UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Atratores pullback para uma equação de difusão não autônoma com retardo

Izabella Durante Temporini Furtado

Orientador: Prof. Dr. Marcelo José Dias Nascimento

São Carlos-SP
Fevereiro de 2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Atratores pullback para uma equação de difusão não autônoma com retardo

Izabella Durante Temporini Furtado

Orientador: Prof. Dr. Marcelo José Dias Nascimento

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

São Carlos-SP
Fevereiro de 2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Izabella Durante Temporini Furtado, realizada em 12/03/2020:

Prof. Dr. Marcelo José Dias Nascimento
UFSCar

Everaldo Mello Bonotto

Prof. Dr. Everaldo de Mello Bonotto
ICMC/USP

Alessandra Verri

Profa. Dra. Alessandra Aparecida Verri
UFSCar

Dedico este trabalho a Elisangela e Alessandro, meus pais.

AGRADECIMENTOS

À Deus, em primeiro lugar, a Ele toda honra e glória. Por Ele me mostrar que quando estamos ao seu lado não existe impossível. Por Ele ter me sustentado até aqui e continuar me dando forças pra continuar. Não poderia deixar de agradecer a minha mãe querida, Nossa Senhora, por sempre interceder por mim.

Aos meus amados pais, Alessandro e Elisangela. Não tenho palavras suficientes para descrever toda a minha gratidão. Sem vocês, eu nada seria. Obrigada por todo o apoio, por todo o amor, por todos os puxões de orelha, por todos os conselhos e por sempre me falarem: 'Filha, levanta a cabeça e continua, estamos aqui do seu lado!' Só cheguei até aqui por causa de vocês! Amo muito vocês! Gostaria de estender o agradecimento a todos os meus familiares: tias, tios, avós, avôs, primas e primos que sempre me apoiaram e são um porto seguro.

Aos meus ordinários favoritos: Dayana, Rafael, Samuel, Leandro, Hermano, Mannaim, Paula, Pedro, Vitória, Alexandre e André. Foram eles que, sem dúvida alguma, deixaram a minha vida mais leve, com muito mais alegria, apesar de tudo. Hoje, eu sei que tenho uma segunda família com vocês. Obrigada por sempre estarem ao meu lado, e saiba que cada um de vocês mora no meu coração. Eu nunca esquecerei o que passamos juntos.

Às minhas amigas Isadora e Izabela. Vocês são minhas irmãs de coração. Obrigada por sempre estarem ao meu lado e torcerem pelo meu sucesso. Amo vocês!

Aos professores e funcionários da UEM e da UFSCar, que tiveram parte fundamental na minha formação. Em particular, gostaria de agradecer a Valéria, por ter feito eu me apaixonar pela matemática e ser a maior incentivadora para eu continuar seguindo meus sonhos. Você é a minha maior inspiração de pessoa e professora. Quero agradecer à Alessandra, por ser meu apoio em meio a tanto caos. E sempre estar de portas abertas pra conversar.

Ao meu orientador, Marcelo, por toda a dedicação, paciência e tranquilidade para lidar com meu desespero. Obrigada por todos os ensinamentos transmitidos nesse período, e me mostrar mais ainda a beleza da matemática.

Este projeto foi financiado pela FAPESP Processo 2018/02478-9 e pela CNPq. Deixo aqui meu agradecimento por este financiamento.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é estudar equações diferenciais parciais parabólicas não autônomas não clássica da forma

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \gamma(t)\Delta \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = g(u) + f(t, u_t) & \text{em } (s, +\infty) \times \Omega \\ u = 0 & \text{em } (s, +\infty) \times \partial\Omega \\ u(t, x) = \phi(t - s, x) & t \in [s - h, s],\ x \in \Omega \end{cases}$$

onde $s \in \mathbb{R}$ é o tempo inicial, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ um domínio suave limitado, Δ representando o operador Laplaciano com respeito as variáveis espaciais. Vamos mostrar resultados de existência de atrator pullback para esse tipo de problema e para a equação sem o retardo.

Palavras-chaves: semigrupos, processos de evolução, atratores pullback, problema não autônomo, equação com retardo.

ABSTRACT

Our goal in this work is to study a nonautonomous parabolic differential equation, which is written as

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \gamma(t)\Delta\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = g(u) + f(t, u_t) & \text{em } (s, +\infty) \times \Omega \\ u = 0 & \text{em } (s, +\infty) \times \partial\Omega \\ u(t, x) = \phi(t - s, x) & t \in [s - h, s],\ x \in \Omega \end{cases}$$

where $s \in \mathbb{R}$ is the inicial time, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ is a smooth bounded domain, Δ represents the Laplacian operator with respect to the spatial variables. We are going to show some results about existence of pullback attractors for this type of problem and for the equation without delay.

Key-words: semigroups, evolution process, pullback attractors, nonautonomous problem, equation with delay.

Sumário

Introdução

A grande relevância da Matemática reside no fato de que, além de existir como ciência, com suas teorias e problemas; ela tem a característica ímpar de penetrar em outros ramos do conhecimento humano. As raízes de várias teorias matemáticas estão em fenômenos naturais que impulsionaram o notável crescimento de grande parte da Matemática. As Equações Diferenciais fazem parte desta Matemática comprometida com o estudo de problemas concretos

Aprofundaremos o estudo das Equações Diferenciais Parciais garantindo a existência de soluções, a unicidade e continuidade em relação aos seus dados inicias. Além disso, quando existe localmente a solução para a equação, queremos estudar se podemos transformá-la em uma solução global. O nosso objetivo é o estudo de um tipo particular de equações, as equações diferenciais parciais parabólicas não autônomas.

Para isto, começaremos o estudo de sistemas dinâmicos, que é uma família de parâmetro (em geral o tempo) de aplicações de um espaço abstrato nele mesmo. Geralmente, um sistema dinâmico está associado a uma equação diferencial. Quando trabalhamos num sistema dinâmico podemos estudar a dinâmica backwards (comportamento do sistema no passado, quando o parâmetro é o tempo) e a dinâmica forwards (comportamento no futuro, quando o parâmetro é o tempo). Nos sistemas de caráter autônomo, as dinâmicas backwards e forwards tem o mesmo comportamento, o que pode não ser verdade nos sistemas não-autônomos, o qual estamos interessados em estudar.

Iremos nos aprofundar nas equações diferenciais parciais semilineares, envolvendo um operador ilimitado (que depende explicitamente do tempo t) que seja gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo analítico. Para isso estudaremos o conceito de Semigrupos e Processos que serão utilizados para a resolução de equações não autônomas.

Em particular, daremos enfoque a uma equação do tipo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \gamma(t)\Delta\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = g(u) + f(t,u_t) & \text{em } (s,+\infty)\times\Omega \\ u = 0 & \text{em } (s,+\infty)\times\partial\Omega \\ u(t,x) = \phi(t-s,x) & t\in[s-h,s],\ x\in\Omega \end{cases}$$

onde $s \in \mathbb{R}$ o tempo inicial, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ um domínio suave limitado, Δ representando o operador Laplaciano com respeito as variáveis espaciais. Suponha g satisfazendo as seguintes condições:

$$g \in C^1(\mathbb{R}), \quad \limsup_{|a|\to+\infty} \frac{g(a)}{a} < 0, \quad |g(a)-g(b)| \leq c|a-b|(1+|a|^{\rho-1}+|b|^{\rho-1})$$

com $1 < \rho < \dfrac{n+2}{n-2}$. O termo de retardo que depende do tempo $f(t,u_t)$ representa, por exemplo, a influência de uma força externa com algum tipo de retardo, memória ou características hereditárias.

Um segmento de solução será denotado por u_t e o valor inicial $\phi \in C([-h,0], L^2(\Omega))$ tal que $\phi(0) \in H_0^1(\Omega)$. Ou seja, dado $h > 0$ e a função $u : [s-h, +\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$, para cada $t \geq s$ definimos a aplicação $u_t : [-h,0] \times \Omega \to \mathbb{R}$ por

$$u_t(\theta, x) = u(t+\theta, x), \text{ para } \theta \in [-h,0],\, x \in \Omega.$$

Neste sentido, a formulação abstrata relacionada ao retardo inclui vários tipos de retardo de uma forma única. Por exemplo, termos do tipo

$$F_1(t, u(t-h)), \;\; F_2(u(t-\tau(t))) \text{ e } \int_{-h}^{0} F_3(t, \theta, u(t+\theta))d\theta,$$

com $F_i\,(i = 1,2,3)$ sendo funções adequadas e $\tau : \mathbb{R} \to [0,h]$, podem ser descritas com as seguintes f_i correspondentes, definidas por

$$f_1(t,\phi) = F_1(t, \phi(-h)), \;\; f_2(t,\phi) = F_2(\phi(-\tau(t))) \text{ e } f_3(t,\phi) = \int_{-h}^{0} F_3(t, \theta, \phi(\theta))d\theta,$$

com $\phi : [-h,0] \to X$. X denotando um espaço de Banach ou Hilbert em relação as variáveis espaciais. No nosso caso de estudo, basta substituir ϕ por u_t.

Mais ainda, suponha a função $\gamma : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ uniformemente contínua que satisfaz $0 < \gamma_0 \leq \gamma(t) \leq \gamma_1 < \infty$. A qual representa a variabilidade da viscosidade devido ao tempo, por exemplo, a temperatura do ambiente externo. Este coeficiente dependendo do tempo que transforma o nosso problema de natureza autônoma

Deste modo, para o estudo deste sistema dinâmico não autônomo consideramos a teoria de processos de evolução e atratores pullback. Primeiro garantimos a existência local de solução e boa-colocação do problema usando o Teorema do Ponto Fixo de Banach. Em seguida, conseguimos a existência global de solução e o comportamento das soluções são abordadas no sentido do atrator pullback.

O trabalho esta organizado da seguinte forma:

No Capítulo 1, apresentamos a definição e resultados básicos sobre a teoria de semigrupo, sendo baseados em [14]. No Capítulo 2, vamos mostrar a construção do espaço das potências fracionárias.

No Capítulo 3, contém resultados relacionados a atratores globais para problemas autônomos e ainda, definimos processos de evolução para estudar os atratores pullback para os problemas não autônomos, baseados em [8]. No Capítulo 4, temos o estudo efetivo da equação de difusão não clássica não autônoma com retardo, seguindo [5].

Por fim, o Capítulo 5, contém a equação de difusão não clássica não autônoma, mas agora sem o retardo, com o intuito de comparar com o estudo feito no Capítulo 4, baseado em [15].

Capítulo 1

Semigrupos para problemas autônomos

Neste capítulo, iremos estudar brevemente a teoria de semigrupos. Dando enfoque na teoria dos semigrupos fortemente contínuos e semigrupos analíticos. Utilizamos como referências principais [10], [11] e [14].

1.1 Semigrupos uniformemente contínuos para operadores lineares limitados

Definição 1. *Seja X um espaço de Banach. Uma família a um parâmetro $T(t)$, $0 \leq t < \infty$ de operadores lineares limitados de X em X, é um semigrupo de operadores lineares limitados em X se:*

(i) $T(0) = I$, *sendo* I *o operador identidade em* X*;*

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$, *para todo* $t, s \geq 0$.

Um semigrupo de operadores lineares limitados, $\{T(t) : t \geq 0\}$*, é uniformemente contínuo se*

$$\lim_{t \to \infty} \|T(t) - I\| = 0.$$

O operador linear $A : D(A) \subset X \to X$ *definido por*

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \to \infty} \frac{T(t)x - I(x)}{t} \quad \text{existe} \right\}$$

e

$$Ax = \lim_{t \to \infty} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{d^+T(t)}{dt}x\bigg|_{t=0} \quad \text{para} \quad x \in D(A)$$

é o gerador infinitesimal do semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$.

Note que se $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo uniformemente contínuo, então

$$\lim_{s \to t} \|T(s) - T(t)\| = 0.$$

Teorema 1.1.1. *Um operador linear* A *é um gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo se, e somente se,* A *é um operador linear limitado.*

Demonstração. Suponha que A seja um operador linear limitado em X e defina

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}.$$

Observe que a série converge em norma para todo $t \geq 0$ e defina para cada t, o operador linear limitado $T(t)$. Temos $T(0) = e^{0A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(0A)^n}{n!} = I$ e queremos calcular $T(t+s)$, para isto utilizaremos o binômio de Newton, sendo

$$(t+s)^p = \sum_{k=0}^{p} \frac{p!}{k!(p-k)!} t^k s^{p-k}$$

o que implica

$$\frac{(t+s)^p}{p!} = \sum_{k=0}^{p} \frac{t^k s^{p-k}}{k!(p-k)!}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} T(t+s) = e^{(s+t)A} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t+s)^n A^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{n} \frac{(t+s)^p A^p}{p!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{n} \left[\sum_{k=0}^{p} \frac{t^k s^{p-k}}{k!(p-k)!} \right] A^p = \lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{n} \sum_{k=0}^{p} \frac{t^k A^k}{k!} \frac{s^{p-k}}{(p-k)!} A^{p-k}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Como $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$ converge absolutamente, então em (1.1) temos $e^{tA}e^{sA}$. Portanto, $T(t+s) = T(t)T(s)$. Temos ainda

$$\begin{aligned} \|T(t) - I\| &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} - I \right\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \right\| = \left\| (tA) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{(n+1)!} \right\| \\ &= \|tA\| \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{(n+1)!} \right\| \leq \|tA\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|t^n A^n\|}{(n+1)!} \\ &\leq \|tA\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|(tA)^n\|}{n!} = \|tA\| \, e^{\|tA\|} = \|tA\| \, e^{t\|A\|} \leq |t| \, \|A\| \, e^{t\|A\|}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|T(t) - I\| \leq |t| \, \|A\| \, e^{t\|A\|}.$$

Assim, quando $t \to 0$, temos $e^{t\|A\|} \to 1$, consequentemente $\|T(t) - I\| \to 0$ quando $t \to 0$, ou seja, $T(t)$ é uniformemente contínuo.

Resta mostrarmos que A é o gerador infinitesimal do semigrupo. De fato,

$$\left\|\frac{T(t)-I}{t}-A\right\| = \left\|\frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tA)^n}{n!}-I}{t}-A\right\| = \left\|A\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tA)^n}{(n+1)!}\right)-A\right\|$$
$$= \left\|A\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tA)^n}{(n+1)!}-I\right)\right\| \leq \|A\| \left\|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tA)^n}{(n+1)!}\right\|$$
$$\leq \|A\|\,\|tA\|\,e^{t\|A\|} \leq |t|\,\|A\|^2\,e^{t\|A\|},$$

assim, fazendo $t \to 0$, obtemos $\left\|\dfrac{T(t)-I}{t}-A\right\| \to 0$, ou seja, $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{T(t)-I}{t} = A$. Portanto, $\{\,T(t)\,:\,t\geq 0\}$ é um semigrupo uniformemente contínuo de operadores lineares limitados em X e A é seu gerador infinitesimal.

Reciprocamente, suponha que $\{\,T(t)\,:\,t\geq 0\}$ seja um semigrupo uniformemente contínuo em X. Pela continuidade uniforme de $\{\,T(t)\,:\,t\geq 0\}$, podemos falar em integrabilidade e aplicando o Teorema A.2.1 temos

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)ds = T(0) = I$$

assim, dado $\varepsilon > 1$, existe $\rho > 0$ tal que

$$\left\|\frac{1}{\rho}\int_0^{\rho} T(s)ds - I\right\| < 1.$$

Pelo Teorema A.2.13, existe o operador inverso

$$I-\left(I-\rho^{-1}\int_0^{\rho} T(s)ds\right) = \rho^{-1}\int_0^{\rho} T(s)ds.$$

Logo, $\rho^{-1}\displaystyle\int_0^{\rho} T(s)ds$ é um operador inversível, assim $\displaystyle\int_0^{\rho} T(s)ds$ também será. Agora,

$$\frac{T(h)-I}{h}\int_0^{\rho} T(s)ds = \frac{1}{h}\left[\int_0^{\rho} T(s+h)ds - \int_0^{\rho} T(s)ds\right] = \frac{1}{h}\left[\int_h^{\rho-h} T(s)ds - \int_0^{\rho} T(s)ds\right]$$
$$= \frac{1}{h}\left[\int_h^{\rho} T(s)ds + \int_{\rho}^{\rho+h} T(s)ds - \int_0^{h} T(s)ds - \int_h^{\rho} T(s)ds\right]$$
$$= \frac{1}{h}\left[\int_{\rho}^{\rho+h} T(s)ds - \int_0^{h} T(s)ds\right]$$

logo,

$$\frac{T(h)-I}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_{\rho}^{\rho+h} T(s)ds - \int_0^{h} T(s)ds\right]\left(\int_0^{\rho} T(s)ds\right)^{-1}. \tag{1.2}$$

Fazendo $h \to 0$ em (1.2) concluímos

$$\lim_{h\to 0}\frac{T(h)-I}{h} = [T(\rho)-I]\left(\int_0^{\rho} T(s)ds\right)^{-1}.$$

Suponha que A seja o limite uniforme de $\dfrac{T(h)-I}{h}$ quando $h \to 0$ assim

$$A = \lim_{h\to 0} \frac{T(h)-I}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{T(h)-T(0)}{h} = \frac{d^+T(0)}{dt}.$$

Para $t > 0$ e $h > 0$, temos

$$\frac{T(h+t)-T(t)}{h} = \frac{T(h)T(t)-T(t)}{h} = T(t)\left(\frac{T(h)-I}{h}\right) \tag{1.3}$$

mas $\dfrac{T(h)-I}{h}$ converge em norma para A, logo (1.3) converge uniformemente para $T(t)A$ quando $h \to 0^+$. T é derivável à direita para todo $t \leq 0$

$$\frac{d^+T(t)}{dt} = T(t)A. \tag{1.4}$$

Para $t, h > 0$ com $0 < h < t$ obtemos

$$\frac{T(t-h)-T(t)}{-h} = \frac{T(t)-T(t-h)}{h} = T(t-h)\left(\frac{T(h)-I}{h}\right).$$

Como T é continuamente uniforme, então quando $h \to 0$ temos $T(t-h) \to T(t)$ e também $\dfrac{T(h)-I}{h} \to A$, logo

$$\lim_{h\to 0} \frac{T(t-h)-T(t)}{-h} = \frac{d^-T(t)}{dt} = T(t)A. \tag{1.5}$$

Portanto, de (1.4) e (1.5) temos

$$\frac{dT(t)}{dt} = AT(t),\ \forall t \geq 0,$$

provando assim que o operador linear $(T(\rho)-I)\left(\int_0^\rho T(s)ds\right)^{-1}$ é o gerador infinitesimal de $\{\,T(t) \,:\, t \geq 0\}$. □

Observação 1.1.1. *Pela definição de semigrupos e pelo Teorema 1.1.1, temos que $\{\,T(t) \,:\, t \geq 0\}$ possui um único gerador infinitesimal.*

Se $\{\,T(t) \,:\, t \geq 0\}$ é uniformemente contínuo seu gerador infinitesimal é um operador linear limitado. A recíproca vale, todo operador linear limitado é um gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo, a pergunta a se fazer é se esse semigrupo é único.

Teorema 1.1.2. *Seja $\{\,T(t) \,:\, t \geq 0\}$ e $\{\,T_1(t) \,:\, t \geq 0\}$ semigrupos uniformemente contínuos de operadores lineares limitados. Se*

$$\lim_{t\to 0} \frac{T(t)-I}{t} = A = \lim_{t\to 0} \frac{T_1(t)-I}{t}.$$

Então $T(t) = T_1(t)$ para todo $t \geq 0$.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [14], assim como a prova do corolário a seguir.

Corolário 1.1.1. *Seja* $\{ T(t) : t \geq 0\}$ *um semigrupo uniformemente contínuo. Então,*

(a) *Existe uma constante* $\omega \geq 0$ *tal que* $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$*;*

(b) *Existe um único operador linear limitado* A *tal que* $T(t) = e^{tA}$*;*

(c) *O operador* A *em (b) é o gerador infinitesimal de* $\{ T(t) : t \geq 0\}$*;*

(d) *A aplicação* $t \longmapsto T(t)$ *é diferenciável em relação a norma do operador e*

$$\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A.$$

1.2 Semigrupos de operadores lineares limitados fortemente contínuo

Nessa seção sempre consideraremos X um espaço de Banach.

Definição 2. *Um semigrupo* $\{ T(t) : t \geq 0\}$ *de operadores lineares limitados em* X *é um semigrupo fortemente contínuo se*

$$\lim_{t \to 0^+} T(t)x = x \, , \ \forall x \in X.$$

Um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados em X *será chamado de semigrupo de classe* C_0 *ou simplesmente* C_0*-semigrupo.*

Teorema 1.2.1. *Seja* $\{ T(t) : t \geq 0\}$ *um* C_0*-semigrupo. Existem constantes* $\omega \geq 0$ *e* $M \geq 1$ *tal que*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \ \textit{para} \ 0 \leq t < \infty.$$

Demonstração. Primeiro mostraremos que existe $\eta > 0$ tal que $\|T(t)\|$ é limitado para $0 \leq t \leq \eta$. Se isso não fosse verdade, existiria uma sequência $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, com $t_n \to 0$, sendo $t_n \geq 0$, para todo n, mas $\|T(t_n)\| \geq n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema de Banach-Steinhauss (A.2.3), $\|T(t_n)x\|$ não seria limitado para algum $x \in X$, contradizendo o fato de $\{ T(t) : t \geq 0\}$ ser fortemente contínuo.

Logo, existe uma constante $M > 0$ tal que $\|T(t)\| \leq M$, para $0 \leq t \leq \eta$. Além disso, como $\|T(0)\| = \|I\| = 1$, então $M \geq 1$. Considere $t \geq 0$, escreva $t = n\eta + \delta$ com $n \in \mathbb{Z}^+$ e $0 \leq \delta < \eta$. Então,

$$\begin{aligned} \|T(t)\| &= \|T(n\eta + \delta)\| = \|T(n\eta)T(\delta)\| \leq \|T(n\eta)\|\|T(\delta)\| \leq \|T(\eta)^n\| \, \|T(\delta)\| \\ &\leq \|T(\eta)\|^n \, \|T(\delta)\| \leq M^n M \leq M^{\frac{t}{\eta}} M = Me^{\omega t} \end{aligned}$$

considerando $\dfrac{t}{\eta} = n + \dfrac{\delta}{\eta}$, o que implica em $M^n \leq M^{\frac{t}{\eta}}$. E ainda $\omega = \dfrac{1}{\eta} \log M \geq 0$, sendo a constante procurada, pois

$$Me^{(\frac{1}{\eta}\log M)t} = Me^{\log M^{\frac{t}{\eta}}} = MM^{\frac{t}{\eta}}.$$

□

Corolário 1.2.1. *Se $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um C_0-semigrupo, então a aplicação, $(t,x) \longmapsto T(t)x$ é uma função contínua de $[0,+\infty) \times X$ em X.*

Teorema 1.2.2. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um C_0-semigrupo e seja A o seu gerador infinitesimal. Então,*

1. *Para $x \in X$,*
$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x;$$

2. *Para $x \in X$, $\displaystyle\int_0^t T(s)xds \in D(A)$ e*
$$A\left(\int_0^t T(s)xds\right) = T(t)x - x;$$

3. *Para $x \in D(A)$, $T(t)x \in D(A)$ e*
$$\frac{dT(t)}{dt}x = AT(t)x = T(t)Ax;$$

4. *Para $x \in D(A)$,*
$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Axd\tau = \int_s^t AT(\tau)xd\tau;$$

5. *(Transformada de Laplace) Para $Re(\lambda) > \omega$ (sendo ω do Teorema 1.2.1), $\lambda \in \rho(A)$ então*
$$(\lambda - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt.$$

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [16].

Corolário 1.2.2. *Se A é o gerador infinitesimal do C_0-semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$, o domínio de A, denotado por $D(A)$, é denso em X e A é um operador linear fechado.*

A demonstração dos próximos dois teoremas pode ser encontrada em [14].

Teorema 1.2.3. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ e $\{T_1(t) : t \geq 0\}$ C_0-semigrupos de operadores lineares limitados com geradores infinitesimais A e B, respectivamente. Se $A = B$ então $T(t) = T_1(t)$, para $t \geq 0$.*

Se A é um gerador infinitesimal do C_0-semigrupo então pelo Corolário 1.2.2, $\overline{D(A)} = X$. Na verdade temos um resultado mais forte.

Teorema 1.2.4. *Seja A o gerador infinitesimal do C_0-semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$. Se $D(A^n)$ é o domínio de A^n, então $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$ é denso em X.*

1.3 O teorema de Hille-Yosida

Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um C_0-semigrupo. Pelo Teorema 1.2.1 segue que existem constantes $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$ tal que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, para $t \geq 0$. Se $\omega = 0$, então o semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ é chamado de uniformemente limitado e, mais ainda, se $M = 1$ chamamos de C_0-semigrupo de contração.

Esta seção será dedicada para a caracterização do gerador infinitesimal dos C_0-semigrupos de contração. Condições sob o comportamento do resolvente do operador A que são necessárias e suficientes para que A seja o gerador infinitesimal do C_0-semigrupo de contração.

Recordando que se A é o operador linear em X, não necessariamente limitado, o conjunto resolvente de A, $\rho(A)$, é o conjunto de todos os números complexos λ para os quais $(\lambda I - A)$ é invertível, isto é, $(\lambda I - A)^{-1}$ é um operador linear limitado em X. A família $R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$, de um operador linear limitado é chamando resolvente de A.

Teorema 1.3.1. (Hille-Yosida) *Seja A um operador linear, este será o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ que satisfaz*

$$\|T(t)\| \leq e^{\omega t} \quad e \quad M = 1$$

se, e somente se,

(i) A é fechado e $\overline{D(A)} = X$;

(ii) O conjunto resolvente de A contém $\mathbb{R}^+$ e para cada $\lambda > 0$

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda - \omega}.$$

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [14].

1.4 O teorema de Lumer-Phillips

O teorema de Lumer-Phillips é uma ótima ferramenta quando estamos querendo encontrar qual é o operador que é o gerador infinitesimal associado ao C_0-semigrupo.

Definição 3. *Seja X um espaço de Banach real ou complexo com norma $\|\cdot\|_X$, e seja $X^* = \{f : X \to \mathbb{C}\ (ou\ \mathbb{R}) : f$ é linear e contínua$\}$, isto é, X^* é o dual topológico de X, com a norma usual de X^*,*

$$\|\xi\|_{X^*} = \sup\{\, Re(\langle \xi, x\rangle);\ \|x\|_X \leq 1\,\} = \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|\leq 1}} |\langle \xi, x\rangle|.$$

A aplicação dualidade, $J : X \to 2^{X^*}$, sendo 2^{X^*} o conjunto das partes de X^*, é uma função definida por

$$x \in X \longmapsto J(x) = \{\, x^* \in X^* : Re(\langle x^*, x\rangle) = \|x\|_X^2,\ \|x^*\|_{X^*} = \|x\|_X^2\,\}.$$

Temos que $J(x) \neq \emptyset$, pois como consequência do Teorema de Hahn-Banach, se X é um espaço vetorial normado. Então para todo $x_0 \in X$ existe um funcional linear contínuo f tal que

$$\|f\|_{X^*} = \|x_0\|_X \quad \text{e} \quad \langle f, x_0\rangle = \|x_0\|^2.$$

Definição 4. *Um operador* $A : D(A) \subset X \to X$ *é dissipativo, se para cada* $x \in D(A)$ *existe* $x^* \in J(x)$ *tal que*

$$Re(\langle x^*, Ax\rangle) \leq 0.$$

As demonstrações dos próximos resultados podem ser consultadas em [14].

Lema 1.4.1. *Um operador* $A : D(A) \subset X \to X$ *é dissipativo se, e somente se,*

$$\|(\lambda - A)x\| \geq \lambda\|x\|, \text{ para todo } \lambda > 0 \text{ e } x \in D(A).$$

Teorema 1.4.1. ***(Lumer-Phillips)*** *Seja* $A : D(A) \subset X \to X$ *um operador linear tal que* $\overline{D(A)} = X$

(i) Se A *gera um* C_0*-semigrupo de contração, então* A *é dissipativo;*

(ii) Se A *é dissipativo e* $R(\lambda_0 - A) = X$*, para algum* $\lambda_0 > 0$*. Então* A *gera um* C_0*-semigrupo de contração.*

Definição 5. *Seja* X *um espaço de Banach,* $A : D(A) \subset X \to X$ *um operador linear com* $\overline{D(A)} = X$*. O adjunto de* A*, denotado por* A^**, é dado pela aplicação* $A^* : D(A^*) \subset X^* \to X^*$ *definida por* $x^* \mapsto A^*x^* = f^*$*, para todo* $x^* \in D(A^*)$*. Sendo o domínio de* A^* *definido por*

$$D(A^*) = \{x^* \in X^* \text{ tais que} \langle x^*, Ax\rangle = \langle f^*, x\rangle, \text{ para todo } x \in D(A) \text{ e para alguma} f^* \in X^*\}.$$

Corolário 1.4.1. *Seja* $A : D(A) \subset X \to X$ *um operador fechado, densamente definido com* A *e* A^* *dissipativos, então* A *gera um semigrupo fortemente contínuo de contrações.*

Teorema 1.4.2. *Seja* A *um operador dissipativo em* X*.*

(i) Se para algum $\lambda_0 > 0$ *temos* $R(\lambda_0 I - A) = X$*, então* $R(\lambda I - A) = X$ *para todo* $\lambda > 0$*;*

(ii) Se A *é fechável então* $\overline{A}$ *também é dissipativo;*

(iii) Se $\overline{D(A)} = X$ *então* A *é fechável.*

Anteriormente vimos que podemos expressar o operador resolvente $(\lambda - A)^{-1}$ em termos de $\{T(t) : t \geq 0\}$, isto é,

$$(\lambda - A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)dt$$

sempre que $Re(\lambda)$ seja suficientemente grande. Agora queremos obter $\{T(t) : t \geq 0\}$ a partir do operador.

Teorema 1.4.3. *Suponha que* A *é o gerador de um semigrupo fortemente contínuo* $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ *satisfazendo*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\beta t}.$$

Para qualquer $x \in D(A^2)$ *e* $t > 0$

$$T(t)x = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - iN}^{\gamma + iN} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1}x\, d\lambda$$

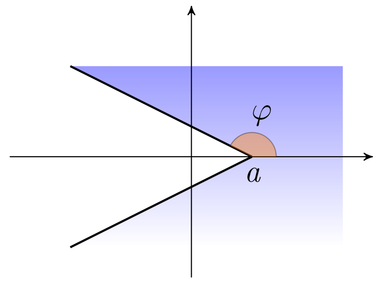
onde a integral está sendo calculada ao longo do segmento de reta $Re(\lambda) = \gamma$*, com* $\gamma >$ *máx*$\{0, \beta\}$*. O limite converge uniformemente para* $\varepsilon \leq t \leq \dfrac{1}{\varepsilon}$*, onde* $\varepsilon > 0$*.*

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [6].

1.5 Operadores setoriais e analiticidade

Definição 6. *Seja $A : D(A) \subset X \to X$, dizemos que $-A$ é um operador setorial se A é densamente definido, A é fechado, e para $a \in \mathbb{R}$ temos o setor $\sum_{a,\varphi} \subset \rho(A)$ definido por*

$$\sum_{a,\varphi} = \{ \lambda \in \mathbb{C} : |arg(\lambda - a)| < \varphi \}, \text{ para algum } \varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right).$$



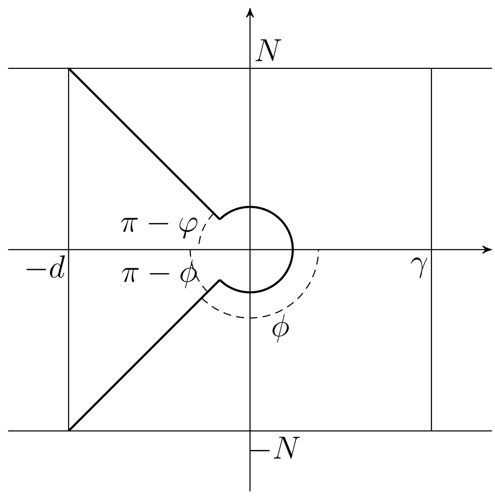
E existe $C > 0$ tal que

$$\left\|(\lambda - A)^{-1}\right\| \leq \frac{C}{|\lambda - a|}, \text{ para todo } \lambda \in \sum_{a,\varphi}.$$

Na figura, observe que $\sum_{a,\varphi}$ é ilustrado pela área sombreada.

Afirmação: Seja $-A$ setorial, com $a = 0$, então A gera um C_0-semigrupo $\{ T(t) : t \geq 0\}$ com $\|T(t)\| \leq M$, considerando no Teorema 1.4.3 $\beta = 0$ e $\gamma >$ máx$\{0, \beta\} = 0$.

De fato, observe que para λ à direita do contorno, $\lambda \in \rho(A)$, pela setoriedade de $-A$. Sobre o contorno, $e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1}$ é analítica então $\oint e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1} d\lambda = 0$.



Vamos mostrar que as integrais nas linhas horizontais são iguais a 0, consequentemente, integrar sobre o segmento em γ é o mesmo que integrar sobre o contorno. Denote este contorno por Ψ. Seja ρ o segmento inferior da figura e tome $x \in D(A^2)$, queremos calcular $\left|\int_\rho e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1} x d\lambda\right|$. Utilizaremos a seguinte mudança de variável $\tan(\pi - \phi) = \dfrac{-d}{-N}$, que implica em $0 < \dfrac{1}{K} = \tan(\pi - \phi) = \dfrac{d}{N}$. Logo, $d = NK$.

Assim,

$$\begin{aligned}
\left|\int_\rho e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1} x d\lambda\right| &= \left|\int_{-KN}^{\gamma} e^{(\theta - iN)t}\left((\theta - iN) - A\right)^{-1} x \, d\theta\right| \\
&\leq \int_{-KN}^{\gamma} e^{\theta t}\left|e^{-iNt}\right| \left\|\left((\theta - iN) - A\right)^{-1}\right\| \|x\| \, d\theta \\
&\leq \int_{-\infty}^{\gamma} e^{\theta t} \frac{C}{|\theta - iN|} \|x\| \, d\theta \leq \int_{-\infty}^{\gamma} e^{\theta t} \frac{C}{\sqrt{\theta^2 + N^2}} \|x\| \, d\theta
\end{aligned}$$

Chamando $f_N(\theta) = \dfrac{e^{\theta t}}{\sqrt{\theta^2 + N^2}}$, temos $\dfrac{e^{\theta t}}{\sqrt{\theta^2 + N^2}} \leq \dfrac{e^{\theta t}}{\sqrt{\theta^2 + 1}}$ e sabemos que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\gamma} \frac{e^{\theta t}}{\sqrt{\theta^2 + N^2}} d\theta < \infty$. Como $\displaystyle\lim_{N \to \infty} \frac{e^{\theta t}}{\sqrt{\theta^2 + N^2}} = 0$, segue do Teorema da Convergência

Dominada que

$$\int_{\rho} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1} x d\lambda \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad N \longrightarrow +\infty.$$

De maneira análoga, podemos fazer para o segmento da parte superior. Isto posto, temos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - iN}^{\gamma + iN} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1} x \, d\lambda = \int_{\Psi} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1} x \, d\lambda.$$

Logo, considerando Γ o contorno estendido

$$T(t)x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1} x \, d\lambda \quad \forall \, x \in D(A^2).$$

Note que a integral $\displaystyle\int_{\Gamma} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1} x \, d\lambda$ em limitados converge, o problema está no $-\infty$ e $+\infty$. Mas, para λ grande, temos $\lambda = |\lambda| \, e^{\pm i\phi} = |\lambda| \, (\cos(\pm\phi) + i \operatorname{sen}(\pm\phi))$, tome $K_1 = \cos(\phi) < 0$, então $\left\| e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1} \right\| \leq e^{-K_1 |\lambda| t} \dfrac{C}{|\lambda|}$. Deste modo,

$$\int_{\Gamma} \left\| e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1} x \, d\lambda \right\| \leq \int_{\Gamma} e^{-K_1 |\lambda| t} \frac{C}{|\lambda|} |d\lambda| < \infty.$$

Portanto, $\displaystyle\int_{\Gamma} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1} x \, d\lambda$ é um operador linear contínuo. Como $D(A^2)$ é denso em X vale para todo $x \in X$ que

$$T(t)x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1} x \, d\lambda \quad \forall t > 0 \tag{1.6}$$

Teorema 1.5.1. *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador com $-A$ sendo um operador setorial, ou seja, existem a, M e $\varphi \in (\pi/2\,,\,\pi)$, com $\sum_a = \{\, \lambda \in \mathbb{C} \, : \, |arg(\lambda - a)| < \varphi + \varepsilon \} \subset \rho(A)$, para $\varepsilon > 0$ dado e $\|(\lambda - a)(\lambda - A)^{-1}\| \leq M$, para todo $\lambda \in \sum_a$.*

Então A gera um semigrupo analítico $\{\, T(t) \, : \, t \geq 0\}$ dado por

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_a} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1} \, d\lambda$$

sendo, $\Gamma_a = \partial\,(\sum_a \backslash \{\, \lambda \in \mathbb{C} \, : \, |\lambda - a| \leq r\})$ no setor $\{\, t \in \mathbb{C} \, : \, |arg(t)| < \varphi - \pi/2\,\}$.

Além disso, existe $K > 0$ tal que $\|T(t)\| \leq K e^{at}$, para todo $t \geq 0$ e $\|AT(t)\| \leq K t^{-1} e^{at}$, com $t > 0$, de modo que $\dfrac{d}{dt}T(t) = AT(t)$, ou seja, $\dfrac{d}{dt}T(t)$ é um operador linear contínuo.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [6].

Capítulo 2

Potências fracionárias

Neste capítulo, queremos estudar a potência fracionária de um operador A, que está definido em um espaço de Banach, utilizando como referência [6]. A nossa motivação para a definição da potência vem de que se considerarmos $a \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ e γ uma curva fechada, retifícavel e simples tal que $\eta(\gamma, a) = 1$ (sendo $\eta(\gamma, a)$ o índice da curva γ em torno do ponto a) com $tr(\gamma) \subset \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ temos que

$$a^\alpha = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\lambda^\alpha}{\lambda - a} \, d\lambda$$

sendo $\lambda^\alpha = e^{\alpha \ln(\lambda)}$, onde $\ln(\lambda)$ é o ramo principal do logaritmo.

Seja $A \in \mathcal{L}(X)$, isto é, A é um operador linear e contínuo, com $\sigma(A) \subset \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ e γ uma curva fechada, retifícavel e simples tal que $\eta(\gamma, \lambda) = 1$, para todo $\lambda \in \sigma(A)$. Definimos

$$A^\alpha := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \lambda^\alpha (\lambda - A)^{-1} \, d\lambda.$$

Como A é um operador linear e limitado então $\sigma(A)$ é um conjunto compacto com $\sigma(A) \subset [-\|A\|, \|A\|]$.

Se, considerarmos o caso particular em que $\alpha = n \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned} A_n &:= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \lambda^n (\lambda - A)^{-1} \, d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \lambda^n \left(\lambda(I - \lambda^{-1}A)\right)^{-1} \, d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \lambda^{n-1} \left(I - \lambda^{-1}A\right)^{-1} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=R} \lambda^{n-1} \left((I - \lambda^{-1}A)\right)^{-1} d\lambda \end{aligned}$$

sendo $R > 2\|A\|$. Como $\|\lambda^{-1}A\| = |\lambda^{-1}|\|A\| < \dfrac{R}{2}\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{2} < 1$, usando o Teorema de Neumann A.2.13 temos

$$(I - \lambda^{-1})^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda^{-1}A)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{-j} A^j.$$

Logo,

$$\lambda^{n-1}(I - \lambda^{-1})^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{n-1-j} A^j = \sum_{j=0}^{n-1} + \lambda^{-1} A^n + \sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda^{n-1-j} A^j$$

assim $Res(\lambda^{n-1}(I - \lambda^{-1})^{-1}, 0) = A^n$, ou seja,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=R} \lambda^{n-1}\left((I - \lambda^{-1}A)\right)^{-1} d\lambda = Res(\lambda^{n-1}(I - \lambda^{-1})^{-1}, 0) = A^n.$$

Mas,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \lambda^{n}(\lambda - A)^{-1} d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=R} \lambda^{n-1}\left(I - \lambda^{-1}A\right)^{-1} d\lambda.$$

Portanto, obtemos para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \lambda^{n}(\lambda - A)^{-1} d\lambda$$

ou seja, quando a potência é $n \in \mathbb{N}$, esta coincide com a definição usada.

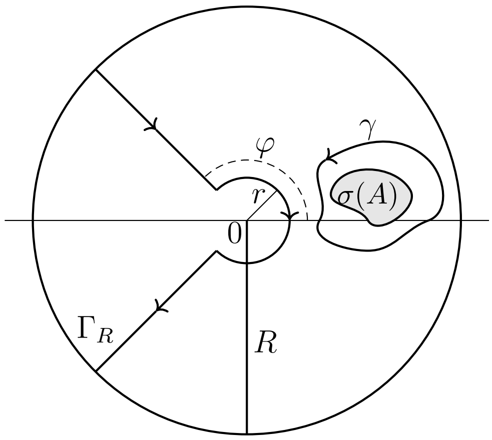
2.1 A^z, quando $Re(z) < 0$

Teorema 2.1.1. *Seja* $\sum = \{\lambda \in \mathbb{C} : |arg(\lambda)| < \varphi\} \setminus \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < r\}$, *sendo* $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ *e* $r > 0$. *Defina* $\Gamma = \partial \sum$, *com* $\Gamma \subset \rho(A)$ *e* A *um operador linear com* $\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$, *para todo* $\lambda \in \Gamma$ *então*

$$A^\alpha = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \lambda^{\alpha}(\lambda - A)^{-1} d\lambda \in \mathcal{L}(X), \;\; \textit{para } Re(\alpha) < 0. \tag{2.1}$$

Demonstração. Considere a figura abaixo e seja $\alpha \in \mathbb{C}$ com $Re(\alpha) < 0$, temos

$$\int_{\gamma_R} \lambda^{\alpha}(\lambda - A)^{-1} d\lambda = \int_{-\varphi}^{\varphi} (Re^{i\theta})^{\alpha}(Re^{i\theta} - A)^{-1} iRe^{i\theta}\, d\theta.$$



Como $R < 2\|A\|$ e para $\lambda \notin \sigma(A)$, temos

$$\begin{aligned}\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\| &= \|(I - \lambda^{-1}A)^{-1}\| \\ &\leq \frac{1}{1 - \|\lambda^{-1}A\|} \\ &= \frac{|\lambda|}{|\lambda| - \|A\|} \leq M\end{aligned}$$

consequentemente, $\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \dfrac{M}{|\lambda|}$.

Assim,

$$\begin{aligned}\left\|\int_{-\varphi}^{\varphi} (Re^{i\theta})^{\alpha}(Re^{i\theta} - A)^{-1} iRe^{i\theta}\, d\theta\right\| &\leq \int_{-\varphi}^{\varphi} \left\|(Re^{i\theta})^{\alpha}\right\| \left\|(Re^{i\theta} - A)^{-1}\right\| R\left|e^{i\theta}\right| d\theta \\ &\leq \int_{-\varphi}^{\varphi} \left|(Re^{i\theta})^{\alpha}\right| \frac{M}{R|e^{i\theta}|} R\, d\theta = \int_{-\varphi}^{\varphi} \left|(Re^{i\theta})^{\alpha}\right| M\, d\theta.\end{aligned}$$

Como, $\left|(Re^{i\theta})^{\alpha}\right| = R^{Re(\alpha)}e^{-Im(\alpha)\theta}$, temos

$$\begin{aligned}\left\|\int_{-\varphi}^{\varphi}(Re^{i\theta})^{\alpha}(Re^{i\theta}-A)^{-1}iRe^{i\theta}\,d\theta\right\| &\leq \int_{-\varphi}^{\varphi}\left|(Re^{i\theta})^{\alpha}\right|\,M\,d\theta = M\int_{-\varphi}^{\varphi}R^{Re(\alpha)}e^{-Im(\alpha)\theta}\,d\theta\\ &= MR^{Re(\alpha)}\frac{1}{-Im(\alpha)}\left[e^{-Im(\alpha)\varphi}-e^{Im(\alpha)\varphi}\right]\longrightarrow 0\\ &\text{quando } R\to+\infty,\end{aligned}$$

já que $Re(\alpha) < 0$.

Agora, consideremos $\Gamma_{\infty} = \Gamma$, ou seja, $\Gamma_{\infty} = \Gamma_R$ quando $R \to \infty$ temos

$$A^{\alpha} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\lambda^{\alpha}(\lambda - A)^{-1}\,d\lambda.$$

Assuma que $\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}}(X) \leq M$, para todo $\lambda \in \Gamma$. Para $t \in \Gamma$, com t na parte inferior de Γ, é da forma $te^{-i\varphi}$ então

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{1}^{\infty}\left(te^{-i\varphi}\right)^{\alpha}\left(te^{-i\varphi}-A\right)^{-1}\,dt\right\| \leq \frac{M}{2\pi}\int_{1}^{\infty}\frac{\left|(te^{-i\varphi})^{\alpha}\right|}{t}\,dt.$$

Mas, já sabemos que, $|(te^{-i\varphi})^{\alpha}| = t^{Re(\alpha)}e^{-Im(\alpha)\varphi}$, logo

$$\begin{aligned}\frac{M}{2\pi}\int_{1}^{\infty}\frac{\left|(te^{-i\varphi})^{\alpha}\right|}{t}\,dt &= \frac{M}{2\pi}\int_{1}^{\infty}t^{Re(\alpha)-1}e^{-Im(\alpha)\varphi}\,dt\\ &= \frac{M}{2\pi Re(\alpha)}e^{Im(\alpha)\varphi}\left(\lim_{t\to\infty}t^{Re(\alpha)}-1\right) = -\frac{M}{2\pi Re(\alpha)}e^{Im(\alpha)\varphi}.\end{aligned}$$

Do mesmo modo, mostramos que para $t \in \Gamma$, com a parte superior de Γ, a integral converge. Lembrando que esta integral esta convergindo na topologia uniforme dos operadores, provando assim o desejado. $\square$

Observe que este resultado nos mostra que temos uma classe mais geral de operadores A para os quais podemos definir as potências A^z, com $Re(z) < 0$. Esta classe é a dos operadores fechados, densamente definidos e com o resolvente contendo $\mathbb{C}\setminus\sum$ e tais que $\lambda(\lambda + A)^{-1}$ é limitada em $\mathbb{C}\setminus\sum$. Com isto mostramos que se A um operador linear tal que $-A$ gera um C_0-semigrupo $\{\,T(t) \,:\, t \geq 0\}$ com $\|T(t)\| \leq K$, para todo $t \geq 0$, então podemos definir A^{α} como em (2.1) para $Re(\alpha) < 0$.

Definição 7. *Sejam X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear fechado, densamente definido. Dizemos que $A : D(A) \subset X \to X$ é do tipo positivo se:*

(a) $\mathbb{R}^{+} \subset \rho(-A)$;

(b) Existe $M \geq 1$ tal que $\|(1+s)(s+A)^{-1}\| \leq M$, para todo $s \geq 0$.

O conjunto dos operadores do tipo positivo é denotado por $\mathcal{P}(X)$.

O operador Laplaciano, Δ é um exemplo de operador do tipo positivo.

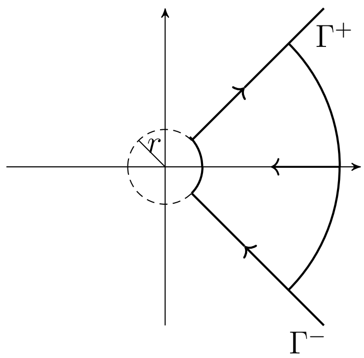
Proposição 2.1.1. *Seja A um operador linear tal que $-A$ gera um C_0-semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ com $\|T(t)\| \leq M$. Então A é do tipo positivo.*

A demonstração desta proposição é resumida basicamente na aplicação do Teorema 1.3.1 (Teorema de Hille-Yosida).

Lema 2.1.1. *Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ com $Re(\alpha) < 0$ e $Re(\beta) < 0$ tem-se $A^\alpha A^\beta = A^{\alpha+\beta}$.*

A demonstração deste lema pode ser consultada em [6].

Seja $0 < Re(\lambda) < 1$, temos $-1 < Re(-\lambda) < 0$. Estamos interessados em calcular a potência fracionária de A, com o expoente negativo, $-\alpha$, sob a curva Γ que será definida como $\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$, representada pela figura a seguir.



Assim,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+}(-\lambda)^{-\alpha}(\lambda+A)^{-1}d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_r^\infty(-s)^{-\alpha}(s+A)^{-1}ds$$

e

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^-}(-\lambda)^{-\alpha}(\lambda+A)^{-1}d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_r^\infty(-s)^{-\alpha}(s+A)^{-1}ds.$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{2\pi i}\int_{\substack{\lambda=re^{i\theta}\\ 0<\theta<2\pi}} (-\lambda)^{-\alpha}(\lambda+A)^{-1}d\lambda \right\| &= \left\| \int_0^{2\pi} \left(-re^{i\theta}\right)^{-\alpha}\left(re^{i\theta}+A\right)^{-1} ire^{i\theta}\, d\theta \right\| \\
&\leq \int_0^{2\pi} \left| \left(re^{i(\theta-\pi)}\right)^{-\alpha}\right| \frac{M}{1+|re^{i\theta}|}\, r\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left| \left(re^{i(\theta-\pi)}\right)^{-\alpha}\right| \frac{M}{1+r}\, r\, d\theta \\
&= M\int_0^{2\pi} \left| e^{-\alpha(\ln r + i(\theta-\pi))}\right| \frac{r}{1+r}\, d\theta \\
&= \frac{M}{1+r}\int_0^{2\pi} r r^{-Re(\alpha)} e^{Im(\alpha)(\theta-\pi)} d\theta \\
&= \frac{r^{1-Re(\alpha)}}{1+r} M e^{-Im(\alpha)\pi} C \longrightarrow 0 \text{ se } r \to 0,
\end{aligned}$$

onde $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-Im(\alpha)\theta} d\theta = C$ e lembrando que $0 < Re(\alpha) < 1$. Assim,

$$\begin{aligned}
A^\alpha &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty e^{i\pi\alpha}s^{-\alpha}(s+A)^{-1}\, ds - \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty e^{-i\pi\alpha}s^{-\alpha}(s+A)^{-1}ds \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{e^{i\pi\alpha}-e^{-\pi\alpha}}{2i}\int_0^\infty s^{-\alpha}(s+A)^{-1}\, ds = \frac{\operatorname{sen}(\pi\alpha)}{\pi}\int_0^\infty s^{-\alpha}(s+A)^{-1}\, ds.
\end{aligned}$$

Logo, para $0 < Re(\alpha) < 1$, temos

$$A^{-\alpha} = \frac{\operatorname{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^\infty s^{-\alpha}\,(s+A)^{-1}\,ds.$$

Em particular, se $A \equiv 1$ e $X = \mathbb{C}$, temos

$$\frac{\operatorname{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^\infty s^{-\alpha}\,(s+1)^{-1}\,ds = 1 \quad \text{para } 0 < Re(\alpha) < 1.$$

Teorema 2.1.2. *$\{A^z : Re(z) < 0\} \cup \{A^0 = I\}$ é um C_0-semigrupo analítico.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [6].

2.2 A^z, quando $Re(z) \geq 0$

Como A^z é injetora para $Re(z) < 0$, segue que A^z tem inversa sobre a imagem, desta forma a seguinte definição é consistente.

Definição 8. *Seja $z \in \mathbb{C}$ com $Re(z) > 0$. Defina*

$$A^z := \left(A^{-z}\right)^{-1}$$

com $D(A^z) = R(A^{-z})$.

Observe que $A^z : D(A^z) \subset X \to X$ é fechada, injetora, tem inversa limitada. Em geral, $A^z \notin \mathcal{L}(X)$ quando $Re(z) > 0$.

A seguir, descreveremos algumas propriedades relacionadas ao operador A^z, com $Re(z) > 0$.

Propriedades:

(i) Sejam $z, w \in \mathbb{C}$ com $Re(w) > Re(z) > 0$, então $D(A^w) \subset D(A^z)$.

(ii) $D(A^z)$ é denso em X, para todo $z \in \mathbb{C}$ com $Re(z) > 0$, ou seja, $\overline{D(A^z)} = X$.

(iii) $A^{z+w}x = A^z A^w x = A^w A^z x$, sendo $Re(z) > 0$ e $Re(w) > 0$, para todo $x \in D(A^{z+w})$.

(iv) Se $Re(z) > Re(w) > 0$, então $A^{-z+w}x = A^{-z}A^w x$ e $A^{z-w}x = A^{-w}A^z x$, para $x \in D(A^w)$ e $x \in D(A^z)$, respectivamente.

A demonstração destas propriedades esta presente em [6].

Proposição 2.2.1. *Suponha $m = 0, 1, 2, \cdots,$ então*

$$A^{-z} = \frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{\pi} \cdot \frac{m!}{(1-z)(2-z)\cdots(m-z)} \int_0^\infty s^{m-z}(s+A)^{-m-1}\,ds \tag{2.2}$$

para $0 < Re(z) < m+1$.

2.3 A^z, quando $Re(z) = 0$

Conhecemos A^z para $z \in \mathbb{C}$ e $Re(z) \neq 0$. Vamos definir A^z quando $Re(z) = 0$. Seja $-1 < Re(z) < 1$, logo, $0 < Re(z) + 1 < 2$, definimos o operador A_z da seguinte forma

$$A_z x := \frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{\pi z} \int_0^\infty s^z (s+A)^{-2} Ax\, ds, \ \forall x \in D(A).$$

Observe que o operador A^z é fechável. Logo, temos a seguinte definição.

Definição 9. *Seja $z \in \mathbb{C}$ com $Re(z) = 0$, definimos $A^z = (A_z)^-$, sendo que $(A_z)^-$ significa $\overline{A_z}$, isto é, o fecho do operador A_z.*

Desta forma, temos para todo $z \in \mathbb{C}$, A^z é fechado e densamente definido.

Teorema 2.3.1. *Seja $A \in \mathcal{P}(X)$. Então, A^z com $z \in \mathbb{C}$ é dito ser um operador de potência fracionária A^z, para cada $z \in \mathbb{C}$, um operador fechado e densamente definido em X. Se $Re(z) < 0$, então $A^z \in \mathcal{L}(X)$ e é dado pela integral*

$$A^z = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (-\lambda)^z (\lambda + A)^{-1} d\lambda$$

onde Γ é qualquer curva simples suave por partes em $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}^+$, percorrendo de $\infty e^{-i\varphi}$ a $\infty e^{i\varphi}$ para algum $\varphi \in (0, \pi)$ tal que $\sigma(-A)$ fica estritamente a esquerda de Γ. Além disso, as seguintes propriedades são satisfeitas:

(i) *A^z coincide com a potência usual quando $z \in \mathbb{Z}$;*

(ii) *Para $x \in D(A)$, $-1 < Re(z) < 1$,*

$$A^z x = \frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{\pi z} \int_0^\infty s^z (s+A)^{-2} Ax\, ds;$$

(iii) *Suponha que*

1. *$x \in D(A^{2m})$, com $m = 0, 1, 2, \cdots$ e máx$\{Re(z), Re(w)\} < m$*

   ou

2. *$Re(z), Re(w)$ e $Re(z+w)$ são não nulos e $x \in D(A^u)$, sendo $u \in \{z, w, z+w\}$ satisfaz $Re(u) =$ máx$\{Re(z), Re(w), Re(z+w)\}$*

então,

$$A^z A^w x = A^{z+w} x;$$

(iv) *Para $Re(z), Re(w) > 0$, temos $A^z A^w = A^{z+w}$;*

(v) *Para $0 < Re(z) < Re(w)$,*

$$D(A^w) \overset{d}{\hookrightarrow} D(A^z) \overset{d}{\hookrightarrow} X;$$

(vi) *Denotemos Lis como sendo o conjunto dos isomorfismos linear. Assim, $A^z \in Lis(D(A^{z+w}), D(A^w)) \cap Lis(D(A^z), X)$, com $Re(z), Re(w) > 0$;*

(vii) Dado $m = 0, 1, 2, \cdots$ a aplicação

$$\begin{array}{ccc} \{z \in \mathbb{C} \,:\, Re(z) < m\} & \longrightarrow & \mathcal{L}(D(A^m), X) \\ z & \longmapsto & A^z \end{array}$$

é analítica.

A demonstração destas propriedades esta presente em [6].

Definição 10. *Sejam $A \in \mathcal{P}(X)$ e $z \in \mathbb{C}$ com $Re(z) \geq 0$. O espaço de Banach $X^z := (D(A^z), \|A^z, \cdot\|)$ é chamado espaço de potência fracionária associada ao operador A.*

Lembrando que como A^z é fechado, seu domínio $D(A^z)$ dotado da norma $D(A^z) \ni x \longmapsto \|A^z x\|_X + \|x\|_X \in \mathbb{R}^+$ é um espaço de Banach.

Pela limitação de A^{-z} conseguimos ver que

$$D(A^z) \ni x \longmapsto \|A^z x\|_X \in \mathbb{R}^+$$

é uma norma equivalente a

$$D(A^z) \ni x \longmapsto \|A^z x\|_X + \|x\|_X \in \mathbb{R}^+.$$

Capítulo 3

Atratores

Neste capítulo estudaremos atratores globais para semigrupo e a teoria de atratores pullback para processos de evolução. Utilizando como referências [2], [7] e [9].

3.1 Atratores para semigrupos

Seja X um espaço de Banach e $\{T(t) : t \geq 0\}$ um C_0-semigrupo.

O semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ é chamado de compacto se $T(t) : X \to X$ é uma aplicação compacta para cada $t > 0$, isto é, dado um subconjunto limitado B de X, $T(B)$ é pré-compacto, em outras palavras, $\overline{T(B)}$ é compacto no contra-domínio.

O semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ é chamado completamente contínuo se é compacto e para cada conjunto limitado $B \subset X$ e cada $t > 0$, a união $\displaystyle\bigcup_{s \in [0,t]} T(s)B$ é limitado em X.

Sejam W_1 e W_2 dois subconjuntos de X. Dizemos que W_2 é $T(t)$-atraído por W_1 se,

$$d(T(t)W_2, W_1) \longrightarrow 0 \text{ quando } t \to \infty,$$

sendo, para cada $t \geq 0$,

$$d(T(t)W_2, W_1) := \sup_{w_2 \in T(t)W_2} \left(\inf_{w_1 \in W_1} dist_X(w_2, w_1) \right)$$

de maneira geral, o número $d(T(t)W_2, W_1)$ mede quanto do conjunto $T(t)W_2$ está fora do conjunto W_1.

Dados quaisquer dois subconjuntos $W_1, W_2 \subset X$, dizemos que W_1 absorve W_2 sob $\{T(t) : t \geq 0\}$ se, existe um número $t_0 \geq 0$ tal que $T(t)W_2 \subset W_1$, para todo $t \geq t_0$. Note que W_1 atrai W_2 se e somente se cada vizinhança aberta N_{W_1} de W_1 em X absorve W_2.

Um elemento $v \in X$ é chamado ponto de equilíbrio para $\{T(t) : t \geq 0\}$ se $T(t)v = v$ para todo $t \geq 0$. Estendendo esta noção, dizemos que o conjunto $A \subset X$ é $\{T(t)\}$-invariante se $T(t)A = A$, para todo $t \geq 0$. Além disso, chamaremos $A \subset X$ por positivamente invariante se $T(t)A \subset A$, para todo $t \geq 0$.

Para qualquer conjunto $B \subset X$, os dois conjuntos $\gamma^+(B)$ e $\omega(B)$ são definidos por

$$\gamma^+(B) := \bigcup_{t \geq 0} T(t)B \quad e \quad \omega(B) := \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} T(t)B}$$

chamados de órbita positiva e conjunto ω-limite de B, respectivamente. Assim, o conjunto $\omega(B)$ consiste de todos os pontos $v \in X$ para os quais existem números positivos $t_n \to \infty$ e pontos $v_n \in B$ com $T(t_n)v_n \to v$.

Dado $v \in X$, denotamos S_v^- como o conjunto de todas as funções $\phi : (-\infty, 0] \to X$ tal que $\phi(0) = v$ e $T(t)\phi(s) = \phi(t+s)$ para qualquer $-\infty < s \leq -t < 0$. O conjunto S_v^- pode ser vazio, pode ser composto de apenas um elemento ϕ ou pode consistir em mais de um elemento ϕ.

Uma órbita negativa passando por um ponto $v \in X$ dado, é definido pelo conjunto

$$\gamma_\phi^-(v) := \bigcup_{t \geq 0} \{\phi(-t)\}$$

sendo $\phi \in S_v^-$. Pode ou não existir uma órbita negativa não vazia.

Para cada ponto $v \in X$, uma órbita completa pelo ponto v é qualquer conjunto

$$\gamma_\phi(v) := \gamma^+(v) \cup \gamma_\phi^-(v)$$

como $\phi \in S_v^-$. Como permitimos a órbita negativa ser vazia, notamos que a órbita completa $\gamma_\phi(v)$ é invariante se e somente se a componente $\gamma_\phi^-(v)$ é não vazia.

Definição 11. *Um atrator global para $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um conjunto não vazio, compacto, $\{T(t)\}$-invariante, o qual atrai todo subconjunto limitado de X.*

Proposição 3.1.1. *Um atrator global, quando existir, é único e é o subconjunto maximal da classe dos subconjuntos limitados e invariantes em X.*

Demonstração. Com efeito, sejam A e A_1 subconjuntos compactos e invariantes no espaço de fase X e suponha que A e A_1 atraim todos os subconjuntos limitados de X. Então, lembrando que A e A_1 são limitados, temos

$$d(A, A_1) = d(T(t)A, A_1) \to 0 \text{ se } t \to +\infty \quad \text{e} \quad d(A_1, A) = d(T(t)A_1, A) \to 0 \text{ se } t \to +\infty.$$

Consequentemente, $d(A, A_1) = d(A_1, A) = 0$. Mas, A e A_1 são fechados, logo, $A = A_1$. Podemos ver também que cada subconjunto limitado invariante de X deve estar contido em um atrator global. □

Proposição 3.1.2. *Um atrator global $\mathcal{A}$ é o minimal na classe de todos os conjuntos fechados e limitados $B \subset X$ o qual atrai conjuntos limitados.*

Demonstração. De fato, consideremos um conjunto qualquer $B \subset X$ sendo fechado e limitado o qual atrai todos os subconjuntos limitados de X, argumentando similarmente a Proposição 3.1.1, obtemos que $d(\mathcal{A}, B) = 0$, já que $\mathcal{A}$ é atrator global. Assim, $\mathcal{A} \subset B$. □

3.1.1 Existência do atrator global

O objetivo desta seção é estabelecer condições para garantir a existência do atrator global, para isto, apresentaremos uma classe de semigrupos que possuem a propriedade: para cada conjunto $B \subset X$ compacto e invariante, a estabilidade assintótica é equivalente a estabilidade uniformemente assintótica.

As condições para a existência do atrator está relacionada com a noção de dissipatividade e a suavidade assintótica de $\{T(t) : t \geq 0\}$.

Definição 12. *Um semigrupo* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *é chamado pontualmente dissipativo se, e somente se, existe um conjunto* $B \subset X$ *não vazio e limitado que atrai todo ponto de* X*.*

O semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ *é chamado limitado dissipativo se, e somente se, existe um conjunto* $B \subset X$ *não vazio e limitado que atrai todo subconjunto limitado de* X*.*

Definição 13. *Um semigrupo* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *é chamado assintoticamente suave se, e somente se, para cada conjunto* $W \subset X$*, não vazio, limitado, fechado, positivamente invariante contém um subconjunto* C *não vazio e compacto que atrai* W*.*

Note que, se o semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}$ em X, então $\{T(t) : t \geq 0\}$ deve ser dissipativo no sentido da Definição 12. Ademais, sob as mesmas condições, $\{T(t) : t \geq 0\}$ é necessariamente assintoticamente suave. De fato, considere qualquer conjunto $W \subset X$ não vazio, fechado e limitado tal que

$$T(t)W \subset W \text{ para todo } t \geq 0. \tag{3.1}$$

Certamente, $\mathcal{A} \cap W$ é um subconjunto fechado do conjunto compacto $\mathcal{A}$, então $\mathcal{A} \cap W$ é compacto. Mais ainda, como $\mathcal{A}$ atrai conjuntos limitados, a condição (3.1) garante que $\mathcal{A} \cap W$ é não vazio e atrai W, logo $\{T(t) : t \geq 0\}$ é assintoticamente suave.

A prova das próximas duas proposições podem ser encontradas em [16].

Proposição 3.1.3. *Se* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *é um* C_0*-semigrupo em* X *que possui um atrator global, então* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *é dissipativo limitado e assintoticamente suave.*

Agora, o nosso interesse é em determinar propriedades importantes dos conjuntos ω-limites de conjuntos limitados no caso em que o semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ é assintoticamente suave.

Proposição 3.1.4. *Seja* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *um* C_0*-semigrupo agindo em* X*. Suponha que* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *é assintoticamente suave,* B *é um subconjunto não vazio de* X *e para algum número* $t_B \geq 0$*, o conjunto*

$$\bigcup_{s \geq t_B} T(s)B$$

é limitado, então $\omega(B)$ *é não vazio, compacto e invariante. Ademais,* $\omega(B)$ *atrai* B*.*

Corolário 3.1.1. *Seja* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *um* C_0*-semigrupo em* X *e suponha que* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *tenha um atrator global* $\mathcal{A}$*. Então,*

(a) $\mathcal{A}$ *é a união dos conjuntos* ω*-limites de todos os conjuntos limitados de* X*;*

(b) $\mathcal{A}$ *é a união dos conjuntos* ω*-limites de todos os conjuntos compactos de* X*;*

(c) $\mathcal{A}$ *é a união de todas as órbitas limitadas, invariantes e completas que passam por* $v \in X$*;*

(d) $\mathcal{A}$ *é a união de todas as órbitas pré-compactas, invariantes e completas passando por* $v \in X$*.*

A demonstração deste corolário esta presente em [14].

O próximo resultado nos garante condições suficientes e necessárias para a existência de atrator global.

Teorema 3.1.1. *Seja* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *um* C_0*-semigrupo em* X*. Se* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *é pontualmente dissipativo, assintoticamente suave e mantém órbitas de conjuntos limitados, sendo limitadas, então* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *tem um atrator global em* X*.*

Demonstração. Dividiremos a demonstração em dois passos:

1º passo: Primeiro iremos garantir a existência de um conjunto limitado $\Theta \subset X$ de modo que cada conjunto compacto $C \subset X$, possui uma vizinhança N_C tal que N_C é absorvido por Θ.

Por hipótese, existe um conjunto não vazio e limitado $W_0 \subset X$, com W_0 atraindo os pontos de X. Seja N_{W_0} uma vizinhança qualquer limitada de W_0. Usando a continuidade de $\{T(t) : t \geq 0\}$ e o fato de N_{W_0} absorver pontos de X, concluímos que

$$\forall\, v \in X, \exists\, \tau_v > 0, \exists \text{ uma bola aberta}\, B_X(v, \varepsilon_v) \text{ tal que } T(\tau_v)B_X(v, \varepsilon_v) \subset N_{W_0} \tag{3.2}$$

sendo $B_X(v, \varepsilon_v)$ a bola aberta de centro v e raio ε_v em X. Agora, escolha $t_{N_{W_0}} \geq 0$ tal que

$$\Theta := \bigcup_{t \geq t_{N_{W_0}}} T(t)N_{W_0}$$

seja limitado. Pelo que já sabemos, Θ é positivamente invariante e absorve pontos de X. Mais ainda, de (3.2) temos que

$$\left\{\ \forall\, v \in X \text{ e } \exists\ t_v := \tau_v + t_{N_{W_0}} \geq 0, \exists\, B_X(v, \varepsilon_v) \text{ tal que } T(t)B_X(v, \varepsilon_v) \subset \Theta\ \right\}. \tag{3.3}$$

Considere, qualquer subconjunto compacto $C \subset X$. Certamente $C \subset \bigcup_{v \in C} B_X(v, \varepsilon_v)$, mas pela compacidade de C, temos

$$C \subset B_X(v_1, \varepsilon_{v_1}) \cup \cdots \cup B_X(v_K, \varepsilon_{v_K}) := N_C \tag{3.4}$$

para algum $K \in \mathbb{N}$ e $v_1, \cdots, v_K \in C$. De (3.3) e (3.4) obtemos que

$$T(t)C \subset T(t)N_C = \bigcup_{j=1}^{K} T(t)(B_X(v_j, \varepsilon_{v_j})) \subset \Theta \text{ para } t \geq \text{ máx}\{t_{v_1}, \cdots, t_{v_K}\}.$$

2º caso: Iremos construir um conjunto compacto e invariante A o qual atrai cada subconjunto limitado de X. Seja $B \subset X$ um conjunto limitado, por hipótese e pela Proposição 3.1.4 garantimos que $\omega(B)$ é compacto e atrai B, ou seja,

$$\left\{\ \forall\, N_{\omega(B)} \text{ vizinhança de } \omega(B),\ \exists\ t_B \geq 0, \text{ tal que } T(t)B \subset N_{\omega(B)} \text{ para } t \geq t_B\ \right\}. \tag{3.5}$$

Entretando, como mostrado no 1º passo, existe uma vizinhança $N_{\omega(B)}$ de $\omega(B)$ que é absorvida por Θ. Por isto e por (3.5) obtemos

$$\forall\, B \subset X,\ B \text{ limitado}, \exists\, \tau_B \geq 0 \text{ tal que } T(t)B \subset \Theta\ \forall\, t \geq \tau_B. \tag{3.6}$$

Seja $A := \omega(\Theta)$. Aplicando novamente a Proposição 3.1.4, obtemos que A é compacto, invariante e atrai Θ. Mais ainda, A atrai conjuntos limitados de X, mas por (3.6) temos que conjuntos limitados são absorvidos por Θ, finalizando a demonstração. $\square$

Observação 3.1.1. *(i) Observe que com este resultado anterior, garantimos que quando temos alguma forma de dissipação fraca, as órbitas de conjuntos limitados converge uniformemente para algum conjunto compacto. De fato, é muito mais fácil obter estimativas pontuais das trajetórias do que garantir a existência de um conjunto absorvente.*

(ii) Como consequência do Teorema 3.1.1 e da Proposição 3.1.3 concluímos que: $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um C_0-semigrupo em X e possui um atrator global em X se, e somente se, $\{T(t) : t \geq 0\}$ é pontualmente dissipativo e assintoticamente suave.

Em geral, a limitação das órbitas de conjuntos limitados não são necessárias para a existência de atrator global, entretanto isto é válido para um grande número de sistemas (como por exemplo, semigrupos compactos correspondentes de equações setoriais).

Do ponto de vista do Teorema 3.1.1, a hipótese pode ser enfraquecido, já que o que de fato usamos na demonstração foi a propriedade que

$$\left\{ \forall\, B \subset X,\ B \text{ limitado, } \exists\, t_B \geq 0, \text{ tal que } \bigcup_{t \geq t_B} T(t) \text{ é limitado em } X \right\}. \tag{3.7}$$

Com base nesta observação, temos

Corolário 3.1.2. *Um C_0-semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ em X possui um atrator global se, e somente se, $\{T(t) : t \geq 0\}$ é pontualmente dissipativo, assintoticamente suave e satisfaz a condição* (3.7).

Observação 3.1.2. *Voltando para a demonstração do Teorema 3.1.1, note que ao invés de dissipatividade pontual de $\{T(t) : t \geq 0\}$, podemos assumir uma condição mais fraca*

$$\left\{\ \exists\, B \subset X,\ \forall\, u_0 \in X,\ \exists\, t_{u_0} \geq 0, \text{ tal que } T(t_{u_0})u_0 \in B\ \right\} \tag{3.8}$$

isto é, $\gamma^+(u_0) \cap B \neq \emptyset$, para cada $u_0 \in X$.

Assim, podemos reescrever o Corolário 3.1.2 como

Corolário 3.1.3. *Um C_0-semigrupo em X possui atrator global se, e somente se, ele é assintoticamente suave e satisfaz as condições* (3.7) *e* (3.8).

3.1.2 Semigrupos compactos

O nosso objetivo é aplicar o Teorema 3.1.1 para o caso em que o semigrupo é compacto, para isto devemos primeiro provar que os semigrupos compactos são assintoticamente suaves e satisfazem (3.7).

Lema 3.1.1. *Se $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um C_0-semigrupo compacto em X, então $\{T(t) : t \geq 0\}$ é assintoticamente suave.*

Demonstração. Utilizando a Definição 13, consideremos qualquer conjunto $B \subset X$ sendo $B \neq \emptyset$, fechado, limitado e positivamente invariante. Como $\gamma^+(B) \subset B$ e $\{T(t) : t \geq 0\}$ é compacto, o conjunto $\overline{T(1)\gamma^+(B)}$ é compacto. Mas $\omega(B)$ é um conjunto fechado contido em $\overline{T(1)\gamma^+(B)}$. Logo, $\omega(B)$ é compacto.

Também vimos que $\omega(B) \subset \overline{\gamma^+(B)} \subset \overline{B} = B$. Assim, resta apenas mostrarmos que $d(T(t)B, \omega(B)) \to 0$ se $t \to +\infty$. Suponha que isto não ocorra, ou seja, que existem $\varepsilon > 0$ e $t_n \to \infty$ tal que

$$d(T(t_n)B, \omega(B)) > \varepsilon,\ n \in \mathbb{N}. \tag{3.9}$$

Então deve existir uma sequência $\{y_n\} \subset B$ de modo que a sequência $\{T(t_n)y_n\}$ não possua subsequência convergente. Entretanto, todos os elementos da sequência $\{T(t_n)y_n\}$ estão contidos no conjunto compacto $\overline{T(1)\gamma^+(B)}$, exceto por uma quantidade finita. Mas isto contradiz (3.9).

Assim, aplicando a condição de Cantor para espaços métricos que diz que a interseção de uma família decrescente de conjuntos compactos e não vazios, é não vazia. Concluímos que $\omega(B)$ é vazio se B for vazio, o que é um absurdo. Portanto, $d(T(t)B, \omega(B)) \to 0$ se $t \to +\infty$. □

Corolário 3.1.4. *Seja $\{\, T(t) \,:\, t \geq 0\}$ um C_0-semigrupo em X. Se $\{\, T(t) \,:\, t \geq 0\}$ é compacto e pontualmente dissipativo, então $\{\, T(t) \,:\, t \geq 0\}$ possui atrator global em X.*

Os detalhes desta demonstração pode ser encontrada em [16].

Observação 3.1.3. *Queremos analisar o caso especial em que o semigrupo $\{\, T(t) \,:\, t \geq 0\}$ é completamente contínuo para $t > 0$, ou seja,*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{O semigrupo é compacto e para cada conjunto limitado } B \subset X \\ \textit{e cada número } \tau > 0 \textit{ o conjunto } \displaystyle\bigcup_{t \in [0,\tau]} T(t)B \textit{ é limitado em } X \end{array} \right\} \tag{3.10}$$

chamaremos estes semigrupos de semigrupos completamente contínuos, omitindo a referência explicita da desigualdade $t > 0$.

Note que a segunda exigência em (3.10) pode ser enfraquecida, já que para um C_0-semigrupo compacto, o Corolário 3.1.4 implica que a limitação de $\displaystyle\bigcup_{t \in [0,\tau]} T(t)B$ por um único número $\tau > 0$ é equivalente a limitação de $\displaystyle\bigcup_{t \in [0,\tau]} T(t)B$, para todo $\tau > 0$.

Levando em consideração a continuidade completa, obtemos

Corolário 3.1.5. *Se $\{\, T(t) \,:\, t \geq 0\}$ é um C_0-semigrupo em X e se $\{\, T(t) \,:\, t \geq 0\}$ é completamente contínuo e pontualemnte dissipativo em X, então $\{\, T(t) \,:\, t \geq 0\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}$ em X.*

Observação 3.1.4. *Veja que em ambos os Corolários 3.1.4 e 3.1.5 a hipótese de $\{\, T(t) \,:\, t \geq 0\}$ ser pontualmente dissipativo pode ser substituido por uma condição mais fraca (3.8).*

3.1.3 Compacidade assintótica do semigrupo

Queremos um outro critério para a avaliação da suavidade assintótica diferente do que já definimos anteriormente. Com isto, queremos introduzir a seguinte condição:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Para qualquer conjunto não vazio } B \text{ com a propriedade de que existe} \\ t_B \geq 0 \text{ tal que } \displaystyle\bigcup_{t \geq t_B} T(t)B \text{ seja limitado, e cada sequência} \\ \{T(t_n)v_n\}, \text{ com } t_n \to +\infty \text{ e } \{v_n\} \subset B, \text{ possui uma subsequência convergente} \end{array} \right\} \tag{3.11}$$

Dizemos que $\{\, T(t) \,:\, t \geq 0\}$ é assintoticamente compacto em X se (3.11) é satisfeito.

Proposição 3.1.5. *Seja* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *um* C_0*-semigrupo em* X*. Então,* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *é assintoticamente suave se, e somente se,* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *é assintoticamente compacto.*

A demonstração pode ser consultada em [16].

Agora, apresentaremos o resultado que é utilizado como ferramenta para garantir a existência de atratores. Seja B um conjunto limitado do espaço de Banach X, definimos

$$\|B\|_X = \sup_{b \in B} \|b\|_X.$$

Teorema 3.1.2. *Seja* X *um espaço de Banach e* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *um* C_0*-semigrupo definido em um subconjunto fechado e positivamente invariante* M *de* X*. Assuma que podemos escrever, para qualquer* $t > 0$ *e qualquer* $u \in M$

$$T(t)u = U(t)u + V(t)u \tag{3.12}$$

com $U(t)$ *e* $V(t)$ *sendo aplicações de* M *em* X*, com a propriedade de que, para qualquer conjunto limitado* $B \subset M$*, existe* $\tau_0(B) > 0$ *tal que sejam satisfeitas as seguintes condições*

(i) $U(t)B$ *é relativamente compacto para qualquer* $t > \tau_0(B)$*;*

(ii) Para qualquer $t > \tau_0(B)$*,*

$$\|V(t)u\|_X \leq k(t, \|B\|_X), \ \forall u \in B$$

sendo $k : (s, r) \in [0, +\infty) \times [0, +\infty) \mapsto [0, +\infty)$ *é uma função tal que* $K(s, r) \to 0$ *quando* $s \to +\infty$*.*

Então, $\{T(t) : t \geq 0\}$ *é assintoticamente suave.*

Reciprocamente, se um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ *admite um atrator global compacto* $\mathcal{A}$ *em um espaço de Banach* X *,então* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *deve ter uma representação como em* (3.12) *com* $U(t), V(t)$ *satisfazendo (i) e (ii).*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [12].

3.2 Atratores para processos de evolução

Agora, vamos definir processos de evolução e estudaremos brevemente a teoria de atratores pullback, tendo como principais referências [4] e [7].

Seja X um espaço métrico e $d(\cdot, \cdot) : X \times X \to [0, +\infty)$ a sua métrica. Denotemos $\mathcal{C}(X)$ como sendo o conjunto das transformações contínuas de X nele mesmo.

Definição 14. *Um processo de evolução em* X *é uma família de transformações* $\{S(t, s) : t \geq s\}$ *em* $\mathcal{C}(X)$ *com as seguintes propriedades*

(i) $S(t, t) = I$*, para todo* $t > 0$*;*

(ii) $S(t, s) = S(t, \tau)S(\tau, s)$*, para todo* $t \geq \tau \geq s$*;*

(iii) $\{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : t \geq s\} \times X \ni (t, s, x) \mapsto S(t, s)x \in X$ *é contínua.*

Quando X é um espaço vetorial normado e $S(t,s)$ é linear para cada $(t,s) \in \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : t \geq s\}$ diremos que o $\{S(t,s) : t \geq s\}$ é um processo de evolução linear.

Definição 15. *Para um processo de evolução $\{S(t,s) : t \geq s\}$ e um conjunto $B \subset X$, definimos:*

(i) *Para cada $(t,s) \in \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : t \geq s\}$, a imagem de B sob $S(t,s)$, é dado por*

$$S(t,s)B := \{S(t,s)b\,;\, b \in B\};$$

(ii) *A órbita de B a partir do instante $s \in \mathbb{R}$ é dada por*

$$\gamma^s(B) := \bigcup_{t \geq s} S(t,s)B;$$

(iii) *A órbita pullback de B no instante $t \in \mathbb{R}$ é dada por*

$$\gamma_p(B,t) := \bigcup_{s \leq t} S(t,s)B.$$

Definição 16. *Seja $\{S(t,s) : t \geq s\}$ um processo de evolução. Dado $t \in \mathbb{R}$, diremos que o conjunto $B(t) \subset X$ atrai-pullback subconjuntos limitados de X no instante t sob a ação de $\{S(t,s) : t \geq s\}$ se, para cada subconjunto limitado D de X*

$$\lim_{s \to -\infty} dist_H(S(t,s)D, B(t)) = 0.$$

O conjunto $B(t)$ absorve pullback subconjuntos limitados de X no instante t, se existe $T = T(t,D) \leq t$ tal que $S(t,s)D \subset B(t)$, para todo $s \leq T$ e para cada subconjunto limitado D de X.

Uma família $\{B(t) : t \in \mathbb{R}\}$ atrai pullback subconjuntos limitados de X sob a ação de $\{S(t,s) : t \geq s\}$ se $B(t)$ atrai-pullback subconjuntos limitados de X no instante t sob a ação de $\{S(t,s) : t \geq s\}$, para cada $t \in \mathbb{R}$. Esta mesma família irá absorver pullback subconjuntos limitados se X pela ação de $\{S(t,s) : t \geq s\}$ se $B(t)$ absorve pullback subconjuntos limitados de X, para cada $t \in \mathbb{R}$.

Se existe uma família $\{B(t) : t \in \mathbb{R}\}$ de conjuntos limitados que atrai-pullback ou absorve pullback conjuntos limitados diremos que $\{S(t,s) : t \geq s\}$ é pullback-limitado dissipativo.

Observe que na definição apresentada acima, o tempo final é mantido fixo enquanto o tempo inicial retrocede para $-\infty$. Isto não é o mesmo que voltar no tempo. A evolução é sempre até um instante futuro t a partir de um instante inicial s que tende a $-\infty$.

A partir destas definições concluímos que, se um conjunto absorve-pullback conjuntos limitados no instante t, então ele atrai-pullback conjuntos limitados no instante t.

Definição 17. *Seja $\{B(t) : t \in \mathbb{R}\}$ uma família de subconjuntos de X. Diremos que esta família é invariante pelo processo de evolução $\{S(t,s) : t \geq s\}$ se $S(t,s)B(s) = B(t)$, para todo $t \geq s$.*

Definição 18. *Seja $\{S(t,s) : t \geq s\}$ um processo de evolução em um espaço métrico X. Diremos que uma família $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ de subconjuntos compactos de X é um atrator-pullback para $\{S(t,s) : t \geq s\}$ se é invariante, atrai-pullback subconjuntos limitados de X e é a família de conjuntos fechados que é minimal com a propriedade de atrair pullback subconjuntos limitados, isto é, se outra família $\{\mathcal{C}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ de conjuntos fechados atrai pullback subconjuntos limitados de X, então $\mathcal{A}(t) \subset \mathcal{C}(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.*

A exigência de minimalidade está relacionado ao enfraquecimento da propriedade de invariância imposta pela natureza não autônoma dos processos de evolução juntamente com a possibilidade dos atratores pullback serem ilimitados em $-\infty$, isto é, permitimos que para todo $t \in \mathbb{R}$, $\bigcup_{s \geq t} A(t)$ seja ilimitado. Podemos excluir esta exigência se considerarmos que $\bigcup_{s \leq t} \mathcal{A}(t)$ seja limitado para todo $t \in \mathbb{R}$.

Definição 19. *Uma solução global $\xi : \mathbb{R}^+ \to X$ de um processo de evolução $\{ S(t,s) \,:\, t \geq s\}$ é chamada de backwards-limitada se existe um $\tau \in \mathbb{R}^+$ tal que o conjunto $\{\xi(t) \,:\, t \leq \tau \}$ seja limitado.*

Se um processo de evolução $\{ S(t,s) \,:\, t \geq s\}$ tem um atrator pullback $\{\mathcal{A}(t) \,:\, t \in \mathbb{R} \}$ e $\xi : \mathbb{R}^+ \to X$ é uma solução backwards-limitada, então $\xi(t) \in \mathcal{A}(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}^+$.

Se $\{\mathcal{A}(t) \,:\, t \in \mathbb{R} \}$ é um atrator pullback para o processo de evolução $\{ S(t,s) \,:\, t \geq s\}$ e $\bigcup_{s \leq t} \mathcal{A}(t)$ é limitado para todo $t \in \mathbb{R}^+$, então $\mathcal{A}(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}^+$, é dado por

$$\mathcal{A}(t) = \{ \xi(t)\,;\, \xi : \mathbb{R} \to X \text{ é uma solução global backwards-limitada para } \{ S(t,s) \,:\, t \geq s\}\}\,.$$

O próximo resultado relaciona atratores pullback de processos de evolução autônomos e os atratores globais de semigrupos. Isto mostra que o conceito de atratores globais para semigrupos é estendido naturalmente para os atratores pullback dos processos.

Teorema 3.2.1. *Seja $\{ T(t) \,:\, t \geq 0\}$ um semigrupo e $S(t,s) = T(t-s)$, $t \geq s$ o processo autônomo associado. O semigrupo $\{ T(t) \,:\, t \geq 0\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}$ se, e somente se, $\{ S(t,s) \,:\, t \geq s\}$ tem um atrator pullback $\{\mathcal{A}(t) \,:\, t \in \mathbb{R} \}$. Em qualquer dos casos, $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}$, para todo $t \in \mathbb{R}^+$.*

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [7].

3.2.1 Existência do atrator-pullback

Nesta seção optamos por omitir a demonstração de alguns resultados, porém estas podem ser encontradas em [4], [7] e [8].

Definição 20. *Sejam $\{ S(t,s) \,:\, t \geq s\}$ um processo de evolução em um espaço métrico X e B um subconjunto de X. O conjunto ω-limite pullback de B é definido por*

$$\omega(B,t) := \bigcap_{\sigma \leq t} \overline{\bigcup_{s \leq \sigma} S(t,s)B}.$$

Para cada subconjunto B de X, temos

$$\omega(B,t) = \left\{ \begin{array}{l} y \in X\text{: existem sequências } \{s_k\}_{k\in\mathbb{N}} \text{ com } s_k \leq s, \forall\, k \in \mathbb{N}, \\ s_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} -\infty \text{ e } \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \text{ em } B, \text{ tal que } y = \lim\limits_{k\to\infty} S(t,s_k)x_k \end{array} \right\}. \tag{3.13}$$

Claramente, se $\{S(t) \,:\, t \geq 0 \}$ é um semigrupo e $S(t,s) = S(t-s)$, $t \geq s$ temos $\omega(B,t) := \bigcap_{s \leq 0} \overline{\bigcup_{r \leq s} S(r)B}$ é independente de t e coincide com a definição do conjunto ω-limite de B para semigrupos.

Lema 3.2.1. *Seja* $\{ S(t,s) \,:\, t \geq s\}$ *um processo de evolução em um espaço métrico* X. *Se* $B \subset X$, *então* $S(t,s)\omega(B,s) \subset \omega(B,t)$ *para* $t \geq s$. *Se* B *é tal que* $\omega(B,s)$ *é compacto e atrai-pullback* B *no instante* s, *com* $t \geq s$, *então* $S(t,s)\omega(B,s) = \omega(B,t)$. *Adicionalmente, se* $\omega(B,s)$ *atrai-pullback* B *no instante* s, *para cada* $s \leq t$, B *é um conjunto conexo e* $\bigcup_{s\leq t}\omega(B,s) \subset B$, *então* $\omega(B,t)$ *é conexo.*

Teorema 3.2.2. *Seja* $\{ S(t,s) \,:\, t \geq s\}$ *um processo de evolução em um espaço métrico* X. *Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $\{ S(t,s) \,:\, t \geq s\}$ *tem um atrator pullback* $\{\mathcal{A}(t) \,:\, t \in \mathbb{R}\}$*;*

(ii) Existe uma família de conjuntos compactos $\{K(t) \,:\, t \in \mathbb{R}\}$ *que atrai-pullback subconjuntos limitados de* X *sob a ação de* $\{ S(t,s) \,:\, t \geq s\}$.

Em qualquer dos casos,

$$\mathcal{A}(t) = \overline{\bigcup\{\omega(B,t) \,:\, B \subset X,\, B \textit{ limitado}\}} \tag{3.14}$$

Demonstração. Se $\{ S(t,s) \,:\, t \geq s\}$ tem um atrator pullback $\{\mathcal{A}(t) \,:\, t \in \mathbb{R}\}$, cada $\mathcal{A}(t)$ é compacto e atrai-pullback subconjuntos limitados de X.

Para provar a recíproca, primeiro observe que, como consequência imediata de (3.13), temos $\omega(B,t) \subset K(t)$, para todo $B \subset X$ limitado e para todo $t \geq 0$. Assim, também temos que $\omega(B,t)$ atrai B. De fato, suponha que este não é o caso, ou seja, que existem $\varepsilon > 0$, uma sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ com $s_n \to -\infty$ e a sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em B tal que

$$dist(S(t,s_n)x_n, \omega(B,t)) > \varepsilon,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $K(t)$ atrai pullback B no instante t, temos

$$dist(S(t,s_n)x_n, K(t)) \longrightarrow 0 \text{ se } n \to \infty.$$

Consequentemente, $\{S(t,s_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergente para algum $x_0 \in K(t)$. Segue que $x_0 \in \omega(B,t)$ e isto nos leva a uma contradição. Do Lema 3.2.1, segue a invariância de $\omega(B,t)$.

Definindo $\mathcal{A}(t)$ por (3.14), $\mathcal{A}(t)$ é claramente compacto e atrai pullback subconjuntos limitados de X. A invariância de $\mathcal{A}(t)$ segue da invariância de cada família $\{\omega(B,t) \,:\, t \in \mathbb{R}\}$. De fato, dado $x_0 \in \mathcal{A}(s)$, existem $x_n \in \omega(B_n,s)$ com $x_n \to x_0$ quando $n \to \infty$. Então, $S(t,s)x_n = y_n \in \omega(B_n,t)$ e da continuidade de $\{ S(t,s) \,:\, t \geq s\}$ temos $S(t,s)x_n = y_n \to S(t,s)x_0$, o que implica que $S(t,s)x_0 \in \mathcal{A}(t)$. Agora, se $y_0 \in \mathcal{A}(t)$, existe $y_n \in \omega(B_n,t)$ com $y_n \to y_0$ quando $n \to +\infty$. Da invariância da família $\omega(B_n,t)$, existe $x_n \in \omega(B_n,s)$ com $S(t,s)x_n = y_n$. Mas cada $S(t,s)x_n \in S(t,s)\omega(B_n,s) \subset S(t,s)\mathcal{A}(s)$. Como este último conjunto é compacto e não depende de n, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} S(t,s)x_n = y_0 \in S(t,s)\mathcal{A}(s).$$

Se $\widehat{A}(t)$ é fechado e atrai pullback subconjuntos limitados de X no instante t temos $\omega(B,t) \subset \widehat{A}(t)$, para todo subconjunto limitado B de X. Consequentemente, $\mathcal{A}(t) \subset \widehat{A}(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. $\square$

O conceito a seguir é útil nas aplicações para obter a existência de atratores pullback sem ter que exibir uma família de conjuntos compactos que atrai pullback subconjuntos limitados.

Definição 21. *Um processo de evolução* $\{\, S(t,s) \,:\, t \geq s\}$ *em um espaço métrico* X *é dito pullback assintoticamente compacto se, para cada* $t \in \mathbb{R}$, *a sequência* $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, *com* $s_k \leq s$, *para todo* $k \in \mathbb{N}$ *e a sequência limitada* $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *em* X *são tais que*

$$s_k \to -\infty \text{ quando } k \to \infty \text{ e } \{S(t,s_k)x_k \,:\, k \in \mathbb{N}\} \text{ é limitada,}$$

temos que a sequência $\{S(t,s_k)x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *possui uma subsequência convergente em* X.

Se $\{\, S(t) \,:\, t \geq 0\,\}$ é um semigrupo, o processo $\{\, S(t-s) \,:\, t \geq s\,\}$ é pullback assintoticamente compacto se, e somente se, para cada sequência limitada $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em X, sequência $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}^+$ tal que $t_k \to +\infty$ quando $k \to \infty$ e $\{S(t,s_k)x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada, a sequência $\{S(t,s_k)x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergente. Neste caso, o semigrupo $\{\, S(t) \,:\, t \geq 0\,\}$ é assintoticamente compacto.

Definição 22. *Diremos que um processo de evolução* $\{\, S(t,s) \,:\, t \geq s\}$ *em um espaço métrico* X *é pullback limitado se, para cada* $t \in \mathbb{R}$, $\gamma_p(B,t)$ *é limitada sempre que* $B \subset X$ *é limitado.*

Seja $\{S(t) \,:\, t \geq 0\}$ é um semigrupo $\{S(t-s) \,:\, t \geq s\}$ é pullback limitado se, e somente se, $\{S(t) \,:\, t \geq 0\}$ é limitado.

Definição 23. *Um processo de evolução* $\{\, S(t,s) \,:\, t \geq s\}$ *é dito pullback eventualmente compacto se ele é pullback limitado e existe* $\tau \geq 0$ *tal que , se* B *é um subconjunto limitado de* X *e* $t \in \mathbb{R}$, *então* $\overline{S(t,t-\tau)B}$ *é compacto.*

Um semigrupo $\{S(t) \,:\, t \geq 0\}$ é eventualmente compacto se é limitado e existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{S(t_0)B}$ é compacto, para cada $B \subset X$ limitado.

Teorema 3.2.3. *Se* $\{\, S(t,s) \,:\, t \geq s\}$ *é um processo de evolução pullback limitado dissipativo e pullback assintoticamente compacto, então* $\mathcal{A}(t)$ *dado por*

$$\mathcal{A}(t) = \bigcup \{\omega(B,t) \,:\, B \subset X,\, B \text{ limitado}\} \tag{3.15}$$

é limitado, atrai pullback subconjuntos limitados de X *no instante* t, *a família* $\{\mathcal{A}(t) \,:\, t \in \mathbb{R}\}$ *é invariante e, se* $\{C(t) \,:\, t \in \mathbb{R}\}$ *atrai pullback subconjuntos limitados de* X, *então* $\mathcal{A}(t) \subset \overline{C(t)}$, *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

Teorema 3.2.4. *Se* $\{\, S(t,s) \,:\, t \geq s\}$ *é um processo de evolução pullback limitado dissipativo e pullback eventualmente compacto, então a família* $\{\mathcal{A}(t) \,:\, t \in \mathbb{R}\}$ *definida por* (3.15) *atrai pullback subconjuntos limitados de* X, *é invariante,* $\mathcal{A}(t)$ *é relativamente compacto e se,* $\{B(t) \,:\, t \in \mathbb{R}\}$ *atrai pullback subconjuntos limitados de* X, *então* $\mathcal{A}(t) \subset \overline{B(t)}$, *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

Observe que os resultados anteriores não concluem a compacidade da seção $\mathcal{A}(t)$ (nem mesmo em dimensão finita). Isto mostra uma primeira diferença entre os processos de evolução não autônomos e autônomos. Para obter a compacidade de cada seção teremos que fazer hipóteses adicionais sobre o processo de evolução.

Definição 24. *Um processo de evolução* $\{S(t,s) : t \geq s\}$ *é pullback fortemente limitado dissipativo se, para cada* $t \in \mathbb{R}$, *existe um subconjunto limitado* $B(t)$ *de* X *que absorve pullback subconjuntos limitados de* X *no instante* τ *para cada* $\tau \leq t$, *isto é, dado qualquer subconjunto limitado* D *de* X *e* $\tau \leq t$, *existe* $s_0(\tau, D)$ *tal que*

$$S(\tau, s)D \subset B(t), \ \forall s \leq s_0(\tau, D).$$

Note que a família $\{B(t) : t \in \mathbb{R}\}$ da definição acima não precisa ter união limitada. Contudo, podemos escolher de modo que, para cada $t \in \mathbb{R}$, $\bigcup_{s \leq t} B(s)$ é limitado.

Teorema 3.2.5. *Se um processo de evolução* $\{S(t,s) : t \geq s\}$ *é pullback fortemente limitado dissipativo e pullback assintoticamente compacto, então* $\{S(t,s) : t \geq s\}$ *tem um atrator pullback* $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ *com a propriedade que* $\bigcup_{s \leq t} \mathcal{A}(s)$ *é limitado, para cada* $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Se $\mathcal{A}(t)$ é dado por (3.15), segue do Teorema 3.2.3 que, para cada $t \in \mathbb{R}$, $\mathcal{A}(t)$ atrai pullback subconjuntos limitados de X no instante t e se $\{B(t) : t \in \mathbb{R}\}$ atrai pullback subconjuntos limitados de X então $\mathcal{A}(t) \subset \overline{B(t)}$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Do fato que $\{S(t,s) : t \geq s\}$ é pullback fortemente limitado dissipativo, existe um subconjunto limitado $B(t)$ de X que absorve pullback subconjuntos limitados de X no instante τ, para cada $\tau \leq t$. Como $\omega(B(t), t)$ atrai pullback $B(t)$ no instante t (considerando como um subconjunto limitado fixo de X), ele atrai pullback todo subconjunto limitado X no instante t. De fato, é suficiente provar que, dado um subconjunto limitado D de X, $\omega(D,t) \subset \omega(B(t), t)$. Se $x_0 \in \omega(D,t)$, existem sequências $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, com $s_k \leq t$, para todo $k \in \mathbb{N}$, com $s_k \to -\infty$ quando2 $k \to \infty$ e $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset D$ tal que $S(t, s_k)x_k \to x_0$ quando $k \to \infty$.

Como $\{S(t,s) : t \geq s\}$ é pullback fortemente limitado dissipativo, dada uma sequência $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, com $\tau_n \leq t$, para todo $n \in \mathbb{N}$, sendo $\tau \to -\infty$ se $n \to \infty$, existe uma sequência $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, com $\sigma_n \leq \tau_n$ tal que $S(\tau_n, s)D \subset B(t)$, para todo $s \leq \sigma_n$. Dado que $s_K \to -\infty$ quando $K \to \infty$ para cada τ_n existe $K_n \geq n$ tal que $s_{K_n} \leq \tau_n$ e $S(\tau_n, s_{K_n})x_{K_n} \in B(t)$.

Portanto, $S(t, s_{k_n})x_{k_n} = S(t, \tau_n)S(\tau_n, s_{k_n})x_{k_n} \in S(t, \tau_n)B(t)$, o que implica $x_0 \in \omega(\overline{B(t)}, t)$. Isto prova que $\mathcal{A}(t) \subset \omega(\overline{B(t)}, t)$ e como $\omega(B(t), t) \subset \mathcal{A}(t)$ temos $\mathcal{A}(t) = \omega(\overline{B(t)}, t)$. Consequentemente, $\mathcal{A}(t)$ é compacto. □

Teorema 3.2.6. *Seja* $\{S(t,s) : t \geq s\}$ *um processo pullback fortemente limitado tal que*

$$S(t,s) = T(t,s) + U(t,s)$$

onde, $U(\cdot,\cdot)$ *é fortemente compacto e existe uma função* $k : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *com* $k(\cdot, r)$ *não-crescente para cada* $r > 0$ *e* $k(\sigma, r) \to 0$ *se* $\sigma \to \infty$, *tal que, para todo* $s \leq t$ *e* $x \in X$ *com* $\|x\| \leq r$,

$$\|T(t,s)x\| \leq k(t-s, r).$$

Então o processo $S(\cdot,\cdot)$ *é pullback fortemente assintoticamente compacto.*

A demonstração deste teorema pode ser vista em [8].

Capítulo 4

Equação de difusão não clássica não autônoma com retardo

Nosso objetivo é estudar o comportamento assintótico, do ponto de vista de atratores pullback da equação de difusão não clássica com retardo, dada pela seguinte formulação

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \gamma(t)\Delta\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = g(u) + f(t, u_t) & \text{em } (s, +\infty) \times \Omega \\ u = 0 & \text{em } (s, +\infty) \times \partial\Omega \\ u(t, x) = \phi(t - s, x) & t \in [s - h, s], \quad x \in \Omega \end{cases} \tag{4.1}$$

sendo $s \in \mathbb{R}$ o tempo inicial, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, um domínio suave e limitado, Δ representando o operador Laplaciano com respeito as variáveis espaciais, isto é,

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Mais ainda, seja $g \in C^1(\mathbb{R})$ satisfazendo a condição de dissipatividade

$$\limsup_{|a| \to +\infty} \frac{g(a)}{a} \leq 0\,, \ \forall a \in \mathbb{R} \tag{4.2}$$

e a condição de crescimento

$$|g(a) - g(b)| \leq c|a - b|(1 + |a|^{\rho-1} + |b|^{\rho-1}), \forall a, b \in \mathbb{R} \tag{4.3}$$

com $1 < \rho < \frac{n+2}{n-2}$.

Suponha que a função $\gamma : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ é uniformemente contínua satisfazendo

$$0 < \gamma_0 \leq \gamma(t) \leq \gamma_1 < \infty.$$

Denotaremos u_t como um segmento da solução (4.1), ou seja, dado $h > 0$ e a função $u : [s - h, +\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$, para cada $t \geq s$ definimos a aplicação $u_t : [-h, 0] \times \Omega \to \mathbb{R}$ por

$$u_t(\theta, x) = u(t + \theta, x), \ \text{ para } \theta \in [-h, 0],\, x \in \Omega.$$

4.1 Existência de solução local

Nesta seção queremos mostrar a existência e unicidade de solução local para nosso problema. Denotemos $C_L = C([-h,0], L^2(\Omega))$ com a norma

$$\|\psi\|_{C_L} = \sup_{s\in[-h,0]} \|\psi(s)\|_{L^2(\Omega)}$$

assim, dado $\psi \in C([-h,T], L^2(\Omega))$, para qualquer $t \in [0,T]$ podemos definir

$$\begin{array}{rccl} \psi_t := & [-h,0] & \longrightarrow & L^2(\Omega) \\ & \theta & \longmapsto & \psi_t(\theta) = \psi(t+\theta). \end{array}$$

Claramente, $\psi_t \in C_L$. Do mesmo modo, podemos definir $C_H = C([-h,0], H_0^1(\Omega))$ com a norma

$$\|\psi\|_{C_H} = \sup_{s\in[-h,0]} \|\psi(s)\|_{H_0^1}.$$

Escolhemos um valor inicial $\phi \in C_L$ tal que $\phi(0) \in H_0^1(\Omega)$.

Assuma que $f : (s,+\infty) \times C_H \to L^2(\Omega)$ é contínua em t e localmente Lipschitz em C_H, ou seja, para todo $R > 0$ existe uma constante $C(R) > 0$ tal que, para qualquer $t \in \mathbb{R}$,

$$\|f(t,\xi) - f(t,\eta)\|_{L^2(\Omega)} \leq C(R)\|\xi - \eta\|_{C_H} \tag{4.4}$$

para todo $\xi, \eta \in C_H$ com $\|\xi\|_{C_H}, \|\eta\|_{C_H} \leq R$.

Denotaremos o operador $A : D(A) \to L^2(\Omega)$ por $A = -\Delta$ com condição de fronteira de Dirichlet. Como o operador A é setorial, então o operador $(\lambda I - A)^{-1}$ está bem definido para todo $\lambda \in \sum_{-1,\varphi} = \{\, \lambda \in \mathbb{C} \,:\, |arg(\lambda+1)| < \varphi\}$, com $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$. Mais ainda, como $0 \in \rho(A)$ temos para $M > 0$

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda|+1},\ \forall\, \lambda \in \sum_{-1,\varphi}.$$

Assim, como $|\gamma(t)| > 0$ e $|\gamma(t)| \in \sum_{-1,\varphi}$ então $|\gamma(t)^{-1}| > 0$ e $|\gamma(t)^{-1}| \in \sum_{-1,\varphi}$. Logo,

$$\begin{aligned} \|(I+\gamma(t)A)^{-1}\| &= \|\gamma(t)\gamma(t)^{-1}(I+\gamma(t)A)^{-1}\| \\ &= \|\gamma(t)^{-1}(\gamma(t)^{-1})^{-1}(I+\gamma(t)A)^{-1}\| \\ &= \|\gamma(t)^{-1}[\gamma(t)^{-1}(I+\gamma(t)A)]^{-1}\| \\ &= \|\gamma(t)^{-1}(\gamma(t)^{-1}+A)^{-1}\| \\ &\leq \frac{1}{|\gamma(t)|}\left(\frac{M}{|\gamma(t)|^{-1}+1}\right) \leq \frac{1}{\gamma_0}\frac{M}{\frac{1}{\gamma_0}+1} = \frac{M}{\gamma_0+1}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Considere a equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \gamma(t)\Delta\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = g(u) + f(t,u_t)$$

a qual pode ser reescrita como

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (I+\gamma(t)A)^{-1}Au = (I+\gamma(t)A)^{-1}(g(u) + f(t,u_t)). \tag{4.6}$$

Deste modo podemos definir os seguintes operadores:

$$B(t) = (I + \gamma(t)A)^{-1} \quad \text{e} \quad \tilde{A}(t) = -AB(t)$$

e as funções

$$\tilde{g}(t,u) = B(t)g(u) \quad \text{e} \quad \tilde{f}(t,\phi) = B(t)f(t,\phi)$$

para todo $t \geq s$ e para todo $\phi \in C_H$. E ainda, reescrever

$$\phi(\theta) = u_t(\theta) = u(t+\theta), \text{ com } \theta \in [-h,0], \ \forall \phi \in C_H$$

sendo $\phi(0) = u(t)$.

Seja $h : (s,+\infty) \times C_H \to L^2(\Omega)$ definida por

$$h(t,\phi) = \tilde{A}(t)\phi(0) + \tilde{g}(t,\phi(0)) + \tilde{f}(t,\phi)$$

para todo $t \geq s$ e para todo $\phi \in C_H$. Com isto, podemos reescrever a equação (4.6) como

$$\frac{du}{dt} = h(t,u).$$

Observe que o domínio do operador $\tilde{A}(t)$ não depende do tempo. De fato, se definirmos nosso problema em $H_0^1(\Omega)$, então $D(\tilde{A}(t)) = H_0^1(\Omega)$. Este operador é uniformemente limitado no tempo, pois

$$\begin{aligned} \|\tilde{A}(t)\| &= \left\| \frac{1}{\gamma(t)}[I - (1+\gamma(t)A)^{-1}] \right\| \leq \frac{1}{|\gamma(t)|} \left\| I - (1+\gamma(t)A)^{-1} \right\| \\ &\leq \frac{1}{\gamma_0}\left(1 + \frac{M}{\gamma_0+1}\right) = \frac{M+\gamma_0+1}{\gamma_0(\gamma_0+1)}, \ \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Como o operador A é setorial podemos definir os espaços de potências fracionárias $X^\alpha = D(A^\alpha)$, para todo $\alpha \geq 0$, munido da norma do gráfico.

Novamente como A é um operador setorial e $I - (1+\gamma(t)A)^{-1} \in R(\lambda : A)$, podemos comutar o operador com seu resolvente, logo para $x \in D(A^\alpha)$,

$$A^\alpha \tilde{A}(t)x = \tilde{A}(t)A^\alpha x.$$

Note que a função $t \in \mathbb{R} \mapsto B(t) \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega))$ é contínua, pois dados quaisquer $t, s \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} &B(t) - B(s) = \\ &= (1+\gamma(t)A)^{-1} - (1+\gamma(s)A)^{-1} \\ &= \gamma(t)^{-1}(\gamma(t)^{-1}+A)^{-1} - \gamma(s)^{-1}(\gamma(s)^{-1}+A)^{-1} \\ &= [\gamma(t)^{-1} - \gamma(s)^{-1}](\gamma(t)^{-1}+A)^{-1} + \gamma(s)^{-1}[(\gamma(t)^{-1}+A)^{-1} - (\gamma(s)^{-1}+A)^{-1}] \\ &= \left[\gamma(t)^{-1} - \gamma(s)^{-1}\right]\left[(\gamma(t)^{-1}+A)^{-1}\left(I - \gamma(s)^{-1}(\gamma(s)^{-1}+A)^{-1}\right)\right] \\ &= \gamma(t)^{-1}(\gamma(t)^{-1}+A)^{-1}\left(I - (I+\gamma(s)A)^{-1}\right) - \gamma(s)^{-1}(\gamma(t)^{-1}+A)^{-1}\left(I - (I+\gamma(s)A)^{-1}\right) \\ &= (I+\gamma(t)A)^{-1}\left(I - (I+\gamma(s)A)^{-1}\right) - \\ &- \gamma(s)^{-1}\gamma(t)(I+\gamma(t)A)^{-1})\left(I - (I+\gamma(s)A)^{-1}\right) \\ &= \left[I - \gamma(s)^{-1}\gamma(t)\right]\left[(I+\gamma(t)A)^{-1})\left(I - (I+\gamma(s)A)^{-1}\right)\right] \\ &= \left[\gamma(s)\gamma(s)^{-1} - \gamma(s)^{-1}\gamma(t)\right]\left[(I+\gamma(t)A)^{-1})\left(I - (I+\gamma(s)A)^{-1}\right)\right] \\ &= [\gamma(s) - \gamma(t)]\gamma(s)^{-1}(I+\gamma(t)A)^{-1}\left[I - (I+\gamma(s)A)^{-1}\right]. \end{aligned}$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\|B(t)-B(s)\|_{\mathcal{L}(H_0^1,H_0^1)} &= \|[\gamma(s)-\gamma(t)]\gamma(s)^{-1}(I+\gamma(t)A)^{-1})\left[I-(I+\gamma(s)A)^{-1}\right]\| \\
&= |\gamma(s)-\gamma(t)||\gamma(s)^{-1}|\|I+\gamma(t)A)^{-1}\|\|I-(I+\gamma(s)A)^{-1}\| \\
&\leq |\gamma(s)-\gamma(t)|\frac{1}{\gamma_0}\frac{M}{\gamma_0+1}\left(1+\frac{M}{\gamma_0+1}\right) \\
&\leq D|\gamma(s)-\gamma(t)|
\end{aligned} \tag{4.8}
$$

sendo D uma constante positiva dada por $D=\dfrac{M[(\gamma_0+1)+M]}{\gamma_0(\gamma_0+1)^2}$. Pelo fato de γ ser uniformemente contínua e usando (4.8) temos que a aplicação $t\longmapsto B(t)$ é contínua.

Além disso,

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{A}(t)-\tilde{A}(s)\|_{\mathcal{L}(H_0^1(\Omega))} &= \|A[B(t)-B(s)]\|_{\mathcal{L}(H_0^1(\Omega))} \\
&= \left\|[\gamma(s)-\gamma(t)]\gamma(s)^{-1}A(I+\gamma(t)A)^{-1}\left(I-(I+\gamma(s)A)^{-1}\right)\right\| \\
&= |\gamma(s)-\gamma(t)||\gamma(s)^{-1}|\|A(I+\gamma(t)A)^{-1}\|\|I-(I+\gamma(s)A)^{-1}\| \\
&\leq |\gamma(s)-\gamma(t)|\frac{1}{\gamma_0}\frac{M+\gamma_0+1}{\gamma_0(\gamma_0+1)}\left(1+\frac{M}{\gamma_0+1}\right).
\end{aligned} \tag{4.9}
$$

Defina $C=\dfrac{1}{\gamma_0}\dfrac{M+\gamma_0+1}{\gamma_0(\gamma_0+1)}\left(1+\dfrac{M}{\gamma_0+1}\right)$, temos

$$
\|\tilde{A}(t)-\tilde{A}(s)\|_{\mathcal{L}(H_0^1(\Omega))}\leq C|\gamma(t)-\gamma(s)|. \tag{4.10}
$$

Com isso, estamos aptos a enunciar e provar o resultado de existência local de soluções para nosso problema.

Teorema 4.1.1. *Para cada $\phi\in C_H$ e sob as hipóteses (4.2), (4.3) e (4.4), existe $\delta>0$ tal que existe uma única solução para o problema (4.1) definida no intervalo $[s-h,s+\delta)$. Em outras palavras, existe um função $u\in C([s-h,s+\delta),H_0^1(\Omega))$ com $u(t,s;\phi)=\phi(t-s)$, para todo $t\in[s-h,s]$ que satisfaz*

$$
u(t,s;\phi)=\phi(0)+\int_s^t h(r,u_r)dr
$$

para todo $t\in[s,s+\delta)$. Mais ainda, se f é contínua em relação ao tempo, então $u\in C([s-h,s+\delta),H_0^1(\Omega))\cap C^1((s,s+\delta),H_0^1(\Omega))$, isto é, u é uma solução forte.

Demonstração. A prova é baseada no Princípio da Contração de Banach. Seja $\phi\in C_H$ e $T>0$, o qual será determinado mais adiante, definimos o seguinte espaço

$$
X_\phi^T=\left\{u\in C([s-h,T),H_0^1(\Omega)) : u(t)=\phi(t-s),\ \forall t\in[s-h,s]\ \text{ e }\ \|u\|_{X_\phi^T}\leq 2\|\phi\|_{C_H}\right\}
$$

com $\|u\|_{X_\phi^T}=\sup\limits_{\sigma\in[s-h,T)}\|u(\sigma)\|_{H_0^1}$.

Observe que X_ϕ^T é um subespaço fechado de $C([s-h,T),H_0^1(\Omega))$. De fato, considere $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sequência em X_ϕ^T tal que $u_n\to v$ quando $n\to+\infty$. Em particular, para cada n, $u_n\in C([s-h,T),H_0^1(\Omega))$, logo $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $C([s-h,T),H_0^1(\Omega))$.

Mais ainda,

$$\begin{aligned}\|u_n - u_m\|_{X_T^\phi} &= \sup_{t\in[s-h,T)} \|u_n(t) - u_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)}\\ &= \sup_{t\in[s-h,T)} \|u_n(t) - v + v - u_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)}\\ &\leq \sup_{t\in[s-h,T)} \|u_n(t) - v\|_{H_0^1(\Omega)} + \sup_{t\in[s-h,T)} \|v - u_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u_n - v\| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \ \forall\, n \geq N \ \text{ com } \ \varepsilon > 0.$$

Logo, $\{u_n\}$ é uma sequência de Cauchy em $C([s-h,T), H_0^1(\Omega))$, o qual é um espaço de Banach, então $u_n \to z$ quando $n \to +\infty$, sendo $z \in C([s-h,T), H_0^1(\Omega))$, mas pela unicidade do limite $z = v$.

Note que, para $t \in [s-h, s]$ e para todo $n \in \mathbb{N}$

$$u_n(t) = \phi(t-s) \to v(t)$$

logo,

$$v(t) = \phi(t-s), \quad \forall t \in [s-h, s].$$

E,

$$\|v\|_{X_\phi^T} = \|v + u_n - u_n\|_{X_\phi^T} \leq \|v - u_n\|_{X_\phi^T} + \|u_n\|_{X_\phi^T} \leq \|v - u_n\|_{X_\phi^T} + 2\|\phi\|_{C_H} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\|\phi\|_{C_H}.$$

Assim, $\|v\|_{X_\phi^T} \leq 2\|\phi\|_{C_H}$. Portanto, $u_n \to v$ quando $n \to +\infty$ e $v \in X_\phi^T$, isto é, X_ϕ^T é fechado. Assim, X_ϕ^T é um subconjunto fechado em um espaço de Banach, logo, X_ϕ^T é um espaço de Banach.

Defina o operador $\Phi : X_\phi^T \to X_\phi^T$

$$\Phi(u)(t) = \begin{cases} \phi(t-s) & , \text{se } t \in [s-h, s]\\ \phi(0) + \int_s^t h(r, u_r)dr & , \text{se } t \in (s, T).\end{cases}$$

Primeiro devemos verificar que para todo $u \in X_\phi^T$ Φ, $\Phi(u) \in X_\phi^T$, isto é, que o operador Φ está bem definido. Com efeito, pela continuidade de ϕ e da aplicação $t \in (s,T) \longmapsto h(t, u_t)$, obtemos que a aplicação $\Phi(u)(\cdot) : [s-h, T) \to L^2(\Omega)$ é contínua.

Para todo $t \geq s$

$$\begin{aligned}\|\Phi(u)(t)\|_{H_0^1(\Omega)} &= \left\|\phi(0) + \int_s^t h(r, u_r)dr\right\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|\phi(0)\|_{H_0^1(\Omega)} + \int_s^t \|h(r, u_r)\|_{H_0^1(\Omega)}dr\\ &= \|\phi(0)\|_{H_0^1(\Omega)} + \int_s^t \left(\|\tilde{A}(r)\|\,\|u_r(0)\| + \|\tilde{g}(r, u_r(0))\| + \|\tilde{f}(r, u_r)\|\right) dr\\ &= \|\phi(0)\|_{H_0^1(\Omega)} + \int_s^t \left(\|\tilde{A}(r)\|\,\|u_r(0)\| + \|B(r)g(u_r(0))\| + \|B(r)f(r, u_r)\|\right) dr\\ &\leq \|\phi(0)\|_{H_0^1} + \int_s^t \left(\|\tilde{A}(r)\|\,\|u_r\|_{H_0^1} + \|B(r)g(u_r(0))\| + \|B(r)f(r, u_r)\|\right) dr.\end{aligned}$$

Mas o operador $\tilde{A}$ é limitado uniformemente, ou seja, $\|\tilde{A}(r)\| \leq a$, para todo $r \geq s$. Sendo a a constante definida em (4.7). Queremos garantir que $\tilde{g} = B \circ g$ é localmente Lipschitz uniformemente em t em $H_0^1(\Omega)$. De fato, por (4.3)

$$\begin{aligned} \|g(u) - g(v)\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}} &= \left[\int_\Omega |g(u) - g(v)|^{\frac{2n}{n+2}} d\mu\right]^{\frac{n+2}{2n}} \\ &\leq c\left[\int_\Omega \left(|u - v|\,(1 + |u|^{\rho-1} + |v|^{\rho-1})\right)^{\frac{2n}{n+2}} d\mu\right]^{\frac{n+2}{2n}}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Observe que

$$\left[\int_\Omega \left(|u - v|\,(1 + |u|^{\rho-1} + |v|^{\rho-1})\right)^{\frac{2n}{n+2}} d\mu\right]^{\frac{n+2}{2n}} = \left\||u - v|\,(1 + |u|^{\rho-1} + |v|^{\rho-1})\right\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}}. \tag{4.12}$$

Considere $\dfrac{1}{r} = \dfrac{n+2}{2n}$, $\dfrac{1}{p} = \dfrac{n-2}{2n}$ e $\dfrac{1}{q} = \dfrac{n}{2}$ para que seja satisfeito $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$. Aplicando a desigualdade de Hölder generalizada, em (4.12) temos

$$\left\||u - v|\,(1 + |u|^{\rho-1} + |v|^{\rho-1})\right\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}} \leq \|u - v\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} \left\|1 + |u|^{\rho-1} + |v|^{\rho-1}\right\|_{L^{\frac{n}{2}}}. \tag{4.13}$$

Note que

$$\||u|^{\rho-1}\|_{L^{\frac{n}{2}}} = \left(\int_\Omega |u|^{(\rho-1)\frac{n}{2}}\right)^{\frac{2}{n}} = \left[\left(\int_\Omega |u|^{(\rho-1)\frac{n}{2}}\right)^{\frac{2}{n(\rho-1)}}\right]^{\rho-1} = \|u\|^{\rho-1}_{L^{\frac{n(\rho-1)}{2}}} \tag{4.14}$$

podemos fazer o mesmo para v, ou seja,

$$\||v|^{\rho-1}\|_{L^{\frac{n}{2}}} = \|v\|^{\rho-1}_{L^{\frac{n(\rho-1)}{2}}} \tag{4.15}$$

assim, em (4.13), utilizando (4.14) e (4.15) temos a seguinte desigualdade

$$\|u - v\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} \left\|1 + |u|^{\rho-1} + |v|^{\rho-1}\right\|_{L^{\frac{n}{2}}} \leq \|u - v\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} \left(|\Omega| + \|u\|^{\rho-1}_{L^{\frac{n(\rho-1)}{2}}} + \|v\|^{\rho-1}_{L^{\frac{n(\rho-1)}{2}}}\right). \tag{4.16}$$

Considere $\tilde{c} > 0$ dada por $\tilde{c} = \dfrac{c}{|\Omega|}$ (lembrando que $|\Omega| < +\infty$) e utilizando as desigualdades (4.11), (4.12) e (4.16) temos

$$\|g(u) - g(v)\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}} \leq \tilde{c}\,\|u - v\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} \left(1 + \|u\|^{\rho-1}_{L^{\frac{n(\rho-1)}{2}}} + \|v\|^{\rho-1}_{L^{\frac{n(\rho-1)}{2}}}\right). \tag{4.17}$$

Como, por hipótese $\rho < \dfrac{n+2}{n-2}$ então, $1 - \dfrac{n}{2} \geq \dfrac{-2n}{n(\rho-1)}$. Deste modo, utilizando as imersões dos espaços de Sobolev, temos

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{n(\rho-1)}{2}}. \tag{4.18}$$

Mais ainda, considere $q = \dfrac{2n}{n-2}$, assim $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q$, pois $1 - \dfrac{n}{2} \geq -\dfrac{n}{q} \Leftrightarrow q \leq \dfrac{2n}{n-2}$. Consequentemente $L^{q^*} \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ sendo $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q^*} = 1$, onde $q^* = \dfrac{2n}{n+2}$.

Pelo fato de $H^{-1} \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n+2}}$, existe $d > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\|g(u) - g(v)\|_{H^{-1}(\Omega)} &\leq d\,\|g(u) - g(v)\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}} \\ &\leq d\tilde{c}\|u - v\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}}\left(1 + \|u\|^{\rho-1}_{L^{\frac{n(\rho-1)}{2}}} + \|v\|^{\rho-1}_{L^{\frac{n(\rho-1)}{2}}}\right).\end{aligned} \tag{4.19}$$

Observe que

$$1 - \frac{n}{2} \geq \frac{-n(n-2)}{2n} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2n}{2} \geq \frac{2-n}{2}$$

o que implica

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2}}. \tag{4.20}$$

Agora, usando as imersões (4.18) e (4.20) na desigualdade (4.19) obtemos

$$\|g(u) - g(v)\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq d\tilde{c}\|u - v\|_{H_0^1(\Omega)}\left(1 + \|u\|^{\rho-1}_{H_0^1(\Omega)} + \|v\|^{\rho-1}_{H_0^1(\Omega)}\right).$$

Considerando $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}, \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq r$, temos

$$\|g(u) - g(v)\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq e\|u - v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

sendo e uma constante positiva dada por $e = d\tilde{c}(1 + r + r)$. Isto mostra que $g : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}$ é localmente Lipschitz. Como

$$H_0^1(\Omega) \xrightarrow{g} H^{-1}(\Omega) \xrightarrow{B(t)} H_0^1(\Omega)$$

então a função $B(t) \circ g$ é localmente Lipschitz em $H_0^1(\Omega)$.

Mais ainda, denote $X^{\frac{1}{2}} = H_0^1(\Omega)$ e $X^{-\frac{1}{2}} = H^{-1}$, queremos provar que

$$\|B(t)\|_{\mathcal{L}(H^{-1}, H_0^1(\Omega))} \leq a. \tag{4.21}$$

De fato, seja $u \in X^{-\frac{1}{2}}$,

$$\begin{aligned}\|B(t)u\|_{X^{\frac{1}{2}}} &= \left\|A^{\frac{1}{2}}B(t)u\right\|_X = \left\|A^{\frac{1}{2}}B(t)A^{\frac{1}{2}}A^{-\frac{1}{2}}u\right\|_X \\ &= \|AB(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\left\|A^{-\frac{1}{2}}u\right\|_X \leq \frac{M + \gamma_0 + 1}{\gamma_0(\gamma_0 + 1)}\|u\|_{X^{-\frac{1}{2}}}\end{aligned}$$

então

$$\sup_{\substack{u \in X^{-\frac{1}{2}} \\ \|u\|_{X^{-\frac{1}{2}}} \leq 1}} \|B(t)u\|_{X^{\frac{1}{2}}} \leq a$$

provando (4.21).

Deste modo, para $R = 2\|\phi\|_{C_H}$, existe $L_g(R) > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\|B(r)g(u(r))\|_{H_0^1(\Omega)} &\leq \|B(r)g(u(r)) - B(r)g(0) + B(r)g(0)\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq \|B(r)(g(u(r)) - g(0))\|_{H_0^1(\Omega)} + \|B(r)g(0)\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq L_g(R)\|u\|_{H_0^1(\Omega)} + \|B(t)\|_{\mathcal{L}(H^{-1}, H_0^1(\Omega))}|g(0)| \\ &\leq L_g(R)\|u\|_{H_0^1(\Omega)} + a|g(0)|.\end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\|B(t)\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega),H_0^1(\Omega))} \leq b_0, \tag{4.22}$$

com $b_0 > 0$. Com efeito, seja $X = L^2(\Omega)$, $H_0^1(\Omega) = X^{\frac{1}{2}}$ e $u \in X$, temos

$$\|B(t)u\|_{X^{\frac{1}{2}}} = \|A^{\frac{1}{2}} B(t)u\|_X.$$

Utilizando a Desigualdade do Momento com $\alpha > 0$, $\beta = \dfrac{1}{2}$ e $\gamma = 1$, temos

$$\begin{aligned}
\|A^{\frac{1}{2}} B(t)u\|_X &\leq c\|A^0 B(t)u\|_X^{\frac{1}{2}} \|AB(t)u\|_X^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c\|B(t)\|_X^{\frac{1}{2}} \|u\|_X^{\frac{1}{2}} \|AB(t)\|_X^{\frac{1}{2}} \|u\|_X^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

pelas estimativas (4.5) e (4.7)

$$\|B(t)u\|_{X^{\frac{1}{2}}} \leq c\left(\frac{M}{\gamma_0 + 1}\right)^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} \|u\|_X$$

logo,

$$\sup_{\substack{u \in X \\ \|u\|_X \leq 1}} \|B(t)u\|_{X^{\frac{1}{2}}} \leq b_0$$

onde $b_0 = c\left(\dfrac{M}{\gamma_0 + 1}\right)^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}}$. Portanto, (4.22) é válida.

Por hipótese, f é localmente Lipschitz e devido a (4.22), obtemos

$$\begin{aligned}
\|B(r)f(r,u_r)\|_{H_0^1(\Omega)} &\leq \|B(r)(f(r,u_r) - f(r,0)) + B(r)f(r,0)\|_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq \|B(t)\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega),H_0^1(\Omega))} \|f(r,u_r) - f(r,0)\|_{H_0^1(\Omega)} \\
&+ \|B(t)\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega),H_0^1(\Omega))} \|f(r,0)\|_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq b_0 C(R)\|u_r\|_{C_H} + b_0\|f(r,0)\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Então, para todo $t \geq s$,

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u)(t)\|_{H_0^1(\Omega)} &\leq \|\phi(0)\|_{H_0^1(\Omega)} + a\int_s^t \|u(r)\|_{H_0^1(\Omega)} dr + L_g(R)\int_s^t \|u(r)\|_{H_0^1(\Omega)} dr + a|g(0)|(t-s) \\
&+ b_0 C(R)\int_s^t \|u_r\|_{C_H} dr + b_0\int_s^t \|f(r,0)\|_{L^2(\Omega)} dr \\
&\leq \|\phi(0)\|_{H_0^1(\Omega)} + (a + L_g(R))\int_s^t \|u(r)\|_{H_0^1(\Omega)} dr \\
&+ a|g(0)|(t-s) + b_0 C(R)\int_s^t \|u_r\|_{C_H} dr + b_0\int_s^t \|f(r,0)\|_{L^2(\Omega)} dr.
\end{aligned}$$

Agora, levando em consideração que

$$\|u_r\|_{C_H} = \sup_{\theta \in [-h,0]} \|u(r+\theta)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \sup_{\sigma \in [s-h,T)} \|u(\sigma)\|_{H_0^1(\Omega)} = \|u\|_{X_\phi^T} \leq R$$

para todo $s \leq r \leq t \leq T$, segue que

$$\|\Phi(u)(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|\phi(0)\|_{H_0^1(\Omega)} + R(t-s)(a + L_g(R) + b_0 C(R)) + a|g(0)|(t-s) + b_0\int_s^t \|f(r,0)\|_{L^2(\Omega)} dr,$$

para todo $t \in (s,T)$.

Se escrevermos $T = s+\delta$, então

$$\|\Phi(u)(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \le \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)} + R\delta(a + L_g(R) + b_0 C(R)) + a|g(0)|\delta + b_0 \int_s^{s+\delta} \|f(r,0)\|_{L^2(\Omega)} dr,$$

para todo $t \in (s,T)$, e tomando $\delta > 0$ pequeno o suficiente, obtemos que

$$\|\Phi(u)(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \le 2\|\phi\|_{C_H}, \quad \forall t \in (s,T).$$

Temos a mesma conclusão para $t \in [s-h,s]$ e portanto, concluímos que o operador Φ está bem definido.

Agora, usando o Príncipio da Contração de Banach, provamos a existência de um ponto fixo para $\Phi(\cdot)$, o qual será a solução para o problema. Para isto, precisamos garantir que Φ é uma contração. Dados $u, v \in X_\phi^T$, com $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}, \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \le R$ e para todo $t \in [s,T)$, temos

$$\begin{aligned}\|\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)\|_{H_0^1(\Omega)} &\le \int_s^t \|h(r,u_r) - h(r,v_r)\|_{H_0^1(\Omega)} dr \\ &\le \int_s^t \|\tilde{A}(t)\|_{\mathcal{L}(H_0^1(\Omega))} \|u(r) - v(r)\|_{H_0^1(\Omega)} dr \\ &+ \int_s^t \|B(r)(g(u(r)) - g(v(r)) + f(r,u_r) - f(r,v_r))\|_{H_0^1(\Omega)} dr.\end{aligned}$$

Usando a limitação uniforme em relação ao tempo para os operadores $\tilde{A}(t)$ e $B(t)$ e o fato de f ser localmente Lipschitz em relação a segunda variável, defina as constantes $K_1 = a + L_g(R)$ e $K_2 = a$. Logo

$$\begin{aligned}\|\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)\|_{H_0^1(\Omega)} &\le K_1 \int_s^t \|u(r) - v(r)\|_{H_0^1(\Omega)} dr + K_2 \int_s^t \|f(r,u_r) - f(r,v_r)\|_{L^2(\Omega)} dr \\ &\le K_1 \int_s^t \|u(r) - v(r)\|_{H_0^1(\Omega)} dr + \\ &+ K(R) \int_s^t \sup_{\theta \in [-h,0]} \|u(r+\theta) - v(r+\theta)\|_{H_0^1(\Omega)} dr.\end{aligned}$$

Tomando o supremo em $[s,T)$ com $T = s+\delta$, obtemos

$$\begin{aligned}\|\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)\|_{H_0^1(\Omega)} &\le K_1 \delta \|u - v\|_{X_\phi^T} \\ &+ K(R)\delta \left(\sup_{r \in [s,T)} \left(\sup_{\theta \in [-h,0]} \|u(r+\theta) - v(r+\theta)\|_{H_0^1(\Omega)} \right) \right)\end{aligned}$$

mas, se $u, v \in X_\phi^T$, temos

$$\sup_{r \in [s,T)} \left(\sup_{\theta \in [-h,0]} \|u(r+\theta) - v(r+\theta)\|_{H_0^1(\Omega)} \right) \le \sup_{r \in [s-h,T)} \|u(r) - v(r)\|_{H_0^1(\Omega)} \le \|u - v\|_{X_\phi^T}$$

Desta forma,

$$\|\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \le K_1 \delta \|u - v\|_{X_\phi^T} + K(R)\delta \|u - v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Considerando $\delta = \text{máx}\left\{\dfrac{1}{4K_1}, \dfrac{1}{4K(R)}\right\}$, temos

$$\|\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \left(K_1\frac{1}{4K_1} + K(R)\frac{1}{4K(R)}\right)\|u-v\|_{X_\phi^T} = \frac{1}{2}\|u-v\|_{X_\phi^T},$$

ou seja, Φ está bem definida e é uma contração em X_ϕ^T, o qual é um espaço completo. Logo, garantimos a existência local para o problema (4.1).

Ademais, pelo fato de f ser contínua em relação ao tempo, aplicando o Teorema 2.9 de [14] temos que se $u \in C([s-h, s+\delta], H_0^1(\Omega)) \cap C^1((s, s+\delta), H_0^1(\Omega))$ então, u é uma solução forte. □

4.2 Solução global e família pullback absorvente

Nesta seção, estamos interessados em garantir a existência de uma solução global, já que no Teorema 4.1.1 foi provada a existência e unicidade local. Ou seja, queremos que a solução para o problema (4.1) seja definida em todo tempo futuro e não somente em um pequeno intervalo de tempo. Entretanto, vamos deduzir este resultado depois de obtermos alguma estimativa a priori desta solução. Mais ainda, esta estimativa será útil para provar a existência de conjuntos absorventes para o processo de evolução gerado pelo modelo.

Como $g \in C^1(\mathbb{R})$ e $\limsup\limits_{|a|\to+\infty} \dfrac{g(a)}{a} \leq 0$, temos que para cada $\varepsilon > 0$, existe uma constante $K_\varepsilon > 0$ tal que

$$\int_\Omega g(u)udx \leq \varepsilon\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + K_\varepsilon \tag{4.23}$$

e

$$\int_\Omega G(u)dx \leq \varepsilon\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + K_\varepsilon \tag{4.24}$$

para todo $u \in L^2(\Omega)$, com $G(r) = \displaystyle\int_0^r g(\theta)d\theta$. De fato, aplicando a definição do $\limsup$, temos

$$\forall\ \delta > 0,\ \exists\ M_\delta > 0,: \ \forall\, |u| \geq \delta\ \Rightarrow\ \frac{g(u)}{u} \leq \delta. \tag{4.25}$$

Como $|u| \geq \delta$, então $ug(u) \leq \delta u^2$.

Note que, se considerarmos conjuntos limitados, como $\{\, u \in \mathbb{R} : |u| \leq M_\delta\} \subset \mathbb{R}$ então, como g é contínua, obtemos $|ug(u)| \leq m_\delta$.

Deste modo, para todo $\delta > 0$, existe $m_\delta > 0$, tal que para todo $u \in \mathbb{R}$

$$ug(u) \leq m_\delta + \delta\, u^2,$$

integrando em Ω, teremos

$$\int_\Omega g(u)u\,dx \leq \int_\Omega m_\delta + \int_\Omega \delta\, u^2 = \int_\Omega m_\delta + \delta\int_\Omega u^2 \leq \delta\int_\Omega |u|^2 + \int_\Omega m_\delta = \delta\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega m_\delta.$$

Considere $\displaystyle\int_\Omega m_\delta\, dx = K_\delta$, logo

$$\int_\Omega g(u)u\,dx \leq \delta\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + K_\delta,$$

provando (4.23).

Agora, para provar (4.24), queremos mostrar primeiramente que

$$G(s) \leq \delta s^2 + K_\delta$$

para todo $s \in \mathbb{R}$. Considere os seguintes casos:

(i) $s > 0$

Se $s \in [0, M_\delta]$, com $M_\delta > 0$, então

$$|g(s)| \leq m_\delta, \quad \forall s \in [0, M_\delta]$$

assim

$$\int_0^s g(u)du \leq \int_0^s m_\delta dx = m_\delta(s-0) \leq m_\delta M_\delta \leq m_\delta M_\delta + \delta s^2,$$

chamando $m_\delta M_\delta = C_\delta$, temos $\displaystyle\int_0^s g(u)dx \leq C_\delta + \delta s^2$.

Agora, se $s > M_\delta > 0$, então

$$\int_0^s g(u)du = \int_0^{M_\delta} g(u)du + \int_{M_\delta}^s g(u)du$$

usando o fato do intervalo $[0, M_\delta]$ ser limitado e a função g contínua, temos $|g(\theta)| \leq m_\delta$, $\forall\, \theta \in [0, M_\delta]$. Utilizando a definição de lim sup dada em (4.25) e pelo fato de $|u| \geq \delta$, temos $g(u) \leq \delta u$, então

$$\int_0^{M_\delta} g(u)\, du \leq m_\delta$$

e

$$\int_{M_\delta}^s \delta\, u\, du = \delta\, \frac{u^2}{2}\bigg|_{M_\delta}^s = \frac{\delta s^2}{2} - \frac{\delta M_\delta^2}{2}$$

logo

$$\int_0^s g(u)\, du \leq m_\delta + \frac{\delta s^2}{2} - \frac{\delta M_\delta^2}{2} \leq m_\delta + \frac{\delta s^2}{2}.$$

Fazendo $m_\delta = C_\delta$ e $\tilde{\delta} = \dfrac{\delta}{2}$, segue que

$$\int_0^s g(u)du \leq C_{\tilde{\delta}} + \tilde{\delta} s^2.$$

Englobando todos os casos temos

$$g(u) := \begin{cases} \leq m_\delta, & \text{se } u \in [0, M_\delta] \\ \leq \delta u, & \text{se } u > M_\delta \\ \geq \delta u, & \text{se } u < -M_\delta \end{cases} \tag{4.26}$$

(ii) $s < 0$

Se $s \in [-M_\delta, 0]$, com $M_\delta > 0$ então pela continuidade de g, ela será limitada, isto é, existe $m_\delta > 0$ tal que

$$|g(s)| \leq m_\delta, \quad \forall s \in [-M_\delta, 0],$$

assim,

$$\int_0^s g(u)du = \int_s^0 -g(u)du \leq \int_s^0 m_\delta du = m_\delta(-s) \leq m_\delta M_\delta \leq m_\delta M_\delta + \delta s^2,$$

tomando $C_\delta = m_\delta M_\delta$, com $M_\delta > 0$, temos

$$\int_0^s g(u)du = \int_s^0 -g(u)du = -\int_s^{-M_\delta} g(u)du + \int_{-M_\delta}^0 -g(u)du$$

mas se $u \in [-M_\delta, 0]$, como g é contínua, então g é limitada em $[-M_\delta, 0]$, isto é, existe $m_\delta > 0$

$$|g(u)| \leq m_\delta, \quad \forall u \in [-M_\delta, 0],$$

então

$$-\int_{-M_\delta}^0 g(u)du \leq m_\delta M_\delta$$

e ainda, de (4.26)

$$-g(u) \leq -\delta u, \quad \text{já que} \quad u < -M_\delta.$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
\int_0^s g(u)du &\leq m_\delta M_\delta + \int_s^{-M_\delta} (-\delta u)du = m_\delta M_\delta + \left(-\delta \frac{u^2}{2}\right)\Bigg|_s^{-M_\delta} \\
&= m_\delta M_\delta + \left(\frac{-\delta M_\delta^2}{2} + \frac{\delta s^2}{2}\right) \leq m_\delta M_\delta + \frac{\delta s^2}{2}.
\end{aligned}$$

Se $C_\delta = m_\delta M_\delta$ e $\delta = \dfrac{\delta}{2}$, temos

$$\int_0^s g(u)du \leq C_\delta + \delta s^2, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Deste modo, integrando em relação a Ω

$$\int_\Omega \left(\int_0^s g(u)du\right) dx \leq \int_\Omega C_\delta dx + \int_\Omega \delta s^2 dx,$$

logo,

$$\int_\Omega G(s) \leq K_\delta + \delta \int_\Omega |s|^2 = K_\delta + \delta \|s\|^2_{L^2(\Omega)},$$

onde $G(s) = \int_0^s g(u)du$. Concluindo a prova de (4.24).

Definimos o funcional de energia $L_b(\varphi)$ dado por

$$L_b(\varphi) = \frac{1}{2}\left(\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} + b\|\varphi\|^2_{H^1_0}\right) - b\int_\Omega G(\varphi)\,dx$$

com $b > 0$ e $\varphi \in H^1_0(\Omega)$. Considere a desigualdade de Poincaré dada por

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \lambda_1^{-1}\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)}, \quad u \in H^1_0(\Omega)$$

sendo $\lambda_1 > 0$ o primeiro autovalor de $-\Delta$. Usando a desigualdade para $\delta > 0$

$$-b\delta\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq -b\delta\lambda_1^{-1}\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)}.$$

Com isto,

$$\begin{aligned}
L_b(\varphi) &= \frac{1}{2}\left(\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} + b\|\varphi\|^2_{H^1_0(\Omega)}\right) - b\int_\Omega G(\varphi)\,dx \\
&\geq \frac{1}{2}\left(\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} + b\|\varphi\|^2_{H^1_0(\Omega)}\right) - b\delta\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} - bK_\delta \\
&\geq \frac{1}{2}\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{b}{2}\|\varphi\|^2_{H^1_0(\Omega)} - b\delta\lambda_1^{-1}\|\varphi\|^2_{H^1_0(\Omega)} - bK_\delta \\
&\geq \frac{b}{2}\|\varphi\|^2_{H^1_0(\Omega)} - b\delta\lambda_1^{-1}\|\varphi\|^2_{H^1_0(\Omega)} - bK_\delta.
\end{aligned}$$

Tome, $\delta = \frac{\lambda_1}{6}$, logo

$$L_b(\varphi) \geq \left(\frac{b}{2} - b\frac{\lambda_1}{6}\frac{1}{\lambda_1}\right)\|\varphi\|^2_{H^1_0(\Omega)} - bK_{\frac{\lambda_1}{6}}$$

ou seja,

$$L_b(\varphi) \geq \frac{b}{3}\|\varphi\|^2_{H^1_0(\Omega)} - bK_{\frac{\lambda_1}{6}}. \tag{4.27}$$

E ainda, para qualquer $\delta > 0$

$$\begin{aligned}
L_b(\varphi) &= \frac{1}{2}\left(\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} + b\|\varphi\|^2_{H^1_0(\Omega)}\right) - b\int_\Omega G(\varphi)\,dx \\
&\leq \frac{1}{2\lambda_1}\|\varphi\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \frac{b}{2}\|\varphi\|^2_{H^1_0(\Omega)} + b\int_\Omega G(\varphi)\,dx \\
&\leq \frac{1}{2\lambda_1}\|\varphi\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \frac{b}{2}\|\varphi\|^2_{H^1_0(\Omega)} + b\delta\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} + bK_\delta \\
&\leq \left(\frac{1}{2\lambda_1} + \frac{b}{2}\right)\|\varphi\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \frac{b\delta}{\lambda_1}\|\varphi\|^2_{H^1_0(\Omega)} + bK_\delta
\end{aligned}$$

então

$$L_b(\varphi) \leq \frac{1 + b(\lambda_1 + 2\delta)}{2\lambda_1}\|\varphi\|^2_{H^1_0(\Omega)} + bK_\delta. \tag{4.28}$$

Considere $b > 0$ e o funcional de energia $L_b(\cdot)$ aplicado em $u(t,s;\phi)$, sendo esta a solução de (4.1) temos

$$L_b(u) = \frac{1}{2}\left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + b\|u\|^2_{H^1_0}\right) - b\int_\Omega G(u)\,dx$$

assim, derivando o funcional em relação ao tempo, obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(L_b(u)\right) &= \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}\left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\right) + b\left(\frac{d}{dt}\left(\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)}\right)\right)\right] - b\left(\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega G(u)\,dx\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}(\langle u,u\rangle_{L^2(\Omega)}) + b\frac{d}{dt}\left(\langle \nabla u,\nabla u\rangle_{L^2(\Omega)}\right)\right] - b\left(\int_\Omega\left(g(u)\frac{\partial u}{\partial t}\right)dx\right)\\
&= \frac{1}{2}\left[2\left\langle u,\frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)} + 2b\left\langle \nabla u,\frac{\nabla\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)}\right] - b\int_\Omega\left(g(u)\frac{\partial u}{\partial t}\right)dx \qquad (4.29)\\
&= \underbrace{\left\langle u,\frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)}}_{\textbf{(I)}} + \underbrace{b\left\langle -\Delta u,\frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)}}_{\textbf{(II)}} - b\int_\Omega\left(g(u)\frac{\partial u}{\partial t}\right)dx.
\end{aligned}
$$

Analisaremos cada elemento de (4.29) separadamente. Em **(I)**, substituindo a equação em $\frac{\partial u}{\partial t}$, temos

$$
\begin{aligned}
\left\langle u,\gamma(t)\Delta\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u + g(u) + f(t,u_t)\right\rangle_{L^2(\Omega)} &= \gamma(t)\left\langle u,\Delta\frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle u,\Delta u\rangle_{L^2(\Omega)} +\\
&\quad + \langle u,g(u)\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle u,f(t,u_t)\rangle_{L^2(\Omega)}\\
&= \gamma(t)\left(\int_\Omega u\Delta\frac{\partial u}{\partial t}\,dx\right) + \int_\Omega u\Delta u\,dx\\
&\quad + \int_\Omega ug(u)\,dx + \int_\Omega uf(t,u_t)\,dx.
\end{aligned}
$$

Calculando uma estimativa para cada elemento da igualdade acima, temos

(a) $\displaystyle\int_\Omega u\Delta u\,dx \;=-\int_\Omega \nabla u\nabla u\,dx \;= \|u\|^2_{H^1_0(\Omega)}.$

(b) $\displaystyle\int_\Omega ug(u)\,dx \;\leq\; \delta\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + K_\delta \;\leq\; \delta\lambda_1^{-1}\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} + K_\delta.$

(c) $\displaystyle\int_\Omega uf(t,u_t)\,dx$

Primeiro, observe que

$$\langle u,f(t,u_t)\rangle_{L^2(\Omega)} \leq \left|\langle u,f(t,u_t)\rangle_{L^2(\Omega)}\right| \leq \|u\|_{L^2(\Omega)}\|f(t,u_t)\|_{L^2(\Omega)}$$

mas, aplicando as desigualdades de Young e de Poincaré, temos

$$\int_\Omega uf(t,u_t)\,dx \leq \frac{\varepsilon_2}{2\lambda_1}\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \frac{1}{2\varepsilon_2}\|f(t,u_t)\|^2_{L^2(\Omega)},\ \forall\,\varepsilon_2 > 0$$

(d) $\displaystyle\gamma(t)\int_\Omega u\Delta\frac{\partial u}{\partial t}\,dx$

Note que integrando por partes e usando as condições de fronteira, obtemos

$$\int_\Omega u\Delta\frac{\partial u}{\partial t}\,dx = \int_\Omega \nabla u\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\,dx,$$

assim

$$\begin{aligned}
-\gamma(t)\left\langle \nabla u, \nabla\frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)} &\leq \left|-\gamma(t)\left\langle \nabla u, \nabla\frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)}\right| = |-\gamma(t)|\left|\left\langle \nabla u, \nabla\frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)}\right| \\
&\leq \gamma(t)\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\left\|\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega)} \leq \gamma(t)\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{H_0^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

aplicando a desigualdade de Young e a limitação de $\gamma(t)$, temos

$$\gamma(t)\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \gamma_1\left(\frac{\varepsilon_1}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \frac{1}{2\varepsilon_1}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right).$$

Agora, levando em consideração **(II)**, podemos reescrever a equação (4.1) como

$$-\Delta u = -\frac{\partial u}{\partial t} + \gamma(t)\Delta\frac{\partial u}{\partial t} + g(u) + f(t,u_t).$$

Substituindo esta expressão em **(II)** obtemos

$$\begin{aligned}
b\left\langle -\Delta u, \frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)} &= b\left\langle -\frac{\partial u}{\partial t} + \gamma(t)\Delta\frac{\partial u}{\partial t} + g(u) + f(t,u_t), \frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= -b\left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)} + b\gamma(t)\left\langle \Delta\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)} + b\left\langle g(u), \frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&+ b\left\langle f(t,u_t), \frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Assim, estudando cada parcela da igualdade acima, temos

(e) $-b\left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)} = -b\int_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx = -b\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)}$

(f) $b\gamma(t)\left\langle \Delta\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)}$
Temos que

$$b\gamma(t)\int_\Omega \Delta\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t}\,dx = -b\gamma(t)\int_\Omega \nabla\frac{\partial u}{\partial t}\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\,dx = -b\gamma(t)\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq -b\gamma_0\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{H_0^1(\Omega)}$$

assim,

$$b\gamma(t)\left\langle \Delta\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)} \leq -b\gamma_0\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{H_0^1(\Omega)}$$

(g) $b\left\langle g(u), \dfrac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)} = b\displaystyle\int_\Omega g(u)\frac{\partial u}{\partial t}\,dx.$

(h) $b\left\langle f(t,u_t), \dfrac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)}$

Note que

$$b\left\langle f(t,u_t), \frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)} \leq \left| b\left\langle f(t,u_t), \frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)}\right| \leq b\|f(t,u_t)\|_{L^2(\Omega)}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega)}$$

pelas desigualdades de Young e de Poincaré, temos

$$b\left\langle f(t,u_t), \frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)} \leq b\left(\frac{\varepsilon_3}{2\lambda_1}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon_3}\|f(t,u_t)\|_{L^2(\Omega)}\right),\ \forall\, \varepsilon_3 > 0.$$

Usando (a)-(h), podemos reescrever (4.29) como

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(L_b(u)) \leq{}& \frac{\gamma_1\varepsilon_1}{2}\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \frac{\gamma_1}{2\varepsilon_1}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{H^1_0(\Omega)} - \|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \frac{\delta}{\lambda_1}\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} + K_\delta \\ &+ \frac{\varepsilon_2}{2\lambda_1}\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \frac{1}{2\varepsilon_2}\|f(t,u_t)\|^2_{L^2(\Omega)} - b\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)} - b\gamma_0\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{H^1_0(\Omega)} \\ &+ b\int_\Omega\left(g(u)\frac{\partial u}{\partial t}\right)dx + \frac{b\varepsilon_3}{2\lambda_1}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \frac{b}{2\varepsilon_3}\|f(t,u_t)\|^2_{L^2(\Omega)} - b\int_\Omega\left(g(u)\frac{\partial u}{\partial t}\right)dx\end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(L_b(u)) \leq{}& \left(\frac{\gamma_1\varepsilon_1}{2} - 1 + \frac{\delta}{\lambda_1} + \frac{\varepsilon_2}{2\lambda_1}\right)\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \left(\frac{1}{2\varepsilon_2} + \frac{b}{2\varepsilon_3}\right)\|f(t,u_t)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &+ \left(\frac{\gamma_1}{2\varepsilon_1} - b\gamma_0 + \frac{b\varepsilon_3}{2\lambda_1}\right)\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{H^1_0(\Omega)} - b\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + K_\delta \\ \leq{}& -\left(1 - \frac{\gamma_1\varepsilon_1}{2} - \frac{2\delta+\varepsilon_2}{2\lambda_1}\right)\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \left(\frac{1}{2\varepsilon_2} + \frac{b}{2\varepsilon_3}\right)\|f(t,u_t)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &+ \left(\frac{\gamma_1}{2\varepsilon_1} - b\gamma_0 + \frac{b\varepsilon_3}{2\lambda_1}\right)\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{H^1_0(\Omega)} + K_\delta,\end{aligned}$$

para todo ε_1, ε_2, ε_3, $\delta > 0$. Tome

$$b > \frac{\gamma_1^2}{\gamma_0}, \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{2\gamma_1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\lambda_1}{4}, \quad \varepsilon_3 = 2\lambda_1\left(\gamma_0 - \frac{1}{b}\gamma_1^2\right) \quad \text{e} \quad \delta = \frac{\lambda_1}{8}.$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}(L_b(u)) \leq -\frac{1}{2}\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \left(\frac{8\gamma_0 b - 8\gamma_1^2 + b^2}{\lambda_1(4\gamma_0 b - 4\gamma_1^2)}\right)\|f(t,u_t)\|^2_{L^2(\Omega)} + K_{\frac{\lambda_1}{8}}. \tag{4.30}$$

Usando (4.28), segue que para todo $\tilde{\delta} > 0$

$$L_b(u) \leq \frac{1 + b(\lambda_1 + 2\delta)}{2\lambda_1}\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} + bK_{\tilde{\delta}},$$

então

$$\frac{-\lambda_1}{1+b(\lambda_1+2\tilde{\delta})}(L_b(u)-bK_{\tilde{\delta}}) \geq -\frac{1}{2}\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)}. \tag{4.31}$$

Substituindo a desigualdade (4.31) em (4.30) temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(L_b(u)\right) \leq & \frac{-\lambda_1}{1+b(\lambda_1+2\tilde{\delta})}L_b(u) + \left(\frac{8\gamma_0 b - 8\gamma_1^2 + b^2}{\lambda_1(4\gamma_0 b - 4\gamma_1^2)}\right)\|f(t,u_t)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ & + \left(\frac{b\lambda_1}{1+b(\lambda_1+2\tilde{\delta})}\right)K_{\tilde{\delta}} + K_{\frac{\lambda_1}{8}}.\end{aligned}$$

Denote

$$C_b = \frac{\lambda_1}{1+b(\lambda_1+2\tilde{\delta})}, \quad C_{\lambda_1} = \left(\frac{8\gamma_0 b - 8\gamma_1^2 + b^2}{\lambda_1(4\gamma_0 b - 4\gamma_1^2)}\right) \quad \text{e} \quad \tilde{K}_b = bC_b\tilde{K}_\delta + K_{\frac{\lambda_1}{8}}$$

assim

$$\frac{d}{dt}\left(L_b(u)\right) \leq -C_b L_b(u) + C_{\lambda_1}\|f(t,u_t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \tilde{K}_b.$$

Observe que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(e^{C_b t}L_b(u)\right) &= C_b e^{C_b t}L_b(u) + e^{C_b t}\left(\frac{d}{dt}L_b(u)\right) \\ &\leq C_b e^{C_b t}L_b(u) + e^{C_b t}\left(-C_b L_b(u) + C_{\lambda_1}\|f(t,u_t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \tilde{K}_b\right) \\ &= e^{C_b t}C_{\lambda_1}\|f(t,u_t)\|^2_{L^2(\Omega)} + e^{C_b t}\tilde{K}_b.\end{aligned}$$

Integrando entre s e t, obtemos

$$\int_s^t \left[\frac{d}{dr}\left(e^{C_b r}L_b(u)\right)\right]dr \leq \int_s^t \left(e^{C_b r}C_{\lambda_1}\|f(r,u_r)\|^2_{L^2(\Omega)} + e^{C_b r}\tilde{K}_b\right)dr.$$

Com isso,

$$e^{C_b t}L_b(u(t)) \leq e^{C_b s}L_b(\phi(0)) + C_{\lambda_1}\int_s^t e^{C_b r}\|f(r,u_r)\|^2_{L^2(\Omega)}dr + \frac{\tilde{K}_b}{C_b}(e^{C_b t} - e^{C_b s}). \tag{4.32}$$

Mais ainda,

$$\begin{aligned}\int_s^t \|f(r,u_r)\|^2_{L^2(\Omega)}dr &= \int_s^t \|f(r,u_r) - f(r,0) + f(r,0)\|^2_{L^2(\Omega)}dr \\ &\leq \int_s^t \|f(r,u_r) - f(r,0)\|^2_{L^2(\Omega)}dr + \int_s^t \|f(r,0)\|^2_{L^2(\Omega)}dr \\ &\leq C(R)\int_s^t \|u_r\|^2_{L^2(\Omega)}dr + \int_s^t \|f(r,0)\|^2_{L^2(\Omega)}dr\end{aligned}$$

assim

$$\begin{aligned}e^{C_b t}L_b(u(t)) \leq & e^{C_b s}L_b(\phi(0)) + C_{\lambda_1}C(R)\int_s^t e^{C_b r}\|u_r\|^2_{L^2(\Omega)}dr + \\ & + C_{\lambda_1}\int_s^t e^{C_b r}\|f(r,0)\|^2_{L^2(\Omega)}dr + \frac{\tilde{K}_b}{C_b}(e^{C_b t} - e^{C_b s}).\end{aligned}$$

Usando (4.27), segue que

$$e^{C_b t}L_b(u(t)) \geq \frac{b}{3}e^{C_b t}\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} - e^{C_b t}bK_{\frac{\lambda_1}{6}} \tag{4.33}$$

deste modo, comparando as desigualdades (4.32) e (4.33), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{b}{3}e^{C_b t}\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} - e^{C_b t}bK_{\frac{\lambda_1}{6}} &\leq e^{C_b t}L_b(u(t))\\ &\leq e^{C_b s}L_b(\phi(0)) + C_{\lambda_1}C(R)\int_s^t e^{C_b r}\|u_r\|^2_{L^2(\Omega)}dr +\\ &+ C_{\lambda_1}\int_s^t e^{C_b r}\|f(r,0)\|^2_{L^2(\Omega)}dr + \frac{\tilde{K}_b}{C_b}(e^{C_b t} - e^{C_b s})\end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned}\frac{b}{3}e^{C_b t}\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq{}& e^{C_b t}bK_{\frac{\lambda_1}{6}} + e^{C_b s}L_b(\phi(0)) + C_{\lambda_1}C(R)\int_s^t e^{C_b r}\|u_r\|^2_{L^2(\Omega)}dr\\ &+ C_{\lambda_1}\int_s^t e^{C_b r}\|f(r,0)\|^2_{L^2(\Omega)}dr + \frac{\tilde{K}_b}{C_b}(e^{C_b t} - e^{C_b s}).\end{aligned} \tag{4.34}$$

Porém, usando (4.28) temos para qualquer $\delta_2 > 0$

$$e^{C_b s}\left(L_b(\phi(0)) - \frac{\tilde{K}_b}{C_b}\right) \leq e^{C_b s}\left(\frac{1 + b(\lambda_1 + 2\delta_2)}{2\lambda_1}\|\phi(0)\|^2_{H^1_0(\Omega)} + bK_{\delta_2} - \frac{\tilde{K}_b}{C_b}\right).$$

Defina

$$\tilde{C}_b = \frac{1 + b(\lambda_1 + 2\delta_2)}{2\lambda_1}$$

assim,

$$e^{C_b s}\left(L_b(\phi(0)) - \frac{\tilde{K}_b}{C_b}\right) \leq e^{C_b s}\left(\tilde{C}_b\|\phi(0)\|^2_{H^1_0(\Omega)} + bK_{\delta_2}\right).$$

Utilizando a desigualdade acima em (4.34), temos

$$\begin{aligned}\frac{b}{3}e^{C_b t}\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq{}& e^{C_b t}bK_{\frac{\lambda_1}{6}} + e^{C_b s}\left(\tilde{C}_b\|\phi(0)\|^2_{H^1_0(\Omega)} + bK_{\delta_2}\right) + \frac{\tilde{K}_\delta}{C_b}e^{C_b t}\\ &+ C_{\lambda_1}C(R)\int_s^t e^{C_b r}\|u_r\|^2_{L^2(\Omega)}dr + C_{\lambda_1}\int_s^t e^{C_b r}\|f(r,0)\|^2_{L^2(\Omega)}dr.\end{aligned}$$

Seja $\theta \in [-h, 0]$ e substituindo t por $t + \theta$ para obter

$$\begin{aligned}\frac{b}{3}e^{C_b t}\|u(t+\theta)\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq{}& e^{C_b (t+\theta)}bK_{\frac{\lambda_1}{6}} + e^{C_b s}\left(\tilde{C}_b\|\phi(0)\|^2_{H^1_0(\Omega)} + bK_{\delta_2}\right) + \frac{\tilde{K}_\delta}{C_b}e^{C_b (t+\theta)}\\ &+ C_{\lambda_1}C(R)\int_s^{t+\theta} e^{C_b r}\|u_r\|^2_{L^2(\Omega)}dr + C_{\lambda_1}\int_s^{t+\theta} e^{C_b r}\|f(r,0)\|^2_{L^2(\Omega)}dr.\end{aligned}$$

Deste modo, multiplicando a desigualdade acima por $e^{-\theta C_b}$ $(-\theta \in [0,h])$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{b}{3}e^{C_b t}\|u(t+\theta)\|^2_{H^1_0(\Omega)} &\leq e^{C_b t} bK_{\frac{\lambda_1}{6}} + e^{C_b(s-\theta)}\left(\tilde{C}_b\|\phi(0)\|^2_{H^1_0(\Omega)} + bK_{\delta_2}\right)\\
&+ \frac{\tilde{K}_\delta}{C_b}e^{C_b t} + C_{\lambda_1}C(R)e^{-C_b\theta}\int_s^{t+\theta} e^{C_b r}\|u_r\|^2_{L^2(\Omega)}dr\\
&+ C_{\lambda_1}e^{-C_b\theta}\int_s^{t+\theta} e^{C_b r}\|f(r,0)\|^2_{L^2(\Omega)}dr\\
&\leq e^{C_b t}\left(bK_{\frac{\lambda_1}{6}} + \frac{\tilde{K}_\delta}{C_b}\right) + e^{C_b(s+h)}\left(\tilde{C}_b\|\phi(0)\|^2_{H^1_0(\Omega)} + bK_{\delta_2}\right)\\
&+ C_{\lambda_1}C(R)e^{C_b h}\int_s^{t+\theta} e^{C_b r}\|u_r\|^2_{L^2(\Omega)}dr\\
&+ C_{\lambda_1}e^{C_b h}\int_s^{t+\theta} e^{C_b r}\|f(r,0)\|^2_{L^2(\Omega)}dr.
\end{aligned}$$

Agora, observe que se $t > s$ e $\theta \in [-h, s-t]$, então

$$u(t+\theta) = \phi(t+\theta-s).$$

Multiplicamos essa igualdade por $e^{C_b t}$ e tomando a norma em $H^1_0(\Omega)$, obtemos

$$e^{C_b t}\|u(t+\theta)\|^2_{H^1_0(\Omega)} = e^{C_b t}\|\phi(t+\theta-s)\|^2_{H^1_0(\Omega)} \tag{4.35}$$

mas,

$$e^{C_b t}\|\phi(t+\theta-s)\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq \sup_{\theta\in[-h,s-t]} e^{C_b t}\|\phi(t+\theta-s)\|^2_{H^1_0(\Omega)}.$$

Note que,

$$-h \leq \theta \leq s-t \Leftrightarrow t-h \leq t+\theta \leq s$$

assim, $t-h \leq s \Rightarrow t \leq s+h$, neste caso, $e^{C_b t} \leq e^{C_b(s+h)}$.

Desta forma,

$$\begin{aligned}
\sup_{\theta\in[-h,s-t]} e^{C_b t}\|\phi(t+\theta-s)\|^2_{H^1_0(\Omega)} &\leq \sup_{\theta\in[-h,s-t]} e^{C_b(s+h)}\|\phi(t+\theta-s)\|^2_{H^1_0(\Omega)}\\
&\leq \sup_{\theta\in[-h,0]} e^{C_b(s+h)}\|\phi(\theta)\|^2_{H^1_0(\Omega)} = e^{C_b(s+h)}\|\phi\|^2_{C_H}
\end{aligned}$$

então,

$$e^{C_b t}\|\phi(t+\theta-s)\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq e^{C_b(s+h)}\|\phi\|^2_{C_H}. \tag{4.36}$$

Agora, se considerarmos $t > s+h$ e $\theta \in [s-t, 0]$, então $s-t \leq \theta \Leftrightarrow s \leq t+\theta$ e assim

$$\begin{aligned}
e^{C_b t}\|u(t+\theta)\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq \sup_{\theta\in[-h,s-t]}\Bigg[&\frac{3}{b}e^{C_b t}\left(bK_{\frac{\lambda_1}{6}} + \frac{\tilde{K}_\delta}{C_b}\right) + \frac{3}{b}e^{C_b(s+h)}\left(\tilde{C}_b\|\phi(0)\|^2_{H^1_0(\Omega)} + bK_{\delta_2}\right)\\
&+ \frac{3}{b}C_{\lambda_1}C(R)e^{C_b h}\int_s^{t+\theta} e^{C_b r}\|u_r\|^2_{L^2(\Omega)}dr + \frac{3}{b}C_{\lambda_1}e^{C_b h}\int_s^{t+\theta} e^{C_b r}\|f(r,0)\|^2_{L^2(\Omega)}dr\Bigg].
\end{aligned}$$

Logo, usando (4.36), (4.37) e (4.35), segue que

$$\begin{aligned}
e^{C_b t}\|u(t+\theta)\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq \text{máx}\Bigg\{ & e^{C_b(s+h)}\|\phi\|^2_{C_H}\,, \sup_{\theta\in[-h,s-t]}\Bigg[\frac{3}{b}\,e^{C_b t}\left(bK_{\frac{\lambda_1}{6}}+\frac{\tilde{K}_\delta}{C_b}\right)\\
&+\frac{3}{b}\,e^{C_b(s+h)}\left(\tilde{C}_b\|\phi(0)\|^2_{H^1_0(\Omega)}+bK_{\delta_2}\right)\\
&+\frac{3}{b}\,C_{\lambda_1}C(R)e^{C_b h}\int_s^{t+\theta} e^{C_b r}\|u_r\|^2_{L^2(\Omega)}dr\\
&+\frac{3}{b}\,C_{\lambda_1}e^{C_b h}\int_s^{t+\theta} e^{C_b r}\|f(r,0)\|^2_{L^2(\Omega)}dr\Bigg]\Bigg\}.
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
\sup_{\theta\in[s-t,0]}&\left(\int_s^{t+\theta} e^{C_b r}\|u_r\|^2_{C_H}dr+\int_s^{t+\theta} e^{C_b r}\|f(r,0)\|^2_{L^2(\Omega)}dr\right)\leq\\
&\int_s^t e^{C_b r}\|u_r\|^2_{C_H}dr+\int_s^t e^{C_b r}\|f(r,0)\|^2_{L^2(\Omega)}dr,
\end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{b}{3}e^{C_b t}\|u_t\|^2_{C_H} \leq\ & e^{C_b t}\left(bK_{\frac{\lambda_1}{6}}+\frac{\tilde{K}_\delta}{C_b}\right)+e^{C_b(s+h)}\left(\tilde{C}_b\|\phi\|^2_{C_H}+bK_{\delta_2}\right)\\
&+C_{\lambda_1}C(R)e^{C_b h}\int_s^t e^{C_b r}\|u_r\|^2_{L^2(\Omega)}dr+C_{\lambda_1}e^{C_b h}\int_s^t e^{C_b r}\|f(r,0)\|^2_{L^2(\Omega)}dr.
\end{aligned}$$

Assumindo

$$C(R)<\frac{bC_b}{3C_{\lambda_1}e^{C_b h}} \tag{4.37}$$

e chamando $\beta=\dfrac{3}{b}C_{\lambda_1}C(R)e^{C_b h}$, temos $\beta<C_b$. Defina

$$\alpha(t)=\frac{3}{b}e^{C_b(s+h)}\left(\tilde{C}_b\|\phi\|^2_{C_H}+bK_{\delta_2}\right)+\frac{3}{b}C_{\lambda_1}e^{C_b h}\int_s^t e^{C_b r}\|f(r,0)\|^2_{L^2(\Omega)}dr+\frac{3}{b}e^{C_b t}\left(\frac{\tilde{K}_b}{C_b}+bK_{\frac{\lambda_1}{6}}\right).$$

Assim,

$$e^{C_b t}\|u_t\|^2_{C_H}\leq\alpha(t)+\int_s^t\beta e^{C_b r}\|u_r\|^2_{C_H}dr$$

aplicando a desigualdade de Gronwall, obtemos

$$e^{C_b t}\|u_t\|^2_{C_H}\leq\alpha(t)+\beta\int_s^t\alpha(r)e^{\beta(t-r)}dr. \tag{4.38}$$

Agora, estudemos as seguintes integrais:

(a)

$$\beta\int_s^t \frac{3}{b}e^{C_b(s+h)}\left(\tilde{C}_b\|\phi\|^2_{C_H}+bK_{\delta_2}\right)e^{\beta(t-r)}dr =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3\beta}{b}e^{C_b(s+h)}\left(\tilde{C}_b\|\phi\|^2_{C_H}+bK_{\delta_2}\right)e^{\beta t}\left(\frac{e^{-\beta r}}{-\beta}\right)\Bigg|_s^t \\
&= \frac{3\beta}{b}e^{C_b(s+h)}\left(\tilde{C}_b\|\phi\|^2_{C_H}+bK_{\delta_2}\right)e^{\beta t} \\
&\times\left(\frac{e^{-\beta t}}{-\beta}-\frac{e^{-\beta s}}{-\beta}\right) \\
&= -\frac{3}{b}e^{C_b(s+h)}\left(\tilde{C}_b\|\phi\|^2_{C_H}+bK_{\delta_2}\right)+ \\
&+ \frac{3}{b}e^{C_b(s+h)}\left(\tilde{C}_b\|\phi\|^2_{C_H}+bK_{\delta_2}\right)e^{\beta(t-s)} \\
&\le \frac{3}{b}e^{C_b(s+h)}\left(\tilde{C}_b\|\phi\|^2_{C_H}+bK_{\delta_2}\right)e^{\beta(t-s)}.
\end{aligned}$$

(b) $\beta\int_s^t \frac{3}{b}C_{\lambda_1}e^{C_bh}\left(\int_s^r e^{C_b\tau}\|f(\tau,0)\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau\right)e^{\beta t-\beta r}dr$

Para isto, vamos fazer uma mudança na ordem de integração e obteremos,

$$\begin{aligned}
\int_s^t\int_s^r e^{C_b\tau}\left\|f(\tau,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau e^{-\beta r}dr &= \int_s^t\left(\int_\tau^t e^{-\beta r}dr\right)e^{C_b\tau}\left\|f(\tau,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau \\
&= \int_s^t\left(-\frac{e^{-\beta t}}{\beta}+\frac{e^{-\beta\tau}}{\beta}\right)e^{C_b\tau}\left\|f(\tau,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau \\
&\le \frac{1}{\beta}\int_s^t e^{-\beta\tau}e^{C_b\tau}\left\|f(\tau,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau.
\end{aligned}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}
&\beta\int_s^t\frac{3}{b}C_{\lambda_1}e^{C_bh}\left(\int_s^r e^{C_b\tau}\|f(\tau,0)\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau\right)e^{(\beta t-\beta r)}dr \\
&\qquad\le \frac{3}{b}C_{\lambda_1}e^{(C_bh+\beta t)}\int_s^t e^{(C_b-\beta)r}\left\|f(r,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}dr.
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\beta\int_s^t\frac{3}{b}e^{C_bt}\left(\frac{\tilde{K}_b}{C_b}+bK_{\frac{\lambda_1}{6}}\right)e^{\beta t}e^{-\beta r}dr &= \beta\frac{3}{b}e^{C_br}\left(\frac{\tilde{K}_b}{C_b}+bK_{\frac{\lambda_1}{6}}\right)\left(\frac{e^{(C_b-\beta)r}}{C_b-\beta}\right)\Bigg|_s^t \\
&= \beta\frac{3}{b}e^{C_bt}\left(\frac{\tilde{K}_b}{C_b}+bK_{\frac{\lambda_1}{6}}\right)\left(\frac{1}{C_b-\beta}\right)\left(e^{(C_b-\beta)t}-e^{(C_b-\beta)s}\right) \\
&\le \beta\frac{3}{b}e^{C_bt}\left(\frac{\tilde{K}_b}{C_b}+bK_{\frac{\lambda_1}{6}}\right)\left(\frac{1}{C_b-\beta}\right).
\end{aligned}$$

Obtemos, através de (a), (b) e (c), a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}\beta\int_s^t \alpha(r)e^{\beta(t-r)}dr \leq& \frac{3}{b}e^{C_b(s+h)}\left(\tilde{C}_b\|\phi\|^2_{C_H}+bK_{\delta_2}\right)e^{\beta(t-s)}\\ &+\frac{3}{b}C_{\lambda_1}e^{(C_bh+\beta t)}\int_s^t e^{(C_b-\beta)r}\|f(r,0)\|^2_{L^2(\Omega)}dr\\ &+\beta\frac{3}{b}e^{C_bt}\left(\frac{\tilde{K}_b}{C_b}+bK_{\frac{\lambda_1}{6}}\right)\left(\frac{1}{C_b-\beta}\right).\end{aligned}$$

Portanto, (4.38) se reduz a

$$\begin{aligned}\|u_t\|^2_{C_H}\leq& e^{-C_bt}\alpha(t)+\frac{3}{b}e^{C_bh}e^{(C_b-\beta)(s-t)}\left(\tilde{C}_b\|\phi\|^2_{C_H}+bK_{\delta_2}\right)\\ &+\frac{3}{b}C_{\lambda_1}e^{(C_bh-(C_b-\beta)t)}\int_s^t e^{(C_b-\beta)r}\|f(r,0)\|^2_{L^2(\Omega)}dr\\ &+\beta\frac{3}{b}\left(\frac{\tilde{K}_b}{C_b}+bK_{\frac{\lambda_1}{6}}\right)\left(\frac{1}{C_b-\beta}\right).\end{aligned}\tag{4.39}$$

Assumindo que existe $\eta_0>0$ tal que, para qualquer $\eta\in[0,\eta_0]$,

$$\int_{-\infty}^t e^{\eta r}\|f(r,0)\|^2_{L^2(\Omega)}dr<\infty$$

e ainda, fazendo $s\to-\infty$, nas seguintes expressões, obtemos

(d)

$$\begin{aligned}&\lim_{s\to-\infty}e^{-C_bt}\Bigg(\frac{3}{b}e^{C_b(s+h)}\left(\tilde{C}_b\|\phi\|^2_{C_H}+bK_{\delta_2}\right)+\frac{3}{b}C_{\lambda_1}e^{C_bh}\int_s^t e^{C_br}\|f(r,0)\|^2_{L^2(\Omega)}dr+\\ &\qquad+\frac{3}{b}e^{C_bt}\left(\frac{\tilde{K}_b}{C_b}+bK_{\frac{\lambda_1}{6}}\right)\Bigg)\\ &\quad=\frac{3}{b}e^{-C_bt}C_{\lambda_1}e^{C_bh}\int_{-\infty}^t e^{C_br}\|f(r,0)\|^2_{L^2(\Omega)}dr+\frac{3}{b}\left(\frac{\tilde{K}_b}{C_b}+bK_{\frac{\lambda_1}{6}}\right)\end{aligned}$$

(e)

$$\lim_{s\to-\infty}\beta\frac{3}{b}\left(\frac{\tilde{K}_b}{C_b}+bK_{\frac{\lambda_1}{6}}\right)\left(\frac{1}{C_b-\beta}\right)=\beta\frac{3}{b}\left(\frac{\tilde{K}_b}{C_b}+bK_{\frac{\lambda_1}{6}}\right)\left(\frac{1}{C_b-\beta}\right)$$

(f)

$$\lim_{s\to-\infty}\frac{3}{b}e^{C_bh}\frac{e^{(C_b-\beta)s}}{e^{(C_b-\beta)t}}\left(\tilde{C}_b\|\phi\|^2_{C_H}+bK_{\delta_2}\right)=0$$

(g)

$$\begin{aligned}\lim_{s\to-\infty}\frac{3}{b}C_{\lambda_1}e^{(C_bh-(C_b-\beta)t)}\int_s^t e^{(C_b-\beta)r}\|f(r,0)\|^2_{L^2(\Omega)}dr=&\frac{3}{b}C_{\lambda_1}e^{(C_bh-(C_b-\beta)t)}\\ &\times\int_{-\infty}^t e^{(C_b-\beta)r}\|f(r,0)\|^2_{L^2(\Omega)}dr\end{aligned}$$

Deste modo, utilizando as estimativas (d), (e), (f) e (g) e fazendo $s \to -\infty$ em (4.39), obtemos

$$\|u\|_{C_H}^2 \longrightarrow l(t) \quad \text{quando} \quad s \longrightarrow -\infty \tag{4.40}$$

sendo, $l(t)$ definida por

$$l(t) = \frac{3}{b}\left(\frac{\tilde{K_b}}{C_b} + bK_{\frac{\lambda_1}{6}}\right)\left(1 + \frac{\beta}{C_b - \beta}\right) + \frac{3}{b}C_{\lambda_1}e^{C_b(h-t)}\left(\int_{-\infty}^{t} e^{C_b r}\|f(r,0)\|_{L^2(\Omega)}^2 dr + \right.$$
$$\left. + e^{\beta t}\int_{-\infty}^{t} e^{(C_b-\beta)r}\|f(r,0)\|_{L^2(\Omega)}^2 dr\right).$$

Observe que a função $l(t)$ não explode em tempo finito. Portanto, temos a existência global de qualquer solução $u(t,s;\phi)$ de (4.1), isto é, para cada $\phi \in C_H$, $u(t,s;\phi) \in C([s-h,+\infty),H_0^1(\Omega))$ no Teorema 4.1.1. E ainda, nas próximas seções iremos justificar utilizando a convergência de $\|u\|_{C_H}^2 \overset{s\to-\infty}{\longrightarrow} l(t)$, que as soluções para o problema geram um sistema dinâmico não-autônomo, e que existe uma família de subconjuntos fechados

$$\{\ \overline{B}_{C_H}(0, l^{\frac{1}{2}}(t))\ :\ t \in \mathbb{R}\ \}$$

a qual atrai pullback subconjuntos limitados de C_H.

Também precisaremos da dependência contínua dos dados iniciais.

Proposição 4.2.1. *Sob as hipóteses do Teorema 4.1.1, qualquer solução $u(t,s;\phi)$ de (4.1) é contínua com respeito aos dados iniciais $\phi \in C_H$. Mais precisamente, se u^i, para $i = 1,2$ são as soluções correspondentes aos dados iniciais $\phi^i \in C_H$, $i = 1,2$; a seguinte estimativa é satisfeita*

$$\|u_t^1 - u_t^2\|_{C_H} \leq \|\phi^1 - \phi^2\|_{C_H}e^{(a+L_g(R)+C(R))t}$$

para todo $t \in [s,T)$, sendo $R \geq 0$ dado por $R = máx(2\|\phi^1\|_{C_H}, 2\|\phi^2\|_{C_H})$.

Demonstração. Sejam u^i, para $i = 1,2$ as soluções correspondentes para os dados iniciais $\phi^i \in C_H$, $i = 1,2$ no intervalo $[s-h,T)$ para um fixado $T > s$. Então temos

$$u^1(t) - u^2(t) = \phi^1(0) - \phi^2(0) + \int_s^t h(r,u_r^1) - h(r,u_r^2)dr$$

para $t \in (s,T)$.

Levando em consideração as seguintes hipóteses: que f é contínua em t e localmente Lipschitz na segunda variável; a limitação das funções no espaço X_ϕ^T; que $\|\tilde{A}(t)\|_{\mathcal{L}(H_0^1(\Omega))} \leq a$ e que $B(t) \circ g$ é localmente Lipschitz em $H_0^1(\Omega)$, obtemos

$$\|u^1(t) - u^2(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|\phi^1(0) - \phi^2(0)\|_{H_0^1(\Omega)} + (a + L_g(R) + C(R))\int_s^t \|u_r^1 - u_r^2\|_{C_H}dr$$

para $t \in (s-h,T)$ e $R = \text{máx}\,\{2\|\phi^1\|_{C_H}, 2\|\phi^2\|_{C_H}\}$,

Deste modo, substituindo t por $t+\theta$ com $\theta \in [-h,0]$ e tomando o supremo em θ, segue que

$$\|u^1(t) - u^2(t)\|_{C_H} \leq \|\phi^1(0) - \phi^2(0)\|_{C_H} + (a + L_g(R) + C(R))\int_s^t \|u_r^1 - u_r^2\|_{C_H}dr$$

para $t \in (s,T)$ e aplicando a Desigualdade de Gronwall, temos

$$\|u^1(t) - u^2(t)\|_{C_H} \leq \|\phi^1(0) - \phi^2(0)\|_{C_H}e^{(a+L_g(R)+C(R))(t-s)}.$$

□

4.3 Resultados abstratos da teoria de atratores

Vamos relembrar agora alguns resultados abstratos da teoria de atratores pullback, os quais já foram abordados no Capítulo 4, porém iremos mudar a notação para nos adequarmos a referência que esta sendo estudado, [5]. Lembrando que os resultados enunciados a seguir foram obtidos de [8].

Considere um dado espaço métrico (X, d_X). Para A e B subconjuntos de X, seja $dist(A, B)$ a notação para a semi-distância de Hausdorff entre A e B definida por

$$dist(A, B) = \sup_{a \in A} \left(\inf_{b \in B} d_X(a, b) \right).$$

Definição 25. *Um processo de evolução em um espaço métrico (X, d_X) é uma família de aplicações contínuas $\{ S(t, s) : t \geq s\}$ de X nele mesmo com as seguintes propriedades:*

(i) $S(t, t) = I$, *para todo* $t \in \mathbb{R}$;

(ii) $S(t, s) = S(t, \tau)S(\tau, s)$, *para todo* $t \geq \tau \geq s$;

(iii) $\{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : t \geq s \} \times X \ni (t, s; x) \longmapsto S(t, s)x \in X$ *é contínua.*

Denotemos por $\mathcal{P}(X)$ a família de todos os subconjuntos não vazios de X e considere a família de conjuntos não vazios

$$\widehat{D}_0 = \{D_0(t) : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{P}(X).$$

Observe que não foi necessária qualquer condição adicional nesses conjuntos, como compacidade ou limitação. Seja $\mathcal{D}$ uma classe não vazia de famílias parametrizadas no tempo

$$\widehat{D} = \{ D(t) : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{P}(X).$$

A classe $\mathcal{D}$ será chamada de universo em $\mathcal{P}(X)$.

Definição 26. *A família $\widehat{D}_0 = \{D_0(t) : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{P}(X)$ é chamada de pullback $\mathcal{D}$-absorvente para o processo $\{ S(t, s) : t \geq s\}$ em X se, para qualquer $t \in \mathbb{R}$ e qualquer $\widehat{D} \in \mathcal{D}$, existe um $s_0(t, \widehat{D}) \leq t$ tal que*

$$S(t, s)D(s) \subset D_0(t)\, , \forall s \leq s_0(t, \widehat{D}).$$

Definição 27. *A família $\mathcal{A}_{\mathcal{D}} = \{\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é um $\mathcal{D}$-pullback atrator para o processo $\{ S(t, s) : t \geq s\}$ em X se:*

(i) para qualquer $t \in \mathbb{R}$, o conjunto $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(t)$ é não-vazio e compacto em X;

(ii) $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}$ é pullback $\mathcal{D}$-atraído, ou seja,

$$\lim_{s \to -\infty} dist(S(t, s)D(s), \mathcal{A}_{\mathcal{D}}(t)) = 0$$

para todo $\widehat{D} \in \mathcal{D}$ e $t \in \mathbb{R}$;

(iii) $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}$ é invariante, isto é,

$$S(t, s)\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(s) = \mathcal{A}_{\mathcal{D}}(t) \quad \forall s \leq t.$$

A família $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}$ é minimal no seguinte sentido, se $\widehat{C} = \{ C(t) : t \in \mathbb{R} \} \subset \mathcal{P}(X)$ é uma família de conjuntos fechados tal que para qualquer $\widehat{D} = \{ D(t) : t \in \mathbb{R} \} \in \mathcal{D}$,

$$\lim_{s \to -\infty} dist_X(S(t,s)D(s), C(t)) = 0,$$

então $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(t) \subset C(t)$.

Definição 28. *Dada uma família parametrizada em relação ao tempo, $\widehat{D} = \{ D(t) : t \in \mathbb{R} \} \subset \mathcal{P}(X)$, dizemos que o processo $\{ S(t,s) : t \geq s\}$ em X é $\widehat{D}$-assintoticamente compacto se, para qualquer $t \in \mathbb{R}$ e qualquer sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (-\infty, t]$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ limitada, satisfazendo $s_n \to -\infty$ e $x_n \in D(s_n)$, para todo n, a sequência $\{S(t,s_n)x_n\}$ é relativamente compacta em X.*

Definição 29. *Um processo $\{ S(t,s) : t \geq s\}$ em X é pullback fortemente limitado, se para cada $t \in \mathbb{R}$ e para cada subconjunto limitado D de X,*

$$\bigcup_{s \leq t} \bigcup_{\tau \leq s} S(s,\tau)D$$

é limitado.

Definição 30. *Um processo $\{ S(t,s) : t \geq s\}$ em X é chamado de pullback $\mathcal{D}$-assintoticamente compacto se o processo é $\widehat{D}$-assintoticamente compacto para qualquer $\widehat{D} \in \mathcal{D}$.*

Denotamos por

$$\omega(\widehat{D}_0, t) := \bigcap_{s \leq t} \overline{\bigcup_{\tau \leq s} S(t,\tau)D_0(\tau)}^X \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R}$$

a generalização natural para o conjunto ω-limite no sentido pullback, temos o seguinte resultado em relação à existência de atratores pullback.

Teorema 4.3.1. *Considere o processo $\{ S(t,s) : t \geq s\}$ em X, um universo $\mathcal{D}$ em $\mathcal{P}(X)$ e uma família $\widehat{D}_0 = \{ D_0(t) : t \in \mathbb{R} \} \subset \mathcal{P}(X)$ a qual é $\mathcal{D}$-pullback absorvente e assuma também que o processo é pullback $\widehat{D}_0$-assintoticamente compacto. Então, a família $\mathcal{A}_{\mathcal{D}} = \{ \mathcal{A}_{\mathcal{D}}(t) : t \in \mathbb{R} \}$ definida por*

$$\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(t) = \overline{\bigcup_{\widehat{D} \in \mathcal{D}} \omega(\widehat{D}, t)^X}, \quad t \in \mathbb{R}$$

é o $\mathcal{D}$-pullback atrator.

4.4 Existência do atrator pullback

Devido aos resultados anteriores, poderemos construir um sistema dinâmico não autônomo. Mais precisamente, iremos construir um processo $S : C_H \to C_H$ associado à (4.1) e provaremos a existência de um atrator pullback para tal processo.

Assumindo as hipóteses (4.2), (4.3) e (4.4), com $f(t,0) = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e suponha que $C(R)$ satisfaz (4.37). Para cada $\phi \in C_H$ e $s \in \mathbb{R}$, pelo Teorema 4.1.1 e pelas estimativas da seção de Solução Global garantimos a existência de solução global $u(\cdot, s; \phi)$ para a equação (4.1). Assim, definimos a família de aplicações $S(t, s)$ em C_H por

$$S(t, s)\phi = u_t(\cdot, s; \phi), \ \forall\, t \geq s. \tag{4.41}$$

De acordo com os resultados anteriores, podemos mostrar que $S(\cdot, \cdot)$ é um processo de evolução. De fato, suponha $\phi \in C_H$ e $\theta \in [-h, 0]$, devem ser satisfeitas as seguintes condições

(i) $S(t, t) = I$:

Temos
$$S(t, t)\phi(\theta) = u_t(\theta, t; \phi) = u(t + \theta, t; \phi) = \phi(t + \theta - t) = \phi(\theta)$$
logo, $S(t, t)\phi(\theta) = \phi(\theta)$. Ou seja, $S(t, t) = I$, desde que $\phi(\theta) \not\equiv 0$.

(ii) $S(t, r)S(r, s) = S(t, s)$, para todo $t \geq r \geq s$:

$$\begin{aligned} S(t, r)\left[S(r, s)\phi(\theta)\right] &= S(t, r)[u_r(\theta, s; \phi)] = S(t, r)[u(r + \theta, s; \phi)] = S(t, r)[\phi(r + \theta - s)] \\ &= u_t(r + \theta - s, r; \phi) = u(t + r + \theta - s, r; \phi) = \phi(t + r + \theta - s - r) \\ &= \phi(t + \theta - s) = u(t + \theta, s; \phi) = u_t(\theta, s; \phi) = S(t, s)\phi(\theta) \end{aligned}$$

portanto, $S(t, r)[S(r, s)\phi(\theta)] = S(t, s)\phi(\theta)$. Mas pela unicidade da solução, $S(t, r)S(r, s) = S(t, s)$.

(iii) $\{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : t \geq s\} \times C_H \ni (t, s, x) \longmapsto S(t, s)x \in C_H$ é uma aplicação contínua:

Note que pela dependência contínua dos dados iniciais, temos que a função $(t, s) \mapsto S(t, s)\phi$ é contínua.

Portanto, $S(\cdot, \cdot)$ definido por (4.41) é um processo de evolução. Podemos escrever

$$\begin{aligned} S(t, s)\phi(\theta) &= u_t(\theta, s; \phi) = u(t + \theta, s; \phi) \\ &= T(t + \theta, s)\phi(0) + \int_s^{t+\theta} T(t + \theta, \tau)\tilde{f}(\tau, u_\tau)d\tau + \int_s^{t+\theta} T(t + \theta, \tau)\tilde{g}(\tau, u)d\tau \end{aligned} \tag{4.42}$$

para todo $t \geq s$ e $\theta \in [-h, 0]$, sendo $T(t, s)$ o processo de evolução associada a (4.1) considerando $f = 0$ e $g = 0$.

Nosso universo, neste caso, é o universo $\mathcal{D}_b$ de todas as famílias com união limitada, isto é, a família $\{D(t) : t \in \mathbb{R}\}$ está em $\mathcal{D}_b$ se, e somente se, $\bigcup\{D(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é limitado em C_H.

Levando isto em consideração, assumindo que $f(t, 0) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e pelas estimativas feitas na Seção de Solução Global, temos, por (4.40),

$$\|u_t\|^2_{C_H} \overset{s \to -\infty}{\longrightarrow} l(t)$$

ou seja,

$$\|u_t\|_{C_H} \overset{s \to -\infty}{\longrightarrow} [l(t)]^{1/2}. \tag{4.43}$$

Com isto, se definirmos a família de subconjuntos fechados $\left\{\overline{B}_{C_H}(0, l(t)^{1/2}) : t \in \mathbb{R}\right\}$ ela irá atrair-pullback subconjuntos limitados de C_H. De fato, considere E um subconjunto limitado de C_H, isto é, $E = \{\phi^i \in C_H : \|\phi^i\|_{C_H} \leq e, \ \text{com } e > 0\}$, assim, temos para $t \geq s$

$$u_t(\cdot, s; \phi^i) \longrightarrow [l(t)]^{1/2} \ \text{ quando } s \longrightarrow -\infty$$

ou seja,
$$\lim_{s\to-\infty} dist_H\left(u_t(\cdot,s;\phi^i),\overline{B}_{C_H}\left(0,l(t)^{1/2}\right)\right)=0$$
mas,
$$u_t(\cdot,s;\phi^i)=S(t,s)\phi^i$$
assim,
$$\lim_{s\to-\infty} dist_H\left(S(t,s)\phi^i,\overline{B}_{C_H}\left(0,l(t)^{1/2}\right)\right)=0.$$

Portanto, $\left\{\overline{B}_{C_H}(0,l(t)^{1/2}):t\in\mathbb{R}\right\}$ é um família de subconjuntos fechados que atrai-pullback subconjuntos limitados de C_H.

Note que a família
$$\widehat{B}_0=\{B_0(t):t\in\mathbb{R}\}$$
onde $B_0(t)=\overline{B}_{C_H}(0,l(t)^{1/2})$, para todo $t\in\mathbb{R}$, é uma família $\mathcal{D}_b$-absorvente em $\mathcal{D}_b$, pois como vale (4.43) então, para qualquer $t\in\mathbb{R}$, e dado $\varepsilon>0$, existe $s_0(t)\leq t$ tal que
$$\left|\|u_t\|_{C_H}-l(t)^{1/2}\right|<\varepsilon,\quad \forall s<s_0(t)$$
o que implica
$$\|u_t\|_{C_H}<l(t)^{1/2}+\varepsilon,\quad \forall s<s_0(t)$$
pela arbitrariedade de ε, temos
$$\|u_t\|_{C_H}\leq l(t)^{1/2},\quad \forall s\leq s_0(t).$$

Obtemos que se $\phi\in D$, com D um subconjunto limitado de C_H, então
$$u_t(\cdot,s;\phi)\in\overline{B}_{C_H}(0,l(t)^{1/2}),\quad \forall\phi\in D$$
ou seja,
$$S(t,s)D\subset\overline{B}_{C_H}(0,l(t)^{1/2}),\quad \forall s\leq s_0(t)$$
provando que $\left\{\widehat{B}_0(t)\right\}_{t\in\mathbb{R}}$ é uma família $\mathcal{D}_b$-absorvente.

Para provar a existência de atrator pullback para nosso problema vamos aplicar o Teorema 4.3.1, para isso precisaremos do seguinte resultado como principal ferramenta, cuja prova será omitida pois é uma simples adaptação da prova do Teorema 3.2.6.

Teorema 4.4.1. *Seja $\{S(t,s):t\geq s\}$ um processo dado em (4.42) $S(t,s)=T(t,s)+U(t,s)$, com $U(t,s)$ compacto e suponha que existe uma função não crescente $k:\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ com $k(\sigma,r)\to 0$ quando $\sigma\to+\infty$, e para todo $s\leq t$ e $x\in C_H$ com $\|x\|_{C_H}\leq r$, $\|T(t,s)\|_{C_H}\leq k(t-s,r)$. Então, $\{S(t,s):t\geq s\}$ é $\mathcal{D}_b$-pullback assintoticamente compacto.*

Proposição 4.4.1. *O processo $\{S(t,s):t\geq s\}$ dado em (4.42) é $\mathcal{D}_b$-pullback fortemente limitado.*

Demonstração. Precisamos mostrar que para cada $t\in\mathbb{R}$ e para cada conjunto limitado B do espaço X,
$$\bigcup_{s\leq t}\bigcup_{\tau\leq s}S(s,\tau)B \tag{4.44}$$
é limitado.

Consideremos assim, B um conjunto limitado, então existe $R > 0$ tal que $B \subset B(0,R)$. Mas como existe a família de subconjuntos fechados $\{\,\overline{B}(0, l^{\frac{1}{2}}(t))\}$ que atrai pullback subconjuntos limitados de C_H, temos

$$\|u(t,s;\phi)\|_{C_H} \leq l(t)^{1/2}$$

então,

$$\sup\{\,\|u(t,s;\phi)\|_{C_H},\ t \in [s, s_0(t))\,\} \leq l(t)^{1/2}.$$

Assim, para cada $t, \tau \in \mathbb{R}$, com $\tau \leq t$ temos

$$S(t,s)B \subset \overline{B}\left(0, l(t)^{1/2}\right),\ \forall s \in \mathbb{R}, s \leq \tau$$

isto é,

$$\bigcup_{s \leq \tau} S(t,s)B \subset \overline{B}\left(0, l(t)^{1/2}\right).$$

Mas este resultado é válido para cada $\tau \leq t$, então concluímos que

$$\bigcup_{s \leq t} \bigcup_{\tau \leq s} S(s,\tau)B \subset \overline{B}\left(0, l(t)^{1/2}\right)$$

ou seja, (4.44) é limitado. □

Proposição 4.4.2. *O processo $\{S(t,s) : t \geq s\}$ dado em (4.42) é $\mathcal{D}_b$-pullback assintoticamente compacto.*

Demonstração. Para isto, queremos que o processo $\{\,S(t,s)\,:\,t \geq s\}$ satisfaça as hipóteses do Teorema 4.4.1, assim por um lado precisamos provar que

$$T(t+\theta, s)\phi(0) + \int_s^{t+\theta} T(t+\theta,\tau)\tilde{f}(\tau, u_\tau)d\tau$$

tende a zero exponencialmente em C_H quando $s \to -\infty$. Com efeito, $T(t,s)$ é a solução da equação (4.1) para $f = g = 0$. Defina o seguinte funcional de energia para qualquer $b_0 > 0$

$$L_{b_0}(\varphi) = \frac{1}{2}\left(\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} + b_0\|\varphi\|^2_{H^1_0(\Omega)}\right).$$

Note que,

$$L_{b_0}(\varphi) = \frac{1}{2}\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{b_0}{2}\|\varphi\|^2_{H^1_0(\Omega)} \geq \frac{b_0}{2}\|\varphi\|^2_{H^1_0(\Omega)}$$

e

$$L_{b_0}(\varphi) = \frac{1}{2}\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{b_0}{2}\|\varphi\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq \frac{1}{2\lambda_1}\|\varphi\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \frac{b_0}{2}\|\varphi\|^2_{H^1_0(\Omega)}$$

logo,

$$\frac{b_0}{2}\|\varphi\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq L_{b_0}(\varphi) \leq \left(\frac{1}{2\lambda_1} + \frac{b_0}{2}\right)\|\varphi\|^2_{H^1_0(\Omega)}.$$

Aplicando o funcional de energia em $u(t,s;\phi)$, sendo esta a solução da equação homogênea associada à (4.1), e derivando em relação a t, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(L_{b_0}(u)\right) &= \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}\left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\right) + b_0\left(\frac{d}{dt}\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}\left(\langle u,u\rangle_{L^2(\Omega)}\right) + b_0\frac{d}{dt}\left(\langle \nabla u,\nabla u\rangle_{L^2(\Omega)}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(2\left\langle u,\frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)} + 2b_0\left\langle \nabla u,\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)}\right) \\
&= \left\langle u,\frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)} + b_0\left\langle \nabla u,\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Substituindo a equação homogênea e utilizando as desigualdades de Hölder e de Poincaré, temos

$$\begin{aligned}
\left\langle u,\gamma(t)\Delta\frac{\partial u}{\partial t}+\Delta u\right\rangle_{L^2(\Omega)} &= \gamma(t)\left\langle u,\Delta\frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle u,\Delta u\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= -\gamma(t)\int_\Omega \nabla u\nabla\frac{\partial u}{\partial t} - \int_\Omega \nabla u\nabla u \\
&\leq \gamma_1\frac{\epsilon_1}{2}\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \frac{\gamma_1}{2\varepsilon_1}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{H^1_0(\Omega)} - \|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} \\
&\leq \left(\gamma_1\frac{\varepsilon_1}{2}-1\right)\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \frac{\gamma_1}{2\varepsilon_1}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{H^1_0(\Omega)},\ \forall\,\varepsilon_1>0.
\end{aligned}$$

Além disso, como

$$\begin{aligned}
b_0\left\langle -\Delta u,\frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)} &= b_0\left\langle -\frac{\partial u}{\partial t}+\gamma(t)\Delta\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= -b_0\left\langle \frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)} + b_0\gamma(t)\left\langle \Delta\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&\leq -b_0\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)} - b_0\gamma_0\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{H^1_0(\Omega)}
\end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(L_{b_0}(u)\right) &\leq \left(\gamma_1\frac{\varepsilon_1}{2}-1\right)\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \left(\frac{\gamma_1}{2\varepsilon_1}-b_0\gamma_0\right)\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{H^1_0(\Omega)} - b_0\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \left(\gamma_1\frac{\varepsilon_1}{2}-1\right)\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \left(\frac{\gamma_1}{2\varepsilon_1}-b_0\gamma_1\right)\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{H^1_0(\Omega)}
\end{aligned}$$

para todo $\varepsilon_1>0$. Considere então $\varepsilon_1=\dfrac{\gamma_1}{2b_0\gamma_0}$ e $b_0>\dfrac{\gamma_1^2}{4\gamma_0}$, assim

$$\frac{d}{dt}\left(L_{b_0}(u)\right) \leq \left(\frac{\gamma_1^2}{4b_0\gamma_0}-1\right)\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)}.$$

Observe que pela escolha de b_0, temos $\left(\dfrac{\gamma_1^2}{4b_0\gamma_0}-1\right) < 0$. Seja $c > 0$ tal que $c = -\left(\dfrac{\gamma_1^2}{4b_0\gamma_0}-1\right)$. Então,

$$\frac{d}{dt}\left(L_{b_0}(u)\right) \leq -c\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

Consequentemente,

$$-c\left(\frac{2\lambda_1}{1+b_0\lambda_1}\right)L_{b_0}(u) \geq -c\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}$$

logo,

$$\frac{d}{dt}\left(L_{b_0}(u)\right) \leq -\frac{2c\lambda_1}{(1+b_0\lambda_1)}L_{b_0}(u).$$

Seja,

$$D_{\lambda_1} = \frac{2c\lambda_1}{2(1+b_0\lambda_1)}$$

temos

$$\frac{d}{dt}\left(L_{b_0}(u)\right) \leq -D_{\lambda_1}L_{b_0}(u) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\frac{d}{dt}L_{b_0}(u)}{L_{b_0}(u)} \leq -D_{\lambda_1}.$$

Integrando de s até t, obtemos

$$\int_s^t \frac{\frac{d}{dt}L_{b_0}(u)}{L_{b_0}(u)}dr \leq -\int_s^t D_{\lambda_1}dr$$

e, portanto

$$\ln(L_{b_0}(u(t,s;\phi))) - \ln(L_{b_0}(u(s,s;\phi))) \leq -D_{\lambda_1}(t-s).$$

Disto, segue que,

$$\ln\left(\frac{L_{b_0}(u(t,s;\phi))}{L_{b_0}(\phi(0))}\right) \leq -D_{\lambda_1}(t-s)$$

ou seja

$$L_{b_0}(u(t,s;\phi)) \leq L_{b_0}(\phi(0))e^{-D_{\lambda_1}(t-s)}.$$

Então

$$\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{2}{b_0}L_{b_0}(u(t,s;\phi)) \leq \frac{2}{b_0}L_{b_0}(\phi(0))e^{-D_{\lambda_1}(t-s)}$$

chamando $K = \frac{2}{b_0}L_{b_0}(\phi(0))$,

$$\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq Ke^{-D_{\lambda_1}(t-s)}$$

mas, neste caso, u é a solução para o problema homogêneo, assim

$$\|T(t,s)\|^2_{H_0^1(\Omega} \leq Ke^{-D_{\lambda_1}(t-s)}.$$

Tome $K_0 = K^{1/2}$ e $D_0 = \frac{D_{\lambda_1}}{2}$, para obter

$$\|T(t+\theta,s)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq K_0e^{-D_0(t+\theta-s)}$$

provando que quando $s \to -\infty$ temos que $T(t,s)$ tende a zero exponencialmente.

Agora, considere a equação (4.1) com $g = 0$ e $f \neq 0$, levando em consideração que $f(t, 0) = 0$, para todo $t \geq s$, então a solução para o problema é dada por

$$\widehat{T}(t+\theta, s) = T(t+\theta, s)\phi(0) + \int_s^{t+\theta} T(t+\theta, \tau)\tilde{f}(\tau, u_\tau)d\tau.$$

Para $b_1 > 0$ e $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, defina o seguinte funcional de energia

$$L_{b_1}(\varphi) = \frac{1}{2}\left(\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} + b_1\|\varphi\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right).$$

Observe que o funcional L_{b_1} se comporta como o funcional L_{b_0} , então

$$\frac{b_1}{2}\|\varphi\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq L_{b_1}(\varphi) \leq \left(\frac{1}{2\lambda_1} + \frac{b_1}{2}\right)\|\varphi\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

Assim, substituindo φ por $u(t, s; \phi)$ sendo esta a solução da equação (4.1) com $g = 0$ e derivando em relação a t, obtemos o mesmo que na equação (4.45) apenas substituindo b_0 por b_1.

Agora, substituindo a equação em $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, temos

$$\begin{aligned}\left\langle u, \gamma(t)\Delta\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u + f(t, u_t)\right\rangle_{L^2(\Omega)} &= \gamma(t)\left\langle u, \Delta\frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle u, \Delta u\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle u, f(t, u_t)\rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= -\gamma(t)\left(\int_\Omega \nabla u\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\right) - \int_\Omega \nabla u\nabla u + \int_\Omega uf(t, u_t).\end{aligned}$$

E, utilizando a expressão $-\Delta u = -\dfrac{\partial u}{\partial t} + \gamma(t)\Delta\dfrac{\partial u}{\partial t} + f(t, u_t)$, obtemos

$$\begin{aligned}b_1\left\langle -\Delta u, \frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)} &= b_1\left\langle -\frac{\partial u}{\partial t} + \gamma(t)\Delta\frac{\partial u}{\partial t} + f(t, u_t), \frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= -b_1\left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)} + b_1\gamma(t)\left\langle \Delta\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)} + b_1\left\langle f(t, u_t), \frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Estudando cada parcela dessa igualdade e usando as desigualdades de Poincaré e de Young, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(L_{b_1}(u)\right) &\leq -\left(1 - \frac{\gamma_1\varepsilon_1}{2} - \frac{\varepsilon_2}{2\lambda_1}\right)\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \left(\frac{1}{2\varepsilon_2} + \frac{b_1}{2\varepsilon_3}\right)\|f(t, u_t)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &+ \left(\frac{\gamma_1}{2\varepsilon_1} - b_1\gamma_0 + \frac{b_1\varepsilon_3}{2\lambda_1}\right)\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{H_0^1(\Omega)} - b\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leq -\left(1 - \frac{\gamma_1\varepsilon_1}{2} - \frac{\varepsilon_2}{2\lambda_1}\right)\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \left(\frac{1}{2\varepsilon_2} + \frac{b_1}{2\varepsilon_3}\right)\|f(t, u_t)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &+ \left(\frac{\gamma_1}{2\varepsilon_1} - b_1\gamma_0 + \frac{b_1\varepsilon_3}{2\lambda_1}\right)\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{H_0^1(\Omega)}\end{aligned}$$

para todo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 > 0$. Considere, $\varepsilon_1 = \frac{1}{2\gamma_1}$, $\varepsilon_2 = \frac{\lambda_1}{2}$, $\varepsilon_3 = 2\lambda_1\left(\gamma_0 - \frac{\gamma_1^2}{b_1}\right)$ e $b_1 > \frac{\gamma_1^2}{\gamma_0}$, assim

$$\frac{d}{dt}\left(L_{b_1}(u)\right) \leq -\frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \left(\frac{4(\gamma_0 b_1 - \gamma_1^2) + b_1^2}{4\lambda_1(\gamma_0 b_1 - \gamma_1^2)}\right)\|f(t, u_t)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Como
$$\frac{-\lambda_1}{1+2\lambda_1}L_{b_1}(u) \geq -\frac{1}{2}\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)},$$
segue que
$$\frac{d}{dt}\left(L_{b_1}(u)\right) \leq \frac{-\lambda_1}{1+2\lambda_1}L_{b_1}(u) + \left(\frac{4(\gamma_0 b_1-\gamma_1^2)+b_1^2}{4\lambda_1(\gamma_0 b_1-\gamma_1^2)}\right)\|f(t,u_t)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Sejam $C_0 = \dfrac{\lambda_1}{1+2\lambda_1}$ e $C_{\gamma_1} = \left(\dfrac{4(\gamma_0 b_1-\gamma_1^2)+b_1^2}{4\lambda_1(\gamma_0 b_1-\gamma_1^2)}\right)$. Podemos reescrever a desigualdade acima como
$$\frac{d}{dt}\left(L_{b_1}(u)\right) \leq -C_0 L_{b_1}(u) + C_{\gamma_1}\|f(t,u_t)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Note que
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(e^{C_0 t}L_{b_1}(u)\right) &= C_0 e^{C_0 t}L_{b_1}(u) + e^{C_0 t}\left(\frac{d}{dt}L_{b_1}(u)\right)\\
&\leq C_0 e^{C_0 t}L_{b_1}(u) + e^{C_0 t}\left(-C_0 L_{b_1}(u) + C_{\gamma_1}\|f(t,u_t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right)\\
&= e^{C_0 t}C_{\gamma_1}\|f(t,u_t)\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Integrando de s a t, temos
$$\int_s^t \left[\frac{d}{dt}\left(e^{C_0 t}L_{b_1}(u)\right)\right]dr \leq \int_s^t \left(e^{C_0 r}C_{\gamma_1}\|f(r,u_r)\|^2_{L^2(\Omega)}\right)dr$$
logo,
$$e^{C_0 t}L_{b_1}(u(t)) \leq e^{C_0 s}L_{b_1}(\phi(0)) + C_{\gamma_1}C(R)\int_s^t e^{C_0 r}\|u_r\|^2_{L^2(\Omega)}dr.$$

Lembre que
$$e^{C_0 t}L_{b_1}(u(t)) \geq \frac{b}{2}\,e^{C_0 t}\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)},$$
e, portanto
$$\frac{b}{2}e^{C_0 t}\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq e^{C_0 t}L_{b_1}(u(t)) \leq e^{C_0 s}L_{b_1}(\phi(0)) + C_{\gamma_1}C(R)\int_s^t e^{C_0 r}\|u_r\|^2_{L^2(\Omega)}dr,$$
o que implica
$$\frac{b}{2}e^{C_0 t}\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq e^{C_0 s}L_{b_1}(\phi(0)) + C_{\gamma_1}C(R)\int_s^t e^{C_0 r}\|u_r\|^2_{L^2(\Omega)}dr.$$

Note que
$$e^{C_0 s}L_{b_1}(\phi(0)) \leq \left(\frac{1+b_1\lambda_1}{2\lambda_1}\right)\|\phi(0)\|^2_{H^1_0(\Omega)}\,e^{C_0 s},$$
logo se $\tilde{C}_0 = \dfrac{1+b\lambda_1}{2\lambda_1}$, temos
$$e^{C_0 s}L_{b_1}(\phi(0)) \leq \tilde{C}_0\,e^{C_0 s}\|\phi(0)\|^2_{H^1_0(\Omega)},$$

ou seja

$$\frac{b}{2}e^{C_0 t}\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq e^{C_0 s}\tilde{C}_0\|\phi(0)\|^2_{H^1_0(\Omega)} + C_{\gamma_1}C(R)\int_s^t e^{C_0 r}\|u_r\|^2_{L^2(\Omega)}dr.$$

Substituindo t por $t+\theta$, com $\theta \in [-h, 0]$, temos

$$\frac{b}{2}e^{C_0(t+\theta)}\|u(t+\theta)\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq e^{C_0 s}\tilde{C}_0\|\phi(0)\|^2_{H^1_0(\Omega)} + C_{\gamma_1}C(R)\int_s^{t+\theta} e^{C_0 r}\|u_r\|^2_{L^2(\Omega)}dr$$

agora multiplicando a desigualdade acima por $e^{-\theta C_0}$ $(-\theta \in [0, h])$, temos

$$\begin{aligned}\frac{b}{2}e^{C_0 t}\|u(t+\theta)\|^2_{H^1_0(\Omega)} &\leq e^{C_0(s-\theta)}\tilde{C}_0\|\phi(0)\|^2_{H^1_0(\Omega)} + C_{\gamma_1}C(R)e^{-C_0\theta}\int_s^{t+\theta} e^{C_0 r}\|u_r\|^2_{L^2(\Omega)}dr \\ &\leq e^{C_0(s+h)}\tilde{C}_0\|\phi(0)\|^2_{H^1_0(\Omega)} + C_{\gamma_1}C(R)e^{C_0 h}\int_s^{t+\theta} e^{C_0 r}\|u_r\|^2_{L^2(\Omega)}dr.\end{aligned}$$

Observe que se $t > s$ e $\theta \in [-h, s-t]$, então

$$u(t+\theta) = \phi(t+\theta-s)$$

assim,

$$e^{C_0 t}u(t+\theta) = e^{C_0 t}\phi(t+\theta-s)$$

o que implica

$$e^{C_0 t}\|u(t+\theta)\|^2_{H^1_0(\Omega)} = e^{C_0 t}\|\phi(t+\theta-s)\|^2_{H^1_0(\Omega)}.$$

Logo

$$e^{C_0 t}\|\phi(t+\theta-s)\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq \sup_{\theta\in[-h,s-t]} e^{C_0 t}\|\phi(t+\theta-s)\|^2_{H^1_0(\Omega)}.$$

Note que $-h \leq \theta \leq s-t \Leftrightarrow t-h \leq t+\theta \leq s$, deste modo $t-h \leq s \Rightarrow t \leq s+h$. Neste caso, $e^{C_b t} \leq e^{C_b(s+h)}$ e portanto

$$\begin{aligned}e^{C_0 t}\|u(t+\theta)\|^2_{H^1_0(\Omega)} &\leq \sup_{\theta\in[-h,s-t]} e^{C_0 t}\|\phi(t+\theta-s)\|^2_{H^1_0(\Omega)} \\ &\leq \sup_{\theta\in[-h,s-t]} e^{C_0(s+h)}\|\phi(t+\theta-s)\|^2_{H^1_0(\Omega)} \\ &\leq \sup_{\theta\in[-h,0]} e^{C_0(s+h)}\|\phi(\theta)\|^2_{H^1_0(\Omega)} = e^{C_0(s+h)}\|\phi\|^2_{C_H},\end{aligned}$$

ou seja

$$e^{C_0 t}\|\phi(t+\theta-s)\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq e^{C_0(s+h)}\|\phi\|^2_{C_H}.$$

Agora, se considerarmos $t > s+h$ e $\theta \in [s-t, 0]$, então $s-t \leq \theta \Leftrightarrow s \leq t+\theta$. Logo,

$$e^{C_0 t}\|u(t+\theta)\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq \sup_{\theta\in[-h,s-t]}\left(\frac{2}{b}\,e^{C_0(s+h)}\tilde{C}_0\|\phi(0)\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \frac{2}{b}\,C_{\gamma_1}C(R)e^{C_0 h}\int_s^{t+\theta} e^{C_0 r}\|u_r\|^2_{L^2(\Omega)}dr\right).$$

Então

$$\begin{aligned}e^{C_0 t}\|u(t+\theta)\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq \text{máx}\Bigg\{& e^{C_0(s+h)}\|\phi\|^2_{C_H}\,,\ \sup_{\theta\in[-h,s-t]}\Bigg[\frac{2}{b}\,\tilde{C}_0 e^{C_0(s+h)}\|\phi(0)\|^2_{H^1_0(\Omega)} \\ &+\ \frac{2}{b_1}\,C_{\gamma_1}C(R)e^{C_0 h}\int_s^{t+\theta} e^{C_0 r}\|u_r\|^2_{L^2(\Omega)}dr\Bigg]\Bigg\}.\end{aligned}$$

Segue que

$$\frac{b_1}{2}e^{C_0 t}\|u_t\|^2_{C_H} \leq \tilde{C}_0 e^{C_0(s+h)}\|\phi\|^2_{C_H)} + C_{\gamma_1}C(R)e^{C_0 h}\int_s^t e^{C_0 r}\|u_r\|^2_{C_H}dr.$$

Assuma que

$$C(R) < \frac{b_1 C_0}{2C_{\gamma_1}e^{C_0 h}}$$

e tome $\alpha_1 = \frac{2}{b_1}\tilde{C}_0\|\phi\|^2_{C_H}e^{C_0(s+h)}$ e $\beta = \frac{2}{b_1}C_{\gamma_1}C(R)e^{C_0 h}$. Segue que $\beta < C_0$.

Assim,

$$e^{C_0 t}\|u_t\|^2_{C_H} \leq \alpha_1 + \int_s^t \beta e^{C_0 r}\|u_r\|^2_{C_H}dr$$

e, aplicando a desigualdade de Gronwall, obtemos

$$\begin{aligned} e^{C_0 t}\|u_t\|^2_{C_H} &\leq \alpha_1 + \beta\alpha_1\int_s^t e^{\beta(t-r)}dr = \alpha_1 + \beta\alpha_1 e^{\beta t}\left(-\frac{e^{-r\beta}}{\beta}\right)\Bigg|_s^t \\ &= \alpha_1 + \alpha_1 e^{\beta t}\left(-e^{-t\beta} + e^{-s\beta}\right) = \alpha_1 e^{\beta(t-s)} \end{aligned}$$

logo,

$$\|u_t\|^2_{C_H} \leq e^{-C_0 t}\frac{2}{b_1}\tilde{C}_0\|\phi\|^2_{C_H}e^{C_0(s+h)}e^{\beta(t-s)}.$$

Assim,

$$\|u_t\|^2_{C_H} \leq \frac{2}{b_1}\tilde{C}_0\|\phi\|^2_{C_H}e^{C_0 h}e^{(\beta-C_0)t}e^{(C_0-\beta)s}$$

denotando,

$$K = \left(\frac{2}{b_1}\tilde{C}_0\|\phi\|^2_{C_H}e^{C_0 h}\right)^{1/2} \quad \text{e} \quad \alpha_2 = \frac{C_0-\beta}{2}$$

segue que

$$\|\widehat{T}(t+\theta,s)\|_{C_H} \leq K e^{\alpha_2(t-s)}.$$

Isto prova que $\widehat{T}(t+\theta,s)$ tende a zero exponencialmente quando $s \to -\infty$.

Por outro lado, precisamos mostrar que $U(t,s)D$ é compacto, onde $U(t,s) : C_H \to C_H$ é definido por

$$(U(t,s)\phi)(\theta) = \int_s^{t+\theta} T(t+\theta,\tau)\tilde{g}(\tau,u(\tau,s;\phi))d\tau.$$

Para isto, é suficiente provar que para qualquer subconjunto limitado $D \subset C_H$ e qualquer $T \geq s$, $U(t,s)D$ é pré-compacto em C_H. Para este fim, utilizaremos o Teorema de Arzelá-Ascoli como ferramenta, então devemos checar as seguintes condições:

(i) $U(t,s)D$ é limitado, para todo $t \geq s$;

(ii) Para cada $\theta \in [-h,0]$,

$$\overline{\bigcup_{\phi\in D}(U(t,s)\phi)(\theta)}$$

é um subconjunto compacto de $H^1_0(\Omega)$;

(iii) O conjunto $U(t,s)D$ deve ser equicontínuo, isto é, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|\theta_1 - \theta_2| \leq \delta$, então

$$|(U(t,s)\phi)(\theta_1) - (U(t,s)\phi)(\theta_2)| \leq \varepsilon$$

para todo $t \geq s$ e $\phi \in D$.

A afirmação (i) segue das estimativas obtidas na prova da existência de um família absorvente.

Para provar a afirmação (ii) usaremos que

$$\rho < \frac{n+2}{n-2} \quad \text{e qualquer} \quad \eta > 0 \quad \text{tal que} \quad \frac{\rho(n-2)-n}{2} < \eta < 1,$$

e, portanto temos a seguinte cadeia

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega) \xrightarrow{g} L^{\frac{2n}{n+2\eta}}(\Omega) \hookrightarrow H^{-\eta} \Subset H^{-1} \xrightarrow{B(t)} H_0^1(\Omega). \tag{4.46}$$

Com efeito, vamos estudar cada uma dessas inclusões e aplicações:

(a) $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2}}$

(b) Note que utilizando $g : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}$ e $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2}}$, temos que se $u \in L^{\frac{2n}{n-2}}$ então $u^{\frac{2n}{n-2}} \in L^1$. Com isso,

$$(u^\rho)^{\frac{2n}{(n-2)\rho}} \in L^1 \Longleftrightarrow u^\rho \in L^{\frac{2n}{(n-2)\rho}}.$$

Queremos determinar para qual p, temos a seguinte cadeia de inclusão

$$L^{\frac{2n}{(n-2)\rho}} \hookrightarrow L^p \hookrightarrow H^{-\eta} \hookrightarrow H^{-1}$$

mas, $L^p \hookrightarrow H^{-\eta} \Leftrightarrow H^\eta \hookrightarrow L^{p^*}$, assim $\eta - \frac{n}{2} \geq -\frac{n}{p^*} \Leftrightarrow \frac{2\eta - n}{2} \geq -\frac{n}{p^*} \Leftrightarrow p^* \leq \frac{2n}{-2\eta+n}$. Sendo p^* o conjugado de p, isto é,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{p} = 1 - \left(\frac{-2\eta+n}{2n}\right) \Longleftrightarrow \frac{1}{p} = \frac{n+2\eta}{2n}.$$

Logo,

$$L^{\frac{2n}{n+2\eta}} \hookrightarrow H^{-\eta}.$$

Devemos ter ainda

$$L^{\frac{2n}{(n-2)\rho}} \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n+2\eta}},$$

porém, isto é válido pois,

$$\frac{(n-2)\rho - n}{2} < \eta < 1 \Leftrightarrow (n-2)\rho - n < 2\eta \Leftrightarrow (n-2)\rho \leq n + 2\eta$$
$$\Leftrightarrow \frac{(n-2)\rho}{2n} \leq \frac{n+2\eta}{2n} \Leftrightarrow -n\frac{(n-2)\rho}{2n} \geq -n\frac{(n+2\eta)}{2n}.$$

Logo a cadeia (4.46) está bem definida. E ainda, como a última inclusão é compacta, provamos o item (ii).

Finalmente, para provar o item (iii) precisamos estimar,

$$\left|\int_s^{t+\theta_1} T(t+\theta_1,\tau)\tilde{g}(\tau,u(\tau,s;\phi))d\tau - \int_s^{t+\theta_2} T(t+\theta_2,\tau)\tilde{g}(\tau,u(\tau,s;\phi))d\tau\right|.$$

Suponha $\theta_1 < \theta_2$, assim

$$\begin{aligned}
&\left|\int_s^{t+\theta_1} T(t+\theta_1,\tau)\tilde{g}(\tau,u(\tau,s;\phi))d\tau - \int_s^{t+\theta_2} T(t+\theta_2,\tau)\tilde{g}(\tau,u(\tau,s;\phi))d\tau\right| = \\
&= \left|\int_s^{t+\theta_1} \left(T(t+\theta_1,\tau) - T(t+\theta_2,\tau)\right)\tilde{g}(\tau,u(\tau,s;\phi))d\tau - \int_{t+\theta_1}^{t+\theta_2} T(t+\theta_2,\tau)\tilde{g}(\tau,u(\tau,s;\phi))d\tau\right| \\
&\leq \int_s^{t+\theta_1} \left|\left(T(t+\theta_1,\tau) - T(t+\theta_2,\tau)\right)\tilde{g}(\tau,u(\tau,s;\phi))\right| d\tau + \int_{t+\theta_1}^{t+\theta_2} \left|T(t+\theta_2,\tau)\tilde{g}(\tau,u(\tau,s;\phi))\right| d\tau.
\end{aligned}$$

De (4.3),

$$|g(u)| \leq c|u|\left(1+|u|^{\rho-1}\right) + g(0) \leq c\left(|u|+|u|^{\rho}\right) + g(0) \leq c_1\left(1+|u|^{\rho-1}\right) + g(0).$$

Mas, provamos anteriormente que

$$\|T(t,s)\|_{C_H} \leq Ce^{-\alpha(t-s)},\ \alpha > 0$$

e que $\tilde{g}(\tau,u(\tau,s;\phi)) = B(\tau)g(u(\tau,s;\phi))$, com $\|B(\tau)\| \leq b_0$. Então,

$$\begin{aligned}
\int_{t+\theta_1}^{t+\theta_2} \left|T(t+\theta_2,\tau)\tilde{g}(\tau,u(\tau,s;\phi))\right| d\tau &\leq \int_{t+\theta_1}^{t+\theta_2} Ce^{-\alpha(t+\theta_2-\tau)}\, b_0 c_1\left(1+|u|^{\rho-1}\right) d\tau \\
&\leq \tilde{C}e^{-\alpha(t+\theta_2)}\left(\frac{e^{\alpha\tau}}{\alpha}\right)_{t+\theta_1}^{t+\theta_2} \\
&= \frac{\tilde{C}}{\alpha}e^{-\alpha(t+\theta_2)}\left(e^{\alpha(t+\theta_2)} - e^{\alpha(t+\theta_1)}\right) \\
&= \frac{\tilde{C}}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha(\theta_2-\theta_1)}\right) \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

quando $|\theta_1 - \theta_2| \to 0$, denotando $\tilde{C} = Cc_1b_0(1+d^{\rho-1})$. Lembrando que u é uma solução limitada.

Por outro lado, como o operador $\tilde{A}(t)$ é limitado uniformemente em relação ao tempo e $T(t,s)$ é o processo de evolução associado à equação (4.1) com $f = 0$ e $g = 0$, temos

$$\frac{d}{dt}T(t,\tau) = \tilde{A}(t)T(t,\tau) \tag{4.47}$$

logo, podemos reescrever (4.47) como

$$T(t+\theta_1,\tau) - T(t+\theta_2,\tau) = \int_{t+\theta_2}^{t+\theta_1}\left(\frac{d}{ds}T(s,\tau)\right)d\tau = \int_{t+\theta_2}^{t+\theta_1}\tilde{A}(t)T(t,\tau)d\tau$$

assim,

$$|T(t+\theta_1,\tau) - T(t+\theta_2,\tau)| \leq \int_{t+\theta_2}^{t+\theta_1} |\tilde{A}(t)|\,|T(t,\tau)|d\tau \leq M|t+\theta_1-t-\theta_2| = M|\theta_1-\theta_2|.$$

Obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_s^{t+\theta_1} \left| (T(t+\theta_1,\tau) - T(t+\theta_2,\tau))\tilde{g}(\tau, u(\tau,s;\phi)) \right| d\tau \leq \\
&\leq \int_s^{t+\theta_1} M|\theta_1 - \theta_2|\, b_0 \left(c_1(1+|u|^{\rho-1}\right) + g(0))d\tau \\
&= M_1|\theta_1 - \theta_2| \int_s^{t+\theta_1} d\tau \\
&= M_1|\theta_1 - \theta_2|(t+\theta_1 - s) \leq M_2|\theta_1 - \theta_2|.
\end{aligned}
$$

Concluindo que as hipóteses do Teorema de Arzelá-Ascoli estão satisfeitas. Logo $U(t,s)$ é compacto. Segue do Teorema 4.4.1, que $\{\, S(t,s) \,:\, t \geq s\}$ dado em (4.42) é assintoticamente compacto. $\square$

Teorema 4.4.2. *O problema* (4.1) *admite um atrator pullback.*

Demonstração. Segue das Proposições 4.4.1 e 4.4.2, do fato de existir um família $\mathcal{D}_b$-absorvente e do Teorema 4.3.1. $\square$

Capítulo 5

Equação de difusão não clássica não autônoma

Neste capítulo estamos interessados no estudo de uma equação de difusão não clássica não autônoma, baseado em [15]. Observe que esta equação é parecida com a presente no Capítulo 4, porém agora não estamos considerando o retardo.

Este estudo, teve como principal objetivo a comparação do comportamento assintótico do processo de evolução associado a equação com o retardo e sem o retardo. Neste capítulo, por exemplo, apresentamos a regularidade do atrator pullback para a equação sem o retardo.

Alguns resultados não serão demonstrados de maneira detalhada, pois iremos considerá-los provenientes do caso da equação com o retardo.

Queremos estudar a seguinte equação

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \gamma(t)\Delta\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{5.1}$$

sendo $s \in \mathbb{R}$ o tempo inicial, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ um domínio suave e limitado, Δ o operador Laplaciano.

Para a não linearidade $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ assumimos que: $f \in C^1(\mathbb{R})$ satisfazendo a condição de dissipatividade

$$\limsup_{|s|\to+\infty} \frac{f(s)}{s} \leq 0\,,\ \forall s \in \mathbb{R} \tag{5.2}$$

e a condição de crescimento

$$|f(t) - f(s)| \leq c|t-s|(1 + |t|^{\rho-1} + |s|^{\rho-1})\,,\ \forall s, t \in \mathbb{R} \tag{5.3}$$

com $1 < \rho < \frac{n+2}{n-2}$.

A função $\gamma : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ é assumida uniformemente contínua com

$$0 < \gamma_0 \leq \gamma(t) \leq \gamma_1 < \infty,\ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

5.1 Existência de solução local

Esta seção esta dedicada a prova da boa colocação do problema (5.1), ou seja, para cada dado inicial, temos a existência de uma única solução local em $H_0^1(\Omega)$.

Defina os operadores

$$B(t) = (I + \gamma(t)A)^{-1} \quad \text{e} \quad \tilde{A}(t) = -AB(t)$$

sendo, $A = -\Delta$ com condição de fronteira de Dirichlet e a função $\tilde{f}(t,u) = B(t)f(u)$. Podemos escrever o problema (5.1) como

$$\frac{du}{dt} = \tilde{A}(t)u + \tilde{f}(t,u).$$

Denotando, $h(t,u) = \tilde{A}(t)u + \tilde{f}(t,u)$, temos

$$\frac{du}{dt} = h(t,u).$$

O domínio do operador $\tilde{A}(t)$ não depende do tempo. De fato, se definirmos nosso problema em $H_0^1(\Omega)$, então $D(\tilde{A}(t)) = H_0^1(\Omega)$. Este operador é uniformemente limitado em relação ao tempo e pode ser escrito como

$$\tilde{A}(t) = \frac{1}{\gamma(t)}\left[I - (1 + \gamma(t)A)^{-1}\right]$$

para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Mais ainda, para qualquer $\alpha > 0$ podemos definir o espaço das potências fracionárias $X^\alpha = D(A^\alpha)$ de A, dotado da norma do gráfico. Assim , seja $x \in D(A^\alpha)$, temos $A^\alpha \tilde{A}(t)x = \tilde{A}(t)A^\alpha x$.

Em seguida, temos a continuidade da função $\mathbb{R} \ni t \mapsto B(t) \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega))$. Para qualquer $t, s \in \mathbb{R}$,

$$B(t) - B(s) = [\gamma(s) - \gamma(t)]\gamma(s)^{-1}(I + \gamma(t)A)^{-1}\left[I - (I + \gamma(s)A)^{-1}\right].$$

Ainda, seguindo os passos feitos em (4.9) e (4.10), temos

$$\|\tilde{A}(t) - \tilde{A}(s)\|_{\mathcal{L}(H_0^1(\Omega))} = \|A[B(t) - B(s)]\| \leq C|\gamma(t) - \gamma(s)|.$$

A função $f : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}$ é Lipschitz em subconjuntos limitados de $H_0^1(\Omega)$. Então, está bem definida a composição:

$$H_0^1(\Omega) \xrightarrow{f} H^{-1} \xrightarrow{B(t)} H_0^1(\Omega)$$

e $\mathbb{R} \times H_0^1(\Omega) \ni (t,u) \mapsto \tilde{f}(t,u) = B(t) \circ f \in H_0^1(\Omega)$ é uma função uniformemente contínua em relação à t e Lipschitz em subconjuntos limitados de $H_0^1(\Omega)$.

Agora, como $\tilde{A}(t)$ é uniformemente limitado no tempo (provado em (4.7)), então $\tilde{A}(t)$ é contínua em relação a t. Note que, dados $u, v \in H_0^1(\Omega)$ temos

$$\|\tilde{A}(t)u - \tilde{A}(t)v\| = \|\tilde{A}(t)(u - v)\| \leq \|\tilde{A}(t)\|\,\|u - v\|$$

mas, $\|\tilde{A}(t)\| \leq a$, para todo $t \in \mathbb{R}$, logo,

$$\|\tilde{A}(t)u - \tilde{A}(t)v\| \leq a\|u - v\|, \ \forall\, u, v \in H_0^1(\Omega)$$

isto é, $\tilde{A}(t)$ é Lipschitz em $H_0^1(\Omega)$.

Deste modo, obtemos que $h(t,u)$ é uma função contínua em relação a t e localmente Lipschitz em $H_0^1(\Omega)$. Considere $s \in \mathbb{R}$ e $T > s$, com $[s,T] \subset \mathbb{R}$ e $u \in H_0^1(\Omega)$. Defina o seguinte operador $F : C([s,T], H_0^1(\Omega)) \to C([s,T], H_0^1(\Omega))$ por

$$F(u(t)) = u_0 + \int_s^t h(r, u(r))dr,$$

para cada $u \in C([s,T], H_0^1(\Omega))$ e $t \in [s,T]$. Observe que, dados $u, v \in C([s,T], H_0^1(\Omega))$ e $t \in [s,T]$, temos

$$\begin{aligned}
\|F(u(t)) - F(v(t))\| &= \left\| u_0 + \int_s^t h(r,u(r))dr - \left(u_0 + \int_s^t h(r,v(r))dr \right) \right\| \\
&= \left\| \int_s^t \left(h(r,u(r)) - h(r,v(r)) \right) dr \right\| \\
&= \left\| \int_s^t \tilde{A}(r)u + \tilde{f}(r,u) - \tilde{A}(r)v - \tilde{f}(r,v) dr \right\|.
\end{aligned}$$

Já sabemos que existe $C_1 > 0$ tal que $\|\tilde{f}(r,u) - \tilde{f}(r,v)\| \leq C_1 \|u - v\|$. Assim,

$$\begin{aligned}
\|F(u(t)) - F(v(t))\| &= \left\| \int_s^t \tilde{A}(r)u + \tilde{f}(r,u) - \tilde{A}(r)v - \tilde{f}(r,v)\, dr \right\| \\
&\leq \int_s^t \|\tilde{A}(r)\| \, \|u - v\| + \|\tilde{f}(r,u) - \tilde{f}(r,v)\| \, dr \\
&\leq \int_s^t a\|u - v\| + C_1\|u - v\| \, dr = (a + C_1)\|u - v\|(t - s).
\end{aligned}$$

Disto, segue que

$$\|F(u(t)) - F(v(t))\| \leq L\|u - v\|(t - s), \tag{5.4}$$

onde $L = a + C_1$. Para $n \in \mathbb{N}^*$ temos

$$\|F^n(u(t)) - F^n(v(t))\| \leq \frac{L^n (t-s)^n}{n!}\|u - v\| \tag{5.5}$$

com $u, v \in C([s,T], H_0^1(\Omega))$ e $t \in [s,T]$. De fato, usando indução, para $n = 1$ já está provado em (5.4). Suponha que (5.5) seja satisfeito para $n \in \mathbb{N}$, então devemos mostrar que é válido

$$\|F^{n+1}(u(t)) - F^{n+1}(v(t))\| \leq \frac{L^{n+1}(t-s)^{n+1}}{(n+1)!}\|u - v\|. \tag{5.6}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|F^{n+1}(u(t)) - F^{n+1}(v(t))\| &= \|F\left(F^n(u(t))\right) - F\left(F^n(v(t))\right)\| \\
&= \left\| u_0 + \int_s^t h(r, F^n(u(r)))dr - \left(u_0 + \int_s^t h(r, F^n(v(r)))dr \right) \right\| \\
&\leq \int_s^t \Big(\|\tilde{A}(r)\| \, \|F^n(u(r)) + F^n(v(r))\| \\
&+ \|\tilde{f}(r, F^n(u(r))) - \tilde{f}(r, F^n(v(r)))\| \Big) \, dr \\
&\leq \int_s^t a \left(\frac{L^n (r-s)^n}{n!} \right) \|u - v\| + C_1 \left(\frac{L^n (r-s)^n}{n!} \right) \|u - v\| \, dr \\
&= \frac{L^{n+1}}{n!}\|u - v\| \int_s^t (r-s)^n \, dr = \frac{L^{n+1}(t-s)^{n+1}}{(n+1)!}\|u - v\|.
\end{aligned}$$

logo, (5.6) é válido. Consequentemente, para cada $n \in \mathbb{N}^*$ temos

$$\|F^n(u(t)) - F^n(v(t))\| \leq \frac{L^n(t-s)^n}{n!}\|u - v\|$$

com $u, v \in C([s,T], H_0^1(\Omega))$. Mas, isto mostra que para n suficientemente grande, F^n é uma contração no espaço completo $C([s,t], H_0^1(\Omega))$. Aplicando o Princípio de Contração de Banach, existe $u_1 \in C([s,t], H_0^1(\Omega))$ tal que

$$F^n(u_1(t)) = u_1(t).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|F(u_1(t)) - u_1(t)\| &= \|F(F^n(u_1(t))) - F^n(u_1(t))\| = \|F^{n+1}(u_1(t)) - F^n(u_1(t))\| \\
&= \|F^n(F(u_1(t))) - F^n(u_1(t))\| \leq \frac{L^n(t-s)^n}{n!}\|F(u_1(t)) - u_1(t)\|.
\end{aligned}$$

Se $q = \dfrac{L^n(t-s)^n}{n!}$, temos $q \in (0,1)$, logo,

$$\|Fu_1 - u_1\| \leq q\|Fu_1 - u_1\| \Leftrightarrow F(u_1(t)) = u_1(t)$$

ou seja, $u_1(t)$ é um ponto fixo de $F(\cdot)$. Mais ainda, $u_1(t)$ é o único ponto fixo, pois se existisse outro ponto fixo, por exemplo, $u_2(t)$, então, $u_2(t)$ deveria ser ponto fixo de $F^n(\cdot)$, mas F^n possui apenas um. Logo, o único ponto fixo de F é a solução local do problema (5.1).

Portanto, para cada valor inicial em $H_0^1(\Omega)$ e tempo inicial $s \in \mathbb{R}$, existe $\tau > 0$ e uma única solução $u(\cdot, s; u_0) \in C^1([s, s+\tau], H_0^1(\Omega))$.

5.2 Solução global

Seguindo os passos feitos na seção Solução Global e Família Pullback Absorvente do Capítulo 4. Devido a condição de dissipatividade (5.2) da f temos que, para cada $\delta > 0$ existe uma constante $C_\delta > 0$ tal que

$$\int_\Omega f(u)u \leq \delta\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + C_\delta \quad \text{e} \quad \int_\Omega G(u) \leq \delta\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + C_\delta \tag{5.7}$$

para cada $u \in H_0^1(\Omega)$ e $G(r) = \displaystyle\int_0^r f(\theta)d\theta$.

Defina os funcionais de energia $L_b, L : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, com $b > 0$, por

$$L_b(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{b}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - b\int_\Omega G(u) \quad \text{e} \quad L(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \int_\Omega G(u).$$

Note que, existe uma constante $K = K(b) > 0$ tal que

$$L_b(u) \geq \frac{b}{8}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - K$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega)$. De fato, temos

$$\int_\Omega G(u) \leq \delta\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + C_\delta \Rightarrow -b\int_\Omega G(u) \geq -b\delta\|u\|^2_{L^2(\Omega)} - bC_\delta.$$

Aplicando a desigualdade de Poincaré, obtemos

$$-b\int_\Omega G(u) \geq -b\lambda_1^{-1}\delta\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - bC_\delta,$$

onde $\lambda_1 > 0$ é o primeiro autovalor de $-\Delta$. Assim,

$$\begin{aligned}
L_b(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{b}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - b\int_\Omega G(u) \\
&\geq \frac{1}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{b}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - b\lambda_1^{-1}\delta\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - bC_\delta \\
&\geq \left(\frac{b}{2} - \frac{b\delta}{\lambda_1}\right)\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - bC_\delta.
\end{aligned}$$

Tome $\delta = \dfrac{\lambda_1}{8}$ e $K = bC_{\lambda_1/8}$, para obter

$$\begin{aligned}
L_b(u) &\geq \left(\frac{b}{2} - \frac{b}{\lambda_1}\frac{\lambda_1}{8}\right)\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - K = \frac{3b}{8}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - K \\
&\geq \frac{b}{8}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - K.
\end{aligned}$$

E ainda, para cada $r > 0$ existe uma constante $K_r > 0$ tal que

$$L_b(u) \leq K_r\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} + K \tag{5.8}$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq r$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
L_b(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{b}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - b\int_\Omega G(u) \leq \frac{1}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{b}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} + b\int_\Omega G(u) \\
&\leq \frac{1}{2\lambda_1}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \frac{b}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} + b\delta\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + C_\delta b \\
&\leq \left(\frac{1}{2\lambda_1} + \frac{b}{2} + \frac{b\delta}{\lambda_1}\right)\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} + C_\delta b \\
&= \left(\frac{1 + b(\lambda_1 + 2\delta)}{2\lambda_1}\right)\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} + bC_\delta
\end{aligned}$$

basta tomar $K_r = \dfrac{1 + b(\lambda_1 + 2\delta)}{2\lambda_1}$ e $K = bC_\delta$, provando (5.8).

Mais ainda,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(L(u)) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right) - \frac{d}{dt}\left(\int_\Omega G(u)\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\langle\nabla u, \nabla u\rangle_{L^2(\Omega)}\right) - \int_\Omega \left(f(u)\frac{du}{dt}\right)dx \\
&= \left\langle -\Delta u, \frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega \left(f(u)\frac{du}{dt}\right)dx.
\end{aligned}$$

Note que podemos reescrever a equação (5.1) como $-\Delta u = f(u) - \dfrac{\partial u}{\partial t} + \gamma(t)\Delta\dfrac{\partial u}{\partial t}$, assim

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(L(u)\right) &= \left\langle -\Delta u, \frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega \left(f(u)\frac{du}{dt}\right) dx \\
&= \left\langle f(u) - \frac{\partial u}{\partial t} + \gamma(t)\Delta\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega \left(f(u)\frac{du}{dt}\right) dx \\
&= \left\langle f(u), \frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)} - \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)} + \gamma(t)\left\langle \Delta\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega f(u)\frac{du}{dt}dx \\
&= \int_\Omega \left(f(u)\frac{du}{dt}\right) dx - \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)} - \gamma(t)\left\langle \nabla\frac{\partial u}{\partial t}, \nabla\frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega \left(f(u)\frac{du}{dt}\right) dx \\
&= -\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)} - \gamma(t)\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{H^1_0(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}\left(L(u)\right) = -\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)} - \gamma(t)\left\|\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Para $b > 0$ suficientemente grande, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(L_b(u)\right) &= \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}\left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + b\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} - 2b\int_\Omega G(u)\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}\left(\langle u, u\rangle_{L^2(\Omega)} + b\langle \nabla u, \nabla u\rangle_{L^2(\Omega)} - 2b\int_\Omega G(u)\right)\right] \\
&= \left\langle u, \frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)} + b\left\langle -\Delta u, \frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)} - b\int_\Omega \left(f(u)\frac{\partial u}{\partial t}\right) dx \\
&= \left\langle u, \frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)} + b\left(\frac{d}{dt}(L(u))\right) \\
&= \left\langle u, \frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)} - b\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)} - \gamma(t)b\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{H^1_0(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Substituindo $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \gamma(t)\Delta\dfrac{\partial u}{\partial t} + \Delta u + f(u)$ no primeiro produto interno da igualdade acima, temos

$$\begin{aligned}
\left\langle u, \frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)} &= \left\langle u, \gamma(t)\Delta\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u + f(u)\right\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= \gamma(t)\left\langle u, \Delta\frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle u, \Delta u\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle u, f(u)\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= \gamma(t)\left(-\int_\Omega \nabla u\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\right) - \int_\Omega \nabla u\nabla u + \int_\Omega uf(u)
\end{aligned}$$

logo

$$\frac{d}{dt}\left(L_b(u)\right) = -\gamma(t)\left\langle \nabla u, \nabla\frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)} - \|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \int_\Omega uf(u) - b\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)} - b\gamma(t)\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{H^1_0(\Omega)}.$$

Mas, aplicando (5.7) e a desigualdade de Poincaré, obtemos

$$\int_\Omega uf(u) \leq \delta\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + C_\delta \leq \delta\lambda_1^{-1}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} + C_\delta$$

e, utilizando a limitação de $\gamma(t)$ e a desigualdade de Young, respectivamente, com $\varepsilon_1 > 0$, temos

$$\begin{aligned}
-\gamma(t)\left\langle \nabla u, \nabla\frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)} &\leq \left|-\gamma(t)\left\langle \nabla u, \nabla\frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)}\right| \leq \gamma_1\left|\left\langle \nabla u, \nabla\frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)}\right| \\
&\leq \gamma_1\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\left\|\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega)} = \gamma_1\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq \frac{\gamma_1\varepsilon_1}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \frac{\gamma_1}{2\varepsilon_1}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{H_0^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(L_b(u)) \leq \frac{\gamma_1\varepsilon_1}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \frac{\gamma_1}{2\varepsilon_1}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \delta\lambda_1^{-1}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \\
+ C_\delta - b\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)} - b\gamma_0\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{H_0^1(\Omega)} \\
\leq -\left(1 - \frac{\gamma_1\varepsilon_1}{2} - \delta\lambda_1^{-1}\right)\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \left(\frac{\gamma_1}{2\varepsilon_1} - b\gamma_0\right)\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{H_0^1(\Omega)} + C_\delta
\end{aligned}$$

para $\varepsilon_1, \delta > 0$. Tome $\varepsilon_1 = \dfrac{\gamma_1}{2b\gamma_0}$, $\delta = \dfrac{\lambda_1}{2}$ e $b > \dfrac{\gamma_1^2}{2\gamma_0}$. Defina

$$C_0 = \frac{2b\gamma_0 - \gamma_1^2}{4b\gamma_0} \quad \text{e} \quad C_1 = C_\delta.$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}(L_b(u)) \leq -C_0\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} + C_1.$$

Para cada $r > 0$, temos $L_b(u) \leq K_r\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} + K$, logo,

$$-C_0\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{C_0}{K_r}L_b(u) + \frac{KC_0}{K_r}.$$

Considerando, $C = \dfrac{C_0}{K_r}$ e $K = \dfrac{KC_0}{K_r}$, obtemos

$$\frac{d}{dt}(L_b(u)) \leq -CL_b(u) + K.$$

Note que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(e^{Ct}L_b(u)\right) &= Ce^{Ct}L_b(u) + e^{Ct}\left(\frac{d}{dt}(L_b(u))\right) \\
&\leq Ce^{Ct}L_b(u) - Ce^{Ct}L_b(u) + e^{Ct}K.
\end{aligned}$$

Assim, integrando a desigualdade de s a t, temos

$$e^{Ct}L_b(u) \leq e^{Cs}L_b(u_0) + \frac{K}{C}\left(e^{Ct} - e^{Cs}\right).$$

Mas, como $L_b(u) \geq \frac{b}{8}\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} - K$, então $e^{Ct}L_b(u) \geq e^{Ct}\frac{b}{8}\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} - e^{Ct}K$. Assim

$$e^{Ct}\frac{b}{8}\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} - e^{Ct}K \leq e^{Cs}L_b(u_0) + \frac{K}{C}\left(e^{Ct} - e^{Cs}\right)$$

logo,

$$e^{Ct}\frac{b}{8}\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq e^{Ct}K + e^{Cs}L_b(u_0) + \frac{K}{C}\left(e^{Ct} - e^{Cs}\right).$$

Note que,

$$e^{Cs}L_b(u_0) \leq e^{Cs}\|u_0\|^2_{H^1_0(\Omega)} + Ke^{Cs}$$

assim,

$$e^{Ct}\frac{b}{8}\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq e^{Cs}\|u_0\|^2_{H^1_0(\Omega)} + Ke^{Cs} + e^{Ct}K + \frac{K}{C}\left(e^{Ct} - e^{Cs}\right).$$

Portanto,

$$\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq \frac{8}{b}\left[e^{C(s-t)}\|u_0\|^2_{H^1_0(\Omega)} + K + \frac{K}{C} - \frac{K}{C}e^{C(s-t)}\right]. \tag{5.9}$$

Fazendo $s \to -\infty$ em (5.9) temos

$$\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} \longrightarrow K + \frac{K}{C}$$

Defina a função $r(t)$ por

$$r(t) = K + \frac{K}{C} := R$$

Observe que a função $r(\mathrm{t})$ não explode em tempo finito. Portanto, temos a existência global de qualquer solução $u(t,s;u_0)$ de (5.1), isto é, para cada $u_0 \in H^1_0(\Omega)$, $u(t,s;u_0) \in C([s,+\infty), H^1_0(\Omega))$. E ainda,

$$\overline{B}_{H^1_0(\Omega)}(0, R^{1/2})$$

é um conjunto fixo pullback fortemente absorvente de conjuntos limitados de $H^1_0(\Omega)$.

5.3 Existência e regularidade do atrator pullback

A garantia da existência do atrator pullback e o estudo da sua regularidade será abordada nesta seção. Iremos seguir os passos feitos na seção de Existência de Atrator Pullback para a equação de difusão não clássica não autônoma com retardo. Para isto, queremos aplicar os Teoremas 3.2.6 e 3.2.5, respectivamente.

Seja $u(t,s;u_0)$ a solução global para a equação 5.1. Podemos definir então o processo associado a esta equação dado por :

$$u(t,s;u_0) = S(t,s)u_0 = T(t,s)u_0 + U(t,s)u_0$$

sendo $T(t,s)$ o processo de evolução associado a parte linear de (5.1) (isto é, quando $f \equiv 0$)

$$U(t,s)u_0 = \int_s^t T(t,s)\tilde{f}(\tau, S(\tau,s)u_0)d\tau.$$

Primeiramente, para que as hipóteses do Teorema 3.2.6 estejam satisfeitas devemos ter que a solução $u(t,s;u_0)$ da parte linear de (5.1) (com $f \equiv 0$) decaia exponencialmente para zero e que o operador $U(t,s)$ seja compacto.

Com efeito, defina $T(t,s)$ como sendo a solução da parte linear de (5.1) e o seguinte funcional de energia

$$L_{b_0}(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{b_0}{2}\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)}$$

com $b_0 > 0$. Assim, aplicando a desigualdade de Poincaré,

$$\begin{aligned} L_b(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{b}{2}\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} &\leq \frac{1}{2\lambda_1}\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \frac{b}{2}\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} \\ &\leq \left(\frac{1}{2\lambda_1} + \frac{b}{2}\right)\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)}, \end{aligned}$$

logo,

$$L_b(u) \leq \tilde{K}\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)}, \tag{5.10}$$

com $\tilde{K} = \dfrac{1}{2\lambda_1} + \dfrac{b}{2}$.

Utilizando a igualdade $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \gamma(t)\Delta\dfrac{\partial u}{\partial t} + \Delta u$ e aplicando as desigualdades de Young e Hölder, respectivamente, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(L_{b_0}(u)\right) &= \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}\left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + b_0\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)}\right)\right] \\ &= \left\langle u, \frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)} + b_0\left\langle -\Delta u, \frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= \left\langle u, \frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)} - b_0\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)} - \gamma(t)b_0\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{H^1_0(\Omega)} \\ &= -\gamma(t)\left\langle \nabla u, \nabla\frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle_{L^2(\Omega)} - \|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} - b_0\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)} - \gamma(t)b_0\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{H^1_0(\Omega)} \\ &\leq \frac{\gamma_1\varepsilon_1}{2}\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \frac{\gamma_1}{2\varepsilon_1}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{H^1_0(\Omega)} - \|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} - b_0\gamma_0\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{H^1_0(\Omega)} - b_0\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leq -\left(1 - \frac{\gamma_1\varepsilon_1}{2}\right) + \left(\frac{\gamma_1}{2\varepsilon_1} - b_0\gamma_0\right)\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{H^1_0(\Omega)} \end{aligned}$$

para todo $\varepsilon_1 > 0$. Considere $\varepsilon_1 = \dfrac{\gamma_1}{2b_0\gamma_0}$, $b_0 > \dfrac{\gamma_1^2}{4\gamma_0}$ e $\tilde{C}_0 = \left(1 - \dfrac{\gamma_1^2}{4\gamma_0 b_0}\right)$, assim

$$\frac{d}{dt}\left(L_{b_0}(u)\right) \leq -\tilde{C}_0\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)}.$$

De (5.10)

$$\frac{d}{dt}\left(L_{b_0}(u)\right) \leq -\tilde{C}_0\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq -\frac{\tilde{C}_0}{\tilde{K}}L_{b_0}(u).$$

Considere $\alpha = \dfrac{\tilde{C}_0}{\tilde{K}}$, então $\dfrac{d}{dt}\left(L_{b_0}(u)\right) \leq -\alpha L_{b_0}(u)$. Consequentemente,

$$\frac{\frac{d}{dt}L_{b_0}(u)}{L_{b_0}(u)} \leq -\alpha.$$

Integrando de s até t, obtemos

$$\int_s^t \frac{\frac{d}{dt}L_{b_0}(u)}{L_{b_0}(u)}dr \leq -\int_s^t \alpha dr,$$

portanto

$$\ln(L_{b_0}(u(t,s;u_0))) - \ln(L_{b_0}(u(s,s;u_0))) \leq -\alpha(t-s)$$

podendo reescrever como

$$\ln\left(\frac{L_{b_0}(u(t,s;u_0))}{L_{b_0}(u_0)}\right) \leq -\alpha(t-s),$$

ou seja

$$L_{b_0}(u(t,s;u_0)) \leq L_{b_0}(u_0)e^{-\alpha(t-s)}.$$

Então

$$\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{2}{b_0}L_{b_0}(u(t,s;u_0)) \leq \frac{2}{b_0}L_{b_0}(u_0)e^{-\alpha(t-s)}$$

chamando $K_2 = \dfrac{2}{b_0}L_{b_0}(u_0)$, temos

$$\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq K_2 e^{-\alpha(t-s)}.$$

Como u é a solução para o problema homogêneo, temos

$$\|T(t,s)\|^2_{H_0^1(\Omega} \leq K_2 e^{-\alpha(t-s)}.$$

Provando que se $s \to -\infty$ então $T(t,s)$ tende a zero exponencialmente.

Agora, como $\rho < \dfrac{n+2}{n-2}$, podemos escolher $s \in (1/2, 1)$ tal que $\rho \leq \dfrac{n+2s}{n-2}$ e assim, temos a seguinte cadeia

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega) \xrightarrow{f} L^{\frac{2n}{n+2s}}(\Omega) \hookrightarrow H^{-s} \Subset H^{-1} \xrightarrow{B(t)} H_0^1(\Omega).$$

Logo, o operador $U(t,s)$ é compacto.

Observe que conseguimos escrever o processo $\{\, S(t,s) \,:\, t \geq s\}$ associado a (5.1) como $S(t,s) = T(t,s) + U(t,s)$, e satisfazendo as hipóteses do Teorema 3.2.6. Logo, aplicando o Teorema 3.2.5, concluímos que existe um atrator pullback $\{\mathcal{A}(t) \,:\, t \in \mathbb{R}\}$ em $H_0^1(\Omega)$. Mais ainda, temos

$$\bigcup_{t\in\mathbb{R}} \mathcal{A}(t) \text{ é limitado em } H_0^1(\Omega). \tag{5.11}$$

Devido a (5.11), temos que o atrator pode ser escrito como o conjunto de todas as soluções globais limitadas

$$\{\mathcal{A}(t) \,:\, t \in \mathbb{R}\} = \{\xi : \mathbb{R} \to H_0^1(\Omega) \,:\, \xi \text{ é uma solução global e limitada de } (5.1)\}.$$

Observe que se $\xi:\mathbb{R}\to H_0^1(\Omega)$ é tal que $\xi(t)\in\mathcal{A}(t)$, para todo $t\in\mathbb{R}$, então

$$\xi(t)=T(t,s)\xi(s)+\int_s^t T(t,\theta)\tilde{f}(\theta,\xi(\theta))d\theta$$

usando o fato de $T(t,s)$ decair exponencialmente e fazendo $s\to-\infty$ temos

$$\xi(t)=\int_{-\infty}^t T(t,\theta)\tilde{f}(\theta,\xi(\theta))d\theta.$$

Seja $w_0=\xi(s)$, para $s\in\mathbb{R}$ fixado e considere

$$W(t,s)w_0:=w(t,s;0)=\int_s^t T(t,\theta)\tilde{f}(\xi(\theta))d\theta.$$

Desta forma, observe que $w(\cdot,s;0)$ é solução da seguinte equação

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial t}-\gamma(t)\Delta\dfrac{\partial w}{\partial t}-\Delta w=f(\xi(t))\\ w(s)=0\end{cases}. \tag{5.12}$$

Queremos estimar a solução para o problema (5.12) sendo w_0 pertencente a um subconjunto limitado de $H_0^1(\Omega)$. Denotemos $X^\alpha=D(A^\alpha)$ como o espaço das potências fracionárias relacionadas ao operador A. Considere $0<\varepsilon<1$. Observe que a função f leva conjuntos limitados de $X^{\frac{1}{2}}$ em subconjuntos limitados de $X^{\frac{-1+\varepsilon}{2}}$.

De fato, devemos provar que dado $B\subset H_0^1(\Omega)$ um subconjunto limitado, então $f(B)\subset X^{\frac{-1+\varepsilon}{2}}$ é limitado. Para provar isto, primeiro devemos encontrar p tal que $L^p\hookrightarrow X^{\frac{-1+\varepsilon}{2}}$, para que seja válido

$$\|f(u)\|_{X^{\frac{-1+\varepsilon}{2}}}\le c\|f(u)\|_{L^p}$$

com $c>0$. Note que

$$L^p\hookrightarrow X^{-\left(\frac{1-\varepsilon}{2}\right)}\Leftrightarrow X^{\frac{1-\varepsilon}{2}}\hookrightarrow L^{p^*}$$

sendo $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p^*}=1$. Assim,

$$\begin{aligned}H^{1-\varepsilon}\hookrightarrow L^{p^*}&\Leftrightarrow 1-\varepsilon-\frac{n}{2}\ge-\frac{n}{p^*}\Leftrightarrow\frac{n-2(1-\varepsilon)}{2}\le\frac{n}{p^*}\\ &\Leftrightarrow p^*\le\frac{2n}{n-2(1-\varepsilon)}.\end{aligned}$$

Pelo fato de $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p^*}=1$ então $\dfrac{1}{p}=\dfrac{n+2(1-\varepsilon)}{2n}$. Logo,

$$L^{\frac{2n}{n+2(1+\varepsilon)}}\hookrightarrow X^{-\left(\frac{1-\varepsilon}{2}\right)}.$$

Obtemos,

$$\|f(u)\|_{X^{-\left(\frac{1-\varepsilon}{2}\right)}}\le c\|f(u)\|_{L^{\frac{2n}{n+2(1+\varepsilon)}}}.$$

Agora, pela condição de crescimento da f, temos

$$|f(u)| \leq c|u|(1+|u|^{\rho-1})$$

assim,

$$\|f(u)\|_{L^{\frac{2n}{n+2(1+\varepsilon)}}} \leq \left\|c|u|(1+|u|^{\rho-1})\right\|_{L^{\frac{2n}{n+2(1+\varepsilon)}}}$$

aplicando a desigualdade de Hölder generalizada, com

$$r = \frac{2n}{n+2(1+\varepsilon)},\ p = \frac{2n}{n-2} \ \text{ e } \ q = \frac{n}{2+\varepsilon}$$

e, satisfazendo $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$, obtemos

$$\begin{aligned} \left\|c|u|(1+|u|^{\rho-1})\right\|_{L^{\frac{2n}{n+2(1+\varepsilon)}}} &\leq \|c|u|\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} \left\|1+|u|^{\rho-1}\right\|_{L^{\frac{n}{2+\varepsilon}}} \\ &\leq c_1\|u\|_{L^{\frac{2n}{n+2(1+\varepsilon)}}} \left(|\Omega| + \left\||u|^{\rho-1}\right\|_{L^{\frac{n}{2+\varepsilon}}}\right). \end{aligned} \tag{5.13}$$

Note que

$$\||u|^{\rho-1}\|_{L^{\frac{n}{2+\varepsilon}}} = \left(\int_\Omega |u|^{(\rho-1)\frac{n}{2+\varepsilon}}\right)^{\frac{2+\varepsilon}{n}} = \left[\left(\int_\Omega |u|^{(\rho-1)\frac{n}{2+\varepsilon}}\right)^{\frac{2+\varepsilon}{n(\rho-1)}}\right]^{\rho-1} = \|u\|^{\rho-1}_{L^{\frac{n(\rho-1)}{2+\varepsilon}}}.$$

assim, substituindo esta igualdade em (5.13) e pelo fato de que $|\Omega| < +\infty$, podemos definir $c_2 = |\Omega|$ e $c_1 = c^{1/2}$, obtendo

$$\left\|c|u|(1+|u|^{\rho-1})\right\|_{L^{\frac{2n}{n+2(1+\varepsilon)}}} \leq c_1\|u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} \left(c_2 + \|u\|^{\rho-1}_{L^{\frac{n(\rho-1)}{2+\varepsilon}}}\right).$$

Já sabemos que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2}}$. Note que

$$\rho < \frac{n+2}{n-2} \Leftrightarrow \rho - 1 \leq \frac{4}{n-2} \Leftrightarrow \frac{(\rho-1)(n-2)}{2} \leq 2,$$

e, para $\varepsilon > 0$, temos

$$\frac{(\rho-1)(n-2)}{2} \leq 2+\varepsilon \Leftrightarrow 1 - \frac{n}{2} \geq -n\frac{(n-2)}{2n}.$$

Logo, $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{n(\rho-1)}{2+\varepsilon}}$. Assim,

$$\left\|c|u|(1+|u|^{\rho-1})\right\|_{L^{\frac{2n}{n+2(1+\varepsilon)}}} \leq c_1c_3\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \left(c_2 + c_4\|u\|^{\rho-1}_{H_0^1(\Omega)}\right)$$

sendo $c_2, c_4 > 0$. Com isto, considere

$$\tilde{c} = \text{máx}\{c_1c_2c_3\,,\ c_1c_3c_4\,\}$$

logo,

$$\|f(u)\|_{L^{\frac{2n}{n+2(1+\varepsilon)}}} \leq \tilde{c}\left(\|u\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u\|^{\rho}_{H_0^1(\Omega)}\right).$$

Como $u \in B$, o qual é um subconjunto limitado de $H_0^1(\Omega)$, então

$$\|f(u)\|_{L^{\frac{2n}{n+2(1+\varepsilon)}}} \leq K$$

consequentemente

$$\|f(u)\|_{X^{\frac{-1+\varepsilon}{2}}} \leq cK$$

provando que $f(B)$ é um subconjunto limitado de $X^{\frac{-1+\varepsilon}{2}}$.

Agora, observe que para qualquer $u_0 \in X^{\frac{1+\varepsilon}{2}}$

$$\|T(t,s)u_0\|_{X^{\frac{1+\varepsilon}{2}}} = \left\|A^{\frac{1+\varepsilon}{2}}T(t,s)u_0\right\|_X = \left\|A^{\frac{1+\varepsilon}{2}}T(t,s)A^{-\left(\frac{1+\varepsilon}{2}\right)}A^{\frac{1+\varepsilon}{2}}u_0\right\|_X. \tag{5.14}$$

Utilizando o Teorema A.2.14 temos

$$\left\|A^{\frac{1+\varepsilon}{2}}T(t,s)A^{-\left(\frac{1+\varepsilon}{2}\right)}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq c_1(t-s)^{\left(\frac{1+\varepsilon}{2}\right)-\left(\frac{1+\varepsilon}{2}\right)}e^{-\alpha(t-s)} \tag{5.15}$$

assim,

$$\|T(t,s)u_0\|_{X^{\frac{1+\varepsilon}{2}}} \leq c_1e^{-\alpha(t-s)}\left\|A^{\frac{1+\varepsilon}{2}}u_0\right\|_X = c_1e^{-\alpha(t-s)}\|u_0\|_{X^{\frac{1+\varepsilon}{2}}}$$

logo,

$$\|T(t,s)u_0\|_{X^{\frac{1+\varepsilon}{2}}} \leq c_1e^{-\alpha(t-s)}\|u_0\|_{X^{\frac{1+\varepsilon}{2}}}.$$

Com isso,

$$\begin{aligned}\|W(t,s)w_0\|_{X^{\frac{1+\varepsilon}{2}}} &= \left\|\int_s^t T(t,\theta)\tilde{f}(\xi(\theta))d\theta\right\|_{X^{\frac{1+\varepsilon}{2}}} \\ &\leq \int_s^t \|T(t,\theta)\|_{\mathcal{L}\left(X^{\frac{1+\varepsilon}{2}}\right)}\left\|\tilde{f}(\xi(\theta))\right\|_{X^{\frac{1+\varepsilon}{2}}} d\theta \\ &\leq c_1\int_s^t e^{-\alpha(t-\theta)}c_2 d\theta = \frac{c_3}{\alpha}e^{-\alpha t}\left(e^{\alpha t}-e^{\alpha s}\right),\end{aligned} \tag{5.16}$$

lembrando que pelo fato de $\tilde{f}(t,u) = B(t)f(u)$, $\tilde{f}$ ser uma aplicação compacta e ξ uma solução global limitada de (5.1), temos a limitação uniforme de $\left\|\tilde{f}(\xi(\theta))\right\|_{X^{\frac{1+\varepsilon}{2}}}$. Mais ainda, estamos denotando $c_3 = c_1c_2$ e $c = \dfrac{c_3}{\alpha}$.

Como $\xi(t) = \lim_{s\to-\infty} W(t,s)$, assim segue de (5.16) que

$$\begin{aligned}\|\xi(t)\|_{X^{\frac{1+\varepsilon}{2}}} &= \left\|\lim_{s\to-\infty} W(t,s)\right\|_{X^{\frac{1+\varepsilon}{2}}} \leq \lim_{s\to-\infty}\|W(t,s)\|_{X^{\frac{1+\varepsilon}{2}}} \\ &\leq \lim_{s\to-\infty} c - ce^{-\alpha(t-s)} = c < +\infty.\end{aligned}$$

Desta forma,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\{\|\xi(t)\|_{X^{\frac{1+\varepsilon}{2}}}\right\} < +\infty, \tag{5.17}$$

consequentemente,

$$\sup_{\xi\in\mathcal{U}}\left(\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\{\|\xi(t)\|_{X^{\frac{1+\varepsilon}{2}}}\right\}\right) < +\infty$$

sendo $\mathcal{U}$ o conjunto que limita as soluções globais de (5.1).

Considere, $\varepsilon_1 = \min\{1, \rho\varepsilon\}$, como $\rho > 1$, então $\varepsilon_1 > \varepsilon$. Queremos estimar $\|W(t,s)w_0\|_{X^{\frac{1+\varepsilon_1}{2}}}$. Assim, temos dois casos a analisar: $\varepsilon_1 = 1$ e $\varepsilon_1 = \rho\varepsilon$. Se $\varepsilon = 1$, então para $u_0 \in X^1$ temos

$$\|T(t,s)u_0\|_{X^1} \leq e_1 e^{-\alpha(t-s)}\|u_0\|_{X^1}. \tag{5.18}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} \|W(t,s)w_0\|_{X^1} &= \left\| \int_s^t T(t,\theta)\tilde{f}(\xi(\theta))d\theta \right\|_{X^1} \\ &\leq \int_s^t \|T(t,\theta)\|_{\mathcal{L}(X^1)} \left\|\tilde{f}(\xi(\theta))\right\|_{X^1} d\theta. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Queremos limitar $\left\|\tilde{f}(\xi(\theta))\right\|_{X^1}$. Podemos escrever

$$\left\|\tilde{f}(\xi(\theta))\right\|_{X^1} = \|B(\theta)f(\xi)\|_{X^1} \leq \|B(\theta)\|_{\mathcal{L}(X^1)} \|f(\xi)\|_{X^1}. \tag{5.20}$$

Para $u \in X^1$, temos

$$\|B(\theta)u\|_{X^1} = \left\|A^1 B(\theta)u\right\|_X \leq \|B(\theta)\|_{\mathcal{L}(X)} \|u\|_{X^1}$$

logo

$$\|B(\theta)\|_{\mathcal{L}(X^1)} \leq \|B(\theta)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M. \tag{5.21}$$

Precisamos encontrar p tal que $L^p \hookrightarrow X^1 = H^2$, para limitar $\|f(\xi)\|_{X^1}$. Assim,

$$\begin{aligned} L^p \hookrightarrow H^{1+\varepsilon_1} &\Leftrightarrow -\frac{n}{p} \geq 2 - \frac{n}{2} \\ &\Leftrightarrow -\frac{n}{p} \geq \frac{4-n}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{p} \leq \frac{n-4}{2n} \\ &\Leftrightarrow p \geq \frac{2n}{n-4}. \end{aligned}$$

Tome $p = \dfrac{2n}{n-4}$, assim existe $e_2 > 0$ tal que

$$\|f(\xi)\|_{X^1} \leq e_2 \|f(\xi)\|_{L^{\frac{2n}{n-4}}}. \tag{5.22}$$

Devido a condição de crescimento de f, temos

$$|f(\xi)| \leq c|\xi| \left(1 + |\xi|^{\rho-1}\right). \tag{5.23}$$

com $c > 0$. Utilizando a estimativa (5.23) e (5.22) obtemos

$$\|f(\xi)\|_{X^1} \leq e_2 \left\|c|\xi| \left(1 + |\xi|^{\rho-1}\right)\right\|_{L^{\frac{2n}{n-4}}}.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder generalizada com $\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{p'}+\dfrac{1}{q'}$, onde $r=\dfrac{2n}{n-4}$ e p' devemos escolher apropriado para que seja válido $H^{1+\varepsilon}\hookrightarrow L^{p'}$, temos

$$\|f(\xi)\|_{X^1}\leq e_2\left[\|c|\xi|\|_{L^{p'}}\left\|1+|\xi|^{\rho-1}\right\|_{L^{q'}}\right]. \tag{5.24}$$

Determinemos p' e q'. Para que $H^{1+\varepsilon}\hookrightarrow L^{p'}$ devemos ter

$$1+\varepsilon-\frac{n}{2}\geq-\frac{n}{p'}\Leftrightarrow p'\leq\frac{2n}{n-2(1+\varepsilon)}.$$

Tome $p'=\dfrac{2n}{n-2(1+\varepsilon)}$, consequentemente

$$\frac{1}{q'}=\frac{1}{r}-\frac{1}{p'}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{1}{q'}=\frac{n-4}{2n}-\frac{n-2(1+\varepsilon)}{2n}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{1}{q'}=\frac{\varepsilon-1}{n}.$$

Logo, substituindo p' e q' em (5.24) temos

$$\|f(\xi)\|_{X^1}\leq e_2\|c\|_{L^{\frac{2n}{n-2(1+\varepsilon)}}}\|\xi\|_{L^{\frac{2n}{n-2(1+\varepsilon)}}}\left\|1+|\xi|^{\rho-1}\right\|_{L^{\frac{n}{\varepsilon-1}}}.$$

Note que, existe $e_3>0$ tal que

$$\|\xi\|_{L^{\frac{2n}{n-2(1+\varepsilon)}}}\leq e_3\|\xi\|_{H^{1+\varepsilon}}$$

devido a escolha de p'. Mas, $\|\xi\|_{H^{1+\varepsilon}}<+\infty$, logo

$$\|\xi\|_{L^{\frac{2n}{n-2(1+\varepsilon)}}}\leq e_4. \tag{5.25}$$

Como $|\Omega|=e_5<+\infty$, temos

$$\begin{aligned}\left\|1+|\xi|^{\rho-1}\right\|_{L^{\frac{n}{\varepsilon-1}}}&\leq\|1\|_{L^{\frac{n}{\varepsilon-1}}}+\left\||\xi|^{\rho-1}\right\|_{L^{\frac{n}{\varepsilon-1}}}=|\Omega|+\left(\int_\Omega|\xi|^{(\rho-1)\frac{n}{\varepsilon-1}}\right)^{\frac{\varepsilon-1}{n}}\\&=e_5+\left[\left(\int_\Omega|\xi|^{(\rho-1)\frac{n}{\varepsilon-1}}\right)^{\frac{\varepsilon-1}{n(\rho-1)}}\right]^{\rho-1}=e_5+\|\xi\|^{\rho-1}_{L^{\frac{n(\rho-1)}{\varepsilon-1}}}.\end{aligned} \tag{5.26}$$

Seja $e_6=e_2\|c\|_{L^{\frac{2n}{n-2(1+\varepsilon)}}}e_4$ e pelas estimativas (5.25) e (5.26) temos

$$\|f(\xi)\|_{X^1}\leq e_6\left(e_5+\|\xi\|^{\rho-1}_{L^{\frac{n(\rho-1)}{\varepsilon-1}}}\right). \tag{5.27}$$

Mas, temos que

$$H^{1+\varepsilon}\hookrightarrow L^{\frac{n(\rho-1)}{\varepsilon-1}} \tag{5.28}$$

pois,

$$\begin{aligned}H^{1+\varepsilon}\hookrightarrow L^{\frac{n(\rho-1)}{\varepsilon-1}}&\Leftrightarrow 1+\varepsilon-\frac{n}{2}\geq-n\frac{(\varepsilon-1)}{n(\rho-1)}\\&\Leftrightarrow 2(\rho-1)(1+\varepsilon)-n(\rho-1)\geq2(1-\varepsilon)\\&\Leftrightarrow 2+2\varepsilon\rho-2\varepsilon-n\rho+n\geq2-2\varepsilon\\&\Leftrightarrow 2+(2\varepsilon-n)\rho+n\geq2\end{aligned}$$

lembrando que $0 < \varepsilon < 1$ e $n \geq 3$ então $2\varepsilon - n < 0$, assim

$$2 + n \geq 2 + (2\varepsilon - n)\rho + n \geq 2$$

o que implica em $2 + n \geq 2$. Portanto, (5.28) é satisfeito. Deste modo, existe $e_7 > 0$ tal que

$$\|\xi\|_{L^{\frac{n(\rho-1)}{\varepsilon-1}}} \leq e_7 \|\xi\|_{H^{1+\varepsilon}} \tag{5.29}$$

porém $\|\xi\|_{H^{1+\varepsilon}} < +\infty$. Logo, existe $e_8 > 0$ tal que

$$\|\xi\|^{\rho-1}_{L^{\frac{n(\rho-1)}{\varepsilon-1}}} \leq e_8.$$

Portanto, se escrevemos $K_1 = e_6(e_5 + e_8)$, temos por (5.29) que

$$\|f(\xi)\|_{X^1} \leq K_1. \tag{5.30}$$

Substituindo (5.21) e (5.30) na desigualdade (5.20), obtemos

$$\left\|\tilde{f}(\xi(\theta))\right\|_{X^1} \leq MK_1 := K_2.$$

Assim,

$$\|W(t,s)w_0\|_{X^1} \leq \int_s^t e_1 e^{-\alpha(t-\theta)} K_2 \, d\theta = \frac{e_1 K_2}{\alpha}(1 - e^{-\alpha(t-s)}).$$

Pelo fato de $\xi(t) = \lim\limits_{s\to-\infty} W(t,s)$, temos

$$\begin{aligned} \|\xi(t)\|_{X^1} &= \left\|\lim_{s\to-\infty} W(t,s)\right\|_{X^1} \leq \lim_{s\to-\infty} \|W(t,s)\|_{X^1} \\ &\leq \lim_{s\to-\infty} \frac{e_1 K_2}{\alpha}(1 - e^{-\alpha(t-s)}) = \frac{e_1 K_2}{\alpha} < +\infty, \end{aligned}$$

logo,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \{\|\xi(t)\|_{X^1}\} < +\infty$$

assim

$$\sup_{\xi\in\mathcal{U}} \left(\sup_{t\in\mathbb{R}} \{\|\xi(t)\|_{X^1}\}\right) < +\infty.$$

Portanto, o atrator pullback é limitado em $X^1 = H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$.

Agora, se $\varepsilon_1 = \rho\varepsilon$, então $\varepsilon_1 < 1$ e $\varepsilon_1 > \varepsilon$. Ademais, refazendo os passos (5.14) e (5.15) para $u_0 \in X^{\frac{1+\varepsilon_1}{2}}$ temos

$$\|T(t,s)u_0\|_{X^{\frac{1+\varepsilon_1}{2}}} \leq d_1 e^{-\alpha(t-s)} \|u_0\|_{X^{\frac{1+\varepsilon_1}{2}}},$$

deste modo

$$\begin{aligned} \|W(t,s)w_0\|_{X^{\frac{1+\varepsilon_1}{2}}} &= \left\|\int_s^t T(t,\theta)\tilde{f}(\xi(\theta))d\theta\right\|_{X^{\frac{1+\varepsilon_1}{2}}} \\ &\leq \int_s^t \|T(t,\theta)\|_{\mathcal{L}\left(X^{\frac{1+\varepsilon_1}{2}}\right)} \left\|\tilde{f}(\xi(\theta))\right\|_{X^{\frac{1+\varepsilon_1}{2}}} d\theta. \end{aligned}$$

Estamos interessados em limitar $\left\|\tilde{f}(\xi(\theta))\right\|_{X^{\frac{1+\varepsilon_1}{2}}}$, assim

$$\left\|\tilde{f}(\xi(\theta))\right\|_{X^{\frac{1+\varepsilon_1}{2}}} = \|B(\theta)f(\xi)\|_{X^{\frac{1+\varepsilon_1}{2}}} \leq \|B(\theta)\|_{\mathcal{L}\left(X^{\frac{1+\varepsilon_1}{2}}\right)} \|f(\xi)\|_{X^{\frac{1+\varepsilon_1}{2}}}.$$

Mas, para $u \in X^{\frac{1+\varepsilon_1}{2}}$, temos

$$\|B(\theta)u\|_{X^{\frac{1+\varepsilon_1}{2}}} = \left\|A^{\frac{1+\varepsilon_1}{2}}B(\theta)u\right\|_X \leq \|B(\theta)\|_{\mathcal{L}(X)} \|u\|_{X^{\frac{1+\varepsilon_1}{2}}}$$

ou seja

$$\|B(\theta)\|_{\mathcal{L}\left(X^{\frac{1+\varepsilon_1}{2}}\right)} \leq \|B(\theta)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M.$$

Agora, queremos determinar p, de modo que $L^p \hookrightarrow X^{\frac{1+\varepsilon_1}{2}} = H^{1+\varepsilon_1}$. Assim,

$$\begin{aligned} L^p \hookrightarrow H^{1+\varepsilon_1} &\Leftrightarrow -\frac{n}{p} \geq \frac{2(1+\varepsilon_1)-n}{2} \\ &\Leftrightarrow p \geq \frac{2n}{n-2(1+\varepsilon_1)}. \end{aligned}$$

Escolha $p = \dfrac{2n}{n-2(1+\varepsilon_1)}$. Então, existe $\tilde{c}_1 > 0$ e usando (5.3), segue que

$$|f(\xi)| \leq c|\xi|\left(1+|\xi|^{\rho-1}\right)$$

logo

$$\|f(\xi)\|_{X^{\frac{1+\varepsilon_1}{2}}} \leq \tilde{c}_1 \|f(\xi)\|_{L^{\frac{2n}{n-2(1+\varepsilon_1)}}} \leq \tilde{c}_1 \left\|c|\xi|\left(1+|\xi|^{\rho-1}\right)\right\|_{L^{\frac{2n}{n-2(1+\varepsilon_1)}}}. \tag{5.31}$$

Aplicando em (5.31) a desigualdade de Hölder generalizada com $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p'} + \dfrac{1}{q'}$, sendo $r = \dfrac{2n}{n-2(1+\varepsilon_1)}$ e p' deve ser escolhido de modo que $H^{1+\varepsilon} \hookrightarrow L^{p'}$, assim

$$\begin{aligned} 1+\varepsilon-\frac{n}{2} \geq -\frac{n}{p'} &\Leftrightarrow \frac{2(1+\varepsilon)-n}{2} \geq -\frac{n}{p'} \\ &\Leftrightarrow p' \leq \frac{2n}{n-2(1+\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Tome $p' = \dfrac{2n}{n-2(1+\varepsilon)}$. Mas como deve ser satisfeito, $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p'} + \dfrac{1}{q'}$, então $\dfrac{1}{q'} = \dfrac{\varepsilon-\varepsilon_1}{n}$. Logo, em (5.31) com as escolhas de p' e q', temos

$$\|f(\xi)\|_{X^{\frac{1+\varepsilon_1}{2}}} \leq \tilde{c}_2 \|\,|\xi|\,\|_{L^{\frac{2n}{n-2(1+\varepsilon)}}} \left\|1+|\xi|^{\rho-1}\right\|_{L^{\frac{n}{\varepsilon-\varepsilon_1}}}$$

mas, existe $\tilde{c}_3 > 0$ tal que

$$\|\,|\xi|\,\|_{L^{\frac{2n}{n-2(1+\varepsilon)}}} \leq \tilde{c}_3 \|\xi\|_{X^{\frac{1+\varepsilon}{2}}} < +\infty$$

já que $X^{\frac{1+\varepsilon}{2}} \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2(1+\varepsilon)}}$. E, lembrando que $|\Omega| < +\infty$, temos que

$$\begin{aligned}\left\|1+|\xi|^{\rho-1}\right\|_{L^{\frac{n}{\varepsilon-\varepsilon_1}}} &\leq \|1\|_{L^{\frac{n}{\varepsilon-\varepsilon_1}}} + \left\||\xi|^{\rho-1}\right\|_{L^{\frac{n}{\varepsilon-\varepsilon_1}}} = |\Omega| + \left(\int_\Omega |\xi|^{(\rho-1)\frac{n}{\varepsilon-\varepsilon_1}}\right)^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_1}{n}} \\ &= |\Omega| + \left[\left(\int_\Omega |\xi|^{(\rho-1)\frac{n}{\varepsilon-\varepsilon_1}}\right)^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_1}{n(\rho-1)}}\right]^{\rho-1} = |\Omega| + \|\xi\|^{\rho-1}_{L^{\frac{n(\rho-1)}{\varepsilon-\varepsilon_1}}}.\end{aligned}$$

Note que,

$$H^{1+\varepsilon} \hookrightarrow L^{\frac{n(\rho-1)}{\varepsilon-\varepsilon_1}} \tag{5.32}$$

pois,

$$\begin{aligned}H^{1+\varepsilon} \hookrightarrow L^{\frac{n(\rho-1)}{\varepsilon-\varepsilon_1}} &\Leftrightarrow 1+\varepsilon-\frac{n}{2} \geq -n\frac{(\varepsilon-\varepsilon_1)}{n(\rho-1)} \\ &\Leftrightarrow 2(\rho-1)(1+\varepsilon) - n(\rho-1) \geq 2(\varepsilon_1-\varepsilon) \\ &\Leftrightarrow \varepsilon\rho + \left(1-\frac{n}{2}\right)(\rho-1) \geq \varepsilon_1 \\ &\Leftrightarrow \varepsilon\rho \geq \varepsilon\rho + \left(1-\frac{n}{2}\right)(\rho-1) \geq \varepsilon_1 \\ &\Leftrightarrow \varepsilon\rho \geq \varepsilon_1\end{aligned}$$

e, como escolhemos $\varepsilon_1 = \varepsilon\rho$, então (5.32) é válido. Portanto,

$$\|f(\xi)\|_{X^{\frac{1+\varepsilon_1}{2}}} \leq \tilde{c}_2\left(\tilde{c}_3\|\xi\|_{X^{\frac{1+\varepsilon_1}{2}}} + |\Omega| + \tilde{c}_4\|\xi\|^{\rho-1}_{X^{\frac{1+\varepsilon_1}{2}}}\right)$$

observe que $\|\xi\|_{X^{\frac{1+\varepsilon_1}{2}}} < +\infty$, devido a (5.17), logo, para $K > 0$

$$\|f(\xi)\|_{X^{\frac{1+\varepsilon_1}{2}}} \leq K.$$

Assim,

$$\|W(t,s)w_0\|_{X^{\frac{1+\varepsilon_1}{2}}} \leq \int_s^t d_1 e^{-\alpha(t-\theta)}K\,d\theta = \frac{d_2}{\alpha}e^{-\alpha t}\left(e^{\alpha t}-e^{\alpha s}\right).$$

Mas, considerando $d_3 = \dfrac{d_2}{\alpha}$ e usando o fato de que $\xi(t) = \lim\limits_{s\to-\infty} W(t,s)$, temos

$$\begin{aligned}\|\xi(t)\|_{X^{\frac{1+\varepsilon_1}{2}}} &= \left\|\lim_{s\to-\infty} W(t,s)\right\|_{X^{\frac{1+\varepsilon_1}{2}}} \leq \lim_{s\to-\infty}\|W(t,s)\|_{X^{\frac{1+\varepsilon_1}{2}}} \\ &\leq \lim_{s\to-\infty} d_3 - d_3 e^{-\alpha(t-s)} = d_3 < +\infty,\end{aligned}$$

deste modo,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\{\|\xi(t)\|_{X^{\frac{1+\varepsilon_1}{2}}}\right\} < +\infty$$

consequentemente,

$$\sup_{\xi\in\mathcal{U}}\left(\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\{\|\xi(t)\|_{X^{\frac{1+\varepsilon_1}{2}}}\right\}\right) < +\infty.$$

Portanto, o atrator pullback é limitado em $X^{\frac{1+\varepsilon_1}{2}}$.

Considere $\varepsilon_2 = \min\{1, \rho\varepsilon_1\} = \min\{1, \rho^2\varepsilon\}$. Se $\varepsilon_2 = 1$, as estimativas são análogas ao caso em que $\varepsilon_1 = 1$ e concluiremos que o atrator pullback é limitado em $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Se $\varepsilon_2 = \rho\varepsilon_1$, então $\varepsilon_2 < 1$ e $\varepsilon_2 > \varepsilon_1 > \varepsilon$. Fazendo estimativas análogas ao caso em que $\varepsilon_1 = \varepsilon\rho$, obtemos que o atrator pullback é limitado em $X^{\frac{1+\varepsilon_2}{2}}$.

Assim, repetindo este processo um número finito de vezes obtemos

$$\bigcup_{t\in\mathbb{R}} \mathcal{A}(t) \text{ é limitado em } X^{\frac{1+\varepsilon_k}{2}}, \text{com } \varepsilon_k = \min\{1, \rho^k\varepsilon\}.$$

Logo,

$$\bigcup_{t\in\mathbb{R}} \mathcal{A}(t) \text{ é limitado em } H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

E, ainda, temos que o conjunto $\bigcup_{t\in\mathbb{R}} \mathcal{A}(t)$ é um subconjunto compacto de $H_0^1(\Omega)$.

Bibliografia

[1] ADAMS, Robert A.; FOURNIER, John J. F. **Sobolev Spaces**, 2 ed. Oxford: Academic Press, 2003. 305 p. (Pure and Applied Mathematics; 140)

[2] BABIN, Anatolii V.; VISHIK, Mark I. **Attractors of evolution equations**. Amsterdam: North-Holland, 1922. 532 p. (Series in Mathematics and Applications; 25)

[3] BREZIS, Haim, **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**, Nova York: Springer, 2010. 599 p. (Universitex).

[4] CARABALLO, Tomás; CARVALHO, Alexandre N.; LANGA, José A.; RIVERO, Felipe. **Existence of pullback attractors for pullback asymptotically compact process.** Nonlinear Analysis, v.72, n. 3-4, p. 1967-1976, 2010.

[5] CARABALLO, Tomás; MÁRQUEZ-DURAN, Antonio M.; RIVERO, Felipe. **Well-Posedness and Asymptotic Behaviour of a Nonclassical Nonautonomous Diffusion Equation with Delay**, International Journal of Bifurcation and Chaos, v.25, n.14, p. 150021, 11 pp.,2015.

[6] CARVALHO, Alexandre N. **Análise Funcional II.** Notas de aula. ICMC-USP, São Carlos, 2010. 200 p.

[7] CARVALHO, Alexandre N. **Sistemas dinâmicos não-lineares.** Notas de aula. ICMC-USP, São Carlos, 2012. 267 p.

[8] CARVALHO, Alexandre N.; LANGA, José A.; ROBISON, James C. **Attractors for Infinite-Dimensional Non-Autonomous Dynamical Systems**, Nova York: Springer, 2013. 409p. (Applied Mathematical Sciences; 182)

[9] CHOLEWA, Jan. W.; DLOTKO, Tomasz. **Global Attractors in Abstract Parabolic Problems**. Cambridge: University Press, 2000. 235 p. (London Mathematical Society Lecture Note Series; 278).

[10] HALE, Jack K. **Asymptotic Behavior of Dissipative Systems**. AMS, Providence, R. I.: Mathematical Surveys and Monographs, 1988. 198 p.

[11] HENRY, Dan. **Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations**. Berlim: Springer, 1980. 348 p. (Lecture Notes in Mathematics)

[12] LADYZHENSKAYA, Olga. **Attractors for Semigroups and Evolution Equations**. Great Britain: Cambridge University, Press, 1991, 73 p.

[13] NASCIMENTO, Marcelo J. D. **Problemas parabólicos semilineares singularmente não autônomos com expoentes críticos.** 2007. 126 p. Tese (Doutorado em Matemática) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, USP, São Carlos, 2007.

[14] PAZY, Amnon. **Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations**, Nova York, Springer, 1983. 279 p. (Applied Mathematical Sciences; 44).

[15] RIVERO, Felipe. **Time Dependent Perturbation in a Nonautonomous Nonclassical Parabolic Equation**. Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B, v. 18, n. 1, p. 209-221, 2013.

[16] VRABIE, Ioan I. C_0**-Semigroups and Applications**. Nova York: ELSEVIER, 2003. 373 p. (North-Holland Mathematics Studies 191).

Apêndice A

Resultados auxiliares

A.1 Espectro de um operador linear

Neste seção, iremos apresentar alguns resultados básicos relacionados a Análise Funcional, em particular, daremos enfoque a análise espectral de um operador linear, que será um ferramenta importante. As principais referências são [3] e [6].

A.1.1 O operador resolvente

Definição 31. *Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear. O conjunto resolvente de A é o subconjunto $\rho(A)$ de todos os $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que $\lambda - A$ é injetor, $\overline{R(\lambda - A)} = X$ e $(\lambda - A)^{-1} : R(\lambda - A) \subset X \to X$ é limitado. Para $\lambda \in \rho(A)$, o operador $(\lambda - A)^{-1}$ é chamado operador resolvente. O espectro do operador A é definido por $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.*

Definição 32. *Um operador $A : D(A) \subset X \to X$ é fechável se para cada sequência $x_n \to 0$ sendo $n \to \infty$ com $Ax_n \to y$ se $n \to \infty$, então $y = 0$. O operador A é dito fechado se $x_n \to x$ quando $n \to \infty$ com $Ax_n \to y$ se $n \to \infty$ então $x \in D(A)$ e $Ax = y$.*

Lema A.1.1. *Se $A_0 : D(A_0) \subset X \to X$ é um operador fechável e $A : D(A) \subset X \to X$ é o seu fecho, então $\rho(A_0) = \rho(A)$.*

Lema A.1.2. *Suponha que um operador $A_0 : D(A_0) \subset X \to X$ tenha um conjunto resolvente $\rho(A_0)$ não vazio.*

(i) Se para algum $\lambda_0 \in \rho(A_0)$, $\overline{(\lambda - A_0)^{-1}}$ é injetivo então A é fechável;

(ii) Se A_0 é fechável, então $\overline{(\lambda - A_0)^{-1}}$ é injetivo para todo $\lambda \in \rho(A_0)$.

A partir de agora consideraremos operadores $A : D(A) \subset X \to X$ fechados e apenas alguns casos específicos A ser fechável.

Observe que se $A : D(A) \subset X \to X$ é fechado e $\lambda \in \rho(A)$, então $R(\lambda - A) = X$. Ainda, se $\lambda - A : D(A) \to X$ é bijetor, segue do Teorema do Gráfico Fechado que $(\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.

Podemos reescrever a definição de conjunto resolvente.

Definição 33. *Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear fechado. O conjunto resolvente de A é o subconjunto $\rho(A)$ de todos os $\lambda \in \mathbb{C}$, tais que $\lambda - A$ é bijetor.*

Teorema A.1.1. *Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear fechado. Então $\rho(A)$ é um conjunto aberto de $\mathbb{C}$ e consequentemente $\sigma(A)$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{C}$. Mais ainda, se $\mu \in \rho(A)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\mu-\lambda|\|(\mu-A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$, então $\lambda \in \rho(A)$ e*

$$(\lambda - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu-\lambda)^n}{(\mu-A)^{n+1}}.$$

Teorema A.1.2. *Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear. Se $\lambda, \mu \in \rho(A)$ temos*

1. $(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1} = (\mu - \lambda)(\mu - A)^{-1}(\lambda - A)^{-1}$;
2. *Se B é um operador qualquer que comuta com A, então $(\lambda - A)^{-1}$ também irá comutar com B;*
3. $(\mu - A)^{-1}(\lambda - A)^{-1} = (\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1}$.

Agora estudaremos algumas particularidades do espectro para os operadores limitados.

Teorema A.1.3. *O conjunto resolvente $\rho(T)$ do operador linear limitado T, de um espaço de Banach X, é aberto, e consequentemente, $\sigma(T)$ é fechado.*

Na demonstração do teorema anterior obtemos uma representação em série de potências do resolvente.

Corolário A.1.1. *Seja X um espaço de Banach complexo e T um operador linear limitado. Para cada $\lambda_0 \in \rho(T)$, conseguimos representar $(T - \lambda I)^{-1}$ por*

$$(T - \lambda I)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n \left[(T - \lambda_0 I)^{-1}\right]^{n+1}.$$

A qual esta série converge absolutamente para cada λ no seguinte disco aberto

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|(T - \lambda_0 I)^{-1}\|},$$

sendo este um subconjunto de $\rho(T)$.

Teorema A.1.4. *O espectro de um operador linear limitado $T : X \to X$, com X um espaço de Banach, é compacto e esta contido em um disco dado por $|\lambda| \leq \|T\|$. Deste modo, o resolvente $\rho(T)$ de T é não vazio.*

A.1.2 Operadores duais

Definição 34. *Sejam X e Y espaços de Banach sobre $\mathcal{K}$ com duais X^* e Y^*. Se $x^* \in X^*$ ($y^* \in Y^*$) denotaremos por $\langle x^*, x\rangle$ ($\langle y^*, y\rangle$). Seja $A : D(A) \subset X \to Y$ um operador linear com domínio denso. O dual $A^*D(A^*) \to Y^* \to X^*$ de A é o operador linear definido por: $D(A^*)$ é o conjunto dos $y^* \in Y^*$, para os quais existem $z^* \in Y^*$ satisfazendo*

$$\langle Ax, y^*\rangle = \langle x, z^*\rangle, \quad \forall x \in D(A). \tag{A.1}$$

Se $y^* \in D(A^*)$ definimos $A^*y^* = z^*$, sendo z^* é o único elemento de X^* satisfazendo (A.1).

Teorema A.1.5. *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear densamente definido. Então*

$$\rho(A) = \rho(A^*) \quad e \quad ((\lambda - A)^{-1})^* = (\lambda - A^*)^{-1}, \ \forall \lambda \in \rho(A).$$

A.2 Teoremas principais

Nesta seção, reunimos uma coleção dos resultados mais usados envolvendo a teoria de medida e integração, espaços de Sobolev e análise funcional. Mais detalhes sobre estes resultados podem ser encontrados em [1], [3], [6] e [13].

Teorema A.2.1. (Teorema da Diferenciabilidade de Lebesgue) *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ uma função mensurável com respeito a medida de Lebesgue e $\int_K |f(x)|dx < \infty$, para qualquer conjunto de medida finita $K \subset \mathbb{R}^n$. Então,*

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} f(y)dy = f(x) \text{ quase todo ponto.}$$

Teorema A.2.2. (Teorema da Convergência Dominada) *Seja $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções integráveis que convergem quase todo ponto para um função integrável g. Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ um sequência de funções mensuráveis tais que $|f_n| \leq g_n$ e f_n converge para f quase todo ponto. Se*

$$\int g = \lim_{n\to\infty} \int g_n,$$

então

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

Teorema A.2.3. (Teorema de Banach-Steinhauss) *Sejam X um espaço de Banach, F um espaço normado e $(T_i)_{i\in I}$ uma família de operadores em $\mathcal{L}(X,F)$ satisfazendo a condição de que para cada $x \in E$, existe $C_x < \infty$ tal que*

$$\sup_{i\in I} \|T_i(x)\| < C_x.$$

Então, $\sup_{i\in I} \|T_i\| < \infty$.

Teorema A.2.4. (Teorema do Gráfico Fechado) *Sejam X, Y espaços de Banach e $T : X \to Y$ uma transformação linear com gráfico fechado, ou seja,*

$$Graf(T) = \{(x,y) \in X \times Y \text{ tal que } y = T(x)\}$$

é um subconjunto fechado. Então T é contínua.

Teorema A.2.5. (Corolário do Teorema de Hahn-Banach - forma geométrica) *Seja E um espaço vetorial normado real e F um subespaço de E tal que $\overline{F} \neq E$, então existe f um funcional linear limitado, $f \neq 0$ tal que $f(x) = 0$, para todo $x \in F$.*

Teorema A.2.6. (Teorema do Ponto Fixo de Banach) *Seja (X,d) um espaço de Banach. Seja T uma contração definida em X. Então, existe um único ponto $x \in X$ tal que $T(x) = x$.*

Teorema A.2.7. (Teorema de Arzela-Ascoli) *Sejam K e M espaços métricos com K compacto e $E \subset \{ f : K \to M \,:\, f \text{ é contínua}\}$. Suponha que estão satisfeitas:*

(i) Para cada $x \in K$ o conjunto $E(x) = \{f(x) \in M \,:\, f \in E\}$ é relativamente compacto em M;

(ii) E é equicontínuo, ou seja, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $d(x,y) < \delta$ então $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$, para todo $f \in E$ e para todo $x, y \in K$.

Então, E é relativamente compacto.

Lema A.2.1. (Desigualdade de Gronwall) *Seja $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta(t) \geq 0$, e $\phi(t)$ são funções reais contínuas que satisfazem*

$$\phi(t) \leq \alpha + \int_a^t \beta(s)\phi(s)\, ds \text{ para } a \leq t \leq b,$$

então

$$\phi(t) \leq \alpha e^{\int_a^t \beta(s) ds}, \quad a \leq t \leq b.$$

Lema A.2.2. (Desigualdade de Gronwall generalizada) *Seja $\alpha, \phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas, $\beta(t) \geq 0$ Lebesgue integrável em $[a,b]$ e*

$$\phi(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\phi(s)\, ds \text{ para } a \leq t \leq b.$$

Então

$$\phi(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\alpha(s) e^{\int_s^t \beta(u) du} ds, \quad a \leq t \leq b.$$

Teorema A.2.8. (Desigualdade de Young) *Sejam $p, q \in \mathbb{R}^+$, com $p > 1$ tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então, para todo $x, y \in \mathbb{R}^+$*

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Teorema A.2.9. (Desigualdade de Hölder) *Seja $f \in L^p(X)$ e $g \in L^q(X)$, com $1 \leq p \leq \infty$. Então, $fg \in L^1(X)$ e*

$$\int |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Teorema A.2.10. (Desigualdade de Hölder Generalizada) *Seja $f \in L^p(X)$ e $g \in L^q(X)$, com $1 \leq p, q \leq \infty$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{r}$. Então $fg \in L^r(X)$ e*

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Teorema A.2.11. (Desigualdade de Poincaré) *Seja $1 \leq p < +\infty$ e $\Omega \subset R^n$ um aberto limitado. Então existe uma constante $k > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq k \|\nabla u\|_{L^p(X)}, \ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Teorema A.2.12. (Teorema da Imersão) *Sejam $r, s \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p, q < +\infty$. Temos*

$$r - \frac{n}{p} \geq s - \frac{n}{q} \Leftrightarrow W^{r,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{s,q}(\Omega).$$

No caso em que $r - \dfrac{n}{p} > s - \dfrac{n}{q}$ a inclusão é compacta.

Teorema A.2.13. (Teorema de Neumann) *Se $A \in \mathcal{L}(X)$, com X espaço de Banach. Se $\|A\| < 1$, então $(I - A)^{-1}$ existe e é um operador linear limitado.*

Teorema A.2.14. *Para $0 \leq \beta \leq \alpha < 1 + \varepsilon$, temos*

$$\left\| A(t)^\alpha U(t,\tau) A(\tau)^{-\beta} \right\| \leq C(\alpha, \beta)(t - \tau)^{\beta - \alpha}.$$