UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Mateus Balbino Guimarães

Equações elípticas singulares envolvendo o expoente crítico de Caffarelli-Kohn-Nirenberg e funções peso mudando de sinal

São Carlos - SP
Fevereiro de 2012

O presente trabalho teve suporte financeiro da Capes

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Equações elípticas singulares envolvendo o expoente crítico de Caffarelli-Kohn-Nirenberg e funções peso mudando de sinal

Mateus Balbino Guimarães
Orientador: Prof Dr. Rodrigo da Silva Rodrigues
Bolsista Capes

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

São Carlos - SP
Fevereiro de 2012

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

G963ee

Guimarães, Mateus Balbino.
Equações elípticas singulares envolvendo o expoente crítico de Caffarelli-Kohn-Nirenberg e funções peso mudando de sinal / Mateus Balbino Guimarães. -- São Carlos : UFSCar, 2012.
111 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2012.

1. Análise. 2. Equações diferenciais elípticas. 3. Existência de soluções. I. Título.

CDD: 515 (20ª)

Banca Examinadora:

Rodrigo S. Rodrigues

Prof. Dr. Rodrigo da Silva Rodrigues
DM - UFSCar

Prof. Dr. Sérgio Henrique Monari Soares
ICMC - USP

Prof. Dr. Olimpio Hiroshi Miyagaki
DM - UFJF

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus pois sem Ele nada conseguiria.

Aos meus pais, ao meu irmão e a todos meus familiares que sempre me apoiam e incetivam.

Ao Professor Rodrigo da Silva Rodrigues, pela excelente orientação.

Aos Professores Sérgio Monari Soares e Olímpio Hiroshi Miyagaki por aceitarem o convite de compor a banca examinadora e pelas críticas e sugestões ao trabalho.

Aos professores e funcionários do departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos.

A todos os meus amigos, em especial aos amigos da República Chinelinho.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Finalmente, agradeço a todos que direta ou indiretamente me ajudaram a terminar essa dissertação.

Resumo

Neste trabalho, estudaremos a existência de soluções fracas não negativas e não triviais para equações elípticas singulares envolvendo o expoente crítico de Caffarelli-Kohn-Nirenberg e funções peso mudando de sinal. Para tal, utilizaremos o método variacional e seus resultados clássicos, como o Teorema do Passo da Montanha e o Princípio Variacional de Ekeland. Também faremos uso da já conhecida variedade de Nehari.

Abstract

In this work we will study the existence of nonnegative nontrivial weak solutions to singular elliptic equations involving the critical Caffarelli-Kohn-Nirenberg exponent and sign-changing functions. For this purpose, we will make use of the variational method and its classical results as the Mountain Pass Theorem and the Ekeland's Variational Principle. We also will use the well known Nehari manifold.

Sumário

Introdução

Neste trabalho estudaremos a existência de soluções fracas para equações elípticas singulares envolvendo o expoente crítico de Caffarelli-Kohn-Nirenberg e funções peso mudando de sinal.

Estudaremos o problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|x|^{2a}}\right) - \mu\frac{u}{|x|^{2(a+1)}} &= \lambda h(x)\frac{|u|^{q-2}u}{|x|^c} + k(x)\frac{|u|^{2_*-2}u}{|x|^{2_*b}} \qquad \text{em } \Omega\backslash\{0\}, \\ u &= 0 \qquad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio aberto e limitado; $N \geq 3$; $0 \in \Omega$; $a < \frac{N-2}{2}$; $a \leq b < a+1$; $1 < q < 2_*$; $c < q(a+1) + N(1-q/2)$; $2_* := \frac{2N}{N-2+2(b-a)}$ é o expoente crítico de Caffarelli-Kohn-Nirenberg; $\mu < \bar{\mu}_a := \frac{(N-2(a+1))^2}{4}$; λ é um parâmetro positivo; h e k são funções contínuas que podem mudar de sinal em $\bar{\Omega}$.

O estudo de problemas semelhantes ao problema (1) tem sido foco de um grande número de pesquisas nos últimos anos.

Os casos $h \equiv 1$ e $k \equiv 1$ têm sido estudados exaustivamente por muitos autores, como [1], [3], [12], [19] e as referências neles encontradas. Em [1], Ambrosetti et al. estudaram, para $\mu = 0$ e $a, b, c = 0$, o problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u^{q-1} + u^{p-1} \qquad \text{em } \Omega, \\ u &> 0 \qquad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \qquad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

com $1 < q < 2 < p \leq \frac{2N}{N-2}$. Usando o método de sub-super solução e o Teorema do

Passo da Montanha eles estabeleceram a existência de $\Lambda_0 > 0$ tal que o problema (2) tem ao menos duas soluções positivas para λ fixo em $(0, \Lambda_0)$, uma solução para $\lambda = \Lambda_0$ e nenhuma solução para $\lambda > \Lambda_0$. Quando $\mu \geq 0$ e $a, b, c = 0$, Chen [12] estudou o comportamento assintótico das soluções do problema

$$\begin{cases} -\Delta u - \mu \frac{u}{|x|^2} &= \lambda u^{q-1} + u^{p-1} \quad \text{em } \Omega \backslash \{0\}, \\ u &> 0 \quad \text{em } \Omega \backslash \{0\}, \\ u &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

com $p = 2_*$ e $1 < q < 2$, usando iteração de Moser. Aplicando o Princípio Variacional de Ekeland ele obteve a existência de uma primeira solução positiva e pelo Teorema do Passo da Montanha ele provou a existência de uma segunda solução positiva. Recentemente, Bouchekif e Matallah [3] estenderam os resultados de [12] para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u - \mu \frac{u}{|x|^2} &= \lambda u^{q-1} + \frac{u^{2_*(s)-1}}{|x|^s} \quad \text{em } \Omega \backslash \{0\}, \\ u &> 0 \quad \text{em } \Omega \backslash \{0\}, \\ u &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4}$$

em que $0 \leq s < 2$, e $2_*(s) = \frac{2(N-s)}{N-2}$. Eles estabeleceram a existência de duas soluções positivas sob algumas condições suficientes para λ e μ. Lin [19] considerou um problema mais geral,

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|x|^{2a}}\right) - \mu \frac{u}{|x|^{2(a+1)}} &= \lambda |u|^{q-2} u + \frac{|u|^{2_*-2} u}{|x|^{2_* b}} \quad \text{em } \Omega \backslash \{0\}, \\ u &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$

com $0 \leq a < \frac{N-2}{2}$, $a \leq b < 1$, $1 < q < 2$, $0 \leq \mu < \bar{\mu}_a$ e $2_* = \frac{2N}{N-2(1+a-b)}$.

Os casos $h \not\equiv 1$ ou $k \not\equiv 1$ podem ser vistos em [4], [18], [21], [26] e as referências neles encontradas. Tarantello [21] estudou o problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= |u|^{p-2}u + h \qquad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \qquad\qquad \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{6}$$

com $h \not\equiv 0$, não necessariamente igual a 1, satisfazendo algumas condições. Bouchekif e Matallah [4] consideraram o problema (1) em $\Omega = \mathbb{R}^N$ com $q = 1$.

Wu [26] mostrou a existência de múltiplas soluções positivas para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= u^{p-1} + \lambda h(x) u^{q-1} \qquad \text{em } \Omega, \\ 0 &\leq u \in H_0^1(\Omega) \qquad\qquad \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{7}$$

com $1 < q < 2 < p < 2_*$ $(2_* = \frac{2N}{N-2}$, se $N \geq 3$; $2_* = \infty$, se $N = 2)$ e $h : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ uma função contínua que muda de sinal em $\bar{\Omega}$. Em [18], Hsu e Lin estabeleceram a existência de múltiplas soluções não triviais para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u - \mu \frac{u}{|x|^2} &= \lambda h(x)|u|^{q-2}u + k(x)|u|^{2_*-2}u \qquad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \qquad\qquad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{8}$$

com $0 \leq \mu < \bar{\mu} = \frac{(N-2)^2}{4}$, $1 < q < 2$ e $h, k : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ funções contínuas que podem mudar de sinal em Ω.

Mais recentemente, Rodrigues [20] estudou o problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\frac{|\nabla u|^{p-2}\nabla u}{|x|^{ap}}\right) &= h(x)\frac{|u|^{q-2}u}{|x|^{\beta}} + \frac{|u|^{p_*-2}u}{|x|^{bp_*}} \qquad \text{em } \Omega\backslash\{0\}, \\ u &= 0 \qquad\qquad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{9}$$

em que $1 < p < N$, $-\infty < a < \frac{N-p}{p}$, $a \leq b < a+1$, $1 < p_0 \leq \frac{Np}{N-p}$ e $q < p_1 \leq \frac{Np}{N-p}$ tais que $\frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1} = 1$ e $h \in L_P(\Omega, |x|^{-\beta})$. Utilizando o Princípio Variacional de Ekeland e o Teorema do Passo da Montanha ele conseguiu provar a existência de ao menos duas soluções distintas não triviais para o caso em que $1 < q < p$. Para os casos $p < q < p_*$ e $q = p$, foi possível encontrar uma solução não trivial através do Teorema do Passo da Montanha.

Como foi possível observar nos artigos citados acima, o número de soluções não triviais do problema (1) é afetado pelos termos côncavos e convexos.

O operador $L_{\mu,a}u := -\operatorname{div}(|x|^{-2a}\nabla u) - \mu|x|^{-2(a+1)}u$ tem sido objeto de muitos artigos. Citamos, entre outros, [17] para $a = 0$ e $\mu < \bar{\mu}_0$ e [16] ou [22] para o caso geral, isto é, $-\infty < a < \frac{N-2}{2}$ e $\mu < \bar{\mu}_a$. Olhando atentamente para $L_{\mu,a}$, podemos observar que degeneralidade e singularidade ocorrem no problema (1). De fato, se $a < 0$ ocorre degeneralidade e se $a \geq 0$ então 0 é uma singularidade. Nessas situações, os métodos clássicos falham ao serem aplicados diretamente e, então, os resultados de existência podem se tornar uma questão delicada que está relacionada ao caráter degenerado (ou singular) da equação diferencial. O ponto de partida da abordagem variacional para estes problemas é a seguinte desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg em [10]: existe uma constante positiva $C_{a,b}$ tal que

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2_* b}|u|^{2_*}dx\Big)^{1/2_*} \leq C_{a,b}\Big(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2a}|\nabla u|^2 dx\Big)^{1/2}, \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega), \tag{10}$$

onde $-\infty < a < (N-2)/2$, $a \leq b < a+1$, $2_* = 2N/(N-2+2(b-a))$. Para a melhor constante e funções extremais veja [11] e [13]. Em (10), se $b = a+1$, então $2_* = 2$ e temos a seguinte desigualdade de Hardy com peso [13]:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2(a+1)}u^2 dx \leq \frac{1}{\bar{\mu}_a}\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2a}|\nabla u|^2 dx, \quad \text{para todo } u \in C_0^\infty(\Omega). \tag{11}$$

Para tratar o nosso problema, introduziremos o espaço de Sobolev com peso, $D_a^{1,2}(\Omega)$, o qual é o completamento do espaço $C_0^\infty(\Omega)$ com respeito à norma

$$\|u\|_{0,a} = \left(\int_\Omega |x|^{-2a}|\nabla u|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Definimos H_μ como o completamento do espaço $C_0^\infty(\Omega)$ com respeito à norma

$$\|u\|_{\mu,a} := \left(\int_\Omega \left(|x|^{-2a}|\nabla u|^2 - \mu|x|^{-2(a+1)}u^2\right) dx\right)^{1/2},$$

para $-\infty < \mu < \bar{\mu}_a$. Pela desigualdade de Hardy com peso, temos que $\|\cdot\|_{\mu,a}$ é equivalente a $\|\cdot\|_{0,a}$, isto é,

$$\left(1 - \frac{1}{\bar{\mu}_a}\max\{\mu, 0\}\right)^{1/2} \|u\|_{0,a} \leq \|u\|_{\mu,a} \leq \left(1 - \frac{1}{\mu_a}\min\{\mu, 0\}\right)^{1/2} \|u\|_{0,a}, \quad \forall u \in H_\mu.$$

De fato, como $\max\{\mu, 0\} \geq 0$, de (11) temos que

$$-\frac{1}{\bar{\mu}_a}\max\{\mu, 0\}\int_\Omega |x|^{-2a}|\nabla u|^2 dx \leq -\max\{\mu, 0\}\int_\Omega |x|^{-2(a+1)}u^2 dx.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{1}{\bar{\mu}_a}\max\{\mu, 0\}\right)^{1/2} \|u\|_{0,a} &= \left(1 - \frac{1}{\bar{\mu}_a}\max\{\mu, 0\}\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |x|^{-2a}|\nabla u|^2 dx\right)^{1/2} \\
&= \left(\int_\Omega |x|^{-2a}|\nabla u|^2 dx - \frac{\max\{\mu, 0\}}{\bar{\mu}_a}\int_\Omega |x|^{-2a}|\nabla u|^2 dx\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\int_\Omega |x|^{-2a}|\nabla u|^2 dx - \max\{\mu, 0\}\int_\Omega |x|^{-2(a+1)}u^2 dx\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Agora, se $\max\{\mu, 0\} = \mu$, temos a desigualdade

$$\left(1 - \frac{1}{\bar{\mu}_a}\max\{\mu, 0\}\right)^{1/2} \|u\|_{0,a} \leq \|u\|_{\mu,a}.$$

Se $\max\{\mu, 0\} = 0$, então $-\mu \geq 0$ e, portanto,

$$\begin{aligned}
\left(\int_\Omega |x|^{-2a}|\nabla u|^2 dx - 0 \cdot \int_\Omega |x|^{-2(a+1)}u^2 dx\right)^{1/2} &\leq \left(\int_\Omega \left(|x|^{-2a}|\nabla u|^2 - \mu|x|^{-2(a+1)}u^2\right) dx\right)^{1/2} \\
&= \|u\|_{\mu,a},
\end{aligned}$$

o que também nos dá

$$\left(1 - \frac{1}{\bar{\mu}_a}\max\{\mu, 0\}\right)^{1/2} \|u\|_{0,a} \leq \|u\|_{\mu,a}.$$

Para mostrar que $\|u\|_{\mu,a} \leq \left(1 - \frac{1}{\mu_a}\min\{\mu, 0\}\right)^{1/2} \|u\|_{0,a}$ o argumento é análogo, bastando observar que $\min\{\mu, 0\} \leq 0$.

Como visto em Xuan [23], temos que existe $C > 0$ tal que

$$\left(\int_\Omega |x|^{-c}|u|^p dx\right)^{1/p} \leq C\left(\int_\Omega |x|^{-2a}|\nabla u|^2 dx\right)^{1/2}, \tag{12}$$

para $1 \leq p \leq 2N/(N-2)$, $c \leq p(a+1) + N(1-p/2)$. Além disso, se $1 \leq p < 2N/(N-2)$, $c < p(a+1) + N(1-p/2)$ e $a < (N-2)/2$, a imersão

$$D_a^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L_p(\Omega, |x|^{-c}) \tag{13}$$

é compacta, onde $L_p(\Omega, |x|^{-c})$ é o espaço L_p com peso, com norma

$$\|u\|_{p,c} = \left(\int_\Omega |x|^{-c}|u|^p dx\right)^{1/p}.$$

Com isso, obtemos que a imersão

$$H_\mu \hookrightarrow L_p(\Omega, |x|^{-c}) \tag{14}$$

é compacta. De fato, seja (u_n) uma sequência limitada em H_μ. Como $\|\cdot\|_{\mu,a}$ é equivalente a $\|\cdot\|_{0,a}$ temos que (u_n) é limitada em $D_a^{1,2}(\Omega)$. Ainda, como $D_a^{1,2}(\Omega)$ é reflexivo, pelo Teorema 4.2.2, a menos uma subsequência, temos que $u_n \rightharpoonup u$ em $D_a^{1,2}(\Omega)$. Mas, a imersão $D_a^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L_p(\Omega, |x|^{-c})$ é compacta, ou seja, $u_n \to u$ em L^p. Logo, a imersão $H_\mu \hookrightarrow L_p(\Omega, |x|^{-c})$ é compacta.

Devido ao expoente crítico no problema (1), não temos que a imersão $H_\mu \hookrightarrow L_{2_*}(\Omega, |x|^{-2*b})$ é compacta, o que dificulta a prova da existência das soluções. Como em Brezis e Nirenberg [8], esse problema foi contornado utilizando as funções extremais. Xuan [22] provou que sob as condições

$$N \geq 3, \quad a < (N-2)/2, \quad 0 < \sqrt{\bar{\mu}_a} - \sqrt{\bar{\mu}_a - \mu} + a < (N-2)/2,$$

$$a \leq b < a+1, \quad \mu < \bar{\mu}_a - b^2,$$

para $\varepsilon > 0$, a função

$$w_\varepsilon(x) = C_0 \varepsilon^{\frac{2}{2_*-2}} \left(\varepsilon^{\frac{2\sqrt{\bar{\mu}_a-\mu}}{\sqrt{\bar{\mu}_a-\mu}-b}} |x|^{\frac{2_*-2}{2}(\sqrt{\bar{\mu}_a}-\sqrt{\bar{\mu}_a-\mu})} + |x|^{\frac{2_*-2}{2}(\sqrt{\bar{\mu}_a}+\sqrt{\bar{\mu}_a-\mu})} \right)^{-\frac{2}{2_*-2}}, \qquad (15)$$

com uma constante adequada C_0, é uma solução de

$$-\operatorname{div}\left(|x|^{-2a}\nabla u\right) - \mu |x|^{-2(a+1)} u = |x|^{-2_* b} |u|^{2_*-2} u \quad \text{em } \mathbb{R}^N \backslash \{0\}.$$

Além do mais,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2a} |\nabla u w_\varepsilon|^2 dx - \mu \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2(a+1)} w_\varepsilon^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2_* b} |w_\varepsilon|^{2_*} dx = (A_{a,b,\mu})^{\frac{2_*}{2_*-2}}, \qquad (16)$$

onde $A_{a,b,\mu}$ é a melhor constante,

$$A_{a,b,\mu} = \inf_{u \in H_\mu \backslash \{0\}} E_{a,b,\mu}(u) = E_{a,b,\mu}(w_\varepsilon), \qquad (17)$$

com

$$E_{a,b,\mu}(u) := \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2a} |\nabla u|^2 dx - \mu \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2(a+1)} u^2 dx}{(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2_* b} |u|^{2_*} dx)^{2/2_*}}.$$

Também, em [19], provou-se que para $0 \leq a < (N-2)/2$, $a \leq b < a+1$, $0 \leq \mu < \bar{\mu}_a$, a função definida, para $\varepsilon > 0$, como

$$\tilde{w}_\varepsilon(x) = (2.2_* \varepsilon^2 (\bar{\mu}_a - \mu))^{\frac{1}{2_*-2}} \left(\varepsilon^2 |x|^{\frac{(2_*-2)(\sqrt{\bar{\mu}_a}-\sqrt{\bar{\mu}_a-\mu})}{2}} + |x|^{\frac{2_*-2}{2}(\sqrt{\bar{\mu}_a}+\sqrt{\bar{\mu}_a-\mu})} \right)^{-\frac{2}{2_*-2}} \qquad (18)$$

é uma solução fraca de

$$-\operatorname{div}(|x|^{-2a}\nabla u) - \mu |x|^{-2(a+1)} u = |x|^{-2_* b} |u|^{2_*-2} u \text{ em } \mathbb{R}^N \backslash \{0\},$$

e satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2a} |\nabla \tilde{w}_\varepsilon|^2 dx - \mu \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2(a+1)} \tilde{w}_\varepsilon^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2_* b} |\tilde{w}_\varepsilon|^{2_*} dx = (B_{a,b,\mu})^{\frac{2_*}{2_*-2}}, \qquad (19)$$

onde $B_{a,b,\mu}$ é a melhor constante,

$$B_{a,b,\mu} := \inf_{u \in H_\mu \setminus \{0\}} E_{a,b,\mu}(u) = E_{a,b,\mu}(\tilde{w}_\varepsilon). \tag{20}$$

Em posse dessas informações, no primeiro capítulo do trabalho, baseados no artigo [5], de Bouchekif e Matallah, estudaremos o problema (1) no caso em que há um termo côncavo-convexo, ou seja, quando $1 < q < 2$. Afim de provarmos a existência de ao menos dois pontos críticos não-negativos e não triviais do funcional associado ao problema (1), nos utilizaremos de dois métodos distintos. Para a obtenção de uma primeira solução, faremos uso da já conhecida variedade de Nehari (veja, por exemplo, Tarantello [21] ou Brown e Zhang [9]) e do Princípio Variacional de Ekeland. Para a segunda solução, nos utilizaremos do Teorema do Passo da Montanha.

No capítulo seguinte, estudaremos o problema (1) no caso em que $2 < q < 2_*$, conhecido como super-linear. Considerando k uma função positiva em Ω, mostraremos a existência de ao menos uma solução não negativa e não trivial para o problema (1) via Teorema do Passo da Montanha.

Por fim, no capítulo 3, estudaremos problema (1) com $q = 2$. Desta vez, considerando h positiva em Ω, mostraremos a existência de ao menos uma solução não negativa e não trivial para o problema (1). Com o objetivo de aplicar o Teorema do Passo da Montanha, foi necessário obter o primeiro autovalor para o problema de autovalor associado ao nosso operador.

Como uma forma de consulta rápida, o último capítulo é destinado aos principais resultados utilizados ao longo do trabalho.

Capítulo

1

O problema (1) para $1 < q < 2$

Considere o problema:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|x|^{2a}}\right) - \mu\frac{u}{|x|^{2(a+1)}} &= \lambda h(x)\frac{|u|^{q-2}u}{|x|^c} + k(x)\frac{|u|^{2_*-2}u}{|x|^{2_*b}} \quad \text{em } \Omega\backslash\{0\}, \\ u &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio aberto e limitado; $N \geq 3$; $0 \in \Omega$; $a < \frac{N-2}{2}$; $a \leq b < a+1$; $1 < q < 2$; $c < q(a+1) + N(1-q/2)$; $2_* := \frac{2N}{N-2+2(b-a)}$ é o expoente crítico de Caffarelli-Kohn-Nirenberg; $\mu < \bar{\mu}_a := \frac{(N-2(a+1))^2}{4}$; λ é um parâmetro positivo; h e k são funções contínuas que podem mudar de sinal em $\bar{\Omega}$.

Baseados no artigo [5], de Bouchekif e Matallah, nosso objetivo nesse capítulo será demonstrar a existência de ao menos duas soluções fracas distintas não negativas e não triviais para o problema (1.1), que nada mais é senão o problema (1) para $1 < q < 2$. Para tal, o capítulo será dividido em duas seções. Na seção 1.1 encontraremos uma primeira solução fraca para o problema, demonstrando o seguinte

Teorema 1.0.1. *Suponha que $a < (N-2)/2$, $a \leq b < a+1$, $1 < q < 2$, $c < q(a+1) + N(1-q/2)$, h seja uma função contínua definida em $\bar{\Omega}$ e k uma função contínua definida em $\bar{\Omega}$. Então, existe $\bar{\Lambda} > 0$ tal que para $\lambda \in (0, \bar{\Lambda})$ o problema (1.1) tem ao menos uma solução não negativa em H_μ.*

Na seção 1.2, acrescentando as hipóteses:

(H) h é uma função contínua definida em $\bar{\Omega}$ e existem h_0 e ρ_0 positivos tais que $h(x) \geq h_0$ para todo $x \in B(0, 2\rho_0)$, onde $B(a, r)$ é a bola centrada em a de raio r;

(K) k é uma função contínua definida em $\bar{\Omega}$ e satisfaz $k(0) = \max_{x\in\bar{\Omega}} k(x) > 0$, $k(x) = k(0) + O(|x|^{\beta})$ para $x \in B(0, 2\rho_0)$ com $\beta > 2_*\sqrt{\bar{\mu}_a - \mu}$, em que $O(\varepsilon^{\varsigma})$ denota $\dfrac{|O(\varepsilon^{\varsigma})|}{\varepsilon^{\varsigma}} \leq C$;

e uma das seguintes hipóteses:

(A1) $N \geq 3$ e

$$(a, \mu) \in]-1, 0[\times]0, \bar{\mu}_a - b^2[\cup[0, \tfrac{N-2}{2}[\times]a(a - N + 2), \bar{\mu}_a - b^2[,$$

(A2) $N \geq 3$, $(a, \mu) \in [0, \frac{N-2}{2}[\times[0, \bar{\mu}_a[$

demonstraremos a existência de uma segunda solução fraca, através do

Teorema 1.0.2. *Suponha que* $a < (N - 2)/2$, $a \leq b < a + 1$, $1 < q < 2$, $c < q(a + 1) + N(1 - q/2)$, (H), (K) *são válidas e* (A1) *ou* (A2) *é satisfeita. Então, existe* $\Lambda^* > 0$ *tal que para* $\lambda \in (0, \Lambda^*)$ *o problema (1.1) tem ao menos duas soluções não negativas em* H_μ.

Desde que nossa abordagem é variacional, definimos o funcional de Euler-Lagrange, $I_{\lambda,\mu}$, como

$$I_{\lambda,\mu}(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2_{\mu,a} - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega h(x)|x|^{-c}u_+^q dx - \frac{1}{2_*}\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}u_+^{2_*}dx, \tag{1.2}$$

para todo $u \in H_\mu$.

Teorema 1.0.3. $I_{\lambda,\mu}$ *está bem definido e é de classe* $C^1(H_\mu, \mathbb{R})$.

Demonstração. Defina os operadores $H_1, H_2, H_3, H_4 : H_\mu \longrightarrow \mathbb{R}$, por

$$H_1(u) = \int_\Omega |x|^{-2a}|\nabla u|^2 dx, \;\; H_2(u) = \int_\Omega |x|^{-2(a+1)}u^2 dx, \;\; H_3(u) = \int_\Omega h(x)|x|^{-c}u_+^q dx$$

e $H_4(u) = \displaystyle\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}u_+^{2_*}dx.$

Agora, considere as funções $F_1 : \Omega \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ e $F_2, F_3, F_4 : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definidas por

$$F_1(x,y) = 2\int_0^{|y|} sds, \quad F_2(x,y) = 2\int_0^y sds, \quad F_3(x,y) = q\int_0^y s^{q-1}ds$$

e $F_3(x,y) = 2_*\displaystyle\int_0^y s^{2_*-1}ds.$

Para $0 < t < 1$ e $u, v \in H_\mu$, temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |x|^{-2a}\frac{|\nabla u + t\nabla v|^2 - |\nabla u|^2}{t}dx &= \int_\Omega |x|^{-2a}\frac{F_1(x,\nabla u + t\nabla v) - F_1(x,\nabla u)}{t}dx,\\
\int_\Omega |x|^{-2(a+1)}\frac{(u+tv)^2 - u^2}{t}dx &= \int_\Omega |x|^{-2(a+1)}\frac{F_2(x,u+tv) - F_2(x,u)}{t}dx,\\
\int_\Omega h(x)|x|^{-c}\frac{(u+tv)_+^q - u_+^q}{t}dx &= \int_\Omega h(x)|x|^{-c}\frac{F_3(x,(u+tv)_+) - F_3(x,u_+)}{t}dx
\end{aligned}$$

e

$$\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}\frac{(u+tv)_+^{2_*} - u_+^{2_*}}{t}dx = \int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}\frac{F_4(x,(u+tv)_+) - F_4(x,u_+)}{t}dx.$$

Dado $x \in \Omega$, aplicando o Teorema do Valor Médio e o Teorema 4.1.1, temos que existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned}
\frac{|F_1(x,\nabla u + t\nabla v) - F_1(x,\nabla u)|}{|t|} &\le \frac{2|\nabla u + \theta t\nabla v||t\nabla v|}{|t|}\\
&\le 2(|\nabla u| + |\nabla v|)|\nabla v|\\
&\le 2(|\nabla u| + |\nabla v|)^2\\
&\le 4(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)\\
&\quad \in L^1(\Omega, |x|^{-2a}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{|F_2(x,u+tv)-F_2(x,u)|}{|t|} &\leq \frac{2|u+\theta tv||tv|}{|t|}\\ &\leq 2(|u|+|v|)|v|\\ &\leq 2(|u|+|v|)^2\\ &\leq 4(|u|^2+|v|^2)\\ &\in L^1(\Omega,|x|^{-2(a+1)}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{|F_3(x,(u+tv)_+)-F_3(x,u_+)|}{|t|} &\leq \frac{q|u+\theta tv|^{q-1}|tv|}{|t|}\\ &\leq q(|u|+|v|)^{q-1}|v|\\ &\leq q(|u|+|v|)^q\\ &\leq q2^{q-1}(|u|^q+|v|^q)\\ &\in L^1(\Omega,|x|^{-c})\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{|F_4(x,(u+tv)_+)-F_4(x,u_+)|}{|t|} &\leq \frac{2_*|u+\theta tv|^{2_*-1}|tv|}{|t|}\\ &\leq 2_*(|u|+|v|)^{2_*-1}|v|\\ &\leq 2_*(|u|+|v|)^{2_*}\\ &\leq 2_*2^{2_*-1}(|u|^{2_*}+|v|^{2_*})\\ &\in L^1(\Omega,|x|^{-2_*b}).\end{aligned}$$

Daí, obtemos do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\begin{aligned}\langle H_1'(u),v\rangle &= \lim_{t\to 0^+}\int_\Omega |x|^{-2a}\frac{|\nabla u+t\nabla v|^2-|\nabla u|^2}{t}dx\\ &= \int_\Omega |x|^{-2a}\lim_{t\to 0^+}\frac{F_1(x,\nabla u+t\nabla v)-F_1(x,\nabla u)}{t}dx \qquad (1.3)\\ &= 2\int_\Omega |x|^{-2a}\nabla u\nabla v dx,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle H_2'(u), v\rangle &= \lim_{t\to 0^+}\int_\Omega |x|^{-2(a+1)}\frac{(u+tv)^2-u^2}{t}dx \\
&= \int_\Omega |x|^{-2(a+1)}\lim_{t\to 0^+}\frac{F_2(x,u+tv)-F_2(x,u)}{t}dx \qquad (1.4)\\
&= 2\int_\Omega |x|^{-2(a+1)}uvdx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle H_3'(u), v\rangle &= \lim_{t\to 0^+}\int_\Omega |x|^{-c}\frac{(u+tv)_+^q-u_+^q}{t}dx \\
&= \int_\Omega |x|^{-c}\lim_{t\to 0^+}\frac{F_3(x,(u+tv)_+)-F_3(x,u_+)}{t}dx \qquad (1.5)\\
&= q\int_\Omega |x|^{-c}u_+^{q-1}vdx
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle H_4'(u), v\rangle &= \lim_{t\to 0^+}\int_\Omega |x|^{-2_*b}\frac{(u+tv)_+^{2_*}-u_+^{2_*}}{t}dx \\
&= \int_\Omega |x|^{-2_*b}\lim_{t\to 0^+}\frac{F_4(x,(u+tv)_+)-F_4(x,u_+)}{t}dx \qquad (1.6)\\
&= 2_*\int_\Omega |x|^{-2_*b}u_+^{2_*-1}vdx.
\end{aligned}$$

Segue de (1.3), (1.4), (1.5),(1.6) e da Desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned}
|\langle H_1'(u), v\rangle| &= \left|2\int_\Omega |x|^{-2a}\nabla u\nabla v dx\right| \\
&\le 2\int_\Omega |x|^{-2a}|\nabla u||\nabla v|dx \\
&\le 2\left(\int_\Omega |x|^{-2a}|\nabla u|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |x|^{-2a}|\nabla v|^2dx\right)^{1/2} \qquad (1.7)\\
&\le 2M_1\|u\|_{\mu,a}\|v\|_{\mu,a},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\langle H_2'(u), v\rangle| &= \left|2\int_\Omega |x|^{-2(a+1)}uv dx\right| \\
&\le 2\int_\Omega |x|^{-2(a+1)}|u||v|dx \\
&\le 2\left(\int_\Omega |x|^{-2(a+1)}u^2dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |x|^{-2(a+1)}v^2dx\right)^{1/2} \qquad (1.8)\\
&\le 2M_2\|u\|_{\mu,a}\|v\|_{\mu,a},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\langle H_3'(u),v\rangle| &= \left| q\int_\Omega h(x)|x|^{-c}u_+^{q-1}v dx\right| \\ &\le q|h^+|_\infty \int_\Omega |x|^{-c}|u|^{q-1}|v|dx \\ &\le q|h^+|_\infty \left(\int_\Omega |x|^{-c}|u|^q dx\right)^{(q-1)/q} \left(\int_\Omega |x|^{-c}|v|^q dx\right)^{1/q} \\ &\le q|h^+|_\infty M_3\|u\|_{\mu,a}^{q-1}\|v\|_{\mu,a} \end{aligned} \tag{1.9}$$

e

$$\begin{aligned} |\langle H_4'(u),v\rangle| &= \left| 2_*\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}u_+^{2_*-1}v dx\right| \\ &\le 2_*|k^+|_\infty \int_\Omega |x|^{-2_*b}|u|^{2_*-1}|v|dx \\ &\le 2_*|k^+|_\infty \left(\int_\Omega |x|^{-2_*b}|u|^{2_*} dx\right)^{(2_*-1)/2_*} \left(\int_\Omega |x|^{-2_*b}|v|^{2_*} dx\right)^{1/2_*} \\ &\le 2_*|k^+|_\infty M_4\|u\|_{\mu,a}^{2_*-1}\|v\|_{\mu,a}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Em que $\eta^+(x) = \max(\eta(x),0)$ e $|\eta^+|_\infty = \sup\limits_{x\in\Omega} ess|\eta^+(x)|$. Logo, de (1.3), (1.4), (1.5) e (1.6) temos que

$$\langle I_{\lambda,\mu}'(u),v\rangle = \int_\Omega (|x|^{-2a}\nabla u\nabla v - \mu|x|^{-2(a+1)}uv - \lambda h(x)|x|^{-c}u_+^{q-1}v - k(x)|x|^{-2_*b}u_+^{2_*-1}v)dx$$

e de (1.7), (1.8), (1.9) e (1.10) que $I_{\lambda,\mu}'(u)$ é um operador linear limitado. Portanto, segue da Proposição 4.3.2 que $I_{\lambda,\mu}'(u) \in C^1(H_\mu,\mathbb{R})$. □

O comportamento de $I_{\lambda,\mu}$ em H_μ com respeito à norma $\|\cdot\|_{\mu,a}$ pode ser visto na Figura 1.0.1.

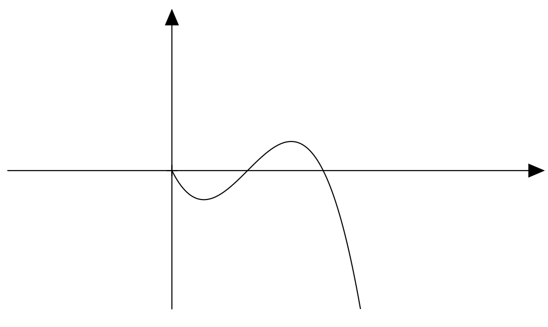

Figura 1.0.1. Gráfico de $I_{\lambda,\mu}$ em H_μ.

Definição 1.0.4. *Dizemos que $u \in H_\mu$ é uma solução fraca do problema (1.1) se satisfaz*

$$\int_\Omega (|x|^{-2a}\nabla u \nabla v - \mu|x|^{-2(a+1)}uv - \lambda h(x)|x|^{-c}u_+^{q-1}v - k(x)|x|^{-2_*b}u_+^{2_*-1}v)dx = 0$$

para todo $v \in H_\mu$.

Teorema 1.0.5. *Se u é uma solução fraca do problema (1.1), então $u \geq 0$.*

Demonstração. Seja u uma solução fraca de (1.1). Fazendo $u = u_+ - u_-$ e observando que $u_+u_- = 0$, temos

$$\begin{aligned}
0 = \left\langle I'_{\lambda,\mu}(u), u_-\right\rangle &= \int_\Omega (|x|^{-2a}\nabla u \nabla u_- - \mu|x|^{-2(a+1)}uu_-)dx \\
&\quad - \lambda\int_\Omega h(x)|x|^{-c}u_+^{q-1}u_-dx - \int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}u_+^{2_*-1}u_-dx \\
&= \int_\Omega (|x|^{-2a}(\nabla u_+\nabla u_- - \nabla u_-\nabla u_-) - \mu|x|^{-2(a+1)}(u_+u_- - u_-^2))dx \\
&= -\int_\Omega (|x|^{-2a}|\nabla u_-|^2 - \mu|x|^{-2(a+1)}u_-^2)dx \\
&= -\|u_-\|_{\mu,a}^2,
\end{aligned}$$

ou seja, $u_- = 0$. Logo, $u = u_+ \geq 0$. □

1.1 Obtenção da primeira solução via Princípio Variacional de Ekeland

Em muitos problemas parecidos com (1.1), $I_{\lambda,\mu}$ não é limitado inferiormente em H_μ, mas é limitado inferiormente em um subconjunto apropriado de H_μ e um mínimo neste conjunto (se existir) pode dar origem a soluções da equação diferencial correspondente.

Um bom candidato a esse subconjunto apropriado de H_μ é a chamada variedade de Nehari

$$\mathcal{N}_\lambda = \{u \in H_\mu \backslash \{0\}, \langle I'_{\lambda,\mu}(u), u\rangle = 0\}.$$

É útil entender $\mathcal{N}_\lambda$ em termos de pontos críticos de aplicações da forma

$$\Psi_u(t) = I_{\lambda,\mu}(tu), \quad t > 0.$$

Daí, temos que

$$\Psi'_u(t) = \langle I'_{\lambda,\mu}(tu), u\rangle = \frac{1}{t}\langle I'_{\lambda,\mu}(tu), tu\rangle.$$

Proposição 1.1.1. *Seja* $u \in H_\mu\backslash\{0\}$ *e* $t > 0$*. Então* $tu \in \mathcal{N}_\lambda$ *se, e somente se,* $\Psi'_u(t) = 0$*.*

Demonstração. Se $tu \in \mathcal{N}_\lambda$, então $\langle I'_{\lambda,\mu}(tu), tu\rangle = 0$. Logo, $\Psi'_u(t) = \frac{1}{t}\langle I'_{\lambda,\mu}(tu), tu\rangle$ $= 0$. Reciprocamente, se $u \in H_\mu\backslash\{0\}$ e $t > 0$, então $tu \in H_\mu\backslash\{0\}$. Além disso, se $\Psi'_u(tu) = 0$, então $\frac{1}{t}\langle I'_{\lambda,\mu}(tu), tu\rangle = 0$ e, como $t > 0$, $\langle I'_{\lambda,\mu}(tu), tu\rangle = 0$. Assim, $tu \in \mathcal{N}_\lambda$. □

Seja $u \neq 0$ um mínimo local de $I_{\lambda,\mu}$, então Ψ_u tem um mínimo local em $t = 1$. De fato, se $u \neq 0$ é um mínimo local de $I_{\lambda,\mu}$, existe uma vizinhança aberta V_u de u tal que $I_{\lambda,\mu}(w) \geq I_{\lambda,\mu}(u)$, $\forall w \in V_u$. Como V_u é aberto, existe uma bola $B_r(u) \subset V_u$. Considere $J = \left(1 - \frac{r}{\|u\|_{\mu,a}}, 1 + \frac{r}{\|u\|_{\mu,a}}\right)$. Se $t \in J$, então

$$\|tu - u\|_{\mu,a} = \|(t-1)u\|_{\mu,a} = |t-1|\|u\|_{\mu,a} \leq \frac{r}{\|u\|_{\mu,a}}\|u\|_{\mu,a} = r$$

ou seja, $tu \in B_r(u) \subset V_u$. Logo, $I_{\lambda,\mu}(tu) \geq I_{\lambda,\mu}(u)$, $\forall t \in J$ e, portanto, $\Psi_u(t) \geq \Psi_u(1)$, $\forall t \in J$, o que diz que 1 é um mínimo local de Ψ_u.

Analogamente, se u é um máximo local, então 1 é um máximo local de Ψ_u. Com isso, é natural dividir $\mathcal{N}_\lambda$ em três subconjuntos, $\mathcal{N}_\lambda^+$, $\mathcal{N}_\lambda^-$ e $\mathcal{N}_\lambda^0$, correspondendo, respectivamente, aos mínimos locais, máximos locais e pontos de inflexão de Ψ_u.

Definimos

$$\mathcal{N}_\lambda^+ = \{u \in \mathcal{N}_\lambda; \Psi_u''(1) > 0\}\,;$$

$$\mathcal{N}_\lambda^- = \{u \in \mathcal{N}_\lambda; \Psi_u''(1) < 0\}\,;$$

$$\mathcal{N}_\lambda^0 = \{u \in \mathcal{N}_\lambda; \Psi_u''(1) = 0\}\,.$$

Observe que, se $u \in \mathcal{N}_\lambda$,

$$\Psi_u(t) = I_{\lambda,\mu}(tu) = \frac{1}{2}t^2\|u\|_{\mu,a}^2 - \frac{\lambda}{q}t^q \int_\Omega h(x)|x|^{-c}u_+^q dx - \frac{1}{2_*}t^{2_*}\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}u_+^{2_*}dx$$

e, portanto,

$$\frac{d}{dt}\Psi_u(t) = \Psi_u'(t) = t\|u\|_{\mu,a}^2 - \lambda t^{q-1}\int_\Omega h(x)|x|^{-c}u_+^q dx - t^{2_*-1}\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}u_+^{2_*}dx$$

e

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}\Psi_u(t) = \Psi_u''(t) = \|u\|_{\mu,a}^2 &- (q-1)\lambda t^{q-2}\int_\Omega h(x)|x|^{-c}u_+^q dx \\ &- (2_*-1)t^{2_*-2}\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}u_+^{2_*}dx.\end{aligned}$$

Como $u \in \mathcal{N}_\lambda$, temos $\langle I_{\lambda,\mu}'(u), u\rangle = 0$, ou seja,

$$\|u\|_{\mu,a}^2 - \lambda\int_\Omega h(x)|x|^{-c}u_+^q dx - \int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}u_+^{2_*}dx = 0.$$

Assim,

$$\lambda\int_\Omega h(x)|x|^{-c}u_+^q dx = \|u\|_{\mu,a}^2 - \int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}u_+^{2_*}dx \tag{1.11}$$

e

$$\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}u_+^{2_*}dx = \|u\|_{\mu,a}^2 - \lambda\int_\Omega h(x)|x|^{-c}u_+^q dx. \tag{1.12}$$

De (1.11) segue que

$$\begin{aligned}
\Psi_u''(1) &= \|u\|_{\mu,a}^2 - (q-1)\lambda \int_\Omega h(x)|x|^{-c} u_+^q dx - (2_* - 1) \int_\Omega k(x)|x|^{-2_* b} u_+^{2_*} dx \\
&= \|u\|_{\mu,a}^2 - (q-1) \left(\|u\|_{\mu,a}^2 - \int_\Omega k(x)|x|^{-2_* b} u_+^{2_*} dx \right) \\
&\quad - (2_* - 1) \int_\Omega k(x)|x|^{-2_* b} u_+^{2_*} dx \\
&= 2\|u\|_{\mu,a}^2 - q\|u\|_{\mu,a}^2 + q \int_\Omega k(x)|x|^{-2_* b} u_+^{2_*} dx - \int_\Omega k(x)|x|^{-2_* b} u_+^{2_*} dx \\
&\quad - 2_* \int_\Omega k(x)|x|^{-2_* b} u_+^{2_*} dx + \int_\Omega k(x)|x|^{-2_* b} u_+^{2_*} dx \\
&= (2-q)\|u\|_{\mu,a}^2 - (2_* - q) \int_\Omega k(x)|x|^{-2_* b} u_+^{2_*} dx.
\end{aligned}$$

Analogamente, de (1.12) temos

$$\Psi_u''(1) = (2 - 2_*)\|u\|_{\mu,a}^2 + (2_* - q)\lambda \int_\Omega h(x)|x|^{-c} u_+^q dx.$$

Consequentemente, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_\lambda^+ &= \left\{ u \in \mathcal{N}_\lambda : (2-q)\|u\|_{\mu,a}^2 - (2_* - q) \int_\Omega k(x) \frac{u_+^{2_*}}{|x|^{2_* b}} dx > 0 \right\} \\
&= \left\{ u \in \mathcal{N}_\lambda : (2-2_*)\|u\|_{\mu,a}^2 + (2_* - q)\lambda \int_\Omega h(x) \frac{u_+^{q}}{|x|^{c}} dx > 0 \right\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_\lambda^- &= \left\{ u \in \mathcal{N}_\lambda : (2-q)\|u\|_{\mu,a}^2 - (2_* - q) \int_\Omega k(x) \frac{u_+^{2_*}}{|x|^{2_* b}} dx < 0 \right\} \\
&= \left\{ u \in \mathcal{N}_\lambda : (2-2_*)\|u\|_{\mu,a}^2 + (2_* - q)\lambda \int_\Omega h(x) \frac{u_+^{q}}{|x|^{c}} dx < 0 \right\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_\lambda^0 &= \left\{ u \in \mathcal{N}_\lambda : (2-q)\|u\|_{\mu,a}^2 - (2_* - q) \int_\Omega k(x) \frac{u_+^{2_*}}{|x|^{2_* b}} dx = 0 \right\} \\
&= \left\{ u \in \mathcal{N}_\lambda : (2-2_*)\|u\|_{\mu,a}^2 + (2_* - q)\lambda \int_\Omega h(x) \frac{u_+^{q}}{|x|^{c}} dx = 0 \right\}.
\end{aligned}$$

Lema 1.1.2. *O funcional $I_{\lambda,\mu}$ é coercivo e limitado inferiormente em $\mathcal{N}_\lambda$.*

Demonstração. Seja $u \in \mathcal{N}_\lambda$. De (1.12) temos que

$$\begin{aligned} I_{\lambda,\mu}(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2_{\mu,a} - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega h(x)|x|^{-c}u_+^q dx - \frac{1}{2_*}\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}u_+^{2_*}dx \\ &= \frac{1}{2}\|u\|^2_{\mu,a} - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega h(x)|x|^{-c}u_+^q dx - \frac{1}{2_*}\left(\|u\|^2_{\mu,a} - \lambda\int_\Omega h(x)|x|^{-c}u_+^q dx\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)\|u\|^2_{\mu,a} - \lambda\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2_*}\right)\int_\Omega h(x)|x|^{-c}u_+^q dx. \end{aligned}$$

Agora, como $q < 2 < 2_*$, temos $\frac{1}{q} > \frac{1}{2} > \frac{1}{2_*}$ e, assim,

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right) > 0 \text{ e } \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2_*}\right) > 0.$$

Além disso, como $h(x)$ contínua em $\bar{\Omega}$ temos que $h(x)$ é limitada em Ω. Logo, existe $M > 0$ tal que $|h(x)| \leq M$, ou seja, $-h(x) \geq -M$. De (12), existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} I_{\lambda,\mu}(u) &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)\|u\|^2_{\mu,a} - \lambda\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2_*}\right)M\int_\Omega |x|^{-c}u_+^q dx \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)\|u\|^2_{\mu,a} - \lambda\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2_*}\right)M \cdot C\|u\|^q_{0,a}. \end{aligned}$$

Como $\|u\|_{0,a}$ e $\|u\|_{\mu,a}$ são equivalentes, existe C' tal que

$$I_{\lambda,\mu}(u) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)\|u\|^2_{\mu,a} - \lambda\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2_*}\right)C'\|u\|^q_{\mu,a}.$$

Já que $2 > q$, temos que $I_{\lambda,\mu}$ é coercivo.

Suponha que $I_{\lambda,\mu}$ não seja limitado inferiormente, daí, existe uma sequência $(u_n) \subset \mathcal{N}_\lambda$ tal que $I_{\lambda,\mu}(u_n) \to -\infty$. Como

$$I_{\lambda,\mu}(u_n) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)\|u_n\|^2_{\mu,a} - \lambda\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2_*}\right)C'\|u_n\|^q_{\mu,a}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

fazendo $n \to \infty$, temos que

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right) \|u_n\|^2_{\mu,a} - \lambda \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2_*}\right) M \cdot C' \|u_n\|^q_{\mu,a} \to -\infty.$$

Absurdo, pois $2 > q$ e $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right) \|u_n\|^2_{\mu,a} > 0$. Portanto, $I_{\lambda,\mu}$ é limitado inferiormente.

$\square$

Na Figura 1.1.1 podemos observar o comportamento de $I_{\lambda,\mu}$ em $\mathcal{N}_\lambda$ com respeito à norma $\|\cdot\|_{\mu,a}$.

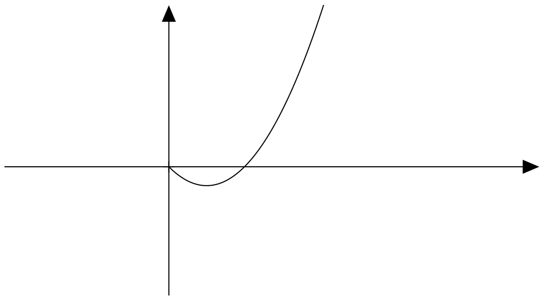

Figura 1.1.1 Gráfico de $I_{\lambda,\mu}$ em $\mathcal{N}_\lambda$.

Podemos, então, definir

$$c_\lambda := \inf_{u \in \mathcal{N}_\lambda} I_{\lambda,\mu}(u);$$

$$c_\lambda^+ := \inf_{u \in \mathcal{N}_\lambda^+} I_{\lambda,\mu}(u);$$

$$c_\lambda^- := \inf_{u \in \mathcal{N}_\lambda^-} I_{\lambda,\mu}(u).$$

Considere

$$S_{a,b,\mu} := \begin{cases} A_{a,b,\mu} & \text{se } (a,\mu) \in]-1,0[\times]0,\bar{\mu}_a - b^2[\cup[0,\frac{N-2}{2}[\times]a(a-N+2),\bar{\mu}_a - b^2[, \\ B_{a,b,\mu} & \text{se}(a,\mu) \in [0,\frac{N-2}{2}[\times[0,\bar{\mu}_a[. \end{cases} \tag{1.13}$$

Lema 1.1.3. *Seja*

$$\Lambda_1 := \left(\frac{2-q}{2_*-q}\right)^{\frac{2-q}{2_*-2}} \left(\frac{2_*-2}{(2_*-q)C_1}\right) |h^+|_\infty^{-1} |k^+|_\infty^{-\frac{2-q}{2_*-2}} (S_{a,b,\mu})^{\frac{2_*}{2}\cdot\frac{2-q}{2_*-2}+\frac{q}{2}},$$

em que $\eta^+(x) = \max(\eta(x), 0)$ *e* $|\eta^+|_\infty = \sup_{x\in\Omega} ess|\eta^+(x)|$. *Então* $\mathcal{N}_\lambda^0 = \emptyset$, *para todo* $\lambda \in (0, \Lambda_1)$.

Demonstração. Suponha que $\mathcal{N}_\lambda^0 \neq \emptyset$, então, para todo $u \in \mathcal{N}_\lambda^0$, temos:

$$\|u\|_{\mu,a}^2 = \frac{2_*-q}{2-q}\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}u_+^{2_*}dx$$

e

$$\|u\|_{\mu,a}^2 = \lambda\frac{2_*-q}{2_*-2}\int_\Omega h(x)|x|^{-c}u_+^q dx.$$

Daí, note que

$$\begin{aligned}
\|u\|_{\mu,a}^2 &= \frac{2_*-q}{2-q}\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}u_+^{2_*}dx \\
&\leq \frac{2_*-q}{2-q}\int_\Omega k^+(x)|x|^{-2_*b}u_+^{2_*}dx \\
&\leq \frac{2_*-q}{2-q}|k^+|_\infty\int_\Omega |x|^{-2_*b}u_+^{2_*}dx. \\
&\leq \frac{2_*-q}{2-q}|k^+|_\infty\int_\Omega |x|^{-2_*b}|u|^{2_*}dx.
\end{aligned}$$

Como $u \in \mathcal{N}_\lambda^0$, temos que $u \neq 0$ e, portanto, $\int_\Omega |x|^{-2_*b}|u|^{2_*}dx \neq 0$. Logo,

$$\left(\frac{2-q}{2_*-q}\right)\frac{1}{|k^+|_\infty}\cdot\frac{\|u\|_{\mu,a}^2}{\int_\Omega |x|^{-2_*b}|u|^{2_*}dx} \leq 1.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\|u\|_{\mu,a}^{2_*-2} &\geq \left(\frac{2-q}{2_*-q}\right)\frac{1}{|k^+|_\infty}\cdot\frac{\|u\|_{\mu,a}^{2_*}}{\int_\Omega |x|^{-2_*b}|u|^{2_*}dx} \\
&\geq \left(\frac{2-q}{2_*-q}\right)\frac{1}{|k^+|_\infty}\cdot(E_{a,b,\mu})^{2_*/2} \\
&\geq \left(\frac{2-q}{2_*-q}\right)\frac{1}{|k^+|_\infty}\cdot(S_{a,b,\mu})^{2_*/2}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\|u\|_{\mu,a}^2 \geq \left[\left(\frac{2-q}{2_*-q}\right)\frac{1}{|k^+|_\infty}\cdot (S_{a,b,\mu})^{2_*/2}\right]^{\frac{2}{2_*-2}}. \tag{1.14}$$

Note, também, que

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mu,a}^2 &= \lambda\frac{2_*-q}{2_*-2}\int_\Omega h(x)|x|^{-c}u_+^q dx \\ &\leq \lambda\frac{2_*-q}{2_*-2}\int_\Omega h^+(x)|x|^{-c}u_+^q dx \\ &\leq \lambda\frac{2_*-q}{2_*-2}|h^+|_\infty\int_\Omega |x|^{-c}u_+^q dx \\ &\leq \lambda\frac{2_*-q}{2_*-2}|h^+|_\infty\int_\Omega |x|^{-c}|u|^q dx. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Mas, pela Desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |x|^{-c}|u|^q dx &\leq \int_\Omega |x|^{-c+qb}|x|^{-qb}|u|^q dx \\ &\leq \left(\int_\Omega \left(|x|^{-c+qb}\right)^{\frac{2_*}{2_*-q}} dx\right)^{\frac{2_*-q}{2_*}}\left(\int_\Omega |x|^{-2_*b}|u|^{2_*}dx\right)^{\frac{q}{2_*}}. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Fazendo $C_1 = \left(\int_\Omega \left(|x|^{-c+qb}\right)^{\frac{2_*}{2_*-q}} dx\right)^{\frac{2_*-q}{2_*}}$, temos que $C_1 < \infty$. De fato, para simplificar, faça $r' = \frac{2_*}{2_*-q}$. Considere $B_R(0)$ a bola centrada na origem de raio R, com $B_R(0) \subset \Omega$. Como Ω é limitado, existe $M > 0$ tal que $|x| \leq M$, $\forall x \in \Omega\backslash B_R(0)$ e, assim,

$$\left(\int_{\Omega\backslash B_R(0)} |x|^{(-c+qb)r'}dx\right)^{1/r'} \leq \left(\int_{\Omega\backslash B_R(0)} M^{(-c+qb)r'}dx\right)^{1/r'} < \infty.$$

Para $x \in B_R(0)$, integrando em coordenadas polares, temos

$$\int_{B_R(0)} |x|^{(-c+qb)r'}dx = \omega_R\int_0^R s^{(-c+qb)r'+N-1}ds$$

Mas, por hipótese, $c < q(a+1) + N(1-q/2)$ e daí,

$$
\begin{aligned}
c &< qa + q + N - \frac{Nq}{2} + qb - qb \\
&= qb + N - \frac{q}{2}\left(N - 2 + 2(b-a)\right) \\
&= qb + N\left(1 - q\frac{N - 2 + 2(b-a)}{2N}\right) \\
&= qb + N\left(1 - \frac{q}{2_*}\right) \\
&= qb + N\left(\frac{2_* - q}{2_*}\right) \\
&= qb + \frac{N}{r'} \\
&= \frac{bqr' + N}{r'}
\end{aligned}
$$

ou seja, $(-c+qb)r' + N > 0$. Dessa forma, $(-c+qb)r' + N - 1 > -1$ e, portanto,

$$
\omega_R \int_0^R s^{(-c+qb)r'+N-1} ds < \infty.
$$

Logo, $C_1 = \left(\int_\Omega \left(|x|^{-c+qb}\right)^{\frac{2_*}{2_*-q}} dx\right)^{\frac{2_*-q}{2_*}} < \infty$. Assim, substituindo (1.16) em (1.15)

$$
\begin{aligned}
\|u\|^2_{\mu,a} &\leq \lambda \frac{2_* - q}{2_* - 2}|h^+|_\infty \int_\Omega |x|^{-c} u_+^q dx \\
&\leq \lambda \frac{2_* - q}{2_* - 2}|h^+|_\infty C_1 \left(\int_\Omega |x|^{-2_* b}|u|^{2_*} dx\right)^{\frac{q}{2_*}}
\end{aligned}
$$

e como $u \neq 0$,

$$
\|u\|^{2-q}_{\mu,a} \leq \lambda \frac{2_* - q}{2_* - 2}|h^+|_\infty C_1 \frac{\left(\int_\Omega |x|^{-2_* b}|u|^{2_*} dx\right)^{\frac{q}{2_*}}}{\|u\|^q_{\mu,a}}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \lambda \frac{2_* - q}{2_* - 2}|h^+|_\infty C_1 \left(E_{a,b,\mu}\right)^{-q/2} \\
&\leq \lambda \frac{2_* - q}{2_* - 2}|h^+|_\infty C_1 \left(S_{a,b,\mu}\right)^{-q/2}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\|u\|_{\mu,a}^{2} \leq \left[\lambda \frac{2_{*}-q}{2_{*}-2}|h^{+}|_{\infty} C_{1}\left(S_{a,b,\mu}\right)^{-q/2}\right]^{\frac{2}{2-q}}. \tag{1.17}$$

De (1.14) e (1.17), temos

$$\left[\left(\frac{2-q}{2_{*}-q}\right)\frac{1}{|k^{+}|_{\infty}}\cdot\left(S_{a,b,\mu}\right)^{2_{*}/2}\right]^{\frac{2}{2_{*}-2}} \leq \left[\lambda \frac{2_{*}-q}{2_{*}-2}|h^{+}|_{\infty} C_{1}\left(S_{a,b,\mu}\right)^{-q/2}\right]^{\frac{2}{2-q}},$$

ou seja,

$$\left[\left(\frac{2-q}{2_{*}-q}\right)\frac{1}{|k^{+}|_{\infty}}\cdot\left(S_{a,b,\mu}\right)^{2_{*}/2}\right]^{\frac{2-q}{2_{*}-2}} \leq \lambda \frac{2_{*}-q}{2_{*}-2}|h^{+}|_{\infty} C_{1}\left(S_{a,b,\mu}\right)^{-q/2}$$

e, portanto,

$$\lambda \geq \left(\frac{2-q}{2_{*}-q}\right)^{\frac{2-q}{2_{*}-2}}\left(\frac{2_{*}-2}{(2_{*}-q)C_{1}}\right)|h^{+}|_{\infty}^{-1}|k^{+}|_{\infty}^{-\frac{2-q}{2_{*}-2}}\left(S_{a,b,\mu}\right)^{\frac{2_{*}}{2}\cdot\frac{2-q}{2_{*}-2}+\frac{q}{2}} = \Lambda_{1}.$$

Logo, $\mathcal{N}_{\lambda}^{0} = \emptyset$, se $\lambda \in (0, \Lambda_{1})$. $\square$

Com o Lema acima concluímos que $\mathcal{N}_{\lambda} = \mathcal{N}_{\lambda}^{+} \cup \mathcal{N}_{\lambda}^{-}$, para todo $\lambda \in (0, \Lambda_{1})$.

Lema 1.1.4. *Seja c_{λ}^{+} como definido anteriormente. Então $c_{\lambda}^{+} < 0$, para todo $\lambda \in (0, \Lambda_{1})$.*

Demonstração. Seja $u \in \mathcal{N}_{\lambda}^{+}$. Então

$$\lambda \int_{\Omega} h(x)|x|^{-c} u_{+}^{q}\, dx = \|u\|_{\mu,a}^{2} - \int_{\Omega} k(x)|x|^{-2_{*}b} u_{+}^{2_{*}}\, dx$$

e

$$\int_{\Omega} k(x)|x|^{-2_{*}b} u_{+}^{2_{*}}\, dx < \frac{2-q}{2_{*}-q}\|u\|_{\mu,a}^{2}.$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
c_\lambda^+ &\leq I_{\lambda,\mu}(u) \\
&= \frac{1}{2}\|u\|_{\mu,a}^2 - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega h(x)|x|^{-c}u_+^q dx - \frac{1}{2_*}\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}u_+^{2_*}dx \\
&= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)\|u\|_{\mu,a}^2 + \left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2_*}\right)\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}u_+^{2_*}dx \\
&< \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)\|u\|_{\mu,a}^2 + \left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2_*}\right)\frac{2-q}{2_*-q}\|u\|_{\mu,a}^2 \\
&= \left(\frac{q-2}{2q} + \frac{2_*-q}{2_*q}\cdot\frac{2-q}{2_*-q}\right)\|u\|_{\mu,a}^2 \\
&= \left(\frac{2_*q(2_*-q)(q-2) + 2q(2_*-q)(2-q)}{2q\cdot 2_*q\cdot(2_*-q)}\right)\|u\|_{\mu,a}^2 \\
&= \frac{q(2_*-q)(q-2)(2_*-2)}{2q\cdot 2_*q\cdot(2_*-q)}\|u\|_{\mu,a}^2 \\
&= -\frac{(2-q)(2_*-2)}{2.2_*q}\|u\|_{\mu,a}^2 < 0.
\end{aligned}
$$

□

Definição 1.1.5. *Seja E um espaço de Banach e $I \in C^1(E,\mathbb{R})$ um funcional. Dizemos que (u_n) é uma sequência de Palais-Smale no nível l, abreviadamente $(PS)_l$, se $I(u_n) \to l$ e $I'(u_n) \to 0$ em E^{-1} (dual de E) quando $n \to \infty$. Dizemos, também, que I satisfaz a condição de Palais-Smale no nível l se toda sequência $(PS)_l$ possui uma subsequência que converge forte em E.*

Lema 1.1.6. *Se $\lambda \in (0,\Lambda_1)$, para cada $u \in \mathcal{N}_\lambda$, existe $\epsilon > 0$ e uma função diferenciável $\xi : B(0,\epsilon) \subset H_\mu \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $\xi(0) = 1$, $\xi(w)(u-w) \in \mathcal{N}_\lambda$ e*

$$
\left\langle \xi'(0), w \right\rangle = \frac{2\int_\Omega\left(\frac{\nabla u\nabla w}{|x|^{2a}} - \mu\frac{uw}{|x|^{2(a+1)}}\right)dx - \lambda q\int_\Omega h(x)\frac{u_+^{q-1}w}{|x|^c}dx - 2_*\int_\Omega k(x)\frac{u_+^{2_*-1}w}{|x|^{2_*b}}dx}{(2-q)\|u\|_{\mu,a}^2 - (2_*-q)\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}u_+^{2_*}dx},
$$

para todo $w \in H_\mu \backslash \{u\}$.

Demonstração. Seja $u \in \mathcal{N}_\lambda$. Defina a função $F_u : \mathbb{R} \times H_\mu \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\begin{aligned} F_u(t,w) &= \left\langle I'_{\lambda,\mu}(t(u-w)), t(u-w) \right\rangle \\ &= t^2\|u-w\|^2_{\mu,a} - \lambda t^q \int_\Omega h(x)|x|^{-c}(u-w)^q_+ dx \\ &\quad - t^{2_*} \int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}(u-w)^{2_*}_+ dx. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_u}{\partial t}(t,w) &= 2t\|u-w\|^2_{\mu,a} - \lambda q t^{q-1} \int_\Omega h(x)|x|^{-c}(u-w)^q_+ dx \\ &\quad - 2_* t^{2_*-1} \int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}(u-w)^{2_*}_+ dx \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial F_u}{\partial w}(t,w), v \right\rangle &= -2t^2 \int_\Omega \left(|x|^{-2a}\nabla(u-w)\nabla v - \mu|x|^{-2(a+1)}(u-w)v\right) dx \\ &\quad + \lambda q t^q \int_\Omega h(x)|x|^{-c}(u-w)^{q-1}_+ v dx \\ &\quad + 2_* t^{2_*} \int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}(u-w)^{2_*-1}_+ v dx. \end{aligned}$$

Em particular, temos $F_u(1,0) = \left\langle I'_{\lambda,\mu}(u), u \right\rangle = 0$, já que $u \in \mathcal{N}_\lambda$ e

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_u}{\partial t}(1,0) &= 2\|u\|^2_{\mu,a} - \lambda q \int_\Omega h(x)|x|^{-c}u^q_+ dx - 2_* \int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}u^{2_*}_+ dx \\ &= \Psi''_u(1) \neq 0, \end{aligned}$$

pois, como $\lambda \in (0, \Lambda_1)$, do Lema 1.1.3, temos que $N^0_\lambda = \emptyset$. Assim, pelo Teorema da Função Implícita, existe $\epsilon > 0$ e uma função diferenciável $\xi : B(0,\epsilon) \subset H_\mu \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $\xi(0) = 1$, $F_u(\xi(w), w) = 0$, para todo $w \in B(0,\epsilon)$ e

$$\langle \xi'(w), v \rangle = \frac{-\left\langle \frac{\partial F_u}{\partial w}(\xi(w),w), v \right\rangle}{\frac{\partial F_u}{\partial t}(\xi(w),w)}, \quad \forall w \in B(0,\epsilon) \text{ e } \forall v \in H_\mu.$$

Como $F_u(\xi(w), w) = 0$, para todo $\forall w \in B(0, \epsilon)$, temos

$$\left\langle I'_{\lambda,\mu}(\xi(w)(u-w)), \xi(w)(u-w)\right\rangle = 0.$$

Também, se $w \neq u$, temos que $\xi(w)(u-w) \neq 0$, ou seja, $\xi(w)(u-w) \in \mathcal{N}_\lambda$, para todo $w \in B(0,\epsilon)\backslash\{u\}$.

Por fim, para todo $w \in H_\mu \backslash \{u\}$,

$$\begin{aligned}
\left\langle \xi'(0), w\right\rangle &= \frac{-\left\langle \frac{\partial F_u}{\partial w}(\xi(0),0), w\right\rangle}{\frac{\partial F_u}{\partial t}(\xi(0),0)} \\
&= \frac{-\left\langle \frac{\partial F_u}{\partial w}(1,0), w\right\rangle}{\frac{\partial F_u}{\partial t}(1,0)} \\
&= \frac{2\int_\Omega \left(\frac{\nabla u \nabla w}{|x|^{2a}} - \mu \frac{uw}{|x|^{2(a+1)}}\right)dx - \lambda q \int_\Omega h(x)\frac{u_+^{q-1}w}{|x|^c}dx - 2_* \int_\Omega k(x)\frac{u_+^{2_*-1}w}{|x|^{2_*b}}dx}{2\|u\|^2_{\mu,a} - \lambda q \int_\Omega h(x)|x|^{-c}u_+^q dx - 2_* \int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}u_+^{2_*}dx} \\
&= \frac{2\int_\Omega \left(\frac{\nabla u \nabla w}{|x|^{2a}} - \mu \frac{uw}{|x|^{2(a+1)}}\right)dx - \lambda q \int_\Omega h(x)\frac{u_+^{q-1}w}{|x|^c}dx - 2_* \int_\Omega k(x)\frac{u_+^{2_*-1}w}{|x|^{2_*b}}dx}{(2-q)\|u\|^2_{\mu,a} - (2_*-q)\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}u_+^{2_*}dx},
\end{aligned}$$

o que conclui o lema. □

Observação: O Lema 1.1.6 também é verdadeiro se trocarmos $\mathcal{N}_\lambda$ por $\mathcal{N}_\lambda^+$ ou $\mathcal{N}_\lambda^-$. Nesse caso, se $u \in \mathcal{N}_\lambda^+$, teríamos

$$\frac{\partial F_u}{\partial t}(1,0) > 0.$$

Daí, observando que

$$\begin{aligned}
\left\langle I'_{\lambda,\mu}(\xi(w)(u-w)), \xi(w)(u-w)\right\rangle = {} & \|\xi(w)(u-w)\|^2_{\mu,a} \\
& - \lambda \int_\Omega h(x)|x|^{-c}(\xi(w)(u-w)_+)^q dx \\
& - \int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}(\xi(w)(u-w)_+)^{2_*}dx,
\end{aligned}$$

temos que

$$\lambda \int_\Omega h(x)|x|^{-c}(\xi(w)(u-w)_+)^q dx = \|\xi(w)(u-w)\|^2_{\mu,a} - \int_\Omega k(x)|x|^{-2_* b}(\xi(w)(u-w)_+)^{2_*} dx$$

e, assim,

$$\begin{aligned}
&(2-q)\|\xi(w)(u-w)\|^2_{\mu,a} - (2_*-q)\int_\Omega k(x)|x|^{-2_* b}(\xi(w)(u-w)_+)^{2_*}dx = \\
&= 2\|\xi(w)(u-w)\|^2_{\mu,a} - q\left(\|\xi(w)(u-w)\|^2_{\mu,a} - \int_\Omega k(x)|x|^{-2_* b}(\xi(w)(u-w)_+)^{2_*}dx\right) \\
&\quad - 2_*\int_\Omega k(x)|x|^{-2_* b}(\xi(w)(u-w)_+)^{2_*}dx \\
&= 2\|\xi(w)(u-w)\|^2_{\mu,a} - q\lambda\int_\Omega h(x)|x|^{-c}(\xi(w)(u-w)_+)^q dx \\
&\quad - 2_*\int_\Omega k(x)|x|^{-2_* b}(\xi(w)(u-w)_+)|^{2_*}dx \\
&= \xi(w)\left(2\xi(w)\|u-w\|^2_{\mu,a} - \xi(w)^{q-1}\cdot q\cdot\lambda\int_\Omega h(x)|x|^{-c}(u-w)^q_+ dx\right. \\
&\quad \left. -\xi(w)^{2_*-1}\cdot 2_*\int_\Omega k(x)|x|^{-2_* b}(u-w)^{2_*}_+ dx\right) \\
&= \xi(w)\cdot\frac{\partial F_u}{\partial t}(\xi(w),w).
\end{aligned}$$

Como $\xi(w)$ é contínua e $\frac{\partial F_u}{\partial t}(1,0) > 0$, podemos tomar $\epsilon > 0$ (menor que o anterior, se necessário) tal que $\frac{\partial F_u}{\partial t}(\xi(w),w) > 0$, para todo $w \in B(0,\epsilon)$ e, assim, $\xi(w)\cdot\frac{\partial F_u}{\partial t}(\xi(w),w) > 0$, para todo $w \in B(0,\epsilon)$, ou seja, $\xi(w)(u-w) \in \mathcal{N}^+_\lambda$.

Se $u \in \mathcal{N}^-_\lambda$ o raciocínio é análogo.

Lema 1.1.7. *Se $\lambda \in (0,\Lambda_1)$, então, existe uma sequência $(PS)_{c_\lambda}$, $(u_n) \subset \mathcal{N}_\lambda$, para $I_{\lambda,\mu}$.*

Demonstração. Pelo Princípio Variacional de Ekeland, existe uma sequência minimizante $(u_n) \subset \overline{\mathcal{N}_\lambda}$ tal que

$$I_{\lambda,\mu}(u_n) < \inf_{u\in\overline{\mathcal{N}_\lambda}} I_{\lambda,\mu}(u) + \frac{1}{n} \leq c_\lambda + \frac{1}{n} \tag{1.18}$$

e

$$I_{\lambda,\mu}(u_n) < I_{\lambda,\mu}(w) + \frac{1}{n}\|w - u_n\|_{\mu,a}, \quad \forall w \neq u_n. \tag{1.19}$$

Pelo Lema 1.1.4 existe $\eta > 0$ tal que $-\infty < c_\lambda^+ < -\eta$. Daí $c_\lambda \leq c_\lambda^+ < -\eta$ e, assim, $-\eta - c_\lambda > 0$. Como $\frac{1}{n} \to 0$ quando $n \to \infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < -\eta - c_\lambda$, para todo $n > n_0$, ou seja, $c_\lambda + \frac{1}{n} < -\eta$, para todo $n > n_0$. Segue de (1.18) que para todo $n > n_0$,

$$\begin{aligned} I_{\lambda,\mu}(u_n) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)\|u_n\|_{\mu,a}^2 - \lambda\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2_*}\right)\int_\Omega h(x)|x|^{-c}u_{n_+}^q dx \\ &< c_\lambda + \frac{1}{n} < -\eta < 0. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lambda\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2_*}\right)\int_\Omega h(x)|x|^{-c}u_{n_+}^q dx &> \eta + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)\|u_n\|_{\mu,a}^2 \\ &> \eta \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \int_\Omega h(x)|x|^{-c}u_{n_+}^q dx &> \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2_*}\right)^{-1}\eta \\ &= \frac{1}{\lambda}\left(\frac{2_* q}{2_* - q}\right)\eta \\ &> 0. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Ainda, de (1.16) e da definição de $S_{a,b,\mu}$ temos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega h(x)|x|^{-c}u_{n_+}^q dx &\leq |h^+|_\infty \int_\Omega |x|^{-c}|u_n|^q dx \\ &\leq |h^+|_\infty C_1\left(\int_\Omega |x|^{-2_*b}|u_n|^{2_*}dx\right)^{q/2_*} \\ &\leq |h^+|_\infty C_1\left(S_{a,b,\mu}\right)^{-q/2}\|u_n\|_{\mu,a}^q. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Segue de (1.21) e (1.22) que

$$|h^+|_\infty C_1\left(S_{a,b,\mu}\right)^{-q/2}\|u_n\|_{\mu,a}^q > \frac{1}{\lambda}\left(\frac{2_* q}{2_* - q}\right)\eta,$$

ou seja,

$$\|u_n\|_{\mu,a} > \left[\frac{1}{\lambda}\left(\frac{2_* q}{2_* - q}\right)\eta \cdot |h^+|_\infty^{-1} \cdot C_1^{-1}\left(S_{a,b,\mu}\right)^{q/2}\right]^{1/q} > 0. \tag{1.23}$$

Também, de (1.20) e (1.22)

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)\|u_n\|_{\mu,a}^2 &< \lambda\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2_*}\right)\int_\Omega h(x)|x|^{-c}|u_n|^q dx \\ &\leq \lambda\left(\frac{2_* - q}{2_* q}\right)|h^+|_\infty C_1\left(S_{a,b,\mu}\right)^{-q/2}\|u_n\|_{\mu,a}^q\end{aligned}$$

e, assim,

$$\begin{aligned}\|u_n\|_{\mu,a} &< \left[\lambda\left(\frac{2 \cdot 2_*}{2_* - 2}\right)\left(\frac{2_* - q}{2_* q}\right)|h^+|_\infty C_1\left(S_{a,b,\mu}\right)^{-q/2}\right]^{\frac{1}{2-q}} \\ &= \left[\lambda\frac{2}{q}\left(\frac{2_* - q}{2_* - 2}\right)|h^+|_\infty C_1\left(S_{a,b,\mu}\right)^{-q/2}\right]^{\frac{1}{2-q}}.\end{aligned} \tag{1.24}$$

Segue de (1.24) que (u_n) é limitada. Observe, ainda, que $(u_n) \subset \overline{\mathcal{N}_\lambda} \subset \mathcal{N}_\lambda^+ \cup \mathcal{N}_\lambda^0 \cup \mathcal{N}_\lambda^- \cup \{0\}$. Entretanto, de (1.23), temos que $u_n \neq 0$ e, como $\lambda \in (0, \Lambda_1)$, do Lema 1.1.3 temos que $\mathcal{N}_\lambda^0 = \emptyset$, ou seja, $(u_n) \subset \mathcal{N}_\lambda^+ \cup \mathcal{N}_\lambda^- = \mathcal{N}_\lambda$.

Agora, mostraremos que $I'_{\lambda,\mu}(u_n) \to 0$ em H_μ^{-1} (dual de H_μ), quando $n \to \infty$.

Aplicando o Lema 1.1.6, para cada $n \in \mathbb{N}$, obtemos um $\varepsilon_n > 0$ e uma função $\xi_n : B(0, \varepsilon_n) \longrightarrow \mathbb{R}^+$, tais que $\xi_n(w)(u_n - w) \in \mathcal{N}_\lambda, \quad \forall w \in H_\mu \backslash \{u_n\}$. Seja $0 < \rho < \varepsilon_n$. Dado $u \in H_\mu$, com $u \neq 0$, defina $w_\rho = \dfrac{\rho u}{\|u\|_{\mu,a}}$. Defina, também, $\eta_\rho = \xi_n(w_\rho)(u_n - w_\rho)$. Como

$$I_{\lambda,\mu}(u_n) < I_{\lambda,\mu}(w) + \frac{1}{n}\|w - u_n\|_{\mu,a}, \quad \forall w \neq u_n,$$

temos que

$$I_{\lambda,\mu}(\eta_\rho) - I_{\lambda,\mu}(u_n) > -\frac{1}{n}\|\eta_\rho - u_n\|_{\mu,a}.$$

Da definição da derivada de Frechét, temos

$$I_{\lambda,\mu}(\eta_\rho) - I_{\lambda,\mu}(u_n) = \left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), \eta_\rho - u_n \right\rangle + o(\|\eta_\rho - u_n\|_{\mu,a}),$$

em que $\dfrac{o(\|s\|)}{\|s\|} \to 0$, quando $s \to 0$. Logo,

$$-\frac{1}{n}\|\eta_\rho - u_n\|_{\mu,a} < \left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), \eta_\rho - u_n \right\rangle + o(\|\eta_\rho - u_n\|_{\mu,a})$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{n}\|\eta_\rho - u_n\|_{\mu,a} + o(\|\eta_\rho - u_n\|_{\mu,a}) &< \left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), \xi_n(w_\rho)(u_n - w_\rho) - u_n \right\rangle \\
&= \left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), \xi_n(w_\rho)(u_n - w_\rho) - u_n + w_\rho - w_\rho \right\rangle \\
&= \left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), \xi_n(w_\rho)(u_n - w_\rho) - (u_n - w_\rho) - w_\rho \right\rangle \\
&= \left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), (\xi_n(w_\rho) - 1)(u_n - w_\rho) - w_\rho \right\rangle \\
&= \left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), -w_\rho \right\rangle \\
&+ (\xi_n(w_\rho) - 1) \left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), (u_n - w_\rho) \right\rangle .
\end{aligned}$$

Como $\eta_\rho = \xi_n(w_\rho)(u_n - w_\rho) \in \mathcal{N}_\lambda$, temos que

$$\begin{aligned}
\left\langle I'_{\lambda,\mu}(\eta_\rho), \eta_\rho \right\rangle &= \left\langle I'_{\lambda,\mu}(\eta_\rho), \xi_n(w_\rho)(u_n - w_\rho) \right\rangle \\
&= \xi_n(w_\rho) \left\langle I'_{\lambda,\mu}(\eta_\rho), (u_n - w_\rho) \right\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

e, com isso,

$$\left\langle I'_{\lambda,\mu}(\eta_\rho), (u_n - w_\rho) \right\rangle = 0.$$

Daí, observando que $w_\rho = \dfrac{\rho u}{\|u\|_{\mu,a}}$, temos

$$
\begin{aligned}
&\left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), -w_\rho \right\rangle + (\xi_n(w_\rho) - 1) \left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), (u_n - w_\rho) \right\rangle \\
&= -\rho \left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), \frac{u}{\|u\|_{\mu,a}} \right\rangle + (\xi_n(w_\rho) - 1) \left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), (u_n - w_\rho) \right\rangle \\
&\quad - (\xi_n(w_\rho) - 1) \left\langle I'_{\lambda,\mu}(\eta_\rho), (u_n - w_\rho) \right\rangle \\
&= -\rho \left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), \frac{u}{\|u\|_{\mu,a}} \right\rangle + (\xi_n(w_\rho) - 1) \left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n) - I'_{\lambda,\mu}(\eta_\rho), (u_n - w_\rho) \right\rangle \\
&> -\frac{1}{n} \|\eta_\rho - u_n\|_{\mu,a} + o(\|\eta_\rho - u_n\|_{\mu,a}).
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), \frac{u}{\|u\|_{\mu,a}} \right\rangle &< \frac{\|\eta_\rho - u_n\|_{\mu,a}}{n \cdot \rho} + \frac{o(\|\eta_\rho - u_n\|_{\mu,a})}{\rho} \\
&\quad + \frac{(\xi_n(w_\rho) - 1)}{\rho} \left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n) - I'_{\lambda,\mu}(\eta_\rho), (u_n - w_\rho) \right\rangle .
\end{aligned}
\tag{1.25}
$$

Agora, note que

$$
\begin{aligned}
\|\eta_\rho - u_n\|_{\mu,a} &= \|\xi_n(w_\rho)(u_n - w_\rho) - u_n\|_{\mu,a} \\
&= \|(\xi_n(w_\rho) - 1)u_n - \xi_n(w_\rho)w_\rho\|_{\mu,a} \\
&\leq \|(\xi_n(w_\rho) - 1)u_n\|_{\mu,a} + \frac{\|\xi_n(w_\rho) \cdot \rho u\|_{\mu,a}}{\|u\|_{\mu,a}} \\
&= |(\xi_n(w_\rho) - 1)| \cdot \|u_n\|_{\mu,a} + \rho \cdot |\xi_n(w_\rho)|.
\end{aligned}
\tag{1.26}
$$

Note, também, que usando a definição da derivada de Gâteaux

$$
\begin{aligned}
\lim_{\rho \to 0^+} \frac{|\xi_n(w_\rho) - 1|}{\rho} &= \lim_{\rho \to 0^+} \frac{|\xi_n(w_\rho) - \xi_n(0)|}{\rho} \\
&= \lim_{\rho \to 0^+} \frac{|\xi_n(\frac{\rho u}{\|u\|_{\mu,a}}) - \xi_n(0)|}{\rho} \\
&= \lim_{\rho \to 0^+} \frac{\frac{1}{\|u\|_{\mu,a}} |\xi_n(\frac{\rho u}{\|u\|_{\mu,a}}) - \xi_n(0)|}{\frac{\rho}{\|u\|_{\mu,a}}} \\
&= \lim_{t \to 0^+} \frac{\frac{1}{\|u\|_{\mu,a}} |\xi_n(tu) - \xi_n(0)|}{t}
\end{aligned}
\tag{1.27}
$$

$$= \frac{1}{\|u\|_{\mu,a}} |\left\langle \xi_n'(0), u \right\rangle|$$
$$\leq \|\xi_n'(0)\|,$$

em que $\|\cdot\|$ denota a norma euclidiana em $\mathbb{R}$.

Substituindo (1.26) em (1.25), temos

$$\left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), \frac{u}{\|u\|_{\mu,a}} \right\rangle \leq \frac{|\xi_n(w_\rho)|}{n} + \frac{|(\xi_n(w_\rho)-1)| \cdot \|u_n\|_{\mu,a}}{n \cdot \rho} + \frac{o(\|\eta_\rho - u_n\|_{\mu,a})}{\rho}$$
$$+ \frac{(\xi_n(w_\rho)-1)}{\rho} \left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n) - I'_{\lambda,\mu}(\eta_\rho), (u_n - w_\rho) \right\rangle.$$

Passando ao limite quando $\rho \to 0^+$,

$$\begin{aligned} \left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), \frac{u}{\|u\|_{\mu,a}} \right\rangle &\leq \lim_{\rho\to 0^+} \frac{|\xi_n(w_\rho)|}{n} + \lim_{\rho\to 0^+} \frac{|(\xi_n(w_\rho)-1)| \cdot \|u_n\|_{\mu,a}}{n \cdot \rho} \\ &+ \lim_{\rho\to 0^+} \frac{o(\|\eta_\rho - u_n\|_{\mu,a})}{\rho} \\ &+ \lim_{\rho\to 0^+} \frac{(\xi_n(w_\rho)-1)}{\rho} \left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n) - I'_{\lambda,\mu}(\eta_\rho), (u_n - w_\rho) \right\rangle. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Mas, observe que

a) ξ_n é diferenciável e $w_\rho = \frac{\rho u}{\|u\|_{\mu,a}} \to 0$, quando $\rho \to 0^+$, ou seja,

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{|\xi_n(w_\rho)|}{n} = \frac{|\xi_n(0)|}{n} = \frac{1}{n}.$$

b) De (1.27)

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{|(\xi_n(w_\rho)-1)| \cdot \|u_n\|_{\mu,a}}{n \cdot \rho} \leq \frac{\|\xi_n'(0)\|}{n} \|u_n\|_{\mu,a}.$$

c) De (1.26) e (1.27)

$$0 \leq \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\|\eta_\rho - u_n\|_{\mu,a}}{\rho} \leq \lim_{\rho\to 0^+} \left(\frac{|(\xi_n(w_\rho)-1)| \cdot \|u_n\|_{\mu,a}}{\rho} + |\xi_n(w_\rho)| \right)$$
$$\leq \|\xi_n'(0)\| \|u_n\|_{\mu,a} + 1.$$

e como (u_n) é limitada em H_μ, temos que $\dfrac{\|\eta_\rho - u_n\|_{\mu,a}}{\rho}$ é limitada em H_μ. Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho\to 0^+} \|\eta_\rho - u_n\|_{\mu,a} &= \lim_{\rho\to 0^+} \|\xi_n(w_\rho)(u_n - w_\rho) - u_n\|_{\mu,a} \\
&= \lim_{\rho\to 0^+} \|\xi_n(\frac{\rho u}{\|u\|_{\mu,a}})\left(u_n - \frac{\rho u}{\|u\|_{\mu,a}}\right) - u_n\|_{\mu,a} \\
&= \|\xi_n(0)(u_n - u_n)\|_{\mu,a} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo, $\dfrac{o(\|\eta_\rho - u_n\|_{\mu,a})}{\|\eta_\rho - u_n\|_{\mu,a}} \to 0$, quando $\rho \to 0^+$, e, portanto,

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{o(\|\eta_\rho - u_n\|_{\mu,a})}{\rho} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\|\eta_\rho - u_n\|_{\mu,a}}{\rho} \cdot \frac{o(\|\eta_\rho - u_n\|_{\mu,a})}{\|\eta_\rho - u_n\|_{\mu,a}} = 0.$$

d) Temos que

$$\left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n) - I'_{\lambda,\mu}(\eta_\rho), (u_n - w_\rho)\right\rangle = \left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), (u_n - w_\rho)\right\rangle - \left\langle I'_{\lambda,\mu}(\eta_\rho), (u_n - w_\rho)\right\rangle.$$

Seja (ρ_j) uma sequência tal que $\rho_j \to 0^+$ quando $j \to \infty$. Daí,

$$\begin{aligned}
\left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), (u_n - w_{\rho_j})\right\rangle = &\int_\Omega |x|^{-2a} \nabla u_n \nabla (u_n - w_{\rho_j}) dx - \mu \int_\Omega |x|^{-2(a+1)} u_n (u_n - w_{\rho_j}) dx \\
&- \lambda \int_\Omega h(x)|x|^{-c} u_{n+}^{q-1}(u_n - w_{\rho_j}) dx \\
&- \int_\Omega k(x)|x|^{-2_* b} u_{n+}^{2_*-1}(u_n - w_{\rho_j}) dx.
\end{aligned}$$

Já que $w_{\rho_j} = \frac{\rho_j u}{\|u\|_{\mu,a}}$, temos que $w_{\rho_j} \to 0$ e $\nabla w_{\rho_j} \to 0$, quando $j \to \infty$. Assim,

$$\begin{aligned}
\lim_{j\to\infty} |x|^{-2a} \nabla u_n(x) \nabla (u_n - w_{\rho_j})(x) &= |x|^{-2a} |\nabla u_n|^2(x), \\
\lim_{j\to\infty} |x|^{-2(a+1)} u_n(x)(u_n - w_{\rho_j})(x) &= |x|^{-2(a+1)} u_n^2(x), \\
\lim_{j\to\infty} h(x)|x|^{-c} u_{n+}^{q-1}(x)(u_n - w_{\rho_j})(x) &= h(x)|x|^{-c} u_{n+}^{q}(x)
\end{aligned}$$

e

$$\lim_{j\to\infty} k(x)|x|^{-2_*b}u_{n_+}^{2_*-1}(x)(u_n - w_{\rho_j})(x) = k(x)|x|^{-2_*b}u_{n_+}^{2_*}(x),$$

em quase todo ponto de Ω ($q.t.p$ em Ω). Agora, como $w_{\rho_j} \to 0$, quando $j \to \infty$, podemos considerar $|w_{\rho_j}| < 1$. Logo,

$$\begin{aligned}
||x|^{-2a}\nabla u_n(x)\nabla(u_n - w_{\rho_j})(x)| &= |x|^{-2a}|\nabla u_n(x)||\nabla(u_n - w_{\rho_j})(x)| \\
&\leq |x|^{-2a}(|\nabla u_n(x)|^2 + |\nabla u_n(x)||w_{\rho_j}(x)|) \\
&\leq |x|^{-2a}(|\nabla u_n(x)|^2 + |\nabla u_n(x)|) \\
&\quad \in L^1(\Omega, |x|^{-2a})
\end{aligned}$$

e, de forma análoga,

$$\begin{aligned}
||x|^{-2(a+1)}u_n(x)(u_n - w_{\rho_j})(x)| &\leq |x|^{-2(a+1)}(|u_n|^2 + |u_n|) \\
&\quad \in L^1(\Omega, |x|^{-2(a+1)}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|h(x)|x|^{-c}u_{n_+}^{q-1}(x)(u_n - w_{\rho_j})(x)| &\leq |h^+|_\infty |x|^{-c}(|u_n|^q + |u_n|) \\
&\quad \in L^1(\Omega, |x|^{-c})
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
|k(x)|x|^{-2_*b}u_{n_+}^{2_*-1}(x)(u_n - w_{\rho_j})(x)| &\leq |k^+|_\infty |x|^{-2_*b}(|u_n|^{-2_*} + |u_n|) \\
&\quad \in L^1(\Omega, |x|^{-2_*b}).
\end{aligned}$$

Segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\lim_{j\to\infty} \left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), (u_n - w_\rho)\right\rangle = I_{\lambda,\mu}(u_n),$$

para toda sequência (ρ_j) tal que $\rho_j \to 0^+$ quando $j \to \infty$.

Dessa forma,

$$\lim_{\rho\to 0^+}\left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n),(u_n-w_\rho)\right\rangle = I_{\lambda,\mu}(u_n).$$

Analogamente,

$$\lim_{\rho\to 0^+} -\left\langle I'_{\lambda,\mu}(\eta_\rho),(u_n-w_\rho)\right\rangle = -I_{\lambda,\mu}(u_n)$$

e, portanto,

$$\lim_{\rho\to 0^+}\left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n)-I'_{\lambda,\mu}(\eta_\rho),(u_n-w_\rho)\right\rangle = 0.$$

Como de (1.27) temos que $\dfrac{(\xi_n(w_\rho)-1)}{\rho}$ é limitada em $\mathbb{R}$, obtemos

$$\lim_{\rho\to 0^+}\frac{(\xi_n(w_\rho)-1)}{\rho}\left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n)-I'_{\lambda,\mu}(\eta_\rho),(u_n-w_\rho)\right\rangle = 0.$$

De a), b), c), d), (1.28) e usando que (u_n) é limitada em H_μ, segue que

$$\left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n),\frac{u}{\|u\|_{\mu,a}}\right\rangle \le \frac{\bar{C}}{n}(1+\|\xi_n'(0)\|).$$

Mostraremos que $\|\xi_n'(0)\|$ é uniformemente limitada em $\mathbb{R}$, com relação ao índice n.

Dado $v\in H_\mu$,

$$\begin{aligned}\left\langle \xi_n'(0),v\right\rangle &= \left(2\int_\Omega(|x|^{-2a}\nabla u_n\nabla v-\mu|x|^{-2(a+1)}u_n v)dx-\lambda q\int_\Omega h(x)|x|^{-c}u_{n_+}^{q-1}v dx\right.\\ &\left.-2_*\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}u_{n_+}^{2_*-1}v dx\right)\left[(2-q)\|u_n\|^2_{\mu,a}-(2_*-q)\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}u_{n_+}^{2_*}dx\right]^{-1}.\end{aligned}$$

Da desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega |x|^{-2a}\nabla u_n \nabla v dx\right| &= \left|\int_\Omega |x|^{-a}\nabla u_n |x|^{-a}\nabla v dx\right| \\ &\leq \left(\int_\Omega |x|^{-2a}|\nabla u_n|^2\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |x|^{-2a}|\nabla v|^2\right)^{1/2} \\ &= \|u_n\|_{0,a}\|v\|_{0,a} \\ &\leq C'\|u_n\|_{\mu,a}\|v\|_{\mu,a}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega |x|^{-2(a+1)}u_n v dx\right| &= \left|\int_\Omega |x|^{-(a+1)}u_n |x|^{-(a+1)} v dx\right| \\ &\leq \left(\int_\Omega |x|^{-2(a+1)}u_n^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |x|^{-2(a+1)}v^2 dx\right)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{\bar{\mu}_a}\left(\int_\Omega |x|^{-2a}|\nabla u_n|^2\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |x|^{-2a}|\nabla v|^2\right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{\bar{\mu}_a}\|u_n\|_{0,a}\|v\|_{0,a} \\ &\leq C''\|u_n\|_{\mu,a}\|v\|_{\mu,a}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega (|x|^{-2a}\nabla u_n \nabla v - \mu|x|^{-2(a+1)}u_n v)dx\right| &\leq (C' + |\mu|C'')\|u_n\|_{\mu,a}\|v\|_{\mu,a} \\ &= M_1\|u_n\|_{\mu,a}\|v\|_{\mu,a}.\end{aligned} \tag{1.29}$$

Também,

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega h(x)|x|^{-c}u_{n_+}^{q-1} v dx\right| &\leq |h^+|_\infty \int_\Omega |x|^{-c}|u_n|^{q-1}|v|dx \\ &= |h^+|_\infty \int_\Omega (|x|^{-c})^{\frac{q-1}{q}}|u_n|^{q-1}(|x|^{-c})^{\frac{1}{q}}|v|dx \\ &\leq |h^+|_\infty \left(\int_\Omega |x|^{-c}|u_n|^q\right)^{\frac{q-1}{q}}\left(\int_\Omega |x|^{-c}|v|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq |h^+|_\infty M_2\|u_n\|_{\mu,a}^{q-1}\|v\|_{\mu,a}\end{aligned} \tag{1.30}$$

e

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}u_{n_+}^{2_*-1}vdx\right| &\le |k^+|_\infty \int_\Omega |x|^{-2_*b}|u_n|^{2_*-1}vdx\\ &= |k^+|_\infty \int_\Omega (|x|^{-2_*b})^{\frac{2_*-1}{2_*}}|u_n|^{2_*-1}(|x|^{-2_*b})^{\frac{1}{2_*}}vdx\\ &\le |k^+|_\infty \left(\int_\Omega |x|^{-2_*b}|u_n|^{2_*}dx\right)^{\frac{2_*-1}{2_*}}\left(\int_\Omega |x|^{-2_*b}|v|^{2_*}dx\right)^{\frac{1}{2_*}}\\ &\le |k^+|_\infty M_3\|u_n\|_{\mu,a}^{2_*-1}\|v\|_{\mu,a}.\end{aligned} \tag{1.31}$$

Sabendo que (u_n) é limitada em H_μ e usando (1.29), (1.30) e (1.31), temos

$$|\langle \xi_n'(0), v\rangle| \le \frac{M\|v\|_{\mu,a}}{\left|(2-q)\|u_n\|_{\mu,a}^2 - (2_*-q)\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}u_{n_+}^{2_*}dx\right|}, \quad \forall v \in H_\mu. \tag{1.32}$$

Assim, devemos mostrar que para n suficientemente grande,

$$\left|(2-q)\|u_n\|_{\mu,a}^2 - (2_*-q)\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}u_{n_+}^{2_*}dx\right| \ge L > 0. \tag{1.33}$$

Suponha que isso não aconteça. Daí, existe uma subsequência, que também denotaremos por (u_n), tal que

$$(2-q)\|u_n\|_{\mu,a}^2 - (2_*-q)\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}u_{n_+}^{2_*}dx = o_n(1),$$

onde $o_n(1) \to 0$, quando $n \to \infty$. Segue de (1.23) que

$$\begin{aligned}\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}u_{n_+}^{2_*}dx &= \frac{2-q}{2_*-q}\|u_n\|_{\mu,a}^2 + o_n(1) \qquad (1.34)\\ &\ge \frac{2-q}{2_*-q}\left[\frac{1}{\lambda}\left(\frac{2_*q}{2_*-q}\right)\eta \cdot |h^+|_\infty^{-1}\cdot C_1^{-1}\right]^{2/q} + o_n(1) > 0.\end{aligned}$$

Como $(u_n) \subset \mathcal{N}_\lambda$, temos

$$\begin{aligned}\lambda\int_\Omega h(x)|x|^{-c}u_{n_+}^q dx &= \|u_n\|_{\mu,a}^2 - \int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}u_{n_+}^{2_*}dx\\ &= \|u_n\|_{\mu,a}^2 - \frac{2-q}{2_*-q}\|u_n\|_{\mu,a}^2 + o_n(1)\end{aligned} \tag{1.35}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(1 - \frac{2-q}{2_*-q}\right)\|u_n\|^2_{\mu,a} + o_n(1)\\
&= \frac{2_*-2}{2_*-q}\|u_n\|^2_{\mu,a} + o_n(1)\\
&\geq \frac{2_*-2}{2_*-q}\left[\frac{1}{\lambda}\left(\frac{2_*q}{2_*-q}\right)\eta\cdot|h^+|^{-1}_\infty\cdot C_1^{-1}\right]^{2/q} + o_n(1).
\end{aligned}
$$

Agora, considere o funcional auxiliar $J_{\lambda,\mu}:\mathcal{N}_\lambda \longrightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$
J_{\lambda,\mu}(u) = \left(\frac{2_*-2}{2_*-q}\right)\left(\frac{2-q}{2_*-q}\right)^{\frac{1}{2_*-2}}\left[\frac{\|u_n\|^{2(2_*-2)+2}_{\mu,a}}{\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}u_+^{2_*}dx}\right]^{\frac{1}{2_*-2}} - \lambda\int_\Omega h(x)|x|^{-c}u_+^q dx.
$$

De (1.34) e (1.35), obtemos

$$
J_{\lambda,\mu}(u_n) = \left(\frac{2_*-2}{2_*-q}\right)\left(\frac{2-q}{2_*-q}\right)^{\frac{1}{2_*-2}}\left[\frac{\|u_n\|^{2(2_*-2)+2}_{\mu,a}}{\frac{2-q}{2_*-q}\|u_n\|^2_{\mu,a}+o_n(1)}\right]^{\frac{1}{2_*-2}} - \frac{2_*-2}{2_*-q}\|u_n\|^2_{\mu,a} + o_n(1).
$$

Mas, como (u_n) é limitada em H_μ, temos que $(\|u_n\|_{\mu,a})$ é uma sequência de números reais limitada. Pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, passando a uma subsequência, se necessário, temos que $\lim\limits_{n\to\infty}\|u_n\|_{\mu,a}$ existe. Assim,

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\|u_n\|^{2(2_*-2)+2}_{\mu,a}}{\frac{2-q}{2_*-q}\|u_n\|^2_{\mu,a}+o_n(1)}\right]^{\frac{1}{2_*-2}} &= \left[\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\|u_n\|^{2(2_*-2)+2}_{\mu,a}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2-q}{2_*-q}\|u_n\|^2_{\mu,a}+o_n(1)\right)}\right]^{\frac{1}{2_*-2}}\\
&= \left[\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\|u_n\|^{2(2_*-2)+2}_{\mu,a}}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2-q}{2_*-q}\|u_n\|^2_{\mu,a}}\right]^{\frac{1}{2_*-2}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\|u_n\|^{2(2_*-2)+2}_{\mu,a}}{\frac{2-q}{2_*-q}\|u_n\|^2_{\mu,a}}\right]^{\frac{1}{2_*-2}},
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\left[\frac{\|u_n\|^{2(2_*-2)+2}_{\mu,a}}{\frac{2-q}{2_*-q}\|u_n\|^2_{\mu,a}+o_n(1)}\right]^{\frac{1}{2_*-2}} = \left[\frac{\|u_n\|^{2(2_*-2)+2}_{\mu,a}}{\frac{2-q}{2_*-q}\|u_n\|^2_{\mu,a}}\right]^{\frac{1}{2_*-2}} + o_n(1). \tag{1.36}
$$

Portanto,

$$\begin{aligned} J_{\lambda,\mu}(u_n) &= \left(\frac{2_*-2}{2_*-q}\right)\left(\frac{2-q}{2_*-q}\right)^{\frac{1}{2_*-2}} \left[\frac{\|u_n\|_{\mu,a}^{2(2_*-2)+2}}{\frac{2-q}{2_*-q}\|u_n\|_{\mu,a}^2}\right]^{\frac{1}{2_*-2}} - \frac{2_*-2}{2_*-q}\|u_n\|_{\mu,a}^2 + o_n(1) \\ &= \frac{2_*-2}{2_*-q}\|u_n\|_{\mu,a}^2 - \frac{2_*-2}{2_*-q}\|u_n\|_{\mu,a}^2 + o_n(1) \\ &= o_n(1). \end{aligned} \tag{1.37}$$

Por outro lado, de (1.22) e observado que

$$\begin{aligned} \int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}u_+^{2_*}dx &\leq |k^+|_\infty \int_\Omega |x|^{-2_*b}|u|^{2_*}dx \\ &\leq |k^+|_\infty (S_{a,b,\mu})^{-2_*/2}\|u_n\|_{\mu,a}^{2_*} \end{aligned} \tag{1.38}$$

temos

$$\begin{aligned} J_{\lambda,\mu}(u_n) &\geq \left(\frac{2_*-2}{2_*-q}\right)\left(\frac{2-q}{2_*-q}\right)^{\frac{1}{2_*-2}} \left[\frac{\|u_n\|_{\mu,a}^{2(2_*-2)+2}}{|k^+|_\infty (S_{a,b,\mu})^{-2_*/2}\|u_n\|_{\mu,a}^{2_*}}\right]^{\frac{1}{2_*-2}} \\ &\quad -\lambda |h^+|_\infty C_1 \left(S_{a,b,\mu}\right)^{-q/2} \|u_n\|_{\mu,a}^q \\ &= \left(\frac{2_*-2}{2_*-q}\right)\left(\frac{2-q}{2_*-q}\right)^{\frac{1}{2_*-2}} |k^+|_\infty^{\frac{-1}{2_*-2}} (S_{a,b,\mu})^{\frac{2_*}{2}\cdot\frac{1}{2_*-2}} \|u_n\|_{\mu,a}^{\frac{2(2_*-2)+2-2_*}{2_*-2}} \\ &\quad -\lambda |h^+|_\infty C_1 \left(S_{a,b,\mu}\right)^{-q/2} \|u_n\|_{\mu,a}^q \\ &= \left(\frac{2_*-2}{2_*-q}\right)\left(\frac{2-q}{2_*-q}\right)^{\frac{1}{2_*-2}} |k^+|_\infty^{\frac{-1}{2_*-2}} (S_{a,b,\mu})^{\frac{2_*}{2}\cdot\frac{1}{2_*-2}} \|u_n\|_{\mu,a} \\ &\quad -\lambda |h^+|_\infty C_1 \left(S_{a,b,\mu}\right)^{-q/2} \|u_n\|_{\mu,a}^q \\ &= \|u_n\|_{\mu,a}^q \left[\left(\frac{2_*-2}{2_*-q}\right)\left(\frac{2-q}{2_*-q}\right)^{\frac{1}{2_*-2}} |k^+|_\infty^{\frac{-1}{2_*-2}} (S_{a,b,\mu})^{\frac{2_*}{2}\cdot\frac{1}{2_*-2}} \|u_n\|_{\mu,a}^{1-q} \right. \\ &\quad \left. -\lambda |h^+|_\infty C_1 \left(S_{a,b,\mu}\right)^{-q/2}\right]. \end{aligned} \tag{1.39}$$

Mas, de (1.22) e (1.35)

$$\begin{aligned} \frac{2_*-2}{2_*-q}\|u_n\|_{\mu,a}^2 + o_n(1) &= \lambda \int_\Omega h(x)|x|^{-c}u_+^q dx \\ &\leq \lambda |h^+|_\infty C_1 \left(S_{a,b,\mu}\right)^{-q/2} \|u_n\|_{\mu,a}^q. \end{aligned}$$

Daí, usando argumentos semelhantes a (1.36)

$$\|u_n\|_{\mu,a} \leq \left(\frac{2_* - q}{2_* - 2}\lambda|h^+|_\infty C_1(S_{a,b,\mu})^{-q/2}\right)^{\frac{1}{2-q}} + o_n(1). \tag{1.40}$$

Substituindo (1.23) e (1.40) em (1.39) e observando que $1 - q < 0$, obtemos

$$\begin{aligned} J_{\lambda,\mu}(u_n) \quad \geq \quad & \left[\frac{1}{\lambda}\left(\frac{2_* q}{2_* - q}\right)\eta \cdot |h^+|_\infty^{-1} \cdot C_1^{-1}\left(S_{a,b,\mu}\right)^{q/2}\right]\left[\left(\frac{2_* - 2}{2_* - q}\right)\left(\frac{2 - q}{2_* - q}\right)^{\frac{1}{2_*-2}}|k^+|_\infty^{\frac{-1}{2_*-2}}\right. \\ & \times\left((S_{a,b,\mu})^{\frac{2_*}{2}\cdot\frac{1}{2_*-2}}\left(\frac{2_* - q}{2_* - 2}\lambda|h^+|_\infty C_1(S_{a,b,\mu})^{-q/2}\right)^{\frac{1-q}{2-q}}\right) \\ & \left. -\lambda|h^+|_\infty C_1\left(S_{a,b,\mu}\right)^{-q/2}\right] + o_n(1). \end{aligned} \tag{1.41}$$

Como $\lambda \in (0, \Lambda_1)$, temos que

$$\lambda < \Lambda_1 = \left(\frac{2_* - 2}{2_* - q}\right)\left(\frac{2 - q}{2_* - q}\right)^{\frac{2-q}{2_*-2}}|k^+|_\infty^{-\frac{2-q}{2_*-2}}|h^+|_\infty^{-1}C_1^{-1}(S_{a,b,\mu})^{\frac{2_*}{2}\cdot\frac{2-q}{2_*-2}+\frac{q}{2}},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \lambda^{\frac{1}{2-q}} &< \left(\frac{2_* - 2}{2_* - q}\right)^{\frac{1}{2-q}}\left(\frac{2 - q}{2_* - q}\right)^{\frac{1}{2_*-2}}|k^+|_\infty^{\frac{-1}{2_*-2}}|h^+|_\infty^{\frac{-1}{2-q}}C_1^{\frac{-1}{2-q}}(S_{a,b,\mu})^{\frac{2_*}{2(2_*-2)}+\frac{q}{2(2-q)}} \\ &= \left(\frac{2_* - 2}{2_* - q}\right)^{1+\frac{q-1}{2-q}}\left(\frac{2 - q}{2_* - q}\right)^{\frac{1}{2_*-2}}|k^+|_\infty^{\frac{-1}{2_*-2}}(S_{a,b,\mu})^{\frac{2_*}{2(2_*-2)}}|h^+|_\infty^{\frac{-1}{2-q}}C_1^{\frac{-1}{2-q}}(S_{a,b,\mu})^{\frac{q}{2(2-q)}} \\ &= \left(\frac{2_* - 2}{2_* - q}\right)\left(\frac{2 - q}{2_* - q}\right)^{\frac{1}{2_*-2}}|k^+|_\infty^{\frac{-1}{2_*-2}}(S_{a,b,\mu})^{\frac{2_*}{2(2_*-2)}}\left(\frac{2_* - q}{2_* - 2}\right)^{\frac{1-q}{2-q}}|h^+|_\infty^{\frac{1-q}{2-q}-1}C_1^{\frac{1-q}{2-q}-1} \\ &\quad \times (S_{a,b,\mu})^{-\frac{q}{2}\left(\frac{1-q}{2-q}\right)+\frac{q}{2}} \\ &= \left(\frac{2_* - 2}{2_* - q}\right)\left(\frac{2 - q}{2_* - q}\right)^{\frac{1}{2_*-2}}|k^+|_\infty^{\frac{-1}{2_*-2}}(S_{a,b,\mu})^{\frac{2_*}{2(2_*-2)}}\left(\frac{2_* - q}{2_* - 2}|h^+|_\infty C_1(S_{a,b,\mu})^{-\frac{q}{2}}\right)^{\frac{1-q}{2-q}} \\ &\quad \times\left(|h^+|_\infty^{-1}C_1^{-1}(S_{a,b,\mu})^{\frac{q}{2}}\right). \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \lambda &< \left(\frac{2_* - 2}{2_* - q}\right)\left(\frac{2 - q}{2_* - q}\right)^{\frac{1}{2_*-2}}|k^+|_\infty^{\frac{-1}{2_*-2}}(S_{a,b,\mu})^{\frac{2_*}{2(2_*-2)}}\left(\frac{2_* - q}{2_* - 2}|h^+|_\infty C_1(S_{a,b,\mu})^{-\frac{q}{2}}\right)^{\frac{1-q}{2-q}} \\ &\quad \times\left(|h^+|_\infty^{-1}C_1^{-1}(S_{a,b,\mu})^{\frac{q}{2}}\right)\lambda^{\frac{1-q}{2-q}} \end{aligned}$$

e, assim,

$$\left(\frac{2_*-2}{2_*-q}\right)\left(\frac{2-q}{2_*-q}\right)^{\frac{1}{2_*-2}}|k^+|_\infty^{\frac{-1}{2_*-2}}(S_{a,b,\mu})^{\frac{2_*}{2}\cdot\frac{1}{2_*-2}}\left(\frac{2_*-q}{2_*-2}\lambda|h^+|_\infty C_1(S_{a,b,\mu})^{-\frac{q}{2}}\right)^{\frac{1-q}{2-q}}$$
$$-\lambda|h^+|_\infty C_1\,(S_{a,b,\mu})^{-q/2}>0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} J_{\lambda,\mu}(u_n) &\geq \left[\frac{1}{\lambda}\left(\frac{2_*q}{2_*-q}\right)\eta\cdot|h^+|_\infty^{-1}\cdot C_1^{-1}\,(S_{a,b,\mu})^{q/2}\right]\left[\left(\frac{2_*-2}{2_*-q}\right)\left(\frac{2-q}{2_*-q}\right)^{\frac{1}{2_*-2}}|k^+|_\infty^{\frac{-1}{2_*-2}}\right.\\ &\quad\times\left((S_{a,b,\mu})^{\frac{2_*}{2}\cdot\frac{1}{2_*-2}}\left(\frac{2_*-q}{2_*-2}\lambda|h^+|_\infty C_1(S_{a,b,\mu})^{-q/2}\right)^{\frac{1-q}{2-q}}\right)\\ &\quad\left.-\lambda|h^+|_\infty C_1\,(S_{a,b,\mu})^{-q/2}\right]+o_n(1)\\ &> 0 \end{aligned} \tag{1.42}$$

e, com isso, (1.42) contradiz (1.37). Portanto, (1.33) é válido e

$$\left\langle\xi_n'(0),v\right\rangle\leq\frac{M}{L}\|v\|_{\mu,a},$$

ou seja,

$$\|\xi_n'(0)\|\leq\frac{M}{L}\cdot$$

Logo,

$$\left\langle I_{\lambda,\mu}'(u_n),\frac{u}{\|u\|_{\mu,a}}\right\rangle\leq\frac{\bar{C}}{n}\left(1+\frac{M}{L}\right).$$

Daí,

$$\left\langle I_{\lambda,\mu}'(u_n),u\right\rangle\leq\frac{\bar{C}}{n}\left(1+\frac{M}{L}\right)\|u\|_{\mu,a}\leq\frac{\tilde{M}}{n},$$

para algum $\tilde{M}>0$. Fazendo $n\to\infty$,

$$\left\langle I_{\lambda,\mu}'(u_n),u\right\rangle\to 0$$

e, consequentemente,

$$I_{\lambda,\mu}'(u_n)\to 0 \text{ em } H_\mu^{-1},\ \text{quando } n\to\infty.$$

Concluímos que $(u_n) \subset \mathcal{N}_\lambda$ é uma sequência $(PS)_{c_\lambda}$. $\square$

Teorema 1.1.8. *Seja (u_n) uma sequência $(PS)_l$ tal que $u_n \rightharpoonup u$, fracamente, em H_μ quando $n \to \infty$. Então, u é uma solução fraca do problema (1.1).*

Demonstração. Como $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em H_μ, quando $n \to \infty$, pela Proposição 4.2.1, temos que (u_n) é limitada em H_μ. Daí, observando que $\|u_n\|_{2_*,b} \leq C\|u_n\|_{\mu,a}$, temos que (u_n) é limitada em $L_{2_*}(\Omega, |x|^{-2_*b})$. Já que $L_{2_*}(\Omega, |x|^{-2_*b})$ é reflexivo, pelo Teorema 4.2.2,

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } L_{2_*}(\Omega, |x|^{-2_*b}).$$

Como a imersão $H_\mu \hookrightarrow L_q(\Omega), |x|^{-c}$ é compacta, temos que

$$u_n \to u \text{ em } L_q(\Omega, |x|^{-c}), \text{ quando } n \to \infty.$$

Daí,

$$\|u_n - u\|_{q,c} \to 0, \text{ quando } n \to \infty.$$

Passando a uma subsequência , se necessário, pelo Teorema 4.2.3, temos que

$$u_n(x) \to u(x), \ q.t.p \text{ em } \Omega, \text{ quando } n \to \infty.$$

e existe uma função $g(x) \in L_q(\Omega, |x|^{-c})$ tal que $|u_n| \leq g(x)$, $q.t.p$ em Ω, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Considere, para cada $w \in H_\mu$, o funcional $F_w : H_\mu \longrightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$F_w(u) = \int_\Omega \left(|x|^{-2a}\nabla u \nabla w - \mu|x|^{-2(a+1)}uw\right) dx, \quad \forall u \in H_\mu.$$

Note que F_w é linear e contínuo. De fato, dados $u, v \in H_\mu$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos

$$F_w(u + \alpha v) = \int_\Omega \left(|x|^{-2a}\nabla(u + \alpha v)\nabla w - \mu|x|^{-2(a+1)}(u + \alpha v)w\right) dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_\Omega \left(|x|^{-2a}\nabla u \nabla w - \mu|x|^{-2(a+1)}uw\right) dx \\
&\quad + \alpha \int_\Omega \left(|x|^{-2a}\nabla v)\nabla w - \mu|x|^{-2(a+1)}vw\right) dx \\
&= F_w(u) + \alpha F_w(v)
\end{aligned}
$$

e, da desigualdade de Hölder,

$$
\begin{aligned}
\|F_w(u) - F_w(v)\| &= \left\| \int_\Omega \left(|x|^{-2a}\nabla(u-v)\nabla w - \mu|x|^{-2(a+1)}(u-v)w\right) dx \right\| \\
&\le \left\| \int_\Omega |x|^{-2a}\nabla(u-v)\nabla w dx \right\| + \left\| \int_\Omega \mu|x|^{-2(a+1)}(u-v)w dx \right\| \\
&\le \left\| \left(\int_\Omega |x|^{-2a}|\nabla(u-v)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |x|^{-2a}|\nabla w|^2 dx \right)^{1/2} \right\| \\
&\quad + |\mu| \left\| \left(\int_\Omega |x|^{-2(a+1)}(u-v) dx \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |x|^{-2(a+1)} w dx \right)^{1/2} \right\| \\
&\le C\|u-v\|_{\mu,a} \cdot \|w\|_{\mu,a}.
\end{aligned}
$$

Assim, F_w é linear e contínuo e $u_n \rightharpoonup u$, quando $n \to \infty$. Da definição de convergência fraca, temos que $F_w(u_n) \to F_w(u)$, ou seja,

$$
\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \left(|x|^{-2a}\nabla u_n \nabla w - \mu|x|^{-2(a+1)}u_n w\right) dx = \int_\Omega \left(|x|^{-2a}\nabla u \nabla w - \mu|x|^{-2(a+1)}uw\right) dx. \tag{1.43}
$$

Já vimos que existe uma função $g(x) \in L_q(\Omega, |x|^{-c})$ tal que $|u_n| \le g(x)$, $q.t.p$ em Ω, para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, $g^q \in L_1(\Omega, |x|^{-c})$, ou seja, $\left(\int_\Omega |x|^{-c}|g|^q\right)^{1/q} < \infty$. Assim, para todo $w \in H_\mu$,

$$
|h(x)|x|^{-c}u_{n+}^{q-1}w| \le |h^+|_\infty |x|^{-c}|u_n|^{q-1}|w| \le |h^+|_\infty |x|^{-c}|g|^{q-1}|w|.
$$

Seugue da desigualdade de Hölder que

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |h^+|_\infty |x|^{-c}|g|^{q-1}|w| dx &\le |h^+|_\infty \left(\int_\Omega |x|^{-c}|w|^q dx\right)^{1/q} \left(\int_\Omega |x|^{-c}|g|^q dx\right)^{(q-1)/q} \\
&< \infty.
\end{aligned}
$$

Logo, $|h^+|_\infty |x|^{-c}|g|^{q-1}|w| \in L_1(\Omega, |x|^{-c})$ e, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega h(x)|x|^{-c} u_{n_+}^{q-1} w dx = \int_\Omega h(x)|x|^{-c} u_+^{q-1} w dx. \tag{1.44}$$

Por último, observe que

$$\left(\int_\Omega |x|^{-2_*b} |u_{n_+}^{2_*-1}|^{\frac{2_*}{2_*-1}} dx\right)^{\frac{2_*-1}{2_*}} = \left(\int_\Omega |x|^{-2_*b}|u_n|^{2_*} dx\right)^{\frac{2_*-1}{2_*}} < \infty,$$

ou seja, $u_{n_+}^{2_*-1} \in L_{\frac{2_*}{2_*-1}}(\Omega, |x|^{-2_*b})$. Como $L_{\frac{2_*}{2_*-1}}(\Omega, |x|^{-2_*b})$ é o dual de $L_{2_*}(\Omega, |x|^{-2_*b})$ e $u_n \rightharpoonup u$ em $L_{2_*}(\Omega, |x|^{-2_*b})$, temos que

$$u_{n_+}^{2_*-1} \rightharpoonup u_+^{2_*-1}, \text{ quando } n \to \infty.$$

Para todo $w \in H_\mu$, defina o funcional linear contínuo $f_w : L_{\frac{2_*}{2_*-1}}(\Omega, |x|^{-2_*b}) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_w(u) = \int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b} w u dx$. Daí, da definição de convergência fraca, temos que $f_w(u_{n_+}^{2_*-1}) \to f_w(u_+^{2_*-1})$, quando $n \to \infty$. e, portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b} u_{n_+}^{2_*-1} w dx = \int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b} u_+^{2_*-1} w dx. \tag{1.45}$$

De (1.43), (1.44) e (1.45), temos que

$$\left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), w\right\rangle \to \left\langle I'_{\lambda,\mu}(u), w\right\rangle, \text{ quando } n \to \infty, \quad \forall w \in H_\mu.$$

Como $\left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), w\right\rangle \to 0$, quando $n \to \infty$, para todo $w \in H_\mu$, obtemos que

$$\left\langle I'_{\lambda,\mu}(u), w\right\rangle = 0, \quad \forall w \in H_\mu$$

e, portanto, u é uma solução fraca de (1.1). □

Lema 1.1.9. *Seja (u_n) uma sequência $(PS)_l$ com $u_n \rightharpoonup u$, fracamente em H_μ, quando $n \to \infty$. Então, existe uma constante positiva $\tilde{C} = C(a, b, N, q, |h^+|_\infty, S_{a,b,\mu})$ tal que*

$$I'_{\lambda,\mu}(u) = 0 \text{ em } H_\mu^{-1} \text{ (dual de } H_\mu) \text{ e } I_{\lambda,\mu}(u) \geq -\tilde{C}\lambda^{\frac{2}{2-q}}.$$

Demonstração. Como (u_n) é uma sequência $(PS)_l$ com $u_n \rightharpoonup u$, fracamente em H_μ, quando $n \to \infty$, pelo Teorema 1.1.8, temos que u é uma solução fraca de (1.1). Daí, obtemos que $I'_{\lambda,\mu}(u) = 0$ em H_μ^{-1}.

Agora, observe que

$$\begin{aligned}
I_{\lambda,\mu}(u) - \frac{1}{2_*}\left\langle I'_{\lambda,\mu}(u), u\right\rangle &= \frac{1}{2}\|u\|^2_{\mu,a} - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega h(x)|x|^{-c}u_+^q dx - \frac{1}{2_*}\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}u_+^{2_*}dx \\
&\quad - \frac{1}{2_*}\left(\int_\Omega (|x|^{-2a}|\nabla u|^2 - \mu|x|^{-2(a+1)}u^2)dx\right. \\
&\quad \left. -\lambda\int_\Omega h(x)|x|^{-c}u_+^{q-1}udx - \int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}u_+^{2_*-1}udx\right) \\
&= \frac{1}{2}\|u\|^2_{\mu,a} - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega h(x)|x|^{-c}u_+^q dx - \frac{1}{2_*}\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}u_+^{2_*}dx \\
&\quad - \frac{1}{2_*}\|u\|^2_{\mu,a} + \frac{1}{2_*}\lambda\int_\Omega h(x)|x|^{-c}u_+^{q-1}(u_+ - u_-)dx \\
&\quad + \frac{1}{2_*}\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}u_+^{2_*-1}(u_+ - u_-)dx \\
&= \frac{1}{2}\|u\|^2_{\mu,a} - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega h(x)|x|^{-c}u_+^q dx - \frac{1}{2_*}\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}u_+^{2_*}dx \\
&\quad - \frac{1}{2_*}\|u\|^2_{\mu,a} + \frac{1}{2_*}\lambda\int_\Omega h(x)|x|^{-c}u_+^q dx \\
&\quad + \frac{1}{2_*}\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}u_+^{2_*}dx \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)\|u\|^2_{\mu,a} - \lambda\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2_*}\right)\int_\Omega h(x)|x|^{-c}u_+^q dx.
\end{aligned}$$

Como $I'_{\lambda,\mu}(u) = 0$ em H_μ^{-1}, temos $\left\langle I'_{\lambda,\mu}(u), u\right\rangle = 0$. Dessa forma,

$$I_{\lambda,\mu}(u) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)\|u\|^2_{\mu,a} - \lambda\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2_*}\right)|h^+|_\infty C_1\left(S_{a,b,\mu}\right)^{-q/2}\|u\|^q_{\mu,a}.$$

Considere a função auxiliar $g : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)t^2 - \lambda\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2_*}\right)|h^+|_\infty C_1\left(S_{a,b,\mu}\right)^{-q/2}t^q, \quad \forall t \in (0, +\infty).$$

Daí,

$$g'(t) = \left(\frac{2_* - 2}{2_*}\right)t - \lambda\left(\frac{2_* - q}{2_*}\right)|h^+|_\infty C_1\left(S_{a,b,\mu}\right)^{-q/2}t^{q-1}, \quad \forall t \in (0, +\infty)$$

e, assim, $g'(t) = 0$ se, e somente se, $t = \left[\lambda \frac{2_*-q}{2_*-2} |h^+|_\infty C_1 \left(S_{a,b,\mu}\right)^{-q/2}\right]^{\frac{1}{2-q}}$, logo,

$$t_0 = \left[\lambda \frac{2_* - q}{2_* - 2} |h^+|_\infty C_1 \left(S_{a,b,\mu}\right)^{-q/2}\right]^{\frac{1}{2-q}}$$

é o único ponto crítico de $g(t)$. Além disso, $g'(t) < 0 \Leftrightarrow t < t_0$ e $g'(t) > 0 \Leftrightarrow t > t_0$, ou seja, t_0 é ponto de mínimo de $g(t)$. Portanto, $g(t) \geq g(t_0)$, para todo $t \in (0, +\infty)$. Temos, então, que

$$\begin{aligned}
I_{\lambda,\mu}(u) &\geq g(\|u\|_{\mu,a}) \\
&\geq g(t_0) \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right) \left[\lambda \frac{2_* - q}{2_* - 2} |h^+|_\infty C_1 \left(S_{a,b,\mu}\right)^{-q/2}\right]^{\frac{2}{2-q}} \\
&\quad - \lambda \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2_*}\right) |h^+|_\infty C_1 \left(S_{a,b,\mu}\right)^{-q/2} \left[\lambda \frac{2_* - q}{2_* - 2} |h^+|_\infty C_1 \left(S_{a,b,\mu}\right)^{-q/2}\right]^{\frac{q}{2-q}} \\
&= \left(\frac{2_* - 2}{2 \cdot 2_*}\right) \left(\frac{2_* - q}{2_* - 2}\right)^{\frac{2}{2-q}} \left[\lambda |h^+|_\infty C_1 \left(S_{a,b,\mu}\right)^{-q/2}\right]^{\frac{2}{2-q}} \\
&\quad - \left(\frac{2_* - q}{q \cdot 2_*}\right) \left(\frac{2_* - q}{2_* - 2}\right)^{\frac{q}{2-q}} \left[\lambda |h^+|_\infty C_1 \left(S_{a,b,\mu}\right)^{-q/2}\right]^{\frac{2}{2-q}} \\
&= \left[\lambda |h^+|_\infty C_1 \left(S_{a,b,\mu}\right)^{-q/2}\right]^{\frac{2}{2-q}} \left[\left(\frac{2_* - 2}{2 \cdot 2_*}\right) \left(\frac{2_* - q}{2_* - 2}\right)^{\frac{2}{2-q}} - \left(\frac{2_* - q}{q \cdot 2_*}\right) \left(\frac{2_* - q}{2_* - 2}\right)^{\frac{q}{2-q}}\right] \\
&= \left[\lambda |h^+|_\infty C_1 \left(S_{a,b,\mu}\right)^{-q/2}\right]^{\frac{2}{2-q}} \left[\left(\frac{2_* - q}{2 \cdot 2_*}\right) \left(\frac{2_* - q}{2_* - 2}\right)^{\frac{2}{2-q}-1} - \left(\frac{2_* - 2}{q \cdot 2_*}\right) \left(\frac{2_* - q}{2_* - 2}\right)^{\frac{2}{2-q}}\right] \\
&= \left[\lambda |h^+|_\infty C_1 \left(S_{a,b,\mu}\right)^{-q/2}\right]^{\frac{2}{2-q}} \left(\frac{2_* - q}{2_* - 2}\right)^{\frac{2}{2-q}} \left[\left(\frac{2_* - q}{2 \cdot 2_*}\right) \left(\frac{2_* - 2}{2_* - q}\right) - \left(\frac{2_* - 2}{q \cdot 2_*}\right)\right] \\
&= \left(\frac{2_* - 2}{2_*}\right) \left[\lambda |h^+|_\infty C_1 \left(S_{a,b,\mu}\right)^{-q/2}\right]^{\frac{2}{2-q}} \left(\frac{2_* - q}{2_* - 2}\right)^{\frac{2}{2-q}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) \\
&= -\left(\frac{2_* - 2}{2_*}\right) \left(\frac{2 - q}{2q}\right) \left[|h^+|_\infty C_1 \left(S_{a,b,\mu}\right)^{-q/2}\right]^{\frac{2}{2-q}} \left(\frac{2_* - q}{2_* - 2}\right)^{\frac{2}{2-q}} \lambda^{\frac{2}{2-q}}.
\end{aligned}$$

Fazendo $\tilde{C} = \left(\frac{2_*-2}{2_*}\right) \left(\frac{2-q}{2q}\right) \left[|h^+|_\infty C_1 \left(S_{a,b,\mu}\right)^{-q/2}\right]^{\frac{2}{2-q}} \left(\frac{2_*-q}{2_*-2}\right)^{\frac{2}{2-q}} > 0$, temos que

$$I_{\lambda,\mu}(u) \geq -\tilde{C} \lambda^{\frac{2}{2-q}}.$$

$\square$

Teorema 1.1.10. *Seja* (u_n) *em* H_μ *tal que*

$$I_{\lambda,\mu}(u_n) \to l < l^* = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*})|k^+|_\infty^{\frac{-2}{2_*-2}}(S_{a,b,\mu})^{2_*/(2_*-2)} - \tilde{C}\lambda^{2/(2-q)} \tag{1.46}$$

e

$$I'_{\lambda,\mu}(u_n) \to 0 \text{ em } H_\mu^{-1}, \text{ quando } n \to \infty, \tag{1.47}$$

em que $\tilde{C}$ *é tal como no Lema 1.1.9. Então, existe uma subsequência fortemente convergente.*

Demonstração. De (1.46) e (1.47) temos que $I_{\lambda,\mu}(u_n) = l + o_n(1)$ e $I'_{\lambda,\mu}(u_n) = o_n(1)$. Sabendo que

$$-\left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), u_n \right\rangle \leq |\left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), u_n \right\rangle| \leq |I'_{\lambda,\mu}(u_n)| \cdot \|u_n\|_{\mu,a},$$

temos

$$\begin{aligned} l + o_n(1) + o_n(1)\frac{1}{2_*}\|u_n\|_{\mu,a} &\geq I_{\lambda,\mu}(u_n) - \frac{1}{2_*}\left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), u_n \right\rangle \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)\|u_n\|_{\mu,a}^2 - \lambda\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2_*}\right)\int_\Omega h(x)|x|^{-c}u_{n_+}^q dx \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)\|u_n\|_{\mu,a}^2 - \lambda\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2_*}\right)|h^+|_\infty\frac{C_1}{(S_{a,b,\mu})^{q/2}}\|u_n\|_{\mu,a}^q, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{l + o_n(1)}{\|u_n\|_{\mu,a}} + o_n(1)\frac{1}{2_*} \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)\|u_n\|_{\mu,a} - \lambda\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2_*}\right)|h^+|_\infty\frac{C_1}{(S_{a,b,\mu})^{q/2}}\|u_n\|_{\mu,a}^{q-1}. \tag{1.48}$$

Daí, segue que (u_n) é limitada em H_μ. De fato, se assim não fosse, a menos de uma subsequência, teríamos $\|u_n\|_{\mu,a} \to \infty$ quando $n \to \infty$. Como $1 < q < 2$, fazendo $n \to \infty$ em (1.48), teríamos $+\infty \leq 0$. Absurdo!

Como H_μ é reflexivo, pelo Teorema 4.2.2, a menos de uma subsequência, temos que

$$u_n \rightharpoonup u_\lambda \text{ em } H_\mu, \text{ quando } n \to \infty.$$

Segue do Teorema 1.1.8 que u é uma solução fraca do problema (1.1).

Denote $v_n = u_n - u$. Como a função $k(x)$ é contínua em Ω, pelo Teorema 4.2.4, temos que

$$\int_\Omega k(x)\frac{u_{n_+}^{2_*}}{|x|^{2_*b}}dx = \int_\Omega k(x)\frac{v_{n_+}^{2_*}}{|x|^{2_*b}}dx + \int_\Omega k(x)\frac{u_+^{2_*}}{|x|^{2_*b}}dx + o_n(1) \tag{1.49}$$

e

$$\|u_n\|_{\mu,a}^2 = \|v_n\|_{\mu,a}^2 + \|u\|_{\mu,a}^2 + o_n(1). \tag{1.50}$$

Pelo Teorema da Convergência Domiada de Lebesgue, temos

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega h(x)\frac{u_{n_+}^q}{|x|^c}dx = \int_\Omega h(x)\frac{u_+^q}{|x|^c}dx. \tag{1.51}$$

De (1.49), (1.50) e (1.51), segue que

$$\begin{aligned} I_{\lambda,\mu}(u_n) &= \frac{1}{2}\|u_n\|_{\mu,a}^2 - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega h(x)\frac{u_{n_+}^q}{|x|^c}dx - \frac{1}{2_*}\int_\Omega k(x)\frac{u_{n_+}^{2_*}}{|x|^{2_*b}}dx \\ &= \frac{1}{2}\|v_n\|_{\mu,a}^2 + \frac{1}{2}\|u\|_{\mu,a}^2 - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega h(x)\frac{u_+^q}{|x|^c}dx - \frac{1}{2_*}\int_\Omega k(x)\frac{v_{n_+}^{2_*}}{|x|^{2_*b}}dx \\ &\quad - \int_\Omega k(x)\frac{u_+^{2_*}}{|x|^{2_*b}}dx + o_n(1) \\ &= I_{\lambda,\mu}(u) + \frac{1}{2}\|v_n\|_{\mu,a}^2 - \frac{1}{2_*}\int_\Omega k(x)\frac{v_{n_+}^{2_*}}{|x|^{2_*b}}dx + o_n(1), \end{aligned} \tag{1.52}$$

e

$$\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), u_n\rangle = \langle I'_{\lambda,\mu}(u), u\rangle + \|v_n\|_{\mu,a}^2 - \int_\Omega k(x)\frac{v_{n_+}^{2_*}}{|x|^{2_*b}}dx + o_n(1).$$

Logo,

$$\|v_n\|_{\mu,a}^2 - \int_\Omega k(x)\frac{v_{n_+}^{2_*}}{|x|^{2_*b}}dx = \langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), u_n\rangle - \langle I'_{\lambda,\mu}(u), u\rangle + o_n(1).$$

Como u é uma solução fraca de (1.1), temos que

$$\left\langle I'_{\lambda,\mu}(u), u \right\rangle = 0. \tag{1.53}$$

Também, como $I'_{\lambda,\mu}(u_n) \to 0$, em H^{-1}, quando $n \to \infty$ e (u_n) é limitada em H_μ, temos que $|I'_{\lambda,\mu}(u_n)| \|u_n\|_{\mu,a} \to 0$, quando $n \to \infty$. Mas, $| \left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), u_n \right\rangle | \leq |I'_{\lambda,\mu}(u_n)| \|u_n\|_{\mu,a}$, ou seja,

$$| \left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), u_n \right\rangle | \to 0, \text{ quando } n \to \infty. \tag{1.54}$$

Segue de (1.53) e (1.54) que

$$\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), u_n \rangle - \langle I'_{\lambda,\mu}(u), u \rangle = o_n(1)$$

e, portanto,

$$\|v_n\|^2_{\mu,a} - \int_\Omega k(x) \frac{v_{n_+}^{2_*}}{|x|^{2_* b}} dx = o_n(1). \tag{1.55}$$

Mas, como (v_n) é limitada, temos que $(\|v_n\|_{\mu,a})$ é uma sequência de números reais limitada. Logo, pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, a menos de uma subsequência, $\lim\limits_{n\to\infty} \|v_n\|_{\mu,a}$ existe. Daí, de (1.55)

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n\|^2_{\mu,a} = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega k(x) \frac{v_{n_+}^{2_*}}{|x|^{2_* b}} dx$$

e, assim, existe $\theta \geq 0$ tal que

$$\|v_n\|^2_{\mu,a} \to \theta \quad \text{e} \quad \int_\Omega k(x) \frac{v_{n_+}^{2_*}}{|x|^{2_* b}} dx \to \theta, \text{ quando } n \to \infty.$$

Agora, da definição de $S_{a,b,\mu}$, temos

$$\begin{aligned}
\|v_n\|^2_{\mu,a} &\geq S_{a,b,\mu}\Big(\int_\Omega \frac{v_{n_+}^{2_*}}{|x|^{2_* b}}dx\Big)^{2/2_*}\\
&= S_{a,b,\mu}\Big(\int_\Omega \frac{v_{n_+}^{2_*}}{|x|^{2_* b}}dx\Big)^{2/2_*}\Big(\frac{|k^+|_\infty}{|k^+|_\infty}\Big)^{2/2_*}\\
&= S_{a,b,\mu}\Big(\int_\Omega |k^+|_\infty \frac{v_{n_+}^{2_*}}{|x|^{2_* b}}dx\Big)^{2/2_*}|k^+|_\infty^{-2/2_*}\\
&\geq S_{a,b,\mu}\Big(\int_\Omega k(x) \frac{v_{n_+}^{2_*}}{|x|^{2_* b}}dx\Big)^{2/2_*}|k^+|_\infty^{-2/2_*}.
\end{aligned}$$

Fazendo $n \longrightarrow \infty$, temos

$$\theta \geq S_{a,b,\mu}|k^+|_\infty^{-2/2_*}\theta^{2/2_*}.$$

Suponha que $\theta \neq 0$. Daí,

$$\theta^{(2_*-2)/2_*} \geq S_{a,b,\mu}|k^+|_\infty^{-2/2_*}$$

e, assim,

$$\theta \geq S_{a,b,\mu}^{2_*/(2_*-2)}|k^+|_\infty^{-2/(2_*-2)}.$$

Segue de (1.52) e do Lema 1.1.9 que

$$\begin{aligned}
l &= I_{\lambda,\mu}(u) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*})\theta\\
&\geq -\tilde{C}\lambda^{2/(2-q)} + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*})|k^+|_\infty^{\frac{-2}{2_*-2}}(S_{a,b,\mu})^{2_*/(2_*-2)} = l^*
\end{aligned}$$

o que é uma contradição. Logo, $\theta = 0$ e, portanto,

$$\|v_n\|^2_{\mu,a} \to 0, \text{ quando } n \to \infty,$$

ou seja,

$$\|u_n - u\|^2_{\mu,a} \to 0, \text{ quando } n \to \infty,$$

o que implica

$$\|u_n - u\|_{\mu,a} \longrightarrow 0, \text{ quando } n \to \infty.$$

Assim, $u_n \longrightarrow u$ forte em H_μ. $\square$

1.1.1 Demonstração do Teorema 1.0.1.

Considere $\Lambda_2 = \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)|k^+|_\infty^{\frac{-2}{2_*-2}}(S_{a,b,\mu})^{\frac{2_*}{2_*-2}}\tilde{C}^{-1}\right]^{\frac{2-q}{2}}$ e seja $\bar{\Lambda} = \min\{\Lambda_1, \Lambda_2\}$. Afirmamos que se $\lambda \in (0, \bar{\Lambda})$, então, $I_{\lambda,\mu}$ tem um mínimo u_λ em $\mathcal{N}_\lambda$ tal que $I_{\lambda,\mu}(u_\lambda) = c_\lambda < 0$. De fato, como $\lambda \in (0, \Lambda_1)$, pelo Lema 1.1.7 existe uma sequência minimizante $(u_n) \subset \mathcal{N}_\lambda$ tal que $I_{\lambda,\mu}(u_n) \to c_\lambda < 0$ e $I'_{\Lambda,\mu}(u_n) \to 0$ em H_μ^{-1}. Assim, obtemos

$$c_\lambda + o_n(1) = I_{\lambda,\mu}(u_n) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)\|u_n\|_{\mu,a}^2 - \lambda\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2_*}\right)\int_\Omega h(x)|x|^{-c}u_{n_+}^q\,dx.$$

Mas, de (1.22),

$$\int_\Omega h(x)|x|^{-c}u_{n_+}^q\,dx \le |h^+|_\infty C_1\left(S_{a,b,\mu}\right)^{-q/2}\|u_n\|_{\mu,a}^q.$$

Portanto,

$$c_\lambda + o_n(1) \ge \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)\|u_n\|_{\mu,a}^2 - \lambda\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2_*}\right)|h^+|_\infty C_1\left(S_{a,b,\mu}\right)^{-q/2}\|u_n\|_{\mu,a}^q. \quad (1.56)$$

Agora, observe que (u_n) é limitada em H_μ. Se assim não fosse, a menos de uma subsequência, teríamos $\|u_n\|_{\mu,a} \to \infty$ quando $n \to \infty$. Como $q < 2$, fazendo $n \to \infty$ em (1.56), teríamos $+\infty \le c_\lambda < 0$. Absurdo!

Como (u_n) é limitada em H_μ e H_μ é reflexivo, pelo Teorema 4.2.2, existe uma subsequência (que também denotaremos por (u_n)) que converge fraco em H_μ, ou seja,

$$u_n \rightharpoonup u_\lambda \text{ em } H_\mu, \text{ quando } n \to \infty.$$

Assim, pelo Teorema 1.1.8, temos que u_λ é uma solução fraca de (1.1). Mais ainda, temos que $u_n \to u_\lambda$, fortemente, em H_μ, quando $n \to \infty$. De fato, já que $\lambda \in (0, \Lambda_2)$, temos

$$l^* = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right) |k^+|_\infty^{\frac{-2}{2_*-2}} (S_{a,b,\mu})^{\frac{2_*}{2_*-2}} - \tilde{C}\lambda^{\frac{2}{2-q}} > 0.$$

Daí, $c_\lambda < 0 < l^*$ e, pelo Teorema 1.1.10, temos que $u_n \to u_\lambda$, fortemente, em H_μ, quando $n \to \infty$. Dessa forma, $I_{\lambda,\mu}(u_\lambda) = c_\lambda < 0$. Como $I_{\lambda,\mu}(0) = 0$, segue que $u_\lambda \neq 0$.

Concluímos que u_λ é uma solução fraca, não trivial, de (1.1). Além do mais, pelo Teorema 1.0.5, temos que u_λ é não negativa.

1.2 Obtenção da segunda solução via Teorema do Passo da Montanha

Nesta seção demonstraremos a existência de uma segunda solução fraca não negativa e não trivial para o problema (1.1). Necessitamos, primeiramente, do seguinte resultado:

Lema 1.2.1. *Se* $\lambda \in \left(0, \frac{q}{2}\left(\frac{2_*}{2}\right)^{\frac{2-q}{2_*-2}} \Lambda_1\right)$, *existe uma sequência* $(PS)_c$, $(u_n) \subset H_\mu$, *para* $I_{\lambda,\mu}$, *em que*

$$0 < c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I_{\lambda,\mu}(\gamma(t)),$$

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1]); \gamma(0) = 0, \gamma(1) = t_0u_0\}$$

e $u_0 \in H_\mu$ *é tal que* $\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}u_{0_+}^{2_*} > 0$.

Demonstração. Verificaremos que $I_{\lambda,\mu}$ satisfaz as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais-Smale. De fato,

1) $I_{\lambda,\mu}(0) = 0$.

2) Seja $u \in H_\mu$. Daí,

$$\begin{aligned}
I_{\lambda,\mu}(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2_{\mu,a} - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega h(x)|x|^{-c}u_+^q dx - \frac{1}{2_*}\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}u_+^{2_*}dx \\
&\geq \frac{1}{2}\|u\|^2_{\mu,a} - \frac{\lambda}{q}|h^+|_\infty C_1(S_{a,b,\mu})^{-q/2}\|u\|^q_{\mu,a} - \frac{1}{2_*}|k^+|_\infty(S_{a,b,\mu})^{-2_*/2}\|u\|^{2_*}_{\mu,a} \\
&= \|u\|^2_{\mu,a}\left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{q}|h^+|_\infty C_1(S_{a,b,\mu})^{-q/2}\|u\|^{q-2}_{\mu,a} - \frac{1}{2_*}|k^+|_\infty(S_{a,b,\mu})^{-2_*/2}\|u\|^{2_*-2}_{\mu,a}\right)
\end{aligned} \tag{1.57}$$

Defina $H:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, dada por

$$H(s) = \left(\frac{\lambda}{q}|h^+|_\infty C_1(S_{a,b,\mu})^{\frac{-q}{2}}\right)s^{q-2} + \left(\frac{1}{2_*}|k^+|_\infty(S_{a,b,\mu})^{\frac{-2_*}{2}}\right)s^{2_*-2}.$$

Assim,

$$H'(s) = (q-2)\left(\frac{\lambda}{q}|h^+|_\infty C_1(S_{a,b,\mu})^{\frac{-q}{2}}\right)s^{q-3} + (2_*-2)\left(\frac{1}{2_*}|k^+|_\infty(S_{a,b,\mu})^{\frac{-2_*}{2}}\right)s^{2_*-3}$$

e, portanto,

$$s_0 = \left[\left(\frac{2-q}{2_*-2}\right)\frac{\frac{\lambda}{q}|h^+|_\infty C_1(S_{a,b,\mu})^{\frac{-q}{2}}}{\frac{1}{2_*}|k^+|_\infty(S_{a,b,\mu})^{\frac{-2_*}{2}}}\right]^{\frac{1}{2_*-q}}$$

é ponto crítico de $H(s)$. Mais ainda, como $H'(s)<0$, para todo $s<s_0$ e $H'(s)>0$, para todo $s>s_0$, temos que s_0 é ponto de mínimo de $H(s)$.

Agora, note que

$$\begin{aligned}
H(s_0) &= \left(\frac{\lambda}{q}|h^+|_\infty C_1(S_{a,b,\mu})^{\frac{-q}{2}}\right)\left[\left(\frac{2-q}{2_*-2}\right)\frac{\frac{\lambda}{q}|h^+|_\infty C_1(S_{a,b,\mu})^{\frac{-q}{2}}}{\frac{1}{2_*}|k^+|_\infty(S_{a,b,\mu})^{\frac{-2_*}{2}}}\right]^{\frac{q-2}{2_*-q}} \\
&\quad + \left(\frac{1}{2_*}|k^+|_\infty(S_{a,b,\mu})^{\frac{-2_*}{2}}\right)\left[\left(\frac{2-q}{2_*-2}\right)\frac{\frac{\lambda}{q}|h^+|_\infty C_1(S_{a,b,\mu})^{\frac{-q}{2}}}{\frac{1}{2_*}|k^+|_\infty(S_{a,b,\mu})^{\frac{-2_*}{2}}}\right]^{\frac{2_*-2}{2_*-q}} \\
&= \left(\frac{2-q}{2_*-2}\right)^{\frac{q-2}{2_*-q}}\left(\frac{1}{2_*}|k^+|_\infty(S_{a,b,\mu})^{\frac{-2_*}{2}}\right)^{\frac{2-q}{2_*-q}}\left(\frac{\lambda}{q}|h^+|_\infty C_1(S_{a,b,\mu})^{\frac{-q}{2}}\right)^{\frac{2_*-2}{2_*-q}} \\
&\quad + \left(\frac{2-q}{2_*-2}\right)^{\frac{2_*-2}{2_*-q}}\left(\frac{1}{2_*}|k^+|_\infty(S_{a,b,\mu})^{\frac{-2_*}{2}}\right)^{\frac{2-q}{2_*-q}}\left(\frac{\lambda}{q}|h^+|_\infty C_1(S_{a,b,\mu})^{\frac{-q}{2}}\right)^{\frac{2_*-2}{2_*-q}} \\
&= \left[\left(\frac{2-q}{2_*-2}\right)^{\frac{q-2}{2_*-q}} + \left(\frac{2-q}{2_*-2}\right)^{\frac{2_*-2}{2_*-q}}\right]\left(\frac{1}{2_*}|k^+|_\infty\right)^{\frac{2-q}{2_*-q}}\left(\frac{\lambda}{q}|h^+|_\infty C_1\right)^{\frac{2_*-2}{2_*-q}}(S_{a,b,\mu})^{-1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{2-q}{2_*-2}\right)^{\frac{q-2}{2_*-q}} \left[1 + \left(\frac{2-q}{2_*-2}\right)\right] \left(\frac{1}{2_*}|k^+|_\infty\right)^{\frac{2-q}{2_*-q}} \left(\frac{\lambda}{q}|h^+|_\infty C_1\right)^{\frac{2_*-2}{2_*-q}} (S_{a,b,\mu})^{-1} \\
&= \left(\frac{2-q}{2_*-2}\right)^{\frac{q-2}{2_*-q}} \left(\frac{2_*-q}{2_*-2}\right) \left(\frac{1}{2_*}\right)^{\frac{2-q}{2_*-q}} |k^+|_\infty^{\frac{2-q}{2_*-q}} |h^+|_\infty^{\frac{2_*-2}{2_*-q}} \left(\frac{C_1}{q}\right)^{\frac{2_*-2}{2_*-q}} (S_{a,b,\mu})^{-1} \lambda^{\frac{2_*-2}{2_*-q}}.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, como $\lambda \in (0, \frac{q}{2}\left(\frac{2_*}{2}\right)^{\frac{2-q}{2_*-2}} \Lambda_1)$ e $q < 2 < 2_*$, temos

$$
\begin{aligned}
\lambda &< \frac{q}{2}\left(\frac{2_*}{2}\right)^{\frac{2-q}{2_*-2}} \Lambda_1 \\
&= \frac{q}{2}\left(\frac{2_*}{2}\right)^{\frac{2-q}{2_*-2}} \left(\frac{2_*-2}{2_*-q}\right) \left(\frac{2-q}{2_*-q}\right)^{\frac{2-q}{2_*-2}} |k^+|_\infty^{-\frac{2-q}{2_*-2}} |h^+|_\infty^{-1} C_1^{-1} (S_{a,b,\mu})^{\frac{2_*-q}{2_*-2}} \\
&= q\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2_*-q}{2_*-2}} 2_*^{\frac{2-q}{2_*-2}} \left(\frac{2-q}{2_*-2}\right)^{\frac{2-q}{2_*-2}} \left(\frac{2_*-2}{2_*-q}\right)^{\frac{2-q}{2_*-2}+1} |k^+|_\infty^{-\frac{2-q}{2_*-2}} |h^+|_\infty^{-1} C_1^{-1} (S_{a,b,\mu})^{\frac{2_*-q}{2_*-2}} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2_*-q}{2_*-2}} \left(\frac{2-q}{2_*-2}\right)^{\frac{2-q}{2_*-2}} \left(\frac{2_*-2}{2_*-q}\right)^{\frac{2_*-q}{2_*-2}} 2_*^{\frac{2-q}{2_*-2}} |k^+|_\infty^{-\frac{2-q}{2_*-2}} |h^+|_\infty^{-1} q C_1^{-1} (S_{a,b,\mu})^{\frac{2_*-q}{2_*-2}},
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\lambda^{\frac{2_*-2}{2_*-q}} < \frac{1}{2}\left(\frac{2-q}{2_*-2}\right)^{\frac{2-q}{2_*-q}} \left(\frac{2_*-2}{2_*-q}\right) 2_*^{\frac{2-q}{2_*-q}} |k^+|_\infty^{-\frac{2-q}{2_*-q}} |h^+|_\infty^{-\frac{2_*-2}{2_*-q}} q^{\frac{2_*-2}{2_*-q}} C_1^{-\frac{2_*-2}{2_*-q}} S_{a,b,\mu}
$$

e, portanto,

$$
\left(\frac{2-q}{2_*-2}\right)^{\frac{q-2}{2_*-q}} \left(\frac{2_*-q}{2_*-2}\right) \left(\frac{1}{2_*}\right)^{\frac{2-q}{2_*-q}} |k^+|_\infty^{\frac{2-q}{2_*-q}} |h^+|_\infty^{\frac{2_*-2}{2_*-q}} \left(\frac{C_1}{q}\right)^{\frac{2_*-2}{2_*-q}} (S_{a,b,\mu})^{-1} \lambda^{\frac{2_*-2}{2_*-q}} < \frac{1}{2}.
$$

Assim, $H(s_0) < \frac{1}{2}$ e, consequentemente, $\frac{1}{2} - H(s_0) > 0$. Dessa forma, para todo $u \in H_\mu$ tal que $\|u\|_{\mu,a} = s_0$, temos de (1.57) que

$$
\begin{aligned}
I_{\lambda,\mu}(u) &\geq \|u\|_{\mu,a}^2 \left(\frac{1}{2} - H(\|u\|_{\mu,a})\right) \\
&= s_0^2\left(\frac{1}{2} - H(s_0)\right) > 0.
\end{aligned}
$$

3) Dados $t > 0$ e $u_0 \in H_\mu$ tal que $\int_\Omega k(x)|x|^{-2_* b} u_{0+}^{2_*} > 0$, temos

$$I_{\lambda,\mu}(tu_0) = \frac{t^2}{2}\|u_0\|_{\mu,a}^2 - \lambda \frac{t^q}{q}\int_\Omega h(x)|x|^{-c} u_{0+}^q dx - \frac{t^{2_*}}{2_*}\int_\Omega k(x)|x|^{-2_* b} u_{0+}^{2_*} dx.$$

Como $q < 2 < 2_*$, temos que $I_{\lambda,\mu}(tu_0) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$. Daí, existe $t_0 > 0$ tal que $\|t_0 u_0\|_{\mu,a} > s_0$ e $I_{\lambda,\mu}(t_0 u_0) < 0$.

De 1), 2) e 3) concluímos que $I_{\lambda,\mu}$ satisfaz as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais-Smale. Portanto, existe uma sequência $(u_n) \subset H_\mu$ tal que $I_{\lambda,\mu}(u_n) \to c$ e $I'_{\lambda,\mu}(u_n) \to 0$ em H_μ^{-1}, quando $n \to \infty$; onde

$$0 < c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I_{\lambda,\mu}(\gamma(t))$$

e

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1]); \gamma(0) = 0, \gamma(1) = t_0 u_0\}.$$

$\square$

Daqui para frente, será necessário o uso das funções extremais definidas em (15) e (18).

Considere $u_\varepsilon(x) = z(\varepsilon) v_\varepsilon(x)$, em que

$$v_\varepsilon(x) = \begin{cases} \left(\varepsilon^{\frac{2\sqrt{\bar\mu_a - \mu}}{\sqrt{\bar\mu_a - \mu} - b}} |x|^{\frac{2_*-2}{2}(\sqrt{\bar\mu_a} - \sqrt{\bar\mu_a - \mu})} + |x|^{\frac{2_*-2}{2}(\sqrt{\bar\mu_a} + \sqrt{\bar\mu_a - \mu})}\right)^{-\frac{2}{2_*-2}}, & \text{se vale (A1);} \\ \left(\varepsilon^2 |x|^{\frac{2_*-2}{2}(\sqrt{\bar\mu_a} - \sqrt{\bar\mu_a - \mu})} + |x|^{\frac{2_*-2}{2}(\sqrt{\bar\mu_a} + \sqrt{\bar\mu_a - \mu})}\right)^{-\frac{2}{2_*-2}}, & \text{se vale (A2)} \end{cases}$$

e

$$z(\varepsilon) = \begin{cases} C_0 \varepsilon^{\frac{2}{2_*-2}}, & \text{se vale (A1);} \\ (2.2_* \varepsilon^2 (\bar\mu_a - \mu))^{\frac{1}{2_*-2}}, & \text{se vale (A2),} \end{cases}$$

com C_0 dada em (15).

Como visto em [22] e [19], citados anteriormente, u_ε é solução do problema

$$-\operatorname{div}\left(|x|^{-2a}\nabla u\right)-\mu|x|^{-2(a+1)}u=|x|^{-2_*b}|u|^{2_*-2}u \quad \text{em } \mathbb{R}^N\backslash\{0\}.$$

e u_ε satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-2a}|\nabla u_\varepsilon|^2dx-\mu\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-2(a+1)}u_\varepsilon^2dx=\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-2_*b}|u_\varepsilon|^{2_*}dx=(S_{a,b,\mu})^{\frac{2_*}{2_*-2}}, \tag{1.58}$$

onde

$$S_{a,b,\mu}=\inf_{u\in H_\mu}\frac{\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-2a}|\nabla u_\varepsilon|^2dx-\mu\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-2(a+1)}u_\varepsilon^2dx}{\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-2_*b}|u_\varepsilon|^{2_*}dx}.$$

De (1.58) segue que

$$\begin{aligned}(S_{a,b,\mu})^{\frac{2_*}{2_*-2}}&=\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-2a}|\nabla(z(\varepsilon)v_\varepsilon(x))|^2dx-\mu\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-2(a+1)}(z(\varepsilon)v_\varepsilon(x))^2dx\\&=[z(\varepsilon)]^2\left(\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-2a}|\nabla v_\varepsilon(x)|^2dx-\mu\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-2(a+1)}(v_\varepsilon(x))^2dx\right)\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-2a}|\nabla v_\varepsilon(x)|^2-\mu|x|^{-2(a+1)}(v_\varepsilon(x))^2dx=[z(\varepsilon)]^{-2}\left(S_{a,b,\mu}\right)^{\frac{2_*}{2_*-2}}. \tag{1.59}$$

Da mesma forma,

$$\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-2_*b}|v_\varepsilon(x)|^{2_*}dx=[z(\varepsilon)]^{-2_*}\left(S_{a,b,\mu}\right)^{\frac{2_*}{2_*-2}}. \tag{1.60}$$

Agora, considere $\Psi(x)\in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $0\le\Psi(x)\le 1$, $\Psi(x)=1$ para $|x|\le\rho_0$ e $\Psi(x)=0$ para $|x|\ge 2\rho_0$, onde ρ_0 é como na hipótese (K). Defina $\tilde{v}_\varepsilon(x)=\Psi(x)v_\varepsilon(x)$.

Lema 1.2.2. *Se vale (A1) ou (A2), então*

$$\|\tilde{v}_\varepsilon\|_{\mu,a}^2=[z(\varepsilon)]^{-2}\left(S_{a,b,\mu}\right)^{\frac{2_*}{2_*-2}}+o_n(1), \tag{1.61}$$

em que $O(\varepsilon^\zeta)$ denota $|O(\varepsilon^\zeta)|/\varepsilon^\zeta\le C$.

Demonstração. Observe que

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{v}_\varepsilon\|^2_{\mu,a} &= \int_\Omega |x|^{-2a}|\nabla(\Psi v_\varepsilon)|^2 - \mu|x|^{-2(a+1)}(\Psi v_\varepsilon)^2 dx \\
&= \int_{B(0,2\rho_0)} |x|^{-2a}|\nabla(\Psi v_\varepsilon)|^2 - \mu|x|^{-2(a+1)}(\Psi v_\varepsilon)^2 dx \\
&= \int_{B(0,\rho_0)} |x|^{-2a}|\nabla v_\varepsilon|^2 dx - \mu|x|^{-2(a+1)} v_\varepsilon^2 dx \\
&\quad + \int_{B(0,2\rho_0)\setminus B(0,\rho_0)} |x|^{-2a}|\nabla \tilde{v}_\varepsilon|^2 - \mu|x|^{-2(a+1)}\tilde{v}_\varepsilon^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2a}|\nabla v_\varepsilon|^2 dx - \mu|x|^{-2(a+1)} v_\varepsilon^2 dx \\
&\quad + \int_{B(0,2\rho_0)\setminus B(0,\rho_0)} |x|^{-2a}|\nabla \tilde{v}_\varepsilon|^2 - \mu|x|^{-2(a+1)}\tilde{v}_\varepsilon^2 dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,\rho_0)} |x|^{-2a}|\nabla v_\varepsilon|^2 - \mu|x|^{-2(a+1)} v_\varepsilon^2 dx
\end{aligned}
$$

e usando (1.59)

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{v}_\varepsilon\|^2_{\mu,a} &= [z(\varepsilon)]^{-2} \left(S_{a,b,\mu}\right)^{\frac{2_*}{2_*-2}} \\
&\quad + \int_{B(0,2\rho_0)\setminus B(0,\rho_0)} |x|^{-2a}|\nabla \tilde{v}_\varepsilon|^2 - \mu|x|^{-2(a+1)}\tilde{v}_\varepsilon^2 dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,\rho_0)} |x|^{-2a}|\nabla v_\varepsilon|^2 - \mu|x|^{-2(a+1)} v_\varepsilon^2 dx \\
&= [z(\varepsilon)]^{-2} \left(S_{a,b,\mu}\right)^{\frac{2_*}{2_*-2}} \\
&\quad + \int_{B(0,2\rho_0)\setminus B(0,\rho_0)} |x|^{-2a}|\Psi\nabla v_\varepsilon + v_\varepsilon\nabla\Psi|^2 dx \\
&\quad - \int_{B(0,2\rho_0)\setminus B(0,\rho_0)} \mu|x|^{-2(a+1)}\Psi^2 v_\varepsilon^2 dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,2\rho_0)} |x|^{-2a}|\nabla v_\varepsilon|^2 - \mu|x|^{-2(a+1)} v_\varepsilon^2 dx \\
&\quad - \int_{B(0,2\rho_0)\setminus B(0,\rho_0)} |x|^{-2a}|\nabla v_\varepsilon|^2 dx + \int_{B(0,2\rho_0)\setminus B(0,\rho_0)} \mu|x|^{-2(a+1)} v_\varepsilon^2 dx \\
&= [z(\varepsilon)]^{-2} \left(S_{a,b,\mu}\right)^{\frac{2_*}{2_*-2}} \\
&\quad + \int_{B(0,2\rho_0)\setminus B(0,\rho_0)} |x|^{-2a}\left(|\Psi|^2|\nabla v_\varepsilon|^2 + 2|\Psi||\nabla v_\varepsilon||\nabla\Psi||v_\varepsilon| + |v_\varepsilon|^2|\nabla\Psi|^2\right) dx \\
&\quad + \mu\int_{B(0,2\rho_0)\setminus B(0,\rho_0)} |x|^{-2(a+1)}(1-\Psi^2) v_\varepsilon^2 dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& -\int_{B(0,2\rho_0)\setminus B(0,\rho_0)} |x|^{-2a}|\nabla v_\varepsilon|^2 dx \\
& -\int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,2\rho_0)} |x|^{-2a}|\nabla v_\varepsilon|^2 - \mu|x|^{-2(a+1)}v_\varepsilon^2 dx \\
= \; & [z(\varepsilon)]^{-2}\left(S_{a,b,\mu}\right)^{\frac{2_*}{2_*-2}} \\
& +\int_{B(0,2\rho_0)\setminus B(0,\rho_0)} |x|^{-2a}(|\Psi|^2-1)|\nabla v_\varepsilon|^2 dx \\
& +2\int_{B(0,2\rho_0)\setminus B(0,\rho_0)} |x|^{-2a}|\Psi||\nabla v_\varepsilon||v_\varepsilon||\nabla\Psi| dx \\
& +2\int_{B(0,2\rho_0)\setminus B(0,\rho_0)} |x|^{-2a}|v_\varepsilon|^2|\nabla\Psi|^2 dx \\
& +\mu\int_{B(0,2\rho_0)\setminus B(0,\rho_0)} |x|^{-2(a+1)}(1-\Psi^2)v_\varepsilon^2 dx \\
& -\int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,2\rho_0)} |x|^{-2a}|\nabla v_\varepsilon|^2 + \mu\int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,2\rho_0)} |x|^{-2(a+1)}v_\varepsilon^2 dx.
\end{aligned}
$$

Como $0 \leq \Psi(x) \leq 1$, $\forall x \in \Omega$, temos que $|\Psi|^2(x) - 1 \leq 0$ e $0 \leq 1 - \Psi^2(x) \leq 1$, $\forall x \in \Omega$. Também, como $\Psi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, $\forall x \in \Omega$, existe $C > 0$ tal que $|\nabla\Psi|(x) \leq C$. Daí, usando que $\mu < \bar{\mu}_a$ e $\bar{\mu}_a \geq 0$,

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{v}_\varepsilon\|_{\mu,a}^2 \leq \; & [z(\varepsilon)]^{-2}\left(S_{a,b,\mu}\right)^{\frac{2_*}{2_*-2}} + 2C\int_{B(0,2\rho_0)\setminus B(0,\rho_0)} |x|^{-2a}|\nabla v_\varepsilon||v_\varepsilon| dx \\
& + C^2\int_{B(0,2\rho_0)\setminus B(0,\rho_0)} |x|^{-2a}|v_\varepsilon|^2 dx \\
& + \bar{\mu}_a\int_{B(0,2\rho_0)\setminus B(0,\rho_0)} |x|^{-2(a+1)}v_\varepsilon^2 dx \\
& + \bar{\mu}_a\int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,2\rho_0)} |x|^{-2(a+1)}v_\varepsilon^2 dx \qquad (1.62) \\
= \; & [z(\varepsilon)]^{-2}\left(S_{a,b,\mu}\right)^{\frac{2_*}{2_*-2}} + 2C\int_{B(0,2\rho_0)\setminus B(0,\rho_0)} |x|^{-2a}|v_\varepsilon||\nabla v_\varepsilon| dx \\
& + C^2\int_{B(0,2\rho_0)\setminus B(0,\rho_0)} |x|^{-2a}|v_\varepsilon|^2 dx \\
& + \bar{\mu}_a\int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,\rho_0)} |x|^{-2(a+1)}v_\varepsilon^2 dx.
\end{aligned}
$$

Antes de prosseguirmos com as estimativas em (1.62), note que podemos escrever

$$v_\varepsilon(x) = (\varepsilon^\gamma |x|^{c_1} + |x|^{c_2})^{\frac{-2}{2_*-2}},$$

onde $c_1 = \frac{2_*-2}{2}(\sqrt{\bar{\mu}_a} - \sqrt{\bar{\mu}_a - \mu})$, $c_2 = \frac{2_*-2}{2}(\sqrt{\bar{\mu}_a} + \sqrt{\bar{\mu}_a - \mu})$, $\gamma = \frac{2\sqrt{\bar{\mu}_a-\mu}}{\sqrt{\bar{\mu}_a-\mu}-b}$, se vale (A1) e $\gamma = 2$, se vale (A2). Daí,

$$\begin{aligned} v_\varepsilon(x) &= \frac{1}{(\varepsilon^\gamma |x|^{c_1} + |x|^{c_2})^{\frac{2}{2_*-2}}} \\ &\leq \frac{1}{|x|^{\frac{2c_2}{2_*-2}}} \\ &= \frac{1}{|x|^{\sqrt{\bar{\mu}_a}+\sqrt{\bar{\mu}_a-\mu}}} \end{aligned} \tag{1.63}$$

e

$$\begin{aligned} \nabla v_\varepsilon(x) &= \left(\frac{-2}{2_*-2}\right)(\varepsilon^\gamma |x|^{c_1} + |x|^{c_2})^{\frac{-2}{2_*-2}-1} \cdot \nabla(\varepsilon^\gamma |x|^{c_1} + |x|^{c_2}) \\ &= \left(\frac{-2}{2_*-2}\right)\frac{(\varepsilon^\gamma c_1 |x|^{c_1-2} + c_2|x|^{c_2-2})\cdot x}{(\varepsilon^\gamma |x|^{c_1} + |x|^{c_2})^{\frac{2_*}{2_*-2}}}. \end{aligned} \tag{1.64}$$

Assim, para $0 < \varepsilon < 1$

$$\begin{aligned} |\nabla v_\varepsilon(x)| &= \left|\frac{-2}{2_*-2}\right| \frac{|\varepsilon^\gamma c_1 |x|^{c_1-1} + c_2|x|^{c_2-1}|}{|\varepsilon^\gamma |x|^{c_1} + |x|^{c_2}|^{\frac{2_*}{2_*-2}}} \\ &\leq \left(\frac{2}{2_*-2}\right)\frac{\varepsilon^\gamma c_1|x|^{c_1-1} + c_2|x|^{c_2-1}}{|x|^{\frac{2_* c_2}{2_*-2}}} \\ &< \left(\frac{2}{2_*-2}\right)\frac{c_1|x|^{c_1-1} + c_2|x|^{c_2-1}}{|x|^{\frac{2_* c_2}{2_*-2}}} \\ &= \left(\frac{2}{2_*-2}\right)\frac{c_1|x|^{c_1-1} + c_2|x|^{c_2-1}}{|x|^{\frac{2_*}{2}(\sqrt{\bar{\mu}_a}+\sqrt{\bar{\mu}_a-\mu})}} \end{aligned} \tag{1.65}$$

Agora, note que se $0 < \varepsilon < 1$, de (1.63) e (1.65), temos

$$\begin{aligned} &2C\int_{B(0,2\rho_0)\backslash B(0,\rho_0)} |x|^{-2a}|v_\varepsilon||\nabla v_\varepsilon| dx \\ &\leq 2C\int_{B(0,2\rho_0)\backslash B(0,\rho_0)} |x|^{-2a}\frac{1}{|x|^{\sqrt{\bar{\mu}_a}+\sqrt{\bar{\mu}_a-\mu}}}\cdot\left(\frac{2}{2_*-2}\right)\frac{c_1|x|^{c_1-1}+c_2|x|^{c_2-1}}{|x|^{\frac{2_*}{2}(\sqrt{\bar{\mu}_a}+\sqrt{\bar{\mu}_a-\mu})}} dx \\ &= \left(\frac{4C}{2_*-2}\right)\int_{B(0,2\rho_0)\backslash B(0,\rho_0)} \frac{1}{|x|^{\sqrt{\bar{\mu}_a}+\sqrt{\bar{\mu}_a-\mu}+2a}}\cdot\frac{c_1|x|^{c_1-1}+c_2|x|^{c_2-1}}{|x|^{\frac{2_*}{2}(\sqrt{\bar{\mu}_a}+\sqrt{\bar{\mu}_a-\mu})}} dx \end{aligned}$$

$$\leq \left(\frac{4C'}{2_* - 2}\right) \int_{B(0,2\rho_0)\setminus B(0,\rho_0)} \frac{1}{\rho_0^{\sqrt{\bar{\mu}_a}+\sqrt{\bar{\mu}_a-\mu}+2a}} \cdot \frac{c_1(2\rho_0)^{c_1-1} + c_2(2\rho_0)^{c_2-1}}{\rho_0^{\frac{2_*}{2}(\sqrt{\bar{\mu}_a}+\sqrt{\bar{\mu}_a-\mu})}} dx \tag{1.66}$$
$$= C'(\rho_0).$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned} C\int_{B(0,2\rho_0)\setminus B(0,\rho_0)} |x|^{-2a}|v_\varepsilon|^2 dx &\leq C \int_{B(0,2\rho_0)\setminus B(0,\rho_0)} |x|^{-2a}|x|^{-2(\sqrt{\bar{\mu}_a}+\sqrt{\bar{\mu}_a-\mu})} dx \\ &\leq C' \int_{B(0,2\rho_0)\setminus B(0,\rho_0)} \rho_0^{-2a-2(\sqrt{\bar{\mu}_a}+\sqrt{\bar{\mu}_a-\mu})} dx \qquad (1.67) \\ &= C''(\rho_0). \end{aligned}$$

Ainda, integrando por coordenadas polares,

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_a \int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,\rho_0)} |x|^{-2(a+1)} v_\varepsilon^2 dx &\leq \bar{\mu}_a \int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,\rho_0)} |x|^{-2(a+1)} \frac{1}{|x|^{2(\sqrt{\bar{\mu}_a}+\sqrt{\bar{\mu}_a-\mu})}} dx \\ &= \bar{\mu}_a \int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,\rho_0)} |x|^{-2(a+1)-2(\sqrt{\bar{\mu}_a}+\sqrt{\bar{\mu}_a-\mu})} dx \\ &= \bar{\mu}_a \sigma(S^{N-1}) \int_{\rho_0}^{+\infty} r^{-2(a+1)-2(\sqrt{\bar{\mu}_a}+\sqrt{\bar{\mu}_a-\mu})} r^{N-1} dr. \end{aligned}$$

Mas, da definição de $\bar{\mu}_a$,

$$\begin{aligned} \sqrt{\bar{\mu}_a} + \sqrt{\bar{\mu}_a - \mu} + a > \sqrt{\bar{\mu}_a} + a \\ &= \frac{N-2(a+1)}{2} + a \\ &= \frac{N-2}{2}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$2a + 2 + 2(\sqrt{\bar{\mu}_a} + \sqrt{\bar{\mu}_a - \mu}) > N$$

e, assim,

$$-2(a+1) - 2(\sqrt{\bar{\mu}_a} + \sqrt{\bar{\mu}_a - \mu}) + N - 1 < -1.$$

Logo,

$$\int_{\rho_0}^{+\infty} r^{-2(a+1)-2(\sqrt{\bar{\mu}_a}+\sqrt{\bar{\mu}_a-\mu})} r^{N-1} dr < \infty$$

e, portanto,

$$\bar{\mu}_a \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,\rho_0)} |x|^{-2(a+1)} v_\varepsilon^2 dx \leq C'''(\rho_0). \tag{1.68}$$

Substituindo (1.66), (1.67) e (1.68) em (1.62), temos que

$$\begin{aligned} \|\tilde{v}_\varepsilon\|_{\mu,a}^2 &\leq [z(\varepsilon)]^{-2} \left(S_{a,b,\mu}\right)^{\frac{2_*}{2_*-2}} + C'(\rho_0) + C''(\rho_0) + C'''(\rho_0) \\ &= [z(\varepsilon)]^{-2} \left(S_{a,b,\mu}\right)^{\frac{2_*}{2_*-2}} + C(\rho_0), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|\tilde{v}_\varepsilon\|_{\mu,a}^2 = [z(\varepsilon)]^{-2} \left(S_{a,b,\mu}\right)^{\frac{2_*}{2_*-2}} + o_n(1).$$

□

Lema 1.2.3. *Se vale a hipótese (K) então* $|k^+|_\infty = k(0)$.

Demonstração. Observe que $k(x) = k^+(x) - k^-(x)$, onde $k^+(x) = \max\{k(x), 0\}$ e $k^-(x) = \max\{-k(x), 0\}$. Da hipótese (K) temos que k é contínua em $\bar{\Omega}$ e satisfaz $k(0) = \max\limits_{x\in\bar{\Omega}} k(x) > 0$. Logo, $k(0) = k^+(0)$.

Agora, como k é contínua e $k^+(x) = \max\{k(x), 0\} = \dfrac{|k(x)| + k(x)}{2}$, segue que $k^+(x)$ é contínua e, portanto, $\sup\limits_{x\in\bar{\Omega}} \text{ess}\ k^+(x) = \max\limits_{x\in\bar{\Omega}} k^+(x)$, ou seja,

$$|k^+|_\infty = \max_{x\in\bar{\Omega}} k^+(x) \geq k^+(0) = \max_{x\in\bar{\Omega}} k(x).$$

Suponha, por absurdo, que $|k^+|_\infty > \max\limits_{x\in\bar{\Omega}} k(x) = k^+(0)$. Da definição de $\max\limits_{x\in\bar{\Omega}} k^+(x) = |k^+|_\infty$, dado $j \in \mathbb{N}$, existe $x_j \in \bar{\Omega}$ tal que

$$|k^+|_\infty \geq k^+(x_j) > |k^+|_\infty - 1/j.$$

Como $|k^+|_\infty > \max\limits_{x\in\bar{\Omega}} k(x)$, existe j_0 tal que $|k^+|_\infty - 1/j_0 > \max\limits_{x\in\bar{\Omega}} k(x)$. Daí, existe x_{j_0} tal que

$$|k^+|_\infty \geq k^+(x_{j_0}) > |k^+|_\infty - 1/j_0 > \max_{x\in\bar{\Omega}} k(x) > 0.$$

Sendo $k^+(x_{j_0}) > 0$, segue que

$$k(x_{j_0}) = k^+(x_{j_0}) > \max_{x \in \bar{\Omega}} k(x).$$

Absurdo!

Logo, $|k^+|_\infty = k^+(0) = k(0)$ □

Lema 1.2.4. *Se valem as hipóteses (K) e (A1) ou (A2), então*

$$\int_\Omega k(x)|x|^{-2_* b}|\tilde{v}_\varepsilon|^{2_*}dx = [z(\varepsilon)]^{-2_*}\left(S_{a,b,\mu}\right)^{\frac{2_*}{2_*-2}} + O(\varepsilon^{\frac{-2 \cdot 2_* \gamma}{2_*-2}}). \tag{1.69}$$

Demonstração. Note que da hipótese (K) temos que $k(x) = k(0)+O(|x|^\beta)$, para $x \in B(0, 2\rho_0)$. Assim, pelo Lema 1.2.3, $k(x) = |k^+|_\infty + O(|x|^\beta)$, para $x \in B(0, 2\rho_0)$. Mais ainda, como $k(0) > 0$ podemos redefinir ρ_0 de forma que $k(x) = |k^+|_\infty + O(|x|^\beta) > 0$, para $x \in B(0, 2\rho_0)$. Daí, temos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega k(x)|x|^{-2_* b}|\tilde{v}_\varepsilon|^{2_*}dx &= \int_{B(0,2\rho_0)} k(x)|x|^{-2_* b}|\tilde{v}_\varepsilon|^{2_*}dx \\
&= \int_{B(0,2\rho_0)} [|k^+|_\infty + O(|x|^\beta)]|x|^{-2_* b}|\tilde{v}_\varepsilon|^{2_*}dx \\
&= \int_{B(0,2\rho_0)} |k^+|_\infty |x|^{-2_* b}|\tilde{v}_\varepsilon|^{2_*}dx + \int_{B(0,2\rho_0)} O(|x|^\beta)|x|^{-2_* b}|\tilde{v}_\varepsilon|^{2_*}dx \\
&= |k^+|_\infty \int_{B(0,\rho_0)} |x|^{-2_* b}|v_\varepsilon|^{2_*}dx \\
&\quad + |k^+|_\infty \int_{B(0,2\rho_0)\setminus B(0,\rho_0)} |x|^{-2_* b}|\Psi v_\varepsilon|^{2_*}dx \\
&\quad + \int_{B(0,2\rho_0)} O(|x|^\beta)|x|^{-2_* b}|\tilde{v}_\varepsilon|^{2_*}dx \\
&= |k^+|_\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2_* b}|v_\varepsilon|^{2_*}dx \\
&\quad + |k^+|_\infty \int_{B(0,2\rho_0)\setminus B(0,\rho_0)} |x|^{-2_* b}|\Psi v_\varepsilon|^{2_*}dx \\
&\quad - |k^+|_\infty \int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,\rho_0)} |x|^{-2_* b}|v_\varepsilon|^{2_*}dx \\
&\quad + \int_{B(0,2\rho_0)} O(|x|^\beta)|x|^{-2_* b}|\tilde{v}_\varepsilon|^{2_*}dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= |k^+|_\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2_* b} |v_\varepsilon|^{2_*} dx \\
&\quad + |k^+|_\infty \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,\rho_0)} |x|^{-2_* b} |\Psi v_\varepsilon|^{2_*} dx \\
&\quad - |k^+|_\infty \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,\rho_0)} |x|^{-2_* b} |v_\varepsilon|^{2_*} dx \\
&\quad + \int_{B(0,2\rho_0)} O(|x|^\beta) |x|^{-2_* b} |\tilde{v}_\varepsilon|^{2_*} dx
\end{aligned}
$$

e usando (1.60) obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega k(x)|x|^{-2_* b}|\tilde{v}_\varepsilon|^{2_*} dx = [z(\varepsilon)]^{-2_*} \left(S_{a,b,\mu}\right)^{\frac{2_*}{2_*-2}} \\
- |k^+|_\infty \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,\rho_0)} |x|^{-2_* b}(1 - |\Psi|^{2_*})|v_\varepsilon|^{2_*} dx \\
+ \int_{B(0,2\rho_0)} O(|x|^\beta)|x|^{-2_* b}|\tilde{v}_\varepsilon|^{2_*} dx.
\end{aligned}
\tag{1.70}
$$

Agora, note que

$$
\begin{aligned}
\left| \int_{B(0,2\rho_0)} O(|x|^\beta)|x|^{-2_* b}|\tilde{v}_\varepsilon|^{2_*} dx \right| &= \left| \int_{B(0,2\rho_0)} O(|x|^\beta)|x|^{-2_* b}|\Psi v_\varepsilon|^{2_*} dx \right| \\
&\leq \int_{B(0,2\rho_0)} |O(|x|^\beta)||x|^{-2_* b}|v_\varepsilon|^{2_*} dx \\
&\leq \int_{B(0,2\rho_0)} C|x|^\beta |x|^{-2_* b}|v_\varepsilon|^{2_*} dx \\
&= \int_{B(0,2\rho_0)} C|x|^{\beta - 2_* b}|v_\varepsilon|^{2_*} dx \\
&= \int_{B(0,2\rho_0)} C|x|^{\beta - 2_* b} \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma |x|^{c_1} + |x|^{c_2}} \right)^{\frac{2 \cdot 2_*}{2_*-2}} dx \\
&\leq \int_{B(0,2\rho_0)} C|x|^{\beta - 2_* b} \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma |x|^{c_1}} \right)^{\frac{2 \cdot 2_*}{2_*-2}} dx \\
&= C\varepsilon^{\frac{-2 \cdot 2_* \gamma}{2_*-2}} \int_{B(0,2\rho_0)} |x|^{\beta - 2_* b - 2_*(\sqrt{\bar{\mu}_a} - \sqrt{\bar{\mu}_a - \mu})} dx \\
&= C\sigma(S^{N-1})\varepsilon^{\frac{-2 \cdot 2_* \gamma}{2_*-2}} \int_0^{2\rho_0} r^{\beta - 2_* b - 2_*(\sqrt{\bar{\mu}_a} - \sqrt{\bar{\mu}_a - \mu})} r^{N-1} dr.
\end{aligned}
$$

Mas, $\mu < \bar{\mu}_a - b^2$ e, assim, $|b| < \sqrt{\bar{\mu}_a - \mu}$. Como $\beta > 2_* \sqrt{\bar{\mu}_a - \mu}$, temos que

$\beta - 2_* b > 0$. Ainda, temos

$$\begin{aligned}
-2_*(\sqrt{\bar{\mu}_a} - \sqrt{\bar{\mu}_a - \mu}) + N - 1 &> -2_*(\sqrt{\bar{\mu}_a} + b) + N - 1 \\
&= \frac{-2N}{N-2+2b-2a} \cdot \left(\frac{N-2a-2}{2} + b\right) + N - 1 \\
&= \frac{-2N}{N-2+2b-2a} \cdot \left(\frac{N-2a-2+2b}{2}\right) + N - 1 \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Logo, $\beta - 2_* b - 2_*(\sqrt{\bar{\mu}_a} - \sqrt{\bar{\mu}_a - \mu}) + N - 1 > -1$ e, portanto,

$$\int_0^{2\rho_0} r^{\beta - 2_* b - 2_*(\sqrt{\bar{\mu}_a} - \sqrt{\bar{\mu}_a - \mu})} r^{N-1} dr < \infty.$$

Dessa forma,

$$\int_{B(0,2\rho_0)} O(|x|^\beta)|x|^{-2_* b}|\tilde{v}_\varepsilon|^{2_*} dx = O(\varepsilon^{\frac{-2 \cdot 2_* \gamma}{2_* - 2}}). \tag{1.71}$$

Note, também, que

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,\rho_0)} |x|^{-2_* b}(1 - |\Psi|^{2_*})|v_\varepsilon|^{2_*} dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,\rho_0)} |x|^{-2_* b}|1 - |\Psi|^{2_*}||v_\varepsilon|^{2_*} dx \\
&\leq 2 \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,\rho_0)} |x|^{-2_* b}|v_\varepsilon|^{2_*} dx \\
&= 2 \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,\rho_0)} |x|^{-2_* b} \left(\varepsilon^\gamma |x|^{c_1} + |x|^{c_2}\right)^{\frac{-2 \cdot 2_*}{2_* - 2}} dx \\
&= 2\sigma(S^{N-1}) \int_{\rho_0}^{+\infty} r^{-2_* b} \left(\varepsilon^\gamma r^{c_1} + r^{c_2}\right)^{\frac{-2 \cdot 2_*}{2_* - 2}} r^{N-1} dr \\
&= 2\sigma(S^{N-1}) \int_{\rho_0}^{\rho_0 + 1} r^{-2_* b} \left(\varepsilon^\gamma r^{c_1} + r^{c_2}\right)^{\frac{-2 \cdot 2_*}{2_* - 2}} r^{N-1} dr \\
&\quad + 2\sigma(S^{N-1}) \int_{\rho_0 + 1}^{+\infty} r^{-2_* b} \left(\varepsilon^\gamma r^{c_1} + r^{c_2}\right)^{\frac{-2 \cdot 2_*}{2_* - 2}} r^{N-1} dr \\
&\leq 2\sigma(S^{N-1}) \int_{\rho_0}^{\rho_0 + 1} r^{-2_* b} \left(\varepsilon^\gamma r^{c_1}\right)^{\frac{-2 \cdot 2_*}{2_* - 2}} r^{N-1} dr \\
&\quad + 2\sigma(S^{N-1}) \int_{\rho_0 + 1}^{+\infty} r^{-2_* b} \left(r^{c_2}\right)^{\frac{-2 \cdot 2_*}{2_* - 2}} r^{N-1} dr
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\sigma(S^{N-1})\varepsilon^{\frac{-2\cdot 2_*\gamma}{2_*-2}} \int_{\rho_0}^{\rho_0+1} r^{-2_*b+\frac{-2\cdot 2_*c_1}{2_*-2}+N-1} dr \\
&\quad + 2\sigma(S^{N-1}) \int_{\rho_0+1}^{+\infty} r^{-2_*b-2_*(\sqrt{\bar{\mu}_a}+\sqrt{\bar{\mu}_a-\mu})+N-1} dr \\
&= C(\rho_0)\varepsilon^{\frac{-2\cdot 2_*\gamma}{2_*-2}} \\
&\quad + 2\sigma(S^{N-1}) \int_{\rho_0+1}^{+\infty} r^{-2_*b-2_*(\sqrt{\bar{\mu}_a}+\sqrt{\bar{\mu}_a-\mu})+N-1} dr.
\end{aligned}
$$

Mas, observe que

$$
\begin{aligned}
-2_*b - 2_*(\sqrt{\bar{\mu}_a} + \sqrt{\bar{\mu}_a - \mu}) + N - 1 &= -2_*(b + \sqrt{\bar{\mu}_a}) - 2_*\sqrt{\bar{\mu}_a - \mu} + N - 1 \\
&= \frac{-2N}{N-2+2b-2a} \cdot \left(\frac{N-2a-2+2b}{2}\right) \\
&\quad - 2_*\sqrt{\bar{\mu}_a - \mu} + N - 1 \\
&= -N - 2_*\sqrt{\bar{\mu}_a - \mu} + N - 1 \\
&= -2_*\sqrt{\bar{\mu}_a - \mu} - 1 \\
&< -1
\end{aligned}
$$

e, assim, existe $\delta > 0$ tal que

$$
-2_*b - 2_*(\sqrt{\bar{\mu}_a} + \sqrt{\bar{\mu}_a - \mu}) + N - 1 + \delta < -1.
$$

Além do mais, se considerarmos $0 < \varepsilon < 1$, para $r \geq \rho_0 + 1 > 1$, temos $r^{\delta} > 1 > \varepsilon^{\frac{2\cdot 2_*\gamma}{2_*-2}}$, ou seja, $r^{-\delta} < \varepsilon^{\frac{-2\cdot 2_*\gamma}{2_*-2}}$. Daí,

$$
\begin{aligned}
\int_{\rho_0+1}^{+\infty} r^{-2_*b-2_*(\sqrt{\bar{\mu}_a}+\sqrt{\bar{\mu}_a-\mu})+N-1} dr &= \int_{\rho_0+1}^{+\infty} r^{-2_*b-2_*(\sqrt{\bar{\mu}_a}+\sqrt{\bar{\mu}_a-\mu})+N-1+\delta} r^{-\delta} dr \\
&< \int_{\rho_0+1}^{+\infty} r^{-2_*b-2_*(\sqrt{\bar{\mu}_a}+\sqrt{\bar{\mu}_a-\mu})+N-1+\delta} \varepsilon^{\frac{-2\cdot 2_*\gamma}{2_*-2}} dr.
\end{aligned}
$$

Já que

$$
-2_*b - 2_*(\sqrt{\bar{\mu}_a} + \sqrt{\bar{\mu}_a - \mu}) + N - 1 + \delta < -1
$$

temos que

$$\int_{\rho_0+1}^{+\infty} r^{-2_*b-2_*(\sqrt{\overline{\mu}_a}+\sqrt{\overline{\mu}_a-\mu})+N-1+\delta}dr < \infty$$

e, por conseguinte,

$$\int_{\rho_0+1}^{+\infty} r^{-2_*b-2_*(\sqrt{\overline{\mu}_a}+\sqrt{\overline{\mu}_a-\mu})+N-1}dr < C'\varepsilon^{\frac{-2\cdot 2_*\gamma}{2_*-2}}.$$

Portanto, para $0 < \varepsilon < 1$,

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,\rho_0)} |x|^{-2_*b}(1-|\Psi|^{2_*})|v_\varepsilon|^{2_*}dx = O(\varepsilon^{\frac{-2\cdot 2_*\gamma}{2_*-2}}). \tag{1.72}$$

Substituindo (1.71) e (1.72) em (1.70) temos que

$$\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}|\tilde{v}_\varepsilon|^{2_*}dx = [z(\varepsilon)]^{-2_*}\left(S_{a,b,\mu}\right)^{\frac{2_*}{2_*-2}} + O(\varepsilon^{\frac{-2\cdot 2_*\gamma}{2_*-2}}).$$

$\square$

Lema 1.2.5. *Se valem as hipóteses (K) e (A1) ou (A2), então*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\|\tilde{v}_\varepsilon\|^2_{\mu,a}}{\left(\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}|\tilde{v}_\varepsilon|^{2_*}dx\right)^{2/2_*}} = 0. \tag{1.73}$$

Demonstração. Dos lemas 1.2.2 e 1.2.4, obtemos

$$\frac{\|\tilde{v}_\varepsilon\|^2_{\mu,a}}{\left(\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}|\tilde{v}_\varepsilon|^{2_*}dx\right)^{2/2_*}} = \frac{[z(\varepsilon)]^{-2}\left(S_{a,b,\mu}\right)^{\frac{2_*}{2_*-2}} + o_n(1)}{\left([z(\varepsilon)]^{-2_*}\left(S_{a,b,\mu}\right)^{\frac{2_*}{2_*-2}} + O(\varepsilon^{\frac{-2\cdot 2_*\gamma}{2_*-2}})\right)^{2/2_*}}.$$

Daí, observando que $z(\varepsilon) = C\varepsilon^{\frac{2}{2_*-2}}$, onde $C > 0$ depende dos casos (A1) e (A2), temos

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\|\tilde{v}_\varepsilon\|^2_{\mu,a}}{\left(\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}|\tilde{v}_\varepsilon|^{2_*}dx\right)^{2/2_*}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{[z(\varepsilon)]^{-2}\left(S_{a,b,\mu}\right)^{\frac{2_*}{2_*-2}} + o_n(1)}{\left([z(\varepsilon)]^{-2_*}\left(S_{a,b,\mu}\right)^{\frac{2_*}{2_*-2}} + O(\varepsilon^{\frac{-2\cdot 2_*\gamma}{2_*-2}})\right)^{2/2_*}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{[z(\varepsilon)]^{-2} (S_{a,b,\mu})^{\frac{2_*}{2_*-2}} + o_n(1)}{\left([z(\varepsilon)]^{-2_*} (S_{a,b,\mu})^{\frac{2_*}{2_*-2}} + o_n(1)\varepsilon^{\frac{-2\cdot 2_*\gamma}{2_*-2}}\right)^{2/2_*}} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{[z(\varepsilon)]^{-2} (S_{a,b,\mu})^{\frac{2_*}{2_*-2}} + o_n(1)}{\varepsilon^{\frac{-4\gamma}{2_*-2}} \left([z(\varepsilon)]^{-2_*} (S_{a,b,\mu})^{\frac{2_*}{2_*-2}} \varepsilon^{\frac{2\cdot 2_*\gamma}{2_*-2}} + o_n(1)\right)^{2/2_*}} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{[z(\varepsilon)]^{-2} (S_{a,b,\mu})^{\frac{2_*}{2_*-2}} \varepsilon^{\frac{4\gamma}{2_*-2}} + o_n(1)\varepsilon^{\frac{4\gamma}{2_*-2}}}{\left([z(\varepsilon)]^{-2_*} (S_{a,b,\mu})^{\frac{2_*}{2_*-2}} \varepsilon^{\frac{2\cdot 2_*\gamma}{2_*-2}} + o_n(1)\right)^{2/2_*}} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{(S_{a,b,\mu})^{\frac{2_*}{2_*-2}} C\varepsilon^{\frac{-4}{2_*-2}} \varepsilon^{\frac{4\gamma}{2_*-2}} + o_n(1)\varepsilon^{\frac{4\gamma}{2_*-2}}}{\left(C\varepsilon^{\frac{2\cdot 2_*}{2_*-2}} (S_{a,b,\mu})^{\frac{2_*}{2_*-2}} \varepsilon^{\frac{2\cdot 2_*\gamma}{2_*-2}} + o_n(1)\right)^{2/2_*}} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{(S_{a,b,\mu})^{\frac{2_*}{2_*-2}} C\varepsilon^{\frac{4}{2_*-2}(\gamma-1)} + o_n(1)\varepsilon^{\frac{4\gamma}{2_*-2}}}{\left(C\,(S_{a,b,\mu})^{\frac{2_*}{2_*-2}} \varepsilon^{\frac{2\cdot 2_*}{2_*-2}(\gamma-1)} + o_n(1)\right)^{2/2_*}}.
\end{aligned}
$$

Mas, se vale (A1), $\gamma = \frac{2\sqrt{\bar{\mu}_a-\mu}}{\sqrt{\bar{\mu}_a-\mu}-b} > 0$ e como $|b| < \sqrt{\bar{\mu}_a - \mu}$, temos

$$
\begin{aligned}
\gamma - 1 &= \frac{2\sqrt{\bar{\mu}_a - \mu}}{\sqrt{\bar{\mu}_a - \mu} - b} - 1 \\
&= \frac{2\sqrt{\bar{\mu}_a - \mu} - \sqrt{\bar{\mu}_a - \mu} + b}{\sqrt{\bar{\mu}_a - \mu} - b} \\
&= \frac{\sqrt{\bar{\mu}_a - \mu} + b}{\sqrt{\bar{\mu}_a - \mu} - b} \\
&> 0.
\end{aligned}
$$

Se vale (A2), $\gamma = 2$ e, portanto, $\gamma - 1 > 0$. De qualquer forma,

$$
\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\|\tilde{v}_\varepsilon\|^2_{\mu,a}}{\left(\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}|\tilde{v}_\varepsilon|^{2_*}dx\right)^{2/2_*}} = 0.
$$

□

Lema 1.2.6. *Suponha que as hipóteses (H), (K) e (A1) ou (A2) sejam válidas e seja l^* como definido no Teorema 1.1.10. Então, existem $\Lambda_4 > 0$ e $\varepsilon_1 \in (0,1)$ tais que $l^* > 0$ e $\sup_{t\geq 0} I_{\lambda,\mu}(t\tilde{v}_{\varepsilon_1}) < l^*, \quad \forall \lambda \in (0, \Lambda_4)$.*

Demonstração. Seja $\Lambda_2 = \left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2_*}\right)|k^+|_\infty^{\frac{-2}{2_*-2}}(S_{a,b,\mu})^{\frac{2_*}{2_*-2}}\tilde{C}^{-1}\right]^{\frac{2-q}{2}}$, como na demonstração do Teorema 1.0.1. Daí, se $\lambda \in (0,\Lambda_2)$, temos

$$l^* = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2_*}\right)|k^+|_\infty^{\frac{-2}{2_*-2}}(S_{a,b,\mu})^{\frac{2_*}{2_*-2}} - \tilde{C}\lambda^{\frac{2}{2-q}} > 0.$$

Agora, considere as seguintes funções:

$$f(t) = I_{\lambda,\mu}(t\tilde{v}_\varepsilon) = \frac{t^2}{2}\|\tilde{v}_\varepsilon\|^2_{\mu,a} - \frac{t^{2_*}}{2_*}\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}\tilde{v}^{2_*}_{\varepsilon_+}dx - \lambda\frac{t^q}{q}\int_\Omega h(x)|x|^{-c}\tilde{v}^q_{\varepsilon_+}dx$$

e

$$\tilde{f}(t) = \frac{t^2}{2}\|\tilde{v}_\varepsilon\|^2_{\mu,a} - \frac{t^{2_*}}{2_*}\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}\tilde{v}^{2_*}_{\varepsilon_+}dx.$$

Como $1<q<2<2_*$, temos que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = -\infty$. Daí, como $f(0)=0$, temos que $\sup\limits_{t\geq 0} I_{\lambda,\mu}(t\tilde{v}_\varepsilon)$ é atingido, ou seja, para todo $\varepsilon>0$, existe $t_\varepsilon>0$ tal que

$$\sup_{t\geq 0} I_{\lambda,\mu}(t\tilde{v}_\varepsilon) = I_{\lambda,\mu}(t_\varepsilon\tilde{v}_\varepsilon).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\sup_{t\geq 0} I_{\lambda,\mu}(t\tilde{v}_\varepsilon) &= \frac{t_\varepsilon^2}{2}\|\tilde{v}_\varepsilon\|^2_{\mu,a} - \frac{t_\varepsilon^{2_*}}{2_*}\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}\tilde{v}^{2_*}_{\varepsilon_+}dx - \lambda\frac{t_\varepsilon^q}{q}\int_\Omega h(x)|x|^{-c}\tilde{v}^q_{\varepsilon_+}dx\\ &= \tilde{f}(t_\varepsilon) - \lambda\frac{t_\varepsilon^q}{q}\int_\Omega h(x)|x|^{-c}\tilde{v}^q_{\varepsilon_+}dx.\end{aligned}$$

Mas, observando que

$$\tilde{f}'(t) = t\|\tilde{v}_\varepsilon\|^2_{\mu,a} - t^{2_*-1}\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}\tilde{v}^{2_*}_{\varepsilon_+}dx$$

e que

$$\begin{aligned}\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}\tilde{v}^{2_*}_{\varepsilon_+}dx &= \int_{B(0,2\rho_0)} k(x)|x|^{-2_*b}(\Psi v_\varepsilon)^{2_*}_+dx\\ &\geq \int_{B(0,\rho_0)} k(x)|x|^{-2_*b}(\Psi v_\varepsilon)^{2_*}_+dx\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{B(0,\rho_0)} k(x)|x|^{-2_*b} v_\varepsilon^{2_*} dx \\
&> 0,
\end{aligned}
$$

já que $\tilde{v}_\varepsilon(x) = 0$, se $x \notin B(0, 2\rho_0)$, $k(x) > 0$, $\forall x \in B(0, 2\rho_0)$, $\Psi(x) = 1$ se $x \in B(0, \rho_0)$ e $v_\varepsilon > 0$, temos que

$$
\begin{array}{rcl}
\tilde{f}'(t) = 0 \Leftrightarrow t\|\tilde{v}_\varepsilon\|^2_{\mu,a} - t^{2_*-1} \int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b} \tilde{v}^{2_*}_{\varepsilon_+} dx & = & 0 \\
\Leftrightarrow t^{2_*-1} \int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b} \tilde{v}^{2_*}_{\varepsilon_+} dx & = & t\|\tilde{v}_\varepsilon\|^2_{\mu,a} \\
\Leftrightarrow t^{2_*-2} & = & \frac{\|\tilde{v}_\varepsilon\|^2_{\mu,a}}{\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b} \tilde{v}^{2_*}_{\varepsilon_+} dx} \\
\Leftrightarrow t & = & \left(\frac{\|\tilde{v}_\varepsilon\|^2_{\mu,a}}{\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b} \tilde{v}^{2_*}_{\varepsilon_+} dx} \right)^{\frac{1}{2_*-2}}.
\end{array}
$$

Dessa forma, $t_0 = \left(\frac{\|\tilde{v}_\varepsilon\|^2_{\mu,a}}{\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b} \tilde{v}^{2_*}_{\varepsilon_+} dx} \right)^{\frac{1}{2_*-2}}$ é um ponto crítico de $\tilde{f}(t)$. Mais ainda, como $\tilde{f}'(t) > 0$, para todo $t < t_0$ e $\tilde{f}'(t) < 0$, para todo $t > t_0$, temos que t_0 é um ponto de máximo de $\tilde{f}(t)$ e

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}(t_0) &= \frac{t_0^2}{2} \|\tilde{v}_\varepsilon\|^2_{\mu,a} - \frac{t_0^{2_*}}{2_*} \int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b} \tilde{v}^{2_*}_{\varepsilon_+} dx \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\|\tilde{v}_\varepsilon\|^2_{\mu,a}}{\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b} \tilde{v}^{2_*}_{\varepsilon_+} dx} \right)^{\frac{2}{2_*-2}} \|\tilde{v}_\varepsilon\|^2_{\mu,a} \\
&\quad - \frac{1}{2_*} \left(\frac{\|\tilde{v}_\varepsilon\|^2_{\mu,a}}{\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b} \tilde{v}^{2_*}_{\varepsilon_+} dx} \right)^{\frac{2_*}{2_*-2}} \int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b} \tilde{v}^{2_*}_{\varepsilon_+} dx \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\|\tilde{v}_\varepsilon\|^2_{\mu,a}\right)^{\frac{2_*}{2_*-2}}}{\left(\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b} \tilde{v}^{2_*}_{\varepsilon_+} dx\right)^{\frac{2}{2_*-2}}} \\
&\quad - \frac{1}{2_*} \cdot \frac{\left(\|\tilde{v}_\varepsilon\|^2_{\mu,a}\right)^{\frac{2_*}{2_*-2}}}{\left(\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b} \tilde{v}^{2_*}_{\varepsilon_+} dx\right)^{\frac{2}{2_*-2}}} \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*} \right) \cdot \frac{\left(\|\tilde{v}_\varepsilon\|^2_{\mu,a}\right)^{\frac{2_*}{2_*-2}}}{\left(\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b} \tilde{v}^{2_*}_{\varepsilon_+} dx\right)^{\frac{2}{2_*-2}}} \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*} \right) \left(\frac{\|\tilde{v}_\varepsilon\|^2_{\mu,a}}{\left(\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b} \tilde{v}^{2_*}_{\varepsilon_+} dx\right)^{2/2_*}} \right)^{\frac{2_*}{2_*-2}}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$\sup_{t\geq 0} I_{\lambda,\mu}(t\tilde{v}_\varepsilon) \leq \tilde{f}(t_0) - \lambda\frac{t_\varepsilon^q}{q}\int_\Omega h(x)|x|^{-c}\tilde{v}_{\varepsilon_+}^q dx.$$

Novamente observando que $\tilde{v}_\varepsilon(x) = 0$, se $x \notin B(0, 2\rho_0)$, que da hipótese (H) temos $h(x) \geq h_0 > 0$, $\forall x \in B(0, 2\rho_0)$ e que $\tilde{v}_{\varepsilon_+} = |\tilde{v}_\varepsilon|$, pois $\tilde{v}_\varepsilon \geq 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
\sup_{t\geq 0} I_{\lambda,\mu}(t\tilde{v}_\varepsilon) &\leq \tilde{f}(t_0) - \frac{\lambda t_\varepsilon^q}{q}h_0\int_{B(0,2\rho_0)}|x|^{-c}|\tilde{v}_\varepsilon|^q dx \\
&\leq \tilde{f}(t_0) - \frac{\lambda t_\varepsilon^q}{q}h_0\int_{B(0,\rho_0)}|x|^{-c}|\tilde{v}_\varepsilon|^q dx \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)\left(\frac{\|\tilde{v}_\varepsilon\|_{\mu,a}^2}{\left(\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}|\tilde{v}_\varepsilon|^{2_*}dx\right)^{2/2_*}}\right)^{\frac{2_*}{2_*-2}} \\
&\quad - \frac{\lambda t_\varepsilon^q}{q}h_0\int_{B(0,\rho_0)}|x|^{-c}|\tilde{v}_\varepsilon|^q dx.
\end{aligned}$$

Como do Lema 1.2.5

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\|\tilde{v}_\varepsilon\|_{\mu,a}^2}{\left(\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}|\tilde{v}_\varepsilon|^{2_*}dx\right)^{2/2_*}} = 0,$$

existe $0 < \varepsilon_1 < 1$ tal que

$$\frac{\|\tilde{v}_\varepsilon\|_{\mu,a}^2}{\left(\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}|\tilde{v}_\varepsilon|^{2_*}dx\right)^{2/2_*}} < |k^+|_\infty^{\frac{-2}{2_*}}(S_{a,b,\mu}), \quad \forall\varepsilon \leq \varepsilon_1.$$

Daí,

$$\sup_{t\geq 0} I_{\lambda,\mu}(t\tilde{v}_{\varepsilon_1}) < \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)|k^+|_\infty^{\frac{-2}{2_*-2}}(S_{a,b,\mu})^{\frac{2_*}{2_*-2}} - \frac{\lambda t_{\varepsilon_1}^q}{q}h_0\int_{B(0,\rho_0)}|x|^{-c}|\tilde{v}_{\varepsilon_1}|^q dx.$$

Agora, já que $\varepsilon_1 < 1$, temos

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,\rho_0)}|x|^{-c}|\tilde{v}_{\varepsilon_1}|^q dx &= \int_{B(0,\rho_0)}|x|^{-c}|\Psi v_{\varepsilon_1}|^q dx \\
&= \int_{B(0,\rho_0)}|x|^{-c}|v_{\varepsilon_1}|^q dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{B(0,\rho_0)} |x|^{-c}(\varepsilon_1^{\gamma}|x|^{c_1} + |x|^{c_2})^{\frac{-2q}{2_*-2}} dx \\
&\geq \int_{B(0,\rho_0)\backslash B(0,\frac{\rho_0}{2})} |x|^{-c}(\varepsilon_1^{\gamma}|x|^{c_1} + |x|^{c_2})^{\frac{-2q}{2_*-2}} dx \\
&\geq C \int_{B(0,\rho_0)\backslash B(0,\frac{\rho_0}{2})} \rho_0^{-c}(\rho_0^{c_1} + \rho_0^{c_2})^{\frac{-2q}{2_*-2}} dx \\
&= C(\rho_0) > 0.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\sup_{t\geq 0} I_{\lambda,\mu}(t\tilde{v}_{\varepsilon_1}) < \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right) |k^+|_{\infty}^{\frac{-2}{2_*-2}} (S_{a,b,\mu})^{\frac{2_*}{2_*-2}} - \lambda C_2,
$$

onde $C_2 = \dfrac{t_{\varepsilon_1}^q}{q} h_0 C(\rho_0) > 0$.

Por fim, tomando $\Lambda_3 = \left(\dfrac{C_2}{\tilde{C}}\right)^{\frac{2-q}{q}}$, para $\lambda \in (0, \Lambda_3)$, temos

$$
\lambda^{\frac{2}{2-q}} \tilde{C} < \lambda C_2.
$$

Daí, para $\lambda \in (0, \Lambda_3)$, temos

$$
\sup_{t\geq 0} I_{\lambda,\mu}(t\tilde{v}_{\varepsilon_1}) < \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right) |k^+|_{\infty}^{\frac{-2}{2_*-2}} (S_{a,b,\mu})^{\frac{2_*}{2_*-2}} - \lambda^{\frac{2}{2-q}} \tilde{C} = l^*.
$$

Logo, tomando $\Lambda_4 = \min\{\Lambda_2, \Lambda_3\}$, temos o resultado.

$\square$

1.2.1 Demonstração do Teorema 1.0.2.

Seja $\Lambda^* = \min\left\{\frac{q}{2}\left(\frac{2_*}{2}\right)^{\frac{2-q}{2_*-2}} \Lambda_1, \Lambda_4\right\}$. Então, para todo $\lambda \in (0, \Lambda^*)$, $I_{\lambda,\mu}$ tem um ponto crítico v_λ tal que $I_{\lambda,\mu}(v_\lambda) = c$, onde

$$
0 < c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I_{\lambda,\mu}(\gamma(t))
$$

e

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], H_\mu); \gamma(0) = 0, \gamma(1) = t_0\tilde{v}_{\varepsilon_1}\}.$$

De fato, como $\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}\tilde{v}^{2_*}_{\varepsilon_{1_+}}dx > 0$, temos, pelo Lema 1.2.1, que para todo $\lambda \in \left(0, \frac{q}{2}\left(\frac{2_*}{2}\right)^{\frac{2-q}{2_*-2}}\Lambda_1\right)$ existe $t_0 > 0$ e uma sequência $(u_n) \subset H_\mu$, tal que

$$I_{\lambda,\mu}(u_n) \to c \quad \text{e} \quad I'_{\lambda,\mu}(u_n) \to 0 \text{ em } H_\mu^{-1}, \tag{1.74}$$

onde

$$0 < c = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I_{\lambda,\mu}(\gamma(t))$$

e

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], H_\mu); \gamma(0) = 0, \gamma(1) = t_0\tilde{v}_{\varepsilon_1}\}.$$

De (1.74), temos que $I_{\lambda,\mu}(u_n) = c + o_n(1)$ e $I'_{\lambda,\mu}(u_n) = o_n(1)$. Usando que

$$-\left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), u_n\right\rangle \leq |\left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), u_n\right\rangle| \leq |I'_{\lambda,\mu}(u_n)| \cdot \|u_n\|_{\mu,a},$$

temos

$$\begin{aligned} c + o_n(1) + o_n(1)\frac{1}{2_*}\|u_n\|_{\mu,a} &\geq I_{\lambda,\mu}(u_n) - \frac{1}{2_*}\left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), u_n\right\rangle \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)\|u_n\|^2_{\mu,a} - \lambda\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2_*}\right)\int_\Omega h(x)|x|^{-c}u^q_{n_+}dx \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)\|u_n\|^2_{\mu,a} - \lambda\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2_*}\right)|h^+|_\infty\frac{C_1}{(S_{a,b,\mu})^{q/2}}\|u_n\|^q_{\mu,a}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{c + o_n(1)}{\|u_n\|_{\mu,a}} + o_n(1)\frac{1}{2_*} \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)\|u_n\|_{\mu,a} - \lambda\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2_*}\right)|h^+|_\infty\frac{C_1}{(S_{a,b,\mu})^{q/2}}\|u_n\|^{q-1}_{\mu,a}. \tag{1.75}$$

Daí, segue que (u_n) é limitada em H_μ. De fato, se assim não fosse, a menos de uma subsequência, teríamos $\|u_n\|_{\mu,a} \to \infty$ quando $n \to \infty$. Como $1 < q < 2$, fazendo $n \to \infty$ em (1.75), teríamos $+\infty \leq 0$. Absurdo!

Como (u_n) é limitada em H_μ e H_μ é reflexivo, pelo Teorema 4.2.2, obtemos uma subsequência (u_n) tal que

$$u_n \rightharpoonup v_\lambda \quad \text{em } H_\mu.$$

Daí, pelo Teorema 1.1.8, v_λ é uma solução fraca do Problema (1.1).

Agora, considere a curva γ_1 dada por $\gamma_1(t) = t(t_0\tilde{v}_{\varepsilon_1})$. Como $\gamma_1 \in C([0,1], H_\mu)$, $\gamma_1(0) = 0$ e $\gamma_1(1) = t_0\tilde{v}_{\varepsilon_1}$, temos que $\gamma_1 \in \Gamma$. Pelo Lema 1.2.6, para todo $\lambda \in (0, \Lambda_4)$,

$$\begin{aligned} 0 < c &= \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I_{\lambda,\mu}(\gamma(t)) \\ &\leq \max_{t\in[0,1]} I_{\lambda,\mu}(t(t_0\tilde{v}_{\varepsilon_1})) \\ &\leq \sup_{s\geq 0} I_{\lambda,\mu}(s\tilde{v}_{\varepsilon_1}) \\ &< l^*. \end{aligned} \tag{1.76}$$

De (1.74), (1.76) e do Teorema 1.1.10, temos, a menos de uma subsequência, que $u_n \to v_\lambda$, forte, em H_μ. Portanto, $I_{\lambda,\mu}(u_n) \to I_{\lambda,\mu}(v_\lambda)$ e, por conseguinte, $I_{\lambda,\mu}(v_\lambda) = c$. Dessa forma, $I_{\lambda,\mu}(v_\lambda) > 0$ e, como $I_{\lambda,\mu}(0) = 0$, temos que $v_\lambda \neq 0$. Além disso, do Teorema 1.0.5, temos que v_λ é não negativa.

Observe que $\Lambda^* \leq \bar{\Lambda}$. Dessa forma, aplicando o Teorema 1.0.1, temos que existe uma solução fraca u_λ, não negativa e não trivial do problema (1.1) tal que $I_{\lambda,\mu}(u_\lambda) < 0$. Como $I_{\lambda,\mu}(v_\lambda) > 0$, temos que $v_\lambda \neq u_\lambda$.

Concluímos que existe $\Lambda^* > 0$ tal que (1.1) tem ao menos duas soluções distintas, não triviais e não negativas, para todo $\lambda \in (0, \Lambda^*)$.

Capítulo

2

O problema (1) para $2 < q < 2_*$

Neste capítulo, estudaremos o problema (1) no caso em que $2 < q < 2_*$. Acrescentando a hipótese $k(x) > 0$, para todo $x \in \Omega$, mostraremos a existência de ao menos uma solução fraca para esse problema via Teorema do Passo da Montanha.

2.1 O problema (1) para $2 < q < 2_*$

Considere o problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|x|^{2a}}\right) - \mu\frac{u}{|x|^{2(a+1)}} = \lambda h(x)\frac{|u|^{q-2}u}{|x|^c} + k(x)\frac{|u|^{2_*-2}u}{|x|^{2_*b}} & \text{em } \Omega\backslash\{0\}, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio aberto e limitado; $N \geq 3$; $0 \in \Omega$; $a < \frac{N-2}{2}$; $a \leq b < a+1$; $2 < q < 2_*$; $c < q(a+1) + N(1-q/2)$; $2_* := \frac{2N}{N-2+2(b-a)}$ é o expoente crítico de Caffarelli-Kohn-Nirenberg; $\mu < \bar{\mu}_a := \frac{(N-2(a+1))^2}{4}$; λ é um parâmetro positivo; h e k são funções contínuas em $\bar{\Omega}$, com h podendo mudar de sinal em $\bar{\Omega}$ e k positiva em Ω.

Considere válidas as hipóteses (H), (A1) e (A2) do Capítulo 2. Em substituição à hipótese (K), considere a hipótese

(K') k é uma função contínua em $\bar{\Omega}$ e satisfaz $k(x) > 0$, para todo $x \in \Omega$, $k(0) = \max_{x\in\bar{\Omega}} k(x)$, $k(x) = k(0) + O(|x|^\beta)$ para $x \in B(0, 2\rho_0)$ com $\beta > 2_*\sqrt{\bar{\mu}_a - \mu}$.

Nosso objetivo será demonstrar o seguinte

Teorema 2.1.1. *Suponha que* $a < (N-2)/2$, $a \leq b < a+1$, $2 < q < 2_*$, $c < q(a+1) + N(1-q/2)$, (H), (K') *são válidas e* (A1) *ou* (A2) *é satisfeita. Então, para todo* $\lambda > 0$, *o problema (1) tem ao menos uma solução não negativa em* H_μ.

2.2 Demonstração do Teorema 2.1.1

Lema 2.2.1. *Dado* $\lambda > 0$, *existe uma sequência* $(PS)_c$, $(u_n) \subset H_\mu$, *para* $I_{\lambda,\mu}$, *em que*

$$0 < c = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I_{\lambda,\mu}(\gamma(t)),$$

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1]); \gamma(0) = 0, \gamma(1) = t_0 u_0\}$$

e $u_0 \in H_\mu$ *é tal que* $\int_\Omega k(x)|x|^{-2_* b} u_{0_+}^{2_*} > 0$.

Demonstração. A demonstração desse lema é similar à do Lema 1.2.1. Verificaremos que $I_{\lambda,\mu}$ satisfaz as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais-Smale. De fato,

1) $I_{\lambda,\mu}(0) = 0$.

2) Sejam $u \in H_\mu$ e $\lambda > 0$. Daí,

$$\begin{aligned} I_{\lambda,\mu}(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2_{\mu,a} - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega h(x)|x|^{-c}u_+^q dx - \frac{1}{2_*}\int_\Omega k(x)|x|^{-2_* b}u_+^{2_*}dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2_{\mu,a} - \frac{\lambda}{q}|h^+|_\infty C_1(S_{a,b,\mu})^{-q/2}\|u\|^q_{\mu,a} - \frac{1}{2_*}|k^+|_\infty(S_{a,b,\mu})^{-2_*/2}\|u\|^{2_*}_{\mu,a} \\ &= \|u\|^2_{\mu,a}\left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{q}|h^+|_\infty C_1(S_{a,b,\mu})^{-q/2}\|u\|^{q-2}_{\mu,a} - \frac{1}{2_*}|k^+|_\infty(S_{a,b,\mu})^{-2_*/2}\|u\|^{2_*-2}_{\mu,a}\right). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Defina $H : (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$H(s) = \frac{\lambda}{q}|h^+|_\infty C_1(S_{a,b,\mu})^{\frac{-q}{2}}s^{q-2} + \frac{1}{2_*}|k^+|_\infty(S_{a,b,\mu})^{\frac{-2_*}{2}}s^{2_*-2}, \quad \forall s \in (0,+\infty).$$

Note que $H(s) \to 0$ quando $s \to 0$. Assim, existe $\rho > 0$ tal que $H(s) < \dfrac{1}{2}$, para todo

$0 < s \leq \rho$. Voltando em (2.2), obtemos que existe $\delta > 0$ tal que $I_{\lambda,\mu}(u) \geq \delta > 0$, para todo $u \in H_\mu$ tal que $\|u\|_{\mu,a} = \rho$.

3) Dados $t > 0$ e $u_0 \in H_\mu$ tal que $\int_\Omega k(x)|x|^{-2_* b} u_{0_+}^{2_*} > 0$, temos

$$I_{\lambda,\mu}(tu_0) = \frac{t^2}{2}\|u_0\|_{\mu,a}^2 - \lambda \frac{t^q}{q}\int_\Omega h(x)|x|^{-c} u_{0_+}^q dx - \frac{t^{2_*}}{2_*}\int_\Omega k(x)|x|^{-2_* b} u_{0_+}^{2_*} dx.$$

Como $2 < q < 2_*$, temos que $I_{\lambda,\mu}(tu_0) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$. Daí, existe $t_0 > 0$ tal que $\|t_0 u_0\|_{\mu,a} > \rho$ e $I_{\lambda,\mu}(t_0 u_0) < 0$.

De 1), 2) e 3) concluímos que $I_{\lambda,\mu}$ satisfaz as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais-Smale. Portanto, existe uma sequência $(u_n) \subset H_\mu$ tal que $I_{\lambda,\mu}(u_n) \to c$ e $I'_{\lambda,\mu}(u_n) \to 0$ em H_μ^{-1}, quando $n \to \infty$; em que

$$0 < c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I_{\lambda,\mu}(\gamma(t))$$

e

$$\Gamma = \left\{\gamma \in C([0,1]); \gamma(0) = 0, \gamma(1) = t_0 u_0\right\}.$$

$\square$

Lema 2.2.2. *Suponha válida a hipótese (K') e seja* (u_n) *uma sequência* $(PS)_l$ *com* $u_n \rightharpoonup u$, *fracamente em* H_μ, *quando* $n \to \infty$. *Então,*

$$I'_{\lambda,\mu}(u) = 0 \text{ em } H_\mu^{-1} \text{ e } I_{\lambda,\mu}(u) \geq 0.$$

Demonstração. Como (u_n) é uma sequência $(PS)_l$ com $u_n \rightharpoonup u$, fracamente em H_μ, quando $n \to \infty$, pelo Teorema 1.1.8, temos que u é uma solução fraca de (2.1). Daí, obtemos que $I'_{\lambda,\mu}(u) = 0$ em H_μ^{-1}.

Agora, observe que

$$
\begin{aligned}
I_{\lambda,\mu}(u) - \frac{1}{q}\left\langle I'_{\lambda,\mu}(u), u\right\rangle = {} & \frac{1}{2}\|u\|^2_{\mu,a} - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega h(x)|x|^{-c}u_+^q dx - \frac{1}{2_*}\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}u_+^{2_*}dx \\
& - \frac{1}{q}\|u\|^2_{\mu,a} + \frac{1}{q}\lambda\int_\Omega h(x)|x|^{-c}u_+^q dx \\
& + \frac{1}{q}\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}u_+^{2_*}dx \\
= {} & \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\|u\|^2_{\mu,a} + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2_*}\right)\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}u_+^{2_*}dx.
\end{aligned}
$$

Como $I'_{\lambda,\mu}(u) = 0$, temos $\left\langle I'_{\lambda,\mu}(u), u\right\rangle = 0$. Dessa forma,

$$
I_{\lambda,\mu}(u) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\|u\|^2_{\mu,a} + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2_*}\right)\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}u_+^{2_*}dx.
$$

Já que $2 < q < 2_*$ e $k(x) > 0$, para todo $x \in \Omega$, temos que

$$
I_{\lambda,\mu}(u) \geq 0.
$$

$\square$

Teorema 2.2.3. *Suponha válida a hipótese (K') e seja (u_n) em H_μ tal que*

$$
I_{\lambda,\mu}(u_n) \to l < l^* = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)|k^+|_\infty^{\frac{-2}{2_*-2}}(S_{a,b,\mu})^{2_*/(2_*-2)} \tag{2.3}
$$

e

$$
I'_{\lambda,\mu}(u_n) \to 0 \text{ em } H_\mu^{-1}, \text{ quando } n \to \infty. \tag{2.4}
$$

Então, existe uma subsequência fortemente convergente.

Demonstração. De (2.3) e (2.4) temos que $I_{\lambda,\mu}(u_n) = l + o_n(1)$ e $I'_{\lambda,\mu}(u_n) = o_n(1)$. Sabendo que

$$
-\left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), u_n\right\rangle \leq |\left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), u_n\right\rangle| \leq |I'_{\lambda,\mu}(u_n)| \cdot \|u_n\|_{\mu,a},
$$

temos

$$
\begin{aligned}
l + o_n(1) + o_n(1)\frac{1}{q}\|u_n\|_{\mu,a} &\geq I_{\lambda,\mu}(u_n) - \frac{1}{q}\left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), u_n\right\rangle \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\|u_n\|^2_{\mu,a} + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2_*}\right)\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}u^{2_*}_{n_+}dx \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\|u_n\|^2_{\mu,a},
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\frac{l + o_n(1)}{\|u_n\|_{\mu,a}} + o_n(1)\frac{1}{q} \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\|u_n\|_{\mu,a}. \tag{2.5}
$$

Daí, segue que (u_n) é limitada em H_μ. De fato, se assim não fosse, a menos de uma subsequência, teríamos $\|u_n\|_{\mu,a} \to \infty$ quando $n \to \infty$. Fazendo $n \to \infty$ em (2.5), teríamos $+\infty \leq 0$. Absurdo!

Como H_μ é reflexivo, pelo Teorema 4.2.2, a menos de uma subsequência, temos que

$$
u_n \rightharpoonup u_\lambda \text{ em } H_\mu, \text{ quando } n \to \infty.
$$

Segue do Teorema 1.1.8 que u é uma solução fraca do problema (2.1).

Denote $v_n = u_n - u$. Como a função $k(x)$ é contínua em Ω, pelo Teorema 4.2.4, temos que

$$
\int_\Omega k(x)\frac{u^{2_*}_{n_+}}{|x|^{2_*b}}dx = \int_\Omega k(x)\frac{v^{2_*}_{n_+}}{|x|^{2_*b}}dx + \int_\Omega k(x)\frac{u^{2_*}_{+}}{|x|^{2_*b}}dx + o_n(1) \tag{2.6}
$$

e

$$
\|u_n\|^2_{\mu,a} = \|v_n\|^2_{\mu,a} + \|u\|^2_{\mu,a} + o_n(1). \tag{2.7}
$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$
\lim_{n\to\infty}\int_\Omega h(x)\frac{u^q_{n_+}}{|x|^c}dx = \int_\Omega h(x)\frac{u^q_{+}}{|x|^c}dx. \tag{2.8}
$$

De (2.6), (2.7) e (2.8), segue que

$$
\begin{aligned}
I_{\lambda,\mu}(u_n) &= \frac{1}{2}\|u_n\|^2_{\mu,a} - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega h(x)\frac{u^q_{n_+}}{|x|^c}dx - \frac{1}{2_*}\int_\Omega k(x)\frac{u^{2_*}_{n_+}}{|x|^{2_*b}}dx \\
&= \frac{1}{2}\|v_n\|^2_{\mu,a} + \frac{1}{2}\|u\|^2_{\mu,a} - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega h(x)\frac{u^q_{+}}{|x|^c}dx - \frac{1}{2_*}\int_\Omega k(x)\frac{v^{2_*}_{n_+}}{|x|^{2_*b}}dx \\
&\quad - \frac{1}{2_*}\int_\Omega k(x)\frac{u^{2_*}_{+}}{|x|^{2_*b}}dx + o_n(1) \\
&= I_{\lambda,\mu}(u) + \frac{1}{2}\|v_n\|^2_{\mu,a} - \frac{1}{2_*}\int_\Omega k(x)\frac{v^{2_*}_{n_+}}{|x|^{2_*b}}dx + o_n(1)
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

e

$$
\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), u_n\rangle = \langle I'_{\lambda,\mu}(u), u\rangle + \|v_n\|^2_{\mu,a} - \int_\Omega k(x)\frac{v^{2_*}_{n_+}}{|x|^{2_*b}}dx + o_n(1).
$$

Logo,

$$
\|v_n\|^2_{\mu,a} - \int_\Omega k(x)\frac{v^{2_*}_{n_+}}{|x|^{2_*b}}dx = \langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), u_n\rangle - \langle I'_{\lambda,\mu}(u), u\rangle + o_n(1).
$$

Como u é uma solução fraca de (2.1), temos que

$$
\left\langle I'_{\lambda,\mu}(u), u\right\rangle = 0. \tag{2.10}
$$

Também, como $I'_{\lambda,\mu}(u_n) \to 0$, em H^{-1}, quando $n \to \infty$ e (u_n) é limitada em H_μ, temos que

$$
|I'_{\lambda,\mu}(u_n)|\|u_n\|_{\mu,a} \to 0, \text{ quando } n \to \infty.
$$

Mas,

$$
|\left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), u_n\right\rangle| \leq |I'_{\lambda,\mu}(u_n)|\|u_n\|_{\mu,a},
$$

ou seja,

$$
|\left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), u_n\right\rangle| \to 0, \text{ quando } n \to \infty. \tag{2.11}
$$

Segue de (2.10) e (2.11) que

$$
\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), u_n\rangle - \langle I'_{\lambda,\mu}(u), u\rangle = o_n(1)
$$

e, portanto,

$$\|v_n\|_{\mu,a}^2 - \int_\Omega k(x)\frac{v_{n_+}^{2_*}}{|x|^{2_* b}}dx = o_n(1). \tag{2.12}$$

Mas, como (v_n) é limitada, temos que $(\|v_n\|_{\mu,a})$ é uma sequência de números reais limitada. Logo, pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, a menos de uma subsequência, $\lim\limits_{n\to\infty}\|v_n\|_{\mu,a}$ existe. Daí, de (2.12)

$$\lim_{n\to\infty}\|v_n\|_{\mu,a}^2 = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega k(x)\frac{v_{n_+}^{2_*}}{|x|^{2_* b}}dx$$

e, assim, existe $\theta \geq 0$ tal que

$$\|v_n\|_{\mu,a}^2 \to \theta \quad \text{e} \quad \int_\Omega k(x)\frac{v_{n_+}^{2_*}}{|x|^{2_* b}}dx \to \theta, \text{ quando } n \to \infty.$$

Agora, da definição de $S_{a,b,\mu}$, temos

$$\begin{aligned}
\|v_n\|_{\mu,a}^2 &\geq S_{a,b,\mu}\Big(\int_\Omega \frac{v_{n_+}^{2_*}}{|x|^{2_* b}}dx\Big)^{2/2_*} \\
&= S_{a,b,\mu}\Big(\int_\Omega \frac{v_{n_+}^{2_*}}{|x|^{2_* b}}dx\Big)^{2/2_*}\left(\frac{|k^+|_\infty}{|k^+|_\infty}\right)^{2/2_*} \\
&= S_{a,b,\mu}\Big(\int_\Omega |k^+|_\infty\frac{v_{n_+}^{2_*}}{|x|^{2_* b}}dx\Big)^{2/2_*}|k^+|_\infty^{-2/2_*} \\
&\geq S_{a,b,\mu}\Big(\int_\Omega k(x)\frac{v_{n_+}^{2_*}}{|x|^{2_* b}}dx\Big)^{2/2_*}|k^+|_\infty^{-2/2_*}.
\end{aligned}$$

Fazendo $n \longrightarrow \infty$, temos

$$\theta \geq S_{a,b,\mu}|k^+|_\infty^{-2/2_*}\theta^{2/2_*}.$$

Suponha que $\theta \neq 0$. Daí,

$$\theta^{(2_*-2)/2_*} \geq S_{a,b,\mu}|k^+|_\infty^{-2/2_*}$$

e, assim,

$$\theta \geq S_{a,b,\mu}^{2_*/(2_*-2)}|k^+|_\infty^{-2/(2_*-2)}.$$

Segue de (2.9) e do Lema 2.2.2 que

$$
\begin{aligned}
l &= I_{\lambda,\mu}(u) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)\theta \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)|k^+|_\infty^{\frac{-2}{2_*-2}}(S_{a,b,\mu})^{2_*/(2_*-2)} = l^*
\end{aligned}
$$

o que é uma contradição. Logo, $\theta = 0$ e, portanto,

$$\|v_n\|^2_{\mu,a} \to 0, \text{ quando } n \to \infty,$$

ou seja,

$$\|u_n - u\|^2_{\mu,a} \to 0, \text{ quando } n \to \infty,$$

o que implica

$$\|u_n - u\|_{\mu,a} \longrightarrow 0, \text{ quando } n \to \infty.$$

Assim, $u_n \longrightarrow u$ forte em H_μ. □

Se procedermos como na Seção 1.2 do Capítulo 1 e considerarmos $\tilde{v}_\varepsilon(x) = \Psi(x)v_\varepsilon(x)$, substituindo a hipótese (K) pela hipótese (K'), temos que o Lema 1.2.5 continua válido. Obtemos, assim, o seguinte

Lema 2.2.4. *Suponha que as hipóteses (H), (K') e (A1) ou (A2) sejam válidas e seja l^* como definido no Teorema 2.2.3. Então, existe $\varepsilon_1 \in (0,1)$ tal que $\sup\limits_{t\geq 0} I_{\lambda,\mu}(t\tilde{v}_{\varepsilon_1}) < l^*$, para todo $\lambda > 0$.*

Demonstração. Seja $\lambda > 0$. Considere as seguintes funções:

$$f(t) = I_{\lambda,\mu}(t\tilde{v}_\varepsilon) = \frac{t^2}{2}\|\tilde{v}_\varepsilon\|^2_{\mu,a} - \frac{t^{2_*}}{2_*}\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}\tilde{v}^{2_*}_{\varepsilon+}dx - \lambda\frac{t^q}{q}\int_\Omega h(x)|x|^{-c}\tilde{v}^q_{\varepsilon+}dx$$

e

$$\tilde{f}(t) = \frac{t^2}{2}\|\tilde{v}_\varepsilon\|^2_{\mu,a} - \frac{t^{2_*}}{2_*}\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}\tilde{v}^{2_*}_{\varepsilon+}dx.$$

Como $2 < q < 2_*$ e $\tilde{v}_\varepsilon(x) = 0$, se $x \notin B(0, 2\rho_0)$, $k(x) > 0$, para todo $x \in \Omega$, $\Psi(x) = 1$

se $x \in B(0,\rho_0)$ e $v_\varepsilon > 0$, temos que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = -\infty$. Daí, como $f(0) = 0$, temos que $\sup\limits_{t\geq 0} I_{\lambda,\mu}(t\tilde{v}_\varepsilon)$ é atingido, ou seja, para todo $\varepsilon > 0$, existe $t_\varepsilon > 0$ tal que

$$\sup_{t\geq 0} I_{\lambda,\mu}(t\tilde{v}_\varepsilon) = I_{\lambda,\mu}(t_\varepsilon\tilde{v}_\varepsilon).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\sup_{t\geq 0} I_{\lambda,\mu}(t\tilde{v}_\varepsilon) &= \frac{t_\varepsilon^2}{2}\|\tilde{v}_\varepsilon\|_{\mu,a}^2 - \frac{t_\varepsilon^{2_*}}{2_*}\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}\tilde{v}_{\varepsilon_+}^{2_*}dx - \lambda\frac{t_\varepsilon^q}{q}\int_\Omega h(x)|x|^{-c}\tilde{v}_{\varepsilon_+}^q dx \\ &= \tilde{f}(t_\varepsilon) - \lambda\frac{t_\varepsilon^q}{q}\int_\Omega h(x)|x|^{-c}\tilde{v}_{\varepsilon_+}^q dx.\end{aligned}$$

Mas, observando que

$$\tilde{f}'(t) = t\|\tilde{v}_\varepsilon\|_{\mu,a}^2 - t^{2_*-1}\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}\tilde{v}_{\varepsilon_+}^{2_*}dx$$

e que

$$\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}\tilde{v}_{\varepsilon_+}^{2_*}dx > 0,$$

temos que

$$\begin{array}{rcllcl}\tilde{f}'(t) & = & 0 & \Leftrightarrow & t\|\tilde{v}_\varepsilon\|_{\mu,a}^2 - t^{2_*-1}\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}\tilde{v}_{\varepsilon_+}^{2_*}dx & = & 0 \\ & & & \Leftrightarrow & t^{2_*-1}\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}\tilde{v}_{\varepsilon_+}^{2_*}dx & = & t\|\tilde{v}_\varepsilon\|_{\mu,a}^2 \\ & & & \Leftrightarrow & t^{2_*-2} & = & \frac{\|\tilde{v}_\varepsilon\|_{\mu,a}^2}{\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}\tilde{v}_{\varepsilon_+}^{2_*}dx} \\ & & & \Leftrightarrow & t & = & \left(\frac{\|\tilde{v}_\varepsilon\|_{\mu,a}^2}{\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}\tilde{v}_{\varepsilon_+}^{2_*}dx}\right)^{\frac{1}{2_*-2}}.\end{array}$$

Dessa forma, $t_0 = \left(\frac{\|\tilde{v}_\varepsilon\|_{\mu,a}^2}{\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}\tilde{v}_{\varepsilon_+}^{2_*}dx}\right)^{\frac{1}{2_*-2}}$ é um ponto crítico de $\tilde{f}(t)$. Mais ainda, como $\tilde{f}'(t) > 0$, para todo $t < t_0$ e $\tilde{f}'(t) < 0$, para todo $t > t_0$, temos que t_0 é um ponto de máximo de $\tilde{f}(t)$ e

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}(t_0) &= \frac{t_0^2}{2}\|\tilde{v}_\varepsilon\|_{\mu,a}^2 - \frac{t_0^{2_*}}{2_*}\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}\tilde{v}_{\varepsilon_+}^{2_*}dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\|\tilde{v}_\varepsilon\|_{\mu,a}^2}{\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}\tilde{v}_{\varepsilon_+}^{2_*}dx}\right)^{\frac{2}{2_*-2}}\|\tilde{v}_\varepsilon\|_{\mu,a}^2 \\
&\quad - \frac{1}{2_*}\left(\frac{\|\tilde{v}_\varepsilon\|_{\mu,a}^2}{\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}\tilde{v}_{\varepsilon_+}^{2_*}dx}\right)^{\frac{2_*}{2_*-2}}\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}\tilde{v}_{\varepsilon_+}^{2_*}dx \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\|\tilde{v}_\varepsilon\|_{\mu,a}^2\right)^{\frac{2_*}{2_*-2}}}{\left(\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}\tilde{v}_{\varepsilon_+}^{2_*}dx\right)^{\frac{2}{2_*-2}}} \\
&\quad - \frac{1}{2_*}\cdot\frac{\left(\|\tilde{v}_\varepsilon\|_{\mu,a}^2\right)^{\frac{2_*}{2_*-2}}}{\left(\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}\tilde{v}_{\varepsilon_+}^{2_*}dx\right)^{\frac{2}{2_*-2}}} \\
&= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2_*}\right)\cdot\frac{\left(\|\tilde{v}_\varepsilon\|_{\mu,a}^2\right)^{\frac{2_*}{2_*-2}}}{\left(\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}\tilde{v}_{\varepsilon_+}^{2_*}dx\right)^{\frac{2}{2_*-2}}} \\
&= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2_*}\right)\left(\frac{\|\tilde{v}_\varepsilon\|_{\mu,a}^2}{\left(\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}\tilde{v}_{\varepsilon_+}^{2_*}dx\right)^{2/2_*}}\right)^{\frac{2_*}{2_*-2}}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\sup_{t\geq 0} I_{\lambda,\mu}(t\tilde{v}_\varepsilon) \leq \tilde{f}(t_0) - \lambda\frac{t_\varepsilon^q}{q}\int_\Omega h(x)|x|^{-c}\tilde{v}_{\varepsilon_+}^q dx.
$$

Novamente observando que $\tilde{v}_\varepsilon(x) = 0$, se $x \notin B(0, 2\rho_0)$, que da hipótese (H) temos $h(x) \geq h_0 > 0$, $\forall x \in B(0, 2\rho_0)$ e que $\tilde{v}_{\varepsilon_+} = |\tilde{v}_\varepsilon|$, pois $\tilde{v}_\varepsilon \geq 0$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\sup_{t\geq 0} I_{\lambda,\mu}(t\tilde{v}_\varepsilon) &\leq \tilde{f}(t_0) - \frac{\lambda t_\varepsilon^q}{q}h_0\int_{B(0,2\rho_0)}|x|^{-c}|\tilde{v}_\varepsilon|^q dx \\
&\leq \tilde{f}(t_0) \\
&= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2_*}\right)\left(\frac{\|\tilde{v}_\varepsilon\|_{\mu,a}^2}{\left(\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}|\tilde{v}_\varepsilon|^{2_*}dx\right)^{2/2_*}}\right)^{\frac{2_*}{2_*-2}}.
\end{aligned}
$$

Como do Lema 1.2.5

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\|\tilde{v}_\varepsilon\|^2_{\mu,a}}{\left(\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}|\tilde{v}_\varepsilon|^{2_*}dx\right)^{2/2_*}}=0,$$

existe $0<\varepsilon_1<1$ tal que

$$\frac{\|\tilde{v}_\varepsilon\|^2_{\mu,a}}{\left(\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}|\tilde{v}_\varepsilon|^{2_*}dx\right)^{2/2_*}}<|k^+|_\infty^{\frac{-2}{2_*}}(S_{a,b,\mu}),\quad \forall\varepsilon\leq\varepsilon_1.$$

Daí,

$$\sup_{t\geq 0} I_{\lambda,\mu}(t\tilde{v}_{\varepsilon_1})<\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2_*}\right)|k^+|_\infty^{\frac{-2}{2_*-2}}(S_{a,b,\mu})^{\frac{2_*}{2_*-2}}=l^*.$$

□

2.2.1 Demonstração do Teorema 2.1.1

Seja $\lambda>0$. Então, $I_{\lambda,\mu}$ tem um ponto crítico v_λ tal que $I_{\lambda,\mu}(v_\lambda)=c$, onde

$$0<c=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I_{\lambda,\mu}(\gamma(t))$$

e

$$\Gamma=\{\gamma\in C([0,1],H_\mu);\gamma(0)=0,\gamma(1)=t_0\tilde{v}_{\varepsilon_1}\}.$$

De fato, como $\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}\tilde{v}^{2_*}_{\varepsilon_{1_+}}dx>0$, pelo Lema 2.2.1, temos que existe $t_0>0$ e uma sequência $(u_n)\subset H_\mu$, tal que

$$I_{\lambda,\mu}(u_n)\to c\quad\text{e}\quad I'_{\lambda,\mu}(u_n)\to 0 \text{ em } H_\mu^{-1},\tag{2.13}$$

onde

$$0<c=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I_{\lambda,\mu}(\gamma(t))$$

e

$$\Gamma=\{\gamma\in C([0,1],H_\mu);\gamma(0)=0,\gamma(1)=t_0\tilde{v}_{\varepsilon_1}\}.$$

De (2.13), temos que $I_{\lambda,\mu}(u_n)=c+o_n(1)$ e $I'_{\lambda,\mu}(u_n)=o_n(1)$. Usando que

$$-\left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n),u_n\right\rangle\leq|\left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n),u_n\right\rangle|\leq|I'_{\lambda,\mu}(u_n)|\cdot\|u_n\|_{\mu,a},$$

temos

$$\begin{aligned}
c + o_n(1) + o_n(1)\frac{1}{q}\|u_n\|_{\mu,a} &\geq I_{\lambda,\mu}(u_n) - \frac{1}{q}\left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), u_n \right\rangle \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\|u_n\|^2_{\mu,a} + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2_*}\right)\int_\Omega k(x)|x|^{-2_* b} u_{n_+}^{2_*}\,dx \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\|u_n\|^2_{\mu,a}.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Daí, segue que (u_n) é limitada em H_μ. Como H_μ é reflexivo, pelo Teorema 4.2.2, obtemos uma subsequência (u_n) tal que

$$u_n \rightharpoonup v_\lambda \quad \text{em } H_\mu.$$

Segue do Teorema 1.1.8 que v_λ é uma solução fraca do Problema (2.1).

Agora, considere a curva γ_1 dada por $\gamma_1(t) = t(t_0\tilde{v}_{\varepsilon_1})$, em que $\tilde{v}_{\varepsilon_1}$ é proveniente do Lema 2.2.4. Como $\gamma_1 \in C([0,1], H_\mu)$, $\gamma_1(0) = 0$ e $\gamma_1(1) = t_0\tilde{v}_{\varepsilon_1}$, temos que $\gamma_1 \in \Gamma$. Logo, pelo Lema 2.2.4, para todo $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned}
0 < c &= \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I_{\lambda,\mu}(\gamma(t)) \\
&\leq \max_{t\in[0,1]} I_{\lambda,\mu}(t(t_0\tilde{v}_{\varepsilon_1})) \\
&\leq \sup_{s\geq 0} I_{\lambda,\mu}(s\tilde{v}_{\varepsilon_1}) \\
&< l^*.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

De (2.13), (2.15) e do Teorema 2.2.3, temos, a menos de uma subsequência, que $u_n \to v_\lambda$, forte, em H_μ. Portanto, $I_{\lambda,\mu}(u_n) \to I_{\lambda,\mu}(v_\lambda)$ e, por conseguinte, $I_{\lambda,\mu}(v_\lambda) = c$. Dessa forma, $I_{\lambda,\mu}(v_\lambda) > 0$ e, como $I_{\lambda,\mu}(0) = 0$, temos que $v_\lambda \neq 0$. Além disso, do Teorema 1.0.5, temos que v_λ é não negativa.

Concluímos que para todo $\lambda > 0$ o problema (2.1) tem ao menos uma solução, não trivial e não negativa.

Capítulo

3

O problema (1) para $q = 2$

Finalizando o estudo do problema (1), estudaremos o caso em que $q = 2$. Novamente, nos utilizaremos do Teorema do Passo da Montanha para obter ao menos uma solução fraca, não negativa e não trivial para o problema. Entretanto, para verificarmos as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha, necessitaremos do primeiro autovalor associado ao problema de autovalor para o operador $L_{\mu,a}u := -\operatorname{div}(|x|^{-2a}\nabla u) - \mu|x|^{-2(a+1)}u$. Especificamente, estamos interessados na obtenção do primeiro autovalor para o problema:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|x|^{2a}}\right) - \mu\frac{u}{|x|^{2(a+1)}} = \lambda h(x)|x|^{-c}u & \text{em } \Omega\backslash\{0\}, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

com Ω um domínio aberto e limitado, $N \geq 3$, $0 \in \Omega$, $a < \frac{N-2}{2}$, $c < 2(a+1)$, $0 \leq \mu < \bar{\mu}_a := \frac{(N-2(a+1))^2}{4}$, λ um parâmetro positivo e h uma função contínua e positiva definida em $\bar{\Omega}$. Além disso, o primeiro autovalor deverá ser positivo.

Devido ao problema (3.1) deveremos acrescentar a hipótese $h(x) > 0$, para todo $x \in \Omega$, todavia, é válido ressaltar que neste capítulo tratamos k como uma função que pode mudar de sinal em $\bar{\Omega}$.

3.1 O primeiro autovalor para o problema (3.1)

Considere o problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|x|^{2a}}\right) - \mu \frac{u}{|x|^{2(a+1)}} = \lambda f(x) u & \text{em } \Omega\backslash\{0\}, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.2}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio aberto e limitado; $N \geq 3$; $0 \in \Omega$; $0 \leq a < \frac{N-2}{2}$; $0 \leq \mu < \bar{\mu}_a := \frac{(N-2(a+1))^2}{4}$; λ é um parâmetro positivo; f é uma função mensurável e positiva em Ω.

Como visto em Wu [25], o primeiro autovalor para o problema (3.2) é caracterizado por

$$\lambda_1 = \inf\left\{\int_\Omega \left(|x|^{-2a}|\nabla u|^2 - \mu|x|^{-2(a+1)u^2}\right) dx; u \in H_\mu, \int_\Omega f(x)u^2 dx = 1\right\}. \tag{3.3}$$

Além disso, ele provou que se

$$f \in \mathcal{F} = \left\{f : \Omega \to \mathbb{R}^+; \lim_{|x|\to 0} |x|^{2(a+1)} f(x) = 0, f \in L^\infty_{loc}(\bar{\Omega}\backslash\{0\})\right\},$$

então $\lambda_1 > 0$.

Defina $g(x) = |x|^{-c}h(x)$, para todo $x \in \bar{\Omega}$. Como h é positiva e contínua em $\bar{\Omega}$ (logo, limitada), temos que g é positiva em Ω e contínua em $\bar{\Omega}\backslash\{0\}$. Além disso, já que $c < 2(a+1)$, temos que $\lim\limits_{|x|\to 0} |x|^{2(a+1)}|x|^{-c}h(x) = 0$. Com isso, obtemos que $g \in \mathcal{F}$.

Concluímos que o primeiro autovalor para o problema (3.1) é caracterizado por

$$\lambda_1 = \inf\left\{\int_\Omega \left(|x|^{-2a}|\nabla u|^2 - \mu|x|^{-2(a+1)u^2}\right) dx; u \in H_\mu, \int_\Omega |x|^{-c}h(x)u^2 dx = 1\right\}. \tag{3.4}$$

e é positivo.

3.2 O problema (1) para q=2

Considere o problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|x|^{2a}}\right) - \mu \frac{u}{|x|^{2(a+1)}} = \lambda h(x)\frac{u}{|x|^c} + k(x)\frac{|u|^{2_*-2}u}{|x|^{2_*b}} & \text{em } \Omega\backslash\{0\}, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.5}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio aberto e limitado; $N \geq 3$; $0 \in \Omega$; $a < \frac{N-2}{2}$; $a \leq b < a+1$; $c < 2(a+1)$; $2_* := \frac{2N}{N-2+2(b-a)}$ é o expoente crítico de Caffarelli-Kohn-Nirenberg; $0 \leq \mu < \bar{\mu}_a := \frac{(N-2(a+1))^2}{4}$; λ é um parâmetro positivo; h e k são funções contínuas em $\bar{\Omega}$, com k podendo mudar de sinal em $\bar{\Omega}$ e h positiva em Ω.

Considere, também, as hipóteses (K), (A1) e (A2) do Capítulo 2. Em substituição à hipótese (H), considere a hipótese

(H') h é uma função contínua em $\bar{\Omega}$ tal que $h(x) > 0$, para todo $x \in \Omega$.

Nosso objetivo será demonstrar o seguinte

Teorema 3.2.1. *Suponha que $a < (N-2)/2$, $a \leq b < a+1$, $q = 2$, $c < 2(a+1)$, $0 \leq \mu < \bar{\mu}_a := \frac{(N-2(a+1))^2}{4}$, (H'), (K) são válidas e (A1) ou (A2) é satisfeita. Se λ_1 é o primeiro autovalor para o problema (3.1), então, para todo $\lambda \in (0, \lambda_1)$, o problema (1) tem ao menos uma solução não negativa em H_μ.*

3.3 Demonstração do Teorema 3.2.1

Lema 3.3.1. *Seja λ_1 o primeiro autovalor para o problema (3.1). Se $\lambda \in (0, \lambda_1)$, então, existe uma sequência $(PS)_c$, $(u_n) \subset H_\mu$, para $I_{\lambda,\mu}$, com*

$$0 < c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I_{\lambda,\mu}(\gamma(t)),$$

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1]); \gamma(0) = 0, \gamma(1) = t_0 u_0\}$$

e $u_0 \in H_\mu$ é tal que $\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}u_{0_+}^{2_*} > 0$.

Demonstração. Verificaremos que $I_{\lambda,\mu}$ satisfaz as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais-Smale. De fato,

1) $I_{\lambda,\mu}(0) = 0$.

2) Sejam $u \in H_\mu$ e $\lambda \in (0, \lambda_1)$. Considere $v = \dfrac{u}{\left(\int_\Omega h(x)|x|^{-c}u^2 dx\right)^{1/2}}$. Note que $v \in H_\mu$ e

$$\begin{aligned}
\int_\Omega h(x)|x|^{-c}v^2 dx &= \int_\Omega h(x)|x|^{-c}\left(\frac{u^2}{\int_\Omega h(x)|x|^{-c}u^2 dx}\right)dx \\
&= \frac{\int_\Omega h(x)|x|^{-c}u^2 dx}{\int_\Omega h(x)|x|^{-c}u^2 dx} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &\leq \|v\|_{\mu,a}^2 \\
&= \frac{\|u\|_{\mu,a}^2}{\int_\Omega h(x)|x|^{-c}u^2 dx}
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\int_\Omega h(x)|x|^{-c}u^2 dx \leq \frac{\|u\|_{\mu,a}^2}{\lambda_1}. \tag{3.6}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
I_{\lambda,\mu}(u) &= \frac{1}{2}\|u\|_{\mu,a}^2 - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega h(x)|x|^{-c}u_+^2 dx - \frac{1}{2_*}\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}u_+^{2_*} dx \\
&\geq \frac{1}{2}\|u\|_{\mu,a}^2 - \frac{\lambda}{2}\cdot\frac{\|u\|_{\mu,a}^2}{\lambda_1} - \frac{1}{2_*}|k^+|_\infty (S_{a,b,\mu})^{-2_*/2}\|u\|_{\mu,a}^{2_*} \qquad (3.7) \\
&= \|u\|_{\mu,a}^2\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) - \frac{1}{2_*}|k^+|_\infty (S_{a,b,\mu})^{-2_*/2}\|u\|_{\mu,a}^{2_*-2}\right].
\end{aligned}$$

Como $\lambda \in (0, \lambda_1)$, temos que $1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} > 0$.

Defina $H : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$H(s) = \frac{1}{2_*}|k^+|_\infty (S_{a,b,\mu})^{-2_*/2} s^{2_*-2}.$$

Note que $H(s) \to 0$ quando $s \to 0$. Assim, existe $\rho > 0$ tal que $H(s) < \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)$, para todo $0 < s \leq \rho$. Voltando em (3.7), obtemos que existe $\delta > 0$ tal que $I_{\lambda,\mu}(u) \geq \delta > 0$, para todo $u \in H_\mu$ tal que $\|u\|_{\mu,a} = \rho$.

3) Dados $t > 0$ e $u_0 \in H_\mu$ tal que $\int_\Omega k(x)|x|^{-2_* b} u_{0_+}^{2_*} > 0$, temos

$$I_{\lambda,\mu}(tu_0) = \frac{t^2}{2}\|u_0\|_{\mu,a}^2 - \lambda \frac{t^2}{2}\int_\Omega h(x)|x|^{-c} u_{0_+}^2 dx - \frac{t^{2_*}}{2_*}\int_\Omega k(x)|x|^{-2_* b} u_{0_+}^{2_*} dx.$$

Como $2 < 2_*$, temos que $I_{\lambda,\mu}(tu_0) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$. Daí, existe $t_0 > 0$ tal que $\|t_0 u_0\|_{\mu,a} > \rho$ e $I_{\lambda,\mu}(t_0 u_0) < 0$.

De 1), 2) e 3) concluímos que $I_{\lambda,\mu}$ satisfaz as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais-Smale. Portanto, existe uma sequência $(u_n) \subset H_\mu$ tal que $I_{\lambda,\mu}(u_n) \to c$ e $I'_{\lambda,\mu}(u_n) \to 0$ em H_μ^{-1}, quando $n \to \infty$; em que

$$0 < c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I_{\lambda,\mu}(\gamma(t))$$

e

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1]); \gamma(0) = 0, \gamma(1) = t_0 u_0\}.$$

□

Lema 3.3.2. *Sejam (u_n) uma sequência $(PS)_l$ com $u_n \rightharpoonup u$, fracamente em H_μ, quando $n \to \infty$ e λ_1 o primeiro autovalor para o problema (3.1). Se $\lambda \in (0, \lambda_1)$, então,*

$$I'_{\lambda,\mu}(u) = 0 \text{ em } H_\mu^{-1} \text{ e } I_{\lambda,\mu}(u) \geq 0.$$

Demonstração. Como (u_n) é uma sequência $(PS)_l$ com $u_n \rightharpoonup u$, fracamente em H_μ, quando $n \to \infty$, pelo Teorema 1.1.8, temos que u é uma solução fraca de (1). Daí, obtemos que $I'_{\lambda,\mu}(u) = 0$ em H_μ^{-1}.

Agora, observe que

$$
\begin{aligned}
I_{\lambda,\mu}(u) - \frac{1}{2_*}\left\langle I'_{\lambda,\mu}(u), u\right\rangle &= \frac{1}{2}\|u\|^2_{\mu,a} - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega h(x)|x|^{-c}u_+^2dx - \frac{1}{2_*}\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}u_+^{2_*}dx \\
&\quad - \frac{1}{2_*}\left(\int_\Omega (|x|^{-2a}|\nabla u|^2 - \mu|x|^{-2(a+1)}u^2)dx\right. \\
&\quad \left. -\lambda\int_\Omega h(x)|x|^{-c}u_+udx - \int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}u_+^{2_*-1}udx\right) \\
&= \frac{1}{2}\|u\|^2_{\mu,a} - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega h(x)|x|^{-c}u_+^2dx - \frac{1}{2_*}\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}u_+^{2_*}dx \\
&\quad - \frac{1}{2_*}\|u\|^2_{\mu,a} + \frac{1}{2_*}\lambda\int_\Omega h(x)|x|^{-c}u_+^2dx \\
&\quad + \frac{1}{2_*}\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}u_+^{2_*}dx \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)\|u\|^2_{\mu,a} - \lambda\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)\int_\Omega h(x)|x|^{-c}u_+^2dx.
\end{aligned}
$$

Como $I'_{\lambda,\mu}(u) = 0$ em H_μ^{-1}, temos $\left\langle I'_{\lambda,\mu}(u), u\right\rangle = 0$. Dessa forma,

$$
\begin{aligned}
I_{\lambda,\mu}(u) &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)\|u\|^2_{\mu,a} - \lambda\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)\int_\Omega h(x)|x|^{-c}u_+^2dx \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)\|u\|^2_{\mu,a} - \lambda\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)\frac{\|u\|^2_{\mu,a}}{\lambda_1} \\
&= \|u\|^2_{\mu,a}\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)\frac{\lambda}{\lambda_1}\right] \\
&= \|u\|^2_{\mu,a}\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\right].
\end{aligned}
$$

Já que $2 < 2_*$ e $\lambda \in (0, \lambda_1)$, temos que

$$
I_{\lambda,\mu}(u) \geq 0.
$$

□

Teorema 3.3.3. *Seja (u_n) em H_μ tal que*

$$
I_{\lambda,\mu}(u_n) \to l < l^* = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)|k^+|_\infty^{\frac{-2}{2_*-2}}(S_{a,b,\mu})^{2_*/(2_*-2)} \tag{3.8}
$$

e

$$I'_{\lambda,\mu}(u_n) \to 0 \ \text{em} \ H_\mu^{-1}, \ \text{quando} \ n \to \infty. \tag{3.9}$$

Se λ_1 é o primeiro autovalor para o problema (3.1) e $\lambda \in (0, \lambda_1)$, então, existe uma subsequência fortemente convergente.

Demonstração. De (3.8) e (3.9) temos que $I_{\lambda,\mu}(u_n) = l + o_n(1)$ e $I'_{\lambda,\mu}(u_n) = o_n(1)$. Sabendo que

$$-\left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), u_n \right\rangle \leq |\left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), u_n \right\rangle| \leq |I'_{\lambda,\mu}(u_n)| \cdot \|u_n\|_{\mu,a},$$

temos

$$\begin{aligned} l + o_n(1) + o_n(1)\frac{1}{2_*}\|u_n\|_{\mu,a} &\geq I_{\lambda,\mu}(u_n) - \frac{1}{2_*}\left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), u_n \right\rangle \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)\|u_n\|^2_{\mu,a} - \lambda\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)\int_\Omega h(x)|x|^{-c}u^2_{n_+}dx \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)\|u\|^2_{\mu,a} - \lambda\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)\frac{\|u\|^2_{\mu,a}}{\lambda_1} \\ &= \|u\|^2_{\mu,a}\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)\frac{\lambda}{\lambda_1}\right] \\ &= \|u\|^2_{\mu,a}\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Daí, segue que (u_n) é limitada em H_μ.

Como H_μ é reflexivo, pelo Teorema 4.2.2, a menos de uma subsequência, temos que

$$u_n \rightharpoonup u_\lambda \ \text{em} \ H_\mu, \ \text{quando} \ n \to \infty.$$

Segue do Teorema 1.1.8 que u é uma solução fraca do problema (1).

Denote $v_n = u_n - u$. Como a função $k(x)$ é contínua em Ω, pelo Teorema 4.2.4, temos que

$$\int_\Omega k(x)\frac{u^{2_*}_{n_+}}{|x|^{2_*b}}dx = \int_\Omega k(x)\frac{v^{2_*}_{n_+}}{|x|^{2_*b}}dx + \int_\Omega k(x)\frac{u^{2_*}_{+}}{|x|^{2_*b}}dx + o_n(1) \tag{3.11}$$

e

$$\|u_n\|^2_{\mu,a} = \|v_n\|^2_{\mu,a} + \|u\|^2_{\mu,a} + o_n(1). \tag{3.12}$$

Pelo Teorema da Convergência Domiada de Lebesgue, temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega h(x) \frac{u^2_{n_+}}{|x|^c} dx = \int_\Omega h(x) \frac{u^2_+}{|x|^c} dx. \tag{3.13}$$

De (3.11), (3.12) e (3.13), segue que

$$\begin{aligned}
I_{\lambda,\mu}(u_n) &= \frac{1}{2}\|u_n\|^2_{\mu,a} - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega h(x)\frac{u^2_{n_+}}{|x|^c}dx - \frac{1}{2_*}\int_\Omega k(x)\frac{u^{2_*}_{n_+}}{|x|^{2_*b}}dx \\
&= \frac{1}{2}\|v_n\|^2_{\mu,a} + \frac{1}{2}\|u\|^2_{\mu,a} - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega h(x)\frac{u^2_+}{|x|^c}dx - \frac{1}{2_*}\int_\Omega k(x)\frac{v^{2_*}_{n_+}}{|x|^{2_*b}}dx \\
&\quad - \frac{1}{2_*}\int_\Omega k(x)\frac{u^{2_*}_+}{|x|^{2_*b}}dx + o_n(1) \\
&= I_{\lambda,\mu}(u) + \frac{1}{2}\|v_n\|^2_{\mu,a} - \frac{1}{2_*}\int_\Omega k(x)\frac{v^{2_*}_{n_+}}{|x|^{2_*b}}dx + o_n(1),
\end{aligned} \tag{3.14}$$

e

$$\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), u_n\rangle = \langle I'_{\lambda,\mu}(u), u\rangle + \|v_n\|^2_{\mu,a} - \int_\Omega k(x)\frac{v^{2_*}_{n_+}}{|x|^{2_*b}}dx + o_n(1).$$

Logo,

$$\|v_n\|^2_{\mu,a} - \int_\Omega k(x)\frac{v^{2_*}_{n_+}}{|x|^{2_*b}}dx = \langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), u_n\rangle - \langle I'_{\lambda,\mu}(u), u\rangle + o_n(1).$$

Como u é uma solução fraca de (3.5), temos que

$$\left\langle I'_{\lambda,\mu}(u), u\right\rangle = 0. \tag{3.15}$$

Também, como $I'_{\lambda,\mu}(u_n) \to 0$, em H^{-1}_μ, quando $n \to \infty$ e (u_n) é limitada em H_μ, temos que

$$|I'_{\lambda,\mu}(u_n)|\|u_n\|_{\mu,a} \to 0, \text{ quando } n \to \infty.$$

Mas,

$$|\left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), u_n\right\rangle| \leq |I'_{\lambda,\mu}(u_n)|\|u_n\|_{\mu,a},$$

ou seja,

$$|\left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), u_n\right\rangle| \to 0, \text{ quando } n \to \infty. \tag{3.16}$$

Segue de (3.15) e (3.16) que

$$\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), u_n\rangle - \langle I'_{\lambda,\mu}(u), u\rangle = o_n(1)$$

e, portanto,

$$\|v_n\|^2_{\mu,a} - \int_\Omega k(x)\frac{v_{n_+}^{2_*}}{|x|^{2_*b}}dx = o_n(1). \tag{3.17}$$

Mas, como (v_n) é limitada, temos que $(\|v_n\|_{\mu,a})$ é uma sequência de números reais limitada. Logo, pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, a menos de uma subsequência, $\lim\limits_{n\to\infty} \|v_n\|_{\mu,a}$ existe. Daí, de (3.17)

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n\|^2_{\mu,a} = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega k(x)\frac{v_{n_+}^{2_*}}{|x|^{2_*b}}dx$$

e, assim, existe $\theta \geq 0$ tal que

$$\|v_n\|^2_{\mu,a} \to \theta \quad \text{e} \quad \int_\Omega k(x)\frac{v_{n_+}^{2_*}}{|x|^{2_*b}}dx \to \theta, \text{ quando } n \to \infty.$$

Agora, da definição de $S_{a,b,\mu}$, temos

$$\begin{aligned}
\|v_n\|^2_{\mu,a} &\geq S_{a,b,\mu}\Big(\int_\Omega \frac{v_{n_+}^{2_*}}{|x|^{2_*b}}dx\Big)^{2/2_*} \\
&= S_{a,b,\mu}\Big(\int_\Omega \frac{v_{n_+}^{2_*}}{|x|^{2_*b}}dx\Big)^{2/2_*}\left(\frac{|k^+|_\infty}{|k^+|_\infty}\right)^{2/2_*} \\
&= S_{a,b,\mu}\Big(\int_\Omega |k^+|_\infty\frac{v_{n_+}^{2_*}}{|x|^{2_*b}}dx\Big)^{2/2_*}|k^+|_\infty^{-2/2_*} \\
&\geq S_{a,b,\mu}\Big(\int_\Omega k(x)\frac{v_{n_+}^{2_*}}{|x|^{2_*b}}dx\Big)^{2/2_*}|k^+|_\infty^{-2/2_*}.
\end{aligned}$$

Fazendo $n \longrightarrow \infty$, temos

$$\theta \geq S_{a,b,\mu}|k^+|_\infty^{-2/2_*}\theta^{2/2_*}.$$

Suponha que $\theta \neq 0$. Daí,

$$\theta^{(2_*-2)/2_*} \geq S_{a,b,\mu}|k^+|_\infty^{-2/2_*}$$

e, assim,

$$\theta \geq S_{a,b,\mu}^{2_*/(2_*-2)}|k^+|_\infty^{-2/(2_*-2)}.$$

Segue de (3.14) e do Lema 3.3.2 que

$$\begin{aligned} l &= I_{\lambda,\mu}(u) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)\theta \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)|k^+|_\infty^{\frac{-2}{2_*-2}}(S_{a,b,\mu})^{2_*/(2_*-2)} = l^* \end{aligned}$$

o que é uma contradição. Logo, $\theta = 0$ e, portanto,

$$\|v_n\|_{\mu,a}^2 \to 0, \text{ quando } n \to +\infty,$$

ou seja,

$$\|u_n - u\|_{\mu,a}^2 \to 0, \text{ quando } n \to +\infty,$$

o que implica

$$\|u_n - u\|_{\mu,a} \longrightarrow 0, \text{ quando } n \to +\infty.$$

Assim, $u_n \longrightarrow u$ forte em H_μ, quando $n \to +\infty$. $\square$

Se procedermos como na Seção 1.2 do Capítulo 1 e considerarmos $\tilde{v}_\varepsilon(x) = \Psi(x)v_\varepsilon(x)$, temos que o Lema 1.2.5 continua válido. Obtemos, assim, o seguinte

Lema 3.3.4. *Suponha que as hipóteses (H'), (K) e (A1) ou (A2) sejam válidas e que $\mu \geq 0$. Sejam l^* como definido no Teorema 3.3.3 e λ_1 o primeiro autovalor para o problema (3.1). Então, existe $\varepsilon_1 \in (0,1)$ tal que*

$$\sup_{t \geq 0} I_{\lambda,\mu}(t\tilde{v}_{\varepsilon_1}) < l^*,$$

para todo $\lambda \in (0, \lambda_1)$.

Demonstração. Seja $\lambda \in (0, \lambda_1)$. Considere as seguintes funções:

$$f(t) = I_{\lambda,\mu}(t\tilde{v}_\varepsilon) = \frac{t^2}{2}\|\tilde{v}_\varepsilon\|^2_{\mu,a} - \frac{t^{2_*}}{2_*}\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}\tilde{v}^{2_*}_{\varepsilon_+}dx - \lambda\frac{t^2}{2}\int_\Omega h(x)|x|^{-c}\tilde{v}^2_{\varepsilon_+}dx$$

e

$$\tilde{f}(t) = \frac{t^2}{2}\|\tilde{v}_\varepsilon\|^2_{\mu,a} - \frac{t^{2_*}}{2_*}\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}\tilde{v}^{2_*}_{\varepsilon_+}dx,$$

definidas em $[0, +\infty)$. Como $\tilde{v}_\varepsilon(x) = 0$, se $x \notin B(0, 2\rho_0)$, $k(x) > 0$, para todo $x \in B(0, 2\rho_0)$, $\Psi(x) = 1$ se $x \in B(0, \rho_0)$ e $v_\varepsilon > 0$, temos que $\displaystyle\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}\tilde{v}^{2_*}_{\varepsilon_+}dx > 0$. Já que $2 < 2_*$, segue que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = -\infty$. Daí, como $f(0) = 0$, temos que $\displaystyle\sup_{t\geq 0} I_{\lambda,\mu}(t\tilde{v}_\varepsilon)$ é atingido, ou seja, para todo $\varepsilon > 0$, existe $t_\varepsilon > 0$ tal que

$$\sup_{t\geq 0} I_{\lambda,\mu}(t\tilde{v}_\varepsilon) = I_{\lambda,\mu}(t_\varepsilon\tilde{v}_\varepsilon).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\sup_{t\geq 0} I_{\lambda,\mu}(t\tilde{v}_\varepsilon) &= \frac{t_\varepsilon^2}{2}\|\tilde{v}_\varepsilon\|^2_{\mu,a} - \frac{t_\varepsilon^{2_*}}{2_*}\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}\tilde{v}^{2_*}_{\varepsilon_+}dx - \lambda\frac{t_\varepsilon^2}{2}\int_\Omega h(x)|x|^{-c}\tilde{v}^2_{\varepsilon_+}dx \\ &= \tilde{f}(t_\varepsilon) - \lambda\frac{t_\varepsilon^2}{2}\int_\Omega h(x)|x|^{-c}\tilde{v}^2_{\varepsilon_+}dx.\end{aligned}$$

Mas, observando que

$$\tilde{f}'(t) = t\|\tilde{v}_\varepsilon\|^2_{\mu,a} - t^{2_*-1}\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}\tilde{v}^{2_*}_{\varepsilon_+}dx$$

e que

$$\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}\tilde{v}^{2_*}_{\varepsilon_+}dx > 0,$$

temos que

$$\begin{array}{rcrcl}
\tilde{f}'(t) = 0 & \Leftrightarrow & t\|\tilde{v}_\varepsilon\|^2_{\mu,a} - t^{2_*-1}\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}\tilde{v}^{2_*}_{\varepsilon_+}dx & = & 0 \\
& \Leftrightarrow & t^{2_*-1}\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}\tilde{v}^{2_*}_{\varepsilon_+}dx & = & t\|\tilde{v}_\varepsilon\|^2_{\mu,a} \\
& \Leftrightarrow & t^{2_*-2} & = & \frac{\|\tilde{v}_\varepsilon\|^2_{\mu,a}}{\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}\tilde{v}^{2_*}_{\varepsilon_+}dx} \\
& \Leftrightarrow & t & = & \left(\frac{\|\tilde{v}_\varepsilon\|^2_{\mu,a}}{\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}\tilde{v}^{2_*}_{\varepsilon_+}dx}\right)^{\frac{1}{2_*-2}}.
\end{array}$$

Dessa forma, $t_0 = \left(\frac{\|\tilde{v}_\varepsilon\|^2_{\mu,a}}{\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}\tilde{v}^{2_*}_{\varepsilon_+}dx}\right)^{\frac{1}{2_*-2}}$ é um ponto crítico de $\tilde{f}(t)$. Mais ainda, como $\tilde{f}'(t) > 0$, para todo $t < t_0$ e $\tilde{f}'(t) < 0$, para todo $t > t_0$, temos que t_0 é um ponto de máximo de $\tilde{f}(t)$ e

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(t_0) &= \frac{t_0^2}{2}\|\tilde{v}_\varepsilon\|^2_{\mu,a} - \frac{t_0^{2_*}}{2_*}\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}\tilde{v}^{2_*}_{\varepsilon_+}dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\|\tilde{v}_\varepsilon\|^2_{\mu,a}}{\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}\tilde{v}^{2_*}_{\varepsilon_+}dx}\right)^{\frac{2}{2_*-2}}\|\tilde{v}_\varepsilon\|^2_{\mu,a} \\
&\quad - \frac{1}{2_*}\left(\frac{\|\tilde{v}_\varepsilon\|^2_{\mu,a}}{\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}\tilde{v}^{2_*}_{\varepsilon_+}dx}\right)^{\frac{2_*}{2_*-2}}\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}\tilde{v}^{2_*}_{\varepsilon_+}dx \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\|\tilde{v}_\varepsilon\|^2_{\mu,a}\right)^{\frac{2_*}{2_*-2}}}{\left(\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}\tilde{v}^{2_*}_{\varepsilon_+}dx\right)^{\frac{2}{2_*-2}}} \\
&\quad - \frac{1}{2_*}\cdot\frac{\left(\|\tilde{v}_\varepsilon\|^2_{\mu,a}\right)^{\frac{2_*}{2_*-2}}}{\left(\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}\tilde{v}^{2_*}_{\varepsilon_+}dx\right)^{\frac{2}{2_*-2}}} \\
&= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2_*}\right)\cdot\frac{\left(\|\tilde{v}_\varepsilon\|^2_{\mu,a}\right)^{\frac{2_*}{2_*-2}}}{\left(\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}\tilde{v}^{2_*}_{\varepsilon_+}dx\right)^{\frac{2}{2_*-2}}} \\
&= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2_*}\right)\left(\frac{\|\tilde{v}_\varepsilon\|^2_{\mu,a}}{\left(\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}\tilde{v}^{2_*}_{\varepsilon_+}dx\right)^{2/2_*}}\right)^{\frac{2_*}{2_*-2}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sup_{t\geq 0} I_{\lambda,\mu}(t\tilde{v}_\varepsilon) \leq \tilde{f}(t_0) - \lambda\frac{t_\varepsilon^2}{2}\int_\Omega h(x)|x|^{-c}\tilde{v}^2_{\varepsilon_+}dx.$$

Observando que $\tilde{v}_\varepsilon(x) \geq 0$, para todo $x \in \Omega$, que da hipótese (H') temos $h(x) > 0$,

$\forall x \in \Omega$ e que $\lambda \in (0, \lambda_1)$, obtemos

$$\lambda \frac{t_\varepsilon^2}{2} \int_\Omega h(x)|x|^{-c} \tilde{v}_{\varepsilon_+}^2 \, dx \geq 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 0} I_{\lambda,\mu}(t\tilde{v}_\varepsilon) &\leq \tilde{f}(t_0) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right) \left(\frac{\|\tilde{v}_\varepsilon\|_{\mu,a}^2}{\left(\int_\Omega k(x)|x|^{-2_* b} \tilde{v}_{\varepsilon_+}^{2_*} dx\right)^{2/2_*}} \right)^{\frac{2_*}{2_*-2}} \end{aligned}$$

Como do Lema 1.2.5

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\|\tilde{v}_\varepsilon\|_{\mu,a}^2}{\left(\int_\Omega k(x)|x|^{-2_* b} |\tilde{v}_\varepsilon|^{2_*} dx\right)^{2/2_*}} = 0,$$

existe $0 < \varepsilon_1 < 1$ tal que

$$\frac{\|\tilde{v}_\varepsilon\|_{\mu,a}^2}{\left(\int_\Omega k(x)|x|^{-2_* b} |\tilde{v}_\varepsilon|^{2_*} dx\right)^{2/2_*}} < |k^+|_\infty^{\frac{-2}{2_*}} (S_{a,b,\mu}), \quad \forall \varepsilon \leq \varepsilon_1.$$

Assim,

$$\sup_{t \geq 0} I_{\lambda,\mu}(t\tilde{v}_{\varepsilon_1}) < \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right) |k^+|_\infty^{\frac{-2}{2_*-2}} (S_{a,b,\mu})^{\frac{2_*}{2_*-2}} = l^*.$$

$\square$

3.3.1 Demonstração do Teorema 3.2.1

Seja $\lambda \in (0, \lambda_1)$. Então, $I_{\lambda,\mu}$ tem um ponto crítico v_λ tal que $I_{\lambda,\mu}(v_\lambda) = c$, onde

$$0 < c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I_{\lambda,\mu}(\gamma(t))$$

e

$$\Gamma = \left\{ \gamma \in C([0,1], H_\mu); \gamma(0) = 0, \gamma(1) = t_0 \tilde{v}_{\varepsilon_1} \right\}.$$

De fato, como $\int_\Omega k(x)|x|^{-2_*b}\tilde{v}_{\varepsilon 1_+}^{2_*}\,dx > 0$, pelo Lema 3.3.1, temos que existe $t_0 > 0$ e uma sequência $(u_n) \subset H_\mu$, tal que

$$I_{\lambda,\mu}(u_n) \to c \quad \text{e} \quad I'_{\lambda,\mu}(u_n) \to 0 \text{ em } H_\mu^{-1}, \text{ quando } n \to \infty \tag{3.18}$$

onde

$$0 < c = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I_{\lambda,\mu}(\gamma(t))$$

e

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], H_\mu); \gamma(0) = 0, \gamma(1) = t_0\tilde{v}_{\varepsilon_1}\}.$$

De (3.18), temos que $I_{\lambda,\mu}(u_n) = c + o_n(1)$ e $I'_{\lambda,\mu}(u_n) = o_n(1)$. Usando que

$$-\left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), u_n\right\rangle \le |\left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), u_n\right\rangle| \le |I'_{\lambda,\mu}(u_n)| \cdot \|u_n\|_{\mu,a},$$

temos

$$\begin{aligned}
c + o_n(1) + o_n(1)\frac{1}{2_*}\|u_n\|_{\mu,a} &\ge I_{\lambda,\mu}(u_n) - \frac{1}{2_*}\left\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n), u_n\right\rangle \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)\|u_n\|_{\mu,a}^2 - \lambda\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)\int_\Omega h(x)|x|^{-c}u_{n+}^2\,dx \\
&\ge \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)\|u\|_{\mu,a}^2 - \lambda\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)\frac{\|u\|_{\mu,a}^2}{\lambda_1} \\
&= \|u\|_{\mu,a}^2\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)\frac{\lambda}{\lambda_1}\right] \\
&= \|u\|_{\mu,a}^2\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\right].
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Daí, segue que (u_n) é limitada em H_μ.

Como (u_n) é limitada em H_μ e H_μ é reflexivo, pelo Teorema 4.2.2, obtemos uma subsequência (u_n) tal que

$$u_n \rightharpoonup v_\lambda \quad \text{em } H_\mu \text{ quando } n \to \infty.$$

Daí, pelo Teorema 1.1.8, v_λ é uma solução fraca do problema (3.5).

Agora, considere a curva γ_1 dada por $\gamma_1(t) = t(t_0\tilde{v}_{\varepsilon_1})$. Como $\gamma_1 \in C([0,1], H_\mu)$, $\gamma_1(0) = 0$ e $\gamma_1(1) = t_0\tilde{v}_{\varepsilon_1}$, temos que $\gamma_1 \in \Gamma$. Pelo Lema 3.3.4, para todo $\lambda \in (0, \lambda_1)$,

$$\begin{aligned} 0 < c &= \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I_{\lambda,\mu}(\gamma(t)) \\ &\leq \max_{t \in [0,1]} I_{\lambda,\mu}(t(t_0\tilde{v}_{\varepsilon_1})) \\ &\leq \sup_{s \geq 0} I_{\lambda,\mu}(s\tilde{v}_{\varepsilon_1}) \\ &< l^*. \end{aligned} \tag{3.20}$$

De (3.18), (3.20) e do Teorema 3.3.3, temos, a menos de uma subsequência, que $u_n \to v_\lambda$, forte, em H_μ. Portanto, $I_{\lambda,\mu}(u_n) \to I_{\lambda,\mu}(v_\lambda)$ e, por conseguinte, $I_{\lambda,\mu}(v_\lambda) = c$. Dessa forma, $I_{\lambda,\mu}(v_\lambda) > 0$ e, como $I_{\lambda,\mu}(0) = 0$, temos que $v_\lambda \neq 0$. Além disso, do Teorema 1.0.5, temos que v_λ é não negativa.

Concluímos que para todo $\lambda \in (0, \lambda_1)$ o problema (1) tem ao menos uma solução, não trivial e não negativa.

Capítulo

4

Alguns resultados utilizados

Neste capítulo listaremos os principais resultados utilizados neste trabalho.

Em todo capítulo denotaremos por X um espaço de Banach e por X^{-1} seu dual.

4.1 Desigualdades

Teorema 4.1.1. *Sejam A, B e $k \geq 1$ reais não negativos. Então,*

$$(A+B)^k \leq 2^{k-1}\left(A^k + B^k\right).$$

Demonstração. Veja [2][Lema2.2]. □

Teorema 4.1.2 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam p, p' tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ e $1 \leq p \leq \infty$. Se $f \in L^p$ e $g \in L^{p'}$, então $fg \in L^1$ e*

$$\int |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Demonstração. Veja [6][Teorema 4.6]. □

4.2 Resultados básicos

Proposição 4.2.1. *Seja (x_n) uma sequência em X tal que $x_n \rightharpoonup x$, quando $n \to \infty$. Então, (x_n) é limitada.*

Demonstração. Veja [6][Proposição 3.5]. □

Teorema 4.2.2. *Se X é um espaço de Banach reflexivo, então toda sequência limitada em X possui uma subsequência fracamente convergente.*

Demonstração. Veja [6][Teorema 3.18]. □

Teorema 4.2.3. *Sejam Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$, (f_n) uma sequência em L^p e $f \in L^p$ tais que $\|f_n - f\|_p \to 0$, quando $n \to +\infty$. Então, existem uma subsequência (f_{n_k}) e uma função $h \in L^p$ tais que*
a) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ q.t.p em Ω, quando $n \to +\infty$;
b) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x), \quad \forall k,$ q.t.p em Ω.

Demonstração. Veja [6][Teorema 4.9]. □

Teorema 4.2.4 (Brezis-Lieb)**.** *Sejam Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$ e (f_n) uma sequência de funções mensuráveis e uniformemente limitada em $L^p(\Omega)$, para algum $0 < p < \infty$ tal que $f_n(x) \to f(x)$, q.t.p em Ω, quando $n \to \infty$. Então, o limite*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\|f_n\|_p^p - \|f_n - f\|_p^p\right)$$

existe e vale a igualdade

$$\lim_{n\to\infty} \left(\|f_n\|_p^p - \|f_n - f\|_p^p\right) = \|f\|_p^p.$$

Demonstração. Veja [7][Teorema 1]. □

Teorema 4.2.5 (Teorema do Valor Médio)**.** *Seja $f : U \to \mathbb{R}$ definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^N$. Supohamos que o segmento de reta $[a, a + v]$ esteja contido em U, que a* *restrição* $f|_{[a,a+v]}$ *seja contínua e que exista a derivada direcional* $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x)$*, segundo* v*, em todo ponto* $x \in (a, a+v)$*. Então, existe* $\theta \in (0,1)$ *tal que* $f(a+v) - f(a) = \dfrac{\partial f}{\partial v}(a+\theta v)$*.*

Demonstração. Veja [15][Pag. 123]. □

Teorema 4.2.6 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)**.** *Sejam* Ω *um aberto de* $\mathbb{R}^N$ *e* (f_n) *uma sequência de funções em* $L^1(\Omega)$ *satisfazendo*

a) $f_n(x) \to f(x)$*, quando* $n \to \infty$*, q.t.p em* Ω*,*

b) existe uma função $g \in L^1$ *tal que, para todo* $n \in \mathbb{N}$*,* $|f_n(x)| \leq g(x)$ *q.t.p em* Ω*.*

Então, $f \in L^1$ *e* $\|f_n - f\|_1 \to 0$*, quando* $n \to \infty$*.*

Demonstração. Veja [6][Teorema 4.2]. □

Definição 4.2.7. *Uma função real* $f : X \to \mathbb{R}$ *definida em um espaço topológico* X *é semicontínua inferiormente (s.c.i.) se, para qualquer* $a \in \mathbb{R}$ *a imagem inversa* $f^{-1}(a, \infty)$ *é um conjunto aberto em* X*.*

Teorema 4.2.8 (Princípio Variacional de Ekeland)**.** *Seja* X *um espaço métrico completo,* $f : X \to \mathbb{R}$ *uma função s.c.i. e limitada inferiormente. Dado* $\varepsilon > 0$ *existe* $x_\varepsilon \in X$ *tal que*

$$f(x_\varepsilon) \leq \inf_X f + \varepsilon \tag{4.1}$$

$$f(x_\varepsilon) < \varepsilon d(x, x_\varepsilon), \forall x \neq x_\varepsilon. \tag{4.2}$$

Demonstração. Veja [14][Corolário 2.3]. □

Teorema 4.2.9 (Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais- Smale)**.** *Sejam* X *um espaço de Banach e* $I \in C^1(X, \mathbb{R})$*. Suponhamos que as seguintes condições geométricas sejam satisfeitas:*

1) $I(0) = 0$*,*

2) $\exists\ \sigma, \rho > 0; I(w) \geq \sigma > 0$*,* $\forall w \in X$ *com* $\|w\| = \rho$*,*

3) $\exists\ e_0 \in X; \|e_0\| > \rho$ *e* $I(e_0) < 0$*.*

Então, existe uma sequência $(w_n) \subset X$ *tal que*

$$I(w_n) \to c \text{ e } I'(w_n) \to 0 \text{ em } X^{-1}, \text{ quando } n \to \infty,$$

em que

$$0 < c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t))$$

e

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e_0\}.$$

Demonstração. Veja [8][Teorema 2.2]. □

4.3 Operadores diferenciáveis

Definição 4.3.1. *Sejam* $U \subset X$ *um aberto e* $\varphi : U \to R$ *um operador. Dizemos que* φ *tem derivada de Gâteaux* $f \in X^{-1}$ *em* $u \in U$ *se, para cada* $h \in X$*,*

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[\varphi(u + th) - \varphi(u) - \langle f, th \rangle] = 0.$$

A derivada de Gâteaux em u *é denotada por* $\varphi'(u)$*.*

Dizemos que φ *tem derivada de Fréchet* $f \in X^{-1}$ *em* $u \in U$ *se*

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\|h\|}[\varphi(u + h) - \varphi(u) - \langle f, h \rangle] = 0.$$

Além disso, dizemos que $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R})$ *se a derivada de Fréchet de* φ *existe e é contínua.*

Se X *é um espaço de Hilbert e* φ *tem derivada de Gâteaux em* $u \in U$*, o gradiente de* φ *em* u *é definido por*

$$\langle \nabla\varphi(u), h \rangle := \langle \varphi'(u), h \rangle.$$

Observação: a) A derivada de Gâteaux é dada por

$$\langle \varphi'(u), h \rangle = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[\varphi(u + th) - \varphi(u)].$$

b) Todo operador diferenciável a Fréchet é diferenciável a Gâteaux.

Proposição 4.3.2. *Se o operador φ tem derivada de Gâteaux contínua em U, então $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R})$.*

Demonstração. Veja [24][Proposição 1.3]. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] A. Ambrosetti, H. Brézis, G. Cerami: *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems*, J. Funct. Anal. 122 (1994), 519-543.

[2] R. Adams, J. Fournier: *Sobolev spaces*, Academic Press, Boston, 2003.

[3] M. Bouchekif, A. Matallah: *Multiple positive solutions for elliptic equations involving a concave term and critical Sobolev-Hardy exponent*, Appl. Math. Lett. 22 (2009), 268-275.

[4] M. Bouchekif, A. Matallah: *On singular nonhomogeneous elliptic equations involving critical Caffarelli-Kohn-Nirenberg exponent*, Ricerche Math. doi 10. 1007/s 11587-009-0056-y.

[5] M. Bouchekif, A. Matallah: *Singular elliptic equations involving a concave term and critical Caffarelli-Kohn-Nirenberg exponent with sign-changing weight functions*, Eletronic Journal of Differential Equations, vol. 2010 (2010), No. 32, 1-12.

[6] H. Brézis: *Functional Analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Springer, New York, 2010.

[7] H. Brézis, E. Lieb: *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals*, Proc. Amer. Math. Soc. 88 (1983), 486-490.

[8] H. Brézis, L. Nirenberg: *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math. vol. 36 (1983), 437-477.

[9] K.J. Brown, Y. Zhang: *The Nehari manifold for a semilinear elliptic equation with a sign-changing weight function*, J. Differential Equations 193 (2003), 481-499.

[10] L. Caffarelli, R. Kohn, L. Nirenberg: *First order interpolation inequality with weights*, Compos. Math. 53 (1984), 259–275.

[11] F. Catrina, Z. Wang: *On the Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities: sharp constants, existence (and nonexistence) and symmetry of extremal functions*, Comm. Pure Appl. Math. 54 (2001), 229-257.

[12] J. Chen: *Multiple positive solutions for a class of nonlinear elliptic equations*, J. Math. Anal. Appl. 295 (2004), 341-354.

[13] K.S. Chou, C.W. Chu: *On the best constant for a weighted Sobolev-Hardy Inequality*, J. London Math. Soc. 2 (1993), 137-151.

[14] I. Ekeland: *On the variational principle*, J. Math. Anal. Appl., v. 47, (1974), 324-353.

[15] E. L. Lima: *Curso de Análise, vol.2*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, IMPA, 2010.

[16] L.C. Evans: *Partial differential equations*, Graduate studies in mathematics 19, Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island, 1998.

[17] A. Ferrero, F. Gazzola: *Existence of solutions for singular critical growth semilinear elliptic equations*, J. Differential Equations 177 (2001), 494-522.

[18] T.S. Hsu, H.L. Lin: *Multiple positive solutions for singular elliptic equations with concave-convex nonlinearities and sign-changing weights*, Boundary Value Problems, doi: 10 1155/2009/584203.

[19] M. Lin: *Some further results for a class of weighted nonlinear elliptic equations*, J. Math. Anal. Appl. 337 (2008), 537-546.

[20] R.S. Rodrigues: *On elliptic problems involving critical Hardy-Sobolev exponents and sign-changing function*, Nonlinear Anal. 73 (2010), 857-880.

[21] G. Tarantello: *On nonhomogeneous elliptic equations involving critical Sobolev exponent*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non. Linéaire 9 (1992), 281-304.

[22] B. J. Xuan, S. Su, Y. Yan: *Existence results for Brézis-Nirenberg problems with Hardy potential and singular coefficients*, Nonlinear Anal. 67 (2007), 2091-2106.

[23] B. J. Xuan: *The solvability of quasilinear Brézis-Nirenberg-type problems with singular weights*, Nonlinear Anal. 62 (4) (2005), 703-725.

[24] M. Willem: *Minimax theorems (Progress in nonlinear differential equations and their applications)*, Birkhäuser, Boston, 1996.

[25] T. F. Wu: *Multiple positive solutions for semilinear elliptic equations with critical weighted Hardy-Sobolev exponents*, Nonlinear Anal. 74 (2011), 2602-2611.

[26] T. F. Wu: *On semilinear elliptic equations involving concave-convex nonlinearities and sign-changing weight function*, J. Math. Anal. Appl. 318 (2006), 253-270.