UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Percolação Acessível

Ricardo de Jesus Caldas Assis

Dissertação de Mestrado do Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística (PIPGEs)

ICMC USP SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura:______________________

Ricardo de Jesus Caldas Assis

Percolação Acessível

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP e ao Departamento de Estatística – DEs-UFSCar, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Estatística – Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Estatística

Orientador: Prof. Dr. Pablo Martín Rodriguez

USP – São Carlos
Abril de 2020

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

d278p de Jesus Caldas Assis, Ricardo
Percolação Acessível / Ricardo de Jesus Caldas Assis; orientador Pablo Martín Rodríguez. -- São Carlos, 2020.
41 p.

Dissertação (Mestrado - Programa Interinstitucional de Pós-graduação em Estatística) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2020.

1. percolação acessível. 2. transição de fase. 3. árvore n-ária . 4. árvore esfericamente simétrica . I. Martín Rodríguez, Pablo , orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Ricardo de Jesus Caldas Assis

Accessible Percolation

Master dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC- USP and to the Department of Statistics – DEs- UFSCar, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master Interagency Program Graduate in Statistics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Statistics

Advisor: Prof. Dr. Pablo Martín Rodriguez

USP – São Carlos
April 2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Ricardo de Jesus Caldas Assis, realizada em 17/02/2020:

Prof. Dr. Pablo Martín Rodríguez
USP

Prof. Dr. Cristian Favio Coletti
UFABC

Mario Estrada

Prof. Dr. Mário Andrés Estrada López
UFPE

Certifico que a defesa realizou-se com a participação à distância do(s) membro(s) Cristian Favio Coletti e, depois das arguições e deliberações realizadas, o(s) participante(s) à distância está(ao) de acordo com o conteúdo do parecer da banca examinadora redigido neste relatório de defesa.

Prof. Dr. Pablo Martín Rodríguez

Resumo

ASSIS, R. J. C. **Percolação Acessível**. 2020. 41p. Dissertação (Mestrado em Estatística - Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatítica) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos - SP, 2020.

Consideramos o modelo de percolação acessível na árvore n-ária finita de altura h. O modelo é definido associando-se uma variável aleatória contínua X_v para cada vértice v da árvore. A principal questão a ser considerada e estudada é a existência ou não de um caminho de vizinhos mais próximos $v_0, v_1, \ldots, v_n$, conectando a raiz com a fronteira da árvore, de tal modo que $X_{v_0} < X_{v_1} < \ldots < X_{v_n}$. O evento definido pela existência desse caminho é chamado de percolação acessível. Neste trabalho estudamos a probabilidade do evento de percolação acessível quando o valor n é dado por $n(h) = \alpha(h)h$ em que h é a altura da árvore e $\alpha(h)$ é constante. Os resultados são obtidos fazendo $h \to \infty$. Adicionalmente, discutiremos outros resultados recentes na literatura.

Palavras chave: Transição de Fase, Percolação Acessível, Árvore n-ária

Abstract

ASSIS, R. J. C. **Accessible Percolation**. 2020. 41p. Dissertação (Mestrado em Estatística - Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatítica) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos - SP, 2020.

We consider the accessibility percolation model on the n-ary tree height the finite h. The model is defined by associating a continuous random variable X_v for each vertex v in the tree. The main issue to consider and study is whether or not there is a nearest neighbor path $v_0, v_1, \ldots, v_n$, connecting the root to the tree boundary, such that $X_{v_0} < X_{v_1} < \ldots < X_{v_n}$. The event defined by the existence of this path is called the accessible percolation. In this paper we study the probability of the accessible percolation event. when n is given by $n(h) = \alpha(h)h$ where h is the height of the tree and $\alpha(h)$ is constant. Results are obtained by making $h \to \infty$. Additionally, we will discuss other recent results in the literature.

keywords: Phase Transition, Accessible Percolation, n-ary Tree

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

O modelo de percolação acessível em árvores foi introduzido no artigo [1], inspirado em questões de Biologia Evolutiva (A questão principal é supor uma população de alguma forma de vida que tenha o mesmo tipo genético (genótipo). Se ocorrer uma mutação, é criado um novo genótipo que pode morrer ou substituir o antigo. Desde que a seleção natural seja suficientemente forte, o último só acontece se o novo genótipo tiver maior aptidão). Nesse artigo uma n-árvore de altura h é considerada e uma variável aleatória absolutamente contínua X_v é dada e está associada a cada vértice v, independentemente de todo o resto. Uma das principais questões neste modelo é se existe um caminho de vizinhos mais próximos $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_h$ de tal modo que $X_{v_1} < X_{v_2} < X_{v_3} < \ldots < X_{v_h}$. Esse tipo de caminho é chamado de caminho acessível. No artigo [1] os autores derivaram um resultado assintótico para a probabilidade de ter pelo menos um caminho acessível conectando a raiz com o nível h de uma árvore $n(h)$ com $n(h) := \alpha(h)h$, e α alguma constante positiva arbitrária. Consequentemente, eles provaram a existência de um valor crítico de percolação para este modelo quando $h \to \infty$. De fato, eles mostraram que a probabilidade de ter pelo menos um caminho acessível vai para zero para $\alpha < \alpha_c$ e converge para um número positivo para $\alpha > \alpha_c$ com $1/e \leq \alpha_c \leq 1$, onde α_c é o valor crítico de percolação. Mais tarde, este resultado foi complementado no artigo [2], onde os autores mostraram que essa probabilidade converge para 1 quando $\alpha > 1/e$. Recentemente, um problema relacionado foi analisado no hipercubo $H_N = \{0,1\}^N$, com $N \in \mathbb{N}$, para mais confira os artigos [4, 6]. Sugerimos consultar tambémos artigos [8, 9, 10, 11, 12] para questões relacionadas. No artigo [3], a principal questão estudada é a existência de um caminho acessível infinito na árvore esfericamente simétrica. Neste modelo para cada vértice v de uma árvore esfericamente simétrica associa-se uma variável aleatória absolutamente contínua X_v com distribuição uniforme $(0, 1)$. Prova-se que para uma dada função de crescimento da árvore existe um valor crítico de percolação.

Nesta dissertação vamos descrever os argumentos usados em [1] para a prova de transição de fase do modelo. Além disto, vamos discutir problemas relacionados e problemas em aberto. O capítulo 1 é dedicado para estudarmos um pouco de teoria de grafos (definição, exemplos e propriedades) e conceituarmos árvores e algumas de suas principais propriedades. No capítulo 2 foi feito um estudo sistemático do artigo [1]. Por fim, no capítulo 3 foi feita uma discussão sobre [3].

Capítulo 1

Preliminares e notação de grafos

Neste capítulo veremos o que é um grafo e algumas definições relacionadas a grafos. Também veremos o conceito de n-árvore ou árvore n-ária e árvore esfericamente simétrica.

Definição 1.1 (Cormen, Leiserson, Rivest, Stein. (2009))**.** *Um* ***grafo orientado*** *finito G é uma par $G = (V, E)$, onde*

1. *V é um conjunto finito, chamado de* ***conjunto de vértices****;*
2. *E é uma relação binária em V, chamado de* ***conjunto de arestas****.*

Em um **grafo não orientado** $G = (V, E)$, E consiste de pares de vértices não ordenados. Se E é infinito, dizemos que G é um **grafo infinito**.

Observação 1.1. *Os grafos podem ser representados graficamente: Os vértices são desenhados como círculos e as arestas são desenhadas como curvas (retas ou não) ligando dois círculos, no caso de grafos orientados, as curvas tem um seta em uma das extremidades.*

Exemplo 1.1. *O grafo a seguir é um exemplo de grafo orientado com* ***laço*** *(arestas de um vértice para ele mesmo).*

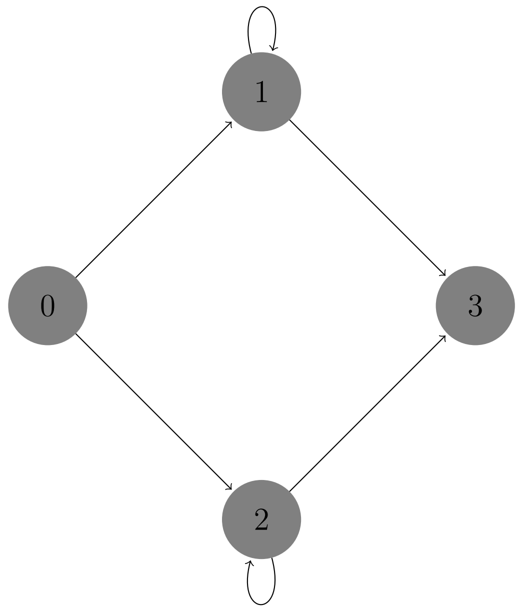

Figura 1.1: grafo orientado com laço

Para este grafo, temos os seguintes conjuntos de vértices e arestas

$$V = \{0, 1, 2, 3\} \text{ } e \text{ } E = \{(0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}.$$

Seja $G = (V, E)$ um grafo. Um caminho de comprimento k de um vértice u até um vértice u' em G é uma sequência $v_0, v_1, v_2, ..., v_k$ de vértices tal que $u = v_0, u' = v_k$ e $(v_{i-1}, v_i) \in E$ para $i \in \{1, 2, ..., k\}$. Além disso, dizemos que um caminho é **simples** se todos os vértices no caminho são distintos. Por outro lado, um caminho $v_0, v_1, ..., v_k$ forma um ciclo se $v_0 = v_k$ e o caminho contém pelo menos uma aresta. O ciclo é **simples** se além disso $v_1, v_2, ..., v_k$ são distintos. Agora, se G é sem ciclo, então ele é dito ser **acíclico.** Finalmente, G é **conexo** se cada vértice é acessível a partir de todos os outros. Agora, dizemos que se G é **conexo acíclico**, então G é uma **árvore**. Em outras palavras, uma árvore T é um grafo tal que todo par de vértices de T é unido por um único caminho.

Observação 1.2. *Dizemos que uma árvore T é infinita se V e E são infinitos. Mais ainda, se T é infinita, então dizemos que T é localmente finita, se cada vértice v da árvore tem um número finito de vizinhos mais próximos em T.*

Exemplo 1.2. *A figura abaixo é uma ilustação de uma árvore não-orientada.*

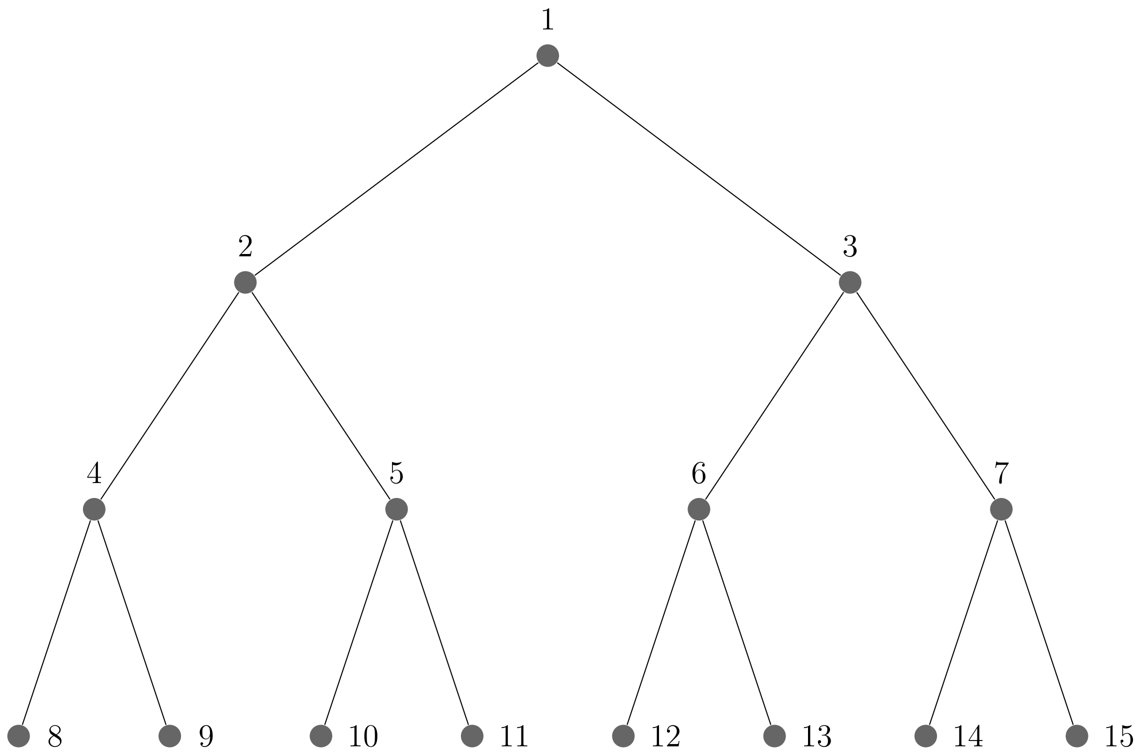

Figura 1.2: árvore dos vértices numerados de 1 a 15

Já vimos que uma árvore é um grafo acíclico conexo não orientado. Agora, uma árvore com raiz é uma árvore que tem um vértice de origem denotado por **0**.

Exemplo 1.3. *O grafo da Figura* 1.2 *é uma árvore com origem (raiz) exatamente no vétice de número* 1*.*

As definições que seguem valem para quaisquer grafos. Entretanto, vamos restringi-las a árvores.

Definição 1.2. *Seja* $T = (\vartheta, \xi)$ *uma árvore. Um caminho de tamanho* n *em* T *é uma sequência de vértices* $v_0, v_1, v_2, ..., v_n$ *conectados por uma sequência de elos* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$*, tais que* $\varepsilon_i = (v_{i-1}, v_i)$ *para todo* $i \in \{1, 2, ..., n\}$*. Denotamos esse caminho por* $v_0 \to v_n$*.*

Observação 1.3. *No caso da definição anterior, dizemos que a distância de* v_0 *até* v_n *é* n *e denotamos por* $d(v_0, v_n) = n$*.*

Definição 1.3. *Seja* $T = (\vartheta, \xi)$ *uma árvore. Dizemos que* u *e* v *de* ϑ *são vizinhos mais próximos se* $d(u, v) = 1$*.*

Definição 1.4. *Seja* $T = (\vartheta, \xi)$ *uma árvore. Dizemos que o grau de* v, *denotado por* $g(v)$, *é o número de vizinhos mais próximos de* v.

Observação 1.4. *Considere o conjunto* $G_v = \{u \in \vartheta; d(v, u) = 1\}$. *Então,* $g(v) = |G_v|$.

Exemplo 1.4. *Seja a árvore finita, abaixo.*

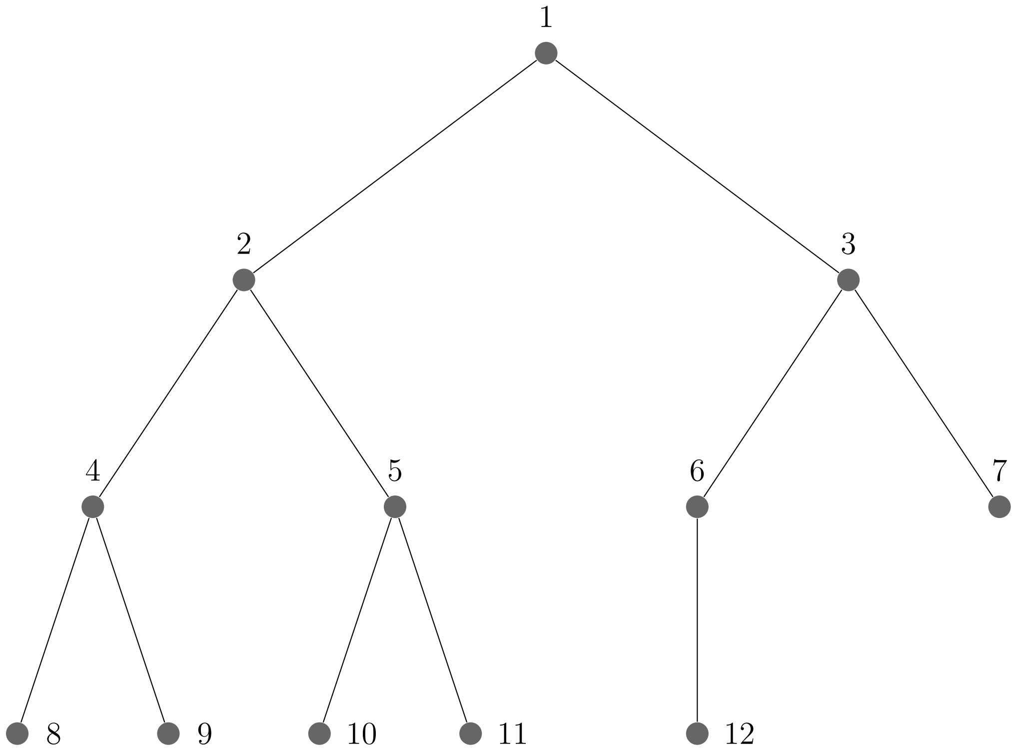

Figura 1.3: árvore dos vértices numerados de 1 a 12

Para esta árvore finita, temos $g(i) = 3$ *se* $i \in \{2, 3, 4, 5\}, g(i) = 2$ *se* $i \in \{1, 6\}$ *e* $g(i) = 1$ *se* $i \in \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

Agora, vamos definir o que é uma n-árvore e estudar alguns conceitos relacionados a este tipo de árvore.

Definição 1.5. *Uma* n*-árvore ou árvore* n*-área completa é uma árvore com raiz onde cada vértice de qualquer nível está conectado a* n *vértices do próximo nível, exceto pelos vértices que estão no último nível da árvore.*

Observação 1.5. *A origem* $\boldsymbol{0}$ *é o nível* 0 *da árvore. O nível de cada vértice da árvore é igual a sua distância em relação a origem.*

Exemplo 1.5. *A figura abaixo representa uma n-árvore de raiz ω, com $n = 2$.*

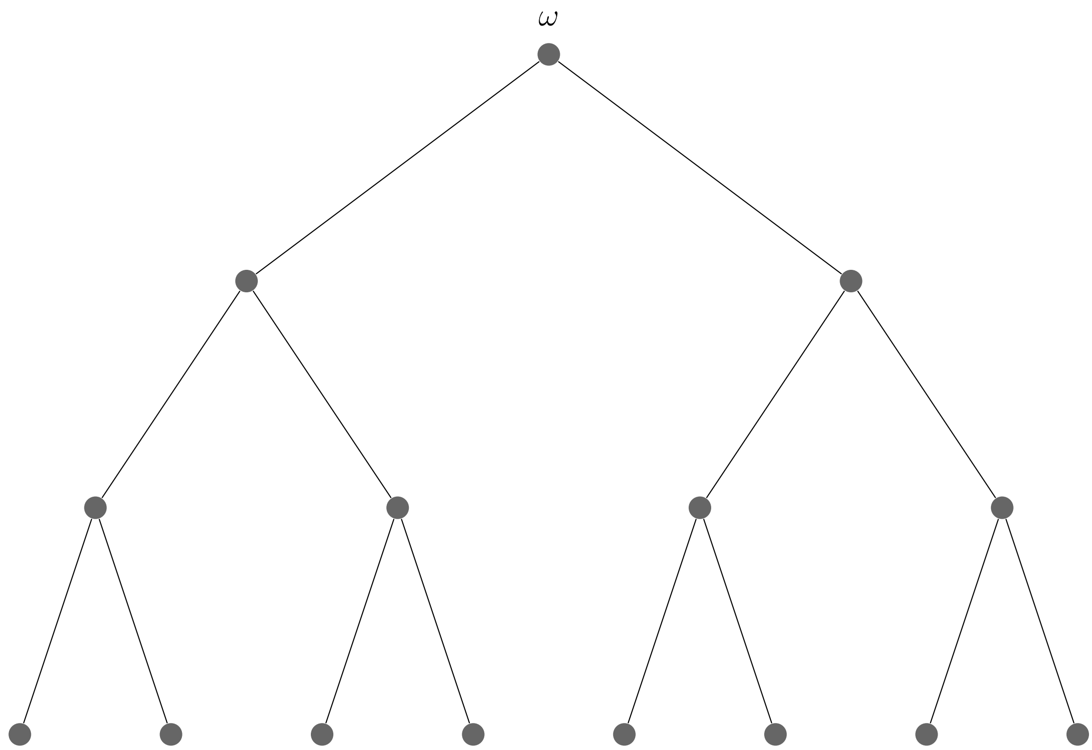

Figura 1.4: 2-árvore de raiz ω

Definição 1.6. *A altura de uma n-árvore é definida como a distância da raiz até o último nível da árvore. Denotamos essa altura por h. Daí, qualquer caminho da raiz ao último nível da árvore consiste de $h + 1$ vértices.*

Exemplo 1.6. *Considere a Figura* 1.4. *Neste caso, temos a altura da* 2*-árvore igual a* 3 *e que cada caminho da raiz ω ao último nível da árvore consiste de exatamente* 4 *vértices.*

Proposição 1.1. *Seja $T = (\vartheta, \xi)$ uma árvore $n-$área. Então, o número de vértices do último nível de T é igual a n^h.*

Demonstração. A prova é por indução sobre h. Com efeito, para $h = 1$ temos o último nível de T com exatamente n vértices. Agora, suponha válido para h. Devemos mostrar válido para $h + 1$. De fato, cada vértice do nível h está conectado a n vértices do nível $h + 1$. Como, por hipótese de indução, existem n^h vértices no nível h concluímos que existem $n.n^h = n^{h+1}$ vértices no nível $h + 1$.

□

Observação 1.6. *Cada vértice do último nível corresponde a um único caminho partindo da raiz. Logo, o número de caminhos partindo da raiz que conectam a algum dos vértices do último nível da $n-$árvore é igual a n^h.*

Agora, vamos definir o que é uma árvore esfericamente simétrica, sua função de crescimento e um exemplo deste tipo de árvore.

Definição 1.7. *Seja uma árvore infinita, localmente finita, $T = (\vartheta, \xi)$ com raiz $\boldsymbol{0}$. Dizemos que T é uma árvore esfericamente simétrica se qualquer par de vértices que tem a mesma distância da origem, têm o mesmo grau. Em outras palavras, T é uma árvore esfericamente simétrica se o grau de qualquer vértice v de ϑ depende apenas da sua distância da raiz $\boldsymbol{0}$.*

Observação 1.7.

1. *Por definição, para cada v de ϑ, temos $|v| = d(\boldsymbol{0}, v)$;*
2. *Na árvore esfericamente simétrica, com raiz $\boldsymbol{0}$, vale que $g(v) = f(|v|) + 1$, onde $f := (f(i))_{i \geq 0}$ é uma sequência de inteiros positivos e f é denominada função crescimento de T.*

Exemplo 1.7. *Seja a árvore esfericamente simétrica* T, *abaixo.*

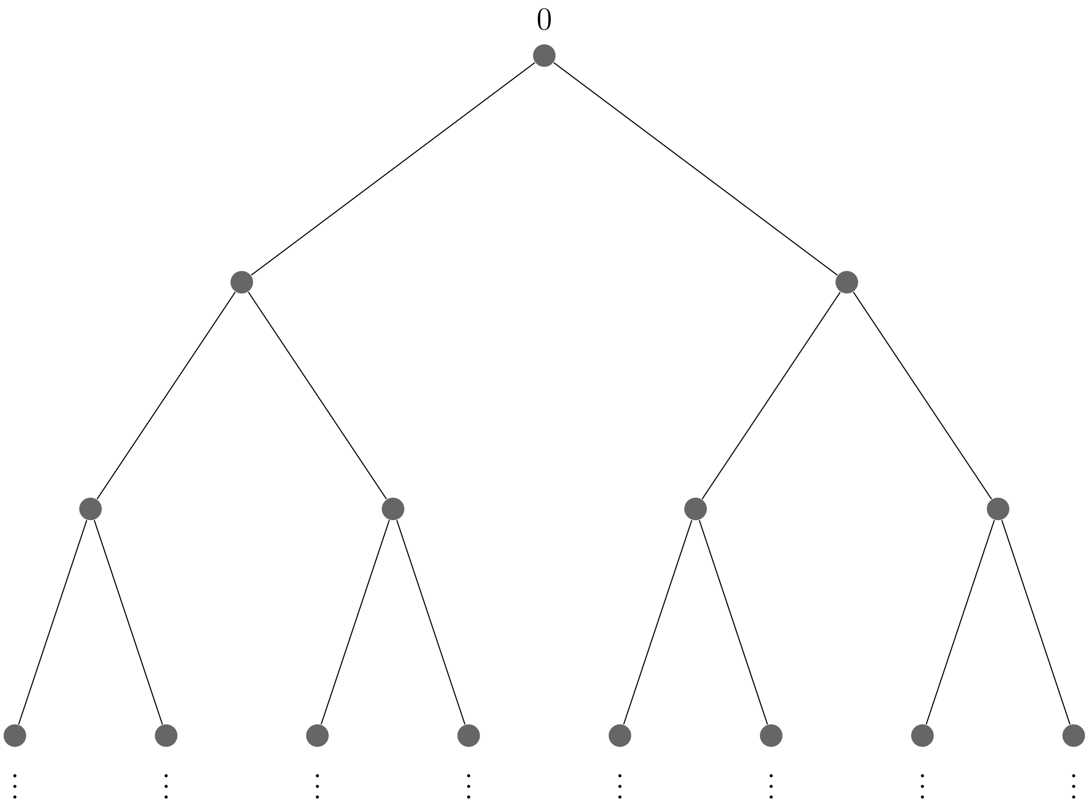

Figura 1.5: árvore esféricamente simétrica T

Para esta árvore, temos a função de crescimento dada por $f(i) = 2, \forall i \geq 0$. *Logo,* $g(v) = f(|v|) + 1 = 3, \forall v \in \vartheta$ *com* $v \neq \boldsymbol{0}$.

Agora, para cada $n > 1$, seja $\partial T_n = \{v \in \vartheta; |v| = n\}$.

Proposição 1.2. *Seja* T *uma árvore esfericamente simétrica. Então,* $|\partial T_n| = \prod_{i=0}^{n-1} f(i)$.

Demonstração. Indução sobre n. Para $n = 1$ é válido, pois $|\partial T_1| = f(0)$. Suponha válido para n, ou seja, $|\partial T_n| = \prod_{i=0}^{n-1} f(i)$. Logo, $|\partial T_{n+1}| = |\partial T_n|.f(n) = (\prod_{i=0}^{n-1} f(i)).f(n) = \prod_{i=0}^{n} f(i)$.

$\square$

Definição 1.8. *Uma árvore esfericamente simétrica infinita cuja função de crescimente é dada por* $f(i) = i+1, \forall i \geq 0$*, é dita árvore fatorial. Denotamos por* $T_!$*. a árvore fatorial. A figura abaixo, é uma representação da árvore* $T_!$*.*

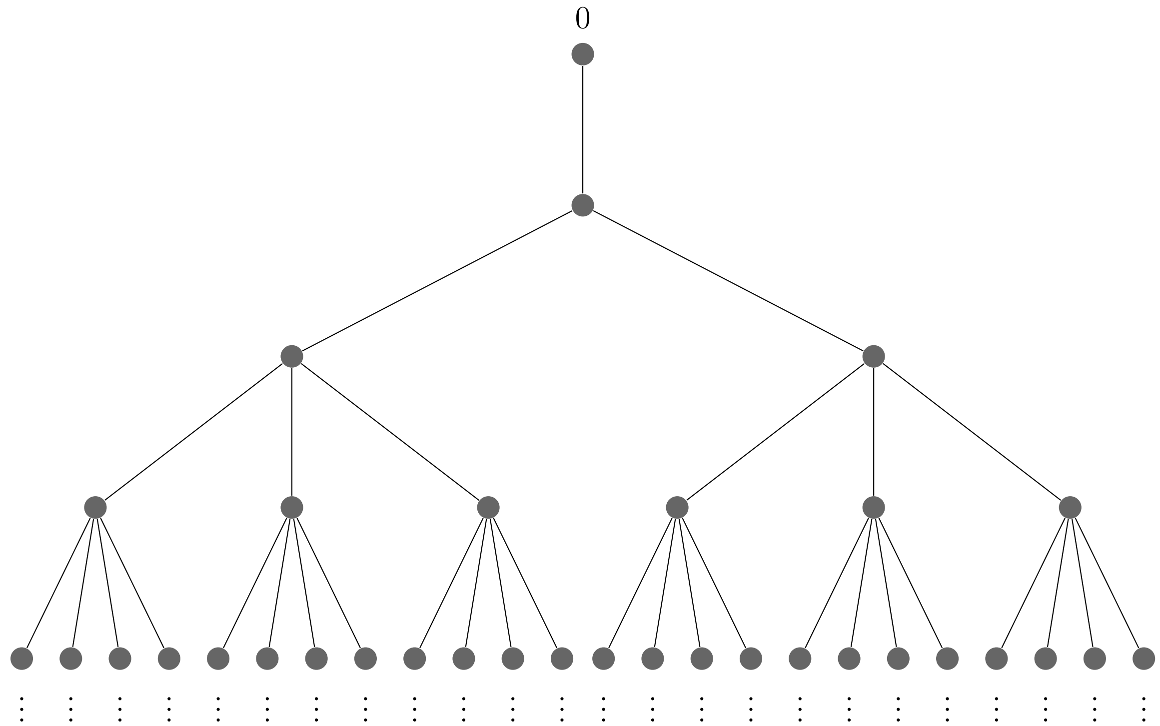

Figura 1.6: Uma representação da árvore $T_!$, até o nível $i = 4$

Observação 1.8. *Pela proposição* 1.2*, segue que* $|\partial T_{!,n}| = 1.2.3...n = n!$.

Capítulo 2

Modelo de percolação acessível em árvores n-árias

Neste capítulo vamos estudar o modelo de percolação acessível na n-árvore. O modelo consiste em associar uma variável aleatória contínua X_v para cada vértice v da n-árvore. Consideremos que as variáveis aleatórias contínuas X_v tem distribuição uniforme $(0, 1)$. Suporemos, sem perda de generalidade, que para a raiz $\mathbf{0}$ atribuímos o valor 0. Vamos estudar sob quais condições existe pelo menos um caminho acessível na n-árvore, definindo assim a percolação acessível. Começaremos definindo o modelo e posteriormente estudando o número de caminhos acessíveis na n-árvore.

2.1 O modelo

Para este modelo, a cada vértice v da árvore associamos uma variável aleatória X_v, tal que essa variável aleatória pertence a uma família de variáveis aleatórias contínuas $(X_v)_{v \in \vartheta}$ i.i.d. Chamamos modelo de percolação acessível o par formado pela árvore T e a família de variáveis aleatórias contínuas $(X_v)_{v \in \vartheta}$.

Definição 2.1. *Um caminho de tamanho* $n, v_0, v_1, v_2, ..., v_n$ *em* T *é acessível se*

$$X_{v_0} < X_{v_1} < X_{v_2} < X_{v_3} < .... < X_{v_n}.$$

Denotamos este evento por $v_0 \overbrace{\rightarrow}^{c.a} v_n$

Exemplo 2.1. *Seja a árvore 2-árvore* T*, abaixo.*

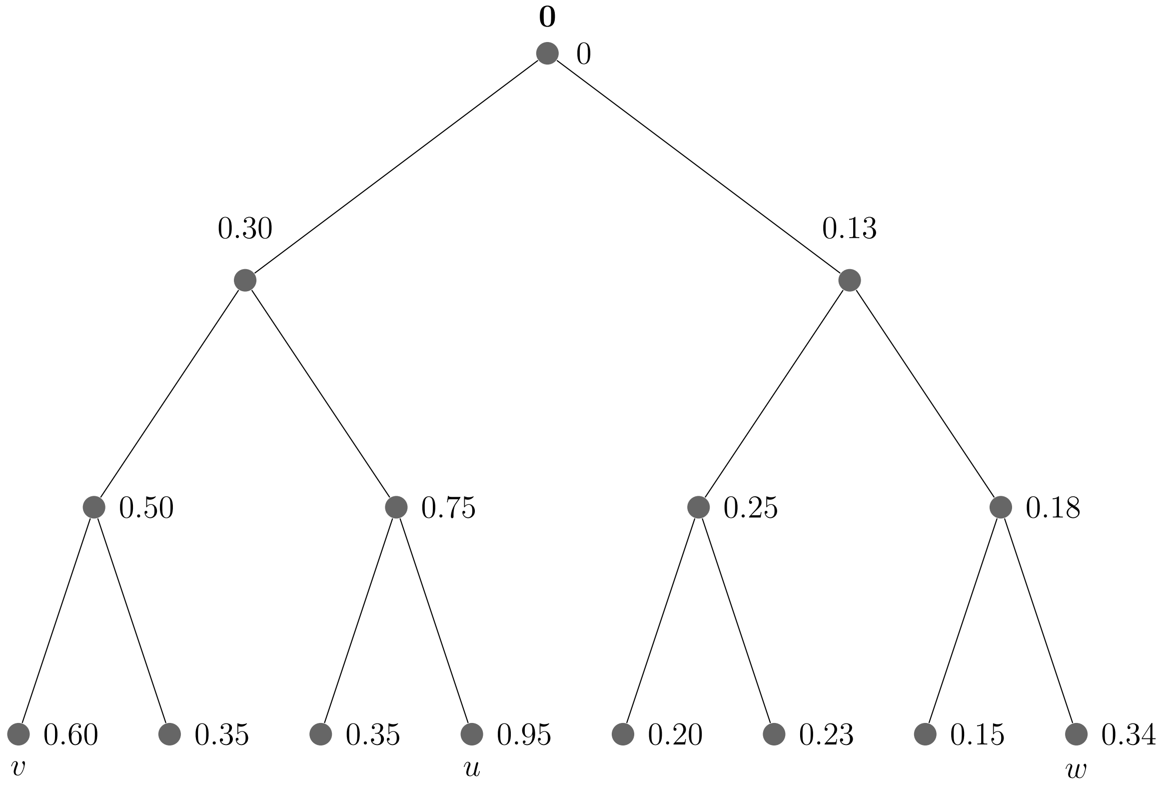

Figura 2.1: realizacão de um modelo de percolação acessível na 2-árvore T

A figura 2.1 *é uma realização de um modelo de percolação acessível, tal que para cada* $v \in \vartheta$ *associamos* $X_v \sim \mathbf{U}(0,1)$ *de uma sequência i.i.d. Neste caso, temos que os caminhos* $\boldsymbol{0} \rightarrow v, \boldsymbol{0} \rightarrow u$ *e* $\boldsymbol{0} \rightarrow w$ *são caminhos acessíveis em* T.

O próximo resultado nos fornece a probabilidade exata de um caminho de tamanho h ser acessível.

Proposição 2.1. *Seja um caminho $v_1, v_2, ..., v_h$, na árvore T. Então,* $\mathbb{P}(v_1 \overbrace{\rightarrow}^{c.a} v_h) = \frac{1}{h!}$.

Demonstração. Seja um caminho $v_1, v_2, ..., v_h$ na árvore T, tal que X_{v_i} está associado a v_i para todo $i \in \{1, 2, ..., h\}$. Vamos facilitar a notação escrevendo $X_{v_i} \equiv X_i$, para todo $i \in \{1, 2, ..., h\}$. Existem $h!$ ordenações de $X_1, X_2, ..., X_h$, ou seja, ao longo do caminho podemos organizar os valores atribuídos as variáveis aleatórias, após uma dada realização, de $h!$ modos. Por exemplo, para uma dada realização do modelo de percolação uma dessas ordens é $X_1 < X_2 < ... < X_h$. Outra ordem possível é $X_2 < X_3 < ... < X_h < X_1$. Por simétria, desde que $X_1, X_2, ..., X_h$ são i.i.d (independentes e identicamente distribuidas), todas as possíveis ordenações tem a mesma probabibilidade de ocorrer, ou seja, $\frac{1}{h!}$, então por exemplo, $\mathbb{P}(X_2 < X_3 < ... < X_h < X_1) = \frac{1}{h!}$. Portanto, $\mathbb{P}(v_1 \overbrace{\rightarrow}^{\text{c.a}} v_h) = \frac{1}{h!}$.

□

Observação 2.1. *Considere um caminho de tamanho h que começa na origem (v_0 até v_h), na $n-$árvore. Como a variável aleatória associada a origem assume o valor 0, segue pela proposição 2.1 que* $\mathbb{P}(v_0 \overbrace{\rightarrow}^{c.a} v_h) = \mathbb{P}(v_1 \overbrace{\rightarrow}^{c.a} v_h) = \frac{1}{h!}$.

2.2 Número de caminhos acessíveis

Denotamos por $N = \#$ de caminhos acessíveis, conectando a origem ao nível h, na n-árvore . Nesta seção, computaremos o primeiro e segundo momento da váriavel aleatória N.

2.2.1 Cálculo do primeiro momento de $N(\mathbb{E}\{N\})$

Esta secão tem por objetivo computar o primeiro momento da variável aleatória N. Para isto, veremos a proposição a seguir que nos fornecerá o valor da $\mathbb{E}\{N\}$.

Proposição 2.2. *Seja N dado acima. Então, o primeiro momento de N é dado por*

$$\mathbb{E}\{N\} = \frac{n^h}{h!} \tag{2.1}$$

Demonstração. Vamos definir uma variável aleatória indicadora $\mathbb{I}_i$ para cada caminho, conectando a origem ao nível h, da n-árvore com $i \in \{1, 2, 3, ..., n^h\}$. Seja a variável aleatória

$$\mathbb{I}_i = \begin{cases} 1, & \text{se o i-ésimo caminho for acessível} \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$$

Por linearidade da esperança, temos

$$\mathbb{E}\{N\} = \mathbb{E}\Big\{\sum_{i=1}^{n^h} \mathbb{I}_i\Big\} = \sum_{i=1}^{n^h}(\mathbb{E}\{\mathbb{I}_i\}) = \sum_{i=1}^{n^h} \mathbb{P}(\mathbb{I}_i = 1) = \sum_{i=1}^{n^h} \frac{1}{h!} = n^h . \frac{1}{h!} = \frac{n^h}{h!}.$$

□

Exemplo 2.2. *Considere a Figura* 2.1. *Para este caso, temos* $\mathbb{E}\{N\} = \frac{n^h}{h!} = \frac{2^3}{3!} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.

2.2.2 Cálculo do segundo momento de N

Está seção tem por objetivo encontrar um limitante superior para o segundo momento da variável aleatória N.

Proposição 2.3. *Seja* $\mathbb{E}\{N^2\}$ *o segundo momento da variável aleatória* N. *Então,* $\mathbb{E}\{N^2\} \leq \mathbb{E}\{N\} + \mathbb{E}\{N\}^2 + \sum_{k=1}^{h-1} \binom{2k}{k} \frac{n^{h+k}}{(h+k)!}$.

Demonstração. Vamos usar as variáveis $\mathbb{I}_i$ da proposição 2.2. Ou seja,

$$\mathbb{I}_i = \begin{cases} 1, & \text{se o i-ésimo caminho for acessível} \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$$

Note que, as variáveis aleatórias $\mathbb{I}_i, i \in \{1, 2, 3, ..., n^h\}$, são dependentes e identicamente distribuidas, tais que $\mathbb{E}\{\mathbb{I}_i\} = \mathbb{E}\{\mathbb{I}_i{}^2\} = \mathbb{P}(\mathbb{I}_i = 1) = \frac{1}{h!}$. Agora, considere que $N = \sum_{i=1}^{n^h} \mathbb{I}_i$. Logo,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\{N^2\} &= \mathbb{E}\Big\{\Big(\sum_{i=1}^{n^h}\mathbb{I}_i\Big)^2\Big\} \\
&= \sum_{i=1}^{n^h}\mathbb{E}\{\mathbb{I}_i{}^2\} + \sum_{i,j=1,i\neq j}^{n^h}\mathbb{E}\{\mathbb{I}_i\mathbb{I}_j\} \\
&= \sum_{i=1}^{n^h}\mathbb{E}\{\mathbb{I}_i\} + \sum_{i,j=1,i\neq j}^{n^h}\mathbb{E}\{\mathbb{I}_i\mathbb{I}_j\} \\
&= \mathbb{E}\{N\} + \sum_{i,j=1,i\neq j}^{n^h}\mathbb{E}\{\mathbb{I}_i\mathbb{I}_j\}
\end{aligned}
$$

Agora, vamos obter uma forma fechada para o correlacionador $\mathbb{E}\{\mathbb{I}_i\mathbb{I}_j\}$. Primeiramente, notemos que este correlacionador depende apenas do número de vértices que o i-ésimo e o j-ésimo caminho tem em comum, pois se o i-ésimo e o j-ésimo caminhos não possuem vértices em comum, temos $\mathbb{E}\{\mathbb{I}_i\mathbb{I}_j\} = \mathbb{E}\{\mathbb{I}_i\}\mathbb{E}\{\mathbb{I}_j\}$, por outro lado se o i-ésimo e o j-ésimo caminhos compartilham vértices, temos $\mathbb{E}\{\mathbb{I}_i\mathbb{I}_j\} = \mathbb{E}\{\mathbb{E}\{\mathbb{I}_i\mathbb{I}_j/\mathbb{I}_J\}\}$. Note também que para quaisquer dois caminhos i e j(com $i \neq j$) que compartilham $h-k+1$ vértices, $\mathbb{E}\{\mathbb{I}_i\mathbb{I}_j\}$ é dado pela probabilidade π_k de ambos os caminhos serem acessíveis, ou seja, $\mathbb{E}\{\mathbb{I}_i\mathbb{I}_j\} = \mathbb{P}(\mathbb{I}_i\mathbb{I}_j = 1) = \mathbb{P}(\mathbb{I}_i = 1; \mathbb{I}_j = 1) = \pi_k$. Seja x o valor atribuido a X_v, onde v é o vértice de divergência dos dois caminhos. Notemos que, estes dois caminhos podem ser decompostos em três caminhos menores e independentes, dois de tamanhos k e um de tamanho $h-k$ conectados ao vértice v (veja figura 2.2).

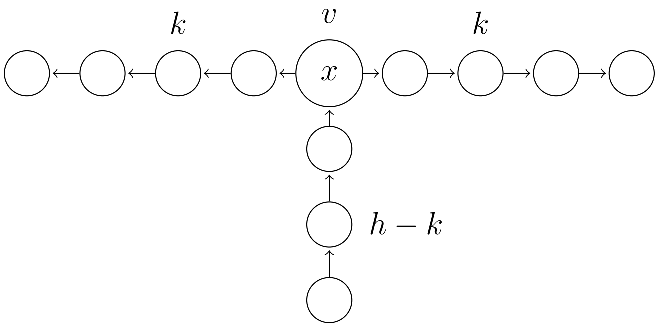

Figura 2.2: A correlação entre dois caminhos depende apenas do número $h-k+1$ de vértices que ambos os caminhos têm em comum.

Considerando v como raiz, todos os vértices que estão mais próximos de v devem ter um valor atribuido menor que x e todos os vértices mais próximos aos últimos níveis da árvore devem ter um valor maior que x. Além disso, todos os valores devem estar em ordem crescente nesses caminhos menores. Daí, usando o fato de que as variáveis aleatórias tem distribuição uniforme $(0, 1)$, concluímos que

$$\begin{aligned}
\pi_k &= \mathbb{P}(\mathbb{I}_i = 1; \mathbb{I}_j = 1/X_v = x) \\
&= \int_0^1 \mathbb{P}(\mathbb{I}_i = 1; \mathbb{I}_j = 1/X_v = x) f(x) dx \\
&= \int_0^1 \mathbb{P}(X_1 < X_2 < \ldots < X_{h-k-1} < x) \mathbb{P}(x < X_{h-k+1} < \ldots < X_h)^2 dx \\
&= \int_0^1 \frac{[F(x)]^{h-k-1}}{(h-k-1)!} \Big[\frac{(1-F(x))^k}{k!}\Big]^2 dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^{h-k-1}}{(h-k-1)!} \Big[\frac{(1-x)^k}{k!}\Big]^2 dx \\
&= \frac{1}{(h-k-1)!(k!)^2} \int_0^1 x^{h-k-1}(1-x)^{2k} dx \\
&= \frac{B(h-k, 2k+1)}{(h-k-1)!(k!)^2} \\
&= \frac{(h-k-1)!(2k)!}{(h+k)!} \Big(\frac{1}{(h-k-1)!(k!)^2}\Big) \\
&= \binom{2k}{k} \frac{1}{(h+k)!}
\end{aligned}$$

onde $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} = \frac{(x-1)!(y-1)!}{(x+y-1)!}$ é uma função beta de Euler.

Para avaliar a soma sobre a correlação entre dois caminhos i e j em π_k também é necessário o número m_k de pares de caminhos que possuem $h - k + 1$ vértices comuns. Este número pode ser avaliado com uma simples combinatória, considerando que: Para o primeiro caminho entre os três na Figura 2.2, digamos o de tamanho k, qualquer vértice pode ser escolhido, isto é, existem n^h possibilidades (que é o número de caminhos da árvore). O segundo caminho compartilha $h - k + 1$ vértices, então existem $n - 1$ vértices, que dista 1 de x em potencial para escolher (se o n-ésimo vértice, também pertence ao primeiro caminho) e finalmente, pode-se escolher qualquer vértice subsequente até que se alcance o último nível de outro caminho e isso equivale a n^{k-1} possibilidades. Logo, existem ao todo $m_k = (n-1)n^h n^{k-1} = (n-1)n^{h+k-1}$ pares diferentes. Consequentemente,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\{N^2\} &= \mathbb{E}\{N\} + \sum_{i,j=1, i\neq j}^{n^h} \mathbb{E}\{\mathbb{I}_i \mathbb{I}_j\} \\
&= \mathbb{E}\{N\} + \sum_{k=1}^{h} \pi_k m_k \\
&= \mathbb{E}\{N\} + \frac{n-1}{n} \sum_{k=1}^{h} \binom{2k}{k} \frac{n^{h+k}}{(h+k)!} \\
&\leq \mathbb{E}\{N\} + \binom{2h}{h} \frac{n^{2h}}{(2h)!} + \sum_{k=1}^{h-1} \binom{2k}{k} \frac{n^{h+k}}{(h+k)!}, \text{ pois } \frac{n-1}{n} \leq 1 \\
&= \mathbb{E}\{N\} + \mathbb{E}\{N\}^2 + \sum_{k=1}^{h-1} \binom{2k}{k} \frac{n^{h+k}}{(h+k)!}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\mathbb{E}\{N^2\} \leq \mathbb{E}\{N\} + \mathbb{E}\{N\}^2 + \sum_{k=1}^{h-1} \binom{2k}{k} \frac{n^{h+k}}{(h+k)!} \tag{2.2}
$$

□

2.3 Probabilidade de existir caminhos acessíveis na n-árvore

Nesta seção, vamos usar o primeiro e o segundo momento da variável aleatória N para obter informações sobre a existência de caminhos acessíveis na n-árvore. Vejamos primeiramente a desigualdade de Cauchy-Schwarz e depois um lema, que relaciona o primeiro e o segundo momento de uma variável aleatória X que assume valores inteiros $\{0, 1, 2, ...\}$.

Lema 2.1 (desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** *Se X e Y são variáveis aleatórias com segundo momento finito, então* $|\mathbb{E}\{XY\}| \leq \sqrt{\mathbb{E}\{X^2\}\mathbb{E}\{Y^2\}}$.

Lema 2.2. *Seja* X *uma variável aleatória que assume apenas valores inteiros* $\{0, 1, 2, ...\}$ *com segundo momento finito. Então vale a inequação*

$$\mathbb{E}\{X\} \geq \mathbb{P}(X \geq 1) \geq \frac{\mathbb{E}\{X\}^2}{\mathbb{E}\{X^2\}} \tag{2.3}$$

Demonstração. Por definição da esperança, temos

$$\mathbb{E}\{X\} = \sum_{i=0}^{\infty} i\mathbb{P}(X = i) \geq \Big[\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = i)\Big] = \mathbb{P}(X \geq 1) \tag{2.4}$$

Agora, vamos mostrar que $\mathbb{P}(X \geq 1) \geq \frac{\mathbb{E}\{X\}^2}{\mathbb{E}\{X^2\}}$. Com efeito, usando a **desigualdade de Cauchy-Schwarz**, temos $\mathbb{E}\{X\} = |\mathbb{E}\{XI_{\{X\geq 1\}}\}| \leq \sqrt{\mathbb{E}\{X^2\}\mathbb{E}\{I_{\{X\geq 1\}}\}}$. Logo, $\mathbb{E}\{X^2\}\mathbb{P}(X \geq 1) \geq \mathbb{E}\{X\}^2$. Consequentemente,

$$\mathbb{P}(X \geq 1) \geq \frac{\mathbb{E}\{X\}^2}{\mathbb{E}\{X^2\}}. \tag{2.5}$$

Portanto, a combinação de (2.4) e (2.5) nos fornece o resultado desejado, ou seja,

$$\mathbb{E}\{X\} \geq \mathbb{P}(X \geq 1) \geq \frac{\mathbb{E}\{X\}^2}{\mathbb{E}\{X^2\}}.$$

□

Como consequência imediata do Lema 2.2, concluímos que combinando as desigualdades (2.2) e (2.3), obtemos

$$\mathbb{E}\{N\} \geq \mathbb{P}(N \geq 1) \geq \frac{\mathbb{E}\{N\}^2}{\mathbb{E}\{N^2\}} \geq \frac{\mathbb{E}\{N\}^2}{\mathbb{E}\{N\} + \mathbb{E}\{N\}^2 + S(h)}, \tag{2.6}$$

onde

$$S(h) = \sum_{k=1}^{h-1} \binom{2k}{k} \frac{n^{h+k}}{(h+k)!}.$$

Vamos tratar o número de ramificações n como uma função de h. Já que vamos distinguir os três casos de crescimento linear, crescimento mais rápido que linear e crescimento mais lento que linear, nós escrevemos

$$n = n(h) = h\alpha(h).$$

Os três casos acima correspondem a:

1. $\alpha(h) = \alpha =$ constante (crescimento constante da árvore);

2. $\alpha(h) \to \infty$ (expansão muito rápido das laterais); e

3. $\alpha(h) \to 0$ (compressão das laterais).

Além disso, suponhamos que $n(h+1) \geq n(h)$. Como $\mathbb{E}\{N\} = \frac{n^h}{h!}$, vamos usar a fórmula de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

para obter um valor médio para N. Logo,

$$\mathbb{E}\{N\} \approx \frac{n(h)^h}{\sqrt{2\pi h}h^h e^{-h}} = \frac{[e\alpha(h)]^h}{\sqrt{2\pi h}} \tag{2.7}$$

Pela relação (2.7), concluímos o seguinte:

1. $\mathbb{E}\{N\} \approx 0$ se $\alpha(h) \to 0$ ou $\alpha(h) \equiv \alpha \leq e^{-1}$

2. $\mathbb{E}\{N\} \to \infty$ se $\alpha(h) \to \infty$ ou $\alpha(h) \equiv \alpha > e^{-1}$.

Primeiro, vamos considerar o caso $\alpha(h) \to 0$ para mostrarmos que $S(h)$ cresce mais lentamente que $\mathbb{E}\{N\}$. Para isto, vejamos a proposição a seguir.

Proposição 2.4. *Sejam* $S(h) = \sum_{k=1}^{h-1} \binom{2k}{k} \frac{n^{h+k}}{(h+k)!}$ *e* $\mathbb{E}\{N\} = \frac{n^h}{h!}$*. Então,* $S(h).\mathbb{E}\{N\}^{-1} \leq 0$ *para* h *suficientemente grande. Consequentemente,* $\mathbb{P}(N \geq 1)$ *é assintóticamente equivalente a* $\mathbb{E}\{N\}$*.*

Demonstração. Aplicando a fórmula de Stirling em $S(h)$, obtemos $\binom{2k}{k} \leq \frac{4^k}{\sqrt{\pi k}}$, logo

$$
\begin{aligned}
S(h) &= \sum_{k=1}^{h-1} \binom{2k}{k} \frac{n^{h+k}}{(h+k)!} \\
&= \mathbb{E}\{N\} \sum_{k=1}^{h-1} \binom{2k}{k} \frac{n^k}{(h+k).(h+k-1)\ldots(h+1)}, \text{ aplicando Stirling} \\
&\leq \mathbb{E}\{N\} \sum_{k=1}^{h-1} \frac{(4n)^k}{\sqrt{\pi k}(h+k).(h+k-1)\ldots(h+1)} \\
&= \mathbb{E}\{N\}(x)\Big(\frac{1-x^{h-1}}{1-x}\Big)
\end{aligned}
$$

com $x = \frac{4n}{h+1}$. Daí, $S(h).\mathbb{E}\{N\}^{-1} \leq (x)\Big(\frac{1-x^{h-1}}{1-x}\Big)$. Logo, para h suficientemente grande, quando $x \to 0$, concluímos que $S(h).\mathbb{E}\{N\}^{-1} \leq 0$. Ou seja, $S(h) \to 0$. Consequentemente, pela desigualdade (2.6), temos $\lim_{h\to\infty} \frac{\mathbb{P}(N\geq 1)}{\mathbb{E}\{N\}} = 1$, i.é, $\mathbb{P}(N \geq 1)$ é assintóticamente equivalente a $\mathbb{E}\{N\}$.

$\square$

Para o caso $\alpha(h) \to \infty$ é um pouco mais complicado. Semelhantemente ao caso anterior, mostraremos que $S(h)$ cresce mais lentamente do que $\mathbb{E}\{N\}^2$, o que vai implicar em $\mathbb{P}(N \geq 1) \to 1$ quando $h \to \infty$. Para isto, vamos demonstrar a proposição seguir.

Proposição 2.5. *Seja a função*

$$\xi(h) = S(h)\mathbb{E}\{N\}_h{}^{-2} \tag{2.8}$$

Então,

$$\xi(h+1) \leq \frac{1+\xi(h)}{\alpha(h)} \tag{2.9}$$

Demonstração. Consideremos que $n(h+1) \geq n(h)$ e $n(h) = h\alpha(h)$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\xi(h+1) &= S(h+1)\mathbb{E}\{N\}_{h+1}{}^{-2} \\
&= \frac{[(h+1)!]^2}{[n(h+1)]^{2(h+1)}} \sum_{k=1}^{h} \binom{2k}{k} \frac{[n(h+1)]^{h+k+1}}{(h+k+1)!} \\
&= \frac{[(h+1)!]^2}{[n(h+1)]^{h+1}} \sum_{k=1}^{h} \binom{2k}{k} \frac{[n(h+1)]^{k}}{(h+k+1)!} \\
&\leq \frac{[(h+1)!]^2}{[n(h)]^{h+1}} \sum_{k=1}^{h} \binom{2k}{k} \frac{[n(h)]^{k}}{(h+k+1)!}, \text{ pois } n(h+1) \geq n(h) \\
&= \frac{[(h+1)!]^2}{[n(h)]^{h+1}} \Big[\frac{[n(h)]^h}{(2h+1)(2h)!} \frac{(2h)!}{(h!)^2} + \frac{1}{[n(h)]^h (h+2)} \sum_{k=1}^{h-1} \binom{2k}{k} \frac{[n(h)]^{h+k}}{(h+k)!} \Big] \\
&= \frac{(h+1)^2}{(2h+1)n(h)} + \frac{(h+1)^2 (h!)^2}{[n(h)]^{2h+1}(h+2)} S(h) \\
&= \frac{1}{n(h)} \Big[\frac{(h+1)^2}{(2h+1)} + \frac{(h+1)^2 (h!)^2}{[n(h)]^{2h}(h+2)} S(h) \Big] \\
&= \frac{1}{\alpha(h)} \Big[\frac{(h+1)^2}{h(2h+1)} + \frac{(h+1)^2}{h(h+2)} \Big(\frac{n(h)^h}{h!} \Big)^{-2} S(h) \Big], \text{ pois } n(h) = h\alpha(h) \\
&= \frac{1}{\alpha(h)} \Big[\frac{(h+1)^2}{h(2h+1)} + \frac{(h+1)^2}{h(h+2)} S(h)\mathbb{E}\{N\}_h{}^{-2} \Big] \\
&= \frac{1}{\alpha(h)} \Big[\frac{(h+1)^2}{h(2h+1)} + \frac{(h+1)^2}{h(h+2)} \xi(h) \Big] \\
&\leq \frac{1}{\alpha(h)} (1 + \xi(h)) \\
&= \frac{1+\xi(h)}{\alpha(h)}
\end{aligned}$$

□

Agora, desde que $\alpha(h) \to \infty$, podemos tomar uma constante fixa $C > 1$ e encontrar h_0 tal que $\alpha(h) > C, \forall h > h_0$. Daí, teremos

$$\xi(h+1) \leq \frac{1+\xi(h)}{\alpha(h)} < \frac{\xi(h)}{C} + \frac{1}{C}, \forall h > h_0.$$

Agora, mostraremos por indução que

$$\xi(h) \leq \frac{\xi(h_0)}{C^{h-h_0}} + \sum_{k=1}^{h-h_0} \frac{1}{C^k} \tag{2.10}$$

Para $k = 1$, temos $\frac{\xi(h_0)}{C^{h-h_0}} + \sum_{k=1}^{h-h_0} \frac{1}{C^k} = \frac{\xi(h_0)}{C^1} + \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{C^1} = \frac{\xi(h_0)}{C} + \frac{1}{C} > \xi(h)$. Suponha válido para k, ou seja, $\xi(h) \leq \frac{\xi(h_0)}{C^{h-h_0}} + \sum_{k=1}^{h-h_0} \frac{1}{C^k}$ é verdadeiro. Logo, $\frac{\xi(h_0)}{C^{h-h_0}} + \sum_{k=0}^{h-h_0} \frac{1}{C^{k+1}} \geq \frac{\xi(h_0)}{C^{h-h_0}} + \sum_{k=1}^{h-h_0} \frac{1}{C^k} \geq \xi(h)$. Portanto, a desigualdade (2.10) é verdadeira.

Notemos que quando $h \to \infty$, temos

$$\sum_{k=1}^{h-h_0} \frac{1}{C^k} \to \frac{1}{C-1}.$$

Portanto, para C arbitrariarmente grande concluímos que $\xi(h) \to 0$. Consequentemente, concluímos pela desigualdade (2.7) que $\mathbb{P}(N \geq 1) \to 1$ quando $h \to \infty$.

Teorema 2.2. *Suponha que $n = n(h) = h\alpha(h)$. Então,*

$$\lim_{h\to\infty} \mathbb{P}(N \geq 1) = \begin{cases} 0, & se\ \alpha(h) \to 0, \\ 1, & se\ \alpha(h) \to \infty. \end{cases}$$

Demonstração. A demonstração consiste na combinando das proposições 2.4 e 2.5. Portanto, o resultado segue.

□

Finalmente, vamos considerar o caso $\alpha(h) = \alpha =$ constante. Usando a forma recursiva dada por (2.10), provaremos que $\xi(h) \leq (\alpha-1)^{-1}$ com $\alpha > 1$. Para isto, veja a proposição a seguir.

Proposição 2.6. *Seja* $\xi(h+1) \leq \frac{1+\xi(h)}{\alpha(h)}$. *Então,* $\xi(h) \leq (\alpha-1)^{-1}$ *com* $\alpha > 1$.

Demonstração. Indução sobre h. Suponha válido para h, ou seja, $\xi(h) \leq (\alpha-1)^{-1}$. Devemos mostrar que $\xi(h+1) \leq (\alpha-1)^{-1}$. Com efeito,

$$\xi(h+1) \leq \frac{1+\xi(h)}{\alpha(h)} \leq \frac{1+(\alpha-1)^{-1}}{\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} = (\alpha-1)^{-1}.$$

□

Observação 2.2. *Notemos que* $\lim_{h\to\infty} \xi(h) \leq \lim_{h\to\infty}(\alpha-1)^{-1} = (\alpha-1)^{-1}$. *Ou seja,* $\xi(h)$ *tem limite finito.*

Agora, demonstraremos o resultado principal para o caso $\alpha(h) = \alpha =$ constante.

Teorema 2.3 (Nowak e Krug.(2013))**.** *Se* $n = \alpha h$, *com* $\alpha > 0$ *uma constante, então*

$$\lim_{h\to\infty} \mathbb{P}(N \geq 1) \begin{cases} = 0, \ \ \textit{se } \alpha \leq e^{-1}, \\ \geq 1 - \alpha^{-1}, \ \ \textit{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

Demonstração. Primeiramente, vamos supor que $\alpha \leq e^{-1}$. Pela desigualdade (2.6) e a relação (2.7) concluímos que

$$0 \geq \lim_{h\to\infty} \mathbb{P}(N \geq 1) \geq 0.$$

Logo, $\lim_{h\to\infty} \mathbb{P}(N \geq 1) = 0$. Agora, suponha que $\alpha > 1$. Pela desigualdade (2.6), obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{h\to\infty} \frac{1}{\mathbb{P}(N \geq 1)} &\leq \lim_{h\to\infty} \frac{\mathbb{E}\{N\} + \mathbb{E}\{N\}^2 + S(h)}{\mathbb{E}\{N\}^2} \\ &= \lim_{h\to\infty} \left(\frac{1}{\mathbb{E}\{N\}} + 1 + \frac{S(h)}{\mathbb{E}\{N\}^2}\right) \\ &= 1 + \lim_{h\to\infty} \xi(h). \end{aligned}$$

Como $\lim_{h\to\infty} \xi(h) \leq (\alpha-1)^{-1}$, temos $\lim_{h\to\infty} \frac{1}{\mathbb{P}(N\geq 1)} \leq 1 + (\alpha-1)^{-1}$. Consequentemente, $\lim_{h\to\infty} \mathbb{P}(N \geq 1) \geq \frac{1}{1+(\alpha-1)^{-1}} = \frac{\alpha-1}{\alpha} = 1 - \alpha^{-1}$.

□

Capítulo 3

Discussão

Neste capítulo vamos discutir sobre outros resultados recentes do modelo de percolação. Vamos centralizar a discussão na prova complementar do teorema de Nowak e Krug, e posteriormente sobre o trabalho recente do modelo de percolação na **árvore esfericamente simétrica infinita**.

3.1 Discussão

No final do Capítulo 2 enunciamos e provamos o Teorema 2.3. Existe um resultado importante que completa este teorema. Notemos que, no Teorema 2.3 é razoável supor que o limite é uma sequência monótona em α. Este fato pode ser verificado da seguinte forma: sejam duas árvores n-árias de altura h, digamos T_1 e T_2, associadas ao valores α_1 e α_2, respectivamente, com $\alpha_1 < \alpha_2$. Suponhamos que T_1 é subárvore de T_2. Logo, todo caminho acessível em T_1 também o é em T_2. Daí, concluímos que $\mathbb{P}(N_1 \geq 1) \leq \mathbb{P}(N_2 \geq 1)$. Consequentemente, $\lim_{h\to\infty} \mathbb{P}(N_1 \geq 1) \leq \lim_{h\to\infty} \mathbb{P}(N_2 \geq 1)$. Portanto, podemos supor o limite como uma sequência monótona em α. Concluímos, devido a monoticidade da sequência formado por esse limite, que deve existir um valor crítico $\alpha_c \in [e^{-1}, 1]$, tal que $\mathbb{P}(N \geq 1) \to 0$ para $\alpha < \alpha_c$ e $\lim_{h\to\infty} \mathbb{P}(N \geq 1) > 0$ para $\alpha > \alpha_c$. Este resultado pode ser encontrado em [2], no teorema de Roberts e Zhao, que diz: Se $n = \alpha h$, então $\alpha_c = e^{-1}$, i.e.,

$$\lim_{h\to\infty} \mathbb{P}(N \geq 1) = \begin{cases} 0, \text{ se } \alpha \leq e^{-1}, \\ 1, \text{ se } \alpha > e^{-1}. \end{cases}$$

Agora, abordaremos alguns resultados mais recentes sobre percolação acessível obtidos em [3]. De acordo com o capítulo 1, uma árvore $T = (\vartheta, \xi)$ é dita **esfericamente simétrica** se qualquer par de vértices na mesma distância da origem, têm o mesmo grau. O modelo consiste em associar uma variável aleatória contínua X_v para cada vértice v da **árvore esfericamente simétrica infinita**. Para o modelo em apreço, tomamos as X_v como tendo distribuição uniforme $(0,1)$ $(\mathbb{U}(0,1))$. Agora, para cada $n > 1$, seja $\partial T_n = \{v \in \vartheta; |v| = n\}$ e considere $\Lambda_n := \Lambda_n(T) = \bigcup_{v \in \partial T_n} \{\ \mathbf{0} \overset{\text{c.a}}{\overbrace{\rightarrow}} v\}$. Dizemos que N_n é o número de caminhos acessíveis conectando a origem ao $n-$ésimo nível da árvore T. Ou seja, $N_n = |\{v \in \partial T_n;\ \mathbf{0} \overset{\text{c.a}}{\overbrace{\rightarrow}} v\}|$. A definição a seguir, caracteriza quando há percolação acessível na **árvore esfericamente simétrica.**

Definição 3.1. *Dizemos que há percolação acessível na árvore* $T = (\vartheta, \xi)$ *se o evento* $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$ *ocorre com probabilidade positiva.*

Observação 3.1. *Note que* $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência decrescente de eventos* $(\Lambda_{n+1} \subset \Lambda_n, \forall n, \Lambda_n \searrow \bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n)$*, então o nosso interesse é estudar* $\theta(T) := \mathbb{P}(\bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\Lambda_n)$.

Definição 3.2. *Seja* $T_1 = (\vartheta_1, \xi_1)$ *e* $T_2 = (\vartheta_2, \xi_2)$ *duas árvores com comum origem* $\boldsymbol{0}$*. Nós dizemos que* T_1 *é sub-árvore de* T_2*, denotamos* $T_1 \prec T_2$*, se* $\vartheta_1 \subset \vartheta_1$ *e* $\xi_1 \subset \xi_2$*.*

Lema 3.1. *Se $T_1 \prec T_2$, então $\theta(T_1) \leq \theta(T_2)$.*

Demonstração. Basta mostrar que todo caminho acessível conectando $\mathbf{0}$ a $\partial T_{1,n}$ também é caminho acessível conectando $\mathbf{0}$ a $\partial T_{2,n}$. Com efeito, seja um caminho acessível $\mathbf{0} \overbrace{\to}^{\text{c.a}} v$ para algum $v \in \partial T_{1,n}$. Como, por hipótese, $T_1 \prec T_2$, então $\mathbf{0} \overbrace{\to}^{\text{c.a}} v$ é caminho acessível em T_2. Veja as árvores T_1 e T_2, respectivamente:

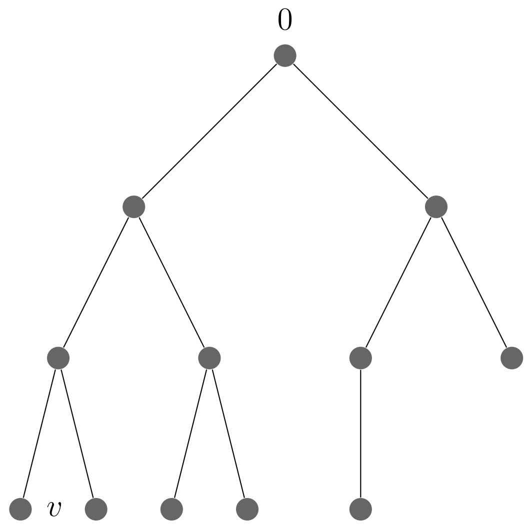

Figura 3.1: árvore T_1

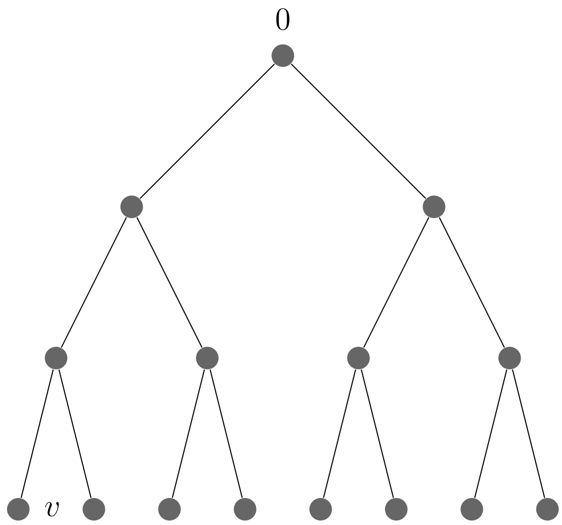

Figura 3.2: árvore T_2

Notemos que as Figuras 3.1 e 3.2 são duas árvores, tais que T_1 é sub-árvore de T_2. Portanto, como $\Lambda_n(T) = \bigcup_{v \in \partial T_n} \{ \mathbf{0} \overbrace{\to}^{\text{c.a}} v\}$, temos $\Lambda_n(T_1) \subset \Lambda_n(T_2)$. Portanto, $P(\Lambda_n(T_1)) \leq P(\Lambda_n(T_2))$ implicando que $\lim_{n\to\infty} P(\Lambda_n(T_1)) \leq \lim_{n\to\infty} P(\Lambda_n(T_2))$ implicando que $\theta(T_1) \leq \theta(T_2)$.

$\square$

Observação 3.2. *$\theta(T)$ é uma função não-decrescente em T.*

Proposição 3.1. *Seja a árvore $T_!$. Então, $\mathbb{P}(\Lambda_n) \leq \frac{|\partial T_{!,n}|}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$.*

Demonstração. Note que, $\Lambda_n(T_!) = \bigcup_{v\in\partial T_{!,n}}\{\ \mathbf{0} \overset{\text{c.a}}{\overbrace{\rightarrow}} v\}$. Portanto,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\Lambda_n(T_!)) &= \mathbb{P}(\bigcup_{v\in\partial T_{!,n}}\{\ \mathbf{0} \overset{\text{c.a}}{\overbrace{\rightarrow}} v\}) \leq \sum_{v\in\partial T_{!,n}} \mathbb{P}(\{\ \mathbf{0} \overset{\text{c.a}}{\overbrace{\rightarrow}} v\}) \\ &= \sum_{v\in\partial T_{!,n}} \frac{1}{(n+1)!} = \frac{|\partial T_{!,n}|}{(n+1)!} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

□

Pela observação 3.1, temos

$$\theta(T_!) = \mathbb{P}(\bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\Lambda_n) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Ou seja, $\theta(T_!) = 0$. Consequentemente, não há percolação acessível na árvore fatorial.

Consideremos a árvore esfericamente simétrica T_α cuja função de crescimento é dada pela função $f(i) = \lceil (i+1)^\alpha \rceil, i \geq 0$, $(\lceil (i+1)^\alpha \rceil = min\{n \in \mathbb{N}; n \geq (i+1)^\alpha\})$ onde $\alpha > 0$ é uma constante. Pela observação 3.2, $\theta(\alpha) := \theta(T_\alpha)$ é uma função não-decrescente em α e o valor crítico

$$\alpha_c := \inf\ \{\alpha; \theta(\alpha) > 0\}$$

está bem definido. O teorema a seguir computa o valor exato onde ocorre a transição de fase para o modelo de percolação acessível em T_α.

Teorema 3.3 (Coletti, Gava, R.(2018)). *Seja* T_α *tal que* $f(i) = \lceil (i+1)^\alpha \rceil, i \geq 0$, *onde* $\alpha > 0$ *é uma constante. Então,*

$$\theta(T_\alpha) \begin{cases} = 0, & se\ \alpha \leq 1 \\ > 0, & se\ \alpha > 1 \end{cases}$$

O valor crítico é dado por $\alpha_c = 1$.

Demonstração. Se $\alpha = 1$, então $f(i) = i + 1$. Daí, $T_\alpha = T_1 = T_!$ e já vimos que $\theta(T_!) = 0$. Agora, se $\alpha < 1$, então $f(i) = \lceil (i+1)^\alpha \rceil \leq f(i) = i + 1$. Daí, $T_\alpha \prec T_!$. Logo, pelo lema 3.1, temos $\theta(T_\alpha) \leq \theta(T_!) = 0$. Portanto, $\theta(T_\alpha) = 0$ se $\alpha \leq 1$. Para $\alpha > 1$, devemos fazer uma comparação com o processo de ramificação com seleção cuja sobrevivência implica em percolação acessível em T_α. Para tanto, vamos usar um resultado que pode ser encontrado em [7], no teorema de Bertacchi, R. e Zucca, que diz: Suponha que $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{m_i} < \infty$, e que para algum $C > 0$ existe $g : \mathbb{N} \to [1, \infty)$ tal que $(m_n{}^{(2)}/(m_n{}^2) \leq g(n)$, para algum n suficientemente grande e $\lim_{n\to\infty} sup(g(n+1)/g(n)) < C$. Então, o processo de ramificação com seleção (PRS) sobrevive com probabilidade positiva. Portanto, Se T é esfericamente simétrica com função de crescimento f, podemos interpretar $m_i = f(i)$, para todo $i \geq 0$ e a condição

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{f(i)} < \infty$$

implica percolação acessível com probabilidade positiva.

$\square$

Observação 3.3. *Para uma prova mais detalhada dessa segunda parte do Teorema* 3.3 *confira* [7].

Conclusão

Neste trabalho fizemos uma estudo detalhado do artigo [1], destacando os principais conceitos relacionados nesse artigo. Buscamos, em todo tempo, deixar o mais claro possível todos os pormenores de cada conceito e resultados que foram abordados, sempre visando uma melhor compreensão da teoria abordada e suas aplicações. Ainda em relação ao artigo [1], discutimos um resultado da literatura que se encontra em [2] que completa o principal resultado obtido no atigo em questão. Sequêncialmente, concluímos com uma discussão sobre os resultados recentes obtidos em percolação acessível tomando por base a teoria desenvolvida em [3]. Discutimos os principais conceitos e os resultados fundamentais que foram obtidos em [3]. Vale ressaltar que em [3] foram estabelecidas novas propriedades do modelo de percolação de acessibilidade em árvores. Contudo, alguns problemas de percolação acessível em árvores permanecem em aberto. Por exemplo, em [3] foi desenvolvida a teoria em cima de árvores esfericamente simétricas e com função de crescimento específica, mas ainda é um problema em aberto obter condições necessárias e suficientes para que exista ou não percolação acessível para uma dada função de crescimento. É fato que, existe uma família inteira de árvores que não valem os resultados obtidos nos artigos [1, 2, 3]. Portanto, é necessário uma busca por novos métodos a serem explorados, que é muito provável o uso do recursos computacionais (simulações numéricas), com o objetivo de resolver estas questões em aberto e que ainda surgirão.

Referências Bibliográficas

[1] Nowak, S. and Krug, J., *Accessibility percolation on n-trees*, *EPL* **101** (2013), 66004.

[2] Roberts, M. and Zhao, L., *Increasing paths in regular trees*, *Electron. Commun. Probab.* **18** (2013), 1-10.

[3] Colleti, C. F., Gava, R. J. and Rodriguez, P. M., *On the existence of acessibility in a tree-indexed percolation model*, *Physica A* **492** (2018), 382-388.

[4] Li, L., *Phase transition for accessibility percolation on hypercubes*, *J. Theor. Probab.* **31** (2018), 2072-2111.

[5] Cormen, Thomas H., Leiserson, Charles E., Rivest, Ronald L. and Stein, C., *Introduction to Algorithms*, 3nd ed. Massachusetts Institute of Technology, London-England, 2009.

[9] Berestycki, J., Brunet, É. and Shi, Z., *The number of accessible paths in the hypercube*, *Bernoulli* **22** (2016), 653-680.

[7] Bertacchi, D., Rodriguez, P. M. and Zucca, F., *Galton-Watson processes in varying environment and accessibility percolation*, *Braz. J. Probab. Stat. In Press.*

[8] Krug, J., Accessibility percolation in random fitness landscapes, *arXiv:1903.11913* (2019).

[9] Berestycki, J., Brunet, É. and Shi, Z., *Accessibility percolation with backsteps*, *ALEA, Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.* **14** (2017), 45-62.

[10] Duque, F., Correa, A. R. and Valencia, L. A., *Accessibility percolation with crossing valleys on n-ary trees*, *J. Stat. Phys.* **174** (2019), 1027-1037.

[11] Hegarty, P. and Martinsson, A., *On the existence of accessible paths in various models of fitness landscapes*, *Ann. Appl. Probab.* **24** (2014), 1375-1395.

[12] Martinsson, A., Accessibility percolation and first-passage site percolation on the unoriented binary hypercube, *arXiv:1501.02206* (2015).

ICMC USP
SÃO CARLOS