UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – UFSCar

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS - PPGECE

ADALBERTO TOMAZ DE AZEVEDO

CONEXÃO ENTRE MATEMÁTICA E MÚSICA: UM PERCURSO PARA O ESTUDO DOS NÚMEROS RACIONAIS

SOROCABA

2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – UFSCar
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS - PPGECE

ADALBERTO TOMAZ DE AZEVEDO

CONEXÃO ENTRE MATEMÁTICA E MÚSICA: UM PERCURSO PARA O ESTUDO DOS NÚMEROS RACIONAIS

Adalberto Tomaz de Azevedo
ORIENTADOR: Prof. Dr. Paulo César Oliveira

SOROCABA
2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – UFSCar

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS - PPGECE

ADALBERTO TOMAZ DE AZEVEDO

CONEXÃO ENTRE MATEMÁTICA E MÚSICA: UM PERCURSO PARA O ESTUDO DOS NÚMEROS RACIONAIS

Dissertação elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas da Universidade Federal de São Carlos, campus Sorocaba, como exigência parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Exatas.

Orientação: Prof. Dr. Paulo César Oliveira

SOROCABA
2019

Azevedo, Adalberto Tomaz de

Conexão entre Matemática e Música: Um percurso para o estudo dos números racionais / Adalberto Tomaz de Azevedo. -- 2019.
188 f. : 30 cm.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal de São Carlos, campus Sorocaba, Sorocaba
Orientador: Paulo César Oliveira
Banca examinadora: Antônio Noel Filho, José Arnaldo Frutuoso Roveda
Bibliografia

1. Números Racionais. 2. Matemática e Música . 3. Registros de Representação Semiótica. I. Orientador. II. Universidade Federal de São Carlos. III. Título.

Ficha catalográfica elaborada pelo Programa de Geração Automática da Secretaria Geral de Informática (SIn).
DADOS FORNECIDOS PELO(A) AUTOR(A)
Bibliotecário(a) Responsável: Maria Aparecida de Lourdes Mariano – CRB/8 6979

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Adalberto Tomaz de Azevedo, realizada em 14/02/2019:

Prof. Dr. Paulo Cesar Oliveira
UFSCar

Prof. Dr. Antonio Noel Filho
IFSP

Prof. Dr. José Arnaldo Frutuoso Roveda
UNESP

Dedico esse trabalho a todas as pessoas que me incentivaram desde o início nessa empreitada: amigos, alunos e familiares. Aos meus professores de todas as épocas que me ensinaram a construir meu próprio aprendizado, e, principalmente à minha querida família: minha mãe Neuza, meu Pai José (in memorian), meus irmãos, Felícia e Alexandre, minha esposa Maiza e ao meu filho Bruno.

.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, que, além da própria vida, concedeu-me o dom de ensinar e principalmente o de aprender, propiciando oportunidades para que eu pudesse desenvolver e unir as minhas duas grandes paixões em uma proposta de ensino: matemática e música.

Agradeço aos meus pais maravilhosos que sempre estiveram ao meu lado em qualquer circunstância. ‘Seu Zeca’ (in memorian), que instintivamente foi fundamental em minhas escolhas pessoais e profissionais, ao comprar meu primeiro violão, e, ao incentivar-me a cursar a faculdade de matemática, e, ‘Dona Neuza’, meu grande exemplo, mulher que admiro por sua força e coragem, abrindo mão muitas vezes de suas vontades em prol dos filhos que tanto ama.

Por trás de todo ‘grande homem’ sempre existe uma grande mulher! No meu caso, uma mulher fantástica! Agradeço a minha querida esposa Maiza, que permitiu que esse meu sonho se realizasse, por ser meu apoio e por segurar a ‘barra lá em casa’ devido à minha ausência, e, principalmente por ter ficado ao meu lado quando isso era praticamente impossível, simplesmente porque sabia que sem ela, eu não conseguiria...O amor se faz através de atos, não simplesmente de palavras, ela sempre soube disso, e demonstrou da forma concreta. Te amo querida. ‘Gratidão’ por tudo!

Agradeço ao meu filho Bruno, o motivo maior de cada passo que dou...A minha maior inspiração, sendo o maior presente de Deus em minha vida, e, que mesmo com toda sua ansiedade, soube esperar e soube entender a ausência de seu pai. Pronto ‘Bu’...Terminamos. Agora vou poder jogar mais videogame contigo!

Não posso esquecer também de todos os meus amigos mestrandos que compartilharam alegrias, dúvidas, incertezas, apreensões e conhecimentos, durante mais de dois anos, principalmente aqueles da chamada ‘minha turma’: Luciana, Leandro, Wanderson, dentre outros. Vocês ajudaram demais. Ah, e, jamais esquecendo do meu ‘parceiraço’ e grande amigo Daniel...Como você sempre disse: ’Nenhum a menos’!! O ‘Betão’ também conseguiu!!!

Agradeço também a todos os meus professores do Mestrado, grandes profissionais, que compartilharam seus conhecimentos matemáticos e experiências de vida. Como esquecer do grande professor e amigo, Dr. Venezuela, ou do Dr. Noel, que iniciou comigo esse projeto, e, mesmo quando algumas circunstâncias não permitiram mais que continuássemos nossa parceria, contribuiu efetivamente para que eu conseguisse novamente me reorganizar. Cito também em especial, a Dra. Magda que apareceu no momento mais complicado para mim no curso. Depois de alguns tropeços, em que estava desiludido, abatido, quase desistindo...Muitos professores, talvez dissessem apenas um 'sinto muito'..., mas não! Ela foi muito além... Acreditou, e principalmente me fez acreditar que era possível reverter uma situação ruim, e, desse modo fez diferença em minha vida acadêmica!

Por último, deixo para agradecer, simplesmente ao 'Cara', que me aceitou como orientando, no meio do caminho, um pouco reticente, devido ao tema de minha pesquisa ser algo que ele tinha receio em poder me ajudar. Que nada!! Foi o melhor orientador que eu podia ter tido. Sei que, ficou um pouco preocupado no início, comigo dando 'cabeçadas', não conseguindo apresentar algo minimamente eficaz, pensando que de repente poderia ter cometido um erro em ter me aceitado..., mas, não foi!!!

Graças a Deus! Graças a ele, que tem o dom fantástico de discernir qual atitude tomar, que sabe com qual aluno está lidando, que sabe ser paciente quando é preciso, e que sabe cobrar quando percebe o aluno em um momento indeciso, sabendo também elogiar a cada evolução. Você é especial demais! Foi um privilégio tê-lo tido como professor e principalmente como meu orientador. Sem você, com certeza não teria acontecido. Ao te procurar no final de 2017, fui atrás apenas de alguém que me auxiliasse em meu trabalho, não sabia que iria encontrar além de um profissional 'único', também um excepcional amigo! Nós conseguimos! Meu muito obrigado Doutor Paulo César Oliveira!!!

Não feito, não perfeito, não completo

Não satisfeito nunca, não contente

Não acabado, não definitivo:

Eis aqui um vivo

Eis-me aqui.

Lenine

RESUMO

Esse trabalho teve por objetivo apresentar um processo de ensino-aprendizagem para uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental envolvida com o ensino de números racionais, em especial, as frações. A abordagem deste conteúdo escolar envolveu a conexão com a música, constituindo uma estratégia educacional não convencional. Com base nas contribuições teórico-metodológicas de Raymond Duval, o desenvolvimento desta pesquisa foi norteado pela seguinte questão de investigação: como a inserção da música no processo ensino-aprendizagem de números racionais contribui na mobilização dos registros de representação semiótica? Para sustentar a opção metodológica de uma pesquisa qualitativa descritiva e interpretativa, apresentamos no decorrer da escrita do relatório de pesquisa, aspectos históricos e elementos da teoria musical, como subsídios para explorar a potencialidade didático-pedagógica da conexão matemática e música no estudo do referido conteúdo escolar. No contexto da escola pública do Estado de São Paulo, na qual o Caderno do Professor é um material de apoio ao desenvolvimento de competências e habilidades prescritas no documento curricular oficial, foi elaborada pelo professor-pesquisador a proposta de ensino-aprendizagem sistematizada em seis tarefas descritas e analisadas a partir das produções escritas e interlocuções ocorridas com seus alunos, no decorrer das aulas de matemática. Apresentamos para o leitor a experiência proporcionada por esta conexão entre diferentes áreas do conhecimento, suas contribuições e sugestões para professores interessados nessa possibilidade educacional para o estudo de números racionais. A utilização da música nessa proposta de ensino possibilitou uma aprendizagem mais eficiente e abrangente com a coordenação e utilização dos diversos registros semióticos referente ao número racional ocorrendo de modo natural e significativo.

Palavras-chave: Ensino fundamental, número racional, registro de representação semiótica, música, fração.

ABSTRACT

This research aimed at presenting a teaching-learning process for a 6^{th} grade group from Elementary School involved with the teaching of rational numbers, especially fractions. The approach of this school content involved the connection with the music, constituting an unconventional educational strategy. Based on the theoretical-methodological contributions of Raymond Duval, the development of this research was guided by the following research question: how does the insertion of music into the teaching-learning process of rational numbers contribute to the mobilization of the registers of semiotic representation? In order to support the methodological option of a descriptive and interpretive qualitative research, we present historical aspects and elements of musical theory in the course of the writing of the research report, as subsidies to explore the didactic-pedagogical potentiality of the mathematical and music connection in the study of the school content already mentioned. In the context of the public school of the State of São Paulo, in which the Teacher's Notebook is a material to support the development of skills and abilities prescribed in the official curricular document, it was prepared by the teacher-researcher the teaching-learning proposal systematized in six tasks described and analyzed from the written productions and interlocutions occurred to his students during the mathematics classes. We present to the reader the experience provided by this connection between different areas of knowledge, its contributions and suggestions to teachers interested in this educational possibility for the study of rational numbers.The usage of music in this teaching proposal permitted a more efficient and comprehensive learning with the coordination and use of different semiotic registers concerning the rational number occurring in a natural and meaningful way.

Keywords: Elementary School, rational number, registers of semiotic representation, music, fraction.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

Sumário

1.INTRODUÇÃO

O Ensino da Matemática e em especial, o de números racionais nas escolas, em todos os níveis, apresenta-se como um grande desafio desde o início da sistematização escolar. Muito estudiosos e educadores sempre se debruçaram nessa difícil, porém necessária tarefa de encontrar soluções oferecendo novos caminhos que possibilitassem um ensino mais atraente e ao mesmo tempo mais eficiente.

Lopes (2008) em seu artigo “O que nossos alunos devem estar aprendendo sobre frações quando tentamos lhes ensinar sobre frações”, alerta para alguns problemas corriqueiros na aprendizagem de números racionais em seu registro fracionário, hoje em dia, trazendo a ideia de Peter Hilton sobre algumas maneiras já corriqueiras e equivocadas de ensinar frações: “Aplicações enganosas; Confusão com a função dos decimais; Ausência de cuidado com definições e explicações; Desonestidade de apresentação; Paixão pela ortodoxia.” (LOPES, 2008, p.3).

Dentre essas aplicações enganosas, Lopes (2008) destaca até mesmo problemas com falsas contextualizações, inventados pelo professor, totalmente fora da realidade do aluno, encontrados em diversas coleções de livros didáticos. Problemas do tipo: “Dois meninos treparam numa laranjeira e chuparam os 2/3 das laranjas que havia. Na laranjeira ficaram os 4/5 do que havia menos 14 laranjas. Quantas laranjas os meninos chuparam?” (LOPES, 2008, p.3), são considerados pelo autor como ‘marcas do século passado’.

Vaz (2006) em sua dissertação “Música e Matemática: novas tecnologias do ensino em uma experiência interdisciplinar”, também crítica essa falsa contextualização presente nos livros didáticos, sendo para ele, responsáveis, por essa aprendizagem deficitária. Este autor alega que esse fato ocasiona resultados poucos satisfatórios em relação à aprendizagem de números racionais, principalmente por não ser respeitado o estágio cognitivo de aprendizagem das crianças.

“Por fim, nota-se nos livros didáticos uma inversão do processo de pensamento natural da criança. A formalização é feita antes da apresentação das situações concretas” (VAZ, 2006, p.52).

Na relação notação decimal e número fracionário, Lopes (2008) salienta que a notação decimal venceu a guerra contra as frações na representação dos números ‘quebrados’, ou seja, dos números não-inteiros, restando a alguns poucos exemplos no dia a dia, situações nas quais a utilização dos números racionais em sua representação fracionária é utilizada, em detrimento da notação decimal, e, em sua grande maioria relacionada com a rotina dos adultos, como na marcação do combustível de um carro, no fracionamento do valor referente às férias, ou na medida do tamanho de uma chave de boca, por exemplo, porém ressalta a importância de seu estudo:

> O objetivo que persegui foi o de mostrar que, apesar de frações terem adquirido um outro estatuto no currículo, devido à perda de força do componente utilitarismo, seu ensino é essencial e inegociável, isto se atribuirmos a devida importância a outros aspectos: o cultural, o formativo (de natureza cognitiva) e o matemático. (LOPES, 2008, p. 20).

Outros autores, como Magina e Campos (2004) em seu artigo: ‘A fração nas perspectivas do professor e do aluno dos primeiros ciclos do Ensino Fundamental’, concebe que o conceito de fração será efetivamente entendido, se for explorado o conceito de fração em seus cinco significados: número, parte-todo, medida, quociente e operador multiplicativo, algo que encontramos também nas orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998, p.66): “o estudo dos números racionais, nas suas representações fracionária e decimal, merece especial atenção no terceiro ciclo, partindo da exploração de seus significados, tais como: a relação parte/todo, quociente, razão e operador”.

Para Magina e Campos (2004) o conceito parte-todo é resumido no ensino de frações, em atividades que utilizam a divisão de uma área em partes iguais e nomeando a fração com o número de partes pintadas levando o aluno a ter o raciocínio do conceito sobre frações apenas pela percepção, em detrimento da relações lógico-matemáticas desenvolvidas.

Além desses problemas encontrados por esses educadores citados, outro aspecto que merece destaque é a dificuldade encontrada pelos alunos devido à grande diversidade de registros semióticos que o objeto matemático número racional assume, e que de acordo com Raymond Duval, são essenciais para uma aprendizagem mais consistente.

Catto (2000) desenvolveu sua dissertação de mestrado intitulada “Registros de representação e o número racional: uma abordagem em livros didáticos”, por considerar que os registros de representação semiótica têm papel fundamental na aprendizagem matemática, em especial, as representações na forma simbólica, figural e língua natural.

No trabalho de Catto (2000), duas coleções de livros didáticos foram submetidas à análise e a escolha foi sobretudo feita em função de apresentarem abordagens dos conteúdos com características distintas. Uma delas de forma ‘compartimentalizada’ e a outra em forma de ‘espiral’. Procuramos avaliar em que medida os diversos registros do número racional eram apresentados.

Catto (2000) investigou como eram trabalhados os ‘tratamentos’ (transformações no interior de um mesmo registro) e as diferentes possibilidades de conversão (transformações de um registro ao outro). Pudemos constatar que, quanto aos tratamentos, uma das coleções privilegiou os realizados no registro numérico, enquanto a outra também os realiza no registro figural. No que se refere às conversões, uma das coleções as apresenta entre os registros figural e o simbólico, bem como entre os registros numéricos, fracionário e decimal, e na outra elas, aparecem de forma pouco significativa. Em geral, em ambas as coleções, foi priorizado um dos sentidos de conversão entre dois registros, não havendo discussões sobre o fenômeno da não-congruência.

Catto (2000, p.37) já afirmava que “a adoção do registro decimal para o uso de calculadoras, computadores, relógios digitais, etc., fez com que este se tornasse mais popular na atualidade.” Porém, para a autora, “não podemos relegar o estudo dos números no registro fracionário, mesmo porque em algumas situações esse se torna mais viável para operações com divisões em que seu custo operatório é facilitado”.

Nesse pensar do conceito ‘parte-todo’ através das divisões de áreas em partes iguais, Silva (2008) analisa e faz uma crítica de como as frações normalmente são apresentadas geometricamente, defendendo a utilização da representação na reta numérica, caracterizando-a como sendo muito mais benéfica para a aprendizagem.

> As frações são representadas geometricamente, em geral dimensão 2, circular ou retangular, fazendo uma analogia com a pizza ou com a barra de chocolate respectivamente, que difere totalmente do modo de representar a fração por meio da reta numérica ou graduada, que por sua vez, é pouco explorado, nas pesquisas, nos livros didáticos, e por nós, professores.(SILVA, 2008, p.53).

Os Parâmetros Curriculares já contemplam essa possibilidade: "localização na reta numérica de números racionais e reconhecimento de que estes podem ser expressos na forma fracionária e decimal, estabelecendo relações entre essas representações." (BRASIL, 1988, p.71)

Catto (2000), corrobora com essa ideia analisando que a reta é correspondente única entre ponto e número racional (fração).

Silva(2008) alega inclusive que há mais facilidades em entender as percepções de soma e relações de equivalência, e, a própria duplicação de um segmento, frisando ainda que esse tipo de representação usando a reta graduada, oferece a oportunidade do entendimento do universo ordenado envolvendo números racionais, algo que a representação figural na forma de pizza ou grades retangulares não consegue transmitir, além de ser isento de ambiguidades que segundo o autor podem ser ocasionados em função da ilustração não tão bem elaborada, e, que segundo ele, nesse caso é predominante.

Na chamada 'dimensão 2', através de desenhos de 'pizza' ou 'grades retangulares', Silva (2008) esclarece que é extremamente congruente e extremamente dependente da figura, a representação dos números que dão origem ao numerador e denominador, alegando que para frações impróprias é mais difícil o seu entendimento do que a reta, por necessitar a presença de mais de uma figura, diferente do que ocorre ao utilizarmos a reta numerada.

Apesar dessa preferência do autor pela 'dimensão 1', no caso a reta numérica, não existe propriamente uma negação pela 'dimensão 2', por essa ser responsável "por bons resultados de aprendizagem". (SILVA, 2008, p.65).

Para os autores Magina e Campos (2004), outras situações podem servir como alicerce da apreensão pelos alunos sobre as relações lógico-matemáticas envolvidas utilizando, por exemplo, a relação existente das frações como quociente.

Na representação de um número racional como quociente, temos que a;b = $\frac{a}{b}$, com ‘a’, ‘b’ inteiros, e com ‘b’ diferente de zero, que segundo Catto (2000), ao relacionar a divisão com o seu valor equivalente a um inteiro, como 4/4 = 1, essa equivalência pode favorecer inclusive o cálculo de frações.

Catto (2000, p.36) ilustra essa afirmação com um simples exemplo: “$\frac{17}{10}$ = $\frac{10}{10}$ + $\frac{7}{10}$, e, facilita inclusive no cálculo estimativo, já que $\frac{4}{5}$ + $\frac{9}{10}$ obtém como resultado aproximadamente 2”.

Percebemos e concordamos que se faz necessário conduzir a aprendizagem de números racionais utilizando os diversos registros semióticos existentes a esse objeto matemático, com seus mais diversos significados, não privilegiando apenas o registro fracionário ou decimal, e, nem a sua significação como ‘parte-todo’ ou mesmo como divisão entre dois números inteiros, mas de modo conecto, agregando todas essas vertentes na busca pela apreensão conceitual de forma mais consistente, sendo cada representação importante em determinada circunstância, seja na economia de cálculos, na visualização concreta do conceito, na ordenação adequada dos números, e, nas mais diversificadas formas, contribuindo desse modo para uma aprendizagem plena do objeto matemático.

Unindo paixões: objetivos e justificativas

Nessa busca por uma aprendizagem mais significativa, ao elaborarmos nosso projeto de pesquisa, optamos em conectar a Música com a Matemática, por ser esta, uma ciência e uma arte presente na vida de quase todas as pessoas, e que possivelmente irá despertar nos alunos, um interesse muito maior na aprendizagem de números racionais principalmente em seu registo fracionário, e apesar de sua utilização ter perdido espaço para a notação decimal, conforme salienta Lopes (2008), sua importância histórica e contemporânea, é inegável.

Acrescentamos a isto o aspecto cognitivo e conceitual, a partir do aporte teórico-metodológico de Duval (2012), sobre os Registros de Representação Semiótica, o qual apresentamos no decorrer da redação do capítulo 3 desse relatório de pesquisa, já que a música pode de forma análoga contribuir para a utilização de diversos registros semióticos que o objeto matemático número racional assume.

Desse modo nosso objetivo principal, para essa pesquisa é o de oferecer através da conexão entre Matemática e Música uma aprendizagem contextualizada, no que concerne o estudo de frações, e de modo mais abrangente, de números racionais, para alunos do 6º ano do Ensino Fundamental.

Mas como dar andamento a essa proposta de ensino-aprendizagem, conectando música e números racionais, de forma adequada e relevante?

A escolha do meu orientador, Dr. Paulo César Oliveira, foi de essencial importância pois ajudou a responder essa pergunta de modo mais consistente.

Ao realizar os primeiros estudos e iniciar a produção do texto referente à a dissertação, lembro-me claramente de suas observações: eu defendia a música. Utilizava argumentos dizendo que a Música seria motivadora, pois estava presente em diversas culturas, em diversas atividades. Dizia que a música, de acordo com o seu estilo, era responsável por provocar diversas sensações nas pessoas, e, desse modo, ao utilizá-la, de modo adequado, conduziria os alunos a uma aprendizagem mais atraente. Citava exemplos, como a música utilizada num filme de terror servindo para dar a atmosfera obscura pedida de tensão ou medo, ou da sua utilização para elevar a venda de um produto num jingle promocional, ou mesmo, ambientar de forma única um encontro de amor.

Argumentava que assim como a Música traz benefícios em qualquer outra atividade, sua utilização de forma apropriada, estimularia e facilitaria a aprendizagem dos alunos no estudo da Matemática, sendo uma ferramenta fantástica nesse sentido.

E, em meio a esses argumentos, um pouco frágeis, a observação sempre pertinente do meu orientador: ‘O seu trabalho é sobre música relacionada ao ensino de frações. Você defende a Música, mas, é só isso? O que ela acrescenta na aprendizagem de frações, e até mesmo de números racionais?'

A Música pode ser tudo! Motivadora, encantadora, espetacular, maravilhosa, mas se não contribuir para a aprendizagem matemática dos alunos, será desnecessária e facilmente esquecida após 5 minutos de sua utilização. Como justificar então um trabalho envolvendo essa conexão?

Nesse aspecto, munido de suas considerações em mente, parti para a revisão bibliográfica da produção acadêmica de teses e dissertações, que subsidiaram muitas ideias e possibilidades, de como desenvolver meu projeto de pesquisa, ao me deparar com diversos trabalhos valiosos, de como a música pode contribuir na aprendizagem dos alunos sobre matemática em diversos conteúdos; especialmente de números racionais, que contribuíram de forma efetiva para a construção do referencial teórico e da própria análise presentes nesse trabalho.

Pesquisadores como Pillão (2009) e Santos Junior (2014) citam que a lei 11.769 implantada em agosto de 2008 que incrementa a obrigatoriedade do ensino de música nas escolas como um dos fatores a serem considerados na utilização da música de modo interdisciplinar. Com base em nossa prática escolar, 10 anos após a implementação da lei, a obrigatoriedade da música nas escolas da rede pública, não é efetiva, sendo apenas utilizadas por iniciativas isolada de professores e coordenadores.

Muita coisa eu sabia sobre Música e Matemática, e, principalmente sobre os benefícios que a Música traz para quem a estuda, tanto do ponto de vista cognitivo como social, mas faltava o mais importante, saber como ela poderia ser importante na aprendizagem da Matemática para alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, ou mais precisamente, na aprendizagem de números racionais para esses alunos.

No meu contexto de docência em escola pública utilizamos em nossas aulas o material de apoio ao Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2012), denominado Caderno do Professor e Caderno do Aluno.

No caso do primeiro volume do Caderno do Professor para o 6º ano, o mesmo contém duas Situações de Aprendizagem, que pretendem orientar a ação do professor na sala de aula para o estudo das frações, mais especificamente, suas diferentes formas de representação (números mistos e porcentagem, por exemplo) e a noção de ideia de equivalência e das operações com frações.

De acordo com esse material, "o professor pode propor outros exercícios complementares ou, até mesmo, modificar as atividades propostas para adequá-las às exigências de seu curso e às características de sua turma" (SÃO PAULO, 2012, 6º ano, v.1, p.7, 2014-2017). Nesse sentido, com base no material disponível aos professores das escolas públicas, em termos de pesquisa, construímos nossa questão de investigação: **Como a inserção da música no processo ensino-aprendizagem de números racionais contribui na mobilização e coordenação dos registros de representação semiótica?**

Em nossa revisão bibliográfica não encontramos nenhuma pesquisa que relacionasse a conexão música e frações como forma de complementar as tarefas existentes no Caderno do Aluno e do Professor, tampouco, fundamentada sob a ótica das contribuições da teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval.

Para cumprir o propósito dessa pesquisa e responder a nossa questão de investigação, o relatório foi dividido em seis capítulos, sendo o primeiro, o capítulo de introdução. No segundo capítulo apresentamos conexões entre a matemática e música em nível histórico, com conceitos musicais utilizados nas tarefas para os alunos do 6ºano do Ensino Fundamental.

Os Registros de Representação Semiótica e as conexões pertinentes ao nosso tema de pesquisa são contemplados no terceiro capítulo.

A análise dos documentos curriculares: Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998), Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2012) e o primeiro volume do Caderno do Professor e do Aluno para o 6º ano do Ensino Fundamental, são abordados no quarto capítulo.

O capítulo 5 apresenta o percurso metodológico de nossa pesquisa.

No capítulo 6 trazemos as análises das atividades efetuadas pelos alunos do 6º ano B do Ensino Fundamental da escola E.E. João Rodrigues Bueno, com base em nosso referencial teórico.

Redigimos nossas “Considerações Finais”, retomando o processo de pesquisa e a busca por resposta à nossa questão de investigação. Para finalizar a redação do relatório de pesquisa, listamos as referências bibliográficas efetivamente utilizadas em todo o processo de investigação.

Dedicamos o anexo desta dissertação de mestrado para abordamos elementos da teoria musical, os quais contribuem para a relação pedagógica entre música e números racionais.

2. PERCURSO TEÓRICO

Neste capítulo tratamos de fornecer algumas informações e procurar esclarecer alguns laços entre Matemática e Música que são essenciais na construção de nosso trabalho que procura conectar à arte da Música com o ensino de números racionais, em especial o ensino de frações, para alunos do 6º ano do Ensino Fundamental trazendo também alguns conceitos de teoria musical devido à sua importância, principalmente referente às tarefas elaboradas para os alunos participantes da pesquisa.

Ao final dessa dissertação apresentamos em anexo para o leitor um material complementar envolvendo a conexão entre Matemática e Música com conceitos de teoria musical.

2.1 De Pitágoras a Bach: a formalização da música como conhecemos hoje

Matemática e Música, Pitágoras e Bach, dois nomes importantíssimos da história do nosso mundo em todos os tempos, que podem representar de modo magnífico, cada uma dessas áreas de conhecimento, essenciais na vida de todos os povos, desde o início da história do homem, com a Matemática utilizada na contagem de objetos, ou da Música, com seu poder exercido na mitologia grega, e, que, embora possam parecer um tanto distantes pela própria organização existente nas disciplinas escolares, apresentam laços profundos conhecidos desde a antiguidade.

> O poder conquistador supra-humano da música já se expressa na mitologia grega em Orfeu, cujo canto acompanhado de lira sustava rios, amansava rios e movia pedras. A matemática também faz-se presente desde os tempos mais remotos, por exemplo, na contagem de objetos. (ABDOUNUR, 2006, p.VII.)

A Matemática é utilizada no entendimento e desenvolvimento da Música e a Música, nessa via de mão dupla, tem o mesmo papel em relação à Matemática.

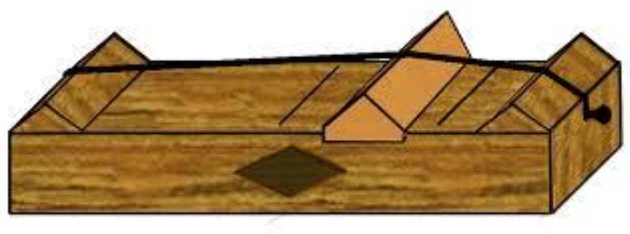
> Matemáticos e físicos como Pitágoras, Euclides, V. Galilei, G. Galilei., L. Euller e J. Kepler, entre outros sentiram a analogias entre matemática e música. Por outro lado, os músicos recorreram à matemática para descrever a sua arte, tais como

> J.P. Rameau, J.S. Bach, F. Chopin, A. Shoenberg, entre outros. (SANTOS-LUIZ, 2015, p.272)

A Música grega, por volta do século VI a.C., contribuiu efetivamente para a evolução da Matemática pura por meio do primeiro experimento científico que se tem registro realizado pela humanidade, de acordo com Abdounur (2006), no qual Pitágoras por meio da criação de seu instrumento musical, chamado monocórdio, descobriu a relação existente entre sons agradáveis aos ouvidos, presentes na música, e sua relação com as razões matemáticas, imprescindíveis para sua compreensão e evolução.

Pitágoras criou então um instrumento, chamado monocórdio, composto por uma caixa acústica e uma corda esticada presa a dois cavaletes fixos, e com um cavalete móvel no qual era possível pressionar a corda em distâncias diferentes, ouvindo o som que ela produzia nesses diversos comprimentos.

Figura 1: Esboço do monocórdio

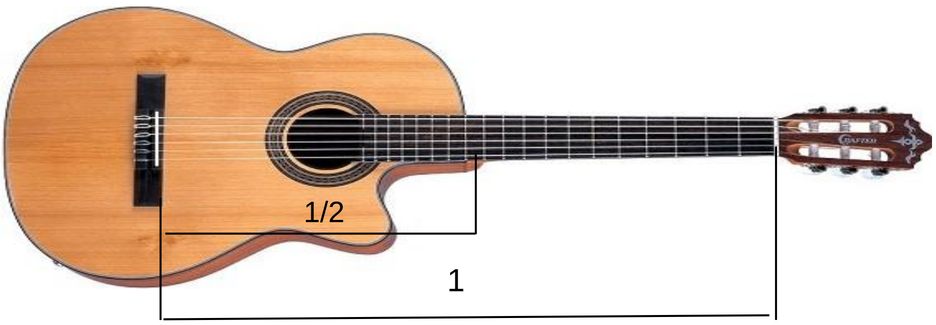


Fonte:http://clubes.obmep.org.br/blog/aplicando-a-matematica-basica-construcao-de-um-monocordio/

O violão pode muito bem representar a ideia desse instrumento, porém com seis cordas ao invés de uma, e o utilizaremos para ilustrar a descoberta de Pitágoras.

Primeiramente Pitágoras fez a corda produzir som fazendo-a vibrar em seu comprimento total. Em seguida fez a corda vibrar na metade de seu comprimento (Figura 2). Encontrando assim um som harmonioso, consonante com o som produzido pela corda solta. No caso, o som encontrado era o mesmo (oitava justa), porém com altura diferente (era mais agudo, porém soava igual ao som anterior).

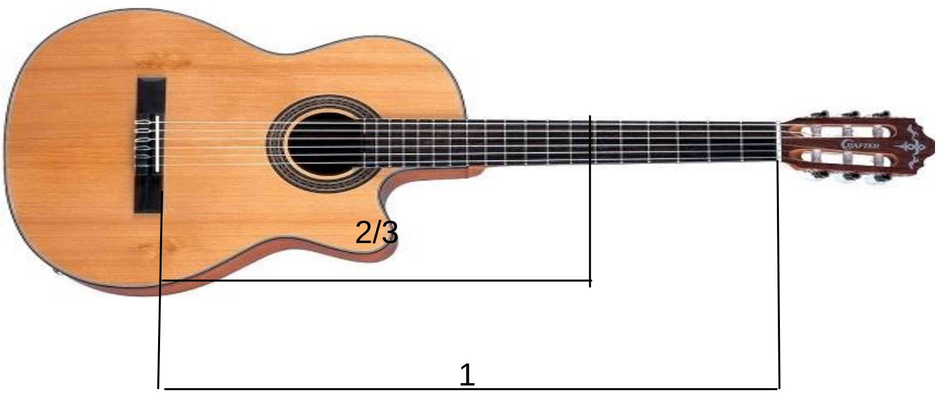
Figura 2: Esboço de oitava justa



Fonte:Figura:https://br.depositphotos.com/163587450/stock-illustration-real-acoustic-guitar-on-a.html. Marcações: próprio autor

Em seguida, Pitágoras encontrou outro intervalo, que soava de modo agradável ao ouvido: o intervalo consonante de quinta justa, no qual o som era produzido com a corda pressionada em $\frac{2}{3}$ de comprimento (Figura 3).

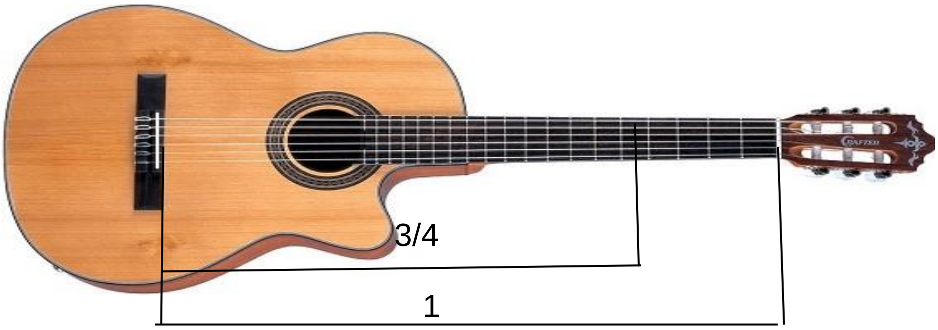
Figura 3: Esboço de quinta justa



Fonte:Figura:https://br.depositphotos.com/163587450/stock-illustration-real-acoustic-guitar-on-a.html. Marcações: próprio autor

O próximo intervalo encontrado por Pitágoras foi o de quarta justa, em $\frac{3}{4}$ do comprimento conforme “figura 4”.

Figura 4: Esboço de quarta justa

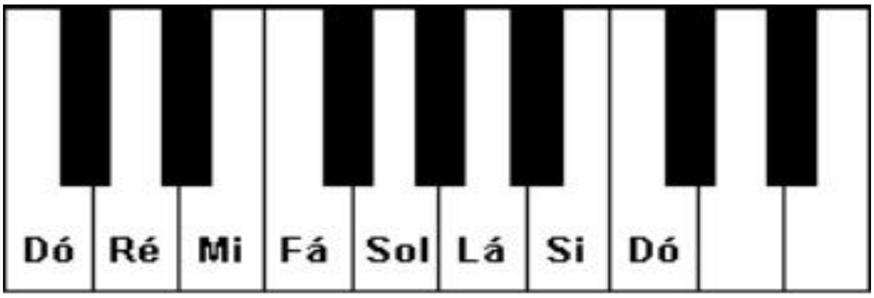


Fonte:Figura:https://br.depositphotos.com/163587450/stock-illustration-real-acoustic-guitar-on-a.html. Marcações: próprio autor

Esses intervalos, chamados de consonâncias pitagóricas, são atribuídos à Pitágoras embora possam ter sido conhecidos provavelmente antes em diversas outras culturas, como salienta Abdounur (2006). No entanto, coube a escola pitagórica a sistematização do conhecimento.

Considerando as sete notas musicais que possivelmente temos conhecimento (do, re, mi, fa ,sol, la si), podemos utilizar a ilustração (Figura 5) a seguir, representando as teclas de um piano, que traz a nomenclatura das notas referentes às teclas do instrumento para compreendermos de modo mais prático esses intervalos obtidos por Pitágoras.

Figura 5: Notas musicais no instrumento de teclas



Fonte: https://www.todamateria.com.br/notas-musicais/

No “quadro 1” temos as notas utilizadas nesses intervalos, se considerarmos a corda mi do violão.

Quadro 1: Intervalos pitagóricos

Intervalo de oitava justa	Mi – Mi
Intervalor de quarta justa	Mi – La
Intervalo de quinta justa	Mi – Si

Fonte: arquivo do pesquisador.

A partir desses primeiros intervalos, Pitágoras elaborou um caminho para construção de uma escala musical, dita maior natural, que é referente a um conjunto de notas respeitando certos intervalos musicais, denominada diatônica, considerando um conjunto de sete notas que apresentavam relações consonantes ou dissonantes entre elas, porém, capaz de gerar música, seguindo alguns princípios que tivemos conhecimento através da ‘aula 27 de matemática e música’ pulicado pela UNIVESP em 11/11/2014, situado em https://www.youtube.com/watch?v=ETPzsN-vgE8&t=460s, e que efetuamos o acesso em maro de 2018.

a) Toda nota é equivalente a outra nota (sendo considerada a mesma nota, porém em altura diferente), quando a relação entre os comprimentos das cordas geradoras delas é dada na razão de 1 para 2^n, com n natural.

b) A unidade de medida, que Pitágoras usou para construção da escala foi o intervalo de quintas justas ($\frac{2}{3}$), que nesse nosso caso é o padrão estabelecido, chamado de ciclo das quintas;

c) E o espectro (limite) em que ele vai construir sua escala: entre o comprimento da corda toda equivalendo a 1 e sua metade contemplam duas notas musicais de mesmo nome, que soam iguais, porém em alturas diferentes (uma nota ‘do’ mais grave referente a nota produzida pelo comprimento da corda toda, e uma nota ‘do’ mais aguda considerando o som produzido com a corda pressionada em metade do seu comprimento, por exemplo). Se ocorresse de ao ser efetuado o cálculo utilizando o percurso das quintas, calculando $\frac{2}{3}$ referente ao comprimento da corda da nota anterior, e fosse encontrado um número racional que não estivesse nesse intervalo considerado, seria necessário dobrar o seu valor a fim de encontrarmos a mesma nota, com altura diferente, que estivesse no intervalo considerado, ou seja, entre $\frac{1}{2}$ e 1.

Para efeito de uma melhor compreensão sobre a obtenção das notas da escala pitagórica já que os nomes dados às notas musicais nessa época eram diferentes, estamos considerando os nomes que utilizamos hoje em dia em que temos as notas: Do-Re-Mi-Fa-Sol-La-Si, se repetindo na medida em que a altura do som produzido aumenta ou diminui.

A obtenção das notas presentes na escala era procedida então da seguinte maneira:

A partir do comprimento total da corda (Vamos considerar que o som produzido por essa corda equivale a nota ‘do’), encontrava-se a quinta justa dessa, calculando-se $\frac{2}{3}$ de 1, encontrando nesse caso, o valor de $\frac{2}{3}$, referente nesse caso à nota Sol. Depois desse procedimento considerava-se essa nova nota com o seu respectivo comprimento de corda como ponto de partida e encontrava-se a quinta justa referente a ela.

Nesse caso teríamos $\frac{2}{3}$ de $\frac{2}{3}$ cujo valor é $\frac{4}{9}$ (equivalendo a nota Re). Mas $\frac{4}{9}$ não estava no intervalo delimitado para a escala, entre $\frac{1}{2}$ e 1, pois $\frac{4}{9}$ = 0,444... Ao multiplicarmos $\frac{4}{9}$ por 2, encontramos $\frac{8}{9}$. A fração $\frac{4}{9}$ está na razão de 1 para 2 em relação a $\frac{8}{9}$ já que temos $\frac{4}{9} + \frac{4}{9} = \frac{8}{9}$ e, portanto, esta nota era a mesma que a anterior, porém entre $\frac{1}{2}$ e 1. Desta forma de maneira análoga encontramos os outros comprimentos referentes às notas La, Mi e Si, que juntamente com as notas ‘Fa’ (de comprimento $\frac{3}{4}$) e da outra nota ‘Do’ (de comprimento $\frac{1}{2}$), contemplam a oitava musical constituída pelas sete notas musicais e que estão presentes numa escala dita maior denominada gama pitagórica. Na “tabela 1” apresentamos os cálculos:

Tabela 1: Cálculo das cordas

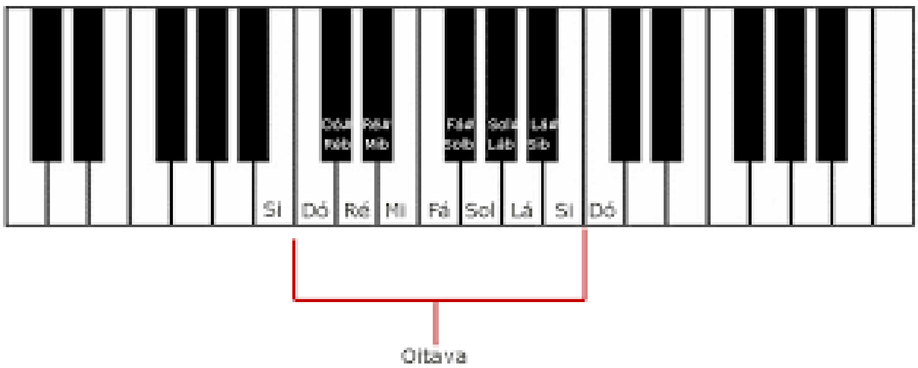
Largura da corda inteira (Lci)	Ciclo das quintas (2/3 de Lci)	Largura resultante LR	Condição de existência ½<LR<1	Fração equivalente Oitava:x2	Notas
1	2/3 de 1	2/3 = 0.666...	Ok		Sol
2/3	2/3 de 2/3	4/9= 0.444...	Não	8/9= 0.88...	Re
8/9	2/3 de 8/9	16/27=0.592592...	0k		La
16/27	2/3 de16/27	32/81=0.395	Não	64/81=0.79	Mi
64/81	2/3 de 64/81	128/243=0,526	Ok		Si

Fonte: Cálculos efetuados pelo autor.

Se continuarmos efetuando os cálculos percorrendo o ciclo das quintas encontramos as outras 5 notas (Fa#, Do#, Sol#, Re# e La#), com seus respectivos comprimentos de corda que somadas às notas já presentes totalizam as 12 notas conhecidas e utilizadas no sistema musical, e que fazem parte de todas as demais escalas utilizadas no ocidente, com suas diferentes constituições de intervalos nos grupos que a compreendem.

Na “figura 6” apresentamos essas doze notas presentes em cada oitava musical através da ilustração de um instrumento de teclas:

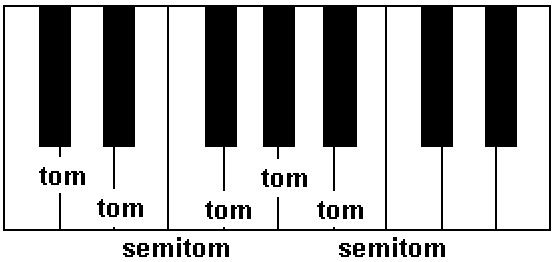
Figura 6: Oitava musical



Fonte:https://www.academiamusical.com.pt/tutoriais/notas-no-teclado-do-piano/

Temos também, que o menor intervalo entre notas musicais é definido como semitom. Na escala diatônica elaborada por Pitágoras são mantidos os intervalos entre as notas da seguinte maneira: tom, tom, semitom, tom, tom, tom, semitom, conforme “figura 7”:

Figura 7: Intervalos da escala diatônica maior



Fonte:https://musicaeadoracao.com.br/26128/teoria-musical-online-intervalos-tons-e-semitons/

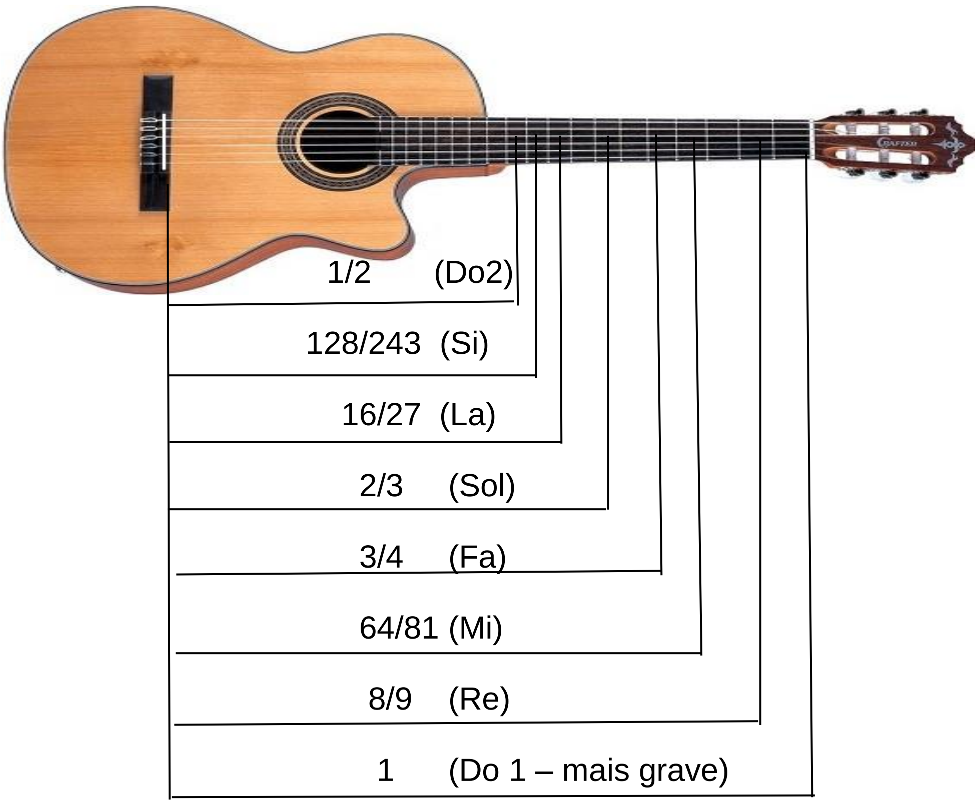
Desse modo, a escala pitagórica na tonalidade de ‘do maior’ contempla os intervalos descritos pelas teclas brancas do instrumento acima. Caso o tom fosse ‘Re maior, a nota inicial seria ‘Re’, e teriam que ser mantidas as mesmas distâncias intervalares.

Nesse caso teríamos as notas Re – Mi – Fa# - Sol – La – Si – Do#, compondo a escala. E, analogamente essa estrutura se estende, para as escalas em todos os outros tons.

É importante notar que poderíamos obter os intervalos de quarta e oitava continuando a efetuar os cálculos por meio do ciclo das quintas, porém antes encontraríamos os comprimentos da corda referentes às notas que não compunham à escala pitagórica, obtendo os comprimentos utilizados nas notas Fa#, Do#, Sol#, Re#, La#, antes de chegar na nota ‘Fa’ e depois na outra nota ‘Do’. (em cada intervalo de quinta é necessária uma distância intervalar de 7 semitons. Depois do intervalo referente à nota ‘si’, a próxima nota encontrada seria ‘Fa#’, e assim, por diante). Porém, por meio desses cálculos iremos encontrar valores um pouco diferentes de $\frac{3}{4} = 0{,}75$ e $\frac{1}{2} = 0{,}5$. No caso do intervalo de quarta o número racional encontrado é $\frac{131072}{177147}$ ≅ 0,739, e no intervalo de oitava o valor encontrado é $\frac{262144}{531441} \cong 0{,}493$, algo referente a um pequeno problema da escala pitagórica que impedia avanços em sua estrutura e que precisaria ser resolvido para que fosse criado um sistema musical mais funcional e abrangente.

A “figura 8” apresenta a imagem de um violão em que os valores da escala pitagórica estão disponibilizados com sua posição no comprimento da corda. Embora o violão com 6 cordas não tenha como uma de suas cordas a nota ‘do’, optamos em descrever os valores da escala pitagórica nesse tom para facilitar o entendimento, já que a distância permanece a mesma para qualquer uma das cordas consideradas.

Figura 8: Escala pitagórica representada utilizando a imagem de um violão



Fonte: Figura:https://br.depositphotos.com/163587450/stock-illustration-real-acoustic-guitar-on-a.html. Marcações: próprio autor

Outro aspecto na utilização de números racionais para a música é utilizado para obtenção dos já citados intervalos musicais. De acordo com Depizoli (2015), a definição física de intervalo musical, presume que os somar, corresponde fisicamente a multiplicar suas razões, assim como determinar a diferença entre eles, corresponde a dividir suas razões. Assim a razão entre a primeira e a segunda nota é $\frac{9}{8}$, equivalendo a um tom. A razão entre a terceira e quartas notas é $\frac{256}{243}$, equivalendo a um semitom, e assim por diante, conforme "Tabela 2":

Tabela 2: Razões e intervalos

Nota Musical	Comprimento da corda	Razão/Intervalos
Do	1	1:8/9 = 9/8 (tom)
Re	8/9	8/9/6481 = 9/8 (tom)
Mi	64/81	64/81:3/4 = 256/243 (semitom)
Fa	¾	3/4:2/3 = 9/8 (tom)
Sol	2/3	2/3:16/27 = 9/8 (tom)
La	16/27	16/27:128/243 =9/8 (tom)
Si	128/243	128/243:1/2 = 256/243 (semitom)

Fonte: Cálculos efetuados pelo autor

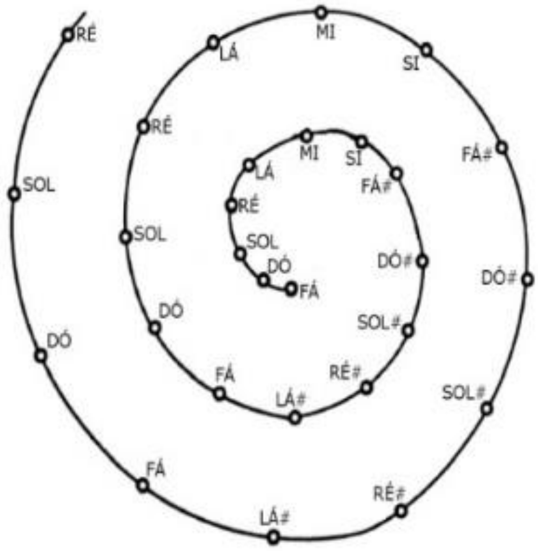
O ciclo das quintas que percorreu Pitágoras é até hoje utilizado no ensino da música, na obtenção de outras escalas e em teoria musical.

Nota-se que a construção da escala pitagórica envolveu de modo importantíssimo diversos conceitos matemáticos como razões, operações com números racionais, limites, comparações e intervalos em que percebemos que de modo conexo, a Música, propicia à Matemática uma oportunidade incrível de contextualização, em várias vertentes, principalmente, no estudo de números racionais que é tema de nosso trabalho.

Porém, como já adiantamos timidamente, nem tudo é perfeito na escala elaborada por Pitágoras.

Segundo Cruz (2013), qualquer que fosse o ponto de partida, percorrendo intervalo de quintas, ou de terças, ou qualquer outro, sempre haveria uma pequena diferença na afinação, não coincidindo os sons oitavados com precisão. A chamada 'coma pitagórica' nada mais é do que a escala feita em espiral (figura 9), ou seja, uma escala que não se fecha; que não volta à origem, como já pudemos perceber ao encontrarmos o valor de 0,493 para o intervalo de oitava através do ciclo das quintas.

Figura 9: Escala em espiral



Fonte:https://laboratoriodeluthieria.wordpress.com/2015/07/02/temperamento-a-musica-atraves-dos-numeros/

Abdounur (2006) fez uma demonstração desse não-fechamento, considerando notas de intervalos de oitava e quinta, justas. Teria que existir em algum momento uma igualdade entre notas que percorressem ciclo de quintas e de oitavas.

O ciclo de quintas é uma progressão geométrica (P.G.) de razão $\frac{2}{3}$, então temos$(\frac{2}{3})^m$, com m natural. Já o ciclo de oitavas é uma P.G. onde temos: $(\frac{1}{2})^n$, com n também natural.

Sendo impossível mostrar que $(\frac{2}{3})^m = (\frac{1}{2})^n$

Considerando que $(\frac{2}{3})^m = (\frac{1}{2})^n \rightarrow \frac{2^m}{3^m} = \frac{1^n}{2^n} \rightarrow 2^{m+n} = 3^m$.

Absurdo. Uma potência de 2 sempre gerará um número par, enquanto que uma potência de 3 sempre gerará um número ímpar.

Desse modo, reescrevendo os cálculos acima, temos que:

$2^m x\ 2^n \neq 3^m$, resultando que:

$2^n \neq (\frac{3}{2})^m$

“Tal desajuste encontra sua melhor adequação após doze quintas e sete oitavas, pois 2^7 = 128 e $(\frac{3}{2})^{12}$ = 129,746. Dividindo 129,746:128 temos 1,013644326...≠1, a chamada: coma pitagórica.” (ABDOUNUR, 2006, p.12).

Desse modo surge a necessidade do temperamento, que consiste em fazer certos ajustes na escala, de modo a solucionar o problema. Além dessa diferença, outra percebida é relacionada também a semitons.

Como já vimos, dois semitons deveriam ser equivalentes a um tom, mas temos, que $\frac{9}{8}$ = 1,125 e $\frac{256}{243}$ x $\frac{256}{243}$ = 1,1098 resultando numa relação de frequência não constante.

Com isso, as possibilidades harmônicas eram limitadas e tocar em outros tons, e com vários instrumentos afinados de forma diferente era impraticável necessitando a todo momento, uma nova afinação em muitos deles.

Sem explorar territórios harmônicos muito distantes, a ‘coma pitagórica’ não apresentava grande importância, porém, com a evolução musical e necessidades de gerar cenários harmônicos mais distantes, sem graves distorções, além da construção de teclados com muitas notas, possibilitando à música maior poder criativo e capacidade de modulação (tocar uma mesma música em outros tons), o temperamento se fez extremamente necessário.

Teoricamente essa forma de divisão é possível com “a invenção de logaritmo por Napier e Burgi, pouco depois de 1600”. (ABDOUNUR, 2006, p.263).

Simon Steven, físico belga, através do temperamento igual, em 1605, dividindo a escala em 12 partes iguais, com uma aproximação bastante razoável, que nada mais era do que ajustes na escala, como um todo, que gerava uma pequena desafinação por todos os intervalos da escala, excetuando-se a oitava, mas que possibilitava transposições, e composições muito mais elaboradas.

Este sistema, todavia, só foi devidamente fundamentado por Andreas Werkmeister, em 1691, com a utilização dos logaritmos para determinar as notas musicais e o intervalo entre elas.

Porém, esse tipo de escala, somente foi implantado definitivamente a partir do século XVIII, sendo totalmente aceito quando John Sebastian Bach (1685-1750) explorou a escala temperada em todos os seus 24 tons de modo magnífico em tons maiores e menores com sua obra ‘o cravo bem temperado’ provando que essa proposta era viável e não comprometia a beleza, nem a qualidade da música.

Bach nasceu em 1685 em Eisenach, região central da atua Alemanha, e é tido por muitos como a maior mente musical do período Barroco e de toda a história da humanidade, tendo composto mais de 1100 obras, para órgãos, cravos, violinos e orquestras.

Obras como ‘tocada e fuga em Re menor’, ‘minueto em Sol Maior’ e o ‘prelúdio da suíte para violoncelo número 1’, são reconhecidas até hoje, quase 300 anos, após sua morte.

Sua importância é ainda mais destacada, pois Bach é contemporâneo de músicos importantíssimos com obras imortalizadas, como Vivaldi, Rendell, Beethoven, Mozart, entre outros.

Bach era o mais novo de uma família grande, composta por nove filhos, sendo todos eles, além do próprio pai, músicos, remetendo a ideia de que a música era encarada como ofício pela família e não apenas como opção de lazer.

No período Barroco cujo significado desta palavra é ‘pérola irregular’ ou ‘pérola deformada’, representava de forma pejorativa a ideia de irregularidade. Esse período (1600 a 1750) durou aproximadamente 150 anos, e Bach foi um dos nomes mais importantes, senão o maior, uma das grandes preocupações era a de propor uma afinação única referente às escalas musicais, e que embora não fosse a perfeita, possibilitasse uma boa relação em todos os outros tons, de modo que todo instrumento construído pudesse efetuar a música em qualquer tonalidade, não havendo nada mais afinado ou desafinado.

Situações em que teclados apresentavam uma afinação maravilhosa e cristalina enquanto outros com a afinação imperfeita e até inutilizável, devido à já citada ‘coma pitagórica’, ocasionava inúmeros problemas, dentre eles, a própria dificuldade de intercâmbio entre músicos, pois uma obra criada por um deles em uma afinação, muitas vezes era totalmente inadequada em outra, referente a uma afinação utilizada no instrumento de outro compositor.

Nesse sentido, Bach surge na metade final do período Barroco, com sua obra ‘o cravo bem temperado’ que era composto por pequenas obras em todas as tonalidades possíveis, para ajudar a estabelecer e propagar o sistema temperado, como um sistema bom o suficiente, para unificar e organizar a afinação musical, em sacrifício da afinação perfeita, e que é utilizado até os dias de hoje.

Bach não foi o ‘inventor’ desse sistema, afinal existiam, como já relatamos, muitas contribuições de diversos pensadores, músicos e matemáticos, mas certamente, foi o grande ‘codificador’, ajudando a traçar um denominador comum, universalizando toda a comunicação musical.

Somente através do temperamento, muitas facilidades foram incorporadas à música, apesar da leve desafinação, que esse processo ocasionava em quase todos os intervalos da escala, com exceção do intervalo de oitava, que segundo alguns estudiosos, deram um caráter mais humano e menos sagrado à música.

Apesar de nosso trabalho de pesquisa ser focado em números racionais relacionados com a música, a presença dos números irracionais em nosso trabalho se torna imprescindível, pois toda teoria musical, que será bastante utilizada nas propostas de tarefas para alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, se fundamenta devido à presença dos mesmos.

2.2. Temperando a escala

Nesse processo de construção da escala temperada foi preciso interpolar 12 meios geométricos entre 1 e 2, sendo construída uma sequência com treze termos sendo o primeiro 1 e o último 2.

Através da interpolação dos termos geométricos, o qual consiste em determinar os números reais existentes entre a_1 e a_n para que a sequência numérica seja uma progressão geométrica (PG), encontramos a razão q=$2^{\frac{1}{12}}$. A partir daí, podemos construir os valores referentes a cada intervalo:

$a_n = a_1 \times q^{n-1}$ (termo geral da PG)

$2 = 1 \times q^{13-1}$

$2 = q^{12}$

$\sqrt[12]{2} = q$

$q = 2^{\frac{1}{12}}$

Tabela 3: Valores da escala temperada

Do	1	Sol	$2^{\frac{7}{12}}$
Do#	$2^{\frac{1}{12}}$	Sol#	$2^{\frac{8}{12}}$
Re	$2^{\frac{2}{12}}$	La	$2^{\frac{9}{12}}$
Re#	$2^{\frac{3}{12}}$	La#	$2^{\frac{10}{12}}$
Mi	$2^{\frac{4}{12}}$	Si	$2^{\frac{11}{12}}$
Fa	$2^{\frac{5}{12}}$	Do	2
FA#	$2^{\frac{6}{12}}$		

Fonte: arquivo do pesquisador

Hoje temos instrumentos temperados como o piano e o violão (é possível perceber nesse instrumento que os trastes diminuem de largura, de maneira a obedecerem ao temperamento), e instrumentos não temperados como o violino. Nesse caso, o violinista tem que ter uma boa percepção musical para ajustar sua afinação de acordo com os instrumentos temperados.

Muitos outros teóricos, matemáticos, filósofos e músicos, contribuíram em muitos aspectos nas relações matemática/música, como, por exemplo, Fourier e sua Série, utilizada para obter a representação gráfica de um timbre sonoro através de funções trigonométricas. Apesar disso, preferimos nos ater de modo mais específico, em conexões que envolvessem matemática e música no que tange a sua relação com frações, e, em alguns aspectos históricos, que contextualizam e valorizam a importância que a relação matemática/música teve para a humanidade, inclusive, com relações analógicas bastante presentes.

Somente através da Matemática a Música pôde ser formalizada, e por causa da Música a Matemática novamente teve sua importância realçada na percepção e busca da consonância musical, sendo considerada essencial tanto no que tange, à composição como, na construção de instrumentos, e até mesmo no próprio estudo da música.

Se não existisse essa base sólida matemática por trás da formalização da escala musical e da construção de instrumentos, certamente a música não teria evoluído tanto e não seria tão acessível a diversos músicos e profissionais ou não, como a conhecemos hoje. Da mesma forma, se não tivesse existido a música, muitos conceitos matemáticos relacionados, não seriam tão desenvolvidos, além do fato da música oferecer uma contextualização importante e significante, para a aprendizagem de diversos conceitos matemáticos.

A Música ainda se apresenta como importante componente no desenvolvimento cognitivo, na criatividade e na interação social das pessoas, o que por si só já justificaria qualquer trabalho que a envolvesse no ensino de qualquer área de modo interdisciplinar.

3. OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E SUAS CONEXÕES

Neste capítulo dedicamos apresentar inicialmente noções teóricas da teoria de Raymond Duval e na sequência tecemos as conexões pertinentes com o objeto de estudo da nossa pesquisa.

3.1 Aspectos teóricos

Raymond Duval (2012) afirma que não é possível estudar os fenômenos relativos ao conhecimento sem se recorrer à noção de representação pelo fato de os objetos matemáticos não serem diretamente acessíveis à percepção por não serem 'reais', mas objetos de apreensão conceitual. É necessário a presença das representações semióticas, pois somente desse modo, as atividades sobre objetos matemáticos são possíveis, sendo considerado, dessa forma um paradoxo cognitivo do pensamento matemático, e, com isso, tornando inevitavelmente confusa essa relação, devido à dificuldade na apropriação direta aos objetos matemáticos.

Para Duval (2013) a atividade matemática deve ser analisada em termos de representações semióticas, e não puramente por meio de conceitos mentais de acordo com o ponto de vista cognitivo. O autor considera errônea a ideia de delegar caráter secundário para as representações semióticas em detrimento das mentais, pois as representações mentais dependem da interiorização das representações semióticas.

O uso das representações semióticas com o emprego de signos próprios apenas para exteriorizar as representações mentais é algo enganoso, pois elas contribuem para o desenvolvimento das representações mentais, apreendendo aquilo que é percebido, e ainda contribuem em outras funções cognitivas, como na atividade de tratamento, em que operamos com números decimais, por exemplo, e obtemos como resultado um número decimal, devido à permanência do sistema semiótico simbólico.

Mas qual a diferença entre as representações mentais e as semióticas?

> As representações mentais recobrem o conjunto de imagens e, mais globalmente, as conceitualizações que um indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação e sobre o que lhe é associado. As representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento. (DUVAL, 2012, p.269.)

Portanto, a Matemática é apresentada com diversas representações em cada conceito estudado. Quanto às várias representações para um número racional, podemos citar 0,75 = $\frac{3}{4}$= 75% como referências ao mesmo objeto matemático, porém, com significados distintos.

Neste sentido, a “distinção entre um objeto e sua representação, é, portanto, um ponto estratégico para compreensão da matemática”. (DUVAL, 2012, p. 268.).

Nessa diversidade de registros semióticos existentes, temos dois conceitos importantes referentes a essa aquisição, que seriam a **semiose** e a **noesis**.

A ‘semiose’ engloba a apreensão intelectual ou a própria produção de uma representação semiótica, enquanto que a ‘noesis’ condiz com a apreensão conceitual do objeto em si. É inegável, porém que as duas, são inseparáveis.

No que se refere à semiose, temos três atividades cognitivas fundamentais relacionadas: uma refere-se à formação de uma representação identificável, a qual depende do sistema semiótico adotado. Se adotarmos o sistema semiótico simbólico, podemos escrever $\frac{1}{4}$ como uma representação fracionária que é equivalente a 0,25 (representação decimal). Podemos mudar o sistema semiótico de simbólico para geométrico e, neste caso, utilizamos a representação gráfica na forma de reta numérica graduada para posicionar a fração $\frac{1}{4}$.

A fração $\frac{1}{4}$, o número decimal 0,25 e a localização desta fração na reta numérica graduada representam a mesma quantidade, o mesmo objeto matemático e a mesma referência, porém com significados distintos. Quando é proposta a representação gráfica na reta numérica para $\frac{1}{4}$, por exemplo, podemos estabelecer conexão com a noção de medida e o desenvolvimento da relação de ordem entre as frações. Podemos ampliar a noção de frações, com a ideia de números e não apenas com o significado parte-todo, ou seja, interpretar $\frac{1}{4}$ como um número entre zero e meio, por exemplo.

A segunda atividade cognitiva na semiose é o tratamento que permite a transformação no mesmo registro apresentado. Por exemplo, se adicionarmos frações vamos obter como resposta uma fração, dada a mesma representação semiótica.

A terceira e última atividade nos registros de representação semiótica, é a conversão que consiste na mudança de registro, conservando sua referência ao objeto matemático. Por exemplo, podemos adicionar frações mudando da representação fracionária para a representação decimal, cuja soma resulta um número decimal.

Essa mudança de registro semiótico, característico da atividade de conversão, envolve um custo cognitivo cujo grau de dificuldade para a realização desta transformação, depende do sentido do registro de partida para o registro de chegada. Se na comparação destes registros, as representações semióticas forem transparentes, ou seja, existe reconhecimento imediato e espontâneo do que elas representam, estamos diante do fenômeno de congruência (DUVAL, 2011).

Na conversão da fração $\frac{1}{4}$ para 0,25 há o fenômeno de congruência pois a divisão de 1 por 4 no registro de partida gera o referido resultado no registro de chegada. A inversão do sentido dos registros envolve um custo cognitivo maior, pois os procedimentos de conversão não são mais os mesmos, evidenciando assim o fenômeno da não congruência. Um possível conjunto de procedimentos nesse sentido de conversão pode ser iniciado pela escrita de 0,25 como a fração $\frac{25}{100}$ e, a partir daí, por divisões sucessivas no numerador e denominador, chegamos à fração irredutível $\frac{1}{4}$.

3.2. A tríade Música, Semiótica e Números Racionais

Nesta seção com base nessa tríade apresentamos cinco conexões que no percurso metodológico de nossa pesquisa assumem o papel de categorias de análise frente ao trabalho de campo desenvolvido com uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental.

3.2.1 Conexão 1: Utilização da escala pitagórica

Quando pensamos nas falsas contextualizações, citadas por Lopes (2008), como podemos utilizar a música a fim de evitar esse problema?

Duarte e Santos (2014), já questionam essa possibilidade de contextualização em seu artigo ‘musicalizando o saber matemático: uma proposta interdisciplinar’:

> Quando se pensa na importância da música em diversos contextos, surgem as questões: existem relações entre Matemática e Música? De que maneira a Música pode ser inserida interdisciplinarmente no ensino de Matemática? (DUARTE; SANTOS, 2014, p.57).

Já vimos no capítulo de nosso trabalho com a construção da escala musical pitagórica, que podemos utilizar a música, por tudo que representa, de modo valioso na aprendizagem de números racionais.

Para Catto (2000), o conceito ‘razão’ é um dos mais relevantes por não se restringir apenas ao estudo de números racionais, sendo utilizado em diversas outas atividades, como na comparação de grandezas, e, nos próprios cálculos de proporções e probabilidades.

Quando calculamos, por exemplo, qual a probabilidade de ser ‘sorteado’ um ‘Valete’ de um baralho contendo 52 cartas, que contém quatro Valetes, para o cálculo dessa probabilidade estamos considerando uma razão que no caso equivale a $\frac{4}{52}$.

Ao nos depararmos com a descoberta de Pitágoras, ao dividir a corda do monocórdio em partes, na busca das consonâncias musicais encontrando as razões $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, dentre outras, estamos pensando na utilização de números racionais em um contexto muito consistente. Não há ‘invenções’ de números gigantescos para tentar apresentar uma atividade de qualquer jeito aos alunos, mas sim, a constatação de algo presente e fundamental na construção e elaboração de toda a música, que é apreciada e presente na vida de quase todas as pessoas do mundo.

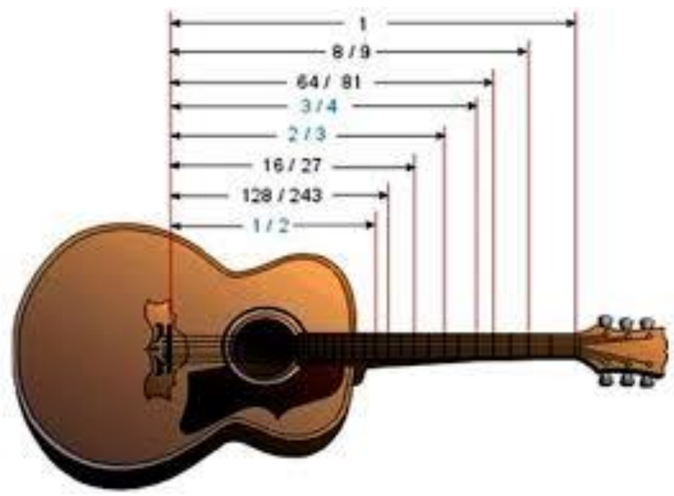
É esperado, que o aluno ao perceber o quanto existe de matemática em música, arte tão presente em todos os povos e culturas, que seu interesse e encantamento pela matemática seja elevado, já que irá perceber que a música, com o seu ‘poder’ de incentivar, colaborar, divertir e até de influenciar as pessoas, através das melodias, harmonias e ritmos diversos, é proveniente de conceitos e aplicações das operações matemáticas.

> A Matemática comporta um amplo campo de relações, regularidades e coerências que despertam a curiosidade e instigam a capacidade de generalizar, projetar, prever e abstrair, favorecendo a estruturação do pensamento e o desenvolvimento do raciocínio lógico. [...] Também é um instrumental importante para diferentes áreas do conhecimento, por ser utilizada em estudos tanto ligados às ciências da natureza como às ciências sociais e por estar presente na composição musical, na coreografia, na arte e nos esportes (BRASIL, 1998, p. 24-25).

Além do aspecto contextual, a utilização da música dessa forma fomenta e possibilita a inclusão de outros registros semióticos através dessa conexão.

Ao apresentarmos a escala pitagórica utilizando a corda do violão (figura 10) já surge a possibilidade da representação semiótica geométrica por meio da reta numérica.

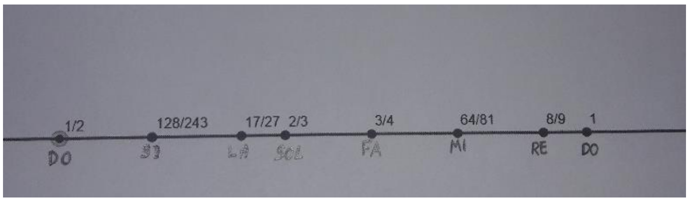
Figura 10: Escala musical pitagórica



Fonte: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150880272

Na “figura 11” temos a representação dos racionais por meio da reta numérica muito defendida por Silva (2008), que dentre outras virtudes, traz a possibilidade da ordenação dos números racionais.

Figura 11: Frações da escala pitagórica na reta numérica



Fonte: Elaborado pelo autor

E, ainda nesse caso, a conversão da forma fracionária para decimal, com a significação da fração encontrada como quociente, pode e deve ser utilizada, para facilitar a visualização e o próprio entendimento da sua ordenação.

Catto (2000) diz que embora a equivalência entre a representação figural e decimal sejam diretas, alguns obstáculos podem aparecer na compreensão do número decimal por ser essa equivalência condicionada ao registro de fração decimal, mas, não necessariamente a representação decimal. Porém, acredito que essa relação traga mais benefícios para aprendizagem pela própria percepção direta agregada.

Nesse caso a utilização da calculadora se torna essencial, devido ao aparecimento de algumas frações com números ‘grandes’ como $\frac{128}{243}$, e, ao desenvolvimento cognitivo ainda limitado de um aluno do 6º ano, no que se refere a divisões não exatas envolvendo esses números.

Além da representação e coordenação de três registros semióticos: fracionário, decimal e figural, e da significação da fração como ‘parte-todo’ e como ‘divisão’ entre dois números inteiros, a construção da escala pitagórica ainda propicia a utilização do ‘tratamento’ no registro fracionário através da operação de multiplicação, necessária, para através do ciclo das quintas obtermos as outras razões presentes na escala pitagórica.

Observe que $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$. E $2 \times \frac{4}{9} = \frac{8}{9}$. (Na tabela 1 do capítulo 2.1 já apresentamos os demais cálculos).

Ao utilizarmos a Música dessa forma estamos nos aproximando dos alunos de modo significativo, pois quase em sua totalidade, os alunos têm na Música, em pelo menos um de seus variados estilos, um componente importante nas relações que os mesmos possuem na sociedade em que estão inseridos.

3.2.2. Conexão 2: Utilizando intervalos musicais

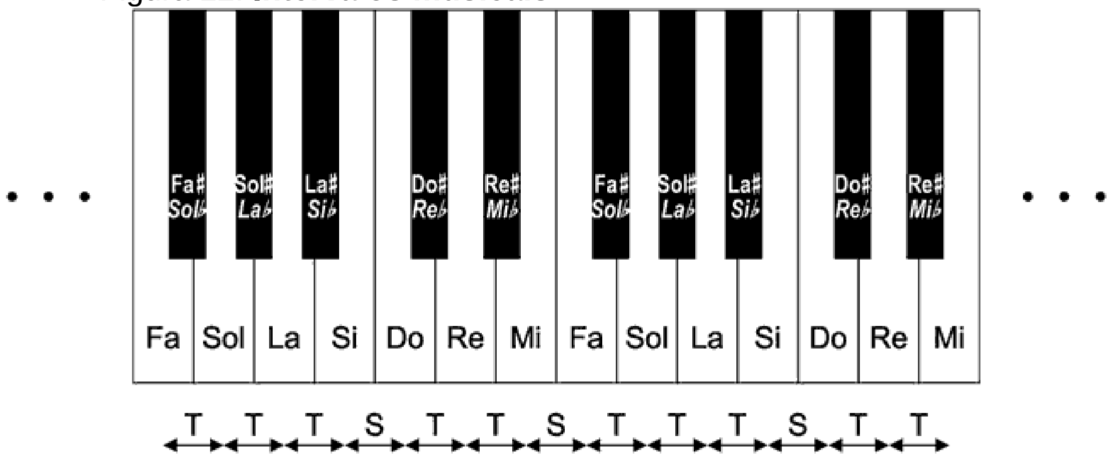
Uma outra maneira de utilizarmos a Música para aprendermos conceitos de números racionais se faz através das relações entre os ‘intervalos musicais’, onde tocamos duas notas simultaneamente.

Com o conhecimento prévio adquirido pelos alunos através das consonâncias pitagóricas, podemos utilizá-los com o auxílio de um instrumento musical como o teclado, executando os intervalos consonantes de oitava, quinta e quarta justas.

Poderemos, por exemplo, executar os intervalos Do-Do (oitava justa), Do-Sol (quinta justa), Do-Fa (quarta justa), considerando também as suas frequências. Posteriormente executamos esses mesmos intervalos em outras tonalidades, como: Re-Re (oitava justa), Re-La (quinta justa), Re-sol (quarta justa); Re# - Re#(oitava justa), Re# - La# (quinta justa), Re# - Sol# (quarta justa).

Ao observarmos a “figura 12”, podemos perceber as distâncias iguais, nos intervalos já descritos.

Figura 12: **Intervalos musicais**



Fonte:https://starviewerteam.com/2012/11/28/la-quiebra-de-la-fisica-de-newton-segunda-parte-nanofractalidad-del-sonido-complejo-nanomusica-i/

Calculamos então as razões referentes a esses intervalos nas tonalidades descritas acima.

Na “tabela 4” abaixo apresentamos as frequências aproximadas referentes às notas musicais citadas.

Tabela 4: Notas e frequências

Nota	Frequência (Hz)
Do 4	262
Do#	277
Re	294
Re#	311
Mi	330
Fa	349
Fa#	370
Sol	392
Sol#	415
La	440
La#	466
Si	494
Do 5	524
Do#	554
Re	588
Re#	622
Mi	659
Fa	698
Fa#	740
Sol	784

Fonte: Cálculos das frequências efetuadas pelo autor

E em seguida, na “tabela 5” apresentamos cálculos referentes a valores equivalentes destes intervalos em três tonalidades.

Cálculos:

Tabela 5: Intervalos: razões em três tonalidades

Intervalos	Do Maior	Re maior	Re# maior
Oitava justa	$\frac{Do4}{Do5} = \frac{262}{524} = \frac{1}{2} = 0{,}5$	$\frac{Re4}{Re5} = \frac{294}{588} = \frac{1}{2} = 0{,}5$	$\frac{RE\#4}{Re\#5} = \frac{311}{622} = \frac{1}{2} = 0{,}5$
Quinta justa	$\frac{Do4}{sol4} = \frac{262}{392} = \frac{2}{3} = 0{,}66$	$\frac{Re4}{La4} = \frac{294}{440} = \frac{2}{3} = 0{,}66$	$\frac{Re\#4}{La\#4} = \frac{311}{466} = \frac{2}{3} = 0{,}66$
Quarta justa	$\frac{Do4}{Fa4} = \frac{262}{349} = \frac{3}{4} = 0{,}75$	$\frac{Re4}{Sol4} = \frac{294}{392} = \frac{3}{4} = 0{,}75$	$\frac{Re\#4}{Sol\#4} = \frac{311}{415} = \frac{3}{4} = 0{,}75$

Fonte: Elaborado pelo autor

A percepção auditiva das consonâncias principais de oitava, quinta e quarta justas, e as diferenças com as dissonâncias, certamente serão percebidas pelos alunos em todas as tonalidades executadas, além da equivalência entre os intervalos iguais.

O conceito dos números racionais interessante a ser trabalhado através dessas equivalências sonoras, é o conceito de números racionais equivalentes. O aluno perceberá através dessas relações, o significado de equivalência, em que uma mesma sonoridade é identificada em diversas alturas, que são provenientes das razões entre as suas frequências.

Conseguiremos dessa forma fortalecer o conceito de equivalência, muito além até, da existente nos números racionais, através de um contexto extremamente importante relacionado com a Música, sendo essa equivalência obtida através da atividade semiótica do ‘tratamento’, quando usamos a simplificação das frações, e, da própria conversão, que se faz presente nos registros fracionários transformados em decimais como $\frac{1}{2} = 0{,}5$ e $\frac{2}{3} = 0{,}66$, por exemplo.

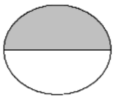
Podemos utilizar ainda os primeiros intervalos consonantes encontrados por Pitágoras: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$, e propor tarefas envolvendo a identificação de outros números racionais equivalentes aos valores citados, escritos em formas diferentes, no mesmo, ou em até outros registros, como o decimal, na forma de porcentagem e figural representando o mesmo objeto matemático.

Atividades do tipo: Quais valores abaixo equivalem ao valor encontrado por Pitágoras($\frac{1}{2}$) no de intervalo de oitava justa?

a) 0,5

b) 2/4

c) 50%

d) 

e) todas as alternativas anteriores

Reforçando ainda essa maneira de perceber a equivalência, tão importante para atividades matemáticas, podemos propor tarefas que contemplem a execução da melodia de uma música em diversos tons.

Novamente a atividade semiótica do ‘tratamento’ aparece nesse contexto, com a transposição de uma melodia para diversas tonalidades, que com os seus respectivos intervalos é realizada em alturas diferentes, e de forma análoga totalmente condizente com o pensamento de equivalência entre números racionais.

Para Abdounur(2006), o pensamento analógico, que podemos ter ao relacionarmos música com matemática, possui a capacidade de além de estruturar a mente com dinâmicas complementares em relação ao pensamento lógico matemática , integrar a essas estruturas, tanto domínios cognitivos como afetivos, contribuindo desse modo na reconfiguração do pensamento de forma mais ampla, conseguindo com a comparação, à partir das trajetórias da matemática e música esquemas comuns na construção de significados.

> A revalorização do pensamento analógico adquire ainda maior importância quando avaliamos as consequências ou os fatores concomitantes de uma formação destituída dessa forma de comparação de ideias na construção da identidade individual e coletiva. (ABDOUNUR, 2006, p. IX).

Ao apresentarmos e trabalharmos a equivalência de números racionais com a utilização dos intervalos musicais, também contemplamos o pensamento de Lopes (2008) que diz que o conceito de frações equivalentes é um dos mais importantes no estudo desse conteúdo, sendo a utilização apenas de exemplos com grades retangulares insuficiente e ineficaz.

Novamente, a Música aparece, com suas equivalências em intervalos e transposições, apresentando-se como uma alternativa de aprendizagem importante possibilitando um novo olhar, criativo e inesperado para absorção desse conteúdo.

3.2.3. Conexão 3: Utilizando a escrita musical

Um outro aspecto muito importante, ao relacionarmos essas duas ciências, é que tanto a Matemática quanto a Música possuem sua linguagem própria, com seus símbolos e registros característicos, mas, no caso da música, utilizando conceitos matemáticos, principalmente relacionados com os números racionais.

Enquanto que na Matemática temos seus símbolos utilizados, desde à própria representação dos números e operações, até linguagens mais rebuscadas, como na representação de uma propriedade utilizando a forma algébrica, na Música ocorre algo parecido, com ela contendo, também sua linguagem própria para representar: as notas musicais, com seus determinados tempos de duração, o local onde as mesmas são inseridas, chamada ‘pauta’, e até emblemas referentes à tonalidade, andamento e harmonia empregadas.

Com esse pensamento, de utilizarmos a representação ‘figural’ da Música, obtida a partir dos conceitos Matemáticos, podemos proceder da seguinte maneira: uma música é executada e ouvida, e, através da atividade semiótica de ‘conversão’, a mesma é representada através de sua escrita na partitura.

A ideia ao trabalharmos a conexão entre Música e números racionais dessa maneira, uma vez mais, reside na coordenação de vários Registros de Representação Semiótica, essenciais, para uma aprendizagem consistente, segundo Duval (2012), pois podemos considerar de forma análoga, a melodia musical ouvida como se fosse, por exemplo, a ‘língua materna’, sendo necessário decodificar o que está sendo ouvido, para a representação na escrita musical, funcionando essa, como o registro figural, já que se assemelha muito mais com a linguagem gráfica do que com a escrita no que se refere aos registros semióticos, cuja correspondência com o ensino de números racionais se efetiva pela duração dos tempos das mesmas. Na “tabela 6” temos os símbolos das notas e respectivos valores:

Tabela 6: Notas musicais e tempo

Figura	Pausa	Tempo	Nome
𝅝	𝄻	4	SEMIBREVE
𝅗𝅥	𝄼	2	MÍNIMA
𝅘𝅥	𝄽	1	SEMÍNIMA
𝅘𝅥𝅮	𝄾	1/2	COLCHEIA
𝅘𝅥𝅯	𝄿	1/4	SEMICOLCHEIA
𝅘𝅥𝅰	𝅀	1/8	FUSA

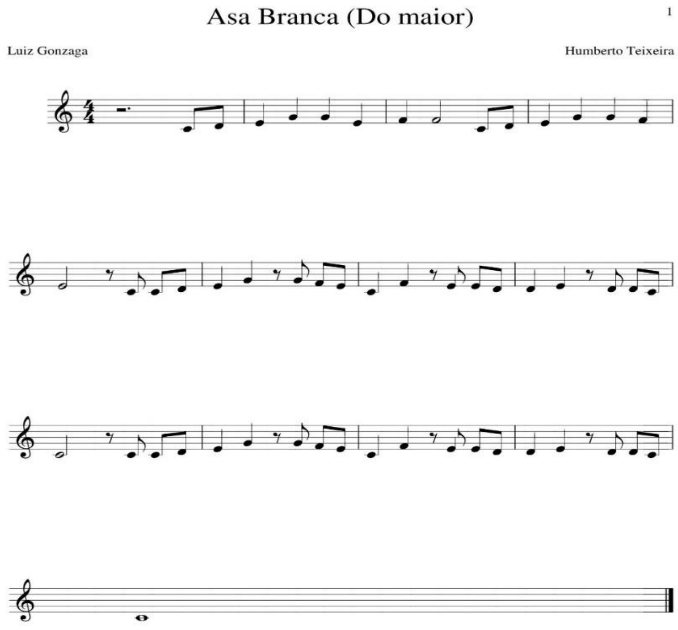
Fonte: https://magiadamusica.webnode.pt/figuras-musicais/

E, nesse caso, mesmo não sendo nossa pretensão a formação teórica completa dos alunos, a identificação figural e correspondências com os números racionais, de alguns conceitos de escrita musical é necessário ser aprendida, porém, é de fácil assimilação, já que trabalharemos apenas com as notas musicais em função da sua duração, relativas aos valores 4, 2, 1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$. de acordo com a “tabela 6”.

Além disso, a transposição, tanto sonora quanto referente à escrita pode ser utilizada, possibilitando uma vez mais trabalharmos o conceito de equivalência, agora sob um novo olhar, e, como sendo a percepção auditiva muito evidente por parte dos alunos, para essa situação, a execução de uma mesma música em vários tons, além de ser percebida auditivamente, também será notada através das imagens figurais de sua escrita que são claramente observáveis.

Na “figura 13” apresentamos a ‘escrita’ melódica da música ‘Asa Branca’ em Do maior:

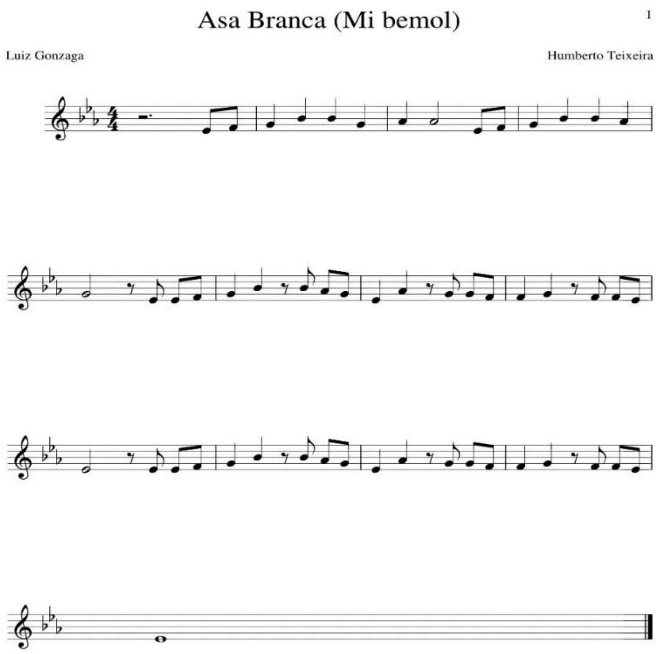
Figura 13: Partitura Asa branca (Do Maior)



Fonte: obra transcrita pelo autor

Apresentamos em seguida a mesma música transcrita na tonalidade de Mi bemol.

Figura 14: Asa Branca em Mi bemol



Fonte: obra transcrita pelo autor

E por último, na “figura 15”, a transcrição da música ‘Asa branca’ em Sol Maior. É fácil percebermos os mesmos símbolos utilizados para as notas, porém em localizações diferentes na pauta, e, com as armaduras de claves diferentes, já indicando os chamados acidentes, que são os sustenidos ou bemóis, a fim de serem mantidos as mesmas distâncias intervalares.

Figura 15: Asa Branca em Sol Maior

Fonte: obra transcrita pelo autor

Uma outra tarefa mais interessante a se propor nesse sentido é o caminho inverso na relação de decodificar o que é ouvido para a escrita musical, por ser menos complexa, principalmente para alunos que não tenham à princípio nenhum conhecimento musical.

Pode-se através do ‘registro figural’, presente na escrita da partitura, convertê-lo para o ‘musical’, ou melhor, para a ‘língua materna’ no chamado ‘solfejo’, que se define como o ‘entoar’ de um trecho musical, vocalizando-o somente com o nome das notas e respectivas alturas.

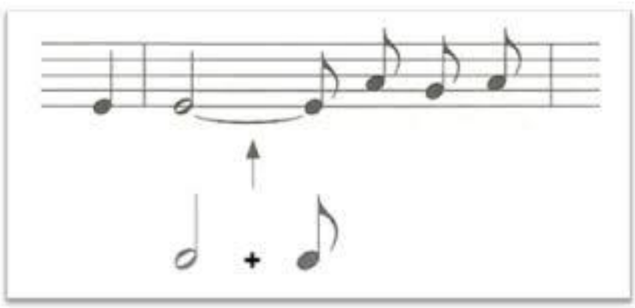
No nosso caso, o solfejo a ser realizado será somente de forma rítmica por ser de mais fácil assimilação e entendimento, e, por ser suficiente para atender nosso objetivo que é o de utilizar a música na apreensão dos conceitos referentes aos números racionais, com esse tipo de atividade.

Normalmente para quem estuda Música, no início é cobrado primeiramente apenas o solfejo rítmico com a correta execução dos tempos das notas, depois acrescenta-se o nome das mesmas, porém, sem diferenciar a altura musical, para somente depois serem exigidos o solfejo com o nome e altura corretos.

Há músicos virtuosos que só de lerem uma partitura, sem o auxílio de qualquer instrumento musical, já conseguem entoar a melodia corretamente respeitando os intervalos melódicos descritos, e, nos tempos adequados, entretanto, outros, só conseguem vocalizá-las corretamente com o auxílio de um instrumento musical executando as notas.

Nessa atividade de solfejar, a inclusão dos números racionais se faz também na forma de frações representando as notas musicais. Embora a escrita musical apresente alguns símbolos diferentes para representar alguns tempos, como as chamadas ‘ligaduras’ (figura 16), que somam o valor da segunda nota ao valor da primeira, no nosso caso, iremos nos ater apenas nos símbolos referentes as notas descritas na “tabela 6”, com algumas reescritas, que ligam duas ou mais ‘colcheias’ ou ‘semicolcheias’.

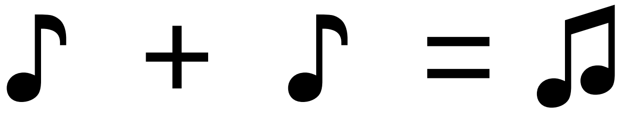
Figura 16: Ligadura



Fonte: http://teoriadescomplicada.blogspot.com/p/blog-page_30.html

Na “figura 17” apresentamos a escrita equivalente a duas colcheias:

Figura 17: Colcheia dupla



Fonte: elaborado pelo autor

E na “figura 18” temos a figura equivalente a quatro semicolcheias:

Figura 18: Quatro semicolcheias

Fonte: https://ramontessmann.com.br/misterio-das-quialteras/

Temos ainda, analogamente na Música, que quando transpomos uma música de tom numa partitura, estamos apenas ‘tratando’, se nos basearmos nos registros semióticos de Duval (2012), pois se trata do mesmo registro, já que é a mesma música, porém, quando uma música escrita numa partitura é executada por um instrumento ou vocalizada por um cantor estamos, de certo modo, realizando uma ‘conversão’, passando da linguagem gráfica (escrita musical), para a ‘língua materna’, que pode ser ‘cantada’ por uma voz ou por um instrumento musical.

Nessa conexão pretendida através do solfejo rítmico, envolvendo a escrita musical descrita em uma partitura, com os seus símbolos, trabalharemos num compasso de $\frac{4}{4}$, em que a semibreve equivale a 4 tempos, a mínima, 2, a semínima 1, a colcheia $\frac{1}{2}$, e, a semicolcheia, $\frac{1}{4}$.

Vamos representar cada tempo de um compasso $\frac{4}{4}$ equivalendo a 1 segundo do relógio. Esse valor varia de música para música. Existem notações em que cada tempo é considerado mais rápido ou mais lento que 1 segundo. Porém para efeito de um melhor entendimento vamos considerar cada tempo valendo 1 segundo.

Podemos pensar em um compasso $\frac{4}{4}$ contendo 4 tempos, com cada tempo equivalendo aproximadamente a 1 segundo, em que se estiver escrito uma ‘semibreve’ na pauta, o solfejo rítmico será executado através da expressão ‘ta-a-a-a’, em que cada silaba equivalerá a 1 tempo (totalizando 4 tempos ou 4 segundos).

No caso de preencher esse mesmo compasso com ‘mínimas’, teremos: ‘ta-a’ (2 tempos ou 2 segundos) e ‘ta-a’ (dois tempos).

Preenchendo o compasso com a nota ‘semínima’: ta-ta-ta-ta (com cada silaba ‘ta’ valendo um tempo).

No caso da colcheia (taca-taca-taca-taca) com cada taca valendo 1 tempo, ou seja: ‘ta’ (1/2 tempo) e ‘ca’ (1/2 tempo).

E por último, a semicolcheia (tatutitu-tatutitu-tatutito-tatutito), nesse caso cada ‘tatutitu’ valendo 1 tempo e cada sílaba (‘ta’, ‘tu’, ‘ti’ ou ‘tu’) valendo $\frac{1}{4}$ de tempo.

A “figura 19” exemplifica a composição de um compasso $\frac{4}{4}$ utilizando as figuras semibreve, mínima, semínima e colcheia, com os respectivos tempos de pausa.

Figura 19: Exercício de solfejo

Fonte:http://viver-musica.blogspot.com/2015/01/duracao-das-notas-musicais-figuras.html

No caso do solfejo rítmico da partitura acima ficaria. ‘Ta-a-a-a’(4 tempos)/ ‘Ta-a’, ‘ta-a’ (2+2= 4 tempos)/ ta-ta-ta-ta (1+1+1+1=4 tempos)/ taca-taca-taca-taca (lembrando que cada taca vale 1 tempo, totalizando 4 tempos)/ ta ,(com esse ‘ta’ valendo meio tempo, sendo o complemento do compasso sendo preenchido com os símbolos referentes aos tempos de pausa).

Nesses símbolos referentes a pausas, temos a ausência de som ou solfejo.

Uma outra vertente dessa atividade, é ao invés de solfejar, utilizar as batidas de palmas, que de modo geral representariam a mesma coisa, porém, de um modo envolvendo a coordenação motora do aluno, propiciando uma atividade bastante descontraída.

Desse modo, a ‘conversão’ do registro figural para o registro da ‘língua materna’ será realizada, e serão percebidas as relações entre os símbolos musicais e os números racionais fracionários $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$, correspondentes aos expressos musicalmente em sua forma rítmica.

Se pensarmos apenas nos números racionais e as grades retangulares expressando a representação figural, essa atividade equivale a conversão do que é observado no desenho para a parte numérica, porém, agregando um aspecto lúdico e divertido, promovendo maior interesse por parte dos alunos.

Um outro benefício inerente a essa atividade é a percepção que o aluno terá instantaneamente de que um inteiro é composto por duas metades ou quatro quartos.

Essa atividade ainda poderia ser mais valorizada se outros símbolos mais rebuscados de escrita musical referentes aos tempos fossem utilizados, porém, pelo pressuposto de que nenhum dos alunos conhece conceitos musicais, não seria viável nesse momento. Talvez, em uma outra oportunidade.

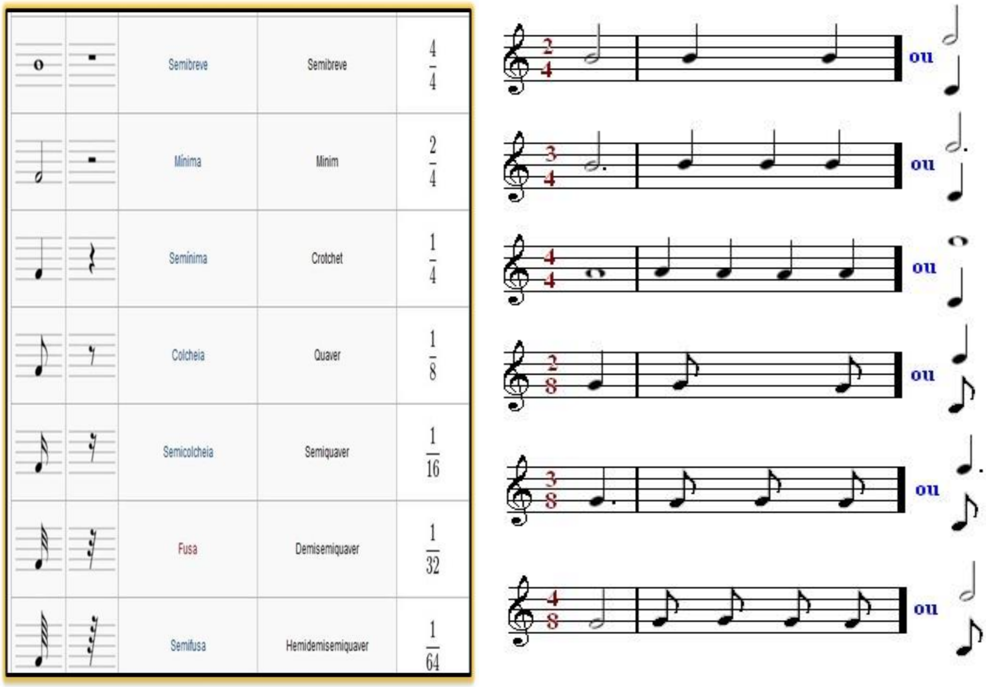
Na utilização do registro semiótico figural ou geométrico, Catto (2000) frisa que ocorre pela percepção e interpretação e não pela leitura apresentando dois aspectos a serem observados: A perceptiva das formas feitas automaticamente, e a apreensão discursiva dos elementos matemáticos da figura privilegiando as possibilidades de transformação e reorganização das mesmas.

Essa ‘reorganização’ citada por Catto (2000), sugere outras formas de trabalharmos com as figuras musicais expressando números racionais, através dos compassos musicais.

3.2.4. Conexão 4: Figuras musicais e compassos

A relação entre a fórmula de compasso com as frações sãos extremamente equivalentes. Observe a “figura 20” com essas equivalências:

Figura 20: Compasso e relação com notas musicais



Fonte: http://www.pensandomusica.com.br/2015/11/o-tempo-na-partitura.html

No caso temos que para a composição de um compasso $\frac{4}{4}$ de uma única nota semibreve é necessária por ser $\frac{4}{4}$. Se considerássemos a mínima seriam necessárias duas pois $\frac{2}{4}+\frac{2}{4}=\frac{4}{4}$; no caso da semínima seriam necessárias 4 notas, pois perceba que $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{4}{4}$.

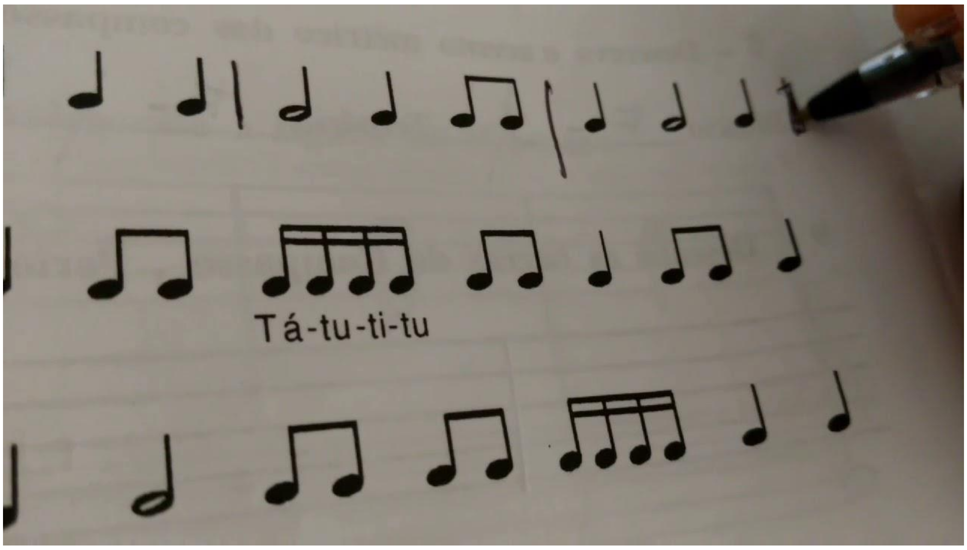
Ou ainda: $8 \times \frac{1}{8}=\frac{4}{4}$ (no caso são 8 colcheias).

Por outro lado, se pensássemos em um compasso de $\frac{3}{8}$ seriam necessárias três colcheias já que $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$, ou uma semínima pontuada (lembrando que o ponto de aumento aumenta metade do valor da figura), que seria a soma entre $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$

Já é perceptível facilmente a possibilidade de utilizarmos a música sob o aspecto de sua escrita musical no ensino de números racionais.

Uma atividade bastante interessante a ser feita através dos compassos musicais, consiste em escrever várias notas musicais com diferentes valores de tempo, sendo o aluno orientado a colocar adequadamente os traços verticais, organizando cada compasso com as notas que o preencham adequadamente. Observe a “figura 21”, em que cada compasso precisa de 4 tempos para ser preenchido corretamente:

Figura 21: Separando compassos



Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=F-Pa6vFQfoE

Posteriormente ainda temos a possibilidade de convertemos da linguagem figural envolvendo as notas musicais totalmente relacionadas com a matemática para a linguagem simbólica matemática envolvendo frações, indo ao encontro, de que segundo Silva (2008), o registro na língua natural e o figural não são algoritmáveis para tratamentos, sendo os cálculos realizados através dos números matemáticos.

Silva (2008), fundamentado na teoria de Duval (2012), atesta que a escolha de um registro se deva a dois fatores matemático: visando a economia de cálculos, ou cognitivo, quando o, conceito a ser aprendido não é contemplado no registro anterior

Podemos também, simplesmente operar com números racionais através das notas musicais que as representam. Estabelecendo esse cálculo através de dois registros semióticos, com a conversão do figural para o simbólico, para assim realizarmos o tratamento.

Podemos por exemplo aplicar tarefas nessa visão, onde podemos efetuar operações envolvendo frações. Observe:

Calcule:

a)

 +  =

E até mesmo propor exercícios provenientes da língua materna envolvendo conceitos musicais:

b) Semínima pontuada + semicolcheia pontuada=

c) Semifusa+semifusa+semifusa+ colcheia pontuada=

d) Três semicolcheias equivalem a quantos tempos?

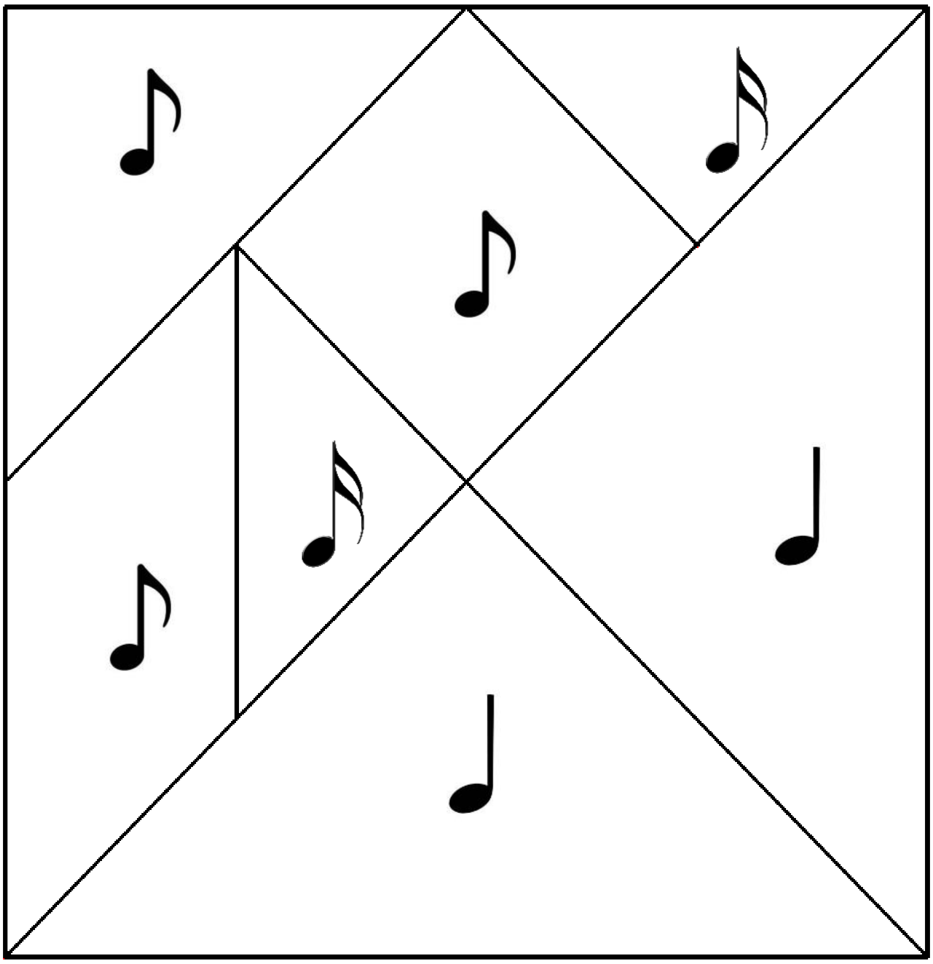
3.2.5. Conexão 5: Relacionando notas musicais e Tangran

Uma outra possibilidade ainda de utilizarmos as notas musicais é a utilização das mesmas em figuras geométricas juntamente com o Tangran, cuja utilização é destacada no Caderno do aluno do material do Estado de São Paulo, no qual cada parte poderá ser substituída por uma figura musical correspondente.

A “figura 22” apresenta as respectivas notações musicais equivalentes de cada parte do Tangran. No caso foram necessárias duas semínimas +3 colcheias + 2 semicolcheias = uma semibreve

$2 \times 1 + 3 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 4$

Figura 22: Tangran através das notas musicais



Fonte: Caderno do professor 2014-2017, 6º ano, v1 p.42; Marcações: elaborado pelo autor

Perguntas relacionadas a essa utilização das notas pode ser feita de várias maneiras de modo a desenvolver adequadamente o conteúdo. Abaixo seguem alguns exemplos de perguntas que podem ser realizadas.

Usando as sobreposições das figuras do Tangram, e na tabela sobre os valores das notas musicais, responda as perguntas abaixo:

a) Quantos triângulos pequenos são necessários para formar um quadrado pequeno?

b) Quantas notas semicolcheias são necessárias para formar uma colcheia?

c) Qual o valor de 1/4 + 1/4?

d) Quantas notas semicolcheias são necessárias para termos uma semínima? Que fração ela corresponde

Desse modo, através da música conseguimos agregar diversas atividades coesas, muito bem contextualizadas, envolvendo a relação ‘ensino-aprendizagem’ de números racionais, visando sua aprendizagem pelos alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, trabalhando com os diversos registros e significações que um número racional assume, tão importantes para uma aprendizagem plena, segundo Duval (2012). Hora utilizando a música de forma análoga, hora apresentando a mesma como um ‘registro figural concreto’ referente aos números racionais, no qual percebemos, o quanto é interessante e importante a sua utilização, de uma forma muito mais abrangente do que antes havíamos imaginado quando iniciamos nossa pesquisa.

4. ANÁLISE DOS DOCUMENTOS CURRICULARES

Tendo em vista a utilização da Música em tarefas contempladas pelo atual Currículo do Estado de São Paulo, neste capítulo apresentamos primeiramente, algumas concepções e orientações didático-pedagógicas dos sempre atuais Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998), procurando relacioná-las com nossa proposta de pesquisa, e, em seguida, algumas considerações sobre a proposta do material fornecido pelo Estado de São Paulo, surgida em 2008, que também subsidiaram nosso trabalho, relacionando-o com nossa proposta, e, também trazendo a análise das tarefas presentes no primeiro Volume do Caderno do Professor e do Aluno para o 6º ano do ensino fundamental, na situação de aprendizagem 3: 'Na medida certa: dos naturais às frações', em que se baseiam nossas conexões com a música sob à luz das teorias dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2012).

4.1. Um 'olhar' baseado em nossa proposta sobre alguns problemas de aprendizagem sinalizados pelos Parâmetros Curriculares Nacionais

Em 1998, os PCN (BRASIL, 1998), foram criados, com o intuito de construir referências nacionais comuns para Educação de todas as regiões do Brasil. Embora estejamos já em 2018, eles ainda se mostram protagonistas no que concerne ao processo de ensino-aprendizagem. Muitas propostas e ideias apresentadas em 1998 continuam atuais, pois privilegiam aspectos muito relevantes, como 'o aprender a aprender' e a utilização da 'situação-problema', como ponto de partida.

> A situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las. (BRASIL, 1998, p.40).

Mesmo mediante a renovações curriculares que se sucederam desde os anos 20, os PCN (1998) apontam que o ensino da matemática continua com seu caráter ‘elitista’ refletido na prática de professores, ou seja, a matemática é tratada como artigo de luxo, não estando disponível para qualquer pessoa.

Excessivas retenções, conceitos formalizados sem um contexto adequado, excesso de mecanização algorítmica sem a devida compreensão, e as poucas aplicações práticas da Matemática, são erros constatados como constantes e recorrentes na nossa Educação, sendo que proposta inovadoras e mais relevantes não chegam aos professores, a não ser, superficialmente.

Os PCN (1998), ainda apontam como dificultadores, a falta de profissionalização qualificada dos docentes, concepções pedagógicas equivocadas, a falta de estrutura de trabalho e a ausência de políticas educacionais efetivas, como obstáculos para uma educação matemática mais satisfatória.

Um outro ponto considerado como obstáculo, utilizado como desculpa em demasia na educação, é o famoso ‘pré-requisito’, sendo alegado por muitos educadores ser necessário adquirir um certo conhecimento anterior para aprendizagem de outro, algo totalmente diferente de como as coisas são apresentadas no mundo, em que, quase sempre um conhecimento encontra-se atrelado a outro.

“Nessa visão, a aprendizagem ocorre como se os conteúdos se articulassem na forma de uma corrente, cada conteúdo sendo um pré-requisito para o que vai sucedê-lo. (BRASIL, 1998, p.22).

Porém, em alguns casos, os PCN (1998), ressaltam que na apreensão de alguns conceitos, talvez seja interessante termos um ponto de partida, para através dele, desenvolvermos outros.

No caso dos números racionais, acreditamos que proporcionar a sua aprendizagem, a partir do estudo de frações, para depois adentrarmos na aprendizagem de seus outros registros, como o dos números decimais, seja mais interessante (os próprios PCN citam isso na p.22), porém, desde que exista, desde o início de seu estudo, conexões com as relações equivalentes a esses outros registros pertinentes, retratados em uma determinada situação. Mesmo que seja abordado de forma simplificada, à princípio, sendo aprofundado esse conhecimento em outro momento. É importante que esse outro conceito, referente a uma outra representação do objeto matemático, seja agregado naturalmente ao saber do aluno, e, não aparecendo, de repente, como algo totalmente novo, nunca antes nem imaginado.

Uma experiência descrita por um ex-aluno que tivemos, e que recentemente reencontramos, reforça esse nosso pensamento:

‘Como me ensinaram que não havia resultado para ‘3 – 5’, até o 6º ano, e, depois no 7º ano disseram que existe? Isso acabou comigo. Passei a odiar matemática!’

Através desse simples exemplo, constatamos ser necessário, de ao invés de o professor dizer que não existe o resultado da subtração ‘3 - 5 ‘, para um aluno do 6º ano, ou mesmo de anos anteriores, já se antecipar, não apenas alertando sobre a existência da possibilidade de executar a operação matemática, mas, apresentando inclusive o resultado, informando que o mesmo faz parte dos números inteiros, e, que será tratado de forma devida, em anos posteriores. E, isso, deve ocorrer com qualquer conteúdo matemático estudado, como por exemplo, o referente aos números complexos quando estudamos equações do 2º grau, e o valor encontrado para o discriminante ‘Delta’ é um número negativo, ou, no próprio estudo dos números irracionais, que são relacionados ao nosso trabalho.

Embora, os números irracionais não sejam objeto de nosso estudo no 6º ano, é importante ao menos dar conhecimento aos alunos sobre sua existência, afinal foi preciso a implantação dos mesmos para que a estrutura musical que trazemos em nosso trabalho pudesse ser realizada de forma adequada.

Dessa forma, a constante revisão de cada conteúdo se torna necessário, já que as situações reais sempre contemplarão as diversas faces e representações que um objeto matemático assume, de modo muitas vezes entrelaçados, algo que infelizmente não é levado muito em consideração em nossas escolas, conforme relata os PCN (1998):

“O que também se observa em termos escolares é que muitas vezes os conteúdos matemáticos são tratados isoladamente e são apresentados e exauridos num único momento.” (BRASIL, 1998, p.22).

Desse modo, ao propormos o ensino de números racionais utilizando a Música sob à luz das teorias de Duval (2012), agregando outros registros de um objeto matemático que serão trabalhados de modo mais abrangente posteriormente, como por exemplo, o registro decimal referente a uma fração encontrada no intervalo consonante musical pitagórico, estamos contemplando uma das prioridades de Duval, no que concerne a apreensão plena de um conceito matemático.

Além disso, vai ao encontro com o que é orientado nos PCN, de não limitar um conteúdo específico a uma determinado tempo, trabalhando com o mesmo sempre que possível de acordo com as oportunidades, e, também indo ao encontro com nosso próprio pensamento de já ir apresentando certos conceitos, mesmo antes de serem formalizados com bastante ênfase, pois acreditamos, que quando for o momento previsto para estudá-lo, além de ser mais familiarizado pelo aluno, agregando maior interesse, também evitará situações como já discorremos nos parágrafos anteriores, de substituir uma concepção já aprendida por outra totalmente diferente.

Essa imersão em conceitos matemáticos que se apresentam interligados, através da Música, promove inovação através de uma contextualização histórica, estimulando o interesse através de um tema tão presente no mundo contemporâneo.

> Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento. (BRASIL,1998, p.42)

A utilização da Música nesse aspecto, não considera como dificultador nem a questão do ‘pré-requisito’, pois certamente conceitos musicais são desconhecidos por quase todos os alunos matriculados em uma escola de Ensino Fundamental, que não tenham a disciplina música como componente curricular, e, nem por isso será tratado como um problema, mas sim, como uma ferramenta capaz de possibilitar a apreensão de novos conceitos na busca por uma aprendizagem mais significativa e envolvente.

> Por isso é fundamental não subestimar o potencial matemático dos alunos, reconhecendo que resolvem problemas, mesmo que razoavelmente complexos, ao lançar mão de seus conhecimentos sobre o assunto e buscar estabelecer relações entre o já conhecido e o novo. (BRASIL, 1998, p.37).

4.2. Variáveis de aprendizagem: professor e aluno

Os PCN (1998) também consideram as características do aluno e do professor como variáveis no processo de ensino de aprendizagem, sendo, no caso do professor sua herança e conhecimento relevantes nesse processo.

> Ter clareza de suas próprias concepções sobre a Matemática, uma vez que a prática em sala de aula, as escolhas pedagógicas, a definição de objetivos e conteúdo de ensino e as formas de avaliação estão intimamente ligadas a essas concepções. (BRASIL, 1998, p.36).

Dessa forma, quando utilizamos a música baseada em nossa vivência pessoal e profissional, estamos levando em consideração em nossa concepção de 'ensino-aprendizagem', aspectos de como a matemática foi concebida em nossa própria aprendizagem, garantindo com isso certamente, mais domínio e motivações para poder extrair do aluno um aprender mais significativo.

Na relação 'professor-aluno', os PCN (1998), ressaltam que o papel do professor é muito maior do que um simples expositor de conteúdo, que promove de modo ineficaz, a repetição de procedimentos corretos, entretanto, sem o mesmo aprender devidamente o conceito trabalhado, mas, sim, tendo um 'papel' voltado para o protagonismo do aluno na construção de sua própria aprendizagem, sendo organizador, facilitador e "mediador.

Os PCN (1998) ainda ressaltam que na função de mediador do professor entre o conhecimento matemático e o aluno, é necessário ao mesmo, estar aberto a novos caminhos com o advento de novos conhecimentos.

Com relação aos alunos do 6º ano, com idades entre 11 e 12 anos, a abordagem não é simples, segundo os PCN (1998), afinal eles se apresentam com diferentes características, ocasionadas pelas mudanças em seu desenvolvimento, físico, emocional e psicológico, em decorrência da própria faixa etária que se encontram, que são representados em seus diferentes comportamentos, reflexo de pressões e exigências a que são submetidos.

> As significativas mudanças que interferem em seu desenvolvimento físico, emocional e psicológico repercutem fortemente no comportamento e trazem preocupações relacionadas ao futuro profissional, à vida afetiva, à sexualidade e à necessidade de liberdade. BRASIL, 1998, p.61).

Levar em consideração todas essas mudanças que ocorrem no aluno, apresentando uma forma de ensinar utilizando algo presente e importante na vida de todos eles, através de uma nova metodologia, que no nosso caso se faz pela música, tão presente na vida de todos, permite que o interesse pelo conteúdo a ser estudado não seja encarado com desdém ou mesmo desconforto.

4.3. Alguns outros aspectos do ensino de números racionais para alunos do terceiro ciclo de acordo com os PCN (1998)

No que se refere ainda sobre a aprendizagem dos números racionais, os PCN(1998) relatam que, embora esses números já sejam trabalhados nos ciclos iniciais, o que ocorre é que o aluno chega ao terceiro ciclo "sem compreender os significados associados a esse tipo de número, e tampouco os procedimentos de cálculo, em especial os que envolvem os racionais na forma decimal." (BRASIL, 1998, p. 100-101).

Conceitos como a multiplicação envolvendo racionais poder ser menor do que o resultado inicial (Exemplo 1), ou o tamanho da escrita numérica não objetivar a comparação de valores adequadamente (Exemplo 2), são alguns fatores considerados como obstáculos.

Exemplo 1: $3 \times 1/2 = 3/2$

Exemplo 2: $2{,}345 < 2{,}4$

> Assim, é desejável explorar no terceiro ciclo, problemas que levem os alunos a fazer predições por meio de questões que envolvam aspectos qualitativos e quantitativos (O número encontrado deveria ser maior ou menor? Quanto maior? Essa resposta faz sentido?). (BRASIL, 1998, p.67).

Utilizar então situações que levem em consideração a construção de significados, pautados em situações que agreguem contextualização e diferentes formas de registros que procurem alicerçar a compreensão do objeto matemático em si, precisam ser bastante valorizadas.

Quando propomos tarefas baseadas na localização das frações referentes aos intervalos consonantes encontrados por Pitágoras, na reta numérica, ou efetuando a própria multiplicação de frações percorrendo o ciclo das quintas para encontrar os outros valores da escala pitagórica contemplamos essas possibilidades citadas.

> É importante destacar que as situações de aprendizagem precisam estar centradas na construção de significados, na elaboração de estratégias e na resolução de problemas, em que o aluno desenvolve processos importantes como intuição, analogia, indução e dedução. (BRASIL, 1998, p. 63).

Nesse aspecto, segundo os PCN (1998), também é importante levar em conta a chamada descontextualização. Ou seja, contextualizar é importante, porém, depois de aprendido um determinado conceito, ele precisa ser descontextualizado, e contextualizado em uma nova situação, a fim de não ficar marcado como pertinente a apenas uma determinada atividade.

Novamente a Música contempla essa possibilidade como descrevemos no capítulo anterior, já que primeiramente temos a ideia de utilizá-la como contexto para o aparecimento das razões referentes aos intervalos consonantes, e, posteriormente esse mesmo objeto matemático, sendo utilizado em outras situações, como na obtenção de frequências sonoras, na escrita musical, nas fórmulas de compasso, contribuindo dessa forma para uma aprendizagem conceitual mais fortalecida.

> O estabelecimento de relações é fundamental para que o aluno compreenda efetivamente os conteúdos matemáticos, pois, abordados de forma isolada, eles não se tornam uma ferramenta eficaz para resolver problemas e para a aprendizagem/construção de novos conceitos. (BRASIL, 1998, p.37).

Apresentar os racionais como complemento aos naturais, mostrando que os naturais não são suficientes para representar todas as situações presentes e que aparecem no dia a dia, são citados pelo PCN (1998), como possibilidade fundamental para a introdução desses números conceitualmente, principalmente, a partir de conceitos históricos, que a música uma vez mais oferece.

> Essa organização linear e bastante rígida dos conteúdos, que vem sendo mantida tradicionalmente na organização do ensino de Matemática, é um dos grandes obstáculos que impedem os professores de mudar sua prática pedagógica numa direção em que se privilegie o recurso à resolução de problemas e a participação ativa do aluno. (BRASIL, 1998, p. 138).

Hoje o conhecimento e acesso à informação é muito rápido e acessível com a popularização cada vez maior da rede mundial de computadores, porém, 20 anos após a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais, que indicavam caminhos para a educação, percebe-se que o papel da mesma ainda continua sendo importantíssima, cabendo a mesma, com situações de aprendizagem motivadoras e recheadas de inovação e pluralidade conceitual, despertar e desafiar o nosso aluno. A escola precisa ser tão atraente quanto as coisas que o mundo oferece, e, nesse sentido, nada melhor do que agregar uma ferramenta tão presente, utilizada e influenciadora, como a música, também na aprendizagem matemática.

4.4. Objetivando o Currículo do Estado de são Paulo

Visando melhorar a qualidade de ensino para seus alunos, em 2008, a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo desenvolveu através do programa ‘São Paulo faz Escola’, um Currículo base, para séries iniciais e finais do Ensino Fundamental e Médio, para apoiar a todas as escolas do Estado.

> Este documento básico apresenta os princípios orientadores para uma escola capaz de promover as competências indispensáveis ao enfrentamento dos desafios sociais, culturais e profissionais do mundo contemporâneo. (SÃO PAULO, 2012, p.3)

A princípio, no início da proposta, em 2008, foram criados e distribuídos para alunos e professores, materiais que continham a revisão de conteúdos de anos anteriores, em forma de jornal: O ‘Jornal do aluno’ e o ‘Jornal do professor’. Por 42 dias, esse material subsidiou os trabalhos dos docentes contemplando principalmente conceitos relacionados à matemática e língua portuguesa, sendo trabalhados, entretanto, pelos professores de todas as disciplinas das unidades escolares.

Ao término desse período, os professores receberam o 'Caderno do Professor' para subsidiar o seu trabalho, e a partir de 2009, foi criado, também, o 'Caderno do aluno'.

O Currículo, dividido por áreas de conhecimento, teve sua primeira edição publicada em 2010, com atualizações efetuadas em 2012, e, no que se refere à área de conhecimento da matemática, apresentou o título de 'Currículo do Estado de São Paulo – Matemática e suas Tecnologias.'

Em 2014 a proposta passou por algumas atualizações, atendendo sugestões propostas por profissionais da educação visando dar maior autonomia ao professor, e, contribuir para melhoria na qualidade de ensino. Foram atualizados alguns dados presentes no material, e o mesmo passou a ser organizado em dois volumes semestrais ao invés do constituído anteriormente, por volumes bimestrais.

Segundo o próprio Currículo do Estado de São Paulo, a intenção é se ter uma base comum no que se refere a competências e conhecimentos, pautando e articulando todas as escolas da rede num mesmo objetivo, tendo as competências como referência, e, procurando estar à altura dos desafios contemporâneos priorizando a competência para leitura e escrita, tendo como foco principal, a transformação da informação em conhecimento, articulando as competências para aprender, e tendo ainda, uma articulação com o mundo do trabalho.

> A relevância e a pertinência das aprendizagens escolares construídas nessas instituições são decisivas para que o acesso a elas proporcione uma real oportunidade de inserção produtiva e solidária no mundo. (SÃO PAULO, 2012, p.9)

Nesse 'Currículo' unificado do Estado de São Paulo, temos como material de apoio à professores e alunos, o 'Caderno do Professor' e o 'Caderno do Aluno', com algumas diferenças entre eles, na medida em que o caderno do professor apresenta, além de orientações didático-pedagógicas para professores, algumas atividades complementares, podendo ser utilizado como complemento à Matriz Curricular.

A utilização da Música, ciência e arte, presente na cultura de todos os povos, na aprendizagem escolar, e, em especial para nós, na aprendizagem de números racionais, frente ao que prevê o Currículo do Estado de São Paulo, se reforça no pensamento do aprendizado como ‘competência’ de uma escola, que devido a inovações constantes, no mundo em que vivemos também tem que aprender a ensinar.

> O conhecimento tomado como instrumento, mobilizado em competências, reforça o sentido cultural da aprendizagem. Tomado como valor de conteúdo lúdico, de caráter ético ou de fruição estética, numa escola de prática cultural ativa, o conhecimento torna-se um prazer que pode ser aprendido ao se aprender a aprender. Nessa escola, o professor não se limita a suprir o aluno de saberes, mas dele é parceiro nos fazeres culturais; é quem promove, das mais variadas formas, o desejo de aprender, sobretudo com o exemplo de seu próprio entusiasmo pela cultura humanista, científica e artística. (SÃO PAULO, 2012, p.11).

Ainda de acordo com o ‘Currículo do Estado para Matemática e suas Tecnologias’ (SÃO PAULO, 2012, p. 28), o objetivo principal é mapear o vasto território do conhecimento, possibilitando ‘novas viagens’, e, não limitando as fronteiras desse conhecimento de modo que as informações sejam organizadas facilitando a construção do conhecimento.

> Cada assunto pode ser explorado numa perspectiva histórica, embebido de uma cultura matemática que é fundamental para um bom desempenho do professor, mas deve trazer elementos que possibilitem uma abertura para o novo, que viabilizem uma ultrapassagem de situações já existentes quando isso se tornar necessário. (SÃO PAULO, 2012, p.33).

No capítulo anterior de nosso trabalho já discorremos sobre o quanto a Música, é uma opção ótima, já que agrega, além de seu caráter histórico, o ‘status’ de novidade com sua utilização na educação matemática, tanto no que tange a motivação educacional como também na própria contribuição para apropriação estrutural de novos significados, oferecendo recursos para melhoria na qualidade de ensino, principalmente nos dias atuais, em que a inovação e velocidade da informação se processam de forma instantânea.

> Em um mundo no qual o conhecimento é usado de forma intensiva, o diferencial está na qualidade da educação recebida. A qualidade do convívio, assim como dos conhecimentos e das competências constituídas na vida escolar. (SÃO PAULO, 2012, p.8-9).

Frente a isso, encontrar metodologias que despertem o interesse e apresentem situações que sejam mais condizentes com o nosso tempo, oferecendo qualidade ao mesmo tempo, é obrigação dos profissionais da educação.

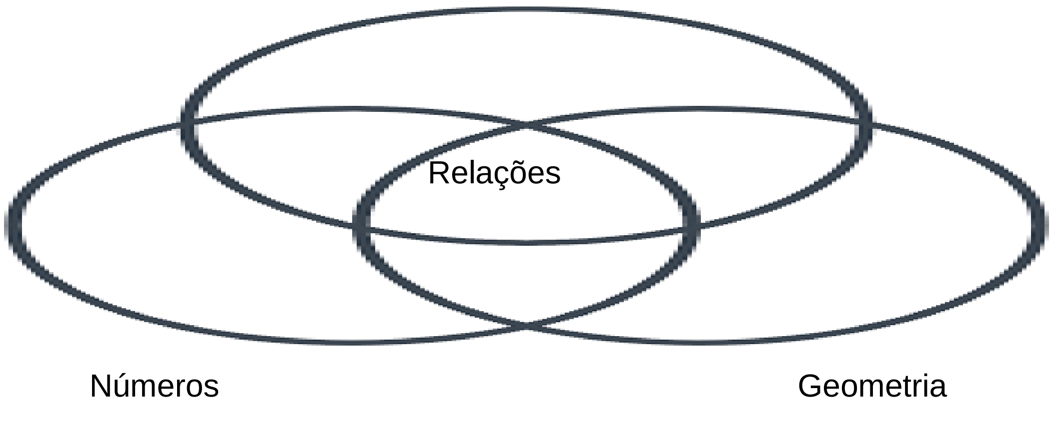
> A aproximação entre os conteúdos escolares e o universo da cultura, a valorização das contextualizações e a busca permanente de uma instrumentação crítica para o mundo do trabalho não constituem exatamente uma novidade entre nós. Tais princípios servem, naturalmente, de ponto de partida para a reconfiguração que agora se realiza, tendo em vista os novos passos a serem dados para o enriquecimento da prática pedagógica. (SÃO PAULO, 2012, p.30).

Nessa busca pela qualidade, trazendo inovações que se adaptem ao mundo contemporâneo, a reestruturação curricular relacionada à matemática, apresentada pelo Estado, fundamentou-se em ideias principais, baseada em três grandes blocos: Números, Geometria e Relações.

"Embora a lista de conteúdos relacionados à Matemática, tanto nos Ensino Fundamental quanto no Médio sejam extensas, as ideias fundamentais a serem exploradas já são mais reduzidas" (SÃO PAULO, 2012, p. 36).

O esquema (figura 23) retrata a integração entre esses blocos:

Figura 23: Blocos temáticos



Fonte: São Paulo, 2012, p 39.

Na "figura 23" percebemos blocos com suas particularidades, porém, apresentando interações entre os mesmos, contemplando um aspecto educacional baseado na pluralidade conceitual em que os conteúdos (quadro 2) com aspectos diferentes, por vezes, se interligam, sendo necessárias situações que proporcionem e contemplem um aprendizado integrado.

> Cada um dos três blocos de conteúdos está presente, então, direta ou indiretamente, na lista dos temas a serem ensinados em todas as séries/anos e, com pequenas e matizadas diferenças, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio. (SÃO PAULO, 2012, p.40).

No “quadro 2” abaixo apresentamos os conteúdos referentes a cada bloco temático citado.

Quadro 2: Blocos do Currículo de São Paulo

NÙMEROS	equivalência/ordem simbolização/operações
GEOMETRIA	percepção/concepção construção/representação
RELAÇÕES	Medidas/aproximações Proporcionalidade/interdependências

Fonte: São Paulo, 2012, p.39.

Em nosso trabalho de pesquisa, focado no estudo e aprendizagem dos números racionais através da conexão com a música, fundamentado nas teorias de Duval (2012), essa interligação ocorre naturalmente, já que cada tarefa envolvendo esse estudo, apresenta a interseção entre esses blocos, que o Currículo do Estado de são Paulo orienta entre ‘números, geometria e relações’.

No capítulo anterior já apresentamos essas interações entre música e números racionais, sob a ótica da Teoria dos Registros Semióticos, que podemos, de forma resumida, exemplificá-las nos ‘tratamentos’, através de operações envolvendo os números racionais e ordenação nos seus determinados registros; nas ‘conversões’, que propiciam a interseção com a geometria; e nas próprias ‘relações’, contempladas através do conceito de proporcionalidade plenamente possível de ser trabalhado através da música, com suas transposições de melodias e intervalos, propiciando uma aprendizagem plena de significado, além da própria comparação com um padrão, que é prevista para as ‘relações’ descritas acima.

No caso, até a proporcionalidade inversa é propiciada através da música, na relação encontrada ao dobrarmos a frequência musical, em que o comprimento da sua onda sonora graficamente é reduzido pela metade, agregando um contexto muito valioso, imprescindível para uma aprendizagem significativa.

> Quando se critica a abstração de grande parte dos conteúdos escolares, reclama-se da falta de complementaridade da contextualização; igualmente criticável pode ser uma fixação rígida de contextos na apresentação dos diversos temas. (SÃO PAULO, 2012, p.31).

Temos ainda que dentre os vários objetivos destacados pelo Currículo do Estado de São Paulo, a integração constante entre a linguagem corrente e a linguagem matemática é destacada, algo que a conexão entre música e números racionais sob a ótica dos Registros de Representações Semióticas de Duval (2012), que já foi por nós destacada no capítulo anterior, contemplam com bastante eficiência, principalmente pela atividade semiótica da ‘conversão’, da música para a linguagem geométrica, e vice-versa, atrelando muitas situações em que a aprendizagem de um objeto matemática se torna mais crível.

> Os objetos matemáticos – números, formas, relações – constituem instrumentos básicos para a compreensão da realidade, desde a leitura de um texto ou a interpretação de um gráfico até a apreensão quantitativa das grandezas e relações presentes em fenômenos naturais ou econômicos, entre outros. (SÃO PAULO, 2012, p.32).

4.5. Caderno do Professor e do Aluno

Como já dissemos, o material de apoio que constitui o Currículo do Estado de São Paulo é formado pelos ‘Caderno do Professor’ e ‘Caderno do Aluno’, com esse, contendo as tarefas descritas e destinadas aos mesmos, sob a orientação do professor que tem no caderno intitulado com o seu nome, orientações e sugestões de como apresentar as tarefas contidas, frisando os conteúdos indispensáveis a serem adquiridos para obtenção das competências necessárias pelos alunos, além de orientações sobre a interligação entre as disciplinas contempladas em cada tema, e, considerações sobre a avaliação a ser realizada.

“As inovações pretendidas referem-se à abordagem dos conteúdos, sugerida ao longo de cada Caderno.” (CADERNO DO PROFESSOR, 2014 – 2017, 6º ano, v1, p.5).

A nova edição do Caderno do Professor e do Aluno, é constituído, por dois volumes semestrais, sendo cada volume contendo oito situações de aprendizagem.

No “quadro 3” temos as situações de aprendizagem contidas no Volume 1:

Quadro 3: Situações de aprendizagem presentes no Caderno do Professor

Situação de aprendizagem 1	**O sistema de numeração decimal e suas operações**
Situação de aprendizagem 2	Explorando os números naturais
Situação de aprendizagem 3	Na medida certa: dos naturais às frações
Situação de aprendizagem 4	Equivalências e operações com frações
Situações de aprendizagem 5	O soroban e os números decimais
Situação de aprendizagem 6	Equivalências e operações com decimais
Situação de aprendizagem 7	Medidas não padronizadas
Situação de aprendizagem 8	Medidas e transformações

Fonte: Caderno do professor, 2014 – 2017, 6º ano, v1, p.4.

O Volume 1 apresenta como conteúdos principais, o estudo dos números naturais, frações decimais e sistemas de medidas, distribuídos nessas oito situações de aprendizagem, porém, organizados em 16 unidades, que seriam os conteúdos contemplados pelas situações de aprendizagem apresentadas, que prevê que o aprofundamento de cada um dos temas, seja feito à critério do professor devido à importância do conteúdo para sua turma, ou pela própria adequação necessária do tempo para desenvolvê-lo.

> A critério do professor, em cada situação específica o assunto correspondente a uma das unidades pode ser estendido para mais de uma semana, enquanto o de outra unidade pode ser tratado de modo mais simplificado. (CADERNO DO PROFESSOR, 2014-2017, 6º ano, v1, p.5).

No "quadro 4" temos a correspondência entre as situações de aprendizagem com os respectivos conteúdos trabalhados em cada uma delas.

Quadro 4: Quadro geral do conteúdo presente no Volume 1 relacionado com as situações de aprendizagem

Situação de aprendizagem 1	Unidade 1: O sistema de numeração decimal: características; Unidade 2: Significado das operações e resolução de problemas
Situação de aprendizagem 2	Unidade 3: Sequências numérica e múltiplos de um número natural Unidade 4: Divisibilidade e números primos Unidade 5: Potenciação
Situação de aprendizagem 3	Unidade 6: Representação fracionária
Situação de aprendizagem 4	Unidade 7: Equivalência de frações Unidade 8: Operações com frações
Situação de aprendizagem 5	Unidade 9: A notação decimal: a representação Unidade 10: Múltiplos e submúltiplos da unidade
Situação de aprendizagem 6	Unidade 9: A notação decimal: a representação Unidade 10: Múltiplos e submúltiplos da unidade Unidade 11: Números decimais e frações decimais Unidade 12: Operações com decimais: adição e subtração
Situações de aprendizagem 7 e 8	Unidade 13: Medidas informais Unidade 14: sistema métrico decimal Unidade 15: Unidades de massa Unidade 16: Unidades de capacidade

Fonte: Caderno do professor, 2014-2017, 6º ano, v1, p.9.

É interessante destacar que um mesmo conteúdo é contemplado em mais de uma situação aprendizagem de modo a favorecer uma articulação eficiente entre os mesmos.

> Nos materiais de apoio oferecidos aos professores (Cadernos do Professor), busca-se apresentar cada tema de uma maneira especialmente significativa do ponto de vista de seu valor formativo e construir uma articulação entre os diversos temas, de modo que se auxiliem mutuamente, ao mesmo tempo em que propiciem interfaces amigáveis com as outras disciplinas. (SÃO PAULO, 2012, p.51-52).

Nas orientações didático-pedagógicas presentes no Caderno do professor, são ainda observadas considerações, sendo as atividades propostas podendo ser completadas por outras à cargo do professor.

> Observem que as atividades ora propostas podem ser complementadas por outras que julgarem pertinentes ou necessárias, dependendo do seu planejamento e da adequação da proposta de ensino deste material à realidade da sua escola e de seus alunos. (SÃO PAULO, 2014-2017, 6º ano, v1, p.3).

Essa busca de outros materiais, através do objetivo do Currículo do Estado de São Paulo, que prevê a escola como “espaço de cultura e de articulação de competências e de conteúdos disciplinares” (SÃO PAULO, 2012, p.7)., vai ao encontro do que sugere o tema de nossa pesquisa,

> Currículo é a expressão do que existe na cultura científica, artística e humanista transposto para uma situação de aprendizagem e ensino. Precisamos entender que as atividades extraclasse não são “extracurriculares” quando se deseja articular cultura e conhecimento. (SÃO PAULO, 2012, p. 10).

Munidos dessas considerações, presentes no Currículo do Estado de São Paulo, e, também, de nosso tema de pesquisa, sob à luz dos pensamentos de Duval, escolhemos uma das situações de aprendizagem que pudesse ser incrementada com a nossa ideia de conexão entre música e matemática.

É interessante descrever, entretanto, que ao iniciarmos nosso processo de pesquisa. nossa ideia inicial era de utilizar a música apenas no ensino de frações, entretanto, com base nas teorias de Duval, em que uma aprendizagem baseada apenas no mono registro se torna deficitária, nos levou a um novo pensar, de não basearmos a aprendizagem exclusivamente no ensino de frações, sem levar em consideração outras representações que as mesmas contemplam, mas agregar sempre que possível outras representações desse objeto matemático conduzindo-nos de modo geral à conexão entre música e números racionais.

Apesar dessa abrangência maior, nosso foco principal é feito na representação fracionária, que são referentes as situações de aprendizagem 3 e 4, do ‘Caderno do aluno’, por isso, não nos aprofundaremos em nosso trabalho, nas operações envolvendo a representação decimal de uma fração, por exemplo.

Com essas considerações, de contemplar o ensino dos números racionais nas tarefas referentes ao 6º ano do Ensino fundamental, escolhemos conectar nosso trabalho de pesquisa com a situação de aprendizagem 3 do ‘Caderno do Aluno’ do 6º ano: ´Na medida certa: dos naturais às frações, considerando todo o conteúdo referente as unidades contidas nas situações de aprendizagens 3 e 4.

> A passagem dos naturais para os racionais é o foco da Situação de Aprendizagem 3. As frações já devem ter sido estudadas pelos alunos, ainda que de forma simplificada, nas séries/anos anteriores. Na 5a série/6o ano, contudo, devemos ampliar o conhecimento deles sobre frações introduzindo outras formas de representação (números mistos e porcentagem, por exemplo) e ampliando o seu espectro de significados. O mote principal para a ampliação do campo numérico dos naturais para os racionais é a relação entre as frações e os processos de medida. As atividades propostas nesta Situação de Aprendizagem têm como eixo central a representação fracionária, conteúdo principal da Unidade 6. (CADERNO DO PROFESSOR, 2014-2017, 6º ano, v1, p.7).

4.6. Análise da situação de aprendizagem 3 do Caderno do Professor: ‘Na medida certa: dos naturais às frações’.

Inicialmente a situação de aprendizagem 3 orienta um diagnóstico preliminar para avaliar o conhecimento dos alunos sobre frações, trazendo conceitos, desde da nomenclatura referentes às frações, como numerador e denominador, além de conceitos como significado de ‘parte-todo’ e observações de grades retangulares relacionadas com frações, considerando ainda a possibilidade de o aluno ter acesso a diversas situações cotidianas em que o uso da fração se faz necessário.

Após esse momento inicial, a primeira tarefa proposta nessa situação de aprendizagem contempla a fração como unidade padrão de medida.

> Se os números naturais podem ser associados aos processos de contagem e ordenação, o significado das frações encontra-se diretamente ligado aos processos de medida. Uma medida nada mais é do que a comparação de uma grandeza com determinado padrão. (CADERNO DO PROFESSOR, 2014-2017, 6º ano, v1, p.39).

Essa tarefa que está presente nas páginas 39 e 40 do caderno do professor no volume 1 do 6º ano do ensino fundamental, vai ao encontro com ideia de medir comparando grandezas de mesma natureza, onde a noção de número é ampliada quando a unidade que tomamos como padrão não cabe um número exato de vezes numa determinada grandeza a ser medida.

No primeiro momento da tarefa, é comparado o ‘objeto-padrão’ que cabe um número inteiro de vezes dentro do objeto.

•—•　　　　　　　　　　Objeto

Unidade　　　　　　　　•—•—•—•

Nesse caso verifica-se que a unidade cabe exatamente 3 vezes no objeto considerado. Dessa forma o objeto mede 3 unidades, onde podemos expressar essa medida tanto pelo quociente 3:1, como pelo número natural 3.

Porém, na maioria das vezes, o objeto não corresponde a um múltiplo inteiro do padrão escolhido, exigindo, portanto, o fracionamento da unidade.

Observando o exemplo:

Objeto　　　　　　　　　　padrão

•——————————————•　　　　•———•

Nesse caso três unidades são insuficientes para medir o objeto e 4 unidades excedem o comprimento total.

Observe:

•——————————————• Objeto

•———•———•———•　Padrão (3 vezes)

•———•———•———•———•　Padrão (4 vezes)

Neste caso, em particular, bastou fracionar a unidade padrão em terços.

Observe:　　　　　　　　　　terços

•—•—•—•—•—•—•—•—•—•—•—•　　　　•—•—•—•

•—•—•—•—•—•—•—•—•—•—•—•

Temos que a expressão numérica dessa comparação, o quociente 11:3 não é um número natural, já que 11 não é múltiplo de 3, gerando a necessidade de um outro tipo de número para efetuar essa medição: A fração.

O ‘Caderno do Professor’ cita que a ampliação do campo numérico dos alunos ocorre dessa forma num contexto significativo.

Acreditamos, porém, que a apreensão desses significado pode ser ainda melhorada, através de um contexto mais atraente, pois de certa maneira, o apresentado pelo caderno do Professor, apesar de considerar a conversão da fração num outro registro, parte de um contexto apenas geométrico, sem muita conexão com o seu dia a dia, ou com algo que possa atrair seu interesse de modo mais significativo, já que é baseado apenas em padrões representados por semirretas e suas subdivisões.

Ainda é sugerido após essa atividade que o professor possa explorar ideias como comparação de frações com mesmo denominador e denominadores diferentes, além de frações equivalentes.

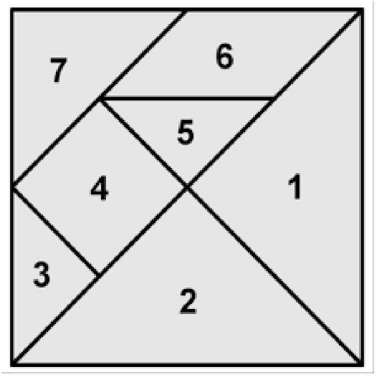
A tarefa seguinte apresenta primeiramente a construção do quebra-cabeças chinês, constituído por sete peças, denominado Tangran, feita juntamente com os alunos, através de recortes e dobraduras, para posteriormente relacioná-los com as frações.

A tarefa explora desde a conversão da linguagem geométrica para a numérica, pensando sob à teoria dos registros semióticos de Duval (2012), contemplando posteriormente a atividade do ‘tratamento’ nas operações envolvendo frações.

Nesse caso aqui, consideramos essa conexão bastante interessante por oferecer a coordenação de três registros semióticos, além das atividades relacionadas ao tratamento. É apresentado nessa tarefa, o conceito de fração na língua materna com o nome das peças do Tangran, como triângulo ou paralelogramo, por exemplo, com a identificação geométrica da mesma e sua conversão para a linguagem numérica para posteriormente efetuarmos o tratamento na operação da adição.

Apesar disso, ainda vislumbramos a possibilidade de agregar ainda mais um fator interessante, utilizando a música juntamente com essa conexão destacada. Algo que apresentaremos no próximo capítulo. Além do que, os exercícios atrelados a essa tarefa, são, a nosso modo de ver, talvez um pouco superficiais, principalmente no que se refere ao tratamento de frações referente à operação da adição, pois em apenas um dos itens é necessário a utilização de frações equivalentes para efetuá-la.

Figura 24: Tangran



Fonte:http://www.educacao.pe.gov.br/portal/upload/galeria/6943/17_MATEMATICA_MEDIO_CADERNO.pdf

Segue um exemplo do que é apresentado no caderno do professor e do aluno:

“O paralelogramo e um triângulo pequeno, juntos, correspondem a que fração do quadrado grande?

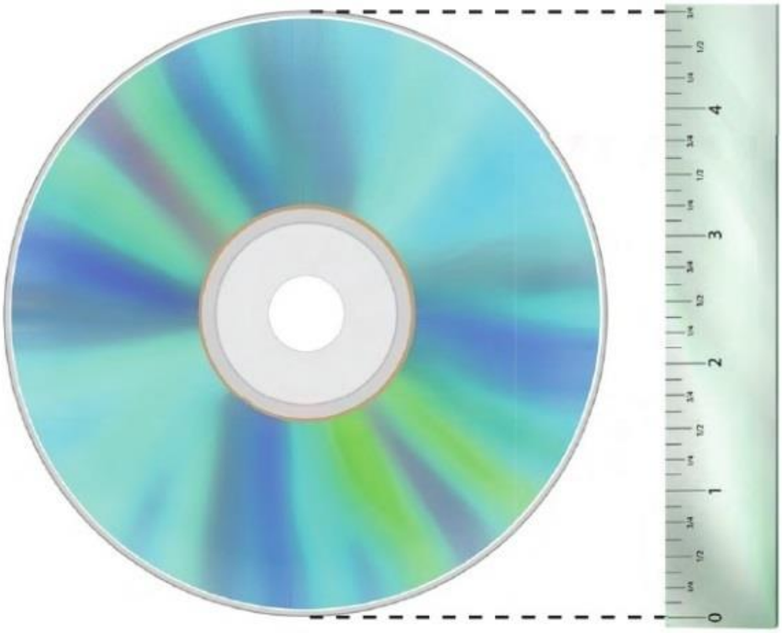
$\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{2}{16}+\frac{1}{16}=\frac{3}{16}$. ” (CADERNO DO PROFESSOR, 2014-2017, 6º ano, v1, p.42).

A tarefa posterior tem como foco os números mistos e sua reescrita em forma de frações impróprias. Primeiramente traz exemplos da representação desses números, em uma reta graduada, muito defendida por Silva (2008) em seu trabalho, que já discorremos no capítulo anterior, e, com a qual concordamos, com a posterior conversão para representação geométrica em dimensão 2, na forma de ´pizza´.

Através dessa correspondência é feita o tratamento da forma mista de uma fração para a sua forma imprópria.

Apesar da utilização, e da coordenação desses dois registros geométricos, com a conversão para o registro numérico serem bastante interessantes, e, irem ao encontro com a nossa fundamentação teórica baseada nos registros semióticos de Duval (2012), novamente o contexto baseado inicialmente numa reta graduada em polegadas apenas, devido à sua pouca utilização e motivação que proporciona aos alunos carece de algo mais arrebatador, mais envolvente, além de julgarmos o aprofundamento dos exercícios relacionadas, pouco abrangentes. A “figura 25” reproduz um dos exercícios referentes ao tratamento envolvendo a fração de sua forma mista para a forma imprópria.

Figura 25: Diâmetro de um CD em polegadas



Fonte: Caderno do professor, 2014-2017, 6º ano, v1, p.44.

$$4\,\frac{3}{4} = \frac{19}{4}$$

A situação de aprendizagem 3 se reforça ainda na utilização da adoção de um objeto padrão, nas tarefas finais, que no caso dará margem à utilização das frações, como , por exemplo, medir o comprimento da carteira adotando como objeto padrão o comprimento do lápis; ou medir o comprimento da sala, utilizando o ‘palmo’, dentre outras situações com as mesmas características, conduzindo ao objetivo principal pretendido que é:

> Levar os alunos a se deparar com a necessidade do fracionamento de uma unidade em um processo de medida. Eles devem perceber que as frações e os números mistos permitem expressar medidas em que a unidade não cabe um número inteiro de vezes no objeto a ser medido. (CADERNO DO PROFESSOR, 2014-2017, 6º ano, v1, p.44.).

Finalizando o texto referente às orientações aos professores através de considerações sobra a avaliação, da situação de aprendizagem 3 é frisado que “a ideia central dessa passagem dos naturais para os racionais foi o estabelecimento de uma associação entre as frações e os processos de medida.” (CADERNO DO PROFESSOR, 2014-2017, 6º ano, v1, p.45.), e também, servir como base para os estudos posteriores em frações.

De modo geral constatamos que as tarefas trazidas pelo Caderno do Professor, apesar de apresentarem a coordenação de registros semióticos do objeto matemático, utilizando as atividades de ‘tratamento’ e ‘conversão’, apresentam a nosso julgar, pouca criatividade nas tarefas apresentadas, além do aspecto pouco relevantes das contextualização descritas, já que as propostas de atividades mais relevantes, utilizam o Tangran.

Além disso as tarefas não contemplam a representação decimal dos números fracionários, que acreditamos ser essencial para uma aprendizagem mais completa dos próprios números fracionários, por serem, segundo Lopes (2008) e Catto (2000), as representações mais identificadas pelos alunos.

Desse modo acreditamos que podemos agregar muita qualidade ,com a contextualização ‘ímpar’, essencial na arte e cultura de todos os povos, algo que faz parte do dia a dia dos alunos e de quase todas as pessoas desde o início da vida, e de uma forma especial, e muito importante, para o professor, que tem esse “ingrediente” ao lado da matemática, como sua grande paixão: a música! Ela além de possibilitar uma contextualização consistente e interessante, possibilita uma coordenação mais abrangente dos registros semióticos, essenciais para uma aprendizagem consistente, segundo Duval (2012).

5. METODOLOGIA E SITUAÇOES DE APRENDIZAGEM

Neste capítulo apresentamos, além da natureza de nossa pesquisa, as tarefas propostas para os alunos do 6º do Ensino Fundamental da E.E. João Rodrigues Bueno, em que objetivamos a conexão entre números racionais e música, utilizando como referência, principalmente a situação de aprendizagem 3 do Caderno do Aluno: ‘Na medida certa: dos naturais às frações’, com a contemplação também dos conteúdos, competências e habilidades almejadas referentes à situação de aprendizagem 4: ‘Equivalências e operações com frações’.

Como a Matemática e a Música apresentam diversas representações para um mesmo objeto, escolhemos fundamentar nosso trabalho nos registros de representação semiótica de Raymond Duval, procurando agregar em cada tarefa, situações de aprendizagem que trouxessem a coordenação e emprego de diversos registros, tanto matemáticos como musicais, tão importantes para uma aprendizagem significativa, segundo Duval, e, que nos conduziram à formulação de nossa questão de investigação: **Como a inserção da música no processo ensino-aprendizagem de números racionais contribui na mobilização e coordenação dos registros de representação semiótica?**

5.1. Delineamento metodológico

Procurando responder essa questão, optamos por ser nossa pesquisa qualitativa descritiva e interpretativa, em que analisamos os documentos escritos entre trabalhos acadêmicos, e, outras fontes não analíticas, sempre vislumbrando observá-las e considerá-las à luz da teoria que escolhemos como fundamentação teórica, no caso as teorias de Raymond Duval.

No aspecto qualitativa descritiva, temos de acordo com Pillão (2000), baseado, nos pensamentos de Biklen (1994):

> As pesquisas qualitativas tem algumas características presentes com maior ou menor eloquência em cada trabalho, a saber, ter o investigador como instrumento principal na obtenção de dados, ser descritiva, focar mais os processos que os resultados ou produtos, desenvolver uma análise indutiva e atribuir significado aos dados, embora seja possível que um ou

> outro estudo qualitativo seja desprovido de qualquer dessas características. (PILLÃO, 2000, p.53).

Além disso, temos que esse aspecto ainda se dá pela coleta de dados, análise e interpretação dos mesmos, aparecendo sob diversas pesquisas, como a própria documental, em que recorremos em fontes referentes a sites, jornais, pois nossa coleta de dados envolveu aspectos contemporâneos atrelados aos presentes na pesquisa bibliográfica em materiais acadêmicos de caráter científico transcritas por Cobello (2018):

> A pesquisa documental assemelha-se muito à pesquisa bibliográfica. A diferença essencial entre ambas está na natureza das fontes/Enquanto a pesquisa bibliográfica se utiliza fundamentalmente das contribuições dos diversos autores sobre determinado assunto, a pesquisa documental vale-se de materiais que não recebem ainda um tratamento analítico, ou que ainda podem ser reelaborados de acordo com os objetos da pesquisa. (COBELLO, 2018, p. 82).

Nossa pesquisa qualitativa descritiva, também é ‘interpretativa’ pois levamos a conexão entre música e números racionais baseados em nossa fundamentação teórica referente aos registros de representação semiótica de Duval para o nosso ambiente natural, para munidos de informações teóricas sobre o assunto e, considerando a interação entre o pesquisador e o indivíduo pesquisado, apresentar nossas impressões e considerações sobre o que foi produzido, e se atendeu nossas expectativas iniciais e o que pode ser reconsiderado posteriormente a partir delas.

5.2. Tarefas conectando música e números racionais alinhadas com o caderno do aluno

A partir daqui apresentamos as tarefas que elaboramos em nosso trabalho de pesquisa, indicando o prazo esperado para realização das mesmas, e quais das conexões entre números racionais, Música e Semiótica descritas na seção 3 do capítulo 3 estaremos contemplando, trazendo um relato de como pretendemos proceder na apresentação e execução de cada uma delas, quais situações de aprendizagem ou objetivos referentes ao ‘Caderno do professor’ e do ‘Aluno’, nos baseamos, e qual o ‘papel’ do aluno nessas tarefas, em termos de participação e aprendizagem adquirida.

5.2.1. Tarefa 1: Diagnosticando e ampliando o espectro de significados sobre frações – Tempo estimado: 2 aulas.

Nossa primeira tarefa vem ao encontro com o que orienta o ‘Caderno do Professor’ na situação de aprendizagem 3, pois fizemos os diagnósticos dos conhecimentos que os alunos possuíam sobre o conceito estudado. Foi perguntado o que eles sabiam sobre frações, quais situações eles poderiam citar como exemplos, e, em quais situações do dia a dia deles o uso delas se faz necessário.

“Sugerimos ao professor que inicie esta Situação de Aprendizagem fazendo um diagnóstico preliminar, para avaliar o conhecimento da turma sobre frações” (CADERNO DO PROFESSOR, 2014-2017, 6º ano, v1, p.39.).

Com base em nossa ideia de primeiramente partir do ensino de frações para depois de forma mais completa conectar com outras representações dos números racionais, procuramos diagnosticar qual o conhecimento eles possuíam sobre frações, já que são conteúdos trabalhados em anos referentes ao Ciclo I.

A expectativa era de que a maioria dos alunos conseguisse relacionar ao menos a representação figural, dimensão 2, referente ao registro numérico para frações, pelo menos no que tange às frações próprias.

Após esse momento inicial em que o diagnóstico preliminar sobre frações com os alunos foi efetuado com o auxílio de ‘giz e lousa’, fomentamos nossa proposta de conexão entre música e matemática, com o auxílio de vídeos, que contemplam aspectos históricos e conexões entre Matemática e outras áreas de conhecimento, incluindo jogos, astronomia e música.

Foi apresentado aos alunos dois vídeos referentes à conexão entre matemática e outras áreas de conhecimento. Um deles é o filme ‘Donald: no país da Matemágica’, situado em https://www.youtube.com/watch?v=wbftu093Yqk, e que tivemos conhecimento ao revisar o trabalho de Barnabé (2011), intitulado “A melodia das razões e proporções: a música sob o olhar interdisciplinar do professor de matemática” e, outro vídeo, mais específico com relação à música, denominado ‘matemática da música’ e situado em https://www.youtube.com/watch?v=6mHjdQpzxyI.

Ao apresentarmos o filme ‘Donald no país da Matemágica’, por se tratar de um desenho compatível com o desenvolvimento cognitivo dos alunos do 6º ano, e, por trazer diversas conexões interessantes entre Matemática e Música, de modo geral, incluindo frações, nossa intenção foi fazê-los perceber que a Matemática não inicia e finda em si mesma, mas está presente em diversas áreas de conhecimento, inclusive na Música que é tema de nosso trabalho. Além de iniciarmos a contextualização referente a conexão pretendida, objetivamos também despertar, um interesse maior nas relações entre Música e o ensino de números racionais pelos alunos.

5.2.2. Tarefa 2: O experimento do monocórdio: Contextualizando o ensino de racionais através da música – Tempo estimado: 2 aulas

Após a primeira tarefa em que primeiramente diagnosticamos o conhecimento dos alunos sobre frações, e, ofertarmos situações visando a percepção da conexão existente entre Matemática e outras áreas de conhecimento, a próxima, contemplou o ‘experimento do monocórdio’, utilizado em quase todos os trabalhos que encontramos referentes à conexão entre Matemática e Música, com alguns mais concretos, inclusive com a própria construção do mesmo, e, outros, com a reprodução do experimento para a obtenção das razões consonantes encontradas por Pitágoras, que foi também nossa proposta.

Nessa tarefa foram objetivadas as conexões entre música-semiótica-racionais 1 e 2, descritas na seção 3 do capítulo 3 de nossa dissertação, trazendo a relação entre Matemática e Música retratada através da contextualização histórica existente entre essas duas áreas de conhecimento, e das razões matemáticas presentes nos intervalos musicais, utilizando essas relações para apresentar de modo análogo, principalmente, o conceito de equivalência entre números racionais.

> Para tanto é importante que os conteúdos matemáticos sejam apresentados aos alunos de forma contextualizada. Nesse tipo de abordagem dos conteúdos é preciso considerar as experiências vividas pelos educandos, os significados por eles atribuídos ao mundo que lhes cerca, ou seja, o seu mundo-vida (JABLONSKI, 2014, p.100).

Recordamos com os alunos a parte do vídeo ‘Donald no país da Matemágica’, que apresenta Pitágoras e os pitagóricos na Grécia Antiga por volta do século VI a.C. onde esses pensadores realizaram o primeiro experimento científico, relacionando os intervalos musicais com as razões matemáticas.

Em seguida explicamos sobre o experimento do monocórdio, que consistia em uma corda esticada, presa a dois cavaletes fixos em uma caixa acústica, e, mais um cavalete móvel, e, que através da movimentação do cavalete móvel, a corda era subdividida em partes, e, cada vez que a corda era tocada, nessas subdivisões, o som produzido era modificado, sendo percebido sons agradáveis (consonantes), ou não, com relação à corda tocada em seu tamanho original.

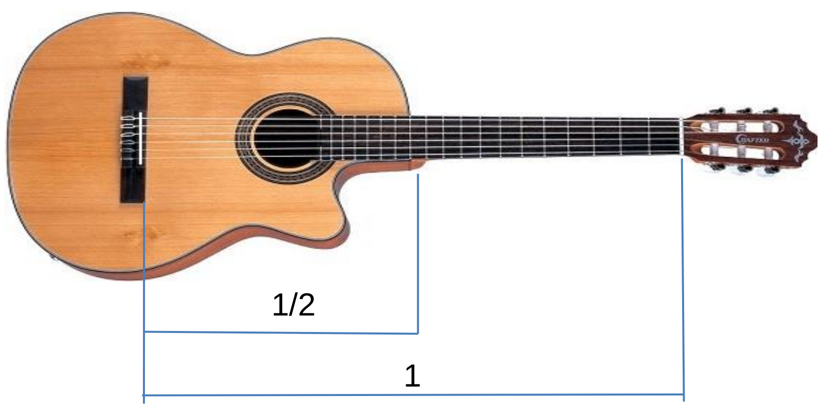
Para essa tarefa apresentamos nesse momento dois instrumentos musicais: a guitarra e o teclado musical. Em seguida conduzimos a execução de uma música por nós escolhida (Asa Branca), no teclado e aprendida vocalmente por todos, a fim de ser um estimulo inicial para a atividade que iríamos discorrer, e, que foi novamente utilizada na tarefa 3.

Após esse momento, para reproduzirmos o experimento do monocórdio utilizamos a guitarra, pois ele tem o mesmo princípio desse instrumento, porém, com 6 cordas.

Tocamos a 6ª corda (‘mi’ – primeira de cima para baixo), da guitarra solta, e, posteriormente pressionamos a corda na metade do seu comprimento produzindo um novo som questionando os alunos sobre a percepção que eles tiveram com relação ao som produzido com a corda solta.

Após a realização do experimento, essa situação foi ilustrada através de uma imagem (Figura 26), e, fisicamente, pela própria guitarra em que a corda foi pressionada na metade do seu comprimento, correspondendo à representação fracionária: $\frac{1}{2}$.

Figura 26: Intervalo de oitava justa



Fonte:Figura:https://br.depositphotos.com/163587450/stock-illustration-real-acoustic-guitar-on-a.html. Marcações: próprio autor

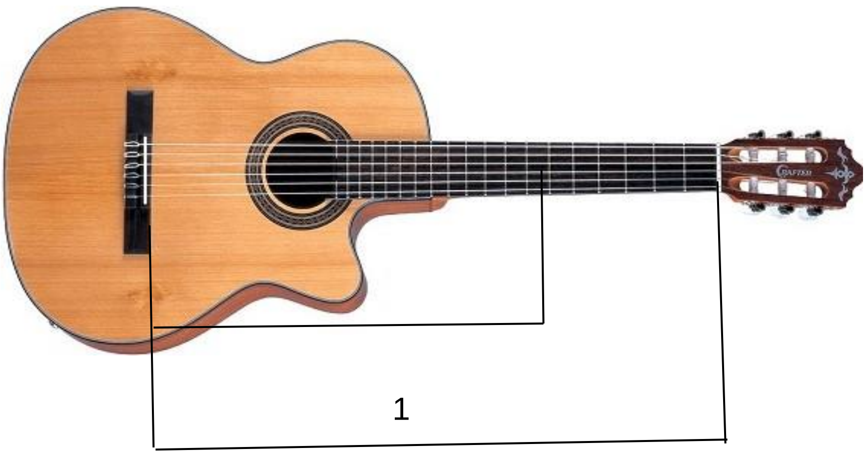
Foi perguntado a eles o que aconteceu com relação aos dois sons encontrados, em que esperávamos como resposta que eles percebessem que os sons encontrados eram ‘parecidos’, ‘harmoniosos’, ou até mesmo ‘iguais’, sendo um grave e outro mais agudo, indo ao encontro com o que prevê o ‘Caderno do Professor’ do Estado de São Paulo, de incluir outros significados para frações:

“O estudo das frações na 5a série/6o ano deve propiciar uma ampliação do espectro de significados relacionados a esse conceito.” (CADERNO DO PROFESSOR, 2014-2017, 6º ano, v1, p.39.).

Foi então esclarecido que os sons encontrados representam uma mesma nota musical, ou seja, além de consonantes e harmoniosos, são equivalentes. Porém, um som é mais agudo (como se fosse a voz de uma mulher), e o outro som é mais grave (como se fosse a voz de um homem).

Depois dessa primeira percepção, procedemos da mesma maneira, tocando primeiramente a corda solta, mas depois, ao invés de tocá-la pressionando sua metade, tocamos pressionando a corda na parte correspondente a $\frac{2}{3}$ do seu comprimento (figura 27).

Figura 27: Intervalo de quinta justa



Fonte:Figura:https://br.depositphotos.com/163587450/stock-illustration-real-acoustic-guitar-on-a.html. Marcações: próprio autor

Mais uma vez, foi perguntado o que ocorreu com os dois sons encontrados: entre a nota solta e a nota pressionada em $\frac{2}{3}$ do seu comprimento.

Novamente a resposta desejada é a de que eles tivessem percebido o som consonante, agradável, porém desta vez, com estes sons representando notas diferentes.

De forma análoga, realizando o mesmo processo no experimento, tocamos novamente a mesma corda solta, e, em seguida a tocamos pressionando-a em $\frac{3}{4}$ do seu comprimento, obtendo o intervalo de quarta justa.

Mais uma vez foi perguntado aos alunos o que ocorreu, e, esperávamos que os mesmos percebessem a consonância existente entre os sons das mesmas, e que as notas musicais encontradas eram diferentes.

Em seguida foi produzido som pressionando a corda em uma região diferente das resultantes nos intervalos de $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\ e\ \frac{3}{4},$ com a execução efetuada em seguida da corda solta, e foi perguntado aos alunos se o som harmonioso, que fora constatado antes ainda permanecera.

Desta vez era esperado a percepção que não haveria o mesmo som agradável.

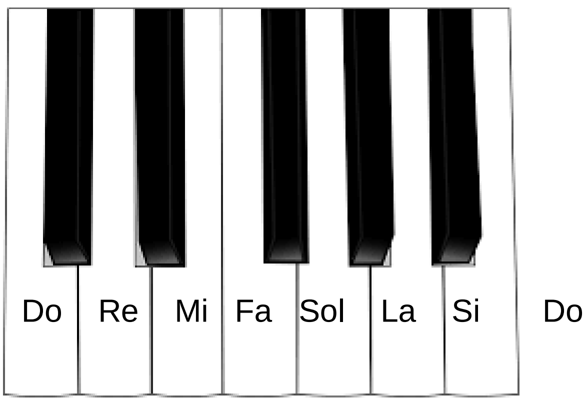
Foi então revelado aos alunos, que nesses intervalos de $\frac{1}{2}$ (intervalo de oitava justa); $\frac{2}{3}$ (intervalo de quinta justa) e $\frac{3}{4}$ (intervalo de quarta justa), Pitágoras constatou maior harmonia e consonância entre os sons produzidos, e, através dessas descobertas nesses intervalos citados, com base nessas relações e razões matemáticas, ele formalizou a escala musical que é base para toda a música que é produzida até os dias de hoje.

Esse momento de trazer a contextualização histórica tão importante na elaboração da música atende a diversas recomendações do Currículo de São Paulo, do PCN (1998), e, de diversos autores por nós pesquisados sobre a importância de estabelecer através de algo concreto a importância de se estudar certo conceito.

Nossa expectativa, também foi de o aluno perceber as relações entre frações e razões, com seus significados para o mesmo objeto matemático, ampliando desse modo, o espectro de conhecimento no uso das mesmas, conseguindo perceber a equivalência entre os diferentes registros semióticos presentes: numérico e geométrico na dimensão 1, com a visualização da fração encontrada na própria corda da guitarra.

Após esse momento, com o auxílio do teclado musical executamos as notas musicais com os respectivos intervalos encontrados no experimento, considerando a nota ‘Do’ como início:

Figura 28: Localização das notas musicais no teclado



Fonte: https://pt.pngtree.com/freepng/keyboard-music_205987.html

Para finalizar a tarefa, foi executado no teclado musical intervalos musicais de oitava, quarta e quinta, justas, e outros, em diversas tonalidades.

Já começamos, desse modo, a trabalhar a percepção de equivalência, que teve maior abrangência na Tarefa 3, muito importante na aprendizagem de frações, e que começamos a introduzir seu aprendizado através da analogia presente na relação com a Música.

5.2.3. Tarefa 3: Entendendo sobre frações equivalentes através da música – Tempo estimado: 4 aulas (2 aulas para a atividade 1, e 2 aulas para atividade 2).

Trabalhar o conceito de números racionais equivalentes, através da Música foi o objetivo dessa tarefa que novamente fez o uso das conexões entre semiótica-música-racionais 1 e 2, descritas na secção 3 do capítulo 3, e, também, da conexão 3, por se tratar de algo referente à teoria musical ao utilizarmos a quantidade de semitons presentes em cada intervalo.

Primeiramente foi executada novamente com os alunos a canção por nós escolhida: ‘Asa Branca’ (Luiz Gonzaga/Humberto Teixeira).

A música primeiramente foi executada por todos no tom de Fa maior. Após essa primeira execução, transpomos a mesma para outras tonalidades.

Foi perguntado aos alunos o que aconteceu, se a música permaneceu a mesma, e se foi mais fácil ou difícil de ‘cantá-la’.

Esperávamos como resposta que os alunos percebessem que a música continuava sendo a mesma tendo mudanças apenas na altura referente as notas musicais. Nesse momento foi explicado sobre ‘frequências’ e notas musicais, de modo simplificado, sendo ressaltado com os alunos a relação de que quando a música aumenta ou diminui de tom, existe proporção entre as razões encontradas no novo tom referente às suas frequências com as razões do tom anterior.

Apresentamos então algumas notas musicais com suas respectivas frequências. (Tabela 7).

Tabela 7: Notas e frequências

Nota	Frequência (Hz)
Do 4	262
Do#	277
Re	294
Re#	311
Mi	330
Fa	349
Fa#	370
Sol	392
Sol#	415
La	440
La#	466
Si	494
Do 5	524
Do#	554
Re	588
Re#	622
Mi	659
Fa	698
Fa#	740
Sol	784

Fonte: Cálculos das frequências das notas musicais efetuados pelo autor

A partir desse momento retomamos os intervalos de oitava, quinta e quarta justas, com as suas respectivas razões, em que foram executados estes mesmos intervalos em diversas tonalidades reforçando o entendimento sobre equivalência. A equivalência através da dimensão 2 foi utilizada pois julgamos ser de fácil observação, como afirma Catto (2000).

Mostramos por meio da representação figural que uma fração equivalente pode ser obtida pela multiplicação ou divisão de seu numerador e denominador por um mesmo número, formalizando dessa forma esse conceito.

Atividade 1: Envolvendo intervalos e frequências em três tonalidades

A partir dos valores das frequências descritos na "tabela 7", organizamos a classe em grupos com 4 ou 5 alunos, e encontramos com eles os valores equivalentes conforme descritos na "tabela 8":

Tabela 8: Intervalos: razões em três tonalidades

Intervalos	Do Maior	Re maior	Re# maior
Oitava justa	$\frac{Do4}{Do5} = \frac{262}{524} = \frac{1}{2} = 0{,}5$	$\frac{Re4}{Re5} = \frac{294}{588} = \frac{1}{2} = 0{,}5$	$\frac{RE\#4}{Re\#\,5} = \frac{311}{622} = \frac{1}{2} = 0{,}5$
Quinta justa	$\frac{Do4}{sol4} = \frac{262}{392} = \frac{2}{3} = 0{,}66$	$\frac{Re4}{La4} = \frac{294}{440} = \frac{2}{3} = 0{,}66$	$\frac{Re\#4}{La\#4} = \frac{311}{466} = \frac{2}{3} = 0{,}66$
Quarta justa	$\frac{Do4}{Fa4} = \frac{262}{349} = \frac{3}{4} = 0{,}75$	$\frac{Re4}{Sol4} = \frac{294}{392} = \frac{3}{4} = 0{,}75$	$\frac{Re\#4}{Sol\#4} = \frac{311}{415} = \frac{3}{4} = 0{,}75$

Fonte: Atividade elaborada pelo autor

Foi então relacionado analogamente essa atividade com o que ocorre com frações equivalentes, que apesar de terem escritas diferentes, representam o mesmo objeto matemático. No caso da Música em especial, a melodia executada, mantem-se a mesma, pois as razões presentes nos intervalos presentes nessa melodia mantêm as relações entre os intervalos executados tom a tom, mudando-se as frequências das notas obtidas proporcionalmente.

> Se encontra presente tanto no raciocínio analógico, em comparações tais como "O Sol está para o dia assim como a Lua está para a noite", quanto no estudo das frações, nas razões e proporções, no estudo da semelhança de figuras, nas grandezas diretamente proporcionais, no estudo das funções de 1º grau, e assim por diante. Analogamente, a ideia de equivalência, ou de igualdade naquilo que vale, está presente nas classificações, nas sistematizações, na elaboração de

> sínteses, mas também quando se estudam as frações, as equações, as áreas ou os volumes de figuras planas ou espaciais, entre muitos outros temas. (SÃO PAULO, 2012, p.37).

Essa construção foi efetuada juntamente com os alunos pelo professor e com o auxílio da calculadora, devido a números grandes presentes nos cálculos, contemplando o uso dessa tecnologia incentivada pelos documentos curriculares, e, também, pela possibilidade de trabalharmos a aproximação, algo inerente aos cálculos apresentados na tabela acima.

> Outra ideia bastante valorizada ao longo de todo o currículo é a de aproximação, a de realização de cálculos aproximados. Longe de ser o lugar por excelência da exatidão, da precisão absoluta, a Matemática não sobrevive nos contextos práticos, nos cálculos do dia a dia sem uma compreensão mais nítida da importância das aproximações. (SÃO PAULO, 2012, p.37).

Julgamos que essa atividade tenha trazido diversos benefícios na assimilação plena do conteúdo referente aos números racionais, com base nas teorias de Duval (2012), pois nessa atividade contempla a atividade semiótica do ‘tratamento’, quando simplificamos as frações, e, também a atividade de conversão, que se faz presente, desde a obtenção das frações que são encontradas a partir da língua materna, até a efetuada nos registros fracionários transformados em decimais como $\frac{1}{2}$ = 0,5 e $\frac{2}{3}$ = 0,66..., por exemplo.

Atividade 2: Relacionando intervalos com outros registros equivalentes

Após esse momento foi proposta a atividade individual apresentada abaixo, dessa vez, utilizando as frações encontradas nos intervalos citados, na qual o aluno será questionado sobre quais frações e/ou representações são equivalentes a estas.

Identifique quais das representações abaixo são equivalentes às frações dadas:

A) $\frac{1}{2}$ (intervalo de oitava justa)

a) 2/4	b) 3/6	c) 11/20	d) ¾
e) metade	f) 0,5	g) 50/100	h) 50%

B) $\frac{3}{4}$ (intervalo de quarta justa)

a) Um meio	b) três quartos	c) 0,5	d) 6/8
e) 75/100	f)75%	g)0,75	h) ½

C) $\frac{2}{3}$ (intervalo de quinta justa)

a) Um meio	b) dois terços	c) 4/6	d)10/15
e) 5/6	f) 20/30	g) 66%	h) 100%

Cada grupo, além de responder sobre quais alternativas poderiam representar o mesmo objeto matemático, teve também, que justificar a sua resposta, podendo ser essa justificativa por escrito através da língua materna, por representação figural, ou até pelo conhecimento matemático adquirido nas aulas iniciais, e, em anos anteriores, que eles possuíssem.

Esperávamos que os alunos, até pelo conhecimento já adquirido em situações do dia a dia, na própria atividade anterior sobre intervalos, ou em estudos prévios, nos primeiros anos do Ciclo I, fossem capazes de conseguir responder as questões de modo satisfatório.

Ao apresentarmos alternativas, envolvendo tanto a linguagem materna, quanto sua representação decimal, e, em porcentagem, esperávamos que o aluno fosse se apropriando adequadamente do conceito de número racional, identificando os diversos tipos de representações semióticas que pertencem a esse mesmo objeto matemático.

> A linguagem verbal, oral e escrita, representada pela língua materna, viabiliza a compreensão e o encontro dos discursos utilizados em diferentes esferas da vida social. É com a língua materna e por meio dela que as formas sociais arbitrárias de visão de mundo são incorporadas e utilizadas como instrumentos de conhecimento e de comunicação. (SÃO PAULO, 2012, p.14).

Além de estimular a produção de texto algo também incentivado pelo Currículo do Estado de São Paulo.

> A leitura e a produção de textos são atividades permanentes na escola, no trabalho, nas relações interpessoais e na vida. Por isso mesmo, o Currículo proposto tem por eixo a competência geral de ler e de produzir textos, ou seja, o conjunto de competências e habilidades específicas de compreensão e de reflexão crítica intrinsecamente associado ao trato com o texto escrito. (SÃO PAULO, 2012, p.15-16).

No que se refere às representações em forma de porcentagem, ou decimal, presentes nas alternativas, foi levado em consideração a interpretação lógico-matemática, não formulando neste momento nenhum método ou ‘receita’ para obtenção dessas representações dos objetos matemáticos citados. O nosso intuito ao apresentar outras representações do objeto matemático, foi devido à sua importância, segundo Duval (2012), para a apropriação plena do conceito, porém, fizemos isso, sem nos prendermos a regras ou aprofundamentos desnecessários, neste momento.

5.2.4. Tarefa 4: A escala musical de Pitágoras: Operações - Atividades de tratamento e conversão referente aos números racionais – Tempo estimado 8 aulas (6 aulas para atividades de conhecimento prévio, e 2 aulas para a construção da escala pitagórica).

Nessa tarefa novamente fizemos o uso das conexões 1 e 2 descritas na seção 3 do capítulo 3, dando ênfase aos aspectos: cultural e histórico, tendo a situação-problema relacionada aos intervalos pitagóricos como início.

“Currículo é a expressão do que existe na cultura científica, artística e humanista transposto para uma situação de aprendizagem e ensino.” (SÃO PAULO, 2012, p.11).

Os PCN (1998), já enaltecem a situação-problema como ponto de partida. Nossa ideia a partir disso foi: ‘vamos construir a escala musical pitagórica, partindo de algo que já conhecemos, que são os primeiros intervalos consonantes pitagóricos, e por meio deles obtermos os outros valores, e, pela necessidade de resolução, agregarmos e aprendermos novos conceitos relevantes e necessários.

Nessa construção da escala, a conexão com o objetivo previsto no Currículo do Estado de São Paulo veio ao encontro com a ampliação da noção de número por meio de situações em que a grandeza tomada como unidade (intervalo de quinta) não cabe um número exato de vezes na grandeza a ser medida (no caso, a escala toda, algo que no ‘Caderno do aluno é trabalhado, apenas através de segmentos de reta conforme descrito no capítulo anterior).

> Uma medida nada mais é do que a comparação de uma grandeza com determinado padrão. Por exemplo: medir o comprimento de um objeto é verificar quantas vezes o comprimento de um objeto-padrão cabe no objeto a ser medido. (CADERNO DO PROFESSOR, 2014-2017, 6º ano, v1, p.39-40).

Além desse aspecto, com a construção da escala trouxemos novamente o conceito de frações equivalentes relacionando-as com os intervalos presentes na música, comparando frações e localizando-as de forma ordenada na reta numérica. A atividade também possibilitou e exigiu operações de adição com denominadores iguais e multiplicação de frações para obtenção das demais notas presentes na escala musical elaborada por Pitágoras.

Nesta proposta de aprendizagem vários conceitos relacionados a números racionais surgiram entrelaçados, da mesma forma como ocorre com todo o conhecimento que se encontra no mundo, trazendo dessa forma o aluno mais próximo da realidade.

Utilizando o contexto, de procurar agregar a música na aprendizagem de frações, neste momento, para ser reproduzida a construção da escala musical realizada por Pitágoras, foi necessário a utilização de conceitos matemáticos referentes a operações com frações.

Nessa tarefa o nosso objetivo com relação à música foi utilizá-la da seguinte forma: ela se apresentou como o contexto, como a ‘situação-problema’ retratada na elaboração da escala musical, fomentando dessa forma, a necessidade de que conceitos matemáticos fossem aprendidos, a fim de que a obtenção da escala musical pitagórica fosse concluída com êxito.

Conhecimentos prévios necessários

Para conseguirmos repetir o que Pitágoras havia feito, de a partir dos intervalos de quinta obtermos as notas da escala pitagórica, foi necessário que o aluno soubesse operar com frações, principalmente multiplicar.

Foi então proposto aos alunos, os seguintes cálculos:

Calcule o dobro de 3

Calcule o dobro de 4

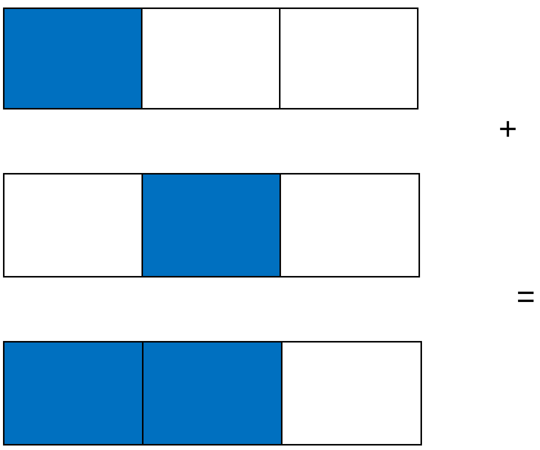
Calcule o dobro de $\frac{1}{3}$

Calcule o dobro de $\frac{1}{4}$

Foi orientado que procurassem utilizar a forma de resolução que ocorre na multiplicação de números naturais, em que o dobro de um número significa somá-lo duas vezes; que o triplo de um número significa soma-lo três vezes; e, assim por diante. Esperávamos que os alunos conseguissem perceber com o nosso auxílio, que a multiplicação envolvendo número natural por fração era efetuada multiplicando o inteiro apenas pelo numerador.

Mostramos a eles através de exemplos utilizando grades retangulares (figuras 29 e 30), e, da representação na reta numérica, como esses cálculos poderiam ser realizados.

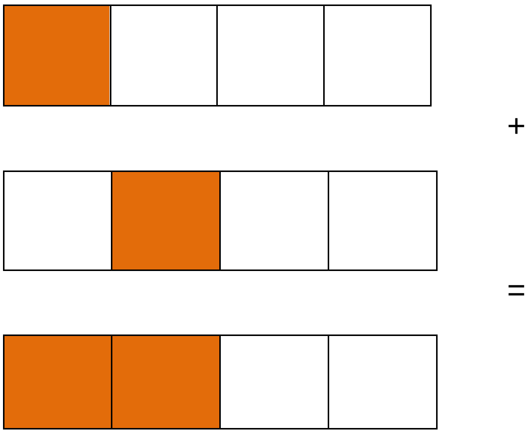
Figura 29: Adição envolvendo frações e grades retangulares



Fonte: elaborado pelo autor

$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ que é equivalente a 2 x $\frac{1}{3}$

Figura 30: Adição envolvendo grades retangulares



Fonte: esquema de grades retangulares elaborado pelo autor

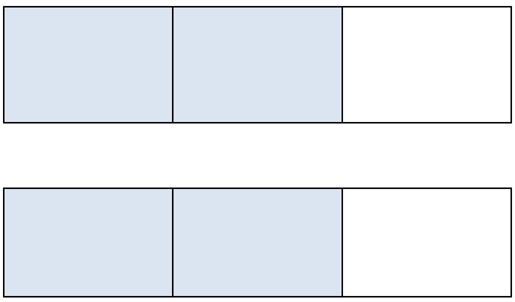
$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$ que é o mesmo que 2 x $\frac{1}{4}$

Novamente esperávamos por meio da percepção e coordenação de vários registros semióticos presentes, que os alunos compreendessem o significado da operação de adição entre frações e multiplicação de um número por fração.

Porém, a multiplicação de frações que precisaríamos saber para conseguirmos encontrar os valores da escala musical, ainda necessitava de conhecimentos sobre as frações impróprias.

Efetuamos a pergunta aos alunos: qual o valor de 2 x $\frac{2}{3}$? (Figura 31)

Figura 31: Multiplicação utilizando grades retangulares



Fonte: esquema de grades retangulares elaborado pelo autor

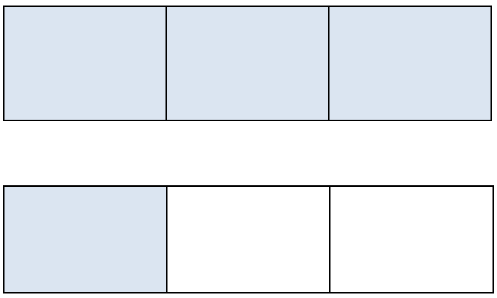
É comum que o aluno acabe muitas vezes cometendo o erro de multiplicar tanto numerador quanto o denominador pelo número 2, mesmo após os exercícios anteriores, pelo fato de se pensar na fração sempre como ‘parte-todo’.

Para minimizarmos esse erro utilizamos a chamada forma mista de uma fração imprópria, unidade conceitual também presente na situação de aprendizagem 3 do ‘caderno do aluno’, utilizando tanto a representação na dimensão 2 quanto na dimensão 1.

Ao aluno foi orientado respeitar na resposta por eles encontrada, o número de partes em que o inteiro deve ser dividido. No caso acima, em três partes.

O aluno então se deparou com a seguinte necessidade: para se ter quatro partes num inteiro dividido em três, é impossível. Logo, neste caso, ele precisaria dos dois inteiros que ele já possui, remanejando apenas as partes tomadas, conforme “figura 32”:

Figura 32: Forma mista utilizando grades retangulares



Fonte: esquema de grades retangulares elaborado pelo autor

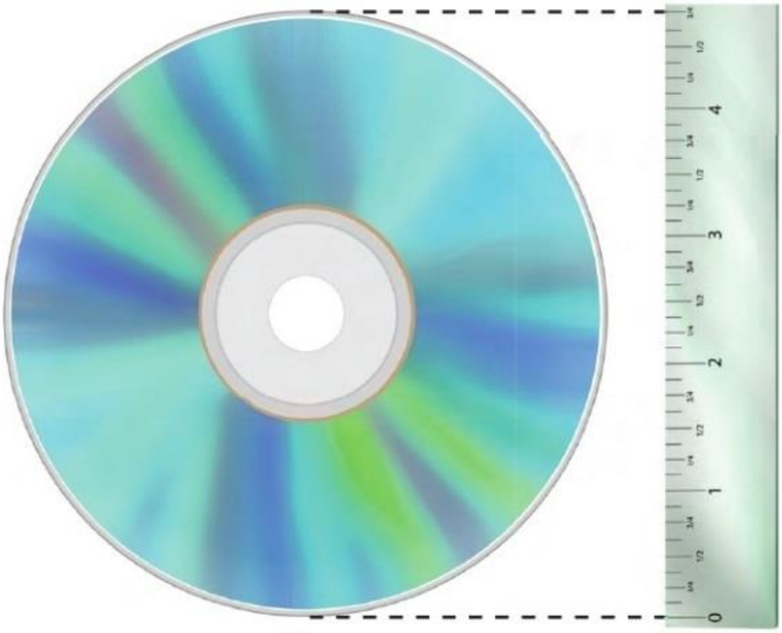
Que pode ser representado como $\frac{3}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$.

Formalizamos ainda com os alunos a forma mista, cujo resultado encontrado poderia ser escrito como $1\,\frac{1}{3}$.

Agregando ainda mais um componente conceitual sobre número racional e, indo ao encontro com o que recomenda Silva (2008) em seu trabalho, a conversão para a dimensão 1 dessa representação figural, com o dobro de $\frac{2}{3}$ sendo obtido na reta numérica, além de facilitar a operação na obtenção do valor de $\frac{4}{3}$, por exemplo, facilitou a sua própria ordenação.

Para reforçarmos esse conceito e entendimento pedimos que os alunos resolvessem a atividade referente a números mistos presentes no caderno do aluno em que um dos exemplos já citamos no capítulo 3, conforme “figura 33”:

Figura 33: Diâmetro de um CD em polegadas



Fonte: Caderno do professor, 2014-2017, 6º ano, v1, p.44..

$4\,\frac{3}{4} = \frac{19}{4}$

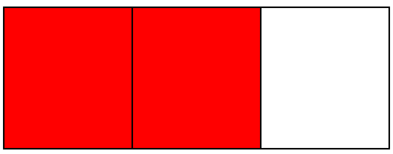
Um último conhecimento relacionado à multiplicação de frações foi necessário: que o aluno entendesse a multiplicação de fração por fração.

Foi então questionado qual o valor de $\frac{2}{3}$ de $\frac{2}{3}$?

Novamente a explanação desse assunto foi efetuada através das grades retangulares (acreditamos que a dimensão 1 seja inviável nesse caso) contribuindo para a aprendizagem efetiva de como se multiplica frações. E, desta vez a preposição 'de', que representa a multiplicação nestes contextos, teve maior importância.

Primeiramente representamos $\frac{2}{3}$ através da grade retangular presente na "figura 34":

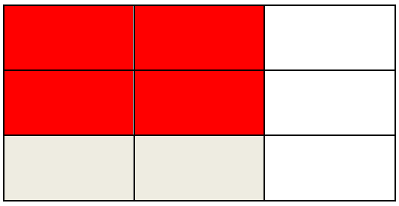
Figura 34: Multiplicações utilizando grades retangulares



Fonte: elaborado pelo autor

Como queríamos $\frac{2}{3}$ desses $\frac{2}{3}$, tivemos que dividir esses dois terços em três partes tomando novamente duas (Figura 35).

Figura 35: $2/3\ de\ 2/3$



Fonte: elaborado pelo autor

Desse modo esperávamos que o aluno percebesse que $\frac{2}{3}\ x\ \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

A partir disso, formalizamos com os alunos, que em uma multiplicação envolvendo frações o resultado é encontrado através da multiplicação de numerador por numerador e denominador por denominador.

Estas atividades se desenvolveram em um tempo de 6 aulas, já que propusemos vários exercícios, com respectivas correções que permitissem ao aluno ter condições de encontrar os valores da escala pitagórica.

Construção da escala pitagórica

Após esse momento de construção de alguns conceitos matemáticos retomamos o problema inicial que previa a construção da escala musical elaborada por Pitágoras.

Dado o problema como ponto e partida, se fizeram necessários, a aquisição de alguns conhecimentos adicionais. Desse modo o conceito de operações envolvendo frações como a multiplicação e a adição, não apareceram descontextualizados, mas foram apresentados como ferramentas importantes contribuindo na resolução de um problema, algo que julgamos ser essencial para além de motivar, também mostrar a necessidade e importância de se adquirir um certo conhecimento. (o conceito de multiplicação de frações não é abordado no ‘Caderno do aluno’ nesta etapa, mas no nosso caso, foi extremamente necessário).

Na reprodução da escala pitagórica pelo aluno, foram obedecidos os seguintes princípios que já descrevemos no subitem de 2.1 desse trabalho.

Toda nota é equivalente a outra nota (sendo a mesma nota), quando a divisão entre os comprimentos das cordas geradoras é exatamente na metade ($\frac{1}{2}$: intervalo de oitava justa). Algo que os alunos já tiveram contato inicialmente na tarefa 3.

A unidade de medida, que Pitágoras usou para construção da escala foi o intervalo de quintas justas ($\frac{2}{3}$), que nesse nosso caso é o padrão estabelecido, chamado de ciclo das quintas. Indo ao encontro com o que prevê o 'Caderno do Aluno,' utilizando a fração como unidade de medida.

E o espectro(limite) que pertencia os valores da escala foi entre a corda toda e sua metade, ou seja, entre $\frac{1}{2}$ e 1, sendo responsável pela escala começar em uma nota (nota La, por exemplo) e terminar na mesma nota (La), mas em outra altura (mais aguda ou grave).

A partir de uma nota inicial era encontrada a quinta justa dessa, calculando-se $\frac{2}{3}$ de 1. Depois desse procedimento considerava-se essa nova nota como ponto de partida e era encontrada a quinta justa referente a ela.

Nesse caso tivemos $\frac{2}{3}$ de $\frac{2}{3}$ cujo valor é $\frac{4}{9}$. Mas $\frac{4}{9}$ não estava no intervalo delimitado para a escala, entre $\frac{1}{2}$ e 1, pois $\frac{4}{9}$ = 0,444...

Como a nota que estivesse na razão $\frac{1}{2}$ é equivalente à nota dada, foi efetuado $\frac{4}{9}$ vezes 2 encontrando a nota equivalente correspondendo a $\frac{8}{9}$ já que $\frac{4}{9}$ está na razão de 1 para 2 em relação a esse novo comprimento.

Obtivemos: $\frac{4}{9} + \frac{4}{9} = \frac{8}{9}$

Nessa atividade, acrescentamos a comparação entre racionais, para os alunos, já que julgamos ser importante ele perceber somente ao observar a fração, se ela estava entre $\frac{1}{2}$ e 1, utilizando o auxílio da calculadora apenas depois para efetuar os cálculos.

Foi proposto que os alunos efetuassem o desenvolvimento das outras razões presentes na escala, e registrassem os valores em ordem crescente.

Como os cálculos exigiram o uso da calculadora e transformações de registros semióticos, o papel do professor foi fundamental em assessorar intensamente os alunos, intervindo e orientando cada aluno sempre que necessário.

Desse modo almejamos encontramos como resposta os valores descritos na “tabela 9”:

Tabela 9: Cálculo envolvendo a escala de Pitágoras

Largura da corda inteira (Lci)	Ciclo das quintas (2/3 de Lci)	Largura resultante LR	Condição de existência ½<LR<1	Fração equivalente Oitava:x2
1	2/3 de 1	2/3 = 0.666...	Ok	-
2/3	2/3 de 2/3	4/9= 0.444...	Não	8/9= 0.88...
8/9	2/3 de 8/9	16/27=0.592592...	0k	-
16/27	2/3 de16/27	32/81=0.395	Não	64/81=0.79
64/81	2/3 de 64/81	128/243=0,526	Ok	-

Fonte: Cálculos efetuados pelo autor

Além desses valores, também foram considerados os intervalos de quarta ($\frac{3}{4}$) e oitava ($\frac{1}{2}$), já encontrados anteriormente.

Com essa atividade, obrigatoriamente, por meio da construção da escala pelos alunos foi trabalhado o conceito de comparação entre números racionais, já que os valores encontrados precisavam estar entre $\frac{1}{2}$ e 1, além da representação e ordenação desses números na reta numérica, a fim de serem reconhecidos os respectivos valores musicais de segunda, terça, quarta, quinta, sexta, sétima e oitava da escala musical pitagórica.

Novamente trabalhamos a fração como padrão para comparar medidas, objetivo esperado pela atividade proposta no caderno do professor, do 6º ano do ensino fundamental (Caderno do Professor, situação de aprendizagem 3. Pág. 38.), atendendo essa expectativa, numa situação contextualizada, e, importante que ainda atinge muitos outros objetivos, pois propicia a aprendizagem de conceitos como a adição e multiplicação de frações, por exemplo.

E ainda existiu o conceito da equivalência entre números racionais novamente trabalhado com a utilização de outro tipo de registro de representação semiótica para as frações encontradas, no caso, a conversão para sua representação decimal.

5.2.5. Tarefa 5: Estudo dos números racionais a partir da teoria musical – Tempo estimado – 4 aulas.

Já apresentamos ao aluno a presença fundamental das frações na elaboração da primeira escala musical, utilizando as razões encontradas por Pitágoras e as operações necessárias para essa tarefa. Entretanto, diferente das outras tarefas elaboradas até então, esta necessitou de alguns conhecimentos de teoria musical.

Nessa tarefa, nos baseamos principalmente nas conexões 3 e 4 descrita no capítulo 3, envolvendo matemática e música.

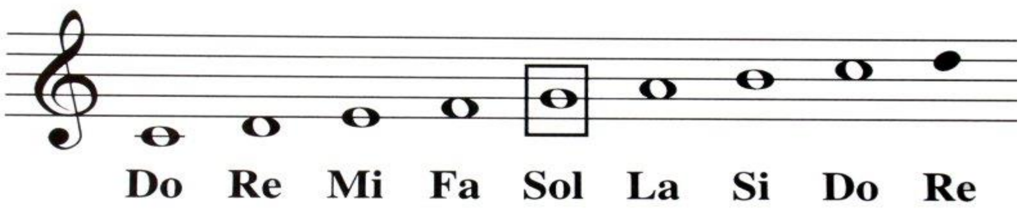
Foi apresentado aos alunos imagens referentes a escrita musical e questionado com eles se já tinham observado em algumas imagens, em revistas, internet, jornais e, até mesmo em televisão, a presença desses símbolos.

Figura 36: Exemplo de uma partitura

Fonte: http://www.pensandomusica.com.br/2015/11/o-tempo-na-partitura.html

A maioria dos alunos já havia visto em algum lugar, mesmo que superficialmente. Foi explicado a eles que a pauta é formada por 5 linhas e quatro espaços entre elas, com barras verticais que a dividem nos chamados compassos, contendo a 'Clave' que identifica as notas musicais, e, a sua fórmula determinada por uma fração. Apresentamos a localização das notas na pauta como informação, conforme "figura 37" abaixo, além de informações sobre como é utilizado o compasso em uma escrita musical.

Figura 37: Notas musicais e posições na pauta



Fonte: https://teoriamusicalemfoco.com.br/clave-de-sol/

Conceitos sobre as notas musicais com os seus respectivos valores de duração, e, com os respectivos símbolos para pausa, com sua conversão para os números racionais, inclusive, com a função relacionada a ‘ligaduras’ e ‘ponto de aumento’, referente à duração das notas, em um compasso $\frac{4}{4}$ conforme “tabela 10” abaixo, também foram apresentados, para em seguida ser proposto um exercício de solfejo rítmico, que foi aprendido e executado oralmente e com o auxílio de palmas por toda a classe simultaneamente.

Tabela 10: Notas e tempos referentes a um compasso 4/4

Figura	Pausa	Tempo	Nome
𝅝	𝄻	4	SEMIBREVE
𝅗𝅥	𝄼	2	MÍNIMA
𝅘𝅥	𝄽	1	SEMÍNIMA
𝅘𝅥𝅮	𝄾	1/2	COLCHEIA
𝅘𝅥𝅯	𝄿	1/4	SEMICOLCHEIA
𝅘𝅥𝅰	𝅀	1/8	FUSA

Fonte: https://magiadamusica.webnode.pt/figuras-musicais/ritmico.html

Solfejo Rítmico

Nessa atividade, novamente lidamos com vários registros de representação semiótica. Houve a ‘conversão’ da linguagem figural representada pelas figuras musicais com os seus correspondentes valores numéricos; existiu o tratamento já que o aluno operou com os símbolos referentes aos valores matemáticos sendo esses limitados em cada compasso; e, ainda trabalhamos seguindo a orientação do Currículo do Estado de São

Paulo na situação de aprendizagem 3, já que tivemos uma fração identificada com o padrão, pois foi necessário saber quantas figuras cabiam em determinado compasso. Acontecendo isso de modo natural, divertido e eficaz. Na “figura 38” temos um solfejo realizado.

Figura 38: Partitura para solfejo rítmico

Fonte: atividade elaborada pelo autor

O interessante nessa atividade como já descrevemos na conexão 3 foi o fato de, além de trabalharmos a conversão do registro figural para a língua materna, surgirem naturalmente relações quase que instantâneas que esperávamos serem percebidas pelos alunos de que um inteiro é composto por duas metades ou quatro quartos, ou ainda, analogamente que são necessárias duas colcheias para termos o valor de uma semínima, possibilitando com isso a coordenação de vários registros semióticos.

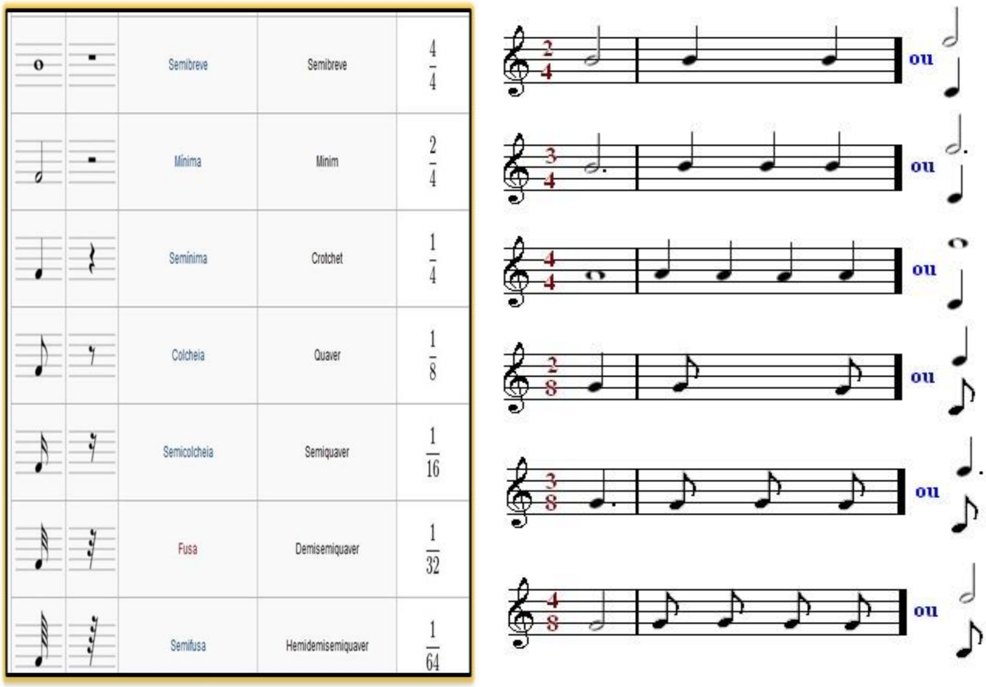
Agrupando compassos

O agrupamento adequado em compassos preenchidos com as notas musicais, e, seus respectivos símbolos de pausa e valores de duração, foi objetivado nessa atividade, em que trabalhamos de duas maneiras: na primeira, o aluno simplesmente colocou os traços verticais agrupando adequadamente os compassos segundo sua fórmula fracionária; na segunda, o aluno constituiu seu compasso da maneira que quis com as notas referentes aos tempos necessários para preenchê-los.

A duração referente as notas musicais foram consideradas diferentemente da maneira utilizada no solfejo da atividade anterior, em que cada semínima valia 1 tempo sendo necessárias 4 semínimas ou quatro tempos para preencher um compasso $\frac{4}{4}$. Nesse caso consideramos o valor da nota em relação ao todo em notação fracionária. Por exemplo, são necessárias 4 semínimas para preencher um compasso $\frac{4}{4}$, então nesse caso cada semínima equivale a $\frac{1}{4}$, já a colcheia vale $\frac{1}{8}$, precisando de 8 para preenchê-lo totalmente, e assim por diante.

A “figura 39’ abaixo exemplifica essa situação:

Figura 39: Compasso e relação com notas musicais



Fonte: http://www.pensandomusica.com.br/2015/11/o-tempo-na-partitura.html

Foi pedido então ao aluno que colocasse adequadamente o traço vertical separando os compassos:

Figura 40: Separando os compassos

Fonte: atividade elaborada pelo autor

Com isso esperava-se que o mesmo execute a atividade semiótica do ‘tratamento’ envolvendo a adição de frações tendo que primeiramente ‘converter’ da linguagem figural em sua mente para a linguagem numérica, para poder realizar os cálculos mentalmente e colocar as barras adequadamente.

Uma vez mais existiu a necessidade de coordenação de ao menos dois registros, com os tratamentos realizados adequadamente e a inclusão do cálculo mental.

A segunda atividade nesse sentido, descritas através das “figuras 41” e “42”, foi o inverso da anterior. Ao invés de as notas já estarem dispostas, dessa vez, o aluno teve que colocá-las adequadamente, com base nos valores já estudados a partir da “figura 39”. Nesse caso novamente esperávamos a coordenação desses dois registros, numérico e figural, só que no caminho inverso, com a representação das notas na pauta.

O grande diferencial desta atividade em relação à anterior, foi a possibilidade de obtermos várias respostas corretas para o mesmo problema, algo importantíssimo para o desenvolvimento cognitivo do aluno e para a vida, em que nem sempre existe apenas uma reposta, mas sim, várias possibilidades, em que a escolha do melhor caminho às vezes é subjetiva, porém em outras, é obtida pela capacidade de pensar e discernir obtida por meio do estudo praticamos, e nos preparamos para cada tomada de decisão

Figura 41: Completando compassos na fórmula de compasso 3/8

Fonte: atividade elaborada pelo autor

Completando compassos na fórmula de compasso $\frac{4}{4}$:

Figura 42: Completando compassos na fórmula de compasso 4/4

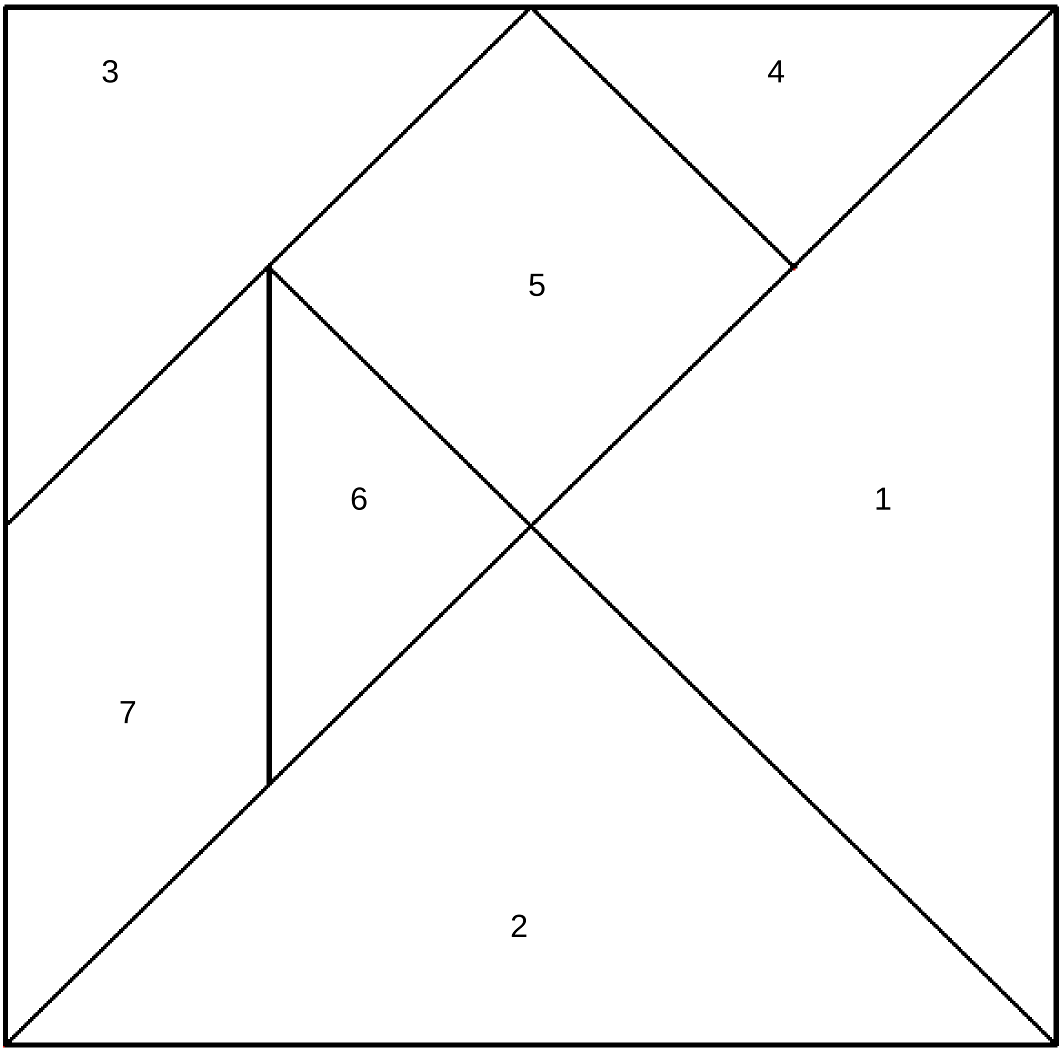
Fonte: atividade elaborada pelo autor

5.2.6. Tarefa 6: Unindo a tarefa do Tangran presente no Caderno do aluno com a teoria musical – Tempo estimado: 4 aulas.

Nessa situação de aprendizagem trouxemos principalmente a conexão 5 descrita no capítulo 2 entre racionais-música-semiótica, mas desta vez, não relacionamos apenas aspectos na abordagem do conceito, ou mesmo dos objetivos propostos nas situações de aprendizagem do ‘Caderno do aluno, mas, efetivamente, unimos nossa proposta de conexão entre Música e Matemática com a mesma, enriquecendo ainda mais uma atividade que julgamos ser bastante relevante pelas representações: figural utilizando polígonos; em língua materna; numérica; e, com a possibilidade da atividade semiótica de tratamento sendo utilizada com frequência.

Primeiramente foi efetuada a construção do Tangram pelos alunos com base nas orientações presentes no Caderno do aluno do 6º ano.

Figura 43: Tangran



Fonte: Caderno do professor, 2014-2017, 6º ano, v1, p.42.

Sendo:

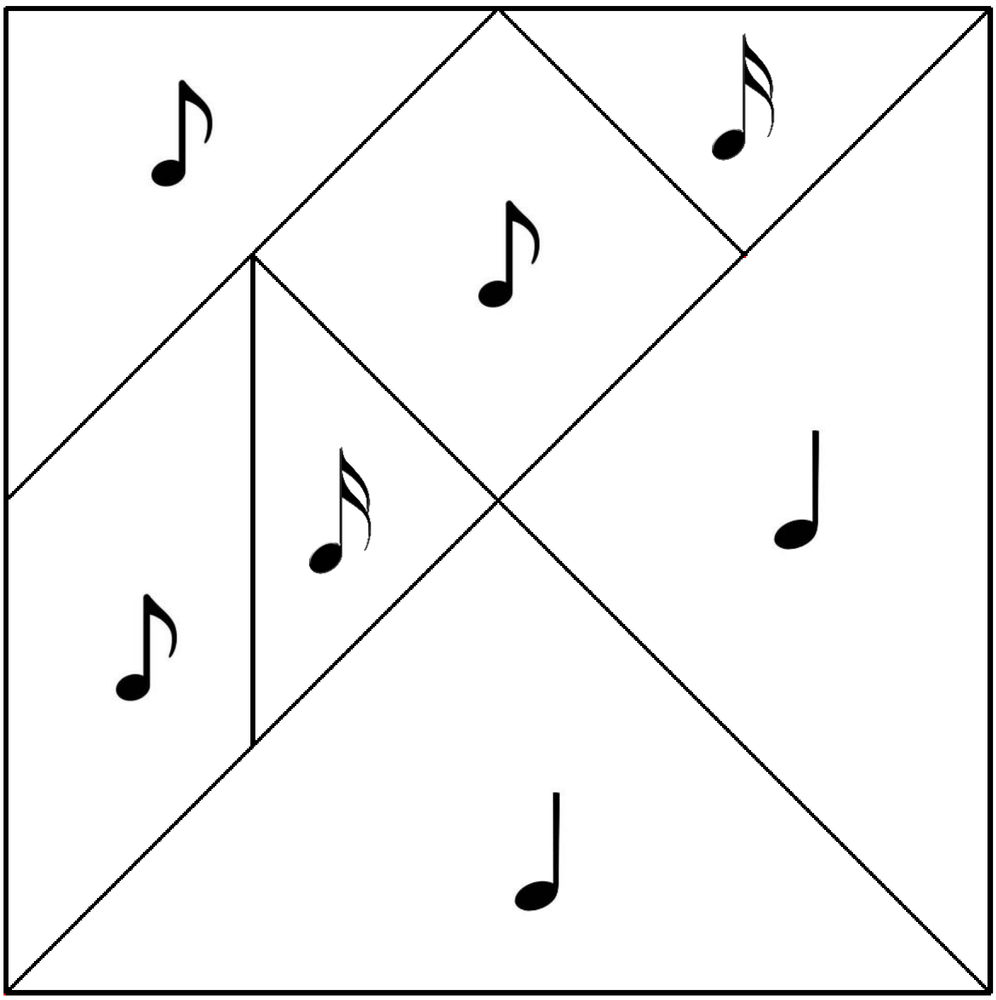
Triângulos grandes: Peças 1 e 2 — Quadrado pequeno: Peça 5

Triângulo médio: Peça 3 — Paralelogramo: Peça 7

Triângulos pequenos: Peças 4 e 6 Quadrado grande: Tangram completo

A tarefa consistiu inicialmente, considerando os valores já apresentados na “figura 39”, colocar as notas musicais referente a cada uma das peças do tangran, cujo resultado que esperávamos está descrito na “figura 44”.

Figura 44: Tangran com as notas musicais



Fonte: Caderno do professor, 2014-2017, 6º ano, v1, p.42. Marcações com notas musicais: elaborado pelo autor

Após esse momento usando as sobreposições das figuras do tangram, já previstas na situação aprendizagem do ‘caderno do aluno’, e, com base na tabela sobre os valores das notas musicais já estudados na “figura 39”, os alunos responderam as seguintes questões:

a) Quantos triângulos pequenos são necessários para formar um quadrado pequeno?

b) Quantas notas semicolcheias são necessárias para formar uma colcheia?

c) Qual o valor de $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$?

d) Quantas notas semicolcheias são necessárias para termos uma semínima? Que fração ela corresponde?

e) O quadrado corresponde a que fração do triângulo grande?

f) Quantas colcheias são necessárias para termos uma semibreve? Que fração corresponde?

g) Uma semicolcheia corresponde a que fração da semibreve?

h) Quantas semicolcheias cabem na semínima?

i) Uma semicolcheia e uma colcheia juntas correspondem a que fração da semínima?

j) Uma semicolcheia e uma colcheia correspondem a que fração da semibreve?

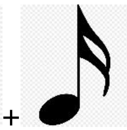
k) Se dividíssemos o triângulo menor que corresponde a uma semicolcheia pela metade, que figura musical encontraríamos? Que fração corresponderia da semínima? Que fração corresponderia da semibreve?

l) Qual o valor da divisão de ¼ por 2?

Considerando os valores das notas musicais relacionadas a um compasso ($\frac{4}{4}$) (tabela 15, p.167), determine os valores para as somas abaixo:

a)  +  =

b)  +  =

c)  +  +  +  =

Novamente nessas tarefas o que se esperava dos alunos era a identificação e coordenação de vários registros com suas vertentes em ‘noesis’ e ‘semiose’.

Existiu a linguagem materna, figural, numérica, com a Música hora sendo identificada analogamente com a Matemática, hora sendo a própria representação figural do objeto matemático.

5.3. Considerações sore as tarefas

Desse modo, inserimos em nossas tarefas todas as unidades conceituais previstas para o Ensino de frações para o aluno do 6º ano do Ensino fundamental pelo currículo do Estado de São Paulo, nas situações de aprendizagens 3 (em que principalmente baseamos as nossas) e 4, porém, sem nos esquecermos de sempre que possível, acrescentar um outro registro semiótico, como o conceito de número decimal, por exemplo, que naturalmente em algumas situações apresenta-se como uma alternativa viável e importante para uma aprendizagem mais rica de significados.

6. DESCRIÇÃO E ANÁLISE DA PRODUÇÃO DOS ALUNOS

Neste capítulo trazemos a descrição e análise da produção e aproveitamento dos alunos do 6º ano do Ensino Fundamental participantes de nossa pesquisa para as tarefas descritas no capítulo anterior, referentes a conexão entre Matemática e Música, trazendo dados objetivos e subjetivos, sobre o comportamento, interesse, e aprendizagem propiciadas a eles através dessa conexão. Trazemos informações e avaliações sobre o que foi relevante, e, se atendeu a coordenação dos registros de representação semiótica de Duval (2012), almejadas em nossa questão de pesquisa, com aspectos interpretativos mediante nossa condução e observação, considerando ainda, mudanças de rota que podem ser feitas a partir dos resultados encontrados, refletindo sobre melhorias nesta proposta de ensino, e até mesmo se é interessante prosseguir com a mesma e, com quais perspectivas.

6.1. Público alvo

O nosso trabalho foi desenvolvido em uma classe com 33 alunos do 6º ano, do período da tarde, da E.E. João Rodrigues Bueno, situada em Sorocaba/SP, em que lecionamos nesse ano de 2018.

As aulas aconteceram em seis aulas semanais, nas duas primeiras aulas de terça, quarta e quinta-feira.

A apresentação das tarefas foi efetuada nas próprias aulas, e, no período de 4 semanas (sedo adicionadas 2 aulas a mais devido à necessidade que percebemos), mesmo tempo previsto para as situações de aprendizagem referente ao conceito de frações presentes no ‘Caderno do ‘Aluno’. Iniciamos as atividades no início do mês de abril, e concluímos no início de maio de 2018.

Discorreremos sobre a análise da produção dos alunos, considerando os desempenhos de modo geral da classe, e, em alguns momentos, mais especificamente de 8 alunos que selecionamos de acordo com o desempenho deles em Matemática, que já tínhamos conhecimento por meio de atividades de avaliação realizadas anteriormente ao nosso trabalho de pesquisa.

Para a seleção desses alunos, além de considerarmos, com base, o desempenho dos mesmos em nossa avaliação já realizada anteriormente, também levamos em consideração, se os mesmos frequentaram a maioria das aulas em que as tarefas propostas em nossa pesquisa foram trabalhadas. Desse modo, consideramos dois alunos dentre os que tinham os melhores desempenhos, 4 com desempenhos intermediários, e, dois deles com desempenho abaixo do esperado, até então, com a ideia de termos uma visão geral, de como nossa proposta de aprendizagem através da conexão entre Matemática e Música seria assimilada pela classe.

Escolhemos denominá-los pelas iniciais de seus nomes, e, nesse caso tivemos os alunos **'MW'**, **'LH'**, que eram dois dentre os alunos com melhor desempenho, **'LB'**, **'EM'**, **'K'**, **'LA'**, com desempenho intermediário, e **'EH'** e **'JV'**, com desempenho ainda insatisfatório.

Embora estejamos citando esses alunos, em algum momento poderemos considerar um outro aluno, na medida em que seja importante sua produção em determinada atividade realizada, para completarmos nossa análise, utilizando outras iniciais de nomes.

6.2. Análise das tarefas

Nesta seção está descrito como se desenvolveu as tarefas descritas no capítulo anterior para os alunos do 6º ano da E.E. João Rodrigues Bueno trazendo informações sobre o aprendizado e envolvimento dos alunos por meio de dados objetivos coletados e de uma análise interpretativa dos resultados.

6.2.1. Análise da Tarefa 1

As respostas dadas pelos alunos sobre o que sabiam sobre frações, vieram ao encontro com a nossa expectativa, que acreditava que o conhecimento referente a esse objeto de estudo, se resumia a poucos exemplos quanto ao seu entendimento, e apenas, sob o aspecto da fração como 'parte-todo'.

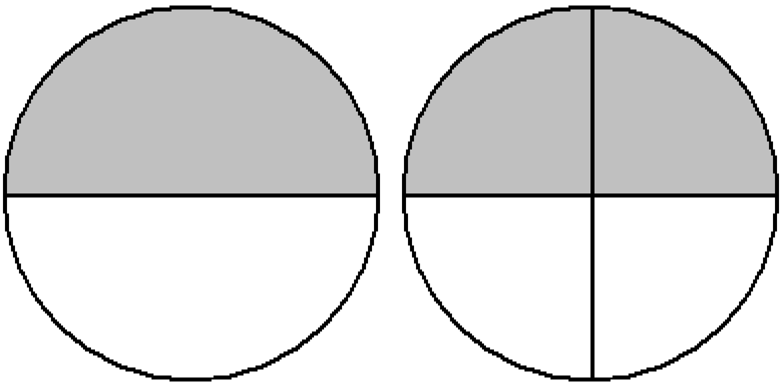
Foram citados exemplos como $\frac{1}{2}\ e\ \frac{3}{4}$, dentre outros, mas no momento que foram questionados sobre situações em que são utilizadas frações no dia a dia, as únicas respostas apresentadas, pela grande maioria dos alunos, foram referentes à dimensão 2, em casos como o de repartir uma 'pizza' ou um 'bolo' em pedaços, tomando algumas dessas partes, com a identificação da fração apenas desse modo.

Apenas o aluno '**EM**', citou que em uma quadra de esportes poderíamos estar pensando em frações considerando as linhas que demarcam a sua metade, algo que oportunizou já a possibilidade de apresentarmos um desenho de uma reta com a localização do número racional $\frac{1}{2}$, algo bastante interessante, porém, foi a única exceção.

Já a aluna **'LB'**, citou a fração 'dois quartos', e, questionado por nós, como poderia ser representado essa fração de uma outra forma, ela então, escreveu o número com seu símbolo matemático: $\frac{2}{4}$, e um desenho em forma de uma 'pizza' na lousa, repartindo-a em 4 pedaços e pintando dois deles.

O interessante nessa resolução dada pela aluna foi a realização correta da atividade semiótica de conversão em duas oportunidades, passando da língua materna para a numérica e posteriormente para o registro figural, em dimensão 2, atestando seu conhecimento adequado sobre frações na representação ´parte-todo´.

Figura 45: Desenho em formato ´pizza´de 2/4



Fonte: Arquivo do pesquisador

Neste momento já procuramos relacionar a reposta dada por **'LB'**, com outros tipos de representações semióticas, para o mesmo objeto matemático referido.

Foi perguntado a todos num momento de explanação, sobre a possibilidade de poder representar a fração $\frac{2}{4}$ de outras maneiras.

Exceto pela representação figural, dimensão 2, já apresentada pela aluna, não houve outro tipo de resposta. Constatamos então algo que nossos estudos baseado em alguns autores, como Catto (2000) ou Vaz (2006), nos próprios documentos curriculares, como os PCN(1998), e, em nossa própria vivência educacional já atestam, que em sua grande maioria, os alunos chegam ao 6º ano com muitas dificuldades em entender adequadamente o que é uma fração ou número racional.

Metade da pizza, meia pizza, 0,5 pizza, $\frac{1}{2}$ pizza, foram as outras representações citadas por nós na medida em já procurar agregar outras representações semióticas de um objeto matemático.

A grande maioria dos alunos conseguiu perceber com clareza que se tratava da mesma porção da pizza, embora inicialmente, ao ser dito a eles que $\frac{1}{2}$ era equivalente a $\frac{2}{4}$ tenha provocado algumas dúvidas, sendo remediadas com a comparação efetuada entre as duas representações figurais, conforme “figura 45”.

Novamente procuramos questioná-los sobre outras situações que eles soubessem sobre outras utilizações das frações, mas não houve nenhuma resposta diferente das já oferecidas.

Foi então proposto a exibição do desenho animado ‘Donald no país da Matemágica’, com a intenção de que os alunos percebessem a presença das frações em outras situações.

Ao término da exibição do filme, foi perguntado a eles sobre as ‘novidades’ na utilização da Matemática, e, quase todos, muito entusiasmados disseram terem percebido sua presença em diversos momentos, como na relação com as formas geométricas presentes na natureza, na utilização das frações no momento do desenho animado que relacionou fração e música, com a colaboração de Pitágoras para construção da escala musical, e, na utilização das frações no ‘jogo de bilhar’, em que um jogador utiliza os ângulos entre taco e bola utilizando conceitos matemáticos para acertar uma segunda bola. O aluno ‘**JV**’, que antes era bastante disperso, ficou bastante empolgado tanto nos exemplos envolvendo música, como nos relacionados ao jogo de bilhar. Algo que iria se fortalecer nas tarefas seguintes.

A identificação da presença da matemática em diversas situações antes não imaginadas por eles, promoveu um encantamento diferente. De repente aquilo que estudavam começou a fazer mais sentido, trazendo um ‘porque’ interessante e desafiador.

A aluna **‘LA’** disse: “Nossa, nem sabia que tinha matemática nessas coisas”.

E, dentre as relações matemáticas vislumbradas no filme, destacamos, neste momento com eles, qual seria nosso objeto de estudo: as relações presentes entre matemática e música, e, que nessa via de mão dupla, iríamos utilizar a Matemática para entendermos e aprendermos conceitos musicais, e, a Música serviria para dar significado a esse estudo matemático. A reação deles foi muito positiva, adoraram a ideia, e se mostraram prontos para essa nova etapa.

Complementamos essa tarefa com a apresentação do segundo filme: ‘Matemática da Música’, em que é retratada situações em que a Matemática é utilizada para criar e elaborar música, incluindo a definição de intervalos através de frequências sonoras, sua presença nos próprios instrumentos musicais, nos sons produzidos, e que novamente trouxe boas reações por parte de quase todos os alunos.

6.2.2. Descrição e análise da tarefa 2

No início da tarefa, optamos em recordar com os alunos, sobre a presença da Matemática na Música, descrita nos vídeos, sendo quase unânime a lembrança da aula anterior.

Foi apresentado a eles os dois instrumentos trazidos para aquele momento: uma guitarra e um teclado musical despertando grande curiosidade, e interesse. Neste momento soubemos que dois dentre os 33 alunos tinham algum conhecimento sobre música: **‘MW’** que estava começando a estudar teclado e a aluna ‘X’, que estudava violino.

Escolhemos como caminho primeiramente não partir diretamente para as relações matemáticas, mas, utilizar o instrumento, para execução de uma música, para de certa forma, despertar maior interesse para o estudo que estava por vir. Escolhemos uma música brasileira, de Luiz Gonzaga e Humberto Teixeira: ‘Asa Branca’, por acreditarmos, ser ela, além de uma música bonita, também presente em nossa cultura, e, ser de fácil aprendizado, que executamos com o auxílio do teclado musical.

Esse momento foi bastante relevante pelo grande interesse que despertou em todos, e, é incrível, o quanto a música, mesmo ‘Asa Branca’ não sendo conhecida por eles, mobilizou e encantou. Todos os alunos se envolveram e foram muito receptivos com a atividade.

Em seguida partimos para o ‘Experimento do monocórdio’ com o auxílio de uma guitarra (figura 46).

Figura 46: Realizando o experimento do monocórdio utilizando uma guitarra

Fonte: Arquivo do pesquisador

Ao reproduzirmos os intervalos de oitava, quinta e quarta justas, aquilo que esperávamos constatar foi plenamente atendido. De modo geral quase todos perceberam as consonâncias, e dissonâncias referentes aos intervalos. O envolvimento de todos na atividade foi acima das expectativas. Até mesmo alunos que imaginávamos que não se envolveriam, como ‘**EH**’ e ‘**JV**’, que durante as aulas normalmente não realizavam as atividades, participaram efetivamente.

Aproveitamos e utilizamos outras cordas da guitarra para reproduzir o experimento, e, novamente fomos bem-sucedidos. Houve boa compreensão principalmente nos intervalos de oitava, e, na percepção das dissonâncias e também na representação figural através da representação na dimensão 1 tanto visualizada na própria guitarra como através do desenho efetuado na lousa conforme “figura 47” abaixo.

Figura 47: Intervalos de oitava, quarta e quinta justas dispostos na reta

Fonte: Arquivo do pesquisador

Continuamos então explorando os intervalos citados através do teclado, e, em diversas tonalidades. A percepção dos intervalos consonantes e dissonantes ficou ainda mais plausível pelos alunos. Nesse momento exploramos já a questão de equivalência, ao executar os mesmos intervalos em outras tonalidades. Novamente com êxito.

Aproveitamos o momento para fortalecermos esse conceito entre frações presentes nesses intervalos, citando $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$, dentre outras, com a relação análoga sonora, alegando que quando se ouvia as mesmas sonoridades em outras tonalidades, significava que a relação entre as razões provenientes das frações era equivalente. Não temos dúvidas que o entendimento de quase todos os alunos a respeito desse significado foi plenamente atendido.

6.2.3. Descrição e análise da tarefa 3

Reforçar o conceito de 'equivalência', tão importante na aprendizagem de números racionais, como corrobora Catto (2000), além de relacionar diversos registros semióticos referente a um número racional, essenciais para uma aprendizagem plena, foi objetivado nessa tarefa.

A execução novamente da música 'Asa Branca' com os alunos novamente foi algo positivo, mantendo o interesse e motivação. Executamos a música em três tonalidades distintas: Fa Maior, Sol Maior, e La Bemol Maior.

Como esperado, de modo geral a percepção por parte deles das mudanças de 'tom', com a música ficando cada vez mais aguda, já que fomos subindo os tons gradativamente, foi perfeitamente assimilada por todos. **'LB'**, quando a música foi executada em La bemol maior já se manifestou dizendo que tinha sido o tom mais gostoso de 'cantá-la'.

Fizemos a pergunta: "A música mudou ou continuou sendo a mesma?"

As repostas em sua totalidade, contemplaram o fato de que a música permaneceu a mesma. Foi explicado então sobre a transposição tão estreitamente relacionada com o conceito matemático de equivalência

Nesse momento apresentamos imediatamente a comparação com o que ocorre com os números racionais equivalentes. Embora sejam escritos de forma diferente ele representam o mesmo objeto matemático. Foi explicado que na música quando realizamos esta atividade, todas as notas são transpostas de maneira que a razão entre os intervalos entre elas permaneça as mesmas, algo assimilado pela maioria da classe.

Utilizamos então o próprio teclado musical (Figura 48) com suas teclas brancas e pretas para esclarecer esse fato. Desse modo encontramos com os alunos as distâncias intervalares para oitava, quinta e quarta justas, para as escalas de 'Do maior', 'Re maior' e 'Re# maior' (Mi bemol). Fizemos simplesmente contando os semitons necessários juntamente com os alunos para os intervalos de oitava justa (12 semitons), quinta justa (7 semitons) e quarta justa (5 semitons) para ‘Do maior’, transpondo para outras tonalidades.

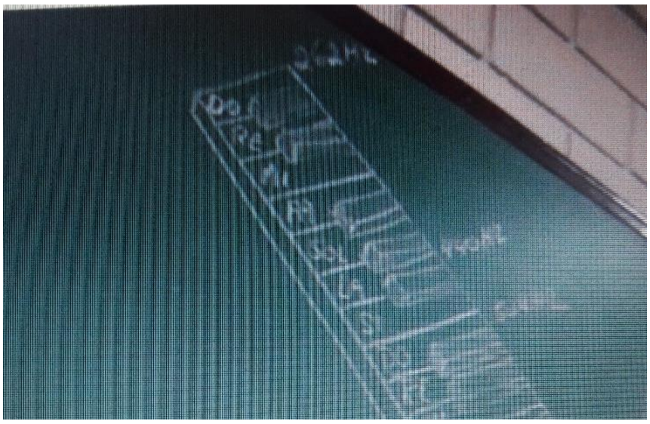
Figura 48: Teclado musical

Fonte: Arquivo do pesquisador

Partimos então para a atividade envolvendo frequências e intervalos.

Iniciamos com o esclarecimento do conceito de frequências sonoras descritos na tarefa, e, com a apresentação dos valores de frequências já descritos na tabela 7, do capítulo anterior, organizamos a classe em 5 grupos de 4 alunos, e, dois grupos de 5 alunos (nesse dia houve 3 ausências), e, propomos com o auxílio da calculadora que fossem utilizadas as frequências relativas as notas musicais dos intervalos de oitava, quinta e quartas justas em três tonalidades, para que encontrassem os valores de $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$, referentes a esses intervalos através da simplificação de frações e do significado da fração como divisão de dois inteiros.

Figura 49: Esboço do teclado com algumas frequências retratadas na lousa



Fonte: Arquivo do pesquisador

Foi realizado com eles utilizando a lousa a atividade para os valores de quinta justa, e pedimos que fizessem o mesmo para os valores de oitava e quarta, justas. Disponibilizamos o uso da calculadora, principalmente na representação do objeto matemático na forma de número decimal, e pedimos que tentassem simplificar irredutivelmente as frações provenientes das razões entre as frequências das notas musicais, que representavam esses intervalos nas três tonalidades.

Apesar de imaginarmos, à princípio, que essa tarefa seria bastante tranquila de ser realizada por eles, já que era em grupo, e, estávamos procurando auxiliá-los, a realidade é que não ocorreu dessa forma, conforme relatamos abaixo.

Intervalo de oitava justa

Nesse sentido em relação à oitava justa, o entendimento até que foi satisfatório nas representações envolvidas nas três tonalidades consideradas, na correspondência entre fração e razão, e, no entendimento da fração como divisão, e, consequente equivalência com o número decimal correspondente. Não tiveram muita dificuldade em compreender que 0,5 e $\frac{1}{2}$ representavam o mesmo número racional. Nesse aspecto foi bastante positivo, pois 6 dentre os grupos responderam corretamente nas três tonalidades.

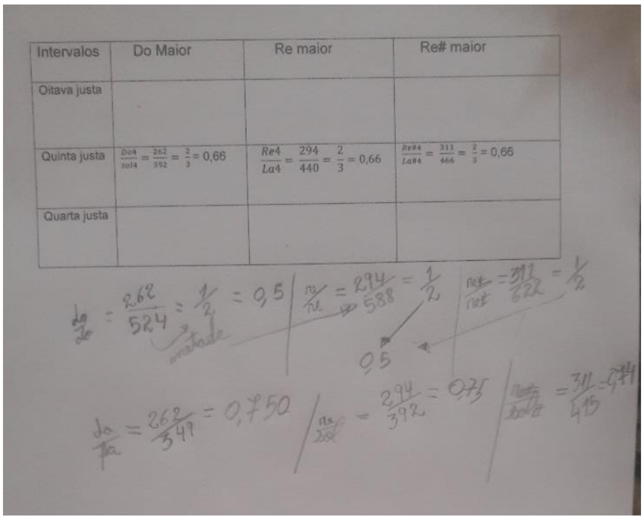
A inclusão da representação decimal, inclusive, contribuiu significativamente oferecendo maior entendimento sobre o significado da sua representação fracionária, indo ao encontro com o que afirma Duval (2012), de que a coordenação de vários registros semióticos de um objeto matemático contribui para uma aprendizagem mais significativa. Desse modo a percepção do conceito de metade referente a uma fração foi muito assimilada pelos grupos (figura 50), e pela maioria da classe em seus diversos registros.

Figura 50: Alunos reunidos em grupos

Fonte: Arquivo do pesquisador

Porém, apenas o grupo A realizou a simplificação dos valores referentes a oitava justa, sendo os demais grupos que acertaram (B, C, D, E e F), justificaram dizendo que o numerador era metade do denominador, ou simplesmente diziam que todas as representações valiam meio, como a resolução do grupo B ilustrada na “figura 51” abaixo.

Figura 51: Resolução do grupo B



Intervalos	Do Maior	Re maior	Re# maior
Oitava justa			
Quinta justa	$\frac{Do4}{Sol4} = \frac{262}{392} = \frac{2}{3} = 0{,}66$	$\frac{Re4}{La4} = \frac{294}{440} = \frac{2}{3} = 0{,}66$	$\frac{Re\#4}{La\#4} = \frac{311}{466} = \frac{2}{3} = 0{,}66$
Quarta justa			

Fonte: Arquivo do pesquisador

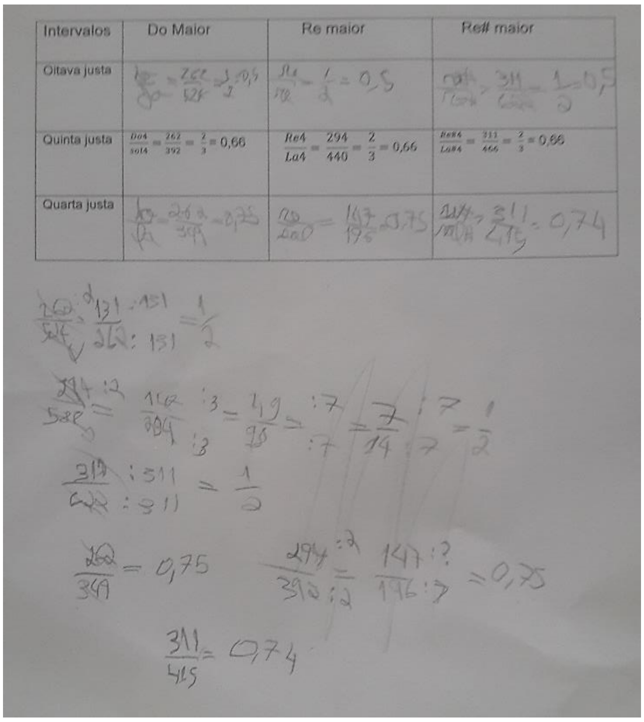
A justificativa através da produção de texto foi muito simples, sem uma escrita elaborada, e, a nosso julgar, não foi satisfatório nesse sentido.

Já em relação à correspondência com o valor decimal, os resultados e o entendimento da fração como divisão entre dois números inteiros saíram naturalmente, sem problemas em quase todos os grupos.

Intervalo de quarta

No que concerne aos mesmos cálculos para os intervalos de quarta justa, o problema foi um pouco maior. Primeiramente, os valores das frequências para Do maior e Re# maior não eram frações redutíveis, e mesmo para os valores referentes a Re maior, que era redutível, os alunos apresentaram dificuldades, pois nenhum grupo conseguiu simplificar as frações até chegar em $\frac{3}{4}$. Nem mesmo o grupo A que tinha simplificado corretamente no intervalo de oitava justa, conseguiu deixá-la na forma irredutível, chegando até o valor de $\frac{147}{196}$ conforme mostra “figura 52”.

Figura 52: Resolução do grupo A



Fonte: Arquivo do pesquisador

Procuramos então, após esse momento, oferecer frações redutíveis aproximadas dos valores, como $\frac{261}{348}$ para o intervalo em Do maior e $\frac{309}{412}$ para Re# maior, mas mesmo assim apenas 3 dos grupos resolveram corretamente.

Finalizamos a aula desse dia reforçando a questão de aproximação com eles, algo importantíssimo como corrobora o Currículo do Estado de São Paulo, pelo fato de que nas situações do dia a dia, essa ação é necessária, e, de certo modo constatamos que a maioria dos alunos percebeu que significavam os mesmos valores racionais, quando considerávamos os mesmos intervalos, porém, na atividade semiótica de ‘tratamento’ envolvendo a simplificação de frações, percebemos dificuldades, não no entendimento do que tinham que fazer, mas na própria habilidade de simplificação utilizando divisores, algo que julgamos ter sido ocasionado pelos números grandes com os quais eles não estavam acostumados a operar normalmente, e, também pela própria deficiência cognitiva referente aos conceitos de múltiplos e divisores.

Acabamos por estender um pouco o tempo dessa atividade (utilizando 2 aulas a mais), a fim de minimizar os problemas de aprendizagem encontrados na simplificação de frações propondo alguns exercícios de m.d.c., e abordando novamente o tema, porém escolhemos valores um pouco menores para serem simplificados. O resultado dessa vez foi satisfatório.

Sobre a atividade envolvendo os intervalos e equivalência

Após esse momento, apresentamos a eles a atividade, já descrita no capítulo anterior (figura 53), em que cada um teria que encontrar representações equivalentes referentes aos intervalos de oitava, quarta e quinta, justas, justificando a sua resposta: geometricamente, através de operações, ou da própria linguagem materna. Desta vez os 28 alunos (faltaram 5 alunos nesse dia) realizaram as atividades individualmente.

Figura 53: Atividade envolvendo intervalos musicais e equivalência

Identifique quais das representações abaixo são equivalentes às frações dadas:

A) $\frac{1}{2}$ (intervalo de oitava justa)

a) 2/4 b) 3/6 c) 11/20 d) ¾
e) metade f) 0,5 g) 50/100 h) 50%

B) $\frac{3}{4}$ (intervalo de quarta justa)

a) Um meio b) três quartos c) 0,5 d) 6/8
e) 75/100 f)75% g)0,75 h) ½

C) $\frac{2}{3}$ (intervalo de quinta justa)

a) Um meio b) dois terços c) 4/6 d)10/15
e) 5/6 f) 20/30 g) 66% h) 100%

Fonte: Atividade elaborada pelo autor

Diferentemente da atividade anterior, essa, provavelmente por conter números menores nos cálculos foi melhor desenvolvida pela classe, com eles conseguindo resolver sem muitos problemas as questões apresentadas.

No que se refere as respostas dadas por eles, resolvemos separá-las por registro semiótico, analisando objetivamente através da porcentagem aproximada de acertos e apresentando algumas considerações.

Língua materna

Tivemos que 82% (23 entre 28 alunos presentes no dia dessa tarefa) responderam adequadamente, incluindo '**JV**'.

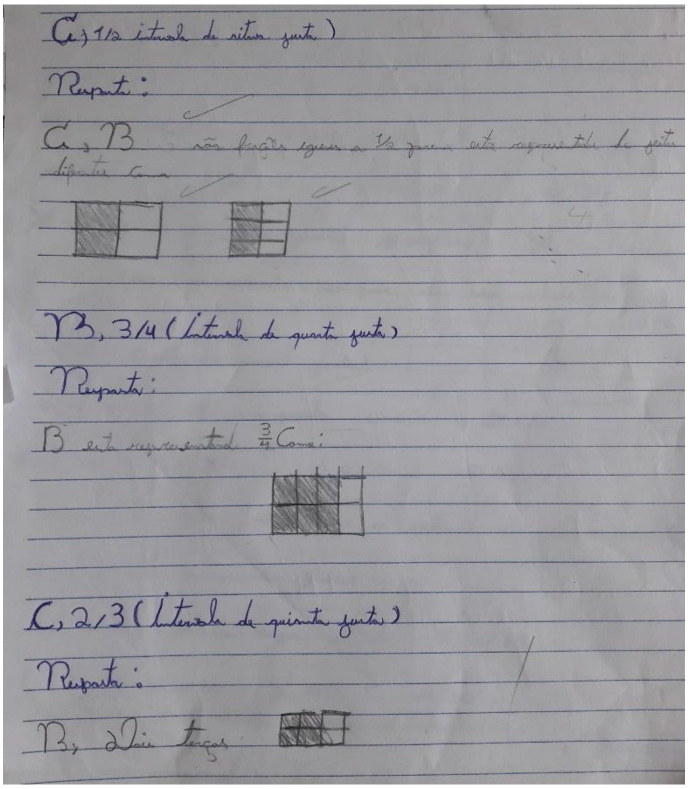
Porém, **'JV'** só apresentou corretamente a reposta em relação à língua materna, mas não tentou apresentar nenhuma outra resposta, que havia pedido justificativas. Acredito que em seu caso a própria percepção de equivalência, não está plena em sua mente, já que o aluno não conseguiu identificar nenhuma outra representação referente à $\frac{1}{2}$, com a atividade do tratamento em relação à representação fracionária sendo inexistente.

Já o aluno **'EH'**, acabou não entregando a atividade, enquanto que os alunos 'LR', 'B', 'A' não conseguiram ou tentaram associar alguma resposta. São alunos com muita dificuldade, e não assinalaram nenhuma das questões adequadamente para qualquer representação.

Registro fracionário

Tivemos com relação as frações, que a grande maioria, 71%, (20 de 28 alunos), encontraram ao menos uma fração equivalente, que é o caso do aluno **'K'** (figura 54), e 43% (12 de 28 alunos) identificaram todas as frações equivalentes presentes.

Figura 54: Resposta do aluno K.



Fonte: Arquivo do pesquisador

Representação decimal e em porcentagem

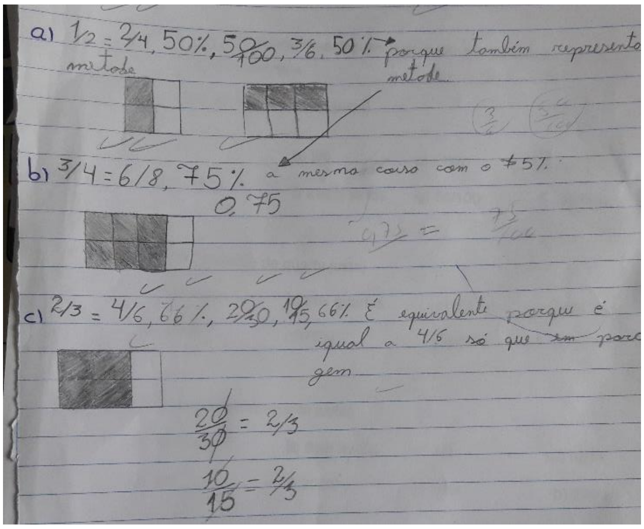
Quanto as outras representações, em forma de número decimal equivalente a $\frac{1}{2}$, os alunos não tiveram dificuldades, com 75% de acertos (21 de 28), referente a 0,5 e 75% (21 de 28), referente a resposta em porcentagem. Já com relação aos outros intervalos de quarta justa, tivemos para 0,75, 50% de acertos (14 de 28 alunos), e para 46% de acertos (13 de 28) para o valor em porcentagem.

O mais difícil, porém, foi o intervalo de quinta justa com apenas 10% (3 de 28) acertando a questão.

Outras considerações

Tivemos apenas dois alunos que conseguiram acertar todas as questões: **‘MW’** (figura 55) e **‘LA’**.

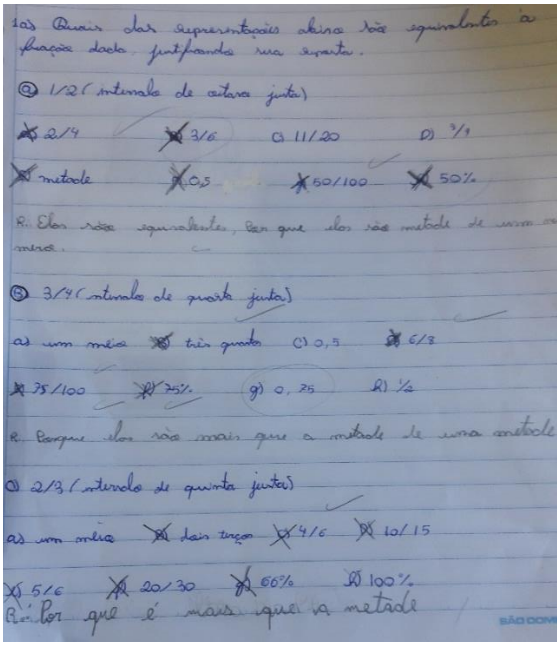
Figura 55: Resposta do aluno MW



Fonte: Arquivo do pesquisador

Porém, **'LA'** apresentou justificativas com bases em estimativas conforme mostra a "figura 56", com respostas um pouco superficiais como: "mais que a metade", "mais do que mais que a metade", levando-nos a constatar que o aluno tem um bom raciocínio lógico, sabendo estimar bem, porém, carece de alguns conhecimentos mais específicos, diferentemente do aluno 'MW', que apresentou representações geométricas para justificar sua resposta.

Figura 56: Resposta do aluno LA



Fonte: Arquivo do pesquisador

De modo geral entendemos que houve um bom entendimento no que se refere à identificação das diferentes representações semióticas do objeto matemático para os valores $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$, com mais dificuldades na representação na forma de porcentagem para $\frac{2}{3}$. Acreditamos que isso deva ao fato de $\frac{2}{3}$ não ser uma fração decimal, como $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$ que podem ser associadas facilmente com valores em dinheiro, em que comumente, os alunos tem contatos com notas de R$ 0,25 e R$ 0,50. Preferimos, no entanto, não aprofundar esses conceitos nesse momento, já que seriam estudados posteriormente no ensino de números decimais presentes a partir da situação de aprendizagem 5 do ‘Caderno do Aluno’.

Embora não fosse o objetivo principal de nossa atividade as representações dos números racionais nos formatos: decimal e porcentagem, ao não ignorarmos sua existência, podemos mesmo que de maneira tímida, já introduzirmos esses conceitos na aprendizagem dos alunos, além de fortalecer o conceito da forma fracionária, por coordenarmos diversos registros semióticos, essenciais para uma aprendizagem efetiva, segundo Duval (2012).

Acreditamos que será muito mais fácil e interessante para eles aprenderem esses conceitos, no momento oportuno, quando da retomada desses temas.

Apesar dessas dificuldades relatadas, julgamos ter sido satisfatória a atividade principalmente pelo entendimento da relação de equivalência entre os registros fracionários terem sido obtido com êxito, existiu aprendizagem satisfatória, além do entendimento e conhecimento da equivalência entre fração e número decimal, mesmo observando ainda a dificuldade em efetuar a divisão em uma fração. Algo que iremos com certeza procurar desenvolver em outro momento.

6.2.4. Descrição e análise da tarefa 4

Começamos apresentando a eles que agora iríamos encontrar os outros valores da escala de Pitágoras. Perguntamos se eles estavam dispostos a continuar, e, após recebemos o sim tão esperado, dissemos que precisaríamos aprender ‘umas coisas’ de Matemática antes...Foi só ‘chiadeira’, e, sempre vem um aluno que diz: “Ah...Então eu não quero!”.

Mas agora não tinha mais jeito...

Essa atividade representou o claro exemplo de termos um problema para ser resolvido, em que precisamos de ferramentas necessárias, da qual nos apropriamos, e, com o desenvolvimento adequado de algumas habilidades e conceitos, conseguimos alcançar nossos objetivos. A Matemática a serviço da elaboração de toda estrutura musical e a Música propiciando o estudo e aprimoramento da Matemática.

Sobre conhecimentos prévios

Começamos a atividade trazendo os conhecimentos necessários descritos no capítulo anterior. Os alunos ao realizarem os cálculos de dobro e triplo de um número natural, não tiveram nenhum problema, e automaticamente perceberam que a preposição ‘de’ em matemática significa a operação de multiplicação, e, imediatamente todos os alunos apresentaram os resultados esperados; 2 x 3 = 6; 2 x 4 = 8.

Já nos cálculos envolvendo as frações, ao apresentarmos o conhecimento do significado de ‘parte-todo’ de uma fração através de grades retangulares, da representação na reta numérica, e, do conceito de que dobrar é somar duas vezes, triplicar é somar três vezes foi utilizado pela maioria após orientação dada.

Apresentamos alguns exemplos e oferecemos alguns exercícios visando o desenvolvimento da aprendizagem deles. A princípio, muitos alunos somavam tanto numeradores, e, denominadores, mas rapidamente, com as orientações oferecidas, houve entendimento, e, de modo geral, não tiveram dificuldade em assimilar, adquirindo o entendimento de que na adição de frações com denominadores iguais, são mantidos os denominadores e adicionados os numeradores.

Foi então formalizado com eles que nas multiplicações envolvendo um número natural por uma fração apenas multiplicamos o numerador pelo número inteiro.

No caso envolvendo a multiplicação cujo resultado eram frações impróprias, novamente alguns alunos apresentaram o erro de multiplicar tanto numerador como denominador pelo número natural.

Incluímos nesse momento por acharmos necessário a atividade descrita no caderno do aluno sobre números mistos e frações impróprias em que se utilizam de reta numérica, já descrita no capítulo 3.

O entendimento da multiplicação envolvendo frações transcorreu de forma positiva, porém, sendo necessários alguns exemplos a mais. Mas de modo geral a classe obteve uma aprendizagem satisfatória.

Como a tarefa envolvia ainda de certo modo a comparação de frações, resolvemos acrescentar algo antes não previsto, na tarefa, que foram algumas atividades, simplesmente de comparação para saber se uma fração estava localizada entre o e $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ e 1, e maior que 1. Nessa atividade efetuada por eles era dada uma fração e eles precisavam dizer em qual localização se encontravam. Esclarecemos que no caso das frações impróprias sempre era maior que 1, caso contrário era necessário verificar se o numerador era menor ou maior que a metade do denominador. O aproveitamento foi muito bom, com quase todos os alunos acertando os exercícios propostos.

Sobre a construção da escala

Apesar de julgarmos ser a tarefa mais importante envolvendo Música e números racionais, por todo o contexto histórico e fundamental que agrega nessa conexão de modo geral, também apresenta uma densidade bastante desafiadora, para alunos do 6º ano, por isso optamos por desenvolvê-la juntamente com eles.

Começamos a atividade, novamente trazendo a guitarra e mostrando em que lugar da mesma teriam que ficar as notas Partindo da nota pressionada em sua metade até a extremidade onde se prendem as cordas, frisando que era entre 0,5 e 1 (comprimento da corda toda).

A partir disso fomos efetuando os cálculos, passo a passo, juntamente com eles. Primeiramente efetuando $\frac{2}{3}$ de 1 = $\frac{2}{3}$.

Imediatamente foram orientados, com o auxílio da calculadora, a encontrar o valor decimal referente a $\frac{2}{3}$ = 0,666...Foi perguntado se estava entre 0,5 e 1. A resposta foi positiva. O próximo passo foi calcular o valor de $\frac{2}{3}$ de $\frac{2}{3}$ = $\frac{4}{9}$. Novamente foi pedido que fizessem a divisão encontrando nesse caso 0,444... Perguntamos se estava entre 0,5 e 1. Responderam que não. Frisamos que teríamos que achar a nota equivalente, multiplicando por dois, e, assim por diante.

O resultado foi muito além do que esperávamos, a grande maioria dos alunos conseguiu realizar a atividade toda, com nosso auxílio, e, alguns alunos foram fazendo sozinhos, ficando felizes quando o resultado por nós apresentado correspondia com suas respostas. Dentre eles ‘MW’, ‘LH’, e ‘K e ‘EM’.

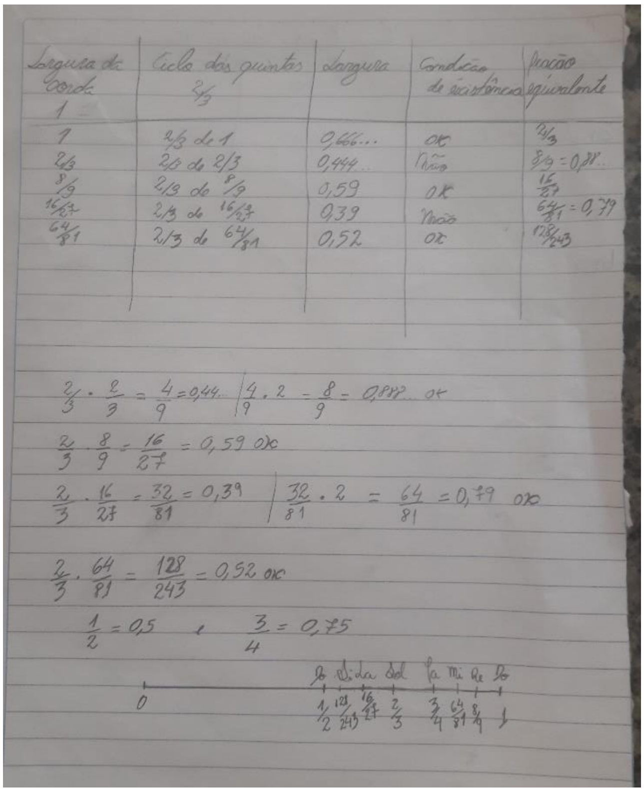
O uso da notação decimal equivalente aos números fracionários de cada intervalo foi fundamental. Sem eles essa percepção teria sido muito mais difícil para alunos do 6º ano.

Através dessa atividade conseguimos entender com muito mais clareza o que Duval(2012), e alguns outros autores baseado em suas teorias, como Catto(2000), e Silva(2008), afirmam, de que a coordenação de vários registros semióticos, sabendo escolher qual o registro mais adequado em determinado momento, devido à economia de cálculos ou a própria facilidade que proporcionam é essencial para a plena aprendizagem.

Se essa atividade fosse realizada apenas utilizando frações seria praticamente impossível que alunos do 6º ano, conseguissem assimilar o que estava sendo ensinado devido a frações envolvendo alguns números grandes e, ao cálculo envolvendo decimais não ter sido ainda trabalhado. Assim, o uso da calculadora nesse caso também foi imprescindível.

A “figura 57” apresenta a atividade do aluno ‘MW’:

Figura 57: Atividade de construção da escala pitagórica feita pelo aluno "MW'



Largura da Corda 1	Ciclo das quintas 2/3	Largura	Condição de existência	Fração equivalente
1	2/3 de 1	0,666...	ok	2/3
2/3	2/3 de 2/3	0,444...	Não	8/9 = 0,88...
8/9	2/3 de 8/9	0,59	ok	16/27
16/27	2/3 de 16/27	0,39	Não	64/81 = 0,79
64/81	2/3 de 64/81	0,52	ok	128/243

$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9} = 0,44...$ | $\frac{4}{9} \cdot 2 = \frac{8}{9} = 0,888...$ ok

$\frac{2}{3} \cdot \frac{8}{9} = \frac{16}{27} = 0,59$ ok

$\frac{2}{3} \cdot \frac{16}{27} = \frac{32}{81} = 0,39$ | $\frac{32}{81} \cdot 2 = \frac{64}{81} = 0,79$ ok

$\frac{2}{3} \cdot \frac{64}{81} = \frac{128}{243} = 0,52$ ok

$\frac{1}{2} = 0,5$ e $\frac{3}{4} = 0,75$

Fonte: Arquivo do pesquisador

Após encontrarmos todos os valores, eles foram orientados a organizarem os números em ordem crescente (com a representação fracionária), e, colocá-los em uma reta numérica, não importando a precisão, mas com o acréscimo da nomenclatura das notas musicais já conhecida, de Do a Do.

Finalizamos a atividade tocando as sete notas da escala com o auxílio da guitarra, utilizando uma corda dela apenas, condizente com o que eles tinham descoberto.

Em nosso dia a dia escolar, muito se fala em aulas de reforço, recuperação paralela e contínua, visando desse modo o aluno com dificuldades, privilegiando apenas esses programas, sem, entretanto, apresentar muitas opções que privilegiem aquele aluno com mais facilidades e interesses pela Matemática.

Embora não fosse nossa intenção inicial, essa tarefa com certeza foi algo que 'assistiu' esse aluno, aquele mais sedento pelo saber Matemático.

Não foram muitos (talvez uns 5 ou 6 alunos), que foram fazendo sem esperar nossas orientações, mas a cada valor encontrado por um deles, com a identificação do seu acerto, as reações foram bastante realizadoras, tanto para eles quanto para o próprio professor. Dentre eles temos **‘MW’**, **‘LH’** e **‘K’** e ‘**EM’.**

O aluno ‘**MW**’, um dos únicos alunos da classe com algum conhecimento prévio musical, disse ao termino da atividade realizada: “Nossa! Como a Música está ligada com a Matemática! Não vejo a hora de chegar em casa e estudar teclado”

Outro aluno, ‘**LA**’, também demonstrou bastante entusiasmo, com a aprendizagem dizendo que queria aprender a tocar algum instrumento.

Uma tarefa densa mais fundamental. Não é uma atividade tão atual, já que ela surgiu há muito tempo atrás quando Pitágoras a partir do ciclo das quintas elaborou a sua escala. Mas ao realizá-la com os alunos, prestando atenção em cada detalhe, nos registros semióticos aparecendo incessantemente, e, não apenas em teoria, não foi forçado, mas, sim necessária a utilização de vários registros. Se não houvesse a conversão para a notação decimal, a atividade seria totalmente inviável; se não localizássemos os valores na reta numérica, não teria sentido estar com uma guitarra na mão falando sobre as relações matemáticas na música. Como a Matemática é fascinante!! E como a Música se mostra maravilhosa por conseguir despertar tudo isso.

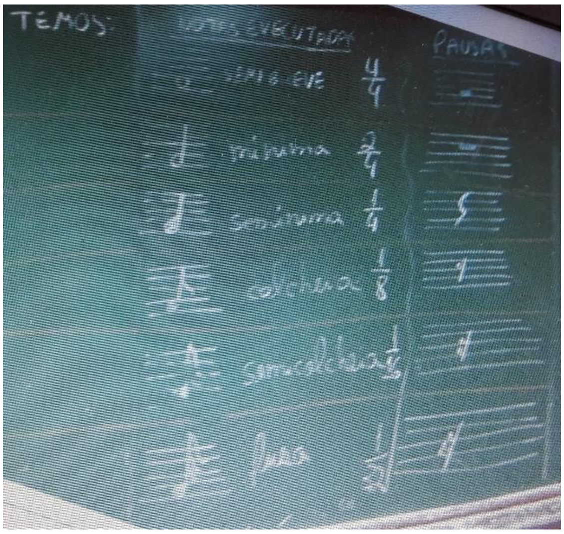
6.2.5. Descrição e análise da tarefa 5

Após uma tarefa mais complexa envolvendo várias vertentes, tivemos essa, que utilizou a música, que nesse caso não foi colocada como análoga em relação a Matemática, mas com sua representação escrita se comportando como mais umas das representações figurais envolvendo números racionais.

No início a tarefa se desenvolveu tranquilamente com os alunos atentos aos conceitos musicais apresentados. A questão dos símbolos musicais e os respectivos tempos para as notas semínima, mínima, colcheia e semicolcheia, foram facilmente entendidos.

Apresentamos os conceitos através de explicações utilizando giz e lousa (figura 58).

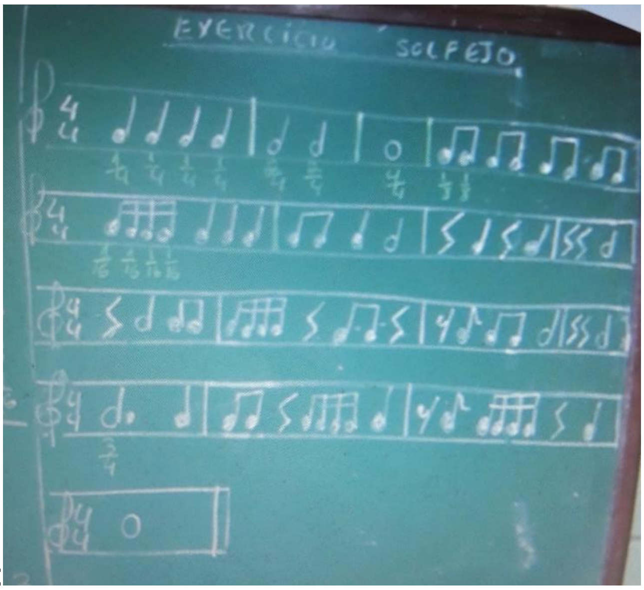
Figura 58: Correspondência entre notas musicais e frações



Fonte: arquivo do pesquisador

Partindo do entendimento deles em relação à conversão entre os símbolos e os tempos de duração dessas notas foi realizada a atividade de solfejo rítmico (figura 59).

Figura 59: Exercício de solfejo realizado

:

Fonte: atividade elaborada pelo autor

Os alunos se envolveram de modo bastante receptivos, como já havia acontecido na atividade referente a execução da música ‘Asa Branca’.

Depois de poucas repetições, a assimilação de solfejar, do exercício proposto foi obtida com êxito. A atividade se desenvolveu num clima alegre de interesse e aprendizado.

Claramente eles perceberam que para se ter o valor referente a uma semínima ($\frac{1}{4}$), eram necessárias duas colcheias ($\frac{1}{8}$), ou 4 semicolcheias ($\frac{1}{16}$), algo que após a atividade de solfejo executada, ao efetuamos os cálculos juntamente com eles, envolvendo os valores das notas que compunham o compasso através da atividade semiótica de adição de frações.

De modo geral todos participaram ativamente. **‘EH’**, que não tinha apresentado a última atividade, e, estava bastante disperso nas outras mais complexas, voltou a se interessar.

A identificação e coordenação satisfatória dos vários registros empregados, por quase todos os alunos, também mereceu destaque, afinal tínhamos os registros: figural, com o desenho da nota musical; materno, com o nome das notas; numérico, com os respectivos valores fracionários; e os tratamentos relacionados a essa representação, sendo assimilados e reproduzidos.

Concluímos a tarefa com a utilização de palmas ao invés da reprodução oral, algo que novamente agregou maior envolvimento, e, também contribuiu para aprendizagem através da mudança de registro, dessa vez, do oral para o registro efetuado através de gestos.

O aluno **‘JV’** apresentou-se novamente com bastante entusiasmo e muito interesse realizando adequadamente a atividade.

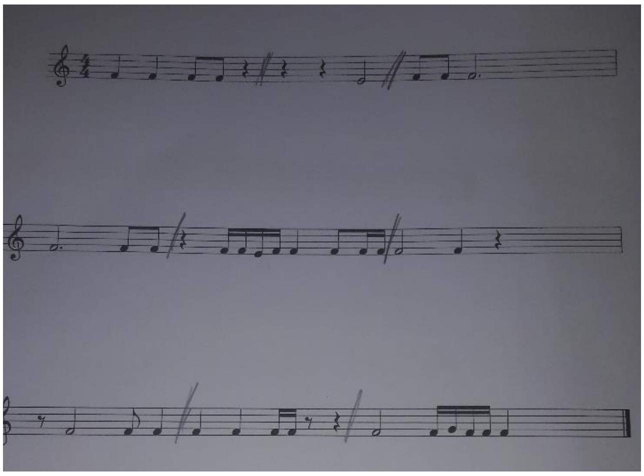
A correspondência entre dois registros matemáticos: figural e numérico, com o tratamento na operação de adição foi importante, principalmente pelo fato de alunos com mais dificuldade como ‘EH’ e ‘JV’, terem conseguido realizá-la. Algo que apenas com ‘papel e lápis’ não estava acontecendo satisfatoriamente.

Sobre as atividades envolvendo os compassos musicais

Dividimos essa situação de aprendizagem em duas atividades: em uma, o aluno organizou os compassos colocando os traços verticais, de modo que cada compasso tivesse os tempos adequados, e, na outra, o aluno colocou as notas referentes a cada compasso.

Na primeira atividade, que privilegiou a adição de compassos com os valores já pré-determinados, envolvendo dois registros semióticos e o cálculo mental, novamente o interesse e envolvimento dos alunos foi conseguido de forma significativa. A grande maioria apresentou resultados satisfatórios, com pequenos erros de um ou outro aluno, em algum compasso, existindo aprendizagem efetiva. A “figura 60” traz a resolução da aluna ‘LB’.

Figura 60: Atividade separando compassos da aluna ‘LB’



Fonte: arquivo do pesquisador

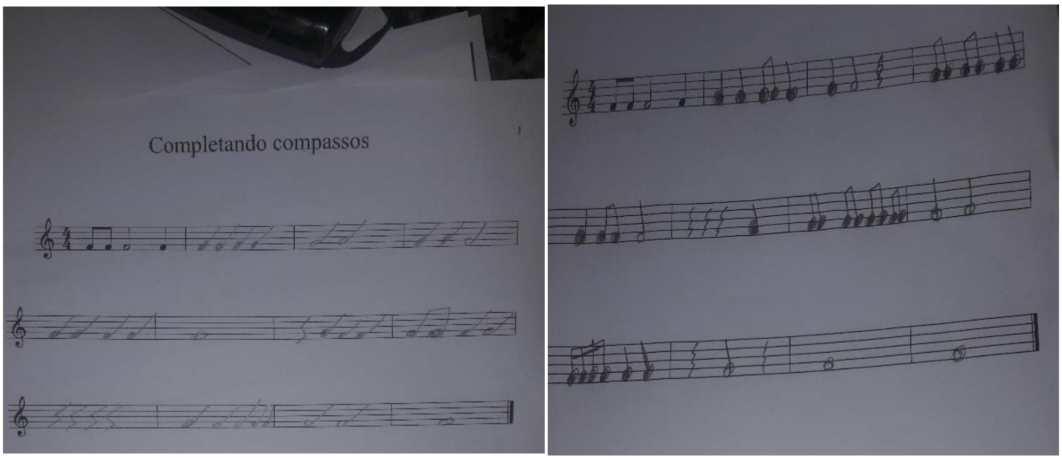
O cálculo mental inserido nessa tarefa foi automático, principalmente pela própria associação direta que o aluno teve de que duas notas colcheias equivalem a uma semínima, por exemplo, encurtando a nosso julgar, caminhos cognitivos.

Na segunda parte efetuamos dois exercícios, um, em um compasso $\frac{4}{4}$, e outro em um compasso $\frac{3}{8}$, para destacar com mais ênfase a questão de a fórmula do compasso estar totalmente interligada ao conceito de fração.

Existiram respostas diferentes como esperávamos, porém, apresentaram poucas variações, com a maioria utilizando quase que sempre as mesmas notas, em ordens diferentes. Somente dois alunos se aventuram em semicolcheias, e apenas um deles utilizou nota pontuada.

Na “figura 61” trazemos a resolução dos alunos ‘JV’ e de ‘LA’ para a mesma atividade.

Figura 61: Atividades completando compassos de ‘JV’’ e ‘LA’



Fonte: Arquivo do pesquisador

Apesar da pouca variedade constatada, julgo ter sido satisfatória a atividade, pelo fato de a grande maioria dos alunos terem conseguido coordenar os registros semióticos envolvidos (figural e numérico) e efetuarem adequadamente a atividade do tratamento na composição dos compassos, com poucos erros.

6.2.6. Descrição e análise da tarefa 6

Certamente ao lado da tarefa 5, na atividade envolvendo o solfejo, a tarefa 6 foi a que apresentou mais sucesso entre os alunos, tanto no poder de envolvimento, como na própria aprendizagem.

A junção entre o tangran, com atividades de dobradura, recortes, e colagens, relacionando com as notas musicais e seus símbolos, foi responsável por proporcionar muito envolvimento por parte deles, além, de ter sido a tarefa em que mais utilizamos a situação de aprendizagem presente no ‘Caderno do Aluno’ de modo efetivo, com a música apenas enriquecendo com seus caracteres movidos a melodia, ritmo e harmonia.

Primeiramente os alunos efetuaram a construção do tangran, de acordo com o que propõe as orientações presentes no ‘Caderno do Aluno’, utilizando dobraduras, e, recortes, e encontraram as sete peças.

Figura 62: Alunos manipulando peças do Tangran musical

Fonte: Arquivo do pesquisador

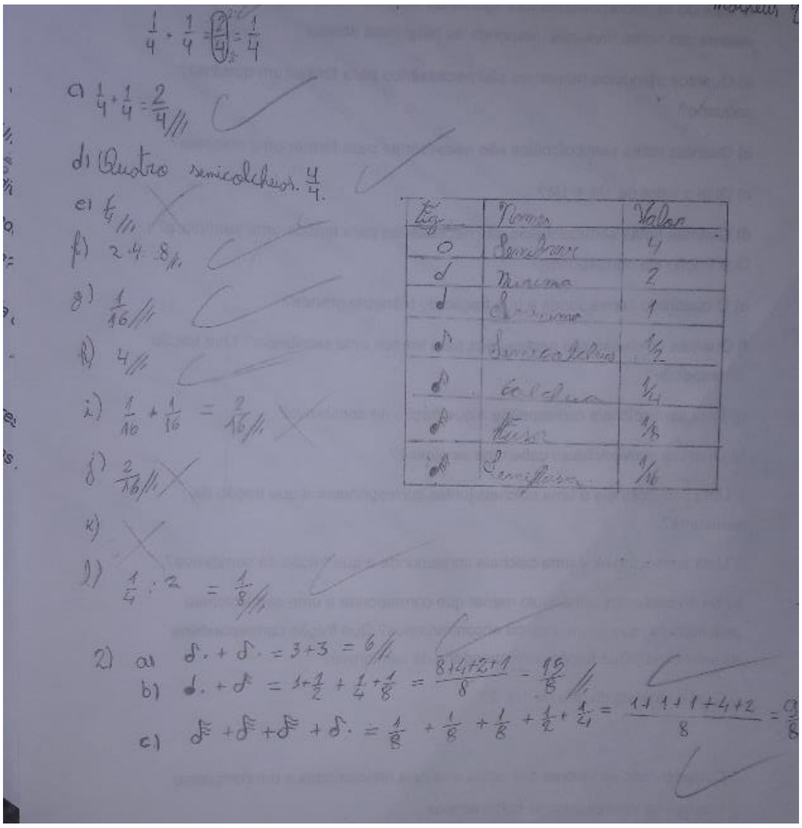
Após esse momento os alunos desenharam nos polígonos as figuras musicais equivalentes à cada peça do Tangran de acordo com seu valor numérico (figura 62).

Novamente a coordenação de alguns registros semióticos pelos alunos foi exigida e assimilada, já que os mesmos tiveram que associar duas representações figurais para os valores numéricos matemáticos

A arte de desenhar e pintar presente na situação de aprendizagem do ‘Caderno do aluno’, com o advento das notas musicais foi de extrema importância. Há alunos que apresentaram um interesse muito maior, simplesmente por que tiveram que desenhar as notas nos polígonos. O principal caso foi o de ‘**JV**’ que novamente destacamos de modo positivo como um dos que mais se envolveram ao realizar suas atividades.

Após esse momento os alunos tiveram que responder as perguntas que criamos inspiradas nas existentes no Caderno do aluno, porém utilizando um mais um ‘ingrediente’: a música. Novamente as atividades contemplaram a coordenação de vários registros semióticos, incluindo dois geométricos, com a inclusão da atividade semiótica do tratamento. Abaixo segue algumas resoluções de alunos:

Figura 63: Respostas do aluno ‘MW’

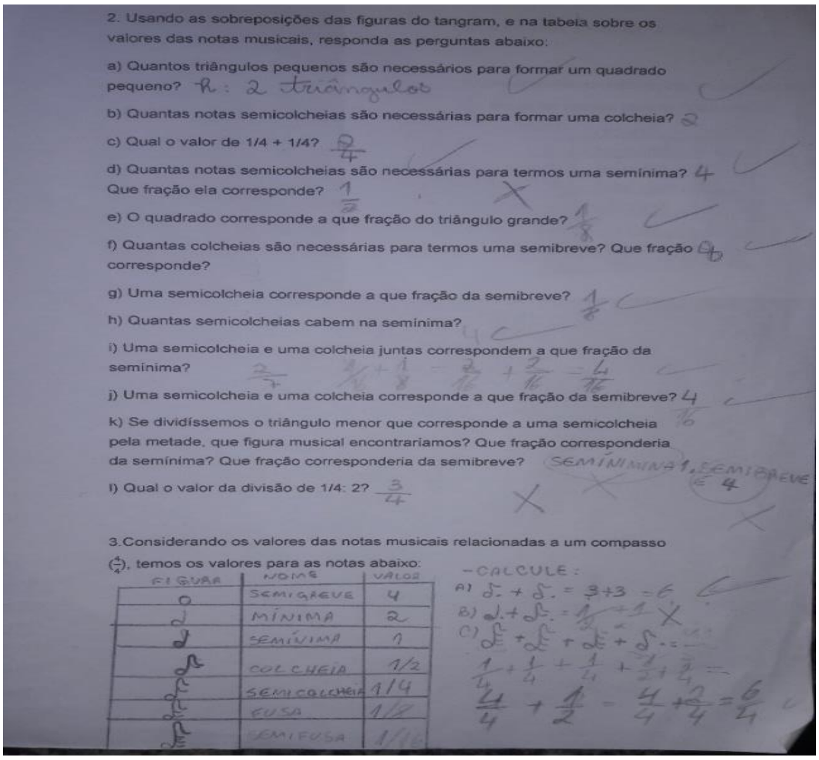


Fonte: Arquivo do pesquisador

O aluno ‘MW’ apresentou ótimo entendimento, em que podemos destacar a perfeita conversão efetuada, da linguagem figural matemática na forma de notas musicais, para a numérica, com a posterior atividade semiótica do tratamento efetuada corretamente como vemos no exercício 2 acima.

O aluno ‘LH já não obteve o mesmo êxito nesses exercícios, acertando apenas um deles, porém na conversão da linguagem materna para a numérica não teve dificuldades apresentando de modo geral uma aprendizagem relevante.

Figura 64: Respostas de ‘LH’



2. Usando as sobreposições das figuras do tangram, e na tabela sobre os valores das notas musicais, responda as perguntas abaixo:

a) Quantos triângulos pequenos são necessários para formar um quadrado pequeno? R: 2 triângulos

b) Quantas notas semicolcheias são necessárias para formar uma colcheia? 2

c) Qual o valor de 1/4 + 1/4? 2/4

d) Quantas notas semicolcheias são necessárias para termos uma semínima? 4
Que fração ela corresponde? 1/2

e) O quadrado corresponde a que fração do triângulo grande?

f) Quantas colcheias são necessárias para termos uma semibreve? Que fração corresponde?

g) Uma semicolcheia corresponde a que fração da semibreve?

h) Quantas semicolcheias cabem na semínima?

i) Uma semicolcheia e uma colcheia juntas correspondem a que fração da semínima?

j) Uma semicolcheia e uma colcheia corresponde a que fração da semibreve?

k) Se dividíssemos o triângulo menor que corresponde a uma semicolcheia pela metade, que figura musical encontraríamos? Que fração corresponderia da semínima? Que fração corresponderia da semibreve? SEMÍNIMA 1, SEMIBREVE 4

l) Qual o valor da divisão de 1/4: 2? 3/4

3. Considerando os valores das notas musicais relacionadas a um compasso ($\frac{4}{4}$), temos os valores para as notas abaixo:

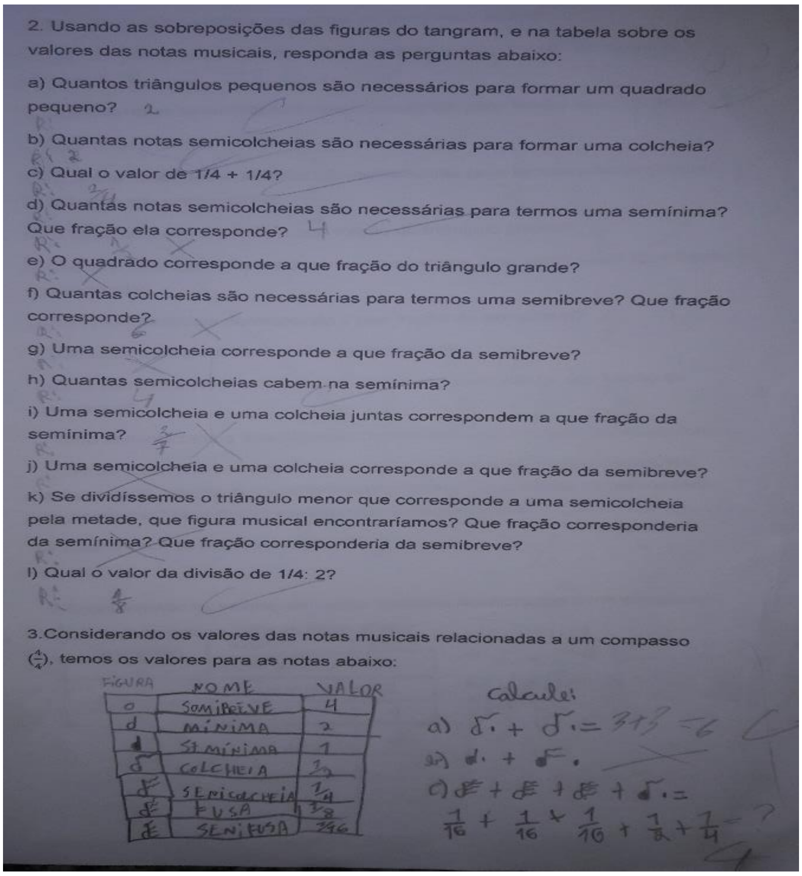
FIGURA	NOME	VALOR
	SEMIBREVE	4
	MÍNIMA	2
	SEMÍNIMA	1
	COLCHEIA	1/2
	SEMICOLCHEIA	1/4
	FUSA	1/8
	SEMIFUSA	1/16

– CALCULE:

Fonte: Arquivo do pesquisador

Já o aluno ‘EM’ apresentou um desempenho apenas satisfatório, em que percebemos algumas dificuldades ainda, tanto na conversão da língua materna, e da figural para a numérica, com a quantidade de acertos e erros apresentados se equivalendo.

Figura 65: Respostas de ‘EM’


2. Usando as sobreposições das figuras do tangram, e na tabela sobre os valores das notas musicais, responda as perguntas abaixo:

a) Quantos triângulos pequenos são necessários para formar um quadrado pequeno? 2

b) Quantas notas semicolcheias são necessárias para formar uma colcheia?
R: 2

c) Qual o valor de 1/4 + 1/4?

d) Quantas notas semicolcheias são necessárias para termos uma semínima? Que fração ela corresponde? 4

e) O quadrado corresponde a que fração do triângulo grande?

f) Quantas colcheias são necessárias para termos uma semibreve? Que fração corresponde?

g) Uma semicolcheia corresponde a que fração da semibreve?

h) Quantas semicolcheias cabem na semínima?

i) Uma semicolcheia e uma colcheia juntas correspondem a que fração da semínima?

j) Uma semicolcheia e uma colcheia corresponde a que fração da semibreve?

k) Se dividíssemos o triângulo menor que corresponde a uma semicolcheia pela metade, que figura musical encontraríamos? Que fração corresponderia da semínima? Que fração corresponderia da semibreve?

l) Qual o valor da divisão de 1/4: 2?

3.Considerando os valores das notas musicais relacionadas a um compasso $(\frac{4}{4})$, temos os valores para as notas abaixo:

FIGURA	NOME	VALOR
	SEMIBREVE	4
	MÍNIMA	2
	SEMÍNIMA	1
	COLCHEIA	1/2
	SEMICOLCHEIA	1/4
	FUSA	1/8
	SEMIFUSA	1/16

Calcule:

Fonte: Arquivo do pesquisador

De modo geral o resultado geral foi bastante positivo com os alunos conseguindo responder corretamente boa parte das questões propostas. Tivemos a participação de um total de 29 alunos, sendo que 5 alunos acertaram mais que 75% das questões, 18 acertaram entre 50 e 75%, 4 acertaram entre 25% e 50%, e 2 acertaram menos que 25 %.

A única questão que não teve nenhum acerto, para nossa surpresa, foi a referente a letra ‘k’. Acredito que devido ao resultado recair em uma nota não utilizada pelos alunos até então (fusa), e, talvez, por também não estar presente nas peças que formavam o tangran.

6.3. Considerações gerais sobre a produção dos alunos

No começo do capítulo elencamos 8 alunos, que escolhemos considerando o desempenho prévio que tínhamos conhecimento, sendo 4 extremos e 4 intermediários, com o intuito, de além, de apresentarmos uma visão geral do desempenho dos alunos da sala, conseguir também, especificar um pouco mais a nossa análise, com alguns representantes de cada um dos 3 níveis de aprendizagem organizados por nós.

Preferimos escolher um número maior do nível intermediário, por acharmos ser mais condizente para uma visão geral, do que teríamos se escolhêssemos, um número maior dos que tinham melhor desempenho, ou, de pior desempenho.

Com base nessa ideia, acredito que dois desses alunos tiveram os maiores avanços e aprendizagens nas tarefas envolvendo a conexão entre música e matemática: **‘MW’**, que simplesmente conseguiu efetuar todas as atividades adequadamente, sempre participativo, colaborando com os colegas, e se antecipando, como na atividade da escala pitagórica, que ao terminá-la alegou que não sabia o que estava acontecendo, mas que não via a hora de chegar em casa e estudar música.

Esperávamos que a Música fosse despertar nos alunos o prazer pela Matemática, mas o inverso foi novidade, e que novidade gostosa de saber: o seu prazer pela Matemática o incentivou a estudar Música!

Outro aluno que destacamos, foi **‘JV’**. Um aluno que era bastante disperso, com muitas dificuldades, que vinha de um desempenho ruim, e, que achávamos que não se envolveria. Começou tímido, no início, mas à medida em que apareciam atividades diferentes, como: cantar uma música, realizar um solfejo rítmico, ou perceber uma nota musical executada, algo foi mudando. Para nossa realização profissional, seu comportamento não foi mais o mesmo, ainda mais quando surgiram as atividades em que era necessário, desenhar notas musicais, como na atividade de preencher compassos, ou ainda envolvendo recortes como a do tangran. Perguntava mais, tirava dúvidas, participava intensamente, e, o mais importante, dentro de seu estágio cognitivo, aprendia e evoluía. “Professor vem me ajudar”, por várias vezes essa frase foi repetida por ele, algo que antes inexistia. Acredito que no seu caso, nossa proposta de aprendizagem mudou sua visão de como enxergava a Matemática. Ele não se tornou um ´gênio’ por isso, mas procurou aprender, e, isso se refletiu posteriormente, nos dias e meses que sucederam as atividades propostas em nosso trabalho, já que acompanhamos seu desempenho durante o ano todo. Apesar da dificuldade natural em Matemática que ele apresentou, dentro de sua capacidade, ele foi ao máximo, e por isso o destacamos.

Quantos aos demais alunos citados, todos eles**: ‘K’, ‘LB’, LA’, ‘LH’ e ‘EM’**, tiveram um bom desempenho, alguns se destacando em atividades envolvendo o cálculo como **‘K’** e **‘LH’**, e outros como **‘LA**’ e **‘EM’** nas atividades envolvendo aspectos mais interligados com a própria música, como no solfejo rítmico, por exemplo.

O aluno **‘K’**, porém não se destacou tanto quanto imaginávamos. Nos cálculos foi muito bem, mas em outras atividades participou sem tanto envolvimento.

O único aluno que infelizmente, dentre os citados, que não apresentou um bom desempenho foi **‘EH’**. Apesar de em algumas atividades, principalmente envolvendo a execução da música ‘Asa branca’, e da atividade envolvendo o tangran, ter participado um pouco mais, quando precisava concluir algo, dispersava, e, no final não finalizava a atividade.

Mas de modo geral, constatamos que nossa proposta conseguiu de modo efetivo e abranger e envolver a maioria dos alunos. A motivação foi diferente, assim como a própria aprendizagem, em que os alunos, de modo geral, apresentaram um desempenho melhor do que anteriormente ao nosso trabalho de pesquisa. A Música fez o que esperávamos, estimulou e, ao mesmo tempo ofereceu caminhos para que os conhecimentos matemáticos fossem absorvidos, contribuindo ainda para o desenvolvimento cognitivo, afetivo e social dos alunos.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Quando iniciamos nosso projeto de pesquisa tínhamos a ideia de utilizar a Música no ensino de frações para o 6º ano do ensino fundamental, pois acreditávamos que essa metodologia poderia trazer muitas possibilidades interessantes no processo de ensino-aprendizagem, tanto no que se refere ao maior interesse dos alunos, como na própria ampliação de significados e situações de aprendizagem por eles vivenciadas.

Ao considerarmos o referencial teórico em que fundamentaríamos nosso trabalho, pensamos imediatamente nos registros de representação semiótica, devido as várias representações que tanto a Música, quanto o objeto matemático ‘fração’, assumem, e, ao pensar nessas diversas representações, se tornou necessário considerar os números racionais como um todo. Desse modo, em nosso trabalho, resolvemos considerar como conteúdo, os números racionais, principalmente em seu registro fracionário, mas abrangendo os outros registros semióticos pertinentes a este objeto matemático sempre que possível.

E, com um último ingrediente: alinhar nossa proposta com o material fornecido pelo Estado de São Paulo, intitulados ‘Caderno do Professor’ e ‘Caderno do aluno’. E que fazem parte do Currículo vigente das escolas estaduais.

Ou seja, apresentar uma proposta de conexão entre números racionais e música, sob à luz dos registros de representação semiótica, alinhados com o material fornecido pelo governo de São Paulo.

Relacionando nossa conexão com o ‘Caderno do aluno’, para nossa dissertação escolhemos a situação de aprendizagem 3: como guia, além do conteúdo, competências e habilidades vislumbradas pela situação de aprendizagem 4, sob à luz das teorias dos registros semióticos, visando uma aprendizagem mais atraente, e, ao mesmo tempo, eficiente, de números racionais para alunos do 6º ano, buscando nessa conexão responder nossa questão de investigação: **Como a inserção da música no processo ensino-aprendizagem de números racionais contribui na mobilização e coordenação dos registros de representação semiótica?**

Com todas as relações descritas ou realizadas que propusemos nessa dissertação, conseguimos responder nossa questão de investigação:

A Música se estabelece como algo muito mais do que uma alternativa viável, para ensinar números racionais em concordância com o material fornecido pelo Currículo do Estado de São Paulo, e, com a mobilização e coordenação dos registros de representação semiótica. Com sua utilização o emprego e coordenação de vários registros semióticos surgem naturalmente, com suas duas atividades, tanto de tratamento como de conversão, podendo ser inseridas constantemente como já discorremos principalmente em nossas considerações referentes a tarefa 4. E, além disso, agrega novos aspectos, como a inclusão dos registros de representação figural matemáticos na forma de símbolos referentes às notas musicais, e do próprio valor análogo que possibilita em diversas situações de aprendizagem.

Constatamos ainda, que nosso trabalho oferece com essa conexão, apesar de ser concebido visando alunos do 6º ano, a possibilidade de ser expandido e aplicado em ‘anos escolares’ mais avançados, com o aumento da complexidade de atividades, se necessário, contemplando percepções trazidas por Catto (2000) que traz a informação, em seu trabalho, de que muitos alunos chegam ao Ensino Médio sem terem aprendido efetivamente o conceito de números racionais. Desse modo, nossa proposta pode ser utilizada como atividade complementar para preencher lacunas de aprendizagem de outros anos escolares, e, ainda avalizar a importância de se estudar matemática.

Alguns problemas encontrados

Em nosso trabalho podemos ressaltar uma tarefa que não foi aquilo que esperávamos. Apesar de termos citado Lopes (2008), em nosso trabalho, para de certo modo criticar, no ensino de frações a utilização de números grandes, e desconectados da realidade que atrapalhavam a aprendizagem dos alunos, fizemos algo parecido na tarefa 3, mesmo não percebendo isso à princípio. Apesar dos números grandes que utilizamos, referentes às frequências, fazerem parte do contexto, no momento da realização da atividade, essa informação não teve relevância alguma. O fato é que dificultou a aprendizagem. Apesar disso, talvez, em um outro momento, para ‘anos escolares’ mais avançados, julgo que a atividade seja mais interessante.

Novas possibilidades

Quanto a outras possibilidades, utilizando a conexão entre matemática e música...Diríamos que sim. É possível agregar mais tarefas, tanto no que se refere a outros conceitos matemáticos, como funções, ou progressões, por exemplo, que tivemos conhecimento ao realizarmos nossa revisão bibliográfica, ou no próprio aprofundamento de nossa própria proposta envolvendo os números racionais, com a inclusão de outras tecnologias e metodologias.

Quando da descrição das atividades realizadas em nosso trabalho, em que tivemos contato com alguns programas musicais para computador, como o o programa para escrita de partituras ‘Encore’, que tem versão gratuita para teste, acrescentando possibilidades interessantes em nossas tarefas, principalmente no referente à composição dos compassos com notas musicais. O programa exige que preenchamos com as notas musicais, que somadas contemplem o valor adequado do compasso, avisando se está faltando algum valor, e, não permitindo a inserção da figura musical que ultrapasse o valor adequado, contribuindo para maior experimentação, e descoberta de diversas soluções pelo aluno para um mesmo problema, fato muito presente nas situações do dia a dia, e cuja presença em situações de aprendizagem escolar são incentivadas pelos próprios documentos curriculares. A versão para teste permite essa possibilidade.

As próprias tarefas que apresentamos, podem ser aprofundadas, como por exemplo, a tarefa 4, que consideramos sem dúvida alguma, aquela que mais demonstra o quanto a conexão entre números racionais-semiótica-música traz de possibilidades para uma aprendizagem rica de significados, se ordenarmos os valores das razões referentes à escala no próprio registro fracionário comparando as frações através da redução das mesmas a um denominador comum. (Para alunos do 6º ano seria inviável devido a cálculos ainda mais difíceis que na tarefa 3).

Epílogo

‘Ao executarmos uma linda canção, solfejada por uma voz doce, afinada, repleta de sensibilidade e emoção passando ao ouvinte uma sensação de bem-estar e de encantamento, de repente percebemos o despertar de sorrisos e uma felicidade presente nas pessoas’.

O dom da arte! O poder que a música tem em influenciar povos desde a antiguidade até os dias de hoje. Como deixar de utilizar essa metodologia virtuosa em todos os campos da atividade humana?

A importância dessa arte, não pode ser nunca desprezada. Muito pelo contrário, se pudermos utilizá-la em beneficio também da aprendizagem no Ensino, poderemos ter resultados muito mais significativos e interessantes.

Se não conseguíssemos utilizá-la para ensinar matemática ou qualquer outra área de conhecimento, de nada valeria, mas felizmente isso não ocorre. A música com certeza se posiciona no aspecto educacional, como sendo muito mais do que uma simples ferramenta didática motivadora, mas sim como uma alternativa viável para possibilitar uma aprendizagem mais consistente e rica de significados.

> As experiências do uso da Música na Educação e no ensino de Matemática revogam a ideia de que esta seja uma simples ferramenta didática, denotando-a como uma amostra de contextualização no âmbito da Matemática. (DUARTE, SANTOS, 2014, p.63.)

Ao relacionarmos e conectarmos estas duas ciências, conseguimos através do poder que a música exerce em quase todas as pessoas, com suas melodias, harmonias e ritmos, promover maior interesse e encantamento do aluno com relação à aprendizagem da matemática, ao perceberem o quanto existe de matemática em música, e, o quanto ela pode contribuir com a aprendizagem no estudo de números racionais de modo efetivo, não sendo apenas objeto de inspiração e motivação, o que já seria algo relevante, principalmente nos dias de hoje, em que despertar o interesse do aluno já é algo desafiador, mas de forma efetiva.

8. REFERÊNCIAS

ABDOUNUR, Oscar João. **Matemática e música:** pensamento analógico na construção de significados. São Paulo: Escrituras, 2006.

BARNABÉ, Fernando Moreira. **A melodia das razões e proporções**: a música sob o olhar interdisciplinar do professor de matemática. 2011. 68f. Dissertação (Mestrado em Educação). São Paulo: Universidade Estadual de São Paulo, 2011.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais:** Matemática**.** Brasília: MEC/SEF, 1998. 148p.

CATTO, Glória Garrido. **Registros de representação e o número racional**: uma abordagem nos livros didáticos. 2000. 168f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2000.

COBELLO, Lucas Soares. **Letramento estatístico:** Análise e reflexões sobre as tarefas contidas no caderno do aluno e do professor do ensino médio. 2018. 132f. Dissertação (Mestrado Profissional). Sorocaba: Universidade Federal de São Carlos, 2018.

CRUZ, Antonio Messias Lopes. **Matemática e música**: compondo um cenário educacional com harmonia. 2013. 72f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Ilhéus: Universidade Estadual de Santa Cruz, 2013.

DEPIZOLI, Carlos Antônio. **Matemática e música e o ensino de funções trigonométricas.** 2015. 88f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Curitiba: Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2015.

DUARTE, Paulo César Xavier; SANTOS, Micaele Pereira. **Musicalizando o saber matemático uma proposta interdisciplinar.** 2014. 12f. Artigo. Nucleus, v.11, n.2, p.57-68.

DUVAL, Raymond. **Ver e ensinar a matemática de outra forma:** entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas. Organização Tânia M. M. Campos. Tradução Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, Raymond. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento.** Tradução de Méricles Thadeu Moretti. REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis, v.7, n.2, p.266-297, 2012.

DUVAL, Raymond. **Entrevista: Raymond Duval e a teoria dos registros de representação semiótica.** RPEM, Campo Mourão, Paraná, v.2, n.3, p.9-34, 2013.

JABLONSKI, Enilso. **Frações e Música:** ligações históricas e atividades didáticas. 2014. 140f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática). Blumenau: Universidade Regional de Blumenau, 2014.

LOPES, Antônio José. O que nossos alunos devem estar aprendendo sobre frações quando tentamos lhes ensinar sobre frações. **Bolema**, Rio Claro, ano 21, n. 31, 2008, p.1 - 22.

MAGINA, Sandra; CAMPOS, Tânia. As frações nas perspectivas do professor e do aluno dos dois primeiros ciclos do ensino fundamental. **Bolema**, Rio Claro, ano 21, n. 31, 2008, p.23 – 40.

OLIVEIRA, Ana Paula de Souza; SABBA, Cláudia Georgia. **Utilizando frações da música à matemática.** 2013. 8f. (VII CIBEM - Montevideo. Uruguai). Osasco: Universidade 9 de julho, 2013.

PEREIRA, Marcos do Carmo. **Matemática e música**: de Pitágoras aos dias de hoje. 2013. 95f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Rio de Janeiro: Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, 2013.

PILLÃO, Delma. **A pesquisa no âmbito das relações didáticas entre matemática e música:** estado da arte. 2009. 108p. Dissertação (Mestrado em Educação). São Paulo: Universidade de São Paulo, 2009.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo:** Matemática e suas tecnologias – Ensino Fundamental (Ciclo II) e Ensino Médio. Coordenação de área: Nilson José Machado. 1ª ed. atual. São Paulo, SEE, 2012. 72p.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Material de apoio ao Currículo do Estado de São Paulo - Caderno do Professor:** 6ª ano do Ensino Fundamental, Matemática. São Paulo: SEE, 2014-2017, v.1.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Material de apoio ao Currículo do Estado de São Paulo - Caderno do Aluno:** 6ª ano do Ensino Fundamental, Matemática. São Paulo: SEE, 2014-2017, v.1.

SANTOS JUNIOR, Ademir Medeiros. **A importância da música como instrumento motivador para as aulas de matemática**. 2015. 61f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Campo Grande: Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, 2015.

SANTOS-LUIZ, Carlos et al. **Matemática e música:** Sistematização de analogias entre conteúdos matemáticos e musicais. Revista Portuguesa de Educação, v.28, n.2, pp. 271-293, 2015.

SILVA, Marcelo Cordeiro da. **Reta graduada:** Um registro de representação dos números racionais. 2008. 121f. Dissertação (Mestrado profissional em ensino de matemática). São Paulo: Pontíficia Universidade Católica de São Paulo,2008.

TEIXEIRA, Alexandre Carlos da Silva. **Matemática na Música**: a escala cromática e as progressões geométricas. 2015. 78f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Catalão: Universidade Federal de Goiás, 2015.

VAZ, Leonardo José Leite da Rocha. **Música e Matemática:** novas tecnologias do ensino em uma experiência Interdisciplinar. 2006. 79f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Rio de Janeiro: Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, 2006.

ANEXO – Elementos de teoria musical

Além da matemática estar presente na elaboração de toda a estrutura musical, inclusive, na própria construção de instrumentos para sua execução, ela também pauta toda a sua escrita, com seus símbolos e linguagens próprias, sendo imprescindível a sua utilização para um sistema efetivo e consistente.

Como uma das maneiras de aplicarmos a música para o estudo da matemática em nosso trabalho está relacionado com a utilização da própria escrita musical, surge a necessidade de trazermos alguns conceitos de teoria. Embora não seja nossa pretensão oferecer conteúdo suficiente para uma formação musical completa, já que a mesma requer tempos de estudo, com certeza será de vital importância para que a compreensão de muitas tarefas propostas para a aprendizagem de números racionais pelos alunos do 6º ano do Ensino Fundamental seja obtida com êxito.

No subitem 2.1 desse capítulo já apresentamos relações históricas entre matemática e música e as descobertas envolvendo as razões envolvidas na estruturação musical, e até já antecipamos alguns conceitos da própria teoria, utilizando as notas musicais com seus respectivos nomes, para facilitar nosso entendimento sobre as descobertas históricas sobre razões e intervalos, e outros conceitos importantes como logaritmos, porém, não chegamos a definir claramente o que é música, e nem mesmo relacionar de modo mais aprofundado as notas musicais com suas referidas frequências, algo que faremos nessa alínea, já que não é interessante falar sobre teoria musical sem antes definir esses conceitos de modo mais abrangente.

Definição de música

Há várias definições para música, algumas mais concretas, como sendo a sucessão de eventos musicais, subordinadas a grandeza tempo, diferente de outras artes, como as plásticas, por exemplo, que podem ser medidas por metros quadrados, colocados num quadro em uma pintura, ou em metros cúbicos, numa escultura. Frases como ‘esse quadro não termina nunca’, ou ele só fica legal no ‘refrão’, não são encontradas em outras artes se comparadas com a música, que acabam por nos mostrar uma vez mais, todo o fascínio que a mesma proporciona a todos por estar condicionada ao tempo.

A música ainda apresenta definições desde a antiguidade, algumas relacionadas mais estreitamente com a matemática, como a de Rameau (1722): “A música é uma ciência que necessita possuir um estatuto definido. Suas regras devem ser extraídas de um princípio claro, inconcebível sem o auxílio da matemática.” (ABDOUNUR, 2006, p.1), ou a de Leibniz (1646-1716): “a música é um exercício oculto de aritmética de uma alma inconsciente que lida com números”. (PEREIRA, 2013, p.18), ou ainda, outras, mais relacionadas com os seus próprios componentes, como o significado interessante extraído de Oliveira e Sabba (2013) que traz o pensamento de que “a música é a arte de combinar os sons simultaneamente e sucessivamente, com ordem, equilíbrio e proporção dentro do tempo. Esta é composta de melodia harmonia e ritmo”. (OLIVEIRA; SABBA, 2013, p.6626).

Para nós, a música é ciência na medida em que seu conhecimento foi adquirido pelo seu estudo e desenvolvimento, sempre regidos e formulados pelas leis matemáticas com descobertas e ‘redescobertas’ através de experimentos e evoluções ao longo do tempo. E, é arte na medida em que consegue despertar emoções das mais diversas nas pessoas, podendo ser analisada como bela, como interessante, e até como ruim ou ‘descartável’, através do julgamento subjetivo ou até mesmo técnico, de quem a contempla. Também é ‘combustível’ que pode incentivar o ser humano no seu dia a dia nas suas mais diversificadas atividades, ou ser um remédio que acalma ou um estopim que inquieta a alma. Portanto, a música é a arte que encanta, e ao mesmo tempo é a ciência que traz conhecimento agregado em todas as suas propriedades e composições, sendo sua utilização pelas pessoas ilimitada

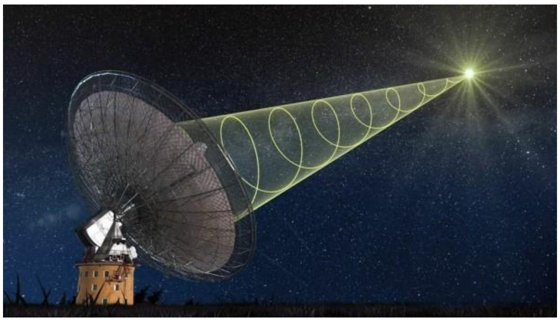
A definição trazida por Oliveira e Sabba (2013), nos oferece a oportunidade de aprofundarmos nossos conhecimentos, nesses componentes fundamentais que fazem parte da música: melodia, harmonia e ritmo.

Contudo, como salienta Vaz (2006), não é possível dissociar a ideia de música e algumas propriedades do som. Nosso trabalho não tem a pretensão de aprofundar conceitos físicos relacionados ao som, mas é interessante apresentar algumas noções.

Algumas Propriedades do som

As ondas sonoras são ondas mecânicas como as ondas eletromagnéticas, de rádio, ou até mesmo, das ondas do mar, que necessitam de um meio material, seja solido, líquido ou gasoso, para se propagar.

Figura 66: Gráfico de ondas sonoras de rádio



Fonte: http://www.revistagalileu.globo.com

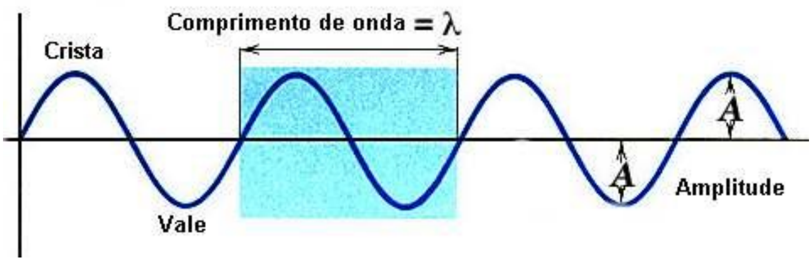
No caso das ondas sonoras presentes na música, elas se propagam pelas partículas do ar atingindo os nossos órgãos sensoriais, no caso a audição, trazendo inerentemente consigo, propriedades que interferem na forma como a reconhecemos.

Dentre essas propriedades, destacam-se, a amplitude que é o tamanho da onda, perpendicular em relação ao eixo de propagação horizontal, que por convenção é medido em metros, totalmente ligada a potência sonora. A velocidade com que o som se propaga depende de alguns fatores como pressão e temperatura, mas que em média equivale a 340m/s. O comprimento da onda está relacionado com o corpo da onda; e sua frequência, está relacionada com o que chamamos de altura musical.

O conceito de velocidade do som talvez seja o mais simples de identificar, pois é a velocidade com que o som chega aos nossos ouvidos. Se estivermos próximos ao local de execução do som, provavelmente nem perceberemos esse tempo, de tão rápido que é efetuado esse deslocamento, a 340 m/s. Já, se estivermos a mais de 500 metros da origem do som, em um show de algum cantor ou banda, por exemplo, de grandes proporções, se estivermos no fundo o som chegará com um pouco mais de 1 segundo de atraso até atingir os nossos órgãos sensoriais.

O comprimento de onda, que é relacionado ao eixo horizontal, é referente ao comprimento de onda, cuja representação gráfica é similar as existentes no estudo da função seno. No gráfico 1, temos o exemplo do que é comprimento de onda além da própria amplitude, e de apresentar a 'crista' que é a parte mais alta referente à onda e o 'vale' que se refere a parte mais baixa:

Gráfico 1: Onda sonora



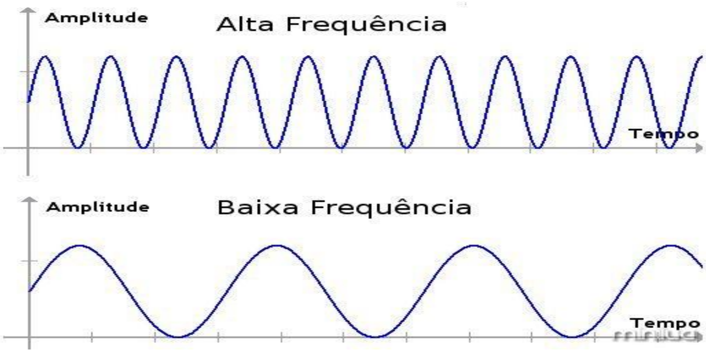
Fonte: http://www.guia.heu.nom.br/tipos_definicoes_ondas.htm

Talvez os conceitos que possam causar um pouco de confusão para o seu entendimento, sejam os de amplitude e frequência. O tamanho de onda que se refere a amplitude está ligada ao volume. Quando dizemos a um 'DJ' (Disc-Jockey) para aumentar o som, na realidade estamos nos referindo a essa amplitude, e, não a altura, sendo essas definições, diferentes.

Não importa se estamos trabalhando com uma voz pequena e aguda e outra grave e encorpada. O volume, simplesmente, é o aumento da amplitude dessas expressões vocais, que graficamente refere-se à coordenada y do plano cartesiano. Já quando falamos de frequência, estamos trabalhando com altura, e reflete-se graficamente ao eixo x do plano cartesiano. Uma voz aguda de mulher é mais 'alta', e, portanto, o comprimento da sua onda (gráfico 2) será menor do que a representação da voz de um homem. Não importa se o volume (amplitude) da voz do homem em questão seja mais amplo.

No gráfico 2 temos a representação de uma onda sonora referente a uma nota mais aguda que pode exemplificar uma voz de mulher, e, outra, mais grave, identificando a voz de um homem, por exemplo. A frequência mais aguda (mais alta) torna o comprimento da onda menor no sentido horizontal do eixo x, sendo inversamente proporcional, ou seja, quanto mais alta é a frequência, menor é o comprimento da onda. Porém, nesse caso, percebe-se que a amplitude referente ao eixo y é a mesma nos dois casos.

Gráfico 2: Ondas sonoras para frequências graves e agudas



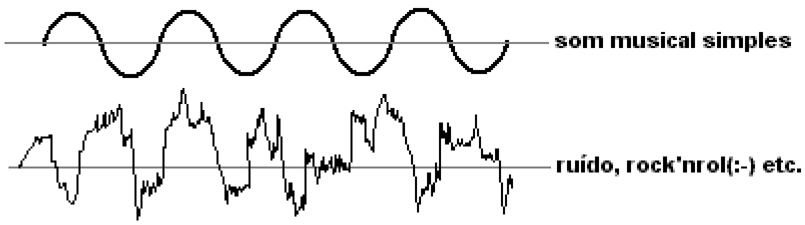
Fonte:https://anasoares1.wordpress.com/2011/01/31/som-e-caracteristicas-do-som-frequencia-amplitude-e-timbre/

Já definimos frequência nesse capítulo e, de modo geral, apresentamos que quando um som se propaga, suas ondas são identificáveis pela descompressão e compressão, aumentando e diminuindo. A quantidade de vezes em que uma onda sonora consegue repetir esse ciclo, em um determinado intervalo de tempo, é chamado de frequência. Foi convencionado que seria em ciclos por segundo, o qual damos o nome de Hertz (Hz), em homenagem ao alemão Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894) que fez grandes contribuições científicas na área do eletromagnetismo, e cuja unidade o ser humano consegue identificar frequências entre 20 Hz e 20000 Hz.

De modo mais prático, de acordo com Santos Junior (2015), se considerarmos nossos passos como uma frequência e se pudéssemos ouvir com clareza, poderíamos ter 1 passo por segundo, como frequência igual a 1, 2 passos por segundo, igual a 2, e assim por diante. Se pudéssemos ouvir 262 passos num segundo teríamos uma frequência de 262 Hertz, que é a unidade de medida em questão, que referente à música equivale a nota 'Do central' do piano.

Temos então que, além das vozes, todos os sons produzidos são identificados e definidos por frequências, sendo a diferença entre um som ruidoso e um som musical definido pela regularidade do som produzido, sendo os musicais caracterizados por sons harmoniosos, de acordo com a diferença estabelecida no gráfico 3.

Gráfico 3: Diferença entre som musical e ruidoso



Fonte: http://adaylikefaraday.blogspot.com/2012/09/

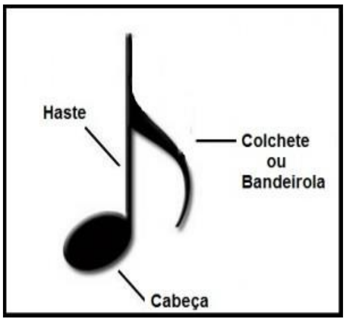
> O jogo entre som e ruído constitui a música. O som do mundo é ruído, o mundo se apresenta para nós a todo momento através de frequências irregulares e caóticas com as quais a música trabalha para extrair-lhes uma ordenação (ordenação que contém também margens de instabilidade, com certos padrões sonoros interferindo sobre outros). (JABLONSKI, 2014, p. 39).

Notação das notas musicais

As notas musicais são representadas na escrita musical por símbolos contendo essencialmente a cabeça, podendo ter hastes e colchetes. Existe diferença, entre notas que apresentam a haste ou não, e dentre aquelas que apresentam hastes, diferenciam-se as que apresentam colchetes, e na própria diferenciação da cabeça, podendo ser preenchida (pintada de preto), ou sem esse preenchimento.

Na “figura 67”, temos a notação de uma nota musical chamada colcheia, e nesse caso ela possui as três características citadas

Figura 67: Notação de uma nota musical



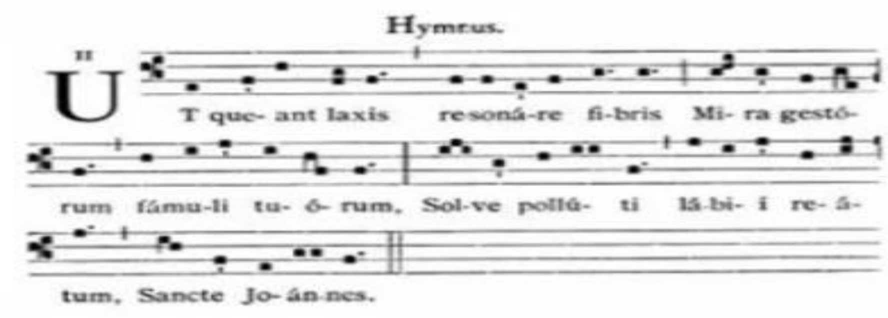
Fonte:https://essaseoutras.com.br/valores-das-notas-musicais-teoria-musical-para-iniciantes/

Essas diferenças estão intimamente ligadas com a Matemática e, particularmente, com os conceitos de números racionais, que trataremos no subitem 2.5. Cada nota musical é tida em uma frequência, mas não é apenas a frequência do som produzido. Imagine se lêssemos um texto inteiro de várias linhas numa determinada frequência, e depois outro texto também volumoso numa outra frequência mais aguda, sem, entretanto, definirmos uma nota musical. Seria um encadeamento de palavras, numa certa altura, mas que não seria conveniente pensarmos em uma nota musical dessa maneira. Precisaríamos de algo mais simples do que uma frase ou um texto inteiro.

Para solucionar esse problema, surgiu a ideia de utilizar apenas uma sílaba para identificação de uma nota musical, e foi instaurada pelo monge Guido Arezzo, que elaborou um esquema com a definição das notas musicais baseada nas silabas iniciais de um hino religioso, em latim, em louvor à São João Batista, cuja transcrição e a respectiva tradução segue: “**Ut** queant laxis /**Re**sonare fibris/ **Mi**ra gestorum/ **Fa**muli tuorum/ **Sol**ve polluti/ **La**bii reatum/**S**ancte **I**oannes (Para que teus servos possam ressoar claramente a maravilha dos teus feitos, limpe nossos lábios impuros ó São João.)” (TEIXEIRA, 2015, p.22).

A escrita musical deste fragmento do hino está representada na figura 68:

Figura 68: Partitura do Hino a São João Batista



Fonte:https://blogdacapoalfine.wordpress.com/tag/hino-a-sao-joao-batista/

Mais tarde, outro italiano, Giovanni Batista Donni, substituiu o ‘Ut’ encontrado no Hino, por ‘Do’, e após algumas transformações obtidas, inclusive com o acréscimo da nota ‘Si’, como abreviação de Sancte Loannes, no decorrer dos tempos, chegamos às notas musicais que conhecemos hoje.

Desse modo a correspondência entre as frequências com os nomes dados nos levaram as já conhecidas sete notas musicais. Do, Re, Mi, Fa, Sol, La e Si.

Antigamente não havia a correlação entre uma nota musical e uma determinada frequência. Existia como descrevemos; uma nota inicial e, a partir desta, os intervalos consonantes a estes eram obtidos. Porém, hoje é definido que a frequência de 440 Hz, equivalente a 440 ciclos por segundo, corresponde à nota ‘La central’, se pensarmos nas teclas de um piano. Desse modo, temos algumas frequências, referentes à oitava central de um piano, lembrando que na escala temperada, apenas as oitavas apresentam frequências puras, com as outras notas apresentando pequenas diferenças, não comprometendo a beleza e execução da música.

A tabela 11 apresenta valores aproximados de frequências das sete notas musicais calculadas a partir da nota ‘La central’, ou ‘La 4’. O numeral 4 refere-se à quarta oitava, se pensarmos nas teclas de um piano, partindo da oitava mais grave.

Tabela 11: Notas e frequências

Nota	Frequência (Hz)
Do	262
Do#	277
Re	294
Re#	311
Mi	330
Fa	349
Fa#	370
Sol	392
Sol#	415
La	440
La#	466
Si	494
Do	524
Do#	554
Re	588
Re#	622
Mi	659
Fa	698
Fa#	740
Sol	784

Fonte: Cálculos efetuados pelo autor

Se quiséssemos encontrar a frequência relativa a outra nota ‘La’ presente na quinta oitava, basta multiplicarmos por dois a frequência de 440 Hz e encontraríamos 880Hz, no qual o comprimento da onda seria à metade do anterior, porém a frequência seria equivalente ao dobro, e, portanto, mais alta. Já, se dividíssemos por 2, encontraríamos 220Hz, com a respectiva nota 'La 3', em que o comprimento da onda dobraria em relação a 'La 4', e a nota seria mais baixa ou grave.

Depizoli (2015), em sua pesquisa, apresentou alguns cálculos envolvendo a obtenção de algumas frequências, partindo da frequência universalmente definida de 440Hz para o 'La' que é comumente utilizada na afinação de instrumentos.

Como na escala temperada, a 'coma pitagórica' foi dividida igualmente entre as doze notas da escala, temos que "uma frequência qualquer será a frequência anterior multiplicada por uma constante q". (Depizoli, 2015, p.39).

Na obtenção da razão, Depizoli (2015) considerou duas notas iguais, porém com frequências na razão de 1:2, como por exemplo, a nota 'Do', e sua outra nota 'Do mais aguda'. A seguir temos a reprodução de seus cálculos:

Tabela 12: Cálculo de frequência da nota musical

Do1	Do#	Re	Re#	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La	La#	Si	Do2
F	q f	q^2f	q^3f	q^4f	q^5f	q^6f	q^7f	q^8f	q^9f	$q^{10}f$	$q^{11}f$	$q^{12}f$

Fonte: (Depizoli, 2015, p.39)

Como o 'Do mais agudo' tem o dobro da frequência do 'Do mais grave', podemos estabelecer a equivalência:

Do 2=2 Do 1

q^{12}f = 2 f

q^{12} = 2

q = $\sqrt[12]{2}$

q ≅ 1,0594.

O valor q ≅ 1,0594 já foi apresentamos quando obtivemos a razão através da interpolação geométrica, só que desta vez estamos utilizando esse conceito no cálculo das frequências e não apenas no cálculo das razões.

Desse modo, partindo da frequência de ‘La = 440 Hz’, se quisermos obter a frequência de quaisquer outras notas, basta aplicarmos as relações referentes à ‘tabela 5’ e a razão q≅1,0594. Por exemplo, para a nota ‘Do mais grave’ em relação ao ‘La’, temos:

La = q^9 f

440 = $(1{,}0594)^9$ f

$\frac{440}{1{,}6808}$ = f

f ≅ 261,7801

Se quisermos encontrar a frequência de ‘Do#’ basta multiplicarmos esse valor por 1,0594:

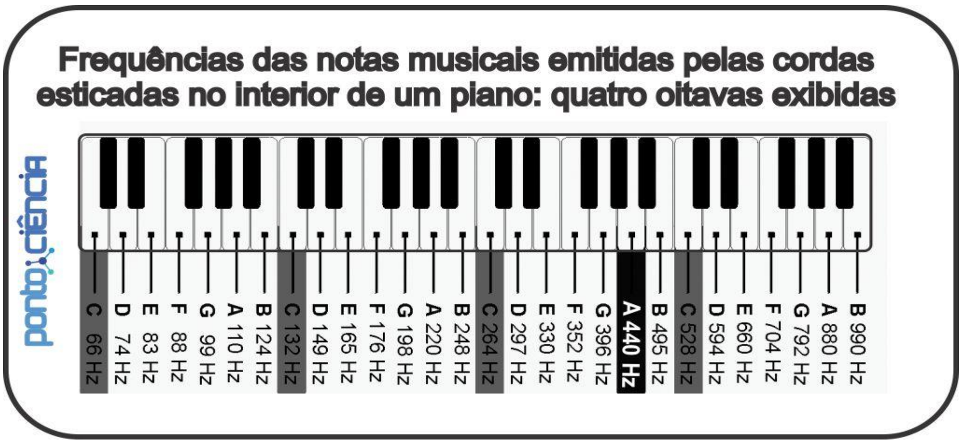
f = 261,7801 x 1,0594

f ≅ 277,3298

Com base neste procedimento, podemos encontrar todas as demais frequências.

A “figura 69” apresenta o desenho de um instrumento de teclas abrangendo 4 oitavas, sendo o primeiro Do (66 Hz), o chamado ‘Do2’, e suas respectivas frequências (aproximadas), denotados por siglas, com a Nota Do correspondendo a ‘C’, a Re a ‘D’, a Mi a ‘E’, Fa a ‘F’, Sol a ‘G’, La a ‘A’, e Si a ‘B’.

Figura 69: Notas e frequências



Fonte:http://pontociencia.org.br/galeria/?content%2FFisica%2FOptica%2FFrequencias+de+cordas+do+Piano.jpg

É importante novamente realçar, essa correspondência análoga que existe entre matemática e música. Temos a nota ‘Do’ representada pela letra ‘C’. Anteriormente, calculamos as notas através das razões referentes ao menor intervalo, na forma temperada, e aqui, estamos partindo das suas frequências, conseguindo encontrar novamente as mesmas notas.

O encadeamento das notas musicais, de inúmeras maneiras, com suas determinadas frequências e tempos, possibilita a criação de música. É interessante notar ainda que a diferença na duração dos tempos das notas de uma referida composição, já pode modificá-la por completo. Imaginemos uma música que apresenta o encadeamento de certas notas musicais, com seus respectivos intervalos, e, tempos de duração.

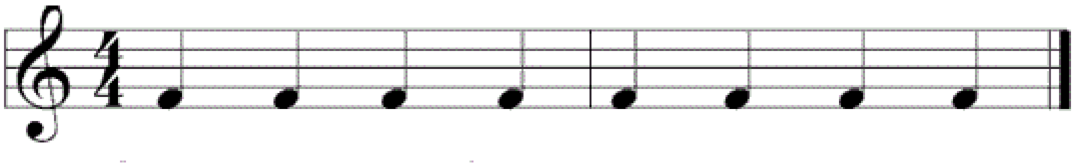
Se por acaso formos reescrevê-la utilizando as mesmas notas e intervalos da sequência anterior, se mudarmos apenas o tempo de duração das notas, podemos ter duas composições diferentes, e, por isso foi necessário um sistema que pudesse, além de escrever as notas e as relações intervalares entre elas, também determinar o tempo referente a duração das mesmas, e, foi o próprio Monge Guido Arezzo quem começou a instaurar uma maneira própria de transcrevê-las ao desenvolver a chamada partitura, que é um modo de escrever universalmente uma música, utilizando principalmente conceitos matemáticos, que com o tempo e adequações chegou à forma que conhecemos hoje em dia, e é utilizada no mundo todo.

Escrita musical: A partitura

A partitura é formada primeiramente por aquilo que se chama pauta. A pauta é formada por cinco linhas e 4 espaços entre eles, com barras verticais que a dividem nos chamados compassos e que são os locais, incluindo as linhas e espaços, em que são inseridas as notas musicais. No último compasso de uma música são desenhadas duas barras verticais indicando o fim da mesma. Além da pauta, compassos e notas, ainda temos as Claves que determinam a abrangência de notas referidas e as armaduras de claves indicando os acidentes (sustenidos ou bemóis) que serão utilizados para preservar a tonalidade escolhida.

Na “Figura 70”, temos uma partitura na clave de sol, cujas notas estão em um compasso $\frac{4}{4}$, numa armadura de clave sem acidentes, indicando a tonalidade de ‘Do’ maior natural.

Figura 70: Pauta num compasso de 4/4



Fonte: http://www.pensandomusica.com.br/2015/11/o-tempo-na-partitura.html

Claves

O primeiro símbolo que aparece na pauta, antes mesmo das próprias notas musicais são as Claves (figura 71), que vem do latim e significa ‘chave’, e tem a função de organizar as regiões referentes as notas com suas respectivas frequências, e localização que estão sendo contempladas.

Figura 71: Clave de sol

Fonte: Arquivo do pesquisador

No caso da Clave de Sol, ela é utilizada para representar as notas com sons mais agudos. Instrumentos como, flauta, guitarras, violão saxofone, trompete, vozes, fazem muito uso desta clave, pois suas notas se encontram nas regiões referentes a elas.

Existem outras claves que são a Clave de Fa, utilizada para notas mais graves provenientes de instrumentos como contrabaixo e violoncelo, e a Clave de Do para notas com som médio.

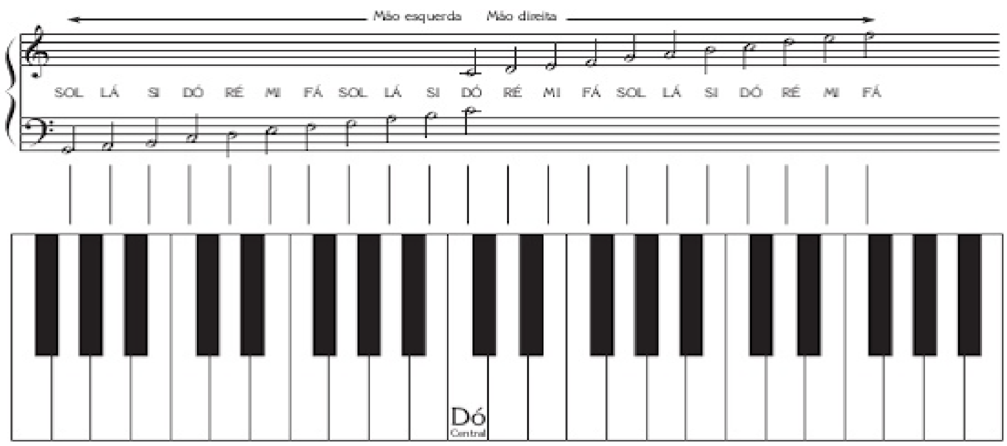
A clave de Do, no entanto, hoje é pouco utilizada, se restringindo praticamente a corais.

O violão, embora se apresente numa faixa de sons médios, utiliza a própria Clave de Sol em sua escrita, sendo anotada, uma oitava acima do real.

Já o piano, que abrange notas agudas e médias acaba utilizando tanto a Claves de Sol, quanto a de Fa. A utilização de várias Claves, se deve à possibilidade de abrangência de um número muito maior de notas referente à altura, o que não seria possível caso existisse apenas uma.

Observe o esquema abaixo (figura 72) referente a uma partitura de piano contendo duas pautas, a de cima, referente a Clave de Sol, e a de baixo, na chamada Clave de Fa, com os respectivos desenhos das notas e as posições em que elas ocupam na pauta.

Figura 72: Imagem das teclas do piano com suas respectivas notas musicais



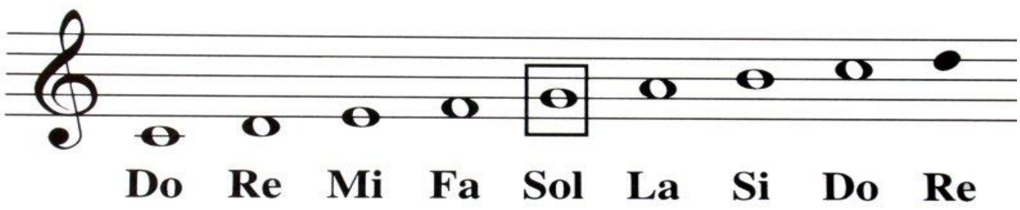
Fonte: http://cursodetecladoonline.com/wp-content/uploads/2017/02/

As posições em que se encontram as notas musicais como, por exemplo, na primeira linha, ou no segundo espaço, identificam qual nota está representada.

Mesmo com a repartição em Claves, a pauta não consegue incluir todas as notas contempladas por um determinado instrumento, então podemos acrescentar linhas suplementares tanto acima como abaixo da pauta.

Em nosso trabalho, nas tarefas para os alunos do 6º ano do Ensino fundamental, utilizamos apenas a Clave de Sol, e nela, a nota Do ocupa a primeira linha abaixo das linhas formadas pela pauta, enquanto que a nota Re ocupa o que seria o primeiro espaço entre essa linha auxiliar e a primeira linha da pauta (Figura 73). Assim, as notas vão se sucedendo, entre linhas e espaços de modo constante, da nota mais grave para a mais aguda na medida em que a nota vai ocupando cada vez lugares localizados mais acima na pauta.

Figura 73: Notas musicais e posições na pauta



Fonte: https://teoriamusicalemfoco.com.br/clave-de-sol/

No decorrer desse capítulo, até mesmo no item anterior, mesmo tendo reservado um espaço para discorrer sobre esses símbolos referente as notas musicais, já fomos obrigados instintivamente a utilizá-los, porém, sem tratá-los ainda de modo mais detalhado. Isso vai ao encontro com o trabalho de Vaz (2006), um dos autores presentes em nossa revisão bibliográfica, que incluiu em sua fundamentação teórica, o Ensino como Rede de Significados.

Certamente encontramos uma realidade na qual todo conhecimento encontra-se misturado. Dificilmente a realidade se apresenta de forma apenas linear, e a contextualização, que a meu modo de ver é imprescindível para uma aprendizagem eficaz, se depara todas as vezes com essa pluralidade conceitual rica e muitas vezes desafiadora.

Além dos símbolos utilizados para representar as próprias notas musicais, existem símbolos para representarem a sua ausência. Na execução de uma música se fazem necessários esses momentos, em que não existe a reprodução de som: são as chamadas pausas. Se pensarmos em um cantor executando uma música, existe a necessidade de o mesmo respirar, pausando o canto a fim de retomar sua execução, e, de mesmo modo, isso ocorre até em uma música instrumental.

A ausência de notas em determinados momentos torna-se um contraponto importante de modo a valorizar ainda mais a beleza de uma música, conforme Zarlino já orientara. E nesse sentido surgem os símbolos referentes a pausas que são opostos aos sons referentes à execução. Cada símbolo referente à execução de uma nota possui um símbolo referente ao silêncio pelo mesmo tempo da anterior. Na “figura 74” temos a quantidade de notas necessárias para preencher um compasso de $\frac{4}{4}$, com suas respectivas pausas. Uma nota semibreve equivale a quatro notas semínimas, por exemplo.

Figura 74: Figuras de notas musicais com os respectivos tempos de duração

Figura	Pausa	Nome	Valor
𝅝	𝄻	*Semibreve*	*1*
𝅗𝅥	𝄼	*Mínima*	*2*
𝅘𝅥	𝄽	*Semínima*	*4*
𝅘𝅥𝅮	𝄾	*Colcheia*	*8*
𝅘𝅥𝅯	𝄿	*Semicolcheia*	*16*
𝅘𝅥𝅰	𝅀	*Fusa*	*32*
𝅘𝅥𝅱	𝅁	*Semifusa*	*64*

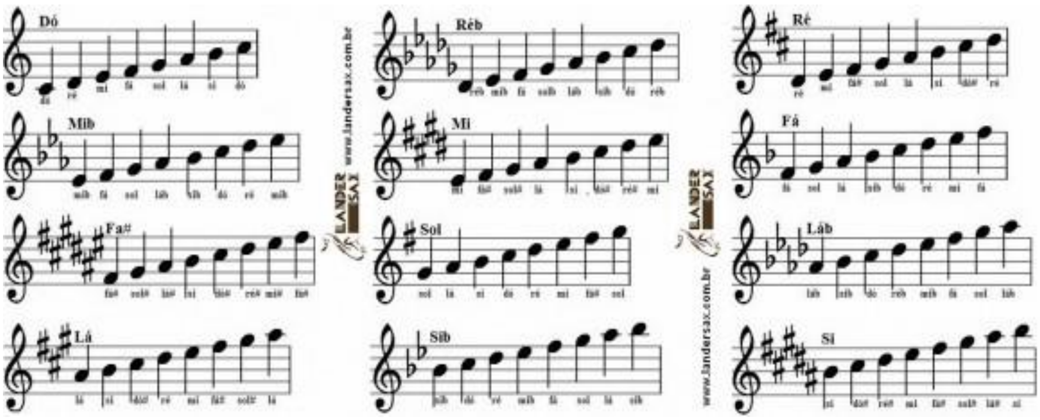
Fonte: http://www.pensandomusica.com.br/2015/11/o-tempo-na-partitura.html

Uma vez mais a música estreita laços com matemática, agora no conceito de oposto, ainda mais que toda figura de acordo com seu desenho representa uma duração em termos de tempo.

Armadura de Clave

Os próximos símbolos que aparecem na pauta, depois do símbolo representando a Clave, são os acidentes, formados pelos sustenidos ou bemóis, que servem para preservar os intervalos, referente a uma das 12 tonalidades. Eles se localizam ou na linha ou no espaço, alterando todas as notas que estiverem nessas linhas ou espaços condizentes a esses acidentes, fazendo com que as distâncias intervalares se mantenham as mesmas em qualquer uma das tonalidades escolhidas. Lembrando que numa escala maior; mantemos os intervalos: tom, tom, semitom, tom, tom, tom, semitom).

Figura 75: Armadura de claves nas doze tonalidades

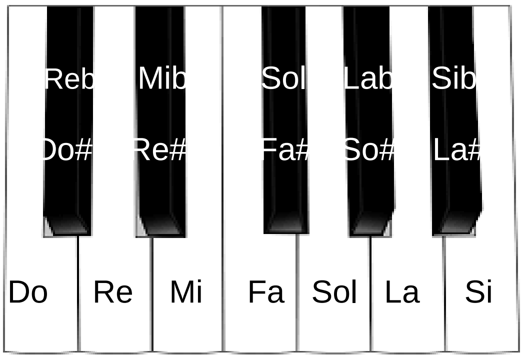


Fonte:https://juarezbarcellos.wordpress.com/2012/12/27/armadura-de-clave/

Observe que na tonalidade La bemol, por exemplo, indicada na “Figura 75”, as notas que serão modificadas são as notas la, si, re e mi. Ao invés de utilizarmos as teclas brancas se pensarmos nas teclas do piano, utilizamos as notas que estão localizadas meio tom abaixo dessas, e, portanto, utilizaremos teclas pretas, meio tom abaixo para La, Si, Re e Mi, mantendo-se as teclas brancas paras as outras três notas da escala: Do, Fa e Sol.

E, importante salientar também, que as notas: Do sustenido (Do#) e Re bemol (Reb), são equivalentes assim como Mi bemol e Re sustenido, entre outras, conforme mostra a “Figura 76”.

Figura 76: Equivalência entre notas



Fonte:https://www.escolavirtualdemusica.com.br/conhecendo-as-notas-musicais-no-teclado/

Essa formulação de escala nos oferece ao estudamos música, através do ciclo das quintas, uma progressão aritmética de razão 1 se considerarmos a quantidade de acidentes, na constituição das armaduras de Clave.

A escala diatônica de Do Maior não tem acidentes, a de Sol maior (que é a quinta de Do Maior) tem um (sustenido), a de Re maior (que é a quinta de Sol Maior) dois (sustenidos), a de La maior (que é a quinta de Re Maior), três, e assim por diante, conforme apresentado na Figura 26.

É curioso ainda notar que depois do Fa sustenido (F#), a próxima escala seria a de Do sustenido (C#) que teria 6 sustenidos, mas que é escrito de maneira diferente, com a utilização de bemóis(b), que ao invés de aumentar, decrescem meio tom. Ao invés de termos a escala de Do sustenido, chamamos a escala de Re bemol (Db), que de modo prático é a mesma coisa, com a clara intenção de facilitar a escrita e a leitura, mantendo no máximo cinco acidentes, se considerarmos tonalidades escritas com sustenidos ou com bemóis.

Tudo isso é possível, entretanto, devido ao temperamento da escala, que foi responsável por ajustes nos intervalos, caso contrário, seria totalmente inviável essas possibilidades já que ocorreria diferenciação entre o Fa sustenido e o Sol bemol, por exemplo, por terem frequências um pouco diferentes.

Compasso

O próximo símbolo que aparece na partitura é referente à fórmula de compasso, até já citada timidamente, reforçando uma vez mais, a importância do Ensino como Rede de significados, trazido a nós no trabalho de Vaz (2006).

Figura 77: Compasso de 4/4

Fonte:http://www.pensandomusica.com.br/2015/11/o-tempo-na-partitura.html

O compasso nada mais é do que o agrupamento do tempo em porções. Cada compasso da pauta é separado por travessões verticais (Um no decorrer da música ou dois no fim de um trecho ou na finalização da mesma).

Numa partitura temos a fórmula de compasso que é indicada no início da partitura por uma fração ordinária. Existe compasso simples e composto. Por exemplo, no compasso($\frac{3}{4}$), o 3 do numerador indica que cada compasso possui 3 tempos, enquanto que o 4 do denominador indica em quantas partes divide-se a semibreve para obter a figura que vale um tempo na música. Ao observarmos a "figura 77", percebemos que 1 nota semibreve é necessária para preencher um compasso inteiro de ($\frac{4}{4}$). Já se considerarmos uma colcheia são necessárias 8 dessas notas, ou seus referentes símbolos de pausa para completar 1 compasso de ($\frac{4}{4}$), ou ainda, 32 fusas, e, assim por diante.

Cruz (2013) salienta que embora alguns músicos 'torçam o nariz' para a fórmula de compasso ser expressa por uma fração, esse descontentamento não condiz com a realidade. Outra maneira de interpretarmos os tempos referentes aos símbolos das notas musicais é através da notação fracionária, conforme a "figura 78". Observe que a semibreve representa $\frac{4}{4}$. E a semínima representa $\frac{1}{4}$. Ou seja, pensando em um compasso de $\frac{4}{4}$, uma semibreve é suficiente. Já pensando na semínima são necessárias 4 notas.

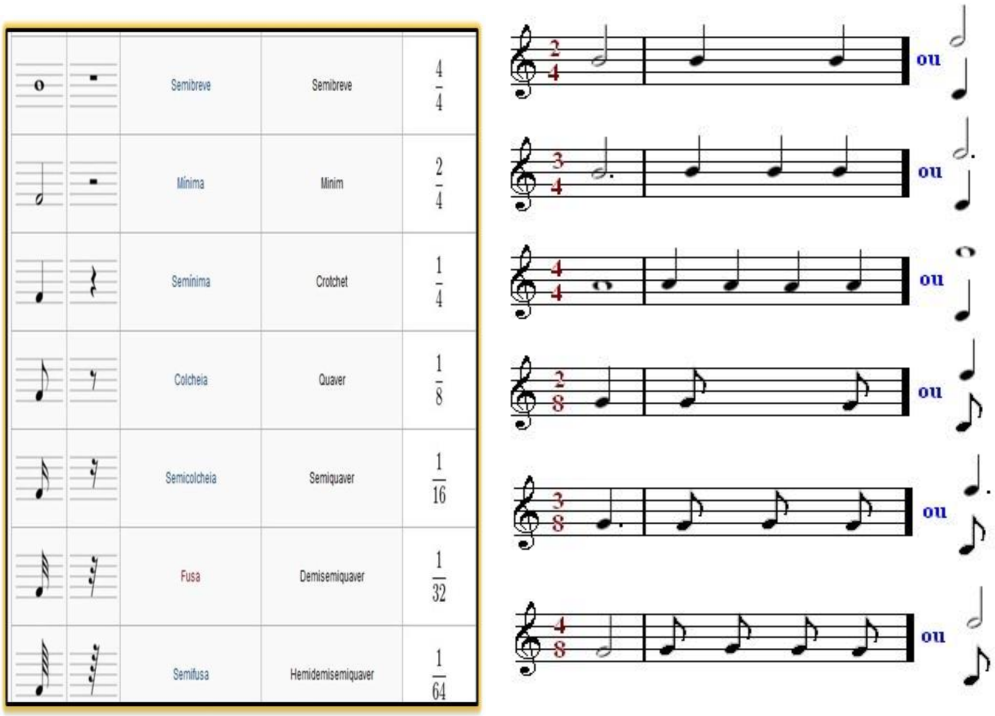
Perceba que $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4}$.

Ou ainda: $8 \times \frac{1}{8} = \frac{4}{4}$ (no caso são 8 colcheias)

Se pensássemos num compasso de $\frac{2}{4}$, duas semínimas seriam necessárias já que $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$

Agora, ao considerarmos um compasso, dito composto, como 3/8, teríamos que ter 3 colcheias pois $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$.

Figura 78: Valores de notas referente aos compassos



Fonte: http://www.pensandomusica.com.br/2015/11/o-tempo-na-partitura.html

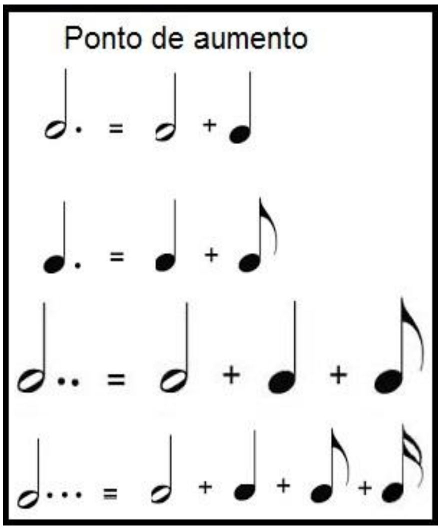
Ainda, na “Figura 78”, percebemos que cada pausa musical corresponde a uma nota, e cada nota corresponde a um determinado valor. Também observamos que cada nota, a partir da semibreve vai tendo metade do valor da anterior. Desse modo fica evidente a possibilidade de o estudo de frações ser feito através da música, pois todas as divisões de tempo que são utilizadas nas composições musicais são regidas por essas relações.

Ponto de aumento

Temos ainda que quando uma nota é seguida por um ponto (figura 79) à sua direita, a duração dessa nota aumenta em metade do seu valor. Assim uma semibreve pontuada passa de 4 para 6 tempos de duração.

Uma semínima passa de 1 tempo para $1 + \frac{1}{2}$,e assim por diante.

Figura 79: Ponto de aumento



Fonte: http://www.pensandomusica.com.br/2015/11/o-tempo-na-partitura.html

Elementos da música

Depois dessa breve descrição de como se estrutura a escrita de uma partitura iremos partir da tríade trazida por Oliveira e Sabba (2013), no início dessa alínea que apresentou a música definida como a junção entre melodia, harmonia e ritmo, e talvez, seja o melhor formato para entendermos plenamente o seu significado.

Ritmo

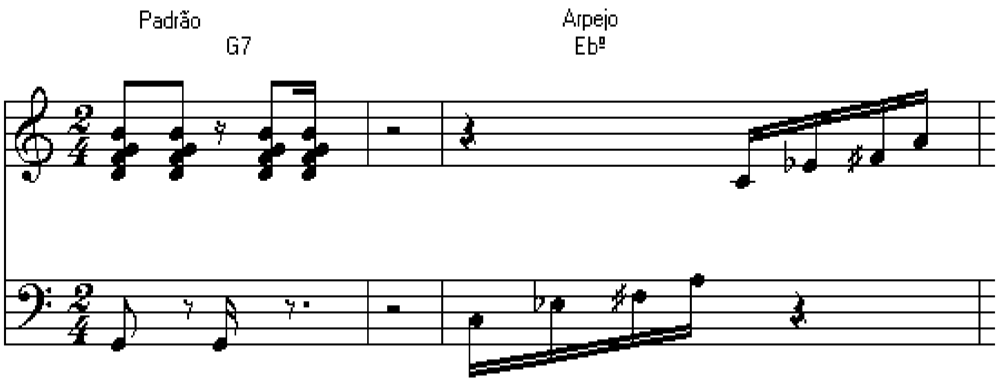
Primeiramente é importante entendermos que ritmo em música não é propriamente o estilo musical, seja ele rock ou sertanejo, ou outro qualquer, e nem mesmo, apenas uma sequência de notas, ou a velocidade com que é executada uma música.

A organização própria dos seus componentes em relação a uma organização temporal é o que define ritmo, sendo essa organização podendo ser feita em diferentes e contrastantes sessões: uma organização na chamada estrofe da música, mais intimista, e outra no refrão que normalmente é a parte que mais se repete e mais empolgante em uma música.

Ainda podemos considerar no ritmo a sucessão de eventos sonoros provenientes de notas com durações de tempo dos mais diversos, existindo uma lógica de organização temporal entre eles, ou seja, a percepção de uma ordem temporal, envolvendo a sequencialidade de eventos sonoros entre si e a duração de cada um deles, qualquer que seja, sendo mais curto, ou mais longo, etc.

Com base nisso podemos reestabelecer a definição de ritmo, como sendo uma determinada organização de eventos sonoros num intervalo de tempo, sendo que uma mesma sequência de notas organizadas diferentemente produzira diferenças no ritmo. Nas “figuras 80 e 81”, temos dois padrões diferentes de ritmos:

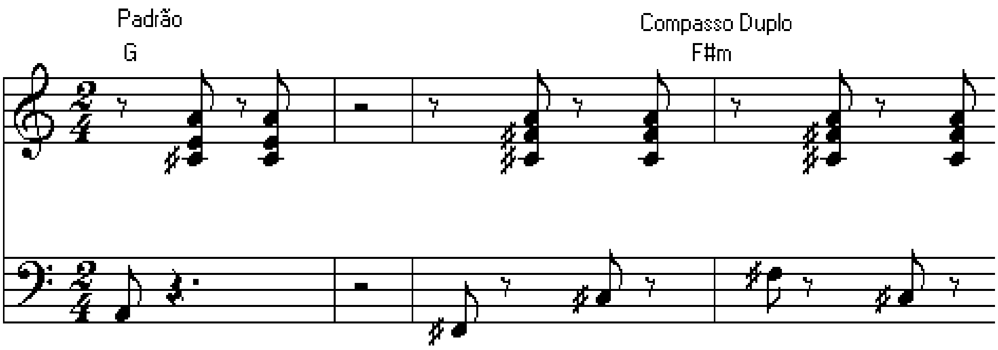
Figura 80: Ritmo de Bossa Nova



Fonte: https://www.cifras.com.br/tutorial.htm?cod=ritmos-em-partituras_7

Abaixo segue o ritmo de regaee descrito na partitura:

Figura 81: Ritmo de Regaae



Fonte: https://www.cifras.com.br/tutorial.htm?cod=ritmos-em-partituras_7

Ritmo não deve também ser confundido com pulsação (intervalos regulares), que se define como o clique de um relógio, sendo os ritmos inseridos nessa pulsação, e, também não ser confundido com o andamento, que deixa a música mais rápida ou mais lenta.

Um relógio pulsa em segundos. Se quisermos uma velocidade maior para a música, ao invés de ter 60 batidas em um minuto, precisamos ter 80, por exemplo.

Para seres humanos é difícil manter a pulsação, sendo mais fácil nas maquinas, próprias da música, no chamado metrônomo, que é um aparelho utilizado para marcar a pulsação de uma música, funcionando como um relógio, mas que podemos aumentar ou diminuir a sua velocidade.

Os teclados musicais modernos já vêm com esse dispositivo embutido neles, algo que facilita o estudo, pois embora seja mais difícil para um ser humano manter essa pulsação, através de muito estudo, pode-se obter um resultado bastante satisfatório.

As gravações em estúdio que são realizadas, e até em shows de grandes artistas brasileiros e mundiais sempre são realizadas com o uso do metrônomo, que são escutados apenas pelos músicos, através de um fone de ouvido, de modo que a música não sofra alterações de pulsação, não correndo o risco de ser executada mais rápida ou mais lenta em determinados momentos, comprometendo a qualidade.

Porém, em shows menores, sem tantas exigências, o uso do metrônomo normalmente é abolido, sendo possível analisar a excelência de um músico nesse quesito.

A pulsação também pode ser caracterizada por situações não necessariamente baseada em eventos sonoros como por exemplo, na frequência cardíaca, em que passos que andamos podem ser BPM.

Porém, a pulsação na música é utilizada o tempo todo, ajudando a criar essa organização ao dividir a pulsação em intervalos regulares, como um clicar dos ponteiros dos segundos de um relógio, ajudando a criação e manipulando dos sons nessa pulsação. Sons representando ½ de pulso, ¼ de pulso, entre ilimitadas formas são utilizadas. E, através dessa manipulação da duração dos sons e pulsos, a combinação dos sons de formas diferentes utilizando divisores temporais diferentes sem limitações oferece a possibilidade de diversos ritmos.

O compasso serve nesse caso, para reunir as pulsações em ciclos, sendo o princípio principal para essas organizações rítmicas.

Melodia

Primeiramente é importante salientar que a melodia não é a música, propriamente dita, embora seja confundida muitas vezes com a mesma, por ser talvez a parte mais reconhecida pela maioria das pessoas.

Melodia não é apenas a sucessão de eventos sonoros, distinguidos por suas diferentes frequências ou notas musicais, porque as melodias precisam de ritmos, e com eles contendo as notas musicais.

Já os ritmos não precisam de notas com suas frequências já que a execução de um batuque em uma bateria pode produzi-lo, por exemplo.

Para uma melodia ser construída, ou composta são necessários, além das notas musicais, os chamados intervalos, que já tratamos desde o item anterior desse capítulo, ao descrevemos a escala obtida por Pitágoras, a partir dos intervalos de quintas.

Se pensarmos nos intervalos medidos em frequências, o que é possível devido ao temperamento por igual, irá possibilitar que mantendo a mesma distância sonora entre ‘La’ e ‘mi’, e entre ‘Do’ e ‘Sol’, teremos relações equivalentes mesmo utilizando notas musicais diferentes.

Desse modo podemos dizer que Melodias são definidas por ritmos, e a sucessão organizada de eventos sonoros, caracterizados em diferentes intervalos, em que os eventos sonoros individuais são diferentes entre si pelos seus diferentes valores de frequências ou diferentes notas musicais.

O que permite reconhecer e apreciar como melodia, são os intervalos provenientes das razões matemáticas entre esses valores de frequência, que nos permite identificar distâncias sonoras entre as notas e relações musicais.

As melodias são caracterizadas então pelas proporções existentes entre as notas musicais, e não pelas notas musicais em si, possibilitando desse modo, a troca de notas, para outra tonalidade, continuando com a mesma melodia, desde que sejam mantidas essas mesmas proporções. É a possibilidade da transposição.

A transposição, que como já dissemos, só foi possível, com o temperamento, possibilita a execução adequada de uma música por um cantor que tem um registro de voz diferente de uma cantora, por exemplo.

Frases com: “em qual tom vai ser realizada a música: Em ‘D’ (Re) ou em ‘Bb’ (Si bemol)?”, são comumente usadas por músicos, para se adequar a tessitura vocal de um cantor, que é o conjunto de notas que ele consegue executar.

Temos como exemplo, uma música famosa dos anos 70 no Brasil chamada ‘Dancing Days’, que começa com ‘Abra suas asas, solte suas feras...’ executado pelas ‘Frenéticas’, em Si bemol (Bb) e que, posteriormente, foi regravada pelo cantor ‘Lulu Santos’, que a executa em Re (D) maior, alterando a tonalidade para ajustar a mudança da sua tessitura vocal.

Mas como funciona a transposição?

Primeiramente temos um ponto de referência: o tom original e sua nota fundamental que é a primeira nota referente a sua escala e que contém as outras como já esclarecemos ao falarmos de harmônicos na alínea anterior.

Imaginando uma melodia que utilize essas notas nessas frequências, partindo do ‘Do’ maior. Do(131hz), Sol (196 hz), Do (262hz), Re (147hz), Mi (165hz). Nesse caso não estamos considerando os tempos referentes as mesmas, pois não há necessidade nesse nosso exemplo.

Se quero efetuar a mesma melodia agora, em ‘La’, preciso manter os mesmos tempos considerados para as notas na tonalidade anterior e parto de um ponto de referência, no caso a nota tônica ou Do(131hz).

Nesse caso temos que calcular a razão entre as notas utilizadas nessa melodia referente à nota de referência; Calculo a razão entre as notas Sol, Fa, Re, Mi e Do mais aguda.

Considerando a frequência da nota Sol com 196hz e dividindo pela frequência de Do (131hz) encontramos a razão 1,5. Tomando a frequência da nota Fa (175hz), e, dividido por 131 obtemos a razão 1,33.

Desse modo obtemos a razão entre as frequências da nota Do relacionada a cada uma das frequências das notas que compõe a música, conforme mostra a Tabela 13:

Tabela 13: Razões entre intervalos

Divisões	Razões
Sol/Do	1,5
Do2/Do1	2
Fa/Do1	1,33
Re/Do1	1,12
Mi/Do1	1,26

Fonte: cálculos efetuados pelo autor

Para transpormos essa mesma melodia para La(220Hz), multiplicamos as razões encontradas pela frequência 220Hz que é a de nosso novo referencial, a nota La.

Desse modo, a nota em substituição à nota Sol nessa nova tonalidade, é encontrada multiplicando por 1,5, o valor referente a nota La(220Hz) obtendo 330Hz que corresponde a nota Mi2, e assim por diante, obtendo as notas descritas na Tabela 14 abaixo:

Tabela 14: Frequências após transposição

Multiplicando	Novas frequências
220 x 1,5	Mi2(330Hz)
220 x 2	La 2 (440Hz)
220x 1,33	Re2 (293Hz)
220 x 1,12	Si (247 Hz)
220 x 1,26	Do# (277Hz)

Fonte: cálculos efetuados pelo autor

Mas isso significa que para transpor de uma tonalidade para outra terei que calcular razões matemáticas o tempo todo?

A resposta é não! Felizmente com o temperamento não é necessário. Basta considerarmos a menor unidade entre intervalo de duas notas, que é o semitom, e contar quantos semitons são necessários para um intervalo considerado. Até mesmo esses cálculos que fizemos acima, se fossem necessários, poderíamos utilizar a razão q=1,0594 e de acordo com a distância de semitons existentes entre uma nota e outra, realizaríamos de modo mais fácil o cálculo.

De Do a Sol temos 7 semitons. Bastava multiplicarmos então 220 por $1{,}0594^7$ = 330Hz.

Porém, nem precisamos mais falar de razões referentes aos intervalos. Podemos apenas contar quantos semitons equivale a um intervalo musical, para transpormos uma melodia para outra tonalidade, obtendo dessa forma a correspondência com o tom referido.

Harmonia

De modo geral, podemos dizer que harmonia é o encontro entre os conceitos de acorde e melodia (sequência temporal de notas musicais).

O ‘acorde’, como já descrevermos na alínea anterior desse capítulo ao trazermos o conceito de ‘tríade’ trazido por Merssene, nada mais é do que um agrupamento de notas musicais, executadas simultaneamente. Com as notas Do, Mi e Sol, temos um acorde de Do maior, por exemplo.

Quando temos um encadeamento de diferentes acordes em uma sequência temporal, a reunião de todos eles utilizados em uma música nos oferece o conceito do que é harmonia, e que através dessa sequência ajuda a preencher a própria melodia.

Posso até executar uma música sem um único acorde, mas faltará aquela estrutura que a enriquece, e muitas vezes é responsável pela sua beleza até mais do que a própria melodia.

A Bossa Nova no Brasil utilizou-se sempre de uma harmonia complexa e elegante oferecendo um contexto musical mais vasto, desafiador e sonoramente muito mais ‘fino’ com a utilização de mais frequências, mais sons densos e com isso, maiores sensações de movimento.

Comparando melodia e harmonia

Comparando com o universo do cinema uma vez mais nesse nosso trabalho, a melodia é tida como uma personagem protagonista, aquela que mais se sobressai, enquanto que a harmonia é tida como se fosse um cenário.

Num filme, o cenário ajuda a contar a história, pois ninguém nunca imaginou um filme de Guerra, num cenário retratando uma praia paradisíaca com pessoas se banhando em um ambiente tranquilo.

As mudanças no cenário podem mudar drasticamente como percebemos a fala dos personagens, e, de modo análogo, a harmonia se coloca dessa forma em relação à melodia, sendo responsável por criar um ambiente favorável para o seu aparecimento, interagindo-se uma em percepção da outra.

Mais algumas considerações sobre música

Ainda poderíamos trazer muitas outras características e propriedades da música, incluindo as mais diversas escalas existentes, relacionadas com o que se espera de uma música, porém, acreditamos que o que trouxemos até aqui seja suficiente para avalizar o quanto essa arte é importante na vida das pessoas e o quanto está relacionada com o ensino da matemática, possibilitando diversas maneiras de oferecermos aos nossos alunos, um ensino mais consistente de significado e relevância.