UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Tatiana Ribeiro Mustafa Gonçalves

UM ESTUDO SOBRE O CONHECIMENTO ADQUIRIDO PELOS ALUNOS DA GRADUAÇÃO NUMA DISCIPLINA COM CONTEÚDO DE MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO

São Carlos - SP
2020

Tatiana Ribeiro Mustafa Gonçalves

UM ESTUDO SOBRE O CONHECIMENTO ADQUIRIDO PELOS ALUNOS DA GRADUAÇÃO NUMA DISCIPLINA COM CONTEÚDO DE MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional para obtenção do Título de Mestre em Matemática.
Orientação: Profa. Dra. Grazielle Feliciani Barbosa.
Coorientação: Profa. Dra. Luciene Nogueira Bertoncello.

São Carlos - SP
2020

Mustafa Gonçalves, Tatiana Ribeiro

Um estudo sobre o conhecimento adquirido pelos alunos da graduação numa disciplina com conteúdo de Matemática do Ensino Médio / Tatiana Ribeiro Mustafa Gonçalves. -- 2020.
97 f. : 30 cm.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal de São Carlos, campus São Carlos, São Carlos
Orientador: Grazielle Feliciani Barbosa
Banca examinadora: Luciene Nogueira Bertoncello, Nivaldo de Góes Grulha Júnior, Pedro Luiz Aparecido Malagutti
Bibliografia

1. Análise de erros.. 2. Conteúdo de Matemática do Ensino Médio.. 3. Disciplina de Graduação.. I. Orientador. II. Universidade Federal de São Carlos. III. Título.

Ficha catalográfica elaborada pelo Programa de Geração Automática da Secretaria Geral de Informática (SIn).

DADOS FORNECIDOS PELO(A) AUTOR(A)

Bibliotecário(a) Responsável: Ronildo Santos Prado – CRB/8 7325

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Tatiana Ribeiro Mustafa Gonçalves, realizada em 20/02/2020:

Profa. Dra. Luciene Nogueira Bertoncello
UFSCar

Prof. Dr. Nivaldo de Góes Grulha Júnior
USP

Prof. Dr. Pedro Luiz Aparecido Malagutti
UFSCar

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, por estar sempre guiando meus passos.

À minha família, meus pais Mohamed e Cláudia, meus sogros José Antônio e Maria Aldeniz, meus irmãos, minhas cunhadas e sobrinhos, por serem base essencial de todas as minhas conquistas, por acreditarem na minha capacidade e incentivarem meu crescimento intelectual e profissional.

Em especial quero agradecer aos meus companheiros diários, meu marido Dimas e minha filha Yasmin, pelo amor, dedicação, carinho e paciência. Ademais, gostaria de reforçar meu agradecimento ao meu marido, pois sempre foi o impulso necessário para que eu pudesse seguir em frente, compartilhando seus conhecimentos e me oferecendo apoio.

À minha orientadora, Profa. Dra. Grazielle pelo trabalho realizado comigo, pelos ensinamentos, pelo carinho e atenção.

À minha coorientadora, Profa. Dra. Luciene que participou na finalização do meu trabalho, oferecendo sugestões para seu aperfeiçoamento, pelos ensinamentos e carinho.

Resumo

O assunto estudado nesta dissertação faz parte do "Ensino da Matemática". Analisamos, por meio de avaliações ao longo da disciplina "Números e Funções Reais", o conhecimento de 45 alunos a respeito de alguns tópicos da Matemática que fazem parte do Ensino Médio. São apresentados dados numéricos referentes a acertos e erros dos exercícios propostos, avaliações modelo (bem escritas e com a maior quantidade de acertos), soluções com erros mais comuns e uma análise de tais erros.

Palavras-chave: Análise de erros. Conteúdo de Matemática do Ensino Médio. Disciplina da Graduação.

Abstract

The subject studied in this dissertation is part of “Teaching Mathematics”. We analyzed, with tests throughout the course “Real Numbers and Functions”, the knowledge of 45 students of some Mathematics topics that are part of high school. It is presented Numerical data regarding the correctness and error of the proposed exercises, model tests (well written and with the most correctness), solutions with the most common errors and analysis of such errors.

Keywords: Error analysis. High School Mathematics Content. Undergraduate course.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

O assunto tratado nesta dissertação está ligado à área de Ensino de Matemática. Este tema foi desenvolvido ao longo do ano 2019 e escolhido perante a preocupação com a formação dos futuros profissionais na área citada.

O objetivo é analisar o conhecimento adquirido pelos alunos ingressantes no Curso de Graduação em Matemática (Licenciatura e Bacharelado), ao longo de uma disciplina específica e citada abaixo, cuja ementa contém temas que fazem parte da estrutura curricular do Ensino Médio.

O espaço amostral foram os alunos ingressantes em 2019 do Curso de Matemática da Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), Campus São Carlos. Eles cursaram a disciplina *Números e Funções Reais*, Código 1001233, oferecida no período diurno e ministrada no primeiro semestre de 2019 pela Profa. Dra. Grazielle Feliciani Barbosa. Os seguintes tópicos, que fazem parte da ementa da disciplina, foram analisados:

a) Funções: conceito, zeros, gráficos e monotonicidade.

b) Funções elementares: linear, afim, quadrática, modular.

c) Funções diretas e inversas e composição de funções.

d) Funções exponenciais e logarítmicas.

e) Introdução à trigonometria. Funções trigonométricas. Aplicações.

f) Números Reais: conceito, operações e completude.

Além dos citados acima, vale ressaltar que na ementa da disciplina consta o tópico "Limite de Funções. Conceito de Derivada como limite". Este não fez parte deste trabalho, por não ser conteúdo do Ensino Médio atualmente.

Na metodologia utilizada, os alunos foram avaliados, nos tópicos acima, no decorrer da disciplina citada, por meio de 9 avaliações: 5 atividades individuais e 4 trabalhos em grupo. Eles tiveram aulas expositivas; as atividades individuais foram realizadas em sala de aula e supervisionadas pela professora Grazielle e pela autora deste trabalho, e tiveram duração de 2 horas por atividade; os trabalhos em grupo não foram realizados em sala de aula, não tiveram a supervisão da Profa. e autora, e cada grupo foi formado por no máximo 5 alunos.

A autora do trabalho participou da elaboração/escolha das questões das 9 avaliações e fez a correção de todas.

Esta dissertação está dividida em 10 capítulos: o primeiro trata-se de uma Avaliação Diagnóstica e os demais das 9 avaliações citadas acima. Eles estão descritos como abaixo:

No Capítulo 1 consta uma Avaliação Diagnóstica. Ela foi elaborada por alguns professores do Departamento de Matemática da UFSCar, e aqui fizemos uma análise dos resultados obtidos por alguns alunos do nosso espaço amostral.

Cada um dos Capítulos 2, 4, 6, 8 e 10 descreve uma das 5 atividades individuais, cujos temas avaliados estão, respectivamente, inseridos no contexto de Teoria dos Conjuntos; Inequações e Funcões modulares; Funções, gráficos e porcentagem; Funções exponencial e logarítmica; Funções trigonométricas e suas relações. Cada atividade foi formada por duas questões. Fizemos um gráfico de barras

$$\text{(intervalo de nota)} \times \text{(quantidade de alunos)}$$

que representa o desempenho da sala e uma análise quantitativa dos erros e acertos. Selecionamos uma prova modelo (bem escrita e com boas resoluções) e algumas provas com os erros mais frequentes e fizemos uma análise destes.

Em cada um dos Capítulos 3, 5, 7 e 9 consta um trabalho em grupo, cujos temas avaliados estão, respectivamente, inseridos no contexto de Números reais; Funções; Potenciação e radiciação; Trigonometria. Cada trabalho é formado por duas ou três questões, as quais enunciamos e cujas resoluções fornecemos. Fizemos um gráfico de barras

$$\text{(intervalo de nota)} \times \text{(quantidade de alunos)}$$

que representa o desempenho da sala e uma análise quantitativa dos erros e acertos. Selecionamos um trabalho modelo (bem escrito e com boas resoluções) e alguns com os erros mais frequentes e fizemos uma análise destes.

Capítulo 1

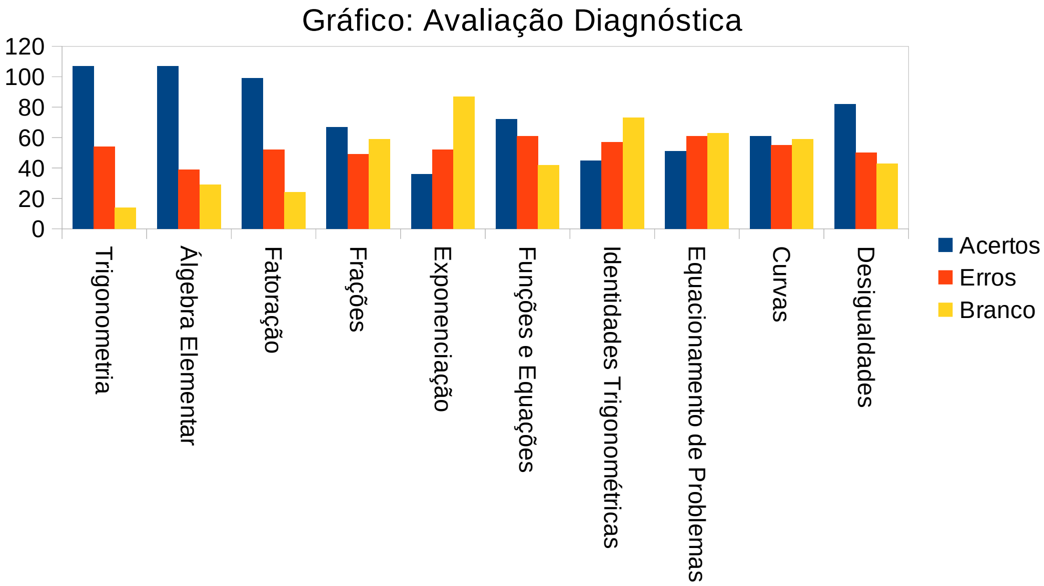
Avaliação diagnóstica

No Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) surgiu, em 2017, um projeto intitulado *Projeto Primeiros Teoremas*. Conforme texto extraído do relatório [2], tal projeto foi uma iniciativa da Coordenação dos Cursos de Graduação e de docentes do Departamento de Matemática, dada a constatação de necessárias inovações pedagógicas, a fim de realizar um acompanhamento didático-pedagógico diferenciado dos alunos ingressantes durante todo o primeiro ano letivo, com foco na formação dos conhecimentos de Matemática. A medida inicial considerada pelo projeto foi a realização de um diagnóstico do conhecimento prévio do ingressante: Avaliação Diagnóstica.

Esta é elaborada a partir do conteúdo de matemática apresentado no ensino médio. A avaliação aplicada no início de 2019 tinha 50 questões distribuídas entre 10 temas (Trigonometria, Álgebra Elementar, Fatoração, Frações, Exponenciação, Funções e Equações, Identidades Trigonométricas, Equacionamento de Problemas, Curvas e Desigualdades), sendo 5 questões por tema.

Um total de 86 alunos ingressantes (diurno e noturno) realizaram esta avaliação, sendo 35 matriculados no período diurno. Como nesta dissertação avaliaremos apenas o desempenho dos alunos do período diurno, analisaremos os dados da avaliação diagnóstica apenas destes 35.

Abaixo segue a tabela com a quantidade de acertos, erros e questões em branco, agrupadas pelos temas.



Analisando o gráfico podemos perceber que os alunos tiveram um melhor desempenho em Trigonometria, Álgebra Elementar e Fatoração. Observamos que teve uma grande quantidade de erros e questões em branco nas identidades trigonométricas, mesmo tendo um bom desempenho em trigonometria. Os outros temas estão abaixo da média, ou seja, a quantidade de erros e em branco está acima da média. Percebemos também que o maior índice de erros e em branco foi em exponenciação.

Chamamos a atenção do leitor para o fato que nesta dissertação analisamos o desempenho de 45 alunos ao longo de vários temas da matemática. Portanto, 10 alunos não participaram de tal Avaliação diagnóstica.

Temos os enunciados desta avaliação na página 81.

Capítulo 2

Primeira atividade avaliativa individual

Neste capítulo serão analisados os resultados obtidos na primeira atividade individual, em que foi avaliado o conhecimento dos alunos sobre alguns tópicos de Teoria dos Conjuntos.

Eles tiveram que resolver individualmente, em sala de aula, os dois exercícios a seguir, e, logo abaixo, fornecemos uma solução.

Questão 1. Sejam A e B conjuntos quaisquer. Classificar em verdadeiro ou falso:
( ) $A - B \subset B^c$
( ) $A \subset A \cap B$
Se for verdadeiro, você deve exibir uma prova. Se for falso, dê um contra-exemplo.
Solução.

a) Seguem as implicações:

$$\forall x, x \in A - B \Rightarrow x \in A \text{ e } x \notin B \Rightarrow x \in A \text{ e } x \in B^c \Rightarrow x \in B^c.$$

Logo, $A - B \subset B^c$ e a afirmação é verdadeira.

b) Por exemplo, se $A = \{1\}$ e $B = \emptyset$, então $A \cap B = \emptyset$. Portanto a sentença é falsa. $\square$

Questão 2. Uma população consome três marcas de sabão em pó: A, B e C. Foi feita uma pesquisa de mercado, em que obtiveram os seguintes resultados tabelados como segue:

marca	A	B	C	A e B	B e C	A e C	A, B e C	nenhuma das três
número de consumidores	109	203	162	25	41	28	5	115

Forneça:

a) o número de pessoas consultadas;

b) o número de pessoas que só consomem a marca A;

c) o número de pessoas que não consomem as marcas A ou C;

d) o número de pessoas que consomem ao menos duas marcas.

Solução.Utilizaremos a notação de número de elementos de um conjunto: $n(X)$, sendo X um conjunto qualquer. Pela tabela, temos que, $n(A) = 109$, $n(B) = 203$, $n(C) = 162$, $n(A \cap B) = 25$, $n(B \cap C) = 41$, $n(A \cap C) = 28$, $n(A \cap B \cap C) = 5$ e $n(D) = 115$, sendo D o conjunto formado pelas pessoas que não consomem nenhuma das três marcas de sabão em pó.

a) $n(U) = n(D) + n(A \cup B \cup C)$, sendo U o conjunto universo (conjunto das pessoas consultadas). Temos

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$,

$n(A \cup B \cup C) = 109 + 203 + 162 - 25 - 41 - 28 + 5 = 385$,

$n(U) = 115 + 385 = 500$.

Logo, 500 pessoas foram consultadas.

b) O número de pessoas que só consomem a marca A é

$$n(A) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C) = 109 - 25 - 28 + 5 = 61.$$

c) Temos

$$n(A \cup C) = n(A) + n(C) - n(A \cap C) = 109 + 162 - 28 = 243.$$

Logo, o número de pessoas que não consomem as marcas A ou C é

$$n(U) - n(A \cup C) = 500 - 243 = 257.$$

d) O número de pessoas que consomem ao menos duas marcas é

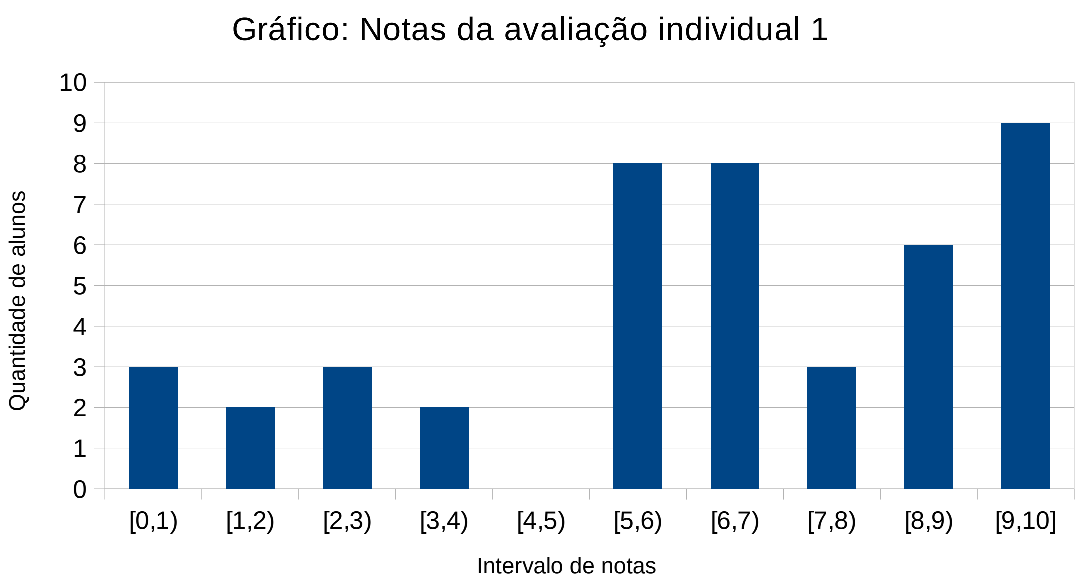
$$n(A \cap B) + n(A \cap C) + n(B \cap C) - 2n(A \cap B \cap C) = 25 + 41 + 28 - 2 \cdot 5 = 84.$$

□

A seguir exibimos o gráfico de barras

$$\text{(intervalo de nota)} \times \text{(quantidade de alunos)}$$

que representa o desempenho da sala.

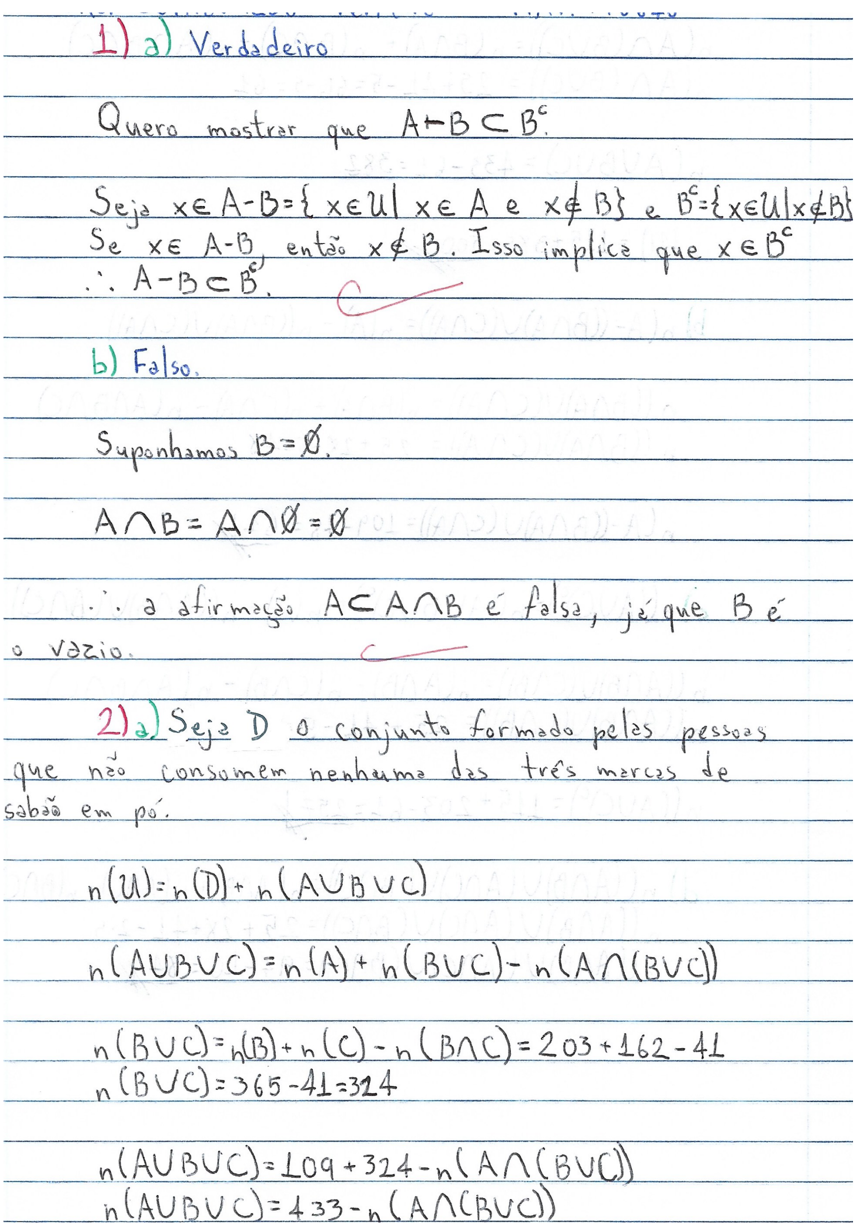


Análise dos resultados

Participaram desta atividade 44 alunos. Foi verificado por meio da análise das provas que:

- 7 alunos conseguiram nota máxima (Dez) e 3 alunos nota mínima (Zero).
- 26 alunos conseguiram nota acima da média (maior ou igual a $6,0$) e 18 alunos nota abaixo da média (menor que $6,0$).
- 15 alunos acertaram o Exercício 1-a), 27 alunos acertaram o Exercício 1-b), 23 alunos acertaram o Exercício 2-a), 29 alunos acertaram o Exercício 2-b), 15 alunos acertaram o Exercício 2-c) e 26 alunos acertaram o Exercício 2-d).

Primeiramente, mostraremos uma atividade em que o aluno fez tudo corretamente.



1) a) Verdadeiro

Quero mostrar que $A - B \subset B^c$

Seja $x \in A - B = \{x \in U \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$ e $B^c = \{x \in U \mid x \notin B\}$

Se $x \in A - B$, então $x \notin B$. Isso implica que $x \in B^c$

$\therefore A - B \subset B^c$.

b) Falso.

Suponhamos $B = \emptyset$.

$A \cap B = A \cap \emptyset = \emptyset$

$\therefore$ a afirmação $A \subset A \cap B$ é falsa, já que B é o vazio.

2) a) Seja D o conjunto formado pelas pessoas que não consomem nenhuma das três marcas de sabão em pó.

$n(U) = n(D) + n(A \cup B \cup C)$

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B \cup C) - n(A \cap (B \cup C))$

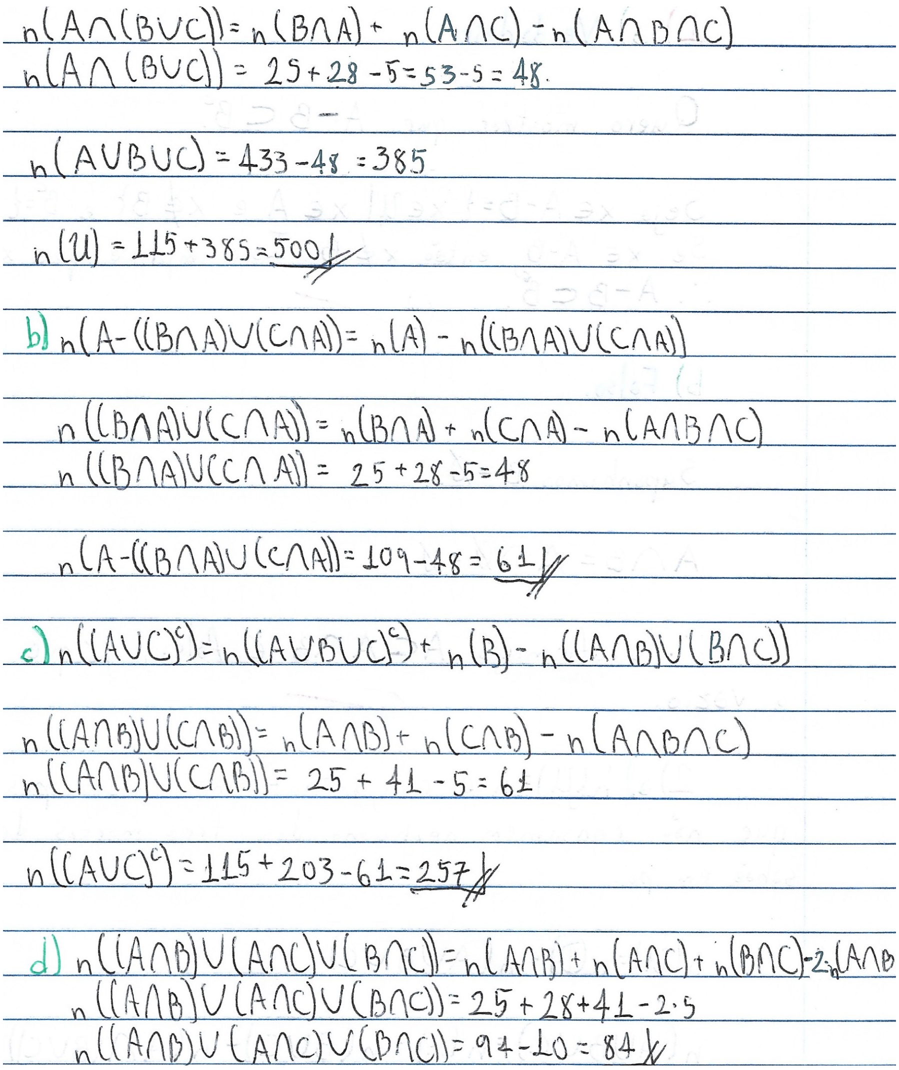
$n(B \cup C) = n(B) + n(C) - n(B \cap C) = 203 + 162 - 41$

$n(B \cup C) = 365 - 41 = 324$

$n(A \cup B \cup C) = 109 + 324 - n(A \cap (B \cup C))$

$n(A \cup B \cup C) = 433 - n(A \cap (B \cup C))$

Figura 2.1: Primeira página da prova modelo.



$n(A\cap(B\cup C)) = n(B\cap A) + n(A\cap C) - n(A\cap B\cap C)$

$n(A\cap(B\cup C)) = 25 + 28 - 5 = 53 - 5 = 48.$

$n(A\cup B\cup C) = 433 - 48 = 385$

$n(U) = 115 + 385 = 500$

b) $n(A-((B\cap A)\cup(C\cap A)) = n(A) - n((B\cap A)\cup(C\cap A))$

$n((B\cap A)\cup(C\cap A)) = n(B\cap A) + n(C\cap A) - n(A\cap B\cap C)$

$n((B\cap A)\cup(C\cap A)) = 25 + 28 - 5 = 48$

$n(A-((B\cap A)\cup(C\cap A)) = 109 - 48 = 61$

c) $n((A\cup C)^c) = n((A\cup B\cup C)^c) + n(B) - n((A\cap B)\cup(B\cap C))$

$n((A\cap B)\cup(C\cap B)) = n(A\cap B) + n(C\cap B) - n(A\cap B\cap C)$

$n((A\cap B)\cup(C\cap B)) = 25 + 41 - 5 = 61$

$n((A\cup C)^c) = 115 + 203 - 61 = 257$

d) $n((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)) = n(A\cap B) + n(A\cap C) + n(B\cap C) - 2n(A\cap B$

$n((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)) = 25 + 28 + 41 - 2\cdot 5$

$n((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)) = 94 - 10 = 84$

Figura 2.2: Segunda página da prova modelo.

Agora, faremos alguns comentários sobre os erros que apareceram nas resoluções. Na resolução abaixo temos um exemplo em que ocorrem vários erros.

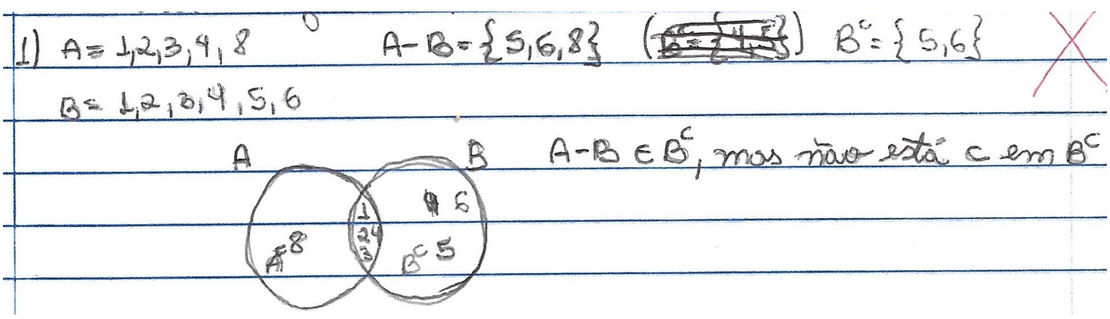


Figura 2.3: Erros de conceito e notação.

Observe que no Exercício 1-a) o aluno não sabe o significado de $A - B$ e B^c. Além disso, temos os erros de notação: ausência de chaves para denotar um conjunto, e emprego de $\in$ no lugar de $\subset$.

Na resolução abaixo temos uma atividade em que o aluno deu exemplo para uma sentença que exige demonstração.

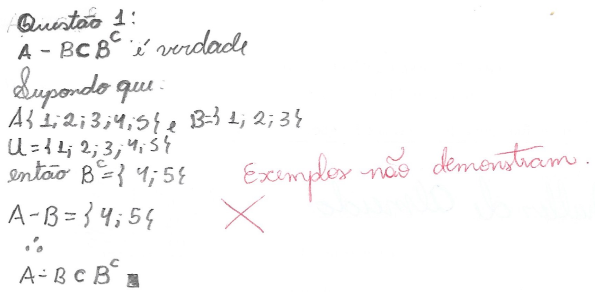


Figura 2.4: Erro de demonstração.

Neste exemplo o aluno fornece um caso particular como argumento de demonstração para o Exercício 1-a).

Na resolução abaixo temos um exemplo em que ocorre erro de interpretação de texto.

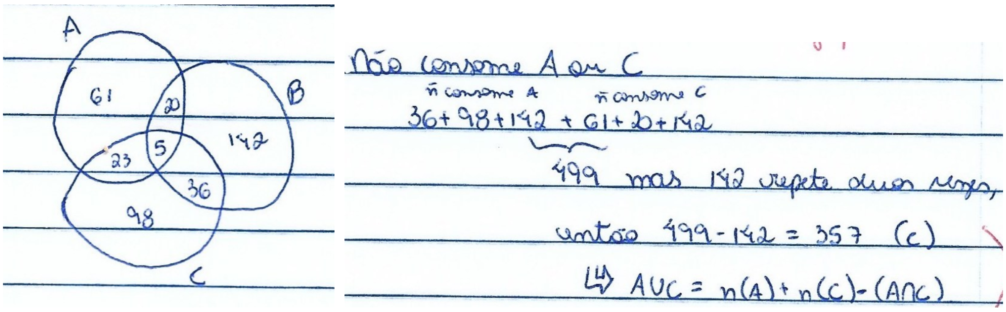


Figura 2.5: Erro de interpretação.

Observe que o diagrama está correto (a menos da informação de que 115 pessoas não consomem nenhuma das marcas, ausente), mas o aluno não soube interpretá-lo da maneira adequada para resolver o problema.

Na resolução abaixo temos um exemplo em que o aluno não soube aplicar a fórmula.

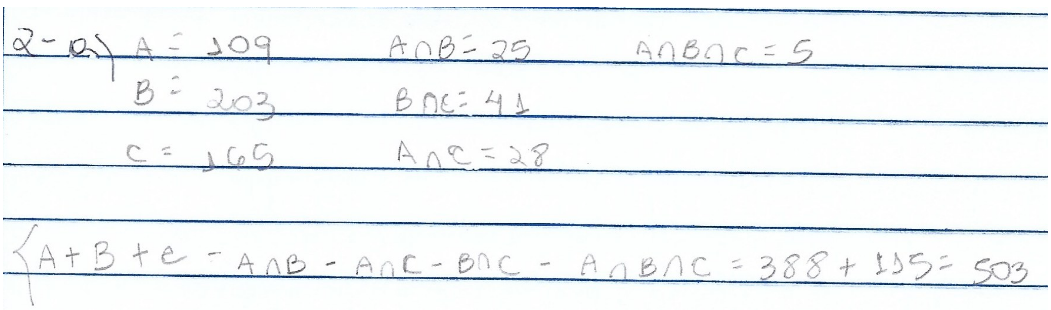


Figura 2.6: Fórmula errada.

Observe que ele deveria ter somado $n(A \cap B \cap C)$ ao invés de subtrair.

Conclusão: percebemos uma dificuldade com demonstrações neste momento inicial do curso. Os erros de notação que apareceram foram trocar $\subset$ por $\in$ (e vice-versa); colocar $+$ no lugar de $\cup$; omitir as chaves $\{\ \}$ para explicitar um determinado conjunto; omitir o sinal de igualdade em $A = \{\ \}$; além disso, alguns alunos tiveram erros de conceitos como, por exemplo, o complementar de um conjunto e também dificuldade de interpretação do enunciado. Muitos utilizaram o diagrama de Venn para resolver os exercícios, nem sempre de forma correta.

Capítulo 3

Primeiro trabalho em grupo

Neste capítulo serão analisados os resultados obtidos no primeiro trabalho em grupo, em que foi avaliado o conhecimento dos alunos sobre Números Reais.

Os alunos formaram grupos de no máximo 5 pessoas e resolveram uma lista com 10 questões (veja Lista de Exercícios 1 em anexo). Tal atividade foi realizada fora da sala de aula sem a supervisão das professoras. O gráfico de barras exibido neste capítulo representa o desempenho da sala referente a avaliação das 10 questões. Selecionamos 3 questões deste trabalho e fornecemos as suas soluções a seguir.

Questão 6. Depois de percorrer $\frac{1}{3}$ do caminho, um carro parou para abastecer. A seguir parou depois de percorrer a metade do caminho restante, quando faltavam apenas 15 km para o final do trajeto. Qual é a distância total do trajeto?

Solução. Seja x a distância total do trajeto. Denote por x_1, x_2, x_3 as distâncias referentes ao primeiro, segundo e terceiro trechos do caminho, respectivamente. Pelo enunciado temos

$$x_1 = \frac{1}{3} \cdot x \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{x - x_1}{2} = \frac{1}{3} \cdot x.$$

Logo,

$$15 = x_3 = x - x_1 - x_2 = \frac{1}{3} \cdot x$$

e portanto $x = 45$ km. □

Questão 7. Suponhamos que $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Mostre que:

a) $x < y \Rightarrow x^2 < y^2$;

b) $x \leq y \Rightarrow x^2 \leq y^2$;

c) $x < y \Leftrightarrow x^2 < y^2$.

Solução.

a) Se $x = 0$, então $0 < y$ por hipótese. Logo, $0 < y^2$, isto é, $x^2 < y^2$.

Se $x > 0$ temos as seguintes implicações:

$0 < x < y \Rightarrow x \cdot x < x \cdot y \Rightarrow x^2 < x \cdot y$,

$0 < x < y \Rightarrow x \cdot y < y \cdot y \Rightarrow x \cdot y < y^2$.

Logo, pela propriedade transitiva, $x^2 < y^2$.

b) Temos as seguintes implicações:
$0 \leq x \leq y \Rightarrow x \cdot 0 \leq x \cdot x \leq x \cdot y \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq x \cdot y,$
$0 \leq x \leq y \Rightarrow 0 \cdot y \leq x \cdot y \leq y \cdot y \Rightarrow 0 \leq x \cdot y \leq y^2.$
Logo, pela propriedade transitiva, $x^2 \leq y^2$.

c) Pelo item a) vale a implicação ($\Rightarrow$). Provemos a recíproca. Temos as implicações:

$$x^2 < y^2 \Rightarrow y^2 - x^2 > 0 \Rightarrow (y-x)\cdot(y+x) > 0 \Rightarrow y - x \text{ e } y + x \text{ têm o mesmo sinal.}$$

(i) Se $(y-x) < 0$ e $(y+x) < 0$, então $y < x$ e $y < -x$. Absurdo, pois $y > 0$.

(ii) Se $(y-x) > 0$ e $(y+x) > 0$, então $y > x$ e $y > -x$. Em particular, $y > x$. ☐

Questão 9. Prove que a diferença entre um número racional e um número irracional é um número irracional.

Solução. Sejam x e y números racional e irracional respectivamente. Suponha que $z = x - y$ seja um número racional. Neste caso, existem $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tais que $b, d \neq 0$; $x = a/b$; $z = c/d$. Logo,

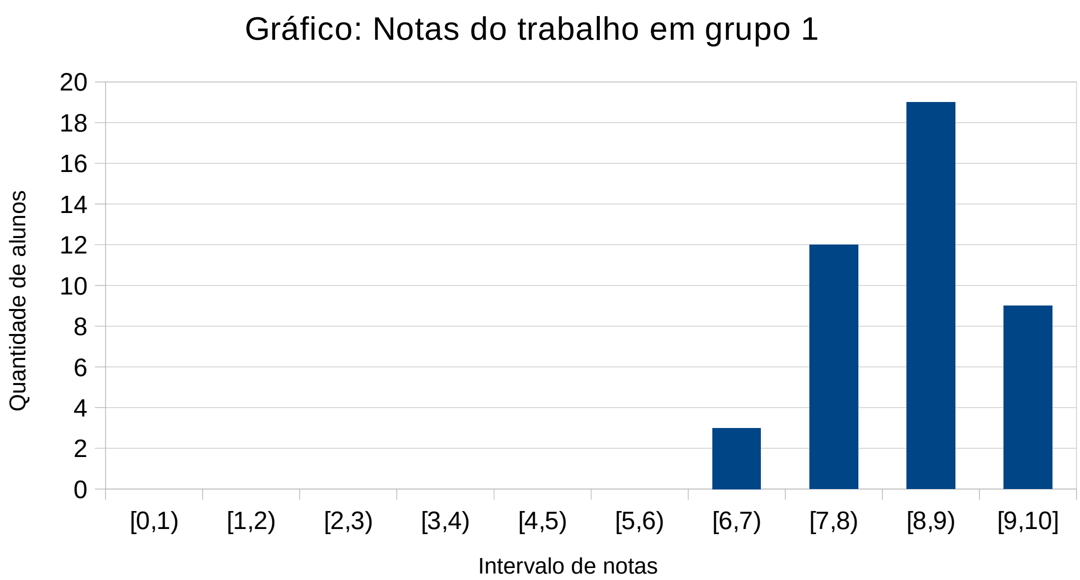
$$y = x - z = \frac{ad - bc}{bd} \in \mathbb{Q}.$$

Absurdo. Portanto, z é irracional. ☐

A seguir exibimos o gráfico de barras

(intervalo de nota) $\times$ (quantidade de alunos)

que representa o desempenho da sala.

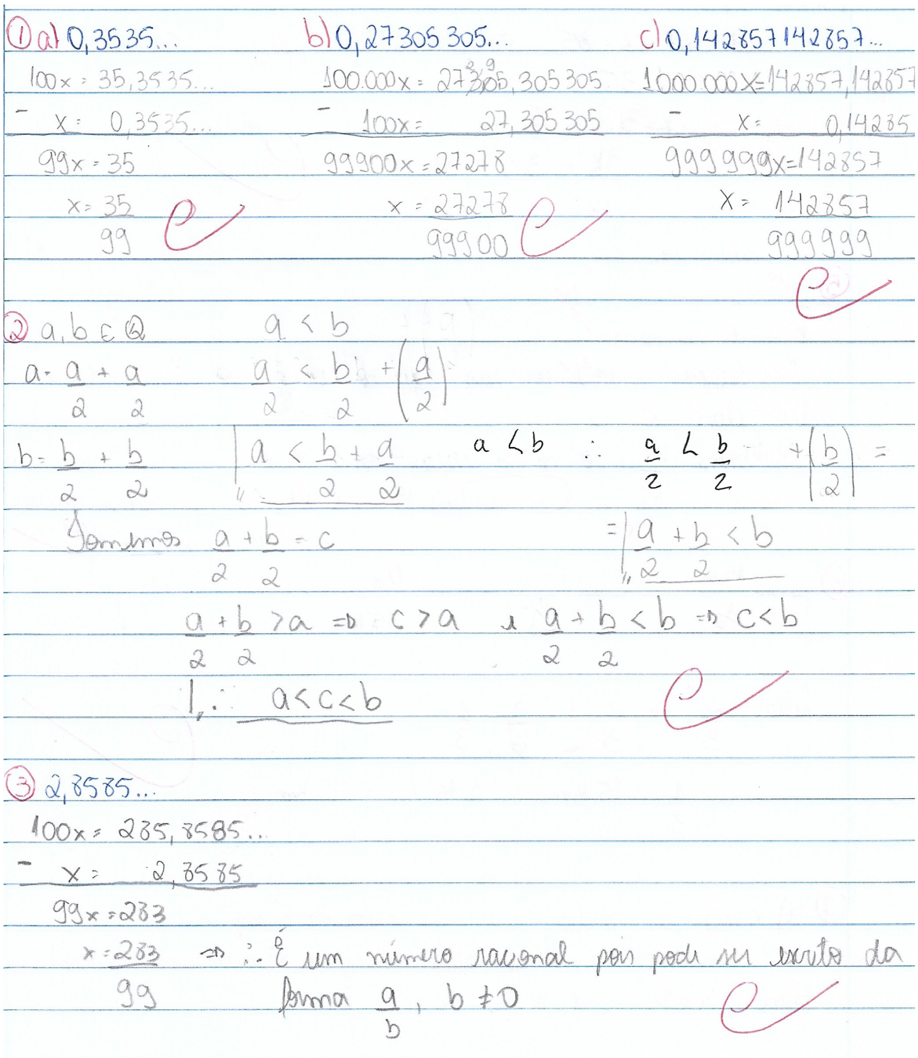


Análise dos resultados

Participaram desta atividade 43 alunos. Foi verificado por meio da análise das provas que:

- Nenhum aluno conseguiu nota máxima (Dez) e nenhum aluno obteve nota mínima (Zero).
- Todos alunos conseguiram nota acima da média (maior ou igual a $6,0$).
- 39 alunos acertaram o Exercício 6, nenhum aluno acertou o Exercício 7-a), 29 alunos acertaram o Exercício 7-b), 13 alunos acertaram o Exercício 7-c) e 35 alunos acertaram o Exercício 9.

Primeiramente, mostraremos abaixo o trabalho que teve maior nota.



1) a) $0,3535\ldots$
$100x = 35,3535\ldots$
$-\ x = 0,3535\ldots$
$99x = 35$
$x = \frac{35}{99}$

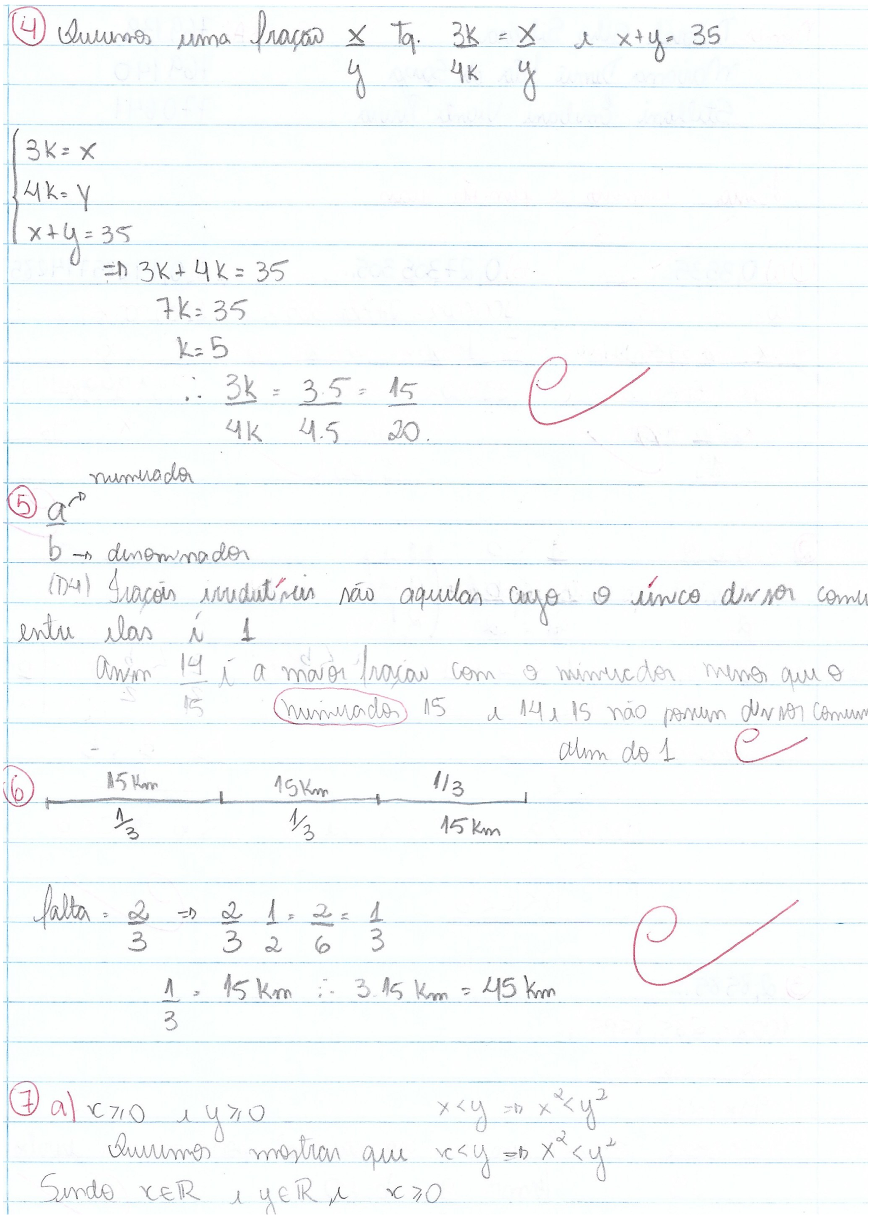
b) $0,27305305\ldots$
$100.000x = 27305,305305$
$-\ 100x = 27,305305$
$99900x = 27278$
$x = \frac{27278}{99900}$

c) $0,142857142857\ldots$
$1000\,000x = 142857,142857$
$-\ x = 0,14285$
$999999x = 142857$
$x = \frac{142857}{999999}$

2) $a, b \in \mathbb{Q}$ $\quad a < b$
$a = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$ $\quad \frac{a}{2} < \frac{b}{2} + \left(\frac{a}{2}\right)$
$b = \frac{b}{2} + \frac{b}{2}$ $\quad a < \frac{b}{2} + \frac{a}{2}$ $\quad a < b \therefore \frac{a}{2} < \frac{b}{2} + \left(\frac{b}{2}\right) =$
Tomemos $\frac{a}{2} + \frac{b}{2} = c$ $\quad = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} < b$
$\frac{a}{2} + \frac{b}{2} > a \Rightarrow c > a$ e $\frac{a}{2} + \frac{b}{2} < b \Rightarrow c < b$
$\therefore a < c < b$

3) $2,3585\ldots$
$100x = 235,3585\ldots$
$-\ x = 2,3585$
$99x = 233$
$x = \frac{233}{99} \Rightarrow \therefore$ É um número racional pois pode ser escrito da forma $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$

Figura 3.1: Primeira página do trabalho modelo.


(4) Queremos uma fração $\frac{x}{y}$ tq. $\frac{3k}{4k} = \frac{x}{y}$ e $x+y=35$

$$\begin{cases} 3k = x \\ 4k = y \\ x+y = 35 \end{cases}$$

$\Rightarrow 3k + 4k = 35$

$7k = 35$

$k = 5$

$\therefore \frac{3k}{4k} = \frac{3.5}{4.5} = \frac{15}{20}.$

(5) $a \to$ numerador

$b \to$ denominador

(D4) Frações irredutíveis são aquelas cujo o único divisor comum entre elas é 1

Assim $\frac{14}{15}$ é a maior fração com o numerador menor que o numerador 15 e 14 e 15 não possuem divisor comum além do 1

(6) 15 Km | 15 Km | 1/3

1/3 | 1/3 | 15 Km

falta $= \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

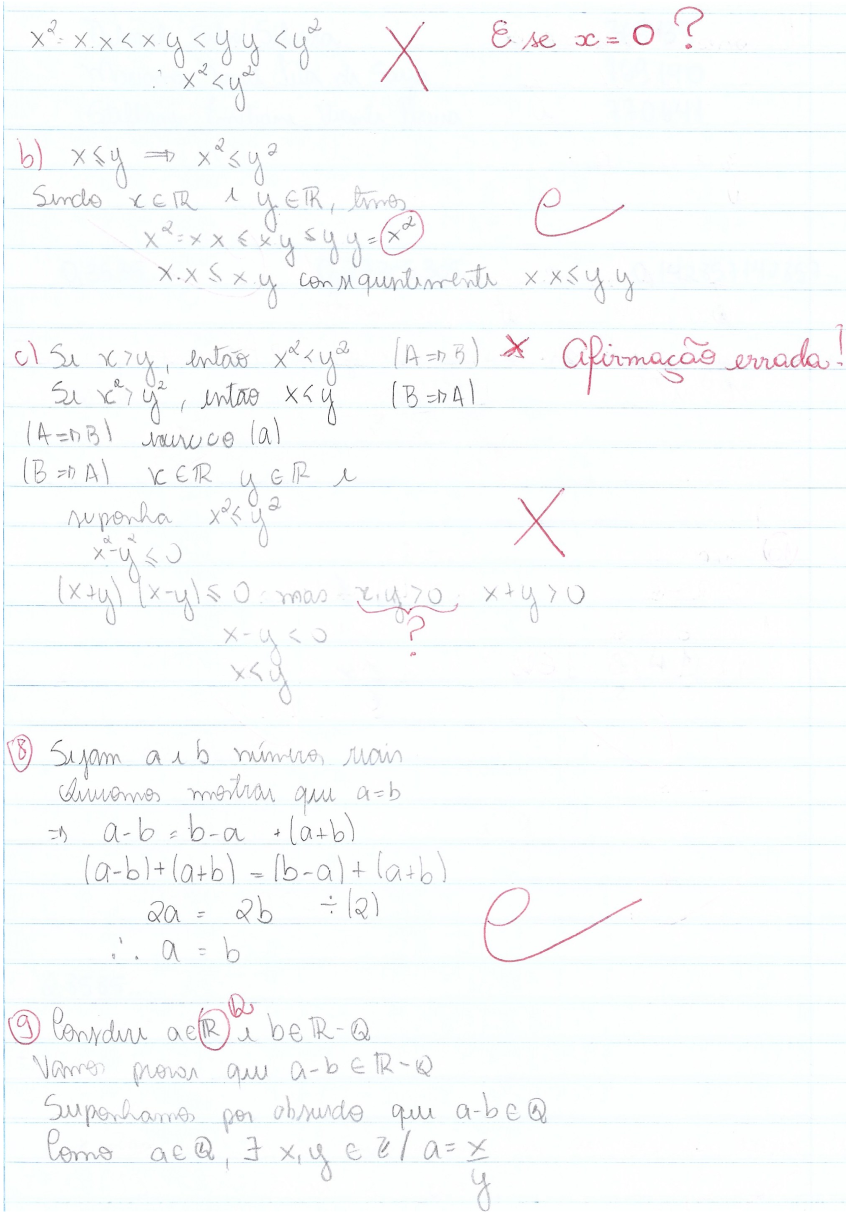
$\frac{1}{3} = 15$ Km $\therefore 3.15$ Km $= 45$ Km

(7) a) $x \geq 0$ e $y \geq 0$ $\quad x<y \Rightarrow x^2<y^2$

Queremos mostrar que $x<y \Rightarrow x^2<y^2$

Sendo $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$ e $x \geq 0$

Figura 3.2: Segunda página do trabalho modelo.



$x^2 = x.x < xy < yy < y^2$

$\therefore x^2 < y^2$

E se $x = 0$?

b) $x \leq y \Rightarrow x^2 \leq y^2$

Sendo $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, temos

$x^2 = x\,x \leq x\,y \leq y\,y = x^2$

$x.x \leq x.y$ consequentemente $x\,x \leq y\,y$

C

c) Se $x > y$, então $x^2 < y^2$ $(A \Rightarrow B)$ Afirmação errada!

Se $x^2 > y^2$, então $x < y$ $(B \Rightarrow A)$

$(A \Rightarrow B)$ mesmo (a)

$(B \Rightarrow A)$ $x \in \mathbb{R}$ $y \in \mathbb{R}$ e

suponha $x^2 \leq y^2$

$x^2 - y^2 \leq 0$

$(x+y)(x-y) \leq 0$ mas $\underbrace{x, y > 0}_{?}$, $x + y > 0$

$x - y < 0$

$x < y$

8) Sejam a e b números reais

Queremos mostrar que $a = b$

$\Rightarrow a - b = b - a \quad +(a+b)$

$(a-b)+(a+b) = (b-a)+(a+b)$

$2a = 2b \quad \div(2)$

$\therefore a = b$

C

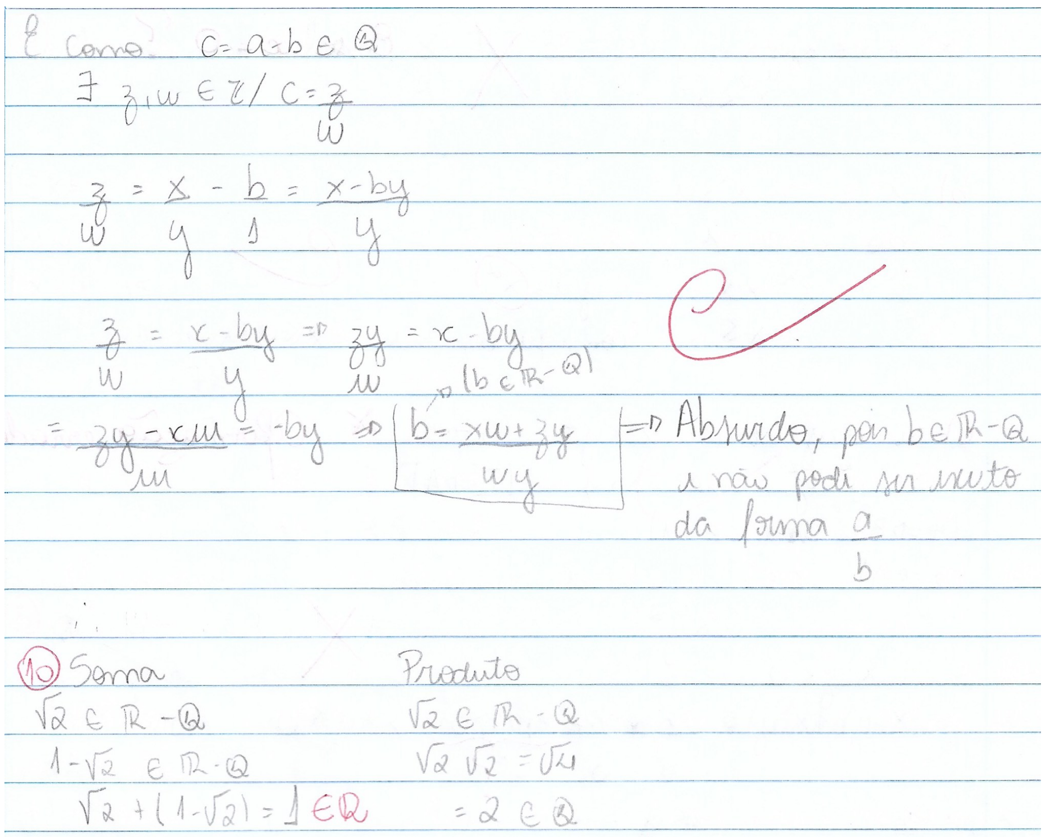
9) Considere $a \in \mathbb{R}$ (ℚ) e $b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

Vamos provar que $a - b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

Suponhamos por absurdo que $a - b \in \mathbb{Q}$

Como $a \in \mathbb{Q}$, $\exists\, x, y \in \mathbb{Z} \,/\, a = \frac{x}{y}$

Figura 3.3: Terceira página do trabalho modelo.



e como $c = a - b \in \mathbb{Q}$

$\exists\, z, w \in \mathbb{Z} \,/\, c = \frac{z}{w}$

$\frac{z}{w} = \frac{x}{y} - \frac{b}{1} = \frac{x - by}{y}$

$\frac{z}{w} = \frac{x - by}{y} \Rightarrow \frac{zy}{w} = x - by$ $(b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q})$

$= \frac{zy - xw}{w} = -by \Rightarrow \boxed{b = \frac{xw + zy}{wy}} \Rightarrow$ Absurdo, pois $b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e não pode ser escrito da forma $\frac{a}{b}$

10 Soma — Produto

$\sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ — $\sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

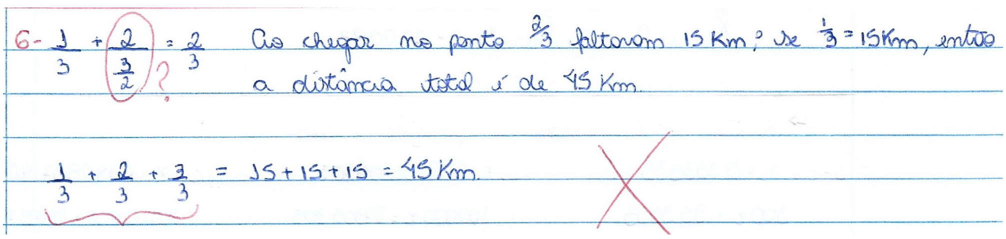
$1 - \sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ — $\sqrt{2}\sqrt{2} = \sqrt{4}$

$\sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) = 1 \in \mathbb{Q}$ — $= 2 \in \mathbb{Q}$

Figura 3.4: Quarta página do trabalho modelo.

Faremos comentários sobre alguns erros que apareceram nas resoluções dos exercícios.

Na resolução abaixo temos um exemplo em que os alunos não souberam trabalhar com frações.



6- $\frac{1}{3} + \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$? Ao chegar no ponto $\frac{2}{3}$ faltaram 15 Km; se $\frac{1}{3} = 15$Km, então a distância total é de 45 Km.

$\underbrace{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{3}{3}}$ $= 15 + 15 + 15 = 45$ Km.

Figura 3.5: Erro de fração.

Note que o grupo colocou $2/(3/2)$ sendo que o correto seria $(2/3)/2$. Além disso, na última linha o grupo fez uma conta que não faz sentido.

Na resolução abaixo temos um exemplo em que os alunos além de não considerarem o caso $x = 0$, ainda cometeram um erro de lógica.

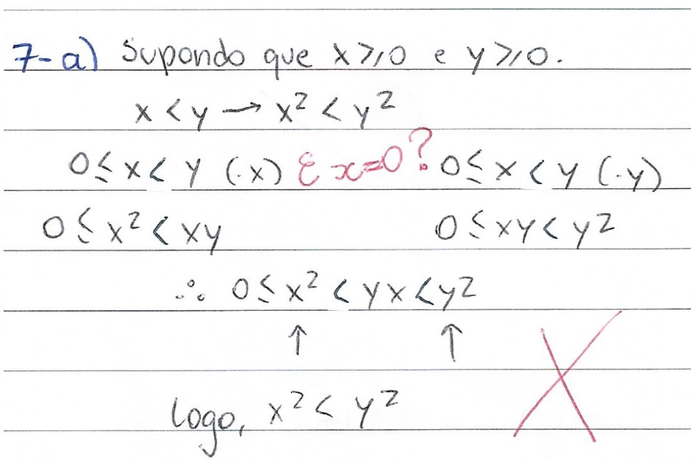


Figura 3.6: Ausência de caso.

Note que se $x = 0$, então a implicação ($x < y \Rightarrow x^2 < yx$) não é válida.

Na resolução abaixo temos um exemplo em que o grupo não justificou por que podemos concluir que $x - y < 0$ a partir de $(x - y)(x + y) < 0$.

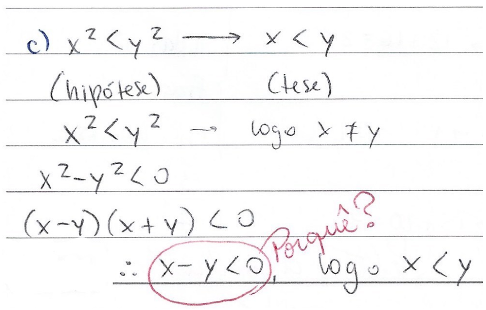


Figura 3.7: Falta de justificativa.

Na resolução abaixo temos um exemplo em que é possível enxergar algumas informações verdadeiras que, talvez com uma melhor organização, pudesse encadear uma demonstração correta.

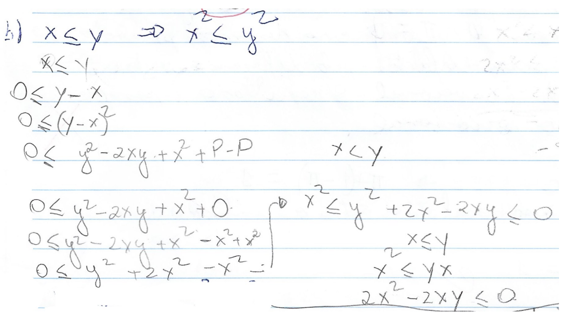


Figura 3.8: Falta de organização.

Na resolução abaixo temos um exemplo em que ocorre erro de demonstração.

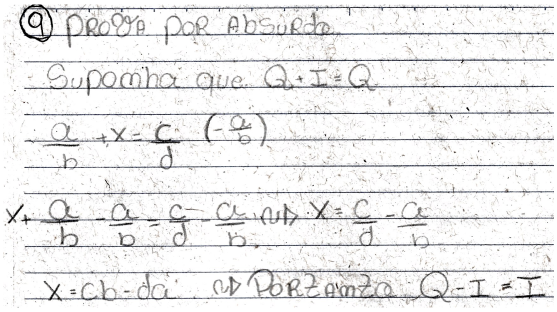


Figura 3.9: Erro de demonstração.

Observe que no final da demonstração o grupo escreve $x = cb - da$ ao invés de $x = (cb - da)/db$.

Conclusão: a ausência do caso $x = 0$ na demonstração do Exercício 7-a) ocorreu com bastante frequência, assim como a falta de justificativa nas conclusões. Embora haja uma melhora das notas referentes a atividade individual do Capítulo 2, alguns erros como falta de organização, ausência de detalhes, somar erroneamente frações ainda permanecem.

Capítulo 4

Segunda atividade avaliativa individual

Neste capítulo serão analisados os resultados obtidos na segunda atividade individual, em que foi avaliado o conhecimento dos alunos sobre inequações e funções modulares.

Eles tiveram que resolver individualmente, em sala de aula, os dois exercícios a seguir, cuja solução é fornecida abaixo.

Questão 1. Resolva as inequações:

(a) $|x-2|+|x-4| \geqslant 6$.

(b) $\dfrac{3-4x}{5x+1} \geqslant 0$.

Solução.

a) Faremos a análise dos 4 casos possíveis:

- Se $x-2 \geqslant 0$ e $x-4 \geqslant 0$, então $x \geqslant 2$ e $x \geqslant 4$. E também,

$$x-2+x-4 \geqslant 6 \Rightarrow 2x \geqslant 12 \Rightarrow x \geqslant 6.$$

  Logo, $x \geqslant 6$.

- Se $x-2 \leqslant 0$ e $x-4 \leqslant 0$, então $x \leqslant 2$ e $x \leqslant 4$. Assim,

$$-x+2-x+4 \geqslant 6 \Rightarrow -2x \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 0.$$

  Logo, $x \leqslant 0$.

- Se $x-2 \geqslant 0$ e $x-4 \leqslant 0$, então $x \geqslant 2$ e $x \leqslant 4$. Além disso,

$$x-2-x+4 \geqslant 6 \Rightarrow 2 \geqslant 6.$$

  Absurdo!

- Se $x-2 \leqslant 0$ e $x-4 \geqslant 0$, então $x \leqslant 2$ e $x \geqslant 4$. Interseção é vazia.

Analisados todos os casos, temos que $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant 6\}$ é o conjunto solução.

b) Primeiro notemos que

$$5x + 1 \neq 0 \Rightarrow 5x \neq -1 \Rightarrow x \neq -\frac{1}{5}.$$

Agora faremos a análise dos 2 casos possíveis:

- $3 - 4x \geqslant 0$ e $5x + 1 > 0 \Rightarrow -4x \geqslant -3$ e $5x > -1 \Rightarrow x \leqslant \frac{3}{4}$ e $x > -\frac{1}{5}$.
  Logo, $-\frac{1}{5} < x \leqslant \frac{3}{4}$.
- $3 - 4x \leqslant 0$ e $5x + 1 < 0 \Rightarrow -4x \leqslant -3$ e $5x < -1 \Rightarrow x \geqslant \frac{3}{4}$ e $x < -\frac{1}{5}$.
  Logo, conjunto vazio.

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{5} < x \leqslant \frac{3}{4}\}$ é o conjunto solução. □

Questão 2.

(a) Mostre que para todos os números reais a e b vale a desigualdade triangular:

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|.$$

(b) Mostre que para todos os números reais x, y e z vale a seguinte desigualdade:

$$|x - y| \leqslant |x - z| + |z - y|.$$

Solução.

a) Pela definição de módulo, segue que $|x| = x$, se $x \geqslant 0$; e $|x| = -x$, se $x < 0$. Assim,

$$a \leqslant |a| \text{ e } b \leqslant |b| \Rightarrow a + b \leqslant |a| + |b|.$$

Por outro lado,

$$-a \leqslant |a| \text{ e } -b \leqslant |b| \Rightarrow -(a + b) \leqslant |a| + |b|.$$

Portanto, $|a + b| \leqslant |a| + |b|$.

b) Temos que, $|x - y| = |x - z + z - y|$. Pela desigualdade triangular,

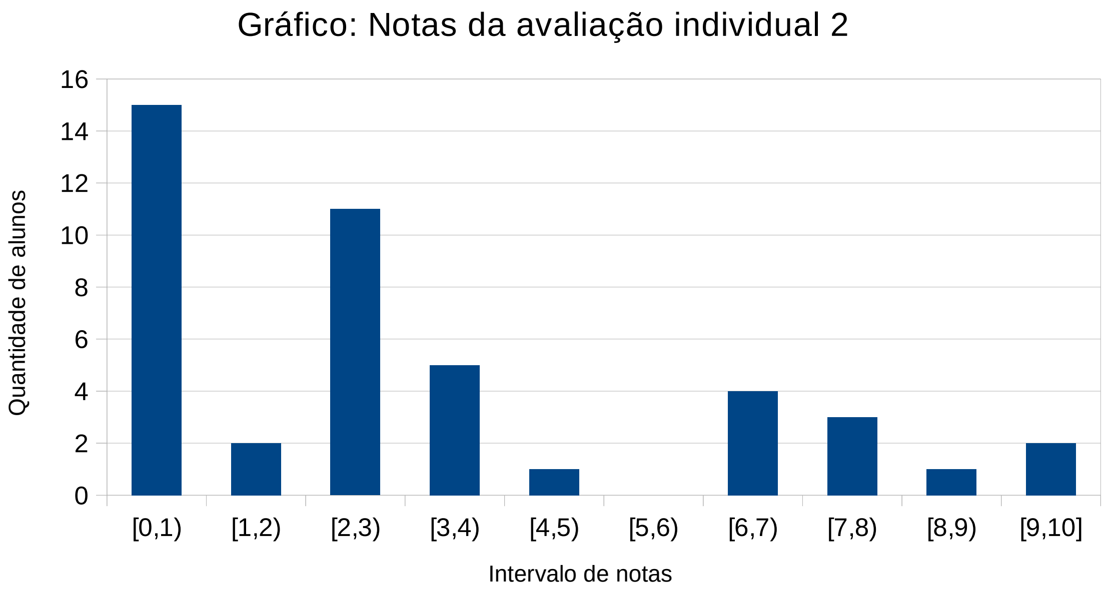
$$|x - z + z - y| \leqslant |x - z| + |z - y|.$$

Logo, $|x - y| \leqslant |x - z| + |z - y|$. □

A seguir exibimos o gráfico de barras

(intervalo de nota) × (quantidade de alunos)

que representa o desempenho da sala.

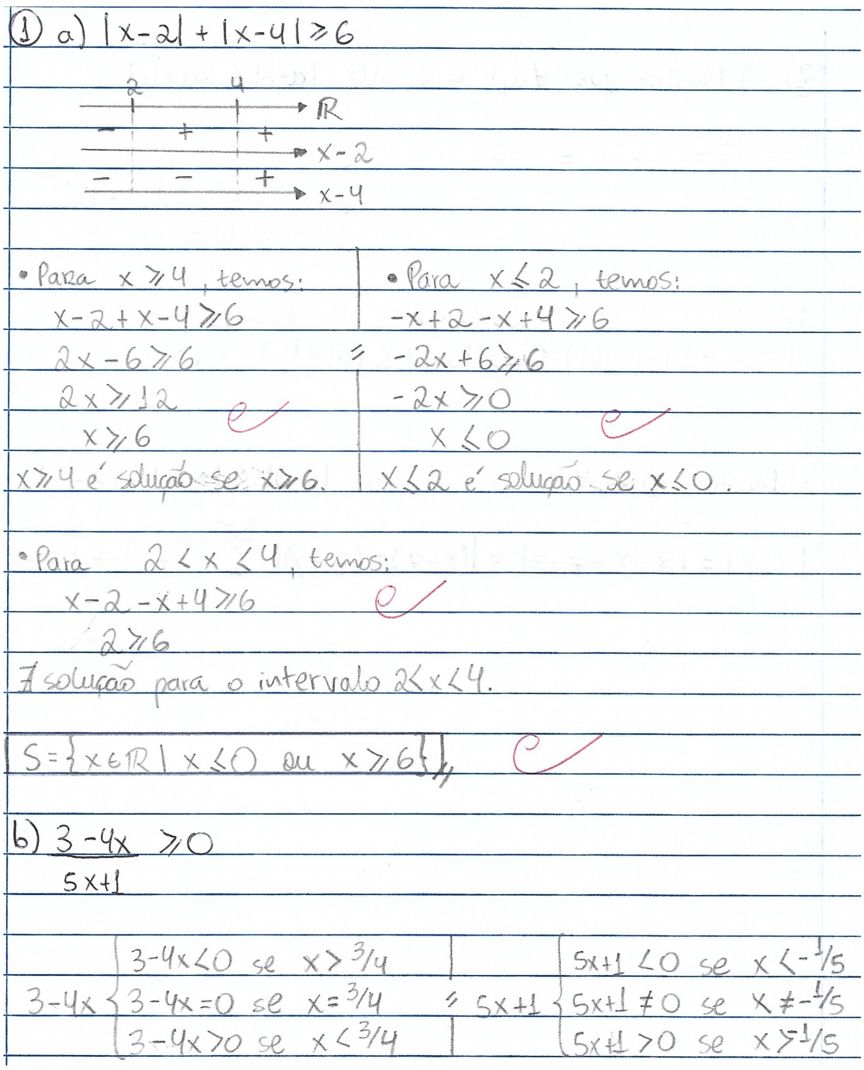


Análise dos resultados

Participaram desta atividade 44 alunos. Foi verificado por meio da análise das provas que:

- 1 aluno atingiu nota máxima (Dez) e 13 alunos nota mínima (Zero).
- 10 alunos obtiveram nota acima da média (maior ou igual a $6,0$) e 34 alunos nota abaixo da média (menor que $6,0$).
- 13 alunos acertaram o Exercício 1-a), 11 alunos acertaram o Exercício 1-b), 12 alunos acertaram o Exercício 2-a), 4 alunos acertaram o Exercício 2-b).

Primeiramente, mostraremos a atividade que teve nota máxima.



① a) $|x-2| + |x-4| \geq 6$

$x-2$: $-$ (antes de 2), $+$, $+$

$x-4$: $-$, $-$, $+$ (depois de 4)

• Para $x \geq 4$, temos:

$x-2+x-4 \geq 6$

$2x-6 \geq 6$

$2x \geq 12$

$x \geq 6$

$x \geq 4$ é solução se $x \geq 6$.

• Para $x \leq 2$, temos:

$-x+2-x+4 \geq 6$

$-2x+6 \geq 6$

$-2x \geq 0$

$x \leq 0$

$x \leq 2$ é solução se $x \leq 0$.

• Para $2 < x < 4$, temos:

$x-2-x+4 \geq 6$

$2 \geq 6$

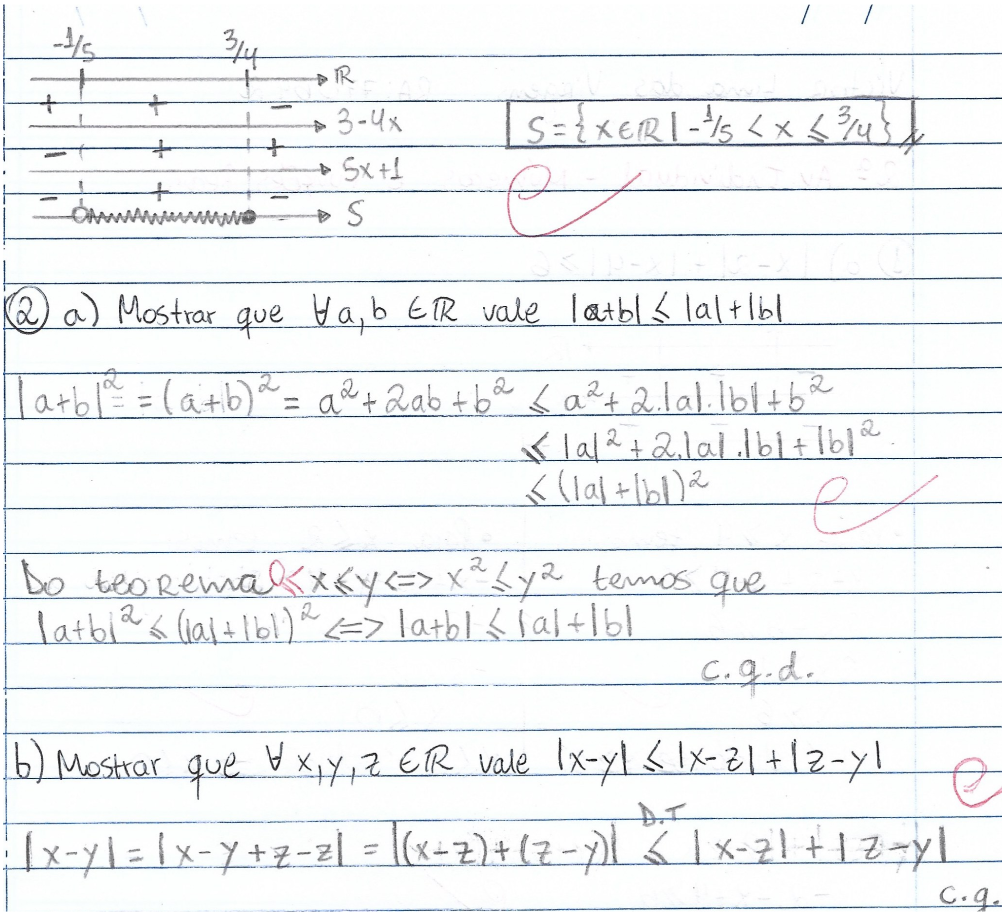
$\nexists$ solução para o intervalo $2<x<4$.

$\boxed{S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ ou } x \geq 6\}}$

b) $\dfrac{3-4x}{5x+1} \geq 0$

$3-4x \begin{cases} 3-4x<0 & \text{se } x>3/4 \\ 3-4x=0 & \text{se } x=3/4 \\ 3-4x>0 & \text{se } x<3/4 \end{cases}$; $5x+1 \begin{cases} 5x+1<0 & \text{se } x<-1/5 \\ 5x+1 \neq 0 & \text{se } x \neq -1/5 \\ 5x+1>0 & \text{se } x>-1/5 \end{cases}$

Figura 4.1: Primeira página da prova modelo.



$-1/5$ $3/4$ $\mathbb{R}$

$3-4x$

$5x+1$

S

$\boxed{S=\{x\in\mathbb{R} \mid -1/5 < x \leq 3/4\}}$

C

② a) Mostrar que $\forall a,b \in \mathbb{R}$ vale $|a+b| \leq |a|+|b|$

$|a+b|^2 = (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \leq a^2+2.|a|.|b|+b^2$
$\leq |a|^2+2.|a|.|b|+|b|^2$
$\leq (|a|+|b|)^2$ C

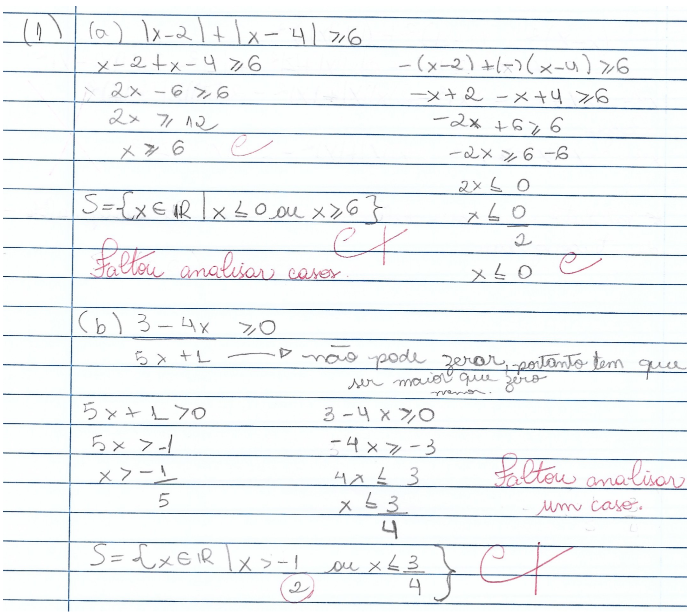
Do teorema $x \leq y \iff x^2 \leq y^2$ temos que
$|a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2 \iff |a+b| \leq |a|+|b|$
c.q.d.

b) Mostrar que $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$ vale $|x-y| \leq |x-z|+|z-y|$ C

$|x-y| = |x-y+z-z| = |(x-z)+(z-y)| \overset{D.T}{\leq} |x-z|+|z-y|$
c.q.

Figura 4.2: Segunda página da prova modelo.

Faremos alguns comentários sobre os erros que apareceram nas resoluções.
Na resolução abaixo temos um exemplo em que o aluno não analisou todos os casos.



(1) (a) $|x-2|+|x-4| \geq 6$

$x-2+x-4 \geq 6$
$2x-6 \geq 6$
$2x \geq 12$
$x \geq 6$ C

$-(x-2)+(-)(x-4) \geq 6$
$-x+2-x+4 \geq 6$
$-2x+6 \geq 6$
$-2x \geq 6-6$
$2x \leq 0$
$x \leq \frac{0}{2}$
$x \leq 0$ C

$S=\{x\in\mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ ou } x \geq 6\}$ C

Faltou analisar casos.

(b) $3-4x \geq 0$
$5x+1 \longrightarrow$ não pode zerar, portanto tem que ser maior que zero menor.

$5x+1>0$
$5x>-1$
$x>-\frac{1}{5}$

$3-4x \geq 0$
$-4x \geq -3$
$4x \leq 3$
$x \leq \frac{3}{4}$

Faltou analisar um caso.

$S=\{x\in\mathbb{R} \mid x>-1 \text{ ou } x \leq \frac{3}{4}\}$ (2) C

Figura 4.3: Ausência de casos.

Um outro erro ocorreu na descrição do conjunto solução do item b) quando o aluno escreve " ou "no lugar de " e ".

Na resolução abaixo temos um exemplo em que o estudo de sinal não foi feito corretamente.

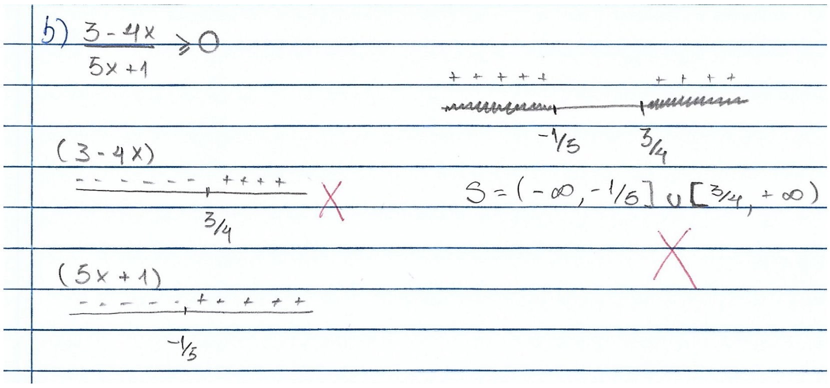


Figura 4.4: Erro no estudo de sinal.

Note que no " varal "de $3 - 4x$ os sinais $+$ e $-$ deveriam estar trocados. Além disso, o aluno não percebeu que $-1/5$ não faz parte da solução.

Na resolução abaixo temos um exemplo em que houve erro de notação.

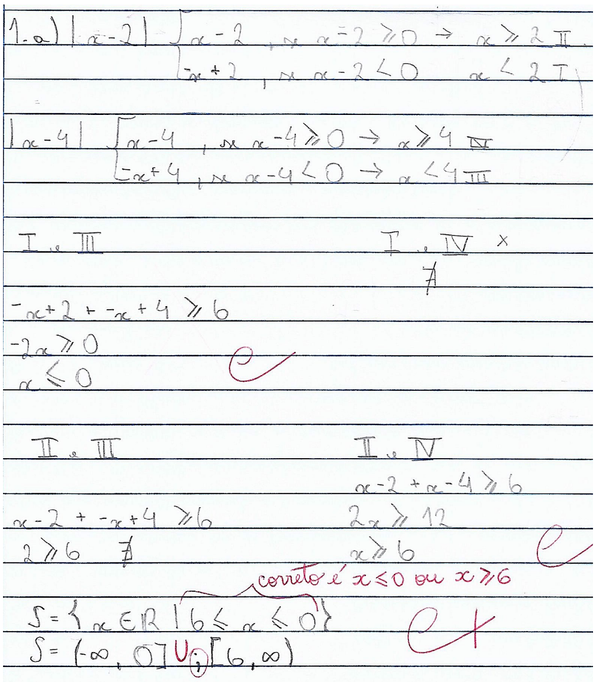


Figura 4.5: Erro de notação.

Observe que o aluno resolveu o exercício corretamente, porém não soube descrever o conjunto solução. Colocou $\{x \in \mathbb{R}|\ 6 \leqslant x \leqslant 0\}$ sendo que o correto deveria ser $\{x \in \mathbb{R}|\ x \leqslant 0$ ou $x \geqslant 6\}$. Em seguida comete outro erro colocando " ; " ao invés de " $\cup$ ".

Na resolução abaixo temos um exemplo em que ocorrem vários erros, mas um chama a atenção: a ordem dos números na reta numérica.

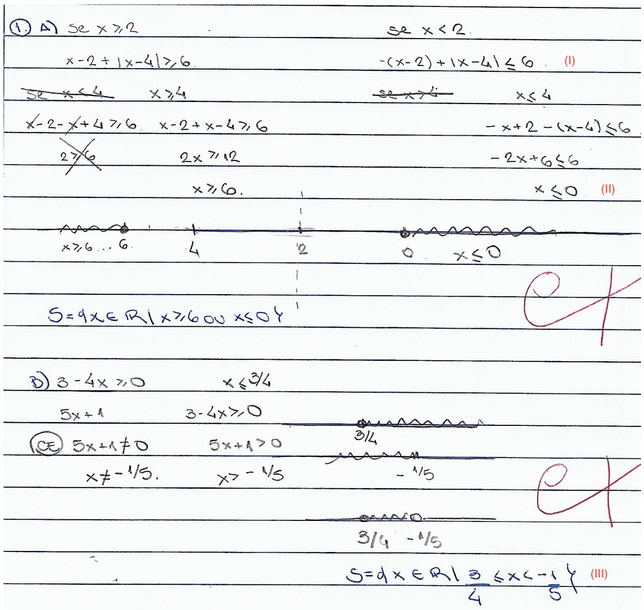


Figura 4.6: Reta numérica incorreta.

Em (I) e (II) o aluno comete erros de sinal, e no item b) ele deixa de analisar um dos casos. Agora observe que o aluno inverte a ordem da reta numéria em ambos os itens. A princípio não há nenhum problema, porém em (III) o aluno demonstra não ser coerente com tal convenção.

Na resolução abaixo temos um exemplo em que o aluno não soube nem começar corretamente um exercício de inequação modular.

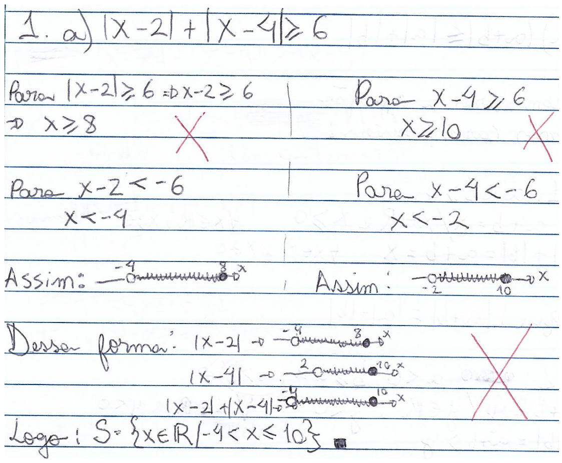
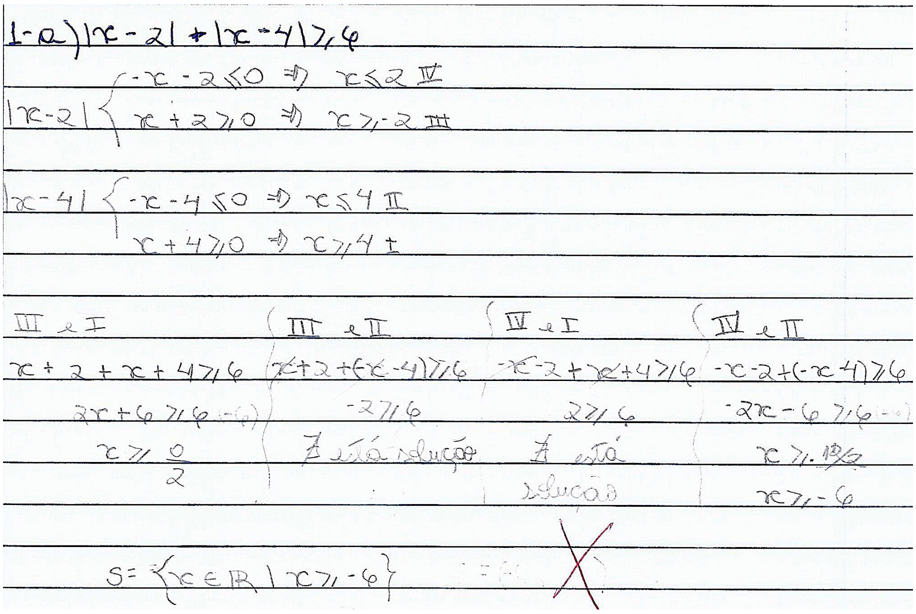


Figura 4.7: Falta de conhecimento.

Na resolução abaixo temos um exemplo de erro de conceito.



1-a) $|x-2|+|x-4| \geq 6$

$|x-2| \begin{cases} -x-2 \leq 0 \Rightarrow x \leq 2 \text{ IV} \\ x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \text{ III} \end{cases}$

$|x-4| \begin{cases} -x-4 \leq 0 \Rightarrow x \leq 4 \text{ II} \\ x+4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4 \text{ I} \end{cases}$

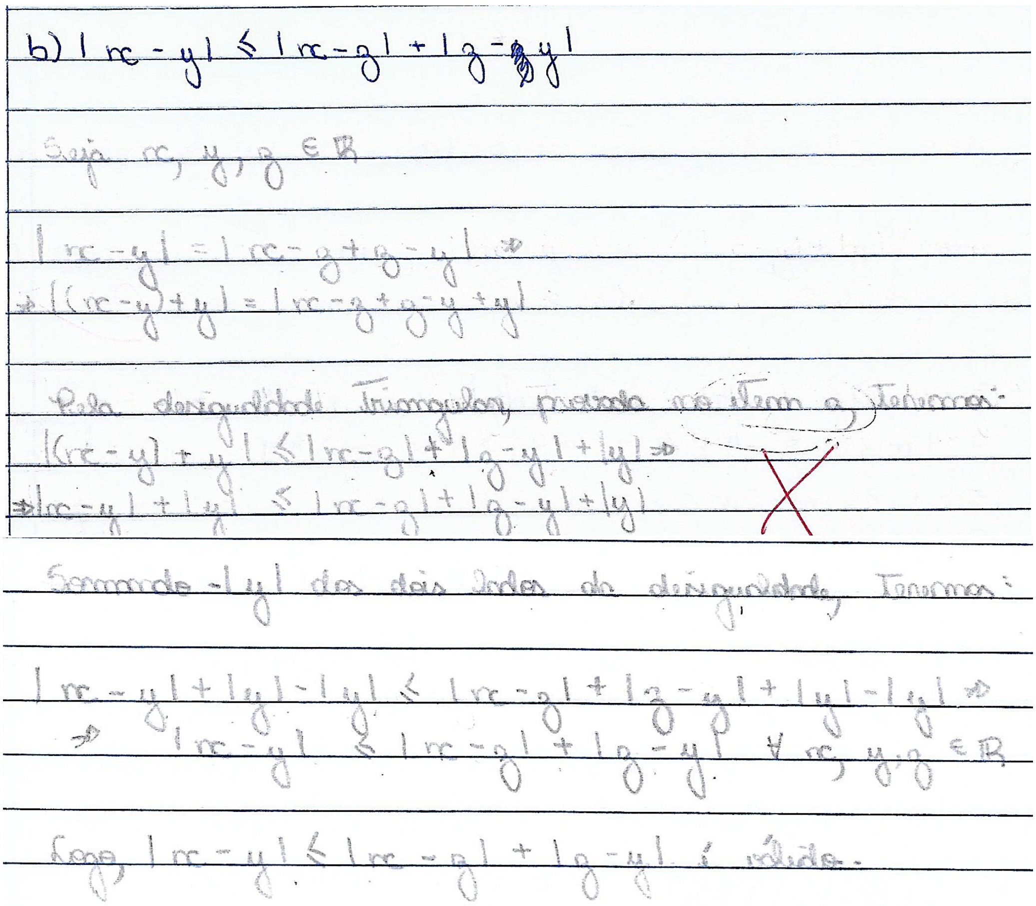
III e I	III e II	IV e I	IV e II
$x+2+x+4 \geq 6$	$x+2+(-x-4) \geq 6$	$-x-2+x+4 \geq 6$	$-x-2+(-x-4) \geq 6$
$2x+6 \geq 6 \ (-6)$	$-2 \geq 6$	$2 \geq 6$	$-2x-6 \geq 6 \ (-6)$
$x \geq \frac{0}{2}$	∄ está solução	∄ está solução	$x \geq \cancel{-12/2}$
			$x \geq -6$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -6\}$

Figura 4.8: Erro de conceito.

Observe que o aluno não sabe o significado de módulo de um número.

Na resolução abaixo temos um erro de demonstração.



b) $|x-y| \leq |x-z| + |z-y|$

Seja $x, y, z \in \mathbb{R}$

$|x-y| = |x-z+z-y| \Rightarrow$

$\Rightarrow |(x-y)+y| = |x-z+z-y+y|$

Pela desigualdade triangular, provada no item a, teremos:

$|(x-y)+y| \leq |x-z| + |z-y| + |y| \Rightarrow$

$\Rightarrow |x-y| + |y| \leq |x-z| + |z-y| + |y|$

Somando $-|y|$ dos dois lados da desigualdade, teremos:

$|x-y| + |y| - |y| \leq |x-z| + |z-y| + |y| - |y| \Rightarrow$

$\Rightarrow |x-y| \leq |x-z| + |z-y| \ \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

Logo, $|x-y| \leq |x-z| + |z-y|$ é válida.

Figura 4.9: Erro de demonstração.

Observe que o aluno não soube utilizar a desigualdade triangular corretamente. Num certo ponto do argumento, o aluno troca $|(x-y)+y|$ por $|x-y|+|y|$.

Conclusão: o erro mais comum foi que os alunos não analisaram todos os casos possíveis nas inequações, também houve vários erros na definição de módulo e percebemos ainda dificuldade em demonstrações.

Capítulo 5

Segundo trabalho em grupo

Neste capítulo serão analisados os resultados obtidos no segundo trabalho em grupo, no qual foi avaliado o conhecimento dos alunos sobre funções.

Os alunos formaram grupos de no máximo 5 pessoas e resolveram uma lista com 6 questões (veja Lista de Exercícios 2 em anexo). Tal atividade foi realizada fora da sala de aula sem a supervisão das professoras. O gráfico de barras exibido neste capítulo representa o desempenho da sala referente a avaliação das 6 questões. Selecionamos 3 questões deste trabalho e fornecemos as suas soluções a seguir.

Questão 2. Determine o maior conjunto A tal que $\mathrm{Im}f \subset D_g$ e em seguida construa a composta $h(x) = g(f(x))$. Temos que $\mathrm{Im}f$ é a imagem da função f e D_g é o domínio da função g.

a) $g(x) = \sqrt{x}$ e $f : A \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - x$.

b) $g(x) = \dfrac{2}{x+2}$ e $f : A \to \mathbb{R},\ f(x) = x + 3$.

Solução.

a) $D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$. Como queremos que $\mathrm{Im}f \subset D_g$, devemos encontrar valores para x tal que $f(x) \geqslant 0$. Temos

$$f(x) = x^2 - x = x \cdot (x - 1) \Rightarrow f(x) \geqslant 0 \ \text{ para } x \leqslant 0 \ \text{ ou } x \geqslant 1.$$

Logo, $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant 1\}$.

Com relação a h, temos $h : A \to \mathbb{R}$, onde

$$h(x) = g(f(x)) = g(x^2 - x) = \sqrt{x^2 - x}.$$

b) $D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2\}$. Como queremos que $\mathrm{Im}f \subset D_g$, devemos encontrar valores para x tal que $f(x) \neq -2$. Temos

$$f(x) = x + 3 \Rightarrow f(x) \neq -2 \text{ para } x \neq -5.$$

Logo, $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -5\}$.

Com relação a h, temos $h : A \to \mathbb{R}$, onde

$$h(x) = g(f(x)) = \frac{2}{f(x) + 2} = \frac{2}{x + 5}.$$

$\square$

Questão 3. Para cada um dos itens do exercício anterior, verifique se f e g são monótonas. Em caso afirmativo, determine se são (estritamente) crescentes ou (estritamente) decrescentes.

Solução.

a)
- Dados $x_1, x_2 \in D_g = [0, +\infty)$, temos
$$x_1 < x_2 \Rightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \Rightarrow g(x_1) < g(x_2).$$
Logo, g é estritamente crescente.
- Dados $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$, temos
$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 > x_2^2 \Rightarrow x_1^2 - x_1 > x_2^2 - x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$
Logo, f é estritamente decrescente em $(-\infty, 0]$.
E dados $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$, temos $x_1 - 1, x_2 - 1 \in [0, +\infty)$ e
$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1(x_1 - 1) < x_2(x_2 - 1) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$
Logo, f é estritamente crescente em $[1, +\infty)$.
Concluímos que f não é monótona.

b)
- Dados $x_1, x_2 \in D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2\}$, temos
$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + 2 < x_2 + 2 \Rightarrow \frac{2}{x_1 + 2} > \frac{2}{x_2 + 2} \Rightarrow g(x_1) > g(x_2).$$
Logo, g é estritamente decrescente.
- Dados $x_1, x_2 \in D_f = A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -5\}$, temos
$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + 3 < x_2 + 3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$
Logo, f é estritamente crescente.

□

Questão 5. Determine se a função dada é injetora, sobrejetora, bijetora. Se for possível calcule a inversa.
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ \text{ dada por } f(x) = 5x + 1.$$

Solução.

- Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Temos
$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 5x_1 + 1 = 5x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2.$$
Logo, f é injetora.
- Seja $y \in \mathbb{R}$. Devemos encontrar $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$. Temos
$$5x + 1 = y \Rightarrow x = \frac{y-1}{5} \Rightarrow f(\frac{y-1}{5}) = 5 \cdot (\frac{y-1}{5}) + 1 = y.$$
Logo, f é sobrejetora.

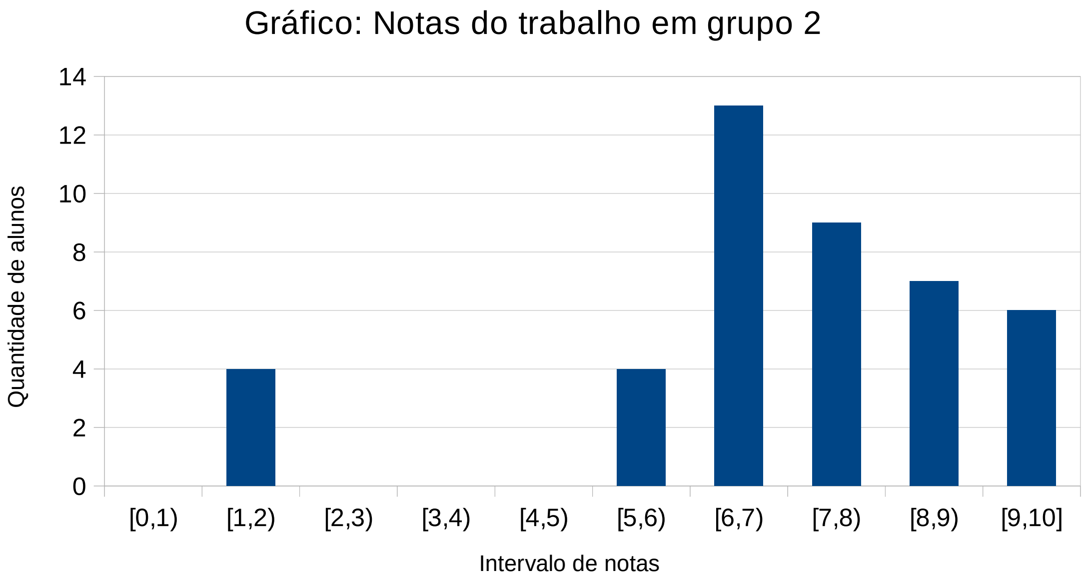
- Como f é injetora e sobrejetora, então f é bijetora.
  Pela construção acima temos que a inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por
  $$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{5}.$$

$\square$

A seguir exibimos o gráfico de barras

$$(\text{intervalo de nota}) \times (\text{quantidade de alunos})$$

que representa o desempenho da sala.

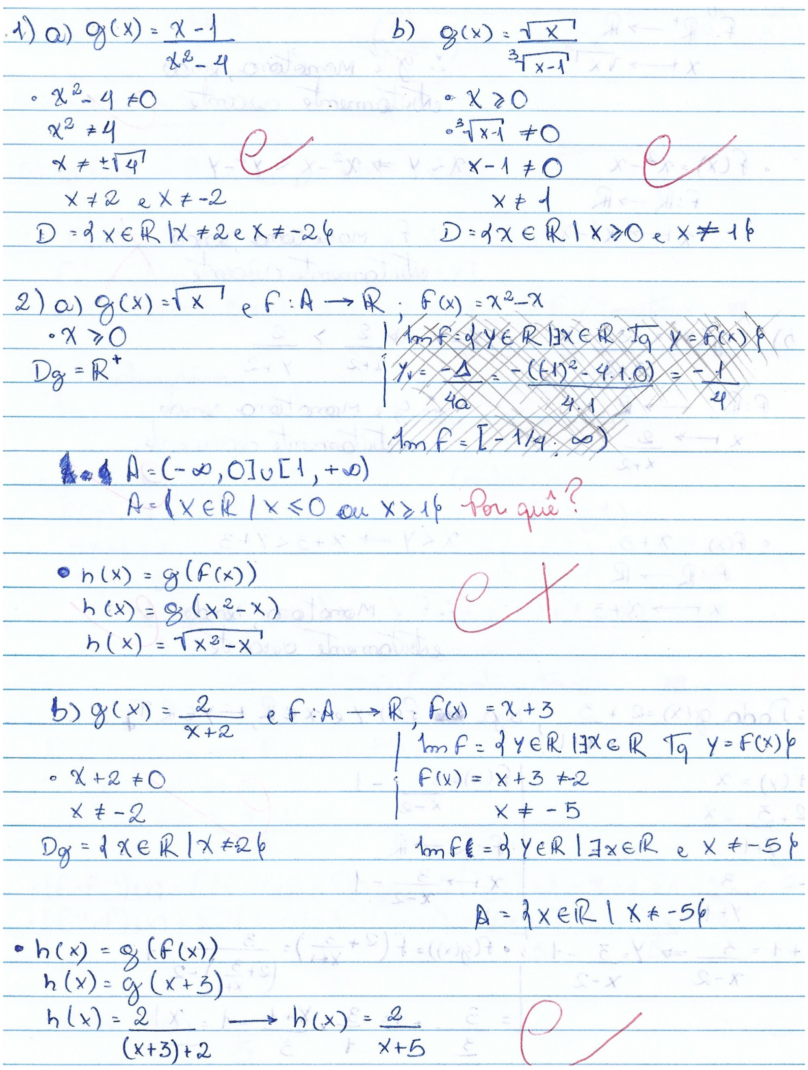


Análise dos resultados

Participaram desta atividade 43 alunos. Foi verificado através da análise das provas que:

- Nenhum aluno conseguiu nota máxima (Dez) e nenhum aluno obteve nota mínima (Zero).
- 35 alunos conseguiram nota acima da média (maior ou igual a $6,0$) e 8 alunos nota abaixo da média (menor que $6,0$).
- 11 alunos acertaram o exercício 2-a), 28 alunos acertaram o exercício 2-b), nenhum aluno acertou o exercício 3-a), 6 alunos acertaram o exercício 3-b) e 21 alunos acertaram o exercício 5.

Primeiramente, mostraremos abaixo o trabalho que teve maior nota.



1) a) $g(x) = \dfrac{x-1}{x^2-4}$

$\circ\ x^2 - 4 \neq 0$

$x^2 \neq 4$

$x \neq \pm\sqrt{4}$

$x \neq 2$ e $x \neq -2$

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2 \text{ e } x \neq -2\}$

C

b) $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x-1}}$

$\circ\ x \geq 0$

$\circ\ \sqrt[3]{x-1} \neq 0$

$x - 1 \neq 0$

$x \neq 1$

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \text{ e } x \neq 1\}$

C

2) a) $g(x) = \sqrt{x}$ e $f: A \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^2 - x$

$\circ\ x \geq 0$

$D_g = \mathbb{R}^+$

$Im\, f = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R} \text{ Tq } y = f(x)\}$

$y_v = \dfrac{-\Delta}{4a} = \dfrac{-((-1)^2 - 4.1.0)}{4.1} = \dfrac{-1}{4}$

$Im\, f = [-1/4, \infty)$

$A = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ ou } x \geq 1\}$ Por quê?

• $h(x) = g(f(x))$

$h(x) = g(x^2 - x)$

$h(x) = \sqrt{x^2 - x}$

C

b) $g(x) = \dfrac{2}{x+2}$ e $f: A \to \mathbb{R}$; $f(x) = x + 3$

$Im\, f = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R} \text{ Tq } y = f(x)\}$

$f(x) = x + 3 \neq -2$

$x \neq -5$

$\circ\ x + 2 \neq 0$

$x \neq -2$

$D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$

$Im\, f = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R} \text{ e } x \neq -5\}$

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -5\}$

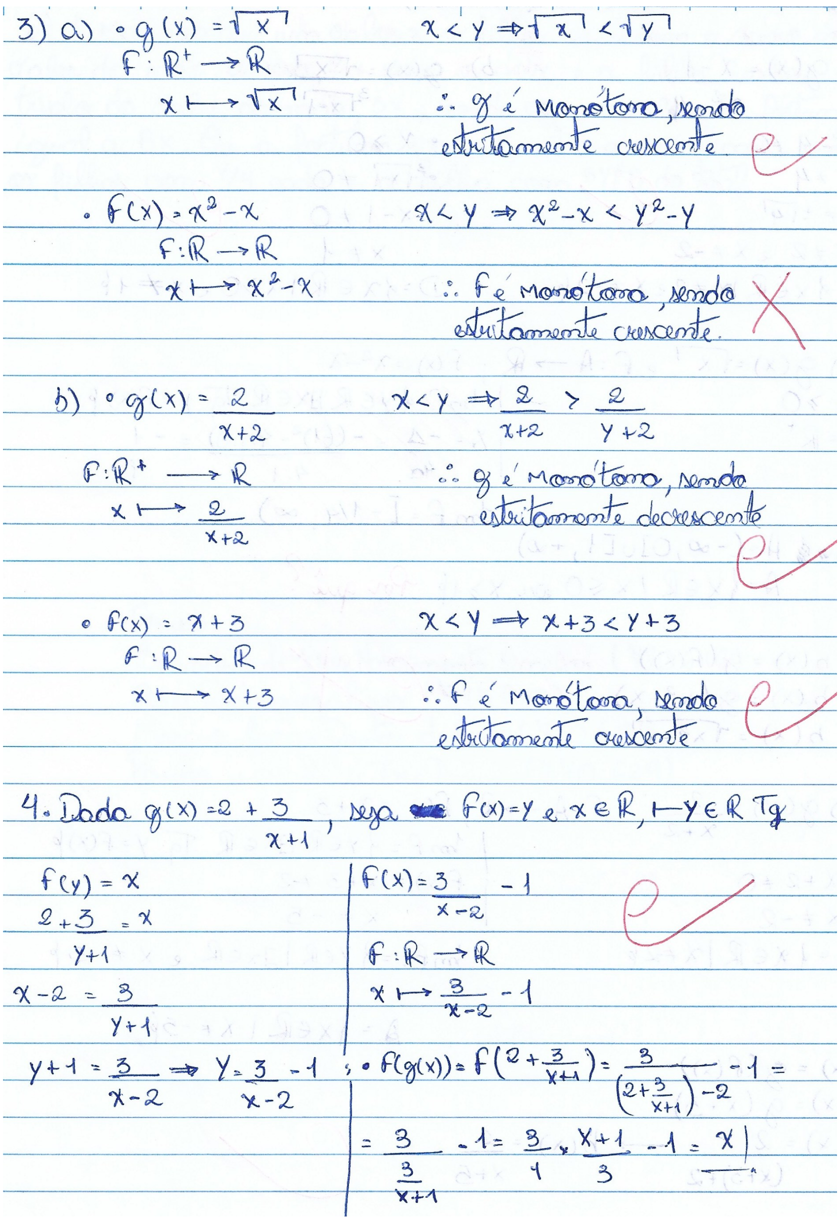
• $h(x) = g(f(x))$

$h(x) = g(x+3)$

$h(x) = \dfrac{2}{(x+3)+2} \longrightarrow h(x) = \dfrac{2}{x+5}$

C

Figura 5.1: Primeira página do trabalho modelo.



3) a) • $g(x) = \sqrt{x}$ $\quad x < y \Rightarrow \sqrt{x} < \sqrt{y}$

$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \sqrt{x}$

$\therefore$ g é Monótona, sendo estritamente crescente

• $f(x) = x^2 - x$ $\quad x < y \Rightarrow x^2 - x < y^2 - y$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^2 - x$

$\therefore$ f é Monótona, sendo estritamente crescente.

b) • $g(x) = \dfrac{2}{x+2}$ $\quad x < y \Rightarrow \dfrac{2}{x+2} > \dfrac{2}{y+2}$

$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{2}{x+2}$

$\therefore$ g é Monótona, sendo estritamente decrescente

• $f(x) = x + 3$ $\quad x < y \Rightarrow x + 3 < y + 3$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x + 3$

$\therefore$ f é Monótona, sendo estritamente crescente

4. Dado $g(x) = 2 + \dfrac{3}{x+1}$, seja $f(x) = y$ e $x \in \mathbb{R}, \vdash y \in \mathbb{R}$ Tg

$f(y) = x$

$2 + \dfrac{3}{y+1} = x$

$x - 2 = \dfrac{3}{y+1}$

$y + 1 = \dfrac{3}{x-2} \Rightarrow y = \dfrac{3}{x-2} - 1$

$f(x) = \dfrac{3}{x-2} - 1$

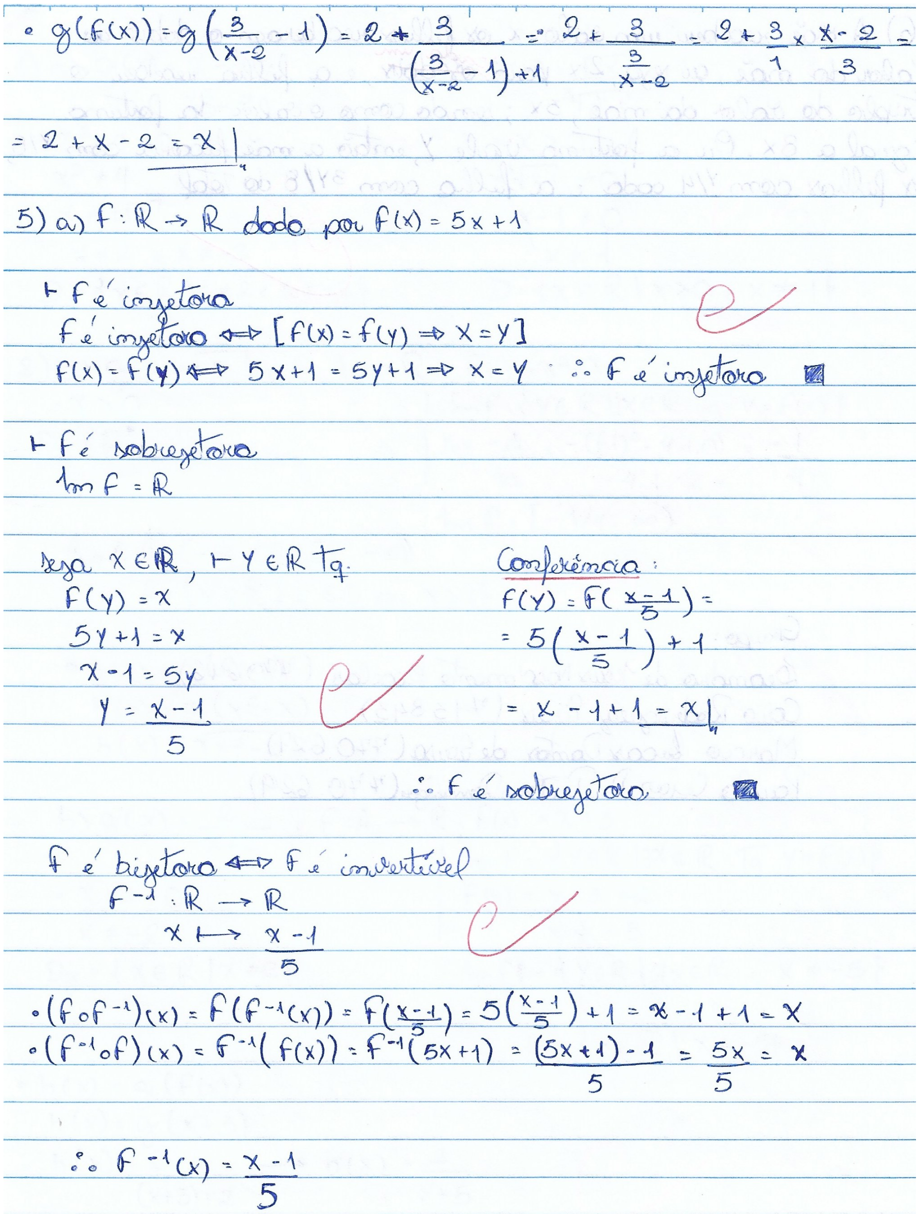
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{3}{x-2} - 1$

• $f(g(x)) = f\left(2 + \dfrac{3}{x+1}\right) = \dfrac{3}{\left(2 + \frac{3}{x+1}\right) - 2} - 1 =$

$= \dfrac{3}{\frac{3}{x+1}} - 1 = \dfrac{3}{1} \times \dfrac{x+1}{3} - 1 = x$

Figura 5.2: Segunda página do trabalho modelo.



$\circ\ g(f(x)) = g\left(\frac{3}{x-2}-1\right) = 2 + \frac{3}{\left(\frac{3}{x-2}-1\right)+1} = 2 + \frac{3}{\frac{3}{x-2}} = 2 + \frac{3}{1} \times \frac{x-2}{3} =$

$= 2 + x - 2 = x$

5) a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 5x+1$

$\vdash$ f é injetora

f é injetora $\Leftrightarrow [f(x) = f(y) \Rightarrow x = y]$

$f(x) = f(y) \Leftrightarrow 5x+1 = 5y+1 \Rightarrow x = y$ $\therefore$ f é injetora ■

$\vdash$ f é sobrejetora

$\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$

Seja $x \in \mathbb{R}$, $\vdash y \in \mathbb{R}$ tq.

$f(y) = x$

$5y + 1 = x$

$x - 1 = 5y$

$y = \frac{x-1}{5}$

Conferência:

$f(y) = f\left(\frac{x-1}{5}\right) =$

$= 5\left(\frac{x-1}{5}\right) + 1$

$= x - 1 + 1 = x$

$\therefore$ f é sobrejetora ■

f é bijetora $\Leftrightarrow$ f é invertível

$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

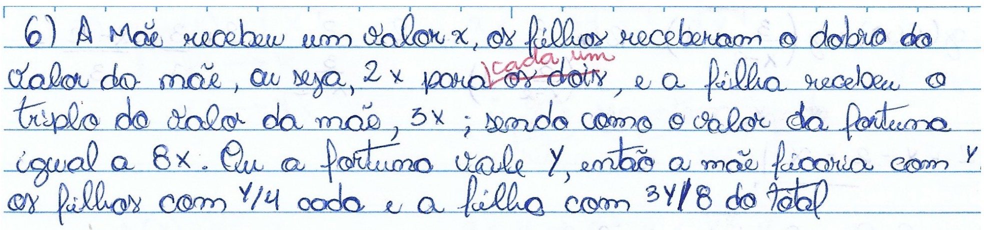
$x \mapsto \frac{x-1}{5}$

$\circ (f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x-1}{5}\right) = 5\left(\frac{x-1}{5}\right) + 1 = x - 1 + 1 = x$

$\circ (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(5x+1) = \frac{(5x+1)-1}{5} = \frac{5x}{5} = x$

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x-1}{5}$

Figura 5.3: Terceira página do trabalho modelo.



6) A Mãe recebeu um valor x, os filhos receberam o dobro do valor da mãe, ou seja, 2x para ~~os dois~~ cada um, e a filha recebeu o triplo do valor da mãe, 3x; sendo como o valor da fortuna igual a 8x. Ou a fortuna vale Y, então a mãe ficaria com Y os filhos com Y/4 cada e a filha com 3Y/8 do total

Figura 5.4: Quarta página do trabalho modelo.

Faremos comentários sobre alguns erros que apareceram nas resoluções dos exercícios.

Nas resoluções abaixo temos exemplos em que os grupos não souberam encontrar o conjunto A nas condições que pede o exercício 2.

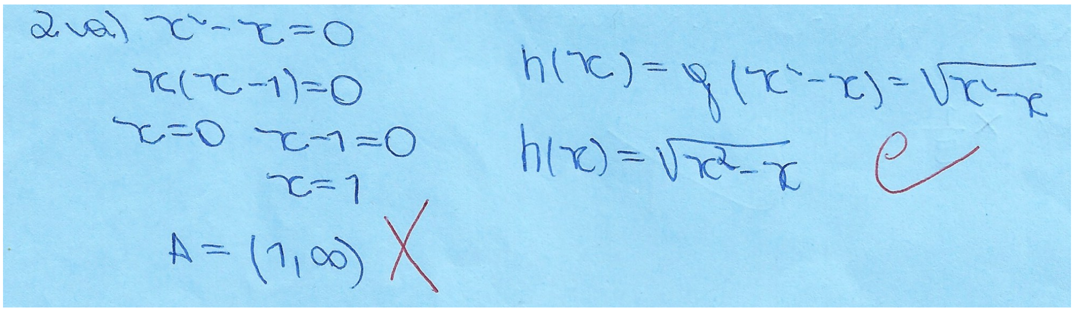


Figura 5.5: Erro na resolução.

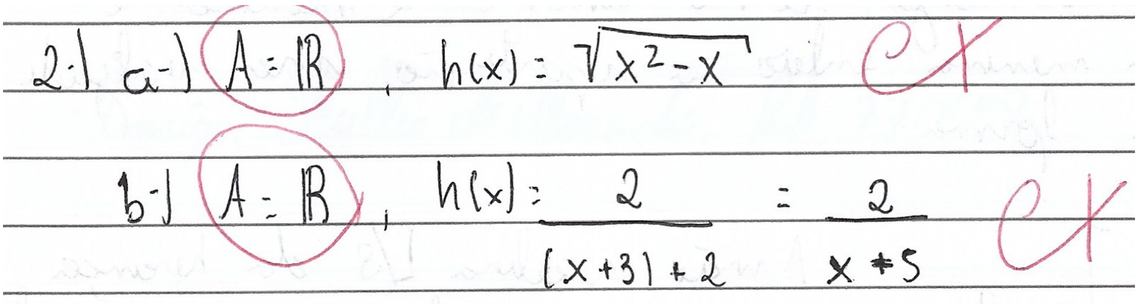


Figura 5.6: Erro na resolução.

No primeiro exemplo note que está faltando o conjunto $(-\infty, 0]$. Já no segundo, note que o grupo informou o domínio da função f sem levar em consideração o fato que Im $f \subset D_g$.

Na resolução abaixo os alunos usaram exemplos para demonstrar o exercício 3-b).

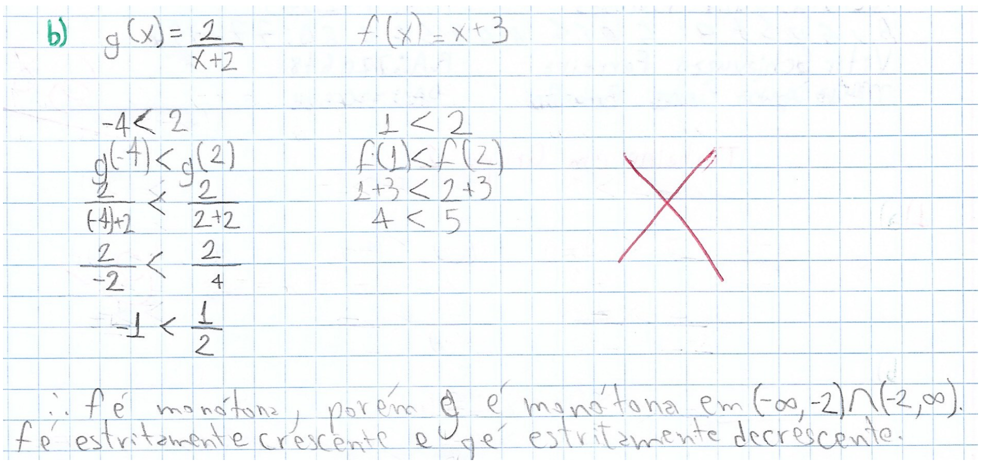


Figura 5.7: Demonstração por exemplo.

Na resolução abaixo temos um exemplo em que os alunos não demonstraram a injetividade e a sobrejetividade da função.

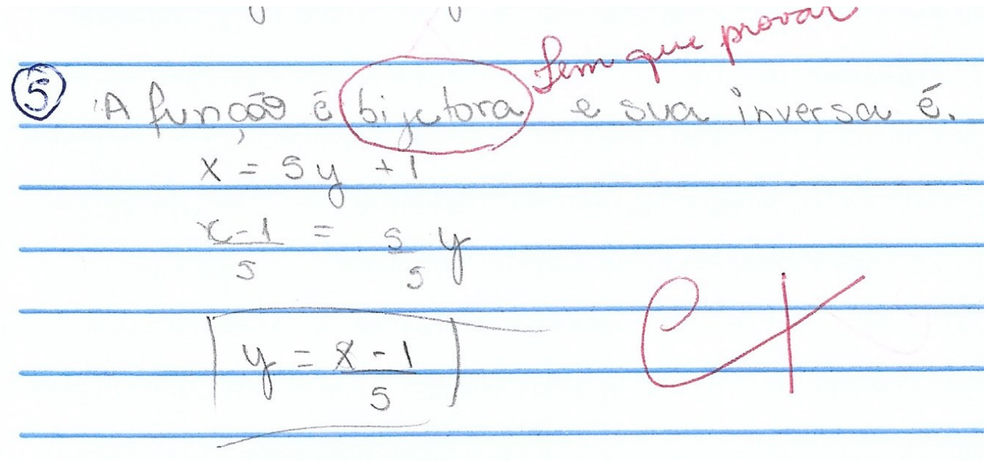


Figura 5.8: Falta justificativa.

Conclusão: embora os grupos saibam determinar a expressão para a lei de $g(f(x))$, muitos têm dificuldade em explicitar o domínio de tal composição (este foi o erro mais frequente). Ainda existe o erro de usar exemplos para demonstrar uma sentença geral como no exercício 3 colocado acima. Além disso, sabem "isolar o x" para determinar a expressão que define a função inversa, mas têm dificuldades em provar a bijetividade.

Capítulo 6

Terceira atividade avaliativa individual

Neste capítulo serão analisados os resultados obtidos na terceira atividade individual, em que foi avaliado o conhecimento dos alunos sobre alguns tópicos de funções, gráfico de funções e porcentagem.

Eles tiveram que resolver individualmente, em sala de aula, os dois exercícios a seguir, cuja solução é fornecida abaixo.

Questão 1. Uma loja de roupas adota a seguinte promoção: "Nas compras acima de 100 reais, ganhe um desconto de 20% sobre o valor que exceder 100 reais."

(a) Duas amigas fazem compras no valor de 70 e 50 reais, respectivamente. Que economia elas fariam se reunissem suas compras em uma única conta?

(b) Determine e esboce o gráfico da função f que associa a cada valor de compras x o valor $f(x)$ efetivamente pago pelo cliente.

Solução.

a) Se reunissem suas compras elas gastariam juntas 120 reais. Então ganhariam um desconto de 20% sobre 20 reais. Como (20% de 20) $= 0,2 \cdot 20 = 4$, elas fariam uma economia de 4 reais.

b) $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$. Se $0 \leqslant x \leqslant 100$ então $f(x) = x$; se $x > 100$ então

$$f(x) = x - (x - 100) \cdot 0,2 = 0,8x + 20.$$

Logo, o gráfico de f fica:

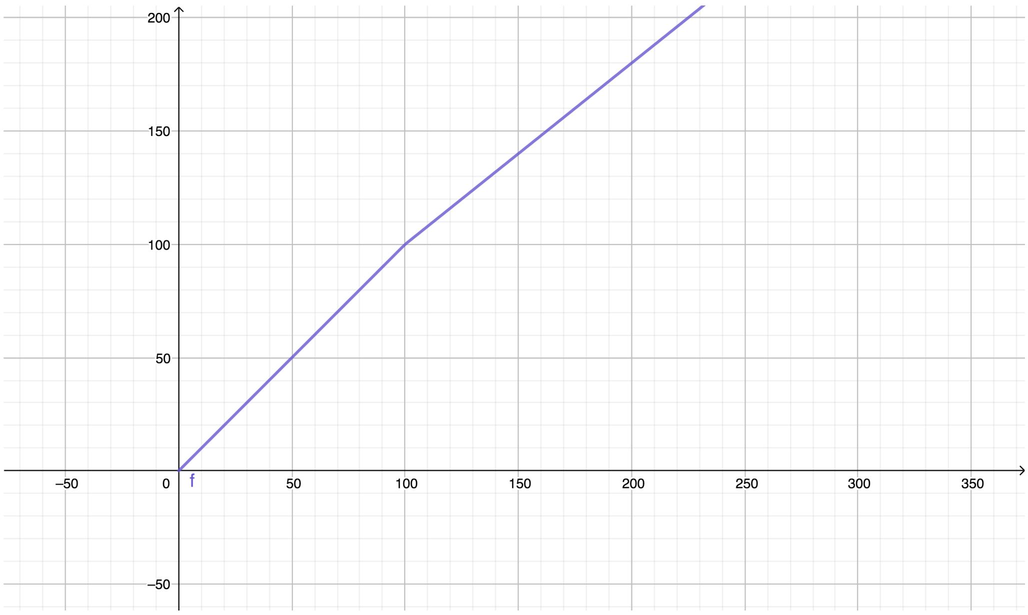


Figura 6.1: Gráfico da função f

Questão 2. Uma loja está fazendo uma promoção na venda de balas: "Compre x balas e ganhe $x\%$ de desconto." A promoção é válida para compras de até 60 balas, caso em que é concedido o desconto máximo de 60%. Alfredo, Beatriz, Carlos e Daniel compraram 10, 15, 30 e 45 balas, respectivamente. Qual deles poderia ter comprado mais balas e gasto a mesma quantia, se empregasse melhor seus conhecimentos de Matemática? Neste exercício espero que você faça também um esboço do gráfico do preço em função do número de balas.

Solução. Denote por a o preço de cada bala. A função desejada é dada por $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ restrita aos naturais, onde $f(x)$ é o preço em função do número de balas x. Temos

$$f(x) = x \cdot a - \frac{x}{100} \cdot xa = -0,01a \cdot x^2 + a \cdot x$$

se $0 \leqslant x \leqslant 60$, e

$$f(x) = a \cdot (x - 60) + f(60) = a \cdot (x - 60) + a \cdot 24 = a \cdot (x - 36)$$

se $x \geqslant 60$.

Faremos o gráfico de f para o caso $a = 1$.

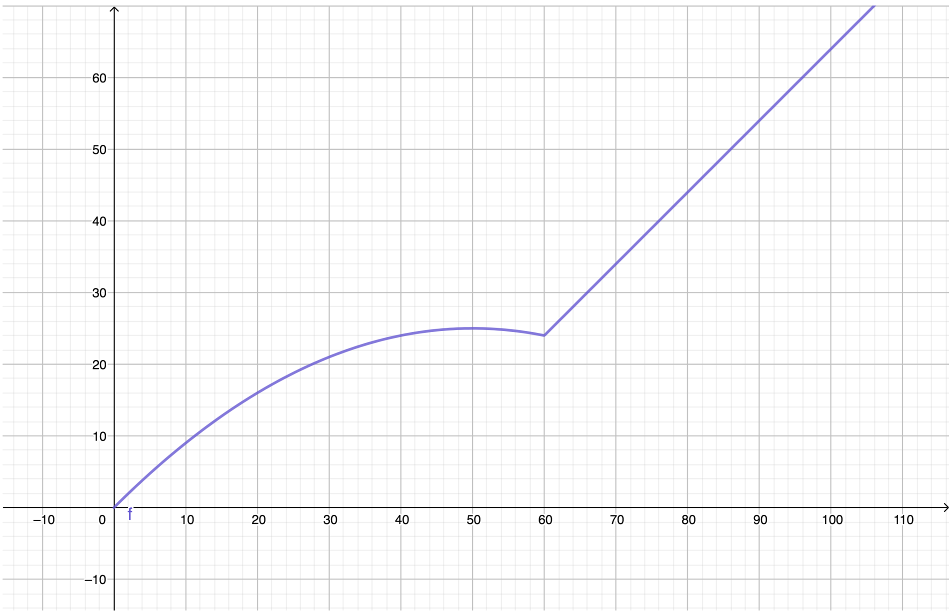


Figura 6.2: Gráfico da função f com $a = 1$

Neste caso,

$$f(x) = \begin{cases} -0,01 \cdot x^2 + x, & se\ 0 \leqslant x \leqslant 60 \\ x - 36, & se\ x \geqslant 60 \end{cases}$$

e temos a tabela representando os valores pagos pelas 4 pessoas:

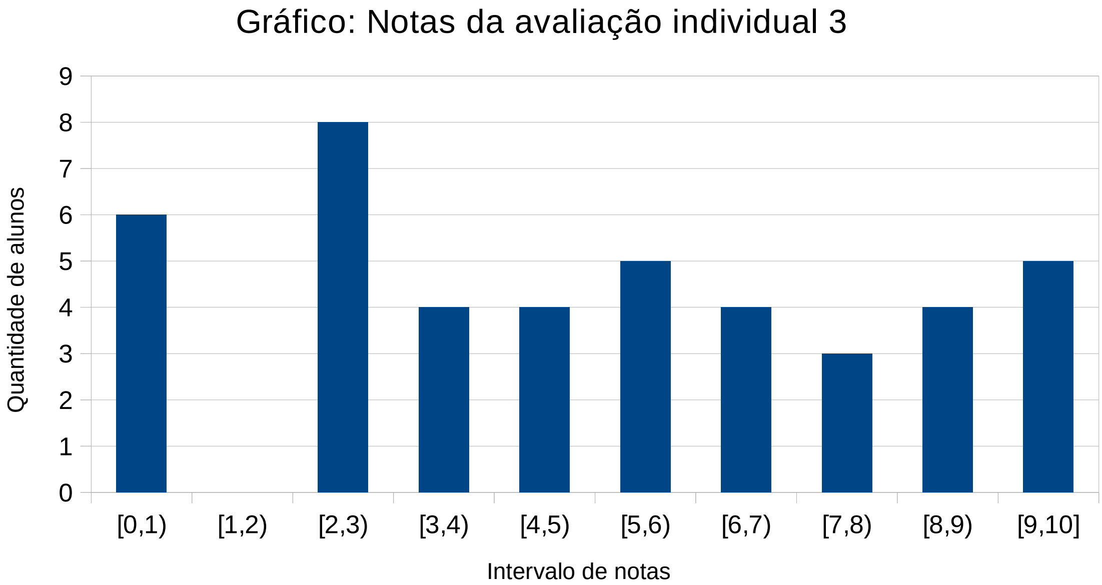
x	$f(x)$
10	9
15	12,75
30	21
45	24,75
60	24

Como o vértice da parábola tem primeira coordenada $x_v = 50$, então Daniel poderia ter comprado 55 balas e ter pago o mesmo valor $f(45) = f(55) = 24,75$. □

A seguir exibimos o gráfico de barras

$$(\text{intervalo de nota}) \times (\text{quantidade de alunos})$$

que representa o desempenho da sala.

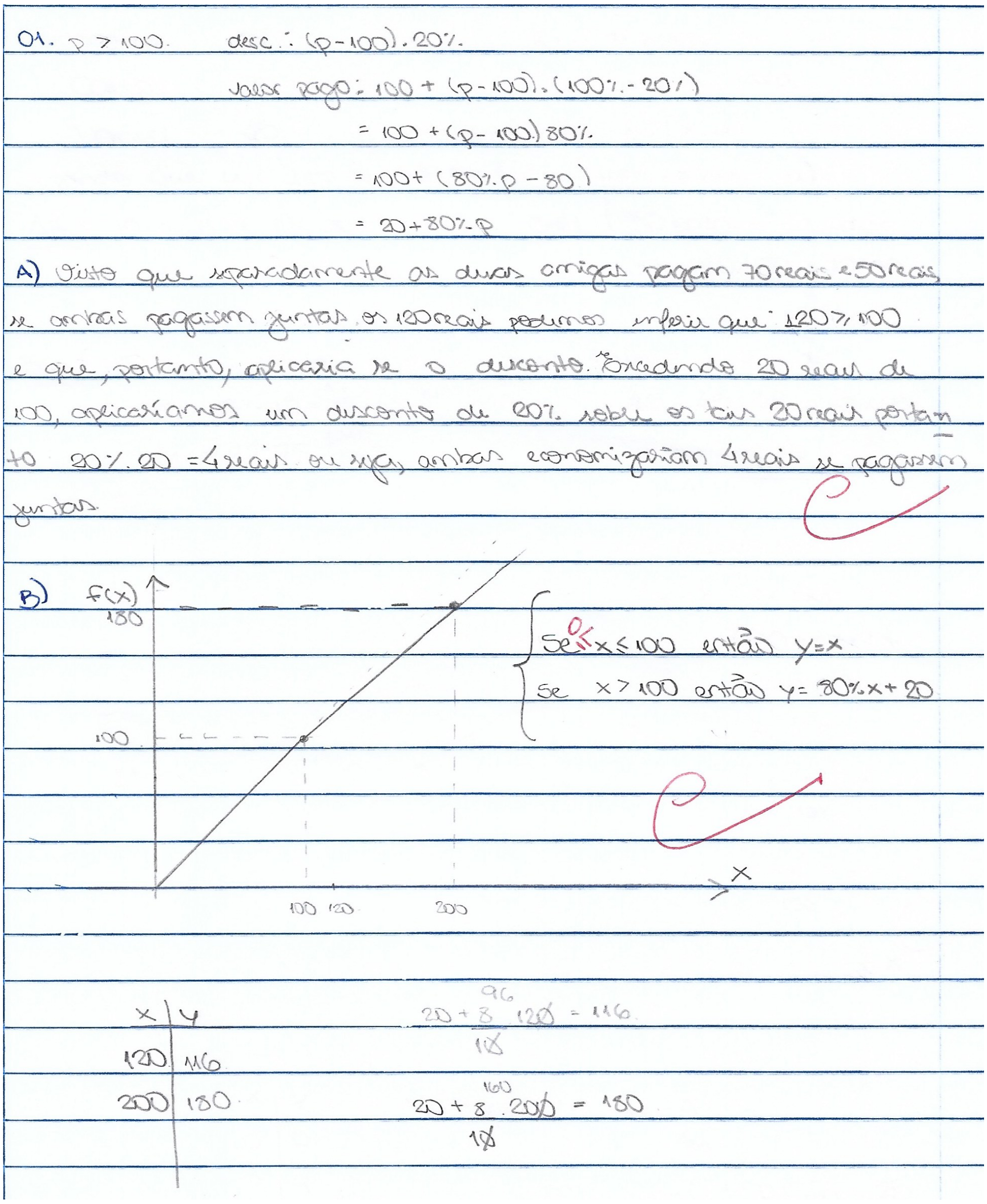


Análise dos resultados

Participaram desta atividade 43 alunos. Foi verificado por meio da análise das provas que:

- Nenhum aluno atingiu nota máxima (Dez) e 6 alunos obtiveram nota mínima (Zero).
- 16 alunos obtiveram nota acima da média (maior ou igual a $6,0$) e 27 alunos nota abaixo da média (menor que $6,0$).
- 34 alunos acertaram o exercício 1-a), 13 alunos acertaram o exercício 1-b), 10 alunos acertaram o exercício 2.

Primeiramente, mostraremos uma atividade em que o aluno fez tudo corretamente.



01. $p > 100$. desc.: $(p-100).20\%$.

valor pago: $100 + (p-100).(100\% - 20\%)$

$= 100 + (p-100)\,80\%$

$= 100 + (80\%.p - 80)$

$= 20 + 80\%.p$

A) Visto que separadamente as duas amigas pagam 70 reais e 50 reais, se ambas pagassem juntas os 120 reais podemos inferir que $120 > 100$ e que, portanto, aplicaria-se o desconto. Excedendo 20 reais de 100, aplicaríamos um desconto de 20% sobre os tais 20 reais, portanto $20\%.20 = 4$ reais, ou seja, ambas economizariam 4 reais se pagassem juntas.

B)

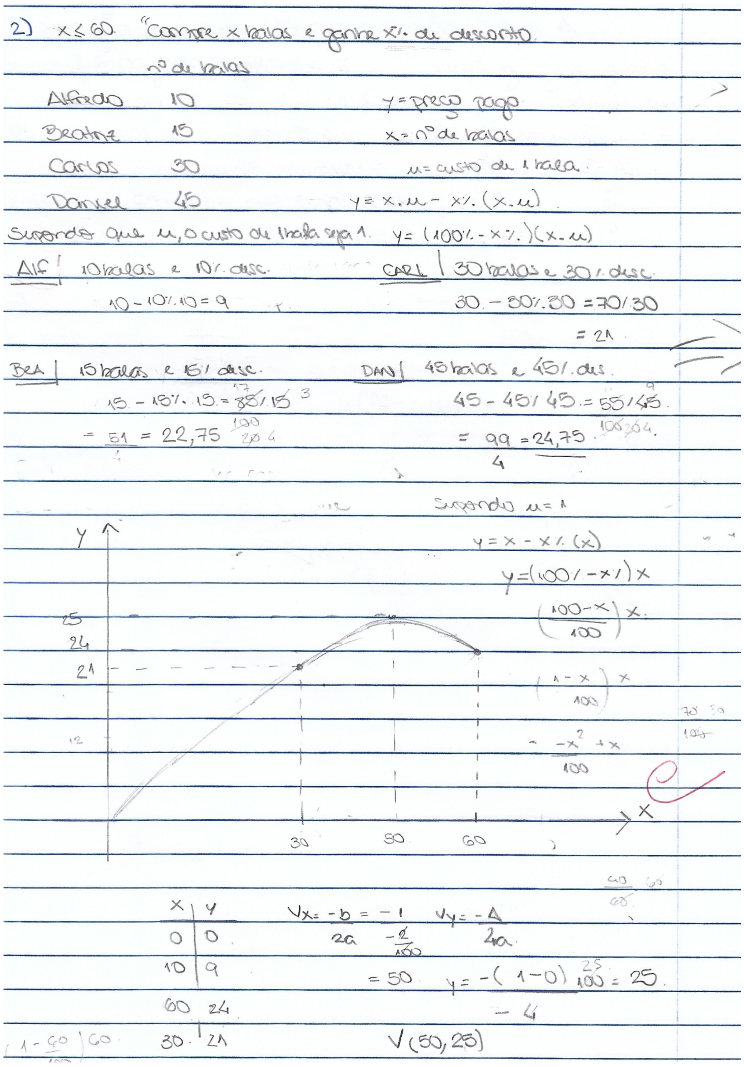
$$\begin{cases} \text{Se } 0 \le x \le 100 \text{ então } y = x \\ \text{Se } x > 100 \text{ então } y = 80\%x + 20 \end{cases}$$

x	y
120	116
200	180

$20 + \frac{8}{10}.120 = 116$ (96)

$20 + \frac{8}{10}.200 = 180$ (160)

Figura 6.3: Primeira página da prova modelo.


2) $x \leq 60$ "Compre x balas e ganhe x% de desconto"

nº de balas

Alfredo 10 — y = preço pago

Beatriz 15 — x = nº de balas

Carlos 30 — u = custo de 1 bala.

Daniel 45 — $y = x.u - x\%.(x.u)$

Supondo que u, o custo de 1 bala seja 1. $y = (100\% - x\%)(x.u)$

Alf | 10 balas e 10% desc. — Carl | 30 balas e 30% desc.

$10 - 10\%.10 = 9$ — $30 - 30\%.30 = 70/30 = 21$

Bea | 15 balas e 15% desc. — Dan | 45 balas e 45% des.

$15 - 15\%.15 = 85/15$ — $45 - 45\%\,45 = 55/45$

$= \frac{51}{4} = 22{,}75$ — $= \frac{99}{4} = 24{,}75$

Supondo $u = 1$

$y = x - x\%(x)$

$y = (100\% - x\%)x$

$\left(\frac{100-x}{100}\right)x$

$\left(1 - \frac{x}{100}\right)x$

$= \frac{-x^2}{100} + x$

x	y
0	0
10	9
60	24
30	21

$V_x = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{-\frac{2}{100}} = 50$ — $V_y = \frac{-\Delta}{4a}$

$y = \frac{-(1-0)}{-4}\cdot\frac{100}{} = 25$

$V(50, 25)$

Figura 6.4: Segunda página da prova modelo.

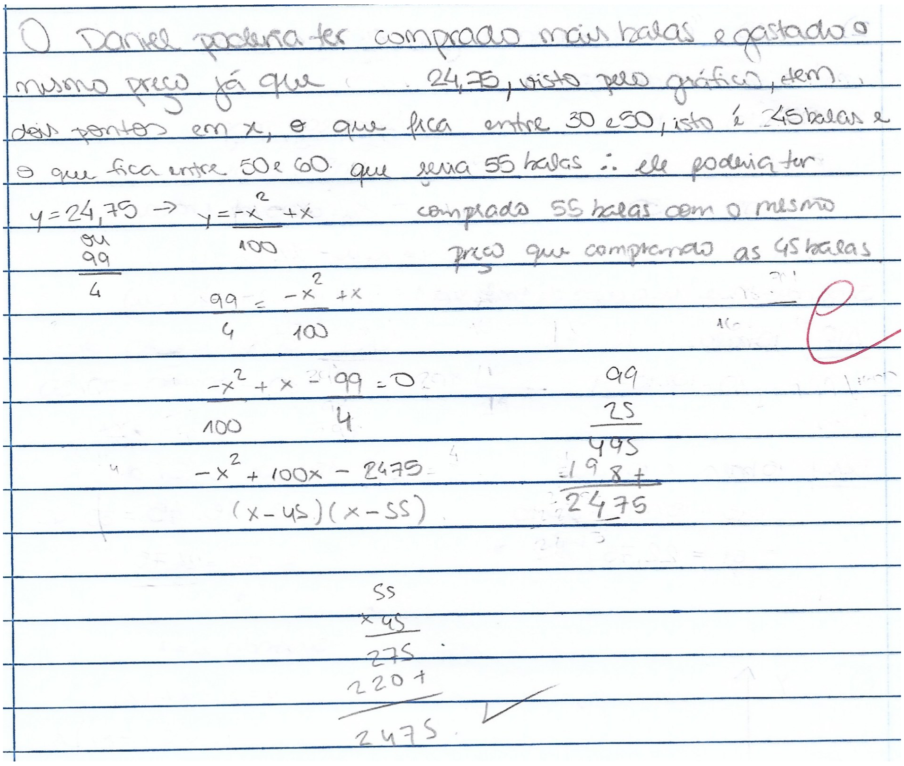


Figura 6.5: Terceira página da prova modelo.

Faremos comentários sobre alguns erros que apareceram nas resoluções dos exercícios.

Na resolução abaixo temos um exemplo em que o aluno não soube interpretar o que o exercício pedia.

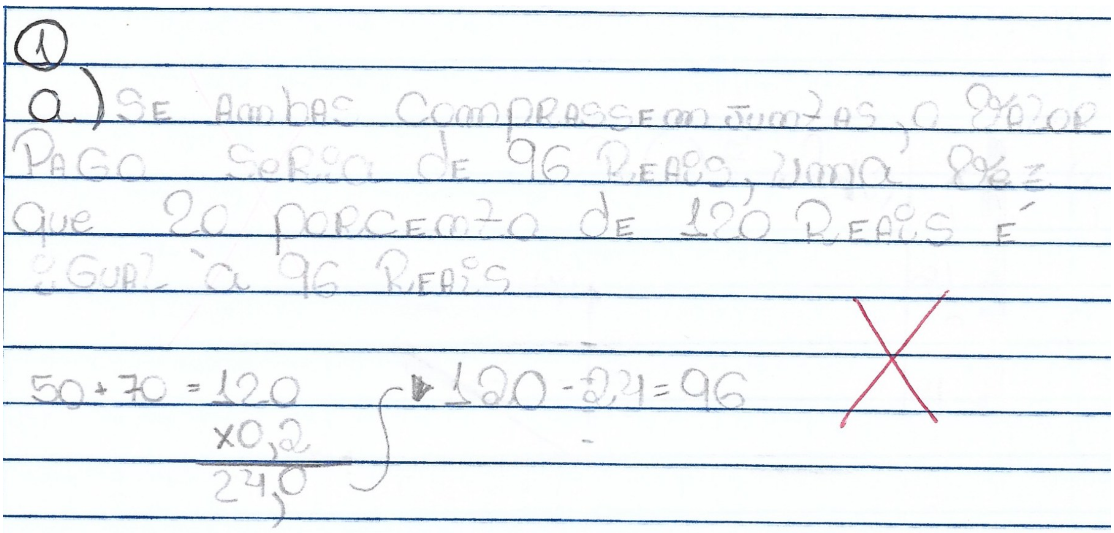


Figura 6.6: Erro de interpretação.

Observem que o aluno fez 20% de 120 ao invés de 20% de 20.

Na resolução abaixo o aluno não fez o gráfico corretamente.

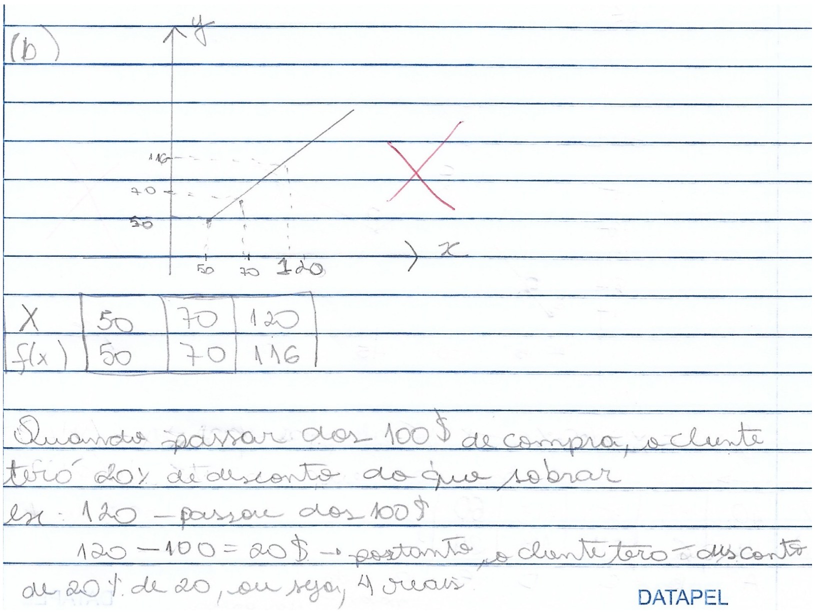


Figura 6.7: Erro no gráfico.

Na resolução abaixo temos outro exemplo em que o aluno não fez o gráfico corretamente. E também não soube interpretar a pergunta.

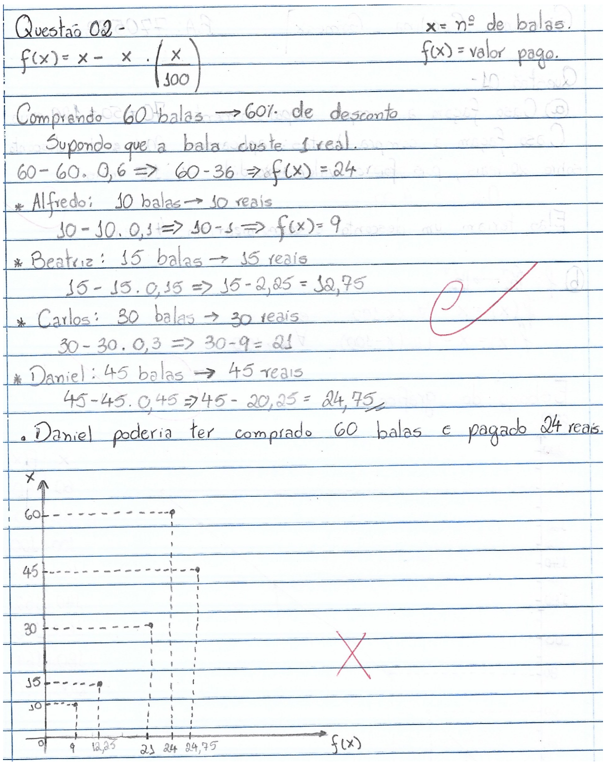


Figura 6.8: Erro no gráfico e de interpretação.

Na resolução abaixo o aluno define a função de maneira errada.

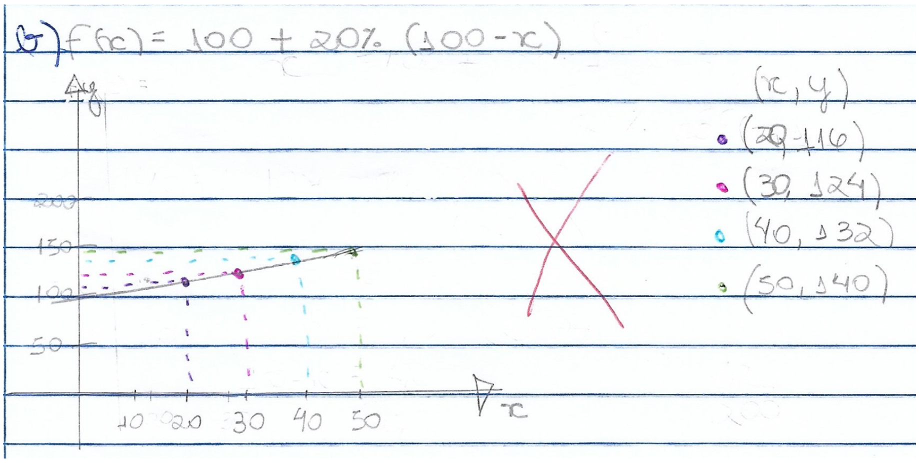


Figura 6.9: Erro na função.

O mesmo ocorre a seguir.

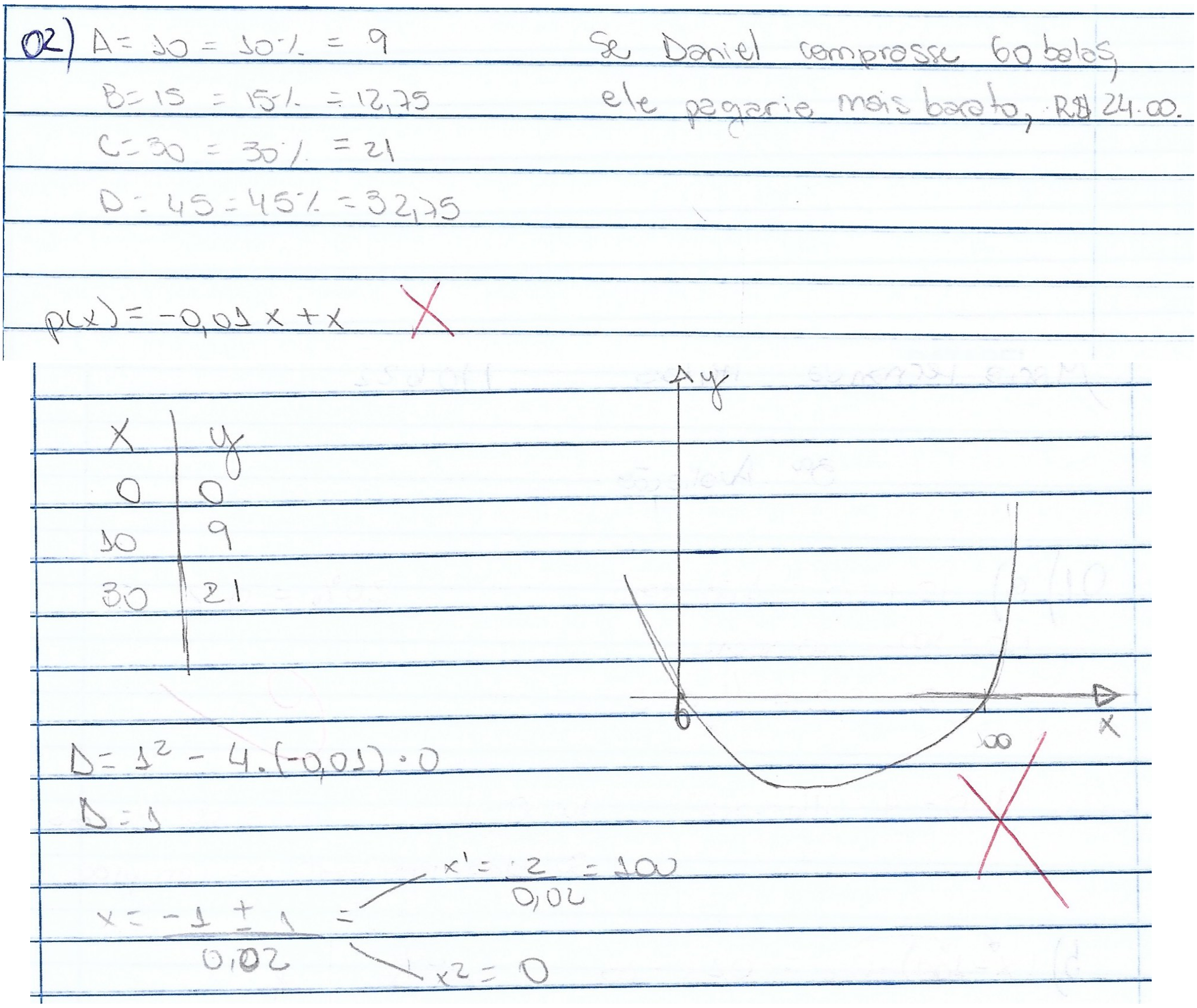
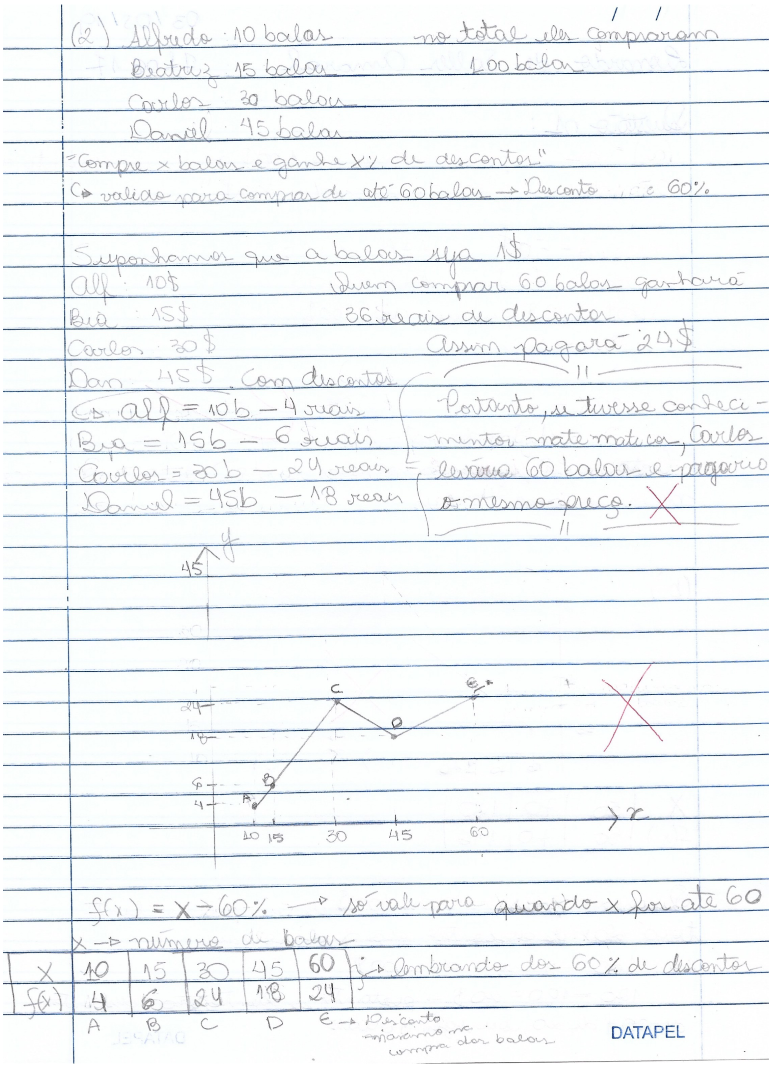


Figura 6.10: Erro na função e no gráfico.

Na resolução abaixo o aluno não soube interpretar a pergunta do exercício, além de não saber fazer o gráfico.



(2) Alfredo: 10 balas — no total eles compraram 100 balas
Beatriz: 15 balas
Carlos: 30 balas
Daniel: 45 balas
"Compre x balas e ganhe x% de desconto"
→ válido para compras de até 60 balas → Desconto = 60%

Suponhamos que a balas seja 1$
Alf: 10$ — Quem comprar 60 balas ganhará 36 reais de desconto. Assim pagará 24$
Bia: 15$
Carlos: 30$
Dan: 45$ Com descontos
→ Alf = 10b − 4 reais
Bia = 15b − 6 reais
Carlos = 30b − 24 reais
Daniel = 45b − 18 reais
Portanto, se tivesse conhecimentos matemáticos, Carlos levaria 60 balas e pagaria o mesmo preço.

$f(x) = x \div 60\%$ → só vale para quando x for até 60
x → número de balas

x	10	15	30	45	60
f(x)	4	6	24	18	24
	A	B	C	D	E

→ lembrando dos 60% de desconto
E → Desconto máximo na compra das balas

DATAPEL

Figura 6.11: Erro de interpretação.

Conclusão: o maior erro foi na construção dos gráficos, tanto no primeiro como no segundo exercício; houve também dificuldade, em grande parte dos alunos, em definir a função nos dois exercícios. Observamos uma quantidade significativa de alunos que erraram ao dar a resposta do segundo exercício.

Capítulo 7

Terceiro trabalho em grupo

Neste capítulo serão analisados os resultados obtidos no terceiro trabalho, em que foi avaliado o conhecimento dos alunos sobre potenciação e radiciação.

Os alunos formaram grupos de no máximo 5 pessoas e resolveram 10 exercícios de uma lista com 20 questões (veja Lista de Exercícios 3 em anexo), resolveram os exercícios de números ímpares do 1 ao 10 e os de números pares do 11 ao 20. Tal atividade foi realizada fora da sala de aula sem a supervisão das professoras. O gráfico de barras exibido neste capítulo representa o desempenho da sala referente a avaliação das 10 questões. Selecionamos 2 questões deste trabalho e fornecemos as suas soluções a seguir.

Questão 7. Racionalize

$$(a)\frac{2}{2+3\sqrt{3}} \qquad (b)\frac{\sqrt[3]{9}-1}{\sqrt[3]{3}-1} \qquad (c)\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{4}}.$$

Solução. Temos

$$(a)\ \frac{2}{2+3\sqrt{3}} = \frac{2\cdot(2-3\sqrt{3})}{(2+3\sqrt{3})\cdot(2-3\sqrt{3})} = \frac{2\cdot(2-3\sqrt{3})}{4-27} = \frac{-2\cdot(2-3\sqrt{3})}{23}.$$

$$(b)\ \frac{\sqrt[3]{9}-1}{\sqrt[3]{3}-1} = \frac{(\sqrt[3]{9}-1)\cdot(\sqrt[3]{3}+1)}{(\sqrt[3]{3}-1)\cdot(\sqrt[3]{3}+1)} = \frac{(\sqrt[3]{9}-1)\cdot(\sqrt[3]{3}+1)}{\sqrt[3]{9}-1} = \sqrt[3]{3}+1.$$

$$(c)\ \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{4}} = \frac{1\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{4})}{(\sqrt{3}-\sqrt{4})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{4})} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{4}}{3-4} = -\sqrt{3}-2.$$

□

Questão 9. Simplifique

$$(a)\ a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{a^{-\frac{1}{2}}b^{-1}}\sqrt{a^{-1}b^{\frac{2}{3}}}, a,b>0. \qquad (b)\frac{2^{x+4}-2\cdot 2^{x}}{2\cdot 2^{x+3}}, x\in\mathbb{R}.$$

Solução.

$$(a)\ a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{a^{-\frac{1}{2}}b^{-1}}\sqrt{a^{-1}b^{\frac{2}{3}}} = a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}b}}\sqrt{\frac{b^{\frac{2}{3}}}{a}} = a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}} = \frac{a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{4}{6}}} = a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{2}}\ .$$

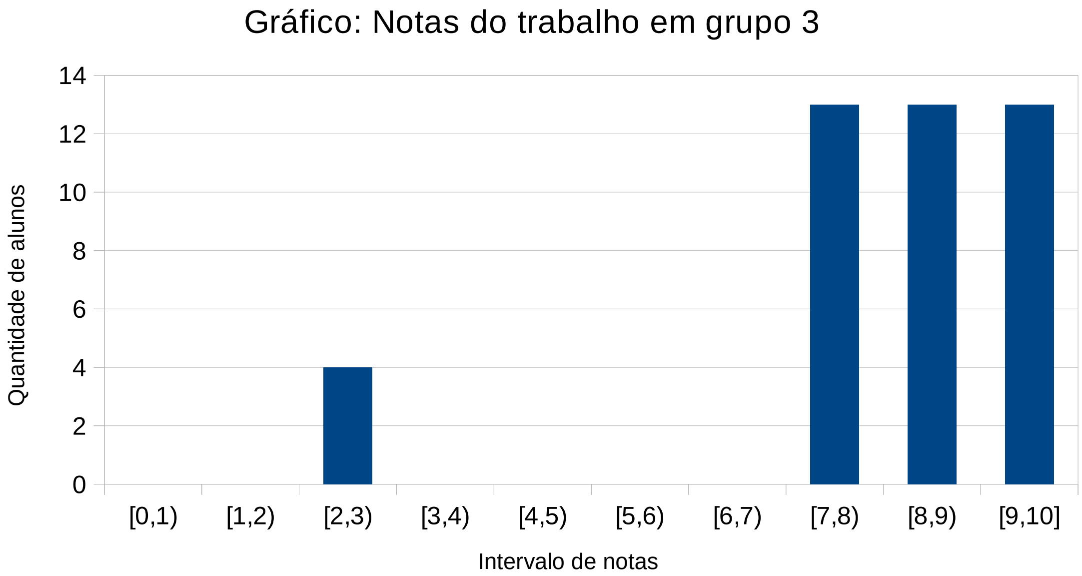
$$(b)\frac{2^{x+4}-2\cdot 2^{x}}{2\cdot 2^{x+3}} = \frac{2^{x}\cdot(2^{4}-2)}{2^{x}\cdot 2^{4}} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}\ .$$

□

A seguir exibimos o gráfico de barras

$$(\text{intervalo de nota}) \times (\text{quantidade de alunos})$$

que representa o desempenho da sala.

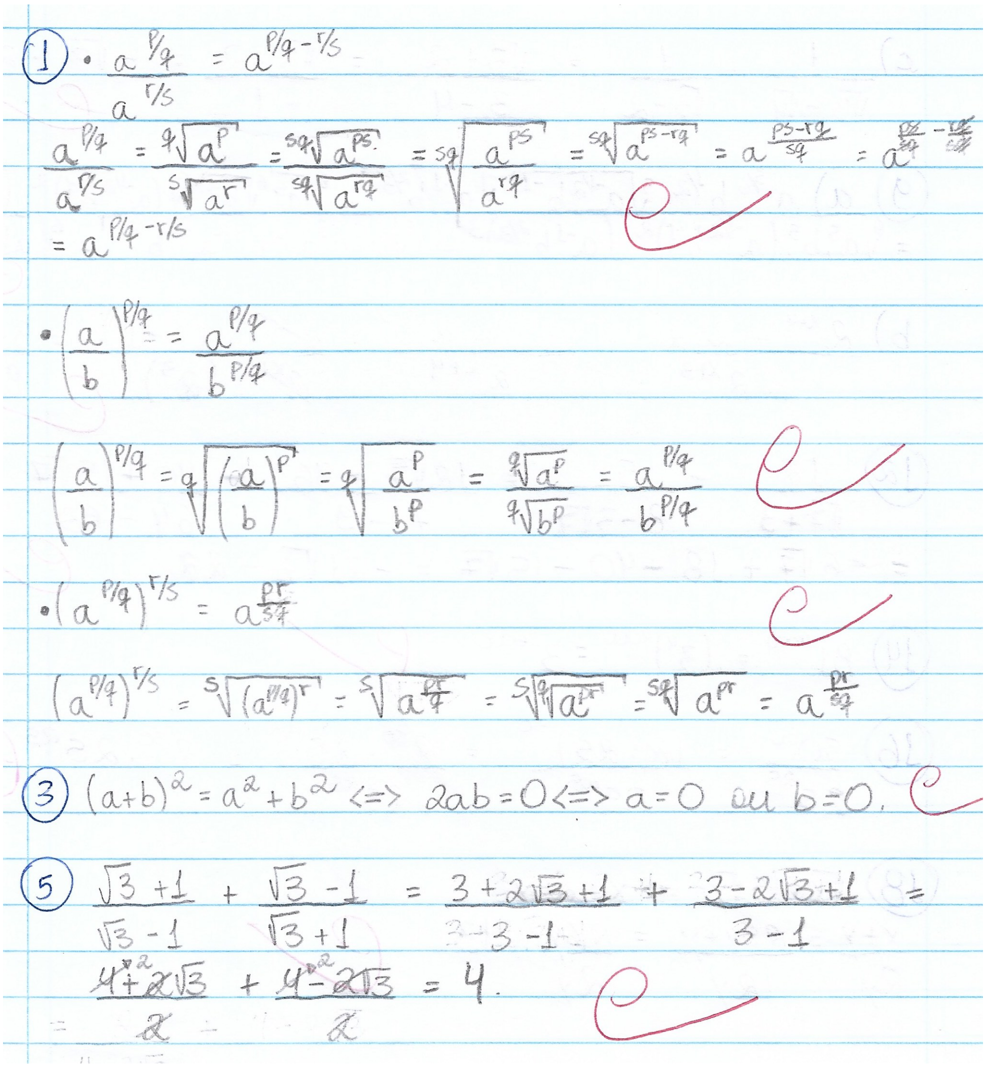


Análise dos resultados

Participaram desta atividade 43 alunos. Foi verificado por meio da análise das provas que:

- Nenhum aluno obteve nota mínima (Zero) e 8 alunos obtiveram nota máxima (Dez).
- 39 alunos conseguiram nota acima da média (maior ou igual a $6,0$) e 4 alunos nota abaixo da média (menor que $6,0$).
- 35 alunos acertaram o exercício 7-a), 20 alunos acertaram o exercício 7-b), 35 alunos acertaram o exercício 7-c), 25 alunos acertaram o exercício 9-a) e 26 alunos acertaram o exercício 9-b).

Primeiramente, mostraremos abaixo o trabalho que teve maior nota.



(1) • $\frac{a^{p/q}}{a^{r/s}} = a^{p/q - r/s}$

$\frac{a^{p/q}}{a^{r/s}} = \frac{\sqrt[q]{a^p}}{\sqrt[s]{a^r}} = \frac{\sqrt[sq]{a^{ps}}}{\sqrt[sq]{a^{rq}}} = \sqrt[sq]{\frac{a^{ps}}{a^{rq}}} = \sqrt[sq]{a^{ps-rq}} = a^{\frac{ps-rq}{sq}} = a^{\frac{ps}{sq} - \frac{rq}{sq}}$

$= a^{p/q - r/s}$

• $\left(\frac{a}{b}\right)^{p/q} = \frac{a^{p/q}}{b^{p/q}}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^{p/q} = \sqrt[q]{\left(\frac{a}{b}\right)^p} = \sqrt[q]{\frac{a^p}{b^p}} = \frac{\sqrt[q]{a^p}}{\sqrt[q]{b^p}} = \frac{a^{p/q}}{b^{p/q}}$

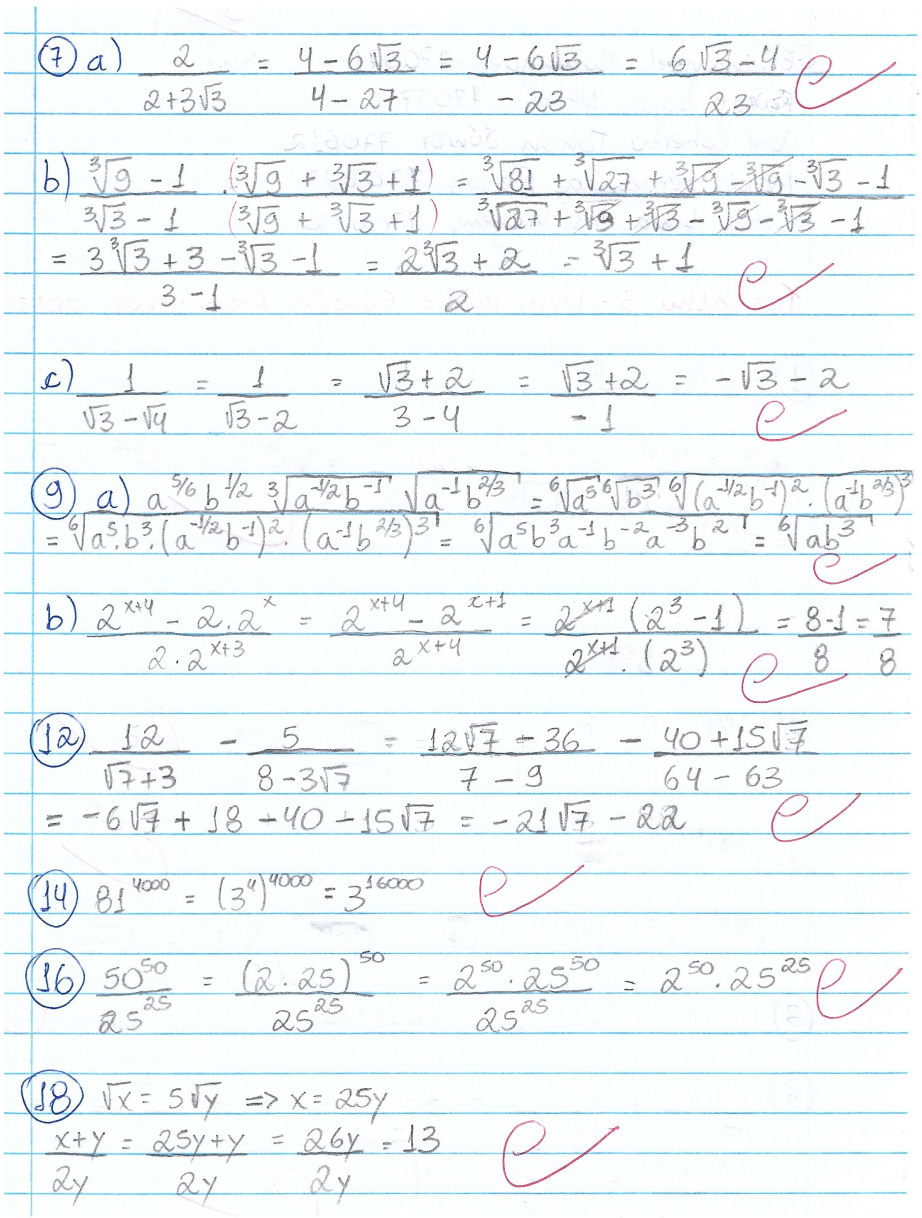
• $\left(a^{p/q}\right)^{r/s} = a^{\frac{pr}{sq}}$

$\left(a^{p/q}\right)^{r/s} = \sqrt[s]{(a^{p/q})^r} = \sqrt[s]{a^{\frac{pr}{q}}} = \sqrt[s]{\sqrt[q]{a^{pr}}} = \sqrt[sq]{a^{pr}} = a^{\frac{pr}{sq}}$

(3) $(a+b)^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow 2ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$.

(5) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} + \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{3+2\sqrt{3}+1}{3-1} + \frac{3-2\sqrt{3}+1}{3-1} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} + \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 4.$

Figura 7.1: Primeira página do trabalho modelo.



7) a) $\dfrac{2}{2+3\sqrt{3}} = \dfrac{4-6\sqrt{3}}{4-27} = \dfrac{4-6\sqrt{3}}{-23} = \dfrac{6\sqrt{3}-4}{23}$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{9}-1}{\sqrt[3]{3}-1} \cdot \dfrac{(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1)}{(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1)} = \dfrac{\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{27}+\cancel{\sqrt[3]{9}}-\cancel{\sqrt[3]{9}}-\sqrt[3]{3}-1}{\sqrt[3]{27}+\cancel{\sqrt[3]{9}}+\sqrt[3]{3}-\cancel{\sqrt[3]{9}}-\sqrt[3]{3}-1}$

$= \dfrac{3\sqrt[3]{3}+3-\sqrt[3]{3}-1}{3-1} = \dfrac{2\sqrt[3]{3}+2}{2} = \sqrt[3]{3}+1$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{4}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}-2} = \dfrac{\sqrt{3}+2}{3-4} = \dfrac{\sqrt{3}+2}{-1} = -\sqrt{3}-2$

9) a) $a^{5/6}\, b^{1/2}\, \sqrt[3]{a^{-1/2}b^{-1}}\, \sqrt{a^{-1}b^{2/3}} = \sqrt[6]{a^5}\sqrt[6]{b^3}\sqrt[6]{(a^{-1/2}b^{-1})^2 \cdot (a^{-1}b^{2/3})^3}$

$= \sqrt[6]{a^5 \cdot b^3 \cdot (a^{-1/2}b^{-1})^2 \cdot (a^{-1}b^{2/3})^3} = \sqrt[6]{a^5 b^3 a^{-1} b^{-2} a^{-3} b^{2}} = \sqrt[6]{a b^3}$

b) $\dfrac{2^{x+4} - 2 \cdot 2^x}{2 \cdot 2^{x+3}} = \dfrac{2^{x+4} - 2^{x+1}}{2^{x+4}} = \dfrac{\cancel{2^{x+1}}(2^3-1)}{\cancel{2^{x+1}} \cdot (2^3)} = \dfrac{8-1}{8} = \dfrac{7}{8}$

12) $\dfrac{12}{\sqrt{7}+3} - \dfrac{5}{8-3\sqrt{7}} = \dfrac{12\sqrt{7}-36}{7-9} - \dfrac{40+15\sqrt{7}}{64-63}$

$= -6\sqrt{7}+18-40-15\sqrt{7} = -21\sqrt{7}-22$

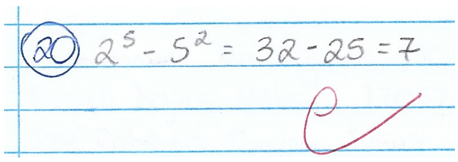
14) $81^{4000} = (3^4)^{4000} = 3^{16000}$

16) $\dfrac{50^{50}}{25^{25}} = \dfrac{(2 \cdot 25)^{50}}{25^{25}} = \dfrac{2^{50} \cdot 25^{50}}{25^{25}} = 2^{50} \cdot 25^{25}$

18) $\sqrt{x} = 5\sqrt{y} \Rightarrow x = 25y$

$\dfrac{x+y}{2y} = \dfrac{25y+y}{2y} = \dfrac{26y}{2y} = 13$

Figura 7.2: Segunda página do trabalho modelo.



20) $2^5 - 5^2 = 32 - 25 = 7$

Figura 7.3: Terceira página do trabalho modelo.

Faremos comentários sobre alguns erros que apareceram nas resoluções dos exercícios. Na resolução abaixo temos um exemplo em que o grupo não soube racionalizar.

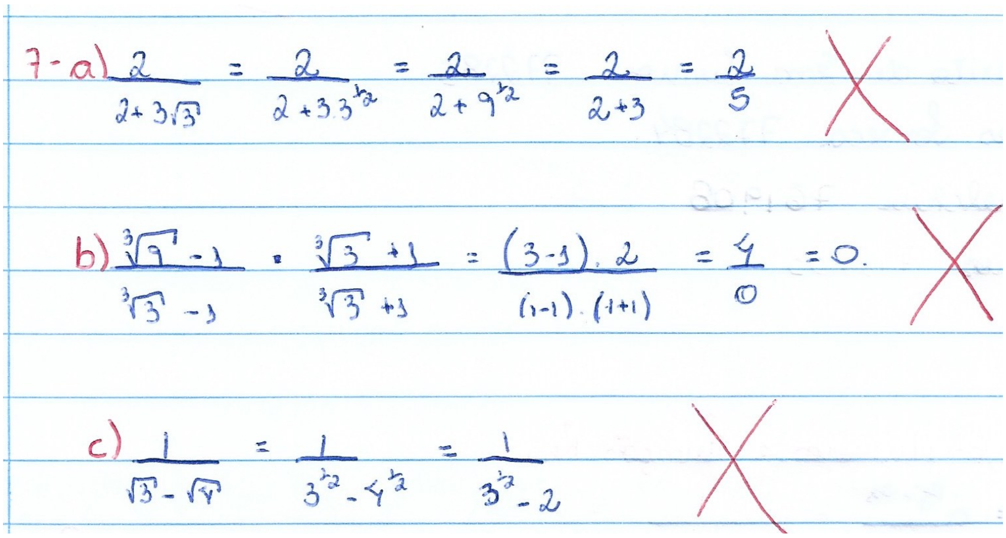


Figura 7.4: Erro de racionalização.

Observem que os alunos tiveram erros de potenciação, de radiciação e de fração. Chama a atenção a igualdade $(4/0) = 0$.

Na resolução abaixo temos um exemplo em que os alunos não souberam utilizar as propriedades de potência.

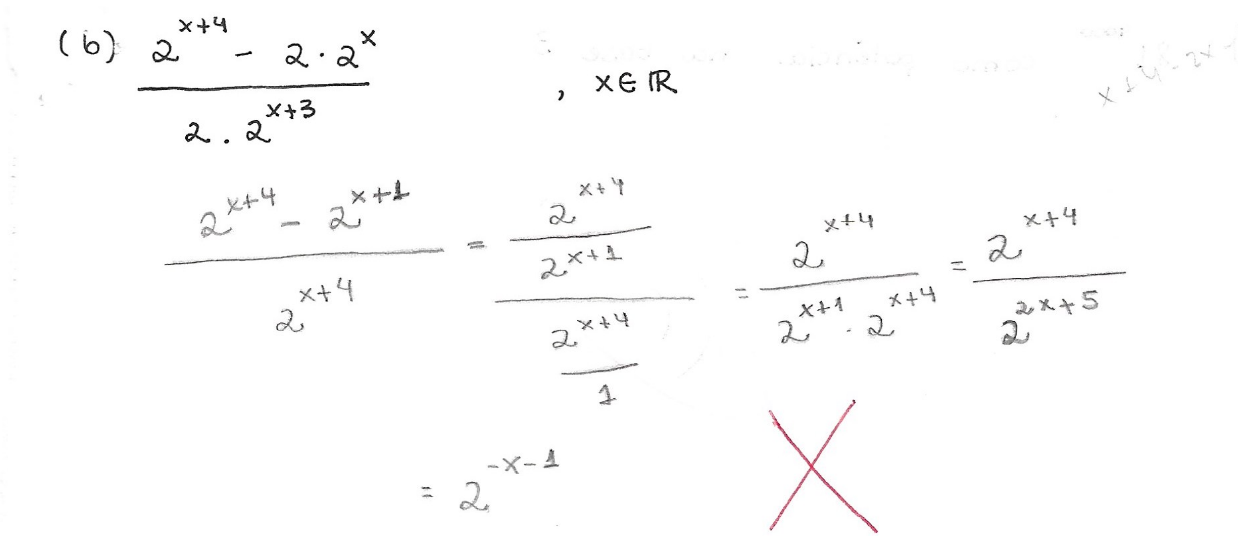


Figura 7.5: Erro de potenciação.

Na resolução abaixo temos um exemplo em que os alunos não assimilaram as propriedades básicas da multiplicação.

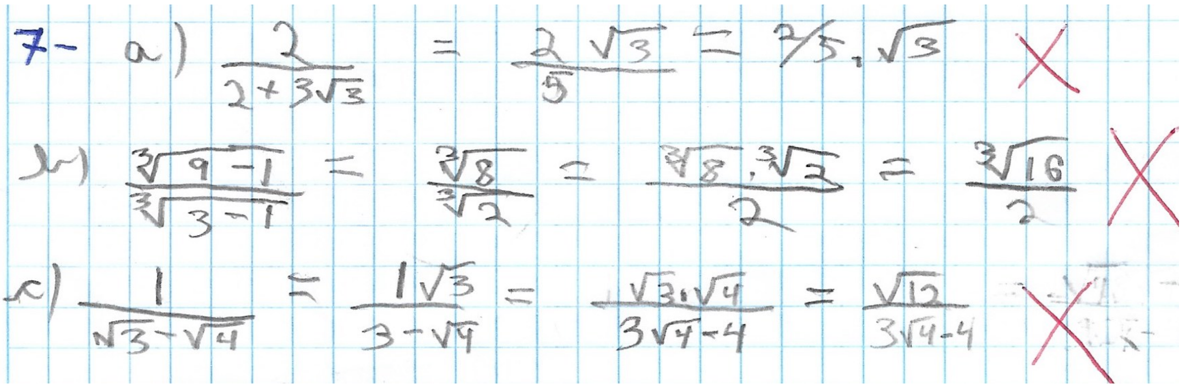


Figura 7.6: Erro de racionalização.

Conclusão: Neste trabalho a maioria dos alunos foi bem. Os poucos erros que ocorreram foram em propriedades básicas de multiplicação, de potenciação e de radiciação, além de não saberem trabalhar com frações.

Capítulo 8

Quarta atividade avaliativa individual

Neste capítulo serão analisados os resultados obtidos na quarta atividade individual, em que foi avaliado o conhecimento dos alunos sobre função exponencial e função logarítmica .

Eles tiveram que resolver individualmente, em sala de aula, os dois exercícios a seguir, cuja solução é fornecida abaixo.

Questão 1. Considere a função f definida por $f(x) = \log_e(x^2 + x)$. Determine o domínio da função f e faça um esboço do gráfico de f; neste gráfico marque os pontos onde $f(x) = 0$.

Solução. Temos que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \Leftrightarrow x^2 + x > 0 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ou } x > 0.$$

Assim, $\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.

Agora,

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

O gráfico é dado por

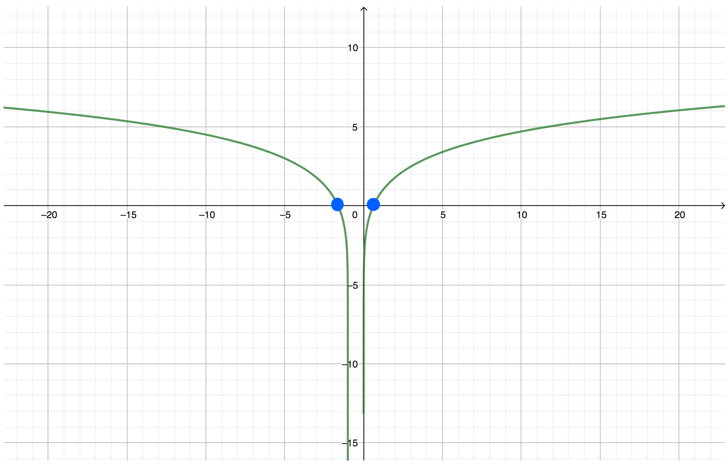


Figura 8.1: Gráfico da função f

Questão 2. Resolva

$$(2^{x+1})^{2x-3} < 128.$$

Solução. Seguem as implicações:

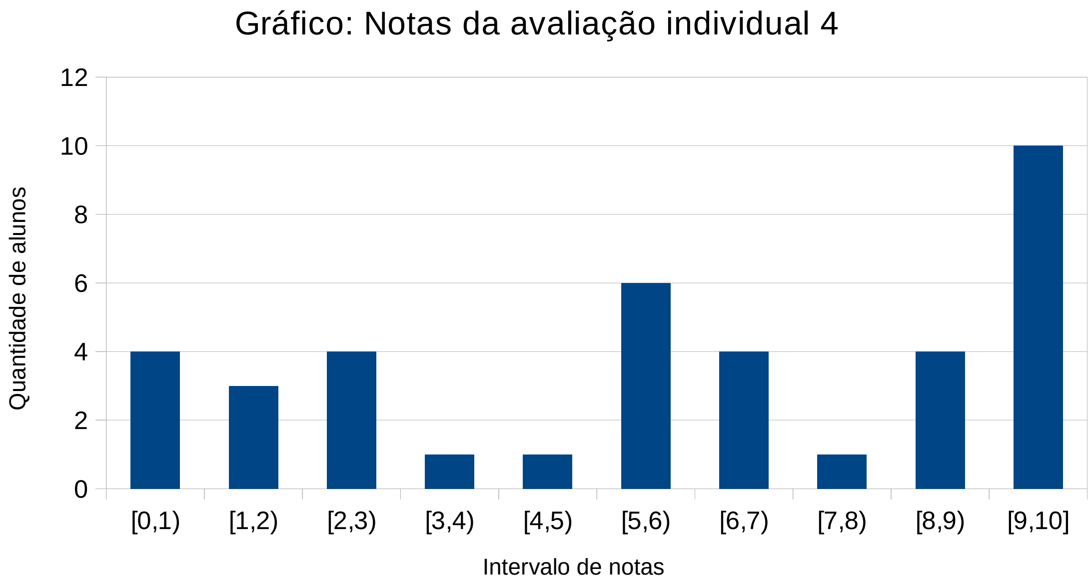
$$(2^{x+1})^{2x-3} < 128 \Leftrightarrow 2^{(x+1)(2x-3)} < 2^7 \Leftrightarrow (x+1)(2x-3) < 7 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 10 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < \frac{5}{2}.$$

$\square$

A seguir exibimos o gráfico de barras

$$(\text{intervalo de nota}) \times (\text{quantidade de alunos})$$

que representa o desempenho da sala.

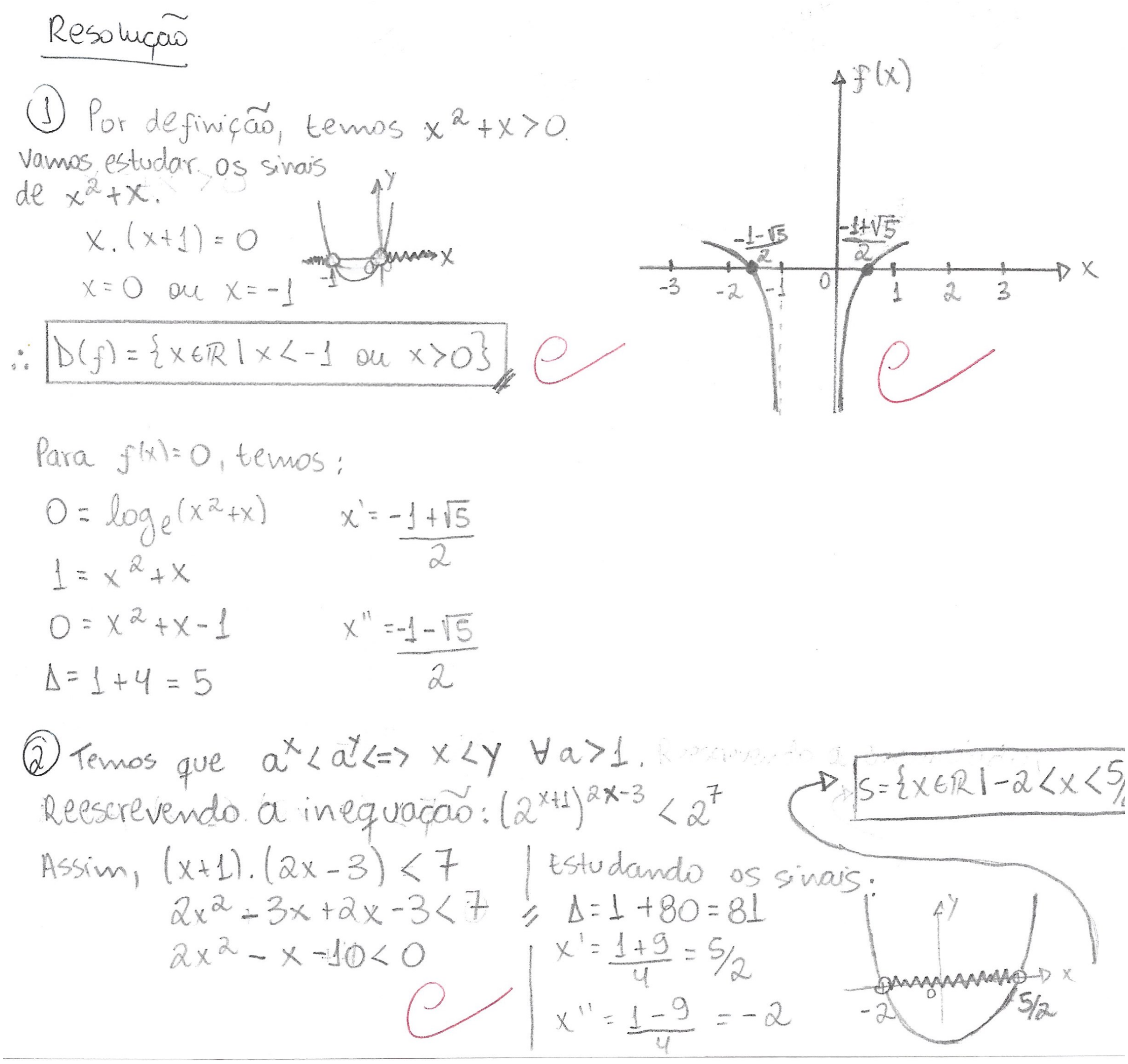


Análise dos resultados

Participaram desta atividade 38 alunos. Foi verificado por meio da análise das provas que:

- 7 alunos obtiveram nota máxima (Dez) e 4 alunos obtiveram nota mínima (Zero).
- 19 alunos conseguiram nota acima da média (maior ou igual a $6,0$) e 19 alunos nota abaixo da média (menor que $6,0$).
- 8 alunos acertaram o exercício 1 e 23 alunos acertaram o exercício 2.

Primeiramente, mostraremos uma atividade em que o aluno fez tudo corretamente.



Resolução

1) Por definição, temos $x^2+x>0$.
Vamos estudar os sinais de x^2+x.
$x.(x+1)=0$
$x=0$ ou $x=-1$
$\therefore \boxed{D(f)=\{x\in\mathbb{R} \mid x<-1 \text{ ou } x>0\}}$

Para $f(x)=0$, temos:
$0=\log_e(x^2+x)$
$1=x^2+x$
$0=x^2+x-1$
$\Delta=1+4=5$
$x'=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
$x''=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

2) Temos que $a^x<a^y \iff x<y \ \forall a>1$.
Reescrevendo a inequação: $(2^{x+1})^{2x-3}<2^7$
Assim, $(x+1).(2x-3)<7$
$2x^2-3x+2x-3<7$
$2x^2-x-10<0$
Estudando os sinais:
$\Delta=1+80=81$
$x'=\frac{1+9}{4}=5/2$
$x''=\frac{1-9}{4}=-2$
$\boxed{S=\{x\in\mathbb{R} \mid -2<x<5/2}$

Figura 8.2: Prova modelo.

Faremos comentários sobre alguns erros que apareceram nas resoluções dos exercícios.

Na resolução abaixo temos um exemplo em que o aluno não soube resolver inequação do segundo grau. Além disso, o aluno não soube fazer o gráfico corretamente.

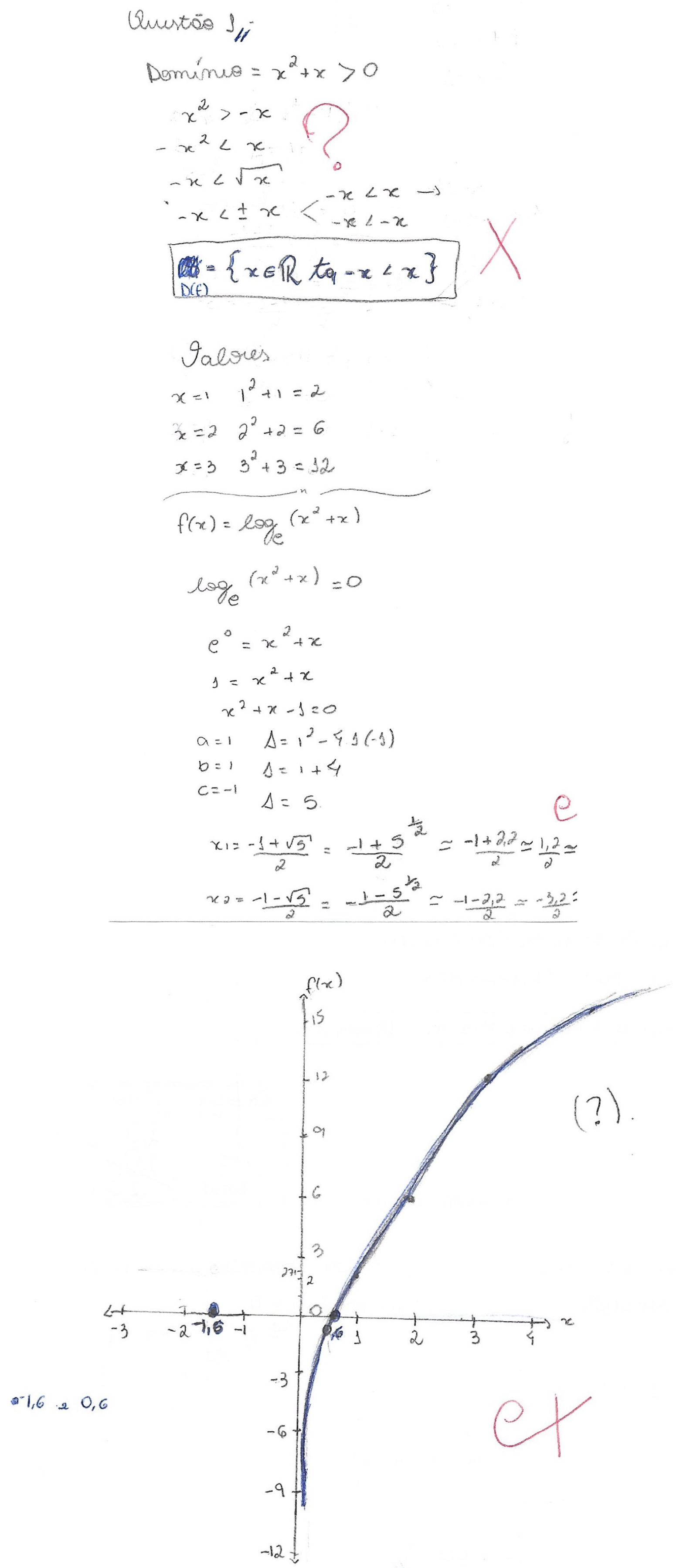
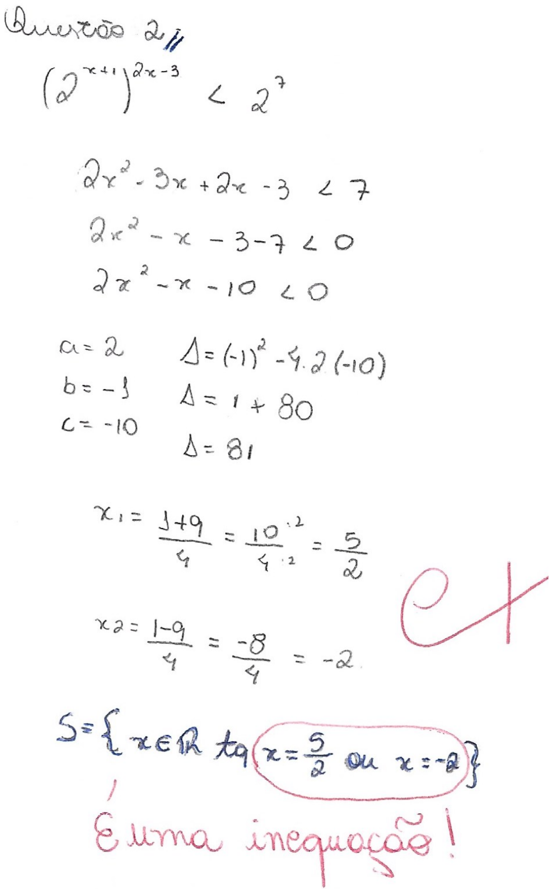


Figura 8.3: Erro na inequação e no gráfico.

Na resolução abaixo temos um exemplo em que o aluno não soube descrever a solução da inequação.


Questão 2

$(2^{x+1})^{2x-3} < 2^7$

$2x^2 - 3x + 2x - 3 < 7$

$2x^2 - x - 3 - 7 < 0$

$2x^2 - x - 10 < 0$

$a = 2$ $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2(-10)$

$b = -1$ $\Delta = 1 + 80$

$c = -10$ $\Delta = 81$

$x_1 = \frac{1+9}{4} = \frac{10^{:2}}{4_{:2}} = \frac{5}{2}$

$x_2 = \frac{1-9}{4} = \frac{-8}{4} = -2$

$S = \{x \in \mathbb{R}$ tq $x = \frac{5}{2}$ ou $x = -2\}$

É uma inequação!

Figura 8.4: Erro na solução.

No exemplo abaixo podemos perceber que o aluno, ao tentar encontrar os valores de x tal que $f(x) = 0$, não usa a Fórmula de Bháskara da maneira correta e depois conclui, por meio do $(*)$, que tais x não existem. Observe também que ele constrói o gráfico da função $x \to log_e(x)$ e não o gráfico de f.

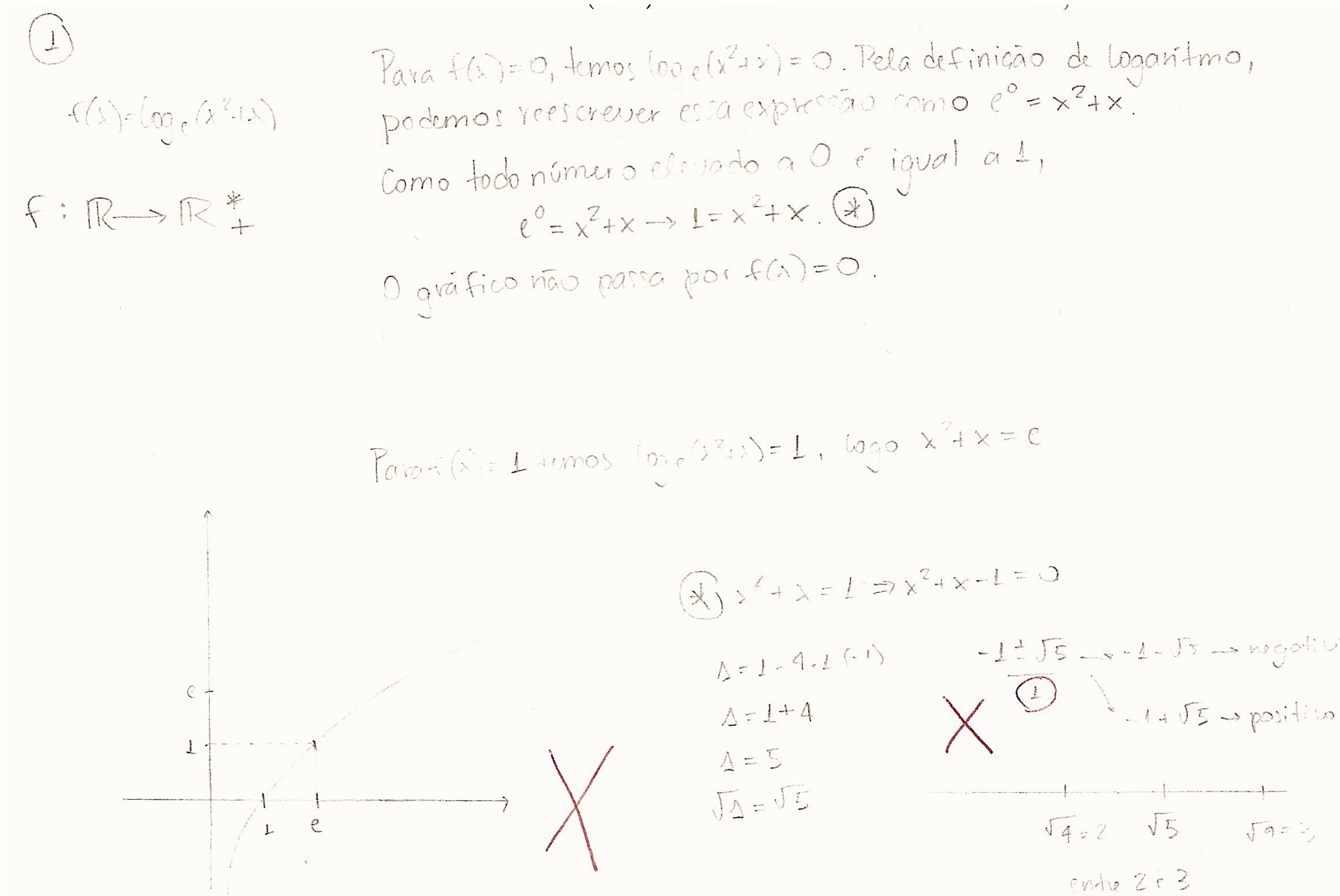


Figura 8.5: Erro na resolução.

No exemplo abaixo, o aluno demonstra não conhecer as propriedades de potência.

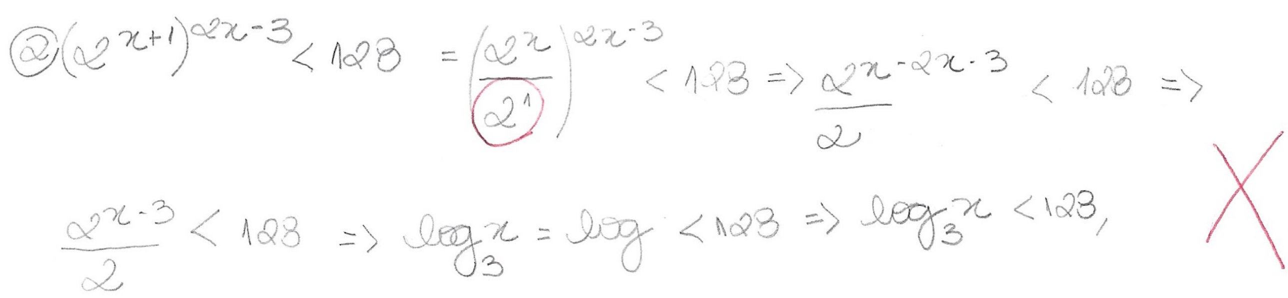


Figura 8.6: Erro na propriedade de potência.

Conclusão: Percebemos que grande parte dos alunos ainda têm dificuldades em trabalhar com a função logarítmica. Além disso, determinar o domínio de uma função e construir gráficos são erros comuns.

Capítulo 9

Quarto trabalho em grupo

Neste capítulo serão analisados os resultados obtidos no quarto trabalho em grupo, em que foi avaliado o conhecimento dos alunos sobre alguns tópicos de trigonometria.

Os alunos formaram grupos de no máximo 5 pessoas e resolveram uma lista com 4 questões (veja Lista de Exercícios 4 em anexo). Tal atividade foi realizada fora da sala de aula sem a supervisão das professoras. O gráfico de barras exibido neste capítulo representa o desempenho da sala referente a avaliação das 4 questões. Selecionamos 2 questões deste trabalho e fornecemos as suas soluções a seguir.

Questão 1. Enuncie e demonstre a Lei dos Cossenos.

Solução. Veja [5, Proposição 6.21].

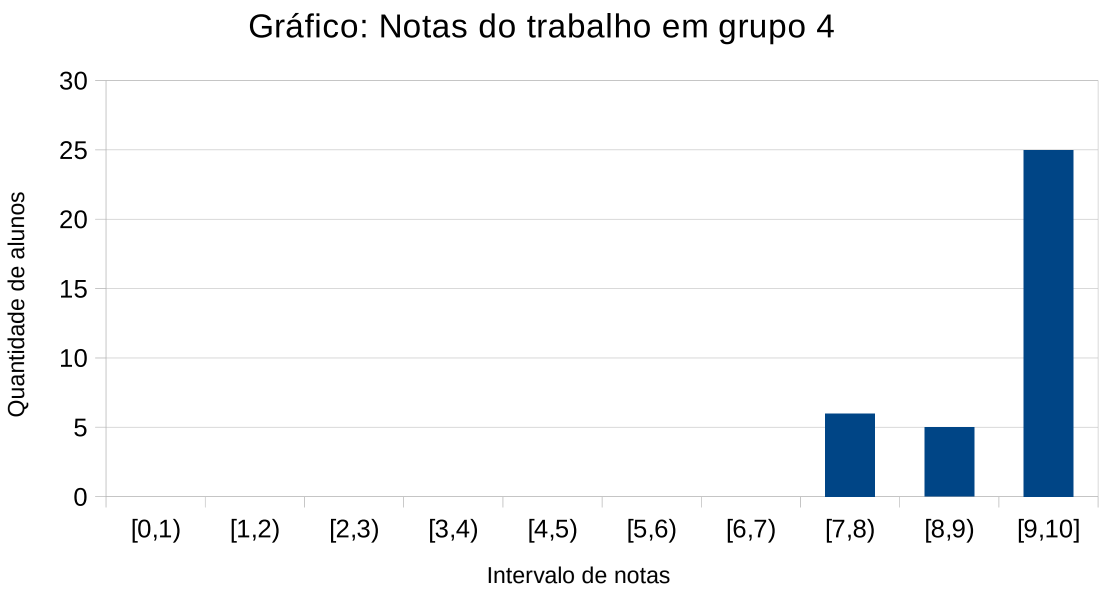
Questão 2. Enuncie e demonstre a Lei dos Senos.

Solução. Veja [5, Proposição 6.25].

A seguir exibimos o gráfico de barras

$$(\text{intervalo de nota}) \times (\text{quantidade de alunos})$$

que representa o desempenho da sala.

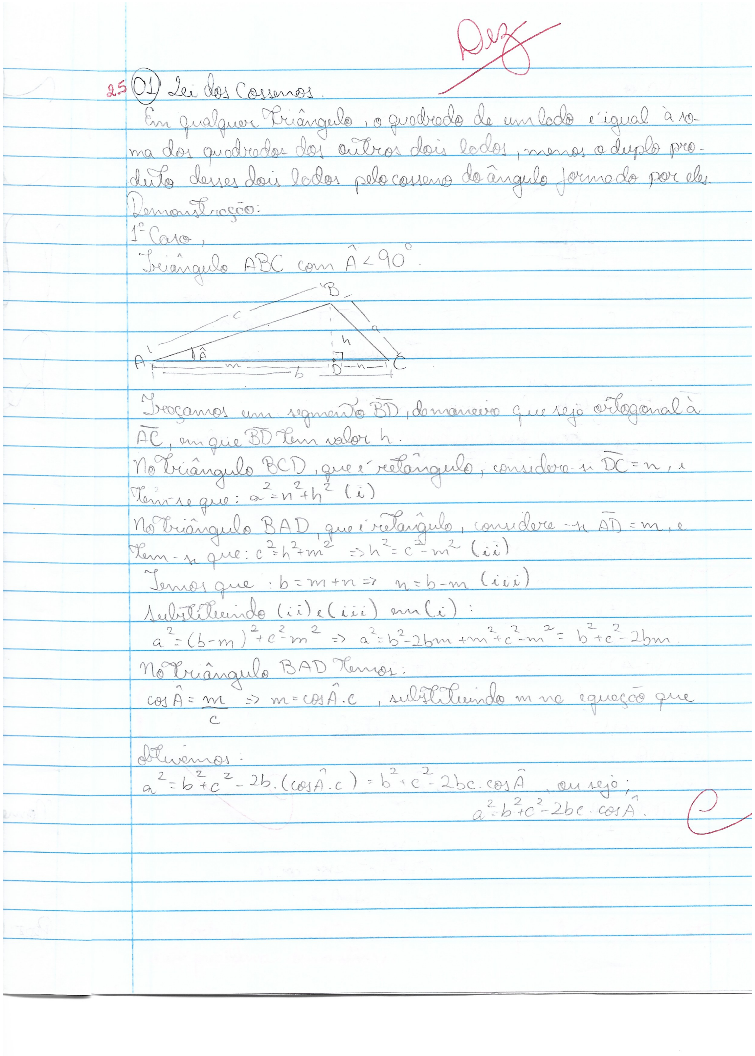


Análise dos resultados

Participaram desta atividade 36 alunos. Foi verificado por meio da análise das provas que:

- 8 alunos obtiveram nota máxima (Dez) e nenhum aluno obteve nota mínima (Zero).
- Todos os alunos conseguiram nota acima da média (maior ou igual a $6,0$).
- 17 alunos acertaram o exercício 1 e 25 alunos acertaram o exercício 2.

Primeiramente, mostraremos abaixo o trabalho que teve nota máxima.



Dez

2.5 01) Lei dos Cossenos.

Em qualquer triângulo, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o duplo produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.

Demonstração:

1º Caso,

Triângulo ABC com $\hat{A} < 90°$.

Traçamos um segmento $\overline{BD}$, de maneira que seja ortogonal à $\overline{AC}$, em que $\overline{BD}$ tem valor h.

No triângulo BCD, que é retângulo, considere-se $\overline{DC} = n$, e tem-se que: $a^2 = n^2 + h^2$ (i)

No triângulo BAD, que é retângulo, considere-se $\overline{AD} = m$, e tem-se que: $c^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow h^2 = c^2 - m^2$ (ii)

Temos que: $b = m + n \Rightarrow n = b - m$ (iii)

Substituindo (ii) e (iii) em (i):

$a^2 = (b-m)^2 + c^2 - m^2 \Rightarrow a^2 = b^2 - 2bm + m^2 + c^2 - m^2 = b^2 + c^2 - 2bm$.

No triângulo BAD temos:

$\cos\hat{A} = \frac{m}{c} \Rightarrow m = \cos\hat{A}.c$, substituindo m na equação que

obtivemos:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2b.(\cos\hat{A}.c) = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\hat{A}$, ou seja;

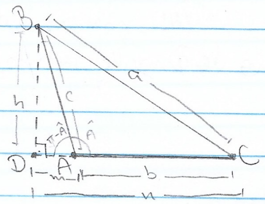
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\hat{A}$.

C

Figura 9.1: Primeira página do trabalho modelo.

2º Caso

Triângulo ABC em que $90° < \hat{A} < 180°$.



Traçamos um segmento $\overline{BD}$, de maneira que o mesmo seja ortogonal ao segmento $\overline{AC}$, em que $\overline{BD}$ tem valor h.

No triângulo BCD, que é retângulo, suponha $\overline{DA} = m$ e $\overline{DC} = n$, tem-se que:

$a^2 = h^2 + n^2$ (i)

No triângulo BAD que é retângulo, temos:

$c^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow h^2 = c^2 - m^2$ (ii)

E também

$n = b + m$ (iii)

Substituindo (iii) e (ii) em (i)

$a^2 = c^2 - m^2 + (b+m)^2 = c^2 - m^2 + b^2 + 2bm + m^2 = c^2 + b^2 + 2bm$

$\Rightarrow a^2 = c^2 + b^2 + 2bm$

No triângo BAD temos que:

$\cos(\pi - \hat{A}) = \dfrac{m}{c} \Rightarrow m = c \cdot \cos(\pi - \hat{A})$;

como $\cos(\pi - \hat{A}) = \cos\pi \cdot \cos\hat{A} + \text{sen}\,\pi \cdot \text{sen}\,\hat{A} = (-1) \cdot \cos\hat{A} + 0 \cdot \text{sen}\,\hat{A}$ $= -\cos\hat{A}$, logo:

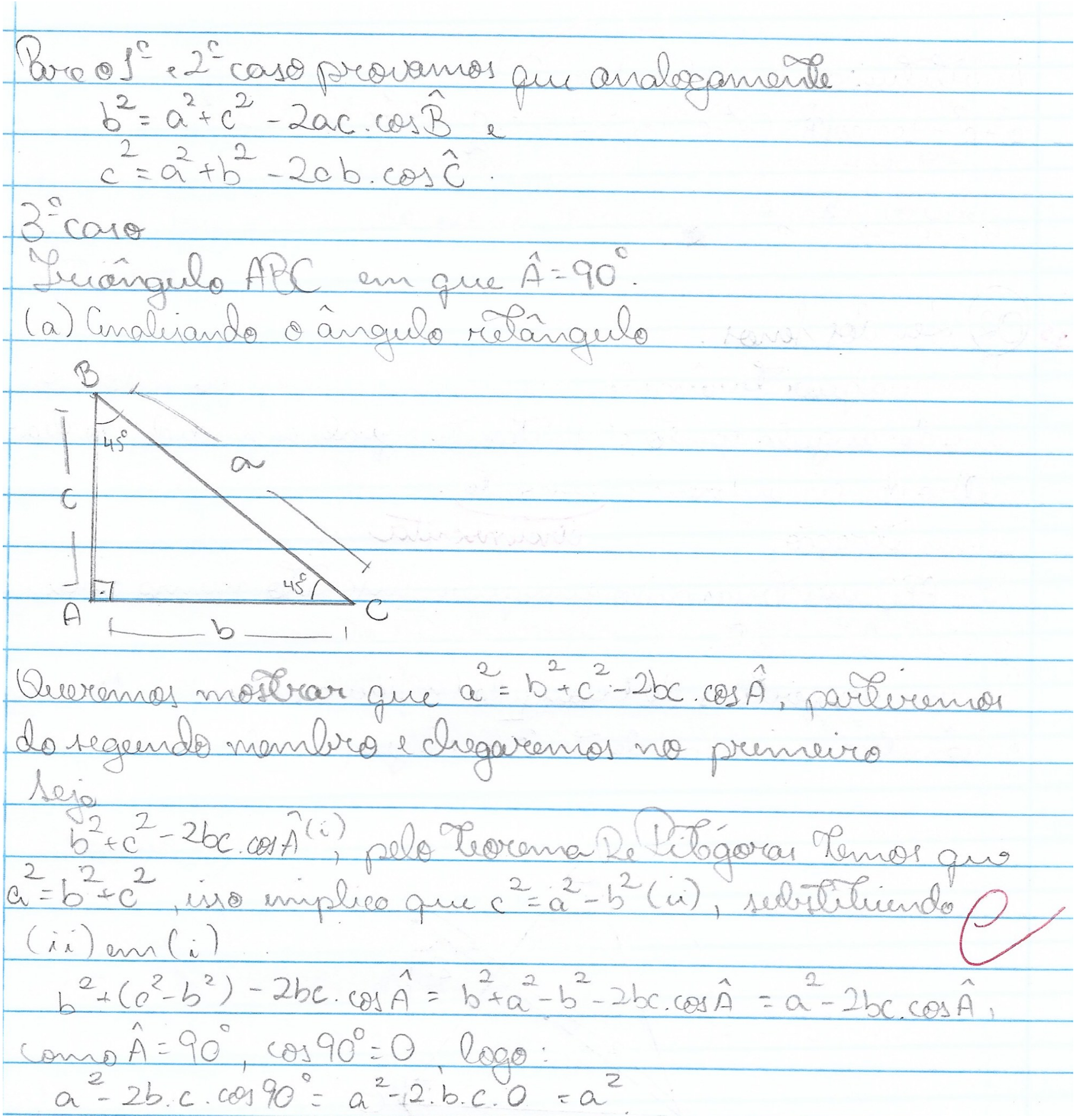
$m = c \cdot (-\cos(\hat{A})) \Rightarrow m = -c \cdot \cos(\hat{A})$.

Substituindo na equação que obtivemos:

$a^2 = c^2 + b^2 + 2b \cdot (-c \cdot \cos(\hat{A}))$, ou seja:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\hat{A})$.

Figura 9.2: Segunda página do trabalho modelo.


Para o 1º e 2º caso provamos que analogamente

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos\hat{B}$ e

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\hat{C}$.

3º caso

Triângulo ABC em que $\hat{A} = 90^\circ$.

(a) Analisando o ângulo retângulo

Queremos mostrar que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\hat{A}$, partiremos do segundo membro e chegaremos no primeiro

seja

$b^2 + c^2 - 2bc.\cos\hat{A}$ (i), pelo Teorema de Pitágoras temos que $a^2 = b^2 + c^2$, isso implica que $c^2 = a^2 - b^2$ (ii), substituindo (ii) em (i)

$b^2 + (a^2 - b^2) - 2bc.\cos\hat{A} = b^2 + a^2 - b^2 - 2bc.\cos\hat{A} = a^2 - 2bc.\cos\hat{A}$,

como $\hat{A} = 90^\circ$, $\cos 90^\circ = 0$ logo:

$a^2 - 2b.c.\cos 90^\circ = a^2 - 2.b.c.0 = a^2$.

Figura 9.3: Terceira página do trabalho modelo.

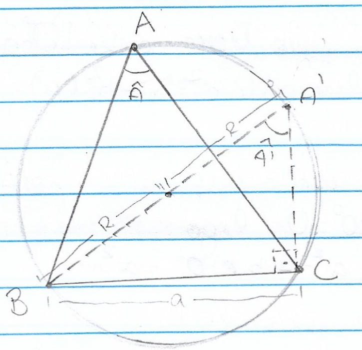
2.5 (02) Lei dos senos:

Em qualquer triângulo, o quociente entre cada lado e o seno do ângulo oposto é constante igual à medida do diâmetro da circunferência inscrita.
circunscrita

Demonstração:

Seja ABC um triângulo qualquer, inscrito numa circunferência de raio R.

Por um dos vértices do triângulo (na figura usa-se B), tracemos o diâmetro correspondente $\overline{BA'}$ e liguemos A' com C.



Sabemos que $\hat{A} = \hat{A}'$ por determinarem o mesmo arco $\widehat{BC}$.

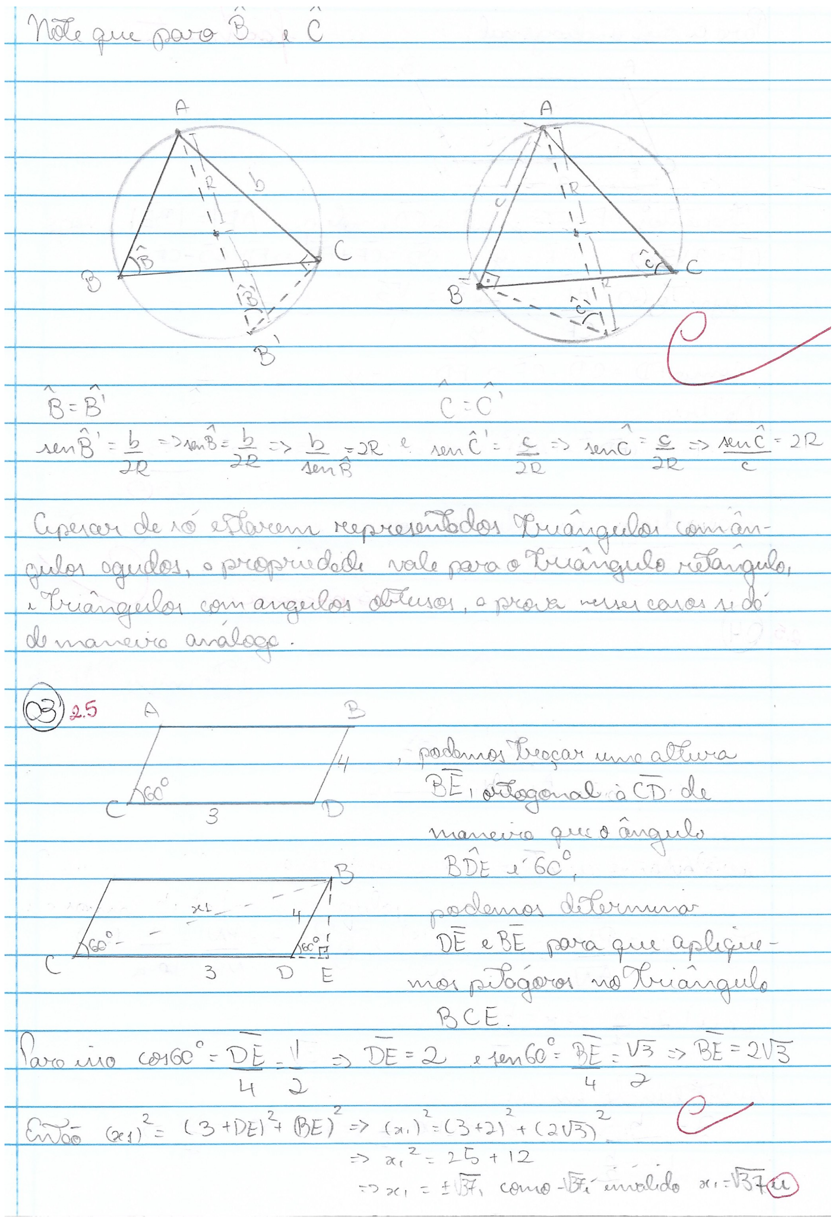
E também o triângulo A'BC é retângulo em C por estar inscrito em uma semicircunferência pois $\overline{BA'}$ é diâmetro da circunferência

Temos, então:

$$\operatorname{sen}\hat{A}' = \frac{a}{2R} \Rightarrow a = 2R \cdot \operatorname{sen}\hat{A}' \Rightarrow a = 2R \cdot \operatorname{sen}\hat{A} \Rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = 2R$$

Analogamente para $\hat{B}$ e $\hat{C}$:

Figura 9.4: Quarta página do trabalho modelo.



Note que para $\hat{B}$ e $\hat{C}$

$\hat{B} = \hat{B}'$ $\qquad$ $\hat{C} = \hat{C}'$

$\operatorname{sen}\hat{B}' = \frac{b}{2R} \Rightarrow \operatorname{sen}\hat{B} = \frac{b}{2R} \Rightarrow \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = 2R$ e $\operatorname{sen}\hat{C}' = \frac{c}{2R} \Rightarrow \operatorname{sen}\hat{C} = \frac{c}{2R} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\hat{C}}{c} = 2R$

Apesar de só estarem representados triângulos com ângulos agudos, a propriedade vale para o triângulo retângulo, e triângulos com angulos obtusos, a prova nesses casos se dá de maneira análoga.

03 2.5

, podemos traçar uma altura $\overline{BE}$, ortogonal à $\overline{CD}$ de maneira que o ângulo $B\hat{D}E$ é $60°$, podemos determinar $\overline{DE}$ e $\overline{BE}$ para que apliquemos pitágoras no triângulo BCE.

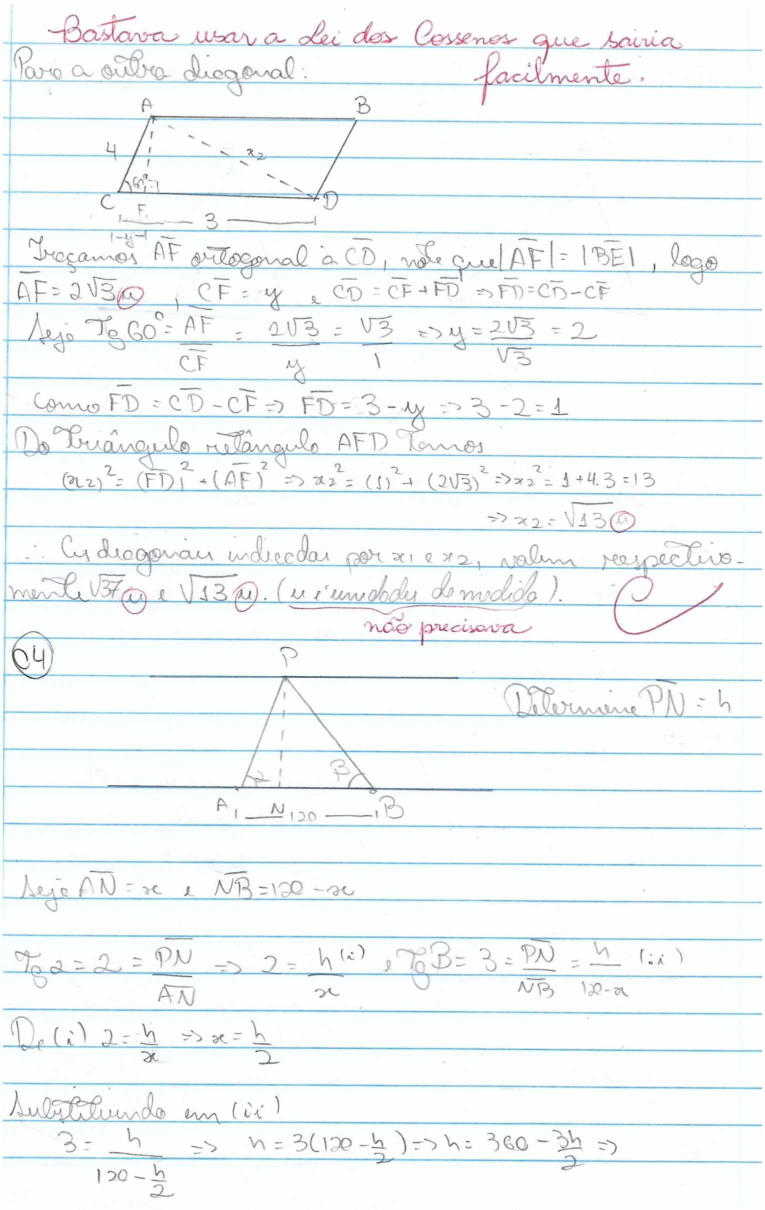
Para isso $\cos 60° = \frac{\overline{DE}}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \overline{DE} = 2$ e $\operatorname{sen} 60° = \frac{\overline{BE}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \overline{BE} = 2\sqrt{3}$

Então $(x_1)^2 = (3+DE)^2 + (BE)^2 \Rightarrow (x_1)^2 = (3+2)^2 + (2\sqrt{3})^2$

$\Rightarrow x_1^2 = 25 + 12$

$\Rightarrow x_1 = \pm\sqrt{37}$, como $-\sqrt{37}$ é inválido $x_1 = \sqrt{37}$ u

Figura 9.5: Quinta página do trabalho modelo.



Bastava usar a Lei dos Cossenos que sairia facilmente.

Para a outra diagonal:

Traçamos $\overline{AF}$ ortogonal à $\overline{CD}$, note que $|\overline{AF}| = |\overline{BE}|$, logo

$\overline{AF} = 2\sqrt{3}$ (u), $\overline{CF} = y$ e $\overline{CD} = \overline{CF} + \overline{FD} \Rightarrow \overline{FD} = \overline{CD} - \overline{CF}$

Seja $Tg\,60° = \frac{\overline{AF}}{\overline{CF}} = \frac{2\sqrt{3}}{y} = \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow y = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2$

Como $\overline{FD} = \overline{CD} - \overline{CF} \Rightarrow \overline{FD} = 3 - y \Rightarrow 3 - 2 = 1$

Do Triângulo retângulo AFD temos

$(x_2)^2 = (\overline{FD})^2 + (\overline{AF})^2 \Rightarrow x_2^2 = (1)^2 + (2\sqrt{3})^2 \Rightarrow x_2^2 = 1 + 4.3 = 13$

$\Rightarrow x_2 = \sqrt{13}$ (u)

∴ As diagonais indicadas por x_1 e x_2, valem respectivamente $\sqrt{37}$ (u) e $\sqrt{13}$ (u). (u: unidades de medida).

não precisava

04

Determine $\overline{PN} = h$

Seja $\overline{AN} = x$ e $\overline{NB} = 120 - x$

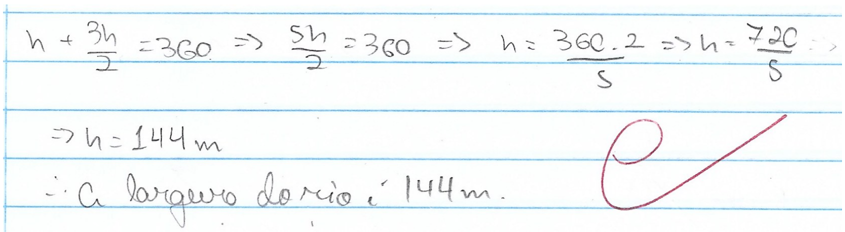
$Tg\,\alpha = 2 = \frac{\overline{PN}}{\overline{AN}} \Rightarrow 2 = \frac{h}{x}$ (i), $Tg\,\beta = 3 = \frac{\overline{PN}}{\overline{NB}} = \frac{h}{120-x}$ (ii)

De (i) $2 = \frac{h}{x} \Rightarrow x = \frac{h}{2}$

Substituindo em (ii)

$3 = \frac{h}{120 - \frac{h}{2}} \Rightarrow h = 3(120 - \frac{h}{2}) \Rightarrow h = 360 - \frac{3h}{2} \Rightarrow$

Figura 9.6: Sexta página do trabalho modelo.



$h + \frac{3h}{2} = 360 \Rightarrow \frac{5h}{2} = 360 \Rightarrow h = \frac{360.2}{5} \Rightarrow h = \frac{720}{5} \Rightarrow$

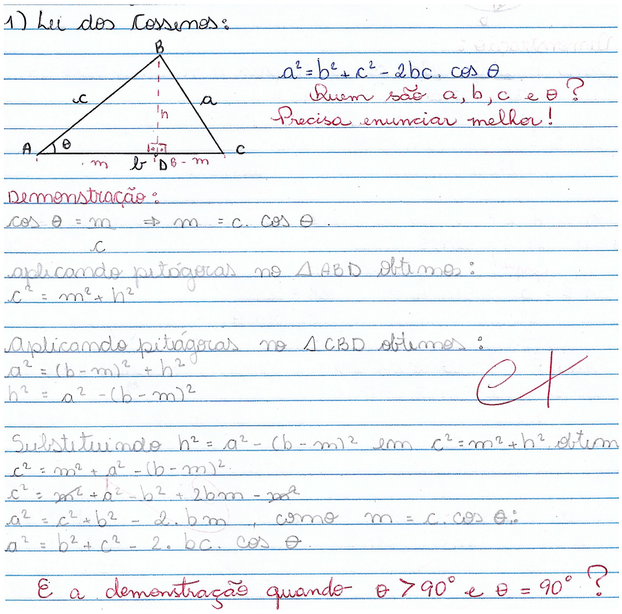
$\Rightarrow h = 144\,m$

∴ A largura do rio é 144 m.

Figura 9.7: Sétima página do trabalho modelo.

Faremos comentários sobre alguns erros que apareceram nas resoluções dos exercícios.

Na resolução abaixo temos um exemplo em que o grupo não fez a demonstração completa, faltaram dois casos.


1) Lei dos Cossenos:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\theta$

Quem são a, b, c e θ?

Precisa enunciar melhor!

Demonstração:

$\cos\theta = \frac{m}{c} \Rightarrow m = c.\cos\theta$.

aplicando pitágoras no $\triangle ABD$ obtemos:

$c^2 = m^2 + h^2$

Aplicando pitágoras no $\triangle CBD$ obtemos:

$a^2 = (b-m)^2 + h^2$

$h^2 = a^2 - (b-m)^2$

Substituindo $h^2 = a^2 - (b-m)^2$ em $c^2 = m^2 + h^2$ obtem

$c^2 = m^2 + a^2 - (b-m)^2$.

$c^2 = \cancel{m^2} + a^2 - b^2 + 2bm - \cancel{m^2}$

$a^2 = c^2 + b^2 - 2.bm$, como $m = c.\cos\theta$:

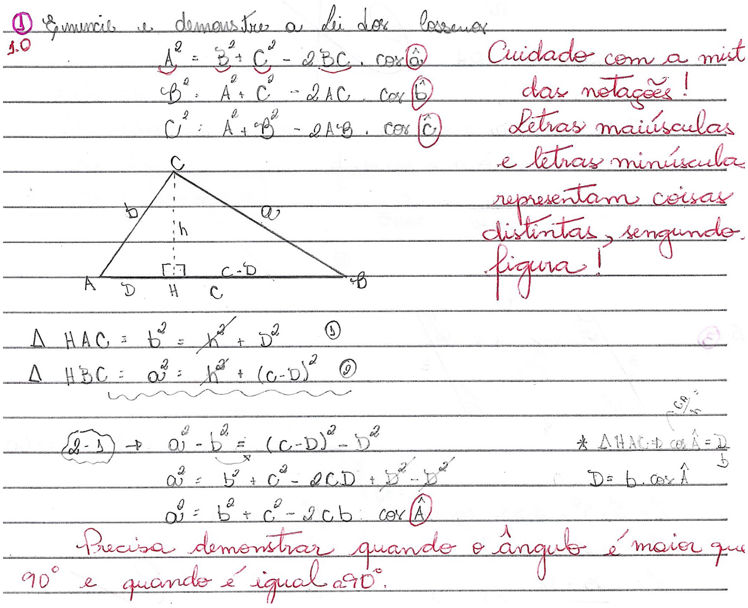
$a^2 = b^2 + c^2 - 2.bc.\cos\theta$.

E a demonstração quando $\theta > 90°$ e $\theta = 90°$?

Figura 9.8: Erro de demonstração.

Observem que os alunos também não enunciaram corretamente.

Na resolução abaixo temos um exemplo em que o grupo teve erro de notação.


1) Enuncie e demonstre a lei dos cossenos

1,0

$A^2 = B^2 + C^2 - 2BC.\cos\hat{a}$

$B^2 = A^2 + C^2 - 2AC.\cos\hat{b}$

$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB.\cos\hat{c}$

Cuidado com a mistura das notações! Letras maiúsculas e letras minúsculas representam coisas distintas, segundo figura!

$\triangle HAC: b^2 = h^2 + D^2$ (1)

$\triangle HBC: a^2 = h^2 + (c-D)^2$ (2)

$(2-1) \rightarrow a^2 - b^2 = (c-D)^2 - D^2$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2cD + \cancel{D^2} - \cancel{D^2}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2cb.\cos\hat{A}$

$* \triangle HAC: \cos\hat{A} = \frac{D}{b}$

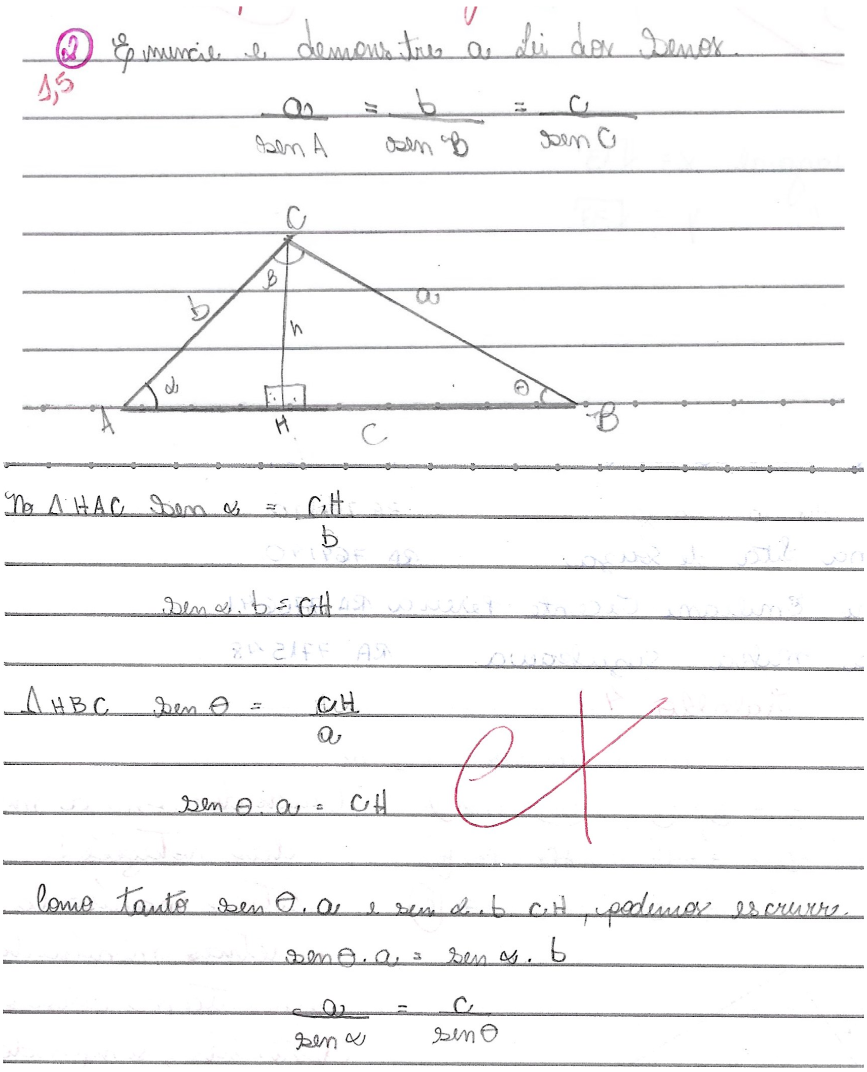
$D = b.\cos\hat{A}$

Precisa demonstrar quando o ângulo é maior que 90° e quando é igual a 90°.

Figura 9.9: Erro de notação.

Observem que os alunos não enunciaram corretamente, tendo erros de notação. Além disso, não fizeram a demonstração completa.

Na resolução abaixo temos um exemplo em que o grupo não fez o enunciado completo.



2) Enuncie e demonstre a lei dos senos.

1,5

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

No ΔHAC $\text{sen } \alpha = \frac{CH}{b}$

$\text{sen } \alpha \cdot b = CH$

ΔHBC $\text{sen } \theta = \frac{CH}{a}$

$\text{sen } \theta \cdot a = CH$

Como tanto $\text{sen } \theta \cdot a$ e $\text{sen } \alpha \cdot b$ CH, podemos escrever.

$\text{sen } \theta \cdot a = \text{sen } \alpha \cdot b$

$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{c}{\text{sen } \theta}$$

Figura 9.10: Erro de enunciado.

Observem que como os alunos não fizeram o enunciado corretamente, então faltou demonstrarem algumas afirmações.

Conclusão: Neste trabalho os alunos obtiveram um bom resultado. A menor nota foi 7, 5. Os poucos erros que ocorreram foram nos enunciados das leis, em notações e na falta de analisar todos os casos possíveis na demonstração.

Capítulo 10

Quinta atividade avaliativa individual

Neste capítulo serão analisados os resultados obtidos na quinta atividade individual, em que foi avaliado o conhecimento dos alunos sobre alguns tópicos de funções trigonométricas e suas relações.

Eles tiveram que resolver individualmente, em sala de aula, os dois exercícios a seguir, cuja solução é fornecida abaixo.

Questão 1. Considere a função f definida por $f(x) = 2 \cdot \text{sen}^2(x)$. Determine o domínio da função f, se ela é par ou ímpar, qual seu período, se ela é limitada, qual sua imagem, faça um esboço do gráfico de f e neste gráfico marque os pontos onde $f(x) = 0$.

Solução. O domínio da função é o conjunto $\mathbb{R}$.

Com respeito a paridade,

$$f(-x) = 2 \cdot \text{sen}^2(-x) = 2 \cdot (-\text{sen}(x))^2 = 2 \cdot \text{sen}^2(x) = f(x).$$

Logo, f é uma função par.

O período de f é π.

A função é limitada com conjunto imagem $[0, 2]$.

O seu gráfico é:

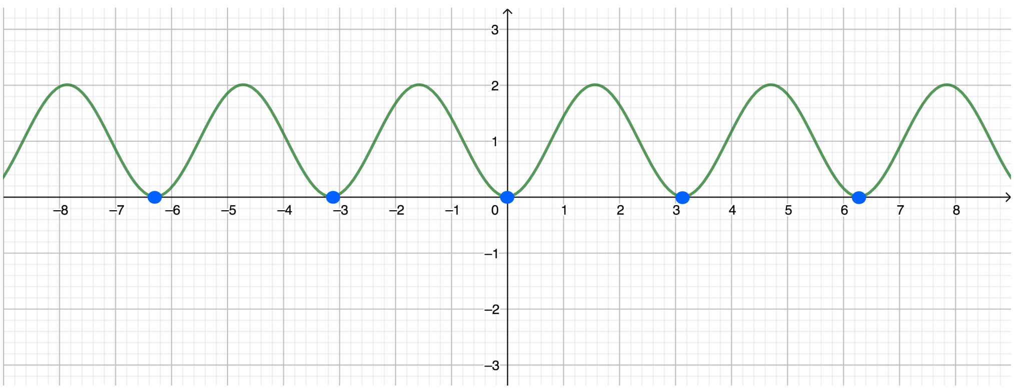


Figura 10.1: Gráfico da função f

Questão 2.

(a) Calcule $\text{sen}(\frac{7\pi}{12})$ e $\cos(\frac{\pi}{12})$.

(b) Os arcos a e b do primeiro quadrante são tais que $\operatorname{sen}(a) = \frac{3}{5}$ e $\operatorname{sen}(b) = \frac{12}{13}$. Calcule $\cos(a+b)$.

Solução. (a) Temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\frac{7\pi}{12}) &= \operatorname{sen}(\tfrac{7\cdot 180^\circ}{12}) = \operatorname{sen}(105^\circ) = \operatorname{sen}(60^\circ + 45^\circ)\\
&= \operatorname{sen}(60^\circ)\cdot\cos(45^\circ) + \operatorname{sen}(45^\circ)\cdot\cos(60^\circ)\\
&= \tfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{\sqrt{6}}{4} + \tfrac{\sqrt{2}}{4}.
\end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}
\cos(\frac{\pi}{12}) &= \cos(\tfrac{180^\circ}{12}) = \cos(15^\circ) = \cos(45^\circ - 30^\circ)\\
&= \cos(45^\circ)\cdot\cos(30^\circ) + \operatorname{sen}(45^\circ)\cdot\operatorname{sen}(30^\circ)\\
&= \tfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{\sqrt{6}}{4} + \tfrac{\sqrt{2}}{4}.
\end{aligned}$$

(b) Temos

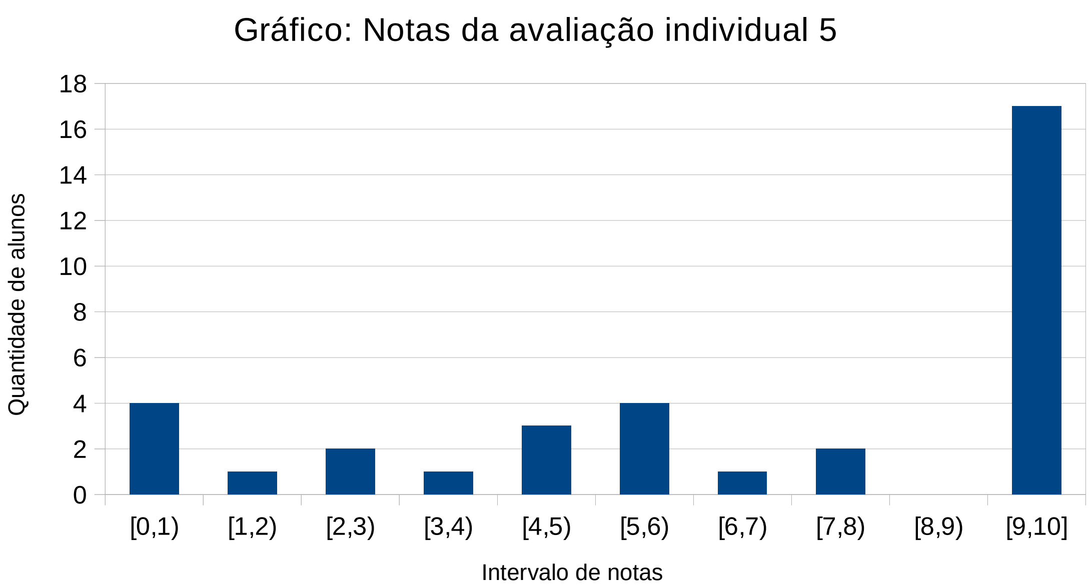
$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos(a)\cdot\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\cdot\operatorname{sen}(b)\\
&= \sqrt{1-\operatorname{sen}^2(a)}\cdot\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(b)} - \operatorname{sen}(a)\cdot\operatorname{sen}(b)\\
&= \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2} - \frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}\\
&= -\frac{16}{65}\,.
\end{aligned}$$

$\square$

A seguir exibimos o gráfico de barras

(intervalo de nota) $\times$ (quantidade de alunos)

que representa o desempenho da sala.

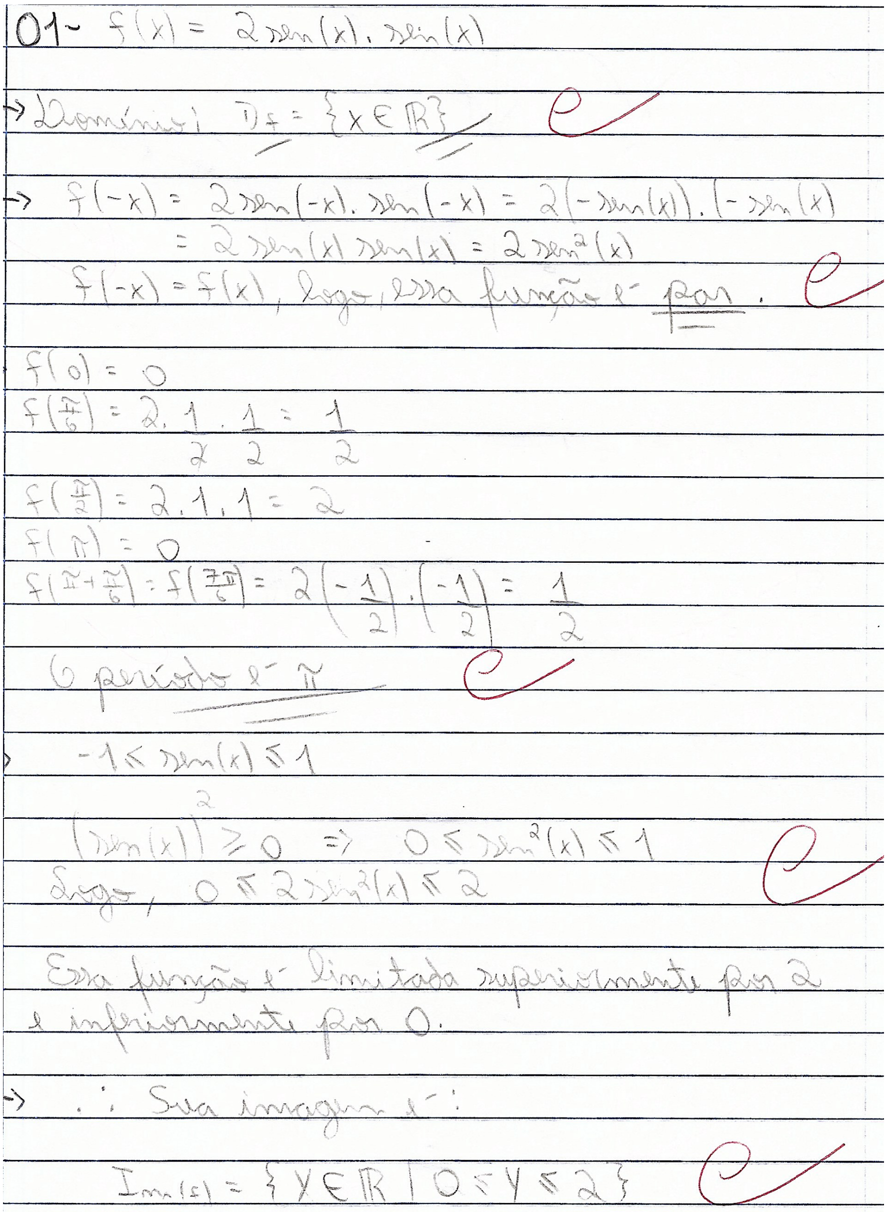


Análise dos resultados

Participaram desta atividade 35 alunos. Foi verificado por meio da análise das provas que:

- 8 alunos obtiveram nota máxima (Dez) e 3 alunos obtiveram nota mínima (Zero).
- 20 alunos conseguiram nota acima da média (maior ou igual a $6,0$) e 15 alunos nota abaixo da média (menor que $6,0$).
- 10 alunos acertaram o exercício 1, 23 alunos acertaram o exercício 2-a) e 21 alunos acertaram o exercício 2-b).

Primeiramente, mostraremos uma atividade em que o aluno fez tudo corretamente.



01- $f(x) = 2\,sen(x) \cdot sen(x)$

→ Domínio: $D_f = \{x \in \mathbb{R}\}$

→ $f(-x) = 2\,sen(-x) \cdot sen(-x) = 2(-sen(x)) \cdot (-sen(x))$

$= 2\,sen(x)\,sen(x) = 2\,sen^2(x)$

$f(-x) = f(x)$, logo, essa função é par.

$f(0) = 0$

$f(\frac{\pi}{6}) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$f(\frac{\pi}{2}) = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$

$f(\pi) = 0$

$f(\pi + \frac{\pi}{6}) = f(\frac{7\pi}{6}) = 2\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

O período é π

→ $-1 \leq sen(x) \leq 1$

$(sen(x))^2 \geq 0 \Rightarrow 0 \leq sen^2(x) \leq 1$

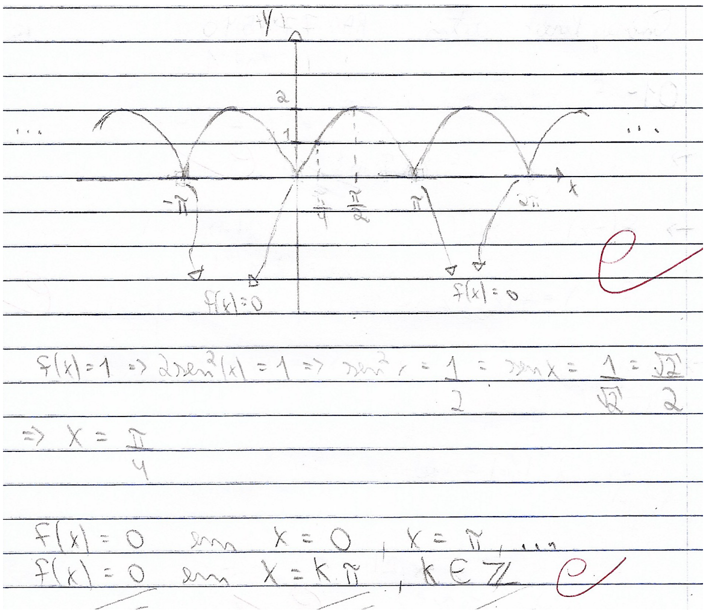
Logo, $0 \leq 2\,sen^2(x) \leq 2$

Essa função é limitada superiormente por 2 e inferiormente por 0.

→ ∴ Sua imagem é:

$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 2\}$

Figura 10.2: Primeira página da prova modelo.



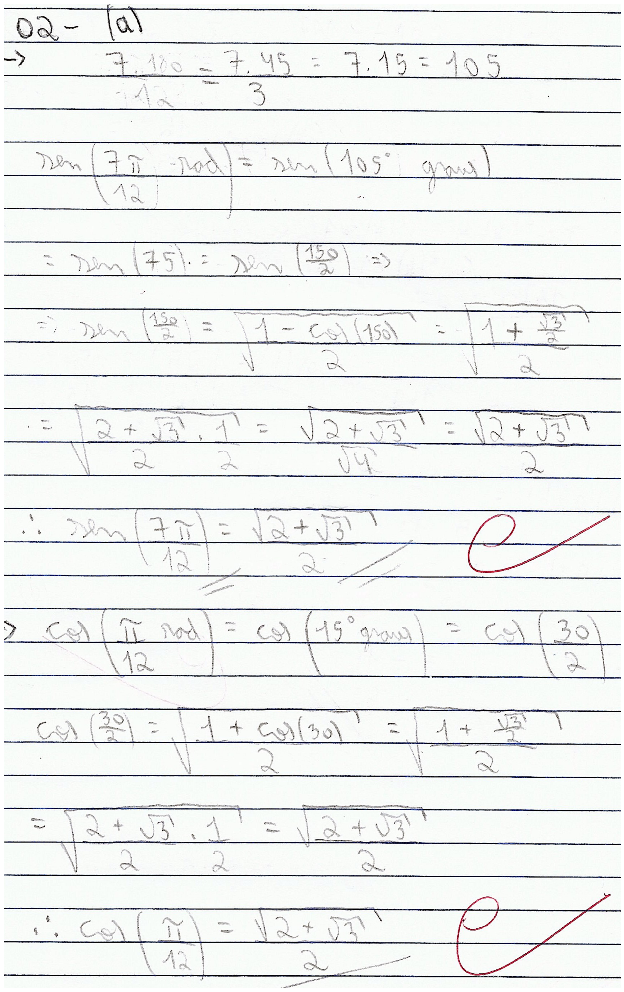
$f(x) = 1 \Rightarrow 2\,sen^2(x) = 1 \Rightarrow sen^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow sen\,x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

$f(x) = 0$ em $x = 0,\ x = \pi, \ldots$

$f(x) = 0$ em $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Figura 10.3: Segunda página da prova modelo.



02- (a)

$\rightarrow \frac{7 \cdot 180}{12} = \frac{7 \cdot 45}{3} = 7 \cdot 15 = 105$

$sen\left(\frac{7\pi}{12}\ rad\right) = sen(105^\circ\ graus)$

$= sen(75) = sen\left(\frac{150}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow sen\left(\frac{150}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - cos(150)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$

$= \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$

$\therefore sen\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$

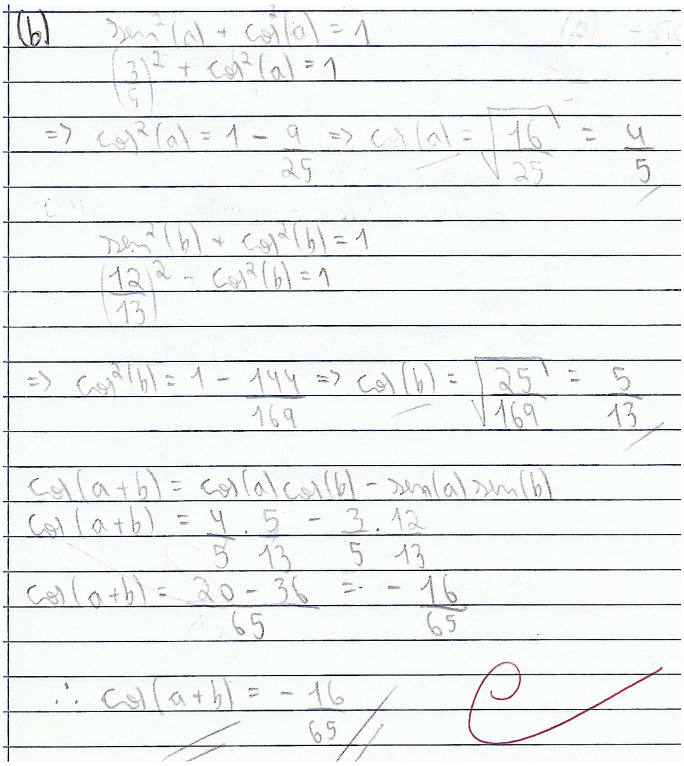
$\rightarrow cos\left(\frac{\pi}{12}\ rad\right) = cos(15^\circ\ graus) = cos\left(\frac{30}{2}\right)$

$cos\left(\frac{30}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + cos(30)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$

$= \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$

$\therefore cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$

Figura 10.4: Terceira página da prova modelo.



(b)

$$\operatorname{sen}^2(a) + \cos^2(a) = 1$$
$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2(a) = 1$$
$$\Rightarrow \cos^2(a) = 1 - \frac{9}{25} \Rightarrow \cos(a) = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

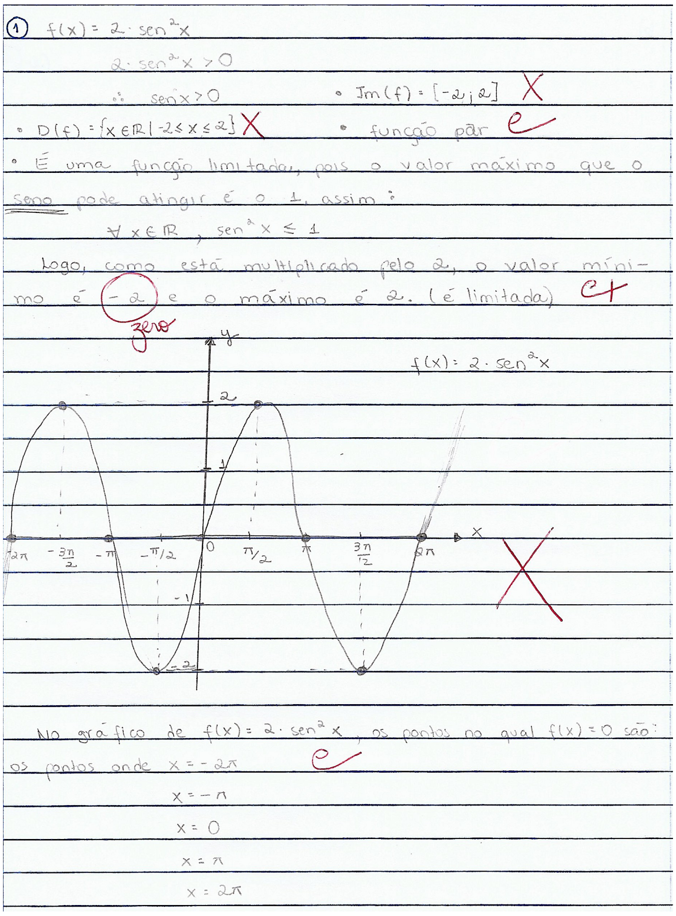
$$\operatorname{sen}^2(b) + \cos^2(b) = 1$$
$$\left(\frac{12}{13}\right)^2 + \cos^2(b) = 1$$
$$\Rightarrow \cos^2(b) = 1 - \frac{144}{169} \Rightarrow \cos(b) = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}$$

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$$
$$\cos(a+b) = \frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13} - \frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}$$
$$\cos(a+b) = \frac{20-36}{65} = -\frac{16}{65}$$
$$\therefore \cos(a+b) = -\frac{16}{65}$$

Figura 10.5: Quarta página da prova modelo.

Faremos comentários sobre alguns erros que apareceram nas resoluções dos exercícios.

Na resolução a seguir temos um exemplo em que o aluno não soube explicitar o domínio e a imagem da função. Além disso, o aluno não soube fazer o gráfico corretamente.



1) $f(x) = 2 \cdot sen^2 x$

$2 \cdot sen^2 x > 0$

$\therefore\ sen\, x > 0$ • $Im(f) = [-2; 2]$ X

• $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$ X • função par C

• É uma função limitada, pois o valor máximo que o seno pode atingir é o 1, assim:

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $sen^2 x \leq 1$

Logo, como está multiplicado pelo 2, o valor mínimo é -2 zero e o máximo é 2. (é limitada) C+

$f(x) = 2 \cdot sen^2 x$

X

No gráfico de $f(x) = 2 \cdot sen^2 x$, os pontos no qual $f(x) = 0$ são: os pontos onde $x = -2\pi$ C

$x = -\pi$

$x = 0$

$x = \pi$

$x = 2\pi$

Figura 10.6: Erro no gráfico.

Chamamos a atenção para o erro $2\text{sen}^2(x) > 0$ e também o erro de implicação

$$2\text{sen}^2(x) > 0 \Rightarrow \text{sen}(x) > 0.$$

Na resolução abaixo, o aluno mostrou não conhecer os conceitos: domínio, imagem, período e paridade de uma função. Também errou o gráfico.

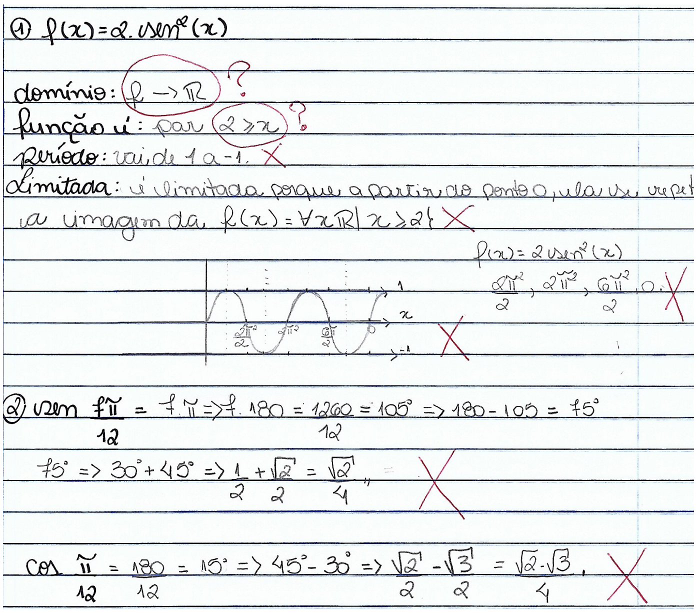


Figura 10.7: Erro de notação.

Observe que o aluno, neste momento do curso (final do semestre), ainda não sabe descrever por meio de notações um determinado conjunto. Ele escreve

$$\forall x\mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}.$$

Ainda nesta prova, mas analisando a questão 2, vemos que o aluno usa as igualdades

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a) + \operatorname{sen}(b) \text{ e } \cos(a-b) = \cos(a) - \cos(b)$$

que não são verdadeiras. Além disso, não sabe somar/subtrair frações.

Na resolução abaixo temos outro exemplo em que o aluno não soube usar uma igualdade trigonométrica.

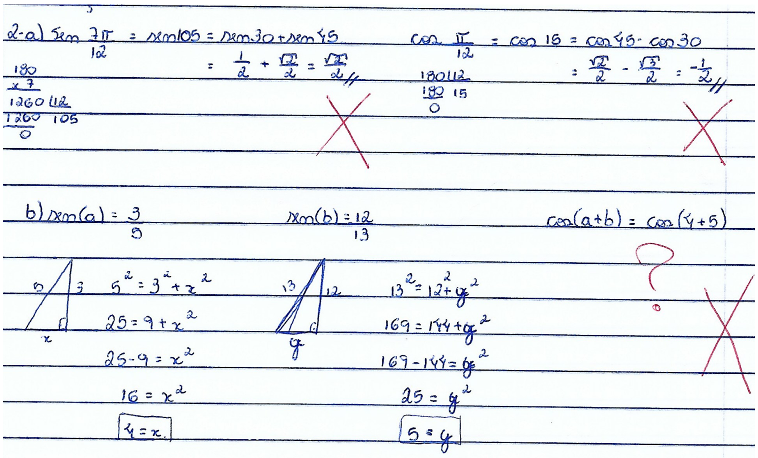


Figura 10.8: Fórmula errada.

Conclusão: Nesta atividade o erro mais comum foi o esboço do gráfico da função $f(x) = 2 \cdot \operatorname{sen}^2(x)$. Muitos fizeram o gráfico de $g(x) = 2 \cdot \operatorname{sen}(x)$ ou algo parecido. Isso nos leva a crer que muitos alunos não sabem interpretar gráficos, pois uma função positiva não admite parte do seu gráfico abaixo do eixo x. Outro erro que aparece é a aplicação da fórmula errada do seno (cosseno) da soma (subtração) de dois ângulos.

Capítulo 11

Conclusão Final

Neste trabalho foram abordados os resultados e amostras de erros, que apareceram ao longo de 5 avaliações individuais e 4 trabalhos em grupo, em assuntos de Matemática que devem constar no Ensino Médio segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Veja [1] para maiores detalhes.

No que diz respeito aos trabalhos em grupo, a maioria dos alunos obteve resultados positivos (notas acima de $6,0$).

No que diz respeito às avaliações individuais, tivemos uma grande variação de notas. A segunda avaliação individual (Capítulo 4) foi a que mais chamou a atenção pela quantidade de erros. Ali fica nítida a dificuldade dos alunos em trabalhar com os dois conceitos: módulo e inequação.

Os erros mais comuns dizem respeito a:

(1) Notações,

(2) Uso de exemplos para demonstrar um resultado geral,

(3) Interpretação de texto,

(4) Função modular,

(5) Solução de inequação,

(6) Bijetividade de uma função,

(7) Construção de uma função que modele uma situação,

(8) Construção de gráfico,

(9) Propriedades da função exponencial e logarítmica,

(10) Relações trigonométricas.

Para nós este trabalho (dissertação) é importante em decorrência de dois pontos:

(a) Identificar "assuntos"dentro da teoria cujos alunos tenham mais dificuldades. Por meio desta identificação é possível criar novos mecanismos por parte do professor para fazer com que o aluno tenha um melhor entendimento e aprendizado do assunto em questão.

(b) Os futuros professores da disciplina *Números e Funções Reais*, da graduação em Matemática, podem criar novos mecanismos de aprendizado com o mesmo intuito do item acima. Vale ressaltar que o conteúdo apresentado nesta disciplina é de fundamental importância para outras disciplinas do currículo da graduação, como por exemplo *Cálculo Diferencial e Integral*.

É importante registrar os erros e outros dados para que possamos por meio destes, cada vez mais, melhorar a formação dos futuros professores, pesquisadores e consequentemente melhorar o nosso ensino.

Capítulo 12

Anexo

Aqui constam as Listas de exercícios 1, 2, 3 e 4 referentes aos Trabalhos em Grupos 1, 2, 3 e 4, respectivamente, citados ao longo da dissertação.

Lista de exercícios 1 - Trabalho em grupo 1

1. Escreva como uma fração os seguintes números racionais:

   a) $0,353535\ldots$

   b) $0,27305305305\ldots$

   c) $0,142857142857\ldots$

2. Mostre que se $a, b \in \mathbb{Q}$ com $a < b$ então existe um número racional c tal que $a < c < b$.

3. Verifique que o número $2,8585\ldots$ é um número racional. Sugestão: Encontre a fração geratriz desta dízima periódica.

4. Encontre uma fração equivalente a $\frac{3}{4}$ cuja soma do denominador e do numerador seja 35.

5. Qual é a maior fração irredutível cujo numerador é menor que o denominador e tal que o denominador é 15?

6. Depois de percorrer $\frac{1}{3}$ do caminho, um carro parou para abastecer. A seguir parou depois de percorrer a metade do caminho restante, quando faltavam apenas 15km para o final do trajeto. Qual é a distância total do trajeto?

7. Suponha que $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$. Mostre que:

   a) $x < y \Rightarrow x^2 < y^2$;

   b) $x \leqslant y \Rightarrow x^2 \leqslant y^2$;

   c) $x < y \iff x^2 < y^2$;

8. Sejam a e b números reais. Se $a - b = b - a$, mostre que $a = b$.

9. Prove que a diferença entre um número racional e um número irracional é um número irracional.

10. Dê pelo menos um exemplo em que a soma (ou diferença) e o produto de dois números irracionais pode ser racional.

Lista de exercícios 2 - Trabalho em grupo 2

1. Em cada um dos ítens abaixo, determine o domínio da função dada.

   (a) $g(x) = \dfrac{x-1}{x^2-4}$ (b) $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x-1}}$

2. Determine o maior conjunto A tal que $\mathrm{Im} f \subset D_g$ e em seguida construa a composta $h(x) = g(f(x))$.

   (a) $g(x) = \sqrt{x}$ e $f : A \to \mathbb{R},\ , f(x) = x^2 - x.$

   (b) $g(x) = \dfrac{2}{x+2}$ e $f : A \to \mathbb{R},\ , f(x) = x + 3.$

3. Para cada um dos ítens do exercício anterior, verifique se f e g são monótonas. Em caso afirmativo, determine se são (estritamente) crescentes ou (estritamente) decrescentes.

4. Determine f de modo que $g(f(x)) = x$, para todo $x \in D_f$, sendo g dada como segue:

$$g(x) = 2 + \frac{3}{x+1}.$$

5. Determine se a função dada é injetora, sobrejetora, bijetora. Se for possível calcule a inversa.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ dada por } f(x) = 5x + 1.$$

6. Na hora de fazer seu testamento, uma pessoa tomou a seguinte decisão: dividiria sua fortuna entre sua filha, que está grávida, e a prole resultante dessa gravidez, dando a cada criança que fosse nascer o dobro daquilo que caberia à mãe se a criança fosse do sexo masculino, e o triplo daquilo que caberia à mãe, se fosse do sexo feminino. Nasceram trigêmeos, sendo dois meninos e uma menina. Como veio a ser repartida a herança legada?

Lista de exercícios 3 - Trabalho em grupo 3

1. Prove todas as propriedades de potências e raízes que não foram provadas em aula.

2. Simplifique as expressões:

$$(a)\sqrt[3]{2(\sqrt{9}+2\sqrt{25})+1} \qquad (b)\frac{5\sqrt[12]{64}-\sqrt{18}}{\sqrt{50}-\sqrt[3]{324}} \qquad (c)\frac{(a^4b^2)^3}{(ab^2)^2}, a, b \neq 0.$$

3. Se a e b são números reais, em que condições $(a+b)^2 = a^2 + b^2$?

4. Se $x, y \neq 0$, simplifique a expressão $\dfrac{x^{-1}+y^{-1}}{(xy)^{-1}}$.

5. Qual é o valor da expressão
$$\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}?$$

6. Simplifique

$$(a)\sqrt[3]{729} \qquad (b)\sqrt[4]{28561} \qquad (c)\sqrt{8}+\sqrt{32}+\sqrt{72}-\sqrt{50} \qquad (d)\sqrt[3]{\sqrt{64}} \qquad (e)\sqrt{a+\sqrt{b}}\sqrt{a-\sqrt{b}}\sqrt{a^2$$

7. Racionalize
$$(a)\frac{2}{2+3\sqrt{3}} \qquad (b)\frac{\sqrt[3]{9}-1}{\sqrt[3]{3}-1} \qquad (c)\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{4}}.$$

8. Determine o valor da expressão

$$(a)(a^{-1}+b^{-1})^{-2} \qquad (b)\frac{2}{3}8^{\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}8^{-\frac{2}{3}}.$$

9. Simplifique

$$(a)\ a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{a^{-\frac{1}{2}}b^{-1}}\sqrt{a^{-1}b^{\frac{2}{3}}}, a, b > 0. \qquad (b)\frac{2^{x+4}-2.2^x}{2.2^{x+3}}, x \in \mathbb{R}.$$

10. Determine o valor da expressão $(2^x + 2^{x-1})(3^x - 3^{x-1})$, $x \in \mathbb{R}$.

11. Mostre que $\sqrt[3]{9(\sqrt[3]{2}-1)} = 1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$.

12. Qual o valor que se obtém ao subtrair $\frac{5}{8-3\sqrt{7}}$ de $\frac{12}{\sqrt{7}+3}$?

13. Sejam $A = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ e $B = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$. Calcule $A + B$.

14. Qual a representação de 81^{4000} como potência na base 3?

15. Simplifique a expressão

$$(a)\ t^4(t^3(t^{-2})^5)^4, \qquad (b)\left(\frac{(x^{-3}y^5)^{-4}}{(x^{-5}y^{-2})^{-3}}\right)^{-2}$$

16. Qual é o quociente de 50^{50} por 25^{25}?

17. Simplifique a expressão

$$(a)\frac{27^{b+1}\cdot 3^{2a-1}}{9^{a+b}\cdot 3^{b+4}} \qquad (b)\sqrt[n]{\frac{3^n-2^n}{2^{-n}-3^{-n}}}.$$

18. Se $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = 5$, simplifique $\frac{x+y}{2y}$.

19. Simplifique $9^{20} + 9^{20} + 9^{20}$ como potência de 3.

20. Calcule o valor da expressão $2^5 - 5^2$.

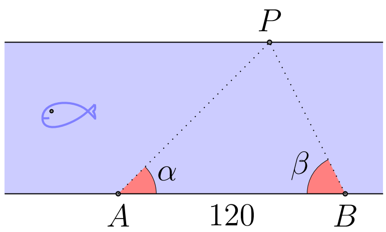
Lista de exercícios 4 - Trabalho em grupo 4

1. Enuncie e demonstre a Lei dos Cossenos.

2. Enuncie e demonstre a Lei dos Senos.

3. Calcule as diagonais de um paralelogramo de lados 3 e 4 e que tem um ângulo de 60°.

4. Dois observadores A e B estão na beira de um rio de margens paralelas e conseguem ver uma pedra P na outra margem. Com seus teodolitos eles medem os ângulos $\widehat{PAB} = \alpha$ e $\widehat{PBA} = \beta$. Sabendo-se que $\overline{AB} = 120m$, $\tan(\alpha) = 2$ e $\tan(\beta) = 3$, determine a largura do rio.



Avaliação diagnóstica

Assinale com um X a alternativa que julgar mais correta.

1	A	B	C	D	E
2	A	B	C	D	E
3	A	B	C	D	E
4	A	B	C	D	E
5	A	B	C	D	E
6	A	B	C	D	E
7	A	B	C	D	E
8	A	B	C	D	E
9	A	B	C	D	E
10	A	B	C	D	E
11	A	B	C	D	E
12	A	B	C	D	E
13	A	B	C	D	E
14	A	B	C	D	E
15	A	B	C	D	E
16	A	B	C	D	E
17	A	B	C	D	E
18	A	B	C	D	E
19	A	B	C	D	E
20	A	B	C	D	E
21	A	B	C	D	E
22	A	B	C	D	E
23	A	B	C	D	E
24	A	B	C	D	E
25	A	B	C	D	E

26	A	B	C	D	E
27	A	B	C	D	E
28	A	B	C	D	E
29	A	B	C	D	E
30	A	B	C	D	E
31	A	B	C	D	E
32	A	B	C	D	E
33	A	B	C	D	E
34	A	B	C	D	E
35	A	B	C	D	E
36	A	B	C	D	E
37	A	B	C	D	E
38	A	B	C	D	E
39	A	B	C	D	E
40	A	B	C	D	E
41	A	B	C	D	E
42	A	B	C	D	E
43	A	B	C	D	E
44	A	B	C	D	E
45	A	B	C	D	E
46	A	B	C	D	E
47	A	B	C	D	E
48	A	B	C	D	E
49	A	B	C	D	E
50	A	B	C	D	E

Avaliação Diagnóstica

Trigonometria

1. Quais dos seguintes triângulos são retângulos?

   1. Um triângulo com lados de comprimento 3, 4 e 5.
   2. Um triângulo com lados de comprimento 4, 5 e 6.
   3. Um triângulo com lados de comprimento 5, 12 e 13.

   $\boxed{\text{A}}$ 1, 2 e 3.

   $\boxed{\text{B}}$ 1 e 2.

   $\boxed{\text{C}}$ 1 e 3.

   $\boxed{\text{D}}$ 2 e 3.

   $\boxed{\text{E}}$ N.R.A. (**N**enhuma das **R**espostas **A**nteriores)

2. Quais das afirmações são verdadeiras?

   1. $30^o = \frac{\pi}{3}$ rd.
   2. $45^o = \frac{\pi}{2}$ rd.
   3. $60^o = \frac{\pi}{3}$ rd.
   4. $45^o = \frac{\pi}{4}$ rd.
   5. $60^o = \frac{\pi}{6}$ rd.
   6. $30^o = \frac{\pi}{6}$ rd.

   $\boxed{\text{A}}$ 1, 2 e 3.

   $\boxed{\text{B}}$ 1, 4 e 5.

   $\boxed{\text{C}}$ 2, 3 e 6.

   $\boxed{\text{D}}$ 3, 4 e 6.

   $\boxed{\text{E}}$ N.R.A.

3. Um triângulo tem lados de comprimento de 3, 4 e 5 cm. Se β é o ângulo entre os lados de comprimento 3 e 5 cm, então $\operatorname{sen}\beta$ é igual a

   $\boxed{\text{A}}$ $\frac{3}{5}$

   $\boxed{\text{B}}$ $\frac{4}{5}$

   $\boxed{\text{C}}$ $\frac{3}{4}$

   $\boxed{\text{D}}$ $\frac{4}{3}$

   $\boxed{\text{E}}$ N.R.A.

4. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

   1. $\operatorname{sen} 0 = 0$
   2. $\cos 0 = 0$
   3. $\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 0$
   4. $\operatorname{sen} 0 = 1$
   5. $\cos 0 = 1$
   6. $\cos \frac{\pi}{2} = 0$

   $\boxed{\text{A}}$ 1, 2 e 3.

   $\boxed{\text{B}}$ 1, 3 e 5.

   $\boxed{\text{C}}$ 2, 4 e 6.

   $\boxed{\text{D}}$ 2, 3 e 4.

   $\boxed{\text{E}}$ N.R.A.

5. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

   1. $\operatorname{sen} 30^o = \frac{1}{2}$
   2. $\operatorname{sen} 30^o = \frac{1}{\sqrt{2}}$
   3. $\operatorname{sen} 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$
   4. $\operatorname{sen} 45^o = \frac{1}{2}$
   5. $\operatorname{sen} 45^o = \frac{1}{\sqrt{2}}$
   6. $\operatorname{sen} 45^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$

   $\boxed{\text{A}}$ 1 e 5

   $\boxed{\text{B}}$ 2 e 4

   $\boxed{\text{C}}$ 3 e 4

   $\boxed{\text{D}}$ 1 e 6

   $\boxed{\text{E}}$ N.R.A.

Álgebra Elementar

6. Simplifique $4 - a - 3[3 - 2(a - b)]$

   $\boxed{\text{A}}$ $5a - 6b - 5$

   $\boxed{\text{B}}$ $5a + 6b - 5$

   $\boxed{\text{C}}$ $-7a + 6b - 5$

   $\boxed{\text{D}}$ $-7a - 6b - 5$

   $\boxed{\text{E}}$ N.R.A.

7. Simplifique $\frac{6x^4yz^2}{-12xy^2z}$

   $\boxed{\text{A}}$ $-\frac{x^3yz}{2}$

B $-12x^5yz$

C $-\dfrac{x^3z}{2y}$

D $\dfrac{-2x^3z}{y}$

E N.R.A.

8. Divida $\dfrac{x^3+x^2-1}{x^2-1}$

A x^3+1

B $x+1-\dfrac{x}{x^2-1}$

C $x+1-\dfrac{x-2}{x^2-1}$

D $x+1+\dfrac{x}{x^2-1}$

E N.R.A.

9. $(5x^2-2y)^2 =$

A $25x^4-20x^2y+4y^2$

B $25x^4+4y^2$

C $25x^4+20x^2y-4y^2$

D $25x^4-10x^2y+4y^2$

E N.R.A.

10. $(2x-5y)^3 =$

A $8x^3-60x^2y-150xy^2-125y^3$

B $8x^3-60x^2y-150xy^2+125y^3$

C $8x^3+60x^2y-150xy^2-125y^3$

D $8x^3-60x^2y+150xy^2-125y^3$

E N.R.A.

Fatoração

11. $x^2-(x+h)^2 =$

A $h(2x+h)$

B $-h(2x+h)$

C $-h^2$

D $-h$

E N.R.A.

12. $x^2-10xy+25y^2 =$

A $(x-5y)(x-5y)$

B $(x+5y)(x+5y)$

C $(x-5y)(x+5y)$

D Não pode ser fatorado

E N.R.A.

13. x^4-10x^2+9

A $(x-1)(x-1)(x-3)(x-3)$

B $(x-1)(x+1)(x-3)(x-3)$

C $(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)$

D $(x-1)(x-1)(x-3)(x+3)$

E N.R.A.

14. $x^3-8 =$

A $(x-2)(x^2+2x+4)$

B $(x-2)^3$

C $(x-2)(x^2+4x+4)$

D $(x-2)(x^2+4x+2)$

E N.R.A.

15. $x+ay+x^2-a^2y^2 =$

A Não pode ser fatorado.

B $(x+ay)(x-ay+1)$

C $(x+ay)(x-ay-1)$

D $(x+ay)(x+ay+1)$

E N.R.A.

Frações

16. Simplificando $\dfrac{x^2+4x}{x^2}$ obtém-se:

A $1+4x$

B $x^2+\dfrac{4}{x}$

C x^4+4x^3

D $1+\dfrac{4}{x}$

E N.R.A.

17. Simplificando $\dfrac{x^2+x-6}{x+3}$ obtém-se:

A $x+2$

B $x-3$

C $x-2$

D Não pode ser simplificada.

E N.R.A.

18. $\dfrac{x^3(2x)-(x^2-1)(3x^2)}{(x^3)^2}$

A $-\dfrac{(x^2-3)}{x^4}$

B $\dfrac{(3x-x^2)}{x^3}$

C $\dfrac{-(x^2+3)}{x^4}$

D $2x-3(x^2-1)$

E N.R.A.

19. $\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{x^2-1}$

A $\frac{2}{x-1}$

B $\frac{2}{x+1}$

C $\frac{2}{x^2-1}$

D 0

E N.R.A.

20. $1-\frac{1}{n^2}.\frac{(n-1)n}{2}$

A $\frac{3}{2}+\frac{1}{2n}$

B $\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$

C $\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$

D $\frac{3}{2}-\frac{1}{2n}$

E N.R.A.

Exponenciação

21. $\sqrt{x^2+2^2}=$

A $x+4$

B $x+2$

C $|x|+4$

D $|x|+2$

E N.R.A.

22. $5x^{2/5}-4x^{1/5}=$

A $x^{1/5}(5x^{1/5}-4)$

B $x^{1/5}(5x^2-4)$

C $x^{1/5}(5x^2-4x)$

D $(5x^2-4x)^{1/5}$

E N.R.A.

23. $\frac{x^2-x}{x^{1/2}}=$

A $x^{3/2}-x^{1/2}$

B $x^2-x^{1/2}$

C $(x^2-x)x^{1/2}$

D $x^{3/2}-x^{1/2}$

E N.R.A.

24. $\frac{(x+1)^{1/2}-1}{x}=$

A 1

B 0

C $\frac{1}{(x+1)^{1/2}+1}$

D $\frac{1}{(x+1)^{1/2}-1}$

E N.R.A.

25. $\frac{3(2-x^2)^{1/3}-(x+2)(-2x)(2-x^2)^{-2/3}}{(2-x^2)^{2/3}}=$

A $(6-4x-3x^2)(2-x^2)^{-4/3}$

B $(6+4x-x^2)(2-x^2)^{-4/3}$

C $(8+x-3x^2)(2-x^2)^{-4/3}$

D $(4-x-3x^2)(2-x^2)^{-4/3}$

E N.R.A.

Funções e equações

26. Se $f(x)=x^3-2x-1$ então $f(1)-f(0)=$

A -2

B -3

C 3

D -1

E N.R.A.

27. Se $f(x)=x^2-4x+7$ então $f(x+h)-f(x)=$

A $(2x-4+h)h$

B $(2x+4+h)h$

C h^2-4h+7

D $h^2+2xh-4h-8x+14$

E N.R.A.

28. Se $4x(10-2x)-(10-2x)^2=0$ então

A $x=\frac{5}{3}$ ou $x=5$

B $x=\frac{3}{5}$ ou $x=5$

C $x=\frac{20\pm5\sqrt{10}}{3}$

D $x=\frac{1}{5}$ ou $x=5$

E N.R.A.

29. Se $x+\sqrt{6-x}=0$ então

A $x=-3$ ou $x=2$

B $x=-2$ ou $x=3$

C $x=2$

D $x=-3$

E N.R.A.

30. $\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{x^2-1}=0$ para

A $x = 0$

B todo x

C nenhuma solução.

D para todo x exceto $x = -1$ ou $x = 1$.

E N.R.A.

Identidades Trigonométricas

31. $\dfrac{\tan x}{\operatorname{sen} x} =$

A $\operatorname{cossec} x$

B $\operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x$

C $\operatorname{cotg} x$

D $\sec x$

E N.R.A.

32. $\dfrac{1}{\cos x + 1} =$

A $\dfrac{1}{\cos x} + 1$

B $\dfrac{1}{\cos(x+1)}$

C $\operatorname{cotg} x \operatorname{cossec} x + \operatorname{cossec}^2 x$

D $\operatorname{cossec}^2 x$

E N.R.A.

33. $\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x} =$

A $\operatorname{sen}(3x)$

B $\operatorname{sen} x$

C $2\cos x$

D 2

E N.R.A.

34. $\operatorname{sen} y \cos x - \operatorname{sen} x \cos y =$

A $\operatorname{sen}(x + y)$

B $\operatorname{sen}(x - y)$

C $\cos(x + y)$

D $\cos(x - y)$

E N.R.A.

35. Se um triângulo tem dois lados de comprimento 1 e o ângulo entre eles é x então a área desse triângulo é

A $\dfrac{(\tan x)}{2}$

B $\dfrac{(\operatorname{sen} x)}{2}$

C $\dfrac{(\cos x)}{2}$

D As informações não são suficientes.

E N.R.A.

Equacionamento de problemas

36. Dois lados opostos de um retângulo tem cada um comprimento x. Se o perímetro do retângulo é 12 então a área, como função de x é

A $x(12 - x)$

B $x(6 - x)$

C $(6 - x)^2$

D $x(12 - 2x)$

E N.R.A.

37. A área de um triângulo equilátero que tem perímetro 18 é

A $9\sqrt{3}$

B $18\sqrt{3}$

C 162

D 324

E N.R.A.

38. Uma caixa aberta é construída de uma peça retangular de metal cortando quadrados de lado x em cada canto e dobrando os lados para cima. Se a medida do metal é 10×16 então o volume da caixa, como uma função de x é

A $x(5 - x)(8 - x)$

B $x(10 - x)(16 - x)$

C $2x(5 - x)(8 - x)$

D $4x(5 - x)(8 - x)$

E N.R.A.

39. Uma lata cilíndrica tem um volume de 2 cm^3. Se o raio da base é x cm, então a área total (incluindo fundo e tampa), como função de x é

A $2\pi x(x + h)$

B $\pi x^2 + \dfrac{4}{x}$

C $2\pi x^2 + \dfrac{4}{x}$

D Informação não suficiente.

E N.R.A.

40. A distância da origem ao ponto (x, y) da reta $y + 2x = 5$, com função de x é

A $5x^2 - 20x + 25$

B $5x^2 + 20x + 25$

C $5x^2 - 10x + 25$

D Informação insuficiente.

E N.R.A.

Curvas

41. A reta com inclinação 3 passando pelo ponto $(1,-2)$ é
    - A $y=3x-1$
    - B $y=3x^2-1$
    - C $y=3x^2-5$
    - D $y=3x-5$
    - E N.R.A.

42. A curva $y=-x^2+2x+3$
    1. É uma parábola aberta para cima.
    2. É uma parábola com concavidade para baixo.
    3. Corta o eixo x em 1 e -3.
    4. Corta o eixo x em -1 e 3.
    5. Tem vértice em $x=-1$.
    6. Tem vértice em $x=2$.

    As afirmações verdadeiras são:
    - A 1, 3 e 6.
    - B 2, 4 e 5.
    - C 1 e 4.
    - D 2 e 3.
    - E N.R.A.

43. O círculo com raio 5 e centro no eixo x em $x=4$ corta o eixo x em
    - A $x=-1$ e $x=1$.
    - B $x=-2$ e $x=2$.
    - C $x=-3$ e $x=3$.
    - D Não corta o eixo x.
    - E N.R.A.

44. As curvas $y=x^2$ e $y=x+6$ interceptam-se nos pontos de abscissa
    - A $x=-3$ e $x=-2$.
    - B $x=2$ e $x=3$.
    - C $x=-3$ e $x=2$.
    - D $x=-2$ e $x=3$.
    - E N.R.A.

45. As curvas $y=\sqrt{x}$ e $y=x-6$ interceptam-se nos pontos de abscissa
    - A $x=4$ e $x=9$.
    - B $x=4$.
    - C $x=9$.
    - D Não se interceptam.
    - E N.R.A.

Desigualdades

46. $\left|\frac{-4x}{y}\right| =$
    - A $4\frac{|x|}{|y|}$.
    - B $-4\frac{x}{y}$.
    - C $-4\frac{|x|}{|y|}$.
    - D $4\frac{x}{y}$.
    - E N.R.A.

47. Se $f(x)=|x|$ então $\frac{f(h)-f(0)}{h} =$
    - A 1 se $h>0$, -1 se $h<0$.
    - B 1 se $h<0$, -1 se $h>0$.
    - C $\frac{|x|}{x}$
    - D Indefinido.
    - E N.R.A.

48. Se $-3 \leqslant 2-5x \leqslant 12$ então
    - A $-2 \leqslant x \leqslant 1$.
    - B $2 \leqslant x \leqslant -1$.
    - C $x \leqslant -2$ ou $1 \leqslant x$.
    - D $x \leqslant -2$ e $1 \leqslant x$.
    - E N.R.A.

49. Se $x^2 < x+6$ então
    - A $-3<x<2$.
    - B $-2<x<3$.
    - C $x<-2$ ou $x>3$.
    - D $x<-3$ ou $x>2$.
    - E N.R.A.

50. Se $|x-3|<2$ então
    - A $x<5$.
    - B $1<x<5$.
    - C $1<x$.
    - D $x<3$.
    - E N.R.A.

Referências Bibliográficas

[1] Base Nacional Comum Curricular. http://basenacionalcomum.mec.gov.br/

[2] Projeto Primeiros Teoremas - Avaliação Diagnóstica 2019. Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Coordenação dos Cursos de Graduação em Matemática.

[3] Elon L. Lima, Paulo C. P. Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto C. Morgado. *A Matemática do Ensino Médio-Volume 1*. Edição 9, Rio de Janeiro, 2011, Coleção do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática.

[4] Gelson Iezzi, Carlos Murakami. *Fundamentos de Matemática Elementar - Volumes 1, 2 e 3*, 2011, Editora Atual.

[5] Antonio Caminha Muniz Neto. *Geometria - Coleção PROFMAT*. Edição 1, Rio de Janeiro, 2013, Sociedade Brasileira de Matemática.