UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROFMAT – PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

LUCIANO MATEUS FIZZON

O USO DE JOGOS E MATERIAL CONCRETO NO ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL

SÃO CARLOS
2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROFMAT – PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

LUCIANO MATEUS FIZZON

O USO DE JOGOS E MATERIAL CONCRETO NO ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL

Dissertação de mestrado profissional apresentada ao PROFMAT – Programa de Mestrado Profissional em Matemática Rede Nacional, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Renato José de Moura

São Carlos

2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Luciano Mateus Fizzon, realizada em 08/06/2018:

Prof. Dr. Renato José de Moura
UFSCar

Prof. Dr. Sérgio Luís Zani
USP

Profa. Dra. Grazielle Feliciani Barbosa
UFSCar

Dedico esse trabalho primeiramente a Deus, em especial aos meus pais e irmãos e a todas as pessoas que me auxiliaram na sua realização.

“Só sei que nada sei.”

Sócrates

“*Penso*, *logo existo.*”

René Descartes

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, princípio da vida e fonte de força e Maria Nossa Mãe pela intercessão nessa caminhada.

Agradeço aos meus pais Luís Antonio e Margarete, juntamente com meus irmãos Juliano e Luís Gabriel pelo apoio familiar durante essa etapa da realização desse meu grande sonho.

Aos meus professores do PROFMAT por todos os aprendizados e que acreditaram sempre no meu potencial, em especial ao meu orientador Prof. Dr. Renato José de Moura, pelo empenho e pelos ensinamentos durante toda esta jornada.

Aos meus colegas de Mestrado por cada momento que passamos juntos durante todo o curso e toda amizade conquistada.

Aos meus colegas de trabalho, em especial aos docentes de Matemática Kléber, Flávia, Juliano, Maristela, Aida, Mário, Juliane e Cíntia, que serviram de ânimo e apoio para mim, não só nesse projeto, mas há tempos.

Ao PROFMAT, juntamente com a CAPES, pela oportunidade e pelo auxílio durante todo o curso.

A todos os alunos que realizaram as atividades com empenho e total zelo pelo projeto.

RESUMO

O trabalho desenvolvido com utilização de materiais lúdicos tem papel fundamental para o ensino-aprendizagem da Matemática, em especial ao campo da Geometria Espacial, realizado esse com turmas do Ensino Médio.

Foi utilizada a sequência didática baseada na Engenharia Didática, como forma de investigação, realizando-se ao final, uma análise a posteriori que evidencia que o aprendizado a partir do uso de materiais concretos proporciona aos alunos uma maior assimilação do conteúdo matemático.

As atividades realizadas neste trabalho têm o intuito de também aperfeiçoar a prática do professor, sendo uma importante ferramenta na construção da aprendizagem significativa, para serem utilizadas em outros momentos na sala de aula.

Palavras-chave: Materiais Concretos, Jogos Matemáticos, Geometria Espacial, Volume, Princípio de Cavalieri.

ABSTRACT

The work developed with the use of playful materials plays a fundamental role in the teaching and learning of Mathematics, especially in the field of Spatial Geometry, carried out with high school classes.

The didactic sequence based on Didactic Engineering, was used as a form of investigation, and a posteriori analysis was carried out, which shows that learning from the use of concrete materials gives students a greater assimilation of mathematical content.

The activities carried out in this work are also intended to improve teacher practice, being an important tool in the construction of meaningful learning, to be used in other moments in the classroom.

Keywords: Concrete Materials, Mathematical Games, Spatial Geometry, Volume, Cavalieri’s Principle.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O ensino de Geometria tem gerado certa dificuldade nas escolas pelo mau entendimento de definições e propriedades fundamentais pelos alunos, muitas vezes por falta de embasamento teórico e prático, como também de afinidade por parte dos professores, apesar de tais profissionais reconhecerem que é vital tal área da Matemática, e desse modo, ocultam a instrução desse conteúdo. Fonseca (2009), depois de participar efetivamente de encontros de formações com professores de Matemática, afirma que

> É frequente ouvir das professoras das séries iniciais que, por diversos motivos, mas principalmente por não saberem o que fazer (nem como e nem por quê), elas acabam não trabalhando nada de Geometria em suas aulas de Matemática. Mais do que a dificuldade do ensino de Geometria é a omissão desse ensino que flagramos nas experiências que acompanhamos ou nos depoimentos dos professores. (Fonseca, 2009, p. 14).

Tal situação também foi observada por Nacarato.

> A ausência da geometria na escolarização formal vem formando gerações de profissionais, principalmente professores, que desconhecem os fundamentos desse campo da matemática, pouco discutido no âmbito da prática pedagógica. (Nacarato, 2002, p. 85).

Isso é muito preocupante, pois a Geometria é importante para o aprimoramento e desenvolvimento matemático, aparecendo em construções, na natureza e em diversas áreas do cotidiano, como destacado em Teixeira Filho (2002, p.16)

> A linguagem geométrica está de tal modo inserido no cotidiano, que a consciência desse fato não é explicitamente percebida. É dever da escola explicitar tal fato a fim de mostrar que a Geometria faz parte da vida, pois vivemos num mundo de formas e imagens. (Teixeira Filho, 2002, p.16).

Em muitas situações há desinteresse por parte dos alunos na Matemática e principalmente na Geometria, e isso é cada vez mais alarmante, sem falar da falta de metodologias eficientes de alguns professores para resgatá-los. Citando Fonseca

> Apesar da preocupação que se tem observado com o ensino de Geometria entre os pesquisadores em Educação Matemática, especialmente a partir da década de 80, são ainda discretas as mudanças nesse quadro de quase

> ausência do tópico nas séries iniciais de escolarização. (FONSECA et al., 2009, p. 17)

É evidente a tamanha importância da Geometria Espacial para a aprendizagem dos alunos, por ser algo que eles vivenciam diretamente no cotidiano, com formas geométricas tridimensionais e cálculos corriqueiros de volume. Também é de se destacar o apelo em um desenvolvimento de uma pesquisa sobre o ensino dela, para uma formação mais específica e continuada dos professores de Matemática, para o melhor desenvolvimento da capacidade de abstração, resolução de problemas práticos do quotidiano, estimar e comparar resultados, reconhecer propriedades das formas geométricas (BRASIL, 2006), deixando claro que não se perde a liberdade dos docentes, mas sim abre um leque de possibilidades para um alongamento de raciocínio e arguição de ideias e indagações dos alunos sobre o tema estudado. Para Fonseca

> A preocupação em se resgatar o ensino da Geometria como uma das áreas fundamentais da Matemática tem levado muitos professores e pesquisadores a se dedicarem à reflexão e à elaboração, implementação e avaliação de alternativas, que busquem superar as dificuldades não raro encontradas na abordagem desse tema, na escola básica ou em níveis superiores de ensino. (FONSECA et al., 2009, p. 91).

Neste sentido, este trabalho apresenta uma proposta de se recuperar e incentivar o ensino de Geometria através de atividades teóricas e práticas, sobretudo o incremento de jogos pedagógicos, com intuito de enriquecer e dar sentido aos tópicos do conteúdo de Geometria Espacial.

Tal roteiro não deve ser feito em curto prazo, deve-se atentar que cada aluno tem um tempo distinto de aprendizado e processamento de idéias. Esse processo, contudo, tem caráter lento para que os alunos possam ser desafiados a desenvolverem habilidades e raciocínios, dando significado ao conteúdo estudado.

Pretende-se neste trabalho empregar a metodologia da Engenharia Didática proveniente de Michèle Artigue (1988). Tal Engenharia foi feita para relacionar a pesquisa e a ação no sistema de ensino e do lugar para aplicar as metodologias de ensino.

O objetivo desta sequência didática está em apresentar atividades, com ênfase em Geometria Espacial, para que se possa reavivar o papel de destaque da Geometria, com construções de sólidos, cálculos de áreas e volumes, envolvendo atividades lúdicas que possam prender a atenção dos alunos e reverter significativamente esse terrível quadro de negação à Geometria, visando o reconhecimento merecido e aprendizagem dos discentes de forma inovadora. Para os Parâmetros Curriculares Nacionais

> Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. (BRASIL, 1997, p. 39).

O desenvolvimento inicial foi feito através de um diagnóstico realizado pelo professor nas turmas de segunda série do ensino médio, ponderando as dificuldades e facilidades dos alunos no que se diz respeito a situações problemas de áreas e de exercícios de reconhecimento de figuras planas e convexas, também de apresentar planificações dos sólidos, de introduzir o Princípio de Cavalieri e uma aula diversificada com utilização de jogos desenvolvidos para aplicação dos conhecimentos adquiridos sobre Geometria Espacial.

Este trabalho foi desenvolvido com materiais concretos de fácil obtenção como esquadros, compasso, papel quadriculado e cartolina, espetinhos de madeira, argila e a utilização de jogos. O emprego desses recursos mais francos gera à sala de aula o trabalho colaborativo e a probabilidade de se conferir experimentos matemáticos. Assim, Vitti (1999, pg. 89) menciona que

> (a geometria) pode ser “encontrada” nos mais simples objetos, na natureza e até mesmo em projetos mais arrojados do homem. Essa busca de elementos na geometria também se deu na tentativa de mostrar que é possível tornar o ensino da matemática atraente e – por que não? – prazeroso.

Com o avanço das tecnologias com computadores e *softwares* cada vez mais avançados e o desenvolvimento de nano tecnologias em dispositivos de multimídia e celulares, perdeu-se com o tempo a abordagem no ensino através de materiais concretos, que eram muito utilizados e eficazes, desde o uso do ábaco que fora substituído por calculadoras, como também do material dourado por um *software* que ilustra o próprio, mas podendo com essas mudanças gerar uma aprendizagem mecânica, com grandes chances de esquecimento, por não ter sido algo bem didático, pois muitos alunos gostam do “pegar”, do “mexer” e ter um contato mais próximo a Geometria, transformando aquele aparente conteúdo abstrato em algo presente em seu dia a dia.

É claro que o uso de recursos tecnológicos em aulas deve sim ser utilizado, mas também temos um resgate eficaz no trabalho através de materiais pedagógicos palpáveis que complementam ou introduzem esses recursos. Ora, nem todos os alunos aprendem da mesma forma e pelas mesmas atividades, assim é evidente não perder os valores dos materiais concretos. Para Gardner (1999), os alunos reagem a diversos estímulos e aprendem de diversas maneiras

> os educadores precisam levar em conta as diferenças entre as mentes de estudantes e, tanto quanto possível, moldar uma educação que possa atingir a infinita variedade de estudantes. (Gardner, 1999).

Nesse contexto, buscamos também evidenciar a proposta através da criação de dois novos jogos, denominados de Memória Espacial Extreme e Spacenó, de caráter lúdico, com intuito de dar apoio didático às aulas, pois assim os alunos podem desenvolver uma maior capacidade de raciocinar, pondo em evidência a praticidade para solucionar situações-problemas, contribuindo para uma estratégia de resolução com argumentações próprias dos discentes.

O emprego de jogos em sala de aula ocasiona uma chance de interação dos alunos, um auxílio mútuo em prol da incitação na busca pelo resultado, incluindo alunos tímidos que têm vergonha de expor dúvidas ou argumentos ao professor durante as aulas correntes, sem falar do papel desafiador que essa atividade proporciona. Assim, procuramos incentivar os professores de Matemática a incluírem jogos lúdicos como forma de facilitador ao ensino, contribuindo para um bom convívio, excitando e desenvolvendo raciocínio lógico dos alunos jogadores.

Os mesmos tiveram caráter de desenvolver e reforçar os conteúdos anteriormente estudados sobre Geometria Espacial em uma forma de “brincadeira” que possam estar entretidos na atividade. Foram envolvidos aspectos de reconhecimento do sólido com sua respectiva planificação, nomenclatura e aplicação no cotidiano, relacionamentos entre equações de volume com prismas, pirâmides e corpos redondos.

De caráter geral, a dificuldade do trabalho era eminente, mas a ideia era buscar algo novo que pudesse chamar a atenção desses alunos, visto que no ano de 2017, boa parte dos atuais alunos foram meus e, então, eu conhecia as qualidades deles como a união, amizade, humildade e trabalho de equipe, embora faltasse algum estímulo para que pudessem colocar isso mais evidente e reduzir a falta de interesse pelos estudos, principalmente em Matemática e mais especificamente no campo geométrico dela.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: no capítulo 1 exploramos as metodologias de pesquisa que pautaram o desenvolvimento desse trabalho.

No capítulo 2 trazemos o local a ser aplicado a sequência didática, bem como um resumo do perfil do professor idealizador do projeto e seus objetivos propostos.

No capítulo 3 tem o desenvolvimento da proposta para sua realização através de um roteiro a ser seguido.

No capítulo 4 é descrito os andamentos das aplicações das etapas sugeridas no capítulo 3 e apresentamos uma discussão a respeito dos resultados obtidos.

No capítulo 5 apresentamos algumas considerações finais sobre o projeto realizado e a aplicação dele em diversos contextos sociais.

E, por fim, estão expostos as Referências, os Apêndices e os Anexos utilizados, servindo-os de base para uma futura aplicação para outros docentes.

1 - METODOLOGIA DE PESQUISA

1.1 - Fundamentação Teórica

Na década de 80, Michèle Artigue (1988) propõe um conjunto de atividades voltadas ao ensino, baseada no papel desempenhado por um engenheiro, constituindo-se assim uma proposta metodológica denominada de Engenharia Didática. Muitos autores têm contribuído de maneira bastante decisiva nesta linha de pesquisa, entre eles destacamos Almouloud (2007), Machado (2002) e Pais (2002).

Esse termo foi criado na França tendo como novidade a uma conduta moderna sobre a educação que separa o caráter científico das experimentações em sala de aula. Valoriza o saber prático do processo, influi na transformação das tradições do sistema de ensino e destaca a realização didática na sala de aula como prática de investigação. Todo o material produzido para o ensino está centrado na união entre o conhecimento prático e o teórico.

O desenvolvimento dessa Engenharia passa por análises precedentes, concepção e análise, experimentações, diagnósticos a posteriori e validação da experiência. O trabalho apresentado se adequa a tal metodologia e possui o intuito de verificações a priori e posteriori, dando confronto para experimentações nessas duas análises, validando o saber prático e a didática como forma de investigação para os alunos.

Essa linha de pesquisa tem como base a criação de uma sequência didática que é aplicada em sala de aula, em que a mesma é supervisionada, experimentada e avaliada. São verificadas nessa metodologia quatro etapas do desenvolvimento do processo: a análise a priori, a experimentação e a análise a posteriori e validação.

A primeira etapa se refere a um estudo trabalhado em relações a hipóteses diagnosticadas, o ambiente que será desenvolvido, levantamento das possíveis variáveis e entendimento sobre o público-alvo.

O posterior passo é a experimentação que trata de aplicarmos tal sequência didática, onde devemos levar em conta todos os acontecimentos presenciados e verificados, coletando dados sobre tal aplicação, tais como participações, receptividade, conclusões e até de imprevistos na realização, através de várias formas de anotações com registros periódicos para uma análise louvável.

Na fase final vem a análise a posteriori, que é o embate entre a presunção desempenhada e o saldo alcançado. Verifica-se aí se o trabalho teve uma consequência positiva no ensino aprendizagem do professor e alunos, e assim podemos legitimá-la ou não, através do processo de validação.

Passamos na sequência a apresentar estas etapas.

1.2 - Análise a Priori

Segundo Artigue (1988), há duas classes de variáveis que são manuseadas pelo investigador: as globais e as locais da Engenharia Didática. Tais classificações dessas variáveis gozam de uma sequência abrangente ou de cunho específico conforme conteúdo da Matemática trabalhado, sendo que a exploração é feita em três dimensões: a epistemológica, a cognitiva e a didática.

A primeira dimensão retrata as peculiaridades do saber; a seguinte sobre as etapas para o conhecimento dos alunos e a última sobre as peculiaridades do sistema de ensino, onde os alunos estão inseridos.

O que se faz sobre o saber em estudo é o objetivo em uma análise a priori, onde estão presentes duas etapas importantes que são a descrição do objeto matemático em estudo e a estimativa de avanços para o procedimento ensinar/aprender, verificando os problemas relativos ao objeto de estudo e edificando proposições que serão constatadas pela investigação prática da sugestão didática a ser planejada.

Essa construção de hipóteses é importantíssima para a Engenharia Didática, pois através delas que podemos validar ou não um resultado obtido posteriormente, através da comparação desses.

1.3 - Experimentação

Essa etapa constitui-se colocar em prática todo aquele planejamento que fora feito, adequando ou corrigindo se preciso, quando identificarem tal necessidade perante variáveis locais, retornando, assim, a análise a priori para uma complementação.

Elaborar uma sequência didática exige toda uma preparação, citando Pais

> Uma sequência didática é formada por um certo número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática. Essas aulas são também denominadas sessões, tendo em vista o seu caráter especifico para a pesquisa. Em outros termos, não são aulas no sentido da rotina da sala de aula. Tal como acontece na execução de todo projeto, é preciso estar atento ao maior número possível de informações que podem contribuir no desvelamento do fenômeno investigatório. (PAIS, 2002, p. 102).

Artigue (1988) relata que na experimentação dessa sequência proposta é necessário evidenciar os tópicos:

a) Explicitação dos objetivos e condições de realização da pesquisa;
b) Estabelecimento do contrato didático;
c) Aplicação dos instrumentos de pesquisa;
d) Registros das observações feitas durante a experimentação.

Assim, é fundamental que os professores assumam o compromisso de criar tratamentos metodológicos sobre os pontos elencados acima.

1.4 - Análise a Posteriori e Validação

A fase final diz respeito à análise posteriori e validação. Ela se baseia na reunião dos dados obtidos na experimentação através das observações realizadas durante o processo de ensino aprendizagem, bem como as obras realizadas pelos alunos nos espaços físicos que serão utilizados. Assim, é possível validar ou não a sequência didática empregada, verificando a consolidação do aprendizado.

A fase de validação na Engenharia Didática é realizada durante todo o processo da sequência didática proposta, confrontando dados das análises a priori e da posteriori, apurando se as hipóteses iniciais serão confirmadas.

Através das fases que descrevem a Engenharia Didática, é possível constatar que esse tratamento metodológico veio para dar ênfase às práticas educativas realizadas em âmbito escolar, podendo considerar a prática de ensino como objeto de inquérito, permitindo mudanças durante o processo à medida que se observam os resultados obtidos.

Tal constatação pode ser explicitada novamente por Pais

> Trata-se de uma sistematização da pesquisa de maneira que ciência e técnica são mantidas articuladas, estabelecendo melhores condições de fluxo entre as fontes de influência descritas pela transposição didática. Nesse caso, o saber acadêmico é constituído pelos resultados da pesquisa, enquanto que suas constatações práticas estão relacionadas com o saber a ser ensinado. A estrutura proposta pela engenharia didática mantém um elo de aplicação entre esses dois saberes, aproximando a academia das práticas escolares. (PAIS, 2002, p.104).

Logo, a Engenharia Didática é bem recomendada ao processo de ensino-aprendizagem, uma vez que admite o entendimento dos efeitos originados pelas práticas dos professores trabalhadas em aulas.

2 - A ESCOLA, A DOCÊNCIA E OS ALUNOS

2.1 - A Unidade Escolar

Teve início no ano de 1952, na cidade de Bariri, interior de São Paulo, as atividades Escola Estadual Professora Idalina Vianna Ferro.

No começo era de caráter municipal e era situada em um prédio particular da cidade, mas no ano de 1959 passa a ter cunho estadual com prédio próprio na Avenida João Lemos nº 31, vila São José, onde está funcionando até nos dias atuais.

Mas somente no ano de 1964, ela recebe o nome da professora homenageada Idalina Vianna Ferro, natural de São Carlos, que teve grande destaque em sua carreira docente em nossa cidade.

Entre as décadas de 70 e 80 era exclusiva para alunos do 1º grau e, com o passar do tempo, ganhou caráter de 2º grau também. Tornou-se Escola padrão em 1994 e, em 1996, pela intervenção Estadual decretada pela Secretaria da Educação, ficou somente com o Ensino Fundamental – Ciclo II e Ensino Médio, cujo modelo é o atual.

Atende em torno de 1000 alunos todos os anos, distribuídos em três períodos: manhã, tarde e noite, com carga horária de 30 aulas semanais para os dois primeiros e 25 para o último.

Possui uma vasta quantidade de professores graduados, efetivos e de baixa rotatividade. A direção e suportes pedagógicos provêm pela diretora, vice-diretora da escola, vice-diretor da escola da família, coordenadoras do ensino fundamental e médio e um corpo de apoio formado por 13 funcionários.

A escola procura vincular com ênfase a relação com família e comunidade em geral, sendo essa última parte importante da gestão democrática. Há órgãos de alunos Representantes de Classe, Professores Conselheiros, Grêmio Estudantil, Conselho de Escola e APM, que desenvolvem projetos educacionais com apoio de parceiros interessados.

Possui quadra poliesportiva coberta, laboratório de ciências equipado, biblioteca com um bom acervo de livros, sala ambiente de informática, cantina, refeitório, cozinha, banheiros, pátio amplo, bebedouros, estacionamento e salas de diretoria, secretaria e de aulas todas climatizadas.

Destacam-se as ações do Coral Infanto-Juvenil “Nova Voz”, da Fanfarra “Professor José Marcondes Cesar Junior”, do Jornal “ComunicAção”, do Programa Escola da Família, das turmas de treinamento tanto esportivas quanto para olimpíadas, do Show de Talentos e Feira das Profissões. Parcerias com o CRAS (Centro de Referência da Assistência Social), Programa Ação-Jovem, Bolsa Família, Centro de Promoção Social e Espaço Amigo, através de palestras institucionais de profissionais das áreas com o intuito de envolver toda comunidade a interagir com temas pertinentes sobre saúde, cultura, educação, segurança e trabalho.

A garantia da aquisição mínima de conhecimentos e seu desenvolvimento como pessoa, sugerido pelo Governo Estadual, por parte dos alunos, passa pela direção, corpos docentes e pedagógicos competentes e funcionários da escola. Embora que em alguns momentos falte algum tipo de suporte material ou técnico, dificultando a aprendizagem dos alunos, particularmente na Matemática, área que leciono.

A maior parte da escola atende alunos carentes, tanto no âmbito familiar como financeiro, que são moradores de núcleos habitacionais. Sendo para esses distribuídos materiais fornecidos pelos Governos e pela Associação de Pais e Mestres da unidade escolar.

Temos três períodos do ensino médio na escola bem definidos: o diurno que envolve os alunos com poder aquisitivo maior e uma visão para um ingresso futuro em alguma universidade em sua maioria, mas em compensação com salas mais lotadas; o vespertino que corresponde, em sua maioria, os alunos um pouco mais carentes e os que provinham de outras escolas, por dar preferência aos alunos que já estavam na nossa escola no período diurno; e o noturno que envolve os alunos trabalhadores, os que mais detestam estudar (por ter menos aulas durante a semana), tendo um ou outro aluno que se destaca positivamente, e um alto índice de evasão e um número considerável de faltas durante o ano todo, por considerarem incapazes, excluídos e sem perspectiva de melhorarem de vida e buscarem algum estudo a mais para uma profissão futura e conhecimento para a vida.

2.2 - A Escolha pela Docência

Desde os meus primeiros anos de estudos, sempre fui uma pessoa que amava Matemática e os desafios que ela proporcionava. Além do mais, buscava ajudar meus colegas que não haviam entendido a matéria, sendo inclusive até admirado pelos meus professores na época por conta disso.

Participei das primeiras OBMEP's com aproveitamento muito bom e ganhando menções honrosas.

Durante os três anos de ensino médio, eu participei das ORMUB's (Olímpiada Regional de Matemática da UNESP Campus Bauru) e conquistei um tri-vice-campeonato na mesma, fato esse único naquela época de uma mesma pessoa conseguir uma premiação em todos os anos que participou, sendo meu nome mencionado por diversos doutores daquela instituição.

Com 17 anos, terminando o ensino médio, não tive dúvidas em optar em cursar Licenciatura em Matemática, justamente na própria UNESP citada, a qual eu aprendi a ter um enorme carinho.

Aprovado no referido vestibular em 2007, cursei de 2008 a 2011 no período noturno.

Comecei a lecionar matemática em 2010 em um cursinho voluntário promovido pela Associação Quilombo, sendo uma organização sem fins lucrativos, na minha cidade, Bariri-SP, e, em duas escolas estaduais, em 2012, com trabalho de professor auxiliar durante a semana e aos sábados em plantões de dúvidas e preparação para o vestibular, esse último voluntário também na E.E. Idalina Vianna Ferro e em caráter de aulas livres de uma gestante que se ausentou na E.E. Ephigênia Cardoso Machado Fortunato, após fazer inscrição na Diretoria de Ensino de Jaú-SP e passar anualmente em processos seletivos. E com o tempo, fui admirando tal tarefa de levar um pouco de educação e conhecimento, principalmente na minha área acadêmica.

Aprovado efetivamente no concurso em 2013, assumi em 2014 uma vaga de docente na minha atual, a qual foi a mesma que estudei por 7 anos e que aprendi a valorizá-la.

Após um período lecionando, em 2015, prestei e passei no ENA do Profmat da UFSCar de São Carlos, cursando-o desde 2016 com o intuito de aprofundar meus estudos e contribuir com um melhor aprendizado aos meus alunos.

2.3 - Objetivo do Projeto

O trabalho desenvolvido visa aos alunos do ensino médio para que relacionem o que aprenderam no ensino fundamental em Geometria, incrementando e aprimorando um caráter tridimensional, evitando uma aprendizagem mecanizada.

Pensando nisso e nos desafios que podiam nos proporcionar, desenvolvemos esse trabalho com o intuito de resgatar esses alunos do Ensino Médio do período noturno e ver que a Matemática pode abrir novos horizontes e propiciar certo divertimento quando a entendemos, trazendo assim também, eles de volta ao âmbito escolar e diminuindo consideravelmente esse número excessivo de faltas.

> Educar é colaborar para que professores e alunos – nas escolas e organizações – transformem suas vidas em processos permanentes de aprendizagem. É ajudar os alunos na construção da sua identidade, do seu caminho pessoal e profissional, do seu projeto de vida, no desenvolvimento das habilidades de compreensão, emoção e comunicação que lhes permitam encontrar seus aspectos pessoais, sociais e de trabalho e tornar-se cidadãos realizados e produtivos. (MORAN, 2001,p.36).

Propomos uma sequência didática de modo que os alunos possam manipular objetos, sobretudo com a aplicação de dois jogos, para que ajude tanto a aprendizagem dos alunos como também resgatar o interesse pela Geometria, o quanto ela é prazerosa e muitas vezes até divertida, pois se encontra no nosso cotidiano frequentemente. Para tanto, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) destacam a importância dessa área da Matemática que também serve de instrumento para outros ramos do conhecimento

> O aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. [...] O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa. Além disso, se esse trabalho for feito a partir da exploração dos objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, ele permitirá ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento. (BRASIL, 1997, p. 39).

3 - PLANEJAMENTO DAS ATIVIDADES

Conforme apontando anteriormente, este projeto visa aplicar conceitos de Geometria através de algumas atividades práticas e teóricas, especialmente através da inclusão de jogos pedagógicos como facilitador da aprendizagem significativa. De início será feito uma revisão buscando-se resgatar alguns conceitos que serão os pré-requisitos da Geometria Plana como calcular uma área de uma figura plana ou seu perímetro, traçar e reconhecer retas paralelas, concorrentes e perpendiculares, diferenciar polígonos convexos de côncavos, definir, traçar e medir diagonais, caracterizar quadriláteros pelas suas definições, medir ângulos, todos necessários para uma boa aprendizagem de Geometria Espacial, vistos no Ensino Fundamental em troca de ideias e conhecimentos com outros professores de Matemática, posto que serão retomados a partir de um *feedback* como forma propulsora dessas atividades.

Na Proposta Curricular do Estado de São Paulo (2008), o ensino tópicos de Geometria Espacial deve ser ministrado no 2º Ano do Ensino Médio. Logo, todas as atividades desenvolvidas estão de acordo com o que é esperado e atribuído pelos órgãos educacionais ao conteúdo/aluno.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática, 1997, p.41, o currículo deve ser tratado em forma de espiral, sendo que um conceito é relacionado com outros, por meio de correções e difusões.

O desenvolvimento do trabalho é constituído de nove principais atividades. Tais atividades têm o intuito de trabalhar tópicos importantes de Geometria Espacial por listas de problemas com respectivas resoluções e conclusões e também com atividades de caráter lúdico através de jogos e realizações de construções para motivarem e criarem um senso crítico aos alunos de forma inovadora e atrativa.

Não é de se esperar classes com alunos ideais homogêneos, mas sim com nítida consciência de averiguar seus conhecimentos prévios básicos de

Geometria, ponderando dificuldades e necessidades, intervindas de maneira significativa a aprendizagem.

Os encontros serão realizados em uma sala bem ventilada, com lousa branca. Os materiais serão trazidos pelo professor como *data-show*, cartolinas, listas de exercícios, entre outros posteriormente citados, conforme o planejamento inicial das atividades propostas.

Na sequência apresentamos as etapas que serão aplicadas em sala.

3.1 - Etapa 1 – Diagnóstico de Geometria Plana

O ponto de partida desse trabalho é resgatar os assuntos já estudados no Ensino Fundamental que terão grande papel no desenvolvimento da Geometria Espacial.

Essa etapa é composta de:

a) Apresentação de um questionário investigativo sobre o conteúdo escolhido Geometria, com enfoque na Plana, que deverá ser resolvido individualmente pelos alunos, descrevendo tais resoluções de maneira que julgarem corretas perante aos alunos, entregando ao professor ao final dessa etapa. Estimativa de duração: 2 aulas.

b) Análise sobre competências e habilidades que foram atingidas ou não dos alunos.

c) Discussão e revisão do reconhecimento de polígonos convexos mais usuais (retângulo, quadrado, círculo, triângulo, trapézio, losango, paralelogramo) e respectivas diagonais e áreas, com o objetivo de orientar e retomar os conteúdos de Geometria Plana. Estimativa de duração 2 aulas.

O objetivo dessa etapa é diagnosticar os conhecimentos prévios dos alunos e retomar assuntos que foram aprendidos no Ensino Fundamental sobre tópicos importantes da Geometria Plana, os quais estão apresentados mais adiante, e, na sequência, debater e analisar em conjunto os resultados por parte dos alunos como forma de confirmar as habilidades e competências que já foram atingidas pelos alunos e retomar as que estavam vagas as ideias.

Tendo esse debate em conjunto, podemos trabalhar de forma investigadora e coletiva, assim cada aluno pode contribuir através de uma discussão ou ponderar sobre determinada questão, a fim de elencar suas dificuldades, analisar suas formas de raciocínios, e sempre com o professor intermediando tais atividades com o propósito de direcionar aos alunos questões pertinentes como para ler detalhadamente e pausadamente o enunciado do exercício, que dados temos nele e que podemos coletá-los a fim de desenvolver alguma linha de raciocínio, determinar diversas estratégias e resolver tal problema e verificar a plausibilidade do resultado obtido.

Em suma, segundo o Currículo do Estado de São Paulo para Matemática e suas tecnologias, vemos que

> Contudo, é importante observar que até mesmo aqueles temas que por vezes julgamos desprovidos de um interesse maior podem se constituir em importante pretexto para articular uma fecunda discussão, desde que haja um projeto que mobilize os interesses do grupo.

Nesse questionário apresentado envolvemos conceitos e definições importantes da Geometria Plana que são a base para o trabalho como um todo.

A atividade detalhada desta etapa pode ser encontrada no Anexo A.

Toda ideia de Geometria surgiu pela vontade do homem em medir, sejam ângulos, áreas, comprimentos. Euclides, em sua obra os Elementos, sistematiza todo o conhecimento de Geometria existente em sua época. Sua obra é de vital importância para o desenvolvimento da Matemática que a geometria que conhecemos hoje recebe o nome de Geometria Euclidiana. Para esta etapa será necessário um conjunto de conceitos de Geometria Euclidiana Plana.

Apresentamos abaixo um conjunto desses conceitos.

3.1.1 - Axiomas de Incidência e alguns resultados de Euclides

Axioma 1: Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém.

Axioma 2: Em qualquer reta estão no mínimo dois pontos distintos.

Axioma 3: Existem pelo menos três pontos distintos não colineares.

Em suma, toda reta contém pelo menos dois pontos distintos e que nem todos os pontos do plano são colineares.

Definição 1: Duas retas são paralelas se não interseccionam, isto é, se nenhum ponto pertence a ambas a retas. Duas retas distintas que se interseccionam são chamadas retas concorrentes.

Através desse, podemos demonstrar o que se segue.

Teorema 1: Duas retas concorrentes interseccionam-se em um único ponto.

Demonstração. Consideremos *r* e *s* duas retas concorrentes num ponto P. Seja Q um outro ponto que também esteja em ambas as retas. Obtemos, pelo Axioma 1, a reta *r* como sendo a reta determinada pelos pontos P e Q, e a reta *s* também como sendo a reta determinada por P e Q. Pela unicidade apresentada neste axioma, r e s seriam a mesma reta, o que contradiz a hipótese de serem retas concorrentes. Logo P é único.

É importantíssimo salientar o que achamos conveniente os alunos saberem de Geometria, segue algumas definições:

Definição 2: Polígono é uma figura geométrica cuja palavra é proveniente do grego que quer dizer: poli (muitos) + gonos (ângulos). Um polígono é uma linha poligonal fechada formada por segmentos consecutivos, não colineares que se fecham.

A região interna a um polígono é a região plana delimitada por um polígono.

Definição 3: Região poligonal convexa é uma região poligonal que não apresenta reentrâncias no corpo da mesma. Isto significa que todo segmento de reta cujas extremidades estão nesta região estará totalmente contido na região poligonal.

Definição 4: Região poligonal não convexa é uma região poligonal que apresenta reentrâncias no corpo da mesma, o que ela possui segmentos de reta cujas extremidades estão na região poligonal, mas que não estão totalmente contidos na região poligonal.

Definição 5: Um triângulo é um polígono de três lados.

Definição 6: Um quadrilátero é um polígono de quatro lados.

Definição 7: Uma diagonal é um segmento que une dois vértices não consecutivos.

Definição 8: Um paralelogramo é um quadrilátero em que os lados opostos são paralelos.

Definição 9: Um losango é um paralelogramo cujos lados são congruentes, ou seja, possuem mesma medida.

Definição 10: Um retângulo é um paralelogramo cujos ângulos são retos.

Definição 11: Um quadrado é um retângulo cujos lados são congruentes.

Definição 12: Um trapézio é um quadrilátero com dois lados paralelos entre si, que são chamados de base maior e base menor.

Definição 13: Sejam A um ponto e *r* um número real positivo. Definimos a circunferência de centro A e raio *r*, a qual denotamos por C (A, *r*), como sendo o conjunto de todos os pontos do plano que estão à mesma distância *r* do ponto A. E definimos como região circular ou círculo como a união de uma circunferência com seu interior.

Definição 14: Seja AB um arco de circunferência de centro O e raio *r*. Chamamos setor circular, ou simplesmente setor, a reunião de todos os segmentos OP, em que P é um ponto qualquer do arco AB. O arco AB é chamado arco de setor ou arco de fronteira e *r* é o seu raio.

Definição 15: Seja M uma classe de regiões tal que nela estejam contidas pelo menos todas as regiões poligonais e todos os setores circulares e círculos, chamamos de área de uma região o número real que lhe corresponde a essa classe.

3.2 - Etapa 2 – Conceito de Área

Nessa etapa destacamos a importância do reconhecimento do conceito de forma concreta de uma área.

Ela é composta de:

a) Entrega aos estudantes com uma folha de papel quadriculado para que eles construam os polígonos nela, com auxílio de réguas e esquadros, destacados na atividade 7 da etapa anterior e que eles modifiquem tais polígonos, reproduzindo-os de forma que virem um paralelogramo para facilitar o cálculo da área inicial de cada um deles, e em seguida, comprovarem os valores das áreas calculadas anteriormente. Estimativa de duração: 1 aula.

b) Exposição dos resultados obtidos, discutindo em conjunto o conceito de área com os alunos, fazendo analogia com as fórmulas de áreas dos polígonos estudados. Estimativa de duração: 1 aula.

Ao propormos a resolução e discussão das áreas dos polígonos em conjunto com os alunos, temos por objetivo reforçar os conceitos e procedimentos abordados até o momento. Também queremos determinar uma aprendizagem significativa sobre a definição do significado de uma área e nada mais coerente que utilizarmos de papel quadriculado para o tal, sem falar da não mecanização das fórmulas de áreas de polígonos, uma vez que é apontado nos Parâmetros Curriculares Nacionais.

> Outro aspecto a ser salientado diz respeito à obtenção de fórmulas. A experiência tem mostrado que os alunos que aprendem mecanicamente fórmulas costumam empregá-las de forma também mecânica e acabam obtendo resultados sobre os quais não têm nenhum tipo de crítica e controle, além de as esquecerem rapidamente. (PCN, 1998).

3.3 - Etapa 3 – Planificações dos Sólidos

Através dessa etapa salientamos a importância do reconhecimento das planificações dos sólidos tridimensionais.

Composta de:

a) Entrega de uma lista de modelos das planificações (Anexo B) de alguns dos sólidos tridimensionais como prismas, cilindro, pirâmides, cone para grupos de alunos, juntamente com régua, esquadros, transferidor e compasso para serem reproduzidas em cartolinas também distribuídas, mas com o diferencial dessa nova construção é possuir área equivalente ao quádruplo da proposta. Estimativa de duração: 2 aulas.

b) Distribuição de tesoura e cola pelo professor aos alunos para recortarem as planificações e, em seguida com auxilio de cola, confeccionarem as montagens tridimensionais, gerando tais sólidos propostos. Estimativa de duração: 1 aula.

A atividade elaborada, desenvolvida e dirigida aos alunos é uma forma de aplicar a teoria de forma contextualizada e prática através dos sólidos construídos em cartolina, fazendo a transição da Geometria Plana para a Geometria Espacial.

Becker (2009, p. 20) afirma

> Segundo Gutierrez (1991), é essencial que o aluno adquira e desenvolva habilidades que o permitam entender e interpretar diferentes tipos de representações bidimensionais de objetos tridimensionais, ou seja, habilidades que permitam ao aluno criar, mover, transformar e analisar imagens mentais de objetos tridimensionais geradas por uma informação dada através de um desenho plano. Os tipos de atividades propostas nos livros não permitem o desenvolvimento dessas habilidades por não oportunizarem aos alunos a experiência e a possibilidade da criação de suas próprias hipóteses.

Com efeito, expor os estudantes a uma forma diferenciada de trabalho, gera uma aprendizagem mais qualitativa sobre o conteúdo, por não ser monótona e ser bem prática, e mais, busca um apelo cooperativo entre os integrantes do grupo, uma vez que podem definir estratégias para uma linha de produção de forma a minimizar o tempo para a confecção dos sólidos ou a busca de afinidade por cortá-los, desenhá-los ou montá-los.

3.4 - Etapa 4 – Esqueletos de Poliedros

Definição 16: Chamamos de poliedro toda região do espaço delimitada por um conjunto de regiões poligonais, que satisfazem as seguintes condições:

i. A interseção de duas regiões poligonais quaisquer ou é vazia, ou é um vértice ou é um dos lados;
ii. Duas regiões poligonais contendo um lado em comum não são coplanares;
iii. Cada lado de uma região poligonal não pertence a mais do que duas regiões. Os lados e vértices das regiões poligonais são denominados arestas e vértices da figura poliédrica, respectivamente. As regiões poligonais são chamadas faces do poliedro.

Por essa Definição, a demarcação do poliedro é precisamente sua superfície poliédrica. Se ela for convexa, então o poliedro é convexo. Focamos nesse trabalho os poliedros convexos.

Para essa atividade apresentamos o caráter de reconhecimento de conceitos que envolvem um poliedro.

Essa etapa é composta de:

a) Entrega de palitinhos de madeira e argila pelo professor. O primeiro material será para os alunos, em grupos, utilizarem como arestas, separando-as por tamanho e o segundo para gerar bolinhas que serão representadas como vértices de cada um dos seguintes poliedros: Cubo, Paralelepípedo retângulo, Prismas de base triangular, hexagonal e octogonal e Pirâmides de base triangular e quadrada, os quais são os que foram anteriormente construídos em cartolina. Estimativa de duração: 1 aula.

b) Montar os esqueletos dos poliedros citados com os materiais, fixando as bolinhas de argila nas respectivas arestas que acharem convenientes. Estimativa de duração: 1 aula.

Através dessa atividade, podemos verificar o quanto é proveitoso saber reconhecer e entender as estruturas envolvidas nos poliedros, que vão desde simples vértices, passando pelas arestas e faces, de uma forma concreta e próxima do cotidiano em que vivemos, fazendo com o que os alunos possam relacioná-los com tais situações presentes corriqueiras.

A utilização de aulas sempre expositivas, principalmente nessa etapa de construção do conteúdo de Geometria Espacial no que diz respeito ao entendimento inicial dos poliedros e todas suas propriedades e características, prejudica o conhecimento significativo, desestimulando os alunos e contribuindo mais com a defasagem deles e comprovando, erroneamente e negativamente, que a Matemática é ultrapassada e chata.

Pois, segundo os PCN's

> Quanto às aulas expositivas, é comum que sejam o único meio utilizado, ao mesmo tempo em que deixam a ideia de que correspondem a uma técnica pedagógica sempre cansativa e desinteressante. (BRASIL, 2006, p. 53).

Assim, quando o professor utiliza de recursos diferenciados e palpáveis, e com o principio da união dos alunos em forma de uma atividade em conjunto, gera-se um aproveitamento melhor de absorção, participação, interesse e cooperação por parte dos alunos, e também demonstra bem mais claramente o papel do professor e sua importância na aprendizagem dos estudantes como um auxiliador no ensino e não somente um transmissor de conteúdo.

3.5 - Etapa 5 – Classificação dos Sólidos e Relação de Euler

A Relação de Euler foi criada pelo matemático suíço Leonhard Euler e possui grande importância para determinar o número de arestas, vértices e faces de qualquer poliedro convexo e de alguns côncavos. Dessa forma, essa relação permite que os cálculos sejam realizados no intuito de indicar a quantidade de tais elementos de um poliedro.

Sejam A o número de arestas, F o de faces e V o de vértices. Então vale que,

$$V + F - A = 2$$

Nessa atividade, propomos o seguinte roteiro no que se refere ao entendimento de classificar os sólidos que estão sendo trabalhados, juntamente com o surgimento da Relação de Euler para os poliedros convexos:

a) Serão entregues para cada grupo de alunos os sólidos de cartolina e os esqueletos com palitinhos de madeira confeccionados por eles que poderão ser utilizados para devido fins da atividade.

b) Apresentação de uma lista de exercícios que tem como base fazer os alunos separarem os sólidos em três grupos: Prismas, Pirâmides ou Corpos Redondos, e também de identificarem e quantificarem vértices, faces e arestas, bem como retas paralelas, perpendiculares e concorrentes presentes nos modelos construídos e, com isso, validarem experimentalmente a Relação de Euler para esses poliedros convexos. experimentalmente a Relação de Euler para esses poliedros convexos. Estimativa de duração: 1 aula.

c) Discussão dos problemas e dificuldades com os estudantes, análise em conjunto dos resultados obtidos por eles e comentário sobre a validade da Relação de Euler. Estimativa de duração: 1 aula.

Para essa etapa temos como objetivo introduzir a Relação de Euler de forma experimental, buscando não a decoração da fórmula, mas sistematizar a teoria de forma simples, sempre dando ênfase ao visual dos alunos para a comprovação da tese, fazendo com que se tenha uma aprendizagem mais satisfatória e não mecanizada.

Também buscamos retomar os conceitos envolvidos nas duas atividades anteriores no que se dizem respeito a arestas, faces e vértices, juntamente atrelando com a etapa número 1 no âmbito de retas paralelas, perpendiculares e concorrentes.

A distinção pela classificação dos sólidos nos 3 grupos associados: Prismas, Pirâmides ou Corpos Redondos, para que com isso os alunos possam definir características presentes nesses e arguir sobre cada um deles, sejam pelas faces laterais, da base ou por qualquer outra forma que acharem conveniente.

Essa diferente concepção para fazer o aluno a pensar, a ter suas próprias conclusões e a investigar a Matemática elaborando estratégias é proposta dos Parâmetros Curriculares Nacionais, de 1998, já apontando a necessidade desses

> O papel da Matemática no ensino fundamental pela proposição de objetivos que evidenciam a importância de o aluno valorizá-la como instrumental para compreender o mundo à sua volta e de vê-la como área do conhecimento que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas.

Em suma, o aluno passa a fazer sua própria história.

3.6 - Etapa 6 – Volumes e Princípio de Cavalieri

O volume de um sólido é o quanto de espaço que ele ocupa. No entanto, a definição segue:

Definição 17: Volume de um sólido ou medida do sólido é um número real positivo associado ao sólido de forma que:

i. Sólidos congruentes têm volumes iguais;
ii. Se um sólido S é a reunião de dois sólidos A e B que não têm pontos interiores comuns, então o volume de S é a soma dos volumes de A e B.

Para os efeitos de volume de um sólido, sua unidade de medida é uma unidade de comprimento cúbica (uc^3), onde se atribui a um cubo de aresta unitária. Assim, o seu volume é 1 unidade de volume (uv).

Desse modo, para determinar o volume de um sólido, verifica-se quantos cubos são necessários para obter o sólido, que por sua vez define um número real positivo, considerando também i e ii.

O Princípio de Cavalieri é uma importante ferramenta para o cálculo de volumes. Com ele é possível solucionar de maneira simples problemas que requereriam técnicas avançadas de cálculo diferencial e integral.

Bonaventura Cavalieri foi um matemático do século XVII que teve a constatação que embora o formato de um sólido geométrico seja modificado, exceto por casos em que ele perde ou ganha massa, seu volume permanecerá inalterado.

Teorema 2 (Princípio de Cavalieri): Sejam A e B sólidos limitados, e seja α um plano. Se qualquer plano β, paralelo a α, determinar duas seções transversais com áreas iguais, então os sólidos A e B tem o mesmo volume.

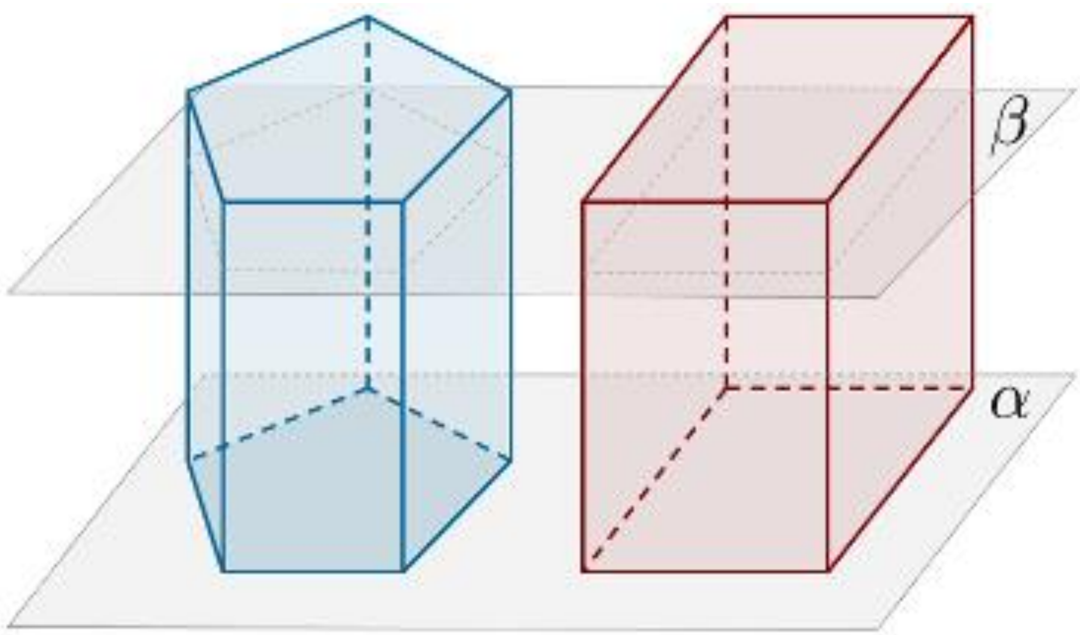


Figura 1: Princípio de Cavalieri

Dessa maneira, o Princípio de Cavalieri pode ser utilizado em sólidos totalmente diferentes, desde que possuam mesma altura e que a área de qualquer seção transversal aplicada no primeiro for igual à sua respectiva seção no segundo, então os sólidos possuem o mesmo volume.

O Caderno do Professor do estado de São Paulo cita que o cálculo de volumes pode ser muito complexo e que vários matemáticos, como o próprio Cavalieri, buscaram alternativas para melhorar a situação.

> Para Cavalieri a linha era formada por pontos sem comprimento, a superfície por infinitas linhas sem largura, e os sólidos eram interpretados por uma

> reunião de superfícies sem profundidade. No seu entendimento, as figuras planas são como tecidos compostos por fios paralelos e os sólidos, como livros, pilhas de folhas paralelas. (SÃO PAULO, 2015, p. 69 e 70)

Através da importância desse Princípio, desenvolvemos a seguinte proposta:

a) Explicação do conceito de volume e do Princípio de Cavalieri realizado pelo professor através de uma aula expositiva com auxílio do computador e *data-show* trazidos por ele. Duração 1 aula.

b) Através de um baralho trazido pelo professor, mostra-se o Princípio de Cavalieri de forma simples na prática, ora deformando o baralho, ora deixando as cartas empilhadas corretamente uma em cima da outra. Na sequência, outra experimentação prática, mas dessa vez o docente traz exemplares de sólidos regulares retos: cone, cilindro, prismas e pirâmides, os quais possuem mesma área da base e mesma altura, e através de um orifício em cada um deles, enche-os de grãos de arroz e fazem-se as devidas reflexões, juntamente com a colaboração dos alunos, sobre o Princípio de Cavalieri que esses prismas e o cilindro têm volume igual, bem como acontece com as pirâmides e o cone, e também no que se diz respeito à confirmação da razão de 1 para 3 do volume de uma pirâmide ou um cone com a do volume um prisma ou cilindro. Duração 1 aula.

O intuito dessa proposta consiste em mostrar que não é sempre ideal ter aulas com lousa e giz em mãos. Os professores devem buscar artifícios diferentes para atrair a atenção e a paixão dos alunos em Matemática, especialmente na Geometria, embora muitos desses, por inexperiência ou medo em trabalhar de forma inovadora e por falta de tempo para o vasto currículo a ser cumprido, optam por não fazer assim.

Geraldo Peçanha em (ALMEIDA, 2011), diz

> A transposição didática pode e deve ser entendida como a capacidade de construir diariamente. Ela se dá quando o professor passa a ter coragem de

> abandonar moldes antigos e ultrapassados e aceita o novo. E o aceita porque tem critérios lógicos para transformá-lo.

Desse modo, essa transposição sugerida para o ensinamento de conteúdos é bem útil, pois cada aluno aprende de uma forma.

3.7 - Etapa 7 – Princípio Arquimediano e o Cálculo de Volume de Objetos Irregulares

Arquimedes foi um matemático e físico. Diz se a lenda que o rei de Siracusa, Hieron, contratou um artesão para fabricar sua coroa com ouro maciço. Ao ser contratado, o rei ofereceu uma bela quantia em dinheiro e forneceu o ouro a ser utilizado na coroa. Após alguns dias, o artesão entregou ao rei, a sua tão desejada coroa. Hieron recebeu a coroa, mas desconfiou se o artesão teria usado todo o ouro que recebera. Para ter certeza, pediu que utilizassem uma balança no intuito de registrar a massa da coroa. Feito o procedimento, verificou-se que a massa da coroa era igual àquela do ouro fornecido pelo rei.

A confirmação da igualdade das massas não convenceu o rei, que ainda desconfiava do artesão em relação à mistura de prata com o ouro. Diante do impasse e sem conhecimento adequado para desvendar o mistério, Hieron contratou Arquimedes e incumbiu-lhe de descobrir a verdade sobre o fato. Arquimedes dedicou-se exclusivamente ao pedido do rei, mas não conseguia estabelecer uma forma de verificar a ocorrência ou não da fraude.

Certo dia, quando se preparava para o banho, encheu a banheira de água e, ao adentrá-la, verificou que certa quantidade de água transbordava. Em virtude dessa observação, ele concluiu que teria como verificar a dúvida do rei.

Empolgado com a possível descoberta, saiu correndo pelas ruas em direção ao palácio real, gritando: Eureka! Eureka!, que em grego significa “descobri”.

Arquimedes encheu um balde de água e realizou os seguintes procedimentos:

Mergulhou a coroa no balde e verificou a quantidade de água que transbordava. Com a mesma quantidade de água no balde, mergulhou uma barra de ouro com a mesma massa da coroa e posteriormente, também mergulhou uma barra de prata com a mesma massa. Ao final do procedimento, verificou que a coroa ao ser mergulhada, transbordou mais água que o ouro e menos água que a prata. Dessa forma, Arquimedes concluiu que a coroa fora fabricada com a mistura entre outro e prata.

Esse transbordamento maior de água na imersão da prata identifica que a densidade da prata é menor que a do ouro. Portanto, se a densidade do ouro é maior, ele possui menor volume em relação à prata, ocupando menos espaço no balde com água. No caso da coroa, verificou-se que a densidade ficou entre a do ouro e a da prata, confirmando a mistura em sua composição. (Texto retirado de SILVA, M. N. P. **A descoberta de Arquimedes.** Disponível em: <https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/a-descoberta-arquimedes.htm> Acesso em: 02 de fevereiro de 2018).

Baseando-se no Princípio Arquimediano, propomos as seguintes atividades:

a) O professor traz aos alunos algum objeto que tem aparência irregular como, por exemplo, uma pedra, e pede aos alunos que deem ideias para o cálculo de volume desse, com o intuito de promover uma discussão, elencar sugestões e atiçar a criatividade dos discentes. Estimativa de duração: 1 aula.

b) É distribuído aos grupos de alunos pelo professor um sólido, que pode ser um prisma, pirâmide ou corpo redondo, sendo ocos e sem tampa, que encontramos no dia-a-dia como um copo, uma vasilha ou pote de biscoito, juntamente com um objeto irregular como, por exemplo, uma pedra, e uma quantia de água. Com isso, pede-se aos alunos que coloquem um pouco dessa água dentro do sólido e retirem as medidas desse que acharem conveniente, como raio, largura, altura e comprimento, calculando, assim, o volume inicial dessa água posta.

c) Em seguida, pede-se que eles imirjam o objeto dado e façam um procedimento similar para calcularem o volume final. Espera-se que os alunos constatem que o volume pedido é a diferença entre o volume final e inicial. Estimativa de duração: 1 aula.

Nessa atividade não só vemos a importância do Princípio Arquimediano, como também ele se faz bem presente no meio dos alunos de uma forma até simples, se podemos dizer, para calcular volumes de objetos irregulares.

3.8 - Etapa 8 – Jogos Matemáticos

O uso de jogos pedagógicos matemáticos, mais precisamente aqueles que trabalham com o concreto, que desmitificam o abstrato e o deixa bem mais próximo da realidade dos alunos, é fundamental na aprendizagem significativa deles, sem falar que através de uma forma diferente e prazerosa, faz tais pessoas refletirem, analisarem e terem estratégias de ganho.

Perante esses pressupostos, é necessária a produção de jogos pedagógicos para dar apoio didático às aulas. Portanto

> Inserido neste contexto, e sob as novas perspectivas de pesquisas que discutem o jogo na Educação e, mais especificamente, na Educação Matemática, considera-se interessante e relevante uma pesquisa que tenha como objeto central de estudo o jogo no processo de formação de conceitos matemáticos, delimitado num ambiente de sala de aula. (GRANDO, 2000, p 18).

Apresentamos a seguir alguns jogos desenvolvidos pelo professor que subscreve a fim de relacioná-los com os conteúdos de Geometria Espacial no que se refere às planificações e ao cálculo de volumes dos sólidos trabalhados.

3.8.1 - Etapa 8.1 - Memória Espacial Extreme

a) Constituição: Esse jogo-atividade é realizado com 2 a 4 jogadores e é constituído por 27 cartas (*cards*), cujas imagens dessas cartas podem conter uma planificação, o sólido ou um exemplo do cotidiano de cada uma destas figuras espaciais (Apêndice A). Neste jogo, em particular, são encontrados cone, prismas de base triangular, hexagonal e octogonal, cilindro, cubo, paralelepípedo retângulo e pirâmides de bases quadrada e triangular. Cada um destes objetos geométricos tem a seguinte descrição para as cartas: três cartas que representam o mesmo sólido são chamadas de uma terna e duas cartas que representam o mesmo sólido são denominadas de par.

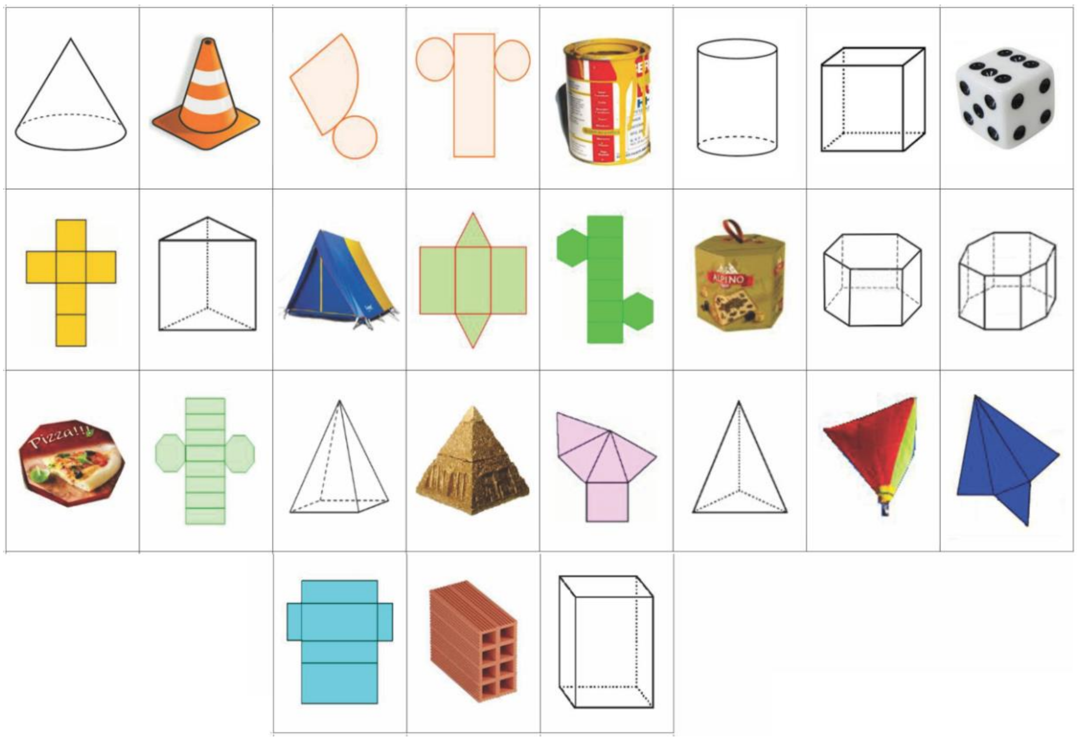


Figura 2: Inscrições das 27 cartas

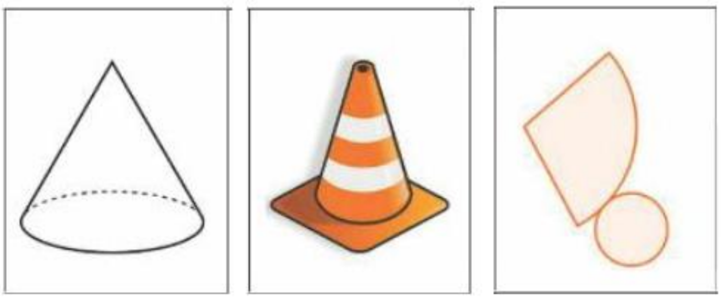


Figura 3: Exemplo de uma terna

b) As regras:

- As 27 cartas são posicionadas de maneira que a parte com a imagem fique voltada para baixo. Em cada turno o jogador deve escolher três cartas e desvirá-las;
- A ordem dos jogadores para início é realizado por um sorteio já realizado antes.
- Após virar as três, o aluno será questionado, quando tirar uma terna ou um par, sobre o que é ou significa cada carta. E, caso responda corretamente, ganha 1 ponto;
- Caso ainda elas formarem uma terna, são removidas do jogo e o aluno ganha mais 1 ponto por cada carta retirada, podendo inclusive jogar novamente. Senão, elas são reviradas, passando a vez para o próximo jogador. Esse processo deve ser repetido até que todas as cartas sejam removidas;

  Observação: Se por ventura um aluno virar três cartas distintas, ou seja, que não formem nem uma terna ou nem um par, o aluno não terá direito a poder responder sobre o significado delas; passando a vez para o próximo jogador;
- Ao final do jogo, ganha quem somar mais pontos.

Estimativa de duração: 1 aula.

O objetivo desse jogo é virar as cartas e ir memorizando os desenhos, associando e reconhecendo as características dos sólidos e ter um embasamento prático desses, verificando os conhecimentos adquiridos anteriormente, dando também um poder de arguição para os discentes sobre o assunto. Assim, quando virar uma carta, o aluno terá que puxar na memória para lembrar se já viu a terna respectiva dela no jogo e, assim, tentar achá-la.

3.8.2 - Etapa 8.2 – Spacenó

a) Este jogo é composto por 4 jogadores. Ele é constituído por 28 peças, ou pedras, divididas ao meio por uma linha (Apêndice B). Cada uma das duas metades da pedra está uma figura de um sólido, que constituem por cilindro, cone, esfera, paralelepípedo, cubo, prisma de base triangular e hexagonal, pirâmide de base quadrada e triangular, e de uma equação de cálculo para algum volume.

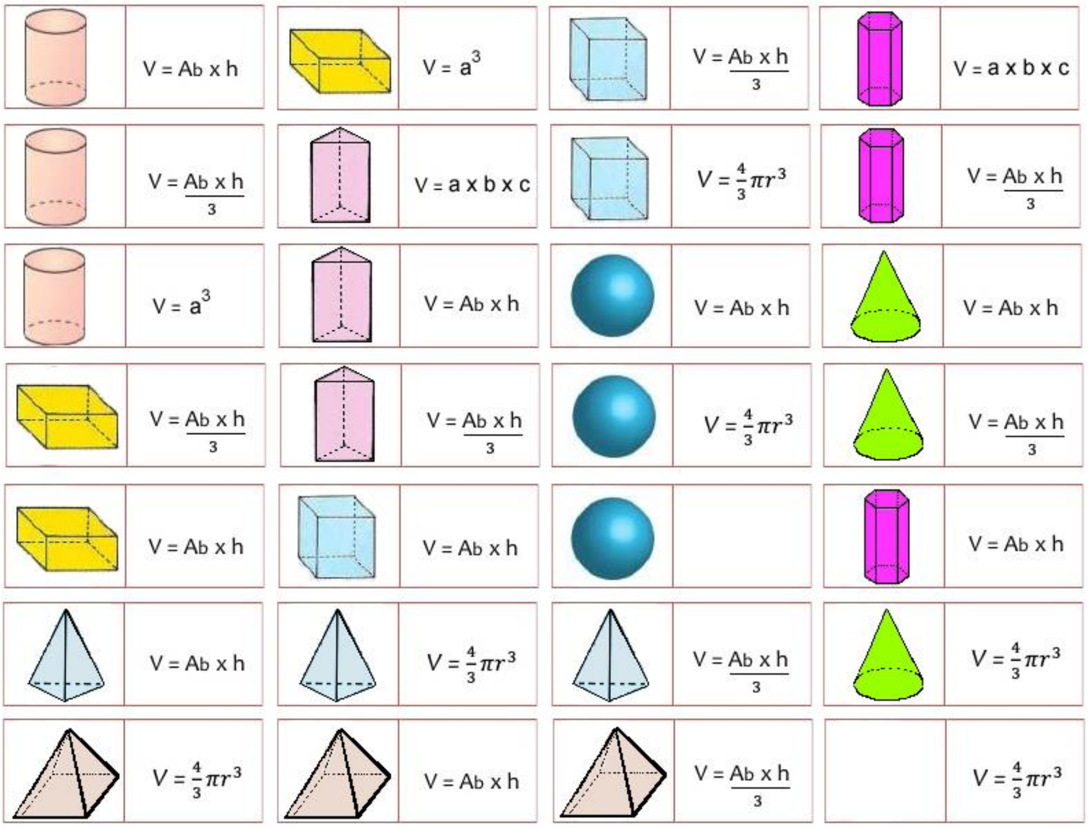


Figura 4: Inscrições das 28 pedras

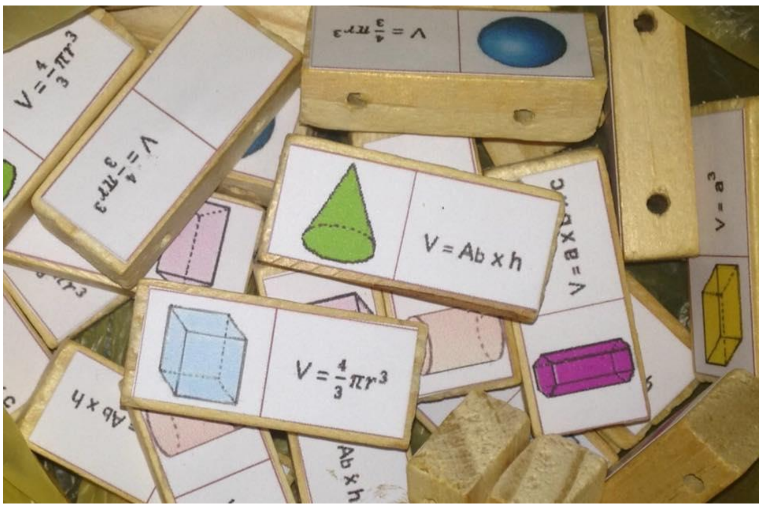


Figura 5: Modelos das pedras

b) As regras:

- Coloque todas as peças (pedras) na mesa com a face marcada voltada para baixo e embaralhe-as até ficarem bem misturadas. O objetivo consiste em que o jogador se livre de todas as suas pedras antes dos outros jogadores terem oportunidade de o fazerem;
- Cada um dos jogadores retira da mesa sete pedras e guarda-as de modo que os adversários não as vejam, podendo escondê-las na mão, por exemplo;
- O jogador que inicia o jogo é o que possui a pedra da metade esfera e metade V = $\frac{4\pi r^3}{3}$ e a coloca no meio da mesa, com a face marcada voltada para cima. O outro jogador, no sentido horário daquele, continua o jogo encostando a metade de uma das suas pedras à correspondente da dele que está na mesa, que tanto pode ser a do referido sólido, como a do seu volume respectivo e vice-versa, e assim por diante, colocando-as continuamente enfileiradas;

Figura 6: Pedra que inicia o jogo

- Quando um jogador não pode continuar, diz: “Passo!” e deixa que o seu adversário continue a jogar até poder voltar a fazê-lo. O jogo acaba quando um dos jogadores puser na mesa todas as suas pedras, o qual será declarado ganhador;
- Detalhe: Quando nenhum dos jogadores puder continuar a jogar, ganha quem tem menos pedras em sua posse.

Pedra Curinga: Há no jogo algumas metades com a face inteira em branco, as quais são peças curingas do jogo, sendo que essa se encaixa em qualquer outra peça, com a condição do jogador saber o que representa a peça a ser encaixada, como por exemplo, reconhecer uma esfera ou o volume dela.

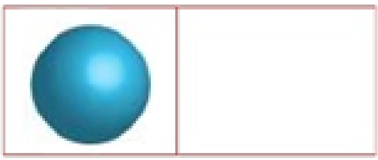


Figura 7: Exemplo de uma pedra curinga.

O objetivo desse jogo é associar e reconhecer os sólidos com seus respectivos cálculos de volume, utilizando, em muitas vezes, o Princípio de Cavalieri.

Dá para se desenvolver muitas estratégias de jogo, reforçando a aprendizagem significativa, uma vez que o aluno deve ter percepção de evitar a utilização nas jogadas iniciais de uma peça curinga ou alguma peça de volume que envolva o Princípio de Cavalieri, pois essas são muito abrangentes para muitos sólidos, criando assim muitas possibilidades para seu encaixe; o que não acontece, por exemplo, com o volume $V=a^3$ que corresponde unicamente ao do cubo.

Estimativa de duração: 1 aula.

3.9 - Etapa 9 – Avaliação Final

Nessa etapa definimos:

a) O professor entrega uma lista de situações-problema para cada estudante a fim de verificar o aprendizado dos alunos, saberem reconhecer um sólido, definirem suas características e estruturas, calcularem áreas e os volumes e o quanto foi entendido dos Princípios Arquimediano e de Cavalieri, assim como a Relação de Euler para poliedros se faz presente. Estimativa de duração: 1 aula.

b) Em caráter de debate, o professor, juntamente com os alunos, revisa as questões, comenta as estratégias utilizadas e pondera alguns comentários sobre essa avaliação. Estimativa de duração: 1 aula.

Essa análise final é muito importante para verificar o quanto de proveitoso fora as atividades desenvolvidas durante o projeto estipulado, desde as metas traçadas, até os objetivos alcançados e os que precisam ser reforçados.

Não podemos também desmerecer um possível insucesso nessa atividade, pois muitos alunos não se sentem à vontade para realizar provas escritas por se sentirem pressionados e ou quando possam ocasionar possíveis “brancos” na hora do nervosismo.

Assim, o objetivo como avaliação se resume a todas as atividades, sem desmerecer nenhuma delas, pois acreditamos que todas elas são fundamentais para uma boa aprendizagem e cada uma delas mostra um critério diferente para se julgar a aprendizagem.

4 - APLICAÇÃO DO PROJETO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

4.1 - Etapa 1 – Diagnóstico de Geometria Plana

Encontro 1 - Em 02/02/2018 foi apresentada aos alunos uma proposta de desenvolvimento de trabalho em substituição as aulas expositivas tradicionais, comentando que utilizariam vários materiais e recursos lúdicos como forma de construírem conhecimentos matemáticos, mais especificadamente sobre Geometria Espacial.

Na sequência foram sanadas algumas dúvidas sobre tal roteiro de atividades que seriam trabalhadas pelos alunos, iniciando a atividade com um questionário investigativo (Anexo A) sobre o conteúdo escolhido Geometria, com foco em tópicos dela no plano. A proposta foi desenvolver uma lista com oito exercícios individualmente, registrando as resoluções nos campos destinados para as mesmas e entregando ao professor ao término dela.

Figura 8: Aluna resolvendo questionário

Porém, à medida que os alunos resolviam (ou tentavam resolver) os exercícios, foi notado que uma grande maioria das turmas tinha muitas dificuldades, principalmente sobre esquecer-se dos conceitos matemáticos necessários e problemas em interpretar os enunciados, pois nesse meio tempo surgiram diversas dúvidas, sendo como utilizava o par de esquadros para construir retas paralelas e perpendiculares, o que era um polígono convexo e como eram as fórmulas de cálculo de áreas mais usuais, sendo que somente a intervenção breve do professor como forma de auxiliador não seria suficiente para uma aprendizagem significativa de retomada de conteúdos. Neste momento foi necessário mudar o planejamento inicial e recolher as listas dos alunos.

Encontros 2 e 3 - Em 06/02/2018 e 07/02/2018, baseado nos fatos do encontro anterior, foi realizada uma revisão dos tópicos mais importantes de Geometria Plana com os alunos através de aulas expositivas, relembrando conceitos matemáticos, definições, propriedades, polígonos convexos e não-convexos, áreas, entre outros, e também de como utilizar um par de esquadros para a confecção de retas paralelas e perpendiculares a uma dada.

Foi percebido que muitos dos alunos tinham certa defasagem em Geometria Plana, através de dificuldades em interpretar um problema, relembrar os conceitos envolvidos aprendidos no Ensino Fundamental, principalmente quando envolvia circunferência com seus respectivos comprimento e área, sendo que alguns alunos afirmaram sobre ela que π era uma variável e não um número real.

Encontro 4 – Em 09/02/2018, foi devolvida a lista de exercícios para os alunos e foi proposto que eles debatessem as questões dela em conjunto com o professor em forma de debate. A ideia era eliminar o máximo de resquícios de dúvidas que ainda podiam pairar sobre os conceitos matemáticos do Ensino Fundamental sobre alguns tópicos mais importantes de Geometria Plana e fazendo com que cada aluno fizesse sua contribuição e reflexão.

Figura 9: Alunos debatendo exercícios

Os alunos se sentiram participantes efetivos da aprendizagem, passando de simples receptores para argumentadores e analistas a cada questão que estava sendo debatida.

É de se relatar que alguns conceitos matemáticos que os alunos tinham um senso comum, como ao afirmarem que diagonais de um polígono precisam necessariamente possuir inclinação diferente de 0 ou 90 graus ou que o losango é um “quadrado em pé”, puderam ser desmistificados.

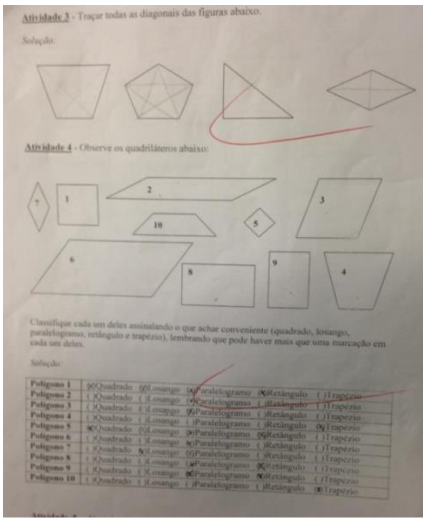


Figura 10: Atividades 1.3 e 1.4: Resolução do aluno

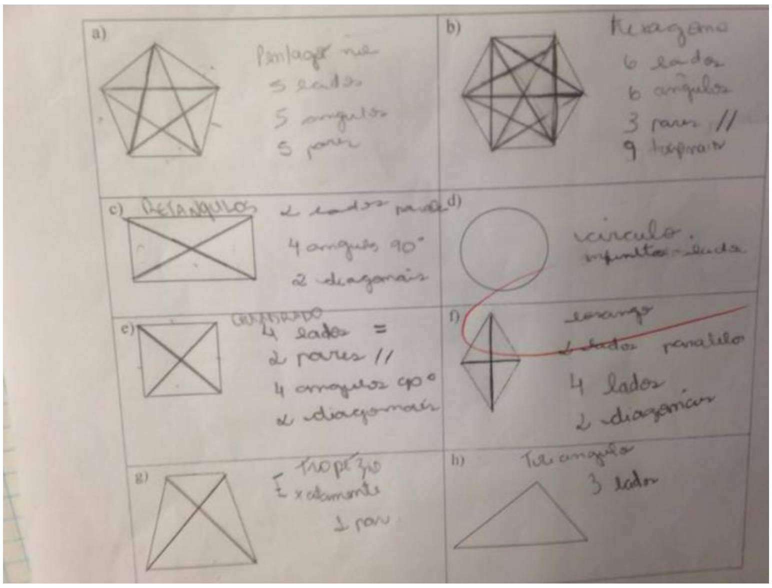


Figura 11: Atividade 1.5: Resolução do aluno

Durante essa atividade foi tomado o cuidado de, através das reflexões e sugestões dos alunos, valorizar cada iniciativa para concluir um resultado, enaltecendo as diversas maneiras de se chegar a ele corretamente.

4.2 - Etapa 2 – Conceito de Área

Encontro 5 - Em 20/02/2018, os alunos, agrupados em duplas, receberam do professor uma folha de papel quadriculado, régua e o par de esquadros.

Tal atividade remete-se aos alunos de evitarem decorar equações para somente passar em alguma avaliação, como forma de uma aprendizagem significativa, dedução ou até para demonstração de áreas de figuras planas mais usuais.

Para isso, o professor pediu que eles construíssem os polígonos da Atividade 7 – Jogo rápido - da lista de exercícios da atividade anterior com suas medidas respectivas dos lados, em que cada lado do quadrado do papel quadriculado correspondesse a 1 u.c. da medida original da mesma referida lista e que, após isso, encontrassem um jeito desses polígonos virarem paralelogramos ou retângulos, reproduzindo-os no papel quadriculado de modo que suas áreas seriam calculadas da mais simples possível forma, através do conceito de *base x altura*.

Figura 12: Construção de polígonos no papel quadriculado

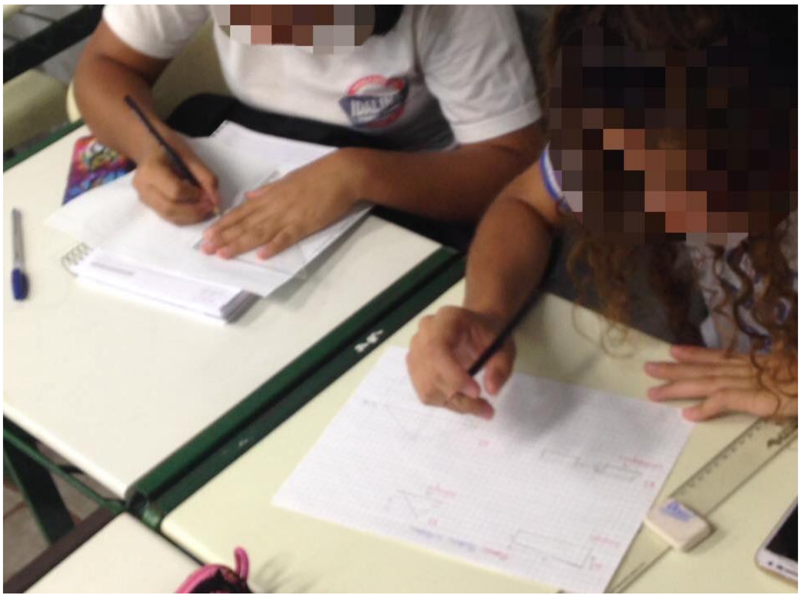


Figura 13: Constatação de conceito base x altura

Para o paralelogramo e o losango, os alunos não tiveram dificuldades para concluir o que se pedira, mediante a realocação de quadradinhos, porém, para o triângulo e trapézio, eles não conseguiram realizar tal construção, pois alegaram que não tinham como deixar a mesma área que a inicial só reproduzindo as figuras geométricas em forma de retângulo ou paralelogramo.

Após isso, foi intervindo e reafirmado que não se tinha dito que necessitava verificar a mesma área das formas geométricas iniciais e finais, mas sim que, através de uma nova reprodução delas, pudesse calcular a área inicial pelo conceito citado anteriormente, que no caso poderia ser uma reprodução de semelhança desses polígonos, como por exemplo, metade da área inicial.

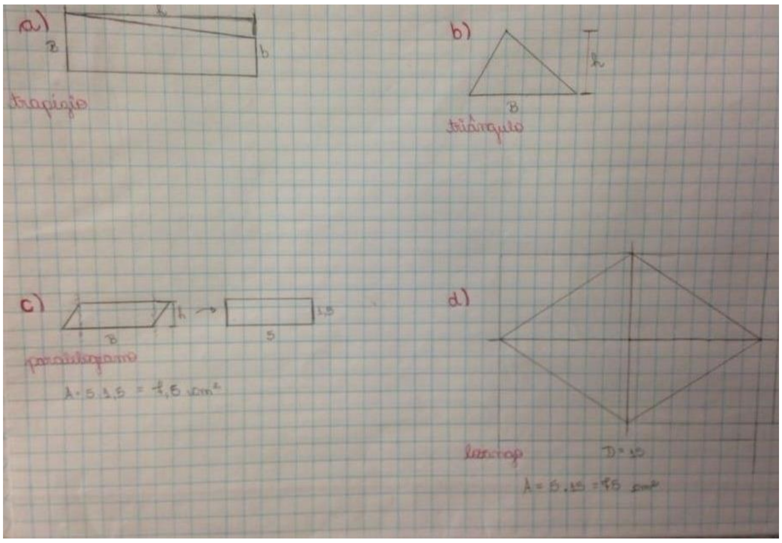


Figura 14: Cálculo de áreas: Resolução dos alunos

Após uma nova reflexão, encontraram uma forma que criassem retângulos ou paralelogramos, mas que esses novos polígonos tinham o dobro da área solicitada, uma vez que construíram dois polígonos um do lado do outro. Assim, realizaram o cálculo dessa área final e dividiram pela metade o resultado obtido, encontrando tal área solicitada.

Encontro 6 - Em 21/02/2018, o professor, mediante ao encontro anterior através de um debate com os alunos, analisou os resultados obtidos nessa atividade com os do Jogo Rápido, constatando os mesmos valores das áreas e deduzindo de forma prática e simples as fórmulas dos cálculos dos polígonos trabalhados.

Foi percebido que os alunos abraçaram muito a causa e se entusiasmaram com a atividade, sugerindo que estavam entendendo a definição e o conceito envolvido no que se refere às áreas e começaram a desnutrir a ideia de que a Matemática e principalmente a Geometria eram chatas, fazendo um sentido a Geometria Plana estudada no Ensino Fundamental. Citando o relato de uma aluna: “Eu não me sentia bem em aprender Geometria, tinha muitas fórmulas e nada parecia fazer sentido. O uso de recursos práticos a fez dinâmica, mais fácil e prazerosa.”

4.3 - Etapa 3 – Planificações dos Sólidos

Encontro 7 - Em 23/02/2018, os alunos foram alojados em grupos de 4 pessoas e cada um desses recebeu uma folha (Anexo B) com as planificações de nove sólidos: Prismas de base retangular (paralelepípedo), quadrada (cubo), triangular, hexagonal e octogonal, Pirâmides de base quadrada e triangular, cone e cilindro e suas respectivas medidas dos lados com o intuito de reproduzirem-nos nas cartolinas fornecidas futuramente pelo professor e, em seguida, os montarem tridimensionalmente.

Mas antes que eles pudessem iniciar tal atividade, o professor citou um diferencial na atividade proposta que foi a inclusão de uma questão pertinente que dizia que as medidas das confecções dos lados teriam que gerar áreas totais dos sólidos equivalentes ao quádruplo das iniciais.

Mais que depressa, os alunos, convictos da resposta, já foram citando que bastava multiplicar cada lado por quatro. Nesse momento, o professor foi instigando e perguntando aos alunos sobre como chegaram nessa conclusão, iniciando um debate.

Após um período de reflexão sobre isso, o professor sugeriu pegar o primeiro caso da folha de modelo das planificações que era a de um cubo de aresta igual a 4cm. Utilizando de uma face quadrada desse, pediu aos alunos que calculassem a respectiva área inicial e em seguida que efetuassem o processo idêntico para um de lado 4 vezes maior e constaram que havia originado uma área final equivalente a 16 vezes maior.

Assim perceberam que, por ser uma forma bidimensional, ela se expande tanto em altura como em comprimento, logo, verificaram que era somente efetuar a multiplicação dos lados por 2, sendo que a partir daquele momento passariam a realizar de fato a próxima etapa dessa atividade no encontro seguinte.

Encontros 8, 9 e 10 - Em 27/02/2018, 28/02/2018 e 02/03/2018, o professor trouxe cartolinas, par de esquadros, compasso, tesoura, cola, transferidor e régua para cada quarteto de alunos, juntamente com o modelo das planificações dos sólidos citados e debatidos aula passada, para que eles reproduzissem com área quatro vezes maior que aquela.

Uma das dificuldades apresentadas pelos alunos foi quando tiveram que construir os lados de um hexágono e octógono, pois não sabiam a inclinação que tinham que realizar para confeccionar o lado desses polígonos.

Com isso, o professor retomou brevemente o conceito de soma de ângulos internos de um polígono regular na lousa e os alunos constataram que o hexágono e o octógono têm cada ângulo interno, respectivamente, equivalentes a 120 e 135 graus.

Outro ponto a se destacar se refere à planificação do cilindro, pois nela não continha a medida do comprimento da base do retângulo desse que dá suporte as áreas circulares da base e da tampa do cone, e também na do cone não havia a medida do ângulo entre as futuras geratrizes.

O professor, então, retomou o conceito de circunferência, destacando principalmente o conceito do perímetro dela e ângulos de setores circulares, que eram bases para resolver os problemas surgidos. Em seguida, os alunos calcularam o perímetro da circunferência de raio 5 cm e o ângulo do setor circular de raio 15 cm, determinando o comprimento da base do cilindro planificado (10π) e do ângulo entre as geratrizes do cone planificado (120°).

Figura 15: Construção de planificações

Figura 16: Aluno planificando sólidos

Sanadas as dúvidas surgidas, os alunos terminaram de fazer as planificações nas cartolinas, recortaram-nas e montaram os sólidos. É mencionado que durante a realização dessa atividade, os grupos optaram por duas formas diferentes de trabalho: uns optaram por todos os integrantes construírem, recortarem e colarem, outros através de uma linha de produção, que cada um dos alunos fazia algo específico, criando, independente do método utilizado, a cooperação e trabalho de equipe entre os envolvidos.

Figura 17: Sistema de produção dos sólidos

Figura 18: Sólidos construídos

4.4 - Etapa 4 – Esqueletos de Poliedros

Encontros 11 e 12 - Em 06/03/2018 e 07/03/2018, o professor trouxe e distribuiu para a sala de aula palitinhos de churrasco de madeira nas medidas de 18 cm e 25 cm e um pouco de argila, e pediu para que os alunos, nos próprios grupos de 4 pessoas da atividade anterior, construíssem sete armações de sólidos tridimensionais, os de antes excetuando o cone e o cilindro, com o intuito de identificarem arestas pelos palitinhos e vértices provenientes de confecções de bolinhas de argila.

Figura 19: Alunos preparando os esqueletos

Figura 20: Alunos medindo arestas

Alguns alunos tiveram dificuldade em saber quantos palitos e quantas bolinhas seriam utilizadas para determinada armação, sendo necessária a utilização dos sólidos previamente construídos de cartolina como modelo para observação e constatação.

O professor recomendou fragmentar o palitinho maior em três partes de mesma medida para utilizarem como lado do octógono e hexágono para não ocuparem muito volume e ficarem com a estrutura instável após ficarem prontos.

Figura 21: Construção dos esqueletos

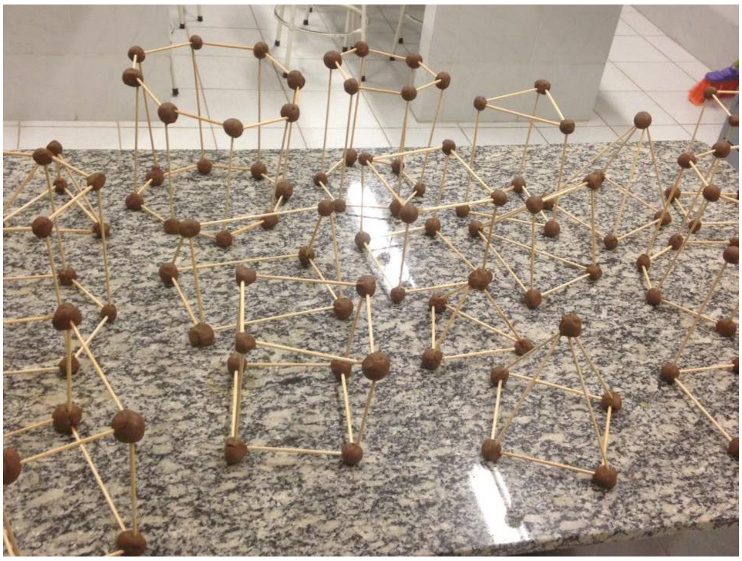


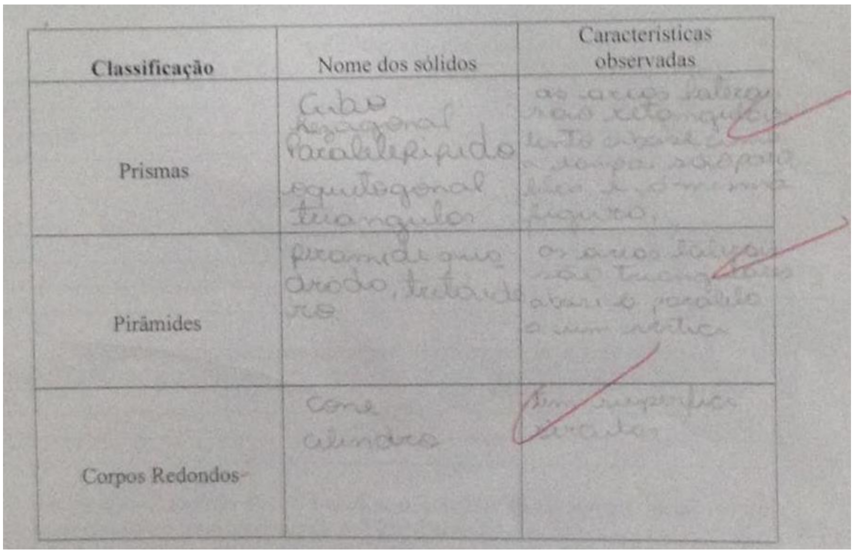
Figura 22: Esqueletos produzidos

Os alunos apreciaram e muito essa atividade, pois a todo o momento queriam fazer as bolinhas mais perfeitas possíveis e as arestas mais simétricas imagináveis, destacando o envolvimento da turma com materiais palpáveis em forma de prática do trabalho coletivo.

4.5 - Etapa 5 – Classificação dos Sólidos e Relação de Euler

Encontro 13 - Em 09/03/2018, foi entregue uma lista com atividades para cada quarteto de alunos já pré-estabelecidos para verificarem alguns tópicos importantes de Geometria Espacial (Anexo C). Ela foi composta por dois tópicos principais: classificação e identificação de elementos dos sólidos.

Na atividade 1 dessa lista, os alunos foram instruídos para que agrupassem os sólidos feitos em cartolina (previamente distribuídos) de acordo com os grupos que acharem conveniente entre Prismas, Pirâmides e Corpos Redondos, escrevendo as características desses na folha fornecida.



Classificação	Nome dos sólidos	Características observadas
Prismas	Cubo hexagonal Paralelepípedo equilátero triangulo	[illegible]
Pirâmides	pirâmide quadrada, tetraedro	[illegible]
Corpos Redondos	cone cilindro	[illegible]

Figura 23: Atividade 5.1: Resolução dos alunos

Não houve tanta dificuldade em reconhecimento dos sólidos conforme suas respectivas classificações, excetuando que alguns alunos alegaram que o cone fosse uma pirâmide, por possuir uma estrutura semelhante, sendo que para esse caso foi explicado particularmente pelo professor.

Na atividade 2 o professor orientou aos alunos a preencherem a tabela que diz respeito a quantidade de vértices, arestas e faces de cada poliedro e os polígonos que o compõem. Para isso, ele entregou os esqueletos construídos na etapa anterior e indagava os alunos individualmente.

Figura 24: Alunas constatando vértices, faces e arestas

Nome do sólido	F Quantidade de faces	A Quantidade de arestas	V Quantidade de vértices	Forma da base	Forma das faces laterais
CUBO	6	12	8	QUADRADO	QUADRADO
PARALELEPIPEDO	6	12	8	RETANGULO	RETANGULO
PRISMA TRIANGULAR	5	9	6	TRIANGULAR	RETANGULAR
PRISMA EXAGONAL	8	18	12	HEXAGONO	RETANGULO
PRISMA OCTAGONAL	10	24	16	OCTOGONO	RETANGULO
PIRAMIDE	4	6	4	TRIANGULO	TRIANGULO
TRIANGULO QUADRADO	5	8	5	QUADRADO	TRIANGULO

Figura 25: Atividade 5.2: Resolução dos alunos

Não houve dificuldades nesse processo e até os mais tímidos tiveram uma participação satisfatória, o que ajuda a melhorar um pouco a aprendizagem, pois todos os alunos fazem parte do processo educacional, sem qualquer tipo de distinção ou preconceito.

Devido à falta de tempo, esta etapa foi encerrada no encontro seguinte.

Encontro 14 – Em 13/03/2018, começou o encontro terminando a etapa anterior.

Sobre as atividades 2a, 2b e 2c, foram seguidas a mesma linha de prática da atividade 2, através dos questionamentos realizados pelo professor, mas agora em caráter de reconhecer retas paralelas, concorrentes e perpendiculares nos poliedros, dando um caráter de associação entre a Geometria Plana e a Espacial. Essa atividade teve um resultado positivo, pois os alunos identificaram corretamente.

E, por fim, a atividade 2d pediu para que os alunos constatassem a Relação de Euler através da tabela da atividade 2, fazendo-se os cálculos necessários entre o a soma do número de faces com o de vértices e descontando o de arestas.

Todos os alunos chegaram ao valor igual a dois. Em seguida, o professor comentou qual seria a importância desse resultado no tratamento de determinar o número de arestas, faces ou vértices de qualquer poliedro convexo e de alguns não-convexos.

4.6 - Etapa 6 – Volumes e Princípio de Cavalieri

Encontro 15 – Em 14/03/2018, com o intuito de ter uma aula diferenciada da tradicional lousa e giz, e sabendo que a utilização de recursos computacionais é cada vez mais frequente nas escolas e no ensino do País pelo avanço tecnológico e pelo fácil acesso e entendimento pelos alunos dessas ferramentas, o professor levou para a sala de aula um *notebook* e um projetor multimídia.

Assim, com uma exibição de apresentações gráficas (textos e imagens), foi mencionado os pontos principais do conceito de Volume, como é calculado nos casos de prismas, pirâmides e corpos redondos (cone, cilindro e esfera) e de como provém do Princípio de Cavalieri que seria introduzido posteriormente.

Figura 26: Introdução ao Princípio de Cavalieri

Figura 27: Conceitos de volume

Foi bem produtiva essa aula tecnológica, sendo que em determinados momentos eram feitas reflexões com os alunos sobre se havia diferença entre

Volume e Volume interno, quantos litros representam o metro cúbico, entre outras.

Encontro 16 – No encontro de 16/03/2018, após a introdução do conceito de Volume e do Princípio de Cavalieri, para reforçá-los, primeiramente, o professor trouxe um baralho de 52 cartas e as deixou ora empilhadas corretamente uma em cima da outra sobre uma mesa, ora deformando-as.

Em seguida, perguntou aos alunos qual a relação entre os dois volumes das duas situações e em qual delas seria mais fácil de calcular seu volume. As respostas foram unanimemente corretas. Logo, foi concluída em conjunto uma aplicação bem prática do Princípio de Cavalieri estudado.

Na sequência, o professor trouxe também sólidos regulares (cone, cilindro, prismas e pirâmides) confeccionados por ele que continham mesma área em cada uma das secções transversais a base e de mesma altura, e através de um orifício em cada um deles, com a ajuda dos alunos, encheram-nos com grãos de arroz e passaram-nos de um sólido para outro, constatando que os prismas entre eles, juntamente com o cilindro, tinham o mesmo volume, sem precisarem ver o resultado numérico propriamente dito. Analogamente acontecendo em relação às pirâmides e o cone, validando assim o referido Princípio.

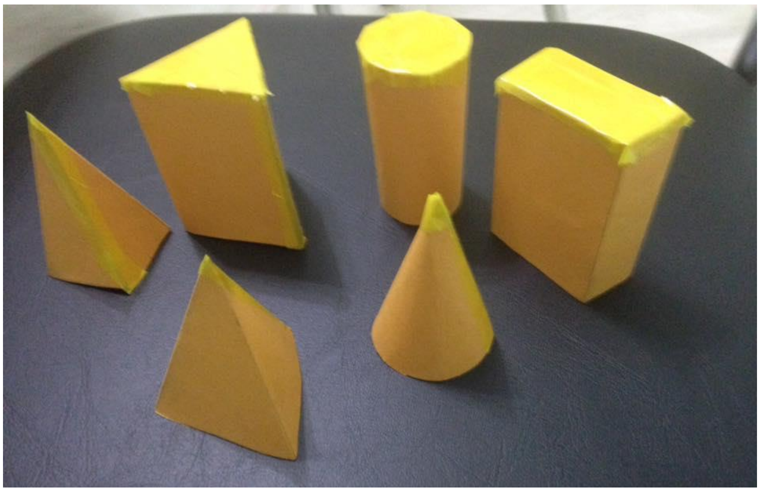


Figura 28: Sólidos à moda Cavalieri

Figura 29: Prática do Princípio de Cavalieri

Figura 30: Constatação do Princípio

Mais que isso, em certo momento o professor indagou aos alunos para descobrirem de quantas vezes a mais o volume de um prisma teria em relação ao de uma pirâmide, ambos com mesma área da base e altura. Pelas explicações ditas anteriormente, constataram facilmente que eram três, o que foi comprovado com o oportuno tipo de experimento com os grãos de arroz.

Figura 31: Relação de volume pirâmide-prisma

Foi percebida a participação efetiva dos alunos nessa atividade e a curiosidade despertada neles sobre se de fato tal experimentação daria certo. Alguns alunos disseram que não ia caber todo arroz nos sólidos, outros torceram e até animados para caber, e uns terceiros ainda afirmaram que faltaria arroz para completá-los, mostrando, assim, o sucesso dessa etapa.

4.7 - Etapa 7 – Princípio Arquimediano e o Cálculo de Volume de Objetos Irregulares

Encontro 17 – Em 20/03/2018, o professor apresentou uma lenda para os alunos sobre a grande descoberta de Arquimedes envolvendo a imersão de corpos, que serviu como base para a elaboração do Princípio Arquimediano, que já fora descrita nesse trabalho.

Na sequência, o professor trouxe alguns objetos do cotidiano com formatos irregulares, tais como um mandril de furadeira, uma resistência elétrica de chuveiro, uma pedra, e pediu para que os alunos elaborassem alguma estratégia ou método para calcular o volume desses.

Figura 32: Objeto irregular do cotidiano

Alguns alunos mencionaram que era só realizar o cálculo da área da base pela altura do objeto, mas outros intervieram afirmando que aquele não era regular.

Percebendo que depois de um tempo os alunos não haviam concluído a resposta, o professor instigou os alunos a relacionar essa questão com a lenda que acabara de contar. Feito isso, os alunos afirmaram que era somente trazer algo similar a uma banheira com água e calcular o desnível depois da imersão do objeto que caracterizaria o tal volume solicitado.

E tal proposta foi realizada na aula seguinte por não haver mais tempo hábil.

Encontro 18 – Em 21/03/2018, o professor continuou da aula anterior e os alunos formaram grupos para realizar a atividade prática sugerida, sendo que cada grupo recebeu uma peça irregular como, por exemplo, uma resistência, um mandril de furadeira, entre outros, e pediu-se que determinassem o volume dela.

Então, eles pegaram vasilhas fornecidas pelo professor no formato de poliedros já estudados, como um copo, um pote de biscoitos e fizeram as medidas necessárias para cálculo das áreas das bases das mesmas e as realizaram.

Figura 33: Medições no prisma

Em seguida, encheram-nas a certa altura de água e mediram essa altura que o líquido em questão tinha atingido e, após isso, calcularam o volume inicial.

Figura 34: Medições no cilindro

Depois imergiram a peça irregular e perceberam que o nível da água havia aumentado. Fazendo o similar processo de antes, encontraram o volume final e, assim, concluíram que o volume pedido era a diferença entre ambos os volumes encontrados, ou seja, que o volume de água deslocado por um sólido irregular é exatamente igual ao volume do próprio sólido, o que é justamente o que o Princípio diz.

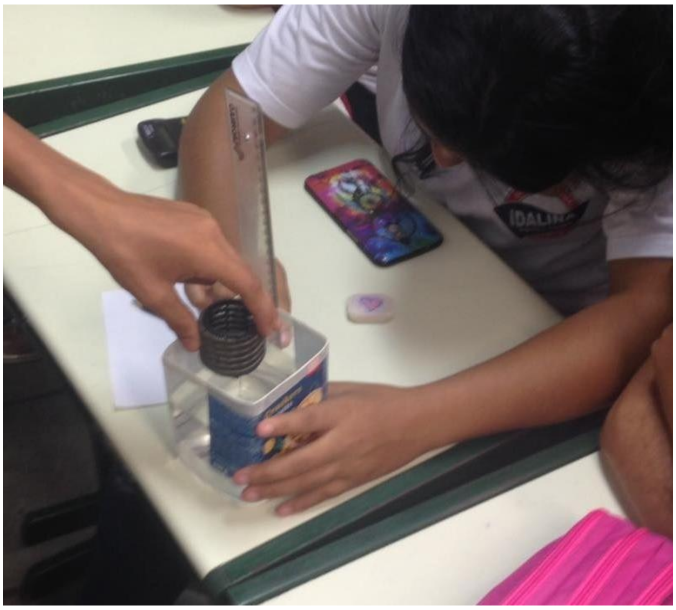


Figura 35: Conceito do Princípio Arquimediano

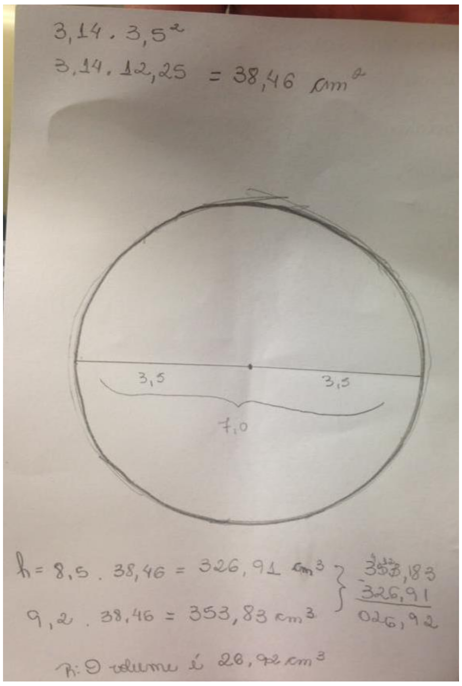


Figura 36: Cálculo do volume do objeto

Através do desafio proposto de resolução de uma situação aparentemente complicada, os alunos se sentiram motivados em busca de alguma estratégia e resposta para o problema. Esse sentir desafiador, atrelado ao tratamento das pessoas como parceiras, trabalhando juntas umas com as outras para um mesmo propósito, faz com que a motivação delas aumente, de acordo com uma nova pesquisa da Universidade Stanford, gerando uma aprendizagem colaborativa e significativa.

4.8 - Etapa 8 – Jogos Matemáticos

Encontro 19 – Em 23/03/2018, a aula começou de uma forma diferente. Foi informado aos alunos que a próxima atividade a ser desenvolvida baseava-se em recursos lúdicos em forma de jogos, para que, de uma forma não convencional, eles pudessem aprender e fixar as ideias “brincando”.

Foi explicado que consistia na utilização de dois jogos que foram criados e confeccionados pelo próprio professor e que os detalhes desses serão descritos a seguir. Depois foi instruído como constituía cada jogo e o nome criado para cada um deles: Memória Espacial Extreme e Spacenó.

Por fim, definiram-se as regras dos jogos, colocou-se na lousa alguns tópicos mais importantes delas para os alunos se habituarem no primeiro momento, e fizeram-se demonstrações práticas de como se jogava. Deixando para os próximos encontros a realização direta pelos alunos desses, por ser algo que requereu mais tempo.

4.8.1 - Etapa 8.1 - Memória Espacial Extreme

Encontro 20 – Em 27/03/2018, foi iniciada a aula para os alunos jogarem o primeiro jogo denominado Memória Espacial Extreme, que consiste em 27 cartas (*cards*) com caráter similar a um jogo da memória.

O diferencial desse jogo é que, ao invés da obtenção de pares com imagens iguais, tem-se o objetivo de encontrar ternas que representem o respectivo sólido, isto é, ele em si, sua planificação e um exemplo do dia-a-dia.

Também nesse jogo se tem uma avaliação embutida nele que é através do questionamento ao aluno, quando esse tirar e reconhecer uma terna ou um par, sobre o que é ou significa cada carta.

Essa atividade envolveu os conteúdos: reconhecimento dos sólidos e suas respectivas planificações e aplicações no cotidiano, constatação da estrutura de cada sólido (prisma, pirâmide ou corpo redondo) e verificação de faces laterais e da base de cada um deles. Sendo que tais assuntos foram trabalhados exaustivamente durante as aulas através da proposta pedagógica.

Para o jogo, os alunos, inicialmente, se dividiram em grupos de 4 pessoas e jogaram diversas vezes para reconhecimento e entendimento do jogo, para habituar e aplicar as regras e elaborarem estratégias para aumentar a chances de ganho, sempre tendo o professor observando cada grupo para resolver possíveis dúvidas que surgiriam e também para arbitrar e definir se o aluno identificou o nome corretamente do sólido quando surgiram duplas ou ternas no jogo.

Em seguida, depois de terem acostumados com a atividade, o professor orientou aos grupos de alunos que jogassem a derradeira, para que essa seria contabilizada como nota para o bimestre.

A avaliação do aluno no jogo consistiu em:

2,00 pontos para o aluno que conseguir a maior pontuação;

1,75 ponto para o aluno que conseguir a segunda maior pontuação;

1,50 ponto para o aluno que conseguir a terceira maior pontuação;

1,25 ponto para o aluno que conseguir a quarta maior pontuação.

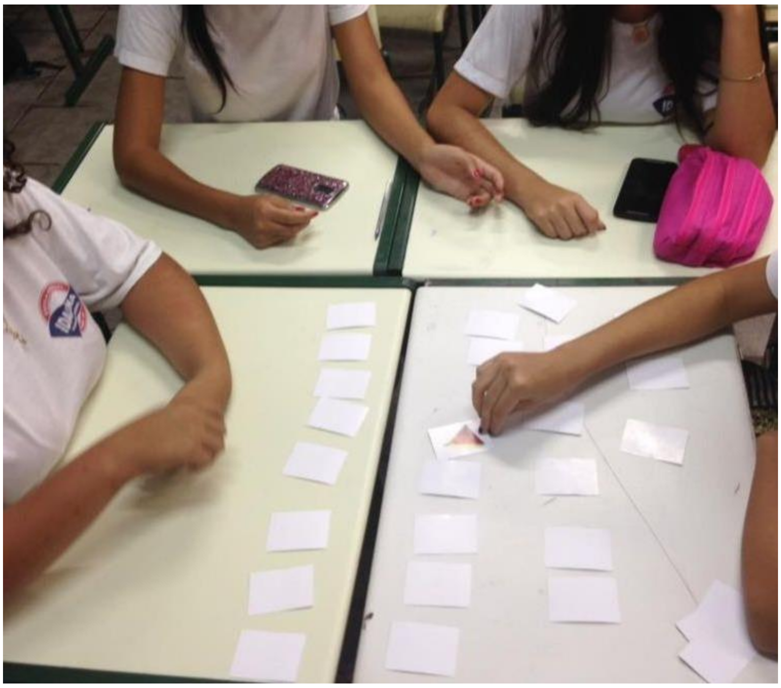


Figura 37: Conhecendo o primeiro jogo

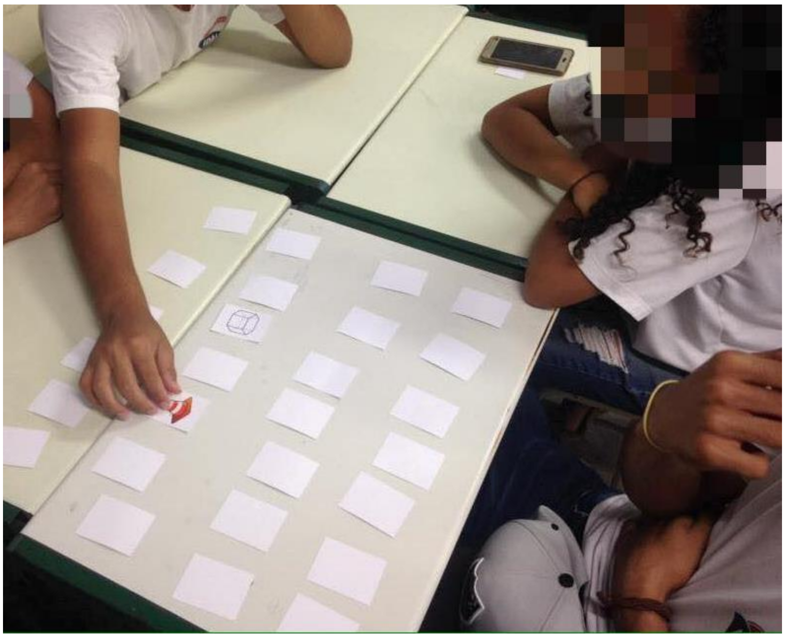


Figura 38: Vamos jogar Memória Espacial Extreme?

Foi notado que embora o jogo tendo caráter competitivo, a participação dos integrantes de cada grupo foi digna de méritos, pois os alunos se preocuparam em ajudar uns aos outros durante a atividade. Uma verdadeira aula de colaboração, cooperação e trabalho em equipe.

4.8.2 - Etapa 8.2 – Spacenó

Encontro 21 – Em 28/03/2018, foi iniciada a aula para os alunos jogarem o segundo jogo denominado Spacenó, que consiste em 28 peças (pedras) com caráter similar a um jogo de dominó.

Diferente do jogo tradicional, esse, por sua vez, não remete a associar numerais iguais, mas sólidos e equações de volumes idênticos, e, mais que isso, também do sólido com seu volume respectivo e vice-versa.

Esse jogo envolveu os seguintes conteúdos que tinham sido abordados em aula como associar e reconhecer os sólidos com seus respectivos cálculos de volume, tendo como fundamento o Princípio de Cavalieri.

Nele encontramos também uma forma de avaliar mais explicitamente o reconhecimento dos sólidos e do Princípio de Cavalieri, sobretudo quando o jogador pretende colocar uma peça curinga, pois era necessário que ele saiba o que representava a peça a ser encaixada, como, por exemplo, reconhecer uma esfera ou o volume dela.

Para realizar o jogo, os alunos se dividiram em grupos de 4 pessoas e o professor disponibilizou um Spacenó para cada quarteto. Em seguida, pediu para que eles jogassem com o intuito de se habituarem as regras, proporem estratégias, sempre com o professor estando próximo como forma auxiliadora para esclarecimentos sobre o jogo e julgando o aluno que pretendia inserir uma pedra curinga no jogo, validando ela ou não mediante a resposta correta de reconhecimento.

Durante o jogo, os alunos foram percebendo que para aumentarem as chances de ganho tinham que eliminar rapidamente a esfera e seu volume, bem como a pedra que continham o volume do cubo ($v = a^3$), por serem exclusivos desses sólidos. Em contrapartida, evitaram a utilização nas jogadas iniciais de uma peça curinga ou alguma peça de volume que envolva o

Princípio de Cavalieri, pois essas eram muito abrangentes para muitos sólidos, criando assim muitas possibilidades para seu encaixe.

Em seguida, depois de terem acostumados com o Spacenó, o professor orientou aos grupos de alunos que jogassem a derradeira, para que essa seria contabilizada como nota para o bimestre.

A avaliação do aluno no jogo consistiu em:

2,00 pontos para o aluno que conseguir a primeira colocação;

1,75 ponto para o aluno que conseguir a segunda colocação;

1,50 ponto para o aluno que conseguir a terceira colocação;

1,25 ponto para o aluno que conseguir a quarta colocação.

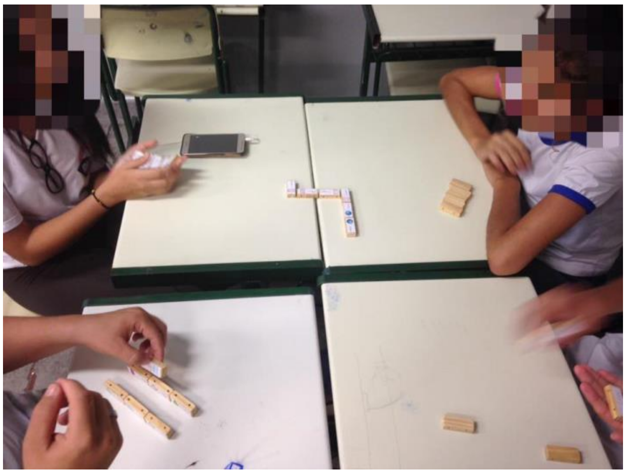


Figura 39: Conhecendo o segundo jogo

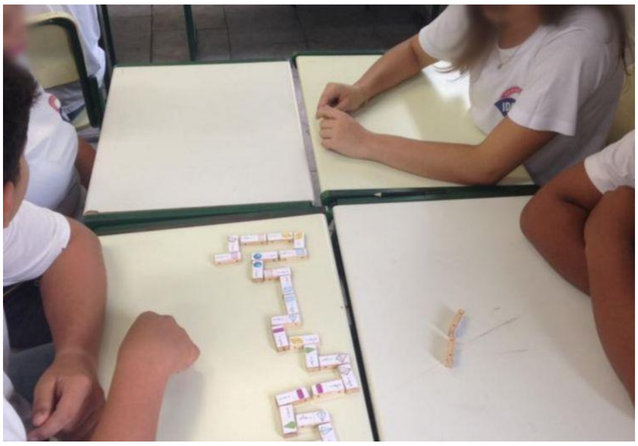


Figura 40: Vamos jogar Spacenó?

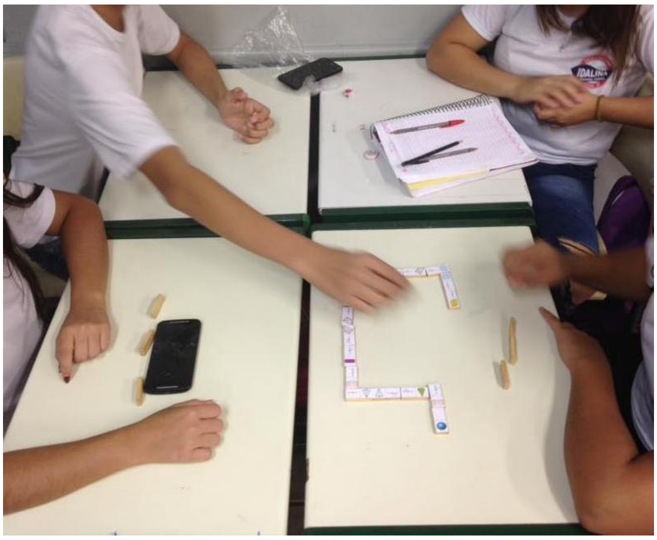


Figura 41: Reflexões e táticas do jogo

Foi muito proveitosa a interação dos alunos nesse jogo, destacando inclusive a cooperação deles em ajudar uns aos outros para encaixar as peças que tinham dúvidas.

Os jogos, de uma forma geral, puderam fazer com o que os alunos desenvolvessem habilidades e competências para resolverem qualquer tipo de problema, mais especificadamente os que envolvem Geometria Espacial, promovendo críticas, argumentações, estratégias, paciência e tenacidade.

> Nesta perspectiva, utilizar materiais manipuláveis na sala de aula é também uma prática social, em que os sujeitos, professores e alunos, interagem uns com os outros, engajados em atividades em que os significados podem ser compartilhados. (SOUZA, 2011, p. 29)

4.9 - Etapa 9 – Avaliação Final

Encontros 22 e 23 – Em 03/04/2018 e 04/04/2018, nas últimas duas aulas do trabalho, para verificar o aprendizado dos alunos, o saber reconhecer um sólido, suas características e estruturas, calcular áreas e os volumes e o quanto foi entendido dos Princípios Arquimediano e de Cavalieri, assim como a Relação de Euler para poliedros se faz presente, foi trazida pelo professor uma lista de 10 situações-problema (Anexo D), cada um valendo 1 ponto, que envolvia os tópicos estudados anteriormente, como forma de validação do projeto e, principalmente, da aprendizagem significativa dos alunos. A atividade foi realizada individualmente.

Após a realização dessa atividade, na aula seguinte o professor, juntamente com os alunos, retomou as situações-problema, comentando as estratégias utilizadas pelos alunos e proferiu alguns comentários sobre essa avaliação.

Foram elencados pelo professor, também, os erros cometidos na lousa sem relacioná-los aos alunos, iniciando um debate, instigando-os a indicarem os erros cometidos, corrigindo-os. Esse desenvolvimento serviu de revisão de conceitos e conteúdos.

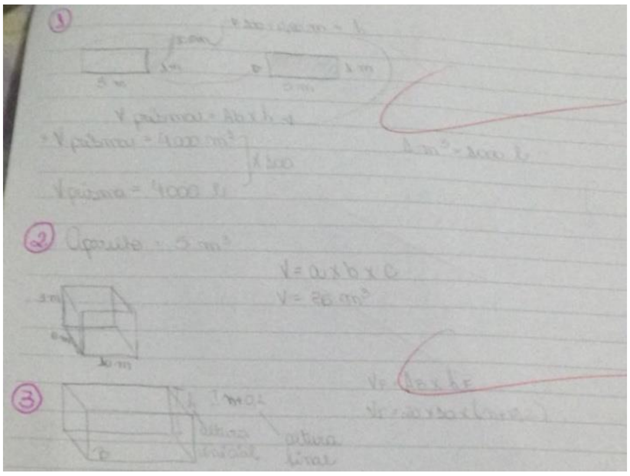


Figura 42: Atividades 9.1, 9.2 e 9.3: Resolução do aluno

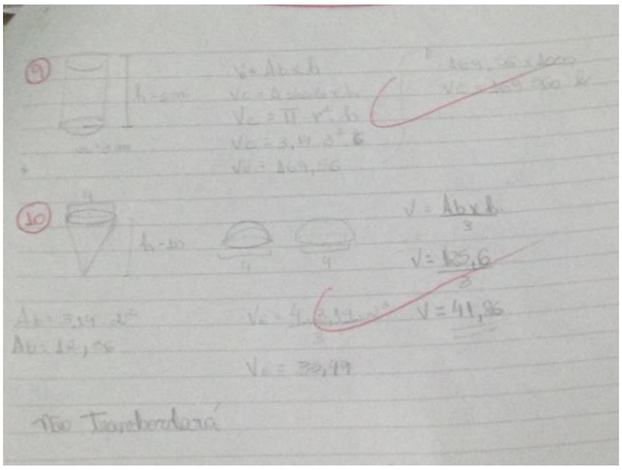


Figura 43: Atividades 9.9 e 9.10: Resolução do aluno

Ao analisar o desempenho dos alunos nesta lista, foi observado que o rendimento dos estudantes foi 67,9% de acertos, apontando um índice satisfatório. Além disso, notou-se que na resolução individual dos discentes houve uma maior ação e capricho em desenhar os sólidos na folha de respostas, mesmo não sendo necessário, utilizando-os para melhor entendimento às situações-problema (Figuras 42 e 43).

O bom retrospecto dos alunos nas avaliações e as participações efetivas em todo o projeto serviram de base para uma aprendizagem significativa.

> ... a Matemática pode dar sua contribuição à formação do cidadão ao desenvolver metodologias que enfatizem a construção de estratégias, a comprovação e justificativa dos resultados, a criatividade, a iniciativa pessoal, o trabalho coletivo e a autonomia advinda da confiança na própria capacidade para enfrentar desafios. (PCN, p. 27)

Desse modo, nos leva ao entendimento que a sequência proposta pôde ser implantada de forma bastante proveitosa.

5 – CONCLUSÃO

O recente estudo teve por objetivo elaborar uma maneira de ensino de Tópicos de Geometria Espacial, dirigidas a Segunda Série do Ensino Médio a partir de recursos diversificados, levando os alunos a verem uma Matemática de forma diferente, tendo em vista a aplicação materiais lúdicos ou manipulativos, proporcionando uma maior aproximação do professor e dos alunos, contextualizando o conhecimento teórico. Sendo que o olhar do aluno ao seu professor, sua empatia e afinidade ajudam no interesse e processo de aprendizagem significativa.

Trabalhando dessa forma, resgatamos um contato direto entre os alunos e auxílio mútuo entre eles através das atividades em grupo e também contribuímos para uma aula mais dinâmica e produtiva. E saindo um pouco do monótono giz e lousa, serve como clima favorável, tornando o discente mais aberto a novas experiências.

É evidente que nem todo conteúdo matemático pode ser tratado com materiais diversos, mas cremos que é fundamental a capacitação e atualização recorrente dos docentes sobre isso, pois esses têm o dever de abrir horizontes aos seus alunos em diversos conteúdos que podem ter certa abertura, sejam com material concreto, jogos, tecnologias, História da Matemática, entre outros.

O projeto elencado pode ser reproduzido total ou parcialmente em salas de aula do Brasil todo. Sempre respeitando a estrutura física e recursos financeiros de cada Unidade Escolar, adaptando os conteúdos às realidades delas. Desse modo, temos diversas formas de aplicações ou incrementos dessa proposta que o professor julgar necessários, através de muita criatividade do próprio.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, G. P. de. **Transposição Didática:** Por onde começar? Curitiba, PR, Brasil: Cortez Editora, 2011.

ARTIGUE, M. (1988): **“Ingénierie Didactique”.** Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 9.3, 281-308.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais.** Matemática. Brasília, 1997. v. 3.

CARNEIRO, Vera Clotilde GARCIA. **Engenharia didática:** um referencial para ação investigativa e para formação de professores de Matemática. Zetetike, CampinasUNICAMP, v. 13, n. 23, 2005, p. 85-118.

FONSECA, Maria da Conceição F. R.; et al. **O ensino da geometria na escola fundamental – três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais.** Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

GARDNER, H. **Estruturas da mente:** a teoria das inteligências múltiplas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1994.

GRANDO, R. C. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula.** 239 fls. Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas – SP, 2000. Disponível em: <https://pedagogiaaopedaletra.com/wp-content/uploads/2012/10/O-CONHECIMENTO-MATEM%C3%81TICO-E-O-USO-DE.pdf> Acesso em: 06 de março de 2018.

LIMA, E. L. **Áreas e volumes.** Rio de Janeiro: SBM, 1980.

LIMA, E. L.; et al. **A matemática do ensino médio.** 6. Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 2.

LORENZATO, Sérgio. **Por que não ensinar Geometria?** A Educação Matemática em Revista, Sociedade Brasileira de Educação Matemática, n. 4, 1º sem. 1995.

MORAN, José Manuel. **Mudanças na comunicação pessoal;** Gerenciamento integrado da comunicação pessoal, social e tecnológica. São Paulo, Paulinas, 1998.

NACARATO, A. M. A **geometria no ensino fundamental:** fundamentos e perspectivas de incorporação no currículo das séries iniciais. In: SISTO, F. F.; DOBRÁNSZKY, E. A.; MONTEIRO, A. (Org.). Cotidiano Escolar: questões de leitura, matemática e aprendizagem. Petrópolis: Vozes; Bragança Paulista: USF, 2002.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática, uma análise da influencia francesa.** 2ª edição, Belo Horizonte: Autentica, 2002.

REZENDE, Eliane Quelho Frota. **Geometria euclidiana plana e construções geométricas** / Eliane Quelho Frota Rezende e Maria Lúcia Bontorim de Queiroz. - 2ª ed. - Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2008.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo.** Matemática e suas tecnologias. Coordenação Geral, Maria Inês Fini; Coordenação de Área, Nilson José Machado. São Paulo, 2010.

SILVA, L. P. M. **Princípio de Cavalieri.** Disponível em: <https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/principio-cavalieri.htm> Acesso em: 15 de março de 2018.

SILVA, M. N. P. **A descoberta de Arquimedes.** Disponível em: <https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/a-descoberta-arquimedes.htm> Acesso em: 02 de fevereiro de 2018.

SODRÉ, Ulysses. **Geometria:** Polígonos e triângulos. Disponível em: <http://www.uel.br/projetos/matessencial/fundam/geometria/poligonos.htm> Acesso em: 22 de janeiro de 2018.

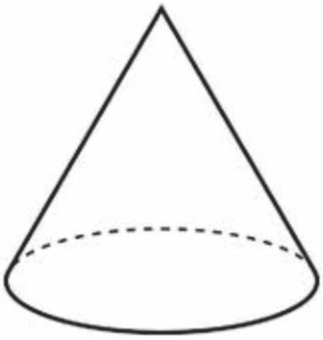
SOUZA, J. V. B.; BARBOSA, J. C. **Os manipuláveis e a prática questionadora dos alunos na sala de aula de matemática.** In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. **Anais...** São Paulo: SBEM, 2010.

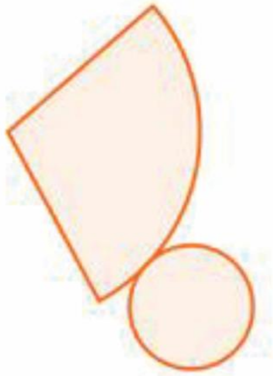
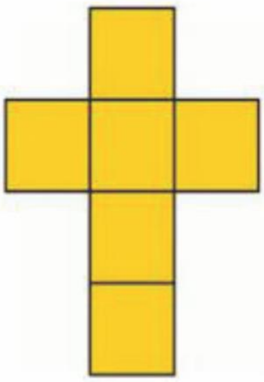
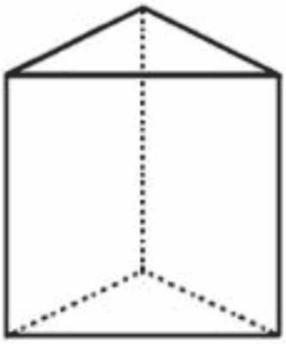
TEIXEIRA FILHO, Durval Martins. **O aprendizado da geometria no ensino médio- origens de dificuldades e propostas alternativas.** Florianópolis: [s.n] 2002.

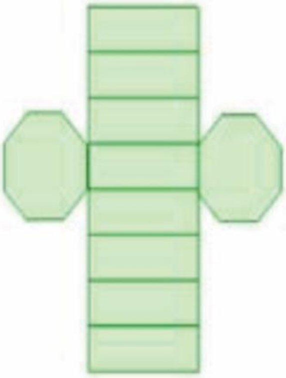
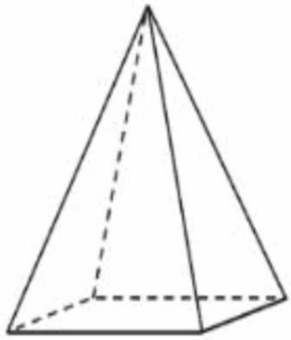
VITTI, Catarina Maria. **Matemática com prazer. A partir da história e da geometria.** 2ª ed. Piracicaba: Editora UNIMEP, 1999.

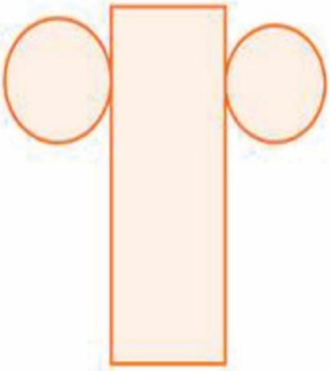
APÊNDICES

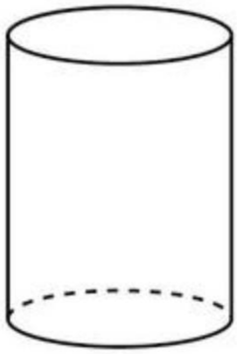
Apêndice A: Cartas do Jogo Memória Espacial Extreme

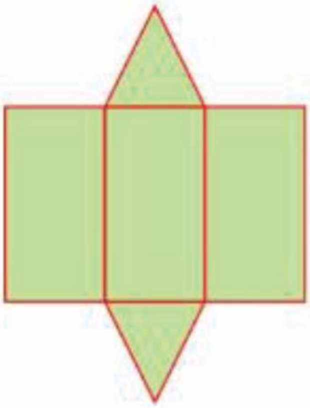


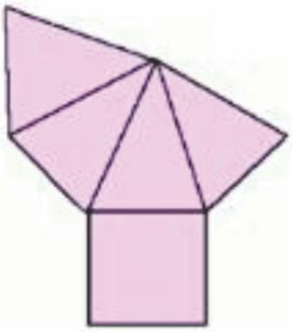



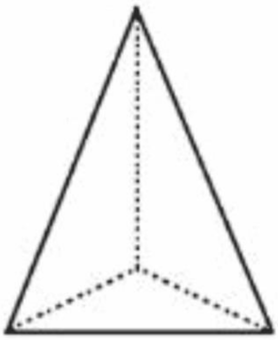


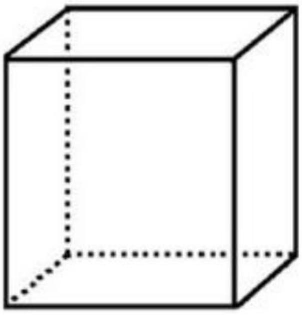
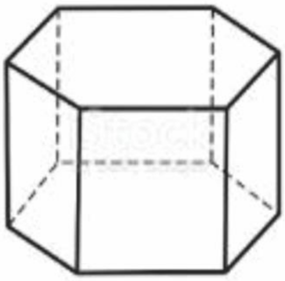
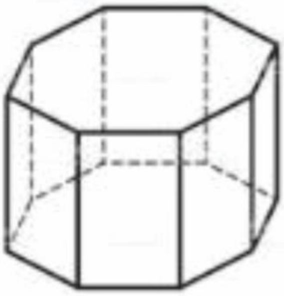
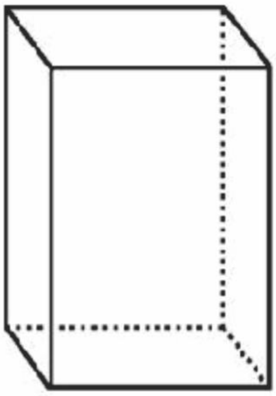
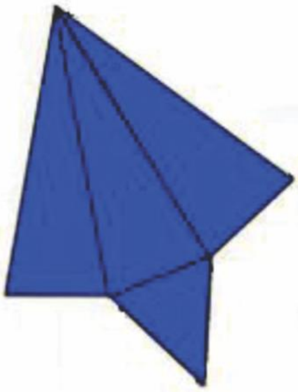
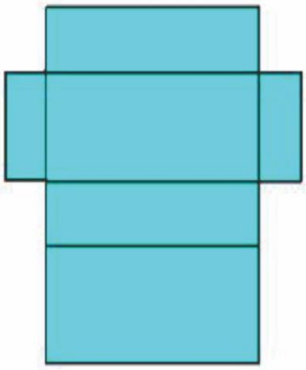




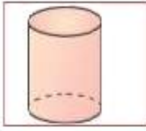
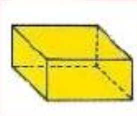
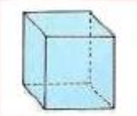
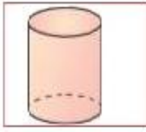
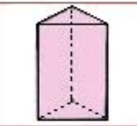
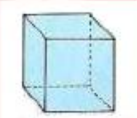
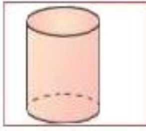
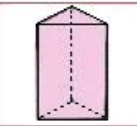
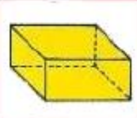
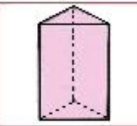
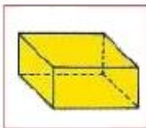
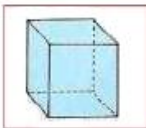
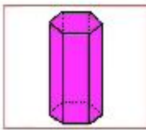
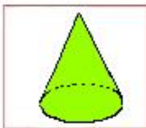
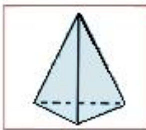
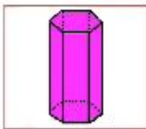
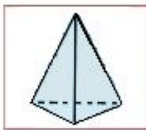
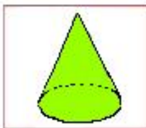
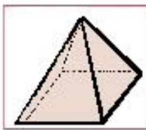
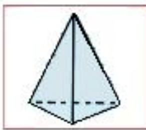
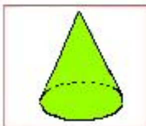
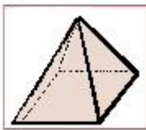
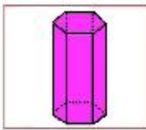
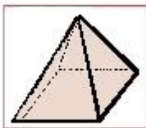

ALPINO





Apêndice B: Pedras do Jogo Spacenó

	$V = Ab \times h$		$V = a^3$		$V = \frac{Ab \times h}{3}$
	$V = \frac{Ab \times h}{3}$		$V = a \times b \times c$		$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
	$V = a^3$		$V = Ab \times h$		$V = Ab \times h$
	$V = \frac{Ab \times h}{3}$		$V = \frac{Ab \times h}{3}$		$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
	$V = Ab \times h$		$V = Ab \times h$		
	$V = a \times b \times c$		$V = \frac{4}{3}\pi r^3$		$V = Ab \times h$
	$V = \frac{Ab \times h}{3}$		$V = \frac{4}{3}\pi r^3$		$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
	$V = Ab \times h$		$V = \frac{4}{3}\pi r^3$		$V = \frac{Ab \times h}{3}$
	$V = \frac{Ab \times h}{3}$		$V = Ab \times h$		$V = Ab \times h$
			$V = \frac{Ab \times h}{3}$		

ANEXOS

Anexo A: Atividade diagnóstica de Geometria Plana.

Proposta de Projeto Didático - PROFMAT

Diretoria de Ensino Regional de Jaú - SP

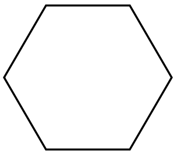
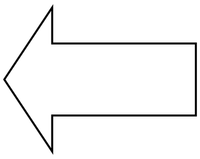
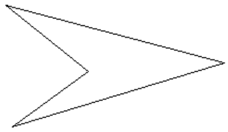
E. E. Prof. Idalina Vianna Ferro

Nome: ______________________________

Atividade 1 – Com auxílio do par de esquadros, trace dois segmentos, EF e GH, paralelos ao segmento AB e dois segmentos, IJ e KL, perpendiculares ao segmento CD.

Solução:

Atividade 2 - Classifique em convexos ou não-convexos os polígonos abaixo. E nos polígonos convexos, nomeie seus vértices e identifique os pares de linhas paralelas e perpendiculares.

a)  b)  c)  d) 

Solução:

<u>Polígono a):</u>

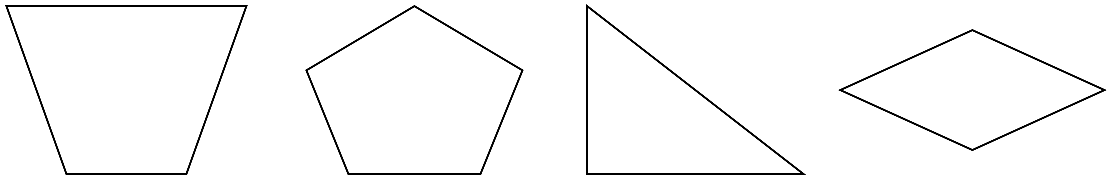
<u>Polígono b):</u>

<u>Polígono c):</u>

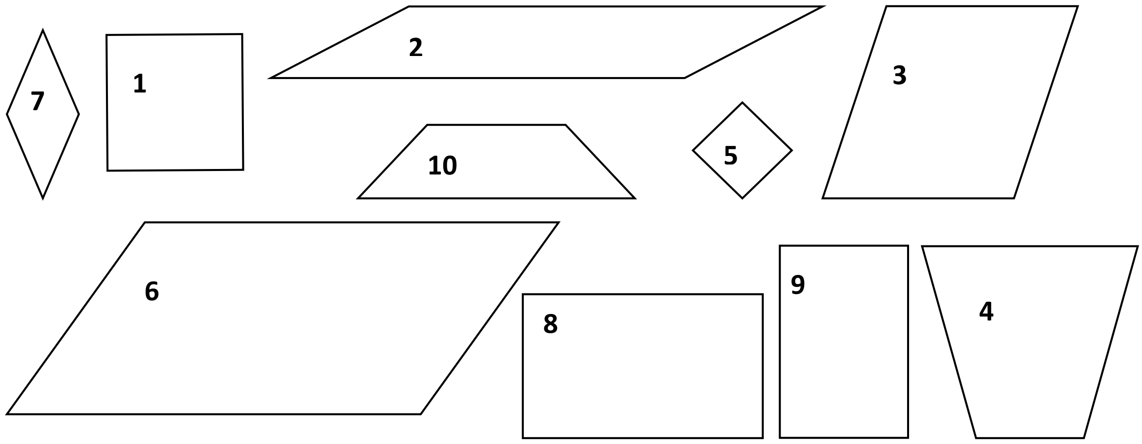
<u>Polígono d):</u>

Atividade 3 - Traçar todas as diagonais das figuras abaixo.

Solução:



Atividade 4 - Observe os quadriláteros abaixo:



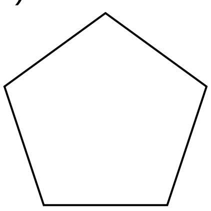
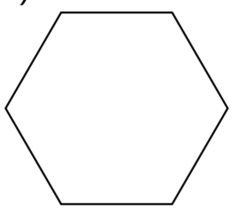
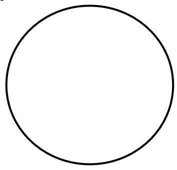
Classifique cada um deles assinalando o que achar conveniente (quadrado, losango, paralelogramo, retângulo e trapézio), lembrando que pode haver mais que uma marcação em cada um deles.

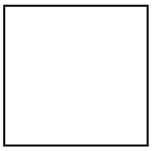
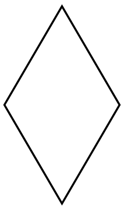
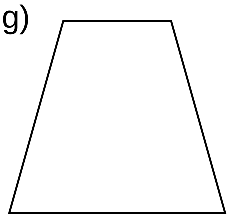
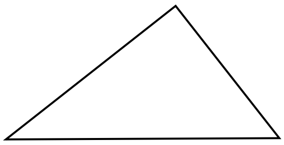
Solução:

Polígono 1	( )Quadrado ( )Losango ( )Paralelogramo ( )Retângulo ( )Trapézio
Polígono 2	( )Quadrado ( )Losango ( )Paralelogramo ( )Retângulo ( )Trapézio
Polígono 3	( )Quadrado ( )Losango ( )Paralelogramo ( )Retângulo ( )Trapézio
Polígono 4	( )Quadrado ( )Losango ( )Paralelogramo ( )Retângulo ( )Trapézio
Polígono 5	( )Quadrado ( )Losango ( )Paralelogramo ( )Retângulo ( )Trapézio
Polígono 6	( )Quadrado ( )Losango ( )Paralelogramo ( )Retângulo ( )Trapézio
Polígono 7	( )Quadrado ( )Losango ( )Paralelogramo ( )Retângulo ( )Trapézio
Polígono 8	( )Quadrado ( )Losango ( )Paralelogramo ( )Retângulo ( )Trapézio
Polígono 9	( )Quadrado ( )Losango ( )Paralelogramo ( )Retângulo ( )Trapézio
Polígono 10	( )Quadrado ( )Losango ( )Paralelogramo ( )Retângulo ( )Trapézio

<u>Atividade 5</u> - Nomeie os polígonos e dê suas características ao lado deles e trace suas respectivas diagonais quando possuírem.

Solução:

a) 	b) 
c) 	d) 

e) 	f) 
g) 	h) 

Atividade 6 - Aproveitando uma promoção de uma loja de materiais para construção, uma família resolve trocar o piso da sala de sua residência. Sabem que a sala mede 4 metros de largura e possui um comprimento de 5,5 metros. Sabem também que o ladrilho desejado é quadrado, com 25 cm de lado. Quantos ladrilhos serão necessários para ladrilhar o piso da sala inteira?

Solução:

Atividade 7 - Jogo rápido:

a) *Um trapézio tem a base menor igual a 2, a base maior igual a 3 e a altura igual a 10. Qual a área deste trapézio?*

Solução:

b) A medida da base de um triângulo é de 7 cm, visto que a medida da sua altura é de 3,5 cm, qual é a área deste triângulo?

Solução:

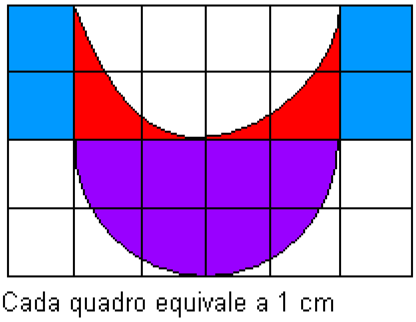
c) A medida da base de um paralelogramo é de 5,2 dm, sendo que a medida da altura é de 1,5 dm. Qual é a área deste polígono?

Solução:

d) As diagonais de um losango medem 10 cm e 15 cm. Qual é a medida da sua superfície?

Solução:

<u>Atividade 8</u> – Desafio: *Determine o valor da área hachurada abaixo:*



Cada quadro equivale a 1 cm

Solução:

Anexo B: Modelo de planificações de sólidos.

Proposta de Projeto Didático - PROFMAT

Diretoria de Ensino Regional de Jaú - SP

E. E. Prof. Idalina Vianna Ferro

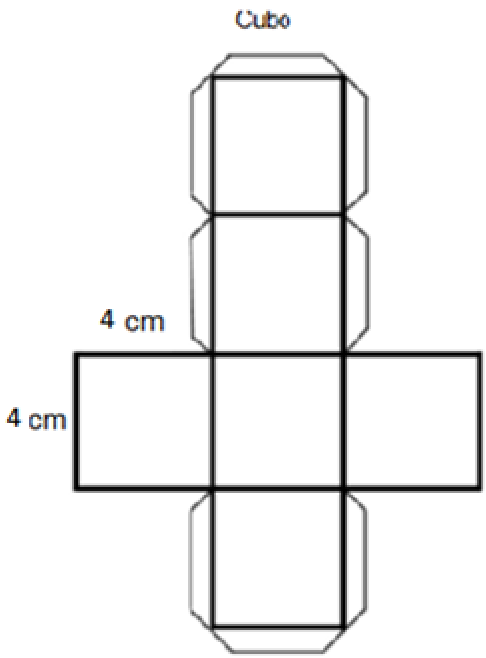
Nome: ______________________________

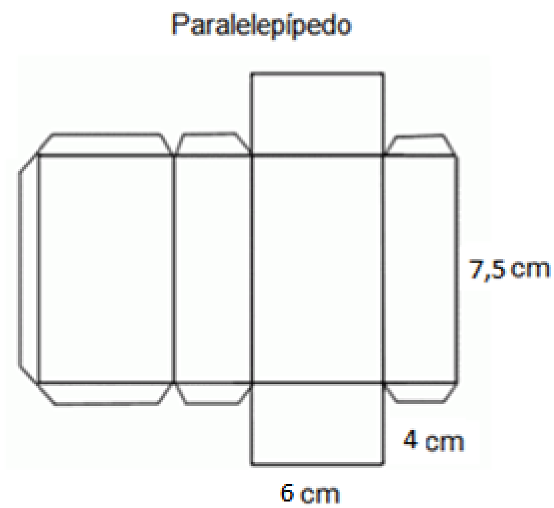
Nome: ______________________________

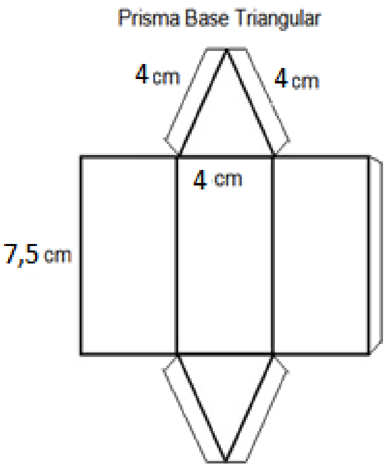
Nome: ______________________________

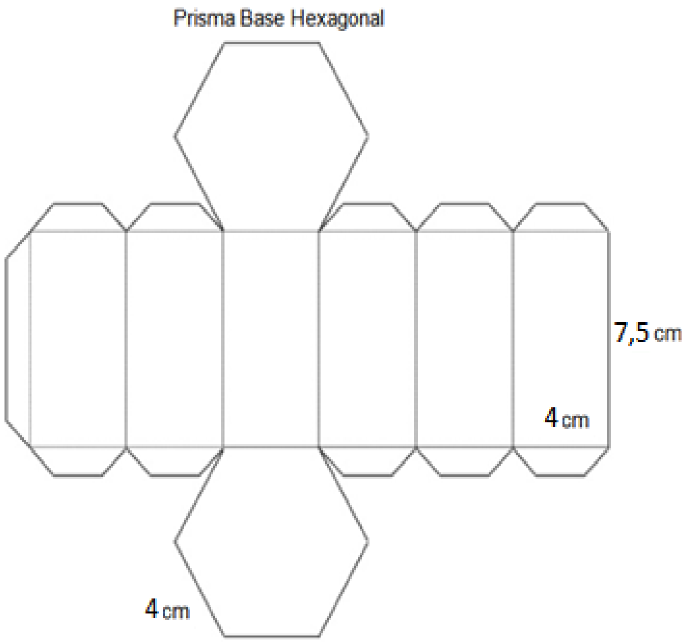
Nome: ______________________________

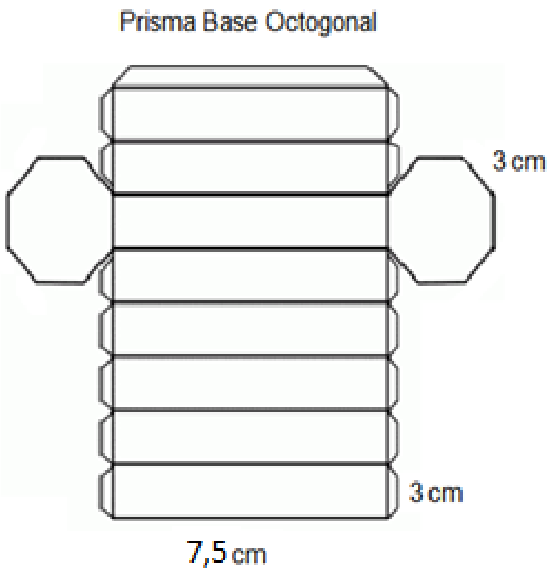
Atividade – Através dos modelos das planificações abaixo, construa-os em cartolina de modo que possuam o quádruplo das áreas iniciais e, em seguida, monte os sólidos.

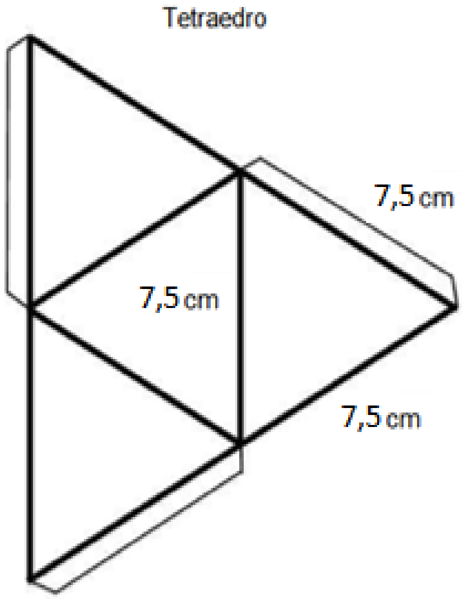




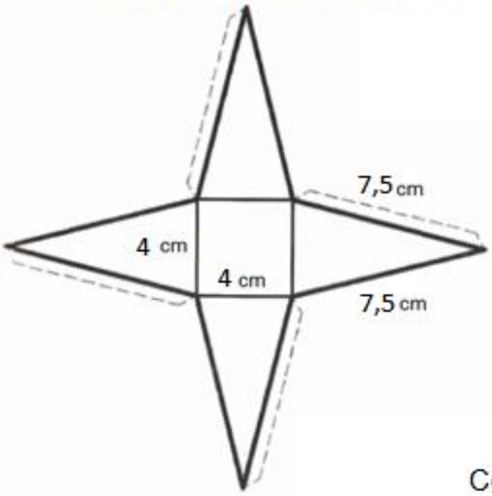

Prisma Base Triangular
4 cm
4 cm
4 cm
7,5 cm


Prisma Base Hexagonal
7,5 cm
4 cm
4 cm

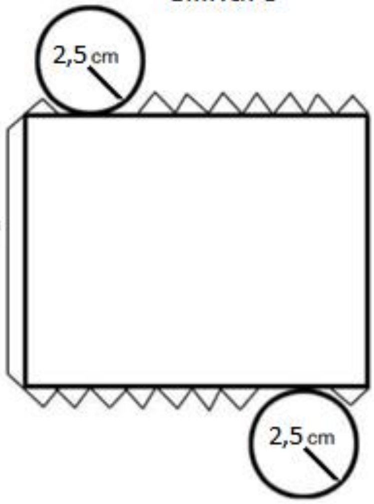

Prisma Base Octogonal
3 cm
3 cm
7,5 cm


Tetraedro
7,5 cm
7,5 cm
7,5 cm

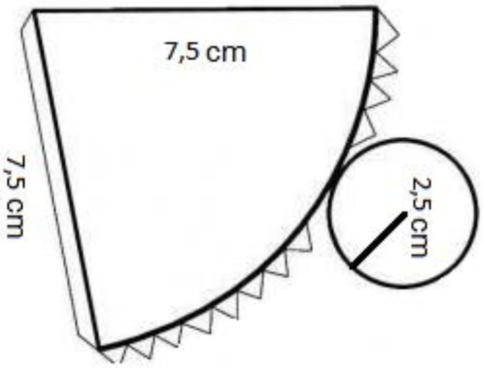
Pirâmide Base Quadrada



Cilindro



Cone



Anexo C: Caracterização dos sólidos e Relação de Euler.

Proposta de Projeto Didático - PROFMAT

Diretoria de Ensino Regional de Jaú - SP

E. E. Prof. Idalina Vianna Ferro

Nome: ______________________________

Nome: ______________________________

Nome: ______________________________

Nome: ______________________________

Atividade 1 – Através dos sólidos construídos, separe-os conforme achar conveniente em três grupos: prismas, pirâmides e corpos redondos, completando a tabela seguinte:

Classificação	Nome dos sólidos	Características observadas
Prismas		
Pirâmides		
Corpos Redondos		

Atividade 2 Com auxílio dos poliedros construídos com os palitos de churrasco, faça o que se pede completando a seguinte tabela e responda as seguintes questões:

Nome do sólido	Quantidade de faces	Quantidade de arestas	Quantidade de vértices	Forma da base	Forma das faces laterais

a) Existem arestas paralelas em quais poliedros?

b) Existem arestas perpendiculares em quais poliedros?

c) Existem arestas concorrentes não-perpendiculares em quais poliedros?

d) Sejam A o número de arestas, F o de faces e V o de vértices de cada sólido, calcule para cada um deles o valor de F + V – A. O que você pode concluir com os resultados obtidos? (Observação: Tal constatação recebe o nome de Relação de Euler).

Anexo D: Avaliação final.

Proposta de Projeto Didático - PROFMAT

Diretoria de Ensino Regional de Jaú - SP

E. E. Prof. Idalina Vianna Ferro

Nome: ________________________________

Atividade 1 - As dimensões de uma caixa d´água em forma de bloco retangular são 1m, 5m e 80cm. Estando totalmente cheia, qual é a capacidade, em litros, da caixa d´água?

Atividade 2 - Em agosto de 1996, a revista Globo Ciências, mostrava o *Mofim,* um aparelho que acaba com a umidade do ar, que propicia o surgimento de fungos, responsáveis por distúrbios respiratórios. Sua atuação é em espaços de no máximo 5 metros cúbicos. Se uma sala tem 10m de comprimento, 6m de largura e 3m de altura, quantos aparelhos seriam necessários colocar nessa sala?

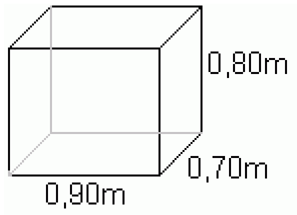
Atividade 3 - Deseja-se elevar o nível da água de uma piscina em 20cm. A piscina é retangular, com 20m de comprimento por 10m de largura. Qual é a quantidade de água em litros que deve ser acrescentada na piscina?

Atividade 4 - Um recipiente de plástico transparente tem forma de um paralelepípedo e suas medidas são 33cm de comprimento, 13cm de largura e 20cm de altura. Estando totalmente cheio, Mara, ao trocá-lo de lugar, derramou certa quantidade de líquido. Calcule qual a quantidade derramada, sabendo que, recolocando o recipiente na posição inicial, a altura do líquido restante atingiu 12cm. Dê a resposta em mililitros, sabendo que $1cm^3 = 1ml$.

Atividade 5 - Uma parede tem 8m de comprimento por 2,75m de altura. Com uma lata de tinta é possível pintar $10m^2$ de parede. Quantas latas de tinta serão necessárias para pintar essa parede?

Atividade 6 - Uma piscina retangular de 15m de comprimento por 10m de largura está cheia com água até a altura de 1,5m. Um produto químico deve ser misturado à água na razão de um pacote para cada 4500L de água. Qual é o número de pacotes a serem usados no tratamento dessa piscina?

Atividade 7 - Quantos litros de água são necessários para encher completamente uma caixa d'água, com formato de um paralelepípedo retângulo (prisma reto quadrangular), cujas dimensões (internas) são: 0,90 m de comprimento, 0,70 m de largura e 0,80 m de altura? Sabe-se que $1m^3 = 1000$ litros.



Atividade 8 - Com o objetivo de trabalhar com seus alunos o conceito de volume de sólidos, um professor fez o seguinte experimento: pegou uma caixa de polietileno, na forma de um cubo com 1 metro de lado, e colocou nela 600 litros de água. Em seguida, colocou, dentro da caixa com água, um sólido que ficou completamente submerso. Considerando que, ao colocar o sólido dentro da caixa, a altura do nível da água passou a ser 80 cm, qual era o volume do sólido?

Atividade 9 - Um reservatório suspenso tem a forma de um cilindro com as seguintes dimensões, raio da base $r = 3m$ e altura do reservatório $h = 6m$. Determinar seu volume em litros.

Atividade 10 - Um copinho de sorvete, em forma de cone, possui 10 cm de profundidade, e 4 cm de diâmetro no topo, tendo aí colocados duas conchas semi-esféricas de sorvete, também de 4cm de diâmetro. Se o sorvete derreter para dentro do copinho, podemos concluir que não transbordará ou transbordará?