UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – PPGECE

Antonio Augusto de Lima

ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA COM EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS

São Carlos
2019

Antonio Augusto de Lima

ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA COM EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas, do Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, da Universidade Federal de São Carlos, como requisito para obtenção do título de Mestre em Ciências Exatas.

Orientador: Prof. Dr. José Antonio Salvador.

São Carlos
2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Antonio Augusto de Lima, realizada em 26/07/2019:

Prof. Dr. Jose Antonio Salvador
UFSCar

Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti
UNESP

Profa. Dra. Luciene Nogueira Bertoncello
UFSCar

AGRADECIMENTOS

A Deus, em primeiro lugar.

À minha família, em especial à minha esposa Meire, a meu pequeno filho, Matheus Victor, pelo apoio e paciência e à minha mãe Dionesia, que mesmo na sua simplicidade, jamais permitiu a desistência através do incentivo.

Ao meu orientador, pelos ensinamentos de Matemática e vida e aos professores do PPGECE, pela oportunidade de aprendizagem oferecida. Agradeço também a professora Marta Cilene Gadotti, da UNESP, pelas palavras mágicas de incentivo.

Aos companheiros de curso pela amizade e colaboração de todos.

Tempo é viver, é celebrar, é conhecer. Tempo é poder amar ao nosso tempo. O tempo só pode ser a mágica de fazer tudo acontecer e possibilitar que os sonhos possam florescer, leve o tempo que precisar.

Jeniffer Harth

RESUMO

Ministrar a disciplina matemática na educação básica é um grande desafio. Logo para o professor obter sucesso, o grande valor a ser cultivado é apresentar aos alunos conteúdos significativos. Na atualidade, em muitos casos, o ensino da matemática se restringe a “decoreba “, e nesse sentido propomos um trabalho onde a autonomia para gerenciar a própria aprendizagem nas Atividades de Modelagem esteve presente. A aproximação entre os conteúdos escolares e a valorização das contextualizações, aliado a grande importância do uso da sala de informática foi nosso ponto de partida. Nessa perspectiva, a modelagem matemática é um mecanismo que pode ser facilmente associado a alguns conteúdos que compõe o currículo da disciplina a fim de facilitar o processo de ensino-aprendizagem. Assim, neste trabalho, é implementada uma discussão acerca de como a modelagem matemática pode ser trabalhada em consonância com o estudo das equações de diferença, com o objetivo de aproximar a matemática formal da matemática cotidiana e, com isso, aproximar o aluno da sua realidade. Para tanto, foi realizada uma profunda pesquisa bibliográfica em acervos de autores renomados na área de Modelagem Matemática, Funções e Ensino-Aprendizagem de Matemática, o que possibilitou a formação de um consistente alicerce teórico para o desenvolvimento desta pesquisa, além de intervenção em uma turma de Ensino Médio em uma disciplina eletiva ofertada pelo pesquisador em uma Escola de Tempo Integral. Por fim, verificou-se a significância da abordagem de modelagem matemática associada aos conteúdo do currículo do Ensino Médio, em especial ao conteúdo de equações de diferenças, e em um dado momento, por curiosidade dos alunos, a função quadrática, na condição de mecanismos matemáticos capazes de desenvolver habilidades ímpares nos discentes, como a abstração e o raciocínio lógico.

Palavras-chave: Modelagem matemática, equações de diferenças, ensino-aprendizagem, Função quadrática.

ABSTRACT

Teaching math subject in basic education is a big challenge. Once the teacher is successful, the great value to be cultivated is to present students with meaningful content. Nowadays, in many cases, teaching of mathematics is restricted to “learning by heart”, and in this sense we propose a work based on the autonomy to manage their own learning in Modeling Activities. The approach among the school contents and the valorization of the contextualization, connected to the great importance of the use of the computer room was our starting point. In this perspective, mathematical modeling is a mechanism that can be easily associated with some content that makes up the curriculum of the discipline in order to improve the teaching-learning process. Thus, in this work, a discussion is implemented about how mathematical modeling can be worked in line with the study of the difference equations, with the aim of bringing formal mathematics closer to everyday mathematics and, futhermore, bringing the student closer to their reality.To this end, a thorough bibliographic research was carried out in collections of renowned authors in the area of Mathematical Modeling, Functions and Mathematics Teaching-Learning, which enabled the formation of a consistent theoretical foundation for the development of this research, as well as intervention in a class. High School in an elective subject offered by the researcher in a Full Time School. Finally, it was verified the significance of the mathematical modeling approach associated with the contents of the High School curriculum, especially the content of difference equations, and at a given moment, by curiosity of the students, the quadratic function, in the condition of mechanisms. mathematicians capable of developing unique skills in students such as abstraction and logical reasoning.

Keywords: Mathematical modeling, difference equations, teaching-learning, Quadratic function.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O foco deste trabalho será mostrar aos alunos a ideia do processo iterativo, que no estudo de sequências é usado por eles com uma certa frequência, muitas vezes de forma espontânea, principalmente nos estudos da primeira série do Ensino Médio quando são estudadas as Progressões em que exploramos esses conceitos através das variáveis discretas.

Também vamos trabalhar com os alunos Modelos Matemáticos relacionados à população da cidade de Limeira nos últimos dez anos, assim como a incidência de mortes por câncer de pulmão e compararmos a proporção de mortes por essa doença ao longo dos anos. Para descrever a pesquisa verificarmos se os objetivos pré-determinados foram alcançados, dividimos este trabalho em cinco capítulos.

No Capítulo I descrevemos sobre a trajetória acadêmica do professor e sua prática docente. Também abordamos sobre os alunos participantes do projeto e sobre a escola onde o trabalho foi realizado.

No Capítulo II, intitulado O Tema do Trabalho, discutimos conceitos relativos às Equações de Diferenças de primeira ordem assim como sobre Modelagem Matemática e a barreira criada pelo ensino tradicional, em que os conceitos necessariamente estão prontos.

No Capítulo III, definido como Modelagem Matemática, estudamos conceitos relacionados à aplicação da Modelagem Matemática na sala de aula.

No Capítulo IV, Sugestões de Aplicações no Ensino Médio, trabalhamos três sugestões de aplicações no Ensino Médio. As três situações trabalhadas encontram-se na Base Curricular do Estado de São Paulo.

No Capítulo V, Atividades de Modelagem através de Equação de diferenças, vivenciamos três experiências envolvendo Práticas de Modelagem com um grupo de 34 alunos. Finalmente, nas Considerações Finais fazemos uma Avaliação do Trabalho.

CAPÍTULO 1: O PROFESSOR, OS ALUNOS, A ESCOLA E UMA REFLEXÃO SOBRE A PRÁTICA DOCENTE

1.1 A ESCOLA

A escola Professor Arlindo Silvestre recebeu esse nome devida a justa homenagem a um professor por sua inteira vocação, conhecedor intenso das situações adversas relacionadas à educação. O Professor Arlindo Silvestre, conforme apresentado na figura 1, soube como poucos dedicar-se com carinho, não renunciando à intensa tarefa de promover a valorização social e cultural dos jovens que foram seus alunos e amigos.

Figura 1- Professor Arlindo Silvestre

Fonte: Cedido por familiar (2019).

Professor Arlindo Silvestre, nasceu em 27 de agosto de 1929, porém foi registrado em 10 de setembro de 1929, na cidade de Ipauçu - SP. Em Xavantes - SP iniciou o curso primário e começou a trabalhar participando da banda e da orquestra local tocando saxofone e clarinete. Fez o ginasial e a escola normal na cidade de Ourinhos – SP. Já como professor primário, residiu em São Paulo, onde cursou a

Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da USP concluindo o curso de História em 1960.

Cursou Pedagogia, tendo se formado em 1979 e desatacado- se como diretor. Foi também Supervisor de Ensino nas cidades de Piracicaba e Limeira. A sua grande importância foi a sua intensa participação como educador, gestor, cidadão e espírita. Suas ações sempre foram ungidas de sabedoria, seus passos superaram as pedras do caminho com aptidão, abrigava com o seu coração as aflições de tantos que o procuravam.

Alicerçava seus saberes em grandes obras científicas, filosóficas e religiosas. Sua inteligência fez-se perceber dentro dos mais diversificados campos de atuação em que se projetou. Na figura 2, segue a foto da Professora aposentada, Dona Elza Silvestre, esposa do Professor Arlindo Silvestre.

Figura 2 - Elza Silvestre – esposa de Arlindo Silvestre

Fonte: Cedido por familiar (2019).

Neste momento da figura 2, a Sra. Elza estava falando com os alunos participantes deste projeto sobre motivação para vencer na vida e também sobre a atuação do esposo que leva o nome da escola.

1.2 OS ALUNOS NO PROJETO

Os participantes dessa pesquisa foram alunos de todos os anos do Ensino Médio. Foi criada uma disciplina eletiva na Escola de Tempo Integral Professor Arlindo Silvestre e os alunos participantes desse projeto tinham dez escolhas a fazer entre todas as eletivas oferecidas.

Participaram do Projeto de livre e espontânea vontade. As disciplinas eletivas compõem a parte diversificada e devem promover o enriquecimento, a ampliação e a diversificação de conteúdo, temas ou áreas do Núcleo Comum. Consideram a interdisciplinaridade enquanto eixo metodológico para buscar a relação entre os temas explorados, respeitando as especificidades das distintas áreas de conhecimento.

Para executar esse projeto foram utilizadas duas aulas de cinquenta minutos todas as quartas-feiras do mês de setembro até doze de dezembro, totalizando 24 aulas, com uma turma de 34 alunos do Ensino Médio, envolvendo alunos dos três anos.

1.3 Descrição do pesquisador e sua prática docente

Até entrar na universidade, dediquei-me a carreira de Torneiro Mecânico. Minha trajetória acadêmica iniciou em março de 1995, já com 26 anos, quando ingressei no Curso Superior de Licenciatura Plena em Matemática, na Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP.

Nesse ano, após muita batalha, iniciou-se uma vida acadêmica de muito estudo e dedicação, na qual sempre tive auxílio de bolsas (Trabalho, Alimentação, Moradia e Iniciação Científica) durante todo o tempo da graduação. Durante o segundo ano, fui convidado para ser professor de Álgebra no Cursinho Popular da Unicamp, onde atuei por três anos; creio que colaborei com muitos alunos, mas também aprendi muito, ganhei muita experiência.

A partir deste momento, meu foco profissional não se desviou mais da Educação. Encontrei não algo que me fazia ou que me faz ganhar a vida, mas algo que, numa época de grandes conflitos educacionais, me sentir à vontade com meus alunos e meu maior prazer é quando faço parte da evolução de pessoas através da educação. E como já bem falou um dia Nelson Mandela*:* “A educação é a arma mais poderosa que você pode usar para mudar o mundo”.

A escolha da matemática se deve ao fato de sempre ter gostado muito das aulas dessa disciplina e de ter demonstrado curiosidade em resolver problemas matemáticos e conhecer novos conteúdos, além de ter sido incentivado por um grande mestre da Matemática, Professor Zacharias, que já não se encontra entre nós.

Sou professor de Matemática há 23 anos e procuro realizar o trabalho com muito amor e dedicação. Sei da responsabilidade que tenho ao exercer minha profissão, então procuro desenvolver meu trabalho numa perspectiva de que cada aluno é um pesquisador e por isso mesmo acredito que o meu papel é de mediador e incentivador na busca de novos conhecimentos. Acredito que um bom professor não é detentor do conhecimento, mas espera que os novos conhecimentos aconteçam a partir do momento que os seus alunos construam através da pesquisa. Ser professor é atualizar-se continuamente.

Sempre senti a necessidade da pesquisa para buscar meios para que o aluno pudesse produzir conhecimentos. Cursei Pós-Graduação em Educação Matemática *lato sensu* na Faculdade De Educação São Luís na cidade de Jaboticabal/SP, e Pedagogia no Centro Universitário de Araras Dr. Edmundo Ulson, na cidade de Araras/SP.

Não se pode negar que a Matemática representa um entrave imenso para um número significativo de alunos. É um mito que continua vivo no senso comum; basta observar as referências feitas à disciplina: "odeio Matemática", "tenho verdadeiro pavor da Matemática", "a ciência dos números é assustadora", "a Matemática é o terror dos jovens, adultos e crianças" e outros tantos pronunciamentos. Acredito que seja preciso pesquisar e rever práticas de ensino continuamente para que se consiga contribuir com minha parcela de conhecimentos, tornar as aulas mais atraentes e menos maçantes.

Após estas reflexões, como tema desta dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências Exatas, propus a aplicação de uma proposta alternativa para o ensino da Matemática a partir do trabalho com a modelagem, sob uma ótica diferenciada de ensino, que faculta ao aluno ser agente na construção do conhecimento, superando, com motivação e descontração, as dificuldades que se apresentam.

É bem verdade que o ensino de matemática atualmente vive um momento difícil, visto que o desempenho de nossos alunos tem deixado muito a desejar. O horror a Matemática é um traço cultural significativo no Brasil. Não por acaso, temos um dos piores desempenhos na disciplina no Programa Internacional de Avaliação de

Estudantes (PISA) segundo o Jornal “ O Estado de São Paulo “ de 06/11/2017. Há uma aceitação no país de que a matemática não é para todos, e a nossa sociedade reproduz isso. Creio que um fator determinante nesse retrospecto é o histórico descaso com a educação e problemas sociais por parte de nossos governantes.

Nos últimos anos, várias reformulações escolares e novas propostas pedagógicas se fizeram presentes nos meios escolares, mas a aplicação das mesmas nem sempre se mostrou eficiente. Ensinar é a principal função dentro de uma escola, mas a maneira que isso é feito determina diferenças nos resultados obtidos. O professor do século XXI precisa planejar situações-problema que tenham significado para os alunos, bem como atividades que permitam a manifestação dos mesmos sobre possíveis diferentes soluções, até mesmo porque a efetiva participação dos alunos depende dos significados das situações propostas.

Nós, professores, sabemos que quando encaramos a Matemática apenas na sua formalidade, isto é, através do ensino tradicional, tiramos a possibilidade de criatividade por parte dos nossos alunos e neste interim, a modelagem matemática é uma excelente alternativa de ensino.

Em linhas gerais, a modelagem matemática problematiza situações do cotidiano, transformando problemas reais em problemas matemáticos e é de suma importância para o aprendizado dos alunos, pois a partir dela os discentes poderão vivenciar modelos matemáticos para a construção do seu conhecimento, permitindo que se tornem críticos.

E, nesse sentido, cabe a nós, profissionais da área da educação, procurar uma relação do que se ensina com o cotidiano dos alunos, procurar contextualização do conhecimento e assim fazer com que o interesse dos educandos se faça presente em sala de aula. Em geral o tema chave desse trabalho é pouco trabalhado nos cursos de Graduação em Licenciatura em Matemática, com isso quase a totalidade dos alunos do Ensino Médio desconhecem o tema equações de diferenças.

Tendo em vista isso, vamos apresentar neste trabalho situações práticas de Modelagem Matemática envolvendo modelos discretos, para que se permita ao aluno uma aprendizagem e reflexão do conceito de forma gradativa, ou seja, a compreensão do problema, simplificação, processo de materialização, a matemática envolvida e discussão dos resultados obtidos.

Vivemos uma época em que as atividades interdisciplinares e as abordagens transdisciplinares constituem recursos fundamentais para a construção do significado dos temas estudados, contribuindo de modo decisivo para a criação de centros de interesse nos alunos. Ao respeitar a rica história da disciplina e alçá-la a uma área do conhecimento, busca-se apenas criar as condições para uma exploração mais adequada das possibilidades de a Matemática servir às outras áreas, na grande tarefa de transformação da informação em conhecimento em sentido amplo, em todas as suas formas de manifestação.

Naturalmente, o ponto de partida para a exploração dos temas matemáticos sempre será a realidade imediata em que nos inserimos. Entretanto, isso não significa a necessidade de uma relação direta entre todos os temas tratados em sala de aula e os contextos de significação já vivenciados pelos alunos. Em nome de um utilitarismo imediatista, o ensino de Matemática não pode privar os alunos do contato com temas epistemológica e culturalmente relevantes. Tais temas podem abrir horizontes e perspectivas de transformação da realidade, contribuindo para a imaginação de relações e situações que transcendem os contextos já existentes

Na exploração de cada centro de interesse, uma estratégia muito fecunda é a via da problematização, da formulação e do equacionamento de problemas, da tradução de perguntas formuladas em diferentes contextos em equações a serem resolvidas. Muito além dos problemas estereotipados em que a solução consiste em construir procedimentos para usar os dados e com eles chegar aos pedidos, os problemas constituem, em cada situação concreta, um poderoso exercício da capacidade de investigar, de perguntar e buscar solução.

Problematizar é explicitar perguntas bem formuladas a respeito de determinado tema. E, uma vez formuladas as perguntas, para respondê-las, é necessário discernir o que é relevante e o que não é relevante no caminho para a resposta. A competência na distinção entre a informação essencial e a supérflua para a obtenção da resposta é absolutamente decisiva e deve ser permanentemente desenvolvida.

Convém registrar que, nas escolas, de forma geral, os alunos costumam ser mais induzidos a dar respostas do que a formular perguntas. Todas as caricaturas da escola – algumas bem grotescas – resumem a atividade do professor à mera formulação de questões a serem respondidas pelos alunos.

O desenvolvimento da inteligência, no entanto, está diretamente relacionado com a capacidade de fazer as perguntas pertinentes ao tema, as perguntas que realmente nos interessam, do que a fornecer as respostas certas a perguntas oriundas de interesses que não são nossos, ou que não fomos levados a fazer nossos. Outro aspecto a ser considerado na busca da criação de centros de interesse é o fato de que as fontes principais de interesse não costumam ser os próprios conteúdos disciplinares, mas se encontram, primordialmente, nas relações interdisciplinares, ou mesmo nas temáticas transdisciplinares segundo Relatório Pedagógico – SARESP2008, página 129.

Nessa perspectiva, este trabalho objetiva propor um método de ensino que possa auxiliar professores e futuros professores a planejar e executar condições de ensino sobre o tema estabelecido. Além disso, propõe-se: estudar as Equações de Diferenças de primeira ordem; apresentar o Método de Resolução; mostrar aplicações das Equações de Diferenças de Primeira ordem; trabalhar com grupos de estudo onde cada grupo desenvolve diferentes formas de aplicação das Equações de Diferenças.

Na busca para entender melhor o processo de construção do conhecimento matemático de meus alunos e através de uma amostragem, nesta pesquisa, em nível de Mestrado Profissionalizante, aplicamos três atividades práticas vinculadas ao tema de estudo desta dissertação. Estas atividades buscaram ainda estreitar os laços com Caderno do Aluno – que desde 2009 é produzido e entregue pelo Sistema de Educação do Estado de São Paulo, o que é uma forma de promover mais igualdade de ensino, para que todas as instituições da Rede Estadual se mantenham no mesmo patamar de qualidade.

CAPÍTULO 2: O TEMA DO TRABALHO

Neste capítulo, vamos discutir conceitos relativos às Equações de Diferenças de primeira ordem, assim como tratarmos da Modelagem Matemática e das barreiras criadas pelo ensino tradicional, no qual os conceitos necessariamente são apresentados.

2.1 EQUAÇÃO DE DIFERENÇAS

Há muitos problemas de interesse em diversas áreas como física, biologia e economia que utilizam modelos matemáticos em que o tempo é uma variável discreta, ou seja, analisamos a evolução do sistema em instantes isolados. Uma aplicação financeira cujos rendimentos são creditados uma vez por mês é um exemplo de aplicação em tempo discreto.

As equações que expressam relações entre as mudanças das variáveis no caso discreto, ou seja, em períodos determinados, são chamadas de relações de recorrência ou equações discretas. Por exemplo, se uma certa população tem uma geração discreta, o tamanho da enésima primeira geração $x(n + 1)$ é uma função da enésima geração $x(n)$. Esta situação é dada pela equação $x(n + 1) = f(x(n))$, com $n = 0, 2, 3, \dots, k$, com k pertencendo ao Conjunto dos Números Naturais.

Se temos uma função contínua, normalmente representamos por $f(x)$. Por exemplo $f(x) = 3x$, com o valor de x sendo um número que pertence aos Conjunto dos Números Reais. Agora, quando uma função é discreta, normalmente representamos por f_x ou y_x . Por exemplo: $y_x = 2 + 3x$. Nesta função, x pode assumir apenas números inteiros não negativos ou naturais, ou seja, $x = 0, 1, 2, 3, ...$

Reescrevendo essa função discreta como $y_n = 2 + 3n$, com o valor de n pertencendo ao Conjunto dos Números Naturais, podemos construir a tabela a seguir com alguns possíveis valores de y_n, para alguns valores de n .

N	0	1	2	3	4
y_n	2	5	8	11	14

Observe que $y_{n+1}= y_n +3$

A equação que escrevemos a partir da observação da tabela é conhecida como Relação de Recorrência ($y_{n+1} = y_n + 3$). Uma relação de recorrência ou, como também é chamada, uma equação de recorrência, é uma relação que determina cada termo de uma dada sequência, a partir de certo termo, em função dos termos anteriores.

Além disso, é dita de primeira ordem quando cada termo da sequência é obtido a partir do termo imediatamente anterior a ele, ou seja, quando y_n está em função de y_{n-1}. A partir de agora vamos chamar essas equações de equação de diferenças, onde para descobrir o valor de algum termo qualquer, em determinada posição, aplica-se uma fórmula para chegar a este chamado enésimo número.

O crescimento de uma população e o investimento de um certo capital são exemplos de situações que variam de acordo com uma grandeza discreta. Em ambos os casos podemos criar um modelo transformando-os em relações matemáticas e assim encontrar soluções que resolvam a situação motivadora de estudo.

Nosso trabalho se concentra em equações de diferenças de 1ª ordem, que assim é definida: É dita de primeira ordem se for do tipo $y_{n+1} - y_n = f(y_0, n)$, com y_0 dado . Dessa forma, uma equação de diferenças de primeira ordem é uma sequência (y_n),com $n \in \mathbb{N}$. Dada por uma fórmula de recorrência, isto é, cada termo y_{n+1} depende do anterior y_n. Citamos alguns exemplos.

2.2 EXERCÍCIOS QUE ENVOLVEM EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS

Exemplo 1 (pág. 27 do Caderno do Aluno, 1º Ano, Volume 1)

a-) $a_1 = 3$ e $a_n = a_{n-1} \cdot 2$, com $n \in IN$, $n \geq 2$;

(3 , 6 , 12 , 24 , 48 , ...)

b) $a_1 = 3$ e $a_n = a_{n-1} + 2$, $n \in IN$, $n \geq 2$;

(3 , 5 , 7 , 9 , 11 , ...)

Exemplo 2 (pág. 30, Caderno do Aluno, 1º Ano, Volume 1)

Suponha que o valor de um automóvel diminua a uma taxa constante de 10% ao ano. Hoje, o valor desse automóvel é R$ 20 mil.

a) Calcule o valor desse automóvel daqui a quatro anos.

Resolução:

Como o veículo custa hoje R$ 20.000,00, daqui um ano vai custar R$20.000,00 menos 10% desse valor, ou seja, R$ 20000 – [20000 . 10/100] , que é igual a R$18.000,00. Esse valor resulta do decréscimo de 10% do valor do veículo. Assim podemos prever o valor que o veículo terá após 1, 2, 3, 4, ... , n anos. Logicamente que a taxa pode mudar, o banco declarar falência, mas nosso trabalho é sem variações de taxas. Vamos transformar essa situação numa relação matemática. Se queremos saber o valor daqui 4 anos, então qureremos saber o valor no tempo 4. Vamos considerar A(0) como o valor do veículo no tempo 0, ou seja, o valor atual do veículo. Logo:

$A(0)= 20.000$

$A(1) = A(0) - (0,1).A(0) = 20.000 (1 - 0,1) = 20.000 \times 0,9 = 18.000$

$A(2) = A(1) – (0,1).A(1) = 18.000 (1 – 0,1) =18.000 \times 0,9 = 16.200$

$A(3) = A(2) – (0,1) . A(2) =16.200 (1 – 0,1) = 16.200 \times 0,9 =14.580$

$A(4) = A(3) – (0,1) . A(3) =14.580 (1 - 0,1) = 14580 \times 0,9 = 13.122$

Portanto, o preço do veículo após 4 anos será de R$ 13.122,00.

b) Encontre uma fórmula que permita calcular o preço desse automóvel daqui a n anos.

Resolução:

$A(1) = A(0) – 0,1 . A(0) = 0,9 . A(0)$

$A(2) = A(1) – 0,1 . A(1) = 0,9^2 . A(0)$

Observando os cálculos acima, é de se esperar que:

$$\boxed{A(n) = 0,9^n .A(0)}$$

Estendendo a ideia acima, podemos afirmar que o valor do veículo em um ano qualquer é o valor do veículo no ano anterior menos a taxa de desvalorização do ano anterior. Matematicamente, nossa situação terá:

$$A(n+1) = A(n) - (0{,}1) \cdot A(n), \text{ com } n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Exemplo 3 – Considere que uma população está aumentando numa taxa de 25 mil habitantes por ano.

a-) Defina uma equação de diferença que traduza esta situação.

Resolução:

Uma população no tempo (n+1) depende de suas taxas de natalidade e de mortalidade. Então, o tamanho de uma população no instante (n+1), que vamos chamar de A(n+1) depende do tamanho da população no tempo n, ou seja, de A(n). Em resumo A(n+1) é uma função de A(n). Logo A(n+1) = f(A(n)), para todo n natural. Portanto, teremos a equação de diferenças:

$$A(n+1) - A(n) = 25000, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ ou } A(n+1) = A(n) + 25000, \forall n \in \mathbb{N}.$$

b) Ache a população em 20 anos, supondo que agora é de 500 milhões.

Resolução:

A(0) = 500.000.000

A(1) = 500.000.000 + 25.000 x 1

A(2) = 500.000.000 + 25.000 x 2

.

.

.

A(20) = 500.000.000 + 25000 x 20

A(20) = 500.500.000

c) Em quanto tempo ela vai atingir 750 milhões?

Resolução:

750.000.000 – 500.000.000 = 25000n

n = 250.000.000 / 25000

n = 10.000 anos

2.3 A FUNÇÃO DO SEGUNDO GRAU

Como os sujeitos dessa pesquisa são alunos do Ensino Médio, todos já tinham conhecimento da resolução de equação do segundo grau, de como encontrar as raízes usando, principalmente, a Fórmula de Bháskara e, consequentemente, do conceito de função do segundo grau, que aparece na Situação de Aprendizagem 8 do Caderno 1, do 9º Ano do Currículo do Estado de São Paulo.

Nem por isso deixamos de fazer uma revisão cuidadosa, partindo da equação mais simples $y = f(x) = x^2$, com $x \in \mathbb{N}$, para conseguir entender aquela mais geral, $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, com coeficientes a, b e c reais na qual o coeficiente a deve ser diferente de zero.

Usamos como referência o Caderno do Aluno do 1º Ano do Ensino Médio, página 84, Situação de Aprendizagem 7. Mostramos aos alunos nesse processo de revisão que a concavidade da parábola pode ser voltada para cima (“alegria”) ou concavidade para baixo (“tristeza”), a abertura da parábola como sendo de maior abertura ou menor abertura, a posição do vértice da parábola com relação ao eixo das abscissas podendo estar acima do eixo, sobre o eixo ou abaixo do eixo e finalmente a posição do vértice da parábola com relação ao eixo das ordenadas, que também podem ser encontradas a esquerda do eixo, na origem ou a direita do eixo. De forma mais técnica e tendo o cuidado com o rigor matemático, falamos sobre deslocamentos verticais, deslocamento horizontais e deslocamento verticais e/ou horizontais. Nesse sentido procuramos fazer uma revisão do estudo para que o aluno conseguisse desenvolver a atividade proposta e poder ter uma melhor compreensão da análise do gráfico.

Os gráficos foram construídos pelos alunos com auxílio do Excel e em alguns momentos do software Geogebra assim como solicitamos aos alunos que também fossem realizadas as observações pertinentes.

Com esse trabalho, buscamos que o aluno observasse a importância de conceitos matemáticos com ênfase na função quadrática, através de dados reais do câncer, buscados por eles através de dados do Instituto Nacional do Câncer (INCA).

Dado o exposto, cabe resgatarmos a definição de modelo matemático trazida por Bassanezi (1999, p.12), ao dizer que

> (...) um modelo matemático é um conjunto consistente de equações ou estruturas matemáticas, elaborado para corresponder a algum fenômeno - este pode ser físico, biológico, social, psicológico, conceitual ou até mesmo um outro modelo matemático.

Diante da afirmação, nosso intuito foi a aplicação da Modelagem Matemática em sala de aula, estratégia que envolve a criação de um modelo ou fórmula, que proporciona a aproximação da teoria matemática com situações problemas do cotidiano.

2.3.1 A função do 2º Grau em domínio discreto

Desde o início da escola que trabalhamos, o papel do aluno não mudou. Sempre foi tratado como um ser sem conhecimentos prévios onde não levamos em conta o que carrega de sua experiência pessoal.

Segundo Antunes (2002, p. 39) "[...] essa atitude conduzia o aluno apenas a uma aprendizagem mecânica, repetitiva, raramente com atribuições de sentidos e, portanto, facilmente esquecida". De acordo com o autor é imprescindível que o professor leve em conta que seus estudantes possuem emoções, sentimentos, experiências vividas, e que vivem inseridos em um "mundo material e social" (2002. p.40) e que esses elementos precisam ser configurados como itens para os conteúdos que se quer ensinar especificamente.

Diante disso procuramos fazer uma experiência no Laboratório de Física da Escola Arlindo Silvestre que evidencia a função do segundo grau. A função quadrática é definida por uma lei envolvendo um trinômio de segundo grau e por isso, também é conhecida como função polinomial de segundo grau. Em alguns problemas é importante o cálculo do valor da função quadrática num ponto; assim como, dado um elemento na imagem da função quadrática, calcular o elemento do domínio correspondente.

Crescimento quadrático ocorre quando crescimentos iguais e sucessivos na variável x fazem com que os incrementos em f(x) se sucedam segundo uma PA. O nosso interesse em parte deste trabalho é trabalhar com uma função quando o domínio e contradomínio são ambos conjuntos discretos. Em determinada questão proposta pelos alunos tivemos que fazer um ajuste na curva segundo um modelo quadrático.

A questão surgiu quando os dados experimentais mostraram a relação entre as variáveis faixa etária de mortes por câncer de pulmão e a quantidade de óbitos observadas nestas faixas etárias, observadas pelos alunos após consulta feita ao site do INCA (Instituto Nacional de Câncer).

É fato que, num certo fenômeno queremos obter uma função definida por alguma fórmula que descreva esses dados de modo discreto e com a maior proximidade possível. Muitas são as dúvidas sobre essa questão, de modo que faremos algumas considerações. Uma primeira dúvida é: que tipo de função devemos utilizar para fazer o ajuste dos dados? Se for polinomial, como saber qual o grau do polinômio mais adequado? Inicialmente, é importante esclarecer que não estamos procurando uma função cujo gráfico contenha exatamente os pontos da tabela.

Os dados discretizados obtidos com um experimento são em geral aproximados, e alguns deles podem trazer erros bem acima do erro médio do experimento. Assim, o ajuste de curva preconiza que o gráfico da função procurada é a curva que melhor aproxima os pontos da tabela, mas alguns pontos podem ficar mais afastados.

Outra observação é que os dados de uma tabela obtidos experimentalmente não determinam, por si mesmos, o melhor tipo de função que modela o fenômeno. Um método direto consiste em plotar os dados discretizados da tabela em um sistema de coordenadas cartesianas, logo propomos no Laboratório de Física um trabalho prático que consistia no movimento de uma esfera descendo uma rampa.

O foco dessa atividade experimental é abordar a função do segundo grau e os dados que constam na tabela 1. Examinando a forma geral da curva discreta formada por esses pontos, podemos levantar uma hipótese sobre que tipo de função é a mais adequada para o ajuste.

2.3.2 A experiência

Um aluno vai colocar uma esfera na rampa de lançamento e o soltará no momento combinado com os amigos do grupo. Outro colega registrará o tempo do deslocamento da esfera pelas marcações da régua nos pontos 0 até 110 cm, a cada 10 cm. Com o cronômetro, registrará o tempo de deslocamento da esfera pelas marcações combinadas.

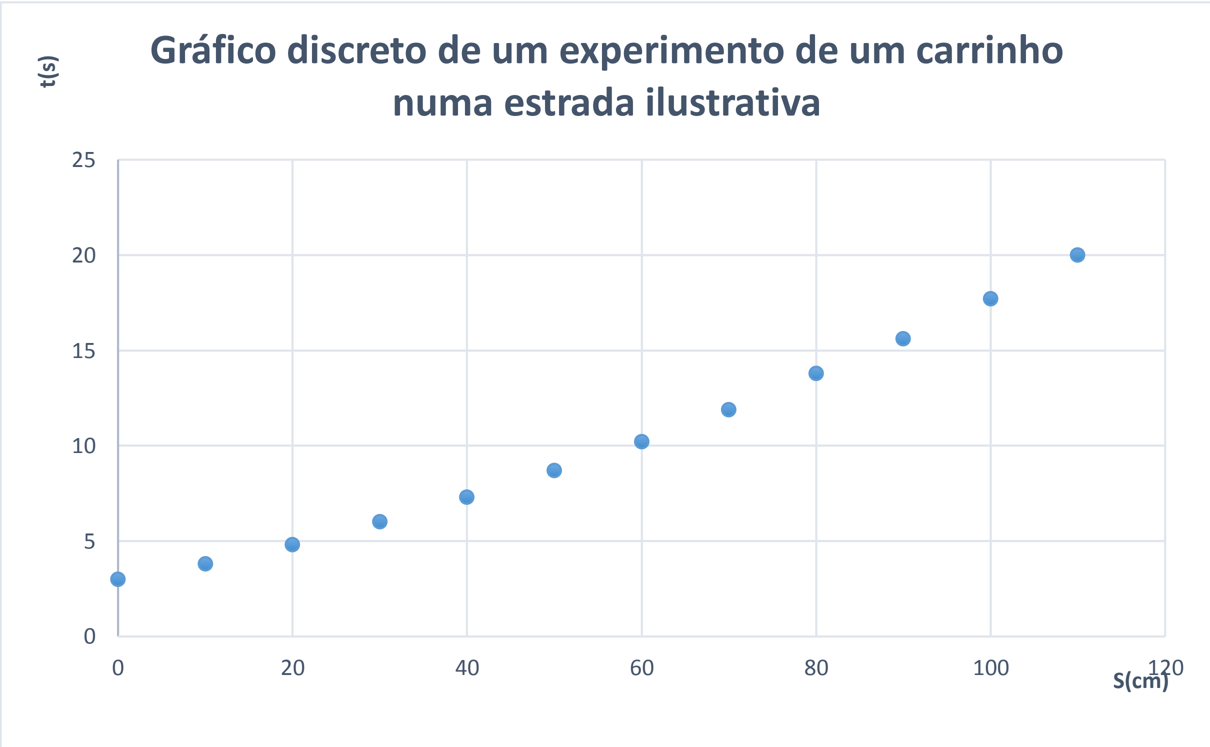
De posse dos tempos t (segundos) e posições s (centímetros) correspondentes, fara-se o preenchimento dos dados que seguem e construirá o gráfico utilizando o Excel ou outro software que possui planilhas.

Tabela 1 - Posições relativa aos tempos marcados com o cronômetro do celular

PREENCHIMENTO DE DADOS												
s(cm)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
t(s)	3	3,8	4,8	6,0	7,3	8,7	10,2	11,9	13,8	15,6	17,7	20

Fonte: Autoria própria (2019).

Gráfico 1 - A função quadrática referente ao experimento com um carrinho



Fonte: Autoria própria (2019).

Observando o formato do gráfico discreto, percebemos que ele pode ser ajustado pelo gráfico de uma função quadrática. Uma maneira de confirmar isso, até certo ponto, é examinar a variação do espaço percorrido.

Percebemos que as diferenças consecutivas s(10) − s(0), s(20) − s(10), s(30) - s(20), etc., se aproximam de uma P.A. caracterizando uma função do 2º grau.

Tabela 2 - Diferenças entre dois tempos consecutivos

TEMPOS CONSECUTIVOS												
s(cm)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
t(s)	3	3,8	4,8	6,0	7,3	8,7	10,2	11,9	13,8	15,6	17,7	20
∆S(cm)	0,8	1,0	1,0	1,2	1,3	1,4	1,5	1,7	1,9	1,8	2,1	2,3

Fonte: Autoria própria (2019).

3.4 ALGUNS EXERCÍCIOS PARA REVISÃO DA FUNÇÃO DO 2º GRAU

Exercício do Caderno do Aluno, 1º Série EM, página 107. (Exercício adaptado para valores mais próximo da realidade). Um criador de gado tem um bezerro de determinada raça para vender. Esse bezerro pesa atualmente 170 quilos e engorda 600 gramas por dia. Inicialmente, o criador acha que, quanto mais tempo esperar para vender o bezerro, melhor será, pois, o bezerro ganhará mais peso.

Entretanto, um de seus funcionários avisa que o preço de venda, que hoje é de 9 reais por quilo, está caindo 0,03 centavos por dia. Como tem muitos bezerros e com base nas informações fornecidas, mantida a situação atual, pede-se:

a) Encontre a melhor data para se vender o bezerro, contada a partir de hoje.

A incógnita é o valor x de dias, contados a partir de hoje, após os quais o bezerro deve ser vendido, de modo a gerar o maior retorno y possível, em reais. Para encontrar o valor de y, devemos multiplicar o peso p (massa) em quilos do bezerro pelo valor v pago por quilo: $y = p \times v$. O enunciado informa que o peso p aumenta 0,6 quilos por dia, a partir do valor inicial 170 quilos, ou seja, $p = 170 + 0.6\,x$, em que x é o número de dias decorridos até a venda.

O valor v de cada quilo, no entanto, decresce à razão de 0,03 centavos por dia, a partir do valor inicial de 9 reais; temos, então, que $v = 9 - 0{,}03x$, com $x \in \mathbb{N}$, logo o valor arrecadado será igual a $y = p \times v$, ou seja: $y = (170 + 0.6x).\ (9 - 0{,}03x) = -0{,}018x^2 + 0.3x + 1530$. O valor a ser arrecadado é, portanto dado por uma função do 2º grau: $f(x) = -0{,}018x^2 + 0.3x + 1530$, sendo x um natural, pois representa o número de dias.

Determinar a melhor data para vender o bezerro corresponde a buscar o valor de x para o qual f(x) assume seu valor máximo. De fato, a função tem o coeficiente a negativo (a = −0,018) e, portanto, apresenta um valor máximo. Tal valor máximo ocorre exatamente no vértice do gráfico de f(x).

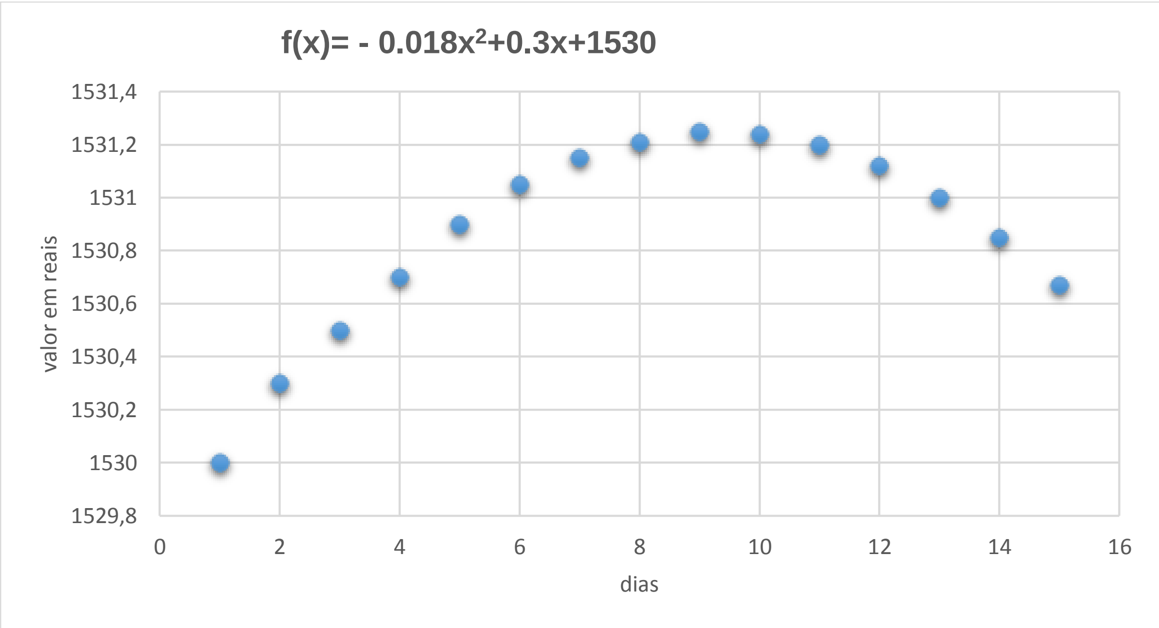
Calculando o valor de x_v, obtemos: $x_v = -\ b/2a = -\ 0.3\ /\ (-0.036) \cong 8.33$. Concluímos, então, que, mantidas as condições atuais, a melhor data para vender o bezerro é daqui a 8 dias, ou seja, entre o 8º e o 9º dia.

b) Calcule o valor em reais que será arrecadado em tal venda.

Solução: O valor a ser arrecadado com a venda é: $f(300/3.6) = -0{,}018.\ (300/3.6)^{2} + 0.3\ .\ (300/3.6) + 1530$, ou seja, é igual a R$ 1531,25

Observamos no gráfico 2 o cálculo que acabamos de mostrar. A parábola que sugere o melhor dia para a venda do bezerro.

Gráfico 2 - A função quadrática mostrando o ponto de máximo, dia e valor ideal para a venda do bezerro.



Fonte: Autoria própria (2019).

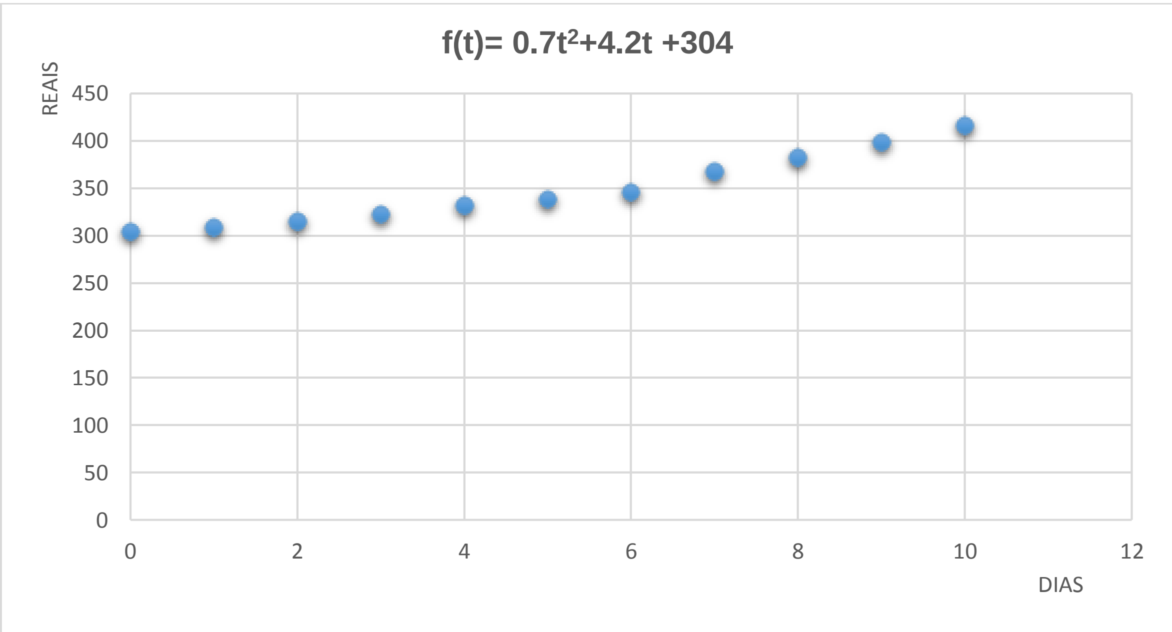
Exercício do Caderno do Aluno, 1º Série EM, página 107. Um empresário possui duas lojas de roupas. Entre os anos 2.000 e 2.005, a receita R_1 de uma das lojas, em milhares de reais, foi modelada pela função

$R_1 = 0{,}7\ t^2 + 3{,}4t + 4$, onde t representa o tempo em anos. Durante o mesmo período, a receita R_2, da segunda loja em milhares de reais, foi modelada pela função $R_2 = 0{,}8t+300$.

Escreva uma função que representa a receita total das duas lojas, indicada por R_t, e verifique se essa receita possui um valor máximo ou mínimo e determine esse valor.

Solução: Com base nos dados do problema, podemos escrever que $R_t = R_1 + R_2$, o que nos permite concluir que $R_t = 0{,}7\ t^2 + 4{,}2\ t + 304$, com $t > 0$. Observando que o coeficiente de t^2 é positivo, concluímos que a concavidade da parábola, que representa essa interdependência, é para cima e, portanto, a função admitirá um valor de mínimo. Contudo, encontrando os valores das coordenadas do vértice dessa parábola, observamos que o valor da abscissa é negativo, $x_v = -3$, o que não é possível, pois ela se refere à grandeza tempo. Construindo o gráfico correspondente, encontramos:

Gráfico 3 - A função quadrática que sugere a receita mínima para as duas lojas



Fonte: Autoria própria (2019).

Desse modo, o valor mínimo da receita não está no vértice, mas no ponto de interseção da parábola com o eixo y, isto é, (0,304). Portanto, a receita total terá um valor mínimo no tempo 0 (zero), e esse valor será igual a R$ 304,00.

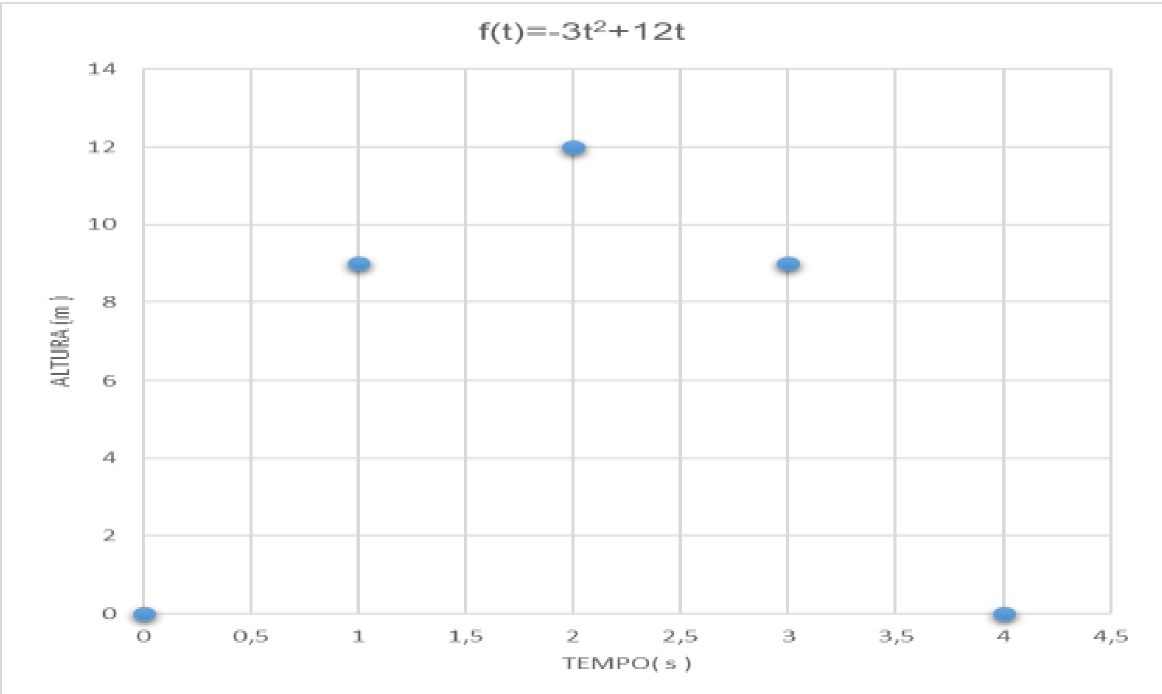
Exercício da Prova de Acesso PROFMAT/2015 (Questão 13)

Uma pedra é atirada para cima e sua altura h, em metros, é dada pela função $h(t) = at^2 + 12t$, $t > 0$ em que t é medido em segundos. Se a pedra atingiu a altura máxima no instante $t = 2$, pode-se afirmar que o valor de a é:

(A) −3 (B) −2 (C) 2 (D) 3 (E) −4

Solução: A função que representa a altura da pedra é dada por $h(t) = at^2 + 12t$, sendo $t > 0$. Logo o valor da variável t que determina a altura máxima é dado por tempo máximo $= -12/2a = -6/a$. Mas, pelos dados do enunciado, segue que $-6/a = 2$ e, portanto $a = -3$, portanto $f(t)=-3t^2+12t$

Gráfico 4 - A função quadrática que sugere a altura máxima da pedra no tempo igual a 2 segundos



Fonte: Autoria própria (2019).

CAPÍTULO 3: MODELAGEM MATEMÁTICA

Na sala de professores é comum ouvirmos frases como: “Hoje eu dei o Teorema de Pitágoras, na semana que vem começo semelhança de Triângulos”. Em nenhum momento é citado de forma explícita os alunos, ou seja, a ênfase sempre está no Professor.

A matemática é colocada como algo que se ensina e o sujeito é o professor. Em modelagem não é assim, o sujeito do processo cognitivo é o aluno. O processo de modelagem matemática configura-se como um método de ensino capaz de conseguir desenvolver um modelo matemático suficiente para representar ou proporcionar soluções para determinados problemas que são vistos no cotidiano do estudante.

Nesse plano de fundo, a modelagem matemática está a cada dia que passa recebendo mais seguidores, isto é, docentes com elevado grau de modernização e criatividade, habilitados para integrar os saberes matemáticos à realidade do discentes, por meio da criação de modelos condizentes com o mundo real.

Cheballard *et al*. (2001) compreendem que boas parcelas dos conhecimentos matemáticos podem ser atribuídas à modelagem matemática. De acordo com eles, um elemento importante no processo científico e intelectual matemático está fortemente entrelaçado à articulação de um modelo matemático do mundo real, a partir do qual é possível se obter dados para serem investigados, a fim de responder algum questionamento levantado.

Nessa perspectiva, Bassanezi (2002, p.18) refere-se ao emprego da matemática relacionada à modelagem:

> O objetivo fundamental do “uso” de Matemática é de fato extrair a parte essencial da situação-problema e formalizá-la em um contexto abstrato onde o pensamento possa ser absorvido com uma extraordinária economia de linguagem. Desta forma, a matemática pode ser vista como instrumento intelectual capaz de sintetizar ideias concebidas em situações empíricas que estão quase sempre camuflados num emaranhado de variáveis de menor importância.

É desejável que, durante a Modelagem, ocorra a aprendizagem de conceitos e técnicas do conteúdo que está sendo estudado. Assim o objeto de estudo pode contribuir como agente motivador da aprendizagem e dar suporte para a sua ocorrência. Nesse sentido, encontramos em D'Ambrosio (1986) um forte argumento, que vem corroborar está expectativa:

> (...) o ponto de vista que me parece de fundamental importância e que representa o verdadeiro espírito da matemática é a capacidade de modelar situações reais, codificá-las adequadamente, de maneira a permitir a utilização das técnicas e resultados conhecidos em outro contexto, novo, isto é, a transferência de aprendizado resultante de uma certa situação para a situação nova é um ponto crucial do que se poderia chamar aprendizado da matemática, e talvez o objetivo maior do seu ensino (D'AMBROSIO, 1986, p.44).

Nessa linha de raciocínio, considera-se a Modelagem Matemática como sendo uma representação, com o auxílio da Matemática, de uma dada situação-problema real, demonstrando o desenvolvimento de uma atividade conforme um ciclo de modelagem, no qual a determinação do tema a ser tratado tem a participação de todos os sujeitos relacionados nesse processo.

3.1 DA MATEMÁTICA À MODELAGEM

Vejamos um pouco a História. Os gregos desenvolveram a geometria porque achavam que tudo o que era ligado a Deus era belo; os egípcios desenvolveram o cálculo de área porque tinham de fazer as medidas das terras do Nilo; os fenícios desenvolveram conceitos aritméticos de contabilidade porque eram comerciantes. Era uma Matemática para algum fim. (Coleção Tendências em Educação Matemática, página 25)

E no século XXI, como podemos trabalhar com a matemática nas escolas, de modo a tornar o seu ensino mais significativo, que diga de mais perto às experiências vividas pelo aluno, e seja uma matemática com significado a fim de favorecer sua aprendizagem? A modelagem matemática é uma das soluções para esta situação, pois emprega situações presentes no cotidiano do aluno, num aspecto investigativo, a fim de gerar situações problemas, com base nesta realidade vivida por ele. Dar significado ao aprendizado representa um ensino com base concreta na formação deste indivíduo.

Qual é o professor que nunca ouviu a seguinte pergunta: "Em que usarei isso para minha vida"? O aprendizado no qual não há uma aplicabilidade com situações concretas, acaba sendo descartado pelo aluno por não compreender a sua importância. Mesmo para o desenvolvimento do seu raciocínio lógico e da construção do seu conhecimento, os educadores têm como objetivo deixar o ensino da matemática atrativo, de forma que desperte o aluno a sair em busca do conhecimento, pois no final das contas, só aprende quem quer.

A modelagem matemática é uma forte ferramenta para quebrar esta monotonia de ensino, pois o aluno aprende de forma significativa, absorvendo este conteúdo. Isso sem falar no papel social, presente em temas de trabalhos ressaltando o desenvolvimento crítico por parte do educando. Podem ocorrer falhas se o professor não souber conduzir este trabalho de forma coerente, e não estiver preparado, ou dentro do tema escolhido para pesquisa. Há o inconveniente de não sabermos por onde o modelo passará, pois nem sempre o ferramental matemático requerido está ao alcance do educando e mesmo do professor. Existem também as dificuldades de adequação ao currículo estabelecido legalmente. Este podendo ser adaptado de tal forma, a tornar possível a utilização da modelagem matemática.

É fundamental um bom planejamento, tempo para realização do trabalho com os alunos e o educador acima de tudo, deverá gostar de desafios, pois desta forma ele pode alcançar descobertas significativas para a sua carreira profissional. Segundo Biembengut e Hein (2000), vale lembrar, que o fato de um profissional ter feito este trabalho uma vez, ou até mesmo um artigo com base em um trabalho de modelagem, não garante que o trabalho possa ser feito com todas as suas turmas. O diagnóstico é um quesito fundamental para garantia do sucesso, pois conhecer a turma, tanto na sua condição socioeconômica, como a quantidade, disposição para trabalhos extraclasse, são itens que irão determinar o modo de como de este projeto será encaminhado.

A escolha do tema é de vital importância, pois nem sempre ele abordará conteúdos que serão de boa compreensão. Cabe ao professor conduzi-lo de modo que tenha um valor significativo a seus alunos e que possa ser bem explorado pela turma. E o que queremos dos nossos alunos? Queremos a formação de alunos críticos, independentes, curiosos, responsáveis e autônomos. Precisamos torna-los hábeis a ter autoconfiança, a aprender a formular e resolver uma situação e a partir dessa fazer uma leitura crítica da realidade.

Portanto, se o objetivo da educação básica é assegurar a formação indispensável para o exercício da cidadania, as aulas de Matemática devem também abordar as *situações não-matemáticas*, expressão esta que aqui utilizo para designar aquelas que pertencem originalmente ao dia a dia, às demais ciências ou ao mundo do trabalho. É o que, na literatura da Educação Matemática, é comumente chamado de *modelagem matemática*, em analogia ao método dos matemáticos aplicados: a partir de um problema complexo, constrói-se uma representação matemática (modelo matemático) e gera-se uma solução.

Quando se usa modelagem matemática, podemos encontrar diferentes soluções válidas, ainda que possamos discutir quais delas sejam mais ou menos úteis. Isso ocorre porque a situação-problema é aberta, levando os alunos a assumirem hipóteses, bem como quais conhecimentos matemáticos serão mobilizados para construir o modelo. Portanto, as soluções matemáticas dependem do processo de modelagem matemática. Bassanezi (2015) considera que a utilização da modelagem na Educação Matemática valoriza o "saber fazer" do estudante e desenvolve sua capacidade de avaliar o processo de construção de modelos matemáticos em seus diferentes contextos de aplicações, a partir da realidade de seu ambiente.

Assim, a modelagem contempla um dos principais objetivos do ensino que é o aprender a aprender, ou seja, fazer com que o estudante aprenda a buscar soluções para as mais diferentes situações. Nessa perspectiva, o documento "Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias" (SÃO PAULO, 2011) enfatiza a importância da autonomia para gerenciar a própria aprendizagem (aprender a aprender) e para a transposição dessa aprendizagem em intervenções solidárias (aprender a fazer e a conviver).

O mais importante é que os problemas sejam do interesse dos alunos. Como nos lembra o pesquisador Ole Skovsmose, sem interesse, não há aprendizagem. Por isso, além do próprio professor levar a situação-problema para a sala de aula, pode-se pedir que os alunos decidam que tema querem estudar. Neste caso, modelagem matemática organiza-se como um trabalho de projeto. Eles escolhem os temas, levantam informações e formulam seus próprios problemas.

Seja qual for a duração, a modelagem matemática responde às interrogações dos alunos sobre os usos da matemática na sociedade. Isto não quer dizer que devemos reduzir o currículo da disciplina somente a tópicos com aplicações fora da escola. Porém, se o nosso objetivo é fomentar a cidadania, não podemos prescindir das situações-problema não-matemáticas nas aulas de Matemática. Em vez de educar para a Matemática, a modelagem matemática é uma forma de educar pela Matemática.

3.2 MODELAGEM MATEMÁTICA E A SALA DE AULA

Há algum tempo a Modelagem Matemática passou a ser vista como uma possibilidade de trabalho em sala de aula, através de uma abordagem pedagógica que poderia auxiliar os alunos na aprendizagem da matemática. Diversas pesquisas foram feitas na área e diferentes perspectivas sobre modelagem no âmbito da Educação Matemática foram delineadas. Inovar práticas pedagógicas e pensar formatos educacionais que valorizem mais a voz do estudante podem favorecer um maior interesse e engajamento do aprendiz, possibilitando seu desenvolvimento intelectual.

Romper com os formatos tradicionais de ensino torna-se cada vez mais um desafio aos educadores contemporâneos. Ao dizer desse rompimento das práticas tradicionais de ensino, não quero minimizar os professores que a praticam, até porque essa é uma atividade absolutamente comum no nosso dia a dia. Além de surgirem aulas proveitosas aos estudantes por meio dessa metodologia, quero destacar que a necessidade de cumprimento de um longo currículo em um tempo exíguo, a exigência de preparação dos estudantes para as avaliações externas, gestões escolares rígidas observando o andamento das aulas, por exemplo, por vezes se sobressaem nas práticas didáticas em detrimento de formas alternativas às tradicionais de se trabalhar a Matemática. Ultrapassar essas barreiras em busca de um diferencial é um grande desafio ao docente, que em sua maioria lida diariamente com uma excessiva carga horária de trabalho.

Entendo que para isso, é necessária uma mudança na condução das aulas, rompendo com práticas que valorizam mais os exercícios e repetições, e busquem mais àquelas que sejam de cunho investigativo. Essa mudança depende, prioritariamente, da vontade docente em procurar práticas alternativas àquelas utilizadas em sua formação básica (BIEMBENGUT, 2009a).

Acreditando na possibilidade dessa mudança da postura docente na condução das aulas e na potencialidade de aprendizagem da Matemática que a Modelagem Matemática na Educação Matemática carrega, e entendendo que, conforme Bassanezi (2002, p. 43), “só se aprende modelagem, modelando”, propus, a minha turma de Eletiva na Escola de Tempo Integral Arlindo Silvestre três situações de Atividades envolvendo Modelagem Matemática, no Ensino Médio.

A educação usual tem privilegiado, na maior parte das vezes, que o processo de ensino seja deflagrado pelo professor. Na Modelagem Matemática o fato de compartilhar o processo de ensino com o grupo ou grupos faz a diferença, constitui-se em uma mudança de postura por parte do professor: essa atitude favorece o estabelecimento de relações afetivas mais fortes entre professor e alunos.

Nessa perspectiva, o ensino de Matemática torna-se dinâmico, mais vivo e em consequência, mais significativo para o aluno e para o grupo. Contribui para tornar mais intensa, mais eficiente e mais eficaz a construção do conhecimento por parte de cada aluno participante do grupo, do próprio grupo ou dos grupos, sobre determinado conteúdo, a partir do conhecimento que cada aluno ou o grupo já possui sobre o assunto. Isso confere maior significado ao contexto, permitindo e favorecendo o estabelecimento de relações matemáticas, a compreensão e o significado dessas relações.

Há ainda a possibilidade de uma dinâmica maior no ensino, pela ação e pelo envolvimento do próprio grupo na perspectiva da busca e da construção do conhecimento, para a socialização desse conhecimento dentro do grupo, e posteriormente aos demais grupos. Nessa forma de encaminhamento concebida pela Modelagem Matemática enquanto estratégia para o ensino de Matemática na Educação Básica, o papel do professor fica redefinido, pois ele passa a se constituir como mediador entre o conhecimento matemático elaborado e o conhecimento do aluno ou do grupo. Isso se diferencia do ensino usual em que, na maioria das vezes, o professor é o centro do processo.

Nessa perspectiva adotada, a Modelagem Matemática rompe com a forma usual de se trabalhar o ensino de Matemática na escola, modelo esse que preconiza o problema como determinante do conteúdo. Isso sem dúvida se apresenta como um grande desafio a ser enfrentado e superado, uma vez que as Diretrizes Curriculares Nacionais, ao tratar do ensino dessa disciplina na Educação Básica, apontam caminhos que desafiam e rompem com a forma usual de se conceber o objeto de estudo, a matemática. Também é verdade que essa ruptura perpassa pela mudança na concepção de educação, de ensino e de aprendizagem.

As Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental instituídas pela resolução 98/CNE (Conselho Nacional de Educação), que organizam as áreas do conhecimento, apontam de que forma o aprendizado de Ciências e Matemática, iniciadas no Ensino Fundamental, devem encontrar complementação e aprofundamento no Ensino Médio, além de acenar para o ensino interdisciplinar do aprendizado científico.

Dessa forma, a adoção da Modelagem Matemática, como uma alternativa metodológica para o ensino de Matemática, pretende contribuir para que gradativamente se vá superando o tratamento estanque e compartimentalizado que tem caracterizado o seu ensino, pois, na aplicação dessa metodologia, um conteúdo matemático pode se repetir várias vezes no transcorrer do conjunto das atividades em momentos e situações distintas.

A oportunidade de um mesmo conteúdo poder ser abordado diversas vezes, no contexto de um tema e em situações distintas, favorecendo a compreensão das ideias fundamentais, pode contribuir de forma significativa para a percepção da importância da Matemática no cotidiano da vida de cada cidadão, seja ele ou não um matemático.

A Modelagem enseja ainda, de forma natural e indissociável, o ensino e a pesquisa, pois ao trabalhar com temas diversos, de livre escolha do grupo ou dos grupos, favorece a ação investigativa como forma de conhecer, compreender e atuar naquela realidade. Não se pode intervir, de forma adequada, numa realidade que não se conhece. Assim, ao trabalhar um tema, procura-se conhecer as várias dimensões ou aspectos que compõem essa realidade.

3.3 MODELAGEM E MODELOS MATEMÁTICOS

Parece haver consenso quanto ao fato de que a modelagem matemática, embora tenha suas raízes na Matemática Aplicada, vai além dela, possibilitando a prática reflexiva e crítica do aluno, a qual tem sido fortemente recomendada no ensino. Assim, através da resolução de problemas reais e utilizando-se da matemática, a modelagem possibilita o exercício da cidadania pelo indivíduo.

A sociedade atual tem desafiado o homem a resolver sempre novos problemas e a matemática é considerada de extrema relevância neste contexto. Já não é suficiente que ela sirva apenas para resolver problemas rotineiros, mas que permita o enfrentamento destas novas situações-problema.

Para as várias perspectivas de modelagem nos processos de ensino e de aprendizagem, a obtenção de um modelo apropriado não é o mais importante, e sim um “caminho” percorrido pelo aluno para compreender o fenômeno estudado e tentar representá-lo matematicamente. Esta dificuldade de elaboração de um modelo está vinculada, em parte, à exigência de um conhecimento amplo sobre o fenômeno e também sobre a Matemática. Além disso, escrever em linguagem matemática as relações existentes em um fenômeno não é uma tarefa trivial.

No processo de elaborar um modelo matemático para alguma situação específica torna-se útil analisar modelos já existentes para a situação apresentada, tendo em vista que eles podem revelar resultados simples, mas importantes sobre o fenômeno e que devem ser considerados na elaboração de um novo modelo, assim como também podem revelar hipóteses que não se mostraram relevantes e que podem ser descartadas.

A importância do modelo matemático consiste em se ter uma linguagem concisa que expressa nossas ideias de maneira clara e sem ambiguidades, além de proporcionar um arsenal enorme de resultados (teoremas) que propiciam o uso de métodos computacionais para as soluções. Os modelos matemáticos podem ser formulados de acordo com a natureza dos fenômenos ou situações analisadas e classificada conforme o tipo de matemática utilizada.

Do ponto de vista conceitual, um modelo matemático ou simplesmente modelo, pode ser apresentado como uma representação de um sistema real, o que significa que um modelo deve representar um sistema e a forma como ocorrem as modificações no mesmo. O ato de modelar, conhecido como modelagem, pode ser aplicado a um grande número de problemas. Modelar um fenômeno está diretamente relacionado, portanto, com o processo de resolução de um problema.

O objetivo da modelagem é transformar e simplificar situações do cotidiano em problemas matemáticos, resolvendo-os e interpretando suas soluções na linguagem do mundo real, utilizando para isto, os modelos. O procedimento de modelagem envolve várias etapas que ocorrem na prática. As etapas que apresentamos aqui são possíveis de serem encontradas na literatura.

Há muita similaridade entre elas. Algumas são mais sucintas, outras mais detalhadas, mas todas são representações simplificadas e explicativas do processo de Modelagem Matemática. Segundo Bassanezi (2002, p.27-31), são cinco as etapas da Modelagem Matemática:

a) Experimentação:

Nesta fase se tem a obtenção dos dados e o estudo inicial do assunto que envolve o problema.

b) Abstração:

Esta fase tem como objetivo a criação dos modelos matemáticos. Nesse sentido, é feita a seleção de variáveis, isto é, são definidas claramente quais são as variáveis que vão agir sobre o sistema, bem como dando ênfase na criação dos problemas teóricos que se pretende resolver, formulando hipóteses.

Em um próximo passo é feita a eliminação de variáveis menos importantes, de forma a deixar o problema matemático tratável, chamado de simplificação. Os fenômenos tratados na matemática geralmente são muito complexos quando considerados todos os seus detalhes.

c) Resolução:

Obtenção do modelo matemático com a tradução da linguagem natural das hipóteses para uma linguagem matemática coerente, mais “natural”.

d) Validação:

Aceitação ou rejeição do modelo de acordo com o grau de aproximação com o objeto de estudo. E analisado se o modelo proposto serve para resolver o problema e fazer previsões de novas situações.

e) Modificação:

Reelaboração ou reformulação do modelo, caso este não tenha sido validado na etapa anterior. Ocorre também a criação de novas hipóteses, caso necessário, o que implicará numa reformulação do modelo. Dependendo da situação-problema e do problema propostos para o estudo em uma atividade de modelagem, diferentes modelos matemáticos podem ser explicitados e diferentes discussões podem ser elucidadas para tentar identificar qual deles melhor representa a situação/discussão em estudo.

É importante se ter em mente que ao se trabalhar com a obtenção de modelos matemáticos, interessa-se também pela compreensão da Matemática envolvida na obtenção de tal modelo.

3.4 MODELAGEM MATEMÁTICA E O CURRÍCULO

A discussão sobre a integração de Modelagem no currículo envolve a questão do "como", a qual não se pode descolar das condições para isso. O ambiente de aprendizagem de Modelagem, baseado na indagação e investigação, se diferencia da forma que o ensino tradicional – visivelmente hegemônico nas escolas - busca estabelecer relações com outras áreas e o dia a dia. Esse último procura trazer situações idealizadas que podem ser diretamente abordadas por ideias e algoritmos sugeridos pela exposição anterior do professor. Os alunos, portanto, já sabem como proceder e o que utilizar na abordagem das situações.

Existe uma relativa distância entre a maneira que o ensino tradicional enfoca problemas de outras áreas e a Modelagem. São atividades de natureza diferente, o que nos leva a pensar que a transição em relação à Modelagem não é algo tão simples. Envolve o abandono de posturas e conhecimentos oferecidos pela socialização docente e discente e a adoção de outros.

Do ponto de vista curricular, não é de se esperar que esta mudança ocorra instantaneamente a partir da percepção da plausibilidade da Modelagem no ensino, sob pena de ser abortada no processo. A par disto, concebemos a integração curricular de Modelagem de formas diversas, de tal modo que pavimente o caminho do professor e dos alunos em direção a este ambiente.

Assumimos uma compreensão teórica geral nos itens anteriores que podem se materializar através de configurações curriculares diferentes, conforme as condições de cada sala de aula, de cada escola e da experiência e confiança de cada professor. Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática apontam aspectos da investigação e compreensão em Matemática que devem ser contemplados no ensino:

> (...) identificar o problema; procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema; formular hipóteses e prever resultados; selecionar estratégias de resolução de problemas; fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades (BRASIL, 1999, p. 259).

Tais aspectos, de modo geral podem ser observados durante o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática, a qual, segundo as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, leva o aluno a mobilizar uma variedade de procedimentos, tais como:

> (...) selecionar variáveis que serão relevantes para o modelo a construir; problematizar, ou seja, formular o problema teórico na linguagem do campo matemático envolvido; formular hipóteses explicativas do fenômeno em causa; recorrer ao conhecimento matemático acumulado para a resolução do problema formulado, o que, muitas vezes, requer um trabalho de simplificação quando o modelo originalmente pensado e matematicamente muito complexo; validar, isto é, confrontar as conclusões teóricas com os dados empíricos existentes; e eventualmente ainda, quando surge a necessidade, modificar o modelo para que esse melhor corresponda a situação real (BRASIL, 2006, p. 85).

A literatura em geral que trata da utilização de atividades de modelagem matemática na sala de aula aponta a necessidade de adequação dessas atividades ao contexto escolar. Ao investigar uma situação-problema em uma atividade de modelagem matemática, professor e alunos não sabe de antemão os conteúdos matemáticos de que farão uso.

No entanto, como são os alunos que conduzem a investigação e utilizam, geralmente, os conhecimentos que têm de Matemática, é possível obtermos diferentes abordagens para um mesmo problema e um mesmo conjunto de informações. Isso vem ao encontro à ideia de que o modelo matemático construído é, na verdade, uma representação da realidade sob a ótica daqueles que investigam a situação. Logo, se abordada no Ensino Fundamental está se moldará a esse nível de ensino e, o mesmo é válido, para o Ensino Médio e o Ensino Superior.

3.5 MODELAGEM MATEMÁTICA E AS EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS

Nossa opção nesse trabalho foi a utilização dos conceitos essenciais das equações de diferenças mais adequadas para a modelagem dos processos discretos com a intenção de despertar uma nova visão dos fenômenos que ocorrem na natureza, através do olhar matemático, mas sem perder o foco do fenômeno que se deseja estudar.

Desta forma, ao solucionar o problema matemático que se originou de um fenômeno real, é importante entender a solução do ponto de vista da realidade, em termos de validade e aproximação de resultados reais.

Atualmente, nossos alunos têm em mente como preocupação principal a nota, em como “agradar” o professor. E por quê? Porque aprenderam, desde sempre, que os problemas lhes são apresentados, e que eles devem “apenas” utilizar a Matemática para resolvê-los, sem questionar e sem pensar muito sobre o porquê estão fazendo aquilo. E como quebrar esse paradigma, construído e reforçado ao longo de muitos anos?

Elaboramos este trabalho com o objetivo de trazer uma abordagem para a perspectiva do ensino de Matemática, através de uma “leitura” da realidade sob o olhar da Matemática. Neste contexto, será feito um estudo de equações de diferenças, através de aplicações em problemas práticos. O ponto de partida será a modelagem dos processos discretos, que são predominantes nos sistemas da natureza.

3.5.1 Do problema real ao modelo matemático

A concepção do modelo matemático nem sempre é uma tarefa fácil. A grande dificuldade está na identificação das características relevantes da realidade, que devem ser consideradas e expressas no modelo a ser proposto. Ao se deparar com a questão fundamental que se procura apreender da realidade é que se começa a construir o modelo, a partir de premissas que possam ser traduzidas para a linguagem matemática, que em última instância, nada mais é do que uma linguagem (ou ferramental) com a qual se pode abstrair (ou descrever) a realidade.

3.5.2 Modelagem através de equações de diferenças

Os chamados processos discretos no tempo, ou seja, que ocorrem em intervalos regulares, tais como: uma vez ao dia, ou em ciclos mensais, em que o estágio seguinte depende do estágio anterior podem ser descritos matematicamente por equações de diferenças (ou fórmulas de recorrência), que estabelecem uma relação entre os termos de uma sucessão.

Nas equações diferenciais ordinárias a variável independente é continua, de forma que a variável dependente pode ser observada a cada variação infinitesimal da variável independente. Quando a variável independente ao invés de contínua for discreta, isto é, seus valores variarem discretamente, dando saltos de um ponto a outro sem passar pelos pontos intermediários, o operador diferencial não faz mais sentido. Ao invés dele (dy/dt) usa-se o operador diferença $\Delta y/\Delta t$. Cada valor da variável independente é um ponto e a diferença entre um valor e o imediatamente anterior é chamado de período. Os períodos podem ser iguais ou não e inteiros ou não. No caso particular, tratado aqui, trabalha-se com o caso mais simples, onde os períodos são iguais e inteiros, mais particularmente, trabalha-se com períodos de uma unidade.

Como a variável independente varia discretamente, a variável dependente só mudaria teoricamente de valor, quando a independente mudar e isso não significa que a variável dependente deve ser discreta ou assumir valores inteiros. A variável independente por ser inteira representa geralmente um tempo discreto como por exemplo um ano, ou uma semana, ou um semestre, ou um mês, etc.

3.5.3 Equações de Diferenças e as Equações Diferenciais

As equações de diferenças são utilizadas para as variações discretas e conseguimos resolvê-las por meio de processos de indução, sendo estas perfeitamente aplicáveis no Ensino Médio, fazendo uso, por exemplo, do trabalho de modelagem que tem por objetivo principal criar condições para que os alunos aprendam a fazer modelos matemáticos e assim aprimorando seus conhecimentos.

Um exemplo que aqui podemos citar é o de que quando o crescimento populacional, entre gerações sucessivas, se dá em etapas discretas e não ocorre uma sobreposição de gerações da espécie analisada. Também podemos citar como outro exemplo de aplicação das Equações de Diferenças o modelo que estabelece relações entre as variáveis renda, poupança, e consumo mensal dependentes do tempo, tomados em meses.

A primeira situação que temos conhecimento que envolve as equações de diferenças apareceu no Ocidente no livro Liber Abaci (1202) de Leonardo de Pisa, conhecido como Fibonacci, embora ela já tivesse sido descrita por matemáticos da Índia. Ele considerou o crescimento de uma população idealizada (não realista biologicamente) de coelhos. Na sequência idealizada por ele temos que o número de casais na população de coelhos era obtido considerando a hipótese de que em cada mês, cada casal de coelhos adulto gera um novo casal de filhotes e cada casal de filhotes começava a procriar após dois meses de idade.

Começando com um casal de filhotes, eles terão filho somente após o segundo mês ou seja, no 1º mês há apenas 1 casal de coelhos. Como a maturidade sexual dos coelhos dá-se somente a partir do segundo mês de vida, no mês seguinte continua havendo apenas 1 casal. No 3º mês teremos o nascimento de mais um casal, totalizando 2 casais. No 4º mês, com o nascimento de mais um casal, gerado pelo casal inicial, (visto que o segundo ainda não amadureceu sexualmente) teremos 3 casais. No mês seguinte (5º), com nascimento de dois novos casais gerados pelo casal 1 e pelo casal 2, totalizam-se 5 casais.

Figura 3 - A sequência de Fibonacci

Fonte: Matematicazup (2019).

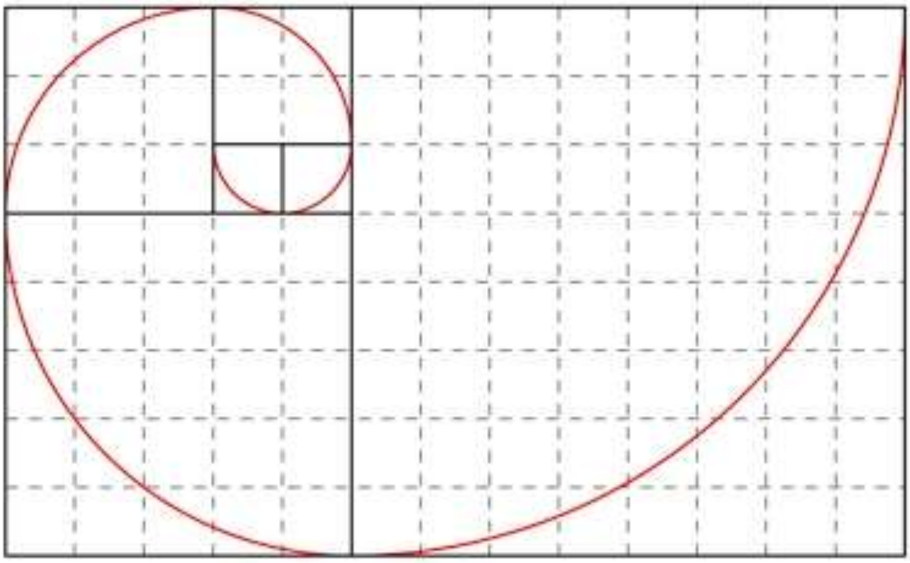
Os números de Fibonacci são então descritos pelas seguinte sequência de números inteiros: (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, etc.).

Do ponto de vista matemático essa sequência é definida pela recursividade, ou seja, o número de pares de coelhos em determinado mês, é a soma dos pares de coelhos existentes nos dois meses anteriores. Matematicamente temos $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \in N$, sendo os dois primeiros termos $F_1=1$ e $F_2= 1$.

Uma particularidade é que essa sequência com F(1) = 1 e F(2) = 1 se tornou conhecida como a sequência de Fibonacci e tal importância está no fato deles gerarem a Proporção áurea para as infinitas potências n. De uma forma geral, cada valor corresponderá a um intervalo de tempo, o que nos permite fazer um estudo de sua variação, ou seja, temos o conceito de diferença, onde aparecem as Equações de diferenças.

$F_n - F_{n-1} = F_{n-2}$, com n= 3, 4,... com $F_{1=1}$ e $F_{2=1}$

Figura 4 - Espiral de Fibonacci



Fonte: Santos (2019).

Vários trabalhos nasceram através da curiosidade em determinar proporções que possuem relação com a sequência proposta pelo matemático Leonardo de Pisa, mais conhecido como Fibonacci como por exemplo, o número de ouro. Não é nosso intuito o trabalho com Equações Diferenciais visto que estamos trabalhando com o Ensino Médio, mas vale a pena essa analogia visto que as Equações Diferenciais constituem um tópico vastíssimo na Matemática.

Quando essas variações ocorrem de forma instantânea, a dinâmica do fenômeno se desenvolve de forma contínua e as equações matemáticas são denominadas Equações Diferenciais. Dois teoremas básicos do cálculo estão ligados à solução de uma Equação Diferencial mais simples, o Teorema Fundamental do Cálculo e o Teorema do Valor Médio.

De uma maneira geral, dizemos que temos uma equação diferencial, se na equação estão envolvidas funções incógnitas e suas derivadas entretanto nosso objetivo, neste trabalho é fazer algumas colocações de situações que podemos trabalhar com a Modelagem por Equações de Diferenças tomando o cuidado com as variações, que são de forma discreta.

3.5.4 A função Discreta

Quando uma função é discreta, normalmente representamos por f_n ou y_n, com $n \in N$. Por exemplo $y_n = 9 + 5n$, nesta função n pode assumir apenas números naturais, ou seja, n = 0, 1, 2, 3, ... Conforme pode ser observado na tabela 3.

Tabela 3 – Equação de Diferença

EQUAÇÃO				
N	0	1	2	3
y_n	9	14	19	24

Fonte: Autoria própria (2019).

Observamos neste caso que: $y_{n+1} = y_n + 5$, com $y(0)=9$

A equação que escrevemos a partir da observação da tabela, chamamos de relação de recorrência. Poderíamos escrever essa equação como: $y_{n+1} - y_n = 5$, daí o nome equação de diferenças, pois trata-se da diferença entre um termo qualquer e seu antecessor.

As equações de diferenças podem ser resolvidas usando iterações ou qualquer outra das técnicas que iremos ver mais adiante. As equações de diferenças têm aplicações em muitas áreas, tais como na Matemática, na Física, na Engenharia, na Economia, na Sociologia, em estratégias de guerra, entre outras. Uma relação de recorrência para uma sucessão {an} é uma fórmula que exprime a_n em função de um ou mais dos termos antecedentes da sucessão, nomeadamente, $(a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1})$ para todos os inteiros com $n \geq n_0$, em que n_0 é positivo e um inteiro não negativo.

Uma sucessão é chamada solução de uma relação de recorrência se os seus termos satisfazem a relação de recorrência. As condições iniciais para a sucessão especificam os termos que precedem o primeiro termo em que a relação de recorrência tem efeito. A relação de recorrência e as condições iniciais determinam univocamente uma sucessão, pois em conjunto fornecem uma definição recursiva da sucessão.

Qualquer termo da sucessão pode ser determinado usando a relação de recorrência e as condições iniciais um número suficiente de vezes. No entanto existem métodos mais práticos para a determinação dos termos de certas classes de sucessões definidas pelas relações de recorrência e pelas condições iniciais.

Podemos usar relações de recorrência para estudar modelos matemáticos de uma vasta variedade de problemas, tais como taxas de juros simples e composto, contagem e suas técnicas, número de movimentos que podem ser realizados com os discos nos pinos como no caso do jogo “Torre de Hanói”, etc.

3.5.5 Solução de uma equação de diferença de 1ª ordem

Por se tratar de uma equação discreta, a equação de diferença pode ser resolvida iterativamente através do emprego recursivo de um valor inicial dado. A solução é dada por uma regra que seja dependente apenas da variável independente. Através desta regra é possível determinar o valor da função em qualquer período de tempo que se queira.

Vejamos alguns exemplos de Equações de Diferenças.

Exemplo 1: Livro do PROFMAT, A Matemática do Ensino Médio, Volume 2, página 71. Resolva a recorrência $x_{n+1} = x_n + 2^n$, com $x_1 = 1$

$n = 1 \rightarrow x_2 = x_1 + 2^1$

$n = 2 \rightarrow x_3 = x_2 + 2^2$

$n = 3 \rightarrow x_4 = x_3 + 2^3$

Para n-1 temos $\rightarrow x_n = x_{n-1} + 2^{n-1}$

Eliminando os termos semelhantes e fazendo a soma dos n primeiros termos da P.G. de Potência 2, denotada por S_n, temos: $x_n – x_1 = x_2 – x_1 + x_3 – x_2 +...+ x_n - x_{n-1} = 2 + 2^2 + ... + 2^{n-1} = 2^n - 2$, portanto: $S_n = 2^n – 2$. Substituindo o valor de x_1, tem-se : $x_n = 1 + 2^n - 2$, e aí ficamos finalmente com

$x_n = 2^n - 1$

Exemplo 2: $y_{n+1} - y_n = 3$, com $y_0 = 2$

$n = 0 \rightarrow y_1 = y_0 + 3$

$n = 1 \rightarrow y_2 = y_1 + 3$

$n = 2 \rightarrow y_3 = y_2 + 3$

$n = 3 \rightarrow y_4 = y_3 + 3$

Para n -1, temos $\rightarrow y_n = y_{n-1} + 3$

Fazendo a Soma Telescópica temos que:

$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + ... + y_n = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + ... + y_{n-1} + 3 + 3 + 3 + 3 + ... + 3$

$y_n = y_0 + 3n$

$y_n = 2 + 3n$

Exemplo 3: Livro do PROFMAT, A Matemática do Ensino Médio, Volume 2, página 67, Exercício 2.

(De volta a Pizza de Steiner). Encontre a solução da recorrência $T_{n+1} = T_n + n$, com $T_1=2$, que expressa o número máximo de regiões em que n retas podem dividir o plano.

Os alunos assistiram o vídeo “De Volta a Matemática”, antes da nossa discussão, o qual está disponível no YouTube.

Tabela 4 - Quantidade que expressa o número máximo de regiões em que n retas podem dividir o plano

N	Quantidade Máxima de Regiões
1	2
2	4
3	7
4	11
n	T_n
n+1	T_n + n+1

Fonte: Autoria própria (2019).

$T_{n+1} = T_n + n+1$

$T_{0 = 1}$

$n = 1 \rightarrow T_2 = T_1 + 1$

$n = 2 \rightarrow T_3 = T_2 + 2$

$n = 3 \rightarrow T_4 = T_3 + 3$

Para n -1 temos $\rightarrow T_n = T_{n-1} + n-1$

$T_2 + T_3 + T_4 + ... + T_n = T_1 + T_2 + T_3 + ... T_{n-1} + 1 + 2 + 3 + ... + n$

Aí temos:

$T_{n} = T_{1} + 1 + 2 + 3 + ... + n$

$T_{n} = [(1 + n).n]/2 + 1$

$T_{n} = (n^2 + n + 2)/2$

CAPÍTULO 4: SUGESTÕES DE APLICAÇÕES NO ENSINO MÉDIO

Neste capítulo IV, vamos trabalhar com os alunos as variáveis discretas e lembrá-los do que se trata as Equações de Diferenças visto que, com esse nome, esse conceito não é nem citado nos documentos oficiais do Ensino Médio.

4.1 UMA AULA DE EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS NO ENSINO MÉDIO

No Caderno do Professor, volume 1, do primeiro ano da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, na página 48 encontramos:

> Conjuntos numéricos infinitos e discretos, como os Naturais e os Inteiros, já foram estudados em séries/anos anteriores e retomados no Ensino Médio. O fato de esses conjuntos possuírem quantidade inumerável de elementos está, normalmente, bem assimilado pelos alunos, nesta etapa de ensino, uma vez que a ideia do "mais 1", no caso dos Naturais, ou do "menos 1", no caso dos Inteiros, características dos conjuntos discretos, vem sendo apresentada a eles desde que começaram sua escolaridade. (VOORWALD,2017.p.48)

Equações de Diferenças é um método para resolver problemas de ciência em tempos discretos, mas de uma forma simples utilizando ferramentas algébricas básicas. Vamos fazer uma Introdução ao tema iniciando por revisar variáveis contínuas e variáveis discretas.

5.1.1 Revisando com os alunos variáveis contínuas e variáveis discretas

Variáveis quantitativas estão associadas a valores numéricos, podendo ser discretas ou contínuas.

Variável quantitativa discreta: quando o número de valores possíveis for finito ou infinito enumerável. Como exemplos de grandezas discretas pode-se citar:

- Números de peças produzidas por uma indústria;
- Número de bactérias por litro de leite;
- Número de dias que choveu em dezembro de 2018 em Limeira.

Variável quantitativa contínua: é aquela que pode, ao menos teoricamente, assumir qualquer valor entre dois valores possíveis dessa variável. Alguns exemplos de variáveis contínuas:

- Comprimentos de parafusos fabricados por certa máquina;
- Massa Corporal de uma Pessoa;
- Tempo gasto por um atleta nos treinos de 50 m de nado.

Costuma-se dizer, de uma maneira quase geral, que as variáveis discretas estão associadas às contagens e as variáveis contínuas às medições. Lembrando que um conjunto A é discreto se existe uma correspondência biunívoca entre seus elementos e um subconjunto dos números naturais.

A variável independente por ser inteira representa geralmente um tempo discreto como por exemplo um ano, ou uma semana, ou um semestre, ou um mês, etc. Problemas que possuem algumas variáveis que podem ser assumidas tendo somente um conjunto discreto de possíveis valores, frequentemente levam a modelos matemáticos envolvendo equações de diferenças (equações com variações discretas).

Na compra de um veículo, por exemplo, é feito o financiamento de um determinado valor que deve ser pago em 36 pagamentos, em parcelas mensais fixas e iguais . É uma técnica matemática que permite definir sequências, operações ou até mesmo algoritmos partindo de problemas particulares para problemas genéricos, ou seja, por intermédio de uma regra pode-se calcular qualquer termo em função do(s) antecessor(es) imediato(s). É uma ferramenta poderosa na modelagem de problemas, quando se consegue reduzir o problema original a vários problemas, cada vez mais simples. A seguir, veremos alguns exemplos que ilustram o uso das equações de diferenças.

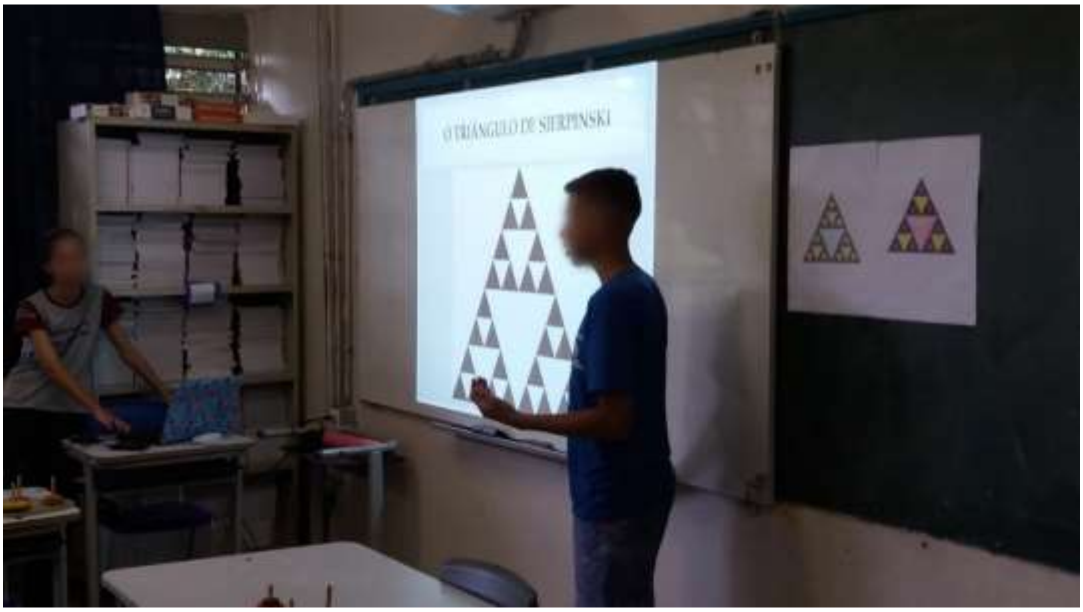
4.2 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO DO CADERNO DO ALUNO

4.2.1 O triângulo de Sierspinki

O Triângulo de Sierpinski foi descoberto pelo matemático Waclav Sierpinski (1882-1969). Conseguimos obtê-lo através de um processo iterativo de divisão de um triângulo equilátero em quatro triângulos semelhantes, visto que um destes triângulos está invertido, em relação ao original e é retirado do triângulo original sobrando apenas os outros três. Assim, repete-se no passo seguinte o mesmo procedimento em cada um dos três novos triângulos com a orientação original, e assim sucessivamente.

Partindo primeiramente da análise do triângulo e sua primeira iteração, veremos que a cada iteração cada triângulo que compunha o Triângulo de Sierpinsky dava origem a quatro novos triângulos, sendo que destes quatro, o do centro é removido.

Figura 5 - Aluno apresentando o Triângulo de Sierspinki na Escola Arlindo Silvestre



Fonte: Autoria própria (2019).

O objetivo desse momento de Ensino Aprendizagem foi apresentar uma proposta geométrica para os alunos verificarem através da construção, que uma sucessão pode ser definida por uma relação de recorrência, ou seja, uma equação de diferenças. Inicialmente, os alunos foram convidados a assistirem um vídeo sobre o tema e logo em seguida conversamos para analisarmos o conhecimento prévio dos mesmos e solicitamos, que munidos de uma régua, um compasso, uma folha A3, lápis e borracha construíssem algumas etapas do triângulo de Sierpinski a partir de um triângulo equilátero de lado 20 cm.

Feito o processo, propomos alguns questionamentos com o intuito do aluno perceber que qualquer progressão geométrica (x_n) de razão q e primeiro termo a pode ser definida por $x_{n+1} = q.x_n$

(n >1) , com x_1=a, ou seja, nossa intenção foi a percepção pelo aluno, que nesse caso estudado, temos uma recorrência de 1º ordem, cada termo é expresso em função do termo anterior imediato.

Também foi nosso objetivo mostrar as técnicas de recursividade que pode contribuir com a habilidade de resolução de situações problemas que envolvam as Equações de Diferenças. No livro do PROFMAT " A Matemática do Ensino Médio, Volume 2, temos a definição de Progressão Geométrica depois de propor alguns problemas interessantes para introdução do tema.

Na página 25 temos: Progressão Geométrica é uma sequência na qual é constante o quociente da divisão de cada termo pelo termo anterior. Esse quociente constante é chamado de razão da progressão e é representado pela letra q. Em uma progressão geométrica (a_1 , a_2 , a_3 , ...), para avançar um termo basta multiplicar pela razão, para avançar dois termos , basta multiplicar duas vezes pela razão, e assim por diante.

Depois que discutimos o conceito e a relação com as Equações de diferenças, tratamos de construir junto aos alunos o termo geral para evidenciar a relação com o termo anterior. Seja a PG genérica: (a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n,...), onde a_1 é o primeiro termo, e a_n é o n-ésimo termo, ou seja, o termo de ordem n.

Da definição de PG, sendo a_1 o 1º termo, podemos escrever:

$a_2 = a_1 . q$

$a_3 = a_2 . q = (a_1 . q) . q = a_1 . q^2$

$a_4 = a_3 . q = (a_1 . q^2) . q = a_1 . q^3$.

Vimos uma definição de PG que usa uma definição de sequência por recorrência. Mas, uma vez conhecendo-se o primeiro termo e a razão de uma PG, podemos deduzir uma lei de formação que nos permite calcular qualquer termo da PG sem usar o cálculo por recorrência. Se denotarmos o primeiro termo da PG por a_1 e a razão por q, temos:

$a_2 = a_1.q$

$a_3 = a_2.q$

$a_4 = a_3.q$

$... = ...$

$a_n = a_{n-1}.q$

Se multiplicarmos todos os membros do lado direito das igualdades e todos os membros do lado esquerdo das desigualdades teremos:

$a_2\, a_3\, a_4 \ldots a_{n-1}.\, a_n = a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \ldots a_{n-1}.\, q^{n-1}$

Cancelando os fatores iguais em ambos os lados da igualdade obtemos:

$\mathbf{a_n = a_1 \,.\, q^{n-1}}$

Após a ilustração da fórmula do termo geral da PG, propomos aos alunos a análise da construção do triângulo de Sierspinki que obtiveram através da tabela abaixo. Generalizou-se x como sendo o lado do triângulo equilátero.

Tabela 4 - Análise da construção do Triângulo de Sierspinki

Nível	Nº de Triângulos	Perímetro de cada um	Perímetro Total
0	1	3x	3x
1	3	3x/2	3. (3x/2)
2	3^2	$3x/2^2$	$3. (3x/2^2)$
3	3^3	$3x/2^3$	$3. (3x/2^3)$
4	3^4	$3x/2^4$	$3. (3x/2^4)$
...	...	...	...
N	3^n	$3x/2^n$	$3. (3x/2^n)$

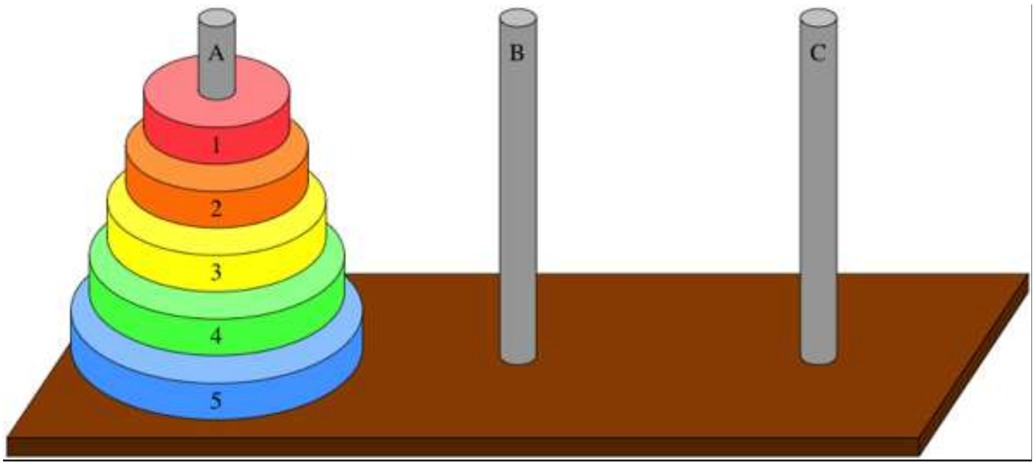
Fonte: Autoria própria

Observamos a percepção dos alunos sobre o valor de um termo quanto a dependência do termo anterior e a importância de encontrarmos um termo geral em função de n.

4.2.2 A torre de hanói

Extraída do Caderno de MATEMÁTICA ATIVIDADES EXPERIMENTAIS E INVESTIGATIVAS da Escola de Tempo Integral do Estado de São Paulo.Tema: Números e operações.

Figura 6 - O Jogo da Torre de Hanói

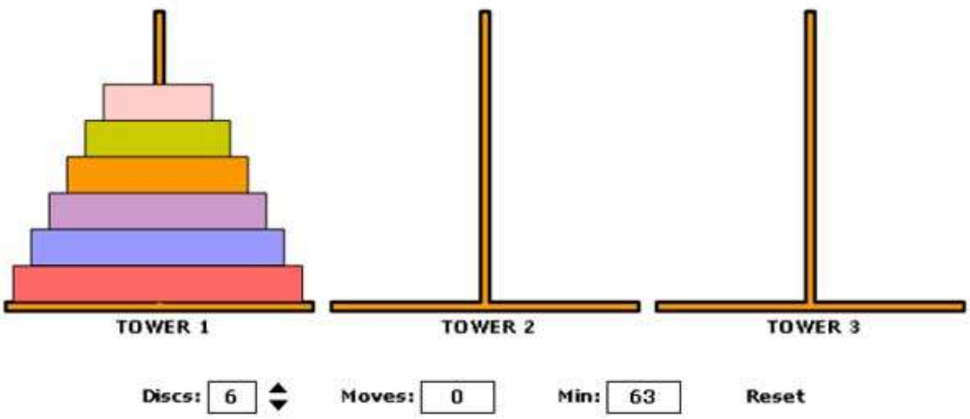


Fonte: Khanacademy (2019). (https://pt.khanacademy.org/computing/computer-science/algorithms/towers-of-hanoi/a/towers-of-hanoi)

A torre de Hanói é um dos mais populares quebra-cabeças na Matemática. Foi inventado em 1883, pelo matemático francês Édouard Lucas (1842-1891), e, desde então, é vendido como brinquedo. Ele é usado também para avaliar a capacidade de planejamento e de solucionar problemas.

Usamos o laboratório de Matemática para explorar o quebra-cabeça que consiste em uma base de madeira onde estão firmados três hastes verticais, e um certo número de discos de madeira, de diâmetros diferentes, furados no centro. Vamos chamar de 1, 2 e 3, as três hastes, conforme a figura.

Figura 7 - Jogando on line no software livre



Fonte: Khanacademy (2019). (https://pt.khanacademy.org/computing/computer-science/algorithms/towers-of-hanoi/a/towers-of-hanoi)

No começo do jogo os discos estão todos enfiados na haste A, em ordem decrescente de tamanho, com o menor disco acima de todos. O objetivo é mover todos os discos, de A para C, obedecendo às seguintes regras:

1) Somente um disco pode ser posto de cada vez.
2) Um disco maior nunca pode ser posto sobre um disco menor.

Habilidades: Compreender as regras de transferência dos discos de um pino para o outro; realizar a contagem dos movimentos feitos com as peças; ultrapassar o uso da tentativa e erro e atingir a reflexão sobre estratégias para a obtenção do número mínimo de movimentos; visualizar os movimentos antes de realizá-los; identificar a regularidade nos movimentos realizados com os discos; relacionar a regularidade observada nos movimentos com os números obtidos; representar algebricamente a relação observada.

4.2.3 O Desafio: O Modelo Matemático do Problema

Inicialmente, solicitamos que os alunos, em grupo, iniciassem o jogo com os sete discos e a partir de 2 discos, construíssem uma tabela auxiliar relacionando o número de peças com o número mínimo de movimentos necessários para o transporte levando-se em conta que uma peça maior não pode ficar em cima de uma menor. Logo após terem feito a tabela, solicitamos que o jogo fosse feito pelos grupos através de um aplicativo onde o número de jogadas mínimas era dado.

Pedimos que conferissem e investigassem o desafio proposto. Orientamos os grupos, sugerindo que eles fizessem um esquema da transferência de quatro discos, indicando os momentos do trabalho com três discos. Por meio desse esquema, solicitamos que conjecturassem sobre a possibilidade de usar essa informação para calcular o número de movimentos tanto para cinco discos como para seis discos.

Por fim, propomos uma discussão onde todos os grupos puderam expressar suas conclusões. Propomos uma representação algébrica, e os grupos chegaram numa representação correta. “Para transferir quatro discos de um pino para o outro, o número de movimentos é igual a duas vezes o número de movimentos de três pinos mais um”.

Se concordarem com essa afirmação, peça que a representem algebricamente. Espera-se que os estudantes percebam que, para resolver o problema com quatro discos, transferem-se os 4 – 1 = 3 discos de cima para um pino vazio, depois passa-se o disco maior para o outro pino vazio e, por fim, colocam-se os três discos sobre o disco maior.

Para resolver o problema com cinco discos, transferem-se os 5 – 1 = 4 discos de cima para um pino vazio, e assim por diante. Por fim trabalhamos com os alunos o questionamento inicial: Qual *a relação matemática entre o número mínimo de jogadas necessárias para transportar uma torre, e o número necessário para transportar a torre acrescida de uma peça?*

$T_2 = 2T_1 + 1$

$T_3 = 2T_2 + 1$

$T_4 = 2T_3 + 1$

$T_5 = 2T_4 + 1$

Logo: $T_{n+1} = 2T_n + 1$

Por definição $T(0) = 0$, pois representa o número de movimentos necessários para mover 0 discos.

Temos então a seguinte equação de diferenças.

$T_{n+1} - 2T_n = 1$, aí temos:

Para n=0, $T_1 - 2T_0 = 1$

Para n=1, $T_2 - 2T_1 = 1$

Para n=2, $T_3 - 2T_2 = 1$

Para n-3, $T_{n-2} - 2T_{n-3} = 1$

Para n-2, $T_{n-1} - 2T_{n-2} = 1$

Para n-1, $T_n - 2T_{n-1} = 1$

Vamos multiplicar a última equação por 2^0, a penúltima por 2^1, a antepenúltima por 2^2, até chegarmos à primeira, ao qual vamos multiplicar por 2^{n-1}, e assim teremos:

$2^{n-1}T_1 - 2^n T_0 = 2^{n-1}$

$2^{n-2}T_2 - 2^{n-1} T_1 = 2^{n-2}$

$2^{n-3}T_3 - 2^{n-2} T_2 = 2^{n-3}$

.

$4T_{n-2} - 8T_{n-3} = 4$

$2. T_{n-1} - 4T_{n-2} = 2$

$T_n - 2T_{n-1} = 1$

Quando fazemos a Soma Telescópica, percebemos que somente resta

$T_n - 2^n T_0 = 1 + 2 + 4 + ...+ 2^{n-1}$, e como T(0)=0 , temos que :

$T_n = 1 + 2 + 4 + ...+ 2^{n-1}$, que é a soma da P.G de razão 2, dada por :

$Sn=a1.\frac{.q^n-1}{q-1}$, logo: $S_n = [1 . (2^n - 1)]/1$ ou seja:

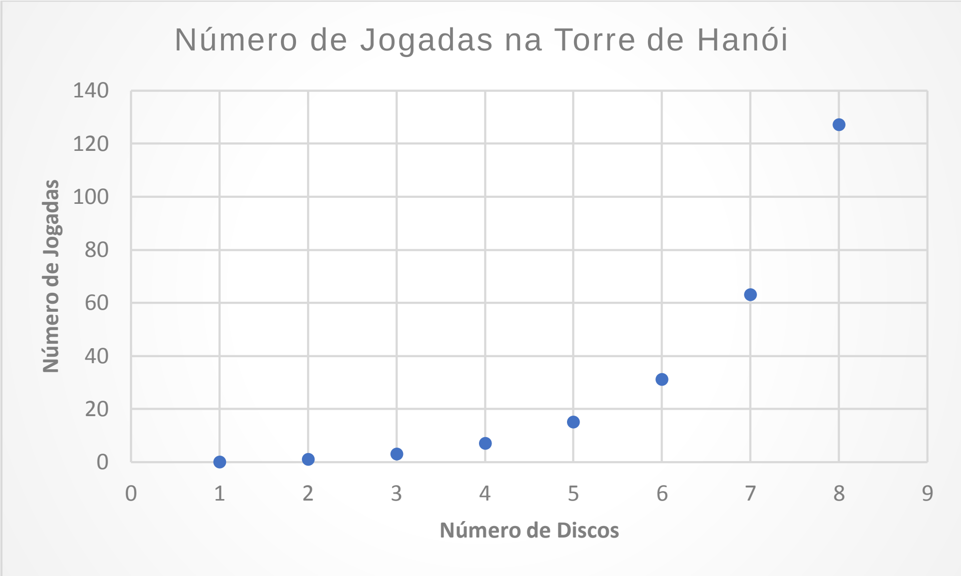
$T_n = 2^n - 1$ é a quantidade mínima de movimentos.

Tabela 6: Quantidade mínima de jogadas em função do número de discos

Nº de Discos	Nº de Jogadas
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63
7	127

Fonte: Autoria própria (2019).

Gráfico 5 - Quantidade de jogadas em função do número de discos



Fonte: Autoria própria (2019).

Figura 8 – Aluna apresentando a Torre de Hanói

Fonte: Autoria própria (2019).

CAPÍTULO 5: ATIVIDADES DE MODELAGEM ATRAVÉS DE EQUAÇÃO DE DIFERENÇAS

Neste capítulo, apresenta-se o trabalho feito com os alunos sobre as variáveis discretas e do que se tratam as Equações de Diferenças, lembrando que, com esse nome, os conceitos não são nem citados no Ensino Médio.

5.1 - ATIVIDADE 1 – O FINANCIAMENTO DE UM VEÍCULO

Adquirindo um Veículo Financiado**:** Atividade extraída do Manual do Voluntário "Meu Dinheiro, meu Negócio" página 24. Imagine que você está precisando muito comprar um carro, mas que não tem o dinheiro para fazer o pagamento à vista e por isso, terá que financiar a compra.

Dessa forma, você vai tomar emprestado parte do valor do carro e fazer os pagamentos em parcelas enquanto você o está usando. Financiar a compra significa pegar emprestado com um banco ou uma empresa de crédito. Nesse caso, é como se o banco ou a empresa comprassem o carro a vista em seu lugar e você pagasse a eles em diversas parcelas.

Ao final de todos os pagamentos, o bem finalmente passa a ser seu. Empréstimos é um assunto que podemos falar utilizando as Equações de Diferenças de 1º ordem e permite uma modelagem matemática simples, compreensível a alunos do Ensino Médio.

5.1.1 A matemática para o problema

A proposta é que os alunos façam uma simulação usando o financiamento para comprar um veículo FIAT, em 36 parcelas fixas sendo estipulado um valor de entrada. Vamos solicitar que façam o cálculo do saldo devedor, formando um plano de amortização e que obedeçam às seguintes regras:

O valor de cada prestação é formado por duas parcelas, uma delas é a devolução do principal, ou parte dele, denominada Amortização, e outra parcela são os juros que representam o custo do empréstimo (prestação = juros + amortização).

O valor dos juros é sempre calculado sobre o saldo devedor do empréstimo, calculado com uma determinada taxa de juros. O valor da primeira prestação inclui os juros calculados sobre o valor total do financiamento. O valor da segunda prestação inclui os juros calculados sobre a diferença do valor financiado menos o valor amortizado na primeira prestação, e assim sucessivamente até a última prestação.

5.1.2 Na concessionária para uma atividade de modelagem

Um grupo de cinco alunos do Ensino Médio foram visitar a Concessionária FIAT na cidade de Limeira no segundo semestre de 2018 e foram atendidos por um vendedor e um funcionário do Banco Santander. Os alunos tinham interesse em fazer a análise do financiamento de um veículo e tinham a liberdade de escolher e analisar as vantagens ou desvantagens de um veículo financiado.

Eles ouviram sobre o consórcio de veículos, aprendendo que se trata de um sistema de compra cooperativada em que você contribui mensalmente através de um sistema de autofinanciamento. Diferente de um empréstimo, o consórcio funciona como uma poupança programada, e você pode adquirir seu automóvel a partir de contemplação por sorteio ou lances, fixo e livres. A desvantagem é que não terá o veículo em poucos dias.

5.1.3 A pesquisa: diferenças entre leasing e CDC

Uma das principais diferenças entre o leasing e o Crédito Direto ao Consumidor (CDC) é que, ao optar pelo primeiro, o cliente faz uma espécie de aluguel daquele veículo, que fica no nome do banco durante o pagamento das parcelas. No site do Banco Central, o leasing é definido como um “arrendamento mercantil”. Por ser uma operação com características legais próprias, não se constitui operação de financiamento.

Nas operações de financiamento, o bem é de propriedade do mutuário, ainda que alienado, já no ato da compra. Assim, como durante o pagamento das parcelas o bem fica no nome do banco e não do cliente, as garantias são maiores e, consequentemente, os juros são menores**.**

O leasing permite ao banco a retomada do bem muito mais facilmente, enquanto com o CDC esse procedimento legal é mais difícil. Além das taxas de juros menores, outra vantagem do leasing é que, nessas operações, não há incidência do IOF (Imposto sobre Operações Financeiras), o que também diminui o valor da prestação.

Apesar dos juros menores, o leasing traz algumas desvantagens para o bolso do consumidor. Se você tiver um dinheiro sobrando, por exemplo, e quiser antecipar algumas parcelas, não vai encontrar nenhum benefício. O cliente até consegue antecipar as prestações, mas não existe desconto dos juros. Já com o CDC, é possível antecipar quantas parcelas quiser e assim pagar menos juros com a antecipação.

Outro ponto desfavorável do leasing é que ele só pode ser contratado para pagamentos acima de 24 meses. O prazo mínimo de arrendamento é de dois anos, para bens com vida útil de até cinco anos, e de três anos, para os demais. O CDC, por sua vez, não impõe nenhum tipo de restrição com relação ao número mínimo de parcelas. No CDC, um dos maiores cuidados que o comprador deve ter é com as taxas de juros. Algumas são realmente muito abusivas.

5.1.4 A escolha do veículo

Veículo: Fiat TORO VOLCANO 2019
Valor de Entrada: R$ 50.000,00
Dívida a ser amortizada: R$ 75.000,00
Valor da parcela: R$ 2318,53
Tipo de Financiamento: CDC
Taxa (i): 0,59% a.m.

5.1.5 Questionário

Questão 01 - O que acontece se você financia um carro, mas não consegue pagar as parcelas ao financiador?
Questão 02 - Nesse caso, o pagamento de entrada e das parcelas pagas será devolvido?
Questão 03 - O que mais, além do dinheiro e do bem, você poderá perder por não ter pago o que se comprometeu a pagar?
Questão 04 - Faça a tabela com a Simulação do Financiamento.

5.1.6 A simulação da tabela do financiamento: Tabela Price

A tabela abaixo surgiu após os dados colhidos na Concessionária FIAT na cidade de Limeira e posterior trabalho na Sala de Informática na Escola Arlindo Silvestre fazendo o uso do Software Excel.

Tabela 7 - Simulação do Financiamento do Veículo Fiat TORO VOLCANO 2019

Parcelas	Pagamento	Balanço In.	Pagamento	Amortização	Juros	Balanço F.
01	10/11/2018	R$75.000,00	R$ 2.318,53	R$ 1.876,03	R$442,50	R$73.123,97
02	10/12/2018	R$73.123,97	R$ 2.318,53	R$ 1.887,10	R$431,43	R$71.236,88
03	10/01/2019	R$71.236,88	R$ 2.318,53	R$ 1.898,23	R$420,30	R$69.338,65
04	10/02/2019	R$69.338,65	R$ 2.318,53	R$ 1.909,43	R$409,10	R$67.429,22
05	10/03/2019	R$67.429,22	R$ 2.318,53	R$ 1.920,69	R$397,83	R$65.508,53
06	10/04/2019	R$65.508,53	R$ 2.318,53	R$ 1.932,03	R$386,50	R$63.576,50
07	10/05/2019	R$63.576,50	R$ 2.318,53	R$ 1.943,43	R$375,10	R$61.633,08
08	10/06/2019	R$ 61633,08	R$ 2.318,53	R$ 1.954,89	R$363,64	R$59.678,18
09	10/07/2019	R$59.678,18	R$ 2.318,53	R$ 1.966,43	R$352,10	R$57.711,76
10	10/08/2019	R$57.711,76	R$ 2.318,53	R$ 1.978,03	R$340,50	R$55.733,73
11	10/09/2019	R$55.733,73	R$ 2.318,53	R$ 1.989,70	R$328,83	R$53.744,03
12	10/10/2019	R$ 53744,03	R$ 2.318,53	R$ 2001,44	R$317,09	R$51.742,60
13	10/11/2019	R$51.742,60	R$ 2.318,53	R$ 2013,25	R$305,28	R$49.729,35
14	10/12/2019	R$49.729,35	R$ 2.318,53	R$ 2025,12	R$293,40	R$47.704,23
15	10/01/2020	R$47.704,23	R$ 2.318,53	R$ 2037,07	R$281,45	R$45.667,16
16	10/02/2020	R$45.667,16	R$ 2.318,53	R$ 2049,09	R$269,44	R$43.618,07
17	10/03/2020	R$43.618,07	R$ 2.318,53	R$ 2061,18	R$257,35	R$41.556,81
18	10/04/2020	R$41.556,89	R$ 2.318,53	R$ 2073,34	R$245,19	R$39.483,55
19	10/05/2020	R$39.483,55	R$ 2.318,53	R$ 2085,57	R$232,95	R$37.397,97
20	10/06/2020	R$37.397,97	R$ 2.318,53	R$ 2097,88	R$220,65	R$35.300,09
21	10/07/2020	R$35.300,09	R$ 2.318,53	R$ 2110,26	R$208,27	R$33.189,84
22	10/08/2020	R$33.189,84	R$ 2.318,53	R$ 2122,71	R$195,82	R$31.067,13
23	10/09/2020	R$31.067,13	R$ 2.318,53	R$ 2135,23	R$183,30	R$28.931,90
24	10/10/2020	R$28.931,90	R$ 2.318,53	R$ 2147,83	R$170,70	R$36.784,07
25	10/11/2020	R$26.784,07	R$ 2.318,53	R$ 2160,50	R$158,03	R$24.623,57
26	10/12/2020	R$24.623,57	R$ 2.318,53	R$ 2173,25	R$145,28	R$22.450,32
27	10/01/2021	R$22.450,32	R$ 2.318,53	R$ 2186,07	R$132,46	R$20.264,25

28	10/02/2021	R$20.264,25	R$ 2.318,53	R$ 2198,97	R$119,56	R$18.065,29
29	10/03/2021	R$18.065,29	R$ 2.318,53	R$ 2211,94	R$106,59	R$15.853,35
30	10/04/2021	R$15.853,35	R$ 2.318,53	R$ 2224,99	R$ 93,53	R$13.628,35
31	10/05/2021	R$13.628,35	R$ 2.318,53	R$ 2238,12	R$ 80,41	R$11.390,23
32	10/06/2021	R$11.390,23	R$ 2.318,53	R$ 2251,32	R$ 67,20	R$ 9.138,91
33	10/07/2021	R$ 9138,91	R$ 2.318,53	R$ 2264,61	R$ 53,92	R$ 6.874,30
34	10/08/2021	R$ 6874,30	R$ 2.318,53	R$ 2277,97	R$ 40,56	R$ 4.596,34
35	10/09/2021	R$ 4596,34	R$ 2.318,53	2291,41	R$ 27,12	R$ 2304,93
36	10/10/2021	R$ 2304,93	R$ 2.318,53	2304,93	R$ 13,60	0,0

Fonte: Audtecna (2019).

Figura 9: Alunos na sala de informática da Escola Arlindo Silvestre, trabalhando na construção da Tabela do Financiamento

Fonte: Autoria própria (2019)

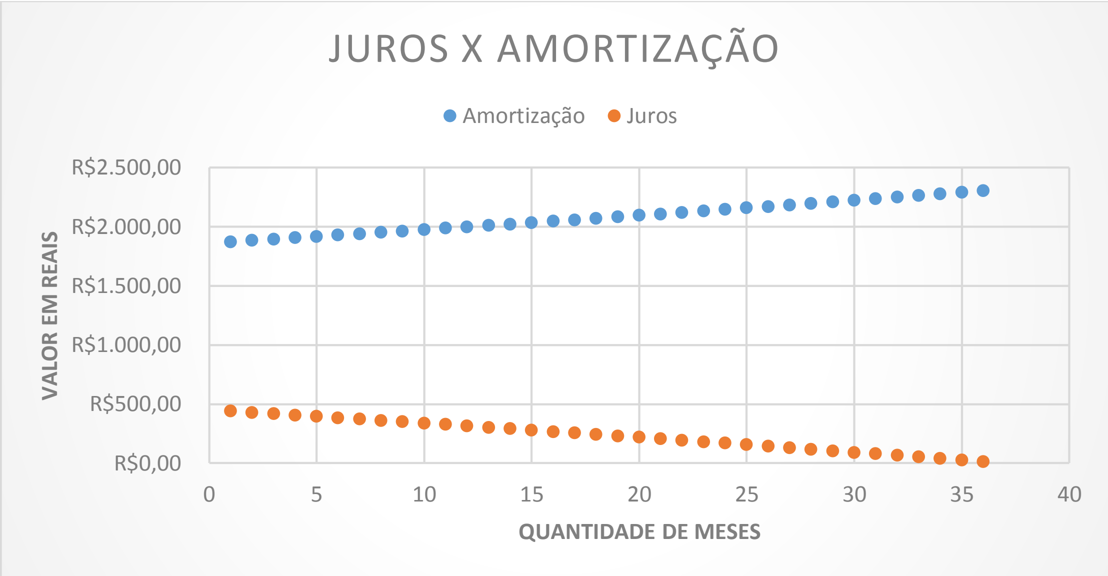
Figura 10 - Alunos na sala de informática da Escola Arlindo Silvestre, trabalhando na construção do Gráfico relativo a Tabela do Financiamento

Fonte: Autoria própria (2019)

Figura 11 - Alunos na sala de informática, ajustando os gráficos

Fonte: Autoria própria (2019)

Gráfico 6 - Gráfico mostrando o crescimento da Amortização e o decrescimento dos juros



Fonte: Autoria própria (2019)

5.1.7 A Tabela Price

A Tabela Price utiliza, como amortização, parcelas de valor fixo durante todo o período do financiamento. Na Tabela Price, as prestações são fixas, os juros decrescentes e as amortizações crescentes. As prestações nesse sistema são calculadas mensalmente, de maneira que parte delas pagam os juros e parte amortizam o saldo devedor.

Como os juros são calculados no pagamento de cada parcela, eles incidem sobre o saldo devedor, sendo embutidos nesses, o que acaba gerando a incidência de juros sobre juros. Inicialmente os alunos foram conferir o valor da prestação dada pelo Excel.

5.1.8 Situação Problema e a Equação de Diferença

Suponha que no início de um certo período (o n-ésimo) de um certo período, você tem uma quantia C(n). Neste período, a quantia é sujeita a juros com taxa i e no final sofre uma modificação p(n). Então, no início de período (n+1), a quantia em questão será (1+i).C(n) + p(n). Logo temos uma equação de diferenças de primeira ordem: C(n+1) - (1+i).C(n) = p(n), onde C(0)=C_0 é o capital inicial .

Temos que $i = 0{,}0059$ já que a taxa foi 0,59% a.m. e $p(n) = p$

$C(n+1) = (1{,}0059).C(n) - p$

Sendo $p_0 = 75.000$ e $n = 36$, temos que :

$C(n) = (1{,}0059)^{36} .75.000 – (p/0{,}0059).((1{,}0059)^{36} – 1)$

Como queremos saldar a dívida, $C(n)=0$, então:

$p/0{,}0059. ((1{,}0059)^{36} – 1) = 75.000. (1{,}0059)^{36}$, logo temos :

$p= 442{,}5 . (1{,}0059)^{36} / 1{,}0059)^{36} – 1$

$p= 546{,}8728568 / 0{,}235870862$

$p= 2318{,}52$

$\boxed{p = 2318{,}52}$

Quando pedimos uma quantia C (em reais) emprestada a uma taxa i mensal , após um mês devemos (1 + i)C reais , após dois meses devemos $(1 + i)^2$ C e assim sucessivamente até chegarmos no n-ésimo mês , quando nossa dívida será de $(1 + i)^n C$ ou seja , se não saldarmos nossa dívida , no próximo período pagamos juros sobre juros devidos no período atual . No problema proposto, da aquisição do veículo, a dívida total foi de R$ 75000,00 com uma dívida mensal de R$ 2318,53 em 36 pagamentos.

Conversamos na sala de aula mostrei aos alunos que o valor de uma quantia depende da época à qual ela está referida, ou seja, só há um único problema de Matemática Financeira: deslocar quantias no tempo. Logo após nossa conversa, os alunos, em grupo, procuraram um modelo que forneça a amortização do valor da *n*-enésima prestação.

Assim, definiram as variáveis: *n*, como sendo o número de prestações a serem quitadas e *A* a amortização quando faltam quitar *n* prestações. Notamos que, por exemplo, a prestação constante de R$ 2318,53 quando descapitalizada linearmente por 2 meses, tem-se 2291,41.

$A_2 = 2318{,}53 / 1{,}0059^2$

$A_2 = 2318{,}53/1{,}011834$

$A_2 = 2291{,}41$

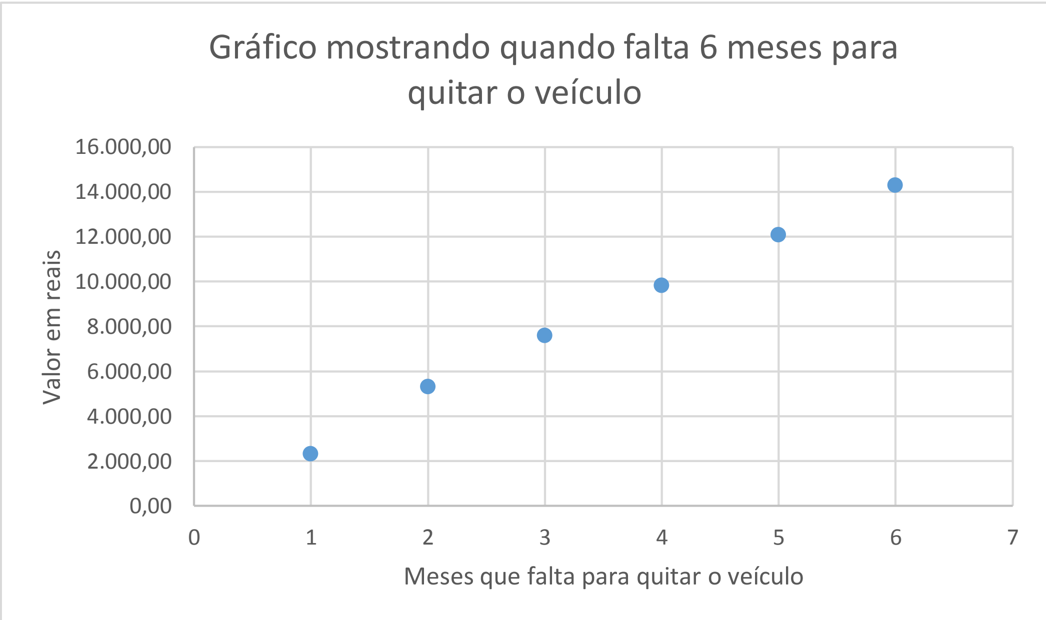
Tabela 8 - Mostrando o valor da dívida quando faltam 6 meses para quitar

Quando faltam 6 meses para quitar o veículo	Dívida
1	2.304,93
2	5.296,34
3	7574,32
4	9.825,66
5	12.063,89
6	14.288,94

Fonte: Autoria própria (2019)

Na Sala de Informática construíram os gráficos de quando faltam 6 meses para quitar o veículo.

Gráfico 7 - Mostrando dívida quando faltam n meses para quitar a dívida.



Fonte: Autoria própria (2019)

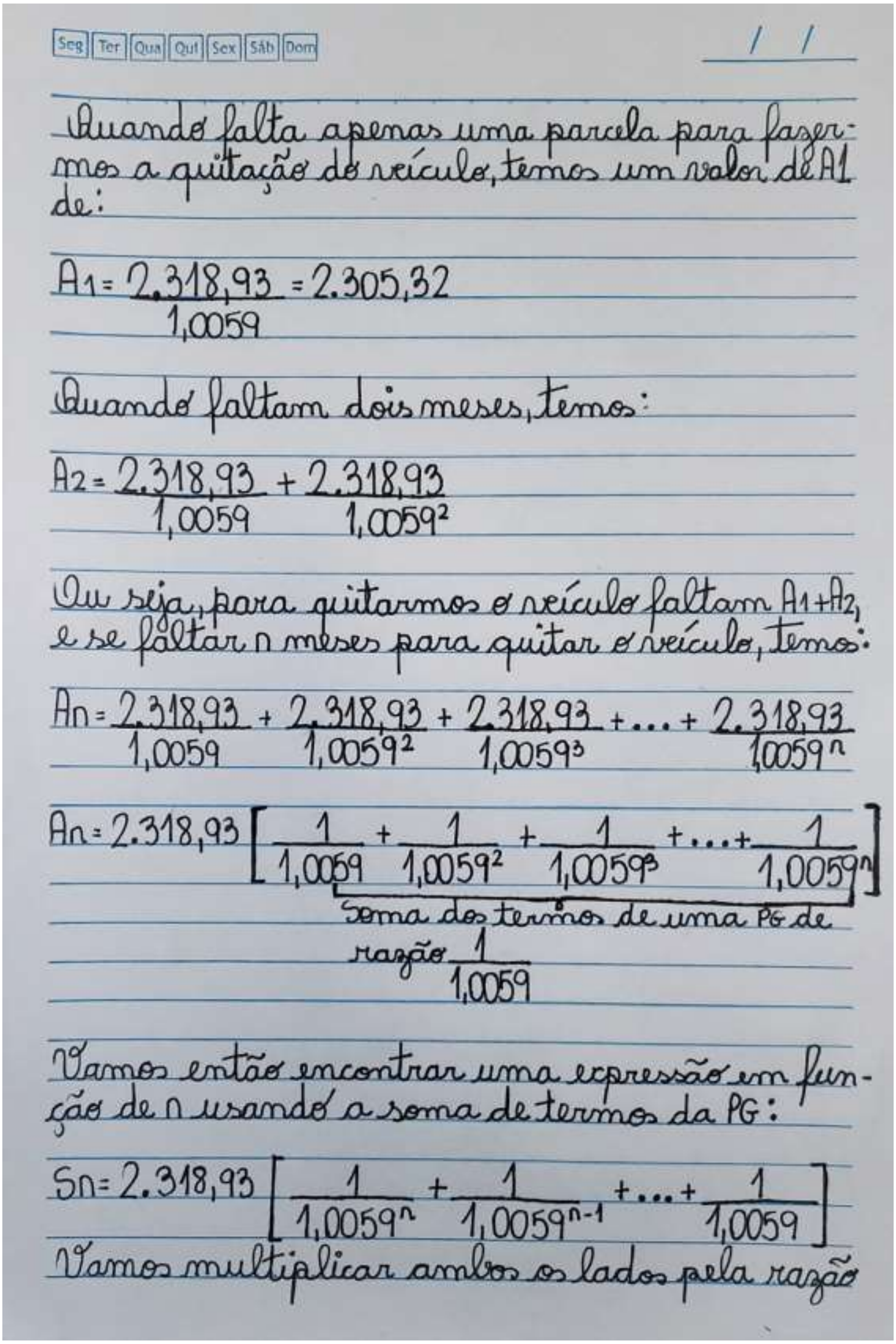
5.1.9 O Modelo Matemático

Após os alunos entenderem que nas prestações da Tabela Price há a incidência de juros compostos, e é tácito que os juros são capitalizados de forma composta, foi proposto que os grupos de trabalho encontrassem um modelo matemático que descrevesse a situação abordada. Vale a pena nesse momento citar D'Ambrósio (2007, p. 80): "O grande desafio para a educação é pôr em prática hoje o que vai servir para o amanhã". É possível inferir na fala do autor que acertar ou errar nesse contexto servirá para uma reflexão sobre nossa prática no sentido de ter a chance de aprimorar ou mesmo reformular.

A Lei de Diretrizes e Bases Nacional (LDB) nº 9.394, em seu Capítulo II Art. 22, orienta sobre as disposições gerais da educação básica, a qual: "tem por finalidades desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores".

Nesse sentido a proposta nesse momento do trabalho, foi uma discussão conjunta para encontrarmos o melhor modelo que traduz a situação. Na página seguinte, na figura 11 e 12 mostra o trabalho de um dos grupos, mostrando o modelo encontrado.

Figura 12 – Trabalho em grupo



Seg Ter Qua Qui Sex Sáb Dom / /

Quando falta apenas uma parcela para fazermos a quitação do veículo, temos um valor de A1 de:

$$A_1 = \frac{2.318,93}{1,0059} = 2.305,32$$

Quando faltam dois meses, temos:

$$A_2 = \frac{2.318,93}{1,0059} + \frac{2.318,93}{1,0059^2}$$

Ou seja, para quitarmos o veículo faltam $A_1 + A_2$, e se faltar n meses para quitar o veículo, temos:

$$A_n = \frac{2.318,93}{1,0059} + \frac{2.318,93}{1,0059^2} + \frac{2.318,93}{1,0059^3} + \dots + \frac{2.318,93}{1,0059^n}$$

$$A_n = 2.318,93 \left[\underbrace{\frac{1}{1,0059} + \frac{1}{1,0059^2} + \frac{1}{1,0059^3} + \dots + \frac{1}{1,0059^n}}_{\text{Soma dos termos de uma PG de razão } \frac{1}{1,0059}} \right]$$

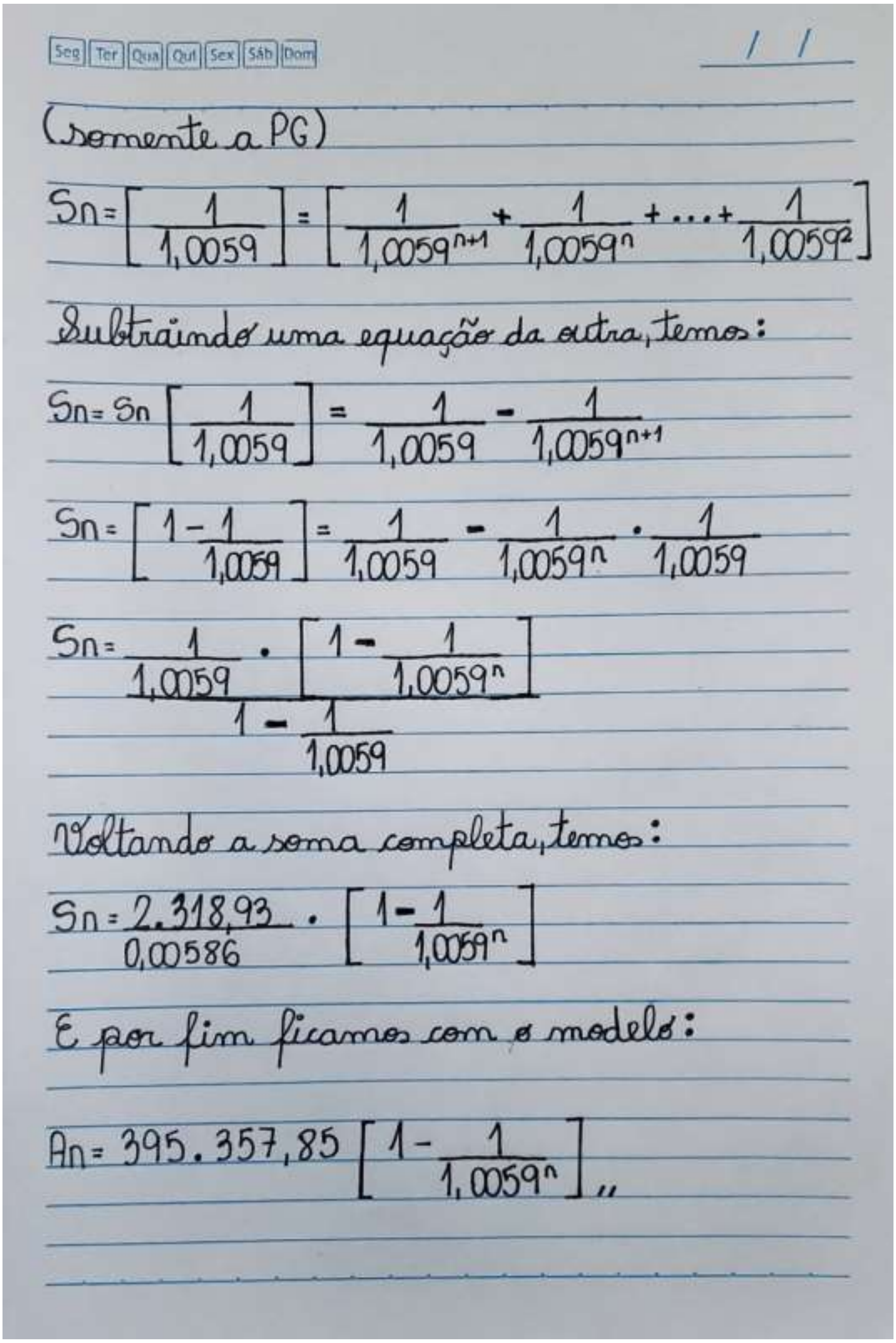
Vamos então encontrar uma expressão em função de n usando a soma de termos da PG:

$$S_n = 2.318,93 \left[\frac{1}{1,0059^n} + \frac{1}{1,0059^{n-1}} + \dots + \frac{1}{1,0059} \right]$$

Vamos multiplicar ambos os lados pela razão

Fonte: Autoria própria (2019)

Figura 13 – Modelo Matemático calculado por um Grupo Produtivo



Seg Ter Qua Qui Sex Sáb Dom   / /

(somente a PG)

$$S_n = \left[\frac{1}{1,0059}\right] = \left[\frac{1}{1,0059^{n+1}} + \frac{1}{1,0059^{n}} + \ldots + \frac{1}{1,0059^{2}}\right]$$

Subtraindo uma equação da outra, temos:

$$S_n = S_n\left[\frac{1}{1,0059}\right] = \frac{1}{1,0059} - \frac{1}{1,0059^{n+1}}$$

$$S_n = \left[1 - \frac{1}{1,0059}\right] = \frac{1}{1,0059} - \frac{1}{1,0059^{n}} \cdot \frac{1}{1,0059}$$

$$S_n = \frac{\frac{1}{1,0059} \cdot \left[1 - \frac{1}{1,0059^{n}}\right]}{1 - \frac{1}{1,0059}}$$

Voltando a soma completa, temos:

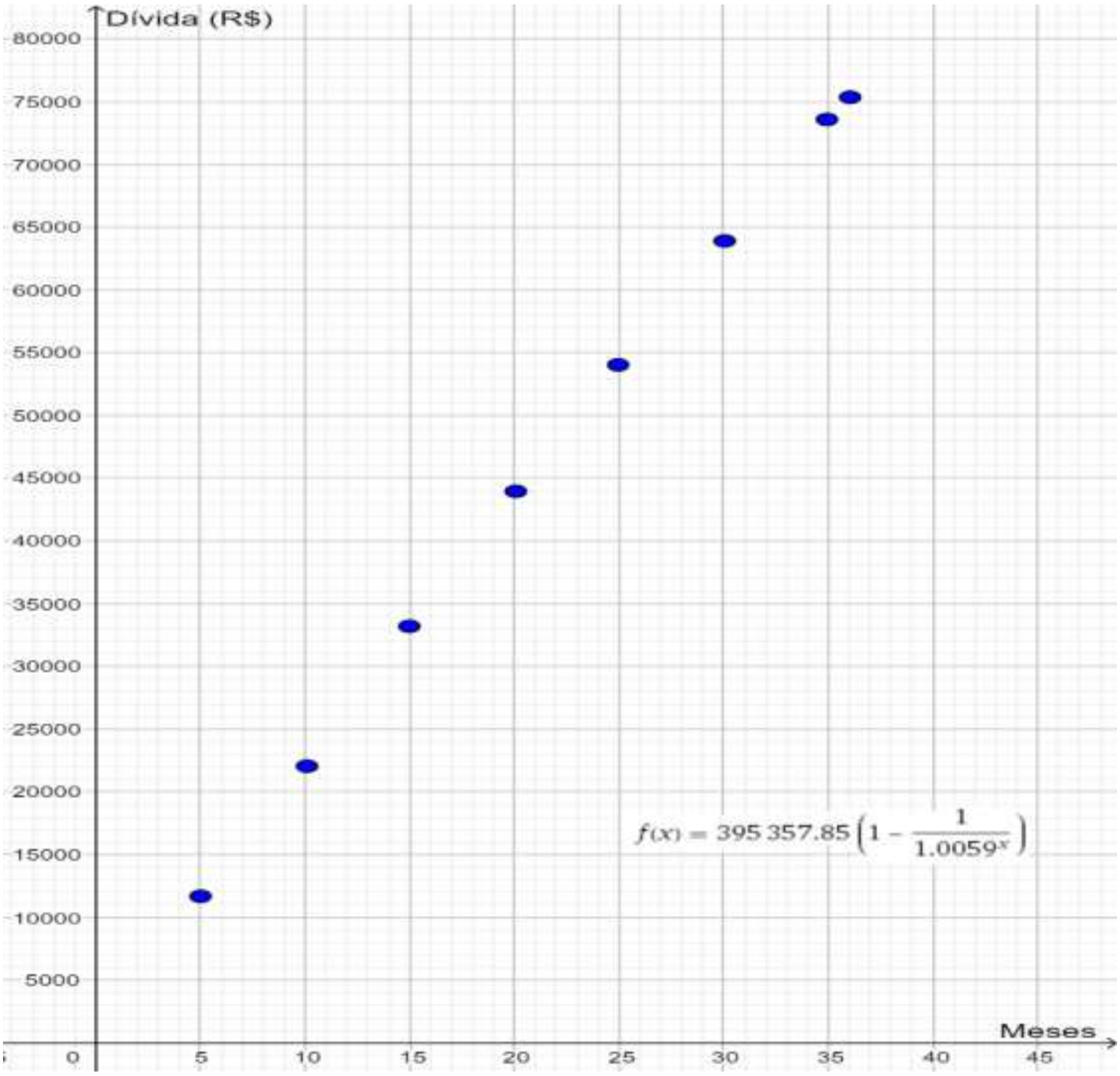
$$S_n = \frac{2.318,93}{0,00586} \cdot \left[1 - \frac{1}{1,0059^{n}}\right]$$

E por fim ficamos com o modelo:

$$A_n = 395.357,85\left[1 - \frac{1}{1,0059^{n}}\right]_{''}$$

Fonte: Autoria própria (2019)

Gráfico 8 - Modelo Matemático mostrando quando faltam x meses para quitá-la



Fonte: Autoria própria (2019)

Figura 14 - Aluno apresentando sobre o Financiamento do Veículo

Fonte: Autoria própria (2019)

Os alunos entenderam através do modelo matemático, que não faltam opções quando vão adquirir um veículo e que é necessário analisar financeiramente qual é a melhor opção, sem esquecer que a compra à vista continua sendo a melhor opção e que se não necessitar do veículo de imediato, o consórcio é melhor, evitando assim os impostos e os juros.

Analisando-se a Tabela 7 que apresenta os resultados obtidos da Tabela Price, verifica-se que o Método Linear melhor atende à necessidade do cliente relativo a Tabela Price, mesmo que com pouca diferença, visto que há uma pequena diferença na Amortização, sendo um Modelo Linear ligeiramente maior, logo o Saldo devedor será menor, visto que vamos subtrair uma parcela maior. Esta situação mostrou aos alunos como funciona o financiamento de um veículo que consiste, no caso, de uma pessoa física emprestar dinheiro para adquirir um veículo e fazer o pagamento em um determinado número de prestações acrescido dos juros.

Entenderam que, durante o pagamento, parte são os juros cobrados e a outra parte para abater a dívida, o que chamamos de amortização. O que foi oferecido a eles na Concessionaria, foi o uso da Tabela Price e fez se o uso das equações de diferenças, pois essa trabalha com um sistema de Amortização de parcelas iguais. Esse sistema é muito utilizado por ser quitado em prestações sempre iguais, o que oferece uma certeza para o devedor como também para o credor. No entanto, não é aconselhável para empréstimos em longo prazo por conta dos indexadores de contrato.

5.2 ATIVIDADE 2 – EVOLUÇÃO POPULACIONAL NA CIDADE DE LIMEIRA

5.2.1 Variação Populacional

O crescimento discreto acontece de forma periódica, isto é, as alterações não ocorrem sistematicamente, havendo intervalos de tempo em que a população se mantém constante. O período entre as transições tanto pode ser frações de segundos, minutos, horas, dezenas de anos ou séculos. O processo do crescimento discreto é o mais comum e natural no estudo das mudanças populacionais, sendo portanto o nosso propósito aqui .

Nosso objetivo, com os alunos, foi trabalhar a aplicação dos conceitos matemáticos aqui apresentado, mas agora sob a ótica do crescimento populacional, visto que a previsão do crescimento populacional de um país ou de uma região é fundamental para avaliar sua capacidade de desenvolvimento e estabelecer mecanismos que sustentem uma produção compatível com o bem-estar social, tema esse de extrema relevância para debater com os alunos.

Na escolha desse tema, foi levado em consideração a contextualização da realidade do município de Limeira, que tem aproximadamente 581km², e que em 2018 apresentou aproximadamente 521,51hab/km², segundo o IBGE. É uma cidade que tem recebido cada vez mais visibilidade. Aplicamos o Modelo Malthusiano para o crescimento populacional com o objetivo de fazermos a comparação dos resultados obtidos pelo modelo, com os dados estatísticos obtidos no IBGE, no período de 2004 a 2015. Com os resultados obtidos através da aplicação de uma modelagem adequada para o crescimento populacional, vamos verificar a validação do modelo e consequentemente validação da teoria de Malthus.

Os dados relativos à população de Limeira (entre 2004 e 2015) foi fruto de pesquisa feita pelos alunos e propomos algumas questões para aguçar a curiosidade referente ao assunto.

a) Qual a população de Limeira em 2018? E em 2030?

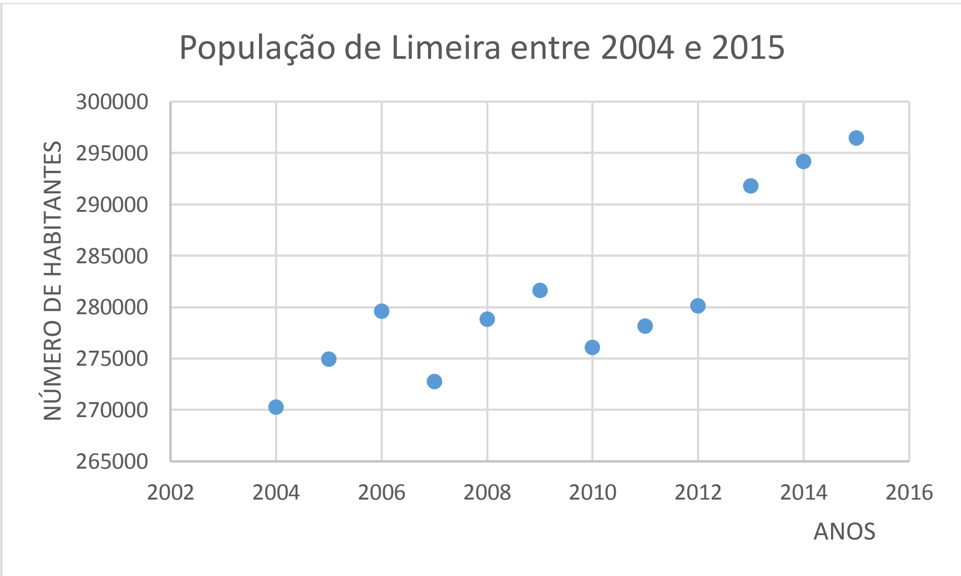
b) O modelo apresentado indica um acerto na previsão?

Tabela 9 - Pesquisa dos alunos relativo à cidade de Limeira no IBGE

Ano	População
2004	270223
2005	274906
2006	279554
2007	272734
2008	278776
2009	281583
2010	276022
2011	278093
2012	280096
2013	291748
2014	294128
2015	296440

Fonte: Autoria própria (2019)

Gráfico 9 - População de Limeira de 2004 até 2015



Fonte: Autoria própria (2019)

5.2.2 Modelo Malthusiano em tempo discreto

Thomas Malthus (1766-1834) foi um economista, sociólogo e clérigo anglicano inglês, cujo pensamento social e econômico girava em torno de sua teoria sobre o crescimento da população, que segundo ele, enquanto os meios de subsistência crescem em progressão aritmética, a população cresce em progressão geométrica.

Em 1798, Thomas Malthus publicou, de forma anônima, a primeira edição de "Ensaios Sobre o Princípio da População", onde afirmava que a miséria era consequência do mau desempenho das instituições e que a terra só poderia alimentar a todos os seres humanos se houvesse melhoras na assistência pública à população pobre, para se conseguir uma maior igualdade social.

Na atualidade, suas idéias são retomadas com um outro sentido: o crescimento da população mundial aumenta a pressão sobre o meio ambiente e pode tornar inviável a vida no planeta . Sendo p(t) a população no ano t ,matematicamente, pode-se descrever este modelo recursivamente por:

$$\frac{P(t+1)-P(t)}{P(t)}=\alpha, \quad \alpha \in R$$

Esta expressão indica que a variação relativa da população é proporcional à própria população em cada período de tempo.

O modelo discreto (tempo discreto) de Malthus é dado por:

$P(t+1) - P(t) = \alpha \,.P(t)$, então :

$P(t + 1) - P(t) = \alpha P(t) \Rightarrow P(t + 1) = (1 + \alpha)P(t).$

Consideramos a População em 2004 como a população inicial, ou seja,

$P(0) = P_0$. Daí temos :

$P(1) = (1 + \alpha)P(0) = (1 + \alpha) P_0$

$P(2) = (1 + \alpha)P(1) = (1 + \alpha)(1 + \alpha) P_0 = (1 + \alpha)^2 P_0$

$P(3) = (1 + \alpha)P(2) = (1 + \alpha)(1 + \alpha)^2 P_0 = (1 + \alpha)^3 P_0$

.

.

.

$P(t)= (1 + \alpha)^t P_0$

Como o período é de 11 anos, então t = 11 e a população em 2004 (inicial) é P_0 = 270223 e a população 11 anos depois, em 2015, é P(11) = 296440. Usando P(t) = 270223$(1 + \alpha)^t$, temos : P(11) = 270223.$(1 + \alpha)^{11} \Rightarrow 296440 = 270223(1 + \alpha)^{11} \Rightarrow$

$(1 + \alpha)^{11} = \frac{296440}{270223}$

$1 + \alpha = 1.00845 \Rightarrow \alpha = 1.00845 - 1 = 0.00845$

0.00845 x 100 = 0.845%

Pelo modelo de crescimento populacional discreto de Malthus, sabemos que o crescimento é constante, ou seja, a população brasileira cresceu 0.845% ao ano.

5.2.3 Cálculo dos alunos relativo à cidade de Limeira segundo Malthus

Encontrado o valor da constante temos α = 0,00845. Os alunos, em grupos, construíram uma tabela usando a constante de Malthus.

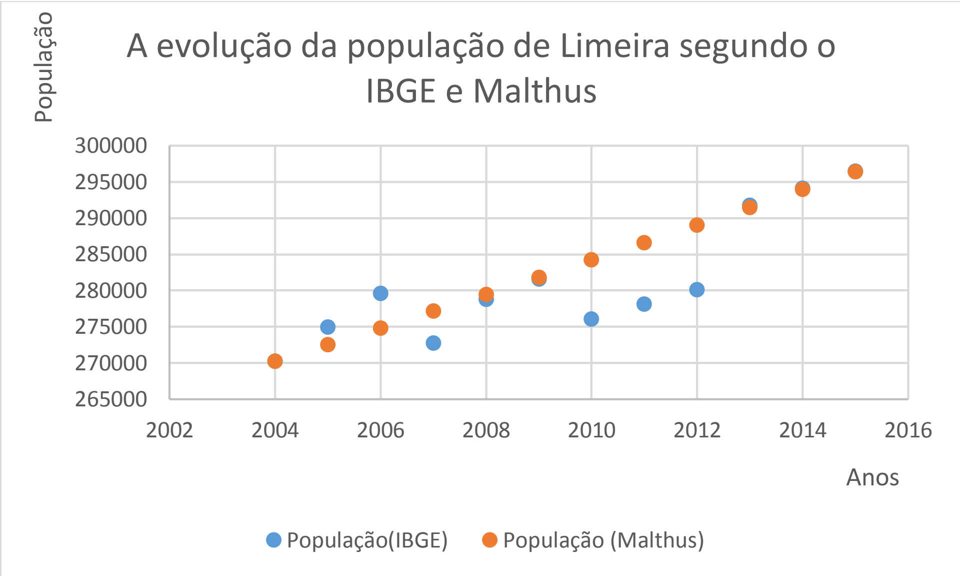
Tabela 10 - população segundo Malthus

Ano	População (hab.)
2004	270223
2005	272506
2006	274809
2007	277131
2008	279472
2009	281834
2010	284216
2011	286617
2012	289039
2013	291482
2014	293944
2015	296428

Fonte: Autoria própria (2019)

Após os cálculos colocaram no mesmo plano cartesiano os dados do IBGE e os dados calculados segundo o Modelo de Malthus.

Gráfico 10 - Modelo de Mathus e o crescimento populacional segundo o IBGE



Fonte: Autoria própria (2019)

Em seguida encontraram o erro relativo, e responderam o questionamento feito no início relativo a população da cidade de Limeira.

Tabela 11 - Cálculo do erro relativo entre a o IBGE e a população segundo Malthus

Ano	População (IBGE)	População (MALTHUS)	ERRO RELATIVO
2004	270223	270223	0,000%
2005	274906	272506	0,807%
2006	279554	274809	1,726%
2007	272734	277131	-1,586%
2008	278776	279472	-0,249%
2009	281583	281834	- 0,089%
2010	276022	284216	-2,883 %
2011	278093	286617	-2,974 %
2012	280096	289039	- 3,094%
2013	291748	291482	0,0915 %
2014	294128	293944	0,0625 %
2015	296440	296428	0,0040 %

Fonte: Autoria própria (2019)

a) Qual a população de Limeira em 2018? E em 2030?

$P_t = (k + 1)^t . P_0$

$P_{18} = (0,00845 + 1)^{14} . 270223$

P_{18} = 304.640 habitantes em 2018 . (Malthus)

Segundo o IBGE , a populção estimada para 2018 é 303.682 pessoas . Lembramos que o próximo censo demográfico deve ocorrer em 2020.

$P_t = (k + 1)^t . P_0$

$P_{30} = (0,00845 + 1)^{24} . 270223$

$P_{30} =$ 330 .695 habitantes em 2030

b) O modelo apresentado indica um acerto na previsão?

Respondendo à pergunta e já concluindo, os dados e informações correspondentes ao período de nosso trabalho parecem sugerir uma pesquisa até aceitável para a cidade de Limeira, ficando evidente na tabela onde mostramos o erro relativo entre os dados do IBGE e o modelo de Malthus, entretanto nas discussões em grupo observamos que esse modelo não é apropriado para descrever populações visto que o modelo nos mostra somente o crescimento, desconsiderando possíveis problemas.

Como cita Bassanezi "o Modelo de Malthus propõe um crescimento de vida otimizada, sem fome, guerra, epidemia ou qualquer catástrofe, onde todos os indivíduos são idênticos, com o mesmo comportamento". Na realidade, não é isso que acontece. A modelagem matemática para descrever o crescimento populacional evoluiu, passando por várias modificações após Malthus. Em meados de 1838, o sociólogo belga Pierre Francois Verhulst criou um dos modelos mais importantes e conhecidos em dinâmica populacional: o modelo Logístico.

Nele é suposto que toda população é predisposta a sofrer inibições naturais em seu crescimento, devendo tender a um valor limite constante quando o tempo cresce. De qualquer forma, um modelo matemático pode dar apenas uma aproximação de algum fenômeno da realidade. Nesse nosso estudo estamos interessados apenas em ter uma visão introdutória no estudo de dinâmica de crescimentos populacionais, fazendo uso do modelo discreto de Malthus, que é mais simples.

5.3 ATIVIDADE 3 – APLICAÇÃO DO MODELO DE MALTHUS E UM MODELO QUADRÁTICO NO ESTUDO DE ÓBITOS POR CÂNCER DE PULMÃO NA CIDADE DE LIMEIRA

Solicitamos aos alunos que coletassem os dados através do Instituto Nacional do Câncer (INCA), relativo ao número de óbitos por câncer de pulmão registrado no período de 2004 até 2015 na cidade de Limeira e em seguida representassem graficamente os dados para análise da disposição dos pontos no plano cartesiano.

Pela representação dos pontos no gráfico, verificamos a maior faixa etária de risco para o câncer de pulmão, o que contribuiu para relacionar a modelagem matemática com situações do cotidiano na elaboração, ou se necessária, a reelaboração dos conceitos matemáticos.

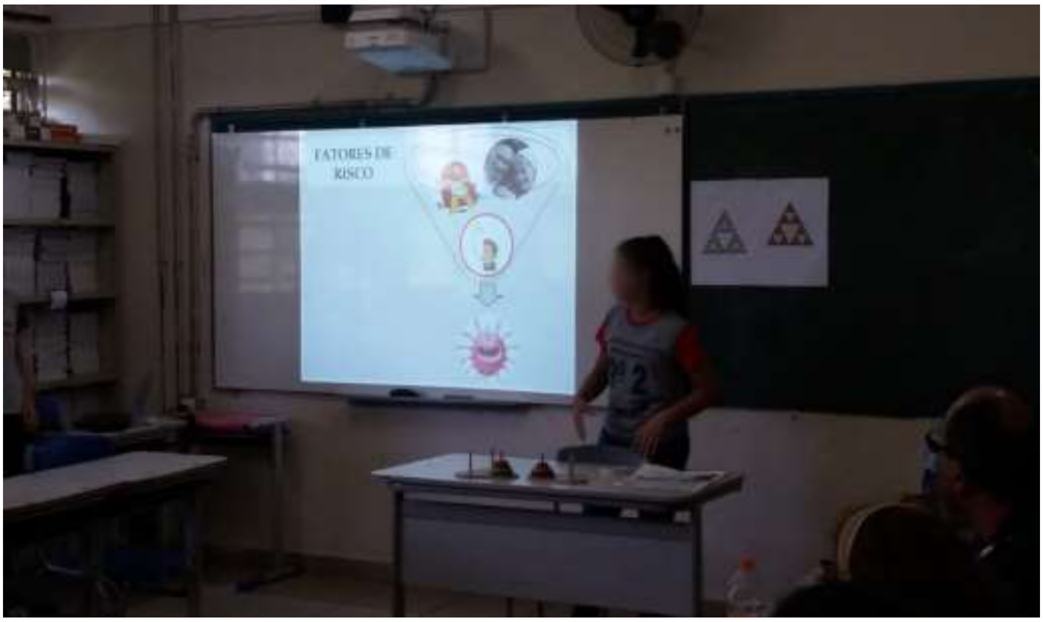
5.3.1 Pesquisa: O Câncer do Pulmão

Entre todos os tumores malignos, o câncer de pulmão é o mais frequente em todo o mundo, e também o que mais mata: são 1,76 milhão o número de vítimas por ano, segundo a Organização Mundial da Saúde (OMS). No Brasil, o Instituto Nacional de Câncer (Inca) estima para 2018 mais de 31 mil novos casos, sendo 18.740 homens e 12.530 mulheres. O tabagismo é a principal causa da doença: o hábito está envolvido em 90% de todos os casos. Esse é o segundo tipo de câncer mais frequente em homens e o quarto em mulheres no país, excluindo-se o câncer de pele não melanoma, o mais prevalente para ambos os sexos.

Estão no grupo de maior risco indivíduos de 55 a 74 anos. O câncer de pulmão é uma doença grave caracterizada pela presença de sintomas como tosse, rouquidão, dificuldade em respirar e emagrecimento. Apesar da gravidade, o câncer de pulmão tem cura quando identificado precocemente, e o seu tratamento, que pode ser feito com cirurgia, radioterapia ou quimioterapia, podendo durar meses ou anos. No entanto, o mais comum é que o câncer de pulmão seja descoberto já na fase avançada da doença, que se desenvolve muito rápido, havendo menor chance de cura.

A incidência do câncer de pulmão aumenta consideravelmente a partir dos 50 anos, sendo que a grande maioria é diagnosticada entre os 60, 70 e 80 anos de idade. Estudos têm relatado que apenas de 1 a 6 % dos pacientes com câncer de pulmão têm menos de 40 anos. No sexo masculino, sem levar em consideração o câncer de pele não melanoma, o câncer de pulmão é o segundo mais incidente no Brasil.

Figura 15 - Aluna apresentando sobre o câncer



Fonte: Autoria própria (2019)

5.3.2 A pesquisa dos alunos sobre o Câncer do Pulmão na cidade de Limeira

A justificativa desse tema de estudo se deve a dois fatos. O primeiro é o comentário de uma aluna sobre a perda de uma pessoa próxima. Dizia ela que após suas pesquisas, a estatística diz que dificilmente um paciente irá viver por mais de 5 anos, mas que na prática cada caso é um caso, pois é apenas uma estimativa.

Aproveitei o momento e também contei de um senhor próximo a mim, porteiro da escola que trabalhei que havia falecido recentemente e o tempo de sobrevida foi próximo a um 1 ano. Outra justificativa se deve à curiosidade demonstrada pelos alunos em saber um pouco mais sobre a doença.

5.3.3 Os casos de câncer de pulmões no município

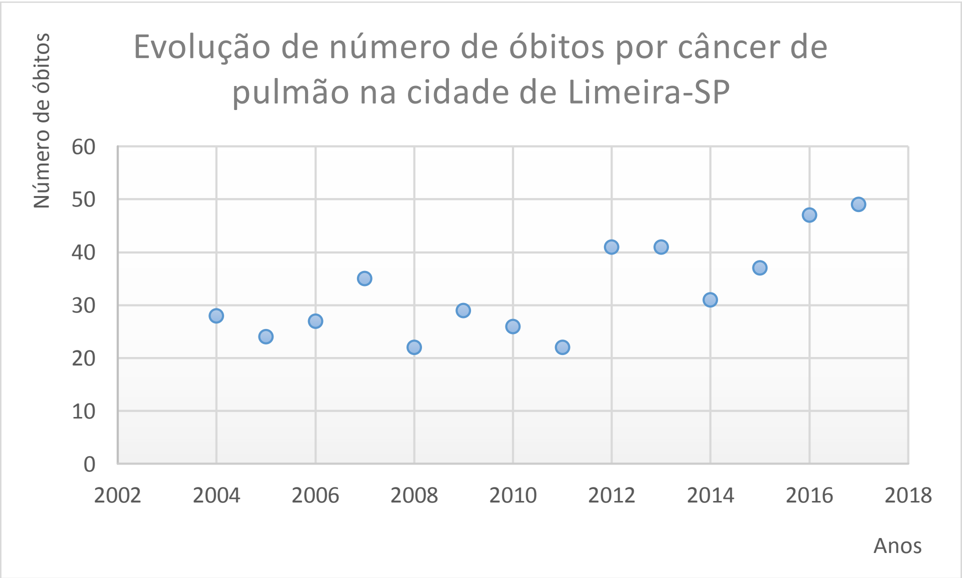
Os alunos pesquisaram os dados de uma pesquisa realizada pelo Instituto Nacional do Câncer (INCA), que fez um levantamento do número de óbitos registrado no período de 2004 a 2017 na cidade de Limeira.

Tabela 12 - Número de óbitos por câncer de Pulmão na Cidade de Limeira

Ano	Nº de Casos
2004	28
2005	24
2006	27
2007	35
2008	22
2009	29
2010	26
2011	22
2012	41
2013	41
2014	31
2015	37
2016	47
2017	49

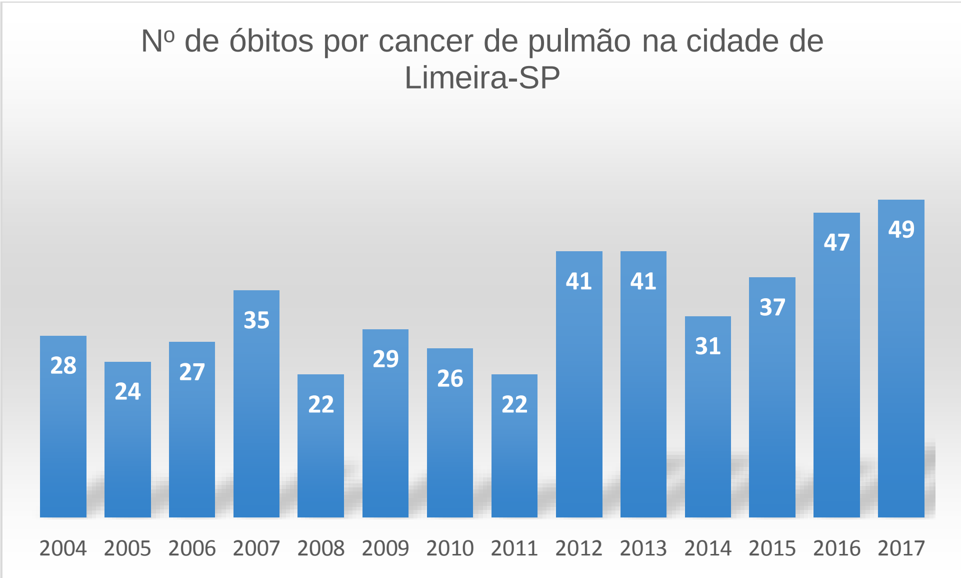
Fonte: INCA (2019) adaptado

Gráfico 11 - Evolução do número de óbitos de Cancer de Pulmão entre 2004 e 2017 na cidade de Limeira



Fonte: INCA (2019) adaptado

Gráfico 12 - Número de óbitos de Cancer de Pulmão entre 2004 e 2017



Fonte: INCA (2019) adaptado

O cálculo dos alunos relativo ao crescimento dos casos de óbitos por câncer de pulmão na cidade de Limeira.

Tabela 13 - Cálculo relativo para o número de óbitos de pulmão na cidade de Limeira

Ano	Cálculo relativo (Acréscimo ou Decréscimo do Número de Óbitos por câncer de pulmão).
2004 – 2005	-0,14
2005 – 2006	0,125
2006 – 2007	0,296
2007 – 2008	-0,371
2008 – 2009	0,318
2009 – 2010	-0,103
2010 – 2011	-0,153
2011 – 2012	0,863
2012 – 2013	0,000
2013 – 2014	-0,243
2014 – 2015	0,193
2015 – 2016	0.270
2016 – 2017	0.042

Fonte: INCA (2019) adaptado

6.3.4 Os casos de câncer de pulmões no Estado de São Paulo

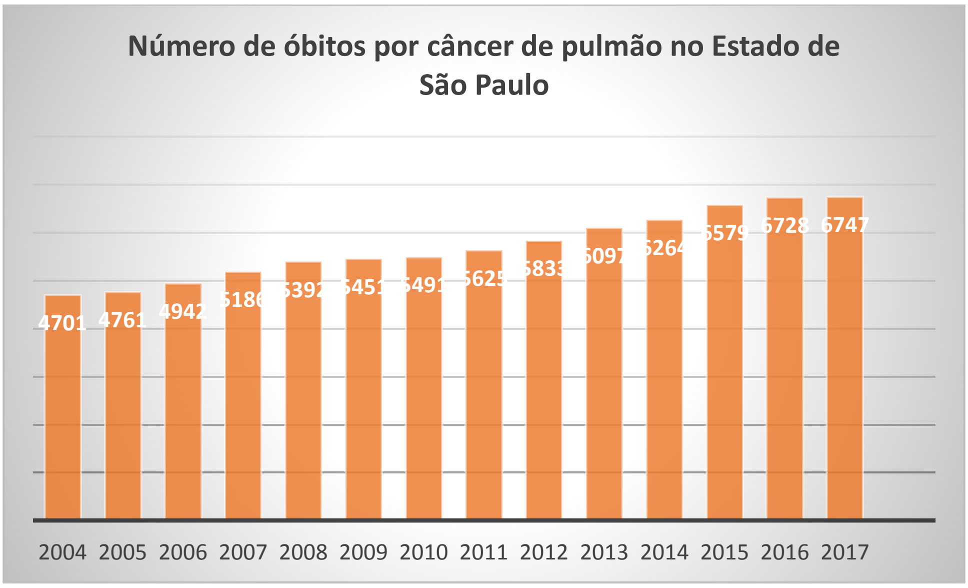
Os alunos pesquisaram os dados do Instituto Nacional do Câncer (INCA), que fez um levantamento do número de óbitos registrado no período de 2004 a 2017 no Estado de São Paulo.

Tabela 14 - Número de óbitos por câncer de Pulmão no Estado de São Paulo

Ano	Nº de Casos
2004	4701
2005	4761
2006	4942
2007	5186
2008	5392
2009	5451
2010	5491
2011	5625
2012	5833
2013	6097
2014	6264
2015	6579
2016	6728
2017	6747

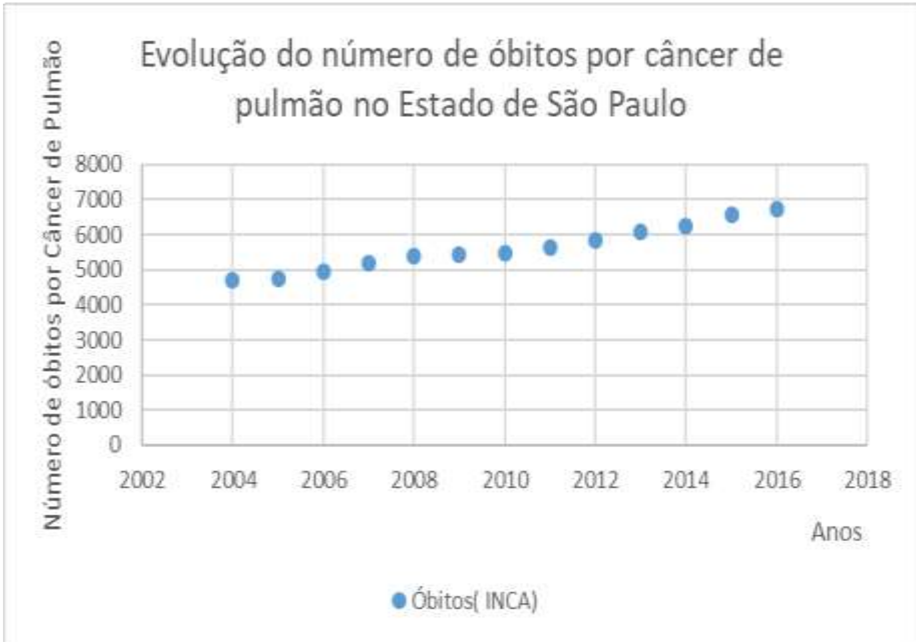
Fonte: INCA (2019) adaptado

Gráfico 13 - Número de óbitos de Cancer de Pulmão entre 2004 e 2017 no Estado de São Paulo



Fonte: INCA (2019)

Gráfico 14 - Evolução do número de óbitos de Cancer de Pulmão entre 2004 e 2017 no Estado de São Paulo



Fonte: Autoria própria (2019)

O cálculo dos alunos relativo ao crescimento dos casos de óbitos por câncer de pulmão no Estado de São Paulo

Tabela 15 - Cálculo relativo para o número de óbitos de pulmão no Estado de São Paulo

Ano	Cálculo relativo
2004 - 2005	0.013
2005 - 2006	0,038
2006 - 2007	0,049
2007 - 2008	0.039
2008 - 2009	0,318
2009 - 2010	0.010
2010 - 2011	0.024
2011 - 2012	0,037
2012 - 2013	0,045
2013 - 2014	0.027
2014 - 2015	0,050
2015 - 2016	0.023
2016 - 2017	0.0028

Fonte: Autoria própria (2019)

Gráfico 15 - Erro relativo entre o número de casos de óbitos por câncer de pulmão na cidade de Limeira - SP e no Estado de São Paulo

Fonte: Autoria própria (2019)

6.3.5 Uma análise e interpretação das tabelas e gráficos estatísticos entre a cidade de Limeira e o Estado de São Paulo utilizando dados interdisciplinares

Foram desenvolvidos e realizados procedimentos que possibilitaram ao aluno coletar, organizar e sintetizar levantamentos, comparar e analisar dados para defender ideias, bem como pesquisar e comunicar dados estatísticos das pesquisas através de tabelas e gráficos, interpretando as representações gráficas que foram construídas.

Em relação aos percentuais acima descritos, o gráfico aponta uma pequena variação em porcentagem do número de óbitos por câncer de pulmão no Estado de São Paulo e praticamente existindo um crescimento constante nos casos de óbitos por câncer de pulmão. Já na cidade de Limeira não notamos a mesma tendência, observando entre 2004 e 2017 um crescimento e decrescimento praticamente em todo período pesquisado, percebendo a linha azul acima do marco zero nos últimos quatro anos indicando que os casos de óbitos por essa doença vêm aumentando.

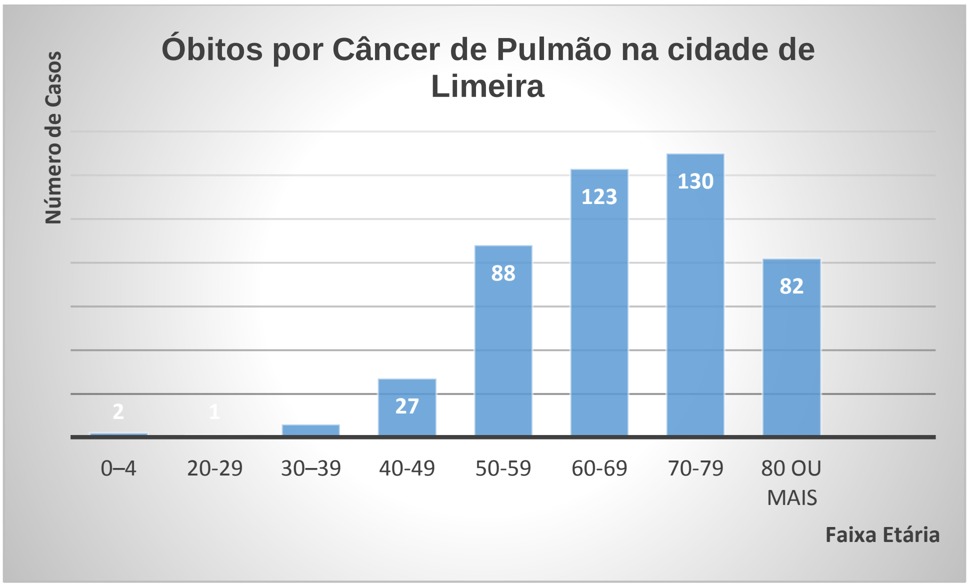
Após essa pesquisa foi proposto uma análise por faixa etária na cidade de Limeira.

Tabela 16 - Óbitos por Câncer de Pulmão por faixa etária na cidade de Limeira entre os anos de 2004 e 2015

Faixa Etária (anos)	Óbitos por Câncer de Pulmão na cidade de Limeira
0–4	2
20-29	1
30–39	6
40-49	27
50-59	88
60-69	123
70-79	130
80 ou mais	82

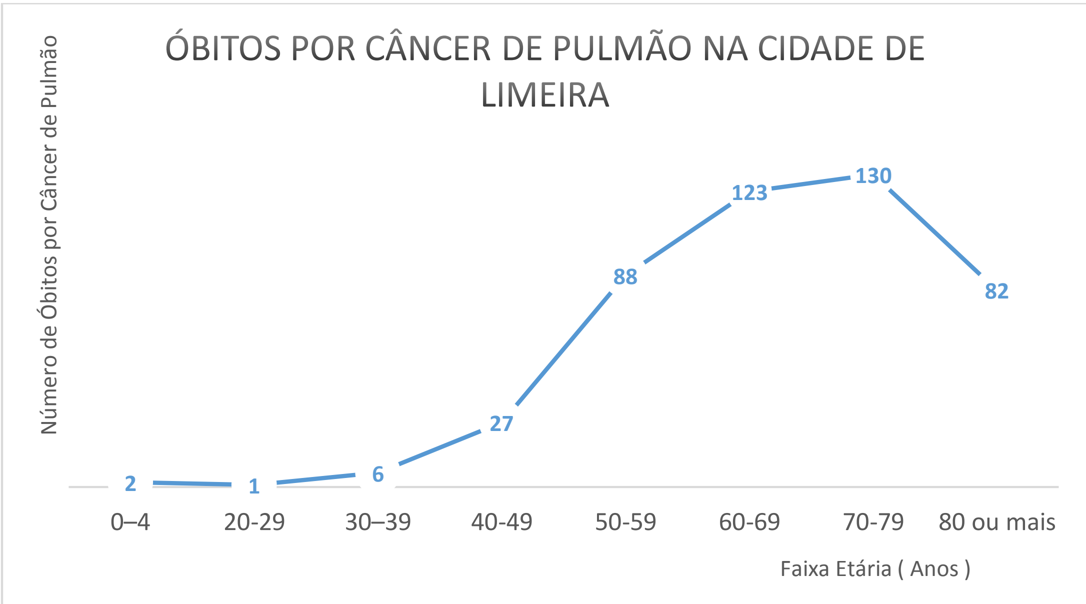
Fonte: Autoria própria (2019)

Gráfico 16 - Faixa etária de casos de óbitos por câncer de pulmão na cidade de Limeira



Fonte: INCA (2019) adaptado

Gráfico 17 - Evolução do número de óbitos por câncer de pulmão por faixa etária



Fonte: INCA (2019) adaptado

5.3.6 A curiosidade dos alunos

Qual a idade onde há maior incidência de mortes por câncer de pulmão? Propomos discutir um modelo que descrevesse o gráfico acima para responder tal pergunta. Como os dados aparecem por faixa etária, propus que encontrassem um valor da idade próximo ao valor central, como abscissa, e associassem a quantidade de óbitos à ordenada. Como o gráfico plotado no Excel lembra uma parábola foram buscar um modelo matemático associada a função quadrática.

Outra decisão tomada antes do início dos cálculos foi que se tratava de uma parábola com concavidade voltada para baixo, ou seja, o coeficiente angular seria negativo ($a < 0$ e $a \in R$), portanto tínhamos um modelo matemático caracterizado por $f(x)= - ax^2 + bx + c$; a, b e c $\in$ R e $a \neq 0$. Optaram por três coordenadas que chamaram de:

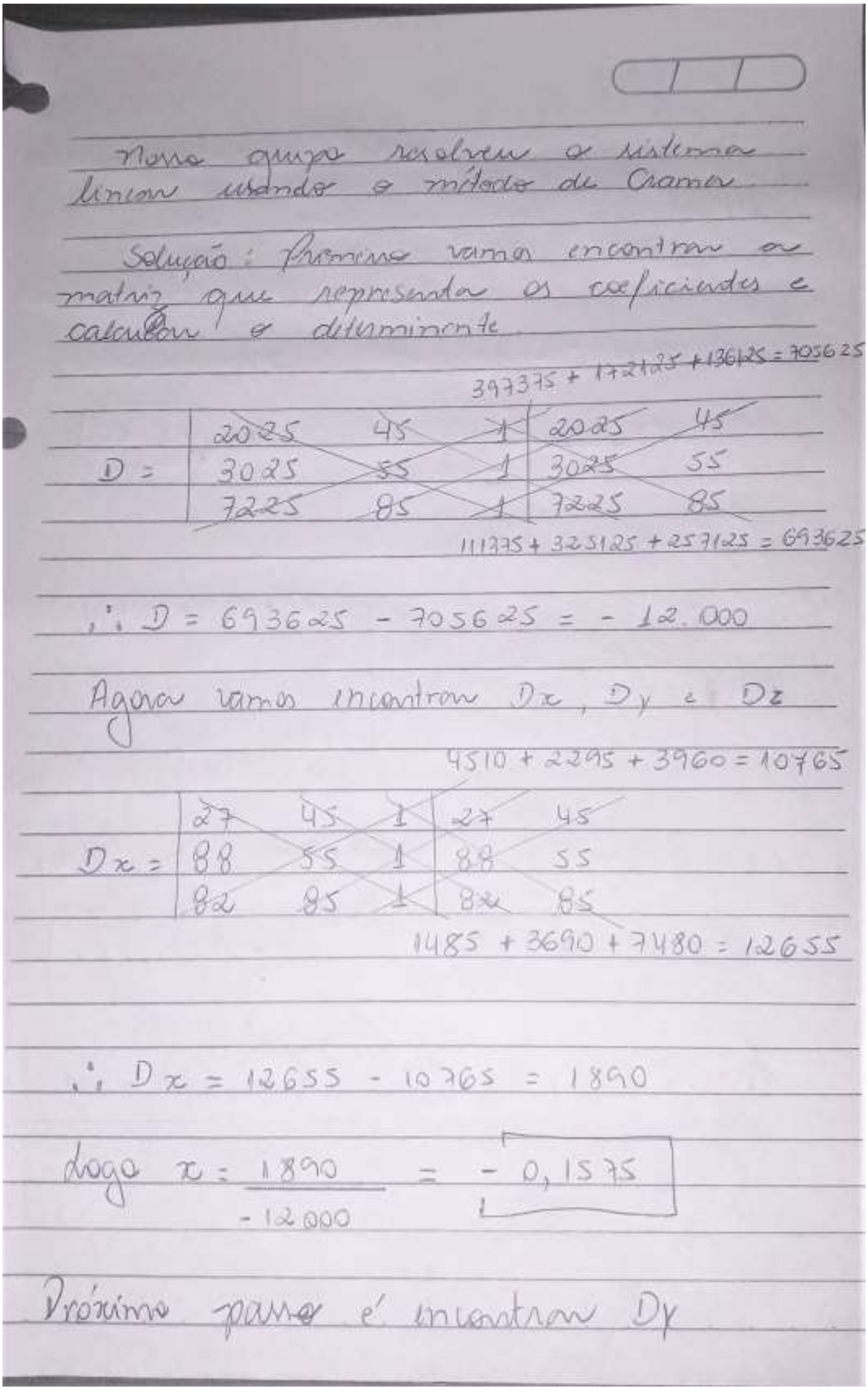
A = (45, 27) ; B = (55 ,88) ; C (85 ,82)

Uma observação: O cálculo da idade com maior número de óbitos, ou seja, as coordenadas acima foram extraídas da tabela, mas admitimos, para a construção do modelo matemático que em um determinado intervalo, todos os óbitos aconteceram na idade que coincide com a idade média do intervalo. Por exemplo, na faixa (40-49) anos que apresentou 27 óbitos, consideramos que todos os óbitos aconteceram na idade média do intervalo, ou seja, 45 anos. (Valor aproximado para cima)

5.3.7 O modelo encontrado

Como os grupos eram compostos por alunos das três séries do Ensino Médio, propomos a resolução do sistema de duas maneiras diferentes e confrontamos os resultados. Segue a resolução de dois grupos. Alguns grupos resolveram usando a eliminação de variáveis e outros grupos usaram a Regra de Cramer. Conferimos as respostas, alguns ajustes de erros de álgebra e por fim chegamos a seguinte função quadrática.

Figura 16 - Representando do cálculo dos grupos


Nosso grupo resolveu o sistema linear usando o método de Cramer.

Solução: Primeiro vamos encontrar a matriz que representa os coeficientes e calcular o determinante.

397375 + 172125 + 136125 = 705625

$$D = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2025 & 45 & 1 & 2025 & 45 \\ 3025 & 55 & 1 & 3025 & 55 \\ 7225 & 85 & 1 & 7225 & 85 \end{array}\right|$$

111375 + 325125 + 257125 = 693625

$\therefore D = 693625 - 705625 = -12.000$

Agora vamos encontrar Dx, Dy e Dz

4510 + 2295 + 3960 = 10765

$$Dx = \left|\begin{array}{ccc|cc} 27 & 45 & 1 & 27 & 45 \\ 88 & 55 & 1 & 88 & 55 \\ 82 & 85 & 1 & 82 & 85 \end{array}\right|$$

1485 + 3690 + 7480 = 12655

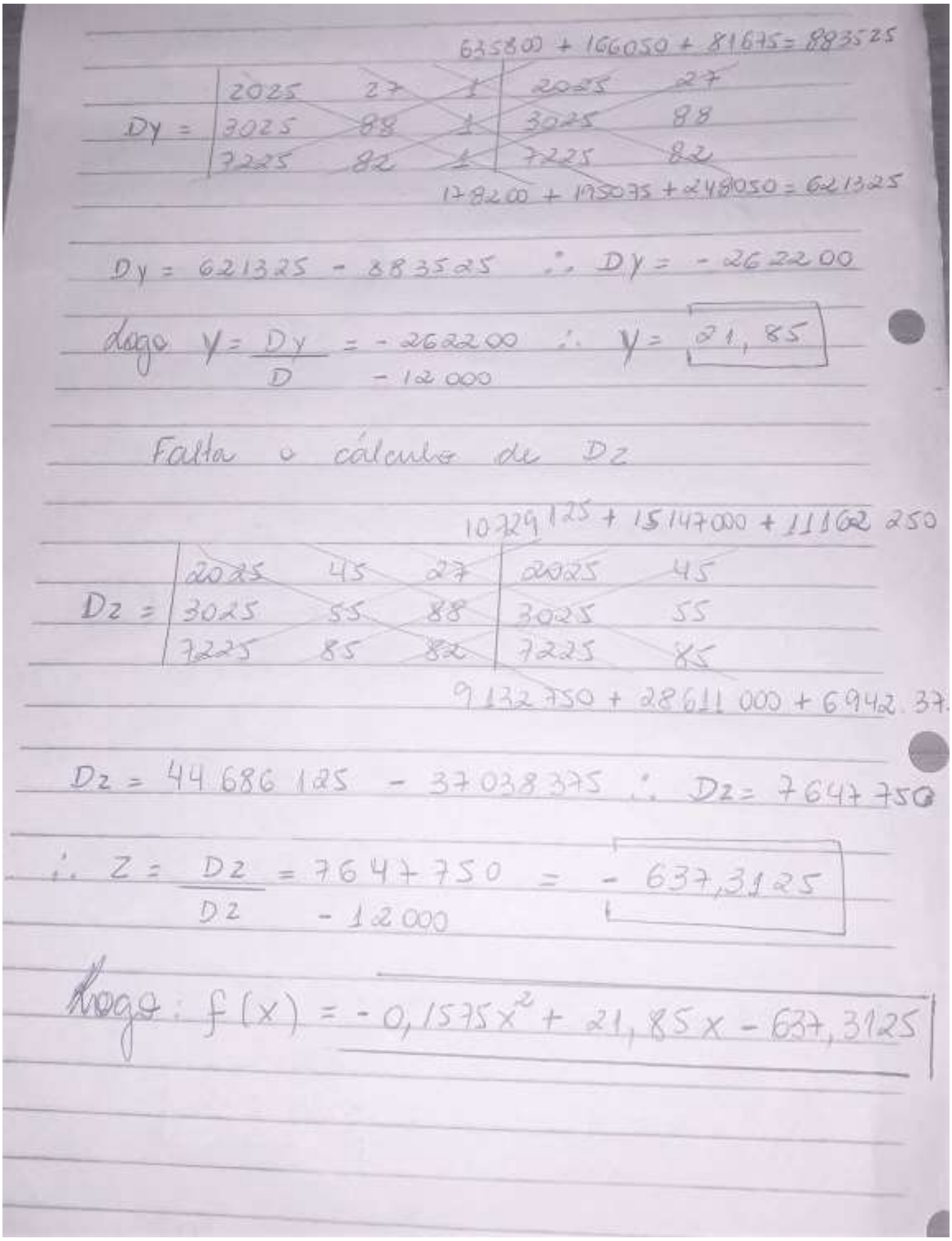
$\therefore Dx = 12655 - 10765 = 1890$

Logo $x = \dfrac{1890}{-12000} = \boxed{-0,1575}$

Próximo passo é encontrar Dy

Fonte: Autoria própria (2019)

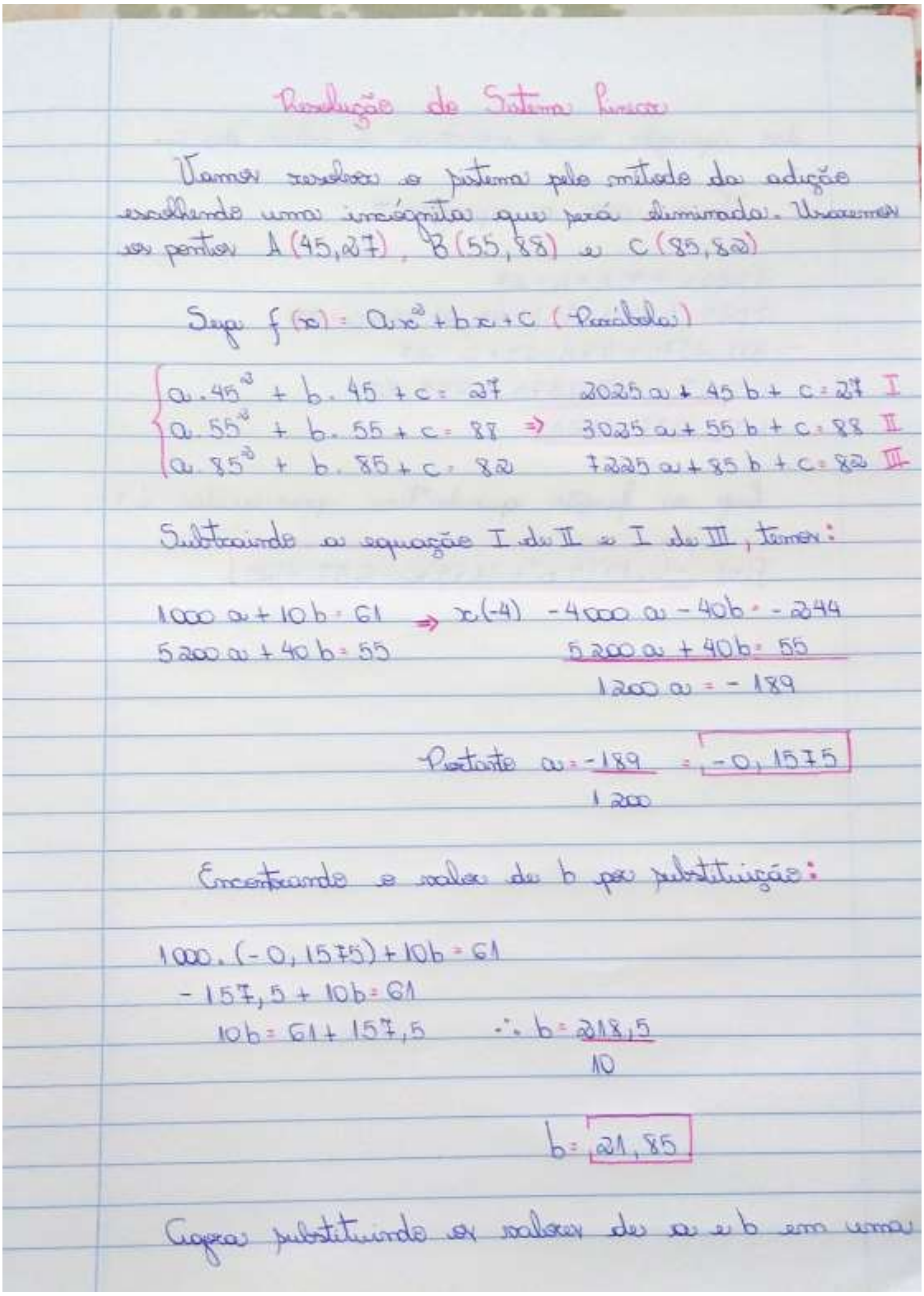
Figura 17 - Cálculo feito por um dos grupos referente a resolução de um sistema usando a Regra de Cramer.



Fonte: Autoria própria (2019)

Função encontrada: f(x)= - $0{,}1575x^2 + 21{,}85x – 637{,}3125$

Figura 18 - O outro grupo com outros cálculos



Resolução de Sistema Linear

Vamos resolver o sistema pelo método da adição escolhendo uma incógnita que será eliminada. Usaremos os pontos A (45,27), B (55,88) e C (85,82)

Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$ (Parábola)

$$\begin{cases} a.45^2 + b.45 + c = 27 \\ a.55^2 + b.55 + c = 88 \\ a.85^2 + b.85 + c = 82 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2025a + 45b + c = 27 & \text{I} \\ 3025a + 55b + c = 88 & \text{II} \\ 7225a + 85b + c = 82 & \text{III} \end{matrix}$$

Subtraindo a equação I da II e I da III, temos:

$$1000a + 10b = 61 \Rightarrow x(-4) \quad -4000a - 40b = -244$$
$$5200a + 40b = 55 \qquad 5200a + 40b = 55$$
$$1200a = -189$$

Portanto $a = \frac{-189}{1200} = \boxed{-0,1575}$

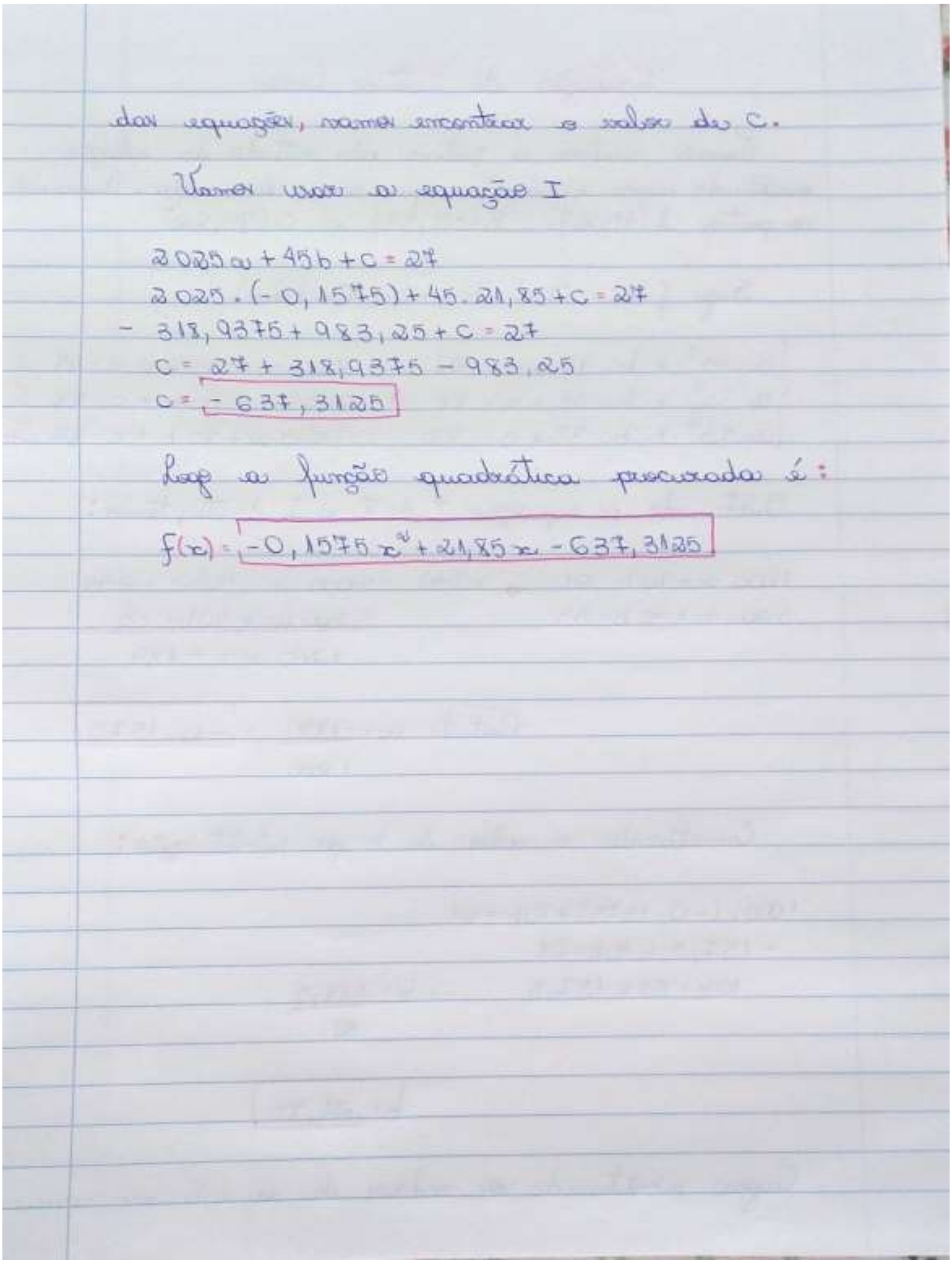
Encontrando o valor de b por substituição:

$$1000.(-0,1575) + 10b = 61$$
$$-157,5 + 10b = 61$$
$$10b = 61 + 157,5 \quad \therefore b = \frac{218,5}{10}$$
$$b = \boxed{21,85}$$

Agora substituindo os valores de a e b em uma

Fonte: Autoria própria (2019)

Figura 19 - Cálculo feito por outro grupo referente a resolução de um sistema usando o Método da Adição.



dos equações, vamos encontrar o valor de c.

Vamos usar a equação I

$2025a + 45b + c = 27$

$2025 \cdot (-0,1575) + 45 \cdot 21,85 + c = 27$

$-318,9375 + 983,25 + c = 27$

$c = 27 + 318,9375 - 983,25$

$c = \boxed{-637,3125}$

Logo a função quadrática procurada é:

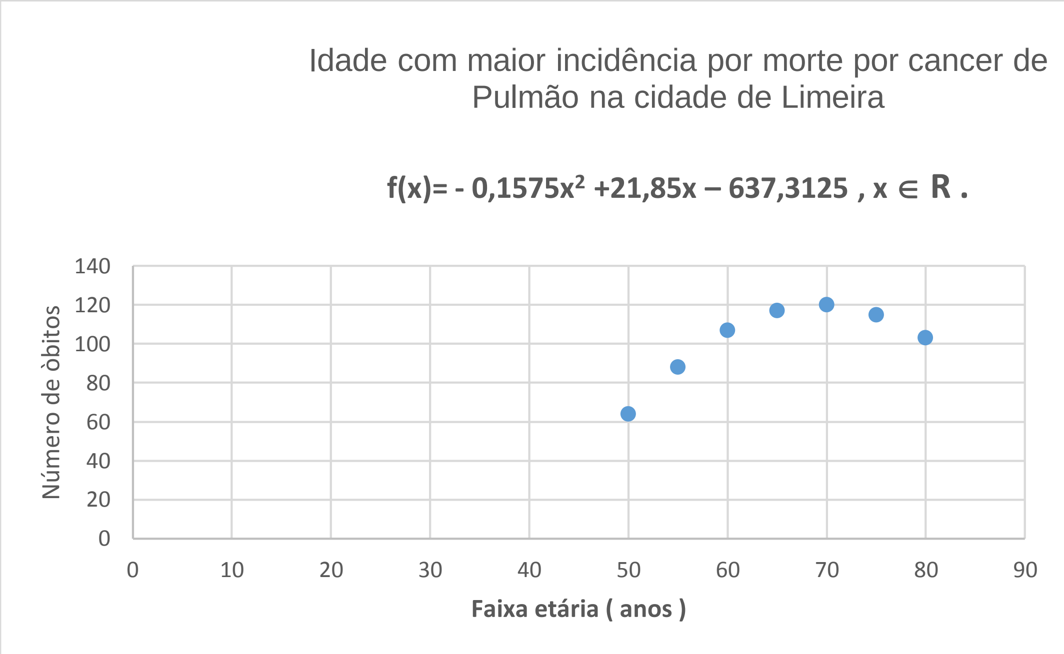
$f(x) = \boxed{-0,1575x^2 + 21,85x - 637,3125}$

Fonte: Autoria própria (2019)

Função encontrada: f(x)= - $0,1575x^2 + 21,85x – 637,3125$.

Após os cálculos propomos ir até a sala de informática onde, através do Excel, os alunos construíram a função quadrática referida.

Gráfico 1 - Parábola mostrando a idade próxima onde a quantidade é maior de mortes por câncer do pulmão na cidade de Limeira



Fonte: INCA (2019) adaptado

Foi feito o cálculo do vértice no eixo horizontal e encontramos:

$$X_v = \frac{-b}{2a} = -\frac{21,85}{2.(-0.1575)} = \frac{21,85}{0,315} = \text{69,36 anos.}$$

Após as atividades no laboratório de informática com o software Excel, foi realizado um novo feedback com os alunos em sala de aula. Iniciamos uma discussão fazendo questionamentos com o intuito de perceber se os alunos tinham se apropriado de conceitos como a relação ao problema proposto através da pesquisa dos dados de câncer de pulmão, a resolução do sistema linear, o encontro de uma função polinomial quadrática e o cálculo do vértice da parábola.

É importante deixar claro que o uso da tecnologia, presença firme na geração atual, é uma ferramenta que nos auxilia na resolução de situações do cotidiano, além da motivação do educando para que este passe a visualizar com mais rapidez e perfeição os conteúdos estudados, compreendendo e assimilando melhor os conteúdos, que se tornam mais significativos.

O modelo quadrático aqui descrito apontou a idade aproximada de 69 anos com maior incidente de mortes o que deixa o aluno reflexivo nos seus cálculos matemáticos relativo a tabela pesquisada, que aponta maior número de óbitos, pessoas entre 70 e 79 anos.

Lembrando que um modelo matemático é simplesmente uma aproximação da realidade, notamos que para o ensino aprendizagem, com a representação da função quadrática no Excel, os alunos puderam visualizar a maior faixa etária de risco para o câncer de pulmão, o que contribuiu para relacionar a modelagem matemática com situações do cotidiano na construção, ou se necessária, a retomada de conceitos matemáticos.

5.4 ATIVIDADE 4: UMA ANÁLISE DO NÚMERO DE ÓBITOS POR CÂNCER DE PULMÃO NA CIDADE DE LIMEIRA

Aqui, simplesmente solicitamos um trabalho final deste projeto, que foi fazer a comparação da Atividade 2 e Atividade 3, ou seja, a comparação dos modelos do crescimento da população e do número de casos de óbitos com casos de câncer de pulmão no município de Limeira e fazer as conclusões.

Após a análise dos dados e dos gráficos deste trabalho os alunos, nas discussões em grupos, e muita pesquisa, observaram que os óbitos e taxas padronizadas de morte por câncer de pulmão na cidade de Limeira apresentaram variação no intervalo pesquisado. Esse número foi menor em 2008 e 2011, mas o fator preocupante é que nos últimos quatro anos esses números vêm aumentando.

Cabe aqui a conscientização de cada aluno que o câncer do pulmão, de doença rara no início do século XX, tornou-se a neoplasia mais letal em todo o mundo. Essa mudança se iniciou na segunda década do século, quando se observou que o número de casos vinha aumentando em todo o mundo. Após a consulta no site do INCA verificaram que uma em cada duas pessoas que fumam morre de doença relacionada com o tabagismo.

Metade dessas mortes ocorre na meia-idade e, em média, a expectativa de vida do fumante está reduzida em 20 anos, comparativamente com a do não fumante. A fumaça do cigarro mata de 24 formas diferentes, sendo o câncer do pulmão a principal delas. Os fumantes devem ser estimulados a parar de fumar caso fumem, as crianças e os adolescentes devem ser convencidos a não começar a fumar. É o melhor método para prevenir todas essas doenças.

Outro dado intrigante e assustador para a cidade foi constatar que em 2017 o o Estado de São Paulo apresentava estimativa próximo de 45.094.866 de habitantes espalhados pelos seus 645 municípios e 3879 óbitos por câncer de pulmão, ou seja próximo a 8,60 a cada 100.000 habitantes e na cidade de Limeira com aproximadamente 300000 habitantes em 2017 e 49 óbitos por câncer de pulmão neste ano, temos 16,33 óbitos a cada 100000 habitantes.

Muito preocupante esses dados e como meta para a cidade foi citado o desenvolvimento de políticas públicas, parcerias, integração, investir em estudos e conscientização, iniciando sempre pelas escolas.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por todas as questões observadas no decorrer desta dissertação, percebe-se que a educação do país pode ter solução, restando aos professores serem criativos e inovadores e que sempre estejam em contato com novas práticas para ensinar os mais diversificados tópicos. É preciso que os professores trabalhem com amor. Paulo Freire diz: “A educação é um ato de amor, por isso, um ato de coragem. Não se pode temer o debate. A análise da realidade. Não pode fugir à discussão criadora, sob pena de ser uma farsa. Como aprender a discutir e a debater como uma educação que impõe”? (FREIRE ,1975 :96**).**

Nesse sentido, neste trabalho procuramos uma alternativa de ensino, a modelagem matemática através das equações de diferenças e em um dado momento, ativando a curiosidade, aplicamos também a função do 2º grau. Foi dado ao aluno a oportunidade de propor situações do cotidiano, onde com o auxílio de conceitos matemáticos e por meio de pesquisa, fosse aguçado seu senso crítico. O que propomos nas três atividades deste trabalho não foi um manual de regras, e sim a oportunidade de refletir, pensar e construir novos conhecimentos para o aprendizado; convidando o aluno a atuar, discutir e investigar, através da utilização de conhecimentos matemáticos em situações do cotidiano.

A simulação da compra do veículo de forma direta na concessionária foi marcante pois houve reunião entre os alunos, discussão com o vendedor e por fim a análise das taxas de juros real e um possível desconto. Quando o foco do trabalho foi a pesquisa da evolução populacional da cidade de Limeira os alunos verificaram através dos gráficos que o modelo de Malthus é válido para fazer algumas previsões, porém sua margem de erro é alta, pois o mesmo considera que a população se mantém constante durante o crescimento, que as taxas de natalidade e de mortalidade permaneçam estáveis e considerou ainda que não ocorreu migrações na população em pesquisa, o que quase sempre não acontece na realidade.

Quanto à pesquisa relativa a óbitos por câncer de pulmão despertou muita curiosidade nos alunos visto que foi tema sugerido por uma aluna que tinha perdido recentemente um parente próximo. Antes de mergulhar nos dados estatísticos foi tema de pesquisa e apresentação pelos alunos sobre programas para aumentar a conscientização do público a respeito do câncer de pulmão, estimular a cessação do tabagismo, diminuir o tempo de diagnóstico e melhorar o acesso a serviços de saúde especializados.

Na cidade de Limeira temos a ALICC (Associação Limeirense de Combate ao Câncer), que existe com o objetivo principal de prevenção do câncer e também assistir pessoas, em especial as com menor poder aquisitivo, portadoras dessa doença e a elas oferecer orientação, acompanhamento e outras necessidades. Quanto ao professor é valido ressaltar a brilhante experiência com modelagem matemática visto que os alunos ficaram compenetrados no problema, se envolveram e com isso a indisciplina foi reduzida durante o momento da aula até porque foi uma situação problema proposta por eles.

Também é fato que o uso do computador torna muito rica a aula possibilitando os alunos fazerem simulações da situação proposta que melhor lhes permitem a interpretação da situação. Os alunos fizeram uso do Excel e do Geogebra. Um fator negativo é que normalmente o conteúdo curricular é previamente estabelecido e, neste método alternativo a falta de tempo torna-se uma barreira visto que este processo necessita de um bom planejamento e ocupa um tempo maior de trabalho, mas com sucesso.

Nas aulas utilizamos aula expositiva, palestras, TV, lousa digital, vídeos, pesquisas, computador, relatórios, debates, trabalho individual e apresentações, inclusive, na UFSCAR, fato esse de grande alegria para o professor visto tratar-se de uma comunidade carente onde dificilmente são vendidos o sonho da Universidade Pública a eles, pelos pais. É fato que a educação necessita de profissionais competentes e que obtenham facilidade em propor uma metodologia que seja adequada ao desenvolvimento da aprendizagem dos alunos. Com aulas mais atrativas o interesse dos alunos irá aumentar, facilitando o desenvolvimento do ensino-aprendizagem, contribuindo assim para a formação do cidadão.

8. REFERÊNCIAS BIBLÍOGRÁFICAS

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VENTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2013. 160 p

ANTUNES, Celso. **Novas maneiras de ensinar, novas formas de aprender**. Porto Alegre: Artmed, 2002.

BARBOSA, J. C. **O que pensam os professores sobre Modelagem Matemática?** Zetetike. Campinas, v.7, n.11, p.67-85, 1999.

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrindo a Geometria Fractal – para a sala de aula.** Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2002.

Barbosa, J. C. **Uma perspectiva de modelagem matemática**. In: Conferência nacional sobre modelagem e educação matemática. (3th ed) Piracicaba. UNIMEP. 2003.

BASSANEZI, R.C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia.** São Paulo: Contexto, 2002.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Modelagem Matemática: teoria e prática**. São Paulo: Contexto, 2015.

________________________ Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia. (2th ed.). São Paulo: Contexto. 2004.

________________________Temas & Modelos Biembengut, M. S. & Hein, N. Modelagem matemática no ensino. (4th ed.). São Paulo: Contexto. 2007.

BIEMBENGUT, Maria Salett. **Modelagem Matemática na formação de professores: possibilidades e limitações.** In: Congresso nacional de educação. Curitiba. IX Congresso nacional de educação – EDUCERE. Curitiba: Champagnat, 2009.

_______________________ Modelagem matemática & implicações no ensino aprendizagem de matemática. Blumenau: Ed. Da Furb. 1999.

BRASIL. Ministério da Educação. **Secretaria de Educação Básica. Orientações Curriculares para o ensino médio** – Volume 2: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, 2006.

_______. Ministério da Educação. **Secretaria de Educação Básica. Orientações Curriculares para o ensino médio** – Volume 2: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, 2006.

___________SÃO PAULO – Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. **Currículo do Estado de São Paulo- Ciências da Natureza e suas Tecnologias – Ensino Fundamental** –Ciclo II e Ensino Médio- SEE, 2011.

___________. **Modelagem Matemática: perspectivas interdisciplinares para o ensino e a aprendizagem de matemática**. IV EPMEM – ENCONTRO PARANAENSE DE MODELAGEM EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 2018. Disponível em: < http://sbemparana.com.br/viiiepmem/> Acesso em: 20 Jul. 2019.

____________. **Lei n° 9.394 – Diretrizes e bases da educação nacional**. 1996. Disponível em: <https://www.slideshare.net/flarcosta/ldblein9394de20dedezembrode1996> Acesso em: 17 Abr. 2019.

BORGES, Diego Lazaris. **CDC ou Leasing: qual é mais vantajoso na hora de comprar um carro?** 2011. Disponível em: <https://www.infomoney.com.br/minhas-financas/carros/noticia/2047752/cdc-leasing-qual-mais-vantajoso-hora-comprar-carro> Acesso em 17 Abr. 2019.

BURAK, D. **Modelagem Matemática: uma metodologia alternativa para o ensino de matemática na 5ª série**. Rio Claro - SP, 1987. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – IGCE, Universidade Estadual Paulista Júlio Mesquita Filho – UNESP, 1987.

___________. **Modelagem matemática: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem**. 329f. Tese (Doutorado em Psicologia Educacional) – Universidade Estadual de Campinas. 1992.

___________. **Modelagem matemática e a sala de aula**. In: Encontro paranaense de modelagem na educação matemática. (1th ed.) Londrina. 2004.

___________. **Caderno do Professor de Matemática** – 1º Ano – Ensino Médio – Volume 1 – Governo do Estado de São Paulo. 2016.

CARNABA, Lucio Mauro. **Currículo de Matemática e Currículo +.** 2015. Disponível em: <http://matematicaef2.blogspot.com/2015/02/curriculo-de-matematica-e-curriculo.html> Acesso em: 24 Mar. 2019.

CHEVALLARD, Y; BOSCH, M. e GASCÓN, J. **Estudar Matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem**. Tradução: Daisy Vaz de Moraes, Porto Alegre: Artmed, 2001.

D’ AMBRÓSIO, Ubiratan. **Da Realidade à Ação. Reflexões sobre a Educação e Matemática.** São Paulo, Summus Editorial. 1986.

___________________ **Educação matemática: da teoria à prática**. Campinas: Papirus, 2007.

__________________**Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

FRAZÃO, Dilva. Thomas Malthus – Biografia de Thomas Malthus. 2018. Disponível em: <www.ebiografia.com/thomas_malthus/> Acesso em: 02 Mar. 2019.

FREIRE, Paulo. **Educação como Prática da Liberdade**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1999.

INCA - Instituto Nacional do Câncer. **Índice de Mortalidade**. Disponível em: <https://mortalidade.inca.gov.br/MortalidadeWeb/pages/Modelo10/consultar.xhtml#panelResultado> Acesso em: 20 Jul. 2019.

KAMMI, C. **Desvendando a aritmética: implicações na teoria de Piaget.** Campinas-SP: Papirus. Machado Jr., A, G. Modelagem matemática no ensino-aprendizagem: ação e resultados. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Universidade Federal do Pará. 1995.

MEYER, João Frederico da Costa de Azevedo. CALDEIRA, Ademir Donizeti; MALHEIROS, Ana Paula dos Santos. **Modelagem em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

RIGONATTO, Marcelo. "**Sequência de Fibonacci"; Brasil Escola.** Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/sequencia-fibonacci.htm. Acesso em: 02 Mar. 2019.

SALES, Elielson Ribeiro de; SANTO, Adilson Oliveira do Espírito. **Modelagem Matemática de Ensino e Aprendizagem: Uma experiência em um curso de licenciatura plena em matemática**. XII Encontro Latino Americano de Iniciação Científica e VIII Encontro Latino Americano de Pós-Graduação – Universidade do Vale do Paraíba. 2008.

SKOVSMOSE, O. **Educação Matemática crítica: a questão da democracia**. Campinas: Papirus, 2001.

VIECILI, Claudia Regina Confortin. **Modelagem Matemática: Uma proposta para o ensino da Matemática.** Dissertação. Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática. Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. 2006.

VOORWALD, Herman. Material de Apoio ao currículo do Estado de São Paulo. Caderno do Professor de Matemática. Ensino Médio. Vol. 1. Nova Edição.2014/2017

.

ANEXOS

E.E. " Prof. Arlindo Silvestre"

Plano da Eletiva

Professor Responsável: Antonio Augusto de Lima

2º Semestre: Agosto à Dezembro de 2018

Ementa: O câncer é uma doença que necessita de tratamento rápido e específico para cada tipo. Vamos investigar na ALICC os dados percentuais de óbitos por câncer de pulmão por faixa etária nos períodos de 2008 até 2018 , na cidade de Limeira e utilizar a modelagem matemática para identificar, elaborar, analisar e criar um modelo matemático. Também vamos fazer uma investigação da dinâmica populacional de Limeira fazendo uso do modelo de Malthus e apresentar uma análise comparativa entre a evolução da população de Limeira e o número de óbitos por câncer de pulmão . Os gráficos que vamos necessitar vamos fazer uso do software livre GeoGebra e do Excel .

Disciplinas/ áreas de conhecimento: : MATEMÁTICA, GEOGRAFIA E BIOLOGIA.

Objetivo geral: Interpretar e compreender os mais diversos fenômenos do nosso cotidiano, devido ao “poder” que a Modelagem proporciona pelas aplicações dos conceitos matemáticos. Podemos descrever estes fenômenos, analisá-los e interpretá-los com o propósito de gerar discussões reflexivas sobre tais fenômenos que cercam nosso cotidiano, desta forma tem mais significado nos conteúdos estudados.

Objetivos específicos:

- Fazer com que o aluno entenda que a matemática está presente em nosso cotidiano, de modo a torná-la a mais significante possível.
- Favorecer a criatividade na elaboração de estratégias de resolução de problemas e busca de soluções.

Habilidades em foco: Habilidades e Competências:

• Identificar , relacionar os dados e interpretar informações relevantes em uma dada situação-problema , sendo apresentados em diferentes linguagens e representações

• Reconhecer a Natureza e situar o objeto de estudo dentro dos diferentes campos da Matemática e das demais Ciências

• Utilizar , elaborar e interpretar modelos e representações matemáticas para análise de Situação Problema .

• Identificar regularidades para estabelecer regras , algoritmos e propriedades

• Expressar as ideias com clareza , utilizando a linguagem matemática

• Reconhecer a contribuição do conhecimento matemático , físico , químico e biológico no desenvolvimento da tecnologia .

Conteúdo Programático: Modelos e Modelagem Matemática; Modelagem Matemática no âmbito educacional; técnicas de Modelagem; evolução de modelos; atividades de modelagem matemática voltadas à sala de aula.

Encaminhamentos metodológicos:
• Sensibilização

• Levantamento dos conhecimentos prévios
• Realização das atividades em grupos colaborativos.
• Análise dos dados estatísticos

Recursos didáticos: Recursos Didáticos:

- Datashow;
- Impressões;
- Palestras
- Vídeos;
- Pesquisa de Campo;
- Uso de Computadores.

Cronograma das aulas

Data	Conteúdo	Habilidade	Estratégia
22/08	Apresentação dos Alunos. Apresentação do Trabalho Pesquisa sobre o câncer de Pulmão	Conhecer como coletar dados por meio da pesquisa de campo, pesquisa em bibliotecas, entrevistas e observação participativa.	Os alunos, com seus celulares e na sala de leitura, trabalharam com a pesquisa.
29/08	**1.1** Palestra com a Estudante de Medicina da Unifesp (Universidade Federal de SP Camila Mendes sobre o Câncer	Vamos trabalhar o “Aprender a ser” onde se destaca a importância da capacidade de autonomia e discernimento	A palestrante vai usar slides e interagir com os educandos

		acompanhada da responsabilidade pessoal dentro do grupo, na palestra.	
05/09	**1.2** Definindo Equações de Diferenças	Encontrar uma fórmula fechada que dê o valor da função diretamente em termos do seu argumento.	Aula Expositiva, usando o caderno do aluno para extrair problemas a serem discutidos.
12/09	**1.3** A torre de Hanói	• Identificar a Regularidade nos movimentos realizados com os discos; relacionar a regularidade observada nos movimentos com os números obtidos; • Representar algebricamente a relação observada.	O jogo foi aplicado em sua versão digital online e também na forma lúdica junto a 34 estudantes entre o 9º Ano e o Ensino Médio, divididos em 6 grupos tendo o professor como mediador.
19/09	**1.4** Trabalhando com o Triangulo de SIERPINSKI	•Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos. • Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.	Os alunos em grupos irão construir os quatro primeiros estágios do triângulo de Sierpinski e responderão um questionário relativo à sequências.
26/09	**1.5** Equação de Diferenças e a Compra de um veículo	Espera-se que este estudo possa servir de motivação para a busca incessante de novas aplicações de tópicos de matemática pura em situações cotidianas, fazendo assim com que as pessoas tenham mais facilidade e familiaridade com a matemática.	Um dos grupos vai buscar junto a uma Concessionária os dados para financiamento de um veículo e trabalhar a utilização das Equações de Diferenças em financiamentos.
03/10	**1.6** Exposição do Tema Equação de Diferenças depois do Trabalho de cada grupo.	Permitindo que o aluno gere a sua representação interna do conhecimento a	Apresentação dos três grupos de Trabalho.

		partir das representações visuais, fazendo a apropriação destes.	G1, G2 e G3
10/10	**1.7** Buscando os dados estatísticos de Câncer do Pulmão na cidade de Limeira **1.8** Distribuição percentual de óbitos por câncer de pulmão entre 2008 e 2018	Representar dados estatísticos por meio de gráficos de barras, setores e segmentos. Representar dados estatísticos por meio de gráficos de barras, setores e segmentos.	Os grupos vão através do site do Instituto Nacional do Câncer (INCA) vão buscar os dados para a pesquisa.
17/10	**1.9** Trabalhando no Laboratório de Informática com os dados e fazendo análises.	Organizar e tabular um conjunto de dados para resolver situações problemas.	No laboratório os alunos vão usar o Geogebra para organização dos dados
24/10	**1.10** Interpretando dados estatísticos sobre o Modelo Matemático construído	Utilizar informações expressas em tabelas para fazer inferências ao resolver situações problemas. Saber utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimentos	Os grupos vão apresentar suas conclusões.
31/10	2 **Uma pausa: Palestra com a senhora Elza Silvestre sobre: Dedicação, Trabalho e suas experiências**		Uma palestra onde a Palestrante vai contar um pouco da sua trajetória profissional e como enfrentou as situações boas e ruins que aconteceram durante sua vida assim como a trajetória de seu esposo, que dá o nome a essa escola. Arlindo Silvestre
07/11	**2.1** Estudando a População de Limeira	Organizar e tabular um conjunto de dados para	Os grupos vão através do site da Fundação SEADE

		resolver situações problemas	vão buscar os dados para a pesquisa.
14/11	**2.2** Estudando a População de Limeira	Utilizar informações expressas em tabelas para fazer inferências ao resolver situações problemas. Saber utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimentos	No laboratório os alunos vão usar o Geogebra para organização dos dados e fazer possíveis futuras previsões sobre a População
14/11	3 **Dinâmica populacional e os modelo de Malthus em tempo discreto** 3.1	Saber utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimentos	Os alunos farão um estudo do Modelo de Malthus para a população da cidade de Limeira
21/11	**3.2** Dinâmica populacional e o modelo de Malthus em tempo discreto	Saber utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimentos	Através da construção de uma tabela os alunos farão a comparação dos dados.
28/11	**3.3** Comparando dados sobre pacientes com câncer e o Crescimento Populacional na cidade de Limeira	Saber utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimentos	Apresentação das Conclusões Finais pelos Grupos de Trabalho.
05/12	**3.4** Visita a Universidade Federal de São Carlos		
12/12	**3.5** Culminância – Apresentação dos trabalhos à Comunidade. 3.6		

Resultados esperados: Temos uma proposta nessa Disciplina Eletiva de apresentar uma proposta de intervenção pedagógica partindo-se do pressuposto de que a Modelagem Matemática é uma estratégia de ensino e aprendizagem utilizada como uma forma de aproximar a matemática escolar formal e a matemática da vida real. Que consigamos atingir tal objetivo com os alunos que escolheram trabalhar esse conceito.

Avaliação: DEVERÁ SER CONTÍNUA PARTINDO DESDE O PROCESSO DE SELEÇÃO DA TURMA PARA ESTA ELETIVA, OBEDECENDO SUAS DIRETRIZES, METAS E PRAZOS DE ACORDO COM O PLANEJAMENTO.

Culminância: APRESENTAÇÃO DOS TRABALHOS DESENVOLVIDOS DURANTE A ELETIVA.

Referências: PESQUISAS NO GOOGLE ACERCA DO TEMA A SER DESENVOLVIDO; DADOS ESTATÍSTICOS, CURRÍCULO DO ESTADO DE SÃO PAULO: MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS; BIOLOGIA E GEOGRAFIA E PROPOSTA PEDAGÓGICA ESCOLAR.

Adriana M. P. dos Santos
RG: 17 209.114-7
Prof. Coord. Geral

PLANO DE ENSINO DA DISCIPLINA ELETIVA

Questionário final

Questão 01: As atividades que o grupo realizou sobre Modelagem Matemática fez com que vocês enxergassem algo significativo na Matemática?
a - (   ) Nunca
b - (   ) Sempre
c - (   ) Poucas Vezes
d - (   ) Na maioria das vezes

Questão 02: O grupo percebeu a importância de refletir antes de tomar uma decisão nas Atividades propostas?
a - (   ) Nunca
b - (   ) Sempre
c - (   ) Poucas Vezes
d – (   ) Na maioria das vezes

Questão 03: O grupo percebeu significados que a Modelagem Matemática tem em outras áreas do conhecimento, outros contextos?
a - (   ) Nunca
b - (   ) Sempre
c - (   ) Poucas Vezes
d - (   ) Na maioria das vezes

Questão 04: Esse formato de aprender Matemática, essa forma de realizar as tarefas faz o grupo se sentir competente para realiza-las?
a - (   ) Nunca
b - (   ) Sempre
c - (   ) Poucas Vezes
d - (   ) Na maioria das vezes

Questão 05: O grupo acha que as Atividades envolvendo Modelagem Matemática contribuiu para facilitar a escolha de seu Projeto de Vida?

a - (   ) Nunca

b - (   ) Sempre

c - (   ) Poucas Vezes

d - (   ) Na maioria das vezes

Questão 06: O grupo acha que a Modelagem Matemática permite um aprendizado de forma a fazer vocês acreditarem que podem e conseguem aprender conceitos matemáticos de forma mais significativa?

a - (   ) Nunca

b - (   ) Sempre

c - (   ) Poucas Vezes

d - (   ) Na maioria das vezes

Questão 07: Os temas escolhidos para Modelagem Matemática despertou a curiosidade dos integrantes desse grupo?

a - (   ) Nunca

b - (   ) Sempre

c - (   ) Poucas Vezes

d - (   ) Na maioria das vezes

Questão 08: O grupo prefere o sistema de Avaliação por escrito ou através de um projeto de Modelagem Matemática semelhante ao trabalhado nessa disciplina eletiva?

a - (   ) Nunca

b - (   ) Sempre

c - (   ) Poucas Vezes

d - (   ) Na maioria das vezes

Questão 09: O grupo realizou operações matemáticas onde se constatou a presença de regularidades que contribuíram para observação de equações de diferenças?

a - (   ) Nunca

b - (   ) Sempre

c - (   ) Poucas Vezes

d - (   ) Na maioria das vezes

QUESTÃO 10: Os elementos desse grupo participaria novamente de uma eletiva sobre Modelagem Matemática?

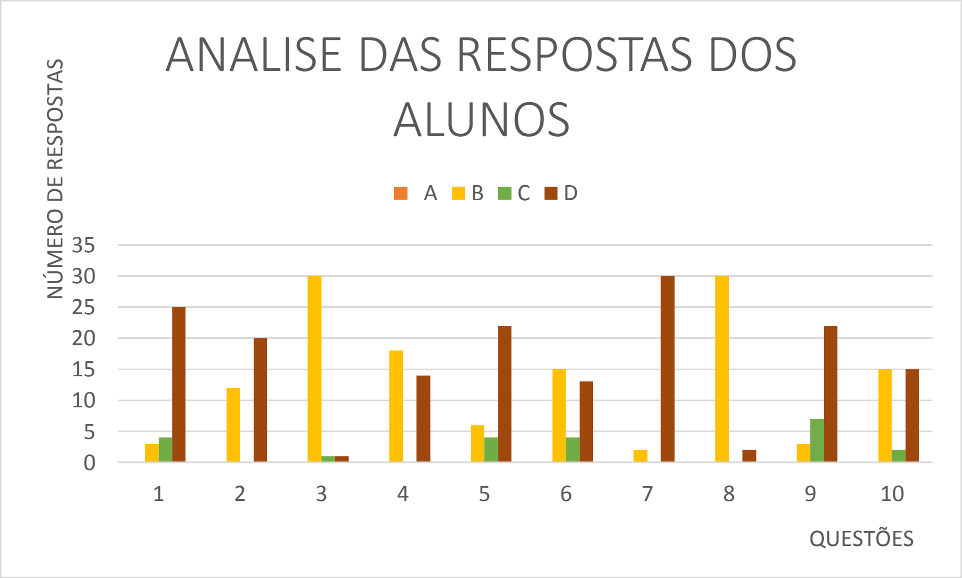
a - ( ) Nunca

b - ( ) Sempre

c - ( ) Poucas Vezes

d - ( ) Na maioria das vezes

Gráfico 1: Gráfico de barras mostrando as respostas dos alunos referentes a Avaliação sobre o Processo de Modelagem



Fonte: Autoria própria (2019).

A VISITA DOS ALUNOS A UFSCAR

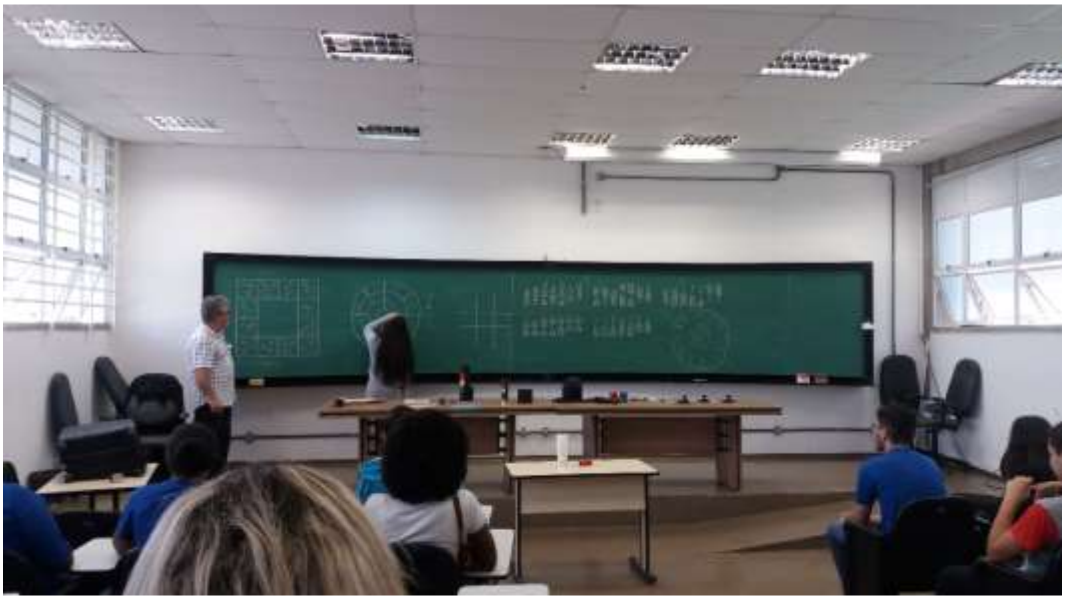
Muitos estudantes do Ensino Médio sonham em estudar na Universidade Federal de São Carlos. A Escola Arlindo Silvestre tem nos seus estudantes alunos provenientes de famílias de baixa renda, alunos sem estrutura com relação a sonhos de estar numa Universidade Pública, logo a maioria deles nunca pisou numa Universidade. Com o apoio de meu orientador e também da Gestão da Escola, preparamos um tour especial com os educandos do Ensino Médio que participaram dessa eletiva.

Durante o dia de uma quarta-feira (05/12/2018), os estudantes foram convidados para vivenciar esse tour diferenciado. A visita pedagógica teve o objetivo de aproximar os estudantes do ambiente universitário. Iniciamos com as Atividades “Mágicas com Fundamentação teórica matemática “do Professor Pedro Malagutti, do DM-UFSCar, onde o Professor interagiu com os alunos de forma “mágica “deixando-os encantados com a apresentação colaborando assim para a divulgação científica em Matemática, apresentando alternativas, a fim de incentivar o interesse dos alunos para a beleza das teorias matemáticas.

Logo após a apresentação que foi finalizada por volta de 12h15min, os alunos foram almoçar e viver a realidade do bandejão, aproveitando o intervalo do almoço para conhecer as dependências da Universidade. As 14h foram convidados a conhecer o prédio da Biblioteca Comunitária que faz parte de um complexo de 9.000 m² composto por Biblioteca, Auditórios, Editora EdUFSCar e Teatro Florestan Fernandes.

Na biblioteca, orientados pelo Professor José Antônio Salvador e alguns alunos da Pós- Graduação, participaram, em grupos, de uma Gincana Matemática, recebendo cada aluno e também os três professores que estavam na UFSCAR conosco, uma caneca ecológica. No final do dia, os alunos, representados pelos líderes de grupo, apresentaram em uma das salas do Departamento de Matemática da UFSCAR, o trabalho realizado, ao orientador.

Figura 1 - Aluna realizando atividades de “Mágicas Matemáticas” no DM-UFSCAR



Fonte: Autoria própria (2019).

Figura 2: Professor e Orientador observando apresentação das “Mágicas Matemáticas“ no DM-UFSCAR

Fonte: Autoria própria (2019).

Figura 3 - Alunos realizando uma Gincana Matemática na Biblioteca Comunitária na UFSCAR

Fonte: Autoria própria (2019).

Figura 4 - Alunos na entrada da Biblioteca Comunitária na UFSCAR

Fonte: Autoria própria (2019).

Figura 5 - Alunos na Biblioteca Comunitária na UFSCAR

Fonte: Autoria própria (2019).

Figura 6 - Alunos na Biblioteca Comunitária na UFSCAR

Fonte: Autoria própria (2019).

Figura 7 - Aluna apresentando o trabalho na UFSCAR

Fonte: Autoria própria (2019).

Figura 8 - Aluna apresentando o trabalho na UFSCAR

Fonte: Autoria própria (2019).