

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas – PPGECE

DIOGO COMIN VIEIRA

O USO DA GEOMETRIA FRACTAL COMO FERRAMENTA NO  
ENSINO DE PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS E LOGARITMOS

São Carlos

2019

DIOGO COMIN VIEIRA

# O USO DA GEOMETRIA FRACTAL COMO FERRAMENTA NO ENSINO DE PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS E LOGARITMOS

Trabalho apresentado ao Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências Exatas - PPGECE do Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos, como requisito para a obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências Exatas

SÃO CARLOS

2019

Vieira, Diogo Comin

O uso da geometria fractal como ferramenta no ensino de progressões geométricas e logaritmos / Diogo Comin Vieira. -- 2019.

90 f. : 30 cm.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal de São Carlos, campus São Carlos, São Carlos

Orientador: Prof. Dr. José Antonio Salvador

Banca examinadora: Prof. Dr. José Antonio Salvador, Prof. Dr. Paulo Leandro Dattori da Silva, Prof. Dr. João Carlos Vieira Sampaio

Bibliografia

1. Geometria Fractal. 2. Ensino de Progressões Geométricas. 3. Ensino de Logaritmos. I. Orientador. II. Universidade Federal de São Carlos. III. Título.

Ficha catalográfica elaborada pelo Programa de Geração Automática da Secretaria Geral de Informática (SIn).

DADOS FORNECIDOS PELO(A) AUTOR(A)

Bibliotecário(a) Responsável: Ronildo Santos Prado – CRB/8 7325



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**  
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

---

**Folha de Aprovação**

---

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Diogo Comin Vieira, realizada em 22/03/2019:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. José Antonio Salvador  
UFSCar

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Paulo Leandro Dattori da Silva  
USP

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. João Carlos Vieira Sampaio  
UFSCar

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus.

Aos meus pais David Samuel e Maria Aparecida, que sempre me incentivaram e proporcionaram condições para que eu pudesse estudar.

Aos meus avós Samuel e Maria, que desde cedo me instigaram a curiosidade e a vontade de aprender.

Ao meu orientador Prof. Dr. José Antonio Salvador, por todo o auxílio durante o desenvolvimento desse trabalho.

Aos meus professores da Universidade Federal de São Carlos, que deram a base necessária para chegar até aqui.

## RESUMO

Esta dissertação é um estudo que busca inserir a Geometria Fractal como ferramenta no ensino de Progressões Geométricas e Logaritmos no ensino médio, mais precisamente no 1º ano, porém as atividades apresentadas abrem possibilidade de aplicação em diversos segmentos do ensino da matemática. O objetivo do trabalho é fornecer embasamento teórico e uma sequência didática que abrange diversos níveis de domínio dos conteúdos, para que professores possam trabalhar a geometria fractal como agente motivador no ensino e aprofundamento de conceitos estudados em sala de aula, abrindo também a possibilidade para a abordagem de temas como limites e convergência de sequências, ainda que de forma intuitiva. A aplicação dessa sequência didática em sala de aula se inicia com o recorte de cartões fractais, que é uma atividade lúdica e divertida, passa pela relação de fractais com os assuntos estudados no ensino médio, até o desenvolvimento de fórmulas gerais e a exigência de um certo domínio algébrico, terminando em uma aplicação interessante das propriedades logarítmicas.

Palavras-chave: Ensino de Matemática, Geometria Fractal, Progressões, Logaritmos

## ABSTRACT

This essay is a study that seeks to introduce Fractal Geometry as a tool in Geometric Progressions and Logarithms teaching in high school, more precisely in the 1st (first) year, but the presented activities unfold a possibility of application in several Math teaching segments. The goal of this work is to provide theoretical basis and a didactical sequence that reaches several levels of contents mastery, so teachers may work the Fractal Geometry as a motivator agent at teaching and deepening the concepts that were studied in the classroom, also opening the possibility for an approach of themes such as Limits and Convergence of Sequence, even in an intuitive way. This didactical sequence application in the classroom starts with Fractal Cards cutting out, which is a playful (ludic) and funny activity, goes through the relations between Fractal and the subjects studied in high school, up until the development of general formulas and the demand of a certain algebraic mastery, ending in an interesting application of Logarithmic properties.

Key-words: Math and Fractal Geometry teaching; Progressions; Logarithms.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Fractais .....	17
Figura 2: Benoit Mandelbrot .....	18
Figura 3: Conjunto de Cantor .....	18
Figura 4: Ilha de Koch .....	19
Figura 5: Exemplos de Fractais .....	21
Figura 6: Autossemelhança exata .....	21
Figura 7: Autossemelhança aproximada .....	22
Figura 8: Curva de Koch .....	22
Figura 9: Árvore Pitagórica .....	23
Figura 10: Samambaia de Barnsley .....	24
Figura 11: Conjunto de Cantor .....	24
Figura 12: Georg Cantor .....	25
Figura 13: Curva de Koch .....	26
Figura 14: Iterações da Curva de Koch .....	27
Figura 15: Niels Fabian Helge von Koch .....	27
Figura 16: Primeiras iterações do Triângulo de Sierpinski .....	28
Figura 17: Tapete de Sierpinski .....	30
Figura 18: Waclaw Sierpinski .....	30
Figura 19: Quadrado .....	31
Figura 20: Divisão do quadrado .....	31
Figura 21: Primeira iteração da curva de Hilbert .....	31
Figura 22: Segunda iteração da curva de Hilbert .....	31
Figura 23: Iterações da curva de Hilbert .....	32
Figura 24: David Hilbert .....	33
Figura 25: Giuseppe Peano .....	33
Figura 26: Segmento de reta .....	33
Figura 27: Segmento dividido em 3 partes .....	33
Figura 28: Primeira iteração da curva de Peano .....	34
Figura 29: Iterações da curva de Peano .....	34
Figura 30: Conjunto de Julia com $P(z) = z^2 - 0,8 + 0,156i$ .....	35
Figura 31: Gaston Maurice Julia .....	36
Figura 32: Conjunto de Mandelbrot .....	37
Figura 33: Fractais na Natureza .....	39
Figura 34: Brócolis .....	39
Figura 35: Raios .....	39
Figura 36: Linha costeira cada vez mais refinada com unidades de medidas menores .....	40
Figura 37: Ilustração da dimensão fractal 1 .....	41
Figura 38: Ilustração da dimensão fractal 2 .....	41
Figura 39: Ilustração da dimensão fractal 3 .....	42
Figura 40: Curva de Koch .....	43
Figura 41: Comportamento da função $(1/10)^n$ .....	46
Figura 42: h: Altura do triângulo equilátero .....	50
Figura 43: Altura do triângulo equilátero de lado 1 .....	50

Figura 44: Fractais e padrões.....	52
Figura 45: Construção do primeiro cartão fractal.....	53
Figura 46: Construção do primeiro cartão fractal.....	53
Figura 47: Construção do primeiro cartão fractal.....	54
Figura 48: Terceira iteração do cartão fractal.....	54
Figura 49: Cartão fractal aberto.....	55
Figura 50: Cartão fractal já montado.....	55
Figura 51: Medidas das arestas do paralelepípedo.....	56
Figura 52: Construção do segundo cartão fractal.....	60
Figura 53: Primeira iteração do cartão fractal.....	61
Figura 54: Três primeiras iterações do cartão fractal.....	61
Figura 55: Cartão após dobrar as partes cortadas.....	61
Figura 56: Segundo cartão fractal pronto.....	62
Figura 57: Medidas das arestas dos paralelepípedos.....	62
Figura 58: Iterações do triângulo de Sierpinski.....	66
Figura 59: Segmento de Reta.....	71
Figura 60: Quadrado.....	71
Figura 61: Cubo.....	71
Figura 62: Divisão da reta.....	72
Figura 63: Divisão do quadrado.....	72
Figura 64: Divisão do cubo.....	72
Figura 65: Triângulo de Sierpinski.....	73
Figura 66: Curva de Koch.....	75
Figura 67: Conjunto de Cantor.....	76
Figura 68: Curva de Peano.....	77
Figura 69: Curva de Hilbert.....	78

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Área retirada do Triângulo de Sierpinski.....	29
Tabela 2: Número de iterações x paralelepípedos aparentes.....	57
Tabela 3: Número de iterações x paralelepípedos aparentes.....	58
Tabela 4: Dados do triângulo de Sierpinski .....	67
Tabela 5: Dados do triângulo de Sierpinski .....	68
Tabela 6: Dimensões.....	73
Tabela 7: Dimensão e fator de aumento.....	73
Tabela 8: Quantidade de triângulos restantes .....	74
Tabela 9: Curva de Koch.....	75
Tabela 10: Número de segmentos no Conjunto de Cantor.....	76

## SUMÁRIO

1. Introdução .....	14
2. Trajetória acadêmica e escolha da sala para aplicação da atividade .....	16
3. Noção intuitiva dos fractais .....	17
3.1 Um pouco da história dos fractais .....	17
4. Os Fractais .....	20
4.1 Autossemelhança.....	21
4.2 Dimensão de um fractal.....	22
4.3 O Conjunto de Cantor.....	24
4.4 A Curva de Koch.....	26
4.5 Floco de Neve de Koch .....	27
4.6 Triângulo de Sierpinski .....	28
4.7 O Tapete de Sierpinski .....	29
4.8 Curva de Hilbert.....	31
4.9 Curva de Peano .....	33
4.10 O Conjunto de Julia .....	35
4.11 O conjunto de Mandelbrot .....	36
5. Os fractais na natureza.....	38

6. O conceito de dimensão.....	40
6.1 Dimensão Fractal.....	40
7. Trabalhando com os Fractais em sala de aula.....	44
7.1 Pré Requisitos .....	44
7.2 Sequências.....	43
7.3 Progressões Geométricas .....	44
7.4 Logaritmos.....	47
7.5 Área do triângulo equilátero .....	49
7.6 O início das atividades.....	51
7.7 Primeiro Cartão Fractal .....	52
7.8 Questões sobre o primeiro Cartão Fractal .....	56
7.9 Resolução comentada pelo professor .....	57
7.10 Reação dos alunos .....	59
7.11 Segundo Cartão Fractal.....	60
7.12 Questões propostas sobre o segundo cartão fractal .....	62
7.13 Respostas comentadas pelo professor.....	63
7.14 Reação dos alunos ao segundo cartão fractal.....	65
7.15 O Triângulo de Sierpinski na sala de aula .....	65

7.16 Questões sobre o triângulo de Sierpinski.....	66
7.17 Resolução comentada pelo professor .....	67
7.18 Usando Logaritmos para determinar a dimensão fractal .....	70
7.19 Logaritmos e dimensão Fractal .....	71
7.20 Dimensão do Triângulo de Sierpinski .....	73
7.21 Dimensão da curva de Koch .....	74
7.22 Dimensão do Conjunto de Cantor .....	76
7.23 Dimensão da curva de Peano .....	77
7.24 Dimensão da curva de Hilbert.....	78
8. Conclusão.....	79
8.1 Experiência dos alunos .....	79
8.2 Experiência como professor.....	79
Bibliografia.....	81
Anexos: Lista de atividades .....	77

## 1. Introdução

Os resultados do Brasil no último Programa de Avaliação dos Estudantes (PISA, sigla em inglês) realizado em 2015, evidenciam a situação delicada que vive a educação brasileira, especialmente quando se trata do sistema Público de Ensino. A prova é aplicada em 70 países, sendo a classificação geral do Brasil 63º, e na área de matemática, o resultado é ainda pior, deixando o Brasil em 66º (Fonte: <https://g1.globo.com/educacao/noticia/brasil-cai-em-ranking-mundial-de-educacao-em-ciencias-leitura-e-matematica.ghtml>). O PISA avalia os estudantes na área de matemática com uma escala de 1 a 6, sendo considerado o nível 2 como o básico para “a aprendizagem e a participação plena na vida social, econômica e cívica das sociedades modernas em um mundo globalizado”, no Brasil 70,25% dos alunos ficaram abaixo do nível 2, um resultado extremamente preocupante, que nos faz pensar sobre quais são motivos que levam a isso, e quais seriam as possíveis soluções.

Alguns dos principais problemas apontados por diversas pesquisas, e profissionais da área são a falta de estrutura física nas escolas, como prédios e carteiras depredados, má remuneração dos profissionais da educação básica, professores com formação abaixo do esperado, falta de atividades diferenciadas e com didática que leve o aluno a desenvolver o raciocínio lógico, grade curricular distante da realidade do aluno, estudantes que trabalham no período contrário ao da escola e dedicam pouco tempo aos estudos, e muitos outros problemas com certeza ainda poderiam ser citados. É fácil perceber o quanto esse assunto é extenso e complexo. Dentro desse contexto este trabalho busca oferecer uma contribuição para a melhoria do ensino de matemática ao apresentar e conectar temas da matemática unindo a teoria e a prática, de forma que o estudo se torne mais significativo para o aluno.

Sabemos que o estudo de matemática no ensino básico muitas vezes se mostra um grande desafio, hora por falta de aplicações práticas para muitos conceitos estudados, hora pelo alto grau de conhecimentos exigido, o que pode desmotivar os alunos. Este trabalho apresenta uma sequência didática com atividades práticas buscando proporcionar condições para que o estudante desenvolva o raciocínio lógico e algébrico ao inserir no ensino básico o estudo da geometria fractal de forma que a mesma se ligue a outros conteúdos estudados nesse nível, explorando diversos níveis de exigência de domínio matemático, e buscando através de conceitos básicos da geometria fractal não apenas instigar a curiosidade do aluno, mas também

auxiliar na descoberta de padrões no ensino e aprendizagem de progressões geométricas e logaritmos no 1º ano do ensino médio. Conceitos como limite e convergência serão abordados de forma intuitiva, e diretamente relacionados com as progressões geométricas, buscando aumentar a curiosidade investigativa do aluno no estudo dessas progressões.

O trabalho está dividido da seguinte forma: O capítulo 1 apresenta uma breve introdução do que será feito, e uma breve abordagem a respeito da educação básica brasileira. O capítulo 2 contém um pequeno resumo de minha trajetória acadêmica. O capítulo 3 apresenta uma visão intuitiva do que são fractais, e conta uma breve história de como se desenvolveu essa teoria, ao mesmo tempo que mostra os principais matemáticos envolvidos em seu desenvolvimento. O capítulo 4 aborda as principais características dos fractais usando como exemplo alguns dos fractais mais conhecidos e apresentando os matemáticos responsáveis pelos mesmos. O capítulo 5 associa os fractais com a natureza, e mostra que diversas estruturas encontradas em nosso mundo se aproximam muito dos fractais. O capítulo 6 trata do conceito de dimensão, e da necessidade de ser definida uma forma de calcular dimensão com números fracionários, no capítulo 7 é apresentada uma sequência didática no intuito de inserir o ensino de geometria fractal no ensino médio, de forma que possa ser usada como ferramenta no ensino de progressões geométricas e logaritmos. Por fim o capítulo 8 apresenta as conclusões a respeito da aplicação desse trabalho em uma sala de aula.

## **2. Trajetória acadêmica e escolha da sala para aplicação da atividade**

Atuo como professor na rede básica de ensino há 11 anos, trabalhando o tempo todo como professor da rede pública do estado de São Paulo, e durante a maior parte desses anos, dividindo meu tempo com escolas de sistemas de ensino como COC, Pueri Domus e SESI.

Usando das experiências que tive durante esses anos, e consultando tanto a grade curricular, como os livros didáticos e apostilas utilizados nessas escolas pude encontrar a melhor série e o melhor bimestre para inserir o assunto geometria fractal, de forma que se encaixasse nos outros conteúdos estudados, o momento propício encontrado foi o final do 2º bimestre do 1º ano do Ensino Médio, em que seguindo a grade curricular, os alunos já têm todos os pré requisitos para a realização das atividades, e estarão estudando assuntos que se encaixam muito bem com os fractais

Assim, para o desenvolvimento das atividades foi escolhida uma classe do 1º ano do Ensino Médio da Escola Estadual Prefeito Caetano Munhoz na cidade de Itapira-SP. Essa classe como a grande maioria das salas de aula do ensino básico apresenta um público heterogêneo em relação ao nível de domínio dos conteúdos das diversas disciplinas, tendo alunos com os mais diferentes níveis de compreensão da matemática, o que possibilita uma boa análise da influência das atividades apresentadas sobre a aprendizagem de progressões geométricas e logaritmos usando a geometria fractal como ferramenta de ensino

### 3. Noção intuitiva dos fractais

De maneira informal, podemos definir fractais como estruturas que apresentam irregularidades e fragmentação em uma faixa de escala muito ampla, aparentemente infinita, como as encontradas em tecidos animais e vegetais.

São figuras em que cada pequena parte se assemelha ao todo, como podemos ver nos exemplos abaixo.



Árvore Pitagórica

Conjunto de Juliá

Folha de Samambaia

Figura 1: Fractais (Fonte: <https://ru.depositphotos.com/142286212/stock-photo-green-leaf-texture-fern-on.html>)

#### 3.1 Um pouco da história dos fractais

A primeira publicação da teoria dos fractais data de 1975 de autoria do matemático Benoit Mandelbrot. Podemos dizer informalmente que um fractal é uma forma cujas partes são réplicas do todo sob algum aspecto, porém com menor tamanho.

Benoit Mandelbrot nasceu de família judia, na Polônia em 1924. Em 1936 mudou-se com sua família para Paris, onde iniciou sua carreira acadêmica como matemático. Posteriormente nos Estados Unidos, trabalhou para a IBM em Nova Iorque, e lá com a ajuda dos mais potentes computadores da época, pode desenvolver as imagens detalhadas de fractais.

Mandelbrot é conhecido mundialmente como o responsável pelo interesse nos objetos fractais. Hoje essa geometria é conhecida pelas belas imagens que podem ser vistas tanto no mundo da matemática quanto da arte e da própria natureza.



Figura 2: Benoit Mandelbrot (Fonte: <https://users.math.yale.edu/mandelbrot/>)

Porém existe uma série de outros acontecimentos anteriores, que abriram caminho para que fosse possível chegar tanto a uma definição de fractal, como a sua construção através de computadores

Entre a segunda metade do século XIX e a primeira do século XX foram propostos vários objetos matemáticos com características especiais e que foram, durante muito tempo, considerados “monstros matemáticos”, já que desafiavam as noções comuns de infinito e para os quais não havia uma explicação objetiva.

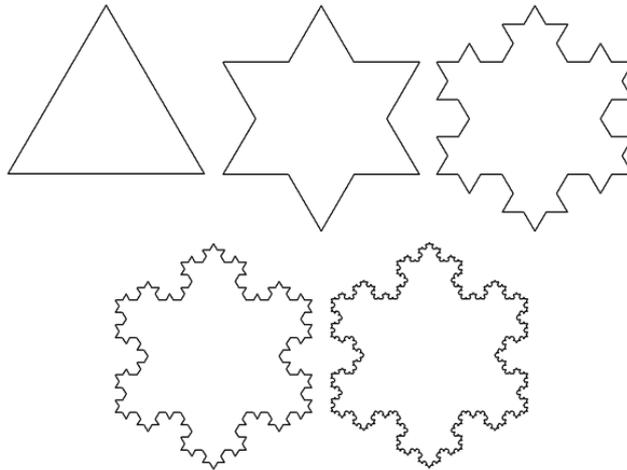
Georg Cantor (1845-1918) que se evidenciou com a teoria dos conjuntos, e com as suas ideias altamente inovadoras sobre o infinito, colocou o problema de um segmento de reta do qual se removeria o seu terço médio, e a cada nova figura gerada, seria feito o mesmo processo, removendo seguidamente o terço médio de cada um dos segmentos restantes, gerando uma “poeira” que como veremos no capítulo 4, possui infinitos pontos, e comprimento total igual a zero.



Figura 3: Conjunto de Cantor

Em 1904, também foi apresentada a ilha de Von Koch, que partindo de um triângulo equilátero, é removido o terço médio de cada lado, e substituído por dois segmentos de

comprimento um terço com uma inclinação de  $60^\circ$  em relação ao lado do triângulo, conforme mostra a figura abaixo.



*Figura 4: Ilha de Koch*

Tal curva conforme veremos no capítulo 4, possui um comprimento infinito, pois a cada geração a ilha se torna mais rugosa, e seu perímetro aumenta cada vez mais, porém cerca uma área finita.

Esses objetos matemáticos já possuíam algumas características comuns aos fractais. Pois, além de conterem em si elementos infinitos, quando ampliados, cada pequena parte era uma cópia do todo em menor escala.

#### 4. Os Fractais

Fractais são objetos matemáticos gerados por meio da iteração infinita de um processo recursivo, ou seja, uma função que é aplicada indefinidamente sobre si mesma. A fórmula matemática pode ser simples, porém devido a aplicação iterativa, tem como resultado uma forma complexa e geralmente de beleza rara.

Formalmente a definição de fractal é complexa, sendo o ponto fixo de um sistema de funções iteradas de um sistema métrico completo com métrica de Hausdorff associada. Falconer (1990) propõe uma definição menos rigorosa, em termos das características das construções ou conjuntos denominados fractais, define que um conjunto é considerado um fractal satisfaz pelo menos algumas das seguintes características:

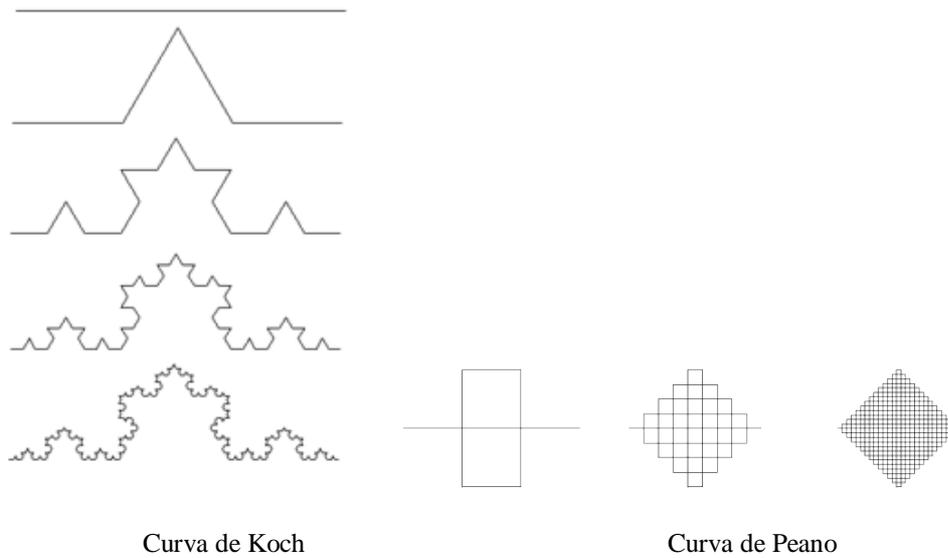
- Possui detalhes em qualquer escala;
- É localmente ou globalmente muito irregular;
- É exatamente, ou aproximadamente autossimilar;
- Pode ser definido por um algoritmo recursivo.

Como exemplo, podemos tomar o conjunto de Cantor e as seguintes curvas de Hilbert, Koch e Peano possuem todas as características fractais citadas acima, e podem ser facilmente descritos geometricamente, e gerados partir de um processo recursivo.



Conjunto de Cantor

Curva de Hilbert



Curva de Koch

Curva de Peano

*Figura 5: Exemplos de Fractais*

#### 4.1 Autossemelhança

A autossemelhança é classificada em dois tipos: exata e aproximada ou estatística: “uma figura é autossemelhante se apresenta sempre o mesmo aspecto visual a qualquer escala que seja ampliada ou reduzida, ou seja, se parte da figura se assemelha à figura vista como um todo”

Uma figura apresenta autossemelhança exata quando é gerada por um processo matemático, no qual o conjunto total é formado por pequenas partes idênticas; a autossemelhança aproximada, por sua vez, pode ser encontrada em objetos da natureza, que possuem em suas partes a mesma estrutura do todo, mas em cópias que não são exatas. As escalas de ampliação nestas formas, podem ser discutidas sob o ponto de vista da Geometria Fractal

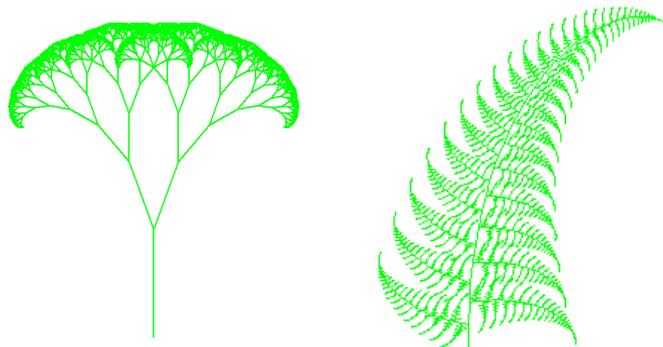
*Figura 6: Autossemelhança exata*



Figura 7: Autossemelhança aproximada (Fonte: <http://www.cienciatube.com/2011/11/o-que-e-um-fractal.html>)

#### 4.2 Dimensão de um fractal

A dimensão quantifica o grau de irregularidade ou de fragmentação de um conjunto geométrico, de uma figura ou de um objeto natural e que pode assumir em circunstâncias especiais, no caso dos objetos da geometria clássica de Euclides, as suas dimensões usuais inteiras (MANDELBROT, 1991). Assim a dimensão fractal pode ser um número fracionário, diferentemente da dimensão euclidiana. Nesse trabalho para calcular a dimensão de um fractal, usaremos a dimensão de Hausdorff-Besicovitch.

Como exemplo podemos usar a curva de Koch, ela ocupa mais espaço que uma reta, que tem dimensão topológica 1, e menos espaço que um plano, que tem dimensão topológica 2, portanto a dimensão de Hausdorff da curva de Koch deve ser algo entre 1 e 2.

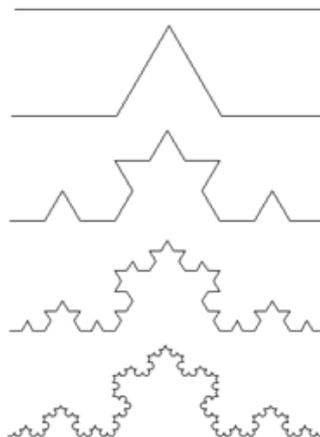
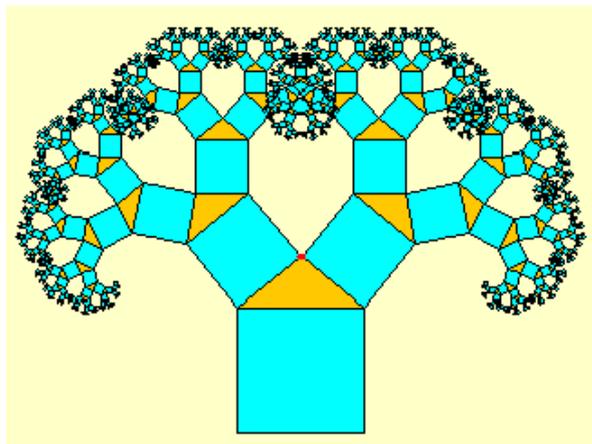


Figura 8: Curva de Koch

A forma como essa dimensão é calculada será abordada posteriormente.

Os processos utilizados para construção de imagens fractais baseiam-se em processos geométricos, em sistemas de funções iteradas ou em sistemas dinâmicos complexos.

Uma função iterada é uma função que é aplicada seguidas vezes a um mesmo conjunto, gerando uma contração do mesmo, quando essa função é aplicada infinitamente a um conjunto, percebemos que ele se torna uma estrutura cada vez mais “rugosa” ou mais cheia de detalhes, sendo cada pequena parte igual, ou semelhante ao todo.



*Figura 9:Árvore Pitagórica*

Fonte: <https://semsofismos.wordpress.com/2014/09/29/trabalho-i-matematica-e-arvores/>

No Fractal acima conhecido como árvore de Pitágoras, as formas são sempre reproduzidas, cada vez numa escala menor, de maneira que quando o número de iterações tende a infinito, o tamanho de cada um dos quadrados e triângulos tende a zero, tornando a figura cada vez mais complexa.

Apesar do grande acúmulo de trabalho desenvolvido no campo das iterações das funções polinomiais e racionais, e dos brilhantes sucessos que ai foram alcançados, ainda há muito que se possa criar nessa área.

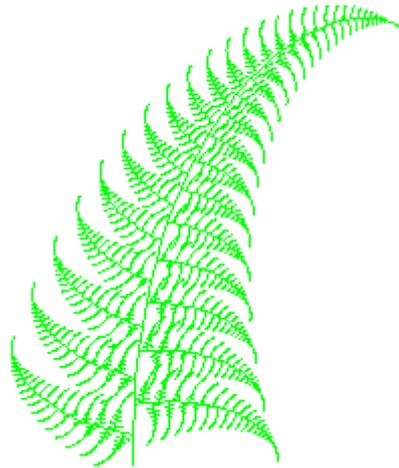


Figura 10: Samambaia de Barnsley

Os processos recursivos e iterativos para obtenção de conjuntos chamaram a atenção de matemáticos como Georg Cantor, Waclaw Sierpinski, Helge von Koch, Pierre Fatou e Gaston Julia. Mandelbrot (1986) afirma que o estudo desses matemáticos foi fundamental para o desenvolvimento dessa nova geometria e seus conjuntos são conhecidos como fractais clássicos. Veremos alguns desses fractais com um pouco mais de detalhes.

### 4.3 O Conjunto de Cantor

O conjunto de Cantor, criado pelo matemático alemão Georg Cantor em 1883, é construído da seguinte maneira: tomamos um segmento de reta e o partimos em três segmentos iguais. Em seguida, o pedaço intermediário é retirado. Os dois segmentos restantes são de novo repartidos em três segmentos iguais e os segmentos intermediários são retirados. O processo de repartir os segmentos e de retirar o pedaço intermediário prossegue ao infinito. A figura abaixo mostra os primeiros passos do processo iterativo de construção desse conjunto.

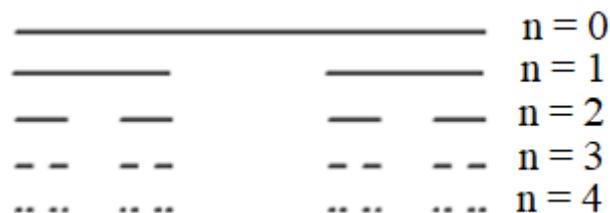


Figura 11: Conjunto de Cantor

Assim a cada iteração restam  $\frac{2}{3}$  do comprimento que havia na iteração anterior.

O Conjunto de Cantor é o conjunto formado por todos os pontos não retirados após infinitas iterações. Podemos ver que quando o número de iterações  $n$  tende a infinito, o comprimento restante de cada segmento tende a 0 da seguinte forma:

Tomando a medida do segmento inicial como  $a_0 = 1$ , o comprimento restante é  $a_1 = \frac{2}{3}$ , e seguindo multiplicando por  $\frac{2}{3}$  cada um dos passos subsequentes, teremos a seguinte sequência:  
 $a_0 = 1, a_1 = \frac{2}{3}, a_2 = \frac{4}{9}, a_3 = \frac{8}{27}, \dots, a_n = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ .

Assim temos uma P.G. cujo primeiro termo é  $a_1 = \frac{2}{3}$ , e razão  $q = \frac{2}{3}$  e cujo termo geral pode ser descrito por:  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_n = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ , como quando  $n$  tende a infinito,  $\left(\frac{2}{3}\right)^n$  tende a 0, então o comprimento restante tende a 0 após infinitas iterações.

Georg Cantor (1845-1918) foi um matemático nascido na Rússia, que adotou a nacionalidade alemã, foi professor da Universidade de Hale, dedicou muitos de seus estudos em pesquisas relativas à fundamentação da matemática, principalmente no tocante à parte hoje conhecida como Teoria dos Conjuntos. Foi Cantor o primeiro matemático a estudar, ao final do século XIX, essa teoria.

Em 1883, Cantor publicou um trabalho no qual é construído um conjunto, chamado hoje “Conjunto de Cantor”. Tal conjunto foi o primeiro objeto reconhecido mais tarde como fractal.

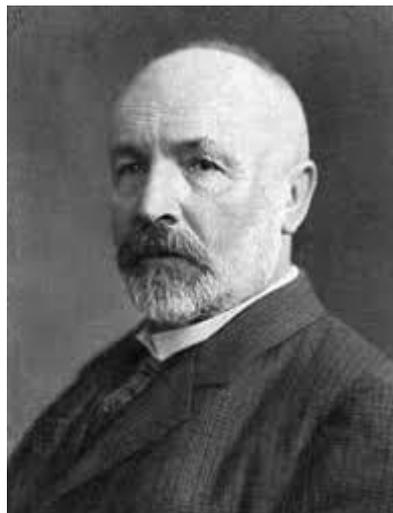


Figura 12: Georg Cantor (Fonte: <https://www.thefamouspeople.com/profiles/georg-cantor-519.php>)

#### 4.4 A Curva de Koch

O conjunto conhecido como Curva de Koch foi criado em 1904 pelo matemático sueco Niels Fabian Helge von Koch (1870-1924). A construção dessa curva pode ser descrita pelo processo iterativo ilustrado na figura abaixo

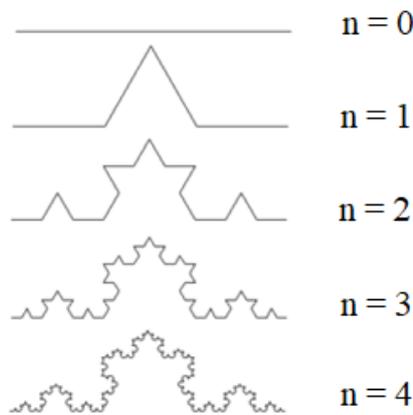


Figura 13: Curva de Koch

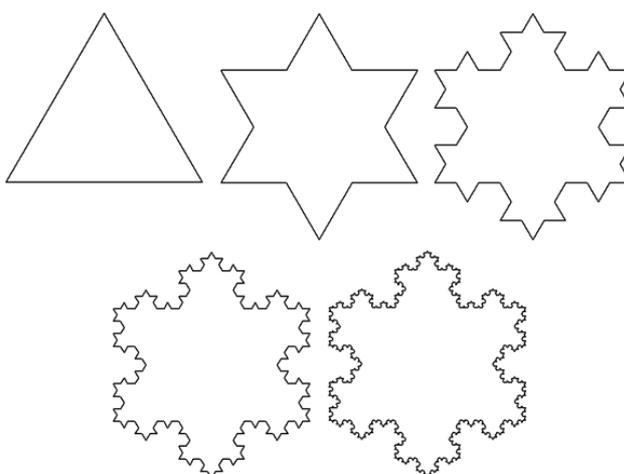
A cada iteração, cada segmento é substituído por 4 segmentos de comprimento  $\frac{1}{3}$ , totalizando um comprimento de  $\frac{4}{3}$  do comprimento anterior, um aumento  $\frac{1}{3}$  em relação a iteração anterior.

Se olharmos a sequência formada pelo perímetro em cada geração do ponto de vista das progressões geométricas, e tomarmos o comprimento inicial como 1, percebemos que se trata de uma P.G. de razão  $q = \frac{4}{3}$ , termo  $a_0 = 1$ , e seus termos são,  $a_1 = \frac{4}{3}$ ,  $a_2 = \frac{16}{9}$ ,  $a_3 = \frac{64}{27}$ ,  $a_n = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow a_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$

Usando uma aplicação direta da fórmula do termo geral da progressão geométrica temos:  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$ , como  $\frac{4}{3} > 1$ , conforme o expoente  $n$  de  $\left(\frac{4}{3}\right)^n$  aumenta, esse número fica cada vez maior, sendo que quando  $n \rightarrow \infty$ , o valor de  $\left(\frac{4}{3}\right)^n \rightarrow \infty$ , portanto o perímetro da curva de Koch, ocupando uma região finita, tende a infinito para infinitas iterações.

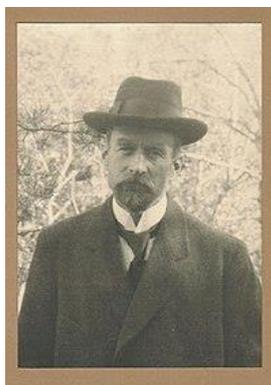
#### 4.5 Floco de Neve de Koch

Para construir o floco de neve de Koch, desenhamos um triângulo equilátero, dividimos cada lado em três partes iguais, removemos a parte central de cada lado, e os substituímos por dois segmentos do mesmo tamanho da seção removida como se fossem dois lados de um triângulo equilátero. Repetindo esse processo de construção, obtemos a figura que se assemelha a um floco de neve encontrado na natureza



*Figura 14: Iterações da Curva de Koch*

Koch foi um matemático sueco, que deu seu nome a esse famoso fractal, que aparece em seu trabalho *Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes plane* publicado em 1906, von Koch também escreveu trabalhos sobre a teoria dos números, em particular escreveu vários trabalhos sobre o teorema do número primo.

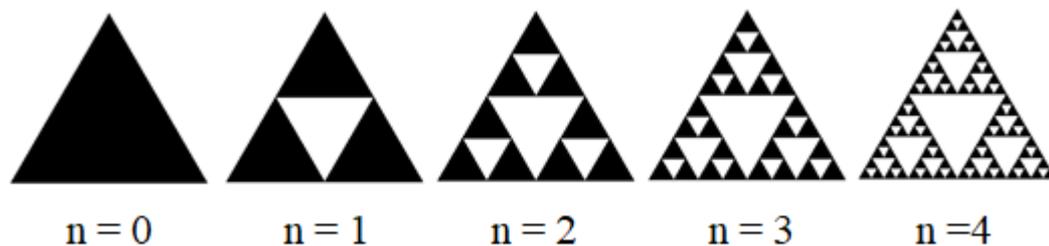


*Figura 15: Niels Fabian Helge von Koch (Fonte: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Helge\\_von\\_Koch](https://pt.wikipedia.org/wiki/Helge_von_Koch))*

#### 4.6 Triângulo de Sierpinski

O conjunto conhecido como Triângulo de Sierpinski foi criado em 1916 pelo matemático polonês Waclaw Sierpinski (1882-1969).

Para começar a construção, partimos de uma região limitada por um triângulo equilátero. Em seguida, a partir do ponto médio de cada lado do triângulo, fazemos um novo triângulo cujos lados tem metade da medida dos lados do triângulo inicial, dividindo a figura em 4 pequenos triângulos, formando 4 regiões triangulares menores cujos lados estão ligados, dos quais retiramos agora a região central. Realizando esse processo recursivo indefinidamente, o resultado será como o apresentado abaixo.



*Figura 16: Primeiras iterações do Triângulo de Sierpinski*

O Triângulo de Sierpinski tem várias propriedades curiosas como a de ter tantos pontos como o do conjunto dos números reais, ser autossemelhante e não perder a sua definição inicial à medida que é ampliado.

#### A área do Triângulo de Sierpinski

A tabela abaixo mostra o número de triângulos retirados, e a área de cada um desses triângulos quando comparados com o triângulo inicial.

Tabela 1: Área retirada do Triângulo de Sierpinski

Iteração	Número de triângulos retirados	Área de cada triângulo retirado em relação a área inicial
1	1	$\frac{1}{4}$
2	3	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$
3	9	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$

Analisando o triângulo de Sierpinski, podemos observar que a cada geração são retirados o triplo de triângulos da geração anterior, e que cada um desses triângulos tem área igual a  $\frac{1}{4}$  da área do triângulo inicial, considerando a área do triângulo inicial como A, se quisermos calcular a área total retirada, temos uma progressão geométrica de primeiro termo  $a_1 = \frac{A}{4}$  e razão  $q = \frac{3}{4}$ , usando a fórmula da soma da P.G. infinita temos:  $S_n = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow S_n = \frac{\frac{A}{4}}{1-\frac{3}{4}} \Rightarrow S_n = \frac{\frac{A}{4}}{\frac{1}{4}} \Rightarrow S_n = \frac{4A}{4} \Rightarrow S_n = A$

Ou seja, após infinitas iterações a área total retirada é igual a área do triângulo inicial, e a área restante tende a 0. Esse fato é particularmente interessante por envolver a ideia de limite.

#### 4.7 O Tapete de Sierpinski

O tapete de Sierpinski é obtido usando a mesma técnica de eliminação que a usada no triângulo de Sierpinski, iniciando com um quadrado, dividindo-o em 9 pequenos quadrados congruentes, e eliminando o quadrado central. Em seguida, aplicar esse mesmo procedimento em cada um dos 8 quadrados restantes, e assim sucessivamente. O resultado que se obtém após algumas iterações já é surpreendentemente bonito e conhecido como Tapete de Sierpinski. Os primeiros termos do resultado da construção é mostrado na figura seguinte.

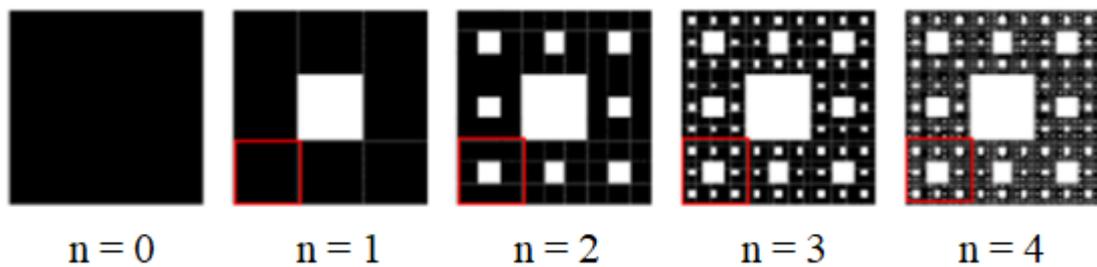


Figura 17: Tapete de Sierpinski (Fonte: <http://www2.unifap.br/matematica/files/2017/07/GEOMETRIA-FRACTAL-NO-ENSINO-M%C3%89DIO.pdf>)

Analisando o tapete de Sierpinski, podemos observar que a cada geração são retirados oito vezes mais quadrados que na geração anterior, e que cada um desses quadrados tem área igual a  $\frac{1}{9}$  da área do quadrado retirado na geração anterior. Considerando a área do quadrado inicial como  $A$ , se quisermos calcular a área total retirada, temos uma progressão geométrica de primeiro termo  $a_1 = \frac{A}{9}$  e razão  $q = \frac{8}{9}$ , usando a fórmula da soma da P.G. infinita temos:

$$S_n = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow S_n = \frac{\frac{A}{9}}{1-\frac{8}{9}} \Rightarrow S_n = \frac{\frac{A}{9}}{\frac{1}{9}} \Rightarrow S_n = \frac{9A}{9} \Rightarrow S_n = A$$

Portanto, assim como no triângulo, no tapete de Sierpinski, após infinitas iterações a área total retirada é igual a área do quadrado inicial, e a área restante tende a 0.

Sierpinski foi um matemático polonês, conhecido pelo pelo triângulo de Sierpinski, foi autor durante sua carreira, do incrível número de 724 artigos e 50 livros [<https://sites.google.com/site/research1121/sierpinski-biography>]. Se aposentou em 1960 como professor da Universidade de Varsóvia



Figura 18: Waclaw Sierpinski (Fonte: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Wac%C5%82aw\\_Sierpi%C5%84ski](https://pt.wikipedia.org/wiki/Wac%C5%82aw_Sierpi%C5%84ski))

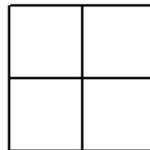
## 4.8 Curva de Hilbert

A curva de Hilbert, criada por David Hilbert (1862-1943) é construída da seguinte forma: Inicialmente tomamos um quadrado



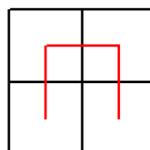
*Figura 19: Quadrado*

O qual dividimos em 4 quadrados iguais, conforme a figura abaixo:



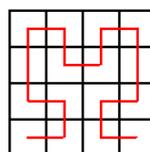
*Figura 20: Divisão do quadrado*

Marcamos os pontos centrais de cada quadrado, e ligamos os pontos centrais de cada quadrado, conforme a figura.



*Figura 21: Primeira iteração da curva de Hilbert*

A curva de Hilbert não é formada pelos quadrados, mas sim pelo processo de ligação entre os pontos centrais de cada quadrado



*Figura 22: Segunda iteração da curva de Hilbert*

Os próximos passos consistem na repetição iterativa dos passos anteriores, formando a seguinte sequência:

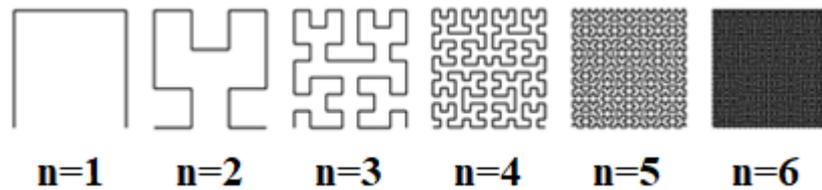


Figura 23: Iterações da curva de Hilbert

Na primeira iteração temos 4 quadrados, e cada segmento da curva de Hilbert mede  $\frac{1}{2}$  do lado do quadrado inicial, Na segunda iteração, temos 16 quadrados, e cada segmento da curva de Hilbert mede  $\frac{1}{4}$  do lado do quadrado inicial, e a cada geração o número de quadrados é multiplicado por 4, e o tamanho de cada segmento é multiplicado por  $\frac{1}{2}$ .

O número de segmentos na primeira geração é 3, na segunda geração é 15, e pode ser generalizado em  $4^n - 1$

Para calcular o tamanho de cada segmento da curva de Hilbert em qualquer geração, temos uma P.G. de termo inicial  $a_1 = \frac{1}{2}$  e razão  $q = \frac{1}{2}$ , usando a fórmula do termo geral da P.G. temos:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad q = \frac{1}{2}$$

Para calcular o comprimento total da curva de Hilbert em qualquer iteração, temos uma P.G. de termo inicial  $a_1 = \frac{3}{2}$  e razão  $q = \frac{1}{2}$ .

$$a_n = (4^n - 1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad q = \frac{1}{2}$$

Hilbert nasceu na Alemanha e foi um matemático notável, sendo membro estrangeiro da Royal Society, e escreveu trabalhos em áreas como Geometria e equações integrais.



Figura 24: David Hilbert (Fonte: <http://www.aprender-mat.info/portugal/historyDetail.htm?id=Hilbert>)

#### 4.9 Curva de Peano

Giuseppe Peano (1858-1932) foi um matemático italiano, autor de mais de 200 livros e artigos, foi um dos fundadores da lógica matemática e da teoria dos conjuntos, passou a maior parte de sua carreira lecionando matemática na Universidade de Turin.

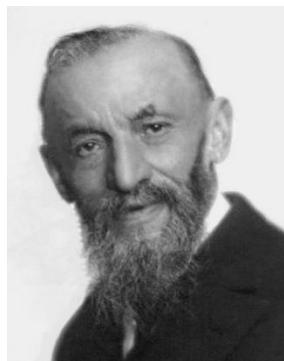


Figura 25: Giuseppe Peano (Fonte: <https://famous-mathematicians.com/giuseppe-peano/>)

Para construir a Curva de Peano, começamos com um segmento de reta



Figura 26: Segmento de reta

Depois o dividimos em três segmentos de mesma medida



Figura 27: Segmento dividido em 3 partes

E construímos um retângulo sobre o terço médio, de forma que esse retângulo fique dividido em dois quadrados, da seguinte forma:

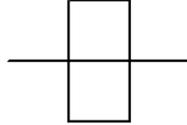


Figura 28: Primeira iteração da curva de Peano

Repetindo esse processo em cada um dos segmentos da figura anterior obtemos as seguintes iterações da curva de Peano:

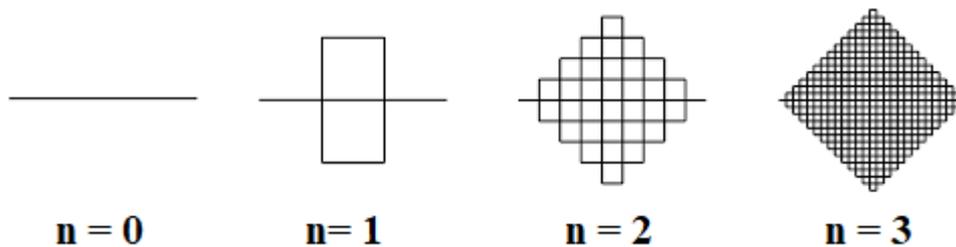


Figura 29: Iterações da curva de Peano

Se considerarmos como 1 o comprimento do segmento inicial, na primeira iteração temos 9 subsegmentos de comprimento  $\frac{1}{3}$ , e a cada nova iteração, o comprimento de cada subsegmento é multiplicado por  $\frac{1}{3}$ , e o número de subsegmentos é multiplicado por 9. Assim, para calcular o tamanho de subsegmentos em uma geração, temos uma P.G. de primeiro termo  $a_1 = \frac{1}{3}$ , e razão  $q = \frac{1}{3}$ . Aplicando a fórmula do termo geral da P.G. temos o tamanho do  $n$ -ésimo segmento:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_n = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

De forma análoga podemos verificar que a quantidade de segmentos em uma iteração também é uma P.G. de termo  $a_1 = 9$ , e razão  $q = 9$ . Assim para calcular o número de subsegmentos e uma iteração podemos usar a fórmula do termo geral da P.G. crescente:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_n = 9 \cdot 9^{n-1} \Rightarrow a_n = 9^n$$

Para calcular o comprimento total da curva de Peano, temos que o número de segmentos é multiplicado por 9, enquanto o comprimento de cada segmento é multiplicado por  $\frac{1}{3}$ .

Assim temos uma P.G. de primeiro termo  $a_1 = 3$  (9 segmentos de comprimento  $\frac{1}{3}$ ), e razão  $q = \frac{1}{3} \cdot 9 \Rightarrow q = 3$

Então podemos calcular o comprimento total da curva de Peano em qualquer iteração usando a fórmula do termo geral da P.G.:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_n = 3 \cdot 3^{n-1} \Rightarrow a_n = 3^n$$

Assim o comprimento total da curva de Peano tende a infinito, quando o número de iterações tende a infinito.

#### 4.10 O Conjunto de Julia

O conjunto conhecido por Conjunto de Julia foi criado pelos matemáticos Pierre Fatou e Gaston Julia em 1919. Esse conjunto, obtido por iterações no plano complexo, resultou da curiosidade de determinar o que aconteceria com um número complexo  $z$  quando a este fosse aplicado iterativamente a função  $f(z) = z^2 + c$ , onde  $c$  é um número complexo. Apenas com os modernos computadores foi possível visualizar a beleza dos gráficos de tais funções.

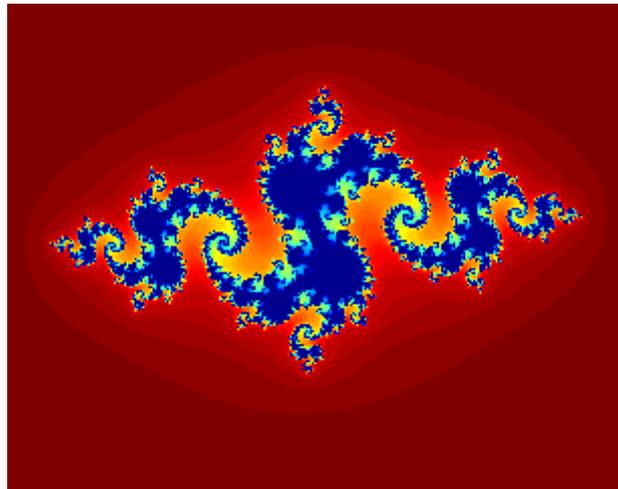


Figura 30: Conjunto de Julia com  $P(z) = z^2 - 0.8 + 0.156i$

(Fonte: [http://www.professoresdematematica.com.br/wa\\_files/fractais\\_20no\\_20ensino\\_20fundamental.pdf](http://www.professoresdematematica.com.br/wa_files/fractais_20no_20ensino_20fundamental.pdf))

Gaston Maurice Julia (1893-1978) nasceu na Argélia, mas se mudou para Paris após receber uma bolsa de estudos de nível superior. Quando estava prestes a se formar a Alemanha declarou guerra à França, e defendendo seu país, Julia foi acertado por um tiro no rosto, o que após várias cirurgias, o obrigou a usar uma tira de couro no rosto pelo resto da vida. Entre essas

dolorosas cirurgias ele realizava muitas pesquisas matemáticas em seu leito hospitalar. Em 1918 se casou com uma das enfermeiras que cuidaram dele enquanto estava no hospital. Julia se tornou professor do *École Polytechnique* em Paris, e continuou a conduzir pesquisas em geometria e teoria das funções complexas.

O estudo dos processos iterativos em matemática continuou esporadicamente após o trabalho de Julia até a década de 1970, quando o advento dos computadores permitiu aos matemáticos produzir imagens detalhadas desses conjuntos.



Figura 31: Gaston Maurice Julia (Fonte: <https://alchetron.com/Gaston-Julia>)

#### 4.11 O conjunto de Mandelbrot

O fractal que tem o nome de Conjunto de Mandelbrot, também obtido no plano complexo, é considerado uma expansão do Conjunto de Julia, pois cada ponto no plano complexo corresponde a um conjunto de Julia diferente. Este conjunto, talvez seja o mais complexo objeto conhecido pelos matemáticos, como revelam as imagens geradas por computador. À medida que ela é examinada em níveis cada vez mais altos de ampliação, o observador vê-se diante de um desfile interminável de voltas, rendilhados e formas que se assemelham à totalidade do conjunto.

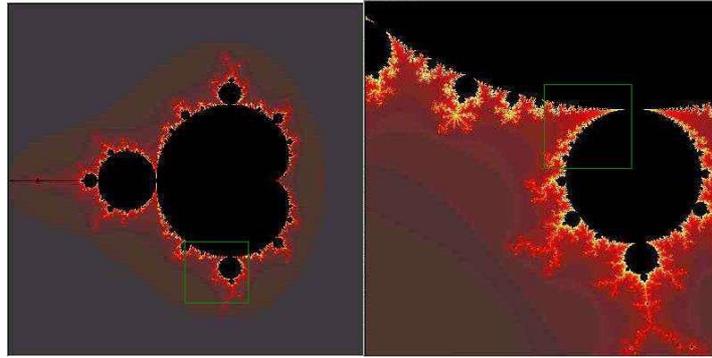


Figura 32: Conjunto de Mandelbrot

(Fonte: <http://www.lactamme.polytechnique.fr/Mosaic/images/TOUR.C.11.0032.D/image.jpg>)

Note que, todos os conjuntos fractais apresentados até aqui possuem as duas características fundamentais que definem um fractal: a autossimilaridade e a complexidade infinita.

As explorações desses conjuntos podem ser muito enriquecedoras para as aulas de matemática. Por exemplo, através da construção do Conjunto de Cantor podemos explorar, usando uma tabela, o número de segmentos a cada nova iteração, o que nos permite chegar a uma fórmula geral, onde é possível obter com total precisão o número de segmentos que o conjunto terá para uma iteração qualquer. O interessante é que o número de segmentos tende ao infinito, porém o comprimento do segmento tende a zero, pois quanto mais segmentos, menor será o tamanho de cada um. No Triângulo de Sierpinski, a área restante do triângulo inicial tende a zero, e na Curva de Koch, seu perímetro tende ao infinito, o que desperta muito a curiosidade do aluno.

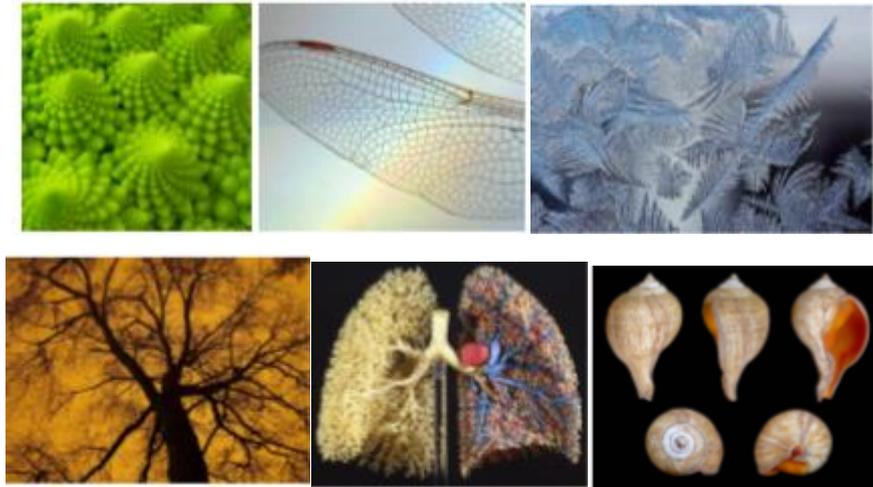
## 5. Os fractais na natureza

Os padrões encontrados na natureza são tão irregulares e fragmentados, que a Geometria tradicional não é capaz de descrever de forma satisfatória. Para isso é necessário um nível completamente diferente de complexidade, a natureza pede outra abordagem. Nessas condições, a Geometria Fractal se mostra muito mais adequada para representar as formas da natureza. Nas últimas décadas, muitos estudiosos como os já citados até aqui, estão fazendo avanços nessa área, e descrevendo fractais cada vez mais complexos. Ao observar elementos da natureza nos deparamos com uma infinidade de exemplos onde os fractais parecem ser uma alternativa viável para descrever tais elementos.

Segundo Mandelbrot (1977) “Por que a Geometria é frequentemente descrita como “fria” e “seca”? Uma razão repousa em sua inabilidade de descrever a forma de uma nuvem, uma montanha, uma linha costeira ou uma árvore. Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, linhas não são círculos, e uma casca de árvore não é lisa, tampouco um feixe de luz viaja em linha reta(...). Eu afirmo que muitos dos padrões da Natureza são tão irregulares e fragmentados, que, se comparados com a Geometria tradicional, exibem não somente um grau mais alto, mas um nível de complexidade completamente diferente”.

Os fractais aparecem com muita frequência na natureza, e as leis que regem a criação dos mesmos parecem ser encontradas em todo o mundo natural. A forma como os galhos e folhas de uma planta seguem padrões que permitem maximizar a sua exposição à luz solar, cristais de gelo que se formam com estruturas fractais, se assemelhando ao floco de neve de Koch, brócolis crescem com características fractais, as ramificações dos rios desde pequenos afluentes ao desembocar no mar possuem essas características, até mesmo a distribuição das veias do nosso corpo parecem seguir essas leis e nosso sistema cardiovascular é distribuído de maneira a transportar mais eficientemente o oxigênio para todas as partes do corpo.

Os fractais além de extremamente belos, são muito eficientes no que diz respeito a desempenho onde quer que apareçam.



*Figura 33: Fractais na Natureza (Fonte: <https://ppgmat.ufersa.edu.br/wp-content/uploads/sites/58/2016/02/Disserta%C3%A7%C3%A3o-Jackson-Ney.pdf>)*

Se cortamos uma parte da flor dos brócolis verificamos a sua semelhança com o restante da flor. Este possui um número infinito de pequenas cópias de si próprio, nesse caso, temos uma autossemelhança aproximada, que é a encontrada na natureza.



*Figura 34: Brócolis*

A estrutura dos relâmpagos também serve como exemplo de fractais na natureza que são conhecidos como fractais aleatórios, pois sua forma é indeterminada.



*Figura 35: Raios (Fonte: [https://www.ebah.com.br/content/ABAAAAJ\\_0AI/a-geometria-fractal-no-ensino-fundamental-medio?part=3](https://www.ebah.com.br/content/ABAAAAJ_0AI/a-geometria-fractal-no-ensino-fundamental-medio?part=3))*

## 6. O conceito de dimensão

A noção intuitiva de dimensão que temos é devida a Euclides, tal dimensão leva em consideração o número de parâmetros independentes, ou de coordenadas, necessárias para a descrição única dos pontos de um objeto, essa definição conseguia satisfazer as necessidades matemáticas até o século XIX. Na geometria Euclidiana, um ponto tem dimensão 0, uma reta tem dimensão 1, um plano tem dimensão 2 e o espaço tem dimensão 3, porém com o surgimento da geometria fractal por exemplo, a definição de dimensão foi generalizada.

### 6.1 Dimensão Fractal

Como podemos ver o conceito de dimensão que carregamos da geometria básica não é capaz de informar o quanto um conjunto fractal pode preencher uma reta, uma superfície ou o espaço, pois fornece apenas números inteiros.

#### O problema da linha costeira

Analisando o contorno de um litoral, Benoit Mandelbrot pensou que seria possível usar números fracionários para definir a dimensão de objetos quando percebeu que quanto menor a medida da escala utilizada para medir a costa de um país, mais detalhes seria possível perceber, e portanto sempre obter um comprimento cada vez maior, ou seja, quanto mais detalhes capturarmos do contorno desse país, maior será seu perímetro.



Figura 36: Linha costeira cada vez mais refinada com unidades de medidas menores

Há mais de uma forma de definir a dimensão de um fractal, usaremos aqui a dimensão de Hausdorff-Besicovitch, desenvolvida pelos matemáticos alemães Felix Hausdorff (1968-1942) e Abram Samoilovitch Besicovitch (1891-1970)

Se partirmos um segmento de comprimento  $L > 0$  em segmentos iguais, de tamanho  $\varepsilon > 0$ , quanto maior o número de segmentos  $N$  de tamanho  $\varepsilon$ , menor será o tamanho de  $\varepsilon$ , de tal forma que:

$$N(\varepsilon) = L \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

$$N(\varepsilon) = \frac{L}{\varepsilon}$$

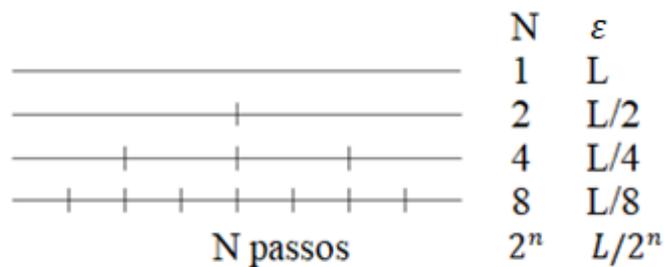


Figura 37: Ilustração da dimensão fractal 1

Assim, como em  $\left(\frac{L}{\varepsilon}\right)$  o expoente é igual a 1, temos a dimensão de um segmento ou da reta sendo igual a 1.

Vamos agora estender esse raciocínio para o quadrado.

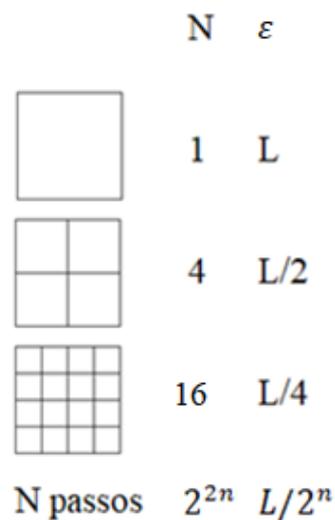


Figura 38: Ilustração da dimensão fractal 2

$$N(\varepsilon) = L^2 \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2$$

$$N(\varepsilon) = \left(\frac{L}{\varepsilon}\right)^2$$

Nesse processo, análogo ao da dimensão 1, como em  $\left(\frac{L}{\varepsilon}\right)^2$  o expoente é igual a 2, temos a dimensão de um quadrado sendo igual a 2.

Fazendo o mesmo com o cubo, obtemos:

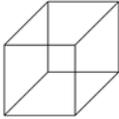
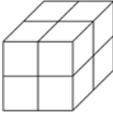
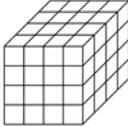
	N	$\varepsilon$
	1	L
	8	L/2
	64	L/4
N passos	$2^{3n}$	$L/2^n$

Figura 39: Ilustração da dimensão fractal 3

Nesse processo, análogo ao das dimensões 1 e 2, como em  $\left(\frac{L}{\varepsilon}\right)^3$  o expoente é igual a 3, temos a dimensão de um cubo sendo igual a 3.

Generalizando, para uma dimensão  $d$ , temos:

$$N(\varepsilon) = L^d \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d$$

$$N(\varepsilon) = \left(\frac{L}{\varepsilon}\right)^d$$

Neste caso geral, a dimensão  $d$  pode ser obtida aplicando logaritmo a equação anterior, ficamos com:

$$\log N(\varepsilon) = \log \left(\frac{L}{\varepsilon}\right)^d$$

Usando as propriedades dos logaritmos, temos:

$$\log N(\varepsilon) = d \cdot \log \frac{L}{\varepsilon}$$

$$d = \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \frac{L}{\varepsilon}}$$

Onde  $N(\varepsilon)$  é o número de partes em que foi dividido o segmento, e  $\frac{L}{\varepsilon}$  é o fator de aumento.

Como exemplo podemos citar a curva de Koch

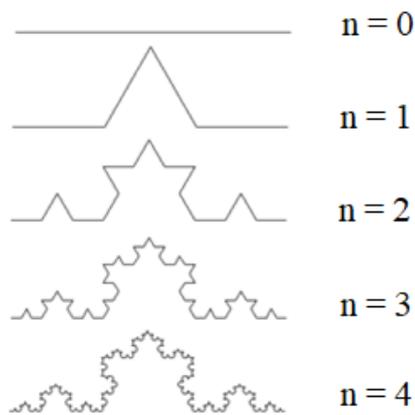


Figura 40: Curva de Koch

Onde a cada geração o número de partes é multiplicado por 4, e o fator de aumento é 3, pois cada segmento passa a ter  $\frac{1}{3}$  da medida dos segmentos da geração anterior. Então temos:

$$d = \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \frac{L}{\varepsilon}} \Rightarrow d = \frac{\log 4}{\log 3} \Rightarrow d \cong 1,3$$

## 7. Trabalhando com os Fractais em sala de aula

### 7.1 Pré Requisitos

Para iniciar o trabalho em sala de aula, é bom que o aluno já tenha estudado e tenha adquirido domínio de progressões geométricas, termo geral, soma dos termos, e soma dos termos da P.G. infinita, de logaritmos e suas propriedades, e do cálculo da área de triângulos equiláteros. Por isso foi importante esperar até o final do 2º bimestre do 1º ano para aplicar as atividades quando o aluno já teve contato com todos esses conteúdos e conceitos. A seguir faremos um pequeno embasamento teórico desses conteúdos, o qual serve também como retomada de conteúdos para iniciar o trabalho com os alunos.

### 7.2 Sequências

Uma sequência ou sucessão é um conjunto de objetos de qualquer natureza organizados ou escritos numa ordem bem determinada. Assim, por exemplo, podemos falar na sequência dos meses do ano: Janeiro, Fevereiro, Março, Abril,..., Dezembro, ou a sequência dos números primos escritos em ordem crescente: 2,3,5,7,11,13,17,19,...

São de particular interesse aos estudos matemáticos as sequências numéricas definidas por fórmulas que permitem calcular qualquer um de seus termos.

### 7.3 Progressões Geométricas

Progressão Geométrica é toda sequência que a partir de um primeiro termo que chamamos  $a_1$ , podemos obter o próximo multiplicando o termo anterior por uma constante real  $q$  sendo  $q \neq 0$ , chamada de razão.

#### **Termo geral da P.G.**

Seja  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$  uma P.G., por definição temos:

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$a_3 = a_2 \cdot q \Rightarrow a_3 = a_1 \cdot q \cdot q \Rightarrow a_3 = a_1 \cdot q^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot q \Rightarrow a_4 = a_1 \cdot q^2 \cdot q \Rightarrow a_4 = a_1 \cdot q^3$$

$$a_n = a_{n-1} \cdot q \Rightarrow a_n = \frac{a_n}{q} \cdot q^n \Rightarrow a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Assim a fórmula do termo geral da P.G. de primeiro termo  $a_1$  e razão  $q$  é  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

### Soma dos termos de uma P.G. finita

Seja  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$  uma P.G., a soma de seus termos deve ser:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_3 + \dots + a_n \quad (1)$$

Multiplicando ambos os membros dessa equação por  $q$  ( $q \neq 0$ ), temos:

$$q \cdot S_n = q \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n) \Leftrightarrow$$

$$q \cdot S_n = q \cdot a_1 + q \cdot a_2 + q \cdot a_3 + \dots + q \cdot a_{n-1} + q \cdot a_n \Leftrightarrow$$

$$q \cdot S_n = a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + q \cdot a_n \quad (2)$$

Subtraindo (2) de (1) temos:

$$q \cdot S_n - S_n = (a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + q \cdot a_n) - (a_1 + a_2 + \dots + a_3 + \dots + a_n)$$

$$q \cdot S_n - S_n = a_n \cdot q - a_1$$

$$(q - 1) \cdot S_n = a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q - a_1$$

$$(q - 1) \cdot S_n = a_1 \cdot q^n - a_1$$

$$S_n = \frac{a_1 \cdot q^n - a_1}{q - 1}$$

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

### Soma dos termos da P.G. infinita

Para esse trabalho nos interessa em particular a soma da P.G. infinita no caso em que  $-1 < q < 1$ , para isso vamos começar com um exemplo prático para observamos o comportamento das potências de uma fração do tipo  $-1 < \frac{a}{b} < 1$ .

Tomemos a fração  $q = \frac{1}{10}$ , a sequência formada por  $a_n = \left(\frac{1}{10}\right)^n$   $n \in \mathbb{N}$ , temos os seguintes termos:

$$a_1 = \frac{1}{10} = 0,1$$

$$a_2 = \frac{1}{100} = 0,01$$

$$a_3 = \frac{1}{1000} = 0,001$$

$$a_4 = \frac{1}{10000} = 0,0001$$

Graficamente temos:

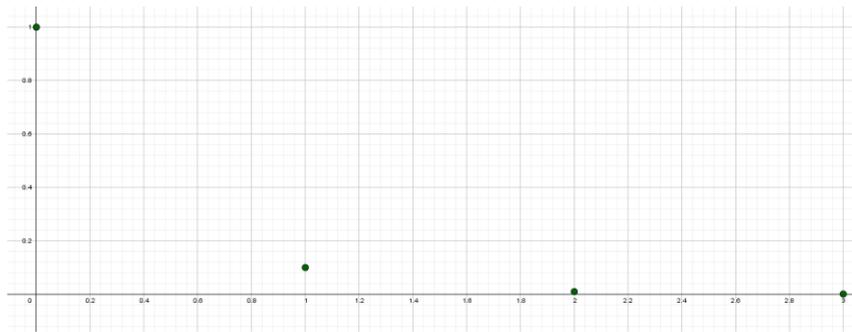


Figura 41: Comportamento da função  $(1/10)^n$

Podemos ver que conforme  $n$  aumenta, o valor de  $a_n$  fica mais próximo de 0.

Dizemos, então que o limite de  $a_n = \left(\frac{1}{10}\right)^n$ , quando  $n$  tende ao infinito, é 0.

Matematicamente, escrevemos:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Se fizermos o mesmo com  $a_n = \left(\frac{-1}{10}\right)^n$   $n \in \mathbb{N}$ , teremos:

$$a_1 = \frac{-1}{10} = -0,1$$

$$a_2 = \frac{1}{100} = 0,01$$

$$a_3 = \frac{-1}{1000} = -0,001$$

$$a_4 = \frac{1}{10000} = 0,0001$$

Mesmo que os termos oscilem entre positivo e negativo, sendo os termos ímpares negativos, e os termos pares positivos, percebemos que os termos se tornam cada vez mais próximos de 0.

De forma geral, pode-se mostrar que, se  $q \in R$ , com  $-1 < q < 1$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Como partimos do princípio que  $-1 < q < 1$ , então substituindo  $q^n$  na expressão  $S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$ , substituindo  $q^n$  por 0, temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1 \cdot (0 - 1)}{q - 1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{-a_1}{q - 1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

Assim, o limite da soma de uma P.G. infinita de razão  $q$ ,  $|q| < 1$ , é  $\frac{a_1}{1 - q}$

## 7.4 Logaritmos

**Definição:** Sendo  $a$  e  $b$  números reais e positivos com  $a \neq 1$  chama-se logaritmo de  $b$  na base  $a$  o expoente  $x$  ao qual se deve elevar a base  $a$  de modo que  $a^x$  seja igual a  $b$ , ou seja:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Propriedades Operatórias dos Logaritmos

$$1. \log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

Demonstração:

$$\text{Sejam: } \log_a(b \cdot c) = t \Leftrightarrow b \cdot c = a^t \quad (1)$$

$$\log_a(b) = x \Leftrightarrow b = a^x \quad (2)$$

$$\log_a(c) = y \Leftrightarrow c = a^y \quad (3)$$

Multiplicando as igualdades (2) e (3) membro a membro, temos:

$$b \cdot c = a^x \cdot a^y \quad (4)$$

Substituindo  $b \cdot c$  por  $a^t$  na igualdade 4 temos:

$$a^t = a^x \cdot a^y$$

$$a^t = a^{x+y}$$

$$t = x + y, \text{ ou seja: } \log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

$$2. \log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

Demonstração:

$$\text{Sejam: } \log_a\left(\frac{b}{c}\right) = t \Leftrightarrow \frac{b}{c} = a^t \quad (1)$$

$$\log_a(b) = x \Leftrightarrow b = a^x \quad (2)$$

$$\log_a(c) = y \Leftrightarrow c = a^y \quad (3)$$

Dividindo as igualdades (2) e (3) membro a membro, temos:

$$\frac{b}{c} = \frac{a^x}{a^y} \quad (4)$$

Substituindo  $\frac{b}{c}$  por  $a^t$  na igualdade (4), temos:

$$a^t = \frac{a^x}{a^y}$$

$$a^t = a^{x-y}$$

$$t = x - y, \text{ ou seja: } \log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

$$3. \log_a(b^r) = r \cdot \log_a b$$

Demonstração:

$$\text{Sejam: } \log_a(b^r) = t, \text{ e } r \cdot \log_a b = x$$

$$\log_a(b^r) = t \Leftrightarrow a^t = b^r \quad (1)$$

$$r \cdot \log_a b = x \Leftrightarrow \log_a b = \frac{x}{r} \Leftrightarrow a^{\frac{x}{r}} = b \quad (2)$$

Elevando ambos os membros da igualdade (2) ao expoente  $r$ , obtemos:

$$\left(a^{\frac{x}{r}}\right)^r = b^r$$

$$a^x = b^r \quad (3)$$

Observando as equações (1) e (3), podemos substituir  $b^r$  por  $a^t$ , e temos:

$$a^t = a^x$$

$$t = x$$

$$\text{Assim: } \log_a(b^r) = r \cdot \log_a b$$

$$4. \log_a(b) = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Demonstração: Fazendo  $\log_a b = t$ ,  $\log_c b = x$  e  $\log_c a = y$

$$\text{Temos: } \log_a b = t \Leftrightarrow a^t = b$$

$$\log_c b = x \Leftrightarrow c^x = b$$

$$\text{Assim, } c^x = a^t \quad (1)$$

Por outro lado, temos também:

$$\log_c a = y \Leftrightarrow c^y = a$$

Elevando ambos os membros da última igualdade ao expoente  $t$ , obtemos:

$$(c^y)^t = a^t \Leftrightarrow c^{ty} = a^t \quad (2)$$

Das igualdades (1) e (2) concluímos que:

$$c^{ty} = c^x$$

$$ty = x$$

$$t = \frac{x}{y}$$

$$\text{Logo, } \log_a(b) = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

### 7.5 Área do triângulo equilátero

Sabendo que a área de qualquer triângulo pode ser calculada por  $A = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$

Dado um triângulo equilátero de lado  $L$ , e chamando sua altura de  $h$ , temos a figura abaixo :

Aplicando o teorema de Pitágoras, que afirma que a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa, no triângulo de catetos  $h$  e  $\frac{l}{2}$ , e hipotenusa  $l$ , temos:

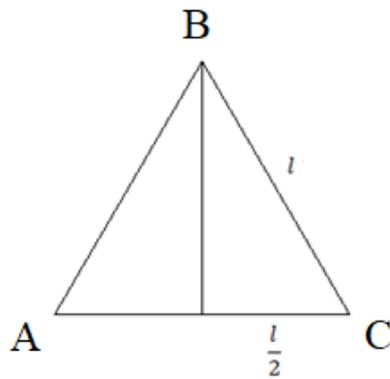


Figura 42:  $h$ : Altura do triângulo equilátero

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$l^2 = h^2 + \frac{l^2}{4}$$

$$h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3l^2}{4}$$

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

Substituindo  $h$  por  $\frac{l\sqrt{3}}{2}$  no triângulo acima, temos:

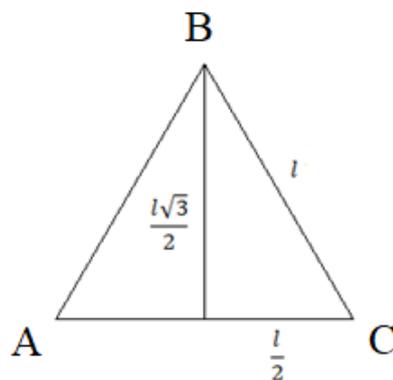


Figura 43: Altura do triângulo equilátero de lado  $l$

Como a área de qualquer triângulo é dada por  $A = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$ , sendo  $l$  a medida do lado de um triângulo equilátero, e assim  $\frac{l\sqrt{3}}{2}$  a medida da altura, temos:

$$A = \frac{l \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2}}{2}$$

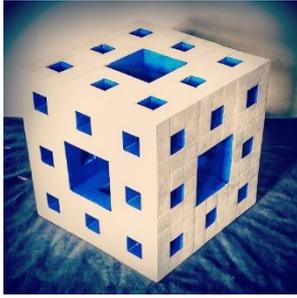
$$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

### 7.6 O início das atividades

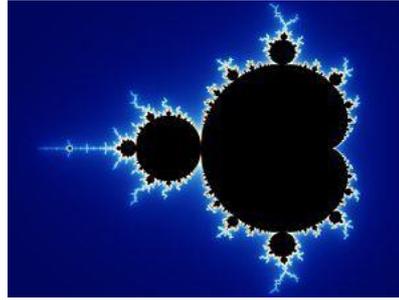
A beleza dos fractais presentes na natureza desperta a curiosidade e incentiva a investigação de padrões matemáticos; por isso, no primeiro momento os alunos foram apresentados ao conceito intuitivo do que são os fractais, mostrando em uma exposição de slides, fractais como o triângulo de Sierpinski, curva de Koch, esponja de Menger, conjunto de Julia e algumas estruturas fractais presentes na natureza.

Alguns vídeos sobre o assunto podem ser encontrados no YouTube, como sugestão deixo o link de dois deles, que podem ser usados em sala de aula <https://www.youtube.com/watch?v=YDhtL566M3U>, <https://www.youtube.com/watch?v=akG8rrE3JcU>

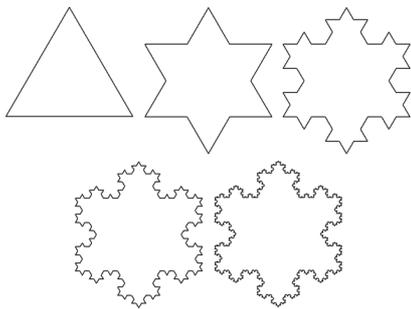
Como exemplo de fractal, temos a esponja de Menger, que conforme podemos observar a figura abaixo, é obtida começando com um cubo de lado  $L$ ,  $L > 0$ . Em seguida, dividimos cada face do cubo em 9 quadrados iguais, obtendo 27 cubos pequenos. Removemos o cubinho no meio de cada face, e o do centro, permanecendo 20 cubinhos no nível 1. Repetindo sucessivamente os passos anteriores para cada um dos cubinhos restantes vamos obtendo os outros níveis da esponja de Menger.



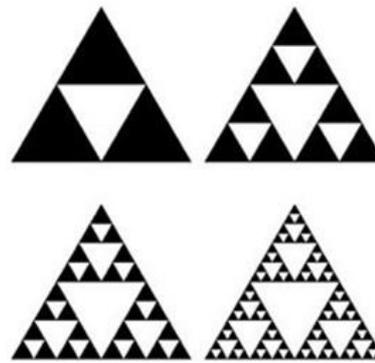
Espanja de Menger



Conjunto de Mandelbrot



Ilha de Koch



Triângulo de Sierpinski

Figura 44: Fractais e padrões

Fonte: <https://plus.google.com/+RodolphoZukauskas> <https://pt.wikipedia.org/wiki/Fractal>

Em seguida pudemos discutir a respeito das propriedades desses fractais, principalmente a respeito da auto-similaridade e o conceito de limite.

Após essa discussão, os alunos receberam folhas de sulfite para a construção de cartões fractais, o motivo é que atividades práticas em geral chamam a atenção do aluno, instigam sua curiosidade e o atraem na forma de desafio. Os alunos foram orientados para construir o primeiro cartão fractal da seguinte forma:

### 7.7 Primeiro Cartão Fractal

**Objetivo:** Investigar as propriedades dos fractais, associar fractais a ideia de progressões geométricas, e inserir intuitivamente o conceito de limite

**Pré requisitos:** Progressões aritméticas e geométricas, do volume de paralelepípedos

**Material:** Régua, tesoura e papel sulfite

**Séries a ser aplicada:** 1º ano do ensino médio

**Tempo Previsto:** 2 aulas

### Construção do cartão fractal 1

- 1- Pegue uma folha de tamanho A4.
- 2- Dobre a folha ao meio, ao longo de sua altura, como mostra a figura



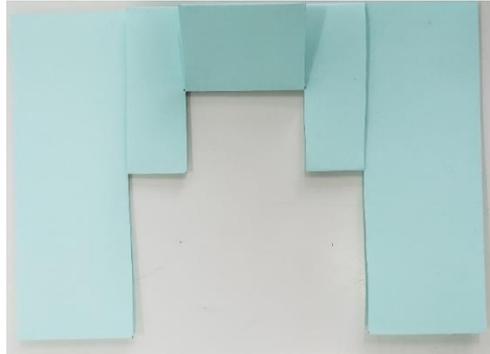
Figura 45: Construção do primeiro cartão fractal

- 3- Com a folha dobrada ao meio, faça dois cortes verticais simétricos a distância de  $\frac{1}{4}$  das extremidades da folha, e com  $\frac{1}{2}$  da altura da folha, como mostra a figura abaixo.



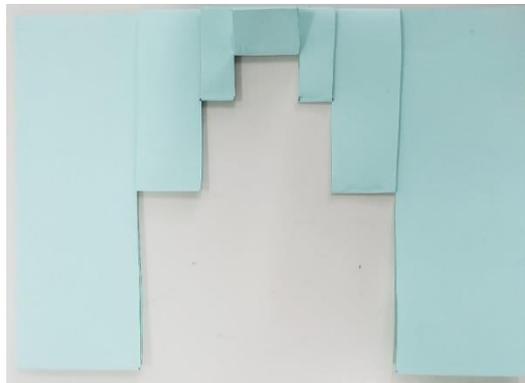
Figura 46: Construção do primeiro cartão fractal

- 4- Dobre o retângulo formado para cima, fazendo um vinco na dobra, essa primeira dobra criará a primeira geração do cartão fractal.
- 5- As gerações seguintes serão obtidas seguindo repetidamente os passos anteriores, porém em uma escala menor, apenas na região dobrada. A segunda geração do cartão fractal é obtida cortando o cartão conforme mostrado abaixo.



*Figura 47: Construção do primeiro cartão fractal*

- 6- Dobre o retângulo para cima, fazendo um vinco na dobra. Siga o mesmo procedimento para chegar a terceira geração do cartão fractal.



*Figura 48: Terceira iteração do cartão fractal*

- 7- Para obter mais gerações, repita esse processo enquanto for possível realizar os cortes e as dobraduras no papel, sempre usando a regra de corte estabelecida no início. Por fim, desdobre todos os recortes e puxe as figuras em relevo. A figura abaixo mostra um cartão de três gerações obtido pelo processo descrito.



*Figura 49: Cartão fractal aberto*

Agora vire as partes cortadas para fora para montar o cartão fractal, que ficará conforme a figura abaixo.



*Figura 50: Cartão fractal já montado*

À medida que o número de iterações vai aumentando, surgem novos paralelepípedos, logo o volume total aumenta. Entretanto, a variação de volume dos paralelepípedos de uma iteração para outra é cada vez menor, pois o volume de cada novo paralelepípedo diminui. Essa ideia pode ser utilizada para introduzir a noção de limite.

Para as questões diremos que as figuras geradas são paralelepípedos, quando na verdade são paralelepípedos aparentes. Visto que as figuras das novas gerações são feitas a partir das arestas da geração anterior.

## 7.8 Questões sobre o primeiro Cartão Fractal

Para efeito de cálculos, nas atividades abaixo vamos considerar que o comprimento e a largura dos paralelepípedos são metade da altura, esse efeito pode ser obtido no cartão, se iniciarmos os recortes usando uma folha quadrada.

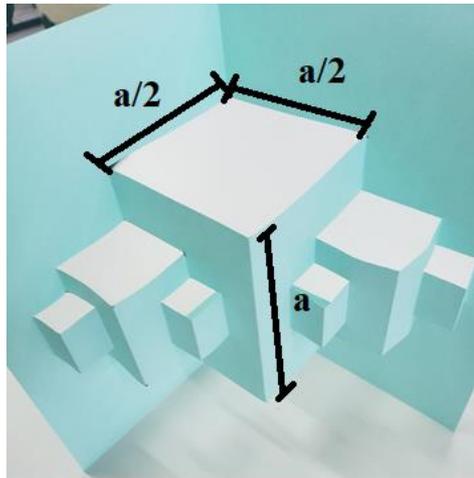


Figura 51: Medidas das arestas do paralelepípedo

- 1- Chamando de  $a$  a altura do paralelepípedo da primeira geração, qual deve ser a altura dos paralelepípedos das próximas gerações?
- 2- É possível associar a sequência formada pelas medidas das alturas ao conteúdo estudado no bimestre anterior?
- 3- Que tipo de progressão é essa?
- 4- Qual a razão dessa progressão?
- 5- Calcule o volume de um paralelepípedo retângulo em cada geração.
- 6- É possível perceber algum tipo de progressão em relação ao volume dos paralelepípedos retângulos que vão se formando?
- 7- Qual a razão dessa progressão?
- 8- Considerando que o volume dos paralelepípedos em cada geração fica cada vez menor, se somarmos os volumes dos paralelepípedos de todas as gerações, o volume irá crescer até o infinito?
- 9- Observe a quantidade de paralelepípedos em cada geração, monte uma tabela com o número da geração e a quantidade de paralelepípedos gerados nela, você obtém uma progressão?

Tabela 2: Número de iterações  $x$  paralelepípedos aparentes

<i>Iteração</i>	<i>Número de paralelepípedos novos</i>
1	
2	
3	
4	
5	
...	
$N$	

10- Qual a razão dessa progressão?

### 7.9 Resolução comentada pelo professor

1- Chamando de  $a$  a altura do paralelepípedo da primeira geração, qual deve ser a altura dos paralelepípedos das próximas gerações?

R: Na segunda geração a altura do paralelepípedo deve ser  $\frac{a}{2}$ , na terceira geração deve ser  $\frac{a}{4}$ , e assim sucessivamente, sempre multiplicando a altura anterior por  $\frac{1}{2}$ .

2- É possível associar a sequência formada pelas medidas das alturas ao conteúdo estudado no bimestre anterior?

R: Sim, a sequência formada pelas medidas das alturas dos paralelepípedos em cada geração forma uma P.G.

3- Que tipo de progressão é essa?

R: É uma P.G.

4- Qual a razão dessa progressão?

R: A razão da P.G. é  $q = \frac{1}{2}$

5- Calcule o volume de um paralelepípedo retângulo em cada geração.

R: O volume do paralelepípedo na primeira geração é  $V_1 = a \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \Leftrightarrow V_1 = \frac{a^3}{4}$ . Como cada lado na geração seguinte é multiplicado por  $\frac{1}{2}$ , o volume será multiplicado por

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ , então o termo geral para o volume de um paralelepípedo na segunda geração é  $V_2 = \frac{1}{8} \cdot \frac{a^3}{4}$ , na terceira geração  $V_3 = \frac{a^3}{4} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}$  e o termo geral é  $V_n = \frac{a^3}{4} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}$

6- É possível perceber algum tipo de progressão em relação ao volume dos paralelepípedos retângulos que vão se formando?

R: Sim, é uma P.G. de razão  $\frac{1}{8}$

7- Qual a razão dessa progressão?

R: A razão é  $q = \frac{1}{8}$

8- Considerando que o volume dos paralelepípedos em cada geração fica cada vez menor, se somarmos os volumes dos paralelepípedos de todas as gerações, o volume irá crescer até o infinito?

R: Não, a cada geração o número de paralelepípedos é multiplicado por 2, porém o volume de cada novo paralelepípedo é  $\frac{1}{8}$  de cada paralelepípedo da geração anterior, assim o volume total dos paralelepípedos em cada geração vai ser  $2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$  do volume total da geração anterior, assim a cada geração o volume do cartão vai aumentando, porém esse aumento é cada vez menor.

9-

*Tabela 3: Número de iterações x paralelepípedos aparentes*

<i>Iteração</i>	<i>Número de paralelepípedos novos</i>
<i>1</i>	<i>1</i>
<i>2</i>	<i>2</i>
<i>3</i>	<i>4</i>
<i>4</i>	<i>8</i>
<i>5</i>	<i>16</i>
<i>...</i>	
<i>N</i>	$2^{n-1}$

10- A razão da progressão é 2

### 7.10 Reação dos alunos

Nessa parte a participação dos alunos foi grande, mesmo daqueles que em geral não costumam se interessar pela matemática, porém ainda nessa atividade alguns alunos já encontraram certa dificuldade ao realizar os recortes. Após terminarem, os alunos passaram a analisar os cartões e com certa facilidade perceberam relações simples entre os lados dos paralelepípedos em cada iteração. No caso a medida das arestas de uma iteração sempre é metade do tamanho da iteração anterior, e também que a cada iteração surgiam o dobro de paralelepípedos da iteração anterior, não foi difícil para eles associarem esses números à progressões geométricas, o que deu início as atividades escritas.

As primeiras atividades foram bem simples, apenas perguntando, ao aluno se a sequência formada pelo número de paralelepípedos em cada iteração formava uma P.G., até então os alunos tiveram muita facilidade, inclusive para calcular a medida das arestas do paralelepípedo em diversas iterações, considerando a aresta inicial como  $a$ , sempre multiplicando a medida anterior por  $\frac{1}{2}$ . Ficou claro aqui que vários alunos, mesmo percebendo o que estava acontecendo, tinham dificuldade em operar com frações, o que foi resolvido em partes pela revisão dos conhecimentos prévios, que foi feita não apenas nessa atividade, mas também nas próximas, sempre lembrando como efetuar cálculos, e também as fórmulas usadas, para o cálculo de área do triângulo, volume de um paralelepípedo, termo geral e soma dos termos da P.G., por exemplo.

Usando a fórmula da soma da P.G. foi possível calcular quantos paralelepípedos haveriam até diferentes iterações e até mesmo para a soma até a  $n$ -ésima iteração, o mesmo foi feito para o volume em cada iteração e a soma dos volumes em cada iteração. Ficou evidente que conforme o nível de dificuldade aumentava, alguns alunos passavam a apresentar mais dificuldades, ou até desistiam, principalmente na questão que pedia para conjecturar a soma dos volumes dos paralelepípedos para a  $n$ -ésima iteração, que mesmo após explicação passo a passo, poucos alunos conseguiram compreender, o que não estragou o trabalho, pois os alunos haviam sido avisados que algumas atividades seriam mais difíceis.

É importante observar que o essencial foi bem absorvido pelos alunos, que é estabelecer a relação entre os fractais e as progressões geométricas, e calcular a razão delas, e que conforme

os alunos conseguiam realizar as atividades mais complexas, eles claramente se mostravam mais motivados pela sensação de descoberta.

### 7.11 Segundo Cartão Fractal

**Objetivo:** Investigar as propriedades dos fractais, associar fractais a ideia de progressões geométricas, e inserir intuitivamente o conceito de limite

**Pré requisitos:** Progressões aritméticas e geométricas, do volume de paralelepípedos

**Séries a ser aplicada:** 1º ano do ensino médio

**Material:** Régua, tesoura e papel sulfite

**Tempo Previsto:** 2 aulas

No segundo dia de aula fizemos outro cartão fractal, com atividades parecidas, novamente os alunos receberam as orientações para a construção do cartão, que são apresentadas a seguir.

#### Construção do cartão fractal 2

- 1- Pegue uma folha de tamanho A4.
- 2- Dobre a folha ao meio, ao longo de sua altura



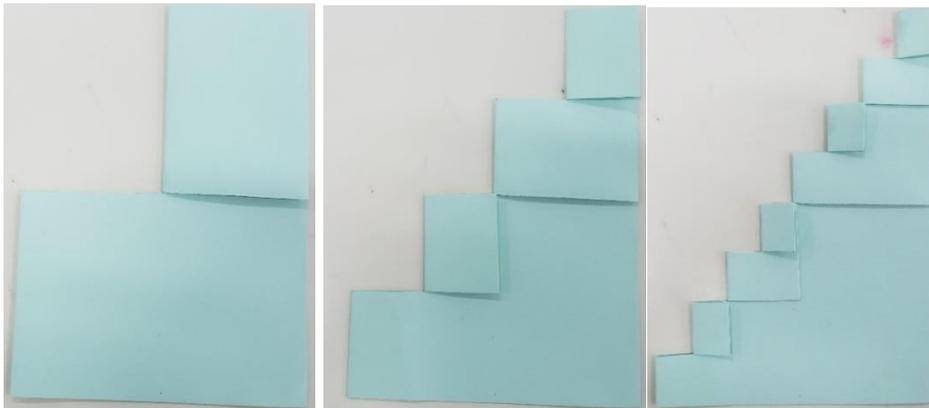
Figura 52: Construção do segundo cartão fractal

- 3- Com a folha dobrada ao meio, marque o ponto médio da largura e da altura, em seguida faça um corte até a metade da largura, a partir da metade da altura, conforme a figura.



*Figura 53: Primeira iteração do cartão fractal*

- 4- Dobre um dos retângulos formado para cima, fazendo um vinco na dobra.
- 5- As gerações seguintes serão obtidas nos dois retângulos (dobrados) formados no cartão, aplicando a mesma regra do passo 3.



*Figura 54: Três primeiras iterações do cartão fractal*



*Figura 55: Cartão após dobrar as partes cortadas*

Abra o cartão, e vire as partes cortadas para fora.

A figura abaixo mostra o cartão *Triângulo de Sierpinski* construído usando o processo descrito anteriormente.



Figura 56: Segundo cartão fractal pronto

### 7.12 Questões propostas sobre o segundo cartão fractal

Para efeito de cálculos, nas atividades abaixo vamos considerar que o comprimento e a largura dos paralelepípedos são metade da altura. Esse efeito pode ser obtido no cartão, se iniciarmos os recortes usando uma folha quadrada.

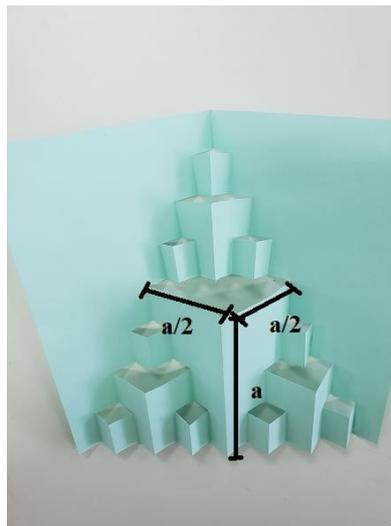


Figura 57: Medidas das arestas dos paralelepípedos

- 1- Qual o número de paralelepípedos gerados na quarta geração?
- 2- Conjecture uma fórmula geral para o número de paralelepípedos em cada geração.
- 3- A sequência formada pela quantidade de paralelepípedos em cada geração forma uma progressão?
- 4- Qual a razão dessa progressão?
- 5- Estabeleça uma fórmula para calcular a soma do número de paralelepípedos até a n-ésima geração.
- 6- Chamando de  $a$  a altura do paralelepípedo da primeira geração, estabeleça uma fórmula para calcular o volume de um paralelepípedo na n-ésima geração.
- 7- A sequência formada pelo volume de um paralelepípedo de cada geração forma uma progressão?
- 8- Qual a razão dessa progressão?
- 9- Conjecture uma fórmula para o volume total na n-ésima geração
- 10- Se somarmos os volumes de todos os paralelepípedos até infinitas iterações, o volume total será infinito?

### 7.13 Respostas comentadas pelo professor

- 1- Qual o número de paralelepípedos gerados na quarta geração?  
R: Serão 27 paralelepípedos, pois a cada geração o número de paralelepípedos gerados é o triplo da geração anterior.
- 2- Conjecture uma fórmula geral para o número de paralelepípedos em cada geração.  
R: Como na primeira geração temos 1 paralelepípedo e a cada nova geração temos o triplo do número de paralelepípedos, temos que  $P_1 = 1 \cdot 3^0 = 1$ ,  $P_2 = 1 \cdot 3^{2-1} = 3$ ,  $P_3 = 1 \cdot 3^{3-1} = 3^2$ ,  $\dots$   $P_n = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$
- 3- A sequência formada pela quantidade de paralelepípedos em cada geração forma uma progressão?  
R: Sim
- 4- Qual a razão dessa progressão?  
R: A razão da P.G é 3
- 5- Estabeleça uma fórmula para calcular a soma do número de paralelepípedos até a n-ésima geração.

R: Usando a fórmula da soma da P.G. temos  $s_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1} \Rightarrow s_n = \frac{1(3^n-1)}{3-1} \Rightarrow$   
 $s_n = \frac{3^n-1}{2}$

6- Chamando de  $a$  a altura do paralelepípedo da primeira geração, estabeleça uma fórmula para calcular o volume de um paralelepípedo na  $n$ -ésima geração.

R: R: Se a altura é  $a$ , temos que a largura e o comprimento medem  $\frac{a}{2}$  cada, por construção, então o volume do paralelepípedo da primeira geração é  $V_1 = a \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \Rightarrow V_1 = \frac{a^3}{4}$ , como a cada geração cada aresta é multiplicada por  $\frac{1}{2}$ , o volume de cada paralelepípedo da próxima geração será  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$  do volume do paralelepípedo da geração anterior, e o termo geral será  $V = \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1} \cdot \frac{a^3}{4}$

7- A sequência formada pelo volume de um paralelepípedo de cada geração forma uma progressão?

R: Sim, é uma progressão geométrica

8- Qual a razão dessa progressão?

R: A razão é  $q = \frac{1}{8}$

9- Conjecture uma fórmula para o volume total na  $n$ -ésima geração

R: Como o volume de cada paralelepípedo em uma geração é dado por  $V_n = \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1} \cdot \frac{a^3}{4}$ , e a cada geração o número de paralelepípedos é multiplicado por 3, temos que o volume total em cada geração será  $V_n = 3^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1} \cdot \frac{a^3}{4}$ , ou seja  $V = \frac{a^3}{4} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^{n-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$

10- Se somarmos os volumes de todos os paralelepípedos até infinitas iterações, o volume total será infinito?

R: Não, usando a fórmula da P.G. infinita para os volumes de todos os paralelepípedos até infinitas iterações  $s_n = \frac{a_1}{1-q}$ , temos:

$$s_n = \frac{\frac{a^3}{4}}{1-\frac{3}{8}} \Rightarrow s_n = \frac{\frac{a^3}{4}}{\frac{5}{8}} \Rightarrow s_n = \frac{2a^3}{5}$$

### 7.14 Reação dos alunos ao segundo cartão fractal

Para realizar as primeiras atividades, os alunos tiveram muito mais facilidade que no primeiro cartão, pois já tinham familiaridade com os fractais, e associaram com a atividade da aula anterior, dessa forma realizaram as atividades propostas com muito mais facilidade, e muito mais rápido que no dia anterior, reconhecendo a P.G. no número de paralelepípedos em cada iteração, e calcularam a razão que dessa vez é 3, e o termo geral da P.G. formada pelo número de paralelepípedos em cada iteração. O mesmo foi feito para o volume de um paralelepípedo em cada iteração, para o volume total dos paralelepípedos em cada iteração, e para a soma dos volumes dos paralelepípedos quando o número de iterações tende a infinito. Novamente os alunos apresentaram dificuldade ao conjecturar o termo geral para a soma dos volumes até a n-ésima geração, porém foram capazes de discutir, argumentar e ajudar a chegar a fórmula.

Durante as discussões, foi possível abordar a ideia de limite, usando a P.G. que envolve a aresta de cada paralelepípedo, que a cada iteração é multiplicada por  $\frac{1}{2}$ , intuitivamente os alunos já eram capazes de deduzir que para o número de iterações tendendo a infinito, a medida aresta do paralelepípedo tende a 0, e usando a fórmula da P.G. infinita perceberam que de fato isso aconteceria, a título de curiosidade chegamos a fazer esse cálculo também usando a fórmula da P.G. finita, o que possibilitou inclusive melhorar a compreensão da fórmula da P.G. infinita.

### 7.15 O Triângulo de Sierpinski na sala de aula

**Objetivo:** Investigar as propriedades do triângulo de Sierpinski, verificar quais conceitos matemáticos estudados em sala de aula estão associados à esse triângulo, e conseqüentemente à geometria fractal.

**Pré requisitos:** Progressões aritméticas e geométricas, cálculo da área de triângulos equiláteros

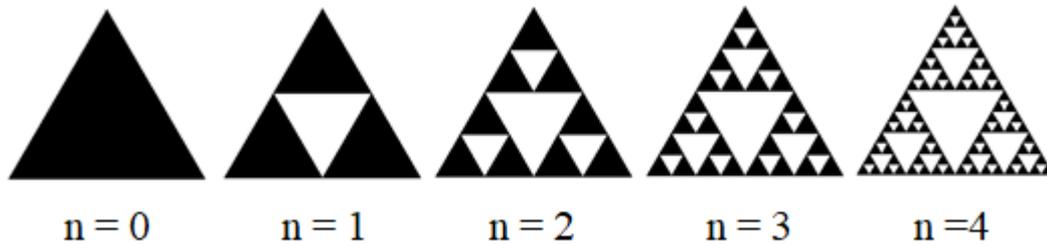
**Séries a ser aplicada:** 1º ano do ensino médio

**Tempo previsto:** 2 aulas

No terceiro dia de aula os alunos realizaram uma atividade com o triângulo de Sierpinski, que é apresentada abaixo.

O matemático polonês Waclaw Sierpinski (1882-1969), obteve enorme reputação principalmente na década de 1920 - 1930, a ponto de uma das crateras lunares ter recebido o seu nome.

Em 1916 Sierpinski apresentou esse famoso fractal em seu trabalho.



*Figura 58: Iterações do triângulo de Sierpinski*

O triângulo de Sierpinski é construído a partir de um triângulo equilátero, do qual na primeira iteração é retirado um triângulo equilátero com vértices nos pontos médios de seus lados, e a cada nova iteração são retirados triângulos equiláteros a partir do ponto médio de cada um dos lados dos triângulos restantes.

### 7.16 Questões sobre o triângulo de Sierpinski

- 1- Qual o número de triângulos retirados na primeira iteração do triângulo de Sierpinski?
- 2- Qual o número de triângulos retirados na segunda iteração?
- 3- Qual o número de triângulos retirados na iteração de número  $n$ ?
- 4- Monte uma sequência com o número de triângulos retirados em cada iteração, você obtém algum tipo de progressão? Qual? Qual a razão dessa progressão?
- 5- Considerando  $L$  o lado do triângulo inicial, qual a área desse triângulo?
- 6- Considerando  $L$  o lado do triângulo inicial, qual a área do triângulo retirado na primeira iteração?
- 7- Qual a fórmula para calcular a área de um triângulo retirado na  $n$ -ésima geração?
- 8- A área de um triângulo de cada geração forma uma P.G.? Qual a razão dessa P.G.?
- 9- Complete a tabela:

Tabela 4: Dados do triângulo de Sierpinski

Iteração (n)	Medida dos lados	Número de triângulos retirados	Área de cada triângulo
0			
1			
2			
3			
4			

- 10- Crie uma fórmula para calcular a área total retirada em cada iteração
- 11- A área total retirada em cada iteração forma uma P.G.?
- 12- O que você percebe em relação a área total retirada em cada iteração? Está retirando cada vez mais, ou cada vez menos área?
- 13- O que deve acontecer com a área restante após infinitas iterações? A área deve chegar a 0? Ou próxima de 0?
- 14- Use a fórmula da P.G. finita, suponha n como infinito e veja se chega ao mesmo resultado da fórmula da P.G. infinita? Por que isso acontece?

### 7.17 Resolução comentada pelo professor

- 1- Qual o número de triângulos retirados na primeira iteração do triângulo de Sierpinski?  
R: Foi retirado 1 triângulo na primeira iteração, o triângulo central
- 2- Qual o número de triângulos retirados na segunda iteração?  
R: Foram retirados 3 triângulos na segunda iteração
- 3- Qual o número de triângulos retirados na iteração número n?  
R: Como a cada iteração o número de triângulos retirados é o triplo da iteração anterior, temos que o número de triângulos retirados na n-ésima iteração é  $T = 1 \cdot 3^{n-1} \Rightarrow T = 3^{n-1}$
- 4- Monte uma sequência com o número de triângulos retirados em cada iteração, você obtém algum tipo de progressão? Qual? Qual a razão dessa progressão?  
R: É uma progressão geométrica de razão  $q = 3$
- 5- Considerando L o lado do triângulo inicial, qual a área desse triângulo?

R: Usando a fórmula da área do triângulo equilátero temos que a área é  $A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$

6- Considerando L o lado do triângulo inicial, qual a área do triângulo retirado na primeira iteração?

R: Como os lados do primeiro triângulo retirado medem  $\frac{1}{2}$  do lado do triângulo inicial,

temos que sua área é  $A = \frac{(\frac{l}{2})^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A = \frac{l^2\sqrt{3}}{16}$

7- Qual a fórmula para calcular a área de um triângulo retirado na n-ésima geração?

R:  $A_n = \frac{(\frac{l}{2^n})^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_n = \frac{l^2\sqrt{3}}{4^{n+1}} \Rightarrow A_n = \frac{l^2\sqrt{3}}{4^{n+1}}, n \in \mathbb{N}$ , que podemos escrever como  $A_n = \frac{1}{4^{n-1}} \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{16}$ , para evidenciar o primeiro termo e a razão.

8- A área de um triângulo de cada geração forma uma P.G.? Qual a razão dessa P.G.?

R: Como a área do triângulo retirado na primeira geração é  $A_1 = \frac{l^2\sqrt{3}}{16}$ , e na segunda

geração é  $A_2 = \frac{l^2\sqrt{3}}{4^{2+1}} \Rightarrow A_2 = \frac{l^2\sqrt{3}}{4^3} \Rightarrow A_2 = \frac{l^2\sqrt{3}}{64}$ , temos que a razão é  $q = \frac{1}{4}$

9- Complete a tabela:

Tabela 5: Dados do triângulo de Sierpinski

Iteração (n)	Medida dos lados	Número de triângulos retirados	Área de cada triângulo
1	$\frac{1}{2}$	$3^0 = 1$	$\frac{l^2\sqrt{3}}{16}$
2	$\frac{1}{4}$	$3^1 = 3$	$\frac{l^2\sqrt{3}}{64}$
3	$\frac{1}{8}$	$3^2 = 9$	$\frac{l^2\sqrt{3}}{256}$
4	$\frac{1}{16}$	$3^3 = 27$	$\frac{l^2\sqrt{3}}{1024}$
5	$\frac{1}{32}$	$3^4 = 81$	$\frac{l^2\sqrt{3}}{4096}$

10- Crie uma fórmula para calcular a área total retirada em cada iteração

R: Como a área de um triângulo em cada geração é  $A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4^{n+1}}, n \in \mathbb{N}$  que pode ser

escrito na forma  $A = \frac{1}{4^{n-1}} \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{16}$  para evidenciar a razão e o primeiro termo da P.G.

formada pela área de um quadrado em cada geração, como o número de triângulos

retirados em cada iteração é sempre o triplo da iteração anterior, temos:  $A_t = 3^{n-1} \frac{1}{4^{n-1}} \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{16} \Rightarrow A_t = \frac{3^{n-1}}{4^{n-1}} \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{16} \Rightarrow A_t = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{16}, n \in \mathbb{N}^*$

11- A área total retirada em cada iteração forma uma P.G.?

R: Sim, a razão dessa P.G. é  $\frac{1}{4}$

12- O que você percebe em relação a área total retirada em cada iteração? Está retirando cada vez mais, ou cada vez menos área?

R: A quantidade de área retirada em cada iteração é cada vez menor, visto que cada triângulo da próxima geração é  $\frac{1}{4}$  da geração anterior, e que são gerados sempre o triplo de triângulos da geração anterior, temos que a área total retirada em uma geração é sempre  $\frac{3}{4}$  da área retirada na geração anterior.

13- O que deve acontecer com a área restante após infinitas iterações? A área deve chegar a 0? Ou próxima de 0?

R: Intuitivamente podemos perceber que após infinitas iterações a área restante do triângulo tende a 0, podemos verificar isso matematicamente aplicando a fórmula da

P.G. infinita, na P.G. formada pela área dos triângulos retirados:  $S_n = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow S_n =$

$$\frac{\frac{l^2\sqrt{3}}{16}}{1-\frac{3}{4}} \Rightarrow S_n = \frac{\frac{l^2\sqrt{3}}{16}}{\frac{1}{4}} \Rightarrow S_n = \frac{4 \cdot l^2\sqrt{3}}{16} \Rightarrow S_n = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}, n \rightarrow \infty$$

Que é exatamente a área do triângulo inicial, ou seja em infinitas iterações a área total retirada é igual a área do triângulo inicial, portanto não deve sobrar área nenhuma.

14- Use a fórmula da P.G. finita, suponha n como infinito e veja se chega ao mesmo resultado da fórmula da P.G. infinita? Por que isso acontece?

R: Usando a fórmula da P.G. finita na P.G. formada pela área retirada em cada geração,

temos:  $S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1} \Rightarrow S_n = \frac{\frac{l^2\sqrt{3}}{16} \left( \left(\frac{3}{4}\right)^n - 1 \right)}{\frac{3}{4}-1}$ , é importante observar agora, que

$\left(\frac{3}{4}\right)^n$  tende a 0 quando n tende a infinito, daí temos:

$$S_n = \frac{\frac{l^2\sqrt{3}}{16}(-1)}{\frac{-1}{4}} \Rightarrow S_n = \frac{-\frac{l^2\sqrt{3}}{16}}{\frac{-1}{4}} \Rightarrow S_n = \frac{\frac{l^2\sqrt{3}}{16}}{\frac{1}{4}} \Rightarrow S_n = \frac{4l^2\sqrt{3}}{16} \Rightarrow S_n = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

Portanto quando o número de iterações tende a infinito, a área retirada tende a  $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$ , que é a área do triângulo inicial, assim a área restante tende a 0.

Por definição o triângulo de Sierpinski é a área restante após infinitas iterações.

Nas atividades com o triângulo de Sierpinski, os alunos conseguiram perceber a progressão geométrica na quantidade de triângulos gerados a cada iteração, que tem razão  $q = 3$ , e também que a área de cada triângulo de uma iteração é sempre  $\frac{1}{4}$  da área de um triângulo da iteração anterior, conjecturaram fórmulas gerais para o número de triângulos em cada iteração e a área de cada triângulo em uma iteração

As maiores dificuldades apresentadas pelos alunos foram devido ao cálculo da área do triângulo equilátero, por sempre trabalhar com raízes não exatas, para conjecturar a fórmula para a área total retirada em cada iteração, e para calcular a área total retirada quando o número de iterações tende a infinito os alunos precisaram de muita ajuda, e mesmo assim muitos não conseguiram compreender a parte algébrica, mesmo que a grande maioria dos alunos já tivesse percebido intuitivamente que a soma das áreas retiradas em infinitas iterações seria igual a área do triângulo inicial. Dessa forma pudemos discutir bastante as noções intuitivas de limite, e de convergência, já que por mais iterações que possamos fazer, sempre sobrar uma quantidade mínima de área, ou seja, quando o número de iterações tende a infinito, a área restante do triângulo tende a 0.

### 7.18 Usando Logaritmos para determinar a dimensão fractal

**Objetivo:** Compreender o conceito de dimensão fracionária, e estabelecer relação com os logaritmos, calcular a dimensão de alguns fractais

**Pré requisitos:** Compreender e aplicar as propriedades dos logaritmos

**Séries a ser aplicada:** 1º ano do ensino médio

**Tempo previsto:** 2 aulas

Para trabalhar o conceito de dimensão em sala de aula. Foi apresentado aos alunos o roteiro logo abaixo, no qual os alunos se depararam com a definição tradicional de dimensão, e a partir dela são levados de forma quase que intuitiva ao cálculo de dimensões fracionárias.

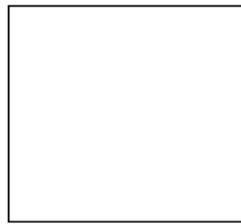
### 7.19 Logaritmos e dimensão Fractal

- Ponto (dimensão): Alguns objetos matemáticos são abstratos, ou seja, são imagináveis. Como por exemplo, o ponto. Não podemos pegar um ponto, pois ele não tem dimensão, nem comprimento, nem largura e nem altura;
- Reta (dimensão 1): A reta não tem largura e nem altura, mas seu comprimento é infinito;



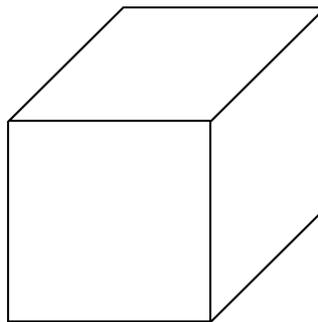
*Figura 59: Segmento de Reta*

- Plano (dimensão 2): O plano apresenta duas dimensões, comprimento e altura, mas não possui profundidade.



*Figura 60: Quadrado*

- Espaço (dimensão 3): O espaço tem três dimensões, comprimento, altura e profundidade, estende-se até o infinito em todas as três dimensões.



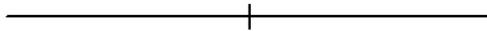
*Figura 61: Cubo*

Porém, a maioria dos objetos na natureza não é formada por linhas e ou curvas, quadrados ou triângulos, mas por figuras geométricas bem mais complexas. Mandelbrot no início dos anos 80 os chamou de Fractais.

Os fractais além de possuírem uma autossimilaridade (uma das propriedades mais importantes), são formas geométricas complexas e irregulares, também podem possuir uma dimensão não inteira.

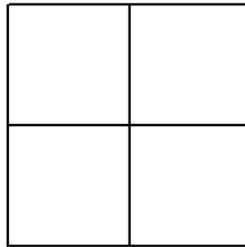
Um segmento de reta, um quadrado e um cubo, que possuem respectivamente dimensões um, dois e três, podem ser repartidos em objetos autossimilares, ou seja, que possuem a propriedade de autossimilaridade.

- 1- Um segmento de reta pode ser dividido em duas partes iguais:



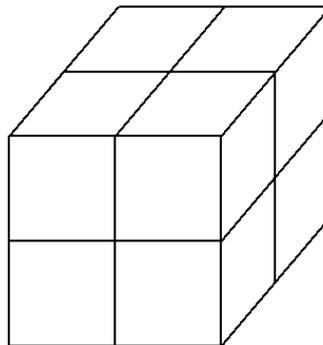
*Figura 62: Divisão da reta*

- 2- Cada lado de um quadrado pode ser dividido em duas partes, obtendo assim quatro novos quadrados congruentes:



*Figura 63: Divisão do quadrado*

- 3- Cada aresta de um cubo pode ser dividida em duas partes iguais, formando assim, oito novos cubos:



*Figura 64: Divisão do cubo*

Organizando essas informações em um quadro temos:

Tabela 6: Dimensões

Figura	Dimensão	Quantidade de peças
Segmento de reta	1	2
Quadrado	2	4
Cubo	3	8

É possível observar que a quantidade de peças aumenta em uma proporção igual a 2, o que podemos chamar de “fator de aumento” igual a 2 para cada lado. Para cada figura podemos escrever a quantidade de peças como uma potência de base 2, onde a dimensão é o expoente.

Tabela 7: Dimensão e fator de aumento

Figura	Dimensão	Quantidade de peças
Segmento de reta	1	$2 = 2^1$
Quadrado	2	$4 = 2^2$
Cubo	3	$8 = 2^3$
Fator de aumento 2	d	$n = 2^d$

Em geral, o número de peças é dado por:  $n = m^d$ , onde n é o número de peças, m é o **fator de aumento** e da **dimensão**.

### 7.20 Dimensão do Triângulo de Sierpinski

O Triângulo de Sierpinski é uma figura geométrica que foi objeto de estudo do matemático Waclaw Sierpinski, e se trata de um fractal que parte inicialmente de um triângulo equilátero e que em seguida toma-se os pontos médios de cada lado do triângulo e a partir deles constrói-se quatro triângulos equiláteros, retirando o triângulo central, como na figura a seguir.

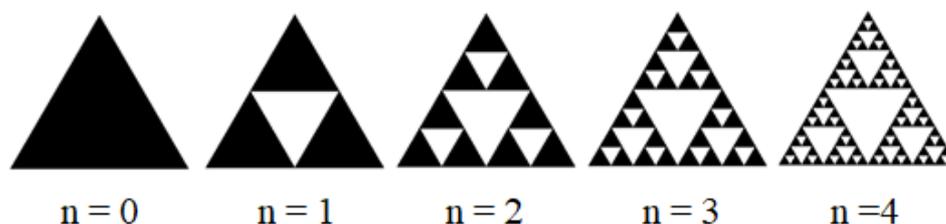


Figura 65: Triângulo de Sierpinski

Tabela 8: Quantidade de triângulos restantes

Iterações	Quantidade de triângulos restantes
Nível 0	1
Nível 1	3
Nível 2	9
Nível 3	27
Nível 4	81

A princípio temos um triângulo e após a primeira iteração temos três triângulos com lados medindo metade do lado do triângulo inicial. Logo, o fator de aumento é 2 e o número de peças restantes é 3.

Dessa forma:  $3 = 2^d$ .

Temos  $2 = 2^1$  e  $4 = 2^2$ , assim a dimensão do Triângulo de Sierpinski estaria entre 1 e 2.

Aplicando logaritmo aos dois lados da equação, temos:

$$\log 3 = \log 2^d$$

Aplicando a propriedade de logaritmo de uma potência:  $\log_a b^k = k \cdot \log_a b$ , obtemos:

$$\log 3 = \log 2^d \Rightarrow \log 3 = d \cdot \log 2 \Rightarrow d = \frac{\log 3}{\log 2} \Rightarrow d \cong 1,6$$

Logo a dimensão do Triângulo de Sierpinski é, aproximadamente, 1,6, que é uma dimensão não inteira.

### 7.21 Dimensão da curva de Koch

A Curva de Koch foi criada pelo matemático Helge Von Koch. Esse fractal mais tarde originou a "Ilha de Koch" ou "Floco de Neve de Koch". A Curva de Koch é um fractal constituído a partir de um segmento de reta, no qual divide-se esse segmento em três partes iguais e retira-se a parte do meio, substituindo-a por um triângulo equilátero sem base, como na figura a seguir.

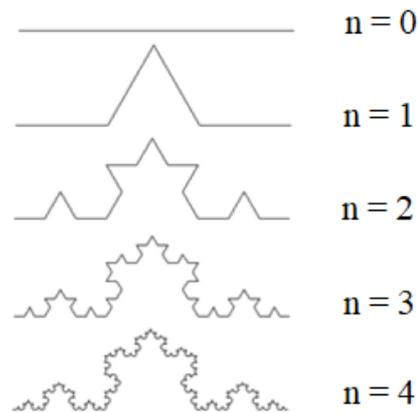


Figura 66: Curva de Koch

Tabela 9: Curva de Koch

Iterações	Quantidade de segmentos
Nível 0	1
Nível 1	4
Nível 2	16
Nível 3	64
...	...

A sequência (1,4, 16, 64...) é uma Progressão Geométrica (PG) de razão 4, onde para saber a quantidade de segmentos que o fractal Curva de Koch terá em n iteração (nível n) é preciso apenas aplicar a fórmula do termo geral da PG:  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ .

No nível inicial, temos um segmento de reta, no nível seguinte, 4 segmentos, com uma medida igual a  $\frac{1}{3}$  da medida do segmento inicial. Logo, o número de peças é 4 e o fator de aumento é 3.

$$\text{Dessa forma: } 4 = 3^d$$

$$\begin{aligned} \text{Aplicando a propriedade de logaritmo de uma potência, obtemos: } \log 4 &= \log 3^d \Rightarrow \\ \log 4 &= d \cdot \log 3 \Rightarrow d = \frac{\log 4}{\log 3} \Rightarrow d \cong 1,3 \end{aligned}$$

Logo a dimensão da Curva de Koch é, aproximadamente, 1,3 que é uma dimensão não inteira.

## 7.22 Dimensão do Conjunto de Cantor

O Conjunto de Cantor também conhecido como "Poeira de Cantor" é o primeiro objeto reconhecido como Fractal. Foi desenvolvido pelo matemático Georg Cantor, e é um subconjunto infinito de pontos no intervalo unitário  $[0,1]$ .

Para a construção do Conjunto de Cantor:

- 1- Considere um segmento de reta unitário;
- 2- Divida esse segmento em três partes iguais e retire a parte central;
- 3- Aos segmentos restantes, aplica-se o passo 2 sucessivamente.

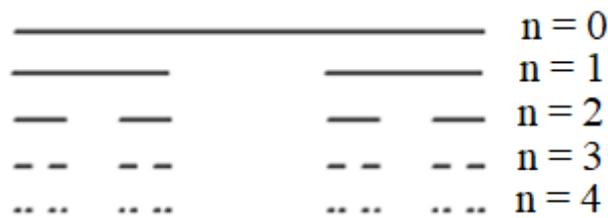


Figura 67: Conjunto de Cantor

Tabela 10: Número de segmentos no Conjunto de Cantor

Iterações	Quantidade de segmentos
Nível 0	1
Nível 1	2
Nível 2	4
Nível 3	8
...	...

Tomando a sequência dos números (2, 4, 8,...) que compõe as quantidades de segmentos do Conjunto de Cantor em cada iteração temos uma sequência numérica não nula, na qual é constante o quociente da divisão de cada termo (a partir do segundo) pelo termo anterior, ou seja, uma Progressão Geométrica (PG) de razão 2, onde para saber a quantidade de segmentos que o fractal Conjunto de Cantor terá em n iteração (nível n) é preciso apenas aplicar a fórmula do termo geral da P.G.:  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ , onde  $a_n$  é o termo geral, n é o número de termos,  $a_1$  é o primeiro termo e q a razão.

No nível inicial, temos um segmento de reta, no nível seguinte, 2 segmentos, com uma medida igual a  $\frac{1}{3}$  da medida do segmento inicial. Logo, o número de peças é 2 e o fator de aumento é 3. Então temos:

$$2 = 3^d$$

A dimensão do conjunto de cantor será:

$$\log 2 = \log 3^d \Rightarrow \log 2 = d \cdot \log 3 \Rightarrow d = \frac{\log 2}{\log 3} \Rightarrow d \cong 0,63$$

### 7.23 Dimensão da curva de Peano

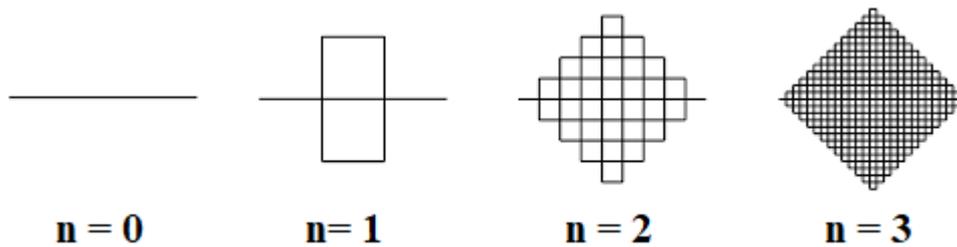


Figura 68: Curva de Peano

No nível inicial, temos um segmento de reta, no nível seguinte, 9 segmentos, com uma medida igual a  $\frac{1}{3}$  da medida do segmento inicial. Logo, o número de peças é 9 e o fator de aumento é 3. Então temos:

$$9 = 3^d$$

A dimensão do conjunto de cantor pode ser obtida usando logaritmos para resolver a equação exponencial.

$$\log 9 = \log 3^d \Rightarrow \log 9 = d \cdot \log 3 \Rightarrow d = \frac{\log 9}{\log 3} \Rightarrow d = 2$$

Nesse caso é possível perceber que a curva de Peano tem como dimensão fractal, um número inteiro, isso acontece pois após infinitas iterações, a tendência é que a curva preencha completamente o plano.

### 7.24 Dimensão da curva de Hilbert

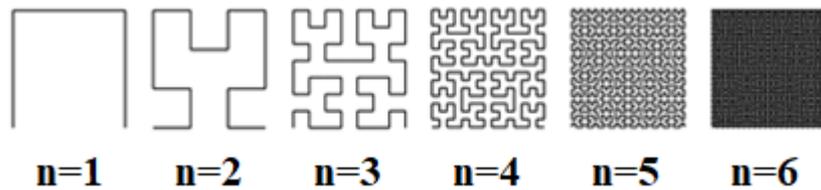


Figura 69: Curva de Hilbert

Cada segmento é dividido em 4 novos segmentos a cada geração, com uma medida igual a  $\frac{1}{2}$  da medida do segmento inicial. Logo, o número de peças é 4 e o fator de aumento é 2. Então temos:

$$4 = 2^d$$

A dimensão do conjunto de cantor será:

$$\log 4 = \log 2^d \Rightarrow \log 4 = d \cdot \log 2 \Rightarrow d = \frac{\log 4}{\log 2} \Rightarrow d = 2$$

Nesse caso é possível perceber que a curva de Hilbert tem como dimensão fractal, um número inteiro, isso acontece pois após infinitas iterações, a tendência é que a curva se torne completamente preenchida.

A atividade sobre logaritmos foi feita no sentido de definir a dimensão fractal. A atividade foi particularmente interessante pois mostra uma aplicação para os logaritmos. O outro ponto é que foi possível sem o uso de logaritmos obter aproximações para a dimensão de alguns fractais, porém de forma muito mais demorada, deixando claro o quanto as propriedades dos logaritmos podem facilitar os cálculos.

## **8. Conclusão**

### **8.1 Experiência dos alunos**

O uso de atividades envolvendo geometria fractal no ensino de progressões geométricas teve aspectos que despertaram bastante a curiosidade dos alunos, a construção dos cartões fractais foi útil para aumentar a percepção dos alunos para a existência de progressões geométricas nos mesmos, e também para aprofundar o estudo das progressões ao conjecturar fórmulas para o termo geral dessas delas, além de melhorar a compreensão dos alunos a respeito de álgebra.

É fato que algumas atividades propostas estão além do que muitos alunos são capazes de realizar nesse momento, mesmo que orientados pelo professor, por isso é importante conhecer bem o público alvo, e avaliar até que ponto as atividades propostas despertam a curiosidade dos alunos e o ajudam a melhorar sua compreensão dos conceitos estudados.

### **8.2 Experiência como professor**

Do ponto de vista do professor, posso dizer que o desenvolvimento desse trabalho contribuiu de forma muito positiva para minha formação em diversos aspectos. Desenvolver trabalhos que envolvam recortes, e atividades manuais em matemática é particularmente interessante, pois é possível perceber uma participação muito maior por parte dos alunos quando comparamos com aulas tradicionais, é claro que não podemos substituir todo o conteúdo e habilidades trabalhados por atividades práticas, mas as inserir quando possível pode sim aumentar o interesse do aluno, o que pode ter repercussão até mesmo comportamental, visto que aumentando o interesse do aluno, há uma grande chance do mesmo mudar sua relação com a disciplina, com o professor, e até mesmo com a escola.

Outro ponto interessante é o de construir o conhecimento tendo o professor como mediador, tanto as atividades com cálculos quanto as algébricas contemplavam vários níveis de dificuldade. Ficou evidente que cada aluno conseguiu desenvolver as atividades até um certo

ponto, alguns chegando a resolver todas elas, outros fazendo apenas as mais simples, porém quando o aluno tem a oportunidade de investigar, e tentar através da observação de determinados padrões conjecturar fórmulas matemáticas, ficou visível que esse conhecimento tem maior significado para o aluno, visto que ele partiu da observação até chegar ao modelo matemático.

Vale lembrar que não estamos falando de nenhuma mágica, nem dizendo que todos os alunos tiveram um rendimento excepcional, mas que trabalhar dessa forma proporciona novas possibilidades, e pode sim chamar um pouco mais a atenção daquele aluno que normalmente não se interessa tanto, e instigar e motivar ainda mais aquele que de certa forma se identifica mais com a disciplina.

## Bibliografia

- [1] Almeida, T. Becker. Fractais no Ensino Fundamental: Explorando Essa Nova Geometria
- [2] Boyer, C.B. História da matemática. São Paulo: Edgar Blucher, 1974
- [3] BARBOSA, Ruy Madsen. Descobrimo a Geometria Fractal para a sala de aula. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2002.
- [4] Corrêa, Augusto de Oliveira. Geometria Fractal no Ensino Médio. 2014. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Amapá
- [5] Côrtes, Ivana Resende da Costa. Geometria Fractal no Ensino Médio: Teoria e Prática, 2014
- [6] De Carvalho, H. C. Geometria Fractal: Perspectivas e possibilidades no ensino de matemática. 2005. Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal do Paraná
- [7] Falconer, K. Fractal geometry: Mathematical foundations and application. Chichester; John Wiley & Sons, 1990.
- [8] Gomes, Antonio do Nascimento. Uma proposta de ensino envolvendo Geometria Fractal para o estudo de figuras planas. 2010. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) UFSCar
- [9] Guzmán, M. Estructuras Fractales y sus Aplicaciones. Ed. Labor S. A, Barcelona. Espanha.1993.
- [10] J anos, Michel. Geometria Fractal. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltada, 2008.
- [11] Mandelbrot, B. Objectos Fractais, Ed. Gradiva. 1991
- [12] Nunes, Raquel Sofia Rebelo. Geometria Fractal e Aplicações. Dissertação de Mestrado – Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. 2006
- [13] Reis, Jakson Ney da Costa. Fractais no Ensino Médio: Da observação de padrões da natureza ao uso da geometria. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal Rural do Semi-Árido

[14] Revista Eletrônica de Matemática: Uma abordagem da geometria fractal para o ensino médio. Volume 10, 2017.

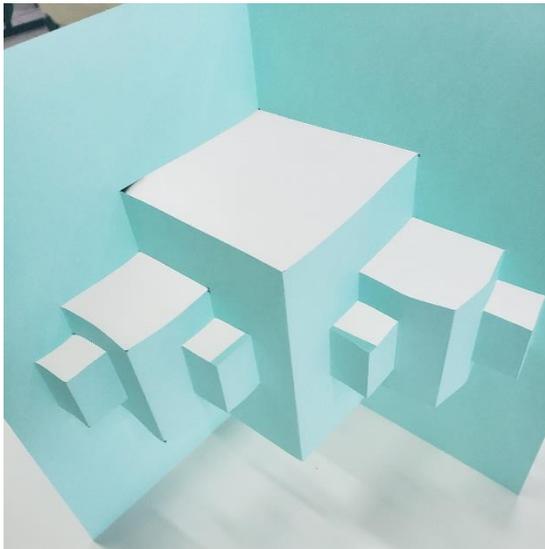
[15] Souza, Rodrigo Silva. Fractais Geométricos. 2010. Dissertação – Universidade Federal de Alfenas

## Anexos

### 1- Lista de atividades sobre o primeiro cartão fractal

**Objetivo:** Investigar as propriedades dos fractais, associar fractais a ideia de progressões geométricas, e inserir intuitivamente o conceito de limite

**Material:** Régua, tesoura e papel sulfite



#### Questões:

- 1- Chamando de  $a$  a altura do paralelepípedo da primeira geração, qual deve ser a altura dos paralelepípedos das próximas gerações?
- 2- É possível associar a sequência formada pelas medidas das alturas ao conteúdo estudado no bimestre anterior?
- 3- Que tipo de progressão é essa?
- 4- Qual a razão dessa progressão?
- 5- Calcule o volume de um paralelepípedo em cada geração.
- 6- É possível perceber algum tipo de progressão em relação ao volume dos paralelepípedos?
- 7- Qual a razão dessa progressão?
- 8- Considerando que o volume dos paralelepípedos em cada geração fica cada vez menor, se somarmos os volumes dos paralelepípedos de todas as gerações, o volume irá crescer até o infinito?

- 9- Observe a quantidade de paralelepípedos em cada geração, monte uma tabela com a número da geração e a quantidade de paralelepípedos gerados nela, você obtém uma progressão?

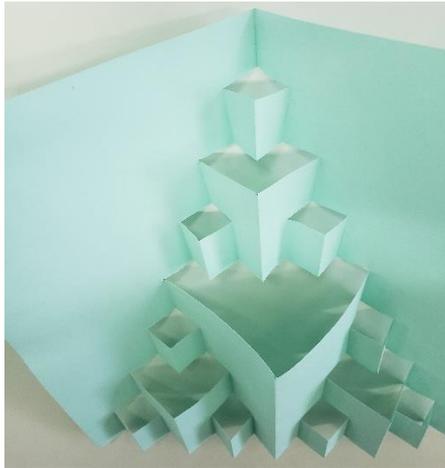
<i>Iteração</i>	<i>Número de paralelepípedos novos</i>
<i>1</i>	
<i>2</i>	
<i>3</i>	
<i>4</i>	
<i>5</i>	
<i>...</i>	
<i>N</i>	

- 10- Qual a razão dessa progressão?

## 2- Questões sobre o segundo cartão fractal

**Objetivo:** Investigar as propriedades dos fractais, associar fractais a ideia de progressões geométricas, e inserir intuitivamente o conceito de limite

**Material:** Régua, tesoura e papel sulfite

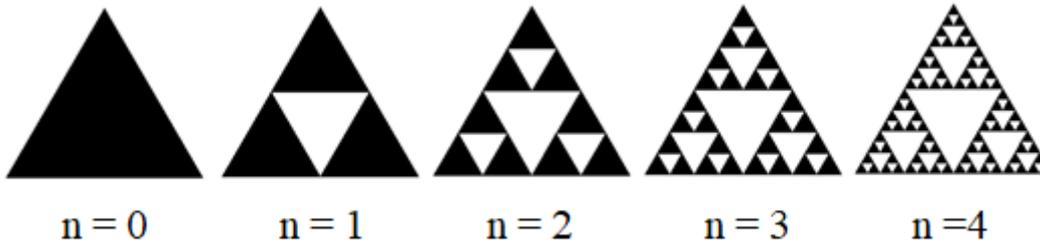


### Questões:

- 1- Qual o número de paralelepípedos gerados na quarta geração?
- 2- Conjecture uma fórmula geral para o número de paralelepípedos em cada geração.
- 3- A sequência formada pela quantidade de paralelepípedos em cada geração forma uma progressão?
- 4- Qual a razão dessa progressão?
- 5- Estabeleça uma fórmula para calcular a soma do número de paralelepípedos até a  $n$ -ésima geração.
- 6- Chamando de  $a$  a altura do paralelepípedo da primeira geração, estabeleça uma fórmula para calcular o volume de um paralelepípedo na  $n$ -ésima geração.
- 7- A sequência formada pelo volume de um paralelepípedo de cada geração forma uma progressão?
- 8- Qual a razão dessa progressão?
- 9- Conjecture uma fórmula para o volume total na  $n$ -ésima geração
- 10- Se somarmos os volumes de todos os paralelepípedos até infinitas iterações, o volume total será infinito?

### 3- Lista de atividades sobre o triângulo de Sierpinski

**Objetivo:** Investigar as propriedades do triângulo de Sierpinski, verificar quais conceitos matemáticos estudados em sala de aula estão associados à esse triângulo, e consequentemente à geometria fractal.



- 1- Qual o número de triângulos retirados na primeira iteração?
- 2- Qual o número de triângulos retirados na segunda iteração?
- 3- Qual o número de triângulos retirados na iteração número  $n$ ?
- 4- Monte uma sequência com o número de triângulos retirados em cada iteração, você obtém algum tipo de progressão? Qual? Qual a razão dessa progressão?
- 5- Considerando  $L$  o lado do triângulo inicial, qual a área desse triângulo?
- 6- Considerando  $L$  o lado do triângulo inicial, qual a área do triângulo retirado na primeira iteração?
- 7- Qual a fórmula para calcular a área de um triângulo retirado na  $n$ -ésima geração?
- 8- A área de um triângulo de cada geração forma uma P.G.? Qual a razão dessa P.G.?
- 9- Complete a tabela:

Iteração (n)	Medida dos lados	Número de triângulos retirados	Área de cada triângulo
0			
1			
2			
3			
4			

- 10- Crie uma fórmula para calcular a área total retirada em cada iteração
- 11- A área total retirada em cada iteração forma uma P.G.?

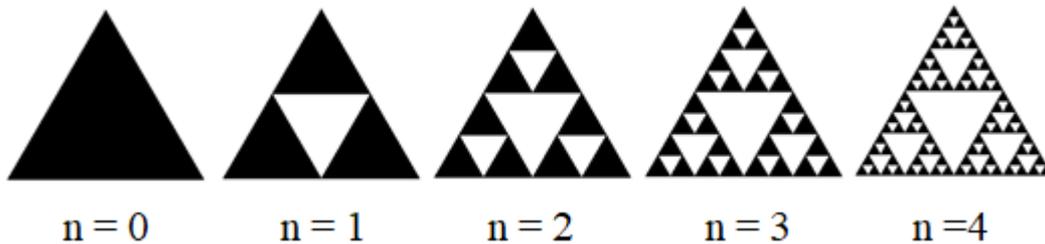
12- O que você percebe em relação a área total retirada em cada iteração? Está retirando cada vez mais, ou cada vez menos área?

13- O que deve acontecer com a área restante após infinitas iterações? A área deve chegar a 0? Ou próxima de 0?

Use a fórmula da P.G. finita, usando  $n$  como infinito e veja se chega ao mesmo resultado da fórmula da P.G. infinita? Por que isso acontece?

#### 4- Dimensão do Triângulo de Sierpinski

O Triângulo de Sierpinski é uma figura geométrica que foi objeto de estudo do matemático Waclaw Sierpinski (1882-1969), e se trata de um fractal que parte inicialmente de um triângulo equilátero e que em seguida toma-se os pontos médios de cada lado do triângulo e a partir deles constrói-se quatro triângulos equiláteros, retirando o triângulo central, como na figura a seguir.



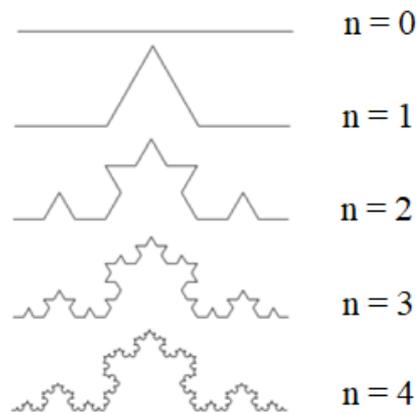
Iterações	Quantidade de triângulos restantes
Nível 0	1
Nível 1	3
Nível 2	9
Nível 3	27
Nível 4	81
...	...

A princípio temos um triângulo e após a primeira iteração temos três triângulos com lados medindo metade do lado do triângulo inicial. Logo, o fator de aumento é 2 e o número de peças restantes é 3.

Calcule a dimensão do triângulo de Sierpinski

### 5- Dimensão da curva de Koch

A Curva de Koch foi criada pelo matemático Helge Von Koch (1870-1924). Esse fractal mais tarde originou a "Ilha de Koch" ou "Floco de Neve de Koch". A Curva de Koch é um fractal constituído a partir de um segmento de reta, no qual divide-se esse segmento em três partes iguais e retira-se a parte do meio, substituindo-a por um triângulo equilátero sem base, como na figura a seguir.



Iterações	Quantidade de segmentos
Nível 0	1
Nível 1	4
Nível 2	16
Nível 3	64
...	...

No nível inicial, temos um segmento de reta, no nível seguinte, 4 segmentos, com uma medida igual a  $\frac{1}{3}$  da medida do segmento inicial. Logo, o número de peças é 4 e o fator de aumento é 3.

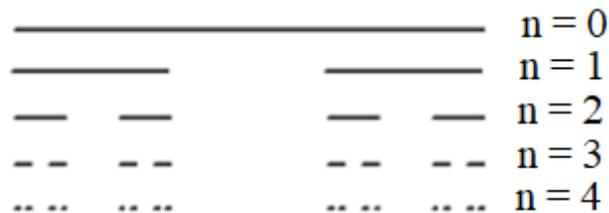
Calcule a dimensão da curva de Koch

## 6- Dimensão do Conjunto de Cantor

O Conjunto de Cantor também conhecido como "Poeira de Cantor" é o primeiro objeto reconhecido como Fractal. Foi desenvolvido pelo matemático Georg Cantor (1845-1918) e é um subconjunto infinito de pontos no intervalo unitário  $[0,1]$ .

Para a construção do Conjunto de Cantor:

- 3- Considere um segmento de reta unitário;
- 4- Divida esse segmento em três partes iguais e retire a parte central;
- 3- Aos segmentos restantes, aplica-se o passo 2 sucessivamente.



Iterações	Quantidade de segmentos
Nível 0	1
Nível 1	2
Nível 2	4
Nível 3	8
...	...

No nível inicial, temos um segmento de reta, no nível seguinte, 2 segmentos, com uma medida igual a  $\frac{1}{3}$  da medida do segmento inicial. Logo, o número de peças é 2 e o fator de aumento é 3.

Calcule a dimensão do conjunto de Cantor.