



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS - UFSCAR
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

UM ESTUDO SOBRE OPERAÇÕES ARITMÉTICAS COM NÚMEROS FUZZY

MARCELO BATISTA DA SILVA

Sorocaba

2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS - UFSCAR
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

UM ESTUDO SOBRE OPERAÇÕES ARITMÉTICAS COM NÚMEROS FUZZY

MARCELO BATISTA DA SILVA
ORIENTADORA: PROF^a. DR^a. MAGDA DA SILVA PEIXOTO

Sorocaba
2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS - UFSCAR
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

MARCELO BATISTA DA SILVA

UM ESTUDO SOBRE OPERAÇÕES ARITMÉTICAS COM NÚMEROS FUZZY

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas da Universidade Federal de São Carlos como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, sob a orientação da Professora Doutora Magda da Silva Peixoto.

Sorocaba

2020

Silva, Marcelo Batista da

UM ESTUDO SOBRE OPERAÇÕES ARITMÉTICAS COM NÚMEROS FUZZY / Marcelo Batista da Silva. -- 2020.

110 f. : 30 cm.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal de São Carlos, campus Sorocaba, Sorocaba

Orientador: Magda da Silva Peixoto

Banca examinadora: Magda da Silva Peixoto, Érica Regina Filletti Nascimento, Antonio Noel Filho

Bibliografia

1. Número Fuzzy. 2. Operações Intervalares. 3. Ensino Médio. I. Orientador. II. Universidade Federal de São Carlos. III. Título.

Ficha catalográfica elaborada pelo Programa de Geração Automática da Secretaria Geral de Informática (SIn).

DADOS FORNECIDOS PELO(A) AUTOR(A)

Bibliotecário(a) Responsável: Maria Aparecida de Lourdes Mariano – CRB/8 6979



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Marcelo Batista da Silva, realizada em 27/02/2020:

Profa. Dra. Magda da Silva Peixoto
UFSCar

Profa. Dra. Érica Regina Filletti Nascimento
UNESP

Prof. Dr. Antonio Noel Filho
IFSP

Certifico que a defesa realizou-se com a participação à distância do(s) membro(s) Érica Regina Filletti Nascimento e, depois das arguições e deliberações realizadas, o(s) participante(s) à distância está(ao) de acordo com o conteúdo do parecer da banca examinadora redigido neste relatório de defesa.

Profa. Dra. Magda da Silva Peixoto

Dedico essa dissertação a Deus e minha
família.
Sem eles, eu nada seria...

AGRADECIMENTOS

De todo meu coração a Deus por ser presente e ter me concedido a força necessária para tal tarefa, por ter preparado meu caminho e as pessoas que nele encontraria, por ser paciente e piedoso comigo, por seu grande amor e direção, pois sem Ele nada seria possível.

Aos meus pais, Felix Batista da Silva (*in memoriam*) e Eneida Baptista da Silva, por seus ensinamentos, por seu orgulho e pelo apoio total e incondicional.

As minhas irmãs, pela amizade, pelo incentivo, por acreditarem em minha capacidade. Nunca lhes faltaram as palavras de conforto.

À minha amada esposa Tatiane Brícola, que me torna uma pessoa melhor a cada dia, pela paciência, pelo carinho em momentos em que meu coração fraquejava, pela compreensão, apoio, incentivo incondicionais. Tantas madrugadas insones, o abraço, o café e as palavras de incentivo nunca faltaram. Nunca me deixou só.

Aos meus amados filhos Marcelinho, que tantas vezes ficou sem montar o quebra-cabeça, e mesmo assim me dizia antes de ir para cama ‘Te amo papai!’; a minha filha Lívia, minha princesa, que nunca entendeu o motivo de eu ficar trancado no escritório por tanto tempo... Vocês são tudo pra mim, muito mais que eu esperava!

A todos os colegas das aulas do Mestrado que acabaram se tornando amigos de luta, em especial ao Leandro Custódio, que me ajudou de maneira única nesse percurso, várias madrugadas estudando juntos, tirando dúvidas e me dizendo que era possível, um verdadeiro amigo, que Deus abençoe sempre seu coração. Mariane, Reinaldo, Carlos, Susana, Sandra, Thais, Camila e Bia que me trataram como a um irmão compartilhando seu conhecimento e força nos momentos de grande desespero e nas tormentas da vida.

À querida amiga Joice, que além de me ajudar na formatação e correções gramaticais, me emprestou seu otimismo e força.

Aos colegas de trabalho da Escola Estadual Professor Eduardo Soares que sempre acreditaram no meu sucesso.

Aos queridos mestres Wladimir Seixas, Silvia M. Carvalho, Antônio Luiz Venezuela, Renato F. Cantão e Paulo César Oliveira, que me mostraram um mundo novo, com tanto respeito e carinho. Serei grato para sempre.

Agradeço de todo coração, aqueles que, trazidos por Deus, passaram por minha vida e deixaram sua contribuição com suas experiências e palavras de incentivo me levando mais perto da finalização dessa pesquisa.

E por último, mas não menos importante, minha orientadora, Professora Doutora Magda da Silva Peixoto, uma pessoa especial, iluminada, humana, por ter me concedido a honra de partilhar uma pequena parte do seu vasto conhecimento comigo e que através de sua dedicação e companheirismo me orientou nessa pesquisa, nunca descreditou de mim, mesmo quando não tinha mais forças. Eu jamais chegaria onde cheguei sem sua orientação acadêmica e pessoal, tem todo meu carinho, admiração e respeito.

“Amo ao SENHOR, porque ele ouviu a minha voz e a minha súplica. Porque inclinou a mim os seus ouvidos; portanto, o invocarei enquanto viver.”

Salmo 116

RESUMO

A presente dissertação baseia-se em um trabalho de pesquisa realizado em sala de aula com alunos do Ensino Médio de uma escola pública, e tem como objetivo mostrar que a introdução de elementos iniciais da Lógica Fuzzy nas primeiras séries do Ensino Médio é possível e pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento matemático de tais alunos. Seria uma forma de auxiliar na compreensão, análise e tratamento de problemas de difícil trato, questões subjetivas com graus de incertezas variados. Essa nova ferramenta, atualmente compartimentalizada, apenas nas etapas do Ensino Superior - ou posterior - pode se mostrar um campo de interesse para muitos alunos que desconhecem tal teoria, e seu alcance na tecnologia atual. Para tal, iniciou-se com o estudo dos conceitos básicos da Teoria dos Conjuntos Fuzzy com ênfase em número fuzzy e aritmética fuzzy, gerando a proposição de uma sequência didática aceitável para alunos em início do Ensino Médio, através de testes especialmente elaborados com o tema 'intervalos' e 'operações intervalares' – objeto desse estudo - e aulas ministradas pelo pesquisador. Posteriormente os resultados obtidos foram tabulados e analisados mostrando que, apesar de os alunos apresentarem certa dificuldade em relação à pesquisa no trabalho com intervalos, o conteúdo é facilmente incorporado aqueles já estudados por eles no seu percurso escolar, e que os benefícios podem ser significativos em longo prazo, trazendo para sua realidade a possibilidade e instrumentação necessária para a elaboração de modelos matemáticos para situações do nosso cotidiano.

Palavras-chaves: Modelo Matemático, Números Fuzzy, Intervalos, Operações intervalares.

ABSTRACT

This dissertation is based on a research work carried out in the classroom with high school students of a public school, and aims to show that the introduction of initial elements of Fuzzy Logic in the first grades of high school is possible and can contribute to the development of mathematical thinking of such students. It would be a way to assist in the understanding, analysis and treatment of difficult-to-deal problems, subjective issues with varying degrees of uncertainty. This new tool, currently compartmentalized, only in the stages of Higher Education - or later - can prove to be a field of interest for many students who are unaware of this theory, and its reach in current technology. To this end, it began with the study of the basic concepts of Fuzzy Set Theory with emphasis on fuzzy number and fuzzy arithmetic, generating the proposition of a didactic sequence acceptable to students at the beginning of high school, through tests specially elaborated with the theme 'intervals' and 'interval operations' – object of this study – and classes taught by the researcher. Subsequently, the results obtained were tabulated and analyzed showing that, although the students presented some difficulty in relation to the research in the work with intervals, the content is easily incorporated those already studied by them in their school career, and that the benefits can be significant in the long term, bringing to their reality the possibility and instrumentation necessary for the elaboration of mathematical models for situations of our daily lives.

Keywords: Mathematical Model, Fuzzy Numbers, Intervals, Interval Operations.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 : Suporte de um subconjunto.....	31
Figura 2: Números Reais Próximos a 7.....	32
Figura 3: Função de pertinência.....	33
Figura 4: α – nível : $[A]^{0,5}$	35
Figura 5: Princípio de Extensão aplicada a uma função monotônica.....	37
Figura 6: Subconjunto $\hat{f}(A)$	42
Figura 7: Representação do número Fuzzy 7.....	46
Figura 8: Número fuzzy ‘em torno de 5’.....	48
Figura 9: Número Fuzzy Trapezoidal que representa os adolescentes.....	51
Figura 10: Número Fuzzy A.....	56
Figura 11: Número Fuzzy B.....	57
Figura 12: Números Fuzzy A+B	58
Figura 13: Número Fuzzy A-B.....	59
Figura 14: Máximo de P, Mínimo de P.....	60
Figura 15: Número Fuzzy A . B pelo Princípio de Extensão.....	61
Figura 16: Número Fuzzy A/B pelo Princípio de Extensão.....	62
Figura 17: Número Fuzzy A, Número Fuzzy B, A+B.....	66
Figura 18: Número Fuzzy A , Número Fuzzy B, A-B.....	67
Figura 19: Número Fuzzy A, Número Fuzzy B, A.B.....	69
Figura 20: Número Fuzzy A, Número B, A/B.....	71
Figura 21: Material utilizado na pesquisa.....	87

Figura 22: Material utilizado na pesquisa.	87
Figura 23: Material utilizado na pesquisa.	88
Figura 24: Material utilizado na pesquisa.	88
Figura 25: Material utilizado na pesquisa.	89
Figura 26: Material utilizado na pesquisa.	89
Figura 27: Material utilizado na pesquisa.	90
Figura 28: Material utilizado na pesquisa.	90
Figura 29: Material utilizado na pesquisa.	91
Figura 30: Material utilizado na pesquisa.	91
Figura 31: Material utilizado na pesquisa.	92
Figura 32: Acertos por Aluno.....	95
Figura 33: Soma dos intervalos A e B, intervalo $A+B$	96
Figura 34: Diferença entre os intervalos entre A e B, intervalo $A-B$.....	96
Figura 35: Multiplicação do intervalo A por um escalar.....	97
Figura 36: Multiplicação entre os intervalos A e B, o intervalo $A.B$	97
Figura 37: : A divisão entre os intervalos A e B, o intervalo A/B	98

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	15
CAPÍTULO 1. AS INCERTEZAS E A LÓGICA	18
1.1 O elemento primordial (<i>arqué</i>)	20
1.2 O logos.....	21
1.3 Mobilismo x monismo: Heráclito x Parmênides	21
1.4 A Lógica Fuzzy	27
CAPÍTULO 2. O PRINCÍPIO DA EXTENSÃO PROPOSTO POR ZADEH E A DEFINIÇÃO DE NÚMEROS FUZZY	29
2.1 Subconjuntos Fuzzy	29
2.1.1 α -Nível de um conjunto	34
2.2 O Princípio da Extensão proposto por <i>Zadeh</i>	35
2.3 A definição de Números Fuzzy	44
2.3.1 Número Fuzzy Triangular	46
2.3.2 Número Fuzzy Trapezoidal.....	49
2.4 Operações Aritméticas com Números Fuzzy.....	51
2.4.1 Operações Aritméticas Intervalares.....	51
2.4.2 Operações Aritméticas com Números Fuzzy.....	54
2.4.3 Operações Aritméticas Básicas para α - <i>nível</i>	62

CAPÍTULO 3. OPERAÇÕES INTERVALARES NO ENSINO MÉDIO	73
3.1 Modelagem Matemática	77
3.2 Plano de Aula	80
3.2.1 Objetivo Geral	80
3.2.2 Objetivos Específicos	80
3.2.3 Conteúdos	81
3.2.4 Metodologia	81
3.2.5 Desenvolvimento dos Conteúdos	81
3.2.6 Avaliação de Aprendizagem.....	82
3.3 Resultados Específicos da Pesquisa e Detalhamento das Etapas do Trabalho Desenvolvido	82
3.3.1 Etapa 1	82
3.3.2 Etapa 2	82
3.3.3 Etapa 3	83
3.3.4 Etapa 4	83
3.3.5 Etapa 5	83
3.3.6 Etapa 6	84
3.3.7 Etapa 7	86
3.3.8 Resultados	92
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	100
REFERÊNCIAS	102

ANEXOS	105
Anexo 1. Termo de Consentimento	105
Anexo 2. Termo de Consentimento Livre e Esclarecido	106

INTRODUÇÃO

Atualmente o ensino de Matemática vive um momento de reflexão e retomada, revendo metodologias, conteúdos e objetivos, e uma questão permeia toda essa visão: o que se deve ensinar e para que. No centro de toda essa discussão está o desejo de que se tenham mais resolvedores de problemas e situações cada vez mais complexos que fazem parte da realidade humana e que trazem, como tudo que é real, a subjetividade, as incertezas e imprecisões que incapacitam a Matemática clássica de modelar ou dialogar com tais situações.

Morin (2008, p. 59), filosoficamente considera que:

[...] o conhecimento nunca é um reflexo real, mas sempre uma tradução e, portanto, comporta riscos de erro, ou seja, é sempre uma aproximação do real; um fato é sempre tributário de interpretação e finalmente, decorre da crise dos fundamentos da certeza

Desse modo a Lógica Fuzzy ou Nebulosa – com raízes na Matemática clássica, também denominada de *crisp* - tem participado da modelagem e na abordagem de problemas em que modos de raciocínio não exatos, comuns na linguagem humana, as variáveis linguísticas estão presentes. É sabido que a Teoria dos Conjuntos Fuzzy tem sido objeto de muitos pesquisadores, em que mostrou grande capacidade de lidar com problemas como os que envolvem as incertezas dos procedimentos médicos, biológicos e epidemiológicos ou até mesmo as questões sociais, de difícil trato na Matemática clássica por não ter uma definição clara, nebulosa na maioria das vezes (BARROS; BASSANEZI, (2015); PEIXOTO; BARROS (2004); LAGHETTO (2016); MARINS (2016); ORTEGA, (2001)).

A Teoria dos Conjuntos Fuzzy está ligada principalmente à abordagem de problemas em que as variáveis linguísticas, comuns nos processos de comunicação humanos, envolvem a expressão de ideias, as tomadas de decisões ou para o desfecho de uma situação. A Lógica Fuzzy vai ao encontro de situações onde não existe a precisão ideal, aliás, a grande maioria dos conjuntos no mundo real não está definida precisamente. Torna-se oportuno citar Zadeh (1965) que foi um dos pioneiros na Teoria dos Conjuntos Fuzzy, que observa:

[...] a classe dos animais mamíferos – os cães, os cavalos, os veados etc. pertencem a esta classe – mas elementos como a estrela do mar possuem uma classificação muito ambígua – os dois termos contraditórios “animais” e “não-animais”. Do mesmo modo podemos citar os conjuntos “máquinas velhas” e “temperatura amena”, que não apresentam uma definição precisa. (traduzido de ZADEH, 1965).

Zadeh teve a ideia de quantificar a incerteza que está presente no pensamento, na linguagem, na comunicação e na informação humana, incerteza que provem exatamente da falta de definição ou de critérios de definição claros de pertinência, no entanto, a Teoria dos Conjuntos Fuzzy surge do rigor da Matemática clássica complementando-a, como uma ferramenta que torna possível estudar quantitativamente situações onde os aspectos qualitativos são levados em consideração para seu modelamento matemático.

Com base nesses argumentos acreditamos que a Teoria dos Conjuntos Fuzzy, ao longo do tempo, se tornou uma ferramenta matemática fundamental para resolução, compreensão e modelagem de situações reais e uma nova dimensão do uso da Matemática no mundo moderno.

Dada a importância de tal teoria para todas as áreas de atuação humana, ela não pode ficar restrita a alguns poucos indivíduos e que quanto mais cedo a sociedade escolar tiver contato com elementos da Teoria dos Conjuntos Fuzzy, tanto maior será a assimilação e a compreensão dessa teoria com intencionalidade de expandir o seu uso, mostrando sua capacidade extraordinária de aplicação no mundo moderno.

Dito isso e com a motivação do trabalho de Spina (2010) que, ao perceber a importância da disseminação de uma teoria como a da Lógica Fuzzy, aplicou os elementos da Teoria dos Conjunto Fuzzy em turmas de graduação, analisando e modelando situação reais e, portando, inundada de incertezas, mudando a visão dos alunos futuros professores de Matemática que, certamente levarão isso aos seus alunos também.

Assim como a referida autora também tive um contanto tardio com a Teoria dos Conjuntos Fuzzy e me perguntei qual seria a contribuição para o ensino de Matemática significativo trabalhar alguns elementos de Matemática crisp ligados a presente teoria já no Ensino Médio. Sem envolver, nesse primeiro momento, os elementos específicos da Teoria dos Conjuntos Fuzzy, levei minha ideia à Professora Doutora Magda Peixoto a qual tem me orientado desde então em todas as etapas desse trabalho.

Escolhemos como público alvo da nossa pesquisa uma sala de 1ª série do Ensino Médio regular da Rede Pública do estado de São Paulo, e o foco foi ‘Operações Aritméticas Intervalares’. Esse trabalho está organizado em três capítulos:

O capítulo 1 traz uma visão filosófica sobre as incertezas que assombraram a humanidade desde os tempos antigos e como a busca da verdade despertou a necessidade de compreender o mundo físico.

No capítulo 2 abordamos o Princípio da Extensão de Zadeh, as definições e conceitos básicos da Teoria dos Conjuntos Fuzzy assim como teoremas, exemplos e ilustrações, que julgamos importantes para desenvolvimento da pesquisa.

No capítulo 3 definimos como seria realizado o trabalho de campo, tais como: plano de aula, objetivos, conteúdos, metodologia, avaliação e apresentamos os resultados da aplicação em sala de aula.

Finalmente foram feitas as considerações finais dessa pesquisa.

CAPÍTULO 1. AS INCERTEZAS E A LÓGICA

“Lógica: a arte de pensar e raciocinar em estrita conformidade com as limitações e incapacidades da incompreensão humana”.
(BIERCE, AMBROSE).

Durante muitos anos a Matemática clássica foi suficiente e adequada na compreensão e modelagem da maioria dos problemas, situações e fenômenos que se planejavam tratar com certa exatidão.

A lógica Booleana foi capaz de ocupar um lugar de destaque em todos os espaços dedicados a estudos e pesquisas e na busca de soluções para as questões Matemáticas do dia a dia da humanidade.

Isso se deu porque a Matemática clássica foi vista como uma ferramenta de corte preciso, que guardava dentro de si a própria essência da verdade – aquilo que puder ser provado ou representado com conceitos matemáticos é algo incontestável – e assim as Ciências Exatas permearam o universo conhecido sem hesitação e com elegância.

Existem frases e citações célebres enaltecendo a Matemática e sua capacidade única de escrever o universo através de símbolos, equações, relações, operações, etc. Como exemplo podemos citar: “A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo” (GALILEU GALILEI); “Todas as coisas são números” (PITÁGORAS); “A Matemática não mente” (ALBERT EINSTEIN).

Contudo ainda existem questões sem a possibilidade de uma lógica tão rígida ser capaz de satisfazê-la adequadamente, onde aparentemente nenhum teorema ou algoritmo parecia se encaixar bem, situações em que as questões não poderiam ser classificadas apenas em verdadeiras ou falsas, pertencentes ou não pertencentes.

As mesmas situações que estavam, e ainda estão presentes, devido ao simples fato de que fazem parte da dinâmica humana; questões que envolvem as incertezas, aquilo que nunca fica bem definido onde os limites não são palpáveis, e os dados imprecisos onde a subjetividade do observador muitas vezes é o dado mais concreto.

Baseado em MARCONDES (2010), dedicamos esse capítulo a um breve histórico sobre o impacto da incerteza sobre a existência humana através dos séculos.

Desde os primórdios da humanidade, as incertezas acompanham a nossa longa trajetória, e parece que isso está intimamente ligado ao processo do pensamento filosófico e

dedutivo. Muitos filósofos e pesquisadores se debruçaram em questões e discussões sobre o papel da incerteza na vida humana e como interpretá-la, ou até mesmo como entendê-la do ponto de vista evolutivo, portanto, qual era seu peso no desenvolvimento intelectual da espécie.

Muitos acontecimentos e fatores corroboraram para que as incertezas e a busca por uma verdade absoluta figurassem nas discussões de muitas mentes brilhantes da Antiguidade entre ilustres filósofos e suas correntes doutrinárias, segundo escritas antigas ou fragmentos que resistiram ao tempo e que foram garimpados através da história.

O pensamento humano é conhecido pela sua capacidade de questionar situações, ou seja, de analisar de forma crítica ou não o que está ao redor, a história mostra que o percurso foi longo.

Muitos aspectos essenciais da realidade em que vivemos não puderam ser explicados com facilidade pelos povos da Antiguidade; e para preencher esse vazio surgiu o pensamento mítico que é uma forma de explicar a realidade que nos cerca como o funcionamento da natureza a origem da vida ou do próprio mundo entre outros (MARCONDES, 2010).

A escola Jônica na pessoa de seus filósofos buscava uma explicação mais científica para os fenômenos naturais ou mundo natural (*physis*, para nós: física), inaugurando o pensamento filosófico científico que busca romper com o pensamento mítico como forma de encontrar a verdade por traz daquilo que se via sem recorrer a seres que habitavam uma realidade inatingível e misteriosa, as divindades ou forças sobrenaturais (MARCONDES, 2010).

O pensamento filosófico científico marcou uma quebra, bastante radical para a época, com o pensamento mítico, quando o consideramos como uma forma para explicar a realidade.

Para Aristóteles esses filósofos, chamados por ele de *physiologos* que procuravam, com suas teorias, explicar o mundo natural através de causas também naturais, ou seja, as respostas para os fenômenos naturais tinham que estar no próprio mundo natural e não fora dele em mundos não tangíveis ou observáveis como nas explicações míticas predominantes até então (MARCONDES, 2010).

Os filósofos da escola jônica usaram em suas teorias sobre a realidade a noção de causalidade, a busca por conexões causais entre determinados fenômenos naturais como forma de explica-los. O uso dessa técnica por filósofos dessa época na tentativa de entender o mundo real a partir dele mesmo pode ser entendido como o início do pensamento científico

na busca da verdade, porém esse processo ainda não estava bem definido e, como veremos a seguir, cada filósofo ou corrente filosófica elege um elemento primordial (*arquê*) para explicar o todo real (MARCONDES, 2010).

Neste capítulo faremos um breve resumo sobre a busca da verdade e o impacto das incertezas do cotidiano que sempre permearam a existência humana desde seus primórdios e para tanto utilizaremos como referência a obra de Marcondes (2010).

1.1 O elemento primordial (*arquê*)

O elemento primordial foi à maneira mais sensata encontrada pelos filósofos para impedir que a explicação causal caísse novamente no pensamento mítico considerado inaceitável e um retrocesso, o elemento primordial eleito pelo pensador serviria de alicerce para a construção de uma teoria.

Cada pensador escolhia seu *arque* de forma subjetiva e livre, levando em conta a possibilidade de satisfazer sua teoria, Tales de Mileto elegeu como seu elemento primordial a água (*hydor*); não se sabe exatamente quais motivos podem ter levado Tales de Mileto a escolher a água como elemento primordial, mas podemos conjecturar que talvez o fato de a água estar presente na natureza de muitas maneiras, e em todos os estados tenha pesado no momento da escolha.

Tal influência pode ter se dado pelo fato de que Tales de Mileto teve contato com povos de regiões áridas, que viam na água a fonte de toda a vida, e carregavam em sua cultura muitos mitos envolvendo a água e seus seres. Contudo, é apenas uma hipótese, visto que não existe registro de quais foram realmente os fatores que levaram Tales de Mileto a escolher a água como seu *arquê*.

É importante destacar, que para esses filósofos, o elemento primordial não representava a coisa em si mesma, mas um conceito muito mais amplo, sua fluidez, sua participação em proporções diferentes; mas constantes em tantos elementos, principalmente naqueles em que a vida está presente e em que unifica a natureza.

Outros pensadores elegeram diferentes elementos primordiais para explicar os processos naturais, e embora cada um tenha tido uma teoria detalhada baseada no elemento de sua escolha, a teoria dos quatro elementos primordiais de onde tudo provinha ficou muito conhecida.

Empédocles introduziu a doutrina dos quatro elementos primordiais: terra, água, fogo e ar, que quando retomada por Platão, ganhou força chegando à era renascentista em experimentos de alquimia, sendo esta a precursora da química moderna.

Talvez, Tales de Mileto, não tenha se dado conta do quão importante foi sua contribuição; sendo que, não foi apenas a escolha da água como elemento primordial, pois poderia ser qualquer outro elemento; mas sim a ideia de elemento primordial. Essa ideia deu início a uma busca, partindo de um pressuposto que existe uma lógica, ou um conjunto de leis que regem a nossa realidade e, portanto ela pode ser compreendida e em grande parte, explicada teoricamente através do que chamamos de Ciências.

1.2 O logos

Após a fase de descobertas, discussão e compreensão, era preciso encontrar uma maneira de explicar e convencer aos demais sobre o funcionamento da realidade sem a ajuda de divindades míticas ou forças vindas de mundos não tangíveis aos nossos sentidos.

Surge então, o “*logos*”, a arte do discurso com uso da razão. É por meio dessa ferramenta, que se mostra muito poderosa até os dias atuais, que os primeiros filósofos se propõem a explicar o mundo sensível através de eventos naturais; trata-se de um discurso argumentativo onde as razões são apresentadas e justificadas de forma racional e submetidas à crítica dos ouvintes, bem como à discussão das ideias apresentadas.

A construção do logos pelos antigos filósofos muito se assemelha as pesquisas realizadas nos dias atuais, uma vez que essa racionalidade que constituía o logos não era fruto de uma inspiração ou de visões, mas da análise e observação detalhada dos fenômenos e de suas prováveis causas.

Vemos aqui que, embora o termo ‘lógica’ tenha surgido mais tarde, é perceptível que ela começou a ser desenhada para explicar o mundo real.

1.3 Mobilismo x monismo: Heráclito x Parmênides

O Monismo (ou permanência) e o Mobilismo (ou movimento) foram duas correntes que dividiram de forma marcante o pensamento filosófico por volta do século V a.C., dando

um novo rumo ao pensamento dos pré-socráticos e redefinindo sua influência na sociedade filosófica daquela época.

Essa nova dimensão de pensamentos encabeçados por Heráclito de Efeso e seus discípulos defendia que a realidade natural estava em fluxo ou em constante movimento, nada sendo como foi em um momento passado; nas palavras de Heráclito, '*Panta rei*' (Tudo passa).

Apesar de conceber a realidade como algo em fluxo constante, Heráclito de Efeso percebeu algo unificador, que para ele são os confrontos entre os opostos que se apresentam em qualquer situação. Porém, esses opostos são do ponto de vista desse filósofo, como algo que confere equilíbrio a essa realidade sensível, e assim morte e vida, calor e frio, são opostos que garantem equilíbrio ao se complementarem.

Heráclito tem uma frase de efeito que define com certa beleza o fluxo constante da realidade física: "Não podemos banhar-nos duas vezes no mesmo rio, pois o rio já não é o mesmo e nós também não somos mais os mesmos". Ele pode ter sido o primeiro filósofo a desenvolver o pensamento dialético, valorizando a não anulação dos opostos, e sim a sua integração de forma a se completarem, embora não haja, nos seus fragmentos, alusão ao termo.

Em oposição ao pensamento mobilista surge na mesma época, e na pessoa de Parmênides e dos eleatas, a visão monista, cuja doutrinação conduzia seus discípulos a crer em uma realidade única, caracterizando o movimento apenas com uma aparência, uma ilusão aos nossos sentidos.

Parmênides definia então a diferenciação entre realidade e aparência, que serviu como um forte argumento contra o pensamento mobilista e suas ideias de fluxo contínuo; definindo esse movimento sentido e observado como aparente e superficial, sendo o pensamento a ferramenta para descobrir que a verdadeira realidade é única, eterna e imutável, não tendo princípio e nem fim.

Tal argumento, de caráter lógico contra o mobilismo definiu a realidade como contínua e indivisível, pressupondo a ideia de permanência como ideia básica.

A frase de efeito de Parmênides, que define suas ideias é: "Aquilo que é não pode não ser"; contrariando os princípios do mobilismo, e caracterizando a realidade mais profunda como imutável.

Para Parmênides e seus discípulos o movimento e, conseqüentemente a mudança, são vistos como aquilo que deixou de ser o que já foi em algum momento, e, portanto, não é ainda o que deveria ser e assim não é nada deixando para o permanente, aquilo que é imutável o ser.

Nessa mesma linha de pensamento conflituosa com o mobilismo, Parmênides afirma que para pensar o ser o homem deve trilhar um caminho da verdade absoluta; o caminho do pensamento e da razão, se afastando cada vez mais de uma rede de opiniões que se formam de impressões sensíveis, percepções do seu cotidiano, que são nada mais do que aparências e ilusões e por isso, mutáveis.

Um dos maiores seguidores de Parmênides, e com certeza um grande defensor do monismo, foi Zenão de Eleia, que ficou famoso por demonstrar a teoria monista através de paradoxos que ficaram muito conhecidos no mundo antigo, chegando até nossos tempos por sua genialidade e complexidade.

Zenão de Eleia é um filósofo pré-socrático, que viu seus paradoxos serem amplamente difundidos por toda a Antiguidade, em constante análise e discussões. Análises que ainda hoje se fazem sentir pela controvérsia que despertam em estudiosos de todo o mundo.

Tais paradoxos são extremamente complexos, e mostram como esse importante filósofo não poupou energia em suas observações sistemáticas para provar que a filosofia mobilista era equivocada.

Nessa busca por provar que a verdade estava no monismo, Zenão de Eleia inaugura uma nova forma de argumentar, muito convincente e eficaz, através dos seus paradoxos, a chamada '*reductio ad absurdum*', é o que vemos no paradoxo de 'Aquiles e a tartaruga' e da 'flecha imóvel'; em que fica claro que Zenão vai contra o senso comum.

Suas observações *in loco* mostram o oposto, porém o que ele quer mostrar com a genialidade de seus paradoxos, abstratos e lógicos é que a impossibilidade de movimento pode ser provada logicamente e, portanto, é uma ilusão, uma impressão dos nossos sentidos.

O conflito de ideias entre monistas e mobilistas foi provavelmente um dos primeiros grandes conflitos teóricos conceituais da filosofia, algo que acabou se tornando comum ao longo de sua história.

Esse conflito de ideias mostrou correntes de pensamentos opostas: a do movimento valorizando a fluidez do real, a complementação dos opostos e a pluralidade do real, que se torna conhecido através das nossas experiências concretas e sensíveis e, que, portanto, somos parte disto como um todo; já para o pensamento monista, a busca por uma verdade imutável,

eterna e absoluta não pode ser alcançada no mundo sensível e menos ainda com experiências concretas, pois, só está acessível ao mundo das ideias e dos pensamentos se revelando a nós através da constante reflexão.

Essa batalha filosófica parece não ter um vencedor; pois não existe uma maneira de dizer quem tem a razão, uma vez que tudo pode ser discutido, analisado e posto à prova; assim a Filosofia inaugura uma busca para respostas de questões de cunho humano como: “o que é a verdade?”, por exemplo.

Para responder a esse tipo de questão surgiu o discurso filosófico, que conheceu seu ápice nos séculos V e IV a.C.; assim como a oratória e a retórica, a arte do discurso, usados a princípio por pessoas que desejam defender suas ideias e interesses, enquanto membros da sociedade; segundo preceitos dessa prática, tudo que se fala deve ser submetido ao pensamento de outros, e as ferramentas de quem discursa devem ser a argumentação e a justificação.

Outra corrente que teve um grande impacto na Filosofia foi à escola sofística, cujo mais importantes expoentes foram Protágoras e Górgias; as ideias ligadas aos sofistas são o humanismo e o relativismo.

Em sua obra sobre a verdade Protágoras diz: “O homem é a medida de todas as coisas, das que são como são e das que não são como não são”. Para os sofistas as coisas são aquilo que a nossa percepção nos mostra, logo depende da situação e das circunstâncias tudo pode variar e cada indivíduo terá sensações diferentes, conhecimentos diferentes. Essa visão pode ser enquadrada na visão mobilista a da realidade em movimento constante, porém, mais centrada na percepção humana das coisas ficando distante de uma verdade única e absoluta.

Contemporâneos e contrários às ideias de Sócrates dominavam as técnicas da retórica, que utilizavam para conseguir o consenso. Com essa técnica os sofistas mostravam o modo como concebiam o conhecimento, sem interesse em entender como as coisas realmente são, pois, o entendimento dessas mesmas coisas depende de como cada um as interpretam através de suas percepções e análises, o importante é conseguir, através de a oratória convencer o público em geral ou um oponente específico do seu ponto de vista.

Além de Protágoras de Abdera e Górgias de Leontinos, outros nomes que representaram a escola sofística foram Hipias, Licofon, Pródicos, dentre outros; os sofistas eram criticados por cobrar por seus ensinamentos, e chamados por muitos de mercenários.

Protágoras e Górgias prometiam a seus discípulos torná-los aptos a fortalecer seus argumentos num discurso para conseguir consenso, mesmo com argumentação fraca.

Aristóteles, de acordo com os fragmentos que sobreviveram ao tempo, foi o primeiro a usar o termo “lógica” em seus estudos.

Embora essa ciência ou seus elementos estivessem presentes em muitas das escolas filosóficas da Antiguidade, foi Aristóteles que tratou desse assunto com mais profundidade buscando uma definição mais explícita e abrangente das regras que regem essa construção do pensamento; com a contribuição não menos importante de Platão, a lógica foi se fortalecendo e ganhando impulso no contexto das grandes discussões filosóficas.

Sócrates viveu em Atenas por volta de 469 a.C., e foi durante o apogeu de Atenas que Sócrates, impulsionado pela convivência com uma sociedade de intelectuais e aristocratas da época, tomou consciência da sua vocação para mestre. Em linhas gerais, Sócrates tem uma concepção filosófica marcada por um método de análise conceitual em que ele, através da dialética, tenta levar o indivíduo a sua verdade absoluta numa construção do próprio conhecimento de si mesmo.

Sócrates ficou conhecido por confrontar os sofistas de sua época com questões que buscavam a definição de coisas, que embora sentidas, eram dificilmente definidas ou dependiam da percepção individual. Na maioria das vezes uma virtude ou qualidade moral, com questionamento que se iniciavam pela celebre pergunta: “o que é?”.

O método, chamado de dialética socrática, iniciou-se com o estímulo de um interlocutor incitando-o a responder perguntas sobre suas crenças habituais e fazendo com que ele justifique o sentido dessa crença deixando para o indivíduo que reconhecer sua própria ignorância tornando-se o princípio de sua sabedoria.

Com esse pensamento, Sócrates formulou a frase de efeito: “Só sei que nada sei”. Nesse momento, o indivíduo se abre para o verdadeiro conhecimento, sem o obstáculo de opiniões externas a ele, ou de percepções não vivenciadas por ele próprio.

Sócrates criticava os sofistas afirmando que os ensinamentos por eles disseminados não passavam de uma técnica argumentativa, que tinham por único objetivo convencer seus oponentes da sua crença ou ponto de vista; mas sem a premissa de levar ao verdadeiro conhecimento, acusava os sofistas de usarem à retórica para influenciar decisões políticas da época com base em opiniões pouco sábias ou virtuosas, dependendo de quem as defendia.

Platão, que foi um discípulo de Sócrates, ao menos inicialmente, também se preocupava em chegar à verdade, a certeza e a clareza através da razão, pois esse deve ser o papel primordial da filosofia, na sua concepção. Sua obra caracteriza-se com a busca do conhecimento verdadeiro, portanto ele via na prática sofista uma degradação dessa busca com as técnicas de convencimento de uma verdade muitas vezes consensual.

Platão compartilhou das ideias do mobilistas, porém, não conseguiu conceber a realidade no mundo sensível. Para não cair em ceticismo, pensou que o único lugar onde as coisas poderiam estar além da dimensão espaço-tempo seria um lugar estável, imutável, eterno, um lugar que não poderia ser percebido pelos sentidos humanos, ou seja, como ele mesmo nomeou, no “*mundo das ideias*”.

Para Platão o “mundo das ideias” é o mundo que está encoberto pelo “mundo sensível”, sendo o verdadeiro, e a única forma de se chegar a ele seria através do intelecto. A dialética é o caminho para acessar essa dimensão, com maior ênfase no caminho percorrido do que propriamente um desfecho final; assim Platão realiza então um feito notável: sintetizar duas correntes antagônicas o mobilismo e o monismo.

Surge, então, a figura de Aristóteles, nascido em Estagira na Macedônia, filiou-se a Academia de Platão, em Atenas, ainda jovem alcançando lugar de destaque ali como seu discípulo. Contudo, após a morte de seu mestre, seguiu um caminho diferente, e depois de algum tempo fundou sua própria escola, conhecida como escola peripatética, devido ao hábito de Aristóteles de discutir e ensinar seus discípulos em longas caminhadas.

Aristóteles desenvolveu uma filosofia contrária à academia de Platão, embora tenha sido seu discípulo, pois para ele não existia o mundo das ideias defendido por Platão, e a essência das coisas estava contida nas próprias coisas.

Para ele todo o conhecimento universal estava ligado à sua lógica e a um mecanismo baseado na dedução formal, o silogismo composto por premissas gerais que devem, seguindo um caminho demonstrativo, gerar uma conclusão.

É possível observar que a cruzada pela verdade perpassou por várias ideias e momentos históricos, muitas vezes sofrendo influências externas, mas resumidamente nota-se que para Aristóteles existe uma verdade única e eterna, que não está ligada aos seres humanos; já para os sofistas que não havia verdade absoluta ou imutável. Assim, a verdade depende da percepção do mundo sensível e, é claro, do saber convencer e persuadir aos

demais da opinião que convém ao interlocutor, buscando pelo que é mais desejável através da arte da retórica.

Platão e Aristóteles elegeram respectivamente a dialética e o silogismo como ferramentas necessárias na busca pela verdade absoluta; o silogismo com o máximo de rigor possível.

Górgias foi um sofista e cético, nascido na Sicília, alcançou grande fama pela sua eloquência e maestria na arte da retórica, dessa forma atraiu para seus ensinamentos representantes das classes mais abastadas de Atenas.

Percebendo que havia muita imprecisão, ambiguidade e até mesmo incerteza em termos comuns da linguagem como seus elementos constituintes, refutou a verdade absoluta no seu “Tratado da Natureza ou Do Não Ser” onde desenvolveu suas teses: “Nada é; ainda que fosse, seria incognoscível; ainda que fosse cognoscível, seria incomunicável”. Górgias demonstra que todo estudo que pretende se lançar para além do mundo sensível, têm em si mesmo contradições quando busca algo estável para se apoiar.

Górgias em seu “Tratado do não ser” no ‘Palamedes’ e no “Elogio a Elena” utilizou a redução ao absurdo, creditada a Zenão, que a utiliza nos seus famosos paradoxos; porém diferentemente de Zenão que utiliza o método para defender o monismo, aqui Górgias o utiliza como argumento para que a tese de Parmênides e a dos físicos se anulem. Assim ele sustenta que aquilo que pode ser comprovado ou defendido pode ser mais importante do que é verdadeiro.

1.4 A Lógica Fuzzy

Todo esse histórico filosófico mostrando o percurso de uma busca que ainda é discutida e analisada, nos mostra o mar de incertezas em que a humanidade sempre esteve mergulhada, que passados milhares de anos ainda faz parte do cotidiano da humanidade, e que perpassa por todo tipo de situação decisória.

A subjetividade, imprecisão, aleatoriedade, dúvida, indecisão, ambiguidade, entre outros termos de mesmo cunho, fazem parte não só das nossas vidas, mas da nossa própria essência, talvez isso nos torne humanos, resumidamente parece haver mais incertezas do que certezas e por isso as incertezas estão sempre no centro das atenções.

Os pesquisadores, em sua sabedoria, dividiram esse campo em dois tipos de incertezas: aquelas provenientes de eventos aleatórios que está bem desenvolvida na Matemática clássica; e em contrapartida aos eventos aleatórios, muitos elementos do nosso cotidiano, da nossa linguagem corrente trazem em si mesmos um tipo de incerteza, que a Matemática clássica não é capaz de quantificar ou medir; sendo variáveis linguísticas transmitidas e compreendidas sem nenhum esforço, mas que não tem um tratamento adequado na Matemática tradicional.

São conceitos como alto e baixo, gordo e magro, rico e pobre, jovem e velho, por exemplo; que podem ser descritos através de graus, que representam verdades ou qualidades parciais ou padrões de maior qualidade.

A Lógica Fuzzy contribuiu para a necessidade de dar um tratamento formal a esses tipos de fenômenos, que não se encaixam na Matemática clássica. Casos em que as fronteiras não ficam bem definidas podem ser moldados pela Lógica Fuzzy, como em conjuntos de pessoas ou elementos que possui uma característica não exclusiva como, por exemplo, conjunto das pessoas altas ou conjunto de pessoas com depressão.

Um exemplo bastante simples é o conjunto dos copos cheios d'água, podemos definir o conjunto dos copos cheios d'água, que têm fronteiras bem definidas na Matemática clássica: pertencem a esse conjunto apenas os copos cheios. Mas, se flexibilizarmos esse conjunto, o tornando não convencional, e considerando que todos os copos com alguma água pertençam a esse conjunto com algum grau de pertinência, logo, quanto maior quantidade de água no copo maior o seu grau de pertinência, e todos os copos estão ligados a esse conjunto com maior ou menor intensidade.

Essa flexibilização de conjuntos clássicos para que se tornem compatíveis com as incertezas que nos cercam conhecidas como Lógica Fuzzy, será estudada nessa dissertação de mestrado.

CAPÍTULO 2. O PRINCÍPIO DA EXTENSÃO PROPOSTO POR ZADEH E A DEFINIÇÃO DE NÚMEROS FUZZY

"E no entanto, ver-se-á bem que não se pode chegar a saber o que cada coisa realmente é".
(DEMÓCRITO DE ABDERA - SÉC. V A.C).

Este capítulo foi dedicado ao estudo de um método utilizado para entender operações típicas de conjuntos clássicos, conhecido como "*Princípio de Extensão*". Neste sentido, se temos uma função f e precisamos aplicar esta função a argumentos fuzzy, então, precisamos recorrer ao princípio de extensão. Contudo, como todo método científico a ser aplicado, também precisa de pré-requisitos, como o conceito de subconjunto fuzzy, α -nível e número fuzzy, exemplificando sempre que possível.

2.1 Subconjuntos Fuzzy

A fim de formalizar um conjunto fuzzy matematicamente, Zadeh (1965) tomou como base o fato de que todo conjunto clássico pode ser definido ou caracterizado por meio de uma função, ou seja, por sua função característica, que pode ser assim definida:

Definição 1. Considere U um conjunto e A um de seus subconjuntos. Atribuímos a A a função característica que o define dada por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

Assim definida, χ_A é uma função de domínio igual a U e sua imagem está contida no conjunto $\{0,1\}$, onde $\chi_A(x) = 0$ indica que o elemento x não pertence a A , enquanto $\chi_A(x) = 1$ indica que x é um dos elementos de A .

Nos conjuntos chamados clássicos fica claro se um elemento pertence ou não a um determinado conjunto, esse limite está bem definido e bastante preciso. Porém, nem sempre é possível definir a pertinência ou não com tanta precisão, ou seja, há casos em que não

conseguimos afirmar se um elemento pertence a um dado conjunto ou não. Nesses casos seria melhor apenas dizer qual ou quais elementos do conjunto universo se encaixam melhor nos parâmetros que caracterizam o subconjunto em questão.

Exemplo 1. Adaptado de Barros & Bassanezi (2015) - (Números próximos de 7) pensemos no conjunto dos números reais e no subconjunto dos “números próximos a 7”, a definição desse conjunto pode ser:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ é aproximadamente } 7\}$$

Pergunta-se quais números pertencem efetivamente a esse subconjunto e quais não pertencem, por exemplo, os números 7,77 e 10 pertencem ao subconjunto mencionado?

É impossível responder com certeza uma questão como essa já que os limites não estão bem definidos, a conclusão mais sensata seria concluir que 7,77 estão mais próximo de 7 do que 10.

Zadeh (1965) detectou essa subjetividade em casos como os citados acima e percebeu também que se fosse permitido uma espécie de relaxamento no conjunto imagem da função característica desses conjuntos seria possível definir matematicamente situações de imprecisão através de subconjunto fuzzy .

Definição 2. Considere U o conjunto universo clássico. O Subconjunto Fuzzy F de U é caracterizado por uma função do tipo $\varphi_F : U \rightarrow [0,1]$ pré-fixada, denominada função de pertinência de um subconjunto fuzzy F .

Logo, um subconjunto fuzzy será determinado pela sua função de pertinência assim como um conjunto clássico é determinado pela sua função característica e o valor de $\varphi_F(x) \in [0,1]$ indica o grau de pertinência com que cada elemento x se encontra no conjunto fuzzy F .

Formalmente, a definição de subconjunto fuzzy pode ser obtida com a simples ampliação do contradomínio da função característica que é o conjunto $\{0,1\}$ para o intervalo $[0,1]$. Pensado dessa forma dizemos que um conjunto clássico é, na verdade, um caso particular de certo conjunto fuzzy. Os conjuntos clássicos são comumente chamados de *subconjunto crisp*, na linguagem fuzzy .

Um subconjunto fuzzy F é composto de elementos x de um conjunto clássico U , providos de um valor de pertinência a F , dado por $\varphi_F(x)$. Assim, podemos dizer que um subconjunto fuzzy F de U é dado por um conjunto clássico de pares ordenados:

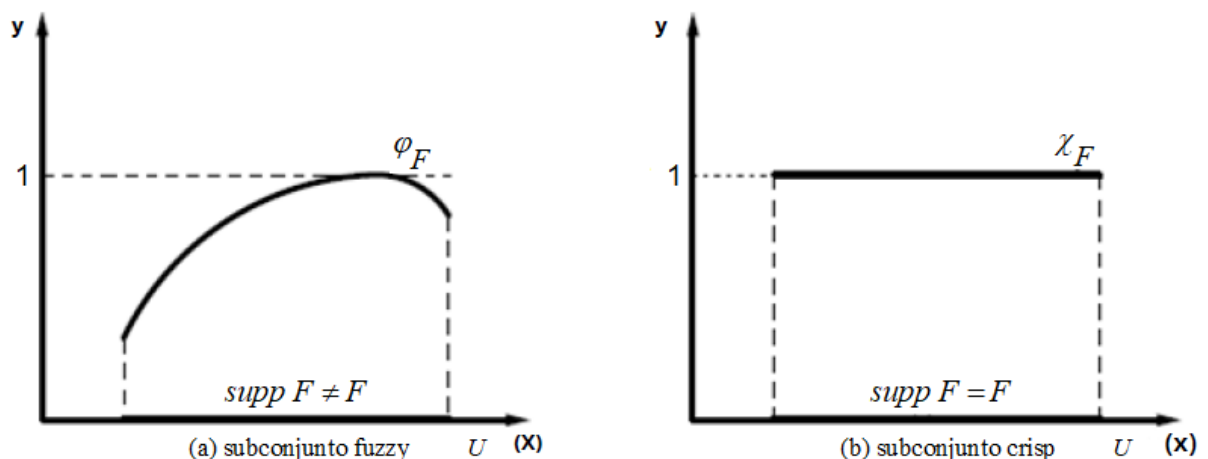
$$F = \{(x, \varphi_F(x)) / x \in U\}$$

O subconjunto clássico de U definido por

$$\text{supp } F = \{x \in U : \varphi_F(x) > 0\}$$

É denominado suporte de F e tem papel fundamental na inter-relação entre as teorias de conjuntos clássicas e fuzzy, pois como é possível perceber, o suporte de um subconjunto crisp sempre coincide com o próprio conjunto, diferentemente do suporte de um subconjunto fuzzy (Figura 1). Assim quando ampliamos o contradomínio da função característica que é o conjunto $\{0,1\}$, para o intervalo $[0,1]$ temos um subconjunto fuzzy (BARROS & BASSANEZI, 2015).

Figura 1 : Suporte de um subconjunto.



Fonte: Adaptado de Barros e Bassanezi (2015, p.15).

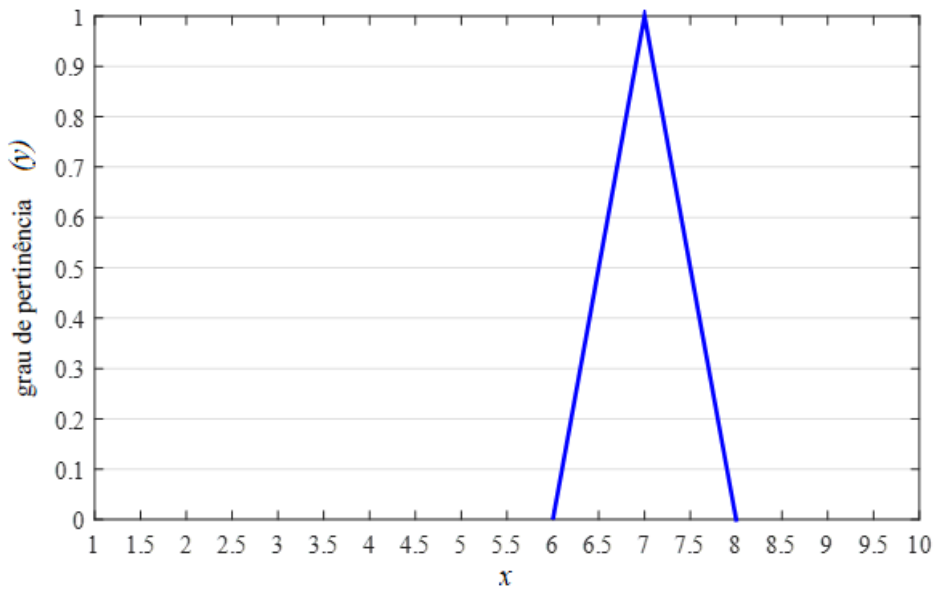
Utilizando o exemplo 1, vamos verificar como seria possível definir o conjunto fuzzy dos números reais próximos de 7, para tanto vamos definir a função de pertinência de

$\varphi_A(x): \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$, que associa x pertencente ao conjunto dos números reais \mathbb{R} ($x \in \mathbb{R}$) a um valor próximo de 7:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 1 - |x - 7| & \text{se } x \in [6,8] \\ 0 & \text{se } x \notin [6,8] \end{cases}$$

A representação gráfica dessa pertinência pode ser conferida na figura 2:

Figura 2: Números Reais Próximos a 7.



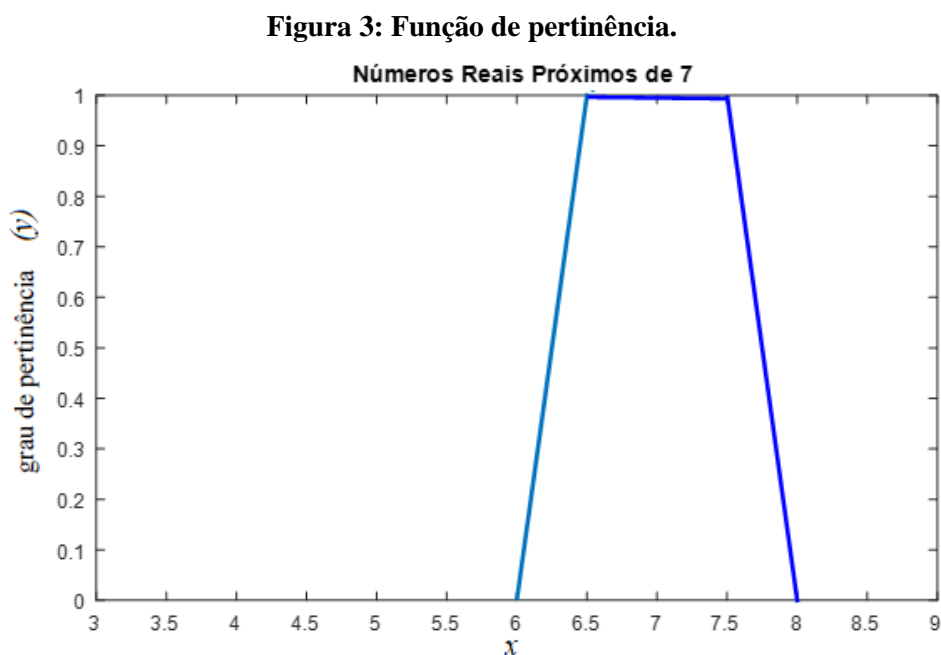
Fonte: Adaptado de Barros & Bassanezi (2015).

Dessa forma $\varphi_A(6,5) = 0,5$ e $\varphi_A(8,5) = 0$, então podemos dizer que $x = 6,5$ é um elemento de A com grau de pertinência 0,5 e $x = 8,5$ possui grau de pertinência 0 para o conjunto A , ou seja, $x = 8,5$ não está próximo ao número 7, de acordo com a função de pertinência dada.

É muito oportuno apontar aqui que a função de pertinência carrega certa subjetividade, ou seja, ela não é única, é possível definir outra função de pertinência e que, talvez, seja mais apropriada. Podemos definir, por exemplo, uma função de pertinência para A onde para estar próximo de 7 com grau de pertinência 1, o número deve pertencer ao intervalo $[6,5; 7,5]$, e a representaremos por $\delta_A(x)$:

$$\delta_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 6 \\ \frac{x-6}{0,5} & \text{se } 6 \leq x < 6,5 \\ 1 & \text{se } 6,5 \leq x \leq 7,5 \\ \frac{8-x}{0,5} & \text{se } 7,5 < x \leq 8 \\ 0 & \text{se } x > 8 \end{cases}$$

A função de pertinência acima está ilustrada graficamente na figura 3:



Fonte: Adaptado de Barros & Bassanezi (2015).

Esse exemplo mostra que a função de pertinência deve ser elaborada de acordo com o termo linguístico da situação observada,. Há também uma subjetividade na escolha da vizinhança do número 7, ou ainda quais valores são considerados como próximos a 7 com grau de pertinência 1.

Teoricamente não existe qualquer diferença entre as funções de pertinência fuzzy que representam o conjunto A, porém, cada uma dessas funções produz conjuntos fuzzy diferentes.

A função de pertinência fuzzy é uma função numérica, gráfica ou tabulada que vai atribuir valores de pertinência fuzzy para valores de uma variável dentro do seu conjunto

universo. Lembrando que o conjunto universo de uma variável representa aquele intervalo numérico dos possíveis valores reais que uma variável específica pode assumir.

2.1.1 α -Nível de um conjunto

Define-se um subconjunto A de U como sendo todos seus elementos em certa ordem hierárquica dada por uma classificação de graus de pertinência, esses graus de pertinência ou nível $\alpha \in [0,1]$. A composição de todos esses elementos com seus graus de pertinência é denominada α -nível de A , geralmente denotado por $[A]^\alpha$.

Definição 3. Seja A um subconjunto fuzzy de U e $\alpha \in [0,1]$. O α -nível de A é um subconjunto clássico de U definido por:

$$[A]^\alpha = \{x \in U : \varphi_A(x) \geq \alpha\} \text{ para } 0 < \alpha \leq 1,$$

A definição de α -nível é muito importante, pois torna possível considerar um conjunto fuzzy de uma maneira diferente. Se uma função de pertinência é capaz de determinar completamente um conjunto fuzzy, isso significa que todos os valores assumidos por ela estão dentro do intervalo $[0,1]$, logo um conjunto fuzzy A pode ser descrito pela junção de todos os conjuntos α -níveis, ou seja, todo conjunto fuzzy pode ser representado pela união de seus conjuntos α -níveis e, portanto, pode ser descrito como uma família de α -níveis.

Exemplo 2. Barros & Bassanezi (2015). Seja $U = \mathbb{R}$ o conjunto dos números reais, e A um subconjunto fuzzy de \mathbb{R} que possui a seguinte função de pertinência:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \\ 3-x & \text{se } 2 < x < 3 \\ 0 & \text{se } x \notin [1,3) \end{cases}$$

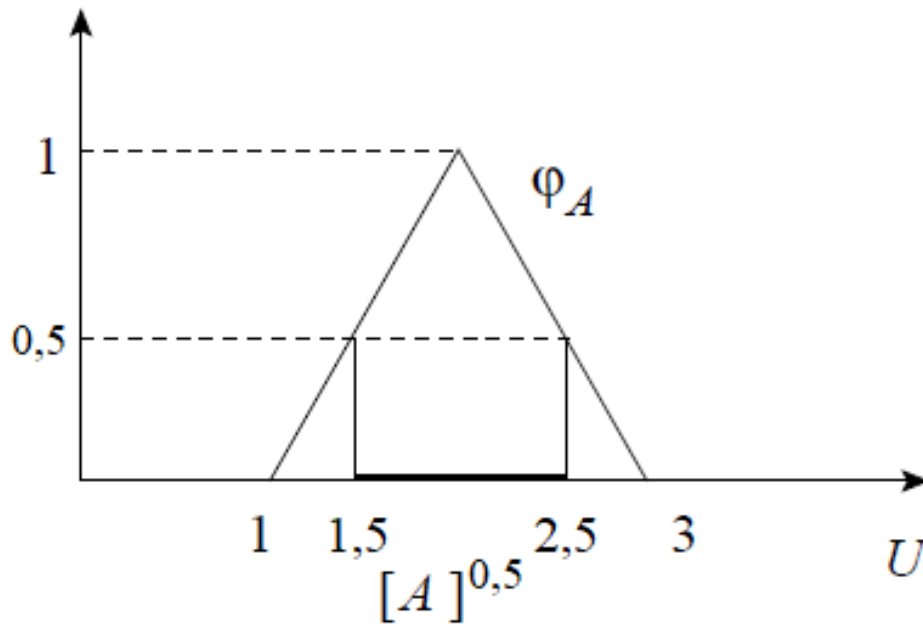
Assim, temos:

$$[A]^\alpha = [\alpha + 1, 3 - \alpha]$$

$$[A]^{0,5} = [0,5 + 1; 3 - 0,5] \rightarrow [A]^{0,5} = [1,5; 2,5]$$

$$[A]^0 = \overline{]1,3[} = [1,3] \neq U$$

Figura 4: α -nível : $[A]^{0,5}$



Fonte: Adaptado de Barros & Bassanezi (2015).

2.2 O Princípio da Extensão proposto por Zadeh

Como já foi dito anteriormente, a Lógica Fuzzy é uma aliada a Lógica Clássica na modelagem de situações onde os limites não estão bem definidos ou são vagos. Assim, estender os conceitos da teoria clássica para a Teoria dos Conjuntos Fuzzy é inevitavelmente necessário.

Um princípio básico da Lógica Fuzzy proposto por Zadeh é conhecido como “Princípio da Extensão”, e propõe sobre a extensão das funções Matemáticas do domínio clássico para o domínio fuzzy.

Com base nessa ideia, consideremos que seja $f: X \rightarrow Y$ uma função qualquer, de domínio clássico, utilizando o princípio da extensão vamos estender a função f para um domínio fuzzy e assim, a partir desse novo domínio, determinar a imagem de um subconjunto

fuzzy que chamaremos de A de X através de f , supondo que essa imagem seja um subconjunto de Y .

Definição 4. Sejam A um subconjunto de fuzzy de X e f uma função, tal que $f : X \rightarrow Z$. O princípio da extensão de Zadeh de f é a função \hat{f} que, aplicada a A fornece o subconjunto fuzzy $\hat{f}(A)$ de Z cuja função de pertinência é:

$$\varphi_{\hat{f}(A)}(z) = \begin{cases} \sup_{f^{-1}(z)} \varphi_A(x) & \text{se } f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } f^{-1}(z) = \emptyset \end{cases}$$

Onde $f^{-1}(z) = \{x; f(x) = z\}$ denomina-se a pré-imagem de z .

Caso f seja uma função bijetora, então teremos:

$$\{x: f(x) = z\} = \{f^{-1}(z)\}$$

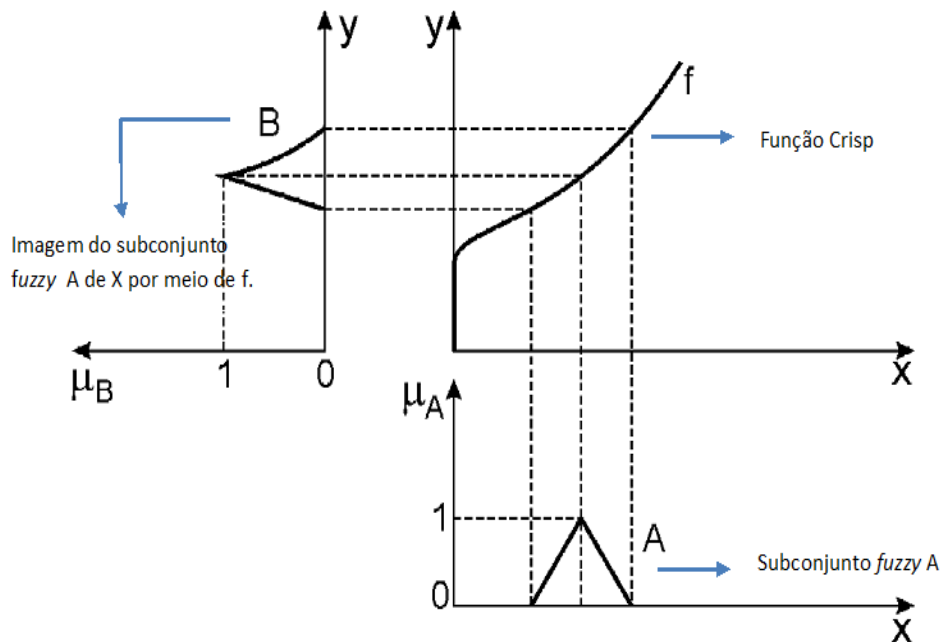
Em que f^{-1} é a função inversa de f .

Observamos que se f é uma bijeção de X em Z , então a função de pertinência de $\hat{f}(A)$ é dado por:

$$\varphi_{\hat{f}(A)}(z) = \sup_{\{x: f(x) = z\}} \varphi_A(x) = \sup_{\{x \in f^{-1}(z)\}} \varphi_A(x) = \varphi_A(f^{-1}(z)).$$

A figura 5 traz um exemplo de aplicação do Princípio de Extensão aplicada a uma função monotônica:

Figura 5: Princípio de Extensão aplicada a uma função monotônica.



Fonte: Adaptado de Barros & Bassanezi (2015).

Para o caso de f ser uma função injetora então $z = f(x)$ pertence ao subconjunto fuzzy $\hat{f}(A)$, com grau α igual ao que x pertence a A , o que pode não ser verificado caso a função em questão não seja injetora.

Assim:

Seja $f: X \rightarrow Z$ uma função injetora, e A um subconjunto fuzzy de X , finito ou enumerável, dado por:

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_A(x_i) / x_i.$$

O princípio de extensão de Zadeh, nos garante que $\hat{f}(A)$ é um subconjunto fuzzy de Z , dado por:

$$\hat{f}(A) = \hat{f}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_A(x_i) / x_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_A(x_i) / f(x_i)$$

Desse modo, pode-se deduzir a imagem de A por f do conhecimento das imagens de x_i por f . Observamos ainda que o grau de pertinência de $z_i = f(x_i)$ em $\hat{f}(A)$ é o mesmo de x_i em A .

No princípio de extensão de *Zadeh* existem dois conceitos importantes:

- I. A possibilidade de um valor de entrada é propagada diretamente para a possibilidade de sua imagem;
- II. Quando a combinação de múltiplas entradas mapeia o mesmo valor de saída, a possibilidade da saída é obtida pela combinação das possibilidades dessas entradas através do operador **sup**.

Vejamus um exemplo para ilustrar o que foi dito:

Exemplo 3. Considere $f(x) = x^2, x \geq 0$ e A é um conjunto fuzzy com suporte enumerável ou finito. Podemos, então, escrever que:

$$\hat{f}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_A(x_i) / f(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_A(x_i) / x_i^2$$

O princípio de extensão proposto, estende o conceito de uma função aplicada a um subconjunto clássico de X , assim, vamos considerar uma função $f: X \rightarrow Z$ e um subconjunto clássico de X que chamaremos de subconjunto A . De acordo com o que já foi discutido concluímos que a função de pertinência de A é também, sua função característica.

Podemos concluir, também, que a extensão de *Zadeh* aplicada a A , é o subconjunto $f(A)$ de Z , e sua função característica é assim determinada:

$$\begin{aligned} \varphi_{\hat{f}(A)}(z) &= \sup_{\{x: f(x)=z\}} \chi_A(x) \begin{cases} 1 & \text{se } z \in f(A) \\ 0 & \text{se } z \notin f(A) \end{cases} \\ &= \chi_{f(A)}(z) \end{aligned}$$

qualquer que seja z .

Portanto o conjunto fuzzy $\hat{f}(A)$ coincide com o conjunto *crisp* $f(A)$, tomando como base o fato de que a função de pertinência do conjunto fuzzy $\hat{f}(A)$ coincide com a função característica do conjunto clássico $f(A)$, simbolicamente:

$$\hat{f}(A) = f(A) \text{ com } f(A) = \{f(a) : a \in A\}$$

Assim, decorre que:

$$\text{Se } [\hat{f}(A)]^\alpha = [f(A)]^\alpha \text{ então } f(A) = f([A]^\alpha)$$

O resultado que acabamos de definir e que será enunciado como um teorema é válido para conjuntos *crisp* e para um subconjunto fuzzy de X .

Teorema 1. Consideremos $f: X \rightarrow Z$ uma função contínua e consideremos, também, A um subconjunto fuzzy de X de α – níveis não vazios. Então, para todo $\alpha \in [0,1]$ temos que:

$$[\hat{f}(A)]^\alpha = (f[A]^\alpha)$$

Isso significa que os α – níveis de um conjunto fuzzy obtido através do Princípio da Extensão de Zadeh coincidem com as imagens dos α – níveis pela função *crisp*.

Exemplo 4. Seja A um subconjunto fuzzy de números reais cuja função de pertinência é:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 4(x - x^2) & \text{se } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{se } x \notin [0, 1] \end{cases}$$

Vamos calcular, então os α – níveis de A :

$$4(x - x^2) \geq \alpha \Rightarrow x - x^2 \geq \frac{\alpha}{4} \cdot (-1) \rightarrow x^2 - x \leq -\frac{\alpha}{4}, \text{ logo:}$$

$$x^2 - x \leq -\frac{\alpha}{4} \text{ (completando o quadrado perfeito)} \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \leq -\frac{\alpha}{4}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq -\frac{\alpha}{4} + \frac{1}{4} \\ &\Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1-\alpha}{4} \\ &\Rightarrow \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} \leq \sqrt{\frac{1-\alpha}{4}} \\ &\Rightarrow \left|x - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{\sqrt{1-\alpha}}{2} \end{aligned}$$

Assim, temos que:

$$-\frac{\sqrt{1-\alpha}}{2} + \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{1-\alpha}}{2} + \frac{1}{2}$$

O que nos leva, através da fatoração dos termos, a:

$$[A]^\alpha = \left[\frac{1}{2} \cdot (1 - \sqrt{1-\alpha}), \frac{1}{2} \cdot (1 + \sqrt{1-\alpha}) \right], \forall \alpha \in [0,1] \text{ e}$$

$$[A]^0 = \left[\frac{1}{2} \cdot (1 - \sqrt{1-0}), \frac{1}{2} \cdot (1 + \sqrt{1-0}) \right]$$

$$[A]^0 = \left[\frac{1}{2} \cdot (1-1), \frac{1}{2} \cdot (1+1) \right] \Rightarrow \left[\frac{1}{2} \cdot (0), \frac{1}{2} \cdot (2) \right]$$

$$[A]^0 = [0,1] =]\overline{0}, \overline{1}[$$

Agora, usando o Princípio de Extensão de Zadeh, vamos considerar a função dada por $f(x) = x^2, \forall x \geq 0$.

Assim:

$$f([A]^\alpha) = \left[f\left(\frac{1}{2} \cdot (1 - \sqrt{1-\alpha})\right), f\left(\frac{1}{2} \cdot (1 + \sqrt{1-\alpha})\right) \right]$$

$$f([A]^\alpha) = \left[\left(\frac{1}{2} \cdot (1 - \sqrt{1-\alpha})\right)^2, \left(\frac{1}{2} \cdot (1 + \sqrt{1-\alpha})\right)^2 \right]$$

E, por fim:

$$\hat{f}([A]^\alpha) = \left[\frac{1}{4} \cdot (1 - \sqrt{1 - \alpha})^2, \frac{1}{4} \cdot (1 + \sqrt{1 - \alpha})^2 \right]$$

Agora podemos calcular os níveis 0; 0,75 e 1 de $\hat{f}([A]^\alpha)$ dentre quaisquer outros que quisermos:

$$\alpha = 0$$

$$\hat{f}([A]^\alpha) = \left[\frac{1}{4} \cdot (1 - \sqrt{1 - \alpha})^2, \frac{1}{4} \cdot (1 + \sqrt{1 - \alpha})^2 \right]$$

$$\hat{f}([A]^0) = \left[\frac{1}{4} \cdot (1 - \sqrt{1 - 0})^2, \frac{1}{4} \cdot (1 + \sqrt{1 - 0})^2 \right]$$

$$= \left[\frac{1}{4} \cdot (1 - 1)^2, \frac{1}{4} \cdot (1 + 1)^2 \right]$$

$$= \left[\frac{1}{4} \cdot (0)^2, \frac{1}{4} \cdot (2)^2 \right]$$

$$\hat{f}([A]^0) = [0, 1]$$

$$\alpha = 0,75$$

$$\hat{f}([A]^\alpha) = \left[\frac{1}{4} \cdot (1 - \sqrt{1 - \alpha})^2, \frac{1}{4} \cdot (1 + \sqrt{1 - \alpha})^2 \right]$$

$$\hat{f}([A]^{0,75}) = \left[\frac{1}{4} \cdot (1 - \sqrt{1 - 0,75})^2, \frac{1}{4} \cdot (1 + \sqrt{1 - 0,75})^2 \right]$$

$$= \left[\frac{1}{4} \cdot (1 - \sqrt{0,25})^2, \frac{1}{4} \cdot (1 + \sqrt{0,25})^2 \right]$$

$$= \left[\frac{1}{4} \cdot (1 - 0,5)^2, \frac{1}{4} \cdot (1 + 0,5)^2 \right]$$

$$= \left[\frac{1}{4} \cdot (0,5)^2, \frac{1}{4} \cdot (1,5)^2 \right]$$

$$= \left[\frac{1}{4} \cdot (0,25), \frac{1}{4} \cdot (2,25) \right]$$

$$= \left[\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4} \right), \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{9}{4} \right) \right] \rightarrow \left[\frac{1}{16}, \frac{9}{16} \right]$$

$$\hat{f}([A]^{0,75}) = [0,0625; 0,5625]$$

$$\alpha = 1$$

$$\hat{f}([A]^\alpha) = \left[\frac{1}{4} \cdot (1 - \sqrt{1 - \alpha})^2, \frac{1}{4} \cdot (1 + \sqrt{1 - \alpha})^2 \right]$$

$$\hat{f}([A]^1) = \left[\frac{1}{4} \cdot (1 - \sqrt{1 - 1})^2, \frac{1}{4} \cdot (1 + \sqrt{1 - 1})^2 \right]$$

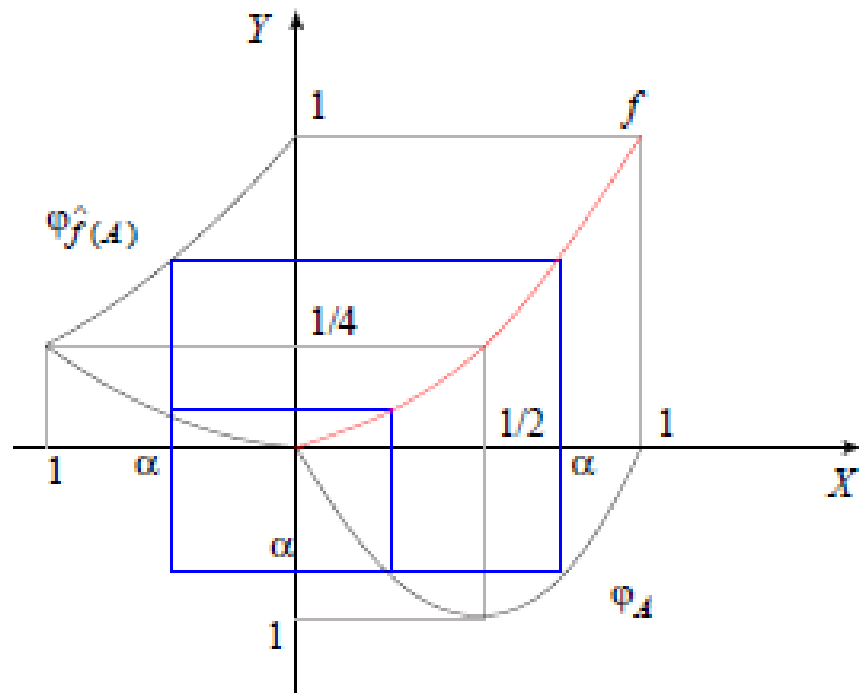
$$= \left[\frac{1}{4} \cdot (1 - 0)^2, \frac{1}{4} \cdot (1 + 0)^2 \right]$$

$$= \left[\frac{1}{4} \cdot (1)^2, \frac{1}{4} \cdot (1)^2 \right]$$

$$\hat{f}([A]^1) = [0,25; 0,25]$$

A figura 6, a seguir ilustra o subconjunto $\hat{f}(A)$.:

Figura 6: Subconjunto $\hat{f}(A)$.



Fonte: Adaptado de Barros & Bassanezi (2015).

Como o objetivo é o estudo sobre as operações entre subconjuntos fuzzy , tratemos do Princípio de Extensão para funções com duas variáveis, cuja definição pode ser assim enunciada:

Definição 5. Sejam $f : X \times Y \rightarrow Z$, A e B subconjuntos fuzzy de X e Y , respectivamente. A extensão \hat{f} de f , aplicada a A e B é o subconjunto fuzzy $\hat{f}(A, B)$ de Z , cuja função de pertinência é dada por:

$$\varphi_{\hat{f}(A,B)}(z) = \begin{cases} \sup_{f^{-1}(z)} \min[\varphi_A(x), \varphi_B(y)] & \text{se } f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } f^{-1}(z) = \emptyset \end{cases}$$

Onde $se f^{-1}(z) = \{(x, y) : se f(x, y) = z\}$.

Exemplo 5. Considere $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $f(x, y) = x^2 + y$. Considere ainda os subconjuntos fuzzy finitos de \mathbb{R}

$$A = 0,4/3 + 0,5/4 + 1/5 + 0,5/6 + 0,2/7$$

$B = 0,2/6 + 0,5/7 + 1/8 + 0,5/9 + 0,2/10$, vamos determinar alguns valores do grau de pertinência z em $\hat{f}(A, B)$:

$$z = 10$$

Considerando os subconjuntos fuzzy finitos dados, A e B , não existe solução, assim podemos escrever que:

$$\hat{f}(A, B) = f^{-1}(10) = \emptyset \text{ e, portanto } \varphi_{\hat{f}(A,B)}(10) = 0$$

$$z = 25$$

Para esse valor de z temos que $f(x, y) = x^2 + y = 25$ para $x = 4$ e $y = 9$:

$$\begin{aligned}
\varphi_{\hat{f}(A,B)}(25) &= \sup_{\{x^2+y=25\}} \min[\varphi_A(x), \varphi_B(y)] \\
&= \sup_{\{x^2+y=25\}} \{\min[\varphi_A(4), \varphi_B(9)]\} \\
&= \max\{0,5;0,5\} = 0,5
\end{aligned}$$

Exemplo 6. Agora considerando os subconjuntos fuzzy finitos de \mathbb{R} e tomando $f(x, y) = 2x + y$, vamos determinar $\hat{f}(A, B)$ e o grau de pertinência de $z = 18$ em $\hat{f}(A, B)$, observe:

$$\begin{aligned}
\varphi_{\hat{f}(A,B)}(18) &= \sup_{\{2x+y=18\}} \{\min[\varphi_A(4), \varphi_B(10)], \\
&\quad \min[\varphi_A(5), \varphi_B(8)], \\
&\quad \min[\varphi_A(6), \varphi_B(6)]\} \\
&= \max\{0,5;0,2\} = 0,5
\end{aligned}$$

2.3 A definição de Números Fuzzy

Com muita frequência os problemas reais que envolvem números, seja para representar quantidades, medidas de tempo ou distancias, áreas, por exemplo, não vão além de meras informações aproximadas, imprecisas que são idealizadas de forma mais rígidas para tornar cálculo possível na Matemática clássica; é o caso, por exemplo, da expressão ‘em torno de’, ‘aproximadamente’ entre outras que chamamos de variações linguísticas.

Um exemplo bem claro é a tomada da medida da altura de uma pessoa, quando fazemos isso, preferimos um número real, concreto, preciso porem é sabido que o valor h alcançado na medição vem cheio de aproximações e imprecisões, seja ela causada pelos instrumentos utilizados, pela pessoa que está medindo ou pela pessoa que está sendo medida, entre outras coisas, logo seria muito mais prudente dizer que a altura dessa pessoa fica ‘em torno de h ’ ou é ‘aproximadamente’ h deixando claro a imprecisão do resultado dessa ação.

É nesse contexto que surgem os números fuzzy que podem representar a expressão linguística ‘em torno de’ matematicamente por um subconjunto fuzzy A que tem como domínio da sua função de pertinência φ_A o conjunto dos números reais. Vale lembrar que um número fuzzy é um caso especial de conjunto fuzzy que define um intervalo fuzzy dentro do

conjunto dos números reais, esses intervalos vão servir para representar um número que não está bem definido ou não é preciso, é nebuloso.

Assim, após essa breve premissa, define-se um número fuzzy .

Definição 6. Chamamos de número fuzzy a todo subconjunto fuzzy . A , quando o conjunto universo em que φ_A está definida é o conjunto dos números reais \mathbb{R} e, além disso, satisfaz as seguintes condições:

- (I) Os α -níveis de A são todos não vazios, com $0 \leq \alpha \leq 1$;
- (II) Os α -níveis de A são todos intervalos fechados de \mathbb{R} ;
- (III) $\text{supp } A = \{x \in \mathbb{R} : \varphi_A(x) > 0\}$ é limitado.

Dessa forma, vamos denotar os α -níveis de um número fuzzy A por:

$$[A]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha]$$

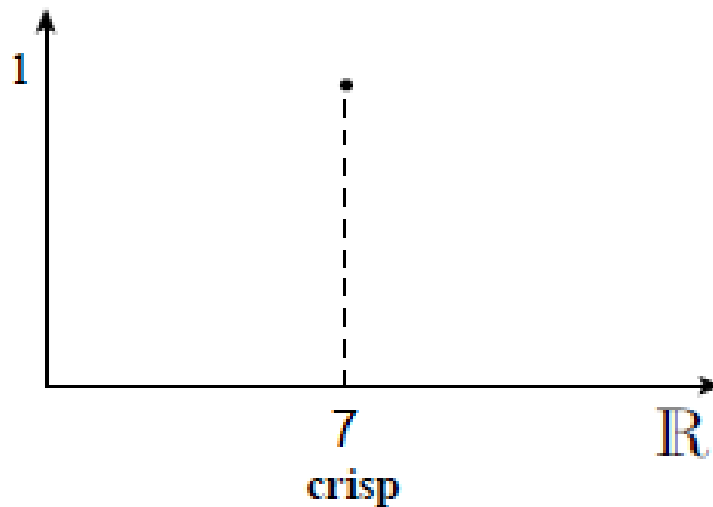
Todo número real é considerado um número fuzzy particular cuja função de pertinência é a sua função característica, isto é:

$$\chi_r(x) = \hat{r} = \begin{cases} 1 & \text{se } x = r \\ 0 & \text{se } x \neq r \end{cases}$$

Utilizaremos a notação $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ para indicar uma família de números fuzzy e como foi observado acima o conjunto dos números reais é um subconjunto clássico de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Exemplo 7. O número fuzzy $\hat{7}$ pode ser representado como mostra à figura 7, a seguir:

Figura 7: Representação do número Fuzzy $\hat{7}$.



Fonte: Adaptado de Barros & Bassanezi (2015).

Os números fuzzy que aparecem com mais frequência são os triangulares e os trapezoidais.

2.3.1 Número Fuzzy Triangular

Dentre as formas mais comuns de número fuzzy, o mais utilizado é o número fuzzy triangular que é representado pelo intervalo fechado $[a, b]$ e tem como único vértice fora da base determinada pelo intervalo $[a, b]$ o ponto $(u, 1)$, dando a forma triangular característica desse número.

Definição 7. Chama-se número fuzzy triangular, todo número fuzzy A que tem sua função de pertinência da forma:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq a \\ \frac{x-a}{u-a} & \text{se } a < x \leq u \\ \frac{x-b}{u-b} & \text{se } u < x \leq b \\ 0 & \text{se } x \geq b \end{cases}$$

Assim os números a, b e u , reais, definem um número fuzzy triangular A que será denotado pela terna (a, u, b) ou $a/u/b$ conforme mostra a função de pertinência desse número.

Podemos escrever esse número em termos de α -*nível* considerando que:

$$\begin{aligned} a_1^\alpha &= (u-a)\alpha + a \\ a_2^\alpha &= (u-b)\alpha + b \end{aligned}$$

e $[A]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha]$, então podemos escrever esse número na seguinte forma simplificada:

$$[a_1^\alpha, a_2^\alpha] = [(u-a)\alpha + a, (u-b)\alpha + b], \text{ para todo } \alpha \in [0, 1].$$

Observe que esses números não são sempre simétricos uma vez que $b-u$ nem sempre é igual a $u-a$, no entanto $\varphi_A(u) = 1$.

Os números fuzzy triangulares são um bom modelo matemático para alguns termos linguísticos como, por exemplo, ‘perto de’ ou ‘em torno de’, para essa última expressão espera-se uma simetria e essa simetria pode levar a uma simplificação na definição de um número fuzzy triangular A . Então, com base nessas observações e sendo u simétrico em relação a a e b , isto é, $u-a = b-u = \delta$.

Logo podemos escrever:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x-u|}{\delta} & \text{se } u-\delta \leq x \leq u+\delta \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo 8. O termo linguístico em torno de 5 pode ser modelado matematicamente pelo número fuzzy triangular simétrico A , e a sua função de pertinência pode ser escrita como mostrado abaixo e na figura 8.

$$\varphi_A(x) \begin{cases} 1 - \frac{|x-5|}{0,2} & \text{se } 4,8 \leq x \leq 5,2 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Figura 8: Número fuzzy ‘em torno de 5’.



Fonte: Adaptado de Barros & Bassanezi (2015).

A partir de $[a_1^\alpha, a_2^\alpha] = [(u-a)\alpha + a, (u-b)\alpha + b]$ é possível obter os α -níveis desse subconjunto fuzzy, isto é, os intervalos $[a_1^\alpha, a_2^\alpha]$, onde:

$$[a_1^\alpha, a_2^\alpha] = [(u-a)\alpha + a, (u-b)\alpha + b]$$

$$[a_1^\alpha, a_2^\alpha] = [(5-4,8)\alpha + 5, (5-5,2)\alpha + 5,2]$$

$$[a_1^\alpha, a_2^\alpha] = [0,2\alpha + 4,8; -0,2\alpha + 5,2], \text{ logo}$$

$$a_1^\alpha = 0,2\alpha + 4,8$$

$$a_2^\alpha = -0,2\alpha + 5,2$$

Podemos chegar ao intervalo α -nível desse número fuzzy analisando sua função de pertinência não simplificada:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq a \\ \frac{x-4,8}{0,2} & \text{se } a < x \leq u \\ \frac{5,2-x}{0,2} & \text{se } a < x \leq u \\ 0 & \text{se } x \leq a \end{cases}$$

$$\frac{x-4,8}{0,2} = \alpha \Rightarrow x = 0,2\alpha + 4,8$$

$$\frac{5,2-x}{0,2} = \alpha \Rightarrow -x = 0,2\alpha - 5,2 \cdot (-1) \Rightarrow x = -0,2\alpha + 5,2$$

$$[A]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] = [0,2\alpha + 4,8; -0,2\alpha + 5,2]$$

Assim para $\alpha = 0,5$

$$\begin{aligned} [A]^{0,5} &= [a_1^{0,5}, a_2^{0,5}] = [0,2 \cdot (0,5) + 4,8; -0,2 \cdot (0,5) + 5,2] \\ &= [a_1^{0,5}, a_2^{0,5}] = [0,1 + 4,8; -0,1 + 5,2] \\ &= [a_1^{0,5}, a_2^{0,5}] = [4,9; 5,1] \\ [A]^{0,5} &= [4,9; 5,1] \end{aligned}$$

2.3.2 Número Fuzzy Trapezoidal

Um número fuzzy trapezoidal tem quatro parâmetros a , b , c e d e podemos defini-lo a partir desses quatro parâmetros:

Definição 8. Um número fuzzy A é denominado de número fuzzy trapezoidal se sua função de pertinência tem a forma de um trapézio dada por:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{se } a \leq x < b \\ 1 & \text{se } b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & \text{se } c < x \leq d \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Os α -níveis de um número fuzzy trapezoidal pode ser obtidos através da função de pertinência:

$$\frac{x-a}{b-a} = \alpha \Rightarrow x = (b-a)\alpha + a$$

$$\frac{d-x}{d-c} = \alpha \Rightarrow -x = (d-c)\alpha - d \Rightarrow x = (c-d)\alpha + d$$

$$[A]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] = [(b-a)\alpha + a, (c-d)\alpha + d] \text{ para todo } \alpha \in [0,1].$$

Exemplo 9. Barros & Bassanezi (2015). Considere o conjunto fuzzy dos indivíduos considerados adolescentes por sua idade; percebe-se que agora se têm uma faixa de idade, e não uma única idade, onde esses indivíduos são considerados adolescentes, ou seja, têm grau de pertinência 1 no termo linguístico ‘adolescente’ assim, o número fuzzy trapezoidal é bastante apropriado para modelar essa situação.

Estabelecendo que na faixa etária que vai de 14 anos a 17 anos os indivíduos são considerados estritamente adolescentes e nas vizinhanças dessa faixa temos graus decrescente de pertinência podemos escrever a função de pertinência que representa esse conjunto fuzzy :

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \frac{x-11}{14-11} \Rightarrow \frac{x-11}{3} & \text{se } 11 \leq x < 14 \\ 1 & \text{se } 14 \leq x \leq 17 \\ \frac{20-x}{20-17} \Rightarrow \frac{20-x}{3} & \text{se } 17 < x \leq 20 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Os α -níveis de um número fuzzy trapezoidal que representa o termo linguístico ‘adolescente’ pode ser obtido através da equação abaixo:

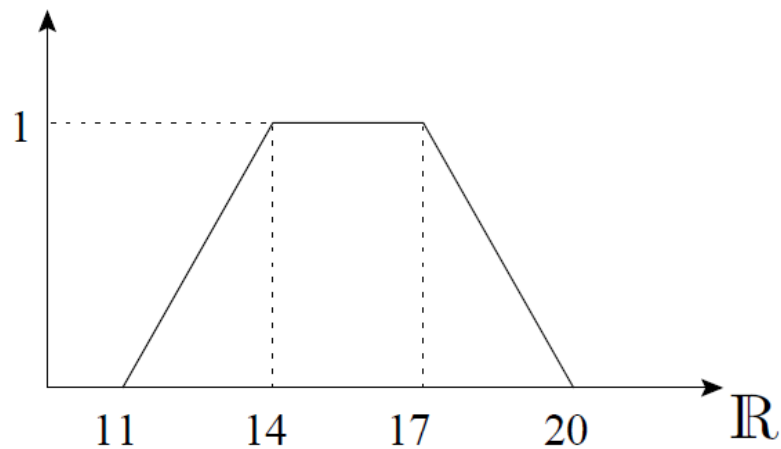
$$[A]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] = [(b-a)\alpha + a, (c-d)\alpha + d]$$

$$[A]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] = [(14-11)\alpha + 11, (17-20)\alpha + 20]$$

$$[A]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] = [3\alpha + 11, -3\alpha + 20], \alpha \in [0,1]$$

E sua representação gráfica, na Figura 9:

Figura 9: Número Fuzzy Trapezoidal que representa os adolescentes.



Fonte: Adaptado de Barros & Bassanezi (2015).

Vamos calcular o α -nível do número fuzzy que representa os adolescentes, para $\alpha = 0,5$:

$$[A]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] = [(14 - 11)\alpha + 11, (17 - 20)\alpha + 20]$$

$$[A]^{0,5} = [a_1^{0,5}, a_2^{0,5}] = [3(0,5) + 11, -3(0,5) + 20]$$

$$[a_1^{0,5}, a_2^{0,5}] = [1,5 + 11, -1,5 + 20]$$

$$[a_1^{0,5}, a_2^{0,5}] = [12,5; 18,5]$$

$$[A]^{0,5} = [12,5; 18,5]$$

2.4 Operações Aritméticas com Números Fuzzy

As operações aritméticas com números fuzzy estão ligadas as mesmas propriedades que regem a aritmética intervalar. A seguir estão listadas as operações básicas para intervalos fechados da reta real \mathbb{R} e logo em seguida um exemplo prático.

2.4.1 Operações Aritméticas Intervalares

Considerando λ um número real e, os intervalos fechados de reta A e B dados por:

$$A = [a_1, a_2] \quad e \quad B = [b_1, b_2]$$

Definição 9. Podemos definir as operações aritméticas intervalares do seguinte modo:

(a) A soma entre A e B será o intervalo fechado

$$A + B = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$$

(b) A diferença entre os intervalos A e B será o intervalo fechado

$$A - B = [a_1 - b_2, a_2 - b_1]$$

(c) A multiplicação de A por um escalar λ será o intervalo fechado

$$\lambda A = \begin{cases} [\lambda a_1, \lambda a_2] & \text{se } \lambda \geq 0 \\ [\lambda a_2, \lambda a_1] & \text{se } \lambda < 0 \end{cases}$$

A multiplicação de A por B será o intervalo fechado

$$A \cdot B = [\min P, \max P], \text{ sendo } P = \{a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2\}$$

(d) A divisão de A por B, quando $0 \notin B$, será o intervalo fechado

$$A / B = [a_1, a_2] \cdot \left[\frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_1} \right]$$

Exemplo 10. Vamos produzir um exemplo das propriedades supracitadas, e consideremos, para tanto, os intervalos fechados $A = [-1, 2]$ e $B = [5, 6]$.

Soma entre os intervalos A e B é o intervalo

$$A + B = [(-1) + 5, 2 + 6]$$

$$A + B = [4, 8]$$

Diferença entre os intervalos A e B é o intervalo

$$A - B = [(-1) - 6, 2 - 5]$$

$$A - B = [-7, -3]$$

Multiplicação do intervalo A por um escalar $\lambda = 4$ é o intervalo

$$4A = [4 \cdot (-1), 4 \cdot 2]$$

$$4A = [-4, 8]$$

Multiplicação entre os intervalos A e B é o intervalo

$$A \cdot B = [\min P, \max P], \text{ onde } P = \{(-1) \cdot 5, (-1) \cdot 6, 2 \cdot 5, 2 \cdot 6\}$$

$$A \cdot B = [\min P, \max P], \text{ onde } P = \{(-5), (-6), 10, 12\}$$

$$A \cdot B = [(-6), 12]$$

Divisão entre os intervalos A e B é o intervalo

$$A / B = [\min P, \max P], \text{ onde } P = \left\{(-1) \cdot \frac{1}{6}, (-1) \cdot \frac{1}{5}, 2 \cdot \frac{1}{6}, 2 \cdot \frac{1}{5}\right\}$$

$$A / B = [\min P, \max P], \text{ onde } P = \left\{\left(-\frac{1}{6}\right), \left(-\frac{1}{5}\right), \frac{2}{6}, \frac{2}{5}\right\}$$

$$A / B = \left[\left(-\frac{1}{5}\right), \frac{2}{5}\right]$$

2.4.2 Operações Aritméticas com Números Fuzzy

As operações aritméticas entre números fuzzy podem ser vistas como casos particulares do princípio de extensão para funções de uma ou duas variáveis.

No teorema que se segue são fornecidas as operações aritméticas intervalares a partir das respectivas operações para números reais, pelo princípio de extensão para intervalos fechados de reta.

Teorema 2. Sejam A e B dois intervalos fechados de \mathbb{R} , e \otimes uma das operações aritméticas entre números reais.

Então,

$$\chi_{A \otimes B}(x) = \sup_{\{(y, z) : y \otimes z = x\}} \min[\chi_A(y), \chi_B(z)]$$

Demonstração ver em Klir e Yuan (1995).

Assim, definimos as operações aritméticas para números fuzzy a partir do Princípio de Extensão para conjuntos fuzzy pois, são na verdade, casos particulares do Princípio de Extensão cujas funções a serem estendidas são as operações aritméticas tradicionais para números reais. A partir do que foi dito até agora, definimos tais operações.

Definição 10. Considere A e B dois números fuzzy e λ um número real.

A soma dos números fuzzy A e B é o número fuzzy $A+B$, cuja função de pertinência é dada por:

$$\varphi_{(A+B)}(z) = \begin{cases} \sup \min [\varphi_A(x), \varphi_B(y)] & \text{se } \phi(z) \neq \emptyset \\ \phi(z) & \\ 0 & \text{se } \phi(z) = \emptyset \end{cases},$$

onde $\phi(z) = \{(x, y) : x + y = z\}$.

(a) A diferença $A-B$ é o número fuzzy cuja função de pertinência é

$$\varphi_{(A-B)}(z) = \begin{cases} \sup \min [\varphi_A(x), \varphi_B(y)] & \text{se } \phi(z) \neq \emptyset \\ \{\phi(z)\} & \\ 0 & \text{se } \phi(z) = \emptyset \end{cases},$$

onde $\phi(z) = \{(x, y) : x - y = z\}$.

(b) A multiplicação de A por um escalar λ , é o número fuzzy λA que tem a seguinte função de pertinência:

$$\varphi_{(\lambda A)}(z) = \begin{cases} \sup [\varphi_A(x)] & \text{se } \lambda \neq 0 \\ \{x : \lambda(x) = z\} & \\ \chi_{\{0\}}(z) & \text{se } \lambda = 0 \end{cases} = \begin{cases} \varphi_A(\lambda^{-1}z) & \text{se } \lambda \neq 0 \\ \chi_{\{0\}}(z) & \text{se } \lambda = 0 \end{cases}$$

onde $\chi_{\{0\}}$ é a função característica de $\{0\}$.

(c) A multiplicação de A por B é o número fuzzy $A.B$, cuja função de pertinência é dada a seguir:

$$\varphi_{(A.B)}(z) = \begin{cases} \sup \min [\varphi_A(x), \varphi_B(y)] & \text{se } \phi(z) \neq \emptyset \\ \{\phi(z)\} & \\ 0 & \text{se } \phi(z) = \emptyset \end{cases},$$

onde $\phi(z) = \{(x, y) : x.y = z\}$.

(d) A divisão de A por B é o número fuzzy A/B cuja função de pertinência é

$$\varphi_{(A/B)}(z) = \begin{cases} \sup \min [\varphi_A(x), \varphi_B(y)] & \text{se } \phi(z) \neq \emptyset \\ \{\phi(z)\} & \\ 0 & \text{se } \phi(z) = \emptyset \end{cases},$$

onde $\phi(z) = \{(x, y) : x / y = z\}$.

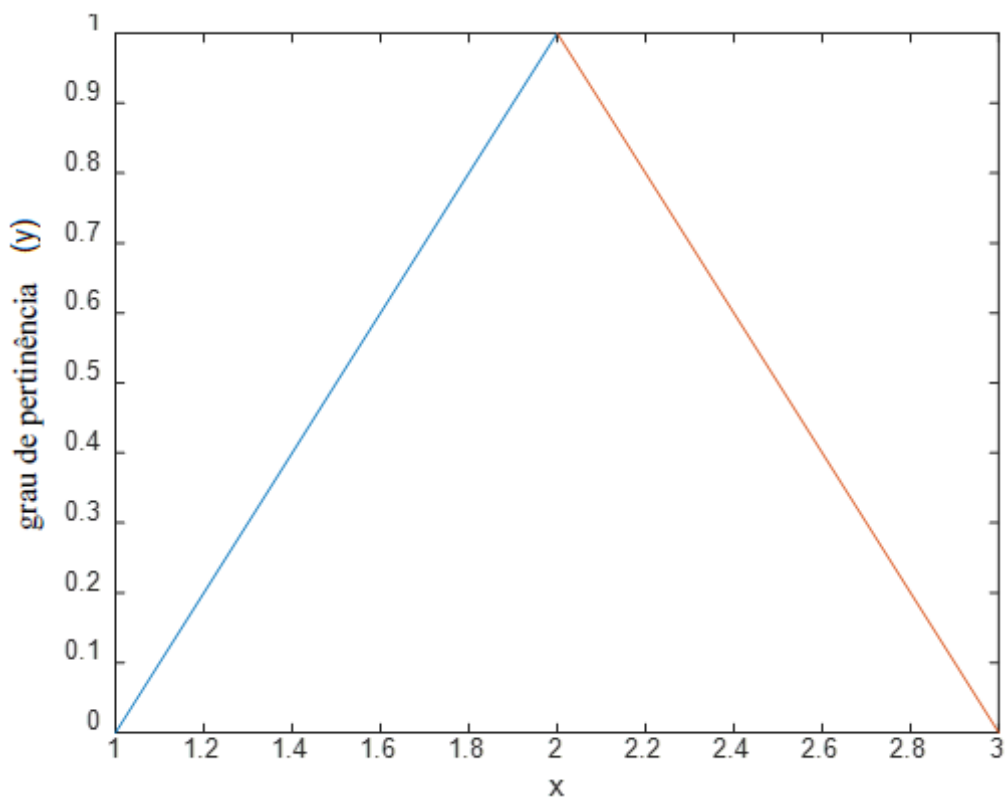
Vamos usar um exemplo simples, mas eficaz para mostrar as definições dadas em ação.

Exemplo 11. Barros & Bassanezi (2015). Considere o número triangular fuzzy ‘aproximadamente 2’ e também o número triangular fuzzy ‘aproximadamente 4’, denotados

por: $A = (1;2;3)$ e $B = (3;4;5)$ que podem ser representados graficamente pelas Figuras 10 e 11, com suas respectivas funções de pertinência:

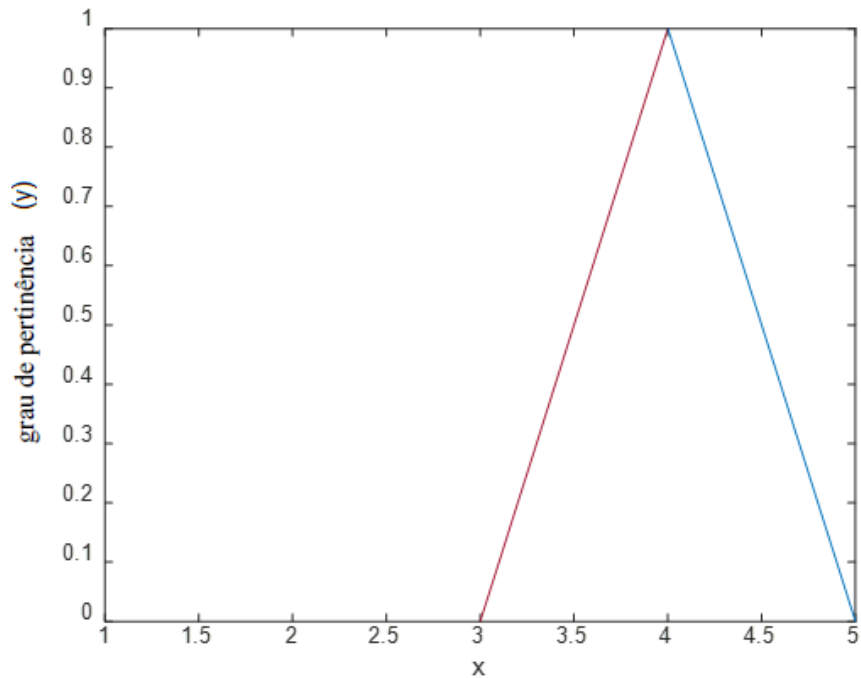
$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 1 \text{ e } x > 3 \\ x-1 & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ 3-x & \text{se } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

Figura 10: Número Fuzzy A.



$$\varphi_B(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \leq 3 \text{ e } y > 5 \\ y-3 & \text{se } 3 < y \leq 4 \\ 5-y & \text{se } 4 < y \leq 5 \end{cases}$$

Figura 11: Número Fuzzy B.



A soma dos números fuzzy A e B é o número fuzzy $A+B$, cuja função de pertinência padrão é dada por:

$$x \in [1, 2] \left. \vphantom{x} \right\} \max_{\phi z \neq \emptyset} \min [(x-1), (y-3)]$$

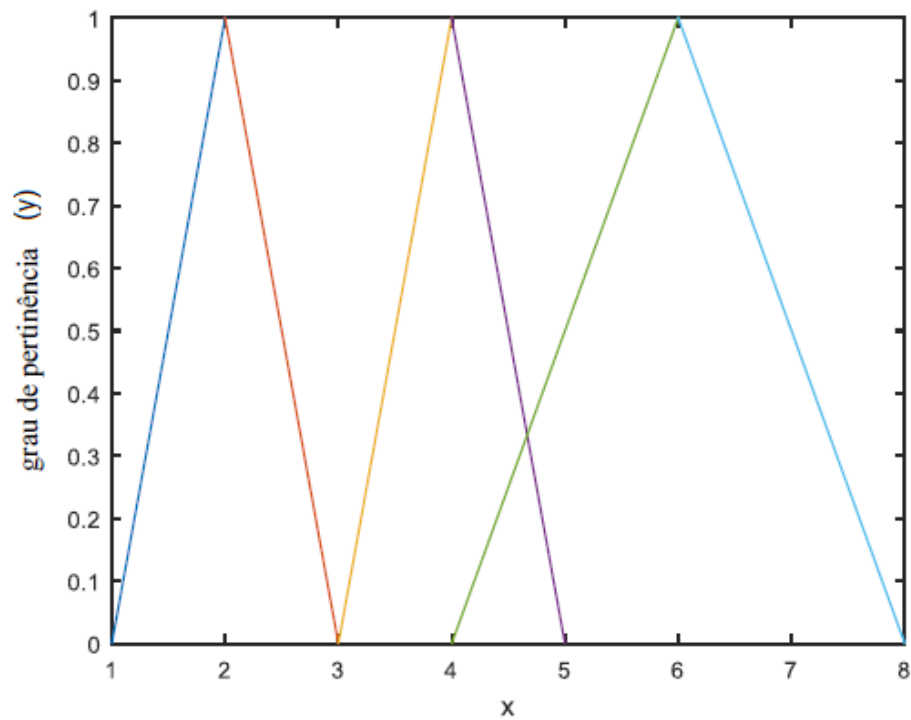
$$x \in [2, 3] \left. \vphantom{x} \right\} \max_{\phi z \neq \emptyset} \min [(3-x), (5-y)]$$

Logo a função de pertinência para a soma de $A+B$ é:

$$\varphi_{(A+B)}(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 4 \text{ e } x > 8 \\ \frac{x-4}{2} & \text{se } 4 < x \leq 6 \\ \frac{8-x}{2} & \text{se } 6 < x \leq 8 \end{cases}$$

E a sua representação gráfica gerada a partir de tal função, na Figura 12:

Figura 12: Números Fuzzy $A+B$.



Podemos obter a função de pertinência da diferença entre os números A e B de modo similar à soma:

$$x \in [1, 2] \left. \vphantom{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}} \right\} \max_{\phi z \neq \emptyset} \min [(x-1), (5-y)]$$

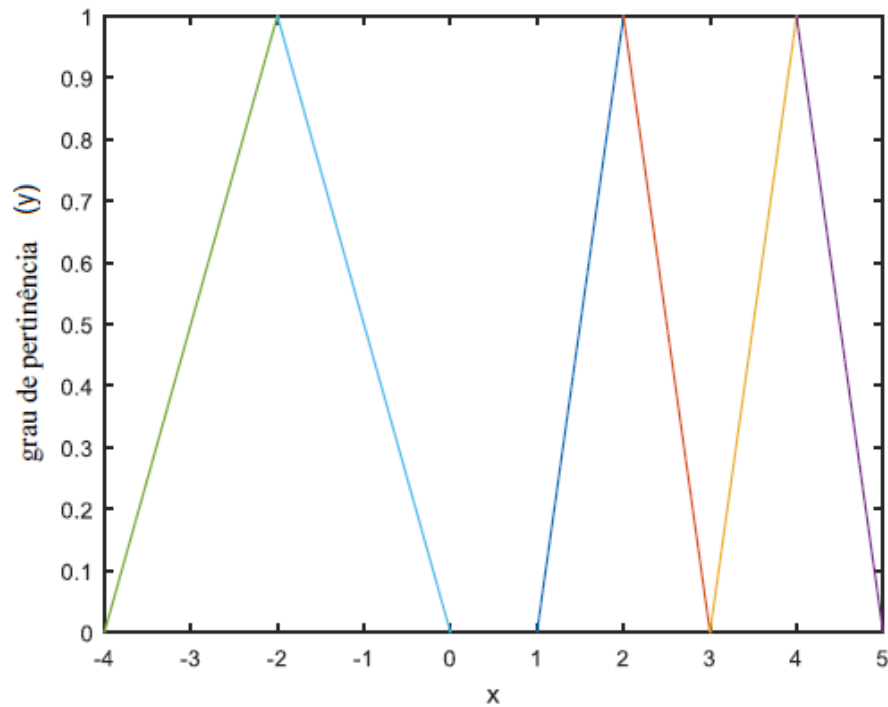
$$x \in [2, 3] \left. \vphantom{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}} \right\} \max_{\phi z \neq \emptyset} \min [(3-x), (y-3)]$$

Portanto a função de pertinência da diferença $A-B$ está descrita a seguir:

$$\varphi_{(A-B)}(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq -4 \text{ e } x > 0 \\ \frac{x+4}{2} & \text{se } -4 < x \leq -2 \\ -\frac{x}{2} & \text{se } -2 < x \leq 0 \end{cases}$$

A partir da função de pertinência para a subtração de números fuzzy , é possível gerar a representação gráfica dessa operação aritmética, na Figura 13:

Figura 13: Número Fuzzy $A-B$.



A multiplicação de A por B é o número fuzzy $A \cdot B$:

$$x \in [1, 2] \left. \vphantom{x} \right\} \max_{\phi z \neq \emptyset} \min [(x-1), (y-3)]$$

$$y \in [3, 4]$$

$$x \in [1, 2] \left. \vphantom{x} \right\} \max_{\phi z \neq \emptyset} \min [(x-1), (5-y)]$$

$$y \in [4, 5]$$

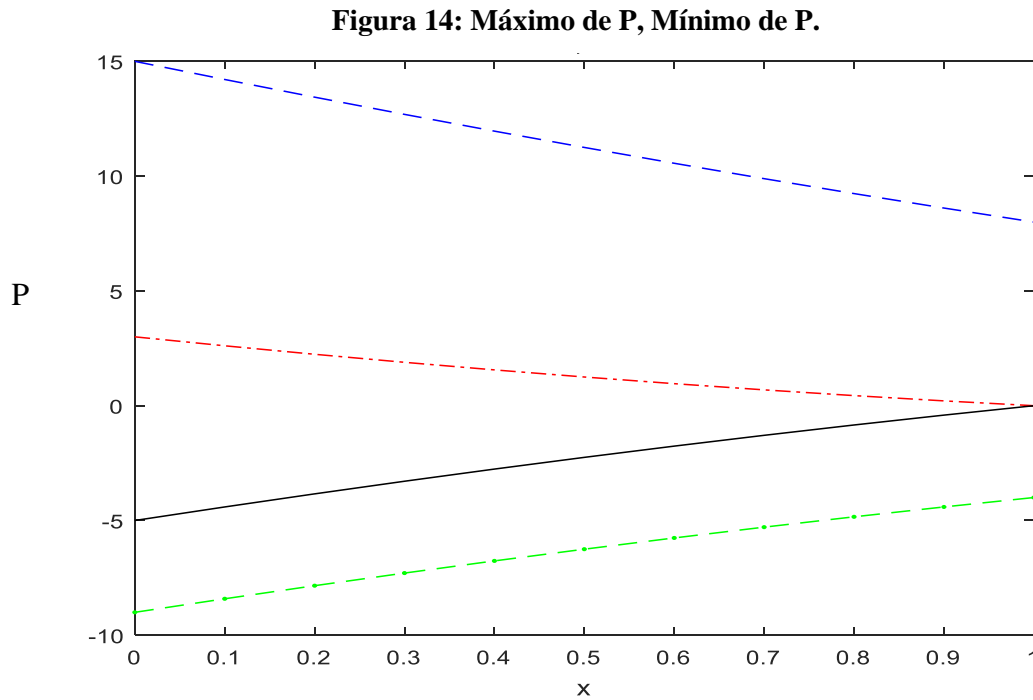
$$x \in [2, 3] \left. \vphantom{x} \right\} \max_{\phi z \neq \emptyset} \min [(3-x), (y-3)]$$

$$y \in [3, 4]$$

$$x \in [2, 3] \left. \vphantom{x} \right\} \max_{\phi z \neq \emptyset} \min [(3-x), (5-y)]$$

$$y \in [4, 5]$$

Observando o comportamento do produto de todos esses intervalos quando são atribuídos valores $[0,1]$, gera-se a Figura 14:



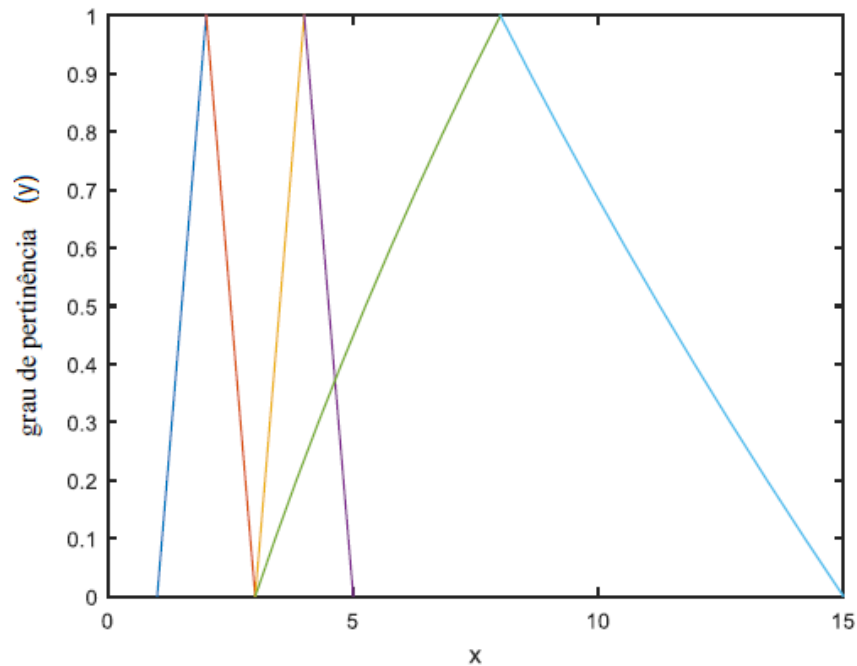
Fonte: Adaptado de Barros & Bassanezi (2015).

Assim a função de pertinência da multiplicação de A por B é:

$$\varphi_{(A \cdot B)}(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 3 \text{ e } x > 15 \\ -2 + (1+x)^{\frac{1}{2}} & \text{se } 3 < x \leq 8 \\ 4 - (1+x)^{\frac{1}{2}} & \text{se } 8 < x \leq 15 \end{cases}$$

De modo análogo aos itens anteriores é possível a partir da função de pertinência descrita acima, representar o número fuzzy $A \cdot B$ graficamente na Figura 15:

Figura 15: Número Fuzzy $A \cdot B$ pelo Princípio de Extensão.



Fonte: Adaptado de Barros & Bassanezi (2015).

Seguindo a definição para a divisão de números fuzzy a partir do princípio de extensão e de acordo com a propriedade das operações aritméticas intervalares para intervalos fechados da reta real, combinamos todos os intervalos que formam os números fuzzy A e B :

$$x \in [1,2] \left. \vphantom{x \in [1,2]} \right\} \max \min_{\phi z \neq \emptyset} \left[(x-1), \left(\frac{1}{5-y} \right) \right]$$

$$x \in [1,2] \left. \vphantom{x \in [1,2]} \right\} \max \min_{\phi z \neq \emptyset} \left[(x-1), \left(\frac{1}{y-3} \right) \right]$$

$$x \in [2,3] \left. \vphantom{x \in [2,3]} \right\} \max \min_{\phi z \neq \emptyset} \left[(3-x), \left(\frac{1}{5-y} \right) \right]$$

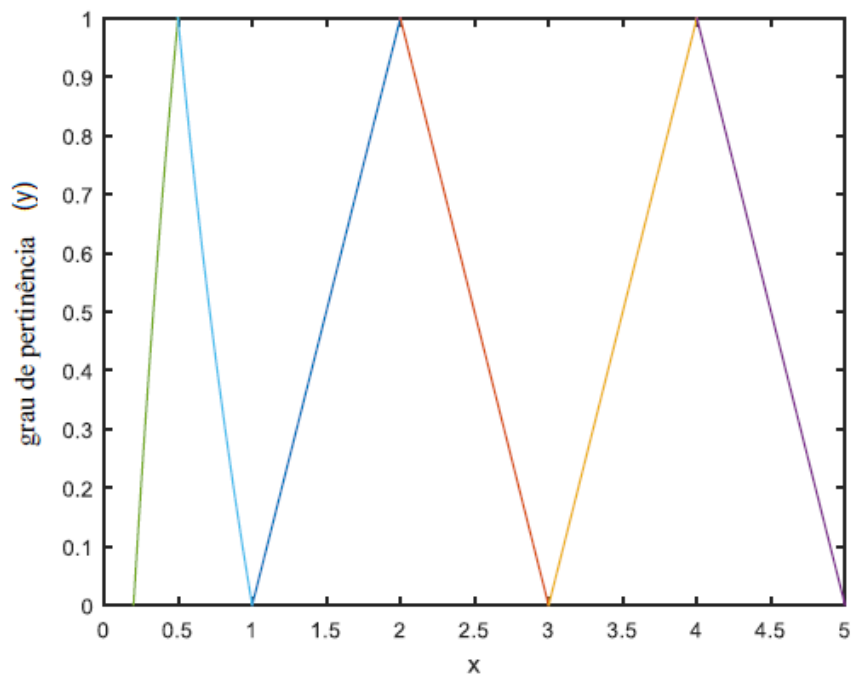
$$x \in [2,3] \left. \vphantom{x \in [2,3]} \right\} \max \min_{\phi z \neq \emptyset} \left[(3-x), \left(\frac{1}{y-3} \right) \right]$$

A partir das combinações acima podemos escrever a função de pertinência para a divisão do número fuzzy A pelo número fuzzy B :

$$\varphi_{(A/B)}(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq \frac{1}{5} \text{ e } x > 1 \\ \frac{5x-1}{x+1} & \text{se } \frac{1}{5} < x \leq \frac{1}{2} \\ -\frac{3x-3}{x+1} & \text{se } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

Feito isso o gráfico que representa o número fuzzy A/B pode ser gerado e representado na Figura 16:

Figura 16: Número Fuzzy A/B pelo Princípio de Extensão.



Fonte: Adaptado de Barros & Bassanezi (2015).

2.4.3 Operações Aritméticas Básicas para α – nível

Podemos perceber que o processo anteriormente demonstrado é bastante trabalhoso e ainda pode induzir a erros que poderiam ser evitados com um método mais prático.

Esse método prático para obter os resultados de cada operação entre números fuzzy pode ser introduzido a partir da combinação de dois teoremas que dão base e fundamentam as operações aritméticas a partir dos α -níveis de um número fuzzy .

Teorema 3. Sejam $f : X \rightarrow Z$ uma função contínua e A um subconjunto fuzzy de X , com α -níveis compactos e não vazios. Então para todo $\alpha \in [0,1]$ vale: $[\hat{f}(A)]^\alpha = f([A]^\alpha)$ (WASQUES, 2015).

Teorema 4. Os α -níveis do conjunto fuzzy $A \otimes B$ são dados por $[A \otimes B]^\alpha = [A]^\alpha \otimes [B]^\alpha$ para todo $\alpha \in [0,1]$, sendo \otimes qualquer uma das operações aritméticas básicas mencionadas anteriormente.

As demonstrações estão disponíveis em Nguyen (1997), Pedrycz e Gomide (1998) e em Fuller (1990).

Mostraremos a seguir tais métodos práticos na forma de propriedades e, a partir delas, a resolução de um exemplo prático com números fuzzy triangulares por serem números de fácil entendimento e visualização:

Proposição 1. Se A e B são dois números fuzzy com α -níveis dados, respectivamente

$$[A]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] \text{ e } [B]^\alpha = [b_1^\alpha, b_2^\alpha].$$

Então podemos enunciar como válidas as seguintes propriedades:

(a) A soma entre A e B é o número fuzzy $A+B$ cujos α -níveis são:

$$[A+B]^\alpha = [A]^\alpha + [B]^\alpha = [a_1^\alpha + b_1^\alpha, a_2^\alpha + b_2^\alpha].$$

(b) A diferença entre A e B é o número fuzzy $A-B$ cujos α -níveis são:

$$[A-B]^\alpha = [A]^\alpha - [B]^\alpha = [a_1^\alpha - b_2^\alpha, a_2^\alpha - b_1^\alpha]$$

(c) O produto entre A e B é o número fuzzy $A \cdot B$ cujos α -níveis são:

$$[A \cdot B]^\alpha = [A]^\alpha \cdot [B]^\alpha = [\min P, \max P], \text{ onde } P = \{a_1^\alpha b_1^\alpha, a_1^\alpha b_2^\alpha, a_2^\alpha b_1^\alpha, a_2^\alpha b_2^\alpha\}.$$

(d) O quociente entre A e B , se $0 \notin \text{supp } B$, é o número fuzzy A/B cujos α -níveis são:

$$\left[\frac{A}{B} \right]^\alpha = \frac{[A]^\alpha}{[B]^\alpha} = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] \cdot \left[\frac{1}{b_2^\alpha}, \frac{1}{b_1^\alpha} \right].$$

Obs.: note que a divisão recai numa multiplicação e, portanto, as mesmas regras da multiplicação entre números fuzzy se aplicam.

Exemplo 13. Considere o exemplo 11 da seção anterior, ou seja, respectivamente, *aproximadamente 2* e *aproximadamente 4*, dados por:

$$A = (1; 2; 3) \text{ e } B = (3; 4; 5).$$

A seguir temos os resultados para cada uma das operações aritméticas básicas entre números fuzzy .

Inicialmente devemos escrever os números A e B de acordo com a forma simplificada:

$$[A]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha]$$

$$[a_1^\alpha, a_2^\alpha] = [(u-a)\alpha + a, (u-b)\alpha + b], \text{ para todo } \alpha \in [0, 1]. \text{ Assim, temos:}$$

$$A = (1; 2; 3)$$

$$[A]^\alpha = [(2-1)\alpha + 1, (2-3)\alpha + 3]$$

$$[A]^\alpha = [\alpha + 1, (-1)\alpha + 3]$$

$$[A]^\alpha = [1 + \alpha, 3 - \alpha]$$

$$B = (3; 4; 5)$$

$$[B]^\alpha = [(4-3)\alpha + 3, (4-5)\alpha + 5]$$

$$[B]^\alpha = [(\alpha + 3), (-1)\alpha + 5]$$

$$[B]^\alpha = [3 + \alpha, 5 - \alpha]$$

A soma entre A e B é o número fuzzy $A+B$ cujos α -níveis são:

$$[A+B]^\alpha = [A]^\alpha + [B]^\alpha = [a_1^\alpha + b_1^\alpha, a_2^\alpha + b_2^\alpha]$$

$$[A+B]^\alpha = [A]^\alpha + [B]^\alpha$$

$$= [(1+\alpha) + (3+\alpha), (3-\alpha) + (5-\alpha)]$$

$$[A+B]^\alpha = [4+2\alpha, 8-2\alpha]$$

Para $\alpha = 0$, temos:

$$[A+B]^\alpha = [4+2\alpha, 8-2\alpha]$$

$$[A+B]^\alpha = [4+2.0, 8-2.0]$$

$$[A+B]^\alpha = [4, 8]$$

Para $\alpha = 1$, temos:

$$[A+B]^\alpha = [4+2\alpha, 8-2\alpha]$$

$$[A+B]^\alpha = [4+2.1, 8-2.1]$$

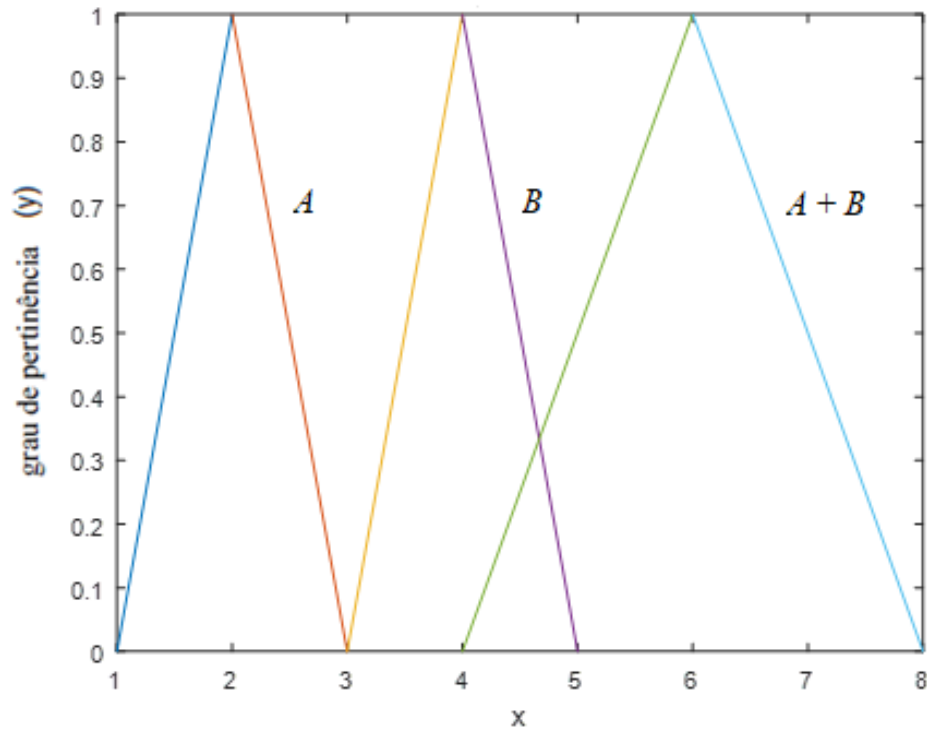
$$[A+B]^\alpha = [6, 6] \rightarrow [A+B]^\alpha = [6]$$

Assim,

$$A+B = (4; 6; 8)$$

Representado na figura 17:

Figura 17: Número Fuzzy A , Número Fuzzy B , $A+B$.



Fonte: Adaptado de Barros & Bassanezi (2015).

A diferença entre A e B é o número fuzzy $A - B$ cujos α -níveis são:

$$\begin{aligned} [A - B]^\alpha &= [A]^\alpha - [B]^\alpha \\ &= [a_1^\alpha, a_2^\alpha] - [b_2^\alpha, b_1^\alpha] \end{aligned}$$

$$[A - B]^\alpha = [a_1^\alpha - b_2^\alpha, a_2^\alpha - b_1^\alpha]$$

$$\begin{aligned} [A - B]^\alpha &= [(1 + \alpha), (3 - \alpha)] - [(3 + \alpha), (5 - \alpha)] \\ &= [(1 + \alpha) - (5 - \alpha), (3 - \alpha) - (3 + \alpha)] \end{aligned}$$

$$[A - B]^\alpha = [-4 + 2\alpha, -2\alpha]$$

Para $\alpha = 0$, temos:

$$[A - B]^\alpha = [-4 + 2\alpha, -2\alpha]$$

$$[A - B]^0 = [-4 + 2 \cdot 0, -2 \cdot 0]$$

$$[A - B]^0 = [-4, 0]$$

Para $\alpha = 1$, temos:

$$[A - B]^\alpha = [-4 + 2\alpha, -2\alpha]$$

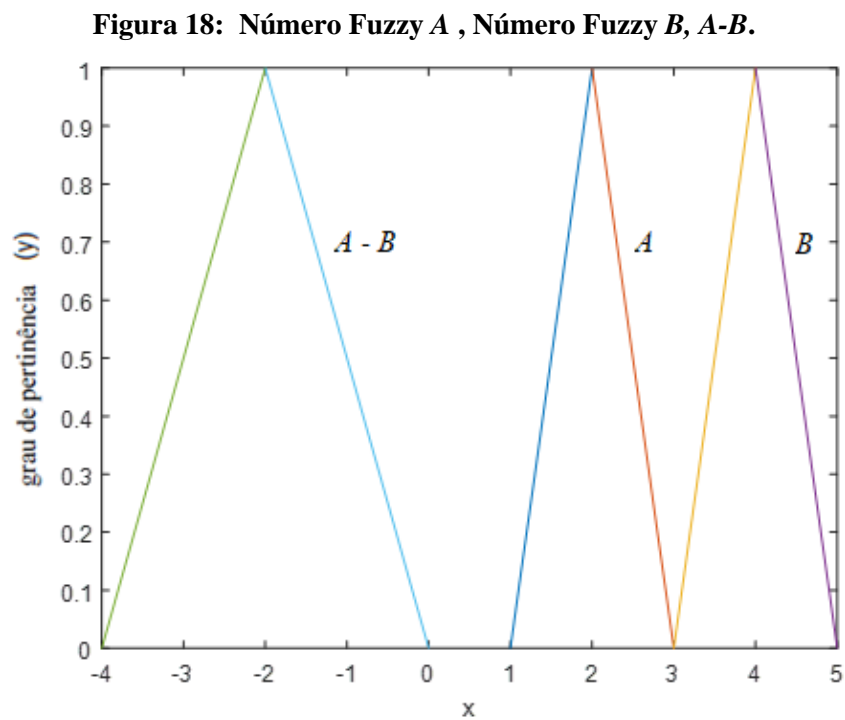
$$[A - B]^1 = [-4 + 2 \cdot 1, -2 \cdot 1]$$

$$[A - B]^1 = [(-2), (-2)] \rightarrow [A - B]^1 = [(-2)]$$

Assim,

$$A - B = (-4; -2; 0)$$

Representado na figura 18:



Fonte: Adaptado de Barros & Bassanezi (2015).

O produto entre A e B é o número fuzzy $A \cdot B$ cujos α -níveis são:

$$[A \cdot B]^\alpha = [A]^\alpha \cdot [B]^\alpha$$

$$[A \cdot B]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] \cdot [b_1^\alpha, b_2^\alpha]$$

$$[a_1^\alpha, a_2^\alpha] \cdot [b_1^\alpha, b_2^\alpha] = [\min P, \max P]$$

Onde $P = \{a_1^\alpha b_1^\alpha, a_1^\alpha b_2^\alpha, a_2^\alpha b_1^\alpha, a_2^\alpha b_2^\alpha\}$.

$$\begin{aligned} [A \cdot B]^\alpha &= [(1+\alpha), (3-\alpha)] \cdot [(3+\alpha), (5-\alpha)] \\ P &= \{(1+\alpha) \cdot (3+\alpha), (1+\alpha) \cdot (5-\alpha), (3-\alpha) \cdot (3+\alpha), (3-\alpha) \cdot (5-\alpha)\} \\ P &= \{\alpha^2 + 4\alpha + 3, -\alpha^2 + 4\alpha + 5, -\alpha^2 + 9, \alpha^2 - 8\alpha + 15\} \end{aligned}$$

Para encontrar o mínimo de P e o máximo de P atribuímos à alfa valores do intervalo $[0,1]$, isto é, $\alpha \in [0,1]$:

Para $\alpha = 0$, temos:

$$\begin{aligned} [A \cdot B]^\alpha &= [\min P, \max P] \\ \text{com } P &= \{\alpha^2 + 4\alpha + 3, -\alpha^2 + 4\alpha + 5, -\alpha^2 + 9, \alpha^2 - 8\alpha + 15\} \\ \text{com } P &= \{0^2 + 4 \cdot 0 + 3, -0^2 + 4 \cdot 0 + 5, -0^2 + 9, 0^2 - 8 \cdot 0 + 15\} = \\ &= [3, 5, 9, 15] \end{aligned}$$

ou seja:

$$[A \cdot B]^0 = [3, 15]$$

Para $\alpha = 0,5$, temos:

$$\begin{aligned} [A \cdot B]^\alpha &= [\min P, \max P] \\ \text{com } P &= \{(0,5)^2 + 4 \cdot (0,5) + 3; -(0,5)^2 + 4 \cdot (0,5) + 5; -(0,5)^2 + 9; (0,5)^2 - 8 \cdot (0,5) + 15\} = \\ &= \{5, 25; 6, 75; 8, 75; 11, 25\} \\ \text{isto é,} \\ [A \cdot B]^{0,5} &= [5, 25; 11, 25] \end{aligned}$$

Para $\alpha = 1$, temos:

$$\begin{aligned} [A \cdot B]^\alpha &= [\min P, \max P] \\ \text{com } P &= \{(1)^2 + 4 \cdot 1 + 3, -(1)^2 + 4 \cdot 1 + 5, -(1)^2 + 9, 1^2 - 8 \cdot (1) + 15\} = \\ &= \{8, 8, 8, 8\} \end{aligned}$$

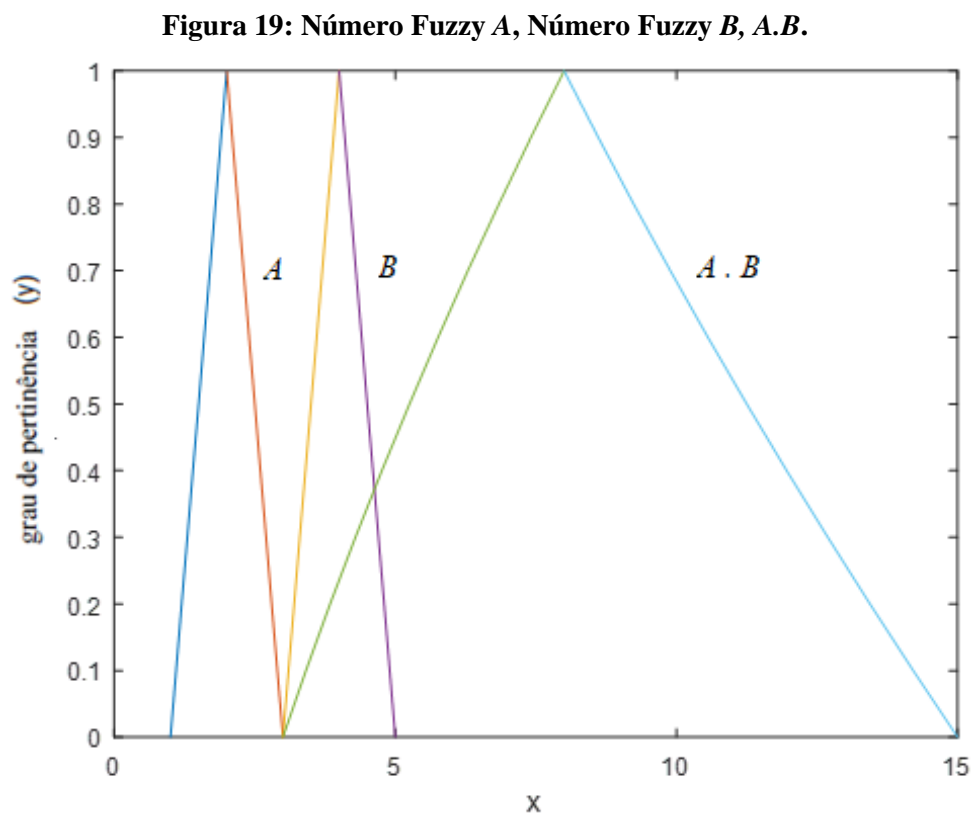
ou

$$[A \cdot B]^1 = [8, 8]$$

Assim,

$$A \cdot B = (3; 8; 15)$$

Representado na figura 19:



Fonte: Adaptado de Barros & Bassanezi (2015).

O quociente entre A e B, se $0 \notin \text{supp } B$, é o número fuzzy A/B cujos α -níveis são:

$$\left[\frac{A}{B}\right]^\alpha = \frac{[A]^\alpha}{[B]^\alpha} = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] \cdot \left[\frac{1}{b_2^\alpha}, \frac{1}{b_1^\alpha}\right]$$

$$\left[\frac{A}{B}\right]^\alpha = \frac{[A]^\alpha}{[B]^\alpha} = [(1+\alpha), (3-\alpha)] \cdot \left[\frac{1}{(5-\alpha)}, \frac{1}{(3+\alpha)}\right]$$

$$\left[\frac{A}{B}\right]^\alpha = \frac{[A]^\alpha}{[B]^\alpha} = [\min P, \max P].$$

$$\text{Onde } P = \left\{ \frac{(1+\alpha)}{(5-\alpha)}, \frac{(1+\alpha)}{(3+\alpha)}, \frac{(3-\alpha)}{(5-\alpha)}, \frac{(3-\alpha)}{(3+\alpha)} \right\}$$

Para encontrar o mínimo de P e o máximo de P atribuímos à α valores do intervalo $[0,1]$, isto é, $\alpha \in [0,1]$:

Para $\alpha = 0$, temos:

$$[A/B]^0 = [\min P, \max P]$$

$$\begin{aligned} \text{com } P &= \left\{ \frac{(1+0)}{(5-0)}, \frac{(1+0)}{(3+0)}, \frac{(3-0)}{(5-0)}, \frac{(3-0)}{(3+0)} \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{3}{3} \right\} = \{0, 2; 0, \bar{3}; 0, 6; 1\}, \text{ logo} \end{aligned}$$

$$[A/B]^0 = [0, 2; 1]$$

Para $\alpha = 0,5$, temos:

$$[A/B]^{0,5} = [\min P, \max P]$$

$$\begin{aligned} \text{com } P &= \left\{ \frac{(1+0,5)}{(5-0,5)}, \frac{(1+0,5)}{(3+0,5)}, \frac{(3-0,5)}{(5-0,5)}, \frac{(3-0,5)}{(3+0,5)} \right\} \\ &= \left\{ \frac{1,5}{4,5}, \frac{1,5}{3,5}, \frac{2,5}{4,5}, \frac{2,5}{3,5} \right\} = \{0, 3; 0, 4; 0, 5; 0, 7\} \end{aligned}$$

ou,

$$[A/B]^{0,5} = [0, 3; 0, 7]$$

Para $\alpha = 1$, temos:

$$[A/B]^I = [\min P, \max P]$$

$$\begin{aligned} \text{com } P &= \left\{ \frac{(1+1)}{(5-1)}, \frac{(1+1)}{(3+1)}, \frac{(3-1)}{(5-1)}, \frac{(3-1)}{(3+1)} \right\} \\ &= \left\{ \frac{2}{4}, \frac{2}{4}, \frac{2}{4}, \frac{2}{4} \right\} = \{0,5\} \end{aligned}$$

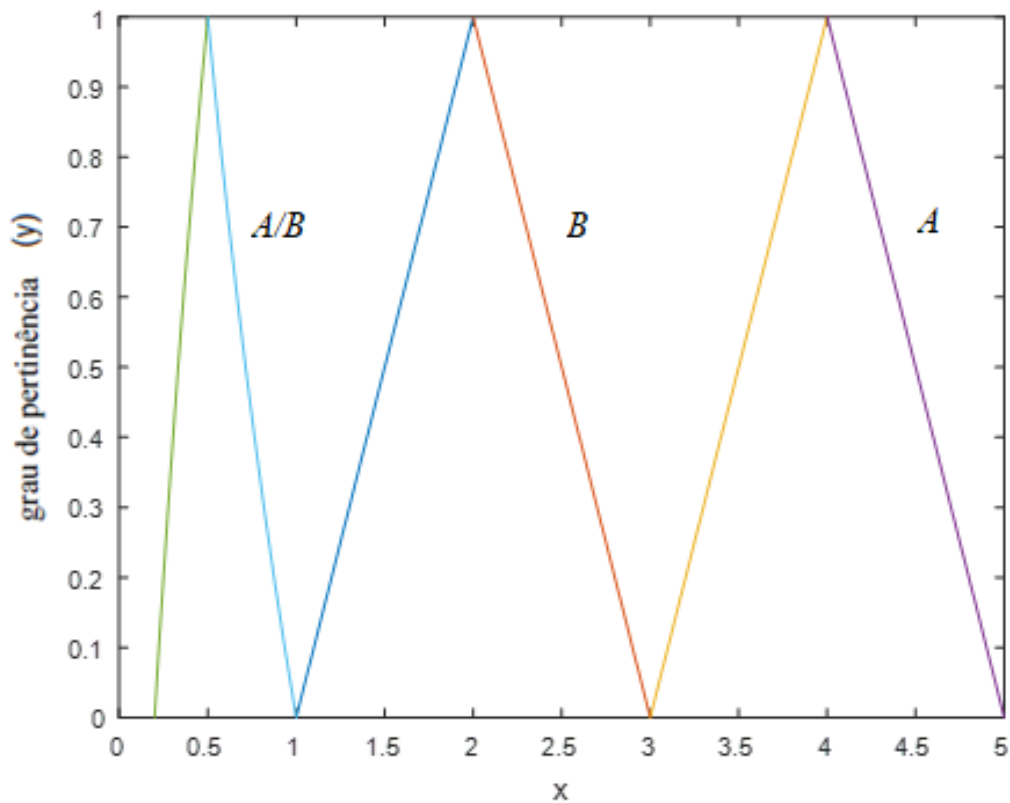
, logo,

$$[A/B]^I = [0,5; 0,5]$$

Assim,

$$A/B = (0,2; 0,5; 1)$$

Figura 20: Número Fuzzy A, Número B, A/B.



Fonte: Adaptado de Barros & Bassanessi (2015).

No capítulo seguinte, vamos comentar sobre a possibilidade de incluir, no Ensino Médio, as Operações Intervalares como uma preparação desses alunos para trabalhar com a

Lógica Fuzzy já na graduação, como provou ser possível a pesquisa de Profa Dra Ana Catarina Spina-Cool (SPINA, 2010).

Nesse sentido apresentamos nossa argumentação pautados nos novos desafios da educação e os pressupostos que estão decidindo aquilo que deve ser ensinado e para que, baseado em documentos oficiais como o Currículo Oficial do Estado de São Paulo – Matemática e suas Tecnologias(2011), Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio(2018) e pesquisas recentes.

CAPÍTULO 3. OPERAÇÕES INTERVALARES NO ENSINO MÉDIO

Atualmente o ensino de Matemática na Educação Básica é baseado na Base Nacional Comum Curricular, a BNCC, homologada em 2017.

A BNCC (2017) propõe ao Ensino Fundamental – Anos Iniciais e Finais – cinco unidades temáticas (Números, Geometria, Álgebra, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística), as quais organizam os objetos de conhecimento (conteúdos, conceitos e processos) relacionados às suas respectivas habilidades (aprendizagens essenciais que devem ser asseguradas aos alunos nos diferentes contextos escolares).

Considerando as competências fundamentais do letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e a articulação com as competências gerais da BNCC, a redação final integra os anos iniciais e finais do Ensino Fundamental e apresenta oito competências específicas para o componente curricular de Matemática, sendo elas:

- “Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.
- Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
- Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
- Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.
- Utilizar processos e ferramentas Matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
- Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).
- Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e

solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.

- Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles”. (MEC, 2017, p. 265).

Os principais pontos da BNCC de Matemática são:

- “A alfabetização está prevista para ocorrer até o final do 2º ano do Ensino Fundamental, incluindo a alfabetização Matemática.
- Enquanto os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática organizavam o currículo do Ensino Fundamental em blocos de conteúdos (Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação), a BNCC estrutura os objetos de conhecimento em unidades temáticas: Números, Geometria, Álgebra, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística.
- trabalho com o objeto de conhecimento “porcentagens” no contexto da educação financeira, aparece de maneira mais explícita. Com exceção do 8º ano, no 5º, 6º, 7º e 9º ano está contido na unidade temática “Números”, com o objetivo de favorecer o estudo de conceitos básicos de economia e finanças, visando à educação financeira dos alunos.
- Na BNCC, o trabalho com a Álgebra assume uma dimensão ampliada e se torna uma unidade temática. Dessa forma, está presente do 1º ao 9º ano do Ensino Fundamental, com o propósito de desenvolver o pensamento algébrico, que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas Matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos.
- Outra novidade proposta na BNCC é o trabalho com a incerteza e o tratamento de dados estudados na unidade temática “Probabilidade e Estatística”, contemplados nos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental.
- Ao defender a importância dos recursos didáticos para a apreensão de significados dos objetos matemáticos, a nova versão da BNCC utiliza o termo “software de geometria dinâmica”. Entende-se por softwares de geometria dinâmica aqueles capazes de construir e manipular objetos geométricos na tela do computador, com possibilidade de “arrastar” a figura construída utilizando o mouse”. (MEC, 2017).

Neste movimento de busca da essência do conhecimento, a Matemática tem sido como instrumento - uma linguagem - para esclarecer/analisar as teorizações. De todo modo, a busca da verdade ou certeza tem levado, inúmeras vezes, ao desenvolvimento de evidências opostas, proporcionando estudos (matemáticos) de distintos tipos de incertezas. A incerteza, proveniente da aleatoriedade de eventos, ocupa um lugar de destaque no elenco da Matemática com ênfase na área de estudos probabilísticos.

A Teoria da Probabilidade tem como foco central a explicação da possível ocorrência de cada evento, baseada numa distribuição de ocorrências passadas. Nesta perspectiva,

quando modelamos certas situações da realidade, as variáveis linguísticas estão, muitas vezes, carregadas de subjetividade - não dispondo de distribuições estatísticas ou aleatórias. Nestes casos, as qualificações de tais variáveis são distinguidas por meio de graduações ou de meias-verdades.

É neste contexto de incerteza que a Lógica Fuzzy tem contribuído com sua linguagem conjuntista, na qual cada elemento é provido de um grau de pertinência ao conjunto.

A Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (UNESCO), definiu em 2016, os desafios que o ensino de Matemática na Educação Básica traçando um panorama esperado para o ensino dessa disciplina na sociedade contemporânea, veja alguns recortes dessa obra:

“Assegurar o numeramento de todos os jovens não é a única meta da educação Matemática na educação básica, mas esse é o objetivo fundamental e prioritário. Assegurar esse numeramento significa permitir o desenvolvimento de conhecimentos e das competências Matemáticas necessárias para a integração e a participação ativa na sociedade, assim como para a adaptação às mudanças previsíveis. Significa também oferecer oportunidades de acesso a um mundo mais abrangente do que aquele em que os alunos têm sido educados, formar indivíduos capazes de encontrar seu lugar no mundo atual, de se realizar e ajudar na solução dos grandes desafios que a humanidade deve enfrentar nos dias atuais: saúde, ambiente, energia e desenvolvimento. Essas metas, longe de serem alcançadas nos dias atuais, constituem um primeiro desafio para a educação Matemática básica.” (UNESCO, 2016, p 13).

E ainda:

“Nos dias atuais, o letramento matemático deve, em especial, permitir que os indivíduos compreendam, analisem e critiquem os múltiplos dados cuja apresentação utiliza sistemas de representação diversos e complexos, numéricos, simbólicos e gráficos, e outras interações. Esse letramento deve permitir que eles realizem escolhas racionais, fundamentadas na compreensão, na modelagem, na predição e no controle de seus efeitos, diante de situações inéditas e muitas vezes cheias de incertezas. Portanto, é essencial, principalmente, que todos os indivíduos sejam, no curso de sua educação básica em Matemática, colocados progressivamente em contato com a complexidade do mundo numérico (digital) atual, que aprendam a se referir a esse mundo e a agir, familiarizando-se com a diversidade dos modos de representação que são utilizados nele”. (UNESCO, 2016, p. 15).

A BNCC (MEC, 2017) estabelece algumas competências específicas em Matemática que corroboram a importância da modelagem em problemas reais que envolvem incertezas, dentre elas temos as que vemos a seguir:

“Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.

Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.

Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.

Utilizar processos e ferramentas Matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados”. (MEC, 2017).

De acordo com Spina (2010), é insuficiente apenas dominar os saberes básicos referentes aos números e às grandezas, que constituíram a condição Matemática para a integração social, por um longo tempo. As novas culturas em que as sociedades atuais estão cada vez mais imersas como, por exemplo, as incertezas crescentes que marcam o mundo em que vivemos e as responsabilidades que os indivíduos devem assumir, como cidadãos ou como pessoas diante de uma sociedade que se renova, carecem de uma revisão e no aprimoramento na ideia do letramento matemático de modo a fornecer a essa sociedade ferramentas mais eficazes, mais capazes de modelar os fenômenos.

Spina (2013) corrobora que a Matemática Clássica tem se mostrado um instrumento ou uma linguagem que torna capaz a análise de certas verdades ou certezas, e muitas vezes essa busca trouxe à tona o oposto, ou seja, nos deparamos com incertezas ou meias verdades, essa análise tem levado ao desenvolvimento de estudos dos vários tipos de incertezas.

A teoria da Probabilidade provou ser muito prospera para tratar das incertezas proveniente da aleatoriedade dos eventos, e ocupa um lugar de destaque que remonta séculos, tendo como foco central a possível ocorrência de eventos, tendo como base a ocorrência ou a distribuição de ocorrências passadas. No entanto certas situações da realidade, variáveis linguísticas que por si só contém uma grande carga de incerteza e subjetividade não podem ser analisadas desse modo uma vez que não existe distribuição estatística anteriores.

Para casos como esses que assolam o nosso cotidiano, temos que assumir meias verdades ou graduações dela, o que a Lógica Fuzzy é capaz de modelar com sua linguagem conjuntista, onde cada elemento carrega um determinado grau de pertencimento ao conjunto.

3.1 Modelagem Matemática

Bassanezi (1990, 1994); Biembengut (1990, 1999); Borba, Meneghetti & Hermini (1999) e outros tantos autores descreveram a Matemática como um meio para a modelagem e seu uso pode ser um método alternativo para o ensino de Matemática. Dessa forma, reconhecer uma problemática, considerar as variáveis e produzir uma relação de pertinência entre elas escolhendo a melhor teoria para tratá-la, bem como produzir conhecimentos não explícitos a respeito de tal problemática prevendo efeitos e analisando as causas, são aspectos esperados no processo de modelagem.

A Modelagem Matemática envolve de forma clara a obtenção de um modelo matemático que represente uma situação real com suas variáveis mais relevantes.

Para Bassanezi (1994), “é quase sempre um sistema de equações ou inequações algébricas, diferenciais, integrais, etc., obtido através de relações estabelecidas entre as variáveis consideradas essenciais ao fenômeno sobre análise”.

A partir dessa ótica, incontáveis situações de complexidade variada do mundo real podem traduzir problemas ou situações que exijam decisões mais assertivas e soluções definitivas ou não, englobando assuntos nos quais os modelos podem estar diretamente ligados a territórios mais particulares da Matemática.

Existem aquelas situações ou fatos que podem envolver a Matemática clássica e elementar, que tem servido tão bem a esse propósito desde sempre, exigindo do modelador conhecimentos básicos. Podemos classificá-los como fatos matemáticos mais simplórios como a evolução de uma dívida contraída a juros simples, a área ou perímetro de uma praça quadrangular, etc.

Outras situações mais complexas, porém, podem envolver áreas mais elaboradas ou teorias menos acessíveis da Matemática, como já foi dito anteriormente que apenas poderão ser determinadas com uma análise mais profunda da situação, das variáveis e do comportamento dessas variáveis na dinâmica do fenômeno ou situação que se deseja modelar.

Esse conjunto de símbolos e relações Matemáticas que busca traduzir de alguma forma lógica um fenômeno ou uma situação real é o que chamamos de “modelo matemático”.

A elaboração de um modelo matemático depende do conhecimento matemático que se tem. Se o conhecimento matemático se restringe a uma Matemática elementar, como aritmética ou medidas, o modelo pode ficar limitado a esses conceitos. Tanto maior o

conhecimento matemático, maiores serão as possibilidades de resolver/analisar questões que exijam uma Matemática mais sofisticada e menos convencional.

Generalizando podemos pensar na modelagem como a maneira para que realidade e Matemática possam interagir. Fica claro que essa interação que permite representar uma situação ‘real’ com ferramentas matemáticas (modelo matemático) pode envolver uma série de procedimentos e escolhas muitas das vezes subjetivas (BIEMBENGUT & HEIN, 2000).

Baseando em Spina (2010), Spina (2013), Sant’Anna (2017) e documentos oficiais tais como BNCC (2017) e com o intuito de buscar uma resposta para a possibilidade ou não de se trabalhar, já no Ensino Médio, os conteúdos básicos para operações fuzzy com uma visão mais inicial, porém de extrema importância para o conhecimento e aprofundamento desse trabalho nas séries posteriores. E ainda, a possível utilização da Matemática não clássica como ampliação do repertório matemático para modelar e compreender situações de cunho social, tecnológico e do mundo do trabalho que envolva incerteza ou que não é bem delimitadas. A presente pesquisa vem ao encontro das aspirações e interesses de alunos que estão em um momento crucial de escolha de suas carreiras acadêmicas e de compreensão do mundo em que vivem frente à tecnologia atual.

Esse trabalho deseja sondar aspectos que demonstrem fatos relevantes para introduzir elementos da Lógica fuzzy mesmo que indiretamente, isto é, estendendo os conteúdos com intervalos, já presente em alguns livros didáticos como um modo de representar subconjuntos reais e, nesse propósito são denominados ‘*Intervalos Reais*’ (IEZZI et al, 2013), outros autores além disso, trazem, também em seus livros didáticos, operações entre subconjuntos intitulado ‘*Operações com Intervalos*’ (DANTE, 2016) mas que geralmente não é trabalhado nas escolas de Ensino Básico por não representar uma fonte de muitas aplicações.

O tema – Operações Aritméticas Intervalares - que pode servir como uma preparação para a introdução da Teoria dos Conjuntos Fuzzy no Ensino Médio, nesse trabalho tem como objetivo resgatar esse conteúdo e nortear sua utilização para as operações com números fuzzy, uma vez que essas operações são regidas pelas regras das operações intervalares, objeto de estudo específicos da Teoria dos Conjuntos Fuzzy.

Vale ressaltar que a matemática intervalar se apresenta como solução para o controle de erros dos resultados das computações numéricas. E nada mais atual do que a computação científica digital.

O que notamos, e que gerou a motivação para esse trabalho, é o fato de todos os aspectos dessa teoria estar compartimentalizada no Ensino Superior, mais especificamente em cursos de pós-graduação (mestrado, doutorado) muito específicos e que a maioria dos alunos do Ensino Médio em geral não terá contato, relegando uma ferramenta tão importante seja por seu poder de modelagem de situações reais de difícil trato, seja por sua modalidade de Matemática não clássica, e nesse aspecto aproximar os alunos dessa teoria faz valer uma das competências específicas para o Ensino Médio proposta pela BNCC que devem ser alcançados na Matemática dos dias atuais.

Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, seja atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humana, das questões socioeconômicas ou tecnológicas (BNCC, 2018)

Com esse intuito um plano de aula foi elaborado para esse primeiro contato e foi aplicado em uma turma de 1º ano do Ensino Médio da Escola Estadual “Professor Eduardo Soares”, localizada na cidade de Alambari/SP.

Essa unidade escolar estadual de ensino funciona em três turnos: manhã, tarde e noite onde se desenvolve o Ensino Fundamental Anos Finais e Ensino Médio. No período da manhã (Ensino Médio) funcionam nove salas; das quais, seis turmas são do Ensino Médio, duas de cada série; no período noturno há três turmas de Ensino Médio; o período vespertino foi reservado para os anos finais do Ensino Fundamental, com exceção do nono ano, as três turmas no período da manhã. Além dessas informações, é importante apontar que a escola em questão se localiza em uma região predominantemente rural com população de aproximadamente 6.000 habitantes, e que a maioria dos alunos vive em locais onde acesso à internet não é fácil. A cidade não possui cinema, teatro, museu contando apenas com serviços básicos, onde o comércio é de caráter familiar.

As turmas da escola onde se deu a pesquisa contam com aproximadamente trinta alunos cada. Os alunos na sua maioria são disciplinados e assíduos nas aulas, porém mostram apatia e pouco interesse em sua aprendizagem e uma acentuada dificuldade ao tratar dos conteúdos matemáticos.

A pesquisa foi dividida em sete etapas e apesar do público alvo desse trabalho conhecer definições básicas da Teoria de Conjuntos Clássicos e conhecimento do tema intervalos reais, achou-se importante retomar esses conteúdos para que não fosse um obstáculo para a análise que se propôs, ou seja, a possibilidade de se trabalhar no Ensino

Médias operações intervalares, visando conhecer futuramente e de forma progressiva, como enriquecimento do repertório dos alunos para tratar ou modelar situações que não ficam bem representadas com os tópicos da Matemática Clássica.

O planejamento para essa pesquisa tinha tempo estimado de duas semanas num total de 10 aulas de 50 minutos cada, conforme o percurso a seguir.

3.2 Plano de Aula

LOCAL: Escola Estadual Professor Eduardo Soares – Alambari – SP

DATA: De 12/11/2018 a 23/11/2018

DISCIPLINA: Matemática

ANO/SÉRIE: 1ª Série do Ensino Médio – Turma B

TEMPO: 10 Aulas

3.2.1 Objetivo Geral

Recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

Ampliar o repertório dos alunos para que, a partir de novos conhecimentos de áreas ainda não exploradas da Matemática, possam utilizar novas ferramentas na investigação, compreensão e solução de problemas mais complexos ou de difícil trato.

Compreender as *Operações Intervalares* que podem ocorrer entre intervalos reais aproveitando o que já sabem sobre as relações entre intervalos, inserindo assim, uma ferramenta valiosa ao aprendizado de operações com números fuzzy .

3.2.2 Objetivos Específicos

Relembrar elementos de Teoria de Conjuntos e a organização de Conjuntos Numéricos conhecidos e trabalhados por eles em séries anteriores; ser capaz de entender o que é um

intervalo numérico de conjunto denso, como o Conjunto dos Números Reais, ser capaz de operar aritmeticamente com esses intervalos.

3.2.3 Conteúdos

- Números Naturais;
- Números Inteiros;
- Números Racionais;
- Números Irracionais.
- Reunião ou União entre conjuntos;
- Intersecção entre conjuntos;
- Diferença entre conjuntos.
- Intervalos Reais
- Operações Intervalares

3.2.4 Metodologia

Estudo dirigido de conteúdo específico para a pesquisa com apoio de giz, lousa e apresentação em Power Point.

Resolução de exercícios exemplares e explanação de conteúdos já estudados como base para novos conhecimentos.

3.2.5 Desenvolvimento dos Conteúdos

Para um melhor controle do desenvolvimento do conteúdo junto aos alunos, a pesquisa foi dividida em 7 etapas que eram realizadas durante os horários das aulas semanais no período citado, com assentimento da direção e coordenação pedagógica da unidade escolar em que foi realizada a pesquisa.

Todos os detalhes dessas etapas estão descritos nesse trabalho com apontamentos que consideramos de maior importância, incluindo dados quantitativos e qualitativos sobre a receptividade dos alunos e o grau de dificuldades encontrado por eles principalmente no que diz respeito às Operações Intervalares, objetivo maior dessa pesquisa.

3.2.6 Avaliação de Aprendizagem

Trabalho cooperativo, em duplas na resolução de alguns exercícios sobre o conteúdo já conhecido acrescido de uma parte específica da pesquisa sobre *Operações Intervalares*.

3.3 Resultados Específicos da Pesquisa e Detalhamento das Etapas do Trabalho Desenvolvido.

3.3.1 Etapa 1

A primeira etapa consistiu no estudo do tema de conjuntos numéricos e de suas características.

Nessa aula foi abordado a definição de conjunto de forma mais geral, os alunos mostraram certa familiaridade com o assunto porém tiveram dificuldade em enunciar tal definição em termos matemáticos. A metodologia utilizada foi o de exemplos do cotidiano com um afunilamento para termos matemático mais específicos. Após esse primeiro contato com o tema, tratamos também da definição de conjuntos numéricos já estudados por eles nos anos anteriores:

- Números Naturais;
- Números Inteiros;
- Números Racionais;
- Números Irracionais.

Fechando, assim o conjunto dos Números Reais. Todo esse conteúdo foi trabalhado com exemplos e definições do livro didático da coleção ‘Ciências e Aplicações’ utilizado pela escola com as devidas adaptações. Para esta etapa do trabalho foram utilizadas duas horas aulas.

3.3.2 Etapa 2

Foi à vez das *Operações entre conjuntos*, também do livro didático da coleção ‘Ciências e Aplicações’, em que abordamos:

- Reunião ou União entre conjuntos;
- Intersecção entre conjuntos;
- Diferença entre conjuntos.

Os temas enunciados acima foram visitados para que os alunos não tivessem dúvidas de que o objetivo do trabalho – Operações aritméticas intervalares – era algo novo e não uma aula de revisão. Para esse tema foram utilizadas outras duas aulas aproximadamente.

3.3.3 Etapa 3

Na aula seguinte aprendemos a representar subconjuntos do conjunto dos Números Reais com intervalos, foi utilizada apenas 1 aula e a metodologia utilizada foi sempre a de exemplos e exercícios.

Com isso encerramos as 5 aulas semanais para implementar a base necessária para a culminância dessa pesquisa.

3.3.4 Etapa 4

Utilizando como base teórica Barros e Bassanezi (2015), iniciamos o estudo propriamente dito das operações aritméticas intervalares, agora que os alunos já tinham uma base mais sólida sobre o tema.

Os alunos participaram de uma apresentação em Power Point das definições de operações intervalares, a apresentação continha um exercício resolvido com intervalos propostos por este pesquisador.

Foi necessário o tempo de duas horas aulas para que fosse possível resolver o exercício na lousa e sanar as dúvidas, que no caso, se concentraram nas operações de multiplicação e divisão.

3.3.5 Etapa 5

Após as aulas expositivas da etapa 4, iniciamos um exercício de experimentação com os alunos trabalhando em duplas ou trios e com ajuda do professor foram sanadas as dúvidas que ainda persistiram.

Para essa etapa, a de resolução do exercício, foi disponibilizado o tempo de uma hora aula e na aula seguinte se deu a correção desse exercício na lousa com alguma ênfase nas operações de multiplicação e divisão que se mostraram mais vulneráveis do ponto de vista dos pré-requisitos.

3.3.6 Etapa 6

Como avaliação e finalização da pesquisa marcamos uma atividade em dupla de caráter investigativo. Foi fornecido a cada dupla uma cópia com as definições para as operações aritméticas intervalares para eventual consulta, as duplas tinham o tempo de 2 horas-aula para realizar as atividades propostas.

Seguem as atividades aplicadas a seguir:

EE PROF. EDUARDO SOARES

EXERCÍCIO AVALIATIVO DE MATEMÁTICA – INTERVALOS

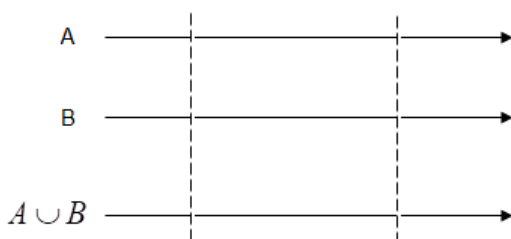
NOME.....nº.....1º__

NOME.....nº.....1º__

PARTE 1

1. Para cada item, determine $A \cup B$:

a) $A = [2, 5[$ e $B = [0, 3]$

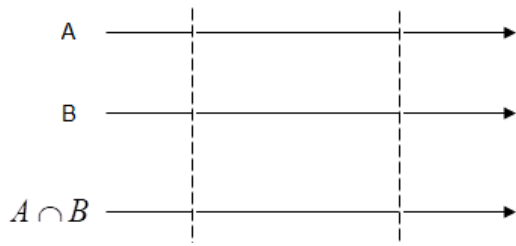


b) $A = [-1, 4]$ e $B = [0, 6[$

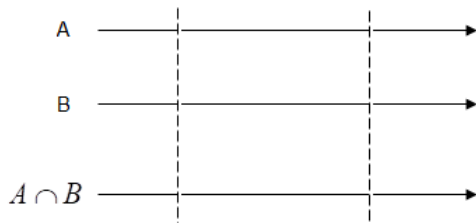


2. Para cada item, determine $A \cap B$.

a) $A = [-2, 2]$ e $B = [-3, 0]$

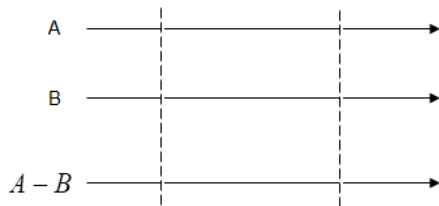


b) $A =]2, 6]$ e $B =]3, 8]$

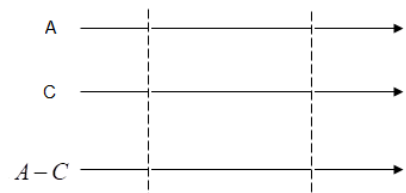


3. Dados os intervalos $A = [1, 4]$; $B =]0, 3]$ e $C =]2, 5[$, determine:

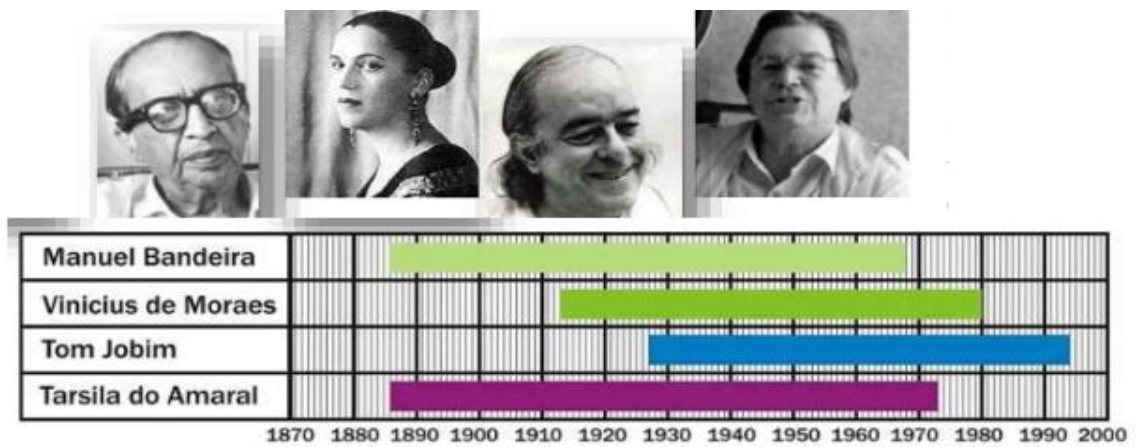
a) $A - B$



b) $A - C$



4. Observe no esquema abaixo a época em que viveram algumas personalidades brasileiras:



Com base nesse esquema responda:

- a) Manuel Bandeira e Tarsila do Amaral viveram em uma mesma época? Em caso afirmativo, determine o intervalo que representa esses anos, com ano inicial e ano final.
- b) Determine o intervalo que representa os anos vividos por Vinicius de Moraes antes do nascimento de Tom Jobim.
- c) Determine o intervalo que compreenda os anos vividos por todas essas personalidades.

PARTE 2

5. Obtenha os resultados das operações definidas acima para os intervalos $A = [-1, 2]$ e $B = [5, 6]$.

- (a) *A soma entre A e B*
- (b) *A diferença entre A e B*
- (c) *A multiplicação de A por um escalar $\lambda = 3$*
- (d) *A multiplicação de A por B*
- (e) *A divisão de A por B , se $0 \notin B$*

3.3.7 Etapa 7

Na etapa final os alunos receberam seus trabalhos já corrigidos e puderam comentar sobre as dificuldades encontradas e sobre o que acharam sobre a proposta de se trabalhar com esse conteúdo no Ensino Médio, contamos com o espaço de uma aula para debater sobre os aspectos positivos de se inserir ferramentas que diversifiquem o repertório dos alunos no tempo do ensino médio.

Essa aula finalizou a segunda semana planejada para a realização da pesquisa.

A reprodução do material utilizado na pesquisa segue abaixo de acordo com as Figuras 21 a 31:

Figura 21: Material utilizado na pesquisa.



Figura 22: Material utilizado na pesquisa.

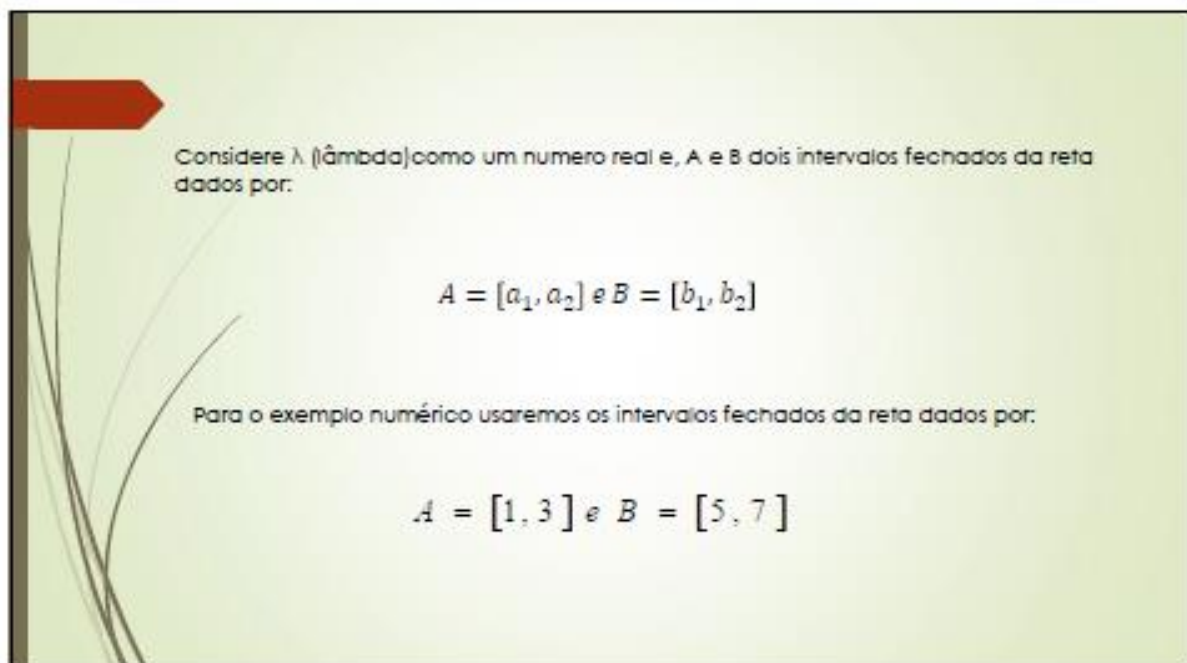
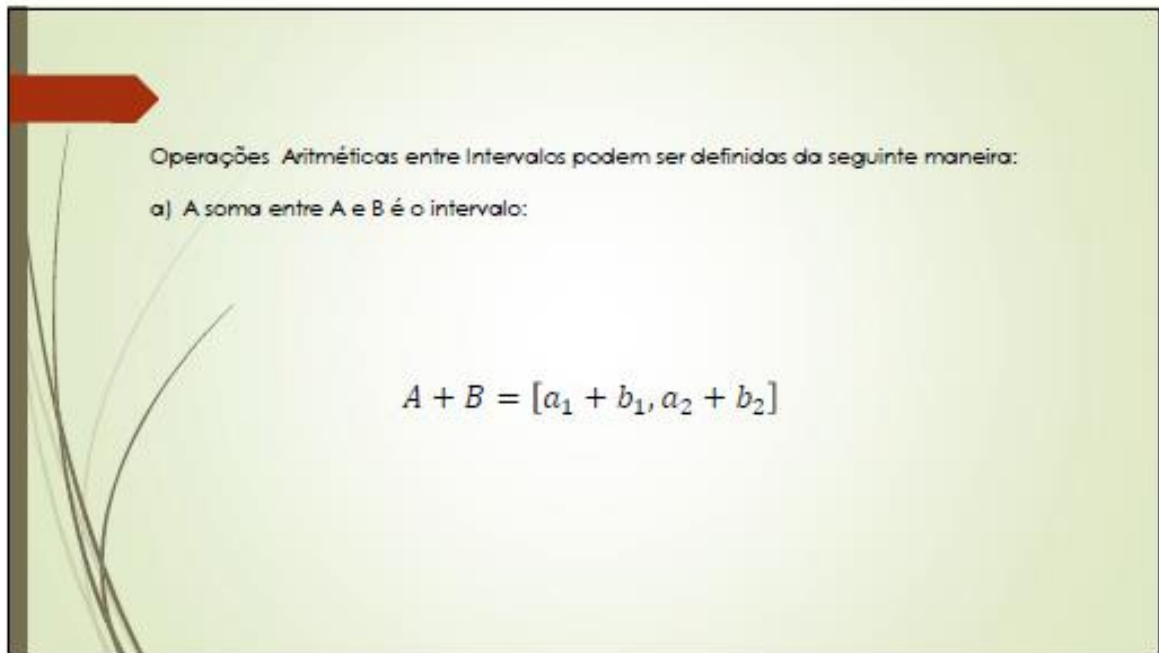


Figura 23: Material utilizado na pesquisa.



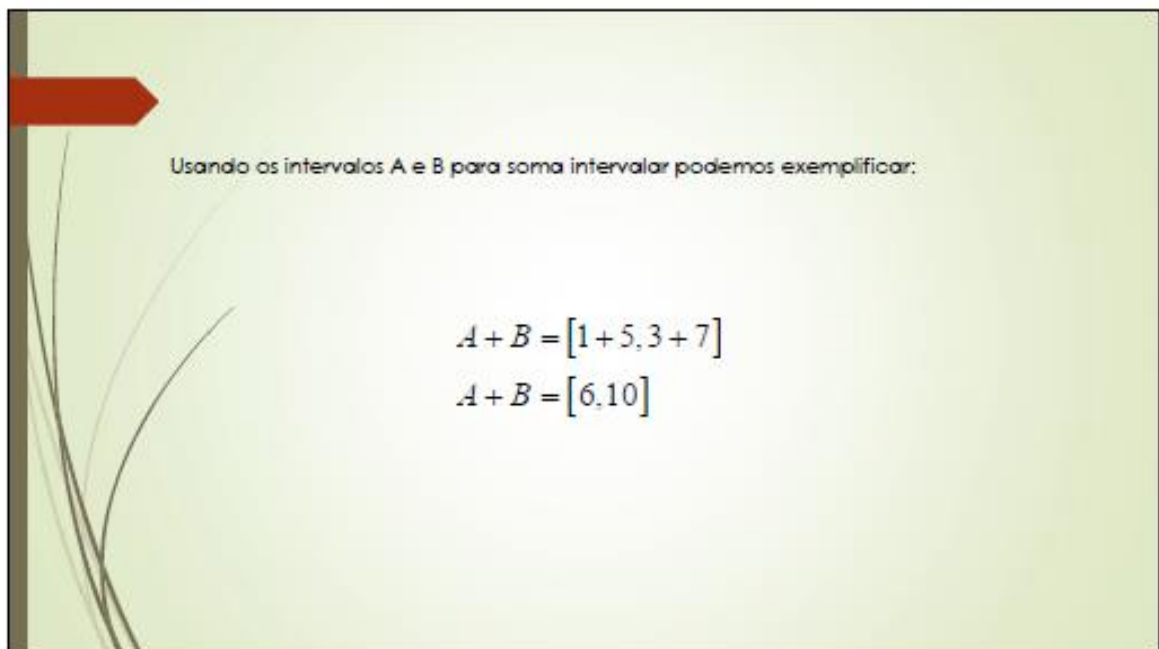
Operações Aritméticas entre Intervalos podem ser definidas da seguinte maneira:

a) A soma entre A e B é o intervalo:

$$A + B = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$$

The slide features a light green background with a decorative red arrow pointing right and thin, curved lines on the left side.

Figura 24: Material utilizado na pesquisa.

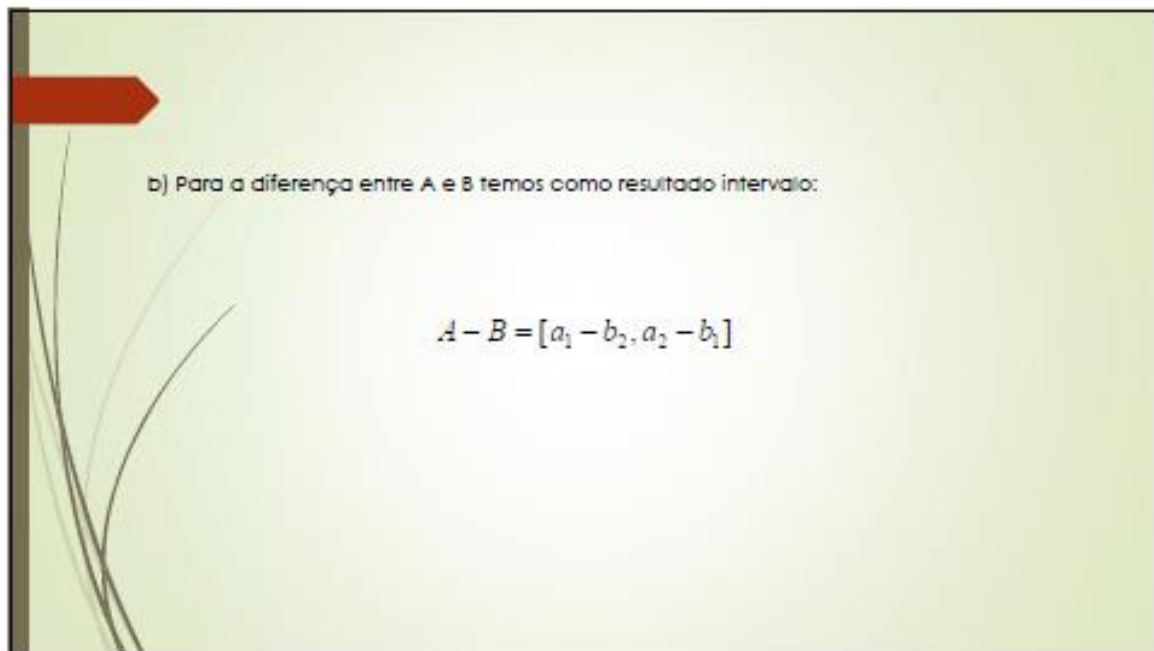


Usando os intervalos A e B para soma intervalar podemos exemplificar:

$$A + B = [1 + 5, 3 + 7]$$
$$A + B = [6, 10]$$

The slide features a light green background with a decorative red arrow pointing right and thin, curved lines on the left side.

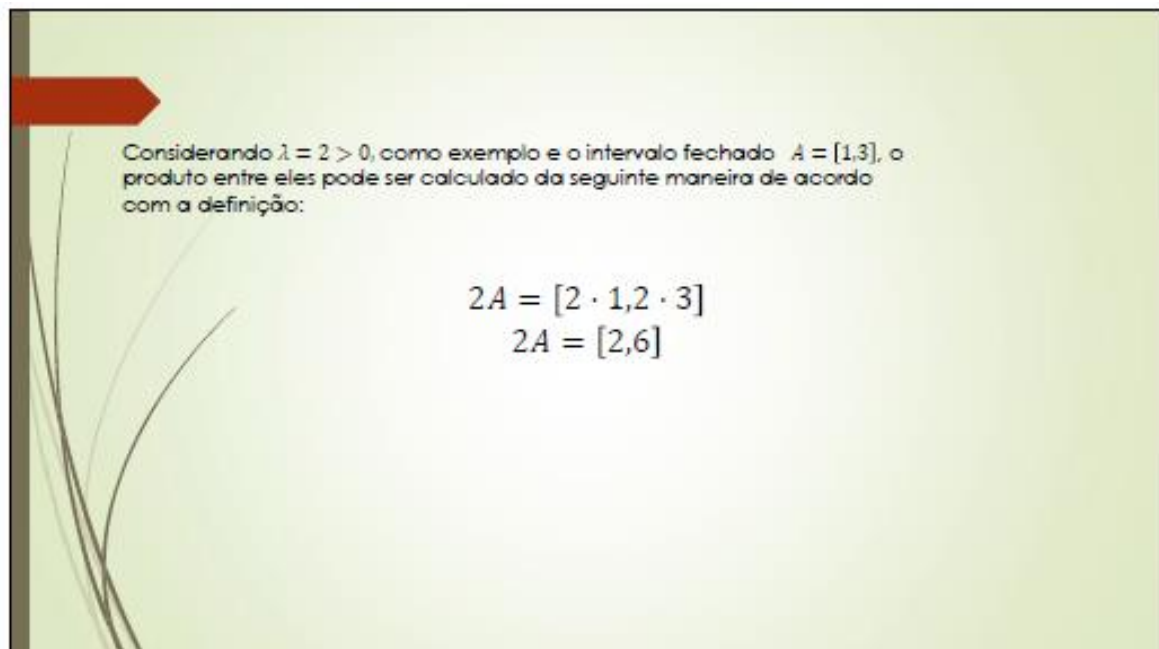
Figura 25: Material utilizado na pesquisa.



b) Para a diferença entre A e B temos como resultado intervalo:

$$A - B = [a_1 - b_2, a_2 - b_1]$$

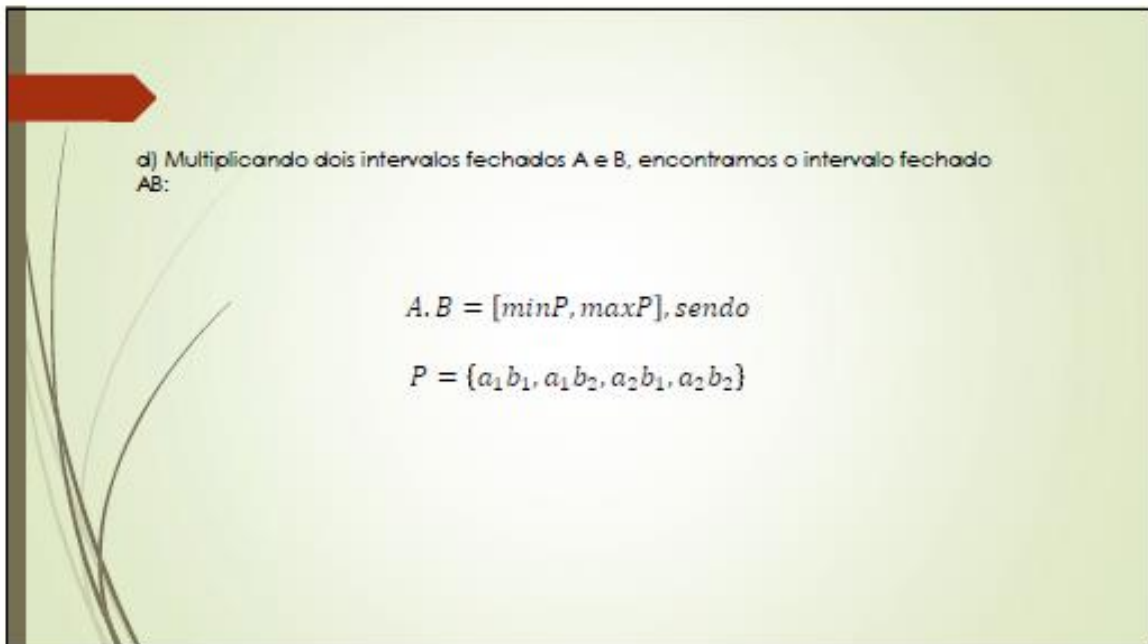
Figura 26: Material utilizado na pesquisa.



Considerando $\lambda = 2 > 0$, como exemplo e o intervalo fechado $A = [1,3]$, o produto entre eles pode ser calculado da seguinte maneira de acordo com a definição:

$$2A = [2 \cdot 1, 2 \cdot 3]$$
$$2A = [2,6]$$

Figura 27: Material utilizado na pesquisa.

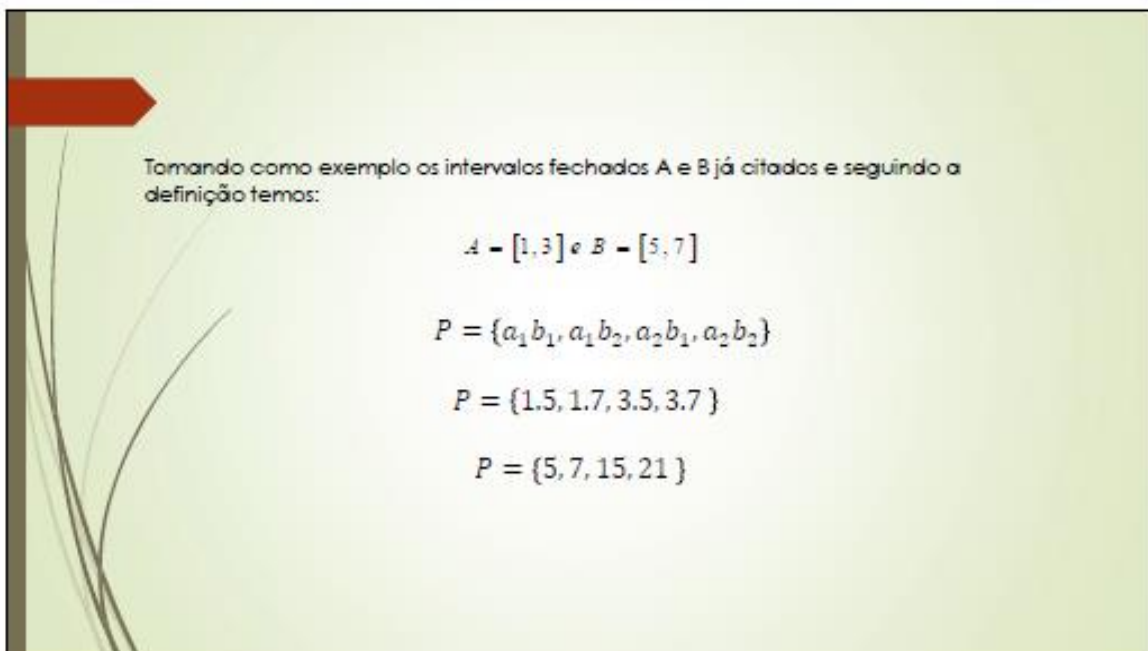


d) Multiplicando dois intervalos fechados A e B, encontramos o intervalo fechado AB:

$$A \cdot B = [\min P, \max P], \text{ sendo}$$

$$P = \{a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2\}$$

Figura 28: Material utilizado na pesquisa.



Tomando como exemplo os intervalos fechados A e B já citados e seguindo a definição temos:

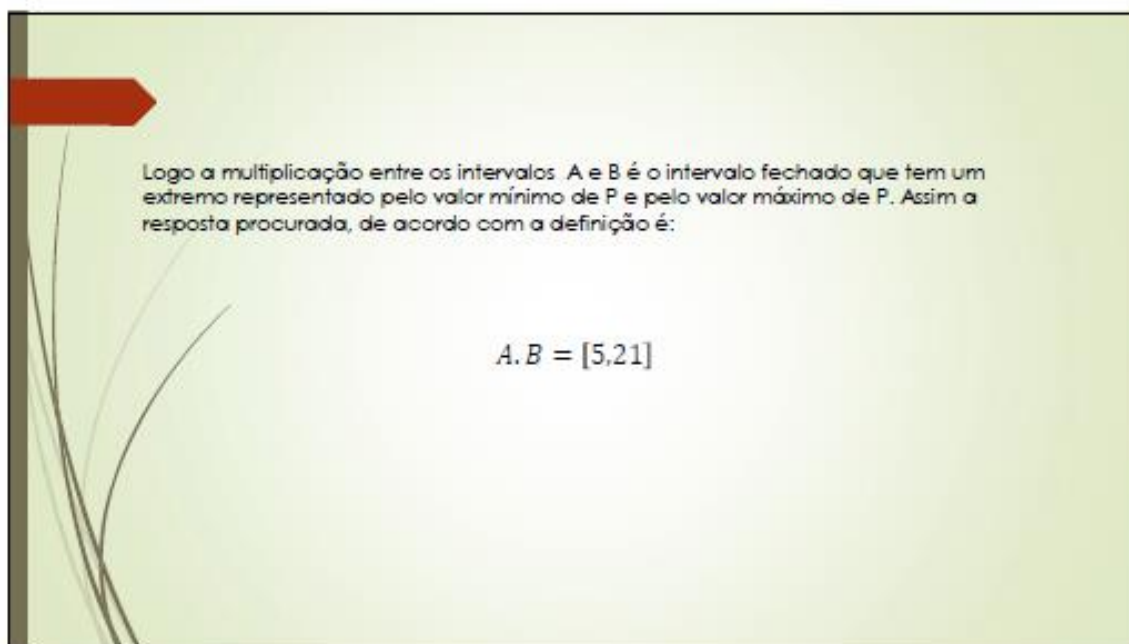
$$A = [1, 3] \text{ e } B = [5, 7]$$

$$P = \{a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2\}$$

$$P = \{1 \cdot 5, 1 \cdot 7, 3 \cdot 5, 3 \cdot 7\}$$

$$P = \{5, 7, 15, 21\}$$

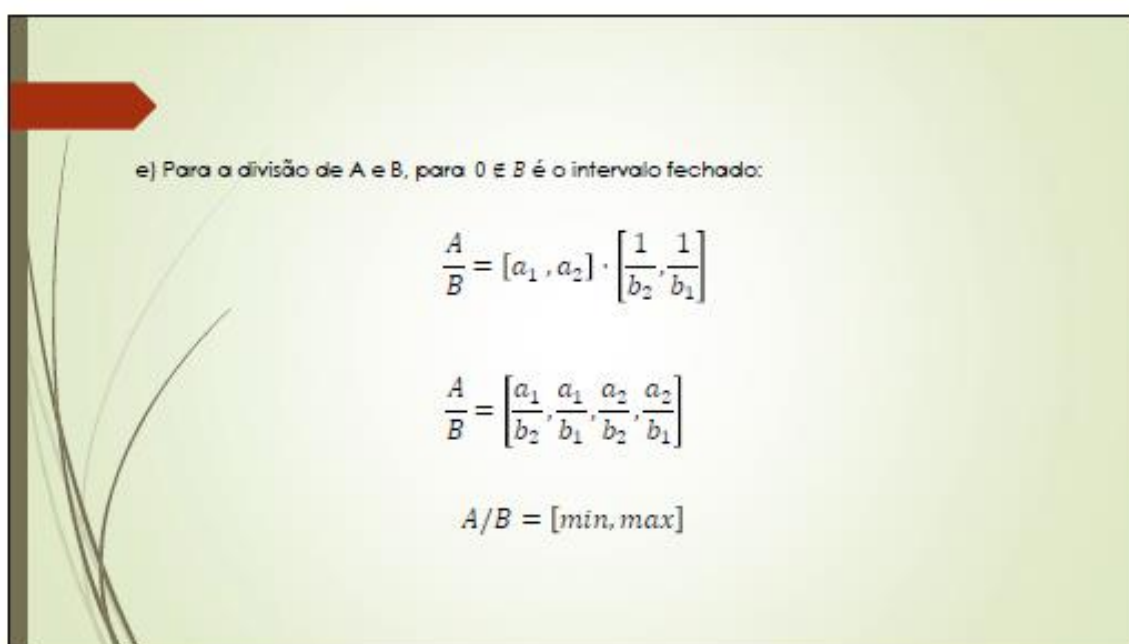
Figura 29: Material utilizado na pesquisa.



Logo a multiplicação entre os intervalos A e B é o intervalo fechado que tem um extremo representado pelo valor mínimo de P e pelo valor máximo de P . Assim a resposta procurada, de acordo com a definição é:

$$A \cdot B = [5, 21]$$

Figura 30: Material utilizado na pesquisa.



e) Para a divisão de A e B , para $0 \in B$ é o intervalo fechado:

$$\frac{A}{B} = [a_1, a_2] \cdot \left[\frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_1} \right]$$

$$\frac{A}{B} = \left[\frac{a_1}{b_2}, \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_2}{b_1} \right]$$

$$A/B = [\min, \max]$$

Figura 31: Material utilizado na pesquisa.

Fazendo todo o procedimento para os intervalos:

$$A = [1, 3] \text{ e } B = [5, 7]$$

$$\frac{A}{B} = [1, 3] \cdot \left[\frac{1}{7}, \frac{1}{5} \right]$$

$$\frac{A}{B} = \left[\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{3}{7}, \frac{3}{5} \right]$$

$$A/B = [\min, \max] \rightarrow A/B = \left[\frac{1}{7}, \frac{3}{5} \right]$$

3.3.8 Resultados

Nesta seção foi apresentado como realizou-se a dinâmica de sala de aula durante o experimento com os alunos, e quais minhas impressões desse processo baseado no diálogo, a fim de pontuar as relevâncias da aplicação.

Como já registrado aqui os alunos que participaram desse trabalho de pesquisa são alunos do ensino médio, na época, da 1ª Série do Ensino Médio em 2018.

Os alunos foram informados que fariam um trabalho em dupla, e que esse trabalho seria um instrumento de análise para compor uma pesquisa de mestrado, eles se mostraram interessados, alguns se espantaram ao saber que alguns professores ainda estudavam e fizeram algumas perguntas sobre os cursos de pós-graduação.

Iniciei as atividades com as revisões que, julguei necessárias, dos conteúdos já estudados por eles para garantir que não se tornassem um empecilho para a próxima etapa da pesquisa que seria trabalhar com a ‘Aritmética Intervalar’.

Desse modo revisamos os conteúdos descritos no plano de aula, claro que nem todos os alunos participaram efetivamente das aulas devido ao fato de esse trabalho não se converter

em notas, mas deixei claro que os participantes teriam uma pontuação positiva na média bimestral como incentivo de participação.

Durante as revisões, e conforme aconteciam as aulas, questionou-se se eles ainda se lembravam daqueles conteúdos, que eram conteúdos básicos, como por exemplo, os conjuntos numéricos, trabalhados ao longo dos anos finais do Ensino Fundamental. Alguns responderam que sim, mas não sabiam definir, com as próprias palavras, as características de cada um. Nesse sentido essa recapitulação foi muita válida para alguns indivíduos e para mim como educador.

Devido ao tempo e ao objetivo da pesquisa não abordou-se a aritmética básica, mas percebeu-se ao longo dos trabalhos que isso fez falta para vários alunos que não tinham domínio de algumas operações, como divisão e multiplicação e o trabalho com frações mostrou-se ainda um entrave para eles.

Passada essa etapa, foi apresentado a eles o tema ‘Intervalos Reais’, alguns lembravam-se desse conteúdo, pois foi trabalhado quando iniciou-se o estudo de Conjunto Numéricos e Funções que é oficialmente estudado na 1ª série do Ensino Médio regular, porém, ele não é um conteúdo obrigatório no ‘Currículo Oficial’ (SEE, 2011).

Utilizando essa nova maneira de representar subconjuntos partiu-se para as relações entre conjuntos, já conhecida pelos alunos em diagramas, mas não com intervalos, e apresentou-se algumas dificuldades na compreensão desse aditivo, mas como trabalhamos em duplas essa dificuldade foi logo vencida.

Houve, nesse trabalho, muitos momentos de interação entre os alunos, e a percepção de que eles fizeram mais perguntas ao professor e aos colegas nessa atividade do que fazem no dia a dia em sala de aula. Alguns não demonstraram interesse, mas como estavam trabalhando em duplas, fizeram para não decepcionar o colega e quase todos realizaram as atividades propostas.

Quando foram apresentados os slides sobre aritmética intervalar os alunos já tinham feito um percurso de aprendizagem que possibilitou a compreensão dos conteúdos, principalmente no caso da adição e da subtração, mas muito estranhamento na multiplicação e divisão. Quando foi perguntado sobre o que tornava aquelas situações mais difíceis para eles foi respondido que: “*a conta era muito grande*”; “*quando tem fração é mais difícil pra mim*”; e ainda “*não sei dividir direito*”.

Na multiplicação, e mais ainda na divisão intervalar, foi necessário a intervenção do professor mais vezes, devido ao fato de se tratar de números racionais, mais especificamente o cálculo com frações, ou números decimais para aquelas duplas que optaram por representar as frações na forma decimal. Porém, ainda assim os obstáculos foram vencidos, não notei nenhuma dificuldade extrema desses alunos que os impedissem de concluir o processo.

A todo momento questionou-se sobre a opinião deles em relação aos exercícios ou exemplos, e as respostas eram variadas:

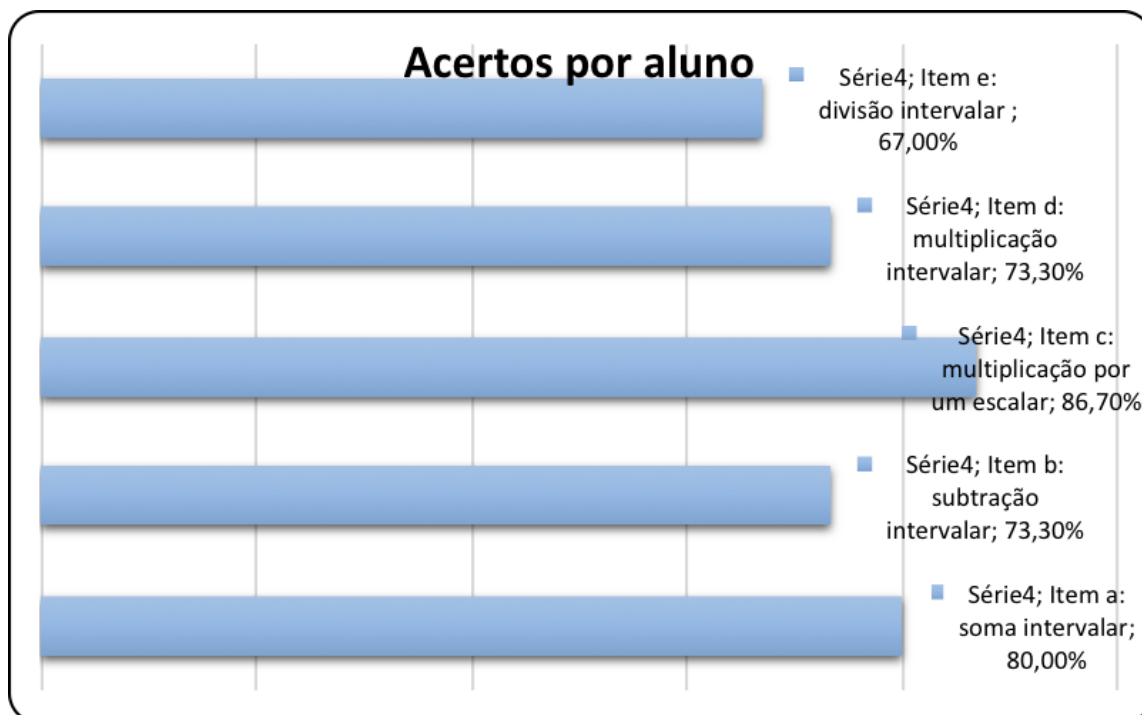
- *E tudo sempre difícil;*
- *Até aqui tá fácil;*
- *Da pra fazer, mas pra que serve isso?;*
- *Achei fácil esse, mais fácil que os logaritmos;*
- *Em dupla é mais fácil...*

Com base nesse episódio foi gerada uma tabela com as porcentagens de acertos dos alunos na segunda parte do trabalho, objeto da pesquisa:

Item da questão	Percentual de alunos que acertaram totalmente ou parcialmente o item.
Item a: soma intervalar	80%
Item b: subtração intervalar	73,3%
Item c: multiplicação por um escalar	86,7%
Item d: multiplicação intervalar	73,3%
Item e: divisão intervalar	67%

Os erros versaram, na maioria das vezes, em regras de sinais e operações e comparações entre números racionais, fracionários ou decimais. Os dados da tabela estão representados na figura 32, a seguir.

Figura 32: Acertos por Aluno.



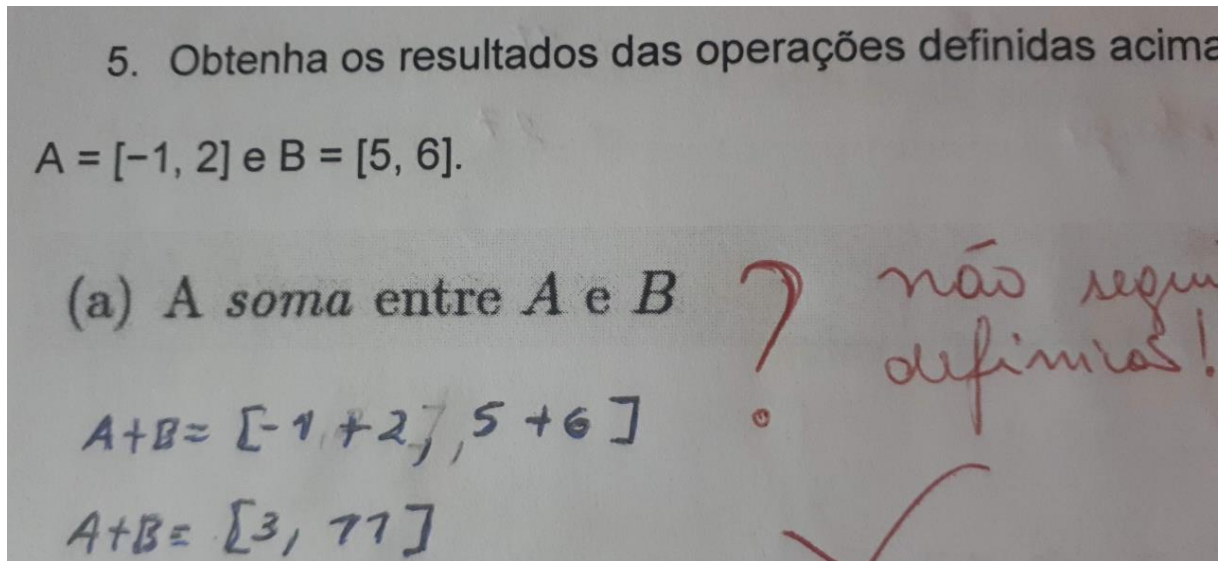
Fonte: Próprio Autor (2018).

Resumidamente e de forma geral a opinião dos alunos foi de que o conteúdo estudado tem uma dificuldade adequada para o Ensino Médio e que o trabalho colaborativo entre eles facilitou todas as etapas do trabalho.

E com esse pensamento a pesquisa mostra que conceitos básicos da Lógica podem ser adequados aos currículos de Matemática aplicados nas escolas do território nacional, bastando apenas uma intencionalidade, pois quando os alunos foram expostos a esses conteúdos as dificuldades foram vencidas de forma satisfatória, dificuldades muitas vezes geradas por falta de pré-requisitos anteriores e não do conteúdo específico.

Nas figuras de 33 a 37 estão ilustrados alguns dos trabalhos dos alunos:

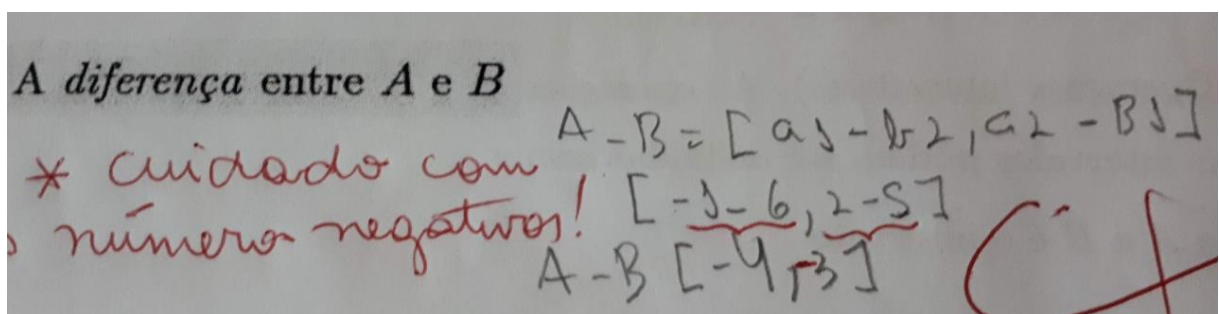
Figura 33: Soma dos intervalos A e B , intervalo $A+B$.



Fonte: Próprio Autor (2018).

Nesse caso, os alunos J.A.A.S. e T.M. de S., não se atentaram a definição da soma de intervalos, adicionando os extremos do mesmo intervalo, esse tipo de erro decorrente do não entendimento da definição.

Figura 34: A diferença entre os intervalos entre A e B , intervalo $A - B$.



Fonte: Próprio Autor (2018).

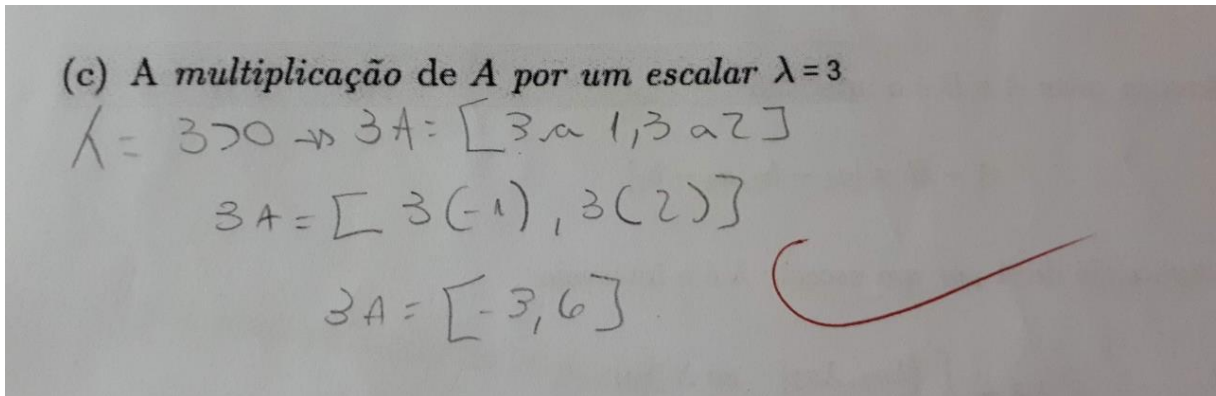
Os alunos R.P e V.M., embora tenham seguido corretamente a definição para a operação de diferença entre intervalos, mostraram dificuldade em operar com números inteiros, o que os levou a um resultado equivocado.

Figura 35: Multiplicação do intervalo A por um escalar λ

(c) A multiplicação de A por um escalar $\lambda=3$

$$\lambda = 3 > 0 \rightarrow 3A = [3a_1, 3a_2]$$

$$3A = [3(-1), 3(2)]$$

$$3A = [-3, 6]$$


Fonte: Próprio Autor (2018).

Os alunos T.C. de O. e L.H.G. da S., não apresentaram nenhum erro na resolução desse item.

Figura 36: A multiplicação entre os intervalos A e B, o intervalo A.B.

(d) A multiplicação de A por B

$$A \cdot B = [\min P, \max P]$$

$$[a_1 \cdot b_1, a_1 \cdot b_2, a_2 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2]$$

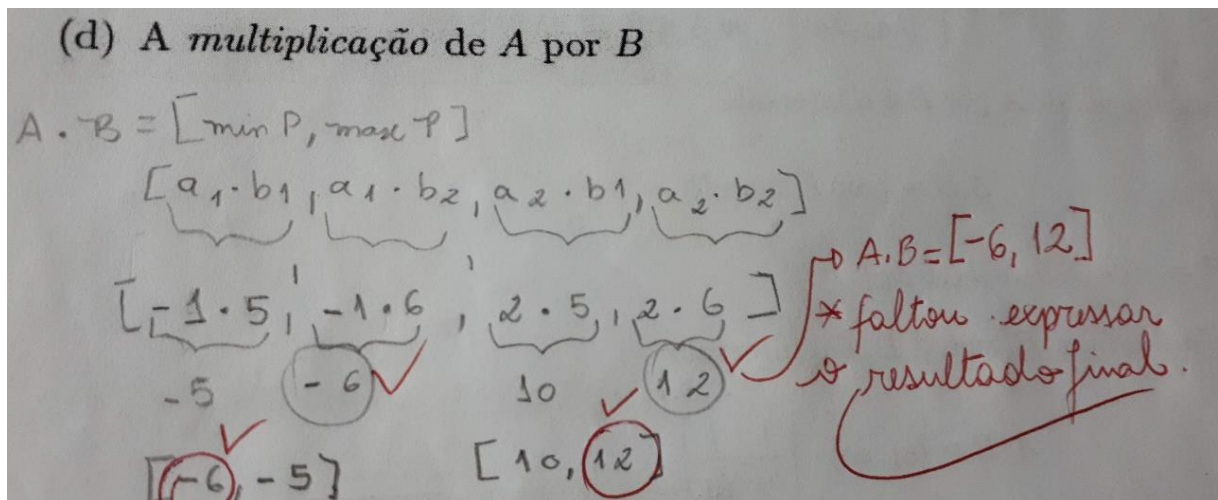
$$[-1 \cdot 5, -1 \cdot 6, 2 \cdot 5, 2 \cdot 6]$$

$$[-5, -6, 10, 12]$$

$$[-6, -5]$$

$$[10, 12]$$

$\rightarrow A \cdot B = [-6, 12]$
* faltou expressar o resultado final.



Fonte: Próprio Autor (2018).

Esses alunos, D.A.M. e E.S.F., tiveram os lapsos usuais de escrita matemática, visto que não há o costume entre eles de deixar claro o resultado final, a solução ou uma resposta para um problema.

Figura 37: A divisão entre os intervalos A e B , o intervalo A/B .

(e) A divisão de A por B , se $0 \notin B$

$$\frac{A}{B} = [-1, 2] \cdot \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{5} \right] \quad P = \left[\frac{-1}{6}, \frac{-1}{5}, \frac{2}{6}, \frac{2}{5} \right] \rightarrow \frac{A}{B} = \left[\frac{-1}{5}, \frac{2}{5} \right]$$

$\frac{A}{B} = \left[\frac{-1}{6}, \frac{2}{6} \right]$

$-\frac{1}{6} > -\frac{1}{5}$ * os resultados estão corretos
 $\frac{2}{5} > \frac{2}{6}$ mas errou na comparação dos racionais.

Fonte: Próprio Autor (2018).

O grupo de alunos formado por A.L.R.T. e A.P.S., avançaram em todas as etapas da divisão intervalar, porém não tiveram sucesso ao comparar números racionais.

Deixamos aqui como uma sugestão para uma próxima etapa desse trabalho, uma aplicação como exemplo:

Considere os números em ‘torno de 6’ e ‘em torno 2’. Determine, para esses números, os resultados para as operações de:

- Adição;
- Subtração;
- Multiplicação por um escalar;
- Multiplicação;
- Divisão.

Podemos destacar a subjetividade envolvida inicialmente quando definimos o termo linguístico ‘em torno’ pois em ‘torno de 2’, pode ser definido no intervalo de $[1,3]$ ou em intervalo em que a precisão pode variar 0,5 para mais ou para menos a partir de 2 e, nesse caso, o intervalo $[1,5;2,5]$ representa essa situação.

Situações com números imprecisos é muito comum em aparelhos de medição que, devido a fatores inerentes ao ato de medir, trabalham com uma margem de precisão que pode ser bem representada se utilizarmos intervalos nessa tarefa.

Para fins de exemplificação, vamos definir em ‘torno de 2’ pelo intervalo

$A = [1,75;2,25]$ e em ‘torno de 6’ pelo intervalo $B = [5,75;6,25]$, com uma precisão de 0,25 em ambos os casos.

Assim para o caso da soma, temos:

$$\begin{aligned} A + B &= [a_1 + b_1, a_2 + b_2] \\ &= [1,75 + 5,75; 2,25 + 6,25] \end{aligned}$$

$$A + B = [7,5; 8,5]$$

ou seja, “em torno de 8”.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o intuito de promover as considerações finais dessa dissertação nos pareceu importante realizar uma retrospectiva do percurso traçado para trazer à luz os resultados dessa pesquisa que, certamente é apenas um início, visto que há ainda muito debate a se fazer sobre o tema.

Inicialmente foram realizadas algumas elucidações acerca das teorias filosóficas sobre a busca da verdade absoluta e como as incertezas tiveram papel decisivo na evolução do pensamento matemática através da história da humanidade.

Em seguida foi realizado um estudo sobre os elementos básicos da Teoria dos Conjuntos Fuzzy, de definições pertinentes para, assim, tomar conhecimento de todo seu potencial enquanto modelador de situações do cotidiano, sem se enredar em assuntos de alta complexidade.

O que encontramos foi à flexibilidade da Lógica Fuzzy em situações em que a Matemática Boleana ou Clássica não é capaz de atender. Por exemplo, sobre a subjetividade de alguns termos linguísticos enraizados no nosso dia a dia e que uma Matemática “rígida” não consegue modelar, devido à características imprecisas e qualitativas, e que, na maioria das vezes, é possível graças à utilização da Lógica Fuzzy, capaz de traduzir tais expressões por meio de uma função de pertinência que considera graus de pertencimento a determinado conjunto.

Todo esse percurso foi necessário para responder a questão principal dessa pesquisa: “A possibilidade de introduzir elementos iniciais de Lógica Fuzzy no Ensino Médio contribui para o desenvolvimento do pensamento matemático em tais alunos?”

Com esse intuito foi escolhida uma sala de 1ª série do Ensino Médio, cujos conteúdos previstos diziam respeito ao tratamento de vários tipos de funções contínuas, o que obrigatoriamente envolvia o estudo de elementos básicos da Teoria de Conjuntos, iniciado no 9º ano do Ensino Fundamental. Aproveitou-se o momento para introduzir o tema “intervalos reais acrescentando o estudo de aritmética intervalar”, cujas regras regem a aritmética com números fuzzy .

Destaca-se aqui que, enquanto realizou-se esse processo, não se perderam de vista as reflexões sobre o fato de a Lógica Fuzzy se tornar importante na resolução ou compreensão de

problemas reais, dada sua flexibilidade em tratar de problemas de várias áreas do mundo real, que tem como forte traço as questões subjetivas, como mostra vasta literatura contemporânea que demonstra essa habilidade em inúmeras questões e situações muitas vezes inusitadas, tornando-a interessante para os alunos do Ensino Médio.

Baseados nos pressupostos da BNCC para o ensino de Matemática, encontramos fundamentos para considerar, nesse momento de debates sobre como e qual matemática se deve ensinar nas escolas e nos cursos de formação, que talvez o conhecimento de uma matemática mais flexível, não clássica e determinista, sirva como um complemento, um aumento do repertório dos alunos para problemas reais, que, por si só, vem carregados de subjetividades e incertezas.

Dentro desse contexto falamos de compreensão de fenômenos, modelagem matemática, investigação de situações reais e, com base nessas investigações, a formulação de problemas que muitas vezes a rigidez da matemática clássica não consegue modelar e nesse momento a Lógica Fuzzy seria uma aliada valiosa.

Quando os alunos foram expostos a esses conteúdos as dificuldades foram vencidas de forma satisfatória, dificuldades muitas vezes geradas por falta de pré-requisitos anteriores.

E para fechar a etapa final da pesquisa realizada na tentativa de introduzir a Lógica Fuzzy como uma ferramenta para modelar e solucionar problemas que envolvem as incertezas e subjetividades próprios da nossa realidade e as questões podem surgir dela, temos a certeza que essa discussão deve continuar pois ela abre a porta para novas pesquisas com o mesmo aspecto ou interesse: trazer para mais perto o conhecimento da Lógica Fuzzy e seu alto desempenho no trabalho com situações - problemas vindas da realidade.

REFERÊNCIAS

ALENCAR FILHO, Edgard de. **Iniciação à Lógica Matemática**. Reimpressão 2006 - Editora Nobel, São Paulo/SP, 1975.

BARROS, Laércio de Carvalho de; BASSANEZI, Rodney Carlos. **Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática**. UNICAMP/IMECC: Campinas/SP, 2015.

BASSANEZI, R. C. **Modelagem como metodologia de ensino de matemática**. In: Actas de la Séptima Conferencia Interamericana sobre Educación Matemática. Paris: UNESCO, 1990. p. 130-155.

BASSANEZI, R. *Modeling as a teaching-learning strategy. For the learning of mathematics, Vancouver*. v. 14, n. 2, p. 31-35, 1994.

BELLUCCI, Danilo Peixoto. **Sistemas Baseados em Regras Fuzzy**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do ABC, Santo André/SP, 2009. Disponível em: <<http://posmat.ufabc.edu.br/teses/MAT-2010%20-20Danilo%20Peixoto%20Bellucci.pdf>>. Acesso em: 23 ago. 2019.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelação Matemática como método de ensino-aprendizagem de Matemática em cursos de 1º e 2º graus**. Rio Claro: IGCE/UNESP, 1990. 210p. (Dissertação, Mestrado).

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem Matemática & implicações no ensino aprendizagem de matemática**. Blumenau: Editora da FURB, 1999. 134p.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson Hein. **Modelagem matemática no ensino**. São Paulo: Contexto, 2000.

BORBA, M. C., MENEGHETTI, R. C. G., HERMINI, H. A. **Estabelecendo critérios para avaliação do uso de Modelagem em sala de aula: estudo de um caso em um curso de ciências biológicas**. In: BORBA, M. C. Calculadoras gráficas e educação matemática. (Série Reflexão em Educação Matemática)Rio de Janeiro: USU, Ed. Bureau, 1999. p. 95-113.

BRASIL. **Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996**. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Diário Oficial da União, Brasília, 23 de dezembro de 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L9394.htm>. Acesso em: 23 ago. 2019.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular: Educação Infantil e Ensino Fundamental**. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2017.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio**. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicação: ensino médio**. 3 ed. – São Paulo – Ática, 2016.

FEITOSA, Hércules de Araújo, PAULOVICH, Leonardo. **Um Prelúdio à Lógica**. São Paulo: Editora UNESP, 2005.

FULLER, R. **On generalization of Nguyen Theorem, Fuzzy Sets and Systems**. 1990, 371-374.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Oswaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de. **Matemática: ciência e aplicação**. Volume 1: Ensino Médio. 7. Ed. – São Paulo: Saraiva. 2013.

KLIR, George J.; Yuan, Bo. *Fuzzy Sets and fuzzy logic theory and applications*. Prentice Halls, 1995.

LAGHETTO, B. K. **Um modelo Matemático para estimar o risco de desenvolver câncer de pulmão por meio de sistemas fuzzy**. [S.I.], 2016.

LAKATOS, E. M.; & MARCONI, M. de A. **Fundamentos de Metodologia Científica**. São Paulo: Atlas, 1991.

LIVEIRA, Claudio Roberto de. CORDANI, Lisbeth Kaiserlian. **Julgando sob incerteza : heurísticas e vieses e o ensino de probabilidade e estatística** [doi:10.11606/D.45.2018.tde-27102017-150037]. São Paulo : Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, 2016. Dissertação de Mestrado em Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. Disponível em: <<https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/31484> >. Acesso em: 12 de jul. 2019.

MARINS, Lazaro Rodrigo de. **Diagnóstico médico por meio de relações Fuzzy: Dengue, Chikungunya ou Zica**. Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, 2016.

MARCONDES, Danilo. **Iniciação à história da filosofia- Dos pré-socráticos a Wittgenstein**. 13ª edição revista e ampliada. Rio de Janeiro/RJ: Editora Jorge Zahar, 2010.

MINIKOVSKY, Cléverson Israel. **Heráclito versus Parmênides: História da Filosofia**. Editora Biblioteca 24 Horas, Seven System Internacional Ltda, 1ª Edição, Brasil, 2009.

MORIN, Edgar. **Ciência com consciência**. 11 ed. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2008.

NGUYEN, H. T. **A first course of fuzzy logic**. CRC Press, Boca Raton, 1997.

ORTEGA, Neli Regina Siqueira. **Aplicação da teoria de Conjuntos Fuzzy a Problemas da Medicina**. Tese de Doutorado, USP, São Paulo/SP, 2001.

PEDRYCZ, W.; GOMIDE, F. **An introduction to fuzzy sets: Analysis and design**. The MIT Press, Massachusetts, 1998.

PEIXOTO, M. S.; BARROS, L. C. **Um estudo de autômatos celulares para o espalhamento geográfico de epidemias com parâmetros fuzzy.** [S.l.], 2004.

PEIXOTO, M. S. **Sistemas dinâmicos e controladores fuzzy: Um estudo da dispersão da morte súbita dos cítrons em São Paulo.** Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP, Campinas, 2005.

SANT'ANNA, C. dos S. **Toria dos Conjuntos Fuzzy: Da simulação ao letramento para alunos do Ensino Médio.** Tese de Mestrado, Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, 2017.

SEE - Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias.** Secretaria da Educação; coordenação geral, Maria Inês Fini; coordenação de área, Nilson José Machado. – 1. ed. atual. – São Paulo : SE, 2011. 72 p.

SPINA, Catharina de Oliveira Corcoll. **Lógica Fuzzy: reflexões que contribuem para a questão da subjetividade na construção do conhecimento matemático** [doi:10.11606/T.48.2010.tde-21012011-104236]. São Paulo: Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 2010. Tese de Doutorado em Educação. [acesso 2019-07-13]. Disponível em: <<http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-21012011-104236/pt-br.php>>. Acesso em: 12 de jul. 2019.

SPINA, Catharina de Oliveira Corcoll. **Uma abordagem da lógica Fuzzy no ensino médio.** [S.l.], 2013.

UNESCO - Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura. **Oficina Regional de Educación de la Unesco para América Latina y el Caribe.** Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de la Educación (LLECE). 2016. Disponível em: <<http://www.unesco.org/new/es/santiago/education/education-assessment-llece>>. Acesso em: 23 jul. 2019.

WASQUES, Vinícius Francisco. **Lógica Fuzzy aplicada à Geologia.** Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista (Júlio de Mesquita Filho). Rio Claro/SP, 2015.

ZADEH, L.A. *Fuzzy sets, Information and Control.* 8 1965, 338 – 353.

ANEXOS

Anexo 1 - Termo de Consentimento

Eu, Fabiana Mendes da Cunha, portadora do RG nº 29.610.061-4, responsável pela instituição ‘Escola Estadual Professor Eduardo Soares’ aceito fazer parte, como instituição voluntária, do desenvolvimento da pesquisa, cujo título provisório “ Operações Aritméticas com Números Fuzzy”. Esta pesquisa é parte integrante para obtenção do título de Mestre, orientada pela Professora Doutora Magda da Silva Peixoto, no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas da Universidade Federal de São Carlos.

Assinando este termo de consentimento, estou ciente de que, o pesquisador Marcelo Batista da Silva irá desenvolver sua pesquisa com alunos de diferentes turmas e apresentará o produto final aos professores desta instituição. Tenho clareza que professores e estudantes envolvidos nesta pesquisa serão mantidos anonimato. Também sei que os resultados obtidos no âmbito desta instituição serão utilizados unicamente para fins de divulgação científica, preservando o anonimato já assinalado acima.

Assinatura:

Alambari, 10 de setembro de 2018.

Anexo 2. Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Declaro, por meio deste termo, que concordei em participar da pesquisa intitulada provisoriamente: “Operações Aritméticas com Números Fuzzy ”, desenvolvida por **Marcelo Batista da Silva**.

Fui informado(a) que:

- a) A pesquisa é orientada pela **Professora Doutora Magda da Silva Peixoto**, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário por meio do e-mail magda@ufscar.br ;
- b) A minha colaboração se fará de forma anônima, por meio das respostas dadas nos instrumentos de pesquisa elaborados pelo pesquisador, a ser respondido a partir da assinatura desta autorização.
- c) O acesso e a análise dos dados coletados se farão apenas pelo pesquisador e pela sua orientadora;
- d) Posso me retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem qualquer prejuízo, sofrer quaisquer sanções ou constrangimento.

Por fim, fui esclarecido(a) sobre os objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais é propor aos professores de Matemática uma sequência de atividades didáticas com operações intervalares, sendo uma ferramenta importante para a resolução de vários problemas e preparando para a formalização no Ensino Médio.

Afirmo que aceitei participar por minha própria vontade, sem receber qualquer incentivo financeiro ou ter qualquer ônus e com a finalidade exclusiva de colaborar para o sucesso da pesquisa.

Atesto o recebimento de uma cópia assinada deste Termo de Consentimento Livre

Esclarecido, conforme recomendações da Comissão Nacional de Ética em Pesquisa (CONEP).

Alambari, 10 de setembro de 2018

Assinatura do(a) participante: _____

Assinatura do(a) pesquisador(a): _____

Assinatura do(a) testemunha(a): _____

