

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

VERUSKA BUENO FREIRE

**UMA EXPERIÊNCIA DIDÁTICA COM DOBRADURA DE PAPEL E
GEOMETRIA DAS TRANSFORMAÇÕES NO PLANO NO ENSINO DE
MATRIZES NO ENSINO MÉDIO**

São Carlos – SP
2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

**UMA EXPERIÊNCIA DIDÁTICA COM DOBRADURA DE PAPEL E
GEOMETRIA DAS TRANSFORMAÇÕES NO PLANO NO ENSINO DE
MATRIZES NO ENSINO MÉDIO**

Veruska Bueno Freire

Orientadora: Prof^a. Dra. Yuriko Yamamoto Baldin

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas da Universidade Federal de São Carlos como exigência parcial para a obtenção do título de mestre, sob orientação da Professora Doutora Yuriko Yamamoto Baldin.

São Carlos – SP
2018

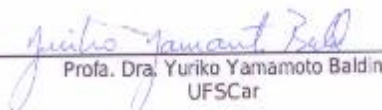


UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Veruska Bueno Freire, realizada em 18/12/2018:



Profa. Dra. Yuriko Yamamoto Baldin
UFSCar



Profa. Dra. Aparecida Francisco da Silva
UNESP



Prof. Dr. João Carlos Vieira Sampaio
UFSCar

DEDICO este estudo ao meu filho, Pedro Freire Machado, ao meu marido, Ronaldo Figueiredo Machado, aos meus pais, Segisfredo Oliveira Freire e Beatriz Bueno Freire, e aos meus irmãos, Mateus Bueno Freire e Micheli Bueno Freire.

AGRADECIMENTOS

- ✓ A Deus, pelo dom da vida.
- ✓ Ao meu marido, Ronaldo Figueiredo Machado, que sempre me apoiou e incentivou, me ajudando a conquistar forças e meios de concluir este trabalho.
- ✓ Ao meu filho, Pedro Freire Machado, pelo tempo de mãe que lhe foi privado.
- ✓ Aos meus pais, Segisfredo Oliveira Freire e Beatriz Bueno Freire, que sempre acreditam em mim.
- ✓ Aos meus Irmãos, Mateus Bueno Freire e Micheli Bueno Freire, meus eternos amigos.
- ✓ À minha sogra, Maria Ester Figueiredo Machado, por me substituir nos momentos em que tive que me ausentar como mãe.
- ✓ Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas.
- ✓ Aos colegas do Mestrado Profissional, em especial, Paulo, Vinícius e Fausto, pelo apoio durante a jornada de conclusão deste trabalho.
- ✓ A minha querida amiga, Patrícia Mendonsa, pelos dias de estudos compartilhados e pelo companheirismo durante todo o curso do Mestrado Profissional.
- ✓ Aos meus alunos do 2º EM, por aceitarem o desafio de participarem de uma atividade extra, realizada no contraturno.
- ✓ A toda equipe do Colégio Scala de Caconde, SP, que sempre confiaram em meu trabalho.
- ✓ A Professora Doutora Orientadora, Yuriko Yamamoto Baldin, pela paciência e dedicação destinadas a mim.

RESUMO

O projeto internacional *The Klein Project* da ICMI-IMU tem como objetivo essencial trazer conhecimentos e aplicações da Matemática atual para o enriquecimento do conhecimento do professor do Ensino Médio, através de pequenos artigos escritos em linguagem acessível. Esta dissertação enfrenta o desafio maior de trazer tal conhecimento para a sala de aula, através do estudo das ideias atuais que não estão presentes nas nossas escolas, em um artigo Klein sobre *imagens digitais e processamento*. Elaborou-se um material concreto de dobradura de papel para uma sequência didática dentro do conteúdo curricular de matrizes para o ensino médio, com aplicações à linguagem matemática da imagem digital de modo a promover uma compreensão sobre a geometria das transformações isométricas no plano. O trabalho apresenta o planejamento das aulas e descrição das realizações em classes, segundo os princípios da *Lesson Study* - Pesquisa de Aula.

Palavras chave: Matrizes e imagem digital; material concreto e geometria das transformações; Projeto Klein- ICMI-IMU; Lesson Study-Pesquisa de Aula.

ABSTRACT

The main objective of the international project The Klein Project of ICMI-IMU is to bring knowledge and applications of contemporary Mathematics to the enrichment of the knowledge of secondary school teachers, through small articles written in accessible language. This dissertation aims to face the bigger challenge of taking such knowledge into the classroom practice, studying the modern mathematical ideas that are not in the school textbooks in one Klein article about *digital images and processing*. Concrete teaching material has been constructed for paper-folding activities of a didactical sequence within the curricular content of matrices of secondary school level, with applications in the mathematical language of digital images, then promoting the understanding about the geometry of isometric transformations of plane. The work presents the planning of the sequence and the description of the execution of the lessons in actual classes, following the principles of Lesson Study methodology.

Key words: Matrices and digital image; concrete material and the geometry of transformations; The Klein Project- ICMI-IMU; Lesson Study.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Malha quadrada quadriculada 5x5, representando uma matriz quadrada A de ordem 5x5	18
Figura 2. Malha quadrada quadriculada 5x5, representando a matriz quadrada A, de ordem 5x5, com alguns elementos a_{ij} destacados em verde, vermelho e azul.	19
Figura 3. Malha quadrada quadriculada 9x9, representando uma matriz quadrada de ordem 9x9	20
Figura 4. Malha quadrada quadriculada 10x10, representando uma matriz C, quadrada de ordem 10x10.	26
Figura 5. Malha quadrada quadriculada 12x12, representando uma matriz quadrada de ordem 12x12	27
Figura 6. Resposta apresentada por uma das duplas	35
Figura 7. Uma das duplas trabalhando na resolução da atividade	36
Figura 8. Dobradura realizada pela dupla LB e MT e resposta apresentada por eles do item c.....	37
Figura 9. Resposta do item d apresentada por uma das duplas	38
Figura 10. Dupla LB e MT manipulando o espelho na atividade item c-iii	39
Figura 11. Resposta do item c-iii, apresentada por uma das duplas	39
Figura 12. Resposta do item c-iv, apresentada pela dupla M e ML.....	40
Figura 13. Representantes de cada uma das duplas expondo suas respostas acerca do item c-iv	40
Figura 14. Resposta da dupla LB e MT	41
Figura 15. Aluna MT anotando na lousa a síntese elaborada por toda a classe da atividade 3.....	42
Figura 16. Síntese elaborada por toda a classe	42
Figura 17. Resposta do item vi, apresentada por uma das duplas.....	43
Figura 18. Resposta do item viii, da dupla que deduziu que o ângulo formado entre os pontos correspondentes da letra T dada e de sua imagem na última posição, com vértice no ponto de concorrência entre as retas coloridas em vermelho e azul, era de 270°	44
Figura 19. Resposta do item viii, apresentada por outra dupla.....	44
Figura 20. Resposta do item x, apresentada pela dupla LC e MCI	45

Figura 21. Representantes de cada uma das duplas divulgando na lousa a síntese do item x.....	45
Figura 22. Exemplo de síntese da atividade 4, que foi transferida para a lousa.	46
Figura 23. Aluna fazendo as reflexões sucessivas da letra T na malha quadriculada ampliada.....	47
Figura 24. Aluna realizando na lousa os itens vii e ix.....	48
Figura 25. Aluna escrevendo na lousa a síntese da atividade 4, elaborada por toda a classe	49
Figura 26. Síntese da atividade 4, elaborada por toda a classe e copiada por uma das duplas.....	49
Figura 27. Resposta do item vi, apresentada por uma das duplas.....	50
Figura 28. Resposta do item vii, viii e ix, apresentada por uma das duplas	51
Figura 29. Resposta do item x, apresentada por uma das duplas.....	52
Figura 30. Alunas realizando nas malhas quadriculadas ampliadas as mesmas ações realizadas nas malhas quadriculadas da atividade 5	53
Figura 31. Aluna escrevendo na lousa a síntese da atividade 5, elaborada por toda a classe.	55
Figura 32. Síntese da atividade 5, elaborada por toda a classe e copiada por uma das duplas.....	55
Figura 33. Resposta do item b, apresentada por uma das duplas.	56
Figura 34. Resposta do item d, apresentada por uma das duplas	57
Figura 35. Resposta do item c-i, apresentada por uma das duplas.....	58
Figura 36. Resposta do item c-iii, apresentada por uma das duplas	59
Figura 37. Síntese de cada uma das duplas da atividade 3	59
Figura 38. Síntese da atividade 4, elaborada por uma das duplas.....	61
Figura 39. Síntese da atividade 4, elaborada por uma das duplas.....	62
Figura 40. Síntese da atividade 4, elaborada por todos os alunos da turma em conjunto.....	62
Figura 41. Síntese da atividade 5, elaborada por uma das duplas.....	64

LISTA DE QUADROS

- Quadro 1.** Tabela de comparação entre os elementos a_{ij} , destacados em verde, vermelho e azul, com os elementos a_{ij} reproduzidos segundo a dobradura.....19
- Quadro 2.** Tabela de comparação entre os elementos b_{ij} da matriz \mathbf{B} com os elementos b_{jj}20

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	12
1.1. ESTRUTURAÇÃO DO TRABALHO	13
CAPÍTULO 1: PLANEJAMENTO DAS AULAS	15
1. INTRODUÇÃO	15
1.1. PLANO DE AULA	15
2. PLANEJAMENTO GERAL: ATIVIDADES 1, 2 e 3.	16
2.1. ATIVIDADE 1	17
2.1.1. Atividade 1	18
2.2. ATIVIDADE 2	18
2.3. ATIVIDADE 3	19
3. OBJETIVOS ESPECÍFICOS: ATIVIDADES 1, 2, e 3.	21
3.1. OBJETIVOS ESPECÍFICOS – ATIVIDADE 1	21
3.1.1. Planejamento da aula para a atividade 1	21
3.2. OBJETIVO ESPECÍFICO – ATIVIDADE 2	22
3.2.1. Planejamento da aula para a atividade 2	22
3.3. OBJETIVOS ESPECÍFICOS – ATIVIDADE 3	23
3.3.1. Planejamento da aula para a atividade 3	23
4. SEGUNDO DIA DE AULA: PLANEJAMENTO GERAL – ATIVIDADES 4 e 5	25
4.1. ATIVIDADE 4	25
4.2. ATIVIDADE 5	27
5. OBJETIVOS ESPECÍFICOS – ATIVIDADES 4 e 5	28
5.1. PLANEJAMENTO DA AULA PARA A ATIVIDADE 4	28
5.2. PLANEJAMENTO DA AULA PARA A ATIVIDADE 5	30
CAPÍTULO 2: EXECUÇÃO DAS AULAS	33
1. INTRODUÇÃO	33

2. APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES 1, 2 e 3	33
2.1. APLICAÇÃO DA ATIVIDADE 1	34
2.2. APLICAÇÃO DA ATIVIDADE 2	36
2.3. APLICAÇÃO DA ATIVIDADE 3	38
2.4. APLICAÇÃO DA ATIVIDADE 4	43
2.5. APLICAÇÃO DA ATIVIDADE 5	50
CAPÍTULO 3: ANÁLISE CRÍTICA SOBRE AS AULAS APLICADAS	56
1. INTRODUÇÃO	56
2. CONSIDERAÇÕES FINAIS	56
2.1. CONSIDERAÇÕES FINAIS – ATIVIDADES 1, 2 e 3	56
2.2. CONSIDERAÇÕES FINAIS – ATIVIDADE 4.....	60
2.3. CONSIDERAÇÕES FINAIS – ATIVIDADE 5.....	63
CONSIDERAÇÕES FINAIS	66
REFERÊNCIAS	68
APÊNDICE A – Folhas de atividades	69

1. INTRODUÇÃO

Durante minha carreira como professora de Matemática (de 2004 até os dias atuais), sempre fui questionada por meus alunos: “Professora, por que temos que estudar isso? Onde vamos usar esse conceito que estamos estudando? Isso é realmente importante para nossa vida?”.

Essas são questões que muitas vezes nos deixam em situações embaraçosas. Então, em janeiro de 2016, quando frequentava o curso de verão do Mestrado Profissional do PPGECE (Programa Pós-Graduação no Ensino de Ciências Exatas), da Universidade Federal de São Carlos (UFSCAR), tive oportunidade de assistir a uma palestra de divulgação do Projeto Klein, ministrada pela Professora Dra. Yuriko Yamamoto Baldin.

O Projeto Klein é um projeto de colaboração entre a **ICMI** (*International Commission on Mathematics Instruction*) e a **IMU** (*International Mathematical Union*), que tem como princípio estabelecer conexões entre a matemática como disciplina escolar e a matemática como disciplina científica. Tem pretensão de atingir todos os professores do Ensino Secundário (Ensino Fundamental II e Ensino Médio) – não apenas aqueles já matemáticos entusiastas, mas também aqueles que podem redescobrir seu gosto pela matemática, segundo citação de Barton dentro de (Baldin, 2013).

No segundo momento dessa palestra, participamos de oficinas de estudos de artigos do Projeto Klein. Foi quando tive contato com o artigo científico “**Matrizes e Imagens Digitais**” de Dirce Uesu Pesco e Humberto José Bortolossi, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense (<http://blog.kleinproject.org>). Fiquei empolgada com a possibilidade de trabalhar algumas operações matriciais a partir da interpretação de imagens digitais e responder o frequente questionamento elaborado pelos alunos – “Para que serve isso que estamos estudando?” – de maneira rica e científica.

Segundo Gonzales e Woods (2000, p.4-5), “uma imagem digital pode ser interpretada como uma matriz, desse modo cada elemento da matriz representa um pixel na imagem digital”. Como consequência, as operações matriciais, aplicadas sobre a matriz que representa a imagem digital, resultarão em transformações na imagem digital.

Optamos por dobraduras de malhas quadriculadas quadradas (impressas em papel vegetal) como modelo concreto para reflexões segundo retas no plano para conectar a álgebra das matrizes quadradas (como operadores matriciais) com as transformações geométricas (em especial, as isometrias no plano).

Para este trabalho de dissertação, adotamos a metodologia de Pesquisa de Aula *Lesson Study*, que coloca o aluno como protagonista da construção do próprio conhecimento, sendo o professor mediador do processo de aprendizagem. Isso acontece através de aulas-pesquisa especialmente desenhadas para potencializar as tarefas executadas dentro da sala de aula com estabelecimento de objetivos claros de aprendizagem dos alunos.

A *Lesson Study* é extensamente trabalhada no Japão como parte cotidiana da profissão de professor e também da educação continuada. É constituída de três etapas básicas:

- 1ª – Planejamento de uma aula ou de uma sequência de aulas
- 2ª – Execução Observada da(s) aula(s)
- 3ª – Reflexão e crítica da(s) aula(s)

O histórico da origem da *Lesson Study*, assim como a descrição dos seus princípios adaptados para o contexto escolar no Brasil, pode ser encontrado na pesquisa de Felix (2010, p. 12) e na dissertação que a compõe.

Neste trabalho, não iremos entrar em detalhes teóricos ou de considerações desta metodologia na perspectiva de uma pesquisa em Ensino da Matemática, dada a natureza limitada deste trabalho de mestrado profissional. Vamos nos apoiar na aplicação prática da metodologia de *Lesson Study* para apresentar o resultado obtido pela execução de um projeto na sala de aula, que satisfizes as expectativas de conseguir envolver os alunos em aprendizagem ativa e participativa com questionamentos que estimulam a investigação. O resultado se baseou em alternativas para um ensino atualizado de conteúdo curricular de “Matrizes no Ensino Médio” por meio de material concreto e abordagens inovadoras para a prática na sala de aula.

1.1. ESTRUTURAÇÃO DO TRABALHO

O foco principal do trabalho são as atividades, incluindo seu **planejamento**, **execução** e **reflexão**. Sendo assim, o trabalho está estruturado em três capítulos, descritos a seguir.

Capítulo 1: Esse capítulo trata do **planejamento das aulas**. Contém as atividades que foram elaboradas e aplicadas aos alunos do 2º ano do Ensino Médio (Turma Única, de uma escola de ensino privado); os materiais utilizados e as intervenções planejadas para auxiliar os alunos no caso de eles apresentarem dificuldades no momento da aplicação das atividades.

Capítulo 2: Nesse capítulo, apresentamos a **execução** das aulas; revelamos como ocorreram as aplicações das atividades planejadas; mencionamos a reação e o envolvimento da turma mediante um novo estilo de aula.

Capítulo 3: Nesse capítulo, fazemos uma **reflexão**, uma análise crítica dos resultados das aulas.

O trabalho apresenta uma seção de **Conclusão** em que finalizamos com as considerações de ordem pessoal depois de ter executado este trabalho de Mestrado Profissional dentro do programa PPGECE-UFSCar. O ANEXO contém cópias das folhas de atividades que os alunos trabalharam durante a realização das sequências propostas.

CAPÍTULO 1: PLANEJAMENTO DAS AULAS

1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo, apresentamos o **planejamento das aulas** e as atividades destinadas aos alunos do 2º ano do EM, turma única, de uma escola de ensino privado do interior do estado de São Paulo. Esses alunos habitualmente fazem uso de material apostilado e participam de aulas expositivas.

A sequência das atividades foi cuidadosamente pensada para atender os princípios didáticos da *Lesson Study*, que visam transformar os alunos em protagonistas da construção do próprio conhecimento, tirando-os da atitude passiva a que estão habituados.

As aulas foram previamente planejadas, com a supervisão da orientadora; quando tentou-se antever possíveis soluções dos alunos às questões propostas, assim como possíveis dificuldades que enfrentariam. Como consequência, foram pensadas intervenções para reverter um possível quadro de dúvidas que poderiam ser apresentadas pelos estudantes.

Optamos pelo uso do material concreto (dobraduras realizadas em malhas quadriculadas quadradas, interpretadas como matrizes quadradas) para trabalharmos operações matriciais (transposição matricial e multiplicação de matrizes) associadas a transformações de uma imagem digital e interpretadas como transformações geométricas isométricas no plano.

1.1. PLANO DE AULA

Tema: Matrizes e suas operações relacionadas às imagens digitais

Objetivo Geral: Estudar as transformações geométricas de figuras planas por meio das operações matriciais.

Objetivo específico das aulas: Apresentar aos alunos do 2º ano do Ensino Médio (regularmente matriculados em uma escola privada) atividades práticas, envolvendo as operações de transposição e multiplicação de matrizes. Em especial, trabalhar as matrizes quadradas associando às transformações de uma imagem digital, interpretadas por meio de transformações geométricas no plano.

Organização das atividades:

Os alunos do 2º ano do Ensino Médio participarão de cinco atividades, sendo elas aplicadas no contra período, ou seja, no período oposto ao que os alunos se encontram matriculados. As atividades estão divididas da seguinte maneira:

- As atividades 1, 2 e 3, trabalhadas em uma aula dupla, totalizando 100 minutos.
- As atividades 4 e 5, executadas em outra aula dupla de 100 minutos.

Todas as atividades serão realizadas em pares, escolhidos conforme interesse próprio dos alunos a fim de que haja o máximo de empatia entre as duplas.

Os objetivos específicos de cada atividade são descritos em sua apresentação.

2. PLANEJAMENTO GERAL: ATIVIDADES 1, 2 e 3.

A **atividade 1** apresenta ao aluno uma nova aplicação do conceito de matriz. Ela mostra aos alunos que uma imagem digital pode ser representada como uma matriz, de tal forma que cada elemento dessa matriz representa um pixel da imagem digital. O valor atribuído a esse pixel (0 ou 1) determinará a sua cor (preta ou branca, respectivamente).

A **atividade 2** mostra que a operação geométrica de reflexão de elementos de uma matriz quadrada, segundo sua diagonal principal, está associada à operação de transposição da matriz.

A **atividade 3** mostra que a recíproca da atividade 2 é verdadeira, ou seja, a transposição de elementos de uma matriz quadrada representa a reflexão destes mesmos elementos segundo a diagonal principal da matriz.

Pré-requisitos: Antes da aplicação destas atividades, serão trabalhados com os alunos os conceitos de matrizes, os vários tipos de matrizes (nula, linha, coluna, quadrada, retangular, identidade), matriz transposta e igualdade de matrizes, adição de matrizes, multiplicação de um número real por uma matriz e multiplicação de matrizes. Tais conteúdos são abordados na apostila bienal (volume 6) do Sistema Anglo de Ensino – material adotado pela escola em que os alunos estão matriculados. Será lembrado com os mesmos o uso de transferidor para medir e construir ângulos.

Na primeira aula, será introduzido um texto preliminar sobre o tema do projeto que servirá de base para todas as atividades (de 1 a 5). O texto preliminar faz parte da atividade 1.

As três primeiras atividades serão realizadas num mesmo dia, sendo apresentadas aos alunos uma por vez, isto é, eles terão contato com a atividade 2

após o término da atividade 1. O mesmo ocorrerá com a terceira atividade, a qual terão em mãos após a conclusão da atividade 2.

As folhas de atividades serão entregues a todos os alunos, porém será solicitada a devolução de apenas uma folha por dupla, contendo a identificação dos estudantes que formam a dupla, bem como a resolução das atividades.

Cada dupla receberá um kit contendo os seguintes materiais: cola, espelho e canetas nas cores verde, vermelha e azul.

As três atividades obedecerão à seguinte estratégia: as leituras das questões serão feitas segundo um esquema de rodízio de estudantes para que todos tenham oportunidade de participar da aula. Após a leitura de cada um dos itens, orientarei as discussões/conclusões a respeito da resolução e do entendimento do exercício.

Feito isso, os alunos deverão, em duplas, resolver as atividades. Aproveitarei esse momento para circular entre as duplas, observá-las e, se necessário, fazer intervenções.

2.1. ATIVIDADE 1

Texto preliminar de apoio:

Conceito de Imagem Digital

Uma imagem digital pode ser considerada como sendo uma matriz cujos índices de linhas e de colunas identificam um ponto na imagem, e o correspondente valor do elemento da matriz identifica o nível de cinza naquele ponto. Os elementos dessa matriz são chamados de **pixels** ou **pels**, abreviações de **Picture elements** (elementos da figura). (GONZALES e WOODS, 2000, p.4-5)

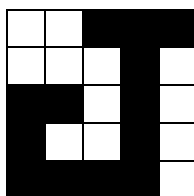
Logo, uma imagem digital pode ser considerada uma matriz, cujos índices de linhas (i) e colunas (j) indicam a posição de um ponto da figura na matriz que a representa. A cor deste ponto é representada pelo valor atribuído a ele. Quando a figura tem apenas duas cores, esta representação é explicada como segue: “O número **0 (zero)** indica a cor preta e o número **1 a cor branca**. Imagens digitais que usam apenas duas cores são denominadas **imagens binárias** ou **imagens booleanas**.” (PESCO; BORTOLOSSI, 2013, p.1).

Com esta conceituação, trabalhamos as atividades de 1 a 5. A seguir, apresentamos os enunciados das atividades 1, 2 e 3, sendo que as folhas de atividades e o planejamento da primeira aula serão descritos em seguida.

2.1.1. Atividade 1

A Figura seguinte mostra um quadrado dentro do qual reconhecemos a figura da letra maiúscula **J** do nosso alfabeto.

Figura 1. Malha quadrada quadriculada 5x5, representando uma matriz quadrada **A** de ordem 5x5



Fonte: Elaborado pela autora.

Item a: De acordo com os conceitos da imagem digital, identifique o tipo de matriz que representa o quadro e denomine-a como **A**.

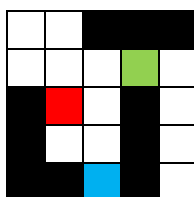
Item b: A partir da matriz identificada, descreva com a notação a_{ij} cada elemento da matriz **A** (apresentada acima) que está pintado de preto.

Item c: A matriz **A** encontrada é uma imagem digital, em que cada um de seus elementos a_{ij} representa um pixel da imagem digital. Utilizando a notação matricial, atribua valor a cada pixel da imagem representada por **A**, utilizando o sistema binário de cores, ou seja, 1 para os pixels brancos e 0 para os pretos.

2.2. ATIVIDADE 2

Alguns elementos da matriz **A** (utilizada na atividade1) foram destacados nas cores verde, vermelho e azul.

Figura 2. Malha quadrada quadriculada 5x5, representando a matriz quadrada A , de ordem 5x5, com alguns elementos a_{ij} destacados em verde, vermelho e azul.



Fonte: Elaborado pela autora.

Item a: Descreva, com a notação a_{ij} , cada um desses elementos associando-os com os nomes das respectivas cores.

Item b: Você recebeu, em papel vegetal, a réplica da matriz A dada acima no formato de um quadrado. Dobre esse quadrado segundo a diagonal principal e identifique a posição ocupada pelos elementos destacados em verde, vermelho e azul na folha dobrada, colorindo-as com suas respectivas cores.

Item c: Escreva, fazendo uso da notação a_{ij} , as novas posições de cada um dos elementos que você identificou. Cole, no espaço abaixo, o quadrado.

Item d: Compare os índices da linha (i) e da coluna (j) dos elementos originalmente coloridos em verde, vermelho e azul com os índices de linha (i) e coluna (j) dos elementos correspondentes obtidos pela dobradura. Para facilitar a análise, preencha a tabela abaixo. Em seguida anote suas conclusões.

Quadro 1. Tabela de comparação entre os elementos a_{ij} , destacados em verde, vermelho e azul, com os elementos a_{ij} reproduzidos segundo a dobradura

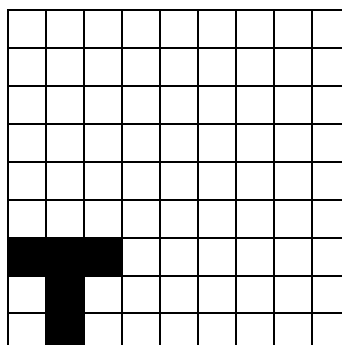
Cores	Notação a_{ij} dos elementos originalmente coloridos	Notação a_{ij} dos elementos reproduzidos a partir da dobradura
Verde		
Vermelho		
Azul		

Fonte: Elaborado pela autora.

2.3. ATIVIDADE 3

Considere a imagem digital representada por uma malha quadriculada **B** de ordem 9 x 9. Nela está inserida a letra maiúscula **T**.

Figura 3. Malha quadriculada 9x9, representando uma matriz quadrada de ordem 9x9



Fonte: Elaborado pela autora.

Item a: Identifique, com o uso da notação b_{ij} , os pixels cuja cor corresponde ao valor **0** (zero).

Item b: Para cada um dos pixels b_{ij} identificados, escreva o elemento b_{ji} , preenchendo a tabela.

Quadro 2. Tabela de comparação entre os elementos b_{ij} da matriz **B** com os elementos b_{ji}

Pixels b_{ij}	Pixels b_{ji}

Fonte: Elaborado pela autora.

Item c: i) Represente na malha quadriculada que você recebeu os elementos b_{ij} encontrados no **item a**. Compare-os com a letra **T**. Qual é a relação entre o **item a** e este item?

ii) Represente na mesma malha quadriculada os elementos b_{ji} , que você registrou na segunda coluna da tabela do **item b**.

iii) Considerando que a malha quadriculada que você recebeu representa uma matriz quadrada de ordem 9×9 , dobre-a segundo a diagonal principal. O que observa? Escreva com suas próprias palavras. Se necessário, use o espelho que você recebeu para validar sua conjectura.

iv) Cole a malha no espaço abaixo e conclua com os colegas a síntese da atividade, relacionando a transformação geométrica sofrida pela imagem da letra T a uma operação matricial.

3. OBJETIVOS ESPECÍFICOS: ATIVIDADES 1, 2, e 3.

3.1. OBJETIVOS ESPECÍFICOS – ATIVIDADE 1

Levar os alunos a entenderem que:

- Uma imagem digital pode ser considerada uma matriz, cada um dos elementos a_{ij} da matriz representa um pixel;
- Imagens digitais que usam apenas duas cores (branca e preta) são denominadas binárias;
- Nas imagens digitais binárias, os valores atribuídos às cores preta e branca podem ser associados aos números 0 e 1 respectivamente.

3.1.1. Planejamento da aula para a atividade 1

Tempo previsto: 30 minutos (dentro de uma aula dupla de 100 minutos).

A atividade será iniciada pedindo a um aluno que faça a leitura do texto preliminar de apoio. Ao término da leitura, a classe será questionada sobre o entendimento do texto, e nesse momento questões investigativas como as seguintes estão planejadas para estimular os alunos a se envolverem com a atividade.

- No texto há algum termo que vocês desconhecem?
- Já ouviram falar de pixel?
- De acordo com a leitura que acabamos de fazer, como vocês definem pixel?

Acredita-se que, depois destas discussões e dos conceitos matriciais previamente trabalhados em aula, os alunos não apresentem dificuldades na realização da atividade.

3.2. OBJETIVO ESPECÍFICO – ATIVIDADE 2

Levar os alunos a perceberem que, quando os elementos de uma matriz quadrada são refletidos segundo a diagonal principal, os elementos a_{ij} têm seus índices i e j trocados de posição, ocupando a posição como elementos a_{ji} . Ou seja, a operação geométrica de refletir elementos de um quadrado segundo sua diagonal principal está associada à operação matricial de transposição da matriz que representa esse quadrado.

3.2.1. Planejamento da aula para a atividade 2

Tempo previsto: 30 minutos (dentro de uma aula dupla de 100 minutos)

Materiais:

Além da folha de atividade e dos materiais do kit, os alunos receberão uma réplica da matriz **A**, impressa no papel vegetal.

O professor contará com duas cópias ampliadas da mesma matriz **A**, impressas em papel vegetal, com pincéis coloridos (verde, vermelho e azul).

Primeiramente, os alunos farão apenas a leitura (no esquema de rodizio) de toda a atividade, item a item, de modo que, para cada item, será destinado um espaço de conversação com o intuito de verificar o entendimento dos alunos a respeito do que se pede em cada questão. Somente depois da leitura e da discussão de toda a atividade, item a item, é que os alunos serão convidados a resolvê-la por completo.

Algumas dúvidas podem surgir na resolução do item b, pelo fato de haver duas possibilidades de dobras segundo a mesma diagonal (diagonal principal): os alunos farão a dobradura sobrepondo o lado avesso da imagem, o que fará com que pintem os quadrinhos na mesma face do papel da imagem original.

Se fizerem o contrário, isto é, quando a dobradura se sobrepõe ao lado original da imagem, a reprodução da imagem dos elementos ficará no avesso da face do papel da imagem original.

O importante é que entendam que tanto faz o lado do papel que foi pintado. Caso ocorra a segunda estratégia de dobradura, basta que eles coloquem o papel contra a luz para verificarem que, em ambas situações de dobraduras, os quadrinhos reproduzidos ocupam a mesma posição, identificados pelos índices de linha e coluna.

Para ilustrar, será solicitado a um dos estudantes que vá à frente da classe e mostre aos seus colegas como fazer a dobradura para, em seguida, reproduzir os quadrinhos destacados em verde, vermelho e azul e suas posições após a dobra. Ele terá duas alternativas para fazer a dobradura segundo a diagonal principal. Os alunos deverão confirmar que obterão o mesmo resultado em ambas estratégias adotadas de dobra.

Como professora, convidarei cada aluno para realizar as duas possibilidades de dobra com o seu material.

Para o **item d**, espera-se que os alunos percebam que os elementos a_{ij} , da matriz **A**, destacados em cores diferentes das preta e branca, após a dobradura do quadrado segundo a diagonal principal, têm suas imagens nas posições cujos índices i e j estão trocados, ou seja, as imagens ocupam a posição a_{ji} .

3.3. OBJETIVOS ESPECÍFICOS – ATIVIDADE 3

Levar os alunos a entenderem que a operação matricial de transposição de uma matriz quadrada está relacionada à operação geométrica no plano de reflexão segundo a diagonal principal do quadrado que é representado pela matriz. A recíproca é verdadeira, ou seja, a reflexão geométrica de um quadrado segundo sua diagonal principal pode ser representada pela operação de transposição de uma matriz quadrada que representa uma malha do quadrado geométrico. Observamos que usamos o termo diagonal principal para o quadrado geométrico para facilitar a compreensão do seu correspondente na representação matricial.

3.3.1. Planejamento da aula para a atividade 3

Tempo previsto: 30 minutos (dentro de uma aula dupla de 100 minutos)

Materiais:

Cada aluno receberá uma malha quadriculada de ordem 9×9 (de dimensões iguais as da apresentada na folha de atividade) impressa em papel vegetal.

Cada dupla receberá um espelho de dimensões $10 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$.

Considerando que a malha quadriculada que os alunos receberão representa uma matriz quadrada de ordem 9×9 , eles deverão reproduzir nela os elementos b_{ij} e b_{ji} mencionados no item **b**. Para tanto, deverão usar as indicações de linha (**i**) e coluna (**j**). Somente depois de feitas essas duas operações é que lhes será pedido que dobrem o papel vegetal segundo a diagonal principal da matriz nele representada. Os alunos terão oportunidade de ver que as duas imagens ficarão sobrepostas, ou seja, que elas são congruentes. O que as diferencia é apenas a posição que elas ocupam dentro do quadrado. Com o auxílio do espelho, eles poderão verificar que a imagem formada pelos elementos b_{ji} com valor 0 é a imagem refletida daquela formada pelos elementos b_{ij} .

No item **c-iv**, espera-se que os alunos consigam perceber que a reflexão geométrica no plano de um quadrado segundo sua diagonal principal está associada à operação de transposição de uma matriz quadrada que representa a malha do quadrado geométrico e vice-versa.

Caso isso não ocorra, questões norteadoras como as que seguem estão planejadas para estimular os alunos a relacionarem a operação geométrica aplicada na imagem da letra **T** com a operação matricial.

- A Imagem da letra **T** formada por elementos b_{ji} sofreu alguma alteração em sua forma quando comparada à imagem da letra **T** de elementos b_{ij} ?
- O que se pode concluir sobre as duas letras **T**?
- Que operação geométrica no plano justifica a congruência das duas letras **T**?
- Como é chamada a matriz que tem os índices de linha (**i**) trocados de posição com os índices de coluna (**j**) em relação a matriz **B**? Ou seja, como se denomina a matriz que tem seus elementos na forma b_{ji} nas posições correspondentes a b_{ij} ?

Depois de finalizadas as discussões acerca da atividade 3, as duplas deverão escrever uma síntese (no item iv) contendo as conclusões a respeito da terceira atividade.

Os últimos 10 minutos de aula estão reservados para que representantes das duplas usem a lousa para expor, por escrito, essas conclusões. As respostas deverão ser escritas na lousa simultaneamente, uma vez que o quadro estará dividido em quatro partes, uma parte para cada dupla. Em seguida, farei, juntamente com a classe, a leitura e a análise de todas as repostas. Verificarei se o objetivo da atividade foi alcançado por meio da compreensão da síntese matemática da atividade.

Síntese Matemática da Atividade:

A operação matricial de transposição dos elementos de uma matriz quadrada, representada por uma malha quadrada quadriculada, corresponde à operação geométrica de reflexão no plano segundo a diagonal principal do quadrado que representa a matriz e vice-versa. A reflexão no plano segundo a diagonal principal de um quadrado geométrico, que representa uma matriz quadrada, está relacionada à operação matricial de transposição dessa matriz quadrada.

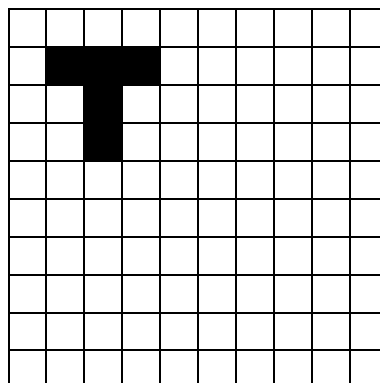
4. SEGUNDO DIA DE AULA: PLANEJAMENTO GERAL – ATIVIDADES 4 e 5

A seguir, apresentamos os enunciados das atividades 4 e 5, sendo que as folhas de atividades e o planejamento do segundo dia da aula serão descritos em seguida.

4.1. ATIVIDADE 4

Considere a seguinte imagem digital representada por uma malha quadrada **C**. Nela está representada a letra maiúscula **T**.

Figura 4. Malha quadrada quadriculada 10x10, representando uma matriz C , quadrada de ordem 10x10.



Fonte: Elaborado pela autora.

Efetue, na malha quadriculada que você recebeu, os seguintes procedimentos.

i) Dobre na metade, verticalmente, a malha quadriculada. Destaque, na cor **VERMELHA**, a reta representada pelo vinco dessa dobradura.

ii) Dobre na metade, horizontalmente, a malha quadriculada. Destaque, na cor **AZUL**, a reta representada pelo vinco dessa dobradura horizontal.

iii) Qual é o ângulo formado entre a reta em **VERMELHO** e a reta em **AZUL**?

iv) Aproveitando a transparência do papel vegetal, projete a imagem da letra **T** refletindo-a segundo a reta destacada em **VERMELHO**, marcando com lápis os pixels da imagem obtida. Observe que a imagem é ainda uma letra **T**.

v) Em seguida, projete a letra **T** que você acaba de obter, refletindo-a segundo a reta destacada em **AZUL**, marcando com lápis os pixels da imagem obtida.

vi) Compare a letra **T** dada inicialmente e a letra **T** da última posição obtida no item v. Que observações vocês fazem quanto ao formato de ambas? E quanto às posições?

vii) Consegue observar um efeito de rotação entre a posição inicial e a posição final da letra **T**? Qual é o sentido dessa rotação? Dizemos que uma rotação tem sentido horário quando segue os movimentos dos ponteiros do relógio analógico e anti-horário no caso contrário.

viii) Qual é o ângulo formado entre pontos correspondentes da figura original e da sua imagem, com vértice no ponto de intersecção das retas **VERMELHA** e **AZUL**? Explore esta questão usando vários pontos da figura original. Elabore uma conjectura.

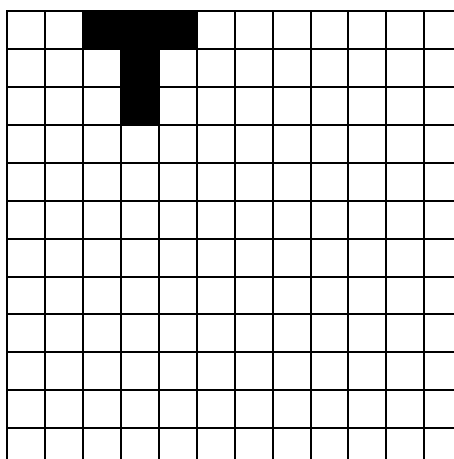
ix) Use um transferidor para testar a sua conjectura do item anterior. Explore uma relação entre o ângulo medido e o ângulo determinado entre as retas em **VERMELHO** e **AZUL**.

x) Cole, no espaço abaixo, a malha quadriculada usada na atividade 4. Faça uma síntese das conclusões dos itens vii, viii e ix.

4.2. ATIVIDADE 5

Consideremos a imagem digital.

Figura 5. Malha quadrada quadriculada 12x12, representando uma matriz quadrada de ordem 12x12



Fonte: Elaborado pela autora.

Item a: Efetue, em uma das malhas quadriculadas que você recebeu, os seguintes procedimentos.

i) Dobre na metade, verticalmente, a malha quadriculada. Destaque, na cor **VERMELHA**, a reta representada pelo vinco dessa dobradura.

ii) Dobre, segundo a diagonal secundária, a malha quadriculada. Destaque, na cor **AZUL**, a reta representada pelo vinco dessa dobradura.

iii) Qual é o menor ângulo formado entre a reta em **VERMELHO** e a reta em **AZUL**? Chame de **O** o ponto de concorrência entre as retas.

iv) Aproveitando a transparência do papel vegetal, projete a imagem da letra **T** refletindo-a segundo reta destacada em **VERMELHO**.

v) Em seguida projete a letra **T** que você acaba de obter, refletindo-a segundo a reta destacada em **AZUL**.

vi) Compare a letra **T** dada inicialmente e a letra **T** da última posição obtida no item v. Houve alguma alteração no formato da imagem que ocupa a posição final?

vii) Consegue observar um efeito de rotação entre a posição inicial e a posição final da letra **T**? Qual é o sentido da rotação?

viii) Qual o ângulo de rotação em torno do ponto **O**?

ix) Use um transferidor para conferir as respostas do item vii, comparando o efeito da rotação entre pelo menos três pontos da figura inicial e suas imagens após a rotação. Conclua a relação entre o ângulo de rotação medido e o ângulo determinado entre as retas em **VERMELHO** e **AZUL**.

x) Agora, na outra transparência, vamos repetir os passos anteriores dobrando primeiro segundo a reta **AZUL** e depois segundo a reta **VERMELHA**. Escreva todas as semelhanças e as diferenças observadas. Compare sua resposta com a síntese do item anterior e escreva uma conclusão. Em seguida, cole as malhas quadriculadas no espaço abaixo.

5. OBJETIVOS ESPECÍFICOS – ATIVIDADES 4 e 5

Levar os alunos a perceberem que a composição de duas reflexões no plano, segundo duas retas concorrentes que formam um ângulo α entre si, determina a rotação de ângulo 2α em torno do ponto de concorrência entre as retas. O sentido da rotação (horário ou anti-horário) é definido pela ordem em que são tomadas as reflexões.

5.1. PLANEJAMENTO DA AULA PARA A ATIVIDADE 4

Tempo previsto: 45 minutos (dentro de uma aula dupla de 100 minutos)

Materiais: Os alunos receberão:

- Um kit contendo: transferidor, régua, cola, caneta azul e caneta vermelha.

- Malha quadriculada, apresentada na atividade 4, impressa em papel vegetal.
- O professor contará com a mesma malha quadriculada, também impressa em papel vegetal, porém em tamanho ampliado.

Para que se possa verificar a compreensão do vocabulário abordado na atividade 4, será proposto aos estudantes que façam, no formato de rodízio, a leitura e a discussão de toda a atividade. Em seguida, deverão trabalhar aos pares na execução da mesma.

Acredita-se que no item vii os alunos conseguirão perceber, mesmo sem a utilização do transferidor, que existe uma rotação no sentido horário de 180° da imagem da letra **T** em torno do ponto de concorrência das retas coloridas em **VERMELHO** e **AZUL**.

No item viii, espera-se que os alunos elaborem a conjectura de que o ângulo entre pontos correspondentes da figura original e da sua imagem, com vértice no ponto de intersecção das retas **VERMELHA** e **AZUL**, será sempre o mesmo, ou seja, 180° . No momento em que os alunos forem socializar suas conclusões, direi a eles que esse ângulo chama-se **ângulo de rotação determinada por esta transformação, em torno do ponto de intersecção das retas usadas**.

No item ix, pode ser que alguns alunos tenham dificuldades em medir com o transferidor os ângulos formados entre os pontos correspondentes da figura original e da figura reproduzida na última ação com vértice no ponto de intersecção das retas vermelha e azul. Para tanto, está planejada uma cópia ampliada e impressa em papel vegetal da mesma imagem manipulada pelos alunos na atividade 4. Esta será usada ou por um aluno que tenha tido êxito na execução da tarefa para explicar aos demais colegas o procedimento utilizado ou pela professora (no caso de toda a classe manifestar dúvidas). Para essa situação, algumas questões estão planejadas:

- Escolha um vértice da letra **T** dada. Nomeie esse ponto de **A**.
- Como podemos fazer para encontrar na letra **T** da última posição o ponto correspondente ao ponto **A**? Nomeie esse ponto de **A''**.
- Como fazer para calcular a medida do ângulo formado entre esses pontos (**A** e **A''**) com vértice no ponto de concorrência entre as retas **VERMELHA** e **AZUL**?

- Agora, façam o mesmo procedimento, escolhendo outro vértice da letra **T**. Nomeie esse outro ponto de **B**, por exemplo.

Enquanto a professora indaga seus alunos, ela pode solicitar a algum deles que faça as ações sugeridas pelos colegas na malha ampliada.

Almeja-se que os estudantes consigam ver que a medida do ângulo conferido no item viii, 180° , é o dobro do ângulo determinado entre as retas concorrentes (90°) destacadas em **VERMELHO** e **AZUL**.

No Item x os alunos deverão elaborar uma síntese das conclusões acerca dos itens vii, viii e ix. Tais sínteses serão expostas simultaneamente na lousa pelos representantes das duplas, uma vez que a lousa será dividida em quatro partes, mesma quantidade de pares de alunos.

Aproveitarei esse momento para analisar, juntamente com a classe, cada uma das sínteses. É quando mencionarei a eles que essa congruência observada entre ângulos dos pontos correspondentes da letra T dada e de sua imagem na posição final com vértice no ponto de concorrência entre as retas **VERMELHA** e **AZUL** é definida como sendo **ângulo de rotação em torno do ponto O de intersecção das retas usadas**. É obtida por duas reflexões segundo retas concorrentes selecionadas e efetuadas seguidamente.

A síntese da atividade, para fins de aprendizagem dos alunos, consiste então em concluir que a composição de duas reflexões no plano por duas retas concorrentes perpendiculares entre si resulta em uma rotação de 180° em torno do ponto de concorrência.

A atividade deverá ter uma sequência de generalização quando se efetua duas reflexões segundo retas concorrentes que formam um ângulo α produzindo como resultado uma rotação em torno do ponto de concorrência com ângulo de rotação de medida 2α . O sentido da rotação é determinado pela ordem com que as reflexões são realizadas.

5.2. PLANEJAMENTO DA AULA PARA A ATIVIDADE 5

Tempo previsto: 45 minutos (dentro de uma aula dupla de 100 minutos)

Materiais: Os alunos receberão:

- Duas malhas quadriculadas iguais à apresentada na atividade 5, impressas em papel vegetal.
- O professor contará com as mesmas duas malhas quadriculadas, também impressas em papel vegetal, porém em tamanhos ampliados.

Após a leitura e a discussão de toda a atividade 5, será proposto aos alunos que a resolvam em duplas.

Acredita-se que os alunos a executarão sem maiores dificuldades, uma vez que a proposta dessa atividade é bem parecida com a da atividade anterior.

O item vii tem por objetivo despertar a atenção dos alunos para o fato de que a rotação ocorrida com a imagem da letra **T** foi no sentido horário e em torno do ponto **O** (ponto de concorrência das retas coloridas em **VERMELHO** e **AZUL**).

Para o item viii, a expectativa é de que os alunos concluam que o **ângulo de rotação** entre a letra **T** dada e a letra da última posição foi de 90° , uma vez que na atividade 4 já lhes foi apresentado o termo **ângulo de rotação**.

Como o item ix pede aos alunos que usem o transferidor para medir o ângulo de rotação entre a letra **T** dada e a letra **T** da última posição, confia-se que os mesmos o farão sem enfrentar problemas, pois eles já terão feito esse mesmo exercício na atividade 4. Acredita-se que será concluído pelos estudantes que o ângulo de rotação sofrida pela letra **T** é de 90° , o dobro do menor ângulo (45°) formado entre as retas concorrentes destacadas em **VERMELHO** e **AZUL**. Além disso, devem concluir que o sentido da rotação foi horário.

O item x tem por finalidade mostrar aos alunos que o sentido da rotação sofrida pela letra **T** se dá de acordo com a ordem das retas concorrentes escolhidas para realizar as reflexões segundo elas, e notar que o ângulo, com vértice no ponto de concorrência **O**, entre as imagens inicial e final, é igual ao dobro do ângulo entre as retas concorrentes.

No referido item, é solicitado que os estudantes façam também as reflexões em ordem contrária a que foram feitas no início da atividade, alternando as dobraduras, dobrando primeiro segundo a reta **AZUL** e em seguida segundo a reta **VERMELHA**. É nesse momento que eles verificarão que a rotação produzida por duas dobraduras consecutivas, mas em ordem contrária, se deu em torno do mesmo ponto de concorrência (ponto **O**), mas agora no sentido anti-horário. Deverão observar que o ângulo de rotação permaneceu 90° , o dobro do ângulo (45°) formado entre as mencionadas retas concorrentes. Em seguida, eles devem anotar as conclusões.

Estas serão expostas simultaneamente na lousa por representantes de cada dupla de alunos para que toda a classe possa fazer a análise e a discussão das respostas.

Em seguida, solicitarei que um aluno da sala seja o relator de uma conclusão geral sobre as atividades 4 e 5. Ele deverá escrever na lousa a síntese elaborada pela classe com a ajuda da professora. Todos os alunos deverão escrever essa síntese do geral em uma folha de papel avulsa, que será entregue aos alunos no momento oportuno.

Para facilitar essa discussão, a professora contará com duas malhas quadriculadas, iguais a da atividade 5, também impressas em papel vegetal, porém em tamanhos ampliados. Será pedido a dois alunos que reproduzam nelas as ações da atividade 5, ou seja, um aluno deverá produzir a imagem da letra **T** refletindo-a inicialmente segundo a reta **VERMELHA** e depois segundo a reta **AZUL**, por meio de dobraduras. O outro aluno fará na ordem contrária, inicialmente refletirá a letra **T** segundo a reta **AZUL** e depois segundo a reta **VERMELHA**, também por dobraduras. Em seguida, será feita a comparação entre as duas malhas, por superposição. Então, os alunos confirmarão que em ambas malhas as rotações se deram em torno do ponto de concorrência (ponto **O**) das retas **VERMELHA** e **AZUL** e que o ângulo de rotação possui medida igual ao dobro do menor ângulo determinado entre as retas concorrentes. O que diferenciou uma atividade da outra será o sentido da rotação; o que se deve à ordem em que foram tomadas as retas para as dobraduras, que representam geometricamente as reflexões no plano, segundo as retas.

A síntese da atividade, para fins de aprendizagem dos alunos, consiste então em conjecturar que a composição de duas reflexões no plano por duas retas concorrentes que determinam um ângulo α resulta em uma rotação de 2α em torno do ponto de concorrência. O sentido da rotação é determinado pela ordem em que as reflexões são realizadas.

CAPÍTULO 2: EXECUÇÃO DAS AULAS

1. INTRODUÇÃO

Seguindo a metodologia de Pesquisa de Aula - *Lesson Study*, esse capítulo trata da execução das aulas. Ficamos atentos a cada detalhe durante a aplicação das atividades, como: dúvidas que surgiram durante o desenvolvimento das aulas; tempo utilizado para a realização das mesmas; soluções e estratégias criativas adotadas pelos alunos.

As cinco atividades planejadas foram aplicadas aos alunos do 2º ano do Ensino Médio (turma única), regularmente matriculados em uma escola particular de ensino, na Cidade de Caconde, SP.

As aulas ocorreram no contra período (período da tarde, turno contrário ao frequentado pelos alunos).

Inicialmente, estava planejado que os alunos participassem de dois dias de aulas duplas, totalizando 100 minutos de aula por dia. Apresentaríamos no primeiro dia de aula as atividades 1, 2 e 3; no segundo dia de aula, as atividades 4 e 5. Porém as atividades foram aplicadas em três dias de aulas, sendo:

- 1 dia de aula dupla (100 minutos de aula) para as atividades 1, 2 e 3
- 1 dia de aula (70 minutos) para a atividade 4
- 1 dia de aula (50 minutos) para a atividade 5

2. APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES 1, 2 e 3

As atividades 1, 2 e 3 foram aplicadas no dia 12 de setembro de 2018 em uma aula dupla, totalizando 100 minutos.

As carteiras da sala de aula foram dispostas em pares. Como a classe é composta por 8 alunos, havia 4 pares de carteiras. Dessa maneira, à medida que os alunos chegavam para participarem da aula, lhes era informado que deveriam sentar-se em duplas, nas carteiras que já estavam organizadas. Assim as duplas foram se

formando sem nenhuma complicação. A classe possui um ótimo entrosamento, o que facilitou a formação das duplas.

Houve três alunos que se atrasaram. O atraso máximo foi de 20 minutos. A classe concordou que a aula iniciasse com a presença de todos e que esse tempo de atraso fosse compensado no final. Ou seja, a aula terminaria 20 minutos mais tarde.

2.1. APLICAÇÃO DA ATIVIDADE 1

Depois que todos os alunos estavam devidamente acomodados, lhes foi entregue a folha de atividades (uma por aluno) e o kit (um por dupla) contendo: cola; espelho; canetas nas cores verde, vermelha e azul.

Os alunos foram orientados que cada dupla deveria entregar apenas uma folha de atividades com as devidas resoluções e com os nomes dos estudantes que compõem a dupla.

Iniciamos a aula com a leitura do texto preliminar de apoio.

Foi-lhes explicado que usaríamos as informações desse texto nas atividades de 1 a 5. Contudo, naquele dia trabalharíamos apenas as atividades 1, 2 e 3. As outras duas atividades (4 e 5) ficariam para o nosso próximo encontro, que ocorreria na semana seguinte.

Ao término da leitura do texto preliminar de apoio, foi interessante notar a surpresa dos alunos em descobrirem que uma imagem digital pode ser considerada uma matriz. Houve o seguinte comentário:

Aluno LB: “Ah, então é por isso que estudamos matriz?! Para depois, se alguém for trabalhar com computador, já chegar na faculdade sabendo pelo menos um pouco da matéria! Que legal!”

Professora: “Boa observação! Uma das aplicações envolvendo a teoria das matrizes é a imagem digital. Vocês sempre questionam para que serve esse ou aquele assunto que estão estudando. Agora vocês tomaram conhecimento de uma aplicação bem moderna da teoria matricial – A Imagem Digital.”

Professora: “vocês já ouviram falar em pixel?”

Classe: “Sim”

Professora: “Depois da leitura realizada, como vocês definiriam pixel?”

Aluna M: “Como sendo um elemento da matriz. Na imagem digital, é tudo a mesma coisa. Como a imagem digital pode ser considerada uma matriz, então os elementos da matriz são os pixels e os pixels são os elementos da matriz.”

Professora: “E sobre o sistema binário de cores? Vocês já tinham ouvido falar?”

Classe: “Sim, nas aulas de Física.”

Aluna ML: “O preto é **zero**, porque ele não reflete nenhuma cor e o branco é **um** porque ele reflete todas as cores.”

Depois da discussão acerca do texto preliminar de apoio, os alunos foram orientados a fazerem em voz alta a leitura em formato de rodizio de toda a atividade 1, discutindo-a item a item. Apenas após toda a leitura eles deveriam trabalhar, aos pares, na resolução da atividade.

Os itens a e b não ofereceram dificuldades aos alunos. Já o item c proporcionou algumas dúvidas. Os alunos queriam saber se era para utilizarem a notação matricial a_{ij} ou se também poderiam utilizar a notação matricial em forma de tabela.

Inicialmente, era para eles utilizarem a notação a_{ij} . Porém, julguei interessante que eles vissem a imagem digital segundo a linguagem computacional; então, sugeri que eles fizessem os dois registros.

Resposta apresentada por uma das duplas, como apresentado na figura 6:

Figura 6. Resposta apresentada por uma das duplas

Item c: A matriz A é uma imagem digital, em que cada um de seus elementos a_{ij} representa um pixel da imagem digital. Utilizando a notação matricial, atribua valor a cada pixel da imagem representada por A , utilizando o sistema binário de cores, ou seja, 1 para os pixels brancos e 0 para os pretos.

Tabela

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$a_{11} = 1$	$a_{21} = 1$	$a_{31} = 0$
$a_{12} = 1$	$a_{22} = 1$	$a_{32} = 0$
$a_{13} = 0$	$a_{23} = 1$	$a_{33} = 1$
$a_{14} = 0$	$a_{24} = 0$	$a_{34} = 0$
$a_{15} = 0$	$a_{24} = 1$	$a_{34} = 1$
$a_{41} = 0$	$a_{51} = 0$	
$a_{42} = 1$	$a_{52} = 0$	
$a_{43} = 1$	$a_{53} = 0$	
$a_{44} = 0$	$a_{54} = 0$	
$a_{45} = 1$	$a_{55} = 1$	

Fonte: Elaborado pela autora.

2.2. APLICAÇÃO DA ATIVIDADE 2

Todos os alunos receberam a folha de atividade e a malha quadriculada da atividade 2, impressa em papel vegetal.

Durante a leitura da atividade 2, percebi que os alunos estavam confusos com relação ao item b. Então pedi a um aluno que lesse de novo o enunciado do item. Após a leitura, levantei algumas questões:

Professora: “Vocês receberam a réplica da matriz A?”

Classe: “Sim.”

Professora: “Que tipo de matriz ela representa?”

Classe: “Matriz quadrada de ordem 5 x 5.”

Professora: “Se ela representa uma matriz quadrada, então identifiquem nela a diagonal principal. Agora, o que devem fazer?”

Aluna MC: “Dobrar o quadrado segundo a diagonal principal e reproduzir os elementos coloridos em verde, vermelho e azul. É só ver a sombra desses elementos no papel vegetal e colorir em cima deles com as cores certas.”

Depois que todos haviam compreendido o que era para ser feito, seguimos adiante com a leitura dos outros itens, que foram facilmente interpretados pelos alunos.

Passado esse momento, os alunos começaram a trabalhar em duplas na resolução do exercício.

Figura 7. Uma das duplas trabalhando na resolução da atividade



Fonte: Autoria própria.

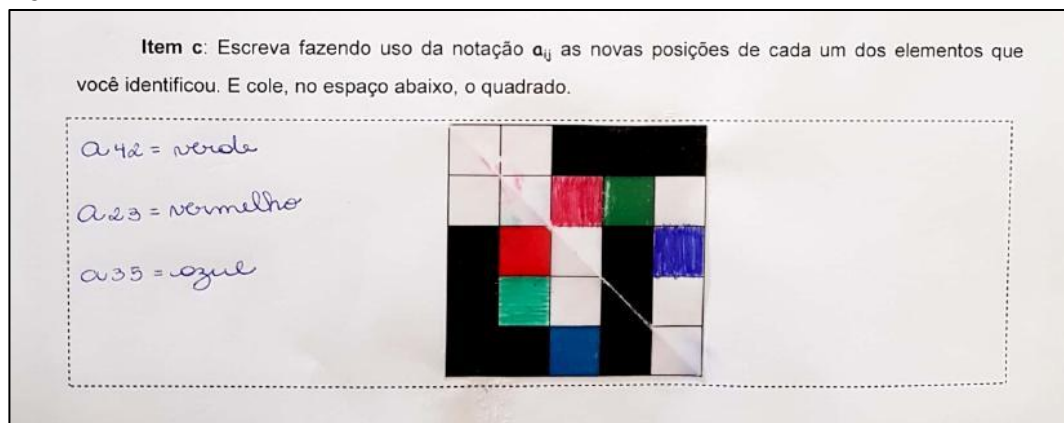
Para minha surpresa, apenas uma dupla solicitou minha ajuda na execução da dobradura. Eu os atendi particularmente não expondo a dúvida deles a toda classe, uma vez que percebi que os outros estavam concentrados na atividade, desempenhando-a com desenvoltura. Dessa maneira, não se fez necessária a utilização das duas malhas quadriculadas ampliadas da atividade 2 também impressas em papel vegetal, que estavam preparadas para o caso de a classe manifestar dúvidas na execução da dobradura.

Aluno LB: “Não entendi direito. Como assim: ‘... indique a posição ocupada pelos elementos destacados em verde, vermelho e azul na folha dobrada, colorindo-as com suas respectivas cores.’?”

Professora: “Faça como a sua colega MC sugeriu: dobre a malha quadriculada segundo a diagonal principal, depois veja quais dos quadrinhos brancos estão sombreados em verde, vermelho e azul. Pinte-os com suas respectivas cores.”

Pude observar que eles, assim como a classe, depois de entendido o que era para ser feito no item b, não apresentaram dúvidas relacionadas a pintar o avesso ou o lado original do papel, contrariando minha previsão acerca da dobradura do item b.

Figura 8. Dobradura realizada pela dupla LB e MT e resposta apresentada por eles do item c.



Fonte: Autoria própria.

Durante a resolução do item d, uma aluna se surpreendeu ao perceber que os índices i e j dos elementos refletidos segundo a diagonal principal haviam trocado de posição quando comparados aos elementos originalmente coloridos em verde, vermelho e azul. Ou seja, o elemento original a_{ij} , depois de reproduzido, tornou-se o elemento a_{ji} .

Aluna J: “Nossa, que legal, gente! O i trocou de lugar com o j !”

Todas as duplas de alunos perceberam tal fato apontado pela aluna J.

Figura 9. Resposta do item d apresentada por uma das duplas

Item d: Compare os índices da linha (i) e da coluna (j) dos elementos originalmente coloridos em verde, vermelho e azul com os índices de linha (i) e coluna (j) dos elementos correspondentes obtidos pela dobradura. Para facilitar a análise preencha a tabela abaixo. Em seguida anote suas conclusões.

Cores	Notação a_{ij} dos elementos originalmente coloridos	Notação a_{ij} dos elementos reproduzidos a partir da dobradura
Verde	a_{24}	a_{42}
Vermelho	a_{32}	a_{23}
Azul	a_{53}	a_{35}

Conclusões:
 Concluímos que ao dobrar na diagonal principal, os índices de linhas e colunas se invertem, como pode-se perceber na colocação original do verde que era a_{24} e seu elemento correspondente se tornou a_{42} .

Fonte: Autoria própria.

2.3. APLICAÇÃO DA ATIVIDADE 3

Foram distribuídas a todos os alunos da classe a folha de atividade e a malha quadriculada de ordem 9×9 , impressa em papel vegetal.

Observei que os alunos tiveram dificuldades em associar o nome **reflexão** à **ação de dobradura** que estavam exercendo sobre a malha quadriculada que receberam.

Todas as duplas concluíram no item **c-iii** que ambas as imagens da letra **T** (a imagem formada por elementos b_{ij} e a imagem formada por elementos b_{ji}) eram congruentes. Entretanto, não perceberam que a imagem da letra **T** formada pelos elementos b_{ji} era a imagem por **reflexão** segundo a diagonal principal da imagem da letra **T** formada pelos elementos b_{ij} e vice-versa. Então, usando o espelho, posicionando-o sobre a diagonal principal do quadrado que representa, neste caso

uma matriz quadrada de ordem 9×9 , verificaram que as imagens da letra T obtidas pela dobradura e a refletida no espelho eram idênticas, assim se convencendo do uso da palavra reflexão na ação pela dobradura.

Figura 10. Dupla LB e MT manipulando o espelho na atividade, item c-iii



Figura 11. Resposta do item c-iii, apresentada por uma das duplas

iii) Considerando que a malha quadriculada que você recebeu representa uma matriz quadrada de ordem 9×9 , dobre-a segundo a diagonal principal. O que observou? Escreva com suas próprias palavras. Se necessário, use o espelho que você recebeu, para validar sua conjectura.

Observa-se que, ao dobrar a diagonal principal, os elementos b_{ii} e b_{ji} ficam sobrepostos.

Fonte: Autoria própria.

A observação escrita é importante ao item c-iii, mesmo sendo possível que ela fosse percebida e mencionada pelos alunos.

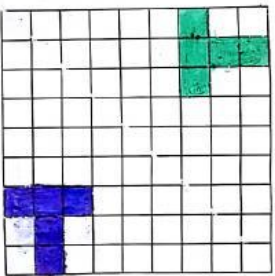
A percepção de que uma das letras T é imagem refletida da letra T dada inicialmente segundo a diagonal principal é pré-requisito para a realização do item c-iv, pois este solicita aos alunos que relacionassem a transformação geométrica sofrida

pela letra T com uma operação matricial. Os alunos tiveram grande dificuldade em associar o nome **reflexão** à **operação geométrica** em questão. Porém a **operação matricial de transposição** foi facilmente identificada e depois associada à operação de reflexão segundo uma reta do plano, por meio de dobradura.

Figura 12. Resposta do item c-iv, apresentada pela dupla M e ML.

iv) Depois de feitos todos os passos anteriores, cole a malha no espaço abaixo e conclua com os colegas a síntese da atividade, relacionando a transformação geométrica sofrida pela imagem da letra T com uma operação matricial.

Podemos concluir que, ao invertermos a posição dos elementos b_{ij} , transformando-os em b_{ji} , realizamos a operação matricial conhecida como matriz transposta.

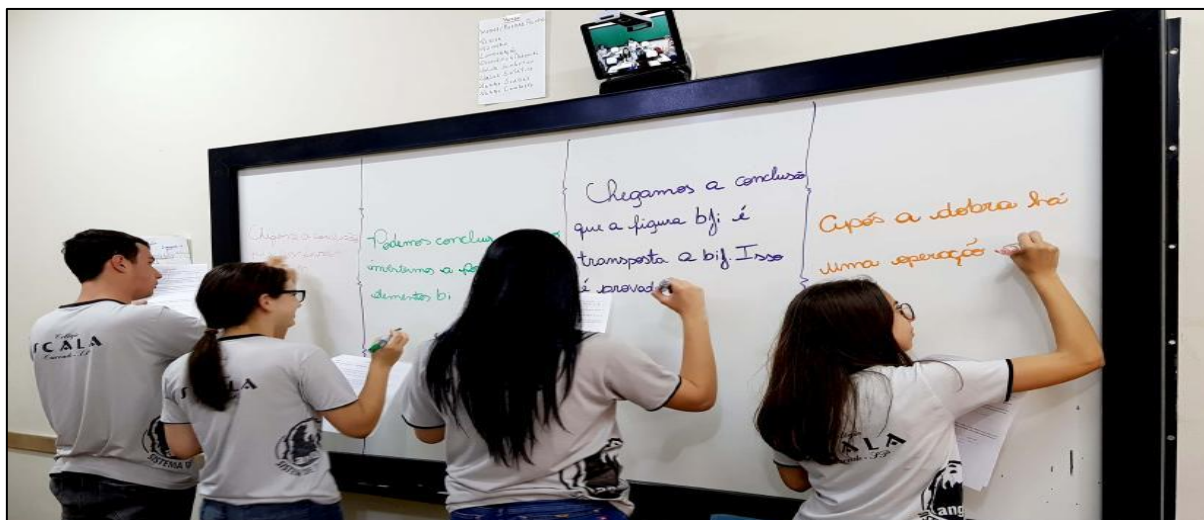


Fonte: Autoria própria.

Os últimos 10 minutos da aula estavam reservados para que representantes das duplas usassem a lousa para expor por escrito as conclusões acerca do item c-iv.

As respostas foram escritas na lousa simultaneamente, uma vez que o quadro estava dividido em quatro partes (uma parte para cada dupla).

Figura 13. Representantes de cada uma das duplas expondo suas respostas acerca do item c-iv



Fonte: Autoria própria

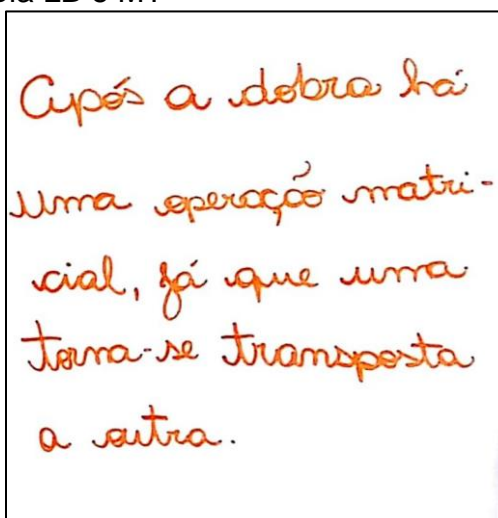
Em seguida, as respostas dos alunos foram lidas e comentadas uma a uma:

Cada uma das respostas era contrastada com o enunciado do item c-iv: “*Depois de feitos todos os passos anteriores, cole a malha no espaço abaixo e conclua com os colegas a síntese da atividade, relacionando a transformação geométrica sofrida pela imagem da letra T com uma operação matricial.*”.

Exemplo:

Professora: “Leiam a resposta da dupla LB e MT.”

Figura 14. Resposta da dupla LB e MT



Fonte: Autoria própria.

Professora: “Todos concordam com a dupla LB e MT, que a operação matricial ocorrida com a imagem da letra T é a transposição?”

Classe: “Sim”

Professora: “Por quê?”

Aluna MC: “Porque, quando comparamos o índice de linha e de coluna dos elementos que compõem as duas imagens, percebemos que em uma imagem o elemento é do tipo b_{ij} e na outra imagem o elemento é do tipo b_{ji} . Isso só acontece quando uma matriz é transposta à outra.”

Professora: “Então ok! Vocês chegaram a uma conclusão quanto à operação matricial envolvida na atividade 3. O que me dizem quanto à operação geométrica sofrida pela imagem da letra T?”

Aluno LC: “As duas letras T ficaram iguais.”

Professora: “Sim, mas qual seria a operação geométrica exercida sobre a letra T?”

Aluna MT: “Uma cópia.”

Professora: “Mas essa cópia recebe um nome especial. Qual seria?”

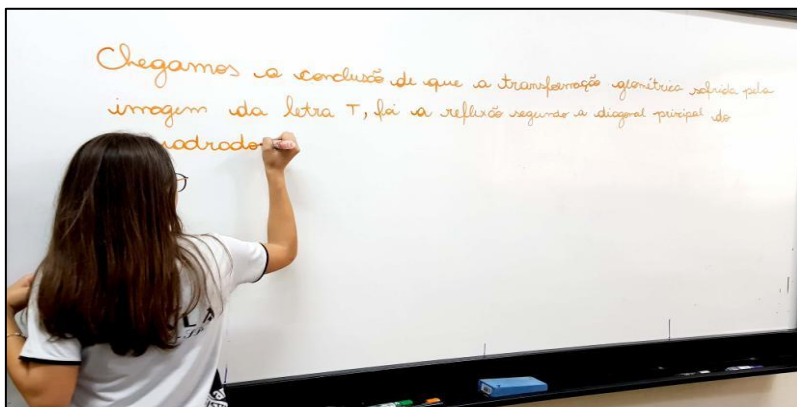
Aluna MC: “Reflexão.”

Aluna ML: “Ah! É claro! Por isso usamos o espelho; para ver que uma letra T era o reflexo da outra!”

Em seguida, prosseguimos com a leitura e com a análise de cada uma das três sínteses restantes. Nesse momento, os alunos perceberam que nenhuma delas apresentava uma resposta satisfatória que relacionasse a transformação geométrica ocorrida com a imagem da letra T com uma operação matricial.

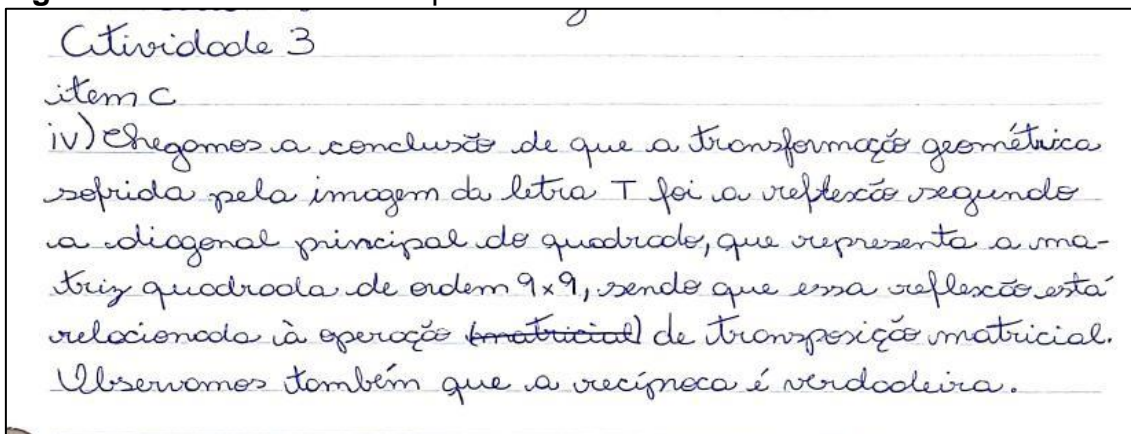
Então, propus que cada dupla anotasse em um papel avulso uma nova síntese, feita agora com a participação de toda a classe. Pedi a um voluntário que fosse à lousa escrever as conclusões apontadas por todos.

Figura 15. Aluna MT anotando na lousa a síntese da atividade 3 elaborada por toda a classe.



Fonte: Autoria própria

Figura 16. Síntese elaborada por toda a classe



Fonte: Autoria própria

2.4. APLICAÇÃO DA ATIVIDADE 4

A atividade 4 foi aplicada no dia 20 de setembro de 2018.

Estava planejado que as atividades 4 e 5 fossem aplicadas no mesmo dia, porém isso não foi possível, uma vez que o tempo gasto para a resolução da atividade 4 foi de aproximadamente 70 minutos (25 minutos a mais do que foi planejado). Embora ainda restasse cerca de 30 minutos que poderiam ser destinados à atividade 5, decidimos reagendar outra data para a última atividade pelo fato de 30 minutos não serem suficientes para finalizarmos a atividade 5. Houve também o fato de os alunos não terem disponibilidade de mais tempo, uma vez que estávamos à véspera de um evento que envolvia todas as turmas da escola – a Mostra Cultural. Assim, eles tinham responsabilidades a serem cumpridas em prol do mencionado evento. Dessa maneira, finalizamos a aula depois de concluirmos a atividade 4.

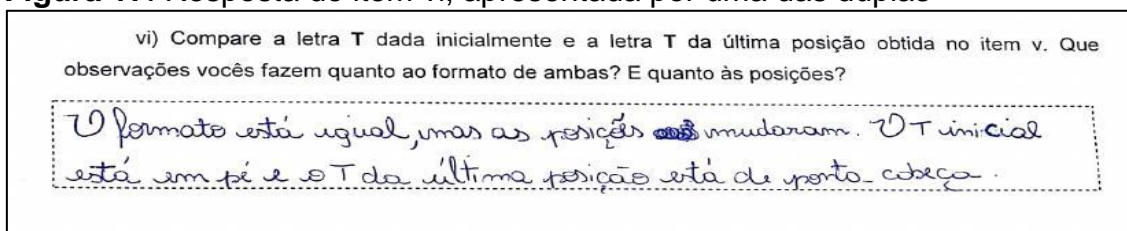
Os alunos foram orientados a trabalharem com as mesmas duplas formadas anteriormente.

Todos os alunos receberam a folha de atividade e a malha quadriculada da atividade 4. Cada dupla recebeu o kit contendo canetas azuis e vermelhas, régua, espelho e transferidor.

A dinâmica da aula seguiu de acordo com as atividades anteriores, com leitura inicial e discussão de toda a atividade, antes de realizar as manipulações, aos pares. Enquanto eles trabalhavam, eu circulava entre as duplas para observar e orientar nas ocasiões em que eu fui solicitada.

Nesta atividade, os alunos perceberam logo que o ângulo formado entre as retas azul e vermelha era de 90° . Observaram ainda que o formato da letra T se manteve inalterado mesmo após as reflexões sucessivas segundo as duas retas concorrentes, reta vermelha e reta azul, nesta ordem. A única alteração observada foi em relação à posição ocupada pela imagem da letra T.

Figura 17. Resposta do item vi, apresentada por uma das duplas



Fonte: Autoria própria.

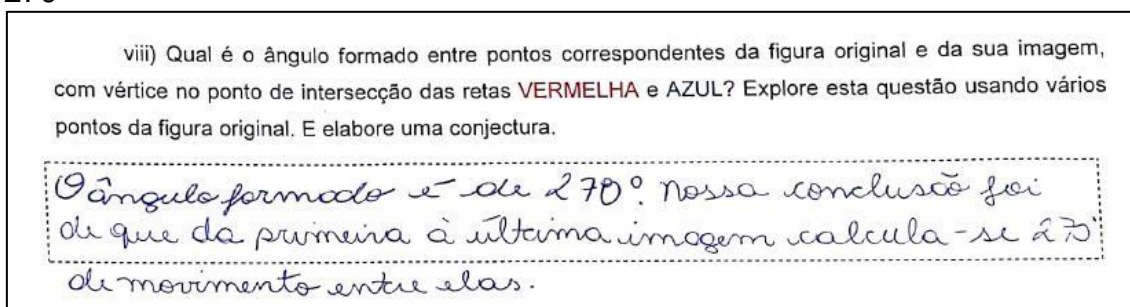
Também identificaram que o sentido da rotação era o sentido horário.

No tocante ao item viii, que questionava sobre o ângulo formado entre os pontos correspondentes da figura original e da sua imagem, com vértice no ponto de intersecção entre as retas vermelha e azul, todos os grupos conseguiram ver que tal ângulo era de 180° , exceto uma dupla, que afirmou que era de 270° . No item seguinte (item ix), eles usaram o transferidor e viram que haviam cometido um engano. Inclusive, me perguntaram se era necessário apagar a resposta anterior, pois ela estava errada. Respondi que não era para apagar e os questioneei:

Professora: “Por que pensaram que a medida desse ângulo era de 270° ?”

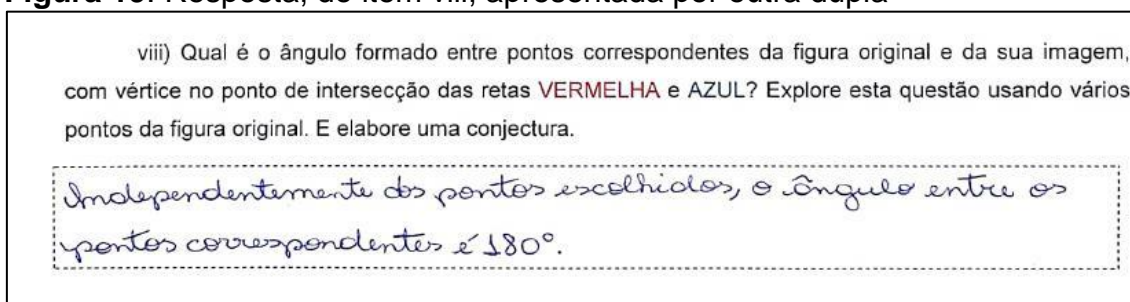
Aluno LC: “Porque imaginamos um plano cartesiano e uma circunferência trigonométrica. Isso nos confundiu, mas agora vimos que está errado. De qualquer maneira esse ângulo será sempre 180° . Mesmo que desenhemos, na malha quadriculada, o plano cartesiano e a circunferência trigonométrica, o ângulo entre os pontos correspondentes da imagem inicial e final, com vértice no ponto de concorrência entre as retas vermelha e azul, não alterará, ou seja, continuará *igual a ser de 180°* (sic).”

Figura 18. Resposta do item viii, da dupla que deduziu que o ângulo formado entre os pontos correspondentes da letra T dada e de sua imagem na última posição, com vértice no ponto de concorrência entre as retas coloridas em vermelho e azul, era de 270°



Fonte: Autoria própria.

Figura 19. Resposta, do item viii, apresentada por outra dupla

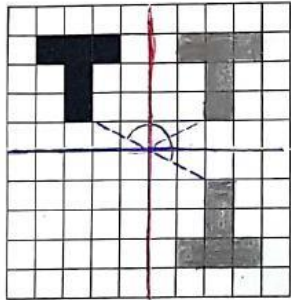


Fonte: Autoria própria.

O item x solicitava aos alunos que colassem a malha quadriculada que estavam manipulando e que fizessem uma síntese sobre conclusões dos itens vii, viii e ix.

Figura 20. Resposta do item x, apresentada pela dupla LC e MCI

x) Cole, no espaço abaixo, a malha quadriculada usada na atividade 4. E faça uma síntese das conclusões dos itens vii, viii e ix.



A partir das conclusões dos itens VII, VIII e IX, fizemos a síntese de que o efeito de rotação é no sentido horário e, que o ângulo formado entre dois pontos escolhidos foi de 180° .

Fonte: Autoria própria.

Depois que todos concluíram a atividade, foram convidados, simultaneamente, um aluno de cada dupla para ir à lousa registrar a síntese elaborada juntamente com seu parceiro.

Figura 21. Representantes de cada uma das duplas divulgando na lousa a síntese do item x

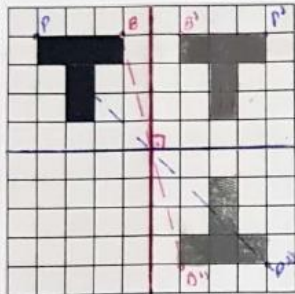


Fonte: Autoria própria.

Seguidamente, cada uma das sínteses foi confrontada com o enunciado do item x.

Figura 22. Exemplo de síntese da atividade 4, que foi transferida para a lousa.

x) Cole, no espaço abaixo, a malha quadriculada usada na atividade 4. E faça uma síntese das conclusões dos itens vii, viii e ix.



Decorrendo o movimento no sentido horário, a imagem muda de lugar assim como o ponto. E ao juntarmos (ligar) o primeiro ponto da figura inicial com o mesmo ponto na figura final encontramos o ângulo de 180° , algo que se mantém nos outros casos.

Fonte: Autoria própria.

Professora: “Aluna JM, leia, por favor, a síntese elaborada por você e sua parceira.”

Aluna JM fez a leitura da síntese exposta no exemplo anterior.

Professora: “Classe, o que vocês entenderam?”

Aluno LB: “Está um pouco confuso, mas está relacionado com a rotação de 180° no sentido horário da letra T.”

Professora: “Dupla JM e MCr, que informações vocês pretendiam passar com esse texto?”

Aluna MCr: “Exatamente o que o LB disse, mas, vendo agora, percebemos que fizemos um texto muito confuso.”

Professora: “O item x solicitava que fizessem uma síntese relacionando os itens vii, viii e ix, ou seja, deveriam mencionar se houve uma rotação na imagem da letra T. Em caso afirmativo, qual é o sentido de tal rotação? De quantos graus foi essa rotação? Existe alguma relação entre essa rotação e o ângulo de concorrência entre as retas? Classe, essa síntese possui todas essas informações?”

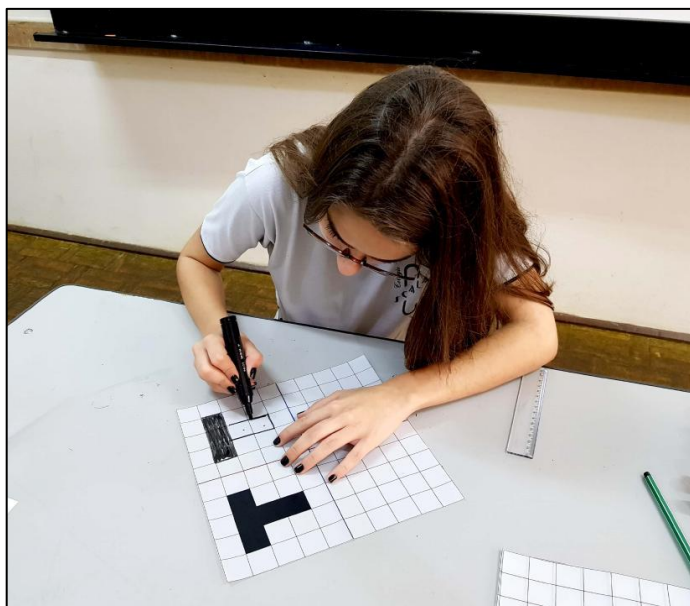
Classe: “Não.”

Aluno LC: “Elas não escreveram nada sobre a relação existente do ângulo formado entre os pontos correspondentes das duas letras T, com vértice no ponto de concorrência das retas vermelha e azul, com o ângulo formado entre as retas coloridas. O pior, é que nós também não escrevemos nada sobre isso.”

O procedimento foi análogo para cada uma das sínteses, ou seja, as sínteses foram confrontadas com o enunciado do item x. Após o confronto, todas as duplas perceberam que seus textos estavam incompletos e confusos. Três duplas cometeram a mesma falha da dupla citada anteriormente, o que significa que esqueceram de mencionar a relação existente entre o ângulo formado entre os pontos correspondentes da letra T e sua imagem na última posição, com o vértice localizado no ponto de concorrência entre as retas, e o ângulo formado entre as retas concorrentes. Outra dupla não pontuou o sentido (horário ou anti-horário) de rotação entre a letra T dada e a letra T da última posição. Então, concluímos que precisávamos elaborar juntos uma outra síntese.

No entanto, disse à classe que, antes de tal fato ocorrer, era necessário voltar a alguns passos da atividade 4. Solicitei a uma aluna que fizesse, na malha quadriculada ampliada da atividade 4, as reflexões sucessivas da letra T, ou seja, que refletisse primeiramente pela reta vertical destacada em vermelho. Depois, tomasse essa imagem refletida e a refletisse novamente segundo a reta horizontal destacada em azul.

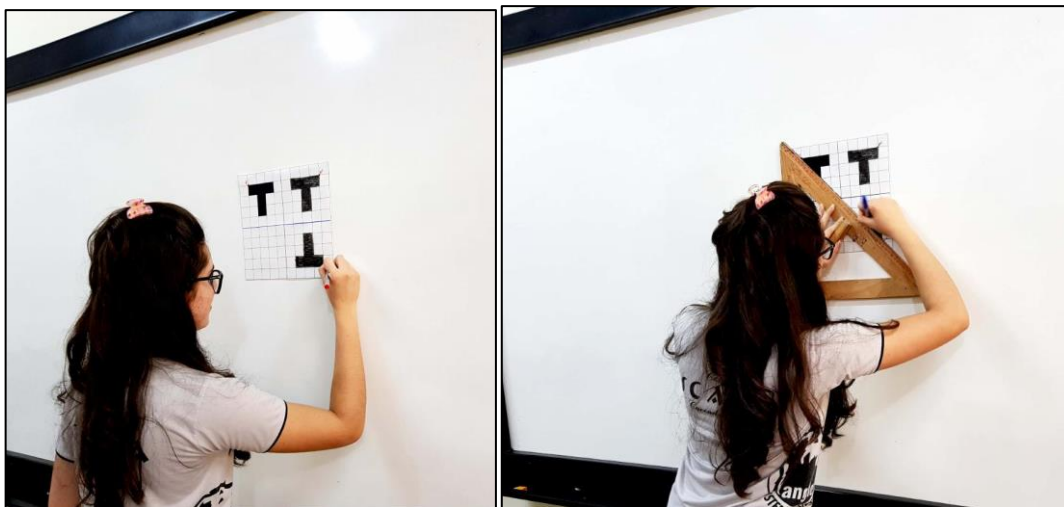
Figura 23. Aluna fazendo as reflexões sucessivas da letra T na malha quadriculada ampliada



Fonte: Autoria própria.

Em seguida, pedi que outra aluna fosse a lousa para realizar os itens viii e ix

Figura 24. Aluna realizando na lousa os itens vii e ix



Fonte: Autoria própria.

Feito isso, questionei a classe:

Professora: “Qual é a medida do ângulo determinado entre um ponto da letra T dada e seu correspondente na última letra T refletida, com vértice no ponto de concorrência entre as retas azul e vermelha?”

Classe: “ 180° .”

Professora: “Esse valor de 180° é a medida de todos os ângulos formados entre os pontos da letra T inicial e seus correspondentes da letra T final após as reflexões cujo vértice é o ponto de concorrência entre a reta azul e a reta vermelha?”

Classe: “Sim.”

Professora: “Isso define o que chamamos de **ângulo de rotação da transformação obtida por realizar a sequência dessas reflexões**. Como todos os pontos da letra T foram rotacionados em torno do ponto de concorrência entre a reta azul e a reta vermelha em 180° , dizemos que esse ângulo (180°) é o **ângulo de rotação** da transformação aplicada sobre a letra T dada.”

Professora: “Existe alguma relação entre o ângulo de rotação sofrida pela letra T e o ângulo formado entre as retas concorrentes?”

Classe: “Sim, o ângulo de rotação (180°) é o dobro do ângulo entre as retas concorrentes (90°).”

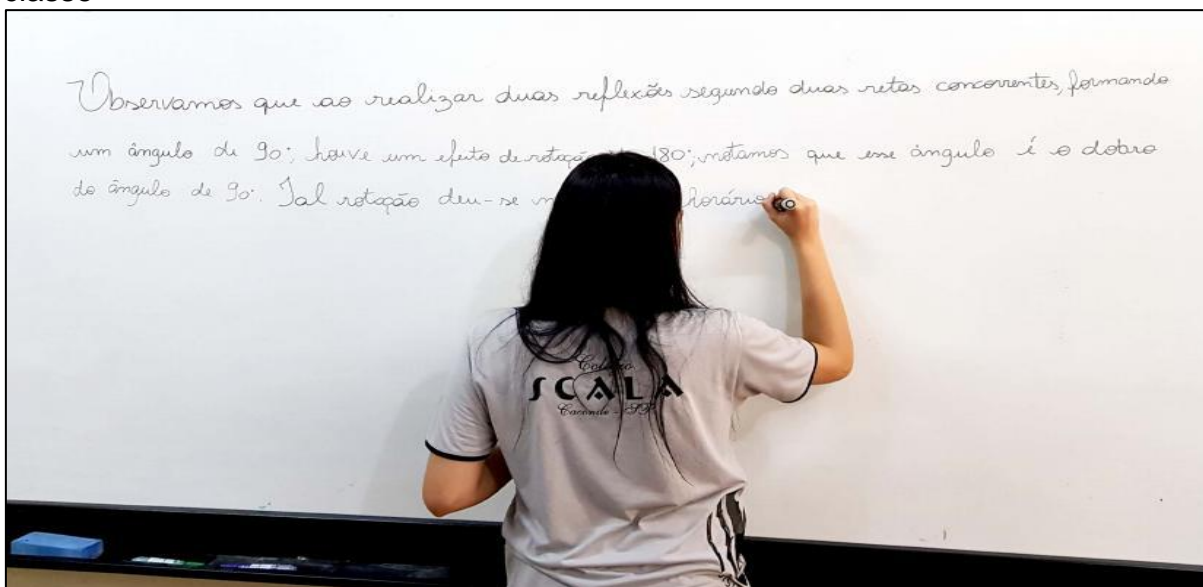
Professora: “A rotação se deu em qual sentido? Horário ou sentido anti-horário?”

Classe: "Sentido horário."

Professora: "Agora, só nos resta montar uma síntese contendo todas essas informações."

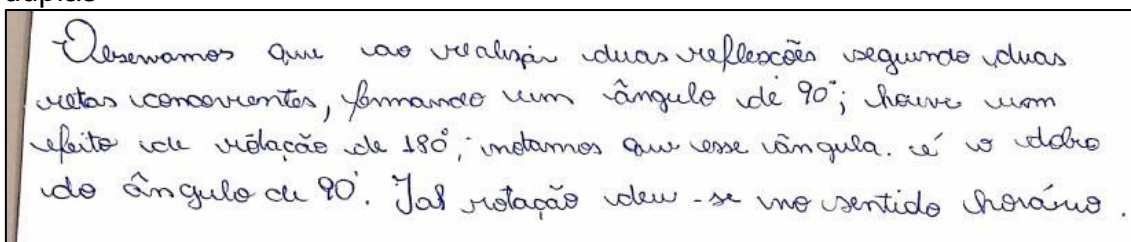
Pedi que um voluntário fosse o relator, na lousa, da síntese feita em conjunto com todos os alunos da classe e que todas as duplas copiassem em uma folha avulsa a resposta por todos elaborada.

Figura 25. Aluna escrevendo na lousa a síntese da atividade 4 elaborada por toda a classe



Fonte: Autoria própria.

Figura 26. Síntese da atividade 4 elaborada por toda a classe e copiada por uma das duplas



Fonte: Autoria própria.

2.5. APLICAÇÃO DA ATIVIDADE 5

A atividade 5 foi aplicada no dia 25 de setembro de 2018 em uma aula de 50 minutos.

Todos os estudantes receberam a atividade 5 e duas malhas quadriculadas da atividade 5, impressas em papel vegetal. Cada dupla recebeu um kit contendo canetas azuis e vermelhas, régua, transferidor e espelho.

Os alunos foram orientados a manterem as mesmas duplas já formadas para a realização das atividades anteriores e a entregarem apenas uma folha de atividade resolvida por dupla.

Fizemos a leitura e análise de toda a atividade, conversando sobre cada um dos itens. Em seguida, os alunos trabalharam em dupla na resolução das questões.

Todas as duplas concluíram que na primeira malha quadriculada a imagem da letra T (na última posição) não sofreu deformações em relação à inicialmente dada. A alteração foi posicional, pois a letra T sofreu uma rotação de 90° no sentido horário em torno do ponto O (ponto de concorrência entre as retas). Também conseguiram perceber que o ângulo de rotação da transformação aplicada à letra T foi de 90° , medida esta que é igual ao dobro do menor ângulo formado entre as retas coloridas em vermelho e azul.

Figura 27. Resposta do item vi, apresentada por uma das duplas

vi) Compare a letra T dada inicialmente e a letra T da última posição obtida no item v. Houve alguma alteração no formato da imagem que ocupa a posição final?

não houve alteração no formato da imagem, apenas na posição.

Fonte: Autoria própria.

Figura 28. Resposta do item vii, viii e ix apresentada por uma das duplas

vii) Consegue observar um efeito de rotação entre a posição inicial e a posição final da letra T? Qual é o sentido da rotação?

Sim, e o sentido de rotação é horário.

viii) Qual o ângulo de rotação em torno do ponto O?

De 90°

ix) Use um transferidor para conferir as respostas do item vii, comparando o efeito da rotação entre pelo menos três pontos da figura inicial e suas imagens após a rotação. Conclua a relação entre o ângulo de rotação medido e o ângulo determinado entre as retas em VERMELHO e AZUL.

Após analisar o efeito de rotação entre os pontos da figura inicial e da final, notamos que o ângulo formado é de 90° . Portanto, é o dobro do ângulo entre as retas vermelha e azul.

Fonte: Autoria própria.

A dobradura solicitada no item x foi facilmente executada pelos alunos.

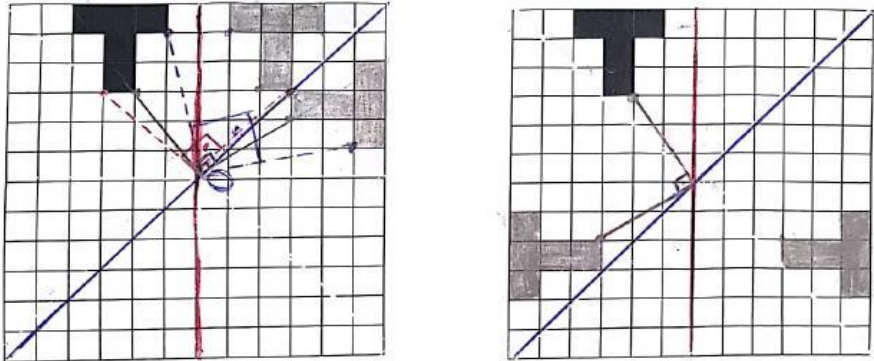
Assim que todos concluíram a atividade, chegou o momento de socializarmos as sínteses elaboradas pelas duplas de alunos.

Inicialmente, havia planejado que as conclusões apresentadas pelos alunos fossem registradas simultaneamente na lousa por representantes de cada uma das duplas. Contudo, quando circulei entre os estudantes, pude perceber que os textos que eles elaboraram estavam muito extensos, o que tornaria essa ação demorada e cansativa. Então, sugeri que as duplas lessem suas respostas para que pudessemos conversar sobre as conclusões nelas contidas.

As sínteses informavam que a rotação sofrida pela letra T ora deu-se no sentido horário, ora no sentido anti-horário. Em ambos os casos, o ângulo de rotação foi de 90° e o ângulo entre as retas concorrentes era de 45° .

Figura 29. Resposta do item x, apresentada por uma das duplas

x) Agora, na outra transparência, vamos repêtir os passos anteriores dobrando primeiro segundo a reta AZUL e depois segundo a reta VERMELHA. Escreva todas as semelhanças e as diferenças observadas. Compare sua resposta com a síntese do item anterior e escreva uma conclusão. Em seguida, cole as malhas quadriculadas no espaço abaixo.



Continuação do item x, da atividade 5.

As semelhanças observadas: ambas possuem o formato de letra T; ambas possuem retas azul e vermelha na mesma posição; ambas possuem 90° quando ligamos os pontos da figura inicial e final. A diferença entre elas é que uma está em sentido horário e outra em anti-horário. A síntese feita no item IX é a mesma que podemos fazer na nova malha quadriculada: ambas possuem a reta AZUL e VERMELHA formando 45° entre si e o dobro dela, 90° , é feito entre os pontos da figura inicial e final.

Fonte: Autoria própria.

Com o intuito de que eles obtivessem conclusões mais generalizadas, propus à classe que fizessem, juntamente comigo, uma análise da atividade 4 (realizada na semana anterior) e da atividade 5. Antes, foi necessário que dois alunos reproduzissem, nas malhas quadriculadas ampliadas, as ações realizadas nas duas malhas quadriculadas da atividade 5.

Figura 30. Alunas realizando, nas malhas quadriculadas ampliadas, as mesmas ações realizadas nas malhas quadriculadas da atividade 5



Fonte: Autoria própria.

Adaptando o planejamento elaborado para a execução da atividade 5, em posse também da malha quadriculada ampliada da atividade 4, propus alguns questionamentos aos alunos com a intenção de que obtivessem uma síntese geral que sistematizasse as conclusões das atividades 4 e 5.

Professora: “Façam uma comparação entre essa atividade e a atividade 4 que realizamos na semana passada. Quais ações realizamos em ambas?”

Classe: “Fizemos reflexões da letra T.”

Professora: “E como foram feitas essas reflexões?”

Aluna M: “Usamos dobradura para facilitar as reflexões.”

Professora: “Como ocorreram essas reflexões? Quantas vezes, em cada uma das malhas quadriculadas, a letra T foi refletida? As reflexões aconteceram segundo que tipo de retas?”

Aluna M: “Em cada uma das malhas quadriculadas, a letra T foi refletida duas vezes consecutivas, segundo duas retas concorrentes.”

Professora: “Na atividade 4, vocês se lembram qual era a medida do ângulo formado entre as retas concorrentes? Para facilitar, olhem a malha quadriculada da atividade 4, eu a trouxe para podermos analisá-la.”

Aluna ML: “Era de 90° .”

Professora: “Qual foi a rotação exercida sobre a letra T e qual o sentido da rotação?”

Classe: “ 180° . A rotação foi no sentido horário.”

Professora: “Na atividade 4, existe alguma relação entre a medida das retas concorrentes e o ângulo de rotação sofrido pela imagem da letra T?”

Alunos: “Sim, o ângulo de rotação é o dobro do ângulo formado entre as retas concorrentes.”

Professora: “E na atividade 5? Qual é a medida do menor ângulo formado entre as retas concorrentes que vocês traçaram?”

Classe: “ 45° .”

Professora: “O que ocorreu com a letra T na primeira malha quadriculada?”

Aluno LC: “Ela sofreu uma rotação de 90° .”

Professora: “Essa rotação foi em qual sentido, aluno LC?”

Aluno LC: “No sentido horário.”

Professora: “E com a segunda malha quadriculada? O que aconteceu? O ângulo entre as retas concorrentes sofreu alguma alteração?”

Aluno LB: “Não, professora, o ângulo entre as retas continuou sendo de 45° , mas a letra T foi rotacionada para o outro lado, no sentido anti-horário.”

Professora: “O que me dizem quanto à medida do ângulo de rotação sofrido pela imagem da letra T na segunda malha quadriculada?”

Classe: “ 90° também.”

Professora: “Vocês conseguem perceber alguma relação entre o ângulo de rotação sofrido pela imagem da letra T e as retas concorrentes, segundo as quais a letra foi refletida seguidamente?”

Aluna MCr: “Sim, o ângulo de rotação é o dobro do ângulo entre as retas concorrentes.”

Professora: “O que me dizem com relação ao sentido da rotação? Por que em uma das malhas quadriculadas da atividade 5 a rotação foi no sentido horário e na outra, no anti-horário?”

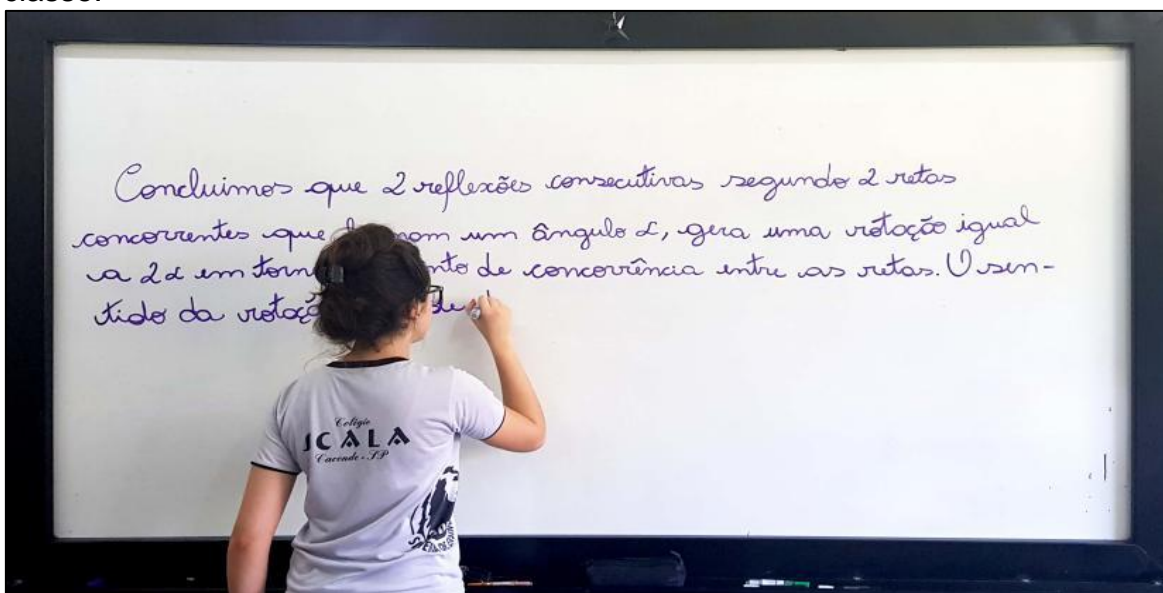
Aluna ML: “Eu acho que tem a ver com a ordem das retas sobre as quais fizemos as reflexões. Porque, quando fizemos a reflexão, primeiro segundo a reta vermelha e depois segundo a reta azul, a rotação foi no sentido horário. Quando mudamos a ordem das reflexões, mudamos também o sentido da rotação.”

Professora: “É exatamente isso.”

Professora: “Precisamos escrever uma nova conclusão acerca da atividade 5. Usaremos, nessa nova síntese, uma linguagem mais geral.”

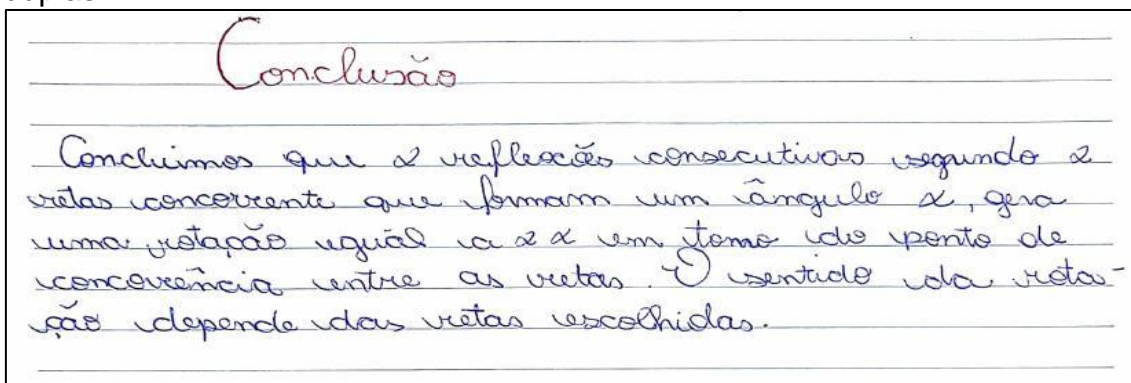
Então, solicitei um voluntário para ser o relator da nova síntese elaborada por todos os colegas, escrevendo-a na lousa para que as duplas pudessem copiar a resposta em uma folha avulsa, que seriam entregues a mim.

Figura 31. Aluna escrevendo na lousa a síntese da atividade 5, elaborada por toda a classe.



Fonte: Autoria própria.

Figura 32. Síntese da atividade 5 elaborada por toda a classe e copiada por uma das duplas



Fonte: Autoria própria.

CAPÍTULO 3: ANÁLISE CRÍTICA SOBRE AS AULAS APLICADAS

1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo, apresentamos a última etapa da metodologia de Pesquisa de Aula- *Lesson Study*, que consiste em uma reflexão sobre:

- A prática docente
- O cumprimento dos objetivos inicialmente propostos no planejamento de uma aula
- Sugestões de melhorias ou eventuais mudanças na sequência didática

Tem-se como objetivo a melhoria da aula para que possa ser reaplicada pelo mesmo professor a outras turmas ou ainda por outros profissionais em suas turmas com as melhorias já apontadas.

2. CONSIDERAÇÕES FINAIS

2.1. CONSIDERAÇÕES FINAIS – ATIVIDADES 1, 2 e 3

No tocante à atividade 1, foi possível observar que os alunos compreenderam facilmente o fato de que uma imagem digital pode ser considerada uma matriz. Sendo assim, cada um dos elementos dessa matriz representa um pixel da imagem digital. Também não tiveram dificuldades em lidar com o sistema binário de cores, uma vez que eles já haviam explorado esse conteúdo nas aulas de física. Isso favoreceu o entendimento de que na imagem digital binária são usadas apenas duas cores, preta e branca, que estão associadas aos valores zero e um respectivamente.

Figura 33. Resposta do item b, apresentada por uma das duplas.

Item b: A partir da matriz identificada, descreva com a notação a_{ij} cada elemento da matriz A (apresentada acima) que está pintado de preto.

$$\begin{array}{c}
 A_{1,3} \\
 A_{1,4} \\
 A_{1,5}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{c} A_{1,3} \\ A_{1,4} \\ A_{1,5} \end{array}} \right\} A_{2,4}
 \left. \vphantom{\begin{array}{c} A_{1,3} \\ A_{1,4} \\ A_{1,5} \end{array}} \right\} \begin{array}{c} A_{3,1} \\ A_{3,2} \\ A_{3,4} \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{c} A_{1,3} \\ A_{1,4} \\ A_{1,5} \end{array}} \right\} \begin{array}{c} A_{4,1} \\ A_{4,4} \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{c} A_{1,3} \\ A_{1,4} \\ A_{1,5} \end{array}} \right\} \begin{array}{c} A_{5,1} \\ A_{5,3} \\ A_{5,4} \end{array}$$

Fonte: Autoria própria

Na atividade 2, os alunos perceberam que a ação de dobradura que eles realizaram sobre a malha quadriculada permitiu que reproduzissem os elementos coloridos em verde, vermelho e azul em outra posição. Esta apresentou os índices de linha trocados de lugar com os índices de coluna quando comparados aos índices de linha e coluna dos elementos originalmente coloridos em verde, vermelho e azul. Eles se entusiasmaram ao perceberem que essa ação estava associada à operação de transposição matricial. Mas, não conseguiram identificar que a operação geométrica efetuada sobre os elementos coloridos era a de reflexão segundo a diagonal principal da matriz representada pela malha quadriculada que manipulavam. Todavia, esse fato não compunha o objetivo do item d, podendo ou não ser notado nesse momento.

Por isso, avaliamos que o objetivo da atividade foi alcançado, pois ela despertou nos alunos a curiosidade sobre “qual é essa ação que faz, na prática, os elementos de uma matriz se comportarem como elementos transpostos dessa mesma matriz?”.

Figura 34. Resposta do item d, apresentada por uma das duplas

Item d: Compare os índices da linha (i) e da coluna (j) dos elementos originalmente coloridos em verde, vermelho e azul com os índices de linha (i) e coluna (j) dos elementos correspondentes obtidos pela dobradura. Para facilitar a análise preencha a tabela abaixo. Em seguida anote suas conclusões.

Cores	Notação a_{ij} dos elementos originalmente coloridos	Notação a_{ij} dos elementos reproduzidos a partir da dobradura
Verde	a_{24}	a_{42}
Vermelho	a_{32}	a_{23}
Azul	a_{53}	a_{35}

Conclusões:

Observa-se que, ao identificar a diagonal principal e reproduzir os pixels coloridos, os novos elementos apresentam uma inversão a_{ij} , ou seja, o que originalmente era linha agora é coluna; e o que era coluna torna-se linha.

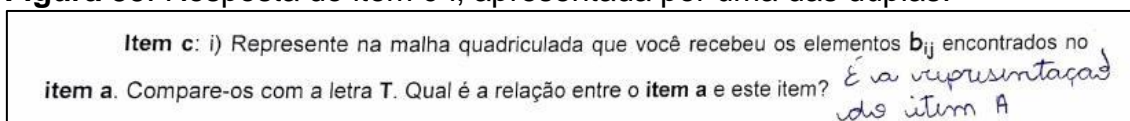
Fonte: Autoria própria.

Analisando criticamente a aplicação da atividade 2, gostaríamos de chamar a atenção para um momento da aula: quando o aluno LB chamou a professora para lhe dizer que não havia entendido o que era para ser feito no **item b**. A professora pediu que ele fizesse segundo a sugestão dada por sua colega MC, repetindo a fala da aluna. Julgamos que essa ação não foi coerente com a metodologia de trabalho (Lesson Study) escolhida para a aplicação desse projeto, uma vez que o aluno teve nesse momento a resposta de sua dúvida prontamente apresentada pela professora. Pensamos que a conduta mais apropriada para essa situação teria sido de que a professora solicitasse à dupla de alunos uma nova, atenta e pausada leitura do item mencionado para levar à compreensão. Assim, eles teriam a chance de fazer uma correta interpretação da atividade, descobrindo sozinhos o que deveria ser feito nessa questão.

A atividade 3 teve um resultado satisfatório. Julgamos que o objetivo da atividade foi alcançado:

Os alunos concluíram que, dada uma imagem digital binária representada por uma matriz quadrada, é possível discriminar a cor de seus pixels utilizando a notação matricial \mathbf{b}_{ij} . (Exemplo: $\mathbf{b}_{71} = 0$ (pixel preto) e $\mathbf{b}_{62} = 1$ (pixel branco)). Observaram também que é possível identificar uma imagem digital binária, mencionando-se, através da notação matricial, a cor de cada pixel. Esse fato é trabalhado no item c-i.

Figura 35. Resposta do item c-i, apresentada por uma das duplas.



Fonte: Autoria própria.

Perceberam que a letra T original e a letra T obtida após dobradura eram congruentes (tanto a letra T formada pelos elementos \mathbf{b}_{ij} , quanto a letra T formada pelos elementos \mathbf{b}_{ji}), por se sobreporem quando a malha quadriculada (que representava uma matriz quadrada de ordem 9 x 9) era dobrada segundo a diagonal principal.

Figura 36. Resposta do item c-iii, apresentada por uma das duplas

iii) Considerando que a malha quadriculada que você recebeu representa uma matriz quadrada de ordem 9×9 , dobre-a segundo a diagonal principal. O que observou? Escreva com suas próprias palavras. Se necessário, use o espelho que você recebeu, para validar sua conjectura.

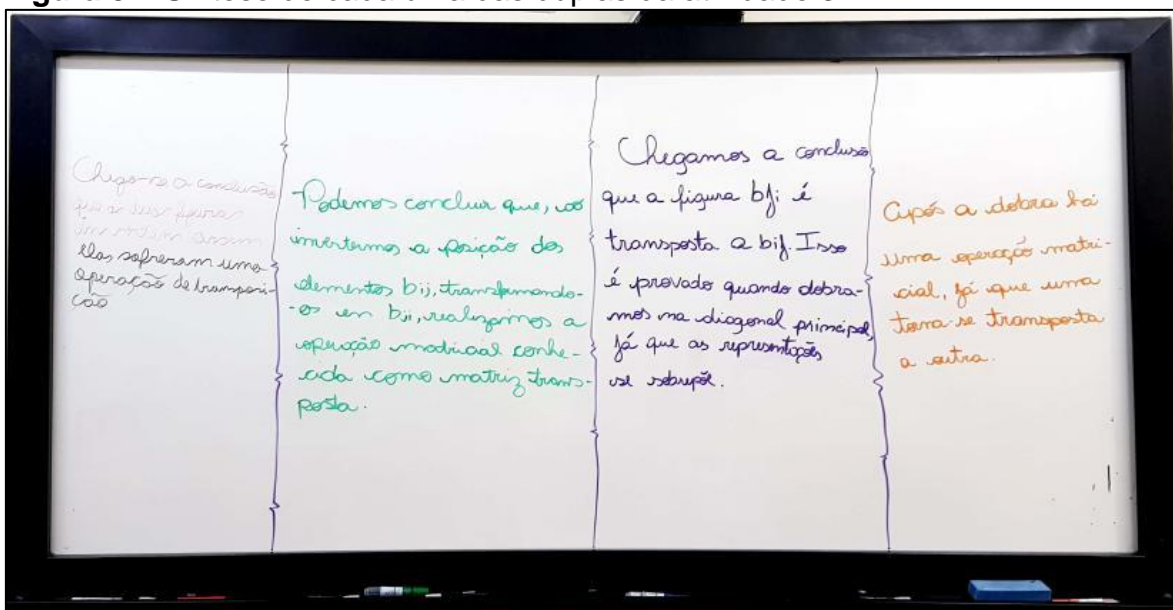
As duas as letras ficaram sobrepostas uma a outra.

Fonte: Autoria própria.

Os alunos notaram, após dobradura, que a matriz com a imagem da letra T composta pelos elementos b_{ji} , representava a matriz transposta da matriz original com a letra T formada pelos elementos b_{ij} e vice-versa. Eles se entusiasmaram com a descoberta de que através de uma dobradura foi possível efetuar, na prática, a operação de transposição matricial (operação matricial que faz parte da grade curricular dos alunos do 2º ano do Ensino Médio, na disciplina de Matemática).

Os alunos apresentaram dificuldades em associar o nome **reflexão** à operação geométrica que estavam estudando ao reproduzir os elementos destacados em preto da malha quadriculada, que representava uma matriz quadrada de ordem 9×9 , operação de dobradura da malha segundo a diagonal principal. Essa dificuldade é notada nas sínteses por eles elaboradas da atividade 3.

Figura 37. Síntese de cada uma das duplas da atividade 3



Fonte: Autoria própria.

Eles mesmos perceberam que seus textos estavam incompletos, pois a síntese deveria conter informações que relacionassem a operação geométrica executada sobre a letra T a uma operação matricial. Todas as sínteses mencionaram apenas a operação matricial. Ao notarem esse fato, ficaram ansiosos por quererem descobrir o nome da operação geométrica que haviam acabado de efetuar com a malha quadriculada. Quando alguém da sala sugeriu que essa operação é a **reflexão** segundo a diagonal principal, os demais se comportaram como se soubessem o tempo todo da resposta, mas haviam esquecido momentaneamente. Até julgaram óbvio que tal operação fosse a **reflexão**, pois eles usaram o espelho para executá-la.

Pensamos que essa dificuldade em relacionar o nome **reflexão** à operação geométrica em questão pudesse ter como justificativa o fato de os enunciados das atividades não mencionarem o verbo “**refletir**” em nenhum dos itens. Associado a isso, também existe o fato de a escola ser apostilada, o que faz com que alunos e professores sintam-se pressionados a concluir as apostilas dentro do prazo estipulado, não restando muito tempo para a realização de atividades práticas.

Acreditamos que, se as operações geométricas de simetria por reflexão, isometria por translação e isometria por rotação de figuras no plano tivessem sido lembradas previamente a essa aula, essa dificuldade em determinar o nome da operação geométrica exercida sobre a letra **T** não existiria.

A partir da Atividade 3, passamos a trabalhar com a letra **T** do nosso alfabeto ao invés da letra **J**. Fizemos essa opção no intuito de facilitar a execução da atividade, uma vez que a letra **T** pode ser composta por uma quantidade menor de quadrinhos (da malha quadriculada) do que a letra **J**. Contudo, tal alteração não se fez necessária; poderíamos ter usado qualquer outra letra no lugar da **T**. Especialmente, mais exercícios de mesma natureza com figuras na malha quadriculada com menos simetrias axiais como da letra **T** seriam interessantes para fixação dos conteúdos trabalhados.

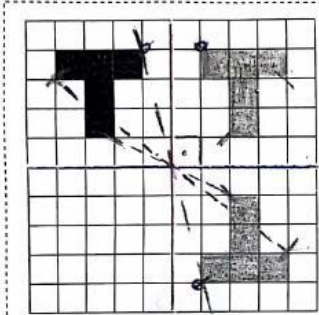
2.2. CONSIDERAÇÕES FINAIS – ATIVIDADE 4

Estava difícil de trabalhar com os alunos nesse dia; eles estavam com dificuldades em concentrar. Acreditamos que os compromissos com a “Mostra Cultural” da Escola e o próprio barulho que vinha do corredor interferiram

negativamente na qualidade da concentração e do envolvimento deles na atividade. Isso contribuiu para que o tempo da aula se estendesse em 25 minutos além do que fora planejado para a realização da atividade, assim como influenciou na dificuldade de os alunos elaborarem uma síntese completa e clara de suas conclusões sobre o exercício.

Figura 38. Síntese da atividade 4, elaborada por uma das duplas

x) Cole, no espaço abaixo, a malha quadriculada usada na atividade 4. E faça uma síntese das conclusões dos itens vii, viii e ix.



Após as reflexões feitas o ângulo entre os pontos correspondentes, é o dobro do ângulo formado pelas retas perpendiculares, mostrando-nos que há um efeito de rotação entre as reflexões.

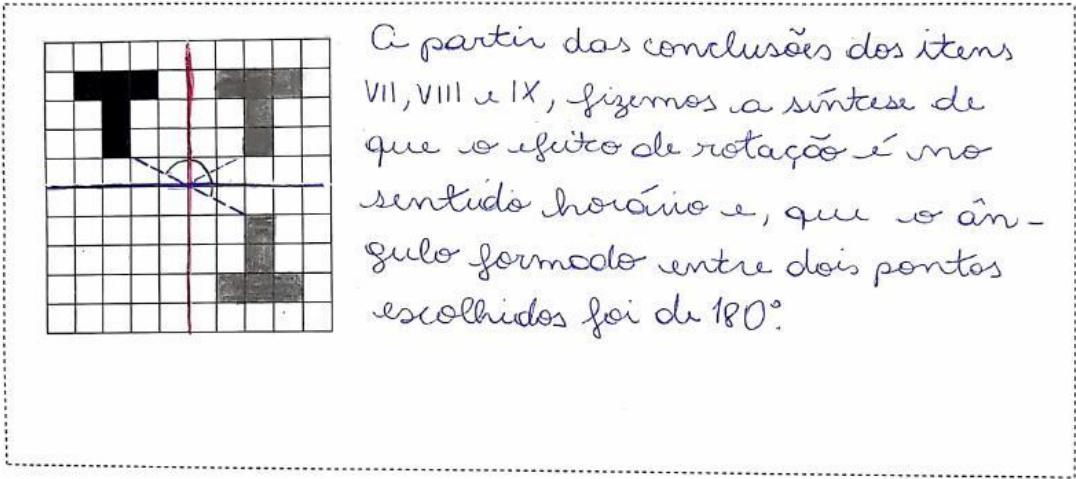
Fonte: Autoria própria.

Nessa síntese, os alunos não escreveram nada sobre o sentido (horário ou anti-horário) da rotação sofrida pela letra T.

Nessa outra síntese, os alunos não relacionaram a medida do ângulo formado entre os pontos da letra T dada e os pontos correspondentes na imagem da letra T na última posição, com o vértice no ponto de concorrência entre as retas vermelha e azul (ângulo de rotação), com o ângulo formado entre as duas retas concorrentes.

Figura 39. Síntese da atividade 4, elaborada por uma das duplas

x) Cole, no espaço abaixo, a malha quadriculada usada na atividade 4. E faça uma síntese das conclusões dos itens vii, viii e ix.



A partir das conclusões dos itens VII, VIII e IX, fizemos a síntese de que o efeito de rotação é no sentido horário e, que o ângulo formado entre dois pontos escolhidos foi de 180° .

Fonte: Autoria própria.

Apesar disso, o resultado final foi positivo, pois o objetivo da atividade foi alcançado. Os estudantes perceberam que a composição de duas reflexões segundo duas retas concorrentes (que, no caso particular, formavam um ângulo reto) determinou uma rotação (em torno do ponto de concorrência entre as retas) da figura da letra T original em 180° , no sentido horário. Esse fato pode ser notado na síntese da atividade 4, elaborada por todos os alunos da classe em conjunto.

Figura 40. Síntese da atividade 4, elaborada por todos os alunos da turma em conjunto.

Observamos que ao realizarmos duas reflexões em sequência duas retas concorrentes, formando um ângulo de 90° , houve um efeito de rotação de 180° , notamos que esse ângulo é o dobro do ângulo de 90° . Tal rotação deu-se no sentido horário.

Fonte: Autoria própria.

Pensamos que uma alteração que contribuiria para o enriquecimento da atividade 4 seria a proposta de estender a atividade, propondo aos alunos que também fizessem as reflexões da letra T em outra ordem. Primeiramente a reflexão da letra T

segundo a reta horizontal (reta azul) e, depois, segundo a reta vertical (reta vermelha). Eles constatariam que, das duas maneiras, as letras **T** ficariam sobrepostas, ou seja, a rotação de 180° ocorreria, em ambos os casos, em torno do ponto de concorrência entre as retas coloridas, porém em sentidos opostos. No primeiro caso, a rotação ocorreria no sentido horário e no segundo, no sentido anti-horário.

O objetivo aqui seria causar discussões entre os alunos e semear curiosidades:

- Será que isso sempre ocorrerá? Será que, ao se fazer a composição de duas reflexões de uma figura segundo duas retas concorrentes, independentemente da ordem escolhida das retas para as reflexões, a imagem final ocupará sempre a mesma posição?
- Será que a única diferença que ocorrerá nos dois procedimentos é o sentido da rotação?
- A rotação sempre ocorrerá em torno do ponto de concorrência entre as retas que geram o movimento?
- A figura sempre sofrerá uma rotação de ângulo de rotação de medida igual ao dobro do ângulo determinado entre as retas concorrentes que geram o movimento?

Esses questionamentos poderiam ser confrontados com as conclusões da atividade 5. Ajudariam na elaboração de uma síntese mais generalizada acerca da composição de duas reflexões no plano segundo duas retas concorrentes que formam um ângulo α entre si.

2.3. CONSIDERAÇÕES FINAIS – ATIVIDADE 5

De modo geral, pode-se dizer que os alunos tiveram facilidade na manipulação das malhas quadriculadas, uma vez que eles familiarizaram-se com as dobraduras durante a realização das atividades anteriores.

A dificuldade prevaleceu no que diz respeito à formulação das sínteses.

Elaboraram textos confusos e não gerais.

Figura 41. Síntese da atividade 5, elaborada por uma das duplas

x) Agora, na outra transparência, vamos repetir os passos anteriores dobrando primeiro segundo a reta AZUL e depois segundo a reta VERMELHA. Escreva todas as semelhanças e as diferenças observadas. Compare sua resposta com a síntese do item anterior e escreva uma conclusão. Em seguida, cole as malhas quadriculadas no espaço abaixo.

MALHA I

MALHA II

Continuação do item x, da atividade 5.

Em ambas as malhas, o ângulo formado entre as retas azul e vermelha foi o mesmo, ou seja, 45° . O formato da imagem não se alterou, porém, se adotarmos o plano cartesiano nos malhas, percebe-se que ao se refletir através da ~~reta~~ reta vermelha, correspondente ao eixo das ordenadas, em I, as reflexões ficaram no 2º quadrante, enquanto em II, elas ficaram no 3º e 4º quadrantes, ao se refletir pela diagonal secundária. ~~Essa reflexão~~ houve rotação no sentido horário e o ângulo formado entre pontos correspondentes vale 90° , e dele o ângulo de concorrência entre as retas azul e vermelha ^{anti-horário}.

Fonte: Autoria própria.

A dificuldade apresentada pelos alunos na elaboração das sínteses nos fez acreditar que devemos continuar investindo em questões dissertativas que forcem os alunos a elaborarem por escrito suas ideias, estratégias de resoluções de problemas, bem como conclusões resultantes de atividades executadas.

Verbalmente, os alunos conseguiram manifestar o conhecimento adquirido com a atividade. Contudo, sozinhos, não conseguiram sintetizar por escrito os novos conhecimentos.

Entretanto, concluímos que o objetivo da atividade 5 foi alcançado, pois, a partir de diálogos, notamos que os alunos perceberam o fato que uma rotação de uma figura em torno de um ponto do plano pode ser obtida através da composição de duas reflexões consecutivas segundo duas retas concorrentes no ponto considerado. O sentido da rotação é determinado pela ordem em que são tomadas as reflexões segundo as retas concorrentes. O ângulo de rotação tem medida igual ao dobro do ângulo determinado entre as retas.

Se a atividade 4 tivesse sido estendida, como sugerimos, os alunos teriam tido oportunidade de comparar, na conclusão da atividade 5, que a posição final de uma imagem submetida a composição de duas reflexões consecutivas segundo duas retas concorrentes nem sempre ocupa o mesmo lugar no plano se a ordem das reflexões for trocada. Esse fato geraria mais investigações e questionamentos.:

Os alunos teriam oportunidade de ampliar seus conhecimentos sobre a natureza das rotações num plano.

A limitação do tempo para concluir este trabalho de dissertação impediu de dar seguimento às atividades propostas como uma sequência didática, como a parte que associaria uma representação matricial 2×2 a uma rotação no plano em torno do ponto O , escolhido como o centro geométrico da malha quadriculada, e utilizando as retas perpendiculares (vermelha e azul da atividade 4) como eixos cartesianos. Assim também, com tal sistema cartesiano de coordenadas exibir uma representação matricial a uma reflexão segundo uma reta que passa por O . Desta forma, a composição de duas reflexões segundo retas concorrentes em O , estudada neste trabalho, estaria associada ao produto de matrizes que representam as reflexões. A atividade 5 ilustra um exemplo de produto não comutativo de matrizes.

Apesar dessa riqueza da sequência didática trabalhada, acreditamos que a associação mencionada acima é sofisticada em nível de Ensino Médio para ser sintetizada pelos alunos, e mesmo por professor. Entretanto, acreditamos que o trabalho conseguiu mostrar que a manipulação prática de dobraduras e a visualização dos efeitos geométricos para compreender a conexão entre o processamento digital de imagens e a linguagem da álgebra matricial são possíveis numa sala de aula, estimulando os estudantes para nova maneira de aprender conteúdos curriculares, de modo investigativo e com significados.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A realização deste trabalho nos foi bastante motivadora, pois conseguimos mostrar aos alunos do 2º ano do Ensino Médio uma aplicação bem contemporânea da teoria de matrizes (assunto que faz parte da grade curricular da disciplina de Matemática no Ensino Médio), sob uma perspectiva abordada pelo projeto Klein. Fizemos a ponte entre a matemática curricular escolar e a matemática científica, uma vez que os alunos puderam vislumbrar uma pequena parcela da aplicação da teoria das matrizes que está associada à imagem digital encontrada nas telas dos celulares, tablets, computadores, notebooks e televisores, tão presentes e marcantes em nossas vidas.

Para o trabalho em questão, foram propostas 5 atividades realizadas segundo a metodologia de Pesquisa de Aula – Lesson Study.

Seguindo os princípios da metodologia, as questões da sequência didática foram cuidadosamente elaboradas e aplicadas para que os alunos pudessem, por eles mesmos, construir novos conhecimentos.

Analisando os fatos ocorridos durante a aplicação das atividades, podemos constatar que nossos objetivos foram alcançados, de acordo com o plano de aula para cada atividade. Um primeiro objetivo foi alcançado quando os alunos compreenderam que uma imagem digital pode ser considerada uma matriz, e que cada um dos elementos a_{ij} dessa matriz representa um pixel da imagem digital. Entenderam ainda, através do uso de material concreto (dobraduras realizadas em malhas quadriculadas quadradas, impressas em papel vegetal), que as operações efetuadas sobre a matriz correspondem a transformações na imagem digital e que essas podem ser representadas como uma operação com matrizes.

Optamos em trabalhar com matrizes quadradas e imagens digitais binárias, ou seja, aquelas que usam apenas duas cores: preta e branca, tendo seus pixels associados aos valores 0 e 1 respectivamente.

Em termos pessoais, foi gratificante presenciar o entusiasmo dos alunos ao perceberem que:

- A operação matricial de transposição de uma matriz quadrada está relacionada à operação geométrica no plano de reflexão segundo a diagonal principal do quadrado, representado como uma matriz.

- A recíproca também é verdadeira, ou seja, a reflexão geométrica de um quadrado segundo sua diagonal principal pode ser representada pela operação de transposição de uma matriz quadrada que representa o quadrado geométrico.
- Duas reflexões no plano efetuadas consecutivamente segundo duas retas concorrentes que determinam ângulo α entre elas geram uma rotação de ângulo 2α ao redor do ponto de concorrência entre as retas.
- O sentido da rotação (horário ou anti-horário) é definido pela ordem em que são tomadas as retas na composição das reflexões correspondentes.

Observamos que os alunos dialogavam facilmente, discutindo seus novos conhecimentos, mesmo apresentando dificuldades em elaborar sínteses conclusivas das atividades realizadas.

Acreditamos que uma estratégia para reverter esse fato é continuar expondo os alunos a questões que exijam deles respostas dissertativas.

Neste trabalho, apresentamos algumas sugestões que podem ser incorporadas ao planejamento dessas atividades antes de sua reaplicação.

Temos consciência de que este trabalho pode ser ampliado e aprofundado. No entanto, esperamos que, com ele, outros professores se sintam motivados a elaborar adaptações de acordo com a realidade das escolas em que atuam e a trabalhar esse e/ou outros conteúdos que fazem parte da grade curricular da disciplina de matemática, em especial a teoria das matrizes.

Ainda sob ponto de vista pessoal, tenho a dizer que os ganhos adquiridos com o curso de Mestrado Profissional (PPGECE) ultrapassam a conclusão deste trabalho. Além do enriquecimento matemático adquirido com aulas assistidas, estudos pessoais e estudos dirigidos ocorridos durante o andamento do curso, nasceu também uma nova postura docente, baseada no estudo prévio e minucioso das aulas a serem aplicadas aos alunos. Estas serão criticamente analisadas para que possíveis melhorias sejam incorporadas antes delas serem reaplicadas.

REFERÊNCIAS

BALDIN, Y.Y., O Projeto Klein de Matemática em Português: uma ponte entre a matemática avançada e a escola. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. (2013), Ano 8, Nº 11, pp 409-417. Costa Rica

GONZALEZ, Rafael C.; WOODS, Richard E. Woods. *Processamento de imagens digitais*. Tradução: Roberto Marcondes Cesar Junior; Luciano da Fontoura Costa. São Paulo: Editora Blucher, 2000.

FELIX, T.F. *Pesquisando a melhoria de aulas de matemática seguindo a proposta curricular do Estado de São Paulo, com a Metodologia de Pesquisa de Aula (Lesson Study)*. 2010. 137p. Dissertação (Mestrado em Ensino De Ciências Exatas) UFSCar, Brasil, 2010.

Ensino Médio Bienal: Cadernos de 5 a 8: aluno - 1. Ed. – São Paulo: SOMOS Sistema de Ensino, 2017. P. 102–117

LEME, Brasil Terra; FURUYA, Yolanda K. Saito; BALDIN, Yuriko Yamamoto. *Geometria plana através de transformações*. Departamento de Matemática: Universidade Federal de São Carlos, São Carlos: 1982.

PESCO, Dirce Uesu; BORTOLOSSI, Humberto José. Imagens digitais e Matrizes. *Gazeta de Matemática*, v.169, p. 44-48, 2013.

<http://blog;kleinproject.org>

APÊNDICE A – Folhas de atividades

Folha de atividade 1

Texto preliminar de apoio para as atividades de 1 a 5.

Conceito de Imagem Digital

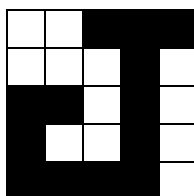
Uma imagem digital pode ser considerada como sendo uma matriz cujos índices de linhas e de colunas identificam um ponto na imagem, e o correspondente valor do elemento da matriz identifica o nível de cinza naquele ponto. Os elementos dessa matriz são chamados de **pixels** ou **pels**, abreviações de **Picture elements** (elementos da figura). (GONZALES e WOODS, 2000, p.4-5)

Logo, uma imagem digital pode ser considerada uma matriz, cujos índices de linhas (i) e colunas (j) indicam a posição de um ponto na figura. A cor deste ponto é representada pelo valor atribuído a ele. Quando a figura tem apenas duas cores, esta representação é explicada como segue: “O número **0 (zero)** indica a cor **preta** e o número **1** a cor **branca**. *Imagens digitais que usam apenas duas cores são denominadas **imagens binárias** ou **imagens booleanas**.*” (PESCO e BORTOLOSSI, p.1)

Com esta conceituação, trabalhamos as atividades de 1 a 5

Atividade 1

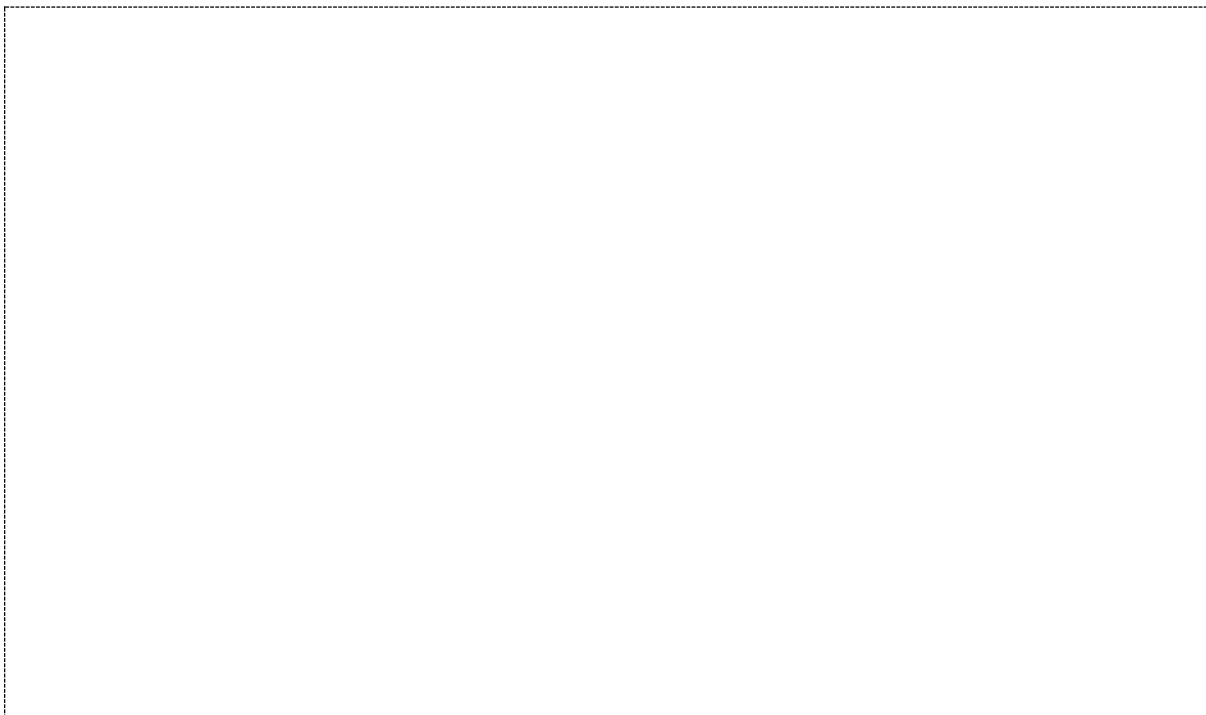
A Figura seguinte mostra um quadrado dentro do qual reconhecemos a figura da letra maiúscula **J** do nosso alfabeto.



Item a: De acordo com os conceitos da imagem digital, identifique o tipo de matriz que representa o quadro, e denomine-a como **A**.

Item b: A partir da matriz identificada, descreva com a notação a_{ij} cada elemento da matriz **A** (apresentada acima) que está pintado de preto.

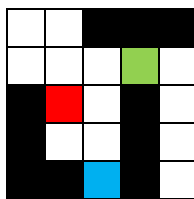
Item c: A matriz **A** é uma imagem digital, em que cada um de seus elementos a_{ij} representa um pixel da imagem digital. Utilizando a notação matricial, atribua valor a cada pixel da imagem representada por **A**, utilizando o sistema binário de cores, ou seja, 1 para os pixels brancos e 0 para os pretos.



Folha de atividade 2

Atividade 2

Alguns elementos da matriz **A**, utilizada na atividade 1, foram destacados em cores verde, vermelho e azul.



Item a: Descreva, com a notação a_{ij} cada um desses elementos associando-os com os nomes das respectivas cores.



Item b: Você recebeu, em papel vegetal, a réplica da matriz **A** (dada acima) no formato de um quadrado. Dobre esse quadrado segundo a diagonal principal e identifique a posição ocupada pelos elementos destacados em verde, vermelho e azul na folha dobrada, colorindo-as com suas respectivas cores.

Item c: Escreva fazendo uso da notação a_{ij} as novas posições de cada um dos elementos que você identificou. E cole, no espaço abaixo, o quadrado.

Item d: Compare os índices da linha (i) e da coluna (j) dos elementos originalmente coloridos em verde, vermelho e azul com os índices de linha (i) e coluna (j) dos elementos correspondentes obtidos pela dobradura. Para facilitar a análise preencha a tabela abaixo. Em seguida anote suas conclusões.

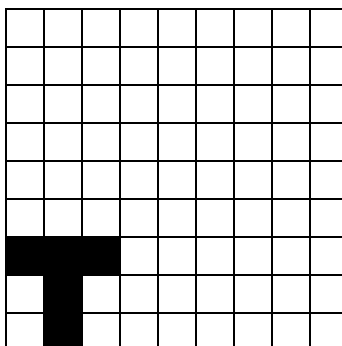
Cores	Notação a_{ij} dos elementos originalmente coloridos	Notação a_{ij} dos elementos reproduzidos a partir da dobradura
Verde		
Vermelho		
Azul		

Conclusões:

Folha de atividade 3.

Atividade 3

Considere a imagem digital representada por uma malha quadriculada **B** de ordem 9 x 9. Nela está inserida a letra maiúscula **T**.



Item a: Identifique com o uso da notação b_{ij} , os pixels cuja cor corresponde ao valor **0** (zero).

Item b: Para cada um dos pixels b_{ij} identificados, escreva o elemento b_{ji} , preenchendo a tabela.

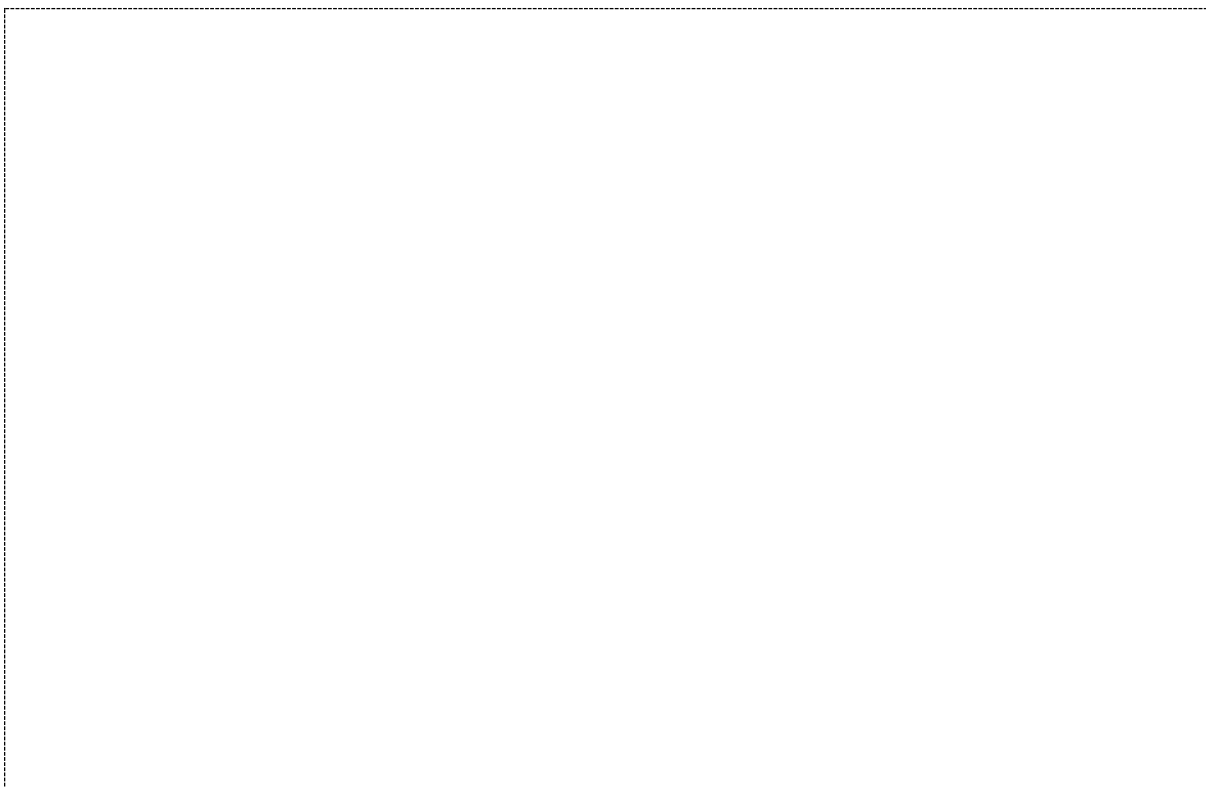
Pixels b_{ij}	Pixels b_{ji}

Item c: i) Represente na malha quadriculada que você recebeu os elementos b_{ij} encontrados no **item a**. Compare-os com a letra **T**. Qual é a relação entre o **item a** e este item?

ii) Represente na mesma malha quadriculada os elementos b_{ji} , que você registrou na segunda coluna da tabela do **item b**.

iii) Considerando que a malha quadriculada que você recebeu representa uma matriz quadrada de ordem 9×9 , dobre-a segundo a diagonal principal. O que observou? Escreva com suas próprias palavras. Se necessário, use o espelho que você recebeu, para validar sua conjectura.

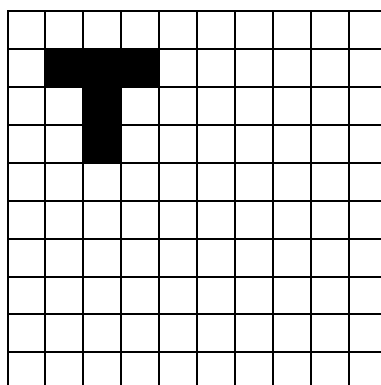
iv) Depois de feitos todos os passos anteriores, cole a malha no espaço abaixo e conclua com os colegas a síntese da atividade, relacionando a transformação geométrica sofrida pela imagem da letra T com uma operação matricial.



Folha de atividade 4

Atividade 4

Considere a seguinte imagem digital representada por uma malha quadrada **C**. Nela está representada a letra maiúscula **T**.



Efetue, na malha quadriculada que você recebeu, os seguintes procedimentos.

i) Dobre na metade, verticalmente, a malha quadriculada. Destaque, na cor **VERMELHA**, a reta representada pelo vinco dessa dobradura.

ii) Dobre na metade, horizontalmente, a malha quadriculada. Destaque na cor **AZUL**, a reta representada pelo vinco dessa dobradura horizontal.

iii) Qual é o ângulo formado entre a reta em **VERMELHO** e a reta em **AZUL**?

iv) Aproveitando a transparência do papel vegetal, projete a imagem da letra **T** refletindo-a segundo a reta destacada em **VERMELHA**, marcando com lápis os pixels da imagem obtida. Observe que a imagem é ainda uma letra **T**.

v) Em seguida projete a letra **T** que você acaba de obter, refletindo-a segundo a reta destacada em **AZUL**, marcando com lápis os pixels da imagem obtida.

vi) Compare a letra **T** dada inicialmente e a letra **T** da última posição obtida no item v. Que observações vocês fazem quanto ao formato de ambas? E quanto às posições?

vii) Consegue observar um efeito de rotação entre a posição inicial e a posição final da letra **T**? qual é o sentido dessa rotação? Dizemos que uma rotação tem sentido horário quando segue os movimentos dos ponteiros do relógio analógico e anti-horário no caso contrário.

viii) Qual é o ângulo formado entre pontos correspondentes da figura original e da sua imagem, com vértice no ponto de intersecção das retas **VERMELHA** e **AZUL**? Explore esta questão usando vários pontos da figura original. E elabore uma conjectura.

ix) Use um transferidor para testar a sua conjectura do item anterior. Explore uma relação entre o ângulo medido e o ângulo determinado entre as retas em **VERMELHO** e **AZUL**?

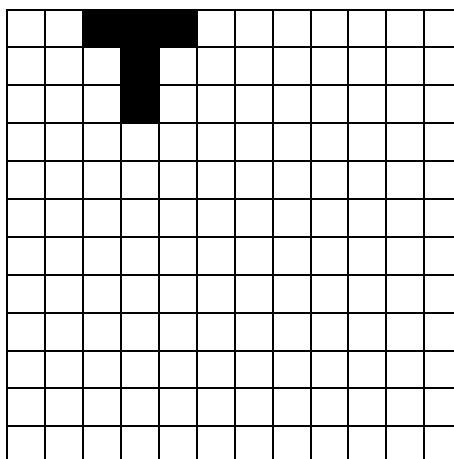
x) Cole, no espaço abaixo, a malha quadriculada usada na atividade 4. E faça uma síntese das conclusões dos itens vii, viii e ix.



Folha de atividade 5

Atividade 5

Consideremos a imagem digital.



Item a: Efetue, em uma das malhas quadriculadas que você recebeu, os seguintes procedimentos.

i) Dobre na metade, verticalmente, a malha quadriculada. Destaque, na cor **VERMELHA**, a reta representada pelo vinco dessa dobradura.

ii) Dobre, segundo a diagonal secundária, a malha quadriculada. Destaque na cor **AZUL**, a reta representada pelo vinco dessa dobradura.

iii) Qual é o menor ângulo formado entre a reta em **VERMELHO** e a reta em **AZUL**? Chame de **O** o ponto de concorrência entre as retas.



iv) Aproveitando a transparência do papel vegetal, projete a imagem da letra **T** refletindo-a segundo reta destacada em **VERMELHO**.

v) Em seguida projete a letra **T** que você acaba de obter, refletindo-a segundo a reta destacada em **AZUL**.

vi) Compare a letra **T** dada inicialmente e a letra **T** da última posição obtida no item v. Houve alguma alteração no formato da imagem que ocupa a posição final?

vii) Consegue observar um efeito de rotação entre a posição inicial e a posição final da letra **T**? Qual é o sentido da rotação?

viii) Qual o ângulo de rotação em torno do ponto **O**?

ix) Use um transferidor para conferir as respostas do item vii, comparando o efeito da rotação entre pelo menos três pontos da figura inicial e suas imagens após a rotação. Conclua a relação entre o ângulo de rotação medido e o ângulo determinado entre as retas em **VERMELHO** e **AZUL**.

x) Agora, na outra transparência, vamos repetir os passos anteriores dobrando primeiro segundo a reta **AZUL** e depois segundo a reta **VERMELHA**. Escreva todas as semelhanças e as diferenças observadas. Compare sua resposta com a síntese do item anterior e escreva uma conclusão. Em seguida, cole as malhas quadriculadas no espaço abaixo.

Continuação do item x, da atividade 5.

