

Fernando Redivo Cardoso

# **Superposição de Estados Comprimidos de Dois Modos e Aplicações em Informação Quântica**

São Carlos

2019



Fernando Redivo Cardoso

# **Superposição de Estados Comprimidos de Dois Modos e Aplicações em Informação Quântica**

Dissertação de Mestrado apresentada à Coordenação de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia (CCET) da Universidade Federal de São Carlos.

Universidade Federal de São Carlos – UFSCar  
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia (CCET)  
Programa de Pós-Graduação em Física/CCET

Orientador: Celso Jorge Villas-Bôas

São Carlos

2019





UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Física

---

Folha de Aprovação

---

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Fernando Redivo Cardoso, realizada em 07/03/2019:



---

Prof. Dr. Celso Jorge Villas Boas  
UFSCar



---

Prof. Dr. Halyne Silva Borges  
IFGoiano



---

Prof. Dr. Tommaso Macri  
UFRN



*Aos meus pais e amigos.*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao Prof. Dr. Celso Jorge Villas-Bôas pela orientação e incentivo durante os dois anos em que desenvolvi o trabalho de mestrado, em especial, pela inspiração, ajuda e empatia nos momentos em que passei por dificuldades acadêmicas e pessoais. Agradeço aos meus pais, Regina Célia Redivo Cardoso e José Roberto Cardoso pelo amor, carinho e apoio nas decisões que tomei nas vidas particular e acadêmica, sem os quais não estaria escrevendo estas linhas hoje.

Ao meu amigo Gabriel de Andrade da Silva, pelo apoio, carinho e companheirismo incomensuráveis, desde a época da graduação até os dias de hoje. Ao meu amigo Murilo Henrique de Oliveira, pelas longas conversas e desabafos, especialmente nos momentos de dificuldade. Ao Leonardo Brito, pelas inúmeras tardes e noites de estudo e prazerosas conversas. Aos meus amigos de convivência quase diária: Ingryd, Michel e José, agradeço pelos momentos de descontração e pelos conselhos que me foram dados, tanto na área acadêmica quanto pessoal.

Ao Daniel Zini Rossato, pela colaboração no trabalho e pela disposição em esclarecer minhas dúvidas e auxiliar em minhas dificuldades. Aos demais integrantes do grupo: Taysa, Carlos e Halyne, pela amizade, apoio e excelentes conversas.

Agradeço ao Departamento de Física da Universidade Federal de São Carlos e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.





# Resumo

Neste trabalho, apresentamos uma nova classe de estados quânticos para potenciais aplicações nas áreas de metrologia e informação quântica, os estados que denominamos de “EPR par” e “EPR ímpar” [1]. Apresentamos uma revisão sobre os conceitos básicos do processo de quantização do campo eletromagnético, juntamente com as funções de probabilidade e distribuição destas no espaço de fase. Apresentamos os principais estados do campo eletromagnético, juntamente com suas propriedades estatísticas relevantes, além dos conceitos básicos envolvidos nos estudos sobre metrologia quântica para estimação de um dado parâmetro. A nova classe de estados é então apresentada, e suas propriedades gerais são discutidas. Com uma definição simples de separabilidade para estados puros de dois modos, são estudadas as propriedades de emaranhamento entre modos, e a quantificação destes é comparada diretamente com o estado original de EPR [2]. Apresentamos resultados referentes à aplicação dos estados de EPR par e ímpar na área de metrologia quântica para estimação de um parâmetro desconhecido envolvido em um processo dinâmico, comparando o resultado com os estados comprimidos de um modo, que têm importância relevante na área de metrologia [3]. Por fim, mostramos que agindo localmente sobre um dos modos dos estados de EPR par e ímpar, é possível contruir o que chamamos de estados “pseudo-térmicos” do campo, que consistem em estados térmicos com misturas de estados de Fock previamente selecionados através do processo de preparação [1], com coeficientes de probabilidade correspondentes à distribuição térmica de fótons.

**Palavras-chave:** Interação radiação-matéria, estados do campo eletromagnético, emaranhamento, metrologia quântica, informação quântica de Fisher, estados térmicos.



# Abstract

In this work, we present a new class of quantum states for applications in quantum metrology and quantum information, the states here named as “Even EPR” and “Odd EPR” [1]. We present a review of the basic concepts of quantization of the electromagnetic field, along with the probability functions and distributions in phase space. We present the main states of the electromagnetic field and their relevant statistical properties, besides the basic concepts involved in quantum metrology for a single parameter estimation. The new class of states is presented, and its general properties are discussed. With a simple definition of separability for two-mode pure states, the entanglement properties between the modes of the field are studied, and its quantifications are directly compared with the original EPR states [2]. We present results about applications of the Even and Odd EPR states in quantum metrology for estimation of a single parameter, comparing the results with the single-mode squeezed states, which has great importance in quantum metrology [3]. Lastly, we show that acting locally onto one of the modes of the even and odd EPR states, it is possible to construct what we call “pseudo-thermal” states of the field, which consists in mixtures of Fock states previously selected through the preparation process [1], with probability coefficients which correspond to thermal distribution of photons.

**Keywords:** Radiation-matter interaction, states of the electromagnetic field, entanglement, quantum metrology, quantum Fisher information, thermal states.



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Funções de Wigner para os estados de Fock $ 1\rangle$ , $ 2\rangle$ e $ 3\rangle$ . . . . .	40
Figura 2 – Distribuições de fótons $P(n)$ para estados térmicos com $\langle N \rangle = 0$ e $\langle N \rangle \approx 2.5$ . . . . .	42
Figura 3 – Funções de Wigner para estados térmicos com $\langle N \rangle = 0$ e $\langle N \rangle \approx 2.5$ . . . . .	42
Figura 4 – Projeções sobrepostas das funções de Wigner para os estados térmicos contendo $\langle N \rangle = 0$ e $\langle N \rangle \approx 2.5$ fótons. . . . .	43
Figura 5 – Distribuições de fótons $P(n)$ para os estados de vácuo (5a) e coerente, com $\alpha = \sqrt{3}$ . . . . .	45
Figura 6 – Projeções das funções de Wigner para os estados de vácuo e coerente, com $\alpha = \sqrt{3}$ . . . . .	45
Figura 7 – Distribuições de fótons $P(n)$ para um estado coerente $ \alpha = \sqrt{3}\rangle$ e um estado coerente comprimido $S(\xi = 0, 5)  \alpha = \sqrt{3}\rangle$ . . . . .	47
Figura 8 – Projeções das funções de Wigner para o estado de vácuo $ 0\rangle$ e para o estado de vácuo comprimido $S(\xi = 0, 5)  0\rangle$ . . . . .	48
Figura 9 – Distribuição de fótons e função de Wigner para o estado de EPR, após ser tomado o traço parcial sobre as variáveis de um dos modos. . . . .	51
Figura 10 – Distribuições de fótons para os estados de EPR par e ímpar, após o traço parcial sobre um dos modos do sistema. . . . .	54
Figura 11 – Projeções sobrepostas das funções de Wigner para os estados de EPR par e ímpar. . . . .	54
Figura 12 – Distribuições de fótons e funções de Wigner em três dimensões para as superposições de estados comprimidos com fase relativa. . . . .	56
Figura 13 – Funções de correlação $\log g^{(2)}(0)$ para os estados de EPR, EPR par e EPR ímpar. . . . .	57
Figura 14 – Graus de emaranhamento para os estados comprimidos de dois modos com e sem fase relativa. . . . .	63
Figura 15 – Mapeamento em três dimensões do grau de emaranhamento para as superposições com fator de fase relativa. . . . .	64
Figura 16 – Comparação de graus de emaranhamento entre os estados de EPR, EPR par, EPR ímpar e superposições com fase relativa. . . . .	64
Figura 17 – Comparação direta das projeções das funções de Wigner sobre o eixo $q$ entre os estados correspondentes a $ \psi_+(r)\rangle$ , representado por $\rho_{1,+}(r)$ , e os estados com fase relativa, $\rho_1(r, \varphi)$ . . . . .	65
Figura 18 – Comparação direta das projeções das funções de Wigner para os estados comprimido de um modo, EPR par e EPR ímpar. . . . .	68

Figura 19 – Comparação das larguras máximas a meia altura da função de Wigner, para os estados comprimido de um modo, EPR par e EPR ímpar. . . . .	69
Figura 20 – Projeções das funções de Wigner dos estados comprimido de um modo e ímpar, no ponto de cruzamento $r = 0,692$ . . . . .	70
Figura 21 – Informação de Fisher em função do módulo de compressão $r$ e do número médio de fótons para os estados comprimido e anticomprimido de um modo, EPR par e EPR ímpar. . . . .	71
Figura 22 – Informação de Fisher em função do módulo de compressão e do número médio de fótons para o estado de EPR. . . . .	72
Figura 23 – Mapeamento em três dimensões da informação de Fisher do sistema representado pela matriz densidade reduzida $\rho_1(r, \varphi)$ . . . . .	73
Figura 24 – Projeções de $W(q, p)$ para as matrizes densidade reduzidas que representam os estados de EPR pseudo-térmicos par e ímpar. . . . .	77

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>15</b>
<b>2</b>	<b>CONCEITOS BÁSICOS E OBJETIVOS</b>	<b>17</b>
<b>2.1</b>	<b>Quantização do Campo Eletromagnético</b>	<b>17</b>
2.1.1	Representação de Ondas Propagantes	19
2.1.2	Hamiltoniana Clássica	20
2.1.3	Quantização da Hamiltoniana Clássica	21
2.1.4	Autoestados do Hamiltoniano Quantizado	22
<b>2.2</b>	<b>Funções de Probabilidade</b>	<b>24</b>
2.2.1	O Operador Densidade	24
2.2.1.1	Operador Densidade Para Estados Puros e Mistos	24
2.2.2	Distribuição de Fótons	25
2.2.2.1	Correlações em Processos de Absorção de Fótons	26
2.2.3	Função de Wigner $W(q, p)$	28
<b>2.3</b>	<b>Metrologia Quântica</b>	<b>31</b>
2.3.1	Protocolo de Estimação	31
2.3.2	Informação Quântica de Fisher	34
2.3.2.1	Estados Puros	35
2.3.2.2	Estados Mistos	36
<b>3</b>	<b>ESTADOS DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO</b>	<b>39</b>
<b>3.1</b>	<b>Estados de Fock</b>	<b>39</b>
<b>3.2</b>	<b>Estado Térmico</b>	<b>40</b>
<b>3.3</b>	<b>Estado Coerente</b>	<b>43</b>
<b>3.4</b>	<b>Estado Comprimido</b>	<b>46</b>
<b>4</b>	<b>ESTADOS COMPRIMIDOS DE DOIS MODOS</b>	<b>49</b>
<b>4.1</b>	<b>Estados de EPR</b>	<b>49</b>
<b>4.2</b>	<b>Estados de EPR Par e Ímpar</b>	<b>52</b>
<b>5</b>	<b>ESTUDO E QUANTIFICAÇÃO DE EMARANHAMENTO EM ESTADOS PUROS</b>	<b>59</b>
<b>5.1</b>	<b>Separabilidade em Sistemas Quânticos Compostos</b>	<b>59</b>
<b>5.2</b>	<b>Quantificação do Emaranhamento nos Estados Comprimidos de Dois Modos</b>	<b>62</b>



<b>6</b>	<b>METROLOGIA QUÂNTICA COM ESTADOS COMPRIMIDOS DE UM E DOIS MODOS</b> . . . . .	<b>67</b>
<b>6.1</b>	<b>Cálculos e Comparações de Distribuições de Probabilidade e Informação de Fisher</b> . . . . .	<b>67</b>
<b>7</b>	<b>ESTADOS TÉRMICOS E “PSEUDO-TÉRMICOS” DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO</b> . . . . .	<b>75</b>
<b>7.1</b>	<b>Estado de EPR reduzido e Estado Térmico</b> . . . . .	<b>75</b>
<b>7.2</b>	<b>Estados de EPR par e ímpar e Estados Pseudo-Térmicos</b> . . . . .	<b>75</b>
<b>8</b>	<b>CONCLUSÕES</b> . . . . .	<b>79</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>81</b>
	<b>APÊNDICE A – FUNÇÕES DE WIGNER PARA OS ESTADOS DE EPR E SUPERPOSIÇÕES COM FASE RELATIVA</b> . . . . .	<b>85</b>
<b>A.1</b>	<b>Estado de EPR reduzido</b> . . . . .	<b>86</b>
<b>A.2</b>	<b>Superposições de Estados Comprimidos Reduzidas</b> . . . . .	<b>86</b>
<b>A.2.1</b>	<b>Estados Reduzidos Par e Ímpar</b> . . . . .	<b>87</b>
<b>A.3</b>	<b>Estados Pseudo-Térmicos</b> . . . . .	<b>87</b>
<b>A.3.1</b>	<b>Pseudo-Térmico Par</b> . . . . .	<b>88</b>
<b>A.3.2</b>	<b>Pseudo-Térmico Ímpar</b> . . . . .	<b>89</b>
	<b>APÊNDICE B – CÁLCULO DE <math>g^{(2)}(0)</math> NOS ESTADOS DE EPR, EPR PAR E EPR ÍMPAR</b> . . . . .	<b>91</b>
<b>B.1</b>	<b>Estado de EPR</b> . . . . .	<b>91</b>
<b>B.2</b>	<b>Estados de EPR par e ímpar</b> . . . . .	<b>92</b>
	<b>APÊNDICE C – CÁLCULO DOS GRAUS DE EMARANHAMENTO</b> . . . . .	<b>95</b>
<b>C.1</b>	<b>Estado de EPR</b> . . . . .	<b>95</b>
<b>C.2</b>	<b>Superposições com Fase Relativa</b> . . . . .	<b>95</b>
<b>C.2.1</b>	<b>Estados Par e Ímpar</b> . . . . .	<b>96</b>
	<b>APÊNDICE D – CÁLCULO DA INFORMAÇÃO DE FISHER</b> . . . . .	<b>97</b>
<b>D.1</b>	<b>Estado de EPR</b> . . . . .	<b>98</b>
<b>D.2</b>	<b>Superposição com Fase Relativa</b> . . . . .	<b>100</b>
<b>D.2.1</b>	<b>Estado Par</b> . . . . .	<b>104</b>
<b>D.2.2</b>	<b>Estado Ímpar</b> . . . . .	<b>104</b>
<b>D.3</b>	<b>Estado de Vácuo Comprimido de um Modo</b> . . . . .	<b>105</b>

# 1 Introdução

Com o advento da Mecânica Quântica, no início do século XX, novos conceitos foram empregados nas teorias físicas com o objetivo explicar o comportamento da natureza, como a discretização da energia em múltiplos de  $\hbar\omega$  (sendo  $\hbar$  a constante de Planck dividida por  $2\pi$  e  $\omega$  uma dada frequência associada à energia do sistema) como suposto por Planck [4], ou o comportamento ondulatório da matéria, no experimento da dupla fenda [5]. Entre os fenômenos presentes na mecânica quântica, destacam-se a superposição de estados, que caracteriza o comportamento de uma partícula passando simultaneamente pelas duas fendas, por exemplo, e os estados emaranhados, que exprimem o caráter não local da teoria [6]. O estudo e emprego de tais propriedades quânticas levam a diversas aplicações e avanços tecnológicos, como por exemplo, em transmissão, segurança e processamento de informação com utilização de teletransporte [7, 8], criptografia [8, 9], e computação quânticas [8, 9, 10], além da aplicação de correlações quânticas na estimação de parâmetros presentes em processos dinâmicos naturais [11, 12]. Temos presenciado grandes avanços tecnológicos desde as proposições teóricas dessas novas aplicações da teoria quântica, o que permitiu verificá-las em inúmeros experimentos e em distintos sistemas físicos como em eletrodinâmica quântica de cavidades ou de circuitos, íons aprisionados, fótons gêmeos, etc [8]. Por exemplo, em 2004 foi realizada a primeira operação bancária utilizando-se criptografia quântica [13] e mais recentemente foi possível implementar um algoritmo de criptografia quântica [14] e teletransporte de estados quânticos [15] envolvendo um laboratório na Terra e um satélite. Também vemos algoritmos de computação quântica sendo implementados em íons aprisionados [16], qubits supercondutores [17]. Simuladores quânticos também foram implementados com sucesso, por exemplo para simular pequenas moléculas com qubits supercondutores [18] ou redes ópticas [19]. Desse modo, o estudo de novos sistemas físicos e novos estados que apresentam melhores propriedades quânticas é de fundamental importância para o progresso dessas novas tecnologias. Com base nisto, propõe-se neste trabalho o estudo de uma nova classe de estados quânticos para aplicações nas áreas de Metrologia e Informação Quânticas, com a vantagem de que estes podem ser gerados experimentalmente no contexto de eletrodinâmica quântica de cavidades [1].

Primeiramente, são introduzidos os conceitos básicos, como a quantização do campo eletromagnético e propriedades de distribuição de probabilidade. Em seguida são apresentados os estados do campo, e suas propriedades são discutidas. Apresentamos então os estados comprimidos de dois modos, com uma revisão básica sobre o processo de geração no contexto de cavidades ópticas, em conjunto com suas propriedades gerais. Posteriormente, são apresentados os estudos de emaranhamento nas superposições de estados comprimidos de dois modos, seguidos de aplicações em metrologia quântica, e,

por último, a apresentação dos estados reduzidos de cada subsistema como estados que denominamos “pseudo-térmicos”, por suas distribuições características de probabilidade.

## 2 Conceitos Básicos e Objetivos

No presente trabalho, estudaremos novas classes de estados comprimidos de dois modos, compostas por estados do campo eletromagnético com distribuições peculiares de probabilidade entre níveis de ocupação e no espaço de fase, além de potenciais aplicações destes estados nas áreas de metrologia e informação quânticas, isto é, na estimação de parâmetros desconhecidos envolvidos em processos dinâmicos, e no cálculo de propriedades de emaranhamento entre modos do sistema. Para tal estudo, faz-se necessária uma apresentação dos conceitos básicos da óptica quântica, tais como a quantização do campo eletromagnético no interior de uma cavidade, propriedades de distribuição de probabilidade e conceitos como informação de Fisher e emaranhamento, apresentadas brevemente neste capítulo.

### 2.1 Quantização do Campo Eletromagnético

Os fenômenos de natureza eletromagnética são descritos matematicamente pelas equações de Maxwell que na ausência de cargas e correntes elétricas, podem ser escritas como [20]

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (2.1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.1b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (2.1d)$$

A equação (2.1b) é satisfeita identicamente se  $\mathbf{B}$  for escrito em termos do potencial vetor,  $\mathbf{A}$ , de forma que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (2.2)$$

Substituindo (2.2) em (2.1c) e (2.1d)

$$\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times \left( -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right), \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (2.4)$$

Utilizando a equação (2.3), pode-se escrever o campo elétrico  $\mathbf{E}$  através de

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (2.5)$$

com  $\phi$  representando o potencial escalar elétrico.

De maneira geral, dada uma função escalar arbitrária  $\Lambda(\mathbf{x}, t)$ , é possível fazer transformações de calibre ou *gauge* [20] nos potenciais,

$$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda, \quad (2.6a)$$

$$\phi \longrightarrow \phi' = \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \quad (2.6b)$$

sob as quais as equações de Maxwell são invariantes: as quantidades observáveis em laboratório, ou seja, os campos elétrico e magnético, não se alteram sob tais transformações. Pode-se, desta maneira, escolher os potenciais da maneira mais conveniente para o estudo de determinadas situações físicas, simplificando consideravelmente os cálculos para obter os mesmos resultados finais.

Em particular, para a descrição de fenômenos em uma região ausente de fontes, uma escolha apropriada para os potenciais é dada pelo calibre de Coulomb, nomeado em homenagem a Charles Augustin de Coulomb, devido a suas contribuições nos estudos e experimentação de fenômenos de natureza elétrica e magnética. A condição de Coulomb,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (2.7a)$$

$$\phi = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \Rightarrow \phi' = 0, \quad (2.7b)$$

gera o mesmo conjunto de equações (2.1) para fenômenos eletromagnéticos no vácuo.

Sob estas condições, os campos elétrico e magnético podem ser completamente determinados através do potencial vetor  $\mathbf{A}$  por processos de derivação. Além disso, verifica-se que  $\mathbf{A}$  satisfaz a equação de onda

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.8)$$

O fato de o potencial vetor ter comportamento ondulatório sob as hipóteses aqui presentes motiva a representação de  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$  como uma combinação de funções que caracterizam os diferentes modos ondulatórios do campo. Indexando cada modo por  $\mathbf{k}$ , pode-se fazer a expansão de  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$  como a superposição de todos os possíveis modos [21],

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} q_{\mathbf{k}}(t) \mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}), \quad (2.9)$$

empregando o método de separação de variáveis: com as amplitudes  $q_{\mathbf{k}}(t)$  dependentes do tempo e a dependência espacial carregada nas funções  $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$ , com relações de ortogonalidade

$$\int_V \mathbf{u}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}'}^* d^3x = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}. \quad (2.10)$$

### 2.1.1 Representação de Ondas Propagantes

A equação de onda para o potencial vetor (2.8) admite, além de ondas estacionárias, soluções na forma de ondas propagantes, com amplitudes dadas pelos coeficientes da expansão sobre todos os modos,  $q_{\mathbf{k}}$ . Com isso, o calibre de Coulomb implica em

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (2.11)$$

sendo, por este motivo, conhecido também como condição de transversalidade: as componentes do potencial vetor estão sempre perpendiculares à direção de propagação da onda. Para o emprego de condições de contorno para descrever o campo em uma região do espaço, considera-se uma caixa cúbica de aresta  $L$ , com paredes perfeitamente condutoras, a fim de minimizar os efeitos de resposta desta aos campos no interior da caixa. Considerando condições periódicas de contorno nas superfícies, pode-se fazer a expansão do potencial vetor  $\mathbf{A}(\mathbf{k}, t)$  na base de Fourier, que é apropriada para os cálculos, como superposição de ondas planas [22]

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} q_{\mathbf{k}}(t) \mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) + q_{\mathbf{k}'}^*(t) \mathbf{u}_{\mathbf{k}'}^*(\mathbf{x}). \quad (2.12)$$

Dada a transversalidade do potencial vetor, pode-se, convenientemente, escolher dois vetores unitários,  $\boldsymbol{\epsilon}^{(1)}$  e  $\boldsymbol{\epsilon}^{(2)}$ , de forma que o conjunto de vetores  $(\boldsymbol{\epsilon}^{(1)}, \boldsymbol{\epsilon}^{(2)}, \mathbf{k}/|\mathbf{k}|)$  componha uma base ortonormal dextrógiara. Soluções possíveis para os coeficientes  $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}$  e  $q_{\mathbf{k}}(t)$  que satisfazem a equação de onda (2.8) são

$$\mathbf{u}_{\mathbf{k},\alpha}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha)} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad q_{\mathbf{k}}(t) = q_{\mathbf{k}}(0) e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t}, \quad (2.13)$$

com  $k_j = \frac{2n_j\pi}{L_j}$ , ( $j = x, y, z$ ),  $n_j$  inteiro impostos pelas condições de contorno periódicas da cavidade. As relações de ortogonalidade são normalizadas pelo volume

$$\frac{1}{V} \int_V \mathbf{u}_{\mathbf{k},\alpha} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}',\alpha'}^* d^3x = \delta_{\alpha,\alpha'} \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}. \quad (2.14)$$

Esta construção é traduzida, no ponto de vista físico, pela superposição de modos particulares de ondas eletromagnéticas caracterizados pelo vetor  $\mathbf{k}$ , que propagam-se em sentidos opostos ( $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}^* = \mathbf{u}_{-\mathbf{k}}$ ). Equações de onda análogas e expansões em modos normais podem ser obtidas para os campos elétrico  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  e magnético  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$  [23].

## 2.1.2 Hamiltoniana Clássica

A Hamiltoniana do campo eletromagnético é dada por [20]

$$H = \frac{1}{2} \int_V (|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2) d^3x. \quad (2.15)$$

O processo a ser feito a seguir é o da integração espacial dos campos elétrico e magnético em (2.15) obtidos através do potencial vetor em (2.9), a fim de iniciar o processo de quantização com a Hamiltoniana final. Substituindo  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  em (2.15),

$$H = \frac{1}{2} \int_V \left( |\nabla \times \mathbf{A}|^2 + \left| -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right|^2 \right) d^3x. \quad (2.16)$$

Para prosseguir com a integração dos termos, é necessário definir condições de contorno para os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  na superfície que delimita o volume  $V$ . Em contato com o campo no interior da cavidade, as cargas presentes na superfície aceleram-se, de maneira a gerar um campo de resposta àquele aplicado. Na situação de equilíbrio, a resposta das paredes anula os campos nestas,

$$\mathbf{E}_{\parallel} = 0 \implies \mathbf{u}_{\parallel} = 0, \quad \mathbf{B}_{\perp} = 0 \implies (\nabla \times \mathbf{u})_{\perp} = 0, \quad (2.17)$$

onde  $\mathbf{E}_{\parallel}$  e  $\mathbf{B}_{\perp}$  representam as componentes paralela e perpendicular dos campos elétrico e magnético, respectivamente.

Para o termo que envolve a derivada temporal, tem-se:

$$\int_V \left| -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right|^2 d^3x = \frac{2}{c^2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \dot{q}_{\mathbf{k}}(t) \dot{q}_{\mathbf{k}'}^*(t) \int_V \mathbf{u}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}'}^* d^3x = \frac{2}{c^2} \sum_{\mathbf{k}} \dot{q}_{\mathbf{k}}(t) \dot{q}_{\mathbf{k}}^*(t). \quad (2.18)$$

Agora, para o termo magnético,

$$\int_V |\nabla \times \mathbf{A}|^2 d^3x = 2 \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} q_{\mathbf{k}}(t) q_{\mathbf{k}'}^*(t) \int_V (\nabla \times \mathbf{u}_{\mathbf{k}}) \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_{\mathbf{k}'}^*) d^3x, \quad (2.19)$$

que, com o uso da identidade vetorial  $(\nabla \times \mathbf{u}_{\mathbf{k}}) \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_{\mathbf{k}'}^*) = \nabla \cdot (\mathbf{u}_{\mathbf{k}} \times (\nabla \times \mathbf{u}_{\mathbf{k}'}^*)) + \mathbf{u}_{\mathbf{k}} \cdot (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}_{\mathbf{k}'}^*))$ , é separada em dois termos. Com o uso do teorema da divergência, o primeiro termo é levado a uma integral de superfície:

$$\int_V \nabla \cdot (\mathbf{u}_{\mathbf{k}} \times (\nabla \times \mathbf{u}_{\mathbf{k}'}^*)) d^3x = \int_S (\mathbf{u}_{\mathbf{k}} \times (\nabla \times \mathbf{u}_{\mathbf{k}'}^*)) \cdot d\mathbf{S}, \quad (2.20)$$

sendo  $d\mathbf{S}$  o elemento de área, orientado de forma normal à superfície de integração. Em virtude das condições de contorno (2.17) a integral anula-se. Para o segundo termo:

$$\int_V \mathbf{u}_{\mathbf{k}} \cdot (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}_{\mathbf{k}'}^*)) d^3x = \int_V \mathbf{u}_{\mathbf{k}} \cdot (\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}'}^*) - \nabla^2 \mathbf{u}_{\mathbf{k}'}^*) d^3x, \quad (2.21)$$

que, devido à equação de onda satisfeita por  $\mathbf{A}$  e pelo calibre de Coulomb, torna-se:

$$\int_V \mathbf{u}_{\mathbf{k}} \cdot (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}_{\mathbf{k}'}^*)) d^3x = \frac{\omega_{\mathbf{k}'}^2}{c^2} \int_V \mathbf{u}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}'}^* d^3x = \frac{\omega_{\mathbf{k}}^2}{c^2}, \quad (2.22)$$

$$\implies \int_V |\nabla \times \mathbf{A}|^2 d^3x = 2 \sum_{\mathbf{k}} \frac{\omega_{\mathbf{k}}^2}{c^2} q_{\mathbf{k}}(t) q_{\mathbf{k}}^*(t). \quad (2.23)$$

Sendo assim, a hamiltoniana (2.15), fazendo as substituições, e utilizando as equações (2.13), escreve-se como

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{c^2} \dot{q}_{\mathbf{k}}(t) \dot{q}_{\mathbf{k}}^*(t) + \frac{\omega_{\mathbf{k}}^2}{c^2} q_{\mathbf{k}}(t) q_{\mathbf{k}}^*(t) = \sum_{\mathbf{k}} 2 \frac{\omega_{\mathbf{k}}^2}{c^2} q_{\mathbf{k}}(t) q_{\mathbf{k}}^*(t). \quad (2.24)$$

Para que  $H$  seja escrita de forma mais conveniente, pode-se fazer as mudanças de variáveis [22],

$$Q_{\mathbf{k}} = \frac{1}{c} (q_{\mathbf{k}} + q_{\mathbf{k}}^*), \quad P_{\mathbf{k}} = -\frac{i\omega_{\mathbf{k}}}{c} (q_{\mathbf{k}} - q_{\mathbf{k}}^*), \quad (2.25)$$

de forma que a Hamiltoniana do campo seja escrita em função das novas variáveis,

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} (P_{\mathbf{k}}^2 + \omega_{\mathbf{k}}^2 Q_{\mathbf{k}}^2). \quad (2.26)$$

As novas variáveis, introduzidas na mudança acima, identificam-se como canonicamente conjugadas, para cada modo. As equações de Hamilton [24] para cada modo são

$$\dot{P}_{\mathbf{k}} = -\omega_{\mathbf{k}}^2 Q_{\mathbf{k}} \implies \dot{P}_{\mathbf{k}} = -\frac{\partial H}{\partial Q_{\mathbf{k}}}, \quad \dot{Q}_{\mathbf{k}} = P_{\mathbf{k}} \implies \dot{Q}_{\mathbf{k}} = \frac{\partial H}{\partial P_{\mathbf{k}}}. \quad (2.27)$$

Desta forma, pode-se pensar nos “osciladores de radiação” [22]: os modos do campo são análogos a uma coleção de osciladores harmônicos desacoplados, com frequências de oscilação bem definidas.

### 2.1.3 Quantização da Hamiltoniana Clássica

O próximo passo do procedimento de quantização do campo eletromagnético clássico é o de considerar as coordenadas canonicamente conjugadas  $(Q_{\mathbf{k}}, P_{\mathbf{k}})$  como operadores, satisfazendo as relações canônicas de comutação [25]

$$[Q_{\mathbf{k}}, P_{\mathbf{k}'}] = i\hbar \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}, \quad (2.28a)$$

$$[Q_{\mathbf{k}}, Q_{\mathbf{k}'}] = [P_{\mathbf{k}}, P_{\mathbf{k}'}] = 0, \quad (2.28b)$$

com  $H$ , agora, também assumindo o caráter de operador.

Para economizar a notação, somente um modo de  $H$  será quantizado, já que o processo pode ser generalizado identicamente para todos os outros. Para simplificar o procedimento, convém adimensionalizar os operadores, como feito no processo de quantização do oscilador harmônico [25], através dos operadores

$$a_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_{\mathbf{k}}}} (\omega_{\mathbf{k}} Q_{\mathbf{k}} + iP_{\mathbf{k}}), \quad (2.29a)$$



$$a_{\mathbf{k}}^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_{\mathbf{k}}}} (\omega_{\mathbf{k}}Q_{\mathbf{k}} - iP_{\mathbf{k}}), \quad (2.29b)$$

que satisfazem as relações de comutação, que vêm direto de (2.28a) e (2.28b)

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^{\dagger}] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}, \quad (2.30a)$$

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}] = [a_{\mathbf{k}}^{\dagger}, a_{\mathbf{k}'}^{\dagger}] = 0. \quad (2.30b)$$

Substituindo os operadores  $a$  e  $a^{\dagger}$ ,

$$P^2 + \omega^2 Q^2 = \hbar\omega(2a^{\dagger}a + 1), \quad (2.31)$$

de forma que o Hamiltoniano do campo fica escrito como

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left( a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right). \quad (2.32)$$

#### 2.1.4 Autoestados do Hamiltoniano Quantizado

Durante o processo de quantização da Hamiltoniana clássica do campo, foram introduzidos os operadores  $a$  e  $a^{\dagger}$ , e a analogia com o oscilador harmônico quântico é completa. Cabe discutir a interpretação física destes operadores em um modo particular do campo, e o entendimento pode se estender a todos os modos, de maneira simples.

Embora os operadores  $a$  e  $a^{\dagger}$  não sejam hermitianos, o produto  $N = a^{\dagger}a$  o é. Como  $[H, N] = 0$ , os autovalores e autovetores de ambos os operadores podem ser encontrados simultaneamente [26]. Escrevendo a equação de autovalores,

$$N |n\rangle = n |n\rangle, \quad (2.33)$$

sendo  $n$  o autovalor associado ao *ket*  $|n\rangle$ . Escrevendo as relações de comutação para  $a$  e  $a^{\dagger}$  com  $N$  [26],

$$[a, N] = a, \quad (2.34a)$$

$$[a^{\dagger}, N] = -a^{\dagger}, \quad (2.34b)$$

é possível observar a ação destes operadores nos autovetores do operador número. Através de (2.33),

$$Na^{\dagger} |n\rangle = (n+1)a^{\dagger} |n\rangle, \quad (2.35a)$$

$$Na |n\rangle = (n-1)a |n\rangle. \quad (2.35b)$$

Assim, os operadores  $a$  e  $a^{\dagger}$  agem diminuindo e aumentando os autovalores do operador número por unidades inteiras, respectivamente, recebendo os nomes de operadores de

aniquilação e criação, destruindo e criando excitações em um modo do campo, os fótons. Os processos de criação e destruição de fótons são claro quando trabalhamos na base de autoestados do Hamiltoniano do campo (estados de número ou estados de Fock). Quando atuamos o operador  $a$  em uma base distinta, por exemplo em um estado coerente  $|\alpha\rangle$  (sendo  $\alpha$  a amplitude complexa desse campo coerente e  $|\alpha|^2 = \langle N \rangle$ ), não se observa a destruição de fótons já que  $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ , e portanto o número médio de fótons não é alterado.

Utilizando novamente a equação de autovalores (2.33),

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad (2.36a)$$

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \quad (2.36b)$$

Tem-se também,

$$\langle n|a^\dagger a|n\rangle = n, \quad (2.37)$$

os elementos da diagonal do operador número revelam o número de fótons presentes no modo do campo e conseqüentemente, a energia presente.

As aplicações sucessivas dos operadores de criação e aniquilação tornam possíveis representar o estado fundamental do sistema, caracterizado pela ausência completa de fótons, e um estado  $|n\rangle$ , com  $n$  fótons presentes, através das relações

$$a|0\rangle = 0, \quad (2.38a)$$

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle. \quad (2.38b)$$

Os autoestados do operador número são ortogonais, chamados estados de Fock, e compõe uma base completa no espaço de Hilbert [27], com as relações de ortogonalidade e completeza, respectivamente escritas como

$$\langle n|n'\rangle = \delta_{nn'}, \quad (2.39a)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = \mathbf{1}. \quad (2.39b)$$

Para um modo particular do campo, então, fazendo uso da equação de autovalores do operador número  $N$ , os autovalores do Hamiltoniano são escritos através dos autovalores de  $N$ ,

$$H|n\rangle = \hbar\omega\left(N + \frac{1}{2}\right)|n\rangle = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)|n\rangle. \quad (2.40)$$

## 2.2 Funções de Probabilidade

### 2.2.1 O Operador Densidade

A definição do operador densidade na mecânica quântica vem da necessidade de associar densidades de probabilidade a estados que compõem um sistema quântico. Para melhor visualizar esta necessidade, é conveniente classificar os estados de sistemas quânticos em duas abrangentes classes: estados puros e mistos. Um estado puro é completamente caracterizado por um vetor no espaço de Hilbert,  $|\psi\rangle$ . Esta situação corresponde àquela em que o experimentador tem conhecimento completo sobre o estado preparado: por exemplo, um feixe de átomos de prata já desviado pelo campo magnético no experimento de Stern-Gerlach [26]. No entanto, esta situação nem sempre acontece: podem ocorrer situações em que os estados não são completamente determinados, como por exemplo, a polarização dos átomos de prata ainda não desviados do caso anterior. Neste caso, diz-se que o sistema se encontra em um estado misto: uma mistura estatística de estados, descritos por vetores  $|\psi_i\rangle$  no espaço de Hilbert, com probabilidades  $p_i$  associadas a cada um destes. Os valores de grandezas físicas relevantes, desta forma, são calculados através de médias estatísticas, tomadas sobre o sistema como um todo, através das probabilidades associadas a cada um dos subsistemas que o compõe.

#### 2.2.1.1 Operador Densidade Para Estados Puros e Mistos

Estados puros são casos particulares e acontecem quando os sistemas podem ser descritos por um único vetor no espaço de Hilbert,  $|\psi\rangle$ . Escolhendo uma base ortonormal de vetores,  $\{|\phi_n\rangle\}$ , pode-se escrever [25]

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |\phi_n\rangle, \quad (2.41)$$

com os coeficientes da expansão  $c_n = \langle\phi_n|\psi\rangle$ ,  $\sum_n |c_n|^2 = 1$ . O valor médio de um operador  $O$  é calculado através de

$$\langle O \rangle = \langle\psi|O|\psi\rangle = \sum_{m,n} c_m^* c_n \langle\phi_m|O|\phi_n\rangle. \quad (2.42)$$

sendo  $\langle\phi_m|O|\phi_n\rangle = O_{mn}$  o elemento de matriz do operador  $O$ , escrito na base  $\{|\phi_n\rangle\}$ .

Utilizando a forma dos coeficientes da expansão, fica-se com

$$\langle O \rangle = \sum_{m,n} \langle\phi_n|\psi\rangle \langle\psi|\phi_m\rangle O_{mn}. \quad (2.43)$$

Definindo o operador densidade  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ , a média de  $O$  pode ser escrita como

$$\langle O \rangle = \sum_{m,n} \langle\phi_n|\rho|\phi_m\rangle O_{mn} = \sum_{m,n} \rho_{nm} O_{mn} = \text{Tr}(\rho O). \quad (2.44)$$

Desta forma,  $\rho$  faz o papel de fornecer as densidades de probabilidade associadas aos estados da base para o cálculo estatístico dos valores esperados. Os elementos diagonais da matriz densidade  $\langle \phi_n | \rho | \phi_n \rangle$  representam as probabilidades associadas às amplitudes da expansão (2.41), ou seja, o quanto de cada vetor  $|\phi_n\rangle$  da base há no estado  $|\psi\rangle$ . Isto implica em

$$\text{Tr}(\rho) = 1. \quad (2.45)$$

Além disso, da forma dos elementos de matriz de  $\rho$ , é possível concluir que este é hermitiano,  $\rho^\dagger = \rho$ , e, para estados puros,  $\rho^2 = \rho \Rightarrow \text{Tr}(\rho^2) = 1$ .

No caso de estados mistos, há probabilidades associadas a cada um dos possíveis estados em que o sistema em questão pode estar, de forma que este não pode ser escrito como um único vetor no espaço de Hilbert. Devido a este caráter probabilístico do sistema, faz-se também necessária uma abordagem estatística no cálculo de variáveis dinâmicas relevantes. Para tal, supõe-se que o sistema seja composto por vetores no espaço de Hilbert,  $|\psi_i\rangle$ , com probabilidades associadas  $p_i$ , normalizadas à unidade. O valor esperado de um operador  $O$  deve ser calculado, neste caso, levando em conta as probabilidades,

$$\langle O \rangle = \sum_i p_i \langle \psi_i | O | \psi_i \rangle, \quad (2.46)$$

utilizando uma relação de completeza para os vetores da base  $\{|\phi_n\rangle\}$ ,

$$\langle O \rangle = \sum_{i,n} p_i \langle \psi_i | O | \phi_n \rangle \langle \phi_n | \psi_i \rangle = \sum_n \langle \phi_n | \rho O | \phi_n \rangle = \text{Tr}(\rho O), \quad (2.47)$$

com

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \quad (2.48)$$

sendo o operador densidade para a mistura de estados. Para estados mistos,  $\text{Tr}(\rho^2) < 1$ , podendo esta ser considerada uma medida do “grau de pureza” de um estado quântico.

Assim, para estados puros e mistos, o operador densidade fornece uma maneira unificada de se calcular valores esperados de grandezas relevantes do sistema, fazendo o papel de densidade de probabilidade no espaço de Hilbert.

### 2.2.2 Distribuição de Fótons

Uma importante ferramenta no estudo dos estados quânticos do campo eletromagnético é a distribuição de fótons,  $p(n)$ . Dado um estado  $|\psi\rangle$ , a função  $p(n)$  representa a probabilidade de serem encontrados  $n$  fótons. Esta função carrega a informação sobre como são distribuídas as excitações de energia do Hamiltoniano do campo, informação de grande importância na identificação de um estado quântico no interior de uma cavidade, por exemplo.

Além disso, a distribuição de fótons ocupa um papel especialmente relevante neste trabalho, em que cálculos numéricos são executados: computacionalmente, é necessário

truncar a dimensão do espaço de Fock. Para que os resultados sejam confiáveis, é necessário que os fótons do estado sob consideração estejam distribuídos adequadamente dentro da base escolhida, isto é, a dimensão total da base deve ser convenientemente fixada.

Para um estado representado pelo operador densidade  $\rho$ , as probabilidades de distribuição dos fótons no campo são calculados projetando-se este na base de Fock. Desta forma, a probabilidade de se ter  $n$  fótons é dada por

$$P(n) = \langle n | \rho | n \rangle, \quad (2.49)$$

sendo os elementos da diagonal da matriz densidade na base de Fock chamados, desta forma, de “populações”. As distribuições de fótons para alguns estados do campo serão ilustradas, conforme estes forem discutidos.

### 2.2.2.1 Correlações em Processos de Absorção de Fótons

Para que as funções de distribuições de fótons para os diferentes estados do campo eletromagnético possam ser construídas, são necessários experimentos de contagem de fótons. No regime óptico, por exemplo, são utilizados fotodetectores e, através da análise dos sinais obtidos destes, é possível construir a distribuição estatística correspondente ao estado no interior de uma cavidade.

Conforme visto na quantização do campo, o potencial vetor  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$  foi decomposto em modos normais, e, a partir deste, os operadores de campos elétrico e magnético,  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  e  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$  podem ser obtidos [23]. Em experimentos de contagem de fótons através de sensores fotoelétricos, a estatística de distribuição de fótons do campo é obtida através dos sinais produzidos por estes sensores na absorção dos fótons.

O campo elétrico em um modo, para uma determinada direção de polarização  $\epsilon^{(\alpha)}$ , derivado do potencial vetor, para um detector posicionado na posição  $\mathbf{x}$  pode ser escrito na forma

$$E(\mathbf{x}, t) = E^{(+)}(\mathbf{x}, t) + E^{(-)}(\mathbf{x}, t), \quad (2.50)$$

sendo  $E^{(+)}(\mathbf{x}, t) \propto a$  e  $E^{(-)} \propto a^\dagger$ .

No caso de fotodetectores, o fóton que é “contado” no sensor é destruído no processo de excitação dos fotoelétrons do sensor, o que implica que somente o operador de aniquilação contribui na construção da estatística de distribuição.

Os estados do campo eletromagnético antes e após a absorção de fótons serão chamados de  $|i\rangle$  e  $|f\rangle$ , respectivamente. Supondo que haja dois fotodetectores, em posições  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$ , a probabilidade de detecção simultânea de dois fótons pelos detectores é dada proporcionalmente (omitindo a dependência temporal devido à simultaneidade) [28]

$$w_2 \propto \left| \langle f | E_2^{(+)} E_1^{(+)} | i \rangle \right|^2 = \langle f | E_2^{(+)} E_1^{(+)} | i \rangle \langle i | E_1^{(-)} E_2^{(-)} | f \rangle, \quad (2.51)$$

onde  $E^{(\pm)}(\mathbf{x}_i) = E_i^{(\pm)}$ , para não carregar demais a notação.

O estado final,  $|f\rangle$ , em que o campo é deixado após a medição, não é conhecido: esta informação não é acessada no procedimento experimental descrito. Como  $|f\rangle$  pode ser qualquer, pode-se fazer a soma sobre estes,

$$w_2^{(i)} = \sum_f \langle f | E_2^{(+)} E_1^{(+)} |i\rangle \langle i| E_1^{(-)} E_2^{(-)} |f\rangle = \sum_f \langle i| E_1^{(-)} E_2^{(-)} |f\rangle \langle f| E_2^{(+)} E_1^{(+)} |i\rangle = \langle O \rangle_i, \quad (2.52)$$

com  $O \equiv E_1^{(-)} E_2^{(-)} E_2^{(+)} E_1^{(+)}$ ,  $\langle O \rangle_i \equiv \langle i|O|i\rangle$ . No caso de um operador densidade geral  $\rho = \sum_i p_i |i\rangle \langle i|$ ,

$$w_2 = \sum_i p_i w_2^{(i)} = \sum_i p_i \langle i|O|i\rangle. \quad (2.53)$$

Inserindo uma relação de completeza em (2.53),

$$w_2 = \sum_i \sum_k p_i \langle i|i\rangle \langle k|O|i\rangle = \sum_k \langle k|O \sum_i p_i |i\rangle \langle i| |k\rangle = \sum_k \langle k|O\rho|k\rangle = \text{Tr}(O\rho). \quad (2.54)$$

Para apenas um modo, a expressão para  $w_2$  simplifica-se consideravelmente, devido ao cancelamento das exponenciais na expressão completa da expansão em modos normais. Para caminhos simétricos, em que a distância percorrida pela luz até o detector é a mesma para ambos os caminhos, as partes espaciais cancelam-se mutuamente, e a expressão fica completamente escrita em termos dos operadores de criação e aniquilação,

$$w_2 = \text{Tr}(\rho (a^\dagger)^2 a^2). \quad (2.55)$$

De posse de  $w_2$ , pode-se definir a função de correlação  $g^{(2)}(0)$  [28], normalizada pelo número total de fótons no estado,

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle (a^\dagger)^2 a^2 \rangle}{\langle a^\dagger a \rangle^2}. \quad (2.56)$$

Através desta função de correlação, é possível também definir o fator  $Q$  de Mandel [29], que mede a diferença entre a variância no número de fótons e o número de fótons em si,

$$Q = \frac{(\Delta N)^2 - \langle N \rangle}{\langle N \rangle}. \quad (2.57)$$

O fator  $Q$  pode ser utilizado como uma medida de classicalidade do estado: para estados em que a variância no número de fótons é menor que a média,  $Q$  assume valores negativos, caracterizando estatísticas sub-poissonianas, sendo mínimo para estados de

variância nula, os estados de Fock  $|n\rangle$ . Para tais estados, não é possível construir funções de probabilidade análogas aos casos clássicos, sendo esta negatividade associada a uma assinatura quântica do estado [29]. Para  $Q = 0$ , a estatística é chamada poissoniana, e no caso  $Q > 0$ , superpoissoniana. Como dito acima, a função de correlação  $g^{(2)}(0)$  e o fator  $Q$  de Mandel estão relacionados. De fato, podemos escrever

$$Q = \langle N \rangle (g^{(2)}(0) - 1). \quad (2.58)$$

### 2.2.3 Função de Wigner $W(q, p)$

A definição do operador densidade  $\rho$ , conforme discutido anteriormente, é a de associar densidades de probabilidade de um dado sistema no espaço de Hilbert, estabelecendo uma forma unificada para o cálculo de propriedades físicas de sistemas quânticos, representadas pelos valores médios de operadores que atuam sobre os estados em questão. Na física estatística clássica, muito frequentemente, são utilizadas distribuições de probabilidade definidas sobre o espaço de fase do sistema, composto pelas coordenadas de posição e *momentum*,  $(q, p)$ . Para que tal feito seja atingido em sistemas quânticos, é necessária que seja feita a correspondência entre as densidades de probabilidade no espaço de Hilbert e as funções de distribuição no espaço de fase. Feita a correspondência, os valores médios são calculados através de integrações feitas no espaço de fase, assim como feito com as grandezas clássicas [24].

A construção da função de Wigner de um estado quântico é de grande importância na identificação do estado em si, devido ao fato das distribuições de fótons não carregarem informações suficientes para tal: os fótons do campo manipulado podem ser distribuídos de maneira igual em diferentes estados, não sendo possível, por exemplo, saber se trata-se de uma superposição coerente de estados, ou de uma mistura estatística descrita por um operador densidade. As funções de Wigner particulares dos principais estados utilizados nos estudos de óptica quântica serão apresentadas juntamente com estes.

O formalismo aqui apresentado é baseada no texto disponível em [30].

A função de onda, nas base de coordenadas e *momenta*, é escrita nas formas

$$\psi(x) = \langle x|\psi \rangle, \quad \psi(p) = \langle p|\psi \rangle. \quad (2.59)$$

Para buscar uma distribuição de probabilidade no espaço de fase  $W(q, p)$ , as integrações sobre as variáveis de posição e *momentum* devem retornar as respectivas densidades de probabilidade marginais correspondentes. Sendo assim, têm-se,

$$\int W(q, p) dq = \langle p|\hat{\rho}|p \rangle, \quad \int W(q, p) dp = \langle q|\hat{\rho}|q \rangle. \quad (2.60)$$

Utilizando a invariância do produto interno por rotações, pode-se escrever as coordenadas no espaço de fase, rotacionadas por um ângulo  $\theta$ , como

$$\hat{q}_\theta = \hat{q} \cos \theta + \hat{p} \sin \theta = \hat{U}^\dagger(\theta) \hat{q} \hat{U}(\theta) \quad (2.61)$$

$$\hat{p}_\theta = \hat{p} \cos \theta - \hat{q} \sin \theta = \hat{U}^\dagger(\theta) \hat{p} \hat{U}(\theta), \quad (2.62)$$

de forma que a probabilidade marginal em termos da matriz densidade do sistema,  $P(q) = \langle q | \hat{\rho} | q \rangle$ , seja ligada à função de Wigner  $W(q, p)$  por

$$P(q_\theta) = \int W(q_\theta \cos \theta + p_\theta \sin \theta, q_\theta \sin \theta + p_\theta \cos \theta) dp_\theta = \langle q_\theta | \hat{\rho} | q_\theta \rangle. \quad (2.63)$$

Desta maneira, de posse das probabilidades  $P(q_\theta)$  para todos os ângulos  $\theta$ , pode-se realizar o mapeamento unívoco da matriz densidade do sistema no espaço de fase, através da função de Wigner. Definindo as funções  $\tilde{W}(u, v)$  e  $\tilde{P}(\xi, \theta)$ ,

$$\tilde{W}(u, v) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W(q, p) e^{-iuq - ivp} dq dp, \quad (2.64a)$$

$$\tilde{P}(\xi, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(q_\theta) e^{-i\xi q_\theta} dq_\theta, \quad (2.64b)$$

que representam as transformadas de Fourier de  $W(q, p)$  e  $P(q_\theta)$ , e substituindo a expressão (2.63) para  $P(q_\theta)$  em (2.64b), ficamos com

$$\tilde{P}(\xi, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W(q, p) e^{-i\xi q_\theta} dq_\theta dp_\theta, \quad (2.65)$$

e, trocando as variáveis  $(q_\theta, p_\theta) \rightarrow (q, p)$

$$\tilde{P}(\xi, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W(q, p) e^{-i\xi[q \cos(\theta) + p \sin(\theta)]} dq dp. \quad (2.66)$$

Da equação (2.66), identificamos  $\tilde{P}(\xi, \theta)$  como a transformada de Fourier de  $W(q, p)$  em coordenadas polares, definindo  $u = \xi \cos(\theta)$  e  $v = \xi \sin(\theta)$ , temos que

$$\tilde{P}(\xi, \theta) = \tilde{W}(u, v). \quad (2.67)$$

A conexão com o operador densidade é dada em termos de  $P(q_\theta)$

$$\begin{aligned} \tilde{P}(\xi, \theta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \langle q_\theta | \hat{\rho} | q_\theta \rangle e^{-i\xi q_\theta} dq_\theta, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \langle q_\theta | \hat{\rho} e^{-i\xi \hat{q}_\theta} | q_\theta \rangle dq_\theta, \\ &= \text{Tr}(\hat{\rho} e^{-i\xi \hat{q}_\theta}) = \text{Tr}(\hat{\rho} e^{-iv\hat{p} - iu\hat{q}}). \end{aligned} \quad (2.68)$$



Para reconstruir a função de Wigner, temos então que fazer a transformada de Fourier inversa de  $\tilde{W}(u, v)$ . Primeiramente, manipulando o resultado (2.68), temos que

$$\begin{aligned}\tilde{W}(u, v) &= \text{Tr}(\hat{\rho} e^{-iv\hat{p}-iu\hat{q}}), \\ &= \text{Tr}(e^{-iv\hat{p}-iu\hat{q}} \hat{\rho}),\end{aligned}\tag{2.69}$$

utilizando a relação de Baker-Hausdorff-Campbell [28],

$$e^{-iv\hat{p}-iu\hat{q}} = e^{-\frac{iuv}{2}} e^{-iv\hat{p}} e^{-iu\hat{q}},\tag{2.70}$$

fica-se com

$$\begin{aligned}\tilde{W}(u, v) &= \text{Tr}(e^{-\frac{iuv}{2}} e^{-iv\hat{p}} e^{-iu\hat{q}} \hat{\rho}), \\ &= \text{Tr}(e^{-\frac{iuv}{2}} e^{-iv\hat{p}/2} e^{-iu\hat{q}} \hat{\rho} e^{-iv\hat{p}/2}), \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{iuv}{2}} \langle q' | e^{-iv\hat{p}/2} e^{-iu\hat{q}} \hat{\rho} e^{-iv\hat{p}/2} | q' \rangle dq' .\end{aligned}\tag{2.71}$$

Inserindo a relação de completeza  $\int_{-\infty}^{+\infty} |p\rangle\langle p| dp$  em (2.71), podemos obter a atuação do operador  $e^{-iv\hat{p}/2}$  sobre o autoestado de posição  $|q'\rangle$ ,

$$e^{-iv\hat{p}/2} |q'\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iv\hat{p}/2} |p\rangle \langle p|q'\rangle dp,\tag{2.72}$$

e utilizando  $\langle p|q'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ipq'}$  [23], ficamos com

$$\begin{aligned}e^{-iv\hat{p}/2} |q'\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ip(q'+v/2)}}_{\langle p|q'+v/2\rangle} dp, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \langle p|q'+v/2\rangle |p\rangle dp = \int_{-\infty}^{+\infty} |p\rangle\langle p|q'+v/2\rangle dp, \\ &= |q'+v/2\rangle .\end{aligned}\tag{2.73}$$

De maneira similar, temos

$$\begin{aligned}\langle q' | e^{-iv\hat{p}/2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \langle q'|p\rangle \langle p| e^{-iv\hat{p}/2} dp, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ipq'} e^{-iv\hat{p}/2} \langle p| dp, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ip(q'-v/2)}}_{\langle q'-v/2|p\rangle} \langle p| dp, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \langle q'-v/2|p\rangle \langle p| dp, \\ &= \langle q'-v/2| .\end{aligned}\tag{2.74}$$

Então, substituindo os resultados (2.73) e (2.74) em  $\tilde{W}(u, v)$ , temos

$$\begin{aligned}\tilde{W}(u, v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-iuv}{2}} \langle q' - v/2 | e^{-iu\hat{q}} \hat{\rho} | q' + v \rangle dq', \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-iuv}{2}} e^{-iu(q'-v/2)} \langle q' - v/2 | \hat{\rho} | q' + v/2 \rangle dq', \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iuq'} \langle q' - v/2 | \hat{\rho} | q' + v/2 \rangle dq' .\end{aligned}\quad (2.75)$$

Para encontrar a função de Wigner  $W(q, p)$ , temos então que fazer as transformadas de Fourier inversas, sobre as variáveis  $u, v$ . Então,  $W(q, p)$  pode ser escrita como

$$\begin{aligned}W(q, p) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iuq+ivp} \tilde{W}(u, v) du dv, \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iuq} e^{ivp} e^{-iuq'} \left\langle q' - \frac{v}{2} \left| \hat{\rho} \right| q' + \frac{v}{2} \right\rangle dq' du dv, \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu(q'-q)} e^{ivp} \left\langle q' - \frac{v}{2} \left| \hat{\rho} \right| q' + \frac{v}{2} \right\rangle dq' du dv .\end{aligned}\quad (2.76)$$

Realizando a integração sobre a variável  $u$ , e utilizando

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu(q'-q)} du = \delta(q' - q), \quad (2.77)$$

temos que, utilizando  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(q' - q) f(q') = f(q)$  [31],

$$\begin{aligned}W(q, p) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ivp} \delta(q' - q) \left\langle q' - \frac{v}{2} \left| \hat{\rho} \right| q' + \frac{v}{2} \right\rangle dq' dv, \\ W(q, p) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ivp} \left\langle q - \frac{v}{2} \left| \hat{\rho} \right| q + \frac{v}{2} \right\rangle dv .\end{aligned}\quad (2.78)$$

## 2.3 Metrologia Quântica

### 2.3.1 Protocolo de Estimação

A metrologia é a ciência que ocupa-se do estudo dos aspectos e métodos, teóricos e experimentais, de processos de medição de uma grandeza física associada a um sistema de interesse. Exemplos destes processos são a medida do comprimento de uma barra, medidas de intervalo de tempo entre eventos, entre outras. É de grande interesse que, ao medir-se o valor de uma variável inerente ao sistema, que este esteja o mais próximo possível do valor real desta grandeza, ou seja, que a incerteza associada ao valor medido seja minimizada. O interesse central da metrologia, desta forma, é o processo de otimização de medidas e minimização de incertezas a estas associadas.

Na escala macroscópica, é natural relacionar a precisão das medidas realizadas com o instrumento de medição utilizado no processo. Para a medida do comprimento da barra, citada como exemplo, há uma variedade de dispositivos que oferecem diferentes níveis de precisão, como por exemplo, uma régua, que fornece medidas com incertezas da ordem de milímetros ( $10^{-3}m$ ), ou um micrômetro, com erros da ordem de micrometros ( $10^{-6}m$ ). Assim, a adoção de um determinado instrumento está relacionada ao valor do desvio que este fornece em relação ao valor real da grandeza medida.

Para sistemas quânticos, o princípio da incerteza de Heisenberg,

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (2.79)$$

define um limite para os desvios associados às variáveis de posição e *momentum*,  $x$  e  $p$  [26]. Isto significa que, não importa o quão preciso seja o instrumento utilizado na medição, as propriedades intrínsecas da teoria impedem a estimação de grandezas com precisão absoluta. A fim de atingir a mínima incerteza às medições realizadas em sistemas físicos, pode-se pensar em “instrumentos” que possuam as características de sistemas quânticos, de forma a estimar o valor correto de uma grandeza no limite imposto pelo princípio da incerteza.

Para entrar em detalhes sobre o processo de estimação de parâmetros, é conveniente definir o protocolo de estimação, que, de maneira geral, é descrito através dos seguintes passos [32]:

- A “sonda”, como é chamado o aparato que interage com o processo dinâmico que contém o parâmetro a ser estimado,  $y$ , é preparada em uma configuração inicial conhecida, descrita quanticamente pelo operador densidade  $\rho$ ;
- A configuração da sonda é alterada pelo processo, tornando-a dependente do parâmetro  $\rho = \rho(y)$ ;
- Uma medida experimental é realizada na configuração final da sonda, com resultado denotado por  $\kappa$ ;
- Uma estimativa do valor do parâmetro em questão é feita,  $y_{est}$ , de posse de uma regra bem estabelecida.

As regras mencionadas no último passo do protocolo estabelecido dependem do processo em questão: é necessário ter conhecimento do fenômeno para que se possa fazer a estimativa do parâmetro desconhecido  $y$  através de  $\kappa$ . Os aparatos experimentais utilizados nas medições são representados matematicamente por um conjunto de operadores positivo-

definidos (POVM's - *positive operator valued measure*)  $\{E_\kappa\}$ , que definem de maneira geral os processos de medição em mecânica quântica [32], e satisfazem a relação

$$\sum_{\kappa} E_{\kappa} = \mathbf{1}. \quad (2.80)$$

O modelo teórico para a realização dos cálculos da estimação de  $y$  baseia-se na distribuição dos resultados experimentais. A construção apresentada a seguir é baseada naquela elaborada em [12].

Para cada resultado experimental  $\kappa$ , associa-se uma probabilidade, dependente do parâmetro de estimação  $y$ ,  $P_{\kappa}(y)$ , de forma que, ao final de uma sequência de medidas, o conjunto de probabilidades associado,  $\{P_{\kappa}(y)\}$ , seja conhecido. O valor médio do parâmetro, calculado através dos valores individuais das estimativas, é definido por

$$\langle y_{est} \rangle = \sum_{\kappa} y_{est}(\kappa) P_{\kappa}(y), \quad (2.81)$$

com as probabilidades devidamente normalizadas,

$$\sum_{\kappa} P_{\kappa}(y) = 1. \quad (2.82)$$

Utilizando a normalização das probabilidades,

$$\sum_{\kappa} y_{est}(\kappa) P_{\kappa}(y) - \sum_{\kappa} \langle y_{est} \rangle P_{\kappa}(y) = \sum_{\kappa} P_{\kappa}(y) [y_{est}(\kappa) - \langle y_{est} \rangle] = 0. \quad (2.83)$$

sendo as estimativas  $y_{est}(\kappa)$  valores constantes. Derivando este resultado em relação ao parâmetro  $y$ , fica-se com

$$\sum_{\kappa} P_{\kappa}(y) \frac{d \ln(P_{\kappa}(y))}{dy} [y_{est}(\kappa) - \langle y_{est} \rangle] = \frac{d \langle y_{est} \rangle}{dy}. \quad (2.84)$$

Elevando (2.84) ao quadrado e utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, que estabelece

$$\left( \sum_x f_1(x) f_2(x) \right)^2 \leq \left( \sum_x f_1^2(x) \right) \left( \sum_x f_2^2(x) \right), \quad (2.85)$$

obtém-se então

$$\left( \sum_{\kappa} P_{\kappa}(y) \left( \frac{d \ln(P_{\kappa}(y))}{dy} \right)^2 \right) \left( \sum_{\kappa} P_{\kappa}(y) [y_{est}(\kappa) - \langle y_{est} \rangle]^2 \right) \geq \left( \frac{d \langle y_{est} \rangle}{dy} \right)^2. \quad (2.86)$$

Definindo a variância associada à variável de estimação  $\langle \Delta y \rangle^2 \equiv \langle (y_{est} - \langle y_{est} \rangle)^2 \rangle$ , e substituindo-a em (2.86), obtém-se

$$\langle \Delta y \rangle^2 \geq \frac{\left( \frac{d\langle y_{est} \rangle}{dy} \right)^2}{\left\langle \left( \frac{d \ln(P_\kappa(y))}{dy} \right)^2 \right\rangle}, \quad (2.87)$$

chamada de desigualdade de Cramér-Rao. A quantidade no denominador,

$$F(y) \equiv \left\langle \left( \frac{d \ln(P_\kappa(y))}{dy} \right)^2 \right\rangle, \quad (2.88)$$

é denominada informação de Fisher, e representa a quantidade de informação a respeito do parâmetro  $y$  disponível no conjunto de probabilidades [12]. Como  $F(y)$  limita o desvio no valor do parâmetro, o cálculo desta grandeza é de central interesse para uma minimização de incertezas inerentes ao processo de medição.

### 2.3.2 Informação Quântica de Fisher

Para o cálculo da Informação Quântica de Fisher relativa à matriz densidade  $\rho(y)$ , é necessária a construção do conjunto de probabilidades  $\{P_\kappa(y)\}$ . A probabilidade  $P_\kappa(y)$  associada a um resultado experimental é [32]

$$P_\kappa(y) = \text{Tr}(\rho(y)E_\kappa) \quad (2.89)$$

sendo  $E_\kappa$  o POVM associado ao processo de medição na sonda, descrito no protocolo. Conforme mencionado anteriormente, o princípio da incerteza proíbe a estimação de parâmetros com precisão absoluta. No entanto, é natural que se busque a máxima precisão em processos de medição, obtendo estimativas próximas ao valor real dos parâmetros, dentro do limite de Heisenberg. Esta situação é equivalente, dentro da teoria de estimação apresentada, à maximização da Informação de Fisher. A Informação Quântica de Fisher é então dada pela maximização sobre todos os POVM's  $\{E_\kappa\}$ ,

$$F_Q[\rho(y)] \equiv \max_{\{E_\kappa\}} \left[ \sum_\kappa \frac{1}{\text{Tr}(\rho(y)E_\kappa)} \left( \frac{d \text{Tr}(\rho(y)E_\kappa)}{dy} \right)^2 \right], \quad (2.90)$$

o que equivale a realizar a maximização sobre todos os aparatos experimentais permitidos pela mecânica quântica. Entretanto, um limite superior para a Informação de Fisher [33], é dado em termos do operador hermitiano derivada logarítmica simétrica,  $L_y$ , definido através da equação diferencial

$$\frac{d\rho(y)}{dy} = \frac{L_y \rho + \rho L_y}{2}. \quad (2.91)$$

Utilizando (2.91), fica-se com

$$\frac{d \text{Tr}(\rho(y)E_\kappa)}{dy} = \text{Tr} \left( \frac{L_y \rho + \rho L_y}{2} E_\kappa \right), \quad (2.92)$$

e, utilizando  $\text{Tr}(A)^* = \text{Tr}(A^\dagger)$ ,

$$\text{Tr}\left(\frac{L_y\rho + \rho L_y}{2} E_\kappa\right) = \frac{1}{2} [\text{Tr}(E_\kappa\rho L_y) + \text{Tr}(\rho L_y E_\kappa)^*] = \text{Re}\{\text{Tr}(E_\kappa\rho L_y)\}, \quad (2.93)$$

onde foram utilizadas as propriedades cíclicas do traço e a hermiticidade dos operadores. Aplicando agora a desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\text{Tr}\left(\frac{L_y\rho + \rho L_y}{2} E_\kappa\right) \leq |\text{Tr}(E_\kappa\rho L_y)|^2. \quad (2.94)$$

Agora, utilizando a desigualdade [32]

$$|\text{Tr}(A^\dagger B)|^2 \leq \text{Tr}(A^\dagger A) \text{Tr}(B^\dagger B), \quad (2.95)$$

e definindo  $A = \sqrt{\rho}\sqrt{E_\kappa}$ ,  $B = \sqrt{\rho}L_y\sqrt{E_\kappa}$ , temos

$$\begin{aligned} \text{Tr}(A^\dagger B) &= \text{Tr}(E_\kappa\rho L_y), \\ |\text{Tr}(E_\kappa\rho L_y)|^2 &\leq \text{Tr}(E_\kappa\rho) \text{Tr}(E_\kappa L_y\rho L_y), \\ \left[\text{Tr}\left(\frac{d\rho}{dy} E_\kappa\right)\right]^2 &\leq \text{Tr}(E_\kappa\rho) \text{Tr}(E_\kappa L_y\rho L_y), \\ \frac{1}{\text{Tr}(E_\kappa\rho)} \left[\text{Tr}\left(\frac{d\rho}{dy} E_\kappa\right)\right]^2 &\leq \text{Tr}(E_\kappa L_y\rho L_y), \end{aligned} \quad (2.96)$$

Podemos então escrever a informação de Fisher como

$$F_Q[\rho(y)] \leq \sum_{\kappa} \text{Tr}(E_\kappa L_y\rho L_y), \quad (2.97)$$

que, devido à condição  $\sum_{\kappa} E_\kappa = \mathbf{1}$ , torna-se

$$F_Q[\rho] \leq \text{Tr}(\rho L_y^2). \quad (2.98)$$

A desigualdade (2.98) revela uma independência da maximização da Infomação de Fisher com relação ao conjunto de todos os POVM's,  $\{E_\kappa\}$ , podendo esta ser aumentada modificando-se a configuração inicial da sonda, representada pelo operador densidade  $\rho$ , de modo a encontrar o maior valor desta na estimação de um parâmetro desconhecido  $y$ .

### 2.3.2.1 Estados Puros

No caso de estados puros, pode-se encontrar uma forma simplificada para  $L_y$ : Fazendo  $\rho^2 = \rho$ ,

$$\frac{d\rho}{dy} = \frac{d\rho^2}{dy} = \frac{d\rho}{dy}\rho + \rho\frac{d\rho}{dy}. \quad (2.99)$$

Reescrevendo convenientemente (2.91) e substituindo, fica-se com

$$\frac{1}{2}L_y\rho + \rho\frac{1}{2}L_y = \frac{d\rho}{dy}\rho + \rho\frac{d\rho}{dy}, \quad (2.100)$$

onde conclui-se que  $L_y = 2\frac{d\rho}{dy}$ . Para o caso de uma evolução unitária da forma

$$U(y) = e^{-iyG}, \quad (2.101)$$

a evolução do estado inicial  $|\psi_0\rangle$  é dada por

$$i\hbar\frac{d|\psi\rangle}{dy} = G|\psi\rangle. \quad (2.102)$$

que é a equação de Schrödinger para a evolução do estado inicial sob ação da transformação representada pelo operador  $G$ , de forma que  $|\psi\rangle = U(y)|\psi_0\rangle$ . Derivando em relação ao parâmetro  $y$ , e substituindo em (2.98), a Informação Quântica de Fisher é escrita, para um estado puro, como

$$F_Q(\rho(y)) = 4(\Delta G)^2, \quad (2.103)$$

sendo  $(\Delta G)^2 = \langle G^2 \rangle - \langle G \rangle^2$  a variância associada ao operador  $G$ , gerador da impressão do parâmetro desconhecido na matriz densidade  $\rho$ .

### 2.3.2.2 Estados Mistos

Para a estimação com estados mistos sob ação do gerador da impressão do parâmetro  $G$ , a evolução da configuração da sonda  $\rho$  é dada pela equação de Von-Neumann [23]

$$i\frac{\partial\rho}{\partial y} = G\rho - \rho G. \quad (2.104)$$

Reescrevendo a matriz densidade na representação espectral, com os autovalores e autovetores numa base  $\{|n\rangle\}$ , fica-se com

$$\rho = \sum_m \lambda_m |m\rangle\langle m|. \quad (2.105)$$

Utilizando (2.104), o elemento de matriz correspondente ao operador  $\frac{\partial\rho}{\partial y}$  é

$$\langle m|\frac{\partial\rho}{\partial y}|n\rangle = \langle m| -iG\rho + i\rho G|n\rangle = i(\lambda_m - \lambda_n)\langle m|G|n\rangle, \quad (2.106)$$

de onde conclui-se

$$\langle m|G|n\rangle = \frac{1}{i(\lambda_m - \lambda_n)} \langle m|\frac{\partial\rho}{\partial y}|n\rangle \quad (2.107)$$

Da equação (2.98), a informação de Fisher é máxima quando

$$F_Q = \text{Tr}(\rho L^2), \quad (2.108)$$

que, utilizando a definição do operador derivada logarítmica simétrica (2.91), torna-se

$$F_Q = \text{Tr}\left(\frac{\partial \rho}{\partial y} L\right). \quad (2.109)$$

Reescrevendo o traço da equação (2.109),

$$F_Q = \sum_m \langle m | \frac{\partial \rho}{\partial y} L | m \rangle = \sum_{m,n} \langle m | \frac{\partial \rho}{\partial y} | n \rangle \langle n | L | m \rangle, \quad (2.110)$$

onde foi inserida a relação de completeza  $\sum_n |n\rangle\langle n| = \mathcal{I}$ . Através da definição expressa em (2.91), pode-se escrever a forma do elemento de matriz do operador  $L$  como

$$\langle n | \frac{\partial \rho}{\partial y} | m \rangle = \frac{1}{2}(\lambda_n + \lambda_m) \langle n | L | m \rangle. \quad (2.111)$$

Substituindo (2.111) em (2.110), tem-se a expressão para a informação de Fisher,

$$F_Q = \sum_{m,n} \frac{2}{\lambda_m + \lambda_n} \left| \langle m | \frac{\partial \rho}{\partial y} | n \rangle \right|^2. \quad (2.112)$$

Em termos do operador que gera a impressão do parâmetro na matriz densidade  $\rho$ , utilizando (2.104),

$$\langle m | \frac{\partial \rho}{\partial y} | n \rangle = i(\lambda_m - \lambda_n) \langle m | G | n \rangle, \quad (2.113)$$

de maneira que, a informação de Fisher, escrita em termos de  $G$ , fica na forma

$$F_Q = 2 \sum_{m,n} \frac{(\lambda_m - \lambda_n)^2}{\lambda_m + \lambda_n} |\langle m | G | n \rangle|^2. \quad (2.114)$$

Desta forma, é possível calcular  $F_Q$  de forma simples, de posse dos autovalores e autovetores da matriz densidade  $\rho$ , que representa agora um estado misto. Este é o caso dos estados reduzidos com que trabalhamos, após o traço parcial sobre um dos modos do campo.





## 3 Estados do Campo Eletromagnético

Neste capítulo, apresentamos alguns exemplos de estados do campo eletromagnético: os estados de Fock, dados pelos autoestados do Hamiltoniano quantizado (2.32), estados térmicos, que são caracterizados por misturas de estados de Fock representados pela matriz densidade  $\rho_T$ , estados coerentes  $|\alpha\rangle$  e estados comprimidos, que compõem uma classe de estados com incerteza mínima [28] juntamente com suas propriedades de distribuição estatística de fótons, e de distribuição de probabilidades no espaço de fase por meio da função de Wigner  $W(q, p)$ .

### 3.1 Estados de Fock

Os estados de Fock são dados pelos autoestados do operador número  $a^\dagger a$ , e caracterizam estados com número bem definido de fótons. Os estados de Fock  $|n\rangle$ , com  $n = 0, 1, 2, \dots$  sendo o número de fótons desse estado, são ortogonais e compõem uma base completa, com relação de completeza expressa pela equação (2.39b).

Para os estados de Fock, a distribuição de fótons é totalmente concentrada no coeficiente correspondente à ocupação, que pode ser visualizada pela relação de ortogonalidade (2.39a). A função de Wigner correspondente a um estado  $|n\rangle$  é dada pela expressão [27]

$$W_n(q, p) = \frac{2}{\pi} e^{-2(q^2+p^2)} (-1)^n L_n[4(p^2 + q^2)], \quad (3.1)$$

onde  $L_n$  representam os polinômios de Laguerre de ordem  $n$ .

O fator  $Q$  de Mandel para um estado  $|n\rangle$  é calculado como

$$Q = \frac{(\Delta N)^2 - \langle N \rangle}{\langle N \rangle} = \frac{-n}{n} = -1, \quad (3.2)$$

caracterizando um estado quântico do campo. O operador número possui variância nula sobre os estados  $|n\rangle$ , devido ao número bem definido de fótons.

Na figura (1), estão representadas as funções de Wigner  $W(q, p)$  para alguns estados de Fock, com diferentes ocupações.

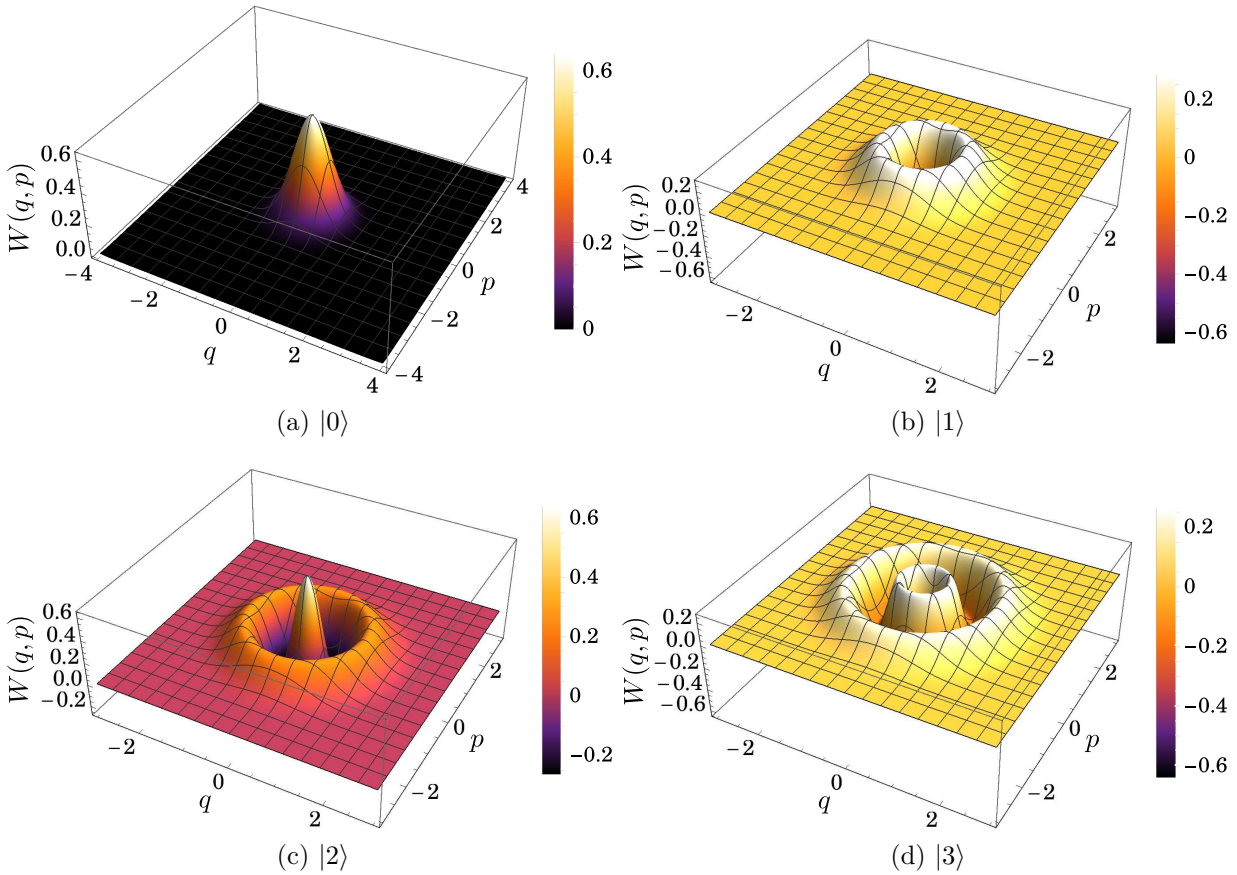


Figura 1 – Funções de Wigner para os estados de Fock, para ocupações correspondentes a 0 (1a), 1 (1b), 2 (1c) e 3 (1d) fótons. Pode-se observar regiões de negatividade da função de Wigner, que são reflexo do número bem definido de fótons, caracterizando estados quânticos do campo.

## 3.2 Estado Térmico

Estados térmicos do campo de radiação são caracterizados pela radiação eletromagnética emitida por qualquer corpo com temperatura não nula. Também chamados de estados “caóticos”, tais estados da luz são gerados pela emissão de fótons causada pela agitação térmica de átomos.

Para um sistema com hamiltoniano  $H$ , em equilíbrio térmico à temperatura  $T$ , o operador densidade é definido como [29]

$$\rho_T = \frac{e^{-H/k_B T}}{\text{Tr}(e^{-H/k_B T})}, \quad (3.3)$$

onde  $k_B$  é a constante de Boltzmann. Redefinindo o nível fundamental de energia do Hamiltoniano quantizado, dado pela equação (2.32), que ocorre quando  $\langle N \rangle = 0$ , pode-se

reescrever (2.32) de forma conveniente como

$$H = \hbar\omega a^\dagger a \implies \frac{H}{k_B T} = \beta a^\dagger a, \quad (3.4)$$

onde  $\beta = \hbar\omega/k_B T$  representa um fator adimensional que define a escala de energia do sistema. Utilizando a base de Fock  $\{|n\rangle\}$ , composta pelos autoestados do operador número  $N$ , tem-se

$$\text{Tr}(e^{-\beta a^\dagger a}) = \sum_n \langle n | e^{-\beta a^\dagger a} | n \rangle = \sum_n e^{-\beta n} = \frac{1}{1 - e^{-\beta}}. \quad (3.5)$$

O número médio de fótons no estado térmico é calculado através de

$$\langle N \rangle = \text{Tr}(\rho_T N) = (1 - e^{-\beta}) \sum_n \langle n | e^{-\beta n} a^\dagger a | n \rangle, \quad (3.6)$$

$$\langle N \rangle = (1 - e^{-\beta}) \sum_n n e^{-\beta n}. \quad (3.7)$$

Pode-se manipular a soma presente na equação (3.7), através de

$$\sum_n n e^{-\beta n} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \sum_n e^{-\beta n} = \frac{e^{-\beta}}{(1 - e^{-\beta})^2}, \quad (3.8)$$

e assim, pode-se reescrever  $\langle N \rangle$  na forma

$$\langle N \rangle = \frac{e^{-\beta}}{1 - e^{-\beta}} = \frac{1}{e^\beta - 1}, \quad (3.9)$$

que caracteriza a distribuição de Bose-Einstein [29]. O operador densidade, representado na base de Fock, assume então a forma diagonal

$$\rho_T(\langle N \rangle) = \sum_n \frac{\langle N \rangle^n}{(1 + \langle N \rangle)^{n+1}} |n\rangle\langle n|, \quad (3.10)$$

sendo o conjunto de autovalores de  $\rho_T$ ,

$$P(n) = \frac{\langle N \rangle^n}{(1 + \langle N \rangle)^{n+1}}, \quad (3.11)$$

a distribuição de fótons entre os níveis de ocupação  $|n\rangle$  na base de Fock, para um campo de radiação térmica com  $\langle N \rangle$  fótons presentes. Nas figuras (2a) e (2b) estão representadas graficamente as distribuições de fótons  $P(n)$  entre ocupações, para diferentes valores de  $\langle N \rangle$ .

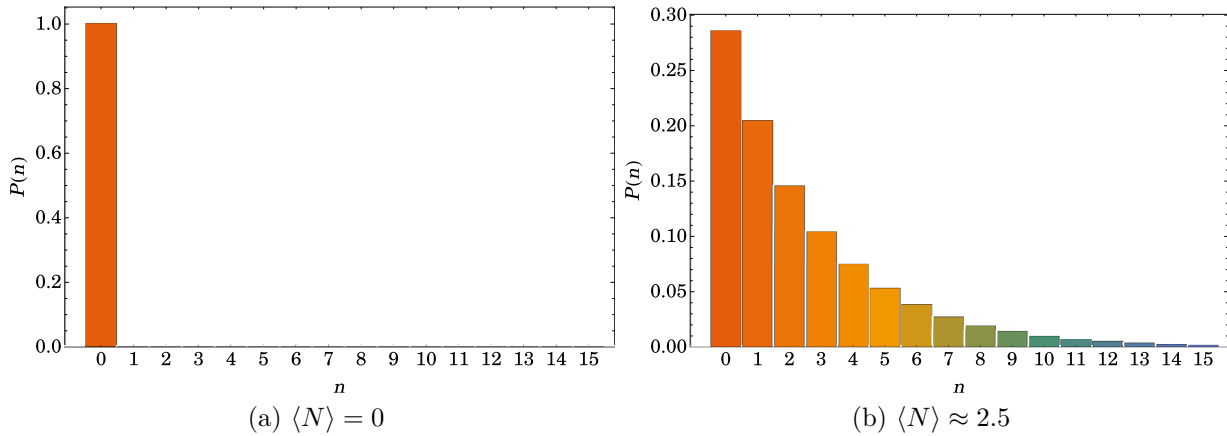


Figura 2 – Distribuições de fótons  $P(n)$  para estados térmicos com  $\langle N \rangle = 0$  (2a) e  $\langle N \rangle \approx 2.5$  (2b). Os valores associados a  $P(n)$  representam as probabilidades de ocupação de cada nível.

Além da informação sobre as distribuições de fótons, são úteis as funções de probabilidade no espaço de fase, obtidas através da função de Wigner. Para o estado térmico, a função de Wigner (derivada no apêndice A) é escrita como

$$W(q, p) = \frac{2}{\pi} \frac{e^{-2(q^2+p^2)}}{1 + 2\langle N \rangle} e^{\frac{4(q^2+p^2)\langle N \rangle}{1+2\langle N \rangle}}. \quad (3.12)$$

Nas figuras (3a) e (3b) são exibidas as funções de Wigner em três dimensões para estados térmicos do campo contendo  $\langle N \rangle = 0$  e  $\langle N \rangle \approx 2.5$  fótons, respectivamente. Na figura (4), são plotadas as projeções de ambas as funções de Wigner sobrepostas.

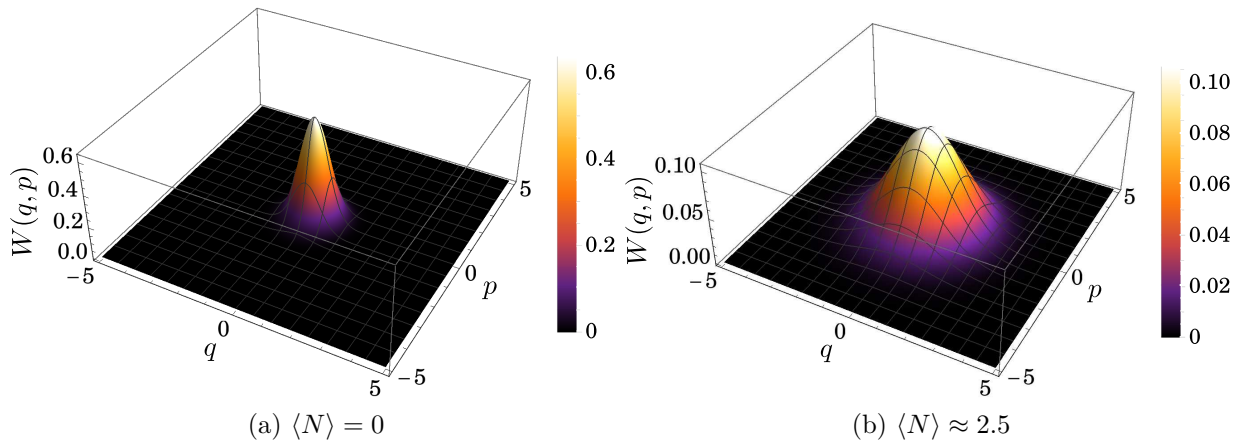


Figura 3 – Funções de Wigner  $W(q, p)$  para estados térmicos com  $\langle N \rangle = 0$  (3a) e  $\langle N \rangle \approx 2.5$  (3b). Apesar de qualitativamente semelhantes, as funções são distribuídas no espaço de fase de maneira distinta.

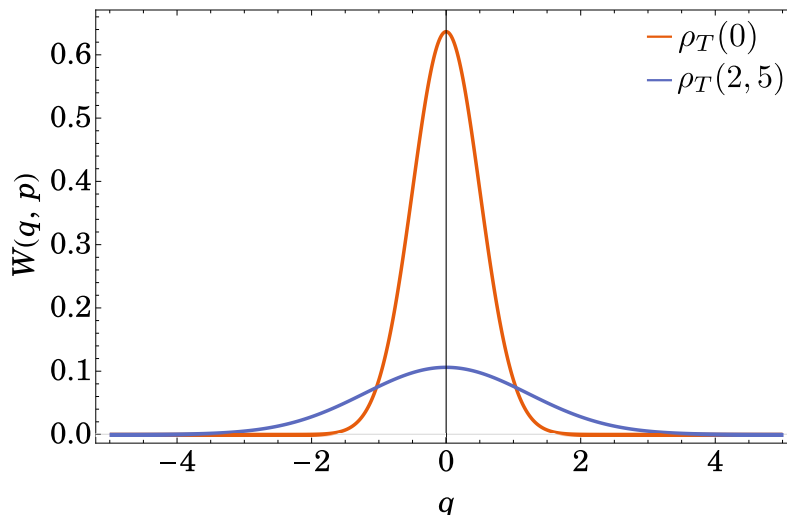


Figura 4 – Projeções sobrepostas das funções de Wigner  $W(q, p)$  para os estados térmicos contendo  $\langle N \rangle = 0$  e  $\langle N \rangle \approx 2.5$  fótons. Com as projeções, é possível observar as diferenças quantitativas entre as distribuições de probabilidade no espaço de fase. Para  $\langle N \rangle = 0$ ,  $W(q, p)$  encontra-se mais concentrada em torno da origem, enquanto para  $\langle N \rangle \approx 2.5$ , as probabilidades encontram-se mais espalhadas.

Nota-se com a análise das projeções de  $W(q, p)$  na figura (4) que o aumento no número de fótons em estado térmico faz com que as probabilidades estejam mais distribuídas sobre o espaço de fase. Isso se deve à maneira com que os fótons são distribuídos entre os níveis pela equação (3.11), que passa a apresentar probabilidades não nulas para ocupação de níveis anteriormente não populados no estado de vácuo térmico,  $\rho_T(0)$ . O fator  $Q$  de Mandel para estados térmicos é dado por

$$Q_T = \frac{(\Delta N)^2 - \langle N \rangle}{\langle N \rangle} = \frac{\langle N \rangle^2 + \langle N \rangle - \langle N \rangle}{\langle N \rangle} = \langle N \rangle \geq 0, \quad (3.13)$$

caracterizando-o como um estado clássico do campo, com estatística superpoissoniana.

### 3.3 Estado Coerente

Os estados coerentes do campo eletromagnético são definidos como

$$|\alpha\rangle = D(\alpha) |0\rangle, \quad (3.14)$$

sendo  $D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}$  o operador deslocamento. Reescrevendo-se o operador com o auxílio do teorema de Baker-Hausdorff-Campbell [28],

$$D(\alpha) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a}, \quad (3.15)$$

verifica-se a propriedade de deslocamento de  $D(\alpha)$ ,

$$D^\dagger(\alpha) a D(\alpha) = a + \alpha, \quad D^\dagger(\alpha) a^\dagger D(\alpha) = a^\dagger + \alpha^*, \quad (3.16)$$

que desloca o valor esperado do operador de aniquilação (criação) pela quantidade  $\alpha$  ( $\alpha^*$ ). Além disso, da expressão (3.15), verifica-se a unitariedade,  $D^\dagger(\alpha)D(\alpha) = \mathbf{1}$ .

Em termos dos estados de Fock,  $|n\rangle$ , os estados coerentes são expandidos como [27],

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (3.17)$$

O número médio de fótons no estado coerente é calculado com o auxílio de (3.16),

$$\langle a^\dagger a \rangle = \langle \alpha | a^\dagger a | \alpha \rangle = \langle 0 | D^\dagger(\alpha) a^\dagger a D(\alpha) | 0 \rangle = |\alpha|^2. \quad (3.18)$$

Definindo o operador densidade do estado coerente,  $\rho = |\alpha\rangle\langle\alpha|$ , a função de distribuição de fótons,  $P(n)$ , utilizando (2.49), é dada pela expressão

$$P(n) = \frac{(|\alpha|^2)^n e^{-|\alpha|^2}}{n!} = \frac{\langle N \rangle^n e^{-\langle N \rangle}}{n!}, \quad (3.19)$$

caracterizando uma distribuição Poissoniana [21], centralizada em  $|\alpha|^2 = \langle N \rangle$ .

As quadraturas do campo eletromagnético correspondem aos operadores de posição e *momentum* do oscilador harmônico. Considerando apenas um modo do campo, os operadores de quadratura correspondentes, em termos dos operadores de criação e aniquilação, são

$$X_1 = (a + a^\dagger), \quad X_2 = -i(a - a^\dagger). \quad (3.20)$$

que satisfazem a relação de comutação

$$[X_1, X_2] = -i[a + a^\dagger, a - a^\dagger] = 2i. \quad (3.21)$$

As variâncias associadas às quadraturas,  $(\Delta X)^2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2$  são então dadas por

$$(\Delta X_1)^2 = 1, \quad (\Delta X_2)^2 = 1, \quad (3.22)$$

evidenciando, desta maneira, as mesmas incertezas associadas a  $X_1$  e  $X_2$ . O princípio da incerteza de Heisenberg para os estados coerentes é satisfeito com a igualdade

$$\Delta X_1 \Delta X_2 = 1. \quad (3.23)$$

Por esta razão, os estados coerentes  $|\alpha\rangle$  caracterizam um conjunto de estados para os quais a incerteza é mínima, sendo estes os estados do campo de radiação que melhor reproduzem o comportamento da radiação eletromagnética clássica emitida por distribuições oscilantes de corrente [27].

O fator  $Q$  de Mandel para os estados coerentes é calculado através de (2.57) como

$$Q_\alpha = \frac{|\alpha|^2 - |\alpha|^2}{|\alpha|^2} = 0, \quad (3.24)$$

o que implica que a função de Wigner  $W(q, p)$  pode ser interpretada como uma distribuição de probabilidade clássica no espaço de fase, assumindo apenas valores positivos. A função de Wigner é dada por [27]

$$W(q, p) = \frac{2}{\pi} e^{-2(q^2+p^2)}. \quad (3.25)$$

Nas figuras (5), estão representadas as distribuições de fótons  $P(n)$  para os estados de vácuo  $|0\rangle$  (5a) e coerente  $|\alpha\rangle$  (5b), e nas figuras (6), estão ilustradas as projeções da função de Wigner  $W(q, p)$ , para os mesmos estados anteriores.

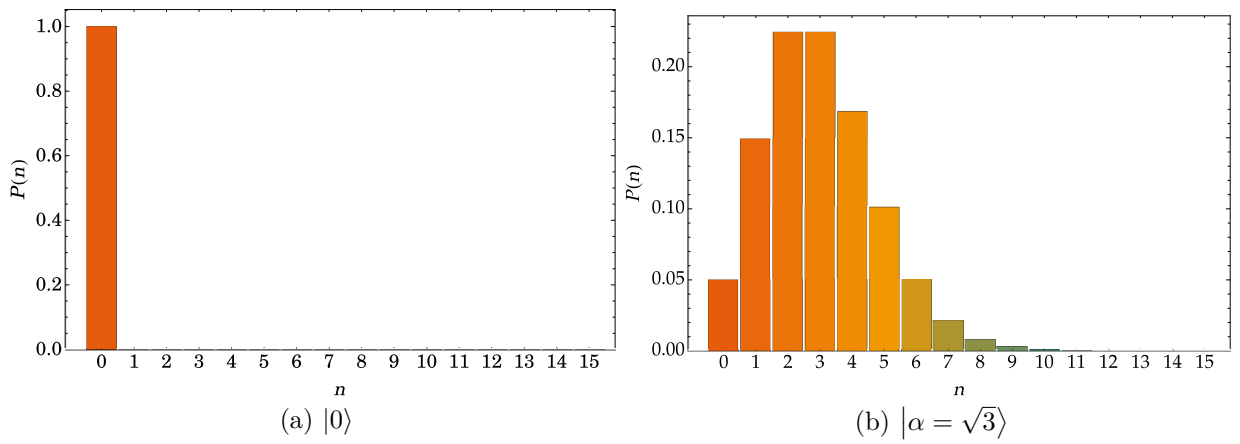


Figura 5 – Distribuições de fótons  $P(n)$  para os estados de vácuo (5a) e coerente (5b). A ação do operador  $D(\alpha)$  desloca os valores de ocupação do estado de vácuo quântico  $|0\rangle$ , tornando a distribuição centralizada em  $|\alpha|^2 = \langle N \rangle = 3$ .

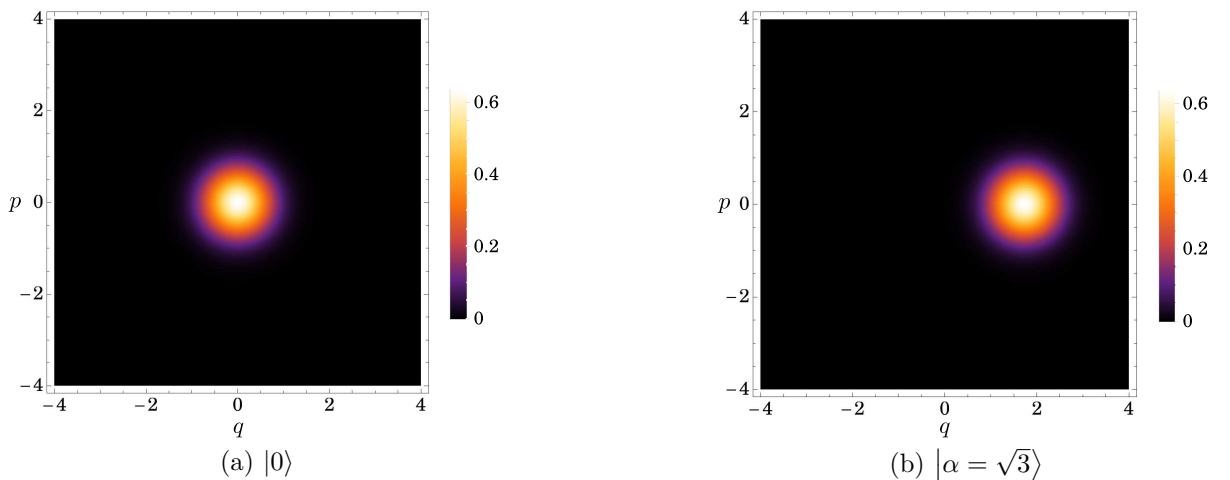


Figura 6 – Projeções das funções de Wigner  $W(q, p)$  para os estados de vácuo (6a) e coerente (6b). Pode-se observar que  $D(\alpha)$  desloca a distribuição de probabilidade do estado de vácuo (6a), antes visivelmente centralizada na origem.



### 3.4 Estado Comprimido

Os estados comprimidos, juntamente com os coerentes  $|\alpha\rangle$ , compõem uma classe de estados com incerteza mínima [28]. Tais estados, definidos através do operador de compressão  $S(\xi)$ , satisfazem o princípio da incerteza de Heisenberg com igualdade, entretanto, com ausência dela entre os valores das variâncias para as amplitudes canonicamente conjugadas,  $X_1$  e  $X_2$ : o desvio em uma destas é reduzido às custas do aumento na outra. Para o estado comprimido, então, deve-se ter [27],

$$(\Delta X_i)^2 < 1 \iff (\Delta X_j)^2 > 1 (i \neq j). \quad (3.26)$$

O operador de compressão é definido por [27]

$$S(\xi) = e^{\frac{1}{2}(\xi^*(a)^2 - \xi(a^\dagger)^2)}, \quad (3.27)$$

sendo  $\xi = re^{i\theta}$  um parâmetro complexo, onde  $r$  representa o fator de compressão e  $\theta$  indica a direção em que é executada. Além disso, o operador  $S(\xi)$  é unitário,

$$S^\dagger(\xi) = S^{-1}(\xi). \quad (3.28)$$

De maneira semelhante ao executado para os estados coerentes, podem ser realizadas transformações unitárias dos operadores  $a$  e  $a^\dagger$  com o operador  $S(\xi)$  [27],

$$S^\dagger(\xi)aS(\xi) = a \cosh(r) - a^\dagger e^{i\theta} \sinh(r), \quad S^\dagger(\xi)a^\dagger S(\xi) = a^\dagger \cosh(r) - a e^{-i\theta} \sinh(r). \quad (3.29)$$

Definindo as amplitudes  $Y_1$  e  $Y_2$ , rotacionadas em relação a  $X_1$  e  $X_2$  por um ângulo  $\theta/2$ ,

$$Y_1 + iY_2 = (X_1 + iX_2)e^{-\frac{i\theta}{2}}, \quad (3.30)$$

e utilizando-se das propriedades de transformação dos operadores  $D(\alpha)$  e  $S(\xi)$ , as variâncias  $\Delta Y_1$  e  $\Delta Y_2$  são [27],

$$(\Delta Y_1)^2 = e^{-2r}, \quad (\Delta Y_2)^2 = e^{2r}, \quad (3.31)$$

de modo que, assim como para os estados coerentes,  $\Delta Y_1 \Delta Y_2 = 1$ , caracterizando-os também como estados com incerteza mínima.

A redução da variância em uma das quadraturas do campo torna interessante o uso de estados comprimidos para detectar perturbações fracas, como as produzidas por

ondas gravitacionais [28]. Um estado de vácuo comprimido é obtido através da atuação de  $S(\xi)$  sobre o estado de vácuo,  $S(\xi)|0\rangle$ , com número médio de fótons

$$\langle a^\dagger a \rangle = \sinh^2(r). \quad (3.32)$$

Na figura (7) estão representadas as distribuições de fótons  $P(n)$  para um estado coerente e para um estado coerente comprimido, respectivamente.

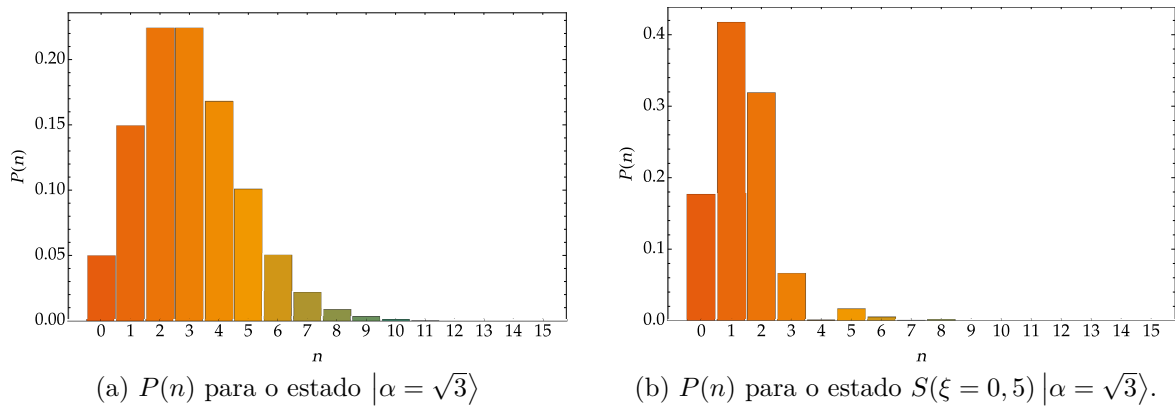


Figura 7 – Distribuições de fótons  $P(n)$  para um estado coerente  $|\alpha = \sqrt{3}\rangle$  (7a) e um estado coerente comprimido  $S(\xi = 0, 5)|\alpha = \sqrt{3}\rangle$  (7b). Pode-se perceber a ação do operador  $S(\xi)$  na distribuição de fótons, diminuindo as probabilidades em algumas ocupações antes mais populadas, concentrando-as em outros valores.

Para um estado de vácuo comprimido, a função de Wigner é escrita como [27],

$$W(q, p) = \frac{2}{\pi} e^{-2(q^2 e^{2r} + p^2 e^{-2r})}, \quad (3.33)$$

que representa um estado comprimido na direção da quadratura  $q$ . O fator  $Q$  de Mandel, para um estado de vácuo comprimido, é calculado através de

$$Q = \frac{\sinh^2(r)(2 \cosh^2(r) + \sinh^2(r)) - \sinh^4(r)}{\sinh^2(r)} = 2 \cosh^2(r) - 1 \geq 0. \quad (3.34)$$

Nas figuras (8) estão representadas as projeções das funções de Wigner para os estados vácuo e vácuo comprimido, respectivamente.

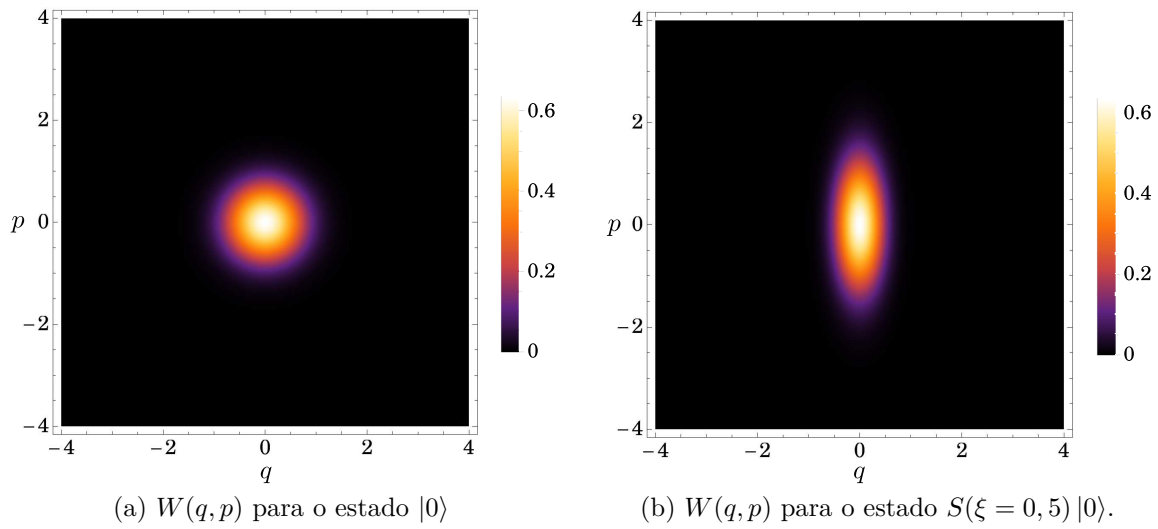


Figura 8 – Projeções das funções de Wigner  $W(q, p)$  para o estado de vácuo  $|0\rangle$  (8a) e para o estado de vácuo comprimido  $S(\xi = 0, 5) |0\rangle$  (8b). O operador  $S(\xi)$  reduz as flutuações na direção da quadratura  $q$ , aumentando-as, conseqüentemente, na direção de  $p$ .

## 4 Estados Comprimidos de Dois Modos

Neste capítulo, apresentamos uma revisão simplificada do processo de geração dos estados comprimidos de dois modos, conhecidos como estados de Einstein-Podolsky-Rosen (EPR), com os quais trabalhamos, no contexto de eletrodinâmica quântica de cavidades, estudado detalhadamente em [1]. Mostramos que as medidas sobre os estados atômicos utilizados no modelo de interação, em diferentes bases, deixam o campo nas configurações finais descritas pelos estados de EPR e EPR par e ímpar. Os estados são apresentados, e suas propriedades estatísticas são discutidas.

### 4.1 Estados de EPR

No presente modelo, apresentado originalmente em [1], são gerados estados comprimidos de dois modos do campo eletromagnético no interior de uma cavidade óptica, por meio da interação entre um átomo de dois níveis, com estados representados na base  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ , e dois modos do campo eletromagnético. Embora o processo de geração tenha sido estudado previamente, as propriedades gerais dos estados comprimidos gerados através do protocolo não foram estudados.

A interação entre os estados atômicos e os modos do campo são representadas pelo Hamiltoniano efetivo [1]

$$H = \chi(ab + a^\dagger b^\dagger)(\sigma_{--} - \sigma_{++}), \quad (4.1)$$

sendo  $a$  e  $b$  ( $a^\dagger$  e  $b^\dagger$ ) os operadores de aniquilação (criação) dos modos do campo, e  $\sigma_{\pm\pm} = |\pm\rangle\langle\pm|$  operadores que atuam sobre os estados atômicos.

O estado inicial do átomo sob consideração é preparado como a superposição de estados de spin

$$|\phi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle + e^{i\varphi} |-\rangle), \quad (4.2)$$

onde  $e^{i\varphi}$  representa o fator de fase relativa entre os estados  $|+\rangle$  e  $|-\rangle$ . O campo eletromagnético no interior da cavidade encontra-se inicialmente no estado de vácuo, representado por

$$|\psi_0\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle = |0, 0\rangle. \quad (4.3)$$

A configuração do sistema composto, representado por átomo e campo, é descrita no espaço de Hilbert gerado pelo produto tensorial dos espaços individuais,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{at.}} \otimes \mathcal{H}_{\text{campo}}, \quad (4.4)$$

e é dada pelo produto dos estados iniciais

$$|\Psi_0\rangle = |\phi_0\rangle \otimes |\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |+\rangle + e^{i\varphi} |-\rangle \right) \otimes |0, 0\rangle. \quad (4.5)$$

A evolução temporal do sistema composto é governada pelo Hamiltoniano 4.1 através da equação de Schrödinger,

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi(t)\rangle}{\partial t} = H |\Psi(t)\rangle, \quad (4.6)$$

e o estado final do sistema é dado por

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{iHt}{\hbar}} |\Psi_0\rangle. \quad (4.7)$$

Substituindo o Hamiltoniano (4.1) em (4.7), escrevemos o estado final do sistema como

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{it}{\hbar} \chi(ab+a^\dagger b^\dagger)(\sigma_{--} - \sigma_{++})} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |+\rangle + e^{i\varphi} |-\rangle \right) \otimes |0, 0\rangle \right]. \quad (4.8)$$

Fazendo a mudança de variável  $\frac{ixt}{\hbar} = \xi$ , em que  $|\xi| = r$  representa o módulo de compressão dos estados comprimidos do campo gerados através do protocolo [1], e considerando a atuação dos operadores atômicos sobre o estado  $|\phi_0\rangle$ ,

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |+\rangle e^{r(ab+a^\dagger b^\dagger)} |0, 0\rangle + e^{i\varphi} |-\rangle e^{-r(ab+a^\dagger b^\dagger)} |0, 0\rangle \right], \quad (4.9)$$

onde foi empregada a notação simplificada  $|x\rangle \otimes |y\rangle = |x\rangle |y\rangle$ .

Uma medida realizada então sobre o estado atômico, na base  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$  deixa o campo nas configurações finais

$$|\psi_\pm(r)\rangle = S_\pm(r) |0, 0\rangle, \quad (4.10)$$

sendo  $S_{12,(\pm)}(r) = e^{\pm r(ab+a^\dagger b^\dagger)}$  o operador que gera a compressão no estado do campo. Representados na base de Fock, os estados  $|\psi_\pm(r)\rangle$  podem ser escritos como [1]

$$|\psi_\pm(r)\rangle = \frac{1}{\cosh(r)} \sum_{n=0}^{\infty} [\pm \tanh(r)]^n |n, n\rangle, \quad (4.11)$$

com  $|\psi_\pm(r)\rangle$  aproximando-se do estado de EPR de dois modos quando  $r \rightarrow \infty$ , originalmente proposto por Einstein, Podolski e Rosen para questionar a mecânica quântica [2]. A matriz densidade pode ser obtida diretamente através de  $\rho_+(r) = |\psi_+(r)\rangle\langle\psi_+(r)|$ ,

$$\rho_+(r) = \frac{1}{\cosh^2(r)} \sum_{m,n=0}^{\infty} \tanh^{m+n}(r) |m, m\rangle\langle n, n|, \quad (4.12)$$

Após ser tomado o traço parcial sobre as variáveis de um dos modos, obtém-se a matriz densidade reduzida, que representa o estado de um modo individual,

$$\rho_{1,+}(r) = \frac{1}{\cosh^2(r)} \sum_{n=0}^{\infty} \tanh^{2n}(r) |n\rangle\langle n|. \quad (4.13)$$

Na figura (9) estão representadas a distribuição de fótons e a função de Wigner para o estado  $|\psi_+(r)\rangle$ , com  $r = 1.5$ .

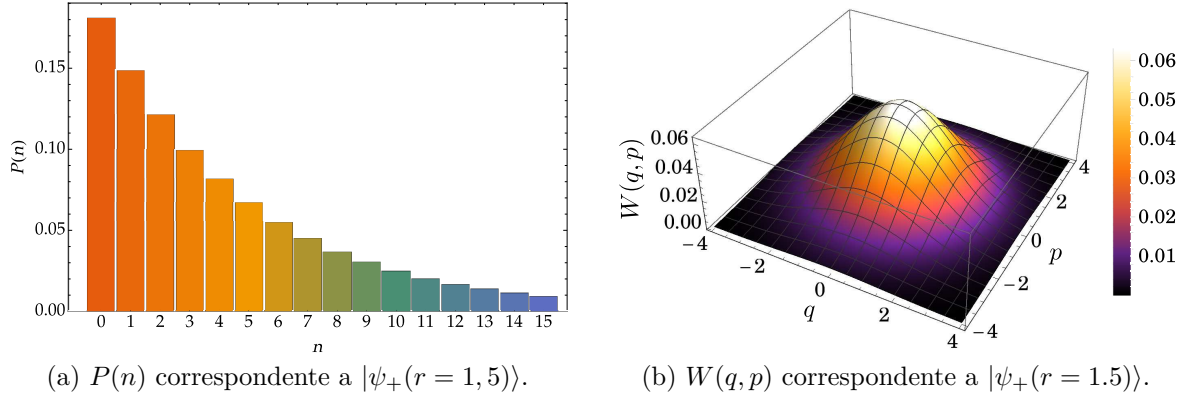


Figura 9 – Distribuição de fótons  $P(n)$  (9a) e função de Wigner  $W(q, p)$  (9b), após ser tomado o traço parcial sobre as variáveis de um dos modos. A ausência de negatividade de  $W(q, p)$  em (9b) caracteriza globalmente a função de Wigner como distribuição de probabilidade, que tem perfil gaussiano. Observa-se, além disso, através de (9a) que o sistema é deixado em uma mistura de estados de Fock, assemelhando-se a um estado térmico do campo.

Realizando uma mudança de base, utilizando agora os estados energéticos do átomo, representados por  $\{|e\rangle, |g\rangle\}$ , com

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|g\rangle \pm |e\rangle), \quad (4.14)$$

pode-se reescrever a configuração final do sistema composto (4.9) na forma

$$|\Psi(r, \varphi)\rangle = \frac{1}{2} \left[ (|g\rangle + |e\rangle) |\psi_+(r)\rangle + e^{i\varphi} (|g\rangle - |e\rangle) |\psi_-(r)\rangle \right], \quad (4.15)$$

$$|\Psi(r, \varphi)\rangle = \frac{1}{2} \left[ |g\rangle (|\psi_+(r)\rangle + e^{i\varphi} |\psi_-(r)\rangle) + |e\rangle (|\psi_+(r)\rangle - e^{i\varphi} |\psi_-(r)\rangle) \right]. \quad (4.16)$$

Medidas realizadas sobre os estados atômicos, na base  $\{|e\rangle, |g\rangle\}$ , deixam então o campo nas superposições de estados

$$|\Phi_{\pm}(r, \varphi)\rangle = \mathcal{N}_{\pm}(r, \varphi) (|\psi_+(r)\rangle \pm e^{i\varphi} |\psi_-(r)\rangle). \quad (4.17)$$

Em particular, os estados da superposição podem ser representados de maneira unificada através da variável  $\varphi$ , de maneira que (4.17) é escrita, para qualquer valor de  $\varphi$ , como

$$|\psi(r, \varphi)\rangle = \mathcal{N}(r, \varphi) (|\psi_+(r)\rangle + e^{i\varphi} |\psi_-(r)\rangle). \quad (4.18)$$

Representada na base de Fock, a superposição é escrita como

$$|\psi(r, \varphi)\rangle = \mathcal{N}(r, \varphi) \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \tanh^n(r) (1 + e^{i\varphi} (-1)^n) |n, n\rangle \right], \quad (4.19)$$

com  $\mathcal{N}(r, \varphi)$ , calculado através da normalização

$$\langle \psi(r, \varphi) | \psi(r, \varphi) \rangle = |\mathcal{N}(r, \varphi)|^2 \sum_{m,n=0}^{\infty} \left[ \tanh^{m+n}(r) (1 + e^{-i\varphi}(-1)^m) (1 + e^{i\varphi}(-1)^n) \langle m, m | n, n \rangle \right], \quad (4.20)$$

$$\langle \psi(r, \varphi) | \psi(r, \varphi) \rangle = |\mathcal{N}(r, \varphi)|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[ 2 \tanh^{2n}(r) (1 + \cos(\varphi)(-1)^n) \right] = 1. \quad (4.21)$$

Então, para um ângulo de fase  $\varphi$  genérico, tem-se

$$|\mathcal{N}(r, \varphi)|^2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{1 - \tanh^4(r)}{(1 + \tanh^2(r)) + \cos(\varphi)(1 - \tanh^2(r))} \right]. \quad (4.22)$$

A matriz densidade, representada na base de Fock, pode ser obtida diretamente através da equação (4.19),

$$\rho(r, \varphi) = |\mathcal{N}(r, \varphi)|^2 \sum_{m,n=0}^{\infty} \tanh^{m+n}(r) (1 + e^{i\varphi}(-1)^m) (1 + e^{-i\varphi}(-1)^n) |m, m\rangle \langle n, n|. \quad (4.23)$$

A partir da matriz densidade (4.23), pode-se obter a matriz densidade reduzida,  $\rho_1$ , através do traço parcial tomado sobre as variáveis de quaisquer dos modos,

$$\begin{aligned} \rho_1 &= |\mathcal{N}(r, \varphi)|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \tanh^{2n}(r) (1 + e^{i\varphi}(-1)^n) (1 + e^{-i\varphi}(-1)^n) |n\rangle \langle n| \\ &= |\mathcal{N}(r, \varphi)|^2 \sum_{n=0}^{\infty} 2 \tanh^{2n}(r) [1 + \cos(\varphi)(-1)^n] |n\rangle \langle n| \end{aligned} \quad (4.24)$$

## 4.2 Estados de EPR Par e Ímpar

Os estados de EPR par e ímpar, também estudados em [1], são casos particulares de ângulos de fase  $\varphi = 0$  e  $\varphi = \pi$ , respectivamente

$$|\psi(r, \varphi = 0)\rangle = \mathcal{N}(r, \varphi = 0) (|\psi_+(r)\rangle + |\psi_-(r)\rangle), \quad (4.25a)$$

$$|\psi(r, \varphi = \pi)\rangle = \mathcal{N}(r, \varphi = \pi) (|\psi_+(r)\rangle - |\psi_-(r)\rangle). \quad (4.25b)$$

De maneira geral, os estados par e ímpar podem ser escritos de maneira compacta através de

$$|\psi_{(p,i)}(r)\rangle = \mathcal{N}_{(p,i)}(r) \sum_{n=0}^{\infty} \tanh^n(r) (1 \pm (-1)^n) |n, n\rangle, \quad (4.26)$$

onde os subíndices  $p, i$  identificam aos estados par e ímpar, representados pelos sinais positivo e negativo no lado direito da eq. (4.26), respectivamente, com

$$|\mathcal{N}_{(p,i)}(r)|^2 = \frac{1}{2 \sum_{n=0}^{\infty} [\tanh^{2n}(r)(1 \pm (-1)^n)]}. \quad (4.27)$$

Os estados descritos por  $|\psi(r)_{(p,i)}\rangle$  têm propriedades de distribuição concentradas em ocupações pares e ímpares. De fato, das equações (4.25a) e (4.25b), resultam as expressões

$$|\psi_p(r)\rangle = 2\mathcal{N}_p(r) \sum_{n=0}^{\infty} \tanh^{2n}(r) |2n, 2n\rangle, \quad (4.28a)$$

$$|\psi_i(r)\rangle = 2\mathcal{N}_i(r) \sum_{n=0}^{\infty} \tanh^{2n+1}(r) |2n+1, 2n+1\rangle. \quad (4.28b)$$

Para que as propriedades dos modos individuais dos estados do campo sejam estudadas, faz-se necessário tomar o traço parcial sobre as variáveis de um dos modos. A matriz densidade dos estados par e ímpar é dada por

$$\rho_{(p,i)}(r) = |\mathcal{N}_{(p,i)}(r)|^2 \sum_{m,n=0}^{\infty} (\tanh(r))^{(m+n)} (1 \pm (-1)^m) (1 \pm (-1)^n) |m, m\rangle\langle n, n|. \quad (4.29)$$

Tomando-se o traço parcial sobre as variáveis de um dos modos, é obtida a matriz densidade reduzida do sistema, escrita como

$$\rho_{1,(p,i)}(r) = \text{Tr}_2(\rho_{(p,i)}(r)), \quad (4.30)$$

$$\rho_{1,(p,i)}(r) = |\mathcal{N}_{(p,i)}(r)|^2 \sum_{n=0}^{\infty} 2 \tanh^{2n}(r) (1 \pm (-1)^n) |n\rangle\langle n| \quad (4.31)$$

Na figura (10) estão representadas graficamente as distribuições de fótons para os estados de EPR par e ímpar.



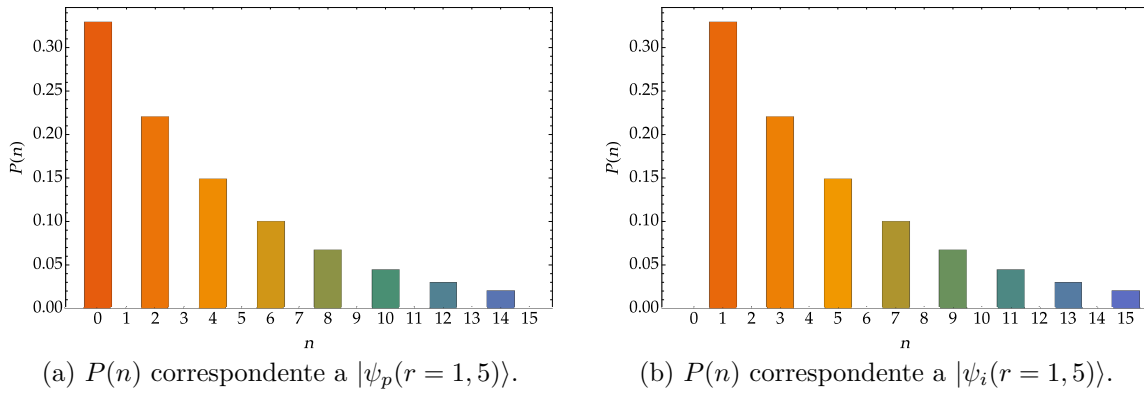


Figura 10 – Distribuições de fótons  $P(n)$  para os estados  $|\psi_p(r=1,5)\rangle$  (10a) e  $|\psi_i(r=1,5)\rangle$  (10b). Evidencia-se o comportamento da seleção de níveis energéticos com ocupações pares e ímpares, respectivamente.

Na figura (11), estão representadas as funções de Wigner em três dimensões para os estados par e ímpar, com  $r=1,5$ , juntamente com suas projeções sobrepostas.

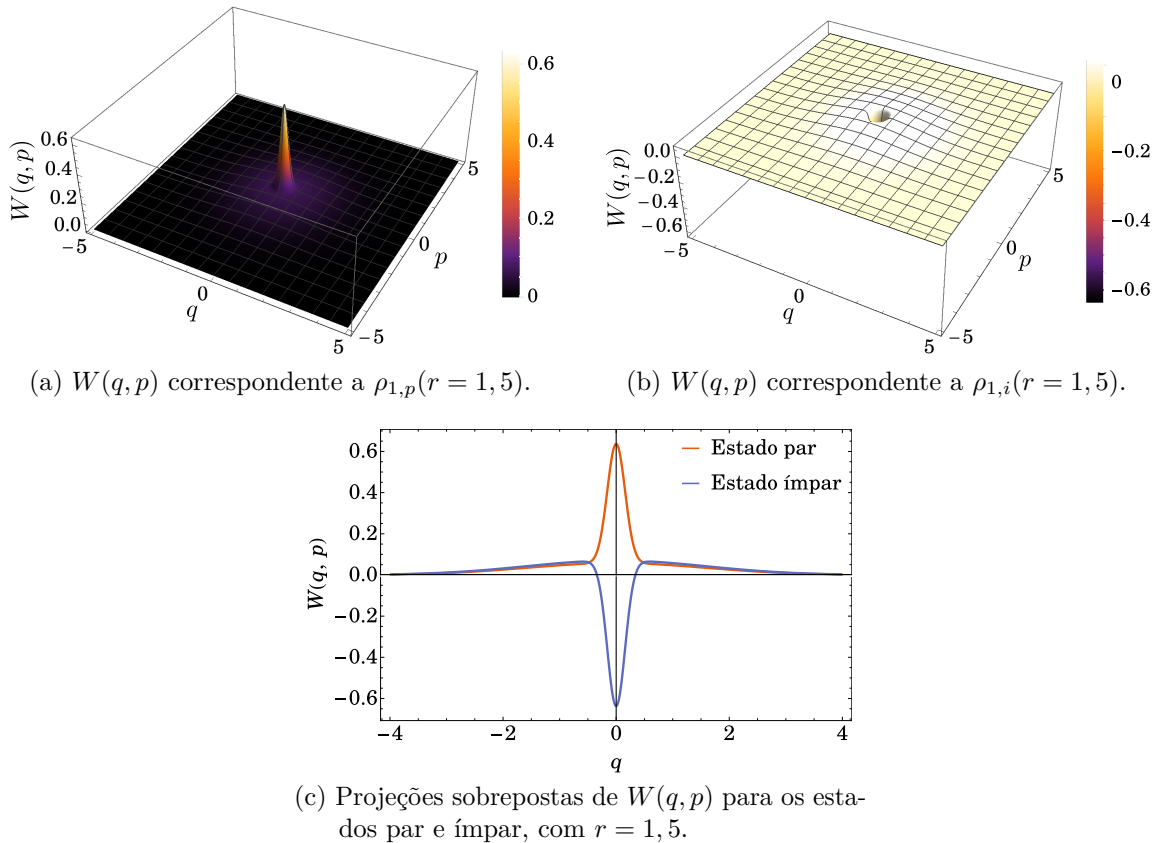


Figura 11 – Funções de Wigner em três dimensões para os estados par (11a) e ímpar (11b), com módulo de compressão  $r=1,5$ , juntamente com as respectivas projeções sobrepostas (11c), para efeitos de comparação.

Os estados representados pelas matrizes densidades reduzidas  $\rho_1(r,\varphi)$  apresentam características peculiares com o aumento do módulo de compressão,  $r$ . Assim como o

estado  $|\psi_+(r)\rangle$ , os estados par e ímpar, após ser tomado o traço parcial sobre um dos modos, são deixados em uma mistura de estados de Fock. No entanto, as distribuições de probabilidade  $W(q, p)$  se comportam de forma distinta quando comparadas ao estado  $|\psi_+(r)\rangle$ : com o aumento de  $r$ ,  $W(q, p)$  correspondente a  $|\psi_+(r)\rangle$  torna-se mais distribuída no espaço de fase, enquanto, para os estados par e ímpar, concentra-se nas vizinhanças da origem, mantendo a simetria em todas as direções. Na figura (12) estão representadas as funções de Wigner e as distribuições de fótons para um valor fixo de  $r$  e diferentes valores de  $\varphi$ , para verificar a influência deste fator sobre as distribuições.

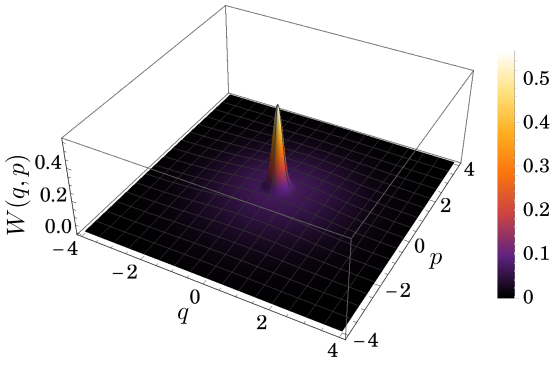
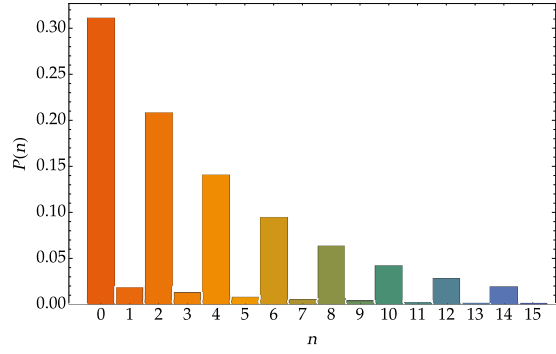
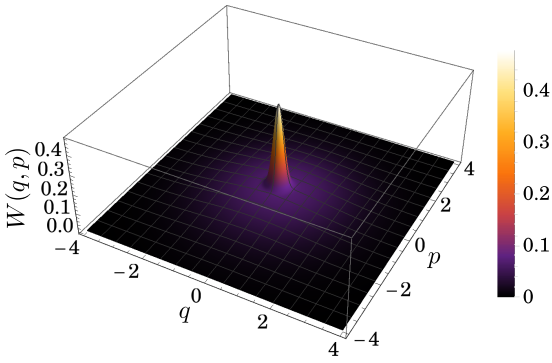
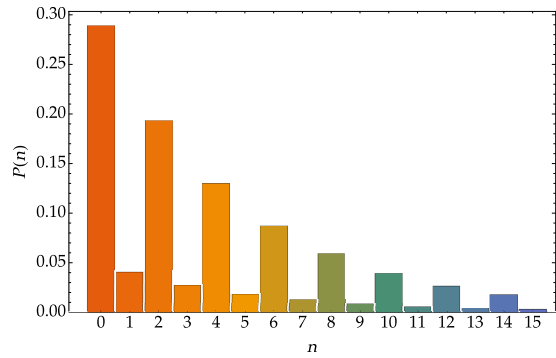
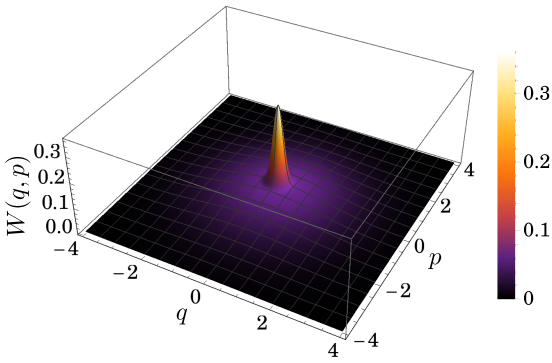
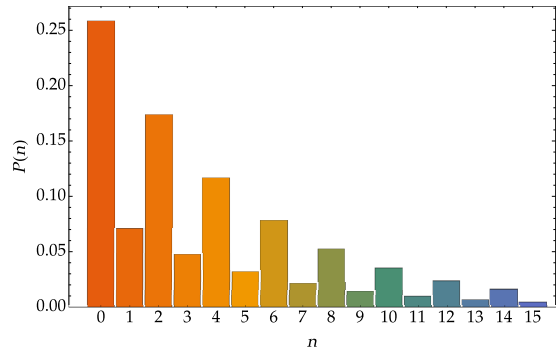
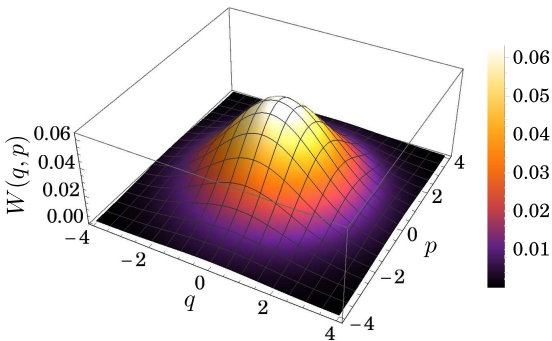
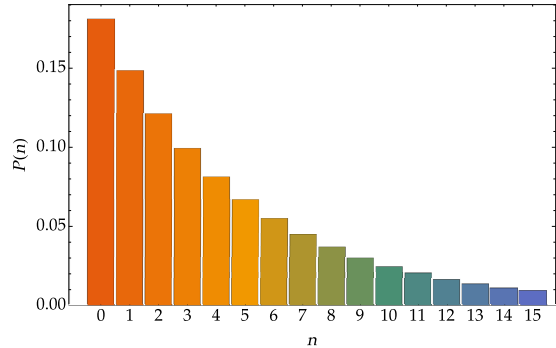
(a)  $r = 1,5 \varphi = \pi/6$ .(b)  $r = 1,5 \varphi = \pi/6$ .(c)  $r = 1,5 \varphi = \pi/4$ .(d)  $r = 1,5 \varphi = \pi/4$ .(e)  $r = 1,5 \varphi = \pi/3$ .(f)  $r = 1,5 \varphi = \pi/3$ .(g)  $r = 1,5 \varphi = \pi/2$ .(h)  $r = 1,5 \varphi = \pi/2$ .

Figura 12 –  $W(q, p)$  e  $P(n)$  para as matrizes densidade reduzidas que representam os estados de EPR com fase relativa. Os diferentes valores do fator de fase alteram as distribuições de fótons, aumentando as probabilidades das ocupações ímpares, antes não populadas no estado par ( $\varphi = 0$ ). As funções de Wigner também sofrem alterações, em especial, as flutuações térmicas aumentam com a alteração do fator de fase, para  $r = 1,5$  fixo.

Também foi estudado o comportamento da função de correlação  $g^{(2)}(0)$  nos estados de EPR par e ímpar, e os resultados foram comparados com os estados de EPR e comprimido de um modo. Para o estado de EPR temos  $g^{(2)}(0) = 2$  por tratar-se de um estado térmico do campo, quando tomado o traço parcial sobre quaisquer dos modos. Para os estados par e ímpar, as funções de correlação (derivadas no apêndice B) são escritas como

$$g^{(2)}(0)_{\text{par}} = \frac{4 \left[ \frac{1}{(1-\lambda)^3} + \frac{1}{(1+\lambda)^3} \right]}{(1-\lambda^2) \left[ \frac{1}{(1-\lambda)^2} - \frac{1}{(1+\lambda)^2} \right]^2}, \quad (4.32a)$$

$$g^{(2)}(0)_{\text{ímpar}} = \frac{4\lambda \left[ \frac{1}{(1-\lambda)^3} - \frac{1}{(1+\lambda)^3} \right]}{(1-\lambda^2) \left[ \frac{1}{(1-\lambda)^2} + \frac{1}{(1+\lambda)^2} \right]^2}, \quad (4.32b)$$

com  $\lambda = \tanh^2(r)$ . Para o estado comprimido de um modo,  $g^{(2)}(0)$  é dada por [34]

$$g^{(2)}(0)_{\text{comp}} = \coth^2(r) + 2. \quad (4.33)$$

Na figura (13) estão representadas graficamente as funções de correlação dos estados citados.

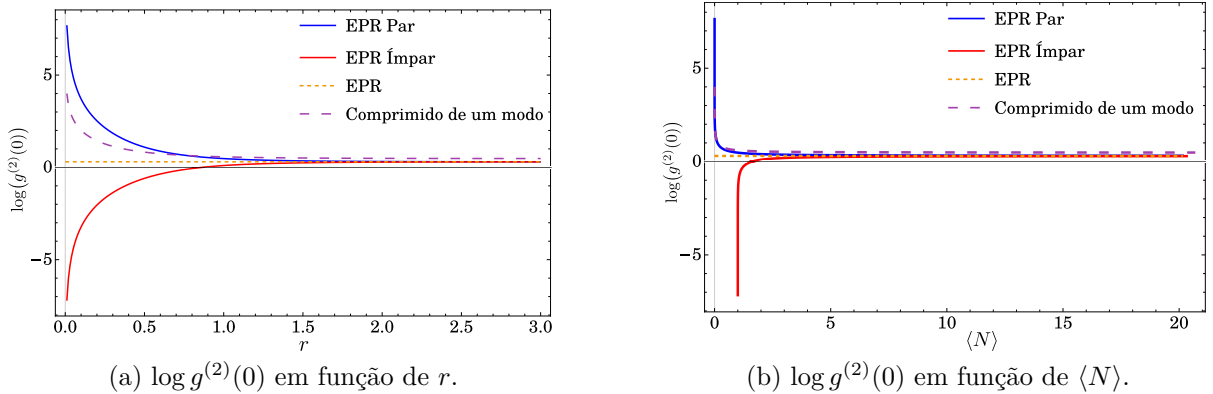


Figura 13 – Funções de correlação  $\log g^{(2)}(0)$  como função do parâmetro de compressão  $r$  (13a) e do número médio de fótons (13b) para os estados de EPR, EPR par e ímpar, e comprimido de um modo. Para o estado par e baixos valores de  $r$ , o estado par possui valores elevados para  $g^{(2)}(0)$ , maiores que o estado térmico de EPR reduzido, caracterizando-o como uma fonte de radiação *bunched*. Para o estado ímpar, os valores de  $g^{(2)}(0)$  o caracterizam como fontes *antibunched*.

O comportamento das funções  $g^{(2)}(0)$  exprime uma característica relevante sobre a natureza das distribuições de fótons para cada um dos estados. Para o estado par com baixos valores  $r$ , o sistema apresenta altos valores de  $g^{(2)}(0)$ . Para o estado ímpar, no entanto, ocorre o contrário: os baixos valores da função de correlação relevam a natureza *antibunched* dos fótons emitidos pelo sistema. Este comportamento pode ser explorado,

por exemplo, na geração de estados de um único fóton [35, 36, 37], em que a absorção simultânea de fótons por detectores exibe baixo nível de correlações.

## 5 Estudo e Quantificação de Emaranhamento em Estados Puros

Neste capítulo tratamos do estudo da separabilidade entre os modos dos estados de interesse no desenvolvimento do trabalho, os estados de EPR, EPR par e EPR ímpar. Apresentamos as definições básicas sobre separabilidade em sistemas quânticos compostos por dois subsistemas, e através de um critério simples de separabilidade, válido para estados puros, quantificamos o grau de emaranhamento para os estados de dois modos estudados.

### 5.1 Separabilidade em Sistemas Quânticos Compostos

Um sistema quântico é dito composto quando pode ser decomposto em dois ou mais subsistemas, onde cada subsistema representa um sistema quântico por si só [38]. Em especial, para sistemas compostos por dois subsistemas, é aplicada a nomenclatura “bipartite”. Formalmente, o espaço de Hilbert correspondente ao sistema composto é dado pelo produto direto dos espaços de Hilbert dos subsistemas individuais. Considerando um sistema *bipartite*, e identificando os subsistemas pelos índices 1 e 2 temos que

$$\mathcal{H}_C = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2. \quad (5.1)$$

O estado quântico do sistema composto corresponde ao produto direto dos estados dos subsistemas. Sejam  $|\psi_1\rangle$  e  $|\psi_2\rangle$  os estados correspondentes aos subsistemas. O estado do sistema composto, então, pode ser escrito como

$$|\Psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle. \quad (5.2)$$

A matriz densidade correspondente a  $|\Psi\rangle$  pode ser obtida facilmente, tratando-se de um estado puro,

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi| = (|\psi_1\rangle\langle\psi_1|) \otimes (|\psi_2\rangle\langle\psi_2|) = \rho_1 \otimes \rho_2. \quad (5.3)$$

O estado composto representado por  $|\Psi\rangle$  representa um estado denominado separável, onde pode-se identificar com exatidão o estado individual de cada um dos subsistemas. É válido notar que a matriz densidade reduzida  $\rho_1$  ( $\rho_2$ ) representa um estado puro, associado ao subsistema 1 (2), de forma que é possível fazer a decomposição de  $\rho$  em um produto de estados puros. O emaranhamento entre subsistemas emerge naturalmente da

aplicação do princípio da superposição a sistemas quânticos compostos. Como exemplo simples, consideremos o estado dado por

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle + |\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle], \quad (5.4)$$

onde  $1/\sqrt{2}$  representa o fator de normalização das probabilidades associadas ao estado, obtido através de  $\langle\Phi|\Phi\rangle = 1$ . Processos de medida associados a somente um dos subsistemas, representados por  $O$  e  $R$  para os subsistemas 1 e 2, respectivamente, podem ser representados por operadores na forma

$$O = O_1 \otimes \mathcal{I}_2, \quad R = \mathcal{I}_1 \otimes R_2, \quad (5.5)$$

sendo  $\mathcal{I}_1$  ( $\mathcal{I}_2$ ) o operador identidade associado ao subsistema 1 (2), cuja dimensão é correspondente ao espaço de Hilbert associado,  $\dim(\mathcal{I}_1) = \dim(\mathcal{H}_1)$  ( $\dim(\mathcal{I}_2) = \dim(\mathcal{H}_2)$ ). O valor médio de  $O$ , que tem ação somente sobre o subsistema 1, no estado representado em (5.4) é calculado como

$$\begin{aligned} \langle O \rangle &= \text{Tr}[O |\Phi\rangle\langle\Phi|] \\ &= \text{Tr}[(O_1 \otimes \mathcal{I}_2) |\Phi\rangle\langle\Phi|] \\ &= \text{Tr}_1[O_1 \text{Tr}_2(|\Phi\rangle\langle\Phi|)] \end{aligned} \quad (5.6)$$

sendo  $\text{Tr}_1$  ( $\text{Tr}_2$ ) a operação que denota o traço parcial sobre os estados correspondentes ao subsistema 1 (2). A situação é semelhante para o operador local  $R$ , que atua somente sobre o subsistema 2,

$$\langle R \rangle = \text{Tr}_2[R_2 \text{Tr}_1(|\Phi\rangle\langle\Phi|)]. \quad (5.7)$$

As equações (5.6) e (5.7) são válidas para quaisquer operadores de atuação local, somente sobre um dos subsistemas. Estas situações podem ser ilustradas quando o experimentador tem acesso a somente uma das partes que compõem o sistema composto, por exemplo, quando a distância entre os subsistemas que compartilham o estado (5.4) é grande. Podemos então escrever os resultados das medidas locais através de

$$\langle O \rangle = \text{Tr}(O_1 \rho_1), \quad \langle R \rangle = \text{Tr}(R_2 \rho_2), \quad (5.8)$$

onde os estados dos subsistemas 1 e 2 passam a ser representados pelos operadores densidades reduzidos  $\rho_1 = \text{Tr}_2(\rho)$ ,  $\rho_2 = \text{Tr}_1(\rho)$ . Dada a validade de (5.6) e (5.7) para quaisquer operadores locais, é possível observar que uma medida executada sobre qualquer

um dos subsistemas componentes implica em uma redução do estado quântico de todo o sistema composto, com os subsistemas individuais representados agora pelos operadores densidade reduzidos.

Os estados dos subsistemas podem ser obtidos diretamente do operador densidade do sistema composto,

$$\begin{aligned}\rho &= |\Phi\rangle\langle\Phi| \\ &= \frac{1}{2} [|\psi_1\rangle\langle\psi_1| \otimes |\psi_2\rangle\langle\psi_2| + |\psi_1\rangle\langle\phi_1| \otimes |\psi_2\rangle\langle\phi_2| + |\phi_1\rangle\langle\psi_1| \otimes |\phi_2\rangle\langle\psi_2| + |\phi_1\rangle\langle\phi_1| \otimes |\phi_2\rangle\langle\phi_2|].\end{aligned}\quad (5.9)$$

Tomando-se o traço parcial sobre as variáveis dos modos 1 e 2, temos, respectivamente

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \text{Tr}_2(\rho) = \frac{1}{2} [|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + |\phi_1\rangle\langle\phi_1|], \\ \rho_2 &= \text{Tr}_1(\rho) = \frac{1}{2} [|\psi_2\rangle\langle\psi_2| + |\phi_2\rangle\langle\phi_2|].\end{aligned}\quad (5.10)$$

Através de (5.10), podemos ver que os operadores densidade correspondentes aos estados individuais representam misturas estatísticas dos estados da superposição (5.4). Além disso, o operador densidade do estado quântico composto não pode ser escrito como o produto direto dos operadores densidade reduzidos,  $\rho_1$  e  $\rho_2$ ,

$$\rho = |\Phi\rangle\langle\Phi| \neq \rho_1 \otimes \rho_2. \quad (5.11)$$

Em tal situação, denomina-se o estado  $|\Phi\rangle$  como não separável. Formalmente, a condição de não separabilidade pode ser definida como [38]

$$\nexists p_i > 0, \rho_1^{(i)}, \rho_2^{(i)} \text{ tais que } \rho = \sum_i p_i \rho_1^{(i)} \otimes \rho_2^{(i)}. \quad (5.12)$$

Além disso, é válido notar que a não separabilidade implica na obtenção de estados mistos como resultado da operação de traço parcial, para um estado composto puro, representado por um vetor de estado  $|\Phi\rangle \in \mathcal{H}_C$ . Sendo assim, para sistemas compostos *bipartites*, representados por estados puros, pode-se investigar a separabilidade condicionada à pureza do estado reduzido.

Para estados puros, tem-se  $\rho^2 = \rho \implies \text{Tr}(\rho^2) = \text{Tr}(\rho) = 1$ . Quando o sistema encontra-se em um estado misto,  $\text{Tr}(\rho^2) < 1$ . Através da análise da pureza dos estados reduzidos, pode-se definir o critério de separabilidade como [38]



$$\text{Tr}(\rho_{1,2}^2) = 1 \Rightarrow \rho \text{ é separável}, \quad \text{Tr}(\rho_{1,2}^2) < 1 \Rightarrow \rho \text{ é emaranhado.} \quad (5.13)$$

A definição de separabilidade (5.13) será utilizada na investigação e quantificação do grau de emaranhamento nos estados de dois modos do campo eletromagnético, objeto de estudo deste trabalho. Definimos o grau de emaranhamento entre os subsistemas como a grandeza

$$GE_{1,2} \equiv 1 - \text{Tr}(\rho_{1,2}^2), \quad (5.14)$$

de maneira que, se os estados reduzidos forem puros,  $\text{Tr}(\rho_{1,2}^2) = 1$  e  $GE_{1,2} = 0$ , implicando que não há emaranhamento entre os subsistemas. À medida em que os subsistemas tornam-se mistos,  $GE_{1,2} \neq 0$ , e o estado composto não pode ser escrito de maneira separável.

## 5.2 Quantificação do Emaranhamento nos Estados Comprimidos de Dois Modos

O estudo das propriedades de emaranhamento nos estados comprimidos de dois modos foi motivado pela presença do fator de fase  $e^{i\varphi}$ , presente na superposição de estados geradas através do protocolo [1], quando feitas medidas sobre os estados atômicos na base  $\{|g\rangle, |e\rangle\}$ . De fato, o fator de fase da preparação é “carregado” aos estados finais em que são deixados os modos do campo eletromagnético presentes no interior da cavidade, de acordo com a equação (4.18).

Tomando-se o traço parcial sobre quaisquer um dos modos do campo, as matrizes densidade reduzidas dos estados de EPR e das superposições são dadas por (4.13) e (4.24), respectivamente. O grau de emaranhamento correspondente ao estado comprimido de dois modos (calculado no apêndice C) é

$$\begin{aligned} \rho_{1,+}^2 &= \frac{1}{\cosh^4(r)} \sum_{n=0}^{\infty} \tanh^{4n}(r) |n\rangle\langle n|, \\ \Rightarrow GE[\rho_{1,+}] &= 1 - \frac{1}{\cosh(2r)}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Para a superposição de estados comprimidos de dois modos com fase relativa, o

grau de emaranhamento (calculado no apêndice C) é dado por

$$\begin{aligned} \rho_1^2(r, \varphi) &= |\mathcal{N}(r, \varphi)|^4 \sum_{n=0}^{\infty} 4 \tanh^{4n}(r) (1 + \cos^2(\varphi) + 2 \cos(\varphi)(-1)^n) |n\rangle\langle n|, \\ \implies GE[\rho_1(r, \varphi)] &= 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{\cos(\varphi)}{\cosh(2r)}\right)^2} \left[ \frac{1 + \cos^2(\varphi)}{\cosh(2r)} + \frac{2 \cos(\varphi)}{\cosh^4(r) + \sinh^4(r)} \right]. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Para verificar a influência do fator de fase no emaranhamento entre os modos do sistema composto, inicialmente, fixou-se a variável  $r = 0,5$ , que representa o módulo de compressão do campo, e variou-se  $\varphi$  no intervalo  $[0, \pi]$ . Para cada valor de  $\varphi$ , foi calculado o grau de emaranhamento do sistema, através das equações (5.15) e (5.16). Na figura (14), estão representados graficamente os graus de emaranhamento correspondentes aos estados  $|\psi_+(r)\rangle$  e  $|\psi(r, \varphi)\rangle$ .

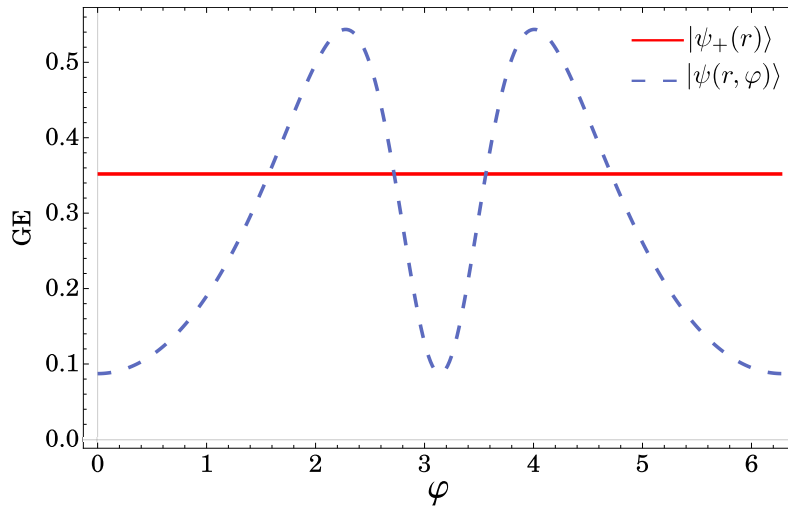


Figura 14 – Graus de Emaranhamento para os estados comprimido de dois modos  $|\psi_+(r)\rangle$ , e superposição de estados comprimidos de dois modos com fase relativa  $|\psi(r, \varphi)\rangle$ , para o parâmetro de compressão fixado em  $r = 0,5$ . Observa-se que o fator de fase de preparação atômica influencia diretamente no grau de emaranhamento entre os modos do campo eletromagnético, sendo este, para alguns casos, maior que àquele referente ao estado  $|\psi_+(r)\rangle$ .

Conforme foi mostrado na figura (14), para um valor de  $r$  fixo, a geração de estados com maior grau de emaranhamento é possível, comparando-se com o estado comprimido de dois modos  $|\psi_+(r)\rangle$ . Isto representa uma vantagem, já que  $|\psi_+(r)\rangle$  é perfeitamente correlacionado em posição e *momentum* quando  $r \rightarrow \infty$ . Em particular, de posse da equação (5.16), é possível mapear o grau de emaranhamento do sistema para todos os valores de  $\varphi$ . O mapeamento em três dimensões é exibido na figura (15).

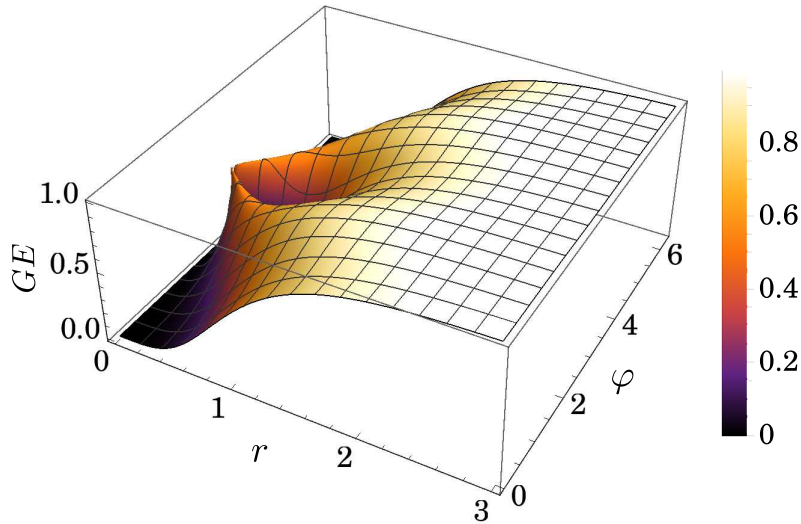


Figura 15 – Mapeamento em três dimensões do grau de emaranhamento do sistema representado pela matriz densidade reduzida  $\rho_1(r, \varphi)$ . Para pequenos valores de  $r$ , é possível obter um grau elevado de emaranhamento, com valores de  $\varphi$  próximos de  $\pi$ .  $GE$  pode também ser mantido elevado ajustando-se os valores de  $\varphi$  para maiores valores do módulo de compressão  $r$ . Além disso, o mapa também evidencia regiões de mínimos locais para  $GE$ .

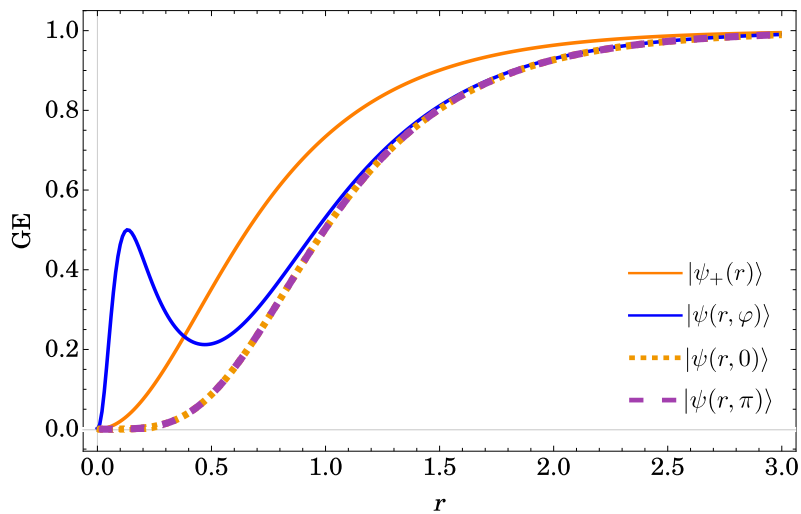


Figura 16 – Comparação entre graus de emaranhamento contidos nos estados comprimido de dois modos  $|\psi_+(r)\rangle$ , o estado preparado com fase relativa  $|\psi(r, \varphi)\rangle$ , e os estados par  $|\psi(r, 0)\rangle$  e ímpar  $|\psi(r, \pi)\rangle$ . Pode-se observar que, para o caso particular  $\varphi = 165^\circ$ ,  $GE$  correspondente a  $|\psi(r, \varphi)\rangle$  apresenta um máximo local nas vizinhanças de  $r = 0,13$ , tendo esta quantidade consideravelmente maior que o estado  $|\psi_+(r)\rangle$ , para o mesmo valor do módulo de compressão. Além disso, também é possível identificar a região de mínimo local para  $GE$  nas vizinhanças de  $r = 0,47$ , enquanto o estado  $|\psi_+(r)\rangle$  apresenta comportamento estritamente crescente com o aumento de  $r$ . Os dois estados apresentam aproximadamente o mesmo grau de mistura em torno de  $r = 0,38$ .

O estudo das regiões de máximos e mínimos locais é conduzido em comparação

direta com o estado  $|\psi_+(r)\rangle$  a seguir. Para tal, foram investigadas a quantificação direta do grau de emaranhamento contido nas matrizes densidade reduzidas diretamente através das equações (5.15) e (5.16), e as distribuições de probabilidade dadas por  $W(q, p)$ , para um caso particular do ângulo de fase  $\varphi = 165^\circ$ , onde podem ser observados máximos e mínimos com curvas suaves.

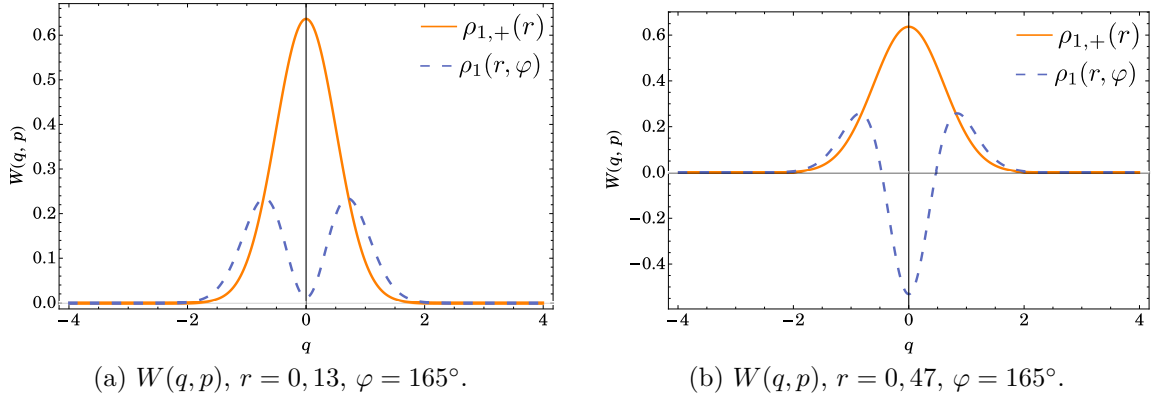


Figura 17 – Comparação direta das projeções das funções de Wigner sobre o eixo  $q$  entre os estados correspondentes a  $|\psi_+(r)\rangle$ , representado por  $\rho_{1,+}(r)$ , e os estados com fase relativa,  $\rho_1(r, \varphi)$ .

Conforme exibido na figura (15), o grau de emaranhamento apresenta uma região de máximo para baixos valores de  $r$  e ângulos de fase  $\varphi$  nas vizinhanças de  $\pi$ . Considerando a expressão para o estado  $|\psi(r, \varphi)\rangle$  da equação (4.19) e fazendo a expansão dos coeficientes para  $r \ll 1$ ,

$$|\psi\rangle = \mathcal{N}_0 \sum_n \left(r - \frac{r^3}{3}\right)^n \left(1 + e^{i\varphi}(-1)^n\right) |n, n\rangle. \quad (5.17)$$

Devido à condição  $r \ll 1$ , os coeficientes correspondentes aos estados  $|2, 2\rangle, |3, 3\rangle, \dots$  tornam-se desprezíveis quando comparados aos dos estados  $|0, 0\rangle$  e  $|1, 1\rangle$ . Desta forma, para um valor fixo de  $r$ , fatorando o fator de fase correspondente a  $|0, 0\rangle$ , a forma efetiva do estado é

$$|\psi\rangle \approx \mathcal{N}_0 \left[ |0, 0\rangle + \alpha \frac{(1 - e^{i\varphi})}{(1 + e^{i\varphi})} |1, 1\rangle \right], \quad (5.18)$$

com fator de normalização  $\mathcal{N}_0 = \sqrt{\frac{1 + \cos(\varphi)}{(1 + \cos(\varphi)) + \alpha^2(1 - \cos(\varphi))}}$ . Para que o estado seja maximamente emaranhado, para um valor de  $r$  fixo, o fator de fase  $\beta = \frac{1 - e^{i\varphi}}{1 + e^{i\varphi}}$  deve ser

máximo. Desta forma, manipulando  $\beta$ ,

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{(1 - e^{i\varphi})(1 + e^{-i\varphi})}{(1 + e^{i\varphi})(1 + e^{-i\varphi})}, \\ &= \frac{-i \sin(\varphi)}{1 + \cos(\varphi)}.\end{aligned}\tag{5.19}$$

Realizando a condição de maximização,

$$\frac{d\beta}{d\varphi} = -i \left[ \frac{1 + \cos(\varphi)}{(1 + \cos(\varphi))^2} = 0 \right],\tag{5.20}$$

$$\frac{1}{1 + \cos(\varphi)} = 0,\tag{5.21}$$

que ocorre quando  $\varphi \rightarrow \pi$ .

## 6 Metrologia Quântica com Estados Comprimidos de um e dois Modos

Neste capítulo apresentamos os resultados de aplicações dos estados quânticos alvos de estudo, comparando-os com àqueles referentes aos estados comprimidos de um modo. Os estados comprimidos de um modo têm grande relevância em trabalhos relacionados à metrologia quântica [11] devido às características de redução de flutuações em uma direção definida pelo parâmetro de compressão  $\xi$ , aumentando a precisão nos processos de estimação de parâmetros envolvidos em processos dinâmicos. Ressaltamos as vantagens das distribuições de probabilidade dos estados par e ímpar, simétricas no espaço de fase, tornando-os estados robustos para aplicações em metrologia, por serem insensíveis à fase de compressão.

### 6.1 Cálculos e Comparações de Distribuições de Probabilidade e Informação de Fisher

A motivação da aplicação dos estados comprimidos de dois modos, em particular, os estados de EPR par e ímpar, surge da simetria de rotação da função de Wigner  $W(q, p)$  dos operadores densidade reduzidos. A utilização dos estados comprimidos de um modo na área de metrologia está diretamente relacionada com a redução dos erros associados às medidas, quando realizadas na direção correspondente à compressão em uma das quadraturas do campo. O fato de os estados par e ímpar serem simétricos ao redor da origem os torna interessantes para aplicações em metrologia, apresentando vantagens em relação ao estado comprimido de um modo, por serem insensíveis à fase associada ao parâmetro de compressão  $\xi$ . Para uma comparação direta entre os estados, nas figuras (18) estão representadas as projeções das funções de Wigner dos estados de vácuo comprimido  $S(\xi) |0\rangle$ , com flutuações reduzidas na coordenada  $q$ , e comprimidos de dois modos par e ímpar, após ser tomado o traço parcial sobre um dos modos, para diferentes valores do parâmetro de compressão.

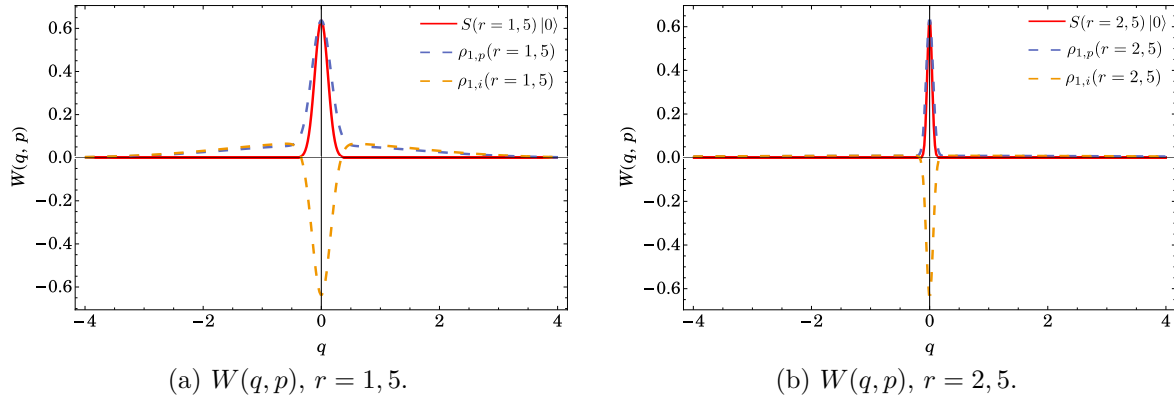


Figura 18 – Comparação direta das projeções das funções de Wigner sobre a coordenada  $q$  do espaço de fase, para os estados comprimido de um modo, par e ímpar, com  $r = 1, 5$  (18a) e  $r = 2, 5$  (18b). Observa-se que o estado comprimido apresenta flutuações ligeiramente menores na direção de compressão, quando comparadas às dos estados par e ímpar.

Para um estudo quantitativo mais detalhado, pode-se utilizar a largura a meia altura da função de Wigner como parâmetro comparativo entre as flutuações apresentadas pelos estados. As projeções das funções de Wigner sobre o eixo  $q$ , para os estados comprimido [27], par e ímpar (calculadas no apêndice A), são dadas, respectivamente, por

$$W_{comp}(q, 0) = \frac{2}{\pi} e^{-2q^2 e^{2r}} \quad (6.1)$$

$$W_p(q, 0) = \frac{1}{\pi} \left[ (1 - \lambda) e^{2q^2 \left( \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \right)} + (1 + \lambda) e^{-2q^2 \left( \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \right)} \right] \quad (6.2)$$

$$W_i(q, 0) = \frac{1}{\pi \lambda} \left[ (1 - \lambda) e^{2q^2 \left( \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \right)} - (1 + \lambda) e^{-2q^2 \left( \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \right)} \right] \quad (6.3)$$

com  $\lambda = \tanh^2(r)$ , apresentando pontos de extremo em  $q = 0$ . A largura à meia altura é definida, considerando uma projeção sobre o eixo  $q$ , como a distância entre os pontos  $q$  para os quais a função de Wigner vale metade de seu valor máximo. Para o estado comprimido de um modo, a largura a meia altura é dada por

$$\delta_{comp}(r) = 2 \sqrt{\frac{1}{2} e^{-2r} \ln(2)}. \quad (6.4)$$

Para os estados par e ímpar, os pontos correspondentes à largura a meia altura devem ser encontrados numericamente. Para o estado par, os pontos que definem a largura são dados pela solução da equação transcendental

$$(1 - \lambda) e^{2q^2 \left( \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \right)} + (1 + \lambda) e^{-2q^2 \left( \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \right)} = 1. \quad (6.5)$$

Para o estado ímpar, a altura foi definida como o ponto de mínimo, encontrado em  $q = p = 0$ , e os pontos correspondentes a meia altura são dados pelas soluções de

$$(1 - \lambda)e^{2q^2(\frac{\lambda-1}{\lambda+1})} - (1 + \lambda)e^{-2q^2(\frac{1+\lambda}{1-\lambda})} = -\lambda. \quad (6.6)$$

Na figura (19), estão apresentados os dados da largura a meia altura FWHM (*full width at half maximum*) para os estados comprimido de um modo, par e ímpar.

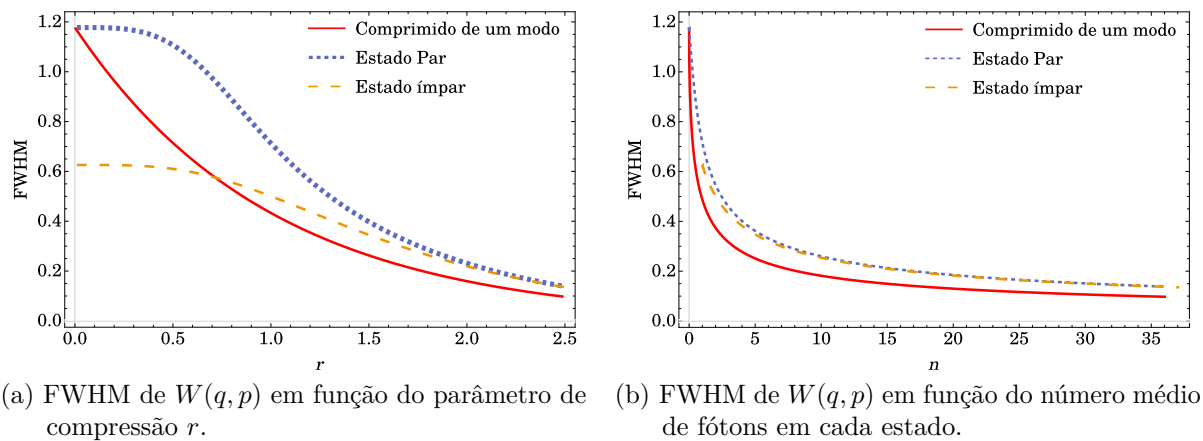


Figura 19 – Comparação das larguras máximas a meia altura da função de Wigner, para os estados comprimido de um modo, par e ímpar. O estado ímpar apresenta menor largura a meia altura, quando comparado ao estado comprimido, para valores baixos de  $r$  e  $n$  devido à forma com que foi definido o ponto de extremo para este estado.

Vale ressaltar que a largura a meia altura para o estado ímpar foi calculada utilizando como referência o ponto de mínimo localizado na origem, em que a função de Wigner vale  $W_i(0, 0) = -2/\pi$ . O ponto de cruzamento entre as curvas da largura a meia altura foi calculado numericamente, e tem valor  $r = 0,692$ , e o valor da largura a meia altura correspondente é de  $FWHM = 0,589$ . Os números médios de fótons para cada estado neste ponto são, respectivamente  $\langle N \rangle = 0,56$  e  $\langle N \rangle = 2,84$ , respectivamente, para os estados comprimido de um modo e ímpar. Para baixos valores do parâmetro de compressão, o estado apresenta flutuações térmicas, além da parte negativa localizada na origem. Tais flutuações podem ser visualizadas com clareza na figura (20), em que foram plotadas as funções de Wigner correspondentes ao ponto de cruzamento.



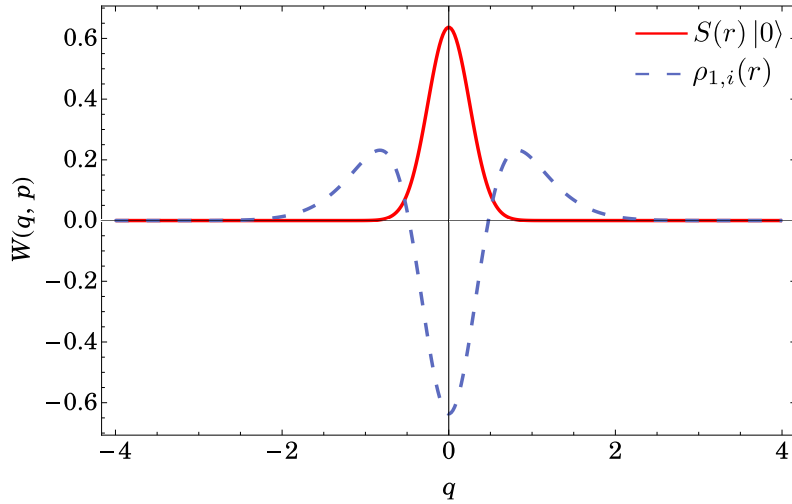


Figura 20 – Projeções das funções de Wigner dos estados comprimido de um modo e ímpar, no ponto de cruzamento  $r = 0,692$ . Pode-se observar as flutuações térmicas na função de Wigner do estado ímpar, representadas pelas regiões de positividade nas vizinhanças da origem.

Foram também calculadas as informações de Fisher para os estados comprimidos de um modo, par e ímpar, com respeito a deslocamentos do campo. Para tal, foi definido o operador de quadratura geral

$$X(\phi) = ae^{-i\phi} + a^\dagger e^{i\phi}, \quad (6.7)$$

que representa os operadores de posição e *momentum* do oscilador harmônico, para  $\phi = 0$  e  $\phi = \pi/2$ , respectivamente. Para estimação da amplitude correspondente à coordenada de posição  $q$ , o gerador utilizado é  $X(\pi/2) = -i(a - a^\dagger)$  [11].

Para os estados de EPR, EPR par e EPR ímpar, a informação de Fisher foi calculada através da equação (2.114), por se tratarem de estados reduzidos mistos. As expressões para a informação de Fisher (calculadas no apêndice D) nos estados EPR, EPR par e EPR ímpar são, respectivamente,

$$F_Q[\rho_{1,+}] = \frac{4(1-\lambda)}{1+\lambda} = \frac{4}{2\langle n_+ \rangle + 1}, \quad (6.8)$$

$$F_Q[\rho_{1,p}] = \frac{4(3\lambda^2 + 1)}{1-\lambda^2} = 4(2\langle n_p \rangle + 1), \quad (6.9)$$

$$F_Q[\rho_{1,i}] = \frac{4(\lambda^2 + 3)}{1-\lambda^2} = 4(2\langle n_i \rangle + 1), \quad (6.10)$$

onde  $\langle n_+ \rangle$  ( $\langle n_p \rangle$ ,  $\langle n_i \rangle$ ) representa o número médio de fótons do estado de EPR (EPR par, EPR ímpar). Vale ressaltar neste ponto o papel da simetria dos estados de EPR na estimação de parâmetros, que faz com que a informação de Fisher seja independente da

fase  $\phi$  do operador de quadratura geral. Isto implica em resultados iguais para estimação das amplitudes correspondentes à posição e *momentum*, assim como quaisquer amplitudes definidas por  $X(\phi)$ .

Para o estado comprimido de um modo, foi utilizada a expressão (2.103), por tratar-se de um estado puro. A informação de Fisher (calculada no apêndice D) para o estado comprimido foi calculada como

$$F_Q[S(\xi) | 0\rangle] = 4 \left( 1 + 2 \sinh^2(r) - \sinh(2r) \cos(\theta - 2\phi) \right), \quad (6.11)$$

sendo  $\theta$  a direção de compressão do estado comprimido ( $\xi = re^{i\theta}$ ). Em termos do número médio de fótons neste estado,  $\langle n_c \rangle$ , a informação de Fisher fica na forma

$$F_Q[S(\xi) | 0\rangle] = 4 \left( 1 + 2 \langle n_c \rangle - 2 \sqrt{\langle n_c \rangle (1 + \langle n_c \rangle)} \cos(\theta - 2\phi) \right), \quad (6.12)$$

que, ao contrário dos estados comprimidos de dois modos estudados, depende das fases de compressão  $\theta$  e de medição  $\phi$ .

Na figura (21) estão representadas a informação de Fisher em função do módulo de compressão  $r$  e do número médio de fótons, para os estados comprimido de um modo, EPR par e EPR ímpar, para estimação de deslocamentos na coordenada  $q = X(0)$ .

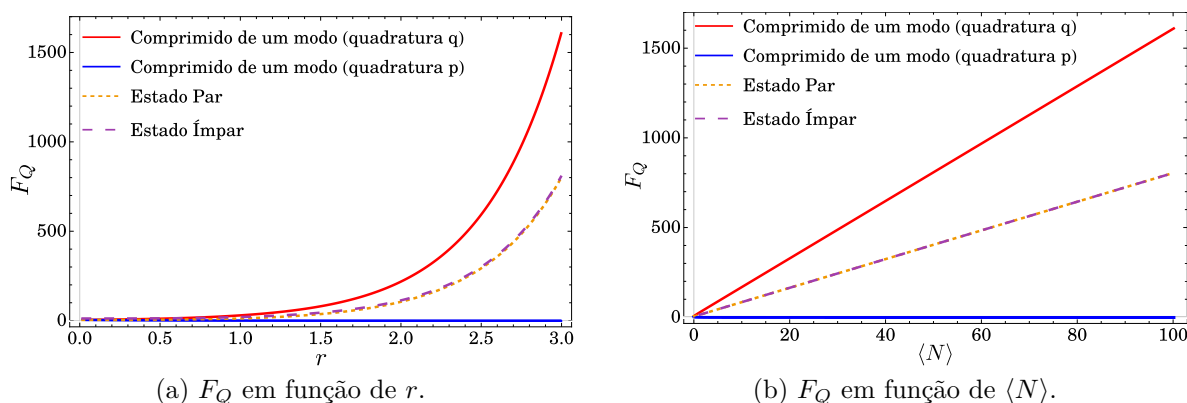


Figura 21 – Informação de Fisher  $F_Q$  em função do módulo de compressão  $r$  (21a) e do número médio de fótons  $\langle N \rangle$  (21b) em cada estado, para os estados comprimido e anticomprimido de um modo, EPR par e EPR ímpar. Verifique-se que a informação de Fisher para o estado anticomprimido é menor, devido à variância elevada deste para estimação na coordenada  $q$ .

Na figura (22) estão representadas a informação de Fisher em função do módulo de compressão  $r$  e do número médio de fótons, para o estado de EPR.

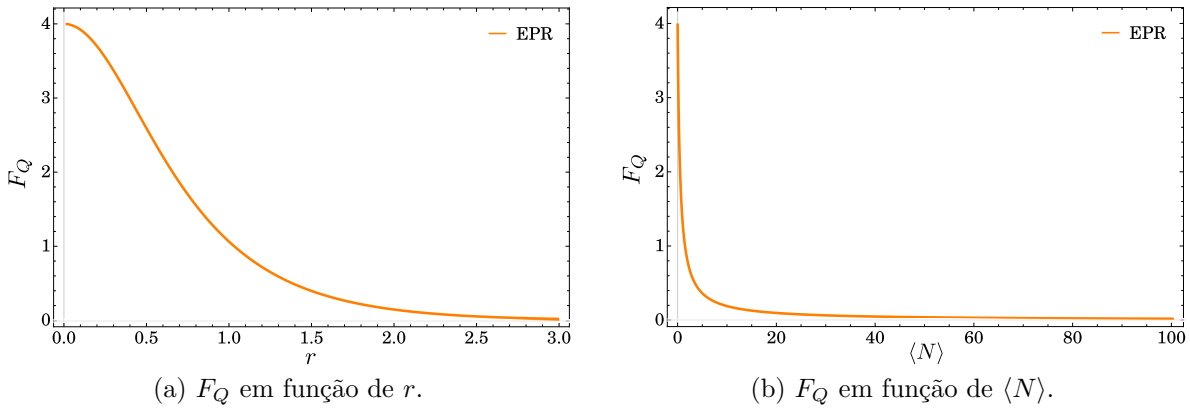


Figura 22 – Informação de Fisher em função do módulo de compressão (22a) e do número médio de fótons (22b) para o estado de EPR. Ao contrário dos estados par e ímpar, o estado de EPR apresenta comportamento decrescente com o aumento de  $r$  e  $\langle N \rangle$ . Este comportamento é devido ao “espalhamento” das probabilidades no espaço de fase, tornando o estado menos sensível à perturbações.

Os resultados reforçam as vantagens dos estados par e ímpar para aplicações em metrologia quântica com estados mistos do campo. Apesar de a largura a meia altura da função de Wigner e da informação de Fisher serem menores que as correspondentes ao estado comprimido de um modo, os estados de EPR par e ímpar apresentam concentradas em uma região específica do espaço de fase, e apresentam simetria em todas as direções, o que os torna insensíveis à fase, ao contrário dos estados comprimidos de um modo.

Em particular, foi investigado o comportamento da informação de Fisher nos estados de EPR com fase relativa, nas vizinhanças do ponto de máximo emaranhamento, observado na figura (15). Na figura (23), está representado o mapeamento em da informação de Fisher em três dimensões, como função do parâmetro de compressão  $r$  e do ângulo de fase  $\varphi$ .

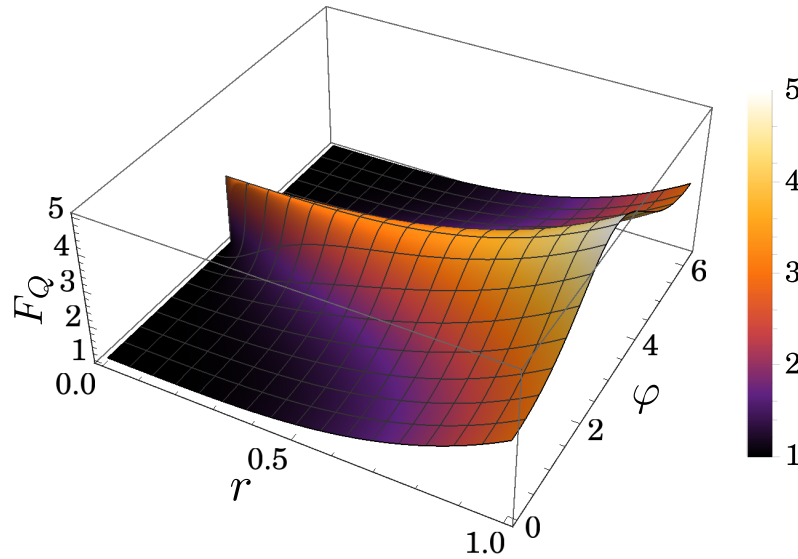


Figura 23 – Mapeamento em três dimensões da informação de Fisher do sistema representado pela matriz densidade reduzida  $\rho_1(r, \varphi)$ . Observa-se que, nas vizinhanças do ponto de máximo emaranhamento, há também uma região em que a informação de Fisher é maior, evidenciando a influência do emaranhamento entre os subsistemas na precisão de medidas realizadas.

Os ganhos na informação de Fisher do sistema com relação à estimação de deslocamentos do campo são ligados às correlações entre os modos do sistema. Mesmo com os valores baixos da informação de Fisher, quando comparados àqueles referentes a maiores valores de  $r$ , pode-se observar uma região local de máximo, que está ligada ao alto grau de emaranhamento apresentado pelo estado quântico sob consideração, mostrando uma relação entre o estado maximamente emaranhado e a quantidade de informação que pode ser extraída do sistema [39, 40]. As correlações quânticas expressas nos estados explicitam ganhos no acesso a informação contida na matriz densidade reduzida do sistema a respeito de um parâmetro desconhecido, e representam as vantagens da utilização das correlações de estados não-clássicos do campo eletromagnético para estimação de parâmetros [41].



## 7 Estados Térmicos e “Pseudo-Térmicos” do Campo Eletromagnético

Neste capítulo mostramos que, através de operações locais atuando sobre um dos subsistemas, o estado reduzido correspondente aos estados de EPR par e ímpar comportam-se como estados “pseudo-térmicos”, com distribuições de probabilidade que se aproximam da distribuição de Boltzmann dos estados térmicos (3.11), com ocupações de níveis correspondentes aos níveis pares e ímpares. O estudo é iniciado evidenciando que, agindo localmente sobre o estado comprimido de dois modos, obtidos através da operação  $S_{12}(r) |0, 0\rangle$ , onde  $S_{12}(r)$  representa o operador de compressão de dois modos, o sistema fica caracterizado por uma distribuição térmica de probabilidades. Em seguida, para os estados de EPR “par” e “ímpar” e mostramos que, através da redução do sistema, representada pelo traço parcial tomado sobre as variáveis de um dos modos, obtém-se distribuições de probabilidade que se aproximam àquelas de estados térmicos, com a característica especial de possuírem ocupações previamente selecionadas, a partir do protocolo de geração [1].

### 7.1 Estado de EPR reduzido e Estado Térmico

Para o estado de EPR, o traço parcial tomado sobre quaisquer dos dois modos resulta na matriz densidade

$$\rho_{1,+}(r) = \frac{1}{\cosh^2(r)} \sum_{n=0}^{\infty} \tanh^{2n}(r) |n\rangle\langle n|, \quad (7.1)$$

com  $\langle n \rangle = \sinh^2(r)$ . Reescrevendo  $\cosh^2(r) = 1 + \langle N \rangle$ ,

$$\begin{aligned} \rho_{1,+}(r) &= \frac{1}{1 + \langle N \rangle} \sum_n \left( \frac{\langle N \rangle}{1 + \langle N \rangle} \right)^n |n\rangle\langle n| \\ &= \sum_n \frac{\langle N \rangle^n}{(1 + \langle N \rangle)^{n+1}} |n\rangle\langle n|. \end{aligned} \quad (7.2)$$

que é efetivamente um estado térmico, com a distribuição de fótons idêntica à equação (3.11), com representação diagonal na base de Fock. A igualdade entre as matrizes densidade implica também na mesma distribuição de probabilidades caracterizada pela função de Wigner.

### 7.2 Estados de EPR par e ímpar e Estados Pseudo-Térmicos

Com motivação na igualdade entre matrizes densidade térmica e EPR reduzida, foi feito um estudo comparativo entre estados “pseudo-térmicos”, com matrizes densidade

definidas através da distribuição térmica, porém com ocupações previamente selecionadas em níveis pares e ímpares. Os estados pseudo-térmicos par e ímpar, são então definidos nas formas

$$\rho_{T,p}(\langle n \rangle) \equiv \mathcal{N}_{tp} \sum_n \frac{\langle n \rangle^{2n}}{(1 + \langle n \rangle)^{2n+1}} |2n\rangle\langle 2n|, \quad (7.3)$$

$$\rho_{T,i}(\langle n \rangle) \equiv \mathcal{N}_{ti} \sum_n \frac{\langle n \rangle^{2n+1}}{(1 + \langle n \rangle)^{2n+2}} |2n+1\rangle\langle 2n+1|. \quad (7.4)$$

sendo  $\mathcal{N}_{tp}$  ( $\mathcal{N}_{ti}$ ) o fator de normalização do estado térmico par (ímpar). Para que as propriedades de distribuição de probabilidade sejam obtidas, convém reindexar as matrizes densidade de forma mais conveniente, incluindo coeficientes correspondentes a misturas de todos os estados de Fock. Para isso, vamos inserir um fator que zera as probabilidades de estados ímpares na matriz par, e vice versa. As matrizes densidade reindexadas com todos os estados podem então ser reescritas como

$$\rho_{T,(p,i)} = \mathcal{N}_{T,(p,i)} \sum_n \frac{\langle n \rangle^n}{(1 + \langle n \rangle)^{n+1}} \frac{(1 \pm (-1)^n)}{2} |n\rangle\langle n|, \quad (7.5)$$

onde o sinal “+” (“−”) corresponde ao estado par (ímpar). De posse da reindexação, os fatores de normalização foram calculados como

$$\mathcal{N}_{T,p} = \frac{1 + 2 \langle n \rangle}{1 + \langle n \rangle}, \quad \mathcal{N}_{T,i} = \frac{1 + 2 \langle n \rangle}{\langle n \rangle}. \quad (7.6)$$

De posse das matrizes densidade com os respectivos fatores de normalização, podemos calcular as funções de Wigner correspondentes aos estados pseudo-térmicos.  $W(q, p)$  para cada um dos estados (cálculos apresentados no apêndice A) é escrita como

$$W_{T,p}(q, p) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1 + 2 \langle N \rangle}{1 + \langle N \rangle} \right) e^{-2(q^2+p^2)} \left[ e^{-4(q^2+p^2)\langle N \rangle} + \frac{e^{\frac{4(q^2+p^2)\langle N \rangle}{1+2\langle N \rangle}}}{1 + 2 \langle N \rangle} \right], \quad (7.7)$$

$$W_{T,i}(q, p) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1 + 2 \langle N \rangle}{\langle N \rangle} \right) e^{-2(q^2+p^2)} \left[ \frac{e^{\frac{4(q^2+p^2)\langle N \rangle}{1+2\langle N \rangle}}}{1 + 2 \langle N \rangle} - e^{-4(q^2+p^2)\langle N \rangle} \right], \quad (7.8)$$

Foram, então, comparadas diretamente as funções de Wigner  $W(q, p)$  das matrizes densidade reduzidas par e ímpar, representadas nas equações (4.28a) e (4.28b), com aquelas resultantes das distribuições pseudo-térmicas, expressas em (7.3) e (7.4). Para realizar a comparação, foram calculados os números médios de fótons para um dado valor do parâmetro de compressão  $r$ , e os valores resultantes foram utilizados como entrada para

as matrizes densidade pseudo-térmicas. Na figura (24) ilustram-se as comparações com as projeções de  $W(q, p)$  sobrepostas, para os estados com coeficientes pares e ímpares.

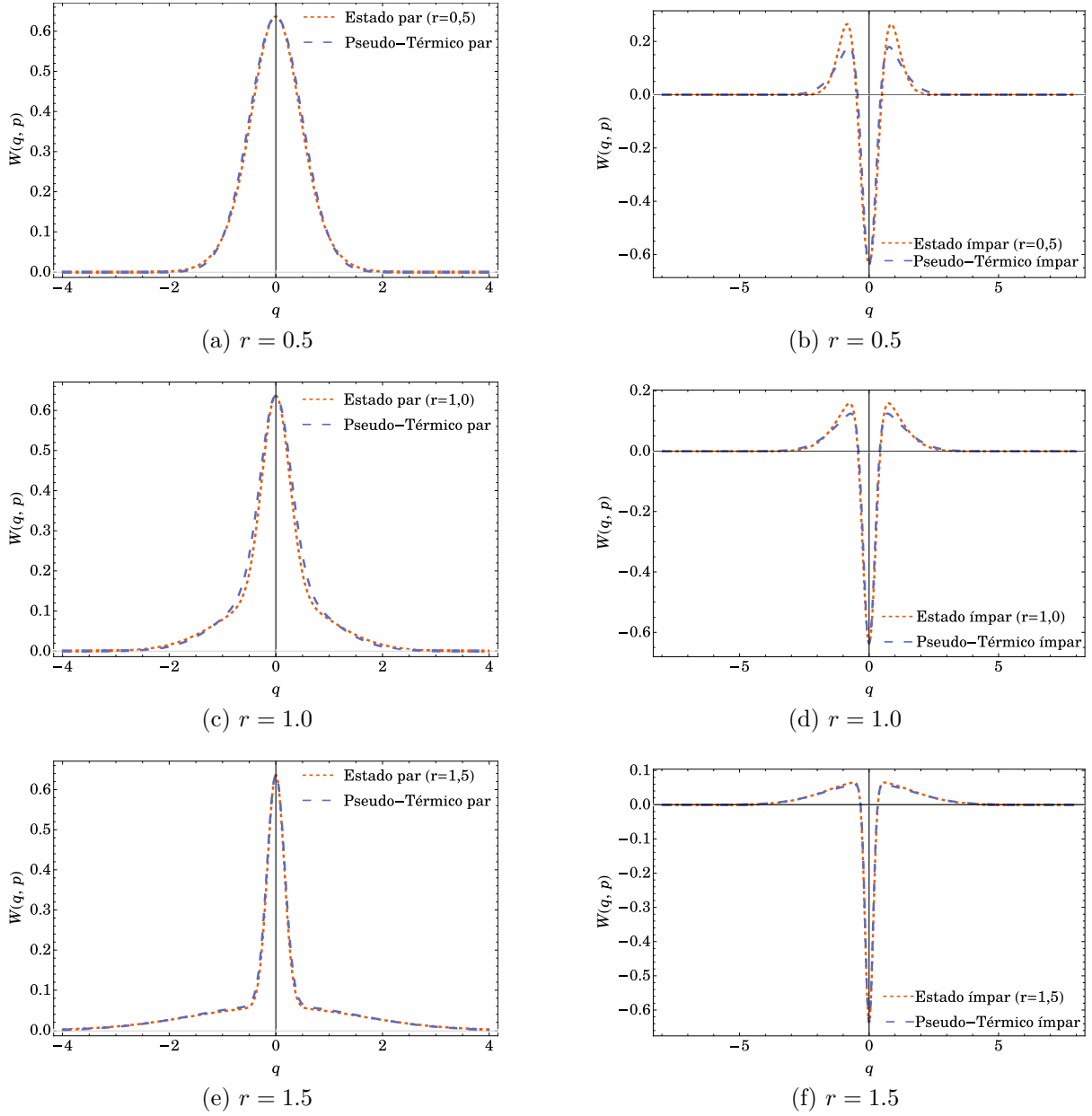


Figura 24 – Projeções de  $W(q, p)$  para as matrizes densidade reduzidas que representam os estados de EPR pseudo-térmicos par e ímpar. Como pode-se observar em (24a), (24c) e (24e), há uma concordância significativa entre as distribuições de probabilidade no espaço de fase entre o estado com coeficientes pares e o estado pseudo-térmico, com  $r = 0, 5, 1, 0, 1, 5$ , respectivamente. Para coeficientes ímpares, as distribuições de probabilidade destoam para valores baixos de  $r$ , e a concordância cresce conforme aumenta-se o valor de  $r$ , nas figuras (24b), (24d) e (24f).

Com isso, mostramos que, assim como no estado comprimido de dois modos original, operações locais reduzem os estados compostos de EPR par e ímpar a matrizes densidade



que caracterizam misturas de estados com propriedades estatísticas de distribuição semelhantes às de estados descritos por uma matriz densidade térmica  $\rho_T$ . Em particular, a distribuição de probabilidades no espaço de fase, caracterizada pela função de Wigner  $W(q, p)$ , para o estado reduzido com ocupações ímpares aproxima-se da distribuição pseudo-térmica com o aumento do módulo de compressão, representado por  $r$ , enquanto o estado par apresenta boa concordância mesmo para baixos valores de  $r$ .

## 8 Conclusões

Neste trabalho, investigamos as propriedades dos estados de EPR, EPR par e ímpar e suas variantes, isto é, considerando-se um fator de fase relativa  $\varphi$  no processo de geração e na superposição final de estados. Verificamos, através da definição de separabilidade e com uma medida simples de emaranhamento para estados puros, que as superposições com fator de fase relativa apresentam maior grau de emaranhamento que os estados originais de EPR, com menor gasto de energia no processo de geração, representado pelo valor do módulo de compressão  $r$ , o que representa uma vantagem nas possíveis aplicações do emaranhamento na área de informação quântica. Para as aplicações em metrologia quântica, foram realizadas comparações com os estados comprimidos de um modo, ressaltando que a simetria das distribuições de probabilidade no espaço de fase, aqui representadas pela função de Wigner  $W(q, p)$ , para os estados par e ímpar representam vantagens nos processos de estimação de parâmetros desconhecidos, devido à independência dos resultados com relação às direções de compressão e de medição, tornando-os estados mais robustos para aplicações, quando comparados aos estados comprimidos de um modo. Por fim, mostramos que agindo localmente sobre um dos subsistemas, é possível caracterizar os estados de EPR par e ímpar como estados “pseudo-térmicos” do campo, que consistem em estados térmicos com distribuições de probabilidade em níveis previamente selecionados através do processo de preparação descrito detalhadamente em [1]. Com a realização do trabalho, concluímos que os estados de EPR par e ímpar e suas variantes apresentam vantagens em relação aos estados de EPR usuais, representadas por suas propriedades de distribuição, e podem ser muito úteis em protocolos de computação, criptografia e comunicação quânticas, além de comporem uma classe mais robusta que os estados comprimidos de um modo para aplicações em metrologia quântica, graças à insensibilidade à fase relacionada aos processos de medição.



# Referências

- 1 VILLAS-BOAS, C.; MOUSSA, M. One-step generation of high-quality squeezed and epr states in cavity qed. *The European Physical Journal D-Atomic, Molecular, Optical and Plasma Physics*, Springer, v. 32, n. 1, p. 147–151, 2005. Citado 9 vezes nas páginas 7, 9, 15, 49, 50, 52, 62, 75 e 79.
- 2 EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B.; ROSEN, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 47, p. 777–780, May 1935. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.47.777>>. Citado 3 vezes nas páginas 7, 9 e 50.
- 3 CAVES, C. M. Quantum-mechanical noise in an interferometer. *Physical Review D*, APS, v. 23, n. 8, p. 1693, 1981. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 9.
- 4 PLANCK, M. On the law of distribution of energy in the normal spectrum. *Annalen der physik*, v. 4, n. 553, p. 1, 1901. Citado na página 15.
- 5 EISBERG, R.; RESNICK, R. *Quantum physics*. [S.l.]: John Wiley New York, 1974. Citado na página 15.
- 6 BELL, J. S. On the einstein podolsky rosen paradox. In: *John S Bell On The Foundations Of Quantum Mechanics*. [S.l.]: World Scientific, 2001. p. 7–12. Citado na página 15.
- 7 BENNETT, C. H. et al. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and einstein-podolsky-rosen channels. *Physical review letters*, APS, v. 70, n. 13, p. 1895, 1993. Citado na página 15.
- 8 NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010. Citado na página 15.
- 9 BENNET, C. H. Quantum cryptography: Public key distribution and coin tossing. In: *Proc. of IEEE Int. Conf. on Comp., Syst. and Signal Proc., Bangalore, India, Dec. 10-12, 1984*. [S.l.: s.n.], 1984. Citado na página 15.
- 10 FEYNMAN, R. P. Simulating physics with computers. *International journal of theoretical physics*, Springer, v. 21, n. 6-7, p. 467–488, 1982. Citado na página 15.
- 11 MACCONE, A. R. L. Squeezing metrology. *arXiv preprint arXiv:1901.07482 [quant-ph]*, 2019. Citado 3 vezes nas páginas 15, 67 e 70.
- 12 ESCHER, B. de M. *ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS EM SISTEMAS QUÂNTICOS ABERTOS*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 15, 33 e 34.
- 13 POPPE, A. et al. Practical quantum key distribution with polarization entangled photons. *Optics Express*, Optical Society of America, v. 12, n. 16, p. 3865–3871, 2004. Citado na página 15.

- 14 LIAO, S.-K. et al. Satellite-to-ground quantum key distribution. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 549, n. 7670, p. 43, 2017. Citado na página 15.
- 15 REN, J.-G. et al. Ground-to-satellite quantum teleportation. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 549, n. 7670, p. 70, 2017. Citado na página 15.
- 16 NIGG, D. et al. Quantum computations on a topologically encoded qubit. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 345, n. 6194, p. 302–305, 2014. Citado na página 15.
- 17 LUCERO, E. et al. Computing prime factors with a josephson phase qubit quantum processor. *Nature Physics*, Nature Publishing Group, v. 8, n. 10, p. 719, 2012. Citado na página 15.
- 18 KANDALA, A. et al. Hardware-efficient variational quantum eigensolver for small molecules and quantum magnets. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 549, n. 7671, p. 242, 2017. Citado na página 15.
- 19 GROSS, C.; BLOCH, I. Quantum simulations with ultracold atoms in optical lattices. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 357, n. 6355, p. 995–1001, 2017. Citado na página 15.
- 20 JACKSON, J. D. *Classical electrodynamics*. [S.l.]: Wiley, 1999. Citado 3 vezes nas páginas 17, 18 e 20.
- 21 LOUISELL, W. H.; LOUISELL, W. H. *Quantum statistical properties of radiation*. [S.l.]: Wiley New York, 1973. v. 7. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 44.
- 22 SAKURAI, J. J. *Advanced quantum mechanics*. [S.l.]: Pearson Education India, 1967. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 21.
- 23 BALLENTINE, L. E. *Quantum Mechanics: A Modern Development Second Edition*. [S.l.]: World Scientific Publishing Company, 2014. Citado 4 vezes nas páginas 19, 26, 30 e 36.
- 24 LEMOS, N. A. *Mecânica analítica*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 28.
- 25 GRIFFITHS, D. J. *Introduction to quantum mechanics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 24.
- 26 SAKURAI, J. J.; COMMINS, E. D. *Modern quantum mechanics, revised edition*. [S.l.]: AAPT, 1995. Citado 3 vezes nas páginas 22, 24 e 32.
- 27 WALLS, D. F.; MILBURN, G. J. *Quantum optics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2007. Citado 8 vezes nas páginas 23, 39, 44, 45, 46, 47, 68 e 85.
- 28 SCULLY, M. O.; ZUBAIRY, M. S. *Quantum optics*. [S.l.]: AAPT, 1999. Citado 7 vezes nas páginas 26, 27, 30, 39, 43, 46 e 47.
- 29 MANDEL, L.; WOLF, E. *Optical coherence and quantum optics*. [S.l.]: Cambridge university press, 1995. Citado 4 vezes nas páginas 27, 28, 40 e 41.

- 30 DAVIDOVICH, L. *Quantum Optics in Cavities, Phase Space Representations, and the Classical Limit of Quantum Mechanics*, Disponível em: <http://web.utk.edu/~pasi/davidovich.pdf> (Acessado em 25/04/2018). 2000. Citado na página 28.
- 31 ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. *Mathematical methods for physicists*. [S.l.]: AAPT, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 86.
- 32 PEZZE, L.; SMERZI, A. Quantum theory of phase estimation. *arXiv preprint arXiv:1411.5164*, 2014. Citado 4 vezes nas páginas 32, 33, 34 e 35.
- 33 HELSTROM, C. W. Quantum detection and estimation theory. *Journal of Statistical Physics*, Springer, v. 1, n. 2, p. 231–252, 1969. Citado na página 34.
- 34 WALLS, D. Squeezing properties of the nonclassical light field. *Nature*, v. 306, n. 10, p. 141–146, 1983. Citado na página 57.
- 35 KANDALA, A. et al. Stable solid-state source of single photons. *Physical review letters*, APS, v. 85, n. 2, p. 290, 2000. Citado na página 58.
- 36 AHARONOVICH, I.; ENGLUND, D.; TOTH, M. Solid-state single-photon emitters. *Nature Photonics*, Nature Publishing Group, v. 10, n. 10, p. 631, 2016. Citado na página 58.
- 37 NEERGAARD-NIELSEN, J. S. et al. Generation of a superposition of odd photon number states for quantum information networks. *Physical review letters*, APS, v. 97, n. 8, p. 083604, 2006. Citado na página 58.
- 38 MINTERT, F.; VIVIESCAS, C.; BUCHLEITNER, A. Basic concepts of entangled states. In: *Entanglement and Decoherence*. [S.l.]: Springer, 2009. p. 61–86. Citado 2 vezes nas páginas 59 e 61.
- 39 LI, N.; LUO, S. Entanglement detection via quantum fisher information. *Physical Review A*, APS, v. 88, n. 1, p. 014301, 2013. Citado na página 73.
- 40 HYLLUS, P. et al. Fisher information and multiparticle entanglement. *Physical Review A*, APS, v. 85, n. 2, p. 022321, 2012. Citado na página 73.
- 41 KNOTT, P. et al. Practical quantum metrology with large precision gains in the low-photon-number regime. *Physical Review A*, APS, v. 93, n. 3, p. 033859, 2016. Citado na página 73.



# APÊNDICE A – Funções de Wigner para os estados de EPR e Superposições com Fase Relativa

Para o cálculo das expressões analíticas para as funções de Wigner, utilizamos a expressão de  $W(q, p)$  para um estado de Fock [27]

$$W_n(q, p) = \frac{2}{\pi} e^{-2(q^2+p^2)} (-1)^n L_n[4(p^2 + q^2)], \quad (\text{A.1})$$

onde  $L_n$  representam os polinômios de Laguerre de ordem  $n$ .

Após ser tomado o traço parcial sobre as variáveis de um dos modos, os estados com que trabalhamos reduzem-se à forma

$$\rho_1 = \sum_n P(n) |n\rangle\langle n|, \quad (\text{A.2})$$

que representam misturas de estados de Fock  $|n\rangle$ , quando representados nesta base. A função de Wigner correspondente será então a combinação das funções dos estados individuais, pesadas pelo fator de probabilidade  $P(n)$ , que, neste caso, correspondem às distribuições de fótons para cada estado reduzido  $\rho_1$ . A expressão para  $W(q, p)$  é então dada por

$$W(q, p) = \left(\frac{2}{\pi}\right) e^{-2(q^2+p^2)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n P(n) L_n[4(p^2 + q^2)]. \quad (\text{A.3})$$

Para a realização dos cálculos, serão úteis os resultados provenientes da série geométrica e suas derivadas que são, para  $|t| < 1$ ,

$$\sum_n t^n = \frac{1}{1-t}, \quad (\text{A.4a})$$

$$\sum_n (-1)^n t^n = \frac{1}{1+t}, \quad (\text{A.4b})$$

$$\sum_n n t^n = \frac{t}{(1-t)^2}, \quad (\text{A.4c})$$

$$\sum_n n (-1)^n t^n = \frac{-t}{(1+t)^2}. \quad (\text{A.4d})$$



Além disso, também faremos uso da função geratriz para os polinômios de Laguerre [31],

$$\sum_n t^n L_n[x] = \frac{1}{1-t} e^{\frac{-tx}{1-t}}. \quad (\text{A.5})$$

## A.1 Estado de EPR reduzido

Para o estado de EPR  $|\psi_+(r)\rangle$ , a matriz densidade reduzida é dada por

$$\rho_{1,+} = (1-\lambda) \sum_n \lambda^n |n\rangle\langle n|, \quad (\text{A.6})$$

sendo  $\lambda \equiv \tanh^2(r)$ . Utilizando a expressão (A.3) para  $W(q, p)$ , temos, definindo  $s^2 = q^2 + p^2$

$$W(s) = \left(\frac{2}{\pi}\right) e^{-2s^2} (1-\lambda) \sum_n (-1)^n \lambda^n L_n[4s^2]. \quad (\text{A.7})$$

Utilizando  $t = -\lambda$  na expressão da função geratriz (A.5),

$$\sum_n (-\lambda)^n L_n[4s^2] = \frac{1}{1+\lambda} e^{\frac{4\lambda s^2}{1+\lambda}}, \quad (\text{A.8})$$

a expressão para a função de Wigner é escrita como

$$W(s) = \left(\frac{2}{\pi}\right) \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right) e^{2s^2 \frac{\lambda-1}{\lambda+1}}, \quad (\text{A.9})$$

que, em termos das coordenadas de posição e momentum  $(q, p)$ , é dada por

$$W(q, p) = \left(\frac{2}{\pi}\right) \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right) e^{2(q^2+p^2) \frac{\lambda-1}{\lambda+1}}. \quad (\text{A.10})$$

## A.2 Superposições de Estados Comprimidos Reduzidas

Para os estados reduzidos correspondentes às superposições de estados comprimidos de dois modos com fase relativa, após tomado o traço parcial sobre quaisquer dos modos, temos que a matriz densidade reduzida pode ser escrita como

$$\rho_1 = |\mathcal{N}_0|^2 \sum_n \lambda^n [1 + \epsilon(-1)^n] |n\rangle\langle n|, \quad (\text{A.11})$$

com  $\lambda \equiv \tanh^2(r)$ ,  $\epsilon \equiv \cos(\varphi)$  e

$$|\mathcal{N}_0|^2 = \frac{1-\lambda^2}{(1+\lambda) + \epsilon(1-\lambda)}. \quad (\text{A.12})$$

Utilizando a expressão (A.3), com  $s^2 = q^2 + p^2$ , a expressão para  $W(q, p)$  fica dada em termos das duas somas

$$W(s) = \left(\frac{2}{\pi}\right) |\mathcal{N}_0|^2 e^{-2s^2} \left[ \sum_n (-\lambda)^n L_n[4s^2] + \epsilon \sum_n \lambda^n L_n[4s^2] \right], \quad (\text{A.13})$$

que, com a utilização da função geratriz (A.5), torna-se

$$W(s) = \left(\frac{2}{\pi}\right) |\mathcal{N}_0|^2 e^{-2s^2} \left[ \frac{1}{1+\lambda} e^{4s^2 \frac{\lambda}{1+\lambda}} + \frac{\epsilon}{1-\lambda} e^{-4s^2 \frac{\lambda}{1-\lambda}} \right]. \quad (\text{A.14})$$

Substituindo  $|\mathcal{N}_0|^2$  e multiplicando a exponencial global  $e^{-2s^2}$  por cada uma das parcelas, temos

$$W(s) = \left(\frac{2}{\pi}\right) \frac{1}{(1+\lambda) + \epsilon(1-\lambda)} \left[ (1-\lambda) e^{2s^2 \frac{\lambda-1}{\lambda+1}} + \epsilon(1+\lambda) e^{-2s^2 \frac{1+\lambda}{1-\lambda}} \right], \quad (\text{A.15})$$

que, em termos de  $(q, p)$ , fica

$$W(q, p) = \left(\frac{2}{\pi}\right) \frac{1}{(1+\lambda) + \epsilon(1-\lambda)} \left[ (1-\lambda) e^{2(q^2+p^2) \frac{\lambda-1}{\lambda+1}} + \epsilon(1+\lambda) e^{-2(q^2+p^2) \frac{1+\lambda}{1-\lambda}} \right]. \quad (\text{A.16})$$

### A.2.1 Estados Reduzidos Par e Ímpar

De posse da função de Wigner para uma superposição com fator de fase relativa (A.16), podemos particularizar os resultados para os estados de EPR par e ímpar de maneira simples.

Para o estado par, temos  $\varphi = 0 \Rightarrow \cos(\varphi) = \epsilon = 1$ . Fazendo a substituição em (A.16), ficamos com

$$W(q, p) = \frac{1}{\pi} \left[ (1-\lambda) e^{2(q^2+p^2) \frac{\lambda-1}{\lambda+1}} + (1+\lambda) e^{-2(q^2+p^2) \frac{1+\lambda}{1-\lambda}} \right]. \quad (\text{A.17})$$

Para o estado ímpar,  $\varphi = \pi \Rightarrow \cos(\varphi) = \epsilon = -1$ . Fazendo a substituição em (A.16), obtemos a função de Wigner para o estado ímpar

$$W(q, p) = \frac{1}{\pi\lambda} \left[ (1-\lambda) e^{2(q^2+p^2) \frac{\lambda-1}{\lambda+1}} - (1+\lambda) e^{-2(q^2+p^2) \frac{1+\lambda}{1-\lambda}} \right]. \quad (\text{A.18})$$

## A.3 Estados Pseudo-Térmicos

Nesta seção, derivamos as expressões para as funções de Wigner para os estados que denominamos pseudo-térmicos.

### A.3.1 Pseudo-Térmico Par

A matriz densidade para o estado pseudo-térmico par é escrita como mistura de estados de Fock pares, com distribuição térmica de fótons

$$\rho_{T,p} = \frac{1 + 2 \langle N \rangle}{1 + \langle N \rangle} \sum_n \frac{\langle N \rangle^{2n}}{(1 + \langle N \rangle)^{2n+1}} |2n\rangle\langle 2n|. \quad (\text{A.19})$$

Para que todas as ocupações, tanto pares quanto ímpares, sejam incluídas na soma da matriz densidade sem penalidade, adicionaremos o fator multiplicativo  $\frac{1}{2} [1 + (-1)^n]$ , que é igual a 1 para  $n$  par, e nulo para  $n$  ímpar. Desta maneira, é possível reindexar a soma na matriz densidade incluindo todos os estados representados por  $|n\rangle\langle n|$ . Fazendo a reindexação, ficamos com

$$\rho_{T,p} = \frac{1 + 2 \langle N \rangle}{1 + \langle N \rangle} \sum_n \frac{\langle N \rangle^n}{(1 + \langle N \rangle)^{n+1}} \frac{1}{2} [1 + (-1)^n] |n\rangle\langle n|. \quad (\text{A.20})$$

Feita esta reindexação nos coeficientes e estados, as somas ficam mais simples de serem executadas, em especial, àquelas que envolvem a função geratriz de  $L_n[x]$ . Definindo

$$\gamma = \frac{1 + 2 \langle N \rangle}{2(1 + \langle N \rangle)^2}, \quad (\text{A.21a})$$

$$t = \frac{\langle N \rangle}{1 + \langle N \rangle} \quad (\text{A.21b})$$

a função de Wigner para o estado pseudo-térmico par fica escrita em termos da soma

$$W(s) = \left(\frac{2}{\pi}\right) e^{-2s^2} \gamma \underbrace{\sum_n (-1)^n t^n [1 + (-1)^n] L_n(4s^2)}_Q. \quad (\text{A.22})$$

Executando a soma  $Q$  acima,

$$\begin{aligned} Q &= \sum_n t^n [1 + (-1)^n] L_n[4s^2], \\ &= \sum_n t^n L_n[4s^2] + \sum_n (-1)^n t^n L_n[4s^2]. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Utilizando a função geratriz (A.5), a soma representada por  $Q$  fica escrita como

$$Q = \frac{1}{1-t} e^{-4s^2 \frac{t}{1-t}} + \frac{1}{1+t} e^{4s^2 \frac{t}{1+t}} \quad (\text{A.24})$$

Agora, fazendo uso da definição de  $t$  na equação (A.21b), temos as seguintes relações

$$\frac{1}{1+t} = \frac{1 + \langle N \rangle}{1 + 2 \langle N \rangle}, \quad \frac{t}{1+t} = \frac{\langle N \rangle}{1 + 2 \langle N \rangle}, \quad (\text{A.25})$$

$$\frac{1}{1-t} = 1 + \langle N \rangle, \quad \frac{t}{1-t} = \langle N \rangle. \quad (\text{A.26})$$

Fazendo as substituições de (A.24) e (A.25) em (A.22),

$$W(s) = \left(\frac{2}{\pi}\right) e^{-2s^2} \gamma \left[ (1 + \langle N \rangle) e^{-4s^2 \langle N \rangle} + \frac{(1 + \langle N \rangle)}{1 + 2 \langle N \rangle} e^{4s^2 \frac{\langle N \rangle}{1 + 2 \langle N \rangle}} \right], \quad (\text{A.27})$$

que, em termos de  $(q, p)$ ,

$$W_{T,p}(q, p) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1 + 2 \langle N \rangle}{1 + \langle N \rangle} \right) e^{-2(q^2 + p^2)} \left[ e^{-4(q^2 + p^2) \langle N \rangle} + \frac{e^{\frac{4(q^2 + p^2) \langle N \rangle}{1 + 2 \langle N \rangle}}}{1 + 2 \langle N \rangle} \right]. \quad (\text{A.28})$$

### A.3.2 Pseudo-Térmico Ímpar

Para o estado pseudo-térmico ímpar, a matriz densidade é escrita como

$$\rho_{T,i} = \frac{1 + 2 \langle N \rangle}{\langle N \rangle} \sum_n \frac{\langle N \rangle^{2n+1}}{(1 + \langle N \rangle)^{2n+2}} |2n + 1\rangle \langle 2n + 1|. \quad (\text{A.29})$$

Utilizando o mesmo esquema de reindexação que foi implementado para o estado pseudo-térmico par, podemos reescrever  $\rho_{T,i}$  na forma

$$\rho_{T,i} = \frac{1 + 2 \langle N \rangle}{2 \langle N \rangle (1 + \langle N \rangle)} \sum_n \frac{\langle N \rangle^n}{(1 + \langle N \rangle)^n} [1 - (-1)^n] |n\rangle \langle n|. \quad (\text{A.30})$$

Definindo

$$t = \frac{\langle N \rangle}{1 + \langle N \rangle}, \quad \gamma = \frac{1 + 2 \langle N \rangle}{2 \langle N \rangle (1 + \langle N \rangle)}, \quad (\text{A.31})$$

a função de Wigner é escrita como

$$W(s) = \left(\frac{2}{\pi}\right) e^{-2s^2} \gamma \underbrace{\sum_n (-1)^n t^n [1 - (-1)^n] L_n[4s^2]}_Q. \quad (\text{A.32})$$

A soma  $Q$  acima é executada em duas parcelas

$$\begin{aligned} Q &= \sum_n t^n [(-1)^n - 1] L_n[4s^2], \\ &= \sum_n (-1)^n t^n L_n[4s^2] - \sum_n t^n L_n[4s^2], \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

que, utilizando (A.5) e as relações (A.25), torna-se

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{1+t} e^{4s^2 \frac{t}{1+t}} - \frac{1}{1-t} e^{-4s^2 \frac{t}{1-t}}, \\ &= \frac{1 + \langle N \rangle}{1 + 2 \langle N \rangle} e^{4s^2 \frac{\langle N \rangle}{1+2\langle N \rangle}} - (1 + \langle N \rangle) e^{-4s^2 \langle N \rangle}. \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

De posse deste resultado, a função de Wigner é escrita como

$$W(s) = \left( \frac{2}{\pi} \right) e^{-2s^2} \frac{1 + 2 \langle N \rangle}{2 \langle N \rangle (1 + \langle N \rangle)} \left[ \frac{1 + \langle N \rangle}{1 + 2 \langle N \rangle} e^{4s^2 \frac{\langle N \rangle}{1+2\langle N \rangle}} - (1 + \langle N \rangle) e^{-4s^2 \langle N \rangle} \right]. \quad (\text{A.35})$$

que, em termos de  $(q, p)$ , é

$$W_{T,i}(q, p) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1 + 2 \langle N \rangle}{\langle N \rangle} \right) e^{-2(q^2+p^2)} \left[ \frac{e^{\frac{4(q^2+p^2)\langle N \rangle}{1+2\langle N \rangle}}}{1 + 2 \langle N \rangle} - e^{-4(q^2+p^2)\langle N \rangle} \right]. \quad (\text{A.36})$$

# APÊNDICE B – Cálculo de $g^{(2)}(0)$ nos estados de EPR, EPR par e EPR ímpar

A função  $g^{(2)}(0)$  é definida através da equação (2.56),

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle (a^\dagger)^2 a^2 \rangle}{\langle a^\dagger a \rangle^2}. \quad (\text{B.1})$$

Serão considerados nos cálculos os estados de EPR, EPR par e EPR ímpar.

## B.1 Estado de EPR

Para o estado de EPR, a matriz densidade reduzida é escrita como

$$\rho_{1,+} = (1 - \lambda) \sum_n \lambda^n |n\rangle\langle n|, \quad (\text{B.2})$$

com  $\lambda = \tanh^2(r)$ . Primeiramente, vamos calcular a média  $\langle (a^\dagger)^2 a^2 \rangle$ ,

$$\begin{aligned} \langle (a^\dagger)^2 a^2 \rangle &= \text{Tr}(\rho_{1,+} (a^\dagger)^2 a^2), \\ &= (1 - \lambda) \sum_n \lambda^n \langle n | (a^\dagger)^2 a^2 | n \rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

onde os elementos de matriz  $\langle n | (a^\dagger)^2 a^2 | n \rangle$  são calculados como

$$\begin{aligned} \langle n | (a^\dagger)^2 a^2 | n \rangle &= \sqrt{n(n-1)} \langle n | (a^\dagger)^2 | n-2 \rangle, \\ &= n(n-1). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Então, a média é dada pela soma

$$\begin{aligned} \langle (a^\dagger)^2 a^2 \rangle &= (1 - \lambda) \sum_n n(n-1) \lambda^n, \\ &= (1 - \lambda) \left[ \sum_n n^2 \lambda^n - \sum_n n \lambda^n \right], \\ &= (1 - \lambda) \left\{ \frac{\lambda}{(1 - \lambda)^2} \left[ \frac{2\lambda}{1 - \lambda} + 1 \right] - \frac{\lambda}{(1 - \lambda)^2} \right\}, \\ &= \frac{2\lambda^2}{(1 - \lambda)^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

A média  $\langle a^\dagger a \rangle$  no estado de EPR é dada por

$$\langle a^\dagger a \rangle = \frac{\lambda}{1 - \lambda}. \quad (\text{B.6})$$

Então, temos que

$$g^{(2)}(0) = 2, \quad (\text{B.7})$$

que é o resultado para um estado térmico do campo eletromagnético.

## B.2 Estados de EPR par e ímpar

Para as superposições com fase relativa, a matriz densidade reduzida é

$$\rho_1 = |\mathcal{N}_0|^2 \sum_n \lambda^n [1 + \epsilon(-1)^n] |n\rangle\langle n|, \quad (\text{B.8})$$

com  $\lambda = \tanh^2(r)$  e  $\epsilon = \cos(\varphi)$ . A média  $\langle (a^\dagger)^2 a^2 \rangle$  é calculada como

$$\begin{aligned} \langle (a^\dagger)^2 a^2 \rangle &= \text{Tr}(\rho_1 (a^\dagger)^2 a^2), \\ &= |\mathcal{N}_0|^2 \sum_n \lambda^n [1 + \epsilon(-1)^n] \langle n | (a^\dagger)^2 a^2 | n \rangle, \\ &= |\mathcal{N}_0|^2 \sum_n n(n-1) \lambda^n [1 + \epsilon(-1)^n], \\ &= |\mathcal{N}_0|^2 \left\{ \underbrace{\sum_n n^2 \lambda^n [1 + \epsilon(-1)^n]}_{s_1} - \underbrace{\sum_n n \lambda^n [1 + \epsilon(-1)^n]}_{s_2} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Para a soma  $s_1$ , temos

$$\begin{aligned} s_1 &= \sum_n n^2 \lambda^n + \epsilon \sum_n n^2 (-1)^n \lambda^n, \\ &= \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2} \left[ \frac{2\lambda}{1-\lambda} + 1 \right] + \frac{\epsilon\lambda}{(1+\lambda)^2} \left[ \frac{2\lambda}{1+\lambda} - 1 \right], \\ &= \lambda \left\{ \frac{1}{(1-\lambda)^2} \left[ \frac{2\lambda}{1-\lambda} + 1 \right] + \frac{\epsilon}{(1+\lambda)^2} \left[ \frac{2\lambda}{1+\lambda} - 1 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Para a soma  $s_2$ ,

$$\begin{aligned}
s_2 &= \sum_n n\lambda^n [1 + \epsilon(-1)^n], \\
&= \sum_n n\lambda^n + \epsilon \sum_n n(-1)^n \lambda^n, \\
&= \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2} - \frac{\epsilon\lambda}{(1+\lambda)^2}, \\
&= \lambda \left[ \frac{1}{(1-\lambda)^2} - \frac{\epsilon}{(1+\lambda)^2} \right].
\end{aligned} \tag{B.11}$$

Então, o cálculo da média é

$$\begin{aligned}
\langle (a^\dagger)^2 a^2 \rangle &= |\mathcal{N}_0|^2 \lambda \left\{ \frac{1}{(1-\lambda)^2} \left[ \frac{2\lambda}{1-\lambda} + 1 - 1 \right] + \frac{\epsilon}{(1+\lambda)^2} \left[ \frac{2\lambda}{1+\lambda} - 1 + 1 \right] \right\}, \\
&= |\mathcal{N}_0|^2 2\lambda^2 \left[ \frac{1}{(1-\lambda)^3} + \frac{\epsilon}{(1+\lambda)^3} \right].
\end{aligned} \tag{B.12}$$

A média  $\langle a^\dagger a \rangle$  é escrita como

$$\langle a^\dagger a \rangle = |\mathcal{N}_0|^2 \lambda \left[ \frac{1}{(1-\lambda)^2} - \frac{\epsilon}{(1+\lambda)^2} \right], \tag{B.13}$$

e a função  $g^{(2)}(0)$  é

$$g^{(2)}(0) = \frac{2 \left[ \frac{1}{(1-\lambda)^3} + \frac{\epsilon}{(1+\lambda)^3} \right]}{|\mathcal{N}_0|^2 \left[ \frac{1}{(1-\lambda)^2} - \frac{\epsilon}{(1+\lambda)^2} \right]^2}. \tag{B.14}$$

Para o estado par, temos  $\epsilon = 1$  e  $|\mathcal{N}_0|^2 = \frac{1-\lambda^2}{2}$ , o que implica em

$$g^{(2)}(0)_{\text{par}} = \frac{4 \left[ \frac{1}{(1-\lambda)^3} + \frac{1}{(1+\lambda)^3} \right]}{(1-\lambda^2) \left[ \frac{1}{(1-\lambda)^2} - \frac{1}{(1+\lambda)^2} \right]^2}. \tag{B.15}$$

Para o estado ímpar,  $\epsilon = -1$  e  $|\mathcal{N}_0|^2 = \frac{1-\lambda^2}{2\lambda}$ , e temos

$$g^{(2)}(0)_{\text{ímpar}} = \frac{4\lambda \left[ \frac{1}{(1-\lambda)^3} - \frac{1}{(1+\lambda)^3} \right]}{(1-\lambda^2) \left[ \frac{1}{(1-\lambda)^2} + \frac{1}{(1+\lambda)^2} \right]^2}. \tag{B.16}$$





# APÊNDICE C – Cálculo dos Graus de Emaranhamento

Para os cálculos dos graus de Emaranhamento nos estados quânticos considerados, também serão utilizadas as relações provenientes das somas de séries geométricas e suas derivadas, já exibidas anteriormente.

## C.1 Estado de EPR

Para o estado de EPR, a matriz densidade reduzida é escrita como

$$\rho_{1,+} = (1 - \lambda) \sum_n \lambda^n |n\rangle\langle n|, \quad (\text{C.1})$$

com  $\lambda = \tanh^2(r)$ . Então,  $\rho_{1,+}^2$  é

$$\rho_{1,+}^2 = (1 - \lambda)^2 \sum_n (\lambda^2)^n |n\rangle\langle n|. \quad (\text{C.2})$$

Tomando-se o traço de  $\rho_{1,+}^2$ ,

$$\text{Tr}(\rho_{1,+}^2) = (1 - \lambda)^2 \frac{1}{1 - \lambda^2} = \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} \quad (\text{C.3})$$

O grau de emaranhamento é definido como  $GE = 1 - \text{Tr}(\rho_{1,+}^2)$ , que resulta em

$$GE = 1 - \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda}. \quad (\text{C.4})$$

## C.2 Superposições com Fase Relativa

Para os estados com fase relativa, a matriz densidade reduzida é escrita como

$$\rho_1 = |\mathcal{N}_0|^2 \sum_n \lambda^n [1 + \epsilon(-1)^n] |n\rangle\langle n|, \quad (\text{C.5})$$

com  $\lambda = \tanh^2(r)$ ,  $\epsilon = \cos(\varphi)$ , e fator de normalização

$$|\mathcal{N}_0|^2 = \frac{1 - \lambda^2}{(1 + \lambda) + \epsilon(1 - \lambda)}. \quad (\text{C.6})$$

Então,  $\rho_1^2$  é escrita como

$$\rho_1^2 = |\mathcal{N}_0|^4 \sum_n (\lambda^2)^n [1 + \epsilon^2 + 2\epsilon(-1)^n] |n\rangle\langle n|. \quad (\text{C.7})$$

Tomando-se o traço de  $\rho_1^2$ ,

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\rho_1^2) &= |\mathcal{N}_0|^4 \left[ (1 + \epsilon^2) \sum_n (\lambda^2)^n + 2\epsilon \sum_n (-\lambda^2)^n \right], \\ &= \left[ \frac{1 - \lambda^2}{(1 + \lambda) + \epsilon(1 - \lambda)} \right]^2 \left[ \frac{(1 + \epsilon^2)}{1 - \lambda^2} + \frac{2\epsilon}{1 + \lambda^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

O grau de emaranhamento é então dado por

$$GE = 1 - \left[ \frac{1 - \lambda^2}{(1 + \lambda) + \epsilon(1 - \lambda)} \right]^2 \left[ \frac{(1 + \epsilon^2)}{1 - \lambda^2} + \frac{2\epsilon}{1 + \lambda^2} \right]. \quad (\text{C.9})$$

### C.2.1 Estados Par e Ímpar

Para particularizar os resultados para os estados par e ímpar, basta substituir os valores de  $\epsilon$  correspondentes a cada um dos estados.

Para o estado par, temos  $\epsilon = 1$ , então

$$\begin{aligned} GE &= 1 - \left[ \frac{1 - \lambda^2}{2} \right]^2 \left[ \frac{2}{1 - \lambda^2} + \frac{2}{1 + \lambda^2} \right], \\ &= 1 - \frac{(1 - \lambda^2)^2}{1 - \lambda^4}. \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Para o estado ímpar,  $\epsilon = -1$ , e ficamos com

$$\begin{aligned} GE &= 1 - \left[ \frac{1 - \lambda^2}{2\lambda} \right]^2 \left[ \frac{2}{1 - \lambda^2} - \frac{2}{1 + \lambda^2} \right], \\ &= 1 - \frac{(1 - \lambda^2)^2}{1 - \lambda^4}. \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

que é o mesmo resultado correspondente ao estado reduzido par.

# APÊNDICE D – Cálculo da Informação de Fisher

Para estados puros, a informação de Fisher com respeito a um parâmetro é dada por

$$F_Q = 4(\Delta G)^2, \quad (\text{D.1})$$

conforme visto anteriormente, sendo  $G$  o operador responsável pela impressão do parâmetro no operador densidade do sistema,  $\rho$ . Para estados mistos, a informação de Fisher é escrita como

$$F_Q = 2 \sum_{m,n} \frac{(\gamma_m - \gamma_n)^2}{\gamma_m + \gamma_n} |\langle \psi_m | G | \psi_n \rangle|^2, \quad (\text{D.2})$$

sendo  $\gamma_n$  e  $|\psi_n\rangle$  os autovalores e autovetores da matriz densidade que representa o sistema.

O problema que consideramos é a estimação de deslocamentos. De modo geral, definiremos o operador de quadratura

$$X(\phi) = ae^{-i\phi} + a^\dagger e^{i\phi} \quad (\text{D.3})$$

que, para  $\phi = 0$  ( $\phi = \pi/2$ ) representa o operador adimensional de posição (momentum) do oscilador harmônico. Faremos os cálculos considerando fatores de fase arbitrários, de modo que os resultados possam ser particularizados por substituição.

Para matrizes densidade representadas na base de Fock, com autoestados  $|n\rangle$ , os elementos de matriz de  $X(\phi)$  são

$$\begin{aligned} \langle m | X(\phi) | n \rangle &= e^{-im\phi} \langle m | a | n \rangle + e^{i\phi} \langle m | a^\dagger | n \rangle, \\ &= e^{-im\phi} \sqrt{n} \langle m | n-1 \rangle + e^{i\phi} \sqrt{n+1} \langle m | n+1 \rangle. \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Então o podemos obter  $|\langle m | X(\phi) | n \rangle|^2$ ,

$$\begin{aligned} |\langle m | X(\phi) | n \rangle|^2 &= e^{-2i\phi} \sqrt{nm} \langle m | n-1 \rangle \langle n | m-1 \rangle + \sqrt{n(m+1)} \langle m | n-1 \rangle \langle n | m+1 \rangle \\ &\quad + \sqrt{m(n+1)} \langle m | n+1 \rangle \langle n | m-1 \rangle + e^{2i\phi} \sqrt{(n+1)(m+1)} \langle m | n+1 \rangle \langle n | m+1 \rangle \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

$$\begin{aligned}
|\langle m|X(\phi)|n\rangle|^2 &= e^{-2i\phi} \sqrt{nm} \delta_{m,n-1} \delta_{n,m-1} + \sqrt{n(m+1)} \delta_{m,n-1} \delta_{n,m+1} \\
&+ \sqrt{m(n+1)} \delta_{m,n+1} \delta_{n,m-1} + e^{2i\phi} \sqrt{(n+1)(m+1)} \delta_{m,n+1} \delta_{n,m+1}
\end{aligned} \tag{D.6}$$

Devido à presença das deltas de Kronecker presentes no cálculo, alguns termos se anularão, pois estas impõem condições que não podem ser satisfeitas por  $m$  e  $n$  simultaneamente. Então, ficamos com

$$|\langle m|X(\phi)|n\rangle|^2 = \sqrt{n(m+1)} \delta_{m,n-1} + \sqrt{m(n+1)} \delta_{m,n+1}, \tag{D.7}$$

onde foram omitidas  $\delta_{n,m+1}$  e  $\delta_{n,m-1}$  por imporem as mesmas condições que  $\delta_{m,n-1}$  e  $\delta_{m,n+1}$ , respectivamente.

De posse deste resultado, podemos substituir (D.7) em (D.2), considerando  $G = X(\phi)$ . Fazendo as substituições,

$$\begin{aligned}
F_Q &= 2 \sum_{m,n} \frac{(\gamma_m - \gamma_n)^2}{\gamma_m + \gamma_n} \left[ \sqrt{n(m+1)} \delta_{m,n-1} + \sqrt{m(n+1)} \delta_{m,n+1} \right], \\
&= 2 \left[ \underbrace{\sum_n n \frac{(\gamma_{n-1} - \gamma_n)^2}{\gamma_{n-1} + \gamma_n}}_{s_1} + \underbrace{\sum_n (n+1) \frac{(\gamma_{n+1} - \gamma_n)^2}{\gamma_{n+1} + \gamma_n}}_{s_2} \right]
\end{aligned} \tag{D.8}$$

## D.1 Estado de EPR

Para o estado de EPR, o conjunto de autovalores é dado por

$$\gamma_n = (1 - \lambda) \lambda^n, \tag{D.9}$$

sendo  $\lambda = \tanh^2(r)$ . Para a execução das somas  $s_1$  e  $s_2$  presentes em (D.8), precisamos das relações entre os autovalores presentes em cada uma das expressões.

Temos então, para  $s_1$ ,

$$\begin{aligned}
\gamma_{n-1} - \gamma_n &= (1 - \lambda)(\lambda^{n-1} - \lambda^n), \\
&= \frac{(1 - \lambda)^2}{\lambda} \lambda^n.
\end{aligned} \tag{D.10a}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{n-1} + \gamma_n &= (1 - \lambda)(\lambda^{n-1} + \lambda^n), \\
&= \frac{(1 - \lambda^2)}{\lambda} \lambda^n.
\end{aligned} \tag{D.10b}$$

De forma que, temos

$$\frac{(\gamma_{n-1} - \gamma_n)^2}{\gamma_{n-1} + \gamma_n} = \frac{(1 - \lambda)^4}{\lambda(1 - \lambda^2)} \lambda^n. \quad (\text{D.11})$$

Então, a soma  $s_1$  é escrita como

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{(1 - \lambda)^4}{\lambda(1 - \lambda^2)} \sum_n n \lambda^n, \\ &= \frac{(1 - \lambda)^4}{\lambda(1 - \lambda^2)} \frac{\lambda}{(1 - \lambda)^2}, \\ &= \frac{(1 - \lambda)^2}{(1 - \lambda^2)}. \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

Agora, para  $s_2$ , a relação entre autovalores é

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1} - \gamma_n &= (1 - \lambda)(\lambda^{n+1} - \lambda^n), \\ &= (1 - \lambda)(\lambda - 1)\lambda^n, \\ &= -(1 - \lambda)^2 \lambda^n. \end{aligned} \quad (\text{D.13a})$$

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1} + \gamma_n &= (1 - \lambda)(\lambda^{n+1} + \lambda^n), \\ &= (1 - \lambda)(1 + \lambda)\lambda^n, \\ &= (1 - \lambda^2)\lambda^n. \end{aligned} \quad (\text{D.13b})$$

de forma que, os coeficientes da soma  $s_2$  sejam

$$\frac{(\gamma_{n+1} - \gamma_n)^2}{\gamma_{n+1} + \gamma_n} = \frac{(1 - \lambda)^4}{(1 - \lambda^2)} \lambda^n. \quad (\text{D.14})$$

A soma  $s_2$  pode então ser executada em duas parcelas

$$\begin{aligned} s_2 &= \frac{(1 - \lambda)^4}{(1 - \lambda^2)} \left[ \sum_n n \lambda^n + \sum_n \lambda^n \right], \\ &= \frac{(1 - \lambda)^4}{(1 - \lambda^2)} \left[ \frac{\lambda}{(1 - \lambda)^2} + \frac{1}{1 - \lambda} \right], \\ &= \frac{(1 - \lambda)^2}{(1 - \lambda^2)}. \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

A informação de Fisher então é calculada como  $F_Q = 2(s_1 + s_2)$ ,

$$F_Q = \frac{4(1 - \lambda)}{1 + \lambda}. \quad (\text{D.16})$$

## D.2 Superposição com Fase Relativa

A matriz densidade para as superposições com fase relativa tem a forma

$$\rho_1 = |\mathcal{N}_0|^2 \sum_n \lambda^n [1 + \epsilon(-1)^n] |n\rangle\langle n|, \quad (\text{D.17})$$

com autovalores correspondentes a

$$\gamma_n = |\mathcal{N}_0|^2 \lambda^n [1 + \epsilon(-1)^n], \quad (\text{D.18})$$

com  $\lambda = \tanh^2(r)$ ,  $\epsilon = \cos(\varphi)$ , e fator de normalização

$$|\mathcal{N}_0|^2 = \frac{1 - \lambda^2}{(1 + \lambda) + \epsilon(1 - \lambda)}. \quad (\text{D.19})$$

Temos então que levar em conta os seguintes autovalores

$$\begin{aligned} \gamma_{n-1} &= |\mathcal{N}_0|^2 \lambda^{n-1} [1 + \epsilon(-1)^{n-1}], \\ &= |\mathcal{N}_0|^2 \frac{\lambda^n}{\lambda} [1 - \epsilon(-1)^n]. \end{aligned} \quad (\text{D.20a})$$

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1} &= |\mathcal{N}_0|^2 \lambda^{n+1} [1 + \epsilon(-1)^{n+1}], \\ &= |\mathcal{N}_0|^2 \lambda^n \lambda [1 - \epsilon(-1)^n]. \end{aligned} \quad (\text{D.20b})$$

Para as relações presentes em  $s_1$ ,

$$\begin{aligned} \gamma_{n-1} - \gamma_n &= |\mathcal{N}_0|^2 \left\{ \frac{\lambda^n}{\lambda} [1 - \epsilon(-1)^n] - \lambda^n [1 + \epsilon(-1)^n] \right\}, \\ &= |\mathcal{N}_0|^2 \lambda^n \left\{ \frac{1}{\lambda} [1 - \epsilon(-1)^n] - [1 + \epsilon(-1)^n] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.21a})$$

$$\begin{aligned} \gamma_{n-1} + \gamma_n &= |\mathcal{N}_0|^2 \left\{ \frac{\lambda^n}{\lambda} [1 - \epsilon(-1)^n] + \lambda^n [1 + \epsilon(-1)^n] \right\}, \\ &= |\mathcal{N}_0|^2 \lambda^n \left\{ \frac{1}{\lambda} [1 - \epsilon(-1)^n] + [1 + \epsilon(-1)^n] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.21b})$$

Para o coeficiente dependendo dos  $\gamma$ 's em  $s_1$ ,

$$\frac{(\gamma_{n-1} - \gamma_n)^2}{\gamma_{n-1} + \gamma_n} = |\mathcal{N}_0|^2 \lambda^n \frac{\left\{ \frac{1}{\lambda} [1 - \epsilon(-1)^n] - [1 + \epsilon(-1)^n] \right\}^2}{\left\{ \frac{1}{\lambda} [1 - \epsilon(-1)^n] + [1 + \epsilon(-1)^n] \right\}}. \quad (\text{D.22})$$

Para os coeficientes em  $s_2$ ,

$$\begin{aligned}\gamma_{n+1} - \gamma_n &= |\mathcal{N}_0|^2 \{ \lambda \lambda^n [1 - \epsilon(-1)^n] - \lambda^n [1 + \epsilon(-1)^n] \}, \\ &= |\mathcal{N}_0|^2 \lambda^n \{ \lambda [1 - \epsilon(-1)^n] - [1 + \epsilon(-1)^n] \}.\end{aligned}\quad (\text{D.23a})$$

$$\begin{aligned}\gamma_{n+1} + \gamma_n &= |\mathcal{N}_0|^2 \{ \lambda \lambda^n [1 - \epsilon(-1)^n] + \lambda^n [1 + \epsilon(-1)^n] \}, \\ &= |\mathcal{N}_0|^2 \lambda^n \{ \lambda [1 - \epsilon(-1)^n] + [1 + \epsilon(-1)^n] \}.\end{aligned}\quad (\text{D.23b})$$

$$\frac{(\gamma_{n+1} - \gamma_n)^2}{\gamma_{n+1} + \gamma_n} = |\mathcal{N}_0|^2 \lambda^n \frac{\{ \lambda [1 - \epsilon(-1)^n] - [1 + \epsilon(-1)^n] \}^2}{\{ \lambda [1 - \epsilon(-1)^n] + [1 + \epsilon(-1)^n] \}},\quad (\text{D.24})$$

de forma que as somas  $s_1$  e  $s_2$  são escritas como

$$s_1 = |\mathcal{N}_0|^2 \sum_n n \lambda^n \frac{\left\{ \frac{1}{\lambda} [1 - \epsilon(-1)^n] - [1 + \epsilon(-1)^n] \right\}^2}{\left\{ \frac{1}{\lambda} [1 - \epsilon(-1)^n] + [1 + \epsilon(-1)^n] \right\}},\quad (\text{D.25a})$$

$$s_2 = |\mathcal{N}_0|^2 \sum_n (n+1) \lambda^n \frac{\{ \lambda [1 - \epsilon(-1)^n] - [1 + \epsilon(-1)^n] \}^2}{\{ \lambda [1 - \epsilon(-1)^n] + [1 + \epsilon(-1)^n] \}}.\quad (\text{D.25b})$$

Para prosseguir com as somas, vamos dividí-las em parcelas com termos pares e ímpares,  $s_i = s_i(\text{par}) + s_i(\text{ímpar})$ ,  $k = 1, 2$ . Reindexaremos as somas pares trocando os índices  $n \rightarrow 2k$ , e as ímpares fazendo  $n \rightarrow 2k + 1$ .

Fazendo primeiramente  $s_{1\text{par}}$ , nota-se que  $(-1)^{2k} = 1$ , e a soma é simplificada por um fator que fica independente de  $k$ . Temos então

$$\begin{aligned}s_{1\text{par}} &= |\mathcal{N}_0|^2 \sum_k (2k) \lambda^{2k} \frac{\left[ \frac{1-\epsilon}{\lambda} - (1+\epsilon) \right]^2}{\frac{1-\epsilon}{\lambda} + (1+\epsilon)}, \\ &= |\mathcal{N}_0|^2 f(\lambda, \epsilon) \sum_k (2k) \lambda^{2k},\end{aligned}\quad (\text{D.26})$$

com

$$f(\lambda, \epsilon) = \frac{\left[ \frac{1-\epsilon}{\lambda} - (1+\epsilon) \right]^2}{\frac{1-\epsilon}{\lambda} + (1+\epsilon)}.\quad (\text{D.27})$$

Podemos então executar a soma presente em (D.26) utilizando as relações obtidas das séries geométricas, e assim,

$$s_{1\text{par}} = |\mathcal{N}_0|^2 f(\lambda, \epsilon) \frac{2\lambda^2}{(1-\lambda^2)^2}.\quad (\text{D.28})$$



Para a soma com coeficientes ímpares, a expressão é

$$s_{1\text{ímpar}} = |\mathcal{N}_0|^2 \sum_k (2k+1) \lambda^{2k+1} \frac{\left\{ \frac{1}{\lambda} [1 - \epsilon(-1)^{2k+1}] - [1 + \epsilon(-1)^{2k+1}] \right\}^2}{\frac{1}{\lambda} [1 - \epsilon(-1)^{2k+1}] + [1 + \epsilon(-1)^{2k+1}]}, \quad (\text{D.29})$$

que simplifica-se consideravelmente ao aplicar  $(-1)^{2k+1} = (-1)$ . A soma  $s_{1\text{ímpar}}$  fica então escrita como

$$s_{1\text{ímpar}} = |\mathcal{N}_0|^2 g(\lambda, \epsilon) \sum_k (2k+1) \lambda^{2k}, \quad (\text{D.30})$$

com

$$g(\lambda, \epsilon) = \frac{\lambda \left[ \frac{1}{\lambda}(1 + \epsilon) - (1 - \epsilon) \right]^2}{\frac{1}{\lambda}(1 + \epsilon) + (1 - \epsilon)}. \quad (\text{D.31})$$

Podemos então obter a expressão para  $s_{1\text{ímpar}}$ ,

$$\begin{aligned} s_{1\text{ímpar}} &= |\mathcal{N}_0|^2 g(\lambda, \epsilon) \left[ 2 \sum_k k \lambda^{2k} + \sum_k \lambda^{2k} \right], \\ &= |\mathcal{N}_0|^2 g(\lambda, \epsilon) \left[ \frac{2\lambda^2}{(1 - \lambda^2)^2} + \frac{1}{1 - \lambda^2} \right], \\ &= |\mathcal{N}_0|^2 g(\lambda, \epsilon) \frac{(1 + \lambda^2)}{(1 - \lambda^2)^2}. \end{aligned} \quad (\text{D.32})$$

Então, a soma  $s_1 = s_{1\text{par}} + s_{1\text{ímpar}}$ ,

$$s_1 = \frac{|\mathcal{N}_0|^2}{(1 - \lambda^2)^2} \left[ 2\lambda^2 f(\lambda, \epsilon) + (1 + \lambda^2)g(\lambda, \epsilon) \right]. \quad (\text{D.33})$$

Agora, para a soma  $s_2$ , realizando o mesmo processo, a soma  $s_{2\text{par}}$  é

$$s_{2\text{par}} = |\mathcal{N}_0|^2 \sum_k (2k+1) \lambda^{2k} \frac{\left\{ \lambda [1 - \epsilon(-1)^{2k}] - [1 + \epsilon(-1)^{2k}] \right\}^2}{\lambda [1 - \epsilon(-1)^{2k}] + [1 + \epsilon(-1)^{2k}]} \quad (\text{D.34})$$

que será reescrita, levando em conta  $(-1)^{2k} = 1$ , como

$$s_{2\text{par}} = |\mathcal{N}_0|^2 h(\lambda, \epsilon) \sum_k (2k+1) \lambda^{2k}, \quad (\text{D.35})$$

com

$$h(\lambda, \epsilon) = \frac{[\lambda(1 - \epsilon) - (1 + \epsilon)]^2}{\lambda(1 - \epsilon) + (1 + \epsilon)}. \quad (\text{D.36})$$

Podemos então escrever a forma final de  $s_{2\text{par}}$  como

$$s_{2\text{par}} = |\mathcal{N}_0|^2 h(\lambda, \epsilon) \frac{(1 + \lambda^2)}{(1 - \lambda^2)^2}. \quad (\text{D.37})$$

Agora, para os coeficientes ímpares,  $s_{2\text{ímpar}}$  é escrita como

$$s_{2\text{ímpar}} = |\mathcal{N}_0|^2 \sum_k (2k + 2) \lambda^{2k+1} \frac{\left\{ \lambda \left[ 1 - \epsilon(-1)^{2k+1} \right] - \left[ 1 + \epsilon(-1)^{2k+1} \right] \right\}^2}{\lambda \left[ 1 - \epsilon(-1)^{2k+1} \right] + \left[ 1 + \epsilon(-1)^{2k+1} \right]}. \quad (\text{D.38})$$

que, utilizando  $(-1)^{2k+1} = -1$ , simplifica-se na forma

$$s_{2\text{ímpar}} = |\mathcal{N}_0|^2 j(\lambda, \epsilon) \sum_k (2k + 2) \lambda^{2k}, \quad (\text{D.39})$$

com

$$j(\lambda, \epsilon) = \frac{\lambda [\lambda(1 + \epsilon) - (1 - \epsilon)]^2}{\lambda(1 + \epsilon) + (1 - \epsilon)}. \quad (\text{D.40})$$

Então, calculando  $s_{2\text{ímpar}}$ ,

$$\begin{aligned} s_{2\text{ímpar}} &= |\mathcal{N}_0|^2 j(\lambda, \epsilon) 2 \left[ \sum_k k \lambda^{2k} + \sum_k \lambda^{2k} \right], \\ &= |\mathcal{N}_0|^2 j(\lambda, \epsilon) 2 \left[ \frac{\lambda^2}{(1 - \lambda^2)^2} + \frac{1}{(1 - \lambda^2)} \right], \\ &= |\mathcal{N}_0|^2 j(\lambda, \epsilon) \frac{2}{(1 - \lambda^2)}. \end{aligned} \quad (\text{D.41})$$

Então, a soma  $s_2 = s_{2\text{par}} + s_{2\text{ímpar}}$  é

$$\begin{aligned} s_2 &= |\mathcal{N}_0|^2 h(\lambda, \epsilon) \frac{(1 + \lambda^2)}{(1 - \lambda^2)^2} + |\mathcal{N}_0|^2 j(\lambda, \epsilon) \frac{2}{(1 - \lambda^2)}, \\ &= \frac{|\mathcal{N}_0|^2}{(1 - \lambda^2)^2} \left[ (1 + \lambda^2) h(\lambda, \epsilon) + 2j(\lambda, \epsilon) \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.42})$$

Agora, de posse de  $s_1$  e  $s_2$ , estamos em condições de calcular  $s = s_1 + s_2$ , que é escrita como

$$s = \frac{|\mathcal{N}_0|^2}{(1 - \lambda^2)^2} \left\{ \left[ 1 + \lambda^2 \right] \left[ g(\lambda, \epsilon) + h(\lambda, \epsilon) \right] + 2 \left[ \lambda^2 f(\lambda, \epsilon) + j(\lambda, \epsilon) \right] \right\}. \quad (\text{D.43})$$

A informação de Fisher pode então ser calculada como  $F_Q = 2(s_1 + s_2)$ ,

$$F_Q = \frac{2|\mathcal{N}_0|^2}{(1 - \lambda^2)^2} \left\{ \left[ 1 + \lambda^2 \right] \left[ g(\lambda, \epsilon) + h(\lambda, \epsilon) \right] + 2 \left[ \lambda^2 f(\lambda, \epsilon) + j(\lambda, \epsilon) \right] \right\}. \quad (\text{D.44})$$

### D.2.1 Estado Par

Para particularizar os resultados para o estado de EPR par, basta substituir  $\epsilon = 1$  na expressão da  $F_Q$ . O valor de cada função, com  $\epsilon = 1$  é

$$|\mathcal{N}_0|^2 = \frac{(1 - \lambda^2)}{2}, \quad (\text{D.45a})$$

$$f(\lambda, 1) = g(\lambda, 1) = h(\lambda, 1) = 2, \quad (\text{D.45b})$$

$$j(\lambda, 1) = 2\lambda^2. \quad (\text{D.45c})$$

Substituindo cada uma das funções em (D.44), obtemos a informação de Fisher para o estado par

$$F_Q = \frac{4(3\lambda^2 + 1)}{(1 - \lambda^2)} \quad (\text{D.46})$$

O número médio de fótons para o estado par é

$$\langle N \rangle_{\text{par}} = \frac{2\lambda^2}{1 - \lambda^2}, \quad (\text{D.47})$$

de forma que podemos reescrever a expressão da informação de Fisher como

$$\begin{aligned} \frac{(3\lambda^2 + 1)}{(1 - \lambda^2)} &= \frac{4\lambda^2}{1 - \lambda^2} + 1 = 2 \langle N \rangle_{\text{par}} + 1, \\ \implies F_Q &= 4(2 \langle N \rangle_{\text{par}} + 1). \end{aligned} \quad (\text{D.48})$$

### D.2.2 Estado Ímpar

Para o estado de EPR ímpar, temos  $\epsilon = -1$ , e o valor de cada função é

$$|\mathcal{N}_0|^2 = \frac{(1 - \lambda^2)}{2\lambda}, \quad (\text{D.49a})$$

$$f(\lambda, -1) = \frac{2}{\lambda}, \quad (\text{D.49b})$$

$$g(\lambda, -1) = h(\lambda, -1) = j(\lambda, -1) = 2\lambda. \quad (\text{D.49c})$$

e a informação de Fisher, substituindo os valores, é dada por

$$F_Q = \frac{4(\lambda^2 + 3)}{(1 - \lambda^2)}. \quad (\text{D.50})$$

O número médio de fótons para o estado ímpar é

$$\langle N \rangle_{\text{ímpar}} = \frac{1 + \lambda^2}{1 - \lambda^2}, \quad (\text{D.51})$$

de forma que a informação de Fisher seja reescrita através de

$$\begin{aligned} \frac{(\lambda^2 + 3)}{(1 - \lambda^2)} &= \frac{2(1 + \lambda^2)}{1 - \lambda^2} + 1 = 2 \langle N \rangle_{\text{ímpar}} + 1, \\ \implies F_Q &= 4(2 \langle N \rangle_{\text{ímpar}} + 1). \end{aligned} \quad (\text{D.52})$$

### D.3 Estado de Vácuo Comprimido de um Modo

O estado de vácuo comprimido é obtido pela atuação do operador de compressão  $S(\xi)$  sobre o vácuo

$$|\psi\rangle = S(\xi) |0\rangle, \quad (\text{D.53})$$

com  $S(\xi) = e^{\frac{1}{2}(\xi^* a^2 - \xi (a^\dagger)^2)}$ . Tratando-se de um estado puro, a informação de Fisher para estimação de deslocamentos é dado pela variância do operador de quadratura geral  $X(\phi)$ , escrita como

$$F_Q = 4(\Delta X(\phi))^2, \quad (\text{D.54})$$

com  $(\Delta X(\phi))^2 = \langle X^2(\phi) \rangle - \langle X(\phi) \rangle^2$ . Primeiramente, calculando  $\langle X^2(\phi) \rangle$ ,

$$\begin{aligned} \langle X^2(\phi) \rangle &= \langle \psi | X^2(\phi) | \psi \rangle, \\ &= \langle 0 | S^\dagger(\xi) X^2(\phi) S(\xi) | 0 \rangle, \\ &= \langle 0 | S^\dagger(\xi) X(\phi) \underbrace{S(\xi) S^\dagger(\xi)}_{\mathcal{I}} X(\phi) S(\xi) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (\text{D.55})$$

Utilizando as propriedades de transformação do operador de compressão  $S(\xi)$  (3.29),

$$\begin{aligned} S^\dagger(\xi) X(\phi) S(\xi) &= S^\dagger(\xi) (a e^{-i\phi} + a^\dagger e^{i\phi}) S(\xi), \\ &= e^{-i\phi} (S^\dagger(\xi) a S(\xi)) + e^{i\phi} (S^\dagger(\xi) a^\dagger S(\xi)), \\ &= e^{-i\phi} (a \cosh(r) - a^\dagger e^{i\theta} \sinh(r)) + e^{i\phi} (a^\dagger \cosh(r) - a e^{-i\theta} \sinh(r)). \end{aligned} \quad (\text{D.56})$$

O produto  $S^\dagger(\xi)X(\phi)S(\xi)S^\dagger(\xi)X(\phi)S(\xi)$  contém termos que são proporcionais a  $a^2$  e  $(a^\dagger)^2$ , além de termos cruzados proporcionais a  $a^\dagger a$  e  $aa^\dagger$ . Destes, os únicos termos que resultarão médias não nulas para o estado de vácuo  $|0\rangle$  são proporcionais a  $aa^\dagger$ , já que  $\langle 0|aa^\dagger|0\rangle = 1$ . Levando em conta somente estes termos, ficamos a cargo de calcular o valor médio da expressão

$$\begin{aligned}
\langle X^2(\phi) \rangle &= \left[ -e^{-2i\phi} e^{i\theta} \cosh(r) \sinh(r) + \cosh^2(r) + \sinh^2(r) - e^{2i\phi} e^{-i\theta} \cosh(r) \sinh(r) \right] \langle 0|aa^\dagger|0 \rangle, \\
&= \cosh^2(r) + \sinh^2(r) - \cosh(r) \sinh(r) \left[ e^{i(\theta-2\phi)} + e^{-i(\theta-2\phi)} \right], \\
&= \cosh^2(r) + \sinh^2(r) - 2 \cos(\theta - 2\phi) \cosh(r) \sinh(r), \\
&= 1 + 2 \sinh^2(r) - \sinh(2r) \cos(\theta - 2\phi).
\end{aligned} \tag{D.57}$$

Os termos resultantes da média  $\langle X(\phi) \rangle = \langle 0|S^\dagger(\xi)X(\phi)S(\xi)|0 \rangle$  são todos nulos, devido a conter médias dos operadores  $a$  e  $a^\dagger$  no estado de vácuo. A informação de Fisher, neste caso, será dada então por  $F_Q = 4 \langle X^2(\phi) \rangle$ ,

$$F_Q = 4 \left[ 1 + 2 \sinh^2(r) - \sinh(2r) \cos(\theta - 2\phi) \right]. \tag{D.58}$$

O número médio de fótons no estado de vácuo comprimido é dado por  $\langle N \rangle = \sinh^2(r)$ . Então, em termos de  $\langle N \rangle$ , a informação de Fisher é escrita como

$$F_Q = 4 \left[ 1 + 2 \langle N \rangle - 2 \sqrt{\langle N \rangle (1 + \langle N \rangle)} \cos(\theta - 2\phi) \right]. \tag{D.59}$$