UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

FU NES L^q ULTRADIFERENCIÁVEIS GLOBAIS E APLICAÇÕES

PATRÍCIA YUKARI SATO RAMPAZO

São Carlos-SP
Novembro de 2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

FUNES L^q ULTRADIFERENCIÁVEIS GLOBAIS E APLICAÇÕES

PATRÍCIA YUKARI SATO RAMPAZO
Orientador: GUSTAVO HOEPFNER

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutora em Matemática.

São Carlos-SP
Novembro de 2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado da candidata Patrícia Yukari Sato Rampazo, realizada em 20/11/2019:

Prof. Dr. Gustavo Hoepfner
UFSCar

Prof. Dr. Gerson Petronilho
UFSCar

Prof. Dr. Paulo Leandro Dattori da Silva
USP

Rafael Augusto dos Santos Kapp

Prof. Dr. Rafael Augusto dos Santos Kapp
UFSCar

Prof. Dr. Sérgio Luís Zani
USP

Agradecimentos

Agradeço à minha família, pelo incentivo. Meu pai Valdir, minha mãe Elisa e minha irmã Vanessa, acreditam em minha capacidade mais do que eu mesma.

Ao Alisson, quem mais ouviu reclamações e sempre me reconfortou nos momentos difíceis.

Ao professor Gustavo Hoepfner, pela orientação e paciência.

Aos colegas e amigos do DM, pela ajuda e palavras de motivação, pelos compartilhamentos de experiências e momentos de descontração.

Aos demais contribuintes e, à CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

A classe das funções Gevrey globais foi introduzida recentemente por Z. Adwan, G. Hoepfner e A. Raich ([2]), os elementos nesses espaços são definidos em termos de suas derivadas com estimativas que dependem de sequências. Sabe-se que no caso local as funções ultradiferenciáveis definidas por sequências e funções peso não são sempre as mesmas. Neste trabalho introduziremos a classe de funções ultradiferenciáveis globais de acordo com funções peso, fazendo um estudo do ponto de vista da análise funcional. É possível caracterizar essas classes de funções via decaimento de suas transformadas FBI, isto é existe uma versão do teorema de Paley-Wiener. Nossas técnicas, quando adaptadas ao caso local, generalizam resultados recentes tais como a existência de extensões quase analíticas. Como aplicação, introduziremos os vetores ultradiferenciáveis globais e mostraremos a validade do teorema de Kotake-Narasimhan global nesses espaços.

Abstract

The class of global Gevrey functions was introduced recently by Z. Adwan, G. Hoepfner and A. Raich ([2]), the elements in these spaces are defined in terms of its derivatives with estimates that depend on sequences. It is know that in the local case ultradifferentiable functions defined by sequences and weight functions are not always the same. In this work we shall introduce the class of global ultradifferentiable functions according with weight functions, making a study from the point of view of functional analysis. It is possible to characterize these classes of functions by decaying of their FBI transform, that is, there exist a version of Paley-Wiener theorem. Our techniques, when adapted to the local case generalize recent results such as the existence of almost analytic extensions. As application, we introduce global ultradifferentiable vectors and show the validity of the global Kotake-Narasimhan theorem in this setting.

Sumário

Introdução

O objetivo deste trabalho é introduzir as classes das funções L^q ultradiferenciáveis globais, segundo funções peso e estudar concisamente estes espaços do ponto de vista da Análise Funcional, de forma similar ao exposto por Adwan, Hoepfner, e Raich [2], onde foi tratado o caso das funções L^q ultradiferenciáveis globais segundo sequências. Vamos generalizar alguns resultados abrangendo diferentes classes não tratadas originalmente e apresentaremos algumas aplicações para espaços dados pela iterada de operadores.

No caso local, existem diferentes maneiras de definir funções ultradiferenciáveis. A mais antiga, apresentada por Maurice Gevrey em 1918 [25], mede o comportamento do crescimento de funções C^∞ em termos de uma sequência da forma $((k!)^s)_{k\in\mathbb{Z}_+}$, $s \geq 1$, hoje conhecido como o espaço das funções Gevrey, G^s. Quando trocamos a sequência citada anteriormente por uma sequência $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ positiva qualquer, o espaço passa a ser tratado por Denjoy-Carleman $\mathcal{E}^M$. Especificamente, dado um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, uma sequência positiva e crescente de números reais $M = (M_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$, define-se o espaço $\mathcal{E}^{\{M\}}(\Omega)$, como sendo o conjunto das funções $f \in C^\infty(\Omega)$ tais que para todo subconjunto compacto K em Ω existe $h > 0$ satisfazendo

$$\sup_{x\in K}\sup_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d}\frac{|\partial^\alpha f(x)|}{h^{|\alpha|}M_{|\alpha|}} < \infty. \tag{1}$$

A topologia no espaço $\mathcal{E}^{\{M\}}(\Omega)$ se dá tomando-se o limite indutivo em h para todo K, e depois o limite projetivo sobre os compactos. Uma discussão completa destes espaços pode ser encontrada em [37].

Recentemente, Adwan, Hoepfner e Raich [2] introduziram uma classe de funções a qual denominaram L^q Gevrey globais, o espaço dessas funções por sua vez, é denotado por $\mathcal{G}^{q,s}$. Nestes espaços globais o conjunto compacto $K \subset\subset \Omega$ não é importante e é definido através do limite indutivo em h. Uma primeira versão dessas funções surgiu no trabalho de Boggess e Raich [11] ao trabalharem na caracterização do decaimento exponencial do núcleo do calor $\Box_b$ em variedades CR quádricas. Mas foi em [2] que os autores refinaram a noção dessa nova classe, incluindo uma discussão sobre a relação com as classes de Gevrey ($\mathcal{G}^s$) e espaços de funções conhecidos. Além disso, apresentam exemplos explícitos de funções L^q Gevrey globais e a existência de extensão quase analítica de uma função L^q Gevrey global.

Depois disso Hoepfner e Raich exploraram mais propriedades envolvendo estimativas globais nos seguintes trabalhos [28] e [29], sendo que neste último utilizam classes mais gerais que Gevrey, a classe Denjoy-Carleman; isto é, os espaços de funções são dados a partir de uma sequência $M = (M_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ satisfazendo certas condições. A classe local Denjoy-Carleman é de extrema importância, foi e continua sendo explorada em diversos trabalhos como, por exemplo, em [3], [27], [31], [37] e as referências contidas neles.

Voltando a tratar do caso local, em outra vertente temos as classes ultradiferenciáveis definidas a partir de funções peso, veja Definição 1.2.1. Beurling [10] mostrou que é possível utilizar funções peso para medir a suavidade de funções C^∞ com suporte compacto pelo decaimento de sua transformada de Fourier. Porém, a forma mais usual de trabalhar com essas classes foi introduzida por Meise e Taylor [41] que mostraram que a caracterização pode ser dada a partir do comportamento do decaimento de derivadas ao utilizar a transformada de Young da função peso composta com a exponencial. Dado um aberto Ω de $\mathbb{R}^n$, uma função peso ω (Definição 1.2.1) e φ^* a conjugada de Young de $\omega \circ exp$ (Definição 1.2.2), o espaço das funções ω-ultradiferenciáveis de tipo Roumieu $\mathcal{E}^{\{\omega\}}(\Omega)$ é dado pelas funções $f \in C^\infty(\Omega)$ tais que para todo compacto $K \subset \Omega$, existe $h \in \mathbb{N}$ satisfazendo

$$\sup_{x\in K}\sup_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d} \left|f^{(\alpha)}(x)\right| \exp\left(-\frac{1}{h}\varphi^*(h|\alpha|)\right) < \infty. \tag{2}$$

A topologia em $\mathcal{E}^{\{\omega\}}(\Omega)$ é dada primeiro tomando-se o limite indutivo em h indo para infinito para cada compacto $K \subset \Omega$ e então tomando o limite projetivo sobre os compactos. Define-se o espaço das funções ω-ultradiferenciáveis de tipo Beurling $\mathcal{E}^{(\omega)}(\Omega)$ pelas funções $f \in C^\infty(\Omega)$ tais que para todo compacto $K \subset \Omega$ e todo $h \in \mathbb{N}$ a equação (2) é satisfeita; neste espaço a topologia é dada tomando-se os limites projetivos tanto sobre os h quanto nos compactos K. Assim como no caso Roumieu, existem inúmeros trabalhos explorando propriedades de tais classes, veja por exemplo, [5], [18],[44].

Algumas vezes se faz necessário impor às sequências e às funções peso utilizadas a propriedade de não quase analiticidade, o que proporciona por exemplo a existência de funções corte não triviais no espaço, ferramenta fundamental para obtenção de diversos resultados. Tem-se também que existem classes ultradiferenciáveis locais definidos por sequências que não podem ser definidos por funções peso, e reciprocamente. Uma comparação detalhada entre estas diferentes noções de funções ultradiferenciáveis locais pode ser encontrada em [17]. Isto nos motivou a trabalhar com funções L^q ultradiferenciáveis globais, segundo funções peso e também considerar o caso quase analítico que não foram tratados anteriormente.

Da mesma forma que [2] trata funções Gevrey de forma global, no presente trabalho trataremos de forma global funções ultradiferenciáveis que aparecem em [18] por exemplo. Mais precisamente, trocamos estimativas globais dadas por sequências pela limitação por funções peso ω (ou melhor dizendo, pela conjugada de Young da função $t \to \omega(e^t)$), vide Definição 2.1.1. Apresentaremos propriedades básicas como condições para que o espaço seja fechado para derivação, multiplicação e convolução bem como apresentamos uma caracterização para o espaço dual. No caso dos espaços locais, Braun, Meise, e Taylor [18] fazem um amplo estudo da classe de funções ultradiferenciáveis, bem como análise de Fourier, provando um resultado análogo ao teorema de Paley-Wiener-Schwartz.

Foi observado em [28], que a transformada de Fourier não é uma ferramenta adequada para se trabalhar em espaços globais. Apesar da grande suavidade de uma função ultradiferenciável global, seu decrescimento não é suficiente para garantir que sua transformada de Fourier continue sendo função. Por exemplo, existem funções L^q ultradiferenciáveis globais cujas transformadas de Fourier são distribuições temperadas porém não são L^1_{loc}; por outro lado, existem funções com decaimento exponencial porém suas transformadas, apesar de serem suaves, não têm decaimento suficiente para pertencerem às classes L^q. Trabalhamos portanto com a transformada de Fourier-Bros-Iagolnitzer (FBI) que é bem comportada em $\mathcal{E}^{q,\omega}$. A versão da transformada FBI utilizada é a mesma que aparece em trabalhos como [6], [9], [19] e [50]. Mostramos que é possível caracterizar classes de funções L^q globalmente ultradiferenciáveis via decaimento de sua transformada FBI, ou seja, obtemos uma versão do teorema de Paley-Wiener para essa nova classe de funções similarmente ao Teorema 1.2 de [28].

Outro tópico estudado é a existência de extensões de funções ultradiferenciáveis globais, ou seja, extensões quase analíticas ou soluções aproximadas para (sistemas de) campos vetoriais de primeira ordem com coeficientes suficientemente regulares. Mesmo em se tratando do caso local, diversos trabalhos como [3], [4] e [8] apresentam resultados apenas para classes de funções não quase analíticas. Neste trabalho, exploramos a classe quase analítica, proporcionando a existência de soluções aproximadas de campos vetoriais nessa classe, mesmo com a dificuldade causada pela falta de funções corte no espaço, obtemos o Teorema 3.2.1. Nesta parte nos baseamos nos trabalhos de Dyn'Kin [21] e outro trabalho mais recente de Rodrigues e Silva [48], que tratam da classe Denjoy-Carleman local. Como novidade no caso global, trabalhamos não somente com sistemas de campos vetoriais como também estruturas globais do tipo tubo, veja Definição 3.3.2, como, por exemplo, as estrutura do tipo Mizohata no plano.

É importante observar que nossos resultados se aplicam também para funções ultradiferenciáveis globais segundo sequências melhorando todos os resultados de Hoepfner e Raich obtidos em [29] uma vez que os autores impõem condições mais restritivas para as sequências utilizadas. Essas condições foram introduzidas por Lambert [39], que provou a existência de funções Denjoy-Carleman com suporte compacto que satisfaziam condições específicas e se mostrou essencial em [4] para a demonstração da existência de soluções aproximadas. Por exemplo, enfraquecemos a definição de solução aproximada e obtemos a existência de extensão analítica também para as classes quase analíticas. Surpreendentemente, esta nova definição se mostra suficiente para provar o Teorema de Paley-Wiener. Ainda, a propriedade convexidade logarítmica forte também deixa de ser necessária no teorema de caracterização que demonstramos e, portanto, em resultados subsequentes com relação ao conjunto frente de onda.

Na Seção 4.2, apresentamos a prova de uma versão global do Teorema de Kotake-Narasimhan. O problema com iterados, começou em 1959 Nelson e 1960 Komatsu ([42], [35]), que caracterizaram funções analíticas f em termos de vetores analíticos, isto é, iteradas $P(D)^j f$ da função f, sendo $P(D)$ um operador diferencial com coeficientes constantes. Esse resultado foi generalizado posteriormente para operadores com coeficientes não constantes por Kotake and Narasimhan [38] e então para a classe Gevrey por Newberger e Zielezny [43]. Na última década, esforços foram feitos para estudar este problema de regularidade para vetores ultradiferenciáveis definidos por funções de peso, conhecidos como iterados, quando os operadores possuem coeficientes constantes. Foi provado que a completude desses espaços é equivalente à hipoelipticidade de P em [34] e depois eles caracterizaram em termos do decrescimento da transformada de Fourier ([12], [14], [15], [33]).

Recentemente, em 2017, Boiti e Jornet [13] deram uma prova simples do Teorema de Kotake-Narasimhan no espaço das funções ultradiferenciáveis no sentido de [18]. Como aplicação, estendemos este resultado para a classe das funções L^q ultradiferenciáveis globais.

CAPÍTULO 1

Classes ultradiferenciáveis locais

Neste Capítulo introduziremos brevemente duas das classes ultradiferenciáveis mais conhecidas que passaremos a tratar por classes locais. Apresentaremos a classe Denjoy-Carleman, que mede o comportamento do crescimento de funções C^∞ em termos de uma sequência $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$. A segunda foi introduzida por Beurling [10], quem mostrou que é possível utilizar funções peso ω para medir a suavidade de funções C^∞ com suporte compacto pelo decaimento de sua transformada de Fourier, mas a caracterização mais utilizada para funções ultradiferenciáveis é dada pelo decrescimento de suas derivadas com relação à transformada de Young de $\omega \circ \exp$ como feito em [18].

A seguir lembraremos a definição de tais classes e apresentaremos propriedades básicas necessárias para o desenvolvimento deste trabalho. Por fim destacamos a importância do estudo de cada uma dassas classes, já que não são comparáveis no sentido de contingência.

1.1 Funções ultradiferenciáveis segundo Denjoy e Carleman

Definição 1.1.1. Dada uma sequência $M = (M_k)_{k\in\mathbb{Z}_+^d}$ de números positivos e um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, dizemos que uma função $f \in C^\infty(\Omega)$ é de classe M-Denjoy-Carleman (ou apenas Denjoy-Carleman) em Ω se para todo compacto $K \subset \Omega$ existe uma constante $h > 0$ tal que

$$\sup_{x\in K} |\partial^\alpha f(x)| \leq h^{|\alpha|+1} M_{|\alpha|}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^d.$$

Denota-se o conjunto de todas as funções Denjoy-Carleman por $\mathcal{E}^{\{M\}}(\Omega)$. Por vezes, também é possível encontrar a notação $C^M(\Omega)$. O espaço é munido com a topologia do limite projetivo sobre todos os compactos $K \subset \Omega$ e do limite indutivo sobre h. Os elementos do dual $\mathcal{E}^{\{M\}}(\Omega)'$ são chamados ultradistribuições.

Observe que ao tomar $M_k = k!^s$, para $s \geq 1$, então $\mathcal{E}^{\{M\}}(\Omega)$ coincide com a classe Gevrey $G^s(\Omega)$, que é amplamente explorada por Rodino [47]. Em particular, $G^1(\Omega) = A(\Omega)$, o espaço das funções analíticas reais em Ω.

É usual encontrar trabalhos referindo apenas à definição descrita anteriormente, que se trata da classe Denjoy-Carleman de tipo Roumieu, mas também podemos definir a classe Denjoy-Carleman de tipo Beurling $\mathcal{E}^{(M)}(\Omega)$ como segue

$$\mathcal{E}^{(M)}(\Omega) := \left\{ f \in C^\infty(\Omega) : \forall K \subset \Omega \text{ compacto e todo } h > 0 : \sup_{\substack{x \in K \\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^d}} \frac{\left|f^{(\alpha)}(x)\right|}{h^{|\alpha|} M_{|\alpha|}} < \infty \right\}.$$

Denotaremos somente por $\mathcal{E}^M(\Omega)$ o conjunto das funções Denjoy-Carleman quando os resultados com relação às classes Roumieu ou Beurling são válidos da mesma forma.

É comum a necessidade de impor algumas condições sobre a sequência $M = (M_k)_{k \in \mathbb{Z}^+}$ para que certas propriedades válidas no espaço de Gevrey continuem válidas. Condições sobre a sequência M refletem em propriedades sobre os espaços $\mathcal{E}^M(\Omega)$. Se as seguintes condições são satisfeitas, chamamos $(M_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$ de *sequência peso.*

(*Condições iniciais*)

$$M_0 = M_1 = 1 \tag{1.1}$$

(*Convexidade logarítmica fraca*) Para $k = 1, 2, ...$

$$M_k^2 \leq M_{k-1} M_{k+1} \tag{1.2}$$

(*Estabilidade sob operadores ultradiferenciais*) Existem constantes $A, H > 1$ independentes de k tal que para todo $k = 1, 2, ...$, tem-se

$$M_{k+1} \leq A H^k M_k \tag{1.3}$$

Uma sequência peso é chamada *não quase analítica* se satisfaz

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k}{M_{k+1}} < \infty, \tag{1.4}$$

caso contrário, a denominamos *quase analítica*.

A última propriedade em especial é necessária para garantir a existência de função corte no espaço $\mathcal{E}^M(\Omega)$; grande parte dos trabalhos que tratam da classe Denjoy-Carleman, dependem dessa ferramenta, isto é, os resultados são válidos para o que chamamos de classe não quase analítica. Veja mais em [37].

Definição 1.1.2. Definimos a transformada de Fourier de uma função $f \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$ por

$$\hat{f}(\tau) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-it\cdot\tau} f(t)dt.$$

Tem-se a seguinte caracterização do espaço $u \in \mathcal{E}^M(\Omega)$ em termos da transformada de Fourier. Enunciaremos apenas o resultado com respeito a classe Roumieu.

Proposição 1.1.1 (Proposition 2.4 [31])**.** *Seja $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Então $u \in \mathcal{E}^M(\Omega)$ em uma vizinhança de x_0 se, e somente se, para alguma vizinhança U de x_0 existe uma sequência limitada $u_n \in \mathcal{E}'(\Omega)$ que é igual a u em U e satisfaz a seguinte estimativa*

$$|\widehat{u_n}(\xi)| \leqq C\left(CM_n/|\xi|\right)^n, \quad n = 1, 2, \cdots$$

para alguma constante C.

Definição 1.1.3. Considere $x, \xi \in \mathbb{R}^d$ e $\lambda \in (0, 1]$, e $x \in \mathbb{R}^d$. Denote $\langle\xi\rangle := \left(1+\sum_{j=1}^{d} \xi_j^2\right)^{1/2}$ e $x^2 := |x|^2$. Dada a forma

$$\omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d \wedge d(\xi_1 + ix_1\langle\xi\rangle^\lambda) \wedge \cdots \wedge d(\xi_d + ix_d\langle\xi\rangle^\lambda),$$

definimos a função $\alpha_\lambda(x, \xi)$, de modo que

$$\omega = \alpha_\lambda(x, \xi)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d \wedge d\xi_1 \wedge \cdots \wedge d\xi_d.$$

Definimos a transformada Fourier-Bros-Iagolnitzer (FBI) de uma ultradistribuição $u \in \mathcal{E}'_M(\mathbb{R}^d)$ por

$$\mathcal{F}_\lambda u(x, \xi) = \left\langle u, e^{i(x-\cdot)\cdot\xi - \langle\xi\rangle^\lambda (x-\cdot)^2} \alpha_\lambda(x - \cdot, \xi)\right\rangle. \tag{1.5}$$

A transformada FBI também foi utilizada para caracterizar a regularidade e microrregularidade nas classes Denjoy-Carleman como pode-se ver em [27] por exemplo. O decaimento é dado com relação à seguinte função associada à sequência $M = (M_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$

$$M(t) = \sup_k \log\left(\frac{t^k}{M_k}\right).$$

Para obter a melhor estimativa possível, é necessário considerar λ admissível para a sequência $M = (M_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, isto é, existem constantes c_1 e c_2 tais que

$$t^\lambda \geq M\left(c_1 t\right), \quad t \geq c_2.$$

Tem-se o seguinte resultado.

Proposição 1.1.2 (Corollary 4.2 [27])**.** *Se* $u \in \mathcal{E}'_M(\mathbb{R}^m)$ *se anula em uma vizinhança de* x_0 *e* λ *é admissível para a sequência* $M = (M_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, *então existem constantes* $C, c, a > 0$ *e uma vizinhança* V *de* x_0 *tais que*

$$|\mathcal{F}_\lambda u(x,\xi)| \le Ce^{-aM(c|\xi|)},$$

para todo $x \in V$ *e* $\xi \in \mathbb{R}^m$.

1.2 Funções ultradiferenciáveis segundo Bonet, Meise e Taylor

Trataremos por funções ultradiferenciáveis a classe de funções cujo decrescimento depende de funções peso. Seguem algumas definições.

Definição 1.2.1. Uma função $\omega : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ não decrescente, contínua tal que $\omega|_{[0,1]} = 0$ é chamada função peso se as seguintes condições são satisfeitas:

(α) Existe $K \ge 1$ tal que $\omega(2\,t) \le K(\omega(t)+1)$, para todo $t \ge 0$;

(β) $\omega(t) = O(t)$ quando $t \to \infty$

(γ) $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\log(1+t)}{\omega(t)} = 0$;

(δ) $\varphi \doteq \omega \circ \exp$ é convexa.

Estendemos ω a $\mathbb{C}^n$ tomando

$$\omega(z) := \omega(|z|),$$

sendo $|z| = \left[\sum_{j=1}^n (\operatorname{Re} z_j)^2 + \sum_{j=1}^n (\operatorname{Im} z_j)^2\right]^{1/2}$ como usualmente.

A função peso ω é dita *não quase analítica* se satisfaz

$$(\beta_0) \qquad \int_0^\infty \frac{\omega(t)}{(1+t^2)}dt < \infty,$$

no caso em que a integral é infinita, ω é chamada *quase analítica.*

Se ω é *subaditiva*, então equivalentemente satisfaz a seguinte propriedade

(α_0) existem $C > 0$, e $t_0 > 0$, tal que para todo $\lambda \ge 1$, e todo $t \ge t_0$ $\omega(\lambda t) \le \lambda C\omega(t)$.

Exemplo 1.2.1. São funções peso
(1) $\omega(t) = t$.
(2) $\omega(t) = t^s$ com $0 < s < 1$.

(3) $\omega(t) = (\log(1+t))^\beta$ para $\beta > 1$.
(4) $\omega(t) = t(\log(e+t))^{-\beta}$ para $\beta > 0$.

Em (3) e (4) quando $0 < \beta \leq 1$ temos que as funções peso são quase analíticas. Observa-se também que todas as funções satisfazem (α_0).

Definição 1.2.2. Seja $\varphi : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ dada por (δ) da Definição 1.2.1, ou seja, φ é uma função convexa, crescente com $\varphi(0) = 0$ e $\lim_{x\to\infty} x/\varphi(x) = 0$. Então definimos a conjugada de Young φ^* de φ por

$$\varphi^* : [0, +\infty[\to [0, +\infty[, \;\; \varphi^*(s) = \sup_{t\geq 0}\{ts - \varphi(t)\}.$$

A seguir apresenta-se a definição de funções ultradiferenciáveis. Essas classes de funções foram introduzidas por Beurling em [10], mas a definição mais utilizada atualmente e como utilizaremos aqui, foi dada por Meise e Taylor [41].

Definição 1.2.3. Dada uma função peso ω , um um subconjunto compacto K de $\mathbb{R}^d$ e $\lambda \in \mathbb{N}$, defina

$$\mathcal{E}_\lambda^{\{\omega\}}(K) := \left\{ f \in C^\infty(K) : \|f\|_{K,\lambda} := \sup_{x\in K} \sup_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d} \left|f^{(\alpha)}(x)\right| \exp\left(-\frac{1}{\lambda}\varphi^*(\lambda|\alpha|)\right) < \infty \right\}.$$

Para um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, define-se o espaço $\mathcal{E}^{\{\omega\}}(\Omega)$ de todas as funções *ultradiferenciáveis de tipo Roumieu* como

$$\mathcal{E}^{\{\omega\}}(\Omega) := \{f \in C^\infty(\Omega) : \text{ para todo compacto } K \subset \Omega \text{ existe } \lambda > 0 \text{ tal que } \|f\|_{K,\lambda} < \infty\}.$$

O espaço é dotado com a topologia do limite indutivo sobre λ para cada compacto $K \subset \Omega$ e então toma-se o limite projetivo desses

$$\mathcal{E}^{\{\omega\}}(G) = \mathrm{proj}_K \, \mathrm{ind}_{\lambda\to\infty} \, \mathcal{E}_\lambda^{\{\omega\}}(K).$$

O espaço $\mathcal{E}^{(\omega)}(\Omega)$ de todas as funções *ultradiferenciáveis de tipo Beurling* em Ω é definido como

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{(\omega)}(\Omega) := \{f \in C^\infty(\Omega) : &\text{ para todo } K \subset \Omega \text{ compacto e cada } \lambda \in \mathbb{N} \\ p_{K,\lambda}(f) &:= \sup_{x\in K} \sup_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d} \left|f^{(\alpha)}(x)\right| \exp\left(-\lambda\varphi^*\left(\tfrac{|\alpha|}{\lambda}\right)\right) < \infty\} \end{aligned} \tag{1.6}$$

$\mathcal{E}^{(\omega)}(\Omega)$ é um espaço Fréchet se munido um a topologia localmente convexa dada pelas seminormas $p_{K,\lambda}$.

Exemplo 1.2.2. Quando tomamos a função peso $\omega_0(t) = t$, temos que o espaço $\mathcal{E}^{(\omega_s)}(\Omega)$ coincide com $G^1(\Omega) = A(\Omega)$.

De fato, temos que $\varphi_0(t) = \omega_0 \circ \exp(t) = e^t$ então, dado $\lambda > 0$,

$$\frac{1}{\lambda}\varphi^*(\lambda t) = \frac{1}{\lambda}\sup_{r\geq 0}\{r\lambda t - e^r\} = \frac{1}{\lambda}(\lambda t\log(\lambda t) - t\lambda)$$

pois $(r\lambda t - e^r)' = \lambda t - e^r$, logo a função assume valor máximo em $r = \log(\lambda t)$. Portanto, como $t! \leq t^t \leq e^t t!$, temos

$$e^{\frac{1}{\lambda}\varphi(\lambda t)} = e^{(\log(\lambda t)^t - t)} = \lambda^t t^t e^{-t} \approx \lambda^t t!,$$

segue então que as classes de funções são equivalentes.

Braun, Meise e Taylor em [18] exploram diversas propriedades desses espaços bem como do seu dual. Provam também um resultado análogo ao teorema de Paley-Wiener, isto é, caracterizam o espaço conforme o decrescimento da transformada de Fourier como pode-se ver a seguir.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ um aberto convexo. Escolha uma exaustão compacta $K_1 \subset K_2 \subset ... \subset \Omega$, defina os seguintes espaço de funções inteiras

$$A_{\{\omega\},\Omega}(\mathbb{C}^d) = \{f \in H(\mathbb{C}^d) : \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall \epsilon > 0 \sup_{z\in\mathbb{C}^d} |f(z)|e^{-H_{K_n}(\operatorname{Im} z) - \epsilon\omega(z)} < \infty\}$$

e

$$A_{\{\omega\},\Omega}(\mathbb{C}^d) = \{f \in H(\mathbb{C}^d) : \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } \sup_{z\in\mathbb{C}^d} |f(z)|e^{-H_{K_n}(\operatorname{Im} z) - n\omega(z)} < \infty\},$$

sendo $H_K(x) = \sup_{y\in K}\langle x, y\rangle$. As definições do espaços acima independem da escolha da exaustão compacta para Ω.

O teorema de caracterização dos espaços é o seguinte.

Teorema 1.2.1 (Theorem 7.4 [18])**.** *A transformada de Fourier-Laplace*

$$\hat{\mu}(z) = \left\langle \mu_x, e^{-ixz}\right\rangle, \quad \mu \in \mathcal{E}^{\{\omega\}}(\Omega)'$$

é um isomorfismo linear topológico de $\mathcal{E}^{\{\omega\}}(\Omega)'$ em $A_{\{\omega\},\Omega}(\mathbb{C}^d)$, bem como de $\mathcal{E}^{(\omega)}(\Omega)'$ em $A_{(\omega),\Omega}(\mathbb{C}^d)$.

1.2.1 Propriedades das funções peso

Nesta seção, apresentam-se algumas propriedades de funções peso e da conjugada de Young que serão utilizadas ao longo desse trabalho.

Proposição 1.2.1. *Seja ω função peso, dados $0 < \lambda < 1$ e $\delta > 0$, existe $R > 0$ tal que*

$$\omega(t^\lambda) \leq \omega(\delta t), \quad \textit{para todo} \quad t > R.$$

Demonstração. Tome $R = \delta^{\frac{1}{\lambda-1}}$, daí se $t > R$, então

$$t^\lambda = tt^{\lambda-1} \leq tR^{\lambda-1} \leq t\delta.$$

Como ω é crescente, segue o resultado. $\square$

Proposição 1.2.2. *Sejam φ e φ^* como na Definição 1.2.2. Valem as seguintes propriedades*

(a) φ^* é convexa.

(b) $\varphi^*(s)/s$ é crescente e $\lim_{s\to\infty} \dfrac{\varphi^*(s)}{s} = \infty$.

(c) $\varphi^{**} = \varphi$.

(d) φ^* é superaditiva, ou seja, $\varphi^*(t) + \varphi^*(s) \leq \varphi^*(t+s)$ para todos $t, s \in [0, +\infty[$.

Demonstração. (a) Basta usar a definição, dado $0 \leq \lambda \leq 1$

$$\begin{aligned}
\varphi^*(\lambda s + (1-\lambda)r) &= \sup_{t\geq 0}\{t(\lambda s + (1-\lambda)r) - \varphi(t)\} \\
&\leq \sup_{t\geq 0}\{t\lambda s - \lambda\varphi(t)\} + \sup_{t\geq 0}\{t(1-\lambda)r - (1-\lambda\varphi)(t)\} \\
&= \lambda\varphi^*(s) + (1-\lambda)\varphi^*(r).
\end{aligned}$$

(b) Note que

$$\frac{\varphi^*(s)}{s} = \frac{\sup_{t\geq 0}\{ts - \varphi(t)\}}{s} = \sup_{t\geq 0}\left\{t - \frac{\varphi(t)}{s}\right\}.$$

Seja $0 < s_1 < s_2$, para todo $t \geq 0$, $-\varphi(t)/s_1 \leq -\varphi(t)/s_2$, substituindo na expressão acima, segue que $\varphi^*(s_1)/s_1 \leq \varphi^*(s_2)/s_2$. Observe que para cada $t \geq 0$ fixo, $t - \varphi(t)/s \to t$ quando $s \to \infty$. Com isso, dado $M > 0$ e escolhendo $t_0 = 2M$, temos que existe $s_0 \geq 0$ tal que

$$\text{se } s \geq s_0, \text{ então } -M + t_0 < t_0 - \frac{\varphi(t_0)}{s} < M + t_0,$$

logo, $\varphi^*(t)/s = \sup_{t\geq 0}\{ts - \varphi(t)/s\} > -M + t_0 = M$ para todo $s \geq s_0$, ou seja, $\lim_{s\to\infty} \frac{\varphi^*(s)}{s} = \infty$.

(c) Como φ é convexa, a propriedade segue pelo Teorema de Fenchel-Moreau [46, Theorem 12.2].

(d) Pela convexidade de φ^*, para todo $0 \leq \lambda \leq 1$ e $r \geq 0$

$$\varphi^*(\lambda r) = \varphi^*(\lambda r + (1-\lambda)0) \leq \lambda\varphi^*(r),$$

por ser $\varphi^*(0) = 0$. Portanto, utilizando $\lambda = \frac{t}{s+t}$ e $\lambda = \frac{s}{s+t}$

$$\varphi^*(t) + \varphi^*(s) = \varphi^*\left(\frac{t}{s+t}(s+t)\right) + \varphi^*\left(\frac{s}{s+t}(s+t)\right) = \varphi^*(t+s).$$

$\square$

Lema 1.2.1. *Seja ω uma função peso e K a constante dada pela propriedade (α) da Definição 1.2.1. Sendo φ^* a conjugada de Young de φ, temos*
(a) $\varphi(x+j) \leq 2jK^{2j}(1+\varphi(x))$, $\forall x \geq 0$ e $\forall j \in \mathbb{N}$.
(b) Dados $p \in \mathbb{N}$ e $m \geq 0$, existe $k > 0$ tal que

$$\frac{1}{k}\varphi^*(ky) + yp \leq \frac{1}{2k} + \frac{1}{m}\varphi^*(ym) \quad \forall y \geq 0.$$

(c) Dados $p \in \mathbb{N}$ e $k \geq 0$, existe $m > 0$ tal que

$$\frac{1}{k}\varphi^*(ky) + yp \leq \frac{1}{2k} + \frac{1}{m}\varphi^*(ym) \quad \forall y \geq 0,$$

em particular, tem-se o resultado para todo $m \geq 2pK^{2p}k$.

Demonstração. A prova de (a) será feita por indução em j. Para $j = 1$ temos pela definição de função peso que

$$\begin{aligned}
\varphi(x+1) &= \omega(e^{x+1}) \leq \omega(4e^x) = \omega(2(2e^x)) \\
&\leq K(1+\omega(2e^x)) \leq K(1+K(1+\omega(e^x))) \\
&\leq K^2(2+\omega(e^x)) \leq 2K^2(1+\omega(e^x)) \\
&= 2K^2(1+\varphi(x)).
\end{aligned}$$

Suponha agora válido para j e mostremos o resultado para $j+1$. Pelo feito acima, temos que $\varphi((x+j)+1) \leq K^2(2+\varphi(x+j))$, logo, pela hipótese de indução

$$\varphi(x+(j+1)) \leq K^2(2+2jK^{2j}(1+\varphi(x))) \leq 2(j+1)K^{2(j+1)}(1+\varphi(x)).$$

Para o item (b), tome $k \leq \frac{m}{4pK^{2p}}$. Segue do item (a) que para todo $x \geq p$,

$$\frac{1}{m}\varphi(x) = \frac{1}{m}\varphi(x-p+p) \leq \frac{2pK^{2p}}{m}(1+\varphi(x-p)) \leq \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k}\varphi(x-p). \tag{1.7}$$

Da definição de φ^* e da sua convexidade, temos

$$\begin{aligned}
py + \frac{1}{k}\varphi^*(ky) &= py + \frac{1}{k}\varphi^*(\frac{2ky}{2}) \leq py + \frac{1}{2k}\varphi^*(2ky) \\
&= \sup_{x\geq 0}\left\{y(x+p) - \frac{1}{2k}\varphi(x)\right\} = \sup_{x\geq p}\left\{yx - \frac{1}{2k}\varphi(x-p)\right\}.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Assim, por (1.7) e (1.8)

$$\begin{aligned}
py+\frac{1}{k}\varphi^*(ky) &\leq \sup_{x\geq p}\left\{yx+\frac{1}{2k}-\frac{1}{m}\varphi(x)\right\}=\frac{1}{2k}+\sup_{x\geq 0}\left\{yx-\frac{1}{m}\varphi(x)\right\}\\
&\leq \frac{1}{2k}+\frac{1}{m}\varphi^*(my).
\end{aligned}$$

A demonstração de (c) é análoga ao feito acima invertendo os papéis de k e m. $\square$

Lema 1.2.2. *Seja ω função peso tal que $\omega(t)=o(t)$. Então para cada $A>0$, existe C_A tal que*

$$s\log s\leq s+\frac{1}{A}\varphi^*(As)+C_A$$

para todo $s>0$.

Demonstração. Ver [26]. $\square$

Dada uma função peso ω, denote, para $k\in\mathbb{Z}_+$ e $A>0$

$$a_{k,A}:=\frac{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(Ak)}}{k!}. \tag{1.9}$$

Proposição 1.2.3. *Seja ω uma função peso e $a_{k,A}$ definida por (1.9), para todo $A>0$*

(a) *$A\mapsto a_{j,A}$ é crescente para todo $j\in\mathbb{Z}_+$.*

(b) *$a_{k+j,A}\leq a_{k,2A}\cdot a_{j,2A}$, $\forall j,k\in\mathbb{Z}_+$.*

(c) *Para todo $\rho,A>0$, existem constantes $C_{\rho,A},A'>0$ tais que*

$$\rho^j e^{\frac{1}{A}\varphi^*(Aj)}\leq C_{\rho,A}e^{\frac{1}{A'}\varphi^*(A'j)}\quad \forall j\in\mathbb{Z}_+.$$

(d) *Dados $j,r\in\mathbb{Z}_+$ tais que $r\leq j$ tem-se*

$$\frac{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(r+1))}}{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(Ar)}}\leq\frac{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(j+1))}}{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(Aj)}}.$$

Demonstração. *(a)* Segue do fato de $\varphi^*(s)/s$ ser crescente, Proposição 1.2.2 *(b)*.
(b) Pela convexidade de φ^*

$$\begin{aligned}
a_{k+j,A}=\frac{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(k+j))}}{(j+h)!} &\leq \frac{k!j!}{(k+j)!}\frac{e^{\frac{1}{2A}\varphi^*(2Ak)}}{k!}\frac{e^{\frac{1}{2A}\varphi^*(2Aj)}}{j!}\\
&=\frac{1}{\binom{j}{k+j}}a_{k,2A}a_{j,2A}\leq a_{k,2A}a_{j,2A}.
\end{aligned}$$

(c) Temos a seguinte propriedade [22, Lema 1.3]: para cada $y \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ e $A > 0$

$$\frac{1}{A}K^n\varphi^*\left(\frac{Ay}{K^n}\right) + ny \leq \frac{1}{A}\varphi^*(Ay) + \frac{1}{A}\sum_{h=1}^{n} K^h,$$

sendo $K > 0$ a mesma constante de (α) Definição 1.2.1. Tomando $y = jK^n$ e dividindo por K^n

$$\frac{1}{A}\varphi^*(Aj) + nj \leq \frac{1}{AK^n}\varphi^*(AjK^n) + \frac{1}{A}\sum_{h=1}^{n} K^{h-n},$$

então

$$\rho^j e^{\frac{1}{A}\varphi^*(Aj)} \leq e^{\frac{1}{AK^n}\varphi^*(AjK^n)+\frac{1}{A}n-nj+j\log\rho}.$$

Escolhendo $n_\rho := [\log\rho + 1] \in \mathbb{N}$ tal que $-n_\rho + \log\rho \leq 0$ para $A' = AK^{n_\rho}$, obtemos

$$\rho^j e^{\frac{1}{A}\varphi^*(Aj)} \leq e^{\frac{1}{A}n_\rho} e^{\frac{1}{A'}\varphi^*(A'j)}.$$

(d) Pela convexidade de φ^*,

$$2\varphi^*(A(r+1)) = 2\varphi^*\left(\frac{Ar}{2} + \frac{A(r+2)}{2}\right) \leq \varphi^*(Ar) + \varphi^*(A(r+2)),$$

logo

$$\varphi^*(A(r+1)) - \varphi^*(Ar) \leq \varphi^*(A(r+2)) - \varphi^*(A(r+1)). \tag{1.10}$$

Da mesma forma,

$$\varphi^*(A(r+2)) \leq \varphi^*(A(r+1)) + \varphi^*(A(r+3)) - \varphi^*(A(r+2)),$$

substituindo em (1.10), temos

$$\varphi^*(A(r+1)) - \varphi^*(Ar) \leq \varphi^*(A(r+3)) - \varphi^*(A(r+2)).$$

Fazendo recursivamente o mesmo argumento para $\varphi^*(A(r+3)), \varphi^*(A(r+4)), ..., \varphi^*(Aj)$, obtemos

$$\varphi^*(A(r+1) - \varphi^*(Ar) \leq \varphi^*(A(j+1)) - \varphi^*(Aj)$$

o que completa a prova. □

Proposição 1.2.4. *Seja ω uma função peso subaditiva e $a_{k,A}$ definida como em (1.9). Então*

(a) $a_{j,A} \cdot a_{k,A} \leq a_{j+k,A} \quad \forall j, k \in \mathbb{Z}_+$.

(b) $a_{j,A} \leq a_{j+1,A} \quad \forall j \in \mathbb{Z}_+$.

(c) Para todos $j, h, r \in \mathbb{Z}_+$ com $0 \leq h \leq j$

$$\frac{j!}{h!}a_{j-h,A} \leq \frac{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(j+r))}}{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(h+r))}}$$

(d) Para todos $j, h, r \in \mathbb{Z}_+$

$$e^{\frac{1}{A}\varphi^*(jA)}e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(r+h))} \leq e^{\frac{1}{2A}\varphi^*(2A(j+h))}e^{\frac{1}{2A}\varphi^*(2Ar)}$$

Demonstração. (a) Da definição da conjugada de Young e da subaditividade de ω

$$\begin{aligned}
\frac{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(Aj)}}{j!} \cdot \frac{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(Ak)}}{k!} &= \sup_{s\geq 0} \frac{e^{js-\frac{1}{A}\varphi(s)}}{j!} \cdot \sup_{t\geq 0} \frac{e^{kt-\frac{1}{A}\varphi(t)}}{k!} \\
&= \sup_{u,v\geq 1} \frac{e^{j\log u + k\log v - \frac{1}{A}(\omega(u)+\omega(v))}}{j!k!} \\
&\leq \sup_{u,v\geq 1} \frac{u^j v^k}{j!k!} e^{-\frac{1}{A}\omega(u+v)} = \frac{1}{(j+k)!} \sup_{u,v\geq 1} (u+v)^{j+k} e^{-\frac{1}{A}\omega(u+v)} \\
&\leq \frac{1}{(j+k)!} \sup_{s\geq 0} e^{(j+k)s - \frac{1}{A}\varphi(s)} = \frac{1}{(j+k)!} e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(j+k))}.
\end{aligned}$$

(b) Segue do item *(a)* tomando $k = 1$, pois temos $a_{1,\lambda} = e^{\lambda\varphi^*(1/\lambda)} \geq 1$.
(c) Primeiro lembre que $\frac{j!}{h!} \leq \frac{(j+r)!}{(h+r)!}$. Então

$$\begin{aligned}
\frac{j!}{h!}a_{j-h,A} &\leq \frac{(j+r)!}{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(j+r))}} \cdot \frac{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(h+r))}}{(h+r)!} \cdot \frac{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(j+r))}}{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(h+r))}} a_{j-h,A} \\
&= \frac{a_{h+r,A}a_{j-h,A}}{a_{j+r,A}} \cdot \frac{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(j+r))}}{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(h+r))}} \leq \frac{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(j+r))}}{e^{\frac{1}{A}\varphi^*((h+r))}}
\end{aligned}$$

sendo que a última estimativa se dá pelo item *(a)*.
(d) Pela convexidade de φ^* e mais uma vez pela propriedade *(a)*

$$\begin{aligned}
e^{\frac{1}{A}\varphi^*(Aj)}e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(r+h))} &= a_{j,A}a_{r+h,A}j!(r+h)! \\
&\leq e^{\frac{1}{A}\varphi^*\left(2A\frac{j+r+h}{2}\right)} \frac{j!(r+h)!}{(j+r+h)!} \\
&\leq e^{\frac{1}{2A}\varphi^*(2A(j+h)) + \frac{1}{2A}\varphi^*(2Ar)} \frac{1}{\binom{j+r+h}{j}} \\
&\leq e^{\frac{1}{2A}\varphi^*(2A(j+h))}e^{\frac{1}{2A}\varphi^*(2Ar)}.
\end{aligned}$$

Observe que a prova de *(a)* depende substancialmente da subaditividade, como a demonstração dos demais itens dependem do primeiro, tal hipótese é indispensável. □

1.3 Comparação entre as classes ultradiferenciáveis locais

Expomos nas seções anteriores as duas das mais conhecidas classes de funções ultradiferenciáveis. Diferem-se basicamente por serem definidas a partir de sequências ou funções peso. Em alguns trabalhos ([16],[17]) é feita uma comparação entre essas classes.

Sobre fortes condições, Meise e Taylor [16] mostraram que ambas definições podem definir a mesma classe.

Definição 1.3.1. Seja $M = (M_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ uma sequência de números positivos. Dizemos que M é uma sequência peso se satisfazer as seguintes condições

(1) $M_k^2 \leqslant M_{k-1}M_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{Z}_+$,

(2) existem $A, H > 0$ tais que $M_k \leq AH^k \min\limits_{0\leq j\leq k} M_j M_{k-j}$ para todo $k \in \mathbb{Z}_+$

(3) existe uma constante $A > 1$ tal que $\displaystyle\sum_{k=p}^{\infty} \frac{M_k}{M_{k+1}} \leq A\frac{M_k}{M_{k+1}}$ para todo $p \in \mathbb{Z}_+$.

Definição 1.3.2. Dada uma sequência de números positivos $M = (M_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$, definimos

1. A função associada $\omega_M : [0,\infty[\to [0,\infty[$ como sendo

$$\omega_M(t) = \begin{cases} \sup_{k\in\mathbb{N}_0} \log \frac{t^k M_0}{M_k} & \text{para } t > 0 \\ 0 & \text{para } t = 0 \end{cases}.$$

   Por vezes $\omega_M(t)$ é denotada $M(t)$.

2. A sequência $(m_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ por $m_k = \dfrac{M_k}{M_{k-1}}$.

Proposição 1.3.1 (3.13 [16])**.** *Seja $M = (M_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ uma sequência satisfazendo as propriedades* (1)–(3) *da Definição 1.3.1 tem-se que $\omega_M(t)$ é uma função peso e $\mathcal{E}^{\{\omega_M\}}(\Omega) = \mathcal{E}^{\{M\}}(\Omega)$ para todo $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ aberto.*

Se $M = (M_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ satisfaz (2) por [37, Proposition 3.2] temos que é possível retomar a sequência da seguinte forma:

$$M_k = M_0 \sup_{t\in\mathbb{N}} \frac{t^k}{e^{\omega_M(t)}},$$

então

$$M_k = M_0 \sup_{t\in\mathbb{N}} e^{k\log t - \omega_M(t)} = M_0 \sup_{t\in\mathbb{N}} e^{kt-\omega_M(e^t)} = M_0 \sup_{t\in\mathbb{N}} e^{kt-\varphi_M(t)} = M_0 e^{\varphi^*_M(t)}. \tag{1.11}$$

Porém, em geral, existem classes definidas de uma forma que não podem ser definidas pela outra. Bonet, Meise e Melikhov [17] fizeram um amplo estudo envolvendo tal questão, a seguir apesentamos alguns resultados desse trabalho.

Teorema 1.3.1 (Theorem 14, [17])**.** *Para cada sequência peso $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) Existe uma função peso ω tal que para cada $d \in \mathbb{N}$, e cada aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, os espaços $\mathcal{E}^M(\Omega)$ e $\mathcal{E}^\omega(\Omega)$ são iguais como espaços vetoriais e/ou como espaços localmente convexos.

(ii) Existem uma função peso ω, $d \in \mathbb{N}$ e um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ tal que os espaços vetoriais $\mathcal{E}^M(\Omega)$ e $\mathcal{E}^\omega(\Omega)$ são iguais.

(iii) A sequência $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ satisfaz (2) e exite $Q \in \mathbb{N}$ tal que $\liminf_{k\to\infty} m_{Qk}/m_k > 1$.

(iv) A sequência $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ satisfaz (2) e (i) é válida quando $\omega = \omega_M$.

Teorema 1.3.2 (Corollary 16 [17])**.** *Para cada função peso ω, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) Existe uma sequência peso $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ tal que para cada $d \in \mathbb{N}$, e cada aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, os espaços $\mathcal{E}^\omega(\Omega)$ e $\mathcal{E}^M(\Omega)$ são iguais como espaços vetoriais e/ou como espaços localmente convexos.

(ii) Existem uma sequência peso $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$, $d \in \mathbb{N}$ e um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ tal que os espaços vetoriais $\mathcal{E}^\omega(\Omega)$ e $\mathcal{E}^M(\Omega)$ são iguais.

(iii) Existe $H > 0$ tal que para todo $t > 0$

$$2\omega(t) \leq \omega(Ht) + H$$

e a sequência $(M_j)_{j\in\mathbb{Z}_+}$, dada por $M_j := \varphi_\omega(j) = \omega(e^j)$ é uma sequência peso para qual (i) vale.

Exemplo 1.3.1. Existe uma sequência peso $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ tal que para cada função peso ω e cada Ω aberto de $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{E}^{(M)}(\Omega) \neq \mathcal{E}^{(\omega)}(\Omega)$.

A sequência é construída em [40]. Considere $c_1 := 1$ e defina m_k, c_n e d_n indutivamente como segue

$$\begin{aligned} m_k &:= c_n^3 && \text{para } c_n \leq \left[(c_n)^{3/2}\right] =: d_n - 1, \\ m_k &:= k^4/d_n^2 && \text{para} \quad d_n \leq k \leq c_{n+1} - 1 := d_n^2. \end{aligned}$$

Defina $M_k := \displaystyle\prod_{j=1}^{k} m_j$.

É possível ver que M_k satisfaz as condições básicas (1.1), (1.2), (1.3) e (1.4) impostas para sequências peso como visto na Seção 1.1. Porém não satisfaz (2).

O contrário também ocorre.

Exemplo 1.3.2. Dado $s > 0$, a função $\omega(t) := \max(0, (\log|t|)^s)$ é tal $\mathcal{E}^{(M)}(\Omega) \neq \mathcal{E}^{(\omega)}(\Omega)$ para toda sequência peso $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ e todo Ω aberto de $\mathbb{R}^d$.

Por esses exemplos fica explícita a importância do estudo tanto das classes geradas a partir de sequências quanto as classes geradas a partir de funções peso.

CAPÍTULO 2

Funções L^q ultradiferenciáveis globais

Introduziremos neste capítulo o objeto principal deste trabalho, a classe de funções L^q ultradiferenciáveis globais. Trabalharemos com classes de funções definidas a partir de funções peso, utilizando o tratamento que Adwan, Hoepfner e Raich [2] utilizaram anteriormente para sequências. Também será apresentado o dual do espaço e um teorema de caracterização baseado no feito em [28], isto é, uma versão do Teorema de Paley-Wiener para a classe de funções ultradiferenciáveis globais.

2.1 Funções L^q-ultradiferenciáveis globais

Fixe uma função peso ω como na Definição 1.2.1, e sejam φ e φ^* definidas como anteriormente na seção 1.2. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, considere $W^{k,q}(\Omega)$ o espaço das funções k-vezes diferenciáveis em $L^q(\Omega)$. Para um multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ de inteiros não negativos, uma constante positiva A, e $1 \leq q \leq \infty$, defina a seminorma $\varrho_{\alpha,A,\Omega,q,\omega} : W^{|\alpha|,q}(\Omega) \to [0, \infty)$

$$\varrho_{\alpha,A,\Omega,q,\omega}(g) = \varrho_\alpha(g) = \|D^\alpha g\|_{L^q(\Omega)} \cdot \exp\left(-\frac{\varphi^*(A|\alpha|)}{A} \right).$$

Supriremos alguns índices e denotaremos apenas por ϱ_α quando possível.

Definição 2.1.1. Sejam $1 \leq q \leq \infty$ e ω uma função peso fixa. Dizemos que uma função $g \in W^{\infty,q}(\Omega)$ é uma *função L^qultradiferenciável global de tipo Roumieu* se existem constantes $A, C > 0$ tais que para todo multi-índice α

$$\|D^\alpha g\|_{L^q(\Omega)} \leq C \exp\left(\frac{\varphi^*(A|\alpha|)}{A}\right). \tag{2.1}$$

Para um $A > 0$ fixo, temos

$$\mathcal{E}_A^{q,\omega}(\Omega) = \left\{g \in W^{\infty,q}(\Omega) : \{\varrho_{\alpha,A,q,\Omega}(g)\}_{|\alpha|\geq 0} \in \ell^q(\mathbb{Z}_+^d)\right\}$$

e

$$\mathcal{E}^{q,\{\omega\}}(\Omega) = \bigcup_{A>0} \mathcal{E}_A^{q,\omega}(\Omega).$$

será chamado espaço das funções L^q *ultradiferenciáveis globais de tipo Roumieu.* O espaço será munido com a topologia do limite indutivo

$$\mathcal{E}^{q,\{\omega\}}(\Omega) = \mathrm{ind}_{A\to\infty}\mathcal{E}_A^{q,\{\omega\}}(\Omega).$$

Por outro lado, definimos o espaço das funções L^q *ultradiferenciáveis globais de tipo Beurling* por

$$\mathcal{E}^{q,(\omega)}(\Omega) = \bigcap_{A>0} \mathcal{E}_A^{q,\omega}(\Omega).$$

O espaço passa a ser munido com a topologia do limite projetivo

$$\mathcal{E}^{q,(\omega)}(\Omega) = \mathrm{proj}_{A\to\infty}\mathcal{E}_A^{q,\omega}(\Omega).$$

Trabalharemos com ênfase nas classe de tipo Roumieu embora os resultados, a menos que explicitamente ditos, valem para classes Beurling também. Doravante denotaremos somente espaço das funções L^q ultradiferenciáveis globais por $\mathcal{E}^{q,\omega}(\Omega)$ quando nos referimos a resultados válidos em ambas as classes.

Ao longo do trabalho consideraremos C uma constante que pode se modificar, mas que depende apenas da dimensão do espaço em que estamos trabalhando.

Observação 2.1.1. Se uma função f satisfaz (2.1), para um $A > 0$ fixo, então existe A_0 tal que $f \in \mathcal{E}_{A_0}^{q,\omega}(\Omega)$. Em particular, A_0 pode ser escolhido desde que satisfaça $A_0 \geq 2K^2A$, sendo K constante provinda da propriedade (α), Definição 1.2.1.

De fato, dado $A > 0$, temos que para todo $A_0 > 0$

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d} \|D^\alpha f\|_{L^q}^q e^{-\frac{q}{A_0}\varphi^*(A_0|\alpha|)} \leq C \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d} e^{\frac{q}{A}\varphi^*(A|\alpha|)-\frac{q}{A_0}\varphi^*(A_0|\alpha|)}$$

então pelo Lema 1.2.1 (c), escolhendo $p = 1$, existe $A_0 \geq 2K^2A$ tal que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{A}\varphi^*(A|\alpha|) + |\alpha| \leq \frac{1}{2A} + \frac{1}{A_0}\varphi^*(A_0|\alpha|)& \\
\Leftrightarrow \frac{1}{A}\varphi^*(A|\alpha|) - \frac{1}{A_0}\varphi^*(A_0|\alpha|) &\leq \frac{1}{2A} - |\alpha| \\
\Leftrightarrow \frac{q}{A}\varphi^*(A|\alpha|) - \frac{q}{A_0}q\varphi^*(A_0|\alpha|) &\leq C_{A,q} - q|\alpha|
\end{aligned}$$

para $|\alpha| > 0$. Substituindo na inequação anterior

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^d_+} \|D^\alpha f\|^q_{L^q} e^{-\frac{q}{A_0}\varphi^*(A_0|\alpha|)} \leq C \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^d_+} e^{-q|\alpha|} \leq C.$$

Portanto $f \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\Omega)$.

Observação 2.1.2. Se $A_1 < A_2$, então $\mathcal{E}^{q,\omega}_{A_1}(\Omega) \subset \mathcal{E}^{q,\omega}_{A_2}(\Omega)$.
De fato, seja $g \in \mathcal{E}^{q,\omega}_{A_1}(\Omega)$, então $(\varrho_{\alpha,A_1}(g))_\alpha = (\|D^\alpha g\|_{L^q} e^{-\frac{1}{A_1}\varphi^*(|\alpha|A_1)})_\alpha \in \ell^q$. Como já visto na Proposição 1.2.2, a função $t \mapsto \frac{\varphi^*(t)}{t}$ é não decrescente, temos

$$\frac{1}{|\alpha|A_1}\varphi^*(|\alpha|A_1) \leq \frac{1}{|\alpha|A_2}\varphi^*(|\alpha|A_2) \Rightarrow -\frac{1}{A_1}\varphi^*(|\alpha|A_1) \geq -\frac{1}{A_2}\varphi^*(|\alpha|A_2),$$

para $|\alpha| \geq 1$, logo

$$\|D^\alpha g\|_{L^q} e^{-\frac{1}{A_2}\varphi^*(|\alpha|A_2)} \leq \|D^\alpha g\|_{L^q} e^{-\frac{1}{A_1}\varphi^*(|\alpha|A_1)}.$$

Portanto $(\varrho_{\alpha,A_2}(g))_\alpha \in \ell^q$, ou seja, $g \in \mathcal{E}^{q,\omega}_{A_2}(\Omega)$.

Proposição 2.1.1. *$\mathcal{E}^{q,\omega}_A(\Omega)$ é um espaço de Banach munido com a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{E}^{q,\omega}_A}$ definida por*

$$\|g\|_{\mathcal{E}^{q,\omega}_A} = \left(\sum_{|\alpha|\geq 0} \varrho_\alpha(g)^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Demonstração. Segue como [2, Proposition 2.2]. □

Proposição 2.1.2. *Seja $g \in \mathcal{E}^{q,\omega}_A(\Omega)$. Se β é um multi-índice, então $D^\beta g \in \mathcal{E}^{q,\omega}_{A'}(\Omega)$ para algum $A' > 0$. Em particular, $\mathcal{E}^{q,\omega}(\Omega)$ é fechado sobre diferenciação.*

Demonstração. Tem-se $D^\alpha(D^\beta g) = D^{\alpha+\beta}g$, como φ^* é convexa, segue

$$\begin{aligned}
\|D^\alpha(D^\beta g)\|_{L^q} &\leq Ce^{\frac{1}{A}\varphi^*(A|\alpha+\beta|)} \\
&\leq Ce^{\frac{1}{2A}\varphi^*(2A|\alpha|)+\frac{1}{2A}\varphi^*(2A|\beta|)} \\
&\leq C_{\beta,A}e^{\frac{1}{2A}\varphi^*(2A|\alpha|)}.
\end{aligned}$$

A' é dado da mesma forma como feito na Observação 2.1.1. □

Lema 2.1.1. *Sejam $1 \leq p, q, r \leq \infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$. Se $f \in \mathcal{E}_A^{q,\omega}(\Omega)$ e $g \in L^p(\Omega)$, então $h = f * g \in \mathcal{E}_A^{r,\omega}(\Omega)$.*

Demonstração. Existe $A > 0$ tal que $f \in \mathcal{E}_A^{q,\omega}(\Omega)$, em particular, $D^\alpha f \in L^q(\Omega)$ para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. Logo, pela Desigualdade de Young

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{|\alpha| \geq 0} \|D^\alpha h\|_{L^r}^r e^{-\frac{r}{A}\varphi^*(A|\alpha|)} \right)^{\frac{1}{r}} &= \left(\sum_{|\alpha| \geq 0} \|(D^\alpha f) * g\|_{L^r}^r e^{-\frac{r}{A}\varphi^*(A|\alpha|)} \right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq \|g\|_{L^p} \left(\sum_{|\alpha| \geq 0} \|D^\alpha f\|_{L^q}^r e^{-\frac{r}{A}\varphi^*(A|\alpha|)} \right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq C \|g\|_{L^p} \|f\|_{\mathcal{E}_A^{q,\omega}} < \infty,
\end{aligned}$$

sendo que a penúltima desigualdade se dá pela propriedade dos espaços ℓ^p, temos que se $q \leq r$ então $\|\cdot\|_{\ell^r} \leq \|\cdot\|_{\ell^q}$. $\square$

Lema 2.1.2. *Sejam $1 \leq q \leq \infty$ e $f \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\Omega)$. Se $g \in \mathcal{E}^{\infty,\omega}(\Omega)$, então $h = fg \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\Omega)$. Da mesma forma, se $g \in \mathcal{E}^{p,\omega}(\Omega)$, sendo p o expoente conjugado de q, então $fg \in \mathcal{E}^{1,\omega}(\Omega)$.*

Demonstração. Existem $A_1, A_2 > 0$ tais que $g \in \mathcal{E}_{A_1}^{q,\omega}(\Omega)$ e $f \in \mathcal{E}_{A_2}^{q,\omega}(\Omega)$. Suponha sem perda de generalidade $A_1 = A_2$ (pois se $A_1 < A_2$ então $\mathcal{E}_{A_1}^{q,\omega}(\Omega) \subset \mathcal{E}_{A_2}^{q,\omega}(\Omega)$).

Para $A > 0$, pela fórmula de Leibniz e a desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
\sum_{|\alpha| \geq 0} \varrho_{\alpha,A}(h)^q &\leq \sum_{|\alpha| \geq 0} \left[\sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \|D^\beta f\|_{L^q} \|D^{\alpha-\beta} g\|_{L^\infty} e^{-\frac{1}{A}\varphi^*(A|\alpha|)} \right]^q \\
&\leq \sum_{|\alpha| \geq 0} \left[\sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \varrho_{\beta,A_1}(f) \|g\|_{\mathcal{E}_{A1}^{\infty,\omega}} e^{\frac{1}{A_1}\varphi^*(A_1|\beta|) + \frac{1}{A_1}\varphi^*(A_1(|\alpha|-|\beta|))} e^{-\frac{1}{A}\varphi^*(A|\alpha|)} \right]^q \\
&\leq C \left(\sum_{\beta \in \mathbb{Z}_+^d} \varrho_{\beta,A_1}(f)^q \right) \sum_{|\alpha| \geq 0} \left[\left(\sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta}^{q'} \right)^{\frac{1}{q'}} e^{\frac{1}{A_1}\varphi^*(A_1|\alpha|)} e^{-\frac{1}{A}\varphi^*(A|\alpha|)} \right]^q \\
&\leq C \sum_{|\alpha| \geq 0} 2^{q|\alpha|} \left[e^{\frac{1}{A_1}\varphi^*(A_1|\alpha|) - \frac{1}{A}\varphi^*(A|\alpha|)} \right]^q.
\end{aligned}$$

Utilizando o Lema 1.2.1 para $p = 3$, temos que para $A > 4K^4 A_1$

$$\begin{aligned}
q|\alpha| \left(\frac{1}{A_1|\alpha|}\varphi^*(A_1|\alpha|) - \frac{1}{A|\alpha|}\varphi^*(A|\alpha|) \right) &\leq q|\alpha| \left(\frac{1}{2A_1|\alpha|} - 3 \right) \\
&= C_{q,A_1} - 3q|\alpha|.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}\sum_{|\alpha|\geq 0} \varrho_{\alpha,A}(h)^q &\leq C \sum_{|\alpha|\geq 0} 2^{2q|\alpha|} e^{c-3q|\alpha|} \\ &\leq C \sum_{|\alpha|\geq 0} e^{-q|\alpha|} < \infty,\end{aligned}$$

portanto $h \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\Omega)$.

Para $g \in \mathcal{E}^{p,\omega}(\Omega)$, a demonstração é análoga. $\square$

Exemplo 2.1.1. Seja ω uma função peso tal que $\omega(t) = o(t)$. Então $f_a(x) = e^{-a|x|^2}$ é um elemento de $\mathcal{E}^{q,\omega}(\mathbb{R}^d)$ para todo $a > 0$.

Façamos primeiro pra $\mathbb{R}$. Pela Proposição 5.2.1 existem $B, C > 0$ tais que

$$|f_a^{(\ell)}(x)| \leq CB^\ell \ell^{\frac{\ell}{2}} e^{-\frac{ax^2}{2}}$$

então,

$$\|f_a^{(\ell)}\|_{L^q}^q = \int |f_a^{(\ell)}(x)|^q dx \leq C_a B^{q\ell} \ell^{\frac{q\ell}{2}}.$$

Tomando a norma $\mathcal{E}_A^{q,\omega}(\mathbb{R})$

$$||f_a||_{\mathcal{E}_A^{q,\omega}}^q = \sum_{\ell=0}^\infty \|f_a^{(\ell)}\|_{L^q}^q e^{-\frac{q}{A}\varphi^*(A\ell)} \leq C \sum_{\ell=0}^\infty B^{q\ell} \ell^{\frac{q\ell}{2}} e^{-\frac{q}{A}\varphi^*(A\ell)} := C \sum_{\ell=0}^\infty \rho_\ell.$$

Para analisar a convergência da série, usamos o Teste da Raiz e utilizemos o Lema 1.2.2

$$\begin{aligned}\lim_{\ell\to\infty} \rho^{\frac{1}{\ell}} &= \lim_{\ell\to\infty} B^q \ell^{\frac{q\ell}{\ell 2}} e^{-\frac{q}{A\ell}\varphi^*(A\ell)} = \lim_{\ell\to\infty} B^q e^{\frac{q}{2}(\log \ell - \frac{1}{A\ell}\varphi^*(A\ell))} e^{-\frac{q}{2A\ell}\varphi^*(a\ell)} \\ &\leq \lim_{\ell\to\infty} B^q e^{\frac{q}{2}\left(1-\frac{C_A}{\ell}\right)} e^{-\frac{q}{2A\ell}\varphi^*(A\ell)} = 0,\end{aligned}$$

pelo fato que $t^{-1}\varphi^*(t) \to \infty$ quando $t \to \infty$ e então $e^{-\frac{q}{2A\ell}\varphi^*(A\ell)} \to 0$. Portanto a série converge e $f_a(x) \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\mathbb{R})$.

Vamos generalizar para $\mathbb{R}^d$, temos $f_a(x) = e^{-ax} = \prod_{j=1}^d e^{-ax_j^2}$.

Seja $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_d)$, como feito anteriormente, pelo Lema 5.2.1, para cada j, existem B_j e C_j tais que

$$|D^\alpha f_a(x)| = \left|\prod_{j=1}^d D_j^{\alpha_j} e^{-ax_j^2}\right| \leq \prod_{j=1}^d C_j a^{\frac{a}{2}} B_j^{\alpha_j} \alpha_j^{\frac{\alpha_j}{2}} e^{-\frac{a}{2}x_j^2}$$

então, sendo $B = \max_j\{B_j\}$ e $C = \max_j\{C_j\} a^{\frac{a}{2}}$, segue

$$\|D^\alpha f_a\|_{L^q}^q = \int_{\mathbb{R}^d} |D^\alpha f_a(x)|^q dx \leq CB^{q|\alpha|} \prod_{j=1}^d \alpha_j^{\frac{q}{2}\alpha_j}.$$

Tomando a norma $\mathcal{E}_A^{q,\omega}(\mathbb{R})$

$$\|f_a\|^q_{\mathcal{E}_A^{q,\omega}} = \sum_{|\alpha|\geq 0} \|D^\alpha f_a\|^q_{L^q} e^{-\frac{q}{A}\varphi^*(A|\alpha|)} \leq C\sum_{\ell=0}^{\infty} e^{-\frac{q}{A}\varphi^*(A|\alpha|)} B^{q\ell} \sum_{|\alpha|=\ell}\left[\prod_{j=1}^{d} \alpha_j^{\frac{q}{2}\alpha_j}\right] := C\sum_{\ell=0}^{\infty}\rho_\ell.$$

Mais uma vez faremos uso do Teste da Raiz para analisar a convergência. Utilizando fórmula de Hardy-Ramanujan-Rademacher, que garante que a função partição ser limitada pelo $(n+1)$-ésimo termo da sequência de Fibonacci, o qual denotaremos por f_{n+1}, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{\ell\to\infty} \rho_\ell^{\frac{1}{\ell}} &= \lim_{\ell\to\infty} B^q e^{-\frac{q}{A}\varphi^*(A\ell)} \left[\sum_{|\alpha|=\ell}\prod_{j=1}^{d}\alpha_j^{\frac{q}{2}\alpha_j}\right]^{\frac{1}{\ell}} \\
&\leq \lim_{\ell\to\infty} B^q e^{-\frac{q}{A}\varphi^*(A\ell)} f_{\ell+1}^{\frac{1}{\ell}} \ell^{\frac{q}{2}} \\
&\leq \lim_{\ell\to\infty} B^q e^{-\frac{q}{2A\ell}\varphi^*(A\ell)} e^{\frac{q}{2}\left[\log\ell - \frac{1}{A\ell}\varphi^*(A\ell)\right]} \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 0
\end{aligned}$$

a convergência é obtida utilizando a mesma justificativa dada no caso anterior. Segue portanto que $f_a(x) = e^{-a|x|^2} \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\mathbb{R}^d)$.

Lema 2.1.3. *Seja $f \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\mathbb{R}^d)$ e $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ uma função $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ não negativa tal que $\int_{\mathbb{R}^d}\phi(x)\,dx = 1$. Defina $\phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-d}\phi(\frac{x}{\epsilon})$, então $\phi_\epsilon * f \to f$ em $\mathcal{E}_A^{q,\omega}(\mathbb{R}^d)$ quando $\epsilon \to 0$.*

Demonstração. Para qualquer $N \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d}\left(\|D^\alpha(f*\phi_\epsilon - f)\|_{L^q} e^{-\frac{1}{A}\varphi^*(A|\alpha|)}\right)^q &= \sum_{|\alpha|<N}\left(\|D^\alpha(f*\phi_\epsilon - f)\|_{L^q} e^{-\frac{1}{A}\varphi^*(A|\alpha|)}\right)^q \\
&+ \sum_{|\alpha|\geq N}\left(\|(D^\alpha f*\phi_\epsilon - D^\alpha f)\|_{L^q} e^{-\frac{1}{A}\varphi^*(A|\alpha|)}\right)^q.
\end{aligned}$$

Do fato que $\int_{\mathbb{R}^d}\phi(x)\,dx = 1$ e pela desigualdade de Minkowski para integrais

$$\begin{aligned}
\|D^\alpha(f*\phi_\epsilon - f)\|_{L^q} &= \left(\int_{\mathbb{R}^d}\left|\int_{\mathbb{R}^d}\epsilon^{-d}\phi\left(\frac{y}{\epsilon}\right)D^\alpha f(x-y)\,dy - D^\alpha f(x)\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^d}\left|\int_{\mathbb{R}^d}\phi(y)[D^\alpha f(x-\epsilon y) - D^\alpha f(x)]\,dy\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d}\phi(y)\|D^\alpha f(\,\cdot - \epsilon y) - D^\alpha f(\,\cdot)\|_{L^q}\,dy \\
&\leq C\|D^\alpha f\|_{L^q}.
\end{aligned}$$

Dado $\delta > 0$, como $f \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\mathbb{R}^d)$, existe N suficientemente grande tal que

$$\left[\sum_{|\alpha| \geq N} \left(\|D^\alpha f\|_{L^q} e^{-\frac{1}{A}\varphi^*(A|\alpha|)} \right)^q \right]^{\frac{1}{q}} < \frac{\delta}{2}. \tag{2.2}$$

Por outro lado, para cada α fixo, como em particular $f \in W^{\infty,q}(\mathbb{R}^d)$, existe $\epsilon_\alpha > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi(y) \|D^\alpha f(\,\cdot - \epsilon y) - D^\alpha f(\,\cdot\,)\|_{L^q} \leq \frac{\delta}{2^{d|\alpha|+1}} e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A|\alpha|)} \quad \text{para todo } \epsilon < \epsilon_\alpha. \tag{2.3}$$

Portanto, sendo $\epsilon' = \min\{\epsilon_\alpha \ : |\alpha| < N\}$, tem-se para todo $\epsilon < \epsilon'$, por (2.2) e (2.3)

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^d} \left(\|D^\alpha (f * \phi_\epsilon - f)\|_{L^q} e^{-\frac{1}{A}\varphi^*(A|\alpha|)} \right)^q \\
&\quad \leq \sum_{|\alpha|<N} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \phi(y) \|D^\alpha f(\,\cdot - \epsilon y) - D^\alpha f\|_{L^q} \, dy e^{-\frac{1}{A}\varphi^*(A|\alpha|)} \right)^q \\
&\qquad + \sum_{|\alpha| \geq N} \left(C \|D^\alpha f\|_{L^q} e^{-\frac{1}{A}\varphi^*(A|\alpha|)} \right)^q \\
&\quad \leq \sum_{|\alpha|<N} \frac{\delta^q}{2^{q(d|\alpha|+1)}} + \frac{\delta^q}{2^q} \\
&\quad \leq \delta^q
\end{aligned}$$

e segue o resultado. □

Exemplo 2.1.2. Considere a função $\chi(x) := (2\pi)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4}}$, então $\int_{\mathbb{R}^d} \chi(x)\, dx = 1$ e $\sigma(x) := (2\pi)^{-d} \hat{\chi}(\xi) = e^{-|\xi|^2} \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\mathbb{R}^d)$ como visto no Exemplo 2.1.1. Dada $f \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\mathbb{R}^d)$ com suporte compacto (para que sua transformada de Fourier seja bem definida), tem-se

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{i(x-y)\xi} e^{-\epsilon^2|\xi|^2} \, dy \, d\xi &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi} \sigma(\epsilon\xi) \hat{f}(\xi) \, d\xi \\
&= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi} \hat{\chi}(\epsilon\xi) \hat{f}(\xi) \, d\xi \\
&= (\chi_\epsilon * f)(x) \to f(x)
\end{aligned}$$

em $\mathcal{E}_A^{q,\omega}(\mathbb{R}^d)$ quando $\epsilon \to 0$.

A seguir, provamos a existência de função corte nas classe não quase analíticas. Dessa forma, os resultados seguintes não são válidos quando consideramos a função peso ω quase analítica.

Proposição 2.1.3. *Se ω é uma função peso não quase analítica, então $\mathcal{E}^{q,\omega}(\Omega)$ possui uma função não trivial de suporte compacto.*

Demonstração. Por [18, Corolário 2.6], existe $h \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, $h \neq 0$ com $\text{supp}(h) \subset [-\epsilon, \epsilon]^d$ e

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{h}(t)| e^{B\omega(t)}\, dt = C < \infty, \quad \text{para todo } B > 0.$$

Como $D^\alpha h(x) = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}D^\alpha h(x) = (2\pi)^{-d}\mathcal{F}^{-1}(x^\alpha \hat{h}(x))$, temos

$$\begin{aligned}
|D^\alpha h(x)| &= (2\pi)^{-d}\left|\int_{\mathbb{R}^d} e^{iyx}\hat{h}(y)y^\alpha\, dy\right| \leq (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{h}(y)| e^{B\omega(y)} e^{-B\omega(y)+\log|y^\alpha|}\, dy \\
&\leq \frac{C}{(2\pi)^d}\sup_{y\in\mathbb{R}^d}\left\{e^{|\alpha|\log|y| - B\omega(y)}\right\} \leq \frac{C}{(2\pi)^d} e^{B\sup_{z>0}\left\{\frac{|\alpha|}{B}z - \varphi(z)\right\}} \\
&\leq \frac{C}{(2\pi)^d} e^{B\varphi^*\left(\frac{|\alpha|}{B}\right)}.
\end{aligned}$$

Logo, para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$, $\|D^\alpha h\|_{L^\infty} < Ce^{B\varphi^*\left(\frac{|\alpha|}{B}\right)}$ e obtemos que $h \in \mathcal{E}^{\infty,\omega}(\Omega)$.

Para $1 \leq q < \infty$, dado $A > 0$

$$\begin{aligned}
\varrho_{\alpha,A}(h)^q &= \|D^\alpha h\|_{L^q}^q e^{-\frac{q}{A}\varphi^*(A|\alpha|)} \\
&\leq C\|D^\alpha h\|_{L^\infty}^q e^{-\frac{q}{A}\varphi^*(A|\alpha|)} \\
&\leq Ce^{q|\alpha|\left[\frac{1}{B|\alpha|}\varphi^*(B|\alpha|) - \frac{1}{A|\alpha|}\varphi^*(A|\alpha|)\right]},
\end{aligned}$$

para todo $B > 0$, sendo $C = C_h > 0$.

Portanto, com o mesmo ajuste feito na Observação 2.1.1

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d} \varrho_{\alpha,A}(h)^q \leq C\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d} e^{-q|\alpha|} \leq C$$

e $h \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\Omega)$. □

Corolário 2.1.1. *Sejam ω função peso não quase analítica e $r > 0$, então existe $\varphi \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\mathbb{R}^d)$ tal que*
(a) $\varphi \in C_c^\infty(B(0, 2r))$;
(b) $\varphi \equiv 1$ em $B(0, r)$.

Demonstração. Segue como o feito no Corolário 2.7 em [2]. □

Lema 2.1.4. *Sejam $1 \leq q \leq \infty$, ω função peso e $A > 0$. Existe $L > 1$ tal que para $A' > LA$ e para toda $u \in \mathcal{E}_A^{q,\omega}(\Omega)$ existe uma sequência $(u_m) \subset \mathcal{E}_{A'}^{q,\omega}(\Omega)$ de funções limitadas com suporte compacto em Ω tal que $u_m \to u$ em $\mathcal{E}_{A'}^{q,\omega}(\Omega)$. Podemos tomar $L = 4K^4$, K constante de (α) na Definição 1.2.1, isto é, a constante depende apenas da função peso ω.*

Demonstração. Suponha $0 \in \Omega$. Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{E}_A^{q,\omega}(\mathbb{R}^d)$ satisfazendo $\phi \equiv 1$ em $B(0, 1)$ e denote $\phi_m(x) = \phi(x/m)$. Defina $u_m(x) = u(x)\phi_m(x)$, é imediato que u_m tem suporte compacto em Ω, mostremos que $u_m \to u$ em $\mathcal{E}^{q,\omega}_{A'}(\Omega)$.

$$\|u-u_m\|_{\mathcal{E}^{q,\omega}_{A'}} = \left[\sum_{|\alpha|\geq 0} \|D^\alpha u(1-\phi_m)\|^q_{L^q} e^{-\frac{q}{A'}\varphi^*(A'|\alpha|)}\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \left[\sum_{|\alpha|\geq 0}\left(\|(1-\phi_m)D^\alpha u\|_{L^q} e^{-\frac{1}{A'}\varphi^*(A'|\alpha|)} + \sum_{\substack{\beta\leq\alpha\\ \beta\neq\alpha}}\binom{\alpha}{\beta}\|D^\beta u\|_{L^q}\|D^{\alpha-\beta}\phi_m\|_{L^\infty} e^{-\frac{1}{A'}\varphi^*(A'|\alpha|)}\right)^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \left[\sum_{|\alpha|\geq 0}\|(1-\phi_m)D^\alpha u\|^q_{L^q} e^{-\frac{q}{A'}\varphi^*(A'|\alpha|)}\right]^{\frac{1}{q}} + \frac{C}{m}\left[\sum_{|\alpha|\geq 0} 2^{q|\alpha|} e^{\frac{q}{A}\varphi^*(A|\alpha|)-\frac{q}{A'}\varphi^*(A'|\alpha|)}\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Como feito na prova do Lema 2.1.2, temos que a soma do segundo termo é finita para $A' > LA$, sendo $L = 4K^4$. Logo a expressão tende a zero quando $m \to \infty$.

Para estimar a primeira parte, como $u \in \mathcal{E}^{q,\omega}_{A'}(\Omega)$, temos que dado $\epsilon > 0$, existe k_0 tal que

$$\sum_{|\alpha|\geq k_0} \varrho_{\alpha,A'}(u)^q < \frac{\epsilon}{2}.$$

Como $1-\phi_m$ tente a zero em $L^q(\Omega)$, segue que

$$\sum_{|\alpha|\geq 0}\|(1-\phi_m)D^\alpha u\|_{L^q} e^{-\frac{1}{A'}\varphi^*(A'|\alpha|)}$$
$$\leq \sum_{|\alpha|\leq k_0}\|1-\phi_m\|^q_{L^q}\|D^\alpha u\|_{L^\infty} e^{-\frac{1}{A'}\varphi^*(A'|\alpha|)} + \sum_{|\alpha|\geq k_0}\|D^\alpha u\|^q_{L^q} e^{-\frac{1}{A'}\varphi^*(A'|\alpha|)} < \epsilon$$

para m suficientemente grande. □

Teorema 2.1.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, ω função peso não quase analítica, $1 \leq q \leq \infty$ e $A' > LA$ (L como no Lema 2.1.4). Então a inclusão*

$$\mathcal{E}^{q,\omega}_{A}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{E}^{q,\omega}_{A'}(\Omega)$$

é compacta.

Demonstração. Já vimos na Observação 2.1.2 que a inclusão é contínua. Para provar que também é compacta, mostremos que se $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada de $\mathcal{E}^{q,\omega}_{A}(\Omega)$, então existe uma subsequência $\{u_{m_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ que converge em $\mathcal{E}^{q,\omega}_{A'}(\Omega)$.

Considere as aproximações $u_{m,M}(x) = u_m(x)\phi_M(x)$, sendo ϕ como no Lema 2.1.4. Será suficiente mostrar que a sequência dupla $\{u_{m,M}\}_{(m,M)\in\mathbb{N}^2}$ satisfaz as seguintes propriedades:

(i) Para cada $M \in \mathbb{N}$ fixo, a sequência $\{u_{m,M}\}_{m\in\mathbb{N}}$ é um subconjunto pré compacto de $\mathcal{E}^{q,\omega}_{A'}(\Omega)$.

(ii) $u_{m,M} \to u_m$ em $\mathcal{E}^{q,\omega}_{A'}(\Omega)$ uniformemente em m quando $M \to \infty$.
Valendo (i) e (ii), basta utilizar o processo de diagonalização de Cantor para concluir a demonstração.

Para a prova de (i), note que $\{u_{m,M}\}_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $\mathcal{E}^{q,\omega}_{A'}(\Omega)$, uniformemente em M por consequência da prova do Lema 2.1.2 (basta tomar na demonstração $h = u_{m,M} = u_m\phi_M$ e que $\{u_m\}$ é limitada em $\mathcal{E}^{q,\omega}_{A}(\Omega)$, portanto a limitação é uniforme). Além disso, para cada M fixo, $\mathrm{supp}(u_{m,M}) \subset B(0, Mr)$ para algum $r > 0$ fixo e para todo $m \in \mathbb{N}$. Dado $\delta > 0$ seja $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left(\sum_{|\alpha|\geq k_0} \exp\left[\frac{1}{A}\varphi^*(A|\alpha|) - \frac{1}{A'}\varphi^*(A'|\alpha|)\right]^q\right)^{\frac{1}{q}} < \frac{\delta}{2C}$$

sendo $C > 0$ constante tal que $\|u_m\|_{\mathcal{E}^{q,\omega}_{A}} \leq C$. Ainda, considere Q a norma em $\mathcal{E}^{q,\omega}_{A'}(\Omega)$ definida por

$$Q(f) = \left[\sum_{|\alpha\leq k_0+d} \varrho_{\alpha,A'}(f)^q\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Como $\{u_{m,M}\}_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em $\mathcal{E}^{q,\omega}_{A'}(\Omega)$, é também uniformemente limitada coma norma Q, que por sua vez é equivalente à norma padrão de $W^{k_0+d,q}(\Omega)$, segue do teorema de compacidade de Rellich-Kondrachov [1, Theorem 6.3] que $\mathcal{E}^{q,\omega}_{A'}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\Omega)$ compactamente. Assim, para cada $M \in \mathbb{N}$ fixo, existe uma subsequência $\{u_{m_j,M}\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $\{u_{m,M}\}_{m\in\mathbb{N}}$ que converge em $C^k(\Omega)$, em particular, é de Cauchy, então para j, ℓ suficientemente grandes, temos

$$\left(\sum_{\alpha\leq k_0} \|D^\alpha(u_{m_j,M} - u_{m_\ell,M})\|^q_{L^q} e^{-\frac{q}{A'}\varphi^*(A'|\alpha|)}\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq |B(0, Mr)| \left(\sum_{\alpha\leq k_0} \|D^\alpha(u_{m_j,M} - u_{m_\ell,M})\|^q_{L^\infty} e^{-\frac{q}{A'}\varphi^*(A'|\alpha|)}\right)^{\frac{1}{q}} < \delta.$$

Ainda, pela desigualdade triangular,

$$\left(\sum_{\alpha\geq k_0} \|D^\alpha(u_{m_j,M} - u_{m_\ell,M})\|^q_{L^q} e^{-\frac{q}{A'}\varphi^*(A'|\alpha|)}\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq \left(\sum_{\alpha\leq k_0} \|D^\alpha u_{m_j,M}\|^q_{L^q} e^{-\frac{q}{A'}\varphi^*(A'|\alpha|)}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{\alpha\leq k_0} \|D^\alpha u_{m_\ell,M}\|^q_{L^q} e^{-\frac{q}{A'}\varphi^*(A'|\alpha|)}\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq 2C\left(\sum_{|\alpha|\geq k_0} \exp\left[\frac{1}{A}\varphi^*(A|\alpha|) - \frac{1}{A'}\varphi^*(A'|\alpha|)\right]^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \delta.$$

Portanto

$$\|u_{m_j,M} - u_{m_\ell,M}\|_{\mathcal{E}^{q,\omega}_{A'}} = \left(\sum_{\alpha \geq 0} \varrho_{\alpha,A'}(u_{m_j,M} - u_{m_\ell,M})^q \right)^{\frac{1}{q}} < 2\delta.$$

Ou seja, a subsequência é de Cauchy, logo converge. O que conclui a prova de (i).

A prova de (ii) está inclusa na demonstração do Lema 2.1.4. □

A seguinte proposição nos diz que o espaço $\mathcal{E}^{q,\omega}(\mathbb{R}^d)$ o qual estamos trabalhando neste capítulo é diferente do espaço $\mathcal{E}^q(\mathbb{R}^d)$ das funções ultradiferenciáveis locais. Desta forma, os duais também serão diferentes, sendo $\mathcal{E}^{q,\omega}(\mathbb{R}^d)'$ o espaço com mais elementos.

Proposição 2.1.4. *Para quaisquer $k = 0, 1, 2, ...$ e $1 \leq q \leq \infty$, temos*

$$\mathcal{E}^{q,\omega}(\mathbb{R}^d) \subsetneq W^{k,q}(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{E}^\omega(\mathbb{R}^d),$$

sendo $\mathcal{E}^\omega(\mathbb{R}^d)$ o espaço das funções ultradiferenciáveis.

Demonstração. Fixe k e q. Seja $\psi \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\mathbb{R}^d)$ não negativa com suporte $\text{supp}\psi \subset B(0,1)$. A existência de ψ satisfazendo tais condições é garantida pelo Corolário 2.1.1. Para cada $\ell \in \mathbb{N}$, considere

$$\psi_\ell(x) = \frac{\ell^{\frac{d}{q}}}{\ell^{k+2}\|\psi\|_{W^{k,q}}} \psi(\ell(x - L)), \qquad L := (\ell, ..., \ell) \in \mathbb{N}^d,$$

lembrando que $\|\psi\|_{W^{k,q}} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha \psi\|_{L^q}$.

Temos

$$\Psi(x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \psi_\ell(x) \in W^{k,q}(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{E}^\omega(\mathbb{R}^d) \setminus \mathcal{E}^{q,\omega}(\mathbb{R}^d).$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\|\psi\|_{W^{k,q}} &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\ell^{\frac{d}{q}}}{\ell^{k+2}\|\psi\|_{W^{k,q}}} \sum_{|\alpha| \leq k} \left[\int |D_x^\alpha \psi(\ell(x - L))|^q \, dx \right]^{\frac{1}{q}} \\
&= \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\ell^{\frac{d}{q}}}{\ell^{k+2}\|\psi\|_{W^{k,q}}} \sum_{|\alpha| \leq k} \ell^{|\alpha|} \left[\int |D^\alpha(\psi)(x))|^q \, \frac{dx}{\ell^d} \right]^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell^2 \|\psi\|_{W^{k,q}}} \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha \psi\|_{L^q} \\
&\leq \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell^2} \leq C.
\end{aligned}$$

Logo $\Psi \in W^{k,q}(\mathbb{R}^d)$.

Lembre, como visto na Definição 1.2.3,

$$\mathcal{E}^\omega(\mathbb{R}^d) := \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) : \text{ para cada compacto } K \subset \mathbb{R}^d, \text{ existe } A > 0 \text{ tal que } |f|_{K,A} < \infty \},$$

sendo

$$|f|_{K,A} = \sup_{x\in K}\sup_{\alpha\in\mathbb{Z}^d_+} |D^\alpha f(x)|e^{-\frac{1}{A}\varphi^*(A|\alpha|)}.$$

Note que para cada ℓ, supp$\psi_\ell \subset B(L,1/\ell)$. Para cada K, denote por M_K o conjunto de índices ℓ tais que $B(L,1/\ell)\subset K$, como K é compacto, segue que M_K é finito, assim

$$\begin{aligned}|\Psi|_{K,A} &= \sup_{x\in K}\sup_{\alpha\in\mathbb{Z}^d_+}\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{\ell^{\frac{d}{q}}}{\ell^{k+2}\|\psi\|_{W^{k,q}}}|D^\alpha\psi(\ell(x-L))|e^{-\frac{1}{A}\varphi^*(A|\alpha|)}\\ &\le C\sup_{x\in K}\sup_{\alpha\in\mathbb{Z}^d_+}|D^\alpha\psi(x)|e^{-\frac{1}{A}\varphi^*(A|\alpha|)}\sum_{\ell\in M_K}\ell^{\frac{d}{q}-k-1}\le C,\end{aligned}$$

pois a soma em ℓ é finita e como $\psi\in\mathcal{E}^{q,\omega}(\mathbb{R}^d)$, suas derivadas são uniformemente limitadas. Obtemos portanto que $\Psi\in\mathcal{E}^{\omega}(\mathbb{R}^d)$.

Por outro lado, ao tomarmos a norma $\mathcal{E}^{q,\omega}_A(\mathbb{R}^d)$ de Ψ, como não há um controle por compactos, a série em ℓ divergirá. Segue que $\Psi\notin\mathcal{E}^{q,\omega}(\mathbb{R}^d)$. □

2.2 Espaços duais e Teorema de Paley-Weiner

Consideraremos nesta seção funções peso ω tais que $\omega(t)=o(t)$ quando $t\to\infty$. Os resultados obtidos são válidos tanto para a classe não quase analítica, quanto para a quase analítica, o que os tornam mais gerais que os apresentados em [28]. As demonstrações foram feitas para a classe Roumieu, a qual denotaremos apenas por $\mathcal{E}^{q,\omega}(\Omega)$ (em vez de $\mathcal{E}^{q,\{\omega\}}(\Omega)$ para não carregar a notação). No caso Beurling são necessárias algumas ressalvas que detalhamos ao final.

A caracterização de classes de funções por meio da transformada de Fourier ou FBI, é um resultado clássico conhecido como Teorema de Paley-Wiener, sendo uma ferramenta fundamental para o estudo de regularidade de operadores definidos na referida classe. Por exemplo, no caso local, Braun, Meise e Taylor obtiveram uma caracterização satisfatória [18, Theorem 1.2.1].

A transformada de Fourier não é uma ferramenta eficiente para caracterizar os espaços globais quanto ao seu decaimento exponencial. Um exemplo construído em [28] é o exemplo de Salem, isto é, tem-se uma medida de Radon positiva em $\mathbb{R}$, compactamente suportada em um conjunto de dimensão Hausforff estritamente menor que 1 cuja transformada de Fourier pertence a $\mathcal{G}^{q,0}$. (Veja mais exemplos na Proposição 5.3.1).

Para suprir tal deficiência, utilizaremos a transformada Fourier-Bros-Iagolnitzer (FBI) seguindo referências como [6] e [19].

Definimos a função $\alpha_\lambda(x,\xi)$, para $\lambda \in (0,1]$, e a forma ω da seguinte maneira

$$\begin{aligned}\omega &= dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d \wedge d(\xi_1 + ix_1\langle\xi\rangle^\lambda) \wedge \cdots \wedge d(\xi_d + ix_d\langle\xi\rangle^\lambda)\\ &= \alpha_\lambda(x,\xi)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d \wedge d\xi_1 \wedge \cdots \wedge d\xi_d\end{aligned}$$

$x, \xi \in \mathbb{R}^d$, sendo $\langle\xi\rangle := \left(1 + \sum_{j=1}^{d} \xi_j^2\right)^{1/2}$.

Para uma função $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$, definimos a *transformada FBI* de g por

$$\mathcal{F}_\lambda g(x,\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x-y)\cdot\xi - \langle\xi\rangle^\lambda (x-y)^2} u(y)\alpha_\lambda(x-y,\xi)\, dy, \tag{2.4}$$

lembre que estamos denotando $(x-y)^2 := |x-y|^2$.

Para uma distribuição $u \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\mathbb{R}^d)'$, definimos a transformação FBI de u por

$$\mathcal{F}_\lambda u(x,\xi) = \left\langle u, e^{i(x-\cdot)\cdot\xi - \langle\xi\rangle^\lambda (x-\cdot)^2} \alpha_\lambda(x-\cdot,\xi)\right\rangle \tag{2.5}$$

sendo que $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ denota o pareamento de $\mathcal{E}^{q,\omega}(\mathbb{R}^d)'$ (dual) com uma função em $\mathcal{E}^{q,\omega}(\mathbb{R}^d)$. A função $\mathcal{F}_\lambda u$ está bem definida para $u \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\mathbb{R}^d)'$, pois como visto no Exemplo 2.1.1 a Gaussiana é um elemento de $\mathcal{E}^{q,\omega}(\mathbb{R}^d)$ desde que $\omega(t) = o(t)$ (como estamos considerando nesta seção). Note também que passaremos a considerar apenas os espaços de funções em que $\Omega = \mathbb{R}^d$ para mais uma vez garantir a boa definição da transformada FBI.

Vamos provar a seguinte versão do Teorema de Paley-Wiener para as funções L^q ultradiferenciáveis globais.

Teorema 2.2.1. *Seja $u \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\mathbb{R}^d)$, então para todo $\beta \in \mathbb{Z}_+^d$ e todo r com $q \le r \le \infty$, $\mathcal{F}_\lambda u(\cdot,\xi) \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\mathbb{R}^d)$ e existem constantes $C, A, M > 0$ tais que*

$$\|D_x^\beta \mathcal{F}_\lambda u(x,\xi)\|_{L^r} \le C e^{-\frac{1}{2}\omega(\frac{\xi}{M})} e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A|\beta|)}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d \tag{2.6}$$

para todo $\lambda \in (0,1)$.

Por outro lado, se $u \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\mathbb{R}^d)'$ e existe $\lambda \in (0,1)$ tal que (2.6) ocorre, então u é uma função e $u \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\mathbb{R}^d)$.

Tem-se um resultado percursor [28, Theorem 1.2] feito para a classe Gevrey global, no presente trabalho, além de fazer as estimativas utilizando funções peso, generalizamos para o caso em que é utilizado $\lambda < 1$ na definição da transformada FBI (2.5). Este parâmetro $\lambda < 1$ se mostrou fundamental como veremos na seção 4.2.1.

Separamos a demonstração do Teorema 2.2.1 em partes, primeiro provamos a necessidade, então somente após mostrar uma fórmula para a inversa da transformada FBI é que provamos a suficiência.

2.2.1 Prova da necessidade do Teorema 2.2.1

Utilizando apenas propriedades das funções em $\mathcal{E}^{q,\omega}(\mathbb{R}^d)$ e da função peso ω é possível obter a estimativa (2.6), veja a seguir.

(Demonstração necessidade do Teorema 2.2.1). Se $u \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\mathbb{R}^d)$, então,

$$\mathcal{F}_\lambda u(x,\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x-y)\cdot\xi - \langle\xi\rangle^\lambda (x-y)^2} u(y)\alpha_\lambda(x-y,\xi)\,dy.$$

Observe que

$$d(\xi_j + ix_j\langle\xi\rangle^\lambda) = d\xi_j + ix_j \sum_{k=1}^{d} \frac{\xi_k}{\langle\xi\rangle^{2-\lambda}} d\xi_k;$$

então, $\alpha_\lambda(x,\xi)$ pode ser escrita como a soma de termos da forma $i^\ell x^\alpha \big(\frac{\xi\langle\xi\rangle^\lambda}{\langle\xi\rangle^2}\big)^\gamma$, sendo $|\alpha| = |\gamma| = \ell$ e $0 \le \ell \le d$. Logo, para obter a estimativa (2.6), pela definição da transformada FBI, é suficiente mostrar a mesma limitação para

$$\begin{aligned} f_u(x,\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x-y)\xi - \langle\xi\rangle^\lambda |x-y|^2} (x-y)^\alpha \left(\frac{\xi\langle\xi\rangle^\lambda}{\langle\xi\rangle^2}\right)^\gamma u(y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{iy\xi - \langle\xi\rangle^\lambda |y|^2} y^\alpha \left(\frac{\xi\langle\xi\rangle^\lambda}{\langle\xi\rangle^2}\right)^\gamma u(x-y)\,dy \end{aligned} \tag{2.7}$$

Primeiro assuma $|\xi| \ge 1$, neste caso, $\langle\xi\rangle^\lambda = (1+|\xi|^2)^{\frac{\lambda}{2}} \le \sqrt{2}|\xi|$. Além disso,

$$|\xi| \le (d \max \xi_j^2)^{\frac{1}{2}} \le d^{\frac{1}{2}} \max|\xi_j| \le d^{\frac{1}{2}}|\xi|.$$

Sem perda de generalidade, assuma $|\xi_1| = \max|\xi_j|$. Vamos agora aplicar D^β em f_u e integrar por partes k vezes, para qualquer $k \in \mathbb{Z}$, obtemos

$$\begin{aligned} D_x^\beta f_u(x,\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{iy\xi - \langle\xi\rangle^\lambda |y|^2} y^\alpha \left(\frac{\xi\langle\xi\rangle^\lambda}{\langle\xi\rangle^2}\right)^\gamma D_x^\beta u(x-y)\,dy \\ &= \frac{(-1)^{|\beta|}}{(-i\xi_1)^k} \left(\frac{\xi\langle\xi\rangle^\lambda}{\langle\xi\rangle^2}\right)^\gamma \int_{\mathbb{R}^d} e^{iy\xi} \frac{\partial^k}{\partial y_1^k}\left(e^{-\langle\xi\rangle^\lambda|y|^2} y^\alpha D_y^\beta u(x-y)\right) dy. \end{aligned}$$

Utilizando a regra de Leibniz, com $\binom{k}{a,b,c} = \dfrac{k!}{a!b!c!}$ e passando o módulo

$$|D_x^\beta f_u(x,\xi)| \le \frac{1}{|\xi_1^k|} \left| \sum_{\substack{a+b+c=k \\ b\le\ell}} \binom{k}{a,b,c} \int_{\mathbb{R}^d} e^{iy\xi} \frac{\partial^a}{\partial y_1^a} e^{-\langle\xi\rangle^\lambda|y|^2} \frac{\partial^b}{\partial y_1^b} y^\alpha \frac{\partial^c}{\partial y_1^c} D_y^\beta u(x-y)\,dy \right|.$$

Tomando a norma $L^r(\mathbb{R}^r)$, e utilizando a inequação de Young para p satisfazendo

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}+1$, obtemos

$$\|\partial^\beta f_u(\cdot,\xi)\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} \le \frac{C}{|\xi|^k}\sum_{\substack{a+b+c=k\\ b\le \ell}}\binom{k}{a,b,c}\times \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}
&\times\left(\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\left|\frac{\partial^a}{\partial y_1^a}e^{-\langle\xi\rangle^\lambda|y|^2}|y|^{\ell-b}\right|\left|\frac{\partial^c}{\partial y_1^c}\partial^\beta u(x-y)\right|dy\right)^r dx\right)^{1/r}\\
&=\frac{C}{|\xi|^k}\sum_{\substack{a+b+c=k\\ b\le \ell}}\binom{k}{a,b,c}\left\|\left[\frac{\partial^a}{\partial y_1^a}e^{-\langle\xi\rangle^\lambda|\cdot|^2}|\cdot|^{\ell-b}\right]*\left[\frac{\partial^c}{\partial y_1^c}\partial^\beta u\right]\right\|_{L^r}\\
&\le\frac{C}{|\xi|^k}\sum_{\substack{a+b+c=k\\ b\le \ell}}\binom{k}{a,b,c}\left\|\frac{\partial^a}{\partial y_1^a}e^{-\langle\xi\rangle^\lambda|\cdot|^2}|\cdot|^{\ell-b}\right\|_{L^p}\left\|\frac{\partial^c}{\partial y_1^c}\partial^\beta u\right\|_{L^q}.
\end{aligned}$$

Por um lado, temos que existe $A_0>0$ tal que $u\in\mathcal{E}^{q,\omega}_{A_0}(\mathbb{R}^d)$. Então

$$\left\|\frac{\partial^c}{\partial y_1^c}\partial^\beta u\right\|_{L^q}\le Ce^{\frac{1}{A_0}\varphi^*(A_0(|\beta|+c))}\le Ce^{\frac{1}{2A_0}\varphi^*(2A_0c)}\,e^{\frac{1}{2A_0}\varphi^*(2A_0|\beta|)}. \tag{2.9}$$

Para a limitação da outra norma, utilizaremos a Proposição 5.2.1. Tem-se

$$\left|\frac{\partial^a}{\partial y_1^a}e^{-\langle\xi\rangle^\lambda|y|^2}\right|\le C2^{\frac{5}{2}a}\,a^{\frac{a}{2}}(\langle\xi\rangle^\lambda)^{\frac{a}{2}}\,e^{-\frac{1}{2}\langle\xi\rangle^\lambda|y|^2}. \tag{2.10}$$

Além disso, como $\varphi^{**}=\varphi$, temos para todo $A>0$,

$$t^a e^{-\frac{1}{A}\varphi^*(Aa)}\le e^{b\log t-\frac{1}{A}\varphi^*(Aa)}=e^{\frac{1}{A}[Aa\log t-\varphi^*(Aa)]}\le e^{\frac{1}{A}\omega(t)},\quad t>0,$$

ainda, pelo Lema 1.2.2, $a^a\le Ce^{a+\frac{1}{A}\varphi^*(Aa)}$, então podemos estimar a expressão em (2.10) por

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial^a}{\partial y_1^a}e^{-\langle\xi\rangle^\lambda|y|^2}\right| &\le C\,2^{\frac{5}{2}a}\,e^{\frac{a}{2}+\frac{1}{2A}\varphi^*(Aa)}\,e^{\frac{1}{2A}\varphi^*(Aa)}\,e^{\frac{1}{2A}\omega(\langle\xi\rangle^\lambda)}e^{-\frac{1}{2}\langle\xi\rangle^\lambda|y|^2}\\
&\le C\,2^{\frac{5}{2}a}e^{\frac{a}{2}}\,e^{\frac{1}{A}\varphi^*(Aa)}\,e^{\frac{1}{2A}\omega(\langle\xi\rangle^\lambda)}e^{-\frac{1}{2}\langle\xi\rangle^\lambda|y|^2}.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Tomando a norma $L^p(\mathbb{R}^d)$, temos

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial^a}{\partial y_1^a} e^{-\langle\xi\rangle^\lambda|\cdot|^2}|\cdot|^{\ell-b}\right\|_{L^p} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d}\left|\frac{\partial^a}{\partial y_1^a} e^{-\langle\xi\rangle^\lambda|y|^2}\right|^p |y|^{p(\ell-b)}\,dy\right)^{1/p} \\ &\leq C\,(2^{\frac{5}{2}}e)^a\, e^{\frac{1}{A}\varphi^*(Aa)}\, e^{\frac{1}{2A}\omega(\langle\xi\rangle^\lambda)}\left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{1}{2}\langle\xi\rangle^\lambda p|y|^2}|y|^{p(\ell-b)}\,dy\right)^{1/p} \\ &= C\,(2^{\frac{5}{2}}e)^a\, e^{\frac{1}{A}\varphi^*(Aa)}\, e^{\frac{1}{2A}\omega(\langle\xi\rangle^\lambda)}\frac{1}{\langle\xi\rangle^{\frac{\lambda(\ell-b)}{2}+\frac{\lambda d}{2p}}}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|t|^{p(\ell-b)}e^{-\frac{p}{2}|t|^{2\lambda}}\,dt\right)^{1/p} \\ &\leq C\,(2^{\frac{5}{2}}e)^a\, e^{\frac{1}{A}\varphi^*(Aa)}\, e^{\frac{1}{2A}\omega(\langle\xi\rangle^\lambda)}\frac{1}{\langle\xi\rangle^{\frac{\lambda(\ell-b)}{2}}}\end{aligned} \tag{2.12}$$

sendo que a constante não depende de p pois a integral é limitada uniformemente em $p \in [1, q']$. Escolheremos $A = 2A_0$ e $m = (2^{\frac{5}{2}}e)$

Voltamos agora a estimar (2.8) substituindo na mesma (2.9) e (2.12). Ainda, pelo Teorema Multinomial $\sum_{a+b+c=k}\binom{k}{a,b,c} = 3^k$,

$$\begin{aligned}\|\partial^\beta f_u(\cdot,\xi)\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} &\leq Cm^k \sum_{\substack{a+b+c=k\\ b\leq\ell}}\binom{k}{a,b,c}\frac{1}{\langle\xi\rangle^{\frac{\lambda(\ell-b)}{2}}|\xi|^k}\, e^{\frac{1}{A}\varphi^*(Aa)+\frac{1}{2A}\omega(\langle\xi\rangle^\lambda)}\, e^{\frac{1}{A}\varphi^*(Ac)+\frac{1}{A}\varphi^*(A|\beta|)} \\ &\leq C\, e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A|\beta|)} e^{\frac{1}{2A}\omega(\langle\xi\rangle^\lambda)}\,\frac{(3m)^k}{|\xi|^k}\, e^{\frac{1}{A}\varphi^*(Ak)} \\ &= C\, e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A|\beta|)}\, e^{\frac{1}{2A}\omega(\langle\xi\rangle^\lambda)}\, e^{-k\log\left(\frac{|\xi|}{M}\right)+\frac{1}{A}\varphi^*(Ak)} \\ &= C\, e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A|\beta|)}\, e^{\frac{1}{2A}\omega(\langle\xi\rangle^\lambda)}\, e^{-\frac{1}{A}\{Ak\log\left(\frac{|\xi|}{M}\right)-\varphi^*(Ak)\}},\end{aligned}$$

para todo $k \in \mathbb{Z}_+$, sendo $M = 3m$. Logo,

$$\begin{aligned}\|\partial^\beta f_u(\cdot,\xi)\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} &\leq C\, e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A|\beta|)}\, e^{\frac{1}{2A}\omega(\langle\xi\rangle^\lambda)}\, e^{-\sup\frac{1}{A}\{Ak\log\left(\frac{|\xi|}{M}\right)-\varphi^*(Ak)\}} \\ &= C\, e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A|\beta|)}\, e^{\frac{1}{2A}\omega(\langle\xi\rangle^\lambda)}\, e^{-\frac{1}{A}\varphi^{**}(\log\left(\frac{|\xi|}{M}\right))} \\ &= C\, e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A|\beta|)}\, e^{\frac{1}{2A}\omega(\langle\xi\rangle^\lambda)}\, e^{-\frac{1}{A}\omega\left(\frac{|\xi|}{M}\right)}.\end{aligned} \tag{2.13}$$

Pela Proposição 1.2.1, existe $R > 0$ tal que para todo $|\xi| > R$,

$$\omega(\langle\xi\rangle^\lambda) \leq \omega\left(\frac{\langle\xi\rangle}{2M}\right) \leq \omega\left(\frac{|\xi|}{M}\right).$$

Portanto, para $|\xi| > R$

$$\begin{aligned}\|\partial^\beta f_u(\cdot,\xi)\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} &\leq C\, e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A|\beta|)}\, e^{\frac{1}{2A}\omega\left(\frac{|\xi|}{M}\right)}\, e^{-\frac{1}{A}\omega\left(\frac{|\xi|}{M}\right)} \\ &\leq CC_\beta\, e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A|\beta|)}\, e^{-\frac{1}{2A}\omega\left(\frac{|\xi|}{M}\right)}.\end{aligned} \tag{2.14}$$

Para $|\xi| \leq R$, basta obtermos uma estimativa do tipo

$$\|\partial^\beta f_u(\cdot,\xi)\|_{L^r} \leq CC_\beta\, e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A|\beta|)}, \tag{2.15}$$

pois temos

$$e^{\frac{1}{2A}\omega\left(\frac{|\xi|}{M}\right)} \leq e^{-\frac{1}{2A}\omega\left(\frac{R}{M}\right)} = C.$$

Basta retomarmos a prova a partir de (2.7). Fazendo a mudança de variáveis $t = \langle\xi\rangle^{\frac{\lambda}{2}} y$, então $dy = \langle\xi\rangle^{\frac{-d\lambda}{2}}$ e

$$\begin{aligned}
|D^\beta f_u(x,\xi)| &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle\xi\rangle^{-\frac{\lambda}{2}}t\xi} e^{-|t|^2} (t\langle\xi\rangle^{-\frac{\lambda}{2}})^\alpha \frac{1}{\langle\xi\rangle^{\frac{\lambda d}{2}}} D_x^\beta u(x-t)dt \right| \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|t|^2}|t|^{|\alpha|} \left| D_x^\beta u(x-t)\right| dt \\
&= C\left(|\cdot|^{|\alpha|} e^{-|\cdot|^2} * D^\beta u \right)(x).
\end{aligned}$$

Mais uma vez utilizando a inequação de Young, obtemos

$$\|\partial^\beta f_u(\cdot,\xi)\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} \leq C \|\,|\cdot|^{|\alpha|} e^{-|\cdot|^2}\|_{L^p} \|D^\beta u\|_{L^q}$$

e, portanto, segue (2.15). □

2.2.2 Caracterização do dual para a classe Roumieu

Em se tratando da topologia do limite indutivo, temos o seguinte resultado.

Proposição 2.2.1 (p.54, [49]). *Seja E um espaço vetorial munido com a topologia indutiva com respeito a família $\{(E_n, g_n),\ n \in \mathbb{N}\}$. Uma aplicação v de E em um espaço localmente convexo F é contínua se, e somente se, cada aplicação $v \circ g_n$ ($n \in \mathbb{N}$) é contínua em E_n.*

Como a topologia do espaço das funções ultradiferenciáveis globais de tipo Roumieu é dada pelo limite indutivo, é uma consequência direta da Proposição anterior.

Proposição 2.2.2. *Uma aplicação em $\mathcal{E}^{q,\omega}(\Omega)$ é contínua se e somente se, para cada $A > 0$, sua restrição em $\mathcal{E}_A^{q,\omega}(\Omega)$ é contínua. Isto implica que*

$$\mathcal{E}^{q,\omega}(\Omega)' = \left(\bigcup_{A>0} \mathcal{E}_A^{q,\omega}(\Omega) \right)' = \bigcap_{A>0} \mathcal{E}_A^{q,\omega}(\Omega)'. \tag{2.16}$$

A seguinte caracterização torna mais fácil o trabalho com o dual do espaço das funções ultradiferenciáveis de tipo Roumieu $\mathcal{E}^{q,\omega}(\mathbb{R}^d)$.

Proposição 2.2.3. *Fixe $1 \leq q \leq \infty$ e seja p o expoente conjugado de q. O dual do espaço das funções ultradiferenciáveis de tipo Roumieu $\mathcal{E}^{q,\omega}(\Omega)'$, pode ser identificado com o espaço $E^{p,\{\omega\}}(\Omega)$ definido por*

$$\left\{ f = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_+^d} f_\gamma^{(\gamma)} \text{ em } \mathcal{E}^{q,\omega}(\Omega)';\ f_\gamma \in L^p(\Omega) \text{ e } \forall \lambda > 0, \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_+^d} \|f_\gamma\|_{L^p} e^{-\frac{1}{\lambda}\varphi^*(\lambda|\gamma|)} < \infty \right\}. \quad (2.17)$$

Demonstração. Como pela Proposição 2.2.2

$$\mathcal{E}^{q,\omega}(\Omega)' = \bigcap_{A>0} \mathcal{E}_A^{q,\omega}(\Omega)',$$

basta mostrarmos que $\mathcal{E}_A^{q,\omega}(\mathbb{R}^d)'$ é da forma (2.17) para um $A > 0$ fixo.

Seja $f \in E^{p,\omega}(\Omega)$ e $\phi \in \mathcal{E}_A^{q,\omega}(\Omega)$, então

$$|\langle f, \phi \rangle| \leq \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_+^d} |\langle f_\gamma^{(\gamma)}, \phi \rangle| = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_+^d} |\langle f_\gamma, \phi^{(\gamma)} \rangle| \leq C \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_+^d} \|f_\gamma\|_{L^p} e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A|\gamma|)} < \infty.$$

Por outro lado, por [2, Lema 2.18] $\ell^q(L^q(\Omega))' = \ell^p(L^p(\Omega))$. Considere, então, a aplicação

$$\begin{aligned} P_A : \mathcal{E}_A^{q,\omega}(\Omega) &\longrightarrow \ell^q(L^q(\Omega)) \\ \phi \quad &\longmapsto \phi^{(\gamma)} e^{-\frac{1}{A}\varphi^*(A|\gamma|)}; \end{aligned}$$

logo P_A é uma isometria de $\mathcal{E}_A^{q,\omega}(\Omega)$ em $P_A(\mathcal{E}_A^{q,\omega}(\Omega)) := S$, subespaço de $\ell^q(L^q(\Omega))$. Dado um subespaço S de $\ell^q(L^q(\Omega))$, pelo teorema de Hahn-Banach, qualquer elemento $u \in S'$ pode ser estendido a um elemento $U \in \ell^q(L^q(\Omega))'$; ou seja, $U = (U_\gamma)$ tal que $\sum \|U_\gamma\|_{L^p}^p < \infty$. Seja $U \in S'$ e $\phi \in \mathcal{E}_A^{q,\omega}(\Omega)$ tem-se

$$\begin{aligned} \langle U, P_A\phi \rangle &= \sum_\gamma \int_{\mathbb{R}^d} U_\gamma(x) \overline{\phi^{(\gamma)}(x) e^{-\frac{1}{A}\varphi^*(A|\gamma|)}}\, dx \\ &= \sum_\gamma \int_{\mathbb{R}^d} (-1)^{|\gamma|} U_\gamma^{(\gamma)}(x) e^{-\frac{1}{A}\varphi^*(A|\gamma|)} \overline{\phi(x)}\, dx \\ &= \langle P_A' U, \phi \rangle, \end{aligned}$$

sendo $P_A' U = \sum (-1)^{|\gamma|} U_\gamma^{(\gamma)} e^{-\frac{1}{A}\varphi^*(A|\gamma|)}$.

Portanto a aplicação dual nos dá um isomorfismo entre S' e $\mathcal{E}_A^{q,\omega}(\Omega)$. De fato, basta notar que se $f \in \mathcal{E}_A^{q,\omega}(\Omega)'$, então $f \circ P_A^{-1} \in S'$ e se $U \in S'$, então $U \circ P_A \in \mathcal{E}_A^{q,\omega}(\Omega)'$, mas como vimos anteriormente, $P_A' U = U \circ P_A$. $\square$

2.2.3 Inversa da FBI e prova da suficiência do Teorema 2.2.1

O teorema a seguir apresenta uma fórmula para a inversa da transformada FBI, cuja demonstração segue a técnica utilizada em [19] e [28].

Teorema 2.2.2. *Sejam $u \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\mathbb{R}^d)'$, para cada $\lambda \in (0,1)$ fixo, denote*

$$u_\epsilon(x) = (2\pi)^{-d} \int_{|\xi| \leq \epsilon^{-1}} \mathcal{F}_\lambda u(x,\xi)\, d\xi.$$

Então $u_\epsilon \to u$ em $\mathcal{E}^{q,\omega}(\mathbb{R}^d)'$ quando $\epsilon \to 0$.

Demonstração. Faremos primeiramente para $u \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\mathbb{R}^d)$. Neste caso mostraremos que $u_\epsilon \to u$ em $\mathcal{E}^{q,\omega}(\mathbb{R}^d)$. Assuma também que u está suportada em uma bola $B(x_0, r)$ com r a escolher. Pelo Exemplo 2.1.2 podemos escrever

$$u(x) = (2\pi)^{-d} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} u(x') e^{i(x-x')\xi} e^{-\epsilon^2 \xi^2}\, dx'\, d\xi,$$

sendo que a convergência ocorre em $\mathcal{E}^{q,\omega}(\mathbb{R}^d)$.

Para ϵ pequeno, mudamos o contorno de integração

$$(x', \xi) \longmapsto (y, \eta) := \Gamma(x', \xi) = (x', \xi + i\langle \xi \rangle^\lambda (x - x')).$$

O integrando é holomorfo com relação à ξ e decai rapidamente, com $|\Gamma(x', \xi, t)| \to \infty$ quando $|x - x'|$ é suficientemente pequeno, sendo

$$\Gamma(x', \xi, t) = (1-t)(x', \xi) + t\Gamma(x', \xi), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

A princípio escolhemos $r = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ e tomemos x na vizinhança $B(x_0, 2r)$ de $B(x_0, r)$. Obtemos

$$\operatorname{Re}(-\epsilon^2 \Gamma(x', \xi, t)^2) = -\epsilon^2 \xi^2 + \epsilon^2 t^2 \langle \xi \rangle^{2\lambda} (x - x')^2 \leq -\frac{1}{2} \epsilon^2 \xi^2$$

para $|x - x'| < 1/\sqrt{2} := 2r$.

Pela definição da transformada FBI, $dx' \wedge d\xi = \alpha_\lambda(y, \eta) dy \wedge d\eta$, assim

$$u(x) = (2\pi)^{-d} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} u(y) e^{i(x-y)\eta - \langle \eta \rangle^\lambda (x-y)^2} \alpha_\lambda(x - y, \eta) e^{-\epsilon^2 (\eta + i\langle \eta \rangle^\lambda (x-y))^2}\, dy\, d\eta \quad (2.18)$$

Vamos analisar tal convergência em $\mathcal{E}^{q,\omega}(B(x_0, 2r))$. Temos que $\alpha_\lambda(x, \eta)$ é a soma de termos da forma $i^\ell x^\alpha \left(\frac{\eta \langle \eta \rangle^\lambda}{\langle \eta \rangle^2}\right)^\gamma$, com $|\alpha| = |\gamma| = \ell$ e $0 \leq \ell \leq d$. Vamos estimar a integral em y que aparece acima. Integrando por partes e utilizando o Lema 5.2.1 e a Proposição 5.2.1

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^d} u(y)e^{i(x-y)\eta-\langle\eta\rangle^\lambda(x-y)^2}(x-y)^\alpha e^{-\epsilon^2(\eta+i\langle\eta\rangle^\lambda(x-y))^2}\,dy\right| \\
&=\left|\int_{\mathbb{R}^d} u(x-y)e^{iy\eta-\langle\eta\rangle^\lambda y^2}y^\alpha e^{-\epsilon^2(\eta+i\langle\eta\rangle^\lambda y)^2}\,dy\right| \\
&=\frac{1}{|\eta|^k}\sum_{\substack{a+b+c+d=k\\ c\leq\ell}}\binom{k}{a,b,c,d}\int_{\mathbb{R}^d}|\partial^a_{y_1}u(x-y)|\partial^b_{y_1}\{e^{-\langle\eta\rangle^\lambda y^2}\}|y|^{|\alpha|-c}\partial^d_{y_1}\{e^{-\epsilon^2(\eta+i\langle\eta\rangle^\lambda y)^2}\}\,dy \\
&\leq C\frac{M^k}{|\eta|^k}\sum_{\substack{a+b+c+d=k\\ c\leq\ell}}\int_{\mathbb{R}^d}|\partial^a_{y_1}u(x-y)|e^{\frac{1}{A}\varphi^*(Ab)+\frac{1}{2A}\omega(\langle\eta\rangle^\lambda)}e^{-\frac{1}{2}\langle\eta\rangle^\lambda y^2}|y|^{|\alpha|-c}e^{\frac{1}{A}\varphi^*(md)}e^{-\frac{1}{4}\epsilon^2\eta^2}\,dy \\
&\leq C\frac{M^k}{|\eta|^k}\sum_{\substack{a+b+c+d=k\\ c\leq\ell}}e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(b+d))}e^{\frac{1}{2A}\omega(\langle\eta\rangle^\lambda)}\int_{\mathbb{R}^d}|\partial^a_{y_1}u(x-y)||y|^{|\alpha|-c}e^{-\frac{1}{2}\langle\eta\rangle^\lambda y^2}\,dy \\
&\leq C\frac{M^k}{|\eta|^k}\sum_{\substack{a+b+c+d=k\\ c\leq\ell}}e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(b+d))}e^{\frac{1}{2A}\omega(\langle\eta\rangle^\lambda)}\|\partial^a_{y_1}u\|_{L^q}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|y|^{p(|\alpha|-c)}e^{-\frac{p}{2}\langle\eta\rangle^\lambda y^2}\,dy\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq Ce^{-k\log\left(\frac{|\eta|}{M}\right)+\frac{1}{A}\varphi^*(Ak)}e^{\frac{1}{2m}\omega(\langle\eta\rangle^\lambda)}\leq Ce^{-\frac{1}{A}\omega\left(\frac{\eta}{M}\right)}e^{\frac{1}{2A}\omega(\langle\eta\rangle^\lambda)}
\end{aligned}
$$

a inequação acima é válida para todo $\eta\geq c$, constante referente ao Lema 5.2.1. Pela Proposição 1.2.1, para η suficientemente grande, temos

$$
\left|\int_{\mathbb{R}^d} u(y)e^{i(x-y)\eta-\langle\eta\rangle^\lambda(x-y)^2}(x-y)^\alpha e^{-\epsilon^2(\eta+i\langle\eta\rangle^\lambda(x-y))^2}\,dy\right|\leq Ce^{-\frac{1}{2A}\omega(\eta/M)}. \tag{2.19}
$$

De forma mais simples obtemos para $\eta<c$ (veja, por exemplo, o argumento usado para concluir (2.15)). Logo, para $u\in\mathcal{E}^{q,\omega}(\mathbb{R}^d)$ suportada em $B(x_0,r)$ a fórmula de inversão é válida para todo $x\in B(x_0,2r)$ e, portanto, pela desigualdade de Minkowski, temos a convergência em $L^q(B(x_0,2r))$. Da mesma forma, obtemos (2.19) para todas as derivadas de $u(x)$, isto é,

$$
\left|\int_{\mathbb{R}^d}\partial^\beta u(y)e^{i(x-y)\eta-\langle\eta\rangle^\lambda(x-y)^2}(x-y)^\alpha e^{-\epsilon^2(\eta+i\langle\eta\rangle^\lambda(x-y))^2}\,dy\right|\leq Ce^{\frac{1}{A}\varphi^*(A|\beta|)}e^{-\frac{1}{2A}\omega(\eta/C)}, \tag{2.20}
$$

então, temos a convergência (2.18) em $\mathcal{E}^{q,\omega}(B(x_0,2r))$. Por outro lado, se definirmos $v(x)=\int\mathcal{F}_\lambda u(x,\xi)\,d\xi$, também temos a convergência da função à direita para $v(x)$ quando $\epsilon\to0$; logo, $v\equiv u\equiv0$ em $B(x_0,2r)\setminus B(x_0,r)$. Mas v é real analítica fora do suporte de u, então ela é nula em todo $B(x_0,r)^c$ e segue que $v\equiv u$; isto é, $u(x)=\int\mathcal{F}_\lambda u(x,\xi)\,d\xi$ neste caso. Claramente $u_\epsilon\to v$ quando $\epsilon\to0$, então pela observação anterior, $u_\epsilon\to u$ quando $\epsilon\to0$.

Considerando uma partição da unidade suportada em bolas de raio r com a propriedade da interseção limitada, podemos escrever $u=\sum_j u_j$ em que cada u_j está suportada numa bola $B(x_j, r)$. Pela identidade obtida anteriormente, podemos escrever

$$u = \sum_j u_j = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \int \mathcal{F}_\lambda u_j(x,\xi)\, d\xi = \lim_{k\to\infty} \int \mathcal{F}_\lambda \Big(\sum_{j=1}^{k} u_j \Big)(x,\xi)\, d\xi = \int \mathcal{F}_\lambda u(x,\xi)\, d\xi,$$

sendo que a convergência é dada pelo Teorema da Convergência Dominada, pois se $u \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\mathbb{R}^d)$, por (2.6) temos que $\mathcal{F}_\lambda$ é limitada por uma função integrável em ξ. Obtemos, portanto, a identidade (em particular a convergência) em $\mathcal{E}^{q,\omega}(\mathbb{R}^d)$ no caso geral.

Assuma agora, $u \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\mathbb{R}^d)'$. Dada $\psi \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\mathbb{R}^d)$, e escrevendo u como na Proposição 2.2.3

$$\begin{aligned}
, \langle u_\epsilon, \psi\rangle &= \left\langle (2\pi)^{-d} \int_{|\xi|\le \epsilon^{-1}} \mathcal{F}_\lambda u(x,\xi)\, d\xi, \psi(x) \right\rangle \qquad (2.21)\\
&= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{|\xi|\le\epsilon^{-1}} \mathcal{F}_\lambda u(x,\xi)\, d\xi\, \psi(x)\, dx\\
&= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{|\xi|\le\epsilon^{-1}} \langle u, e^{i(x-\cdot)\xi - \langle\xi\rangle^\lambda (x-\cdot)^2} \alpha_\lambda(x-\cdot,\xi)\rangle\, d\xi\, \psi(x)\, dx\\
&= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{|\xi|\le\epsilon^{-1}} \sum_\gamma (-1)^{|\gamma|} \int_{\mathbb{R}^d} u_\gamma^{(\gamma)}(x') e^{i(x-x')\xi - \langle\xi\rangle^\lambda (x-x')^2} \alpha_\lambda(x-x',\xi)\, dx'\, d\xi\, \psi(x)\, dx\\
&= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{|\xi|\le\epsilon^{-1}} \sum_\gamma \int_{\mathbb{R}^d} u_\gamma(x') \partial_x^\gamma \{ e^{i(x-x')\xi - \langle\xi\rangle^\lambda (x-x')^2} \alpha_\lambda(x-x',\xi)\}\, dx'\, d\xi\, \psi(x)\, dx
\end{aligned}$$

Para cada γ fixo, queremos que a função $u_\gamma(x')\partial_x^\gamma\{e^{i(x-x')\xi-\langle\xi\rangle^\lambda(x-x')^2}\alpha(x-x',\xi)\}$ seja integrável em (x',ξ,x) para $|\xi| \le \epsilon^{-1}$ e dominada por uma função cuja soma em γ é finita.

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{|\xi|\le\epsilon^{-1}} |u_\gamma(x') \partial_x^\gamma \{ e^{i(x-x')\xi - \langle\xi\rangle^\lambda (x-x')^2} \alpha_\lambda(x-x',\xi)\} \psi(x)|\, d\xi\, dx\, dx'\\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{|\xi|\le\epsilon^{-1}} |u_\gamma(x') e^{i(x-x')\xi - \langle\xi\rangle^\lambda (x-x')^2} \alpha_\lambda(x-x',\xi) \partial_x^\gamma \psi(x)|\, d\xi\, dx\, dx'\\
&\qquad \le \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{|\xi|\le\epsilon^{-1}} |u_\gamma(x-x')| e^{-\langle\xi\rangle^\lambda (x')^2} p(|x'|) |\partial_x^\gamma \psi(x)|\, d\xi\, dx\, dx'\\
&\qquad \le C \|u_\gamma\|_{L^p} \|\partial^\gamma \psi\|_{L^q} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{1}{2}|x'|^2} p(|x'|)\, dx'\\
&\qquad \le C e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A|\gamma|)} \|u_\gamma\|_{L^p}
\end{aligned}$$

sendo $p(|x'|)$ um polinômio positivo em x'. Pela Proposição 2.2.3 obtemos que a soma em γ é de fato finita.

Podemos portanto aplicar o teorema de Fubini em (2.21)

$$\begin{aligned}
\langle u_\epsilon, \psi \rangle &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_\gamma (-1)^{|\gamma|} u_\gamma(-x') \times \\
&\times \partial_{x'}^\gamma \left\{ \int_{|\xi| \leq \epsilon^{-1}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(-x+x')\xi - \langle \xi \rangle^\lambda (-x+x')^2} \alpha_\lambda(-x+x', \xi) \psi(-x)\, dx\, d\xi \right\} dx' \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \sum_\gamma (-1)^{|\gamma|} u_\gamma^{(\gamma)}(-x') \left[(2\pi)^{-d} \int_{|\xi| \leq \epsilon^{-1}} \mathcal{F}_\lambda \check{\psi}(x, \xi)\, d\xi \right] dx' \\
&= \left\langle u(-x'), (2\pi)^{-d} \int_{|\xi| \leq \epsilon^{-1}} \mathcal{F}_\lambda \check{\psi}(x', \xi)\, d\xi \right\rangle \\
&\to \langle u(-x'), \psi(-x') \rangle = \langle u, \psi \rangle, \quad \text{quando } \epsilon \to 0
\end{aligned}$$

e obtemos portanto o resultado, sendo que a convergência se dá pelo caso anterior, válido para funções em $\mathcal{E}^{q,\omega}(\mathbb{R}^d)$. □

A fórmula para a inversa da transformada FBI é uma ferramenta fundamental para a prova da suficiência do Teorema 2.2.1, que apresentaremos a seguir.

(Demonstração da recíproca do Teorema 2.2.1). Utilizaremos o Teorema 2.2.2, isto é, para λ fixo, tem-se que $u_\epsilon \to u$ em $\mathcal{E}^{q,\omega}(\mathbb{R}^d)'$ quando $\epsilon \to 0$, sendo

$$u_\epsilon(x) = (2\pi)^{-d} \int_{|\xi| \leq \epsilon^{-1}} \mathcal{F}_\lambda u(x, \xi)\, d\xi. \tag{2.22}$$

Como por hipótese $\mathcal{F}_\lambda u$ satisfaz (2.6), em particular para $r = \infty$, podemos fazer $\epsilon \to 0$ em (2.22) para concluir que $u(x) = (2\pi)^{-d} \int \mathcal{F}_\lambda u(x, \xi)\, d\xi$ é uma função bem definida. Aplicando o Teorema da Convergência Dominada para as derivadas de u, obtemos

$$D^\beta u(x) = (2\pi)^{-d} \int D_x^\beta \mathcal{F}_\lambda u(x, \xi)\, d\xi$$

utilizando a desigualdade de Minkowski para integrais e (2.6)

$$\begin{aligned}
\|D^\beta u\|_{L^q} &\leq (2\pi)^{-d} \int \left(\int |D_x^\beta \mathcal{F}_\lambda u(x, \xi)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} d\xi \leq C e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A|\beta|)} \int e^{-\frac{1}{A}\omega(a\xi)}\, d\xi \\
&\leq C e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A|\beta|)}
\end{aligned}$$

completando a demonstração. □

2.2.4 Casos particulares

Se compararmos o Teorema 2.2.1 com a Proposição 1.1.2, mesmo que considerando sequências, podemos notar que não há necessidade de impor λ admissível. Essa condição é necessária no caso local para controlar o suporte de u, fator inexistente no caso global.

O Teorema 2.2.1 não é válido para $\lambda = 1$ pois estamos utilizando condições mais gerais para as funções peso, o que torna certas estimativas impossíveis. Neste caso, é necessário introduzir um outro parâmetro κ na transformada FBI como feito em trabalhos como [6] e [9]:

$$\mathcal{F}^\kappa u(x,\xi) = \left\langle u, e^{i(x-\cdot)\cdot\xi - \kappa\langle\xi\rangle(x-\cdot)^2}\alpha_\kappa(x-\cdot,\xi)\right\rangle, \tag{2.23}$$

sendo α_κ tal que

$$\begin{aligned}\omega &= dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d \wedge d(\xi_1 + i\kappa x_1\langle\xi\rangle) \wedge \cdots \wedge d(\xi_d + i\kappa x_d\langle\xi\rangle)\\ &= \alpha_\kappa(x,\xi)\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx_d \wedge d\xi_1 \wedge \cdots \wedge d\xi_d.\end{aligned}$$

Utilizando a transformada de Fourier com o parâmetro κ, obtemos um resultado análogo ao anterior. Tal parâmetro $\kappa < 1$ independe da função, dimensão ou qualquer outra informação.

Teorema 2.2.3. *Seja $u \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\mathbb{R}^d)$, então para todo $\beta \in \mathbb{Z}_+^d$ e todo r com $q \le r \le \infty$, $\mathcal{F}^\kappa u(\cdot,\xi) \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\mathbb{R}^d)$ e existem constantes $C, A, M > 0$ tais que*

$$\|D_x^\beta \mathcal{F}^\kappa u(x,\xi)\|_{L^r} \le Ce^{-\frac{1}{2}\omega(\frac{\xi}{M})}e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A|\beta|)}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d \tag{2.24}$$

para κ suficientemente pequeno.

Por outro lado, se $u \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\mathbb{R}^d)'$ é tal que $\mathcal{F}^\kappa u(\cdot,\xi) \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\mathbb{R}^d)$ e (2.24) ocorre para algum κ, então u é uma função e $u \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\mathbb{R}^d)$.

Demonstração. A demonstração segue de forma análoga a do Teorema 2.2.1 até (2.13). Neste caso teríamos

$$\left\|\partial^\beta f_u(\cdot,\xi)\right\|_{L^r\left(\mathbb{R}^d\right)} \le Ce^{\frac{1}{A}\varphi^*(A|\beta|)}e^{\frac{1}{2A}\omega(\kappa|\xi|)}e^{-\frac{1}{A}\omega\left(\frac{|\xi|}{M}\right)}.$$

Escolhendo $\kappa \le \frac{1}{M}$, sendo $M = \left(3e2^{\frac{5}{2}}\right)$ como aparece na demonstração anterior, obtemos

$$\left\|\partial^\beta f_u(\cdot,\xi)\right\|_{L^r\left(\mathbb{R}^d\right)} \le Ce^{\frac{1}{A}\varphi^*(A|\beta|)}e^{-\frac{1}{2A}\omega\left(\frac{|\xi|}{M}\right)}.$$

A prova da recíproca também segue como antes. □

No caso Beurling, devido a forma com a qual é tomada a topologia do espaço, não temos uma caracterização do espaço dual tão precisa quanto no caso Roumieu, dada pela Proposição 2.2.3 devido à topologia do limite projetivo. Porém, podemos fazer uma análise sobre um conjunto contido no dual como segue.

Proposição 2.2.4. *Fixe $1 \leq q \leq \infty$ e seja p o expoente conjugado de q. Considere o espaço $E^{p,(\omega)}(\Omega)$ definido por*

$$\left\{ f = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_+^d} f_\gamma^{(\gamma)} \text{ em } \mathcal{E}^{q,(\omega)}(\Omega)';\ f_\gamma \in L^p(\Omega) \text{ e } \exists \lambda > 0 \text{ tal que } \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_+^d} \|f_\gamma\|_{L^p} e^{-\frac{1}{\lambda}\varphi^*(\lambda|\gamma|)} < \infty \right\}. \tag{2.25}$$

Então $E^{p,(\omega)}(\Omega)$ está contido em $\mathcal{E}^{q,(\omega)}(\Omega)'$.

Demonstração. Basta utilizar a relação obtida para o dual de $\mathcal{E}_A^{q,\omega}(\Omega)$ na prova da Proposição 2.2.3. □

Teorema 2.2.4. *Seja $u \in \mathcal{E}^{q,(\omega)}(\mathbb{R}^d)$, então para todo $\beta \in \mathbb{Z}_+^d$ e todo r com $q \leq r \leq \infty$, $\mathcal{F}_\lambda u(\cdot, \xi) \in \mathcal{E}^{q,(\omega)}(\mathbb{R}^d)$ e existem constantes $C, A, M > 0$ tais que*

$$\|D_x^\beta \mathcal{F}_\lambda u(x,\xi)\|_{L^r} \leq C e^{-\frac{1}{2}\omega(\frac{\xi}{M})} e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A|\beta|)}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d \tag{2.26}$$

para todo $\lambda \in (0,1)$.

Por outro lado, se $u \in E^{p,(\omega)}(\Omega)$ e existe $\lambda \in (0,1]$ tal que (2.26) ocorre, então u é uma função e $u \in \mathcal{E}^{q,(\omega)}(\mathbb{R}^d)'$.

Demonstração. Note que a caracterização da inversa da transformada FBI como no Teorema 2.2.2 é válida em $E^{p,(\omega)}(\Omega)$ também. Logo, a demonstração segue de forma análoga ao feito no Teorema 2.2.1. □

Observação 2.2.1. Fica em aberto a questão de quando $E^{q,(w)}$ é igual a $\mathcal{E}^{q,(w)}$.

CAPÍTULO 3

Soluções Aproximadas

Em 1984, Petzsche e Vogt [44] caracterizaram funções ultradiferenciáveis por suas extensões quase analíticas, estendendo e simplificando os resultados anteriormente obtidos por Komatsu [37].

Em [4] Adwan e Hoepfner provam a existência de soluções aproximadas de sistemas involutivos de campos vetoriais complexos $\mathcal{V} = \{L_j\}_{1\leq j\leq n}$ nas classes Denjoy-Carleman (local) não quase analíticas, definidos em uma vizinhança da origem de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Em um sistema de coordenadas especial, os campos L_j são dados localmente por

$$L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} + \sum_{k=1}^{m} a_j^k(x,t)\frac{\partial}{\partial x_k}$$

sendo que os coeficientes a_j^k são de classe $\mathcal{E}^M$. Utilizando as mesmas ideias tem-se o resultado para funções L^q-Gevrey globais $\mathcal{G}^{q,s}$ em [2] para campos vetoriais em uma vizinhança da origem em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}^m$ da forma

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} a_k(x,t,\zeta)\frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{m} b_j(x,t,\zeta)\frac{\partial}{\partial \zeta_j}$$

com coeficientes a_k, b_j de classe $\mathcal{G}^{\infty,s}$ em x e holomorfos em ζ.

Campos da mesma forma (com coeficientes de classe $\mathcal{E}^M$ na primeira variável) são trabalhados em [21] e [48], o grande diferencial desses trabalhos é que estes últimos incluem o caso quase analítico; nesse caso, existe uma dificuldade: a ausência de casos não-triviais de funções com suporte compacto, o que obstrui as técnicas utilizadas nos trabalhos citados anteriormente.

O que fazemos neste capítulo é utilizar a técnica de Rodrigues e Silva [48], válida em classes Denjoy-Carleman quase analíticas, para funções L^q-ultradiferenciáveis globais estendendo o feito em trabalhos citados anteriormente.

3.1 Ferramentas

Consideraremos ao longo deste capítulo ω uma função peso como na Definição 1.2.1, satisfazendo $\omega(t) = o(t)$ quando $t \to \infty$. Retomando a notação utilizada anteriormente, para $k \in \mathbb{Z}_+$ e $A > 0$

$$a_{k,A} := \frac{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(Ak)}}{k!}. \tag{3.1}$$

Nesta seção, pediremos também que a seguinte condição seja satisfeita: para todo $k \in \mathbb{N}$ e $A > 0$

$$a_{k,A}^2 \leq a_{k-1,A}a_{k+1,A}. \tag{3.2}$$

Note que no caso dos espaços gerados a partir de sequências, é muito comum de se exigir tal condição, também conhecida como convexidade logarítmica, veja (4.3).

Proposição 3.1.1. *Para toda função peso ω e $a_{k,A}$ como descritas anteriormente, tem-se que dados $n, k, N \in \mathbb{N}$ tais que $n \leq k \leq N$*

$$a_{k,A}^{N-n} \leq a_{n,A}^{N-k}a_{N,A}^{k-n}. \tag{3.3}$$

Demonstração. Faremos por indução em $\ell = N - n$. Os casos $\ell = 0$ e $\ell = 1$ seguem trivialmente, pois há a igualdade quando $k = n$ ou $k = N$. Para $\ell = 2$, o único caso não trivial é quando se tem $n = k - 1$ e $N = k + 1$, logo segue por (3.2). Considere válido para ℓ, isto é,

$$a_{k,A}^{\ell} \leq a_{n,A}^{n+\ell-k}a_{n+\ell,A}^{k-n}. \tag{3.4}$$

Façamos para $\ell + 1$, isto é,

$$a_{k,A}^{\ell+1} \leq a_{n,A}^{n+\ell+1-k}a_{n+\ell+1,A}^{k-n}.$$

Para tal, considere a seguinte afirmação, que provaremos adiante

$$a_{n+j,A} \leq a_{n,A}\left(\frac{a_{n+j+1,A}}{a_{n+j,A}}\right)^j \quad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{3.5}$$

Pela hipótese de indução (3.4), (3.2) e (3.5), considerando $k = n + j$, com $j < \ell$

$$\begin{aligned}
a_{k,A}^{\ell+1} &= a_{k,A} a_{k,A}^{\ell} \\
&\leq a_{k,A} a_{n,A}^{n+\ell-k} a_{n+\ell,A}^{k-n} \\
&\leq a_{n,A}^{n+\ell-k} a_{n+j,A} \left(\frac{a_{n+\ell-1,A}}{a_{n+\ell,A}} \right)^{k-n} a_{n+\ell+1,A}^{k-n} \\
&\leq a_{n,A}^{n+\ell-k+1} \left(\frac{a_{n+j+1,A}}{a_{n+j,A}} \right)^{j} \left(\frac{a_{n+\ell-1,A}}{a_{n+\ell,A}} \right)^{j} a_{n+\ell+1,A}^{k-n} \\
&\leq a_{n,A}^{n+\ell+1-k} a_{n+\ell+1,A}^{k-n},
\end{aligned}$$

sendo que a última desigualdade segue de (3.2), $\dfrac{a_{k,A}}{a_{k-1,A}} \leq \dfrac{a_{k+1,A}}{a_{k,A}} \Rightarrow \dfrac{a_{n+j+1,A}}{a_{k+j,A}} \leq \dfrac{a_{n+\ell,A}}{a_{n+\ell-1,A}}$ ao repetir o processo $\ell - j - 1$ vezes.

Para concluir a demonstração, resta provar a afirmação (3.5), para isso faremos mais uma indução, agora em j. Para $j = 1$, por (3.2)

$$a_{n+1,A} = \frac{a_{n+1,A}^2}{a_{n+1,A}} \leq a_{n,A} \frac{a_{n+2,A}}{a_{n+1,A}}.$$

Suponha válido para $j - 1$, isto é,

$$a_{n+j-1,A} \leq a_{n,A} \left(\frac{a_{n+j,A}}{a_{n+j-1,A}} \right)^{j-1}.$$

Portanto,

$$a_{n+j,A} \leq a_{n+j-1,A} \frac{a_{n+j+1,A}}{a_{n+j-1,A}} \leq a_{n,A} \left(\frac{a_{n+j,A}}{a_{n+j-1,A}} \right)^{j-1} \frac{a_{n+j+1,A}}{a_{n+j-1,A}} \leq a_{n,A} \left(\frac{a_{n+j+1,A}}{a_{n+j,A}} \right)^{j}$$

para todo $j \in \mathbb{Z}_+$, confirmando a afirmação. □

A seguir apresentamos algumas notações introduzidas em [21] trocando a utilização sequências por funções peso. Tal notação é essencial, pois facilita o trabalho em algumas estimativas que serão utilizadas ao longo do capítulo.

Definição 3.1.1. Para cada $r > 0$ definimos

$$h_1^A(r) = \inf_{k \in \mathbb{Z}_+} a_{k,A} r^{k-1},$$

$$h^A(r) = \inf_{k \in \mathbb{Z}_+} a_{k,A} r^{k}$$

e

$$N(r) = \min\{n : h_1^A(r) = a_{n,A} r^{n-1}\}.$$

Proposição 3.1.2. *A função N definida acima satisfaz as seguintes propriedades.*

1. $N(r) = 0$ *para* $r \geq 1$.

2. Se $r = \dfrac{a_{n,A}}{a_{n+1,A}}$, *então* $N(r) = n$.

3. N *é decrescente e* $\lim_{r \to 0} N(r) = \infty$.

Demonstração. (1) Como $a_{0,A} = 1$ e $a_{k,A} \geq 1$ para todo $k \geq 1$ (devido ao fato de $a_{k,A}$ ser crescente), para $r \geq 1$ temos

$$a_{k,A} r^{k-1} \geq 1 \geq r^{-1} = a_{0,A} r^{0-1}, \quad \forall k \geq 1.$$

Portanto, o ínfimo é atingido em 0.

(2) Por (3.2), para todo $k \in \mathbb{Z}_+$

$$\frac{a_{k,A}}{a_{k+1,A}} < \frac{a_{k-1,A}}{a_{k,A}}. \tag{3.6}$$

Seja $r = \dfrac{a_{n,A}}{a_{n+1,A}}$. Para $k < n$, por (3.6)

$$a_{k,A} r^{k-1} = \frac{a_{k,A}}{a_{k+1,A}} \frac{a_{k+1,A}}{a_{k+2,A}} \cdots \frac{a_{n-1,A}}{a_{n,A}} a_{n,A} r^{k-1} \geq \left(\frac{a_{n,A}}{a_{n+1,A}} \right)^{n-k} a_{n,A} \left(\frac{a_{n,A}}{a_{n+1,A}} \right)^{k-1} = a_{n,A} r^{n-1}.$$

Então $h_1^A(r) \leq a_{n,A} r^{n-1} \leq a_{k,A} r^{k-1}$, logo $N(r) \geq n$. Por outro lado, se $j > n$

$$a_{n,A} r^{n-1} = \frac{a_{n,A}}{a_{n+1,A}} \frac{a_{n+1,A}}{a_{n+2,A}} \cdots \frac{a_{j-1,A}}{a_{j,A}} a_{j,A} r^{k-1} \leq \left(\frac{a_{n,A}}{a_{n+1,A}} \right)^{j-n} a_{j,A} \left(\frac{a_{n,A}}{a_{n+1,A}} \right)^{n-1} = a_{j,A} r^{j-1},$$

ou seja, $h_1^A(r) \leq a_{n,A} r^{n-1} \leq a_{j,A} r^{j-1}$. Portanto, $N(r) = n$.

(3) Provaremos que a sequência monótona $\dfrac{a_{n,A}}{a_{n+1,A}} \to 0$ quando $n \to \infty$; o resultado seguirá de *(2)*. Suponha que $\dfrac{a_{n,A}}{a_{n+1,A}}$ não converge para 0, ou seja, que existe $0 < \epsilon < 1$ tal que $\dfrac{a_{n,A}}{a_{n+1,A}} \geq \epsilon$ para todo n, pois a sequência monótona decrescente converge para seu ínfimo. Então, escrevendo $\delta = 1/\epsilon \geq 1$, teríamos $a_{n+1,A} \leq \delta a_{n,A}$, ou seja

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(n+1))} &\leq \delta e^{\frac{1}{A}\varphi^*(An)}(n+1) \\ &\leq \delta^2 e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(n-1))} n \leq \dots \\ &\leq \delta^{n+1}(n+1)! \approx e^{\frac{1}{\delta}\varphi_0^*(\delta(n+1))}, \end{aligned}$$

sendo $\varphi_0^*(t)$ a transformada de Young de e^t, temos a equivalência pelo Exemplo 1.2.2. Deveríamos ter então ω coincidindo com a classe analítica gerada pela função peso $\omega_0(t) = t$, o que é uma contradição, já que estamos considerando $\omega = o(t)$ quando $t \to \infty$. Segue portanto que a sequência $\dfrac{a_{n,A}}{a_{n+1,A}}$ converge para 0. $\square$

Proposição 3.1.3. *Dado $n \in \mathbb{Z}_+$, existem constantes $C_1, C_0 > 0$ tais que*

$$\frac{1}{r^n} h_1^A(r) \leq C_1 h_1^{2A}(r) \quad e \quad \frac{1}{r^n} h^A(r) \leq C_0 h^{2A}(r)$$

para todo $r > 0$.

Demonstração. Se $k \geq n$

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^n} a_{k,A} r^{k-1} &\leq a_{n,2A} a_{k-n,2A} r^{k-n-1} \\ &= C_n a_{k-n,2A} r^{k-n-1}.\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^n} h_1^A(r) = \frac{1}{r^n} \inf_{k \in \mathbb{Z}_+} a_{k,A} r^{k-1} &\leq \frac{1}{r^n} \inf_{k \geq n} a_{k,A} r^{k-1} \\ &\leq \inf_{k-n \geq 0} C_n a_{k-n,2A} (c^n r)^{k-n-1} \\ &\leq C_n h_1^A(r).\end{aligned}$$

Tome $C_1 = a_{n,2A}$.

A prova para h é análoga. □

Lema 3.1.1. *Seja $r > 0$, se $n \leq k \leq N(r)$, então*

$$a_{k,A} r^k \leq a_{n,A} r^n.$$

Demonstração. Por (3.3) da Proposição 3.1.1,

$$a_{k,A}^{N(r)-n} \leq a_{n,A}^{N(r)-k} a_{N(r),A}^{k-n}.$$

Então, pela definição de $N(r)$

$$\begin{aligned}(a_{k,A} r^k)^{N(r)-n} &\leq a_{n,A}^{N(r)-k} r^{N(r)n+k-n-kn} (a_{N(r),A} r^{N(r)-1})^{k-n} \\ &\leq a_{n,A}^{N(r)-k} r^{N(r)n+k-n-kn} (a_{n,A} r^{n-1})^{k-n} \\ &\leq a_{n,A}^{N(r)-n} r^{N(r)n-n^2} \\ &= (a_{n,A} r^n)^{N(r)-n}\end{aligned}$$

e portanto obtemos a estimativa. □

Podemos relacionar a notação dada anteriormente para a função associada h com ω^* utilizada em [44], mais comum em se tratando de funções peso. Em [45] essa relação é amplamente discutida.

Definição 3.1.2. Seja ω uma função peso. Para $t > 0$ definimos

$$\omega^*(t) := \sup_{s\geq 0}(\omega(s) - st). \tag{3.7}$$

Proposição 3.1.4. *Seja ω uma função peso, h^A e ω^* definidas como anteriormente, então*

$$e^{-\frac{e}{A}\omega^*\left(\frac{At}{e}\right)} \leq h^A(t) \leq e^{-\frac{1}{A}\omega^*(At)}.$$

Demonstração. Pelas definições, podemos ecrever

$$\begin{aligned}
\omega^*(At) &= \sup_{s\geq 0}(\omega(s) - sAt) \qquad (3.8)\\
&= A\sup_{s\geq 0}\left\{\frac{1}{A}\varphi^{**}(\log(s)) - st\right\}\\
&= A\sup_{s\geq 0}\left\{\sup_{k\geq 0}\frac{1}{A}(Ak\log s - \varphi^*(Ak)) - \log e^{st}\right\}\\
&= A\sup_{k\geq 0}\left\{\sup_{s\geq 0}\log\left(\frac{s^k}{e^{st}}\right) + \log e^{-\frac{1}{A}\varphi^*(Ak)}\right\}.
\end{aligned}$$

Considere $f(s) = s^k e^{-st}$. Tomando a derivada

$$\begin{aligned}
f'(s) = 0 &\Leftrightarrow ks^{k-1}e^{-st} - s^k te^{-st} = 0\\
&\Leftrightarrow ks^{-1} = t \Leftrightarrow s = \frac{k}{t}
\end{aligned}$$

temos que $f(s)$ assume valor máximo em k/t. Substituindo em (3.8) e utilizando a relação $k! \leq k^k \leq e^k k!$

$$\begin{aligned}
\omega^*(At) = \sup_{s\geq 0}(\omega(s) - Ast) &= A\sup_{k\geq 0}\log\left(\frac{k^k e^{-\frac{1}{A}\varphi^*(Ak)}}{e^k t^k}\right)\\
&\leq A\sup_{k\geq 0}\log\left(\frac{k!}{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(Ak)}t^k}\right) = -A\log h^A(t).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$-A\log h^A(t) = A\sup_{k\geq 0}\log\left(\frac{k!}{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(Ak)}t^k}\right) \leq A\sup_{k\geq 0}\log\left(\frac{k^k e^{-\frac{1}{A}\varphi^*(Ak)}}{e^k(t/e)^k}\right) = \omega^*\left(A\frac{t}{e}\right).$$

Portanto,

$$\omega^*(At) \leq -\log h^A(t) \leq \frac{1}{A}\omega^*\left(\frac{At}{e}\right)$$

ou seja,

$$e^{-\frac{e}{A}\omega^*\left(\frac{At}{e}\right)} \leq h^A(t) \leq e^{-\frac{1}{A}\omega^*(At)}$$

como queríamos. $\square$

Definição 3.1.3. Sejam $\Omega' \subset \mathbb{R}^m$, e $\Omega'' \subset \mathbb{R}^d$ conjuntos abertos e ω função peso. Denote por $\mathcal{E}^{q,\omega}(\Omega', C^\infty(\Omega''))$ o espaço das funções $f(x,y) \in C^\infty(\Omega' \times \Omega'')$ e $\mathcal{E}^{q,\omega}(\Omega')$ na variável x uniformemente em y, isto é, existem constantes $A, C > 0$ tais que

$$\|D_x^\alpha f(\,\cdot, y)\|_{L^q(\Omega')} \leq C e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A|\alpha|)},$$

sendo que C não depende de y.

3.2 Soluções aproximadas para campos vetoriais

Nesta seção utilizando artifícios que aparecem em [48], iremos construir soluções aproximadas para campos vetoriais; porém, os resultados do trabalho citado são feitos para as classes Denjoy-Carleman locais. Nosso desafio é inserir as funções peso e trabalhar com normas em L^q.

Denotaremos $\Omega = \Omega' \times \mathbb{R}$ sendo Ω' uma vizinhança da origem em $\mathbb{R}^m$. Seja

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{3.9}$$

um campo vetorial em Ω, com a_i $C^1(\Omega')$ para $i = 1, 2, ..., n$.

Definição 3.2.1. Seja $u_0 \in C^1(\Omega')$. Uma função $u(x,t) \in C^1(\Omega)$ é chamada $\mathcal{E}^{q,\omega}(\Omega')$-*solução aproximada de* L em Ω com condição inicial u_0 se satisfaz as seguintes propriedades:

1. Para todo $x \in \Omega'$, tem-se $u(x,0) = u_0(x)$;

2. Existem constantes $C, A, Q, \delta > 0$ tais que

$$\|Lu(x,t)\|_{L^q(\Omega')} \leq C e^{\frac{1}{A}\omega^*(Qt)}, \quad \forall t \in (-\delta, \delta). \tag{3.10}$$

Note que (3.10) é equivalente a dizer que para todo $k \in \mathbb{Z}_+$

$$\|Lu(x,t)\|_{L^q(\Omega')} \leq \frac{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(Ak)}}{k!}(Q|t|)^k, \quad \forall (x,t) \in \Omega' \times (-\delta, \delta).$$

Nosso objetivo é mostrar a existência de uma solução aproximada de L como em (3.9) para toda $f \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\Omega')$ como condição inicial, supondo os coeficientes de L, a_i elementos de $\mathcal{E}^{\infty,\omega}(\Omega')$. Defina

$$\begin{aligned} u_0(x) &= f(x) \\ u_k(x) &= -\frac{1}{k}\left[\sum_{i=1}^{d} a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u_{k-1}(x)\right], \end{aligned} \tag{3.11}$$

para $k \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$ e para todo $x \in \Omega'$.
Então $\tilde{u}(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)t^k$ é uma solução formal do problema

$$\begin{cases} L\tilde{u}(x,t) = 0 \\ \tilde{u}(x,0) = f(x) \end{cases}. \tag{3.12}$$

A seguir construiremos ferramentas para então provar a existência da solução aproximada para campos vetoriais como descrito acima.

Lema 3.2.1 (Lemma 4.1 [7])**.** *Sejam $A > 0$ e $G > 1$ constantes fixas. Existe $L > 1$ tal que para todo multi-índice $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$*

$$\frac{A}{L-1}\sum_{\beta\leq\alpha} G^{1-|\alpha-\beta|} \leq 1.$$

Proposição 3.2.1. *Existem constantes $A, B, D > 0$ tais que*

$$\|\partial_x^\alpha u_k\|_{L^q} \leq \frac{B^k D^{|\alpha|+1} e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(|\alpha|+k))}}{k!}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+,\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^d. \tag{3.13}$$

Demonstração. Temos $f \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\Omega')$ e $a_k \in \mathcal{E}^{\infty,\omega}(\Omega')$, então existem constantes $A, D_0, B_0 > 0$ tais que

$$\|\partial^\alpha u_0\|_{L^q} = \|\partial^\alpha f\|_{L^q} \leq D_0 e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A|\alpha|)}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^d \tag{3.14}$$

e

$$\|\partial^\alpha a_i\|_{L^\infty} \leq B_0 e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A|\alpha|)}, \quad \forall i = 1, ..., d. \tag{3.15}$$

Faremos a prova por indução em k. Sejam G e L as constantes no Lema 3.2.1, vamos escolher $B = dB_0L$ e $D = G = \max\{1, D_0\}$. Para $k = 0$, por (3.14) temos

$$\|\partial^\alpha u_0\|_{L^q} \leq D_0 e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A|\alpha|)} \leq B^0 D^{|\alpha|+1} e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A|\alpha|)}.$$

Suponha (3.13) válido para $k-1$, isto é, para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$

$$\|\partial^\alpha u_{k-1}\|_{L^q} \leq \frac{B^{k-1} D^{|\alpha|+1} e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(|\alpha|+k-1))}}{(k-1)!}. \tag{3.16}$$

Pela definição de u_k e utilizando a regra de Leibniz

$$\begin{aligned}|\partial^\alpha u_k| &\leq \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{d}|\partial^\alpha[a_i(x)\partial_{x_i}u_{k-1}(x)]| \\ &\leq \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{d}\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}|\partial^{\alpha-\beta}a_i(x)||\partial^{\beta+e_i}u_{k-1}(x)|.\end{aligned} \tag{3.17}$$

Pela hipótese de indução (3.16)

$$\|\partial^{\beta+e_i}u_{k-1}\|_{L^q} \leq \frac{B^{k-1}D^{|\beta+e_i|+1}e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A[(|\beta|+1)+(k-1)])}}{(k-1)!},$$

e por (3.15)

$$\|\partial^{\alpha-\beta}a_i\|_{L^\infty} \leq B_0 e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A|\alpha-\beta|)}.$$

Por (3.17) e pelo Lema 3.2.1

$$\begin{aligned}\|\partial^\alpha u_k\|_{L^q} &\leq \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{d}\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}B_0 e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(|\alpha|-|\beta|))}\frac{B^{k-1}D^{|\beta|+2}}{(k-1)!}e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(|\beta|+k))} \\ &\leq \frac{(dB_0L)B^{k-1}}{k!L}e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(|\alpha|+k))}\sum_{\beta\leq\alpha}D^{|\beta|+2} \\ &\leq \frac{B^k}{k!}e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(|\alpha|+k))}\left(\frac{1}{L}\sum_{\beta\leq\alpha}D^{|\beta|-|\alpha|+1}\right)D^{|\alpha|+1} \\ &\leq \frac{B^kD^{|\alpha|+1}}{k!}e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(|\alpha|+k))},\end{aligned}$$

sendo que a segunda desigualdade se deve ao item *(a)* da Proposição 1.2.4 junto ao fato de que $\binom{\alpha}{\beta} \leq \binom{|\alpha|}{|\beta|}$

$$\binom{\alpha}{\beta}e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(|\alpha|-|\beta|))}e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(|\beta|+k))} \leq \binom{|\alpha|+k}{|\beta|+k}e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(|\alpha|-|\beta|))}e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(|\beta|+k))} \leq e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(|\alpha|+k))}.$$

Portanto segue a demonstração. □

Denote por $\mathcal{E}^{q,\omega}(\Omega')[t]$ o espaço das séries de potências formais na variável t e coeficientes em $\mathcal{E}^{q,\omega}(\Omega')$.

Definição 3.2.2. Para $n \in \mathbb{Z}_+$, defina $T^n : \mathcal{E}^{q,\omega}(\Omega')[t] \to \mathcal{E}^{q,\omega}(\Omega')[t]$ por

$$T^n\left[\sum_{k=0}^{\infty}s_k(x)t^k\right] = \sum_{k=0}^{n}s_k(x)t^k,$$

sendo $\sum_{k=0}^{\infty}s_k(x)t^k \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\Omega')[t]$.

Proposição 3.2.2. *Existem constantes $A', M > 0$ tais que*

$$\|L(T^n\tilde{u})(\cdot, t)\|_{L^q} \leq M^{n+1} a_{n,A'} |t|^n \tag{3.18}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}_+$.

Demonstração. A seguinte igualdade é válida em se tratando de séries de potências formais

$$\begin{aligned} L(T^n\tilde{u})(x,t) &= L\left[\sum_{k=0}^{n} u_k(x)t^k\right] = L\left[\tilde{u}(x,t) - \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)t^k\right] \\ &= L\left[\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)t^k\right] = (n+1)u_{n+1}(x)t^n + Q(x,t) \end{aligned}$$

sendo que $Q(x,t)$ tem ordem maior ou igual que $n+1$. Como, por definição, o lado esquerdo da equação é um polinômio de grau n na variável t, segue que

$$L(T^n\tilde{u})(x,t) = (n+1)u_{n+1}(x)t^n.$$

Portanto, pela Proposição 3.2.1,

$$\begin{aligned} \|L(T^n\tilde{u})(\cdot,t)\|_{L^q} &= (n+1)|t|^n \|u_{n+1}\|_{L^q} \\ &\leq \frac{(n+1)B^{n+1}}{(n+1)!} e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A[n+1])} |t|^n \\ &\leq B^{n+1} \frac{e^{\frac{1}{2A}\varphi^*(2An) + \frac{1}{2A}\varphi^*(2A)}}{n!} |t|^n \\ &\leq M^{n+1} a_{n,2A} |t|^n, \end{aligned}$$

sendo a penúltima desigualdade obtida pela convexidade de φ^*. □

Dyn'Kin [21] demonstra a existência de extensões analíticas para as classes de Hölder e Carleman. Em [48] a demonstração de [21] é adaptada para provar a existência de soluções aproximadas de campos vetoriais também nas classes Denjoy-Carleman quase analíticas. Aplicamos a mesma técnica no seguinte teorema para obtermos a existência de $\mathcal{E}^{q,\omega}$-soluções aproximadas.

Teorema 3.2.1. *Seja $\Omega = \Omega' \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ uma vizinhança aberta da origem. Seja*

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

um campo vetorial definido em Ω, com $a_i \in \mathcal{E}^{\infty,\omega}(\Omega')$. Se $f \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\Omega')$, então existe uma função $u \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\Omega', C^\infty(\mathbb{R}))$ tal que $u(x,0) = f(x)$ para todo $x \in \Omega'$. Além disso, existem *constantes $C, A, Q, \delta > 0$ para as quais vale a seguinte estimativa*

$$\|Lu(\cdot,t)\|_{L^q} \leq Ce^{-\frac{1}{A}\omega^*(Qt)}, \quad \forall t \in [-\delta, \delta], \tag{3.19}$$

ou seja, existe solução aproximada.

Demonstração. Fixe $0 < \epsilon < 1$ e tome $\psi \in C^\infty(D_\epsilon(0))$ uma função radial tal que $\psi \geq 0$ e $\int_{\mathbb{C}} \psi(z)\, dz \wedge d\bar{z} = 2/i$. Utilizando u_k como em (3.11), defina

$$u(x,t) = \frac{i}{2t^2} \int_{\mathbb{C}} \psi\left(\frac{z-t}{|t|}\right) \sum_{k=0}^{N((1+\epsilon)C|z|)} u_k(x) z^k dz \wedge d\bar{z},$$

sendo $N(r)$ uma função step e o integrando mensurável, segue que u está bem definida. Pela escolha de ψ, temos que $\lim_{t\to 0} u(x,t) = u_0(x) = f(x)$, então podemos definir

$$u(x,0) = f(x).$$

Ao fazer a mudança de variáveis $(z-t)/t \mapsto z'$, temos

$$u(x,t) = \frac{i}{2} \int_{\mathbb{C}} \psi(z') \sum_{k=0}^{N((1+\epsilon)C||t|z'+t|)} u_k(x)(|t|z'+t)^k dz' \wedge d\bar{z}'.$$

Provaremos agora a estimativa (3.19). Para tal utilizaremos o seguinte: para todo polinômio $P(z)$

$$\frac{i}{2t^2} \int_{\mathbb{C}} \psi\left(\frac{z-t}{|t|}\right) P(z)\, dz \wedge d\bar{z} = P(t). \tag{3.20}$$

De fato, note que $\frac{i}{2t^2} \int_{\mathbb{C}} \psi\left(\frac{z-t}{|t|}\right) P(z)\ dz \wedge d\bar{z} = P * \psi_{|t|}(t)$, sendo $dz \wedge d\bar{z} = (2\pi)^d dV$. Como ψ é radial e todo polinômio é uma função harmônica, por (5.3) decorrente da prova do Teorema 5.1.1, segue que $P(t) = P * \psi_{|t|}(t)$ e, portanto, (3.20) é válida.

Então, utilizando (3.20) para $P(z) = \sum_{k=0}^n u_k(x) z^k$,

$$\begin{aligned} Lu(x,t) &= L\left[\sum_{k=0}^n u_k(x)t^k + \frac{i}{2t^2}\int_{\mathbb{C}} \psi\left(\frac{z-t}{|t|}\right) \sum_{k=n+1}^{N((1+\epsilon)C|z|)} u_k(x)z^k dz \wedge d\bar{z}\right] \\ &= L(T^n \tilde{u}(x,t)) + \frac{i}{2}\int_{\mathbb{C}} L\left[\frac{1}{t^2}\psi\left(\frac{z-t}{|t|}\right) \sum_{k=n+1}^{N((1+\epsilon)C|z|)} u_k(x)\right] z^k dz \wedge d\bar{z} \\ &= L(T^n \tilde{u}(x,t)) + \frac{i}{2}\int_{\mathbb{C}} L\left[\frac{1}{t^2}\psi\left(\frac{z-t}{|t|}\right)\right] \sum_{k=n+1}^{N((1+\epsilon)C|z|)} u_k(x) z^k dz \wedge d\bar{z} \\ &\quad + \frac{i}{2}\int_{\mathbb{C}} \frac{1}{t^2}\psi\left(\frac{z-t}{|t|}\right) \sum_{k=n+1}^{N((1+\epsilon)C|z|)} L[u_k(x)] z^k dz \wedge d\bar{z}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Como ψ e suas derivadas são limitadas, para $t > 0$, temos

$$\begin{aligned}\left| L\left[\frac{1}{t^2}\psi\left(\frac{z-t}{|t|}\right)\right]\right| &= \left|\frac{-2}{t^3}\psi\left(\frac{z-t}{|t|}\right) + \frac{1}{t^2}\frac{z}{t^2}(\partial\psi)\left(\frac{z-t}{|t|}\right)\right| \\ &\leq \frac{C_1}{|t|^4},\end{aligned}$$

para alguma constante $C_1 > 0$; para $t < 0$ prosseguimos de forma análoga. Então, tomando a norma L^q em (3.21); pelo Teorema de Minkowski para Integrais,

$$\begin{aligned}\|Lu(\cdot,t)\|_{L^q} \leq \|L(T^n\tilde{u}(\cdot,t)\|_{L^q} &+ \frac{C_1}{2|t|^4}\int_{D_{|t|\epsilon}(t)}\sum_{k=n+1}^{N((1+\epsilon)C|z|)}\|u_k\|_{L^q}|z|^k|dz\wedge d\bar{z}| \qquad (3.22) \\ &+ \frac{C_2}{|t|^2}\int_{D_{|t|\epsilon}(t)}\sum_{k=n+1}^{N((1+\epsilon)C|z|)}\|Lu_k\|_{L^q}|z|^k|dz\wedge d\bar{z}|.\end{aligned}$$

Sejam B e M as constantes referentes às Proposições 3.2.1 e 3.2.2 respectivamente. Tome $C = 2\max\{B, M\}$ e fixe $n = N((1+\epsilon)^2C|t|) - 1$. Além disso, assuma também $|t| \leq 1/((1+\epsilon)C) := \delta < 1$.

O Lema 3.1.1 nos garante para $n < k \leq N((1+\epsilon)C|z|)$

$$\frac{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(Ak)}}{k!}((1+\epsilon)C|z|)^k \leq \frac{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(n+1))}}{(n+1)!}((1+\epsilon)C|z|)^{n+1}.$$

Com isso, pela Proposição 3.2.1 e por ser $|z| < 2\epsilon|t|$, temos

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{N((1+\epsilon)C|z|)}\|u_k\|_{L^q}|z|^k &\leq \sum_{k=n+1}^{N((1+\epsilon)C|z|)} B^k\frac{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(Ak)}}{k!}|z|^k \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{N((1+\epsilon)C|z|)} C\frac{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(Ak)}}{k!}((1+\epsilon)C|z|)^k\frac{1}{(1+\epsilon)^k} \\ &\leq \frac{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(n+1))}}{(n+1)!}((1+\epsilon)C|z|)^{n+1}\sum_{k=n+1}^{N((1+\epsilon)C|z|)}\frac{1}{(1+\epsilon)^k} \\ &\leq a_{n+1,A}((1+\epsilon)C)^{n+1}(2\epsilon|t|)^{n+1}\frac{1+\epsilon}{\epsilon} \\ &\leq C_3 a_{n+1,A}((1+\epsilon)^2C|t|)^{n+1} \\ &\leq C_3|t|h_1^A((1+\epsilon)^2C|t|). \qquad (3.23)\end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{N((1+\epsilon)C|z|)} \|Lu_k\|_{L^q}|z|^k & \sum_{k=n+1}^{N((1+\epsilon)C|z|)} \left\|\sum_{i=1}^{d} a_i\,\partial^{e_i}u_k\right\|_{L^q} |z|^k \\ & \leq \sum_{k=n+1}^{N((1+\epsilon)C|z|)} \sup_{0\leq i\leq d}\|a_i\|_{L^\infty}C^2\frac{e^{\frac{1}{2A}\varphi^*(2Ak)}}{k!}((1+\epsilon)C|z|)^k\frac{1}{(1+\epsilon)^k} \\ & \leq C_4\frac{e^{\frac{1}{2A}\varphi^*(2A(n+1))}}{(n+1)!}((1+\epsilon)C|z|)^{n+1}\sum_{k=n+1}^{N((1+\epsilon)C|z|)}\frac{1}{(1+\epsilon)^k} \\ & \leq C_4 a_{n+1,2A}((1+\epsilon)^2C|t|)^{n+1} \\ & \leq C_4|t|h_1^{2A}((1+\epsilon)^2C|t|). \end{aligned} \tag{3.24}$$

Pela Proposição 3.2.2

$$\begin{aligned}\|L(T^n\tilde{u})(\cdot,t)\|_{L^q} &\leq M^{n+1}a_{n,2A}|t|^n \leq Ca_{n,2A}((1+\epsilon)^2C|t|)^n \\ &\leq C_5h^{2A}((1+\epsilon)^2C|t|). \end{aligned} \tag{3.25}$$

Portanto, utilizando as estimativas (3.23), (3.24) e (3.25) em (3.22), e também pela Proposição 3.1.3

$$\begin{aligned}\|Lu(\cdot,t)\|_{L^q} &\leq C_5h^{A'}((1+\epsilon)^2C|t|) + \frac{C_1}{2|t|^4}(|t|\epsilon)^2C_3|t|h_1^{A'}((1+\epsilon)^2C|t|) \\ &+ \frac{C_2}{|t|^2}(|t|\epsilon)^2C_4|t|h_1^{A'}((1+\epsilon)^2C|t|) \\ &\leq C_6h^{A'}(Q_1|t|), \end{aligned}$$

sendo $A' = 4A$. Por fim, pela Proposição 3.1.4, para $Q = A'Q_1$ segue que

$$\|Lu(\cdot,t)\|_{L^q} \leq C_7e^{-\frac{1}{A'}\omega^*(Qt)}.$$

Mostraremos agora que u é uma função C^∞. Suponha $t > 0$

$$\begin{aligned}\partial_x^\alpha\partial_t^j u(x,t) &= \frac{i}{2}\int_{\mathbb{C}}\psi(z)\sum_{k=0}^{j}\partial_x^\alpha u_k(x)\partial_t^j[(t(z+1))^k]dz\wedge d\bar{z} \\ &+ \int_{D_{\epsilon t}(t)}\partial_t^j\left[\frac{i}{2t^2}\psi\left(\frac{z-t}{t}\right)\right]\sum_{k=j+1}^{N((1+\epsilon)C|z|)}\partial_x^\alpha u_k(x)z^kdz\wedge d\bar{z}. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Vamos estimar a primeira parte da soma, observando que para $k < j$ tem-se $\partial_t^j t^k = 0$ e para $j=k$, $\partial_t^j t^j = j!$, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{i}{2}\int_{D_\epsilon(0)} \psi\left(z\right)\sum_{k=0}^{j}\partial_x^\alpha u_k(x)\partial_t^j[(t(z+1))^k]dz\wedge d\bar{z}\right| \\
&\qquad\qquad\leq \frac{1}{2}\int_{D_\epsilon(0)} |\psi\left(z\right)||\partial_x^\alpha u_k(x)|j!|z+1|^j|dz\wedge d\bar{z}| \\
&\qquad\qquad\leq C_\epsilon j!(1+\epsilon)^j|\partial_x^\alpha u_k(x)|,
\end{aligned}
$$

tomando a norma L^q em Ω', pela Proposição 3.2.1

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{i}{2}\int_{\mathbb{C}} \psi\left(z\right)\sum_{k=0}^{j}\partial_x^\alpha u_k(x)\partial_t^j[(t(z+1))^k]dz\wedge d\bar{z}\right\|_{L^q(\Omega')} &\leq C_\epsilon j!(1+\epsilon)^j\|\partial_x^\alpha u_k\|_{L^q(\Omega')} \\
&\leq C^{|\alpha|+j+1}j!\frac{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(\alpha+j))}}{j!} \\
&\leq C^{|\alpha|+j+1}e^{\frac{1}{2A}\varphi^*(2A\alpha)}e^{\frac{1}{2A}\varphi^*(2Aj)}.
\end{aligned}
$$

Da mesma forma estimamos a segunda parte

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{D_{\epsilon t}(t)}\partial_t^j\left[\frac{i}{2t^2}\psi\left(\frac{z-t}{t}\right)\right]\sum_{k=j+1}^{N((1+\epsilon)C|z|)}\partial_x^\alpha u_k(x)z^k dz\wedge d\bar{z}\right| \\
&\qquad\qquad\leq \frac{C_j}{|t|^{j+2}}\int_{D_{\epsilon t}(t)}\sum_{k=j+1}^{N((1+\epsilon)C|z|)}|\partial_x^\alpha u_k(x)||z|^k|dz\wedge d\bar{z}|,
\end{aligned}
$$

então, como neste caso $|z|<(1+\epsilon)|t|$ e por sua vez $t<\delta$

$$
\begin{aligned}
&\left\|\int_{D_{\epsilon t}(t)}\partial_t^j\left[\frac{i}{2t^2}\psi\left(\frac{z-t}{t}\right)\right]\sum_{k=j+1}^{N((1+\epsilon)C|z|)}\partial_x^\alpha u_k(x)z^k dz\wedge d\bar{z}\right\|_{L^q(\Omega')} \\
&\quad\leq \frac{C_j}{|t|^{j+2}}\int_{D_{\epsilon t}(t)}\sum_{k=j+1}^{N((1+\epsilon)C|z|)}\|\partial_x^\alpha u_k\|_{L^q}((1+\epsilon)|t|)^k|dz\wedge d\bar{z}| \\
&\quad\leq C^{|\alpha|+1}e^{\frac{1}{2A}\varphi^*(2A\alpha)}\frac{C_j}{|t|^{j+2}}\int_{D_{\epsilon t}(t)}\sum_{k=j+1}^{N((1+\epsilon)C|z|)}\frac{e^{\frac{1}{2A}\varphi^*(2Ak)}}{k!}((1+\epsilon)^2C|t|)^k\frac{1}{1+\epsilon}|dz\wedge d\bar{z}| \\
&\quad\leq C^{|\alpha|+1}e^{\frac{1}{2A}\varphi^*(2A\alpha)}\frac{C_j}{|t|^{j+2}}\frac{e^{\frac{1}{2A}\varphi^*(2A(j+1))}}{(j+1)!}((1+\epsilon)C|t|)^{j+1}C_\epsilon|t|^2 \\
&\quad\leq C^{|\alpha|+1}e^{\frac{1}{2A}\varphi^*(2A\alpha)}a_{j+1,2A}C_{j,\epsilon,\delta}
\end{aligned}
$$

O caso $t<0$ segue de forma análoga. Note também que caso $N(z)<j$ então só temos a primeira parte da soma em (3.26). Portanto

$$
\|\partial_x^\alpha\partial_t^j u(\cdot,t)\|_{L^q(\Omega')}\leq C(j,\delta)C^{|\alpha|+1}e^{\frac{1}{2A}\varphi^*(2A\alpha)}. \tag{3.27}
$$

O resultado acima garante que $\partial_x^\alpha \partial_t^j u(\cdot,t) \in L^q(\Omega',[-\delta,\delta])$ para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$ e todo $j \in \mathbb{Z}_+$. Pelo teorema de imersão de Sobolev, segue que $u(x,t) \in C^\infty(\Omega)$.

Em particular, por (3.27), tem-se que $u \in \mathcal{E}^{q,M}(\Omega', C^\infty(-\delta,\delta))$

$\square$

O Teorema 3.2.1 também é válido para campos vetoriais complexos como enunciado a seguir. A prova é feita analogamente, mas para não carregar a notação, apresentamos apenas a prova no caso mais simples.

Teorema 3.2.2. *Seja $\Omega = \Omega' \times I \times \Omega'' \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}^m$ uma vizinhança aberta da origem. Seja*

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{d} a_i(x,\zeta)\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} b_j(x,\zeta)\frac{\partial}{\partial \zeta_j}$$

um campo vetorial definido em Ω, com $a_i \in \mathcal{E}^{\infty,\omega}(\Omega')$. Seja $f \in C^\infty(\Omega' \times \Omega'')$ uma função $\mathcal{E}^{q,\omega}(\Omega')$ na variável x e holomorfa em ζ. Então existe um aberto $V \subset \Omega''$ e uma função $u \in C^\infty(\Omega)$ de classe $\mathcal{E}^{q,\omega}(\Omega')$ na variável x, tal que $u(x,0,\zeta) = f(x,\zeta)$ para todo $(x,\zeta) \in (\Omega' \times V)$. Além disso, existem constantes $C, A, Q, \delta > 0$ para as quais vale a seguinte estimativa

$$\|Lu(x,t,\zeta)\|_{L_x^q} \leq Ce^{-\frac{1}{A}\omega^*(Qt)}, \quad \forall y \in (-\delta,\delta) \text{ e } \zeta \in V. \tag{3.28}$$

3.3 Sistemas de campos vetoriais

Nesta seção generalizaremos o Teorema 3.2.1 para sistemas de campos vetoriais. Observando que em [48] esse tópico não é investigado, podemos encontrar resultados apenas para as classes não quase analíticas locais como por exemplo em [4] e [8]. Além disso, conseguimos provar mais uma versão de existência de soluções aproximada onde são consideradas estruturas do tipo tubo.

Considere os abertos $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^d$ e campos vetoriais da forma

$$L_j = \frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{k=1}^{m} a_j^k(x,y)\frac{\partial}{\partial x_k}, \quad j = 1,...,d \tag{3.29}$$

com coeficientes $a_j^k \in \mathcal{E}^{\infty,\omega}(\Omega \times V)$. Seja $\mathcal{V}$ um sistema involutivo global gerado pelos campos vetoriais L_j, isto é,

$$\mathcal{V} = \operatorname{span}\{L_j :\ 1 \leq j \leq d\},$$

é tal que cada comutador $[L_j, L_k]$ $j,k = 1,...,d$, é a combinação linear de $L_1,...,L_d$.

Dada uma função $f \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\Omega)$, queremos encontrar uma $\mathcal{E}^{q,\omega}$-*solução aproximada* de $\mathcal{V}$, isto é, $u(x,y) \in C^\infty(\Omega \times V)$ tal que $u(x,0) = f(x)$ para todo $x \in \Omega$ e para qual existem constantes $C, A, Q > 0$ tais que para cada $j = 1, ..., d$

$$\|L_j u(\,\cdot\,, y)\|_{L^q(\Omega')} \leq C e^{-\frac{1}{A}\omega^*(Qy)}, \quad \forall y \in [-\delta, \delta]^d. \tag{3.30}$$

A existência de soluções aproximadas será garantida pelo Corolário 3.3.2 adiante.

Começaremos provando casos mais simples. Primeiro assumiremos que os campos são da forma

$$L_j = \frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{k=1}^{m} a_j^k(x) \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad j = 1, ..., d \tag{3.31}$$

com a_j^k de classe $\mathcal{E}^{\infty,\omega}(\Omega)$; note que neste primeiro caso os coeficientes não dependem da variável y.

Seja $f \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\Omega)$, como podemos ver em [4], tem-se que $\tilde{u}(x,y) = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}_+^d} u_\beta(x) y^\beta$ é solução formal de

$$\begin{cases} L_j \tilde{u}(x,t) = 0 \\ \tilde{u}(x,0) = f(x) \end{cases}$$

ao tomarmos

$$u_0(x) = f(x)$$

e para $\beta \in \mathbb{Z}_+^d$, $|\beta| \neq 0$

$$u_\beta(x) = -\frac{1}{A_\beta} \sum_{\substack{\ell : \beta_\ell \neq 0 \\ \mu = \beta - e_\ell}} \frac{1}{\beta_\ell} \left(\sum_{k=1}^{m} a_\ell^k(x) (\partial_{x_k} u_\mu)(x) \right) \tag{3.32}$$

sendo $A_\beta = \#\{\ell : \beta_\ell \neq 0\}$, $\beta = (\beta_1, ..., \beta_d)$. A construção dessas u_β é feita em [4].

Definição 3.3.1. Seja $\Omega' \subset \mathbb{R}^m$ e $\Omega'' \subset \mathbb{R}^n$ abertos. Uma função $f(x', x'') \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\Omega') \times \mathcal{E}^{q,\infty}(\Omega'')$ se, e somente se, existe $A > 0$ tal que

$$\left\{ \|D^\alpha f(x', x'')\|_{L^q_{x'} \times L^\infty_{x''}} e^{-\frac{1}{A}\varphi^*(A|\alpha|)} \right\}_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^{m+n}} \in \ell^q(\mathbb{Z}^{m+n}).$$

Considere $\Omega = \Omega' \times \Omega'' \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ e $f(x', x'') \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\Omega') \times \mathcal{E}^{q,\infty}(\Omega'')$, quando possível, denote $x = (x', x'') \in \mathbb{R}^{m+n}$. A norma mista $L^q \times L^\infty$ está sendo inserida pois é uma ferramenta importante quando passaremos a tratar de campos com coeficientes $a_j^k(x,y)$ (que dependem também da variável y). A seguir vamos fazer algumas estimativas como na seção anterior, agora trabalhando com multi-índices.

Proposição 3.3.1. *Existem constantes $B, D > 0$ tais que*

$$\|D^\alpha u_\beta(x', x'')\|_{L^q_{x'} \times L^\infty_{x''}} \leq \frac{B^{|\beta|} D^{|\alpha|+1}}{\beta!} e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(|\alpha|+|\beta|))}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^{m+n},\ \beta \in \mathbb{Z}_+^m. \tag{3.33}$$

Demonstração. Estamos considerando $f \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\Omega') \times \mathcal{E}^{\infty,\omega}(\Omega'')$ e $a_j^k \in \mathcal{E}^{q,\infty}(\Omega' \times \Omega'')$, então existem constantes $C, A > 0$ tais que para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^{m+n}$, $k = 1, ..., m$ e $j = 1, ..., d$

$$\begin{aligned}
\|\partial^\alpha f(x', x'')\|_{L^q_{x'} \times L^\infty_{x''}} &\leq D_0 e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A|\alpha|)} \\
\|\partial^\alpha a_j^k(x', x'')\|_{L^q_{x'} \times L^\infty_{x''}} &\leq B_0 e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A|\alpha|)}.
\end{aligned}$$

Provaremos (3.33) utilizando indução em β. Considerando as constantes do Lema 3.2.1, vamos denotar $D = G > \max\{1, D_0\}$ e escolher $B = dB_0L$. No caso $|\beta| = 0$, como visto acima, temos

$$\|\partial^\alpha u_0(x', x'')\|_{L^q_{x'} \times L^\infty_{x''}} = \|\partial^\alpha f(x', x'')\|_{L^q_{x'} \times L^\infty_{x''}} \leq D^{|\alpha|+1} e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A|\alpha|)}.$$

Vamos supor que (3.33) vale para qualquer multi-índice γ com $|\gamma| \leq n - 1$. Se $|\beta| = n$, temos

$$|\partial^\alpha u_\beta(x)| \leq \frac{1}{A_\beta} \sum_{\substack{\ell:\beta_\ell \neq 0 \\ \mu = \beta - e_\ell}} \sum_{k=1}^{d} \frac{1}{\beta_\ell} \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} |\partial_x^{\alpha-\gamma} a_\ell^k(x)| |\partial_x^{\gamma+e_k} u_\mu(x)|.$$

Pela hipótese de indução, pela superaditividade de φ^* e a Proposição 1.2.4

$$\begin{aligned}
\|\partial^\alpha u_\beta(x', x'')\|_{L^q_{x'} \times L^\infty_{x''}} &\leq \frac{B_0}{A_\beta} \sum_{\substack{\ell:\beta_\ell \neq 0 \\ \mu = \beta - e_\ell}} \sum_{k=1}^{d} \frac{1}{\beta_\ell} \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \frac{B^{|\mu|} D^{|\gamma|+2}}{\mu!} e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A|\alpha-\gamma|)} e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A[|\gamma+e_k|+|\mu|])} \\
&\leq \frac{dB_0}{A_\beta} \sum_{\substack{\ell:\beta_\ell \neq 0 \\ \mu = \beta - e_\ell}} \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{|\alpha| + |\beta|}{|\gamma| + |\beta|} e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(|\alpha|-|\gamma|))} e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(|\gamma|+|\beta|))} \frac{B^{|\beta|-1} D^{|\gamma|+2}}{\beta_\ell \mu!} \\
&\leq B^{|\beta|} \frac{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(|\alpha|+|\beta|))}}{\beta!} \frac{1}{A_\beta} \sum_{\mu = \beta - e_\ell} \left(\frac{1}{L} \sum_{\gamma \leq \alpha} D^{|\alpha|-|\gamma|+1} \right) D^{|\alpha|+1} \\
&\leq B^{|\beta|} D^{|\alpha|+1} \frac{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(|\alpha|+|\beta|))}}{\beta!},
\end{aligned}$$

sendo a última desigualdade obtida pelo Lema 3.2.1. Obtemos portanto, (3.33) para todo $\beta \in \mathbb{Z}_+^d$. □

Para $\kappa \in \mathbb{Z}_+$, defina

$$S^\kappa \left[\sum_{\beta \in \mathbb{Z}_+^d} u_\beta(x) y^\beta \right] = \sum_{|\beta| \leq \kappa} u_\beta(x) y^\beta.$$

Proposição 3.3.2. *Existem constantes $A, M > 0$ tais que para todo $\kappa \in \mathbb{Z}_+$ e $j = 1, ..., d$*

$$\|L_j(S^\kappa \tilde{u})(x', x'', y)\|_{L^q_{x'} \times L^\infty_{x''}} \leq M^{\kappa+1} \frac{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(An)}}{\kappa!} |y|^\kappa.$$

Demonstração. Temos a seguinte identidade no sentido de séries formais

$$
\begin{aligned}
L_j(S^\kappa \tilde{u})(x,y) &= L_j\left(\tilde{u}(x,y) - \sum_{\beta \geq \kappa+1} u_\beta(x) y^\beta\right) \\
&= \sum_{|\beta|=\kappa+1} \frac{\partial}{\partial y_j}(u_\beta(x) y^\beta) + \sum_{|\beta|=\kappa+1} \sum_{k=1}^{m+n} a_j^k(x) \frac{\partial}{\partial x_k}(u_\beta(x)) y^\beta + \sum_{|\beta|\geq \kappa+2} L_j(u_\beta(x) y^\beta) \\
&= \sum_{|\beta|=\kappa+1} \beta_j u_\beta(x) y^{\beta - e_j} + Q(x,y),
\end{aligned}
$$

sendo que $Q(x,y)$ tem termos y^γ com $|\gamma| \geq \kappa + 1$. Mas, pela definição, o lado esquerdo da equação tem grau κ, portanto

$$
L_j(S^\kappa \tilde{u})(x,y) = \sum_{|\beta|=\kappa+1} \beta_j u_\beta(x) y^{\beta - e_j}.
$$

Pela Proposição 3.3.1

$$
\begin{aligned}
\|L_j(S^\kappa \tilde{u})(x', x'', y)\|_{L^q_{x'} \times L^\infty_{x''}} &\leq \sum_{|\beta|=\kappa+1} \beta_j \|u_\beta\|_{L^q \times L^\infty} |y|^{|\beta - e_j|} \\
&\leq |y|^\kappa \sum_{|\beta|=\kappa+1} \beta_j B^{|\beta|} \frac{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A|\beta|)}}{\beta!} \\
&\leq B^{\kappa+1} |y|^\kappa e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(\kappa+1))} \sum_{\substack{|\beta|=\kappa+1 \\ \beta_j \neq 0}} \frac{1}{(\beta - e_j)!} \\
&\leq B^{\kappa+1} |y|^\kappa c\, e^{\frac{1}{2A}\varphi^*(2A\kappa)} \frac{(m+n)^{\kappa+1}}{\kappa!} \\
&\leq M^{\kappa+1} \frac{e^{\frac{1}{2A}\varphi^*(2A\kappa)}}{\kappa!} |y|^\kappa.
\end{aligned} \tag{3.34}
$$

Sendo que a penúltima desigualdade se dá pelo Teorema Multinomial, ou seja,

$$
(x_1 + \dots + x_d)^\kappa = \sum_{|\gamma|=\kappa} \frac{\kappa!}{\gamma!} (x_1, \dots, x_d)^\gamma,
$$

tomando $x = (1, \dots, 1)$, como $(\beta - e_j)! = \beta!/\beta_j$, temos

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{|\beta|=\kappa+1 \\ \beta_j \neq 0}} \frac{1}{(\beta - e_j)!} = \sum_{|\beta|=\kappa+1} \frac{\beta_j}{\beta!} &\leq \sum_{|\gamma|=\kappa+1} \frac{\kappa+1}{\gamma!} \\
&= \frac{1}{\kappa!} \sum_{|\gamma|=\kappa+1} \frac{(\kappa+1)!}{\gamma!} = \frac{d^{\kappa+1}}{\kappa!},
\end{aligned}
$$

a prova segue por (3.34). □

Teorema 3.3.1. *Seja* $\mathcal{V} = \{L_j\}_{1\le j\le m}$ *um sistema involutivo gerado por campos vetoriais* $\mathcal{E}^{\infty,\omega}$ *como em* (3.31)*, definidos em uma vizinhança da origem* $\Omega = \Omega' \times \Omega'' \times V \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d$*. Seja* $f(x',x'') \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\Omega') \times \mathcal{E}^{q,\omega}(\Omega'')$*, então existe uma função* $u(x',x'',y) \in C^\infty(\Omega)$ *tal que* $u(x',x'',0) = f(x',x'')$*. Além disso, existem constantes* C, A, Q, δ *tais que para cada* $j = 1, ..., m$

$$\|L_j u(x',x'',y)\|_{L^q_{x'} \times L^\infty_{x''}} \le Ce^{-\frac{1}{A}\omega^*(Qy)}, \quad \forall y \in [-\delta,\delta]^d. \tag{3.35}$$

Demonstração. Denote $x = (x',x'')$.

Fixe $\epsilon > 0$, considerando u_β como em (3.32), defina

$$u(x,y) := \left(\frac{i}{2y^2}\right)^d \int_{\mathbb{C}^d} \psi\left(\frac{z-y}{|y|}\right) \sum_{\beta \le N((1+\epsilon)C|z|)} u_\beta(x) z^\beta dz \wedge d\bar{z},$$

sendo ψ uma função $\mathbb{C}^\infty(D_\epsilon(0))$, radial, tal que $\psi \ge 0$ e $\int_{\mathbb{C}} \psi(z)\, dz \wedge d\bar{z} = (2)^{2d}/i$.

Fazendo a mudança de variáveis $(z-y)/|y| \mapsto z'$, temos $z = z'|y| + y$ e $dz \wedge d\bar{z} = |y|^{2d} dz' \wedge d\bar{z}'$, então

$$u(x,y) = \frac{i}{2^{2d}} \int_{\mathbb{C}^d} \psi(z') \sum_{\beta \le N((1+\epsilon)C||y|z'+y|)} u_\beta(x)(|y|z'+y)^\beta dz' \wedge d\bar{z}'.$$

Tomando $y = 0$

$$u(x,0) = \frac{i}{2^{2d}} u_0(x) \int_{\mathbb{C}^d} \psi(z') dz' \wedge d\bar{z}' = f(x).$$

Vamos trabalhar para obter a estimativa (3.43). Para tal utilizaremos o seguinte: para todo polinômio $P(z)$

$$\left(\frac{i}{2y^2}\right) \int_{\mathbb{C}} \psi\left(\frac{z-y}{|y|}\right) P(z)\, dz \wedge d\bar{z} = P(y). \tag{3.36}$$

De fato, note que $(i/2y^2)^d \int_{\mathbb{C}} \psi\left(\frac{z-y}{|y|}\right) P(z)\, dz \wedge d\bar{z} = P * \psi_{|y|}(y)$, sendo $dz \wedge d\bar{z} = (2/i)^d dV$. Como ψ é radial e todo polinômio é uma função harmônica, por (5.3) segue que $P(y) = P * \psi_{|y|}(y)$ e portanto (3.36) é válida.

Então, utilizando (3.20) para $P(z) = \sum_{\beta \leq k} u_\beta(x) z^\beta$,

$$
\begin{aligned}
L_j u(x,y) &= L_j \left[\sum_{\beta \leq k} u_\beta(x) y^\beta + \left(\frac{i}{2y^2}\right)^d \int_{\mathbb{C}^d} \psi\left(\frac{z-y}{|y|}\right) \sum_{k+1 \leq \beta \leq N((1+\epsilon)C|z|)} u_\beta(x) z^\beta dz \wedge d\bar{z} \right] \\
&= L_j(S^k \tilde{u}(x,y)) + \left(\frac{i}{2}\right)^d \int_{\mathbb{C}^d} L_j \left[\frac{1}{y^{2d}} \psi\left(\frac{z-y}{|y|}\right) \sum_{k+1 \leq \beta \leq N((1+\epsilon)C|z|)} u_\beta(x) \right] z^\beta dz \wedge d\bar{z} \\
&= L_j(S^k \tilde{u}(x,y)) + \left(\frac{i}{2}\right)^d \int_{\mathbb{C}^d} L_j \left[\frac{1}{y^{2d}} \psi\left(\frac{z-y}{|y|}\right) \right] \sum_{k+1 \leq \beta \leq N((1+\epsilon)C|z|)} u_\beta(x) z^\beta dz \wedge d\bar{z} \\
&+ \left(\frac{i}{2}\right)^d \int_{\mathbb{C}^d} \frac{1}{y^{2d}} \psi\left(\frac{z-y}{|y|}\right) \sum_{k+1 \leq \beta \leq N((1+\epsilon)C|z|)} L_j[u_\beta(x)] z^\beta dz \wedge d\bar{z}.
\end{aligned}
$$

Como ψ é limitada, e $|z-y| \leq |y|$

$$
\begin{aligned}
\left| L_j \left[\frac{1}{y^{2d}} \psi\left(\frac{z-y}{|y|}\right) \right] \right| &= \left| \frac{-2dy_j}{y^{2d+2}} \psi\left(\frac{z-y}{|y|}\right) + \frac{1}{y^{2d}} \left[\frac{-|y| - (z-y) y_j |y|^{-1}}{y^2} \right] (\partial\psi)\left(\frac{z-y}{|y|}\right) \right| \\
&\leq \frac{C_1}{|y|^{2d+1}}
\end{aligned}
$$

para alguma constante $C_1 > 0$.

Então, pelo Teorema de Minkowski para Integrais,

$$
\begin{aligned}
\|L_j u(x', x'', y)\|_{L^q_{x'} \times L^\infty_{x''}} \leq{}& \|L_j(S^n \tilde{u}(x', x'', y))\|_{L^q_{x'} \times L^\infty_{x''}} \\
&+ \frac{C_1}{2|y|^{2d+1}} \int_{D_{|y|\epsilon}(y)} \sum_{k+1 \leq \beta \leq N((1+\epsilon)C|z|)} \|u_\beta(x', x'')\|_{L^q_{x'} \times L^\infty_{x''}} |z|^{|\beta|} |dz \wedge d\bar{z}| \\
&+ \frac{C_2}{|y|^{2d}} \int_{D_{|y|\epsilon}(y)} \sum_{k+1 \leq \beta \leq N((1+\epsilon)C|z|)} \|L_j u_\beta(x', x'')\|_{L^q_{x'} \times L^\infty_{x''}} |z|^{|\beta|} |dz \wedge d\bar{z}|.
\end{aligned} \tag{3.37}
$$

Sejam B e D constantes referentes à Proposição 3.33 e Proposição 3.3.2 respectivamente. Tome $C = 2\max\{B, D, cD\}$ e fixe $k = N((1+\epsilon)C|y|) - 1$. Agora, assuma também $|y| \leq 1/((1+\epsilon)C) := \delta < 1$.

Pelo Lema 3.1.1 e o fato que $|\beta|! \leq 2^{|\beta|}\beta!$ temos

$$
\frac{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A|\beta|)}}{\beta!} ((1+\epsilon)B|z|)^{|\beta|} \leq \frac{2^{|\beta|} e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A|\beta|)}}{|\beta|!} ((1+\epsilon)B|z|)^{|\beta|} \leq \frac{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(k+1))}}{(k+1)!} ((1+\epsilon)C|z|)^{k+1},
$$

para $k < |\beta| \leq N((1+\epsilon)C|z|)$.

Com isso, pela Proposição 3.2.1 e por ser $|z| < 2\epsilon|y|$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{k+1\le|\beta|\le N((1+\epsilon)C|z|)} \|u_\beta\|_{L^q\times L^\infty}|z|^{|\beta|} &\le \sum_{k+1\le|\beta|\le N((1+\epsilon)C|z|)} \frac{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A|\beta|)}}{\beta!}((1+\epsilon)B|z|)^{|\beta|}\frac{1}{(1+\epsilon)^{|\beta|}} \\
&\le \frac{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(k+1))}}{(k+1)!}((1+\epsilon)C|z|)^{k+1} \sum_{k+1\le|\beta|\le N((1+\epsilon)C|z|)} \frac{1}{(1+\epsilon)^{|\beta|}} \\
&\le a_{k+1,A}((1+\epsilon)C)^{k+1}(2|y|)^{k+1} \\
&\le C_3|y|h_1((1+\epsilon)C|y|). \qquad (3.38)
\end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned}
\sum_{k+1\le|\beta|\le N((1+\epsilon)C|z|)} \|L_j u_\beta\|_{L^q\times L^\infty}|z|^{|\beta|} &\le \sum_{k+1\le|\beta|\le N((1+\epsilon)C|z|)} DB^{|\beta|}\frac{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A|\beta+e_j|)}}{(\beta+e_j)!}|z|^{|\beta|} \\
&\le \sum_{k+1\le|\beta|\le N((1+\epsilon)C|z|)} D\frac{e^{\frac{1}{2A}\varphi^*(2A|\beta|)}}{\beta!}((1+\epsilon)B|z|)^{|\beta|}\frac{1}{(1+\epsilon)^{|\beta|}} \\
&\le D\frac{e^{\frac{1}{2A}\varphi^*(2A(k+1))}}{(k+1)!}((1+\epsilon)C|z|)^{k+1} \sum_{k+1\le|\beta|\le N((1+\epsilon)C|z|)} \frac{1}{(1+\epsilon)^{|\beta|}} \\
&\le C_4\frac{a_{k+1,2A}}{(k+1)!}((1+\epsilon)C)^{k+1}(\epsilon|y|)^{k+1} \\
&\le C_4|y|h_1^{2A}((1+\epsilon)C|y|). \qquad (3.39)
\end{aligned}$$

Pela Proposição 3.3.2

$$\|L(S^k\tilde{u})(\,\cdot\,,y)\|_{L^q\times L^\infty} \le M^{n+1}a_{k,A}|y|^{|\beta|} \le C_5h^A((1+\epsilon)C|y|). \qquad (3.40)$$

Portanto, utilizando as estimativas (3.38), (3.39) e (3.40) em (3.37), também pelas Proposições 3.1.3 e 3.1.4

$$\begin{aligned}
\|L_ju(\,\cdot\,,y)\|_{L^q\times L^\infty} &\le C_5h^A((1+\epsilon)^2C|y|) + \frac{C_1}{|y|^{2d+1}}(|y|\epsilon)^{2d}C_3|y|h_1^A((1+\epsilon)^2C|y|) \\
&+ \frac{C_2}{|y|^{2d}}(|y|\epsilon)^{2d}C_4|y|h_1^{2A}((1+\epsilon)^2C|y|) \\
&\le C_6h^{2A}(Q_1|y|) \\
&\le Ce^{-\frac{1}{A'}\omega^*(Qy)}
\end{aligned}$$

Para ver que $u \in C^\infty(\Omega' \times [-\delta,\delta]^d)$ e que é $\mathcal{E}^{q,\omega}$ na primeira variável. Basta prosseguir como na demonstração do Teorema 3.2.1, utilizando o teorema de imersão de Sobolev. □

Corolário 3.3.1 (Extensão quase analítica)**.** *Seja* $\Omega \in \mathbb{R}^d$ *e* $f \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\Omega)$*. Então existe* $F \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\Omega, C^\infty([-\delta,\delta]^d))$ *tal que* $F(x,0) = f(x)$ *para todo* $x \in \Omega$ *e existem constantes*

$A, C, Q > 0$ tais que

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} F(\cdot, y) \right\|_{L^q(\Omega)} \leq C e^{\frac{1}{A}\omega^*(Qy)} \tag{3.41}$$

para todo $y \in [-\delta, \delta]^d$ e $j = 1, 2, ..., d$.

Demonstração. Basta tomar campos de coeficientes constantes da forma

$$L_j = \frac{i}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y_j} - i \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$$

e utilizar o Teorema anterior. □

A função F obtida acima é chamada *extensão quase analítica de f*. Diferente de trabalhos como [8], [4] e [2], obtemos a extensão quase analítica para ambas as classes, não quase analíticas e quase analíticas.

Corolário 3.3.2 (Solução aproximada)**.** *Seja $\mathcal{V} = \{L_j\}_{1 \leq j \leq m}$ um sistema involutivo de campos vetoriais $\mathcal{E}^{\infty,\omega}$ definidos em uma vizinhança da origem $\Omega \times V \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d$ sendo L_j campos da forma*

$$L_j = \frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{k=1}^{m} a_j^k(x, y) \frac{\partial}{\partial x_k}, \tag{3.42}$$

com $a_j^k \in \mathcal{E}^{\infty,\omega}(\Omega \times V)$. Seja $f \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\Omega)$, então existe solução aproximada de $\mathcal{V}$, isto é, uma função $u \in C^\infty(\Omega \times [\delta, \delta]^d)$ tal que $u(x, 0) = f(x)$. Além disso, existem constantes $C, A, Q > 0$ tais que para cada $j = 1, ..., m$

$$\|L_j u(\,\cdot\,, y)\|_{L^q(\Omega')} \leq C e^{-\frac{1}{A}\omega^*(Qy)}, \quad \forall y \in [-\delta, \delta]^d. \tag{3.43}$$

Demonstração. Enfatizando que agora os campos L_j são como em (3.42), isto é, com coeficientes que dependem das variáveis x e y. Considere os campos

$$\tilde{L}_j = \frac{\partial}{\partial s_j} + L_j$$

definidos em $\Omega \times V \times \mathbb{R}^d$, sendo $s \in \mathbb{R}^d$. Defina $\tilde{f} : \Omega \times V \to \mathbb{R}$ como $\tilde{f}(x, y) = f(x)$, então claramente $f \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\Omega) \times \mathcal{E}^{\infty,\omega}(V)$.

Pelo Teorema 3.3.1, existe $\tilde{u}(x, y, s) \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\Omega) \times \mathcal{E}^{\infty,\omega}(V) \times C^\infty([-\delta, \delta]^d)$ tal que $\tilde{u}(x, y, 0) = \tilde{f}(x, y)$ e existem constantes $C, Q, A, \delta > 0$ tais que

$$\|\tilde{L}_j \tilde{u}(x, y, s)\|_{L^q_x \times L^\infty_y} \leq C e^{\frac{1}{A}\omega^*(Qs)}, \quad \forall s \in [-\delta, \delta]^d \tag{3.44}$$

Tome $u(x, y) := \tilde{u}(x, y, y)$, então

$$u(x, 0) = \tilde{u}(x, 0, 0) = \tilde{f}(x, 0) = f(x).$$

Além disso, observe que $\tilde{u}(x,y,y)$ é constante em s, então

$$L_j u(x,y) = \left[\partial_{s_j} + L_j\right] \tilde{u}(x,y,y) = \tilde{L}_j \tilde{u}(x,y,y),$$

portanto, por (3.44)

$$\|L_j u(x,y)\|_{L^q} \leq \|\tilde{L}_j \tilde{u}(x,y,y)\|_{L^q_x \times L^\infty_y} \leq C e^{\frac{1}{A}\omega^*(Qy)},$$

o que completa a prova do corolário. □

Trataremos de mais um caso soluções aproximadas, agora para estruturas do tipo tubo, cuja definição apresenta-se a seguir.

Definição 3.3.2. Fixe abertos $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ e $0 \in V \subset \mathbb{R}^d$. Dizemos que $\mathcal{V}$ é uma $\mathcal{E}^{q,\omega}$ estrutura global de tipo tubo (de posto m e coposto d) se $\mathcal{V}$ é globalmente gerada por $\{L_1, \ldots, L_d\}$, com

$$L_j = \frac{\partial}{\partial y_j} - i \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \Phi_k}{\partial y_j}(y) \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad j = 1, 2, \ldots, d. \tag{3.45}$$

Sendo $\Phi(y) : V \to \mathbb{R}^m$, $\Phi(x,y) = (\Phi_1(y), ..., \Phi_m(y))$ é tal que $\Phi(0) \equiv 0$ e $\Phi_k \in \mathcal{E}^{\infty,\omega}(V)$ para cada $k = 1, .., m$. A função $Z(x,y)$ dada por

$$\begin{aligned} Z(x,y) &:= x + i\Phi(y) \\ &= (x_1 + i\Phi_1(y), ..., x_m + i\Phi_m(y)) \\ &=: (Z_1(x,y), ..., Z_m(x,y)) \end{aligned} \tag{3.46}$$

faz com que as Z_k's sejam as primeiras integrais de $\mathcal{V}$, no sentido que para cada $j = 1, 2, \ldots, n$ e cada $k = 1, \ldots, m$ tem-se $L_j Z_k = 0$.

Exemplo 3.3.1. Os operadores k-Mizohata

$$M_k = \partial_y + i(k+1)y^k \partial_x$$

definidos em $\mathbb{R}^2$ são do tipo tubo com $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $\Phi(y) = -y^{k+1}$.

Exemplo 3.3.2. Operador de Cauchy-Riemann em $\mathbb{R}^2$

$$\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\partial_y + i\partial_x\right)$$

é do tipo tubo com $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\Phi(y) = -y$.

Teorema 3.3.2. *Seja $\mathcal{V}$ uma $\mathcal{E}^{q,\omega}$ estrutura global de tipo tubo como na Definição 3.3.2 gerada por campos $\{L_1, \ldots, L_d\}$ como em* (3.45). *Se $f(x) \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\Omega)$, então existe uma* *solução aproximada adaptada a $\mathcal{V}$, isto é, $F(x,y) \in C^\infty(\Omega \times [-\epsilon,\epsilon]^d)$ tal que $F(x,0) = f(x)$ para todo $x \in \Omega$ e, além disso, existem constantes $C, A, Q > 0$ tais que para cada $j = 1, ..., d$*

$$\|L_j u(x,y)\|_{L^q(\Omega)} \leq Ce^{-\frac{1}{A}\omega^*(Q|\Phi(y)|)}, \quad \forall y \in [-\epsilon,\epsilon]^d. \tag{3.47}$$

Demonstração. Se $f(x) \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\Omega)$, então, pelo Corolário 3.3.1 ela possui uma extensão quase analítica, isto é, existe $u \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\Omega, C^\infty([-\delta,\delta]^d))$ tal que $u(x,0) = f(x)$ para todo $x \in \Omega$ e satisfaz a estimativa (3.41). Em particular, como $\Phi(0) = 0$, existe ϵ tal que se $y \in [-\epsilon,\epsilon]^d$, então $\Phi(y) \in [-\delta,\delta]^m$, logo,

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} u(\cdot, \Phi(y)) \right\|_{L^q(\Omega)} \leq Ce^{\frac{1}{A}\omega^*(Q|\Phi(y)|)}, \quad \forall y \in [-\epsilon,\epsilon]^d, \tag{3.48}$$

para A, C e Q constantes.

Defina $F(x,y) = u \circ Z(x,y) = u(x,\Phi(y))$, então

$$F(x,0) = u(x,\Phi(0)) = u(x,0) = f(x).$$

Como $0 = L_j Z_k = L_j(x_k) + iL_j(\Phi_k)$, então $L_j(\Phi_k) = iL_j(x_k) = \partial_{y_j}\Phi_k$. Utilizando isso e denotando $\Phi(y) = t$ temos

$$\begin{aligned}
L_j F(x,y) &= L_j(u \circ Z)(x,y) \\
&= \frac{\partial}{\partial y_j} u(x,\Phi(y)) - i\sum_{k=1}^m \frac{\partial \Phi_k}{\partial y_j}(y)\frac{\partial}{\partial x_k} u(x,\Phi(y)) \\
&= \sum_{k=1}^m (\partial_{t_k} u)(x,t)\partial_{y_j}\Phi_k(y) - i\sum_{k=1}^m (\partial_{y_j}\Phi_k)(y)(\partial_{x_k} u)(x,t) \\
&= \sum_{k=1}^m (\partial_{t_k} u)(x,t) L_j\Phi_k(y) + \sum_{k=1}^m (\partial_{x_k} u)(x,t) L_j(x_k) \\
&= \sum_{k=1}^m \left[i(\partial_{t_k} u)(x,t)L_j(x_k) + (\partial_{x_k} u)(x,t)L_j(x_k)\right] \\
&= 2\sum_{k=1}^m L_j(x_k)\partial_{\bar{z}_k} u(x,\Phi(y)).
\end{aligned}$$

Temos que $\Phi_k \in \mathcal{E}^{\infty,\omega}(V)$ para $k = 1, ...m$, logo

$$\|L_j(x_k)\|_{L^\infty} = \left\|\partial_{y_j}\Phi_k(y)\right\|_{L^\infty} \leq ce^{\frac{1}{A}\varphi^*(A)} = C.$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
\|L_jF(\,\cdot\,,y)\|_{L^q} &= \left\| 2\sum_{k=1}^{m} L_j(x_k)\partial_{\bar z_k} u(x,\Phi(y)) \right\|_{L^q_x} \\
&\leq C\,\|\partial_{\bar z_k} u(\,\cdot\,,\Phi(y))\|_{L^q_x} \\
&\leq Ce^{\frac{1}{A}\omega^*(Q|\Phi(y)|)}
\end{aligned}
$$

sendo a última desigualdade obtida por (3.48). □

3.3.1 Conjunto frente de onda

Obtemos anteriormente a existência de extensões quase analítica para funções $\mathcal{E}^{q,\omega}(\Omega)$ inclusive para as classes quase analíticas. Dessa forma, resultados apresentados em [29] de existência de valores de fronteira e caracterização do $\mathcal{E}^{q,\omega}$-conjunto frente de onda para classes mais restritivas seguirão da mesma forma. Pelo Teorema 2.2.1, podemos introduzir a seguinte definição

Definição 3.3.3. Seja $u \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\mathbb{R}^d)'$ e $\xi^0 \in \mathbb{R}^d$. Dizemos que u é $\mathcal{E}^{q,\omega}$-*microglobal regular* em $\mathbb{R}^d \times \{\xi^0\}$ (ou simplesmente em ξ^0) se existe uma vizinhança cônica Γ_0 de ξ^0 em $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ e constantes $C, a, > 0$ tais que para cada $q \leq r \leq \infty$ e β multi-índice

$$
\|D_x^{\beta}\mathcal{F}_\lambda u(x,\xi)\|_{L^r} \leq Ce^{-\frac{1}{2A}\omega(a\xi)}e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A|\beta|)}, \quad \forall \xi \in \Gamma_0. \tag{3.49}
$$

Definimos o $\mathcal{E}^{q,\omega}$-*conjunto frente de onda* de u, $WF_{\mathcal{E}^{q,\omega}}u$ como sendo o complemento do conjunto das direções ξ onde u é $\mathcal{E}^{q,\omega}$-microglobal regular.

Seja $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ um cone, denote por $\Gamma_\delta := \Gamma \cap B_\delta(0)$ o cone truncado de altura δ. Se $S^{d-1} = \{y \in \mathbb{R}^d : \ |y| = 1\}$, então $\Gamma_\delta = \{\tau y' : \ 0 < \tau < \delta \text{ e } y' \in \Gamma \cap S^{d-1}\}$.

Os seguintes resultados foram obtidos por Hoepfner e Raich [29] para classes Denjoy-Carleman globais não quase analíticas do tipo Roumieu. Como as demonstrações dependem da existência de extensões quase analíticas, a qual obtemos na seção anterior Corolário 3.3.2, generalizamos os resultados não somente para classes ultradiferenciáveis globais geradas por funções peso mas também para classes quase analíticas.

Teorema 3.3.3. *Sejam $\mathcal{W} := \Omega \times \Gamma_\delta \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, e $f \in C(\mathcal{W}) \cap L^p(\mathcal{W})$ satisfazendo o seguinte: existe uma constante $C > 0$ tal que*

1. *para todo $1 \leq j \leq d$ e para $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$*

$$
\sup_{y' \in \Gamma \cap S^{d-1}} \int_0^{\delta} \|\partial_{\bar z_j} f(\,\cdot + i\tau y')\|_{L^p}\, d\tau \leq C < \infty;
$$

2. para todo $x \in \Omega$ e para todo $\lambda > 0$,

$$\sup_{y' \in \Gamma \cap S^{d-1}} \int_0^\delta \left\{ \|f(\,\cdot + i\tau y')\|_{L^p}\, e^{\omega^*(\lambda\tau)} \right\} d\tau \leq C < \infty.$$

Então $\lim_{\Gamma \ni y \to 0} f(\,\cdot + iy)$ *existe em* $\mathcal{E}^{q,\omega}(\Omega)'$*, isto é,*

$$\langle bf, \phi \rangle := \lim_{\Gamma \ni y \to 0} \int f(x+iy)\phi(x)\, dx \tag{3.50}$$

existe e define uma ultradistribuição em $\mathcal{E}^{q,\{\omega\}}(\Omega)'$.

Demonstração. A demonstração segue adaptando-se a prova de [29, Theorem 2.2] e utilizando o Corlário 3.3.2. □

Teorema 3.3.4. *Sejam* $u \in \mathcal{E}^{q,\{\omega\}}(\mathbb{R}^d)'$ *e* $\xi^0 \in \mathbb{R}^d$*. Tem-se que* $\xi^0 \notin WF_{\mathcal{E}^{q,\{\omega\}}}(u)$ *se e somente se existem cones abertos* $\Gamma_1, ..., \Gamma_k \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ *e* $\delta > 0$ *tal que*

1. *para cada* $j \in \{1, ..., k\}$, $\xi^0 \cdot \Gamma_j < 0$;
2. *para cada* $j \in \{1, ..., k\}$*, existem funções* f_j *em* $\mathbb{R}^d \times (\Gamma_j)_\delta$ *satisfazendo (1) do Teorema 3.3.3*
3. *para todo* $p \leq r \leq \infty$ *(sendo* p *tal que* $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$*) e todo* $\lambda > 0$

$$\sup_{y \in (\Gamma_j)_\delta} \|f(\,\cdot + i\tau y')\|_{L^p} e^{\omega^*(\lambda\tau)} \leq A_{\lambda,r}$$

para algum $A_{\lambda,r} > 0$;

4. bf_j *existe em* $\mathcal{E}^{q,\{\omega\}}(\mathbb{R}^d)'$ *e*

$$u - \sum_{j=1}^{k} bf_j \in \mathcal{E}^{q,\{\omega\}}(\mathbb{R}^d).$$

Demonstração. A prova segue como feito em [29, Theorem 2.5], utilizando o Teorema 3.3.4. □

Uma aplicação interessante em [29], que também se comporta bem nas classes ultradiferenciáveis globais gerada por sequências, é uma versão global do resultado clássico que o conjunto frente de onda de Pu está contido no conjunto frente de onda de u, que por sua vez está contido no conjunto frente de onda de Pu união com o conjunto característico. A seguir explanaremos tal afirmação.

Considere um operador diferencial parcial de ordem m

$$P = \sum_{\ell=0}^{m} P_\ell(x, D)$$

sendo $P_\ell(x,\xi)$ um polinômio de grau no máximo ℓ em ξ e suave em x.

O conjunto característico de P é definido por

$$\operatorname{Char} P = \left\{(x,\xi) \in (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \backslash \{0\}) : P_m(x,\xi) = 0\right\}.$$

Definição 3.3.4. Definimos o conjunto característico global de P por

$$\operatorname{Char}_G P = \{\xi : (x,\xi) \in \operatorname{Char} P\}. \tag{3.51}$$

Teorema 3.3.5. *Seja P um operador diferencial de coeficientes constantes de ordem m. Então*

$$WF_{\mathcal{E}^{q,\{\omega\}}}(Pu) \subset WF_{\mathcal{E}^{q,\{\omega\}}}(u) \subset WF_{\mathcal{E}^{q,\{\omega\}}}(Pu) \cup \operatorname{Char}_G P. \tag{3.52}$$

Demonstração. Segue como o feito em [29, Theorem 2.8]. □

No caso Beurling temos resultados análogos quando substituímos o dual pelo conjunto $E^{p,(\omega)}$ definido em (2.25).

Também podemos obter um resultado mais geral do que o Teorema 3.3.3. Considere $\mathcal{V}$ uma $\mathcal{E}^{q,\omega}$ estrutura global de tipo tubo (de posto m e coposto d) gerada por $\{L_1,\ldots,L_d\}$, como na Definição 3.3.2, para o próximo resultado pediremos uma propriedade adicional para Φ: para cada $y \in \mathbb{R}^d$ fixo , a aplicação

$$\rho \mapsto |\Phi(y\rho)| \quad \text{é crescente.} \tag{3.53}$$

Note que as funções dadas pelos operadores $k-$Mizohata definidos no Exemplo 3.3.1 satisfazem (3.53).

Teorema 3.3.6. *Sejam $\mathcal{W} := \Omega \times \Gamma_\delta \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d$, e $\mathcal{V} = \{L_j\}_{1\le j\le d}$ uma $\mathcal{E}^{q,\omega}$ estrutura global de tipo tubo como na Definição 3.3.2. Se $f \in C(\mathcal{W}) \cap L^p(\mathcal{W})$ satisfaz o seguinte: existe uma constante $C > 0$ tal que*

1. *para todo $1 \le j \le d$ e para $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$*

$$\sup_{y' \in \Gamma \cap S^{d-1}} \int_0^\delta \|L_j f(\,\cdot + i\tau y')\|_{L^p}\, d\tau \le C < \infty;$$

2. *para todo $x \in \Omega$ e para todo $\lambda > 0$,*

$$\sup_{y' \in \Gamma \cap S^{d-1}} \int_0^\delta \left\{\|f(\,\cdot + i\tau y')\|_{L^p}\, e^{-\omega^*(\lambda|\Phi(\tau y')|)}\right\} d\tau \le C < \infty.$$

Então $\lim_{\Gamma \ni y \to 0} f(\,\cdot + iy)$ existe em $\mathcal{E}^{q,\omega}(\Omega)'$, isto é,

$$\langle bf, \phi \rangle := \lim_{\Gamma \ni y \to 0} \int f(x+iy)\phi(x)\, dx \tag{3.54}$$

existe e define uma ultradistribuição em $\mathcal{E}^{q,\{\omega\}}(\Omega)'$.

Demonstração. Primeiro consideraremos $f \in C(\mathcal{W}) \cap W^{1,p}(\mathcal{W})$ e mostraremos a existência do limite (3.54) ao longo de uma direção fixa $y' = (y'_1, \dots, y'_d) \in \Gamma \cap S^{d-1}$.

Vamos fixar algumas notações e observar estimativas. Seja

$$L' := y'_1 L_1 + \dots y'_d L_d$$

e

$$\Pi' := \Omega \times \{\tau y'\} := \{(x, \tau y') : x \in \Omega, \tau \in (0, 2\delta)\} \subset \mathbb{R}^m_x \times \mathbb{R}^d_y.$$

Tome $\Pi = \Omega \times (0, 2\delta)$ e $f'(x, \tau) : \Pi \to \mathbb{C}$ a função dada pela restrição de $f(x, y)$ em Π', isto é, $f'(x, \tau) := f(x, \tau y'), 0 < \tau < 2\delta$. Podemos escrever

$$L' = \partial_\tau - i \sum_{k=1}^{n} \partial_\tau \Phi_k(y'\tau) \partial_{x_k}$$

Pois

$$\begin{aligned} L' &= y'_1 \left(\partial_{y_1} - i \sum_{k=1}^{m} \partial_{y_1} \Phi_k(y'\tau) \partial_{x_k} \right) + \dots + y'_d \left(\partial_{y_d} - i \sum_{k=1}^{m} \partial_{y_d} \Phi_k(y'\tau) \partial_{x_k} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{d} y'_j \partial_{y_j} - i \sum_{j=1}^{d} \sum_{k=1}^{m} y'_j \partial_{y_j} \Phi_k(y'\tau) \partial_{x_k} \end{aligned}$$

e quando derivamos $y = \tau y'$ com respeito a τ tem-se

$$\partial_\tau y = y'_1 \partial_{y_1} + \dots + y'_n \partial_{y_n},$$

o mesmo para $\partial_\tau \Phi(y)$

$$\partial_\tau \Phi_k(y) = \sum_{j=1}^{d} \partial_{y_j} \Phi_k(y'\tau) \partial_\tau (y'_j \tau) = \sum_{j=1}^{d} \partial_{y_j} \Phi_k(y'\tau) y'_j.$$

Desta forma, podemos considerar L' como um único campo vetorial em $(m+1)$ variáveis $(x, \tau) \in \Pi$ com primeiras integrais

$$Z'(x, \tau) := (Z'_1(x, \tau), \dots, Z'_m(x, \tau)), \quad \text{sendo} \quad Z'_j(x, \tau) := x_j + i\Phi_j(\tau y'), \quad j = 1, \dots, d.$$

Por *(1)*, segue que

$$L' f'(x, \tau) = \sum_{j=1}^{d} y'_j L_j f(x, \tau y') \in L^p(\Omega \times (0, \delta)).$$

Denote $f'_\varepsilon(x,\tau) := f'(x, \varepsilon+\tau)$ para $0<\varepsilon<\delta/2$,, então por *(1)* e *(2)*

$$\sup_{y'\in\Gamma\cap S^{n-1}} \int_0^{\delta/2} \|L' f'_\varepsilon(\cdot,\tau)\|_{L^p}\, d\tau \le \sum_{j=1}^{d} \sup_{y'\in\Gamma\cap S^{n-1}} \int_0^{\delta/2} \|(L_j f)\,(\cdot,(\tau+\varepsilon)y')\|_{L^p}\, d\tau \tag{3.55}$$
$$\le \sum_{j=1}^{d} \sup_{y'\in\Gamma\cap S^{n-1}} \int_0^{\delta} \|(L_j f)\,(\cdot,\tau y')\|_{L^p}\, d\tau \le C < \infty,$$

tem-se que ω^* é decrescente e $|\Phi|$ é crescente por (3.53), então

$$\int_0^{\delta/2} \sup_{y'\in\Gamma S^{n-1}} \left\| f'_\varepsilon(\cdot,\tau) e^{-\omega^*(\lambda|\Phi(\tau y')|)}\right\|_{L^p} d\tau \le \int_0^{\delta/2} \sup_{y'\in\Gamma\Omega^{n-1}} \left\| f\,(\cdot,(\tau+\varepsilon)y')\, e^{-\omega^*(\lambda|\Phi((\tau+\varepsilon)y')|)}\right\|_{L^p} d\tau$$
$$\le \int_0^{\delta} \sup_{y'\in\Gamma\cap S^{n-1}} \left\| f\,(\cdot,\tau y')\, e^{-\omega^*(\lambda|\Phi(\tau y')|)}\right\|_{L^p} d\tau$$
$$\le C < \infty. \tag{3.56}$$

Vamos agora provar o Teorema no caso considerado.

Tome uma função $\phi \in \mathcal{E}^{q,\{\omega\}}(\Omega)$, pelo Corolário 3.3.1, existe $\psi \in \mathcal{E}^{q,\{\omega\}}\,(\Omega, C^\infty\,(V))$ extensão quase analítica de ϕ. Defina $\psi'(x,\tau) = \psi\,(x,\tau t')$, por (3.41), temos

$$\left\| L'\psi'(\cdot,\tau) e^{\omega^*(\lambda|\Phi(\tau y')|)}\right\|_{L^q} \le \sum_j \left\| L_j\psi\,(\cdot,\tau y')\, e^{\omega^*(\lambda|\Phi(\tau y')|)}\right\|_{L^q}$$
$$\le \sum_j \sup_{y\in\Gamma_\delta} \left\| L_j\psi(\cdot,y) e^{\omega^*(\lambda|\Phi(y)|)}\right\|_{L^q} \le C < \infty \tag{3.57}$$

Por outro lado, se $g(x,\tau) \in W^{1,p}(\Pi)$, então

$$\mathrm{d}g(x,\tau) = \partial_\tau g(x,\tau)\mathrm{d}\tau + \sum_{k=1}^{m} \partial_{x_k} g(x,\tau)\mathrm{d}x_k$$
$$= L' g(x,\tau)\mathrm{d}\tau + \sum_{k=1}^{m} \partial_{x_k} g(x,\tau)\mathrm{d}Z'_k(x,\tau).$$

Seja $\mathrm{d}Z'(x,\tau) = \mathrm{d}Z'_1 \wedge\cdots\wedge \mathrm{d}Z'_d$ o volume das integrais, então, se $g(x,\tau) = f'_\varepsilon(x,\tau)\psi'(x,\tau)$, $0<\varepsilon<\delta/2$ e $\theta(x,\tau) = g(x,\tau)\mathrm{d}Z'(x,\tau)$, segue que

$$\mathrm{d}\theta = L' g(x,\tau)\mathrm{d}\tau \wedge \mathrm{d}Z' + \sum_{k=1}^{m} \partial_{x_k} g(x,\tau)\mathrm{d}Z'_k \wedge \mathrm{d}Z'$$
$$= f'_\varepsilon(x,\tau) L'\psi'(x,\tau)\mathrm{d}\tau \wedge \mathrm{d}Z' + \left(L' f'_\varepsilon\right)(x,\tau)\psi'(x,\tau)\mathrm{d}\tau \wedge \mathrm{d}Z'.$$

Pelo Teorema de Stokes, para $\delta' < \delta/2$,

$$\int_\Omega \int_0^{\delta'} \mathrm{d}\theta(x,t) = \int_\Omega \theta\left(x, \delta'\right) - \int_\Omega \theta(x,0),$$

então, substituindo

$$\begin{aligned}\int_\Omega f'(x,\varepsilon)\varphi(x)\mathrm{d}x = &\int_\Omega f'\left(x, \delta'+\varepsilon\right)\psi'\left(x,\delta'\right)\mathrm{d}Z'\left(x,\delta'\right) \\ &- \int_0^{\delta'}\int_\Omega L'f'_\varepsilon(x,\tau)\psi'(x,\tau)\mathrm{d}\tau\wedge\mathrm{d}Z'(x,\tau) \\ &- \int_0^{\delta'}\int_\Omega f'_\varepsilon(x,\tau)L'\psi'(x,\tau)\mathrm{d}\tau\wedge\mathrm{d}Z'(x,\tau).\end{aligned} \tag{3.58}$$

Mostraremos agora que o limite quando $\varepsilon \to 0$ existe para cada uma das integrais em (3.58). Como estamos assumindo f contínua, a função $f'\left(x, \delta' + \epsilon\right)$ está bem definida e a suposição L^p a priori definida para algum ε, agora é contínua em ε. Consequentemente, a integral, como uma função em ε, é contínua em um compacto; logo, possui um máximo. Podemos, então, utilizar o Teorema da Convergência Dominada.

Para a primeira integral dupla, utilizando a desigualdade de Hölder, (3.55) e o fato de ψ ser solução aproximada

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^{\delta'}\int_\Omega L'f'_\varepsilon(x,\tau)\psi'(x,\tau)\mathrm{d}\tau\wedge\mathrm{d}Z'(x,\tau)\right| \\ &\qquad \le C\int_0^\delta \left\|L'f'(\cdot,\tau)\right\|_{L^p} d\tau \cdot \sup_{y\in\Gamma}\|\psi(\cdot,y)\|_{L^q} \le C,\end{aligned}$$

a integral não depende de ε e t', então utilizamos o Teorema da Convergência Dominada. Para a segunda integral dupla, utilizamos (3.56) e (3.57)

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^{\delta'}\int_\Omega f'_\varepsilon(x,\tau)L'\psi'(x,\tau)\mathrm{d}\tau\wedge\mathrm{d}Z'(x,\tau)\right| \\ &\quad\le \int_0^{\delta'}\int_\Omega \left|f'_\varepsilon(x,\tau)e^{\omega^*(\lambda\Phi(\tau y'))-\omega^*(\lambda\Phi(\tau y'))}L'\psi'(x,\tau)\right|\mathrm{d}\tau\wedge\mathrm{d}Z'(x,\tau) \\ &\quad\le C\int_0^\delta \left\|L'f_\varepsilon(\cdot,\tau y')e^{-\omega^*(\lambda\Phi(\tau y'))}\right\|_{L^p} d\tau\cdot\sup_{y\in\Gamma}\|L'\psi(\cdot,y)e^{\omega^*(\lambda\Phi(\tau y'))}\|_{L^q} \le C' < C,\end{aligned}$$

então o limite quando $\varepsilon \to 0$ existe independentemente da direção τ'. Logo

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega f(x,\varepsilon y')\phi(x)\mathrm{d}x = &\int_\Omega f'(x,\delta)\psi(x,\delta)\mathrm{d}Z'(x,\delta) \\ &- \int_0^\delta\int_\Omega [(L'f)\psi' + f(L'\psi')](x,\tau)\mathrm{d}\tau\wedge\mathrm{d}Z'(x,\tau).\end{aligned} \tag{3.59}$$

Segue portanto

$$\int_{\Omega} |f(x, \tau y')\phi(x)\mathrm{d}x \leq C_{\phi}.$$

E finalizamos a prova pra $f \in C(\mathcal{W}) \cap W^{1,p}(\mathcal{W})$.

Para $f \in C(\mathcal{W}) \cap L^p(\mathcal{W})$, basta regularizar f fazendo convolução com uma distribuição.

Para vermos que (3.59) independe de y', basta fazer como em [32, Theorem 3.1]. $\square$

CAPÍTULO 4

Aplicações

4.1 Classe L^q-Denjoy-Carleman global

Nesta seção apresentaremos a definição dos espaços Denjoy-Carleman globais e um resumo dos resultados que acabaram sendo generalizados por esse trabalho, no sentido em que algumas condições impostas nos trabalhos precursores [28], [29] eram mais restritivas devido às técnicas utilizadas.

Começaremos com as definições, como podem ser vistas em [29].

Dados $k \geq 0$, $1 \leq q \leq \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, considere $W^{k,q}(\Omega)$ o espaço das funções k-vezes diferenciáveis em $L^q(\Omega)$. Para um multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ de inteiros não negativos, uma constante positiva $A > 0$, defina a seminorma $\varrho_{\alpha,A,\Omega,q,M} : W^{|\alpha|,q}(\Omega) \to [0, \infty)$

$$\varrho_{\alpha,A,\Omega,q,M}(g) = \varrho_\alpha(g) = \frac{\|D^\alpha g\|_{L^q(\Omega)}}{A^{|\alpha|} M_{|\alpha|}}.$$

Suprimimos alguns índices e denotamos ϱ_α quando possível.

Definição 4.1.1. Seja $1 \leq q \leq \infty$ e fixe uma sequência de números não negativos $M = (M_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$. Dizemos que uma função $g \in W^{\infty,q}(\Omega)$ é uma *função L^q-Denjoy-Carleman global de ordem M* se existem constantes $A, C > 0$ tais que para todo multi-índice α

$$\|D^\alpha g\|_{L^q(\Omega)} \leq C A^{|\alpha|} M_{|\alpha|}. \tag{4.1}$$

Para um $A > 0$ fixo, temos

$$\mathcal{E}_A^{q,M}(\Omega) = \left\{ g \in W^{\infty,q}(\Omega) : \{\varrho_{\alpha,A,q,\Omega}(g)\}_{|\alpha|\geq 0} \in \ell^q(\mathbb{Z}^d_{\geq 0}) \right\}$$

e

$$\mathcal{E}^{q,\{\omega\}}(\Omega) = \bigcup_{A>0} \mathcal{E}_A^{q,\omega}(\Omega).$$

Ao utilizar a sequência $M_k = (k!)^s$ na definição acima, chamamos as funções que satisfazem (4.1) de L^q Gevrey globais e denotamos o espaço por $\mathcal{G}^{q,s}(\Omega)$.

Estimativas deste tipo, surgiram primeiro no trabalho de Boggess e Raich [11], então Adwan, Hoepfner e Raich em [2] formalizaram a notação, iniciaram uma discussão sobre a transformada de Fourier e a relação desses espaços globais com as classes de Gevrey (locais).

Para o desenvolvimento dos trabalhos citados acima, foram consideradas sequências que satisfazem certas propriedades, tais condições foram introduzidas por Lambert [39].

As demonstrações feitas neste trabalho, quando adaptadas para o uso de sequências, resultam no enfraquecimento das condições antes necessárias nos trabalhos citados acima e detalhadas a seguir.

(*Convexidade logarítmica forte*) Para algum $A > 0$ fixo e r tal que $0 \leq r < 1/A$, se denotarmos $P_k = M_k/(k!)^r$, então

$$\text{a sequência } \left(\frac{P_k}{kP_{k-1}}\right) \text{ é crescente.} \tag{4.2}$$

Com as novas demonstrações, basta utilizarmos a convexidade logarítmica mais fraca, decorrente de (4.2), isto é

$$\left(\frac{M_k}{k!}\right)^2 \leq \frac{M_{k-1}M_{k+1}}{(k-1)!(k+1)!}. \tag{4.3}$$

Note que esta condição é equivalente a (3.2) que pedimos no Capítulo 3 para funções peso, no caso das sequências é uma propriedade frequentemente exigida.

(*Estabilidade sobre operadores diferenciais forte*) Existem $A, H > 1$ tais que para todo $k \in \mathbb{Z}_+$

$$M_k \leq AH^k \min_{0\leq j\leq k} M_j M_{k-j}. \tag{4.4}$$

A condição acima implica na estabilidade sobre operadores diferenciais (usual), podemos então considerar tal condição mais fraca: existem constantes $A, H > 1$ tais que para todo $0 \leq j \leq k$

$$M_k \leq AH^{k-1} M_j M_{k-j}. \tag{4.5}$$

(*Não quase analiticidade forte*) Existe uma constante $A > 1$ tal que para todo $k \in \mathbb{Z}_+$

$$\sum_{k=p}^{\infty} \frac{M_k}{M_{k+1}} \leq A \frac{M_p}{M_{p+1}}. \tag{4.6}$$

Tem-se que (4.6) não é mais necessária, os resultados passam a valer também para a classe quase analítica, dada a partir de sequências tais que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_k}{M_{k+1}} = \infty, \tag{4.7}$$

e quando consideradas as classes não quase analíticas, basta considerarmos uma versão mais fraca que (4.6):

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_k}{M_{k+1}} < \infty. \tag{4.8}$$

Observe ainda que, como visto no Capítulo 1, Proposição 1.3.1, quando deixamos de considerar as condições (4.4) e (4.6), os espaços ultradiferenciáveis locais gerados por sequências e funções peso não coincidem.

A seguir enunciaremos resultados que foram generalizados; porém, abstemos as provas, pois seguem de forma análoga ao apresentado anteriormente. Os resultados são válidos para sequências $M = (M_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$ satisfazendo apenas as condições (1.1), (1.2) e (1.3) apresentadas no Capítulo 1. Portanto incluem as classes quase analíticas.

Teorema 4.1.1. *Seja $\mathcal{E}^{q,M}(\mathbb{R}^d)$ contendo $\mathcal{G}^{q,\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d)$. Suponha $u \in \mathcal{E}^{q,M}(\mathbb{R}^d)$, então para todo $\beta \in \mathbb{Z}_+^d$ e todo r com $q \leq r \leq \infty$, $\mathcal{F}_\lambda u(\cdot, \xi) \in \mathcal{E}^{q,M}(\mathbb{R}^d)$ e existem constantes $C, A, B, c > 0$ tais que*

$$\|D_x^\beta \mathcal{F}_\lambda u(x,\xi)\|_{L^r} \leq C A^{|\beta|} M_{|\beta|} e^{-\frac{1}{c} M(B|\xi|)}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d \tag{4.9}$$

para $\lambda < 1$.

Por outro lado, se $u \in \mathcal{E}^{q,M}(\mathbb{R}^d)'$ é tal que $\mathcal{F}_\lambda u(\cdot, \xi) \in \mathcal{E}^{q,M}(\mathbb{R}^d)$ e (4.9) ocorre, então u é uma função e $u \in \mathcal{E}^{q,M}(\mathbb{R}^d)$.

A *função associada* $M(t)$ presente no Teorema 4.1.1 é definida da seguinte forma

$$M(t) := \sup_{\ell} \log \frac{t^\ell}{M_\ell} \tag{4.10}$$

e sua conjugada de Young é

$$M^*(s) = -\log \inf_{\ell \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{s^\ell M_\ell}{\ell!} \right\}. \tag{4.11}$$

É sabido que a função $M^*(s)$ é comparável com $\omega^*(s)$ da Definição 3.1.2, veja [44].

Isto é, para todo $H > 0$, existe uma constante positiva $C > 0$ tal que

$$M^*(Hs) - C \leq w^*(s) \leq M^*(s), \qquad \text{para todo } s > 0. \tag{4.12}$$

Pode-se encontrar a prova do seguinte resultado em [2, Theorem 6.6], feita de modo que as condições (4.2) e (4.6) impostas sobre a sequência $M = (M_j)_{j \in \mathbb{Z}_+}$ são imprescindíveis. Por outro lado, analogamente ao visto na seção anterior, com os novos resultados de existência de extensões analíticas, tais condições mais fortes se tornam desnecessárias.

Teorema 4.1.2. *Seja $f \in \mathcal{E}^{q,M}(\Omega)$, então ela possui uma $\mathcal{E}^{q,M}$-extensão quase analítica, isto é, existe $F \in \mathcal{E}^{q,M}(\Omega, L^\infty(V))$ tal que $F(x,0) = f(x)$ para todo $x \in \Omega$ e satisfaz*

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} F(\,\cdot\,, y) \right\| \leq C e^{-M^*(y/\lambda)} \qquad \forall j = 1, 2, ..., d \text{ e } y \in V,$$

sendo C e λ constantes positivas que independem de y.

Definição 4.1.2. Seja $u \in \mathcal{E}^{q,M}(\mathbb{R}^d)'$ e $\xi^0 \in \mathbb{R}^d$. Dizemos que u é $\mathcal{E}^{q,M}$-*microglobal regular* em $\mathbb{R}^d \times \{\xi^0\}$ (ou apenas em ξ^0) se existe uma vizinhança cônica Γ_0 de ξ^0 em $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ e constantes $C, B, A, c > 0$ tais que para cada $q \leq r \leq \infty$ e β multi-índice

$$\|D_x^\beta \mathcal{F}_\lambda u(x, \xi)\|_{L^r} \leq C A^{|\beta|} M_{|\beta|} e^{-\frac{1}{c} M(B|\xi|)}, \quad \forall \xi \in \Gamma_0. \tag{4.13}$$

Definimos o $\mathcal{E}^{q,M}$-*conjunto frente de onda* de u, $WF_{\mathcal{E}^{q,\omega}} u$ como sendo o complemento do conjunto das direções ξ onde u é $\mathcal{E}^{q,M}$-microglobal regular.

Teorema 4.1.3. *Sejam $\mathcal{W} := \Omega \times \Gamma_\delta \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, e $f \in C(\mathcal{W}) \cap L^p(\mathcal{W})$ satisfazendo o seguinte: existe uma constante $C > 0$ tal que*

1. *para todo $1 \leq j \leq d$ e para $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$*

$$\sup_{y' \in \Gamma \cap S^{d-1}} \int_0^\delta \|\partial_{\bar{z}_j} f(\,\cdot\, + i\tau y')\|_{L^p} d\tau \leq C < \infty;$$

2. *para todo $x \in \Omega$ e para todo $\lambda > 0$,*

$$\sup_{y' \in \Gamma \cap S^{d-1}} \int_0^\delta \{\|f(\,\cdot\, + i\tau y')\|_{L^p} e^{M^*(\lambda\tau)} d\tau\} \leq C < \infty; .$$

Então $\lim_{\Gamma \ni y \to 0} f(\,\cdot\, + iy)$ existe em $\mathcal{E}^{q,M}(\Omega)'$, isto é,

$$\langle bf, \phi \rangle := \lim_{\Gamma \ni y \to 0} f(x + iy)\phi(x)\, dx$$

existe e define uma ultradistribuição em $\mathcal{E}^{q,M}(\Omega)'$.

Teorema 4.1.4. *Suponha que* $\mathcal{E}^{q,M}(\mathbb{R}^d)$ *contenha* $\mathcal{G}^{q,\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d)$*,* $u \in \mathcal{E}^{q,M}(\mathbb{R}^d)'$ *e* $\xi^0 \in \mathbb{R}^d$*. Tem-se que* $\xi^0 \notin WF_{\mathcal{E}^{q,M}}(u)$ *se e somente se existem cones abertos* $\Gamma_1, ...\Gamma_k \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ *e* $\delta > 0$ *tal que*

1. *para cada* $j \in \{1, ..., k\}$*,* $\xi^0 \cdot \Gamma_j < 0$*;*

2. *para cada* $j \in \{1, ..., k\}$*, existem funções* f_j *em* $\mathbb{R}^d \times (\Gamma_j)_\delta$ *satisfazendo (1) do Teorema 4.1.3*

3. *existe* $a > 0$ *tal que para todo* $p \leq r \leq \infty$ *(sendo* p *tal que* $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$*) e todo* $\lambda > 0$

$$\sup_{y \in (\Gamma_j)_\delta} \|f(\,\cdot + i\tau y')\|_{L^p} e^{-aM^*(\lambda\tau)} \leq A_{\lambda,r}$$

   para algum $A_{\lambda,r} > 0$*;*

4. bf_j *existe em* $\mathcal{E}^{q,M}(\mathbb{R}^d)'$ *e*

$$u - \sum_{j=1}^{k} bf_j \in \mathcal{E}^{q,M}(\mathbb{R}^d).$$

Consequentemente, também se torna válido de forma mais geral para as classe globais o seguinte resultado clássico.

Teorema 4.1.5. *Seja* P *um operador diferencial de coeficientes constantes de ordem* m*. Então*

$$WF_{\mathcal{E}^{q,M}}(Pu) \subset WF_{\mathcal{E}^{q,M}}(u) \subset WF_{\mathcal{E}^{q,M}}(Pu) \cup \mathrm{Char}_G\, P. \tag{4.14}$$

4.2 Vetores ultradiferenciáveis globais

Apresentaremos nesta seção a prova de uma versão global do Teorema de Kotake-Narasimhan. O problema com iterados, foi introduzido por Nelson [42] e Komatsu [35], que caracterizaram funções analíticas f em termos de vetores analíticos, isto é, iteradas $P(D)^j f$ da função f, sendo $P(D)$ um operador diferencial com coeficientes constantes. Esse resultado foi generalizado posteriormente para operadores com coeficientes não constantes por Kotake e Narasimhan [38] e então para a classe Gevrey por Newberger e Zielezny [43].

Na última década, esforços foram feitos para estudar este problema de regularidade para vetores ultradiferenciáveis definidos por funções de peso, conhecidos como iterados, quando os operadores possuem coeficientes constantes. Foi provado que a completude desses espaços é equivalente à hipoelipticidade de P em [34] e depois foi obtida uma caracterização em termos do decrescimento da transformada de Fourier ([33], [15], [14]).

Recentemente, Boiti e Jornet [13] deram uma prova simples do Teorema de Kotake-Narasimhan no espaço das funções ultradiferenciáveis no sentido de [18]. Estendemos este resultado para a classe das funções ultradiferenciáveis globais, sendo considerado somente o caso Roumieu.

Primeiramente introduziremos algumas definições e notações, considere Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^d$. Seja

$$P(x,D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

um operador diferencial de ordem m e coeficientes $a_\alpha \in C^\infty(\Omega)$, podemos escrever $P(x,D) = P$. Denotamos o símbolo principal de P por

$$P_m(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha.$$

Considere também

$$\nabla^j f(x) = \sum_{|\alpha|=j} D^\alpha f(x).$$

Seja $j \in \mathbb{N}$, considere P^j a j-ésima iterada do operador $P(x,D)$, isto é,

$$P^j = \underbrace{P \circ \ \dots \ \circ P}_{j},$$

se $j = 0$, então $P^0 f = f$.

Definição 4.2.1. Dada uma função peso ω, φ e φ^* como na Seção 1.2, para cada $A > 0$ e $j \in \mathbb{Z}_+$, considere a seminorma

$$\|f\|_{A,j} := \exp\left(-\frac{1}{A}\varphi^*\left(Ajm\right)\right)\left\|P^j f\right\|_{L^2(\Omega)}. \tag{4.15}$$

Definimos

$$\mathcal{E}^\omega_A(\Omega;P) := \left\{f \in C^\infty(\Omega) : \|f\|_A := \sup_{j\in\mathbb{N}} \|f\|_{A,j} < \infty\right\}. \tag{4.16}$$

O espaço das funções ultradiferenciáveis de tipo Roumieu com respeito às iteradas de P é

$$\mathcal{E}^\omega(\Omega;P) := \left\{f \in C^\infty(\Omega) : \text{ existe } A > 0, \|f\|_A < \infty\right\}. \tag{4.17}$$

O espaço é munido com a topologia dada por

$$\mathcal{E}^\omega(\Omega;P) := \operatorname{limind}_{A\to\infty} \mathcal{E}^\omega_A(\Omega;P). \tag{4.18}$$

Neste capítulo consideraremos apenas funções peso subaditivas, ou seja, aquelas que satisfazem a condição (α_0) como visto no Capítulo 1. Pode-se encontrar outros trabalhos como [13] e [44] que também utilizam funções satisfazendo tal condição.

Antes de enunciar o resultado principal, trabalharemos em algumas estimativas fundamentais para este trabalho.

Proposição 4.2.1. *Sejam $f \in W^{m,2}(\Omega)$ e $0 \le r \le m$, então existe $C > 0$ tal que*

$$\left\|\nabla^{m-r} f\right\|_{L^2} \le C\varepsilon^r \left(\|\nabla^m f\|_{L^2} + \varepsilon^{-m}\|f\|_{L^2}\right) \tag{4.19}$$

para todo $\varepsilon > 0$.

Demonstração. Veja [36, Lemma 5.3]. □

Definição 4.2.2. Um operador diferencial parcial $P(x, D) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) D^\alpha$ é elíptico em Ω se

$$P_m(x, \xi) \ne 0 \quad \forall (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^d \setminus \{0\}.$$

Diremos que P é uniformemente elíptico em Ω se existir uma constante $A \ge 1$ (independente de x) tal que

$$A^{-1}|\xi|^m \le P_m(x, \xi) \le A|\xi|^m, \quad x \in \Omega,\, \xi \in \mathbb{R}^d. \tag{4.20}$$

Exemplo 4.2.1. Os seguintes operadores são uniformemente elípticos

1. Laplaciano $\Delta = \sum_{j=1}^{d} \dfrac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ em qualquer aberto de $\mathbb{R}^d$. Em geral todo operador diferencial parcial elíptico com coeficientes constantes é uniformemente elíptico.
2. Operador de Tricomi $L = y\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ na faixa $\{(x, y) : \epsilon < y < 1\}$ sendo $1/\epsilon = A$ em (4.20). Observe que na faixa $\{(x, y) : 0 < y < 1\}$, o operador de Tricomi é apenas elíptico.

Observação 4.2.1. Por [23, Proposição 7.1], temos que se o operador P é elíptico e a dimensão do espaço é $d \ge 3$, ou $d = 2$ e os coeficientes a_α assumem valore reais, então m é par. Ou seja, doravante trabalharemos apenas com operadores de ordem par.

Proposição 4.2.2. *Sejam P um operador diferencial parcial uniformemente elíptico de ordem m, coeficientes em $\mathcal{E}^{\infty,\omega}(\Omega)$ e $f \in W^{m,2}(\Omega)$, então existe $C > 0$ tal que*

$$\|\nabla^m f\|_{L^2} \le C\left(\|Pf\|_{L^2} + \|f\|_{L^2}\right). \tag{4.21}$$

Demonstração. Podemos escrever $P = P^0 + P^1$, sendo

$$P^0 = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\partial^\alpha \text{ e } P^1 = \sum_{|\alpha|<m} a_\alpha(x)\partial^\alpha.$$

Para um $x_0 \in \Omega$ fixo, denotamos $P^0_{x_0} f(x) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x_0)\partial^\alpha f(x)$.

Se P é uniformemente elíptico, existe $A > 0$ tal que para $x_0 \in \Omega$

$$\left| \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x_0)\xi^\alpha \right| \geq A|\xi|^m.$$

Então, pelo Teorema de Plancherel

$$\begin{aligned}
\|\nabla^m f\|_{L^2} &= \left\| \sum_{|\alpha|=m} \partial^\alpha f \right\|_{L^2} = \sum_{|\alpha|=m} \left\| x^\alpha \widehat{f} \right\|_{L^2} \\
&\leq C_m \left\| |x|^m \widehat{f} \right\|_{L^2} \leq C_m A \left\| \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x_0) x^\alpha \widehat{f} \right\|_{L^2} \\
&\leq C \left\| \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x_0) D^\alpha f \right\|_{L^2} \\
&= C\|P^0_{x_0} f\|_{L^2} \leq C(\|P^0 f\|_{L^2} + \|P^0_{x_0} f - P^0 f\|_{L^2}). \qquad (4.22)
\end{aligned}$$

Como $a_\alpha \in \mathcal{E}^{\infty,\omega}(\Omega)$

$$\|\nabla^m f\|_{L^2} \leq C(\|P^0 f\|_{L^2} + \|f\|_{L^2}). \qquad (4.23)$$

Por outro lado, como $f \in W^{m,2}(\Omega)$

$$\begin{aligned}
\|P^1 f\|_{L^2} &= \left\| \sum_{|\alpha|<m} a_\alpha D^\alpha f \right\|_{L^2} \leq \sum_{|\alpha|<m} \max_\alpha \|a_\alpha\|_{L^\infty} \|D^\alpha f\|_{L^2} \\
&\leq C\|f\|_{L^2}. \qquad (4.24)
\end{aligned}$$

Portanto, por (4.23) e (4.24),

$$\begin{aligned}
\|\nabla^m f\|_{L^2} &\leq C\left(\|P^0 f + P^1 f - P^1 f\|_{L^2} + \|f\|_{L^2}\right) \\
&\leq C\left(\|Pf\|_{L^2} + \|P^1 f\|_{L^2} + \|f\|_{L^2}\right) \\
&\leq C\left(\|Pf\|_{L^2} + \|f\|_{L^2}\right)
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

Proposição 4.2.3. *Considere P um operador diferencial parcial uniformemente elíptico de ordem m e coeficientes em $\mathcal{E}^{\infty,\omega}(\Omega)$. Dada $u \in W^{m,2}(\Omega)$, existem constantes $A > 0$ e $C > 0$ tais que*

$$\left\|\nabla^{jm} u\right\|_{L^2} \leq C\left(\|\nabla^{(j-1)m}(Pu)\|_{L^2} + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(jmA)}}{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(imA)}} \|\nabla^{im} u\|_{L^2} \right). \qquad (4.25)$$

Demonstração. Por (4.21), Proposição 4.2.2

$$\left\|\nabla^{(j+1)m}u\right\|_{L^2} = \left\|\nabla^m(\nabla^{jm}u)\right\|_{L^2} \leq C(\left\|P(\nabla^{jm}u)\right\|_{L^2} + \left\|\nabla^{jm}u\right\|_{L^2}). \tag{4.26}$$

Pela fórmula de Leibniz,

$$\begin{aligned}
\nabla^{jm}Pu &= \sum_{|\beta|=jm} D^\beta \left[\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u(x)\right] \\
&= \sum_{|\alpha|\leq m}\sum_{|\beta|=jm}\sum_{\gamma\leq\beta}\binom{\beta}{\gamma} D^\gamma a_\alpha(x) D^{\alpha+\beta-\gamma}u(x) \\
&= \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) \sum_{|\beta|=jm} D^{\alpha+\beta}u(x) + \sum_{|\alpha|\leq m}\sum_{|\beta|=jm}\sum_{1\leq|\gamma|\leq pm}\binom{\beta}{\gamma} D^\gamma a_\alpha(x) D^{\alpha+\beta-\gamma}u(x) \\
&= P(\nabla^{jm}u) + \sum_{|\alpha|\leq m}\sum_{|\beta|=jm}\sum_{1\leq|\gamma|\leq jm}\binom{\beta}{\gamma} D^\gamma a_\alpha(x) D^{\alpha+\beta-\gamma}u(x). \qquad (4.27)
\end{aligned}$$

Utilizando (4.27) em (4.26), obtemos

$$\left\|\nabla^{(j+1)m}u\right\|_{L^2} \leq C\left[\left\|\nabla^{jm}Pu\right\|_{L^2} + \sum_{s=0}^{m}\sum_{r=1}^{jm}\binom{jm}{r}\left\|P^{[r]}\nabla^{jm-r+s}u\right\| + \left\|\nabla^{jm}u\right\|_{L^2}\right], \tag{4.28}$$

sendo $P^{[r]} := \sum_{|\alpha|=r}\|D_x^\alpha a_\alpha\|_{L^\infty}$.

Precisamos estimar $S := \displaystyle\sum_{s=0}^{m}\sum_{r=1}^{jm}\binom{jm}{r}\left\|P^{[r]}\nabla^{jm-r+s}u\right\|_{L^2}$. Como $a_\alpha \in \mathcal{E}^{\infty,\omega}(\Omega)$, existe $A > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
S &\leq C\sum_{r=1}^{jm}\binom{jm}{r} e^{\frac{1}{A}\varphi^*(Ar)} \sum_{s=0}^{m}\left\|\nabla^{jm-r+s}u\right\|_{L^2} \\
&\leq C\sum_{r=1}^{jm}\frac{(jm)!}{(jm-r)!}a_{r,k}\left(\left\|\nabla^{jm-r}u\right\|_{L^2} + \sum_{s=1}^{m}\left\|\nabla^{jm-r+s}u\right\|_{L^2}\right).
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis $r = (j-i)m + t$, temos

$$\begin{aligned}
S &\leq C\sum_{i=1}^{j}\sum_{t=1}^{m}\frac{(jm)!}{(im-t)!}a_{(j-i)m+t,A}\left\|\nabla^{(i+1)m-t}u\right\|_{L^2} + C\sum_{t=1}^{m}\frac{(jm)!}{(m-t)!}\frac{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(Ar)}}{(jm-m+t)!}\left\|\nabla^{m-t}u\right\|_{L^2} \\
&\leq C\sum_{t=1}^{m}\frac{(jm)!}{(jm-t)!}a_{t,A}\left\|\nabla^{(j+1)m-t}u\right\|_{L^2} + C\sum_{i=1}^{j-1}\sum_{t=1}^{m}\frac{(jm)!}{(im-t)!}a_{(j-i)m+t,A}\left\|\nabla^{(i+1)m-t}u\right\|_{L^2} \\
&\quad + C\sum_{t=1}^{m}(jm)!a_{jm,A}\left\|\nabla^{m-t}u\right\|_{L^2} \\
&:= S_1 + S_2 + S_3. \qquad (4.29)
\end{aligned}$$

Por (4.19), tomando $\varepsilon = (jm)^{-1}$

$$\begin{aligned}
S_1 &\leq C \sum_{t=1}^{m} \frac{(jm)!}{(jm-t)!} a_{m,A} \left\| \nabla^{m-t} (\nabla^{jm} u) \right\|_{L^2} \\
&\leq C \sum_{t=1}^{m} (jm)^t a_{m,A} \varepsilon^t (\left\| \nabla^{(j+1)m} u \right\|_{L^2} + \varepsilon^{-m} \left\| \nabla^{jm} u \right\|_{L^2}) \\
&\leq C m a_{m,A} (\left\| \nabla^{(j+1)m} u \right\|_{L^2} + (jm)^m \left\| \nabla^{jm} u \right\|_{L^2}) \\
&\leq C_m a_{m,A} (\left\| \nabla^{(j+1)m} u \right\|_{L^2} + C_m j^m \left\| \nabla^{jm} u \right\|_{L^2}) \\
&\leq C_m \left\| \nabla^{(j+1)m} u \right\|_{L^2} + C \frac{e^{\frac{1}{A}\varphi^*((j+1)mA)}}{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(jmA)}} \left\| \nabla^{jm} u \right\|_{L^2},
\end{aligned} \tag{4.30}$$

sendo que a última desigualdade se deve ao item *(c)* da Proposição 1.2.4:

$$j^m a_{m,A} \leq \frac{((j+1)m)!}{(jm)!} a_{m,A} \leq \frac{e^{\frac{1}{A}\varphi^*((j+1)mA)}}{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(jmA)}},$$

e utilizando o fato que $j^m (jm)! \leq ((j+1)m)!$.

Para estimar S_2, utilizamos (4.19), agora com $\varepsilon = 1$ e a propriedade *(c)* da Proposição 1.2.4

$$\begin{aligned}
S_2 &\leq C \sum_{i=1}^{j-1} \sum_{t=1}^{m} \frac{(jm)!}{(im)!} a_{(j-i)m,A} a_{m,A} \left\| \nabla^{(i+1)m-t} u \right\|_{L^2} \\
&\leq C \sum_{i=1}^{j-1} \frac{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(jmA)}}{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(imA)}} (\left\| \nabla^{(i+1)m} u \right\|_{L^2} + \left\| \nabla^{im} u \right\|_{L^2}) \\
&\leq C \sum_{i=1}^{j} \frac{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(jmA)}}{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(imA)}} \left\| \nabla^{im} u \right\|_{L^2}.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Mais uma vez por (4.19), com $\varepsilon = 1$

$$\begin{aligned}
S_3 &\leq C \sum_{t=1}^{m} (jm)! a_{jm,A} (\|\nabla^m u\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}) \\
&\leq C m \, e^{\frac{1}{A}\varphi^*(jmA)} (\|\nabla^m u\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}) \\
&\leq C \left(\frac{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(jmA)}}{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(mA)}} \|\nabla^m u\|_{L^2} + e^{\frac{1}{A}\varphi^*(jmA)} \|u\|_{L^2} \right).
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Substituindo (4.30), (4.31) e (4.32) em (4.29), obtemos a estimativa desejada para S e portanto o resultado segue. □

Todos os resultados anteriores são nada mais que uma construção para encontrarmos uma estimativa nos moldes que desejamos como na proposição seguinte.

Proposição 4.2.4. *Seja P um operador diferencial parcial uniformemente elíptico de ordem m e coeficientes em $\mathcal{E}^{\infty,\omega}(\Omega)$. Dada $u \in W^{\infty,2}(\Omega)$, existem constantes $A, C > 0$ tais que*

$$\|\nabla^{jm} u\|_{L^2} \leq C^j \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \frac{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(jmA)}}{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(imA)}} \left\|\left(P^i u\right)\right\|_{L^2}. \tag{4.33}$$

Demonstração. Vamos fazer a demonstração por indução em j. Para $j = 0$ segue trivialmente pois tem-se apenas $\|u\|_{L^2} = C^0 \|u\|_{L^2}$ e para $j = 1$ segue diretamente da Proposição 4.2.3.

Assuma (4.33) válida para $0, 1, ..., j-1$ e vamos provar para j.

Aplicando a Proposição 4.2.3, (4.25), para $1, 2, ..., j-1$, existem constantes positivas A e C tais que

$$\begin{aligned}
\|\nabla^m u\|_{L^2} &\leq C \left(\|Pu\|_{L^2} e^{\frac{1}{A}\varphi^*(mA)} \|\nabla^m u\|_{L^2} \right) \\
&\vdots \\
\|\nabla^{(j-1)m} u\|_{L^2} &\leq C \left(\|\nabla^{(j-2)m}(Pu)\|_{L^2} + \sum_{i=1}^{j-2} \frac{e^{\frac{1}{A}\varphi^*((j-1)mA)}}{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(imA)}} \|\nabla^{im} u\|_{L^2} \right).
\end{aligned}$$

Substituindo em (4.25),

$$\begin{aligned}
&\|\nabla^{jm} u\|_{L^2} \\
&\leq C\left(\|\nabla^{(j-1)m}(Pu)\|_{L^2} + \frac{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(jmA)}}{e^{\frac{1}{A}\varphi^*((j-1)mA)}} \|\nabla^{(j-1)m} u\|_{L^2} + \sum_{i=1}^{j-2} \frac{e^{\frac{1}{A}\varphi^*((j-2)mA)}}{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(imA)}} \|\nabla^{im} u\|_{L^2} \right) \\
&\leq C\left[\|\nabla^{(j-1)m}(Pu)\|_{L^2} + \frac{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(jmA)}}{e^{\frac{1}{A}\varphi^*((j-1)mA)}} C\left(\|\nabla^{(j-2)m} Pu\|_{L^2} + \frac{e^{\frac{1}{A}\varphi^*((j-1)mA)}}{e^{\frac{1}{A}\varphi^*((j-2)mA)}} \|\nabla^{(j-2)m} u\|_{L^2} \right.\right. \\
&\left.\left. + \sum_{i=1}^{j-3} \frac{e^{\frac{1}{A}\varphi^*((j-3)mA)}}{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(imA)}} \|\nabla^{im} u\|_{L^2} \right) \right] \\
&\vdots \\
&\leq \sum_{i=1}^{j-1} \frac{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(jmA)}}{e^{\frac{1}{A}\varphi^*((i+1)mA)}} C^{j-i} \|\nabla^{im}(Pu)\|_{L^2} + C^j e^{\frac{1}{A}\varphi^*(jmA)} \|u\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Portanto, utilizando a hipótese de indução e a propriedade *(d)* da Proposição 1.2.3

$$\begin{aligned}
\|\nabla^{jm} u\|_{L^2} &\leq \sum_{i=1}^{j-1} \frac{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(jmA)}}{e^{\frac{1}{A}\varphi^*((i+1)mA)}} C^{j-i} C^i \sum_{r=0}^{i} \binom{i}{r} \frac{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(imA)}}{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(rmA)}} \|(P^r u)\|_{L^2} + C^j e^{\frac{1}{A}\varphi^*(jmA)} \|u\|_{L^2} \\
&\leq C^j \sum_{r=0}^{j-1} \sum_{i=r}^{j-1} \binom{i}{r} \frac{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(jmA)}}{e^{\frac{1}{A}\varphi^*((r+1)mA)}} \left\|\left(P^{r+1} u\right)\right\|_{L^2} + C^j e^{\frac{1}{A}\varphi^*(jmA)} \|u\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Tem-se que $\displaystyle\sum_{i=r}^{j-1}\binom{i}{r}=\binom{j}{r+1}$, então fazendo $r'=r+1$

$$\begin{aligned}\|\nabla^{jm}u\|_{L^2} &\leq C^j\sum_{r=0}^{j-1}\binom{j}{r+1}\frac{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(jmA)}}{e^{\frac{1}{A}\varphi^*((r+1)mA)}}\left\|P^{r+1}u\right\|_{L^2}+C^je^{\frac{1}{A}\varphi^*(jmA)}\|u\|_{L^2}\\ &\leq C^j\sum_{r'=0}^{j}\binom{j}{r'}\frac{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(jmA)}}{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(r'mA)}}\left\|P^{r'}u\right\|_{L^2},\end{aligned}$$

completando a prova. □

A seguir enunciamos a versão do Teorema de Kotake-Narasimhan para as funções ultradiferenciáveis globais de tipo Roumieu. Resultado análogo foi obtido para a classe das funções ultradiferenciáveis no caso local em [13] porém a demonstração apresentada requer ajustes. Seguiremos o roteiro da demonstração do mesmo resultado em [13], simplificando e arrumando uma das estimativas principais a serem demonstradas (compare (4.34) com [13, desigualdade (3.3)]).

Teorema 4.2.1. *Seja ω uma função peso subaditiva, $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ um aberto e $P(x,D)$ um operador diferencial de ordem m com coeficientes em $\mathcal{E}^{\infty,\omega}(\Omega)$. Então*

(i) $\mathcal{E}^{2,\omega}(\Omega)\subset\mathcal{E}^{\omega}(\Omega;P)$.

(ii) Se $P(x,D)$ é uniformemente elíptico, então $\mathcal{E}^{2,\omega}(\Omega)=\mathcal{E}^{\omega}(\Omega;P)$.

Demonstração. (i) Seja $u\in\mathcal{E}^{2,\omega}(\Omega)$, vamos provar por indução em j que existem $A,B>0$ tais que para todo $\beta\in\mathbb{Z}_+^d$

$$\left\|D^\beta P^ju\right\|_{L^2}\leq B^{j+1}\,e^{\frac{1}{A}\varphi^*((\ell+jm)A)}. \tag{4.34}$$

Em particular, quando tomarmos $\beta=(0,0,...,0)$, então

$$\left\|P^ju\right\|_{L^2}\leq B^je^{\frac{1}{A}\varphi^*(Ajm)}\leq Ce^{\frac{1}{A'}\varphi^*(A'jm)},$$

e obtemos o resultado pretendido, sendo que a última desigualdade se dá por *(c)* da Proposição 1.2.3.

Para $j=0$, como $u\in\mathcal{E}^{2,\omega}(\Omega)$, pela definição do espaço, existem $A_1,B_1>0$ tais que

$$\left\|D^\beta u\right\|_{L^2}\leq B_1\,e^{\frac{1}{A_1}\varphi^*(A_1|\beta|)}.$$

Ainda faremos a escolha de A e B, onde consideraremos valores maiores do que A_1 e B_1 presentes na última inequação, que continuará válida pois a expressão à direita é crescente nesses parâmetros.

Assuma (4.34) válida para j e para todo $\beta \in \mathbb{Z}_+^d$ denotando $|\beta| = \ell$, vamos provar que é verdadeiro também para $j+1$. Pela fórmula de Leibniz

$$\left\|D^\beta P^{j+1}u\right\|_{L^2} = \left\|D^\beta\left[\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha D^\alpha(P^j u)\right]\right\|_{L^2} = \left\|\sum_{|\alpha|\le m}\sum_{|\gamma|\le|\beta|}\binom{\beta}{\gamma} D^\gamma a_\alpha D^{\alpha+\beta-\gamma}(P^j u)\right\|_{L^2}.$$

Como $a_\alpha \in \mathcal{E}^{\infty,\omega}$, existe $M > 0$ tal que, possivelmente aumentando A_1, vale a seguinte desigualdade

$$\|P^{[r]}\|_{L^\infty} \le \max_{|\alpha|\le m}\sum_{|\gamma|=r}\|D^\gamma a_\alpha\|_{L^\infty} \le M e^{\frac{1}{A_1}\varphi^*(A_1 r)}.$$

Temos

$$\begin{aligned}\left\|D^\beta P^{j+1}u\right\|_{L^2} &\le \sum_{\gamma\le\beta}\binom{|\beta|}{|\gamma|}\sum_{|\alpha|\le m}\left\|P^{[|\gamma|]}D^{\alpha+\beta-\gamma}P^j u\right\|_{L^2}\\ &\le \sum_{r=0}^{\ell}\sum_{|\gamma|=r}\binom{\ell}{r} M\, e^{\frac{1}{A_1}\varphi^*(A_1 r)}\sum_{|\alpha|\le m}\left\|D^{\alpha+\beta-\gamma}P^j u\right\|_{L^2}\\ &\le M\sum_{r=0}^{\ell}\sum_{|\gamma|=r}\frac{\ell!}{(\ell-r)!}a_{r,A_1}\sum_{|\alpha|=m}\left\|D^{\alpha+\beta-\gamma}P^j u\right\|_{L^2}\\ &\quad + M\sum_{r=0}^{\ell}\sum_{|\gamma|=r}\frac{\ell!}{r!(\ell-r)!}e^{\frac{1}{A_1}\varphi^*(A_1 r)}\sum_{|\alpha|\le m-1}\left\|D^{\alpha+\beta-\gamma}P^j u\right\|_{L^2}.\end{aligned}\tag{4.35}$$

Utilizando a hipótese de indução nas expressões acima e escrevendo $|\alpha| = s$ para $s = m$ na primeira soma à direita e $s \in \{0, \ldots, m-1\}$ na segunda soma à direita, podemos continuar estimando (4.35) por

$$\begin{aligned}\left\|D^\beta P^{j+1}u\right\|_{L^2} &\le M\sum_{r=0}^{\ell}2^{rd}\frac{\ell!}{r!(\ell-r)!}e^{\frac{1}{A_1}\varphi^*(A_1 r)}2^{md}B^{j+1}e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(m+\ell-r+jm))}\\ &\quad + M\sum_{r=0}^{\ell}2^{rd}\frac{\ell!}{r!(\ell-r)!}e^{\frac{1}{A_1}\varphi^*(A_1 r)}\sum_{s=0}^{m-1}2^{sd}B^{j+1}e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(s+\ell-r+jm))}\\ &=: \mathrm{I} + \mathrm{II}.\end{aligned}\tag{4.36}$$

No segundo termo à direita de (4.36), II, vamos separar as somas em $r \in \{0, \ldots, \ell\}$ e $s \in \{0, \ldots, m-1\}$ de acordo com o fato de que se $\sigma := s + \ell - r$ é maior ou igual a m, ou menor que m, os quais denotaremos por $\mathrm{II}_{\ge m}$ e $\mathrm{II}_{<m}$ respectivamente. Observe que quando consideramos $\sigma \ge m$ então para cada $r \in \{0, \ldots, \ell\}$ teremos, no máximo, m valores de $s \in \{0, \ldots, m-1\}$ para os quais $\sigma \ge m$ assim, podemos dominar a segunda

soma à direita de (4.36) para os quais $\sigma \geq m$ por

$$\mathrm{II}_{\geq m} \leq mM \sum_{r=0}^{\ell} 2^{rd} \frac{\ell!}{r!(\ell-r)!} e^{\frac{1}{A_1}\varphi^*(A_1 r)} 2^{md} B^{j+1} e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(m+\ell-r+jm))} \tag{4.37}$$

que é, essencialmente, igual ao primeiro termo à direita de (4.35). Ao considerarmos os termos da segunda soma à direita de (4.36) para os quais $0 \leq \sigma \leq m-1$ e usando argumento análogo ao anterior, vemos que podemos dominar estes termos por

$$\mathrm{II}_{<m} = mM \sum_{r=0}^{\ell} 2^{rd} \frac{\ell!}{r!(\ell-r)!} e^{\frac{1}{A_1}\varphi^*(A_1 r)} m 2^{md} B^{j+1} \sum_{\sigma=0}^{m-1} e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(\sigma+jm))} \tag{4.38}$$

Utilizando o Lema 1.2.1, item (b), para $p = d$ existe $A > A_1$ tal que

$$\frac{1}{A_1}\varphi^*(A_1 r) - \frac{1}{A}\varphi^*(Ar) \leq C_{A_1} - rd.$$

Somando e subtraindo $\frac{1}{A}\varphi^*(Ar)$, segue que

$$e^{\frac{1}{A_1}\varphi^*(A_1 r)} \leq e^{\frac{1}{A_1}\varphi^*(A_1 r) - \frac{1}{A}\varphi^*(Ar)} e^{\frac{1}{A}\varphi^*(Ar)} \leq C_1 e^{-rd} e^{\frac{1}{A}\varphi^*(Ar)}. \tag{4.39}$$

Este último fato, juntamente com as propriedades de $a_{r,A}$ presentes na Proposição 1.2.4 itens (a) e (b), nos permitem refinar ambas expressões em (4.36), (4.37) e (4.38), da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}{+}\mathrm{II}_{\geq m} &\leq (m+1)M2^{md}B^{j+1}C_1 \sum_{r=0}^{\ell} 2^{rd} e^{-rd} \frac{\ell!}{(\ell-r)!} a_{r,A} (\ell - r + (j+1)m)! a_{\ell-r+(j+1)m,A} \\
&\leq \Big((m+1)M2^{md}B^{j+1}C_1\Big) e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(\ell+(j+1)m))} \sum_{r=0}^{\ell} 2^{rd} e^{-rd} \frac{\ell!}{(\ell-r)!} \frac{(\ell-r+(j+1)m)!}{(\ell+(j+1)m))!} \\
&\leq \frac{(m+1)M2^{md}B^{(j+1)+1}C_1}{B} \; e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(\ell+(j+1)m))} \sum_{r=0}^{\ell} (\tfrac{2}{e})^{rd} \binom{\ell}{r} \binom{\ell+(j+1)m}{\ell-r+(j+1)m}^{-1} \\
&\leq \frac{(m+1)M2^{md}B^{(j+1)+1}C_1}{B} \; e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(\ell+(j+1)m))} \sum_{r=0}^{\ell} (\tfrac{2}{e})^{rd} \\
&= \frac{(m+1)M2^{md}B^{(j+1)+1}C_1C_2}{B} \; e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(\ell+(j+1)m))} \qquad (4.40)
\end{aligned}$$

e, analogamente, mais simples desta vez,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{II}_{<m} &\leq \frac{m^2 M 2^{md} B^{(j+1)+1} C_1}{B} \sum_{r=0}^{\ell} (\tfrac{2}{e})^{rd} \frac{\ell!}{(\ell-r)!} a_{r,A} \sum_{\sigma=0}^{m-1} (\sigma+jm)! a_{\sigma+jm,A} \\
&\leq \frac{m^3 M 2^{md} B^{(j+1)+1} C_1}{B} \; \ell! a_{\ell,A} \sum_{r=0}^{\ell} (\tfrac{2}{e})^{rd} ((j+1)m)! a_{(j+1)m,A} \\
&\leq \frac{m^3 M 2^{md} B^{(j+1)+1} C_1}{B} \; e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(\ell+(j+1)m))} \sum_{r=0}^{\ell} (\tfrac{2}{e})^{rd} \frac{\ell!((j+1)m)!}{(\ell+(j+1)m)!} \\
&\leq \frac{m^3 M 2^{md} B^{(j+1)+1} C_1 C_2}{B} \; e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(\ell+(j+1)m))}.
\end{aligned}
\tag{4.41}
$$

Escolhendo

$$B \geq \max\left\{2(m+1)MC_1C_2, 2m^3MC_1C_2, B_1\right\}$$

lembrando que $\mathrm{II} = \mathrm{II}_{<m} + \mathrm{II}_{\geq m}$, juntamente com (4.36), (4.40) e (4.41), vemos que (4.34) é válida para $j+1$. Concluindo a demonstração de (i).

Façamos agora a prova de (ii). Suponha $u \in \mathcal{E}^{\omega}(\Omega, P)$ e P uniformemente elíptico, pela Proposição 4.2.4,

$$
\begin{aligned}
\left\|\nabla^{jm} u\right\|_{L^2} &\leq C_0^j \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \frac{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(jmA)}}{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(imA)}} \left\|P^i u\right\|_{L^2} \\
&\leq C_0^j \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \frac{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(jmA)}}{e^{\frac{1}{A}\varphi^*(imA)}} C \, e^{\frac{1}{A}\varphi^*(imA)} \\
&\leq C C_0^j 2^j e^{\frac{1}{A}\varphi^*(jmA)},
\end{aligned}
$$

para todo $j \in \mathbb{Z}^+$.

Dado $r \in \mathbb{Z}^+$, podemos escrevê-lo da forma $r = jm+t$, sendo $1 \leq t \leq m-1$. Tomando $t' = m - t \geq 0$, utilizando (4.19) temos

$$
\begin{aligned}
\|\nabla^r u\|_{L^2} = \left\|\nabla^{jm+t} u\right\|_{L^2} &= \left\|\nabla^{m-t'}(\nabla^{jm} u)\right\|_{L^2} \\
&\leq C_1 \left(\left\|\nabla^{(j+1)m} u\right\|_{L^2} + \left\|\nabla^{jm} u\right\|_{L^2}\right) \\
&\leq C_2^j \big(e^{\frac{1}{A}\varphi^*((j+1)mA)} e^{\frac{1}{A}\varphi^*(jmA)}\big) \\
&\leq C_2^j e^{\frac{1}{2A'}\varphi^*((jm+t)2A')} \\
&\leq C e^{\frac{1}{A''}\varphi^*(rA'')},
\end{aligned}
$$

sendo que C não depende de r devido à Proposição 1.2.3 (c).

Portanto, se $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$ com $|\alpha| = r$, então

$$\|D^\alpha u\|_{L^2}^2 \leq \left\| \sum_{|\beta|=r} D^\alpha u \right\|_{L^2} = \|\nabla^r u\|_{L^2} \leq Ce^{\frac{1}{A''}\varphi^*(rA'')} =\leq Ce^{\frac{1}{A''}\varphi^*(A''|\alpha|)}$$

e $u \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\Omega)$, completando a prova do Teorema. □

Observe que em compactos, todo operador elíptico é uniformemente elíptico, bem como os espaços $\mathcal{E}^\omega(\Omega)$ (global) e $\mathcal{E}^\omega(\Omega)$ (local) coincidem, portanto, neste caso o Teorema 4.2.1 recupera [13, Theorem 1.4].

4.2.1 Caso Gevrey e coeficientes constantes

Os resultados desta seção foram obtidos em conjunto com os professores Andrew Raich e Gustavo Hoepfner em [30] e iremos enunciar sem demonstração para ilustrar a importância dos resultados envolvendo a transformada FBI, $\mathcal{F}_\lambda$ (2.4) desenvolvidos neste trabalho.

Como visto anteriormente, trabalhamos com vetores ultradiferenciáveis globais gerados por funções peso obtendo uma versão do Teorema de Kotake-Narasimhan sob a hipótese do operador ser uniformemente elíptico. Quando nos restringimos a vetores Gevrey globais para operadores hipoelípticos com coeficientes constantes é possível caracterizar os vetores em termos de transformação do FBI e obter versões global e microglobal do Teorema de Kotake-Narasimhan. Além disso, o teorema microglobal de Kotake-Narasimhan fornece uma versão mais geral do Teorema 4.1.5 demonstrado em [29].

Definição 4.2.3. Seja $s \geq 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $P(D)$ um operador diferencial parcial com coeficientes constantes de ordem m. Para cada $A > 0$ e $j \in \mathbb{N}_0$ considere $\|\cdot\|_{d,j}$ seminormas em $W^{2,mj}(\Omega)$ como segue:

$$\|f\|_{A,j} := (j^{jsm}A^j)^{-1}\big\|P^j f\big\|_{L^2(\Omega)}.$$

Para $j = 0$ tomamos a norma L^2 usual. Definimos

$$\mathcal{G}_A^{2,s}(\Omega; P) := \Big\{ f \in C^\infty(\Omega) : \|f\|_A := \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \|f\|_{A,j}^2 \Big)^{\frac{1}{2}} < \infty \Big\}. \tag{4.42}$$

O espaço dos L^2 *vetores Gevrey globais com respeito a* $P(D)$ *de ordem* s é

$$\mathcal{G}^{2,s}(\mathbb{R}^d; P) := \Big\{ f \in C^\infty(\Omega) : \text{existe } A > 0,\ \|f\|_A < \infty \Big\}. \tag{4.43}$$

munido com a topologia dada por

$$\mathcal{G}^{2,s}(\Omega; P) := \operatorname{limind}_{A\to\infty} \mathcal{G}^{2,s}_A(\Omega, P). \tag{4.44}$$

No caso Gevrey, tem-se o seguinte teorema, que é uma versão microglobal do Teorema de Paley-Wiener para os iterados.

Teorema 4.2.2. *Seja $s > 1$ e $P(D)$ um operador diferencial parcial hipoelíptico com coeficientes constantes de ordem m e $u \in \mathcal{G}^{2,s}(\mathbb{R}^d)'$. Então $u \in \mathcal{G}^{2,s}(\mathbb{R}^d; P)$ se, e somente se existe $\lambda \in (0, 1/s]$ e constantes positivas c_0, C, A tais que para todos $N \in \mathbb{N}_0$, $J \in \mathbb{N}_0^d$, e $r \geq 2$ tem-se*

$$\left\| D_x^J \mathcal{F}_\lambda(P^N u)(\cdot, \xi) \right\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} \leq C A^{N+|J|} N^{Nms} |J|^{|J|/\lambda} e^{-c_0|\xi|^\lambda}, \quad \textit{para todo } \xi \in \mathbb{R}^d. \tag{4.45}$$

Demonstração. A demonstração é feita em [30]; porém, faremos um esboço para mostrar que foi neste ponto que usamos fortemente a transformada FBI $\mathcal{F}_\lambda$. Especificamente, seja ρ o índice dado por Hörmander, isto é $\rho \leq 1$ é tal que

$$|P(\xi)| \geq C|\xi|^{\rho m}, \qquad \forall |\xi| \geq K. \tag{4.46}$$

Esta variação da FBI, nos permitiu chegar a uma estimativa da forma

$$\| D_x^J \mathcal{F}_\lambda(P^N u)(\cdot, \xi) \|_{L^r(\mathbb{R}^d)} \leq C_\delta A^{N+|J|} N^{Nms} |J|^{|J|/\lambda} e^{(\delta|\xi|)^\lambda - sm(c|\xi|)^{\rho/s}} \tag{4.47}$$

para todo $0 < \delta < 1$ e com c independente δ. Portanto a estimativa (4.45) segue diminuindo δ e escolhendo $\lambda := \rho/s$ para obter

$$\| D_x^J \mathcal{F}_\lambda(P^N u)(\cdot, \xi) \|_{L^r(\mathbb{R}^d)} \leq C_\delta A^{N+|J|} N^{Nms} |J|^{|J|/\lambda} e^{-c_0|\xi|^{\rho/s}}, \quad \forall\, |\xi| \geq K \tag{4.48}$$

como em (4.45). $\square$

Observe que quando se tem uma forma de caracterização do espaço, é possível definir o conjunto frente de onda e fazer sua análise microglobal.

Definição 4.2.4. Seja $s > 0$ e P um operador diferencial parcial de ordem m com coeficientes constantes e hipoelíptico. Para $u \in \mathcal{G}^{2,s}(\mathbb{R}^d)'$, definimos o conjunto frente de onda microglobal de u com respeito às iteradas de P de ordem s, $WF_{\mathcal{G}^{2,s}(\mathbb{R}^d)}(u; P)$ como o complemento dos pontos $\xi^0 \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ para os quais existe uma vizinhança cônica Γ_0 de ξ^0 tal que a seguinte propriedade ocorre: existe $\lambda \in (0, 1/s]$ e constantes C, c_0, A, tais que para todo $N \in \mathbb{Z}_+$ e cada $r \geq 2$

$$\left\| \mathcal{F}_\lambda(P^N u)(\cdot, \xi) \right\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} \leq C A^N N^{Nms} e^{-c_0|\xi|^\lambda}, \quad \xi \in \Gamma_0.$$

O próximo corolário relaciona os iterados de um operador hipoelíptico de coeficientes constantes (vetor Gevrey global) com as funções Gevrey globais. Na demonstração fica explícita a importância de termos inserido o coeficiente $\lambda < 1$ que introduzimos no Teorema 2.2.1.

Corolário 4.2.1. *Seja $s > 1$ e $P(D)$ um operador diferencial parcial hipoelíptico de ordem m e coeficientes constantes. Então existe $s' \geq s$ tal que $\mathcal{G}^{2,s}(\mathbb{R}^d; P) \subset \mathcal{G}^{2,s'}(\mathbb{R}^d)$.*

Demonstração. Segue imediatamente do Teorema 4.2.2, em que (4.45) é valida para $\lambda = \rho/s := 1/s'$, juntamente com o Teorema 4.1.1. $\square$

Unindo esses últimos resultados, obtemos uma versão mais completa do Teorema 4.1.5.

Teorema 4.2.3. *Se P é um operador diferencial parcial com coeficientes constantes hipoelíptico de ordem m, dada $u \in \mathcal{G}^{2,s}(\mathbb{R}^d)'$, temos*

$$WF_{\mathcal{G}^{2,s}(\mathbb{R}^d)}(u; P) \subset WF_{\mathcal{G}^{2,s}(\mathbb{R}^d)}(Pu) \subset WF_{\mathcal{G}^{2,s}(\mathbb{R}^d)}(u) \subset WF_{\mathcal{G}^{2,s}(\mathbb{R}^d)}(u; P) \cup \mathrm{Char_G P}. \quad (4.49)$$

O resultado seguinte é a versão global Gevrey do Teorema de Kotake-Narasimhan.

Corolário 4.2.2. *Seja $s > 1$ e $P(D)$ um operador diferencial parcial elíptico com coeficientes constantes e ordem m. Então $\mathcal{G}^{2,s}(\mathbb{R}^d, P) \subset \mathcal{G}^{2,s}(\mathbb{R}^d)$.*

Note que, apesar de obtermos o resultado para operadores elípticos também, o Teorema 4.2.1 ainda tem sua relevância pois neste caso considera-se apenas operadores com coeficientes constantes.

CAPÍTULO 5

Apêndice

5.1 Teoremas importantes

Começaremos falando sobre funções harmônicas. Uma função harmônica em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ é uma função $u \in C^2(\Omega)$ satisfazendo $\Delta u = 0$ (Δ é o operador Laplaciano $\Delta = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$. Veja mais em [24].

O seguinte teorema caracteriza funções harmônicas pela propriedade do valor médio. Além disso, parte de sua demonstração é uma ferramenta utilizada na prova do teorema que dá a existência de soluções aproximadas para campos vetoriais.

Teorema 5.1.1. *Seja u uma função contínua em um domínio $\Omega \in \mathbb{R}^d$. Então u é harmônica em Ω se, e somente se, u satisfaz a seguinte propriedade (conhecida como propriedade do valor médio): para todo $x_0 \in \Omega$ e todo $r > 0$ tal que $\overline{B(x_0, r)} = \{x \in \mathbb{R}^d : |x - x_0| \leq r\} \subset \Omega$,*

$$u(x_0) = \frac{1}{\omega^{d-1}} \int_{S^{d-1}} u(x_0 + r\sigma)\, d\sigma \tag{5.1}$$

sendo $\omega^{d-1} = \int_{S^{d-1}} d\sigma$, a medida da esfera S^{n-1}.

Demonstração. Suponha u harmônica, então $\Delta u = 0$ em Ω. Seja $x_0 \in \Omega$ e $r > 0$ tal que $\overline{B(x_0, r)} \subset \Omega$. Para $0 < s \leq r$, defina

$$f(s) = \frac{1}{\omega^{d-1}} \int_{S^{d-1}} u(x_0 + s\sigma)\, d\sigma.$$

Note que f é diferenciável e

$$f'(s) = \frac{1}{\omega^{d-1}} \int_{S^{d-1}} \sum_{j=1}^{d} u(x_0 + s\sigma)\sigma_j \, d\sigma,$$

o integrando é igual a $D_\sigma u(x_0+s\sigma)$, derivada de u na direção da normal externa do ponto $x_0 + s\sigma$. Então, fazendo uma mudança de variáveis,

$$f'(s) = \frac{1}{\omega^{n-1}} \int_{\partial B(x_0,s)} D_\sigma u(x) \frac{1}{s^{d-1}} d\sigma_s(x),$$

$d\sigma_s$ é a medida de Lebesgue em $\partial B(x_0, s)$. Aplicando o Teorema de Green, obtemos

$$f'(s) = \frac{1}{s^{d-1}\omega^{n-1}} \int_{B(x_0,s)} \Delta u(x) \, dx = 0.$$

Então $f(s)$ é constante para $0 < s \leq r$. Por um lado, temos que $f(s) \to u(x_0)$ quando $s \to 0$, por outro, $f(s) \to f(r)$ quando $s \to r$. Portanto, $f(r) = u(x_0)$ e segue (5.1).

Façamos agora a recíproca, supondo válida a propriedade do valor médio e façamos primeiramente o caso em que $u \in C^2(\Omega)$. Utilizando a mesma notação que anteriormente temos que $f(s) = u(x_0)$ é constante em $(0, r]$. Então $f'(s) = 0$ e

$$\frac{1}{|B(x_0, s)|} \int_{B(x_0,s)} \Delta u(x) \, dx = \frac{n}{s^d \omega^{n-1}} \int_{B(x_0,s)} \Delta u(x) \, dx = 0.$$

Como Δu é contínuo,

$$\frac{1}{|B(x_0, s)|} \int_{B(x_0,s)} \Delta u(x) \, dx \to \Delta u(x_0) \text{ quando } s \to 0$$

segue que $\Delta u(x_0) = 0$, x_0 é arbitrário, portanto u é harmônica.

Para o caso em que u é apenas contínua e satisfaz (5.1), como o problema é local, podemos considerar Ω limitado e então u limitada também. Seja $\phi \in C_C^\infty(B(0, 1))$ radial ($\phi(x) = \psi(|x|)$) com $\int \phi = 1$ e denote $\phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-1}\phi(\epsilon^{-1}x)$. Tome

$$u_\epsilon(x) = u * \phi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} u(y)\phi_\epsilon(x - y) \, dy.$$

Como ϕ é suave, u_ϵ é suave também. Além disso, u_ϵ satisfaz a propriedade do valor médio em $\Omega_\epsilon = \{x \in \Omega : \text{ dis}(x, \partial\Omega) > \epsilon\}$, de fato, se $x_0 \in \Omega_\epsilon$ e $\overline{B(x_0, r)} \subset \Omega_\epsilon$, então

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\omega^{d-1}} \int_{S^{n-1}} u_\epsilon(x_0 + r\sigma)\, d\sigma &= \frac{1}{\omega^{d-1}} \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^d} u(x_0 + r\sigma - y)\phi_\epsilon(y)\, dy\, d\sigma \\
&= \int_{B(0,\epsilon)} \frac{1}{\omega^{d-1}} \int_{S^{n-1}} u((x_0 - y) + r\sigma -)\, d\sigma\, \phi_\epsilon(y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} u(x_0 - y)\phi_\epsilon(y)\, dy \\
&= u_\epsilon(x)
\end{aligned}$$

utilizamos o fato de u satisfazer (5.1) em Ω e que $\overline{B(x_0 - y, r + \epsilon)} \subset \Omega$. Consequentemente, pelo primeiro caso, u_ϵ é harmônica em Ω_ϵ. Por outro lado, para $x \in \Omega_\epsilon$

$$\begin{aligned}
u_\epsilon(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} u(x - y)\phi_\epsilon(y)\, dy = \int_0^\infty r^{d-1} \int_{S^{d-1}} u(x - r\sigma)\phi_\epsilon(r\sigma)\, d\sigma\, dr \qquad (5.2)\\
&= \int_0^\infty r^{d-1} \int_{S^{d-1}} u(x - r\sigma)\phi_\epsilon(r\sigma)\, d\sigma\, dr \\
&= \frac{1}{\epsilon^d} \int_0^\infty r^{d-1}\psi(\epsilon^{-1}r) \int_{S^{d-1}} u(x - r\sigma)\, d\sigma\, dr \\
&= \frac{1}{\epsilon^d} \int_0^\infty r^{d-1}\psi(\epsilon^{-1}r)\omega^{d-1}u(x)\, d\sigma\, dr \\
&= u(x) \int_0^\infty \int_{S^{d-1}} r^{d-1}\phi_\epsilon(r\sigma)\, d\sigma\, dr = u(x) \int_{\mathbb{R}^d} \phi_\epsilon(y)\, dy \\
&= u(x).
\end{aligned}$$

Então, para cada $x \in \Omega$, existe uma vizinhança em que u coincide com u_ϵ a qual é harmônica. Segue portanto que u é harmônica. □

O mesmo resultado acima é válido para funções harmônicas em $\Omega \subset \mathbb{C}^d$. Note a a demonstração é válida pois as ferramentas utilizadas, como por exemplo o Teorema de Green são válidas em $\mathbb{C}^d$ (visto como variedade) também. Em paticular, tem-se que se u é harmônica em C^d, então

$$u_\epsilon(w) = \int_{\mathbb{C}^d} u(w - z)\phi_\epsilon(z)\, dV(z) = u(w), \qquad (5.3)$$

sendo $dV(z) = \left(\frac{1}{2i}\right)^d d\bar{z} \wedge dz = \left(\frac{i}{2}\right)^d dz \wedge d\bar{z}$.

No presente trabalho, utilizamos diversas vezes o teorema de imersão de Sobolev para demonstrar a suavidade de funções. É pertinente apresentar o enunciado, que tem diversas versões como se pode ver em [1].

Teorema 5.1.2. *[Teorema de Imersão de Sobolev] Sejam Ω um domínio em $\mathbb{R}^d$, $j \geq 0$, $m \geq 1$ inteiros e $1 \leq p < \infty$. Se Ω satisfaz a condição do cone e $mp > d$ (ou $m = d$ e*

$p = 1$), então

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega).$$

Demonstração. Veja em [1] $\square$

Sendo $C_B^j(\Omega)$ o espaço das funções limitadas, com derivadas de ordem até j contínuas em Ω.

Domínios suaves satisfazem a condição do cone, logo o Teorema 5.1.2 também é valido em tais domínios.

5.2 Estimativas $\mathcal{E}^{q,\omega}$

Nesta seção seguem algumas estimativas necessárias para a demonstração de resultados como os Teoremas 2.2.2 e 2.2.1, tais resultados seguem de forma análoga ao feito em [28], com as adequações necessárias trocando o uso de sequência por função peso nas estimativas finais.

Proposição 5.2.1. *Seja $s > 0$. Existem constantes $B, C > 0$ tais que para todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$\left| \frac{\partial^a}{\partial y_j^a} e^{-s|y|^2} \right| \leq CB^a e^{-\frac{s}{2}y^2} s^{\frac{a}{2}} a^{\frac{a}{2}}.$$

Demonstração. Pela a fórmula de Faà di Bruno, (veja [20, Corolário 2.11]) , temos

$$\frac{\partial^a}{\partial y_1^a} e^{-s|y|^2} = e^{-s|y|^2} \sum_{r=1}^{a} \sum_{\mathfrak{p}(a,r)} a! \prod_{p=1}^{a} \frac{\left(\partial_{y_1}^p \{-s|y|^2\}\right)^{k_p}}{k_p![p!]^{k_p}} \tag{5.4}$$

sendo

$$\mathfrak{p}(a,r) = \left\{ (k_1, \ldots, k_q) : k_j \geq 0, \ \sum_{p=1}^{a} k_p = r, \ \sum_{p=1}^{a} pk_p = a \right\}.$$

Como em (5.4) os termos com $p \geq 3$ não têm contribuição, podemos fazer uma identificação do conjunto $\mathfrak{p}(a,r)$ com

$$\mathfrak{p}_2(a,r) = \left\{ (k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2 : \ k_1 + k_2 = r, \ k_1 + 2k_2 = a \right\},$$

desta forma podemos simplificar as somas que aparecem em 5.4.

Como $\left(\frac{k_1}{2}\right)^{\frac{k_1}{2}} k_2^{k_2} \leq C\left(\frac{k_1}{2}+k_2\right)^{\frac{k_1}{2}+k_2} \leq C2^{-\frac{a}{2}} a!^{\frac{1}{2}}$

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial^a}{\partial y_1^a} e^{-s|y|^2}\right| &\leq e^{-s|y|^2} \sum_{r=1}^{a} \sum_{\mathfrak{p}_2(a,r)} a!\Big(\prod_{p=1}^{2} \frac{1}{k_p!\, p!^{k_p}}\Big)(2s|y|)^{k_1}(2s)^{k_2} \\
&\leq e^{-s|y|^2} \sum_{r=1}^{a} (k_1+2k_2)! \sum_{\mathfrak{p}_2(a,r)} \Big(\prod_{p=1}^{2} \frac{1}{k_p!\, p!^{k_p}}\Big)(2s|y|^2)^{\frac{k_1}{2}}(2s)^{\frac{k_1}{2}}(2s)^{k_2} \\
&\leq e^{-\frac{s}{2}|y|^2} \sum_{r=1}^{a} \sum_{\mathfrak{p}_2(a,r)} \Big(\prod_{p=1}^{2} \frac{(r+k_2)!}{k_p!\, p!^{k_p}}\Big)\left(e^{-\frac{s}{k_1}|y|^2} 2s|y|^2\right)^{\frac{k_1}{2}}(2s)^{\frac{a}{2}} \\
&\leq e^{-\frac{s}{2}|y|^2} \sum_{r=1}^{a} \sum_{\mathfrak{p}_2(a,r)} \frac{2^a r! k_2^{k_2}}{k_1!\, k_2! 2^{k_2}} \left(\frac{k_1}{2}\right)^{\frac{k_1}{2}} 2^{k_1}(2s)^{\frac{a}{2}} \\
&\leq C(s)^{\frac{a}{2}}\, e^{-\frac{s}{2}|y|^2}\, 2^{a-\frac{a}{2}-k_2+k_1+\frac{a}{2}} a!^{\frac{1}{2}} \sum_{r=1}^{a} r! \sum_{\mathfrak{p}(a,r)} \prod_{p=1}^{a} \frac{1}{k_p!} \\
&\leq C2^{\frac{3}{2}a}\, a!^{\frac{1}{2}}(s)^{\frac{a}{2}}\, e^{-\frac{s}{2}|y|^2} \sum_{r=1}^{a} \binom{a-1}{r-1} \\
&\leq C2^{\frac{5}{2}a}\, a!^{\frac{1}{2}}(s)^{\frac{a}{2}}\, e^{-\frac{s}{2}|y|^2}. \qquad (5.5)
\end{aligned}
$$

sendo que na penúltima equação usamos [20, p.515]

$$
r! \sum_{\mathfrak{p}(a,r)} \prod_{j=1}^{a} \frac{1}{k_j!} = \binom{a-1}{r-1}.
$$

□

Lema 5.2.1. *Para cada $A > 0$, existem constantes positivas c_1, c_2 e C tais que para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$,*

$$
\left|\partial_y^\alpha \{e^{-\epsilon^2(\eta+i\langle\eta\rangle^\lambda y)^2}\}\right| \leq c_A C^{|\alpha|} e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A|\alpha|)} e^{-\frac{1}{4}\epsilon^2\eta^2},
$$

para $|y| < c_1$, $|\eta| \geq c_2$ e $0 < \lambda \leq 1$.

Demonstração. Note que

$$
-\epsilon^2(\eta+i\langle\eta\rangle^\lambda y)^2 = -\epsilon^2(\eta^2 - \langle\eta\rangle^{2\lambda} y^2 + 2i\langle\eta\rangle^\lambda \eta \cdot y),
$$

então, para $|y| \leq 1/2$ e $|\eta| \geq 1$

$$
\mathrm{Re}[-\epsilon^2(\eta+i\langle\eta\rangle^\lambda y)^2] = -\epsilon^2(\eta^2 - \langle\eta\rangle^{2\lambda} y^2) \leq -\frac{1}{2}\epsilon^2\eta^2.
$$

Ainda, se α é um multi-índice,

$$\partial_y^\alpha\{-\epsilon^2(\eta+i\langle\eta\rangle^\lambda y)^2\} = \begin{cases} 0, & \text{se } |\alpha|>3 \\ -\epsilon^2(2i\langle\eta\rangle^\lambda\eta_j - 2\langle\eta\rangle^{2\lambda}y_j), & \text{se } \alpha=e_j \\ -\epsilon^2 2\langle\eta\rangle^{2\lambda}, & \text{se } \alpha=2e_j \\ 0, & \text{se } \alpha=e_j+e_\ell,\ j\neq\ell \end{cases}.$$

Então em todos os casos, como consideramos $\lambda\leq 1$,

$$|\partial_y^\alpha\{-\epsilon^2(\eta+i\langle\eta\rangle^\lambda y)^2\}| \leq 4\epsilon^2\langle\eta\rangle^2,\ |y|<1.$$

Utilizando [20, Corolário 2.10] (consequência da Fórmula de Faà di Bruno), obtemos

$$\begin{aligned} |\partial_y^\alpha\{e^{-\epsilon^2(\eta+i\langle\eta\rangle^\lambda y)^2}\}| &= \left|\sum_{r=1}^{|\alpha|} e^{-\epsilon^2(\eta+i\langle\eta\rangle^\lambda y)^2}\sum_{\mathfrak{p}(\alpha,r)}\alpha!\prod_{j=1}^{|\alpha|}\frac{|\partial_y^{\ell_j}\{-\epsilon^2(\eta+i\langle\eta\rangle^\lambda y)^2\}|^{k_j}}{k_j!(\ell_j!)^{k_j}}\right| \\ &\leq \sum_{r=1}^{|\alpha|} e^{Re\{-\epsilon^2(\eta+i\langle\eta\rangle^\lambda y)^2\}}\sum_{\mathfrak{p}(\alpha,r)}|\alpha|!\prod_{j=1}^{|\alpha|}\frac{4\epsilon^2\langle\eta\rangle^2}{k_j!(\ell_j!)^{k_j}}, \end{aligned}$$

sendo $\sum_{j=1}^{|\alpha|}k_j=r$ e $\sum_{j=1}^{|\alpha|}k_j\ell_j=\alpha$. Como $(a+b)!\leq 2^{a+b}a!b!$, temos

$$\prod_{j=1}^{|\alpha|}(\ell_j!)^{k_j} \geq \prod_{j=1}^{|\alpha|}(2^{-|\ell_j|}|\ell_j|!)^{k_j} \geq 4^{-|\alpha|}|\alpha|!.$$

Com isso, e com as propriedades de $\mathfrak{p}(\alpha,r)$, veja [20, p.515]

$$\begin{aligned} |\partial_y^\alpha\{e^{-\epsilon^2(\eta+i\langle\eta\rangle^\lambda y)^2}\}| &= e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2\eta^2}\sum_{r=1}^{|\alpha|}\sum_{\mathfrak{p}(\alpha,r)}|\alpha|!\frac{4^{|\alpha|+r}(\epsilon^2\langle\eta\rangle^2)^r}{|\alpha|!}\prod_{j=1}^{|\alpha|}\frac{1}{k_j!} \\ &\leq C^{|\alpha|}(\epsilon^2\langle\eta\rangle^2)^{|\alpha|}e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2\eta^2}\sum_{r=1}^{|\alpha|}\frac{r!}{r!}\sum_{\mathfrak{p}(\alpha,r)}\prod_{j=1}^{|\alpha|}\frac{1}{k_j!} \\ &\leq C^{|\alpha|}(\epsilon^2\langle\eta\rangle^2)^{|\alpha|}e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2\eta^2} \\ &\leq C^{|\alpha|}\left(\frac{|\alpha|}{\epsilon}\right)^{|\alpha|}e^{-\frac{1}{4}\epsilon^2\eta^2} \\ &\leq C^{|\alpha|}e^{A\varphi^*\left(\frac{|\alpha|}{A}\right)+C_A}e^{-\frac{1}{4}\epsilon^2\eta^2}, \end{aligned}$$

sendo a última desigualdade obtida pelo Lema 1.2.2. □

5.3 Transformada de Fourier em $\mathcal{E}^{q,\omega}$

Comentamos ao londo do trabalho que a transformada de Fourier não é uma ferramenta adequada para se trabalhar nos espaços globais como os que apresentamos aqui. A seguir mostramos alguns resultados com relação à transformada de Fourier, em quais casos ela serve para caracterizar a classe, e os casos em que não nos dá nenhuma comparação.

Lema 5.3.1. *Seja* $f:\mathbb{R}^d \to [0,\infty)$. *São equivalentes:*
(i) *Exitem constantes* $C, \epsilon > 0$ *tais que*

$$f(\xi) \leq Ce^{-\epsilon\omega(\xi)}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

(ii) *Existem constantes* $C, A > 0$ *satisfazendo*

$$|\xi|^N f(\xi) \leq Ce^{\frac{1}{A}\varphi^*(AN)}, \quad N = 1, 2, ..., \ \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Demonstração. $(ii) \Rightarrow (i)$, lembrando que $\varphi^{**} = \varphi$,

$$\begin{aligned} f(x) &\leq C \inf_{N\in\mathbb{Z}^+} |\xi|^N e^{\frac{1}{A}\varphi^*(AN)} \leq C \inf_{N\in\mathbb{Z}^+} e^{-\frac{1}{A}(NA\log|\xi| - \varphi^*(AN))} \\ &\leq Ce^{-\frac{1}{A}\sup_{y\geq 0}(y\log|\xi| - \varphi^*(y))} = Ce^{-\frac{1}{A}\varphi^{**}(\log|\xi|)} = e^{-\frac{1}{A}\omega(\xi)}. \end{aligned}$$

$(i) \Rightarrow (ii)$, da mesma forma que o feito acima, note que

$$\frac{1}{A}\omega(|\xi|) = \frac{1}{A}\varphi^{**}(|\xi|) = \frac{1}{A}\sup_{y\geq 0}(y\log|\xi| - \varphi^*(y)) \geq \sup_{N\in\mathbb{Z}^+}\big(N\log|\xi| - \frac{1}{A}\varphi^*(NA)\big).$$

Tomando A tal que $\frac{1}{A} \leq \epsilon$, segue que

$$|\xi|^N f(\xi) \leq Ce^{\frac{1}{A}\varphi^*(AN)}, \quad N = 1, 2, ...$$

$\square$

Teorema 5.3.1. *Seja* $f:\mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$.
(1) Suponha que existam constantes $C, A > 0$ *tais que*

$$||t|^\ell f(t)| \leq Ce^{\frac{1}{A}\varphi^*(A\ell)}$$

para todo $\ell \in \mathbb{N}$, *então* $\hat{f} \in \mathcal{E}^{\infty,\omega}(\mathbb{R}^d)$.
(2) Suponha $\hat{f} \in \mathcal{E}^{1,\omega}(\mathbb{R}^d)$. *Então existe* $C > 0$ *tal que*

$$||t|^\ell f(t)| \leq Ce^{\frac{1}{A}\varphi^*(A\ell)},$$

para todo $\ell \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Para a prova de (1), note que

$$\begin{aligned}|D_\xi^\alpha \hat{f}(\xi)| &= \left| D_\xi^\alpha \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\xi} f(x)\, dx \right| \le \int_{\mathbb{R}^d} |x|^{|\alpha|} |f(x)|\, dx \\ &= \int_{B(0,1)} |x|^{|\alpha|}|f(x)|\, dx + \int_{B(0,1)^C} |x|^{|\alpha|}|f(x)|\, dx.\end{aligned}$$

Temos pela hipótese

$$\int_{B(0,1)} |x|^{|\alpha|}|f(x)|\, dx \le C|B(0,1)| e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A|\alpha|)}$$

e

$$\begin{aligned}\int_{B(0,1)^C} |x|^{|\alpha|}|f(x)|\, dx &= \int_{B(0,1)^C} |x|^{-d-1} ||x|^{|\alpha|+d+1} f(x)|\, dx \\ &\le Ce^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(|\alpha|+d+1))} \int_1^\infty \lambda^{-d-1+d-1} d\lambda \\ &\le Ce^{\frac{1}{A}\varphi^*(A(|\alpha|+d+1))} \le Ce^{\frac{1}{2A}\varphi^*(2A|\alpha|)\frac{1}{2A}\varphi^*(2A(d+1))} \\ &\le Ce^{\frac{1}{A'}\varphi^*(A'|\alpha|)},\end{aligned}$$

sendo $A' = 2A$. Logo

$$\|D^\alpha \hat{f}\|_{L^\infty} \le Ce^{\frac{1}{A'}\varphi^*(A'|\alpha|)}.$$

A prova de (2) também é simples, pois

$$\begin{aligned}|x^\alpha f(x)| = |x^\alpha \mathcal{F}^{-1}\hat{f}(x)| = |\mathcal{F}^{-1}(D^\alpha \hat{f})(x)| &= \left|(2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi} D^\alpha \hat{f}(\xi)\, d\xi\right| \\ \le C\|D^\alpha \hat{f}\|_{L^1} \le Ce^{\frac{1}{A'}\varphi^*(A'|\alpha|)}.\end{aligned}$$

□

A seguir, temos um claro exemplo do comportamento ruim da transformada de Fourier. Temos o caso de funções que pertencem a $\mathcal{E}^{\infty,\omega}(\Omega)$ cuja transformada de Fourier sequer define uma função (e tão pouco caracterizam o decrescimento da função).

Proposição 5.3.1. *Denote por* $Exp_\omega(\Omega)$ *o conjunto das funções* f *mensuráveis em* Ω *para as quais existem constantes* $C, \epsilon > 0$ *tais que* $|f(x)| \le Ce^{-\epsilon\omega(x)}$ *q.t.p., tem-se para qualquer função peso* ω
(1) $\mathcal{F}(\mathcal{E}^{\infty,\omega}(\Omega)) \nsubseteq Exp_\omega(\Omega)$
(2) $\mathcal{F}(Exp_\omega(\Omega)) \nsubseteq \mathcal{E}^{1,\omega}(\Omega)$.

Demonstração. Para a prova de (1) basta tomar $f(x) = 1$, então claramente está em $\mathcal{E}^{\infty,\omega}(\Omega)$, mas $\hat{f} = (2\pi)^d\delta_0$ sequer é função.

Considere $f(x) = \begin{cases} e^{-\omega(x)}, & \text{se } |x| \geq 1 \\ 0, & \text{se } |x| < 1 \end{cases}$, se tivéssemos $\hat{f} \in \mathcal{E}^{1,\omega}(\Omega)$, em particular $\hat{f} \in L^1(\Omega)$ e então $\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = f$ deveria ser contínua, o que não ocorre. Obtemos portanto (2). $\square$

Proposição 5.3.2. *Seja $A > 0$ e tome $1 \leq p, q \leq \infty$ expoentes conjugados.*
(i) Se $1 \leq q \leq 2$ e $g \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\mathbb{R}^d)$, então para todo multi-índice α, $x^\alpha g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ e satisfaz

$$\|x^\alpha g\|_{L^p} \leq C e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A|\alpha|)}. \tag{5.6}$$

(ii) Se $2 \leq q \leq \infty$ e $x^\alpha \hat{g} \in L^p(\mathbb{R}^d)$ e satisfaz (5.6) para todo $\alpha \in \mathbb{Z}^d_+$, então $g \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\mathbb{R}^d)$.

Demonstração. Seja $\hat{g} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. (i) Seja $g \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\mathbb{R}^d)$, então $\hat{g} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, além disso, a suavidade de g, dá o decaimento de $\hat{g}$. Em particular, se $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, temos o mesmo para $x^\alpha \psi$. Veja

$$\begin{aligned} |\langle \hat{g}, x^\alpha \psi \rangle| &= |\langle g, D^\alpha \hat{\psi} \rangle| = |\langle D^\alpha g, \hat{\psi} \rangle| \\ &\leq \|D^\alpha g\|_{L^q} \|\hat{\psi}\|_{L^p} \leq C \|\hat{\psi}\|_{L^p} e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A|\alpha|)}. \end{aligned}$$

Então, pela desigualdade de Hausdorff-Young, para $1 \leq q \leq 2$,

$$|\langle x^\alpha \hat{g}, \psi \rangle| \leq C \|\psi\|_{L^q} e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A|\alpha|)}.$$

Pelo fato de $(L^p(\mathbb{R}^d))' \cong L^q(\mathbb{R}^d)$ e por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ser denso em $L^p(\mathbb{R}^d)$, segue que $x^\alpha \hat{g} \in L^p(\mathbb{R}^d)$ e

$$\|x^\alpha \hat{g}\|_{L^q} \leq C e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A|\alpha|)}.$$

(ii) Seja $x^\alpha \hat{g} \in L^p(\mathbb{R}^d)$ satisfazendo (5.6) e $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, então

$$\begin{aligned} |\langle D^\alpha g, \psi \rangle| &= |\langle \widehat{D^\alpha g}, \check{\psi} \rangle| = |\langle D^\alpha g, \check{\psi} \rangle| \\ &\leq \|x^\alpha \widehat{g}\|_{L^p} \|\check{\psi}\|_{L^q} \leq C \|\hat{\psi}\|_{L^q} e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A|\alpha|)}. \end{aligned}$$

Daí, se $2 \leq q \leq \infty$, então $1 \leq p \leq 2$. Assim, mais uma vez pela desigualdade de Housdorff-Young,

$$|\langle D^\alpha g, \psi \rangle| \leq C \|\hat{\psi}\|_{L^p} e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A|\alpha|)},$$

portanto, como feito no item anterior,

$$\|D^\alpha \hat{g}\|_{L^q} \leq C e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A|\alpha|)}$$

e $g \in \mathcal{E}^{q,\omega}(\mathbb{R}^d)$. $\square$

Segue imediatamente do resultado acima o seguinte.

Corolário 5.3.1. *Uma distribuição temperada g é um elemento de $\mathcal{E}^{2,\omega}_A(\mathbb{R}^d)$ se e somente se,*

$$\{\|x^\alpha \hat{g}\|_{L^q} e^{\frac{1}{A}\varphi^*(A|\alpha|)}\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^d_+} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d_+).$$

Concluímos portanto que temos a caracterização da classe das ultradiferenciáveis globais via transformada de Fourier somente quando $q = 2$.

No presente trabalho, focamos os resultados com o uso da transformada FBI como visto na Seção 2.2. Vale ressaltar que no caso local ainda não havia sido inserido o uso dessa transformada em espaços gerados a partir de funções peso, sendo necessário a utilização da transformada de Fourier de forma trabalhosa via sequências como pode-se ver em [5] por exemplo. Tal ferramenta pode ser interessante para as classes locais também, no caso dos espaços Denjoy-Carleman local, já existem resultados de caracterização do espaço via transformada FBI [27].

Referências Bibliográficas

[1] Adams, R. A. e Fournier, J. J., *Sobolev spaces* (Vol. 140). Elsevier (2003).

[2] Adwan, Z., Hoepfner, G. e Raich, A., *Global L^q Gevrey functions and their applications*. The Journal of Geometric Analysis, 27(3) (2017), 1874-1913.

[3] Adwan, Z., e Hoepfner, G. *Approximate solutions and micro-regularity in the Denjoy-Carleman classes*. Journal of Differential Equations, 249(9), (2010), 2269-2286.

[4] Adwan, Z. e Hoepfner, G., *Denjoy-Carlman classes: boundary values, approximate solutions and applications*. The Journal of Geometric Analysis, 25(3) (2015), 1720-1743.

[5] Albanese, A. A., Jornet, D. e Oliaro, A., *Quasianalytic wave front sets for solutions of linear partial differential operators*. Integral Equations and Operator Theory, (2010), 66(2), 153-181.

[6] Baouendi, M. S., Chang, C. H. e Treves, F., *Microlocal hypo-analyticity and extension of CR functions*. Journal of Differential Geometry, 18(3) (1983), 331-391.

[7] Barostichi, R. F. e Petronilho, G., *Gevrey micro-regularity for solutions to first order nonlinear PDE*. Journal of Differential Equations, (2009), 247(6), 1899-1914.

[8] Barostichi, R. F. e Petronilho, G., *Existence of Gevrey approximate solutions for certain systems of linear vector fields applied to involutive systems of first-order nonlinear pdes*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 382(1) (2011), 248-260.

[9] Berhanu, S., Cordaro, P. D. e Hounie, J., *An introduction to involutive structures* (Vol. 6). Cambridge University Press (2008).

[10] Beurling, A., *Quasianalytic and general distributions*. Lectures 4 and 5. AMS Summer Institute, Stanford. (1961)

[11] Boggess, A. e Raich, A., *Heat kernels, smoothness estimates and exponential decay.* J. Fourier Anal. Appl. 19, 180-224 (2013)

[12] Boiti, C. e Jornet, D., *A characterization of the wave front set defined by the iterates of an operator with constant coefficients*. Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM, (2017) 111(3), 891-919.

[13] Boiti, C. e Jornet, D., *A simple proof of Kotake-Narasimhan theorem in some classes of ultradifferentiable functions*. Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications, 8(2), (2017) 297-317.

[14] Boiti, C. e Jornet, D., *The problem of iterates in some classes of ultradifferentiable functions*. In Pseudo-differential operators and generalized functions volume 245 of Oper.Theory Adv. Appl., pages 21-33. Birkhäauser/Springer, Cham, (2015).

[15] Boiti, C., Jornet, D. e Juan-Huguet, J., *Wave front sets with respect to the iterates of an operator with constant coefficients*. Abstr. Appl. Anal., (2014) pages Art. ID 438716, 17.

[16] Bonet, J., Braun, R., Meise, R. e Taylor, B., *Whitney's extension theorem for non-quasianalytic classes of ultradifferentiable functions*. Studia Mathematica, (1991), 99, 155-184.

[17] Bonet, J., Meise, R. e Melikhov, S. N., *A comparison of two different ways to define classes of ultradifferentiable functions*. Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin, 14(3), (2007), 425-444.

[18] Braun, R. W., Meise, R. e Taylor,B. A., *Ultradifferentiable functions and Fourier analysis*. Res. Math. 17 (1990), 207-237.

[19] Christ, M., *Intermediate optimal Gevrey exponents occur*. Communications in Partial Differential Equations, 22(3-4) (1997), 117-204.

[20] Constantine, C. M. e Savits, T. H., *A multivariate Faà di Bruno Formula with applications*. Trans. Amer. Math. Soc. 348 (1996), 503-520.

[21] Dyn'kin, E. M., *Pseudoanalytic extension of smooth functions. The uniform scale.* Transl., Ser. 2, Am. Math. Soc. 115 (1980) 33-58.

[22] Fernández, C., Galbis, A. e Jornet, D., *Pseudodifferential operators on non-quasianalytic classes of Beurling type*. Studia Mathematica, 167 (2) (2005) 99–131.

[23] Folland, G. B., *Introduction to partial differential equations*. Princeton university press (1995).

[24] García-Cuerva, J. e De Francia, J. R., *Weighted norm inequalities and related topics* (Vol. 116). Elsevier (2011).

[25] Gevrey, M., *Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles*. Premier mémoire. In Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure (Vol. 35, p. 129-190). Elsevier (1918).

[26] Heinrich, T. e Meise, R., *A support theorem for quasianalytic functionals*. Mathematische Nachrichten. 280(4) (2007), 364-387.

[27] Hoepfner, G. e Medrado, R., *The FBI transforms and their use in microlocal analysis*. Journal of Functional Analysis, (2018), 275(5), 1208-1258.

[28] Hoepfner, G. e Raich, A., *Global L^q Gevrey functions, Paley-Wiener theorems and the FBI transfom* Indiana Univ. Math. J. (2018)

[29] Hoepfner, G. e Raich, A., *Microglobal regularity and the global wavefront set*. Mathematische Zeitschrift, (2019), 291(3-4), 971-998.

[30] Hoepfner, G., Raich, A. e Rampazo P. *Global Gevrey vectors*. Submitted.

[31] Hörmander L., *Uniqueness theorems and wave front sets for solutions of linear partial differential equations with analytic coeffcients*. Comm. Pure Appl. Math 24 (1971), 671-704.

[32] Hounie, J. e da Silva, E. R., *Existence of trace for solutions of locally integrable systems of vector fields*. In Geometric analysis of several complex variables and related topics, volume 550 of Contemp. Math., pages 57-73. Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2011).

[33] Juan-Huguet, J., *A Paley-Wiener type theorem for generalized non-quasianalytic classes*. Studia Mathematica, (2012) 1(208), 31-46.

[34] Juan-Huguet, J., *Iterates and hypoellipticity of partial differential operators on non-quasianalytic classes*. Integral Equations Operator Theory, (2010), 68(2):263-286.

[35] Komatsu, H., *A characterization of real analytic functions*. Proc. Japan Acad., (1960), 36:90-93.

[36] Komatsu, H., *On interior regularities of the solutions of principally elliptic systems of linear partial differential equations*. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. 1, 9, 141-164 (1961).

[37] Komatsu. H., *Ultradistributions. I. Structure theorems and a characterization*. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math 20 (1973), 25-105.

[38] Kotake, T. e Narasimhan, M. S., *Regularity theorems for fractional powers of a linear elliptic operator*. Bull. Soc. Math. France, (1962) 90:449-471.

[39] Lambert, A., *Quelques théorèmes de décomposition des ultradistributions*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 29(3), (1979), 57-100.

[40] Langenbruch, M., *Ultradifferentiable functions on compact intervals*. Mathematische Nachrichten,(1989), 140(1), 109-126.

[41] Meise R. e Taylor B. A., *Whitney's extension theorem for ultradifferentiable functions of Beurling type*. Ark. Mat. 26 (1988), 265-287.

[42] Nelson, E.,*Analytic vectors*. Ann. of Math. (1959) 572-615.

[43] Newberger, E. e Zielezny. *The growth of hypoelliptic polynomials and Gevrey classes*. Proc. Amer. Math. Soc., (1973) 39:547-552.

[44] Petzsche, H. J. e Vogt, D., *Almost analytic extension of ultradifferentiable functions and the boundary values of holomorphic functions*. Mathematische Annalen, (1984) 267(1), 17-35.

[45] Rainer, A. e Schindl, G., *On the extension of Whitney ultrajets*. (2017) preprint arXiv:1709.00932.

[46] Rockafellar, R. T., *Convex analysis* (Vol. 28). Princeton university press (1970).

[47] Rodino, L., *Linear partial differential operators in Gevrey spaces*. World Scientific (1993).

[48] Rodrigues, N. B. e Silva Jr, A. V. D., *Approximate solutions of vector fields and an application to Denjoy-Carleman regularity of solutions of a nonlinear PDE*. (2018) preprint arXiv:1809.06803.

[49] Schaefer, H. H., *Locally Convex Topological Vector Spaces*. In Topological Vector Spaces (pp. 36-72). Springer, New York, NY. (1971).

[50] Treves F., *Hypo-analytic strutures: local theory*. Princenton University Press (1992).