Universidade Federal De São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

# Resolubilidade contínua e singularidades removíveis para a equação divergente

Victor Sandrin Biliatto

São Carlos-SP
Agosto de 2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

# Resolubilidade contínua e singularidades removíveis para a equação divergente

Victor Sandrin Biliatto
Orientador: Prof. Dr. Tiago Henrique Picon
Co-orientador: Prof. Dr. Laurent Moonens

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

São Carlos-SP
Agosto de 2019

Biliatto, Victor Sandrin

Resolubilidade contínua e singularidades removíveis para a equação divergente / Victor Sandrin Biliatto. -- 2019.
76 f. : 30 cm.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal de São Carlos, campus São Carlos, São Carlos
Orientador: Tiago Henrique Picon
Banca examinadora: Tiago Henrique Picon, Cezar Issao Kondo, Sérgio Henrique Monari Soares
Bibliografia

1. Campos vetoriais de medida-divergência. 2. Análise Harmônica. 3. Teoria Geométrica da Medida. I. Orientador. II. Universidade Federal de São Carlos. III. Título.

Ficha catalográfica elaborada pelo Programa de Geração Automática da Secretaria Geral de Informática (SIn).
DADOS FORNECIDOS PELO(A) AUTOR(A)
Bibliotecário(a) Responsável: Ronildo Santos Prado – CRB/8 7325

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

---

## Folha de Aprovação

---

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Victor Sandrin Biliatto, realizada em 12/08/2019:

Prof. Dr. Tiago Henrique Picon
USP

Prof. Dr. Cezar Issao Kondo
UFSCar

Prof. Dr. Sérgio Henrique Monari Soares
USP

*Aos meus pais, que tanto amo e que sempre me apoiaram.*

# Agradecimentos

Agradeço à minha mãe, Roseli, e ao meu pai, Cesar, por todo o amor, carinho, dedicação e incentivo que deram a mim durante toda a minha vida. Sem o apoio de vocês às decisões que tomei durante esses anos, provavelmente não teria chegado onde estou hoje.

Agradeço aos meus padrinhos, Rosane e Valter, e ao meu primo, Walter Luis, por estarem sempre por perto quando preciso.

Agradeço à minha avó, Nilza, pelo carinho e pelas liberdades que só os avós sabem dar aos netos.

Agradeço ao meu orientador, Tiago, por toda a sua dedicação a este projeto, pelas excelentes aulas, explicações, dicas e pelos conselhos que me deu desde os dias de gradução em Ribeirão Preto até hoje.

Ao professor Laurent, que, seja no Brasil ou no exterior, dedicou parte do seu tempo dando aulas, tirando dúvidas e fazendo sugestões a este trabalho, *merci beaucoup*.

Agradeço aos membros da banca examinadora, os professores Cezar Kondo, do DM/UFSCar, e Sérgio Monari, do ICMC/USP, pelos comentários e pelas sugestões a este texto.

A todos os professores que tive, no ensino básico, na USP Ribeirão Preto, na Queen Mary University of London, e na UFSCar, agradeço por contribuírem na formação do matemático e da pessoa que sou hoje.

Faço um agradecimento à Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, a OBMEP, por dar a mim a oportunidade de me apaixonar pela matemática tão jovem.

Agradeço aos meus queridos amigos, Danjo, Manolo, Exemplo, Clight, Kadmo e Pônei, por serem os vacilões que fizeram meus anos de graduação muito melhores.

Também agradeço aos amigos do mestrado, Raphael, Junio e Felipe, pelos exercícios resolvidos, pelas sessões de sinuca e pelas mais variadas conversas.

Quero agradecer ainda à querida Isadora e ao querido Pantera por, na etapa final do mestrado, meu semestre como “visitante” na USP Ribeirão, estarem por perto em vários dos meus momentos de descanso e descontração no desgastante período em que escrevi este texto.

Finalmente, agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) que, através do processo nº 2017/20250-2, financiou este projeto de mestrado.

*"Die Mathematik ist die Königin der Wissenschaften"*

Carl Friedrich Gauss

# Resumo

Neste texto estudamos alguns resultados obtidos por Nguyen Cong Phuc e Monica Torres no artigo "*Characterizations of the Existence and Removable Singularities of Divergence-measure Vector Fields*" [PT] a respeito da caracterização de soluções e de singularidades removíveis da equação

$$\text{div } F = \mu,$$

no qual $\mu$ é uma medida e $F$ é um campo vetorial contínuo ou de classe $L^p$. Para realizar tal estudo, são apresentadas definições e propriedades sobre os campos vetoriais de medida-divergência, medidas de Hausdorff, capacidade de Sobolev e funções de variação limitada.

**Palavras-chave:** Campos vetoriais de medida-divergência. Resolubilidade. Singularidades removíveis. Análise Harmônica. Teoria Geométrica da Medida.

# Abstract

In this text we study some results obtained by Nguyen Cong Phuc and Monica Torres in the paper "*Characterizations of the Existence and Removable Singularities of Divergence-measure Vector Fields*" [PT] regarding the characterisation of solutions and removable singularities of the equation

$$\text{div } F = \mu,$$

where $\mu$ is a measure and $F$ is a continuous or $L^p$ vector field. To perform this study, the text presents definitions and properties on divergence-measure vector fields, Hausdorff measures, Sobolev capacity and functions of bounded variation.

**Keywords:** Divergence-measure vector fields. Solvability. Removable singularities. Harmonic Analysis. Geometric Measure Theory.

# Sumário

# Introdução

O presente projeto de mestrado tem como objetivo a leitura do artigo *"Characterizations of the Existence and Removable Singularities of Divergence-measure Vector Fields"*, de Nguyen Cong Phuc e Monica Torres [PT], e o estudo de resultados nele obtidos a respeito da caracterização de soluções e de singularidades removíveis da equação

$$\operatorname{div} F = \mu, \tag{1}$$

no qual $\mu$ é uma medida e $F$ é um campo vetorial contínuo ou de classe $L^p$, para $1 \leq p \leq \infty$.

Campos vetoriais de medida-divergência aparecem em algumas áreas de equações diferenciais parciais, como as leis de conservação não-lineares. É sabido que soluções de entropia $u(t,x)$ para o sistema

$$u_t + \operatorname{div}_x f(u) = 0,$$

com $x \in \mathbb{R}^d$, no qual $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ e $f = (f_1, \ldots, f_m)$ com $f_j : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^d$, $j = 1, \ldots, m$, pertencem a algum espaço $L^p(\mathbb{R}^{d+1}_+)$, com $1 \leq p \leq \infty$, ou podem até mesmo ser medidas. Mais ainda, $u$ satisfaz a desigualdade entrópica

$$\eta(u)_t + \operatorname{div}_x q(u) \leq 0$$

no sentido das distribuições, para qualquer par $(\eta, q)$ de fluxo entropia-entropia convexo (veja [Da]). A desigualdade entrópica e o Teorema de Representação de Riesz levam à conclusão de que existe uma medida $\mu_{\eta,q}$ em $\mathbb{R}^{d+1}_+$ tal que

$$\operatorname{div}_{t,x}(\eta(u), q(u)) = \mu_{\eta,q}$$

e, portanto, $F_u = (\eta(u), q(u))$ é um campo de medida-divergência.

Como referências para estudos sobre os campos vetoriais de medida-divergência apontamos os artigos [CF1,CF2,CT,CTZ1,ACM,Si]. Para detalhes sobre a conexão e aplicações de campos de medida-divergência a leis de conservação, referimos ao artigo [CTZ2].

No Capítulo 1 é fixada a notação utilizada ao longo do texto, são apresentadas definições básicas e são enunciados alguns resultados de Teoria da Medida, Distribuições, Análise Funcional e Análise Harmônica.

No Capítulo 2 são apresentados campos vetoriais de medida-divergência, esclarecendo o significado da equação div $F = \mu$.

O Capítulo 3 é dedicado às medidas de Hausdorff. Na Seção 3.1, são apresentadas definições e propriedades clássicas de tais medidas. A Seção 3.2 apresenta uma demonstração detalhada do Lema de Frostman.

O Capítulo 4 apresenta o conceito de capacidade de Sobolev e suas propriedades, bem como certas relações da capacidade de Sobolev com medidas de Hausdorff e campos vetoriais de medida-divergência.

O Capítulo 5 trata das funções de variação limitada e dos conjuntos com perímetro finito. A Seção 5.2 traz uma demonstração da fórmula de co-área para funções de variação limitada. Já na Seção 5.3 são demonstradas duas desigualdades denominadas isoperimétricas e a desigualdade *boxing*.

No Capítulo 6 são demonstrados os teoremas principais do artigo [PT]. A Seção 6.1 apresenta resultados a serem utilizados nas demonstrações. Na Seção 6.2 são demonstrados os teoremas que caracterizam a existência de soluções para (1) em $L^p$, divididos em três faixas diferentes de valores de $p$, enquanto o resultado sobre a resolubilidade contínua de (1) é demonstrado na Seção 6.3.

Finalmente, no Capítulo 7 é apresentada, como uma aplicação para os teoremas de resolubilidade do Capítulo 6, uma caracterização para singularidades removíveis da equação (1). O resultado para campos $L^p$ é demonstrado na Seção 7.1, enquanto que para campos contínuos a demonstração é feita na Seção 7.2.

Um apêndice ao final do texto apresenta algumas definições da Teoria Geométrica da Medida que generalizam o conceito de fronteira para conjuntos com perímetro finito, bem como algumas propriedades dessas fronteiras generalizadas.

# Resultados principais

Os principais resultados de resolubilidade que serão demonstrados nesta dissertação são:

**Teorema 0.1.** *Suponha $n \geq 2$ e $n/(n-1) < p < \infty$. Se $F \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ é solução de* $\operatorname{div} F = \mu$, *para alguma medida de Radon positiva $\mu$, então $\mu$ possui energia-$(1,p)$ finita, ou seja,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} [I_1\mu(x)]^p \, dx < \infty,$$

*no qual $I_1$ é o* potencial de Riesz de ordem 1 *definido por*

$$I_1\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} \, d\mu(y).$$

*Reciprocamente, se $\mu$ é uma medida de Radon positiva com energia-$(1,p)$ finita, então existe um campo vetorial $F \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tal que* $\mathrm{div}F = \mu$.

**Teorema 0.2.** *Se $\mu$ é uma medida de Radon positiva tal que*

$$\mu(B(x,r)) \leq Cr^{n-1}, \quad \text{para todo } r > 0, x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

*para alguma constante $C > 0$, que independe de $x$ e $r$, então existe um campo vetorial $F \in L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ que satisfaz $\mathrm{div}F = \mu$. Reciprocamente, se $F \in L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ é tal que $\mathrm{div}F = \mu$ para alguma medida de Radon positiva $\mu$, então $\mu$ satisfaz a propriedade* (2).

**Teorema 0.3.** *Seja $\mu$ uma medida de Radon positiva em um conjunto aberto não-vazio $U \subset \mathbb{R}^n$. Então, as propriedades abaixo são equivalentes:*

*(i)* *A equação $\mathrm{div}\, F = \mu$ possui uma solução contínua $F : U \to \mathbb{R}^n$.*

*(ii)* *Dados $\varepsilon > 0$ e um conjunto compacto $K \subset\subset U$, existe $\theta > 0$ tal que*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu \right| \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi| \, dx + \theta \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi| \, dx$$

*para toda $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(K)$.*

*(iii)* *Para qualquer conjunto compacto $K \subset\subset U$,*

$$\lim_{\delta \to 0^+} \sup_{x_0 \in K} \sup \left\{ \frac{\mu(B(x_0,r))}{r^{n-1}} : 0 < r < \delta \right\} = 0.$$

*(iv)* *Para qualquer conjunto compacto $K \subset\subset U$,*

$$\lim_{\delta \to 0^+} \sup_{x_0 \in K} \sup \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}^n} u \, d\mu \right| : u \in \mathcal{C}_c^\infty(B(x_0,\delta)), \|\nabla u\|_1 \leq 1 \right\} = 0.$$

Utilizando os resultados de resolubilidade, mostraremos os seguintes teoremas que caracterizam a existência de singularidades removíveis para (1):

**Teorema 0.4.** *Sejam $E$ um conjunto compacto e $U$ um conjunto aberto tais que $E \subset U \subset \mathbb{R}^n$, $\mu$ uma medida de Radon com sinal em $U$ tal que $\mu(E) = 0$ e $n/(n-1) < p \leq \infty$ (ou seja, $1 \leq p' < n$). Se $\mathrm{cap}_{1,p'}(E,U) = 0$, então toda solução $F$ de*

$$\mathrm{div}\, F = \mu \quad \text{em } U \setminus E, \ F \in L^p_{loc}(U, \mathbb{R}^n) \tag{3}$$

*é uma solução de*

$$\mathrm{div}\, F = \mu \quad \text{em } U, \ F \in L^p_{loc}(U, \mathbb{R}^n). \tag{4}$$

*Reciprocamente, suponha que exista pelo menos um campo vetorial $\tilde{F}$ solução de* (4) *e suponha que toda solução de* (3) *é também solução de* (4)*. Então, necessariamente, $\mathrm{cap}_{1,p'}(E,U) = 0$.*

**Teorema 0.5.** *Sejam $E$ um conjunto compacto e $U$ um conjunto aberto tais que $E \subset U \subset \mathbb{R}^n$, e $\mu$ uma medida de Radon com sinal em $U$ tal que $\mu(E) = 0$. Se $\mathcal{H}^{n-1}(E) = 0$, então toda solução $F$ de*

$$\operatorname{div} F = \mu \quad \text{em } U \setminus E,\ F \in \mathcal{C}(U, \mathbb{R}^n) \tag{5}$$

*é uma solução de*

$$\operatorname{div} F = \mu \quad \text{em } U,\ F \in \mathcal{C}(U, \mathbb{R}^n). \tag{6}$$

*Reciprocamente, suponha que exista pelo menos um campo vetorial $\tilde{F}$ solução de (6) e suponha que toda solução de (5) é também solução de (6). Então,*

$$\mathcal{H}^{n-1+\varepsilon}(E) = 0$$

*para qualquer $\varepsilon > 0$. Ou seja, a dimensão de Hausdorff de $E$ não pode ser maior que $n - 1$.*

# Capítulo 1

# Preliminares

Neste capítulo, fixamos a notação utilizada ao longo do texto, e apresentamos definições e resultados de Teoria da Medida, Distribuições, Análise Funcional e Análise Harmônica que serão úteis para a compreensão completa do conteúdo aqui apresentado.

## 1.1 Notações

Denotaremos por $x = (x_1, \cdots, x_n)$ a variável espacial em $\mathbb{R}^n$, $n > 1$. A fronteira e o fecho de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ serão denotados por $\partial X$ e $\overline{X}$, respectivamente. Indicaremos por $B(x, r)$ a bola aberta de centro $x$ e raio $r > 0$. A bola fechada será indicada por $B[x, r]$. A notação $V \subset\subset U$ significará que $V$ está compactamente contido em $U$, ou seja, $\overline{V}$ é compacto e $\overline{V} \subset U$.

A notação $\mathcal{C}^k(U)$ indicará o conjunto das funções $k$ vezes diferenciáveis em $U$ e $\mathcal{C}^\infty(U)$ o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis em $U$.

O produto interno e a norma usuais em $\mathbb{R}^n$ serão denotados, respectivamente, por

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

e

$$|x| = (x \cdot x)^{\frac{1}{2}}.$$

Denotamos por $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ a esfera unitária em $\mathbb{R}^n$. Escrevemos $\partial_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$ e $\nabla = (\partial_1, \ldots, \partial_n)$. Se $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um campo vetorial, denotamos

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \partial_1 F_1 + \cdots \partial_n F_n.$$

Uma $n$-upla $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ é chamado um *multi-índice*. Definimos

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j, \quad \alpha! = a_1! \alpha_2! \ldots \alpha_n!,$$

e para $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Denotamos $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n}$.

Se $n \in \mathbb{N}$ e $E$ é um espaço vetorial normado, real ou complexo, denotamos $E^n = E \times \cdots \times E$, $n$ vezes o produto cartesiano de $E$. Denotamos por $E^*$ o espaço dual de $E$, ou seja, o conjunto dos funcionais lineares contínuos $f : E \to \mathbb{R}$ se $E$ é um espaço real, ou $f : E \to \mathbb{C}$ se $E$ é um espaço complexo.

A medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ será denotada por $\mathcal{L}^n$. Usaremos $dx$ para indicar integração com respeito à medida de Lebesgue. Denotamos por $\chi_E$ a função característica de $E$, ou seja,

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in E \\ 0, & \text{se } x \notin E. \end{cases}$$

Claramente, $\mathcal{L}^n(E) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x)\, dx$. A notação $\displaystyle⨍_E f\, d\mu$ será usada para indicar a média de $f$ em $E$ com respeito a uma medida $\mu$, ou seja,

$$⨍_E f\, d\mu = \frac{1}{\mu(E)} \int_E f\, d\mu.$$

Quando uma propriedade for válida no complementar de um conjunto de medida nula, diremos que tal propriedade é verdadeira em *quase toda parte* ou em *quase todo ponto*, o que será abreviado como *q.t.p.* (ou $\mu$-*q.t.p.*, quando desejarmos explicitar a medida para evitar ambiguidade).

Para $1 \leq p < \infty$, denotamos por $L^p(X)$ (ou $L^p(\mu), L^p(X, \mu)$, quando quisermos ser mais explícitos) o espaço de Banach das funções $\mu$-mensuráveis de $X$ em $\mathbb{C}$, com norma $\|\cdot\|_p$ dada por

$$\|f\|_p = \left( \int_X |f|^p\, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Para evitar ambiguidades sobre $X$ ou $\mu$, denotaremos em alguns momentos

$$\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L^p(X)} = \|\cdot\|_{L^p(\mu)}.$$

Denotamos $L^\infty(X)$ o espaço de Banach das funções essencialmente limitadas de $X$ em $\mathbb{C}$, ou seja, $f \in L^\infty(X)$ se existe $C > 0$ tal que $\mu(\{x \in X : |f(x)| > C\}) = 0$. Uma norma em $L^\infty(X)$, denotada $\|\cdot\|_\infty$, é dada por

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_X(|f|) = \inf\{C > 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > C\}) = 0\}.$$

Por $L^p_{loc}(X)$ denotamos o espaço das funções $f$ de $X$ em $\mathbb{C}$ tais que, para cada aberto $U \subset\subset X$, tem-se $f \in L^p(U)$.

Dentro do contexto dos espaços $L^p$, para $1 < p < \infty$, denotamos por $p'$ o expoente conjugado de $p$, ou seja, $p' = \dfrac{p}{p-1}$. Observe que $p'$ satisfaz $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. Em particular, se $p = 1$, então definimos $p' = \infty$. Analogamente, se $p = \infty$, definimos $p' = 1$.

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f \in L^1_{loc}(U)$. Dizemos que $g_j \in L^1_{loc}(U)$ é a derivada parcial fraca de $f$ com respeito a $x_j$ em $U$, $1 \leq j \leq n$, se

$$\int_U f\, \partial_j \varphi \, dx = -\int_U g_j\, \varphi \, dx$$

para toda $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(U)$. Denotaremos $\partial_j f = \dfrac{\partial f}{\partial x_j} = g_j$ e, quando todas as derivadas fracas existirem, $\nabla f = (\partial_1 f, \ldots, \partial_n f)$.

Seja $1 \leq p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Defina

$$\|\varphi\|_{1,p} = \left(\int_\Omega |\varphi|^p \, dx\right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |\nabla \varphi|^p \, dx\right)^{1/p}.$$

O *espaço de Sobolev* $W^{1,p}(\Omega)$ é definido como o completamento de

$$\{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) : \|\varphi\|_{1,p} < \infty\}$$

com respeito à norma $\|\cdot\|_{1,p}$. Ou seja, uma função $u$ está em $W^{1,p}(\Omega)$ se, e somente se, existe uma sequência $\{\varphi_j\} \subset \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, com $\|\varphi_j\|_{1,p} < \infty$, tal que $\varphi_j \to u$ em $L^p(\Omega)$ e o limite $\lim_{j\to\infty} \nabla \varphi_j$ em $L^p(\Omega)$ existe. O limite $\lim_{j\to\infty} \nabla\varphi_j$ é chamado de *gradiente de* $u$ *em* $W^{1,p}(\Omega)$, é denotado por $\nabla u$, e está unicamente definido em $L^p(\Omega)$. Como consequência, se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, então $u \in L^p(\Omega)$ e $\nabla u \in L^p(\Omega)$.

Definimos a função Gama para $x > 0$ por

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \, dt.$$

Para simplificar a escrita em vários pontos do texto, denotaremos $f(x) \lesssim g(x)$, $\forall\, x \in A$, quando existir uma constante $C > 0$ tal que $f(x) \leq C g(x)$, $\forall\, x \in A$.

Por fim, um par de nomenclaturas de Topologia. Um conjunto $X$ é um espaço topológico de Hausdorff se, dados $p, q \in X$, com $p \neq q$, existem abertos $U, V$ em $X$ tais que $p \in U$, $q \in V$, e $U \cap V = \varnothing$. Um espaço topológico $X$ é dito localmente compacto se todo ponto de $X$ possui uma vizinhança cujo fecho é compacto.

## 1.2 Tópicos de Análise Funcional

Nesta seção, apresentamos definições e resultados de Análise Funcional que serão utilizados ao longo do texto. Os livros [B] e [O] podem ser consultados para maior aprofundamento.

**Definição 1.2.1.** Sejam $X$ um espaço vetorial normado e $\Lambda : X \to \mathbb{C}$ um funcional linear. Definimos a *norma* de $\Lambda$ por $\|\Lambda\| = \sup\{|\Lambda x| : x \in X, \|x\| \leq 1\}$, e dizemos que $\Lambda$ é um *funcional linear limitado* se $\|\Lambda\| < \infty$.

**Observação 1.2.2.** Dado qualquer $x \in X \setminus \{0\}$, temos $\dfrac{|\Lambda x|}{\|x\|} = \left|\Lambda\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)\right| \leq \|\Lambda\|$. Então, $|\Lambda x| \leq \|\Lambda\|\|x\|$, $\forall x \in X$.

**Teorema 1.2.3** (Teorema de Hahn-Banach). *Sejam $X$ um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$, que aqui pode ser $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, e $g : X \to [0, \infty)$ tal que*

$$g(x+y) \leq g(x) + g(y), \quad \forall x, y \in X,$$
$$g(ax) = |a|g(x), \quad \forall x \in X, \forall a \in \mathbb{F}.$$

*Se $f : Y \to \mathbb{F}$ é um funcional linear definido num subespaço vetorial $Y \subset X$, sobre $\mathbb{F}$, com $|f(y)| \leq g(y)$, $\forall y \in Y$, então existe uma extensão linear $F : X \to \mathbb{F}$ de $f$ que satisfaz*

$$|F(x)| \leq g(x), \quad \forall x \in X.$$

Uma demonstração para o Teorema acima pode ser vista em [O].

**Corolário 1.2.4** (Hahn-Banach). *Sejam $X$ um espaço vetorial normado e $Y \subset X$ um subespaço, ambos sobre o mesmo corpo $\mathbb{F}$. Então todo funcional linear limitado $f : Y \to \mathbb{F}$ possui uma extensão linear limitada $F : X \to \mathbb{F}$ com $\|F\| = \|f\|$.*

*Demonstração.* Basta tomar $g : X \to [0, \infty)$ dada por $g(x) = \|f\|\|x\|$, a qual satisfaz as hipóteses do Teorema 1.2.3. Assim, existe uma extensão linear $F : X \to \mathbb{F}$ de $f$ com $|F(x)| \leq \|f\|\|x\|$. Logo, $F$ é limitado e $\|F\| \leq \|f\|$. Como $F$ é uma extensão de $f$, temos que $\|f\| \leq \|F\|$. Segue que $\|F\| = \|f\|$. $\square$

O lema a seguir será bastante útil em teoremas que apresentaremos no Capítulo 6.

**Lema 1.2.5.** *Sejam $X$ e $Y$ dois espaços vetoriais normados e $T : X \to Y$ uma isometria linear, ou seja, $\|T(x)\|_Y = \|x\|_X$, para todo $x \in X$. Então, sua aplicação adjunta $T^* : Y^* \to X^*$, definida por $T^*(g)(x) = g(T(x))$, é sobrejetora.*

*Demonstração.* Seja $f \in X^*$. Como $T$ é uma isometria, então $T$ é injetora. Desse modo, fica bem definido o funcional linear $g_0 : T(X) \to \mathbb{F}$ dado por

$$g_0(T(x)) = f(x).$$

Note que, para todo $x \in X$,

$$|g_0(T(x))| = |f(x)| \leq \|f\|\|x\|_X = \|f\|\|T(x)\|_Y.$$

Então, pelo Teorema 1.2.3, existe $g \in Y^*$ tal que $g(T(x)) = g_0(T(x))$ para todo $x \in X$, de modo que

$$T^*(g)(x) = g(T(x)) = g_0(T(x)) = f(x)$$

para todo $x \in X$. Portanto, $f = T^*(g)$, provando que $T^*$ é sobrejetora. $\square$

**Observação 1.2.6.** Sobre o lema acima, encontrado em [MRT], é interessante apontar algumas informações a respeito. Primeiro, não foi necessária nenhuma hipótese relacionada à completude $X$ ou $Y$. Segundo, não podemos trocar a hipótese de $T$ ser uma isometria por $T$ ser injetora, como exemplificado a seguir. Considere $X = Y = \ell^2$ ($= L^2(\mathbb{N}, \mu)$, no qual $\mu$ é a medida de contagem), e denote $x \in \ell^2$ por $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Seja $T : \ell^2 \to \ell^2$ dada por

$$T(x) = \left(\frac{x_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Não é difícil verificar que $T$ é um operador linear limitado injetor, mas não é uma isometria. Além disso, temos que $T^* = T$, que não é sobrejetor.

**Definição 1.2.7.** Seja $X$ um espaço de Hausdorff localmente compacto. Dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{C}$ *se anula no infinito* se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um conjunto compacto $K \subset X$ tal que $|f(x)| < \varepsilon$, $\forall x \notin K$. Denotamos a classe das funções contínuas em $X$ que se anulam no infinito por $\mathcal{C}_0(X)$.

**Definição 1.2.8.** Seja $X$ um espaço topológico.

(i) Denotamos por $\mathcal{C}_c^+(X)$ a classe das funções em $\mathcal{C}_c(X)$ com valores reais não-negativos, ou seja, $\mathcal{C}_c^+(X) = \{f \in \mathcal{C}_c(X) : f(X) \subset [0, \infty)\}$.

(ii) Um funcional linear $\Lambda : \mathcal{C}_c(X) \to \mathbb{C}$ é dito *positivo* se $\Lambda f \in [0, \infty)$ para toda $f \in \mathcal{C}_c^+(X)$.

**Teorema 1.2.9.** *Se $X$ é um espaço de Hausdorff localmente compacto, então $\mathcal{C}_0(X)$ é o completamento de $\mathcal{C}_c(X)$ com respeito à métrica definida pela norma do supremo:* $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in X} |f(x)|$.

*Demonstração.* Devemos provar que $\mathcal{C}_c(X)$ é denso em $\mathcal{C}_0(X)$ e que $\mathcal{C}_0(X)$ é um espaço métrico completo. De fato, dados $f \in \mathcal{C}_0(X)$ e $\varepsilon > 0$, por definição, existe um compacto $K$ tal que $|f(x)| < \varepsilon$ fora de $K$. Pelo Lema de Urysohn (ver [R2, p. 39]), existe uma função $g \in \mathcal{C}_c(X)$ tal que $0 \leq g \leq 1$ e $g \equiv 1$ em $K$. Tome $h = fg$. Então, $h \in \mathcal{C}_c(X)$, pois $supp(h) \subset supp(g)$. Além disso, temos $|f(x) - h(x)| = 0$ quando $x \in K$, e $|f(x) - h(x)| = |f(x)||1 - g(x)| < \varepsilon$ quando $x \notin K$. Logo, $\|f - h\|_\infty < \varepsilon$, provando que $\mathcal{C}_c(X)$ é denso em $\mathcal{C}_0(X)$.

Agora, seja $(f_n)$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{C}_0(X)$. Logo, $(f_n)$ converge uniformemente para uma função contínua $f$, pois o espaço das funções contínuas é completo com respeito à métrica do supremo. Dado $\varepsilon > 0$, existem $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon/2$ e um compacto $K$ tal que $|f_n(x)| < \varepsilon/2$ fora de $K$. Logo, para $x \notin K$, $|f(x)| \leq \|f - f_n\|_\infty + |f_n(x)| < \varepsilon$. Portanto, $f \in \mathcal{C}_0(X)$, ou seja, $\mathcal{C}_0(X)$ é completo. $\square$

## 1.3 Tópicos de Teoria da Medida

Nesta seção, apresentamos definições e resultados de Teoria da Medida que serão utilizados ao longo do texto. Exceto quando apontado o contrário, as demonstrações omitidas nesta seção podem ser encontradas em [F2] ou [R2].

Seja $\mathcal{P}(X)$ o conjuntos das partes de $X$.

**Definição 1.3.1.** Seja $X$ um conjunto. Uma aplicação $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ é uma *medida exterior* em $X$ se

(i) $\mu(\varnothing) = 0$;

(ii) $\mu(\cup_{j=1}^{\infty} E_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$.

**Definição 1.3.2.** Seja $\mu$ uma medida exterior em $X$. Um conjunto $A \subset X$ é *$\mu$-mensurável* se, para cada $B \subset X$,

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A).$$

**Definição 1.3.3.** Seja $X$ um conjunto não-vazio. Uma *álgebra* em $X$ é uma coleção não-vazia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $X$ tal que

(i) se $E_1, E_2, \ldots, E_m \in \mathcal{A}$, então $\cup_{j=1}^{m} E_j \in \mathcal{A}$;

(ii) se $E \in \mathcal{A}$, então $X \setminus E \in \mathcal{A}$.

Uma *$\sigma$-álgebra* em $X$ é uma álgebra tal que, se $\{E_j : j \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{A}$, então $\cup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{A}$.

Observe que as definições acima implicam que álgebras (respectivamente, $\sigma$-álgebras) são também fechadas sob interseções finitas (respectivamente, enumeráveis). Mais ainda, se $\mathcal{A}$ é uma álgebra em $X$, então $\varnothing \in \mathcal{A}$ e $X \in \mathcal{A}$.

**Definição 1.3.4.** Uma *medida*, ou *medida real positiva*, em um conjunto $X$ é uma função $\mu : \mathfrak{M} \to [0, \infty]$, no qual $\mathfrak{M}$ é uma $\sigma$-álgebra em $X$, tal que

(i) $\mu(\varnothing) = 0$;

(ii) se $(E_j)$ é uma sequência de conjuntos disjuntos em $\mathfrak{M}$, então $\mu(\cup_{j=1}^{\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$.

Se $\mu$ é uma medida exterior em $X$, emtão a coleção $\mathfrak{M}$ dos conjuntos $\mu$-mensuráveis é uma $\sigma$-álgebra. A restrição de $\mu$ a $\mathfrak{M}$, denotada por $\mu|_{\mathfrak{M}}$, é uma medida.

Ao longo do texto, $\mathfrak{M}$ denotará sempre uma $\sigma$-álgebra. Um *espaço de medida* é uma tripla $(X, \mathfrak{M}, \mu)$, no qual $X$ é um conjunto, $\mathfrak{M}$ é uma $\sigma$-álgebra em $X$ e $\mu$ é uma medida definida em $\mathfrak{M}$. As propriedades básicas de uma medida positiva são as seguintes:

**Teorema 1.3.5.** *Seja $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ um espaço de medida.*

*(i) Se $E, F \in \mathfrak{M}$ e $E \subset F$, então $\mu(E) \leq \mu(F)$;*

*(ii) se $E_j \in \mathfrak{M}$, $j \in \mathbb{Z}_+$, então $\mu(\cup_{j=1}^{\infty} E_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$;*

*(iii) se $E_j \in \mathfrak{M}$, $j \in \mathbb{Z}_+$, e $E_1 \subset E_2 \subset \dots$, então $\mu(\cup_{j=1}^{\infty} E_j) = \lim\limits_{j\to\infty} \mu(E_j)$;*

*(iv) se $E_j \in \mathfrak{M}$, $j \in \mathbb{Z}_+$, $E_1 \supset E_2 \supset \dots$, e $\mu(E_n) < \infty$ para algum $n$, então $\mu(\cap_{j=1}^{\infty} E_j) = \lim\limits_{j\to\infty} \mu(E_j)$.*

**Definição 1.3.6.** Uma *medida com sinal* em $X$ é uma função $\nu : \mathfrak{M} \to [-\infty, \infty]$ tal que

(i) $\nu(\varnothing) = 0$;

(ii) $\nu$ assume, no máximo, um dos valores $\pm\infty$;

(iii) se $(E_j)$ é uma sequência de conjuntos disjuntos em $\mathfrak{M}$, então $\nu(\cup_{j=1}^{\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j)$, no qual a soma converge absolutamente se $\nu(\cup_{j=1}^{\infty} E_j) < \infty$.

Toda medida é uma medida com sinal. Quando a ênfase parecer necessária, chamaremos uma medida de *medida positiva*.

As propriedades (iii) e (iv) do Teorema 1.3.5 permanecem válidas para medidas com sinal.

**Definição 1.3.7.** Uma *medida complexa* em $X$ é uma função $\nu : \mathfrak{M} \to \mathbb{C}$ tal que

(i) $\nu(\varnothing) = 0$;

(ii) se $(E_j)$ é uma sequência de conjuntos disjuntos em $\mathfrak{M}$, então $\nu(\cup_{j=1}^{\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j)$, no qual a soma converge absolutamente.

Em particular, valores infinitos não são permitidos. Uma medida positiva é complexa se, e somente se, for finita.

**Definição 1.3.8.** Seja $X$ um espaço de Hausdorff localmente compacto.

(i) Uma medida $\mu$ é dita ser uma *medida de Borel* em $X$ se estiver definida na $\sigma$-álgebra de Borel em $X$.

(ii) Uma medida positiva $\mu$ em $X$ é chamada *$\sigma$-finita* se $X$ é uma união enumerável de conjuntos $E_j$ com $\mu(E_j) < \infty$.

(iii) Uma medida positiva $\mu$ definida em uma $\sigma$-álgebra $\mathfrak{M}$ é *completa* se, para todo $E \in \mathfrak{M}$ com $\mu(E) = 0$ e $F \subset E$, tem-se $F \in \mathfrak{M}$.

(iv) Se $\mu$ é Borel positiva em $X$, um subconjunto boreliano $E \subset X$ é *regular exterior* se $\mu(E) = \inf\{\mu(V) : E \subset V,\ V \text{ aberto}\}$.

(v) Se $\mu$ é Borel positiva em $X$, um subconjunto boreliano $E \subset X$ é *regular interior* se $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E,\ K \text{ compacto}\}$.

(vi) Se todo subconjunto boreliano de $X$ é, simultaneamente, regular exterior e interior, então $\mu$ é dita uma *medida regular*.

**Definição 1.3.9.** Seja $X$ um espaço de Hausdorff localmente compacto e $\mu$ uma medida em $X$. Dizemos que $\mu$ é uma *medida de Radon* se $\mu$ é uma medida de Borel em $X$ tal que $\mu(K) < \infty$ para todo $K \subset X$ compacto, regular exterior para todos os borelianos de $X$, e regular interior para todos os abertos de $X$.

**Exemplo 1.3.10.** A medida de Lebesgue $\mathcal{L}^n$ em $\mathbb{R}^n$ é uma medida de Radon.

**Exemplo 1.3.11.** A medida de contagem em $(X, \mathfrak{M})$ é definida por

$$c(E) = \begin{cases} \#E, & \text{se } E \text{ é finito,} \\ \infty, & \text{se } E \text{ é infinito,} \end{cases}$$

no qual $\#E$ denota a cardinalidade de $E$.

Se $(X, \mathfrak{M}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{P}(\mathbb{R}^n))$, a medida de contagem não é uma medida de Radon pois, por exemplo, $c(B[0,1]) = \infty$.

**Definição 1.3.12.** A *restrição* de uma medida $\mu$ em $X$ a um conjunto mensurável $A \subset X$ é definida por

$$(\mu \llcorner A)(B) = \mu(A \cap B),$$

para $B \subset X$ mensurável.

**Teorema 1.3.13** (Teorema da Convergência Monótona)**.** *Seja $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ um espaço de medida. Se $(f_k)$ é uma sequência de funções mensuráveis não-negativas tais que $f_j \leq f_{j+1}$ para todo $j$, e $f = \lim_{k\to\infty} f_k$, então $\int f = \lim_{k\to\infty} \int f_k$.*

**Lema 1.3.14** (Lema de Fatou)**.** *Se $(f_k)$ é uma sequência qualquer de funções mensuráveis não-negativas, então*

$$\int \left( \liminf_{k\to\infty} f_k \right) \leq \liminf_{k\to\infty} \int f_k.$$

**Teorema 1.3.15** (Teorema da Convergência Dominada)**.** *Seja $(f_k)$ uma sequência em $L^1$ tal que* *(i)* $f_k \to f$ *q.t.p.;*

*(ii) existe uma função não-negativa* $g \in L^1$ *tal que* $|f_k| \leq g$ *q.t.p. para todo* $k$.

*Então,* $f \in L^1$ *e* $\displaystyle\int f = \lim_{k\to\infty} \int f_k$.

Para o próximo resultado, a respeito da integração de funções em $X \times Y$, considere a seguinte notação: $f_x(y) = f(x,y)$ para cada $x \in X$, e $f^y(x) = f(x,y)$ para cada $y \in Y$.

**Teorema 1.3.16** (Teorema de Fubini-Tonelli)**.** *Sejam* $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ *e* $(Y, \mathfrak{N}, \nu)$ *espaços de medida* $\sigma$*-finitos.*

*(i)* (Tonelli) *Se* $f$ *é uma função mensurável não-negativa em* $X \times Y$*, então as funções* $g(x) = \int_Y f_x \, d\nu$ *e* $h(y) = \int_X f^y \, d\mu$ *são funções mensuráveis não-negativas e*

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f \, d(\mu \times \nu) &= \int_X \left[\int_Y f(x,y)\, d\nu(y)\right] d\mu(x) \\ &= \int_Y \left[\int_X f(x,y)\, d\mu(x)\right] d\nu(y). \qquad (1.1)\end{aligned}$$

*(ii)* (Fubini) *Se* $f \in L^1(\mu \times \nu)$*, então* $f_x \in L^1(\nu)$ *para q.t.p.* $x \in X$*,* $f^y \in L^1(\mu)$ *para q.t.p.* $y \in Y$*, as funções definidas q.t.p.* $g(x) = \int_Y f_x \, d\nu$ *e* $h(y) = \int_X f^y \, d\mu$ *estão em* $L^1(\mu)$ *e* $L^1(\nu)$*, respectivamente, e vale* (1.1)*.*

**Teorema 1.3.17** (Lebesgue)**.** *Toda função real monótona possui derivada em* $\mathcal{L}^1$*-q.t.p.* $x \in \mathbb{R}$.

Uma demonstração elementar para o teorema acima pode ser encontrada em [RS, pp. 5-9]. Nesta referência, o teorema é utilizado como ponto de partida para a Teoria de Lebesgue.

**Definição 1.3.18.** Seja $\mu$ uma medida positiva numa $\sigma$-álgebra $\mathfrak{M}$, e seja $\lambda$ uma medida arbitrária em $\mathfrak{M}$, que pode ser positiva ou complexa.

(i) Dizemos que $\lambda$ é *absolutamente contínua* com respeito a $\mu$, e denotamos $\lambda \ll \mu$, se $\mu(E) = 0 \Rightarrow \lambda(E) = 0$.

(ii) Dizemos que $\lambda$ é *concentrada em* $A$ se existe $A \in \mathfrak{M}$ tal que $\lambda(E) = \lambda(E \cap A)$, para todo $E \in \mathfrak{M}$, ou equivalentemente, tal que $\lambda(E) = 0$ sempre que $E \cap A = \varnothing$.

(iii) Dizemos que duas medidas $\lambda_1$ e $\lambda_2$ em $\mathfrak{M}$ são *mutuamente singulares*, e denotamos $\lambda_1 \perp \lambda_2$, se existem conjuntos disjuntos $A$ e $B$ tais que $\lambda_1$ é concentrada em $A$ e $\lambda_2$ é concentrada em $B$.

A seguir, apresentamos um exemplo no qual as medidas não são absolutamente contínuas.

**Exemplo 1.3.19.** Seja $\{r_1, r_2, \dots\}$ uma enumeração do conjunto $\mathbb{Q}$ e defina

$$\mu(A) = \sum_{r_j \in A} \frac{1}{2^j}.$$

Sabemos que $\mathcal{L}^1(\mathbb{Q}) = 0$, mas $\mu(\mathbb{Q}) = \sum_{r_j \in \mathbb{Q}} \dfrac{1}{2^j} = 1$. Logo, $\mu$ não é absolutamente contínua com respeito a $\mathcal{L}^1$.

**Teorema 1.3.20** (Teorema da Decomposição de Hahn)**.** *Se $\nu$ é uma medida com sinal em $X$, então existem conjuntos mensuráveis $P$ e $N$ tais que $\nu(E) \geq 0$, para todo $E \subset P$ mensurável, $\nu(F) \leq 0$, para todo $F \subset N$ mensurável, $P \cup N = X$ e $P \cap N = \varnothing$. Se $P'$ e $N'$ é outro par com tal propriedade, então $\nu(P \bigtriangleup P') = \nu(N \bigtriangleup N') = 0$, no qual $A \bigtriangleup B$ denota a diferença simétrica entre os conjuntos $A$ e $B$, ou seja,*

$$A \bigtriangleup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

**Teorema 1.3.21** (Teorema da Decomposição de Jordan)**.** *Se $\nu$ é uma medida com sinal em $X$, então existem medidas positivas $\nu^+$ e $\nu^-$, únicas, tais que $\nu = \nu^+ - \nu^-$ e $\nu^+ \perp \nu^-$.*

As medidas $\nu^+$ e $\nu^-$ são chamadas de *parte positiva* e *negativa* de $\nu$, respectivamente. $\nu^+$ e $\nu^-$ são concentradas, respectivamente, nos conjuntos $P$ e $N$ do Teorema 1.3.20.

**Definição 1.3.22.** Se $\nu$ é uma medida com sinal, definimos sua *variação total* por

$$|\nu| = \nu^+ + \nu^-.$$

Claramente, $|\nu|$ define uma medida.

**Teorema 1.3.23** (Lebesgue-Radon-Nikodym)**.** *Seja $\mu$ uma medida positiva $\sigma$-finita numa $\sigma$-álgebra $\mathfrak{M}$ em um conjunto $X$, e seja $\lambda$ uma medida complexa em $\mathfrak{M}$.*

*(i) Existe um único par de medidas complexas $\lambda_a$ e $\lambda_s$ em $\mathfrak{M}$ tal que $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$, $\lambda_a \ll \mu$ e $\lambda_s \perp \mu$. Se $\lambda$ é positiva e finita, então $\lambda_a$ e $\lambda_s$ também são.*

*(ii) Existe uma única $h \in L^1(\mu)$ tal que $\lambda_a(E) = \int_E h\, d\mu$ para todo $E \in \mathfrak{M}$.*

**Observação 1.3.24.** O item (ii) do Teorema 1.3.23 é conhecido como *Teorema de Radon-Nikodym.* Sua essência é justamente garantir que sempre que $\lambda \ll \mu$ então

$$\lambda(E) = \int_E h\, d\mu$$

para alguma $h \in L^1(\mu)$. A função $h$ é chamada de *derivada de Radon-Nikodym* de $\lambda$ com respeito a $\mu$, e denotamos a igualdade anterior por $d\lambda = h\, d\mu$.

**Definição 1.3.25.** Seja $f : X \to \mathbb{C}$ uma função. O *suporte* de $f$ é o conjunto $supp(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$. Denotamos por $\mathcal{C}_c(X)$ o conjunto de todas as funções contínuas em $X$ cujo suporte é compacto.

**Teorema 1.3.26** (Teorema de Representação de Riesz)**.** *Sejam $X$ um espaço de Hausdorff localmente compacto e $\Lambda$ um funcional linear positivo em $\mathcal{C}_c(X)$. Então existe uma $\sigma$-álgebra $\mathfrak{M}$ em $X$ contendo todos os conjuntos borelianos de $X$ e existe uma única medida positiva $\mu$ em $\mathfrak{M}$, dada por*

$$\mu(V) = \sup\{\Lambda f : f \in \mathcal{C}_c(X),\, 0 \leq f \leq 1,\, supp(f) \subset V\},$$

*para $V \subset X$ aberto, e*

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) : E \subset V,\, V \text{ aberto}\},$$

*para $E \in \mathfrak{M}$, com as seguintes propriedades:*

*(i)* $\Lambda f = \int_X f\, d\mu$ *para toda* $f \in \mathcal{C}_c(X)$*;*

*(ii)* $\mu(K) < \infty$ *para todo conjunto compacto* $K \subset X$*;*

*(iii) para todo aberto $E \subset X$ e para todo $E \in \mathfrak{M}$ com $\mu(E) < \infty$, temos $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E,\, K \text{ compacto}\}$;*

*(iv) Se $E \in \mathfrak{M}$ com $\mu(E) = 0$ e $A \subset E$, então $A \in \mathfrak{M}$.*

*Como consequência, temos que $\mu$ é uma medida positiva de Radon completa.*

**Teorema 1.3.27.** *Sejam $X$ um espaço de Hausdorff localmente compacto e $\mu$ uma medida em uma $\sigma$-álgebra $\mathfrak{M}$ de $X$ com as propriedades enunciadas no Teorema 1.3.26. Então, para $1 \leq p < \infty$, $\mathcal{C}_c(X)$ é denso em $L^p(\mu)$.*

**Definição 1.3.28.** Sejam $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ medidas de Radon em um espaço métrico $X$. Dizemos que a sequência $(\mu_j)$ *converge fracamente* para $\mu$, denotado $\mu_j \xrightarrow{W} \mu$, se

$$\lim_{j\to\infty} \int_X \varphi\, d\mu_j = \int_X \varphi\, d\mu,$$

para toda $\varphi \in \mathcal{C}_c(X)$.

Os dois teoremas a seguir podem ser encontrados em [Mat, pp. 18-19].

**Teorema 1.3.29.** *Se $\mu_1, \mu_2, \ldots$ são medidas de Radon em $\mathbb{R}^n$ satisfazendo*

$$\sup_j \mu_j(K) < \infty$$

*para todo conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, então existe uma subsequência de $(\mu_j)$ fracamente convergente.*

**Teorema 1.3.30.** *Sejam $\mu_1, \mu_2, \dots$ medidas de Radon em um espaço métrico localmente compacto. Se $\mu_j \xrightarrow{W} \mu$ então, para todo $K \subset X$ compacto e $U \subset X$ aberto, temos*

*(i)* $\mu(K) \geq \limsup_{j\to\infty} \mu_j(K)$*;*

*(ii)* $\mu(U) \leq \liminf_{j\to\infty} \mu_j(U)$*.*

**Definição 1.3.31.** A *variação total* de uma medida complexa $\nu$ definida na $\sigma$-álgebra $\mathfrak{M}$ é a medida positiva $|\nu|$ definida como

$$|\nu|(E) = \sup \sum_{j=1}^{\infty} |\nu(E_j)|,$$

para $E \in \mathfrak{M}$, no qual o supremo é tomado sobre todas as partições $\{E_j\}$ de $E$.

Observe que, se $\nu$ é uma medida com sinal, então a definição acima é equivalente àquela dada na Definição 1.3.22. De fato, se $E \in \mathfrak{M}$, então os conjuntos $P$ e $N$ dados no Teorema 1.3.20 formam uma partição de $E$. Desse modo,

$$\nu^+(E) + \nu^-(E) = |\nu(P)| + |\nu(N)| \leq \sup_{\{E_j\}} \sum_{j=1}^{\infty} |\nu(E_j)|.$$

Por outro lado, se $\{E_j\}$ é uma partição de $E$, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} |\nu(E_j)| &= \sum_{j=1}^{\infty} |\nu(E_j \cap P) + \nu(E_j \cap N)| \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \big(|\nu(E_j \cap P)| + |\nu(E_j \cap N)|\big) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \big(\nu^+(E_j) + \nu^-(E_j)\big) = \nu^+(E) + \nu^-(E), \end{aligned}$$

de modo que

$$\sup_{\{E_j\}} \sum_{j=1}^{\infty} |\nu(E_j)| \leq \nu^+(E) + \nu^-(E).$$

Da definição acima, temos que $|\nu(E)| \leq |\nu|(E)$, para todo $E \in \mathfrak{M}$. Mais ainda, se $\lambda$ é uma medida positiva tal que $|\nu(E)| \leq \lambda(E)$, para todo $E \in \mathfrak{M}$, então $|\nu|(E) \leq \lambda(E)$.

**Teorema 1.3.32.** *Seja $\nu$ é uma medida complexa em $X$, então:*

*(i)* $|\nu|(X) < \infty$*;*

*(ii) existe uma função mensurável $h$ tal que $|h(x)| = 1$ para todo $x \in X$ e $d\nu = h\, d|\nu|$;*

*(iii) se $\mu$ é uma medida positiva e $g \in L^1(\mu)$ é tal que $d\nu = g\,d\mu$, então $d|\nu| = |g|\,d\mu$.*

**Definição 1.3.33.** Uma medida de Borel complexa $\nu$ em $X$ será chamada *regular* se $|\nu|$ for uma medida regular.

**Lema 1.3.34.** *Se $\nu_1$ e $\nu_2$ são medidas complexas regulares, então $\nu_1 + \nu_2$ é regular.*

*Demonstração.* Primeiro, mostramos a regularidade exterior. Seja $E$ um conjunto boreliano. Dado $\varepsilon > 0$, existem abertos $V_1, V_2 \supset E$ tais que

$$|\nu_1|(V_1) < |\nu_1|(E) + \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$|\nu_2|(V_2) < |\nu_2|(E) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Note que, para $A$ mensurável,

$$|(\nu_1 + \nu_2)(A)| \leq |\nu_1(A)| + |\nu_2(A)| \leq |\nu_1|(A) + |\nu_2|(A),$$

de modo que

$$|\nu_1 + \nu_2|(A) \leq |\nu_1|(A) + |\nu_2|(A).$$

Defina $V = V_1 \cap V_2$. Então $V \supset E$ é aberto e

$$\begin{aligned}
|\nu_1 + \nu_2|(V) - |\nu_1 + \nu_2|(E) &= |\nu_1 + \nu_2|(V \setminus E) \\
&\leq |\nu_1|(V \setminus E) + |\nu_2|(V \setminus E) \\
&\leq |\nu_1|(V_1 \setminus E) + |\nu_2|(V_2 \setminus E) \\
&= |\nu_1|(V_1) - |\nu_1|(E) + |\nu_2|(V_2) - |\nu_2|(E) \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$|\nu_1 + \nu_2|(E) = \inf\{|\nu_1 + \nu_2|(V) : E \subset V,\ V \text{ aberto}\}.$$

A regularidade interior é análoga. Existem compactos $K_1, K_2 \subset E$ tais que

$$|\nu_1|(E) - \frac{\varepsilon}{2} < |\nu_1|(K_1)$$

e

$$|\nu_2|(E) - \frac{\varepsilon}{2} < |\nu_2|(K_2).$$

Definindo $K = K_1 \cup K_2$, temos que $K \subset E$ é compacto e

$$\begin{aligned} |\nu_1 + \nu_2|(E) - |\nu_1 + \nu_2|(K) &= |\nu_1 + \nu_2|(E \setminus K) \\ &\leq |\nu_1|(E \setminus K) + |\nu_2|(E \setminus K) \\ &\leq |\nu_1|(E \setminus K_1) + |\nu_2|(E \setminus K_2) \\ &= |\nu_1|(E) - |\nu_1|(K_1) + |\nu_2|(E) - |\nu_2|(K_2) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto,

$$|\nu_1 + \nu_2|(E) = \sup\{|\nu_1 + \nu_2|(K) : K \subset E,\ K \text{ compacto}\}.$$

□

Com as hipóteses do Lema acima também podemos concluir que $\nu_1 - \nu_2$ é regular, visto que, como $|-\nu_2| = |\nu_2|$, a medida $-\nu_2$ é regular.

Se $\nu$ é uma medida de Borel complexa numa $\sigma$-álgebra $\mathfrak{M}$ em $X$, o Teorema 1.3.32 afirma que existe uma função mensurável $h$ com $|h| = 1$ tal que $d\nu = h\, d|\nu|$. Desse modo, é natural definir a integração com respeito a uma medida complexa $\nu$ pela fórmula

$$\int_X f\, d\nu = \int_X f h\, d|\nu|.$$

**Observação 1.3.35.** Da definição acima, temos que, para $E \in \mathfrak{M}$,

$$\nu(E) = \int_E h\, d|\nu| = \int_X \chi_E\, h\, d|\nu| = \int_X \chi_E\, d\nu.$$

Assim,

$$\int_X \chi_E\, d(\nu_1 + \nu_2) = (\nu_1 + \nu_2)(E) = \nu_1(E) + \nu_2(E) = \int_X \chi_E\, d\nu_1 + \int_X \chi_E\, d\nu_2$$

sempre que $\nu_1$ e $\nu_2$ são medidas complexas em $\mathfrak{M}$ e $E \in \mathfrak{M}$. Disso, obtemos a fórmula de adição

$$\int_X f\, d(\nu_1 + \nu_2) = \int_X f\, d\nu_1 + \int_X f\, d\nu_2,$$

que é válida, por exemplo, para toda $f$ mensurável limitada.

A seguir, apresentamos alguns resultados sobre os espaços $L^p$.

**Teorema 1.3.36** (Desigualdade de Hölder). *Suponha $1 < p < \infty$ e $p'$ seu expoente conjugado. Se $f$ e $g$ são funções mensuráveis em $X$, então*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

*Em particular, se $f \in L^p(X)$ e $g \in L^{p'}(X)$, então $fg \in L^1(X)$. Nesse caso, vale a igualdade na relação acima se, e somente se, existem constantes $\alpha, \beta$, com $\alpha\beta \neq 0$, tais que $\alpha|f|^p = \beta|g|^{p'}$ em quase toda parte.*

**Teorema 1.3.37.** *Seja $(f_n)$ uma sequência em $L^p$, $1 \leq p \leq \infty$, e seja $f \in L^p$ tal que $\|f_n - f\|_p \to 0$. Então, existe uma subsequência $(f_{n_k})$ e uma função $h \in L^p$ tal que*

*(i)* $f_{n_k}(x) \to f(x)$ *q.t.p.;*

*(ii)* $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ *para todo $k$, em quase todo ponto.*

O teorema acima está demonstrado em [B, p. 94].

**Teorema 1.3.38** (Teorema de Representação de Riesz em $L^p$)**.** *Suponha que $1 \leq p < \infty$, $\mu$ uma medida positiva $\sigma$-finita em $X$ e $\Phi$ é um funcional linear limitado em $L^p(X, \mu)$. Então existe uma única $g \in L^{p'}(X, \mu)$, $p'$ o expoente conjugado de $p$, tal que*

$$\Phi(f) = \int_X f g \, d\mu,$$

*para toda $f \in L^p(X, \mu)$. Mais ainda, se $\Phi$ e $g$ estão relacionados como acima, então $\|\Phi\| = \|g\|_{p'}$. Ou seja, $L^{p'}(X, \mu)$ é isometricamente isomorfo ao espaço dual de $L^p(X, \mu)$.*

A demonstração do teorema abaixo pode ser vista em [EG, pp. 138-140].

**Teorema 1.3.39** (Desigualdade de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg)**.** *Suponha $1 \leq p < n$. Existe uma constante $c_1 > 0$, que depende apenas de $p$ e $n$, tal que, para toda $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$,*

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |f|^{p^*} \, dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq c_1 \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

*no qual $p^* = \dfrac{np}{n-p}$.*

O próximo teorema é uma versão local da desigualdade acima. Sua demonstração está em [EG, pp. 141-142].

**Teorema 1.3.40** (Desigualdade de Poincaré)**.** *Para cada $1 \leq p < n$ existe uma constante $c_2 > 0$, que depende apenas de $p$ e $n$, tal que, para toda $B[x, r] \subset \mathbb{R}^n$ e $f \in W^{1,p}(B(x, r))$,*

$$\left( ⨍_{B[x,r]} |f - (f)_{x,r}|^{p^*} \, dy \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq c_2 \, r \left( ⨍_{B[x,r]} |\nabla f|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}},$$

*no qual $p^* = \dfrac{np}{n-p}$ e $(f)_{x,r} = ⨍_{B[x,r]} f \, dy$.*

O próximo resultado é uma generalização do clássico Teorema de Recobrimento de Besicovitch. Para uma demonstração, veja [G] ou [Di].

**Teorema 1.3.41** (Teorema de Recobrimento de Besicovitch)**.** *Seja $S \subset \mathbb{R}^n$. A cada ponto $x \in S$ associamos uma bola $B(x, r_x)$, $r_x > 0$, e denotamos a coleção de tais bolas por $\mathscr{B}$. Assumimos que*

(I) *os raios das bolas em $\mathscr{B}$ são totalmente limitados, ou seja, dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe uma quantidade finita de intervalos de comprimento menor que $\varepsilon$ cuja união contém todos os $r_x$,*

(II) *a sequência dos raios de qualquer sequência disjunta de bolas em $\mathscr{B}$ tende a zero.*

*Então, podemos escolher uma sequência de bolas $(B_j)$ em $\mathscr{B}$ tal que:*

(i) $S \subset \bigcup_j B_j$;

(ii) *Existe um número $M$, que depende apenas de $n$, tal que qualquer ponto de $\mathbb{R}^n$ pertence a, no máximo, $M$ bolas em $(B_j)$;*

(iii) *As bolas $(1/3)B_j$ são disjuntas;*

(iv) $\bigcup_{B\in\mathscr{B}} B \subset \bigcup_j 4B_j$.

## 1.4 Tópicos de Distribuições

Apresentamos aqui algumas definições e resultados que serão utilizados ao longo do texto. Um maior aprofundamento no tema pode ser obtido na referência [H].

**Definição 1.4.1.** Denotamos por $\mathcal{C}_c^k(X)$, $k \in \mathbb{N}$ ou $k = \infty$, o conjunto de todas as funções de classe $\mathcal{C}^k$ em $X$ cujo suporte é compacto. O espaço $\mathcal{C}_c^\infty(X)$ é também chamado de *espaço das funções-teste.*

**Exemplo 1.4.2.** Um exemplo de função-teste bastante útil em $\mathbb{R}^n$ é

$$\phi(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{a^2}{|x|^2 - a^2}\right), & \text{se } |x| < a \\ 0, & \text{se } |x| \geq a. \end{cases}$$

Multiplicando $\phi$ por uma constante positiva adequada, obtemos uma nova função-teste $\phi$ tal que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \phi\, dx = 1$. É útil notar que *supp*$(\phi) = B[0, a]$.

**Definição 1.4.3.** Uma sequência $(\phi_j)$ em $\mathcal{C}_c^\infty(X)$ converge para zero em $\mathcal{C}_c^\infty(X)$ se

(i) existe um compacto $K \subset X$ tal que *supp*$(\phi_j) \subset K$ para todo $j \in \mathbb{N}$;

(ii) para todo $m \in \mathbb{N}$, as derivadas de ordem $m$ das funções $\phi_j$ convergem uniformemente a zero quando $j \to \infty$.

Com isso, dizemos que uma sequência $(\phi_j) \subset \mathcal{C}_c^\infty(X)$ converge para $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(X)$ se $(\phi_j - \phi)$ converge para zero em $\mathcal{C}_c^\infty(X)$.

**Definição 1.4.4.** Sejam $f$ e $g$ funções contínuas em $\mathbb{R}^n$, uma delas com suporte compacto. Definimos a *convolução* de $f$ e $g$ como

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\, dy.$$

A segunda igualdade acima é facilmente verificada com uma simples mudança de variável.

Se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in \mathcal{C}^k_c(\mathbb{R}^n)$, então $f * \phi$ está bem definida e o seguinte resultado é válido:

**Teorema 1.4.5.** *Se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in \mathcal{C}^k_c(\mathbb{R}^n)$, então $f*\phi$ é de classe $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$ e, para qualquer multi-índice $\alpha$ tal que $|\alpha| \leq k$, temos que $\partial^\alpha(f*\phi) = f * \partial^\alpha \phi$.*

**Definição 1.4.6.** Seja $\phi$ uma função integrável em $\mathbb{R}^n$ tal que $\int \phi\, dx = 1$. Para $\varepsilon > 0$, definimos

$$\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\phi(x/\varepsilon).$$

A família $\{\phi_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ é chamada de *aproximação da identidade.*

**Teorema 1.4.7.** *Seja $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ com $\phi \geq 0$ como acima. Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leq p < \infty$, então $f * \phi_\varepsilon \to f$ em norma $L^p(\mathbb{R}^n)$ quando $\varepsilon \to 0$.*

**Teorema 1.4.8.** *Seja $\phi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi \geq 0$ e $\int \phi\, dy = 1$. Se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, defina, para $\varepsilon > 0$,*

$$f_\varepsilon(x) = f * \phi_\varepsilon(x).$$

*Então,*

*(i) $f_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$;*

*(ii) se $f(x) = 0$ para q.t.p. $x$ fora de um conjunto fechado $A$, tem-se que supp$(f_\varepsilon) \subset A +$ supp$(\phi_\varepsilon)$;*

*(iii) se $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, tem-se que $f_\varepsilon \to f$ uniformemente quando $\varepsilon \to 0$.*

**Observação 1.4.9.** No Teorema acima, se tomarmos $\phi$ como no Exemplo 1.4.2, temos em (ii) que *supp*$(f_\varepsilon) \subset A + B[0, a\varepsilon]$.

**Observação 1.4.10.** Existe $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(B(0,1))$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$, e $\varphi \equiv 1$ em $B[0,1/2]$.

De fato, basta escolher $\phi \in \mathcal{C}^\infty_c(B(0,1/4))$ com $\int \phi\, dx = 1$ e tomar $\varphi = \phi * \chi_{B(0,3/4)}$. Note ainda que existe $C > 0$ tal que $|\nabla\varphi| \leq C$, pois cada derivada parcial de $\varphi$ é uma função-teste suportada em $B[0,1]$.

Além do mais, dado $r > 0$, podemos exibir $\varphi_r \in \mathcal{C}^\infty_c(B(0,2r))$ tal que $0 \leq \varphi_r \leq 1$, $\varphi_r \equiv 1$ em $B[0,r]$ e $|\nabla\varphi_r| \leq \dfrac{C}{r}$, para uma constante $C > 0$, basta definirmos $\varphi_r(x) = \varphi\left(\dfrac{x}{2r}\right)$

**Definição 1.4.11.** Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Uma *distribuição* em $X$ é um funcional linear contínuo $u : \mathcal{C}_c^\infty(X) \to \mathbb{C}$. A continuidade aqui é com respeito à convergência em $\mathcal{C}_c^\infty(X)$ tal como dada na Definição 1.4.3. O espaço das distribuições em $X$ é denotado $\mathcal{D}'(X)$.

Enunciamos agora a definição e algumas propriedades da Transformada de Fourier. Uma maior abordagem do assunto, bem como as demonstrações dos resultados a seguir, pode ser encontrada em [Du].

**Definição 1.4.12.** A *transformada de Fourier* de uma função $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ é definida por

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)\, dx.$$

**Proposição 1.4.13.** *Valem as seguintes propriedades para a transformada de Fourier:*

*(i)* $(af + bg)\hat{} = a\hat{f} + b\hat{g}$.

*(ii)* $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$ *e* $\hat{f}$ *é contínua.*

*(iii)* $\lim\limits_{|\xi|\to\infty} \hat{f}(\xi) = 0$.

*(iv)* $(f * g)\hat{}(\xi) = \hat{f}(\xi)\, \hat{g}(\xi)$.

*(v) Se* $g(x) = \lambda^{-n} f(\lambda^{-1}x)$, *então* $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\lambda\xi)$.

*(vi)* $(\partial^\alpha f)\hat{}(\xi) = (2\pi i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$.

*(vii)* $[(-2\pi i x)^\alpha f]\hat{}(\xi) = (\partial^\alpha \hat{f})(\xi)$.

Não é sempre verdade que se $f \in L^1$ então $\hat{f} \in L^1$. Por exemplo, a função $f = \chi_{[-1,1]} \in L^1(\mathbb{R})$, mas $\hat{f}(\xi) = \frac{\operatorname{sen}(2\pi\xi)}{\pi\xi}$ não é integrável. No entanto, existe um subconjunto de $L^1$ que é invariante pela transformada de Fourier.

**Definição 1.4.14.** O *espaço de Schwartz*, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, é o subespaço de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ das funções de decrescimento rápido, ou seja,

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \{|x^\alpha \partial^\beta f(x)|\} < \infty, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \right\}.$$

**Proposição 1.4.15.** $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subsetneq L^p(\mathbb{R}^n)$, *para* $1 \leq p \leq \infty$.

*Demonstração.* A primeira parte segue da observação que $\partial^\beta f(x) = 0$, $\forall x \notin supp(f)$, quando $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Para a segunda parte, quando $p = \infty$, basta tomar $\alpha = \beta = 0$ e o resultado segue. Quando $1 \leq p < \infty$, fixado $R > 0$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, dx = \int_{\|x\|\leq R} |f(x)|^p\, dx + \int_{\|x\|>R} |f(x)|^p\, dx.$$

Para a primeira parcela, temos

$$\int_{\|x\|\leq R} |f(x)|^p \, dx \leq M^p \mathcal{L}^n(B[0,R]) < \infty,$$

no qual $M = \sup_{\|x\|\leq R} |f(x)|$. Para a segunda, note que, tomando $\beta = 0$ e $|\alpha| > \dfrac{n}{p}$, existe $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq \dfrac{C}{|x|^{|\alpha|}}$ e desse modo, obtemos

$$\int_{\|x\|>R} |f(x)|^p \, dx \leq C^p \int_{\|x\|>R} \frac{1}{|x|^{|\alpha|p}} \, dx = C^p |S^{n-1}| \int_R^\infty r^{-|\alpha|p+n-1} \, dr < \infty,$$

no qual $|S^{n-1}|$ denota a "área da superfície $S^{n-1}$".

Os subconjuntos são próprios pois $f(x) = e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $g(x) = \chi_{B(0,1)}(x) \in L^p(\mathbb{R}^n) \setminus \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. De fato, $f$ não possui suporte compacto e suas derivadas são da forma $\partial^\beta f(x) = P_\beta(x) f(x)$, no qual $P_\beta$ é um polinômio, de onde conclui-se que $\|f\|_{\alpha,\beta} < \infty$, para quaisquer $\alpha, \beta$ multi-índices. No outro caso, note que $g \notin \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ mas é claramente p-integrável. $\square$

A coleção $\{\| \cdot \|_{\alpha,\beta}\}$ é uma família enumerável de seminormas em $\mathcal{S}$ e pode ser usada para definir uma topologia em $\mathcal{S}$ (veja [SW, Cap. 1, Seção 3]). Uma sequência $(\phi_k)$ em $\mathcal{S}$ converge para 0 se, e somente se, para todo multi-índice $\alpha, \beta$,

$$\lim_{k\to\infty} \|\phi_k\|_{\alpha,\beta} = 0.$$

**Definição 1.4.16.** O espaço dos funcionais lineares contínuos em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, com respeito à topologia descrita acima, é chamado de espaço das *distribuições temperadas*, e é denotado por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

**Teorema 1.4.17.** *A transformada de Fourier é uma aplicação contínua de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, invertível, tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, \hat{g} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} \, g$$

*e*

$$\mathcal{F}^{-1} f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} f(\xi) \, d\xi.$$

**Definição 1.4.18.** A transformada de Fourier de $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ é a distribuição temperada $\hat{T}$ dada por

$$\hat{T}(f) = T(\hat{f}), \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Se $f \in L^p$, $1 \leq p \leq \infty$, então $f$ pode ser identificada com uma distribuição temperada, $T_f$, definida como

$$T_f(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} f \, \phi, \qquad \text{para } \phi \in \mathcal{S}.$$

A boa definição de $T_f$ segue da desigualdade de Hölder. Para $f \in L^2$, temos o seguinte resultado:

**Teorema 1.4.19** (Plancherel). *A transformada de Fourier é uma isometria em $L^2$, ou seja, $\hat{f} \in L^2$ e $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$. Além disso,*

$$\hat{f}(\xi) = \lim_{R\to\infty} \int_{|x|<R} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx$$

*e*

$$f(x) = \lim_{R\to\infty} \int_{|\xi|<R} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi,$$

*no qual os limites são dados em $L^2$.*

## 1.5 Tópicos de Análise Harmônica

Nesta seção, trazemos definições e resultados de Análise Harmônica que serão utilizados durante do texto. Para maior aprofundamento no assunto, citamos as referências [Du] e [St].

Sejam $(X,\mu)$ e $(Y,\nu)$ espaços de medida, e seja $T$ uma transformação de $L^p(X)$ no conjunto das funções mensuráveis de $Y$ em $\mathbb{C}$.

**Definição 1.5.1.** Dizemos que

(i) $T$ é *fraco* $(p,q)$, $q<\infty$, se

$$\nu(\{y \in Y : |Tf(y)| > \lambda\}) \leq \left(\frac{C\|f\|_p}{\lambda}\right)^q,$$

para toda $f \in L^p(X)$ e todo $\lambda > 0$, no qual $C > 0$ depende apenas de $p$ e $q$.

(ii) $T$ é *fraco* $(p,\infty)$ se $T$ é uma transformação limitada de $L^p(X)$ em $L^\infty(Y)$.

(iii) $T$ é *forte* $(p,q)$ se $T$ é uma transformação limitada de $L^p(X)$ em $L^q(Y)$.

**Proposição 1.5.2.** *Se $T$ é forte $(p,q)$, então é fraco $(p,q)$.*

*Demonstração.* O caso $q=\infty$ é óbvio. Para $q<\infty$, tome $E_\lambda = \{y \in Y : |Tf(y)| > \lambda\}$. Então,

$$\begin{aligned}
\nu(E_\lambda) = \int_{E_\lambda} d\nu &\leq \int_{E_\lambda} \left|\frac{Tf(y)}{\lambda}\right|^q d\nu \\
&\leq \int_Y \left|\frac{Tf(y)}{\lambda}\right|^q d\nu \\
&= \left(\frac{\|Tf\|_q}{\lambda}\right)^q \leq \left(\frac{C\|f\|_p}{\lambda}\right)^q.
\end{aligned}$$

□

Enunciamos aqui o clássico Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz, cuja demonstração pode ser vista em [St, Apêndice B].

**Teorema 1.5.3** (Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz)**.** *Suponha que* $p_0, p_1, q_0, q_1 \in \mathbb{R}_+$ *são tais que* $1 \leq p_j \leq q_j < \infty$, $p_0 < p_1$, *e* $q_0 \neq q_1$. *Sejam* $\mu$ *uma medida de Borel positiva em* $\mathbb{R}^n$ *e* $T$ *um operador linear definido em* $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, *cujos valores são funções* $\mu$*-mensuráveis. Suponha que* $T$ *seja dos tipos fraco* $(p_0, q_0)$ *e fraco* $(p_1, q_1)$, *ou seja, existem constantes* $C_0, C_1$ *tais que*

$$\mu(\{y : |Tf(y)| > \lambda\}) \leq \left(\frac{C_j \|f\|_{p_j}}{\lambda}\right)^{q_j},$$

*para quaisquer* $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *e* $\lambda > 0$, $j = 0, 1$. *Se* $0 < \theta < 1$ *e*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1},$$

*então, para qualquer* $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, *temos*

$$\|Tf\|_{L^q(\mu)} \leq k\, C_0^{1-\theta} C_1^\theta \|f\|_p,$$

*e assim,* $T$ *pode ser estendido para* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *como um operador contínuo* $L^p \to L^q(\mu)$. *Aqui,* $k = k(p_0, p_1, q_0, q_1, \theta) > 0$ *é uma constante independente de* $\mu, T$, *e* $f$.

**Definição 1.5.4.** Dada $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, definimos, para cada $j = 1, \ldots, n$, a $j$-ésima *transformada de Riesz* de $f$ como

$$R_j f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} c_n \int_{|y| > \varepsilon} f(x-y) \frac{y_j}{|y|^{n+1}}\, dy,$$

no qual $c_n = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \pi^{-(n+1)/2}$.

Em [Du] encontramos uma demonstração para o seguinte resultado:

**Proposição 1.5.5.** $(R_j f)\hat{}(\xi) = -i \dfrac{\xi_j}{|\xi|} \hat{f}(\xi)$, *para toda* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

O resultado a seguir nos permitirá extrair propriedades úteis da transformada de Riesz. Sua demonstração pode ser encontrada em [Du, p. 91].

**Teorema 1.5.6** (Teorema de Calderón-Zygmund)**.** *Seja* $K \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *que coincide com uma função localmente integrável em* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *tal que*

*(i)* $|\hat{K}(\xi)| \leq A$;

*(ii)* $\displaystyle\int_{|x| > 2|y|} |K(x-y) - K(x)|\, dx \leq B$, *para* $y \in \mathbb{R}^n$.

*Então, para* $1 < p < \infty$,

$$\|K * f\|_p \leq C_p \|f\|_p,$$

*e*

$$\mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n : |K * f(x)| > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_1.$$

O item $(ii)$ do Teorema acima é chamado de *condição de Hörmander*, e pode ser deduzido de outra condição mais forte, chamada *condição do gradiente*:

**Proposição 1.5.7.** *A condição de Hörmander é satisfeita quando, para todo* $x \neq 0$*,*

$$|\nabla K(x)| \leq \frac{C}{|x|^{n+1}}.$$

Note que, se $K_j(x) = c_n \dfrac{x_j}{|x|^{n+1}}$, então $R_j f = K_j * f$. O Teorema 4.5 de [SW, p. 164], mostra que $\hat{K}_j(\xi) = -i\dfrac{\xi_j}{|\xi|}$, de modo que $K_j$ satisfaz $(i)$. Além disso, $K_j$ satisfaz a condição do gradiente, pois

$$\partial_\ell K_j(x) = \begin{cases} C\dfrac{x_j x_l}{|x|^{n+3}}, & \text{se } \ell \neq j \\ \dfrac{c_n}{|x|^{n+1}} + C\dfrac{x_j^2}{|x|^{n+3}}, & \text{se } \ell = j. \end{cases}$$

Concluímos, então, que:

**Proposição 1.5.8.** *A transformada de Riesz* $R_j$ *é do tipo forte* $(p,p)$*, para* $1 < p < \infty$*, e é do tipo fraco* $(1,1)$*.*

Desse modo, a transformada de Riesz $R_j$ pode ser estendida para os espaços $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Será útil introduzir aqui o espaço de Lorentz $L^{1,\infty}(X,\mu)$, das funções mensuráveis $f$ de $X$ em $\mathbb{C}$ que satisfazem $\|f\|_{L^{1,\infty}} < \infty$, no qual

$$\|f\|_{L^{1,\infty}} = \sup_{\lambda > 0} \lambda\, \mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}).$$

É direto que um operador $T$ é fraco $(1,1)$ se, e somente se, $\|Tf\|_{L^{1,\infty}} \lesssim \|f\|_1$, para toda $f \in L^1(X)$.

**Definição 1.5.9.** Para $0 < \alpha < n$, o *potencial de Riesz* de $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, denotado $I_\alpha f$, é definido por

$$I_\alpha f(x) = \frac{1}{\gamma_\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy,$$

no qual $\gamma_\alpha = \pi^{\frac{n}{2}-\alpha} \dfrac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}$.

No sentido de distribuições, vale a igualdade

$$(I_\alpha f)\hat{}\,(\xi) = |\xi|^{-\alpha} \hat{f}(\xi).$$

O próximo Teorema caracteriza a continuidade $L^p \to L^q$ do potencial de Riesz $I_\alpha$ quando $1 < p < q < \infty$ e $\alpha p < n$.

**Teorema 1.5.10.** *Sejam $\mu$ uma medida de Borel positiva em $\mathbb{R}^n$, $\alpha > 0$, $1 < p < q < \infty$, e $\alpha p < n$. Então, o potencial de Riesz*

$$I_\alpha f(x) = \frac{1}{\gamma_\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy$$

*é contínuo de $L^p$ em $L^q(\mu)$ se, e somente se, a função*

$$M(x) = \sup_{r>0} r^{-s} \mu(B(x,r)),$$

*no qual $s = q\big(\frac{n}{p} - \alpha\big)$, é uniformemente limitada, ou seja, $\mu(B(x,r)) \lesssim r^s$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$.*

*Demonstração.* Primeiro, suponha que $M$ é limitada. Mostraremos que

$$t\mu(\mathscr{L}_t)^{1/q} \leq v_n^{1/p'} \frac{pq(n-\alpha)}{\gamma_\alpha (n-\alpha p)(q-p)} [\sup M(x)]^{1/q} \|f\|_p, \tag{1.2}$$

no qual

$$p' = \frac{p}{p-1}, \quad v_n = \mathcal{L}^n(B(0,1)), \quad \mathscr{L}_t = \{y : I_\alpha |f|(y) > t\}, \quad t > 0.$$

Defina $\mu_t = \mu \llcorner \mathscr{L}_t$. Então

$$\begin{aligned} t\mu(\mathscr{L}_t) &= t\int_{\mathbb{R}^n} d\mu_t \leq \int_{\mathbb{R}^n} I_\alpha |f|(y)\, d\mu_t \\ &= \frac{1}{\gamma_\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \left( \int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{\alpha-n}\, d\mu_t(y) \right) dx. \end{aligned}$$

A integral interior (com respeito a $y$) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{\alpha-n}\, d\mu_t(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_0^\infty \chi_{(0,|x-y|^{\alpha-n})}(\tau)\, d\tau \right) d\mu_t(y) \\ &= \int_0^\infty \left( \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{(0,|x-y|^{\alpha-n})}(\tau)\, d\mu_t(y) \right) d\tau \\ &= \int_0^\infty \mu_t(\{y : |x-y|^{\alpha-n} > \tau\})\, d\tau, \end{aligned}$$

e fazendo a mudança de variável $\tau = \rho^{\alpha-n}$ obtemos

$$\int_0^\infty \mu_t(\{y : |x-y|^{\alpha-n} > \tau\})\, d\tau = (n-\alpha) \int_0^\infty \mu_t(B(x,\rho)) \rho^{\alpha-n-1}\, d\rho.$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} t\mu(\mathscr{L}_t) &\leq \frac{n-\alpha}{\gamma_\alpha} \int_0^\infty \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \mu_t(B(x,\rho))\, dx \right) \rho^{\alpha-n-1}\, d\rho \\ &= \frac{n-\alpha}{\gamma_\alpha} \int_0^R (\cdots) \rho^{\alpha-n-1}\, d\rho + \frac{n-\alpha}{\gamma_\alpha} \int_R^\infty (\cdots) \rho^{\alpha-n-1}\, d\rho = A_1 + A_2, \end{aligned}$$

no qual $R > 0$ será determinado mais adiante.

Note que

$$\begin{aligned}\mu_t(B(x,\rho)) &= \mu_t(B(x,\rho))^{1/p'}\mu_t(B(x,\rho))^{1/p}\rho^{-s/p}\rho^{s/p}\\ &\leq \mu_t(B(x,\rho))^{1/p'}M(x)^{1/p}\rho^{s/p}.\end{aligned}$$

Obtemos então,

$$\begin{aligned}A_1 &\leq \frac{n-\alpha}{\gamma_\alpha}[\sup M(x)]^{1/p}\int_0^R\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\mu_t(B(x,\rho))^{1/p'}\,dx\right)\rho^{\alpha-n-1+s/p}\,d\rho\\ &\leq \frac{n-\alpha}{\gamma_\alpha}[\sup M(x)]^{1/p}\|f\|_p\int_0^R\left(\int_{\mathbb{R}^n}\mu_t(B(x,\rho))\,dx\right)^{1/p'}\rho^{\alpha-n-1+s/p}\,d\rho.\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\mu_t(B(x,\rho))\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\chi_{B(x,\rho)}\,d\mu_t\right)dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\chi_{B(x,\rho)}\,dx\right)d\mu_t\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{L}^n(B(x,\rho))\,d\mu_t\\ &= \rho^n v_n\int_{\mathbb{R}^n}d\mu_t = \rho^n v_n\mu_t(\mathbb{R}^n) = \rho^n v_n\mu(\mathscr{L}_t),\end{aligned}$$

de modo que

$$A_1 \leq \frac{n-\alpha}{\gamma_\alpha}[\sup M(x)]^{1/p}\|f\|_p\, v_n^{1/p'}\mu(\mathscr{L}_t)^{1/p'}\int_0^R\rho^{\alpha-n-1+s/p+n/p'}\,d\rho.$$

Observe que

$$\alpha-n+\frac{s}{p}+\frac{n}{p'} = \alpha-n\left(1-\frac{1}{p'}\right)+\frac{s}{p} = \alpha-\frac{n}{p}+\frac{s}{p}$$

e

$$\frac{s}{p} > \frac{s}{q} = \frac{n}{p}-\alpha.$$

Então

$$\alpha-n+\frac{s}{p}+\frac{n}{p'} > 0$$

e, desse modo,

$$A_1 \leq \frac{p(n-\alpha)}{(\alpha p-n+s)\gamma_\alpha}[\sup M(x)]^{1/p}\|f\|_p\, v_n^{1/p'}\mu(\mathscr{L}_t)^{1/p'}R^{\alpha-(n-s)/p}.$$

De modo análogo, como

$$\mu_t(B(x,\rho)) = \mu_t(B(x,\rho))^{1/p'}\mu_t(B(x,\rho))^{1/p} \leq \mu_t(B(x,\rho))^{1/p'}\mu(\mathscr{L}_t)^{1/p},$$

temos

$$
\begin{aligned}
A_2 &\leq \frac{n-\alpha}{\gamma_\alpha}\mu(\mathscr{L}_t)^{1/p}\int_R^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\mu_t(B(x,\rho))^{1/p'}\,dx\right)\rho^{\alpha-n-1}\,d\rho \\
&\leq \frac{n-\alpha}{\gamma_\alpha}\mu(\mathscr{L}_t)^{1/p}\|f\|_p\int_R^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mu_t(B(x,\rho))\,dx\right)^{1/p'}\rho^{\alpha-n-1}\,d\rho \\
&= \frac{n-\alpha}{\gamma_\alpha}\|f\|_p\, v_n^{1/p'}\mu(\mathscr{L}_t)\int_R^\infty \rho^{\alpha-n-1+n/p'}\,d\rho.
\end{aligned}
$$

Veja que

$$\alpha - n + \frac{n}{p'} = \alpha - \frac{n}{p} < 0.$$

Então

$$A_2 \leq \frac{p(n-\alpha)}{(n-\alpha p)\gamma_\alpha}\|f\|_p\, v_n^{1/p'}\mu(\mathscr{L}_t)R^{\alpha-n/p}.$$

Logo,

$$t\mu(\mathscr{L}_t) \leq \frac{\mu(\mathscr{L}_t)^{1/p'}\|f\|_p v_n^{1/p'}p(n-\alpha)}{\gamma_\alpha}\left(\frac{[\sup M(x)]^{1/p}}{\alpha p - n + s}R^{\alpha-(n-s)/p} + \frac{\mu(\mathscr{L}_t)^{1/p}}{n-\alpha p}R^{\alpha-n/p}\right)$$

e, dividindo ambos os lados por $\mu(\mathscr{L}_t)^{1/p'}$,

$$t\mu(\mathscr{L}_t)^{1/p} \leq \frac{\|f\|_p v_n^{1/p'}p(n-\alpha)}{\gamma_\alpha}\left(\frac{[\sup M(x)]^{1/p}}{\alpha p - n + s}R^{\alpha-(n-s)/p} + \frac{\mu(\mathscr{L}_t)^{1/p}}{n-\alpha p}R^{\alpha-n/p}\right).$$

Escolha $R > 0$ tal que

$$R^s = \frac{\mu(\mathscr{L}_t)}{\sup M(x)},$$

de modo que a desigualdade acima se torna

$$t\mu(\mathscr{L}_t)^{1/p} \leq v_n^{1/p'}\frac{pq(n-\alpha)}{\gamma_\alpha(n-\alpha p)(q-p)}[\sup M(x)]^{1/q}\|f\|_p\,\mu(\mathscr{L}_t)^{(1/p)-(1/q)},$$

obtendo (1.2):

$$t\mu(\mathscr{L}_t)^{1/q} \leq v_n^{1/p'}\frac{pq(n-\alpha)}{\gamma_\alpha(n-\alpha p)(q-p)}[\sup M(x)]^{1/q}\|f\|_p.$$

Como

$$C = v_n^{1/p'}\frac{pq(n-\alpha)}{\gamma_\alpha(n-\alpha p)(q-p)}[\sup M(x)]^{1/q}$$

depende apenas de $p, q, n$ e $\alpha$, e

$$\{y : |I_\alpha f(y)| > t\} \subset \mathscr{L}_t,$$

então (1.2) implica que

$$\mu(\{y : |I_\alpha f(y)| > t\}) \leq \mu(\mathscr{L}_t) \leq \left(\frac{C\|f\|_p}{t}\right)^q,$$

ou seja, $I_\alpha$ é do tipo fraco $(p,q)$.

Fixados $1 < p < q < \infty$, $\alpha p < n$, escolha $p_0, p_1$ tais que $1 < p_0 < p < p_1 < \min\{\frac{n}{\alpha}, q\}$. Fixe $0 < \theta < 1$ tal que

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

Escolha $p_1 < q_0 < q$ e tome $q < q_1 < \infty$ tal que

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Então $I_\alpha$ é dos tipos fraco $(p_0, q_0)$ e fraco $(p_1, q_1)$. Logo, aplicando o Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz (Teorema 1.5.3), temos que o operador $I_\alpha : L^p \to L^q(\mu)$ é contínuo e

$$\|I_\alpha f\|_{L^q(\mu)} \leq c[\sup M(x)]^{1/q} \|f\|_p.$$

Reciprocamente, se

$$\|I_\alpha f\|_{L^q(\mu)} \leq C\|f\|_p,$$

para toda $f \in L^p$, tome $f = \chi_{B(x,\rho)}$. Então,

$$\begin{aligned}\int_{B(x,\rho)} |I_\alpha f(z)|^q \, d\mu \leq \|I_\alpha f\|^q_{L^q(\mu)} &\leq C^q \|f\|_p^q \\ &= C^q \left( \int_{B(x,\rho)} dy \right)^{\frac{q}{p}} = C^q \rho^{\frac{nq}{p}} v_n^{q/p}.\end{aligned}$$

Além disso, para $z \in B(x,\rho)$,

$$\begin{aligned} I_\alpha f(z) &= \frac{1}{\gamma_\alpha} \int_{B(x,\rho)} \frac{1}{|z-y|^{n-\alpha}} \, dy \\ &\geq \frac{1}{\gamma_\alpha} \int_{B(x,\rho)} (2\rho)^{\alpha-n} \, dy \\ &= \frac{(2\rho)^{\alpha-n} \mathcal{L}^n(B(x,\rho))}{\gamma_\alpha} = \frac{v_n 2^{\alpha-n} \rho^\alpha}{\gamma_\alpha}. \end{aligned}$$

Disso decorre que

$$\begin{aligned} \mu(B(x,\rho))^{1/q} &= \left( \int_{B(x,\rho)} d\mu \right)^{1/q} \\ &\leq \left[ \left( \frac{\gamma_\alpha}{v_n 2^{\alpha-n} \rho^\alpha} \right)^q \int_{B(x,\rho)} |I_\alpha f(z)|^q \, d\mu \right]^{1/q} \\ &= \frac{\gamma_\alpha}{v_n 2^{\alpha-n} \rho^\alpha} \left( \int_{B(x,\rho)} |I_\alpha f(z)|^q \, d\mu \right)^{1/q} \\ &\leq \frac{\gamma_\alpha C v_n^{1/p} \rho^{n/p}}{v_n 2^{\alpha-n} \rho^\alpha} = \frac{\gamma_\alpha C v_n^{1/p}}{v_n 2^{\alpha-n}} \rho^{n/p-\alpha} = \frac{\gamma_\alpha C v_n^{1/p}}{v_n 2^{\alpha-n}} \rho^{s/q}. \end{aligned}$$

Portanto, $\mu(B(x,\rho)) \lesssim \rho^s$, concluindo a demonstração. □

**Definição 1.5.11.** Seja $1 < p < \infty$. Uma medida de Radon positiva $\mu$ tem energia-$(1,p)$ finita se

$$\int_{\mathbb{R}^n} [I_1\mu(x)]^p \, dx < \infty,$$

no qual $I_1$ é o *potencial de Riesz de ordem 1* definido por

$$I_1\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} \, d\mu(y).$$

**Observação 1.5.12.** No caso em que $1 < p \leq n/(n-1)$, a medida $\mu \equiv 0$ é a única medida de Radon positiva com energia-$(1,p)$ finita. No caso $p = 1$, temos que se $\|I_1\mu\|_{L^{1,\infty}} < \infty$, então $\mu \equiv 0$. De fato, para qualquer $R > 0$, note que, como $|x-y| < |x| + R$ para $y \in B(0,R)$, então

$$I_1\mu(x) \geq \int_{B(0,R)} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} \, d\mu(y) \geq \int_{B(0,R)} \frac{1}{(|x|+R)^{n-1}} \, d\mu(y) = \frac{\mu(B(0,R))}{(|x|+R)^{n-1}}.$$

Se $1 < p \leq n/(n-1)$, e $\mu$ tem energia-$(1,p)$ finita, então

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{\mu(B(0,R))}{(|x|+R)^{n-1}}\right]^p dx < \infty.$$

No entanto,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{\mu(B(0,R))}{(|x|+R)^{n-1}}\right]^p dx &= \mu(B(0,R))^p \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(|x|+R)^{(n-1)p}} \, dx \\
&= \mu(B(0,R))^p c(n) \int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(r+R)^{(n-1)p}} \, dr \\
&= \mu(B(0,R))^p c(n) \int_R^\infty \frac{(r-R)^{n-1}}{r^{(n-1)p}} \, dr,
\end{aligned}$$

no qual a última integral tende ao infinito, pois $n-1-(n-1)p+1 \geq n-1-n+1 = 0$. Concluímos então que $\mu(B(0,R)) = 0$, $\forall R > 0$, ou seja, $\mu \equiv 0$.

Se temos que $\|I_1\mu\|_{L^{1,\infty}} = \sup\limits_{\lambda>0} \lambda \, \mathcal{L}^n\left(\{x : |I_1\mu(x)| > \lambda\}\right) < \infty$, então

$$\sup_{\lambda>0} \lambda \, \mathcal{L}^n \left(\left\{x : \frac{\mu(B(0,R))}{(|x|+R)^{n-1}} > \lambda\right\}\right) < \infty,$$

pois $\left\{x : \frac{\mu(B(0,R))}{(|x|+R)^{n-1}} > \lambda\right\} \subset \{x : |I_1\mu(x)| > \lambda\}$. Note, porém, que

$$\frac{\mu(B(0,R))}{(|x|+R)^{n-1}} > \lambda \iff |x| < \left(\frac{\mu(B(0,R))}{\lambda}\right)^{\frac{1}{n-1}} - R \iff x \in B\left(0, \left(\frac{\mu(B(0,R))}{\lambda}\right)^{\frac{1}{n-1}} - R\right).$$

Então,

$$\begin{aligned}
\lambda\ \mathcal{L}^n\left(\left\{x : \frac{\mu(B(0,R))}{(|x|+R)^{n-1}} > \lambda\right\}\right) &= \lambda\ \mathcal{L}^n\left[B\left(0, \left(\frac{\mu(B(0,R))}{\lambda}\right)^{\frac{1}{n-1}} - R\right)\right] \\
&= \lambda\ \mathcal{L}^n\left[\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{n-1}} B\left(0, \mu(B(0,R))^{\frac{1}{n-1}} - \lambda^{\frac{1}{n-1}} R\right)\right] \\
&= \lambda^{1-\frac{n}{n-1}}\ \mathcal{L}^n\left[B\left(0, \mu(B(0,R))^{\frac{1}{n-1}} - \lambda^{\frac{1}{n-1}} R\right)\right] \\
&= \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{n-1}}\ \mathcal{L}^n\left[B\left(0, \mu(B(0,R))^{\frac{1}{n-1}} - \lambda^{\frac{1}{n-1}} R\right)\right],
\end{aligned}$$

que vai para infinito para $\lambda$ pequeno e algum $R > 0$ se $\mu \not\equiv 0$. Então temos novamente que $\mu \equiv 0$.

# Capítulo 2

# Campos vetoriais de medida-divergência

Neste capítulo, apresentamos a boa definição de objetos centrais deste texto, campos vetoriais $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ cujo divergente é uma medida de Radon.

## 2.1 Um teorema de representação

Provaremos inicialmente o seguinte teorema de representação:

**Teorema 2.1.1.** *Se $X$ é um espaço de Hausdorff localmente compacto, então todo funcional linear limitado $\Phi$ em $\mathcal{C}_0(X)$ é representado por uma única medida de Radon complexa $\mu$, no sentido de*

$$\Phi(f) = \int_X f \, d\mu \quad , \forall f \in \mathcal{C}_0(X). \tag{2.1}$$

*Mais ainda, a norma de $\Phi$ é a variação total de $\mu$:*

$$\|\Phi\| = |\mu|(X). \tag{2.2}$$

*Demonstração.* Mostramos primeiro a unicidade.

Seja $\mu$ uma medida de Borel regular complexa em $X$ tal que

$$\int_X f \, d\mu = 0, \quad \forall f \in \mathcal{C}_0(X).$$

Pelo Teorema 1.3.32, existe uma função $\mu$-mensurável $h$ com $|h| = 1$ tal que $d\mu = h \, d|\mu|$. Dada qualquer sequência $(f_n) \subset \mathcal{C}_0(X)$, temos que

$$\begin{aligned}
|\mu|(X) = \int_X d|\mu| &= \int_X |h|^2 \, d|\mu| - \int_X f_n \, d\mu \\
&= \int_X \bar{h} \, h \, d|\mu| - \int_X f_n \, h \, d|\mu| \\
&= \int_X (\bar{h} - f_n) \, h \, d|\mu| \\
&\leq \int_X |\bar{h} - f_n| \, |h| \, d|\mu| \\
&= \int_X |\bar{h} - f_n| \, d|\mu|,
\end{aligned} \tag{2.3}$$

no qual $\bar{h}$ denota o conjugado complexo de $h$.

Pelo Teorema 1.3.27, $\mathcal{C}_c(X)$ é denso em $L^1(|\mu|)$. Além disso, $\bar{h} \in L^1(|\mu|)$ pois, pelo Teorema 1.3.32,

$$\int_X |\bar{h}| \, d|\mu| = \int_X d|\mu| = |\mu|(X) < \infty.$$

Podemos tomar, então, $(f_n) \subset \mathcal{C}_c(X)$ de modo que $f_n \to \bar{h}$ em $L^1(|\mu|)$, ou seja, que o lado direito de (2.3) converge para zero, concluindo que $|\mu|(X) = 0$. Mas como $\mu \ll |\mu|$, temos que $\mu \equiv 0$.

Se $\mu_1$ e $\mu_2$ são duas medidas que satisfazem (2.1), então $\mu = \mu_1 - \mu_2$ é como a medida tratada acima pois, pelo Lema 1.3.34, $\mu$ é uma medida regular e, pela Observação 1.3.35,

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f \, d\mu_1 - \int_X f \, d\mu_2 = 0,$$

para toda $f \in \mathcal{C}_0(X)$. Logo, $\mu \equiv 0$, ou seja, $\mu_1 = \mu_2$.

Provemos agora que tal $\mu$ existe. Seja $\Phi$ um funcional linear limitado em $\mathcal{C}_0(X)$. Assuma, *a priori*, que $\|\Phi\| = 1$. Construiremos um funcional linear positivo $\Lambda$ em $\mathcal{C}_c(X)$ tal que

$$|\Phi(f)| \leq \Lambda(|f|) \leq \|f\|_\infty \quad , \forall f \in \mathcal{C}_c(X). \tag{2.4}$$

Lembremos que um funcional linear $\Lambda$ em $\mathcal{C}_c(X)$ é positivo se $\Lambda f \in [0, \infty)$ para toda $f \in \mathcal{C}_c^+(X) = \{f \in \mathcal{C}_c(X) : f(X) \subset [0, \infty)\}$. Para $f \in \mathcal{C}_c^+(X)$, defina

$$\Lambda(f) = \sup\{|\Phi(h)| : h \in \mathcal{C}_c(X), |h| \leq f\}. \tag{2.5}$$

É claro que $\Lambda(f) \geq 0$, o que significa que $\Lambda$ é positivo. Como para $f \in \mathcal{C}_c(X)$ temos $|f| \in \mathcal{C}_c^+(X)$, obtemos que

$$|\Phi(f)| \leq \sup\{|\Phi(h)| : h \in \mathcal{C}_c(X), |h| \leq |f|\} = \Lambda(|f|),$$

pois $f$ está no conjunto onde o supremo é tomado. Também, se $h \in \mathcal{C}_c(X)$, e $|h| \leq |f|$, temos que

$$|\Phi(h)| \leq \|\Phi\| \cdot |h| = |h| \leq |f| \leq \|f\|_\infty,$$

ou seja, $\Lambda(|f|) \leq \|f\|_\infty$. Logo, (2.4) é satisfeito.

Se $f \in \mathcal{C}_c^+(X)$ e $c > 0$ é uma constante, então $cf \in \mathcal{C}_c^+(X)$ e $\Lambda(cf) = c\Lambda(f)$, pois

$$\{|\Phi(h)| : h \in \mathcal{C}_c(X), |h| \leq cf\} = \{c|\Phi(g)| : g \in \mathcal{C}_c(X), |g| \leq f\},$$

visto que $|h| \leq cf \iff \left|\frac{1}{c}h\right| \leq f$ e $c\left|\Phi\left(\frac{1}{c}h\right)\right| = |\Phi(h)|$, já que $\Phi$ é linear.

Se $0 \leq f_1 \leq f_2$, então $\Lambda(f_1) \leq \Lambda(f_2)$, pois

$$\{|\Phi(h)| : h \in \mathcal{C}_c(X), |h| \leq f_1\} \subset \{|\Phi(h)| : h \in \mathcal{C}_c(X), |h| \leq f_2\}.$$

Usaremos isso para mostrar que

$$\Lambda(f+g) = \Lambda(f) + \Lambda(g) \quad, \forall f, g \in \mathcal{C}_c^+(X). \tag{2.6}$$

Fixados $f, g \in \mathcal{C}_c^+(X)$, se $\varepsilon > 0$, existem $h_1, h_2 \in \mathcal{C}_c(X)$ com $|h_1| \leq f$ e $|h_2| \leq g$ tais que

$$\Lambda(f) - \frac{\varepsilon}{2} \leq |\Phi(h_1)| \quad \text{e} \quad \Lambda(g) - \frac{\varepsilon}{2} \leq |\Phi(h_2)|.$$

Existem $\alpha_j \in \mathbb{C}$, com $|\alpha_j| = 1$ tais que $\alpha_j\Phi(h_j) = |\Phi(h_j)|$ para $j = 1, 2$. De fato, basta tomar $\alpha_j = 1$ se $\Phi(h_j) = 0$, ou $\alpha_j = \dfrac{\overline{\Phi(h_j)}}{|\Phi(h_j)|}$ se $\Phi(h_j) \neq 0$. Então,

$$\begin{aligned}
\Lambda(f) + \Lambda(g) &\leq |\Phi(h_1)| + |\Phi(h_2)| + \varepsilon \\
&= \alpha_1\Phi(h_1) + \alpha_2\Phi(h_2) + \varepsilon \\
&= \Phi(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2) + \varepsilon \\
&\leq \Lambda(|\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2|) + \varepsilon \\
&\leq \Lambda(f+g) + \varepsilon,
\end{aligned}$$

pois $|\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2| \leq |h_1| + |h_2| \leq f + g$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, temos que

$$\Lambda(f+g) \geq \Lambda(f) + \Lambda(g).$$

Por outro lado, tome $h \in \mathcal{C}_c(X)$ tal que $|h| \leq f + g$ e considere $V = \{x : f(x) + g(x) > 0\}$. Defina

$$h_1(x) = \frac{f(x)h(x)}{f(x)+g(x)} \quad \text{e} \quad h_2(x) = \frac{g(x)h(x)}{f(x)+g(x)}$$

se $x \in V$, e $h_1(x) = h_2(x) = 0$ se $x \notin V$. Note que

$$|h_1(x)| = \left|\frac{f(x)}{f(x)+g(x)}\right| |h(x)| \leq |h(x)|,$$

para todo $x \in V$, e $|h_1(x)| = 0 \leq |h(x)|$, $\forall x \notin V$. Então $|h_1| \leq |h|$ e, de modo análogo, $|h_2| \leq |h|$. Mostremos que $h_1$ e $h_2$ são contínuas em $X$. Claramente, $h_1$ e $h_2$ são contínuas em $V$. Já se $x_0 \notin V$, então

$$0 \leq |h(x_0)| \leq f(x_0) + g(x_0) \leq 0.$$

Logo, $h(x_0) = 0$. Então, da continuidade de $h$, temos que

$$|h_j(x) - h_j(x_0)| = |h_j(x)| \leq |h(x)| \to |h(x_0)| = 0$$

quando $x \to x_0$. Logo, $h_j$ é contínua em $x_0$, para $j = 1, 2$. Além disso, se $h_j(x) > 0$, então $x \in V$. Logo $f(x) > 0$ ou $g(x) > 0$, de modo que $x \in supp(f) \cup supp(g)$, de onde concluímos que $supp(h_j)$ é compacto. Logo, $h_1, h_2 \in \mathcal{C}_c(X)$. É fácil ver que $h_1 + h_2 = h$, $|h_1| \leq f$ e $|h_2| \leq g$. Com tudo isso temos, da definição dada em (2.5), que

$$|\Phi(h)| = |\Phi(h_1 + h_2)| \leq |\Phi(h_1)| + |\Phi(h_2)| \leq \Lambda(f) + \Lambda(g).$$

E, portanto, $\Lambda(f + g) \leq \Lambda(f) + \Lambda(g)$, provando (2.6).

Agora, estendemos $\Lambda$ para todo o $\mathcal{C}_c(X)$. Se $f \in \mathcal{C}_c(X)$ assume apenas valores reais, então $f$ pode ser escrita como $f = f^+ - f^-$, no qual

$$f^+ = \frac{|f| + f}{2} \in \mathcal{C}_c^+(X) \quad \text{e} \quad f^- = \frac{|f| - f}{2} \in \mathcal{C}_c^+(X).$$

Definimos então, para $f \in \mathcal{C}_c(X)$ com valores reais, $\Lambda(f) \doteq \Lambda(f^+) - \Lambda(f^-)$. Nesse caso, se $c \geq 0$, então

$$\Lambda(cf) = \Lambda([cf]^+) - \Lambda([cf]^-) = \Lambda(cf^+) - \Lambda(cf^-) = c(\Lambda(f^+) - \Lambda(f^-)) = c\Lambda(f),$$

e se $c < 0$, então

$$\Lambda(cf) = \Lambda([cf]^+) - \Lambda([cf]^-) = \Lambda(-cf^-) - \Lambda(-cf^+) = -c(\Lambda(f^-) - \Lambda(f^+)) = c\Lambda(f).$$

Além disso, se $f, g \in \mathcal{C}_c(X)$ têm valores reais, então

$$(f + g)^+ - (f + g)^- = f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^-,$$

de onde obtemos

$$(f + g)^+ + f^- + g^- = (f + g)^- + f^+ + g^+.$$

Aplicando $\Lambda$ a ambos os lados, e usando (2.6), temos que

$$\Lambda((f + g)^+) + \Lambda(f^-) + \Lambda(g^-) = \Lambda((f + g)^-) + \Lambda(f^+) + \Lambda(g^+),$$

de onde concluímos que

$$\Lambda(f + g) = \Lambda((f + g)^+) - \Lambda((f + g)^-) = \Lambda(f^+) - \Lambda(f^-) + \Lambda(g^+) - \Lambda(g^-) = \Lambda(f) + \Lambda(g).$$

Logo, $\Lambda$ é linear nas funções $\mathcal{C}_c(X)$ com valores reais.

Se $f \in \mathcal{C}_c(X)$ assume valores complexos, então $f = u + iv$, no qual $u, v \in \mathcal{C}_c(X)$ assumem valores reais. Definimos então, $\Lambda(f) \doteq \Lambda(u) + i\Lambda(v)$, para toda $f \in \mathcal{C}_c(X)$.

Se $f = u + iv \in \mathcal{C}_c(X)$ e $c = a + ib \in \mathbb{C}$, então

$$\begin{aligned}\Lambda(cf) &= \Lambda(au - bv + i(av + bu))\\ &= \Lambda(au - bv) + i\Lambda(av + bu)\\ &= a\Lambda(u) - b\Lambda(v) + i(a\Lambda(v) + b\Lambda(u))\\ &= a(\Lambda(u) + i\Lambda(v)) + ib(\Lambda(u) + i\Lambda(v))\\ &= c(\Lambda(u) + i\Lambda(v))\\ &= c\Lambda(f).\end{aligned}$$

Por fim, se $f = u_f + iv_f \in \mathcal{C}_c(X)$ e $g = u_g + iv_g \in \mathcal{C}_c(X)$, então

$$\begin{aligned}\Lambda(f + g) &= \Lambda(u_f + u_g + i(v_f + v_g))\\ &= \Lambda(u_f + u_g) + i\Lambda(v_f + v_g)\\ &= \Lambda(u_f) + i\Lambda(v_f) + \Lambda(u_g) + i\Lambda(v_g)\\ &= \Lambda(f) + \Lambda(g).\end{aligned}$$

Assim, $\Lambda$ é, de fato, um funcional linear positivo em $\mathcal{C}_c(X)$ que satisfaz (2.4).

Podemos, então , associar a $\Lambda$ uma medida de Borel positiva $\lambda$ em $X$ tal que $\Lambda(f) = \displaystyle\int_X f\, d\lambda$, $\forall f \in \mathcal{C}_c(X)$, como dada pelo Teorema 1.3.26:

$$\lambda(V) = \sup\{\Lambda(f) : f \in \mathcal{C}_c(X), 0 \leq f \leq 1, supp(f) \subset V\},$$

para $V \subset X$ aberto, e

$$\lambda(E) = \inf\{\lambda(V) : E \subset V, V \text{ aberto}\},$$

para $E \subset X$ mensurável.

Se mostrarmos que $\lambda(X) < \infty$, então, pela propriedade (iii) do Teorema 1.3.26,

$$\lambda(E) = \sup\{\lambda(K) : K \subset E,\ K \text{ compacto}\}$$

para todo $E \subset X$ $\lambda$-mensurável. Como, pelo mesmo teorema, temos que $\lambda(K) < \infty$ para todo $K \subset X$ compacto, concluiremos que $\lambda$ é uma medida de Radon. De fato, se $f \in \mathcal{C}_c(X)$ com $0 \leq f \leq 1$, então, por (2.4),

$$\Lambda(f) = \Lambda(|f|) \leq \|f\|_\infty \leq 1.$$

Logo, como $\lambda(X) = \sup\{\Lambda(f) : f \in \mathcal{C}_c(X), 0 \leq f \leq 1\}$, temos que $\lambda(X) \leq 1$. Ainda de (2.4), para $f \in \mathcal{C}_c(X)$, temos

$$|\Phi(f)| \leq \Lambda(|f|) = \int_X |f|\, d\lambda = \|f\|_1,$$

no qual $\|\cdot\|_1$ é a norma de $L^1(X,\lambda)$ em $\mathcal{C}_c(X)$. Então, $\Phi$ é um funcional linear em $\mathcal{C}_c(X)$ cuja norma, com respeito à norma de $L^1(X,\lambda)$ em $\mathcal{C}_c(X)$, satisfaz

$$|||\Phi||| = \sup\{|\Phi(f)| : f \in \mathcal{C}_c(X), \|f\|_1 \leq 1\} \leq 1.$$

Como $\mathcal{C}_c(X)$ é denso em $L^1(X,\lambda)$, pelo Teorema de Hahn-Banach (especificamente, o Corolário 1.2.4), existe uma extensão de $\Phi$, que preserva norma, a um funcional linear em $L^1(X,\lambda)$. Assim, podemos usar o Teorema 1.3.38 para o caso $p=1$ e concluir que existe $g \in L^\infty(X,\lambda)$, com $|g| \leq 1$, tal que

$$\Phi(f) = \int_X f\,g\,d\lambda \quad, \forall f \in \mathcal{C}_c(X). \tag{2.7}$$

Cada lado da igualdade (2.7) é um funcional linear contínuo em $\mathcal{C}_0(X)$. De fato, o lado esquerdo o é por hipótese, e se $(f_n)$ é uma sequência e $f$ uma função em $\mathcal{C}_0(X)$ tais que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, então

$$\left|\int_X f_n\,g\,d\lambda - \int_X f\,g\,d\lambda\right| \leq \int_X |f_n - f|\,|g|\,d\lambda \leq \lambda(X)\|f_n - f\|_\infty \leq \|f_n - f\|_\infty \to 0.$$

Logo, como $\mathcal{C}_c(X)$ é denso em $\mathcal{C}_0(X)$, então (2.7) vale para toda $f \in \mathcal{C}_0(X)$. Tomando $d\mu = g\,d\lambda$, temos que $\mu$ é uma medida de Radon satisfazendo (2.1).

Como estamos supondo $\|\Phi\| = 1$, então, se $f \in \mathcal{C}_0(X)$ com $\|f\|_\infty \leq 1$, temos que

$$|\Phi(f)| = \left|\int_X f\,g\,d\lambda\right| \leq \int_X |f|\,|g|\,d\lambda \leq \int_X |g|\,d\lambda.$$

Logo,

$$\begin{aligned} 1 = \|\Phi\| &= \sup\{|\Phi(f)| : f \in \mathcal{C}_0(X), \|f\|_\infty \leq 1\} \\ &\leq \int_X |g|\,d\lambda \\ &\leq \int_X d\lambda = \lambda(X) \\ &\leq 1, \end{aligned}$$

ou seja, $\displaystyle\int_X |g|\,d\lambda = \lambda(X) = 1$. Então $|g| = 1$ $\lambda$-q.t.p.. Logo, $d|\mu| = |g|\,d\lambda = d\lambda$ e, portanto, $|\mu|(X) = \lambda(X) = 1 = \|\Phi\|$, provando (2.2).

De modo geral, se $\Phi$ é qualquer funcional linear limitado em $\mathcal{C}_0(X)$, a demonstração acima vale para $\Psi = \dfrac{\Phi}{\|\Phi\|}$, ou seja, existe uma medida de Borel regular $\nu$ satisfazendo (2.1) e (2.2) para $\Psi$. Então,

$$\Phi(f) = \|\Phi\|\Psi(f) = \|\Phi\|\int_X f\,d\nu = \int_X f\,\|\Phi\|\,d\nu.$$

Tomando $d\mu = \|\Phi\|\, d\nu$, obtemos $\Phi(f) = \int_X f\, d\mu$ e

$$|\mu|(X) = \|\Phi\|\, |\nu|(X) = \|\Phi\| \|\Psi\| = \|\Phi\|.$$

□

## 2.2 Campos vetoriais de medida-divergência

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $F \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ um campo vetorial. Então, div$F$ define uma distribuição como

$$\text{div}F(\varphi) = \int_\Omega F \cdot \nabla\varphi\, dx \quad , \forall\, \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega).$$

De fato, como definido acima, div$F$ é claramente linear. Agora, se *supp*$(\varphi) \subset K$, para um $K \subset \Omega$ compacto, então

$$|\text{div}F(\varphi)| \leq \int_K \sum_{j=1}^n \|F\|_\infty \|\partial_j\varphi\|_\infty\, dx = \mathcal{L}^n(K)\|F\|_\infty \sum_{j=1}^n \|\partial_j\varphi\|_\infty.$$

Assim, se $(\varphi_k) \subset \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ é uma sequência convergindo para a função identicamente nula em $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, então existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que *supp*$(\varphi_k) \subset K$ para todo $k \in \mathbb{N}$, e $\partial^\alpha\varphi_k \to 0$ uniformemente para todo multi-índice $\alpha$. Então,

$$|\text{div}F(\varphi_k)| \leq \mathcal{L}^n(K)\|F\|_\infty \sum_{j=1}^n \|\partial_j\varphi_k\|_\infty \to 0.$$

Logo, div$F$, como definido acima, é contínuo em $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ e, portanto, é uma distribuição.

**Definição 2.2.1.** Sejam $\Omega$ e $F$ como acima. Se $U \subset \Omega$ é aberto, definimos a *variação-divergência (total) de $F$ em $U$* por

$$\|\text{div}F\|(U) = \sup\left\{\text{div}F(\varphi) : \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(U),\ |\varphi| \leq 1\right\}.$$

**Definição 2.2.2.** Dizemos que $F$ é um *campo vetorial de medida-divergência sobre* $\Omega$ se $F \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e $\|\text{div}F\|(\Omega) < \infty$. Denotamos o espaço dos campos de medida-divergência sobre $\Omega$ por $\mathcal{DM}(\Omega)$.

Nosso objetivo é concluir que, dado $F \in \mathcal{DM}(\mathbb{R}^n)$, existe uma medida de Radon com sinal $\mu$ satisfazendo

$$\int_{\mathbb{R}^n} F \cdot \nabla\varphi\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\, d\mu, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$$

e, mais ainda, $\|\text{div}F\|(\mathbb{R}^n) = |\mu|(\mathbb{R}^n)$.

O Teorema 2.1.1 não nos serve para tal, pois embora seja possível estender div$F$ de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ para $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$ por densidade, não podemos garantir que tal extensão seja limitada. Por isso, apresentamos o seguinte teorema de representação, que não exige a continuidade do funcional linear:

**Teorema 2.2.3** (Teorema de Representação de Riesz). *Seja $L : \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ um funcional linear tal que*

$$\sup\{L(f) : f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), |f| \leq 1, supp(f) \subset K\} < \infty \tag{2.8}$$

*para cada compacto $K \subset \mathbb{R}^n$. Então existe uma medida exterior $\mu$ em $\mathbb{R}^n$, definida em cada aberto $V \subset \mathbb{R}^n$ por*

$$\mu(V) = \sup\{L(f) : f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m),\ |f| \leq 1,\ supp(f) \subset V\},$$

*e em $A \subset \mathbb{R}^n$ arbitrário por*

$$\mu(A) = \inf\{\mu(V) : A \subset V \ aberto\},$$

*e uma função $\mu$-mensurável $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que*

*(i) $|\sigma(x)| = 1$ para $\mu$-q.t.p. $x$;*

*(ii) $L(f) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \sigma \, d\mu$ para toda $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.*

*Além disso, restrita à $\sigma$-álgebra dos conjuntos $\mu$-mensuráveis, $\mu$ é uma medida de Radon.*

*Demonstração.* Defina $\mu$ como enunciado acima. Primeiro, mostremos que $\mu$ é uma medida exterior. Sejam $V$ e $\{V_j\}_{j=1}^\infty$ subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$, com $V \subset \cup_{j=1}^\infty V_j$. Escolha $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ tal que $|g| \leq 1$ e $supp(g) \subset V$. Como $supp(g)$ é compacto, existe um índice $k$ tal que $supp(g) \subset \cup_{j=1}^k V_j$. Seja $\{\xi_j\}_{j=1}^k$ uma sequência finita de funções suaves não-negativas tais que $supp(\xi_j) \subset V_j$ para $1 \leq j \leq k$ e $\sum_{j=1}^k \xi_j = 1$ em $supp(g)$. Então, $g = \sum_{j=1}^k g\xi_j$, e desse modo

$$|L(g)| = \left|\sum_{j=1}^k L(g\xi_j)\right| \leq \sum_{j=1}^k |L(g\xi_j)| \leq \sum_{j=1}^k \mu(V_j) \leq \sum_{j=1}^\infty \mu(V_j).$$

Então, tomando o supremo sobre $g$, obtemos

$$\mu(V) \leq \sum_{j=1}^\infty \mu(V_j).$$

Agora, sejam $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ subconjuntos arbitrários de $\mathbb{R}^n$. Fixe $\varepsilon > 0$ e escolha conjuntos abertos $V_j$ tais que $A_j \subset V_j$ e $\mu(V_j) \leq \mu(A_j) + \dfrac{\varepsilon}{2^j}$. Então

$$\begin{aligned}\mu(\cup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \mu\left(\cup_{j=1}^{\infty} V_j\right) &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(V_j)\\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ é tomado arbitrariamente, concluímos que

$$\mu(\cup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

Provemos agora que $\mu$ é Borel. Sejam $U_1$ e $U_2$ conjuntos abertos com $\operatorname{dist}(U_1, U_2) > 0$. Se $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $|f| \leq 1$, $supp(f) \subset U_1 \cup U_2$, então $f = f_1 + f_2$, no qual $f_j \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $|f_j| \leq 1$, $supp(f_j) \subset U_j$, para $j = 1, 2$. Daí,

$$L(f) = L(f_1) + L(f_2) \leq \mu(U_1) + \mu(U_2),$$

de onde concluímos que

$$\mu(U_1 \cup U_2) \leq \mu(U_1) + \mu(U_2).$$

Dado $\varepsilon > 0$, tome, para $j = 1, 2$, $f_j \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $|f_j| \leq 1$, $supp(f_j) \subset U_j$, tais que $L(f_j) > \mu(U_j) - \varepsilon/2$. Então, $f_1 + f_2 \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $|f_1 + f_2| \leq 1$, $supp(f_1 + f_2) \subset U_1 \cup U_2$ e

$$\mu(U_1) + \mu(U_2) - \varepsilon < L(f_1) + L(f_2) = L(f_1 + f_2) \leq \mu(U_1 \cup U_2).$$

Portanto, temos que $\mu(U_1 \cup U_2) = \mu(U_1) + \mu(U_2)$. Agora, se $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n$ e $\operatorname{dist}(A_1, A_2) > 0$, então, dado $\varepsilon > 0$, existem conjuntos abertos $U_j$, $j = 1, 2$, tais que $A_j \subset U_j$, $\operatorname{dist}(U_1, U_2) > 0$, e $\mu(U_j) < \mu(A_j) + \varepsilon/2$. Então

$$\mu(A_1 \cup A_2) \leq \mu(U_1 \cup U_2) = \mu(U_1) + \mu(U_2) < \mu(A_1) + \mu(A_2) + \varepsilon.$$

Por outro lado, seja $U \supset A_1 \cup A_2$ aberto. Tome, para $j = 1, 2$, $\tilde{U_j} = U \cap U_j$. Então $A_j \subset \tilde{U_j}$ e $\operatorname{dist}(\tilde{U_1}, \tilde{U_2}) > 0$. Daí,

$$\mu(A_1) + \mu(A_2) \leq \mu(\tilde{U_1}) + \mu(\tilde{U_2}) = \mu(\tilde{U_1} \cup \tilde{U_2}) \leq \mu(U),$$

de onde concluímos que

$$\mu(A_1) + \mu(A_2) \leq \mu(A_1 \cup A_2).$$

Portanto, temos que $\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$. De acordo com o critério de Carathéodory (veja [EG, pp. 9-11]), $\mu$ é Borel.

A seguir, mostremos que $\mu$ é finita em compactos. Dado $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto, existe $r > 0$ tal que $K \subset B(0,r) \subset B[0,r]$. Então

$$\mu(K) \leq \mu(B(0,r)) \leq \sup\{L(f) : f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), |f| \leq 1, supp(f) \subset B[0,r]\} < \infty,$$

por (2.8).

Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, tome $V_k \supset A$ aberto tal que $\mu(V_k) < \mu(A) + 1/k$. Então

$$\mu(A) \leq \mu\left(\bigcap_{j=1}^{k} V_j\right) \leq \mu(V_k) < \mu(A) + 1/k.$$

Fazendo $k \to \infty$, obtemos que

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} V_j\right).$$

Por [EG, Teorema 4, p. 8], concluímos que $\mu$ satisfaz as mesmas condições satisfeitas por uma medida de Radon.

Para $f \in \mathcal{C}_c^+(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n) : f \geq 0\}$, defina

$$\Lambda(f) = \sup\{|L(g)| : g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), |g| \leq f\}.$$

De modo análogo ao feito na demonstração do Teorema 2.1.1, temos que se $f_1, f_2 \in \mathcal{C}_c^+(\mathbb{R}^n)$ e $c \geq 0$, então $f_1 \leq f_2$ implica que $\Lambda(f_1) \leq \Lambda(f_2)$ e, além disso, $\Lambda(cf_1) = c\Lambda(f_1)$. Isso prova, tal como feito em (2.6), que $\Lambda(f_1 + f_2) = \Lambda(f_1) + \Lambda(f_2)$, para toda $f_1, f_2 \in \mathcal{C}_c^+(\mathbb{R}^n)$.

A seguir, mostraremos que, para toda $f \in \mathcal{C}_c^+(\mathbb{R}^n)$,

$$\Lambda(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu.$$

Seja $f \in \mathcal{C}_c^+(\mathbb{R}^n)$. Tome $\varepsilon > 0$ e escolha $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N$ tais que $t_N = 2\|f\|_\infty$, $0 < t_j - t_{j-1} < \varepsilon$ e $\mu\big(f^{-1}(\{t_j\})\big) = 0$, para $j = 1, \ldots, N$. Tais $t_j$ podem ser escolhidos desse modo pois $P = \{t \in \mathbb{R}_+ : \mu\big(f^{-1}(\{t\})\big) > 0\}$ é enumerável.

De fato, se $t \in P \setminus \{0\}$, então $X_t := f^{-1}(\{t\}) \subset supp(f)$ e, desse modo,

$$\bigcup_{t \in P \setminus \{0\}} X_t \subset supp(f),$$

no qual a união acima é, obviamente, disjunta. Suponha que $P$ seja não-enumerável. Mostraremos que

$$\mu\left(\bigcup_{t \in P \setminus \{0\}} f^{-1}(\{t\})\right) = \infty,$$

gerando uma contradição, pois $\mu\big(supp(f)\big) < \infty$, já que $f$ tem suporte compacto. Mostremos que, de modo geral, se $\{X_\alpha : \alpha \in \Theta\}$, $\Theta$ não-enumerável, é uma coleção de conjuntos dois a dois disjuntos tais que $\mu(X_\alpha) > 0$, então

$$\mu\left(\bigcup_{\alpha\in\Theta} X_\alpha\right) = \infty.$$

Denote $X = \cup_{\alpha\in\Theta} X_\alpha$. Seja $Y_n = \cup\{X_\alpha : \alpha \in \Theta, \mu(X_\alpha) > 1/n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Como $\Theta$ é não-enumerável, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $Y_{n_0}$ contém uma quantidade infinita de conjuntos $X_\alpha$. Logo, existe uma quantidade infinita enumerável de $X_{\alpha_j}$ com $\mu\left(X_{\alpha_j}\right) > 1/n_0$ tais que

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} X_{\alpha_j} \subset Y_{n_0}.$$

Temos, então, que

$$\mu(X) \geq \mu(Y_{n_0}) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu\left(X_{\alpha_j}\right) > \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n_0} = \infty.$$

Portanto, $\mu(X) = \infty$ e, com isso, obtemos uma contradição, concluíndo que $P$ é enumerável.

Defina $U_j = f^{-1}\big((t_{j-1}, t_j)\big)$. Temos que os $U_j$ são abertos e $\mu(U_j) < \infty$. Da regularidade de $\mu$, existem compactos $K_j$ tais que $K_j \subset U_j$ e $\mu(U_j \backslash K_j) < \varepsilon/N$, para $j = 1, 2, \ldots, N$. Além disso, existem funções $g_j \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, com $|g_j| \leq 1$ e $supp(g_j) \subset U_j$, tais que $|L(g_j)| > \mu(U_j) - \varepsilon/N$. Pelo Lema de Urysohn (ver [R2, p. 39]), existem funções $h_j \in \mathcal{C}_c^+(\mathbb{R}^n)$ tais que $supp(h_j) \subset U_j$, $0 \leq h_j \leq 1$, e $h_j = 1$ em $K_j \cup supp(g_j)$. Então,

$$\Lambda(h_j) \geq |L(g_j)| > \mu(U_j) - \varepsilon/N$$

e

$$\begin{aligned}
\Lambda(h_j) &= \sup\{|L(g)| : g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), |g| \leq h_j\} \\
&\leq \sup\{|L(g)| : g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), |g| \leq 1, supp(g) \subset U_j\} \\
&= \mu(U_j),
\end{aligned}$$

de modo que $\mu(U_j) - \varepsilon/N < \Lambda(h_j) \leq \mu(U_j)$.

Defina

$$A = \left\{x \in \mathbb{R}^n : f(x)\left(1 - \sum_{j=1}^{N} h_j(x)\right) > 0\right\}.$$

Note que $A$ é aberto. Veja que

$$\begin{aligned}
\Lambda\left(f - f\sum_{j=1}^{N} h_j\right) &= \sup\left\{|L(g)| : g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), |g| \le f - f\sum_{j=1}^{N} h_j\right\}\\
&\le \sup\{|L(g)| : g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), |g| \le \|f\|_\infty \chi_A\}\\
&= \|f\|_\infty \sup\{L(g) : g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), |g| \le \chi_A\}\\
&= \|f\|_\infty \mu(A)\\
&= \|f\|_\infty\, \mu\left(\bigcup_{j=1}^{N} (U_j \setminus \{h_j = 1\})\right)\\
&\le \|f\|_\infty \sum_{j=1}^{N} \mu(U_j \setminus K_j)\\
&\le \varepsilon \|f\|_\infty.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\Lambda(f) &= \Lambda\left(f - f\sum_{j=1}^{N} h_j\right) + \Lambda\left(f\sum_{j=1}^{N} h_j\right)\\
&\le \varepsilon\|f\|_\infty + \sum_{j=1}^{N} \Lambda(f h_j)\\
&\le \varepsilon\|f\|_\infty + \sum_{j=1}^{N} t_j \Lambda(h_j) \qquad \big(\text{pois } f(x) < t_j \text{ em } U_j \supset supp(h_j)\big)\\
&\le \varepsilon\|f\|_\infty + \sum_{j=1}^{N} t_j \mu(U_j) \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\Lambda(f) &= \Lambda\left(f - f\sum_{j=1}^{N} h_j\right) + \Lambda\left(f\sum_{j=1}^{N} h_j\right)\\
&\ge \Lambda\left(f\sum_{j=1}^{N} h_j\right) = \sum_{j=1}^{N} \Lambda(f h_j)\\
&\ge \sum_{j=1}^{N} t_{j-1} \Lambda(h_j) \ge \sum_{j=1}^{N} t_{j-1}\left(\mu(U_j) - \frac{\varepsilon}{N}\right)\\
&\ge \sum_{j=1}^{N} \left(t_{j-1}\mu(U_j) - t_N \frac{\varepsilon}{N}\right)\\
&= \sum_{j=1}^{N} \big(t_{j-1}\mu(U_j)\big) - \varepsilon t_N. \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N} t_{j-1}\mu(U_j) &= \sum_{j=1}^{N}\int_{U_j} t_{j-1}\,d\mu \\ &\leq \sum_{j=1}^{N}\int_{U_j} f\,d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} f\,d\mu \end{aligned} \tag{2.11}$$

e

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f\,d\mu &= \sum_{j=1}^{N}\int_{U_j} f\,d\mu \\ &\leq \sum_{j=1}^{N}\int_{U_j} t_j\,d\mu = \sum_{j=1}^{N} t_j\mu(U_j). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Então temos que, por (2.10) e (2.12),

$$-\sum_{j=1}^{N}(t_j - t_{j-1})\mu(U_j) - \varepsilon t_N \leq \Lambda(f) - \int_{\mathbb{R}^n} f\,d\mu,$$

e, por (2.9) e (2.11),

$$\Lambda(f) - \int_{\mathbb{R}^n} f\,d\mu \leq \sum_{j=1}^{N}(t_j - t_{j-1})\mu(U_j) + \varepsilon\|f\|_\infty,$$

de modo que, como $t_N = 2\|f\|_\infty$,

$$\begin{aligned}\left|\Lambda(f) - \int_{\mathbb{R}^n} f\,d\mu\right| &\leq \sum_{j=1}^{N}(t_j - t_{j-1})\mu(U_j) + \varepsilon\|f\|_\infty + \varepsilon t_N \\ &\leq \varepsilon\sum_{j=1}^{N}\mu(U_j) + 3\varepsilon\|f\|_\infty \\ &\leq \varepsilon\mu\big(supp(f)\big) + 3\varepsilon\|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ foi tomado arbitrariamente, obtemos

$$\Lambda(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f\,d\mu.$$

Agora, encontraremos uma função $\mu$-mensurável $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que

$$L(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \sigma\,d\mu$$

para toda $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Fixe $e \in \mathbb{R}^m$, com $|e| = 1$, e defina $\Lambda_e(h) = L(he)$ para $h \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$. Então $\Lambda_e$ é linear e

$$\begin{aligned}|\Lambda_e(h)| &= |L(he)| \\ &\leq \sup\{|L(g)| : g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), |g| \leq |h|\} \\ &= \Lambda(|h|) = \int_{\mathbb{R}^n} |h|\,d\mu, \end{aligned}$$

de modo que, pelo Teorema de Hahn-Banach (Teorema 1.2.3), podemos estender $\Lambda_e$ a um funcional linear limitado em $L^1(\mathbb{R}^n, \mu)$. Logo, pelo Teorema de Representação de Riesz em $L^p$ (Teorema 1.3.38), existe $\sigma_e \in L^\infty(\mathbb{R}^n, \mu)$ tal que

$$\Lambda_e(h) = \int_{\mathbb{R}^n} h\sigma_e \, d\mu$$

para $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$. Seja $e_1, \ldots, e_m$ a base canônica para $\mathbb{R}^m$ e defina

$$\sigma = \sum_{j=1}^{m} \sigma_{e_j} e_j.$$

Então, se $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, temos

$$\begin{aligned} L(f) &= \sum_{j=1}^{m} L((f \cdot e_j)e_j) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \Lambda_{e_j}(f \cdot e_j) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^n} (f \cdot e_j)\sigma_{e_j} \, d\mu \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \sigma \, d\mu. \end{aligned}$$

Por fim, resta mostrar que $|\sigma| = 1$ em $\mu$-quase toda parte. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, com $\mu(U) < \infty$. Pela definição,

$$\mu(U) = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \sigma \, d\mu : f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), |f| \leq 1, supp(f) \subset U \right\}.$$

Tome $f_k \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ tais que $|f_k| \leq 1$, $supp(f_k) \subset U$ e $f_k \cdot \sigma \to |\sigma|$ em $\mu$-quase toda parte. A existência de tais funções é garantida pelo Corolário 1 em [EG, p. 16]. Então, pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\int_U |\sigma| \, d\mu = \lim_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \cdot \sigma \, d\mu \leq \mu(U).$$

Por outro lado, se $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ com $|f| \leq 1$ e $supp(f) \subset U$, então

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \sigma \, d\mu \leq \int_U |\sigma| \, d\mu,$$

o que implica em

$$\mu(U) \leq \int_U |\sigma| \, d\mu.$$

Logo, $\mu(U) = \int_U |\sigma| \, d\mu$ para todo $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Logo, $|\sigma| = 1$ em $\mu$-quase toda parte. Com isso, a demonstração está concluída. □

Note que, no resultado anterior, podemos considerar $\mu$ restrita à coleção dos conjuntos $\mu$-mensuráveis, ou seja, considerar $\mu$ como uma medida, que, pelo que foi demonstrado acima, é uma medida de Radon.

Vejamos então que, se $F \in \mathcal{DM}(\mathbb{R}^n)$, podemos estender $\mathrm{div}F : \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ para um funcional linear $L : \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ tal que

$$\sup\{L(\varphi) : \varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n),\ |\varphi| \leq 1,\ supp(\varphi) \subset K\} < \infty$$

para cada compacto $K \subset \mathbb{R}^n$.

Seja $\mathrm{div}F : \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\mathrm{div}F(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} F \cdot \nabla\varphi \, dx.$$

Como $F \in \mathcal{DM}(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$\|\mathrm{div}F\|(V) = \sup\{\mathrm{div}F(\varphi) : \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(V), |\varphi| \leq 1\} < \infty$$

para todo subconjunto aberto $V \subset \mathbb{R}^n$. Assim,

$$\frac{1}{\|\varphi\|_\infty}|\mathrm{div}F(\varphi)| = \left|\mathrm{div}F\left(\frac{\varphi}{\|\varphi\|_\infty}\right)\right| \leq \|\mathrm{div}F\|(V), \tag{2.13}$$

para toda $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(V)$ com $\|\varphi\|_\infty \neq 0$.

Fixando um conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, escolhemos um aberto $V$ tal que $K \subset V \subset \mathbb{R}^n$. Dada $\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ com $supp(\varphi) \subset K$, pelo Teorema 1.4.8 podemos escolher uma sequência $(\varphi_k) \subset \mathcal{C}_c^\infty(V)$ tal que $\varphi_k \to \varphi$ uniformemente. Como, dado $\varepsilon > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\|\varphi_k - \varphi_\ell\|_\infty < \varepsilon/\|\mathrm{div}F\|(V)$ quando $k, \ell > m$, então, por (2.13),

$$|\mathrm{div}F(\varphi_k) - \mathrm{div}F(\varphi_\ell)| = |\mathrm{div}F(\varphi_k - \varphi_\ell)| \leq \|\mathrm{div}F\|(V)\|\varphi_k - \varphi_\ell\|_\infty < \varepsilon.$$

Logo, $\big(\mathrm{div}F(\varphi_k)\big)$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ e, portanto, $\lim\limits_{k\to\infty} \mathrm{div}F(\varphi_k)$ existe. Além disso, tal limite não depende da sequência $(\varphi_k)$ escolhida, visto que se $(\phi_k)$ é outra sequência em $\mathcal{C}_c^\infty(V)$ que converge uniformemente para $\varphi$, então

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} |\mathrm{div}F(\varphi_k) - \mathrm{div}F(\phi_k)| &= \lim_{k\to\infty} |\mathrm{div}F(\varphi_k - \phi_k)| \leq \|\mathrm{div}F\|(V) \lim_{k\to\infty} \|\varphi_k - \phi_k\|_\infty \\
&\leq \|\mathrm{div}F\|(V) \lim_{k\to\infty} (\|\varphi_k - \varphi\|_\infty + \|\varphi - \phi_k\|_\infty) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Segue que

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{div}F(\varphi_k) - \lim_{k\to\infty} \mathrm{div}F(\phi_k) = \lim_{k\to\infty} [\mathrm{div}F(\varphi_k) - \mathrm{div}F(\phi_k)] = 0.$$

Desse modo, $\mathrm{div}F$ pode ser estendido unicamente a um funcional linear $L : \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ dado por $L(\varphi) = \lim_{k\to\infty} \mathrm{div}F(\varphi_k)$, no qual $\varphi_k \to \varphi$ uniformemente. Note que, se $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto, $\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ com $supp(\varphi) \subset K$ e $|\varphi| \leq 1$, então $L(\varphi) \leq \|\mathrm{div}F\|(V)$, pois podemos escolher $|\varphi_k| < 1$. Logo,

$$\sup\{L(\varphi) : \varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n), supp(\varphi) \subset K, |\varphi| \leq 1\} < \infty$$

para cada $K \subset U$ compacto.

Pelo Teorema 2.2.3, existe uma medida de Radon $\lambda$ em $\mathbb{R}^n$ e uma função $\lambda$-mensurável $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tais que $|g(x)| = 1$ para $\lambda$-q.t.p. $x$ e $L(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\, g\, d\lambda$, para toda $\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$. Em particular, se $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} F \cdot \nabla\varphi\, dx = \mathrm{div}F(\varphi) = L(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\, g\, d\lambda.$$

Denotando $d\mu = g\, d\lambda$, temos que

$$\mathrm{div}F(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\, d\mu$$

para toda $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Além disso, se $\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, $|\varphi| \leq 1$, por argumento feito anteriormente,

$$L(\varphi) \leq \|\mathrm{div}F\|(\mathbb{R}^n).$$

Como, pelo Teorema 2.2.3,

$$\lambda(\mathbb{R}^n) = \sup\{L(\varphi) : \varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n),\ |\varphi| \leq 1\},$$

então

$$\begin{aligned}\lambda(\mathbb{R}^n) &\leq \|\mathrm{div}F\|(\mathbb{R}^n)\\ &= \sup\{\mathrm{div}F(\varphi) : \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n), |\varphi| \leq 1\}\\ &= \sup\{L(\varphi) : \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n), |\varphi| \leq 1\}\\ &\leq \sup\{L(\varphi) : \varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n), |\varphi| \leq 1\}\\ &= \lambda(\mathbb{R}^n).\end{aligned}$$

Mas como $d|\mu| = |g|\ d\lambda = d\lambda$, temos que

$$\|\mathrm{div}F\|(\mathbb{R}^n) = |\mu|(\mathbb{R}^n).$$

Com isso, acabamos de demonstrar o seguinte teorema:

**Teorema 2.2.4.** *Seja $F \in \mathcal{DM}(\mathbb{R}^n)$. Então existe uma medida de Radon com sinal $\mu$ tal que*

$$\mathrm{div}F(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} F \cdot \nabla\varphi\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\, d\mu,$$

*para toda $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e, além disso, $\|\mathrm{div}F\|(\mathbb{R}^n) = |\mu|(\mathbb{R}^n)$. Nesse caso, denotamos $\mathrm{div}F = \mu$.*

# Capítulo 3

# Medida de Hausdorff

Neste capítulo, apresentamos uma família de medidas em $\mathbb{R}^n$ que são capazes de medir subconjuntos "pequenos" do $\mathbb{R}^n$, chamadas medidas de Hausdorff. Tais medidas são de grande importância para o estudo de propriedades geométricas de conjuntos. Os livros [Mat] e [EG] apresentam uma maior abordagem sobre esse tópico.

## 3.1 Definições e propriedades

**Definição 3.1.1.** Seja $A \subset \mathbb{R}^n$, $0 \leq s < \infty$, $0 < \delta < \infty$. Defina

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s)(\text{diam } C_j)^s : A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j, \ \text{diam } C_j \leq \delta \right\},$$

no qual

$$\alpha(s) = \frac{\pi^{s/2}}{2^s \, \Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}.$$

Definimos ainda

$$\mathcal{H}^s_\infty(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s)(\text{diam } C_j)^s : A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j \right\},$$

que por vezes é chamado de *conteúdo de Hausdorff de dimensão $s$.*

A *medida de Hausdorff de dimensão $s$* em $\mathbb{R}^n$ é definida como

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^s_\delta(A).$$

As demonstrações dos resultados abaixo podem ser vistas em [EG].

**Teorema 3.1.2.** *Propriedades elementares da medida de Hausdorff:*

*(i) $\mathcal{H}^s$ é uma medida regular, para $0 \leq s < \infty$.*

*(ii)* $\mathcal{H}^0$ *é a medida de contagem.*

*(iii)* $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$ *em* $\mathbb{R}^n$.

*(iv)* $\mathcal{H}^s \equiv 0$ *em* $\mathbb{R}^n$ *para todo* $s > n$.

*(v)* $\mathcal{H}^s(\lambda A) = \lambda^s \mathcal{H}^s(A)$ *para todo* $\lambda > 0$, $A \subset \mathbb{R}^n$.

*(vi)* $\mathcal{H}^s(L(A)) = \mathcal{H}^s(A)$ *para toda isometria afim* $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$.

**Lema 3.1.3.** *Seja* $A \subset \mathbb{R}^n$ *e* $0 \leq s < t < \infty$.

*(i) Se* $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, *então* $\mathcal{H}^t(A) = 0$.

*(ii) Se* $\mathcal{H}^t(A) > 0$, *então* $\mathcal{H}^s(A) = \infty$.

*Demonstração.* Seja $\mathcal{H}^s(A) < \infty$ e $\delta > 0$. Então existe uma coleção de conjuntos $\{C_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que diam $C_j \leq \delta$, $A \subset \displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j$ e

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s)(\text{diam } C_j)^s \leq \mathcal{H}^s_\delta(A) + 1 \leq \mathcal{H}^s(A) + 1.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^t_\delta(A) &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(t)(\text{diam } C_j)^t \\
&= \frac{\alpha(t)}{\alpha(s)} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s)(\text{diam } C_j)^s(\text{diam } C_j)^{t-s} \\
&\leq \frac{\alpha(t)}{\alpha(s)} \delta^{t-s} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s)(\text{diam } C_j)^s \\
&\leq \frac{\alpha(t)}{\alpha(s)} \delta^{t-s}(\mathcal{H}^s(A) + 1).
\end{aligned}$$

Fazendo $\delta \to 0$, obtemos $\mathcal{H}^t(A) = 0$. O item (ii) é apenas a contrapositiva de (i). $\square$

Note que $\mathcal{H}^s$ não é uma medida de Radon em $\mathbb{R}^n$ se $0 \leq s < n$, já que, por exemplo, $\mathcal{H}^s(B[0, 1]) = \infty$, pelo Teorema 3.1.2 (iii) e pelo Lema 3.1.3 (ii).

**Definição 3.1.4.** A *dimensão de Hausdorff* de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é definida como

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{dim}(A) &= \inf\{0 \leq s < \infty : \mathcal{H}^s(A) = 0\} = \inf\{0 \leq s < \infty : \mathcal{H}^s(A) < \infty\} \\
&= \sup\{0 \leq s < \infty : \mathcal{H}^s(A) = \infty\} = \sup\{0 \leq s < \infty : \mathcal{H}^s(A) > 0\}.
\end{aligned}$$

**Observação 3.1.5.** Note que $\mathcal{H}_{dim}(A) \leq n$. Seja $s = \mathcal{H}_{dim}(A)$. Então $\mathcal{H}^t(A) = 0$ para todo $t > s$ e $\mathcal{H}^t(A) = \infty$ para todo $t < s$, enquanto $0 \leq \mathcal{H}^s(A) \leq \infty$. Se, para um conjunto $A$, existir $t$ tal que $0 < \mathcal{H}^t(A) < \infty$, então $t = \mathcal{H}_{dim}(A)$. Além disso, $\mathcal{H}_{dim}(A)$ não é, necessariamente, um número inteiro. Exemplos de conjuntos de Cantor com dimensão de Hausdorff não-inteira podem ser vistos em [Mat]. Mesmo se $\mathcal{H}_{dim}(A) = k$ for um número inteiro e $0 < \mathcal{H}^k(A) < \infty$, $A$ pode não ser algum tipo de "superfície de dimensão $k$". No entanto, se $A$ é uma superfície de dimensão $k$ suficientemente regular em $\mathbb{R}^n$, então $\mathcal{H}^k(A)$ é igual à "área da superfície de dimensão $k$".

**Exemplo 3.1.6.** Em [EG, Capítulo 3] é demonstrada a chamada *Fórmula de Área*, que pode ser usada, por exemplo, para mostrar que, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ é Lipschitz e injetora, e $C = f([a, b])$, para $-\infty < a < b < \infty$, então

$$\mathcal{H}^1(C) = \int_a^b |f'|\, dt = \text{ "comprimento" da curva } C.$$

Ou ainda, se $g : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ é Lipschitz e, para $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ aberto, $G = \{(x, g(x)) : x \in U\} \subset \mathbb{R}^n$ é o gráfico de $g$ em $U$, então

$$\mathcal{H}^{n-1}(G) = \int_U \sqrt{1 + |\nabla g|^2}\, dx = \text{ "área da superfície" } G.$$

Também em [EG, Capítulo 3] é demonstrada a chamada *Fórmula de Co-área.* Uma de suas aplicações é a seguinte proposição:

**Proposição 3.1.7.** *Seja $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} g\, dx = \int_0^\infty \left( \int_{\partial B(0,r)} g\, d\mathcal{H}^{n-1} \right) dr.$$

*Em particular, temos que*

$$\frac{d}{dr} \left( \int_{B(0,r)} g\, dx \right) = \int_{\partial B(0,r)} g\, d\mathcal{H}^{n-1}$$

*para $\mathcal{L}^1$-q.t.p. $r > 0$.*

Por vezes, é mais prático trabalhar com o conteúdo de Hausdorff, $\mathcal{H}^s_\infty$, do que com a medida de Hausdorff, $\mathcal{H}^s$. A Proposição a seguir apresenta uma relação entre as duas quantidades.

**Proposição 3.1.8.** $\mathcal{H}^s_\infty(E) = 0$ *se, e somente se,* $\mathcal{H}^s(E) = 0$.

*Demonstração.* Da definição, temos que $0 \leq \mathcal{H}^s_\infty(E) \leq \mathcal{H}^s(E)$. Logo, se $\mathcal{H}^s(E) = 0$, então $\mathcal{H}^s_\infty(E) = 0$.

Suponha que $\mathcal{H}^s(E) > 0$ e tome $0 < c < \mathcal{H}^s(E)$. Escolha $\delta > 0$ pequeno o suficiente para que $c < \mathcal{H}^s_\delta(E)$. Dada uma cobertura $\{C_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $E$, exatamente um dos seguintes casos acontece: $(i)$ diam $C_j \le \delta$, para todo $j \in \mathbb{N}$, ou $(ii)$ existe ao menos um $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que diam $C_{j_0} > \delta$. Caso $(i)$ aconteça, temos

$$c < \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s)(\text{diam } C_j)^s.$$

Na ocorrência de $(ii)$, então

$$0 < \alpha(s)\delta^s < \alpha(s)(\text{diam } C_{j_0})^s \le \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s)(\text{diam } C_j)^s.$$

Portanto, dada qualquer cobertura $\{C_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $E$, temos

$$\min\{c, \alpha(s)\delta^s\} < \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s)(\text{diam } C_j)^s,$$

concluindo então que

$$0 < \min\{c, \alpha(s)\delta^s\} \le \mathcal{H}^s_\infty(E).$$

□

O próximo lema, demonstrado em [Maz, p. 33], será utilizado na demonstração do teorema de recobrimento a seguir.

**Lema 3.1.9.** *Seja $G \subset \mathbb{R}^n$ aberto, com fronteira $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ (veja a Definição 5.1.1), e seja*

$$2\mathcal{L}^n(B(0,r) \cap G) = \mathcal{L}^n(B(0,r)).$$

*Então*

$$\mathcal{H}^{n-1}(B(0,r) \cap \partial G) \ge cr^{n-1},$$

*no qual $c = c(n)$.*

**Teorema 3.1.10.** *Seja $G \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então existe um recobrimento de $G$ por uma sequência de bolas com raios $r_j$, $j = 1, 2, \ldots$, tais que*

$$\sum_j r_j^{n-1} \le c\mathcal{H}^{n-1}(\partial G),$$

*no qual $c = c(n)$.*

*Demonstração.* Afirmamos que cada ponto $x \in G$ é centro de uma bola $B(x, r_x)$ tal que

$$\frac{\mathcal{L}^n(B(x, r_x) \cap G)}{\mathcal{L}^n(B(x, r_x))} = \frac{1}{2}.$$

De fato, fixado $x \in G$, a função

$$h(r) = \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \cap G)}{\mathcal{L}^n(B(x, r))}$$

é contínua, pois a medida de Lebesgue da bola é contínua com respeito ao raio. Além disso, $h(r) = 1$ para valores pequenos de $r$, pois $G$ é aberto, e $\lim_{r\to\infty} h(r) = 0$, pois $G$ é limitado. Então, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $r_x > 0$ tal que $h(r_x) = 1/2$.

Tome a coleção $\{B(x, 3r_x) : x \in G\}$. Pelo Teorema de Recobrimento de Besicovitch (Teorema 1.3.41), existe uma sequência de bolas disjuntas $B(x_j, r_{x_j})$ tal que

$$G \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B(x_j, 3r_{x_j}).$$

Do Lema 3.1.9,

$$\mathcal{H}^{n-1}(B(x_j, r_{x_j}) \cap \partial G) \geq c r_{x_j}^{n-1}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{n-1}(\partial G) &\geq \mathcal{H}^{n-1}([\cup_j B(x_j, r_{x_j})] \cap \partial G) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}^{n-1}(B(x_j, r_{x_j}) \cap \partial G) \\
&\geq c \sum_{j=1}^{\infty} r_{x_j}^{n-1} = 3^{1-n} c \sum_{j=1}^{\infty} (3r_{x_j})^{n-1}.
\end{aligned}$$

Logo, $\{B(x_j, 3r_{x_j})\}$ é o recobrimento desejado. $\square$

O próximo teorema apresenta uma relação entre a medida de Hausdorff $\mathcal{H}^{n-1}$ e os campos vetoriais de medida-divergência.

**Teorema 3.1.11.** *Seja $F \in L^\infty(U)$, com $\mathrm{div} F = \mu$ para alguma medida de Radon com sinal $\mu$. Então, $|\mu| \ll \mathcal{H}^{n-1}$ em $U$.*

*Demonstração.* Seja $A \subset U$ tal que $\mathcal{H}^{n-1}(A) = 0$. Como $\mu$ pode ser decomposta nas partes positiva, $\mu^+$, e negativa, $\mu^-$, concentradas em conjuntos disjuntos $U_+$ e $U_-$, respectivamente, tais que $U_+ \cup U_- = U$, podemos supor que $A \subset U_+$ de modo que

$$|\mu|(A) = \mu^+(A) = \mu(A).$$

Além disso, como $\mu$ é uma medida de Radon e $\mathcal{H}^{n-1}$ é uma medida regular, basta provar a afirmação para um conjunto $A$ compacto.

Dado $\varepsilon > 0$, temos que $\mathcal{H}^{n-1}_{\varepsilon}(A) = 0$ e, então, existe uma coleção de bolas $\{B(x_j, r_j)\}$ (que, por compacidade, pode ser tomada finita), com $2r_j \leq \varepsilon$, tal que

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{J} B(x_j, r_j) \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{J} \alpha(n-1)(2r_j)^{n-1} < \varepsilon.$$

Agora, aplicamos a fórmula de Gauss-Green dada em [CF1, Teorema 2.2, fórmula (2.9)] com $\Omega = \Omega_\varepsilon = \bigcup_{j=1}^{J} B(x_j, r_j)$ e qualquer $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi \equiv 1$ em $\overline{\Omega_\varepsilon}$. Então,

$$\begin{aligned}
|\mu(\Omega_\varepsilon)| = \left| \int_{\Omega_\varepsilon} \operatorname{div} F \right| &= \left| \operatorname{div} F|_{\Omega_\varepsilon}(\varphi) \right| \\
&= \left| \int_{\partial \Omega_\varepsilon} \varphi F \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{\Omega_\varepsilon} F \cdot \nabla \varphi \right| \\
&= \left| \int_{\partial \Omega_\varepsilon} \varphi F \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1} \right| \\
&\leq \int_{\partial \Omega_\varepsilon} |F| \, d\mathcal{H}^{n-1} \\
&\leq \|F\|_\infty \mathcal{H}^{n-1}(\partial \Omega_\varepsilon) \\
&\leq \|F\|_\infty \sum_{j=1}^{J} \mathcal{H}^{n-1}(\partial B(x_j, r_j)) \\
&\lesssim \|F\|_\infty \sum_{j=1}^{J} \alpha(n-1)(2r_j)^{n-1} \\
&< \varepsilon \|F\|_\infty.
\end{aligned}$$

Temos que $\chi_{\Omega_\varepsilon} \to \chi_A$ pontualmente em $U$ quando $\varepsilon \to 0$. Com efeito, se $x \in A$, então $\chi_{\Omega_\varepsilon}(x) = 1$, $\forall \varepsilon > 0$. Se $x \notin A$, então $\chi_{\Omega_\varepsilon}(x) = 0$, para $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(x, A) = \inf\{\|x - y\| : y \in A\}$. Portanto,

$$|\mu|(A) = \mu(A) = 0.$$

$\square$

## 3.2 Lema de Frostman

Para provar o próximo resultado, introduziremos a noção de cubos diádicos. Em $\mathbb{R}^n$, definimos o cubo unitário aberto na direita como o conjunto $[0,1)^n$, e denotamos por $\mathcal{D}_0$ a coleção dos cubos em $\mathbb{R}^n$ que são congruentes a $[0,1)^n$ cujos vértices estão no reticulado $\mathbb{Z}^n$. Se dilatarmos essa família de cubos por um fator de $2^{-k}$, obtemos a coleção $\mathcal{D}_k$, $k \in \mathbb{Z}$, dos cubos abertos na direita cujos vértices são pontos adjacentes do reticulado $(2^{-k}\mathbb{Z})^n$. Os cubos em $\cup_{k\in\mathbb{Z}}\mathcal{D}_k$ são chamados *cubos diádicos*. São imediatas da construção acima as seguintes propriedades:

(i) dado $x \in \mathbb{R}^n$, existe um único cubo em cada família $\mathcal{D}_k$ que contém $x$;

(ii) quaisquer dois cubos diádicos são, ou disjuntos, ou um completamente contido no outro;

(iii) um cubo diádico em $\mathcal{D}_k$ está contido em um único cubo de cada família $\mathcal{D}_j$, $j < k$, e contém $2^n$ cubos diádicos de $\mathcal{D}_{k+1}$.

O resultado abaixo, conhecido como Lema de Frostman, será usado para demonstrar os teoremas de caracterização de singularidades removíveis.

**Teorema 3.2.1** (Lema de Frostman)**.** *Seja $B \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto. Então $\mathcal{H}^s(B) > 0$ se, e somente se, existe uma medida de Radon $\mu$, concentrada em $B$, com $0 < \mu(B) < \infty$, tal que $\mu(B(x,r)) \lesssim r^s$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$. Mais ainda, podemos encontrar $\mu$ de modo que $\mu(B) \geq c\mathcal{H}^s_\infty(B)$, no qual $c > 0$ depende apenas de $s$.*

*Demonstração.* Se tal $\mu$ existe, tome uma coleção $\{B(x_j, r_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $B \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B(x_j, r_j)$. Então,

$$\begin{aligned} \mu(B) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B(x_j, r_j)) &\lesssim \sum_{j=1}^{\infty} r_j^s \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}{\pi^{s/2}} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s)(2r_j)^s. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$0 < \mu(B) \lesssim \mathcal{H}^s_\infty(B)$$

e, pela Proposição 3.1.8,

$$\mathcal{H}^s(B) > 0.$$

Para a recíproca, a menos de uma translação, podemos assumir que $B$ está contido em algum cubo diádico. Fixamos $Q_\zeta \in \mathcal{D}_\zeta$ o menor cubo diádico que contém $B$.

Como $\mathcal{H}^s(B) > 0$, pela Proposição 3.1.8, $\mathcal{H}^s_\infty(B) > 0$. Logo, existe $c > 0$, dependendo apenas de $s$, tal que, para $b = c\mathcal{H}^s_\infty(B)$,

$$\sum_j (\operatorname{diam} Q_j)^s \geq b, \tag{3.1}$$

sempre que os cubos $\{Q_j\}$ formarem uma cobertura de $B$.

Para $m = 1, 2, \ldots$, defina a medida $\mu_m^m$ em $\mathbb{R}^n$ de modo que, para cada $Q \in \mathcal{D}_m$,

$$\mu_m^m \llcorner Q = \begin{cases} 2^{-ms}\mathcal{L}^n(Q)^{-1}(\mathcal{L}^n \llcorner Q), & \text{se } B \cap Q \neq \varnothing \\ 0, & \text{se } B \cap Q = \varnothing. \end{cases}$$

A seguir, modificando a medida $\mu_m^m$, definimos a medida $\mu_{m-1}^m$ de modo que, para cada $Q \in \mathcal{D}_{m-1}$,

$$\mu_{m-1}^m \llcorner Q = \begin{cases} \mu_m^m \llcorner Q, & \text{se } \mu_m^m(Q) \leq 2^{-(m-1)s} \\ 2^{-(m-1)s}\mu_m^m(Q)^{-1}(\mu_m^m \llcorner Q), & \text{se } \mu_m^m(Q) > 2^{-(m-1)s}. \end{cases}$$

Continuando a construção, $\mu_{m-k-1}^m$ é obtida a partir de $\mu_{m-k}^m$ fazendo, para cada $Q \in \mathcal{D}_{m-k-1}$,

$$\mu_{m-k-1}^m \llcorner Q = \lambda(Q)(\mu_{m-k}^m \llcorner Q),$$

no qual

$$\lambda(Q) = \min\{1, 2^{-(m-k-1)s}\mu_{m-k}^m(Q)^{-1}\}.$$

Paramos a construção na etapa em que $B \subset Q_\zeta \in \mathcal{D}_{m-k_0}$ (ou seja, $m - k_0 = \zeta$) e definimos $\mu^m = \mu_{m-k_0}^m$. Mostremos que $\mu^m$ satisfaz

$$\mu^m(Q) \leq 2^{-(m-k)s}, \quad \text{para } Q \in \mathcal{D}_{m-k},\ k \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.2}$$

Se $Q \in \mathcal{D}_{m-k}$ e $k < k_0$, então existe um único $Q_0 \in \mathcal{D}_{m-k_0}$ tal que $Q \subset Q_0$. Assim,

$$\begin{aligned} \mu^m(Q) &= (\mu_{m-k_0}^m \llcorner Q_0)(Q) \\ &= \lambda(Q_0)(\mu_{m-(k_0-1)}^m \llcorner Q_0)(Q) \\ &\leq (\mu_{m-(k_0-1)}^m \llcorner Q_0)(Q) \\ &= \mu_{m-(k_0-1)}^m(Q). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Se $k < k_0 - 1$, argumento similar conclui que

$$\mu_{m-(k_0-1)}^m(Q) \leq \mu_{m-(k_0-2)}^m(Q).$$

Repetimos tal procedimento $k_0 - k$ vezes até obter $\mu^m(Q) \leq \mu_{m-k}^m(Q)$. Como $Q \in \mathcal{D}_{m-k}$, então

$$\begin{aligned} \mu^m(Q) \leq \mu_{m-k}^m(Q) &= (\mu_{m-k}^m \llcorner Q)(Q) \\ &= \lambda(Q)(\mu_{m-(k-1)}^m \llcorner Q)(Q) \\ &\leq 2^{-(m-k)s}\mu_{m-(k-1)}^m(Q)^{-1}(\mu_{m-(k-1)}^m \llcorner Q)(Q) \\ &= 2^{-(m-k)s}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

No caso $k = k_0$, o argumento usado em (3.4) mostra que, se $Q \in \mathcal{D}_{m-k_0}$,

$$\mu^m(Q) \leq 2^{-(m-k_0)s}.$$

Mais do que isso, podemos mostrar que, se $Q \neq Q_\zeta$ é um cubo da mesma família $\mathcal{D}_{m-k_0}$, então $\mu^m(Q) = 0$. De fato, tal como em (3.3),

$$\mu^m(Q) \leq \mu_{m-(k_0-1)}^m(Q).$$

Mas $Q = \bigcup_{j=1}^{2^n} Q^j_{k_0-1}$, no qual $Q^j_{k_0-1} \in \mathcal{D}_{m-(k_0-1)}$, de modo que

$$\mu^m_{m-(k_0-1)}(Q) = \sum_{j=1}^{2^n} \mu^m_{m-(k_0-1)}(Q^j_{k_0-1}),$$

e repetindo esse processo, obtemos

$$\mu^m(Q) \leq \sum_{j=1}^{2^{nk_0}} \mu^m_m(Q^j),$$

no qual $Q^j \in \mathcal{D}_m$ são tais que $Q = \bigcup_{j=1}^{2^{nk_0}} Q^j$. Mas como $Q \cap Q_\zeta = \varnothing$ e $B \subset Q_\zeta$, então $B \cap Q^j = \varnothing$, de maneira que $\mu^m_m(Q^j) = 0$ e, portanto, $\mu^m(Q) = 0$.

Vamos agora considerar o caso em que $k > k_0$. Se $Q \in \mathcal{D}_{m-k}$, então $Q = \bigcup_{j=1}^{2^{n(k-k_0)}} Q^j$, no qual $Q^j \in \mathcal{D}_{m-k_0}$. Se $B \cap Q = \varnothing$, então $\mu^m(Q) = 0$. Caso contrário,

$$\mu^m(Q) = \mu^m(Q_\zeta) \leq 2^{-(m-k_0)s} < 2^{-(m-k)s}. \tag{3.5}$$

Dessa forma, mostramos (3.2).

Mostremos agora que, para cada $x \in B$, existe $k \in \mathbb{Z}_+$ e $Q \in \mathcal{D}_{m-k}$ tal que $x \in Q$ e

$$\mu^m(Q) = 2^{-(m-k)s} = n^{-s/2}(\text{diam } Q)^s. \tag{3.6}$$

Note que, por (3.5), tal $k$ deve ser menor ou igual a $k_0$. Fixado $x \in B$, para cada $k$ existe um único $Q \in \mathcal{D}_{m-k}$ tal que $x \in Q$.

Comecemos por $k = k_0$ e tomemos $Q_\zeta \in \mathcal{D}_{m-k_0}$ tal que $x \in Q_\zeta$. Se $\mu^m(Q_\zeta) = 2^{-(m-k_0)s}$, encontramos o que desejávamos. Por outro lado, se $\mu^m(Q_\zeta) < 2^{-(m-k_0)s}$, então

$$\lambda(Q_\zeta) = \mu^m(Q_\zeta)(\mu^m_{m-(k_0-1)}(Q_\zeta))^{-1} < 2^{-(m-k_0)s}(\mu^m_{m-(k_0-1)}(Q_\zeta))^{-1}, \tag{3.7}$$

de modo que $\lambda(Q_\zeta) = 1$ e, por isso,

$$\mu^m(Q_\zeta) = \mu^m_{m-(k_0-1)}(Q_\zeta).$$

Passamos então para $k = k_0 - 1$ e tomamos $Q_{k_0-1} \in \mathcal{D}_{m-(k_0-1)}$ tal que $x \in Q_{k_0-1}$. Se $\mu^m(Q_{k_0-1}) = 2^{-(m-(k_0-1))s}$, temos o que queríamos. Já se $\mu^m(Q_{k_0-1}) < 2^{-(m-(k_0-1))s}$, então, como $Q_{k_0-1} \subset Q_\zeta$,

$$\begin{aligned}
\mu^m_{m-(k_0-1)}(Q_{k_0-1}) &= \lambda(Q_\zeta)\mu^m_{m-(k_0-1)}(Q_{k_0-1}) \\
&= \lambda(Q_\zeta)(\mu^m_{m-(k_0-1)} \llcorner Q_\zeta)(Q_{k_0-1}) \\
&= (\mu^m_{m-k_0} \llcorner Q_\zeta)(Q_{k_0-1}) \\
&= \mu^m(Q_{k_0-1}) \\
&< 2^{-(m-(k_0-1))s}.
\end{aligned}$$

Por lógica semelhante à usada em (3.7), concluímos que $\lambda(Q_{k_0-1}) = 1$ e

$$\mu^m(Q_{k_0-1}) = \mu^m_{m-(k_0-1)}(Q_{k_0-1}) = \mu^m_{m-(k_0-2)}(Q_{k_0-1}).$$

O processo pode se repetir, sem resultado, até no máximo o caso $k = 0$, quando, tomando $Q_0 \in \mathcal{D}_m$ tal que $x \in Q_0$, temos, pelo mesmo processo feito acima,

$$\mu^m(Q_0) = \mu^m_m(Q_0) = 2^{-ms},$$

pois $B \cap Q_0 \neq \varnothing$. Assim, (3.6) está demonstrado.

Escolhendo, para cada $x \in B$, o maior $Q$ com tal propriedade, obtemos cubos disjuntos $Q_1, \ldots, Q_\ell$ tais que $B \subset \bigcup_{j=1}^{\ell} Q_j$ e

$$\mu^m(\mathbb{R}^n) = \sum_{j=1}^{\ell} \mu^m(Q_j) = n^{-s/2} \sum_{j=1}^{\ell} (\text{diam } Q_j)^s \geq n^{-s/2} b,$$

por (3.1).

Defina $\nu^m = \mu^m(\mathbb{R}^n)^{-1}\mu^m$. Então $\nu^m(\mathbb{R}^n) = 1$ e

$$\nu^m(Q) \leq b^{-1} n^{s/2} 2^{-(m-k)s}, \tag{3.8}$$

para $Q \in \mathcal{D}_{m-k}$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

Pelo Teorema 1.3.29, a sequência $(\nu^m)$ possui uma subsequência fracamente convergente $\nu^{m_j} \xrightarrow{W} \nu$, no qual $\nu$ é uma medida de Radon positiva. Dado $E \subset \mathbb{R}^n$ tal que $E \cap B = \varnothing$, existe $m$ grande o suficiente para que $E$ seja coberto por cubos diádicos $Q \in \mathcal{D}_m$ tais que $Q \cap B = \varnothing$, de modo que $\mu^m_m(E) = 0$ e, portanto, $\mu^m(E) = 0 = \nu^m(E)$. Disso decorre que $\nu$ é concentrada em $B$ e $\nu(B) = 1$.

Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ e $0 < r < \infty$, a bola $B(x,r)$ está contida no interior $U$ de uma união $\bigcup_{j=1}^{2^n} Q_j$ de $2^n$ cubos $Q_j \in \mathcal{D}_p$ com diam $Q_j = n^{1/2}2^{-p} \leq 4n^{1/2}r$. De fato, considere a bola $B(0,r)$ e escolha $p$ tal que $2^{-(p+1)} \leq 2r < 2^{-p}$, de modo que $2^{-p} \leq 4r$. Assim, $B(0,r)$ está contida no interior da união dos $2^n$ cubos de $\mathcal{D}_p$ que possuem um vértice na origem, e a quantidade de cubos necessários para cobrir a bola não aumenta com translações, visto que o diâmetro da bola é menor que o comprimento dos lados dos cubos.

Então, para $m \geq p$, podemos utilizar (3.8), obtendo

$$\nu^m(U) \leq \sum_{j=1}^{2^n} \nu^m(Q_j) \leq 2^n b^{-1} n^{s/2} 2^{-ps} \leq 2^{n+2s} b^{-1} n^{s/2} r^s,$$

e, pelo Teorema 1.3.30,

$$\nu(B(x,r)) \leq \nu(U) \leq \liminf_{j\to\infty} \nu^{m_j}(U) \leq 2^{n+2s} b^{-1} n^{s/2} r^s.$$

$\square$

# Capítulo 4

# Capacidade de Sobolev

Neste capítulo introduzimos o conceito de capacidade, fundamental para o estudo do comportamento local de funções em espaços de Sobolev. Os livros [AH], [HKM], [K] e [T] trazem um maior aprofundamento no assunto.

Primeiro relembramos que, para $1 \leq p < \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, o *espaço de Sobolev* $W^{1,p}(\Omega)$ é definido como o completamento de

$$V = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) : \|\varphi\|_{1,p} < \infty\}$$

com respeito à norma

$$\|\varphi\|_{1,p} = \left(\int_\Omega |\varphi|^p \, dx\right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |\nabla\varphi|^p \, dx\right)^{1/p}.$$

Definimos o espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ como o fecho de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ em $W^{1,p}(\Omega)$. Em [HKM, Teorema 1.27] encontramos demonstrado o seguinte resultado:

**Teorema 4.1.** $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) = W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Utilizaremos adiante o seguinte teorema, encontrado em [HKM, Teorema 1.32]:

**Teorema 4.2.** *Sejam $1 < p < \infty$ e $(\varphi_j)$ uma sequência limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Se $\varphi_j \to \varphi$ q.t.p., então $\varphi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.*

**Definição 4.3.** Para $1 \leq p < \infty$, a $(1,p)$-*capacidade de Sobolev* de um conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ é definida por

$$\operatorname{Cap}_{1,p}(E) = \inf_{\varphi \in \mathscr{A}_p(E)} \int_{\mathbb{R}^n} \left(|\varphi|^p + |\nabla\varphi|^p\right) dx,$$

no qual

$$\mathscr{A}_p(E) = \{\varphi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n) : 0 \leq \varphi \leq 1,\ \varphi = 1 \text{ numa vizinhança aberta de } E\}.$$

Se $\mathscr{A}_p(E) = \varnothing$, definimos $\operatorname{Cap}_{1,p}(E) = \infty$. Note que $\operatorname{Cap}_{1,p}(E) \geq 0$ para todo $E \subset \mathbb{R}^n$.

Para conjuntos compactos, temos o seguinte resultado:

**Lema 4.4.** *Se $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto, então*

$$\mathrm{Cap}_{1,p}(K) = \inf_{\varphi \in \mathscr{A}_p^0(K)} \int_{\mathbb{R}^n} \left(|\varphi|^p + |\nabla \varphi|^p\right) dx,$$

*no qual $\mathscr{A}_p^0(K) = \mathscr{A}_p(K) \cap \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

*Demonstração.* A desigualdade "$\leq$" é imediata, pois $\mathscr{A}_p^0(K) \subset \mathscr{A}_p(K)$. Para a outra desigualdade, considere $\varphi \in \mathscr{A}_p(K)$. Como, pelo Teorema 4.1, $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) = W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, podemos escolher uma sequência de funções $(\phi_j)$ em $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \phi_j \leq 1$, que converge para $\varphi$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Seja $U \subset\subset \mathbb{R}^n$ uma vizinhança aberta de $K$ tal que $\varphi = 1$ em $U$. Seja $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \psi \leq 1$, tal que $\psi = 1$ em $\mathbb{R}^n \setminus U$ e $\psi = 0$ num aberto $V$ tal que $K \subset V \subset U$. Defina $\psi_j = 1 - (1 - \phi_j)\psi$. Mostremos que $\psi_j \in \mathscr{A}_p^0(K)$ e que, passando a uma subsequência, $\psi_j \to \varphi$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

É claro que $\psi_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Em $\mathbb{R}^n \setminus U$, temos $\psi_j = \phi_j$. Assim,

$$\begin{aligned} supp(\psi_j) &= \left[supp(\psi_j) \cap \overline{U}\right] \cup \left[supp(\psi_j) \cap (\mathbb{R}^n \setminus U)\right] \\ &= \left[supp(\psi_j) \cap \overline{U}\right] \cup \left[supp(\phi_j) \cap (\mathbb{R}^n \setminus U)\right] \end{aligned}$$

é compacto, pois $\overline{U}$ e $supp(\phi_j)$ são compactos. Portanto, $\psi_j \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Além disso, em $V$, $\psi_j = 1$.

Como $\phi_j \to \varphi$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, então $\phi_j \to \varphi$ e $\nabla \phi_j \to \nabla \varphi$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$. Então, passando a uma subsequência, $\phi_j \to \varphi$ e $\nabla \phi_j \to \nabla \varphi$ q.t.p. (Teorema 1.3.37). Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\psi_j - \varphi|^p \, dx &= \int_U |\psi_j - \varphi|^p \, dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus U} |\psi_j - \varphi|^p \, dx \\ &= \int_U |\psi_j - 1|^p \, dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus U} |\phi_j - \varphi|^p \, dx \\ &= \int_U |(1 - \phi_j)\psi|^p \, dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus U} |\phi_j - \varphi|^p \, dx \end{aligned}$$

no qual a segunda parcela converge a zero pois $\phi_j \to \varphi$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$, e a primeira converge a zero pelo Teorema da Convergência Dominada, já que $\phi_j \to 1$ q.t.p. em $U$, e $\overline{U}$ é compacto. Analogamente,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \psi_j - \nabla \varphi|^p \, dx &= \int_U |\nabla \psi_j - \nabla \varphi|^p \, dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus U} |\nabla \psi_j - \nabla \varphi|^p \, dx \\ &= \int_U |\nabla \psi_j|^p \, dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus U} |\nabla \phi_j - \nabla \varphi|^p \, dx \\ &= \int_U |\psi \nabla \phi_j - (1 - \phi_j) \nabla \psi|^p \, dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus U} |\nabla \phi_j - \nabla \varphi|^p \, dx, \end{aligned}$$

no qual a segunda parcela converge a zero pois $\nabla\phi_j \to \nabla\varphi$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$, e a primeira converge a zero pelo Teorema da Convergência Dominada, já que $\phi_j \to 1$ e $\nabla\phi_j \to 0$ q.t.p. em $U$, e $\overline{U}$ é compacto. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que

$$\inf_{\phi\in\mathscr{A}_p^0(K)} \int_{\mathbb{R}^n} \left(|\phi|^p + |\nabla\phi|^p\right) dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(|\psi_j|^p + |\nabla\psi_j|^p\right) dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(|\varphi|^p + |\nabla\varphi|^p\right) dx + \varepsilon.$$

Tomando o ínfimo sobre $\varphi \in \mathscr{A}_p(K)$, obtemos

$$\inf_{\phi\in\mathscr{A}_p^0(K)} \int_{\mathbb{R}^n} \left(|\phi|^p + |\nabla\phi|^p\right) dx \leq \mathrm{Cap}_{1,p}(K) + \varepsilon.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$, temos o resultado. $\square$

Apresentamos a seguir uma outra maneira de definir a capacidade. Provaremos mais adiante, no Teorema 4.9, que, quando $1 \leq p < n$, ambas as definições são, de certo modo, comparáveis.

**Definição 4.5.** Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $K \subset \Omega$ compacto, e

$$\mathscr{B}(K,\Omega) = \{\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) : 0 \leq \varphi \leq 1,\, \varphi = 1 \text{ em } K\}.$$

Definimos

$$\mathrm{cap}_{1,p}(K,\Omega) = \inf_{\varphi\in\mathscr{B}(K,\Omega)} \int_\Omega |\nabla\varphi|^p\, dx.$$

Seja $U \subset \Omega$ aberto. Definimos

$$\mathrm{cap}_{1,p}(U,\Omega) = \sup\{\mathrm{cap}_{1,p}(K,\Omega) : K \subset U,\ K \text{ compacto}\}.$$

Finalmente, para um conjunto $E \subset \Omega$ arbitrário, definimos

$$\mathrm{cap}_{1,p}(E,\Omega) = \inf\{\mathrm{cap}_{1,p}(U,\Omega) : E \subset U \subset \Omega,\ U \text{ aberto}\}.$$

Quando $\Omega = \mathbb{R}^n$, denotaremos $\mathrm{cap}_{1,p}(\cdot,\mathbb{R}^n) = \mathrm{cap}_{1,p}(\cdot)$.

**Teorema 4.6.** *Se $1 < p < \infty$, então $\mathrm{Cap}_{1,p}$ satisfaz as seguintes propriedades:*

*(i)* $\mathrm{Cap}_{1,p}(\varnothing) = 0$;

*(ii) se $E_1 \subset E_2$, então $\mathrm{Cap}_{1,p}(E_1) \leq \mathrm{Cap}_{1,p}(E_2)$;*

*(iii)* $\mathrm{Cap}_{1,p}(\cup_{j=1}^\infty E_j) \leq \sum_{j=1}^\infty \mathrm{Cap}_{1,p}(E_j)$ *sempre que $E_j \subset \mathbb{R}^n, j \in \mathbb{N}$.*

*(iv) se $(K_j)$ é uma sequência decrescente de conjuntos compactos com $K = \cap_j K_j$, então*

$$\mathrm{Cap}_{1,p}(K) = \lim_{j\to\infty} \mathrm{Cap}_{1,p}(K_j);$$

*(v) se $(E_j)$ é uma sequência crescente de conjuntos com $E = \cup_j E_j$, então*

$$\mathrm{Cap}_{1,p}(E) = \lim_{j\to\infty} \mathrm{Cap}_{1,p}(E_j);$$

*(vi) para todo conjunto boreliano $E$,*

$$\mathrm{Cap}_{1,p}(E) = \sup\{\mathrm{Cap}_{1,p}(K) : K \subset E, K \textit{ compacto}\}.$$

*Demonstração.* Se $\varphi \equiv 0$, então $\varphi \in \mathscr{A}_p(\varnothing)$. Logo,

$$\mathrm{Cap}_{1,p}(\varnothing) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(|\varphi|^p + |\nabla\varphi|^p\right) dx = 0.$$

Sejam $E_1 \subset E_2$. É claro que $\mathscr{A}_p(E_2) \subset \mathscr{A}_p(E_1)$ e, portanto, $\mathrm{Cap}_{1,p}(E_1) \leq \mathrm{Cap}_{1,p}(E_2)$. Para $(iii)$, podemos assumir que $\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{Cap}_{1,p}(E_j) < \infty$ pois, caso contrário, nada temos a provar. Seja $\varepsilon > 0$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, escolha $\varphi_j \in \mathscr{A}_p(E_j)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(|\varphi_j|^p + |\nabla\varphi_j|^p\right) dx < \mathrm{Cap}_{1,p}(E_j) + \varepsilon 2^{-j}.$$

Mostremos que $\psi = \sup_j \varphi_j \in \mathscr{A}_p(\cup_{j=1}^{\infty} E_j)$. Primeiro, mostraremos que $\psi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Seja

$$\psi_k = \max_{1\leq j\leq k} \varphi_j,$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Então $(\psi_k)$ é uma sequência crescente tal que $\psi_k \to \psi$ pontualmente quando $k \to \infty$. Mais ainda,

$$|\psi_k| = \big|\max_{1\leq j\leq k} \varphi_j\big| \leq \big|\sup_j \varphi_j\big| = |\psi|$$

e

$$|\nabla\psi_k| \leq \max_{1\leq j\leq k} |\nabla\varphi_j| \leq \sup_j |\nabla\varphi_j|.$$

Além disso, $(\psi_k)$ é uma sequência limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, pois

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \left(|\psi_k|^p + |\nabla\psi_k|^p\right) dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sup_j |\varphi_j|^p + \sup_j |\nabla\varphi_j|^p\right) dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_j|^p + \sum_{j=1}^{\infty} |\nabla\varphi_j|^p\right) dx \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left(|\varphi_j|^p + |\nabla\varphi_j|^p\right) dx \quad \text{(pelo T. Convergência Monótona)} \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} (\mathrm{Cap}_{1,p}(E_j) + \varepsilon 2^{-j}) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{Cap}_{1,p}(E_j) + \varepsilon < \infty.
\end{aligned}$$

Como $\psi_k \to \psi$ q.t.p., pelo Teorema 4.2 concluímos que $\psi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Como $\varphi_j \in \mathscr{A}_p(E_j)$, existe um aberto $O_j \supset E_j$ tal que $\varphi_j = 1$ em $O_j$. Logo, $\psi = 1$ em $\cup_{j=1}^{\infty} O_j$, que é uma vizinhança de $\cup_{j=1}^{\infty} E_j$, provando que $\psi \in \mathscr{A}_p(\cup_{j=1}^{\infty} E_j)$.

Com isso, concluímos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cap}_{1,p}(\cup_{j=1}^{\infty} E_j) &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(|\psi|^p + |\nabla \psi|^p\right) dx \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left(|\varphi_j|^p + |\nabla \varphi_j|^p\right) dx \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{Cap}_{1,p}(E_j) + \varepsilon,
\end{aligned}$$

e o resultado desejado é obtido fazendo $\varepsilon \to 0$.

Os itens $(iv)$ e $(v)$ serão omitidos aqui, mas seguem a mesma demonstração dada em [HKM, Teorema 2.2]. Já o item $(vi)$ segue do Teorema 2.5 da mesma referência. $\square$

**Observação 4.7.** $\mathrm{Cap}_{1,p}$ é regular exterior, ou seja,

$$\mathrm{Cap}_{1,p}(E) = \inf\{\mathrm{Cap}_{1,p}(O) : E \subset O,\, O \text{ aberto}\}.$$

De fato, pela monotonicidade,

$$\mathrm{Cap}_{1,p}(E) \leq \inf\{\mathrm{Cap}_{1,p}(O) : E \subset O,\, O \text{ aberto}\}.$$

Por outro lado, sejam $\varepsilon > 0$ e $\varphi \in \mathscr{A}_p(E)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(|\varphi|^p + |\nabla \varphi|^p\right) dx < \mathrm{Cap}_{1,p}(E) + \varepsilon.$$

Como $\varphi \in \mathscr{A}_p(E)$, então existe aberto $O \supset E$ tal que $\varphi = 1$ em $O$, de modo que

$$\mathrm{Cap}_{1,p}(\tilde{O}) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(|\varphi|^p + |\nabla \varphi|^p\right) dx < \mathrm{Cap}_{1,p}(E) + \varepsilon,$$

no qual $\tilde{O}$ é um aberto tal que $E \subset \tilde{O} \subset O$. Logo,

$$\inf\{\mathrm{Cap}_{1,p}(O) : E \subset O,\, O \text{ aberto}\} < \mathrm{Cap}_{1,p}(E) + \varepsilon,$$

e a desigualdade desejada é obtida fazendo $\varepsilon \to 0$.

As mesmas propriedades são válidas para $\mathrm{cap}_{1,p}(\cdot, \Omega)$, como demonstrado em [HKM, Teoremas 2.2 e 2.5]:

**Teorema 4.8.** *Se $1 < p < \infty$, e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, então $\mathrm{cap}_{1,p}(\cdot, \Omega)$ satisfaz as seguintes propriedades:*

*(i)* *se* $E_1 \subset E_2 \subset \Omega$*, então* $\operatorname{cap}_{1,p}(E_1, \Omega) \leq \operatorname{cap}_{1,p}(E_2, \Omega)$*;*

*(ii)* *se* $(K_j)$ *é uma sequência decrescente de subconjuntos compactos de* $\Omega$ *com* $K = \cap_j K_j$*, então*

$$\operatorname{cap}_{1,p}(K, \Omega) = \lim_{j\to\infty} \operatorname{cap}_{1,p}(K_j, \Omega);$$

*(iii)* *se* $(E_j)$ *é uma sequência crescente de subconjuntos tal que* $E = \cup_j E_j \subset \Omega$*, então*

$$\operatorname{cap}_{1,p}(E, \Omega) = \lim_{j\to\infty} \operatorname{cap}_{1,p}(E_j, \Omega);$$

*(iv)* *se* $\cup_{j=1}^{\infty} E_j \subset \Omega$*, então* $\operatorname{cap}_{1,p}(\cup_{j=1}^{\infty} E_j, \Omega) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{cap}_{1,p}(E_j, \Omega)$*;*

*(v)* *para todo subconjunto boreliano* $E \subset \Omega$*,*

$$\operatorname{cap}_{1,p}(E, \Omega) = \sup\{\operatorname{cap}_{1,p}(K, \Omega) : K \subset E, K \textit{ compacto}\}.$$

**Teorema 4.9.** *Seja* $1 \leq p < n$*. Se* $E \subset B(x_0, r)$*, então existe uma constante* $c = c(p, n) > 0$ *tal que*

$$(1 + cr^p)^{-1} \operatorname{Cap}_{1,p}(E) \leq \operatorname{cap}_{1,p}(E, B(x_0, 2r)) \leq 4^p(1 + r^{-p}) \operatorname{Cap}_{1,p}(E).$$

*Demonstração.* Mostremos o teorema para um conjunto $K$ compacto. O resultado segue dos Teoremas 4.6 e 4.8. Seja $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(B(x_0, 2r))$ uma função corte tal que $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta \equiv 1$ em $B[x_0, r]$, e $|\nabla \eta| \leq 2/r$. Então, se $\varphi \in \mathscr{A}_p^0(K)$, temos que $\eta\varphi \in \mathscr{B}(K, B(x_0, 2r))$. Desse modo,

$$\begin{aligned}
\operatorname{cap}_{1,p}(K, B(x_0, 2r)) &\leq \int_{B(x_0,2r)} |\nabla(\eta\varphi)|^p \, dx \\
&= \int_{B(x_0,2r)} |\varphi\nabla\eta + \eta\nabla\varphi|^p \, dx \\
&\leq \int_{B(x_0,2r)} \left(\frac{2}{r}|\varphi| + |\nabla\varphi|\right)^p \, dx \\
&\leq 4^p(1 + r^{-p}) \int_{\mathbb{R}^n} \left(|\varphi|^p + |\nabla\varphi|^p\right) dx.
\end{aligned}$$

Tome agora $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(B(x_0, 2r))$ tal que $\varphi = 1$ em uma vizinhança aberta de $K$. Sejam

$$p^* = \frac{np}{n-p} \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{p^*}{p}.$$

Note que, como $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$, temos que $p^* > p$ e, portanto, $\gamma > 1$. Veja também que

$$\frac{1}{\gamma'} = 1 - \frac{1}{\gamma} = \frac{p}{n}.$$

Então, pelas desigualdades de Hölder (Teorema 1.3.36) e de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg (Teorema 1.3.39), temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^p \, dx = \int_{B(x_0,2r)} |\varphi|^p \, dx &\leq \mathcal{L}^n(B(x_0,2r))^{1/\gamma'} \left( \int_{B(x_0,2r)} |\varphi|^{p\gamma} \, dx \right)^{\dfrac{1}{\gamma}} \\ &= \mathcal{L}^n(B(x_0,2r))^{p/n} \left( \int_{B(x_0,2r)} |\varphi|^{p^*} \, dx \right)^{\dfrac{p}{p^*}} \\ &\leq \mathcal{L}^n(B(x_0,2r))^{p/n} {c_1}^p \int_{B(x_0,2r)} |\nabla\varphi|^p \, dx \\ &= cr^p \int_{B(x_0,2r)} |\nabla\varphi|^p \, dx,\end{aligned}$$

no qual $c = c(p,n)$. Logo,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \big(|\varphi|^p + |\nabla\varphi|^p\big) \, dx &= \int_{B(x_0,2r)} \big(|\varphi|^p + |\nabla\varphi|^p\big) \, dx \\ &\leq (1 + cr^p) \int_{B(x_0,2r)} |\nabla\varphi|^p \, dx.\end{aligned}$$

Combinando as duas desigualdades obtidas, concluímos que

$$(1 + cr^p)^{-1} \operatorname{Cap}_{1,p}(K) \leq \operatorname{cap}_{1,p}(K, B(x_0,2r)) \leq 4^p(1 + r^{-p}) \operatorname{Cap}_{1,p}(K).$$

□

**Corolário 4.10.** *Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Então $\operatorname{Cap}_{1,p}(K) = 0$ se, e somente se, $\operatorname{cap}_{1,p}(K,O) = 0$ para todo aberto $O \supset K$.*

*Demonstração.* Suponha que $\operatorname{cap}_{1,p}(K,O) = 0$ para todo aberto $O \supset K$. Como $K$ é compacto, existe $r > 0$ tal que $K \subset B(0,r) \subset B(0,2r)$. Pela hipótese, $\operatorname{cap}_{1,p}(K, B(0,2r)) = 0$ e, pelo teorema anterior, $\operatorname{Cap}_{1,p}(K) = 0$.

Suponha agora que $\operatorname{Cap}_{1,p}(K) = 0$ e tome $O \supset K$ aberto. Para cada $x \in K$, existe $r_x > 0$ tal que $B(x, 2r_x) \subset O$. Observe que a coleção $\{B(x, r_x) : x \in K\}$ é uma cobertura de $K$. Logo, existe uma subcoleção finita $\{B_j = B(x_j, r_j)\}_{j=1}^{\ell}$ tal que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{\ell} B_j.$$

Pelo teorema anterior,

$$\operatorname{cap}_{1,p}(K \cap B_j, 2B_j) \leq 4^p(1 + r_j^{-p}) \operatorname{Cap}_{1,p}(K \cap B_j) \leq 4^p(1 + r_j^{-p}) \operatorname{Cap}_{1,p}(K) = 0.$$

Como $2B_j \subset O$, temos pela definição de $\mathrm{cap}_{1,p}$ que

$$\mathrm{cap}_{1,p}(K \cap B_j, O) \leq \mathrm{cap}_{1,p}(K \cap B_j, 2B_j) = 0.$$

Logo,

$$\mathrm{cap}_{1,p}(K, O) \leq \sum_{j=1}^{\ell} \mathrm{cap}_{1,p}(K \cap B_j, O) = 0.$$

□

**Lema 4.11.** *$\mathcal{L}^n(E) \leq \mathrm{Cap}_{1,p}(E)$, para todo conjunto $\mathcal{L}^n$-mensurável $E \subset \mathbb{R}^n$.*

*Demonstração.* Se $\mathrm{Cap}_{1,p}(E) = \infty$, nada temos a provar. Se $\mathrm{Cap}_{1,p}(E) < \infty$, tome $\varepsilon > 0$ e $\varphi \in \mathscr{A}_p(E)$ tal que

$$\mathrm{Cap}_{1,p}(E) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(|\varphi|^p + |\nabla\varphi|^p\right) dx < \mathrm{Cap}_{1,p}(E) + \varepsilon.$$

Seja $O \supset E$ aberto tal que $\varphi = 1$ em $O$. Desse modo,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^n(E) \leq \mathcal{L}^n(O) &= \int_O dx \\
&= \int_O |\varphi|^p \, dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^p \, dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(|\varphi|^p + |\nabla\varphi|^p\right) dx \\
&< \mathrm{Cap}_{1,p}(E) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ é tomado arbitrariamente, o resultado segue. □

Podemos relacionar a capacidade $\mathrm{cap}_{1,1}$ com a medida de Hausdorff $\mathcal{H}^{n-1}$ da seguinte maneira:

**Proposição 4.12.** *Sejam $K \subset U \subset \mathbb{R}^n$, com $K$ compacto e $U$ aberto. Então $\mathrm{cap}_{1,1}(K, U) = 0$ se, e somente se, $\mathcal{H}^{n-1}(K) = 0$.*

*Demonstração.* Suponha que $\mathcal{H}^{n-1}(K) > 0$. Pelo Lema de Frostman (Teorema 3.2.1), existe uma medida de Radon positiva $\mu$ concentrada em $K$ tal que $\mu(B(x, r)) \lesssim r^{n-1}$ para toda bola aberta, e $\mathcal{H}^{n-1}_\infty(K) \lesssim \mu(K)$.

Seja $\varphi \in \mathscr{B}(K, U) = \{\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(U) : 0 \leq \varphi \leq 1, \, \varphi = 1 \text{ em } K\}$.

Então, pelo Teorema 6.1.3,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}^{n-1}_\infty(K) \lesssim \mu(K) &= \int_K d\mu \\
&= \int_K |\varphi|\, d\mu \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|\, d\mu \\
&\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\varphi|\, dx = \int_U |\nabla\varphi|\, dx
\end{aligned}
$$

Tomando o ínfimo sobre $\varphi \in \mathscr{B}(K, U)$, temos que

$$\mathcal{H}^{n-1}_\infty(K) \lesssim \operatorname{cap}_{1,1}(K, U).$$

Pela Proposição 3.1.8, $\mathcal{H}^{n-1}_\infty(K) > 0$. Logo, $\operatorname{cap}_{1,1}(K, U) > 0$. Provamos assim que $\operatorname{cap}_{1,1}(K, U) = 0 \Rightarrow \mathcal{H}^{n-1}(K) = 0$.

Por outro lado, suponha $\mathcal{H}^{n-1}(K) = 0$. Equivalentemente, $\mathcal{H}^{n-1}_\infty(K) = 0$. Dado $\varepsilon > 0$, existe uma cobertura de $K$ (que pode ser tomada finita, pela compacidade) por bolas $B_j = B(x_j, r_j)$, $j = 1, \ldots, s$, tais que $2B_j \subset U$ e

$$\sum_{j=1}^{s} \alpha(n-1)(2r_j)^{n-1} < \varepsilon.$$

Podemos então encontrar funções $\varphi_j \in \mathcal{C}^\infty_c(U)$, $j = 1, \ldots, s$, com suporte em $2B_j$, tais que $0 \leq \varphi_j \leq 1$, $|\partial^\alpha \varphi_j| \lesssim r_j^{-|\alpha|}$ para todo multi-índice $\alpha$, e $\varphi = \sum_{j=1}^{s} \varphi_j = 1$ em $\cup_{j=1}^{s} B_j$ (ver [HP, p. 43]). Então, $\varphi \in \mathscr{B}(K, U)$ e, desse modo,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{cap}_{1,1}(K, U) \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\varphi|\, dx \leq \sum_{j=1}^{s} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\varphi_j|\, dx &= \sum_{j=1}^{s} \int_{2B_j} |\nabla\varphi_j|\, dx \\
&\lesssim \sum_{j=1}^{s} \int_{2B_j} r_j^{-1}\, dx = \sum_{j=1}^{s} r_j^{-1} \mathcal{L}^n(2B_j) \\
&= \sum_{j=1}^{s} r_j^{-1} 2^n \alpha(n)(2r_j)^n \\
&= \frac{2^{n+1}\alpha(n)}{\alpha(n-1)} \sum_{j=1}^{s} \alpha(n-1)(2r_j)^{n-1} \\
&\lesssim \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, temos que $\operatorname{cap}_{1,1}(K, U) = 0$. □

O próximo teorema relaciona capacidade com campos vetoriais de medida-divergência.

**Teorema 4.13.** *Seja $F \in L^p(U)$, $1 < p < \infty$, com $\operatorname{div} F = \mu$ para alguma medida de Radon com sinal $\mu$. Então, se $K \subset U$ é compacto e $\operatorname{Cap}_{1,p'}(K) = 0$, temos $|\mu|(K) = 0$.*

*Demonstração.* Seja $K \subset U$ compacto tal que $\operatorname{Cap}_{1,p'}(K) = 0$. Tal como na demonstração do Teorema 3.1.11, podemos supor que $|\mu|(K) = \mu(K)$. Pelo Corolário 4.10, temos que $\operatorname{cap}_{1,p'}(K, O) = 0$ para qualquer aberto $O \subset U$ que contém $K$. Seja $\{O_j\}$ uma sequência de conjuntos abertos que contêm $K$ tais que $U \supset O_1 \supset O_2 \supset \ldots$, e $\cap_j O_j = K$. Como $\operatorname{cap}_{1,p'}(K, O_j) = 0$ para cada $j$, podemos encontrar $\varphi_j \in \mathcal{C}_c^\infty(O_j)$, $0 \leq \varphi_j \leq 1$, $\varphi_j \equiv 1$ em uma vizinhança de $K$ tais que

$$\|\nabla \varphi_j\|_{p'} \to 0 \quad \text{quando } j \to \infty.$$

Visto que $\operatorname{div} F = \mu$, temos, pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
\mu(K) + \int_{U \setminus K} \varphi_j \, d\mu &= \int_K \varphi_j \, d\mu + \int_{U \setminus K} \varphi_j \, d\mu \\
&= \int_U \varphi_j \, d\mu \\
&= \int_U F \cdot \nabla \varphi_j \, dx \\
&\leq \|F\|_{L^p(U)} \|\nabla \varphi_j\|_{L^{p'}(U)} \\
&= \|F\|_{L^p(U)} \|\nabla \varphi_j\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\mu(K) \leq \|F\|_{L^p(U)} \|\nabla \varphi_j\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} - \int_{U \setminus K} \varphi_j \, d\mu = \|F\|_{L^p(U)} \|\nabla \varphi_j\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} - \int_{O_j \setminus K} \varphi_j \, d\mu.$$

Então,

$$\begin{aligned}
|\mu(K)| &\leq \|F\|_{L^p(U)} \|\nabla \varphi_j\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} + \left| \int_{O_j \setminus K} \varphi_j \, d\mu \right| \\
&\leq \|F\|_{L^p(U)} \|\nabla \varphi_j\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} + \int_{O_j \setminus K} |\varphi_j| \, d\mu \\
&\leq \|F\|_{L^p(U)} \|\nabla \varphi_j\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} + \mu(O_j \setminus K) \\
&\leq \|F\|_{L^p(U)} \|\nabla \varphi_j\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} + |\mu|(O_j \setminus K) \to 0
\end{aligned}$$

fazendo $j \to \infty$, completando a demonstração. $\square$

# Capítulo 5

# Funções de variação limitada

Neste capítulo apresentamos funções em $\mathbb{R}^n$ de variação limitada, que nada mais são que funções cujas derivadas parciais fracas de primeira ordem são medidas de Radon. Apresentamos também os conjuntos com perímetro finito, ou seja, conjuntos cuja função característica associada possui variação limitada.

Para maiores mais detalhes e maior aprofundamento no tópico, o leitor pode consultar as referências [EG] e [Z].

## 5.1 Definições e propriedades

No decorrer desta seção, $U \subset \mathbb{R}^n$ é sempre um conjunto aberto.

**Definição 5.1.1.** Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado. Dizemos que $\partial U$ é de classe $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$, se para cada $x_0 \in \partial U$ existe $r > 0$ e uma função $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^{n-1})$ tal que, após renomear e reorientar as coordenadas se necessário, temos

$$U \cap B[x_0, r] = \{x \in B[x_0, r] : x_n > \gamma(x_1, \ldots, x_{n-1})\}.$$

De modo análogo, dizemos que $\partial U$ é de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ se $\partial U$ for $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Dizemos que $\partial U$ é analítica se a aplicação $\gamma$ for analítica.

**Observação 5.1.2.** Se $U \subset \mathbb{R}^n$ limitado tem fronteira $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, então o *campo vetorial unitário normal exterior* $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ está bem definido em $\partial U$.

A seguir, apresentamos duas versões do famoso Teorema de Gauss-Green, também conhecido como Teorema da Divergência. Primeiro, enunciamos sua versão clássica, e em seguida, trazemos uma versão para campos vetoriais localmente integráveis.

**Teorema 5.1.3** (Teorema de Gauss-Green clássico)**.** *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado, com fronteira $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, e $\varphi \in \mathcal{C}^1(\overline{U})$. Então*

$$\int_U \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx = \int_{\partial U} \varphi\, \nu_j \, d\mathcal{H}^{n-1} \quad , \text{ para } j = 1, \dots, n,$$

*no qual $\nu_j$ são as coordenadas do vetor unitário normal exterior. Logo, se $F \in \mathcal{C}^1(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$,*

$$\int_U \mathrm{div} F \, dx = \int_{\partial U} F \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1},$$

*no qual $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$.*

**Teorema 5.1.4** (Gauss-Green para campos vetoriais $L^1_{loc}$)**.** *Seja $F \in L^1_{loc}(U, \mathbb{R}^n)$ um campo vetorial tal que* $\mathrm{div} F = \mu$ *para alguma medida de Radon com sinal $\mu$. Então, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ e para quase todo $r > 0$,*

$$\mu(B(x,r)) = \int_{B(x,r)} \mathrm{div} F \, dy = \int_{\partial B(x,r)} F \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1},$$

*no qual $\nu$ é o vetor unitário normal exterior.*

O Teorema 5.1.3 é uma consequência do Teorema de Stokes, cuja demonstração pode ser vista em [R1, pp. 272-275]. Para uma demonstração do Teorema 5.1.4, veja [DMM, Teorema 5.4]. Note que o Teorema 5.1.4 acima é válido para campos vetoriais essencialmente limitados, pois $L^\infty(U, \mathbb{R}^n) \subset L^1_{loc}(U, \mathbb{R}^n)$.

**Lema 5.1.5.** *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(U, \mathbb{R}^n)$. Então*

$$\int_U \mathrm{div}\varphi \, dx = 0.$$

*Demonstração.* Como *supp*$(\varphi) \subset U$ é compacto, existe $r > 0$ tal que *supp*$(\varphi) \subset B(0,r)$. Então, pelo Teorema de Gauss-Green (Teorema 5.1.3),

$$\int_U \mathrm{div}\varphi \, dx = \int_{B(0,r)} \mathrm{div}\varphi \, dx = \int_{\partial B(0,r)} \varphi \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1} = 0,$$

pois $\varphi \equiv 0$ em $\partial B(0,r)$. □

**Definição 5.1.6.** Uma função $f \in L^1(U)$ tem *variação limitada* em $U$ se

$$\sup \left\{ \int_U f \, \mathrm{div}\varphi \, dx : \varphi \in \mathcal{C}^1_c(U, \mathbb{R}^n), |\varphi| \leq 1 \right\} < \infty.$$

Denotamos por $\mathcal{BV}(U)$ o espaço das funções de variação limitada em $U$.

**Definição 5.1.7.** Um conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue mensurável tem *perímetro finito* em $U$ se $\chi_E \in \mathcal{BV}(U)$.

As definições acima possuem versões locais.

**Definição 5.1.8.** Uma função $f \in L^1_{loc}(U)$ tem *variação localmente limitada* em $U$ se, para cada aberto $V \subset\subset U$,

$$\sup\left\{\int_V f \operatorname{div}\varphi \, dx : \varphi \in \mathcal{C}^1_c(V, \mathbb{R}^n), |\varphi| \leq 1\right\} < \infty.$$

Denotamos por $\mathcal{BV}_{loc}(U)$ o espaço das funções de variação localmente limitada em $U$.

**Definição 5.1.9.** Um conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue mensurável tem *perímetro localmente finito* em $U$ se $\chi_E \in \mathcal{BV}_{loc}(U)$.

O teorema a seguir mostra que funções em $\mathcal{BV}_{loc}$ são funções cujas derivadas parciais fracas de 1ª ordem são medidas de Radon.

**Teorema 5.1.10** (Teorema Estrutural para funções $\mathcal{BV}_{loc}$)**.** *Seja $f \in \mathcal{BV}_{loc}(U)$. Então existe uma medida de Radon $\mu$ em $U$ e uma função $\mu$-mensurável $g : U \to \mathbb{R}^n$ tais que*

*(i)* $|g(x)| = 1$, *$\mu$-q.t.p.;*

*(ii)* $\displaystyle\int_U f \operatorname{div}\varphi \, dx = -\int_U \varphi \cdot g \, d\mu$, *para toda* $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(U, \mathbb{R}^n)$.

*Demonstração.* Seja $T : \mathcal{C}^1_c(U, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ o funcional linear dado por

$$T(\varphi) = -\int_U f \operatorname{div}\varphi \, dx.$$

Como $f \in \mathcal{BV}_{loc}(U)$, temos que $C(V) = \sup\{T(\varphi) : \varphi \in \mathcal{C}^1_c(V, \mathbb{R}^n), |\varphi| \leq 1\} < \infty$ para todo subconjunto aberto $V \subset\subset U$. Assim,

$$\frac{1}{\|\varphi\|_\infty}|T(\varphi)| = \left|T\left(\frac{\varphi}{\|\varphi\|_\infty}\right)\right| \leq C(V), \tag{5.1}$$

para $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(V, \mathbb{R}^n)$ com $\|\varphi\|_\infty \neq 0$.

Fixando um conjunto compacto $K \subset U$, escolhemos um aberto $V$ tal que $K \subset V \subset\subset U$. Dada $\varphi \in \mathcal{C}_c(U, \mathbb{R}^n)$, pelo Teorema 1.4.8 podemos escolher uma sequência $(\varphi_k) \subset \mathcal{C}^1_c(V, \mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi_k \to \varphi$ uniformemente em $V$. Como, dado $\varepsilon > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\|\varphi_k - \varphi_\ell\|_\infty < \varepsilon / C(V)$ quando $k, \ell > m$, então, por (5.1),

$$|T(\varphi_k) - T(\varphi_\ell)| = |T(\varphi_k - \varphi_\ell)| \leq C(V)\|\varphi_k - \varphi_\ell\|_\infty < \varepsilon.$$

Logo, $(T(\varphi_k))$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ e, portanto, $\lim\limits_{k\to\infty} T(\varphi_k)$ existe. Além disso, tal limite não depende da sequência $(\varphi_k)$ escolhida, visto que se $(\phi_k)$ é outra sequência em

$\mathcal{C}_c^1(V, \mathbb{R}^n)$ que converge uniformemente para $\varphi$ em $V$, então

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} |T(\varphi_k) - T(\phi_k)| = \lim_{k\to\infty} |T(\varphi_k - \phi_k)| &\leq C(V) \lim_{k\to\infty} \|\varphi_k - \phi_k\|_\infty \\ &\leq C(V) \lim_{k\to\infty} (\|\varphi_k - \varphi\|_\infty + \|\varphi - \phi_k\|_\infty) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Segue que

$$\lim_{k\to\infty} T(\varphi_k) - \lim_{k\to\infty} T(\phi_k) = \lim_{k\to\infty} [T(\varphi_k) - T(\phi_k)] = 0.$$

Desse modo, $T$ pode ser estendido unicamente a um funcional linear $\overline{T} : \mathcal{C}_c(U, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ dado por $\overline{T}(\varphi) = \lim\limits_{k\to\infty} T(\varphi_k)$. Note que, se $K \subset U$ é compacto e $\varphi \in \mathcal{C}_c(U, \mathbb{R}^n)$ com $supp(\varphi) \subset K$ e $|\varphi| \leq 1$, então $\overline{T}(\varphi) \leq C(V)$, pois podemos escolher $|\varphi_k| < 1$. Logo,

$$\sup\{\overline{T}(\varphi) : \varphi \in \mathcal{C}_c(U, \mathbb{R}^n), supp(\varphi) \subset K, |\varphi| \leq 1\} < \infty$$

para cada $K \subset U$ compacto.

Pelo Teorema de Representação de Riesz (Teorema 2.2.3), existe uma medida de Radon $\mu$ em $U$ e uma função $\mu$-mensurável $g : U \to \mathbb{R}^n$ tais que $|g(x)| = 1$ para $\mu$-q.t.p. $x$ e $\overline{T}(\varphi) = \displaystyle\int_U \varphi \cdot g \, d\mu$, para toda $\varphi \in \mathcal{C}_c(U, \mathbb{R}^n)$. Em particular, se $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(U, \mathbb{R}^n)$, temos

$$\int_U f \operatorname{div}\varphi \, dx = -\int_U \varphi \cdot g \, d\mu.$$

□

**Definição 5.1.11** (Medida variação e medida perímetro)**.**

(i) Se $f \in \mathcal{BV}_{loc}(U)$, a medida $\mu$ obtida no Teorema 5.1.10 é chamada de *medida variação* de $f$, e denotada por $\|Df\|$. Assim, a afirmação (ii) do Teorema acima se reescreve como

$$\int_U f \operatorname{div}\varphi \, dx = -\int_U \varphi \cdot g \, d\|Df\|,$$

para toda $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(U, \mathbb{R}^n)$, no qual $g : U \to \mathbb{R}^n$ é uma função $\|Df\|$-mensurável tal que $|g(x)| = 1$ para $\|Df\|$-q.t.p. $x \in U$.

(ii) Se $f = \chi_E$, e $E$ tem perímetro localmente finito em $U$, a medida $\mu$ é chamada de *medida perímetro* de $E$, e denotada por $\|\partial E\|$. Escrevendo $\nu_E = -g$, temos

$$\int_E \operatorname{div}\varphi \, dx = \int_U \varphi \cdot \nu_E \, d\|\partial E\|,$$

para toda $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(U, \mathbb{R}^n)$, e $|\nu_E(x)| = 1$ para $\|\partial E\|$-q.t.p. $x \in U$. Dizemos que $\|\partial E\|(U)$ é o *perímetro* de $E$ em $U$.

**Exemplo 5.1.12.** Seja $f \in W^{1,1}_{loc}(U)$. Então, para cada $V \subset\subset U$ e $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(V, \mathbb{R}^n)$ com $|\varphi| \leq 1$, temos

$$\int_U f \ \mathrm{div}\varphi \, dx = -\int_U \nabla f \cdot \varphi \, dx \leq \int_V |\nabla f| \, dx < \infty.$$

Logo, $f \in \mathcal{BV}_{loc}(U)$.

Portanto, $W^{1,1}_{loc}(U) \subset \mathcal{BV}_{loc}(U)$. De modo análogo mostra-se que $W^{1,1}(U) \subset \mathcal{BV}(U)$. Em particular, $W^{1,p}_{loc}(U) \subset \mathcal{BV}_{loc}(U)$ para $1 \leq p \leq \infty$. Temos, no entanto, exemplos de funções de variação limitada que não são funções de Sobolev. Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f = \chi_{B(0,1)}$. A função $f \in \mathcal{BV}(\mathbb{R}^2)$ pois, dada $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}^2)$ com $|\varphi| \leq 1$, temos, pelo Teorema de Gauss-Green (Teorema 5.1.3),

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \ \mathrm{div}\varphi \, dx = \int_{B(0,1)} \mathrm{div}\varphi \, dx = \int_{S^1} \varphi \cdot \nu \, d\mathcal{H}^1 \leq \mathcal{H}^1(S^1) < \infty.$$

Em [K, Teorema 1.41], é provado que se $u \in W^{1,p}_{loc}(U)$, $1 \leq p \leq \infty$, e $V \subset\subset U$, então existe $\tilde{u} : U \to [-\infty, \infty]$ tal que $\tilde{u} = u$ q.t.p. em $U$, $\tilde{u}$ é absolutamente contínua em $\mathcal{L}^{n-1}$-quase todo segmento de reta em $V$ paralelo aos eixos coordenados e as derivadas parciais clássicas de $\tilde{u}$ coincidem com as derivadas parciais fracas de $u$ q.t.p. em $U$. Mostremos que isso não ocorre com $f$.

Uma função $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ é *absolutamente contínua* se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $a = x_1 < y_1 \leq x_2 < y_2 \leq \cdots \leq x_m < y_m = b$ é uma partição de $[a, b]$ com

$$\sum_{j=1}^{m} (y_j - x_j) < \delta,$$

então

$$\sum_{j=1}^{m} |u(y_j) - u(x_j)| < \varepsilon.$$

Seja $\tilde{f} = f$ q.t.p. em $\mathbb{R}^2$. Existe um intervalo $(a, b) \subset (-1, 1)$ no qual, para q.t.p. $x_0 \in (a, b)$ tem-se $f(x_0, y) = \tilde{f}(x_0, y)$ para q.t.p. $y \in \mathbb{R}$. Fixe $x_0$ com tal propriedade, um ponto $p = (x_0, y_0) \in S^1$ (podemos escolher $y_0 > 0$ sem perda de generalidade) e tome $V = B(p, r)$. Fixado $\varepsilon = 1/2$ e dado $\delta > 0$, existem $y_1 \in \left(y_0 - \frac{\delta}{4}, y_0\right)$ e $y_2 \in \left(y_0, y_0 + \frac{\delta}{4}\right)$ tais que $\tilde{f}(x_0, y_1) = 1$ e $\tilde{f}(x_0, y_2) = 0$.

Considere a partição de $[y_0 - r, y_0 + r]$ dada por

$$\{a_1 = y_0 - r, b_1, a_2 = y_1, b_2 = y_2, a_3, b_3 = y_0 + r\},$$

na qual $b_1 \in (a_1, a_1 + \frac{\delta}{4})$ e $a_3 \in (b_3 - \frac{\delta}{4}, b_3)$. Então,

$$\sum_{j=1}^{3} (b_j - a_j) < \delta,$$

mas

$$\sum_{j=1}^{3} |\tilde{f}(x_0, b_j) - \tilde{f}(x_0, a_j)| \geq |\tilde{f}(x_0, b_2) - \tilde{f}(x_0, a_2)| = 1 > \varepsilon.$$

Logo, $\tilde{f}$ não é absolutamente contínua no segmento $x = x_0$ em $V$ para q.t.p. $x_0 \in (a, b)$. Então, $f \notin W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^2)$ e, portanto, $f \notin W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$, $1 \leq p \leq \infty$.

**Exemplo 5.1.13.** Se $E \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado com fronteira $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$, então $E$ tem perímetro finito.

De fato, se $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(U, \mathbb{R}^n)$ com $|\varphi| \leq 1$, então, pelo Teorema de Gauss-Green (5.1.3),

$$\begin{aligned} \int_E \operatorname{div}\varphi \, dx = \int_{\partial E} \varphi \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1} &= \int_{U \cap \partial E} \varphi \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\leq \int_{U \cap \partial E} |\varphi| \, |\nu| \, d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\leq \int_{U \cap \partial E} d\mathcal{H}^{n-1} = \mathcal{H}^{n-1}(U \cap \partial E) \leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial E). \end{aligned}$$

Note que existe uma quantidade finita de bolas $B(x_j, r_j)$, com $x_j \in \partial E$, tais que $\partial E \subset \cup_{j=1}^{k} B(x_j, r_j)$, e cada $\partial E \cap B(x_j, r_j)$ é, a menos de uma reorientação das coordenadas, o gráfico de uma função $\mathcal{C}^2$, ou seja, é uma variedade de dimensão $n-1$. Desse modo, $\mathcal{H}^{n-1}(\partial E \cap B(x_j, r_j))$ corresponde ao volume $(n-1)$-dimensional de $\partial E \cap B(x_j, r_j)$ (veja a Observação 3.1.5 e o Exemplo 3.1.6). Portanto,

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial E) \leq \sum_{j=1}^{k} \mathcal{H}^{n-1}(\partial E \cap B(x_j, r_j)) < \infty.$$

Basta, então, tomar o supremo em $\varphi$ para concluir que

$$\sup \left\{ \int_E \operatorname{div}\varphi \, dx : \varphi \in \mathcal{C}^1_c(U, \mathbb{R}^n), |\varphi| \leq 1 \right\} \leq \mathcal{H}^{n-1}(U \cap \partial E) < \infty.$$

Mais ainda, é possível mostrar a desigualdade inversa e provar que

$$\sup \left\{ \int_E \operatorname{div}\varphi \, dx : \varphi \in \mathcal{C}^1_c(U, \mathbb{R}^n), |\varphi| \leq 1 \right\} = \mathcal{H}^{n-1}(U \cap \partial E)$$

(veja [Z, p. 229]).

**Observação 5.1.14.**

(i) Do Teorema de Representação de Riesz (Teorema 2.2.3) e do Teorema Estrutural (Teorema 5.1.10), temos que, para cada $V \subset\subset U$,

$$\|Df\|(V) = \sup \left\{ \int_V f \operatorname{div}\varphi \, dx : \varphi \in \mathcal{C}^1_c(V, \mathbb{R}^n), |\varphi| \leq 1 \right\}, \text{ e}$$

$$\|\partial E\|(V) = \sup \left\{ \int_E \operatorname{div}\varphi \, dx : \varphi \in \mathcal{C}^1_c(V, \mathbb{R}^n), |\varphi| \leq 1 \right\}.$$

(ii) Se $f \in \mathcal{BV}_{loc}(U) \cap L^1(U)$, então $f \in \mathcal{BV}(U) \iff \|Df\|(U) < \infty$. Nesse caso, definimos $\|f\|_{\mathcal{BV}(U)} = \|f\|_1 + \|Df\|(U)$.

De fato, se $g$ é a função determinada pelo Teorema 5.1.10, e $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(U, \mathbb{R}^n)$ com $|\varphi| \leq 1$, então

$$\begin{aligned}\int_U f \,\operatorname{div}\varphi\, dx = -\int_U \varphi \cdot g\, d\|Df\| &\leq \left|\int_U \varphi \cdot g\, d\|Df\|\right| \\ &\leq \int_U |\varphi| \cdot |g|\, d\|Df\| \\ &\leq \int_U d\|Df\| = \|Df\|(U).\end{aligned}$$

Logo,

$$\sup\left\{\int_U f \,\operatorname{div}\varphi\, dx : \varphi \in \mathcal{C}_c^1(U, \mathbb{R}^n), |\varphi| \leq 1\right\} \leq \|Df\|(U).$$

Então, se $\|Df\|(U) < \infty$, temos $f \in \mathcal{BV}(U)$. Por outro lado, se $f \in \mathcal{BV}(U)$, então fixado $K \subset U$ compacto, tome $V$ aberto tal que $K \subset V \subset\subset U$. Pelo item $(i)$ acima,

$$\begin{aligned}\|Df\|(K) \leq \|Df\|(V) &= \sup\left\{\int_V f \operatorname{div}\varphi\, dx : \varphi \in \mathcal{C}_c^1(V, \mathbb{R}^n), |\varphi| \leq 1\right\} \\ &\leq \sup\left\{\int_U f \operatorname{div}\varphi\, dx : \varphi \in \mathcal{C}_c^1(U, \mathbb{R}^n), |\varphi| \leq 1\right\} < \infty.\end{aligned}$$

Como, pelo Teorema 5.1.10, $\|Df\|$ é uma medida de Radon, temos que

$$\|Df\|(U) = \sup\{\|Df\|(K) : K \subset U \text{ compacto}\}.$$

Logo, do anterior, concluímos que $\|Df\|(U) < \infty$.

**Teorema 5.1.15** (Semicontinuidade inferior da medida variação)**.** *Suponha $(f_k)$ uma sequência de funções em $\mathcal{BV}(U)$ tal que $f_k \to f$ em $L^1_{loc}(U)$. Então,*

$$\|Df\|(U) \leq \liminf_{k\to\infty} \|Df_k\|(U).$$

*Demonstração.* Seja $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(U, \mathbb{R}^n)$ com $|\varphi| \leq 1$. Então,

$$\int_U f \operatorname{div}\varphi\, dx = \lim_{k\to\infty} \int_U f_k \operatorname{div}\varphi\, dx = \lim_{k\to\infty} \int_U -\varphi \cdot \sigma_k\, d\|Df_k\| = \liminf_{k\to\infty} \int_U -\varphi \cdot \sigma_k\, d\|Df_k\|,$$

no qual $|\sigma_k(x)| = 1$ para $\|Df_k\|$-q.t.p. $x$. Como

$$\int_U -\varphi \cdot \sigma_k\, d\|Df_k\| \leq \int_U |\varphi| \cdot |\sigma_k|\, d\|Df_k\| \leq \int_U d\|Df_k\| = \|Df_k\|(U),$$

temos que

$$\int_U f \operatorname{div}\varphi\, dx \leq \liminf_{k\to\infty} \|Df_k\|(U).$$

Disto segue que

$$\|Df\|(U) = \sup\left\{\int_U f\,\mathrm{div}\varphi\,dx : \varphi \in \mathcal{C}^1_c(U;\mathbb{R}^n), |\varphi| \leq 1\right\} \leq \liminf_{k\to\infty} \|Df_k\|(U).$$

□

**Teorema 5.1.16** (Aproximação local por funções suaves)**.** *Seja $f \in \mathcal{BV}(U)$. Então existe uma sequência $(f_k) \subset \mathcal{BV}(U) \cap \mathcal{C}^\infty(U)$ tal que $f_k \to f$ em $L^1(U)$ e $\|Df_k\|(U) \to \|Df\|(U)$ quando $k \to \infty$.*

*Demonstração.* Fixado $\varepsilon > 0$ e dado $m \in \mathbb{N}$, defina os conjuntos abertos

$$U_k = \left\{x \in U : \mathrm{dist}(x, \partial U) > \frac{1}{m+k}\right\} \cap B(0, k+m)$$

para $k \in \mathbb{Z}_+$. Escolha $m$ grande o suficiente de modo que

$$\|Df\|(U \setminus U_1) < \varepsilon. \tag{5.2}$$

Observe que $U_k \subset U_{k+1}$ e $U = \bigcup_{k=1}^\infty U_k$. Defina $U_0 = \varnothing$ e $V_k = U_{k+1} \setminus \overline{U_{k-1}}$, para $k \in \mathbb{Z}_+$. Podemos então tomar uma partição da unidade $\{\zeta_k\}_{k=1}^\infty$ tal que

$$\begin{cases} \zeta_k \in \mathcal{C}^\infty_c(V_k), & k \in \mathbb{N}; \\ 0 \leq \zeta_k \leq 1, & k \in \mathbb{N}; \\ \displaystyle\sum_{k=1}^\infty \zeta_k = 1 & \text{em } U. \end{cases}$$

Considere a função teste $\phi$ suportada em $B[0,1]$, como definida no Exemplo 1.4.2 para construir uma aproximação da identidade. Para cada $k$, escolha $\varepsilon_k > 0$ pequeno o suficiente de modo que

$$\begin{cases} supp(\phi_{\varepsilon_k} * f\zeta_k) \subset V_k; \\ \displaystyle\int_U |\phi_{\varepsilon_k} * f\zeta_k - f\zeta_k|\,dx < \frac{\varepsilon}{2^k}; \\ \displaystyle\int_U |\phi_{\varepsilon_k} * f\nabla\zeta_k - f\nabla\zeta_k|\,dx < \frac{\varepsilon}{2^k}. \end{cases} \tag{5.3}$$

Defina

$$f_\varepsilon = \sum_{k=1}^\infty \phi_{\varepsilon_k} * f\zeta_k.$$

Pela maneira como os conjuntos $V_k$ foram construídos, temos que, numa vizinhança de cada $x \in U$, existe apenas uma quantidade finita de termos não nulos na soma acima. Por isso,

$f_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Como $f = \sum_{k=1}^{\infty} f\zeta_k$, temos por (5.3) que

$$\begin{aligned}
\|f_\varepsilon - f\|_{L^1(U)} &= \int_U \left| \sum_{k=1}^{\infty} \left(\phi_{\varepsilon_k} * f\zeta_k - f\zeta_k\right) \right| dx \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_U |\phi_{\varepsilon_k} * f\zeta_k - f\zeta_k|\, dx \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Desse modo, $f_\varepsilon \to f$ em $L^1(U)$, quando $\varepsilon \to 0$. Pelo Teorema 5.1.15,

$$\|Df\|(U) \leq \liminf_{\varepsilon \to 0} \|Df_\varepsilon\|(U). \tag{5.4}$$

Para $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(U)$, $|\varphi| \leq 1$, temos

$$\begin{aligned}
\int_U f_\varepsilon \operatorname{div}\varphi\, dx &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_U (\phi_{\varepsilon_k} * f\zeta_k) \operatorname{div}\varphi\, dx \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_U f\zeta_k \left(\phi_{\varepsilon_k} * \operatorname{div}\varphi\right) dx \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_U f\zeta_k \operatorname{div}(\phi_{\varepsilon_k} * \varphi)\, dx \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_U f \operatorname{div}(\zeta_k(\phi_{\varepsilon_k} * \varphi))\, dx - \sum_{k=1}^{\infty} \int_U f\nabla\zeta_k \cdot (\phi_{\varepsilon_k} * \varphi)\, dx \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_U f \operatorname{div}(\zeta_k(\phi_{\varepsilon_k} * \varphi))\, dx - \sum_{k=1}^{\infty} \int_U \varphi \cdot (\phi_{\varepsilon_k} * f\nabla\zeta_k)\, dx \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_U f \operatorname{div}(\zeta_k(\phi_{\varepsilon_k} * \varphi))\, dx - \sum_{k=1}^{\infty} \int_U \varphi \cdot (\phi_{\varepsilon_k} * f\nabla\zeta_k - f\nabla\zeta_k)\, dx \\
&:= I_1^\varepsilon + I_2^\varepsilon,
\end{aligned}$$

pois $\sum_{k=1}^{\infty} \nabla\zeta_k = 0$ em $U$.

Para cada $k$, temos que $|\zeta_k(\phi_{\varepsilon_k} * \varphi)| \leq \int_U \phi_{\varepsilon_k} = 1$. Além disso, cada ponto em $U$ pertence a, no máximo, dois conjuntos $V_k$. De fato, dado $x \in U$, tome $k_0 = \min\{k : x \in U_k\}$. Se $k_0 = 1$, então $x \in V_1$ apenas. Se $k_0 > 1$, então $x \in V_{k_0-1}$ e, possivelmente, $V_{k_0}$. Realmente, se $k_0 = 1$ então

$$x \in U_1 \subset U_2 = V_1,$$

e para $k > 1$,

$$x \notin V_k = U_{k+1} \setminus \overline{U_{k-1}}$$

pois $U_1 \subset U_{k-1}$. Agora, se $k_0 > 1$ então

$$x \in U_{k_0} \setminus U_{k_0-1} \subset U_{k_0} \setminus \overline{U_{k_0-2}} = V_{k_0-1},$$

pois $\overline{U_{k_0-2}} \subset U_{k_0-1}$. Para $k < k_0 - 1$, temos que $x \notin V_k = U_{k+1} \setminus \overline{U_{k-1}}$, pois $U_{k+1} \subset U_{k_0-1}$, e para $k > k_0$, $x \notin V_k = U_{k+1} \setminus \overline{U_{k-1}}$, dado que $U_{k_0} \subset U_{k-1}$.

Então,

$$\begin{aligned}
|I_1^\varepsilon| &= \left| \int_U f \ \mathrm{div}(\zeta_1(\phi_{\varepsilon_1} * \varphi))\, dx + \sum_{k=2}^{\infty} \int_U f \ \mathrm{div}(\zeta_k(\phi_{\varepsilon_k} * \varphi))\, dx \right| \\
&\leq \|Df\|(U) + \sum_{k=2}^{\infty} \|Df\|(V_k) \\
&\leq \|Df\|(U) + 2\|Df\|(U \setminus U_1) \\
&< \|Df\|(U) + 2\varepsilon, \qquad \text{por (5.2).}
\end{aligned}$$

Por outro lado, de (5.3), temos que $|I_2^\varepsilon| < \varepsilon$. Logo,

$$\int_U f_\varepsilon \ \mathrm{div}\varphi\, dx \leq \|Df\|(U) + 3\varepsilon$$

e, portanto,

$$\|Df_\varepsilon\|(U) \leq \|Df\|(U) + 3\varepsilon.$$

Isso, e (5.4), nos permite concluir que $\|Df_\varepsilon\|(U) \to \|Df\|(U)$ quando $\varepsilon \to 0$. $\square$

**Observação 5.1.17.** Note que o Teorema não garante que $\|D(f_k - f)\|(U) \to 0$.

## 5.2 Fórmula de co-área para funções $\mathcal{BV}$

Começamos apresentando dois lemas em preparação para a demonstração do principal resultado da seção, a fórmula de co-área para funções $\mathcal{BV}$.

**Lema 5.2.1.** *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Se $f \in L^1(U)$, então*

*(i)* $\|f\|_{L^1(U)} = \sup\left\{ \int_U f\varphi\, dx : \varphi \in L^\infty(U), |\varphi| \leq 1 \right\}$;

*(ii)* $\|f\|_{L^1(U)} = \sup\left\{ \int_U f\varphi\, dx : \varphi \in \mathcal{C}_c^1(U), |\varphi| \leq 1 \right\}$.

*Demonstração.* Para mostrar o item $(i)$, tome $\varphi \in L^\infty(U)$ com $|\varphi| \leq 1$. Então

$$\int_U f\varphi\, dx \leq \int_U |f||\varphi|\, dx \leq \int_U |f|\, dx = \|f\|_{L^1(U)},$$

de modo que
$$\sup\left\{\int_U f\varphi\,dx : \varphi \in L^\infty(U), |\varphi| \leq 1\right\} \leq \|f\|_{L^1(U)}.$$
Por outro lado, considere a função $\varphi^* : U \to \mathbb{R}$ dada por
$$\varphi^*(x) = \mathrm{sgn} f(x) = \begin{cases} \dfrac{\overline{f(x)}}{|f(x)|}, & \text{se } f(x) \neq 0 \\ 0, & \text{se } f(x) = 0. \end{cases}$$
Observe que $\varphi^* \in L^\infty(U)$ com $|\varphi^*| \leq 1$, e que $f\varphi^*(x) = |f(x)|$. Assim,
$$\|f\|_{L^1(U)} = \int_U f\varphi^*\,dx \leq \sup\left\{\int_U f\varphi\,dx : \varphi \in L^\infty(U), |\varphi| \leq 1\right\}.$$

Provemos agora o item $(ii)$. Seja $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(U)$ com $|\varphi| \leq 1$. Então
$$\int_U f\varphi\,dx \leq \int_U |f||\varphi|\,dx \leq \int_U |f|\,dx = \|f\|_{L^1(U)}.$$
Logo,
$$\sup\left\{\int_U f\varphi\,dx : \varphi \in \mathcal{C}^1_c(U), |\varphi| \leq 1\right\} \leq \|f\|_{L^1(U)}.$$
Para mostrar a desigualdade contrária, fixe $\theta > 0$. Pelo item $(i)$, existe $g \in L^\infty(U)$ com $|g| \leq 1$ tal que
$$\int_U fg\,dx \geq \|f\|_{L^1(U)} - \theta. \tag{5.5}$$
Para cada $k \in \mathbb{N}$, defina $U_k = \{x \in U : \mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus U) \geq 2^{-k}\} \cap B[0,k]$. Como $(U_k)$ é uma sequência crescente de subconjuntos de $U$ tal que $\cup_k U_k = U$, temos que $\lim\limits_{k\to\infty} fg\chi_{U_k}(x) = fg(x)$ para todo $x \in U$. Além disso, $|fg\chi_{U_k}| \leq |f| \in L^1(U)$. Então podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada para obter
$$\int_U fg\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_U fg\chi_{U_k}\,dx.$$
Fixe $k \in \mathbb{N}$ tal que
$$\int_U fg\chi_{U_k}\,dx \geq \int_U fg\,dx - \theta.$$
Por (5.5), temos que
$$\int_U fg\chi_{U_k}\,dx \geq \|f\|_{L^1(U)} - 2\theta. \tag{5.6}$$
Seja $\rho \in \mathcal{C}^\infty_c(B[0,1])$ com $\rho \geq 0$ e $\int \rho\,dx = 1$ e considere a aproximação da identidade $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\rho(x/\varepsilon)$, para $\varepsilon > 0$, como dada na Definição 1.4.6. Como $|g\chi_{U_k}| \leq \chi_{U_k} \in L^1(U)$, temos pelo Teorema 1.4.7 que
$$\rho_\varepsilon * (g\chi_{U_k}) \to g\chi_{U_k}$$

em $L^1(U)$, quando $\varepsilon \searrow 0$. Pelo Teorema 1.3.37, existe uma sequência $\varepsilon_j \searrow 0$ tal que

$$\varphi_j = \rho_{\varepsilon_j} * (g\chi_{U_k}) \to g\chi_{U_k}$$

em quase todo ponto, quando $j \to \infty$. Como $|f\varphi_j| \leq |f| \int |\rho_{\varepsilon_j}| dx = |f| \in L^1(U)$, o Teorema da Convergência Dominada pode ser usado para concluir que

$$\int_U fg\chi_{U_k}\, dx = \lim_{j\to\infty} \int_U f\varphi_j\, dx.$$

Fixe $j \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_U f\varphi_j\, dx \geq \int_U fg\chi_{U_k}\, dx - \theta.$$

Por (5.6), temos que

$$\int_U f\varphi_j\, dx \geq \|f\|_{L^1(U)} - 3\theta.$$

Note que, para $j$ suficientemente grande, $\varphi_j \in \mathcal{C}_c^\infty(U_k + B[0, \varepsilon_j]) \subset \mathcal{C}_c^1(U)$. Além disso, $|\varphi_j| \leq \int |\rho_{\varepsilon_j}| dx = 1$. Então

$$\|f\|_{L^1(U)} - 3\theta \leq \int_U f\varphi_j\, dx \leq \sup\left\{\int_U f\varphi\, dx : \varphi \in \mathcal{C}_c^1(U), |\varphi| \leq 1\right\}.$$

Como $\theta > 0$ foi fixado arbitrariamente, concluímos que

$$\|f\|_{L^1(U)} \leq \sup\left\{\int_U f\varphi\, dx : \varphi \in \mathcal{C}_c^1(U), |\varphi| \leq 1\right\},$$

completando a demonstração. □

Para $f : U \to \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}$, defina $E_t = \{x \in U : f(x) > t\}$.

**Lema 5.2.2.** *Se $f \in \mathcal{BV}(U)$, a aplicação $t \mapsto \|\partial E_t\|(U)$ é $\mathcal{L}^1$-mensurável.*

*Demonstração.* A aplicação $(x, t) \mapsto \chi_{E_t}(x)$ é $(\mathcal{L}^n \times \mathcal{L}^1)$-mensurável. De fato, basta mostrar que, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto $A_\alpha = \{(x, t) : \chi_{E_t}(x) > \alpha\}$ é Lebesgue mensurável. Se $\alpha \geq 1$, então $A_\alpha = \varnothing$. Quando $\alpha < 0$, temos $A_\alpha = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Em ambos os casos, $A_\alpha$ é obviamente Lebesgue mensurável. Resta, portanto, $0 \leq \alpha < 1$. Nesse caso,

$$\begin{aligned} A_\alpha &= \{(x, t) : \chi_{E_t}(x) = 1\} \\ &= \{(x, t) : x \in E_t\} = \{(x, t) : f(x) - t > 0\}. \end{aligned}$$

As aplicações $(x, t) \mapsto f(x)$ e $(x, t) \mapsto t$ são Lebesgue mensuráveis, pois a função identidade obviamente o é, e $f \in \mathcal{BV}(U) \subset L^1(U)$. Portanto, a aplicação $(x, t) \mapsto f(x) - t$ é mensurável, concluindo que $A_\alpha$ é um conjunto mensurável. Logo, para cada $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(U, \mathbb{R}^n)$, a função

$$t \mapsto \int_{E_t} \mathrm{div}\varphi\, dx = \int_U \chi_{E_t}\, \mathrm{div}\varphi\, dx$$

é $\mathcal{L}^1$-mensurável.

Seja $D \subset \mathcal{C}_c^1(U,\mathbb{R}^n)$ um subconjunto denso e enumerável. Então, por densidade,

$$\begin{aligned} t \mapsto \|\partial E_t\|(U) &= \sup\left\{\int_{E_t} \mathrm{div}\varphi \, dx : \varphi \in \mathcal{C}_c^1(U,\mathbb{R}^n), |\varphi| \leq 1\right\} \\ &= \sup\left\{\int_{E_t} \mathrm{div}\varphi \, dx : \varphi \in D, |\varphi| \leq 1\right\}, \end{aligned}$$

e tal aplicação é $\mathcal{L}^1$-mensurável, pois é o supremo de uma quantidade enumerável de funções $\mathcal{L}^1$-mensuráveis. □

Finalmente, demonstramos a fórmula de co-área para funções de variação limitada.

**Teorema 5.2.3** (Fórmula de co-área para funções $\mathcal{BV}$)**.** *Seja $f \in \mathcal{BV}(U)$.*

*(i) $E_t$ tem perímetro finito para $\mathcal{L}^1$-q.t.p. $t \in \mathbb{R}$;*

*(ii) $\|Df\|(U) = \int_{\mathbb{R}} \|\partial E_t\|(U)\, dt$.*

*Por outro lado, se $f \in L^1(U)$ e $\|Df\|(U) = \int_{\mathbb{R}} \|\partial E_t\|(U)\, dt < \infty$, então $f \in \mathcal{BV}(U)$.*

*Demonstração.* Seja $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(U,\mathbb{R}^n)$ com $|\varphi| \leq 1$.

Mostremos primeiro que

$$\int_U f \,\mathrm{div}\varphi\, dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{E_t} \mathrm{div}\varphi\, dx\right) dt.$$

Suponha, *a priori*, que $f \geq 0$. Então

$$f(x) = \int_0^{f(x)} dt = \int_0^{\infty} \chi_{E_t}(x)\, dt$$

para q.t.p. $x \in U$. Então, pelo Teorema de Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned} \int_U f\,\mathrm{div}\varphi\, dx &= \int_U \left(\int_0^\infty \chi_{E_t}(x)\, dt\right) \mathrm{div}\varphi(x)\, dx \\ &= \int_0^\infty \left(\int_U \chi_{E_t}(x)\,\mathrm{div}\varphi(x)\, dx\right) dt \\ &= \int_0^\infty \left(\int_{E_t} \mathrm{div}\varphi(x)\, dx\right) dt. \end{aligned}$$

Se $f \leq 0$, então

$$f(x) = -\int_{f(x)}^0 dt = \int_{-\infty}^0 (\chi_{E_t}(x) - 1)\, dt.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_U f \operatorname{div}\varphi \, dx &= \int_U \left( \int_{-\infty}^0 (\chi_{E_t}(x) - 1) \, dt \right) \operatorname{div}\varphi(x) \, dx \\
&= \int_{-\infty}^0 \left( \int_U (\chi_{E_t}(x) - 1) \operatorname{div}\varphi(x) \, dx \right) dt \\
&= \int_{-\infty}^0 \left( \int_{U \setminus E_t} -\operatorname{div}\varphi(x) \, dx \right) dt \\
&= \int_{-\infty}^0 \left( \int_U -\operatorname{div}\varphi(x) \, dx - \int_{E_t} -\operatorname{div}\varphi(x) \, dx \right) dt \\
&= \int_{-\infty}^0 \left( \int_{E_t} \operatorname{div}\varphi(x) \, dx \right) dt,
\end{aligned}$$

pelo Lema 5.1.5.

Tomando $f$ em geral, e escrevendo $f = f^+ - f^-$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_U f \operatorname{div}\varphi \, dx &= \int_U f^+ \operatorname{div}\varphi \, dx + \int_U (-f^-) \operatorname{div}\varphi \, dx \\
&= \int_0^\infty \left( \int_{E_t} \operatorname{div}\varphi(x) \, dx \right) dt + \int_{-\infty}^0 \left( \int_{E_t} \operatorname{div}\varphi(x) \, dx \right) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{E_t} \operatorname{div}\varphi(x) \, dx \right) dt. \qquad (5.7)
\end{aligned}$$

Como $\int_{E_t} \operatorname{div}\varphi(x) \, dx \leq \|\partial E_t\|(U)$, pela igualdade (5.7) temos que

$$\int_U f \operatorname{div}\varphi \, dx \leq \int_{\mathbb{R}} \|\partial E_t\|(U) \, dt.$$

Agora, tomando o supremo em $\varphi$, obtemos

$$\|Df\|(U) \leq \int_{\mathbb{R}} \|\partial E_t\|(U) \, dt. \qquad (5.8)$$

Seja $f \in \mathcal{BV}(U) \cap \mathcal{C}^\infty(U)$. Mostraremos que, nesse caso, vale a igualdade em (5.8). Defina $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$m(t) = \int_{U \setminus E_t} |\nabla f| \, dx = \int_{\{x \in U : f(x) \leq t\}} |\nabla f| \, dx.$$

A função $m$ é não-decrescente, pois se $s \leq t$, então $\{x \in U : f(x) \leq s\} \subset \{x \in U : f(x) \leq t\}$. Logo, pelo Teorema 1.3.17, $m'(t)$ existe para $\mathcal{L}^1$-q.t.p. $t \in \mathbb{R}$. Afirmamos, primeiramente, que para $a < b$,

$$\int_a^b m'(t) \, dt \leq m(b) - m(a).$$

Para mostrar isso, considere

$$\bar{m}(t) = \begin{cases} m(a), & \text{para } t \leq a \\ m(t), & \text{para } a \leq t \leq b \\ m(b), & \text{para } t \geq b \end{cases}$$

e note que
$$\int_a^b \bar{m}'(t)\,dt \leq m(b) - m(a).$$
De fato, para $h > 0$ pequeno,
$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}\int_a^b \bar{m}(t+h) - \bar{m}(t)\,dt &= \frac{1}{h}\left[\int_{a+h}^{b+h} \bar{m}(t)\,dt - \int_a^b \bar{m}(t)\,dt\right] \\
&= \frac{1}{h}\left[\int_{a+h}^{b} \bar{m}\,dt + \int_b^{b+h} \bar{m}\,dt - \int_a^{a+h} \bar{m}\,dt - \int_{a+h}^{b} \bar{m}\,dt\right] \\
&= \frac{1}{h}\left[m(b)\cdot h - \int_a^{a+h} m\,dt\right] \\
&\leq \frac{1}{h}\left[m(b)\cdot h - \int_a^{a+h} m(a)\,dt\right] \\
&= \frac{1}{h}\left[m(b)\cdot h - m(a)\cdot h\right] = m(b) - m(a).
\end{aligned}$$
Logo, pelo Lema de Fatou, temos que
$$\begin{aligned}
\int_a^b \bar{m}'(t)\,dt &= \int_a^b \lim_{h\to 0} \frac{\bar{m}(t+h) - \bar{m}(t)}{h}\,dt \\
&\leq \liminf_{h\to 0} \int_a^b \frac{\bar{m}(t+h) - \bar{m}(t)}{h}\,dt \leq m(b) - m(a).
\end{aligned}$$

Então
$$\begin{aligned}
\int_{-T}^{T} m'(t)\,dt &\leq m(T) - m(-T) \\
&= \int_{\{x\in U: f(x)\leq T\}} |\nabla f|\,dx - \int_{\{x\in U: f(x)\leq -T\}} |\nabla f|\,dx \\
&= \int_{\{x\in U: -T< f(x)\leq T\}} |\nabla f|\,dx \\
&\leq \int_U |\nabla f|\,dx.
\end{aligned}$$
Fazendo $T \to \infty$, obtemos
$$\int_{\mathbb{R}} m'(t)\,dt \leq \int_U |\nabla f|\,dx. \tag{5.9}$$
Fixados $t \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, defina $n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por
$$n(s) = \begin{cases} 0, & \text{se } s \leq t \\ \dfrac{s-t}{r}, & \text{se } t \leq s \leq t+r \\ 1, & \text{se } s \geq t+r. \end{cases}$$

Então

$$n'(s) = \begin{cases} 0, & \text{se } s < t \text{ ou } s > t+r \\ 1/r, & \text{se } t < s < t+r. \end{cases}$$

Logo, para toda $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(U, \mathbb{R}^n)$, $|\varphi| \leq 1$, temos

$$\begin{aligned} -\int_U n(f(x))\,\mathrm{div}\varphi(x)\,dx &= \int_U \nabla(n(f(x)))\cdot\varphi(x)\,dx \\ &= \int_U n'(f(x))\nabla f(x)\cdot\varphi(x)\,dx \\ &= \int_{\{x\in U: t<f(x)<t+r\}} \frac{1}{r}\nabla f(x)\cdot\varphi(x)\,dx \\ &= \frac{1}{r}\int_{E_t\setminus E_{t+r}} \nabla f(x)\cdot\varphi(x)\,dx. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Agora,

$$\begin{aligned} \frac{m(t+r)-m(t)}{r} &= \frac{1}{r}\left(\int_{U\setminus E_{t+r}} |\nabla f|\,dx - \int_{U\setminus E_t} |\nabla f|\,dx\right) \\ &= \frac{1}{r}\int_{E_t\setminus E_{t+r}} |\nabla f|\,dx \\ &\geq \frac{1}{r}\int_{E_t\setminus E_{t+r}} \nabla f\cdot\varphi\,dx \\ &= -\int_U n(f(x))\,\mathrm{div}\varphi(x)\,dx, \quad \text{por (5.10)}. \end{aligned}$$

Para valores de $t$ tais que $m'(t)$ existe, fazemos $r \to 0$ e obtemos, para $\mathcal{L}^1$-q.t.p. $t$,

$$m'(t) \geq \lim_{r\to 0}\left[-\int_U n(f(x))\,\mathrm{div}\varphi(x)\,dx\right] = -\int_{\{x\in U: f(x)>t\}} \mathrm{div}\varphi\,dx = -\int_{E_t} \mathrm{div}\varphi\,dx.$$

O limite acima é consequência do Teorema da Convergência Dominada, pois $n(s) \to \chi_{(t,\infty)}(s)$ quando $r \to 0$ e $|n(f(x))\,\mathrm{div}\varphi(x)| \leq |\mathrm{div}\varphi(x)| \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Tomando o supremo em $\varphi$, temos $m'(t) \geq \|\partial E_t\|(U)$. De (5.9),

$$\int_{\mathbb{R}} \|\partial E_t\|(U)\,dt \leq \int_{\mathbb{R}} m'(t)\,dt \leq \int_U |\nabla f|\,dx.$$

Afirmamos que

$$\int_U |\nabla f|\,dx = \|Df\|(U).$$

De fato, para $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(U, \mathbb{R}^n)$,

$$\int_U f\ \mathrm{div}\varphi\,dx + \int_U \nabla f\cdot\varphi\,dx = \int_U \mathrm{div}(f\varphi)\,dx = 0,$$

pelo Lema 5.1.5. Segue que

$$\int_U f \operatorname{div}\varphi \, dx = -\int_U \nabla f \cdot \varphi \, dx,$$

e, tomando o supremo sobre $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(U, \mathbb{R}^n)$ com $|\varphi| \leq 1$, obtemos, pelo Lema 5.2.1,

$$\|Df\|(U) = \|\nabla f\|_{L^1(U)} = \int_U |\nabla f| \, dx.$$

Então, de (5.8),

$$\int_{\mathbb{R}} \|\partial E_t\|(U) \, dt \leq \|Df\|(U) \leq \int_{\mathbb{R}} \|\partial E_t\|(U) \, dt.$$

Portanto,

$$\|Df\|(U) = \int_{\mathbb{R}} \|\partial E_t\|(U) \, dt, \qquad \text{para } f \in \mathcal{BV}(U) \cap \mathcal{C}^\infty(U). \tag{5.11}$$

Por fim, fixada $f \in \mathcal{BV}(U)$, pelo Teorema 5.1.16, existe uma sequência $(f_k) \subset \mathcal{BV}(U) \cap \mathcal{C}^\infty(U)$ tal que $f_k \to f$ em $L^1(U)$ e $\|Df_k\|(U) \to \|Df\|(U)$ quando $k \to \infty$.

Definindo $E_t^k = \{x \in U : f_k(x) > t\}$, note que $|\chi_{E_t^k}(x) - \chi_{E_t}(x)| = \chi_{E_t^k \triangle E_t}(x)$, no qual

$$\begin{aligned} E_t^k \triangle E_t &= \{x \in U : f(x) \leq t < f_k(x)\} \cup \{x \in U : f_k(x) \leq t < f(x)\} \\ &= \{x \in U : \min\{f_k(x), f(x)\} \leq t < \max\{f_k(x), f(x)\}\}. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\chi_{E_t^k}(x) - \chi_{E_t}(x)| \, dt &= \int_{\{t \in \mathbb{R} : \, x \in E_t^k \triangle E_t\}} dt \\ &= \int_{\min\{f_k(x), f(x)\}}^{\max\{f_k(x), f(x)\}} dt \\ &= |f_k(x) - f(x)|. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_U |f_k(x) - f(x)| \, dx = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_U |\chi_{E_t^k}(x) - \chi_{E_t}(x)| \, dx \right) dt,$$

pelo Teorema de Fubini-Tonelli. Denote

$$g_k(t) = \int_U |\chi_{E_t^k}(x) - \chi_{E_t}(x)| \, dx.$$

Como $f_k \to f$ em $L^1(U)$, temos que $\|g_k\|_1 \to 0$. Pelo Teorema 1.3.37, existe uma subsequência tal que, a menos de uma mudança de índices $k$, satisfaz $g_k(t) \to 0$ para $\mathcal{L}^1$-q.t.p. $t$, ou seja, $\chi_{E_t^k} \to \chi_{E_t}$ em $L^1(U)$ para $\mathcal{L}^1$-q.t.p. $t$.

Além disso, pelo que foi feito anteriormente, $\chi_{E_t^k} \in \mathcal{BV}(U)$. Podemos, então, aplicar o Teorema 5.1.15 e concluir que

$$\|\partial E_t\|(U) \leq \liminf_{k \to \infty} \|\partial E_t^k\|(U).$$

Então, pelo Lema de Fatou e por (5.11),

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \|\partial E_t\|(U)\,dt &\leq \int_{\mathbb{R}} \liminf_{k\to\infty} \|\partial E_t^k\|(U)\,dt\\ &\leq \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \|\partial E_t^k\|(U)\,dt\\ &= \liminf_{k\to\infty} \|Df_k\|(U)\\ &= \|Df\|(U).\end{aligned}$$

Isso, junto com (5.8), conclui que

$$\|Df\|(U) = \int_{\mathbb{R}} \|\partial E_t\|(U)\,dt.$$

□

Em certo ponto no início da demonstração acima, construímos uma função $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não-decrescente tal que $m'(t)$ existe para $\mathcal{L}^1$-q.t.p. $t \in \mathbb{R}$, e provamos que, para $a < b$, temos

$$\int_a^b m'(t)\,dt \leq m(b) - m(a).$$

Embora seja grande a tentação de afirmar que a igualdade é válida em geral, o seguinte exemplo, sugerido pelo Prof. L. Moonens, mostra que isso não é verdade.

**Exemplo 5.2.4.** Considere o conjunto

$$M = \{u \in \mathcal{C}([0,1]) : 0 \leq u \leq 1, u(0) = 0, u(1) = 1\},$$

e defina uma distância $d$ em $M$ pela fórmula

$$d(u,v) = \sup_{t\in[0,1]} |u(t) - v(t)|.$$

O espaço métrico $(M, d)$ é completo. De fato, $M \subset \mathcal{C}([0,1])$ e a distância $d$ é a restrição ao conjunto $M$ da distância $\bar{d}$ em $\mathcal{C}([0,1])$ induzida pela norma do supremo:

$$\bar{d}(u,v) = \sup_{t\in[0,1]} |u(t) - v(t)| = \|u - v\|_\infty.$$

Como $(\mathcal{C}([0,1]), \bar{d})$ é um espaço de Banach, então se $(u_j) \subset M$ é uma sequência de Cauchy, existe $u \in \mathcal{C}([0,1])$ tal que

$$\bar{d}(u_j, u) \to 0, \quad \text{quando } j \to \infty.$$

Como a convergência uniforme implica na convergência pontual, obtemos

$$u(0) = \lim_{j\to\infty} u_j(0) = 0 \quad \text{e} \quad u(1) = \lim_{j\to\infty} u_j(1) = 1.$$

Além disso, para $t \in [0,1]$,

$$u(t) = \lim_{j\to\infty} u_j(t) \in [0,1],$$

pois $0 \le u_j \le 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Então $u \in M$, provando que $(M,d)$ é completo.

Podemos definir a aplicação

$$\Phi : M \to M, \quad u \mapsto \Phi(u),$$

no qual $\Phi(u)$ é definida em $[0,1]$ por

$$\Phi(u)(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}u(3t), & \text{se } t \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \\ \frac{1}{2}, & \text{se } t \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}u(3t-2), & \text{se } t \in \left(\frac{2}{3}, 1\right]. \end{cases}$$

A aplicação $\Phi$ é uma contração, com constante de Lipschitz igual a $\frac{1}{2}$. Com efeito, sejam $u, v \in M$. Para $t \in [0,1]$,

$$\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[u(3t) - v(3t)], & \text{se } t \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \\ 0, & \text{se } t \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \\ \frac{1}{2}[u(3t-2) - v(3t-2)], & \text{se } t \in \left(\frac{2}{3}, 1\right]. \end{cases}$$

Logo, para cada $t \in [0,1]$, temos

$$|\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)| \le \frac{1}{2} d(u,v),$$

de onde obtemos que

$$d(\Phi(u), \Phi(v)) \le \frac{1}{2} d(u,v).$$

O Teorema do Ponto Fixo de Banach garante a existência de uma única $u^* \in M$ tal que $\Phi(u^*) = u^*$. Garante ainda que, para qualquer $u_0 \in M$, a sequência $(u_j)$ definida por

$$u_j = \Phi(u_{j-1}),$$

para $j \in \mathbb{N}$, converge em $M$ para $u^*$.

A função $u^*$ é chamada *função de Cantor*. Construindo $u^*$ a partir de $u_0(t) = t$, observamos que $u^*$ é não-decrescente e

$$(u^*)'(t) = 0 \quad \text{para } t \in [0,1] \setminus C,$$

no qual $C \subset [0,1]$ é o conjunto de Cantor. Como $\mathcal{L}^1(C) = 0$, temos que

$$(u^*)'(t) = 0 \quad \text{para } \mathcal{L}^1\text{-q.t.p. } t \in [0,1].$$

Desse modo,

$$\int_0^1 (u^*)'(t)\, dt = 0 < 1 = u^*(1) - u^*(0).$$

## 5.3 Desigualdades isoperimétricas e Desigualdade *boxing*

Nesta seção mostraremos três desigualdades que serão úteis em demonstrações posteriores: as chamadas Desigualdades isoperimétricas e a Desigualdade *boxing*.

Antes, no entanto, enunciamos a versão para funções $\mathcal{BV}$ das desigualdades de Sobolev e de Poincaré, que são obtidas a partir dos Teoremas 1.3.39 e 1.3.40. A demonstração pode ser vista em [EG, pp. 189-190].

**Teorema 5.3.1.**

*(i) Existe uma constante $c_1 > 0$ tal que*

$$\|f\|_{L^{n/(n-1)}} \leq c_1\|Df\|(\mathbb{R}^n)$$

*para toda $f \in \mathcal{BV}(\mathbb{R}^n)$.*

*(ii) Existe uma constante $c_2 > 0$ tal que*

$$\|f - (f)_{x,r}\|_{L^{n/(n-1)}(B[x,r])} \leq c_2\|Df\|(B(x,r))$$

*para toda $f \in \mathcal{BV}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e $B[x,r] \subset \mathbb{R}^n$, no qual $(f)_{x,r} = \fint_{B[x,r]} f\,dy$.*

**Teorema 5.3.2.** *Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ limitado e com perímetro finito. Então existem constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que*

*(i)* (Desigualdade isoperimétrica) $\quad \mathcal{L}^n(E)^{\frac{n-1}{n}} \leq c_1\|\partial E\|(\mathbb{R}^n)$.

*(ii)* (Desigualdade isoperimétrica relativa) $\quad$ *Para cada bola $B[x,r] \subset \mathbb{R}^n$,*

$$\min\{\mathcal{L}^n(B[x,r] \cap E), \mathcal{L}^n(B[x,r] \setminus E)\}^{\frac{n-1}{n}} \leq 2c_2\|\partial E\|(B(x,r)).$$

As constantes $c_1$ e $c_2$ são as mesmas dos Teoremas 1.3.39 (Desigualdade de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg) e 1.3.40 (Desigualdade de Poincaré).

*Demonstração.* Para $(i)$, aplicamos o item $(i)$ do Teorema 5.3.1 para $f = \chi_E$, de modo que

$$\mathcal{L}^n(E)^{\frac{n-1}{n}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\chi_E|^{n/(n-1)}\,dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \leq c_1\|D\chi_E\|(\mathbb{R}^n) = c_1\|\partial E\|(\mathbb{R}^n).$$

Provemos $(ii)$. Seja $f = \chi_{B[x,r]\cap E}$. Nesse caso,

$$(f)_{x,r} = \frac{1}{\mathcal{L}^n(B[x,r])}\int_{B[x,r]\cap E} dy = \frac{\mathcal{L}^n(B[x,r] \cap E)}{\mathcal{L}^n(B[x,r])}.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\int_{B[x,r]} |f-(f)_{x,r}|^{n/(n-1)}\,dy &= \int_{B[x,r]\cap E} \left|1-\frac{\mathcal{L}^n(B[x,r]\cap E)}{\mathcal{L}^n(B[x,r])}\right|^{n/(n-1)} dy \\
&\quad + \int_{B[x,r]\setminus E} \left|-\frac{\mathcal{L}^n(B[x,r]\cap E)}{\mathcal{L}^n(B[x,r])}\right|^{n/(n-1)} dy \\
&= \left(\frac{\mathcal{L}^n(B[x,r]\setminus E)}{\mathcal{L}^n(B[x,r])}\right)^{n/(n-1)} \mathcal{L}^n(B[x,r]\cap E) \\
&\quad + \left(\frac{\mathcal{L}^n(B[x,r]\cap E)}{\mathcal{L}^n(B[x,r])}\right)^{n/(n-1)} \mathcal{L}^n(B[x,r]\setminus E). \qquad (5.12)
\end{aligned}$$

Se $\mathcal{L}^n(B[x,r]\cap E) \leq \mathcal{L}^n(B[x,r]\setminus E)$, então,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathcal{L}^n(B[x,r]\setminus E)+\mathcal{L}^n(B[x,r]\cap E)}{\mathcal{L}^n(B[x,r])} \\
&\leq \frac{1}{2}\cdot\frac{2\mathcal{L}^n(B[x,r]\setminus E)}{\mathcal{L}^n(B[x,r])} \\
&= \frac{\mathcal{L}^n(B[x,r]\setminus E)}{\mathcal{L}^n(B[x,r])}.
\end{aligned}$$

De (5.12),

$$\int_{B[x,r]} |f-(f)_{x,r}|^{n/(n-1)}\,dy \geq \left(\frac{\mathcal{L}^n(B[x,r]\setminus E)}{\mathcal{L}^n(B[x,r])}\right)^{n/(n-1)} \mathcal{L}^n(B[x,r]\cap E),$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\|f-(f)_{x,r}\|_{L^{n/(n-1)}(B[x,r])} &\geq \left(\frac{\mathcal{L}^n(B[x,r]\setminus E)}{\mathcal{L}^n(B[x,r])}\right) \mathcal{L}^n(B[x,r]\cap E)^{\frac{n-1}{n}} \\
&\geq \frac{1}{2}\min\{\mathcal{L}^n(B[x,r]\cap E),\mathcal{L}^n(B[x,r]\setminus E)\}^{\frac{n-1}{n}},
\end{aligned}$$

e, portanto, aplicando o item $(ii)$ do Teorema 5.3.1 para $f$,

$$\begin{aligned}
\min\{\mathcal{L}^n(B[x,r]\cap E),\mathcal{L}^n(B[x,r]\setminus E)\}^{\frac{n-1}{n}} &\leq 2\|f-(f)_{x,r}\|_{L^{n/(n-1)}(B[x,r])} \\
&\leq 2c_2\|Df\|(B(x,r)) \\
&= 2c_2\|\partial(B[x,r]\cap E)\|(B(x,r)).
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\|\partial(B[x,r]\cap E)\|(B(x,r)) &= \sup\left\{\int_{B[x,r]\cap E} \mathrm{div}\varphi\,dy : \varphi\in\mathcal{C}_c^1(B(x,r),\mathbb{R}^n), |\varphi|\leq 1\right\} \\
&= \sup\left\{\int_E \mathrm{div}\varphi\,dy - \int_{E\setminus B[x,r]} \mathrm{div}\varphi\,dy : \varphi\in\mathcal{C}_c^1(B(x,r),\mathbb{R}^n), |\varphi|\leq 1\right\} \\
&= \sup\left\{\int_E \mathrm{div}\varphi\,dy : \varphi\in\mathcal{C}_c^1(B(x,r),\mathbb{R}^n), |\varphi|\leq 1\right\} \\
&= \|\partial(E)\|(B(x,r)).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\min\{\mathcal{L}^n(B[x,r] \cap E), \mathcal{L}^n(B[x,r] \setminus E)\}^{\frac{n-1}{n}} \leq 2c_2\|\partial(E)\|(B(x,r)).$$

No caso em que $\mathcal{L}^n(B[x,r]\setminus E) \leq \mathcal{L}^n(B[x,r]\cap E)$, argumento similar leva à mesma conclusão, completando a demonstração. □

Enunciamos o lema a seguir para o utilizarmos na demonstração da Desigualdade *boxing* (ver [EG, p. 27]):

**Lema 5.3.3** (Lema de Recobrimento de Vitali)**.** *Seja $\mathcal{G}$ uma coleção de bolas tal que*

$$\sup\{\text{diam } B : B \in \mathcal{G}\} < \infty.$$

*Então, existe uma subcoleção enumerável $\{B_j\} \subset \mathcal{G}$ de elementos dois a dois disjuntos tal que*

$$\bigcup_{B\in\mathcal{G}} B \subset \bigcup_j 5B_j.$$

**Lema 5.3.4** (Desigualdade *boxing*)**.** *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto com perímetro finito, $\mathcal{L}^n$-mensurável com $\mathcal{L}^n(U) < \infty$. Então, existe uma coleção de bolas disjuntas $B(x_j, R_j)$, $j = 1, 2, \ldots$, tais que*

$$U \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B(x_j, 5R_j),$$

$$\frac{1}{2^{n+1}} < \frac{\mathcal{L}^n(U \cap B(x_j, R_j))}{\mathcal{L}^n(B(x_j, R_j))} \leq \frac{1}{2}, \quad \text{para } j = 1, 2, \ldots$$

*e*

$$\sum_{j=1}^{\infty} R_j^{n-1} \leq C\|\partial U\|(\mathbb{R}^n),$$

*no qual $C > 0$ depende apenas de $n$.*

*Demonstração.* Seja $x \in U$. Como $U$ é aberto,

$$\frac{\mathcal{L}^n(U \cap B(x,r))}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} = 1$$

para $r > 0$ pequeno. Logo, para cada $x \in U$, existe $r_x > 0$ tal que

$$\frac{\mathcal{L}^n(U \cap B(x,r_x))}{\mathcal{L}^n(B(x,r_x))} = 1.$$

Além disso,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\mathcal{L}^n(U \cap B(x,r))}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} = 0,$$

pois $\mathcal{L}^n(U) < \infty$. Da continuidade da função

$$f(r) = \frac{\mathcal{L}^n(U \cap B(x,r))}{\mathcal{L}^n(B(x,r))},$$

existe $k = k(x) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\mathcal{L}^n(U \cap B(x, 2^m r_x))}{\mathcal{L}^n(B(x, 2^m r_x))} > \frac{1}{2} \quad \text{para } m = 0, 1, 2, \dots, k-1, \tag{5.13}$$

e

$$\frac{\mathcal{L}^n(U \cap B(x, 2^k r_x))}{\mathcal{L}^n(B(x, 2^k r_x))} \leq \frac{1}{2}. \tag{5.14}$$

Como $\mathcal{L}^n(B(x, 2^k r_x)) = 2^n \mathcal{L}^n(B(x, 2^{k-1} r_x))$ e $B(x, 2^{k-1} r_x) \subset B(x, 2^k r_x)$ para $k \in \mathbb{N}$, temos, de (5.13), que

$$\frac{\mathcal{L}^n(U \cap B(x, 2^k r_x))}{\mathcal{L}^n(B(x, 2^k r_x))} \geq \frac{\mathcal{L}^n(U \cap B(x, 2^{k-1} r_x))}{2^n \mathcal{L}^n(B(x, 2^{k-1} r_x))} > \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Denote $R_x = 2^k r_x$. Como $U$ é mensurável, (5.14) implica que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n(B(x, R_x) \setminus U) &= \mathcal{L}^n(B(x, R_x)) - \mathcal{L}^n(U \cap B(x, R_x)) \\ &\geq \mathcal{L}^n(U \cap B(x, R_x)), \end{aligned}$$

de onde concluímos que

$$\min\{\mathcal{L}^n(U \cap B(x, R_x)), \mathcal{L}^n(B(x, R_x) \setminus U)\} = \mathcal{L}^n(U \cap B(x, R_x)) > \frac{\mathcal{L}^n(B(x, R_x))}{2^{n+1}}.$$

Pela desigualdade anterior, e pela Desigualdade isoperimétrica relativa (Teorema 5.3.2),

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}^n(B(x, R_x))}{2^{n+1}} &< \mathcal{L}^n(U \cap B(x, R_x))^{1/n} \; \mathcal{L}^n(U \cap B(x, R_x))^{(n-1)/n} \\ &\leq \mathcal{L}^n(U \cap B(x, R_x))^{1/n} \; 2c_2 \; \|\partial U\|(B(x, R_x)) \\ &\leq \mathcal{L}^n(B(x, R_x))^{1/n} \; 2c_2 \; \|\partial U\|(B(x, R_x)) \\ &= R_x \; \tilde{c} \; \|\partial U\|(B(x, R_x)), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{\mathcal{L}^n(B(x, R_x))}{R_x} < \tilde{\tilde{c}} \; \|\partial U\|(B(x, R_x)).$$

Aplicando o Lema de Recobrimento de Vitali (Lema 5.3.3) à coleção $\{B(x, R_x)\}$, $x \in U$, obtemos uma família enumerável de bolas disjuntas $B(x_j, R_j)$, $j = 1, 2, \dots$, tais que

$$U \subset \bigcup_{x \in U} B(x, R_x) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B(x_j, 5R_j).$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mathcal{L}^n(B(x_j, 5R_j))}{5R_j} &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{5^n \mathcal{L}^n(B(x_j, R_j))}{5R_j} \\ &\leq \tilde{\tilde{c}} \; 5^{n-1} \sum_{j=1}^{\infty} \|\partial U\|(B(x_j, R_j)) \\ &= c \; \|\partial U\|(\cup_{j=1}^{\infty} B(x_j, R_j)) \\ &\leq c \; \|\partial U\|(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Logo, como

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\mathcal{L}^n(B(x_j,5R_j))}{5R_j} &= \sum_{j=1}^{\infty}\frac{5^n\mathcal{L}^n(B(x_j,R_j))}{5R_j}\\ &= 5^{n-1}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\tilde{c}{R_j}^n}{R_j}\\ &= 5^{n-1}\tilde{c}\sum_{j=1}^{\infty}{R_j}^{n-1},\end{aligned}$$

temos que

$$\sum_{j=1}^{\infty}R_j^{n-1}\leq C\|\partial U\|(\mathbb{R}^n).$$

□

# Capítulo 6

# Resolubilidade da equação div $F = \mu$

Neste capítulo estudaremos resultados apresentados em [PT] que caracterizam a existência de soluções para a equação div$F = \mu$ quando $\mu$ é uma medida de Radon positiva em $\mathbb{R}^n$. Primeiro, veremos o caso em que $F \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, para $1 \leq p \leq \infty$. Em seguida, trataremos do caso em que $F$ é contínuo. Antes, porém, apresentamos alguns teoremas que serão utilizados nas demonstrações.

## 6.1 Resultados preliminares

**Teorema 6.1.1.** *Sejam $\mu$ uma medida de Borel positiva em $\mathbb{R}^n$, $1 < p < q < \infty$ e $p < n$. Então, para toda $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, existe $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^q(\mu)} \leq C\|\nabla u\|_p,$$

*no qual*

$$C^q \leq c \sup_{x\in\mathbb{R}^n;\rho>0} \rho^{(1-n/p)q}\mu(B(x,\rho)).$$

*Demonstração.* Mostremos que, para $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos $|u(x)| \lesssim I_1|\nabla u|(x)$. De fato, temos que

$$\begin{aligned}
\hat{u}(\xi) &= \left(\sum_{j=1}^n \frac{\xi_j^2}{|\xi|^2}\right)\hat{u}(\xi) = \sum_{j=1}^n \frac{\xi_j}{|\xi|^2}\xi_j\hat{u}(\xi) \\
&= \sum_{j=1}^n (K_j)\hat{\ }(\xi)\,(\partial_j u)\hat{\ }(\xi) = \sum_{j=1}^n (K_j * \partial_j u)\hat{\ }(\xi) \\
&= \left[\sum_{j=1}^n K_j * \partial_j u\right]\hat{\ }(\xi),
\end{aligned}$$

no qual $K_j(x) = c_1\dfrac{x_j}{|x|^n}$. (Em [SW, Teorema 4.1, p. 160] é mostrado que $(K_j)\hat{\ }(\xi) = c_2\dfrac{\xi_j}{|\xi|^2}$.)

Então,

$$
\begin{aligned}
u(x) &= \sum_{j=1}^{n} (K_j * \partial_j u)(x) \\
|u(x)| &\leq \sum_{j=1}^{n} (|K_j| * |\partial_j u|)(x) \\
&\lesssim \sum_{j=1}^{n} \left( \frac{1}{|x|^{n-1}} * |\partial_j u| \right)(x) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\partial_j u(y)|}{|x-y|^{n-1}}\, dy \\
&\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}}\, dy \\
&= I_1 |\nabla u|(x).
\end{aligned}
$$

Disso decorre que, para $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\|u\|_{L^q(\mu)}^q \lesssim \big\| I_1 |\nabla u| \big\|_{L^q(\mu)}^q.$$

Desse modo, pelo Teorema 1.5.10,

$$\|u\|_{L^q(\mu)} \lesssim \big\| I_1 |\nabla u| \big\|_{L^q(\mu)} \lesssim \big\| |\nabla u| \big\|_p = \|\nabla u\|_p.$$

□

Passamos agora a um resultado que nos permite obter uma estimativa semelhante no caso em que $p = 1 \leq q$.

**Teorema 6.1.2.** *Se*

$$\sup_{\{G\}} \frac{\mu(G)^{1/q}}{\mathcal{H}^{n-1}(\partial G)} < \infty, \tag{6.1}$$

*no qual $\mu$ é uma medida de Borel positiva em $\mathbb{R}^n$, $q \geq 1$ e $\{G\}$ é uma coleção de subconjuntos de um conjunto aberto $\Omega$, $G \subset\subset \Omega$, limitados por variedades $\mathcal{C}^\infty$. Então, para qualquer $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$,*

$$\|u\|_{L^q(\Omega,\mu)} \leq C \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)},$$

*no qual*

$$C \leq \sup_{\{G\}} \frac{\mu(G)^{1/q}}{\mathcal{H}^{n-1}(\partial G)}.$$

*Demonstração.* Seja

$$\mathscr{L}_t = \{x \in \Omega : |u(x)| > t\}.$$

Então

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^q(\Omega,\mu)} &= \left( \int_\Omega |u(x)|^q \, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}} = \left( \int_\Omega \left( \int_0^\infty \chi_{(0,|u(x)|^q)}(\tau) \, d\tau \right) d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left( \int_0^\infty \left( \int_\Omega \chi_{(0,|u(x)|^q)}(\tau) \, d\mu(x) \right) d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left( \int_0^\infty \mu(\{x \in \Omega : |u(x)|^q > \tau\}) \, d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left( \int_0^\infty \mu(\{x \in \Omega : |u(x)| > t\}) \, d(t^q) \right)^{\frac{1}{q}} = \left( \int_0^\infty \mu(\mathscr{L}_t) \, d(t^q) \right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Como $\mu(\mathscr{L}_t) \leq \mu(\mathscr{L}_s)$ quando $s \leq t$, temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \mu(\mathscr{L}_t) \, d(t^q) &= \int_0^\infty [\mu(\mathscr{L}_t)^{1/q}]^q \, d(t^q) \\
&= \int_0^\infty q[t\mu(\mathscr{L}_t)^{1/q}]^{q-1} \mu(\mathscr{L}_t)^{1/q} \, dt \\
&= \int_0^\infty q \left[ \int_0^t \mu(\mathscr{L}_t)^{1/q} \, ds \right]^{q-1} \mu(\mathscr{L}_t)^{1/q} \, dt \\
&\leq \int_0^\infty q \left[ \int_0^t \mu(\mathscr{L}_s)^{1/q} \, ds \right]^{q-1} \mu(\mathscr{L}_t)^{1/q} \, dt \\
&= \int_0^\infty \frac{d}{dt} \left( \left[ \int_0^t \mu(\mathscr{L}_s)^{1/q} \, ds \right]^q \right) dt \\
&= \left( \int_0^\infty \mu(\mathscr{L}_t)^{1/q} \, dt \right)^q.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^q(\Omega,\mu)} &\leq \int_0^\infty \mu(\mathscr{L}_t)^{1/q} \, dt \\
&= \int_0^\infty \frac{\mu(\mathscr{L}_t)^{1/q}}{\mathcal{H}^{n-1}(\partial \mathscr{L}_t)} \mathcal{H}^{n-1}(\partial \mathscr{L}_t) \, dt \\
&\leq \sup_{\{G\}} \frac{\mu(G)^{1/q}}{\mathcal{H}^{n-1}(\partial G)} \int_0^\infty \mathcal{H}^{n-1}(\partial \mathscr{L}_t) \, dt,
\end{aligned}$$

pois, pelo corolário em [Maz, p. 37], os conjuntos $\mathscr{L}_t$ pertencem à classe $\{G\}$.

Por fim, pela fórmula de co-área (Teorema 5.2.3), obtemos

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^q(\Omega,\mu)} &\leq C \int_0^\infty \mathcal{H}^{n-1}(\partial \mathscr{L}_t) \, dt \\
&= C \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

□

O Teorema anterior possui uma versão especial quando $\Omega = \mathbb{R}^n$, na qual a condição (6.1) é substituída por outra equivalente, que toma o supremo apenas sobre bolas:

**Teorema 6.1.3.** *Se*
$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n; r>0} \frac{\mu(B(x,r))}{r^{(n-1)q}} < \infty,$$
*no qual $\mu$ é uma medida de Borel positiva em $\mathbb{R}^n$ e $q \geq 1$, então, para qualquer $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$,*
$$\|u\|_{L^q(\mu)} \leq C\|\nabla u\|_1,$$
*no qual*
$$C^q \leq c^q \sup_{x\in\mathbb{R}^n;\, r>0} \frac{\mu(B(x,r))}{r^{(n-1)q}},$$
*com $c = c(n) > 0$.*

*Demonstração.* Dado $G \in \{G\}$ como no teorema anterior, tome o recobrimento $\{B(x_j, r_j)\}$ dado pelo Teorema 3.1.10.

Note que, se $a_j > 0$ e $q \geq 1$, temos
$$\frac{a_1^{1/q} + a_2^{1/q}}{(a_1 + a_2)^{1/q}} = \frac{a_1^{1/q}}{(a_1 + a_2)^{1/q}} + \frac{a_2^{1/q}}{(a_1 + a_2)^{1/q}} \geq \frac{a_1}{a_1 + a_2} + \frac{a_2}{a_1 + a_2} = 1,$$
ou seja,
$$(a_1 + a_2)^{1/q} \leq a_1^{1/q} + a_2^{1/q}.$$
Então,
$$\left(\sum_j a_j\right)^{1/q} \leq \sum_j a_j^{1/q},$$
de onde obtemos
$$\begin{aligned}\mu(G) &\leq \sum_j \mu(B(x_j, r_j)) \leq \left(\sum_j \mu(B(x_j, r_j))^{1/q}\right)^q \\ &= \left(\sum_j [r_j^{(1-n)q}\mu(B(x_j, r_j))]^{1/q} r_j^{n-1}\right)^q \\ &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n;\, r>0} \frac{\mu(B(x,r))}{r^{(n-1)q}} \left(\sum_j r_j^{n-1}\right)^q.\end{aligned}$$
Do Teorema 3.1.10, concluímos que
$$\mu(G) \leq c^q \sup_{x\in\mathbb{R}^n;\, r>0} \frac{\mu(B(x,r))}{r^{(n-1)q}} \left(\mathcal{H}^{n-1}(\partial G)\right)^q.$$
Logo,
$$\sup_{\{G\}} \frac{\mu(G)^{1/q}}{\mathcal{H}^{n-1}(\partial G)} \leq c\left(\sup_{x\in\mathbb{R}^n;\, r>0} \frac{\mu(B(x,r))}{r^{(n-1)q}}\right)^{1/q} < \infty.$$
Aplicando o Teorema anterior, obtemos a conclusão desejada. □

## 6.2 O caso $L^p$

Dividiremos o estudo em três faixas diferentes para valores de $p$. O caso em que $1 \leq p \leq n/(n-1)$ se mostra pouco interessante pois, aqui, a equação apenas admite solução quando $\mu$ é a medida nula.

**Teorema 6.2.1.** *Sejam $n > 1$ e $1 \leq p \leq n/(n-1)$. Se $\mu$ é uma medida de Radon positiva em $\mathbb{R}^n$, e $F \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ é solução de $\operatorname{div} F = \mu$, então $\mu \equiv 0$.*

*Demonstração.* Observe primeiramente que, para $n > 1$,

$$\int_{|x-y|}^{\infty} \frac{1}{r^n}\, dr = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{|x-y|^{n-1}}.$$

Assim, temos que

$$I_1\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{n-1}}\, d\mu(y) = (n-1)\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{|x-y|}^{\infty} \frac{1}{r^n}\, dr\right) d\mu(y).$$

Se $A_y = \{s \in \mathbb{R} : s > |x-y|\}$, então, pelo Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}
I_1\mu(x) &= (n-1)\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^{\infty} \frac{\chi_{A_y}(r)}{r^n}\, dr\right) d\mu(y) \\
&= (n-1)\int_0^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\chi_{A_y}(r)}{r^n}\, d\mu(y)\right) dr \\
&= (n-1)\int_0^{\infty} \left(\int_{B(x,r)} \frac{1}{r^n}\, d\mu(y)\right) dr \\
&= (n-1)\int_0^{\infty} \frac{\mu(B(x,r))}{r^n}\, dr \\
&= (n-1)\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\mu(B(x,r))}{r^n}\, dr.
\end{aligned}$$

Como $L^p \subset L^1_{loc}$, $\forall p \in [1,\infty]$, podemos usar o Teorema 5.1.4 para obter

$$\begin{aligned}
I_1\mu(x) &= (n-1)\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{r^n}\left(\int_{B(x,r)} d\mu(y)\right) dr \\
&= (n-1)\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{r^n}\left(\int_{B(x,r)} \operatorname{div} F(y)\, dy\right) dr \\
&= (n-1)\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{r^n}\left(\int_{\partial B(x,r)} F(y)\cdot\nu(y)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y)\right) dr.
\end{aligned}$$

Note que, para $y \in \partial B(x,r)$, o vetor unitário normal exterior é dado por $\nu(y) = \frac{y-x}{|y-x|} = \frac{y-x}{r}$.

Assim, temos

$$\begin{aligned}
I_1\mu(x) &= (1-n)\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^\infty \left(\int_{\partial B(x,r)} F(y)\cdot \frac{x-y}{|x-y|^{n+1}}\,d\mathcal{H}^{n-1}(y)\right) dr \\
&= (1-n)\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|x-y|>\varepsilon} F(y)\cdot \frac{x-y}{|x-y|^{n+1}}\,dy \\
&= (1-n)\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|x-y|>\varepsilon} \left(\sum_{j=1}^n f_j(y)\cdot \frac{x_j-y_j}{|x-y|^{n+1}}\right) dy \\
&= (1-n)\sum_{j=1}^n \left(\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|x-y|>\varepsilon} f_j(y)\cdot \frac{x_j-y_j}{|x-y|^{n+1}}\,dy\right) \\
&= c(n)\sum_{j=1}^n R_j f_j(x),
\end{aligned}$$

para q.t.p. $x\in\mathbb{R}^n$, no qual $F=(f_1,\dots,f_n)$ e $R_j$ é a j-ésima transformada de Riesz.

Para $1<p<\infty$, temos, pela Proposição 1.5.8, que $R_j$ é forte $(p,p)$, de modo que

$$\|I_1\mu\|_p = c(n)\left\|\sum_{j=1}^n R_j f_j\right\|_p \le c(n)\sum_{j=1}^n \|R_j f_j\|_p \lesssim \sum_{j=1}^n \|f_j\|_p \lesssim \|F\|_p < \infty. \tag{6.2}$$

Então, $\mu$ tem energia-$(1,p)$ finita. Pela Observação 1.5.12, temos nesse caso que $\mu\equiv 0$.

Para $p=1$, a Proposição 1.5.8 afirma que $R_j$ é do tipo fraco $(1,1)$, de onde obtemos

$$\|I_1\mu\|_{L^{1,\infty}} = c(n)\left\|\sum_{j=1}^n R_j f_j\right\|_{L^{1,\infty}} \lesssim \sum_{j=1}^n \|R_j f_j\|_{L^{1,\infty}} \lesssim \sum_{j=1}^n \|f_j\|_1 \lesssim \|F\|_1 < \infty.$$

Novamente pela Observação 1.5.12, concluímos que $\mu\equiv 0$. $\square$

A seguir, consideramos o caso em que $n/(n-1)<p<\infty$, ou seja, $1<p'<n$. Nesse caso, a existência de uma solução para a equação é caracterizada pela energia-$(1,p)$ de $\mu$.

**Teorema 6.2.2.** *Suponha $n/(n-1)<p<\infty$. Se $F\in L^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ é solução de $\operatorname{div}F=\mu$, para alguma medida de Radon positiva $\mu$, então $\mu$ possui energia-$(1,p)$ finita. Reciprocamente, se $\mu$ é uma medida de Radon positiva com energia-$(1,p)$ finita, então existe um campo vetorial $F\in L^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ tal que $\operatorname{div}F=\mu$.*

*Demonstração.* Os mesmos argumentos que levam a (6.2) na demonstração do Teorema 6.2.1 provam a primeira parte.

Por outro lado, seja $w^{1,p'}$ o conjunto $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ com a norma $\|u\|_{w^{1,p'}}=\|\nabla u\|_{p'}$. Definimos a transformação linear $A: w^{1,p'}\to L^{p'}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ como $A(u)=\nabla u$. Note que $\|A(u)\|_{p'}=\|u\|_{w^{1,p'}}$, logo $A$ é uma isometria linear. Então, sua adjunta, $A^*: L^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)\to (w^{1,p'})^*$, é sobrejetora, pelo Lema 1.2.5. Temos pelo Teorema 1.3.38 que, para toda $u\in\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$A^*(F)(u) = F(A(u)) = \int_{\mathbb{R}^n} F\cdot\nabla u,$$

ou seja, $A^*(F) = \text{div}F$ como distribuição.

Como visto no início da demonstração do Teorema 6.1.1, temos que $|u(x)| \lesssim I_1|\nabla u|(x)$ para $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Desse modo, para $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^n} u\, d\mu\right| &\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} I_1|\nabla u|\, d\mu \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left[C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}}\, dy\right] d\mu(x) \\
&= C \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(y)| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{n-1}}\, d\mu(x)\right] dy \\
&= C \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(y)|\, I_1\mu(y)\, dy.
\end{aligned}$$

Como $\mu$ tem energia-$(1,p)$ finita, pela Desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^n} u\, d\mu\right| &\lesssim \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} [I_1\mu]^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\lesssim \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} = \|u\|_{w^{1,p'}},
\end{aligned}$$

para $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Logo, temos que $\mu \in (w^{1,p'})^*$. Como $A^*$ é sobrejetivo, existe $F \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tal que $\text{div}F = A^*(F) = \mu$. □

Por fim, temos resultado análogo ao Teorema 6.2.2 para o caso $p = \infty$.

**Teorema 6.2.3.** *Se $\mu$ é uma medida de Radon positiva tal que*

$$\mu(B(x,r)) \leq Cr^{n-1}, \quad \textit{para todo } r > 0, x \in \mathbb{R}^n, \tag{6.3}$$

*para alguma constante $C > 0$, que independe de $x$ e $r$, então existe um campo vetorial $F \in L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ que satisfaz $\text{div}F = \mu$. Reciprocamente, se $F \in L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ é tal que $\text{div}F = \mu$ para alguma medida de Radon positiva $\mu$, então $\mu$ satisfaz a propriedade* (6.3).

*Demonstração.* Por um lado, se $F \in L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ satisfaz $\text{div}F = \mu$, então pela fórmula de Gauss-Green dada no Teorema 5.1.4 temos que, para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$ e para quase todo $r > 0$,

$$\begin{aligned}
\mu(B(x,r)) = \int_{B(x,r)} \text{div}F &= \int_{\partial B(x,r)} F \cdot \nu\, d\mathcal{H}^{n-1} \\
&\leq \int_{\partial B(x,r)} \|F\|_\infty\, d\mathcal{H}^{n-1} \\
&\leq \|F\|_\infty\, c(n) r^{n-1}.
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Denote por $N \subset \mathbb{R}_+$ o conjunto (de medida nula) dos valores $r > 0$ para os quais (6.4) não é satisfeito. Dados quaisquer $x \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, podemos escrever

$$B[x,r] = \bigcap_j B(x, r_j),$$

no qual os raios $r_j \in \mathbb{R}_+ \setminus N$ formam uma sequência decrescente tal que $r_j \to r$. Tal sequência existe, pois $\mathbb{R}_+ \setminus N$ é denso em $\mathbb{R}_+$. De fato, se não fosse denso, existiria um intervalo aberto $I \subset N$, de modo que $N$ não teria medida nula. Assim,

$$\begin{aligned}\mu(B(x,r)) &\le \mu(B[x,r]) = \lim_j \mu(B(x,r_j)) \\ &\le \lim_j \|F\|_\infty \, c(n) r_j^{n-1} \\ &= \|F\|_\infty \, c(n) r^{n-1}.\end{aligned}$$

Por outro lado, considere, como anteriormente, o espaço $w^{1,1}$ das funções $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ com a norma $\|u\|_{w^{1,1}} = \|\nabla u\|_1$, e defina $A : w^{1,1} \to L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ como $A(u) = \nabla u$. Novamente, $A$ é uma isometria linear e, portanto, sua adjunta $A^* : L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \to (w^{1,1})^*$ é sobrejetora, pelo Lema 1.2.5. Assim como na demonstração anterior, $A^*F = \operatorname{div} F$ em distribuição.

Como $\mu$ satisfaz (6.3), então

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n;\, r>0} \frac{\mu(B(x,r))}{r^{n-1}} < \infty.$$

Logo, podemos usar o Teorema 6.1.3, com $q = 1$, para concluir que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} u \, d\mu \right| \le \int_{\mathbb{R}^n} |u| \, d\mu \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u| \, dx = \|u\|_{w^{1,1}}$$

para toda $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Desse modo, $\mu \in (w^{1,1})^*$. Portanto, pela sobrejetividade de $A^*$, obtemos o resultado desejado. $\square$

## 6.3 O caso contínuo

Começamos esta seção enunciando o seguinte teorema, devido à De Pauw e Pfeffer em [DP1]:

**Teorema 6.3.1.** *Seja $\mu$ uma medida de Radon com sinal definida em um conjunto aberto não-vazio $U \subset \mathbb{R}^n$. Então, as propriedades a seguir são equivalentes.*

*(i) A equação* $\operatorname{div} F = \mu$ *possui uma solução contínua $F : U \to \mathbb{R}^n$.*

*(ii) Dados $\varepsilon > 0$ e um conjunto compacto $K \subset\subset U$, existe $\theta > 0$ tal que*

$$\left| \int_U \varphi \, d\mu \right| \le \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi| \, dx + \theta \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi| \, dx$$

*para toda $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(K)$.*

*Demonstração.* Apresentaremos aqui apenas a demonstração de $(i) \Rightarrow (ii)$. A demonstração da recíproca envolve outras técnicas que fogem ao escopo desta dissertação.

Seja $F \in \mathcal{C}(U, \mathbb{R}^n)$ solução de div $F = \mu$, ou seja,

$$\int_U \varphi \, d\mu = \int_U F \cdot \nabla\varphi \, dx,$$

para toda $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$. Dados $\varepsilon > 0$ e $K \subset\subset U$ compacto, tome $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(K)$. Como $F$ é contínua no compacto $K$, existe, pelo Teorema de Weierstrass (veja [R1]), $f \in \mathcal{C}_c^\infty(U, \mathbb{R}^n)$ tal que $\sup_K |f - F| < \varepsilon$. Dessa maneira,

$$\begin{aligned}
\left|\int_U \varphi \, d\mu\right| &= \left|\int_U F \cdot \nabla\varphi \, dx - \int_U f \cdot \nabla\varphi \, dx + \int_U f \cdot \nabla\varphi \, dx\right| \\
&\leq \int_K |F - f| \, |\nabla\varphi| \, dx + \left|\int_U f \cdot \nabla\varphi \, dx\right| \\
&\leq \varepsilon \int_K |\nabla\varphi| \, dx + \left|\int_U \varphi \, \mathrm{div} f \, dx\right| \\
&\leq \varepsilon \int_K |\nabla\varphi| \, dx + \int_K |\varphi| \, |\mathrm{div} f| \, dx \\
&\leq \varepsilon \int_K |\nabla\varphi| \, dx + \|\mathrm{div} f\|_{L^\infty(K)} \int_K |\varphi| \, dx \\
&= \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\varphi| \, dx + \|\mathrm{div} f\|_{L^\infty(K)} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi| \, dx.
\end{aligned}$$

Definindo $\theta = \|\mathrm{div} f\|_{L^\infty(K)}$, obtemos o resultado. □

Caminhando para o principal teorema desta seção, o Teorema 6.3.4, mostramos os resultados seguintes.

**Teorema 6.3.2.** *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e seja $\mu$ uma medida de Radon com sinal em $U$. Suponha que, para cada conjunto compacto $K \subset\subset U$,*

$$\lim_{\delta \to 0^+} \sup_{x_0 \in K} \sup \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}^n} u \, d\mu \right| : u \in \mathcal{C}_c^\infty(B(x_0, \delta)), \|\nabla u\|_1 \leq 1 \right\} = 0.$$

*Então, dados $\varepsilon > 0$ e um conjunto compacto $K \subset\subset U$, existe $\theta > 0$ tal que*

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu\right| \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\varphi| \, dx + \theta \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi| \, dx$$

*para toda $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(K)$.*

*Demonstração.* Seja $\varepsilon > 0$. Definimos $d(K) = \mathrm{dist}(K, \partial U)$ e

$$K_{d(K)/2} = \left\{ x_0 \in U : \mathrm{dist}(x_0, K) \leq \frac{d(K)}{2} \right\}.$$

Pela hipótese, existe $0 < \delta = \delta(\varepsilon) < d(K)/2$ tal que

$$\sup_{x_0 \in K} \sup \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}^n} u \, d\mu \right| : u \in \mathcal{C}_c^\infty(B(x_0, \delta)), \|\nabla u\|_1 \leq 1 \right\} \leq \varepsilon,$$

ou seja,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} u \, d\mu \right| \leq \varepsilon,$$

para todo $x_0 \in K_{d(K)/2}$ e para toda $u \in \mathcal{C}_c^\infty(B(x_0, \delta))$ com $\|\nabla u\|_1 \leq 1$. Aplicando a desigualdade acima para $\dfrac{u}{\|\nabla u\|_1}$, com $u \in \mathcal{C}_c^\infty(B(x_0, \delta))$, obtemos que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} u \, d\mu \right| \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u| \, dx, \tag{6.5}$$

para todo $x_0 \in K_{d(K)/2}$ e para toda $u \in \mathcal{C}_c^\infty(B(x_0, \delta))$.

Seja $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(B(0,1))$ uma função corte tal que $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta \equiv 1$ em $B[0, 1/2]$, e $|\nabla \eta| \leq C(n)$ (veja Observação 1.4.10). Escolhemos $x_j \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, 2, \ldots$, de modo que $\{x_j\}$ determina um reticulado no qual a distância entre pontos adjacentes é $\dfrac{\delta}{3\sqrt{n}}$ e definimos

$$\eta_j(x) = \eta\left(\frac{x - x_j}{\delta}\right).$$

Note que $\eta_j \in \mathcal{C}_c^\infty(B(x_j, \delta))$, $0 \leq \eta_j \leq 1$, $\eta_j \equiv 1$ em $B[x_j, \delta/2]$ e

$$|\nabla \eta_j| \leq \frac{C}{\delta}. \tag{6.6}$$

Defina

$$\psi(x) = \sum_j \eta_j(x),$$

no qual a soma é tomada sobre uma quantidade finita de índices $j$ tal que

$$K_{d(K)/2} \subset \bigcup_j B(x_j, \delta/2).$$

Cada ponto em $K_{d(K)/2}$ está contido em, no máximo, $N = N(n)$ bolas $B(x_j, \delta/2)$. Por isso, $1 \leq \psi \leq N$ em $K_{d(K)/2}$ e, por (6.6),

$$|\nabla \psi| \leq \sum_j |\nabla \eta_j| \leq \frac{\tilde{C}(n)}{\delta} \tag{6.7}$$

em $K_{d(K)/2}$.

Agora, definimos

$$\xi_j(x) = \frac{\eta_j(x)}{\psi(x)}.$$

Note que, em $K_{d(K)/2}$, as $\xi_j$ estão bem definidas, pois $\psi \geq 1$, e

$$\sum_j \xi_j(x) = 1.$$

Dada $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(K)$, temos que cada $\xi_j\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(B(x_j, \delta))$. Então, de (6.5), obtemos

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\, d\mu\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_j \xi_j\right) \varphi\, d\mu\right| \\
&\leq \sum_j \left|\int_{\mathbb{R}^n} \xi_j \varphi\, d\mu\right| \\
&\leq \varepsilon \sum_j \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(\xi_j\varphi)|\, dx \\
&\leq \varepsilon \sum_j \int_{\mathbb{R}^n} \xi_j |\nabla\varphi|\, dx + \varepsilon \sum_j \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\xi_j|\, |\varphi|\, dx \\
&= \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\varphi|\, dx + \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi| \sum_j |\nabla\xi_j|\, dx.
\end{aligned}$$

Utilizando (6.7), estimamos

$$\begin{aligned}
\sum_j |\nabla\xi_j(x)| &= \sum_j \left|\frac{\psi(x)\nabla\eta_j(x) - \eta_j(x)\nabla\psi(x)}{[\psi(x)]^2}\right| \\
&\leq \sum_j \frac{|\nabla\eta_j(x)|}{\psi(x)} + \sum_j \frac{\eta_j(x)|\nabla\psi(x)|}{[\psi(x)]^2} \\
&= \sum_j \frac{|\nabla\eta_j(x)|}{\psi(x)} + \frac{|\nabla\psi(x)|}{\psi(x)} \\
&= \frac{1}{\psi(x)} \left(\sum_j |\nabla\eta_j(x)| + |\nabla\psi(x)|\right) \\
&\leq \frac{2\tilde{C}(n)}{\delta}.
\end{aligned}$$

Fazendo $\theta = \dfrac{\varepsilon\, 2\tilde{C}(n)}{\delta}$, obtemos

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\, d\mu\right| \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\varphi|\, dx + \theta \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|\, dx.$$

□

**Teorema 6.3.3.** *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e seja $\mu$ uma medida positiva em $U$. Suponha que, para qualquer conjunto compacto $K \subset\subset U$,*

$$\lim_{\delta\to 0^+} \sup_{x_0 \in K} \sup \left\{\frac{\mu(B(x_0, r))}{r^{n-1}} : 0 < r < \delta\right\} = 0.$$

*Então, para qualquer conjunto compacto $K \subset\subset U$,*

$$\lim_{\delta \to 0^+} \sup_{x_0 \in K} \sup \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}^n} u \, d\mu \right| : u \in \mathcal{C}_c^\infty(B(x_0, \delta)), \|\nabla u\|_1 \leq 1 \right\} = 0.$$

*Demonstração.* Observe que a hipótese é equivalente a dizer que, para qualquer compacto $K \subset\subset U$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$\mu(B(x_0, r)) \leq \varepsilon r^{n-1}$$

para todo $x_0 \in K$ e $0 < r < \delta < \delta_0$. Já a tese, tal como argumentado na demonstração anterior, é equivalente a dizer que, para qualquer compacto $K \subset\subset U$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} u \, d\mu \right| \leq \varepsilon,$$

para toda $u \in \mathcal{C}_c^\infty(B(x_0, \delta))$ com $\|\nabla u\|_1 \leq 1$, $x_0 \in K$ e $0 < \delta < \delta_0$.

Seja $K \subset\subset U$ um conjunto compacto. Sejam $\varepsilon > 0$ e $d(K) = \operatorname{dist}(K, \partial U)$. Definimos

$$K_{d(K)/2} = \left\{ x_0 \in U : \operatorname{dist}(x_0, K) \leq \frac{d(K)}{2} \right\}.$$

Pela hipótese, aplicada para $K_{d(K)/2}$ e $2r$, existe $0 < \delta_1 < d(K)/2$ tal que

$$\mu(B(x_0, 2r)) \leq \varepsilon r^{n-1}, \tag{6.8}$$

para todo $x_0 \in K_{d(K)/2}$ e $0 < r < \delta_1$. Sejam $u \in \mathcal{C}_c^\infty(B(x_0, \delta))$ com $\|\nabla u\|_1 \leq 1$, $x_0 \in K$ e $0 < \delta < \delta_1/10$. Considere a decomposição $u = u^+ - u^-$ de $u$ nas suas partes positiva e negativa, que são funções contínuas. Pelo Teorema 5.2.3, podemos aplicar a Desigualdade *boxing* (Teorema 5.3.4) para o conjunto $E_t = \{x : u^+(x) > t\}$, $t > 0$, para obter uma coleção de bolas $\{B(x_{j,t}, r_{j,t})\}_j$, com $x_{j,t} \in E_t$, tal que

$$E_t \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B(x_{j,t}, r_{j,t})$$

e

$$\sum_{j=1}^{\infty} r_{j,t}^{n-1} \leq C(n) \|\partial E_t\|(\mathbb{R}^n), \tag{6.9}$$

no qual $C(n) > 0$ não depende de $t$.

Como $supp(u^+) \subset supp(u) \subset B(x_0, \delta)$, então $E_t \subset B(x_0, \delta)$. Além disso, da demonstração da Desigualdade *boxing*, a cobertura $\{B(x_{j,t}, r_{j,t})\}$ pode ser tomada de modo que

$$2\mathcal{L}^n(B(x_{j,t}, r_{j,t}/5) \cap E_t) = \mathcal{L}^n(B(x_{j,t}, r_{j,t}/5)).$$

Afirmamos que $r_{j,t} < 10\delta < \delta_1$. De fato, se $r_{j,t} \geq 10\delta$, então

$$\mathcal{L}^n(B(x_0, 2\delta)) \leq \mathcal{L}^n(B(x_{j,t}, r_{j,t}/5)) = 2\mathcal{L}^n(B(x_{j,t}, r_{j,t}/5) \cap E_t) \leq \mathcal{L}^n(E_t) \leq \mathcal{L}^n(B(x_0, \delta)),$$

um absurdo. Além disso, $x_{j,t} \in K_{d(K)/2}$. De fato, como $x_{j,t} \in E_t \subset B(x_0, \delta)$ e $x_0 \in K$, então

$$\operatorname{dist}(x_{j,t}, K) \leq \operatorname{dist}(x_{j,t}, x_0) < \delta < \frac{\delta_1}{10} < \frac{1}{10} \times \frac{d(K)}{2}.$$

Logo, de (6.8), temos que

$$\mu(B(x_{j,t}, 2r_{j,t})) \leq \varepsilon r_{j,t}^{n-1}, \quad \text{para todo } j. \tag{6.10}$$

Portanto, de (6.9), (6.10) e da fórmula de co-área para funções $\mathcal{BV}$ (Teorema 5.2.3), obtemos

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^n} u^+(x)\, d\mu \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_0^{u^+(x)} dt \right) d\mu \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_0^{\infty} \chi_{\{(s,y):\ u^+(y)>s\}}(t,x)\, dt \right) d\mu \right| \\
&= \left| \int_0^{\infty} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\{(s,y):\ u^+(y)>s\}}(t,x)\, d\mu \right) dt \right| \\
&= \left| \int_0^{\infty} \mu(E_t)\, dt \right| \\
&\leq \int_0^{\infty} \sum_j \mu(B(x_{j,t}, 2r_{j,t}))\, dt \leq \varepsilon \int_0^{\infty} \sum_j r_{j,t}^{n-1}\, dt \\
&\leq C(n)\varepsilon \int_0^{\infty} \|\partial E_t\|(\mathbb{R}^n)\, dt = C(n)\varepsilon \|Du^+\|(\mathbb{R}^n) = C(n)\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u^+|\, dx \\
&\leq C(n)\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|\, dx \leq C(n)\varepsilon.
\end{aligned}$$

De modo análogo, obtemos

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^n} u^-\, d\mu \right| &\leq C(n)\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u^-|\, dx \\
&\leq C(n)\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|\, dx \\
&\leq C(n)\varepsilon.
\end{aligned}$$

Desse modo, concluímos que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} u\, d\mu \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} (u^+ + u^-)\, d\mu \right| \leq 2C(n)\varepsilon,$$

completando a demonstração. □

Finalmente, juntando os teoremas anteriores, obtemos as equivalências a seguir.

**Teorema 6.3.4.** *Seja $\mu$ uma medida de Radon positiva em um conjunto aberto não-vazio $U \subset \mathbb{R}^n$. Então, as propriedades abaixo são equivalentes:*

*(i) A equação* $\operatorname{div} F = \mu$ *possui uma solução contínua $F : U \to \mathbb{R}^n$.*

*(ii) Dados $\varepsilon > 0$ e um conjunto compacto $K \subset\subset U$, existe $\theta > 0$ tal que*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu \right| \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi| \, dx + \theta \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi| \, dx$$

*para toda $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(K)$.*

*(iii) Para qualquer conjunto compacto $K \subset\subset U$,*

$$\lim_{\delta \to 0^+} \sup_{x_0 \in K} \sup \left\{ \frac{\mu(B(x_0, r))}{r^{n-1}} : 0 < r < \delta \right\} = 0.$$

*(iv) Para qualquer conjunto compacto $K \subset\subset U$,*

$$\lim_{\delta \to 0^+} \sup_{x_0 \in K} \sup \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}^n} u \, d\mu \right| : u \in \mathcal{C}_c^\infty(B(x_0, \delta)), \|\nabla u\|_1 \leq 1 \right\} = 0.$$

*Demonstração.* Pelo Teorema 6.3.1, temos $(i) \iff (ii)$. O Teorema 6.3.3 nos dá $(iii) \Rightarrow (iv)$, enquanto o Teorema 6.3.2 prova que $(iv) \Rightarrow (ii)$. Basta mostrar, portanto, que $(ii) \Rightarrow (iii)$.

Sejam $\varepsilon > 0$ e $K \subset\subset U$ compacto. Como antes, definimos $d(K) = \operatorname{dist}(K, \partial U)$ e

$$K_{d(K)/2} = \left\{ x_0 \in U : \operatorname{dist}(x_0, K) \leq \frac{d(K)}{2} \right\}.$$

Pela propriedade $(ii)$, existe $\theta = \theta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu \right| \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi| \, dx + \theta \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi| \, dx \tag{6.11}$$

para toda $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(K_{d(K)/2})$. Sejam $x_0 \in K$ e $0 < r < \delta$, no qual

$$\delta = \min \left\{ \frac{d(K)}{4}, \frac{\varepsilon}{2\theta} \right\}.$$

Tomamos uma função corte $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(B(x_0, 2r))$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi \equiv 1$ em $B(x_0, r)$, e $|\nabla \varphi| \leq C(n)/r$ (veja Observação 1.4.10).

Temos que $B(x_0, 2r) \subset K_{d(K)/2}$ pois, se $x \in B(x_0, 2r)$, então

$$\operatorname{dist}(x, K) \leq \operatorname{dist}(x, x_0) < 2r < 2\delta \leq \frac{2d(K)}{4} = \frac{d(K)}{2}.$$

Logo, $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(K_{d(K)/2})$, e podemos usar (6.11) para obter

$$\begin{aligned}
\mu(B(x_0,r)) = \int_{B(x_0,r)} d\mu &= \int_{B(x_0,r)} \varphi\, d\mu \\
&\leq \int_{B(x_0,2r)} \varphi\, d\mu \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\, d\mu \right| \\
&\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\varphi|\, dx + \theta \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|\, dx \\
&= \varepsilon \int_{B(x_0,2r)} |\nabla\varphi|\, dx + \theta \int_{B(x_0,2r)} |\varphi|\, dx \\
&\leq \frac{\varepsilon C(n)}{r} \mathcal{L}^n(B(x_0,2r)) + \theta \mathcal{L}^n(B(x_0,2r)) \\
&= \varepsilon C_1(n) r^{n-1} + \theta C_2(n) r^n \\
&< \varepsilon C_1(n) r^{n-1} + \theta C_2(n) r^{n-1}\delta \\
&\leq \varepsilon C_1(n) r^{n-1} + \theta C_2(n) r^{n-1} \cdot \frac{\varepsilon}{2\theta} \\
&= \varepsilon C_3(n) r^{n-1},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{\mu(B(x_0,r))}{r^{n-1}} \lesssim \varepsilon,$$

para todo $x_0 \in K$ e $0 < r < \delta$. Tomando o supremo em $r$ e em $x_0$, obtemos $(iii)$, completando a demonstração. $\square$

# Capítulo 7

# Singularidades removíveis

Nesse capítulo, aplicaremos os resultados anteriores para caracterizar singularidades removíveis para a equação div $F = \mu$ nos casos $F \in L^p_{loc}$, para $n/(n-1) < p \leq \infty$, e $F$ contínua.

**Definição 7.0.1.** Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Um conjunto $E \subset U$ é dito *removível* para a equação

$$\text{div } F = \mu \tag{7.1}$$

se todo campo $F$ que satisfaz (7.1) em $U \setminus E$, isto é,

$$\text{div}F(\varphi) = \int_U F \cdot \nabla\varphi \, dx = \int_U \varphi \, d\mu, \quad \forall \, \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(U \setminus E),$$

também satisfaz (7.1) em $U$, isto é,

$$\text{div}F(\varphi) = \int_U F \cdot \nabla\varphi \, dx = \int_U \varphi \, d\mu, \quad \forall \, \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(U).$$

O estudo de singularidades removíveis para o divergente nos permite tirar conclusões a respeito de singularidades removíveis para o operador Laplaciano:

$$\Delta u = \text{div}(\nabla u).$$

Um conjunto compacto $E \subset \mathbb{R}^n$ é dito removível para o Laplaciano em uma classe $\mathcal{U}$ de funções com valores reais se toda $u \in \mathcal{U}$ que satisfaz $\Delta u = 0$ fora de $E$, no sentido de distribuição, também satisfaz $\Delta u = 0$ em todo o $\mathbb{R}^n$.

Desse modo, se $E$ é removível para div$F = 0$, para $F$ um campo vetorial contínuo, $L^p$ ou limitado, então $E$ é removível para o Laplaciano, para funções $\mathcal{C}^1$, $W^{1,p}$ ou Lipschitz, respectivamente, já que o gradiente de uma função $\mathcal{C}^1$ é contínuo, de uma função $W^{1,p}$ é $L^p$, e de uma função Lipschitz é limitado. A recíproca nem sempre é válida. Um contra-exemplo, na classe das funções Lipschitz, aparece em [DM].

## 7.1 O caso $L^p$

Primeiro, apresentamos o caso em que $F \in L^p_{loc}(U, \mathbb{R}^n)$, para $n/(n-1) < p \leq \infty$.

**Teorema 7.1.1.** *Sejam $E$ um conjunto compacto e $U$ um conjunto aberto tais que $E \subset U \subset \mathbb{R}^n$, $\mu$ uma medida de Radon com sinal em $U$ tal que $\mu(E) = 0$ e $n/(n-1) < p \leq \infty$ (ou seja, $1 \leq p' < n$). Se $\operatorname{cap}_{1,p'}(E, U) = 0$, então toda solução $F$ de*

$$\operatorname{div} F = \mu \quad \text{em } U \setminus E, \quad F \in L^p_{loc}(U, \mathbb{R}^n) \tag{7.2}$$

*é uma solução de*

$$\operatorname{div} F = \mu \quad \text{em } U, \quad F \in L^p_{loc}(U, \mathbb{R}^n). \tag{7.3}$$

*Reciprocamente, suponha que exista pelo menos um campo vetorial $\tilde{F}$ solução de (7.3) e suponha que toda solução de (7.2) é também solução de (7.3). Então, necessariamente, $\operatorname{cap}_{1,p'}(E, U) = 0$.*

*Demonstração.* Suponha primeiro que $\operatorname{cap}_{1,p'}(E, U) = 0$. Seja $F \in L^p_{loc}(U, \mathbb{R}^n)$ uma solução de (7.2). Então,

$$\int_U F \cdot \nabla\varphi \, dx = \int_U \varphi \, d\mu \quad , \forall\, \varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(U \setminus E). \tag{7.4}$$

Como $\operatorname{cap}_{1,p'}(E, U) = 0$, podemos construir uma sequência $(u_k) \subset \mathcal{C}^\infty_c(U)$ tal que $0 \leq u_k \leq 1$, $u_k \equiv 1$ em $E$ e $\|\nabla u_k\|_{p'} \to 0$. Mais ainda, $(u_k)$ pode ser escolhida de modo que $u_k \to 0$ pontualmente em $U$, exceto talvez em um conjunto $N \subset U$ com $\operatorname{cap}_{1,p'}(N, U) = 0$ (ver [BP, Lema 2.2]).

Queremos mostrar que

$$\int_U F \cdot \nabla\psi \, dx = \int_U \psi \, d\mu \quad , \forall\, \psi \in \mathcal{C}^\infty_c(U).$$

Dada $\psi \in \mathcal{C}^\infty_c(U)$, considere a sequência das funções

$$\psi_k = \psi(1 - u_k) \in \mathcal{C}^\infty_c(U \setminus E). \tag{7.5}$$

Temos então

$$\nabla\psi_k = (1 - u_k)\nabla\psi - \psi\nabla u_k.$$

Observe que, pelo Lema 4.11, $|u_k \nabla\psi|^{p'} \to 0$ q.t.p. em $U$, e

$$|u_k \nabla\psi|^{p'} \leq |\nabla\psi|^{p'} \in L^1,$$

de modo que, pelo Teorema da Convergência Dominada, quando $k \to \infty$,

$$\|u_k \nabla\psi\|_{p'} = \left( \int_U |u_k \nabla\psi|^{p'} \, dx \right)^{\frac{1}{p'}} \to 0.$$

Além disso,

$$\|\psi \nabla u_k\|_{p'} \le \|\psi\|_\infty \|\nabla u_k\|_{p'} \to 0.$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}\|\nabla \psi_k - \nabla \psi\|_{p'} &= \| - u_k \nabla \psi - \psi \nabla u_k\|_{p'} \\ &\le \|u_k \nabla \psi\|_{p'} + \|\psi \nabla u_k\|_{p'} \to 0 \end{aligned} \tag{7.6}$$

quando $k \to \infty$. De (7.4) e (7.5) temos, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_U F \cdot \nabla \psi_k \, dx = \int_U \psi_k \, d\mu. \tag{7.7}$$

Usando a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}\left| \int_U F \cdot \nabla \psi_k \, dx - \int_U F \cdot \nabla \psi \, dx \right| &= \left| \int_U F \cdot (\nabla \psi_k - \nabla \psi) \, dx \right| \\ &\le \int_U |F \cdot (\nabla \psi_k - \nabla \psi)| \, dx \\ &\le \|F\|_{L^p(U)} \|\nabla \psi_k - \nabla \psi\|_{L^{p'}(U)}.\end{aligned}$$

Fazendo $k \to \infty$ obtemos, por (7.6), que

$$\int_U F \cdot \nabla \psi_k \, dx \to \int_U F \cdot \nabla \psi \, dx. \tag{7.8}$$

Mais ainda, como $\operatorname{div} F = \mu$ em $U \setminus E$, os Teoremas 3.1.11 e 4.13 implicam que $\mu \ll \mathcal{H}^{n-1}$ em $U \setminus E$ quando $p = \infty$, e $\mu \ll \operatorname{cap}_{1,p'}(\cdot, U)$ em $U \setminus E$ quando $p < \infty$. Como $N \subset U$ tem capacidade zero, então $\operatorname{cap}_{1,p'}(N \setminus E, U) = 0$. Logo, no caso $p < \infty$, $\mu(N \setminus E) = 0$. Pela Proposição 4.12, a mesma conclusão é obtida no caso $p = \infty$. Como, por hipótese, $\mu(E) = 0$, concluímos que $\mu(N) = \mu(N \setminus E) = 0$. Logo, $u_k \to 0$ $\mu$-q.t.p. em $U$. Portanto, $\psi_k \to \psi$ $\mu$-q.t.p.. Como $|\psi_k| \le |\psi| \in L^1$, pelo Teorema da Convergência Dominada concluímos que

$$\int_U \psi_k \, d\mu \to \int_U \psi \, d\mu \tag{7.9}$$

quando $k \to \infty$. De (7.7), (7.8) e (7.9), obtemos

$$\int_U F \cdot \nabla \psi \, dx = \int_U \psi \, d\mu,$$

como queríamos. Ou seja, $F$ é solução de $\operatorname{div} F = \mu$ em $U$.

Para a recíproca, considere primeiro o caso $p = \infty$. Suponha que $\operatorname{cap}_{1,1}(E, U) > 0$, ou seja, pela Proposição 4.12, $\mathcal{H}^{n-1}(E) > 0$. Pelo Lema de Frostman (Teorema 3.2.1), existe uma medida de Radon positiva não-trivial $\sigma$ concentrada em $E$ tal que, para toda bola $B(x,r)$,

$$\sigma(B(x,r)) \lesssim r^{n-1}.$$

Pelo Teorema 6.2.3, existe $F_\sigma \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\text{div}F_\sigma = \sigma$. Tome $F = \tilde{F} + F_\sigma$, no qual $\tilde{F}$ é, por hipótese, uma solução de (7.3). Se $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(U \setminus E)$, então

$$\begin{aligned}\int_{U\setminus E} F \cdot \nabla\varphi\, dx &= \int_{U\setminus E} \tilde{F} \cdot \nabla\varphi\, dx + \int_{U\setminus E} F_\sigma \cdot \nabla\varphi\, dx \\ &= \int_{U\setminus E} \varphi\, d\mu + \int_{U\setminus E} \varphi\, d\sigma \\ &= \int_{U\setminus E} \varphi\, d\mu,\end{aligned}$$

pois $\sigma$ é concentrada em $E$. Logo, $\text{div}F = \mu$ em $U \setminus E$, como distribuição. Mas, se $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$,

$$\int_U F \cdot \nabla\varphi\, dx = \int_U \varphi\, d\mu + \int_U \varphi\, d\sigma,$$

ou seja, $\text{div}F = \mu + \sigma \neq \mu$ em $U$, como distribuição. Então, $F$ é uma solução de (7.2) que não é solução de (7.3). Contradição.

Para o caso $p < \infty$, suponha novamente que $\text{cap}_{1,p'}(E, U) > 0$. Pelo Teorema 2.5.3 de [AH] (adaptado para $\text{cap}_{1,p'}$), existe uma medida positiva não-trivial $\sigma$ concentrada em $E$ tal que $\sigma$ tem energia-$(1, p)$ finita. Pelo Teorema 6.2.2, existe $F_\sigma \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que $\text{div}F_\sigma = \sigma$. Mais uma vez, tome $F = \tilde{F} + F_\sigma$. Como antes, $F$ é solução de (7.2), mas não de (7.3). Contradição. □

## 7.2 O caso contínuo

A seguir, demonstramos resultado análogo para o caso em que $F \in \mathcal{C}(U, \mathbb{R}^n)$.

**Teorema 7.2.1.** *Sejam $E$ um conjunto compacto e $U$ um conjunto aberto tais que $E \subset U \subset \mathbb{R}^n$, e $\mu$ uma medida de Radon com sinal em $U$ tal que $\mu(E) = 0$. Se $\mathcal{H}^{n-1}(E) = 0$, então toda solução $F$ de*

$$\text{div}\, F = \mu \quad \text{em } U \setminus E, \quad F \in \mathcal{C}(U, \mathbb{R}^n) \tag{7.10}$$

*é uma solução de*

$$\text{div}\, F = \mu \quad \text{em } U, \quad F \in \mathcal{C}(U, \mathbb{R}^n). \tag{7.11}$$

*Reciprocamente, suponha que exista pelo menos um campo vetorial $\tilde{F}$ solução de (7.11) e suponha que toda solução de (7.10) é também solução de (7.11). Então,*

$$\mathcal{H}^{n-1+\varepsilon}(E) = 0$$

*para qualquer $\varepsilon > 0$. Ou seja, a dimensão de Hausdorff de $E$ não pode ser maior que $n - 1$.*

*Demonstração.* A primeira parte da demonstração é a mesma do Teorema 7.1.1, pois $F \in L^\infty_{loc}(U)$, e $\mathcal{H}^{n-1}(E) = 0$ é equivalente a $\text{cap}_{1,1}(E, U) = 0$. Para a recíproca, tomamos $\varepsilon > 0$ e supomos que $\mathcal{H}^{n-1+\varepsilon}(E) > 0$. Pelo Lema de Frostman, existe uma medida positiva não-trivial $\sigma$ concentrada em $E$ tal que, para toda bola $B(x, r)$,

$$\sigma(B(x, r)) \lesssim r^{n-1+\varepsilon}.$$

Logo,

$$\lim_{r \to 0} \frac{\sigma(B(x, r))}{r^{n-1}} = 0$$

e, pelo Teorema 6.3.4, itens $(i)$ e $(iii)$, existe um campo $F_\sigma \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tal que div $F_\sigma = \sigma$. Tomamos $F = \tilde{F} + F_\sigma$, no qual $\tilde{F}$ é, por hipótese, uma solução de (7.11). Logo, assim como na demonstração do teorema anterior, div $F = \mu$ em $U \setminus E$, mas div $F = \mu + \sigma \neq \mu$ em $U$, ambos como distribuição, ou seja, $F$ é uma solução de (7.10) que não é solução de (7.11), uma contradição. $\square$

# Apêndice A

# Teoria Geométrica da Medida - Fronteira reduzida e fronteira essencial

Neste apêndice, tratamos brevemente de algumas definições abstratas da Teoria Geométrica da Medida relacionadas aos conjuntos com perímetro finito. O conteúdo aqui tratado pode ser visto em detalhes nas referências [Z] e [EG].

Com o Exemplo 5.1.13, vimos que todo conjunto limitado com fronteira suave tem perímetro finito. Queremos agora a recíproca: que tipo de regularidade podemos esperar da fronteira dos conjuntos com perímetro finito?

Definiremos a seguir subconjuntos especiais da fronteira topológica $\partial E$ que possuem boas propriedades do ponto de vista da Teoria da Medida. No decorrer deste apêndice, exceto quando for explicitamente apontado algo diferente, $E \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto com perímetro localmente finito.

O gradiente de $\chi_E$, no sentido de distribuição, é dado por

$$\nabla\chi_E(\varphi) = \int_E \operatorname{div}\varphi \, dx,$$

para $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Pelo Teorema 5.1.10, utilizando a notação da Definição 5.1.11, temos que

$$\nabla\chi_E(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \cdot \nu_E \, d\|\partial E\|,$$

para toda $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Ou seja, $\nabla\chi_E$ é uma medida vetorial de Radon, dada por

$$\nabla\chi_E(A) = \int_A \nu_E \, d\|\partial E\| = \left( \int_A {\nu_E}^1 \, d\|\partial E\| \, , \, \cdots \, , \, \int_A {\nu_E}^n \, d\|\partial E\| \right),$$

no qual $\nu_E = ({\nu_E}^1, \dots, {\nu_E}^n)$, para $A$ um conjunto boreliano. Note que $\nu_E$ é a derivada de Radon-Nikodym de $\nabla\chi_E$ com respeito a $\|\partial E\|$, ou seja,

$$\nu_E(x) = \lim_{r \to 0} \frac{\nabla\chi_E(B(x,r))}{\|\partial E\|(B(x,r))},$$

para $\|\partial E\|$-q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$.

O desenvolvimento acima motiva a seguinte definição:

**Definição A.1.** Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto com perímetro localmente finito. A *fronteira reduzida* de $E$, denotada por $\partial^- E$, é o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}^n$ tais que:

(i) $\|\partial E\|(B(x,r)) > 0$, para todo $r > 0$;

(ii) se $\nu_r(x) = -\dfrac{\nabla \chi_E(B(x,r))}{\|\partial E\|(B(x,r))}$, então o limite $\nu(x) = \lim\limits_{r \to 0} \nu_r(x)$ existe e $|\nu(x)| = 1$.

O vetor $\nu(x) = \nu(x, E)$ é chamado de *vetor normal exterior generalizado* a $E$ em $x$.

**Observação A.2.** Pelo argumento desenvolvido acima da definição anterior, temos que

$$\|\partial E\|(\mathbb{R}^n \setminus \partial^- E) = 0,$$

pois, para $\|\partial E\|$-q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$, $\lim\limits_{r \to 0} \nu_r(x) = -\nu_E(x)$ e $|\nu_E(x)| = 1$.

**Exemplo A.3.** Considere $Q = [-1,1] \times [-1,1] \subset \mathbb{R}^2$. Sua fronteira reduzida é o conjunto

$$\partial^- Q = \partial Q \setminus \{(1,1), (-1,1), (-1,-1), (1,-1)\}.$$

Mostremos que, por exemplo, $(1,1) \notin \partial^- Q$. Para $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$,

$$\nabla \chi_Q(\varphi) = \int_Q \operatorname{div}\varphi \, dx = \int_{\partial Q} \varphi \cdot \nu \, d\mathcal{H}^1, \tag{A.1}$$

no qual

$$\nu(x) = \begin{cases} (1,0), & \text{se } x \in \{1\} \times (-1,1) \\ (0,1), & \text{se } x \in (-1,1) \times \{1\} \\ (-1,0), & \text{se } x \in \{-1\} \times (-1,1) \\ (0,-1), & \text{se } x \in (-1,1) \times \{-1\}. \end{cases}$$

A igualdade $(A.1)$ é decorrente de uma versão do Teorema de Gauss-Green que pode ser vista em [KM, Teorema 2.21]. Consequentemente, se $a = (1,1) \in \partial Q$ e $r > 0$ é pequeno o suficiente, temos

$$\begin{aligned} \nabla \chi_Q(B(a,r)) &= \int_{B(a,r)} \nu \, d(\mathcal{H}^1 \llcorner \partial Q) \\ &= \int_{\{1\} \times (1-r,1)} (1,0) \, d\mathcal{H}^1 + \int_{(1-r,1) \times \{1\}} (0,1) \, d\mathcal{H}^1 \\ &= (r,0) + (0,r) = (r,r) \end{aligned}$$

e

$$\|\partial Q\|(B(a,r)) = (\mathcal{H}^1 \llcorner \partial Q)(B(a,r)) = 2r.$$

Logo,

$$\lim_{r\to 0} -\frac{\nabla\chi_Q(B(x,r))}{\|\partial Q\|(B(x,r))} = -\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

Mas $\left|\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, e portanto $a \notin \partial^- Q$.

**Lema A.4.** *Seja $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$. Então, para cada $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$\int_{E\cap B[x,r]} \operatorname{div}\varphi\, dy = \int_{B[x,r]} \varphi\cdot\nu_E\, d\|\partial E\| + \int_{E\cap\partial B[x,r]} \varphi\cdot\nu\, d\mathcal{H}^{n-1}$$

*para $\mathcal{L}^1$-q.t.p. $r > 0$, no qual $\nu$ é o vetor unitário normal exterior a $\partial B[x,r]$ e $\nu_E$ é como na Definição 5.1.11.*

*Demonstração.* Se $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é suave, então $\operatorname{div}(h\varphi) = h\operatorname{div}\varphi + \nabla h\cdot\varphi$. Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^n} h\varphi\cdot\nu_E\, d\|\partial E\| = \int_E \operatorname{div}(h\varphi)\, dy = \int_E h\operatorname{div}\varphi\, dy + \int_E \nabla h\cdot\varphi\, dy. \tag{A.2}$$

Para $r > 0$ e $\varepsilon > 0$, defina

$$g_\varepsilon(s) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \le s \le r \\ \dfrac{r+\varepsilon-s}{\varepsilon}, & \text{se } r \le s \le r+\varepsilon \\ 0, & \text{se } s \ge r+\varepsilon. \end{cases}$$

Note que

$$g'_\varepsilon(s) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\varepsilon}, & \text{se } r < s < r+\varepsilon \\ 0, & \text{se } 0 \le s < r \text{ ou } s > r+\varepsilon. \end{cases}$$

Fixado $x \in \mathbb{R}^n$, defina

$$h_\varepsilon(y) = g_\varepsilon(|y-x|) = \begin{cases} 1, & \text{se } y \in B[x,r] \\ \dfrac{r+\varepsilon-|y-x|}{\varepsilon}, & \text{se } y \in B[x,r+\varepsilon]\setminus B(x,r) \\ 0, & \text{se } y \in \mathbb{R}^n\setminus B(x,r+\varepsilon). \end{cases}$$

Assim,

$$\nabla h_\varepsilon(y) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{y-x}{|y-x|}, & \text{se } y \in B(x,r+\varepsilon)\setminus B[x,r] \\ 0, & \text{se } y \in B(x,r) \text{ ou } y \in \mathbb{R}^n\setminus B[x,r+\varepsilon]. \end{cases}$$

Podemos aproximar $h_\varepsilon$ uniformemente por funções-teste, como no Teorema 1.4.8, e concluir que $(A.2)$ vale para $h_\varepsilon$. Portanto

$$\int_{\mathbb{R}^n} h_\varepsilon \varphi \cdot \nu_E \, d\|\partial E\| = \int_E h_\varepsilon \operatorname{div}\varphi \, dy - \frac{1}{\varepsilon} \int_{E \cap \{y:\, r<|y-x|<r+\varepsilon\}} \varphi \cdot \frac{y-x}{|y-x|} \, dy. \tag{A.3}$$

Observe que

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\{y:\, r<|y-x|<r+\varepsilon\}} \varphi \cdot \frac{y-x}{|y-x|} \, dy = \frac{1}{\varepsilon} \left[ \int_{B(x,r+\varepsilon)} \varphi \cdot \frac{y-x}{|y-x|} \, dy - \int_{B(x,r)} \varphi \cdot \frac{y-x}{|y-x|} \, dy \right],$$

logo, pela Proposição 3.1.7,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\{y:\, r<|y-x|<r+\varepsilon\}} \varphi \cdot \frac{y-x}{|y-x|} \, dy &= \frac{d}{dr} \left( \int_{B(x,r)} \varphi \cdot \frac{y-x}{|y-x|} \, dy \right) \\ &= \int_{\partial B(x,r)} \varphi \cdot \frac{y-x}{|y-x|} \, d\mathcal{H}^{n-1}(y) \end{aligned}$$

para $\mathcal{L}^1$-q.t.p. $r > 0$.

Então, fazendo $\varepsilon \to 0$ em $(A.3)$, concluímos que

$$\int_{B[x,r]} \varphi \cdot \nu_E \, d\|\partial E\| = \int_{E \cap B[x,r]} \operatorname{div}\varphi \, dy - \int_{E \cap \partial B[x,r]} \varphi \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

para $\mathcal{L}^1$-q.t.p. $r > 0$. $\square$

O lema a seguir está demonstrado em [EG, pp. 196-198].

**Lema A.5.** *Existem constantes positivas $A_1, \ldots, A_5$, que dependem apenas de $n$, tais que para cada $x \in \partial^- E$,*

*(i)* $\liminf_{r \to 0} \dfrac{\mathcal{L}^n(B(x,r) \cap E)}{r^n} > A_1 > 0,$

*(ii)* $\liminf_{r \to 0} \dfrac{\mathcal{L}^n(B(x,r) \setminus E)}{r^n} > A_2 > 0,$

*(iii)* $\liminf_{r \to 0} \dfrac{\|\partial E\|(B(x,r))}{r^{n-1}} > A_3 > 0,$

*(iv)* $\limsup_{r \to 0} \dfrac{\|\partial E\|(B(x,r))}{r^{n-1}} \leq A_4,$

*(v)* $\limsup_{r \to 0} \dfrac{\|\partial(E \cap B(x,r))\|(\mathbb{R}^n)}{r^{n-1}} \leq A_5.$

**Definição A.6.** Para cada $x \in \partial^- E$, defina o hiperplano

$$H(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \nu(x,E) \cdot (y-x) = 0\}$$

e os semiespaços

$$H^+(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \nu(x, E) \cdot (y - x) > 0\}$$

e

$$H^-(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \nu(x, E) \cdot (y - x) < 0\}.$$

Fixados $x \in \partial^- E$ e $r > 0$, denote $E_r = \{y \in \mathbb{R}^n : r(y - x) + x \in E\}$. O próximo teorema pode ser visto em [EG, pp. 199-203] ou em [Z, pp. 238-240].

**Teorema A.7.** *Seja $x \in \partial^- E$. Então $\chi_{E_r} \to \chi_{H^-(x)}$ em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ quando $r \to 0$.*

Ou seja, para $r > 0$ pequeno o suficiente, $E \cap B[x, r]$ é aproximadamente igual a $H^-(x) \cap B[x, r]$.

Introduzimos a seguir outro conceito para o vetor normal exterior a um conjunto. Este afirma, de certo modo, que um vetor unitário $\vec{n} \in S^{n-1}$ é normal a um conjunto $E$ em um ponto $x$ se $E$ está contido em um dos semiespaços determinados pelo hiperplano ortogonal a $\vec{n}$. Precisamente, a definição é a seguinte:

**Definição A.8.** Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto $\mathcal{L}^n$-mensurável. Um vetor unitário $\vec{n} \in S^{n-1}$ é chamado o *vetor normal da teoria da medida* a $E$ em $x$ se

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mathcal{L}^n\big(B(x, r) \cap E \cap \{y : (y - x) \cdot \vec{n} > 0\}\big)}{r^n} = 0$$

e

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mathcal{L}^n\big((B(x, r) \setminus E) \cap \{y : (y - x) \cdot \vec{n} < 0\}\big)}{r^n} = 0.$$

Denotamos $\vec{n} = \vec{n}(x, E)$ e definimos

$$\partial^* E = \{x \in \mathbb{R}^n : \vec{n}(x, E) \text{ existe}\}.$$

O teorema seguinte, demonstrado em [Z, p. 241], prova que, se $E$ tem perímetro localmente finito, então $\partial^- E \subset \partial^* E$ e, se $x \in \partial^- E$, então $\nu(x, E) = \vec{n}(x, E)$.

**Teorema A.9.** *Tome $x \in \partial^- E$. Então*

*(i)* $\displaystyle\lim_{r \to 0} \frac{\mathcal{L}^n\big(B(x, r) \cap E \cap H^+(x)\big)}{r^n} = 0$;

*(ii)* $\displaystyle\lim_{r \to 0} \frac{\mathcal{L}^n((B(x, r) \setminus E) \cap H^-(x))}{r^n} = 0.$

Daqui em diante, utilizaremos as notações $H^+(x)$ e $H^-(x)$ para os semiespaços determinados pelo vetor $\vec{n}(x, E)$, ou seja,

$$H^+(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \vec{n}(x, E) \cdot (y - x) > 0\}$$

e

$$H^-(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \vec{n}(x, E) \cdot (y - x) < 0\}.$$

**Lema A.10.** *Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto com perímetro localmente finito. Existe uma constante $C = C(n) > 0$ tal que, para todo $x \in \partial^* E$,*

$$\liminf_{r\to 0} \frac{\|\partial E\|(B(x,r))}{r^{n-1}} \geq C.$$

*Demonstração.* Fixado $x \in \partial^* E$, temos que

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n\big(B(x,r)\cap E \cap H^+(x)\big)}{r^n} = \lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n\big((B(x,r)\setminus E)\cap H^-(x)\big)}{r^n} = 0.$$

Como

$$\frac{1}{2} = \frac{\mathcal{L}^n\big(B(x,r)\cap H^+(x)\big)}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} = \frac{\mathcal{L}^n\big((B(x,r)\setminus E)\cap H^+(x)\big)}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} + \frac{\mathcal{L}^n\big(B(x,r)\cap E\cap H^+(x)\big)}{\mathcal{L}^n(B(x,r))},$$

obtemos

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n\big((B(x,r)\setminus E)\cap H^+(x)\big)}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} = \frac{1}{2}.$$

Logo,

$$\liminf_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n\big(B(x,r)\setminus E\big)}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \geq \liminf_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n\big((B(x,r)\setminus E)\cap H^+(x)\big)}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} = \frac{1}{2}.$$

Argumento análogo, com $H^-(x)$, mostra que

$$\liminf_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n\big(B(x,r)\cap E\big)}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \geq \frac{1}{2}.$$

Como $E$ tem perímetro localmente finito, então $E$ é mensurável. Desse modo,

$$\frac{\mathcal{L}^n\big(B(x,r)\setminus E\big)}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} = 1 - \frac{\mathcal{L}^n\big(B(x,r)\cap E\big)}{\mathcal{L}^n(B(x,r))},$$

de onde tiramos que

$$\limsup_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n\big(B(x,r)\setminus E\big)}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} = 1 - \liminf_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n\big(B(x,r)\cap E\big)}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \leq \frac{1}{2}$$

e

$$\limsup_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n\big(B(x,r)\cap E\big)}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} = 1 - \liminf_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n\big(B(x,r)\setminus E\big)}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \leq \frac{1}{2}.$$

Juntando tudo, temos

$$\frac{1}{2} \leq \liminf_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n\big(B(x,r)\cap E\big)}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \leq \limsup_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n\big(B(x,r)\cap E\big)}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \leq \frac{1}{2}$$

e

$$\frac{1}{2} \leq \liminf_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n\big(B(x,r)\setminus E\big)}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \leq \limsup_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n\big(B(x,r)\setminus E\big)}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \leq \frac{1}{2}.$$

Logo,
$$\lim_{r\to 0}\frac{\mathcal{L}^n\big(B(x,r)\cap E\big)}{\mathcal{L}^n(B(x,r))}=\lim_{r\to 0}\frac{\mathcal{L}^n\big(B(x,r)\setminus E\big)}{\mathcal{L}^n(B(x,r))}=\frac{1}{2}.$$
Pela desigualdade isoperimétrica relativa (Teorema 5.3.2), existe $c=c(n)>0$ tal que
$$\frac{c\|\partial E\|(B(x,r))}{r^{n-1}}\geq \min\left\{\frac{\mathcal{L}^n\big(B(x,r)\cap E\big)}{\mathcal{L}^n(B(x,r))},\frac{\mathcal{L}^n\big(B(x,r)\setminus E\big)}{\mathcal{L}^n(B(x,r))}\right\}^{\frac{n-1}{n}},$$
de onde concluímos que
$$\liminf_{r\to 0}\frac{\|\partial E\|(B(x,r))}{r^{n-1}}\geq \frac{1}{c}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{n}}.$$
□

**Lema A.11.** *Sejam $\mu$ uma medida de Radon positiva, $A\subset\mathbb{R}^n$ um conjunto $\mu$-mensurável, e as constantes $0<\lambda<\infty$ e $0<s\leq n$. Se, para todo $x\in A$, vale*
$$\limsup_{r\to 0}\frac{\mu(B(x,r))}{r^s}>\lambda,$$
*então existe $C=C(n,s)>0$ tal que*
$$\mu(A)\geq C\lambda\mathcal{H}^s(A).$$

*Demonstração.* Podemos supor $\mu(A)<\infty$ pois, caso contrário, o resultado é imediato. Como $\mu$ é de Radon, existe $U\subset\mathbb{R}^n$ aberto, com $A\subset U$, tal que $\mu(U)<\infty$. Fixe $\varepsilon>0$ e tome, para cada $x\in A$, um número $r_x>0$ de modo a obter uma coleção
$$\mathcal{V}=\left\{B(x,r_x):B(x,r_x)\subset U,\ 0<r_x\leq\varepsilon,\ \frac{\mu(B(x,r_x))}{{r_x}^s}>\lambda\right\}.$$
Aplicando o Lema de Recobrimento de Vitali 5.3.3 para $\mathcal{V}$ obtemos uma subcoleção
$$\mathcal{V}_*=\{B(x_j,r_j)\}_j\subset\mathcal{V}$$
enumerável, de elementos dois a dois disjuntos, tal que
$$A\subset\bigcup_{\mathcal{V}}B(x,r_x)\subset\bigcup_j B(x_j,5r_j).$$
Então,
$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s_{10\varepsilon}(A)\leq\alpha(s)\sum_j(\text{diam }B(x_j,5r_j))^s&=\alpha(s)10^s\sum_j{r_j}^s\\&\leq\frac{\alpha(s)10^s}{\lambda}\sum_j\mu(B(x_j,r_j))\\&=\frac{\alpha(s)10^s}{\lambda}\mu\left(\bigcup_j B(x_j,r_j)\right)\\&\leq\frac{\alpha(s)10^s}{\lambda}\mu(U).\end{aligned}$$

Como $\mu$ é de Radon, ao tomarmos o ínfimo sobre os abertos $U \supset A$, obtemos

$$\frac{\lambda}{\alpha(s)10^s}\mathcal{H}^s_{10\varepsilon}(A) \leq \mu(A)$$

e, fazendo $\varepsilon \to 0$, concluímos que

$$\frac{\lambda}{\alpha(s)10^s}\mathcal{H}^s(A) \leq \mu(A).$$

□

Com o lema acima, podemos mostrar que as duas fronteiras generalizadas que definimos, $\partial^- E$ e $\partial^* E$, diferem uma da outra por um conjunto de medida $\mathcal{H}^{n-1}$ nula.

**Corolário A.12.** *Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto com perímetro localmente finito. Então*

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial^* E \setminus \partial^- E) = 0.$$

*Demonstração.* Sabemos, da Observação A.2, que

$$\|\partial E\|(\mathbb{R}^n \setminus \partial^- E) = 0.$$

Como $\partial^* E \setminus \partial^- E \subset \mathbb{R}^n \setminus \partial^- E$, temos que

$$\|\partial E\|(\partial^* E \setminus \partial^- E) = 0.$$

Pelo Lema A.10, para todo $x \in \partial^* E \setminus \partial^- E$,

$$\liminf_{r\to 0} \frac{\|\partial E\|(B(x,r))}{r^{n-1}} \geq C > 0.$$

Pelo Lema A.11,

$$0 = \|\partial E\|(\partial^* E \setminus \partial^- E) \geq \tilde{C}\mathcal{H}^{n-1}(\partial^* E \setminus \partial^- E),$$

de onde segue o resultado. □

**Lema A.13.** *Para $\mathcal{H}^{n-1}$-q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n \setminus \partial^* E$, vale*

$$\limsup_{r\to 0} \frac{\|\partial E\|(B(x,r))}{r^{n-1}} = 0.$$

*Demonstração.* Fixado $\lambda > 0$, defina

$$A_\lambda = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \partial^* E : \limsup_{r\to 0} \frac{\|\partial E\|(B(x,r))}{r^{n-1}} > \lambda \right\}.$$

Pelo Lema A.11 e pela Observação A.2,

$$C\lambda\mathcal{H}^{n-1}(A_\lambda) \leq \|\partial E\|(A_\lambda) \leq \|\partial E\|(\mathbb{R}^n \setminus \partial^* E) \leq \|\partial E\|(\mathbb{R}^n \setminus \partial^- E) = 0.$$

Logo,

$$\mathcal{H}^{n-1}(A_\lambda) = 0$$

para todo $\lambda > 0$. Então,

$$\mathcal{H}^{n-1}\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \partial^* E : \limsup_{r \to 0} \frac{\|\partial E\|(B(x,r))}{r^{n-1}} > 0\right\}\right) = \mathcal{H}^{n-1}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_{2^{-k}}\right) = 0.$$

$\square$

**Definição A.14.** Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ mensurável e $x \in \mathbb{R}^n$. Definimos a *densidade superior* de $E$ em $x$ por

$$\overline{D}(E,x) = \limsup_{r \to 0} \frac{\mathcal{L}^n(E \cap B(x,r))}{\mathcal{L}^n(B(x,r))},$$

e a *densidade inferior* de $E$ em $x$ por

$$\underline{D}(E,x) = \liminf_{r \to 0} \frac{\mathcal{L}^n(E \cap B(x,r))}{\mathcal{L}^n(B(x,r))}.$$

Se os valores acima são iguais, denotamos ambos por $D(E,x)$ e dizemos que esta é a *densidade* de $E$ em $x$.

**Observação A.15.** Se $\underline{D}(E,x) = 1$, então, como $1 = \underline{D}(E,x) \leq \overline{D}(E,x) \leq 1$, temos que $D(E,x) = 1$. De modo análogo, se $\overline{D}(E,x) = 0$, então $D(E,x) = 0$. Note ainda que

$$\underline{D}(E,x) = 1 - \overline{D}(\mathbb{R}^n \setminus E, x).$$

**Definição A.16.** Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ mensurável.

(i) Definimos o *interior essencial* de $E$ por

$$\mathrm{int}_e E = \{x \in \mathbb{R}^n : D(E,x) = 1\}.$$

(ii) Definimos o *fecho essencial* de $E$ por

$$\mathrm{adh}_e E = \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{int}_e(\mathbb{R}^n \setminus E).$$

(iii) Definimos a *fronteira essencial* de $E$ por

$$\partial_e E = \mathrm{adh}_e E \setminus \mathrm{int}_e E.$$

**Proposição A.17.** *Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ mensurável.*

$$\partial_e E = \{x \in \mathbb{R}^n : \overline{D}(E,x) > 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \overline{D}(\mathbb{R}^n \setminus E, x) > 0\}.$$

*Demonstração.* Basta observar que

$$x \in \mathrm{adh}_e E \iff x \notin \mathrm{int}_e(\mathbb{R}^n \setminus E) \iff \underline{D}(\mathbb{R}^n \setminus E, x) < 1 \iff \overline{D}(E, x) > 0$$

e

$$x \notin \mathrm{int}_e E \iff \underline{D}(E, x) < 1 \iff \overline{D}(\mathbb{R}^n \setminus E, x) > 0.$$

□

**Proposição A.18.** *Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto com perímetro localmente finito. Então*

*(i)* $\partial^* E \subset \partial_e E$;

*(ii)* $\mathcal{H}^{n-1}(\partial_e E \setminus \partial^* E) = 0$.

*Demonstração.* Na demonstração do Lema A.10, mostramos que, para $x \in \partial^* E$,

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n\big(E \cap B(x,r)\big)}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} = \lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n\big(B(x,r) \setminus E\big)}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} = \frac{1}{2}.$$

Logo, $\partial^* E \subset \partial_e E$.

Pelo Lema A.13, existe $N \subset \mathbb{R}^n$ com $\mathcal{H}^{n-1}(N) = 0$ tal que, para todo $x \in (\mathbb{R}^n \setminus \partial^* E) \setminus N$, vale

$$\limsup_{r\to 0} \frac{\|\partial E\|(B(x,r))}{r^{n-1}} = 0.$$

Mostraremos que $\partial_e E \setminus \partial^* E \subset N$. Seja $x \in \partial_e E \setminus \partial^* E$. Então existe $0 < \delta < \frac{1}{2}$ tal que

$$\overline{D}(E, x) > \delta \quad \text{e} \quad \overline{D}(\mathbb{R}^n \setminus E, x) > \delta.$$

Defina, para $r > 0$,

$$f(r) = \frac{\mathcal{L}^n\big(E \cap B(x,r)\big)}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} = 1 - \frac{\mathcal{L}^n\big(B(x,r) \setminus E\big)}{\mathcal{L}^n(B(x,r))}.$$

Temos que

$$\limsup_{r\to 0} f(r) = \overline{D}(E, x) > \delta$$

e

$$\liminf_{r\to 0} f(r) = 1 - \overline{D}(\mathbb{R}^n \setminus E, x) < 1 - \delta.$$

Dado $\eta > 0$, existe $r' < \eta$ tal que $f(r') > \delta$. Se, além disso, $f(r') < 1 - \delta$, então tome $r_\eta = r'$. Se não, sabemos que existe $r'' < \eta$ tal que $f(r'') < 1 - \delta$. Da continuidade de $f$, existe $r_\eta$ entre $r'$ e $r''$ tal que $\delta < f(r_\eta) < 1 - \delta$. Seja $(r_j) \downarrow 0$ uma sequência composta de tais $r_\eta$. Pela desigualdade isoperimétrica relativa (Teorema 5.3.2), existe $c = c(n) > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{c\|\partial E\|(B(x,r_j))}{{r_j}^{n-1}} &\geq \min\left\{ \frac{\mathcal{L}^n\big(E \cap B(x,r_j)\big)}{\mathcal{L}^n(B(x,r_j))}, \frac{\mathcal{L}^n\big(B(x,r_j) \setminus E\big)}{\mathcal{L}^n(B(x,r_j))} \right\}^{\frac{n-1}{n}} \\ &> \delta^{(n-1)/n}. \end{aligned}$$

Daí, concluímos que

$$\limsup_{r\to 0} \frac{\|\partial E\|(B(x,r))}{r^{n-1}} > 0$$

e, portanto, $x \in N$. Então

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial_e E \setminus \partial^* E) \leq \mathcal{H}^{n-1}(N) = 0.$$

□

**Definição A.19.** Seja $f$ uma função Lebesgue mensurável definida em $\mathbb{R}^n$. Definimos o *limite aproximado superior* de $f$ no ponto $x$ por

$$\operatorname{ap}\limsup_{x} f = \inf\{t > 0 : D(\{y : f(y) > t\}, x) = 0\},$$

e o *limite aproximado inferior* de $f$ no ponto $x$ por

$$\operatorname{ap}\liminf_{x} f = \sup\{s > 0 : D(\{y : f(y) < s\}, x) = 0\}.$$

É provado em [Z, Seção 5.9] que, se $u \in \mathcal{BV}(U)$, então

$$u(x) = \frac{\operatorname{ap}\liminf_x u + \operatorname{ap}\limsup_x u}{2}$$

para $\mathcal{H}^{n-1}$-q.t.p. $x \in U$.

Por fim, mostraremos um resultado que, de certo modo, generaliza o Teorema 6.1.3.

**Teorema A.20.** *Seja $\mu$ uma medida de Radon positiva em $\mathbb{R}^n$ tal que*

$$\mu(B(x,r)) \lesssim r^{n-1}$$

*para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$. Então,*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} u \, d\mu \right| \lesssim \|Du\|(\mathbb{R}^n)$$

*para toda $u \in \mathcal{BV}(\mathbb{R}^n)$.*

*Demonstração.* Observe primeiramente que a hipótese implica diretamente que $\mu \ll \mathcal{H}^{n-1}$.

Seja $u \in \mathcal{BV}(\mathbb{R}^n)$ não-negativa. Pela fórmula de co-área (Teorema 5.2.3), o conjunto $A_t = \{x \in \mathbb{R}^n : u(x) > t\}$ tem perímetro finito para $\mathcal{L}^1$-q.t.p. $t \in \mathbb{R}$. Para esses valores de $t$, defina

$$B_t = \{x \in A_t : \overline{D}(A_t, x) \geq 1/2\}.$$

Para $\mathcal{H}^{n-1}$-q.t.p. $x \in A_t$,

$$\operatorname{ap}\limsup_{x} u \geq \frac{\operatorname{ap}\liminf_x u + \operatorname{ap}\limsup_x u}{2} = u(x) > t,$$

o que implica em

$$\inf\{s > 0 : D(\{y : u(y) > s\}, x) = 0\} = \inf\{s > 0 : D(A_s, x) = 0\} > t,$$

de onde temos que, para todo $x \in A_t \setminus N$, no qual $\mathcal{H}^{n-1}(N) = 0$,

$$\overline{D}(A_t, x) > 0.$$

Tome $x \in (A_t \setminus B_t) \setminus N$. Então

$$\overline{D}(A_t, x) > 0 \quad \text{e} \quad \underline{D}(A_t, x) \leq \overline{D}(A_t, x) < 1/2 < 1,$$

o que, como visto na demonstração da Proposição A.17, implica que $x \in \partial_e A_t$. Além disso, como

$$\overline{D}(A_t, x) = \limsup_{r \to 0} \frac{\mathcal{L}^n(A_t \cap B(x, r))}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} < 1/2,$$

da demonstração do Lema A.10 temos que $x \notin \partial^* A_t$. Portanto,

$$(A_t \setminus B_t) \setminus N \subset \partial_e A_t \setminus \partial^* A_t.$$

Pela Proposição A.18,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{n-1}(A_t \setminus B_t) &= \mathcal{H}^{n-1}((A_t \setminus B_t) \setminus N) \\ &\leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial_e A_t \setminus \partial^* A_t) = 0. \end{aligned}$$

Aplicando o Lema 5.3.4 em $B_t$, existem $\{x_j\} \subset B_t$ e $\{r_j\} \subset \mathbb{R}^+$ tais que $B_t \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B(x_j, r_j)$ e

$$\sum_{j=1}^{\infty} r_j^{n-1} \lesssim \|\partial B_t\|(\mathbb{R}^n).$$

Note ainda que $\mathcal{H}^{n-1}(A_t \setminus B_t) = 0$ implica que $\mathcal{H}^n(A_t \setminus B_t) = \mathcal{L}^n(A_t \setminus B_t) = 0$, ou seja, $\chi_{A_t} = \chi_{B_t}$ em $\mathcal{L}^n$-q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$. Então para qualquer $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ temos

$$\int_{A_t} \operatorname{div}\varphi \, dx = \int_{B_t} \operatorname{div}\varphi \, dx.$$

Tomando o supremo sobre $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ com $|\varphi| \leq 1$, obtemos

$$\|\partial B_t\|(\mathbb{R}^n) = \|\partial A_t\|(\mathbb{R}^n).$$

Além disso, como $\mu \ll \mathcal{H}^{n-1}$, temos $\mu(A_t \setminus B_t) = 0$. Logo, $\mu(A_t) = \mu(B_t)$.

Como $u(x) = \int_0^{u(x)} dt = \int_0^\infty \chi_{\{(s,y):u(y)>s\}}(t,x)\, dt$, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} u\, d\mu &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_0^\infty \chi_{\{(s,y):u(y)>s\}}\, dt \right) d\mu \\
&= \int_0^\infty \left( \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\{(s,y):u(y)>s\}}\, d\mu \right) dt \\
&= \int_0^\infty \mu(A_t)\, dt \\
&= \int_0^\infty \mu(B_t)\, dt \\
&\leq \int_0^\infty \sum_{j=1}^\infty \mu(B(x_j, r_j))\, dt \\
&\lesssim \int_0^\infty \sum_{j=1}^\infty r_j^{n-1}\, dt \\
&\lesssim \int_0^\infty \|\partial B_t\|(\mathbb{R}^n)\, dt \\
&= \int_0^\infty \|\partial A_t\|(\mathbb{R}^n)\, dt \\
&= \|Du\|(\mathbb{R}^n),
\end{aligned}$$

pela fórmula de co-área.

Se $u \in \mathcal{BV}(\mathbb{R}^n)$ é qualquer, então

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} u\, dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u|\, dx \lesssim \|Du\|(\mathbb{R}^n).$$

□

# Referências Bibliográficas


[AH] ADAMS, D. R.; HEDBERG, L. I. *Function Spaces and Potential Theory.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [A Series of Comprehensive Studies in Mathematics], Vol. 314, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[ACM] AMBROSIO, L.; CRIPPA, G.; MANIGLIA, S. *Traces and Fine Properties of a BD Class of Vector Fields and Applications.* Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse: Mathématiques, Série 6, Vol. 14 (2005), 527-561.

[BP] BARAS, P.; PIERRE, M. *Singularités Éliminables Pour Des Équations Semi-linéaires.* Annales de l'institut Fourier, Vol. 34, No. 1 (1984), 185-206.

[B] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer, New York, 2011.

[C] CARLESON, L. *Selected Problems on Exceptional Sets.* Van Nostrand Mathematical Studies, No. 13, D. Van Nostrand Company, Inc., New Jersey, 1967.

[CF1] CHEN, G.-Q.; FRID, H. *Divergence-measure Fields and Hyperbolic Conservation Laws.* Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. 147, No. 2 (1999), 89-118.

[CF2] CHEN, G.-Q.; FRID, H. *Extended Divergence-measure Fields and the Euler Equations for Gas Dynamics.* Communications in Mathematical Physics, Vol. 236, No. 2 (2003), 251-280.

[CT] CHEN, G.-Q.; TORRES, M. *Divergence-measure Fields, Sets of Finite Perimeter, and Conservation Laws.* Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. 175, No. 2 (2005), 245-267.

[CTZ1] CHEN, G.-Q.; TORRES, M.; ZIEMER, W.P. *Gauss-Green Theorem for Weakly Differentiable Vector Fields, Sets of Finite Perimeter, and Balance Laws.* Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. 62, No. 2 (2009), 242-304.

[CTZ2] CHEN, G.-Q.; TORRES, M.; ZIEMER, W.P. *Measure-theoretic Analysis and Nonlinear Conservation Laws*. Pure and Applied Mathematics Quarterly, Vol. 3, No. 3 (2007), 841-879.

[Da] DAFERMOS, C. M. *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], Vol. 325, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[DM] DAVID, G.; MATTILA, P. *Removable sets for Lipschitz Harmonic Functions in the Plane*. Revista Matemática Iberoamericana, Vol. 16, No. 1 (2000), 137-215.

[DP1] DE PAUW, T.; PFEFFER, W. F. *Distributions for Which* $\operatorname{div} v = F$ *Has a Continuous Solution*. Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. 61, No. 2 (2008), 230-260.

[DP2] DE PAUW, T.; PFEFFER, W. F. *The Gauss–Green Theorem and Removable Sets for PDEs in Divergence Form*. Advances in Mathematics, Vol. 183, No. 1 (2004), 155-182.

[DMM] DEGIOVANNI, M.; MARZOCCHI, A.; MUSESTI, A. *Cauchy Fluxes Associated with Tensor Fields Having Diergence Measure*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. 147, No. 3 (1999), 197-223.

[Di] DIBENEDETTO, E. *Real Analysis*, 2ª ed. Birkhäuser Advanced Texts Basler Lehrbücher, Birkhäuser, New York, 2016.

[Du] DUOANDIKOETXEA, J. *Fourier Analysis*. Graduate Studies in Mathematics, Vol. 29, American Mathematical Society, 2001.

[E] EVANS, L. C. *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19, American Mathematical Society, 1998.

[EG] EVANS, L. C.; GARIEPY, R. F. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. CRC Press Inc., Boca Raton, 1992.

[F1] FOLLAND, G. B. *Introduction to Partial Differential Equations*, 2ª ed. Princeton University Press, New Jersey, 1995.

[F2] FOLLAND, G. B. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, 2ª ed. Pure an Applied Mathematics, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.

[G] GUZMÁN, M. *Differentiation of Integrals in* $\mathbb{R}^n$. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 481, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[HP] HARVEY, R.; POLKING, J. C. *Removable Singularities of Solutions of Linear Partial Differential Equations*. Acta Mathematica, Vol. 125 (1970), 39-56.

[HKM] HEINONEN, J.; KILPELÄINEN, T.; MARTIO, O. *Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations*. Dover Publications, Inc., New York, 2006.

[H] HOUNIE, J. G. *Teoria Elementar das Distribuições*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979.

[KM] KESSELMARK, C.; MOONENS, L. *Les théorèmes fondamentaux du calcul intégral*. Gazette des Mathematiciens, No. 141 (2014), 49-67.

[K] KINNUNEN, J. *Sobolev Spaces*. Department of Mathematics and Systems Analysis, Aalto University, 2017.

[KKST] KINNUNEN, J.; KORTE, R.; SHANMUGALINGAM, N.; TUOMINEN, H. *Lebesgue Points and Capacities Via The Boxing Inequality in Metric Spaces*. Indiana University Mathematics Journal, Vol. 57, No. 1 (2008), 401-430.

[Mat] MATTILA, P. *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces: Fractals and Rectifiability*. Cambridge studies in advanced mathematics, Vol. 44, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[Maz] MAZ'YA, V. *Sobolev Spaces - with Applications to Elliptic Partial Differential Equations*, 2ª ed. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [A Series of Comprehensive Studies in Mathematics], Vol. 342, Springer-Verlag, Berlin, 2011.

[MRT] MOONENS, L.; RUSS, E.; TUOMINEN, H. *Removable Singularities for* $\operatorname{div} v = f$ *in Weighted Lebesgue Spaces*. Indiana University Mathematics Journal, Vol. 67, No. 2 (2018), 859-887.

[O] OLIVEIRA, C. R. *Introdução à Análise Funcional*. Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2015.

[PT] PHUC, N. C.; TORRES, M. *Characterizations of the Existence and Removable Singularities of Divergence-measure Vector Fields*. Indiana University Mathematics Journal, Vol. 57, No. 4 (2008), 1573-1597.

[P] PICON, T. H. *Uma Extensão da Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg*. Dissertação de mestrado, UFSCar, 2008.

[RS] RIESZ, F.; SZ.-NAGY, B. *Functional Analysis*. Blackie & Son Limited, London, 1956.

[R1] RUDIN, W. *Principles of Mathematical Analysis*, 3ª ed. McGraw-Hill International Editions, McGraw-Hill Co., Singapore, 1976.

[R2] RUDIN, W. *Real and Complex Analysis*, 3ª ed. McGraw-Hill International Editions, McGraw-Hill Co., Singapore, 1987.

[Si] ŠILHAVÝ, M. *Divergence-measure Fields and Cauchy's Stress Theorem*. Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, Vol. 113 (2005), 15-45.

[St] STEIN, E. M. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*. Princeton University Press, New Jersey, 1970.

[SW] STEIN, E. M.; WEISS, G. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*. Princeton University Press, New Jersey, 1971.

[T] TURESSON, B. O. *Nonlinear Potential Theory and Weighted Sobolev Spaces*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1736, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[Z] ZIEMER, W. P. *Weakly Differentiable Functions: Sobolev Spaces and Functions of Bounded Variation*. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 120, Springer-Verlag, New York, 1989.