

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

**ALGORITMOS PARA A REDUÇÃO DE RUÍDO  
POISSON E ESTIMATIVA DE PARÂMETROS  
UTILIZANDO DISTÂNCIAS ESTOCÁSTICAS**

**ANDRÉ DE ANDRADE BINDILATTI**

**ORIENTADOR: PROF. DR. NELSON DELFINO D'ÁVILA MASCARENHAS**

São Carlos – SP

Junho/2018

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

**ALGORITMOS PARA A REDUÇÃO DE RUÍDO  
POISSON E ESTIMATIVA DE PARÂMETROS  
UTILIZANDO DISTÂNCIAS ESTOCÁSTICAS**

**ANDRÉ DE ANDRADE BINDILATTI**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Ciência da Computação, área de concentração: Processamento de imagens e sinais

Orientador: Prof. Dr. Nelson Delfino d'Ávila Mascarenhas

São Carlos – SP

Junho/2018



# UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação

## Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado do candidato André de Andrade Bindilatti, realizada em 14/06/2018:

*Nelson Delfino D'Avila Mascarenhas*

Prof. Dr. Nelson Delfino D'Avila Mascarenhas  
UFSCar

*Alexandre Luis M. Levada*

Prof. Dr. Alexandre Luis Magalhães Levada  
UFSCar

*f. R.*

Prof. Dr. Ricardo José Ferrari  
UFSCar

*por Nelson Delfino D'Avila Mascarenhas*

Prof. Dr. Luciano Vieira Dutra  
INPE

*Marcelo Andrade da Costa Vieira*

Prof. Dr. Marcelo Andrade da Costa Vieira  
EESC/USP

Certifico que a defesa realizou-se com a participação à distância do(s) membro(s) Luciano Vieira Dutra e, depois das arguições e deliberações realizadas, o(s) participante(s) à distância está(ão) de acordo com o conteúdo do parecer da banca examinadora redigido neste relatório de defesa.

*Nelson Delfino D'Avila Mascarenhas*

Prof. Dr. Nelson Delfino D'Avila Mascarenhas

## RESUMO

Ruído é um problema inerente a todas aplicações de imageamento digital. Devido à sua natureza estocástica, é impossível determinar procedimentos exatos para a remoção do ruído. Assim sendo, o sinal de interesse pode ser comprometido durante o processo de atenuação de ruído pela suavização de detalhes e estruturas finas da imagem, ou pela introdução de artefatos visuais. Algoritmos considerados como o atual estado da arte são eficazes em reduzir o ruído em imagens, no entanto, podem provocar a introdução de alguns tipos de artefatos visuais. Além disso, a grande maioria desses algoritmos é formulada sob hipótese de ruído aditivo. Redução de ruído Poisson trata-se de um problema ainda em aberto e representa um grande desafio, uma vez que o ruído é dependente de sinal. Isso implica no fato de que os parâmetros do modelo estocástico para o ruído também dependem da imagem livre de ruído subjacente, que não é observável na prática. O objetivo deste trabalho de pesquisa foi propor novas abordagens para a estimativa de parâmetros e redução de ruído Poisson, baseadas no uso de distâncias estocásticas para a comparação de distribuições de probabilidade, visando a preservação de pequenos detalhes e estruturas finas da imagem e, ao mesmo tempo, evitando a introdução de artefatos visuais. Para tal, duas novas abordagens foram propostas: (1) filtragem Wiener utilizando estimativa ponderada de parâmetros no domínio do espaço; e (2) filtragem Wiener com estimativa não-local no domínio das *wavelets* de Haar, utilizando distâncias estocásticas para a comparação de coeficientes *wavelet*. No domínio do espaço, distâncias estocásticas entre distribuições de variáveis Poisson foram utilizadas para definir estimadores ponderados das estatísticas de primeira e segunda ordem do sinal e ruído, necessárias para o cálculo do filtro de Wiener. No domínio das *wavelets* de Haar, os coeficientes *wavelet* foram modelados como variáveis Skellam. Expressões de forma fechada para as distâncias estocásticas entre distribuições Skellam não puderam ser obtidas, assim sendo, a distribuição Gaussiana foi utilizada como aproximação. As sub-bandas de detalhe são filtradas no domínio *wavelet*, utilizando um algoritmo não-local baseado nas distâncias estocásticas entre distribuições dos coeficientes das sub-bandas. Resultados experimentais demonstraram que os métodos propostos são competitivos com algoritmos de estado da arte relacionados. Em geral, dentre as abordagens propostas, a técnica baseada no uso de *wavelets* demonstrou uma maior eficácia na redução de ruído e na preservação de detalhes.

**Palavras-chave:** Processamento de Imagens, Ruído Poisson, Distâncias Estocásticas, Transformada *Wavelet*, Distribuição Skellam.



## ABSTRACT

Noise is present in all applications of digital imaging. Due to its stochastic nature, it is impossible to determine exact procedures to completely remove noise from the image. Thus, the target signal may be affected during the noise attenuation process due to the smoothing of fine details and image structures or by the introduction of visual artifacts. *State-of-the-art* denoising algorithms are effective in removing noise, however, they can cause image artifacts. Furthermore, most of these algorithms are formulated under the assumption of the additive noise model. The problem of denoising Poisson-corrupted images is still an open issue and represents a great challenge, since the noise in this model is signal dependent. This property implies that the parameter of the underlying stochastic model are also dependent of the noise-free image, which is unknown in practice. The objective of this research was to propose novel approaches to address the problem of parameter estimation and noise reduction of Poisson-corrupted images, based on the use of stochastic distances as measures of similarity between distributions of random variables, capable of preserving small details and fine image structures, while avoiding the introduction of visual artifacts. Two novel approaches were proposed: (1) Poisson Wiener filtering with non-local weighted parameter estimation in the spatial domain; and (2) Wiener filtering with non-local estimates in the Haar wavelet transform domain, using stochastic distances as similarity measures between patches of wavelet coefficients. In the spatial domain, stochastic distances between distributions of Poisson variables can be used to define weighted estimators of the first and second statistical moments of the signal and noise in order to compute the Wiener filter for Poisson-corrupted data. In the Haar wavelet domain, the wavelet coefficients can be modeled as Skellam variables. Closed-form solutions for the stochastic distances between Skellam distributions could not be obtained, therefore, the Gaussian distribution was proposed as an approximation. The detail sub-bands can be denoised in the Haar wavelet domain using a non-local algorithm based on stochastic distances as similarity measures between wavelet coefficients. Experimental results demonstrated that the proposed methods are competitive with related *state-of-the-art* algorithms. In general, among the proposed approaches, the technique based on the use of *wavelets* demonstrated a greater efficiency in the reduction of noise and preservation of details.

**Keywords:** Image Processing, Poisson Noise, Stochastic Distances, Wavelet Transform, Skellam Distribution

## LISTA DE FIGURAS

1.1	Exemplos de artefatos visuais introduzidos como consequência do processo de redução de ruído. . . . .	14
2.1	Ilustração do conceito de <i>patches</i> similares. . . . .	20
2.2	Imagem simulada com diferentes faixas verticais de intensidade contaminadas por ruído Poisson. . . . .	22
2.3	Ilustração do processo de execução do algoritmo NLM. . . . .	30
2.4	Diagrama de blocos representando o algoritmo SPNLM. . . . .	34
2.5	Diagrama representativo da estimativa básica do algoritmo BM3D. . . . .	35
2.6	Diagrama representativo da estimativa final do algoritmo BM3D. . . . .	36
3.1	Diagrama representativo do processo de decomposição de um sinal 2D utilizando a transformada <i>wavelet</i> discreta. . . . .	51
3.2	Diagrama representativo do processo de reconstrução de um sinal 2D utilizando a transformada <i>wavelet</i> discreta. . . . .	52
3.3	Ilustração do procedimento de interpolação parabólica inversa. . . . .	61
4.1	Coeficientes do filtro para a imagem “Cameraman” com pico de intensidade 20. . . . .	69
4.2	Coeficientes do filtro PNL-Wiener obtidos utilizando diferentes valores para o parâmetro $\beta$ . . . . .	70
4.3	Resultados de filtragem obtidos utilizando o algoritmo PNL-Wiener com diferentes valores para o parâmetro $\beta$ . . . . .	71
4.4	Erro médio quadrático entre as probabilidades obtidas por meio das distribuições paramétricas e as probabilidades estimadas por meio do histograma normalizado dos dados de diferença $D = Y_1 - Y_2$ . . . . .	77

4.5	Distribuição da diferença entre realizações de pares de variáveis Poisson obtidas para diferentes combinações de parâmetros. . . . .	78
4.6	Gráfico das funções utilizadas para a atribuição de pesos utilizando diversos parâmetros diferentes. . . . .	84
4.7	Resultados de filtragem obtidos utilizando o algoritmo WPNL-Wiener com diferentes valores para o parâmetro $\beta$ . . . . .	86
4.8	Resultados de filtragem obtidos utilizando o algoritmo WPNL-Wiener com <i>wavelets</i> ortogonais e estacionárias. . . . .	88
4.9	Gráficos para o MSE e o critério PURE em função dos parâmetros $\gamma$ e $\beta$ do algoritmo PNL-Wiener. . . . .	91
4.10	Resultados obtidos utilizando os valores ótimos dos parâmetros $\gamma$ e $\beta$ com relação ao menor erro médio quadrático para o algoritmo PNL-Wiener. . . . .	91
4.11	Resultados obtidos utilizando os valores ótimos dos parâmetros $\gamma$ e $\beta$ com relação ao critério PURE para o algoritmo PNL-Wiener. . . . .	92
4.12	Gráficos para o MSE e o critério PURE em função dos parâmetros $h$ , $h'$ e $\beta$ do algoritmo WPNL-Wiener. . . . .	93
4.13	Resultados obtidos utilizando os valores ótimos dos parâmetros $h$ , $h'$ e $\beta$ com relação ao menor erro médio quadrático para o algoritmo WPNL-Wiener. . . . .	93
4.14	Resultados obtidos utilizando os valores ótimos dos parâmetros $h$ , $h'$ e $\beta$ com relação ao critério PURE para o algoritmo WPNL-Wiener. . . . .	93
4.15	Resultados visuais obtidos com a imagem “Cameraman” com pico de intensidade $Q = 50$ . . . . .	100
4.16	Resultados visuais obtidos com a imagem “Cameraman” com pico de intensidade $Q = 20$ . . . . .	101
4.17	Resultados visuais obtidos com a imagem “Cameraman” com pico de intensidade $Q = 10$ . . . . .	102
4.18	Resultados visuais obtidos a partir de uma imagem real de microscopia de fluorescência em uma seção próxima ao centro da região imageada. . . . .	103
4.19	Contagem de células realizadas a partir de uma imagem real de microscopia de fluorescência em uma seção próxima ao centro da região imageada. . . . .	104

4.20	Resultados visuais obtidos a partir de uma imagem real de microscopia de fluorescência em uma seção distante do centro da região imageada. . . . .	105
4.21	Contagem de células realizadas a partir de uma imagem real de microscopia de fluorescência em uma seção distante do centro da região imageada. . . . .	106

## LISTA DE TABELAS

2.1	Principais características exploradas por algoritmos de estado da arte. . . . .	46
4.1	Resultados comparativos obtidos utilizando o algoritmo WPNL-Wiener com <i>wavelets</i> ortogonais e estacionárias para a filtragem da imagem “Boat” ( $256 \times 256$ ) com pico de intensidade igual a 50. Resultados reportados são a média obtida após experimentos com dez realizações diferentes da imagem ruidosa. .	87
4.2	Resultados quantitativos obtidos com a imagem “Cameraman” com picos de intensidade $Q = 50$ , $Q = 20$ e $Q = 10$ . . . . .	96

# SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO</b>	<b>11</b>
1.1 Contexto . . . . .	11
1.2 Motivação . . . . .	13
1.3 Objetivos e Justificativas . . . . .	15
1.4 Metodologia de Desenvolvimento do Trabalho . . . . .	16
1.5 Organização do Trabalho . . . . .	18
<b>CAPÍTULO 2 – TÉCNICAS PARA A FILTRAGEM DE RUÍDO</b>	<b>19</b>
2.1 Considerações Iniciais . . . . .	19
2.2 Modelos de Ruído . . . . .	21
2.2.1 Modelo de ruído Poisson . . . . .	21
2.2.2 Modelo de ruído aditivo . . . . .	23
2.3 Técnicas para a Redução de Ruído Poisson . . . . .	24
2.4 Transformada de Anscombe . . . . .	27
2.5 Principais Técnicas Relacionadas . . . . .	28
2.5.1 O Algoritmo NLM . . . . .	28
2.5.2 Poisson NLM . . . . .	32
2.5.3 SP-NLM . . . . .	33
2.5.4 Block-Matching and 3D Filtering . . . . .	35
2.5.5 NL-Bayes . . . . .	37

2.5.6	Redução de Ruído em Duplo-Domínio . . . . .	38
2.6	Considerações Finais . . . . .	45
<b>CAPÍTULO 3 – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>		<b>47</b>
3.1	Considerações Iniciais . . . . .	47
3.2	Transformada <i>Wavelet</i> . . . . .	47
3.3	Filtro de Wiener . . . . .	53
3.4	<i>Peak Signal-to-Noise Ratio</i> – PSNR . . . . .	55
3.5	<i>Structural SIMilarity Index</i> – SSIM . . . . .	56
3.6	Estimativas Não Enviesadas do Risco . . . . .	57
3.7	Método de Brent . . . . .	60
3.8	Considerações Finais . . . . .	62
<b>CAPÍTULO 4 – TRABALHO PROPOSTO</b>		<b>63</b>
4.1	Considerações Iniciais . . . . .	63
4.2	Hipóteses e Justificativas . . . . .	64
4.3	Redução de Ruído Poisson por Meio da Técnica de Filtragem Wiener com Estimativa Ponderada de Parâmetros . . . . .	67
4.4	Filtragem Não-Local de Ruído Poisson no Domínio das <i>Wavelets</i> de Haar Utilizando Distâncias Estocásticas . . . . .	72
4.4.1	Caracterização estocástica no domínio das <i>wavelets</i> de Haar . . . . .	73
4.4.2	Distâncias estocásticas para comparação de <i>patches</i> no domínio das <i>wavelets</i> de Haar . . . . .	79
4.4.3	Filtragem Não-Local no Domínio das <i>Wavelets</i> de Haar . . . . .	82
4.5	Seleção de Parâmetros . . . . .	90
4.6	Experimentos e Resultados . . . . .	94
4.6.1	Experimentos com ruído simulado . . . . .	95
4.6.2	Experimentos com dados reais . . . . .	97

<b>CAPÍTULO 5 – DISCUSSÃO E CONCLUSÕES</b>	<b>107</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>111</b>
<b>GLOSSÁRIO</b>	<b>117</b>



# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

---

---

*Ruído é um problema inerente a todos os tipos de aplicações de imageamento digital. Algoritmos considerados como o atual estado da arte são eficazes em reduzir o ruído em imagens, no entanto, podem causar a introdução de alguns tipos de artefatos visuais e a perda de bordas e pequenos detalhes. Este trabalho de pesquisa buscou contribuir com novas abordagens para a redução de ruído Poisson em imagens digitais, procurando evitar a introdução de tais artefatos e preservar detalhes.*

### 1.1 Contexto

Sistemas digitais de aquisição e formação de imagens se baseiam na mensuração de um sinal por meio de sensores eletrônicos. De modo geral, devido a limitações e características inerentes ao processo físico necessário para mensuração do sinal subjacente, são observadas flutuações aleatórias nos valores de pixel da imagem adquirida.

Tais flutuações correspondem ao ruído presente na imagem observada e são indesejáveis, pois podem comprometer na interpretação dos resultados visuais, seja por um especialista do domínio em questão ou mesmo no desempenho de tarefas automatizadas (ou semi-automatizadas) de visão computacional, como a segmentação e a detecção de objetos, dentre possíveis outras. Por essa razão, algoritmos para a redução de ruído constituem um importante tópico de pesquisa em processamento digital de imagens.

Uma grande maioria dos algoritmos conhecidos na literatura assumem a hipótese de ruído Gaussiano branco aditivo (AWGN – *Additive White Gaussian Noise*). Tal modelo oferece uma boa tratabilidade matemática e, portanto, se torna bastante conveniente para a formulação teórica de algoritmos para a redução de ruído. Embora o modelo AWGN seja amplamente adotado na literatura, pode se mostrar limitado na prática.

Em aplicações como a tomossíntese digital mamária; tomografia por emissão de pósitrons; imageamentos por baixa exposição de raios-X; microscopia de fluorescência; astronomia ótica ou por infravermelho; e imageamento com baixo tempo de exposição ou regime limitado de fótons de luz (STARCK; MURTAGH, 2001; WERNICK; AARSVOLD, 2004; BERRY; BURNELL, 2005; VONESCH et al., 2006; BERTERO et al., 2010), o tipo predominante de ruído é devido ao processo estocástico de contagem envolvido na aquisição das imagens. O ruído presente nessas aplicações é conhecido como ruído Poisson, pois cada pixel da imagem observada é modelado como o resultado de um processo estocástico obedecendo uma distribuição Poisson.

Uma vez que o ruído se trata de um processo estocástico, se o mesmo sinal de interesse for submetido ao processo de aquisição diversas vezes, serão observados diferentes valores de pixel para as imagens obtidas, ou seja, serão observadas diferentes realizações de um processo estocástico. Por essa razão, remover o ruído presente no sinal observado sem comprometer o sinal de interesse é uma tarefa impossível na prática, considerando as técnicas atualmente conhecidas, uma vez que não é possível prever de modo exato as flutuações causadas devido ao ruído.

Algoritmos como a correspondência de blocos e filtragem 3D (*Block Matching and 3D filtering* – BM3D) (DABOV et al., 2007) e Non-Local Bayes (NL-Bayes) (LEBRUN; BUADES; MOREL, 2013b) são conhecidos por produzirem resultados de estado da arte. Esses algoritmos são muito eficazes em reduzir o ruído em imagens, porém, podem causar a introdução de alguns tipos de artefatos visuais. Além disso, tais algoritmos são formulados com base na hipótese do modelo AWGN. Sendo assim, para poderem ser aplicados a imagens corrompidas por ruído Poisson, é necessário o uso de transformadas de estabilização de variância (VSTs – *Variance-Stabilizing Transformations*) como a transformada de Anscombe (ANSCOMBE, 1948).

Embora o uso de VSTs seja adequado, alguns pesquisadores reportaram resultados promissores ao explorar algoritmos elaborados especificamente para o modelo de ruído Poisson. Esse é o caso do algoritmo PURE-LET<sup>1</sup>, proposto por Luisier et al. (2010), que supera os resultados obtidos por sua contrapartida SURE-LET<sup>2</sup> (BLU; LUISIER, 2007) baseada no modelo AWGN, mesmo com o uso da transformada de Anscombe para a estabilização da variância. Outros exemplos são o *Non-Local Principal Component Analysis* (NL-PCA) (SALMON et al., 2014) e *Poisson Non-Local Means* (DELEDALLE; TUPIN; DENIS, 2010).

Em um trabalho anterior, o algoritmo *Stochastic Poisson Non-Local Means* (SP-NLM) foi

---

<sup>1</sup>Do inglês, *Poisson Unbiased Risk Estimator with Linear Expansion of Thresholds*, que pode ser traduzido para: Estimador de risco Poisson não enviesado com expansão linear de limiares.

<sup>2</sup>Também do inglês, *Stein's Unbiased Risk Estimator with Linear Expansion of Thresholds*, que pode ser traduzido para: Estimador de risco não enviesado de Stein com expansão linear de limiares.

proposto por Bindilatti e Mascarenhas (2013) como uma extensão do algoritmo *Non-Local Means* (NLM) proposto por Buades, Coll e Morel (2005), utilizando distâncias estocásticas como novas métricas de similaridade (ou dissimilaridade) entre *patches*.

Apesar do atual estado da arte em algoritmos para a redução de ruído ser composto por técnicas bastante eficazes em atenuar ruído, menos foco é dado a questão de artefatos visuais introduzidos como consequência da aplicação de tais técnicas. Além disso, a preservação de pequenos detalhes e estruturas pode ser uma prioridade maior que a atenuação do ruído para algumas aplicações. É neste contexto que o presente trabalho de pesquisa se insere, buscando contribuir com novas abordagens para a redução de ruído Poisson, tendo como prioridades prevenir a introdução de artefatos visuais e a preservação de detalhes.

Também é importante mencionar que, em geral, algoritmos para a redução de ruído possuem parâmetros que influenciam no resultado final obtido. Para que resultados efetivos sejam alcançados, tais parâmetros necessitam ser adequadamente ajustados. O ajuste de tais parâmetros nem sempre é uma tarefa trivial, uma vez que seu valor ótimo pode variar de acordo com a imagem sendo processada e nível de degradação.

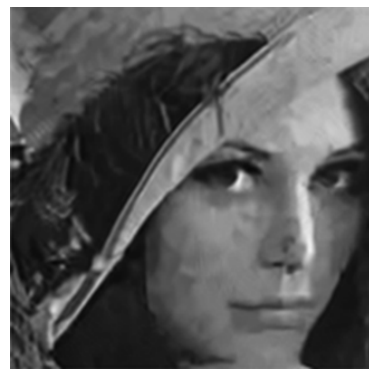
## 1.2 Motivação

Como foi mencionado na Seção 1.1, ruído Poisson é o tipo de ruído predominante em uma vasta gama de aplicações. Embora a presença de ruído possa ser prejudicial para aplicações envolvendo o uso de tais imagens, a introdução de artefatos por parte do emprego de algoritmos para a redução de ruído também é um fator crítico.

Algoritmos considerados como o atual estado da arte, como o Poisson-NLM (DELEDALLE; TUPIN; DENIS, 2010), BM3D (DABOV et al., 2007), NL-Bayes (LEBRUN; BUADES; MOREL, 2013b) e *Dual Domain Image Denoising* (DDID) (KNAUS; ZWICKER, 2013), proporcionam resultados notáveis quanto à suavização de ruído. Entretanto, podem introduzir artefatos visuais como a presença de ruído residual, *blocking*, *ringing* e fenômenos de Gibbs. Exemplos desses artefatos são exibidos na Figura 1.1.

Recentemente, Knaus e Zwicker (2015) propuseram uma nova abordagem para a redução de ruído denominada filtragem em duplo-domínio (DDF – *Dual Domain Filtering*). Essa técnica permite a redução de ruído eliminando a presença de artefatos como ruído residual e *blocking*. Originalmente, a técnica DDF foi formulada sob hipótese do modelo AWGN.

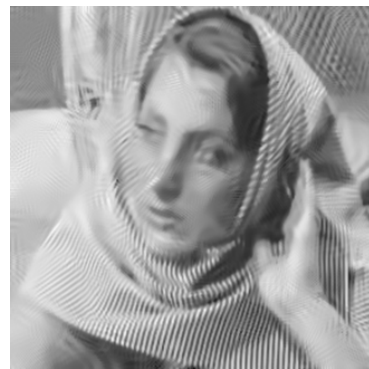
Dois aspectos devem ser considerados sobre a filtragem de duplo-domínio: (1) embora



(a) Artefato de *blocking* observado em imagem processada com o algoritmo BM3D.



(b) Artefato de *ringing* observado em imagem processada com o algoritmo Poisson-NLM.



(c) Fenômeno de Gibbs observado em imagem processada com o algoritmo DDID.



(d) Ruído residual observado em imagem processada com o filtro local de Wiener.

**Figura 1.1: Exemplos de artefatos visuais introduzidos como consequência do processo de redução de ruído.**

Knaus e Zwicker (2015) descrevem uma das etapas de sua proposta como sendo a atenuação de coeficientes *wavelets*, na prática essa etapa é implementada como a limiarização de coeficientes no domínio da frequência, obtidos a partir da transformada de Fourier janelada, cuja janela é definida de modo semelhante ao *kernel* bilateral (TOMASI; MANDUCHI, 1998); e (2) DDF atua em vizinhanças locais e, portanto, não explora a redundância inerente em imagens naturais, princípio no qual algoritmos como o NLM, BM3D e NL-Bayes se baseiam.

Como a filtragem em duplo-domínio se apoia no uso da transformada janelada de Fourier, artefatos visuais como o fenômeno Gibbs podem ser introduzidos como consequência do processo de atenuação de ruído. Além disso, o *kernel* empregado nas técnicas baseadas no conceito de filtragem em duplo-domínio são definidos em função da similaridade entre pixels individuais. Essa abordagem torna a estimativa inicial do sinal mais sensível a presença de ruído.

Com base em tais argumentos, é suposto que ao combinar os conceitos de redundância espacial e filtragem em duplo-domínio, explorando o uso da transformada *wavelet* de Haar

como alternativa para a transformada janelada de Fourier, é possível obter algoritmos mais eficazes para a redução de ruído Poisson e, ao mesmo tempo, capazes de evitar a introdução de artefatos visuais.

As *wavelets* de Haar são de particular interesse para este trabalho de pesquisa pois possuem uma relação especial com o modelo de ruído Poisson. No domínio das *wavelets* de Haar, os coeficientes de aproximação são obtidos pela soma de variáveis Poisson. Tal como será detalhado na seção 2.2.1 do capítulo 2, a relação sinal-ruído aumenta em função da contagem de fótons. Sendo assim, a cada nível de decomposição da transformada *wavelet* de Haar, a relação sinal-ruído é melhorada. Resultados promissores puderam ser alcançados ao explorar essa propriedade.

### 1.3 Objetivos e Justificativas

Este trabalho de pesquisa teve como **objetivos gerais**, propor novas abordagens para a estimativa de parâmetros e a redução de ruído Poisson, combinando os conceitos de redundância espacial inerente a imagens naturais e filtragem de ruído em diferentes domínios de representação, tendo como prioridade evitar a introdução de artefatos visuais, tais como *blocking*, *ringing*, ruído residual e fenômenos de Gibbs.

Os **objetivos específicos** deste trabalho de pesquisa foram:

- Aplicar distâncias estocásticas como métricas de similaridade entre *patches* ruidosos. Na presença de ruído, flutuações aleatórias são observadas para os valores de pixel e, portanto, *patches* que poderiam ser considerados similares na ausência de ruído podem aparentar dissimilaridades. Sendo assim, métricas de similaridade que comparam diretamente tons de cinza podem não ser confiáveis para imagens com baixa relação sinal-ruído, comprometendo o desempenho de algoritmos que exploram a similaridade entre pequenas vizinhanças de pixels. Distâncias estocásticas são métricas de similaridade que comparam a discrepância entre as distribuições de probabilidade subjacentes aos *patches* sendo comparados, explorando o conhecimento do modelo estocástico do ruído;
- Explorar o uso de estimadores de Wiener em grupos de *patches* redundantes. Técnicas clássicas para a redução de ruído Poisson empregam o uso de estimadores de Wiener em vizinhanças locais para obter as estimativas dos valores de pixel livres de ruído (JIANG; SAWCHUK, 1986; RABBANI, 1988). Estimadores de Wiener são atrativos por oferecer baixo custo computacional e correspondem ao estimador Bayesiano ótimo quando o

estimador ótimo em questão é linear;

- Explorar o uso de transformadas de domínio esparso no contexto de um *framework* não-local, isto é, utilizando o conceito de redundância inerente a imagens naturais. A maioria das técnicas de estado da arte para a filtragem de ruído empregam transformadas de domínio esparso para obter melhores resultados (DABOV et al., 2007; KNAUS; ZWICKER, 2015). Representações esparsas permitem que o sinal seja expresso de modo que poucos coeficientes concentrem a maior parte da informação, enquanto os demais coeficientes, de modo geral, codificam ruído e podem ser descartados ou reduzidos por um processo de limiarização. No contexto deste trabalho de pesquisa, o uso da transformada *wavelet* de Haar foi explorado com o intuito de separar o conteúdo correspondente a pequenos detalhes e bordas da imagem do conteúdo de baixa frequência, de modo a promover a filtragem em duplo domínio aplicando o conceito de processamento não local; e
- Propor uma metodologia automatizada para a determinação dos parâmetros de filtragem para as abordagens propostas. Algoritmos para a redução de ruído frequentemente possuem parâmetros que controlam o compromisso entre a redução de ruído e a suavização de estruturas finas e pequenos detalhes da imagem (SALMON, 2010; LUISIER et al., 2010; BERTERO et al., 2010; DELEDALLE; TUPIN; DENIS, 2010; LEBRUN; BUADES; MOREL, 2013a). Determinar o valor ótimo para tais parâmetros é uma tarefa essencial para a eficácia do processo de redução de ruído e também pode ser uma tarefa bastante desafiadora, dado que esses parâmetros por vezes são sensíveis aos dados de entrada, ou seja, podem variar de acordo com o conteúdo da imagem de entrada e o nível de degradação devido a presença de ruído.

## 1.4 Metodologia de Desenvolvimento do Trabalho

Neste trabalho de pesquisa foram elaboradas novas abordagens para a redução de ruído Poisson. Em uma primeira abordagem, uma formulação do filtro de Wiener para atenuação de ruído Poisson foi aplicada utilizando distâncias estocásticas em um *framework* não-local. Mais precisamente, média e variância do sinal e ruído são obtidas a partir de estimadores ponderados, sendo que os pesos são atribuídos de acordo com a similaridade entre *patches*. Neste contexto, distâncias estocásticas entre distribuições de variáveis Poisson foram utilizadas como métricas de similaridade. Desse modo, amostras obtidas a partir de *patches* com distribuições de probabilidade menos discrepantes entre si passam a exercer maior influência na estimativa

dos parâmetros em questão.

Na segunda abordagem proposta, o conceito de filtragem não-local é explorado no domínio das *wavelets* de Haar, utilizando distâncias estocásticas para a comparação de *patches* de coeficientes *wavelet*. No domínio das *wavelets* de Haar, os coeficientes de detalhe são distribuídos de acordo com a distribuição Skellam (SKELLAM, 1945). Não foi possível obter expressões de forma fechada para as distâncias estocásticas entre variáveis Skellam. Assim sendo, é proposta uma aproximação utilizando a distribuição Gaussiana. Experimentos foram realizados utilizando transformadas *wavelet* decimadas e não-decimada.

Ambas as abordagens propostas dependem de um parâmetro que controla o compromisso entre a redução de ruído e a preservação de bordas e pequenas estruturas da imagem, denominado parâmetro de filtragem. O problema de determinar o valor ótimo para este parâmetro foi abordado como um problema de otimização unidimensional, em que o parâmetro selecionado corresponde ao argumento que minimiza o erro médio quadrático entre a imagem filtrada e a imagem livre de ruído.

Para tal, o método de Brent (PRESS et al., 2007) foi empregado para solução do problema de minimização. Como o erro médio quadrático depende da imagem livre de ruído, desconhecida na prática, um estimador de risco não enviesado para o modelo Poisson (*Poisson Unbiased Risk Estimator* – PURE) foi utilizado como métrica substituta. Ao minimizar o PURE, o erro médio quadrático também é minimizado.

A implementação dos métodos propostos foi realizada utilizando o ambiente de desenvolvimento MATLAB. Experimentos foram realizados em uma imagem padrão com ruído Poisson simulado e em imagens reais de microscopia de fluorescência. As métricas índice de similaridade estrutural (*Structural SIMilarity* – SSIM), proposta por Wang et al. (2004), e a relação sinal-ruído de pico (*Peak Signal-to-Noise Ratio* – PSNR) foram aplicadas como forma de avaliação quantitativa nos experimentos com ruído simulado. Para os experimentos com imagens reais, o desempenho da transformada de Hough foi avaliado antes e após a aplicação dos algoritmos redutores de ruído, como forma de avaliar a melhoria na qualidade da imagem.

Experimentos foram realizados comparando os métodos propostos aos seguintes algoritmos conhecidos na literatura para a redução de ruído Poisson: Poisson-NLM (DELEDALLE; TUPIN; DENIS, 2010); PURE-LET (LUISIER et al., 2010); e SP-NLM (BINDILATTI; MAS-CARENHAS, 2013).

Também foram incluídos nos experimentos comparativos os algoritmos BM3D (DABOV et al., 2007) e DDID (KNAUS; ZWICKER, 2013), ambos propostos para o modelo de ruído adi-

tivo, no qual a variância do ruído é suposta constante para toda a imagem e não depende do sinal. Para os experimentos com tais algoritmos, a transformada de Anscombe (ANSCOMBE, 1948) foi utilizada para a estabilização da variância. A transformada inversa exata de Anscombe, proposta por Makitalo e Foi (2011), foi utilizada após a filtragem no domínio de Anscombe para obter a estimativa final dos dados no domínio espacial.

## 1.5 Organização do Trabalho

O restante deste trabalho está organizado da seguinte maneira:

- No Capítulo 2 são descritos os modelos de ruído aditivo e ruído Poisson. Os principais algoritmos de estado da arte em redução de ruído relacionados ao presente trabalho de pesquisa também são descritos em maiores detalhes. Seus principais parâmetros, características, limitações e algumas de suas extensões propostas na literatura são discutidas;
- No Capítulo 3, a fundamentação teórica necessária para a compreensão dos algoritmos e métodos discutidos nos capítulos seguintes é descrita, buscando tornar o conteúdo deste documento autocontido.
- No Capítulo 4 são apresentadas as novas abordagens para a redução de ruído Poisson propostas por este trabalho de pesquisa. Também são apresentados os resultados obtidos e os experimentos práticos que foram realizados; e
- No Capítulo 5 são apresentadas as discussões e conclusões finais sobre este trabalho de pesquisa. Também são apresentadas as propostas para trabalhos futuros.



# Capítulo 2

## TÉCNICAS PARA A FILTRAGEM DE RUÍDO

---

---

*Algoritmos não-locais têm sido utilizados com sucesso para a redução de ruído em imagens digitais. Segundo Lebrun et al. (2012), é notável que tais algoritmos pareçam estar convergindo para um desempenho máximo alcançável. Apesar do bom desempenho na atenuação de ruído apresentado pelos algoritmos considerados como o atual estado da arte, a introdução de artefatos visuais por consequência do emprego de tais técnicas pode ser um problema. Nesse sentido, novas abordagens capazes de evitar a introdução de artefatos visuais poderiam ser considerados como importantes contribuições para o campo de pesquisa em questão.*

### 2.1 Considerações Iniciais

Devido a imperfeições inerentes a todos os sistemas de aquisição e formação de imagem, ruído é um problema sempre presente em aplicações de imageamento digital. A presença de ruído também surge como um compromisso entre fatores como o tempo de exposição e o aumento da resolução em tais sistemas.

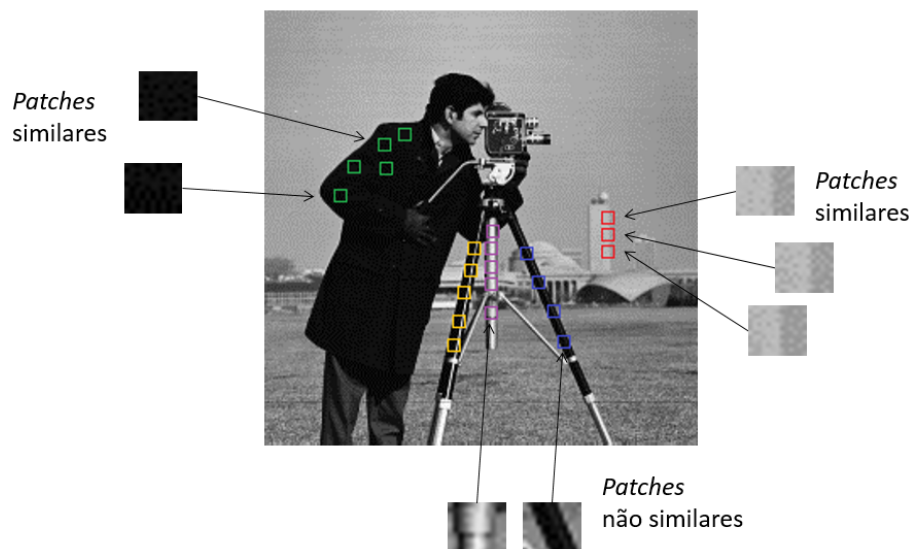
Um maior tempo de exposição permite uma menor degradação devido ao ruído no sinal observado, porém, surgem problemas como a saturação de sensores ou a introdução de movimentação do objeto de interesse ou cena sendo imageados. O aumento de resolução implica numa grade mais densa de sensores, ou seja, a taxa de contagem em cada sensor tende a ser menor devido ao fluxo de fótons incidindo em uma dada região ser distribuído entre uma quantidade maior de sensores.

Considerando uma imagem como a realização de um processo estocástico, a abordagem ideal para a redução de ruído consiste em obter uma quantidade estatisticamente significativa de realizações da mesma imagem e então, utilizá-las como amostras para a estimativa da imagem

livre de ruído. Contudo, na prática acesso a apenas uma realização da imagem ruidosa (ou a uma quantidade bastante limitada de realizações) é possível.

Na ausência de diferentes realizações da mesma imagem, algoritmos clássicos para a redução de ruído se baseavam na hipótese de que o sinal é localmente estacionário para uma pequena região centralizada ao redor de cada pixel (LEE, 1980; KUAN et al., 1985; JIANG; SAW-CHUK, 1986; RABBANI, 1988). Tais algoritmos podem ser chamados de **algoritmos locais** ou então, como **filtros locais**. O filtro bilateral proposto por Tomasi e Manduchi (1998) também é um exemplo de filtro local.

Uma abordagem alternativa consiste em explorar a redundância inerente a imagens naturais, assumindo que pixels em *patches* similares tendem pertencer a uma mesma população estatística. Esse conceito é ilustrado na Figura 2.1, em que *patches* similares são destacados utilizando quadros de mesma cor. Algoritmos baseados nessa abordagem são conhecidos como algoritmos **não-locais** (BUADES; COLL; MOREL, 2005; LEBRUN; BUADES; MOREL, 2013b; SALMON et al., 2014). Por vezes, também são referidos como algoritmos baseados em *patches* (*patch-based approaches*) (DELEDALLE; DENIS; TUPIN, 2009).



**Figura 2.1:** Ilustração do conceito de *patches* similares.

Este capítulo está organizado da seguinte maneira: na seção 2.2, os modelos de ruído Poisson e aditivo Gaussiano branco são enunciados de modo formal; na seção 2.3 são descritas as principais técnicas conhecidas na literatura para a redução de ruído Poisson; na seção 2.4 é descrita a transformada de Anscombe; na seção 2.5 serão descritos as principais técnicas e algoritmos de estado da arte relacionados ao presente trabalho de pesquisa; e na seção 2.6 serão realizadas as considerações finais sobre este capítulo.

## 2.2 Modelos de Ruído

Ruído aleatório<sup>1</sup> se trata de um processo estocástico cujas propriedades dependem do processo físico empregado para a obtenção do sinal mensurado. Devido à potencial complexidade do processo de aquisição e formação de imagens e à grande variedade de técnicas de imageamento existentes, modelos teóricos de ruído são propostos para facilitar a formulação e o estudo de soluções para a redução de ruído. Apesar de tais modelos serem abstrações de processos mais complexos, na prática se mostram bastante poderosos.

Mais precisamente, seja  $I = \{i \mid i = (a, b) \in \mathbb{Z}_{\{1:N_1\}} \times \mathbb{Z}_{\{1:N_2\}}\}$  um conjunto de coordenadas bidimensionais discretas, com  $\mathbb{Z}_{\{1:N_1\}} = \{1, 2, \dots, N_1\}$  e  $\mathbb{Z}_{\{1:N_2\}} = \{1, 2, \dots, N_2\}$ , isto é,  $\mathbb{Z}_{\{1:N_1\}}$  e  $\mathbb{Z}_{\{1:N_2\}}$  denotam os subconjuntos dos números inteiros de 1 até  $N_1$  e de 1 até  $N_2$ , respectivamente. Uma imagem digital é um conjunto de valores de pixel  $Y = \{y_i \mid i \in I\}$  definidos sobre o conjunto de coordenadas  $I$ . Essa notação também será adotada no restante deste trabalho.

Se  $Y$  é uma imagem ruidosa, então, assume-se a existência de uma imagem livre de ruído  $X = \{x_i \mid i \in I\}$  correspondente em que  $Y$  é a realização de um processo estocástico envolvendo  $X$ . Em outras palavras,  $Y$  é referida como uma observação degradada de  $X$ . Modelos de ruído podem ser vistos como formalismos que descrevem o processo estocástico subjacente.

O modelo mais amplamente conhecido é o modelo AWGN. Entretanto, para aplicações nas quais a imagem resultante é obtida por meio de um processo de contagem, o modelo de ruído Poisson é uma aproximação mais realista. Ainda assim, muitos algoritmos são formulados sob hipótese do modelo AWGN (LEBRUN; BUADES; MOREL, 2013b) devido ao fato de que, com o uso de VSTs, o ruído Poisson passa a se comportar aproximadamente como AWGN.

### 2.2.1 Modelo de ruído Poisson

Em aplicações nas quais os pixels da imagem observada são o resultado de um processo de detecção e contagem de fótons, o ruído predominante pode ser modelado como ruído Poisson. Nesse modelo, o valor de cada pixel  $y_i$  observado pode ser visto como a realização de um processo Poisson cuja média depende do valor do pixel livre de ruído subjacente,  $y_i \sim \mathcal{P}(x_i)$ .

Sendo assim, a probabilidade de observar o valor  $k \in \mathbb{Z}^+$  como sendo o resultado do processo de contagem para um dado pixel ruidoso  $y_i$ , quando a taxa de fótons é  $x_i$ , obedece uma

<sup>1</sup>Por simplicidade de exposição, neste trabalho de pesquisa ruído aleatório é referido simplesmente por “ruído”.

distribuição Poisson dada pela seguinte expressão,

$$P(y_i = k | x_i) = \frac{e^{-x_i} x_i^k}{k!}. \quad (2.1)$$

Devido às propriedades da distribuição Poisson (ROSS, 2014), a variância do ruído é igual à taxa média de fótons chegando em cada célula de um arranjo de sensores, portanto este modelo de ruído é dito **dependente-de-sinal**. Diferentemente do modelo AWGN, em que a variância do ruído é constante.

Uma maneira de quantificar a degradação da imagem devido à presença de ruído é por meio da relação sinal-ruído (*Signal-to-Noise Ratio* – SNR). Sob a hipótese de ruído Poisson, a relação sinal-ruído, normalmente definida como sendo a razão entre média do sinal e desvio padrão do ruído, é dada pela seguinte expressão (BERRY; BURNELL, 2005, p. 37),

$$SNR_i = \frac{\bar{x}_i}{\sqrt{\bar{x}_i}} = \sqrt{\bar{x}_i}. \quad (2.2)$$

É possível observar pela Equação (2.2) que a relação sinal-ruído também varia no espaço e depende da taxa média de fótons em cada coordenada  $i$ . Logo, quanto maior a taxa de fótons em uma determinada região, menor será a degradação devido à presença de ruído. A Figura 2.2 exibe uma imagem simulada com diferentes faixas verticais de intensidade contaminadas por ruído Poisson, com intensidade média decrescente da esquerda para a direita.



**Figura 2.2:** Imagem simulada com diferentes faixas verticais de intensidade contaminadas por ruído Poisson.

De acordo com Berry e Burnell (2005, p. 40), a soma de  $N$  realizações diferentes de uma mesma imagem corrompida por ruído Poisson pode melhorar a relação sinal-ruído em um fator

de  $\sqrt{N}$ , com respeito a relação sinal-ruído de uma imagem individual. Esse fato pode ser facilmente comprovado considerando a seguinte expressão,

$$SNR_i(N) = \frac{N\bar{x}_i}{\sqrt{N\bar{x}_i}} = \sqrt{N\bar{x}_i}. \quad (2.3)$$

No entanto, essa abordagem é limitada na prática, uma vez que durante a aquisição de várias imagens do mesmo objeto de interesse, podem ocorrer problemas como o deslocamento ou movimentação de cena, ou no caso de aplicações como imageamento por raios-X, isso significaria expor o paciente a uma dose maior de radiação, o que poderia ser nocivo.

Vale a pena mencionar que quando a contagem de fótons acumulada em um fotodetector é alta o suficiente, isto é, com valores superiores a 20 fótons, a distribuição Poisson pode ser aproximada por uma distribuição normal com média e variância iguais à taxa de fótons subjacente (STARCK; MURTAGH, 2001; BERRY; BURNELL, 2005). Neste caso a função de distribuição de probabilidade pode ser expressa pela seguinte equação,

$$P(y_i = k \mid \mu = x_i, \sigma^2 = x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x_i}} \exp\left\{-\frac{(k - x_i)^2}{2x_i}\right\}, \quad \text{com } k, x_i \in \mathbb{Z}^+. \quad (2.4)$$

Essa propriedade também é válida para os pixels de uma imagem obtida a partir da soma de múltiplas realizações ruidosas de uma mesma cena ou objeto de interesse.

### 2.2.2 Modelo de ruído aditivo

No modelo AWGN, o ruído em cada pixel da imagem é representado como a realização de uma variável aleatória seguindo uma distribuição Gaussiana com média zero e variância arbitrária, adicionada ao valor de pixel livre de ruído. De modo equivalente, seja  $y_i$  o valor do pixel observado para uma dada coordenada  $i$ ,

$$y_i = x_i + z_i, \quad (2.5)$$

em que  $x_i$  é o valor de pixel livre de ruído e  $z_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$  é uma variável aleatória seguindo uma distribuição Gaussiana, com média zero e variância arbitrária  $\sigma^2$ , com função de densidade de probabilidade definida pela seguinte equação,

$$f(z_i \mid 0, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z_i}{\sigma}\right)^2\right\}, \quad \text{com } z_i \in \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

Desse modo,  $Y$  pode ser visto como a realização de um campo aleatório Gaussiano. Além disso, assume-se que as variáveis aleatórias  $\{z_i\}_{i \in I}$  não são correlacionadas ao sinal e são independentes entre si, ou seja,  $z_i$  é estatisticamente independente de  $z_j$  para todo  $i \neq j$ .

Em abordagens Bayesianas, a imagem livre de ruído subjacente  $X = \{x_i \mid i \in I\}$  é assumida como sendo um campo aleatório. Em geral, definir a distribuição exata de  $X$  nem sempre é possível. Por simplicidade,  $X$  também pode ser modelado como um campo aleatório Gaussiano. Esse é o caso do modelo assumido por Lebrun, Buades e Morel (2013b), descrito na Seção 2.5.5.

É importante observar que sob hipótese do modelo AWGN, a variância do ruído  $\sigma^2$  é uniforme em toda a imagem e não depende do sinal. Além disso, quanto maior a variância do ruído, maior será a degradação do sinal observado. Devido à sua simplicidade e tratabilidade matemática, tal modelo se torna bastante conveniente para a formulação teórica de algoritmos para a redução de ruído.

## 2.3 Técnicas para a Redução de Ruído Poisson

Redução de ruído em imagens corrompidas por ruído dependente de sinal é um desafio maior a ser abordado, uma vez que a degradação da imagem varia no espaço. No modelo de ruído Poisson, a relação sinal-ruído é menor em regiões de baixa incidência de fótons. De modo análogo, quanto maior a taxa de fótons em uma dada região, melhor será a relação sinal-ruído. Nesta seção, serão descritos algumas das principais técnicas para a redução de ruído Poisson.

Rabbani (1988) propôs um algoritmo Bayesiano baseado no critério de máxima probabilidade *a posteriori* (MAP – *Maximum A posteriori Probability*), com a hipótese de que a imagem livre de ruído pode ser modelada como um processo Gaussiano multivariado com média e matriz de covariância não estacionárias. Entretanto, para simplificar a estimativa dos parâmetros *a priori*, na prática é assumida a hipótese de que o sinal é estacionário para vizinhanças locais, isto é, média e variância do sinal permanecem constantes para todos os pixels em uma vizinhança suficientemente pequena.

Algoritmos baseados no critério de mínimo erro médio quadrático (MMSE – *Minimum Mean Square Error*), no caso geral, podem levar a soluções não lineares, podem ser computacionalmente onerosos e dependem das funções de densidade de probabilidade do sinal livre de ruído e do ruído (KAY, 1993, p. 379). Além disso, nem sempre é possível obter expressões de forma fechada para tais estimadores.

Lee, Lee e Kim (2011) propuseram um filtro não-local baseado no critério MMSE para a redução de ruído Poisson. A fórmula exata para se obter os coeficientes ótimos do filtro foi considerada intratável e por essa razão, os autores também propuseram uma aproximação para a implementação prática do algoritmo.

Uma alternativa ao critério MMSE consiste em buscar pelo estimador linear que minimize o erro médio quadrático. Limitar-se a soluções lineares facilita na obtenção de expressões de forma fechada para os estimadores, geralmente levando a algoritmos com maior tratabilidade. Outra vantagem é que tais estimadores exigem apenas estatísticas de primeira e segunda ordem do sinal e ruído. Esse critério é conhecido como mínimo erro médio quadrático linear (LMMSE – *Linear Minimum Mean Square Error*) e estimadores baseados em tal critério são conhecidos como estimadores de Wiener ou como filtros de Wiener.

Embora o termo “filtro de Wiener” seja utilizado genericamente nesse contexto, é importante ressaltar que algumas distinções podem ser feitas na literatura. Como exemplo, Kay (1993, p. 400) define o problema de filtragem de Wiener como um processo de estimativa que envolve apenas os dados “presentes e passados,” de modo semelhante à aplicação de um filtro causal.

Segundo Kay (1993, p. 380), quando o estimador ótimo para o problema em questão é de fato linear, como é o caso quando os dados observados e os parâmetros a serem estimados obedecem processos Gaussianos, a solução baseada no critério LMMSE é também a solução ótima. Do contrário, é uma solução subótima.

Baseado no critério LMMSE, Kuan et al. (1985) propuseram algoritmos adaptativos para a redução de ruído Poisson e outros modelos de ruído dependente-de-sinal. Tais algoritmos assumem que as estatísticas de primeira e segunda ordem do sinal e do ruído são estacionárias para a vizinhança local do pixel sendo processado e, portanto, podem ser computadas localmente de maneira amostral. Jiang e Sawchuk (1986) estendem o trabalho original de Kuan et al. (1985), propondo um algoritmo de filtragem iterativo com fórmulas explícitas para a atualização da variância do ruído a cada iteração do método.

O problema de redução de ruído Poisson também pode ser formulado como um problema de otimização, no qual uma função objetivo é minimizada sujeita a termos regularizadores baseados em *Total Variation* (TV) ou em outros critérios para a preservação de bordas, pequenos detalhes ou outras características da imagem (ZANELLA et al., 2009; BARDSLEY; GOLDES, 2009; BERTERO et al., 2010; LANDI; PICCOLOMINI, 2012; LI; LIU, 2012).

Muitos algoritmos exploram a limiarização de coeficientes menos significativos em um domínio no qual a imagem possui representação esparsa. Zhang, Fadili e Starck (2008) propõem uma nova VST para representações multi escala com bancos de filtros *wavelets*, *ridgelets* e *curvelets*, em que coeficientes significativos são detectados utilizando teste de hipótese. Lefkimiatis, Maragos e Papandreou (2009) propõem uma técnica baseada no algoritmo *Expectation-Maximization* (EM) para a estimativa das taxas de contagem e em uma nova representação multi escala, proposta para uma melhor preservação de bordas e estruturas da imagem.

No domínio das *wavelets* de Haar, coeficientes das sub-bandas de detalhes são o resultado da diferença de variáveis aleatórias Poisson, e portanto obedecem uma distribuição Skellam (SKELLAM, 1945). Já os coeficientes da sub-banda de aproximação são o resultado da soma de variáveis aleatórias Poisson, que por sua vez também seguem uma distribuição Poisson. Neste contexto, Hirakawa e Wolfe (2009) propõem diferentes abordagens baseadas em um *framework* Bayesiano para a atenuação de coeficientes *wavelets*. É importante ressaltar que tais abordagens são soluções aproximadas, visto que soluções de forma fechada nem sempre são possíveis na prática para algoritmos Bayesianos, como mencionado anteriormente.

Blu e Luisier (2007) propuseram um algoritmo, denominado SURE-LET, que combina o processamento no domínio da transformada *wavelet* não decimada, ao conceito em que o processo de redução de ruído pode ser formulado como a combinação linear de processos elementares, definidos pela limiarização de coeficientes *wavelet* utilizando diferentes parametrizações. Os processos básicos de limiarização são combinados de modo a minimizar o critério definido pela estimativa de risco não enviesado de Stein (1981), também conhecida como SURE<sup>2</sup> e que pode ser vista como uma métrica substituta para o erro médio quadrático quando a imagem livre de ruído é desconhecida.

O critério estabelecido pela estimativa SURE também supõem que a imagem ruidosa é corrompida por AWGN, portanto, o algoritmo SURE-LET deve ser aplicado em conjunto com uma VST, tal como a transformada de Anscombe, para o processamento de imagens corrompidas por ruído Poisson. Também é importante ressaltar que, devido ao fato do algoritmo SURE-LET empregar *wavelets* não decimadas, o custo computacional desse algoritmo tende a ser mais elevado.

Em uma segunda abordagem, Luisier et al. (2010) propuseram um novo algoritmo para a redução de ruído Poisson, denominado pelos autores como PURE-LET, formulado especificamente para a redução de ruído Poisson dependente de sinal que, a partir de certo ponto de vista, pode ser visto como uma contrapartida para o algoritmo SURE-LET dispensando o uso de VSTs.

O algoritmo PURE-LET é semelhante ao algoritmo SURE-LET no sentido que ambos abordam o problema de redução de ruído por meio da combinação linear de processos mais básicos de limiarização<sup>3</sup>. Entretanto, PURE-LET emprega *wavelets* ortogonais não redundantes e minimiza o critério definido pela estimativa de risco não enviesada do erro médio quadrático para ruído Poisson, denominada PURE<sup>4</sup>.

<sup>2</sup>Do inglês, *Stein's Unbiased Risk Estimate* – SURE.

<sup>3</sup>Do inglês, *Linear Expansion of Thresholds* – LET.

<sup>4</sup>Do inglês, *Poisson Unbiased Risk Estimate* – PURE



Para a viabilidade do algoritmo PURE-LET, os autores exploram uma propriedade particular das *wavelets* de Haar em que as estatísticas dos dados são preservadas através de diferentes escalas da transformada e que, ao minimizar o critério PURE individualmente para cada sub-banda da imagem, o erro de estimativa global também é minimizado.

Outros exemplos de algoritmos que adotam formulações baseadas em modelos de ruído dependentes-de-sinal, dispensando assim o uso de VSTs, são: Non-Local PCA (SALMON et al., 2014), Poisson-NLM (DELEDALLE; TUPIN; DENIS, 2010), e SP-NLM (BINDILATTI; MASCARENHAS, 2013), propostos para a hipótese de ruído Poisson.

Thakur, Damodare e Sapkal (2016) propõem uma extensão do filtro bilateral, originalmente proposto por Tomasi e Manduchi (1998), para a redução de ruído Poisson. Embora o algoritmo proposto por Thakur, Damodare e Sapkal (2016) apresente um baixo tempo de execução, algoritmos não-locais para a redução de ruído Poisson como o Poisson-NLM (DELEDALLE; TUPIN; DENIS, 2010) apresentam melhores resultados em termos de redução de ruído e preservação de bordas e pequenos detalhes.

## 2.4 Transformada de Anscombe

No domínio da transformada de Anscombe, uma variável aleatória Poisson pode ser aproximada como uma variável aleatória obedecendo uma distribuição Gaussiana com variância unitária, possibilitando o uso de algoritmos originalmente formulados para o modelo AWGN. A transformada de Anscombe é dada pela seguinte expressão (ANSCOMBE, 1948),

$$z = 2\sqrt{y + 3/8}, \quad (2.7)$$

em que  $y$  é uma variável aleatória Poisson e  $z$  pode ser vista como uma variável normal com variância aproximadamente unitária.

No domínio de Anscombe, a variância do ruído é aproximadamente constante para todas as regiões da imagem, permitindo que algoritmos formulados sob hipótese de ruído aditivo possam ser aplicados para a redução de ruído. Após o processo de atenuação do ruído, uma transformada inversa precisa ser aplicada para que os dados retornem a sua representação original. A inversa algébrica de Anscombe é dada pela seguinte equação,

$$y = \left(\frac{z}{2}\right)^2 - \frac{3}{8}. \quad (2.8)$$

Devido ao fato de que nenhum algoritmo conhecido para redução de ruído é ideal, ou seja,

nenhum algoritmo conhecido remove efetivamente a presença de ruído de modo a recuperar exatamente o sinal livre de ruído, e dada a não linearidade da transformada de Anscombe, viés é introduzido ao aplicar a equação (2.8) como transformada inversa. Para imagens obtidas a partir de altas contagens de fótons, a transformada inversa assintoticamente não enviesada de Anscombe pode ser utilizada (ANSCOMBE, 1948),

$$y = \left(\frac{z}{2}\right)^2 - \frac{1}{8}. \quad (2.9)$$

A inversa descrita pela Equação (2.9) não apresenta viés para regiões da imagem com alta incidência de fótons. Por outro lado, segundo Starck e Murtagh (2001), para regiões com taxas de contagem abaixo de 20 fótons, viés ainda é um problema. Makitalo e Foi (2011) propuseram uma transformada inversa exata, otimizada para imagens obtidas em regimes de baixa contagem de fótons.

## 2.5 Principais Técnicas Relacionadas

Nesta seção, serão descritos de maneira detalhada os algoritmos NLM, Poisson-NLM, SP-NLM, BM3D, NL-Bayes e a técnica de filtragem em duplo-domínio. Estes algoritmos e técnicas podem ser considerados como o atual estado da arte para a atenuação de ruído em imagens digitais. Baseando-se nas características de tais métodos, novas abordagens foram propostas por este trabalho de pesquisa, de modo a estabelecer novos algoritmos eficazes para a redução de ruído Poisson que, ao mesmo tempo, evitam a introdução de artefatos visuais.

### 2.5.1 O Algoritmo NLM

Buades, Coll e Morel (2005) propuseram um algoritmo chamado *Non-Local Means* (NLM) que explora a redundância inerente a imagens naturais. O algoritmo NLM inspirou um novo *framework* de algoritmos que exploram o princípio que imagens naturais são compostas por diversos conjuntos de pequenas regiões (*patches*) similares entre si, sendo que tais regiões não necessariamente se localizam próximas umas das outras no domínio do espaço.

No que se segue, será realizada uma descrição mais geral do algoritmo NLM. Isso tornará mais clara a explanação de suas extensões. Teoricamente, o algoritmo NLM estima o valor livre de ruído de um pixel, como a média ponderada de todos os outros pixels ruidosos da imagem, em que pixels centralizados em *patches* similares ao *patch* correspondente ao pixel sendo processado, recebem maior peso. Na prática, a busca por *patches* similares é limitada

a uma janela de busca ao redor do pixel de interesse, reduzindo o custo computacional do algoritmo.

Mais formalmente, o algoritmo NLM produz uma estimativa da imagem livre de ruído,  $\hat{X} = \{\hat{x}_i \mid i \in I\}$ , em que  $\hat{x}_i$  é obtido por meio da seguinte expressão (BUADES; COLL; MOREL, 2005),

$$\hat{x}_i = \sum_{j \in \Omega_i} w_{ij} \cdot y_j. \quad (2.10)$$

Na equação (2.10),  $\Omega_i$  representa a janela de busca definida (por simplicidade) como sendo uma janela quadrada centralizada ao redor da coordenada de pixel  $i$  e  $\{w_{ij}\}_{j \in \Omega_i}$  são os coeficientes do filtro.

Por sua vez, os coeficientes do filtro são calculados como uma função decrescente da distância entre os *patches* centralizados nas coordenadas  $i$  e  $j$ ,

$$w_{ij} = \frac{K_h\{d(\mathbf{y}_j, \mathbf{y}_i)\}}{W_i}, \quad (2.11)$$

sendo que  $\mathbf{y}_j$  e  $\mathbf{y}_i$  representam os vetores  $n$ -dimensionais dos tons de cinza dos *patches* centralizados nas coordenadas  $j$  e  $i$ , respectivamente;  $d(\mathbf{y}_j, \mathbf{y}_i)$  é a função de distância ou (dis)similaridade entre os vetores  $\mathbf{y}_j$  e  $\mathbf{y}_i$ ;  $K_h$  é uma função *kernel* que determina o decaimento dos pesos em função das distâncias entre *patches*; e  $W_i = \sum_{j \in \Omega_i} K_h\{d(\mathbf{y}_j, \mathbf{y}_i)\}$  é um fator normalizador, tal que  $\sum_{j \in \Omega_i} w_{ij} = 1$  e  $0 \leq w_{ij} \leq 1$  para qualquer  $i$  e qualquer  $j \in \Omega_i$ .

Para o algoritmo NLM, originalmente proposto por Buades, Coll e Morel (2005),  $d(\mathbf{y}_j, \mathbf{y}_i)$  é definida como a distância Euclidiana ponderada entre vetores,

$$\|\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_i\|_{2,a}^2 = \frac{1}{\sum_{b \in P} \mathcal{G}_a(b)} \left( \sum_{b \in P} \mathcal{G}_a(b) \cdot (y_{j+b} - y_{i+b})^2 \right), \quad (2.12)$$

com  $P = \{-\tau, \dots, 0, \dots, \tau\} \times \{-\tau, \dots, 0, \dots, \tau\}$  representando todos os possíveis deslocamentos discretos em um *patch* quadrado de largura  $2\tau + 1$ ; e  $\mathcal{G}_a$  é um *kernel* Gaussiano com desvio padrão  $a$ , determinado pela seguinte equação,

$$\mathcal{G}_a(b) = \frac{1}{2\pi a^2} \cdot \exp\left\{-\frac{\|b\|^2}{2a^2}\right\}. \quad (2.13)$$

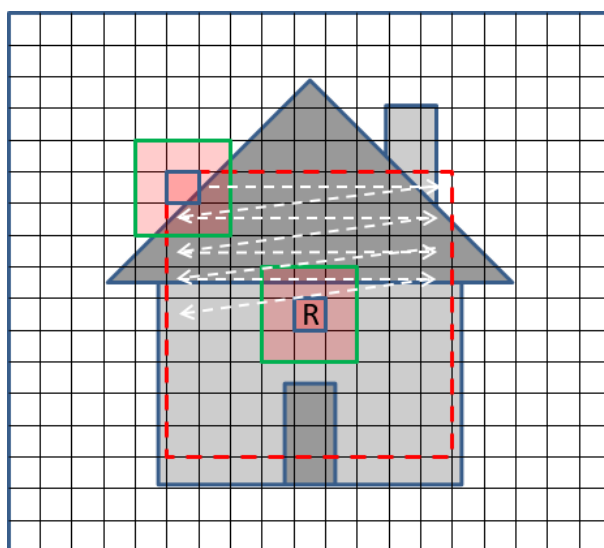
Enquanto  $K_h$  é definido de acordo com a seguinte expressão,

$$K_h(d) = \exp(-d/h^2), \quad (2.14)$$

em que o argumento  $d$  representa a distância entre *patches* e  $h$  é um parâmetro de filtragem, responsável por controlar o compromisso entre redução de ruído e suavização da imagem, e será

discutido na subseção 2.5.1. Funções *kernel*  $K_h$  e métricas de (dis)similaridade  $d(\mathbf{y}_j, \mathbf{y}_i)$  mais gerais foram propostas para extensões do algoritmo NLM (DELEDALLE; TUPIN; DENIS, 2010; DELEDALLE; DENIS; TUPIN, 2012; BINDILATTI; MASCARENHAS, 2013; WU et al., 2013).

A Figura 2.3 ilustra o processo de execução definido pelo algoritmo NLM. Para cada coordenada de pixel a ser processada, o *patch* centralizado em tal coordenada, denotado por  $R$ , é fixado como referência e uma janela de busca é estabelecida ao seu redor, indicada pela linha tracejada em vermelho. Cada pixel da janela de busca é percorrido sequencialmente, da esquerda para a direita e de cima para baixo, e o *patch* centralizado em cada coordenada visitada é comparado ao *patch* referência  $R$ . Durante esse processo de busca, os coeficientes do filtro são computados de acordo com a equação (2.11). Após percorrer toda a janela de busca, o valor livre de ruído da coordenada de pixel central,  $R$ , é obtido utilizando a equação (2.10).



**Figura 2.3: Ilustração do processo de execução do algoritmo NLM.**

Intuitivamente, é possível observar que para computar a equação (2.10), a distância definida na equação (2.12) precisa ser calculada para cada coordenada da janela de busca, o que por sua vez envolve a comparação de todos os pixels correspondentes entre o *patch* referência e o atual *patch* sendo visitado na janela de busca. Visto que a equação (2.10) precisa ser computada para cada coordenada de pixel da imagem, sejam  $N = |I|$  o total de coordenadas de pixels a serem processados,  $|\Omega|$  o tamanho da janela de busca e  $|P|$  o tamanho dos *patches*, a complexidade do algoritmo NLM pode ser expressa por  $O(N \cdot |\Omega| \cdot |P|)$ , em notação O-grande (*big-O*).

É importante notar que se a equação (2.10) fosse definida utilizando todos os pixels disponíveis na imagem, isto é, sem o uso de uma janela de busca, a complexidade do algoritmo NLM passaria a ser quadrática com relação ao número de pixels  $N$ ,  $O(N^2 \cdot |P|)$ . Isso tornaria o

algoritmo NLM inviável para aplicações práticas.

### Principais Parâmetros

Os principais parâmetros do algoritmo NLM são: (1) o parâmetro de filtragem  $h$ ; (2) o tamanho do *patch*, também chamado de janela de similaridade; e (3) o tamanho da janela de busca. Na prática, o desvio padrão  $a$  do *kernel* Gaussiano  $\mathcal{G}_a$  é um parâmetro negligenciado sem grande perda nos resultados em algumas variações do algoritmo NLM (DARBON et al., 2008; ZHONG; YANG; ZHANG, 2012), nas quais  $\mathcal{G}_a$  é removido, ou definido de modo empírico.

O parâmetro de filtragem  $h$  controla o compromisso entre redução de ruído e suavização da imagem, de modo que para valores de  $h$  tendendo a zero,  $h \rightarrow 0$ , a imagem  $\hat{X}$  estimada se aproxima da imagem ruidosa,  $\hat{X} \rightarrow Y$ , ou seja, quanto menor  $h$ , menor será a suavização da imagem ruidosa. Por outro lado, para  $h \rightarrow \infty$ , o algoritmo NLM se comporta como um filtro de média local e, portanto, maior será o borramento observado na imagem filtrada.

Sob hipótese do modelo AGWN, Buades, Coll e Morel (2005) sugerem que uma boa escolha para o parâmetro de filtragem é  $h = \gamma \cdot \sigma$ , sendo que  $\gamma$  é uma constante dependente dos dados e deve ser selecionada experimentalmente, enquanto  $\sigma$  é o desvio padrão do ruído.

O tamanho do *patch* (ou janela de similaridade) deve ser selecionado de modo a proporcionar robustez com relação a ruído. Quanto maior o tamanho do *patch*, menor é a influência do ruído na função de similaridade definida pela equação (2.12). Porém, quanto maior o tamanho dos *patches*, maior é o número de combinações possíveis de *patches* existentes e menor é a probabilidade de encontrar *patches* similares, reduzindo a eficácia do algoritmo NLM em atenuar ruído.

Em outras palavras, o tamanho dos *patches* deve ser grande o suficiente para fornecer robustez a ruído, porém, não tão grande de modo a capturar eficientemente estruturas locais. Tamanhos típicos utilizados na prática são  $5 \times 5$ ,  $7 \times 7$  ou  $9 \times 9$  (BUADES; COLL; MOREL, 2005; SALMON, 2010).

No caso de imagens naturais, o uso de uma janela de busca não somente leva a um algoritmo com menor complexidade computacional, como também produz melhores resultados de filtragem. Salmon (2010) demonstrou experimentalmente que, para o algoritmo NLM, o ganho de desempenho em termos de PSNR é pouco substancial para janelas de busca com tamanhos superiores a  $15 \times 15$ , sendo que em alguns casos resultados inferiores são obtidos.

Isso ocorre devido ao fato de que os pesos do algoritmo NLM são definidos por uma função suave que decresce com distância Euclidiana entre *patches*, vide equação (2.14). Com o au-

mento da janela de busca, um número maior de amostras não similares será incluído na estimativa definida pela equação (2.10), com pesos diferente de zero. Conforme observado por Salmon (2010), esse problema não ocorre para imagens periódicas ou *quasi*-periódicas.

### 2.5.2 Poisson NLM

Deledalle, Tupin e Denis (2010) propuseram uma extensão para o algoritmo NLM para a redução de ruído Poisson, denominada Poisson-NLM. No algoritmo Poisson-NLM, a função que define os coeficientes do filtro, expressa pela equação (2.11), é substituída por

$$w_{ij} = \frac{1}{W_i} \exp \left( -\frac{1}{\alpha} \sum_{b \in P} f(y_{j+b}, y_{i+b}) - \frac{1}{\beta} \sum_{b \in P} g(\hat{\lambda}_{j+b}, \hat{\lambda}_{i+b}) \right), \quad (2.15)$$

em que  $\hat{\lambda}_{j+b}$  e  $\hat{\lambda}_{i+b}$  são pixels obtidos a partir de uma imagem pré suavizada;  $y_{j+b}$  e  $y_{i+b}$  são amostras de pixels obtidas a partir da imagem ruidosa;  $f$  é a função que define a similaridade entre pixels ruidosos;  $g$  é a função de similaridade entre pixels pré-filtrados; e  $\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros de filtragem que ponderam a influência de  $f$  e  $g$ , respectivamente, no cálculo dos pesos do filtro.

É importante salientar que, em contraste ao algoritmo NLM originalmente proposto por Buades, Coll e Morel (2005), o algoritmo Poisson-NLM combina a similaridade entre *patches* obtidos tanto a partir de uma imagem ruidosa, como também entre os *patches* correspondentes em uma imagem pré-suavizada. Essa abordagem proporciona melhores resultados para a filtragem de imagens com baixa relação sinal-ruído, pois ao explorar a similaridade entre *patches* pré-suavizados, a influência do ruído no cálculo dos pesos do filtro é atenuada. Ao passo que, quando a relação sinal-ruído é mais elevada, a contribuição da similaridade entre *patches* ruidosos minimiza a influência do borramento introduzido na pré-suavização da imagem sendo processada.

As funções  $f$  e  $g$  são definidas levando em consideração o modelo de ruído Poisson. Em particular,  $f$  é definida pela razão de verossimilhança entre amostras ruidosas, dada pela seguinte equação,

$$f(y_1, y_2) = y_1 \log y_1 + y_2 \log y_2 - (y_1 + y_2) \log \left( \frac{y_1 + y_2}{2} \right). \quad (2.16)$$

Enquanto  $g$  é definida pela distância simétrica de Kullback–Leibler entre distribuições Poisson com parâmetros obtidos a partir de uma imagem pré filtrada,

$$g(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) = (\hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_2) \log \left( \frac{\hat{\lambda}_1}{\hat{\lambda}_2} \right). \quad (2.17)$$

No trabalho de Deledalle, Tupin e Denis (2010), os parâmetros de filtragem  $\alpha$  e  $\beta$  são ajustados automaticamente por meio de um procedimento iterativo baseado na minimização do critério de risco PURE, que serve como uma métrica substituta para o erro médio quadrático na ausência da imagem livre de ruído.

### 2.5.3 SP-NLM

Em um trabalho anterior, Bindilatti e Mascarenhas (2013) propuseram uma extensão do algoritmo NLM, denominada *Stochastic Poisson NLM* (SP-NLM), baseada no uso de distâncias estocásticas como métricas de (dis)similaridade, para a redução de ruído Poisson. A Figura 2.4 ilustra o diagrama de blocos representando os passos envolvidos para a execução do algoritmo SP-NLM.

Distâncias estocásticas são divergências simétricas que assumem valores maiores quando a discrepância entre duas distribuições aumenta. Sejam  $X$  e  $Y$  variáveis aleatórias obedecendo distribuições Poisson, com parâmetros  $\lambda_X$  e  $\lambda_Y$  respectivamente. As distâncias estocásticas entre as distribuições das variáveis  $X$  e  $Y$  são definidas pelas seguintes equações (BINDILATTI; MASCARENHAS, 2013):

- Distância Kullback–Leibler:

$$d_{KL}(X, Y) = \frac{1}{2} \left[ (\lambda_X - \lambda_Y) \cdot \ln \frac{\lambda_X}{\lambda_Y} \right]; \quad (2.18)$$

- Distância Rény:

$$d_R^\beta(X, Y) = \frac{1}{\beta - 1} \ln \left( \frac{e^{-\lambda_Y + \beta(\lambda_Y - \lambda_X) + \lambda_X^\beta \lambda_Y^{(1-\beta)}} + e^{-\lambda_X + \beta(\lambda_X - \lambda_Y) + \lambda_Y^\beta \lambda_X^{(1-\beta)}}}{2} \right); \quad (2.19)$$

- Distância Hellinger:

$$d_H(X, Y) = 1 - \exp \left( -\frac{1}{2} (\lambda_X + \lambda_Y) + \sqrt{\lambda_X \lambda_Y} \right); \quad (2.20)$$

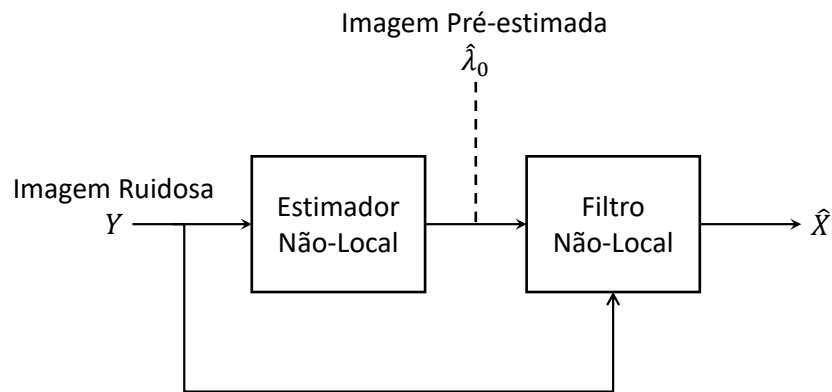
- Distância Bhattacharyya:

$$d_B(X, Y) = \frac{1}{2} (\lambda_X + \lambda_Y) - \sqrt{\lambda_X \lambda_Y}. \quad (2.21)$$

Conforme pode ser observado a partir da Figura 2.4, o primeiro passo do algoritmo SP-NLM consiste em obter uma pré-estimativa da imagem livre de ruído  $\hat{\lambda}_0 = \{\hat{\lambda}_i \mid i \in I\}$ . Essa etapa é baseada no estimador de máxima verossimilhança para dados distribuídos de acordo com

a distribuição Poisson, utilizando um procedimento não-local semelhante ao método proposto por He e Greenshields (2009) para imagens de ressonância magnética.

Mais especificamente, para cada coordenada de pixel  $i \in I$ , os  $k$  *patches* mais similares ao *patch* centralizado em  $i$  são selecionados. O estimador de máxima verossimilhança para distribuição Poisson, é então aplicado para obter a estimativa  $\hat{\lambda}_i$ , utilizando como amostra o conjunto dos  $k$  pixels correspondentes aos pixels centrais dos *patches* selecionados.



**Figura 2.4: Diagrama de blocos representando o algoritmo SPNLM.**

Uma vez obtida a pré-estimativa  $\hat{\lambda}_0 = \{\hat{\lambda}_i \mid i \in I\}$ , a estimativa final da imagem livre de ruído  $\hat{X} = \{\hat{x}_i \mid i \in I\}$  é obtida utilizando um filtro não-local, baseado nas distâncias estocásticas como novas métricas de similaridade. Para tal, é empregado o mesmo procedimento expresso pela Equação (2.10), porém, com os coeficientes do filtro são definidos da seguinte maneira,

$$w_{ij} = \frac{1}{W_i} \exp \left( -\frac{1}{\gamma \cdot \hat{\lambda}_i^{1/2}} \sum_{b \in P} d_\Lambda(\hat{\lambda}_{j+b}, \hat{\lambda}_{i+b}) \right), \quad (2.22)$$

em que  $d_\Lambda$  é uma das distâncias estocásticas propostas para a distribuição Poisson e expressas pelas equações (2.18), (2.19), (2.20) e (2.21);  $\gamma$  é uma constante fornecida como parâmetro e controla a intensidade do filtro, tal como descrito na Seção 2.5.1; e  $\hat{\lambda}_i^{1/2}$  é uma estimativa do desvio padrão do ruído, sob hipótese de ruído Poisson.

É importante notar que, assim como ilustrado no diagrama de blocos da Figura 2.4, a etapa final de estimativa recebe como entrada tanto a imagem ruidosa  $Y$ , quanto a pré-estimativa  $\hat{\lambda}_0$  da imagem livre de ruído. A estimativa final  $\hat{x}_i$  é obtida por meio de uma média ponderada de amostras ruidosas, do mesmo modo como no algoritmo NLM, porém, os coeficientes do filtro são calculados utilizando a imagem pré-estimada.



### 2.5.4 Block-Matching and 3D Filtering

O algoritmo *Block-Matching* e filtragem 3D (BM3D), proposto por Dabov et al. (2007), também é conhecido por explorar a redundância inerente a imagens naturais, porém, emprega uma nova estratégia chamada de **filtragem colaborativa**. Ao agrupar *patches* similares, é possível aumentar a eficácia de métodos de filtragem ao processar o grupo de *patches* coletivamente, obtendo resultados melhores do que seriam obtidos ao processar cada *patch* de modo individual.

De modo geral, o algoritmo BM3D é dividido em dois estágios principais: (1) estimativa básica, baseada na atenuação de coeficientes *wavelets* utilizando a técnica de *hard-thresholding*; e (2) estimativa final, baseada na atenuação de coeficientes *wavelets* utilizando o filtro de Wiener. Na etapa estimativa básica, *patches* são agrupados de acordo com sua similaridade definida pela distância Euclidiana entre *patches* ruidosos. Já na estimativa final, a imagem pré-estimada obtida no primeiro passo é utilizada como guia para o agrupamento mais preciso de *patches*, e também como informação *a priori* para o cálculo do filtro de Wiener.

A Figura 2.5 ilustra os procedimentos envolvidos na estimativa básica. Grupos de *patches* similares são formados utilizando em um procedimento chamado *block-matching*. Um sinal 3D ou tensor, é formado empilhando o grupo de *patches* 2D, tal como ilustrado na Figura 2.5. Uma transformada *wavelet* 3D, composta pelas transformadas individuais nas linhas, colunas e na profundidade, é aplicada ao grupo 3D de *patches* similares.

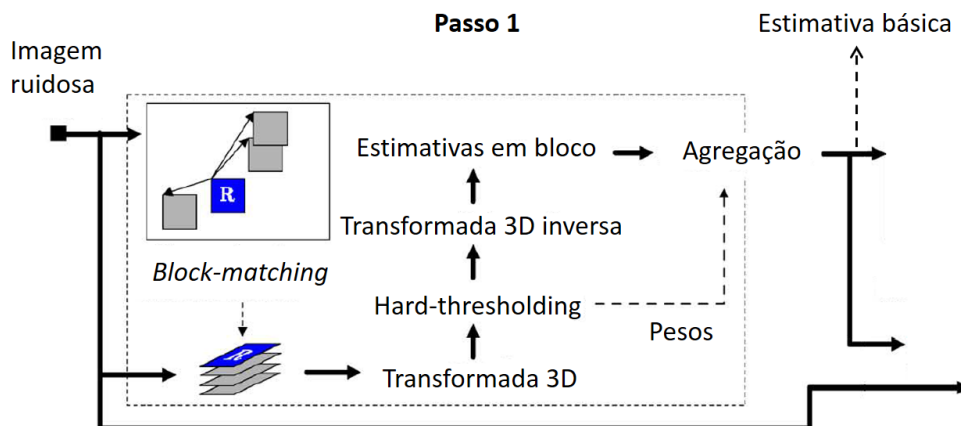


Figura 2.5: Diagrama representativo da estimativa básica do algoritmo BM3D.

A filtragem colaborativa é então exercida utilizando a técnica de *hard-thresholding*. Devido à alta redundância do grupo 3D, mais esparsos serão os coeficientes *wavelet* no domínio da transformada 3D e, portanto, mais eficientes serão os resultados obtidos com a técnica de *hard-thresholding*. Ao filtrar coletivamente o grupo de *patches*, uma transformada 3D inversa é

então aplicada, obtendo versões filtradas dos *patches* 2D individuais. Por sua vez, os *patches* individuais são inseridos novamente em suas respectivas coordenadas de origem.

Múltiplas estimativas do valor livre de ruído de um mesmo pixel podem ser obtidas, uma vez que é possível que haja sobreposição entre *patches* em um dado grupo. Além disso, um mesmo *patch* pode participar mais de uma vez do processo de filtragem colaborativa ao ser incluído em outros grupos de *patches* similares. Essas estimativas precisam ser combinadas para que uma única estimativa seja estabelecida para cada pixel. Esse processo de **agregação** é realizado por meio de uma média ponderada das estimativas individuais, em que os pesos são inversamente proporcionais à variância amostral dos grupos formados durante a filtragem colaborativa.

A Figura 2.6 ilustra os procedimentos envolvidos na estimativa final. O segundo estágio do algoritmo BM3D é composto por procedimentos similares aos realizados no primeiro estágio, porém com duas modificações principais:

1. o processo de *block-matching* compara *patches* extraídos da imagem obtida na estimativa básica, formado dois grupos 3D de *patches* similares. Um grupo composto pelos *patches* extraídos da imagem pré-filtrada e um segundo grupo com os *patches* correspondentes extraídos da imagem ruidosa. A transformada 3D é aplicada em ambos os grupos;
2. a estimativa final é obtida com a atenuação de coeficientes do grupo de *patches* ruidosos no domínio da transformada 3D, utilizando o filtro de Wiener. Os coeficientes do grupo de *patches* extraídos da imagem obtida na estimativa básica são utilizados como uma aproximação para os verdadeiros coeficientes do sinal livre de ruído.

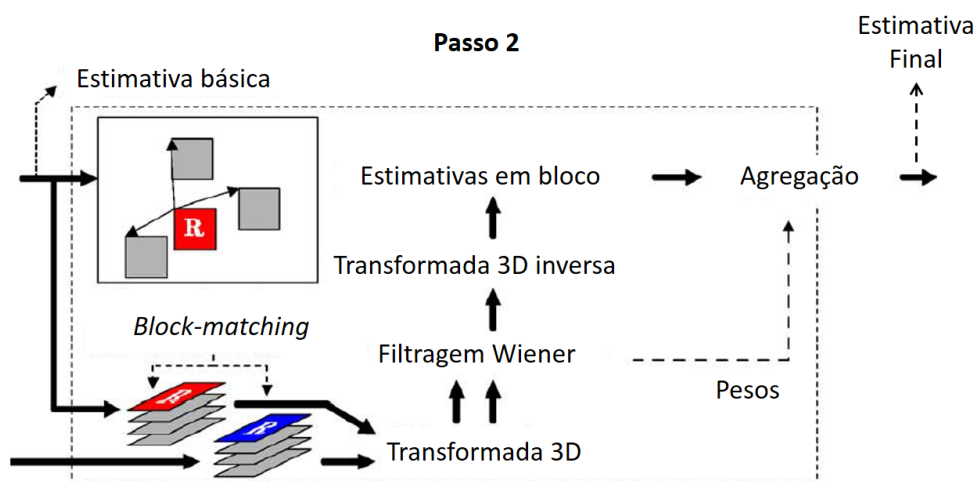


Figura 2.6: Diagrama representativo da estimativa final do algoritmo BM3D.

Mevenkamp et al. (2015) propuseram uma extensão do algoritmo BM3D para a redução de ruído Poisson em imagens de estruturas cristalinas, obtidas pela técnica de microscopia eletrônica de varredura por transmissão (*Scanning Transmission Electron Microscopy* – STEM). Os autores sugerem o uso da razão de verossimilhança para a distribuição Poisson, expressa pela Equação (2.16), para a comparação de *patches* durante o processo de *block-matching* empregado na estimativa básica. Os demais passos do algoritmo são realizados no domínio da transformada de Anscombe. Além disso, uma estratégia baseada na periodicidade das estruturas cristalinas é proposta para melhor explorar a redundância em tais imagens.

### 2.5.5 NL-Bayes

O algoritmo NL-Bayes, proposto por Lebrun, Buades e Morel (2013b), se baseia em uma abordagem Bayesiana para a estimativa de um *patch* livre de ruído  $\mathbf{x}_i$ , expresso como um vetor coluna, dado uma observação ruidosa  $\mathbf{y}_i$  do mesmo. Assume-se como hipótese que ambos  $\mathbf{x}_i \sim \mathcal{N}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{C}_x)$  e  $\mathbf{y}_i \sim \mathcal{N}(\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{C}_y)$  são realizações de processos Gaussianos e que o ruído presente na imagem obedece o modelo AWGN.

Sob as circunstâncias descritas acima, e assumindo que as seguintes aproximações são válidas  $\bar{\mathbf{x}} \simeq \bar{\mathbf{y}}$  e  $\mathbf{C}_x \simeq \mathbf{C}_y + \sigma^2 \mathbf{I}$ , o filtro ótimo segundo o critério MAP pode ser expresso pela seguinte equação (LEBRUN; BUADES; MOREL, 2013b),

$$\hat{\mathbf{x}}_i = \bar{\mathbf{y}} + [\mathbf{C}_y - \sigma^2 \mathbf{I}] \mathbf{C}_y^{-1} (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}}), \quad (2.23)$$

em que  $\sigma^2$  é a variância do ruído. É importante observar que a Equação (2.23) tem a mesma forma do filtro de Wiener descrito na Seção 3.3 do Capítulo 3.

De modo semelhante ao algoritmo BM3D, para cada coordenada de pixel  $i \in I$ , grupos de *patches* similares são formados. No caso do algoritmo NL-Bayes, os grupos de *patches* similares são compostos pelos  $k$  *patches* mais similares ao *patch* sendo processado, considerando apenas *patches* localizados em uma janela de busca centralizada ao redor do *patch* de interesse. Os parâmetros  $\bar{\mathbf{y}}$  e  $\mathbf{C}_y$  são então calculados a partir desses grupos utilizando as seguintes fórmulas,

$$\bar{\mathbf{y}} = \frac{1}{k} \sum_j \mathbf{y}_j \quad \text{e} \quad (2.24)$$

$$\mathbf{C}_y = \frac{1}{k-1} \sum_j (\mathbf{y}_j - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y}_j - \bar{\mathbf{y}})^T. \quad (2.25)$$

Cada um dos *patches* do grupo é processado utilizando o estimador expresso na Equação (2.23) e suas respectivas versões filtradas são posicionadas em suas coordenadas originais. Uma

vez que pode haver sobreposição de *patches* ou que um mesmo *patch* pode participar mais de uma única vez do processo de filtragem, porém, em diferentes grupos de *patches* similares, múltiplas estimativas podem ser obtidas para um mesmo pixel. Essas estimativas são agregadas utilizando uma média uniforme, diferente do algoritmo BM3D que emprega uma média ponderada.

O algoritmo NL-Bayes também realiza uma segunda etapa de filtragem, e assim como no caso do algoritmo BM3D, a similaridade entre *patches* é calculada a partir da imagem obtida na primeira etapa de filtragem, formando dois grupos de *patches*: um grupo com *patches* extraídos a partir da imagem pré estimada; e um segundo grupo formado por *patches* extraídos da imagem ruidosa.

Na segunda etapa de filtragem, a matriz de covariância amostral é calculada a partir dos grupos de *patches* extraídos da imagem pré-filtrada utilizando a seguinte equação,

$$\mathbf{C}_x = \frac{1}{k' - 1} \sum_j (\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{y}})^T. \quad (2.26)$$

Novamente assumindo que as seguintes aproximações são válidas  $\bar{\mathbf{x}} \simeq \bar{\mathbf{y}}$  e  $\mathbf{C}_x \simeq \mathbf{C}_y + \sigma^2 \mathbf{I}$ , o estimador descrito pela Equação (2.23) passa a ser definido da seguinte maneira,

$$\hat{\mathbf{x}}'_i = \bar{\mathbf{y}} + \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}} [\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}} + \sigma^2 \mathbf{I}]^{-1} (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}}), \quad (2.27)$$

em que  $\hat{\mathbf{x}}'_i$  representa a estimativa de *patch* obtida na segunda etapa de filtragem. O restante do processo de filtragem se sucede de forma análoga à primeira etapa de filtragem.

Na prática, algumas otimizações são aplicadas na implementação do algoritmo NL-Bayes, permitindo que resultados melhores (em termos de métricas como o PSNR) sejam obtidos. Como exemplo, tratamento especial é realizado para grupos de *patches* detectados como homogêneos, isto é, grupos cuja variância amostral de seus pixels é inferior a um determinado limiar fornecido como parâmetro. Nesse caso, a estimativa do valor livre de ruído de cada pixel é obtida pela média amostral de todos os pixels pertencentes ao grupo. Para mais detalhes sobre a implementação do algoritmo NL-Bayes e suas otimizações (LEBRUN; BUADES; MOREL, 2013a) deve ser referido.

## 2.5.6 Redução de Ruído em Duplo-Domínio

Uma nova estratégia para a redução de ruído em imagens, se baseia na filtragem em duplo-domínio, em que o sinal ruidoso é simultaneamente processado nos domínios do espaço e da frequência. Três principais algoritmos baseados nessa estratégia são conhecidos na literatura:

*Dual-Domain Image Denoising* (DDID), *Progressive Image Denoising* (KNAUS; ZWICKER, 2014) e *Dual-Domain Filtering* (DDF) (KNAUS; ZWICKER, 2015). Tais algoritmos são descritos nesta seção.

### Dual-Domain Image Denoising

Proposto por Knaus e Zwicker (2013) para a redução de imagens corrompidas por AWGN, o algoritmo *Dual-Domain Image Denoising* (DDID), se baseia na filtragem em duplo-domínio utilizando *kernels* bilaterais, semelhantes ao *kernel* bilateral empregado no filtro bilateral de Tomasi e Manduchi (1998). Em contraste com os algoritmos baseados no NLM, BM3D e NL-Bayes, o algoritmo DDID não explora a semelhança entre *patches*.

O *kernel* bilateral combina duas medidas de similaridade na definição de seus coeficientes: (1) a distância de domínio, obtida pela distância espacial entre pixels; e (2) a distância fotométrica ou distância *range*, obtida a partir da diferença entre os tons de cinza de pixels. Para atenuar a influência de ruído na definição do filtro bilateral utilizado pelo algoritmo DDID, a distância fotométrica é computada a partir de uma imagem pré-filtrada  $Z = \{z_i \mid i \in I\}$ .

Seja  $\mathcal{N}_i$  o conjunto de coordenadas de pixel pertencentes à vizinhança de  $i$ , o *kernel* bilateral utilizado no algoritmo DDID é definido da seguinte forma,

$$k_{ij} = \exp \left\{ -\frac{\|i - j\|^2}{2\sigma_s^2} \right\} \exp \left\{ -\frac{(z_i - z_j)^2}{\gamma_r \sigma^2} \right\}, \quad (2.28)$$

em que  $\sigma_s$  é um parâmetro que determina a influência da distância de domínio  $\|i - j\|^2$ ;  $\gamma_r$  é um parâmetro que determina a influência da distância fotométrica  $(z_i - z_j)^2$ ; e  $\sigma$  é o desvio padrão do ruído.

Para cada coordenada de pixel  $i \in I$ , o filtro bilateral definido pela Equação (2.28) é aplicado para a suavização tanto da imagem ruidosa  $Y$  quanto da imagem guia  $Z$ ,

$$\bar{y}_i = \frac{\sum_{j \in \mathcal{N}_i} (k_{ij} \cdot y_j)}{\sum_{j \in \mathcal{N}_i} k_{ij}}, \quad (2.29)$$

$$\bar{z}_i = \frac{\sum_{j \in \mathcal{N}_i} (k_{ij} \cdot z_j)}{\sum_{j \in \mathcal{N}_i} k_{ij}}. \quad (2.30)$$

A segunda etapa do algoritmo DDID consiste na redução de ruído no domínio da frequência. Embora Knaus e Zwicker (2013) descrevam essa etapa como a atenuação de coeficientes *wavelet*, na prática é semelhante à redução de ruído no domínio da frequência utilizando a transformada janelada de Fourier, em que a função de janelamento é definida pelo *kernel* bilateral

expresso na Equação (2.28).

Formalmente, Knaus e Zwicker (2013) definem as transformadas de domínio por meio das seguinte expressões,

$$Y_{i,f} = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} e^{-\iota 2\pi(j-i) \cdot f / (2\tau+1)} k_{ij} (y_j - \bar{y}_i), \quad (2.31)$$

$$Z_{i,f} = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} e^{-\iota 2\pi(j-i) \cdot f / (2\tau+1)} k_{ij} (z_j - \bar{z}_i), \quad (2.32)$$

em que  $\tau$  é a distância do pixel central até os limites da vizinhança centralizada em  $i$  no espaço; e  $\iota = \sqrt{-1}$ <sup>5</sup>. Os coeficientes  $Y_{i,f}$  e  $Z_{i,f}$  são calculados para diferentes frequências em um conjunto discreto  $f \in \mathcal{F}_i$  de frequências.

É importante notar que as funções base da transformada janelada de Fourier,  $e^{-\iota 2\pi(j-i) \cdot f / (2\tau+1)}$ , são aplicadas às diferenças residuais  $(y_j - \bar{y}_i)$  e  $(z_j - \bar{z}_i)$ , em que  $\bar{y}_i$  e  $\bar{z}_i$  são obtidos pelas equações (2.29) e (2.30), respectivamente. Em outras palavras, os resíduos entre a imagem suavizada e a imagem ruidosa são processados no domínio da frequência, tendo como objetivo recuperar detalhes removidos durante a primeira etapa de filtragem no domínio do espaço.

Assim como proposto por Knaus e Zwicker (2013), a filtragem no domínio da frequência utilizando o algoritmo DDID é realizada da seguinte maneira,

$$\hat{s}_i = \frac{1}{|\mathcal{F}_i|} \sum_{f \in \mathcal{F}_i} K_{i,f} \cdot Y_{i,f}, \quad (2.33)$$

em que  $\hat{s}_i$  pode ser visto como o sinal recuperado a partir do resíduo da imagem suavizada na primeira etapa de filtragem. Os coeficientes de atenuação são obtidos pela seguinte expressão,

$$K_{i,f} = \exp \left\{ -\frac{\gamma_f \sigma_{i,f}^2}{|Z_{i,f}|^2} \right\}, \quad (2.34)$$

em que  $\gamma_f$  é um parâmetro de filtragem análogo ao parâmetro  $\gamma_r$  da Equação (2.28);  $|Z_{i,f}|^2$  é o espectro do resíduo obtido a partir da imagem guia; e  $\sigma_{i,f}^2 = \sigma^2 \sum_{(j \in \mathcal{N}_i)} k_{ij}^2$  é a estimativa da variância do ruído no domínio da transformada.

A estimativa final do valor de pixel livre de ruído  $\hat{x}_i$  é obtida somando o resultado da filtragem no domínio do espaço  $\bar{y}_i$  ao resultado da filtragem no domínio da frequência, ou seja,  $\hat{x}_i = \bar{y}_i + \hat{s}_i$ . Essa soma é adequada de acordo com Knaus e Zwicker (2013), uma vez que  $\hat{s}_i$  é a média dos coeficientes atenuados no domínio da frequência,  $K_{i,f} \cdot Y_{i,f}$ , e pode ser vista como a transformação inversa para o coeficiente central.

<sup>5</sup>A convenção  $\iota = \sqrt{-1}$  é adotada para que não haja confusão com o uso dos símbolos  $i$  e  $j$ , utilizados para denotar coordenadas de pixels no restante do texto.

Na primeira iteração do algoritmo DDID, a imagem ruidosa é utilizada como imagem guia. Nas etapas seguintes, a imagem obtida como resultado na iteração anterior é utilizada como guia para o processo de filtragem da iteração atual. Segundo Knaus e Zwicker (2013), para o algoritmo DDID cerca de três iterações são suficientes para obter bons resultados.

### Progressive Image Denoising

O algoritmo *Progressive Image Denoising* (PID), proposto por Knaus e Zwicker (2014) para a redução ruído em imagens corrompidas por AWGN, se trata de um algoritmo iterativo semelhante ao algoritmo DDID, em que o resíduo da imagem filtrada é processado no domínio da frequência. Porém, no algoritmo PID, o objetivo é estimar o resíduo entre a imagem ruidosa e a imagem livre de ruído<sup>6</sup>. O resíduo estimado é então subtraído da imagem ruidosa.

Seja  $\hat{X}^{[c]} = \{\hat{x}_i^{[c]} \mid i \in I\}$  a imagem pré estimada, utilizada como guia para o processo de filtragem na iteração  $c$ , com  $\hat{X}^{[0]} = \{y_i \mid i \in I\}$  na primeira iteração. Para cada vizinhança  $\mathcal{N}_i$ , com  $i \in I$ , as diferenças  $d_{i,j}^{[c]} = \hat{x}_j^{[c]} - \hat{x}_i^{[c]}$  são calculadas para todo  $j \in \mathcal{N}_i$ . De modo análogo a Equação (2.32), a transformada janelada de Fourier é aplicada às diferenças  $d_{i,j}^{[c]}$  (KNAUS; ZWICKER, 2014),

$$D_{i,f}^{[c]} = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} d_{ij}^{[c]} \cdot \exp\left(-\frac{|i-j|^2}{S^{[c]}}\right) \exp\left(-\frac{|d_{ij}^{[c]}|^2}{T^{[c]}}\right) e^{-i\frac{2\pi}{(2\tau+1)}f \cdot (j-i)}, \quad (2.35)$$

em que  $S^{[c]}$  e  $T^{[c]}$  são parâmetros de filtragem e são modificados a cada iteração.

O resíduo do ruído na coordenada  $i$  é aproximado pela seguinte equação, análoga à Equação (2.33),

$$\hat{n}_i^{[c]} = \frac{1}{(2\tau+1)^2} \sum_{f \in \mathcal{F}_i} \exp\left(-\frac{|D_{i,f}^{[c]}|^2}{V^{[c]}}\right) \cdot D_{i,f}^{[c]}, \quad (2.36)$$

em que  $(2\tau+1)^2$  é o tamanho da vizinhança  $\mathcal{N}_i$  e  $V^{[c]}$  é um parâmetro de filtragem, obtido pela seguinte expressão,

$$V^{[c]} = \sigma^2 \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \exp\left(-\frac{|i-j|^2}{S^{[c]}}\right)^2 \exp\left(-\frac{|d_{ij}^{[c]}|^2}{T^{[c]}}\right)^2, \quad (2.37)$$

em que  $\sigma^2$  é a variância do ruído e, segundo Knaus e Zwicker (2014),  $V^{[c]}$  pode ser visto como uma estimativa da variância dos coeficientes no domínio da transformada. A intuição por trás da

<sup>6</sup>A imagem livre de ruído é desconhecida. Assim sendo, a cada iteração do algoritmo PID, uma pré-estimativa da imagem livre de ruído é computada.

Equação (2.36) é que coeficientes com alta amplitude indicam a presença de sinal e, portanto, devem sofrer uma maior atenuação para que não haja viés devido ao sinal na estimativa do resíduo  $\hat{n}_i^{[c]}$ .

O resíduo estimado no domínio da frequência  $\hat{n}_i^{[c]}$  é subtraído da atual estimativa do valor livre de ruído  $\hat{x}_i^{[c]}$  em  $i$ , ou seja,  $\hat{x}_i^{[c+1]} = \hat{x}_i^{[c]} - \hat{n}_i^{[c]}$ , atualizando iterativamente a estimativa do valor de pixel livre de ruído. Os parâmetros de filtragem  $S^{[c]}$  e  $T^{[c]}$  também são atualizados iterativamente,

$$\begin{aligned} S^{[c]} &= \sigma_s^2 \cdot \gamma_s \cdot \alpha^{c/2}, \\ T^{[c]} &= \sigma^2 \cdot \gamma_r \cdot \alpha^{-c}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

sendo que  $\sigma_s^2$ ,  $\sigma^2$  e  $\gamma_r$  são análogos aos mesmos parâmetros definidos para o filtro bilateral da Equação (2.28);  $\gamma_s$  é uma constante paramétrica e controla a influência da distância fotométrica na Equação (2.35); e  $\alpha$  determina a velocidade de convergência do algoritmo.

A cada iteração, o valor do parâmetro  $S^{[c]}$  cresce, reduzindo a influência da distância espacial na Equação (2.35); enquanto o parâmetro  $T^{[c]}$  decresce, aumentando a influência da distância fotométrica na Equação (2.35). Após todas as iterações <sup>7</sup>, o último passo definido pelo algoritmo PID consiste em executar uma única iteração do algoritmo DDID, utilizando a imagem obtida em sua iteração mais recente como guia para o DDID. Segundo Knaus e Zwicker (2014), esse último passo tem como intuito reduzir artefatos na imagem resultante.

### Dual-Domain Filtering

O algoritmo *Dual-Domain Filtering* (DDF), proposto por Knaus e Zwicker (2015), se baseia nas mesmas ideias que o algoritmo PID. A principal diferença é que o algoritmo DDF estima o resíduo ruidoso  $\hat{n}_i$  no domínio do espaço e, em uma segunda etapa, realiza uma nova estimativa de  $\hat{n}_i$  no domínio da frequência. A vantagem do algoritmo DDF é que um número menor de iterações é necessário para se obter bons resultados. Além disso, o DDF também pode ser utilizado para a redução de artefatos introduzidos por outros filtros.

Para cada vizinhança  $\mathcal{N}_i$ , com  $i \in I$ , as diferenças  $d_{i,j} = y_j - y_i$  são calculadas para todo  $j \in \mathcal{N}_i$ , de modo similar ao algoritmo PID. A estimativa do resíduo  $\hat{n}_i$  no domínio do espaço é então obtida pela seguinte expressão,

$$\hat{n}_i = a \left( \frac{\sum_{j \in \mathcal{N}_i} d_{ij} \cdot k_{ij}}{\sum_{j \in \mathcal{N}_i} k_{ij}} \right), \quad (2.39)$$

<sup>7</sup>O número de iterações também é definido como um dos parâmetros a ser fornecido como entrada para o algoritmo PID. Knaus e Zwicker (2014) sugerem que 30 iterações são suficientes para obter bons resultados.



em que  $a \in [0, 1]$  é um fator de confiança estabelecidos como parâmetro; e  $\{k_{ij}\}_{j \in \mathcal{N}_i}$  são coeficientes do *kernel* bilateral, análogos aos definidos pela Equação (2.28) para o algoritmo DDID,

$$k_{ij} = f(|i - j|^2, |d_{i,j}|^2) \quad (2.40)$$

sendo que  $f(\rho^2, d^2)$  é uma função *kernel*.

Conforme descrevem (KNAUS; ZWICKER, 2015), a intuição por trás da Equação (2.39) é que coeficientes de diferença  $d_{i,j}$  obtidos a partir de pixels com tons de cinza muito discrepantes entre si indicam a presença de pequenos detalhes ou bordas e, por essa razão, precisam ser atenuados para não induzir viés na estimativa do resíduo  $\hat{n}_i$ . Por outro lado, em regiões mais homogêneas as diferenças  $d_{i,j}$  são menos significativas e menor será a atenuação causada pelo *kernel* bilateral.

A estimativa no domínio da frequência é realizada utilizando a seguinte transformada (KNAUS; ZWICKER, 2015),

$$D_{i,f} = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (d_{ij} - \hat{n}_i) \cdot k_{ij} \cdot e^{-i \frac{2\pi}{2\tau+1} f \cdot (j-i)}, \quad (2.41)$$

em que  $(2\tau + 1)$  é a largura do lado de uma janela quadrada definida ao redor de  $i$ , denotada por  $\mathcal{N}_i$ . A Equação (2.41) pode ser vista como uma transformada discreta janelada de Fourier das diferenças  $d_{ij}$ , após a subtração da estimativa do resíduo no domínio do espaço  $\hat{n}_i$ . De acordo com Knaus e Zwicker (2015), essa subtração é necessária para reduzir a influência do ruído no cálculo dos coeficientes  $k_{ij}$  do *kernel* bilateral, Equação (2.40), que utiliza a distância fotométrica  $|d_{ij}|^2$  entre pixels ruidosos.

A estimativa final do resíduo é obtida no domínio da frequência pela seguinte expressão,

$$\hat{n}_i = A \sum_{f \in \mathcal{F}_i} D_{i,f} \cdot K_{i,f} / (2\tau + 1)^2, \quad (2.42)$$

em que  $A \in [0, 1]$  é um parâmetro de confiança. O fator  $(2\tau + 1)^2$  corresponde ao tamanho da vizinhança ao redor de  $i$  e busca compensar o fato da transformada da Equação (2.41) ser não unitária. Os coeficientes  $K_{i,f}$  são obtidos pela seguinte expressão,

$$K_{i,f} = F \left( |D_{i,f}|^2 / \sum_{j \in \mathcal{N}_i} k_{ij}^2 \right), \quad (2.43)$$

em que  $F(D^2)$  é a função *kernel* utilizada no domínio da frequência. A estimativa final  $\hat{x}_i$  do valor livre de ruído em cada coordenada de pixel  $i \in I$  é obtida subtraindo o resultado da Equação (2.42),  $\hat{n}_i$ , do valor observado para o pixel ruidoso  $y_i$ , isto é,  $\hat{x}_i = y_i - \hat{n}_i$ .

Segundo Knaus e Zwicker (2015), o algoritmo DDF pode ser utilizado para a redução de

artefatos em imagens previamente processadas por outros algoritmos. Nesse caso, durante a primeira etapa de estimativa no domínio do espaço, a imagem pré-filtrada é utilizada como guia para o cálculo do *kernel* da Equação (2.40). Na segunda etapa, a transformada definida pela Equação (2.41) é também aplicada aos valores de diferenças extraídos a partir imagem guia, e ambos os conjuntos de coeficientes são utilizados para determinar os fatores de atenuação no domínio da frequência.

O algoritmo DDF também pode ser aplicado de maneira iterativa, utilizando o resultado de cada iteração como guia para iteração seguinte, de maneira similar ao algoritmo PID descrito na Subseção 2.5.6. Knaus e Zwicker (2015) propõem o uso de diferentes funções *kernel*  $f(\rho^2, d^2)$  e  $F(D^2)$  para o algoritmo DDF.

Assim como sugerem Knaus e Zwicker (2015), quando o algoritmo DDF é utilizado para redução de artefatos, as seguintes funções *kernel* devem ser empregadas,

$$\begin{aligned} f(\rho^2, d^2) &= \exp\left\{\frac{-\rho^2}{2\sigma_s^2}\right\} \exp\left\{\frac{-d^2}{\gamma_r \sigma^2}\right\}, \\ F(D^2) &= \max\left(0, 1 - \frac{D^2}{\gamma_f \sigma^2}\right), \end{aligned} \quad (2.44)$$

sendo que  $\sigma_s$ ,  $\gamma_r$  e  $\sigma$  possuem os mesmos significados que o *kernel* bilateral da Equação (2.28), e o parâmetro  $\gamma_f$  é análogo ao parâmetro da Equação (2.34), conforme descritos na Subseção 2.5.6.

Quando o algoritmo DDF é utilizado de modo iterativo, as seguintes funções *kernel* são propostas por Knaus e Zwicker (2015),

$$\begin{aligned} f(\rho^2, d^2)^{[c]} &= \cos\left(\min\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{d^2}{T^{[c]}c}}\right)\right)^c e^{-\frac{\rho^2}{S^{[c]}}}, \\ F(D^2)^{[c]} &= \cos\left(\min\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{D^2}{Vc}}\right)\right), \end{aligned} \quad (2.45)$$

em que  $c$  representa o número da iteração atual do algoritmo e decresce de  $N$  até 1;  $T^{[c]} = \gamma_r \cdot \sigma^2 \cdot \alpha^{\frac{c-1}{N}}$  e  $S^{[c]} = 2\sigma_s^2 \cdot \alpha^{\frac{1-c}{2N}}$  são parâmetros de filtragem atualizados a cada iteração, análogos aos parâmetros da Equação (2.38) para o filtro PID, conforme descritos na Subseção 2.5.6; e  $V = \gamma_f \sigma^2$ , sendo que  $\sigma^2$  é a variância do ruído e  $\gamma_f$  é uma constante fornecida como parâmetro e definida empiricamente.

## 2.6 Considerações Finais

Algoritmos como o NLM, Poisson-NLM e SP-NLM estimam o valor livre de ruído de um pixel por meio da média ponderada de pixels ruidosos, sendo que pixels centralizados em *patches* similares ao *patch* de interesse recebem maior peso. Diferentemente do NLM que utiliza a distância Euclidiana ao comparar *patches*, Poisson-NLM e SP-NLM exploram outras métricas de similaridade na tentativa de estender o algoritmo NLM para o modelo de ruído Poisson.

Uma abordagem diferente é sugerida pelo algoritmo BM3D, que introduz o conceito de filtragem colaborativa. Na filtragem colaborativa, um conjunto de *patches* ou blocos são agrupados e filtrados de modo coletivo, tornando o processo de redução de ruído mais eficaz do que a filtragem individual de cada *patch*. No caso do BM3D, esse processo é realizado pela atenuação de coeficientes no domínio de uma transformada 3D esparsa.

O algoritmo SP-NLM realiza duas etapas de filtragem, de modo similar ao BM3D, porém não explora a filtragem colaborativa. O algoritmo NL-Bayes, por outro lado, também emprega uma estratégia baseada em duas etapas de filtragem e realiza um processo semelhante à filtragem colaborativa, no qual um conjunto de *patches* similares são agrupados e parâmetros necessários para computar o filtro de Wiener, tais como o vetor média e matriz de covariância, são estimados com maior eficácia a partir do grupo de *patches* similares. No entanto, o algoritmo NL-Bayes não explora transformadas esparsas como o BM3D.

Os algoritmos DDID, PID e DDF podem ser vistos como formas generalizadas do filtro bilateral e, portanto, podem ser considerados como algoritmos locais. Em outras palavras, tais algoritmos estimam o valor livre de ruído de um dado pixel utilizando apenas amostras localizadas em uma pequena vizinhança local centralizada ao seu redor. Sendo assim, não dependem da similaridade entre *patches* e não exploram a redundância inerente a imagens naturais. Ainda assim, alcançam resultados compatíveis com o estado da arte.

Assim como o algoritmo Poisson-NLM, SP-NLM, BM3D e NL-Bayes, os algoritmos DDID, PID e DDF podem obter melhores resultados utilizando imagens pré-estimadas como guias durante o processo de redução de ruído. Embora os algoritmos DDID, PID e DDF não empreguem o conceito de filtragem colaborativa, exploram o uso de transformadas de domínio durante o processo de redução de ruído, tal como o BM3D. A Tabela 2.1 resume a discussão apresentada nesta seção, indicando as características exploradas por cada um desses algoritmos.

No próximo capítulo são descritas a fundamentação teórica e as técnicas utilizadas para o desenvolvimento deste trabalho de pesquisa e em sequência, no Capítulo 4, são apresentadas

**Tabela 2.1: Principais características exploradas por algoritmos de estado da arte.**

<b>Algoritmo</b>	<b>Não-local</b>	<b>Dois Estágios</b>	<b>Iterativo</b>	<b>Imagem guia</b>	<b>Transformada</b>
NLM	Sim	Não	Não	Não	Não aplica
Poisson-NLM	Sim	Não	Sim	Sim	Não aplica
SP-NLM	Sim	Sim	Sim	Sim	Não aplica
BM3D	Sim	Sim	Não	Sim	<i>Wavelet</i> 3D
NL-Bayes	Sim	Sim	Não	Sim	Não aplica
DDID	Não	Sim	Não	Sim	Fourier Janelado
PID	Não	Sim	Sim	Sim	Fourier Janelado
DDF	Não	Sim	Sim	Sim	Fourier Janelado

as abordagens para a filtragem de ruído Poisson propostas por este trabalho de pesquisa. Duas abordagens foram propostas: filtragem Wiener utilizando estimativa ponderada de parâmetros; e filtragem não-local no domínio das *wavelets* de Haar. Os resultados obtidos com tais abordagens e os experimentos comparativos realizados também são apresentados no Capítulo 4.

# Capítulo 3

## FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

---

---

*Com o intuito de tornar o conteúdo deste documento autocontido, neste capítulo é descrita a fundamentação teórica e as técnicas e métodos utilizados para o desenvolvimento deste trabalho de pesquisa. São descritos os fundamentos da transformada wavelet discreta; da teoria dos estimadores de Wiener; dos estimadores SURE e PURE para a estimativa não enviesada do erro médio quadrático; e do método de Brent para otimização unidimensional. Também são detalhadas as métricas PSNR e SSIM, para avaliação quantitativa dos resultados de filtragem.*

### 3.1 Considerações Iniciais

O propósito deste capítulo é fornecer uma descrição ampla sobre os conceitos, fundamentos teóricos, métodos e técnicas essenciais para a compreensão deste trabalho de pesquisa e dos capítulos subsequentes. A transformada *wavelet* discreta é descrita na seção 3.2; a fundamentação teórica sobre o filtro de Wiener é descrita na seção 3.3; nas seções 3.4 e 3.5 são detalhadas as métricas PSNR e SSIM; na seção 3.6 são descritos os estimadores SURE e PURE para a estimativa não enviesada do erro médio quadrático; na seção 3.7 é descrito o método de Brent para otimização unidimensional; e na seção 3.8 são realizadas as considerações finais sobre este capítulo.

### 3.2 Transformada *Wavelet*

De modo geral, a transformada *wavelet* envolve o conceito de representação de uma dada função<sup>1</sup>  $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ , em termos de componentes mais simples, para diferentes escalas  $a$  e

---

<sup>1</sup>Assume-se que  $f(t)$  é  $L^2$ -integrável, ou seja,  $f(t)$  possui norma finita no espaço  $L^2$ ,  $\int |f(t)|^2 dt < \infty$ .

posições  $b$ . Tais componentes são obtidos por meio da translação e dilatação de uma única função, denominada *wavelet* mãe  $\psi(t)$ .

Para o caso contínuo, é possível expressar as versões transladadas e dilatadas da função *wavelet* mãe como uma família de funções parametrizadas por  $a$  e  $b$ ,

$$\Psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi \left( \frac{t-b}{a} \right), \quad (3.1)$$

com  $a \in \mathbb{R}^+$ ,  $b \in \mathbb{R}$  e  $a \neq 0$ . Segundo Starck, Murtagh e Fadili (2010, p. 16), nessas condições a transformada *wavelet* contínua é dada pela seguinte expressão,

$$\begin{aligned} \omega_{a,b} &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi^* \left( \frac{t-b}{a} \right) dt = f * \bar{\psi}_a(b), \\ &\text{com } \bar{\psi}_a(b) \text{ definido por,} \\ \bar{\psi}_a(b) &= \frac{1}{\sqrt{a}} \psi^* \left( \frac{-t}{a} \right), \end{aligned} \quad (3.2)$$

sendo que  $\omega_{a,b}$  é o coeficiente *wavelet* da função  $f(t)$  para escala  $a$  e posição  $b$ ; o operador  $*$  representa a convolução entre duas funções; e  $\psi^*(t)$  é o conjugado complexo de  $\psi(t)$ .

A função  $f(t)$  pode ser recuperada a partir de  $w_{a,b}$  por meio da seguinte transformação inversa (STARCK; MURTAGH; FADILI, 2010),

$$f(t) = \frac{1}{C} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \omega_{a,b} \cdot \chi \left( \frac{t-b}{a} \right) \frac{db \cdot da}{a^2}, \quad (3.3)$$

sendo que  $\chi(t)$  é conhecida como a função dual de  $\psi(t)$  e  $C$  é chamada de constante de admissibilidade,

$$C = \int_0^{+\infty} \frac{\Psi(u)^* X(u)}{u} du = \int_{-\infty}^0 \frac{\Psi(u)^* X(u)}{u} du, \quad (3.4)$$

em que  $\Psi(f) = \mathcal{F} \{ \psi(t) \}$  e  $X(f) = \mathcal{F} \{ \chi(t) \}$  são as transformadas de Fourier de  $\psi(t)$  e  $\chi(t)$ , respectivamente. Normalmente  $\chi(t) = \psi(t)$  e nesse caso  $C = \int_0^{\infty} \frac{1}{u} |\Psi(u)|^2 du$ , porém, outras definições de  $\chi(t)$  são possíveis. Além disso,  $\chi(t)$  pode não ser uma função *wavelet*.

É possível observar que a função  $f(t)$  pode ser recuperada pela Equação (3.3) somente se a condição  $0 < C < \infty$  for satisfeita. De acordo com Percival e Walden (2006, p. 4), essa condição é conhecida como **condição de admissibilidade** e implica em  $\Psi(0) = 0$ , ou seja, a função *wavelet*  $\psi$  possui média zero.

Conforme descrito por Rosas-Orea et al. (2005), a transformada *wavelet* também pode ser definida utilizando a seguinte parametrização discreta,  $a = a_0^j$  e  $b = n \cdot b_0 \cdot a_0^j$  com  $j, n \in \mathbb{Z}$ .

Nesse caso, a família de *wavelets* pode ser definida tal como segue,

$$\psi_{j,n}(t) = a_0^{-j/2} \psi \left( a_0^{-j} t - n b_0 \right). \quad (3.5)$$

A transformada *wavelet* é então dada por,

$$\omega_{j,n} = a_0^{-j/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \psi \left( a_0^{-j} t - n b_0 \right) dt. \quad (3.6)$$

A Equação (3.6) pode ser vista como a projeção da função  $f(t)$  em  $\psi_{j,n}(t)$ . A partir das escolhas apropriadas para a função *wavelet* mãe e parâmetros  $a_0$  e  $b_0$ , a família de funções  $\psi_{j,n}(t)$  forma uma base ortogonal para o espaço de funções  $L^2$ -integráveis.

Ao selecionar os parâmetros  $a_0 = 2$  e  $b_0 = 1$  é determinada uma amostragem discreta do plano tempo-frequência  $(b, a)$ , correspondendo a uma grade diádica (ROSAS-OREA et al., 2005). Nesse caso, a Equação (3.6) pode ser reescrita,

$$\omega_{j,n} = 2^{-j/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \psi \left( 2^{-j} t - n \right) dt. \quad (3.7)$$

Os coeficientes  $\omega_{j,n}$  são chamados de coeficientes *wavelet* ou de detalhe.

Segundo Mallat (1989), utilizando conceitos da teoria de análise multi-escala, uma função  $f(t)$  pode ser decomposta em uma sequência de aproximações com menor resolução. Formalmente, sejam  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  uma sequência aninhada de sub-espacos fechados no espaço de funções  $L^2$ -integráveis, existe uma função de escala  $\phi_{j,n}(t) \in L^2(\mathbb{R})$  tal que a seguinte família de funções,

$$\phi_{j,n}(t) = 2^{-j/2} \phi \left( 2^{-j} t - n \right), \quad (3.8)$$

é uma base ortogonal do sub-espaco  $V_j$ . Ao expandir  $f(t)$  recursivamente em termos das funções de escala  $\phi_{j,n}(t)$ , uma sequência de aproximações suaves e de menor resolução de  $f(t)$  são obtidas para cada sub-espaco  $V_j$ .

A expansão de  $f(t)$  em termos das funções de escala  $\phi_{j,n}(t)$  pode ser obtida pela projeção de  $f(t)$  em  $\phi_{j,n}(t)$ ,

$$a_{j,n} = 2^{-j/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \phi \left( 2^{-j} t - n \right) dt. \quad (3.9)$$

Os coeficientes  $a_{j,n}$  são chamados de coeficientes de escala ou aproximação. A função  $f(t)$  pode ser recuperada em termos de seus coeficientes de detalhe e aproximação, obtidos a partir de sua decomposição em  $J$  níveis (ROSAS-OREA et al., 2005),

$$f(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_{J,n} \phi_{J,n}(t) + \sum_{j=J}^{\infty} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \omega_{j,n} \psi_{j,n}(t). \quad (3.10)$$

Originalmente proposta por Haar (1910), a transformada *wavelet* de Haar forma uma base ortogonal para o espaço  $L^2$  e trata-se de uma das primeiras *wavelets* conhecidas na literatura. A transformada *wavelet* de Haar pode ser obtida adotando a seguinte função *wavelet* mãe  $\psi(t)$ ,

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ -1 & \text{se } \frac{1}{2} \leq t < 1, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (3.11)$$

e a seguinte função de escala  $\phi(t)$ ,

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq t < 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.12)$$

Por simplicidade, na descrição realizada foi considerada a decomposição de funções de variáveis contínuas  $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ . Entretanto, a transformada *wavelet* também pode ser definida para sequências discretas  $f[t]$  utilizando a transformada *wavelet* discreta (GONZALEZ; WOODS, 2008, p. 511). Nesse caso, as funções *wavelet* e de escala são discretizadas por meio da extração de amostras igualmente espaçadas em seu intervalo de suporte.

Assim como descrito por Rosas-Orea et al. (2005), uma propriedade fundamental para aplicações envolvendo *wavelets* é a seguinte relação entre coeficientes de aproximação e detalhe para níveis de decomposição adjacentes,

$$\begin{aligned} a_{j,n} &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_l a_{j-1,2n-l}, \\ d_{j,n} &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_l a_{j-1,2n-l}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

em que  $g_l$  são coeficientes de um filtro passa baixas e  $h_l$  são coeficientes de um filtro passa-altas. A Equação (3.13) indica que os coeficientes de detalhe e aproximação no nível  $j$  podem ser obtidos, respectivamente, pela convolução discreta dos coeficientes de aproximação do nível  $j-1$  utilizando filtros passa-banda e passa-baixas. Um processo de *downsampling* por um fator de 2 deve ser aplicado aos resultados.

Por sua vez, os coeficientes de aproximação no nível  $j-1$  podem ser recuperados utilizando os coeficientes de aproximação e detalhe do nível  $j$  (ROSAS-OREA et al., 2005),

$$a_{j-1,n} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_l a_{j,2n-l} + \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_l d_{j,2n-l}. \quad (3.14)$$

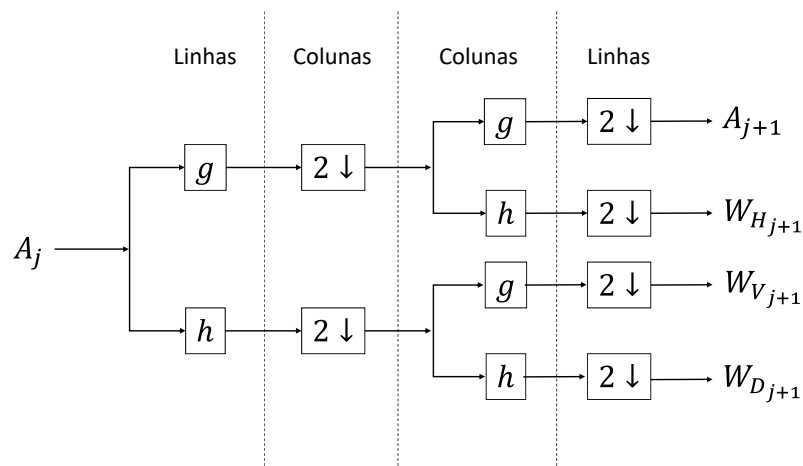
Uma operação de *upsampling* deve ser aplicada aos resultados dos filtros na Equação (3.14).



Desse modo, a sequência original pode ser obtida recursivamente.

Imagens digitais podem ser vistas como sinais bi-dimensionais discretos. Portanto, a transformada *wavelet* discreta para o caso 2D é de interesse fundamental para a análise e processamento de imagens digitais. Segundo Gonzalez e Woods (2008), assumindo funções de escala  $\phi$  e *wavelet*  $\psi$  separáveis, o processo de decomposição descrito pela Equação (3.13) pode ser estendido para o caso 2D, aplicando a transformada *wavelet* discreta 1D separadamente nas linhas e colunas da imagem, seguida pelas operações adequadas de decimação (*downsampling*).

A Figura 3.1 ilustra o procedimento de decomposição de um sinal 2D utilizando a transformada *wavelet* discreta. Seja  $A_j$  uma sub-banda de aproximação, com  $A_0$  correspondendo a imagem no domínio do espaço em sua resolução original, os filtros de análise  $g$  e  $h$  são aplicados nas linhas de  $A_j$  por um processo de convolução 1D. Em seguida, a operação de *downsampling*  $2 \downarrow$  é aplicada às colunas de  $A_j$ . Até então, duas sub-imagens são obtidas como resultados intermediários.

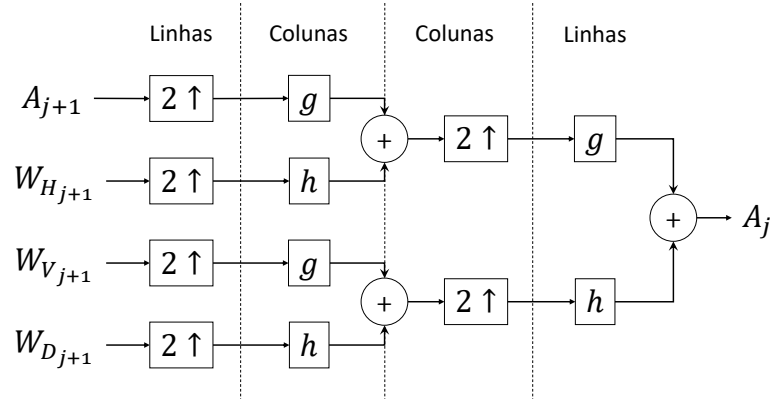


**Figura 3.1:** Diagrama representativo do processo de decomposição de um sinal 2D utilizando a transformada *wavelet* discreta.

Utilizando novamente os filtros  $g$  e  $h$ , as colunas das sub-imagens obtidas no passo anterior são processadas por meio da operação de convolução 1D. Dessa vez o processo de *downsampling*  $2 \downarrow$  é aplicado às linhas das sub-imagens resultantes. Ao final desse procedimento, são obtidas as sub-bandas de detalhe horizontal  $W_{H_{j+1}}$ , vertical  $W_{V_{j+1}}$ , diagonal  $W_{D_{j+1}}$  e de aproximação  $A_{j+1}$ , para o nível de decomposição  $j + 1$ . Esse processo pode prosseguir de maneira recursiva, decompondo  $A_{j+1}$  em sub-bandas de frequência mais estreitas.

A Figura 3.2 ilustra o processo de reconstrução de um sinal 2D a partir de suas sub-bandas. De modo análogo ao processo descrito pela Equação (3.14) para o caso 1D, a sub-banda de aproximação  $A_j$  do nível  $j$  é recuperada a partir de suas sub-bandas de detalhe horizontal  $W_{H_{j+1}}$ ,

vertical  $W_{V_{j+1}}$ , diagonal  $W_{D_{j+1}}$  e de aproximação  $A_{j+1}$ , por meio de operações de convolução 1D dos filtros de síntese  $g$  e  $h$ , separadamente nas linhas e colunas das sub-bandas, seguido das operações adequadas de *upsampling* e adição dos resultados intermediários, tal como indicado na Figura 3.2. O procedimento descrito pela Figura 3.2 é aplicado iterativamente, até que a imagem seja reconstruída.



**Figura 3.2:** Diagrama representativo do processo de reconstrução de um sinal 2D utilizando a transformada *wavelet* discreta.

Segundo Luisier et al. (2010), para o caso particular da transformada *wavelet* discreta de Haar não normalizada, uma imagem 2D pode ser decomposta utilizando o procedimento ilustrado na Figura 3.1 por meio dos seguintes filtros de análise 1D,

$$g = [1, 1], \quad e \quad h = [-1, 1]. \quad (3.15)$$

O processo de reconstrução, tal como representado na Figura 3.2, deve ser realizado utilizando os seguintes filtros de síntese,

$$g' = \frac{1}{2} \cdot [1, 1], \quad e \quad h' = \frac{1}{2} \cdot [1, -1]. \quad (3.16)$$

Utilizando os filtros expressos na Equação (3.15), os coeficientes de aproximação no nível  $j$  são obtidos pela soma de coeficientes de aproximação do nível  $j - 1$ , enquanto os coeficientes de detalhe no nível  $j$  são obtidos pela diferença de coeficientes de aproximação do nível  $j - 1$ .

A transformada *wavelet* discreta definida pelos procedimentos representados nas Figuras 3.1 e 3.2, com filtros de análise e síntese tais como definidos pelas equações (3.15) e (3.16), pode ser denominada como transformada *wavelet* de Haar ortogonal ou não redundante. Por simplicidade de exposição, esse tipo de transformada será referida simplesmente como *wavelets* ortogonais no restante deste documento. As *wavelets* ortogonais fornecem uma nova representação para o sinal de interesse, de modo que o número de coeficientes na nova representação é igual ao número de amostras no domínio de origem.

O procedimento de *downsampling* do sinal de entrada torna as *wavelets* ortogonais sensíveis a translação, isto é, a translação do sinal sendo processado não corresponde a uma translação dos coeficientes no domínio da transformada. Em algumas aplicações tais como a redução de ruído em imagens digitais, isso implica na possível introdução de anomalias visuais após a reconstrução dos coeficientes processados. Para superar essa limitação, é possível utilizar a transformada *wavelet* estacionária.

É possível definir a transformada *wavelet* **não decimada** ou **estacionária** de modo semelhante à transformada *wavelet* ortogonal não redundante, ao substituir as operações de *downsampling* pela divisão das amostras com índices pares ou ímpares em diferentes conjuntos de coeficientes. Na etapa de reconstrução, esses conjuntos de coeficientes são recombinaados após a aplicação dos filtros de síntese.

De acordo com Starck, Murtagh e Fadili (2010), a transformada *wavelet* estacionária pode ser implementada de maneira eficiente utilizando um algoritmo denominado *à trous* (do francês, “com buracos”). Esse algoritmo define um procedimento similar ao estabelecido pela transformada *wavelet* discreta não redundante, porém, não há *downsampling* das linhas ou colunas. A cada nível de decomposição  $j$ , os coeficientes de detalhe e aproximação são computados a partir da sub-banda de aproximação do nível  $j - 1$ , aplicando novas versões  $g_j$  e  $h_j$  dos filtros de análise, em que  $g_j$  e  $h_j$  são obtidos pelo *upsampling* sucessivo dos filtros de síntese originais  $g$  e  $h$ . As lacunas em  $g_j$  e  $h_j$  são preenchidas com zeros, portanto o nome *à trous*.

### 3.3 Filtro de Wiener

Tal como descrito por Kay (1993, p. 380), dado um conjunto de  $N$  amostras,  $\mathbf{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_N\}$ , e um parâmetro escalar  $x$  a ser estimado, o filtro de Wiener é conhecido como o estimador linear ótimo  $\hat{x}$ , que minimiza o valor esperado para o erro quadrático com relação a  $x$ , dado pela seguinte equação,

$$\Delta(x, \hat{x}) = E[(x - \hat{x})^2], \quad (3.17)$$

sendo que o valor esperado da Equação (3.17) é tomado com respeito à função de probabilidade conjunta  $p(\mathbf{y}, x)$  dos dados observados e do parâmetro a ser estimado.

Formalmente, o filtro de Wiener é definido como um estimador da seguinte forma geral,

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^N w_i \cdot y_i + w_0, \quad (3.18)$$

em que  $\{w_i\}$ , para  $i = 0, 1, \dots, N$ , são os coeficientes do filtro. Segundo Kay (1993, p. 382),

o estimador ótimo satisfazendo as condições descritas pelas Equações (3.17) e (3.18) é obtido por,

$$\hat{x} = E[x] + C_{xy}C_{yy}^{-1}(\mathbf{y} - E[\mathbf{y}]), \quad (3.19)$$

sendo que  $C_{xy}$  é a matriz de covariância cruzada entre o parâmetro  $x$  e o vetor de amostras observadas  $\mathbf{y}$ , definida como uma matriz linha de dimensões  $1 \times N$ ; e  $C_{yy}$  é a matriz de covariância do vetor  $\mathbf{y}$ , definida como uma matriz de dimensões  $N \times N$ .

Alternativamente, seja  $\mathbf{x} = \{x_i \mid i \in I\}$ , com  $i = 0, 1, \dots, M$ , um vetor de parâmetros a serem estimados, o filtro de Wiener vetorial pode ser definido pela seguinte expressão (KAY, 1993, p. 389),

$$\hat{\mathbf{x}} = E[\mathbf{x}] + C_{xy}C_{yy}^{-1}(\mathbf{y} - E[\mathbf{y}]), \quad (3.20)$$

sendo que  $C_{xy}$  agora é uma matriz de dimensões  $M \times N$ . Conforme pode ser observado a partir das Equações (3.19) e (3.20), apenas as estatísticas de primeira e segunda ordem do sinal e ruído são necessárias para computar o filtro de Wiener. Conhecimento sobre a forma explícita da distribuição conjunta do sinal e ruído não é diretamente necessário.

Para o problema de atenuação de ruído,  $x$  representa o valor livre de ruído de um dado pixel e  $y$  é um conjunto de amostras ruidosas. Quando uma única amostra ruidosa  $y_i$  é observada para cada coordenada  $i \in I$  de pixel, o estimador resultante é referido como sendo um estimador pontual.

Segundo Lee (1980), sob hipótese do modelo AWGN, o filtro pontual de Wiener pode ser definido pela seguinte equação,

$$\hat{x}_i = \bar{y}_i + \frac{\sigma_{y_i}^2 - \sigma^2}{\sigma_{y_i}^2}(y_i - \bar{y}_i),$$

ou de modo equivalente,

$$\hat{x}_i = \bar{y}_i + \frac{\sigma_{x_i}^2}{\sigma_{x_i}^2 + \sigma^2}(y_i - \bar{y}_i), \quad (3.21)$$

sendo que  $\bar{y}_i$  é a média do sinal ruidoso;  $\sigma_{y_i}^2$  é a variância do sinal ruidoso;  $\sigma_{x_i}^2$  é a variância do sinal livre de ruído definida como sendo  $\sigma_{x_i}^2 = \sigma_{y_i}^2 - \sigma^2$ , mas também pode ser aproximada a partir de uma imagem pré-suavizada; e  $\sigma^2$  é a variância do ruído aditivo. A Equação (3.21) pode ser deduzida a partir da Equação (3.19), utilizando o fato de que o ruído possui média zero e é não correlacionado ao sinal.

Na prática, os parâmetros  $\bar{y}_i$  e  $\sigma_{y_i}^2$  são calculados de maneira local, utilizando janelas quadradas centralizadas em cada coordenada de pixel  $i \in I$ . Essa abordagem implica na premissa de que o sinal é localmente estacionário, isto é, amostras pertencentes a vizinhança local cen-

tralizada ao redor do pixel sendo processado possuem média e variância estacionárias.

De modo análogo, sob hipótese de ruído Poisson dependente-de-sinal, a variância do ruído é igual a média do sinal e o filtro pontual de Wiener pode ser definido tal como segue (KUAN et al., 1985; JIANG; SAWCHUK, 1986),

$$\hat{x}_i = \bar{y}_i + \frac{\sigma_{y_i}^2 - \bar{y}_i}{\sigma_{y_i}^2} (y_i - \bar{y}_i),$$

ou equivalentemente,

$$\hat{x}_i = \bar{y}_i + \frac{\sigma_{x_i}^2}{\sigma_{x_i}^2 + \bar{y}_i} (y_i - \bar{y}_i). \quad (3.22)$$

A Equação (3.22) também segue da Equação (3.19), utilizando o fato de que o ruído Poisson possui média zero e é não correlacionado ao sinal.

Ambas as Equações (3.21) e (3.22) podem ser reescritas da seguinte maneira,

$$\hat{x}_i = \bar{y}_i + \alpha_i (y_i - \bar{y}_i) \quad \text{ou} \quad \hat{x}_i = \bar{y}_i (1 - \alpha_i) + \alpha_i \cdot y_i,$$

com

$$\alpha_i = \begin{cases} \frac{(\sigma_{y_i}^2 - \sigma^2)}{\sigma_{y_i}^2}, & \text{no caso da equação (3.21).} \\ \frac{(\sigma_{y_i}^2 - \bar{y}_i)}{\sigma_{y_i}^2}, & \text{no caso da equação (3.22).} \end{cases} \quad (3.23)$$

Uma vez que  $\sigma^2$  e  $\bar{y}_i$  representam a variância do ruído considerando os modelos de ruído AWGN e Poisson, respectivamente,  $\alpha_i$  pode ser visto como uma espécie de compromisso entre atenuação de ruído e preservação do sinal.

Quando a variância do ruído é muito maior que a variância do sinal, os coeficientes do filtro tendem a zero,  $\alpha_i \rightarrow 0$ , e o resultado do filtro de Wiener tende a estimativa da média do sinal,  $\hat{x}_i \rightarrow \bar{y}_i$ . Normalmente, esse é o comportamento do filtro Wiener em regiões homogêneas da imagem. Quando a variância do sinal é muito maior que a variância do ruído, os coeficientes do filtro tendem a um,  $\alpha_i \rightarrow 1$ , e o resultado obtido pelo filtro de Wiener tende a ser igual a amostra ruidosa,  $\hat{x}_i \rightarrow y_i$  e conseqüentemente, não há suavização. Esse é o comportamento do filtro próximos a bordas ou pequenos detalhes da imagem.

### 3.4 Peak Signal-to-Noise Ratio – PSNR

O PSNR trata-se de um índice para a comparação de imagens, baseado na razão entre a potência máxima de um sinal e o erro médio quadrático de uma estimativa do mesmo. O PSNR

pode ser obtido pela seguinte expressão,

$$PSNR(X, \hat{X}) = 10 \log_{10} \left( \frac{MAX_X^2}{MSE(X, \hat{X})} \right), \quad (3.24)$$

sendo que  $X$  é a imagem livre de ruído ou imagem referência;  $MAX_X^2$  corresponde ao valor máximo que o sinal pode assumir, assumido como sendo  $MAX_X^2 = 255^2$  para imagens de 8-bits; e  $MSE(X, \hat{X})$  é o erro médio quadrático entre a imagem referência  $X$  e a imagem estimada  $\hat{X}$ , obtido pela seguinte equação,

$$MSE(X, \hat{X}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \hat{x}_i)^2. \quad (3.25)$$

### 3.5 Structural SIMilarity Index – SSIM

Proposto por Wang et al. (2004), o SSIM consiste em um índice para avaliação da similaridade entre duas imagens, que objetiva proporcionar uma maior correlação com o sistema de visão humano. Esse índice é obtido pela combinação de três critérios: (1) comparação de luminância; (2) comparação de contraste; e (3) comparação estrutural.

O SSIM pode ser obtido pela seguinte expressão,

$$SSIM(X, \hat{X}) = L(X, \hat{X})^\alpha \cdot C(X, \hat{X})^\beta \cdot S(X, \hat{X})^\gamma \quad (3.26)$$

sendo que  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  e  $\gamma > 0$  são parâmetros que controlam a importância de cada um dos critérios individuais na obtenção do índice final.  $L(X, \hat{X})$  corresponde ao critério de comparação de luminância e é definido pela Equação (3.27),

$$L(X, \hat{X}) = \left( \frac{2\mu_X 2\mu_{\hat{X}} + C_1}{\mu_X^2 + \mu_{\hat{X}}^2 + C_1} \right), \quad (3.27)$$

$C(X, \hat{X})$  corresponde ao critério de comparação de contraste e é definido pela Equação (3.28),

$$C(X, \hat{X}) = \left( \frac{2\sigma_X 2\sigma_{\hat{X}} + C_2}{\sigma_X^2 + \sigma_{\hat{X}}^2 + C_2} \right), \quad (3.28)$$

e  $S(X, \hat{X})$  corresponde ao critério de comparação estrutural, dado pela Equação (3.29),

$$S(X, \hat{X}) = \left( \frac{\sigma_{X, \hat{X}} + C_3}{\sigma_X \cdot \sigma_{\hat{X}} + C_3} \right), \quad (3.29)$$

sendo que  $\mu_X$ ,  $\mu_{\hat{X}}$ ,  $\sigma_X$ ,  $\sigma_{\hat{X}}$  e  $\sigma_{X, \hat{X}}$  são, respectivamente, as médias, desvios padrões e coeficiente de correlação de  $X$  e  $\hat{X}$ . Os parâmetros  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  são constantes positivas responsáveis por

evitar problemas numéricos quando os valores  $\mu_X^2$ ,  $\mu_{\hat{X}}^2$ ,  $\sigma_X^2$  e  $\sigma_{\hat{X}}^2$  calculados para as Equações (3.27), (3.28) e (3.29) se aproximam de zero.

Na prática, as estatísticas  $\mu_X$ ,  $\mu_{\hat{X}}$ ,  $\sigma_X$ ,  $\sigma_{\hat{X}}$  e  $\sigma_{X,\hat{X}}$  são calculadas de modo local, utilizando uma janela que se move ao longo da imagem. A Equação (3.26) é então calculada para cada posição da imagem, e o valor final para o índice SSIM é obtido pela média de todos índices locais.

Wang et al. (2004) sugerem a seguinte parametrização padrão, também adotada neste trabalho,

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta = \gamma = 1, \\ C_1 &= (K_1 \cdot \mathcal{L})^2, \quad C_2 = (K_2 \cdot \mathcal{L})^2, \quad C_3 = C_2/2, \\ K_1 &= 0,01 \quad \text{e} \quad K_2 = 0,03. \end{aligned} \tag{3.30}$$

sendo que  $\mathcal{L}$  é o nível máximo de cinza, normalmente ajustado como  $\mathcal{L} = 255$  para imagens de 8-bits. Wang et al. (2004) também recomendam o uso de janelas de tamanho  $11 \times 11$  para a estimativa das estatísticas locais.

### 3.6 Estimativas Não Enviesadas do Risco

O erro médio quadrático, expresso pela equação (3.25) na subseção 3.4, pode ser utilizado como uma métrica de fidelidade entre uma dada imagem livre de ruído e sua estimativa, obtida a partir da filtragem de uma imagem ruidosa. Tecnicamente, não existem imagens reais livres de ruído. Sendo assim, na prática adota-se como referência uma imagem com relação sinal-ruído alta o suficiente.

Embora o erro médio quadrático não seja necessariamente o melhor critério para avaliação da qualidade do processo de redução de ruído, pois não correlaciona bem com o sistema de visão humano, dentre outros aspectos, tal como argumentam (WANG; BOVIK, 2009). Ainda assim é bastante atrativo devido a suas propriedades matemáticas como a simetria, convexidade e diferenciabilidade, que facilitam na solução de problemas de otimização.

O problema da seleção de parâmetros para algoritmos de redução de ruído pode ser formulado como um problema de otimização. Neste contexto, o erro médio quadrático pode ser estabelecido como uma função de custo a ser minimizada, com os parâmetros ajustáveis do algoritmo em questão sendo os argumentos para o problema de otimização.

Formalmente, fixados  $X$  e  $Y$ , é possível selecionar um conjunto ótimo de parâmetros  $\Theta^*$ ,

no sentido do mínimo erro médio quadrático, resolvendo o seguinte problema de otimização,

$$\Theta^* = \underset{\Theta}{\operatorname{arg\,min}} \quad \operatorname{MSE} \left( X, f(Y; \Theta) \right), \quad (3.31)$$

em que  $f$  representa um algoritmo arbitrário para a redução de ruído,  $\Theta$  é o conjunto de parâmetros de  $f$ ,  $Y$  é uma realização ruidosa de  $X$  e  $\operatorname{MSE}(\cdot, \cdot)$  é o erro médio quadrático definido pela equação (3.25). De modo geral, o algoritmo  $f$  pode abstraído como uma função  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ , que associa uma imagem ruidosa  $Y$  à sua estimativa livre de ruído  $\hat{X} = f(Y; \Theta)$ .

O problema expresso pela equação (3.31) é bem conhecido na literatura e existem diversos algoritmos para sua solução (PRESS et al., 2007). Entretanto, conhecimento do sinal livre de ruído é necessário, o que torna tal abordagem infactível para problemas práticos, uma vez que o sinal livre de ruído é desconhecido.

Para contornar este problema, quando a imagem ruidosa é corrompida por AWGN, o estimador de risco não enviesado de Stein (1981) (SURE) pode ser utilizado como métrica substituta para o MSE. O critério SURE pode ser definido pela seguinte equação (MONTAGNER; ANGELINI; OLIVO-MARIN, 2014),

$$\begin{aligned} \operatorname{SURE} &= \frac{1}{N} \|f(Y; \Theta) - Y\|_2^2 - \sigma^2 + \frac{2\sigma^2}{N} \operatorname{Div} f(Y; \Theta), \\ &\text{com} \\ \operatorname{Div} f(Y; \Theta) &= \sum_i^N \frac{\partial f_i}{\partial y_i}(Y; \Theta). \end{aligned} \quad (3.32)$$

O operador  $\operatorname{Div} f$  é conhecido como a divergência de  $f$ , enquanto a expressão  $\frac{\partial f_i}{\partial y_i}(Y; \Theta)$  representa a derivada parcial de  $f$  para o  $i$ -ésimo pixel da estimativa,  $\hat{x}_i = f_i(Y; \Theta)$ , com relação a  $i$ -ésima amostra ruidosa de  $Y$ , isto é,  $y_i$ .

Posto de maneira simples, o critério SURE substitui a necessidade do conhecimento explícito do sinal livre de ruído, pelo conhecimento do modelo de ruído e do comportamento do filtro com respeito a imagem de entrada. Alternativamente, para imagens corrompidas por ruído Poisson, o critério PURE pode ser utilizado como substituto para o MSE. Segundo Montagner, Angelini e Olivo-Marin (2014), o critério PURE pode ser definido pela seguinte equação,

$$\operatorname{PURE} = \frac{1}{N} \left( \|f(Y; \Theta)\|_2^2 + \|Y\|_2^2 - 2 \left( \sum_{i=1}^N y_i \cdot f_i(Y - U_i; \Theta) \right) - \sum_{i=1}^N y_i \right). \quad (3.33)$$

Na equação (3.33),  $U_i$  é definido como sendo um vetor binário em que todos os elementos são zeros, exceto pelo  $i$ -ésimo componente cujo valor é igual a 1.



De acordo com Montagner, Angelini e Olivo-Marin (2014), o termo  $\sum_{i=1}^N (y_i \cdot f_i(Y - U_i; \Theta))$  da equação (3.33) é análogo ao termo  $\text{Div } f(Y)$  na equação (3.32), no sentido de que ambos os termos expressam o quanto pequenas perturbações na imagem de entrada influenciam no resultado obtido.

Diversos algoritmos se baseiam no critério SURE e PURE para a otimização de parâmetros. Esse é o caso dos algoritmos SURE-LET (BLU; LUISIER, 2007), PURE-LET (LUISIER et al., 2010) e Poisson-NLM (DELEDALLE; TUPIN; DENIS, 2010), mencionados na seção 2.3. Kishan e Seelamantula (2012) propõem o uso do critério PURE para a seleção ótima de parâmetros para o filtro bilateral. Hirakawa e Wolfe (2009) também exploram o conceito da estimativa não enviesada do risco para determinação do limiar ótimo para a filtragem de coeficientes *wavelet*. Ville e Kocher (2009) derivam expressões de forma fechada para o cálculo do SURE para o algoritmo NLM.

Apesar do cálculo das equações (3.32) e (3.33) não exigir conhecimento sobre a imagem livre de ruído, as derivadas parciais do filtro precisam ser conhecidas. Isso pode não ser um problema para algoritmos lineares ou com forma analítica bem definida, entretanto, no caso geral nem sempre é possível determinar a forma fechada para as derivadas parciais do filtro.

Ramani, Blu e Unser (2008) propuseram uma abordagem Monte-Carlo para o cálculo do critério SURE, em que o termo  $\frac{2\sigma^2}{N} \text{Div } f(Y; \Theta)$  é aproximado de acordo com a seguinte equação,

$$\frac{2\sigma^2}{N} \text{Div } f(Y; \Theta) \approx \frac{2\sigma^2}{N\varepsilon} \mathbf{b}'^T \left( f(Y + \varepsilon \mathbf{b}'; \Theta) - f(Y; \Theta) \right). \quad (3.34)$$

Sendo que  $\mathbf{b}'$  é a realização de um vetor aleatório com média zero, variância unitária e independente de  $Y$ .  $\varepsilon > 0$  é uma constante positiva, fornecida como parâmetro, e deve ser ajustada com um valor próximo de zero, porém, tal valor não pode ser demasiadamente pequeno de modo a evitar erros em aritmética de ponto flutuante. Sem perda de generalidade e em favor da simplicidade de expressão, a equação (3.34) pressupõem que  $\mathbf{b}'$ ,  $f(\cdot; \Theta)$  e  $Y$  são representados como vetores coluna<sup>2</sup>.

O critério PURE também pode ser computado utilizando uma abordagem Monte-Carlo. De acordo com o trabalho de Montagner, Angelini e Olivo-Marin (2014), a equação (3.33) pode ser simplificada para,

$$\text{PURE} = \frac{1}{N} \left( \|f(Y; \Theta) - Y\|_2^2 + \frac{2}{\varepsilon} \langle \delta \circ Y \mid f(Y + \varepsilon \delta; \Theta) - f(Y; \Theta) \rangle - \sum_{i=1}^N y_i \right). \quad (3.35)$$

<sup>2</sup>Mesmo que o algoritmo de filtragem  $f$  não necessariamente adote a convenção de representar as imagens de entrada e saída como vetores coluna, uma imagem sempre pode ser compreendida como um vetor lexicograficamente ordenado de pixels ou como um arranjo bidimensional, sem perda de generalidade.

O símbolo  $\circ$  denota o produto Hadamard entre vetores ou matrizes, definido como um operador binário que produz como resultado um terceiro vetor ou matriz de mesmas dimensões, cujos elementos são obtidos pelo produto entre os elementos correspondentes dos operandos; o operador  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  representa o produto escalar;  $\varepsilon > 0$  é uma constante positiva fornecida como parâmetro e deve ser ajustada tão próxima de zero quanto possível, porém, não tão próximo de zero de modo a evitar instabilidade numérica; e  $\boldsymbol{\delta}$  é a realização de um vetor aleatório com elementos estatisticamente independentes.

Conforme os resultados apresentados por Montagner, Angelini e Olivo-Marin (2014), para reduzir a variância do estimador expresso pela equação (3.35), os elementos  $\delta_k$  de  $\boldsymbol{\delta}$  precisam ser obtidos como realizações de uma distribuição binária simétrica, assumindo os valores  $-1$  ou  $1$  com igual probabilidade. Montagner, Angelini e Olivo-Marin (2014) recomendam o valor  $\varepsilon = 10^{-4}$  para o critério PURE. Para o cálculo de SURE da equação (3.34), com base nos experimentos apresentados por Ramani, Blu e Unser (2008),  $\varepsilon = 10^{-1}$  seria um valor suficientemente adequado.

### 3.7 Método de Brent

O método de Brent (1973) é bastante conhecido na literatura como um algoritmo para minimização de funções arbitrárias de uma única variável, sem necessidade do conhecimento explícito de suas derivadas. Esse método combina outros métodos como a busca em seção-áurea e a interpolação parabólica inversa, de modo a garantir convergência e minimizar o número de vezes que a função objetivo deve ser avaliada (PRESS et al., 2007).

A busca em seção-áurea trata-se de um procedimento para a busca do mínimo de uma função  $f$ , elaborado para o caso geral em que nada é suposto sobre as propriedades da função a ser minimizada, exceto pela hipótese de que a função em questão possui um mínimo  $f(x)$  em um intervalo conhecido  $(a, b)$ . Conforme descrevem Press et al. (2007), a cada iteração desse procedimento, o intervalo de busca é reduzido considerando duas possíveis partições,  $(a, x)$  e  $(x, b)$ , até que um intervalo toleravelmente pequeno seja estabelecido.

Seja  $(a, b)$  o intervalo de busca, com  $a < b$ , e seja  $c$  um valor de abscissa entre  $a$  e  $b$ , a cada iteração da busca em seção-áurea a função  $f$  é avaliada para um novo valor de abscissa  $x$ , computando  $f(x)$ , e a tríplice de valores  $(a, c, b)$  é atualizada da seguinte forma:

$$(a', c', b') = \begin{cases} (c, x, b) & \text{se } f(c) < f(x), \\ (a, x, c) & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.36)$$

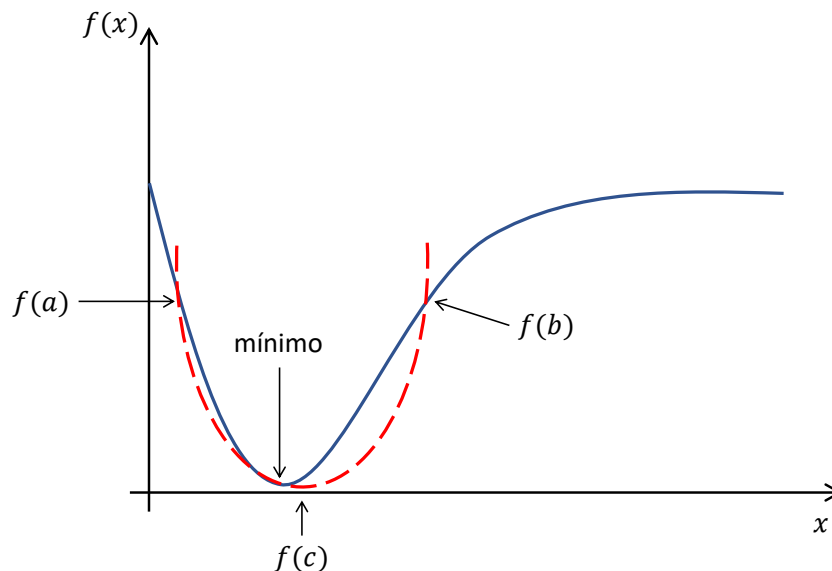
A questão fundamental para a eficiência da busca em seção-áurea é determinar a maneira ótima de selecionar um novo valor  $x$ , de modo a maximizar a poda do intervalo de busca a cada iteração. Dada uma tríplice  $(a, c, b)$ , de acordo com Press et al. (2007), a estratégia ótima consiste em selecionar um valor  $x$  localizado a uma fração  $m$  do intervalo de maior comprimento, seja  $|b - c|$  ou  $|c - a|$ , a partir do ponto intermediário  $c$  para “dentro” do intervalo de maior comprimento. A constante  $m$  é definida pela seguinte equação,

$$m = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0,38197. \quad (3.37)$$

Para funções suficientemente suaves, a interpolação parabólica inversa pode ser utilizada para encontrar o mínimo em poucas iterações, ou então, obter um ponto próximo ao mínimo. Segundo descrevem Press et al. (2007), a interpolação parabólica inversa determina a abscissa  $x$  correspondente ao mínimo de uma parábola passando por três pontos,  $\{a, f(a)\}$ ,  $\{b, f(b)\}$  e  $\{c, f(c)\}$ :

$$x = b - \frac{1}{2} \frac{(b-a)^2[f(b) - f(c)] - (b-c)^2[f(b) - f(a)]}{(b-a)[f(b) - f(c)] - (b-c)[f(b) - f(a)]} \quad (3.38)$$

A Figura 3.3 ilustra o processo de interpolação expresso pela equação (3.38), em que uma parábola é ajustada de modo a encontrar uma estimativa aproximada do mínimo de uma função unidimensional.



**Figura 3.3: Ilustração do procedimento de interpolação parabólica inversa.**

A interpolação parabólica inversa pode não convergir para funções não bem comportadas ou não suficientemente suaves. Sendo assim, o método de Brent tenta aplicar a interpolação inversa e, quando a função de interesse se mostra não cooperativa, algumas iterações da busca em seção-áurea são realizadas de modo a garantir a convergência do algoritmo. Para tal, os

últimos pontos avaliados da função sendo otimizada são monitorados de modo a verificar as condições de convergência do algoritmo.

### 3.8 Considerações Finais

Grande porção dos algoritmos para redução de ruído é baseada no modelo AWGN, devido sua simplicidade e tratabilidade matemática. Para que tais algoritmos possam ser aplicados a imagens corrompidas por ruído Poisson, o uso da transformada de Anscombe se faz necessário.

Algoritmos como o BM3D (DABOV et al., 2007), LPG-PCA (ZHANG et al., 2010), DDF (KNAUS; ZWICKER, 2015), alcançam resultados de estado da arte ao explorar propriedades de transformadas de domínio com as transformadas *wavelet*, Fourier e PCA. Devido a suas propriedades inerentes, as *wavelets* de Haar são de interesse fundamental para esse trabalho de pesquisa, uma vez que admitem uma caracterização estocástica para dados corrompidos por ruído Poisson no domínio da transformada.

O filtro de Wiener é uma abordagem clássica para a atenuação de ruído. Algoritmos recentemente propostos como o BM3D (DABOV et al., 2007) e NL-Bayes (LEBRUN; BUADES; MOREL, 2013b) proporcionam resultados de estado da arte aplicando o filtro de Wiener no contexto de um *framework* não-local para a redução de ruído.

As métricas PSNR e SSIM podem ser empregadas para avaliar quantitativamente a similaridade entre uma imagem filtrada e uma imagem dada como referência. Enquanto o PSNR se baseia no erro médio quadrático, o SSIM busca uma melhor correlação com o sistema de visão humano. Contudo, nem sempre é possível estabelecer uma imagem referência e, portanto, a aplicação de tais métricas é limitada. Ainda assim, são bastante atrativas para simulações e avaliações comparativas.

Os critérios SURE e PURE podem ser utilizados como estimativas do erro médio quadrático para imagens filtradas, sem necessidade do conhecimento de uma imagem livre de ruído ou de uma imagem referência. Isso pode ser utilizado na seleção ótima de parâmetros de algoritmos para a atenuação de ruído. Neste contexto, o algoritmo de Brent pode ser utilizado para determinar o parâmetro de filtragem ótimo, quando um único parâmetro necessita ser otimizado. Essa abordagem será apresentada e discutida no Capítulo 4 a seguir, no qual também são apresentadas as novas abordagens para a filtragem de ruído Poisson propostas por este trabalho de pesquisa.

# Capítulo 4

## TRABALHO PROPOSTO

---

---

*O objetivo deste trabalho de pesquisa foi propor novas abordagens para a redução de ruído Poisson, capazes de preservar pequenos detalhes e estruturas finas, evitando a introdução de artefatos visuais. Baseando-se em características de algoritmos do atual estado da arte, duas novas abordagens fundamentadas no uso de distâncias estocásticas foram propostas: (1) filtragem Wiener não-local utilizando estimativa ponderada de parâmetros no domínio do espaço; e (2) filtragem Wiener não-local no domínio das wavelets de Haar. Os resultados obtidos com tais abordagens são apresentados neste capítulo.*

### 4.1 Considerações Iniciais

Chatterjee e Milanfar (2010) avaliaram o desempenho de diversos algoritmos de estado da arte considerando uma estimativa do limitante inferior de Cramér–Rao. Os autores concluíram que ainda há espaço para melhorias no desempenho de algoritmos para a redução de ruído, porém, os atuais algoritmos estão se aproximando do desempenho máximo tangível estabelecido de acordo com limitante teórico. A análise realizada por Lebrun et al. (2012) também sugere que os atuais algoritmos do estado da arte realizam os mesmos procedimentos, porém, por meio de abordagens diferentes.

Neste contexto, é possível observar que embora o atual estado da arte seja composto por algoritmos bastante eficazes em atenuar ruído, menos atenção é dada ao problema da introdução de artefatos visuais causados como consequência desse processo. Tipos comuns de artefatos visuais são:

- ruído residual: padrões ruidosos causados devido ao ruído não atenuado de modo eficaz durante a etapa de processamento;

- *blocking*: falsas estruturas de blocos com transições abruptas em regiões adjacentes. O descarte de coeficientes no domínio *wavelet* na tentativa de reduzir ruído em *patches* pode ocasionar esse tipo de artefato, portanto, comum em imagens processadas com algoritmos como o BM3D. Também é observado com bastante frequência em imagens comprimidas utilizando padrões como JPEG 2000;
- *ringing*: se manifesta como falso sinal ou “auréolas” próximas a regiões de transição de bordas. Pode ocorrer devido a perda de conteúdo de alta frequência durante o processamento da imagem. Segundo Lebrun et al. (2012), também pode se manifestar em imagens processadas por algoritmos baseados no NLM, dada sua menor eficácia ao atenuar ruído em regiões próximas a bordas, nas quais o sinal é menos redundante;
- fenômenos de Gibbs: fenômeno observados devido ao comportamento das séries de Fourier e outras representações associadas, próximo a regiões de descontinuidade ou “saltos.” Como exemplo, esse tipo de artefato se manifesta em imagens processadas por algoritmos como o DDID, que se baseia no uso das funções base de Fourier.

Assim sendo, este trabalho de pesquisa tem por objetivo propor novas abordagens para a redução de ruído Poisson, capazes de proporcionar uma melhor preservação de pequenos detalhes e estruturas da imagem, ao mesmo tempo, procurando evitar a introdução de artefatos visuais.

Este capítulo está organizado da seguinte maneira: na seção 4.2 são apresentadas as hipóteses e justificativas gerais deste trabalho de Doutorado; na seção 4.3 é apresentada uma abordagem baseada na estimativa ponderada de parâmetros para o filtro de Wiener utilizando distâncias estocásticas; na seção 4.4 é apresentada uma segunda abordagem baseada na atenuação de ruído Poisson no domínio das *wavelets* de Haar, utilizando distâncias estocásticas para o aprimoramento do filtro de Wiener no domínio esparso; na seção 4.5 é apresentada uma metodologia para seleção automatizada de parâmetros; na seção 4.6 são apresentados e discutidos os resultados experimentais obtidos; e finalmente, as conclusões obtidas são discutidas e apresentadas no Capítulo 5.

## 4.2 Hipóteses e Justificativas

Neste trabalho de pesquisa, o problema de redução do ruído em imagens corrompidas por ruído Poisson é abordado. O modelo de ruído Poisson foi descrito em maiores detalhes na subseção 2.2.1 do Capítulo 2 e corresponde ao modelo de ruído aqui adotado. Adicionalmente, é

assumido que o ruído é não correlacionado ao sinal e é independente para cada pixel<sup>1</sup>. Também é assumido que a imagem livre de ruído pode ser modelada como uma coleção redundante de pequenas vizinhanças de pixels.

Knaus e Zwicker (2015) assumem a hipótese de que *kernels* bilaterais podem ser utilizados como estimadores robustos para o ruído presente em imagens corrompidas por AWGN. Nas abordagens consideradas neste trabalho de pesquisa, assume-se que estimadores ponderados baseados em um *framework* não-local podem ser utilizados para obter estimativas dos momentos de primeira e segunda ordem de imagens corrompidas por ruído Poisson. Com base em tais estimadores, o filtro pontual de Wiener formulado para o modelo de ruído Poisson, tanto para domínio do espaço como também para o domínio *wavelet*, é aplicado para a redução de ruído.

Os resultados obtidos por este trabalho de pesquisa demonstram que o *framework* de filtragem não-local pode ser visto como uma metodologia para a estimativa de parâmetros. Uma vez que diferentes regiões da imagem podem ser descritas por distribuições estatísticas com parâmetros distintos, estimadores ponderados fornecem um bom compromisso entre obter um número maior de amostras e evitar a introdução de viés na estimativa, causado pela presença de amostras de diferentes populações estatísticas.

Algoritmos baseados na filtragem em duplo-domínio, de modo geral, se baseiam em uma etapa de estimativa no espaço, seguida por uma segunda etapa de estimativa no domínio da frequência, utilizando a diferença entre o sinal suavizado no domínio do espaço e o sinal observado (KNAUS; ZWICKER, 2013, 2014, 2015).

De certo modo, esse processo pode ser visto como análogo à aproximação “grosseira” do sinal, utilizando um filtro de passa-baixas, seguido pela subtração entre o sinal observado e o sinal suavizado, obtendo uma estimativa dos detalhes da imagem para serem processados no domínio da frequência. Sob esse ponto de vista, uma relação entre a filtragem em duplo-domínio e a análise multiescala pode ser estabelecida. Nesse sentido, a transformada *wavelet* pode ser vista como uma técnica poderosas para a representação do sinal.

Em vista de tais argumentos, a redução de ruído no domínio das *wavelets* de Haar utilizando distâncias estocásticas em um *framework* não-local, também foi considerada por este trabalho de pesquisa. Como será visto na subseção 4.4.2, as distâncias estocásticas entre coeficientes *wavelet* combinam simultaneamente a similaridade entre coeficientes das sub-bandas de detalhe e aproximação.

No domínio das *wavelets* de Haar, os coeficientes de detalhes são obtidos pela diferença de

---

<sup>1</sup>As realizações de ruído são independentes entre si para cada pixel, porém, dependentes do sinal. Ressalta-se também que dependência de sinal não implica na correlação entre ruído e sinal.

variáveis Poisson, portanto possuem distribuição Skellam (SKELLAM, 1945). Já os coeficientes de aproximação são obtidos pela soma de variáveis Poisson, portanto também são variáveis Poisson. Neste contexto, distâncias estocásticas (NASCIMENTO; CINTRA; FRERY, 2010) podem ser empregadas como métricas para comparação de *patches* no domínio da transformada.

Os coeficientes de detalhe livres de ruído podem ser estimados pela média ponderada de coeficientes ruidosos, em que maior peso é atribuído para coeficientes com distribuição similar. Essa abordagem foi avaliada empregando tanto *wavelets* ortogonais, conhecidas por causar a introdução de severos artefatos visuais no contexto de algoritmos para atenuação de ruído (PORTILLA et al., 2003; PARRILLI et al., 2012), como também a transformada *wavelet* estacionária (sem decimação).

É notável que mesmo com o uso de *wavelets* ortogonais, a abordagem proposta alcançou resultados competitivos com o estado da arte, ao mesmo tempo minimizando a presença de artefatos visuais. Ainda assim, os resultados obtidos com *wavelets* estacionárias demonstraram um melhor compromisso entre eficácia na redução de ruído e preservação de detalhes. Entretanto, o emprego de *wavelets* ortogonais pode ser bastante atrativo devido ao seu custo computacional substancialmente menor.

Infelizmente, expressões de forma fechada para a distribuição Skellam não puderam ser obtidas. Assim sendo, é proposto o uso da distribuição Gaussiana como aproximação para a distribuição Skellam. Hwang, Kim e Kweon (2012) também apontam que essa aproximação é razoável.

Duas novas abordagens para a redução de ruído Poisson foram propostas como contribuições deste trabalho de pesquisa. Além disso, o uso de distâncias estocásticas para a comparação de *patches* de coeficientes no domínio das *wavelets* de Haar para a filtragem de ruído Poisson é também uma nova proposta realizada por esse trabalho. Tal como será apresentado na seção 4.6, as abordagens propostas evitam consideravelmente a introdução de artefatos visuais, ao mesmo tempo obtendo resultados compatíveis com o atual estado de arte em termos de métricas como o PSNR e o SSIM.

A seleção de parâmetros para algoritmos de redução de ruído é uma etapa fundamental para obtenção de resultados satisfatórios e, por si só, consiste em um grande desafio. Boa parte dos trabalhos de pesquisa em algoritmos para a redução de ruído utilizam busca exaustiva ou experimentos empíricos para determinar o melhor ajuste de parâmetros. Uma metodologia automatizada para a seleção ótima de parâmetros também foi proposta neste trabalho de pesquisa.



### 4.3 Redução de Ruído Poisson por Meio da Técnica de Filtragem Wiener com Estimativa Ponderada de Parâmetros

Assim como descrito na Seção 3.3 do Capítulo 3, as abordagens clássicas para o filtro de Wiener se baseiam na estimativa local de parâmetros (LEE, 1980; KUAN et al., 1985; JIANG; SAWCHUK, 1986). Isto é, média e variância do sinal e ruído são estimados utilizando amostras pertencentes à vizinhança local da coordenada de pixel sendo processada.

Abordagens locais para o filtro de Wiener se baseiam na hipótese de que as estatísticas de primeira e segunda ordem do sinal e ruído são estacionárias, considerando regiões suficientemente pequenas da imagem. No entanto, essa premissa nem sempre é válida na prática, principalmente em regiões próximas a bordas ou pequenos detalhes, resultando no borramento excessivo de tais regiões.

A tarefa de atenuação do ruído em imagens digitais pode ser vista como um processo não supervisionado, uma vez que a população estatística ou a classe correspondente a cada amostra ruidosa de pixel ou *patch*, no caso geral, é desconhecida. Abordagens locais correspondem à suposição de que pixels pertencentes a uma mesma vizinhança são amostras da mesma população estatística.

Inspirada por algoritmos não-locais como o NLM, uma abordagem alternativa consiste em assumir que amostras de pixel centralizadas em *patches* similares pertencem a mesma população estatística. Diversos algoritmos se baseiam nessa premissa (HE; GREENSHIELDS, 2009; LEBRUN; BUADES; MOREL, 2013b; BINDILATTI; MASCARENHAS, 2013).

Knaus e Zwicker (2015) utilizam *kernels* bilaterais na estimativa robusta do ruído. Uma vez que os *kernels* bilaterais são definidos em função das distâncias fotométrica e geométrica entre pixels, pode ser dito que maior influência é atribuída a amostras que possuem tons de cinza menos discrepantes ao do pixel sendo processado e que, de maneira concomitante, estão localizadas mais próximas no domínio do espaço.

Neste sentido, o presente trabalho de pesquisa propõem aplicar o conceito de redundância inerente a imagens à estimativa robusta dos momentos de primeira e segunda ordem do sinal e ruído, para a redução de ruído Poisson utilizando o filtro de Wiener. Mais especificamente, conforme a Equação (3.22)<sup>2</sup>, computar o filtro pontual de Wiener para redução de ruído Poisson

---

<sup>2</sup>Por clareza de exposição, a Equação (3.22) é reproduzida neste capítulo pela Equação (4.1).

exige conhecimento dos seguintes parâmetros  $\bar{y}_i$  e  $\sigma_{y_i}^2$ , para uma dada coordenada  $i$ ,

$$\hat{x}_i = \bar{y}_i + \frac{\sigma_{y_i}^2 - \bar{y}_i}{\sigma_{y_i}^2} (y_i - \bar{y}_i). \quad (4.1)$$

Assumindo a média ponderada da Equação (2.10) como uma estimativa robusta da média do sinal, isto é,

$$\bar{y}_i = E[y_i] \approx \bar{y}_i^{[NL]} = \sum_{j \in \Omega_i} w_{ij} \cdot y_i, \quad (4.2)$$

de modo análogo, a variância de  $y_i$  pode ser definida tal como segue,

$$\begin{aligned} \sigma_{y_i}^2 &= E[y_i^2] - E[y_i]^2 \approx \sigma_{y_i}^{2[NL]}, \quad \text{com} \\ \sigma_{y_i}^{2[NL]} &= \left( \sum_{j \in \Omega_i} w_{ij} \cdot y_i^2 \right) - \left( \sum_{j \in \Omega_i} w_{ij} \cdot y_i \right)^2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

e assim a Equação (4.1) pode ser reescrita da seguinte forma,

$$\hat{x}_i = \bar{y}_i^{[NL]} + \left( \frac{\sigma_{y_i}^{2[NL]} - \bar{y}_i^{[NL]}}{\sigma_{y_i}^{2[NL]}} \right)^\beta (y_i - \bar{y}_i^{[NL]}), \quad (4.4)$$

sendo que  $\beta$  é um parâmetro proposto para controlar a intensidade do processo de filtragem. Os pesos  $\{w_{ij}\}_{j \in \Omega_i}$  são definidos de acordo com a Equação (2.22), utilizando as distâncias estocásticas para distribuição Poisson, da mesma forma como para o algoritmo SP-NLM (BIN-DILATTI; MASCARENHAS, 2013), descrito na Subseção 2.5.3 do Capítulo 2.

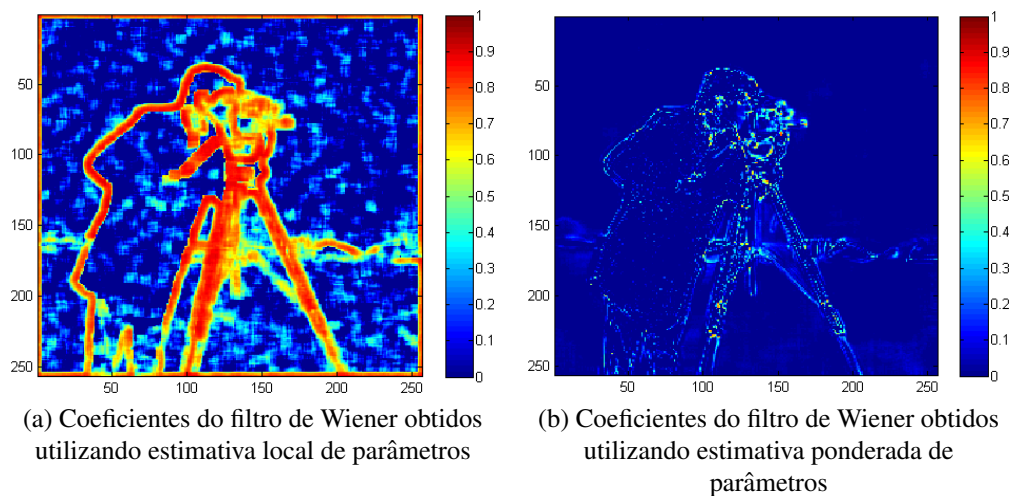
Seja  $\alpha_i = \frac{\sigma_{y_i}^{2[NL]} - \bar{y}_i^{[NL]}}{\sigma_{y_i}^{2[NL]}}$  o coeficiente do filtro para a posição  $i$ , uma vez que  $\alpha_i$  assume valores no intervalo entre 0 e 1,  $\alpha_i^\beta \in [0, 1]$  também é um coeficiente entre 0 e 1. Logo, para  $\beta \rightarrow \infty$ ,  $\alpha_i^\beta \rightarrow 0$  e  $\hat{x}_i \rightarrow \bar{y}_i^{[NL]}$ , ou seja,  $\hat{x}_i$  tende ao estimador não-local da média  $\bar{y}_i^{[NL]}$ . Por outro lado, para  $\beta \rightarrow 0$ ,  $\alpha_i^\beta \rightarrow 1$  e  $\hat{x}_i \rightarrow y_i$ , sendo assim,  $\hat{x}_i$  tende ao valor observado para o pixel ruidoso  $y_i$ . Finalmente, para  $\beta = 1$ , a Equação (4.4) se comporta da mesma forma que a Equação (4.1), exceto pelo fato que  $\bar{y}_i^{[NL]}$  e  $\sigma_{y_i}^{2[NL]}$  são estimadores ponderados.

Em outras palavras, é proposta uma nova maneira de estimar os parâmetros do filtro de Wiener, expresso na equação (4.1), de modo a obter resultados compatíveis com o estado da arte. Além disso, como pode ser visto pela equação (4.4), um novo parâmetro  $\beta$  é introduzido à formulação do filtro de Wiener. Assim como será discutido no que se segue, este parâmetro permite evitar a introdução de ruído residual e a atenuar a influência de viés na estimativa da média e variância.

Os estimadores propostos nas Equações (4.2) e (4.3) podem ser vistos como estimadores

ponderados da média e variância, sendo que maior peso é atribuído a amostras centralizadas em *patches* cuja distribuição é menos discrepante à do *patch* centralizado em *i*. A intuição dessa abordagem é fornecer estimativas mais robustas em regiões próximas a bordas e pequenos detalhes, atribuindo menos influência a amostras extraídas de regiões correspondentes a diferentes populações estatísticas. O método baseado nesta abordagem foi denominado Poisson Non-Local Wiener (PNL-Wiener).

Para tornar mais clara a vantagem oferecida pelos estimadores propostos, a Figura 4.1(a) compara os coeficientes do filtro Wiener originalmente proposto por Kuan et al. (1985), calculados de acordo com a Equação (4.1) e utilizando estimativa local de parâmetros; aos coeficientes do filtro de Wiener proposto na equação (4.4), exibidos na Figura 4.1(b) e computados utilizando a estimativa ponderada de parâmetros de acordo com as equações (4.2) e (4.3). Regiões representadas por cores quentes correspondem a coordenadas nas quais o filtro de Wiener prioriza a preservação do sinal de interesse, suprimindo a atenuação de ruído; enquanto regiões representadas por cores frias correspondem a coordenadas nas quais a atenuação de ruído é maior.



**Figura 4.1: Coeficientes do filtro para a imagem “Cameraman” com pico de intensidade 20.**

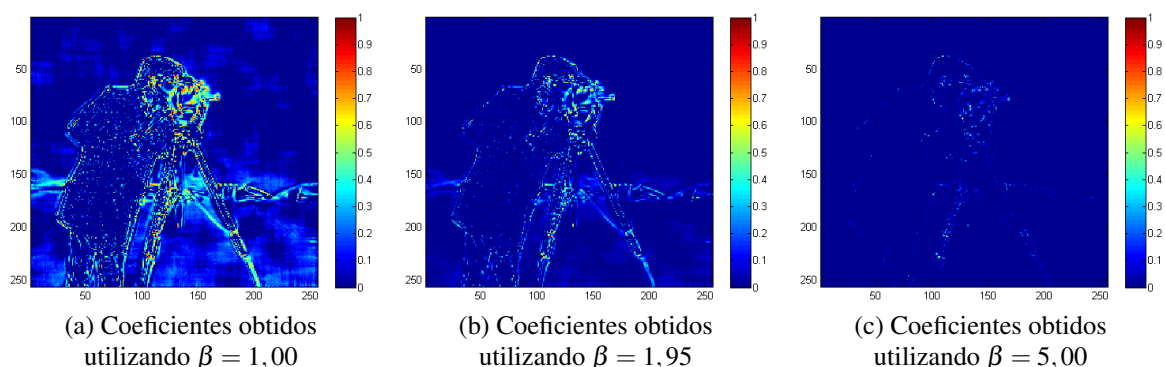
Como pode ser visto a partir da Figura 4.1(a), os coeficientes do filtro de Wiener local são bastante sensíveis a ruído, implicando em uma menor eficácia na atenuação de ruído mesmo em regiões homogêneas da imagem. Esse efeito causa a introdução de ruído residual na imagem resultante do processo de filtragem. Devido ao uso de uma vizinhança local para a estimativa de parâmetros, a atenuação do ruído é menos eficiente em vizinhanças próximas a bordas e pequenos detalhes, uma vez que em tais regiões nem todos os pixels pertencentes a mesma vizinhança local correspondem a mesma população estatística.

Por outro lado, como pode ser observado a partir da Figura 4.1(b), os coeficientes obti-

dos utilizando a estimativa ponderada de parâmetros são substancialmente menos sensíveis a ruído. Atenuação do ruído é suprimida apenas em coordenadas contendo bordas e pequenos detalhes, resultando em um melhor compromisso entre redução de ruído e preservação do sinal de interesse.

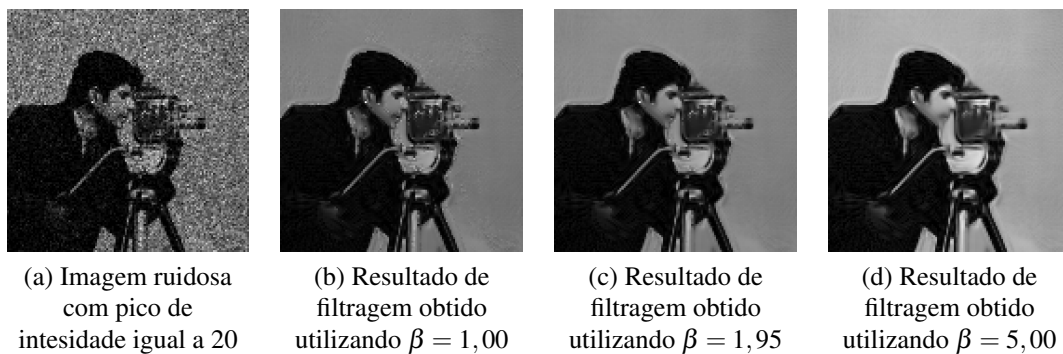
Embora o filtro de Wiener clássico seja ótimo no sentido do critério LMMSE, pode não fornecer o melhor compromisso entre atenuação de ruído e preservação de características de interesse do sinal sendo processado. Como exemplo, esse é o caso de aplicações como a tomossíntese digital mamária, em que a preservação de pequenas estruturas pode ser considerada como um fator mais crítico que a atenuação de ruído. Além disso, os estimadores ponderados propostos nas equações (4.2) e (4.3) podem permitir que amostras pertencentes a diferentes populações estatísticas participem do processo de estimativa, porém, com um peso menor. Assim sendo, o ajuste adequado do parâmetro  $\beta$  para o filtro de Wiener paramétrico, proposto na equação (4.4), permite um melhor equilíbrio de tais fatores na imagem resultante.

Para demonstrar a influência do parâmetro  $\beta$ , a Figura 4.2 exibe os coeficientes de filtragem obtidos com o algoritmo PNL-Wiener para diferentes valores do parâmetro  $\beta$ , enquanto a figura 4.3 exibe os respectivos resultados de filtragem. Como pode ser observado a partir dos coeficientes apresentados nas Figuras 4.2 (a), (b) e (c), ao passo que o valor de  $\beta$  aumenta, os coeficientes do filtro se aproximam de zero, conseqüentemente, maior é a atenuação do ruído na imagem resultante, conforme pode ser visto pelas Figuras 4.3 (a), (b) e (c), porém, bordas e detalhes finos da imagem sofrem maior borramento. Em outras palavras, o parâmetro  $\beta$  pode ser ajustado de modo a priorizar a preservação de detalhes da imagem, ao custo de menor atenuação do ruído.



**Figura 4.2:** Coeficientes do filtro PNL-Wiener obtidos utilizando diferentes valores para o parâmetro  $\beta$ .

Outras abordagens baseadas na combinação do algoritmo NLM e do filtro de Wiener são conhecidas na literatura (LIN; LINGFU, 2009; SALVADEO; MASCARENHAS; LEVADA,



**Figura 4.3: Resultados de filtragem obtidos utilizando o algoritmo PNL-Wiener com diferentes valores para o parâmetro  $\beta$ .**

2012). Nesses métodos, o algoritmo NLM é utilizado como uma etapa de pré-filtragem, como uma forma de obter acesso preliminar a uma estimativa da imagem livre de ruído. Em outras palavras, as estimativas de média e variância são computadas de modo local utilizando uma imagem pré-suavizada com o algoritmo NLM. Ainda assim, ao computar média e desvio padrão, todos os pixels em uma janela local recebem o mesmo peso.

Na abordagem proposta por este trabalho de pesquisa, estimadores ponderados das estatísticas de primeira e segunda ordem do sinal e ruído, são aplicados como substitutos para os estimadores locais, empregados em abordagens tradicionais do filtro de Wiener. Dessa maneira, a hipótese de que o sinal é localmente estacionário é relaxada, utilizando uma abordagem não-local.

É importante salientar que a formulação do filtro de Wiener empregada nessa abordagem se baseia na hipótese de ruído Poisson dependente de sinal. Além disso, os pesos dos estimadores ponderados são obtidos utilizando distâncias estocásticas (BINDILATTI; MASCARENHAS, 2013), especificamente propostas para a distribuição Poisson.

Um método baseado na abordagem proposta nesta seção, denominado *Poisson Non-Local Wiener filter* (PNL-Wiener), foi proposto e publicado em (BINDILATTI; VIEIRA; MASCARENHAS, 2018). O algoritmo 1 apresenta o pseudocódigo para o método proposto. A rotina “optimal” se refere a um procedimento para a seleção ótima de parâmetros e será descrito em detalhes na seção 4.5 deste capítulo. A rotina “basic\_estimate” consiste em um procedimento de estimativa por máxima verossimilhança utilizando os *k-patches* mais similares, conforme foi descrito na subseção 2.5.3.

O procedimento “search\_window( $i, S$ )” obtém todas as coordenadas de pixels em uma janela de busca de dimensões  $S \times S$  centralizada em  $i$ , enquanto “patch( $\lambda_i, P$ )” e “patch( $\lambda_j, P$ )” extraem *patches* com dimensões  $P \times P$  centralizados nas coordenadas  $i$  e  $j$ , a partir da

imagem obtida como estimativa básica  $\lambda$ , representados por vetores de pixels com intensidades  $\lambda_{P_i}[\cdot]$  e  $\lambda_{P_j}[\cdot]$ , respectivamente.

---

**Algorithm 1:** Poisson Non-Local Wiener Filter (PNL-Wiener)

---

**Input:**  $y :=$  imagem ruidosa

**Output:**  $\hat{x} :=$  imagem filtrada

Tamanho do *patch*  $P := 11 \times 11$

Tamanho da janela de busca  $S := 21 \times 21$

**Parameters:** Número de vizinhos similares  $k := 30$

Parâmetro de filtragem  $\gamma := \text{optimal}(y, \gamma^*)$

Compromisso do filtro (*trade-off*)  $\beta := \text{optimal}(y, \beta^*)$

$\lambda := \text{basic\_estimate}(y, k);$

**foreach** *coordenada de pixel i na grade da imagem do*

$\Omega_i := \text{search\_window}(i, S);$

$\lambda_{P_i} := \text{patch}(\lambda_i, P); \lambda_{P_j} := \text{patch}(\lambda_j, P);$

Calcular os coeficientes do filtro  $w_{ij}$  para todo  $j \in \Omega_i$  conforme proposto por Bindilatti e Mascarenhas (2013):

$$w_{ij} = \frac{1}{W_i} \exp\left(\frac{-\sum_{q \in P} d(\lambda_{P_i}[q], \lambda_{P_j}[q])}{\gamma \cdot \lambda_i^2}\right);$$

Calcular equações (4.2) e (4.3) usando os pesos  $w_{ij}$  para obter  $\bar{y}_i^{[NL]}$  e  $\sigma_{y_i}^{2[NL]}$ , respectivamente;

Estimar o valor livre de ruído do pixel sendo processado utilizando a equação (4.4):

$$\hat{x}_i = \bar{y}_i^{[NL]} + \left(\frac{\sigma_{y_i}^{2[NL]} - \bar{y}_i^{[NL]}}{\sigma_{y_i}^{2[NL]}}\right)^\beta (y_i - \bar{y}_i^{[NL]});$$


---

## 4.4 Filtragem Não-Local de Ruído Poisson no Domínio das Wavelets de Haar Utilizando Distâncias Estocásticas

Conforme descrito no Capítulo 2, muitos algoritmos de estado da arte como o BM3D e suas extensões (DABOV et al., 2007; PARRILLI et al., 2012) exploram representações esparsas para alcançar uma maior eficácia no processo de redução de ruído. Entretanto, alguns artefatos visuais podem ser introduzidos como consequência, tal como pode ser visto a partir da Figura 1.1a do Capítulo 1.

A abordagem proposta na seção 4.3 explorou o uso de estimadores ponderados para os momentos de primeira e segunda ordem do sinal e ruído, considerando o problema de atenuação de ruído Poisson. Nesta seção, um algoritmo não-local para a redução de ruído Poisson no domínio

*wavelet* é apresentado. Para tal, é proposto o uso de distâncias estocásticas para a comparação de *patches* no domínio *wavelet* e uma formulação mais específica do filtro de Wiener, combinando informações obtidas a partir dos coeficientes de detalhe e aproximação para determinar os coeficientes do filtro. Tal abordagem pode ser vista como a contrapartida da abordagem proposta na seção 4.3 no domínio das *wavelets* de Haar.

Assim como será demonstrado na seção 4.6, a abordagem proposta minimiza a introdução de artefatos visuais. A subseção 4.4.1 apresenta a caracterização estocásticas dos coeficientes *wavelet* para imagens corrompidas por ruído Poisson; na subseção 4.4.2 são propostas as expressões para as distâncias estocásticas entre coeficientes *wavelets*; e na subseção 4.4.3 é proposto um algoritmo para a redução de ruído utilizando distâncias estocásticas.

#### 4.4.1 Caracterização estocástica no domínio das *wavelets* de Haar

O modelo AWGN é invariante quanto ao uso de transformadas ortogonais, ou seja, o modelo estocástico do ruído não é modificado no domínio da transformada (PRATT, 1972). Entretanto, imagens corrompidas por ruído Poisson não possuem essa propriedade e, portanto, nem sempre é possível caracterizar a distribuição dos coeficientes após a transformação dos dados.

Para o caso particular das *wavelets* de Haar, descritas na Seção 3.2, é possível obter uma caracterização estocástica dos coeficientes *wavelet* de imagens corrompidas por ruído Poisson, facilitando a formulação teórica de algoritmos para a atenuação do ruído. Sendo assim, as *wavelets* de Haar são adotadas neste trabalho para a decomposição do sinal ruidoso.

Sejam  $Y_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$  e  $Y_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$  duas variáveis aleatórias Poisson, a variável  $S$  obtida pela soma  $S = Y_1 + Y_2$  também é uma variável aleatória Poisson  $S \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$ , com parâmetro  $\lambda_1 + \lambda_2$ . A variável  $D$ , obtida pela diferença  $D = Y_1 - Y_2$ , obedece uma distribuição Skellam (SKELLAM, 1945), com média  $E[D] = \lambda_1 - \lambda_2$ , variância  $Var(D) = \lambda_1 + \lambda_2$  e função de probabilidade dada pela seguinte expressão,

$$\mathcal{S}(d; \lambda_1, \lambda_2) = P(D = d) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{d/2} I_d \left( 2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \right), \quad (4.5)$$

em que  $d \in \mathbb{Z}$  é a diferença observada e  $I_d(z)$  é a função de Bessel modificada do primeiro tipo, definida tal como segue,

$$I_d(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m! \Gamma(m + d + 1)} \left( \frac{z}{2} \right)^{2m+d}, \quad (4.6)$$

sendo que  $\Gamma(t)$  é a função gama.

Seja  $\mathbf{y} = \{y_0, y_1, \dots, y_{N-1}\}$  uma sequência 1D, a transformada de Haar pode ser obtida simplesmente a partir da soma e diferença de elementos vizinhos (HIRAKAWA; WOLFE, 2012),

$$\begin{cases} a_{t,l} = a_{2t,l-1} + a_{2t+1,l-1}, \\ \omega_{t,l} = a_{2t,l-1} - a_{2t+1,l-1}, \end{cases} \quad (4.7)$$

sendo que  $a_{t,l}$  e  $\omega_{t,l}$  são os  $t$ -ésimos coeficientes de aproximação e detalhe, respectivamente, no  $l$ -ésimo nível de decomposição, com  $a_{t,l=0} = y_t$ , para  $t = 0, 1, \dots, N-1$ . Uma vez que os coeficientes de aproximação são a soma de variáveis Poisson, os coeficientes  $\omega_{t,l}$  da sub-banda de detalhe são distribuídos de acordo com a distribuição Skellam, para todo nível de decomposição  $l$ .

De forma análoga para o caso 2D, considerando a separabilidade das *wavelets* de Haar, o processo de decomposição da imagem se resume na combinação das operações de convolução 1D nas linhas e colunas da imagem, utilizando filtros de passa-baixas e passa-altas, seguidas pelas operações adequadas de decimação, tal como ilustrado na Figura 3.1. Logo os coeficientes das sub-bandas horizontais  $\omega_{r,c,l}^{[H]}$ , verticais  $\omega_{r,c,l}^{[V]}$ , diagonais  $\omega_{r,c,l}^{[D]}$  e de aproximação  $a_{r,c,l}$ , podem ser obtidos pelas seguintes expressões,

$$\begin{cases} a_{r,c,l} = (a_{2r,2c,l-1} + a_{2r,2c+1,l-1}) + (a_{2r+1,2c,l-1} + a_{2r+1,2c+1,l-1}), \\ \omega_{r,c,l}^{[H]} = (a_{2r,2c,l-1} + a_{2r,2c+1,l-1}) - (a_{2r+1,2c,l-1} + a_{2r+1,2c+1,l-1}), \\ \omega_{r,c,l}^{[V]} = (a_{2r,2c,l-1} - a_{2r,2c+1,l-1}) + (a_{2r+1,2c,l-1} - a_{2r+1,2c+1,l-1}), \\ \omega_{r,c,l}^{[D]} = (a_{2r,2c,l-1} - a_{2r,2c+1,l-1}) - (a_{2r+1,2c,l-1} - a_{2r+1,2c+1,l-1}), \end{cases} \quad (4.8)$$

em que  $r$  e  $c$  são os índices das linhas e colunas, respectivamente.

Os termos nas expressões da Equação (4.8) podem ser rearranjados como a soma e diferença de variáveis Poisson,

$$\begin{cases} a_{r,c,l} = (a_{2r,2c,l-1} + a_{2r,2c+1,l-1}) + (a_{2r+1,2c,l-1} + a_{2r+1,2c+1,l-1}), \\ \omega_{r,c,l}^{[H]} = (a_{2r,2c,l-1} + a_{2r,2c+1,l-1}) - (a_{2r+1,2c,l-1} + a_{2r+1,2c+1,l-1}), \\ \omega_{r,c,l}^{[V]} = (a_{2r,2c,l-1} + a_{2r+1,2c,l-1}) - (a_{2r,2c+1,l-1} + a_{2r+1,2c+1,l-1}), \\ \omega_{r,c,l}^{[D]} = (a_{2r,2c,l-1} + a_{2r+1,2c+1,l-1}) - (a_{2r+1,2c,l-1} + a_{2r,2c+1,l-1}). \end{cases} \quad (4.9)$$

Novamente, uma vez que os coeficientes de aproximação são variáveis aleatórias Poisson, sua soma também é Poisson. Logo, as expressões dos coeficientes de detalhe da equação (4.9) podem ser vistas como a diferença entre variáveis Poisson e, portanto, possuem distribuição Skellam.



Por simplicidade de notação, as seguintes convenções serão adotadas no restante do texto. Dado uma imagem  $Y$  corrompida por ruído Poisson,  $A_l$  denota sua sub-banda de aproximação e  $\Omega_l^{[H]}$ ,  $\Omega_l^{[V]}$  e  $\Omega_l^{[D]}$ , denotam suas sub-bandas de detalhes horizontal, vertical e diagonal, no nível de decomposição  $l$ . Subjacente a  $Y$ , presume-se a existência de uma imagem livre de ruído,  $X$ , com sub-banda de aproximação  $\tilde{A}_l$  e sub-bandas de detalhes  $\tilde{\Omega}_l^{[H]}$ ,  $\tilde{\Omega}_l^{[V]}$  e  $\tilde{\Omega}_l^{[D]}$ . Os coeficientes  $\omega_{r,c,l}^\theta \in \Omega_l^\theta$  serão denotados simplesmente por  $\omega_{p,l}^\theta \in \Omega_l^\theta$ , com  $p = (r, c)$  e  $\theta$  representando a orientação da sub-banda em questão.

Para agrupar conjuntos de *patches* similares é necessária a definição de uma métrica de distância. Neste trabalho de pesquisa é proposto o uso de divergências simétricas, também conhecidas como distâncias estocásticas (NASCIMENTO; CINTRA; FRERY, 2010). Tais métricas são capazes de mensurar a discrepância entre distribuições de probabilidade.

Devido a sua forma analítica, não foi possível obter expressões de forma fechada para as distâncias estocásticas entre variáveis obedecendo a distribuição Skellam. Uma vez que a comparação de *patches* é realizada de forma extensiva por algoritmos não-locais como o NLM e o BM3D, soluções de forma fechada são preferíveis do ponto de vista do custo computacional.

À medida que  $\lambda_1$  ou  $\lambda_2$  tendem ao infinito,  $\lambda_1, \lambda_2 \rightarrow \infty$ , a distribuição Skellam da Equação (4.5) tende a uma distribuição Gaussiana com média  $\mu = \lambda_1 - \lambda_2$  e variância  $\sigma^2 = \lambda_1 + \lambda_2$  (ALZAID; OMAIR et al., 2010),

$$\mathcal{N}(z; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(z - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}. \quad (4.10)$$

A distribuição Gaussiana é simétrica. No caso geral, a distribuição Skellam é assimétrica com coeficiente de *skewness* dado por  $(\lambda_1 - \lambda_2)/(\lambda_1 + \lambda_2)^{3/2}$ , sendo assimétrica positiva quando  $\lambda_1 > \lambda_2$  e assimétrica negativa quando  $\lambda_1 < \lambda_2$ .

Assim sendo, é proposto o uso a aproximação da distribuição Skellam utilizando uma distribuição Gaussiana  $\mathcal{N}(\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2)$ . Devido à tratabilidade matemática da distribuição Gaussiana, expressões de forma fechada para as distâncias estocásticas podem ser obtidas. Essa aproximação é adequada assintoticamente,  $\lambda_1, \lambda_2 \rightarrow \infty$ . Além disso, ao passo que a imagem é decomposta em mais níveis utilizando as *wavelets* de Haar, os coeficientes de aproximação em níveis de menor resolução correspondem a variáveis Poisson com taxas cada vez maiores.

Como forma de aproximar o comportamento assimétrico da distribuição Skellam, também foi considerada a aproximação por meio da distribuição normal assimétrica (*Skew Normal – SN*) (AZZALINI, 2013), que possui a distribuição Gaussiana como caso particular. A função

de densidade de probabilidade da distribuição normal assimétrica é dada pela seguinte equação,

$$\mathcal{S}\mathcal{N}(z; \xi, \varpi^2, \alpha) = \varphi\left(\frac{d - \xi}{\varpi}\right) \Phi\left(\alpha \frac{d - \xi}{\varpi}\right), \quad (4.11)$$

sendo que  $\varphi$  e  $\Phi$  são, respectivamente, as funções de densidade de probabilidade e de probabilidade acumulada da distribuição normal padrão  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

O parâmetro  $\xi$  é chamado de localização e é análogo a média da distribuição Skellam, portanto, pode ser ajustado como  $\xi = \lambda_1 - \lambda_2$ ;  $\omega^2$  é conhecido como o parâmetro de escala e é análogo a variância da distribuição Skellam, logo  $\omega^2 = \lambda_1 + \lambda_2$ ; e  $\alpha$  é conhecido como o parâmetro de forma e controla a assimetria da distribuição, portanto pode ser ajustado de acordo com o coeficiente de *skewness*,  $\alpha = (\lambda_1 - \lambda_2)/(\lambda_1 + \lambda_2)^{3/2}$ .

Para observar o quão bem as distribuições Gaussiana e normal assimétrica aproximam o comportamento da distribuição Skellam, experimentos envolvendo dados simulados foram realizados. Em cada experimento, 1.000.000 realizações de duas variáveis Poisson,  $Y_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$  e  $Y_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$ , foram simuladas para diferentes combinações dos parâmetros  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . A diferença  $D = Y_1 - Y_2$  entre as realizações das variáveis  $Y_1$  e  $Y_2$  foi computada e as seguintes distribuições de probabilidade foram então obtidas:

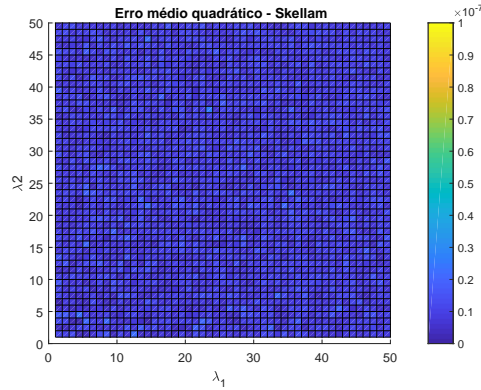
- distribuição empírica, obtida pelo histograma normalizado dos dados;
- distribuição Skellam com parâmetros  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ ;
- distribuição Gaussiana com média  $\lambda_1 - \lambda_2$  e variância  $\lambda_1 + \lambda_2$ ;
- distribuição normal assimétrica, com parâmetros  $\xi = \lambda_1 - \lambda_2$ ,  $\varpi^2 = \lambda_1 + \lambda_2$  e  $\alpha = (\lambda_1 - \lambda_2)/(\lambda_1 + \lambda_2)^{3/2}$ .

A Figura 4.4 relaciona o erro médio quadrático entre as distribuições Skellam 4.4(a), Gaussiana 4.4(b) e normal assimétrica 4.4(c), aos histogramas normalizados computados a partir dos dados de diferença  $D = Y_1 - Y_2$ , considerando todos os possíveis pares para os parâmetros  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  com valores inteiros de 0 a 50.

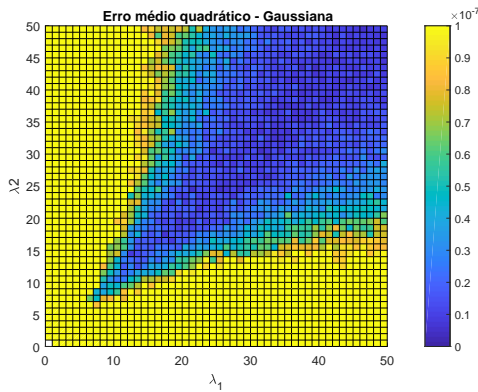
O mapeamento de cores utilizando na Figura 4.4 foi definido de modo a oferecer um melhor contraste entre os diferentes níveis de erro, buscando facilitar na compreensão dos resultados. As células preenchidas com a cor branca<sup>3</sup> representam os pares de parâmetros para os quais a distribuição de probabilidade em questão não é definida. Células preenchidas com cores quentes

<sup>3</sup> Isso ocorre quando  $\lambda_1 = 0$  ou  $\lambda_2 = 0$  para o caso da Figura 4.4 (a); e quando  $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$  para os casos das Figuras 4.4 (b) e (c).

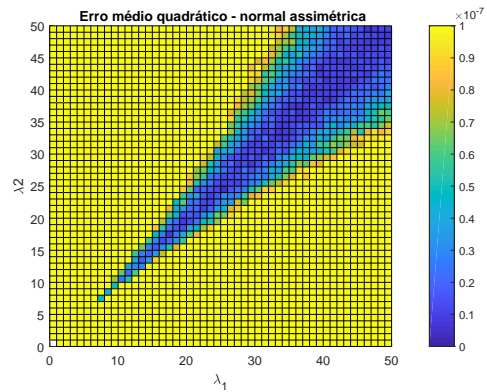
indicam erro mais elevado, enquanto células com cores frias indicam erro mais próximo de zero. As células amarelas correspondem aos experimentos cujo erro médio quadrático pertence ao intervalo entre  $1 \times 10^{-7}$  e  $1,4 \times 10^{-4}$ .



(a) Resultados experimentais obtidos utilizando a distribuição Skellam



(b) Resultados experimentais obtidos utilizando a distribuição gaussiana



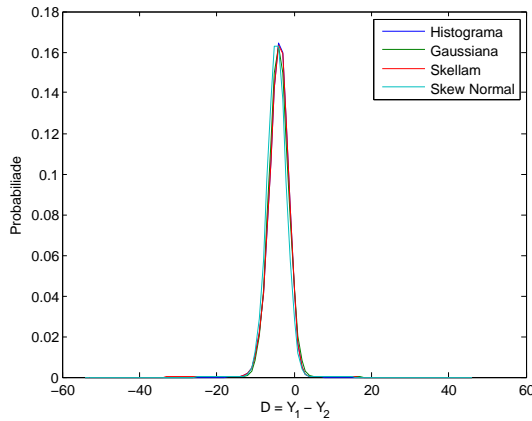
(c) Resultados experimentais obtidos utilizando a distribuição normal assimétrica

**Figura 4.4: Erro médio quadrático entre as probabilidades obtidas por meio das distribuições paramétricas e as probabilidades estimadas por meio do histograma normalizado dos dados de diferença  $D = Y_1 - Y_2$ .**

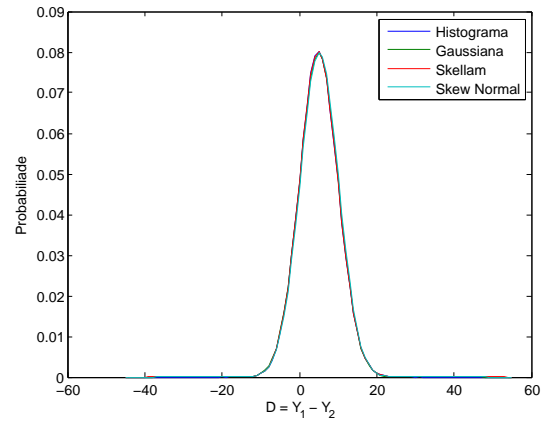
Pode ser constatado a partir da Figura 4.4 que o erro ao aproximar a distribuição Skellam utilizando a distribuição Gaussiana tende a valores próximos de zero, conforme os parâmetros  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  assumem valores superiores a 20. A normal assimétrica aproxima a distribuição Skellam com erros próximos a zero quando os parâmetros  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  possuem valores semelhantes, isto é,  $\lambda_1 - \lambda_2 \rightarrow 0$ . A aproximação utilizando a distribuição gaussiana também tende a oferecer um melhor ajuste aos dados quando a diferença entre  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  é menor, porém, demonstrou menor sensibilidade à diferença entre os parâmetros.

A Figura 4.5 exhibe as distribuições de probabilidades estimadas utilizando o histograma normalizado dos dados, junto às as distribuições de probabilidade gaussiana, Skellam e normal assimétrica, para diferentes combinações de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Como é possível observar pelos resulta-

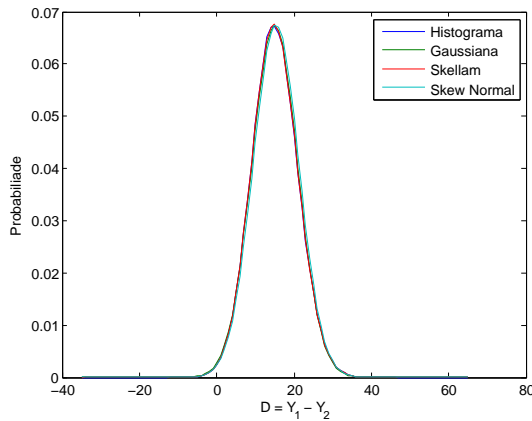
dos apresentados na Figura 4.5, as distribuições Gaussiana e normal assimétrica aproximam o comportamento geral da distribuição Skellam.



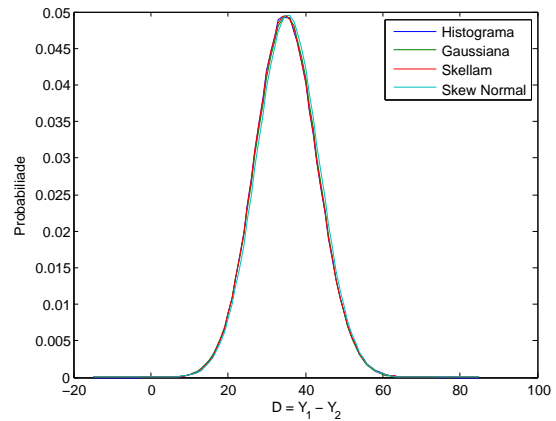
(a) Resultados obtidos para  $\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_2 = 5$



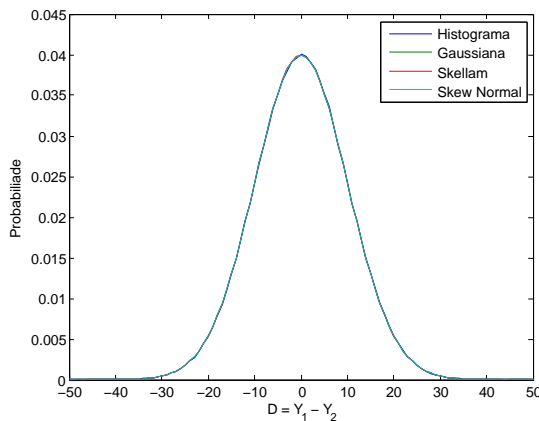
(b) Resultados obtidos para  $\lambda_1 = 15$  e  $\lambda_2 = 10$



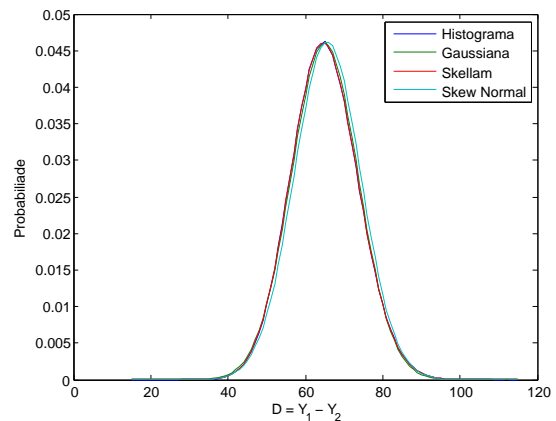
(c) Resultados obtidos para  $\lambda_1 = 25$  e  $\lambda_2 = 10$



(d) Resultados obtidos para  $\lambda_1 = 50$  e  $\lambda_2 = 15$



(e) Resultados obtidos para  $\lambda_1 = 50$  e  $\lambda_2 = 50$



(f) Resultados obtidos para  $\lambda_1 = 70$  e  $\lambda_2 = 5$

**Figura 4.5: Distribuição da diferença entre realizações de pares de variáveis Poisson obtidas para diferentes combinações de parâmetros.**

Como esperado, a distribuição Skellam oferece o melhor ajuste aos dados, tal como também é possível observar pela Figura 4.5(a). Quando os parâmetros  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  assumem valores elevados e  $\lambda_1 = \lambda_2$ , como acontece na Figura 4.5(e), as distribuições Skellam, gaussiana e normal

assimétrica oferecem um bom ajuste aos dados e demonstram um comportamento bastante similar. É importante ressaltar que nas circunstâncias da Figura 4.5(e) a distribuição dos dados é simétrica. Por outro lado, uma maior discrepância é observada no ajuste das distribuições Gaussiana e normal assimétrica quando as taxas  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  assumem valores muito pequenos, situação ilustrada pela 4.5(a). Esse comportamento também é notado na Figura 4.4.

Hwang, Kim e Kweon (2012) também realizaram experimentos avaliando o ajuste das distribuições Skellam e Gaussiana à diferença de variáveis Poisson. Conforme os resultados experimentais apresentados por Hwang, Kim e Kweon (2012), embora a distribuição Skellam ofereça um ajuste preciso aos dados, a distribuição Gaussiana oferece uma aproximação razoável quando as taxas de contagem subjacentes são suficientemente altas. Tal como pode ser observado a partir da Figura 4.4b, a distribuição Gaussiana oferece uma boa aproximação para taxas de contagem superiores a 20 fótons.

#### 4.4.2 Distâncias estocásticas para comparação de *patches* no domínio das *wavelets* de Haar

A partir das evidências experimentais apresentados nas Figuras 4.4 e 4.5, é possível afirmar que, embora a distribuição Gaussiana não seja o modelo paramétrico exato para a distribuição da diferença entre variáveis Poisson, apresenta um bom compromisso entre capturar o comportamento geral da distribuição dos dados e tratabilidade matemática, principalmente quando as variáveis Poisson envolvidas possuem altas taxas de contagem.

No caso da transformada *wavelet* de Haar 2-D, a cada nível de decomposição as variáveis Poisson são somadas em conjuntos de  $2 \times 2$  amostras de pixel, fazendo com que as condições favoráveis para uma aproximação gaussiana sejam alcançadas, mesmo para os primeiros níveis de decomposição. Esse processo de agregação por meio da soma de pixels é análogo ao procedimento de *pixel binning*, por vezes aplicado em problemas de imageamento com baixa contagem de fótons, tal como no trabalho de Salmon et al. (2014). Esse procedimento pode permitir a obtenção de um melhor compromisso entre resolução espacial e relação sinal-ruído.

A distribuição normal assimétrica também pode ser uma boa candidata para aproximar a distribuição Skellam. Entretanto, a distribuição Gaussiana possui uma quantidade menor de parâmetros a serem estimados e simplifica o cálculo das distâncias estocásticas, consequentemente levando a soluções com menor custo computacional.

Utilizando uma metodologia similar à aplicada por Nascimento, Cintra e Frery (2010) e por Bindilatti e Mascarenhas (2013), neste trabalho de pesquisa, distâncias estocásticas para

a distribuição Gaussiana foram obtidas a partir da simetrização de medidas de divergência e aplicadas como métricas de similaridade entre *patches* de coeficientes no domínio da transformada *wavelet* de Haar. Segundo Pardo (2005), medidas de divergência podem ser vistas como métricas capazes de comparar distribuições de probabilidade, porém, não possuem a propriedade de simetria.

Assumindo que *patches* obtidos a partir de sub-bandas de detalhe no domínio das *wavelets* de Haar podem ser modelados por variáveis Gaussianas multivariadas,  $\mathbf{U} \sim \mathcal{N}(\bar{\boldsymbol{\mu}}_1, \boldsymbol{\Sigma}_1)$  e  $\mathbf{V} \sim \mathcal{N}(\bar{\boldsymbol{\mu}}_2, \boldsymbol{\Sigma}_2)$ , com dimensão  $n$ , a divergência de Kullback–Leibler entre  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  é dada por (PARDO, 2005, p. 47),

$$D_{KL}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \frac{1}{2}(\bar{\boldsymbol{\mu}}_1 - \bar{\boldsymbol{\mu}}_2)^T \boldsymbol{\Sigma}_2^{-1} (\bar{\boldsymbol{\mu}}_1 - \bar{\boldsymbol{\mu}}_2) + \frac{1}{2} \text{Tr}(\boldsymbol{\Sigma}_2^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_1 - \mathbf{I}) + \frac{1}{2} \ln \frac{\det(\boldsymbol{\Sigma}_2)}{\det(\boldsymbol{\Sigma}_1)}. \quad (4.12)$$

Sob a hipótese adicional de variáveis independentes,  $\boldsymbol{\Sigma}_1$  e  $\boldsymbol{\Sigma}_2$  são matrizes diagonais e a Equação (4.12) pode ser reescrita da seguinte forma,

$$D_{KL}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{(\mu_{1,i} - \mu_{2,i})^2 + \sigma_{1,i}^2}{\sigma_{2,i}^2} \right) + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\prod_{i=1}^n \sigma_{2,i}^2}{\prod_{i=1}^n \sigma_{1,i}^2} \right) - \frac{n}{2}. \quad (4.13)$$

Nessas condições, a distância estocástica de Kullback–Leibler  $d_{KL}(\mathbf{U}, \mathbf{V})$  pode ser obtida pela seguinte expressão,

$$\begin{aligned} d_{KL}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) &= \frac{D_{KL}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) + D_{KL}(\mathbf{V}, \mathbf{U})}{2} = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \left( \frac{(\mu_{1,i} - \mu_{2,i})^2}{\sigma_{2,i}^2} + \frac{\sigma_{1,i}^2}{\sigma_{2,i}^2} + \frac{(\mu_{2,i} - \mu_{1,i})^2}{\sigma_{1,i}^2} + \frac{\sigma_{2,i}^2}{\sigma_{1,i}^2} \right) - \frac{n}{2}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Segundo Nascimento, Cintra e Frery (2010), a distância Rényi  $d_R^\tau(\mathbf{U}, \mathbf{V})$  de ordem  $\tau$ , com  $0 < \tau < 1$ , pode ser definida pela seguinte equação,

$$d_R^\tau(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \frac{1}{\tau - 1} \ln \left( \frac{\int f_{\mathbf{U}}^\tau(\mathbf{x}) f_{\mathbf{V}}^{1-\tau}(\mathbf{x}) + \int f_{\mathbf{U}}^{1-\tau}(\mathbf{x}) f_{\mathbf{V}}^\tau(\mathbf{x})}{2} \right). \quad (4.15)$$

em que  $f_{\mathbf{U}}(\mathbf{x})$  e  $f_{\mathbf{V}}(\mathbf{x})$  são as funções de densidade de probabilidade gaussianas para as variáveis  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$ , tal como definido anteriormente. Nessas condições, conforme demonstrado por (PARDO, 2005, p. 45), a seguinte equação é válida,

$$\begin{aligned} \int f_{\mathbf{U}}^\tau(\mathbf{x}) f_{\mathbf{V}}^{1-\tau}(\mathbf{x}) &= \frac{\det(\tau \boldsymbol{\Sigma}_2 + (1 - \tau) \boldsymbol{\Sigma}_1)^{-1/2}}{\det(\boldsymbol{\Sigma}_1)^{\frac{\tau-1}{2}} \det(\boldsymbol{\Sigma}_2)^{-\tau/2}} \\ &\times \exp \left\{ \frac{\tau(\tau - 1)}{2} (\bar{\boldsymbol{\mu}}_1 - \bar{\boldsymbol{\mu}}_2)^T (\tau \boldsymbol{\Sigma}_2 + (1 - \tau) \boldsymbol{\Sigma}_1)^{-1} (\bar{\boldsymbol{\mu}}_1 - \bar{\boldsymbol{\mu}}_2) \right\} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Ao aplicar a equação (4.16) à (4.15), a distância Rényi  $d_R^\tau(\mathbf{U}, \mathbf{V})$  é obtida.

No entanto, a distância estocástica Rényi de ordem  $\tau = 1/2$  é de particular interesse para determinar a distância Hellinger. Ao fixar  $\tau = 1/2$ , a equação (4.16) pode ser simplificada para,

$$\int f_{\mathbf{U}}^{1/2}(\mathbf{x}) f_{\mathbf{V}}^{1/2}(\mathbf{x}) = \left( \frac{\det(\frac{1}{2}(\Sigma_2 + \Sigma_1))}{\sqrt{\det(\Sigma_1) \det(\Sigma_2)}} \right)^{-1/2} \times \exp \left\{ -\frac{1}{8} (\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2)^T \left( \frac{1}{2}(\Sigma_2 + \Sigma_1) \right)^{-1} (\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2) \right\} \quad (4.17)$$

Assumindo novamente a hipótese de variáveis independentes, a equação (4.17) pode ser simplificada para a seguinte expressão,

$$\int f_{\mathbf{U}}^{1/2}(\mathbf{x}) f_{\mathbf{V}}^{1/2}(\mathbf{x}) = \exp \left( -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \frac{(\mu_{1,i} - \mu_{2,i})^2}{(\sigma_{2,i}^2 + \sigma_{1,i}^2)} \right) \times \left( \frac{\frac{1}{2^n} \prod_{i=1}^n (\sigma_{2,i}^2 + \sigma_{1,i}^2)}{\sqrt{(\prod_{i=1}^n \sigma_{1,i}^2) (\prod_{i=1}^n \sigma_{2,i}^2)}} \right)^{-1/2}. \quad (4.18)$$

Finalmente, a distância Rényi de ordem  $\tau = 1/2$  é obtida substituindo (4.18) em (4.15),

$$d_R^\tau(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(\mu_{1,i} - \mu_{2,i})^2}{(\sigma_{2,i}^2 + \sigma_{1,i}^2)} + \ln \left( \frac{\frac{1}{2^n} \prod_{i=1}^n (\sigma_{2,i}^2 + \sigma_{1,i}^2)}{\sqrt{(\prod_{i=1}^n \sigma_{1,i}^2) (\prod_{i=1}^n \sigma_{2,i}^2)}} \right). \quad (4.19)$$

Segundo Nascimento, Cintra e Frery (2010), a distância de Hellinger  $d_H(\mathbf{U}, \mathbf{V})$  pode ser obtida em função da distância  $d_R^{1/2}$ ,

$$\begin{aligned} d_H(\mathbf{U}, \mathbf{V}) &= 1 - \exp \left( -\frac{1}{2} d_R^{1/2}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) \right) = \\ &= 1 - \exp \left( -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \frac{(\mu_{1,i} - \mu_{2,i})^2}{(\sigma_{2,i}^2 + \sigma_{1,i}^2)} - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\frac{1}{2^n} \prod_{i=1}^n (\sigma_{2,i}^2 + \sigma_{1,i}^2)}{\sqrt{(\prod_{i=1}^n \sigma_{1,i}^2) (\prod_{i=1}^n \sigma_{2,i}^2)}} \right) \right) = \\ &= 1 - \exp \left( -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \frac{(\mu_{1,i} - \mu_{2,i})^2}{(\sigma_{2,i}^2 + \sigma_{1,i}^2)} \right) \left( \frac{\sqrt{(\prod_{i=1}^n \sigma_{1,i}^2) (\prod_{i=1}^n \sigma_{2,i}^2)}}{\frac{1}{2^n} \prod_{i=1}^n (\sigma_{2,i}^2 + \sigma_{1,i}^2)} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Por sua vez, a distância de Bhattacharyya  $d_B(\mathbf{U}, \mathbf{V})$  pode ser obtida em função da distância

de Hellinger  $d_H(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ ,

$$\begin{aligned}
 d_B(\mathbf{U}, \mathbf{V}) &= -\ln(1 - d_H(\mathbf{U}, \mathbf{V})) = \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \frac{(\mu_{1,i} - \mu_{2,i})^2}{(\sigma_{2,i}^2 + \sigma_{1,i}^2)} - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\sqrt{(\prod_{i=1}^n \sigma_{1,i}^2) (\prod_{i=1}^n \sigma_{2,i}^2)}}{\frac{1}{2^n} \prod_{i=1}^n (\sigma_{2,i}^2 + \sigma_{1,i}^2)} \right) = \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \frac{(\mu_{1,i} - \mu_{2,i})^2}{(\sigma_{2,i}^2 + \sigma_{1,i}^2)} + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\frac{1}{2^n} \prod_{i=1}^n (\sigma_{2,i}^2 + \sigma_{1,i}^2)}{\sqrt{(\prod_{i=1}^n \sigma_{1,i}^2) (\prod_{i=1}^n \sigma_{2,i}^2)}} \right). \tag{4.21}
 \end{aligned}$$

Como pode ser visto pelas equações (4.14), (4.19), (4.20) e (4.21), as expressões obtidas para as distâncias estocásticas são funções dos parâmetros  $\bar{\mu}_1$ ,  $\bar{\mu}_2$ ,  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  das variáveis aleatórias subjacentes aos *patches* sendo comparados. Os parâmetros  $\mu_{1,i} = \lambda_{1,i} - \lambda'_{1,i}$  e  $\mu_{2,i} = \lambda_{2,i} - \lambda'_{2,i}$ , com  $i = 1, 2, \dots, n$ , estão diretamente relacionados com os coeficientes das sub-bandas de detalhe; enquanto os parâmetros  $\sigma_{1,i}^2 = \lambda_{1,i} + \lambda'_{1,i}$  e  $\sigma_{2,i}^2 = \lambda_{2,i} + \lambda'_{2,i}$ , com  $i = 1, 2, \dots, n$ , estão diretamente relacionados com os coeficientes das sub-bandas de aproximação. Logo as distâncias estocásticas podem ser vistas como métricas de similaridade entre *patches*, que combinam informações das sub-bandas de aproximação e detalhe.

Sob hipótese de independência estatística, as matrizes de covariância  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  passam a ser representadas por matrizes diagonais, simplificando o cálculo de termos envolvendo o determinante ou a inversão das matrizes de covariância. Além disso, essa simplificação também reduz o número de parâmetros a serem estimados. Do contrário, pelo menos  $n$  amostras diferentes de *patches* seriam necessárias para a estimativa da matriz de covariância para cada um dos *patches* da imagem sendo processada.

A hipótese de independência estatística é, portanto, assumida por conveniência algorítmica de modo a permitir uma implementação eficiente e com alto potencial para paralelismo, viabilizando também a implementação de um procedimento iterativo para determinação dos parâmetros de filtragem ótimos, descrito na seção 4.5. Essa abordagem representa um compromisso entre custo computacional e rigor teórico do modelo subjacente.

### 4.4.3 Filtragem Não-Local no Domínio das Wavelets de Haar

Assumindo que cada coeficiente ruidoso de uma dada sub-banda de detalhe  $\tilde{\omega}_{p,l}^\theta \in \Omega_l^\theta$  pode ser modelado como uma variável aleatória, a média e a variância da distribuição associada a



$\tilde{\omega}_{p,l}^\theta$  são dadas por,

$$E[\tilde{\omega}_{p,l}^\theta] = \omega_{p,l}^\theta$$

e

$$Var(\tilde{\omega}_{p,l}^\theta) = a_{p,l}.$$

Em outras palavras, a média e variância de  $\tilde{\omega}_{p,l}^\theta$  são equivalentes aos valores livre de ruído  $\omega_{p,l}^\theta$  e  $a_{p,l}$  correspondendo aos coeficiente de detalhe e aproximação subjacentes na posição  $p$ , nível de decomposição  $l$  e orientação  $\theta$ .

Na prática, os valores  $\omega_{p,l}^\theta$  e  $a_{p,l}$  não são conhecidos. Assim sendo, é proposto um algoritmo baseado em dois estágios. No primeiro estágio, as distâncias estocásticas são calculadas utilizando os coeficientes ruidosos das sub-bandas de detalhe e aproximação, na ausência de uma melhor estimativa da verdadeira distância entre coeficientes. Na segunda etapa de filtragem, a imagem resultante do primeiro estágio é utilizada como estimativa básica da imagem livre de ruído, ou seja, as distâncias estocásticas são computadas utilizando coeficientes obtidos a partir da estimativa básica.

Mais especificamente, sejam  $A_l$ ,  $\Omega_l^{[H]}$ ,  $\Omega_l^{[V]}$  e  $\Omega_l^{[D]}$ , as sub-bandas de aproximação e de detalhes horizontais, verticais e diagonais, respectivamente, obtidas utilizando as *wavelets* de Haar com  $l = 1, 2, \dots, L$  níveis de decomposição. Na primeira etapa de filtragem, estimativas das sub-bandas de detalhe livres de ruído  $\hat{\Omega}_l^{[H]}$ ,  $\hat{\Omega}_l^{[V]}$  e  $\hat{\Omega}_l^{[D]}$  são obtidas pela média ponderada de coeficientes ruidosos,

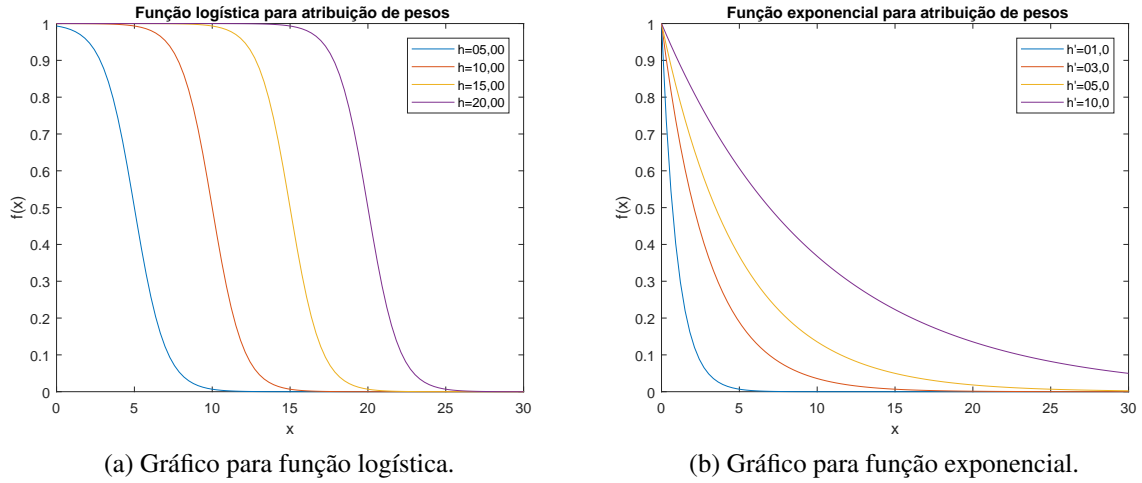
$$\hat{\omega}_{p,l}^{\theta[NL]} = \frac{\sum_{q \in \Delta_p} w_{pq,l}^\theta \cdot \tilde{\omega}_{q,l}^\theta}{\sum_{q \in \Delta_p} w_{pq,l}^\theta}. \quad (4.23)$$

em que  $\Delta_p$  é uma janela de busca centralizada em  $p$ .

É proposto o emprego de duas funções distintas para a atribuição de pesos. No primeiro passo, a imagem ruidosa é utilizada para o cálculo das distâncias estocásticas e, portanto, a função logística é usada para definição dos pesos com o intuito de reduzir a influência de ruído no processo de filtragem. Na segunda etapa de filtragem, uma imagem pré-filtrada é utilizada para o cálculo das distâncias estocásticas. Assim sendo, a função exponencial é empregada para a atribuição de pesos, fazendo com que os pesos decresçam rapidamente em função das distâncias estocásticas. Ao observar a Figura 4.6, é possível comparar o comportamento de ambas as funções para a atribuição de pesos.

Ao utilizar a função logística para a atribuição de pesos, coeficientes centralizados em *patches* cuja distância é maior que um dado limiar  $h$  recebem pesos tendendo a zero; enquanto pesos tendendo a um são atribuídos a coeficientes centralizados em *patches* cuja distância é inferior ao limiar fornecido como parâmetro. Para os casos intermediários, os pesos são atribuídos

conforme um “degrau” decrescente e suave, tal como pode ser visto na Figura 4.6 (a). Em outras palavras, a função logística atua como uma espécie de limiar suave, fazendo com que *patches* dissimilares não exerçam influência no processo de estimativa, enquanto *patches* similares o suficiente<sup>4</sup> recebam pesos unitários, reduzindo a sensibilidade ao ruído no cálculo das distâncias estocásticas.



**Figura 4.6: Gráfico das funções utilizadas para a atribuição de pesos utilizando diversos parâmetros diferentes.**

Na segunda etapa do algoritmo, a imagem obtida no primeiro passo é utilizada como pré-estimativa do sinal livre de ruído para o cálculo das distâncias estocásticas. Sendo assim, a função exponencial é aplicada para a atribuição de pesos, fazendo com que pesos mais elevados sejam atribuídos apenas para *patches* muito similares, reduzindo borramento na estimativa final. O gráfico da função exponencial para diferentes valores do parâmetro de filtragem  $h'$  é exibido na Figura 4.6 (b).

Formalmente, os coeficientes para a primeira etapa de estimativa do filtro  $w_{pq,l}^\theta$  são definidos pela seguinte equação,

$$w_{pq,l}^\theta = \frac{1}{1 + \exp(d - h)},$$

com

(4.24)

$$d = d_\Lambda \left( \tilde{\omega}_{p,l}^\theta, \tilde{\omega}_{q,l}^\theta, \tilde{a}_{p,l}, \tilde{a}_{q,l} \right).$$

sendo que  $\tilde{\omega}_{p,l}^\theta$ ,  $\tilde{a}_{p,l}$ ,  $\tilde{\omega}_{q,l}^\theta$  e  $\tilde{a}_{q,l}$  são vetores compostos pelos coeficientes de detalhe e aproximação extraídos dos *patches* centralizados nas posições  $p$  e  $q$ , respectivamente;  $h$  é um parâmetro de filtragem que controla a intensidade do filtro; e  $d_\Lambda$  representa a escolha de uma das distâncias estocásticas, expressas pelas Equações (4.14), (4.19), (4.20) ou (4.21).

<sup>4</sup>Conforme o limiar estabelecido como parâmetro.

De modo similar, para a segunda etapa de filtragem os pesos do filtro são obtidos utilizando a seguinte equação,

$$w_{pq,l}^{\theta} = \exp(-d/h') \quad \text{com} \quad (4.25)$$

$$d = d_{\Lambda} \left( \hat{\omega}_{p,l}^{\theta}, \hat{\omega}_{q,l}^{\theta}, \hat{a}_{p,l}, \hat{a}_{q,l} \right),$$

sendo que desta vez  $\hat{\omega}_{p,l}^{\theta}$ ,  $\hat{\omega}_{q,l}^{\theta}$ ,  $\hat{a}_{p,l}$  e  $\hat{a}_{q,l}$  são vetores de coeficientes extraídos a partir de *patches* das sub-bandas de detalhe e aproximação, computados a partir da imagem pré-filtrada.

Para evitar o borramento excessivo do sinal de interesse, o parâmetro  $h'$  é ajustado com um valor menor na segunda etapa de filtragem. É importante ressaltar que apenas os coeficientes do filtro são computados a partir da imagem pré-estimada, enquanto o processo de filtragem é novamente aplicado aos coeficientes da imagem ruidosa, da mesma forma como definido para a primeira etapa de processamento.

Após o procedimento de filtragem não-local em duas etapas, estimativas dos coeficientes de detalhe livres de ruído são obtidas. Essas estimativas são então utilizadas para computar o filtro de Wiener no domínio das *wavelets* de Haar. Ao utilizar estimativas não-locais obtidas aplicando distâncias estocásticas como métricas de similaridade, uma maior eficácia é alcançada por meio da filtragem Wiener, uma vez que o uso de estimadores não-locais permite reduzir o viés devido a incerteza sobre a população estatística das amostras envolvidas no processo de estimativa de parâmetros.

Segundo Ghael, Sayeed e Baraniuk (1997), no domínio *wavelet* o filtro de Wiener pode ser expresso pela seguinte equação,

$$\hat{\omega}_{p,l}^{\theta} = \frac{|\omega_{p,l}^{\theta}|^2}{|\omega_{p,l}^{\theta}|^2 + \sigma^2} \cdot \tilde{\omega}_{p,l}^{\theta}, \quad (4.26)$$

em que  $\sigma^2$  é a variância do ruído e  $\omega_{p,l}^{\theta}$  é o coeficiente *wavelet* livre de ruído subjacente. Os parâmetros  $\omega_{p,l}^{\theta}$  e  $\sigma^2$  são desconhecidos e estão relacionados ao sinal de interesse e ruído, portanto, precisam ser estimados a partir da imagem observada.

Neste trabalho de pesquisa é proposto o uso de estimadores não-locais para a estimativa ponderada dos coeficientes *wavelet*, enquanto a variância do ruído é determinada de acordo com os coeficientes de aproximação  $a_{p,l}$ . Uma vez que os coeficientes de detalhe ruidosos podem ser modelados como variáveis Skellam, a variância do ruído está diretamente relacionada a soma de variáveis Poisson. Assim sendo, a seguinte expressão é proposta para o cálculo do filtro de

Wiener,

$$\hat{\omega}_{p,l}^{\theta[\text{Wiener}]} = \left( \frac{|\hat{\omega}_{p,l}^{\theta[NL]}|^2}{|\hat{\omega}_{p,l}^{\theta[NL]}|^2 + \tilde{\alpha}_{p,l}} \right)^{\beta} \cdot \tilde{\omega}_{p,l}^{\theta}. \quad (4.27)$$

Ao utilizar estimadores ponderados para os coeficientes *wavelet*, menor peso é atribuído a amostras obtidas a partir de *patches* dissimilares, porém, viés ainda é introduzido. Por essa razão, o parâmetro  $\beta$  é proposto na equação (4.27) de modo a fornecer um melhor ajuste do compromisso entre redução de ruído e introdução de viés na estimativa, análogo ao parâmetro  $\beta$  proposto na equação (4.4). O procedimento proposto nesta seção é denominado WPNL-Wiener (*Wavelet-based Poisson Non-Local Wiener filter*).

A Figura 4.7 demonstra o efeito do parâmetro  $\beta$  para o algoritmo WPNL-Wiener. Quanto menor o valor de  $\beta$  maior é a preservação de detalhes, porém, ao custo de uma menor atenuação de ruído, tal como pode ser visto pela Figura 4.7 (b). Em contrapartida, quando  $\beta$  assume valores muito elevados, o ruído é completamente atenuado ao custo da introdução de borramento e, conseqüentemente, na perda de alguns detalhes e estruturas finas da imagem. Esse caso é ilustrado na Figura 4.7 (d). Quando o valor de  $\beta$  é ajustado adequadamente, o melhor compromisso entre atenuação de ruído e preservação de detalhes é alcançado, tal como pode ser observado pela Figura 4.7 (c).



**Figura 4.7: Resultados de filtragem obtidos utilizando o algoritmo WPNL-Wiener com diferentes valores para o parâmetro  $\beta$ .**

Ambas as transformadas *wavelet* ortogonal (não redundante) e estacionária (não decimada) foram consideradas neste trabalho de pesquisa<sup>5</sup>, entretanto melhores resultados em termos de PSNR e SSIM foram observados ao utilizar a transformada *wavelet* estacionária. Por essa razão, na seção 4.6 apenas os resultados obtidos com as *wavelets* estacionárias são apresentados. Ainda assim, é importante ressaltar que o uso das *wavelets* ortogonais oferecem um bom custo benefício em termos do tempo de execução e eficácia na redução de ruído, tal como pode ser

<sup>5</sup>Uma revisão sobre essas transformadas foi realizada na seção 3.2 do Capítulo 3.

constato pela Tabela 4.1 e por meio da Figura 4.8<sup>6</sup>.

Para minimizar a presença de artefatos visuais nos resultados obtidos com as *wavelets* ortogonais, a técnica de *cycle spinning* foi empregada. Essa técnica também é aplicada ao algoritmo PURE-LET, tal como originalmente proposto pelos autores Luisier et al. (2010). O procedimento *cycle spinning* consiste em realizar a translação das linhas e colunas da imagem, previamente à aplicação da transformada *wavelet* e do algoritmo para atenuação do ruído. Após a aplicação da transformada inversa, as linhas e colunas da imagem são então reposicionadas de acordo com seus respectivos locais de origem. O resultado final é computado por meio da média das imagens intermediárias, obtidas para diferentes combinações de deslocamento.

Para amenizar o aumento no custo computacional, o procedimento de *cycle spinning* é realizado apenas ao aplicar o filtro de Wiener paramétrico. Isto é, as estimativas ponderadas obtidas nas duas primeiras etapas do algoritmo WPNL-Wiener são computadas sem a translação das linhas ou colunas da imagem, obtendo assim uma pré-estimativa dos coeficientes *wavelet*. O procedimento de *cycle spinning* é então utilizado apenas ao realizar a etapa de filtragem Wiener, utilizando os coeficientes estimados por meio das duas primeiras etapas do algoritmo WPNL-Wiener.

O tempo de execução e o número de iterações reportados na Tabela 4.1 referem-se ao uso de um procedimento automático para o ajuste de parâmetros de filtragem. Tal procedimento de otimização será apresentado na seção 4.5. A melhoria em termos de PSNR e SSIM devido ao emprego da transformada *wavelet* estacionária também é refletida nos resultados visuais apresentados na Figura 4.8 (d). Ainda assim, os resultados exibidos na Figura 4.8 (c) demonstram que a introdução de artefatos visuais, típicos do emprego de *wavelets* ortogonais, pode ser minimizada de maneira significativa com o uso da técnica *cycle spinning*, visto que discrepância em relação aos resultados apresentados na Figura 4.8 (d) não é tão severa. Esse fato também é constatado ao comparar a Figura 4.8 (c) à Figura 4.8 (b), em que a técnica *cycle spinning* contribuiu de maneira substancial para redução de artefatos visuais.

**Tabela 4.1: Resultados comparativos obtidos utilizando o algoritmo WPNL-Wiener com *wavelets* ortogonais e estacionárias para a filtragem da imagem “Boat” (256 × 256) com pico de intensidade igual a 50. Resultados reportados são a média obtida após experimentos com dez realizações diferentes da imagem ruidosa.**

WPNL-Wiener	PSNR (db)	SSIM	Tempo de execução (seg.s)	Iterações
<i>Wavelets</i> Ortogonais	26,30	0.7936	<b>11,19</b>	49,9
<i>Wavelets</i> Estacionárias	<b>27,15</b>	<b>0.8204</b>	147,65	40,6

<sup>6</sup>Os resultados apresentados na Tabela 4.1 e na Figura 4.8 foram obtidos utilizando a distância de Kullback-Leibler, expressa pela equação (4.14).



(a) Imagem ruidosa com pico de intensidade igual a 50



(b) WPNL-Wiener utilizando *wavelets* ortogonais e sem *cycle spinning*



(c) WPNL-Wiener utilizando *wavelets* ortogonais com *cycle spinning*



(d) WPNL-Wiener utilizando *wavelets* estacionárias

**Figura 4.8: Resultados de filtragem obtidos utilizando o algoritmo WPNL-Wiener com *wavelets* ortogonais e estacionárias.**

O Algoritmo 2 apresenta o pseudo-código detalhado para o filtro WPNL-Wiener. O procedimento `optimal` representa um processo iterativo para determinar os parâmetros de filtragem ótimos, eliminando a necessidade de um ajuste empírico. A dimensão dos *patches* e da janela de busca são mantidas constantes para todos os níveis de decomposição quando a transformada *wavelet* estacionária é utilizada, uma vez que todas as sub-bandas possuem a mesma dimensão. Quando *wavelets* ortogonais são utilizadas, diferentes dimensões para o tamanho de *patch* e janela de busca devem ser especificadas para cada nível de decomposição.

O método proposto nesta seção, denominado WPNL-Wiener, pode ser visto como a contrapartida do método PNL-Wiener, proposto na seção 4.3, para o domínio das *wavelets* de Haar. Ao invés de utilizar estimativas ponderadas dos momentos de primeira e segunda ordem, coeficientes *wavelet* são obtidos por meio de estimadores ponderados para o cálculo do filtro de Wiener paramétrico.

Uma vantagem desta abordagem é que, ao decompor o sinal em diferentes escalas, a relação

**Algorithm 2:** Wavelet-based Poisson Non-Local Wiener Filter (WPNL-Wiener)**Input:**  $y$  := imagem ruidosa**Output:**  $\hat{x}$  := imagem filtradaTamanho do *patch*  $P := 7 \times 7$ **Parameters:** Tamanho da janela de busca  $S := 15 \times 15$ Número de níveis de decomposição  $L := 4$ // computar a transformada *wavelet* de Haarhaar\_wavelet\_transform ( $y, L$ );

// determinar parâmetro de filtragem ótimo

 $h := \text{optimal}(y, h^*);$ 

// pré-estimativa das sub-bandas livres de ruído

**foreach** nível de decomposição  $l = 1, 2, \dots, L$  e orientação  $\theta$  **do****foreach** coordenada de coeficiente  $p$  na sub-banda  $\tilde{\Omega}_l^{[\theta]}$  **do** $\Delta_p := \text{search\_window}(p, S);$ Estimar os coeficientes *wavelet* livres de ruído  $\hat{\omega}_{p,l}^{\theta[NL]}$  para todo  $q \in \Delta_p$  conforme a média ponderada expressa pela equação (4.23) e pesos definidos pela equação (4.24) com parâmetro  $h$ :

$$\hat{\omega}_{p,l}^{\theta[NL]} := \frac{\sum_{q \in \Delta_p} w_{pq,l}^{\theta} \cdot \tilde{\omega}_{q,l}^{\theta}}{\sum_{q \in \Delta_p} w_{pq,l}^{\theta}};$$

// determinar parâmetro de filtragem ótimo para estimativa final

 $h' := \text{optimal}(y, h'^*);$  $\beta := \text{optimal}(y, \beta^*);$ 

// estimativa final das sub-bandas livres de ruído

**foreach** nível de decomposição  $l = 1, 2, \dots, L$  e orientação  $\theta$  **do****foreach** coordenada de coeficiente  $p$  na sub-banda  $\tilde{\Omega}_l^{[\theta]}$  **do** $\Delta_p := \text{search\_window}(p, S);$ Computar nova estimativa dos coeficientes *wavelet* livres de ruído  $\hat{\omega}_{p,l}^{\theta[NL]}$  para todo  $q \in \Delta_p$  conforme a média ponderada expressa pela equação (4.23) e pesos definidos pela equação (4.25) com parâmetro  $h'$ :

$$\hat{\omega}_{p,l}^{\theta[NL]} := \frac{\sum_{q \in \Delta_p} w_{pq,l}^{\theta} \cdot \tilde{\omega}_{q,l}^{\theta}}{\sum_{q \in \Delta_p} w_{pq,l}^{\theta}};$$

Computar o filtro de Wiener utilizando as estimativas não-locais:

$$\hat{\omega}_{p,l}^{\theta[Wiener]} := \left( \frac{|\hat{\omega}_{p,l}^{\theta[NL]}|^2}{|\hat{\omega}_{p,l}^{\theta[NL]}|^2 + \tilde{\alpha}_{p,l}} \right)^{\beta} \cdot \tilde{\omega}_{p,l}^{\theta};$$

Obter estimativa final utilizando a transformada *wavelet* inversa a partir das sub-bandas de coeficientes filtrados obtidos na estimativa final.

sinal-ruído tende ser mais elevada para os níveis de decomposição mais grosseiros, uma vez que a soma de variáveis Poisson está envolvida no processo de decomposição. Também é importante mencionar que, devido à natureza esparsa do domínio *wavelet*, a atenuação de ruído por meio de técnicas não-locais é mais eficaz, pois há uma discrepância maior entre *patches* similares e dissimilares.

## 4.5 Seleção de Parâmetros

Tal como mencionado anteriormente, ambos os algoritmos PNL-Wiener e WPNL-Wiener,<sup>7</sup> propostos por este trabalho de pesquisa, necessitam do ajuste de alguns parâmetros relacionados ao processo de atenuação do ruído. Neste trabalho de pesquisa, o ajuste de parâmetros é abordado como um problema de otimização unidimensional sem o conhecimento explícito das derivadas da função de custo.

As Figuras 4.9 e 4.12 apresentam as curvas de MSE e PURE em função dos parâmetros de filtragem dos algoritmos PNL-Wiener e WPNL-Wiener, propostos por este trabalho de pesquisa. Todas as curvas foram obtidas utilizando a imagem “Peppers” com pico de intensidade igual a 50 e ruído Poisson simulado. Cada ponto foi obtido calculando os critérios de erro, MSE ou PURE, entre a imagem livre de ruído e a imagem filtrada para dez realizações diferentes de ruído e então, calculando a média dos resultados obtidos.

O algoritmo PNL-Wiener possui dois parâmetros relacionados ao processo de filtragem:

1. O parâmetro  $\gamma$ : Responsável por controlar a sensibilidade dos coeficientes do filtro não-local. Quando  $\gamma \rightarrow 0$  as estimativas ponderadas da média e variância são afetadas severamente pela presença de ruído. Por outro lado, quando  $\gamma \rightarrow \infty$  os estimadores ponderados passam a se comportar como estimadores locais; e
2. O parâmetro  $\beta$ : Determina o compromisso do filtro de Wiener. Quando  $\beta \rightarrow 0$ , não há atenuação de ruído ou borramento do sinal de interesse, entretanto, quando  $\beta \rightarrow \infty$  a estimativa final da imagem livre de ruído tende a média estimada.

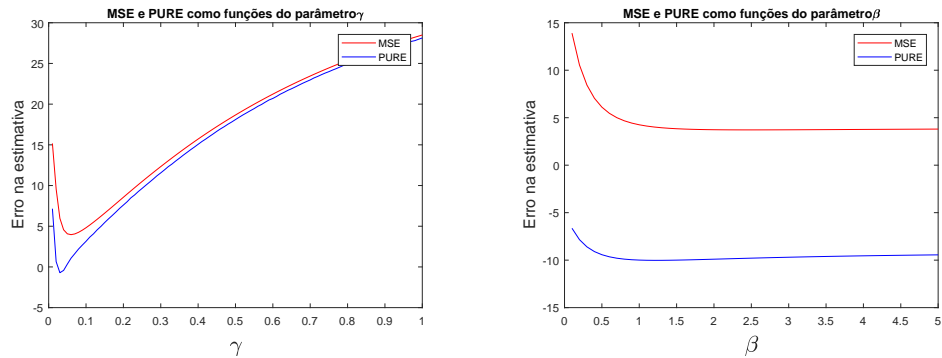
Como é possível observar a partir da Figura 4.9 (a), existe um valor ótimo para o parâmetro  $\gamma$  no intervalo entre 0 e 1. Conforme os resultados exibidos na Figura 4.9 (b), o erro médio na estimativa final deixa de decrescer a partir de um valor ótimo de  $\beta$  e passa a crescer sutilmente. Esse crescimento sutil ocorre devido ao fato que, pequenos detalhes e estruturas finas

---

<sup>7</sup>Vide algoritmos 1 e 2, respectivamente.



recuperados na etapa de filtragem Wiener, correspondem a uma pequena fração dos pixels de uma imagem, enquanto a suavização de grandes regiões homogêneas exerce maior influência para o erro médio na estimativa final.

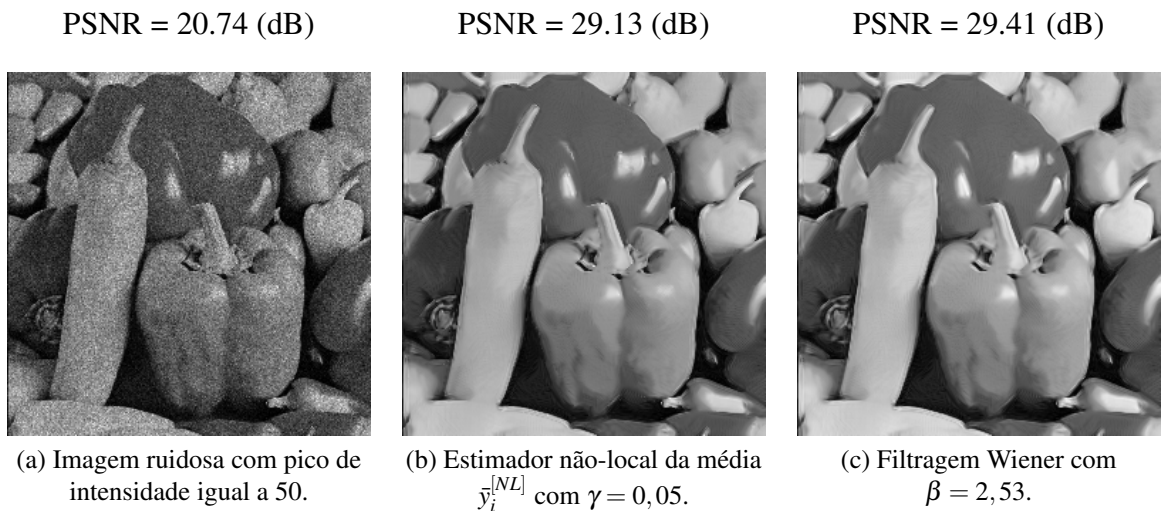


(a) Curva referente a etapa de estimativa não-local utilizando distâncias estocásticas.

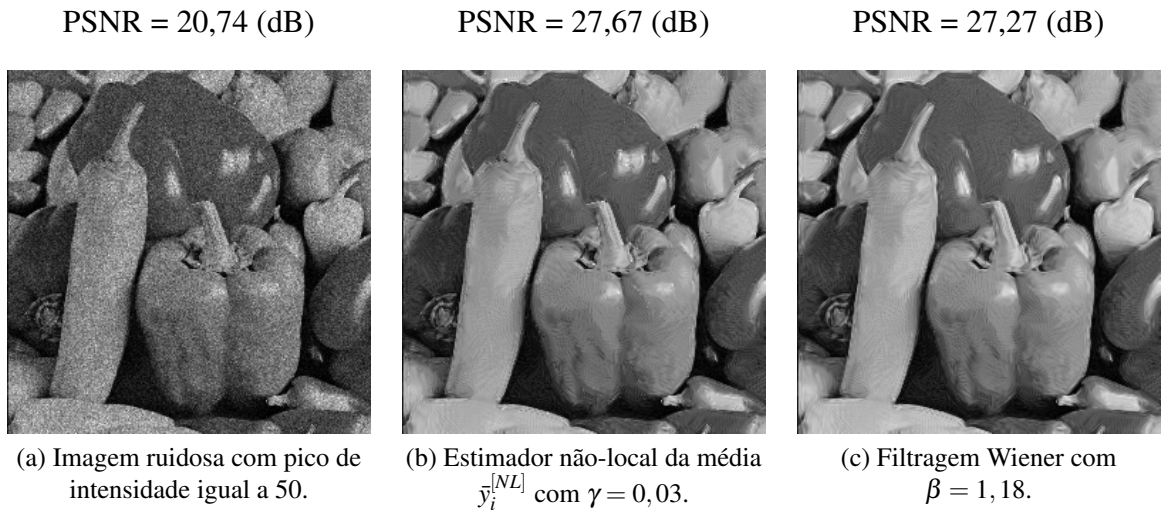
(b) Curva referente a etapa de filtragem Wiener com estimativa ponderada de parâmetros.

**Figura 4.9:** Gráficos para o MSE e o critério PURE em função dos parâmetros  $\gamma$  e  $\beta$  do algoritmo PNL-Wiener.

Na Figura 4.10 são apresentados os resultados obtidos utilizando o valor ótimo de  $\gamma$  e  $\beta$ , para as etapas de estimativa não-local e filtragem Wiener do algoritmo PNL-Wiener, com relação ao menor erro médio quadrático. Enquanto a Figura 4.11 apresenta os resultados obtidos com os valores ótimos para  $\gamma$  e  $\beta$  de acordo com o critério PURE. Como pode ser constatado ao comparar as Figuras 4.10 e 4.11, o critério PURE aproxima o comportamento geral do MSE, porém, os parâmetros encontrados não coincidem com os valores obtidos utilizando o verdadeiro MSE, resultando em uma menor eficácia na atenuação do ruído.



**Figura 4.10:** Resultados obtidos utilizando os valores ótimos dos parâmetros  $\gamma$  e  $\beta$  com relação ao menor erro médio quadrático para o algoritmo PNL-Wiener.



**Figura 4.11: Resultados obtidos utilizando os valores ótimos dos parâmetros  $\gamma$  e  $\beta$  com relação ao critério PURE para o algoritmo PNL-Wiener.**

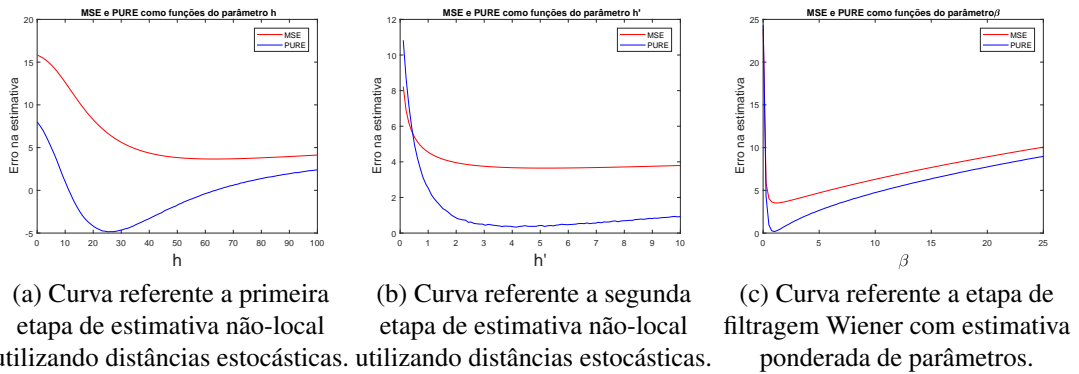
O algoritmo WPNL-Wiener possui três parâmetros relacionados ao processo de filtragem:

1. O parâmetro  $h$ : Pode ser visto como uma espécie de limiar suave tal que, pesos tendendo a zero são atribuídos a *patches* cuja distância com respeito ao *patch* central<sup>8</sup> é inferior a  $h$ , enquanto que peso unitário é atribuído a *patches* cuja distância é maior que  $h$ ;
2. O parâmetro  $h'$ : Controla a intensidade do filtro não-local no domínio *wavelet*. Quando  $h' \rightarrow 0$ , os coeficientes *wavelet* estimados tendem aos valores ruidosos correspondentes. No entanto, quando  $h' \rightarrow \infty$ , as estimativas não-locais se aproximam da média local dos coeficientes observados; e
3. O parâmetro  $\beta$ : Define o compromisso do filtro Wiener, equivalente ao parâmetro  $\beta$  do algoritmo PNL-Wiener.

A Figura 4.12 ilustra as curvas para o MSE e o critério PURE para os parâmetros  $h$ ,  $h'$  e  $\beta$  do algoritmo WPNL-Wiener. Tal como pode ser notado ao observar as Figuras 4.12 (a) e (b), existe um valor ótimo para os parâmetros  $h$  e  $h'$  nos intervalos  $(0, 100)$  e  $(0, 10)$ , respectivamente. Contudo, o aumento no MSE é discreto a partir dos valores ótimos, uma vez que os pequenos detalhes e estruturas finas suavizadas como consequência, correspondem a uma fração menor do conteúdo da imagem. Já o parâmetro  $\beta$  possui valor ótimo próximo de 1,00, como pode ser facilmente notado ao verificar a Figura 4.12 (c).

Nas Figuras 4.13 e 4.14 são apresentados os resultados obtidos utilizando o valor ótimo para os parâmetros  $h$ ,  $h'$  e  $\beta$ , para as diferentes etapas de filtragem do algoritmo WPNL-Wiener,

<sup>8</sup> *Patch* sendo processado.



**Figura 4.12: Gráficos para o MSE e o critério PURE em função dos parâmetros  $h$ ,  $h'$  e  $\beta$  do algoritmo WPNL-Wiener.**

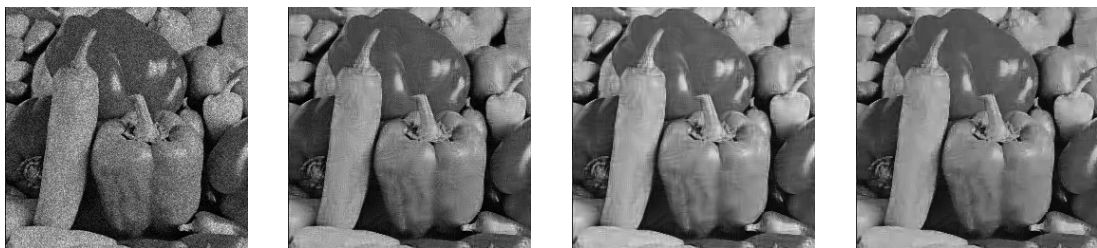
PSNR = 20.74 (dB)   PSNR = 29.27 (dB)   PSNR = 29.34 (dB)   PSNR = 29.49 (dB)



(a) Imagem ruidosa com pico de intensidade igual a 50.   (b) Primeira etapa de estimativa com  $h = 64,92$ .   (c) Segunda etapa de estimativa com  $h' = 4,97$ .   (d) Filtragem Wiener no domínio *wavelet* com  $\beta = 1,15$ .

**Figura 4.13: Resultados obtidos utilizando os valores ótimos dos parâmetros  $h$ ,  $h'$  e  $\beta$  com relação ao menor erro médio quadrático para o algoritmo WPNL-Wiener.**

PSNR = 20,74 (dB)   PSNR = 27,00 (dB)   PSNR = 28,20 (dB)   PSNR = 28,68 (dB)



(a) Imagem ruidosa com pico de intensidade igual a 50.   (b) Primeira etapa de estimativa com  $h = 27,21$ .   (c) Segunda etapa de estimativa com  $h' = 3,84$ .   (d) Filtragem Wiener no domínio *wavelet* com  $\beta = 0,94$ .

**Figura 4.14: Resultados obtidos utilizando os valores ótimos dos parâmetros  $h$ ,  $h'$  e  $\beta$  com relação ao critério PURE para o algoritmo WPNL-Wiener.**

com relação ao menor erro médio quadrático e ao critério PURE, respectivamente. Tal como pode ser visto, embora o critério PURE leve a uma escolha razoável para os parâmetros em questão, os valores seleccionados não são os mesmos obtidos ao empregar o verdadeiro MSE, de forma similar ao ocorrido nos resultados exibidos na Figura 4.11. Ainda assim, o critério PURE

oferece uma alternativa para a seleção de parâmetros na ausência da imagem livre de ruído.

Em todos os casos, o valor ótimo pode ser encontrado utilizando o método de Brent (1973) para a minimização do erro na estimativa, tanto para o caso do critério PURE quanto para o MSE. Os parâmetros selecionados para obtenção dos resultados apresentados nas Figuras 4.10, 4.11, 4.13 e 4.14 foram determinados utilizando o método de Brent. Os valores selecionados para os parâmetros em questão podem ser verificados ao inspecionar as Figuras 4.9 e 4.12.

O critério PURE utiliza conhecimento das propriedades do filtro e modelo estocástico do ruído como substituto para o conhecimento da imagem livre de ruído. Para tal, alguns requisitos são necessários. Segundo Montagner, Angelini e Olivo-Marin (2014), a função correspondente ao algoritmo de redução do ruído deve ser fracamente diferenciável, suas derivadas parciais devem ter energia finita, dentre outras hipóteses sobre a regularidade e suavidade do filtro.

Como pode ser observado a partir das Figuras 4.9–4.14, o critério PURE aproxima o comportamento das curvas do erro médio quadrático, entretanto, em alguns casos como na Figura 4.12 (a) e (b), a discrepância entre o critério PURE e o verdadeiro MSE é maior. Uma possível explicação é que em tais casos, as hipóteses necessárias para a consistência do critério PURE não são completamente satisfeitas.

Nos resultados apresentados nesta seção, o critério PURE foi avaliado utilizando o método Monte Carlo proposto por Montagner, Angelini e Olivo-Marin (2014). Esse método dispensa o conhecimento explícito das derivadas do filtro. O algoritmo de Brent foi escolhido para minimização do risco, pois também dispensa a necessidade de obter as expressões analíticas para as derivadas parciais do filtro. Isso permite que a metodologia para a seleção de parâmetros proposta neste trabalho possa ser aplicada a outros algoritmos. Além disso, nem sempre é possível determinar a forma analítica para as derivadas parciais de muitos algoritmos para a redução de ruído.

## 4.6 Experimentos e Resultados

Para avaliar o desempenho dos métodos propostos, experimentos utilizando imagens simuladas e reais foram realizados. Os métodos propostos foram comparados aos seguintes algoritmos para a redução de ruído Poisson: Poisson-NLM (DELEDALLE; TUPIN; DENIS, 2010); PURE-LET (LUISIER et al., 2010); e SP-NLM (BINDILATTI; MASCARENHAS, 2013). Os algoritmos BM3D (DABOV et al., 2007) e DDID (KNAUS; ZWICKER, 2013), proposto para o modelo AWGN, também foram incluídos nos experimentos comparativos, utilizando a transformada de Anscombe para a estabilização da variância e a transformada inversa exata de Ans-

combe, proposta por Makitalo e Foi (2011).

### 4.6.1 Experimentos com ruído simulado

Ruído foi simulado utilizando a imagem padrão “Cameraman”, com três diferentes picos de intensidade, 10, 20 e 50. Em cada experimento, dez realizações de ruído foram geradas e os algoritmos sendo avaliados foram utilizados para atenuação de ruído. Após o processo de filtragem de ruído, as métricas de PSNR e SSIM foram computadas utilizando a imagem livre de ruído e a imagem filtrada. Os resultados visuais obtidos também são apresentados.

Ruído Poisson é dependente de sinal e, portanto, quanto menor a intensidade dos pixels, menor será a relação sinal-ruído. Para simular imagens de baixa intensidade o seguinte procedimento foi adotado: (1) obter o maior valor de pixel existente na imagem,  $\rho_{max}$ ; e (2) multiplicar cada pixel da imagem por  $Q = \frac{\rho_{low}}{\rho_{max}}$ , em que  $\rho_{low}$  é o novo pico de intensidade desejado. O resultado desse procedimento é uma imagem com menor intensidade de pixels.

A partir das imagens de baixa intensidade simuladas utilizando o procedimento supra-descrito, o ruído é simulado substituindo cada valor de pixel da imagem por um valor obtido por meio de uma rotina geradora de números aleatórios conforme a distribuição Poisson, utilizando o valor original do pixel como parâmetro. A maioria das linguagens e ambientes de programação oferecem bibliotecas com rotinas para tal finalidade, MATLAB e Python são exemplos.

Uma janela local de dimensões  $7 \times 7$  foi utilizada para as estimativas locais de média e variância para o filtro local de Wiener (KUAN et al., 1985). Janelas de busca de dimensões  $21 \times 21$  e *patches* de dimensões  $11 \times 11$  foram utilizados para experimentos com os algoritmos Poisson-NLM (DELEDALLE; TUPIN; DENIS, 2010), SP-NLM (BINDILATTI; MASCARENHAS, 2013) e PNL-Wiener. Enquanto janelas de busca e *patches* de dimensões  $15 \times 15$  e  $7 \times 7$ , respectivamente, foram utilizadas para o algoritmo WPNL-Wiener.

Cinco escalas de decomposição foram utilizadas para o algoritmo PURE-LET (LUISIER et al., 2010) e WPNL-Wiener. Os parâmetros de filtragem do algoritmo Poisson-NLM (DELEDALLE; TUPIN; DENIS, 2010) são ajustados automaticamente, utilizando um método numérico de otimização. O desvio padrão do ruído foi ajustado para  $\sigma = 1$  para os algoritmos BM3D e DDID, uma vez que no domínio de Anscombe o ruído tende a se comportar como ruído AWGN com variância unitária.

O parâmetros de filtragem para os algoritmos SP-NLM, PNL-Wiener e WPNL-Wiener, foram selecionados como sendo o valor a proporcionar o menor erro médio quadrático entre

a imagem filtrada e a imagem livre de ruído, utilizando o método de Brent para seleção de parâmetros, tal como descrito na seção 4.5. É importante ressaltar que os coeficientes do filtro SP-NLM são utilizados para as estimativas das estatísticas de primeira e segunda ordem do sinal e ruído para o algoritmo PNL-Wiener. Apenas a distância de Kullback–Leibler, Equação (2.18), foi utilizada nos experimentos com os algoritmos SP-NLM e PNL-Wiener, uma vez que resultados similares são obtidos para as distâncias estocásticas consideradas para a distribuição Poisson em (BINDILATTI; MASCARENHAS, 2013; BINDILATTI, 2014; BINDILATTI; VIEIRA; MASCARENHAS, 2018).

A Tabela 4.2 exibe os resultados quantitativos dos experimentos realizados com a imagem “Cameraman” com dimensões  $256 \times 256$ , para picos de intensidade de  $Q = 50$ ,  $Q = 20$  e  $Q = 10$ , respectivamente. Os valores de PSNR e SSIM reportados nas tabelas são as médias calculadas a partir da execução dos algoritmos sobre dez realizações diferentes de ruído Poisson, sendo que os três melhores resultados obtidos para cada índice são destacados em negrito. As Figuras 4.15, 4.16 e 4.17 apresentam os resultados visuais correspondentes.

**Tabela 4.2: Resultados quantitativos obtidos com a imagem “Cameraman” com picos de intensidade  $Q = 50$ ,  $Q = 20$  e  $Q = 10$ .**

Algoritmo	$Q = 50$		$Q = 20$		$Q = 10$	
	PSNR (db)	SSIM	PSNR (db)	SSIM	PSNR (db)	SSIM
Filtro local de Wiener	27,04	0,816	24,50	0,722	22,69	0,635
PURE-LET	28,03	0,823	25,54	0,755	23,98	0,702
Poisson-NLM	28,13	0,853	26,71	0,823	25,33	0,786
SP-NLM	28,41	0,849	26,81	0,794	25,28	0,735
PNL-Wiener	28,98	0,860	26,99	0,796	<b>25,39</b>	0,737
BM3D	<b>29,76</b>	<b>0,891</b>	<b>27,76</b>	<b>0,853</b>	<b>26,16</b>	<b>0,819</b>
DDID	<b>29,75</b>	<b>0,886</b>	<b>27,76</b>	<b>0,846</b>	<b>26,16</b>	<b>0,815</b>
WPNL-Wiener Kullback–Leibler	29,07	0,877	27,01	0,840	25,00	<b>0,790</b>
WPNL-Wiener Rényi	29,09	0,878	27,03	0,840	25,00	0,789
WPNL-Wiener Hellinger	28,65	0,869	26,52	0,825	24,51	0,766
WPNL-Wiener Bhattacharyya	<b>29,10</b>	<b>0,878</b>	<b>27,03</b>	<b>0,840</b>	25,00	0,789

Os resultados quantitativos apresentados na Tabela 4.2 indicam que os algoritmos BM3D e DDID proporcionaram os melhores resultados em termos de PSNR e SSIM, seguido pelos algoritmos WPNL-Wiener e PNL-Wiener, propostos por este trabalho de pesquisa. Entretanto, conforme os resultados visuais apresentados nas Figuras 4.15, 4.16 e 4.17, os algoritmos BM3D e DDID introduzem artefatos visuais como consequência do processo de redução do ruído, sendo que os artefatos introduzidos pelo algoritmo DDID são bastante notáveis. O filtro local de Wiener para ruído Poisson apresenta anomalias visuais relacionados a presença substancial de ruído residual, enquanto o algoritmo PURE-LET causa considerável perda de resolução, mesmo quando a relação sinal-ruído é mais elevada.

Os algoritmos Poisson-NLM, SP-NLM e PNL-Wiener apresentam bons resultados em ter-

mos de preservação de pequenos detalhes e não causam artefatos visuais, tais como os apresentados pelos algoritmos PURE-LET e pelo filtro local de Wiener. Sendo que o algoritmo PNL-Wiener oferece um melhor compromisso em termos de preservação de detalhes e atenuação do ruído. O algoritmo BM3D se mostrou bastante eficaz em remover ruído, porém, introduz a presença de algumas distorções ou falsas estruturas em regiões homogêneas da imagem, como pode ser observado na região de fundo correspondendo ao “céu” ou próximo às construções no horizonte da imagem, facilmente notáveis nas Figuras 4.16(e) e 4.17(e).

O algoritmo WPNL-Wiener se mostrou competitivo com relação aos algoritmos BM3D e DDID em termos de PSNR e SSIM, também demonstrando um bom compromisso em termos da preservação de detalhes e estruturas da imagem. Resultados similares foram obtidos utilizando todas as distâncias estocásticas, exceto quando a distância Hellinger é utilizada para determinar a similaridade entre *patches*. Isso provavelmente acontece devido ao termo envolvendo a função exponencial na equação (4.20), que decresce rapidamente para zero ao passo que a diferença entre os coeficientes de detalhe aumenta, fazendo com que a maioria dos *patches* encontrados na imagem sejam considerados dissimilares.

#### 4.6.2 Experimentos com dados reais

Imagens de células obtidas por meio de microscopia de fluorescência<sup>9</sup>, com o uso de proteínas fluorescentes verdes, foram utilizadas nos experimentos utilizando dados reais. As imagens correspondem a seções do eixo Z, adquiridas a partir da contagem de fótons originados pela emissão de luz verde por parte das proteínas fluorescentes. As seções mais próximas dos focos de emissão demonstram menor degradação por ruído Poisson, enquanto seções mais distantes no eixo Z apresentam uma relação sinal-ruído mais baixa. Assim sendo, duas seções foram selecionadas para os experimentos, uma mais próxima do centro e uma mais distante.

Para a avaliação dos resultados obtidos utilizando dados reais, foi realizada a inspeção visual das imagens filtradas quanto a presença de artefatos visuais, introduzidos como consequência do processo de filtragem. Além disso, a transformada de Hough (HOUGH, 1962; DUDA; HART, 1972; ILLINGWORTH; KITTLER, 1988; ATHERTON; KERBYSON, 1999) para a detecção de círculos foi aplicada às imagens de microscopia para a localização e contagem das células, tanto previamente como após o processo de redução do ruído.

Redução de ruído é uma etapa de pré-processamento importante em muitos sistemas de visão computacional. Ao aplicar a transformada de Hough é possível avaliar o quanto cada

---

<sup>9</sup>Disponível em <http://images.yeastrc.org/imagerepo/viewExperiment.do?id=195>, YRC – Yeast Resource Center, repositório público de imagens.

algoritmo melhorou a imagem de entrada, conforme o aumento na eficácia da contagem de células. Ou seja, quanto maior a precisão ao realizar a contagem de células, mais eficaz é considerado o algoritmo aplicado para a redução de ruído.

Embora possam existir técnicas potencialmente mais eficientes e precisas para a contagem das células, o escopo deste trabalho se limita a algoritmos para a redução de ruído. Portanto, a transformada de Hough foi selecionada por sua simplicidade e popularidade, de modo a proporcionar uma forma alternativa de avaliar os resultados no contexto de uma aplicação real. Formas mais convencionais de avaliação como o cálculo de métricas quantitativas, tais como PSNR e SSIM, não podem ser utilizadas neste contexto, pois a imagem livre de ruído é desconhecida.

Para os experimentos realizados com dados reais, o critério PURE foi considerado como substituto para o erro médio quadrático no ajuste dos parâmetros para os métodos propostos, PNL-Wiener e WPNL-Wiener. Contudo, resultados insatisfatórios foram obtidos. Por essa razão, é proposta a soma entre um termo de fidelidade aos dados e um termo baseado no critério de variação total (TV – *Total Variation*) como função objetivo alternativa para a otimização de parâmetros. Formalmente,

$$g(y, \hat{x}; \lambda) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (y_{i,j} - \hat{x}_{i,j})^2 + \lambda \sum_{i,j} \sqrt{(\hat{x}_{i+1,j} - \hat{x}_{i,j})^2 + (\hat{x}_{i,j+1} - \hat{x}_{i,j})^2}, \quad (4.28)$$

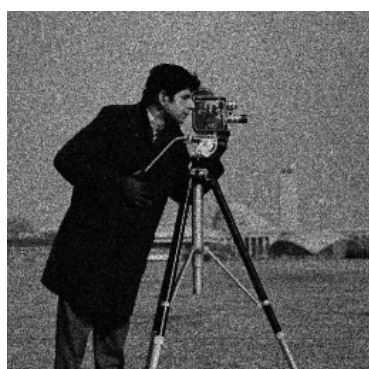
em que  $\hat{x}$  é a imagem filtrada,  $y$  a imagem ruidosa e  $\lambda$  é um parâmetro que controla o compromisso entre fidelidade aos dados e atenuação do ruído.

A função expressa pela equação (4.28) é bastante conhecida na literatura (RUDIN; OSHER; FATEMI, 1992) e, no caso geral, ao minimizar o critério estabelecido por  $g(y, \hat{x}; \lambda)$  é possível obter uma estimativa da imagem livre de ruído. Neste trabalho de pesquisa, ao invés de buscar por uma solução geral, limitamos o espaço de possíveis soluções às saídas das diferentes etapas dos algoritmos PNL-Wiener e WPNL-Wiener, em função de seus respectivos parâmetros de filtragem em cada etapa. Essa abordagem pode ser vista como uma forma adicional de regularização. Neste contexto, o método de Brent foi utilizado como algoritmo para minimização de  $g(y, \hat{x}; \lambda)$ .

Os parâmetros dos demais algoritmos são definidos da mesma maneira como para os experimentos com ruído simulado. Foi necessário realizar um ajuste manual para o parâmetro  $\beta$  do algoritmo WPNL-Wiener para obtenção de melhores resultados, enquanto os parâmetros  $h$  e  $h'$  foram determinados por meio do método de Brent ao minimizar o critério estabelecido pela equação (4.28). Apenas a distância estocástica de Kullback–Leibler foi utilizada nos experimentos com dados reais, uma vez que resultados similares foram observados para as demais distâncias na subseção anterior.



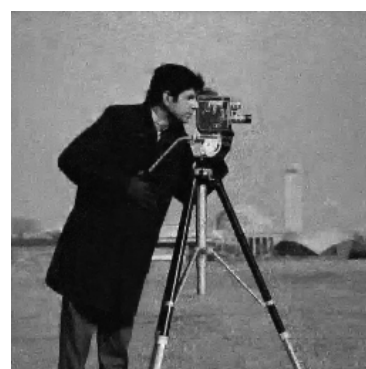
As Figuras 4.18, 4.19, 4.20 e 4.21 apresentam os resultados obtidos com as imagens de microscopia de fluorescência. Sem a aplicação de algoritmos para a redução de ruído, é inviável realizar a contagem das células utilizando a transformada de Hough. O filtro local de Wiener e o algoritmo PURE-LET não foram eficazes o suficiente, resultando na não detecção ou perda de muitas células. Os algoritmos Poisson-NLM, SP-NLM e DDID permitiram a detecção de um número maior de células, porém, apresentaram uma alta taxa de falsos positivos. De modo geral, os algoritmos BM3D, PNL-Wiener e WPNL-Wiener apresentaram um melhor equilíbrio entre precisão na contagem de células e minimização da taxa de falsos positivos.



(a) Ruidosa



(b) Wiener Local



(c) PURE-LET



(d) Poisson-NLM



(e) BM3D



(f) DDID



(g) SP-NLM



(h) PNL-Wiener

(i) WPNL-Wiener  
Kullback-Leibler

(j) WPNL-Wiener Rényi



(k) WPNL-Wiener Hellinger

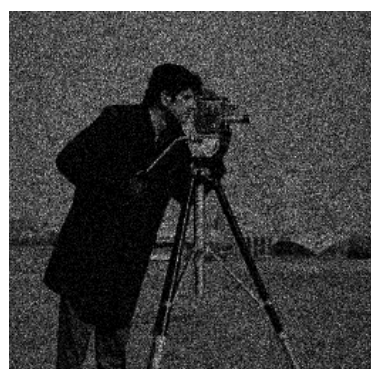


(l) WPNL-Wiener Bhattacharyya

Figura 4.15: Resultados visuais obtidos com a imagem “Cameraman” com pico de intensidade  $Q = 50$ .



**Figura 4.16:** Resultados visuais obtidos com a imagem “Cameraman” com pico de intensidade  $Q = 20$ .



(a) Ruidosa



(b) Wiener Local



(c) PURE-LET



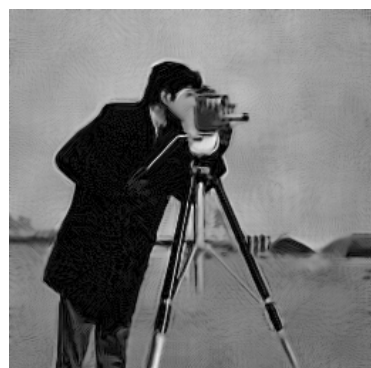
(d) Poisson-NLM



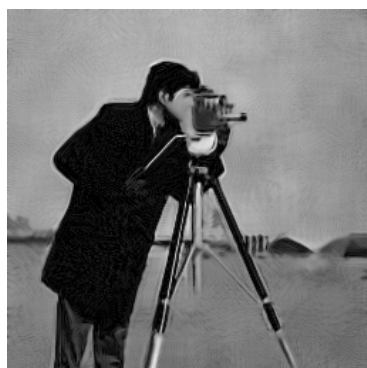
(e) BM3D



(f) DDID



(g) SP-NLM



(h) PNL-Wiener

(i) WPNL-Wiener  
Kullback-Leibler

(j) WPNL-Wiener Rényi

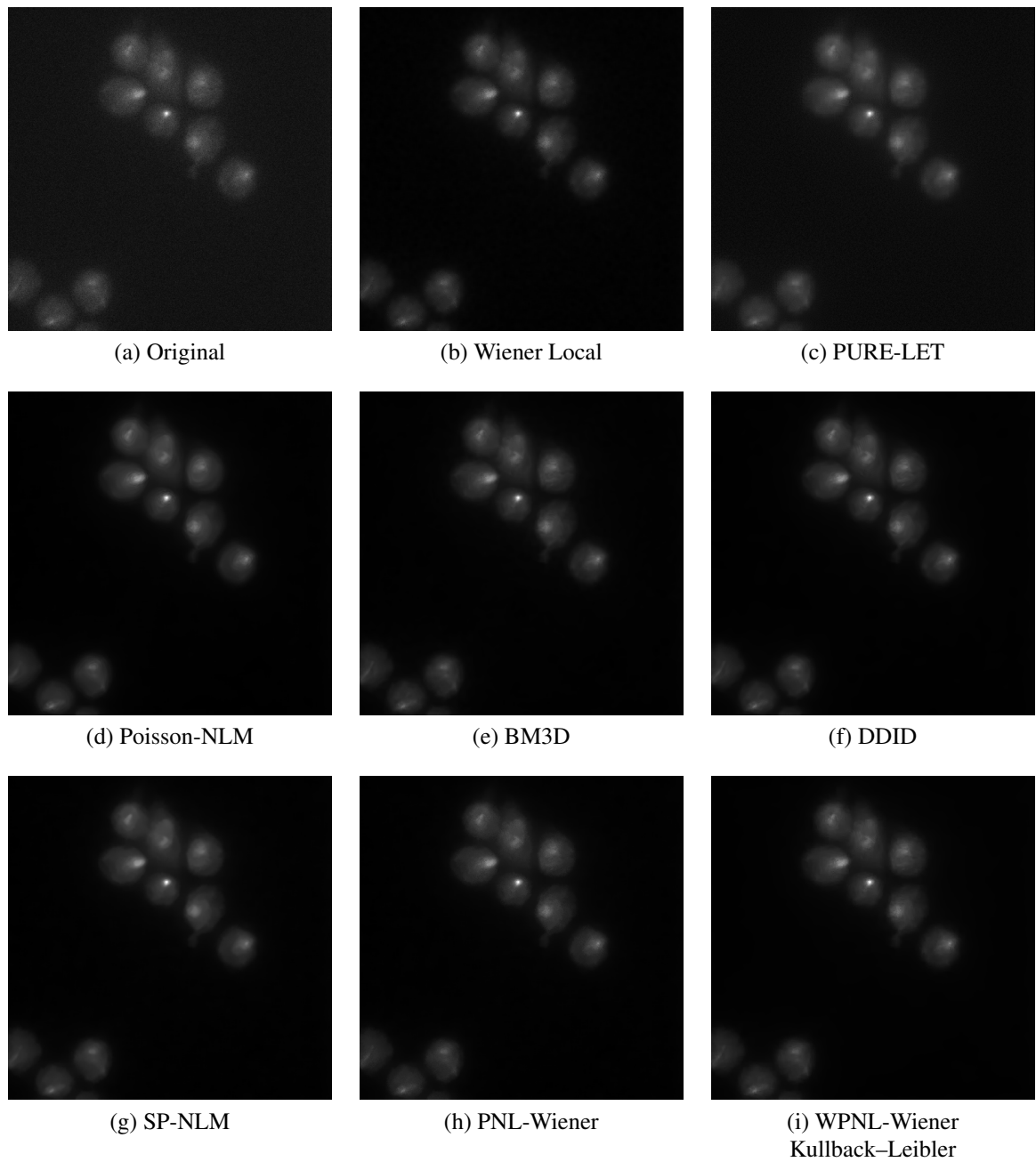


(k) WPNL-Wiener Hellinger

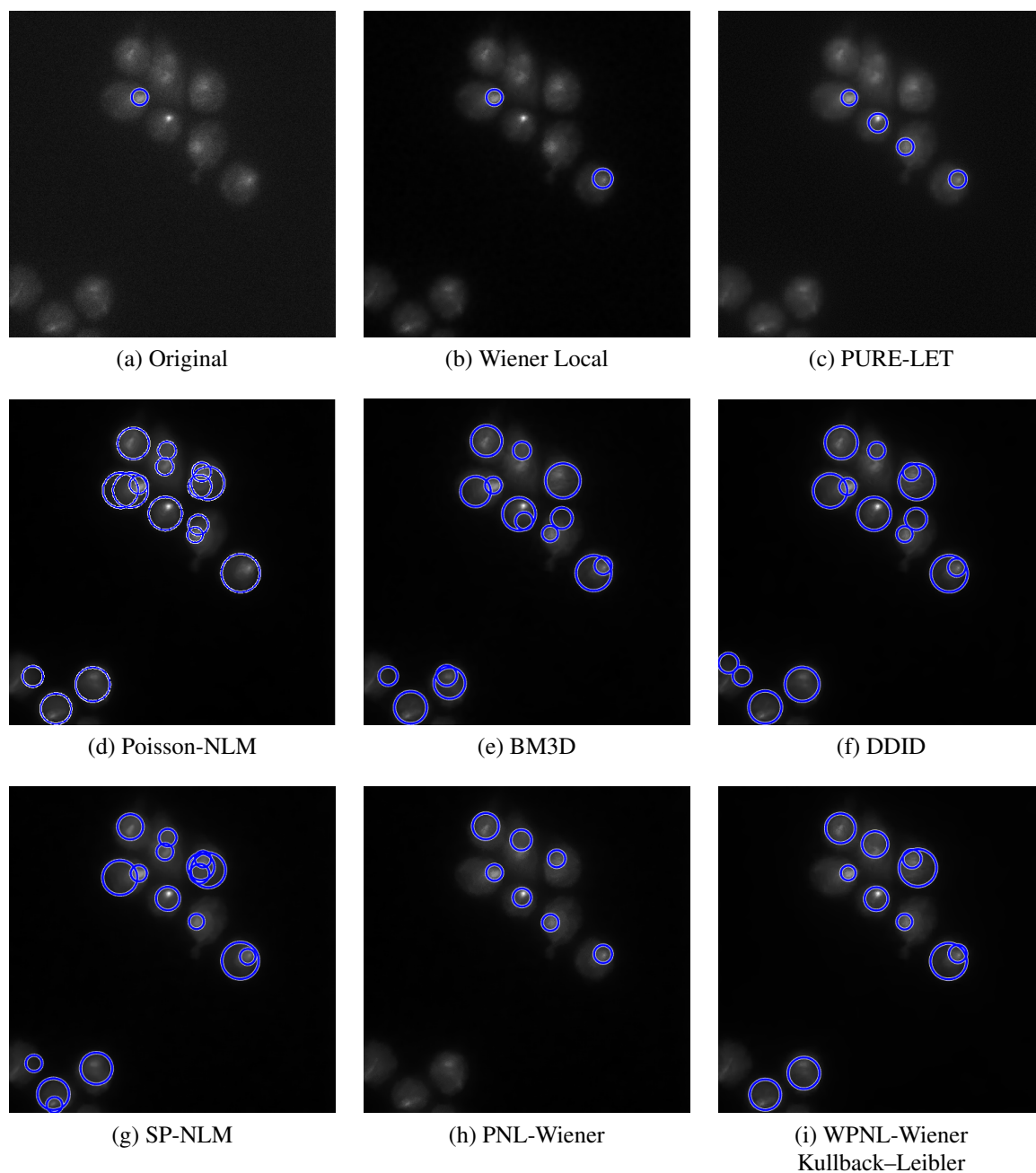


(l) WPNL-Wiener Bhattacharyya

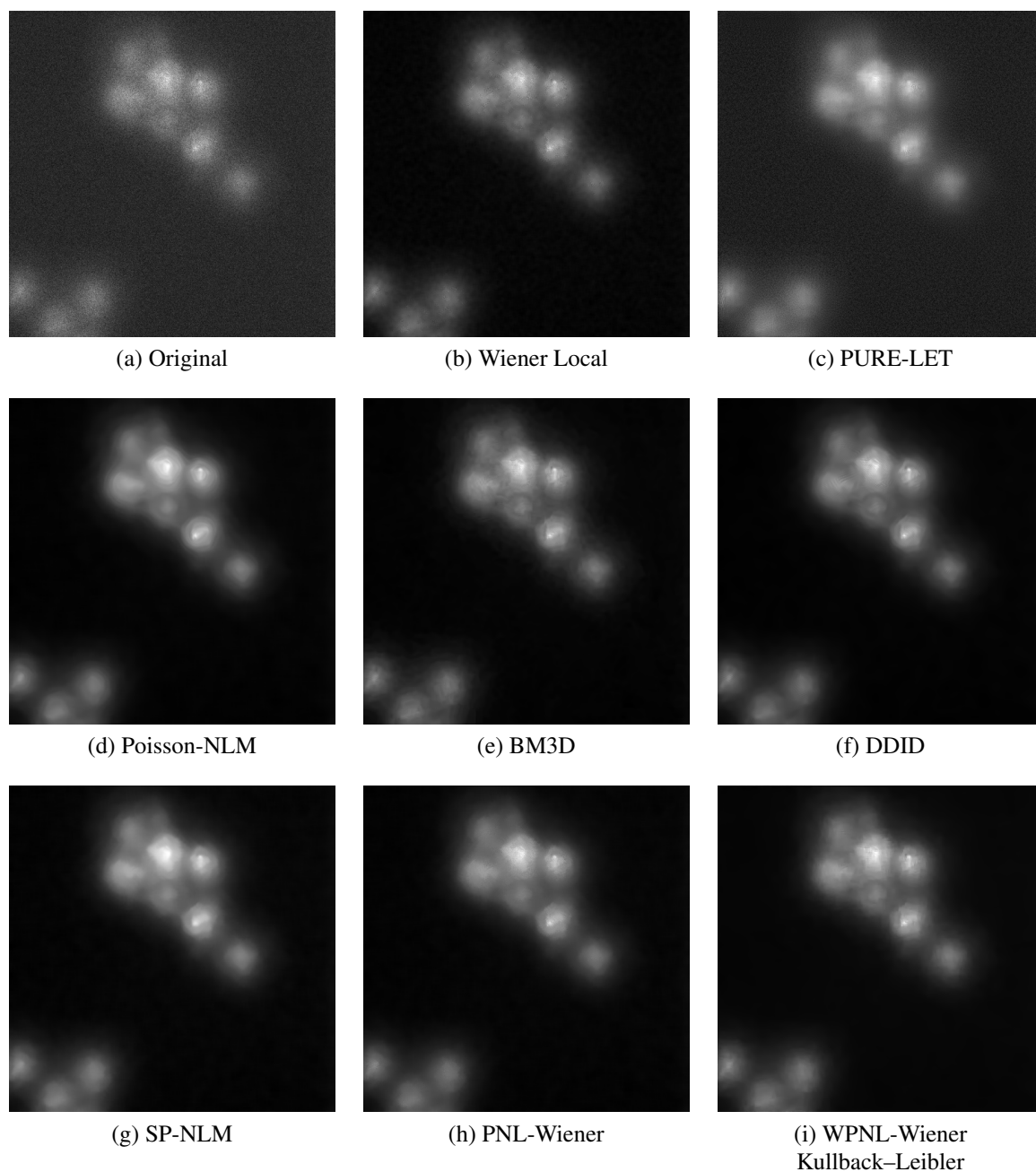
**Figura 4.17: Resultados visuais obtidos com a imagem “Cameraman” com pico de intensidade  $Q = 10$ .**



**Figura 4.18:** Resultados visuais obtidos a partir de uma imagem real de microscopia de fluorescência em uma seção próxima ao centro da região imageada.

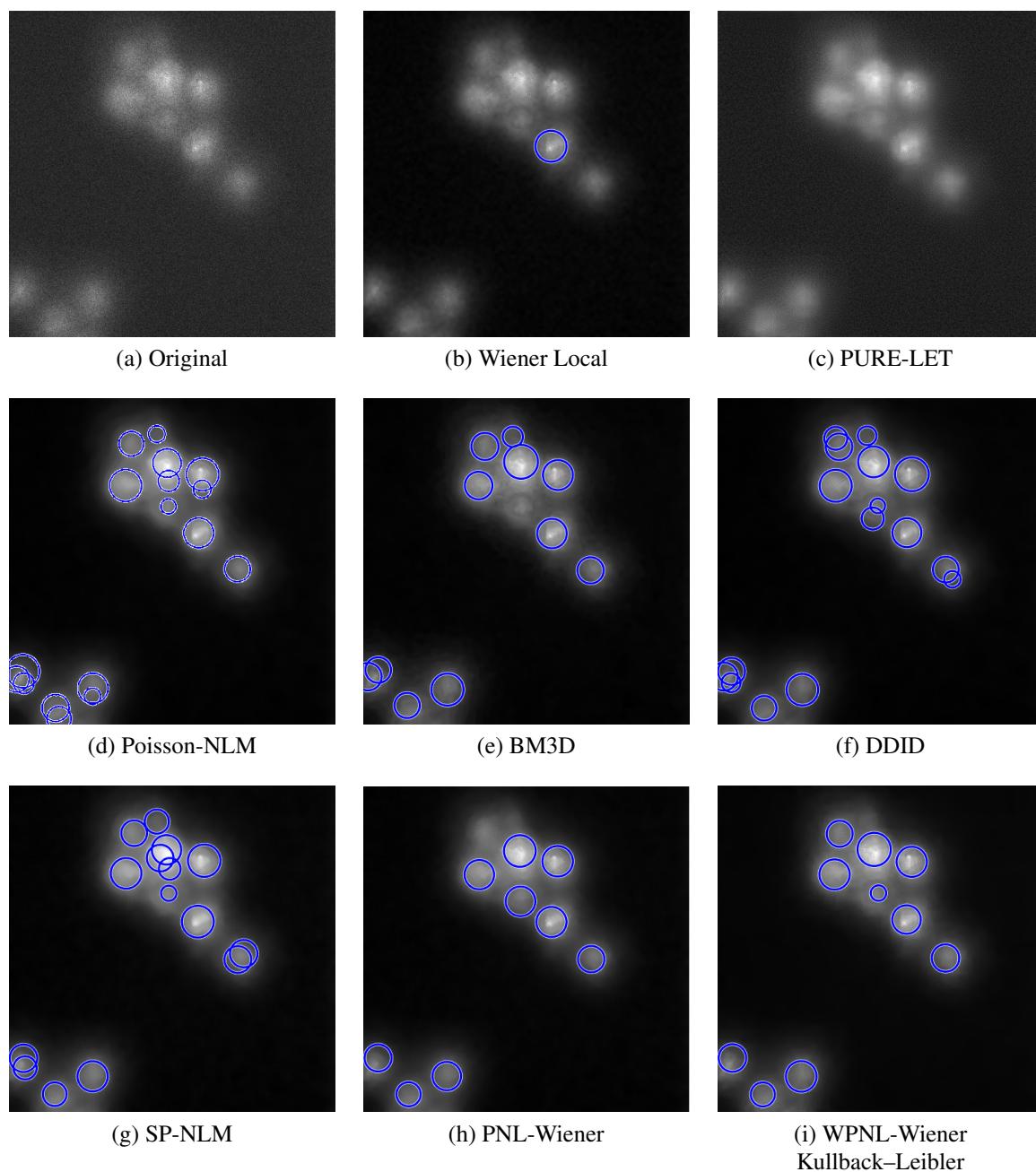


**Figura 4.19:** Contagem de células realizadas a partir de uma imagem real de microscopia de fluorescência em uma seção próxima ao centro da região imageada.



**Figura 4.20:** Resultados visuais obtidos a partir de uma imagem real de microscopia de fluorescência em uma seção distante do centro da região imageada.





**Figura 4.21:** Contagem de células realizadas a partir de uma imagem real de microscopia de fluorescência em uma seção distante do centro da região imageada.



# Capítulo 5

## DISCUSSÃO E CONCLUSÕES

---

---

*Redução de ruído Poisson é um problema ainda em aberto e representa um grande desafio, em que os parâmetros do modelo estocástico para o ruído dependem da imagem livre de ruído a ser estimada, que por sua vez é desconhecida. O objetivo deste projeto de pesquisa foi propor novas técnicas para a redução de ruído, visando a preservação de pequenos detalhes e estruturas da imagem, ao mesmo tempo, evitando a introdução de artefatos visuais. Duas novas abordagens baseadas no uso de distâncias estocásticas e filtragem Wiener foram propostas como frutos desta pesquisa.*

O principal objetivo deste trabalho foi propor novas abordagens para a redução de ruído Poisson, priorizando a preservação de detalhes e evitando a introdução de artefatos visuais. Como resultado desta pesquisa, duas novas abordagens foram propostas: (1) filtragem Wiener utilizando estimativa ponderada de parâmetros no domínio do espaço; e (2) filtragem Wiener com estimativa não-local de parâmetros no domínio das *wavelets* de Haar, utilizando distâncias estocásticas para a comparação de coeficientes *wavelet*.

Baseando-se na primeira abordagem, um algoritmo denominado PNL-Wiener (*Poisson Non-Local Wiener*), foi proposto. Assume-se que melhores estimativas dos momentos de primeira e segunda ordem do sinal e ruído podem ser obtidos utilizando estimadores ponderados, em que os pesos são definidos como uma função suave que decresce com a distâncias estocástica entre variáveis Poisson. Os coeficientes do filtro SP-NLM (vide subseção 2.5.3 do Capítulo 2) são utilizados como pesos para a definição desses estimadores ponderados. Com base em tais estimadores, o filtro pontual de Wiener formulado para o modelo de ruído Poisson é aplicado para a redução de ruído.

O algoritmo PNL-Wiener se mostrou mais eficaz em preservar pequenos detalhes e estruturas finas do sinal de interesse, ao mesmo tempo evitando a presença de ruído residual, em

contraste ao filtro local de Wiener para a atenuação de ruído Poisson (KUAN et al., 1985), que pode ser visto como sua contrapartida local. Os resultados obtidos com o algoritmo PNL-Wiener também se revelaram superiores aos resultados obtidos por outros algoritmos de estado da arte, como o Poisson-NLM (DELEDALLE; TUPIN; DENIS, 2010) para a redução de ruído Poisson.

Um segundo algoritmo baseado na filtragem Wiener utilizando estimativa não-local de parâmetros no domínio das *wavelets* de Haar, denominado WPNL-Wiener (*Wavelet-based Poisson Non-Local Wiener filter*), também foi proposto. Para tal, foram propostas distâncias estocásticas para a comparação de coeficientes *wavelet*, utilizando uma caracterização estocástica apropriada para coeficientes obtidos a partir da diferença de variáveis Poisson.

No domínio das *wavelets* de Haar, os coeficientes de detalhes são obtidos pela diferença de variáveis Poisson e, portanto, são variáveis com distribuição Skellam; enquanto os coeficientes de aproximação são obtidos pela soma de variáveis Poisson, logo também são variáveis com distribuição Poisson. A caracterização explícita da distribuição dos coeficientes *wavelet* só é possível graças à características inerentes das *wavelets* de Haar.

Infelizmente, expressões de forma fechada para a distribuição Skellam não puderam ser obtidas. Por essa razão, foi proposto o uso da distribuição Gaussiana como aproximação para a distribuição Skellam. As distâncias estocásticas propostas podem ser vistas como métricas de similaridade entre *patches*, capazes de combinar informações das sub-bandas de aproximação e detalhe.

Bons resultados foram obtidos utilizando *wavelets* ortogonais e estacionárias, porém, resultados mais competitivos em termos de PSNR e SSIM foram obtidos com as *wavelets* estacionárias. Ainda assim, o uso de *wavelets* ortogonais é atrativo por oferecer um custo computacional substancialmente menor. Vale a pena ressaltar que para obtenção dos resultados utilizando *wavelets* ortogonais, a mesma técnica empregada pelo algoritmo PURE-LET (LUISIER et al., 2010), denominada *cycle spinning*, foi aplicada.

O intuito da técnica de *cycle spinning* é evitar a introdução de anomalias visuais e envolve a translação das linhas e colunas da imagem, seguida pela atenuação do ruído no domínio *wavelet*. Após a redução de ruído e a transformação inversa do sinal, as linhas e colunas da imagem são deslocadas de volta para seus locais de origem. Esse processo é repetido para diferentes combinações de deslocamento, sendo que o resultado final é obtido pela média dos resultados obtidos nos passos intermediários.

Aa combinar a filtragem Wiener ao *framework* de estimativa não-local, o algoritmo PNL-

Wiener combina o melhor de ambas as técnicas, a capacidade preservação de detalhes dos algoritmos não-locais ao critério de filtragem ótimo estabelecido pelo filtro de Wiener. Desse modo, a presença de ruído residual e borramento é minimizada. Como o processo de filtragem é realizado no domínio do espaço, artefatos de “*blocking*” e fenômeno de Gibbs não são observados.

O algoritmo WPNL-Wiener toma vantagem do fato em que, para cada nível de decomposição, os coeficientes de aproximação são obtidos pela soma de variáveis Poisson e, portanto, a relação sinal-ruído é incrementada, visto que a relação-ruído cresce em função da taxa de contagem subjacente. Isso pode ser visto de modo análogo com o processo de *pixel binning*, em que informações de pixels adjacentes são combinadas em um único pixel de modo a melhorar a relação sinal-ruído. Além disso, ao somar pixels a verdadeira distribuição dos dados se aproxima ainda mais da distribuição gaussiana.

O ajuste de parâmetros para algoritmos atenuadores de ruído é uma tarefa importante para a obtenção de resultados satisfatórios. Em muitos trabalhos científicos, o ajuste de parâmetros é realizado por meio de uma busca exaustiva ou de forma empírica. Neste trabalho de pesquisa, uma metodologia simples para o ajuste de parâmetros foi proposta. Tal metodologia não requer o conhecimento das derivadas parciais do filtro ou da função a ser minimizada, podendo assim ser aplicada a outros algoritmos.

O erro médio quadrático e o critério PURE foram considerados como métricas para guiar o processo de seleção de parâmetros, enquanto o método de Brent foi utilizado como algoritmo para otimização. O critério PURE foi avaliado utilizando uma técnica Monte Carlo proposta por Montagner, Angelini e Olivo-Marin (2014), de modo a dispensar o conhecimento das derivadas parciais do filtro em questão.

Infelizmente, o critério PURE, ao ser avaliado utilizando a técnica Monte Carlo, se mostrou instável para alguns casos, inviabilizando seu uso na prática. Por essa razão, o critério TV somado a um termo de fidelidade aos dados foi empregado nos experimentos com dados reais. Isso difere da redução de ruído baseada em TV clássica ao restringir as soluções conforme as saídas dos algoritmos PNL-Wiener e WPNL-Wiener.

A partir dos experimentos com imagens reais de microscopia de fluorescência, foi possível constatar que a atenuação de ruído pode melhorar significativamente o resultado de outros algoritmos para análise automatizada das imagens. Neste contexto, as abordagens propostas por este trabalho de pesquisa demonstraram um bom desempenho na prática, tornando mais precisa a contagem das células por meio da transformada de Hough.

Embora algoritmos como o DDID ofereçam um melhor resultado em avaliações quantitativas, a introdução de anomalias visuais pode inviabilizar seu uso na prática. Portanto, novas métricas ou métodos para a avaliação dos resultados devem ser buscados. Além disso, futuras pesquisas no campo dos algoritmos para a redução de ruído devem priorizar técnicas que minimizem a presença de artefatos visuais.

Em trabalhos futuros, outros critérios que dispensem conhecimento da imagem livre de ruído devem ser explorados para um ajuste ainda melhor dos parâmetros. Além disso, neste trabalho de pesquisa, o domínio das *wavelets* de Haar foi explorado devido a sua relação particular com o modelo de ruído Poisson. Para trabalhos futuros, o uso de técnicas para aprendizado de dicionário ou para a decomposição de tensores devem ser consideradas.

Durante o desenvolvimento deste trabalho de Doutorado, o método PNL-Wiener foi publicado no *journal Signal Processing* (BINDILATTI; VIEIRA; MASCARENHAS, 2018). Além disso, dois artigos estão sendo redigidos e serão submetidos para publicação em periódicos da área de processamento de sinais, com base nos materiais e resultados correspondentes à metodologia para seleção automática de parâmetros e ao método WPNL-Wiener, também propostos por este trabalho de pesquisa.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALZAID, A. A.; OMAIR, M. A. et al. On the poisson difference distribution inference and applications. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, The Malaysian Mathematical Sciences Society, v. 8, n. 33, p. 17–45, 2010.
- ANSCOMBE, F. J. The transformation of poisson, binomial and negative-binomial data. *Biometrika*, v. 35, n. 3–4, p. 246–254, 1948. Disponível em: <<http://biomet.oxfordjournals.org/content/35/3-4/246.short>>.
- ATHERTON, T.; KERBYSON, D. Size invariant circle detection. *Image and Vision Computing*, v. 17, n. 11, p. 795 – 803, 1999. ISSN 0262-8856. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0262885698001607>>.
- AZZALINI, A. *The Skew-Normal and Related Families*:. Cambridge: Cambridge University Press, 2013. ISBN 9781139248891. Disponível em: <<https://www.cambridge.org/core/books/the-skew-normal-and-related-families/4B9A3CD9D58EB6022FC1D21E1E08A10E>>.
- BARDSLEY, J. M.; GOLDES, J. Regularization parameter selection methods for ill-posed poisson maximum likelihood estimation. *Inverse Problems*, v. 25, n. 9, p. 095005, 2009. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0266-5611/25/i=9/a=095005>>.
- BERRY, R.; BURNELL, J. *The Handbook of Astronomical Image Processing*. 2. ed. [S.l.]: Willmann-Bell, 2005.
- BERTERO, M. et al. A discrepancy principle for poisson data. *Inverse Problems*, v. 26, n. 10, p. 105004, 2010. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0266-5611/26/i=10/a=105004>>.
- BINDILATTI, A. A.; MASCARENHAS, N. D. A. A nonlocal poisson denoising algorithm based on stochastic distances. *IEEE Signal Processing Letters*, v. 20, n. 11, p. 1010–1013, Nov 2013. ISSN 1070-9908.
- BINDILATTI, A. A.; VIEIRA, M. A.; MASCARENHAS, N. D. Poisson wiener filtering with non-local weighted parameter estimation using stochastic distances. *Signal Processing*, v. 144, p. 68 – 76, 2018. ISSN 0165-1684. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165168417303523>>.
- BINDILATTI, A. de A. *Abordagens Não-Locais para Filtragem de Ruído Poisson*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de São Carlos – UFSCar, maio 2014.
- BLU, T.; LUISIER, F. The SURE-LET approach to image denoising. *IEEE Transactions on Image Processing*, v. 16, n. 11, p. 2778–2786, November 2007.

- BRENT, R. P. *Algorithms for minimization without derivatives*. [S.l.]: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1973. ISBN 0-13-022335-2.
- BUADES, A.; COLL, B.; MOREL, J. M. A review of image denoising algorithms, with a new one. *Multiscale Modeling & Simulation*, v. 4, n. 2, p. 490–530, 2005. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1137/040616024>>.
- CHATTERJEE, P.; MILANFAR, P. Is denoising dead? *IEEE Transactions on Image Processing*, IEEE, v. 19, n. 4, p. 895–911, 2010.
- DABOV, K. et al. Image denoising by sparse 3-d transform-domain collaborative filtering. *IEEE Transactions on Image Processing*, v. 16, n. 8, p. 2080–2095, Aug 2007. ISSN 1057-7149.
- DARBON, J. et al. Fast nonlocal filtering applied to electron cryomicroscopy. In: IEEE. *2008 5th IEEE International Symposium on Biomedical Imaging: From Nano to Macro*. [S.l.], 2008. p. 1331–1334.
- DELEDALLE, C. A.; DENIS, L.; TUPIN, F. Iterative weighted maximum likelihood denoising with probabilistic patch-based weights. *IEEE Transactions on Image Processing*, v. 18, n. 12, p. 2661–2672, Dec 2009. ISSN 1057-7149.
- DELEDALLE, C.-A.; DENIS, L.; TUPIN, F. How to compare noisy patches? patch similarity beyond gaussian noise. *International Journal of Computer Vision*, v. 99, n. 1, p. 86–102, 2012. ISSN 1573-1405. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s11263-012-0519-6>>.
- DELEDALLE, C. A.; TUPIN, F.; DENIS, L. Poisson nl means: Unsupervised non local means for poisson noise. In: *2010 IEEE International Conference on Image Processing*. [S.l.: s.n.], 2010. p. 801–804. ISSN 1522-4880.
- DUDA, R. O.; HART, P. E. Use of the hough transformation to detect lines and curves in pictures. *Commun. ACM*, ACM, New York, NY, USA, v. 15, n. 1, p. 11–15, jan. 1972. ISSN 0001-0782. Disponível em: <<http://doi.acm.org/10.1145/361237.361242>>.
- GHAEL, S.; SAYEED, A. M.; BARANIUK, R. G. Improved wavelet denoising via empirical wiener filtering. In: *SPIE Technical Conference on Wavelet Applications in Signal Processing*. [S.l.: s.n.], 1997.
- GONZALEZ, R. C.; WOODS, R. E. *Digital image processing*. 3. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 2008.
- HAAR, A. Zur theorie der orthogonalen funktionensysteme: Erste mitteilung. *Mathematische Annalen*, v. 69, n. 3, p. 331–371, 1910.
- HE, L.; GREENSHIELDS, I. R. A nonlocal maximum likelihood estimation method for rician noise reduction in mr images. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, v. 28, n. 2, p. 165–172, Feb 2009. ISSN 0278-0062.
- HIRAKAWA, K.; WOLFE, P. J. Efficient multivariate skellam shrinkage for denoising photon-limited image data: An empirical bayes approach. In: *2009 16th IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*. [S.l.: s.n.], 2009. p. 2961–2964. ISSN 1522-4880.

- HIRAKAWA, K.; WOLFE, P. J. Skellam shrinkage: Wavelet-based intensity estimation for inhomogeneous poisson data. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 58, n. 2, p. 1080–1093, Feb 2012. ISSN 0018-9448.
- HOUGH, P. V. *Method and means for recognizing complex patterns*. [S.l.]: US Patent 3,069,654, dez. 18 1962.
- HWANG, Y.; KIM, J. S.; KWEON, I. S. Difference-based image noise modeling using skellam distribution. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, v. 34, n. 7, p. 1329–1341, July 2012. ISSN 0162-8828.
- ILLINGWORTH, J.; KITTLER, J. A survey of the hough transform. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, v. 44, n. 1, p. 87 – 116, 1988. ISSN 0734-189X. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0734189X88800331>>.
- JIANG, S.-S.; SAWCHUK, A. A. Noise updating repeated wiener filter and other adaptive noise smoothing filters using local image statistics. *Appl. Opt.*, OSA, v. 25, n. 14, p. 2326–2337, Jul 1986. Disponível em: <<http://ao.osa.org/abstract.cfm?URI=ao-25-14-2326>>.
- KAY, S. M. *Fundamentals of statistical signal processing, volume I: estimation theory*. [S.l.]: Prentice Hall, 1993.
- KISHAN, H.; SEELAMANTULA, C. S. Optimal parameter selection for bilateral filters using poisson unbiased risk estimate. In: *2012 19th IEEE International Conference on Image Processing*. [S.l.: s.n.], 2012. p. 121–124. ISSN 1522-4880.
- KNAUS, C.; ZWICKER, M. Dual-domain image denoising. In: *2013 IEEE International Conference on Image Processing*. [S.l.: s.n.], 2013. p. 440–444. ISSN 1522-4880.
- KNAUS, C.; ZWICKER, M. Progressive image denoising. *IEEE Transactions on Image Processing*, v. 23, n. 7, p. 3114–3125, July 2014. ISSN 1057-7149.
- KNAUS, C.; ZWICKER, M. Dual-domain filtering. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, v. 8, n. 3, p. 1396–1420, 2015. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1137/140978879>>.
- KUAN, D. T. et al. Adaptive noise smoothing filter for images with signal-dependent noise. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-7, n. 2, p. 165–177, March 1985. ISSN 0162-8828.
- LANDI, G.; PICCOLOMINI, E. L. An efficient method for nonnegatively constrained total variation-based denoising of medical images corrupted by poisson noise. *Computerized Medical Imaging and Graphics*, Elsevier, v. 36, n. 1, p. 38–46, 2012.
- LEBRUN, M.; BUADES, A.; MOREL, J.-M. Implementation of the "non-local bayes"(nl-bayes) image denoising algorithm. *Image Processing On Line*, v. 3, p. 1–42, 2013.
- LEBRUN, M.; BUADES, A.; MOREL, J. M. A nonlocal bayesian image denoising algorithm. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, v. 6, n. 3, p. 1665–1688, 2013. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1137/120874989>>.
- LEBRUN, M. et al. Secrets of image denoising cuisine. *Acta Numerica*, Cambridge Univ Press, v. 21, p. 475–576, 2012.

- LEE, C.; LEE, C.; KIM, C. S. Mmse nonlocal means denoising algorithm for poisson noise removal. In: *2011 18th IEEE International Conference on Image Processing*. [S.l.: s.n.], 2011. p. 2561–2564. ISSN 1522-4880.
- LEE, J. S. Digital image enhancement and noise filtering by use of local statistics. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-2, n. 2, p. 165–168, March 1980. ISSN 0162-8828.
- LEFKIMMIATIS, S.; MARAGOS, P.; PAPANDREOU, G. Bayesian inference on multiscale models for poisson intensity estimation: Applications to photon-limited image denoising. *IEEE Transactions on Image Processing*, v. 18, n. 8, p. 1724–1741, Aug 2009. ISSN 1057-7149.
- LI, F.; LIU, R. Poisson noise removal with total variation regularization and local fidelity. *Chinese Journal of Electronics*, v. 21, n. 2, p. 304–308, 2012.
- LIN, L.; LINGFU, K. Image denoising based on non-local means with wiener filtering in wavelet domain. In: *Intelligent Information Hiding and Multimedia Signal Processing, 2009. IHH-MSP '09. Fifth International Conference on*. [S.l.: s.n.], 2009. p. 471–474.
- LUISIER, F. et al. Fast interscale wavelet denoising of poisson-corrupted images. *Signal Processing*, v. 90, n. 2, p. 415 – 427, 2010. ISSN 0165-1684. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165168409003016>>.
- MAKITALO, M.; FOI, A. Optimal inversion of the anscombe transformation in low-count poisson image denoising. *IEEE Transactions on Image Processing*, v. 20, n. 1, p. 99–109, Jan 2011. ISSN 1057-7149.
- MALLAT, S. G. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, v. 11, n. 7, p. 674–693, Jul 1989. ISSN 0162-8828.
- MEVENKAMP, N. et al. Poisson noise removal from high-resolution stem images based on periodic block matching. *Advanced Structural and Chemical Imaging*, v. 1, n. 1, p. 1–19, 2015. ISSN 2198-0926. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1186/s40679-015-0004-8>>.
- MONTAGNER, Y. L.; ANGELINI, E. D.; OLIVO-MARIN, J. C. An unbiased risk estimator for image denoising in the presence of mixed poisson gaussian noise. *IEEE Transactions on Image Processing*, v. 23, n. 3, p. 1255–1268, March 2014. ISSN 1057-7149.
- NASCIMENTO, A. D. C.; CINTRA, R. J.; FRERY, A. C. Hypothesis testing in speckled data with stochastic distances. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, v. 48, n. 1, p. 373–385, Jan 2010. ISSN 0196-2892.
- PARDO, L. *Statistical inference based on divergence measures*. [S.l.]: CRC Press, 2005.
- PARRILLI, S. et al. A nonlocal sar image denoising algorithm based on lmmse wavelet shrinkage. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, v. 50, n. 2, p. 606–616, Feb 2012. ISSN 0196-2892.
- PERCIVAL, D. B.; WALDEN, A. T. *Wavelet methods for time series analysis*. [S.l.]: Cambridge university press, 2006.



- PORTILLA, J. et al. Image denoising using scale mixtures of gaussians in the wavelet domain. *IEEE Transactions on Image Processing*, v. 12, n. 11, p. 1338–1351, Nov 2003. ISSN 1057-7149.
- PRATT, W. K. Generalized wiener filtering computation techniques. *IEEE Transactions on Computers*, C-21, n. 7, p. 636–641, July 1972. ISSN 0018-9340.
- PRESS, W. H. et al. *Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing*. 3. ed. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2007. ISBN 0521880688, 9780521880688.
- RABBANI, M. Bayesian filtering of poisson noise using local statistics. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, v. 36, n. 6, p. 933–937, Jun 1988. ISSN 0096-3518.
- RAMANI, S.; BLU, T.; UNSER, M. Monte-carlo sure: A black-box optimization of regularization parameters for general denoising algorithms. *IEEE Transactions on Image Processing*, v. 17, n. 9, p. 1540–1554, Sept 2008. ISSN 1057-7149.
- ROSAS-OREA, M. C. E. et al. A comparative simulation study of wavelet based denoising algorithms. In: *15th International Conference on Electronics, Communications and Computers (CONIELECOMP'05)*. [S.l.: s.n.], 2005. p. 125–130.
- ROSS, S. M. *Introduction to probability and statistics for engineers and scientists*. [S.l.]: Academic Press, 2014.
- RUDIN, L. I.; OSHER, S.; FATEMI, E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 60, n. 1, p. 259 – 268, 1992. ISSN 0167-2789. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/016727899290242F>>.
- SALMON, J. On two parameters for denoising with non-local means. *IEEE Signal Processing Letters*, v. 17, n. 3, p. 269–272, March 2010. ISSN 1070-9908.
- SALMON, J. et al. Poisson noise reduction with non-local pca. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, v. 48, n. 2, p. 279–294, 2014. ISSN 1573-7683. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s10851-013-0435-6>>.
- SALVADEO, D. H. P.; MASCARENHAS, N. D. A.; LEVADA, A. L. M. Contextual filtering of ct images using markovian wiener filters with a non local means approach for statistical estimation. In: *2012 25th SIBGRAPI Conference on Graphics, Patterns and Images*. [S.l.: s.n.], 2012. p. 16–23. ISSN 1530-1834.
- SKELLAM, J. G. The frequency distribution of the difference between two poisson variates belonging to different populations. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)*, v. 109, n. Pt 3, p. 296–296, 1945.
- STARCK, J. L.; MURTAGH, F. Astronomical image and signal processing: looking at noise, information and scale. *IEEE Signal Processing Magazine*, v. 18, n. 2, p. 30–40, March 2001. ISSN 1053-5888.
- STARCK, J.-L.; MURTAGH, F.; FADILI, J. M. *Sparse image and signal processing: wavelets, curvelets, morphological diversity*. [S.l.]: Cambridge university press, 2010.

- STEIN, C. M. Estimation of the mean of a multivariate normal distribution. *The Annals of Statistics*, Institute of Mathematical Statistics, v. 9, n. 6, p. 1135–1151, 1981. ISSN 00905364. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/2240405>>.
- THAKUR, K. V.; DAMODARE, O. H.; SAPKAL, A. M. Poisson noise reducing bilateral filter. *Procedia Computer Science*, v. 79, p. 861 – 865, 2016. ISSN 1877-0509. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877050916002180>>.
- TOMASI, C.; MANDUCHI, R. Bilateral filtering for gray and color images. In: *Computer Vision, 1998. Sixth International Conference on*. [S.l.: s.n.], 1998. p. 839–846.
- VILLE, D. V. D.; KOCHER, M. Sure-based non-local means. *IEEE Signal Processing Letters*, v. 16, n. 11, p. 973–976, Nov 2009. ISSN 1070-9908.
- VONESCH, C. et al. The colored revolution of bioimaging. *IEEE Signal Processing Magazine*, v. 23, n. 3, p. 20–31, May 2006. ISSN 1053-5888.
- WANG, Z.; BOVIK, A. C. Mean squared error: Love it or leave it? a new look at signal fidelity measures. *IEEE Signal Processing Magazine*, v. 26, n. 1, p. 98–117, Jan 2009. ISSN 1053-5888.
- WANG, Z. et al. Image quality assessment: from error visibility to structural similarity. *IEEE Transactions on Image Processing*, v. 13, n. 4, p. 600–612, April 2004. ISSN 1057-7149.
- WERNICK, M. N.; AARSVOLD, J. N. Chapter 2 - introduction to emission tomography. In: WERNICK, M. N.; AARSVOLD, J. N. (Ed.). *Emission Tomography*. San Diego: Academic Press, 2004. p. 11 – 23. ISBN 978-0-12-744482-6. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780127444826500053>>.
- WU, Y. et al. Probabilistic non-local means. *IEEE Signal Processing Letters*, v. 20, n. 8, p. 763–766, Aug 2013. ISSN 1070-9908.
- ZANELLA, R. et al. Efficient gradient projection methods for edge-preserving removal of poisson noise. *Inverse Problems*, v. 25, n. 4, p. 045010, 2009. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0266-5611/25/i=4/a=045010>>.
- ZHANG, B.; FADILI, J. M.; STARCK, J. L. Wavelets, ridgelets, and curvelets for poisson noise removal. *IEEE Transactions on Image Processing*, v. 17, n. 7, p. 1093–1108, July 2008. ISSN 1057-7149.
- ZHANG, L. et al. Two-stage image denoising by principal component analysis with local pixel grouping. *Pattern Recognition*, v. 43, n. 4, p. 1531 – 1549, 2010. ISSN 0031-3203. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0031320309003677>>.
- ZHONG, H.; YANG, C.; ZHANG, X. A new weight for nonlocal means denoising using method noise. *IEEE Signal Processing Letters*, v. 19, n. 8, p. 535–538, Aug 2012. ISSN 1070-9908.

# GLOSSÁRIO

---

---

**AWGN** – *Additive White Gaussian Noise*

**BM3D** – *Block-Matching 3D*

**DA3D** – *Data Adaptive Dual Domain Denoising*

**DDF** – *Dual Domain Filtering*

**DDID** – *Dual Domain Image Denoising*

**KLT** – *Karhunen–Loève Transform*

**LET** – *Linear Expansion of Thresholds*

**LMMSE** – *Linear Minimum Mean Square Error*

**LPG-PCA** – *Local Pixel Grouping with Principal Component Analysis*

**MAP** – *Maximum A posteriori Probability*

**MMSE** – *Minimum Mean Square Error*

**MSSIM** – *Mean Structural SIMilarity*

**NLGWF** – *Non-Local Generalized Wiener Filter*

**NLM** – *Non-Local Means*

**PCA** – *Principal Component Analysis*

**PID** – *Progressive Image Denoising*

**PSNR** – *Peak Signal-to-Noise Ratio*

**PURE** – *Poisson Unbiased Risk Estimator*

**SA** – *Simulated Annealing*

**SNR** – *Signal-to-Noise Ratio*

**SN** – *Skew Normal*

**SP-NLM** – *Stochastic Poisson Non-Local Means*

**SSIM** – *Structural SIMilarity*

**STEM** – *Scanning Transmission Electron Microscopy*

**SURE** – *Stein's Unbiased Risk Estimator*

**TV** – *Total Variation*

**VST** – *Variance-Stabilizing Transformation*