UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Existência e multiplicidade de soluções para equações de Schrödinger com potencial magnético

Sandra Machado de Souza Lima
Orientador: Olimpio Hiroshi Miyagaki
Coorientador: Francisco Odair Vieira de Paiva

São Carlos
Junho/2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Existência e multiplicidade de soluções para equações de Schrödinger com potencial magnético

Sandra Machado de Souza Lima
Orientação: Olimpio Hiroshi Miyagaki
Coorientação: Francisco Odair Vieira de Paiva

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Doutora em Matemática.

São Carlos
Junho/2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado da candidata Sandra Machado de Souza Lima, realizada em 26/06/2018:

Francisco O.V. de Paiva

Prof. Dr. Francisco Odair Vieira de Paiva
UFSCar

Adilson Presoto

Prof. Dr. Adilson Eduardo Presoto
UFSCar

Prof. Dr. Gustavo Ferron Madeira
UFSCar

Prof. Dr. Marcelo Fernandes Furtado
UnB

Prof. Dr. Edcarlos Domingos da Silva
UFG

À minha família.

Agradecimentos

Agradeço à Jesus, meu amigo, fonte de toda graça e sabedoria. À virgem Maria meu consolo e meu anjo da guarda meu guia.

Aos meus pais, perseverantes na oração e sempre presentes com aquele olhar que descansa e renova as forças para continuar a caminhada. Aos meus irmãos pelo apoio, preocupação e carinho.

Ao Fábio, meu marido, amigo, estímulo, que acreditou em mim mais que eu mesma e em tudo me apoiou para chegar até aqui. Ao João minha riqueza e ao Francisco que está vindo, gerados durante esse trabalho foram minhas fontes de motivação.

Aos que me ajudaram nos cuidados com o João: minha mãe, Magda, Carla, Tia Nananda. Obrigada pela disponibilidade, pelo carinho e dedicação.

Ao meu orientador Olímpio, ser humano extraordinário. Exemplo de dedicação, compreensão, sabendo apertar nas horas certas. Sempre pronto a atender minhas dúvidas e me dando força nas dificuldades que não foram poucas. Levarei seu exemplo para a vida toda.

Ao Odair pela coorientação, contribuindo nos pontos críticos e sempre disposto a ajudar.

Aos professores Ed Carlos, Marcelo, Adilson e Gustavo por aceitarem participar desta banca e pelas correções e contribuições ao trabalho.

Aos meus amigos que vivenciaram comigo cada dificuldade desse trabalho sempre me apoiando e propiciando horas de descanso mais agradáveis.

Aos professores e funcionários do Departamento de Matemática da UFSCar, que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Aos colegas e amigos da UFSCar, pela troca de experiências. De modo muito especial ao pessoal da turma que tomei como minha: Mari, Amanda, Alisson, Chico e Igor. À Pat e Thais, me ajudando com a amizade e nos cuidados com o João.

Agradeço à UFJF que me cedeu um espaço para realizar parte desse trabalho no departamento de Matemática de Juiz de Fora. Aos professores e amigos da UFJF que desde a graduação me acompanharam e incentivaram nesse caminho.

Aos colegas e amigos da UFF, pelo incentivo por me ajudarem a conseguir conciliar as pesquisas e atividades acadêmicas.

À Capes pelo apoio financeiro.

"Por vezes sentimos que
aquilo que fazemos não é
senão uma gota de água no
mar. Mas o mar seria menor
se lhe faltasse uma gota".
(Madre Teresa de Calcutá)

Resumo

Neste trabalho, consideramos primeiramente a seguinte classe de problemas elípticos do tipo côncavo-convexo

$$(P_1) \qquad \begin{cases} -\Delta_A u + u = a_\lambda(x)|u|^{q-2}u + b_\mu(x)|u|^{p-2}u, \ x \ \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1_A(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

onde $1 < q < 2 < p < 2^* = \frac{2N}{N-2}$, $a_\lambda(x)$ é uma família de funções que pode mudar de sinal e $b_\mu(x)$ satisfaz algumas condições adicionais. Ainda, $A \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ é um potencial magnético, tal que A é assintótico a uma constante quando $|x| \to \infty$. Provamos a existência de pelo menos quatro soluções para o problema em questão. Procuramos ainda estabelecer resultados de regularidade para as soluções. Explorando a relação entre a variedade de Nehari e a aplicação fibração, discutimos a existência de pelo menos duas soluções para o problema. Utilizamos teoria de categoria para garantir a existência de uma terceira solução e um argumento de Bahri Li para garantir a existência de uma quarta solução.

Em um segundo momento estudamos o seguinte problema

$$(P_2) \qquad \begin{cases} -\Delta_A u + u = a(x)|u|^{q-2}u + b(x)|u|^{p-2}u, \ x \ \text{ em } \mathbb{R}^N \\ u \in H^1_A(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

onde $2 < q < p < 2^* = \frac{2N}{N-2}$, $a(x)$ e $b(x)$ são funções peso que podem mudar de sinal e satisfazem algumas condições adicionais. Também utilizando o método de Nehari combinando com outros argumentos complementares discutimos a existência de infinitas soluções para o problema, variando as hipóteses sobre as funções peso.

Palavras Chaves: Potencial magnético, funções peso mudando de sinal, Nehari, aplicação fibração, regularidade.

Abstract

In this work we consider first the following class of elliptic problems

$$(P_1) \qquad \begin{cases} -\Delta_A u + u = a_\lambda(x)|u|^{q-2}u + b_\mu(x)|u|^{p-2}u, \text{ em } \mathbb{R}^N \\ u \in H^1_A(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

for $x \in \mathbb{R}^N$, $1 < q < 2 < p < 2^* = \frac{2N}{N-2}$, $a_\lambda(x)$ is a weight function that can change signal and $b_\mu(x)$ satisfies some additional conditions. Further, $u \in H^1_A(\mathbb{R}^N)$ and $A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ is a magnetic potential $C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, such as A is asymptotic at a constant as $|x| \to \infty$. We show the existence of at least four solutions to the problem in question. We also seek to establish regularity results for solutions. Exploring the relationship between the Nehari manifold and the fibering map, we discussed the existence of at least two solutions to the problem. We use category theory to guarantee the existence of a third solution and a Bahri Li argument to guarantee the existence of the fourth solution.

In a second moment we study the following problem

$$(P_2) \qquad \begin{cases} -\Delta_A u + u = a(x)|u|^{q-2}u + b(x)|u|^{p-2}u, \text{ in } \mathbb{R}^N \\ u \in H^1_A(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

with $2 < q < p < 2^* = \frac{2N}{N-2}$, $a(x)$ and $b(x)$ are functions that can change signal and satisfy some additional conditions. Also using the Nehari method in combination with other complementary arguments, we discuss the existence of infinite solutions to the problem in question, varying the assumptions about the weight functions.

Keywords: Magnetic potential, sing-changing weight functions, Nehari, Fibering map, regularity.

Lista de Símbolos

Neste trabalho, faremos uso das seguintes notações

- Ω denota um subconjunto de $\mathbb{R}^N$ limitado com fronteira suave;
- $\langle\ ,\ \rangle$ denota o produto de dualidade;
- $B(x,R)$ denota a bola aberta centrada em x e com raio R;
- $p^* = \begin{cases} \frac{pN}{N-p}, \text{ se } N \geq p \\ \infty, \text{ se } 1 \leq N \leq p \end{cases}$ denota o expoente crítico de Sobolev;
- X^* denota o espaço dual do espaço de Banach X;
- $u_n \to u$ denota a convergência forte (em norma), quando $n \to \infty$;
- $u_n \rightharpoonup u$ denota a convergência fraca, quando $n \to \infty$;
- q.t.p. denota quase todo ponto;
- $C', C, C_1, C_2, ..$ denotam constantes positivas;
- $o_n(1)$ será usado para denotar uma quantidade que tende a zero quando $n \to \infty$.
- dim denota a dimensão de um espaço;
- $codim$ denota a codimensão de um espaço;
- $\int_\Omega f$ denota $\int_\Omega f(x)dx$;
- $(PS)_c$ denota a condição de Palais-Smale no nível c;
- $|\Omega|$ denota medida do conjunto Ω;
- $\nabla u := \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right)$;

- $\Delta u := \sum\limits_{i=1}^{i=N} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$;
- $\nabla_A u := (D_1 u, D_2 u, ..., D_N u)$ e $D_j := -i\partial_j - A_j(x)$, com $j = 1, 2, ..., N$, e $A(x) = (A_1(x), ..., A_N(x))$, (faremos as considerações referente à esta notação em um capítulo específico);
- $U \hookrightarrow \Omega$: denota que $U \subset\subset \Omega$;
- $C^k(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; u$ é continuamente k vezes diferenciável$\}$;
- $L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; u$ é mensurável e $\|u\|_p = (\int_\Omega |u(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$;
- $\|u\|_p = \left[\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx \right]^{1/p}$ denota a norma do espaço $L^p(\mathbb{R}^N)$;
- $L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; u$ é mensurável com $\|u\|_{L^\infty} < \infty\}$;
- $W^{k,p}(\Omega)$ é o espaço de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que para cada multi-índice α com $|\alpha| \leq k$, $D^\alpha u$ existe no sentido fraco e pertence a $L^p(\Omega)$;
- $W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \exists g \in L^p(\Omega)$ tal que $\int_\Omega u D^\alpha u = \int_\Omega g\phi, \ \forall \phi \in C_c^1(\Omega)\}$;
- $W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$, Munido da norma $||u|| = ||u||_{H_0^1(\Omega)} = (\int_\Omega |\nabla u|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$, denota o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^1(\Omega)$;
- $H_A^1(\Omega)$, munido da norma $||u||_A = ||u||_{H_A^1(\Omega)} = (\int_\Omega |\nabla_A u|^2 + u^2 dx)^{\frac{1}{2}}$, denota o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H_A^1(\Omega)$;
- $\|u\|_A = \left[\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla_A u|^2 + u^2) dx \right]^{1/2}$ denota a norma do espaço $H_A^1(\mathbb{R}^N)$.

Sumário

Capítulo

1

Introdução

Neste trabalho estamos interessados em estudar a existência, multiplicidade de soluções para duas classes de problemas elípticos. Começaremos abordando o seguinte problema elíptico côncavo-convexo

$$(P_1) \qquad \begin{cases} -\Delta_A u + u = a_\lambda(x)|u|^{q-2}u + b_\mu(x)|u|^{p-2}u \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1_A(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

onde $N \geq 3$ e $-\Delta_A = (-i\nabla + A)^2$. Ainda, $1 < q < 2 < p < 2^* = \frac{2N}{N-2}$, $a_\lambda(x)$ é uma família de funções que podem mudar de sinal, $b_\mu(x)$ é contínua e satisfaz algumas condições adicionais, $u \in H^1_A(\mathbb{R}^N)$ (tal espaço definiremos mais tarde), $\lambda > 0$ e $\mu > 0$ são parâmetros reais, $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ e $A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é um potencial magnético em $C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, tal que $A \to d$ quando $|x| \to \infty$, com d constante. Procuraremos neste caso mostrar a existência de quatro soluções e também provaremos a regularidade das mesmas.

Em um segundo momento estudaremos o seguinte problema

$$(P_2) \qquad \begin{cases} -\Delta_A u + u = a(x)|u|^{q-2}u + b(x)|u|^{p-2}u, \text{ em } \mathbb{R}^N \\ u \in H^1_A(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

com $2 < q < p < 2^* = \frac{2N}{N-2}$, $a(x)$ e $b(x)$ são funções que podem mudar de sinal e satisfazem algumas condições adicionais. Discutiremos a existência de infinitas soluções para o problema em questão, variando as hipóteses sobre as funções peso.

Faremos uso do operador magnético no qual trabalhamos com o Laplaciano Magnético no lugar do Laplaciano usual. Na física quântica não relativística, o Hamiltoniano associado a uma partícula carregada num campo eletromagnético é dado por $(i\nabla - A)^2 + V$, onde $A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é o potencial magnético e $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é o potencial elétrico.

Sua importância na física foi discutida em Alves e Figueiredo [5] e também em Arioli e Szulkin[9].

O problema (P_1) com $A = 0$ possui uma vasta literatura. Começamos citando Ambrosetti, Brezis e Cerami [7], onde é considerado o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = \lambda u^{q-1} + u^{p-1} \text{ em } \Omega, \\ u > 0 \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um domínio regular limitado de $\mathbb{R}^N$ $(N > 3)$, com fronteira suave e $1 < q < 2 < p \leq 2^*$. Combinando o método de sub e super-soluções com o método variacional, os autores provaram a existência de um certo $\lambda_0 > 0$ tal que existem duas soluções quando $\lambda \in (0, \lambda_0)$, uma solução se $\lambda = \lambda_0$ e nenhuma solução caso $\lambda > \lambda_0$.

O problema côncavo-convexo do tipo

$$\begin{cases} -\Delta u + u = \lambda f(x) u^{q-1} + u^{p-1} \text{ em } \Omega, \\ u > 0 \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases}$$

com $f \in C(\overline{\Omega})$ e mudando de sinal e $1 < q < 2 < p \leq 2^*$, foi estudado por Wu em [55]. Ele prova que o problema tem pelo menos duas soluções positivas para valores de λ suficientemente pequeno.

O problema a seguir foi estudado por de Paiva [26]

$$\begin{cases} -\Delta u = a(x) u^p + \lambda b(x) u^q, x \in \Omega, \\ u(x) = 0, x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

com $0 < p < 1 < q \leq 2^* - 1$, a uma função que pode mudar de sinal e $b \geq 0$. Ele prova a existência de um certo $\lambda^* \in (0, \infty)$ tal que o problema acima tem uma solução não negativa sempre que $0 < \lambda < \lambda^*$ e nenhuma solução quando $\lambda > \lambda^*$.

A partir deste, muitos estudos foram dedicados à análise de existência e multiplicidade de problemas elípticos côncavo-convexo em domínios limitados, como podemos citar Brown [19]; Brown e Wu[17]; Brown e Zhang [18]; Hsu [38]; Hsu e Lin [36] e referências contidas nestes artigos.

Hsu e Lin [35] consideram a seguinte equação

$$\begin{cases} -\Delta u + u = a(z)u^{p-1} + \lambda h(z)u^{q-1} \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \ \in \ H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

para $N \geq 3$, $1 \leq q < 2 < p < 2^*$, $\lambda > 0$, a é contínua e positiva e h é positiva em um conjunto de medida positiva. Os autores estudam a existência e multiplicidade de soluções para esta equação. No caso em que $q = \lambda = 1$ e $a(z) = 1$ para todo $z \in \mathbb{R}^N$, supondo h pequena em alguma norma, com decaimento exponencial e não negativa Zhu [56] e Hsu e Wang [37] mostraram que a equação acima tem pelo menos duas soluções positivas em um domínio exterior a uma faixa de $\mathbb{R}^N$.

Além destes podemos citar Chen [22], Huang, Wu e Wu [39], que trabalharam casos semelhantes em $\mathbb{R}^N$.

Wu em [53], trata do problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f_\lambda(x)u^{q-1} + g_\mu u^{p-1} \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \geq 0 \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \ \in \ H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

com $1 < q < 2 < p \leq 2^*$, $g_\mu \geq 0$ ou f_λ podendo mudar de sinal, dentre outras hipóteses adicionais. Ele busca mostrar a existência de pelo menos quatro soluções para o problema quando tomados valores de λ e μ suficientemente pequenos. Tal resultado procuramos estender, investigando se seria possível obter consequências semelhantes ao substituirmos o laplaciano magnético no lugar do Laplaciano usual.

Ainda buscando contextualizar os problemas que tratamos nesta tese, falaremos agora um pouco do que tem sido feito com respeito à problemas do tipo convexo com o Laplaciano usual. A começar pelo trabalho de Alama e Tarantello [4] que consideram o problema

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u = W(x)f(u), x \in \Omega \\ u(x) = 0, \ \ x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Neste caso W é uma função que pode mudar de sinal e f satisfaz $\lim_{|u|\to\infty} f(u)/|u|^{p-2}u = a > 0$ para algum $2 < p \leq 2^*(2 < p < \infty$ se $N = 1$ ou $2)$. Eles tratam da existência de soluções positivas. No caso em que f é uma função ímpar, mostram a existência de infinitas soluções, que inclusive podem até ser soluções que mudam de sinal.

Em [13], Berestycki et al. estudam a existência e a não existência de soluções para a seguinte classe de problemas

$$\begin{cases} -\Delta u + m(x)u = a(x)u^p, x \in \Omega, \\ Bu(x) = 0, x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Neste caso, $m(x)$ pode mudar de sinal, $1 < p < 2^* - 1$ e $Bu = u$, $Bu = \partial_\nu u$ ou $Bu = \partial_\nu u + \alpha(x)u, \alpha > 0$.

Outros trabalhos que também trataram do caso convexo em domínio limitado com o Laplaciano usual, podem ser vistos em [3, 17, 18, 41, 54].

Já em $\mathbb{R}^N$, Miyagaki [46] estuda a existência de soluções não triviais para a seguinte classe de problemas elípticos

$$-\Delta u + a(x)u = \lambda|u|^{q-1}u + |u|^{p-1}u, \ x \ \in \ \mathbb{R}^N,$$

onde $1 < p < q \leq 2^* - 1 = \frac{N+2}{N-2}$, $\lambda > 0$ é uma constante e $a(x) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo algumas condições adicionais.

Jalilian e Szulkin [40] trabalham uma equação do tipo

$$\begin{cases} -\Delta u + u = a(x)|u|^{p-2}u + b(x)|u|^{q-2}u, \ x \ \in \ \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

com $2 < p < q < 2^* = \frac{2N}{N-2}$, em que $a(x)$ ou $b(x)$ são funções que podem mudar de sinal. Eles investigam a existência de infinitas soluções. Este foi o segundo problema que procuramos estender.

Apresentaremos, nesse ponto, os principais trabalhos próximos ao que está sendo estudado nesta tese, que utilizam o laplaciano magnético, de modo a contextualizar e evidenciar a importância do estudo que desenvolvemos.

Os primeiros resultados em equações de Schrödinger não lineares, com $A \neq 0$ podem ser atribuídos à Esteban e Lions [29] em que é estudada a existência de soluções estacionárias para equações do tipo

$$-\Delta_A + Vu = |u|^{p-2}u, u \neq 0, u \in L^2(\mathbb{R}^N),$$

$p \in (2, \infty)$, utilizando métodos de minimização para o caso $V = 1$, com campo magnético constante e também para o caso geral.

Em [43], Kurata mostrou que a equação

$$\left(\frac{h}{i}\nabla - A(x)\right)^2 u + V(x)u - f(|u|^2)u = 0, x \in \mathbb{R}^N$$

com certas suposições sobre o campo magnético A, bem como para o potencial V e f, possui pelo menos uma solução que se concentra próximo do conjunto de mínimos globais de V, quando $h \to 0$.

Ainda, Chabrowski e Szulkin [21] trabalharam com este operador no caso crítico e com o potencial elétrico V podendo mudar de sinal. Já Cingolani, Jeanjean e Secchi [23] consideram a existência de soluções mult-peak no caso subcrítico.

Um problema do tipo

$$-\Delta_A u = \mu|u|^{q-2}u + |u|^{2^*-2}u, u \neq 0, x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N,$$

$\mu > 0$ e $2 \leq q < 2^*$, é tratado por Alves e Figueiredo [5] em que se relaciona o número de soluções com a topologia de Ω.

Um problema usando o Laplaciano magnético foi estudado por Alves, Figueiredo e Furtado [6]

$$\left(-i\nabla - A\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right)^2 u + u = f(|u|^2)u, x \in \Omega_\lambda,$$

em que o conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, $\lambda > 0$ é um parâmetro real, A é um campo magnético regular e f é uma função superlinear com crescimento subcrítico. Para valores de λ suficientemente grande os autores mostram a existência e multiplicidade de soluções relacionando o número de soluções com a topologia de Ω,

Não encontramos na literatura trabalhos que tratassem do caso A não nulo com função peso que muda de sinal nem no caso côncavo-convexo, nem no caso convexo. Desta forma, foi necessário construir argumentos próprios para alcançar os resultados planejados. Além disso, pode-se observar que, com esse operador, estamos trabalhando com os números complexos, assim, os resultados clássicos de regularidade, por exemplo, não se aplicam diretamente. Foi necessário fazer uma combinação de resultados para poder usar a teoria da regularidade.

No nosso caso $A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é um potencial magnético $C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$. Ainda, no primeiro problema temos a hipótese adicional de que A é assintótico a uma constante quando $|x| \to \infty$.

Utilizaremos o método que foi introduzido por Nehari, em 1960, que se tornou muito útil na teoria de pontos críticos e que atualmente recebe o nome de método da variedade de Nehari. A idéia original de Nehari consiste em estudar um problema de valor de fronteira para certas equações diferenciais ordinárias não lineares de segunda ordem em um intervalo aberto (a, b) e mostrar que a equação possui uma solução não trivial que pode ser obtida através de um problema de minimização com vínculo. Em geral o conjunto que define a variedade de Nehari não é de fato uma variedade, como pode ser visto em [33] e [17], mas em ambos os problemas trabalhados conseguimos mostrar que a variedade definida é de fato uma variedade. O método da aplicação fibração introduzido por Drabek e Pohozaev [28] e discutida por Brown e Zhang [18], relaciona o funcional com uma função real. As informações sobre esta função nos levam à uma demonstração simples do resultado que buscamos.

1.1 Um pouco do problema (P_1)

Em sequência enunciaremos o primeiro resultado que buscamos mostrar. Para tratar do primeiro problema, trabalharemos com as hipóteses que enunciaremos a seguir.

Vamos assumir

$$a_\lambda(x) = \lambda a_+(x) + a_-(x)$$

onde $a_\pm = \pm \max\{\pm a(x), 0\} \neq 0$.

(A) $a(x) \in L^{q'}(\mathbb{R}^N)$, $q' = \frac{p}{p-q}$ e existe $\hat{c} > 0$ e $r_{a_-} > 0$, tais que

$$a_-(x) > -\hat{c}\exp(-r_{a_-}|x|) \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Ainda, assumiremos que $b_\mu(x) = b_1(x) + \mu b_2(x)$, onde

(B_1) $b_1(x) > 0$ é contínua em $\mathbb{R}^N$, com $b_1(x) \to 1$ quando $|x| \to \infty$ e existe $r_{b_1} > 0$, tal que

$$1 \geq b_1(x) \geq 1 - c_0 \exp(-r_{b_1}|x|) \text{ para algum } \quad c_0 < 1 \text{ e para todo } \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

(B_2) $b_2(x) > 0$ é contínua em $\mathbb{R}^N$, $b_2(x) \to 0$ quando $|x| \to \infty$ e existe $r_{b_2} > 0$, com $r_{b_2} < \min\{r_{a_-}, r_{b_1}, q\}$ tal que

$$b_2(x) \geq d_0 \exp(-r_{b_2}|x|) \text{ para algum } \quad d_0 < 1 \text{ e para todo } \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Hipóteses similares foram usadas em [53].

Consideremos

$$\Upsilon_0 = (2-q)^{2-q} \left(\frac{p-2}{||a_+||_{q'}}\right)^{p-2} \left(\frac{S_p}{p-q}\right)^{p-q}, \quad \text{onde}$$

$$S_p = \inf_{u \in H^1_A(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})} \frac{(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_A u|^2 + u^2 dx)^{\frac{1}{2}}}{(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx)^{\frac{2}{p}}} > 0. \tag{1.1}$$

Teorema 1.1. *Assumindo as hipóteses (A), (B_1) e (B_2), e tomando Υ_0 como definido acima, temos que para cada $\lambda > 0$ e $\mu > 0$ com*

$$\lambda^{p-2}(1 + \mu||b_2||_\infty)^{2-q} < \left(\frac{q}{2}\right)^{p-2} \Upsilon_0, \tag{1.2}$$

o problema (P_1) tem pelo menos duas soluções $u^+_{\lambda,\mu}$ e $u^-_{\lambda,\mu}$ com $J_{\lambda,\mu}(u^+_{\lambda,\mu}) < 0 < J_{\lambda,\mu}(u^-_{\lambda,\mu})$.

Podemos observar que as solução de (P_1) variam de acordo com os parâmetros μ e λ. Dedicaremos uma seção para tratar do comportamento de $u^+_{\lambda,\mu}$ quando $\lambda \to 0$ e veremos o que acontece também quando $\mu \to \infty$.

No Teorema 1.1, a existência é válida para todos os valores de λ e μ que satisfaçam a desigualdade (1.2). Agora, se além disso, fixarmos valores de λ e μ convenientemente pequenos conseguiremos o resultado de multiplicidade, obtendo a existência de pelo menos três soluções como enunciamos no teorema a seguir.

Teorema 1.2. *Suponha que as hipóteses (A), (B_1) e (B_2) sejam satisfeitas, e seja Υ_0 como definido acima, então existem $\lambda_0 > 0$ e $\mu_0 > 0$ com $\lambda_0^{p-2}(1 + \mu_0||b_2||_\infty)^{2-q} < \left(\frac{q}{2}\right)^{p-2} \Upsilon_0$, tais que para todo $\lambda \in (0, \lambda_0)$ e $\mu \in (0, \mu_0)$, o problema (P_1) tem pelo menos três soluções.*

Para o problema em questão, os números λ_0 e μ_0 independem do valor de a_-. Entretanto, considerando algumas hipóteses adicionais e tomando valores de $||a_-||_{q'}$ suficientemente pequenos temos o resultados de mais uma solução. Antes de enunciar este resultado apresentaremos as seguintes hipóteses:

(C_1) $b_1(x) < 1$ em $\mathbb{R}^N$ em um conjunto de medida positiva;

(C_2) $r_{b_1} > 2$.

Teorema 1.3. *Assumindo as hipóteses (A), (B_1), (B_2), (C_1) e (C_2) existem valores positivos de $\tilde{\lambda_0} \leq \lambda_0$, $\tilde{\mu_0} \leq \mu_0$ e ν_0 tal que para $\lambda \in (0, \tilde{\lambda_0})$, $\mu \in (0, \tilde{\mu_0})$ e $||a_-||_{q'} < \nu_0$, o problema (P_1) tem pelo menos quatro soluções.*

Prosseguiremos fazendo uso de Métodos Variacionais para provar os teoremas acima. Além disso, buscaremos mostrar resultados de regularidade que expressamos a seguir.

Teorema 1.4. *Suponha que $u_0 \in H^1_A(\mathbb{R}^N)$ seja uma solução não nula de (P_1) com $\lambda > 0$ e $\mu > 0$. Então temos*
(i) $u_0 \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}) \cap L^\gamma(\mathbb{R}^N)$ para todo $2 \leq \gamma < +\infty$;
(ii) $|u_0|$ é positiva em $\mathbb{R}^N$.

Teorema 1.5. *Se $u_0 \in H^1_A(\mathbb{R}^N)$ é solução de (P_1), então $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $\lim_{|x|\to\infty} u_0(x) = 0$.*

No Capítulo 2 vamos trabalhar no sentido de provar estes resultados que acabamos de enunciar. Começaremos definindo o funcional J_λ associado ao problema (P_1), bem como a variedade de Nehari e veremos como eles se relacionam. Mostraremos como o funcional é melhor comportado sobre a variedade de Nehari, mas não é limitado em geral sobre seu domínio todo $H^1_A(\mathbb{R}^N)$. Trabalharemos a relação entre a variedade de Nehari e o comportamento das funções na forma $F_u : t \to J_{\lambda,\mu}(tu)$; $(t > 0)$. Faremos uma adaptação ao nosso problema para conseguirmos aplicar a Teoria de Regularidade [32], de modo a provar que as soluções fracas são, de fato, soluções clássicas do problema em questão.

Usaremos a relação entre a variedade de Nehari e a aplicação fibração, para discutir a existência de soluções não triviais para esta classe de problemas elípticos de Equações Diferenciais Parciais. Trataremos de analisar o comportamento desta solução nos casos em que $\lambda \to 0$ e quando $\mu \to \infty$. Faremos um estudo para estimar os níveis de energia dos ínfimos em diferentes partes da variedade de Nehari, o que vai nos possibilitar encontrar duas soluções distintas para o problema. Faremos ainda um estudo da teoria de categoria para investigar a existência de uma terceira solução. Por fim, trabalharemos sob mais algumas hipóteses para estimar diferentes níveis de energia e usaremos o argumento min-max de Bahri-Li a fim de mostrar que para valores bem pequenos de $||a_-||_{q'}$, o problema possui pelo menos quatro soluções distintas.

1.2 Um pouco do problema (P_2)

Falaremos um pouco agora do segundo problema que trataremos. Como já foi dito, não encontramos na literatura trabalhos com o Laplaciano magnético que tratassem do caso convexo com funções peso podendo mudar de sinal.

Nesse caso, precisaremos de enumerar algumas hipóteses dentre as quais as funções a, b poderão assumir nos teoremas que seguem.

(D_1) $a \in L^r$ e $b \in L^s$, onde $1 < \frac{r}{r-1} < \frac{2^*}{p}$ e $1 < \frac{s}{s-1} < \frac{2^*}{q}$;

(D_2) $a, b \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\limsup_{|x|\to\infty} a(x) \leq 0$ e $\limsup_{|x|\to\infty} b(x) \leq 0$;

(D_3) $a, b \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, e a e b são funções 1-periódicas em x_1, x_2,...,x_n;

(D_4) $b \geq 0$ e o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^N; b > 0\}$ tem interior não vazio;

(D_5) $a \leq 0$ e o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^N; b > 0\}$ tem interior não vazio.

As hipóteses acima são semelhantes as do trabalho de Jalilian e Szulkin [40].

Algumas definições específicas deixaremos para tratar com mais detalhes no capítulo próprio.

Teorema 1.6. *Suponha que (D_1) ou (D_2) e (D_4) ou (D_5) sejam satisfeitas. Então o problema (P_2) tem infinitas soluções.*

Enunciaremos agora nosso segundo resultado.

Teorema 1.7. *Suponha (D_3) e também (D_4) ou (D_5) sejam satisfeitas. Então o problema (P_2) tem infinitas soluções geometricamente distintas.*

Também neste problema usaremos a relação entre a variedade de Nehari e a aplicação fibração, para discutir a existência de soluções não triviais para esta classe de problemas elípticos. Mostraremos que a variedade de Nehari é fechada e de classe C^2 sob cada uma das hipóteses dos teoremas acima.

Para obter o resultado do Teorema 1.6, mostraremos que a condição PS é satisfeita na variedade e usaremos um argumento de gênero de Krasnoselskii, argumento este que pode ser visto também em [40].

Já sob as hipóteses Teorema 1.7, não vale a condição PS, daí precisaremos dispor de um argumento do tipo deformação baseado em uma ideia de Szulkin e Weth [49] para mostrar a existência de infinitas soluções geometricamente distintas.

O espaco $H^1_A(\mathbb{R}^N)$

Definiremos agora o espaço $H^1_A(\mathbb{R}^N)$ e faremos algumas considerações importantes.

De acordo com Tang [50], denotaremos por $H_A(\mathbb{R}^N)$ o espaço de Hilbert obtido pelo fecho de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ com o seguinte produto interno

$$\langle u, v\rangle_A = Re\left(\int_{\mathbb{R}} \nabla_A u\overline{\nabla_A v} + u\overline{v}dx\right),$$

onde $\nabla_A u := (D_1 u, D_2 u, ..., D_N u)$ e $D_j := \partial_j + iA_j(x)$, com $j = 1, 2, ..., N$, e $A(x) = (A_1(x), ..., A_N(x))$. Assim, $\nabla_A = (\nabla + iA)$ e $-\Delta_A = (-i\nabla + A)^2$. A norma induzida por este produto é dada por

$$||u||^2_A := \left(\int_{\mathbb{R}} |\nabla_A u|^2 + |u|^2 dx\right).$$

No nosso caso $A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é um potencial magnético linear $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$.

Usaremos mais tarde que

$$-\Delta_A\psi = (-i\nabla + A)^2\psi = (-i\nabla + A)(-i\nabla + A)\psi = (-\Delta - i\nabla A - iA\nabla + A^2)\psi;$$

onde

$$i\nabla(A\psi) = iA\nabla\psi + i\psi\nabla A$$

e

$$\nabla A = \ divA.$$

Desse modo

$$(-i\nabla + A)^2\psi = -\Delta\psi - 2iA\nabla\psi + |A|^2\psi - i\psi\ divA \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N.$$

Pode ser visto em [50, Observação 2.1] que os espaços $H^1_A(\mathbb{R}^N)$ e $H^1(\mathbb{R}^N)$ não são comparáveis. Mais precisamente, em geral

$$H_A^1(\mathbb{R}^N) \not\subset H^1(\mathbb{R}^N)$$

e

$$H^1(\mathbb{R}^N) \not\subset H_A^1(\mathbb{R}^N).$$

Entretanto, Arioli e Szulkin[9] provam que em domínio limitado tais espaços são equivalentes.

No nosso caso, como estamos trabalhando com $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$, temos que os resultados clássicos para espaço de Hilbert $H^1(\mathbb{R}^N)$ não se aplicam diretamente para $H_A^1(\mathbb{R}^N)$. Para contornar algumas questões, usamos um resultado que foi provado por Esteban e Lions [29, Seção II] que garante que para todo $u \in H_A^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ vale a desigualdade diamagnética, a saber

$$|\nabla |u|(x)| = \left| Re\left(\nabla u \frac{\overline{u}}{|u|}\right)\right| = \left| Re\left((\nabla u - iAu)\frac{\overline{u}}{|u|}\right)\right| \leq |\nabla_A u(x)|.$$

Assim, se $u \in H_A^1(\mathbb{R}^N)$ temos que $|u|$ pertence ao espaço do Sobolev usual $H^1(\mathbb{R}^N)$. Deste modo, obtemos a imersão contínua

$$H_A^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}),$$

para todo $2 \leq q \leq 2^*$, $(N \geq 3)$ e localmente compacta [52, Teorema 1.8] para $1 \leq q < 2^*$.

Neste espaço que acabamos de definir, trataremos agora de obter os resultados enunciados para os problemas em questão.

Capítulo

2

O problema (P_1)

Neste capítulo trabalharemos com a seguinte classe de problemas elípticos do tipo côncavo-convexo

$$(P_1) \qquad \begin{cases} -\Delta_A u + u = a_\lambda(x)|u|^{q-2}u + b_\mu(x)|u|^{p-2}u \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1_A(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

onde $N \geq 3$ e $-\Delta_A = (-i\nabla + A)^2$. Ainda, $1 < q < 2 < p < 2^* = \frac{2N}{N-2}$, $a_\lambda(x)$ é uma família de funções peso que podem mudar de sinal, $b_\mu(x)$ é contínua e satisfaz algumas condições adicionais, $u \in H^1_A(\mathbb{R}^N)$, $\lambda > 0$ e $\mu > 0$ são parâmetros reais, $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ e $A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é um potencial magnético em $C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, tal que A é assintótico a uma constante quando $|x| \to \infty$. Procuraremos neste caso mostrar a existência de quatro soluções e também provaremos a regularidade das mesmas.

Iniciaremos o capítulo definindo o funcional J_λ associado ao problema (P_1), bem como a variedade de Nehari e veremos como eles se relacionam. Mostraremos como o funcional é melhor comportado sobre a variedade, mas em geral não é limitado inferiormente sobre seu domínio todo $H^1_A(\mathbb{R}^N)$. Trabalharemos a relação entre a variedade de Nehari e o comportamento das funções na forma $F_u : t \to J_{\lambda,\mu}(tu)$; $(t > 0)$. Faremos uma adaptação ao nosso problema para conseguirmos aplicar a Teoria de Regularidade, vide [32], de modo a provar que as soluções fracas são, de fato, soluções clássicas do problema. Por fim, trabalharemos no sentido de provar a existência e multiplicidade de soluções.

2.1 Variedade de Nehari

Definiremos agora a variedade de Nehari e a aplicação fibração e verificaremos suas propriedades a partir do funcional J_λ associado à (P_1). Mais tarde, usaremos essas informações para provar de maneira bem simples a existência de uma solução de (P_1), para valores convenientes de λ e μ.

Observe que

$$J_{\lambda,\mu}(u) = \frac{1}{2}||u||_A^2 - \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda(x)|u|^q dx - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} b_\mu(x)|u|^p dx, \tag{2.1}$$

é o correspondente funcional do problema (P_1) e é de classe C^1 em $H_A^1(\mathbb{R}^N)$ como pode ser visto em [47].

Para obter resultados de existência neste caso, introduzimos a variedade de Nehari

$$M_{\lambda,\mu} = \{u \in H_A^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} : \langle J'_{\lambda,\mu}(u), u\rangle = 0\}$$

onde $\langle\ ,\ \rangle$ denota a dualidade usual entre $H_A^1(\mathbb{R}^N)^*$ e $H_A^1(\mathbb{R}^N)$, em que $H_A^1(\mathbb{R}^N)^*$ é o espaço dual ao espaço $H_A^1(\mathbb{R}^N)$ correspondente.

Embora $M_{\lambda,\mu}$ seja chamada de variedade de Nehari, este conjunto pode não ser uma variedade de fato e pode ser visto em [33] e [17], o que não ocorre no nosso caso. $M_{\lambda,\mu}$ é de fato uma variedade, e para mostrar isso, provaremos que $M_{\lambda,\mu}$ é imagem inversa do zero por uma aplicação $\psi \in C^1$ e que zero é um valor regular de ψ.

Lembramos que $0 \in \mathbb{R}$ é um valor regular da função diferenciável $\psi : U \subset E \to \mathbb{R}$ se, para todo $u \in U$ tal que $\psi(u) = 0$, tivermos $\psi'(u)$ uma aplicação linear sobrejetora, ou o mesmo que, $\psi'(u) \neq 0$. Satisfeita essa condição, teremos que $\psi^{-1}(0)$ é uma variedade em E. Ainda, se tivermos $\psi \in C^k$ então a variedade $\psi^{-1}(0)$ é de classe C^k.

Proposição 2.1. *A variedade de Nehari $M_{\lambda,\mu}$ é não vazia e é uma subvariedade de $H_A^1(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração. Defina $\psi : H_A^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\psi(u) = \langle J'_{\lambda,\mu}(u), u\rangle.$$

Assim,

$$\psi(u) = ||u||_A^2 - \int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda(x)|u|^q dx - \int_{\mathbb{R}^N} b_\mu(x)|u|^p dx.$$

Temos que $\psi \in C^1(\Omega)$, além disso,

$$\psi'(u)v = 2\int (\nabla_A u \nabla_A v + uv)dx - q\int a_\lambda(x)|u|^{q-1}v dx - p\int b_\mu(x)|u|^{p-1}v dx.$$

Seja $v \neq 0; v \in H_A^1(\mathbb{R}^N)$ e considere a função

$$t \mapsto \psi(tv); t \in \mathbb{R} \ \text{ e } \ t > 0.$$

Desse modo,

$$\psi(tv) \;\; = \;\; t^2||v||_A^2 - t^q \int a_\lambda(x)|v|^q - t^p \int b_\mu(x)|v|^p dx. \tag{2.2}$$

Afirmação (i): $M_{\lambda,\mu} \neq \emptyset$.

De fato, tome algum $u \in H_A^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $\int a_\lambda(x)|v|^q < 0$. Como $\int b_\mu(x)|v|^p dx > 0$ e $1 < q < 2 < p$, segue por (2.3) que

$$\lim_{t\to\infty} \psi(tv) = -\infty \quad \text{e}$$

Ainda, colocando t^q em evidência em (2.3) temos

$$\psi(tv) \;\; = \;\; t^q \left(t^{2-q}||v||_A^2 - \int a_\lambda(x)|v|^q - t^{p-q} \int b_\mu(x)|v|^p dx \right), \tag{2.3}$$

de onde podemos concluir que

$$\lim_{t\to 0} \psi(tv) = 0,$$

por valores maiores que zero. Com isso, para algum $\bar{t} > 0$ a função $\psi(\bar{t}v)$ é igual a zero, ou seja, $\bar{t}v \in M_{\lambda,\mu}$. Dessa forma mostramos que $M_{\lambda,\mu} \neq \emptyset$, o que conclui a afirmação.

Vamos mostrar agora que zero é valor regular de ψ, o que nesse caso é equivalente a mostrar que ψ não possui ponto crítico em $M_{\lambda,\mu}$. Observe que

$$\psi'(u)u = 2||u||_A^2 - q\int a_\lambda(x)|u|^q dx - p\int b_\mu(x)|u|^p dx. \tag{2.4}$$

Para toda $u \in M_{\lambda,\mu}$, temos

$$\psi(u) = 0 \Rightarrow ||u||_A^2 - \int_{\mathbb{R}^N} b_\mu(x)|u|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda(x)|u|^q dx.$$

Substituindo em (2.4), segue que

$$\psi'(u)u = (2-q)||u||_A^2 - (q-p)\int_{\mathbb{R}^N} b_\mu(x)|u|^p dx > 0, \tag{2.5}$$

já que $1 < q < 2 < p$ e $\int b_\mu(x)|u|^p dx > 0$. Daí, obtemos $\psi'(u) \neq 0$ para todo $u \neq 0$ em $M_{\lambda,\mu}$. Considere $S = H_A^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}$. Por (2.5) vemos que 0 é o único ponto crítico em $\psi^{-1}(0)$ e $0 \notin S$. Logo, 0 é um valor regular de $\psi|_S$. Pelo Teorema 4.1, segue que $\psi^{-1}(0)$ é uma subvariedade de S. Portanto, $M_{\lambda,\mu}$ é uma C^1 subvariedade de $H_A^1(\mathbb{R}^N)$. $\square$

Podemos perceber que $M_{\lambda,\mu} \subset H_A^1(\mathbb{R}^N)$ e que $M_{\lambda,\mu}$ é um conjunto mais restrito que $H_A^1(\mathbb{R}^N)$, deste modo iremos estudar nosso funcional $J_{\lambda,\mu}$ restrito a $M_{\lambda,\mu}$.

Note que em $M_{\lambda,\mu}$ temos

$$||u||_A^2 - \int_{\mathbb{R}^N} b_\mu(x)|u|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda(x)|u|^q dx. \tag{2.6}$$

Substituindo em (2.1) ficamos com

$$\begin{aligned}
J_{\lambda,\mu}(u) &= \frac{1}{2}||u||_A^2 - \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda(x)|u|^q dx - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} b_\mu(x)|u|^p dx \\
&= \frac{1}{2}||u||_A^2 - \frac{1}{q}\left(||u||_A^2 - \int_{\mathbb{R}^N} b_\mu(x)|u|^p dx\right) - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} b_\mu(x)|u|^p dx \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)||u||_A^2 - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\int_{\mathbb{R}^N} b_\mu(x)|u|^p dx,
\end{aligned}$$

ou ainda

$$J_{\lambda,\mu}(u) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)||u||_A^2 - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda(x)|u|^q dx.$$

2.2 Aplicação Fibração

Apresentaremos agora as funções da forma $F_u : t \to J_{\lambda,\mu}(tu)$; $(t > 0)$, analisaremos seu comportamento e mostraremos sua relação com a variedade de Nehari.

Observe que a aplicação fibração do modo como foi definida depende de u, λ e μ, de modo que notação adequada seria $F_{u,\lambda,\mu}$, mas a fim de simplificar a notação, trabalharemos apenas com F_u.

Se $u \in H^1_A(\mathbb{R}^N)$, temos

$$F_u(t) = \frac{t^2}{2}||u||_A^2 - \frac{t^q}{q}\int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda(x)|u|^q dx - \frac{t^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N} b_\mu(x)|u|^p dx, \tag{2.7}$$

$$F'_u(t) = t||u||_A^2 - t^{q-1}\int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda(x)|u|^q dx - t^{p-1}\int_{\mathbb{R}^N} b_\mu(x)|u|^p dx, \tag{2.8}$$

$$F''_u(t) = ||u||_A^2 - (q-1)t^{q-2}\int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda(x)|u|^q dx - (p-1)t^{p-2}\int_{\mathbb{R}^N} b_\mu(x)|u|^p dx. \tag{2.9}$$

A proposição abaixo relaciona a variedade de Nehari e a Aplicação Fibração.

Proposição 2.2. *Seja F_u a aplicação definida acima e $u \in H^1_A(\mathbb{R}^N)$, então:*

(i) $u \in M_{\lambda,\mu}$ se, e somente se, $F'_u(1) = 0$;

(ii) mais geralmente $tu \in M_{\lambda,\mu}$ se, e somente se, $F'_u(t) = 0$.

Demonstração. (i) Este item é bem direto, basta observar que

$$F'_u(1) = ||u||_A^2 - \int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda(x)|u|^q dx - \int_{\mathbb{R}^N} b_\mu(x)|u|^p dx = J'_{\lambda,\mu}(u)u.$$

(ii) $(\Leftarrow)$ $0 = F'_u(t) = t||u||_A^2 - t^{q-1}\int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda(x)|u|^q dx - t^{p-1}\int_{\mathbb{R}^N} b_\mu(x)|u|^p dx.$

Multiplicando esta equação por t,

$$0 = t^2||u||_A^2 - t^q\int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda(x)|u|^q dx - t^p\int_{\mathbb{R}^N} b_\mu(x)|u|^p dx = J'_{\lambda,\mu}(tu)tu.$$

$(\Rightarrow)$ Como $tu \in M_{\lambda,\mu}$, temos

$$0 = J'_{\lambda,\mu}(tu)tu = t^2||u||_A^2 - t^q\int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda(x)|u|^q dx - t^p\int_{\mathbb{R}^N} b_\mu(x)|u|^p dx,$$

dividindo esta equação por $t > 0$,

$$0 = t||u||_A^2 - t^{q-1}\int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda(x)|u|^q dx - t^{p-1}\int_{\mathbb{R}^N} b_\mu(x)|u|^p dx = F'_u(t).$$

$\square$

A partir da proposição anterior podemos concluir que os elementos em $M_{\lambda,\mu}$, correspondem aos pontos críticos da Aplicação Fibração. Assim é natural subdividir $M_{\lambda,\mu}$ em subconjuntos, onde para cada $u \in H^1_A(\mathbb{R}^N)$ fixada, o número 1 é um ponto crítico de F_u. Sendo assim, como $F_u(t) \in C^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, podemos dividir a variedade de Nehari em três partes

$$M^+_{\lambda,\mu} = \{u \in M_{\lambda,\mu}; F''_{\lambda,\mu}(1) > 0\};$$

$$M^-_{\lambda,\mu} = \{u \in M_{\lambda,\mu}; F''_{\lambda,\mu}(1) < 0\};$$

$$M^0_{\lambda,\mu} = \{u \in M_{\lambda,\mu}; F''_{\lambda,\mu}(1) = 0\}.$$

Em seguida, provaremos algumas propriedades da Variedade de Nehari $M_{\lambda,\mu}$. Começaremos com um lema que mostra que um ponto de crítico do funcional restrito à variedade é também um ponto crítico do funcional no espaço todo. Para isso, precisaremos de alguns resultados preliminares.

Lema 2.1. (i) *Para* $u \in M^+_{\lambda,\mu} \cup M^0_{\lambda,\mu}$, *temos* $\int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda |u|^q dx > 0.$
la, já sabemos que ela é positiva. (ii) *Para* $u \in M^-_{\lambda,\mu}$, *temos* $\int_{\mathbb{R}^N} b_\mu |u|^p dx > 0.$

Demonstração. (i) Observe que para $u \in M_{\lambda,\mu}$

$$\begin{aligned} F''_{\lambda,\mu}(1) &= ||u||^2_A - (q-1)\int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda |u|^q dx - (p-1)\int_{\mathbb{R}^N} b_\mu |u|^p dx \\ &= (2-p)||u||^2_A - (q-p)\int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda |u|^q dx. \end{aligned}$$

No caso em que $u \in M^+_{\lambda,\mu} \cup M^0_{\lambda,\mu}$, segue que $F''_{\lambda,\mu}(1) \geq 0$, de onde

$$(2-p)||u||^2_A - (q-p)\int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda |u|^q \geq 0 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda |u|^q dx > 0. \tag{2.10}$$

(ii) Para $u \in M_{\lambda,\mu}$ temos

$$F''_{\lambda,\mu}(1) = (2-q)||u||^2_A - (p-q)\int_{\mathbb{R}^N} b_\mu |u|^p dx.$$

Ainda, se $u \in M^-_{\lambda,\mu}$ então $F''_{\lambda,\mu}(1) < 0$, de onde

$$(2-q)||u||^2_A - (p-q)\int_{\mathbb{R}^N} b_\mu |u|^p dx < 0 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} b_\mu |u|^p dx > 0. \tag{2.11}$$

□

Lema 2.2. *Suponha que* $\lambda > 0$ *e* $\mu > 0$. *Se* u_0 *é um mínimo local para* $J_{\lambda,\mu}$ *em* $M_{\lambda,\mu}$ *com* $u_0 \notin M^0_{\lambda,\mu}$, *então* $J'_{\lambda,\mu}(u_0) = 0$ *em* H_A^{-1}.

Demonstração. Seja u_0 um ponto de máximo ou de mínimo local de $J_{\lambda,\mu}$ em $M_{\lambda,\mu}$. Pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange (ver apêndice, Teorema 4.1), existe $\delta \in \mathbb{R}$ verificando

$$J'_{\lambda,\mu}(u_0) = \delta G'(u_0), \tag{2.12}$$

onde

$$G(u_0) = ||u_0||_A^2 - \int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda |u_0|^q dx - \int_{\mathbb{R}^N} b_\mu |u_0|^p dx = J'_{\lambda,\mu}(u_0)u_0 = 0.$$

Logo,

$$||u_0||_A^2 = \int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda |u_0|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} b_\mu |u_0|^p dx. \tag{2.13}$$

Derivando G temos

$$G'(u_0)h = \lim_{t \to 0} \frac{G(u_0 + th) - G(u_0)}{t}.$$

Tomando $h = u_0$ e usando a Regra de L'Hospital, obtemos

$$G'(u_0)u_0 = 2||u||_A^2 - q \int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda(x)|u|^q dx - p \int_{\mathbb{R}^N} b_\mu(x)|u|^p dx.$$

Substituindo em (2.13)

$$G'(u_0)u_0 = (2-q)||u_0||_A^2 - (p-q) \int_{\mathbb{R}^N} b_\mu |u_0|^p dx = F''_{u_0}(1).$$

Como u_0 não pertence à $M^0(\lambda)$ então $F''_{u_0}(1) \neq 0$. Daí $G'(u_0)u_0 \neq 0$.

Por outro lado $u_0 \in M_{\lambda,\mu}$, daí, por (2.12)

$$0 = J'_{\lambda,\mu}(u_0)u_0 = \delta G'(u_0)u_0,$$

de onde obtemos $\delta = 0$ e assim $J'_{\lambda,\mu}(u_0) = 0$. Portanto, u_0 é ponto crítico de $J_{\lambda,\mu}$ em H_A^{-1}. □

O lema a seguir nos mostra sob quais condições a $M^0_{\lambda,\mu}$ é vazia. Esse fato é essencial para o desenvolvimento desse trabalho, pois sob tais condições estaremos nas hipóteses do lema anterior. Desse modo, essas condições serão impostas nos teoremas principais para que os pontos críticos do funcional encontrados ao restringirmos o funcional à variedade de Nehari, sejam também pontos críticos do funcional sem esta restrição.

Lema 2.3. *Sejam $\mu \geq 0$ e $\lambda > 0$ tais que $\lambda^{p-2}(1+\mu||b_2||_\infty)^{2-q} < \Upsilon_0$. Então $M^0_{\lambda,\mu} = \emptyset$.*

Demonstração. Suponha o contrário, que exista $0 \neq u \in M^0_{\lambda,\mu}$ tal que

$$\lambda^{p-2}(1+\mu||b_2||_\infty)^{2-q} \quad < \quad \Upsilon_0. \tag{2.14}$$

Como $u \in M^0_{\lambda,\mu}$ temos

$$0 = F''_{\lambda,\mu}(1) \quad = \quad (2-p)||u||^2_A - (q-p)\int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda |u|^q dx \tag{2.15}$$
$$= \quad (2-q)||u||^2_A - (p-q)\int_{\mathbb{R}^N} b_\mu |u|^p dx. \tag{2.16}$$

Assim, por (2.15) e pelas desigualdades de Hölder e Sobolev temos

$$\begin{aligned}(p-2)||u||^2_A \quad &= \quad (p-q)\int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda(x)|u|^q dx \leq \lambda(p-q)||a_+||_{q'}||u||^q_p \\ &\leq \quad \lambda(p-q)||a_+||_{q'} S_p^{\frac{-q}{2}}||u||^q_A\end{aligned}$$

com S_p definido como em (1.1).

Segue que

$$||u||^2_A \quad \leq \quad \left(\frac{\lambda(p-q)||a_+||_{q'}}{p-2}\right)^{\frac{2}{2-q}} S_p^{-\frac{q}{2-q}}. \tag{2.17}$$

Usando (2.16) e mais a condição $\mu \geq 0$, podemos concluir que

$$(2-q)||u||^2_A \quad = \quad (p-q)\int_{\mathbb{R}^N} b_\mu(x)|u|^p dx \leq (p-q)(1+\mu||b_2||_\infty) S_p^{\frac{-p}{2}}||u||^p_A,$$

de onde

$$||u||^2_A \quad \geq \quad \left(\frac{2-q}{(1+\mu||b_2||_\infty)(p-q)}\right)^{\frac{2}{p-2}} S_p^{\frac{p}{p-2}}. \tag{2.18}$$

Agora, por (2.17) e (2.18) concluímos que

$$\lambda^{p-2}(1+\mu||b_2||_\infty)^{2-q} \geq \left(\frac{p-2}{||a_+||_{q'}}\right)^{p-2}\left(\frac{S_p}{p-q}\right)^{p-q}(2-q)^{2-q} = \Upsilon_0.$$

O que é impossível já que $\lambda^{p-2}(1+\mu||b_2||_\infty)^{2-q} < \Upsilon_0$. $\square$

Com esse resultado que acabamos de mostrar que se $\mu \geq 0$ e $\lambda > 0$ são tais que $\lambda^{p-2}(1+\mu||b_2||_\infty)^{2-q} < \Upsilon_0$ então

$$M_{\lambda,\mu} = M^+_{\lambda,\mu} \cup M^-_{\lambda,\mu}. \tag{2.19}$$

2.2.1 Definição de $m_{\mu,u}$ e sua relação com $F_u(t)$

Veremos que a natureza essencial da Aplicação Fibração F_u é determinada pelo sinal de $\int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda(x)|u|^q dx$. Para isso, consideremos a função $m_{\mu,u} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por

$$m_{\mu,u}(t) = t^{2-q}||u||^2_A - t^{p-q}\int_{\mathbb{R}^N} b_\mu(x)|u|^p dx. \tag{2.20}$$

Observe que $m_{\mu,u}$ foi construída de modo que

$$t^{-q}F'_u(t) + \int_{\mathbb{R}^N} b_\mu(x)|u|^p dx = m_{\mu,u}(t).$$

Derivando a equação acima, temos

$$-qt^{-q-1}F'_u(t) + t^{-q}F''_u(t) = m'_{\mu,u}(t).$$

Desse modo, se $tu \in M_{\lambda,\mu}$ então $F'_u(t) = 0$, de onde obtemos a seguinte relação

$$m'_{\mu,u}(t) = t^{-q}F''_u(t), \text{ para } tu \in M_{\lambda,\mu}. \tag{2.21}$$

Esta observação tem uma grande importância para este capítulo, pois se conhecermos o sinal de $m'_{\mu,u}$, conheceremos o sinal de $F''_{tu}(t)$, e assim poderemos saber se F_{tu} tem um ponto de mínimo local, máximo local ou de inflexão.

Resumidamente temos

$$\begin{cases} tu \in M^+_{\lambda,\mu} & \text{se } m'_{\mu,u} > 0 \\ tu \in M^-_{\lambda,\mu} & \text{se } m'_{\mu,u} < 0 \end{cases}$$

2.2.2 Análise da $m_{\mu,u}(t)$

Nosso objetivo agora é construir um esboço para $m_{\mu,u}(t)$ a fim de obtermos informações sobre a $F_u(t)$.

Note que, para $t > 0$, $tu \in M_{\lambda,\mu}$ se e somente se

$$m_{\mu,u}(t) = \int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda(x)|u|^q dx. \tag{2.22}$$

De fato, substituindo (2.20) em (2.22), temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda(x)|u|^q dx = t^{2-q}||u||_A^2 - t^{p-q}\int_{\mathbb{R}^N} b_\mu(x)|u|^p dx.$$

Reescrevendo esta equação

$$t^{2-q}||u||_A^2 - \int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda(x)|u|^q dx - t^{p-q}\int_{\mathbb{R}^N} b_\mu(x)|u|^p dx = 0.$$

Multiplicando a equação acima por t^q

$$t^2||u||_A^2 - t^q\int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda(x)|u|^q dx - t^p\int_{\mathbb{R}^N} b_\mu(x)|u|^p dx = 0,$$

ou equivalentemente

$$J'_{\lambda,\mu}(tu)tu = 0.$$

Logo

$$tu \in M_{\lambda,\mu}.$$

Derivando (2.20) temos

$$m'_{\mu,u}(t) = (2-q)t^{1-q}||u||_A^2 - (p-q)t^{p-q-1}\int_{\mathbb{R}^N} b_\mu(x)|u|^p dx. \tag{2.23}$$

Ainda

$$m''_{\mu,u}(t) = (2-q)(1-q)t^{-q}||u||_A^2 - (p-q)(p-q-1)t^{p-q-2}\int_{\mathbb{R}^N} b_\mu(x)|u|^p dx. \tag{2.24}$$

Para construir um esboço de m_u podemos analisar (2.23) e observarmos que como $1 < q < 2 < p < 2^*$, então $m_{\mu,u}(t) \to 0$ por valores maiores que zero quando $t \to 0$. Além disso, $m_{\mu,u}(t) \to -\infty$ quando $t \to \infty$, de onde obtemos o seguinte esboço para $m_{\mu,u}(t)$.

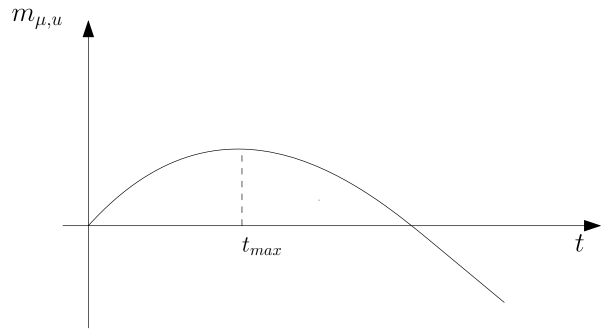

Figura 2.1: Esboço de $m_{\mu,u}$

Observando o gráfico e a relação (2.21), temos $tu \in M^{+}_{\lambda,\mu}$ (respectivamente, $M^{-}_{\lambda,\mu}$) se e só se $m'_{\mu,u}(t) > 0$ (respectivamente, $m'_{\mu,u}(t) < 0$). Daí, se $u \in H^1_A(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$, como $\int_{\mathbb{R}^N} b_\mu(x)|u|^p dx > 0$, $m_{\mu,u}(t)$ tem um único ponto crítico em $t = t_{\max}(u)$, onde

$$t_{\max}(u) = \left(\frac{(2-q)||u||_A^2}{(p-q)\int_{\mathbb{R}^N} b_\mu(x)|u|^p dx} \right)^{\frac{1}{p-2}} > 0. \tag{2.25}$$

A partir disso, temos duas situações a estudar.

(I) $\int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda(x)|u|^q dx \leq 0$.

Neste caso, vemos que se $\int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda(x)|u|^q dx < 0$, vai existir um único valor $t^-(u)$ satisfazendo (2.22), com $t^-(u) > t_{\max}(u)$ e tal que $m'_{\mu,u}(t^-(u)) < 0$. Com isso e pela relação (2.21), temos que para cada $u \in H^1_A(\mathbb{R}^N)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda(x)|u|^q dx < 0$, vai existir único $t^-(u)$ tal que $t^-(u)u \in M^{-}_{\lambda,\mu}$. Obtemos então um esboço para o gráfico da F_u.

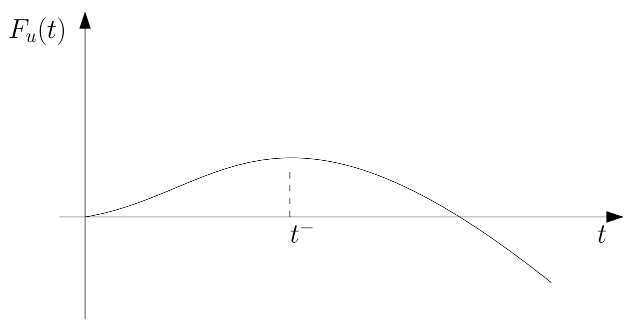

Figura 2.2: Esboço de F_u quando $\int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda(x)|u|^q dx \leq 0$.

(II) $m_{\mu,u}(t_{\max}(u)) > \int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda(x)|u|^q dx > 0$.

Vemos que se $\int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda(x)|u|^q dx$ é tal que $m_{\mu,u}(t_{\max}(u)) > \int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda(x)|u|^q dx > 0$, vão existir $t^+(u)$ e $t^-(u)$ satisfazendo (2.22), com $t^-(u) > t_{\max}(u) > t^+(u)$ e tais que $m'_{\mu,u}(t^-(u)) < 0$

e $m'_{\mu,u}(t^+(u)) > 0$. Com isso e pela relação (2.21), temos que para cada $u \in H^1_A(\mathbb{R}^N)$ nessas condições, vão existir únicos $t^+(u)$ e $t^-(u)$ tais que $t^+(u)u \in M^+_{\lambda,\mu}$ e $t^-(u)u \in M^-_{\lambda,\mu}$. Obtemos então um esboço para o gráfico da F_u.

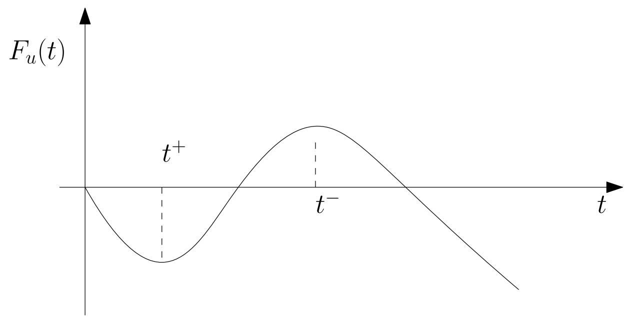

Figura 2.3: Esboço de F_u quando $m_{\mu,u}(t_{\max}(u)) > \int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda(x)|u|^q dx > 0$.

Concluindo, $m_{\mu,u}(t)$ é crescente em $(0, t_{\max}(u))$ e decrescente em $(t_{\max}(u), +\infty)$. Ainda, impondo a condição

$$\lambda^{p-2}(1 + \mu||b_2||_\infty)^{2-q} < \Upsilon_0, \tag{2.26}$$

obtemos

$$\begin{aligned} m_{\mu,u}(t_{\max}(u)) &= \left[\left(\frac{2-q}{p-q}\right)^{\frac{2-q}{p-2}} - \left(\frac{2-q}{p-q}\right)^{\frac{p-q}{p-2}}\right] \frac{||u||_A^{\frac{2(p-q)}{p-2}}}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} b_\mu(x)|u|^p dx\right)^{\frac{2-q}{p-q}}} \\ &= ||u||_A^q \left(\frac{p-2}{p-q}\right)\left(\frac{2-q}{p-q}\right)^{\frac{2-q}{p-2}} \left(\frac{||u||_A^p}{\int_{\mathbb{R}^N} b_\mu(x)|u|^p dx}\right)^{\frac{2-q}{p-q}} \\ &\geq \frac{p-2}{\lambda||a_+||_{L^{q'}}} \left(\frac{S_p}{p-q}\right)^{\frac{p-q}{p-2}} \left(\frac{2-q}{1+\mu||b_2||_\infty}\right)^{\frac{p-q}{p-2}} \int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda(x)|u|^q dx \\ &> \int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda(x)|u|^q dx. \end{aligned}$$

Isso significa que sob a condição (2.26) sempre teremos $m_{\mu,u}(t_{\max}(u)) > \int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda(x)|u|^q dx$. Por esta análise feita anteriormente acabamos de demonstrar o seguinte resultado.

Lema 2.4. *Para cada $u \in H^1_A(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ e $\mu > 0$ temos*

(i) Se $\int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda(x)|u|^q dx \leq 0$, então existe um único $t^-(u) > t_{\max}(u)$ tal que $t^-(u)u \in M^-_{\lambda,\mu}$. Além disso, $F_u(t)$ é crescente em $(0, t^-(u))$, decrescente em $(t^-(u), +\infty)$ e $F_u(t) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$.

(ii) Se $\int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda(x)|u|^q dx > 0$ e λ é tal que $\lambda^{p-2}(1 + \mu||b_2||_\infty)^{2-q} < \Upsilon_0$, então existe

$0 < t^+(u) < t_{\max}(u) < t^-(u)$ tal que $t^{\pm}(u)u \in M^{\pm}_{\lambda,\mu}$. Ainda, $F_u(t)$ é decrescente em $(0, t^+(u))$, crescente em $(t^+(u), t^-(u))$ e decrescente em $(t^-(u), +\infty)$. Além disso, $F_u(t) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$.

Enunciaremos agora um outro resultado que será utilizado na estimativa dos níveis de energia do funcional.

Lema 2.5. *Se $u \in H^1_A(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$, então*

(i) $t^-(u)$ é uma função contínua para $u \in H^1_A(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$;

(ii) $M^-_{\lambda,\mu} = \{u \in H^1_A(\mathbb{R}^N);\ \frac{1}{||u||_A} t^-(u)(\frac{u}{||u||_A}) = 1\}$.

Demonstração. A prova é similar ao feito em [53, Lema 2.6(iii)-(iv)]. □

Pelo Lema 2.4, podemos ver que o funcional não é limitado inferiormente em $H^1_A(\mathbb{R}^N)$. Neste caso, consideramos a variedade de Nehari, onde $J_{\lambda,\mu}$ tem um bom comportamento, como será mostrado no Lema 2.6 a seguir. Ainda, pelos Lemas 2.3 e 2.4, podemos ver que sob certas condições de λ e μ, temos um minimizador em $M^+_{\lambda,\mu}$ e outro em $M^-_{\lambda,\mu}$, cujos níveis mínimos de energia denotaremos respectivamente por

$$m^+_{\lambda,\mu} = \inf_{u \in M^+_{\lambda,\mu}} J_{\lambda,\mu}(u)$$

e

$$m^-_{\lambda,\mu} = \inf_{u \in M^-_{\lambda,\mu}} J_{\lambda,\mu}(u).$$

O nosso próximo resultado mostra que esses pontos estão bem definidos.

Lema 2.6. *O funcional $J_{\lambda,\mu}$ é coercivo e limitado inferiomente em $M_{\lambda,\mu}$.*

Demonstração. Seja $u \in M_{\lambda,\mu}$, pelas desigualdades de Hölder e Sobolev

$$\begin{aligned} J_{\lambda,\mu}(u) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) ||u||^2_A - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right) \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda a_+ + a_-)|u|^q dx \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) ||u||^2_A - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right) \int_{\mathbb{R}^N} \lambda a_+ |u|^q dx \\ &\geq \left(\frac{p-2}{2p}\right) ||u||^2_A - \lambda \left(\frac{p-q}{pq}\right) ||a_+||_{q'} S_p^{-\frac{q}{2}} ||u||^q_A > -C, \end{aligned} \tag{2.27}$$

para algum $C > 0$, de onde obtemos que o funcional é limitado inferiormente. Ainda, observe que como $q < 2$, quando $||u||_A \to \infty$ segue que $J_{\lambda,\mu}(u) \to \infty$, de onde concluímos que o funcional é coercivo. □

Para os próximos resultados precisaremos de algumas estimativas sobre os valores das funções em $m^{\pm}_{\lambda,\mu}$. Para isso, vejamos que se $\lambda^{p-2}(1+\mu||b_2||_\infty)^{2-q} < \Upsilon_0$, então, por (2.10)

$$||u||_A^2 < \frac{p-q}{p-2}\int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda(x)|u|^q dx \leq \Upsilon_0^{1/(p-2)}\frac{p-q}{p-2}S_p^{\frac{-q}{2}}||a_+||_{L^{q'}}||u||_A^q,$$

de onde

$$||u||_A \leq \left(\Upsilon_0^{1/(p-2)}\frac{p-q}{p-2}S_p^{\frac{-q}{2}}||a_+||_{L^{q'}}\right)^{1/(2-q)}||u||_A^q, \tag{2.28}$$

para toda $u \in M^+_{\lambda,\mu}$.

Ainda, se $\lambda = 0$, então (2.26) é satisfeita, daí, pelo Lema 2.4(i), $M^+_{\lambda,\mu} = \emptyset$ e por (2.19) temos $M_{\lambda,\mu} = M^-_{\lambda,\mu}$ para todo $\mu \geq 0$.

A partir do que foi visto, mostraremos os seguintes resultados sobre os valores de $m^{\pm}_{\lambda,\mu}$.

Lema 2.7. *(i) Se $\lambda^{p-2}(1+\mu||b_2||_\infty)^{2-q} < (\frac{q}{2})^{p-2}\Upsilon_0$, então $m^-_{\lambda,\mu} > 0$;*

(ii) Seja $\lambda > 0$ e $\mu \geq 0$ com $\lambda^{p-2}(1+\mu||b_2||_\infty)^{2-q} < \Upsilon_0$, então $m^+_{\lambda,\mu} < 0$. Em particular, se $\lambda^{p-2}(1+\mu||b_2||_\infty)^{2-q} < (\frac{q}{2})^{p-2}\Upsilon_0$, então

$$m^+_{\lambda,\mu} = \inf_{M_{\lambda,\mu}} J_{\lambda,\mu}(u).$$

Demonstração. (i) Seja $u \in M^-_{\lambda,\mu}$, isso significa que $F''_{\lambda,\mu} < 0$. Pela estimativa (2.11) e a desigualdade de Sobolev obtemos

$$\frac{2-q}{p-q}||u||_A < \int_{\mathbb{R}^N} b_\mu(x)|u|^p dx \leq (1+\mu||b_2||_\infty)S_p^{\frac{-p}{2}}||u||_A^p,$$

de onde

$$||u||_A > S_p^{\frac{p}{2(p-2)}}\left(\frac{2-q}{(p-q)(1+\mu||b_2||_\infty)}\right)^{1/(p-2)}, \tag{2.29}$$

para toda $u \in M^-_{\lambda,\mu}$.

Com isso e por (2.27)

$$\begin{aligned} J_{\lambda,\mu}(u) &= \frac{p-2}{2p}||u||_A^2 - \frac{(p-q)}{pq}\int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda(x)|u|^q dx \\ &\geq ||u||_A^q\left(\frac{p-2}{2p}||u||_A^{2-q} - \frac{p-q}{pq}\lambda||a_+||_{q'}S_p^{-q/2}\right) \\ &> S_p^{\frac{qp}{2(p-2)}}\left(\frac{2-q}{(p-q)(1+\mu||b_2||_\infty)}\right)^{q/(p-2)} \\ &\quad \times\left(\frac{p-2}{2p}S_p^{\frac{p(2-q)}{2(p-2)}}\left(\frac{2-q}{(p-q)(1+\mu||b_2||_\infty)}\right)^{\frac{2-q}{p-2}} - \frac{p-q}{pq}\lambda||a_+||_{q'}S_p^{-q/2}\right). \end{aligned} \tag{2.30}$$

Observe que $S_p^{\frac{qp}{2(p-2)}}\left(\frac{2-q}{(p-q)(1+\mu||b_2||_\infty)}\right)^{q/(p-2)} > 0$. Logo, por (2.30), $J_{\lambda,\mu}(u) > 0$ para $u \in M^-_{\lambda,\mu}$, desde que

$$\left(\frac{p-2}{2p}S_p^{\frac{p(2-q)}{2(p-2)}}\left(\frac{2-q}{(p-q)(1+\mu||b_2||_\infty)}\right)^{\frac{2-q}{p-2}} - \frac{p-q}{pq}\lambda||a_+||_{q'}S_p^{-q/2}\right) > 0.$$

Isto é o mesmo que

$$\begin{aligned} \lambda^{p-2}(1+\mu||b_2||_\infty)^{2-q} &< \left(\frac{pq}{p-q}\right)\left(\frac{p-2}{2p}\right)S_p^{p-q}\left(\frac{2-q}{p-q}\right)^{2-q}||a_+||_{q'}^{2-p} \\ &= \left(\frac{q}{2}\right)^{p-2}\left(\frac{(p-2)^{p-2}(2-q^{2-q})}{(p-q)^{p-q}}\right)S_p^{p-q}||a_+||_{q'}^{2-p} \\ &= \left(\frac{q}{2}\right)^{p-2}\Upsilon_0, \end{aligned}$$

lembrando que

$$\Upsilon_0 = (2-q)^{2-q}\left(\frac{p-2}{||a_+||_{q'}}\right)^{p-2}\left(\frac{S_p}{p-q}\right)^{p-q}.$$

Segue que

$$J_{\lambda,\mu}(u) > 0,$$

para $u \in M^-_{\lambda,\mu}$ quando $\lambda^{p-2}(1+\mu||b_2||_\infty)^{2-q} < \left(\frac{q}{2}\right)^{p-2}\Upsilon_0$. Nestas condições, conseguimos $m^-_{\lambda,\mu} = \inf_{M^-_{\lambda,\mu}} J_{\lambda,\mu}(u) > 0$, como queríamos.

(ii) Seja $u \in M^+_{\lambda,\mu}$. Então

$$||u||_A^2 = \int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda(x)|u|^q dx + \int_{\mathbb{R}^N} b_\mu(x)|u|^p dx$$

e

$$||u||_A^2 > (q-1)\int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda(x)|u|^q dx + (p-1)\int_{\mathbb{R}^N} b_\mu(x)|u|^p dx,$$

o que implica que

$$(p-2)||u||_A^2 < (p-q)\int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda(x)|u|^q dx. \tag{2.31}$$

O fato de $u \in M^+_{\lambda,\mu}$, nos dá

$$J_{\lambda,\mu}(u) \;=\; \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) ||u||_A^2 - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right) \int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda(x)|u|^q dx. \tag{2.32}$$

Agora, por (2.31) e (2.32) obtemos

$$J_{\lambda,\mu}(u) \;\leq\; -\frac{(2-q)(p-q)}{2pq} \int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda(x)|u|^q dx. \tag{2.33}$$

Usando (2.33) e o Lema 2.1 temos $J_{\lambda,\mu}(u) < 0$ para todo $u \in M^+_{\lambda,\mu}$. Concluímos com isso que $m^+_{\lambda,\mu} < 0$. □

Usando os Lemas 2.4 e 2.7, podemos concluir que, para todo $u \in H^1_A(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$

$$J_{\lambda,\mu}(t^-(u)u) = \max_{t \leq 0} J_{\lambda,\mu}(tu), \tag{2.34}$$

sempre que $\lambda^{p-2}(1 + \mu||b_2||_\infty)^{2-q} < \left(\frac{q}{2}\right)^{p-2} \Upsilon_0$, com $\lambda \geq 0$ e $\mu > 0$.

Mais ainda, se $t^+(u)$ existe, então $J_{\lambda,\mu}(t^+(u)u) = \min_{0 \geq t \geq t^-(u)} J_{\lambda,\mu}(tu)$. Estas propriedades são essenciais para mostrarmos a existência de uma solução de (P_1). Antes disso, trataremos de provar resultados de regularidade como o faremos na seção a seguir.

2.3 A Regularidade de soluções para problemas com Δ_A

Nessa seção estabeleceremos resultados de regularidade para as soluções não nulas de (P_1) com $\lambda > 0$ e $\mu > 0$.

Supondo que as condições (A), (B_1) e (B_2) sejam satisfeitas, combinaremos argumentos de regularidade de Brezis-Kato [48, Lema B3] e um argumento similar ao usado em [21, Lema 2.1], para mostrar que se u é solução de (P_1), então $u \in L^{\gamma}(\mathbb{R}^N)$ para todo $\gamma \in [2^*, +\infty)$.

Para tanto, precisaremos dos resultados que mostraremos a seguir.

Lema 2.8. *Considere*

$$h(x,u) = a_\lambda(x)|u|^{q-2}u + b_\mu(x)|u|^{p-2}u.$$

Suponha que as condições (A), (B_1) e (B_2) sejam satisfeitas. Então existe $|v(x)| \in L^{\frac{N}{2}}$ tal que

$$h(x,u) = v(x)(1+|u|).$$

Demonstração. Observe que

$$\begin{aligned} h(x,u) &= a_\lambda(x)|u|^{q-2}u + b_\mu(x)|u|^{p-2}u \\ &= (1+|u|)\left(\frac{a_\lambda(x)|u|^{q-2}u}{1+|u|} + \frac{b_\mu(x)|u|^{p-2}u}{1+|u|}\right). \end{aligned}$$

Chamando

$$v(x) = \left(\frac{a_\lambda(x)|u|^{q-2}u}{1+|u|} + \frac{b_\mu(x)|u|^{p-2}u}{1+|u|}\right),$$

temos

$$\begin{aligned} |v(x)| &= \left|\frac{a_\lambda(x)|u|^{q-2}u}{1+|u|} + \frac{b_\mu(x)|u|^{p-2}u}{1+|u|}\right| \\ &\leq \left|\frac{a_\lambda(x)|u|^{q-2}u}{1+|u|}\right| + \left|\frac{b_\mu(x)|u|^{p-2}u}{1+|u|}\right| \\ &= \frac{|a_\lambda(x)||u|^{q-1}}{1+|u|} + \frac{|b_\mu(x)||u|^{p-1}}{1+|u|} \\ &\leq |a_\lambda(x)||u|^{q-1} + \frac{|b_\mu(x)||u|^{p-1}}{|u|}. \end{aligned}$$

Ainda,

$$\int \left(|a_\lambda(x)||u|^{q-1}\right)^{N/2} \leq \int \left(|a_\lambda(x)|^{\frac{sN}{2}}\right)^{1/s} \left(\int |u|^{(q-1)\frac{N}{2}s'}\right)^{1/s'} \leq ||a_\lambda||_{q'}^{\frac{N}{2}} \left(\int |u|^{p'}\right)^{\frac{1}{s'}}, \quad (2.35)$$

onde $s = \frac{2p}{n(p-q)}$ e $p' = \frac{2p}{2p-n(p-q)}$. Veja que, $p' = (q-1)\frac{np}{2p-n(p-q)} \leq 2^*$, de onde $|a_\lambda(x)||u|^{q-1} \in L^{\frac{N}{2}}$.

Além disso,

$$\int \left(\frac{|b_\mu(x)||u|^{p-1}}{|u|}\right)^{\frac{N}{2}} \leq \int (|b_\mu(x)||u|^{p-2})^{\frac{N}{2}} \leq C \int (|u|^{p-2})^{\frac{N}{2}}. \quad (2.36)$$

Como $p < 2^*$, temos $(p-2)\frac{N}{2} < (2^*-2)\frac{N}{2} = 2^*$ e pela imersão contínua $H_A^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\gamma$, para todo $2 \leq \gamma \leq 2^*$, temos $\int (|u|^{p-2})^{\frac{N}{2}} < \infty$. Daí $|b_\mu(x)||u|^{p-2} \in L^{\frac{N}{2}}$. Assim, por (2.35) e (2.36)

$$|h(x,u)| \leq |v(x)|(1+|u|) \quad \text{com} \quad |v(x)| \quad \in L^{\frac{N}{2}}.$$

$\square$

Agora considere $\phi(x) = \eta(x)^2 u(x) \min\{|u(x)|^{\beta-1}, L\}$, onde $\beta > 1$ e $L > 0$ são constantes e $u \in H_A^1(\mathbb{R}^N)$, e η é uma função C^1-, limitada, tal que sua derivada também é limitada.

Denotaremos χ_Ω como a função característica do conjunto Ω. Então teremos

$$\begin{aligned} \overline{\nabla_A \phi} &= 2\eta\nabla\eta\bar{u}\min\{|u(x)|^{\beta-1}, L\} + \eta^2\overline{\nabla_A u}\min\{|u(x)|^{\beta-1}, L\} \\ &+ (\beta-1)\eta^2\bar{u}|u|^{\beta-2}\nabla|u|\chi_{|u|^{\beta-1}<L} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \nabla_A u\overline{\nabla_A \phi} &= |\nabla_A u|^2\eta^2\min\{|u|^{\beta-1}, L\} + 2\eta\nabla\eta\bar{u}\min\{|u|^{\beta-1}, L\}\nabla_A u \\ &+ (\beta-1)\eta^2\bar{u}|u|^{\beta-2}\nabla|u|\chi_{|u|^{\beta-1}<L}\nabla_A u. \end{aligned}$$

Observe que

$$Re(\bar{u}\nabla_A u) = Re(\nabla u + iAu)\bar{u} = Re(\bar{u}\nabla u) = |u|Re(\frac{\bar{u}}{|u|}\nabla u) = |u|\nabla|u|.$$

Usando a parte real de $\nabla_A u \overline{\nabla_A \phi}$ obtemos

$$\begin{aligned} Re(\nabla_A u \overline{\nabla_A \phi}) &= |\nabla_A u|^2 \eta^2 \min\{|u|^{\beta-1}, L\} + 2\eta \nabla\eta \nabla|u||u| \min\{|u|^{\beta-1}, L\} \\ &+ (\beta-1)\eta^2 |u|^{\beta-1} |\nabla|u||^2 \chi_{|u|^{\beta-1}<L} \\ &\leq |\nabla_A u|^2 \eta^2 \min\{|u|^{\beta-1}, L\} + 2\eta \nabla\eta \nabla|u||u| \min\{|u|^{\beta-1}, L\}. \end{aligned}$$

Assim

$$Re(\nabla_A u \overline{\nabla_A \phi}) \leq |\nabla_A u|^2 \eta^2 \min\{|u|^{\beta-1}, L\} + 2\eta \nabla\eta \nabla|u||u| \min\{|u|^{\beta-1}, L\}. \tag{2.37}$$

Lema 2.9. *As soluções de* (P_1) *com* $\lambda > 0$ *e* $\mu > 0$*, em* $H^1_A(\mathbb{R}^N)$*, pertencem à* $L^\gamma(\mathbb{R}^N)$ *para todo* $\gamma \in [2^*, +\infty)$.

Demonstração. Iremos testar o nosso problema com a função $\phi = u \min\{|u|^{\beta-1}, L\}$. Note que $(u\phi)^{\frac{1}{2}} = u \min\{|u|^{\beta-1}, L\}^{\frac{1}{2}}$. Nosso primeiro objetivo é mostrar que

$$|||u| \min\{|u|^{\beta-1}, L\}^{\frac{1}{2}}||^2_{2^*} \leq C \int |u|^2 \min\{|u|^{\beta-1}, L\}.$$

Para isso, veremos por partes, a seguinte sequência de quatro desigualdades

$$\begin{aligned} |||u| \min\{|u|^{\beta-1}, L\}^{\frac{1}{2}}||^2_{2^*} &\leq \int |\nabla(|u| \min\{|u|^{\frac{\beta-1}{2}}, L^{\frac{1}{2}}\})|^2 dx & (2.38) \\ &\leq C(\beta) \int |\nabla|u||^2 \min\{|u|^{\beta-1}, L\} dx & (2.39) \\ &\leq C(\beta) \int |\nabla_A u|^2 \min(|u|^{\beta-1}, L)) dx & (2.40) \\ &\leq C(K, \beta) \int |u|^2 \min\{|u|^{\beta-1}, L\} dx. & (2.41) \end{aligned}$$

A primeira desigualdade (2.38), obtemos da desigualdade de Sobolev. De fato

$$|||u| \min\{|u|^{\beta-1}, L\}^{\frac{1}{2}}||^2_{2^*} \leq |||u| \min\{|u|^{\beta-1}, L\}^{\frac{1}{2}}||^2_{H^1_0}.$$

Ainda, para verificar (2.39) observemos que

$$|||u| \min\{|u|^{\beta-1}, L\}^{\frac{1}{2}}||^2_{H^1_0} = \int |\nabla(|u| \min\{|u|^{\frac{\beta-1}{2}}, L^{\frac{1}{2}}\})|^2 + |(u \min\{|u|^{\frac{\beta-1}{2}}, L^{\frac{1}{2}}\})|^2 dx,$$

daí

$$
\begin{aligned}
&\int |\nabla(|u|\min(|u|^{\frac{\beta-1}{2}}, L^{\frac{1}{2}}))|^2 + [(|u|\min\{|u|^{\frac{\beta-1}{2}}, L^{\frac{1}{2}}\})]^2 dx\\
\leq &\int 2^{2-1}[(\nabla|u|\min(|u|^{\frac{\beta-1}{2}}, L^{\frac{1}{2}}))^2 + (|u|\min\{|u|^{\frac{\beta-1}{2}}, L^{\frac{1}{2}}\})^2] + [(|u|\min\{|u|^{\frac{\beta-1}{2}}, L^{\frac{1}{2}}\})]^2\\
\leq &\int 2(\nabla|u|)^2\min\{|u|^{\beta-1}, L\} + 2|u|^2\left(u\nabla u\frac{\beta-1}{2}|u|^{\frac{\beta-1}{2}-2}\chi_{|u|^{\frac{\beta-1}{2}}<L^{\frac{1}{2}}}\right)^2\\
+ &\ [(|u|\min\{|u|^{\frac{\beta-1}{2}}, L^{\frac{1}{2}}\})]^2\\
\leq &\int 2(\nabla|u|)^2\min\{|u|^{\beta-1}, L\} + 2|u|^2|u|^2|\nabla|u||^2\frac{(\beta-1)^2}{4}|u|^{(\beta-1)-4}\chi_{|u|^{\frac{\beta-1}{2}}<L^{\frac{1}{2}}}\\
+ &\ [(|u|\min\{|u|^{\frac{\beta-1}{2}}, L^{\frac{1}{2}}\})]^2\\
\leq &\left(2+\frac{(\beta-1)^2}{2}\right)\int |\nabla|u||^2\min\{|u|^{\beta-1}, L\} + [(|u|\min\{|u|^{\frac{\beta-1}{2}}, L^{\frac{1}{2}}\})]^2.
\end{aligned}
$$

A terceira desigualdade (2.40) conseguimos a partir da desigualdade diamagnética

$$
C\int |\nabla|u||^2\min\{|u|^{\beta-1}, L\} \leq C\int |\nabla_A u|^2\min\{|u|^{\beta-1}, L\}.
$$

Finalmente, segue da desigualdade (2.37), com $\eta = 1$, que para toda constante K

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_A u|^2\min\{|u|^{\beta-1}, L\} + |u|^2\min\{|u|^{\beta-1}, L\} \leq \int Re(\nabla_A u\overline{\nabla_A\phi}) + Re|u|^2\min\{|u|^{\beta-1}, L\}\\
= &\ Re\int(-\Delta_A u\overline{\phi} + u\overline{\phi}) \leq |\int(-\Delta_A u\overline{\phi} + u\overline{\phi})|\\
= &\ |\int h(x,u)\overline{\phi}| \leq \int |h(x,u)||\overline{\phi}| \leq \int |v(x)|(1+|u|)|\phi|\\
= &\int |v(x)||u|\min\{|u|^{\beta-1}, L\} + \int |v(x)||u|^2\min\{|u|^{\beta-1}, L\}\\
\leq &\left(\int_{|v(x)|>K}|v(x)|^{\frac{N}{2}}\right)^{\frac{2}{N}}\left(\int(|u|\min\{|u|^{\beta-1}, L\})^{\frac{N}{N-2}}\right)^{\frac{N-2}{N}} + K\int_{|v(x)|<K}|u|\min\{|u|^{\beta-1}, L\}\\
+ &\left(\int_{|v(x)|>K}v(x)^{\frac{N}{2}}\right)^{\frac{2}{N}}\left(\int(|u|^2\min\{|u|^{\beta-1}, L\})^{\frac{N}{N-2}}\right)^{\frac{N-2}{N}} + K\int_{|v(x)|<K}|u|^2\min\{|u|^{\beta-1}, L\}.
\end{aligned}
$$

Para K suficientemente grande temos $\left(\int_{|v(x)|>K}v(x)^{\frac{N}{2}}\right)^{\frac{2}{N}} = o_n(1)$, já que pelo Lema 2.8, $|v(x)| \in L^{\frac{N}{2}}$. Ainda, fazendo $L \to \infty$ e tomando $\beta + 1 = 2^*$ obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_A u|^2\min\{|u|^{\beta-1}, L\} &+ |u|^2\min\{|u|^{\beta-1}, L\} \leq\\
&\leq K\int |u|^{2^*-1} + K\int |u|^{2^*} + o_N(1) < \infty,
\end{aligned}
$$

já que $u \in H^1_A(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p$ para $2 < p \leq 2^*$.

Concluímos que se u_0 é uma solução de (P_1), então $u \in L^\gamma(\mathbb{R}^N)$ para todo $\gamma \in [2^*, \infty)$. $\square$

Teorema 2.1. *Suponha que* $u_0 \in H^1_A(\mathbb{R}^N)$ *é uma solução não nula de* (P_1) *com* $\lambda > 0$ *e* $\mu > 0$. *Então temos* $u_0 \in C(R^N, \mathbb{C}) \cap L^\gamma(R^N)$ *para todo* $2^* \leq \gamma < +\infty$.

Demonstração. Pelo Lema 2.9, temos que como $u_0 \in H^1_A(\mathbb{R}^N)$ é uma solução não nula de (P_1), então ele pertencem à $L^\gamma(\mathbb{R}^N)$ para todo $\gamma \in [2^*, +\infty)$.

Agora, para mostrar a outra parte da intercessão e aplicar a teoria de regularidade precisamos separar nosso problema em dois outros fazendo

$$u = v + iw.$$

Veja que,

$$\begin{aligned} -\Delta_A u + u &= -\Delta u - 2iA\nabla u + |A|^2 u - iu\mathrm{div}A + u \\ &= a_\lambda |u|^{q-2}u + b_\mu |u|^{p-2}u, \end{aligned}$$

daí

$$-\Delta v + v = h_1 = a_\lambda |u|^{q-2}v + b_\mu |u|^{p-2}v - 2A\nabla w - |A|^2 v - w\,\mathrm{div}A,$$

$$-\Delta w + w = h_2 = a_\lambda |u|^{q-2}w + b_\mu |u|^{p-2}w + 2A\nabla w - |A|^2 w + w\,\mathrm{div}A.$$

Com isso conseguimos $v, w \in H^1 \hookrightarrow L^{2^*}$ e por [52, Teorema 1.9], segue que h_1 e h_2 $\in L^{q_1}(K, \mathbb{R})$, onde $q_1 = \min\{2^*(p-1)^{-1}, 2\}$.

Por um argumento padrão $v, w \in W^{2,q_1}$. Usando [16, Corolário 9.13], se $2q_1 < N$ teremos, $v, w \in L^{\frac{Nq_1}{N-2q_1}}$ e ainda $\nabla v, \nabla w \in L^{\frac{Nq_1}{N-2q_1}}$.

Novamente, fazendo os mesmos cálculos obtemos h_1 e $h_2 \in L^{q_2}(K, \mathbb{R})$, onde $q_2 = Nq_1 \min\{(N-2q_1)(p-1)^{-1}, (N-q_1)^{-1}\}$.

Usamos agora o argumento de boot-strap para concluir que após um número finito de passos teremos $v, w \in W^{2,q}$ para todo $q \in [1, +\infty)$ e pelas imersões de Sobolev, v e $w \in C^{1,\alpha}(K, \mathbb{R})$ com $0 < \alpha < 1$, de onde obtemos o resultado pretendido para u.

□

Para concluir os resultados de regularidade apresentamos o lema a seguir.

Teorema 2.2. *Se* $u \in H^1_A(\mathbb{R}^N)$ *é solução de* (P_1), *então* $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ *e* $\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$.

Demonstração. Usaremos a técnica da interação de Moser's. Seja η uma função C^1 de suporte compacto. Reescrevendo o problema (P_1) do seguinte modo

$$\nabla_A u + u = g(x, |u|)u, \tag{2.42}$$

temos $g(x,|u|)u = v(x)(1+|u|)$, com $v \in L^{N/2}$, como já foi visto no Lema 2.8. Testando (2.42) com $\phi = \eta^2 u \min\{|u|^{\beta-1}, L\}$ e usando a inequação (2.37) obtemos a estimativa

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla_A u|^2\eta^2 \min\{|u|^{\beta-1}, L\} + 2\eta\nabla\eta\nabla|u||u| \min\{|u|^{\beta-1}, L\}dx \leq \\
\leq\ & \int Re(\nabla_A u\overline{\nabla_A \phi}) = Re\int -\Delta_A u\overline{\phi} \\
=\ & Re\int(-u+g(x)u)\overline{\phi} \leq |\int g(x)u\overline{\phi} - u\overline{\phi}| \leq \int |g(x)u\overline{\phi} - u\overline{\phi}| \\
\leq\ & \int |g(x)u\overline{\phi}| + |u\overline{\phi}| \leq \int |g(x)u||\overline{\phi}| \\
\leq\ & \int |v(x)(1+|u|)||\overline{\phi}| \leq \int |v(x)(1+|u|)||\overline{\phi}| \leq \int |v(x)||\overline{\phi}| + |v(x)||u|)||\overline{\phi}|.
\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\eta^2|\nabla|u||^2 - 2|u|^2|\nabla\eta|^2 &\leq \eta^2|\nabla|u||^2 + 2\eta|u|\nabla|u|\nabla\eta \\
&\leq \eta^2|\nabla_A u|^2 + 2\eta|u|\nabla|u|\nabla\eta.
\end{aligned}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla|u||^2\eta^2\min\{|u|^{\beta-1}, L\} &\leq \int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla_A u|^2\eta^2\min\{|u|^{\beta-1}, L\} + 2\eta|u|\nabla|u|\nabla\eta\min\{|u|^{\beta-1}, L\} \\
&\quad +2|u|^2|\nabla\eta|^2\min\{|u|^{\beta-1}, L\}) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N}(|v(x)||\overline{\phi}| + |v(x)||u|)||\overline{\phi}| + 2|u|^2|\nabla\eta|^2\min\{|u|^{\beta-1}, L\}.
\end{aligned}$$

Fazendo $L \to \infty$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla|u||^2\eta^2|u|^{\beta-1} \leq 2\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\eta|^2|u|^{\beta+1} + \int |v(x)||1+|u|||u|^\beta\eta^2 \\
&= \ 2\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\eta|^2|u|^{\beta+1} + C\int |v(x)||u|^\beta\eta^2 + C\int |v(x)||u|^{\beta+1}\eta^2. \qquad (2.43)
\end{aligned}$$

Ainda, fazendo $\omega = |u|^{\frac{\beta+1}{2}}$

$$\frac{2}{(\beta+1)^2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\omega|^2\eta^2 \ \leq\ 2\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\eta|^2\omega^2 + C\int |v(x)|\omega^2\eta^2 + C\int |v(x)|\omega^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\eta^2. \quad (2.44)$$

Para os dois últimos termos de (2.44) temos

$$\int |v(x)|\omega^2\eta^2 \ \leq\ \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v(x)|^{\frac{N}{2}}\right)^{\frac{2}{N}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} (\eta\omega)^{2^*}\right)^{\frac{N-2}{N}},$$

e também

$$\begin{aligned}\int |v(x)|\omega^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\eta^2 &= \int |v(x)|(\omega\eta)^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\eta^{\frac{2}{\beta+1}}\\ &\leq ||v||_{\frac{N}{2}}||\omega\eta||_{2^*}^{\beta\frac{N-2}{N}}||\eta||_{2^*}^{\frac{N-2}{N}}.\end{aligned}$$

Agora, para mostrar a integrabilidade do primeiro termo da desigualdade (2.44) observe que

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla(\omega\eta)|^2 \leq 2\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\omega|^2\eta^2 + 2\int|\nabla\eta|^2\omega^2$$

que juntamente com (2.43) nos dá

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla(\omega\eta)|^2 \leq C(\beta-1)^2\int_{\mathbb{R}^N}a\omega^2\eta^2 + 2((\beta-1)^2-1)\int|\nabla\eta|^2\omega^2.$$

Por Sobolev e Holder

$$\begin{aligned}S^2\left(\int_{\mathbb{R}^N}(\omega\eta)^{2^*}\right)^{\frac{N-2}{2}} &\leq C(\beta-1)^2\left(\int_{\mathbb{R}^N}|v(x)|^{\frac{N}{2}}\right)^{\frac{2}{N}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}(\omega\eta)^{2^*}\right)^{\frac{N-2}{2}}\\ &+ ((\beta-1)^2-1)\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla\eta|^2\omega^2) + (\beta-1)^2\int|v(x)|\omega^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\eta^2,\end{aligned}$$

em que $S = \inf\{\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dx; u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N);\ \int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}dx = 1\}$ é a constante de Sobolev. Ainda, escolhemos um $R > 0$ conveniente de modo que

$$C(\beta-1)^2\left(\int_{|x|>R}|v(x)|^{\frac{N}{2}}\right)^{\frac{2}{N}} \leq \frac{S^2}{2}.$$

Agora, assumindo que supp$\eta \subset (|x| > R)$ temos

$$\int_{|x|<R}(\omega\eta)^{2^*} = 0,$$

daí,

$$S^2\left(\int_{\mathbb{R}^N}(\omega\eta)^{2^*}\right)^{\frac{N-2}{2}} \leq 4((\beta-1)^2-1)\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\eta|^2\omega^2. \tag{2.45}$$

Para prosseguir com a interação tomaremos um $\eta \in C^1(\mathbb{R}^N,[0,1])$, com $\eta(x) = 1$ em $B(x_0,r_1)$, $\eta(x) = 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \{B(x_0,r_1)\}$ e ainda $|\nabla\eta(x)| \leq \frac{2}{r_2-r_1}$ em $\mathbb{R}$, onde $1 \leq r_1 < r_2 \leq 2$. Além disso, escolheremos x_0 e r_2 de modo que $B(x_0,r_2) \subset (|x| > R)$.

Com isso, segue de (2.45) que

$$\begin{aligned}\left(\int_{B(x_0,r_1)} \omega^{2^*}\right)^{\frac{1}{2^*}} &\leq \frac{2}{S}((\beta+1)^2+1)^{\frac{1}{2}}\frac{2}{r_2-r_1}\left(\int_{B(x_0,r_1)} \omega^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq T\frac{\beta+1}{r_2-r_1}\left(\int_{B(x_0,r_1)} \omega^2\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

com T uma constante absoluta. Fazendo $\gamma=\beta+1=2^*$ e $\chi=\frac{N}{N-2}$ temos

$$\left(\int_{B(x_0,r_1)} |u|^{\gamma\chi}\right)^{\frac{1}{\gamma\chi}} \leq \left(\frac{T\gamma}{r_2-r_1}\right)^{\frac{2}{\gamma}}+\left(\int_{B(x_0,r_1)} |u|^{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Para iterar a inequação, que segue com $\gamma\geq 2^*$, tomamos $s_m=1+2^{-m}$, $r_1=s_m$, $r_2=s_{m-1}$ e substituímos $\gamma=2^*$ por $\gamma\chi^{m-1}$, para $m=1,2,....$ Desse modo obtemos

$$\begin{aligned}\left(\int_{B(x_0,s_m)} |u|^{\gamma\chi^m}\right)^{\frac{1}{\gamma\chi^m}} &\leq \left(\frac{T\gamma\chi^{m-1}}{s_{m-1}-s_m}\right)^{\frac{2}{\gamma\chi^{m-1}}}\left(\int_{B(x_0,s_{m-1})} |u|^{\gamma\chi^{m-1}}\right)^{\frac{1}{\gamma\chi^{m-1}}}\\ &= (T\gamma)^{\frac{2}{\gamma\chi^{m-1}}}2^{\frac{2m}{\gamma\chi^{m-1}}}\chi^{\frac{2(m-1)}{\gamma\chi^{m-1}}}\left(\int_{B(x_0,s_{m-1})} |u|^{\gamma\chi^{m-1}}\right)^{\frac{1}{\gamma\chi^{m-1}}}.\end{aligned}$$

Por indução

$$\left(\int_{B(x_0,s_m)} |u|^{\gamma\chi^m}\right)^{\frac{1}{\gamma\chi^m}} \leq (T\gamma)^{\frac{2}{\gamma}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{\chi^j}}2^{\frac{2m}{\gamma}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{j+1}{\chi^j}}\chi^{\frac{2}{\gamma}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{j}{\chi^j}}\left(\int_{B(x_0,s_0)} |u|^{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

para todo $m\in\mathbb{N}$.

Como $s_0=2$ e quando $m\to\infty$ temos $s_m\to 1$, deduzimos, fazendo $m\to\infty$ que existe $R>0$ e $C>0$ tais que para toda $B(x_0,2)\subset(|x|>R)$

$$\sup_{B(x_0,1)}|u(x)| \leq C\left(\int_{B(x_0,2)} |u|^{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Como $\int|u|^\gamma<\infty$, então $\int_{B^C_{(x_i,R)}}|u|^\gamma\to 0$ se $R\to\infty$ de onde obtemos que $u(x)\to 0$ quando $|x|\to\infty$.

Para provar a limitação de u na bola $B(0,R)$ fixamos $\bar{x}\in B(0,R)$ e escolhemos $r>0$ tal que

$$(\beta+1)^2\left(\int_{B(\bar{x},r)} b^{\frac{N}{2}}\right)^{\frac{2}{N}}\leq\frac{S}{2}$$

e supomos η com suporte em $B(\bar{x},r.)$

Repetimos então o argumento prévio com um reescalonamento adequado na $B(\bar{x},r)$

para obter a limitação de u na $B(\bar{x}, \frac{r}{2})$.

Sendo $\overline{B(0,R)}$ compacto e como u é limitada em cada compacto $B(x, \frac{r}{2})$ para cada $x \in B(0,R)$, concluímos que $\overline{B(0,R)}$ possui subcobertura finita de compactos nos dando que u é limitada na $B(0,R)$.

Com isso e o pelo fato mostrado na primeira parte deste teorema obtemos $u \in L^\infty$. $\square$

2.4 A Existência de Solução para (P_1)

Nesta seção mostraremos a existência de soluções para o problema (P_1) para $\Upsilon_0 > 0$ e $\mu > 0$. Primeiramente estabeleceremos um lema de compacidade local, para isso, considere o seguinte problema elíptico semilinear

$$(P_A) \qquad \begin{cases} -\Delta_A u + u = |u|^{p-2}u \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1_A(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

Seja $J_\infty(u) = \frac{1}{2}||u||^2_A - \frac{1}{p}||u||^p_p$, o funcional associado ao problema (P_A), então J_∞ é um funcional C^2 em $H^1_A(\mathbb{R}^N)$. A variedade de Nehari associada ao problema (P_A) é dada por

$$M_\infty = \{u \in H^1_A(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\};\ J'_\infty(u)u = 0\}.$$

Neste problema podemos observar que se $u \in N_\infty$, então $||u||^2_A = ||u||^p_p$.

Agora considere o seguinte problema de minimização

$$m_\infty = \inf_{M_\infty} J_\infty(u). \tag{2.46}$$

Para mostrar a existência de solução para esse problema de minimização vamos comparar o nosso problema com o descrito a seguir. Considere

$$S = \{u \in H^1_A(\mathbb{R}^N); \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx = 1\},$$

e o seguinte problema de minimização

$$S_\infty = \inf_{u \in S} ||u||^2_A. \tag{2.47}$$

Por uma adaptação do resultado de D'avenia e Squassina [25, Teorema 4.3] para o nosso caso, existe u_0 satisfazendo o problema (2.47), ou seja, existe $u_0 \in H^1_A(\mathbb{R}^N)$ tal que

$S_\infty = \inf_{u\in S} ||u||_A^2 = ||u_0||_A^2$ e $\int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^p dx = 1$. Comparando os níveis dos problemas (2.46) e (2.47) vamos mostrar o seguinte.

Lema 2.10. *Existe $\bar{u} \in H_A^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $m_\infty = \inf_{N_\infty} J_\infty(u) = J_\infty(\bar{u})$.*

Demonstração. Seja u_0 solução do problema de minimização (2.47). Considere $\tilde{u} = \frac{u}{(\int |u|^p)^{\frac{1}{p}}}$ com $u \in H_A^1(\mathbb{R}^N)$. Desse modo, $||\tilde{u}||_p = \frac{||u||_p}{||u||_p} = 1$, nos dando que $\tilde{u} \in S$. Daí

$$||\tilde{u}||_A^2 \geq ||u_0||_A^2.$$

Consequentemente, se $u \in N_\infty$

$$\begin{aligned} ||u_0||_A^2 &\leq ||\tilde{u}||_A^2 = ||u||_A^2 \frac{1}{(\int |u|^p)^{2/p}} \\ &= ||u||_A^2 \frac{1}{||u||_A^{4/p}} = ||u||_A^{\frac{2(p-2)}{p}}, \end{aligned}$$

de onde

$$||u_0||_A^{\frac{2p}{p-2}} \leq ||u||_A^2, \tag{2.48}$$

para todo $u \in N_\infty$.

Definimos então

$$\bar{u} = ||u_0||_A^{\frac{2}{p-2}} u_0. \tag{2.49}$$

Note que $\bar{u} \in N_\infty$. Assim,

$$\begin{aligned} J_\infty(\bar{u}) &= \frac{1}{2}||u_0||_A^{\frac{4}{p-2}}||u_0||_A^2 - \frac{1}{p}||u_0||_p^{\frac{2p}{p-2}} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)||u_0||_A^{\frac{2p}{p-2}} \\ &\leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)||u||_A^2 = J_\infty(u), \end{aligned}$$

para todo $u \in N_\infty$.

Concluímos assim que $\bar{u}$ é ínfimo de $J_\infty(u)$ na Variedade de Nehari, isto é, $m_\infty = J_\infty(\bar{u})$. □

A partir dessas considerações mostraremos o seguinte resultado que nos dá uma descrição de uma sequência (PS) de $J_{\lambda,\mu}$.

Lema 2.11. *Considere $\mu \geq 0$ e $\lambda > 0$ tais que $\lambda^{p-2}(1 + \mu||b_-||_\infty)^{2-q} < \Upsilon_0$.*

(i) Seja $\{u_n\} \subset H_A^1(\mathbb{R}^N)$ uma sequência satisfazendo $J_{\lambda,\mu}(u_n) = \beta + o_n(1)$ com $\beta < m_{\lambda,\mu}^+ + m_\infty$ e $J'_{\lambda,\mu}(u_n) = o_n(1)$ em H_A^{-1} quando $n \to \infty$, então existe uma subsequência $\{u_n\}$ e $u_0 \in H_A^1(\mathbb{R}^N)$,

com u_0 *não nulo, tal que* $u_n = u_0 + o_n(1)$ *forte em* $H^1_A(\mathbb{R}^N)$ *e* $J_{\lambda,\mu}(u_0) = \beta$. *Além disso,* u_0 *é uma solução de* (P_1).

(ii) Seja $\{u_n\} \subset M^-_{\lambda,\mu}$ *sequência* $(PS)_\beta$ *em* $H^1_A(\mathbb{R}^N)$ *de* $J_{\lambda,\mu}$, *isto é, uma sequência satisfazendo* $J_{\lambda,\mu}(u_n) = \beta + o_n(1)$ *e* $J'_{\lambda,\mu}(u_n) = o_n(1)$ *em* H^{-1}_A *quando* $n \to \infty$, *onde*

$$m^+_{\lambda,\mu} + m_\infty < \beta < m^-_{\lambda,\mu} + m_\infty,$$

então existe uma subsequência $\{u_n\}$ *e* $u_0 \in H^1_A(\mathbb{R}^N)$, *com* u_0 *não nulo, tal que* $u_n = u_0 + o_n(1)$ *forte em* $H^1_A(\mathbb{R}^N)$ *e* $J_{\lambda,\mu}(u_0) = \beta$. *Além disso,* u_0 *é uma solução de* (P_1).

Demonstração. (i) Primeiramente recordamos que

$$\Upsilon_0 = (2-q)^{2-q}\left(\frac{p-2}{||a_+||_{q'}}\right)^{p-2}\left(\frac{S_p}{p-q}\right)^{p-q}.$$

Por $(A), (B_1)$ e (B_2), obtemos por um argumento padrão que $\{u_n\}$ é limitada em $H^1_A(\mathbb{R}^N)$. Então existe uma subsequência $\{u_n\}$ e $u_0 \in H^1_A(\mathbb{R}^N)$ tais que $u_n \rightharpoonup u_0$ fraco em $H^1_A(\mathbb{R}^N)$ quando $n \to \infty$. Tomando $v_n = u_n - u_0$, temos que $v_n \rightharpoonup 0$ fraco em $H^1_A(\mathbb{R}^N)$ quando $n \to \infty$.

Denotando por $B(0,1)$ a bola centrada na origem de raio 1, temos em $B(0,1)$ a convergência forte

$$\int_{B(0,1)} |u_n|^q \to \int_{B(0,1)} |u_0|^q.$$

Agora veja que, a menos de subsequência, $h_n = a_\lambda||u_n|^q - |u_0|^q| \to 0$ quase sempre na bola. Então, existe $H \in L^q$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| < H$, na bola. Desse modo $|h_n| \le a_\lambda|H^q - |u_0|^q| \in L^1$, daí podemos usar o Teorema da Convergência Dominada e obter

$$\int_{B(0,1)} h_n = \int_{B(0,1)} a_\lambda||u_n|^q - |u_0|^q| \to 0, \text{ quando } n \to \infty.$$

Usando a desigualdade acima temos

$$\begin{aligned} \left|\int a_\lambda(x)(|u_n|^q - |u_0|^q)\right| &\le \int_{B(0,1)} |a_\lambda(x)|||u_n|^q - |u_0|^q| + \int_{B^c(0,1)} a_\lambda(x)||u_n|^q - |u_0|^q| \\ &\le o_n(1) + \int_{B^c(0,1)} a_\lambda(x)||u_n|^q - |u_0|^q|. \end{aligned}$$

Ainda, por Hölder e pela integrabilidade de a_λ prosseguimos com a desigualdade acima do seguinte modo

$$\begin{aligned}\left|\int a_\lambda(x)(|u_n|^q - |u_0|^q)\right| &\leq o_n(1) + \int_{B^c(0,1)} a_\lambda(x)||u_n|^q - |u_0|^q| \\ &\leq o_n(1) + \left(\int_{B^c(0,1)} a_\lambda(x)^{q^*}\right)^{\frac{1}{q^*}} (||u_n||_p^q + ||u_0||_p^q) \\ &\leq o_n(1) + \epsilon C.\end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, temos

$$\int a_\lambda(x)(|u_n|^q - |u_0|^q) = o_n(1).$$

Por outro lado, pelas condições (B_1) e (B_2) e pelo Lema 4.2 (Brezis-Lieb), podemos concluir que $\mu \int b_2(x)|v_n|^p = o_n(1)$, $\int (1 - b_1(x))|v_n|^p = o_n(1)$ e $\int b_\mu(x)(|u_n|^p - |v_n|^p - |u_0|^p) = o_n(1)$, que juntamente com a desigualdade acima nos dá

$$J_{\lambda,\mu}(u_n) = J_\infty(v_n) + J_{\lambda,\mu}(u_0) + o_n(1).$$

Ainda, de modo similar obtemos que $J'_\infty(v_n)v_n = J'_{\lambda,\mu}(u_n)u_n - J'_{\lambda,\mu}(u_0)u_0 + o_n(1)$. Por hipótese $J'_{\lambda,\mu}(u_n) \to 0$ forte em $H^1_A(\mathbb{R}^N)^{-1}$ e $u_n \rightharpoonup u_0$ fraco em $H^1_A(\mathbb{R}^N)$ quando $n \to \infty$ e assim temos $J'_{\lambda,\mu}(u_0) = 0$.

Agora, defina $\delta = \limsup_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B(y,1)} |v_n|^p$. Então temos dois casos:

(i) $\delta > 0$, ou

(ii) $\delta = 0$.

Suponhamos que (i) aconteça. Então vai existir uma sequência $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^N$ tal que $\int_{B(y_n,1)} |v_n|^p \geq \frac{\delta}{2}$ e para todo $n \in \mathbb{N}$. Defina $\tilde{v}_n(x) = v_n(x + y_n)$. Temos que $\{\tilde{v}_n\}$ é limitada e $\tilde{v}_n \rightharpoonup v$ fraco e quase sempre.

Fazendo uma mudança de variáveis obtemos

$$\int_{B(0,1)} |\tilde{v}_n|^p \geq \frac{\delta}{4}.$$

Pela imersão de Sobolev

$$\int_{B(0,1)} |v|^p \geq \frac{\delta}{4}, \tag{2.50}$$

nos dando $v \neq 0$.

Mas, $v_n \rightharpoonup 0$ e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p \geq \int_{B(y_n,1)} |v_n|^p \geq \frac{\delta}{2} > 0. \tag{2.51}$$

Veja que

$$J_\infty(v_n) = \frac{1}{2}\int (|\nabla_A v_n|^2 + v_n^2)dx - \frac{1}{p}\int |v_n|^p dx.$$

Assim,

$$F_{v_n}(t) = J_\infty(tv_n) = \frac{t^2}{2}||v_n||_A^2 - \frac{t^p}{p}||v_n||^p.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos obter t_n tal que $t_n v_n \in M_\infty$. Construímos assim uma sequência $\{t_n\} \subset \mathbb{R}^N$ com $t_n \to t_0$ quando $n \to \infty$, tal que $t_n v_n \in M_\infty$, ou seja, tal que $J'_\infty(t_n v_n)t_n v_n = 0$.

Veja ainda que

$$J'_\infty(v_n)v_n = ||v_n||_A^2 - ||v_n||^p = o_n(1)$$

e

$$F'_{v_n}(t) = J'_\infty(tv_n)v_n = t||v_n||_A^2 - t^{p-1}||v_n||^p = o_n(1). \tag{2.52}$$

Com isso temos que

$$(t_n - t_n^{p-1})||v_n||_A^2 = t_n(1 - t_n^{p-2})||v_n||_A^2 = o_n(1). \tag{2.53}$$

Por (2.50) sabemos que $||v_n||_A^2 \nrightarrow 0$. Além disso observe que $t_n^{2-p} = \frac{\int |v_n|^p}{||v_n||_A^2} \geq \frac{\delta}{2c}$.

Com isso e por (2.53) obtemos que $(1 - t_n^{p-2}) \to 0$, nos dando que $t_n \to 1$.

Agora, veja que $v_n \rightharpoonup 0$ fraco em $H_A^1(\mathbb{R}^N)$ quando $n \to \infty$. Com isso e pelo fato de $t_n \to 1$, podemos concluir que

$$J_{\lambda,\mu}(u_n) = J_\infty(t_n v_n) + J_{\lambda,\mu}(u_0) + o_n(1) \geq m_\infty + J_{\lambda,\mu}(u_0).$$

Note que, por hipótese $J_{\lambda,\mu}(u_n) = c + o_n(1)$ com $c < m_\infty + m^+_{\lambda,\mu}$. Daí obtemos

$$c + o_n(1) = J_{\lambda,\mu}(u_n) = J_\infty(t_n v_n) + J_{\lambda,\mu}(u_0) + o_n(1) \geq m_\infty + J_{\lambda,\mu}(u_0),$$

nos dando

$$m_\infty + J_{\lambda,\mu}(u_0) \leq c + o_n(1) < m_\infty + m^+_{\lambda,\mu} + o_n(1),$$

de onde

$$J_{\lambda,\mu}(u_0) \leq m^+_{\lambda,\mu} + o_n(1). \tag{2.54}$$

Já vimos que $J'_{\lambda,\mu}(u_n)$ converge forte para zero, de onde obtemos $J'_{\lambda,\mu}(u_0) = 0$. Desse modo

$u_0 \in M_{\lambda,\mu}$. Ainda, pelo Lema 2.3, $M^0_{\lambda,\mu} = \emptyset$ e pelo Lema 2.7 $m^+ > 0$ e $m^- < 0$. Assim,

$$J_{\lambda,\mu}(u_0) \geq \inf_{M_{\lambda,\mu}} J_{\lambda,\mu}(u) = \inf_{M^+_{\lambda,\mu}} J_{\lambda,\mu}(u) = m^+,$$

o que contradiz o que concluímos em (2.54).

Concluímos então que (II) ocorre. Neste caso, existe subsequência $\{v_n\}$ tal que $\int |v_n|^p \to 0$ se $n \to \infty$.

Como já temos $J'_\infty(v_n)v_n = o_n(1)$ com $J'_\infty(v_n)v_n = ||v_n||^2_A - ||v_n||^p_p$ e $\int |v_n|^p \to 0$, concluímos que $||v_n||^2 \to 0$ nos dando $u_n \to u_0$ forte em $H^1_A(\mathbb{R}^N)$.

Veja ainda que $u_0 \neq 0$. De fato, note que se $u_0 = 0$ então $\tilde{v}_n = v_n = u_n$ e $\int_{B(0,1)} |u_n|^p \geq \frac{\delta}{4}$, o que já vimos ser um absurdo.

(ii) O argumento é similar ao que foi feito em (i). Temos $\{u_n\}$ limitada em $H^1_A(\mathbb{R}^N)$, e $\{u_n\} \in M^-_{\lambda,\mu}$. Então existe uma subsequência $\{u_n\}$ e $u_0 \in H^1_A(\mathbb{R}^N)$ tais que $u_n \rightharpoonup u_0$ fraco em $H^1_A(\mathbb{R}^N)$ quando $n \to \infty$. Tomando $v_n = u_n - u_0$, temos que $v_n \rightharpoonup 0$ fraco em $H^1_A(\mathbb{R}^N)$ quando $n \to \infty$.

Pelos mesmos argumentos do item anterior obtemos

$$J_{\lambda,\mu}(u_n) = J_\infty(v_n) + J_{\lambda,\mu}(u_0) + o_n(1).$$

Ainda, de modo similar obtemos que $J'_\infty(v_n)v_n = J'_{\lambda,\mu}(u_n)u_n - J'_{\lambda,\mu}(u_0)u_0 + o_n(1)$. Por hipótese $J'_{\lambda,\mu}(u_n) \to 0$ forte em $H^1_A(\mathbb{R}^N)^{-1}$ e $u_n \rightharpoonup u_0$ fraco em $H^1_A(\mathbb{R}^N)$ quando $n \to \infty$ e assim temos $J'_{\lambda,\mu}(u_0) = 0$.

Definindo novamente $\delta = \limsup_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B(y,1)} |v_n|^p$, temos dois casos:

(i) $\delta > 0$, ou

(ii) $\delta = 0$.

Suponhamos que (i) aconteça, daí vai existir uma sequência $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^N$ tal que $\int_{B(y_n,1)} |v_n|^p \leq \frac{\delta}{2}$ e para todo $n \in \mathbb{N}$.

Defina $\tilde{v}_n(x) = v_n(x + y_n)$. Então $\{\tilde{v}_n\}$ é limitada e $\tilde{v}_n \to v$ fraco e quase sempre.

Fazendo uma mudança de variáveis obtemos

$$\int_{B(0,1)} |\tilde{v}_n|^p \geq \frac{\delta}{4}.$$

Pela imersão de Sobolev

$$\int_{B(0,1)} |v|^p \geq \frac{\delta}{4},$$

nos dando $v \neq 0$.

Mas, $v_n \rightharpoonup 0$ e
$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p \geq \int_{B(y_n,1)} |v_n|^p \geq \frac{\delta}{2} > 0.$$

Além disso, como visto anteriormente podemos encontrar uma sequência $\{t_n\} \subset \mathbb{R}^N$ com $t_n > 0$ para todo n e $t_n \to 1$ quando $n \to \infty$ tal que $t_n v_n \in M_\infty$. Neste caso, se $u_0 \in M^-_{\lambda,\mu}$, então vale
$$J_{\lambda,\mu}(u_n) = J_\infty(t_n v_n) + J_{\lambda,\mu}(u_0) + o_n(1) \geq m_\infty + m^-_{\lambda,\mu}.$$

Note que por hipótese $J_{\lambda,\mu}(u_n) = \beta + o_n(1)$ com $\beta < m_\infty + m^-_{\lambda,\mu}$. Daí obtemos
$$\beta + o_n(1) = J_{\lambda,\mu}(u_n) = J_\infty(t_n v_n) + J_{\lambda,\mu}(u_0) + o_n(1) \geq m_\infty + J_{\lambda,\mu}(u_0),$$

nos dando
$$m_\infty + J_{\lambda,\mu}(u_0) \leq c + o_n(1) < m_\infty + m^+_{\lambda,\mu} + o_n(1),$$

de onde
$$J_{\lambda,\mu}(u_0) \geq m^+_{\lambda,\mu} + o_n(1). \tag{2.55}$$

Já vimos que $J'_{\lambda,\mu}(u_n)$ converge forte para zero de onde $J'_{\lambda,\mu}(u_0) = 0$. Desse modo $u_0 \in M_{\lambda,\mu}$. Ainda, pelo Lema 2.3, $M^0_{\lambda,\mu} =$ e pelo Lema 2.7 $m^+ > 0$ e $m^- < 0$. Assim,
$$J_{\lambda,\mu}(u_0) \geq \inf_{M_{\lambda,\mu}} J_{\lambda,\mu}(u) = \inf_{M^+_{\lambda,\mu}} J_{\lambda,\mu}(u) = m^+$$

o que contradiz o que concluímos em (2.55).

Concluímos que (II) ocorre. Daí existe subsequência v_n tal que $\int |v_n|^p \to 0$ se $n \to \infty$.

Como já temos $J'_\infty(v_n)v_n = o_n(1)$ com $J'_\infty(v_n)v_n = ||v_n||^2_A - ||v_n||^p_p$ e $\int |v_n|^p \to 0$, concluímos que $||v_n||^2 \to 0$ nos dando $u_n \to u_0$ forte em $H^1_A(\mathbb{R}^N)$.

Da mesma maneira temos $u_0 \neq 0$. De fato, note que se $u_0 = 0$ então $\tilde{v}_n = v_n = u_n$ e $\int_{B(0,1)} |u_n|^p \geq \frac{\delta}{4}$, o que já vimos ser um absurdo. □

Na Proposição 2.1 mostramos que $M_{\lambda,\mu}$ é uma variedade C^1. Do mesmo modo, podemos mostrar que $M^\pm_{\lambda,\mu}$ é uma variedade C^1 para valores de λ apropriados, assim como argumentado em [20]. A partir disso e do resultado que acabamos de demonstrar, estamos prontos para tratar da existência da primeira solução do problema (P_1) em $M^+_{\lambda,\mu}$.

Proposição 2.3. *Suponha que as condições $(A), (B_1)$ e (B_2) sejam satisfeitas com $\lambda > 0$ e $\mu \geq 0$ satisfazendo $\lambda^{p-2}(1 + \mu||b_2||_\infty)^{2-q} < \Upsilon_0$, então existe $u^+_{\lambda,\mu} \in M^+_{\lambda,\mu}$ tal que $J_{\lambda,\mu}(u^+_{\lambda,\mu}) = m^+_{\lambda,\mu}$ e $J'_{\lambda,\mu}(u^+_{\lambda,\mu}) = 0$ em H^{-1}_A e mais, $||u^+_{\lambda,\mu}|| \to 0$ quando $\lambda \to 0$.*

Demonstração. Pelos Lemas 2.3 e 2.6, podemos aplicar uma consequência do Princípio Variacional de Ekland 4.7, para obter uma sequência $\{u_n\} \subset M^+_{\lambda,\mu}$ satisfazendo $J_{\lambda,\mu}(u_n) \to \inf_{u\in M_{\lambda,\mu}} J_{\lambda,\mu}(u) = m^+_{\lambda,\mu}$ e $J'_{\lambda,\mu}(u_n) = o_n(1)$ forte em H_A^{-1} quando $n \to \infty$.

Pelo Lema 2.11, existe uma subsequência u_n e $u^+_{\lambda,\mu} \in M^+_{\lambda,\mu}$ tal que $u_n = u^+_{\lambda,\mu} + o_n(1)$ forte em $H^1_A(\mathbb{R}^N)$ quando $n \to \infty$. Segue que $J_{\lambda,\mu}(u^+_{\lambda,\mu}) = m^+_{\lambda,\mu}$ e $J'_{\lambda,\mu}(u_n) = 0$ em H_A^{-1}. Ainda, por (2.28) e $u^+_{\lambda,\mu} \in M^+_{\lambda,\mu}$, obtemos que $||u^+_{\lambda,\mu}|| \to 0$ quando $\lambda \to 0$.

□

2.5 Comportamento da 1^a solução de (P_1)

Podemos observar que as soluções de (P_1) variam de acordo com os parâmetros μ e λ. Na Proposição 2.3 tratamos do comportamento da $u^+_{\lambda,\mu}$ quando $\lambda \to 0$. Agora veremos o que acontece com $u^+_{\lambda,\mu}$ quando $\mu \to \infty$.

Proposição 2.4. *Para cada $\lambda > 0$ tal que $\lambda^{p-2}(1+\mu||b_2||_\infty)^{2-q} < (\frac{q}{2})^{p-2}\Upsilon_0$, e sequência $\{\mu_n\} \subset (0,\infty)$ com $\mu_n \to \infty$ quando $n \to \infty$, existe uma subsequência μ_n tal que $u^+_{\lambda,\mu_n} \to 0$ forte em $H^1_A(\mathbb{R}^N)$ quando $n \to \infty$.*

Demonstração. Como foi visto, $J_{\lambda,\mu_n}(u^+_{\lambda,\mu_n}) = m^+_{\lambda,\mu_n} < 0$. Segue então da condição (A) e do fato de $u^+_{\lambda,\mu_n} \in M_{\lambda,\mu}$, que u^+_{λ,μ_n} é limitada em $H^1_A(\mathbb{R}^N)$. Desse modo, existe uma subsequência $\{\mu_n\}$ e $u_0 \in H^1_A(\mathbb{R}^N)$ tal que $u^+_{\lambda,\mu_n} \rightharpoonup u_0$ fraco em $H^1_A(\mathbb{R}^N)$ quando $n \to \infty$.

Como $u^+_{\lambda,\mu_n} \in M^+_{\lambda,\mu}$, segue da definição da variedade de Nehari e de (2.11) que

$$\begin{aligned} 0 < F''_{\lambda,\mu_n}(1) &= (2-q)||u^+_{\lambda,\mu_n}||^2_A - (p-q)\int b_\mu |u^+_{\lambda,\mu_n}|^p \\ &\leq ||u^+_{\lambda,\mu_n}||^2_A - (p-q)\int b_1|u^+_{\lambda,\mu_n}|^p - \mu_n(p-q)\int b_2|u^+_{\lambda,\mu_n}|^p \\ &\leq ||u^+_{\lambda,\mu_n}||^2_A - \mu_n(p-q)\int b_2|u^+_{\lambda,\mu_n}|^p. \end{aligned} \tag{2.56}$$

Para analisar o último termo da desigualdade (2.56), vamos separar a integral em duas partes

$$\int_{\mathbb{R}^N} b_2(x)|u^+_{\lambda,\mu_n}|^p = \int_{B(0,R)} b_2(x)|u^+_{\lambda,\mu_n}|^p + \int_{B^C(0,R)} b_2(x)|u^+_{\lambda,\mu_n}|^p.$$

Dentro da bola vai existir um $h > 0$ tal que $|u^+_{\lambda,\mu_n}|^p < h$, onde podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada. Fora da bola, pelo Lema de Fatou temos

$$\liminf \int_{B^C(0,R)} b_2(x)|u^+_{\lambda,\mu_n}|^p \geq \int_{B^C(0,R)} \liminf b_2(x)|u^+_{\lambda,\mu_n}|^p = \int_{B^C(0,R)} b_2(x)|u^+_0|^p,$$

e utilizando o Lema de Fatou inverso segue

$$\limsup \int_{B^C(0,R)} b_2(x)|u^+_{\lambda,\mu_n}|^p \leq \int_{B^C(0,R)} \limsup b_2(x)|u^+_{\lambda,\mu_n}|^p = \int_{B^C(0,R)} b_2(x)|u^+_0|^p.$$

Com isso

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} b_2(x)|u^+_{\lambda,\mu_n}|^p &= \int_{B(0,R)} b_2(x)|u^+_{\lambda,\mu_n}|^p + \int_{B^C(0,R)} b_2(x)|u^+_{\lambda,\mu_n}|^p \\
&\leq \int_{B(0,R)} b_2(x)|u_0|^p + \int_{B^C(0,R)} b_2(x)|u^+_{\lambda,\mu_n}|^p \to \int_{\mathbb{R}^N} b_2(x)|u_0|^p.
\end{aligned}$$

Daí podemos concluir que

$$\int_{\mathbb{R}^N} b_2(x)|u^+_{\lambda,\mu_n}|^p \to \int_{\mathbb{R}^N} b_2(x)|u^+_0|^p \quad \text{quando} \;\; n \to \infty.$$

Ainda, quando $n \to \infty$, temos $-\mu_n \to -\infty$ que junto com a limitação de $||u^+_{\lambda,\mu_n}||$ e com a desigualdade (2.56), nos dá $u_0 = 0$.

Com isso e pelas condições (A), (B_1) e (B_2), temos

$$\begin{aligned}
0 &= J'_{\lambda,\mu_n}(u^+_{\lambda,\mu_n})u^+_{\lambda,\mu_n} = ||u^+_{\lambda,\mu_n}||^2_A - \int a_\lambda |u^+_{\lambda,\mu_n}|^q - \int b_{\mu_n}|u^+_{\lambda,\mu_n}|^p \\
&= ||u^+_{\lambda,\mu_n}||^2_A - \int a_\lambda |u^+_{\lambda,\mu_n}|^q - \int b_1 |u^+_{\lambda,\mu_n}|^p - \mu_n \int b_2 |u^+_{\lambda,\mu_n}|^p \\
&\geq ||u^+_{\lambda,\mu_n}||^2_A - \int |u^+_{\lambda,\mu_n}|^p + o_n(1) = J'_\infty(u^+_{\lambda,\mu_n})u^+_{\lambda,\mu_n} + o_n(1)
\end{aligned}$$

e usando o Lema 2.7

$$\begin{aligned}
0 &> J_{\lambda,\mu_n}(u^+_{\lambda,\mu_n})u^+_{\lambda,\mu_n} = \frac{1}{2}||u^+_{\lambda,\mu_n}||^2_A - \frac{1}{q}\int a_\lambda |u^+_{\lambda,\mu_n}|^q - \frac{1}{p}\int b_1 |u^+_{\lambda,\mu_n}|^p - \frac{\mu_n}{p}\int b_2 |u^+_{\lambda,\mu_n}|^p \\
&\geq \frac{1}{2}||u^+_{\lambda,\mu_n}||^2_A - \frac{1}{q}\int a_\lambda |u^+_{\lambda,\mu_n}|^q - \frac{1}{p}\int |u^+_{\lambda,\mu_n}|^p - \frac{\mu_n}{p}\int b_2 |u^+_{\lambda,\mu_n}|^p \\
&= J_\infty(u^+_{\lambda,\mu_n})u^+_{\lambda,\mu_n} + o_n(1). \qquad (2.57)
\end{aligned}$$

Suponhamos por absurdo que exista um $\delta_1 > 0$ tal que $||u^+_{\lambda,\mu_n}|| \geq \delta_1$ para todo n suficientemente grande.

Então, sabendo que $J'_\infty(u^+_{\lambda,\mu_n})u^+_{\lambda,\mu_n} = ||u^+_{\lambda,\mu_n}||^2_A - ||u^+_{\lambda,\mu_n}||^p_p + o_n(1)$, por (2.57) temos

$$||u^+_{\lambda,\mu_n}||^p_p \geq ||u^+_{\lambda,\mu_n}||^2_A + o_n(1) \geq \delta_1^2 + o_n(1) > \delta_1^2 > 0, \qquad (2.58)$$

ou seja, existe $\delta_2 > 0$ tal que $||u^+_{\lambda,\mu_n}||_p \geq \delta_2 > 0$ para todo n suficientemente grande. Sem perda de generalidade, assumamos $||u^+_{\lambda,\mu_n}|| \geq \delta_1$ e $||u^+_{\lambda,\mu_n}||_p \geq \delta_2 > 0$ para todo $n \in \mathbb{R}^N$.

Por outro lado, já sabemos que para todo $n \in \mathbb{N}$, existe um único $t_n > 0$ tal que $t_n u^+_{\lambda,\mu_n} \in M_\infty$ e $J_\infty(t_n u^+_{\lambda,\mu_n}) = \max_{t\geq 0} J_\infty(t u^+_{\lambda,\mu_n}) > 0$. Daí

$$\frac{t_n^2}{2}||u^+_{\lambda,\mu_n}||^2_A - \frac{t_n^p}{p}||u^+_{\lambda,\mu_n}||^p_p = \max_{t>0}\left(\frac{t^2}{2}||u^+_{\lambda,\mu_n}||^2_A - \frac{t^p}{p}||u^+_{\lambda,\mu_n}||^p_p\right) > 0, \tag{2.59}$$

de onde

$$\frac{t_n^2}{2}||u^+_{\lambda,\mu_n}||^2_A > \frac{t_n^p}{p}||u^+_{\lambda,\mu_n}||^p_p. \tag{2.60}$$

Como u^+_{λ,μ_n} é limitado em $H^1_A(\mathbb{R}^N)$ e $||u^+_{\lambda,\mu_n}||_p \geq \delta_2 > 0$ para todo $n \in \mathbb{R}^N$, temos a seguinte desigualdade

$$C > ||u^+_{\lambda,\mu_n}||^2_A > \frac{2t_n^{p-2}}{p}||u^+_{\lambda,\mu_n}||^p_p \geq \frac{2\delta_2^p}{p}t_n^{p-2} \geq 0. \tag{2.61}$$

Podemos dizer então que existe $T > 0$ tal que $t_n \leq T$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sem perda de generalidade assumamos que $t_n \to t_*$ quando $n \to \infty$. Se $t_* = 1$ então

$$J_\infty(t_n u^+_{\lambda,\mu_n}) - J_\infty(u^+_{\lambda,\mu_n}) = \frac{t_n^2 - 1}{2}||u^+_{\lambda,\mu_n}||^2_A - \frac{t_n^p - 1}{p}||u^+_{\lambda,\mu_n}||^p_p = o_n(1),$$

que juntamente com (2.57) nos dá

$$0 \geq J_\infty(u^+_{\lambda,\mu_n}) + o_n(1) = J_\infty(t_n u^+_{\lambda,\mu_n}) + o_n(1) \geq m_\infty + o_n(1),$$

o que é impossível para n suficientemente grande.

Se $t_* < 1$, então para n suficientemente grande teremos

$$\begin{aligned} m_\infty \leq J_\infty(t_n u^+_{\lambda,\mu_n}) &= t_n^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)||u^+_{\lambda,\mu_n}||^2_A \\ &< \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)||u^+_{\lambda,\mu_n}||^2_A, \end{aligned}$$

já que $t_n u^+_{\lambda,\mu_n} \in M_\infty$.

Note que, como $u^+_{\lambda,\mu_n} \rightharpoonup 0$ fraco em $H^1_A(\mathbb{R}^N)$ quando $n \to \infty$ e pela condição (A) temos

$$0 > -\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)\int a_\lambda |u^+_{\lambda,\mu_n}|^q \geq -C_1||a_\lambda||_{q^*}||u^+_{\lambda,\mu_n}||^q_p \geq -C_2||u^+_{\lambda,\mu_n}||^q_A S_p^{-q} \to 0$$

quando $n \to \infty$, de onde $\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)\int a_\lambda |u^+_{\lambda,\mu_n}|^q = o_n(1)$.

Com isso e pelo fato de $u^+_{\lambda,\mu_n} \in M^+$ temos

$$\begin{aligned}
0 &> J_{\lambda,\mu_n}(u^+_{\lambda,\mu_n}) - \frac{1}{p}J'_{\lambda,\mu_n}(u^+_{\lambda,\mu_n})u^+_{\lambda,\mu_n} \\
&= \frac{1}{2}||u^+_{\lambda,\mu_n}||^2_A - \frac{1}{q}\int a_\lambda |u^+_{\lambda,\mu_n}|^q - \frac{1}{p}\int b_\mu |u^+_{\lambda,\mu_n}|^p - \frac{1}{p}||u^+_{\lambda,\mu_n}||^2_A + \frac{1}{p}\int a_\lambda |u^+_{\lambda,\mu_n}|^q + \frac{1}{p}\int b_\mu |u^+_{\lambda,\mu_n}|^p \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)||u^+_{\lambda,\mu_n}||^2_A - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)\int a_\lambda |u^+_{\lambda,\mu_n}|^q \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)||u^+_{\lambda,\mu_n}||_A - o_n(1),
\end{aligned}$$

o que é impossível para n suficientemente grande.

Por fim, se $t_* > 1$, então por (2.57) e pelo fato de $t_n u^+_{\lambda,\mu_n} \in M_\infty$ obtemos

$$m_\infty \leq J_\infty(t_n u^+_{\lambda,\mu_n}) \leq t_n^p J_\infty(u^+_{\lambda,\mu_n}) \leq o_n(1),$$

o que também é um absurdo para n suficientemente grande. Logo concluímos que existe uma subsequência $\{\mu_n\}$ tal que $u^+_{\lambda,\mu_n} \to 0$ em $H^1_A(\mathbb{R}^N)$ quando $n \to \infty$, como queríamos demonstrar. $\square$

2.6 O caso da multiplicidade

Para começar a tratar da multiplicidade de soluções do problema em questão, precisaremos fazer algumas considerações. Observe que a equação

$$-\Delta_A u + u = a_\lambda(x)|u|^{q-2}u + b_\mu(x)|u|^{p-2}u \qquad (P_1)$$

é tal que $a_\lambda(x) \to 0$ e $b_\mu(x) \to 1$ quando $|x| \to \infty$. Acrescentando a hipótese de $A \to d$ com d constante quando $|x| \to \infty$, o problema (P_1) converge no infinito para o problema

$$-\Delta_d u + u = |u|^{p-2}u. \qquad (P_\infty),$$

onde $-\Delta_d = (-i\nabla + d)^2$.

Sendo assim, por um resultado de Ding e Liu [27, Lema 2.5], u é uma solução de (P_∞) se e somente se $v(x) := |u(x)| \in H^1$ é uma solução do problema

$$-\Delta v + v = v^{p-1}; \quad v > 0. \qquad (E_\infty)$$

Mais ainda, as equações (P_∞) e (E_∞) tem o mesmo nível de energia, isto é

$$J_\infty(u) = I_\infty(v) = m_\infty;$$

em que J_∞ e I_∞ são os respectivos funcionais associados aos problemas anteriores.

De acordo com Berestick, Lions [14] ou Kwong [44], a equação (E_∞) possui uma única solução z_0 simétrica, positiva e radial. Pelo [31, Teorema 2], para todo $\epsilon > 0$, existem A_ϵ, B_0 e C_ϵ positivos tais que

$$A_\epsilon \exp(-(1+\epsilon)|x|) \leq z_0(x) \leq B_0 \exp(-|x|) \tag{2.62}$$

e

$$|\nabla z_0(x)| \leq C_\epsilon \exp(-(1-\epsilon)|x|). \tag{2.63}$$

Conforme Kurata [43, Lema 4], definindo $w_0 = z_0 e^{-idx}$ temos que w_0 é solução de (P_∞), única, simétrica, positiva e radial. Assim teremos $J_\infty(w_0) = m_\infty$. Veja ainda que $z_0 = |w_0|$, que junto com (2.62) nos dá as seguintes desigualdades

$$A_\epsilon \exp(-(1+\epsilon)|x|) \leq |w_0(x)| \leq B_0 \exp(-|x|) \tag{2.64}$$

e

$$|\nabla w_0(x)| \leq C_\epsilon \exp(-(1-\epsilon)|x|). \tag{2.65}$$

A seguir, faremos algumas estimativas sobre os níveis mínimos de energia na Variedade de Nehari para provar a existência de uma segunda solução.

2.6.1 Existência de duas soluções

Já mostramos a existência de uma solução não nula $u^+_{\lambda,\mu} \in M^+_{\lambda,\mu}$ do problema (P_1) e agora queremos mostrar a existência de uma segunda solução não nula $u^-_{\lambda,\mu} \in M^-_{\lambda,\mu}$.

Afim de não sobrecarregar a notação, denotaremos $u^+_{\lambda,\mu} := u^+$. Considerando $J(u^+) = m^+$, $m^- = \inf_{u\in M^-_{\lambda,\mu}} J_{\lambda,\mu}(u)$ e $m_\infty = \inf_{u\in M_\infty} J_\infty(u) = J_\infty(w_0)$, faremos a seguinte estimativa para tais níveis de energia.

Proposição 2.5. *Para todo $\lambda > 0$ e $\mu > 0$ satisfazendo $\lambda^{p-2}(1+\mu||b_2||_\infty)^{2-q} < \Upsilon_0$, temos $m^- < m^+ + m^\infty$.*

Demonstração. Seja $S^{N-1} = \{x \in \mathbb{R}^N; |x| = 1\}$ e considere $w_0(x)$ um ponto crítico de $I_\infty(u)$ em que $I_\infty(w_0) = m^\infty$ e m^∞ é o mesmo definido anteriormente. Seja $e \in S^{N-1}$ e defina

$w_k(x) = w_0(x + ke)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Nosso objetivo é mostrar que

$$\sup_{t>0} J(u^+ + tw_k) < m^+ + m^\infty, \quad \text{para} \quad k \text{ suficientemente grande.} \tag{2.66}$$

Observe que a partir da afirmação acima, será suficiente mostrar que existe um certo t^* tal que $(u^+ + t^*w_k) \in M^-_{\lambda,\mu}$, para garantir a afirmação do lema.

Veja que se $t \to 0$, então $(u^+ + tw_k) \to u^+$ forte em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e uniformemente para $k \in \mathbb{N}$. Ainda, temos que $J(u^+) = m^+ < 0$ e como m^+ é ínfimo, segue que para todo $\epsilon > 0$, vai existir um

em particular para $0 < \epsilon < m_\infty$, de onde obtemos $J(u^+ + tw_k) < m^+ + m^\infty$ para todo $t \in [0, \underline{t})$ e para todo $k \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, $\frac{u^+}{t} + w_k \to w_k$ forte em $H^1_A(\mathbb{R}^N)$ e uniformemente para $k \in \mathbb{N}$ quando $t \to +\infty$. Desse modo, para todo $k \in \mathbb{N}$, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e pelas condições (A), (B_1) e (B_2) temos

$$\begin{aligned} J(u^+ + t_k w_k) &= \frac{t^2}{2}(||w_0||^2 + o_t(1)) - \frac{t^q}{q}\left(\int a_\lambda(x)|w_k|^q + o_t(1)\right) && (2.67)\\ &\quad -\frac{t^p}{p}\left(\int b_1(x)|w_k|^q + o_t(1)\right) && (2.68)\\ &\quad -\frac{\mu t^p}{p}\left(\int b_2(x)|w_k|^p + o_t(1)\right), && (2.69)\end{aligned}$$

onde $o_t(1) \to 0$ quando $t \to +\infty$. Lembramos que $q < 2 < p$ e ainda podemos observar que o último termo da expressão acima é sempre negativo, assim, precisamos analisar o comportamento de $\int b_1(x)|w_k|^q$. Note que pela condição (B_1), $\int b_1(x)|w_k|^q \geq C > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e alguma constante C independente de k. Desse modo

$$J(u^+ + tw_k) \to -\infty \quad \text{para} \ \ k \in \mathbb{N} \text{ quando} \quad t \to \infty. \tag{2.70}$$

Segue que para todo $\epsilon > 0$, vai existir um $\bar{t} > \underline{t}$, independente de k tal que $J(u^+ + t_k w_k) < m^+ + m^\infty$ para todo $t > \bar{t}$ e $k \in \mathbb{N}$.

Para completar a prova, resta mostrar que

$$\sup_{\underline{t} \leq t \leq \bar{t}} J(u^+ + tw_k) < m^+ + m^\infty, \quad \text{para } k \text{ suficientemente grande.} \tag{2.71}$$

Para demonstrar esse ponto observe que como u^+ é um ponto crítico de $J(u)$, temos

$$\begin{aligned}
J(u^+ + t_k w_k) &= \frac{1}{2}||u^+||_A^2 + tRe\left(\int (\nabla_A u^+ \overline{\nabla_A w_k} + u^+ \overline{w_k})dx\right) + \frac{1}{2}||tw_0||_A^2 \\
&-\frac{1}{q}\int a_\lambda(x)(|u^+ + tw_k|^q) \\
&-\frac{1}{p}\int b_1(x)|u^+ + tw_k|^p - \frac{1}{p}\int \mu b_2(x)|u^+ + tw_k|^p \\
&= J(u^+) + I_\infty(tw_0) + J'(u^+)(tw_k) + \frac{1}{q}\int a_\lambda(x)(|u^+|^q - |u^+ + tw_k|^q + q|u^+|^{q-1}(tw_k)) \\
&+\frac{1}{p}\int b_1(x)(|u^+|^p - |u^+ + tw_k|^p + |tw_k|^p + p|u^+|^{p-1}(tw_k)) \\
&+\frac{1}{p}\int (1 - b_1(x))|tw_k|^p - \frac{\mu}{p}\int (b_2(x)|u^+ + tw_k|^p \\
&-|u^+|^p - p|u^+|^{p-1}(tw_k)) = m_+ + m_\infty + \tilde{K},
\end{aligned}$$

em que $\tilde{K} = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$, com

$$\Gamma_1 = \frac{1}{q}\int a_\lambda(x)(|u^+|^q - |u^+ + tw_k|^q + q|u^+|^{q-1}(tw_k));$$

$$\Gamma_2 = -\frac{1}{p}\int b_1(x)(|u^+ + tw_k|^p - |u^+|^p - |tw_k|^p - p|u^+|^{p-1}(tw_k));$$

$$\Gamma_3 = \frac{1}{p}\int (1 - b_1(x))|tw_k|^p;$$

$$\Gamma_4 = -\frac{\mu}{p}\int b_2(x)(|u^+ + tw_k|^p - |u^+|^p - p|u^+|^{p-1}(tw_k)).$$

Para mostrar a afirmação (2.71), precisamos mostrar que $\tilde{K} < 0$ para k suficientemente grande para $t \in [\underline{t}, \overline{t}]$. Para isso faremos algumas estimativas sobre os valores de cada Γ_i, para $i = 1, 2, 3$ e 4.

Sabendo que $(t+s)^p - t^p - s^p - pt^{p-1}s \geq 0$ para $s > 0$ e $t > 0$, temos

$$(|u^+ tw_k|^p - |u^+|^p - |tw_k|^p - p|u^+|^{p-1}(tw_k)) \geq 0.$$

Com isso e pelo fato de $b_1 > 0$, obtemos

$$\Gamma_2 = -\frac{1}{p}\int b_1(x)(|u^+ tw_k|^p - |u^+|^p - |tw_k|^p - p|u^+|^{p-1}(tw_k)) \leq 0. \tag{2.72}$$

Para analisar Γ_3, note que usando (B_1) e (2.64)

$$\begin{aligned}
\Gamma_3 &= \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}(1-b_1(x))|tw_k|^p \leq c_0B_0^p\int_{\mathbb{R}^N}\exp(-r_{b_1}|x|)\exp(-p|x+le|)dx \\
&\leq c_0B_0^p\int_{|x|<l}\exp(-\min\{r_{b_1},p\}(|x|+|x+le|))dx \\
&\quad +c_0B_0^p\int_{|x|\geq l}\exp(-\min\{r_{b_1},p\}(|x|+|x+le|))dx \\
&\leq c_0B_0^pl^n\int_{|x|<l}\exp(-\min\{r_{b_1},p\}l(|x|+|x+e|))dx \\
&\quad +c_0B_0^p\exp(-\min\{r_{b_1},p\}l)\int_{|x|\geq l}\exp(-\min\{r_{b_1},p\}(|x+le|))dx \\
&\leq c_0B_0^pl^n\int_{|x|<l}\exp(-\min\{r_{b_1},p\}l)dx + C_0B_0^p\exp(-\min\{r_{b_1},p\}l) \\
&\quad +C_0B_0^pl^n\exp(-\min\{r_{b_1},p\}l) \quad \text{para} \quad l\geq 1. \qquad (2.73)
\end{aligned}$$

Agora, usando um argumento de Gidas, Ni e Nirenberg [31] e a expansão de Taylor, temos

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \frac{1}{q}\int a_\lambda(x)(|u^+|^q-|u^++tw_k|^q+|u^+|^q+q|u^+|^{q-1}(tw_k)) \\
&= \frac{1}{q}\int a_\lambda(x)\left(-q\int_0^{tw_k}|u^++\eta|^{q-1}d\eta+q|u^+|^{q-1}(tw_k)\right) \\
&= \int -a_\lambda(x)\left(\int_0^{tw_k}|u^++\eta|^{q-1}d\eta - tw_k|u^+|^{q-1}\right).
\end{aligned}$$

Note que $\int_0^{tw_k}|u^++\eta|^{q-1}d\eta = -|u^+|^{q-1}\eta|_0^{tw_k} = -tw_k|u_0|^{q-1}$. Ainda, como $-a_\lambda(x) = -\lambda a_+(x)-a_-(x)\leq|a_-|$ segue

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &\leq \int\left(|a_-|\int_0^{tw_k}((u^++\eta)^{q-1}-(u^+)^{q-1})d\eta\right) \\
&\leq \int\left(|a_-|\int_0^{tw_k}\eta^{q-1}d\eta\right) \\
&\leq \frac{\bar{t}^q}{q}\int_{\mathbb{R}^N}|a_-|w_k^q. \qquad (2.74)
\end{aligned}$$

Assim, pela condição (A_2) e pelo mesmo argumento utilizado em (2.73) obtemos

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &\leq \frac{\bar{t}^q}{q}\int_{\mathbb{R}^N}|a_-|w_k^q \\
&\leq \hat{c}B_0^q\frac{\bar{t}^q}{q}\int_{\mathbb{R}^N}\exp(-r_{a_-}|x|)\exp(-q|x+ke|)dx \\
&\leq \hat{c}B_0^qk^n\frac{\bar{t}^q}{q}\exp(-\min\{r_{a_-},q\}k)dx \quad \text{para} \quad k\geq 1. \qquad (2.75)
\end{aligned}$$

Usando argumentos semelhantes aos usado em (2.74) com as condições (B_1) e (B_2), por

Gidas Ni Nirenberg [31], pela expansão de Taylor e o fato de $\mu > 0$, temos

$$\begin{aligned}\Gamma_4 &= -\frac{\mu}{p}\int b_2(x)(|u^+ + tw_k|^p - |u^+|^p - p|u^+|^{p-1}(tw_k)) \\ &\geq -\frac{\mu\bar{t}^p}{p}\int |b_2|w_k^p. \end{aligned} \tag{2.76}$$

Usando (B_2) obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |b_2|w_k^p &= \int_{\mathbb{R}^N} b_2(x-ke)w_0^p dx \geq \left(\min_{x\in B^N(0,1)} w_0^p(x)\right)\int_{B^N(0,1)} b_2(x-ke)dx \\ &\geq \left(\min_{x\in B^N(0,1)} w_0^p(x)\right) d_0 \int_{B^N(0,1)} \exp(-r_{b_2}|x-ke|)dx \\ &\geq \left(\min_{x\in B^N(0,1)} w_0^p(x)\right) d_0 \exp(-r_{b_2}k|e|)\int_{B^N(0,1)} \exp(-r_{b_2}|x-ke|)dx \\ &= \left(\min_{x\in B^N(0,1)} w_0^p(x)\right) D_0 \exp(-r_{b_2}k). \end{aligned} \tag{2.77}$$

Usando (2.72)-(2.77) obtemos

$$\begin{aligned} J(u^+ + t_k w_k) &\leq m_+ + m_\infty + \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 \\ &\leq m_+ + m_\infty + \hat{c}B_0^q k^n \frac{\bar{t}^q}{q}\exp(-\min\{r_{a_-}, q\}k)dx \\ &+ C_0 B_0^p k^n \exp(-\min\{r_{b_1}, p\}k) \\ &- \frac{\mu\bar{t}^p}{p}\left(\min_{x\in B^N(0,1)} w_0^p(x)\right) D_0 \exp(-r_{b_2}k). \end{aligned}$$

Queremos $\tilde{K} = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 < 0$, e como é a exponencial que predomina, precisamos para isso que $r_{b_2}k < \min\{r_{a_-}, p, r_{b_1}, q\}k$, ou seja,

$$r_{b_2} < \min\{r_{a_-}, p, r_{b_1}, q\} = \min\{r_{a_-}, r_{b_1}, q\},$$

o que de fato acontece pela hipótese (B_2). Desse modo, vai existir k_1 suficientemente grande, tal que para todo $k > k_1$, teremos $\tilde{K} < 0$ nos dando

$$J(u^+ + t_k w_k) \leq m_+ + m_\infty, \text{ para todo } t > 0 \text{ e } k > k_1.$$

Por fim, como já foi observado, precisamos mostrar que existe um certo t^* tal que $(u^+ + t^* w_k) \in M^-_{\lambda,\mu}$, para garantir a afirmação do lema.

Sejam

$$U_1 = \left\{ u \in H_A^1(\mathbb{R}^N); \frac{1}{||u||_A} t^- \left(\frac{u}{||u||_A} \right) > 1 \right\} \cup \{0\};$$

$$U_2 = \left\{ u \in H_A^1(\mathbb{R}^N); \frac{1}{||u||_A} t^- \left(\frac{u}{||u||_A} \right) < 1 \right\}.$$

Desse modo $M_{\lambda,\mu}^-$ separa $H_A^1(\mathbb{R}^N)$ em duas componentes conexas U_1 e U_2. Ainda, pelo que vimos no Lema 2.5 segue que $H_A^1(\mathbb{R}^N) \setminus M_{\lambda,\mu}^- = U_1 \cup U_2$.

Se $u \in M_{\lambda,\mu}^+$, temos que $t^+(u) = 1$ e pelo o item (ii) do Lema 2.4, teremos

$$1 < t_{max,\mu}(u) < t^-(u). \tag{2.78}$$

como $t^-(u) = \frac{1}{||u||_A} t^-(\frac{u}{||u||_A})$, segue que $M_{\lambda,\mu}^+ \subset U_1$.

Afirmamos que existe $t_0 > 0$ tal que $u_{\lambda,\mu}^+ + t_0 w_k \ \in \ U_2$.

Para mostrar isso, vejamos primeiramente que existe uma constante $c > 0$ tal que $0 < t^-(\frac{u^+ + tw_k}{||u^+ + tw_k||_A}) < c$ para cada $t \geq 0$. De fato, suponha o contrário por absurdo, ou seja, que exista uma sequência $\{t_n\}$ tal que $t_n \to \infty$ e $t^-(\frac{u^+ + t_n w_k}{||u^+ + t_n w_k||_A}) \to \infty$ quando $n \to \infty$. Chamando $v_n = \frac{u^+ + t_n w_k}{||u^+ + t_n w_k||_A}$, temos $||v_n||_A = 1$. Como $t^-(v_n)v_n \in M_{\lambda,\mu}^-$, usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} b_\mu v_n^p dx &= \int_{\mathbb{R}^N} b_\mu \left(\frac{u^+ + t_n w_k}{||u^+ + t_n w_k||_A} \right)^p dx \\
&= \left(\frac{1}{||\frac{u^+}{t^n} + w_k||_A} \right)^p \int_{\mathbb{R}^N} b_\mu \left(\frac{u^+}{t^n} + w_k \right)^p dx \\
&\to \frac{\int_{\mathbb{R}^N} b_\mu w_k^p dx}{||w_k||_A^p} \text{ quando } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Desse modo obtemos

$$\begin{aligned}
J(t^-(v_n)v_n) &= \frac{[t^-(v_n)]^2}{2} - \frac{[t^-(v_n)]^q}{q} \int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda v_n^q dx \\
&\quad - \frac{[t^-(v_n)]^p}{p} \int_{\mathbb{R}^N} b_\mu v_n^p dx \to -\infty \text{ quando } n \to \infty,
\end{aligned}$$

mas isso contradiz o fato do funcional ser limitado inferiormente na variedade de Nehari. Assim, concluímos que $0 < t^-(v_n) < c$ para uma constante c positiva.

Defina

$$t_0 = \left(\frac{p-2}{2p\alpha_\infty} c^2 - ||u^+||_A^2 \right)^{\frac{1}{2}} + 1.$$

Note que

$$\begin{aligned}||u^+ + t_0 w_k||_A^2 &= ||u^+||_A^2 + t_0^2||w_k||_A^2 + o(1)\\ &> ||u^+||_A^2 + |c^2 - ||u^+||_A^2| + o(1)\\ &> c^2 + o(1) > \left[t^-\left(\frac{u^+ + t_0 w_k}{||u^+ + t_0 w_k||_A}\right)\right]^2 \quad \text{quando} \quad k \to \infty.\end{aligned}$$

Assim, vai existir $k_2 > k_1$ tal que para todo $k > k_2$,

$$\frac{1}{||u^+ + t_0 w_k||_A} t^-\left(\frac{u^+ + t_0 w_k}{||u^+ + t_0 w_k||_A}\right) < 1$$

ou seja, $u^+ + t_0 w_k \in U_2$.

Defina agora um caminho $\gamma_l(s) = u^+ + st_0 w_k$ para $s \in [0,1]$. Desse modo

$$\gamma_l(0) = u^+ \quad \in \quad U_1, \quad \text{e} \quad \gamma_l(s) = u^+ + t_0 w_k \quad \in \quad U_2.$$

Sendo $\frac{1}{||u||_A} t^-(\frac{u}{||u||_A})$ uma função contínua para valores de u não nulos e sendo $\gamma_l([0,1])$ um caminho conexo, segue que vai existir um certo $s_l(0,1)$ tal que $u^+ + s_l t_0 w_k \in M^-_{\lambda,\mu}$, como queríamos demonstrar.

$\square$

Como foi dito anteriormente $M^\pm_{\lambda,\mu}$ é uma variedade C^1 para valores de λ apropriados, assim como argumentado em [20]. A partir disso e do resultado que acabamos de demonstrar, estamos prontos para tratar da existência da segunda solução do problema (P_1) em $M^-_{\lambda,\mu}$.

Proposição 2.6. *Para cada $\lambda > 0$ e $\mu \geq 0$, com $\lambda^{p-2}(1 + \mu||b||_\infty)^{2-q} < \Upsilon_0$, existe $u^-_{\lambda,\mu} \in M^-_{\lambda,\mu}$ tal que $J_{\lambda,\mu}(u^-_{\lambda,\mu}) = m^-_{\lambda,\mu}$ e $J'_{\lambda,\mu}(u^-_{\lambda,\mu}) = 0$ em H^{-1}_A.*

Demonstração. Pelos Lemas 2.3, 2.6 e pelo Teorema 4.7 vai existir uma sequência $\{u_n\} \subset M^-_{\lambda,\mu}$ satisfazendo $J_{\lambda,\mu}(u_n) \to \inf_{u \in M_{\lambda,\mu}} J_{\lambda,\mu}(u) = m^-_{\lambda,\mu}$ e $J'_{\lambda,\mu}(u_n) = o_n(1)$ forte em H^{-1}_A quando $n \to \infty$.

Como $m^-_{\lambda,\mu} < m^+_{\lambda,\mu} + m_\infty$, pelo Lema 2.11(ii), existe uma subsequência u_n e $u^-_{\lambda,\mu} \in M^-_{\lambda,\mu}$ tal que $u_n = u^-_{\lambda,\mu} + o_n(1)$ forte em $H^1_A(\mathbb{R}^N)$ quando $n \to \infty$. Segue que $J_{\lambda,\mu}(u^-_{\lambda,\mu}) = m^-_{\lambda,\mu}$ e $J'_{\lambda,\mu}(u_n) = 0$ em H^{-1}_A. $\square$

Com esse resultado podemos então concluir a prova do Teorema 1.1.

Prova do Teorema 1.1. Pelos Teoremas 2.3 e 2.6 podemos concluir que o problema (P_1) tem pelo menos duas soluções $u^+_{\lambda,\mu}$ e $u^-_{\lambda,\mu}$ com $J_{\lambda,\mu}(u^+_{\lambda,\mu}) < 0 < J_{\lambda,\mu}(u^-_{\lambda,\mu})$. □

2.7 Terceira Solução

2.7.1 Algumas considerações

Para obtermos a terceira solução do problema (P_1), precisaremos de alguns resultados que faremos a seguir. Para isso, destacamos o conjunto a seguir definido para $\lambda = 0$ e $\mu = 0$

$$M^-_{a_0,b_0} = \{u \in H^1_A(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} : \langle J'_{a_0,b_0}(u), u\rangle = 0\}$$

onde

$$\begin{aligned} J_{a_0,b_0} &= \frac{1}{2}||u||^2_A - \frac{1}{q}\int a_0(x)|u|^q dx - \frac{1}{p}\int b_0(x)|u|^p dx \\ &= \frac{1}{2}||u||^2_A - \frac{1}{q}\int a_-(x)|u|^q dx - \frac{1}{p}\int b_1(x)|u|^p dx. \end{aligned}$$

Lema 2.12. *Temos*

$$\inf_{u\in M^-_{a_0,b_0}} J_{a_0,b_0}(u) = \inf_{u\in M^\infty} J_\infty(u) = m^\infty.$$

Demonstração. Seja w_k como definido anteriormente. Pelo fato de estarmos trabalhando com $\lambda = 0$, temos que $a(x) = \lambda a_+(x) + a_-(x) = a_-(x) < 0$ de onde $\int_{\mathbb{R}^N} a_-|t^-(w_k)w_k|^q dx \leq 0$, daí pelo Lema 2.4(i) existe um único $t^-(w_k) > \left(\frac{2-q}{p-q}\right)^{\frac{1}{p-2}}$ tal que $t^-(w_k)w_k \in M^-_{a_0,b_0}$ para todo $k > 0$, ou seja, $J'_{a_0,b_0}(t^-(w_k)w_k) = 0$, nos dando

$$||t^-(w_k)w_k||^2_A = \int_{\mathbb{R}^N} a_-|t^-(w_k)w_k|^q dx + \int_{\mathbb{R}^N} b_-|t^-(w_k)w_k|^p dx. \tag{2.79}$$

Como w_0 é solução de (E_∞) e lembrando que o funcional associado à (E_∞) é dado por $I(u) = \frac{1}{2}||u||^2_A - \frac{1}{p}||u||^p_p$, e $I'(u) = ||u||^2_A - ||u||^p_p$ temos

$$I'(w_0)w_0 = ||w_0||^2_A - ||w_0||^p_p = 0 \Rightarrow ||w_0||^2_A = ||w_0||^p_p,$$

de onde

$$\begin{aligned} m_\infty &= I(w_0) = \frac{1}{2}||w_0||_A^2 - \frac{1}{p}||w_0||_p^p \\ &= \frac{1}{2}||w_0||_A^2 - \frac{1}{p}||w_0||_A^2 = \frac{p-2}{2p}||w_0||_A^. \end{aligned}$$

Sendo w_0 solução de (E_∞) segue que $w_k(x) = w_0(x + ke)$ também o é, com isso e por $I'(w_0)w_0 = 0$, teremos $I'(w_k)w_k = 0$. Daí

$$||w_k||_A^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |w_k|^q dx = \frac{2p}{p-2} m^\infty \text{ para todo } k \geq 0. \tag{2.80}$$

Sabe-se que w_n é limitada em $L^{r'}$ e $w_n \to 0$ q.t.p., pelo Teorema [34, Teorema 13.44] que $w_n \rightharpoonup 0$ fraco em $L^{r'}$. Como pela condição (A), $a_- \in (L^{r'})' = L^r$ obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} a_-|w_k|^q dx \to 0 \text{ quando } k \to \infty. \tag{2.81}$$

Além disso, pelas condições (B_1) e (B_2)

$$\int_{\mathbb{R}^N} (1-b_1)|w_k|^q dx = \int_{B(0,R)} (1-b_1)|w_k|^q dx + \int_{B^c(0,R)} (1-b_1)|w_k|^q dx \to 0 \text{ quando } w_k \to \infty. \tag{2.82}$$

Por (2.79), (2.81) e (2.82) temos que $t^-(w_k) \to 1$ quando $k \to \infty$. Assim

$$\lim_{k\to\infty} J_{a_0,b_0}(t^-(w_k)w_k) = \lim_{k\to\infty} J_\infty(t^-(w_k)w_k) = m_\infty.$$

Desse modo

$$m_\infty = \inf_{u \in M^\infty} J_\infty(u) = \lim_{k\to\infty} J_\infty(t^-(w_k)w_k) \geq \inf_{u \in M^-_{a_0,b_0}} J_{a_0,b_0}(u). \tag{2.83}$$

Temos também que para $u \in M_{a_0,b_0}$, pelo Lema 2.4(i), $J_{a_0,b_0}(u) = \sup_{t\geq 0} J_{a_0,b_0}(tu)$, e mais, existe um único $t^\infty > 0$ tal que $t^\infty u \in M^\infty$. Assim

$$\begin{aligned} J_{a_0,b_0}(t^\infty u) &= \frac{1}{2}||t^\infty u||_A^2 - \frac{(t^\infty)^q}{q}\int_{\mathbb{R}^N} a_-|u|^q dx - \frac{(t^\infty)^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N} b_1|u|^p dx \\ &\geq \frac{1}{2}||t^\infty u||_A^2 - \frac{(t^\infty)^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx \\ &= J_\infty(t^\infty u) \geq m_\infty, \end{aligned}$$

de onde

$$\inf_{u\in M_{a_0,b_0}} J_{a_0,b_0}(t^{\infty}u) \geq m_{\infty}. \tag{2.84}$$

Por (2.83) e (2.84)

$$\inf_{u\in M_{a_0,b_0}} J_{a_0,b_0}(u) = \inf_{u\in M^{\infty}} J_{\infty}(u) = m^{\infty}.$$

□

O resultado a seguir mostra que o ínfimo não é assumido em M_{a_0,b_0}.

Lema 2.13. *O problema* (P_{a_0,b_0}) *não admite nenhuma solução* u_0 *tal que* $J_{a_0,b_0}(u_0) = \inf_{u\in M_{a_0,b_0}} J_{a_0,b_0}(u)$.

Demonstração. Suponha por absurdo que exista u_0 tal que $J_{a_0,b_0}(u_0) = \inf_{u\in M_{a_0,b_0}} J_{a_0,b_0}(u)$. Desse modo, pelo Lema 2.4(i), $J_{a_0,b_0}(u_0) = \sup_{t\geq 0} J_{a_0,b_0}(tu_0)$, e mais, existe um único $t_{u_0} > 0$ tal que $t_{u_0}u_0 \in M^{\infty}$. Assim, por (A) e pelo Lema anterior

$$\begin{aligned}
m^{\infty} &= \inf_{u\in M^{\infty}} J_{\infty}(u) = \inf_{u\in M^{-}_{a_0,b_0}} J_{a_0,b_0}(u) = J_{a_0,b_0}(u_0) \\
&\geq J_{a_0,b_0}(t_{u_0}u_0) \geq J_{\infty}(t_{u_0}u_0) - \frac{t^q_{u_0}}{q}\int_{\mathbb{R}^N} a_-|u_0|^q dx \\
&\geq m^{\infty} - \frac{t^q_{u_0}}{q}\int_{\mathbb{R}^N} a_-|u_0|^q dx.
\end{aligned}$$

Isso implica que $\int_{\mathbb{R}^N} a_-|u|^q dx = 0$ e ainda que $u_0 \equiv 0$ onde $a_-(x) \neq 0$. Pela hipótese (A) o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^N$ em que $a_-(x) > 0$ tem medida positiva, o que implica que o conjunto onde $u_0 \equiv 0$ tem medida positiva.

Temos ainda que $m^{\infty} = \inf_{u\in M^{\infty}} J_{\infty}(u) = J_{\infty}(t_{u_0}u_0)$, ou seja, $t_{u_0}u_0$ é solução de (E_{∞}), e mais, usando o mesmo argumento utilizado na demonstração do Teorema 2.1(ii) obtemos que $|t_{u_0}u_0|$ é solução positiva de (E_{∞}). Isso contradiz $u_0 \equiv 0$ em um conjunto de medida positiva, completando a prova. □

Lema 2.14. *Seja* $\{u_n\}$ *uma sequência minimizante em* M_{a_0,b_0} *para o funcional* J_{a_0,b_0}. *Então,*

(i) $\int_{\mathbb{R}^N} a_-|u_n|^q dx = o(1)$;

(ii) $\int_{\mathbb{R}^N} (1-b_1)|u|^p dx = o(1)$.

Além disso, $\{u_n\}$ *é uma sequência* $(PS)_{m_\infty}$ *em* $H^1_A(\mathbb{R}^N)$ *para* J_{∞}.

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe um único $t_n > 0$ tal que $t_nu_n \in M^{\infty}$, isto é

$$J'_{\infty}(t_nu_n)t_nu_n = t_n^2||u_n||_A^2 - t_n^p\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p dx = 0 \;\;\Rightarrow\;\; t_n^2||u_n||_A^2 = t_n^p\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p dx.$$

Agora, pelo Lema 2.4(i)

$$\begin{aligned}\sup_{t\geq 0} J_{a_0,b_0}(tu_n) &= J_{a_0,b_0}(u_n) \geq J_{a_0,b_0}(t_nu_n)\\ &= J_\infty(t_nu_n) + \frac{t_n^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N}(1-b_1)|u_n|^p dx - \frac{t_n^q}{q}\int_{\mathbb{R}^N} a_-|u_n|^q dx\\ &\geq m_\infty + \frac{t_n^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N}(1-b_1)|u_n|^p dx - \frac{t_n^q}{q}\int_{\mathbb{R}^N} a_-|u_n|^q dx.\end{aligned}$$

Sendo $\{u_n\}$ uma sequência minimizante em M_{a_0,b_0} para o funcional J_{a_0,b_0} e pelo Lema 2.12 temos

$$J_{a_0,b_0}(u_n) = \inf_{u\in M^-_{a_0,b_0}} J_{a_0,b_0}(u) + o(1) = m^-_{a_0,b_0} + o(1) = m^\infty + o(1).$$

Daí

$$\frac{t_n^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N}(1-b_1)|u_n|^p dx = o(1)$$

e

$$\frac{t_n^q}{q}\int_{\mathbb{R}^N} a_-|u_n|^q dx = o(1).$$

Para garantir o resultado a partir destas duas igualdades acima, precisamos mostrar que $t_n \nrightarrow 0$, isto é, que existe $c_0 > 0$ tal que $t_n > c_0$ para todo n.

Suponhamos por absurdo que $t_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Como $J_{a_0,b_0}(u_n) = m^\infty + o(1)$, pelo Lema 2.6, $||u_n||_A$ é uniformemente limitada e por isso $||t_nu_n||_A \to 0$ quando $n \to \infty$.

Como $t_nu_n \in M^\infty$, segue que

$$J_\infty(t_nu_n) = \left(\frac{p-2}{2p}\right)||t_nu_n||_A^2 \to 0,$$

o que contradiz o fato $J_\infty(t_nu_n) \geq m^\infty > 0$. Desse modo

$$\int_{\mathbb{R}^N}(1-b_1)|u_n|^p dx = 0(1)$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} a_-|u_n|^q dx = 0(1).$$

Isso implica que $||u_n||_A^2 = \int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^p dx + o(1)$ e assim $J_\infty(u_n) = m^\infty + o(1)$.

Podemos concluir a última afirmação do Lema usando a volta do [51, Lema7], de onde obtemos que $\{u_n\}$ é uma sequência $(PS)_{m^\infty}$ em $H_A^1(\mathbb{R}^N)$ para J_∞.

□

O resultado a seguir é de fundamental importância para a obtenção da terceira solução.

Lema 2.15. *Considere o conjunto* $\mathcal{C} = \{u \in M^-_{a_0,b_0}; J_{a_0,b_0}(u) < m_\infty + l_0\}$*. Existe um* $l_0 > 0$ *tal que*

$$\int \frac{x}{|x|}(|\nabla u|^2 + u^2) \neq 0$$

para todo $u \in \mathcal{C}$*.*

Demonstração. Suponha por absurdo que não exista tal l_0, então, vai existir uma sequência $\{l_n\}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $u \in M^-_{a_0,b_0}$ com $J_{a_0,b_0}(u) \leq m_\infty + l_n$, mas $\int \frac{x}{|x|}(|\nabla u|^2 + u^2) = 0$. Podemos assim, tomar $\{u_n\} \in M^-_{a_0,b_0}$ de modo que $J_{a_0,b_0}(u) = m_\infty + o(1) \leq m_\infty + l_0$. Com isso e pelo Lema 2.14 segue que $\{u_n\}$ é uma $(PS)_{m_\infty}$-sequência em $H^1_A(\mathbb{R}^N)$ para J_∞.

Usando o Lema 2.6 vai existir uma subsequência $\{u_n\}$ e $u_0 \in H^1_A(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \rightharpoonup u_0$ fraco em $H^1_A(\mathbb{R}^N)$. Pelo Lema de Splitting como em [30, Lema2.3], vai existir uma sequência $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^N$, e uma solução positiva $w_0 \in H^1_A(\mathbb{R}^N)$ de (E^∞) tal que

$$||u_n(x) - w_0(x - x_n)||_A \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty. \tag{2.85}$$

Mostraremos agora que $|x_n| \to \infty$ quando $n \to \infty$. De fato, suponha o contrário, então teremos $\{x_n\}$ limitada e vai existir $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tal que $x_n \to x_0$. Daí, por (2.85)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} a_-|u_n|^q dx &= \int_{\mathbb{R}^N} a_-(x)|w_0(x - x_n)|^q dx + o(1) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} a_-(x + x_n)|w_0(x)|^q dx + o(1) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} a_-(x + x_0)|w_0(x)|^q dx + o(1), \end{aligned}$$

o que é um absurdo pelo resultado obtido no Lema 2.14. Então, podemos assumir que $\frac{x_n}{|x_n|} \to e$ quando $n \to \infty$, onde $e \in S^{N-1}$. Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{x}{|x|}(|\nabla u_n|^2 + u_n^2)dx = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{x + x_n}{|x + x_n|}(|\nabla w_n|^2 + w_n^2)dx \\ &= \frac{2p}{p-2} m_\infty e + o(1). \end{aligned}$$

Chegando em uma contradição. Isso nos leva ao resultado que queríamos demonstrar. □

Nos próximos lemas estabeleceremos algumas estimativas necessárias para chegarmos ao último resultado desse capítulo. Para isso, faremos as seguintes considerações.

Por (2.11), (2.25) e Lema 2.4, para cada $u \in M^-_{a_\lambda,b_\mu}$ existe um único $t_0^-(u) > 0$ tal que

$t_0^-(u)u \in M_{a_0,b_0}$ e

$$t_0^-(u) > t_{\max}(u) = \left(\frac{(2-q)||u||_A^2}{(p-q)\int_{\mathbb{R}^N} b_\mu(x)|u|^p dx} \right)^{\frac{1}{p-2}} > 0.$$

Recordamos que

$$\Upsilon_0 = (2-q)^{2-q} \left(\frac{p-2}{||a_+||_{q'}} \right)^{p-2} \left(\frac{S_p}{p-q} \right)^{p-q}.$$

Além disso, considere

$$\theta_\mu = \left[\frac{(p-q)(1+\mu||b/a||_\infty)}{2-q} \left(1 + ||a_-||_{q^*} \left(\frac{(p-q)(1+\mu||b/a||_\infty)}{(2-q)S_p^{\frac{p-q}{2-q}}} \right)^{\frac{2-q}{p-2}} \right) \right]^{\frac{p}{p-2}}.$$

A partir disso apresentamos os resultados a seguir.

Lema 2.16. *Para cada $\lambda > 0$ e $\mu > 0$ com $\lambda^{p-2}(1+\mu||b_2||_\infty)^{2-q} < (q/2)^{p-2}\Upsilon_0$, temos*

(i) $[t_0^-(u)]^p < \theta_\mu$ *para todo* $u \in M^-_{a_\lambda,b_\mu}$*;*

(ii) $\int_{\mathbb{R}^N} b_0|u|^p dx \geq \frac{pq}{\theta_\mu(p-q)} m^\infty$ *para todo* $u \in M^-_{a_\lambda,b_\mu}$.

Demonstração. (i) Para $u \in M_{a_\lambda,b_\mu}$ temos

$$||u||_A^2 - \int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda |u|^q dx - \int_{\mathbb{R}^N} b_\mu |u|^p dx = 0.$$

Em particular, como $u \in M^-_{a_\lambda,b_\mu}$ segue que $F_u''(1) < 0$ de onde

$$(2-q)||u||_A^2 < (p-q)\int_{\mathbb{R}^N} b_\mu |u|^p dx.$$

Vamos a partir daqui dividir em dois casos: primeiro, se $t_0^-(u) < 1$. Como $\theta_\mu > 1$ para todo $\mu > 0$ temos $t_0^-(u) < 1 < \theta_\mu$, como desejado.

Agora, se $t_0^-(u) \geq 1$,

$$\begin{aligned} [t_0^-(u)]^p \int_{\mathbb{R}^N} b_0|u|^p dx &= [t_0^-(u)]^2||u||_A^2 - [t_0^-(u)]^q \int_{\mathbb{R}^N} a_-|u|^q dx \\ &= [t_0^-(u)]^2 \left(||u||_A^2 - [t_0^-(u)]^{q-2} \int_{\mathbb{R}^N} a_-|u|^q dx \right) \\ &\leq [t_0^-(u)]^2 \left(||u||_A^2 - \int_{\mathbb{R}^N} a_-|u|^q dx \right) \end{aligned}$$

daí

$$[t_0^-(u)]^{p-2} \leq \frac{||u||_A^2 - \int_{\mathbb{R}^N} a_-|u|^q dx}{\int_{\mathbb{R}^N} b_0|u|^p dx}. \tag{2.86}$$

Além disso, por (2.11) e pela desigualdade de Sobolev,

$$\begin{aligned}
||u||_A^2 &< \frac{p-q}{2-q}\int_{\mathbb{R}^N} b_\mu |u|^p dx \leq \frac{p-q}{2-q}(1+\mu||b_2/b_1||_\infty)\int_{\mathbb{R}^N} b_0|u|^p dx \\
&= \frac{(p-q)(1+\mu||b_2/b_1||_\infty)}{2-q}||u||_p^p \\
&= \frac{(p-q)(1+\mu||b_2/b_1||_\infty)}{(2-q)S_p^{p/2}}||u||_A^p. \qquad (2.87)
\end{aligned}$$

Assim

$$||u||_A^{p-2} \geq \left(\frac{(2-q)S_p^{p/2}}{(p-q)(1+\mu||b_2/b_1||_\infty)}\right)^{\frac{1}{p-2}}.$$

Como consequência dessas três desigualdades apresentadas acima obtemos

$$\begin{aligned}
[t_0^-(u)]^{p-2} &\leq \frac{||u||_A^2 - \int_{\mathbb{R}^N} a_-|u|^q dx}{\int_{\mathbb{R}^N} b_0|u|^p dx} = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^N} b_0|u|^p dx}||u||_A^2\left(1+\frac{\int_{\mathbb{R}^N} a_-|u|^q dx}{||u||_A^2}\right) \\
&\leq (1+\mu||b_2/b_1||_\infty)\left(\frac{p-q}{2-q}\right)\left(1+\frac{\int_{\mathbb{R}^N} a_-|u|^q dx}{||u||_A^2}\right) \\
&\leq (1+\mu||b_2/b_1||_\infty)\left(\frac{p-q}{2-q}\right)\left(1+\frac{||a_-||_{q^*}}{||u||_A^{2-q}S_p^{q/2}}\right) \\
&\leq (1+\mu||b_2/b_1||_\infty)\left(\frac{p-q}{2-q}\right)\left(1+||a_-||_{q^*}\left(\frac{(p-q)(1+\mu||b_2/b_1||_\infty)}{(2-q)S_p^{\frac{p-q}{2-q}}}\right)^{\frac{2-q}{p-2}}\right) = \theta_\mu^{\frac{p-2}{p}}.
\end{aligned}$$

Concluindo com isso que $[t_0^-(u)]^p \leq \theta_\mu$, para toda $u \in M^-_{a_\lambda,b_\mu}$.

(ii) Usaremos nessa parte o resultado mostrado no Lema 2.12 que diz que $\inf_{u\in M^-_{a_0,b_0}} J_{a_0,b_0}(u) = m^\infty$. Veja que, para $t_0^-(u)u \in M^-_{a_0,b_0}$,

$$\begin{aligned}
m^\infty &= J_{a_0,b_0}(t_0^-(u)u) \\
&= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)[t_0^-(u)]^2||u||_A^2 + \left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)[t_0^-(u)]^p\int_{\mathbb{R}^N} b_-|u|^p dx \\
&< \left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)[t_0^-(u)]^p\int_{\mathbb{R}^N} b_-|u|^p dx,
\end{aligned}$$

de onde obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} b_-|u|^p dx \geq \frac{1}{[t_0^-(u)]^p}\left(\frac{pq}{p-q}\right)m^\infty.$$

Sabendo que $[t_0^-(u)]^{p-2} \leq \theta_\mu^{\frac{p-2}{p}}$, podemos então concluir que para $u \in M^-_{a_0,b_0}$

$$\int_{\mathbb{R}^N} b_-|u|^p dx \geq \frac{pq}{\theta_\mu(p-q)}m^\infty.$$

$\square$

No próximo capítulo usaremos um resultado de teoria de categoria para obter uma terceira solução. Para isso precisaremos de construir uma certa homotopia e o resultado a seguir nos mune de ferramentas para essa construção.

Antes de enunciá-lo, para garantir que o conjunto de funções $u \in H_A^1(\mathbb{R}^N)$ que satisfazem as condições do lema não é um conjunto vazio, lembramos que no final da Proposição 2.5 mostramos que existe $k_2 > 0$ tais que para todo $k > k_2$, vai existir um $t^* > 0$ tal que $u_{\lambda,\mu}^+ + t^* w_k \in M_{a_\lambda, b_\mu}^-$ com $J_{\lambda,\mu}(u_{\lambda,\mu}^+ + t^* w_k) < m_{a_\lambda,b_\mu}^+ + m^\infty$.

Lema 2.17. *Existem $\lambda_0 > 0$ e $\mu_0 > 0$ com*

$$\lambda_0^{p-2}(1 + \mu_0 ||b_1||_\infty)^{2-q} < \left(\frac{q}{2}\right)^{p-2} \Upsilon_0,$$

tais que para todo $\lambda \in (0, \lambda_0)$ e $\mu \in (0, \mu_0)$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{x}{|x|}(|\nabla u|^2 + u^2)dx \neq 0$$

para todo $u \in M_{a_\lambda,b_\mu}^-$ com $J_{\lambda,\mu}(u) < m_{a_\lambda,b_\mu}^+ + m^\infty$.

Demonstração. Seja $u \in M_{a_\lambda,b_\mu}^-$ com $J_{\lambda,\mu}(u) < m_{a_\lambda,b_\mu}^+$. Pelo Lema 2.4(i) vai existir um $t_0^-(u) > 0$ e usando também o Lema 2.7(ii) teremos

$$\begin{aligned} J_{\lambda,\mu}(u) &= \sup_{t\geq 0} J_{\lambda,\mu}(tu) \geq J_{\lambda,\mu}(t_0^-(u)u) \\ &= J_{a_0,b_0}(t_0^-(u)u) - \frac{\lambda[t_0^-(u)]^q}{q} \int_{\mathbb{R}^N} a_+|u|^q dx \\ &- \frac{\mu[t_0^-(u)]^p}{p} \int_{\mathbb{R}^N} b_2|u|^p dx. \end{aligned}$$

Agora, usando o Lema 2.16 e as desigualdades de Hölder e Sobolev

$$\begin{aligned} J_{a_0,b_0}(t_0^-(u)u) &\leq J_{\lambda,\mu}(u) + \frac{\lambda[t_0^-(u)]^q}{q} \int_{\mathbb{R}^N} a_+|u|^q dx + \frac{\mu[t_0^-(u)]^p}{p} \int_{\mathbb{R}^N} b_2|u|^p dx \\ &< m_{a_\lambda,b_\mu}^+ + m^\infty + \frac{\lambda\theta_\mu^{q/p}}{q} ||a_+||_{q^*} S_p^{-\frac{q}{2}} ||u||_A^q + \frac{\mu\theta_\mu ||b_2||_\infty}{p} S_p^{-\frac{p}{2}} ||u||_A^p. \end{aligned}$$

Veja que por hipótese $J_{\lambda,\mu}(u) < m_{a_\lambda,b_\mu}^+ + m^\infty < m^\infty$, com isso e pela desigualdade (2.27), para cada $\lambda > 0$ e $\mu > 0$ com $\lambda^{p-2}(1+\mu||b_2||_\infty)^{2-q} < (\frac{q}{2})\Upsilon_0$, vai existir uma constante $\tilde{c}$ independente de λ e μ tal que $||u||_A \leq \tilde{c}$ para toda $u \in M^-_{a_\lambda,b_\mu}$ com $J_{\lambda,\mu}(u) < m^+_{a_\lambda,b_\mu} + m^\infty$. Daí,

$$J_{a_0,b_0}(t_0^-(u)u) \leq m^+_{a_\lambda,b_\mu} + m^\infty + \frac{\lambda\theta_\mu^{q/p}}{q}||a_+||_{q^*}S_p^{-\frac{q}{2}}\tilde{c}^q + \frac{\mu\theta_\mu||b_2||_\infty}{p}S_p^{-\frac{p}{2}}\tilde{c}^p.$$

Seja $l_0 > 0$ como no Lema 2.15. Então vão existir λ_0 e μ_0 positivos com $\lambda^{p-2}(1+\mu||b_2||_\infty)^{2-q} < (\frac{q}{2})\Upsilon_0$, tais que para $\lambda \in (0,\lambda_0)$ e $\mu \in (0,\mu_0)$

$$J_{a_0,b_0}(t^-(u)u) < m^\infty + l_0. \tag{2.88}$$

Como $t_0^-(u)u \in M_{a_0,b_0}$ e $t_0^-(u) > 0$, pelo Lema 2.15 e 2.88

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{x}{|x|}(|\nabla t_0^-(u)u|^2 + (t_0^-(u)u)^2)dx \neq 0,$$

nos dando que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{x}{|x|}(|\nabla u|^2 + u)^2)dx \neq 0,$$

para toda $u \in M^-_{a_\lambda,b_\mu}$ com $J_{\lambda,\mu}(u) < m^+_{a_\lambda,b_\mu} + m^\infty$. □

2.7.2 Obtendo a Terceira Solução

Para mostrar o Teorema 1.2 apresentaremos alguns conceitos necessários para aplicar a teoria de categoria. Esta ideia foi utilizada por Adach e Tanaka [1].

Definição 2.1. *Seja X um espaço topológico. Um subconjunto não vazio $Y \subset X$ é dito contrátil se existe $x_0 \in X$ e uma aplicação contínua $\gamma : [0,1] \times Y \to X$, tal que*

$$\gamma(0,x) = x \ ; \ \textit{para todo} \ x \in Y,$$

e

$$\gamma(1,x) = x_0 \ ; \ \textit{para todo} \ x \in Y.$$

Definição 2.2. *Definimos*

$$\begin{aligned} cat(X) = \min \quad \{ \quad & m \in \mathbb{N}; \exists m \textit{ subconjuntos fechados } Y_1,...,Y_m \subset X, \textit{ tais que} \\ & Y_i \textit{ é contrátil a um ponto de } X \textit{ para todo } i \textit{ e } \cup_{i=1}^m Y_i = X\}. \end{aligned}$$

No caso de não existir uma cobertura finita para X de conjuntos $Y_1,...,Y_n \subset X$, tais que Y_i é contrátil a um ponto de X para todo $i \in \mathbb{N}$, dizemos que $cat(X) = \infty$.

Para obter nosso resultado, precisaremos também dos dois resultados que enunciaremos a seguir.

Lema 2.18. *Seja X é uma variedade de Hilbert e $J \in C^1(X,\mathbb{R})$. Assuma que exista $c_0 \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$,*

(i) J satisfaz a condição PS para todo nível $c < c_0$;

(ii) $cat(\{x \in X; F(x) \leq c_0\}) \geq k$.

Então $J(x)$ tem pelo menos k pontos críticos em $\{x \in X; J(x) \leq c_0\}$.

Demonstração. Conforme Ambrosetti [8, Teorema 2.3] □

Lema 2.19. *Seja X um espaço topológico. Suponha que existam aplicações contínuas*

$$\Phi : S^{N-1} \to X, \quad \Psi : X \to S^{N-1},$$

tais que $\Psi \circ \Phi$ é homotópica à identidade em S^{N-1}, isto é, existe uma aplicação contínua $\xi : [0,1] \times S^{N-1} \to S^{N-1}$, tal que

$$\xi(0,x) = \Psi \circ \Phi(x) \ \ ; \ \textit{para todo} \ \ x \ \in \ S^{N-1},$$

e

$$\xi(1,x) = x \ \ ; \ \textit{para cada} \ \ x \ \in \ S^{N-1}.$$

Então $cat(X) \geq 2$.

Demonstração. Conforme Adachi e Tanaka [1, Lema 2.5] □

Para usar esse lema que acabamos de enunciar, procuraremos mostrar que para um $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno

$$cat([J_{\lambda,\mu} \leq m^+_{a_\lambda,b_\mu} + m^\infty - \varepsilon]) \geq 2. \tag{2.89}$$

Considere k_2 e $u^+ + s_l t_0 w_k$ conforme a Proposição 2.5. Para $k > k_2$, definimos a aplicação $\Phi_{a_\lambda,b_\mu} : S^{N-1} \to H^1_A(\mathbb{R}^N)$ por

$$\Phi_{a_\lambda,b_\mu}(e)(x) = u^+ + s_l t_0 w_0(x+ke) = u^+ + s_l t_0 w_k \ \text{ para } \ e \in S^{N-1}.$$

Para $c \in \mathbb{R}^+$, denotamos

$$[J_{\lambda,\mu} \leq c] = \{u \in M^-_{a_\lambda,b_\mu}; u \geq 0, J_{\lambda,\mu} \leq c\}.$$

Temos então o seguinte resultado

Lema 2.20. *Existe uma sequência* $\{\varepsilon_n\} \subset \mathbb{R}^+$ *com* $\varepsilon_n \to \infty$ *quando* $n \to \infty$ *tal que*

$$\Phi_{a_\lambda,b_\mu}(S^{N-1}) \subset [J_{\lambda,\mu} \leq m^+_{a_\lambda,b_\mu} + m^\infty - \varepsilon_n].$$

Demonstração. Conforme a Proposição 2.5, para cada $k > k_2$, temos $u^+ + s_l t_0 w_k \in M^-_{a_\lambda,b_\mu}$ e

$$\sup_{t \geq 0} J_{\lambda,\mu}(u^+ + tw_k) < m^+_{a_\lambda,b_\mu} + m^\infty$$

uniformemente em $e \in S^{N-1}$; lembrando que $w_k(x) = w_0(x + ke)$.

Note que $\Phi_{a_\lambda,b_\mu}(S^{N-1})$ é um conjunto compacto. Daí obtemos que $J_{\lambda,\mu}(u^+ + s_l t_0 w_k) \leq m^+_{a_\lambda,b_\mu} + m^\infty - \varepsilon_n$. De onde concluímos o que queríamos demonstrar.

□

Denotemos $\mathcal{Q}_{\lambda,\mu} = \{u \in M^-_{a_\lambda,b_\mu}; J_{\lambda,\mu} < m^+_{a_\lambda,b_\mu} + m^\infty\}$. Nosso objetivo é mostrar que este subconjunto da $M^-_{a_\lambda,b_\mu}$ tem categoria maior ou igual que 2. Para isso, vamos começar definindo a seguinte função Ψ_{a_λ,b_μ}, conforme o Lema 2.17

$$\Psi_{a_\lambda,b_\mu} : \mathcal{Q}_{\lambda,\mu} \to S^{N-1}$$

por

$$\Psi_{a_\lambda,b_\mu}(u) = \frac{\int_{\mathbb{R}^N} \frac{x}{|x|}(|\nabla_A u|^2 + u)^2)dx}{|\int_{\mathbb{R}^N} \frac{x}{|x|}(|\nabla_A u|^2 + u)^2)dx|}.$$

A partir dessas considerações mostraremos o resultado a seguir, no qual construímos uma aplicação homotópica à identidade, necessária para aplicarmos ao nosso problema a teoria de categoria.

Lema 2.21. *Sejam* λ_0 *e* μ_0 *como no Lema 2.17. Então para cada* $\lambda \in (0, \lambda_0)$ *e* $\mu \in (0, \mu_0)$, *vai existir* $k_* \geq k_2$ *tal que para* $k > k_*$, *a aplicação*

$$\Psi_{a_\lambda,b_\mu} \circ \Phi_{a_\lambda,b_\mu} : S^{N-1} \to S^{N-1}$$

é homotópica à identidade.

Demonstração. Seja $\sum = \{u \in H^1_A(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}; \int_{\mathbb{R}^N} \frac{x}{|x|}(|\nabla_A u|^2 + u)^2)dx \neq 0\}$. Definimos

$$\overline{\Psi}_{a_\lambda,b_\mu} : \sum \to S^{N-1}$$

por

$$\overline{\Psi}_{a_\lambda,b_\mu}(u) = \frac{\int_{\mathbb{R}^N} \frac{x}{|x|}(|\nabla_A u|^2 + u)^2)dx}{|\int_{\mathbb{R}^N} \frac{x}{|x|}(|\nabla_A u|^2 + u)^2)dx|}$$

uma extensão de Ψ_{a_λ,b_μ}.

Veja que Ψ é de fato uma extensão já que sob as hipóteses do Lema 2.17, para toda $u \in M^-_{a_\lambda,b_\mu}$ com $J_{\lambda,\mu}(u) < m^+_{a_\lambda,b_\mu} + m^\infty$, tem-se $\int_{\mathbb{R}^N} \frac{x}{|x|}(|\nabla_A u|^2 + u)^2)dx \neq 0$, de onde segue a inclusão

$$[J_{\lambda,\mu} < m^+_{a_\lambda,b_\mu} + m^\infty] \subset \sum = \{u \in H^1_A(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}; \int_{\mathbb{R}^N} \frac{x}{|x|}(|\nabla_A u|^2 + u)^2)dx \neq 0\}.$$

Como $w_k \in \sum$ para todo $e \in S^{N-1}$ e k suficientemente grande, tomamos $\gamma : [s_1, s_2] \to S^{N-1}$, uma geodésica regular entre $\overline{\Psi}_{a_\lambda,b_\mu}(w_k)$ e $\overline{\Psi}_{a_\lambda,b_\mu}(\Phi_{a_\lambda,b_\mu}(e))$ onde

$$\gamma(s_1) = \overline{\Psi}_{a_\lambda,b_\mu}(w_k)$$

e

$$\gamma(s_2) = \overline{\Psi}_{a_\lambda,b_\mu}(\Phi_{a_\lambda,b_\mu}(e)).$$

Lembrando que $w_k(x) = w_0(x + ke)$ para $k \in \mathbb{R}$, $e \in S^{n-1}$ e $\Phi_{a_\lambda,b_\mu}(e)(x) = u^+_{\lambda,\mu} + s_l t_0 w_k(x)$; com s_l como na prova da Proposição 2.5 tal que $u^+_{\lambda,\mu} + s_l t_0 w_k(x) \in M^-_{a_\lambda,b_\mu}$.

Por um argumento similar ao utilizado no Lema 2.15, existe um $k_* \geq k_2$ tal que para $k > k_*$,

$$w_0\left(x + \frac{k}{2(1-\theta)}e\right) \in \sum \quad \text{para todo} \quad e \in S^{N-1} \quad \text{e} \quad \theta \in [1/2, 1),$$

onde w_0 é uma solução positiva de P_∞ em $H^1_A(\mathbb{R}^N)$.

Queremos agora construir uma função ζ de modo a ter que a sua composição com a $\overline{\Psi}$ seja homotópica à identidade. Para isso definimos

$$\zeta_k(\theta, e) : [0,1] \times S^{N-1} \to S^{N-1}$$

por

$$\zeta_k(\theta, e) = \begin{cases} \gamma(2\theta(s_1 - s_2) + s_2) & \text{para } \theta \in [0, 1/2); \\ \overline{\Psi}_{a_\lambda,b_\mu}(w_0(x + \frac{k}{2(1-\theta)}e)) & \text{para } \theta \in [1/2, 1); \\ e & \text{para } \theta = 1. \end{cases}$$

Então

$$\begin{aligned} \zeta_k(0, e) &= \gamma(2 \cdot 0(s_1 - s_2) + s_2) = \gamma(s_2) \\ &= \overline{\Psi}_{a_\lambda,b_\mu}(\Phi_{a_\lambda,b_\mu}(e)) = \overline{\Psi}_{a_\lambda,b_\mu}(\Phi_{a_\lambda,b_\mu}(e)) \end{aligned}$$

o que faz sentido já que $J_{a_\lambda,b_\mu}(\Phi(e)) = J_{a_\lambda,b_\mu}(u^+_{\lambda,\mu} + s_l t_0 \Psi_k) < m^+_{a_\lambda,b_\mu} + m^\infty$. Além disso,

$$\zeta_k(1,e) = e.$$

Já foi visto que $u^+_{\lambda,\mu} \in C(\mathbb{C})$. Precisamos mostrar ainda que $\lim_{\theta\to 1^-}\zeta_k(\theta,e) = e$ e $\lim_{\theta\to\frac{1}{2}^-}\zeta_k(\theta,e) = \overline{\Psi}_{a_\lambda,b_\mu}(w_0(x+ke))$.

Primeiramente observe que se $\theta \in [1/2,1)$

$$\zeta_k(\theta,e) + \overline{\Psi}_{a_\lambda,b_\mu}\left(u_0(x+\frac{k}{2(1-\theta)}e)\right)$$

com

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} & \frac{x}{|x|}\left(|\nabla_A\left[u_0\left(x+\frac{k}{2(1-\theta)}e\right)\right]|^2 + \left[u_0\left(x+\frac{k}{2(1-\theta)}e\right)\right]^2\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\frac{x-\frac{k}{2(1-\theta)}e}{|x-\frac{k}{2(1-\theta)}e|}(|\nabla_A u_0(x)|^2 + u_0^2)dx \\
&= \left(\frac{2p}{p-2}\right)m^\infty e + o_n(1) \quad \text{se} \quad \theta\to 1^-.
\end{aligned} \tag{2.90}$$

Como pela definição $\overline{\Psi}_{a_\lambda,b_\mu}(u) = \frac{\int_{\mathbb{R}^N}\frac{x}{|x|}(|\nabla_A u|^2+u)^2)dx}{|\int_{\mathbb{R}^N}\frac{x}{|x|}(|\nabla_A u|^2+u)^2)dx|}$ segue que $\lim_{\theta\to 1^-}\zeta_k(\theta,e) = e$.

Além disso,

$$\lim_{\theta\to\frac{1}{2}^-}\zeta_k(\theta,e) = \gamma(s_1) = \overline{\Psi}_{a_\lambda,b_\mu}(w_k) = \overline{\Psi}_{a_\lambda,b_\mu}(w_0(x+ke)),$$

já que $\overline{\Psi} : \sum \to S^{N-1}$ é contínua.

Assim concluímos que $\zeta_k(\theta,e) \in C([0,1]\times S^{N-1}, S^{N-1})$ e

$$\zeta_k(0,e) = \Psi(\Phi(e)), \ \text{ para toda } \ e \in S^{N-1}$$

$$\zeta_k(1,e) = e \ \text{ para toda } \ e\in S^{N-1} \ \text{ e para todo } \ k > k_0.$$

Concluímos então que $\Psi\circ\Phi$ é homotópica à identidade.

□

Lema 2.22. *Para cada $\lambda\in(0,\lambda_0)$, $\mu\in(0,\mu_0)$ e $k>k^*$, o funcional $J_{\lambda,\mu}$ tem pelo menos dois pontos críticos em $\mathcal{Q}_{\lambda,\mu} = [J_{\lambda,\mu} < m^+_{a_\lambda,b_\mu} + m^\infty]$.*

Demonstração. Pelo que vimos no Lema 2.21, a aplicação $\Psi\circ\Phi$ é homotópica à identidade em S^{N-1}, para $\lambda\in(0,\lambda_0)$, $\mu\in(0,\mu_0)$ e $k>k^*$. Além disso, observe que o domínio da Ψ é igual à imagem da Φ e é dado pelo conjunto que chamamos de $\mathcal{Q}_{\lambda,\mu}$. Assim, $cat(\mathcal{Q}_{\lambda,\mu}) \geq 2$, cumprindo a hipótese (ii) do Lema 2.18.

Ainda, sob essas condições $J_{\lambda,\mu} < m^{+}_{a_\lambda,b_\mu} + m^{\infty}$ para todo $u \in \mathcal{Q}_{\lambda,\mu}$ e pela Proposição 2.11 se $\{u_n\} \subset M^{-}_{\lambda,\mu}$ é uma sequência minimizante em $H^1_A(\mathbb{R}^N)$ de $J_{\lambda,\mu}$, então existe uma subsequência $\{u_n\}$ e $u_0 \in H^1_A(\mathbb{R}^N)$ não nulo, tal que $u_n = u_0 + o_n(1)$ forte em $H^1_A(\mathbb{R}^N)$ e $J_{\lambda,\mu}(u_0) = \beta$, nos dando que $J_{\lambda,\mu}$ satisfaz P.S. o que cumpre a condição (i) do Lema 2.18.

Desse modo podemos concluir que $J_{\lambda,\mu}$ tem pelo menos dois pontos críticos em $\mathcal{Q}_{\lambda,\mu}$.

□

Prova do Teorema 1.2. Para $\lambda \in (0, \lambda_0)$, $\mu \in (0, \mu_0)$, usando o Teorema 2.3 e o Lema 2.22 podemos concluir que o problema (P_1) tem pelo menos três soluções $u^{+}_{\lambda,\mu}$, u^{-}_1 e u^{-}_2 com $u^{+}_{\lambda,\mu} \in M^{+}_{a_\lambda,b_\mu}$, e u^{-}_1 e u^{-}_2 $\in M^{-}_{a_\lambda,b_\mu}$. O que conclui a prova do Teorema 1.2.

□

2.8 Quarta Solução

Trabalharemos nesta seção com estimativas dos níveis de energia do funcional associado ao problema principal para provar a existência de uma solução cujo nível de energia satisfaça as condições da Proposição 2.11(ii), ou seja, uma solução distinta das três soluções já encontradas nas seções anteriores.

Para $\alpha > 0$, definimos

$$J_{0,\alpha b_0}(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_A u|^2 + u^2 dx - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} \alpha b_0 |u|^p dx,$$

$$M_{0,\alpha b_0} = \{u \in H^1_A(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}; \langle J'_{0,\alpha b_0}(u), u\rangle = 0\}.$$

Agora, definimos o seguinte conjunto das funções de norma unitária

$$\mathcal{B} = \{u \in H^1_A(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}; u \geq 0 \ \text{ e } \ ||u||_A = 1\}.$$

Lembremos que para cada $u \in H^1_A(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ existe um único $t^{-}(u) > 0$ e $t_0(u) > 0$ tal que $t^{-}(u) \in M^{-}_{a_\lambda,b_\mu}$ e $t_0(u) \in M_{0,b_0}$. Com o objetivo de aplicar o argumento minimax de Bahri-Li apresentaremos o seguinte resultado.

Lema 2.23. *Para cada* $u \in \mathcal{B}$ *teremos* *(i) Existe um único* $t_0^\alpha = t_0^\alpha(u) > 0$ *tal que* $t_0^\alpha u \in M_{0,\alpha b_0}$ *e*

$$\sup_{t\geq 0} J_{0,\alpha b_0}(tu) = J_{0,\alpha b_0}(t_0^\alpha u) = \frac{p-2}{2p}\left(\int_{\mathbb{R}^N} \alpha b_0 |u|^p dx\right)^{\frac{-2}{p-2}}.$$

(ii) Para $\rho \in (0,1)$*,*

$$J_{a_\lambda,b_\mu}(t^-(u)u) \geq \frac{(1-\rho)^{\frac{p}{p-2}}}{(1+\mu||b_2/b_1||_\infty)^{\frac{2}{p-2}}} J_{0,b_0}(t_0(u)u) - \frac{2-q}{2q}(\rho S_p)^{\frac{q}{q-2}}(\lambda||a_+||_{q^*})^{\frac{2}{2-q}}$$

e

$$J_{a_\lambda,b_\mu}(t^-(u)u) \leq \frac{(1+\rho)^{\frac{p}{p-2}}}{2} J_{0,b_0}(t_0(u)u) + \frac{2-q}{2q}(\rho S_p)^{\frac{q}{q-2}}(\lambda||a_+||_{q^*} + ||a_-||_{q^*})^{\frac{2}{2-q}}.$$

Demonstração. (i) Para cada $u \in \mathcal{B}$, seja

$$K_u(t) = J_{0,\alpha b_0}(tu) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t^p \int_{\mathbb{R}^N} \alpha b_0 |u|^p dx,$$

então $K_u(t) \to -\infty$ quando $t \to \infty$ e

$$K_u'(t) = t - t^{p-1}\int_{\mathbb{R}^N} \alpha b_0 |u|^p dx.$$

Assim, $K_u'(t_0^\alpha) = 0$, e $t_0^\alpha u \in M_{0,\alpha b_0}$ quando

$$t_0^\alpha = t_0^\alpha(u) = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \alpha b_0 |u|^p dx\right)^{\frac{1}{2-p}} > 0.$$

Além disso, $K_u''(t) = 1 - (p-1)t^{p-2}\int_{\mathbb{R}^N} \alpha b_0 |u|^p dx$. Daí em $t_0^\alpha(u)$ temos

$$K_u''(t_0^\alpha) = 2 - p < 0,$$

ou seja, t_0^α é um ponto de máximo de K_u.

Então, existe um único $t_0^\alpha = t_0^\alpha(u) > 0$ tal que $t_0^\alpha u \in M_{0,\alpha b_0}$ e ainda, como por definição $K_u(t) = J(tu)$ obtemos

$$\sup_{t\geq 0} J_{0,\alpha b_0}(tu) = J_{0,\alpha b_0}(t_0^\alpha u) = \frac{p-2}{2p}\left(\int_{\mathbb{R}^N} \alpha b_0 |u|^p dx\right)^{\frac{-2}{2-p}}.$$

(ii) Seja $\alpha = (1+\mu||b_2/b_1||_\infty)/(1-\rho)$. Então, para cada $u \in \mathcal{B}$ e $\rho \in (0,1)$, temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda |t_0^\alpha u|^q dx &\leq \lambda S_p^{\frac{-q}{2}} ||a_+||_{q^*} ||t_0^\alpha u||_A^q \\ &\leq \frac{2-q}{2}\left((\rho S_p)^{\frac{-q}{2}} \lambda ||a_+||_{q^*}\right)^{\frac{2}{2-q}} + \frac{q}{2}\left((\rho)^{\frac{q}{2}} ||t_0^\alpha u||_A\right)^{\frac{2}{q}} \\ &= \frac{2-q}{2}(\rho S_p)^{\frac{q}{q-2}} (\lambda ||a_+||_{q^*})^{\frac{2}{2-q}} + \frac{q\rho}{2}||t_0^\alpha u||_A^2. \end{aligned} \tag{2.91}$$

Então, pela parte (i) e por (2.91),

$$\begin{aligned}\sup_{t\geq 0} J_{a_\lambda,b_\mu}(tu) &\geq J_{a_\lambda,b_\mu}(t_0^\alpha u) \\ &\geq \frac{1-\rho}{2}||t_0^\alpha u||_A^2 - \frac{2-q}{2q}(\rho S_p)^{\frac{q}{q-2}}(\lambda||a_+||_{q^*})^{\frac{2}{2-q}} \\ &\quad -\frac{(1+\mu||b_2/b_1||_\infty)}{p}\int_{\mathbb{R}^N} b_0 |t_0^\alpha u|^p dx \\ &= (1-\rho)J_{0,\alpha b_0}(t_0^\alpha u) - \frac{2-q}{2q}(\rho S_p)^{\frac{q}{q-2}}(\lambda||a_+||_{q^*})^{\frac{2}{2-q}} \\ &= \frac{(p-2)(1-\rho)^{\frac{p}{p-2}}}{2p((1+\mu||b_2/b_1||_\infty)\int_{\mathbb{R}^N} b_0|u|^p dx)^{\frac{2}{p-2}}} - \frac{2-q}{2q}(\rho S_p)^{\frac{q}{q-2}}(\lambda||a_+||_{q^*})^{\frac{2}{2-q}} \\ &= \frac{(1-\rho)^{\frac{p}{p-2}}}{(1+\mu||b_2/b_1||_\infty)^{\frac{2}{p-2}}} J_{0,\alpha b_0}(t_0(u)u) - \frac{2-q}{2q}(\rho S_p)^{\frac{q}{q-2}}(\lambda||a_+||_{q^*})^{\frac{2}{2-q}}. \end{aligned}$$

Ainda, pelo Lema 2.4 e pelo Teorema 2.7,

$$\sup_{t\geq 0} J_{a_\lambda,b_\mu}(tu) = J_{a_\lambda,b_\mu}(t^-(u)u).$$

Desse modo,

$$J_{a_\lambda,b_\mu}(t^-(u)u) \geq \frac{(1-\rho)^{\frac{p}{p-2}}}{(1+\mu||b_2/b_1||_\infty)^{\frac{2}{p-2}}} J_{0,\alpha b_0}(t_0(u)u) - \frac{2-q}{2q}(\rho S_p)^{\frac{q}{q-2}}(\lambda||a_+||_{q^*})^{\frac{2}{2-q}}.$$

Ainda, pelas desigualdades de Hölder, Sobolev e de Young,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda |tu|^q dx\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} a_\lambda |tu|^q dx \leq (\lambda||a_+||_{q^*} + ||a_-||_{q^*})S_p^{\frac{-q}{2}}||tu||_A^q \\ &\leq \frac{2-q}{2}(\rho S_p)^{\frac{q}{q-2}}(\lambda||a_+||_{q^*} + ||a_-||_{q^*})^{\frac{2}{2-q}} + \frac{q\rho}{2}||tu||_A^2. \end{aligned}$$

Ainda,

$$\begin{aligned} J_{a_\lambda,b_\mu}(tu) &\leq \frac{(1+\rho)}{2}t^2 + \frac{2-q}{2q}(\rho S_p)^{\frac{q}{q-2}}(\lambda||a_+||_{q^*} + ||a_-||_{q^*})^{\frac{2}{2-q}} - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} b_0|tu|^p dx \\ &\leq \frac{(1+\rho)^{\frac{p}{p-2}}}{2} J_{0,b_0}(t_0(u)u) + \frac{2-q}{2q}(\rho S_p)^{\frac{q}{q-2}}(\lambda||a_+||_{q^*} + ||a_-||_{q^*})^{\frac{2}{2-q}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$J_{a_\lambda,b_\mu}(t^-(u)u) \le \frac{(1+\rho)^{\frac{p}{p-2}}}{2} J_{0,b_0}(t_0(u)u) + \frac{2-q}{2q}(\rho S_p)^{\frac{q}{q-2}}(\lambda||a_+||_{q^*} + ||a_-||_{q^*})^{\frac{2}{2-q}}.$$

Como queríamos demonstrar.

$\square$

Observe que como $m^-_{a_\lambda,b_\mu} > 0$ para todo $\lambda \in (0,\lambda_0)$ e $\mu \in (0,\mu_0)$, definimos

$$I_{a_\lambda,b_\mu}(u) = \sup_{t\ge 0} J_{a_\lambda,b_\mu}(tu) = J_{a_\lambda,b_\mu}(t^-(u)u) > 0,$$

onde $t^-(u)u \in M^-_{a_\lambda,b_\mu}$. Podemos ver que se λ, μ e $||a_-||_{q^*}$ forem suficientemente pequenos, poderemos usar o argumento de minimax de Bahri-Li [10] para o nosso funcional J_{a_λ,b_μ}. Seja

$$\Gamma_{a_\lambda,b_\mu} = \{\gamma \in C(\overline{B^N(0,k)}, \mathbb{B}); \gamma|_{\partial B^N(0,k)} = w_k/||w_k||_A\}$$

para valores de l suficientemente grandes.

Definimos

$$n_{a_\lambda,b_\mu} = \inf_{\gamma\in\Gamma_{a_\lambda,b_\mu}} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} I_{a_\lambda,b_\mu}(\gamma(x)) \text{ e } n_{0,b_0} = \inf_{\gamma\in\Gamma_{0,b_0}} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} I_{0,b_0}(\gamma(x))$$

Pelo Lema 2.23(ii), para $0<\rho<1$, temos

$$n_{a_\lambda,b_\mu} \ge \frac{(1-\rho)^{\frac{p}{p-2}}}{(1+\mu||b_2/b_1||_\infty)^{\frac{2}{p-2}}} n_{0,b_0} - \frac{2-q}{2q}(\rho S_p)^{\frac{q}{q-2}}(\lambda||a_+||_{q^*})^{\frac{2}{2-q}} \tag{2.92}$$

e

$$n_{a_\lambda,b_\mu} \le (1+\rho)^{\frac{p}{p-2}} n_{0,b_0} + \frac{2-q}{2q}(\rho S_p)^{\frac{q}{q-2}}(\lambda||a_+||_{q^*} + ||a_-||_{q^*})^{\frac{2}{2-q}}. \tag{2.93}$$

Precisaremos das estimativas sobre os níveis de energia como a seguir.

Lema 2.24. $m^\infty < n_{0,b_0} < 2m^\infty$.

Demonstração. Pelos resultados de Bahri e Li [10] temos que a equação (E_{0,b_0}) admite pelo menos uma solução u_0 com $J_{0,b_0}(u_0) = n_{0,b_0} < 2m^\infty$. Além disso, pela condição (C_1), a equação (E_{0,b_0}) não possui uma solução de energia mínima. Assim, $m^\infty < n_{0,b_0} < 2m^\infty$. $\square$

Teorema 2.3. *Sejam λ_0 e μ_0 como no Lema 2.17. Então vão existir valores positivos $\tilde{\lambda_0} \le \lambda_0$, $\tilde{\mu_0} \le \mu_0$ e $\tilde{\nu_0} \le \nu_0$ tais que para $\lambda \in (0,\tilde{\lambda_0})$, $\mu \in (0,\tilde{\mu_0})$ e $||a_-||_{q^*} < \nu_0$, temos*

$$m^+_{a_\lambda,b_\mu} + m^\infty < n_{a_\lambda,b_\mu} < m^-_{a_\lambda,b_\mu} + m^\infty.$$

Além disso, (P_1) admite uma solução v_{a_λ,b_μ} com

$$J_{a_\lambda,b_\mu}(v_{a_\lambda,b_\mu}) = n_{a_\lambda,b_\mu}.$$

Demonstração. Pelo Lema 2.23(ii), temos para $0 < \rho < 1$

$$m^-_{a_\lambda,b_\mu} \geq \frac{(1-\rho)^{\frac{p}{p-2}}}{(1+\mu||b_2/b_1||_\infty)^{\frac{2}{p-2}}} m^\infty - \frac{2-q}{2q}(\rho S_p)^{\frac{q}{q-2}}(\lambda||a_+||_{q^*})^{\frac{2}{2-q}}$$

e

$$m^-_{a_\lambda,b_\mu} \leq (1+\rho)^{\frac{p}{p-2}} m^\infty + \frac{2-q}{2q}(\rho S_p)^{\frac{q}{q-2}}(\lambda||a_+||_{q^*} + ||a_-||_{q^*})^{\frac{2}{2-q}}.$$

Para cada $\epsilon > 0$ existem valores positivos $\tilde{\lambda_1} \leq \lambda_0$, $\tilde{\mu_1} \leq \mu_0$ e ν_1 tais que para $\lambda \in (0, \tilde{\lambda_1})$, $\mu \in (0, \tilde{\mu_1})$ e $||a_-||_{q^*} < \nu_1$, temos

$$m^\infty - \epsilon < n_{a_\lambda,b_\mu} < m^\infty + \epsilon.$$

Então,

$$2m^\infty - \epsilon < n_{a_\lambda,b_\mu} + m^\infty < 2m^\infty + \epsilon.$$

Usando 2.92 e 2.93, para todo $\delta > 0$, vão existir valores positivos $\tilde{\lambda_2} \leq \lambda_0$, $\tilde{\mu_2} \leq \mu_0$ e ν_2 tais que para $\lambda \in (0, \tilde{\lambda_2})$, $\mu \in (0, \tilde{\mu_2})$ e $||a_-||_{q^*} < \nu_2$, tenhamos

$$n_{0,b_0} - \delta < n_{a_\lambda,b_\mu} < n_{0,b_0} + \delta.$$

Fixando valores pequenos de $0 < \epsilon < (2m^\infty - n_{0,b_0})/2$, sendo $m^\infty < n_{0,b_0} < 2m^\infty$, e escolhendo $\delta > 0$ de modo que para $\lambda < \tilde{\lambda_0} = \min\{\tilde{\lambda_1}, \tilde{\lambda_2}\}$, $\mu < \tilde{\mu_0} = \min\{\tilde{\mu_1}, \tilde{\mu_2}\}$ e $||a_-||_{q^*} < \nu_0 = \min\{\nu_1, \nu_2\}$, teremos

$$m^+_{a_\lambda,b_\mu} + m^\infty < m^\infty < n_{a_\lambda,b_\mu} < 2m^\infty - \epsilon < m^-_{a_\lambda,b_\mu} + m^\infty.$$

Desse modo, pela Proposição 2.11(ii), obtemos que o problema (P_1) tem uma solução v_{a_λ,b_μ} com

$$J_{a_\lambda,b_\mu}(v_{a_\lambda,b_\mu}) = n_{a_\lambda,b_\mu}.$$

□

Prova do Teorema 1.3: Com o resultado do Teorema 2.3 podemos completar a prova do Teorema 1.3. Para $\lambda \in (0, \tilde{\lambda_0})$, $\mu \in (0, \tilde{\mu_0})$ e $||a_-||_{q^*} < \nu_0$, utilizando também os resultados dos Teoremas 1.2 e 2.3, obtemos que a equação (P_1) admite pelo menos quatro soluções.

Capítulo

3

O Problema (P_2)

Neste capítulo estamos interessados em estudar a seguinte classe de problemas elípticos

$$(P_2) \qquad \begin{cases} -\Delta_A u + u = a(x)|u|^{q-2}u + b(x)|u|^{p-2}u, \\ u \in H_A^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

onde $x \in \mathbb{R}^N$, $2 < q < p < 2^* = \frac{2N}{N-2}$, a e b são funções que podem mudar de sinal e satisfazem algumas condições adicionais. Além disso, $u \in H_A^1(\mathbb{R}^N)$ e $A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é um potencial magnético $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$. Discutiremos nesse capítulo a existência de soluções e, variando as hipóteses sob as funções peso, estudaremos a existência de infinitas soluções para o problema em questão.

Recordaremos neste ponto as hipóteses deste problema e os resultados que procuramos mostrar neste capítulo. Antes disso, aproveitamos para fazer a definição a seguir.

Definição 3.1. *Seja $g \in E(\mathbb{R}^N)$ e $j \in \mathbb{Z}$. Dizemos que a função g é $1-$periódica em x_i se*

$$g(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n) = g(x_1, x_2, ..., x_i + j, ..., x_n),$$

para $i = 1, 2, ..., n$.

No que se segue, assumiremos que a, b satisfaçam algumas das seguintes hipóteses:

(D_1) $a \in L^r$ e $b \in L^s$, onde $1 < \frac{r}{r-1} < \frac{2^*}{p}$ e $1 < \frac{s}{s-1} < \frac{2^*}{q}$;

(D_2) $a, b \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\limsup_{|x| \to \infty} a(x) \leq 0$ e $\limsup_{|x| \to \infty} b(x) \leq 0$;

(D_3) $a, b \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, e o potencial A e as funções a e b são 1-periódicos em x_1, x_2,...,x_n;

(D_4) $b \geq 0$ e o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^N; b > 0\}$ tem interior não vazio;

(D_5) $a \leq 0$ e o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^N; b > 0\}$ tem interior não vazio.

As condições (D_4) e (D_5) aparecem primeiramente em [41, Exemplo 4.3] em que é estudada a existência de soluções positivas para um problema com o Laplaciano usual e em domínio limitado. Também Jalilian e Szulkin em [40], utilizam as hipóteses acima para tratar um problema elíptico em $\mathbb{R}^N$.

Teorema 3.1. *Suponha que (D_1) ou (D_2) e (D_4) ou (D_5) sejam satisfeitas. Então o problema (P_2) tem infinitas soluções.*

Para nosso próximo resultado precisaremos da seguinte definição.

Definição 3.2. *Considere o conjunto $O(u) := \{u(\,\cdot\, - k) : k \in \mathbb{Z}^N\}$. Chamamos $O(u)$ de órbita de u sob ação de $\mathbb{Z}^N$. Dizemos que duas soluções u_1 e u_2 são geometricamente distintas se $O(u_1) \neq O(u_2)$.*

A partir da definição feita acima podemos observar que se (D_3) é satisfeita e u é solução de (P_2), então todos os elementos do conjunto $O(u)$ também são soluções.

Enunciaremos agora nosso segundo resultado.

Teorema 3.2. *Suponha (D_3) e também (D_4) ou (D_5) sejam satisfeitas. Então o problema (P_2) tem infinitas soluções geometricamente distintas.*

Para a demonstração deste teorema usaremos a ideia do que foi feito em [40].

Inicialmente definiremos o funcional associado ao problema em questão. Utilizaremos a variedade de Nehari e a aplicação fibração para relacionar os pontos críticos do funcional com os pontos críticos do funcional restrito à variedade.

Mostraremos que a variedade de Nehari é fechada e de classe C^2 sob cada uma das hipóteses dos teoremas acima.

Sob as hipóteses do primeiro teorema deste capítulo, mostraremos que a condição PS é satisfeita na variedade e usaremos um argumento de gênero de Krasnoselskii, para concluir este primeiro resultado.

Já sob as hipóteses do segundo teorema não temos a condição PS, daí precisaremos de usar um argumento do tipo deformação baseado em uma ideia de Szulkin e Weth [49] para mostrar a existência de infinitas soluções geometricamente distintas.

3.1 Considerações Iniciais para o problema (P_2)

Nesta seção definiremos a variedade de Nehari associada ao problema (P_2) e sua relação com a aplicação fibração. O estudo a ser feito a seguir é semelhante ao que foi feito para o problema anterior e o faremos de forma mas sucinta.

O funcional associado ao problema em questão é dado por

$$I(u) := \frac{1}{2}||u||_A^2 - \frac{1}{q}\int_{R^N} a(x)|u|^q dx - \frac{1}{p}\int_{R^N} b(x)|u|^p dx$$

e desde que (D_1), (D_2) ou (D_3) forem satisfeitas teremos que o funcional é de classe $C^2(H_A^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{C})$.

Podemos ver também que os pontos críticos do funcional são soluções fracas do problema (P_2).

Proposição 3.1. *Se (D_4) ou (D_5) forem satisfeitas, então o funcional I não é limitado inferiormente em $H_A^1(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração. Considerando sem perda de generalidade que $\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx > 0$, para alguma $u \in H_A^1(\mathbb{R}^N)$ com $u > 0$ em $\mathbb{R}^N$ e considere $t > 0$, assim

$$\begin{aligned} I(tu) &= \frac{t^2}{2}||u||_A^2 - \frac{t^q}{q}\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^q dx - \frac{t^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx \\ &= t^p\left(\frac{1}{2t^{p-2}}||u||_A^2 - \frac{1}{qt^{p-q}}\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^q dx - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx\right). \end{aligned}$$

Tomando $t \to \infty$, como $2 < q < p < 2^*$, temos que $I(tu) \to -\infty$, isto é, I não é limitado inferiormente em $H_A^1(\mathbb{R}^N)$. $\square$

3.2 Variedade de Nehari associada a (P_2)

Queremos encontrar um subconjunto de $H_A^1(\mathbb{R}^N)$, onde o funcional I seja bem comportado, ou seja, onde esse funcional seja limitado inferiormente. Definimos então

$$\mathbb{M} = \{u \in H_A^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} : \langle I'(u), u\rangle = 0\}.$$

$\mathbb{M}$ é a variedade de Nehari associada ao funcional I. Assim,

$$u \in \mathbb{M} \Leftrightarrow I'(u)u = 0 \Leftrightarrow$$

$$||u||_A^2 - \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^q dx - \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx = 0. \tag{3.1}$$

Observamos que $\mathbb{M} \subset H_A^1(\mathbb{R}^N)$ e agora vamos encontrar o funcional definido sobre a variedade de Nehari.

Note que para $u \in \mathbb{M}$

$$
\begin{aligned}
I(u) &= I(u) - \frac{1}{q} I'(u)u \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) ||u||_A^2 - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx; \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) ||u||_A^2 - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right) \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^q dx.
\end{aligned}
$$

Veremos agora que o funcional I é bem comportado na variedade de Nehari.

Corolário 3.1. *Suponha que* (D_4) *ou* (D_5) *seja satisfeita, então o funcional* I *é limitado inferiormente em* $\mathbb{M}$.

Demonstração. De fato, por (3.1) e por (D_4) temos

$$
\begin{aligned}
I(u) &= \frac{1}{2}||u||_A^2 - \frac{1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^q dx - \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) ||u||_A^2 - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx \geq 0,
\end{aligned}
$$

ainda, quando (D_5) for satisfeita

$$
\begin{aligned}
I(u) &= \frac{1}{2}||u||_A^2 - \frac{1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^q dx - \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) ||u||_A^2 - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right) \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^q dx \geq 0,
\end{aligned}
$$

o que conclui a prova.

□

Faremos agora algumas considerações e apresentaremos algumas propriedades da Variedade e sua relação com a aplicação fibração.

3.3 Aplicação Fibração

Definiremos agora a aplicação fibração associada ao funcional I, que são as funções da forma $T_u : t \to I(tu); \quad (t > 0)$, analisaremos seu comportamento e mostraremos sua relação com a variedade de Nehari.

Se $u \in H_A^1(\mathbb{R}^N)$, temos

$$
T_u(t) = \frac{t^2}{2}||u||_A^2 - \frac{t^q}{q} \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^q dx - \frac{t^p}{p} \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx, \tag{3.2}
$$

$$T_u'(t) = t||u||_A^2 - t^{q-1}\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^q dx - t^{p-1}\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx, \tag{3.3}$$

$$T_u''(t) = ||u||_A^2 - (q-1)t^{q-2}\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^q dx - (p-1)t^{p-2}\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx. \tag{3.4}$$

A proposição abaixo relaciona a variedade de Nehari e a Aplicação Fibração.

Proposição 3.2. *Seja T_u a aplicação definida acima e $u \in H_A^1(\mathbb{R}^N)$, então*

(i) $u \in \mathbb{M}$ se, e somente se, $T_u'(1) = 0$;

(ii) Mais geralmente $tu \in \mathbb{M}$ se, e somente se, $T_u'(t) = 0$.

A partir das definições feitas, vamos analisar o comportamento da aplicação fibração a fim de obter informações sobre nosso funcional.

Observação 3.1. *Note que se $u \in \mathbb{M}$, isto é, $T_u'(1) = 0$, então*

$$\begin{aligned} T_u''(1) &= (2-q)||u||_A^2 - (p-q)\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx & (3.5)\\ &= (2-p)||u||_A^2 - (q-p)\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^q dx. & (3.6)\end{aligned}$$

3.3.1 Análise da Aplicação Fibração

Descrição da função m_u

Nesta parte do trabalho, veremos que a natureza essencial da aplicação fibração T_u é determinada pelo sinal de $\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^q dx$ e de $\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx$. Para isso, consideremos a função

$$m_u(t) = \frac{1}{t^{q-2}}||u||_A^2 - t^{p-q}\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx; \quad t > 0 \tag{3.7}$$

Observação 3.2. *Note que, para $t > 0$, $tu \in \mathbb{M}$ se, e somente se, t é solução de*

$$m_u(t) = \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^q dx. \tag{3.8}$$

De fato, substituindo (3.7) em (3.8), temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^q dx = t^{2-q}||u||_A^2 - t^{p-q}\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx,$$

$$0 = t^{2-q}||u||_A^2 - \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^q dx - t^{p-q}\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx.$$

Multiplicando a equação acima por t^q

$$0 = t^2||u||_A^2 - t^q\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^q dx - t^p\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx,$$

ou equivalentemente

$$I'(tu)tu = 0.$$

Logo,

$$tu \in \mathbb{M}.$$

Ainda, derivando (3.7) obtemos

$$m_u'(t) = (2-q)t^{1-q}||u||_A^2 - (p-q)t^{p-q-1}\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx. \tag{3.9}$$

Vamos agora analisar o comportamento de m_u para os casos a seguir.

(i) Quando $\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx > 0$, m_u é uma função estritamente decrescente.

De fato, sendo $2 < q < p$ para $t > 0$

$$m_u'(t) = (2-q)t^{1-q}||u||_A^2 - (p-q)t^{p-q-1}\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx < 0,$$

sempre que $\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx > 0$. Além disso, se $t \to 0$ então $m_u(t) \to +\infty$. Agora, se $t \to \infty$ então $m_u(t) \to -\infty$. Desse modo concluímos que $m_u(t)$ tem um único ponto de inflexão em $t_i = \left(\frac{(2-q)||u||_A^2}{(p-q)\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx} \right)^{\frac{1}{p-2}} < 0$, e seu gráfico tem um esboço como na figura 3.1.

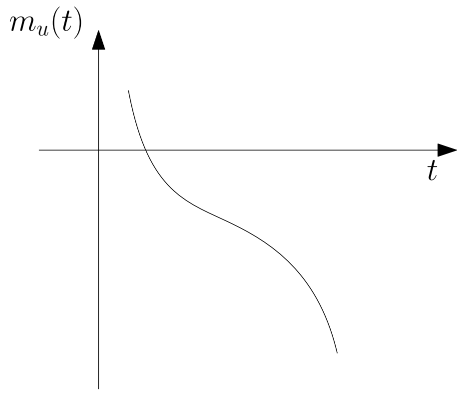

Figura 3.1: Esboço de m_u quando $\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx > 0$

(ii) Quando $\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx = 0$, m_u também é uma função estritamente decrescente.

De fato, para $t > 0$ então

$$m_u'(t) = (2-q)t^{1-q}||u||_A^2 < 0,$$

sempre que $\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx = 0$. Além disso, se $t \to 0$ então $m_u(t) \to +\infty$. Se $t \to \infty$ então $m_u(t) \to 0$. Desse modo concluímos que $m_u(t)$ tem o gráfico como na figura 3.2.

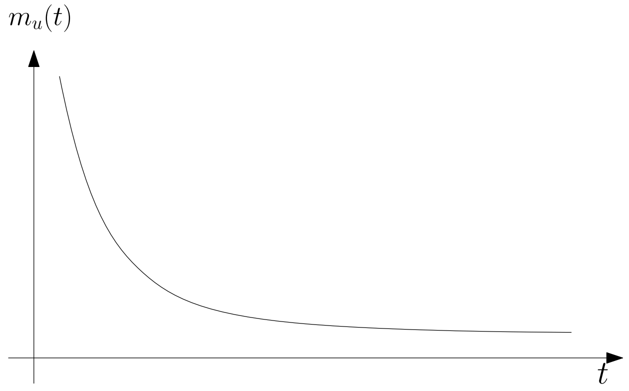

Figura 3.2: Esboço de m_u quando $\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx = 0$

(iii) Quando $\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx < 0$, temos que m_u é uma função decrescente e depois crescente com um único ponto crítico em $t_{\min} = \left(\frac{(2-q)||u||_A^2}{(p-q)\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx} \right)^{\frac{1}{p-2}}$. Além disso, nesse caso $m_u(t) > 0$ para todo $t > 0$. Observando que

$$\lim_{t \to 0} m_u(t) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{t \to \infty} m_u(t) = \infty,$$

podemos concluir que m_u tem gráfico como na figura 3.3.

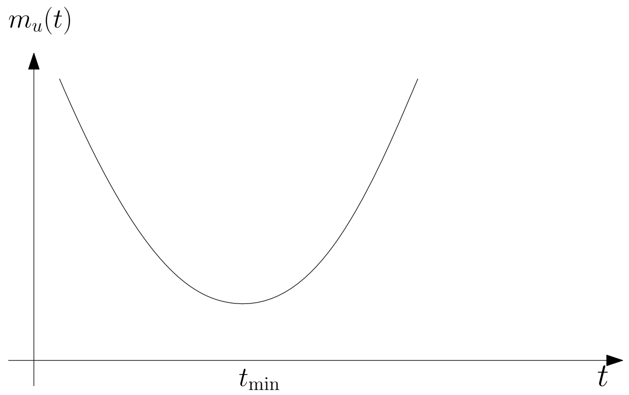

Figura 3.3: Esboço de m_u quando $\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx < 0$

Observação 3.3. *É importante observar que, se $tu \in \mathbb{M}$, por (3.5) e (3.7) temos*

$$T''_{tu}(1) = t^{q+1} m'_u(t).$$

De fato,

$$
\begin{aligned}
T''_{tu}(1) &= (2-q)t^2||u||_A^2 - (p-q)t^p \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx \\
&= t^{q+1}((2-q)t^{1-q}||u||_A^2 - (p-q)t^{p-q-1} \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx) \\
&= t^{q+1} m'_u(t).
\end{aligned}
$$

Esta observação é fundamental, pois se conhecermos o sinal de $m'_u(t)$, conheceremos o sinal de $T''_{tu}(t)$. Assim poderemos saber se T_{tu} tem um ponto de mínimo local, máximo local ou de inflexão.

Descrição da função T_u

Vejamos agora a descrição da natureza da aplicação fibração para os casos em que (D_4) ou (D_5) for satisfeita.

(I) Quando (D_4) é satisfeita, vão existir $u's \in H_A^1(\mathbb{R}^N)$, tais que $\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx > 0$ com desigualdade estrita. Observando o gráfico que construímos no item (i) acima, existem $t'_u s$, solução de (3.8) para qualquer valor de $\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^q dx$. Nessas condições, para cada u tal que $\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx > 0$, existe um único $t_u > 0$, tal que $t_u u \in \mathbb{M}$. Ainda, $t_u > 0$ é um ponto de máximo para T_{tu}, já que $T''_{tu}(1) = t^{q+1} m'_u(t) < 0$ nesse caso. Por esta análise, concluímos que o gráfico T_u tem seu esboço como mostrado na figura 3.4.

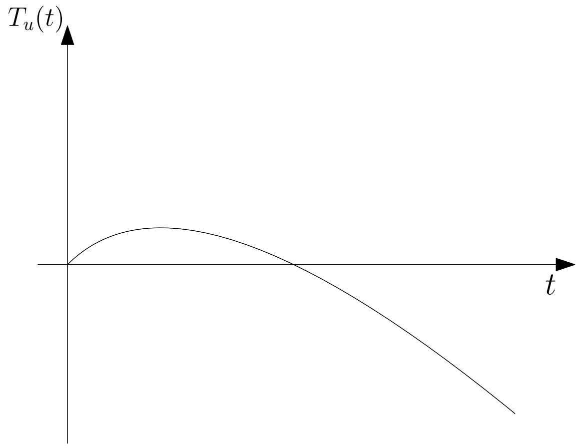

Figura 3.4: Possível forma de T_u quando $\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx > 0$

(II) Já no caso em que a hipótese (D_5) é satisfeita temos $\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^q dx \leq 0$. Observando os gráficos 3.1, 3.2 e 3.3, vemos que a equação (3.8) só possui solução quando $\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx > 0$. Condições estas que já foram analisadas no item (I).

A partir dessas observações temos o seguinte.

Lema 3.1. *Suponha que a hipótese (D_1) seja satisfeita e que $a,\ b\ \in L^{\infty}(\mathbb{R}^N)$.*

(i) Se (D_4) for satisfeita e além disso tivermos $\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx > 0$ ou $\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^q dx > 0$, então a equação $T_u'(t) = 0$ tem exatamente uma solução $t_u > 0$.

Ainda, $I(u) > 0$ para toda $u \in \mathbb{M}$;

(ii) Se (D_5) for satisfeita e $\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx > 0$, então a equação $T_u'(t) = 0$ tem exatamente uma solução $t_u > 0$.

Além disso, $I(u) > 0$ para todo $u \in \mathbb{M}$.

3.3.2 Propriedades da Variedade de Nehari

A seguir veremos que sob certas hipóteses a variedade de Nehari é de fato uma variedade.

Lema 3.2. *Suponha que (D_1) e também (D_4) ou (D_5) sejam satisfeitas. Então a variedade de Nehari é uma variedade de classe C^2, fechada e tal que $||u||_A \geq \delta > 0$, para toda $u \in \mathbb{M}$.*

Demonstração. Seja $u \in \mathbb{M}$, uma consequência direta da definição da variedade nos dá

$$||u||_A^2 = \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^q dx + \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx.$$

Daí, por Hölder, Sobolev, por (D_1) e pela desigualdade diamagnética temos

$$\begin{aligned} ||u||_A^2 &\leq ||a||_r ||u||_{qr'}^q + ||b||_s ||u||_{ps'}^p \\ &\leq c_1 ||a||_r ||u||_A^q + c_2 ||b||_s ||u||_A^p, \end{aligned} \tag{3.10}$$

onde $r' = \frac{r}{r-1}$, $s' = \frac{s}{s-1}$ e c_1, c_2 são constantes positivas. Dividindo (3.10) por $||u||_A^2$ obtemos

$$1 \leq c_1 ||a||_r ||u||_A^{q-2} + c_2 ||b||_s ||u||_A^{p-2}. \tag{3.11}$$

Suponha por absurdo que exista uma sequência $\{u_n\} \in \mathbb{M}$ tal que $||u_n||_A \to 0$, quando $n \to \infty$. Então, como $2 < q < p$, por (3.11) chegamos que $1 \leq 0$ o que é um absurdo. Segue que existe $\delta > 0$ tal que $||u||_A \geq \delta > 0$, para toda $u \in \mathbb{M}$.

Mostraremos agora que a variedade de Nehari é fechada e de classe C^2. A ideia é semelhante ao que foi feito na demontração da Proposição 2.1. Defina $\alpha : X \to \mathbb{R}$ por

$$\alpha(u) := \langle J'(u), u \rangle = ||u||_A^2 - \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^q dx - \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx.$$

Veja que $\alpha \in C^2$ e pela definição de α, temos que $\mathbb{M} = \alpha^{-1}(0) \setminus \{0\}$.

O fato de existir $\delta > 0$ tal que $||u||_A \geq \delta > 0$, para toda $u \in \mathbb{M}$, nos dá que $\mathbb{M}$ é fechada.

Precisamos mostrar que 0 é um valor regular de α, isto é, que para todo $u \in \mathbb{M}$, $\alpha'(u)$ é uma transformação linear sobrejetora. Como a imagem da aplicação α é $\mathbb{R}$, ou seja, é um espaço de dimensão um, basta mostrar que $\alpha'(u) \neq 0$ para todo $u \in \mathbb{M}$.

Observe que, para todo $u \in \mathbb{M}$

$$||u||_A^2 = \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^q dx + \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx. \tag{3.12}$$

Ainda,

$$\langle \alpha'(u), u \rangle = 2||u||_A^2 - q\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^q dx - p\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx. \tag{3.13}$$

Agora, por (3.12) e (3.13) temos

$$\langle \alpha'(u), u \rangle = (2-q)||u||_A^2 + (q-p)\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx. \tag{3.14}$$

Se (D_4) é satisfeita então $\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx \geq 0$ e por (3.14)

$$\langle \alpha'(u), u \rangle < 0. \tag{3.15}$$

Ainda, por (3.12) e (3.13) temos

$$\langle \alpha'(u), u \rangle = (2-p)||u||_A^2 + (p-q)\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^q dx. \tag{3.16}$$

Daí, se (D_5) é satisfeita então $\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^p dx \leq 0$ e por (3.16)

$$\langle \alpha'(u), u \rangle < 0. \tag{3.17}$$

Desse modo, por (3.15) e (3.17) segue que $\alpha'(u) \neq 0$. Concluímos assim que 0 é um valor regular de α, nos dando que a variedade de Nehari é uma variedade de fato e de classe C^2.

$\square$

Mostraremos agora que as mesmas conclusões do lema anterior também são válidas quando consideramos as hipóteses descritas no lema a seguir.

Lema 3.3. *Suponha que $a, b \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e também (D_4) ou (D_5) sejam satisfeitas. Então a variedade de Nehari é uma variedade de classe C^2, fechada e tal que $||u||_A \geq \delta > 0$, para toda $u \in \mathbb{M}$*

Demonstração. Seja $u \in \mathbb{M}$ e sejam $a, b \in L^{\infty}(\mathbb{R}^N)$. Temos então

$$\begin{aligned} ||u||_A^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^q dx + \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx \\ &\leq ||a||_{\infty}||u||_q^q + ||b||_{\infty}||u||_p^p \\ &\leq c_1||a||_{\infty}||u||_A^q + c_2||b||_{\infty}||u||_A^p, \end{aligned} \tag{3.18}$$

onde c_1, c_2 são constantes positivas. Dividindo (3.10) por $||u||_A^2$ obtemos

$$1 \leq c_1||a||_{\infty}||u||_A^q + c_2||b||_{\infty}||u||_A^p. \tag{3.19}$$

Suponha por absurdo que exista uma sequência $\{u_n\} \in \mathbb{M}$ tal que $||u_n||_A \to 0$, quando $n \to \infty$. Então, como $2 < q < p$, por (3.19) chegamos que $1 \leq 0$ o que é um absurdo. Segue que existe $\delta > 0$ tal que $||u||_A \geq \delta > 0$, para toda $u \in \mathbb{M}$.

A demonstração segue como noLema 3.2. Concluímos que nessas condições a variedade de Nehari é uma variedade de classe C^2 e fechada. □

A partir dos resultados que acabamos de fazer já estamos prontos para relacionar os pontos críticos do funcional restrito à variedade de Nehari com os pontos críticos do funcional definido em todo o $H_A^1(\mathbb{R}^N)$.

Lema 3.4. *Suponha que as hipóteses dosLemas 3.2 ou 3.3 sejam satisfeitas. Então $u \neq 0$ é um ponto crítico do funcional I, se e somente se, é também um ponto crítico de $I|_{\mathbb{M}}$.*

Além disso, $\{u_n\} \subset \mathbb{M}$ é uma sequência $(PS)_c$ de I se e somente se é uma sequência $(PS)_c$ para $I|_{\mathbb{M}}$.

Demonstração. Se $u \neq 0$ é um ponto crítico de I, temos que $\langle I'(u), v\rangle = 0$ para todo $v \in H_A^1(\mathbb{R}^N)$, em particular para $u = v$ e pela definição da variedade de Nehari, temos que $u \in \mathbb{M}$. Além disso, $\langle I'(u), v\rangle = 0$ para todo $v \in T_u\mathbb{M}$, de onde concluímos que u é ponto crítico de $I|_{\mathbb{M}}$.

Por outro lado, seja $u \in \mathbb{M}$ um ponto crítico de $I|_{\mathbb{M}}$. Já sabemos que $\langle I'(u), tu\rangle = t\langle I'(u), u\rangle = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, então para garantir que u é ponto crítico de I em $H_A^1(\mathbb{R}^N)$ falta mostrar que $\langle I'(u), v\rangle = 0$ para todo v fora de $\mathbb{R}_u$ (espaço gerado por u). Isso é o mesmo que mostrar que $T_u\mathbb{M} \perp \mathbb{R}_u$.

Para isso considere $v \in T_u\mathbb{M}$, então existe um caminho $\phi : [0, 1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{M}$ tal que $\phi(0) = u$ e $\phi'(0) = v$. Observe que

$$\langle I'(\phi(t)), \phi(t)\rangle = I''(\phi(t))\phi(t)\phi'(t) + I'(\phi(t))\phi'(t).$$

Como $\phi(0) = u \in \mathbb{M}$, $\langle I'(\phi(0)), \phi(0)\rangle = 0$. Assim, fazendo $t = 0$ e multiplicando a igualdade acima por u obtemos

$$I''(\phi(0))\phi(0)\phi'(0)u + I'(\phi(0))\phi'(0)u = 0.$$

Substituindo $\phi(0) = u$ e $\phi'(0) = v$ segue

$$\langle I''(u), u\rangle\langle v, u\rangle + \langle I'(u), u\rangle v = 0.$$

Veja que $\langle I'(u), u\rangle = 0$ e por (3.14), temos $\langle \alpha'(u), u\rangle < 0$, daí $\langle v, u\rangle = 0$ para toda $v \in T_u\mathbb{M}$, concluindo assim a primeira parte do lema.

Para mostrar a ida da segunda afirmação deste lema, considere $\{u_n\} \subset \mathbb{M}$ uma sequência $(PS)_c$ de I, isto é,

$$I(u_n) = c$$

e

$$||I'(u_n)|| = \sup_{v\in H^1_A;||v||_A=1} \langle I'(u_n), v\rangle \to 0. \tag{3.20}$$

Primeiro observe que $I(u_n) = c$. Além disso, temos

$$||I'|_{\mathbb{M}}(u_n)|| = \sup_{w\in T_{u_n}\mathbb{M};||w||_A=1} \langle I'(u_n), w\rangle, \tag{3.21}$$

conforme [52, Definição 5.10], que também vai para zero, já que é um caso particular de (3.20), o que conclui a ida.

Para mostrar o outro lado da afirmação considere $\{u_n\} \subset \mathbb{M}$ uma sequência $(PS)_c$ para $I|_{\mathbb{M}}$, isto é,

$$I|_{\mathbb{M}}(u_n) = c$$

e

$$||I'|_{\mathbb{M}}(u_n)|| = \sup_{w\in T_{u_n}\mathbb{M};||w||_A=1} \langle I'(u_n), w\rangle \to 0. \tag{3.22}$$

Do mesmo modo que anteriormente temos $I'(u_n) = I(u_n) = c$. Além disso, vimos que $H^1_A(\mathbb{R}^N) = T_{u_n}\mathbb{M} \oplus \mathbb{R}_{u_n}$, assim, cada $v \in H^1_A(\mathbb{R}^N)$ tal que $||v||_A = 1$ pode ser escrito como $v = w + z$ com $w \in T_{u_n}\mathbb{M}$ e $z \in \mathbb{R}_{u_n}$. Desse modo, temos

$$\begin{aligned} ||I'(u_n)|| &= \sup_{v\in H^1_A;||v||_A=1} \langle I'(u_n), v\rangle \\ &= \sup_{||w||_A=1} \langle I'(u_n), w\rangle + \sup_{||z||_A=1} \langle I'(u_n), z\rangle. \end{aligned} \tag{3.23}$$

O primeiro termo de (3.23) converge à zero por hipótese e o segundo termo converge à zero pelo mesmo argumento utilizado na primeira parte dessa demonstração. □

3.4 Preliminares do Teorema 1.6

Para provar o teorema 1.6 precisaremos de alguns resultados auxiliares. A fim de facilitar a notação vamos definir os seguintes funcionais

$$A(u) = \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^p dx \tag{3.24}$$

e

$$B(u) = \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^q dx. \tag{3.25}$$

Além disso precisaremos das definições a seguir.

Definição 3.3. *Dizemos que o funcional F é fracamente contínuo quando $F(u_n) \to F(u)$ sempre que $u_n \rightharpoonup u$, para $n \to \infty$.*

Definição 3.4. *Dizemos que o funcional $F' : X \to X^*$ é completamente contínuo quando $F'(u_n) \to F'(u)$ sempre que $u_n \rightharpoonup u$, para $n \to \infty$.*

Lema 3.5. *Suponha que a hipótese (D_1) seja satisfeita. Então, $A', B' : H^1_A(\mathbb{R}^N) \to H^1_A(\mathbb{R}^N)^*$ são completamente contínuos.*

Demonstração. Começaremos provando que A' é completamente contínuo.

Seja $u_n \in H^1_A(\mathbb{R}^N)$ com $u_n \rightharpoonup u$. Sendo $\{u_n\}$ limitada em $H^1_A(\mathbb{R}^N)$, usando a desigualdade diamagnética obtemos

$$\int |\nabla |u_n||^2 \leq \int |\nabla_A u_n|^2 < C \tag{3.26}$$

para todo $n \in \mathbb{R}$, de onde $\{|u_n|\}$ é limitada em H^1.

Passando a uma subsequência se necessário, pelo teorema de Rellich-Kondrachov [42, Teorema 8.16] obtemos

$$|u_n| \rightharpoonup u \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N); \tag{3.27}$$

$$|u_n| \to u \text{ em } L^l_{loc}(\mathbb{R}^N) \text{ para todo } 2 \leq l < 2^*; \tag{3.28}$$

$$|u_n| \to u \text{ q.t.p. } \mathbb{R}^N; \tag{3.29}$$

Escolha $v_n := |u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u$. Por (3.29)

$$v_n \to 0 \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N. \tag{3.30}$$

Sabendo que $|a+b|^t \leq 2^{t-1}(a^t + b^t)$ para $t > 1$ temos,

$$\begin{aligned} |v_n|^{\frac{p}{p-1}} &= ||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u|^{\frac{p}{p-1}} \\ &\leq 2^{\frac{p}{p-1}-1}[(|u_n|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} - (|u|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}}] \\ &= C(|u_n|^p - |u|^p). \end{aligned} \tag{3.31}$$

Observe que $u \in H^1_A(\mathbb{R}^N)$, logo $|u| \in H^1$, de onde

$$\left(\int (|u|^p)^{\frac{r}{r-1}}\right)^{\frac{r-1}{r}} = ||u||^p_{\frac{pr}{r-1}} < \infty, \tag{3.32}$$

já que por (D_4) temos $\frac{pr}{r-1} < 2^*$. O mesmo vale para cada u_n da sequência dada. Daí, por (3.31) e (3.32) obtemos $|v_n|^{\frac{p}{p-1}} \in L^{\frac{r}{r-1}}$.

Pela limitação de $\{u_n\}$ em $H^1_A(\mathbb{R}^N)$, por (3.32) e (3.30) temos que $\{|v_n|^{\frac{p}{p-1}}\}$ é limitada em $L^{\frac{r}{r-1}}(\mathbb{R}^N)$. Isso nos dá que existe uma subsequência tal que

$$|v_n|^{\frac{p}{p-1}} \rightharpoonup 0 \quad \text{em } L^{\frac{r}{r-1}}. \tag{3.33}$$

Agora, tome $w \in H^1_A(\mathbb{R}^N)$ tal que $||w||_A < 1$. Pelas desigualdades de Hölder e Sobolev obtemos

$$\begin{aligned} |\langle A'(u_n) - A'(u), w\rangle| &= \left|\int_{\mathbb{R}^N} a(x)v_n w dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |a(x)|^{\frac{1}{p}}|w||a(x)|^{\frac{1}{p'}}v_n dx \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |a(x)||w|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |a(x)||v_n|^{p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq ||a||_r^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |w|^{pr'} dx\right)^{\frac{1}{pr'}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |a(x)||v_n|^{p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq C||a||_r^{\frac{1}{p}}||w||_{pr'} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |a(x)||v_n|^{p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}}, \end{aligned} \tag{3.34}$$

com $C > 0$ constante. Ainda $a \in L^r = (L^{r'})^*$, com isso e por (3.33) temos que (3.34) vai para zero uniformemente com respeito a $||w||_A \leq 1$. O que prova que A' é completamente contínuo.

Para B' a prova é análoga. □

Agora, supondo que a hipótese (D_2) seja satisfeita, estamos interessados em mostrar que o funcional satisfaz a condição $(PS)_c$ na variedade, para todo $c \in \mathbb{R}$. Como as funções peso podem mudar de sinal, iremos separar os funcionais A e B definidos anteriormente em suas partes positivas e negativas a fim de mostrar que a parte positiva das suas derivadas são completamente contínuas. Desse modo, faremos as definições a seguir.

$$a^-(x) := \max\{0, -a(x)\}, \ \ a^+(x) := \max\{0, a(x)\}, \tag{3.35}$$

e definimos $b \pm (x)$ similarmente. Ainda,

$$A_\pm(u) := \int_{\mathbb{R}^N} a^\pm(x)|u|^q dx, \ \ B_\pm(u) := \int_{\mathbb{R}^N} b^\pm(x)|u|^p dx. \tag{3.36}$$

Apresentamos então o resultado a seguir.

Lema 3.6. *Suponha que a hipótese* (D_2) *seja satisfeita. Então* $A'_+, B'_+ : H^1_A(\mathbb{R}^N) \to H^1_A(\mathbb{R}^N)^*$ *são completamente contínuas.*

Demonstração. Primeiro mostraremos que A'_+ é completamente contínuo. Seja $\{u_n\} \in H^1_A(\mathbb{R}^N)$ e $u_n \rightharpoonup u_0$ em $H^1_A(\mathbb{R}^N)$. Passando se necessário a uma subsequência e utilizando o mesmo argumento da demontração do Lema (3.5) obtemos (3.27)-(3.29). Assim como fizemos anteriormente, escolha $v_n := |u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u$. Como $u_n \to u$ em $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$, pelo resultado [52, Teorema A.2] e por (3.29)

$$v_n \to 0 \text{ em } L^{\frac{p}{p-1}}_{loc}\mathbb{R}^N. \tag{3.37}$$

Pela hipótese (D_2) para todo $\varepsilon > 0$ vai existir um $R > 0$ tal que

$$a^+(x) < \varepsilon \quad \text{sempre que } |x| > R. \tag{3.38}$$

Usando as desigualdades de Hölder e Sobolev e por (3.37) obtemos

$$\begin{aligned} \sup_{||w||\le 1}\left|\int_{|x|\le R} a^+(x) v_n w dx\right| &\le ||a^+||_\infty \left(\int_{|x|\le R} |v_n|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{|x|\le R} |w|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le C_1 \left(\int_{|x|\le R} |v_n|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \to 0, \end{aligned} \tag{3.39}$$

quando $n \to \infty$. Como visto no lema anterior, $\{v_n\}$ é limitada em $L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N)$. Usando esse fato, as desigualdades de Hölder e Sobolev e por (3.38) obtemos que existe uma constante $C_2 > 0$ independente de $\varepsilon > 0$ tal que

$$\sup_{||w||\le 1}\left|\int_{|x|\le R} a^+(x) v_n w dx\right| \le C_2 \varepsilon. \tag{3.40}$$

Usando (3.39) e (3.40), temos

$$\sup_{||w||\leq 1} |\langle A'_+(u_n) - A'_+(u), w\rangle| = \sup_{||w||\leq 1} \left| \int_{|x|>R} a^+(x) v_n w dx \right| \to 0,$$

quando $n \to \infty$, de onde concluímos que A'_+ é completamente contínuo.

Para B'_+ o argumento é análogo.

$\square$

Lema 3.7. *Suponha que as hipóteses (D_4) ou (D_5) sejam satisfeitas. Então, toda sequência $(PS)_c$ $\{u_n\} \subset \mathbb{M}$ é limitada.*

Demonstração. Seja $c \in \mathbb{R}$ e seja $\{u_n\} \subset \mathbb{M}$ uma sequência $(PS)_c$. Então

$$||u_n||^2 = A(u_n) + B(u_n), \tag{3.41}$$

e $I'(u_n) \to 0$, $I(u_n) \to c$.

Se (D_4) é satisfeita, então $B(u_n) \geq 0$ e por (3.41) e pela limitação de $I(u_n)$,

$$\begin{aligned} I(u_n) &= \frac{1}{2}||u_n||_A^2 - \frac{1}{p}A(u_n) - \frac{1}{q}B(u_n) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)||u_n||_A^2 + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)B(u_n) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)||u_n||_A^2 \end{aligned} \tag{3.42}$$

para todo n suficientemente grande.

Ainda, se (D_5) é satisfeita, então $A(u_n) \leq 0$ e por (3.41) novamente obtemos

$$\begin{aligned} I(u_n) &= \frac{1}{2}||u_n||_A^2 - \frac{1}{p}A(u_n) - \frac{1}{q}B(u_n) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)||u_n||_A^2 - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)A(u_n) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)||u_n||_A^2 \end{aligned} \tag{3.43}$$

para todo n suficientemente grande. Como $I(u_n) \to c$, temos que nos dois casos $\{u_n\}$ é uma sequência limitada. Como queríamos demonstrar. $\square$

Agora estamos prontos para mostrar que a condição $(PS)_c$ é satisfeita pelo funcional I em $\mathbb{M}$ para todo $c \in \mathbb{R}$.

Proposição 3.3. *Suponha (D_1) ou (D_2) e (D_4) ou (D_5) sejam satisfeitas. Então, o funcional I satisfaz a condição $(PS)_c$ em $\mathbb{M}$ para todo $c \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Seja $c \in \mathbb{R}$ e seja $\{u_n\} \subset \mathbb{M}$ uma sequência $(PS)_c$. Como estamos sob as hipóteses (D_4) ou (D_5), pelo Lema 3.7 $\{u_n\}$ é uma sequência limitada. Assim, existe $u \in H^1_A(\mathbb{R}^N)$ tal que, passando a uma subsequência se necessário, $u_n \rightharpoonup u$. Desse modo, tendo $I'(u_n) \to 0$, obtemos $I'(u) = 0$. Com isso,

$$\langle I'(u_n)-I'(u), u_n-u\rangle = ||u_n-u||^2-\langle A'(u_n)-A'(u), u_n-u\rangle-\langle B'(u_n)-B'(u), u_n-u\rangle \to 0. \quad (3.44)$$

Agora, se (D_1) é satisfeita, então pelo Lema 3.5, $A'(u_n) \to A'(u)$ e $B'(u_n) \to B'(u)$. Desse modo, por (3.44) obtemos $u_n \to u \in X$.

Suponha agora que (D_2) seja satisfeita. Usando o fato da função $v \mapsto |v|^t$ ser convexa para $t \geq 2$ (em particular para $t = p$ e q), temos $(|v|^{t-2}v - |u|^{t-2}u)(v-u) \geq 0$. Com isso, por (3.44),

$$\begin{aligned} ||u_n - u||_A^2 &- \langle A'_+(u_n) - A'_+(u), u_n - u\rangle - \langle B'_+(u_n) - B'_+(u), u_n - u\rangle \\ &\leq \langle A'(u_n) - A'(u), u_n - u\rangle - \langle B'(u_n) - B'(u), u_n - u\rangle \to 0. \end{aligned}$$

Pelo Lema 3.6, $A'_+(u_n) \to A'_+(u)$ e $B'_+(u_n) \to B'_+(u)$, daí $u_n \to u$ também neste caso, o que conclui a prova da proposição. □

Para provar o Teorema 1.6 precisaremos fazer algumas considerações.

Definição 3.5. *O conjunto $K \subset H^1_A(\mathbb{R}^N)$ é dito simétrico se $K = -K$.*

Definição 3.6. *Seja*

$$\Sigma := \{K \subset X : K \text{ é fechado e simétrico}\}.$$

Para $K \neq \emptyset$ e $K \in \Sigma$, o gênero de Krasnoselskii de K é o menor inteiro n tal que exista uma função ímpar $f \in C(K, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

O gênero de K é denotado por $\gamma(K)$. Se não existe nenhuma f que satisfaça as propriedades acima para algum n, então $\gamma(K) := \infty$. Note ainda que $\gamma(\emptyset) := 0$.

Teorema 3.3. *[48, Teorema II.5.7]. Suponha que $J \in C^1(M)$ seja um funcional par em uma variedade $C^{1,1}$, completa e simétrica $M \subset V \setminus \{0\}$ em um espaço de Banach V. Suponha ainda que J satisfaça a condição $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$ e seja limitado inferiormente em M. Considere*

$$\hat{\gamma}(M) := \sup\{\gamma(K) : K \subset M \text{ é compacto e simétrico}\}.$$

Então, o funcional J possui pelo menos $\hat{\gamma}(M) \leq \infty$ pares de pontos críticos.

3.4.1 Prova do Teorema 1.6

O nosso objetivo é mostrar que o problema (P_2) tem infinitas soluções. Para isso, estamos considerando o funcional I definido na variedade de Nehari $\mathbb{M} \subset H^1_A(\mathbb{R}^N)$.

Pelos Lemas 3.1-2.1 e pela Proposição 3.3, $\mathbb{M}$ é uma variedade simétrica e fechada de classe C^2, $I(u) > 0$ para todo $u \in \mathbb{M}$ e I satisfaz a condição $(PS)_c$ em $\mathbb{M}$ para todo $c \in \mathbb{R}$. Com isso, estamos nas hipóteses do teorema 3.3. Resta então, mostrar que $\hat{\gamma}(\mathbb{M}) = \infty$.

Faremos isso provando que para todo $n \geq 1$ existe um conjunto simétrico e compacto $K_n \subset \mathbb{M}$ tal que $\gamma(K_n) \geq n$. Daí, a primeira afirmação desse teorema vai seguir do Lema 3.4 e do Teorema 3.3.

Seja $n \geq 1$ e seja X_n um subspaço gerado por n funções $v_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ linearmente independentes e tais que supp $v_j \subset \{x \in \mathbb{R}^N : b(x) > 0\}$ e seja

$$S^{n-1} := X_n \cap \{u \in H^1_A(\mathbb{R}^N) : ||u||_A = 1\}.$$

Pela definição de S^{n-1}, temos $B(u) > 0$ para todo $u \in S^{n-1}$ e segue do Lema 3.1 que a equação $\alpha'_u(t) = 0$ tem exatamente uma solução $t_u \in (0, \infty)$. Assim, a aplicação $\phi : S^{n-1} \to \mathbb{M}$ dada por $\phi(u) := t_u u$ está bem definida. Além disso, pela forma que encontramos t_u no Lema 3.1 podemos ver que $t_u = t_{-u}$, assim

$$\phi(-u) = t_{-u}(-u) = -t_u u = -\phi(u)$$

nos dando que ϕ é uma aplicação ímpar.

Afirmação: $\phi : u \mapsto t_u$ é uma função contínua.

Para mostrar a afirmação, observe que se a condição necessária e suficiente de existência de um t_u dada no Lema 3.1 for satisfeita, então $T''_u(t) < 0$ para $t = t_u$, como está ilustrado no gráfico 3.4. Assim, chamando $f(t,u) = T'_u(t)$, teremos $f(t_u, u) = T'_u(t_u) = 0$, com $\frac{\partial f}{\partial t} = T''_u(t) < 0$. Daí, pelo teorema da função implícita obtemos a continuidade de $u \mapsto t_u$, concluindo a afirmação.

Assim, ϕ é uma função contínua e ímpar de K_n em S^{n-1} e segue da propriedade do gênero que $\gamma(K_n) = \gamma(S^{n-1}) = n$, conforme [48, Seção II.5].

3.5 Preliminares do Teorema 1.7

Queremos estabelecer resultados de existência e multiplicidade de soluções para o caso em que a hipótese (D_3) e uma das condições (D_4) ou (D_5) sejam satisfeitas. Procuramos adaptar para o nosso caso um método que foi desenvolvido por [49] e também utilizado em [40]. A seguir, apresentamos as considerações necessárias para construirmos a demostração do Teorema 1.7.

Nosso próximo resultado mostra a existência de soluções não triviais para o problema (P_2) quando a e b forem periódicas.

Proposição 3.4. *Suponha* (D_3) *e também* (D_4) *ou* (D_5) *sejam satisfeitas. Então existe* $v \in \mathbb{M}$ *tal que* $I'(v) = 0$ *e* $|v(x)| > 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^N$.

Demonstração. Pelo Lema 3.1, I é limitado inferiormente em $\mathbb{M}$. Por uma consequência do Princípio Variacional de Ekland (conforme corolário 4.7 no apêndice), existe uma sequência $\{u_n\} \subset \mathbb{M}$ tal que

$$I'(u_n) \to 0 \quad \text{e} \quad I(u_n) \to c_0 := \inf_{u \in \mathbb{M}} I(u).$$

Pelo Lema 3.7, temos que $\{u_n\}$ é limitada. Assim, passando a uma subsequência se necessário, vai existir $u \in H^1_A(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$.

Pelo princípio de concentração e compacidade, conforme o Lema de P.L. Lions [52, Lema 1.21], se para algum $r > 0$ tivermos

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B(y,r)} |u_n|^2 dx = 0,$$

então $|u_n| \to 0$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$ e $L^q(\mathbb{R}^N)$. Neste caso teríamos

$$A(u_n) = \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u_n|^p dx \to 0$$

e

$$B(u_n) = \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u_n|^q dx \to 0$$

e como $||u_n||^2_A = A(u_n) + B(u_n)$, segue que $|u_n| \to 0$ em $H^1_A(\mathbb{R}^N)$.

Entretanto, pelo Lema 3.3 que $||u||_A \geq \delta > 0$ para toda $u \in \mathbb{M}$, o que nos leva a uma contradição.

Assim, existe $y_n \subset \mathbb{Z}^N$, $\rho > 0$ e $R \geq r$ tal que, passando a uma subsequência se necessário temos $v_n(x) := u_n(x - y_n)$ satisfazendo

$$\lim_{n \to \infty} |v_n|^2 dx = \int_{B(y_n,R)} |u_n|^2 dx \geq \rho > 0. \tag{3.45}$$

Sendo $\{v_n\}$ limitada em $H^1_A(\mathbb{R}^N)$ existe $v \in H^1_A(\mathbb{R}^N)$ tal que $v_n \rightharpoonup v$ em $H^1_A(\mathbb{R}^N)$. Além disso, pela desigualdade diamagnética temos

$$\int |\nabla |v_n||^2 \leq \int |\nabla_A v_n|^2 < C$$

para todo $n \in \mathbb{R}$, de onde $\{u_n\}$ é limitada em H_0^1. Passando a uma subsequência se necessário, pelo Teorema de Rellich-Kondrachov [42, Teorema 8.16] obtemos

$$\begin{aligned} |v_n| &\rightharpoonup |v| \quad \text{em } H^1(\mathbb{R}^N), && (3.46)\\ |v_n| &\to |v| \ \text{ em } \ L^l_{loc}(\mathbb{R}^N), 2 \leq l < 2^*, && (3.47)\\ |v_n| &\to |v| \ \text{q.t.p. em } \ \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

Por (3.47),

$$||v||_2^2 \geq \int_{B(0,R)} |v|^2 = \lim_{n\to\infty} \int_{B(0,R)} |v_n|^2 \geq \rho > 0.$$

Daí $|v| \neq 0$. Como $y_n \in \mathbb{Z}^N$, segue da periodicidade de a

$$\begin{aligned} A(v_n) &= A(u_n(x-y_n)) = \int a(x-y_n)|u_n(x-y_n)|^p \\ &= \int a(x)|u_n(x-y_n)|^p = \int a(x)|u_n(x)|^p = A(u_n). \end{aligned}$$

Do mesmo modo, pela periodicidade de b, $B(v_n) = B(u_n)$. Com isso, $||I'(v_n)||_A = ||I'(u_n)||_A \to 0$.

Podemos mostrar que $I'(v) = 0$. De fato, basta tomar $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, usando (3.45)-(3.47) obtemos

$$\langle I'(v_n), \phi\rangle \to 0. \tag{3.48}$$

Por outro lado,

$$\langle I'(v_n), \phi\rangle = \int \nabla_A u_n \nabla_A \phi - \int a(x)|v_n|^{p-1}\phi - \int b(x)|v_n|^{q-1}\phi \to \langle I'(v), \phi\rangle,$$

que juntamente com (3.48) nos dá que $\langle I'(v), \phi\rangle = 0$ para todo $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Pela densidade de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ em $H_A^1(\mathbb{R}^N)$ obtemos $\langle I'(v), w\rangle = 0$ para todo $w \in H_A^1(\mathbb{R}^N)$, de onde concluímos que $I'(v) = 0$.

Agora mostraremos que v é um mínimo para I em $\mathbb{M}$. Como $I(v_n) = I(u_n)$, $I(v_n) \to c_0$.

Se (D_4) é satisfeita, então $b \geq 0$ e pelo Lema de Fatou

$$\liminf_{n\to\infty} [B(v_n)] \geq B(\liminf_{n\to\infty} v_n) = B(v).$$

Com isso, temos

$$\begin{aligned} c_0 &= \liminf_{n\to\infty} I(v_n) = \liminf_{n\to\infty} \left(I(v_n) - \frac{1}{p}\langle I'(v_n), v_n\rangle \right) \\ &= \liminf_{n\to\infty} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) ||v_n||_A^2 + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) B(v_n) \right] \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) ||v||_A^2 + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) B(v) \\ &= I(v) - \frac{1}{p}\langle I'(v), v\rangle = I(v) \geq c_0. \end{aligned}$$

Assim, $I(v) = c_0$.

Analogamente, se (D_5) é satisfeita, então $a \leq 0$ e daí

$$\begin{aligned} c_0 &= \liminf_{n\to\infty} I(v_n) = \liminf_{n\to\infty} \left(I(v_n) - \frac{1}{p}\langle I'(v_n), v_n\rangle \right) \\ &= \liminf_{n\to\infty} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) ||v_n||_A^2 + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) A(v_n) \right] \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) ||v||_A^2 + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) A(v) \\ &= I(v) - \frac{1}{p}\langle I'(v), v\rangle = I(v) \geq c_0, \end{aligned}$$

desse modo, $I(v) = c_0$ também neste caso.

□

No caso em que a hipótese (D_3) é satisfeita, não conseguimos mostrar a continuidade completa de A'^{+} e B'^{+}. Por conta disso não é possível garantir a condição $(PS)_c$ para o funcional I na variedade, para nenhum $c \in \mathbb{R}$. A fim de contornar essa dificuldade, precisaremos de um argumento do tipo deformação. Para isso faremos uso das seguintes notações

$$K := \{u \in \mathbb{M} : I'(u) = 0\}$$

$$K_d := \{u \in K : I(u) = d\}.$$

Além disso, definimos os seguintes conjuntos de nível da variedade de Nehari

$$I^d := \{u \in \mathbb{M} : I(u) \leq d\}, \qquad I_e := \{u \in \mathbb{M} : e \leq I(u)\}, \qquad I_e^d := I_e \cap I^d.$$

Seja $\mathcal{K}$ um subconjunto de K tal que $\mathcal{K} = -\mathcal{K}$ e cada órbita $O(u) \subset K$ tenha um único representante em $\mathcal{K}$.

Nosso objetivo agora é mostrar que $\mathcal{K}$ tem infinitos elementos sob a hipótese (D_3) e também (D_4) ou (D_5). Para isso vamos supor que $\mathcal{K}$ é finito para chegar a uma contradição. Pelo mesmo argumento usado em [49, Lema 2.13] podemos mostrar que

Lema 3.8. *O ínfimo das distâncias entre dois elementos distintos do conjunto $K \cup \{0\}$ é um número positivo.*

Demonstração. A demonstração desse lema segue a ideia do que foi feito em [49, Lema 2.13]. Escreveremos aqui para facilitar o leitor.

Queremos mostrar que $\kappa := \inf\{||v - w|| : v, w \in K \cup \{0\}, v \neq w\} > 0$.

Tome v_n e w_n em $\mathcal{K}$ e k_n, l_n em $\mathbb{Z}^N$ tais que $v_n(\cdot - k_n) \neq w_n(\cdot - l_n)$ para todo n e

$$||v_n(\cdot - k_n) - w_n(\cdot - l_n)|| \to \kappa, \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Tome $m_n = k_n - l_n$. Pela finitude de $\mathcal{K}$, passando a uma subsequência teremos $v_n = v \in \mathcal{K}$, $w_n = w \in \mathcal{K}$. Além disso temos duas possibilidades, ou $m_n = m \in \mathbb{Z}^N$ para quase todo n, ou $|m_n| \to \infty$.

Se $m_n = m \in \mathbb{Z}^N$ para quase todo n, então

$$\begin{aligned} 0 &< ||v_n(\cdot - k_n) - w_n(\cdot - l_n)|| = ||v(\cdot - k_n) - w(\cdot - l_n)|| \\ &= ||v - w(\cdot - m_n)|| = ||v - w(\cdot - m)|| = \kappa; \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Por outro lado, se $|m_n| \to \infty$, então $w(\cdot - m_n) \rightharpoonup 0$ e assim $\kappa = \lim_{n\to\infty} ||v - w(\cdot - m_n)|| \geq ||v|| = 1$. Como queríamos demonstrar. $\square$

Em [49] o ínfimo é assumido para todo $v, w \in K$, mas como 0 é um ponto crítico isolado, κ permanece positivo mesmo se v ou w for 0.

A seguir, estabeleceremos uma propriedade que é relacionada à noção de atrator discreto de Palais-Smale introduzida em [11], utilizada também em [40, Lema 4.4] e [49, Lema 2.14].

Lema 3.9. *Suponha (D_3) e também (D_4) ou (D_5) sejam satisfeitas e que $\{u_n\}$, $\{v_n\} \subset \mathbb{M}$ sejam duas sequências $(PS)_c$ de I. Então ou $||u_n - v_n||_A \to 0$ quando $n \to \infty$ ou $\limsup_{n\to\infty} ||u_n - v_n||_A \geq \kappa > 0$.*

Demonstração. Segue do Lema 3.7 que u_n e v_n são limitadas em $H^1_A(\mathbb{R}^N)$.

Caso 1: Suponha primeiramente que $||u_n - v_n||_p$, $||u_n - v_n||_q \to 0$ quando $n \to \infty$. Pela desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned}
||u_n - v_n||_A^2 &= \langle I'(u_n), (u_n - v_n)\rangle - \langle I'(v_n), (u_n - v_n)\rangle \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} a(x)[|u_n|^{p-2}u_n - |v_n|^{p-2}v_n](u_n - v_n)dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} b(x)[|u_n|^{q-2}u_n - |v_n|^{q-2}v_n](u_n - v_n)dx \\
&\leq \langle I'(u_n), (u_n - v_n)\rangle - \langle I'(v_n), (u_n - v_n)\rangle \\
&+ ||a||_\infty(||u_n||_p^{p-1} - ||v_n||_p^{p-1})||u_n - v_n||_p \\
&+ ||b||_\infty(||u_n||_q^{q-1} - ||v_n||_q^{q-1})||u_n - v_n||_q.
\end{aligned}$$

Primeiro, como $I'(u_n) \to 0$ e $I'(v_n) \to 0$ e u_n e v_n são limitadas em $H_A^1(\mathbb{R}^N)$, segue que $\{u_n - v_n\}$ também é limitada em $H_A^1(\mathbb{R}^N)$, de onde

$$\langle I'(u_n), (u_n - v_n)\rangle \to 0 \quad \text{e} \quad \langle I'(v_n), (u_n - v_n)\rangle \to 0.$$

Além disso, pela limitação de $\{u_n\}$ e $\{v_n\}$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$ e $L^q(\mathbb{R}^N)$, concluímos que $||u_n - v_n||_A \to 0$.

Caso 2: Vamos supor agora que $||u_n - v_n||_p \nrightarrow 0$ ou $||u_n - v_n||_q \nrightarrow 0$ as $n \to \infty$. Como u_n e v_n são limitadas em $H_A^1(\mathbb{R}^N)$, pela desigualdade diamagnética $|u_n|$ e $|v_n|$ são limitadas em H^1. Então, pelo Lema de P.L. Lions [52, Lema 1.21] (conforme Lema 4.3 no apêndice), existe $\delta_0 > 0, \{y_n\} \subset \mathbb{Z}^N$ e $r > 0$ tal que, passando a uma subsequência se necessário, $u_n(x - y_n) - v_n(x - y_n)$ satisfaz

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B(0,r)} |u_n(x - y_n) - v_n(x - y_n)|^2 dx \geq \delta_0 > 0. \tag{3.49}$$

Observe que I e $\mathbb{M}$ são invariantes pela translação $u \mapsto u(\cdot - k)$, $k \in \mathbb{Z}^N$, desse modo, definindo

$$u_n^1(x) := u_n(x - y_n) \text{ e } v_n^1(x) := v_n(x - y_n),$$

temos que u_n^1, $v_n^1 \in \mathbb{M}$ e $\{u_n^1\}$, $\{v_n^1\}$ são sequências $(PS)_c$ (com o mesmo c).

Com isso, estamos novamente nas hipóteses do Lema 3.7, de onde obtemos que $\{u_n^1\}$, $\{v_n^1\}$ são limitadas. Assim, existem u^1 e $v^1 \in H_A^1(\mathbb{R}^N)$ tais que,

$$u_n^1 \rightharpoonup u^1 \text{ e } v_n^1 \rightharpoonup v^1,$$

quando $n \to \infty$. Passando a uma subsequência se necessário, (3.46) e (3.47) valem também para

u_n^1 e v_n^1. Por (3.49) e a convergência forte de u_n e v_n em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$, temos $u^1 - v^1 \neq 0$.

Como foi visto anteriormente $I'(u^1) = I'(v^1) = 0$. Desse modo, u^1, $v^1 \in K \cup \{0\}$ e daí

$$\limsup_{n\to\infty} ||v_n - u_n||_A \geq \liminf_{n\to\infty} ||v_n - u_n||_A \geq ||v^1 - u^1||_A \geq \kappa,$$

o que completa a prova. $\square$

Recordando a nossa notação utilizada, estamos denotando o produto interno em $H^1_A(\mathbb{R}^N)$ por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Defina o gradiente de I pela dualidade, isto é, pelo conjunto

$$\langle \nabla_A I(v), w \rangle := \langle I'(v), w \rangle \text{ para todo } w \in H^1_A(\mathbb{R}^N).$$

Como $\mathbb{M}$ é uma variedade de classe C^2, fechada em $H^1_A(\mathbb{R}^N)$, pelo resultado [48, Lema II.3.9], tem-se que $I|_{\mathbb{M}}$ admite um campo vetorial de pseudo gradientes H, ou seja, uma aplicação localmente Lipschitziana e contínua $H : \mathbb{M} \setminus T \to T\mathbb{M}$ tal que

$$||H(v)||_A < 2||\nabla_A I(v)||_A, \tag{3.50}$$

$$(H(v), \nabla_A I(v)) > \frac{1}{2}||\nabla_A I(v)||_A^2 \tag{3.51}$$

vale para todo $v \in \mathbb{M} \setminus K$. Além disso, como I é par, assumimos que H é ímpar, como pode ser visto em [48, Remark II.3.10]. Note que $\langle \nabla_A I(v), v \rangle = 0$ se $v \in \mathbb{M}$ e $\nabla_A I$ é igual ao gradiente de $I|_{\mathbb{M}}$ para cada v.

Agora, seja $\eta : \mathcal{D} \to \mathbb{M}$ o fluxo correspondente ao campo de vetores pseudo gradiente H, isto é, η é definido por

$$(P) \qquad \begin{cases} \frac{d}{dt}\eta(t,v) = -H(\eta(t,v)), \\ \eta(0,v) = v, \end{cases}$$

Aqui $\mathcal{D} := \{(t,v) : v \in \mathbb{M} \setminus K, t \in I_v\}$ e $I_v := (T^-(v), T^+(v))$ é o intervalo máximo de existência para o problema de valor inicial (P).

Observação 3.4. *Por um resultado em [47, Teorema A.4] η é ímpar em v. Seguimos exibindo tal resultado para facilitar o leitor.*

Observe que o problema (P) possui única solução $\eta_t = \eta(t,v)$, para cada v.

Considere agora o problema de Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} \frac{d}{dt}\eta(t,v) = H(\eta(t,v)), \\ \eta(0,v) = -v, \end{cases}$$

que por sua vez também possui única solução $\eta_t = \eta(t, -v)$, para cada v.

Defina $w(t) = -\eta(t, v)$. Daí,

$$w(0) = -\eta(0, v) = -v \tag{3.52}$$

e pelo fato de H ser ímpar temos

$$\frac{d}{dt}w = -\frac{d}{dt}\eta = -H(\eta) = -H(-w) = H(w). \tag{3.53}$$

De (3.52) e (3.53) temos o seguinte problema

$$(2) \qquad \begin{cases} \frac{d}{dt}w(t) = H(\eta(t, v)), \\ \eta(0, v) = -v. \end{cases}$$

Veja que os problemas (1) *e* (2) *coincidem. Assim, pela unicidade de soluções segue que $w(t) = \eta_t$ ou seja,*

$$-\eta(t, u) = \eta(t, -u),$$

mostrando que η é ímpar em v.

Observação 3.5. *Como $I \in C^2(\mathbb{M})$, podemos de fato escolher H como sendo o campo de vetores gradiente de $I|_{\mathbb{M}}$, isto é, podemos colocar $H(v) := \nabla_A I(v)$, com $v \in \mathbb{M}$. Para isto H podemos mostrar que o fluxo η existe para todo $(t, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{M}$.*

Lema 3.10. *Para todo $v \in \mathbb{M}$ o limite $\lim_{t \to T^+(v)} \eta(t, v)$ existe e é um ponto crítico de I.*

Demonstração. A prova segue de modo semelhante ao que foi feito em [49, Lema 2.15], com $\rho(d)$ substituído por κ. Note que o argumento usado em [49] somente usa a existência do fluxo do pseudo-gradiente η em uma variedade completa e também o fato da sequência $(PS)_c$ ser discreta. Essa última propriedade é válida no contexto do Lema 3.9.

Seja $v \in \mathbb{M}$ e seja $I(v) = D$. Dividiremos a demonstração em dois casos.

Caso 1: $T^+(v) < +\infty$. Para $0 \leq s < t < T^+(v)$, temos por (3.50), (3.51) e (2) que

$$\begin{aligned} ||\eta(t, v) - \eta(s, v)||_A &\leq \int_s^t ||H(\eta(\tau, v))||_A d\tau \leq 2\sqrt{2}\int_s^t \sqrt{\langle H(\eta(\tau, v)), \nabla_A I(\eta(\tau, v))\rangle} d\tau \\ &\leq 2\sqrt{2(t-s)}\left(\int_s^t \langle H(\eta(\tau, v)), \nabla_A I(\eta(\tau, v))\rangle d\tau\right)^{1/2} \\ &= 2\sqrt{2(t-s)}[I(\eta(s, v)) - I(\eta(t, v))]^{1/2} \leq 2\sqrt{2(t-s)}[I(v) - c]^{1/2}. \end{aligned}$$

Temos então que o limite $\lim_{t \to T^+(v)} \eta(t, v)$ existe, já que $T^+(v) < +\infty$. Ainda, o limite é um ponto crítico de I, pois caso contrário teríamos que a trajetória $t \mapsto \eta(t, v)$ poderia continuar além de $T^+(v) < +\infty$.

Caso 2: $T^+(v) = +\infty$. Precisamos mostrar que para todo $\epsilon > 0$ existe $t_\epsilon > 0$ com $||\eta(t_\epsilon, v) - \eta(t, v)|| < \epsilon$ para $t > t_\epsilon$. Suponha por absurdo que isso seja falso. Assim teremos que existe ϵ entre 0 e κ, onde κ é como no Lema 3.8, e uma sequência $(t_n) \subset [0, \infty)$ com $t_n \to \infty$ e $||\eta(t_n, v) - \eta(t_{n+1}, v)|| = \epsilon$.

Escolha o menor $t_n^1 \in (t_n, t_{n+1})$ tal que $||\eta(t_n, v) - \eta(t_n^1, v)||_A = \frac{\epsilon}{3}$ e seja $\delta_n := \min_{s\in[t_n, t_n^1]} ||\nabla_A I(\eta(s, v))||ds$. Desse modo,

$$\begin{aligned}
\frac{\epsilon}{3} &= ||\eta(t_n, v) - \eta(t_n^1, v)||_A \leq \int_{t_n}^{t_n^1} ||H(\eta(s, v))||ds \leq 2\int_{t_n}^{t_n^1} ||\nabla_A I(\eta(s, v))||ds \\
&\leq \frac{2}{\delta_n}\int_{t_n}^{t_n^1} ||\nabla_A I(\eta(s, v))||ds \leq \frac{4}{\delta_n}\int_{t_n}^{t_n^1} \langle H(\eta(s, v)), \nabla_A I(\eta(s, v))\rangle ds \\
&= \frac{4}{\delta_n}(I(\eta(t_n, v)) - I(\eta(t_n^1, v))).
\end{aligned}$$

Mas este último termo vai a zero quando $n \to \infty$. Isso implica que $\delta_n \to 0$ e mais, existe $s_n^1 \in [t_n, t_n^1]$ tal que $\nabla_A I(\eta(s_n^1, v)) \to 0$.

Analogamente procuramos o maior $t_n^2 \in (t_n^1, t_{n+1})$ para o qual $||\eta(t_{n+1}, v) - \eta(t_n^2, v)||_A = \frac{\epsilon}{3}$, e assim $\nabla_A I(\eta(s_n^2, v)) \to 0$.

Chamando $v_n^1 := \eta(s_n^1, v)$ e $v_n^2 := \eta(s_n^2, v)$ temos $||v_n^1 - \eta(t_n, v)||_A \leq \frac{\epsilon}{3}$ e $||v_n^2 - \eta(t_{n+1}, v)||_A \leq \frac{\epsilon}{3}$, ou seja, $\{v_n^1\}$ e $\{v_n^2\}$ são duas sequências PS tais que

$$\frac{\epsilon}{3} \leq ||v_n^1 - v_n^2||_A \leq 2\epsilon < \kappa,$$

o que contradiz o Lema 3.9.

Assim conseguimos mostrar que que para todo $\epsilon > 0$ existe $t_\epsilon > 0$ com $||\eta(t_\epsilon, v) - \eta(t, v)||_A < \epsilon$ para $t > t_\epsilon$, logo, o limite existe e é um ponto crítico de I. $\square$

Seja $O \subset \mathbb{M}$ e $\delta > 0$. Defina

$$U_\delta(O) := \{w \in \mathbb{M} : dist(w, O) < \delta\}.$$

Lema 3.11. *Seja $d \geq c_0 = \inf_{u\in\mathbb{M}} I(u)$. Então para todo $\delta > 0$ existe $\epsilon = \epsilon(\delta) > 0$ tal que*
(a) $I_{d-\epsilon}^{d+\epsilon} \cap K = K_d$;
(b) $\lim_{t\to T^+(v)} I(\eta(t, v)) < d - \epsilon$ para $v \in I^{d+\epsilon} \setminus U_\delta(K_d)$.

Demonstração. (a) Segue imediatamente da finitude de $\mathcal{K}$.

(b) Essa parte pode ser provada pelo mesmo argumento utilizado em [49, Lema 2.16], mas com κ ao invés de $\rho(d+1)$. Este argumento se apóia nos Lemas 3.9 e 3.10 e envolve uma criteriosa análise do fluxo η. Para facilidade do leitor deixaremos exposto o argumento a seguir.

Sem perda de generalidade podemos assumir $U_\delta(K_d) \subset I^\kappa$ e $\delta < \kappa$, lembrando que

$$I^d := \{u \in \mathbb{M} : I(u) \leq d\},$$

$$K_d = I_{d-\epsilon}^{d+\epsilon} \cap K \quad \text{e} \quad U_\delta(K_d) := \{w \in \mathbb{M} : dist(w, K_d) < \delta\}.$$

Para encontrar um ϵ tal que (b) seja satisfeita, tomemos

$$\tau := \inf\{||\nabla_A I(w)||_A; w \in U_\delta(K_d) \setminus U_{\delta/2}(K_d)\}.$$

Afirmação: $\tau > 0$.

Suponha por contradição que $\tau = 0$ ou seja, que exista uma sequência $(v_n^1)_n \subset U_\delta(K_d) \setminus U_{\delta/2}(K_d)$ tal que $\nabla_A I(v_n^1) \to 0$.

Passando a uma subsequência se necessário, usando a $\mathbb{Z}^n$ invariância de I e a finitude de $\mathcal{K}$, podemos assumir que $v_n^1 \in U_\delta(v_0) \setminus U_{\delta/2}(v_0)$ para algum $v_0 \in K_d$.

Tome $v_n^2 \to v_0$. Daí, pela definição de K_d temos $\nabla_A I(v_n^2) \to 0$. Além disso,

$$\frac{\delta}{2} \leq \limsup_{n\to\infty} ||v_n^1 - v_n^2||_A \leq \delta < \kappa,$$

o que contraria o Lema 3.9. Desse modo, obtemos $\tau > 0$.

Seja $A := \sup\{||\nabla_A I(v)||_A; v \in U_\delta(v_0) \setminus U_{\delta/2}(v_0)\}$ e escolha $\epsilon < \frac{\delta\tau^2}{8A}$ tal que (a) seja satisfeita.

Pelo Lema 3.10 e (a), a única possibilidade de (b) falhar seria se $\eta(t, w) \to \tilde{w} \in K_d$ quando $t \to T^+(w)$ para algum $w \in I^{d+\epsilon} \setminus U_\delta(K_d)$. Suponhamos por contradição que isso aconteça e considere

$$t_1 := \sup\{t \in [0, T^+(w)); \eta(t, w) \notin U_\delta(\tilde{w})\}$$

e

$$t_2 := \inf\{t \in (t_1, T^+(w)); \eta(t, w) \in U_{\delta/2}(\tilde{w})\}.$$

Desse modo,

$$\frac{\delta}{2} = ||\eta(t_1, w) - \eta(t_2, w)||_A \leq \int_{t_1}^{t^2} ||H(\eta(s, w))||ds \leq 2\int_{t_1}^{t^2} ||\nabla_A I(\eta(s, w))||_A ds \leq 2A(t_2 - t_1)$$

e ainda

$$\begin{aligned} I(\eta(t_2,w)) - I(\eta(t_1,w)) &= -\int_{t_1}^{t^2} \langle \nabla_A I(\eta(s,w)), H(\eta(s,w))\rangle ds \\ &\leq -\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t^2} ||\nabla_A I(\eta(s,w)||_A^2 ds \leq -\frac{1}{2}\tau^2(t_2-t_1) \leq -\frac{\delta\tau^2}{8A}. \end{aligned}$$

Daí,

$$I(\eta(t_2,w)) \leq I(\eta(t_1,w)) - \frac{\delta\tau^2}{8A} \leq d+\epsilon - \frac{\delta\tau^2}{8A} < d,$$

nos dando $\eta(t,w) \nrightarrow \tilde{w} \in K_d$ o que é um absurdo. Assim obtemos o resultado desejado.

□

3.5.1 Prova do Teorema 1.7

A existência de soluções foi mostrada na Proposição 3.4. Para mostrar o fato de que existem infinitas soluções geometricamente distintas, usamos o mesmo argumento utilizado em [49, Teorema 1.2] como apresentaremos a seguir.

Considere a sequência

$$c_k := \inf\{d \in \mathbb{R} : \gamma(I^d) \geq k\}, \quad k \in N,$$

isto é, para cada $k \in \mathbb{N}$ tomamos o menor nível d tal que o gênero de I^d seja maior que k.

Queremos usar a finitude de $\mathcal{K}$ para chegar à uma contradição. Para isso, vamos mostrar que

$$K_{c_k} \neq \emptyset \text{ e } c_k < c_{k+1} \text{ para todo } k.$$

$K_{c_k} \neq \emptyset$ nos garante que para cada termo da sequência existe um $w \in H_A^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $I'(w) = 0$, ou seja, tal que w é solução de (P_2) e $I(w) = c_k$. Ainda, mostrando que $c_k < c_{k+1}$ garantimos que a cada k estamos trabalhando em um nível distinto do anterior.

Façamos $d = c_k$. Pelo Lema 3.8, $\gamma(K_d) = 0$ ou 1. Usando a propriedade de continuidade do gênero, existe um δ tal que $0 < \delta < \frac{\kappa}{2}$ e com $\gamma(\bar{U}) = \gamma(K_d)$, onde

$$U := U_\delta(K_d) = \{w \in \mathbb{M} : dist(w, K_d) < \delta\},$$

ou seja, existe uma faixa em torno do nível d tal que o gênero permanece o mesmo.

Para esse δ, escolhemos um $\epsilon = \epsilon(\delta) > 0$ tal que a conclusão do Lema 3.11 segue. Assim, para cada $v \in I^{d+\epsilon} \setminus U$ existe $t \in [0, T^+(v))$ tal que $I(\eta(t,v)) < d - \epsilon$.

Agora, defina a aplicação $e : I^{d+\epsilon} \setminus U \to [0, \infty)$;

$$e(v) := \inf\{t \in [0, T^+(v)); I(\eta(t, v)) < d - \epsilon\}$$

Como $d - \epsilon$ não é um valor crítico de I, segue do Lema 3.11 que a aplicação e é contínua e mais ainda, é par (já que I o é).

Seja $h : I^{d+\epsilon} \setminus U \to I^{d-\epsilon}$; $h(v) := \eta(e(v), v)$. Veja que

$$h(-v) = \eta(e(-v), -v) = \eta(e(v), -v) = -\eta(e(v), v) = -h(v),$$

ou seja, h é ímpar e contínua.

Agora, usando as propriedades do gênero e da definição de c_k, obtemos

$$\gamma(I^{d+\epsilon}) \leq \gamma(\bar{U}) + \gamma(I^{d-\epsilon}) \leq \gamma(K_d) + k - 1.$$

Pelas definições de $d = c_k$ e c_{k+1} temos

$$\gamma(K_d) \geq 1, \quad \text{se} \quad c_{k+1} > c_k$$

e

$$\gamma(K_d) > 1, \quad \text{se} \quad c_{k+1} = c_k.$$

Pelo Lema 3.8, temos $\gamma(K_d) \leq 1$. Daí obtemos $\gamma(K_d) = 1$ e $K_d \neq \emptyset$ e ainda $c_k < c_{k+1}$ para todo k. Desse modo, existem infinitos pares $(\pm v_k)$ de soluções geometricamente distintas de (P_2) tais que $I(v_k) = c_k$ contrariando a finitude de $\mathcal{K}$, o que finaliza a prova.

Capítulo

4

Apêndice

Apresentamos aqui alguns resultados que usamos ao longo do texto, bem como as referências de suas provas.

4.1 Resultados Clássicos

Teorema 4.1. *[42, Proposição 14.3, pg 55](Teorema dos Multiplicadores de Lagrange) Sejam* X *um espaço de Banach,* $J, F : X \to \mathbb{R}$ *funcionais de classe* $C^1(X, \mathbb{R})$ *e* $M = \{x \in X; F(u) = 0\}$ $= F^{-1}(\{0\})$ *com* $F'(u) \neq 0$*, para todo* $u \in M$*. Se* J *é limitado inferiormente sobre* M *e existe* $u_0 \in M$ *tal que*

$$J(u_0) = \inf_{u \in M} J(u),$$

então existe $\delta \in \mathbb{R}$ *verificando*

$$J'(u_0) = \delta F'(u_0).$$

Definição 4.1. *Seja* X *um espaço de Banach,* $F \in C^1(X, \mathbb{R}^N)$ *e* $c \in \mathbb{R}$*.*

(i) A sequência (u_n) *é uma sequência* $(PS)_c$ *em* X *para* F *se*

$$F(u_n) \to c, \quad F'(u_n) \to 0,$$

forte em X^* *quando* $n \to \infty$*.*

(ii) A função F *satisfaz a condição* $(PS)_c$ *se para toda sequência* $(u_n) \subset X$ *tal que*

$$F(u_n) \to c, \quad F'(u_n) \to 0,$$

quando $n \to \infty$*, possui uma subsequência convergente.*

Definição 4.2. *(Ponto regular) Se* $F : M \to N$ *é uma aplicação regular, um ponto* $p \in M$ *é dito* *ser um ponto regular de F se $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$ é sobrejetiva; isto é, um ponto crítico de outra forma. (Em particular, todo ponto é crítico se $dimM < dimN$.)*

Definição 4.3. *(Valor regular) Um ponto $c \in N$ é dito ser um valor regular de F se cada ponto do conjunto de níveis $F^{-1}(c)$ for um ponto regular, e um valor crítico de outra forma. Em particular, se $F^{-1}(c) = \emptyset$, c é regular.*

Definição 4.4. *(Conjunto de nível regular) Finalmente, um nível conjunto $F^{-1}(c)$ é chamado de conjunto de nível regular se c for um valor regular; em outras palavras, um conjunto de níveis regulares é um conjunto de níveis consistindo inteiramente de pontos regulares.*

Definição 4.5. *(Espaço tangente) Sejam M uma variedade arbitrária e x um ponto em M. Dizemos que um vetor v está no espaço tangente à M em x se existe uma curva $\gamma(t) : (-a, a) \to M$, tal que*

$$\gamma(0) = x \;\; e \;\; \gamma'(0) = v.$$

Assim,

$$T_xM = \{v| \text{ existe } \gamma(t) : (-a, a) \to M \text{ com } \gamma(0) = x \text{ e } \gamma'(0) = v\}.$$

Definição 4.6. *Sejam (X, d) e (Y, d) espaços métricos. Uma função $f : X \to Y$ é dita Lipschitz contínua se existir uma constante real $L > 0$ tal que:*

$$d\,(f(x), f(y)) \leq L \cdot d(x, y), \;\; \forall x, y \in X$$

O ínfimo das constantes L para o qual a desigualdade acima é válida é chamado de constante de Lipschitz.

Corolário 4.1. *[45, Corolário 5.24] (Teorema do Conjunto de Nível Regular). Todo conjunto de nível regular de uma aplicação suave é uma subvariedade fechada cuja codimensão é igual à dimensão do contradomínio.*

Lema 4.1. *[48, Lema II.5.6] Suponha que para algum k, l tenhamos*

$$-\infty < \beta_k = \beta_{k+1} = ... = \beta_{k+l-1} = \beta < \infty.$$

Então $\gamma(K_\beta) \leq l$. Em particular, se $l > 1$, K_β é infinito.

Teorema 4.2. *[16, Corolário 9.10] Seja $1 \leq p < N$. Então $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N)$, para todo $q \in [p, p^*]$, com imersão contínua.*

Teorema 4.3. *[16, Teorema 9.16] Suponha* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$*, um domínio limitado de classe* C^1*. Então temos*

$$W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \text{ para todo } q \in [1, 2^*)$$

com injeção compacta, onde $2^* = \frac{2N}{N-2}$ *e* $N \geq 3$*.*

Teorema 4.4. *[16, Teorema 4.9] Seja* (f_n) *uma sequência de funções de* $L^p(\Omega)$ *e* $f \in L^p(\Omega)$ *tais que* $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0$*, onde* Ω *é um aberto de* $\mathbb{R}^N$*. Então existe uma subsequência* f_{n_k} *de* (f_n)*, e uma função* $h \in L^p(\Omega)$*, tal que*

$$f_{n_k}(x) \to f(x) \text{ q.t.p. em } \Omega$$

e

$$|f_{n_k}(x)| \leq h(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Teorema 4.5. *[16, Corolário 9.13] Sejam* $m \geq 1$ *um inteiro e* $1 \leq p < \infty$*. Então*

$$\begin{aligned}
&\text{Se} \quad \tfrac{1}{p} - \tfrac{m}{N} > 0, \quad \text{temos} \quad W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N), \quad \text{onde } \tfrac{1}{q} = \tfrac{1}{p} - \tfrac{m}{n};\\
&\text{se} \quad \tfrac{1}{p} - \tfrac{m}{N} = 0, \quad \text{temos} \quad W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N), \quad \text{para todo } q \in [p, \infty);\\
&\text{se} \quad \tfrac{1}{p} - \tfrac{m}{N} < 0, \quad \text{temos} \quad W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^\infty(\mathbb{R}^N),
\end{aligned}$$

com injeções contínuas.

Teorema 4.6. *[2, Teorema 6.2] Suponha* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio limitado com fronteira* $\partial\Omega$ *de classe* C^1 *e sejam* $m \geq 1$ *e* $1 \leq p < \infty$*. Então para qualquer* $j \geq 0$ *a imersão*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\alpha}(\overline{\Omega}),$$

onde $0 < \alpha < 1 - \frac{N}{p}$*, é compacta se* $m - 1 < \frac{N}{p} < m$*.*

Lema 4.2. *[15, Teorema 1] (Brézis e Lieb). Sejam* (Ω, μ) *espaço de medida e* $(f_n) : \Omega \to \mathbb{C}$ *funções mensuráveis. Suponha que*

1. *as funções* f_n*, para* $n = 1; 2; 3; ...; \infty$*, sejam uniformemente limitadas em* $L^p(\Omega)$*, para algum* $0 < p < 1$ *e*

2. $f_n \to f$ *q. t. p em* Ω*.*

Então

$$\lim_{n\to\infty} [|f_n|_p^p - |f_n - f|_p^p] = |f|_p^p.$$

Teorema 4.7. *[24, Corolário A.3] Seja* $\phi \in C^1(E, \mathbb{R})$*, com* E *um espaço de Hilbert e seja* $M = \{u \in E \setminus \{0\}; \psi(u) = 0\}$*, onde* $\psi \in C^1(E, \mathbb{R})$ *com* $\nabla\psi(u) \neq 0$ *para todo* $u \in M$*. Suponha que* ϕ *seja limitado inferiormente em* M*, e seja* $u_n \in M$ *uma sequência minimizante para* $\phi|_M$*. então existe outra sequência minimizante* $v_n \in M$ *tal que*

$$\phi(v_n) \leq \phi(u_n),$$

$$||v_n - u_n|| \to 0$$

e

$$||\nabla(\phi|_M)(v_n)|| \to 0,$$

quando $n \to \infty$*.*

Lema 4.3. *(P.L. Lions) [52, Lema 1.21] Seja* $r > 0$ *e* $2 \leq q < 2^*$*, se* u_n *é limitada em* $H^1(\mathbb{R}^N)$*, e se*

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B(y,r)} |u_n|^q \to 0, \quad \textit{quando } n \to \infty,$$

então $u_n \to 0$ *em* L^p *para* $2 < p < 2^*$*.*

Referências Bibliográficas

[1] Adachi,S. e Tanaka,K., *Four positive solutions for the semilinear elliptic equation:*$-\nabla u+u = a(x)u^p + f(x) \in \mathbb{R}^N$, Calc. Var. Partial Differential Equations 11.1 (2000): 63-95.

[2] Adams,R.A., *Sobolev spaces*, Academic Press, New York, (1975).

[3] Alama,S. e Tarantello,G., *Elliptic problems with nonlinearities indefinite in sign*, J. Func. Anal. 141 (1996): 159-215.

[4] Alama,S. e Tarantello,G., *On semilinear elliptic equations with indefinite nonlinearities*, Calc. Var. PDE 1 (1993): 439-475.

[5] Alves,C.O. e Figueiredo,G.M., *Multiple Solutions for a Semilinear Elliptic Equation with Critical Growth and Magnetic Field,* Milan J. Math. 82.2 (2014): 389-405.

[6] Alves,C.O., Figueiredo,G.M. e Furtado,M.F., *On the number of solutions of NLS equations with magnetics fields in expanding domains,* J. Differential Equations 251.9 (2011): 2534-2548.

[7] Ambrosetti,A., Brezis,H. e Cerami,G., *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems,* J. Func. Anal. 122.2 (1994): 519-543.

[8] Ambrosetti,A., *Critical points and nonlinear variational problems,* Bull. Soc. Math. France Mémoire 49 (1992): 1-139.

[9] Arioli,G. e Szulkin,A., *A semilinear Schrödinger equation in the presence of a magnetic field,* Arch. Ration. Mech. Anal. 170.4 (2003): 277-295.

[10] Bahri,A. e Li,Y.Y., *On a Min-Max Procedure for the Existence of a Positive Solution for Certain Scalar Field Equations in* $\mathbb{R}^N$, Rev. Mat. Iberoamericana 6.1 (1990): 1-15.

[11] Bartsch,T. e Ding,Y.H., *On a nonlinear Schrödinger equation with periodic potential,* Math. Ann. 313 (1999): 15-37.

[12] Bartsch,T. e Weth,T., *A note on additional properties of sign changing solutions to superlinear elliptic equations,* Topol. Meth. Nonl. Anal. 22 (2003): 1-14.

[13] Berestycki,H.I., Capuzzo-Dolcetta e Nirenberg,L. *Variational methods for indefinite superlinear homogeneous elliptic problems*, Nonl. Diff. Eq. Appl. 2 (1995): 553-572.

[14] Berestycki,H.I. e Lions,P.L., *Nonlinear scalar field equations, I existence of a ground state,* Arch. Ration. Mech. Anal. 82.4 (1983): 313-345.

[15] Brezis,H. e Lieb,E., *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals,* Proc. Amer. Math. Soc. 88 (1983): 486-490.

[16] Brezis,H., *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Springer, New York, (2010).

[17] Brown,K.J. e Wu,T.F., *A fibering map approach to a semilinear elliptic boundary value problem,* Eletron. J. Differential Equations 2007 (2007): 1-9.

[18] Brown,K.J. e Zhang,Y., *The Nehari monifold for a semilinear elliptic problem with a sing changing weight function.* J. Differential Equations 193 (2003): 481-499.

[19] Brown,K. J., *The Nehari manifold for a semilinear elliptic equation involving a sublinear term.* Calc. Var. Partial Differential Equations 22.4 (2004): 483-494.

[20] Carvalho, M. L. M., Edcarlos D. da Silva, e Goulart,C., *Quasilinear elliptic problems with concave-convex nonlinearities.* Commun. Contemp. Math. 19.06 (2017): 1650050.

[21] Chabrowski,J. e Szulkin,A., *On the Schrödinger equation involving a critical Sobolev exponent and magnetic field,* Topol. Meth. Nonl. Anal. 25 (2005): 3-21.

[22] Chen,K.J., *On multiple solutions of concave e convexe nonlinearities in elliptic equation on RN,* BVP ID 147008, (2009): 1-19.

[23] Cingolani,S., Jeanjean,L. e Secchi,S., *Multi-peak solutions for magnetic NLS equations without non-degeneracy conditions,* ESAIM Control Optim. Calc. Var. 15.3 (2009): 653-675.

[24] Costa, D. G., *An invitation to variational methods in differential equations.* Springer Science e Business Media, (2010).

[25] D'Avenia,P. e Marco,S., *Ground states for fractional magnetic operators,* ESAIM Control Optim. Calc. Var. 24.1 (2018): 1-24.

[26] de Paiva,F.O., *Nonnegative solutions of elliptic problems with sublinear indefinite nonlinearity,* J. Func. Anal. 261.9 (2011): 2569-2586.

[27] Ding,Y. e Liu,X.Y., *Semiclassical solutions of Schrödinger equations with magnetic fields and critical nonlinearities,* Manuscripta Math. (2013): 1-32.

[28] Drabek,P. e Pohozaev,S.I., *Positive solutions for the p-Laplacian: application of the fibering method.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, (1997): 703-726.

[29] Esteban,M.J. e Lions,P.L., *Stationary solutions of nonlinear Schrödinger equations with an external magnetic field,* in PDE and Calculus of Variations, in honor of E. De Giorgi, Birkhauser (1990): 401-449.

[30] Furtado,M.F., Maia,L.A. e Medeiros,E.S., *Positive and nodal solutions for a nonlinear Schrödinger equation with indefinite potential,* Adv. Nonlinear Stud. 8.2 (2008): 353-373.

[31] Gidas,B., *Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in* $\mathbb{R}^N$, Adv. Math. Suppl. Stud. 7 (1981): 369-402.

[32] Gilbard,D. e Trudinger,N. S., *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer-Verlag, Berlin, (1983).

[33] Girão,P. M. e Gomes,J. M., *Multibump nodal solutions for an indefinite superlinear elliptic problem,* J. Differential Equations 247.4 (2009): 1001-1012.

[34] Hewitt, E., e Stromberg,K., *Real and abstract analysis: a modern treatment of the theory of functions of a real variable*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2013.

[35] Hsu,T.S. e Lin,H.L., *Four positive solutions of semilinear elliptic equations involving concave and convex nonlinearities in RN.* J. Math. Anal. Appl. 365.2 (2010): 758-775.

[36] Hsu,T.S. e Lin,H.L., *Three positive solutions for semilinear elliptic problems involving concave and convex nonlinearities,* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 142.1 (2012): 115.

[37] Hsu,T.S. e Wang,H.C., *A perturbation result of semilinear elliptic equations in exterior strip domains,* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 127 (1997): 983-1004.

[38] Hsu,T.S *Multiple positive solutions for a class of concave-convex semilinear elliptic equations in unbounded domains with sign-changing weights.* BVP 2010.1 (2010): 856932.

[39] Huang,Y., Wu,T.F. e Wu,Y., *Multiple positive solutions for a class of concave-convex elliptic problems in* $\mathbb{R}^N$ *involving sign-changing weight, II,* Commun. Contemp. Math. 17.05 (2015): 1450045.

[40] Jalilian,Y. e Szulkin,A., *Infinitely many solutions for semilinear elliptic problems with sing-changing weight functions* Appl. Anal. 93(4) July (2014): 756-770.

[41] Kajikiya,R., *Mountain pass theorem in ordered Banach spaces and its applications to semilinear elliptic equations*, Nonl. Diff. Eq. Appl. 19 (2012), 159-175.

[42] Kavian,O., *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problems elliptiques*, Springer-Verlag, New York, Berlin, (1994).

[43] Kurata,K., *Existence and semi-classical limit of the least energy solution to a nonlinear Schrödinger equation with electromagnetic fields,* Nonlinear Anal. 41 (2000): 763-778.

[44] Kwong,M.K., *Uniqueness of positive solutions of $\Delta u - u + u^p = 0$ in $\mathbb{R}^n$,* Arch. Ration. Mech. Anal. 105.3 (1989): 243-266.

[45] Lee,J.M., *Introduction to Smooth manifolds,* (2001).

[46] Miyagaki,O.H., *On a class of semilinear elliptic problems in $\mathbb{R}^N$ with critical growth,* Nonlinear Anal.: Theory, Methods e Applications 29.7 (1997): 773-781.

[47] Rabinowitz,P.H., *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations,* No. 65. American Mathematical Soc., (1986).

[48] Struwe,M., *Variational methods. Applications to nonlinear partial differential equations and hamiltonian systems*, Springer-Verlag, Berlin, (1990).

[49] Szulkin, A. e Weth,T., *Ground state solutions for some indefinite variational problems*, J. Func. Anal. 257 (2009), 3802-3822.

[50] Tang,Z.W., *Multi-bump bound states of nonlinear Schrödinger equations with electromagnetic fields and critical frequency,* J. Differential Equations 245.10 (2008): 2723-2748.

[51] Wang,H. e Wu,T.F., *Symmetry breaking in a bounded symmetry domain,* NoDEA: Nonlinear Differential Equations Appl. 11.3 (2004): 361-377.

[52] Willem,M., *Minimax Theorems*, Birkhäuser, Basel, (1996).

[53] Wu,T.F., *Multiple positive solutions for a class of concave-convex elliptic problems in $\mathbb{R}^N$ involving sign-changing weight,* J. Func. Anal. 258.1 (2010): 99-131.

[54] Wu,T.F., *Multiplicity results for a semi-linear elliptic equation involving sign-changing weight function*, Rocky Mountain J. Math. 39 (2009), 995-1011.

[55] Wu,T.F., *On semilinear elliptic equations involving concave-convex nonlinearities and sign-changing weight function,* J. Math. Anal. Appl. 318 (2006):253-270.

[56] Zhu,X.P., *A perturbation result on positive entire solutions of a semilinear elliptic equation,* J. Differential Equations 92 (1991): 163-178.