Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

Neilson Castro Soares

Dinâmica topológica do operador deslocamento com pesos

São Carlos
Abril de 2020

Neilson Castro Soares

Dinâmica topológica do operador deslocamento com pesos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientador: *Prof. Dr. Benito Frazão Pires*

São Carlos
Abril de 2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Neilson Castro Soares, realizada em 20/04/2020:

Benito Frazão Pires

Prof. Dr. Benito Frazão Pires
UFSCar

Prof. Dr. Tiago de Carvalho
USP

Prof. Dr. Francisco Braun
UFSCar

Certifico que a defesa realizou-se com a participação à distância do(s) membro(s) Tiago de Carvalho, Francisco Braun e, depois das arguições e deliberações realizadas, o(s) participante(s) à distância está(ao) de acordo com o conteúdo do parecer da banca examinadora redigido neste relatório de defesa.

Benito Frazão Pires

Prof. Dr. Benito Frazão Pires

Dedico este trabalho aos meus irmãos Juscilene, Jeferson, Jonilson e Jesiel (in memoriam). Dedico também à minha mãe Noeme e namorada Sara.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pela minha vida, pela força e esperança de trilhar esta trajetória.

Agradeço também aos meus irmãos Juscilene, Jeferson, Jesiel e Jonilson e à minha mãe Noeme, que sempre foi meu o alicerce em todas as instâncias, minha mentora e refúgio em todos os momentos.

Agradeço à minha namorada Sara pelo amor e dedicação, por ter estado comigo, sempre me ajudando e apoiando.

Agradeço a todos os meus amigos de São Carlos e Ribeirão Preto que estiveram comigo ao longo desses dois anos.

Agradeço a todos os meus professores e colegas do mestrado que de alguma forma contribuíram para meu desenvolvimento.

Agradeço ao professor Benito Frazão Pires, por suas muitas contribuições e pela parceria, que foi de grande valia para que este trabalho fosse concluído.

Agradeço a CAPES pelo suporte financeiro.

Resumo

No presente trabalho faremos um estudo de dinâmica linear de operadores, focando principalmente nos conceitos de transitividade topológica, hiperciclicidade e caoticidade. Em um primeiro momento trataremos de sistemas dinâmicos não lineares e, posteriormente, abordaremos a dinâmica de operadores em um contexto linear, mais especificamente, em espaços de Banach. Também apresentaremos exemplos de operadores lineares, estando estes correlacionados, são eles: O operador deslocamento à esquerda, operador de Rolewicz e o operador deslocamento com pesos. Por fim, mostraremos resultados que nos fornecem sob quais condições estes operadores apresentam propriedades dinâmicas no espaço de sequências $\ell_p(X)$, onde $1 \leq p < \infty$ e X é um espaço de Banach.
Palavras-chave: Dinâmica de Operadores, Operadores Lineares, Operador Deslocamento com Pesos.

Abstract

In the present work, we will do a study of linear dynamics of operators, focusing mainly on the concepts of topological transitivity, hypercyclicity and chaoticity. At first, we will deal with non-linear dynamical systems and, later, we will approach the dynamics of operators in a linear context, more specifically, in Banach spaces. We will also present examples of linear operators, which are correlated, they are: the backward shift operator, Rolewicz and weighted shift operator. Finally, we will show results that provide us under what conditions these operators have dynamic properties in the $\ell_p(X)$ sequence space, where $1 \leq p < \infty$ and X is a Banach space.
Keywords: Operator Dynamics, Linear Operators, Weighted Shift Operator.

Sumário

Introdução

Um sistema dinâmico (X, f) é composto de um conjunto não-vazio X e uma função $f : X \to X$, isto é, uma função cujo domínio e contra-domínio são iguais a X. É claramente possível fazer sucessivas composições desta função com ela mesma. Denominamos *iterada* cada uma destas composições. O comportamento das iteradas é onde se concentra o esforço dos matemáticos que se inclinam a esta área. Quando consideramos sistemas dinâmicos compostos de um espaço métrico e uma função contínua por partes, chamados de *sistemas dinâmicos topológicos*, outras propriedades vão surgindo, dando forma aos mais variados tipos de sistemas dinâmicos, desde os mais simples como os periódicos aos mais complicados como os sistemas dinâmicos caóticos.

Em grau crescente de complexidade, os sistemas dinâmicos topológicos considerados nesta obra podem ser agrupados em quatro tipos: periódicos, minimais, topologicamente transitivos ou hipercíclicos, e caóticos.

Um sistema dinâmico é periódico (cf. §1.1) se todas as órbitas do sistema são periódicas. Neste caso, a restrição do sistema dinâmico a cada órbita do sistema é por si só um novo sistema dinâmico. Sendo assim, o sistema dinâmico original pode ser decomposto em inúmeros subsistemas mais simples. A rotação racional do círculo é o exemplo mais conhecido de tal sistema (cf. Exemplo 1.1.2). Um sistema dinâmico é minimal (cf. §1.2) se cada órbita do sistema é um subconjunto denso. A rotação irracional do círculo (cf. Exemplo 1.2.1) é o modelo clássico de tal sistema. Exceto em casos degenerados, um sistema dinâmico topológico não pode ser simultaneamente periódico e minimal. Assim, estas duas noções são demasiado fortes para coexistirem num mesmo sistema. Uma noção um pouco mais fraca que minimalidade é o conceito de hiperciclicidade (cf. §1.3) que ocorre quando o sistema possui (pelo menos) uma órbita densa. No caso em que o domínio do sistema dinâmico topológico é um espaço métrico separável sem pontos isolados, pelo Teorema de Transitividade de Birkhoff (cf. Teorema 1.3.6), o conceito de hiperciclicidade é equivalente à noção de transitividade topológica. Sistemas dinâmicos topológicos que são topologicamente transitivos não podem ser decompostos em dois subsistemas dinâmicos topológicos com domínios formados por conjuntos invariantes com interior não-vazio. Assim, de certa forma, transitividade topológica ou hiperciclicidade implica um certo tipo de irredutibilidade do sistema (cf. Corolário 1.3.5). A transitividade topológica não exclui a presença de pontos periódicos. Na verdade uma órbita densa pode coexistir com uma quantidade densa de pontos periódicos, caso em que o sistema é denominado caótico (cf. §1.4). A definição original de sistema caótico é devida a Devaney (cf. [7]) e inclui o requisito adicional de dependência sensível das condições iniciais (cf. Definição 1.4.2). Em 1992, Banks-Brooks-Cairns-Davis-Stacey (cf. [1]) mostraram que tal condição é desnecessária e segue automaticamente das hipóteses de transitividade topológica e densidade de pontos periódicos. O exemplo mais popular de sistema dinâmico caótico é a transformação logística (cf. Definição 1.0.1).

O objetivo desta dissertação é entender as noções de transitividade topológica e caoticidade no contexto dos operadores lineares contínuos. A área da matemática que estuda tal assunto é conhecida por *Dinâmica Linear*. É uma área relativamente nova que se situa na confluência de outras áreas clássicas da matemática tais como: Sistemas Dinâmicos, Teoria Ergódica e Análise Funcional. Os livros [2, 10] e a nota [8] formam uma boa introdução ao assunto. Apesar da Dinâmica Linear ser uma área relativamente recente, tem se desenvolvido rapidamente. Esta foi concebida a partir dos estudos do comportamento das iteradas de operadores lineares. Historicamente, o início dos estudos neste campo é aceitadamente datado de 1982, na tese de Kitai que, embora não tenha sido publicada, foi amplamente difundida (cf. [2]). Kitai, Godefroy e Shapiro foram precursores do que se tornaria a Dinâmica Linear. Em seus trabalhos eles explicaram os conceitos básicos, deram vários exemplos e apresentaram técnicas importantes de pesquisa neste campo (cf. [2, 10]).

Transitividade topológica, hiperciclicidade ou caoticidade em operadores lineares contínuos só podem ocorrer em espaços de dimensão infinita (cf. Corolário 2.1.2). Os exemplos mais simples e antigos de operadores lineares contínuous hipercíclicos são o operador de Birkhoff (cf. [5]) estudado em 1929, o operador de MacLane (cf. [12]) estudado em 1952, e o operador de Rolewicz (cf. [13]), estudado em 1969. O operador de Rolewicz também é caótico e resulta ser um caso particular do operador deslocamento à esquerda com pesos, apresentado por Salas (cf. [14]) em 1995 e definido no espaço-sequência $\ell_p, 1 \leq p < \infty$. Este operador carrega importantes propriedades dinâmicas como hiperciclicidade e caoticidade se impusermos condições à sequência peso. O operador descolamento à esquerda com pesos é ainda muito estimado dentre os teóricos devido ao seu modo de construção simples. Assim, muitos resultados são obtidos primeiro para operadores com pesos e somente depois generalizados.

Godefroy e Shapiro (cf. [9]) foram pioneiros na utilização da definição de caos, dada por Devaney em [7], no contexto de operadores lineares. Eles também desenvolveram classes novas de operadores lineares hipercíclicos. Segundo [10], o termo "hipercíclico" para vetores com órbita densa foi inicialmente utilizado por volta de 1986 por Beauzamy (cf. [3]), sendo estendido logo após para operadores com uma órbita densa em [6, 9].

Existem vários teoremas intitulados *critérios* que caracterizam propriedades dinâmicas, com destaque para o Critério de Hiperciclicidade que, como o nome sugere, serve essencialmente para verificar se um dado operador é de fato hipercíclico. As versões mais antigas destes critérios foram propostas por Kitai (Critério de Kitai) e por Gethner e Shapiro (Critério de Gethner-Shapiro). Atualmente, a maneira como esse critério é enunciado é oriunda de Bès e Peris (cf. [4]).

É neste cenário que surge o presente trabalho. Primeiro iremos revisitar o contexto natural no qual surgem as noções de transitividade topológica, hiperciclicidade e caos (no sentido de Devaney). Mais precisamente, iremos estudar alguns sistemas dinâmicos topológicos não-lineares definidos em conjuntos compactos. Tendo nos familiarizado com as três noções descritas acima, iremos passar para o contexto dos operadores lineares. Definiremos inicialmente o operador de Rolewicz. Além da sua simplicidade, Feldman (cf. [8]) mostrou que o operador de Rolewicz é um modelo universal de sistema caótico (cf. Teorema 2.3.4). Este resultado coloca os sistemas dinâmicos lineares no mesmo patamar de dificuldade que os não-lineares. Vamos estudar também uma generalização do operador de Rolewicz denominada operador deslocamento à esquerda com pesos em espaços $\ell_p(X)$, onde $1 \leq p < \infty$ e X é um espaço de Banach. A ideia é estudar a caracterização completa da hiperciclicidade e da caoticidade revisitando os artigos de Salas (cf. [14]) e Grosse-Erdmann (cf. [11]).

A dissertação foi organizada da seguinte maneira. Apresentaremos inicialmente no Capítulo 1 os conceitos fundamentais da teoria de sistemas dinâmicos (não-lineares). Já no Capítulo 2, serão explorados os conceitos concernentes à dinâmica linear, mais especificamente, trataremos apenas resultados em espaços de Banach e, eventualmente, revisitaremos conceitos e resultados vistos no Capítulo 1 no contexto da linearidade e também as condições necessárias e suficientes, dadas por Salas (cf. [14]) e Grosse-Erdmann (cf. [11]), para que o operador deslocamento à esquerda com pesos seja topologicamente transitivo e caótico, respectivamente.

Capítulo 1

Dinâmica topológica

Um *sistema dinâmico* é um par (X, f), onde X é um conjunto não-vazio e $f : X \to X$ uma função, doravante denominada transformação. Em geral, identificamos o sistema dinâmico com a própria transformação $f : X \to X$ que o determina. Como o domínio e o contra-domínio de f são o mesmo conjunto, podemos realizar a composição de f consigo mesma inúmeras vezes, obtendo as suas iteradas definidas recursivamente por $f^n = f \circ f^{n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, onde f^0 é a transformação identidade. Quando f é bijetiva, denotamos por f^{-1} a sua inversa. Nesse caso, podemos definir $f^{-n} = f^{-1} \circ f^{-(n-1)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Dizemos que o sistema dinâmico (X, f) é *topológico* quando X é um espaço métrico e $f : X \to X$ é uma transformação contínua ou simplesmente contínua por partes quando fizer sentido. Definimos a *órbita* ou f-*órbita* de um ponto $x \in X$ como sendo o conjunto $O_f(x) = \{f^n(x) : n \geq 0\}$. As órbitas de f formam uma partição do conjunto X e o objetivo da dinâmica topológica é justamente entender os arranjos formados pelas órbitas do sistema dinâmico.

Exemplo 1.0.1 (Transformação logística)**.** *Sejam* $0 \leq \mu \leq 4$ *e* $L_\mu : [0, 1] \to [0, 1]$ *dada por*

$L_\mu(x) = \mu x(1-x)$. *Então* $\big([0,1], L_\mu\big)$ *é um sistema dinâmico topológico.*

Demonstração. Seja $0 \leq \mu \leq 4$. Primeiro vamos verificar que, de fato, $L_\mu\big([0,1]\big) \subseteq [0,1]$. Dado $x \in [0,1]$, como $0 \leq \mu \leq 4$, temos que $0 \leq \mu x(1-x) \leq 4x(1-x)$. Desta forma, $0 \leq L_\mu(x) \leq L_4(x)$. Mas o valor máximo de $L_4(x)$ para $x \in [0,1]$ é 1. Logo, $L_\mu([0,1]) \subseteq [0,1]$. Por outro lado, como L_μ é restrição de um polinômio, segue que L_μ é contínua. Concluímos que $\big([0,1], L_\mu\big)$ é um sistema dinâmico topológico. $\square$

Observe que para mostrar que (X, f) é um sistema dinâmico topológico, precisamos checar primeiro que $f(X) \subseteq X$, isto é, que X é f-invariante no sentido da seguinte definição.

Definição 1.0.2. *Um subconjunto* $Y \subseteq X$ *é dito* f*-invariante por uma função* $f : X \to X$ *se* $f(Y) \subseteq Y$.

1.1 Sistemas dinâmicos periódicos

Os sistemas dinâmicos mais simples são aqueles em que todas as órbitas são periódicas. Mais especificamente, $x \in X$ é um *ponto periódico* de $f : X \to X$ se existe um inteiro positivo n tal que $f^n(x) = x$. Se n é o menor inteiro positivo com tal propriedade, então o ponto x é denominado *n-periódico.* A f-órbita $O_f(x) = \{x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)\}$ de um ponto n-periódico x é formada por n pontos n-periódicos distintos e é denominada *órbita periódica.* Eis alguns sistemas que só possuem órbitas periódicas.

Exemplo 1.1.1. *Sejam* X *um conjunto não-vazio e* $f : X \to X$ *a transformação identidade. Então cada ponto de* X *é* 1*-periódico.*

Exemplo 1.1.2 (Rotação racional)**.** *Sejam* $1 \leq p < q$ *relativamente primos e* $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ *a transformação definida por* $f(e^{i\theta}) = e^{i\frac{p}{q}\cdot 2\pi} \cdot e^{i\theta}$*, onde* $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$*. Então todas* *as órbitas de f são q-periódicas.*

Demonstração. Seja $e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1$. Então $f^q(e^{i\theta}) = e^{ip\cdot 2\pi} \cdot e^{i\theta} = e^{i\theta}$. Assim, $e^{i\theta}$ é ponto periódico. Vamos mostrar que q é o menor período de $e^{i\theta}$. Suponha que exista $1 \leq r < q$ tal que $f^r(e^{i\theta}) = e^{i\theta}$. Então $e^{i\frac{pr}{q}\cdot 2\pi} \cdot e^{i\theta} = e^{i\theta}$, logo $e^{i\frac{pr}{q}\cdot 2\pi} = 1$. Assim, $\frac{pr}{q} = k$ para algum inteiro $k \geq 1$. Daí, $rp = qk$, com $k \geq 1$ e $1 \leq r < q$. Segue que rp é um múltiplo de p e também de q. Contradição, pois sendo p e q relativamente primos, o menor múltiplo comum entre estes é pq. Portanto, todas as órbitas de f são q-periódicas. $\square$

No próximo exemplo, $(\mathbb{Z}_n, +)$ denota o conjunto $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ provido com a adição modular. Em particular, $0 + 1 = 1, 1 + 1 = 2, \ldots, n - 1 + 1 = 0$.

Exemplo 1.1.3. *Sejam $n \geq 1$, $X = \{(i,j) : i, j \in \mathbb{Z}_n\}$ e $f : X \to X$ a transformação definida por $f\big((i,j)\big) = (i, j+1)$. Então todas as órbitas de f são n-periódicas.*

Demonstração. Seja $x = (i,j)$ um ponto qualquer de X. Então para $n \geq 1, f^n((i,j)) = (i, j+n)$. Como $j + n = j$ em $\mathbb{Z}_n$, temos $f^n((i,j)) = (i,j)$. Concluímos assim que todo $x = (i,j) \in X$ é periódico e sua órbita é $O_f(x) = \{(i,j), (i,j+1), \ldots, (i, j+n-1)\}$. $\square$

1.2 Sistemas dinâmicos minimais

Dizemos que um sistema dinâmico topológico (X, f) é *minimal* ou que $f : X \to X$ é *minimal* se toda órbita de f é densa em X. A rotação irracional é o exemplo mais simples de sistema dinâmico topológico minimal.

Exemplo 1.2.1 (Rotação irracional)**.** *Sejam $\alpha \in (0,1)$ irracional e $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ a transformação definida por $f(e^{i\theta}) = e^{i\alpha 2\pi} \cdot e^{i\theta}$. Então f é minimal.*

Demonstração. Mostremos primeiro que a rotação irracional não tem pontos periódicos. De fato, suponha que existam $e^{i\theta}$ e um inteiro $n \geq 1$ tais que $f^n(e^{i\theta}) = e^{i\theta}$. Então

$$e^{in\alpha 2\pi} \cdot e^{i\theta} = e^{i\theta} \implies e^{in\alpha 2\pi} = 1 \implies \exists k \geq 1 \mid n\alpha = k \implies \alpha = \frac{k}{n},$$

que é uma contradição, pois α é irracional.

Vamos mostrar agora a minimalidade da rotação irracional. Suponha por absurdo que existe $x \in \mathbb{S}^1$ tal que $O_f(x)$ não é denso em $\mathbb{S}^1$. Então o conjunto $A := \mathbb{S}^1 \setminus \overline{O_f(x)}$ é um aberto não-vazio.

Afirmação. $f(A) = A$.

É suficiente mostrar que $f\big(\overline{O_f(x)}\big) = \overline{O_f(x)}$, pois f é sobrejetora. De fato, seja $y \in \overline{O_f(x)}$, então existe uma sequência $n_1 < n_2 < \ldots$ de números naturais tal que $y = \lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x)$. Da continuidade de f, segue que $f(y) = f\big(\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x)\big) = \lim_{k\to\infty} f^{n_k+1}(x) \in \overline{O_f(x)}$. Da mesma forma, da continuidade e bijetividade de f^{-1} segue que $f^{-1}(y) = f^{-1}\big(\lim_{k\to\infty} f^{n_k-1}(x)\big) = \lim_{k\to\infty} f^{n_k-1}(x) \in \overline{O_f(x)}$.

Seja γ uma componente conexa de A, neste caso, γ é um arco aberto (a, b) maximal.

Afirmação. $f^n(\gamma) \cap \gamma = \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}$.

Supondo ser a afirmação falsa, então teríamos duas situações:

- Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^N(\gamma) = \gamma$. Daí $f^N\big((a, b)\big) = (e^{iN\alpha 2\pi}a, e^{iN\alpha 2\pi}b) = (a, b)$. Contradição, pois não existem pontos periódicos por rotação irracional, como foi provado.

- Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^N(\gamma) \neq \gamma$ e $f^N(\gamma) \cap \gamma \neq \emptyset$. Assim $B := f^N(\gamma) \cup \gamma$ é reunião de dois arcos contidos em A com interseção não-vazia. Portanto, B é um arco aberto contido em A. Mas γ é um subconjunto próprio de B, logo γ é um subconjunto próprio de uma componente conexa de A, o que é uma contradição.

Como para cada $n \in \mathbb{N}$, $f^n(\gamma) \cap \gamma = \emptyset$, segue que $f^m(\gamma) \cap f^n(\gamma) = \emptyset$ para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$ com $m \neq n$. Caso contrário, supondo $m > n$, existiria $z \in \gamma$ tal que $f^m(z) = f^n(z) \implies f^{m-n}(z) = z$, e assim $f^{m-n}(\gamma) \cap \gamma \neq \emptyset$, o que é uma contradição. Perceba que as iteradas de f não alteram o comprimento de γ. Logo, como as iteradas de f sobre γ são disjuntas duas a duas, o conjunto $\dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} f^n(\gamma)$ que é a união disjunta das iteradas de γ por f, teria medida infinita. Absurdo, uma vez que $\mathbb{S}^1$ tem medida igual a 2π. □

Outro exemplo de sistema dinâmico minimal é o odômetro.

Exemplo 1.2.2 (Odômetro)**.** *Seja* $X = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ *o conjunto das sequências binárias provido com a métrica* $d(x, y) = \sum_{i\in\mathbb{N}} 2^{-i} \cdot |x_i - y_i|$, *onde* $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *e* $y = (y_i)_{i\in\mathbb{N}}$. *Seja* $f : X \to X$ *a transformação definida da seguinte forma. Se* $x = (1, 1, \ldots)$, *então* $f(x) = (0, 0, \ldots)$. *Se* $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X \backslash \{(1, 1, \ldots)\}$, *então definimos*

$$f(x)_i = \begin{cases} 0 & se \quad i < \ell(x) \\ 1 & se \quad i = \ell(x) \\ x_i & se \quad i > \ell(x) \end{cases}, \quad onde \quad \ell(x) = \min\{i \in \mathbb{N} : x_i = 0\}.$$

Então f é minimal.

Demonstração. Uma propriedade interessante deste sistema dinâmico é a de que dado um ponto qualquer $x \in X$, então $f^{2^n}(x)$ tem as n primeiras entradas iguais as de x e ainda existe $k \leq 2^n$ tal que qualquer ponto de X tem as n primeiras entradas iguais às de $f^k(x)$. Por exemplo, se $x = (0, 1, \ldots)$ então $f(x) = (1, 1, \ldots)$, $f^2(x) = (0, 0, \ldots)$, $f^3(x) = (1, 0, \ldots)$ e, finalmente, $f^4(x) = (0, 1, \ldots)$. Podemos notar que as duas primeiras entradas de x foram escolhidas de forma arbitrária. Na verdade, no exemplo, todas as possíveis combinações para as duas primeiras entradas de um ponto qualquer de X foram alcançadas e $f^{2^2}(x)$ tem as duas primeiras iguais a x, como já foi observado.

Mostremos que este sistema dinâmico é minimal. Seja $x = (x_1, x_2, \ldots) \in X$. Dado $\epsilon > 0$, seja $N \geq 1$ tão grande que $\sum_{i>N} 2^{-i} < \epsilon$. Dado $y = (y_1, y_2, \ldots) \in X$, pelo que foi discutido anteriormente, existe $k \leq 2^N$ tal que $z = f^k(x) = (z_1, z_2, \ldots)$, então $z_i = y_i$ para todo $i \leq N$. Daí

$$d(f^k(x), y) = \sum_{i\in\mathbb{N}} 2^{-i}|z_i - y_i| = \sum_{i>n} 2^{-i}|z_i - y_i| \leq \sum_{i>n} 2^{-i} < \epsilon.$$

Como ϵ e $y \in X$ são arbitrários, isto mostra que a f-órbita de x é densa. □

1.3 Sistemas dinâmicos topologicamente transitivos ou hipercíclicos

O conceito de sistema dinâmico minimal é muito restrito pois ele exclui a presença de órbitas periódicas. Um conceito um pouco mais natural, que permite a coexistência de órbitas periódicas e órbitas densas é o conceito de hiperciclicidade.

Definição 1.3.1 (Transformação ou sistema hipercíclico)**.** *Dizemos que um sistema dinâmico topológico* (X, f) *é hipercíclico ou que* $f : X \to X$ *é hipercíclica se* f *possui uma órbita densa.*

Existe uma variante do conceito de hiperciclicidade denominada transitivade topológica. Ela é motivada pelo fato de que se $f : X \to X$ é hipercíclica, então f possui uma órbita densa, portanto visita qualquer subconjunto aberto de X. Isto motiva a seguinte definição.

Definição 1.3.2 (transformação ou sistema topologicamente transitivo). *Dizemos que um sistema dinâmico topológico* (X, f) *é topologicamente transitivo ou que* $f : X \to X$ *é topologicamente transitiva se para cada par de conjuntos abertos não-vazios* $U, V \subseteq X$*, existe* $n \geq 0$ *tal que* $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$*.*

O conceito de transitividade topológica está associado a um certo tipo de indecomposição do domínio em duas partes invariantes pela transformação f.

Definição 1.3.3. *Dizemos que um sistema dinâmico topológico* (X, f) *é irredutível ou que* $f : X \to X$ *é irredutível se* X *não puder ser escrito como a união disjunta de dois subconjuntos* f*-invariantes que tenham interior não-vazio.*

Teorema 1.3.4. *Seja* (X, f) *um sistema dinâmico topológico. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) f *é topologicamente transitiva;*

(ii) X *não pode ser escrito como uma união* $X = A \cup B$*, onde* A *e* B *são dois subconjuntos disjuntos com interior não-vazio e* A *é* f*-invariante;*

(iii) Para todo aberto não-vazio $U \subseteq X$*, o conjunto* $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(U)$ *é denso em* X*;*

(iv) Para todo aberto não-vazio $U \subseteq X$*, o conjunto* $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U)$ *é denso em* X*.*

Demonstração. $(i) \implies (ii)$. Sejam $X = A \cup B$ tais que A e B são subconjuntos de X disjuntos e $f(A) \subseteq A$. Então $\operatorname{int}(A)$ e $\operatorname{int}(B)$ são subconjuntos abertos, disjuntos e $f^n(\operatorname{int}(A)) \cap \operatorname{int}(B) \subseteq A \cap B = \emptyset$ para todo $n \geq 0$. Logo, por (i), $int(A) = \emptyset$ ou $int(B) = \emptyset$.

$(ii) \implies (iii)$. Seja U um aberto não-vazio de X. Façamos então $A := \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(U)$ e $B := X \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(U)$. Temos que $X = A \cup B$, com A e B disjuntos e A f-invariante. Como

U é não-vazio, A tem interior não-vazio, pois A contém U. Segue de (ii) que $\operatorname{int}(B) = \emptyset$ e assim $X = \overline{A}$. Logo A é denso em X.

$(iii) \implies (i)$. Decorre da definição de transitividade topológica.

$(iii) \iff (iv)$. Dados U, V abertos não-vazios de X e $n \in \mathbb{N}$,

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset \iff U \cap f^{-n}(V) \neq \emptyset.$$

□

Corolário 1.3.5. *Seja (X, f) um sistema dinâmico topológico. Se f é topologicamente transitiva então f é irredutível.*

O Teorema de Transitividade de Birkhoff fornece as condições sob as quais os conceitos de hiperciclicidade e transitividade topológica são equivalentes.

Teorema 1.3.6 (Teorema da Transitividade de Birkhoff)**.** *Sejam X um espaço métrico completo separável sem pontos isolados e $f : X \to X$ contínua. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) f é hipercíclica;

(ii) f é topologicamente transitiva.

Além disso, se quaisquer dos itens acima é verdadeiro, então o conjunto de pontos de X possuindo órbita densa é um conjunto do tipo G_δ, isto é, composto por uma interseção enumerável de conjuntos abertos.

Demonstração. $(i) \implies (ii)$. Sejam f hipercíclica e $y \in X$ um ponto tal que $O_f(y)$ é denso em X. Afirmamos que para todo $n \geq 1$, $O_f\big(f^n(y)\big)$ é denso em X. Como X não tem pontos isolados, $O_f(y)\backslash\{y, f(y), \ldots, f^{n-1}(y)\}$ também é denso em X. Além disso, como $O_f(y)\backslash\{y, f(y), \ldots, f^{n-1}(y)\} \subseteq O_f\big(f^n(y)\big)$, temos que $O_f\big(f^n(y)\big)$ é denso em X.

Sejam U, V abertos não-vazios de X. Como f é hipercíclica, existe $y \in X$ tal que $O_f(y)$ é denso em X. Em particular, existe $n \geq 0$ tal que $x = f^n(y) \in U$. Segue do primeiro parágrafo que $O_f(x)$ também é denso em X. Assim, existe $m \geq 0$ tal que $f^m(x) \in V$. Deste modo, $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$. Logo f é topologicamente transitiva.

$(ii) \implies (i)$. Seja agora f topologicamente transitiva. Considere D_f o conjunto dos pontos com f-órbita densa. Se mostrarmos que D_f é não-vazio então obtemos que f é hipercíclico. Como X é separável, considere $\{y_j : j \in \mathbb{N}\}$ um conjunto denso de X. Temos que as bolas de centro y_j e raio $\frac{1}{m}, m \geq 1$, compõem uma base contável da topologia de X. Denominemos tal base por $(U_k)_{k\geq 1}$. Assim, $x \in D_f \Leftrightarrow \forall k \geq 1, \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \in U_k$, isto é,

$$D_f = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U_k).$$

Da continuidade de f e do Teorema 1.3.4, para cada $k \geq 1$, o conjunto $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U_k)$ é aberto e denso. Logo, pelo Teorema de Categoria de Baire, D_f é G_δ denso e, portanto, não-vazio. $\square$

O próximo exemplo mostra que no Teorema 1.3.6 a hipótese de que X não tenha pontos isolados é necessária. Isto é, sem tal hipótese, os conceitos de transitividade topológica e hiperciclicidade não são equivalentes.

Exemplo 1.3.7. *Seja $X = \{0, 1\}$ dotado da métrica trivial. Seja $f : X \to X$ a função contínua definida por $f(0) = 1$ e $f(1) = 1$. Então f é hipercíclica mas f não é topologicamente transitiva.*

Demonstração. Como $O_f(0) = \{0, 1\} = X$, temos que a f-órbita de 0 é densa em X, logo f é hipercíclica. Os conjuntos $U = \{1\}$ e $V = \{0\}$ são abertos não-vazios disjuntos. Observe que para todo $n \geq 0$, $f^n(U) \cap V = U \cap V = \emptyset$. Assim, f não é topologicamente transitiva. $\square$

O próximo exemplo mostra que no Teorema 1.3.6 a hipótese de que X é completo é necessária.

Exemplo 1.3.8. *Sejam $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ a transformação contínua definida por $f(z) = z^2$ e $D = \bigcup_{n\geq 1} \left\{1, e^{i2\pi\frac{1}{2^n-1}}, e^{i2\pi\frac{2}{2^n-1}}, \ldots, e^{i2\pi\frac{2^n-2}{2^n-1}}\right\}$. Então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

(*i*) *f é topologicamente transitiva e hipercíclica;*

(*ii*) *D é f-invariante e $f|_D$ é topologicamente transitiva mas não é hipercíclica.*

Demonstração. (i). Dado U um aberto não-vazio de $\mathbb{S}^1$, então tem-se que U contém um arco de comprimento $\frac{2\pi}{2^n}$ para algum $n \geq 1$. Daí, como a transformação f dobra ângulos, $f^n(U)$ contém um arco de comprimento 2π para algum $n \geq 1$, isto é, $f^n(U) = \mathbb{S}^1$. Em particular, $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo aberto não-vazio V. Logo f é topologicamente transitiva. Como $\mathbb{S}^1$ é um espaço métrico completo separável com a métrica usual, segue do Teorema da Transitividade de Birkhoff que f também é hipercíclica.

(ii). Primeiro observe que $e^{i2\pi\frac{\ell}{2^n-1}} \in D$ para todo inteiro $\ell \geq 0$. De fato, podemos escrever $\ell = k \cdot (2^n - 1) + r$, onde $k \geq 0$ e $0 \leq r \leq 2^n - 2$. Assim,

$$e^{i2\pi\frac{\ell}{2^n-1}} = e^{i2\pi\frac{k\cdot(2^n-1)+r}{2^n-1}} = e^{i2\pi\frac{r}{2^n-1}} \in D. \tag{1.1}$$

Agora considere $p = e^{i2\pi\frac{m}{2^n-1}} \in D$. Então, tomando $\ell = 2m$ obtemos de (1.1) que $f\big(p\big) = e^{i2\pi\frac{2m}{2^n-1}} = e^{i2\pi\frac{\ell}{2^n-1}} \in D$. Logo, $f(D) \subseteq D$ e, portanto, D é f-invariante.

A métrica usual em $\mathbb{S}^1$ é $d : \mathbb{S}^1 \to [0,1]$ definida por

$$d(e^{i2\pi t}, e^{i2\pi s}) = \min\{|t-s|, 1-|s-t|\}, \quad \forall 0 \leq t, s \leq 1.$$

Para cada $n \geq 1$ e $0 \leq r \leq 2^n - 3$, temos que $d\big(e^{i2\pi \frac{r}{2^n-1}}, e^{i2\pi \frac{r+1}{2^n-1}}\big) = \frac{1}{2^n-1}$. Além disso, $d\big(e^{i2\pi \frac{2^n-2}{2^n-1}}, 1\big) = \frac{1}{2^n-1}$. Em outras palavras, os pontos do conjunto

$$\Big\{1, e^{i2\pi \frac{1}{2^n-1}}, e^{i2\pi \frac{2}{2^n-1}}, \ldots, e^{i2\pi \frac{2^n-2}{2^n-1}}\Big\}$$

são uniformemente distribuídos em $\mathbb{S}^1$ e a distância entre dois pares de pontos consecutivos quaisquer é $\frac{1}{2^n-1}$, que tende a 0 quando $n \to \infty$. Segue disto que D é denso em $\mathbb{S}^1$.

Para provar que $f|_D$ é topologicamente transitiva, sejam U_D e V_D dois abertos não-vazios de D. Então existem abertos não-vazios U e V de $\mathbb{S}^1$ tais que $U_D = U \cap D$ e $V_D = V \cap D$. Da transitividade topológica de f em $\mathbb{S}^1$, segue que existe um ponto $u \in U$ cuja f-órbita intercepta V. Da continuidade de f e da densidade de D segue se $d \in U_D$ está suficientemente próximo de u, então a f-órbita de d também intercepta V e está contida em D, logo ela intercepta V_D. Isto mostra que $f|_D$ é topologicamente transitiva.

A transformação $f|_D$ não é hipercíclica pois todas os pontos de D são periódicos. De fato, se $z = e^{i2\pi \frac{r}{2^n-1}} \in D$, então $f^n(z) = z^{2^n} = e^{i2\pi \frac{r2^n}{2^n-1}} = e^{i2\pi \frac{r}{2^n-1}} = z$. □

Exemplo 1.3.9 (Transformação tenda). *Seja $f : [0,1] \to [0,1]$ definida como*

$$f(x) = \begin{cases} 2x & se \quad x \in [0, \frac{1}{2}] \\ \\ 2-2x & se \quad x \in]\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

Então f é topologicamente transitiva e hipercíclica.

Demonstração.

Afirmação. $f^n\left(\frac{2k}{2^n}\right) = 0, n \geq 1, 0 \leq k \leq 2^{n-1}$ *e* $f^n\left(\frac{2k-1}{2^n}\right) = 1, n \geq 1, 1 \leq k \leq 2^{n-1}$.

Para $n = 1$, $k = 0$ ou 1 para a primeira igualdade, então $f\left(\frac{2\cdot 0}{2^1}\right) = f(0) = 0$ e $f\left(\frac{2\cdot 1}{2^1}\right) = f(1) = 2 - 2\cdot 1 = 0$ e $k = 1$ para a segunda igualdade. Então $f\left(\frac{2\cdot 1-1}{2^1}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$.

Seja $n \geq 1$. Suponha que $f^n\left(\frac{2k}{2^n}\right) = 0, 0 \leq k \leq 2^{n-1}$ e $f^n\left(\frac{2k-1}{2^n}\right) = 1, 1 \leq k \leq 2^{n-1}$. Vamos mostrar que $f^{n+1}\left(\frac{2k}{2^{n+1}}\right) = 0, 0 \leq k \leq 2^n$ e $f^{n+1}\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right) = 1, 1 \leq k \leq 2^n$. De fato,

$$f^{n+1}\left(\frac{2k}{2^{n+1}}\right) = \begin{cases} f^n\left(f\left(\frac{2k}{2^{n+1}}\right)\right) = f^n\left(\frac{2k}{2^n}\right) = 0 & \text{se} \quad 0 \leq k \leq 2^{n-1} \\ f^n\left(f(1)\right) = f^n(0) = 0 & \text{se} \quad k = 2^n \end{cases}.$$

Da mesma maneira,

$$f^{n+1}\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right) = \begin{cases} f^n\left(f\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right)\right) = f^n\left(\frac{2k-1}{2^n}\right) = 1 & \text{se} \quad 1 \leq k \leq 2^{n-1} \\ f^n\left(f\left(\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}\right)\right) = f^n\left(f\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\right) = f^n\left(\frac{1}{2^n}\right) = 1 & \text{se} \quad k = 2^n \end{cases}.$$

O resultado segue então por indução finita.

Mostremos que f é topologicamente transitiva. Seja U um aberto não-vazio do intervalo $[0,1]$. Temos que para n suficientemente grande, U contém um intervalo $J_m = [\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}]$ para algum $0 \leq m \leq 2^n - 1$. Note que segue da **Afirmação** que $[0,1] = f^n(J_m) \subseteq f^n(U)$. Logo $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(U)$ é denso em $[0,1]$ e, portanto, f é topologicamente transitiva. Como $[0,1]$ é um espaço métrico completo separável com a métrica usual, segue do Teorema da Transitividade de Birkhoff que f também é hipercíclica. $\square$

Exemplo 1.3.10. *A transformação* $f : [0,1] \to [0,1]$ *dada por* $f(x) = \{2x\}$*, onde* $\{\cdot\}$ *denota a parte fracionária, é topologicamente transitiva.*

Demonstração. Seja $n \geq 1$. Considere os intervalos $\left\{\left(\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right) : 0 \leq i \leq 2^n - 1\right\}$. Afirmarmos que $f^n\left(\left(\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right)\right) = (0,1)$ para todo $0 \leq i \leq n$. A afirmação é verdadeira para $n = 1$,

$i = 0, 1$ pois $f\left(\left(0, \frac{1}{2}\right)\right) = (0,1)$ e $f\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right)\right) = (0,1)$. Assuma que a afirmação seja verdadeira para algum $n \geq 1$ e todo $0 \leq i \leq 2^n - 1$. Afirmamos que ela é verdadeira para $n+1$ e todo $0 \leq i \leq 2^{n+1} - 1$. De fato,

$$f^{n+1}\left(\left(\frac{i}{2^{n+1}}, \frac{i+1}{2^{n+1}}\right)\right) = \begin{cases} f^n\left(\left(\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right)\right) = (0,1) \text{ se } 0 \leq i \leq 2^n - 1 \\ f^n\left(\left(\frac{i}{2^n} - 1, \frac{i+1}{2^n} - 1\right)\right) = f^n\left(\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right) = (0,1) \, \text{se} \, 2^n \leq i \leq \\ 2^{n+1} - 1 \end{cases},$$

onde $j = i - 2^n \leq 2^{n+1} - 1 - 2^n = 2 \cdot 2^n - 1 - 2^n = 2^n - 1$.

Assim, por indução, a afirmação é válida para todo $n \geq 1$. Sejam $U, V \subseteq [0,1]$ abertos não-vazios. Sejam $n \geq 1$ e $0 \leq i \leq 2^n - 1$ tais que $\left(\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right) \subseteq U$. Da afirmação, obtemos que $(0,1) = f^n\left(\left(\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right)\right) \subset U$. Logo, $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ e f é topologicamente transitiva. $\square$

Outros exemplos de transformações topologicamente transitivas e hipercíclicas podem ser construídos usando o conceito de quase-conjugação.

Definição 1.3.11 (Quase-conjugação). *Sejam (X, f) e (Y, g) sistemas dinâmicos topológicos.*

(*i*) *Se existe uma função $h : Y \to X$ contínua e com imagem densa tal que $h \circ g = f \circ h$, ou seja, o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{g} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ X & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

comuta, então dizemos que f é quase-conjugada a g.

(*ii*) *Se além do diagrama no item anterior comutar, tivermos que h é um homeomorfismo, então dizemos que f e g são conjugadas.*

Exemplo 1.3.12. *A transformação $L_4 : [0,1] \to [0,1]$ dada por $L_4(x) = 4x(1-x)$ é quase-conjugada a $g : [0,1] \to [0,1]$ dada por $g(x) = \{2x\}$, onde $\{\cdot\}$ denota a parte fracionária.*

Demonstração. Considere $h : [0,1] \to [0,1]$ definida por $h(x) = \operatorname{sen}^2(\pi x)$. Temos que h é uma função contínua e sobrejetora, portanto tem imagem densa. Além disso, $L_4(h(x)) = L_4(\operatorname{sen}^2(\pi x)) = 4\operatorname{sen}^2(\pi x)(1 - \operatorname{sen}^2(\pi x)) = \operatorname{sen}^2(2\pi x)$ e $h(g(x)) = h(\{2x\}) = \operatorname{sen}^2(\pi\{2x\}) = \operatorname{sen}^2(\pi(2x - \lfloor 2x \rfloor)) = \operatorname{sen}^2(2\pi x)$, onde $\lfloor 2x \rfloor$ denota a parte inteira de $2x$. Logo $L_4 \circ h = h \circ g$. Porém h não é injetiva, pois por exemplo $h(\frac{1}{4}) = h(\frac{3}{4})$. Então h não é um homeomorfismo. Portanto, L_4 é quase-conjugada a f mas não é conjugada a f. □

Exemplo 1.3.13. *As transformações $f : [0,1]/\mathbb{Z} \to [0,1]/\mathbb{Z}$ dada por $f(x) = \{2x\}$ e $g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ dada por $g(z) = z^2$ são conjugadas.*

Demonstração. Considere $h : [0,1]/\mathbb{Z} \to \mathbb{S}^1$ definida por $h(x) = e^{2\pi i x}$. Podemos observar que se identificarmos $0 = 1$ em $[0,1]/\mathbb{Z}$, h é um homeomorfismo. Temos também que $h(f(x)) = h(\{2x\}) = e^{2\pi i(2x - \lfloor 2x \rfloor)} = e^{4\pi i x}$ e $g(h(x)) = g(e^{2\pi i x}) = e^{4\pi i x}$. Logo, $h \circ f = g \circ h$. Assim obtemos que f e g são conjugados. □

Proposição 1.3.14. *As propriedades de transitividade topológica e hiperciclicidade são preservadas por quase-conjugação, isto é, se f é quase-conjugada a g e g é hipercíclica (respectivamente, topologicamente transitiva), então f também é hipercíclica (respectivamente, topologicamente transitiva).*

Demonstração. Sejam (X, f) e (Y, g) sistemas dinâmicos topológicos e $h : Y \to X$ uma função contínua e com imagem densa tal que $h \circ g = f \circ h$, isto é, f é quase-conjugada a g.

Suponha que g seja topologicamente transitiva. Dados U, V abertos não-vazios de X, segue que $h^{-1}(U)$ e $h^{-1}(V)$ são abertos não-vazios de Y. Como h tem imagem densa, existe $y \in Y$ tal que $h(y) \in U$, daí $y \in h^{-1}(U)$. Como g é topologicamente transitiva, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $g^n(y) \in h^{-1}(V)$, e assim $h(y) \in U$ e $h(g^n(y)) \in V$. Como $h \circ g = f \circ h$, obtemos que $h(g^n(y)) = f^n(h(y)) \in V$. Logo f é topologicamente transitiva.

Suponha g seja hipercíclica. Então existe $y \in Y$ tal que $\{g^k(y) : n \in \mathbb{N}\}$ é denso em Y. Dado um aberto não-vazio U em X, como y tem g-órbita densa, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $g^n(y) \in h^{-1}(U)$, então $h(g^n(y)) \in U$. Como $h \circ g = f \circ h$, $h(g^n(y)) = f^n(h(y)) \in U$. Logo $h(y)$ tem f-órbita densa em X.

$\square$

Exemplo 1.3.15. *A transformação $L_4 : [0,1] \to [0,1]$ dada por $L_4(x) = 4x(1-x)$ é topologicamente transitiva e hipercíclica.*

Demonstração. É uma consequência imediata dos enunciados do Exemplos 1.3.10, da Proposição e do Teorema da Transitividade de Birkhoff. $\square$

É importante observar que a hiperciclicidade de uma transformação f não implica a hiperciclicidade das iteradas de f.

Exemplo 1.3.16. *Considere a transformação contínua $f : [-1,1] \to [-1,1]$ dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 2 + 2x & \textit{se} \quad x \in [-1, -\frac{1}{2}[\\ -2x & \textit{se} \quad x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\\ -2 + 2x & \textit{se} \quad x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} .$$

Temos que f é uma transformação hipercíclica mas f^2 não o é.

Demonstração. Observe que $f\big([-1,0]\big) = [0,1]$ e $f\big([0,1]\big) = [-1,0]$. Assim, $f^2\big([-1,0]\big) = [-1,0]$ e $f^2\big([0,1]\big) = [0,1]$. Portanto, f^2 não é hipercíclica. Por outro lado, procedendo da mesma forma que na prova do Exemplo 1.3.9, pode-se mostrar que dados U, V abertos não-vazios em $[-1,1]$, existe $m \geq 1$ tal que $f^{2m}(U) \cup f^{2m-1}(U) \cap V \neq \emptyset$. Logo existe $n \in \{2m, 2m-1\}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$, de onde concluímos a transitividade topológica de f. Logo, pelo Teorema da Transitividade de Birkhoff, f é hipercíclica. $\square$

Naturalmente, os exemplos mais simples, porém desinteressantes, de sistemas hipercíclicos ou topologicamente transitivos são os sistemas minimais. Os exemplos mais interessantes são aqueles que permitem coexistência de uma quantidade densa de pontos periódicos e de uma órbita densa. Estes sistemas são chamados de caóticos.

1.4 Sistemas dinâmicos caóticos

Sistemas dinâmicos caóticos são sistemas dinâmicos topologicamente transitivos que possuem um conjunto denso de órbitas periódicas. A definição formal é a seguinte.

Definição 1.4.1 (Transformação caótica ou sistema dinâmico caótico)**.** *Seja X um espaço métrico sem pontos isolados. Dizemos que um sistema dinâmico topológico (X, f) é um sistema dinâmico caótico ou que $f : X \to X$ é uma transformação caótica se as seguintes condições forem satisfeitas:*

(*i*) *A transformação f é topologicamente transitiva;*

(*ii*) *O conjunto de pontos periódicos de f é denso em X.*

Na definição original de R. L. Devaney [7] há uma terceira condição nomeada *dependência sensível das condições iniciais.*

Definição 1.4.2 (Dependência sensível das condições iniciais)**.** *Seja X um espaço métrico sem pontos isolados. Dizemos que um sistema dinâmico topológico (X, f) ou que $f : X \to X$ tem dependência sensível das condições iniciais se existe $\epsilon > 0$ tal que para cada $x \in X$ e cada $\delta > 0$, existem $y \in X$ com $d(x, y) < \delta$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que $d\big(f^n(x), f^n(y)\big) > \epsilon$. Neste caso, ϵ é denominada constante de sensibilidade de f.*

Conforme mostra o resultado abaixo, a terceira condição é automaticamente satisfeita para transformações contínuas que satisfazem as condições (i) e (ii) da Definição 1.4.1.

Teorema 1.4.3 (Banks-Brooks-Cairns-Davis-Stacey)**.** *Sejam X um espaço métrico sem pontos isolados. Se $f : X \to X$ é contínua, topologicamente transitiva e tem um conjunto denso de pontos periódicos, então f também tem dependência sensível das condições iniciais.*

Demonstração. Seja d uma métrica que define a topologia de X.

Afirmação. *Existe $\eta > 0$ tal que para todo $x \in X$, existe um ponto periódico p tal que $d(x, f^n(p)) \geq \eta, \forall n \in \mathbb{N}$.*

De fato, como X não tem pontos isolados, ele é infinito. Então podemos tomar dois pontos periódicos p_1, p_2 cujas órbitas são disjuntas. Defina

$$\eta = \inf_{m,n \in \mathbb{N}} \frac{d(f^m(p_1), f^n(p_2))}{2} > 0\cdot$$

Pela desigualdade triangular, para cada $x \in X$, $d(x, f^n(p_1)) \geq \eta$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ou $d(x, f^n(p_2)) \geq \eta$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Caso contrário, existiriam $m, n \in \mathbb{N}$ tais que

$$\underbrace{d(x, f^m(p_1))}_{<\eta} + \underbrace{d(x, f^n(p_2))}_{<\eta} \geq d(f^m(p_1), f^n(p_2)) \geq 2\eta,$$

o que é uma contradição. Isto prova a Afirmação.

Mostremos agora que f tem dependência sensível das condições iniciais com constante de sensibilidade $\epsilon = \frac{\eta}{4}$. Dados $x \in X$ e $\delta > 0$, como X tem um conjunto denso de pontos periódicos, podemos tomar um ponto periódico q de modo que

$$d(x, q) < \min\{\epsilon, \delta\}. \tag{1.2}$$

Denote por N o período de q. Pela Afirmação anterior, existe um ponto periódico p tal que

$$d(x, f^n(p)) \geq \eta = 4\epsilon, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.3}$$

Da continuidade de f, existe uma vizinhança V de p tal que

$$d(f^n(p), f^n(y)) < \epsilon, \forall n \in \{0, 1, \ldots, N\},\ \forall y \in V. \tag{1.4}$$

Devido à transitividade topológica de f, podemos tomar $z \in B(x, \delta)$ e $k \in \mathbb{N}$ tais que $f^k(z) \in V$.

Seja $j \in \mathbb{N}$ com $k \leq jN < k+N$, temos então que $d(f^{jN}(q), f^{jN}(z)) = d\left(q, f^{jN-k}\left(f^k(z)\right)\right)$, pois q tem período N. Aplicando a desigualdade triangular duas vezes, segue que

$$d\left(q, f^{jN-k}\left(f^k(z)\right)\right) \geq d(x, f^{jN-k}(p)) - d(f^{jN-k}(p), f^{jN-k}\left(f^k(z)\right)) - d(x, q)$$

Por (1.2),(1.3) e (1.4), temos que

$$d(f^{jN}(q), f^{jN}(z)) > 4\epsilon - \epsilon - \epsilon = 2\epsilon.$$

Logo, $d(f^{jN}(x), f^{jN}(q)) > \epsilon$ ou $d(f^{jN}(x), f^{jN}(z)) > \epsilon$ (mesmo argumento utilizado na Afirmação) com $z, q \in B(x, \delta)$. Portanto f tem dependência sensível das condições iniciais. $\square$

Exemplo 1.4.4. *A transformação contínua $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ definida por $f(z) = z^2$ é caótica.*

Demonstração. A prova é a mesma do Exemplo 1.3.8. $\square$

Exemplo 1.4.5. *A transformação tenda vista no Exemplo 1.3.9 é uma transformação caótica.*

Demonstração. Já foi mostrado no Exemplo 1.3.9 que f é topologicamente transitiva. Além disso, foi mostrado que para todo $n \geq 1$, $0 \leq m \leq 2^n - 1$ e $J_{n,m} = \left[\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}\right]$, ocorre que $f^n(J_{n,m}) = [0,1]$. Combinando isto com a continuidade de f^n, obtemos que f^n tem um ponto fixo em $J_{n,m}$, isto é, f tem um ponto periódico no intervalo $J_{n,m}$ para cada $n \geq 1$ e $1 \leq m \leq 2^n - 1$. Logo, o conjunto de pontos periódicos é denso. $\square$

Exemplo 1.4.6. *A transformação dada no Exemplo 1.3.10 é caótica.*

Demonstração. A transitividade topológica de f já foi demonstrada no Exemplo 1.3.10. Mostremos que o conjunto de pontos periódicos é denso. Dado $n \geq 1$, seja $J_m = \left[\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}\right)$, $0 \leq m \leq 2^n - 1$. Vamos provar que f^n é afim em J_m e que $f^n\big(J_m\big) = [0,1)$. A afirmação é verdadeira para $n = 1$ pois f é afim em $J_m = \left[\frac{m}{2}, \frac{m+1}{2}\right)$ e $f\big(J_m\big) = [0,1)$, $0 \leq m \leq 1$. Suponha que a afirmação seja verdadeira para algum $n \geq 1$ e todo $0 \leq m \leq 2^n - 1$. Vamos provar que ela também vale para $n+1$. De fato,

$$f^{n+1}(J_m) = (f^n \circ f)\left(\left[\frac{m}{2^{n+1}}, \frac{m+1}{2^{n+1}}\right)\right) = \begin{cases} f^n\left(\left[\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}\right)\right) = [0,1) & \text{se} \quad 0 \leq m \leq 2^n - 1 \\ f^n\left(\left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right)\right) = [0,1) & \text{se} \quad 2^n \leq m \leq 2^{n+1} - 1, \end{cases}$$

onde $0 \leq j = m - 2^n \leq 2^{n+1} - 1 - -2^n = 2^n - 1$. Assim, segue por indução que a afirmação é verdadeira para todo $n \geq 1$. Como f^n leva $\left[\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}\right)$ sobre $[0,1)$ de maneira fim, f^n tem um ponto fixo em cada intervalo da forma $\left[\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}\right)$, provando que o conjunto de pontos periódicos de f é denso. $\square$

Proposição 1.4.7. *Caos é preservado por quase-conjugação, isto é, se f é quase-conjugada a g e g é caótica, então f também é caótica.*

Demonstração. Pela Proposição 1.3, a transitividade topológica é preservada por quase-conjugação. Assim, basta mostrar que a propriedade de ter uma quantidade densa de pontos periódicos também é preservada por tal relação. Sejam $f : X \to X$ e $g : Y \to Y$ sistemas dinâmicos e $h : Y \to X$ uma função contínua com $h \circ g = f \circ h$, isto é, f é quase conjugada a g. Suponha que Y tenha um conjunto denso de pontos periódicos. Dado um aberto não-vazio U em X, temos que $h^{-1}(U)$ é aberto não-vazio de Y, pois h tem imagem densa. Como o conjunto de pontos periódicos é denso em Y, existe $y \in h^{-1}(U)$ tal que $g^n(y) = y$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Daí $h(y) = h(g^n(y))$. Como $h \circ g = f \circ h$, obtemos que $h(y) = h(g^n(y)) = f^n(h(y)) \in U$. Logo quase-conjugação preserva a propriedade de caos. □

Exemplo 1.4.8. *A transformação $L_4 : [0, 1] \to [0, 1]$ dada por $L_4(x) = 4x(1-x)$ é caótica.*

Demonstração. É uma consequência dos Exemplos 1.3.15 e 1.4.6 e da Proposição 1.4.7. □

Capítulo 2

Dinâmica linear

Operadores lineares contínuos atuando em espaços de Banach separáveis podem apresentar comportamento caótico. Mais geralmente, existe um operador linear contínuo – o operador de Rolewicz – definido no espaço ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, das sequências de números reais p-somáveis com a propriedade universal de que qualquer sistema dinâmico contínuo definido num espaço métrico compacto pode ser topologicamente mergulhado nele.

Definição 2.0.1. *Um sistema dinâmico linear é um par* (X, T)*, onde* $(X, \|\cdot\|)$ *é um espaço vetorial normado e* $T : X \to X$ *uma transformação linear contínua* (*operador contínuo*).

2.1 Operadores lineares em espaços de Banach de dimensão finita

O primeiro ingrediente do caos – a hiperciclicidade (ou equivalentemente, a transitividade topológica) – não pode ocorrer em espaços de dimensão finita para operadores lineares.

Teorema 2.1.1. *Sejam X um espaço de Banach real de dimensão finita e $T : X \to X$ um operador linear. Dado $x \in X$, uma das três alternativas ocorre:*

(i) $\lim_{n\to\infty} T^n x = 0$;

(ii) $\lim_{n\to\infty} \|T^n x\| = \infty$;

(iii) $\exists m, M > 0$ *tais que* $m < \|T^n x\| < M$ *para todo* $n \geq 0$.

Demonstração. Seja X um espaço de Banach de dimensão finita $N, N \geq 1$, então X é isomorfo isometricamente a $\mathbb{R}^N$. Consideremos a partir daqui $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$. Pelo Teorema da Decomposição de Jordan, existe uma base de $\mathbb{R}^N$ com relação à qual a matriz $[T]$ do operador T está na forma de Jordan. Como todas as normas são equivalentes em $\mathbb{R}^N$, consideramos a base como a canônica. Mostrar o resultado é equivalente a mostrar que este é válido para operadores representados pelo bloco de Jordan da forma

$$[T] = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 0 & \lambda & 1 \\ & & & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Para $n \geq N-1$, temos

$$[T^n] = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \cdots & \cdots & \binom{n}{N-1}\lambda^{n-N+1} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \cdots & \cdots & \binom{n}{N-2}\lambda^{n-N+2} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} \\ & & & 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ & & & & 0 & \lambda^n \end{bmatrix}.$$

Aplicando T^n em um vetor não-nulo $x = (x_1, \cdots, x_N)$ de $\mathbb{R}^N$, podemos analisar os possíveis casos com relação ao valor absoluto de λ.

Seja $|\lambda| > 1$. Como x é um vetor não-nulo, existe $1 \leq k \leq N$ tal que $x_k \neq 0$. Seja $x_{k'}$ a última entrada não-nula de x, então a k'-ésima entrada de $T^n x$ é $\lambda^n x_{k'}$. Logo $\|T^n x\| \longrightarrow \infty$ quando $n \longrightarrow \infty$.

Agora analisemos o caso em que $|\lambda| = 1$. Se $x = (x_1, 0, \ldots, 0)$, então todas as entradas de $T^n x$ são nulas, exceto a primeira dada por $\lambda^n x_1$. Assim, $\|T^n x\| = |x_1|$ para todo $n \geq 0$. Se o primeiro caso não ocorrer, então $|x_i| > 0$ para algum $2 \leq i \leq N$. Neste caso, a $(i-1)$-ésima entrada de $T^n x$ é $\lambda^n x_{i-i} +\, n\lambda^{n-1}x_i$. Assim, $\|T^n x\| \to \infty$ quando $n \to \infty$.

Se $|\lambda| < 1$, então todas as entradas de $T^n x$ tendem a 0, e segue que $T^n x \longrightarrow 0$. $\square$

Corolário 2.1.2. *Se $T : X \to X$ é um operador linear definido num espaço de Banach real X de dimensão finita, então T não é hipercíclico, nem topologicamente transitivo, nem caótico.*

Demonstração. Dado $x \in X$, pelo Teorema 2.1.1, podem ocorrer três possibilidades. Suponha que $\lim_{n\to\infty} T^n x = 0$ e assim para algum $\epsilon > 0$, $T^n x \in \overline{B_\epsilon(0)}, \forall n \in \mathbb{N}$ então o aberto $X \backslash \overline{B_\epsilon(0)}$ não possui nenhuma iterada de T. Logo T não é topologicamente transitivo.

Suponha que $\lim_{n\to\infty} \|T^n x\| = \infty$, então para algum $\epsilon > 0$ tal que $T^n x \notin B_\epsilon(0), \forall n \in \mathbb{N}$. Logo T não é topologicamente transitivo.

Por fim, suponha que $\exists m, M > 0$ tais que $m < \|T^n x\| < M$ para todo $n \geq 0$, então a bola $B_{\frac{m}{2}}(0)$ não contém nenhuma iterada de T. Logo T não é topologicamente transitivo.

Os mesmos argumentos mostram que T não é hipercíclico. Logo, T também não é caótico. $\square$

Devido ao resultado acima, os estudos de propriedades dinâmicas em espaços de Banach de dimensão finita é desinteressante.

Vimos no Capítulo 1 que o Teorema da Transitividade de Birkhoff "reduz" a hiperciclicidade a uma condição mais simples que é a de transitividade topológica. Porém, em muitas situações não é óbvio fazer tal verificação. É à luz deste problema que surgem os teoremas denominados *critérios* na teoria. Os critérios têm a característica de serem fáceis de aplicar, alguns de simples compreensão, ainda que em geral sejam bem específicos, ou seja, um mesmo critério faz caracterizações especificamente restrita a um espaço. Apresentaremos abaixo um dos critérios, o Critério de Hiperciclicidade. Como o nome sugere, serve para verificar se um dado operador, definido particularmente em espaços de Banach, é hipercíclico.

Teorema 2.1.3 (Critério de hiperciclicidade)**.** *Seja $T : X \to X$ um operador linear definido num espaço de Banach separável X. Se existem subconjuntos densos $X_0, Y_0 \subseteq X$, uma sequência crescente $(n_k)_k \subseteq \mathbb{N}$ e funções $S_{n_k} : Y_0 \to X, k \geq 1$, tais que para todo par $(x, y) \in X_0 \times Y_0$:*

(i) $T^{n_k} x \longrightarrow 0$;

(ii) $S_{n_k} y \longrightarrow 0$;

(*iii*) $T^{n_k}S_{n_k}y \longrightarrow y$.

Então T é topologicamente transitivo e hipercíclico.

Demonstração. Mostremos que T é topologicamente transitivo. Sejam U, V abertos não-vazios de X. Como X_0 e Y_0 são densos em X, podemos tomar $x \in X_0 \cap U$ e $y \in Y_0 \cap V$. Segue que $x + S_{n_k}y \longrightarrow x$ e $T^{n_k}(x + S_{n_k}y) = T^{n_k}x + T^{n_k}S_{n_k}y \longrightarrow y \in V$. Logo $T^{n_k}(U) \cap V \neq \emptyset$ e assim T é topologicamente transitivo. Como X é um espaço de Banach separável, pelo Teorema de Transitividade de Birkhoff, T é hipercíclico. □

Vamos introduzir agora alguns exemplos de operadores lineares contínuos em espaços de Banach de dimensão infinita. Vamos precisar de algumas notações. Dado um espaço de Banach $(X, \|\cdot\|)$, denotamos por $\ell_p(X) = \left\{(x_i) \in X^{\mathbb{N}} : \sum_{i\in\mathbb{N}} \|x_i\|^p < \infty\right\}$ o conjunto das sequências p-somáveis de elementos de X munido da norma $\|(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\|_p = \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} \|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

Lema 2.1.4. *Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach. Dado $1 \leq p < \infty$, as seguintes afirmações são verdadeiras:*

(*i*) *$\ell_p(X)$ é um espaço de Banach com a norma*

$$\| (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \|_p = (\sum_{i\in\mathbb{N}} \|x_i\|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Além disso, $(\ell_2(X), \|\cdot\|_2)$ é um espaço de Hilbert.

(*ii*) *Se X é separável, $\ell_p(X)$ é separável.*

Demonstração.

(*i*) É claro que $\ell_p(X)$ é um espaço normado com a norma dada. Mostremos primeiro que $\ell_p(X)$ é um espaço de Banach. Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy arbitrária em $\ell_p(X)$. Então dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para quaisquer $m, n \geq N$,

$$\|a_n - a_m\|_p^p = \sum_{i \in \mathbb{N}} \|x_{i,n} - x_{i,m}\|^p < \epsilon^p. \tag{2.1}$$

Para cada $i \in \mathbb{N}$, $(x_{i,m})_{m \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em X, devido a (2.1). Como X é de Banach, existe $x_i \in X$ tal que $x_{i,m} \longrightarrow x_i$. Tome $a := (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$. De (2.1), temos que $\sum_{i=1}^k \|x_{i,n} - x_{i,m}\|^p < \epsilon^p$ para cada $k \geq 1$ e $m, n \geq N$. Fazendo $m \longrightarrow \infty$, obtemos que $\sum_{i=1}^k \|x_{i,n} - x_i\|^p < \epsilon^p$ para cada $k \geq 1$ e $n \geq N$. Assim, fazendo $k \to \infty$, obtemos que

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \|x_{i,n} - x_i\|^p \leq \epsilon^p.$$

Logo, $a_n \longrightarrow a$. Além disso, como $(x_{i,n})_{i \in \mathbb{N}} \in \ell_p(X)$ e $(x_{i,n} - x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \ell_p(X)$,

$$a = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} = (x_{i,n})_{\mathbb{N}} + (x_i - x_{i,n})_{i \in \mathbb{N}} \in \ell_p(X).$$

Portanto, como a sequência de Cauchy foi escolhida arbitrariamente, $\ell_p(X)$ é um espaço de Banach.

Para verificar que $\ell_2(X)$ é um espaço de Hilbert, basta notar que a norma $\|\cdot\|_2$ provém do produto interno canônico.

(ii) Como X é separável, existe um conjunto enumerável de vetores F denso em X. Seja D o conjunto enumerável de vetores de $\ell_p(X)$ definido por $D = \cup_{n \geq 1} D_n$, onde $D_n = \{(x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots,) : x_i \in F, i = 1, 2, \ldots, n\}$. Afirmamos que D é denso em $\ell_p(X)$. De fato, dados $z = (z_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \ell_p(X)$ e $\epsilon > 0$, seja $N \geq 1$ tal que $\sum_{i > N} \|z_i\|_p^p < \epsilon^p/2$. Seja $x_1, \ldots, x_N \in F$ tais que $\|x_i - z_i\|_p < \epsilon^p/2N$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Seja $x = (x_1, \ldots, x_N, 0, 0 \ldots)$. Então, $x \in D$ e

$$\|x - z\|_p^p = \sum_{i=1}^{N} \|x_i - z_i\|_p^p + \sum_{i > N} \|z_i\|_p^p \leq \epsilon^p.$$

Assim, $\|x - z\|_p < \epsilon$. Como ϵ é arbitrário, segue que D é denso. $\square$

2.2 O operador deslocamento à esquerda

O operador deslocamento à esquerda é um dos exemplos mais simples de operador linear. Ele é definido logo abaixo.

Definição 2.2.1 (Deslocamento à esquerda)**.** *Sejam $1 \leq p < \infty$ e X um espaço de Banach. O operador deslocamento à esquerda $B : \ell_p(X) \to \ell_p(X)$ é definido por*

$$B(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots).$$

Proposição 2.2.2. *O operador deslocamento à esquerda $B : \ell_p(X) \to \ell_p(X)$ é contínuo e tem norma $\|B\|_p = 1$. Além disso, B não é topologicamente transitivo, nem hipercíclico, nem caótico.*

Demonstração. Dados $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p(X), y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p(X)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$B(x + \alpha y) = (x_2 + \alpha y_2, x_3 + \alpha y_3, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots) + \alpha(y_2, y_3, \ldots) = B(x) + \alpha B(y).$$

Portanto B é linear.

Temos também que

$$\|Bx\|_p = \|(x_2, x_3 \ldots)\|_p \leq \|(x_1, x_2, \ldots)\|_p = \|x\|_p < \infty\cdot$$

Logo B é continuo e $\|B\|_p \leq 1$.

Agora considere $x = (0, x_2, x_3 \ldots) \in \ell_p(X)$. Observe que

$$\|Bx\|_p = \left(\sum_{i\geq 2} \|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p.$$

Desta forma, $\|B\|_p = \sup_{x\in X} \frac{\|Bx\|_p}{\|x\|} = 1$.

Sejam $U = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ e $V = \{x \in X : \|x\| > 1\}$. Então

$$y \in U \implies \|By\|_p \leq \|B\|_p \cdot \|y\|_p \leq 1 \implies By \in U.$$

Desta forma, $B^n U \subseteq U$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto mostra que B não é nem topologicamente transitivo, nem hipercíclico, nem caótico. $\square$

2.3 O operador de Rolewicz

O operador de Rolewicz é um dos exemplos mais simples de operador linear caótico.

Definição 2.3.1 (Operador de Rolewicz)**.** *Sejam $1 \leq p < \infty$ e X um espaço de Banach. O operador de Rolewicz $T : \ell_p(X) \to \ell_p(X)$ é definido por*

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (2x_2, 2x_3, \ldots). \tag{2.2}$$

Teorema 2.3.2. *Sejam X um espaço de Banach separável e $1 \leq p < \infty$. O operador de Rolewicz $T : \ell_p(X) \to \ell_p(X)$ é contínuo e caótico.*

Demonstração. O operador T é contínuo. De fato, seja $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_p(X)$, temos que

$$\begin{aligned} \|Tx\|_p^p &= \|T(x_1, x_2, ...)\|_p^p = \|2(x_2, x_3, ...)\|_p^p = \sum_{i\geq 2} \|2x_i\|^p \\ &= 2^p \cdot \sum_{i\geq 2} \|x_i\|^p \leq 2^p \sum_{i\in\mathbb{N}} \|x_i\|^p < \infty \cdot \end{aligned}$$

Afirmação. *O conjunto das sequências finitas é denso em X .*

Como X é separável, existe um conjunto enumerável de vetores F denso em X. Seja D o conjunto enumerável de vetores de $\ell_p(X)$ definido por $D = \cup_{n\geq 1} D_n$, onde $D_n = \{(x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots,) : x_i \in F, i = 1, 2, \ldots, n\}$. Afirmamos que D é denso em $\ell_p(X)$. De fato, dados $z = (z_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_p(X)$ e $\epsilon > 0$, seja $N \geq 1$ tal que $\sum_{i>N} \|z_i\|^p < \epsilon^p/2$. Seja $x_1, \ldots, x_N \in F$ tais que $\|x_i - z_i\| < \epsilon^p/2N$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Seja $x = (x_1, \ldots, x_N, 0, 0 \ldots)$. Então, $x \in D$ e

$$\|x - z\|_p^p = \sum_{i=1}^{N} \|x_i - z_i\|^p + \sum_{i>N} \|z_i\|^p \leq \epsilon^p.$$

Assim, $\|x-z\|_p < \epsilon$. Como ϵ é arbitrário, segue que D é denso.

Mostremos agora que T é topologicamente transitivo. Sejam $r > 0$ e $U, V \subset \ell_p(X)$ bolas abertas de raio r centradas respectivamente em $x = (x_1, x_2, \ldots)$ e $(y_1, y_2, \ldots)$. Pela Afirmação acima, existem $N \geq 1$, $x^* \in U$ e $y^* \in V$ tais que $x^* = (x_1, x_2, \ldots, x_N, 0, \ldots)$, $y^* = (y_1, y_2, \ldots, y_N, 0, \ldots)$, $\|x - x^*\|_p < \frac{r}{4}$ e $\|y - y^*\|_p < \frac{r}{4}$. Defina $z^* \in X$ por

$$z^* = (x_1, x_2, \ldots, x_N, 2^{-N}y_1, 2^{-N}y_2, \ldots, 2^{-N}y_N, 0, \ldots)\cdot$$

Temos que $T^N z^* = y^*$. Além disso, $\|x^* - z^*\|_p = 2^{-N}\|y^*\|_p < \frac{r}{4}$. Logo, pela Desigualdade Triangular, $z^* \in U$ e $T^n z^* = y^* \in V$. Logo, T é topologicamente transitiva.

Por fim, mostremos que o conjuntos de pontos periódicos é denso em X. Dados $x \in \ell_p(X)$ e $\epsilon > 0$, pela Afirmação acima, existem $N \geq 1$ arbitrariamente grande e $x^* = (x_1, \ldots, x_N, 0, \ldots)$ tais que $\|x - x^*\|_p < \frac{\epsilon}{4}$. Defina

$$x^{**} = (x_1, \ldots, x_N, 2^{-N}x_1, \ldots, 2^{-N}x_N, 2^{-2N}x_1, \ldots, 2^{-2N}x_N, \ldots).$$

Obtemos assim que ponto x^{**} é periódico com período menor ou igual a N. Ainda,

$$\|x^{**} - x^*\|_p^p \leq \sum_{i \geq 1} 2^{-Ni}\|x^*\|^p = \frac{1}{2^N - 1}\|x^*\|_p^p.$$

Tomando N arbitrariamente grande, resulta que $\|x^{**} - x^*\|_p < \frac{\epsilon}{4}$. Assim, pela Desigualdade Triangular, $\|x^{**} - x\|_p < \epsilon$. Isto prova que o conjunto de pontos periódicos é denso. Assim, T é caótica. $\square$

Existem generalizações para operador de Rolewicz, por exemplo, podemos considerar um operador $T = \lambda B$ em que $\lambda \in \mathbb{R}$ e B é o operador deslocamento à esquerda. Nessa perspectiva, segue o resultado:

Proposição 2.3.3. *Sejam $1 \leq p < \infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e X um espaço de Banach separável . O operador $T : \ell_p(X) \to \ell_p(X)$ definido como $T = \lambda B$ é caótico se, e somente $|\lambda| > 1$.*

Demonstração. Mostrar que $T = \lambda B$ é caótico para $|\lambda| > 1$ é um processo análogo ao que foi feito na prova do Teorema 2.3.2. Agora considere $|\lambda| \leq 1$, daí $\|T^n x\|_p = |\lambda|^n \|B^n x\|_p \leq \|x\|_p, \forall x \in \ell_p(X)$ e $n \in \mathbb{N}$. Como $\|x\|_p < \infty$, as iteradas de T são limitadas. Logo T não é topologicamente transitivo. □

O operador de Rolewicz é um operador caótico universal no seguinte sentido.

Teorema 2.3.4. *Sejam $X = \ell_2(\mathbb{R})$ e $T : \ell_2(X) \to \ell_2(X)$ o operador de Rolewicz. Dada qualquer transformação contínua $f : K \to K$ definida num espaço métrico compacto K, existe um subconjunto T-invariante L de $\ell_2(X)$ tal que f é conjugada à restrição $T|_L$ de T a L. Em outras palavras, existe um homeomorfismo $h : K \to L$ tal que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{f} & K \\ \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ L & \xrightarrow{T|_L} & L \end{array}$$

Demonstração. Pelo Lema 2.1.4, $\ell_2(X)$ é um espaço de Hilbert separável munido do produto interno canônico. Primeiramente vamos definir uma função $h : K \to \ell_2(X)$ que seja adequada. Assuma que a métrica d de K é limitada por 1, caso contrário, podemos tomar a métrica equivalente $d^{'}(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$. Como K é um espaço métrico compacto, é separável, portanto podemos tomar uma sequência densa $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ em K. Dado $x \in K$, defina $h(x)$ como sendo igual à sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\ell_2(\mathbb{R})$ da seguinte forma:

$$h(x) = (s_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\left(\frac{1}{2^{k+n}} d(y_k, f^n(x)) \right)_{k\in\mathbb{N}} \right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Afirmação. *A função h está bem definida.*

De fato, para cada $n \in \mathbb{N}$, a sequência $\left(\frac{1}{2^{k+n}} d(y_k, f^n(x))\right)_{k\in\mathbb{N}}$ satisfaz

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{2^{k+n}} d(y_k, f^n(x))\right)^2 \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{2^{2(k+n)}}\right) = \frac{2^{-2n}}{3} < \infty.$$

Portanto, $s_n \in \ell_2(\mathbb{R})$, isto é, $s_n \in X$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Além disso,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|s_n\|_2^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2^{-2n}}{3} < \infty.$$

Assim, $h(x) \in \ell_2(X)$ para cada $x \in K$. Logo, h está bem definida.

Afirmação. *h é contínua.*

Para quaisquer $x, y \in K$ e $N \geq 1$, temos

$$\begin{aligned} \|h(x) - h(y)\|_2^2 &= \sum_{n,k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{2(k+n)}} \left|d(y_k, f^n(x)) - d(y_k, f^n(y))\right|^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{N} \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{2(k+n)}} \left(d(f^n(x), f^n(y))\right)^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{4}{2^{2(k+n)}}. \end{aligned}$$

Dado $\epsilon > 0$, seja $N \geq 1$ tão grande que $\sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{4}{2^{2(k+n)}} < \frac{\epsilon^2}{2}$. Da continuidade uniforme de f, f^2, $\ldots$, f^N, existe $\delta > 0$ tal que se $|x - y| < \delta$ então $|f^n(x) - f^n(y)| < \frac{\epsilon^2}{2N}$ para todo $1 \leq n \leq N$. Assim, juntando tudo obtemos que:

$$|x - y| < \delta \implies \|h(x) - h(y)\| < \epsilon.$$

Afirmação. *h é injetiva.*

Suponha $h(x) = h(y)$, então para cada $n \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{2^{k+n}} d(y_k, f^n(x)) = \frac{1}{2^{k+n}} d(y_k, f^n(y)).$$

Daí, tomando $n = 1$, obtemos $d(y_k, f(x)) = d(y_k, f(y)), \forall k \in \mathbb{N}$. Pela Desigualdade Triangular,

$$d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), y_k) + d(f(x), y_k) = 2d(f(x), y_k) \longrightarrow 0$$

quando $k \longrightarrow \infty$, pois $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é denso em K. Assim, $d(f(x), f(y)) = 0 \implies d(x, y) = 0$, então $x = y$. Logo, h é injetiva e, portanto, segue a afirmação.

Como h é contínua e injetiva com domínio compacto K, então K é homeomorfo a $h(K) := L$ em $\ell_2(X)$.

Afirmação. *$h \circ f = T \circ h$ e L é T-invariante.*

Para qualquer $x \in K$,

$$
\begin{aligned}
h(f(x)) &= \left(\left(\frac{1}{2^{k+n}} d(y_k, f^{n+1}(x))\right)_k\right)_n \\
&= 2\left(\left(\frac{1}{2^{k+n+1}} d(y_k, f^{n+1}(x))\right)_k\right)_n \\
&= \big(2s_{n+1}\big)_{n\in\mathbb{N}} \\
&= T(h(x))\cdot
\end{aligned}
$$

Também,

$$T(L) = T(h(K)) = h(f(K)) \subset h(K) = L.$$

Pelo Teorema 2.3.2, o operador T é caótico. Segue então o resultado. $\square$

2.4 O operador deslocamento com pesos

O operador deslocamento com pesos é um operador linear que atua no espaço $X^{\mathbb{N}}$ das sequências infinitas de pontos de um espaço vetorial X. Trata-se de uma generalização do operador de Rolewicz.

Definição 2.4.1 (Operador deslocamento com pesos B_w)**.** *Sejam X um espaço vetorial, $1 \leq p < \infty$ e $w = (w_1, w_2, \ldots)$ uma sequência de números positivos. O operador desloca-*

mento com pesos $B_w : X^{\mathbb{N}} \to X^{\mathbb{N}}$ *é definido por*

$$B_w(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (w_2 x_2, w_3 x_3, \ldots). \tag{2.3}$$

As entradas ω_i *de* w *são denominadas pesos. Tomando* $w = (1, 1, \ldots)$*, obtemos o operador deslocamento (sem pesos)* $B : X^{\mathbb{N}} \to X^{\mathbb{N}}$ *definido por*

$$B(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots). \tag{2.4}$$

Quando a sequência de pesos $w = (w_1, w_2, \ldots)$ é limitada, o operador B_w age continuamente no espaço $\ell_p(X) \subset X^{\mathbb{N}}$ munido da norma $\|x\|_p = \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} \|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, isto é, $B_w : \ell_p(X) \to \ell_p(X)$ é um operador linear contínuo. Em particular, segue da Proposição 2.2.2 que quando $w = (1, 1, \ldots)$, $B_w = B$ não é hipercíclico nem topologicamente transitivo. Além disso, Rolewicz mostrou (cf. Teorema 2.3.2) que se $\omega = (2, 2, \ldots)$, então B_w é caótico. De forma mais geral, a hiperciclicidade e a caoticidade do operador $B_w : \ell_p(X) \to \ell_p(X)$ foi completamente caracterizada através dos resultados de Salas [14] e Grosse-Erdmann [10], enunciados abaixo. Estes dois teoremas são os principais resultados deste capítulo. As respectivas demonstrações serão dadas posteriormente.

Teorema 2.4.2. *Sejam* X *um espaço de Banach separável,* $1 \leq p < \infty$ *e* $\omega = (w_1, w_2, \ldots)$ *uma sequência satisfazendo* $0 < \inf_{i\in\mathbb{N}} w_i \leq sup_{i\in\mathbb{N}} w_i < \infty$*. O operador deslocamento com pesos* $B_w : \ell_p(X) \to \ell_p(X)$ *é hipercíclico se e somente se* $\liminf_{i\to\infty}(w_1 w_2 \cdots w_i)^{-1} = 0$.

Teorema 2.4.3. *Sejam* X *um espaço de Banach separável,* $1 \leq p < \infty$ *e* $\omega = (w_1, w_2, \ldots)$ *uma sequência satisfazendo* $0 \leq \inf_{i\in\mathbb{N}} w_i \leq \sup_{i\in\mathbb{N}} w_i < \infty$*. O operador deslocamento com pesos* $B_w : \ell_p(X) \to \ell_p(X)$ *é caótico se e somente se* $\sum_{i\in\mathbb{N}}(w_1 w_2 \cdots w_i)^{-p} < \infty$.

Note que $\sum_{i\in\mathbb{N}}(w_1 w_2 \cdots w_i)^{-p} = 0$ implica $\liminf_{i\to\infty}(w_1 w_2 \cdots w_i)^{-1} = 0$, mas as duas condições não são equivalentes, conforme mostra o seguinte exemplo.

Exemplo 2.4.4. *Sejam $X = \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$ e $\omega = \left(2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \ldots\right)$. O operador deslocamento com pesos $B_w : \ell_1(\mathbb{R}) \to \ell_1(\mathbb{R})$ é hipercíclíco mas não é caótico.*

Demonstração. Observe que $\dfrac{1}{2}\dfrac{2}{3}\ldots\dfrac{i-1}{i} = \dfrac{1}{i}, \forall i \geq 2$. Como $\lim_{i\to\infty} \frac{1}{i} = 0$ e $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty$, obtemos pelos teoremas acima que B_w é hipercíclico, mas não é caótico. $\square$

Em vez do subespaço $\ell_p(X)$ podemos considerar a ação do operador B_w sobre outros subespaços de $X^{\mathbb{N}}$. Por exemplo, para cada sequência $\alpha = (\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de números positivos, podemos considerar o espaço

$$\ell_p(X, \alpha) = \left\{ (x_i) \in X^{\mathbb{N}} : \sum_{i\in\mathbb{N}} \|\alpha_i x_i\|^p < \infty \right\}.$$

Proposição 2.4.5. *Sejam $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números positivos. Então $\ell_p(X, \alpha)$ é um espaço vetorial normado munido da norma $\|x\|_{p,\alpha} = \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} \|\alpha_i x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.*

Demonstração. Sejam $x = (x_i), y = (y_i) \in \ell_p(X, \alpha)$. Então

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \|\alpha_i x_i\|^p < \infty \quad \text{e} \quad \sum_{i\in\mathbb{N}} \|\alpha_i y_i\|^p < \infty. \tag{2.5}$$

Para mostrar que $\ell_p(X, \alpha)$ é subespaço vetorial de $X^{\mathbb{N}}$, basta verificar que $ax+by \in \ell_p(X, \alpha)$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$. De fato, usando a convexidade da função $t \mapsto t^p$ e usando (2.5), obtemos:

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in\mathbb{N}} \|\alpha_i (ax_i + by_i)\|^p &\leq \sum_{i\in\mathbb{N}} (|a| \cdot \|\alpha_i x_i\| + |b| \cdot \|\alpha_i y_i\|)^p \\
&= (|a| + |b|)^p \sum_{i\in\mathbb{N}} \left(\frac{|a|}{|a| + |b|} \cdot \|\alpha_i x_i\| + \frac{|b|}{|a| + |b|} \cdot \|\alpha_i y_i\| \right)^p \\
&\leq |a|(|a| + |b|)^{p-1} \sum_{i\in\mathbb{N}} \|\alpha_i x_i\|^p + |b|(|a| + |b|)^{p-1} \sum_{i\in\mathbb{N}} \|\alpha_i y_i\|^p < \infty.
\end{aligned}$$

Desta forma, $\ell_p(X, \alpha)$ é subespaço vetorial de $X^{\mathbb{N}}$. Vamos mostrar agora que $\| \cdot \|_{p,\alpha}$ é uma norma. Seja $h : X^{\mathbb{N}} \to X^{\mathbb{N}}$ o isomorfismo linear $h(x_1, x_2, \ldots) = \left(\frac{x_1}{\alpha_1}, \frac{x_2}{\alpha_2}, \ldots\right)$. Note que

$h^{-1}\big(\ell_p(X,\alpha)\big) \subseteq \ell_p(X)$. De fato,

$$x \in \ell_p(X,\alpha) \implies \sum_{i\in\mathbb{N}} \|\alpha_i x_i\|^p < \infty \implies h^{-1}x \in \ell_p(X).$$

Além disso, $\|x\|_{p,\alpha} = \|h^{-1}x\|_p$ para todo $x \in X^{\mathbb{N}}$. Como h é um isomorfismo linear, segue que $\|\cdot\|_{p,\alpha}$ herda de $\|\cdot\|_p$ as propriedades de norma. $\square$

Proposição 2.4.6. *Sejam X um espaço de Banach separável, $1 \leq p < \infty$ e $\omega = (w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada de números positivos. Defina $\alpha = (\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ colocando $\alpha_i = (w_1 w_2 \cdots w_i)^{-1}$. Então os operadores lineares contínuos $B_w : \ell_p(X) \to \ell_p(X)$ e $B : \ell_p(X,\alpha) \to \ell_p(X,\alpha)$ são conjugados através do isomorfismo linear $h : \ell_p(X) \to \ell_p(X,\alpha)$ definido por $h(x_1, x_2, \ldots) = (x_1/\alpha_1, x_2/\alpha_2 \ldots)$. Em outras palavras, o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{array}{ccc} \ell_p(X) & \xrightarrow{B_w} & \ell_p(X) \\ \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ \ell_p(X,\alpha) & \xrightarrow{B} & \ell_p(X,\alpha) \end{array}$$

Demonstração. Segue da prova da Proposição 2.4.5 que h é um isomorfismo linear que leva $\ell_p(X)$ sobre $\ell_p(X,\alpha)$ preservando as respectivas normas, portanto h é também um homeomorfismo. Além disso, como $w_{i+1} = \frac{\alpha_i}{\alpha_{i+1}}$, $i \in \mathbb{N}$, temos que

$$(h \circ B_w)(x_1, x_2, \ldots) = h(w_2 x_2, w_3 x_3, \ldots) = \left(\frac{w_2 x_2}{\alpha_1}, \frac{w_3 x_3}{\alpha_2}, \ldots\right) = \left(\frac{x_2}{\alpha_2}, \frac{x_3}{\alpha_3}, \ldots\right).$$

Por outro lado,

$$(B \circ h)(x_1, x_2, \ldots) = B\left(\frac{x_1}{\alpha_1}, \frac{x_2}{\alpha_2}, \ldots\right) = \left(\frac{x_2}{\alpha_2}, \frac{x_3}{\alpha_3}, \ldots\right)$$

Assim, $B \circ h = h \circ B_w$, mostrando que h é um conjugação. $\square$

Demonstração do Teorema 2.4.2.

($\Longrightarrow$) Suponha que B_w seja hipercíclico. Seja $u \in X$ um vetor não-nulo. Para cada $0 < \delta < \|u\|_p$, existem $n \in \mathbb{N}$ arbitrariamente grande e $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_p(X)$ tal que

$$\|x\|_p < \delta \quad \text{e} \quad \|B_w^{n-1}x - e_1\|_p < \delta, \tag{2.6}$$

onde

$$e_1 = (u, 0, 0, \ldots).$$

De (2.6) e da igualdade $B_w^{n-1}(x) = (w_2 w_3 \cdots w_n x_n, w_3 w_4 \cdots w_{n+1} x_{n+1}, \ldots)$, segue que

$$\|x_n\| < \delta \quad \text{e} \quad \|w_2 w_3 \cdots w_n x_n\| \geq \|u\| - \delta.$$

Assim,

$$(w_1 w_2 \cdots w_n)^{-1} x_n \leq (w_1)^{-1} \frac{\delta}{\|u\| - \delta}.$$

Como δ é arbitrariamente pequeno, obtemos que $\liminf_{i\to\infty} (w_1 w_2 \cdots w_i)^{-1} = 0$.

($\Longleftarrow$) Suponha que $\liminf_{i\to\infty} (w_1 w_2 \cdots w_i)^{-1} = 0$. Então existe uma sequência crescente $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k\to\infty} (w_1 w_2 \cdots w_{n_k})^{-1} = 0$. Mostremos que B_w satisfaz o Critério de Hiperciclicidade (Teorema 2.1.3). Mais precisamente, vamos mostrar que existem subconjuntos densos $U, V \subseteq \ell_p(X)$ e funções $S_{n_k} : V \to \ell_p(X), k \geq 1$, tais que para todo par $(x, y) \in U \times V$:

(i) $B_w^{n_k} x \longrightarrow 0$;

(ii) $S_{n_k} y \longrightarrow 0$;

(iii) $B_w^{n_k} S_{n_k} y \longrightarrow y$.

Seja $U = V$ o subconjunto de $\ell_p(X)$ formado por todas as sequências com uma quantidade finita de elementos não-nulos, isto é,

$$U = V = \bigcup_{n\geq 1} \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in X, i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Afirmação. *$U = V$ é denso em $\ell_p(X)$.*

É a mesma prova do item (ii) do Lema 2.1.4.

Afirmação. *$B_w^{n_k} x \to 0$ para todo $x \in U$.*

Seja $x = (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) \in U$. Como $n_1 < n_2 < \cdots$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_k \geq n$ para todo $k \geq k_0$. Assim,

$$B_w^{n_k} x = B_w^{n_k}(x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) = (0, 0, 0, \ldots) \quad \text{para todo} \quad k \geq k_0.$$

Em particular, $\lim_{k\to\infty} B_w^{n_k} x = 0$.

Seja $S_{n_k} : V \to \ell_p(X)$ definido por

$$S_{n_k}\big((y_1, \ldots, y_n, 0, 0, \ldots)\big) = \left(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n_k}, \frac{y_1}{w_2 \cdots w_{n_k+1}}, \ldots, \frac{y_n}{w_{n+1} \cdots w_{n_k+n}}, 0, 0, \ldots\right).$$

Afirmação. *$S^{n_k} y \to 0$ para todo $y \in U$.*

Sejam $y = (y_1, \ldots, y_n, 0, 0, \ldots) \in V$ e $C > 1$ tal que $C^{-1} \leq w_i \leq C$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Então,

$$\begin{array}{rcl} w_1 w_2 \cdots w_{n_k} C^{-1} & \leq & C w_2 \cdots w_{n_k} w_{n_k+1} \\ w_1 w_2 \cdots w_{n_k} C^{-2} & \leq & C^2 w_3 \cdots w_{n_k+1} w_{n_k+2} \\ \vdots & \leq & \vdots \\ w_1 w_2 \cdots w_{n_k} C^{-n} & \leq & C^n w_{n+1} \cdots w_{n_k+n-1} w_{n_k+n} \end{array} \tag{2.7}$$

Desta forma,

$$\begin{array}{rcl} \|S_{n_k} y\|_p^p & = & \|y_1\|^p \cdot \left(w_2 \cdots w_{n_k} w_{n_{k+1}}\right)^{-1} + \cdots + \|y_n\|^p \cdot \left(w_{n+1} \cdots w_{n_k+n-1} w_{n_k+n}\right)^{-1} \\ & \leq & \left(\|y_1\|^p C^2 + \cdots + \|y_n\|^p C^{2n}\right) \left(w_1 w_2 \cdots w_{n_k}\right)^{-1}. \end{array}$$

Como n não varia e, por hipótese, $\lim_{k\to\infty} \left(w_1 w_2 \cdots w_{n_k}\right)^{-1} = 0$, segue que $S_{n_k}(y) \to 0$.

Afirmação. $B_w^{n_k} S_{n_k} y \longrightarrow y$

Por construção, $B_w^{n_k} S_{n_k}$ é a transformação identidade.

Concluímos pelo Critério de Hiperciclicidade que B_w é hipercíclico. $\square$

Demonstração do Teorema 2.4.3.

$(\Longleftarrow)$ Como $\sum_{i\in\mathbb{N}}(w_1w_2\cdots w_i)^{-p} < \infty$, em particular $\liminf_{i\to\infty}(w_1w_2\cdots w_i)^{-1} = 0$. Logo, pelo Teoerma 2.4.2 e pelo Teorema de Transitividade de Birkhoff, B_w é topologicamente transitivo. Vamos mostrar agora que B_w tem um conjunto denso de pontos periódicos. Sejam $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_p(X)$ e $C = \sup_{i\in\mathbb{N}} w_i$. Dado $\epsilon > 0$, existe $n \geq 1$ tal que se $y = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$, então

$$\|y - x\|_p < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad \max_{1\leq i\leq n} \|x_i\|^p \cdot C^n \sum_{i\geq n+1} (w_1\cdots w_i)^{-p} < \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.8}$$

Seja

$$\begin{aligned} z \;=\; & (x_1, \ldots, x_n, \\ & (w_2\cdots w_{n+1})^{-1}x_1, \ldots, (w_{n+1}\cdots w_{2n})^{-1}x_n, \\ & (w_2\cdots w_{2n+1})^{-1}x_1, \ldots, (w_{n+1}\cdots w_{3n})^{-1}x_n, \ldots). \end{aligned}$$

Afirmação. *$z \in \ell_p(X)$ e z é ponto periódico de período n.*

Seja $C > 1$ tal que $w_i \leq C$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Então,

$$\begin{aligned}
w_1 w_2 \cdots w_{n+1} &\leq Cw_2 \cdots w_{n+1} \\
w_1 w_2 \cdots w_{2n} &\leq C^n w_{n+1} \cdots w_{2n} \\
w_1 w_2 \cdots w_{2n+1} &\leq Cw_2 \cdots w_{2n+1} \\
\vdots &\leq \vdots \\
w_1 w_2 \cdots w_{3n} &\leq C^n w_{n+1} \cdots w_{3n} \\
\vdots &\leq \vdots
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Segue de (2.9) que

$$\|z\|_p = \sum_{i \in \mathbb{N}} \|z_i\|^p \leq \max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|^p \cdot C^n \cdot \left(1 + \sum_{i \geq n+1} (w_1 \cdots w_i)^{-p}\right) < \infty,$$

mostrando que $z \in \ell_p(X)$. Segue da definição de B_w e z que $B_w^n z = z$. Assim, z é ponto periódico de B_w.

Afirmação. $\|z - x\|_p < \epsilon$.

De fato, procedendo como acima, e usando (2.8), obtemos:

$$\|z - y\|_p^p \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \|z_i\|^p \leq \max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|^p \cdot C^n \sum_{i \geq n+1} (w_1 \cdots w_i)^{-p} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Logo, $\|z - x\|_p \leq \|z - y\|_p + \|y - x\|_p < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

Como ϵ é arbitrário, segue que B_w tem um conjunto denso de pontos periódicos.

$(\Longrightarrow)$ Defina $\alpha = (\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ colocando $\alpha_i = (w_1 w_2 \cdots w_i)^{-1}$. Então os operadores lineares contínuos $B_w : \ell_p(X) \to \ell_p(X)$ e $B : \ell_p(X, \alpha) \to \ell_p(X, \alpha)$ são conjugados através do isomorfismo linear $h : X^{\mathbb{N}} \to X^{\mathbb{N}}$ definido por $h(x_1, x_2, \ldots) = (x_1/\alpha_1, x_2/\alpha_2 \ldots)$. Suponha que B_w seja caótico. Logo, por causa da conjugação, B também é caótico. Seja $x =$

$(x_1, x_2, \ldots) \in \ell_p(X, \alpha)$ um ponto periódico de B não-nulo de período $N \geq 1$. Então existe $1 \leq j \leq N$ tal que $x_j \neq 0$ e $x_{j+kN} = x_j$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $j = 1$. Assim, $x_1 = x_{N+1} = x_{2N+1} = \ldots$. Seja

$$y = (y_i)_{i\in\mathbb{N}} = (\underbrace{x_1, 0, \ldots, 0}_{N-\text{termos}}, x_1, 0, \ldots, 0, \ldots).$$

Observe que

$$\|y\|_{p,\alpha}^p = \sum_{i\in\mathbb{N}} \|\alpha_i y_i\|^p = \sum_{k\in\mathbb{N}} |\alpha_{1+kN} y_{1+kN}\|^p = \sum_{k\in\mathbb{N}} \|\alpha_{1+kN} x_{1+kN}\|^p \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \|\alpha_i x_i\|^p = \|x\|_{p,\alpha} < \infty.$$

Assim, $y \in \ell_p(X, \alpha)$. Logo, $B^k y \in \ell_p(X, \alpha)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Em particular,

$$(x_1, x_1, x_1, \ldots) = y + By + \ldots + B^{N-1} y \in \ell_p(X, \alpha).$$

Logo,

$$\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i^p\right) \|x_1\|^p = \sum_{i\in\mathbb{N}} \|\alpha_i x_1\|^p < \infty.$$

Desta forma,

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} (w_1 w_2 \cdots w_i)^{-p} = \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i^p < \infty.$$

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] BANKS, J.; BROOKS, J., CAIRNS, G.; DAVIS, G., AND STACEY, P. On Devaney's definition of chaos. *Amer. Math. Monthly 99*, 4 (1992), 332–334.

[2] BAYART, F.; MATHERON, E. *Dynamics of linear operators*, vol. 179 of *Cambridge Tracts in Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[3] BEAUZAMY, B. Un opérateur, sur l'espace de hilbert, dont tous les polynômes sont hypercycliques. *CR Acad. Sci. Paris Sér. I Math 303*, 18 (1986), 923–925.

[4] BÈS, J.; PERIS, A. Hereditarily hypercyclic operators. *Journal of Functional Analysis 167*, 1 (1999), 94–112.

[5] BIRKHOFF, G. D. Démonstration d'un théorème élémentaire sur les fonctions entières. *CR Acad Sci. Paris Ser. I Math. 189* (1929), 473–475.

[6] BOURDON, P. S.; SHAPIRO, J. H. Cyclic composition operators on h^2, operator theory: Operator algebras and applications, part 2 (proc. summer res. inst., durham, nh, 1988), 43–53. *Amer. Math. Soc., Providence, RI 1* (1990).

[7] Devaney, R. L. *An introduction to chaotic dynamical systems*, second ed. Addison-Wesley Studies in Nonlinearity. Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Redwood City, CA, 1989.

[8] Feldman, N. S. Linear chaos, 2001. Disponível em: https://feldman.academic.wlu.edu/files/pdffiles/LinearChaos.pdf. Acesso em 27 de novembro de 2019.

[9] Godefroy, G.; Shapiro, J. H. Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds. *Journal of Functional Analysis 98*, 2 (1991), 229–269.

[10] Grosse-Erdmann, K.-G.; Manguillot, A. P. *Linear chaos*. Universitext. Springer, London, 2011.

[11] Grosse-Erdmann, K.-G. Hypercyclic and chaotic weighted shifts. *Studia Math. 139*, 1 (2000), 47–68.

[12] MacLane, G. R. Sequences of derivatives and normal families. *Journal d'Analyse Mathématique 2*, 1 (1952), 72–87.

[13] Rolewicz, S. On orbits of elements. *Studia Mathematica 32*, 1 (1969), 17–22.

[14] Salas, H. N. Hypercyclic weighted shifts. *Transations of the American Mathematical Society 347*, 3 (1995), 993–1004.