UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Teoria dos Operadores Integrais Singulares

Muriel Andreane Dalcy

São Carlos
2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Teoria dos Operadores Integrais Singulares

Muriel Andreane Dalcy
Orientador: Prof. Dr. Jorge Guillermo Hounie

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

São Carlos
2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Muriel Andreane Dalcy, realizada em 28/04/2020:

Prof. Dr. Jorge Guillermo Hounie
UFSCar

Prof. Dr. Jose Ruidival Soares dos Santos Filho
UFSCar

Prof. Dr. Sérgio Luís Zani
USP

Certifico que a defesa realizou-se com a participação à distância do(s) membro(s) Jose Ruidival Soares dos Santos Filho, Sérgio Luís Zani e, depois das arguições e deliberações realizadas, o(s) participante(s) à distância está(ao) de acordo com o conteúdo do parecer da banca examinadora redigido neste relatório de defesa.

Prof. Dr. Jorge Guillermo Hounie

À minha mãe, Roseli.

Agradecimentos

À minha mãe pelo carinho e incentivo aos meus estudos.

Ao meu irmão Anderson pelo apoio e confiança em mim.

Aos amigos do DM, em particular Cláudio, Diana e Bárbara, pela amizade e incentivo durante o mestrado.

Aos amigos Gustavo, Mateus, Amanda e Ian pelo constante apoio e incentivo.

Ao meu orientador Jorge Hounie pela orientação, dedicação e paciência.

Ao professor Tiago Picon pela orientação durante a graduação e incentivo para que iniciasse o mestrado.

A todos os professores que tive ao longo de minha formação.

À CAPES pelo financiamento da bolsa.

Resumo

Apresentamos neste trabalho alguns dos principais resultados a respeito da continuidade em L^p e da definição em quase toda parte de operadores conhecidos como Integrais Singulares, assim como alguns exemplos clássicos e aplicações. Utilizamos como principal referência para este trabalho o livro "Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions" de Elias M. Stein.

Palavras-chave: Análise Harmônica, Integrais Singulares, Decomposição de Calderón-Zygmund, Transformada de Riesz.

Abstract

We present in this work some of the main results regarding the continuity in L^p and the definition almost everywhere of operators known as Singular Integrals, as well as some classic examples and applications. We have utilized as the main reference for this work the book "Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions" by Elias M. Stein.

Keywords: Harmonic Analysis, Singular Integrals, Calderón-Zygmund Decomposition, Riesz Transform.

Sumário

Introdução

O objetivo deste trabalho é o estudo de operadores integrais singulares de valor principal dados pela convolução com uma função K que é singular na origem. Ao longo do texto, apresentamos alguns resultados a respeito da continuidade destes operadores, assim como exemplos e aplicações.

Apresentamos no Capítulo 1 alguns resultados preliminares que serão utilizados ao longo do texto, como teoremas de Teoria da Medida, de integração e de convergência em espaços L^p.

No segundo capítulo, apresentamos uma ferramenta conhecida como transformada de Fourier. Iniciamos com sua definição e propriedades para funções em $L^1(\mathbb{R}^n)$, assim como sua fórmula de inversão para o caso em que a transformada pertença a $L^1(\mathbb{R}^n)$. Em seguida, estudamos uma forma de estender esta definição para funções em $L^2(\mathbb{R}^n)$ por meio de aproximações em norma L^2, de forma que a transformada de Fourier seja uma isometria neste espaço. Por fim, apresentamos brevemente o comportamento da transformada de Fourier no espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, e veremos que esta é uma aplicação contínua de $\mathcal{S}$ em $\mathcal{S}$.

O terceiro capítulo se destina à apresentação de alguns conceitos de Análise Harmônica que serão utilizados neste trabalho, como a função maximal de Hardy-Littlewood, teoremas de decomposição do espaço $\mathbb{R}^n$ em cubos, como a Decomposição de Calderón-Zygmund, e um teorema de interpolação em espaços L^p.

O quarto capítulo tem como objetivo apresentar a definição formal e os principais resultados deste trabalho a respeito da limitação em L^p de operadores integrais singulares, para $1 < p < \infty$. O primeiro resultado da seção 4.1 trata da continuidade de integrais singulares dadas pela convolução com um núcleo K. No entanto, tal resultado ainda não abrange o caso em que a integral singular é dada pelo valor principal deste núcleo, e para cobrir este caso, apresentamos o Teorema 4.2. Na seção 4.2, vemos um caso particular no qual a integral singular comuta com translações e dilatações, e seu núcleo é da forma $\Omega(x)|x|^{-n}$, no qual Ω é uma função positivamente homogênea de grau zero. Finalizamos este capítulo com um resultado que garante a definição em quase toda parte destes operadores.

No Capítulo 5, apresentamos como exemplos de operadores integrais singulares a transformada de Hilbert, definida para funções reais, e sua generalização para funções em $\mathbb{R}^n$, conhecida como transformada de Riesz. De forma breve, estudamos em seguida a solução do problema de Dirichlet para $\mathbb{R}^{n+1}_+$ via integrais de Poisson e apresentamos na seção 5.3 um resultado que estabelece uma relação entre as transformadas de Riesz e as integrais de Poisson.

Capítulo 1

Preliminares

Introduzimos neste capítulo alguns conceitos e resultados preliminares que serão utilizados ao longo deste trabalho. Iniciamos com alguns dos principais resultados de Teoria da Medida, que foram extraídos e adaptados das referências [3], [5] e [9].

1.1 Medida e Integração

Definição 1.1. *Seja X um conjunto não vazio. Uma σ-álgebra de conjuntos em X é uma coleção não vazia $\mathcal{M}$ de subconjuntos de X tal que*

(a) Se $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$, então $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{M}$;

(b) Se $E \in \mathcal{M}$, então $E^c = X \setminus E \in \mathcal{M}$.

Definição 1.2. *Uma medida é uma função $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$, no qual $\mathcal{M}$ é uma σ-álgebra, que satisfaz*

1. *$\mu(\varnothing) = 0$;*

2. *Se $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ é uma sequência de conjuntos disjuntos de $\mathcal{M}$ então*

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j).$$

Dizemos que μ é uma medida finita se $\mu(X) < \infty$ implica que $\mu(E) < \infty$, para todo $E \in \mathcal{M}$, $X = E \cup E^c$. E dizemos que μ é uma medida σ-finita se $X = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j$, no qual $E_j \in \mathcal{M}$ e $\mu(E_j) < \infty$ para todo $j \geq 1$. Um conjunto E é σ-finito para μ se $E = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j$, no qual $E_j \in \mathcal{M}$ e $\mu(E_j) < \infty$, para todo $j \geq 1$.

Dizemos que uma afirmação é verdadeira em quase toda parte (q.t.p.) se essa afirmação é verdadeira exceto em um conjunto E de medida nula.

Se $\mathcal{M}$ é uma σ-álgebra de X, dizemos que $(X, \mathcal{M})$ é um espaço mensurável, e os conjuntos de $\mathcal{M}$ são chamados de conjuntos mensuráveis. Mais ainda, se μ é uma medida em $(X, \mathcal{M})$, dizemos que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ é um espaço de medida.

Definição 1.3. *Sejam $(X, \mathcal{M}), (Y, \mathcal{N})$ espaços mensuráveis. Dizemos que $f : X \to Y$ é $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$-mensurável, ou simplesmente mensurável, se para todo $E \in \mathcal{N}$ temos que $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$.*

Definição 1.4. *Sejam $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável, $E \subset X$. Definimos a função característica $\mathcal{X}_E$ de E por*

$$\mathcal{X}_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E; \\ 0, & x \notin E. \end{cases}$$

Uma função simples em X é uma combinação linear finita com coeficientes complexos de funções características de conjuntos de $\mathcal{M}$.

Definição 1.5. *Seja L^+ o conjunto $L^+ = \{f : X \to [0, \infty]; f$ é mensurável$\}$. Se $\phi \in L^+$ é uma função simples com $\phi = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathcal{X}_{E_j}$, $a_j > 0$, então definimos a integral de ϕ com relação a μ por*

$$\int_X \phi \, d\mu \doteq \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j).$$

Se $f \in L^+$, definimos

$$\int f \, d\mu \doteq \sup \left\{ \int \phi \, d\mu; 0 \leq \phi \leq f, \, \phi \, simples \right\}.$$

Definição 1.6. *Dizemos que $f : X \to \mathbb{C}$ é integrável se $\int |f| < \infty$. Mais ainda, dado $E \in \mathcal{M}$, dizemos que f é integrável em E se $\int_E |f| < \infty$. Assim, definimos o espaço L^1 por $L^1 = \{f : X \to \mathbb{C}; f$ é integrável$\}$.*

Neste trabalho, utilizaremos predominantemente a medida de Lebesgue em $X = \mathbb{R}^n$, cuja construção é feita com detalhes no primeiro capítulo da referência [3]. Em geral, vamos considerar o espaço de medida $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n, m)$, no qual m denota a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{L}^n$ é a classe dos conjuntos Lebesgue mensuráveis em $\mathbb{R}^n$. Desta forma, a integral de uma função mensurável f em relação à medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ será denotada por

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, dx.$$

O resultado a seguir mostra que a medida de Lebesgue é invariante por translações.

Teorema 1.1. *Se $E \in \mathcal{L}^n$, então $E + s = \{x + s; x \in E\} \in \mathcal{L}$ e $rE = \{rx; x \in E\} \in \mathcal{L}$, para todo $r, s \in \mathbb{R}$. Além disso, $m(E + s) = m(E)$ e $m(rE) = |r| m(E)$.*

Demonstração. Ver [3], página 37.

Definição 1.7. *Seja $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ uma função Lebesgue-mensurável tal que, para cada conjunto compacto $K \subset \Omega$, temos*

$$\int_K |f(x)| \, dx < \infty.$$

Então dizemos que f é localmente integrável, e escrevemos $f \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Vejamos a seguir alguns dos principais resultados preliminares a respeito de convergência e integração.

Teorema 1.2. *Seja $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável. Se $f : X \to \mathbb{C}$ é mensurável, então existe uma sequência $\{\phi_n\}$ de funções simples tal que $0 \leq |\phi_1| \leq |\phi_2| \leq \cdots \leq |f|$, $\phi_n \to f$ pontualmente e $\phi_n \to f$ uniformemente em qualquer conjunto no qual f é limitada.*

Demonstração. Ver [3], página 47.

Teorema 1.3 (Teorema da Convergência Dominada)**.** *Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que*

1. *$f_n(x) \to f(x)$ q.t.p.;*
2. *Existe $g \geq 0$ em $L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.t.p. para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Então $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\,dx.$$

Demonstração. Ver [3], página 55.

Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ espaços de medida, $E \subset X \times Y$. Então para cada $x \in X$ e $y \in Y$ definimos a x-seção E_x e a y-seção E^y de E respectivamente por

$$\begin{aligned} E_x &= \{y \in Y; (x, y) \in E\}, \\ E^y &= \{x \in X; (x, y) \in E\}. \end{aligned}$$

Se f é uma função definida em $X \times Y$, definimos a x-seção f_x de f por $f_x(y) = f(x, y)$ e a y-seção f^y de f por $f^y(x) = f(x, y)$.

Teorema 1.4 (Teorema de Fubini)**.** *Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ espaços de medida σ-finitos.*

(a) Se $f \in L^+(X \times Y)$ então as funções $g(x) = \int f_x(y)\,d\nu(y)$ e $h(y) = \int f^y(x)\,d\mu(x)$ estão em $L^+(X)$ e $L^+(Y)$, respectivamente, e

$$\begin{aligned} \int f\,d(\mu \times \nu) &= \int \left[\int f(x, y)\,d\nu(y) \right] d\mu(x) \\ &= \int \left[\int f(x, y)\,d\mu(x) \right] d\nu(y). \end{aligned} \tag{1.1}$$

(b) Se $f \in L^+(\mu\times\nu)$ então $f_x \in L^1(\nu)$ q.t.p. em X e $f^y \in L^1(\mu)$ q.t.p. em Y, as funções $g(x) = \int f_x\,d\nu$ e $h(x) = \int f^y\,d\nu$ estão definidas q.t.p. e estão, respectivamente, em $L^1(\mu)$ e $L^1(\nu)$, e (1.1) é válida.

Demonstração. Ver [3], página 67.

Os resultados a seguir tratam de integração em coordenadas polares e serão fundamentais para a estimativa de algumas integrais ao longo do texto.

Seja $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| = 1\}$ a esfera unitária. Se $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, definimos as coordenadas polares $(r, x') \in \mathbb{R}^+ \times S^{n-1}$ da seguinte forma:

$$r = |x| \in (0, \infty) \quad \text{e} \quad x' = \frac{x}{|x|} \in S^{n-1}.$$

A aplicação $\phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to (0, \infty) \times S^{n-1}$ definida por $\phi(x) = (r, x')$ é bijetora e contínua, com inversa $\phi^{-1} : (0, \infty) \times S^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ dada por $\phi^{-1}(r, x') = rx' = x$. Esta aplicação ϕ induz uma medida de Borel m_* em $(0, \infty) \times S^{n-1}$ com $m_*(E) = m(\phi^{-1}(E))$, para todo E boreliano em $(0, \infty) \times S^{n-1}$. Definimos a medida $\rho = \rho_n$ em $(0, \infty)$ por $\rho(E) = \int_E r^{n-1}\, dr$.

Teorema 1.5. *Existe uma única medida de Borel $\sigma = \sigma_{n-1}$ em S^{n-1} tal que $m_* = \rho \times \sigma$. Se f é Borel mensurável em $\mathbb{R}^n$, então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} f(rx') r^{n-1}\, d\sigma(x')\, dr.$$

Demonstração. Ver [3], página 78.

Corolário 1.1. *Se f é uma função mensurável em $\mathbb{R}^n$ e $f \geq 0$ ou $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $f(x) = g(|x|)$ para alguma g definida em $(0, \infty)$, então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \sigma\left(S^{n-1}\right) \int_0^\infty g(r) r^{n-1}\, dr.$$

Demonstração. Ver [3], página 79.

1.2 Espaços L^p

Os conceitos e resultados apresentados a seguir tratam dos espaços de funções conhecidos com espaços L^p, essenciais ao estudo dos operadores integrais singulares.

Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida. Se f é uma função mensurável em X e $0 < p \leq \infty$, definimos

$$\|f\|_p \doteq \left(\int |f|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 0 < p < \infty,$$

e se $p = \infty$,

$$\|f\|_\infty \doteq \inf\{a \geq 0; \mu(\{x; |f(x)| > a\}) = 0\},$$

com a convenção de que $\inf \varnothing = \infty$. O valor $\|f\|_\infty$ é chamado supremo essencial de $|f|$, e se $\|f\|_\infty < \infty$, dizemos que f é essencialmente limitada.

Definição 1.8. *Se $0 < p \leq \infty$,*

$$L^p(X, \mathcal{M}, \mu) \doteq \{f : X \to \mathbb{C}; f \text{ é mensurável e } \|f\|_p < \infty\}.$$

O conjunto definido acima também é denotado por $L^p(X)$, $L^p(\mu)$ ou apenas L^p quando o espaço de medida estiver subentendido. Pelos resultados presentes no capítulo seis da referência [3], $\|\cdot\|_p$ de fato define uma norma em L^p para $1 \leq p \leq \infty$. Logo, L^p é um espaço vetorial complexo e dizemos que $f = g$ em L^p se, e somente se, $f(x) = g(x)$ q.t.p.

Definição 1.9. *Sejam $f \in L^p(\mu)$ e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções em $L^p(\mu)$. Dizemos que f_n converge a f em norma L^p se*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

Teorema 1.6. *Se $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\mu)$ é um espaço métrico completo para toda medida positiva μ.*

Demonstração. Ver [9], página 67.

Proposição 1.1. *Para $1 \leq p < \infty$, o conjunto das funções simples, dadas por $f = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathcal{X}_{E_j}$, com $\mu(E_j) < \infty$ para $1 \leq j \leq n$, é denso em L^p.*

Demonstração. Ver [3], página 183.

Proposição 1.2. *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Se $f \in L^p(\mu)$ e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\mu)$ são tais que f_n converge a f em norma L^p, então existe uma subsequência $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $f_{n_k}(x)$ converge a $f(x)$ em quase toda parte.*

Demonstração. Ver [5], página 242.

Definição 1.10. *Sejam $1 < p < \infty$ e $1 < q < \infty$. Dizemos que p e q são expoentes conjugados se*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

E se $p = 1$, então $p = 1$ e $q = \infty$ são expoentes conjugados.

Teorema 1.7 (Desigualdade de Hölder)**.** *Suponha que p e q, $1 \leq p, q \leq \infty$, sejam expoentes conjugados. Se f e g são funções mensuráveis em X, então*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q. \tag{1.2}$$

Demonstração. Ver [3], página 182.

Os resultados a seguir nos mostram a relação de dualidade entre os espaços L^p.

Definição 1.11. *Definimos o dual V^* de um espaço vetorial normado V por*

$$V^* \doteq \{f : V \to \mathbb{C}; f \text{ é linear e contínua}\}.$$

Sejam p e q expoentes conjugados. Para cada $g \in L^q$, considere o funcional linear e limitado ϕ_g em L^p dado por

$$\phi_g(f) \doteq \int fg\, d\mu, \quad f \in L^p. \tag{1.3}$$

Proposição 1.3. *Sejam p e q expoentes conjugados com $1 \leq q < \infty$. Se $g \in L^q$, então $\|g\|_q = \|\phi_g\|$, ou seja, a aplicação $g \mapsto \phi_g$ é uma isometria de L^q em $(L^p)^*$.*

Demonstração. Ver [3], página 188.

Teorema 1.8 (Teorema de Representação de Riesz)**.** *Sejam p e q expoentes conjugados. Se $1 < p < \infty$, então para cada $\phi \in (L^p)^*$, existe $g \in L^q$ tal que*

$$\phi(f) = \int f g \, d\mu,$$

para toda $f \in L^p$, e portanto L^q é isometricamente isomorfo a $(L^p)^*$. Se μ é σ-finita, a mesma conclusão é válida para $p = 1$.

Demonstração. Ver [3], página 190.

A seguinte desigualdade será importante na estimativa de algumas integrais.

Teorema 1.9 (Desigualdade de Minkowski para Integrais)**.** *Suponha $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ espaços de medida σ-finitos, e seja f uma função $(\mathcal{M} \bigotimes \mathcal{N})$-mensurável em $X \times Y$. Se $f \geq 0$ e $1 \leq p < \infty$, então*

$$\left[\int \left(\int f(x,y) \, d\nu(y)\right)^p d\mu(x)\right]^{\frac{1}{p}} \leq \int \left(\int f(x,y)^p \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} d\nu(y).$$

Demonstração. Ver [3], página 194.

Vejamos agora alguns subespaços que são densos em L^p.

Teorema 1.10. *Se $1 \leq p < \infty$, o espaço $C_c(\mathbb{R}^n)$ das funções contínuas com suporte compacto em $\mathbb{R}^n$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Ver [9], página 69.

Teorema 1.11. *Se $1 \leq p < \infty$, o espaço $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em $\mathbb{R}^n$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Ver [5], página 246.

Por fim, enunciamos um teorema a respeito de diferenciação sob o sinal da integral que nos fornece condições para que seja válida a seguinte fórmula:

$$\frac{d}{dy} \int_\Omega F(x,y) \, d\mu(x) = \int_\Omega \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \, d\mu(x). \tag{1.4}$$

Teorema 1.12. *Sejam J um intervalo em $\mathbb{R}$ e $F : \Omega \times J \to \mathbb{C}$ tal que:*

(a) Para todo $y \in J$ fixado, a função $x \mapsto F(x,y)$ é integrável em relação a μ.

(b) Em todo ponto de $\Omega \times J$, existe a derivada parcial $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)$.

(c) *Existe uma função integrável $g : \Omega \to [0, \infty]$ tal que*

$$g(x) \geq \left| \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \right|,$$

para todos $x \in \Omega$, $y \in J$.

Então, a função $y \mapsto \int_\Omega F(x, y)\, d\mu(x)$ é diferenciável em J e para cada $y \in J$ fixado, a função $x \mapsto \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$ é integrável em relação a μ. Mais ainda, vale a fórmula (1.4).

Demonstração. Ver [5], página 103.

Capítulo 2

A Transformada de Fourier

Introduzimos neste capítulo alguns dos principais resultados a respeito da aplicação conhecida como transformada de Fourier, sendo esta uma ferramenta que será amplamente utilizada ao longo do texto. Denotaremos por dx a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ e por $m(E)$ a medida de Lebesgue de um conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$.

2.1 Propriedades

Se f é uma função em $L^1(\mathbb{R}^n)$, a transformada de Fourier de f é definida como a função $\hat{f}$ dada por

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{2\pi i x \cdot y}\, dy, \tag{2.1}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, no qual $x \cdot y$ denota o produto interno usual entre os vetores x e y.

Teorema 2.1. *(a) A aplicação $f \mapsto \hat{f}$ é uma transformação linear e limitada de $L^1(\mathbb{R}^n)$ a $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.*

(b) Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então $\hat{f}$ é uma função uniformemente contínua.

Demonstração. (a) É evidente que a aplicação $f \mapsto \hat{f}$ é linear. Mais ainda,

$$\|\hat{f}\|_\infty = \operatorname{sup\,ess} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{2\pi i x \cdot y}\, dy \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, dy = \|f\|_1 .$$

(b) Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\delta > 0$. Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$\begin{aligned} |\hat{f}(x+h) - \hat{f}(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{2\pi i (x+h)\cdot y}\, dy - \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{2\pi i x \cdot y}\, dy \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \left[e^{2\pi i (x+h)\cdot y} - e^{2\pi i x \cdot y} \right] f(y)\, dy \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot y} \left[e^{2\pi i h \cdot y} - 1 \right] f(y)\, dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| e^{2\pi i h \cdot y} - 1 \right| |f(y)|\, dy \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{|y|\leq R} \left|e^{2\pi i h\cdot y} - 1\right| |f(y)|\, dy + \int_{|y|>R} \left|e^{2\pi i h\cdot y} - 1\right| |f(y)|\, dy \\
&= I_1 + I_2,
\end{aligned}
$$

no qual a integral em I_2 é tal que

$$
I_2 = \int_{|y|>R} \left|e^{2\pi i h\cdot y} - 1\right| |f(y)|\, dy \leq 2\int_{|y|>R} |f(y)|\, dy < \delta
$$

se R é uma constante fixada suficientemente grande, uma vez que f é integrável. Para o termo I_1, observamos primeiramente que se $|y| \leq R$, então $\left|e^{2\pi i h\cdot y} - 1\right| \to 0$ se $|h| \to 0$. Como $\left|e^{2\pi i h\cdot y} - 1\right| |f(y)| \leq 2|f(y)|$ e $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, segue do Teorema da Convergência Dominada que

$$
I_1 = \int_{|y|\leq R} \left|e^{2\pi i h\cdot y} - 1\right| |f(y)|\, dy < \delta
$$

se $|h|$ é suficientemente pequeno. Logo, $\hat{f}$ é uniformemente contínua.

■

Teorema 2.2 (Teorema de Riemann-Lebesgue)**.** *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então $\hat{f}(x) \to 0$ se $|x| \to \infty$. Mais ainda, podemos concluir que $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$, isto é, $\hat{f}$ é contínua e tende a zero no infinito.*

Demonstração. A demonstração será dividida em quatro passos:

Primeiro passo: Começamos mostrando que o resultado é válido para funções características em intervalos unidimensionais. Para isto, basta mostrarmos o resultado para funções características de intervalos simétricos da forma $(-h, h)$. De fato, dado um intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$, definindo $c = \frac{a+b}{2}$ e $h = \frac{b-a}{2}$, obtemos que

$$
\chi_{(a,b)}(x) = \chi_{(-h,h)}(x - c).
$$

Assim,

$$
\widehat{\chi_{(-h,h)}}(x) = \int_{-h}^{h} e^{2\pi i x y}\, dy = \frac{e^{2\pi i x h} - e^{-2\pi i x h}}{2\pi i x} = \frac{1}{\pi}\frac{\operatorname{sen}(2\pi x h)}{x} \to 0
$$

se $|x| \to \infty$, e pelo anterior,

$$
\widehat{\chi_{(a,b)}}(x) = \widehat{\chi_{(-h,h)}}(x - c) = \frac{1}{\pi}\frac{\operatorname{sen}(2\pi(x - c)h)}{x - c} \to 0
$$

se $|x| \to \infty$.

Segundo passo: Considere agora o intervalo n-dimensional $I = \{x \in \mathbb{R}^n; a_j \leq x_j \leq b_j, j = 1, \ldots, n\}$ em $\mathbb{R}^n$. Calculando $\widehat{\chi_I}(x)$, obtemos do passo anterior que

$$
\widehat{\chi_I}(x) \;=\; \int_I e^{2\pi i x\cdot y}\, dy
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} e^{2\pi i x_1 y_1} \dots e^{2\pi i x_n y_n} \, dy_n \dots dy_1 \\
&= \prod_{j=1}^{n} \int_{a_j}^{b_j} e^{2\pi i x_j y_j} \, dy_j \to 0
\end{aligned}
$$

quando $|x| \to \infty$.

Terceiro passo: Se f é uma função simples, então esta será dada por uma combinação linear finita de funções características, e portanto o resultado também é válido neste caso.

Quarto passo: Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dado $\delta > 0$, existe uma função simples g tal que $\|f - g\|_1 < \delta$, uma vez que o espaço das funções simples é denso em L^1. Escrevendo $f = g + (f - g)$, temos

$$\hat{f}(x) = \hat{g}(x) + (\hat{f} - \hat{g})(x),$$

no qual $\hat{g}(x) \to 0$ se $|x| \to \infty$ e, pelo Teorema 2.1,

$$|\hat{f} - \hat{g}| \leq \|f - g\|_1 < \delta.$$

■

O resultado a seguir lista algumas propriedades da transformada de Fourier.

Proposição 2.1. *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.*

(a) Para cada $a \in \mathbb{R}^n$, considere a translação por a definida por $f_a(x) = f(x + a)$. Então,

$$\widehat{f_a}(x) = e^{-2\pi i x \cdot a} \hat{f}(x).$$

(b) Se $a \in \mathbb{R}^n$ e $g(x) = e^{2\pi i x \cdot a} f(x)$, então

$$\hat{g}(x) = \hat{f}(x + a).$$

(c) Para $0 \neq \delta \in \mathbb{R}^n$, considere o operador de dilatação por δ definido por $(\tau_\delta f)(x) = f(\delta x)$. Então,

$$(\tau_\delta f)\widehat{\ }(x) = \frac{1}{|\delta|^n} \hat{f}\left(\frac{x}{\delta}\right).$$

Demonstração. (a) Se $a \in \mathbb{R}^n$ e $f_a(x) = f(a + x)$, então

$$
\begin{aligned}
\widehat{f_a}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot y} f(y + a) \, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot (y - a)} f(y) \, dy \\
&= e^{-2\pi i x \cdot a} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot y} f(y) \, dy \\
&= e^{-2\pi i x \cdot a} \hat{f}(x).
\end{aligned}
$$

(b) Para $g(x) = e^{2\pi i x\cdot a} f(x)$, temos que

$$\begin{aligned}
\hat{g}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot y} e^{2\pi i y\cdot a} f(y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i (x+a)\cdot y} f(y)\, dy \\
&= \hat{f}(x+a).
\end{aligned}$$

(c) Para $(\tau_\delta f)(x) = f(\delta x)$, temos

$$\begin{aligned}
(\tau_\delta f)\widehat{\ }(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot y} f(\delta y)\, dy \\
&= \frac{1}{|\delta|^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \frac{x}{\delta}\cdot y} f(y)\, dy \\
&= \frac{1}{|\delta|^n} \hat{f}\left(\frac{x}{\delta}\right).
\end{aligned}$$

■

Definição 2.1. *Sejam $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Definimos a convolução entre f e g por*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y)\, dy. \tag{2.2}$$

Por meio de uma mudança de variáveis, observa-se que $(f * g)(x) = (g * f)(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Observe também que, pela definição acima, $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, pois pelo Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}
\|f * g\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y)\, dy \right| dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|\, dy\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\, dx \right] |g(y)|\, dy \\
&\leq \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty.
\end{aligned}$$

Mais ainda, a operação de convolução está bem definida para $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, e $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, como mostra o resultado a seguir.

Teorema 2.3 (Desigualdade de Young). *Sejam $1 \leq p, q, r \leq \infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$ e $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$. Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, então*

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q. \tag{2.3}$$

Demonstração. Por simplicidade, provaremos o caso em que $q = 1$, e consequentemente, $r = p$, ou seja,

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1 .$$

Iniciamos observando que

$$|(f * g)(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\, dy \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|\, dy.$$

Utilizando a Desigualdade de Minkowski para Integrais, obtemos

$$\begin{aligned}
\|f * g\|_p &= \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f * g|^p(x)\, dx \right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|\, dy \right)^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p |g(y)|^p\, dx \right]^{\frac{1}{p}} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p\, dx \right]^{\frac{1}{p}} |g(y)|\, dy \\
&= \|f\|_p \|g\|_1 .
\end{aligned}$$

■

O resultado a seguir ilustra um fato interessante a respeito da relação entre a operação de convolução e a transformada de Fourier.

Teorema 2.4. *Se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então*

$$(f * g)\widehat{\ } = \hat{f}\hat{g}.$$

Demonstração. Note que $(f * g)\widehat{\ }$ está bem definida, uma vez que $\|f * g\|_1 < \infty$ se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Assim, segue por definição que

$$\begin{aligned}
(f * g)\widehat{\ }(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot y}(f * g)(y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot y} \int_{\mathbb{R}^n} f(y-w)g(w)\, dw\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot(y-w)} f(y-w)\, dy \right] e^{2\pi i x\cdot w} g(w)\, dw \\
&= \hat{f}(x)\hat{g}(x).
\end{aligned}$$

■

Exemplo 2.1. Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $0 < k \leq h$. Considere a função par $\chi_{h,k}$ definida por

$$\chi_{h,k}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq h-k \\ 0, & x \geq h+k, \\ \frac{h+k-x}{2k}, & x \in (h-k, h+k). \end{cases}$$

Observe que esta função pode ser expressa, a menos de uma constante, pela convolução entre χ_h e χ_k, pois

$$(\chi_h * \chi_k)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_h(t)\chi_k(x-t)\,dt = \int_{-h}^{h} \chi_k(x-t)\,dt = 2k\chi_{h,k}(x).$$

Pelo teorema anterior, obtemos que

$$\widehat{\chi_{h,k}}(x) = \frac{1}{2k}\widehat{\chi_h}(x)\widehat{\chi_k}(x) = \frac{1}{2k}\frac{1}{\pi^2}\frac{\operatorname{sen}(2\pi x h)}{x}\frac{\operatorname{sen}(2\pi x k)}{x}.$$

Há também algumas relações entre a operação de diferenciação e a transformada de Fourier, como mostram os resultados a seguir.

Teorema 2.5. *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e suponha que $x_k f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, no qual x_k é a função projeção da k-ésima coordenada. Então $\hat{f}$ é diferenciável em relação a x_k e*

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_k}(x) = (2\pi i t_k f(t))\widehat{\ }(x).$$

Demonstração. Seja $h = (0, \ldots, h_k, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ um vetor não nulo no qual $h_k \neq 0$ é o elemento da k-ésima coordenada. Pelo item (b) da Proposição 2.1, sabemos que $(e^{2\pi i t\cdot a} f(t))\widehat{\ }(x) = \hat{f}(x+a)$, e assim

$$\begin{aligned}
\frac{\hat{f}(x+h) - \hat{f}(x)}{h_k} &= \frac{(e^{2\pi i h\cdot t} f(t) - f(t))\widehat{\ }(x)}{h_k} \\
&= \left[\left(\frac{e^{2\pi i h\cdot t} - 1}{h_k}\right) f(t)\right]\widehat{\ }(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(e^{2\pi i h\cdot t} - 1)}{h_k} e^{2\pi i t\cdot x} f(t)\,dt.
\end{aligned}$$

No entanto, note que

$$\lim_{h_k \to 0} \frac{e^{2\pi i h\cdot t} - 1}{h_k} = \lim_{h_k \to 0} (2\pi i t_k) e^{2\pi i h\cdot t} = 2\pi i t_k,$$

e portanto segue pelo Teorema da Convergência Dominada que

$$\begin{aligned}
\lim_{h_k \to 0} \frac{\hat{f}(x+h) - \hat{f}(x)}{h_k} &= \lim_{h_k \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(e^{2\pi i h\cdot t} - 1)}{h_k} e^{2\pi i t\cdot x} f(t)\,dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi i t_k) e^{2\pi i t\cdot x} f(t)\,dt \\
&= (2\pi i t_k f(t))\widehat{\ }(x).
\end{aligned}$$

Logo, $\hat{f}$ é diferenciável e

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_k}(x) = (2\pi i t_k f(t))\widehat{\ }(x).$$

■

Definição 2.2. *Dizemos que f é diferenciável em norma L^p em relação a x_k se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e existe $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h_k} - g(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \to 0$$

se $h_k \to 0$, no qual $h = (0, \ldots, h_k, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ e $h_k \neq 0$ é o elemento da k-ésima coordenada. A função g é chamada de derivada parcial de f em relação a x_k em norma L^p.

Teorema 2.6. *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e g é a derivada parcial de f em relação a x_k em norma L^1, então*

$$\hat{g}(x) = -2\pi i x_k \hat{f}(x).$$

Demonstração. Pela definição de g, sabemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h_k} - g(x) \right| dx \to 0$$

se $h_k \to 0$. E para $f_h(t) = f(h+t)$, note que

$$\begin{aligned} \left| \left[\frac{f_h - f}{h_k} - g \right]^{\widehat{}}(x) \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot t} \left[\frac{f(t+h) - f(t)}{h_k} - g(t) \right] dt \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{f(t+h) - f(t)}{h_k} - g(t) \right| dt \to 0 \end{aligned}$$

se $h_k \to 0$. Daí,

$$\begin{aligned} \left| \left[\frac{f_h - f}{h_k} - g \right]^{\widehat{}}(x) \right| &= \left| \frac{\widehat{f_h}(x) - \hat{f}(x)}{h_k} - \hat{g}(x) \right| \\ &= \left| \frac{e^{-2\pi i h \cdot x} \hat{f}(x) - \hat{f}(x)}{h_k} - \hat{g}(x) \right| \\ &= \left| \frac{(e^{-2\pi i h \cdot x} - 1) \hat{f}(x)}{h_k} - \hat{g}(x) \right| \to 0 \end{aligned}$$

se $h_k \to 0$, isto é, $\dfrac{(e^{-2\pi i h \cdot x} - 1)\hat{f}(x)}{h_k} \to \hat{g}(x)$. Mas por outro lado,

$$\lim_{h_k \to 0} \frac{(e^{-2\pi i h \cdot x} - 1)\hat{f}(x)}{h_k} = -2\pi i x_k \hat{f}(x).$$

Por unicidade, concluímos que

$$\hat{g}(x) = -2\pi i x_k \hat{f}(x).$$

■

Teorema 2.7 (Fórmula de Multiplicação). *Sejam $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)\,dx.$$

Demonstração. Pelo Teorema de Riemann-Lebesgue, $\hat{f}g$ e $f\hat{g}$ são integráveis, logo as integrais acima existem. Mais ainda, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)||g(y)|\,dx\,dy \leq \|f\|_1\,\|g\|_1 < \infty.$$

Aplicando o Teorema de Fubini, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)g(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot y} f(y)\,dy\right]dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot y} g(x)\,dx\right]dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\hat{g}(y)\,dy.
\end{aligned}$$

■

Definição 2.3. *Dizemos que uma função f é radial se $f(x) = f(|x|)$, isto é, se f é uma função invariante sob rotações em torno da origem.*

Teorema 2.8. *A transformada de Fourier de uma função radial é também uma função radial.*

Demonstração. Seja ρ um operador de rotação em torno da origem e denote sua ação sobre funções por $\rho(f)(x) = f(\rho^{-1}x)$. Afirmamos que o operador $f \mapsto \hat{f}$ comuta com ρ. Este fato será provado mais adiante, quando estivermos tratando das transformadas de Riesz. Assim,

$$\hat{f}(\rho^{-1}x) = \rho\hat{f}(x) = \widehat{(\rho f)}(x) = \hat{f}(x),$$

pois como f é radial,

$$(\rho f)(y) = f(\rho^{-1}y) = f(y),$$

e portanto $\hat{f}$ é radial. ■

2.2 Fórmula de Inversão

Para uma função $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, sabemos que sua transformada de Fourier é definida por

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot y} f(y)\,dy.$$

Nosso objetivo nesta seção é encontrar uma fórmula de inversão para a aplicação $f \mapsto \hat{f}$, isto é, uma representação para $f(x)$ em termos de sua transformada de Fourier, da forma

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot y} \hat{f}(y)\,dy. \tag{2.4}$$

No entanto, note que $\hat{f}$ não necessariamente é integrável. Como exemplo, considere $n = 1$ e tome $f(x) = \chi_{[-h,h]}(x)$, $h \in \mathbb{R}^+$. Como já visto na demonstração do Teorema 2.2, a transformada de Fourier de f é dada por $\hat{f}(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(2\pi x h)}{\pi x}$, e assim

$$\|\hat{f}\|_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\operatorname{sen}(2\pi x h)}{x} \right| dx = \infty.$$

Por este motivo, introduziremos o conceito de somabilidade de integrais. Seja $a(u)$, $0 \leq u < \infty$, localmente integrável de forma que as integrais

$$A(w) = \int_0^w a(u)\, du$$

existam, mas o limite

$$\lim_{w \to \infty} A(w) = \int_0^\infty a(u)\, du$$

não necessariamente exista. Considere agora a função $H(u)$, $0 \leq u < \infty$, satisfazendo as seguintes condições:

1) $H(u)$ é de variação limitada em $[0, \infty)$;

2) $H(u) \to 0$ se $u \to \infty$;

3) $H(u)$ é contínua em $u = 0$ e $H(0) = 1$.

Definição 2.4. *A integral* $\int_0^\infty a(u)\, du$ *é dita H-somável a um valor I se as integrais*

$$I_\varepsilon = \int_0^\infty a(u) H(\varepsilon u)\, du$$

convergem para todo $\varepsilon > 0$ e $I_\varepsilon \to I$ se $\varepsilon \to 0$.

Teorema 2.9. *Seja $a \in L^1_{loc}([0,\infty))$. Se a integral* $\int_0^\infty a(u)\, du$ *converge a um valor I, então a mesma é H-somável ao valor I.*

Demonstração. Mostremos que as integrais

$$I_\varepsilon = \int_0^\infty a(u) H(\varepsilon u)\, du$$

existem para cada $\varepsilon > 0$ e que $I_\varepsilon \to I$ se $\varepsilon \to 0$. Como $a \in L^1_{loc}([0,\infty))$, então a função

$$A(u) = \int_0^u a(v)\, dv$$

está bem definida e

$$\lim_{u \to \infty} A(u) = \lim_{u \to \infty} \int_0^u a(v)\, dv = \int_0^\infty a(v)\, dv = I.$$

Mais ainda, uma demonstração análoga à que será apresentada para provar o Teorema de Diferenciação de Lebesgue, presente no capítulo seguinte, nos mostra que $A'(u) = a(u)$ q.t.p. Denotando por V a variação total de $H(u)$ em $[0, \infty)$ e integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^w a(u)H(\varepsilon u)\,du &= \int_0^w A'(u)H(\varepsilon u)\,du \\
&= H(\varepsilon w)A(w) - H(0)A(0) - \int_0^w A(u)\,dH(\varepsilon u) \\
&= H(\varepsilon w)A(w) - \int_0^w A(u)\,dH(\varepsilon u),
\end{aligned}$$

no qual a última integral existe pois, se $|A(u)| \leq M$, então pelo corolário presente na página 140 da referência [8] obtemos que

$$\left| \int_0^w A(u)\,dH(\varepsilon u) \right| \leq MV,$$

uma vez que $H(u)$ e $H(\varepsilon u)$ possuem a mesma variação total.

Fazendo $w \to \infty$, sabemos que $H(\varepsilon w) \to 0$ e $A(w) \to I$, e portanto

$$\begin{aligned}
I_\varepsilon &= \lim_{w\to\infty} \int_0^w a(u)H(\varepsilon u)\,du \\
&= \lim_{w\to\infty} \left[H(\varepsilon w)A(w) - \int_0^w A(u)\,dH(\varepsilon u) \right] \\
&= -\int_0^\infty A(u)\,dH(\varepsilon u).
\end{aligned}$$

Como $A(u) \to I$ se $u \to \infty$, podemos escrever $A(u) = I + \eta(u)$, no qual $\eta(u) \to 0$ se $u \to \infty$, e assim

$$\begin{aligned}
I_\varepsilon &= -\int_0^\infty (I + \eta(u))\,dH(\varepsilon u) \\
&= -I \int_0^\infty dH(\varepsilon u) - \int_0^\infty \eta(u)\,dH(\varepsilon u) \\
&= -I \left[\lim_{k\to\infty} H(k) - H(0) \right] - \int_0^\infty \eta(u)\,dH(\varepsilon u) \\
&= I - \int_0^\infty \eta(u)\,dH(\varepsilon u).
\end{aligned}$$

Basta agora mostrarmos que a integral $\displaystyle\int_0^\infty \eta(u)\,dH(\varepsilon u)$ tende a zero quando $\varepsilon \to 0$. Como $|A(u)|$ é limitada, existe $N > 0$ tal que $|\eta(u)| \leq N$. E como $\eta(u) \to 0$ se $u \to \infty$, então dado $\delta > 0$, existe $u_0 \in \mathbb{R}$ tal que $|\eta(u)| \leq \delta$ sempre que $u \geq u_0$. Assim,

$$\int_0^\infty \eta(u)\,dH(\varepsilon u) = \int_0^{u_0} \eta(u)\,dH(\varepsilon u) + \int_{u_0}^\infty \eta(u)\,dH(\varepsilon u) = P + Q,$$

no qual Q é arbitrariamente pequeno para todo $\varepsilon > 0$, pois

$$|Q| = \left| \int_{u_0}^{\infty} \eta(u)\, dH(\varepsilon u) \right| \leq \delta V.$$

Mais ainda, se $\overset{\varepsilon u_0}{\underset{0}{V}}(H(u))$ denota a variação total de $H(u)$ em $[0, \varepsilon u_0]$, então

$$\begin{aligned} |P| &= \left| \int_0^{u_0} \eta(u)\, dH(\varepsilon u) \right| \\ &\leq N \left| \int_0^{u_0} dH(\varepsilon u) \right| \\ &= N \left| \int_0^{u_0} \varepsilon H'(\varepsilon u)\, du \right| \\ &= N \left| \int_0^{\varepsilon u_0} H'(u)\, du \right| \\ &= N \overset{\varepsilon u_0}{\underset{0}{V}}(H(u)) \to 0 \end{aligned}$$

se $\varepsilon \to 0$, pois $H(u)$ é de variação limitada e contínua em $u = 0$, e portanto segue do Teorema 6.26 presente na página 136 da referência [8] que sua função variação também é contínua em $u = 0$.

■

Agora, vamos estender o conceito de somabilidade a integrais múltiplas. Seja $a \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e considere

$$S(R) = \int_{|u| \leq R} a(u)\, du.$$

Definição 2.5. *Dizemos que* $\int_{\mathbb{R}^n} a(u)\, du$ *converge esfericamente a um valor* I *se* $S(R) \to I$ *quando* $R \to \infty$.

A noção correspondente de somabilidade esférica é definida como segue: considere as integrais

$$I_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^n} a(u) H(\varepsilon |u|)\, du,$$

no qual $H(r)$, $r = |x|$, satisfaz as condições 1, 2 e 3 listadas anteriormente. Se I_ε existe para cada $\varepsilon > 0$ e $I_\varepsilon \to I$ se $\varepsilon \to 0$, então dizemos que $\int_{\mathbb{R}^n} a(u)\, du$ é H-somável ao valor I.

Teorema 2.10. *Seja* $a \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. *Se a integral* $\int_{\mathbb{R}^n} a(u)\, du$ *converge esfericamente a um valor* I, *então esta integral é* H*-somável ao valor* I.

Demonstração. Por hipótese,

$$S(R) = \int_{|u|\leq R} a(u)\,du \to I$$

se $R \to \infty$. Afirmamos que

$$\int_{|u|\leq w} a(u)H(\varepsilon|u|)\,du = \int_0^w H(\varepsilon R)\,dS(R). \tag{2.5}$$

Com efeito, segue da definição de S que

$$S(R) = \int_{|u|\leq R} a(u)\,du = \int_0^R r^{n-1}\left[\int_{|u|=r} a(u)\,d\theta\right] dr,$$

no qual $u \in \mathbb{R}^n$, $r = |u|$ e $\theta = \frac{u}{|u|}$. Como $a \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, então

$$F(r) = r^{n-1}\int_{|u|=r} a(u)\,d\theta$$

é uma função contínua e pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$S'(R) = R^{n-1}\int_{|u|=R} a(u)\,d\theta.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\int_{|u|\leq w} a(u)H(\varepsilon|u|)\,du &= \int_{S^{n-1}}\int_0^w a(R\theta)H(\varepsilon R)R^{n-1}\,dR\,d\theta \\
&= \int_0^w H(\varepsilon R)\left[R^{n-1}\int_{S^{n-1}} a(R\theta)\,d\theta\right] dR \\
&= \int_0^w H(\varepsilon R)\,dS(R),
\end{aligned}$$

e portanto vale a igualdade em (2.5). Utilizando integração por partes, obtemos ainda que

$$\begin{aligned}
\int_{|u|\leq w} a(u)H(\varepsilon|u|)\,du &= \int_0^w H(\varepsilon R)\,dS(R) \\
&= H(\varepsilon w)S(w) - \int_0^w S(R)\,dH(\varepsilon R).
\end{aligned}$$

Fazendo $w \to \infty$, $H(\varepsilon w) \to 0$ e então

$$I_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^n} a(u)H(\varepsilon|u|)\,du = -\int_0^\infty S(R)\,dH(\varepsilon R),$$

e o restante da demonstração segue como na demonstração do Teorema 2.9.

∎

Suponha agora que a função radial H satisfaça as condições 1, 2 e 3 citadas anteriormente e, mais ainda, satisfaça a condição

4) $H \in L^1(\mathbb{R}^n)$, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^n} H(|x|)\,dx = \sigma(S^{n-1})\int_0^\infty H(r)r^{n-1}\,dr < \infty.$$

Denotando por $K(x)$ a transformada de Fourier de $H(|x|)$, obtemos dos teoremas 2.1 e 2.8 que $K(x)$ é uma função limitada e radial. Assim, segue da Proposição 2.1 e da Fórmula de Multiplicação que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y)e^{-2\pi i x\cdot y}H(\varepsilon|y|)\,dy &= \int_{\mathbb{R}^n} (f(x+y))\widehat{\ } H(\varepsilon|y|)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x+y)(H(\varepsilon|y|))\widehat{\ }\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^{-n} f(x+y)\hat{H}\left(\frac{|y|}{\varepsilon}\right)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^{-n} f(x-y)K\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)K_\varepsilon(y)\,dy \\
&= (f * K_\varepsilon)(x),
\end{aligned}$$

no qual $K_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}K(x/\varepsilon)$.

Por fim, suponha que K satisfaça as condições

5) $K(x) = \hat{H}(|x|) = \mathcal{O}(|x|^{-n-1})$ para $|x| \geq 1$, isto é, $|K(x)| \leq C|x|^{-n-1}$ para $|x| \leq 1$. Como K é uma função limitada, então $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

6) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} K(x)\,dx = 1.$

Teorema 2.11. *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $H(|x|)$ satisfaz as condições de 1 a 6, então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y)e^{-2\pi i x\cdot y}H(\varepsilon|y|)\,dy \to f(x)$$

em quase toda parte e em norma L^1 se $\varepsilon \to 0$.

Demonstração. Se $K(x)$ é a transformada de Fourier de $H(|x|)$, vimos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y)e^{-2\pi i x\cdot y}H(\varepsilon|y|)\,dy = (f * K_\varepsilon)(x),$$

no qual $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e K_ε é uma função radial, decrescente e integrável.

Utilizando um resultado a respeito de aproximações da identidade, que será apresentado mais adiante no Teorema 5.3, concluímos que $(f * K_\varepsilon)(x) \to f(x)$ q.t.p. e $\|f * K_\varepsilon - f\|_1 \to 0$ se $\varepsilon \to 0$. ∎

O resultado a seguir segue diretamente do Teorema 2.11.

Corolário 2.1 (Unicidade da Transformada de Fourier)**.** *Se $\hat{f}$ é identicamente nula, então $f(x) = 0$ q.t.p.*

Teorema 2.12. *Se a integral $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y)e^{-2\pi i x \cdot y}\, dy$ converge esfericamente, então esta converge em quase toda parte ao valor $f(x)$.*

Demonstração. Por hipótese, sabemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y)e^{-2\pi i x \cdot y}\, dy \xrightarrow{\text{esf.}} I$$

para algum valor I. Mas como $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, então o integrando acima é localmente integrável e pelo Teorema 2.10, temos que a integral acima é H-somável a I, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y)e^{-2\pi i x \cdot y} H(\varepsilon|y|)\, dy \to I$$

se $\varepsilon \to 0$. Mas pelo Teorema 2.11,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y)e^{-2\pi i x \cdot y} H(\varepsilon|y|)\, dy \to f(x)$$

em quase toda parte se $\varepsilon \to 0$.

Por unicidade, obtemos que $f(x) = I$ q.t.p., e portanto $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y)e^{-2\pi i x \cdot y}\, dy$ converge esfericamente a $f(x)$ q.t.p.

■

Em particular, se $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então a integral $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y)e^{-2\pi i x \cdot y}\, dy$ é convergente, e pelo Teorema 2.12, vale a igualdade

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y)e^{-2\pi i x \cdot y}\, dy \quad \text{q.t.p.}$$

2.3 Transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n)$

Nosso objetivo nesta seção será definir a transformada de Fourier para funções em $L^2(\mathbb{R}^n)$ por meio de aproximações por integrais truncadas. Lembremos que $L^2(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$f \cdot g = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

e norma $\|f\|_2 = (f \cdot f)^{\frac{1}{2}}$.

Observe que toda função $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ é localmente integrável, pois dado qualquer compacto $K \subset \mathbb{R}^n$,

$$\int_K |f(x)|\, dx \leq \|f\|_2 \left[\int_K 1^2\, dx\right]^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

e portanto as integrais truncadas

$$\widehat{f_R}(x) = \int_{|y|\leq R} f(y) e^{2\pi i x\cdot y}\, dy$$

existem e estão bem definidas para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 2.13 (Teorema de Parseval-Plancherel)**.** *Seja $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.*

(a) A transformada de Fourier de f existe como um limite em norma L^2 das integrais truncadas $\widehat{f_R}$ quando $R \to \infty$;

(b) Vale a fórmula de Parseval: $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$;

(c) A fórmula de inversão (2.4) vale como um limite em norma L^2, isto é,

$$\int_{|y|\leq R} \hat{f}(y) e^{-2\pi i x\cdot y}\, dy \to f(x)$$

em L^2 se $R \to \infty$.

Demonstração. A demonstração será dividida em sete passos. Iniciamos provando o teorema para funções simples.

Primeiro passo: Mostremos que o resultado é válido para funções características em $\mathbb{R}$. Seja $\chi_h(x)$ a função característica do intervalo $(-h, h)$. Como já observado, sua transformada de Fourier é dada por

$$\widehat{\chi_h}(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\operatorname{sen}(2\pi h x)}{x},$$

e esta existe nos sentidos pontual e por aproximação em $L^2(\mathbb{R})$. De fato, se $f(x) = \chi_h(x)$, as integrais truncadas

$$\widehat{f_R}(x) = \int_{-R}^{R} f(y) e^{2\pi i x y}\, dy$$

são todas iguais para $R \geq h$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} (\widehat{\chi_h})^2(x)\, dx &= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(2\pi h x)}{x^2}\, dx \\
&= \frac{2h}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2}\, dx \\
&= 2h \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \chi_h^2(x)\, dx,
\end{aligned}$$

e portanto $\|\widehat{\chi_h}\|_2 = \|\chi_h\|_2$.

Agora, se $\chi_{(a,b)}$ é a função característica de qualquer intervalo $(a,b) = (c-h, c+h)$, então

$$\widehat{\chi_{(a,b)}}(x) = e^{2\pi ixc}\widehat{\chi_h}(x),$$

pois

$$\widehat{\chi_{(a,b)}}(x) = \int_a^b e^{2\pi ixy}\,dy = \int_{c-h}^{c+h} e^{2\pi ixy}\,dy = \int_{-h}^{h} e^{2\pi ix(y+c)}\,dy = e^{2\pi ixc}\widehat{\chi_h}(x).$$

Assim,

$$|\widehat{\chi_{(a,b)}}(x)|^2 = |\widehat{\chi_h}(x)|^2 = (\widehat{\chi_h})^2(x),$$

e a conclusão segue como no caso anterior.

Segundo passo: Consideramos agora funções características em intervalos n-dimensionais. No entanto, este caso segue diretamente do anterior, uma vez que se $\chi(x)$ é a função característica de um intervalo n-dimensional $a_j \leq x_j \leq b_j$, $j = 1, \dots, n$, então

$$\chi(x) = \chi_1(x_1)\cdots\chi_n(x_n)$$

e as integrais n-dimensionais determinando as normas em L^2 de χ e $\widehat{\chi}$ serão produtos de integrais unidimensionais de funções como no primeiro passo.

Terceiro passo: Consideramos agora funções simples em $\mathbb{R}$. Suponha que f assuma os valores $c_1, \dots, c_m$ nos m intervalos disjuntos $I_1, \dots, I_m$, respectivamente, e zero fora destes intervalos. Assim,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k\chi_k(x) \quad \text{e} \quad \hat{f}(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k\widehat{\chi_k}(x),$$

no qual χ_k é a função característica do intervalo I_k. Logo,

$$\begin{aligned}
\int_{\infty}^{\infty} |\hat{f}(x)|^2\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x)\overline{\hat{f}(x)}\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{m} c_k\widehat{\chi_k}(x)\right]\left[\sum_{j=1}^{m} c_j\overline{\widehat{\chi_j}(x)}\right]dx \\
&= \sum_{k=1}^{m} |c_k|^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\chi_k}(x)|^2\,dx + \sum_{k\neq j} c_k\overline{c_j}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\chi_k}(x)\overline{\widehat{\chi_j}(x)}\,dx \\
&= A + B.
\end{aligned}$$

Afirmação: $B = 0$. De fato, se $I_1 = (x_1 - h_1, x_1 + h_1)$ e $I_2 = (x_2 - h_2, x_2 + h_2)$ são intervalos disjuntos com $x_1 + h_1 \leq x_2 - h_2$ e $h_1 \geq h_2 > 0$, então

$$\widehat{\chi_1}(x) = \int_{x_1-h_1}^{x_1+h_1} e^{2\pi ixy}\,dy = \frac{e^{2\pi ix(x_1+h_1)} - e^{2\pi ix(x_1-h_1)}}{2\pi ix} = \frac{e^{2\pi ixx_1}}{\pi}\frac{\operatorname{sen}(2\pi xh_1)}{x},$$

e também,

$$\widehat{\chi_2}(x) = \frac{e^{2\pi i x x_2}}{\pi} \frac{\operatorname{sen}(2\pi x h_2)}{x}.$$

Assim,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\chi_1}(x)\overline{\widehat{\chi_2}(x)}\, dx = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2\pi x h_1)}{x} \frac{\operatorname{sen}(2\pi x h_2)}{x}\, e^{2\pi i x(x_1 - x_2)}\, dx.$$

Definindo a função

$$F(x) = \frac{1}{\pi^2} \frac{\operatorname{sen}(2\pi x h_1)}{x} \frac{\operatorname{sen}(2\pi x h_2)}{x},$$

então $F \in L^1(\mathbb{R})$ e F é igual, a menos de uma constante C, à transformada de Fourier da função χ_{h_1,h_2} definida no Exemplo 2.1, que é contínua e integrável. Pela fórmula de inversão, concluímos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\chi_1}(x)\overline{\widehat{\chi_2}(x)}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, e^{-2\pi i x(x_2 - x_1)}\, dx = C\chi_{h_1,h_2}(x_2 - x_1) = 0,$$

pois $|x_2 - x_1| \geq h_1 + h_2$ e portanto $\chi_{h_1,h_2}(x_2 - x_1) = 0$. Logo, a afirmação está provada.

Por fim, como as funções χ_k possuem suportes disjuntos, obtemos do primeiro passo que

$$\begin{aligned}
\int_{\infty}^{\infty} |\hat{f}(x)|^2\, dx &= \sum_{k=1}^{m} |c_k|^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\chi_k}(x)|^2\, dx \\
&= \sum_{k=1}^{m} |c_k|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \chi_k^2(x)\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{m} c_k \chi_k(x) \right|^2 dx \\
&= \int_{\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx,
\end{aligned}$$

e portanto vale a fórmula de Parseval.

Quarto passo: O caso em que f é uma função simples em $\mathbb{R}^n$ é análogo ao anterior e pode ser tratado da mesma forma.

Quinto passo: Faremos agora uma extensão por continuidade. Denote por S a classe de todas as funções simples em $\mathbb{R}^n$ e seja T o operador $f \mapsto \hat{f}$. Dos passos anteriores, sabemos que a fórmula de Parseval

$$\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$$

é válida para toda $f \in S$, e portanto T é um operador linear e contínuo definido em um subespaço denso de L^2.

Afirmação: O operador T pode ser estendido ao fecho $\overline{S} = L^2$ preservando-se a norma, isto é, de forma que a fórmula de Parseval seja válida para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

De fato, sejam $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções simples tais que $f_n \to f$ em norma L^2. Em particular, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, e então

$$\|f_n - f_m\|_2 \to 0$$

se $m, n \to \infty$. Pela continuidade de T,

$$\|Tf_n - Tf_m\|_2 \to 0$$

se $m, n \to \infty$, isto é, $\{Tf_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy. Como $L^2(\mathbb{R}^n)$ é um espaço completo, existe $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $Tf_n \to g$ em norma L^2. Assim, definimos Tf por $Tf = g$. Note que Tf está bem definida, pois se $\{f'_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset S$ é outra sequência que converge a f em norma L^2 e tal que $Tf'_n \to g'$ em norma L^2, então a sequência $\{f_1, f'_1, f_2, f'_2, \dots\}$ converge a f e a sequência $\{Tf_1, Tf'_1, Tf_2, Tf'_2, \dots\}$ também converge em norma L^2, e portanto $g = g'$.

Por fim, pela fórmula Parseval

$$\|Tf_n\|_2 = \|f_n\|_2$$

para $f_n \in S$, $f_n \to f$ em norma L^2, e pela continuidade da função norma, obtemos que

$$\|\hat{f}\|_2 = \|Tf\|_2 = \|f\|_2$$

para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, e portanto a afirmação está provada.

Sexto passo: Vejamos que $Tf = \hat{f}$ é o limite em norma L^2 das integrais truncadas $\widehat{f_R}$. Para isto, provemos primeiramente que se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ possui suporte compacto, então Tf é da forma

$$\widehat{f_R}(x) = \int_{|y|\le R} f(y) e^{2\pi i x\cdot y}\, dy.$$

Suponha que o suporte de f esteja contido na bola $B(0,R)$ de raio R centrada na origem. Seja $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções simples cujos suportes pertençam a $B(0,R)$ e tais que $f_k \to f$ em norma L^2. Pela continuidade de T, $Tf_k \to Tf$ em norma L^2 e portanto segue da Proposição 13.17 da referência [5] que existe uma subsequência de $\{Tf_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a Tf em quase toda parte. Mais ainda, segue da definição de T que

$$\begin{aligned}
\left|Tf_k(x) - \widehat{f_R}(x)\right| &= \left|\int_{|y|\le R} f_k(y) e^{2\pi i x\cdot y}\, dy - \int_{|y|\le R} f(y) e^{2\pi i x\cdot y}\, dy\right| \\
&\le \int_{|y|\le R} |f_k(y) - f(y)|\, dy \\
&\le C\,\|f_k - f\|_2 \to 0
\end{aligned}$$

se $k \to \infty$, e portanto a sequência $\{Tf_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente a $\widehat{f_R}$. Do anterior, concluímos que $Tf = \widehat{f_R}$ em quase toda parte.

Seja agora $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ qualquer e considere

$$f_R(x) = \begin{cases} f(x), & |x| \leq R, \\ 0, & |x| > R. \end{cases}$$

Note que $f_R \to f$ em norma L^2 se $R \to \infty$, e assim $Tf_R \to Tf$ em norma L^2. Mas pelo argumento anterior, $Tf = \widehat{f_R}$ em quase toda parte, e portanto

$$\widehat{f_R} \to Tf = \hat{f}$$

em norma L^2 se $R \to \infty$.

Sétimo passo: Por fim, vejamos que vale a fórmula de inversão

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y) e^{-2\pi i x \cdot y}\, dy, \tag{2.6}$$

no qual a integral deve ser entendida como o limite em norma L^2 de suas integrais truncadas sobre $|y| \leq R$.

Analogamente aos passos anteriores, é suficiente provarmos que (2.6) vale para funções simples em $\mathbb{R}^n$. Mais ainda, segue por linearidade que é suficiente provarmos para funções características de intervalos n-dimensionais, e este caso se reduz ao caso de intervalos reais. Assim, como

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1,$$

temos para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ que

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\alpha x)}{x} = \operatorname{sgn}(\alpha),$$

no qual sgn é a função sinal, definida por

$$\operatorname{sgn}(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{|\alpha|}, & \alpha \neq 0, \\ 0, & \alpha = 0. \end{cases}$$

Se $f(x) = \chi_{a,b}(x)$ é a função característica do intervalo $(a,b) = (c-h, c+h)$, então

$$\hat{f}(x) = \frac{e^{2\pi i x c}}{\pi} \frac{\operatorname{sen}(2\pi x h)}{x},$$

e assim

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) e^{-2\pi i x y}\, dy &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i y(c-x)} \frac{\operatorname{sen}(2\pi y h)}{y}\, dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi y(c-x)) \frac{\operatorname{sen}(2\pi y h)}{y}\, dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2\pi y(c-x+h)) - \operatorname{sen}(2\pi y(c-x-h))}{2y}\, dy \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2\pi y(b-x)) - \operatorname{sen}(2\pi y(a-x))}{y}\,dy \\
&= \frac{\operatorname{sgn}(b-x) - \operatorname{sgn}(a-x)}{2} \\
&= \begin{cases} 0, & x \notin [a,b], \\ 1, & x \in (a,b), \\ \frac{1}{2}, & x = a \text{ ou } x = b \end{cases} \\
&= f(x) \quad \text{q.t.p.},
\end{aligned}
$$

e portanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) e^{-2\pi i x y}\,dy = f(x)$$

em quase toda parte, o que finaliza a demonstração do teorema.

■

2.4 Transformada de Fourier em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

O objetivo desta seção é apresentar brevemente o comportamento da transformada de Fourier no espaço $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, denominado espaço de Schwartz.

Definição 2.6. *Definimos por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ o espaço de todas as funções infinitamente diferenciáveis em $\mathbb{R}^n$ e tais que todas as suas derivadas permanecem limitadas quando multiplicadas por polinômios, isto é, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha D^\beta f(x) \right| < \infty$$

para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, no qual $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ e

$$D^\beta = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\beta_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\beta_n} = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1} \cdots \partial x_n^{\beta_n}}.$$

Definição 2.7. *Dizemos que uma sequência $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ converge a zero em $\mathcal{S}$ se*

$$x^\alpha D^\beta f_j(x) \to 0$$

uniformemente para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$.

Proposição 2.2. *Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Tomando $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tal que $|\alpha| = n+1$ e $\beta = 0$, obtemos por definição que

$$|f(x)| \leq \frac{C}{|x|^{n+1}}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, no qual C é uma constante positiva. Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\,dx = \int_{|x|\leq 1} |f(x)|^p\,dx + \int_{|x|>1} |f(x)|^p\,dx$$

$$\begin{aligned}
&\leq \quad m(B(0,1)) \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|^p + \int_{|x|>1} \frac{C^p}{|x|^{p(n+1)}}\, dx \\
&= \quad m(B(0,1)) \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|^p + C^p \sigma(S^{n-1}) \int_1^\infty \frac{1}{r^{pn+p-n+1}}\, dr < \infty,
\end{aligned}$$

pois $pn+p-n+1 \geq 2$. Logo, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$.

■

Observação 2.1. Observe que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, porém esta inclusão é estrita, pois a função $f(x) = e^{-|x|^2}$ pertence a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mas não possui suporte compacto.

Observação 2.2. Note ainda que, como $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$ e $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, então $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$.

Da proposição anterior, sabemos que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, e assim a expressão

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot y} f(y)\, dy \tag{2.7}$$

está bem definida para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Veremos agora que o espaço de Schwartz é invariante pela transformada de Fourier.

Teorema 2.14. *A aplicação $u \mapsto \hat{u} = \mathscr{F}(u)$ é uma aplicação contínua de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Mais ainda, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$,*

(a) $D^\alpha \hat{u}(x) = \mathscr{F}((2\pi i y)^{|\alpha|} u(y))(x)$.

(b) $x^\alpha \hat{u}(x) = C_\beta \mathscr{F}(D^\alpha u)(x)$, no qual C_β é uma constante que depende apenas de β.

Demonstração. Como $u \in \mathcal{S}$, podemos derivar (2.7) sob o sinal da integral. Assim,

$$\begin{aligned}
D^\alpha \hat{u}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha e^{2\pi i x\cdot y} u(y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi i y)^{|\alpha|} e^{2\pi i x\cdot y} u(y)\, dy \\
&= \mathscr{F}((2\pi i y)^{|\alpha|} u(y))(x),
\end{aligned}$$

o que mostra que $\hat{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e que vale o item (a).

Agora, multiplicando a segunda igualdade acima por x^β e integrando por partes, obtemos que

$$\begin{aligned}
x^\beta D^\alpha \hat{u}(x) &= (2\pi i)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} x^\beta e^{2\pi i x\cdot y} y^\alpha u(y)\, dy \\
&= (2\pi i)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} D^\beta \left[e^{2\pi i x\cdot y}\right] (2\pi i)^{-|\beta|} y^\alpha u(y)\, dy \\
&= (-1)^{|\beta|} (2\pi i)^{|\alpha|-|\beta|} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot y} D^\beta [y^\alpha u(y)]\, dy,
\end{aligned}$$

e portanto

$$|x^\beta D^\alpha \hat{u}(x)| \leq (2\pi)^{|\alpha|-|\beta|} \int_{\mathbb{R}^n} \left| D^\beta [y^\alpha u(y)] \right| dy < \infty, \tag{2.8}$$

uma vez que $u \in \mathcal{S}$. Logo, $\hat{u} \in \mathcal{S}$.

Mais ainda, tomando $\alpha = 0 \in \mathbb{N}^n$ na última igualdade, obtemos

$$\begin{aligned} x^\beta \hat{u}(x) &= (-1)^{|\beta|}(2\pi i)^{-|\beta|} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot y} D^\beta u(y)\, dy \\ &= C_\beta \mathscr{F}(D^\beta u)(x), \end{aligned}$$

e portanto vale o item (b).

Por fim, substituindo u em (2.8) por uma sequência $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a zero em $\mathcal{S}$, então $\widehat{u_k} \to 0$ em $\mathcal{S}$, e portanto $\mathscr{F}$ é uma aplicação contínua de $\mathcal{S}$ em $\mathcal{S}$.

■

Capítulo 3

Função Maximal e Teorema de Interpolação

Nosso objetivo neste capítulo será introduzir alguns conceitos fundamentais sobre funções reais, como a função maximal de Hardy-Littlewood, teoremas de decomposição em cubos de abertos em $\mathbb{R}^n$ e de interpolação em espaços $L^p(\mathbb{R}^n)$. Tais conceitos serão utilizados nos capítulos seguintes no estudo de integrais singulares.

3.1 Função Maximal de Hardy-Littlewood

Definição 3.1. *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Definimos a função maximal de Hardy-Littlewood Mf por*

$$Mf(x_0) = \sup_{r>0} \frac{1}{m(B(x_0,r))} \int_{B(x_0,r)} |f(x)|\, dx, \tag{3.1}$$

onde $B(x_0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - x_0| < r\}$.

A seguinte proposição nos permite afirmar que a função maximal definida acima é mensurável.

Proposição 3.1. *Sejam $r \in (0,\infty)$ fixado e $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. A aplicação $g(x) = \int_{B(x,r)} f(y)\, dy$ é contínua.*

Demonstração. Seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathbb{R}^n$ que converge a x. Então

$$\begin{aligned} |g(x_n) - g(x)| &= \left| \int_{B(x_n,r)} f(y)\, dy - \int_{B(x,r)} f(y)\, dy \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left[\chi_{B(x_n,r)}(y) - \chi_{B(x,r)}(y)\right]\, dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| f(y) \chi_{B(x_n,r) \triangle B(x,r)}(y) \right| dy, \end{aligned}$$

onde $B(x_n,r) \triangle B(x,r)$ é a diferença simétrica entre $B(x_n,r)$ e $B(x,r)$. Mas

$$|\chi_{B(x_n,r)\triangle B(x,r)}(y)| \to 0 \text{ se } n \to \infty,$$

pois $x_n \to x$ se $n \to \infty$. Daí, como

$$\left|f(y)\chi_{B(x_n,r)\triangle B(x,r)}(y)\right| \leq |f(y)|,$$

onde $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, segue do Teorema da Convergência Dominada que $g(x_n)$ converge a $g(x)$, e portanto g é contínua. ■

Da proposição anterior, sabemos que para $r > 0$ fixado, a aplicação $x \mapsto F(x,r)$, onde

$$F(x,r) = \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy,$$

é contínua, e portanto mensurável. Logo, como

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy = \sup_{r>0} F(x,r),$$

então Mf é mensurável. Além do mais, obtemos de forma análoga que para cada $x \in \mathbb{R}^n$ fixado, a aplicação $r \mapsto F(x,r)$ é contínua.

Definição 3.2. *Seja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dizemos que g é semicontínua inferiormente se, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n; g(x) > \alpha\}$ é aberto.*

Proposição 3.2. *Mf é uma função semicontínua inferiormente.*

Demonstração. Basta provarmos que uma função dada pelo supremo de funções contínuas é uma função semicontínua inferiormente, uma vez que $Mf(x) = \sup_{r>0} F_r(x)$, no qual as funções F_r são contínuas para todo $r > 0$.

Considere então uma família $\{f_i\}_{i \in I}$ de funções contínuas de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$ e defina a função f por $f(x) = \sup_{i \in I} f_i(x)$. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ qualquer, mostremos que o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) > \alpha\}$ é aberto.

Assim, seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(x_0) > \alpha$. Pela definição de supremo, existe $j \in I$ tal que $f_j(x_0) > \alpha$, e como f_j é contínua, o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n; f_j(x) > \alpha\}$ é aberto, ou seja, existe $\delta_j > 0$ tal que $f_j(x) > \alpha$ sempre que $x \in B(x_0, \delta_j)$. Daí, para todo $x \in B(x_0, \delta_j)$, tem-se que

$$f(x) = \sup_{i \in I} f_i(x) \geq f_j(x) > \alpha,$$

e portanto o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) > \alpha\}$ é aberto.

■

Teorema 3.1. *Seja f uma função mensurável em $\mathbb{R}^n$.*

(a) Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$, então $Mf(x) < \infty$ q.t.p.

(b) Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\alpha > 0$, então

$$m\left(\{x \in \mathbb{R}^n; Mf(x) > \alpha\}\right) \leq \frac{A_n}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, dy, \tag{3.2}$$

onde A_n é uma constante que depende apenas da dimensão n.

(c) Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in (1, \infty]$, então

$$\|Mf\|_p \leq C_p \|f\|_p\,, \tag{3.3}$$

onde C_p depende apenas de p e da dimensão n.

Note que o conjunto $E_f(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n; Mf(x) > \alpha\}$ é mensurável, pois Mf é uma função mensurável.

Antes de provarmos o Teorema 3.1, precisamos do seguinte resultado:

Lema 3.1. *Seja $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_N\}$ uma família de bolas em $\mathbb{R}^n$. Então existe uma constante C, dependendo apenas de n, tal que*

$$C \sum_{k=1}^{L} m(B_{i_k}) \geq m\left(\bigcup_{j=1}^{N} B_j\right),$$

para alguma subfamília disjunta $\mathcal{B}' = \{B_{j_k}\}_{k=1}^{L}$ de $\mathcal{B}$.

Demonstração. Iniciamos reordenando as bolas $B_1, \ldots, B_N$ de forma que $m(B_1) \geq m(B_2) \geq \cdots \geq m(B_N)$. Vamos construir a subfamília $\mathcal{B}' = \{B_{j_k}\}_{k=1}^{L}$ da seguinte forma: Tome $B_{j_1} = B_1$. Se B_1 intercepta todas as demais bolas em $\mathcal{B}$, então $\mathcal{B}' = \{B_1\}$. Caso contrário, tome $j_2 = \min\{j > j_1; B_j \cap B_{j_1} = \varnothing\}$, isto é, B_{j_2} é a bola de maior medida em $\mathcal{B}$ que não intercepta B_1. Analogamente, se B_{j_2} intercepta todas as demais bolas em $\mathcal{B} \setminus B_1$, então $\mathcal{B}' = \{B_{j_1}, B_{j_2}\}$. Caso contrário, escolha $j_3 = \min\{j > j_2; B_j \cap B_{j_2} = B_j \cap B_{j_1} = \varnothing\}$.

Repetindo-se este processo finitas vezes, obtemos uma subfamília disjunta $\mathcal{B}' = \{B_{j_k}\}_{k=1}^{L}$ de $\mathcal{B}$. Para cada $k = 1, \ldots, L$, considere a bola $B_{j_k}^* = B_{j_k}^*(x, 3r)$, no qual r é o raio da bola B_{j_k}. Afirmamos que $\bigcup_{j=1}^{N} B_j \subseteq \bigcup_{k=1}^{L} B_{j_k}^*$.

De fato, temos que $B_{j_k} \subset B_{j_k}^*$ para cada $k = 1, \ldots, L$. Porém, se $B_j(x_j, r_j) \in \mathcal{B}$ é uma bola que intercepta $B_{j_k}(x_{j_k}, r_{j_k})$ para algum k, segue por construção que $m(B_j) \leq m(B_{j_k})$ e

$$|x - x_{j_k}| \leq |x - x_j| + |x_j - x_{j_k}| \leq 3r,$$

para todo $x \in B_j$. Logo, $B_j \subset B_{j_k}^*$ e daí segue a afirmação. Portanto,

$$m\left(\bigcup_{j=1}^{N} B_j\right) \leq m\left(\bigcup_{k=1}^{L} B_{j_k}^*\right) \leq \sum_{k=1}^{L} m(B_{j_k}^*) = 3^n \sum_{k=1}^{L} m(B_{j_k}).$$

∎

Demonstração do Teorema 3.1. Para provarmos o item (b), vamos supor inicialmente que $m(E_f(\alpha)) < \infty$. Dado $\varepsilon > 0$, segue da regularidade interior da medida de Lebesgue que existe $K \subset E_f(\alpha)$ compacto tal que

$$m(K) \geq \frac{1}{1+\varepsilon} m(E_f(\alpha)). \tag{3.4}$$

Como $K \subset E_f(\alpha)$, então $Mf(x) > \alpha$ para cada $x \in K$, e portanto existe uma bola $B_x = B(x, r)$ tal que

$$\frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy > \alpha.$$

Note que $K \subset \bigcup_{x\in K} B_x$ e, pela compacidade de K, existe uma quantidade finita de bolas $B_1, \ldots, B_N$ em $\bigcup_{x\in K} B_x$ tais que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{N} B_j \quad \text{e} \quad \frac{1}{m(B_j)} \int_{B_j} |f(y)|\, dy > \alpha. \tag{3.5}$$

Se $\{B_{j_k}\}_{k=1}^{L}$ é a subfamília de $B_1, \ldots, B_N$ construída como na demonstração do Lema 3.1, então

$$\frac{1}{m(B_{j_k})} \int_{B_{j_k}} |f(y)|\, dy > \alpha. \tag{3.6}$$

Segue de (3.5) e (3.6) que

$$\begin{aligned} m(K) &\leq m\left(\bigcup_{j=1}^{N} B_j\right) \leq 3^n \sum_{k=1}^{L} m(B_{j_k}) \leq \frac{3^n}{\alpha} \sum_{k=1}^{L} \int_{B_{j_k}} |f(y)|\, dy \\ &= \frac{3^n}{\alpha} \int_{\bigcup_k B_{j_k}} |f(y)|\, dy \leq \frac{3^n}{\alpha} \|f\|_1 , \end{aligned}$$

e por (3.4),

$$m(E_f(\alpha)) \leq (1+\varepsilon) m(K) \leq \frac{3^n}{\alpha}(1+\varepsilon) \|f\|_1 .$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$, obtemos que

$$m(E_f(\alpha)) \leq \frac{3^n}{\alpha} \|f\|_1 .$$

Por fim, note que a desigualdade $m(K) \leq (3^n/\alpha) \|f\|_1$ não depende da escolha do compacto $K \subset E_f(\alpha)$. Pela regularidade interior da medida de Lebesgue, concluímos que

$$m(E_f(\alpha)) = \sup\{m(K); K \subset E_f(\alpha), K \text{ compacto}\} \leq \frac{3^n}{\alpha} \|f\|_1 .$$

Para o item (a), considere primeiramente o caso $p = 1$. Dada $f \in L^1$, se $S = \{x \in \mathbb{R}^n; Mf(x) = \infty\}$ então $S \subset E_f(\alpha)$ para todo $\alpha > 0$. Mostremos que $m(S) = 0$. De fato, pelo item (b),

$$m(S) \leq m(E_f(\alpha)) \leq \frac{3^n}{\alpha} \|f\|_1 .$$

Mas como a desigualdade acima vale para qualquer $\alpha > 0$, então $m(S) = 0$.

Para $f \in L^p$, $p \in [1, \infty]$, escrevemos $f = f_1 + f_2$, onde

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \begin{cases} f(x), & |f(x)| \geq 1 \\ 0, & |f(x)| < 1, \end{cases} \\ f_2(x) &= f(x) - f_1(x). \end{aligned}$$

Observe que se $|f|$ é limitada por uma constante $c > 0$, então Mf também é limitada pela mesma constante c, pois

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy \leq c \sup_{r>0} \frac{m(B)}{m(B)} = c.$$

Note que $Mf(x) \leq Mf_1(x) + Mf_2(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Assim, como $|f_2(x)| \leq 1$, então $Mf_2(x)$ é finita para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Além disso, segue da definição de f_1 que $|f_1(x)| \leq |f_1(x)|^p$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e, como $f_1 \in L^p$, então $f_1 \in L^1$. Mas pelo caso anterior, $Mf_1(x)$ é finito em quase toda parte, e portanto $Mf(x) < \infty$ q.t.p.

Provemos, por fim, o item (c). Defina, para cada $\alpha > 0$, a função de distribuição de uma função g por

$$\lambda_g(\alpha) = m(\{x \in \mathbb{R}^n; g(x) > \alpha\}).$$

Sejam $f \in L^p$, $1 < p \leq \infty$, e $\lambda_{Mf}(\alpha) = \lambda(\alpha)$ a função de distribuição de Mf. Utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo e o Teorema de Fubini, mostramos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |Mf(x)|^p\, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_0^{|Mf(x)|} \frac{d}{d\alpha} \alpha^p \, d\alpha \right] dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_0^{\infty} p\alpha^{p-1} \chi_{E_f(\alpha)}(x)\, d\alpha \right] dx \\
&= p \int_0^{\infty} \alpha^{p-1} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{E_f(\alpha)}(x)\, dx \right] d\alpha \\
&= p \int_0^{\infty} \alpha^{p-1} m(E_f(\alpha))\, d\alpha \\
&= p \int_0^{\infty} \alpha^{p-1} \lambda(\alpha)\, d\alpha.
\end{aligned}$$

Se $\alpha > 0$, defina f_1 e f_2 como

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \begin{cases} f(x), & |f(x)| \geq \alpha/2, \\ 0, & |f(x)| < \alpha/2, \end{cases} \\
f_2(x) &= f(x) - f_1(x),
\end{aligned}$$

de forma que $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$. Pela definição de $Mf(x)$,

$$Mf(x) \leq Mf_1(x) + Mf_2(x) \leq Mf_1(x) + \frac{\alpha}{2}.$$

Assim, se $Mf(x) > \alpha$, então $Mf_1(x) > \alpha/2$ e daí

$$\{x \in \mathbb{R}^n; Mf(x) > \alpha\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n; Mf_1(x) > \alpha/2\}.$$

Pelo anterior, segue que

$$m(\{x \in \mathbb{R}^n; Mf(x) > \alpha\}) \leq m(\{x \in \mathbb{R}^n; Mf_1(x) > \alpha/2\}),$$

isto é, $\lambda(\alpha) \leq \lambda_{Mf_1}(\alpha/2)$. Mais ainda, temos que $f_1 \in L^1$ pois se $A = \{x \in \mathbb{R}^n; |f(x)| \geq \alpha/2\}$, segue pela definição de f_1 que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\chi_A(x)\,dx = \|f\chi_A\|_1 \leq \|f\|_p \|\chi_A\|_q < \infty,$$

onde q é expoente conjugado de p. Aplicando o item (b) à função f_1 obtemos a desigualdade

$$\lambda_{Mf_1}(\alpha/2) = m(\{x \in \mathbb{R}^n; Mf_1(x) > \alpha/2\}) \leq \frac{A_n}{\alpha/2}\|f_1\|_1 = \frac{2A_n}{\alpha}\int_{|f(x)|>\alpha/2} |f(x)|\,dx.$$

Por fim, obtemos pelas desigualdades anteriores que

$$\begin{aligned}
\|M_f\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |Mf(x)|^p\,dx \\
&= p\int_0^\infty \alpha^{p-1}\lambda(\alpha)\,d\alpha \\
&\leq p\int_0^\infty \alpha^{p-1}\lambda_{Mf_1}(\alpha/2)\,d\alpha \\
&\leq 2A_n p\int_0^\infty \frac{\alpha^{p-1}}{\alpha}\int_{|f(x)|>\alpha/2} |f(x)|\,dx\,d\alpha \\
&= 2A_n p\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\int_0^{2|f(x)|} \alpha^{p-2}\,d\alpha\,dx \\
&= 2A_n p\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\left.\frac{\alpha^{p-1}}{p-1}\right|_0^{2|f(x)|}dx \\
&= \frac{2A_n p}{p-1}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|(2|f(x)|)^{p-1}\,dx \\
&= \frac{2^p A_n p}{p-1}\|f\|_p^p,
\end{aligned}$$

e portanto vale o item (c).

■

Corolário 3.1 (Teorema de Diferenciação de Lebesgue)**.** *Se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, então*

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)} f(y)\,dy = f(x) \;\; q.t.p. \tag{3.7}$$

Demonstração. Mostremos primeiramente que o resultado é válido para $f \in L^1$. Assim, para $f \in L^1$ e $B = B(0,1)$, definimos a função $\phi \in L^1$ por

$$\phi(x) = \frac{1}{m(B)}\chi_B(x).$$

Pela definição de ϕ, é claro que $\int_{\mathbb{R}^n}\phi(x) = 1$. Para tal ϕ, definimos ainda a função ϕ_ε por

$$\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

de forma que $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\varepsilon(x) = 1$. Mais ainda, podemos escrever a integral

$$f_\varepsilon(x) \doteq \frac{1}{m(B(x,\varepsilon))} \int_{B(x,\varepsilon)} f(y)\, dy$$

como a convolução $(\phi_\varepsilon * f)(x)$, pois

$$\begin{aligned}
(\phi_\varepsilon * f)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\phi_\varepsilon(x-y)\, dy \\
&= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy \\
&= \frac{1}{\varepsilon^n m(B)} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\chi_B\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy \\
&= \frac{1}{m(B)} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-\varepsilon y)\chi_B(y)\, dy \\
&= \frac{1}{m(B)} \int_B f(x-\varepsilon y)\, dy \\
&= \frac{1}{\varepsilon^n m(B)} \int_{B(x,\varepsilon)} f(y)\, dy \\
&= \frac{1}{m(B(x,\varepsilon))} \int_{B(x,\varepsilon)} f(y)\, dy.
\end{aligned}$$

Desta forma, segue que $f_\varepsilon \in L^1$, pois pela Desigualdade de Young,

$$\|f_\varepsilon\|_1 = \|\phi_\varepsilon * f\|_1 \le \|\phi_\varepsilon\|_1 \|f\|_1 = \|f\|_1 < \infty.$$

Agora, considere $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ uma função contínua de suporte compacto. Se $g_\varepsilon = \phi_\varepsilon * g$, vejamos que g_ε converge a g em norma L^1. Com efeito, como $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
g(x) - g_\varepsilon(x) &= g(x) - \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\varepsilon(x-y)g(y)\, dy \\
&= g(x) - \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} \phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) g(y)\, dy \\
&= g(x) - \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y)g(x-\varepsilon y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} [g(x) - g(x-\varepsilon y)]\phi(y)\, dy \\
&= \frac{1}{m(B)} \int_B g(x) - g(x-\varepsilon y)\, dy.
\end{aligned}$$

O último termo converge a zero pontualmente se $\varepsilon \to 0$, dado que $g \in C_c$ e portanto o integrando converge a zero uniformemente em B. Além disso, como $g_\varepsilon = \phi_\varepsilon * g$ também possui suporte compacto, existe $R > 0$ tal que $\operatorname{supp}(g - g_\varepsilon) \subset B(0,R)$. Pela continuidade de g e como $g \in L^1$, segue do Teorema da Convergência Dominada que g_ε também é contínua e assim $g - g_\varepsilon$ é limitada em $\overline{B(0,R)}$. Daí,

$$\|g - g_\varepsilon\|_1 = \int_{B(0,R)} |g(x) - g_\varepsilon(x)|\, dx$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sup_{x\in B(0,R)} |g(x)-g_\varepsilon(x)| m(B(0,R)) \\
&= \sup_{x\in B(0,R)} \left[\frac{1}{m(B)}\int_B g(x)-g(x-\varepsilon y)\,dy\right] m(B(0,R))
\end{aligned}
$$

que converge a zero pelo argumento anterior.

Com isto, podemos afirmar que f_ε converge a f em norma L^1. De fato, dado $\rho > 0$, existe $g \in C_c$ tal que $\|g-f\|_1 < \rho/3$. Mais ainda, sabemos do anterior que para ε suficientemente pequeno, $\|g_\varepsilon - g\| < \rho/3$, e utilizando novamente a Desigualdade de Young, concluímos que f_ε converge a f em norma L^1, pois

$$
\begin{aligned}
\|\phi_\varepsilon * f - f\|_1 &\leq \|\phi_\varepsilon * f - \phi_\varepsilon * g\|_1 + \|g-f\|_1 + \|\phi_\varepsilon * g - g\|_1 \\
&= \|\phi_\varepsilon * (f-g)\|_1 + \|g-f\|_1 + \|\phi_\varepsilon * g - g\|_1 \\
&\leq \|f-g\|_1 + \|g-f\|_1 + \|\phi_\varepsilon * g - g\|_1 \\
&< \rho.
\end{aligned}
$$

Como f_ε converge a f em norma L^1, sabemos pela Proposição 13.17 da referência [5] que existe uma subsequência $\{f_{\varepsilon_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $f_{\varepsilon_k}(x)$ converge a $f(x)$ q.t.p. Assim, para concluirmos que $f_\varepsilon(x)$ converge a $f(x)$ q.t.p., basta mostrarmos que o limite pontual existe em quase toda parte. Sem perda de generalidade, suponha que f seja uma função real e considere a função Ω_f definida como

$$
\Omega_f(x) = \limsup_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(x) - \liminf_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(x).
$$

Note que $\Omega_f(x_0) = 0$ para algum $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se, e somente se, o limite de $f_\varepsilon(x_0)$ para $\varepsilon \to 0$ existe. Vamos mostrar que $\Omega_f(x) = 0$ q.t.p. Para isto, observe que $\Omega_f(x) \leq 2Mf(x)$, pois

$$
f_\varepsilon(x) = (\phi_\varepsilon * f)(x) = \frac{1}{m(B(x,\varepsilon))}\int_{B(x,\varepsilon)} f(y)\,dy \leq Mf(x).
$$

Agora note que

$$
\{x\in\mathbb{R}^n; \Omega_f(x) > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{x\in\mathbb{R}^n; \Omega_f(x) > \frac{1}{k}\right\},
$$

e portanto,

$$
m(\{x\in\mathbb{R}^n; \Omega_f(x) > 0\}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n; \Omega_f(x) > \frac{1}{k}\right\}\right).
$$

Como $\Omega_f(x) \leq 2Mf(x)$, então

$$
\left\{x\in\mathbb{R}^n; \Omega_f(x) > \frac{1}{k}\right\} \subset \left\{x\in\mathbb{R}^n; Mf(x) > \frac{1}{2k}\right\},
$$

e pelo item (b) do Teorema 3.1,

$$
m\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n; \Omega_f(x) > \frac{1}{k}\right\}\right) \leq m\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n; Mf(x) > \frac{1}{2k}\right\}\right)
$$

$$\leq \quad A_n 2k \|f\|_1 .$$

Tomando $g \in C_c$ de forma que $\|f-g\|_1 < \rho$, obtemos para todo $x \in \mathbb{R}^n$ que

$$\Omega_f(x) \leq \Omega_{f-g}(x) + \Omega_g(x) = \Omega_{f-g}(x) \leq M_{f-g}(x),$$

uma vez que

$$\begin{aligned} \Omega_f(x) &= \limsup_{\varepsilon\to 0}(f+g-g)_\varepsilon(x) - \liminf_{\varepsilon\to 0}(f+g-g)_\varepsilon(x) \\ &\leq \limsup_{\varepsilon\to 0}(f-g)_\varepsilon(x) + \limsup_{\varepsilon\to 0} g_\varepsilon(x) - \liminf_{\varepsilon\to 0}(f-g)_\varepsilon(x) - \liminf_{\varepsilon\to 0} g_\varepsilon(x) \\ &= \Omega_{f-g}(x) + \Omega_g(x) \end{aligned}$$

e $\Omega_g(x) = 0$ para $g \in C_c$. Daí,

$$\begin{aligned} m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n; \Omega_f(x) > \frac{1}{k}\right\}\right) &\leq m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n; \Omega_{f-g}(x) > \frac{1}{k}\right\}\right) \\ &\leq 2kA_n \|f-g\|_1 \\ &< 2kA_n\rho, \end{aligned}$$

e como ρ pode ser tomado arbitrariamente pequeno, concluímos que $\Omega_f(x) = 0$ q.t.p., e portanto o corolário está provado para $f \in L^1$.

Suponha, por fim, que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e defina para cada $j \in \mathbb{N}$ a função $f_j(x) = f(x)\chi_{B_j}(x)$, onde $B_j = B(0,j)$. Então $f_j \in L^1$ para todo $j \in \mathbb{N}$, pois

$$\|f_j\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |f_j(x)|\, dx \leq \int_{B_j} |f(x)|\, dx < \infty.$$

Pelo caso anterior, para $x \in B_j$,

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{m(B(0,r))} \int_{B(0,r)} f_j(x-y)\, dy = \lim_{r\to 0} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f_j(y)\, dy = f_j(x)$$

em $\mathbb{R}^n \setminus E_j$, no qual $m(E_j) = 0$. Tomando $E = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j$, então

$$m(E) = m\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j\right) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} m(E_j) = 0,$$

e portanto

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y)\, dy = f(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$, isto é, vale (3.7).

■

3.2 Decomposição de Calderón-Zygmund

A decomposição de determinados conjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$ em cubos será fundamental para os resultados que serão apresentados no próximo capítulo. Aqui, denotamos apenas por "cubo" um conjunto fechado em $\mathbb{R}^n$ da forma

$$\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; a_1 \leq x_1 \leq b_1, \ldots, a_n \leq x_n \leq b_n\}.$$

Teorema 3.2. *Seja $F \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado e não vazio. Então existe uma coleção de cubos $\mathscr{F} = \{Q_1, Q_2, \ldots\}$ que satisfaz*

(a) $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k = \Omega = F^c$;

(b) Os cubos Q_k possuem interiores mutuamente disjuntos;

(c) $c_1 \operatorname{diam} Q_k \leq \operatorname{dist}(Q_k, F) \leq c_2 \operatorname{diam} Q_k$, *no qual c_1 e c_2 não dependem de F.*

Demonstração. Considere a malha $\mathscr{M}_0$ determinada pela grade de pontos em $\mathbb{R}^n$ com coordenadas inteiras, isto é, formada pelos cubos de lado unitário cujos vértices são pontos desta grade. Esta malha dá origem a uma cadeia infinita de malhas $\{\mathscr{M}_k\}_{-\infty}^{\infty}$, com $\mathscr{M}_k = 2^{-k}\mathscr{M}_0$. Logo, dividindo por dois cada um de seus lados, cada cubo da malha $\mathscr{M}_k$ gera 2^n novos cubos na malha $\mathscr{M}_{k+1}$. Mais ainda, cada cubo em $\mathscr{M}_k$ possui lado 2^{-k} e diâmetro $\sqrt{n}2^{-k}$, uma vez que o diâmetro de cada cubo em $\mathscr{M}_0$ é $\sqrt{n}$.

Além das malhas $\mathscr{M}_k$, consideramos também as camadas Ω_k definidas por

$$\Omega_k = \{x \in \mathbb{R}^n; c2^{-k} < \operatorname{dist}(x, F) \leq c2^{-k+1}\},$$

no qual c é uma constante positiva que será fixada no momento. Para tais camadas, afirmamos que $\Omega = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \Omega_k$. Com efeito, dado $x \in \Omega$, temos que $\operatorname{dist}(x, F) > 0$. Logo existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $0 < c2^{-m} < \operatorname{dist}(x, F) \leq c2^{-m+1}$, isto é, $x \in \Omega_m$ e portanto $\Omega \subseteq \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \Omega_k$. Por outro lado, se $x \in \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \Omega_k$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $c2^{-k_0} < \operatorname{dist}(x, F) \leq c2^{-k_0+1}$, e como $c > 0$, então $\operatorname{dist}(x, F) > 0$ e portanto $x \in \Omega$.

Faremos agora uma escolha inicial de cubos e vamos denotar a coleção resultante por $\mathscr{F}_0$. Assim, dentre os cubos de cada malha $\mathscr{M}_k$, escolhemos aqueles que possuem interseção com Ω_k, isto é,

$$\mathscr{F}_0 \doteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{Q \in \mathscr{M}_k; Q \cap \Omega_k \neq \varnothing\}.$$

Pela definição de $\mathscr{F}_0$, podemos afirmar que $\Omega = \bigcup_{Q\in\mathscr{F}_0} Q$. De fato, tomando $x \in \Omega$, então $x \in \Omega_k$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Mas também, como $x \in \mathbb{R}^n$, então $x \in Q$ para algum cubo da malha $\mathscr{M}_k$ e portanto $x \in \mathscr{F}_0$. Por outro lado, se $x \in \bigcup_{Q\in\mathscr{F}_0} Q$, então $x \in Q \cap \Omega_k$ para algum $k \in \mathbb{N}$ e $Q \in \mathscr{M}_k$, e pela primeira afirmação, $x \in \Omega$.

Mostremos agora que, com uma escolha mais apropriada de c, obtemos para todo $Q \in \mathscr{F}_0$ que

$$\operatorname{diam} Q \leq \operatorname{dist}(Q, F) \leq 4 \operatorname{diam} Q. \tag{3.8}$$

Dado $Q \in \mathscr{F}_0$, com $Q \in \mathscr{M}_k$, sabemos que $\operatorname{diam} Q = \sqrt{n}2^{-k}$, e também existe $x \in Q \cap \Omega_k$. Pela definição de Ω_k,

$$\operatorname{dist}(Q, F) \leq \operatorname{dist}(x, F) \leq c2^{-k+1},$$

e como $\operatorname{dist}(Q, F) + \operatorname{diam} Q \geq \operatorname{dist}(x, F)$, então

$$\operatorname{dist}(Q, F) \geq \operatorname{dist}(x, F) - \operatorname{diam} Q > c2^{-k} - \sqrt{n}2^{-k}.$$

Tomando $c = 2\sqrt{n}$, obtemos que

$$\operatorname{dist}(Q, F) \leq c2^{-k+1} = 2\sqrt{n}2^{-k+1} = 4 \operatorname{diam} Q,$$

e também

$$\operatorname{dist}(Q, F) \geq c2^{-k} - \sqrt{n}2^{-k} = 2\sqrt{n}2^{-k} - \sqrt{n}2^{-k} = \operatorname{diam} Q,$$

e portanto as desigualdades em (3.8) são válidas. Destas mesmas desigualdades, obtemos que os cubos em $\mathscr{F}_0$ são disjuntos de F e cobrem Ω, uma vez que $\Omega = \bigcup_{Q \in \mathscr{F}_0} Q$.

Logo, os itens (a) e (c) estão provados. No entanto, a coleção $\mathscr{F}_0$ não satisfaz o item (b), uma vez que os cubos em $\mathscr{F}_0$ não necessariamente são disjuntos. Precisamos então refinar a escolha de cubos em $\mathscr{F}_0$ eliminando aqueles que forem desnecessários. Mas pela definição de cada malha $\mathscr{M}_k$, note que se $Q_1, Q_2 \in \mathscr{F}_0$, com $Q_1 \in \mathscr{M}_{k_1}$, $Q_2 \in \mathscr{M}_{k_2}$ e $Q_1 \cap Q_2 \neq \varnothing$, então $Q_1 \subset Q_2$ ou $Q_2 \subset Q_1$. Em particular, se $k_1 \geq k_2$, então $Q_1 \subseteq Q_2$.

Tome agora um cubo $Q \in \mathscr{F}_0$ qualquer e considere o cubo maximal em $\mathscr{F}_0$ que contém Q. Por (3.8), sabemos que

$$\operatorname{diam} Q \leq \operatorname{dist}(Q, F) \leq 4 \operatorname{diam} Q, \quad \forall Q \in \mathscr{F}_0,$$

logo se $Q' \in \mathscr{F}_0$ e $Q \subset Q'$, então

$$\operatorname{diam} Q' \leq \operatorname{dist}(Q', F) \leq \operatorname{dist}(Q, F) \leq 4 \operatorname{diam} Q,$$

e assim $\operatorname{diam} Q' \leq 4 \operatorname{diam} Q$.

Mais ainda, se $Q', Q'' \in \mathscr{F}_0$ são cubos que contêm Q, então $Q \subset Q' \subset Q''$ ou $Q \subset Q'' \subset Q'$, e portanto cada cubo $Q \in \mathscr{F}_0$ possui um único cubo maximal em $\mathscr{F}_0$ que o contém. Note ainda que, pelo mesmo argumento, estes cubos maximais são disjuntos.

Considere então a coleção $\mathscr{F}$ de cubos maximais em $\mathscr{F}_0$. Então $\mathscr{F}$ satisfaz os três itens do teorema, pois

(a) $\bigcup_{Q \in \mathscr{F}} Q = \Omega$, dado que $\bigcup_{Q \in \mathscr{F}_0} Q = \Omega$;

(b) Os cubos em $\mathscr{F}$ são disjuntos;

(c) $\operatorname{diam} Q \leq \operatorname{dist}(Q, F) \leq 4 \operatorname{diam} Q$, para todo $Q \in \mathscr{F}$, uma vez que estas desigualdades valem para cubos em $\mathscr{F}_0$.

■

O resultado a seguir nos fornece uma decomposição conveniente de $\mathbb{R}^n$, dadas uma função integrável não negativa e uma constante $\alpha > 0$.

Teorema 3.3 (Decomposição de Calderón-Zygmund)**.** *Seja f uma função integrável e não negativa em $\mathbb{R}^n$ e seja α uma constante positiva. Então existe uma decomposição de $\mathbb{R}^n$ de forma que*

(a) $\mathbb{R}^n = F \cup \Omega$, com $F \cap \Omega = \varnothing$;

(b) $f(x) \leq \alpha$ q.t.p. em F;

(c) Ω é dado pela união de cubos cujos interiores são disjuntos e tais que, para cada cubo $Q_k \in \Omega$,

$$\alpha < \frac{1}{m(Q_k)} \int_{Q_k} f(x)\, dx \leq 2^n \alpha. \tag{3.9}$$

Demonstração. Iniciamos a demonstração decompondo o $\mathbb{R}^n$ em uma malha de cubos iguais cujos interiores são disjuntos e cujo diâmetro em comum é suficientemente grande de forma que

$$\frac{1}{m(Q')} \int_{Q'} f(x)\, dx \leq \alpha,$$

para todo cubo Q' nesta malha. Note que tal decomposição é possível pois, como $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e f é positiva, então $\int_{Q'} f(x)\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \|f\|_1 < \infty$.

Seja Q' um cubo fixado desta malha. Vamos dividi-lo em 2^n cubos repartindo ao meio cada um de seus lados. Seja Q'' um desses novos cubos. Temos dois casos possíveis para Q'':

Primeiro caso: $\displaystyle\frac{1}{m(Q'')} \int_{Q''} f(x)\, dx \leq \alpha.$

Segundo caso: $\displaystyle\frac{1}{m(Q'')} \int_{Q''} f(x)\, dx > \alpha.$

Se Q'' satisfaz o segundo caso, então ele não é subdividido e será um dos cubos em Ω. Para tal cubo Q'' vale a desigualdade (3.9), pois como $Q'' \subset Q'$ e f é não negativa,

$$\alpha < \frac{1}{m(Q'')} \int_{Q''} f(x)\, dx = \frac{1}{2^{-n} m(Q')} \int_{Q''} f(x)\, dx \leq \frac{1}{2^{-n} m(Q')} \int_{Q'} f(x)\, dx \leq 2^n \alpha.$$

Se Q'' satisfaz o primeiro caso, continuamos a subdivisão até que ocorra o segundo caso, se este ocorrer. Denotando por Ω a união dos cubos obtidos do segundo caso, mostremos que $f(x) \leq \alpha$ q.t.p. em $F = \Omega^c$. Com efeito, segue do Teorema de Diferenciação de Lebesgue 3.1 que

$$\lim_{\operatorname{diam} Q \to 0} \frac{1}{m(Q)} \int_Q f(y)\, dy = f(x) \quad \text{q.t.p.},$$

no qual o limite é tomado sobre todos os cubos Q que contêm x. Porém, cada um dos cubos da decomposição que possuem um ponto $x \in F$ é um cubo que satisfaz o primeiro caso, isto é,

$$\frac{1}{m(Q)} \int_Q f(x)\, dx \leq \alpha.$$

Logo, $f(x) \leq \alpha$ q.t.p. em F e também $\mathbb{R}^n = F \cup \Omega$, com $F \cap \Omega = \varnothing$, e portanto o teorema está provado.

■

Do teorema anterior obtemos o seguinte corolário:

Corolário 3.2. *Suponha f, α, F, Ω e Q_k como no teorema anterior. Então existem duas constantes A e B, dependendo apenas da dimensão n, tais que*

(a) $m(\Omega) \leq \dfrac{A}{\alpha} \|f\|_1$,

(b) $\dfrac{1}{m(Q_k)} \displaystyle\int_{Q_k} f(x)\,dx \leq B\alpha$.

Demonstração. Pelo Teorema 3.3, sabemos que

$$\alpha < \frac{1}{m(Q_k)} \int_{Q_k} f(x)\,dx \leq 2^n \alpha$$

para cada $Q_k \in \Omega$. Logo, basta tomar $B = 2^n$. E também,

$$m(\Omega) = m\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} m(Q_k) \leq \frac{1}{\alpha} \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{Q_k} f(x)\,dx = \frac{1}{\alpha} \int_{\Omega} f(x)\,dx \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_1\,,$$

o que prova o corolário para $A = 1$ e $B = 2^n$. ■

Observação 3.1. Observe que, a partir da demonstração do Teorema 3.3, não é possível concluir se os conjuntos Ω e F são abertos ou fechados. Vejamos agora uma forma alternativa de demonstrar o Teorema 3.3 de forma a obter Ω aberto e F fechado.

Assim como na demonstração, iniciamos decompondo o $\mathbb{R}^n$ em uma malha de cubos iguais, com interiores disjuntos e cujos diâmetros são suficientemente grandes de forma que

$$\frac{1}{m(Q)} \int_{Q} f(x)\,dx \leq \alpha$$

para todo cubo Q da malha.

Para cada cubo Q' nesta malha, considere o cubo expandido $(Q')^*$ contendo Q' e de mesmo centro, mas de lado dobrado. Aplicamos então o mesmo processo de subdivisão utilizado na demonstração, mas agora para os cubos expandidos, obtendo assim 2^n cubos. Seja $(Q'')^*$ um desses cubos. Obtemos assim, dois casos:

Primeiro caso: $\dfrac{1}{m((Q'')^*)} \displaystyle\int_{(Q'')^*} f(x)\,dx \leq \alpha$.

Segundo caso: $\dfrac{1}{m((Q'')^*)} \displaystyle\int_{(Q'')^*} f(x)\,dx > \alpha$.

Assim como na demonstração, se $(Q'')^*$ satisfaz o primeiro caso, continuamos a subdivisão. E se $(Q'')^*$ satisfaz o segundo caso, então $\mathring{Q}'' = int(Q'')$ será um dos cubos em Ω. Definindo Ω como a união de todo $\mathring{Q}''$ tal que $(Q'')^*$ satisfaz o segundo caso, obtemos que Ω é aberto em $\mathbb{R}^n$ e $F = \Omega^c$ é fechado. Mais ainda, $f(x) \leq \alpha$ q.t.p. em F de forma análoga à da demonstração.

Por fim, vejamos que para cada cubo $\mathring{Q}$ em Ω vale

$$\alpha < \frac{1}{m(Q^*)} \int_{Q^*} f(x)\, dx \leq 2^n \alpha. \tag{3.10}$$

Como cada cubo Q^* satisfaz o segundo caso, vale a primeira desigualdade. E como $\mathring{Q} \subset Q^*$ é um cubo de Ω, então o cubo Q' obtido no passo imediatamente anterior da decomposição é tal que $(Q')^*$ satisfaz o primeiro caso, e por isso foi subdividido. Daí, analogamente à primeira demonstração, temos que

$$\alpha < \frac{1}{m(Q^*)} \int_{Q^*} f(x)\, dx = \frac{1}{2^{-n} m((Q')^*)} \int_{Q^*} f(x)\, dx \leq 2^n \alpha,$$

e portanto vale (3.10).

Observação 3.2. O Corolário 3.2 permanece válido para Ω e F construídos como na Observação 3.1. Para o item (a), observe que cada $x \in \mathbb{R}^n$ pertence a, no máximo, 3^n cubos Q_j^*. Daí,

$$\begin{aligned} m(\Omega) &= m\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \mathring{Q}_j\right) = \sum_{j\in\mathbb{N}} m(\mathring{Q}_j) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{m(Q_j^*)}{2^n} \leq \frac{1}{2^n} \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{1}{\alpha} \int_{Q_j^*} f(x)\, dx \\ &= \frac{1}{2^n \alpha} \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\chi_{Q_j^*}(x)\, dx = \frac{1}{2^n \alpha} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} \chi_{Q_j^*}(x)\right) f(x)\, dx \\ &\leq \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{1}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \frac{A}{\alpha} \|f\|_1 . \end{aligned}$$

Para o item (b), se $Q_j^* \subset \Omega$,

$$\frac{1}{m(\mathring{Q}_j)} \int_{\mathring{Q}_j} f(x)\, dx \leq \frac{2^n}{m(Q_j^*)} \int_{Q_j^*} f(x)\, dx \leq 2^n 2^n \alpha = 2^{2n}\alpha = B\alpha,$$

e portanto o corolário permanece válido.

Note que, com a demonstração do Teorema 3.3 apresentada na Observação 3.1, podemos concluir que F é um conjunto fechado no qual $f(x) \leq \alpha$. No entanto, isso ainda não determina o conjunto F. O que determina este conjunto é o fato de que $Mf(x) \leq \alpha$ em F. Mostremos então uma outra demonstração do Corolário 3.2 sem utilizar o Teorema 3.3, e vejamos que esta nova demonstração nos fornece ainda outra vantagem: a de que os cubos em Ω estão a uma distância de F que é comparável a seus respectivos diâmetros. Sendo assim, definimos F e Ω como

$$\begin{aligned} F &= \{x \in \mathbb{R}^n; Mf(x) \leq \alpha\}, \\ \Omega &= \{x \in \mathbb{R}^n; Mf(x) > \alpha\}. \end{aligned}$$

Pelo item (b) do Teorema 3.1, temos que $m(\Omega) \leq A/\alpha \|f\|_1$. Como Mf é semi-contínua inferiormente, então F é fechado. Utilizando então a decomposição do Teorema 3.2, podemos escolher cubos Q_k tais que $\Omega = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k$ e cujos diâmetros satisfazem

$$\operatorname{diam} Q_k \leq \operatorname{dist}(Q_k, F) \leq 4 \operatorname{diam} Q_k.$$

Seja Q_k um desses cubos e considere $p_k \in F$ de forma que

$$\operatorname{dist}(F, Q_k) = \operatorname{dist}(p_k, Q_k).$$

Seja B_k a menor bola cujo centro é p_k e que contém o interior do cubo Q_k. Defina então γ_k por

$$\gamma_k = \frac{m(B_k)}{m(Q_k)}.$$

Afirmação: $\gamma_k \leq B$, onde B é uma constante que não depende do índice k. Com efeito, se r_k é o raio da bola B_k e se l_k é o lado do cubo Q_k, então $m(B_k) = c(r_k)^n$, $m(Q_k) = (l_k)^n$ e $r_k \leq \operatorname{dist}(p_k, Q_k) + \operatorname{diam} Q_k \leq 5 \operatorname{diam} Q_k$. Daí,

$$\frac{m(B_k)}{m(Q_k)} = \frac{c(r_k)^n}{(l_k)^n} \leq \frac{5^n c(\operatorname{diam} Q_k)^n}{(l_k)^n} = \frac{5^n c(l_k\sqrt{n})^n}{(l_k)^n} = 5^n c\sqrt{n}^n = B.$$

Agora, como $p_k \in F$, então

$$\begin{aligned} \alpha &\geq Mf(p_k) \\ &= \sup_{r>0} \frac{1}{m(B(p_k, r))} \int_{B(p_k,r)} |f(x)|\, dx \\ &\geq \frac{1}{m(B_k)} \int_{B_k} f(x)\, dx \\ &\geq \frac{1}{\gamma_k m(Q_k)} \int_{Q_k} f(x)\, dx. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{1}{m(Q_k)} \int_{Q_k} f(x)\, dx \leq \alpha\gamma_k \leq \alpha B,$$

o que mostra o Corolário 3.2.

3.3 Interpolação em $L^p(\mathbb{R}^n)$

Vamos apresentar nesta seção um teorema de interpolação em espaços $L^p(\mathbb{R}^n)$ que nos garante que, sob algumas hipóteses, se uma transformação satisfaz uma condição “fraca” para $p = 1$ e $p = r$, então esta transformação satisfaz uma condição “forte” para todo $1 < p < r$. Para isso, vejamos antes algumas definições.

Definição 3.3. *Seja $T : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p, q \leq \infty$. Dizemos que T é do tipo (p, q) se*

$$\|Tf\|_q \leq A \|f\|_p , \tag{3.11}$$

onde A é uma constante que não depende da função f. E dizemos que T é do tipo fraco (p, q), para $q < \infty$ e $\alpha > 0$, se

$$m(\{x \in \mathbb{R}^n; |Tf(x)| > \alpha\}) \leq \left(\frac{A \|f\|_p}{\alpha} \right)^q , \tag{3.12}$$

onde A não depende de f e de α. Se $q = \infty$, dizemos que T é do tipo fraco (p, q) se T é do tipo (p, q).

Note que, pela definição anterior, toda transformação T do tipo (p, q) também é do tipo fraco (p, q). De fato, se $X = \{x \in \mathbb{R}^n; |Tf(x)| > \alpha\}$, temos que

$$\alpha^q m(X) \;=\; \alpha^q \int_X 1^q \, dx \leq \alpha^q \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|Tf(x)|^q}{\alpha^q} \, dx = \|Tf\|_q^q \leq A^q \|f\|_p^q ,$$

e portanto T é do tipo fraco (p, q).

Proposição 3.3. *Sejam $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$. Para todo $p_1 < p < p_2$, temos que*

$$L^p(\mathbb{R}^n) \subset L^{p_1}(\mathbb{R}^n) + L^{p_2}(\mathbb{R}^n),$$

no qual

$$L^{p_1}(\mathbb{R}^n) + L^{p_2}(\mathbb{R}^n) \doteq \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}; f = f_1 + f_2, \text{ com } f_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \text{ e } f_2 \in L^{p_2}(\mathbb{R}^n)\}.$$

Demonstração. Para $p_1 < p < p_2$, seja $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $\gamma > 0$ uma constante fixada. Definimos f_1 e f_2 como

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \begin{cases} f(x), & |f(x)| > \gamma \\ 0, & |f(x)| \leq \gamma \end{cases} \\ f_2(x) &= \begin{cases} f(x), & |f(x)| \leq \gamma \\ 0, & |f(x)| > \gamma. \end{cases} \end{aligned}$$

Vejamos que $f_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ e $f_2 \in L^{p_2}(\mathbb{R}^n)$. Com efeito, como $p_1 < p$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)|^{p_1} \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)|^p |f_1(x)|^{p_1 - p} \, dx \\ &= \int_{|f(x)| > \gamma} |f(x)|^p |f(x)|^{p_1 - p} \, dx \\ &\leq \gamma^{p_1 - p} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx < \infty. \end{aligned}$$

Analogamente, como $p_2 > p$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_2(x)|^{p_2} \, dx \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} |f_2(x)|^p |f_2(x)|^{p_2 - p} \, dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{|f(x)|\leq\gamma} |f(x)|^p |f(x)|^{p_2-p}\, dx \\
&\leq \gamma^{p_2-p} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, dx < \infty.
\end{aligned}
$$

Logo, $f = f_1 + f_2$, com $f_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ e $f_2 \in L^{p_2}(\mathbb{R}^n)$. ■

Teorema 3.4 (Teorema de Interpolação). *Sejam $1 < r \leq \infty$ e T uma aplicação de $L^1(\mathbb{R}^n) + L^r(\mathbb{R}^n)$ ao espaço das funções mensuráveis em $\mathbb{R}^n$. Suponha que T seja sub-aditiva, isto é, para quaisquer $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n) + L^r(\mathbb{R}^n)$ vale*

$$
|T(f+g)(x)| \leq |Tf(x)| + |Tg(x)|, \tag{3.13}
$$

e também que T seja do tipo fraco $(1,1)$ e do tipo fraco (r,r), ou seja,

$$
m\{x \in \mathbb{R}^n; |Tf(x)| > \alpha\} \leq \frac{A_1}{\alpha} \|f\|_1, \quad f \in L^1(\mathbb{R}^n), \tag{3.14}
$$

$$
m\{x \in \mathbb{R}^n; |Tf(x)| > \alpha\} \leq \left(\frac{A_r}{\alpha} \|f\|_r\right)^r, \quad f \in L^r(\mathbb{R}^n) \text{ e } r < \infty. \tag{3.15}
$$

Se $r = \infty$, consideramos que T é do tipo (r,r). Então,

$$
\|Tf\|_p \leq A_p \|f\|_p, \quad f \in L^p(\mathbb{R}^n), \tag{3.16}
$$

para todo $1 < p < r$, no qual A_p depende apenas de A_1, A_r, p e r.

Demonstração. O caso $r = \infty$ segue de forma análoga à demonstração do Teorema 3.1, e portanto consideramos apenas o caso $r < \infty$. Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < r$. Vamos estimar a função de distribuição $\lambda(\alpha)$ dada por $\lambda(\alpha) = m\{x \in \mathbb{R}^n; |Tf(x)| > \alpha\}$. Para isso, fixe $\alpha > 0$. Utilizando a mesma decomposição feita na Proposição 3.3 para $\gamma = \alpha$, obtemos $f = f_1 + f_2$, com $f_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $f_2 \in L^r(\mathbb{R}^n)$. Como T satisfaz (3.13), temos

$$
\{x \in \mathbb{R}^n; |Tf(x)| > \alpha\} \subset \left\{x \in \mathbb{R}^n; |Tf_1(x)| > \frac{\alpha}{2}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R}^n; |Tf_2(x)| > \frac{\alpha}{2}\right\},
$$

e assim

$$
\begin{aligned}
\lambda(\alpha) &= m(\{x \in \mathbb{R}^n; |Tf(x)| > \alpha\}) \\
&\leq m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n; |Tf_1(x)| > \frac{\alpha}{2}\right\}\right) + m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n; |Tf_2(x)| > \frac{\alpha}{2}\right\}\right).
\end{aligned}
$$

Do anterior, e pelas hipóteses (3.14) e (3.15), temos

$$
\begin{aligned}
\lambda(\alpha) &\leq \frac{A_1}{\alpha/2} \|f_1\|_1 + \left(\frac{A_r}{\alpha/2} \|f_2\|_r\right)^r \\
&= \frac{2A_1}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)|\, dx + \frac{(2A_r)^r}{\alpha^r} \int_{\mathbb{R}^n} |f_2(x)|^r\, dx \\
&= \frac{2A_1}{\alpha} \int_{|f(x)|>\alpha} |f(x)|\, dx + \frac{(2A_r)^r}{\alpha^r} \int_{|f(x)|\leq\alpha} |f(x)|^r\, dx.
\end{aligned}
$$

Pela demonstração do Teorema 3.1, sabemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p \, dx = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \lambda(\alpha) \, d\alpha,$$

logo,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p \, dx = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \lambda(\alpha) \, d\alpha \\
\leq \;& p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \left[\frac{2A_1}{\alpha} \int_{|f(x)|>\alpha} |f(x)| \, dx + \frac{(2A_r)^r}{\alpha^r} \int_{|f(x)|\leq\alpha} |f(x)|^r \, dx \right] d\alpha \\
= \;& p \int_0^\infty \frac{2A_1 \alpha^{p-1}}{\alpha} \int_{|f(x)|>\alpha} |f(x)| \, dx \, d\alpha + p \int_0^\infty \frac{(2A_r)^r \alpha^{p-1}}{\alpha^r} \int_{|f(x)|\leq\alpha} |f(x)|^r \, dx \, d\alpha \\
= \;& I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Calculando I_1 e I_2 separadamente, vemos que

$$\begin{aligned}
I_1 &= 2A_1 p \int_0^\infty \frac{\alpha^{p-1}}{\alpha} \int_{|f(x)|>\alpha} |f(x)| \, dx \, d\alpha \\
&= 2A_1 p \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \alpha^{p-2} |f(x)| \chi_{\{|f(x)|>\alpha\}}(x) \, dx \, d\alpha \\
&= 2A_1 p \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \int_0^{|f(x)|} \alpha^{p-2} \, d\alpha \, dx \\
&= 2A_1 p \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)||f(x)|^{p-1}}{p-1} \, dx \\
&= \frac{2A_1 p}{p-1} \|f\|_p^p ,
\end{aligned}$$

uma vez que $p > 1$. E como $1 < p < r$, segue analogamente que

$$\begin{aligned}
I_2 &= (2A_r)^r p \int_0^\infty \alpha^{p-1-r} \int_{|f(x)|\leq\alpha} |f(x)|^r \, dx \, d\alpha \\
&= (2A_r)^r p \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^r \int_{|f(x)|}^\infty \alpha^{p-1-r} \, d\alpha \, dx \\
&= \frac{-(2A_r)^r p}{p-r} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^r |f(x)|^{p-r} \, dx \\
&= \frac{(2A_r)^r p}{r-p} \|f\|_p^p .
\end{aligned}$$

Por fim, obtemos que

$$\|Tf\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p \, dx \leq I_2 + I_2 = \left[\frac{2A_1 p}{p-1} + \frac{(2A_r)^r p}{r-p} \right] \|f\|_p^p ,$$

e isto implica que

$$\|Tf\|_p \leq A_p \|f\|_p ,$$

no qual $A_p = \left[\frac{2A_1 p}{p-1} + \frac{(2A_r)^r p}{r-p} \right]^{\frac{1}{p}}$. Portanto, T é do tipo (p, p) para $1 < p < r$.

■

Capítulo 4

Operadores Integrais Singulares

O estudo de integrais singulares tem se desenvolvido graças aos trabalhos dos matemáticos Calderón e Zygmund, se mostrado cada vez mais relevante em algumas áreas da Análise, como o estudo de Equações Diferenciais Parciais. Nosso objetivo neste capítulo será o estudo de algumas propriedades de operadores integrais singulares dados pela convolução com uma função K, denominada núcleo, assim como as implicações que as propriedades deste núcleo podem ter sobre o operador.

4.1 Integrais Singulares e Valor Principal

Dizemos que um operador T é uma integral singular, ou um operador integral singular, se T pode ser expresso como

$$(Tf)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)f(y)\,dy,$$

no qual o núcleo K é uma função singular no conjunto em que $x = y$.

Aqui, nosso interesse está no estudo de integrais singulares determinadas pela convolução com o núcleo K, que é singular na origem e tal que $|K(x)| \leq C|x|^{-n}$, e que são determinadas pelo limite de integrais truncadas, definidas como

$$T_\varepsilon(f)(x) = \int_{|y|\geq\varepsilon} f(x-y)K(y)\,dy.$$

Denominamos o limite das integrais truncadas acima por valor principal de K, denotado por

$$\text{v. p.}\, K(f)(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|y|\geq\varepsilon} f(x-y)K(y)\,dy.$$

Assim, uma integral singular determinada pelo limite acima é chamada de integral singular de valor principal.

O resultado a seguir não trata diretamente de operadores integrais singulares de valor principal. No entanto, será de grande importância para o estudo dos demais resultados a respeito destes operadores.

Teorema 4.1. *Seja $K \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e suponha que* *(a) A transformada de Fourier de K é essencialmente limitada, isto é,*

$$|\hat{K}(x)| \leq B \ q.t.p. \tag{4.1}$$

(b) K satisfaz a condição de Hörmander, dada por

$$\int_{|x|\geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)|\, dx \leq B, \quad |y| > 0. \tag{4.2}$$

Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, definimos

$$(Tf)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)\, dy. \tag{4.3}$$

Então para $1 < p < \infty$, existe uma constante A_p tal que

$$\|Tf\|_p \leq A_p \|f\|_p, \tag{4.4}$$

no qual A_p depende apenas de p, B e da dimensão n.

Mais ainda, como $L^1 \cap L^p$ é denso em L^p, temos por continuidade que é possível estender T a todo L^p, $1 < p < \infty$.

Demonstração. Vamos dividir a demonstração em três passos:

Primeiro passo: Mostremos que T é do tipo fraco $(2,2)$. Para isso, considere $f \in L^1 \cap L^2$. Como $Tf = K * f$, então pela Desigualdade de Young $Tf \in L^2(\mathbb{R}^n)$, uma vez que $K \in L^2$ e $f \in L^1$. Aplicando a transformada de Fourier, obtemos que

$$(Tf)\widehat{\ }(y) = \hat{K}(y)\hat{f}(y).$$

Pelo Teorema de Parseval-Plancherel e pelo item (a), segue que

$$\|(Tf)\|_2 = \left\|(Tf)\widehat{\ }\right\|_2 = \|\hat{K}\hat{f}\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{K}|^2|\hat{f}|^2(x)\, dx\right)^{1/2} \leq B\|\hat{f}\|_2 = B\|f\|_2.$$

Do anterior, T é um operador linear e contínuo, e portanto possui extensão única em todo L^2 de forma que a desigualdade anterior ainda seja válida. Logo, T é um operador do tipo $(2,2)$, e em particular do tipo fraco $(2,2)$, isto é,

$$m(\{x \in \mathbb{R}^n; |Tf(x)| > \alpha\}) \leq \frac{B^2}{\alpha^2} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2\, dx, \tag{4.5}$$

para toda $f \in L^2$.

Segundo passo: Mostremos que T é do tipo fraco $(1,1)$, isto é, que existe uma constante C, dependendo apenas de B e n, tal que para toda $f \in L^1$,

$$m(\{x \in \mathbb{R}^n; |Tf(x)| > \alpha\}) \leq \frac{C}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx. \tag{4.6}$$

Dada $f \in L^1$, vamos utilizar o Teorema de Decomposição de Calderón-Zygmund para decompô-la em $f = b + g$ convenientemente de forma que a parte "boa" g pertença a L^2 e a parte "ruim" b ainda esteja em L^1. Para isso, fixamos $\alpha > 0$ e aplicamos o Corolário 3.2. Assim, temos que $\mathbb{R}^n = F \cup \Omega$, com $F \cap \Omega = \varnothing$, $|f(x)| \leq \alpha$ q.t.p. em F e $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$, no qual os interiores de Q_j são mutuamente disjuntos. Mais ainda, valem

$$m(\Omega) \leq \frac{A}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx, \tag{4.7}$$

$$\frac{1}{m(Q_j)} \int_{Q_j} |f(x)|\, dx \leq C\alpha. \tag{4.8}$$

Definimos então a função g por

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in F, \\ \\ \dfrac{1}{m(Q_j)} \displaystyle\int_{Q_j} f(y)\, dy, & x \in Q_j. \end{cases}$$

Como $f = g + b$, temos que $b(x) = 0$ para todo $x \in F$ e, para cada cubo Q_j,

$$\int_{Q_j} b(x)\, dx = 0,$$

pois

$$\begin{aligned} \int_{Q_j} b(x)\, dx &= \int_{Q_j} f(x)\, dx - \int_{Q_j} g(x)\, dx \\ &= \int_{Q_j} f(x)\, dx - \int_{Q_j} \left[\frac{1}{m(Q_j)} \int_{Q_j} f(y)\, dy \right] dx \\ &= \int_{Q_j} f(x)\, dx - m(Q_j) \left[\frac{1}{m(Q_j)} \int_{Q_j} f(y)\, dy \right] = 0. \end{aligned}$$

Agora, como $Tf = Tg + Tb$, segue que

$$\begin{aligned} & m\left(\{x \in \mathbb{R}^n; |Tf(x)| > \alpha\}\right) \\ \leq\ & m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n; |Tg(x)| > \frac{\alpha}{2}\right\}\right) + m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n; |Tb(x)| > \frac{\alpha}{2}\right\}\right). \end{aligned}$$

É suficiente, portanto, estabelecer para os dois termos da direita desigualdades análogas à desigualdade (4.6). A estimativa para Tg será uma consequência da desigualdade (4.5) se mostrarmos que $g \in L^2$. Com efeito, observe que

$$\begin{aligned} \|g\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^2\, dx \\ &= \int_F |g(x)|^2\, dx + \int_\Omega |g(x)|^2\, dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_F |f(x)|^2\,dx + \int_\Omega |g(x)|^2\,dx \\
&\leq \int_F \alpha|f(x)|\,dx + \sum_{j=1}^{\infty}\int_{Q_j}\left|\frac{1}{m(Q_j)}\int_{Q_j} f(y)\,dy\right|^2 dx \\
&\leq \alpha\,\|f\|_1 + C^2\alpha^2 m(\Omega) \\
&\leq \alpha\,\|f\|_1 + C^2\alpha^2\left(\frac{A}{\alpha}\,\|f\|_1\right) \\
&= \alpha\,\|f\|_1\,(1+C^2A) < \infty.
\end{aligned}
$$

Logo, $g \in L^2$. Aplicando a desigualdade (4.5) obtida no primeiro passo, obtemos a estimativa desejada para Tg:

$$
\begin{aligned}
m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n; |Tg(x)| > \frac{\alpha}{2}\right\}\right) &\leq \frac{B^2}{\alpha^2}\,\|g\|_2^2 \\
&\leq \frac{B^2}{\alpha^2}\alpha(1+C^2A)\,\|f\|_1 \\
&= \frac{B^2(1+C^2A)}{\alpha}\,\|f\|_1 \\
&= \frac{C_1}{\alpha}\,\|f\|_1\,. \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

Agora, definimos para cada $j \in \mathbb{N}$ as funções

$$
b_j(x) = \begin{cases} b(x), & x \in Q_j, \\ 0, & x \notin Q_j. \end{cases}
$$

Note que a igualdade $b(x) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j(x)$ vale pontualmente, uma vez que os interiores dos cubos Q_j são mutuamente disjuntos.

Afirmação 1: $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ converge a b em norma L^1.

Com efeito, sabemos por definição que

$$
g(x) = \frac{1}{m(Q_j)}\int_{Q_j} f(y)\,dy
$$

em Q_j, e como $f = g + b$, então

$$
\begin{aligned}
b_j(x) &= \chi_{Q_j}(x)\left[f(x) - \frac{1}{m(Q_j)}\int_{Q_j} f(y)\,dy\right] \\
&= \chi_{Q_j}(x)f(x) - \frac{\chi_{Q_j}(x)}{m(Q_j)}\int_{Q_j} f(y)\,dy
\end{aligned}
$$

para cada $x \in Q_j$, $j \in \mathbb{N}$. Tomando a soma até um natural $N \in \mathbb{N}$, obtemos

$$
\sum_{j=1}^{N} b_j(x) = \sum_{j=1}^{N} \chi_{Q_j}(x)f(x) - \sum_{j=1}^{N} \frac{\chi_{Q_j}(x)}{m(Q_j)}\int_{Q_j} f(y)\,dy,
$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{j=1}^{N} b_j - b\right\|_1 &= \left\|\sum_{j=N+1}^{\infty} b_j\right\|_1 \\
&= \left\|\sum_{j=N+1}^{\infty} \chi_{Q_j} f - \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{\chi_{Q_j}}{m(Q_j)} \int_{Q_j} f(y)\, dy\right\|_1 \\
&\leq \left\|\sum_{j=N+1}^{\infty} \chi_{Q_j} f\right\|_1 + \left\|\sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{\chi_{Q_j}}{m(Q_j)} \int_{Q_j} f(y)\, dy\right\|_1 \\
&= I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Para I_1, o Teorema da Convergência Dominada garante que

$$I_1 = \left\|\sum_{j=N+1}^{\infty} \chi_{Q_j} f\right\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \sum_{j=N+1}^{\infty} \chi_{Q_j}(x)\, dx \to 0$$

se $N \to \infty$, uma vez que $f \in L^1$ e

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} \chi_{Q_j}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{Q_j}(x) - \sum_{j=1}^{N} \chi_{Q_j}(x) = \chi_{\Omega}(x) - \chi_{\bigcup\limits_{j=1}^{N} Q_j}(x) \to 0$$

se $N \to \infty$.

Para I_2, temos que

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{\chi_{Q_j}}{m(Q_j)} \int_{Q_j} f(x)\, dx\right\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{\chi_{Q_j}(y)}{m(Q_j)} \left|\int_{Q_j} f(x)\, dx\right| dy \\
&= \int_{\bigcup\limits_{N+1}^{\infty} Q_j} \frac{1}{m(Q_j)} \left|\int_{Q_j} f(x)\, dx\right| dy \\
&= \sum_{j=N+1}^{\infty} \int_{Q_j} \frac{1}{m(Q_j)} \left|\int_{Q_j} f(x)\, dx\right| dy \\
&= \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{1}{m(Q_j)} \left|\int_{Q_j} f(x)\, dx\right| \int_{Q_j} dy \\
&= \sum_{j=N+1}^{\infty} \left|\int_{Q_j} f(x)\, dx\right| \\
&\leq \sum_{j=N+1}^{\infty} \int_{Q_j} |f(x)|\, dx \\
&= \int_{\bigcup\limits_{N+1}^{\infty} Q_j} |f(x)|\, dx
\end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \sum_{j=N+1}^{\infty} \chi_{Q_j}(x)\, dx \to 0$$

se $N \to \infty$, pelo mesmo argumento utilizado para I_2. Logo, $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ converge a b em norma L^1 e portanto a Afirmação 1 está provada.

Obtemos como consequência da Afirmação 1 que $Tb(x) = \sum_{j=1}^{\infty} Tb_j(x)$ e $T\left(\sum_{j=1}^{N} b_j\right)$ converge a Tb em norma L^1, pois pela Desigualdade de Young,

$$\begin{aligned}
\left\| T\left(\sum_{j=1}^{N} b_j\right) - Tb \right\|_1 &= \left\| K * \left(\sum_{j=1}^{N} b_j\right) - K * b \right\|_1 = \left\| K * \left(\sum_{j=1}^{N} b_j - b\right) \right\|_1 \\
&\leq \|K\|_2 \left\| \sum_{j=1}^{N} b_j - b \right\|_1 \to 0.
\end{aligned}$$

Para a estimativa de Tb, faremos a seguinte construção. Para cada cubo Q_j, considere o cubo Q_j^* de mesmo centro y_j, mas expandido $4\sqrt{n}$ vezes e contendo Q_j. Se $\Omega^* = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j^*$, então $\Omega \subset \Omega^*$ e $m(\Omega^*) \leq (4\sqrt{n})^n m(\Omega)$. E se $F^* = (\Omega^*)^c$, então $F^* \subset F$. Agora, para cada $x \notin Q_j^*$, temos que

$$|x - y_j| \geq 2|y - y_j|, \tag{4.10}$$

para todo $y \in Q_j$, pois se l_j e l_j^* denotam os lados dos cubos Q_j e Q_j^*, respectivamente, então

$$|x - y_j| \geq \frac{l_j^*}{2} \geq \frac{4\sqrt{n} l_j}{2} = 2\sqrt{n} l_j = 2 \operatorname{diam} Q_j \geq 2|y - y_j|.$$

Pela definição de T, temos que

$$\begin{aligned}
Tb_j(x) &= \int_{Q_j} K(x - y) b_j(y)\, dy \qquad (4.11)\\
&= \int_{Q_j} [K(x - y) - K(x - y_j)] b_j(y)\, dy, \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

pois

$$\int_{Q_j} K(x - y_j) b_j(y)\, dy = K(x - y_j) \int_{Q_j} b_j(y)\, dy = 0.$$

Agora, de (4.12) e pelo Teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned}
\int_{F^*} |Tb(x)|\, dx &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{x \notin Q_j^*} |Tb_j(x)|\, dx \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{x \notin Q_j^*} \int_{Q_j} |K(x - y) - K(x - y_j)||b(y)|\, dy\, dx
\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{Q_j} \left[\int_{x \notin Q_j^*} |K(x-y) - K(x-y_j)| \, dx \right] |b(y)| \, dy.$$

Mas por (4.10), sabemos que $|x - y_j| \geq 2|y - y_j|$ para $x \notin Q_j^*$ e $y \in Q_j$. Logo, segue pela hipótese (b) que

$$\int_{x \notin Q_j^*} |K(x-y) - K(x-y_j)| \, dx \leq \int_{|x'| \geq 2|y'|} |K(x'-y') - K(x')| \, dx' \leq B,$$

no qual $y' = y - y_j$ e $x' = x - y_j$. Do anterior, e pelas igualdades em (4.7) e (4.8), temos

$$\begin{aligned}
\int_{F^*} |Tb(x)| \, dx &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{Q_j} \left[\int_{x \notin Q_j^*} |K(x-y) - K(x-y_j)| \, dx \right] |b(y)| \, dy \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} B \int_{Q_j} |b(y)| \, dy \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} B \int_{Q_j} |f(y)| + |g(y)| \, dy \\
&\leq B \|f\|_1 + B \sum_{j=1}^{\infty} \int_{Q_j} |g(y)| \, dy \\
&= B \|f\|_1 + B \sum_{j=1}^{\infty} \int_{Q_j} \left| \frac{1}{m(Q_j)} \int_{Q_j} f(x) \, dx \right| dy \\
&\leq B \|f\|_1 + B \sum_{j=1}^{\infty} \int_{Q_j} \left(\frac{1}{m(Q_j)} \int_{Q_j} |f(x)| \, dx \right) dy \\
&\leq B \|f\|_1 + BC\alpha m(\Omega) \\
&\leq B \|f\|_1 + BCA \|f\|_1 \\
&= C_2 \|f\|_1 .
\end{aligned}$$

Assim, para $X = \{x \in F^*; |Tb(x)| > \alpha/2\}$, vale a desigualdade $1 < (2/\alpha)|Tb(x)|$ sempre que $x \in X$, e daí temos a estimativa

$$m(X) = \int_X 1 \, dx \leq \int_X \frac{2|Tb(x)|}{\alpha} \, dx \leq \frac{2}{\alpha} \int_{F^*} |Tb(x)| \, dx \leq \frac{C_3}{\alpha} \|f\|_1 .$$

E por outro lado, sabemos pelo Teorema 3.3 e pela Observação feita em 3.2 que

$$\alpha < \frac{1}{m(Q_j^*)} \int_{Q_j^*} f(x) \, dx,$$

e isso implica que

$$m(\Omega^*) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} m(Q_j^*)$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{1}{\alpha} \int_{Q_j^*} f(x)\,dx \\
&= \frac{1}{\alpha} \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\chi_{Q_j^*}(x)\,dx \\
&= \frac{1}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} \chi_{Q_j^*}(x) \right) f(x)\,dx \\
&\leq \frac{3^n}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx \\
&= \frac{C_4}{\alpha} \|f\|_1 .
\end{aligned}
$$

Do anterior, obtemos as desigualdades $m(\{x \in F^*; |Tb(x)| > \alpha/2\}) \leq (C_3/\alpha)\|f\|_1$ e $m((F^*)^c) = m(\Omega^*) \leq (C_4/\alpha)\|f\|_1$, e então

$$
m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n; |Tb(x)| > \frac{\alpha}{2}\right\}\right) \leq \frac{C_5}{\alpha}\|f\|_1 . \tag{4.13}
$$

Mas por (4.9), sabemos que $m(\{x \in \mathbb{R}^n; |Tg(x)| > (\alpha/2)\}) \leq (C_1/\alpha)\|f\|_1$, e portanto podemos concluir que

$$
m(\{x \in \mathbb{R}^n; |Tf(x)| > \alpha\}) \leq \frac{C}{\alpha}\|f\|_1 , \tag{4.14}
$$

o que mostra que T é do tipo fraco $(1,1)$.

Terceiro passo: Para concluir o teorema, vamos utilizar os dois passos anteriores e as relações de dualidade dos espaços L^p. Temos assim três casos:

(i) Para $p = 2$, sabemos pelo primeiro passo que T é do tipo $(2,2)$.

(ii) Para $1 < p < 2$, sabemos pelo Teorema 3.4 de interpolação em $L^p(\mathbb{R}^n)$ que T é do tipo (p,p) para todo $1 < p < 2$, uma vez que T é linear e é do tipo fraco $(1,1)$ e tipo fraco $(2,2)$.

(iii) Se $2 < p < \infty$ e q é seu expoente conjugado, então $q < 2$. E como $p \neq \infty$, então $1 < q < 2$, e portanto o teorema está provado para $L^q(\mathbb{R}^n)$. Utilizaremos agora a seguinte afirmação:

Afirmação 2: Se ψ é uma função localmente integrável e se

$$
\sup\left\{ \left| \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\varphi(x)\,dx \right| ; \varphi \in C_c(\mathbb{R}^n), \|\varphi\|_q \leq 1 \right\} = A < \infty, \tag{4.15}
$$

então $\psi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $\|\psi\|_p = A$.

Com efeito, considere o funcional λ_ψ definido por

$$
\lambda_\psi(\varphi) \doteq \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\varphi(x)\,dx, \quad \varphi \in C_c(\mathbb{R}^n).
$$

Note que λ_ψ está bem definido, pois $\psi \in L^1_{loc}$. É evidente que λ_ψ é linear. Além disso, obtemos pela hipótese (4.15) que, para toda $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ não identicamente nula,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) \frac{\varphi(x)}{\|\varphi\|_q} \, dx \right| \leq A,$$

e portanto $|\lambda_\psi(\varphi)| \leq A \|\varphi\|_q$, ou seja, λ_ψ é contínuo em $C_c(\mathbb{R}^n)$. Mas como $C_c(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^q(\mathbb{R}^n)$, o funcional λ_ψ pode ser estendido a um funcional linear $\tilde{\lambda}_\psi$ contínuo em todo $L^q(\mathbb{R}^n)$, isto é,

$$|\tilde{\lambda}_\psi(\varphi)| \leq A \|\varphi\|_q \,,$$

para toda $\varphi \in L^q(\mathbb{R}^n)$, e portanto $\tilde{\lambda}_\psi \in (L^q)^*$, dual de L^q. Mas pelo Teorema de Representação de Riesz, existe uma única $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, no qual p é expoente conjugado de q, tal que

$$\tilde{\lambda}_\psi(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) \, dx,$$

para toda $\varphi \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Mas como

$$\tilde{\lambda}_\psi(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\varphi(x) \, dx$$

em $C_c(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f - \psi)(x)\varphi(x) \, dx = 0$$

para toda $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$, e portanto $f(x) = \psi(x)$ q.t.p. Como $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, segue que $\psi \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Mas novamente pelo Teorema de Representação de Riesz, $\|\tilde{\lambda}_\psi\|_{(L^q)^*} = \|f\|_p = \|\psi\|_p$, no qual

$$\|\tilde{\lambda}_\psi\|_{(L^q)^*} = \sup \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\varphi(x) \, dx \right| ; \varphi \in L^q(\mathbb{R}^n), \|\varphi\|_q \leq 1 \right\} = A,$$

uma vez que a integral acima está bem definida para $\psi \in L^p$ e $\varphi \in L^q$ e, por hipótese, o supremo acima vale A quando tomado sobre funções em um subespaço denso de L^q. Logo, $\|\psi\|_p = A$, e a Afirmação 2 está provada.

Considere agora $f \in L^1 \cap L^p$, $2 < p < \infty$, e $\varphi \in C_c$ tal que $\|\varphi\|_q \leq 1$. Como $K \in L^2$, temos pela escolha de f e de φ que a integral dupla

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} K(x - y) f(y) \varphi(x) \, dx \, dy$$

converge absolutamente. De fato, utilizando a Desigualdade de Hölder,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |K(x - y) f(y) \varphi(x)| \, dx \, dy \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |K(x - y)||\varphi(x)| \, dx \right) dy$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |K(-(y-x))||\varphi(x)|\, dx \right) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|(|\check{K}| * |\varphi|)(y)\, dy \\
&\leq \left\| |\check{K}| * |\varphi| \right\|_\infty \|f\|_1 < \infty,
\end{aligned}
$$

no qual $\left\| |\check{K}| * |\varphi| \right\|_\infty \leq \left\| \check{K} \right\|_2 \|\varphi\|_2 < \infty$ pela Desigualdade de Young.

Portanto, o valor da integral dupla acima é

$$
I = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)\varphi(x)\, dx \right) dy.
$$

Mas note que o resultado do teorema é válido para $1 < q < 2$ considerando-se o núcleo $\check{K}$ e com mesma constante A_q, isto é, se $Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \check{K}(x-y)f(y)\, dy$ e $\check{K}$ satisfaz as hipóteses (a) e (b), então $\|Tf\|_q \leq A_q \|f\|_q$.

Daí obtemos que $K * \varphi \in L^q$, pois

$$
(K * \varphi)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)\varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \check{K}(y-x)\varphi(x)\, dx = T\varphi(y),
$$

no qual $\varphi \in C_c$, $\|\varphi\|_q \leq 1$ e $\|T\varphi\|_q \leq A_q \|\varphi\|_q \leq A_q < \infty$.

Do anterior e pela Desigualdade de Hölder, segue que

$$
\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^n} Tf(x)\varphi(x)\, dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)\, dy\, \varphi(x)\, dx \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)\varphi(x)\, dy\, dx \right| \\
&= |I| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \left| \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)\varphi(x)\, dx \right| dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)||T\varphi(y)|\, dy \\
&\leq \|f\|_p \|T\varphi\|_q \\
&\leq A_q \|f\|_p .
\end{aligned}
$$

Tomando o supremo sobre toda φ em C_c com norma $\|\varphi\|_q \leq 1$, obtemos

$$
\sup \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}^n} Tf(x)\varphi(x)\, dx \right| ; \varphi \in C_c(\mathbb{R}^n), \|\varphi\|_q \leq 1 \right\} \leq A_q \|f\|_p .
$$

Mas como $Tf \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, concluímos pela afirmação feita acima que

$$
\|Tf\|_p \leq A_q \|f\|_p ,
$$

para $2 < p < \infty$, e portanto o teorema está provado.

$\blacksquare$

Observação 4.1. O teorema anterior permanece válido se a hipótese (4.2) do item (b) for substituída pela seguinte condição sobre o gradiente de K:

$$|\nabla K(x)| \leq \frac{B}{|x|^{n+1}},$$

se K é de classe C^1 fora da origem, uma vez que esta última implica a condição de Hörmander (4.2). De fato, suponha que $K \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ satisfaça a condição do gradiente e considere $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que $|x| \geq 2|y|$. Pelo Teorema do Valor Médio, temos que

$$|K(x-y) - K(x)| \leq |\nabla K(p)||y| \leq \frac{B}{|p|^{n+1}}|y|,$$

no qual $p = tx + (1-t)(x-y) = x - (1-t)y$, com $0 < t < 1$, e

$$|p| = |x - (1-t)y| \geq |x| - (1-t)|y| > |x| - |y| \geq \frac{|x|}{2} > 0.$$

Assim, segue que

$$\begin{aligned}
\int_{|x|\geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)|\, dx &< \int_{|x|\geq 2|y|} \frac{B}{(|x|/2)^{n+1}}|y|\, dx \\
&= B'|y| \int_{|x|\geq 2|y|} \frac{1}{|x|^{n+1}}\, dx \\
&= B'|y|\sigma(S^{n-1}) \int_{2|y|}^{\infty} \frac{r^{n-1}}{r^{n+1}}\, dr \\
&= B''|y| \int_{2|y|}^{\infty} \frac{1}{r^2}\, dr \\
&= B''|y|\frac{1}{2|y|} \\
&= B''',
\end{aligned}$$

e portanto a condição de Hörmander (4.2) é satisfeita.

Como já observado, o teorema anterior não trata diretamente de operadores integrais singulares, isto é, aqueles que são definidos removendo-se uma vizinhança simétrica da singularidade. Para cobrir estes casos, apresentamos o resultado a seguir.

Teorema 4.2. *Suponha que o núcleo K satisfaça as condições:*

$$\begin{cases} |K(x)| \leq B|x|^{-n}, \quad |x| > 0, \\ \displaystyle\int_{|x|\geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)|\, dx \leq B, \quad |y| > 0, \end{cases} \tag{4.16}$$

e também

$$\int_{R_1<|x|<R_2} K(x)\,dx = 0, \quad 0 < R_1 < R_2 < \infty. \tag{4.17}$$

Para $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, *seja*

$$T_\varepsilon(f)(x) = \int_{|y|\geq\varepsilon} f(x-y)K(y)\,dy, \quad \varepsilon > 0. \tag{4.18}$$

Então

$$\|T_\varepsilon(f)\|_p \leq A_p \|f\|_p, \tag{4.19}$$

no qual A_p *não depende de* f *e* ε*. Mais ainda, para cada* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$*, o limite*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon(f) = T(f)$$

existe em norma L^p *e* T *satisfaz* (4.19).

As integrais definidas em (4.18) para cada $\varepsilon > 0$ são chamadas de integrais truncadas. As hipóteses (4.16) e (4.17) nos permitem provar a limitação em L^2 de núcleos truncados K_ε, e disto a limitação em L^p das integrais truncadas. Para a limitação em L^2 de K_ε, temos o seguinte lema:

Lema 4.1. *Suponha que* K *satisfaça as condições do Teorema 4.2 e seja*

$$K_\varepsilon(x) = \begin{cases} K(x), & |x| \geq \varepsilon, \\ 0, & |x| < \varepsilon. \end{cases}$$

Então $K_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *e vale a seguinte estimativa para as transformadas de Fourier de* K_ε*:*

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^n} |\widehat{K_\varepsilon}(y)| \leq CB, \quad \varepsilon > 0, \tag{4.20}$$

no qual C *depende apenas da dimensão* n*.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, temos de fato que $K_\varepsilon \in L^2$, pois

$$\begin{aligned} \|K_\varepsilon\|_2^2 &= \int_{|x|\geq\varepsilon} |K(x)|^2\,dx \leq \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{B^2}{|x|^{2n}}\,dx = B^2\sigma(S^{n-1}) \int_\varepsilon^\infty \frac{1}{r^{2n}} r^{n-1}\,dr \\ &= B^2\sigma(S^{n-1}) \int_\varepsilon^\infty r^{-n-1}\,dr = B^2\sigma(S^{n-1})\frac{\varepsilon^{-n}}{n} < \infty. \end{aligned}$$

Provemos primeiramente a desigualdade (4.20) para o caso $\varepsilon = 1$, isto é, se

$$K_1(x) = \begin{cases} K(x), & |x| \geq 1, \\ 0, & |x| < 1, \end{cases}$$

vejamos que $\sup_{y\in\mathbb{R}^n} |\widehat{K_1}(y)| \leq CB$.

Afirmação: K_ε satisfaz (4.16) e (4.17), mas com limitação CB em vez de B, no qual C é uma constante que depende apenas da dimensão n.

A fim de dar continuidade à demonstração, provaremos a afirmação após a demonstração do lema. Agora, note que

$$\begin{aligned}
\widehat{K_1}(y) &= \lim_{R\to\infty}\int_{|x|\leq R} e^{2\pi i x\cdot y}K_1(x)\,dx \\
&= \int_{|x|\leq\frac{1}{|y|}} e^{2\pi i x\cdot y}K_1(x)\,dx + \lim_{R\to\infty}\int_{\frac{1}{|y|}\leq|x|\leq R} e^{2\pi i x\cdot y}K_1(x)\,dx \\
&= I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Porém, temos que

$$I_1 = \int_{|x|\leq\frac{1}{|y|}} e^{2\pi i x\cdot y}K_1(x)\,dx = \int_{|x|\leq\frac{1}{|y|}} [e^{2\pi i x\cdot y}-1]K_1(x)\,dx,$$

pois pela condição (4.17),

$$\int_{|x|\leq\frac{1}{|y|}} K_1(x)\,dx = \int_{1\leq|x|\leq\frac{1}{|y|}} K(x)\,dx = 0.$$

Assim, como $|e^{2\pi i x\cdot y}-1|\leq 2\pi|x\cdot y|$, temos

$$\begin{aligned}
|I_1| &= \left|\int_{|x|\leq\frac{1}{|y|}} [e^{2\pi i x\cdot y}-1]K_1(x)\,dx\right| \\
&\leq \int_{|x|\leq\frac{1}{|y|}} |e^{2\pi i x\cdot y}-1||K_1(x)|\,dx \\
&\leq 2\pi|y|\int_{|x|\leq\frac{1}{|y|}} |x||K_1(x)|\,dx \\
&\leq 2\pi|y|B\int_{|x|\leq\frac{1}{|y|}} \frac{1}{|x|^{n-1}}\,dx \\
&= 2\pi|y|\sigma(S^{n-1})B\int_0^{\frac{1}{|y|}} dr \\
&= 2\pi\sigma(S^{n-1})B.
\end{aligned}$$

Para a estimativa de I_2, escolha $z=z(y)$ tal que $e^{2\pi i y\cdot z}=-1$. Tal escolha pode ser feita tomando-se $z=\dfrac{y}{2|y|^2}$, de forma que $|z|=\dfrac{1}{2|y|}$ e

$$2\pi i y\cdot z = 2\pi i y\cdot\left(\frac{y}{2|y|^2}\right) = \frac{\pi i}{|y|^2}y\cdot y = \pi i.$$

Mas agora note que podemos escrever

$$\int_{\mathbb{R}^n} K_1(x)e^{2\pi i x\cdot y}\,dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}[K_1(x)-K_1(x-z)]e^{2\pi i x\cdot y}\,dx, \tag{4.21}$$

pois

$$
\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{R}^n} K_1(x-z)e^{2\pi i x\cdot y}\,dx &= -\int_{\mathbb{R}^n} K_1(w)e^{2\pi i(w+z)\cdot y}\,dw \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} K_1(w)e^{2\pi i w\cdot y}e^{2\pi i z\cdot y}\,dw \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} K_1(w)e^{2\pi i w\cdot y}\,dw.
\end{aligned}
$$

Mas por (4.21), temos que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} K_1(x)e^{2\pi i x\cdot y}\,dx &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} [K_1(x)-K_1(x-z)]e^{2\pi i x\cdot y}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{|x|\le R} [K_1(x)-K_1(x-z)]e^{2\pi i x\cdot y}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{\frac{1}{|y|}\le|x|\le R} [K_1(x)-K_1(x-z)]e^{2\pi i x\cdot y}\,dx \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{|x|\le\frac{1}{|y|}} [K_1(x)-K_1(x-z)]e^{2\pi i x\cdot y}\,dx. \qquad (4.22)
\end{aligned}
$$

Mas por outro lado, temos também

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} K_1(x)e^{2\pi i x\cdot y}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{|x|\le R} K_1(x)e^{2\pi i x\cdot y}\,dx \\
&= \lim_{R\to\infty}\int_{\frac{1}{|y|}\le|x|\le R} K_1(x)e^{2\pi i x\cdot y}\,dx + \int_{|x|\le\frac{1}{|y|}} K_1(x)e^{2\pi i x\cdot y}\,dx. \qquad (4.23)
\end{aligned}
$$

Como as integrais em (4.22) e (4.23) devem ser iguais, segue que

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \lim_{R\to\infty}\int_{\frac{1}{|y|}\le|x|\le R} K_1(x)e^{2\pi i x\cdot y}\,dx \qquad (4.24) \\
&= \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{\frac{1}{|y|}\le|x|\le R} [K_1(x)-K_1(x-z)]e^{2\pi i x\cdot y}\,dx \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{|x|\le\frac{1}{|y|}} [K_1(x)-K_1(x-z)]e^{2\pi i x\cdot y}\,dx - \int_{|x|\le\frac{1}{|y|}} K_1(x)e^{2\pi i x\cdot y}\,dx. \qquad (4.25)
\end{aligned}
$$

Pela afirmação anterior e como $|z| = \frac{1}{2|y|}$, sabemos que a primeira parcela em (4.25) pode ser majorada por

$$
\frac{1}{2}\int_{|x|\ge\frac{1}{|y|}} |K_1(x)-K_1(x-z)|\,dx = \frac{1}{2}\int_{|x|\ge 2|z|} |K_1(x)-K_1(x-z)|\,dx \le CB,
$$

uma vez que $|x| \ge \frac{1}{|y|} = 2|z|$. Desenvolvendo os dois últimos termos em (4.25), obtemos

$$
\frac{1}{2}\int_{|x|\le\frac{1}{|y|}} [K_1(x)-K_1(x-z)]e^{2\pi i x\cdot y}\,dx - \int_{|x|\le\frac{1}{|y|}} K_1(x)e^{2\pi i x\cdot y}\,dx
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_{|x|\le\frac{1}{|y|}} K_1(x)e^{2\pi i x\cdot y}\,dx - \frac{1}{2}\int_{|x|\le\frac{1}{|y|}} K_1(x-z)e^{2\pi i x\cdot y}\,dx - \int_{|x|\le\frac{1}{|y|}} K_1(x)e^{2\pi i x\cdot y}\,dx\\
&= -\frac{1}{2}\int_{|x|\le\frac{1}{|y|}} K_1(x)e^{2\pi i x\cdot y}\,dx + \frac{1}{2}\int_{|x+z|\le\frac{1}{|y|}} K_1(x)e^{2\pi i x\cdot y}\,dx\\
&= \frac{1}{2}\left[-\int_{|x|\le\frac{1}{|y|}} K_1(x)e^{2\pi i x\cdot y}\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} K_1(x)e^{2\pi i x\cdot y}\,dx - \int_{|x+z|\ge\frac{1}{|y|}} K_1(x)e^{2\pi i x\cdot y}\,dx\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[\int_{|x|\ge\frac{1}{|y|}} K_1(x)e^{2\pi i x\cdot y}\,dx - \int_{|x+z|\ge\frac{1}{|y|}} K_1(x)e^{2\pi i x\cdot y}\,dx\right]\\
&= -\frac{1}{2}\left[\int_{|x+z|\ge\frac{1}{|y|}} K_1(x)e^{2\pi i x\cdot y}\,dx - \int_{|x|\ge\frac{1}{|y|}} K_1(x)e^{2\pi i x\cdot y}\,dx\right]\\
&= -\frac{1}{2}\int_A K_1(x)e^{2\pi i x\cdot y}\,dx, \qquad (4.26)
\end{aligned}
$$

no qual A é a diferença simétrica entre as regiões $\{x\in\mathbb{R}^n; |x+z|\ge 1/|y|\}$ e $\{x\in\mathbb{R}^n; |x|\ge 1/|y|\}$, isto é,

$$
\begin{aligned}
A &= \left\{x\in\mathbb{R}^n; |x+z|\ge\frac{1}{|y|} \text{ e } |x|\le\frac{1}{|y|}\right\}\cup\left\{x\in\mathbb{R}^n; |x+z|\le\frac{1}{|y|} \text{ e } |x|\ge\frac{1}{|y|}\right\}\\
&= A_1\cup A_2.
\end{aligned}
$$

Observe agora que o conjunto $A_1=\left\{x\in\mathbb{R}^n; |x|\le\frac{1}{|y|}\le|x+z|\right\}$ satisfaz a inclusão

$$
A_1\subset\left\{x\in\mathbb{R}^n; \frac{1}{2|y|}\le|x|\le\frac{1}{|y|}\right\},
$$

pois dado $x\in A_1$, obtemos

$$
|x|\ge|x+z|-|z|\ge\frac{1}{|y|}-\frac{1}{2|y|}=\frac{1}{2|y|}.
$$

Analogamente, para $A_2=\left\{x\in\mathbb{R}^n; |x+z|\le\frac{1}{|y|}\le|x|\right\}$, temos que

$$
A_2\subset\left\{x\in\mathbb{R}^n; \frac{1}{2|y|}\le|x|\le\frac{3}{2|y|}\right\},
$$

pois como $\frac{1}{2|y|}\le|x|$ para todo $x\in A_2$, então

$$
|x|\le|x+z|+|z|\le\frac{1}{|y|}+\frac{1}{2|y|}=\frac{3}{2|y|}.
$$

Do anterior, a integral em (4.26) é tomada sobre uma região contida no conjunto

$$
\left\{x\in\mathbb{R}^n; \frac{1}{2|y|}\le|x|\le\frac{1}{|y|}\right\}\cup\left\{x\in\mathbb{R}^n; \frac{1}{2|y|}\le|x|\le\frac{3}{2|y|}\right\},
$$

e então temos as limitações

$$\begin{aligned}
\left|\int_{A_1} K_1(x)e^{2\pi i x\cdot y}\,dx\right| &\leq \int_{\frac{1}{2|y|}\leq|x|\leq\frac{1}{|y|}} |K_1(x)|\,dx \\
&\leq B\int_{\frac{1}{2|y|}\leq|x|\leq\frac{1}{|y|}} |x|^{-n}\,dx \\
&= B\sigma(S^{n-1})\int_{\frac{1}{2|y|}}^{\frac{1}{|y|}} \frac{1}{r}\,dr \\
&= B\sigma(S^{n-1})\left(\ln\frac{1}{|y|} - \ln\frac{1}{2|y|}\right) \\
&= B\sigma(S^{n-1})\ln 2,
\end{aligned}$$

e também,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{A_2} K_1(x)e^{2\pi i x\cdot y}\,dx\right| &\leq \int_{\frac{1}{2|y|}\leq|x|\leq\frac{3}{2|y|}} |K_1(x)|\,dx \\
&\leq B\int_{\frac{1}{2|y|}\leq|x|\leq\frac{3}{2|y|}} |x|^{-n}\,dx \\
&= B\sigma(S^{n-1})\int_{\frac{1}{2|y|}}^{\frac{3}{2|y|}} \frac{1}{r}\,dr \\
&= B\sigma(S^{n-1})\ln 3,
\end{aligned}$$

e portanto obtemos a estimativa desejada para I_2. Por fim, como $\widehat{K_1}(y) = I_1 + I_2$, segue que

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^n} |\widehat{K_1}(y)| \leq CB,$$

e o lema está provado para $\varepsilon = 1$.

Para o caso geral, considere τ_ε a dilatação pelo fator $\varepsilon > 0$, isto é, $(\tau_\varepsilon f)(x) = f(\varepsilon x)$. Vejamos que se T é um operador de convolução dado por

$$T(f) = \varphi * f = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)f(y)\,dy,$$

então $\tau_{\varepsilon^{-1}}T\tau_\varepsilon$ é um operador de convolução com núcleo φ_ε, no qual $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(\varepsilon^{-1}x)$. De fato,

$$\begin{aligned}
(\tau_{\varepsilon^{-1}}T\tau_\varepsilon)(f)(x) &= \tau_{\varepsilon^{-1}}(\varphi * \tau_\varepsilon(f))(x) \\
&= (\varphi * \tau_\varepsilon(f))(\varepsilon^{-1}x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\varepsilon^{-1}x - y)f(\varepsilon y)\,dy \\
&= \varepsilon^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\varepsilon^{-1}(x-y))f(y)\,dy \\
&= \varepsilon^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\varepsilon^{-1}y)f(x-y)\,dy
\end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(y) f(x-y)\, dy.$$

Em nosso caso, o operador T é definido através do núcleo K, e portanto $\tau_{\varepsilon^{-1}} T \tau_\varepsilon$ é um operador com núcleo $\tilde{K}_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} K(\varepsilon^{-1}x)$.

Agora note que se K satisfaz as hipóteses do Teorema 4.2, então $\tilde{K}_\varepsilon$ também as satisfaz com os mesmos limitantes. Com efeito, temos para as hipóteses em (4.16) que

$$|\tilde{K}_\varepsilon(x)| = |\varepsilon^{-n} K(\varepsilon^{-1}x)| \leq \frac{\varepsilon^{-n}B}{|\varepsilon^{-1}x|^n} = \frac{B}{|x|^n},$$

e também,

$$\begin{aligned}
\int_{|x|\geq 2|y|} |\tilde{K}_\varepsilon(x-y) - \tilde{K}_\varepsilon(x)|\, dx &= \varepsilon^{-n} \int_{|x|\geq 2|y|} \left| K\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) - K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right| dx \\
&= \int_{|x|\geq 2\left|\frac{y}{\varepsilon}\right|} \left| K\left(x - \frac{y}{\varepsilon}\right) - K(x)\right| dx \\
&\leq B.
\end{aligned}$$

Para a hipótese (4.17),

$$\int_{R_1<|x|<R_2} \tilde{K}_\varepsilon(x)\, dx = \int_{R_1<|x|<R_2} \varepsilon^{-n} K(\varepsilon^{-1}x)\, dx = \int_{\varepsilon^{-1}R_1<|x|<\varepsilon^{-1}R_2} K(x)\, dx = 0.$$

Considere agora $K'(x) = \varepsilon^n K(\varepsilon x)$. Analogamente a $\tilde{K}_\varepsilon$, K' também satisfaz as hipóteses (4.16) e (4.17). Assim, definindo K'_1 como

$$K'_1(x) = \begin{cases} K'(x), & |x| \geq 1, \\ 0, & |x| < 1, \end{cases}$$

concluímos pelo caso $\varepsilon = 1$ que $|\widehat{K'_1}(y)| \leq CB$. Mais ainda, observe que a transformada de Fourier de $\varepsilon^{-n}K'_1(\varepsilon^{-1}x)$ é dada por

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{-n}\widehat{K'_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)} &= \varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot y} K'_1\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \varepsilon x\cdot y} K'_1(y)\, dy \\
&= \widehat{K'_1}(\varepsilon x),
\end{aligned}$$

e esta última também é limitada por CB. No entanto, veja que $\varepsilon^{-n}K'_1(\varepsilon^{-1}x) = K_\varepsilon(x)$, pois para $|x| \geq \varepsilon$,

$$\varepsilon^{-n}K'_1(\varepsilon^{-1}x) = \varepsilon^{-n}K'(\varepsilon^{-1}x) = K(x),$$

e para $|x| < \varepsilon$, $K'_1(\varepsilon^{-1}x) = 0$.

Logo, a transformada de Fourier de $K_\varepsilon(y)$ é limitada por CB para todo $y \in \mathbb{R}^n$, e portanto o lema está provado.

$\blacksquare$

Demonstração da Afirmação. Vejamos que K_ε satisfaz (4.16) e (4.17) com limitação CB. Para a condição (4.17), note que

$$\int_{R_1<|x|<R_2} K_\varepsilon(x)\,dx = 0, \quad 0 < R_1 < R_2 < \infty,$$

pois se $R_1 \geq \varepsilon$, então $K_\varepsilon = K$ em $\{x \in \mathbb{R}^n; R_1 < |x| < R_2\}$ e se $0 < R_1 < \varepsilon$, então $K_\varepsilon(x) = 0$ em $\{x \in \mathbb{R}^n; 0 < |x| < \varepsilon\}$.

Para a primeira desigualdade em (4.16), segue trivialmente que

$$|K_\varepsilon(x)| \leq |K(x)| \leq B|x|^{-n}. \tag{4.27}$$

Para mostrarmos a desigualdade

$$\int_{|x|\geq 2|y|} |K_\varepsilon(x-y) - K_\varepsilon(x)|\,dx \leq CB,$$

vamos considerar três casos:

Caso 1: Suponha $|y| \geq \varepsilon$. Como $|x| \geq 2|y|$, então $|x| \geq 2\varepsilon$, $-|y| \geq -|x|/2$ e assim

$$|x-y| \geq |x| - |y| \geq |x| - \frac{|x|}{2} = \frac{|x|}{2} \geq \varepsilon.$$

Logo, segue da definição de K_ε que

$$\int_{|x|\geq 2|y|} |K_\varepsilon(x-y) - K_\varepsilon(x)|\,dx = \int_{|x|\geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)|\,dx \leq B.$$

Caso 2: Suponha $\frac{\varepsilon}{2} \leq |y| < \varepsilon$. Como no caso anterior,

$$|x| \geq 2|y| \geq 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

e portanto $K_\varepsilon(x) = K(x)$. E também,

$$|x-y| \geq |x| - |y| \geq 2|y| - |y| = |y| \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{|x|\geq 2|y|} |K_\varepsilon(x-y) - K_\varepsilon(x)|\,dx &= \int_{\{|x|\geq 2|y|\}\cap\{|x-y|\geq\varepsilon\}} |K_\varepsilon(x-y) - K(x)|\,dx \\
&\quad + \int_{\{|x|\geq 2|y|\}\cap\{\frac{\varepsilon}{2}<|x-y|<\varepsilon\}} |K_\varepsilon(x-y) - K(x)|\,dx \\
&\leq B + \int_{\{|x|\geq 2|y|\}\cap\{\frac{\varepsilon}{2}<|x-y|<\varepsilon\}} |K(x)|\,dx.
\end{aligned}$$

Mas para $|x| \geq 2|y|$ e $\varepsilon/2 \leq |x-y| < \varepsilon$, temos que $|x| \leq |x-y| + |y| < 2\varepsilon$ e $|x| \geq 2|y| \geq \varepsilon$, de onde obtemos que $\varepsilon \leq |x| < 2\varepsilon$. Assim,

$$\int_{\{|x|\geq 2|y|\}\cap\{\frac{\varepsilon}{2}<|x-y|<\varepsilon\}} |K(x)|\,dx \leq \int_{\varepsilon\leq|x|<2\varepsilon} B|x|^{-n}\,dx$$

$$
\begin{aligned}
&= B\sigma(S^{n-1})\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon}\frac{1}{r}\,dr \\
&= B\sigma(S^{n-1})\ln 2 \\
&= C_1 B,
\end{aligned}
$$

e portanto

$$\int_{|x|\geq 2|y|}|K_\varepsilon(x-y)-K_\varepsilon(x)|\,dx \leq B + C_1 B = C_2 B.$$

Caso 3: Suponha que $0<|y|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Então

$$
\begin{aligned}
\int_{|x|\geq 2|y|}|K_\varepsilon(x-y)-K_\varepsilon(x)|\,dx &= \int_{\{|x|\geq 2|y|\}\cap\{|x-y|\geq\varepsilon\}}|K_\varepsilon(x-y)-K_\varepsilon(x)|\,dx \\
&\quad + \int_{\{|x|\geq 2|y|\}\cap\{|x-y|<\varepsilon\}}|K_\varepsilon(x-y)-K_\varepsilon(x)|\,dx \\
&= I_1 + I_2.
\end{aligned}
$$

Escrevendo $I_1 = \int_{A_1}|K_\varepsilon(x-y)-K_\varepsilon(x)|\,dx$, no qual $A_1 = \{|x|\geq 2|y|\}\cap\{|x-y|\geq\varepsilon\}$, temos que

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_{A_1}|K(x-y)-K_\varepsilon(x)|\,dx \\
&= \int_{A_1\cap\{|x|\geq\varepsilon\}}|K(x-y)-K_\varepsilon(x)|\,dx + \int_{A_1\cap\{|x|<\varepsilon\}}|K(x-y)-K_\varepsilon(x)|\,dx \\
&= \int_{A_1\cap\{|x|\geq\varepsilon\}}|K(x-y)-K(x)|\,dx + \int_{A_1\cap\{|x|<\varepsilon\}}|K(x-y)|\,dx \\
&\leq B + \int_{A_1\cap\{|x|<\varepsilon\}}|K(x-y)|\,dx.
\end{aligned}
$$

Para $|x|\geq 2|y|$, $|x-y|\geq\varepsilon$ e $|x|<\varepsilon$, temos que

$$\varepsilon \leq |x-y| \leq |x|+|y| < \varepsilon + \frac{|x|}{2} < \frac{3\varepsilon}{2},$$

e então $\varepsilon\leq|x-y|<3\varepsilon/2$. Daí,

$$
\begin{aligned}
\int_{A_1\cap\{|x|<\varepsilon\}}|K(x-y)|\,dx &\leq B\int_{\varepsilon\leq|x-y|<\frac{3\varepsilon}{2}}|x-y|^{-n}\,dx \\
&= B\int_{\varepsilon\leq|z|<\frac{3\varepsilon}{2}}|z|^{-n}\,dz \\
&= B\sigma(S^{n-1})\int_{\varepsilon}^{\frac{3\varepsilon}{2}}\frac{1}{r}\,dr \\
&= B\sigma(S^{n-1})\ln\left(\frac{3}{2}\right) \\
&= C_3 B,
\end{aligned}
$$

e portanto temos que $I_1 \leq B + C_3 B = C_4 B$.

Analogamente, escrevemos $I_2 = \int_{A_2} |K_\varepsilon(x-y) - K_\varepsilon(x)|\, dx$ no qual $A_2 = \{|x| \geq 2|y|\} \cap \{|x-y| < \varepsilon\}$, e assim

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{A_2} |K_\varepsilon(x)|\, dx \\ &= \int_{A_2 \cap \{|x| \geq \varepsilon\}} |K_\varepsilon(x)|\, dx + \int_{A_2 \cap \{|x| < \varepsilon\}} |K_\varepsilon(x)|\, dx \\ &= \int_{A_2 \cap \{|x| \geq \varepsilon\}} |K(x)|\, dx. \end{aligned}$$

Para $0 < |y| < \varepsilon/2$, $|x| \geq 2|y|$, $|x-y| < \varepsilon$ e $|x| \geq \varepsilon$, temos

$$\varepsilon \leq |x| \leq |x-y| + |x| < \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{3\varepsilon}{2},$$

e então $\varepsilon \leq |x| < 3\varepsilon/2$. Daí,

$$\begin{aligned} \int_{A_2 \cap \{|x| \geq \varepsilon\}} |K(x)|\, dx &\leq B \int_{\varepsilon \leq |x| < \frac{3\varepsilon}{2}} |x|^{-n}\, dx \\ &= B\sigma(S^{n-1}) \int_\varepsilon^{\frac{3\varepsilon}{2}} \frac{1}{r}\, dr \\ &= B\sigma(S^{n-1}) \ln\left(\frac{3}{2}\right) \\ &= C_5 B, \end{aligned}$$

e portanto $I_2 \leq C_5 B$.

Do anterior, concluímos

$$\int_{|x| \geq 2|y|} |K_\varepsilon(x-y) - K_\varepsilon(x)|\, dx = I_1 + I_2 \leq C_4 B + C_5 B = CB,$$

e portanto a afirmação está provada.

■

Voltemos agora à demonstração do Teorema 4.2.

demonstração do Teorema 4.2. O Lema 4.1 nos garante que $K_\varepsilon \in L^2$ e $|\widehat{K_\varepsilon}(x)| \leq CB$, e pela afirmação contida no lema sabemos também que

$$\int_{|x| \geq 2|y|} |K_\varepsilon(x-y) - K_\varepsilon(x)|\, dx \leq CB, \quad |y| > 0.$$

Desta forma, K_ε satisfaz as hipóteses do Teorema 4.1 e portanto vale desigualdade em (4.19), isto é,

$$\|T_\varepsilon(f)\|_p \leq A_p \|f\|_p\,.$$

Considere agora uma função $f_1 \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$. Pela propriedade de cancelamento (4.17), temos

$$\begin{aligned}
T_\varepsilon(f_1)(x) &= \int_{|y|\geq\varepsilon} K(y)f_1(x-y)\,dy \\
&= \int_{|y|\geq 1} K(y)f_1(x-y)\,dy + \int_{\varepsilon\leq|y|\leq 1} K(y)f_1(x-y)\,dy \\
&= \int_{|y|\geq 1} K(y)f_1(x-y)\,dy + \int_{\varepsilon\leq|y|\leq 1} K(y)[f_1(x-y)-f_1(x)]\,dy \\
&= I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

A integral I_1 representa uma função em L^p, uma vez que

$$I_1 = \int_{|y|\geq 1} K(y)f_1(x-y)\,dy = (K_1 * f_1)(x),$$

no qual $f_1 \in L^1$ e $K_1 \in L^p$, pois

$$\|K_1\|_p^p = \int_{|y|\geq 1} |K(y)|^p\,dy \leq \int_{|y|\geq 1} B^p|y|^{-np}\,dy = B^p\sigma(S^{n-1})\int_1^\infty \frac{1}{r^{n(p-1)+1}}\,dr < \infty.$$

Como f_1 possui suporte compacto, a integral I_2 possui suporte em um conjunto compacto fixado de x e converge uniformemente em x se $\varepsilon \to 0$. Com efeito, segue da diferenciabilidade de f_1 que

$$|f_1(x-y) - f_1(x)| \leq |\nabla f_1(x-ty)||y| \leq A|y|,$$

no qual A é uma constante e $0 < t < 1$.

Definindo $R(f_1)$ e $R_\varepsilon(f_1)$ por

$$\begin{aligned}
R_\varepsilon(f_1)(x) &\doteq \int_{\varepsilon\leq|y|\leq 1} K(y)[f_1(x-y)-f_1(x)]\,dy, \\
R(f_1)(x) &\doteq \int_{0\leq|y|\leq 1} K(y)[f_1(x-y)-f_1(x)]\,dy,
\end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned}
|R_\varepsilon(f_1)(x) - R(f_1)(x)| &= \left|\int_{0\leq|y|\leq\varepsilon} K(y)[f_1(x-y)-f_1(x)]\,dy\right| \\
&\leq \int_{0\leq|y|\leq\varepsilon} \frac{AB|y|}{|y|^n}\,dy \\
&= AB\sigma(S^{n-1})\int_0^\varepsilon \frac{r^{n-1}}{r^{n-1}}\,dr \\
&= AB\sigma(S^{n-1})\varepsilon \to 0
\end{aligned}$$

se $\varepsilon \to 0$. Assim,

$$\|R_\varepsilon(f_1) - R(f_1)\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} |R_\varepsilon(f_1)(x) - R(f_1)(x)|^p\,dx$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_{0\leq|x|\leq\varepsilon} C^p \varepsilon^p \, dx \\
&= C^p m(B(0,\varepsilon))\varepsilon^p \to 0
\end{aligned}
$$

se $\varepsilon \to 0$, e portanto $R_\varepsilon(f_1) \to R(f_1)$ em norma L^p. Logo, $T_\varepsilon(f_1)$ converge em norma L^p se $\varepsilon \to 0$.

Agora, se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, note que podemos escrever $f = f_1 + f_2$, no qual $f_1 \in C_c^1$ e $\|f_2\|_p$ é pequena. De fato, dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $f_1 \in C_c^1$ tal que $\|f - f_1\|_p < \varepsilon$, o que é possível graças à densidade de C_c^1 em L^p, e $f_2 = f - f_1$. Assim, aplicando a desigualdade (4.19) para f_2, obtemos que

$$\|T_\varepsilon(f_2)\|_p \leq A_p \|f_2\|_p \leq A_p \varepsilon,$$

e portanto o limite $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon(f)$ existe em norma L^p, pois

$$T_\varepsilon(f) = T_\varepsilon(f_1 + f_2) = T_\varepsilon(f_1) + T_\varepsilon(f_2),$$

no qual $T_\varepsilon(f_1)$ converge em norma L^p se $\varepsilon \to 0$ e $T_\varepsilon(f_2) \to 0$ em norma L^p se $\varepsilon \to 0$.

Por fim, se $T_\varepsilon \to T$ em norma L^p para $\varepsilon \to 0$, como $\|T_\varepsilon(f)\|_p \leq A_p \|f\|_p$, então vale a desigualdade

$$\|T(f)\|_p \leq A_p \|f\|_p,$$

e portanto o teorema está provado.

■

Exemplo 4.1. Considere a função $K(x) = \dfrac{1}{\pi x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Vejamos que K satisfaz as condições do Teorema 4.2. Primeiramente, vemos que

$$|K(x)| = \left|\frac{1}{\pi x}\right| = \frac{1}{\pi}|x|^{-1},$$

e também, dados $0 < a < b < \infty$,

$$\int_{a\leq|x|\leq b} K(x)\, dx = \int_{-b}^{-a} \frac{1}{\pi x}\, dx + \int_a^b \frac{1}{\pi x}\, dx = 0.$$

Mais ainda, note que K satisfaz a seguinte condição sobre a derivada

$$\left|\frac{d}{dx}\frac{1}{\pi x}\right| = \left|\frac{-1}{\pi x^2}\right| = \frac{1}{\pi}\frac{1}{|x|^2},$$

e portanto segue da Observação 4.1 que K satisfaz a condição

$$\int_{|x|\geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)|\, dx \leq B, \quad y \neq 0.$$

Pelo teorema anterior, concluímos que se $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, então o limite

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi} \int_{|y|\geq\varepsilon} \frac{f(x-y)}{y}\, dy$$

existe em norma L^p e o operador resultante é limitado em L^p. Tal operador é conhecido como transformada de Hilbert.

4.2 Integrais Singulares que Comutam com Dilatações

Nesta seção, nosso interesse está no estudo de operadores que comutam com translações e dilatações, e dentre estes a classe do operadores integrais singulares, caindo ainda no escopo do Teorema 4.2. Iniciamos com um resultado ilustrando a relação entre operadores em L^2 que comutam com translações e a transformada de Fourier.

Proposição 4.1. *Seja T uma transformação linear e limitada de $L^2(\mathbb{R}^n)$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Então T comuta com translações se, e somente se, existe uma função mensurável e limitada m, denominada multiplicador, tal que*

$$(Tf)\widehat{\ }(y) = m(y)\hat{f}(y),$$

para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Além disso, $\|T\|_{\mathscr{L}(L^2)} = \|m\|_\infty$.

Demonstração. Assuma primeiramente que $(Tf)\widehat{\ }(y) = m(y)\hat{f}(y)$ para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Seja ψ_a o operador translação por a, definido por $\psi_a f(x) = f(x-a)$, e suponha que f pertença ao espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Por definição, temos que

$$(\psi_a f)\widehat{\ }(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot y} f(y-a)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot (y+a)} f(y)\,dy = e^{2\pi i x\cdot a}\hat{f}(x),$$

e portanto

$$m(x)(\psi_a f)\widehat{\ }(x) = m(x)e^{2\pi i x\cdot a}\hat{f}(x). \tag{4.28}$$

Mas também, se $\mathscr{F}$ denota a operação $f \mapsto \hat{f}$, então

$$Tf(x) = \mathscr{F}^{-1}((Tf)\widehat{\ }(x)) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot y}(Tf)\widehat{\ }(y)\,dy,$$

e assim

$$\begin{aligned}
\psi_a(Tf)(x) &= Tf(x-a) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i (x-a)\cdot y}(Tf)\widehat{\ }(y)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot y}e^{2\pi i a\cdot y} m(y)\hat{f}(y)\,dy \\
&= \mathscr{F}^{-1}\left(e^{2\pi i a\cdot y}m(y)\hat{f}(y)\right)(x).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\mathscr{F}\left(\psi_a(Tf)\right)(x) = e^{2\pi i a\cdot x}m(x)\hat{f}(x). \tag{4.29}$$

Como as expressões em (4.28) e (4.29) devem ser iguais, concluímos que

$$((\psi_a T)f)\widehat{\ }(x) = m(x)(\psi_a f)\widehat{\ }(x) = ((T\psi_a)f)\widehat{\ }(x),$$

e portanto segue do Teorema de Parseval-Plancherel 2.13 que $(\psi_a T - T\psi_a)f = 0$ para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Mas como $\psi_a T - T\psi_a$ é linear e contínuo em $L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^2(\mathbb{R}^n)$, então $(\psi_a T)f = (T\psi_a)f$ para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Suponha agora que T comute com translações. Esta implicação será dividida em cinco passos.

Primeiro passo: Seja $M_a : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ o operador linear limitado dado por

$$M_a f(x) = e^{2\pi i a \cdot x} f(x).$$

Se $\mathscr{F}$ denota a transformada de Fourier, defina a transformação S dada pela composição

$$S = \mathscr{F} T \mathscr{F}^{-1}.$$

Afirmação 1: Os operadores S e M_a comutam, isto é, $M_a S = S M_a$. De fato, seja f uma função no espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Utilizando as propriedades da transformada de Fourier, obtemos que

$$(\mathscr{F}\psi_a) f(x) = e^{2\pi i a \cdot x} \hat{f}(x) = M_a \hat{f}(x) = (M_a \mathscr{F}) f(x),$$

e assim,

$$\begin{aligned}
(\mathscr{F}^{-1} M_a) f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot y} (M_a f)(y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i (x-a) \cdot y} f(y)\, dy \\
&= (\psi_a \mathscr{F}^{-1}) f(x).
\end{aligned}$$

Logo, segue do anterior que

$$S M_a = \mathscr{F} T \mathscr{F}^{-1} M_a = \mathscr{F} T \psi_a \mathscr{F}^{-1} = \mathscr{F} \psi_a T \mathscr{F}^{-1} = M_a \mathscr{F} T \mathscr{F}^{-1} = M_a S,$$

e portanto $(M_a S - S M_a) f(x) = 0$ para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Mas como $\mathcal{S}$ é denso em L^2 e $M_a S - S M_a$ é linear e limitado em L^2, então $(M_a S) f(x) = (S M_a) f(x)$ para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, o que prova a Afirmação 1.

Segundo passo: Seja $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $f = \hat{g}$, ou seja,

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot y} g(y)\, dy.$$

Como $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, então g é Riemann integrável e podemos escrever a integral que a define como um limite de somas de Riemann, as quais são dadas por combinações lineares finitas de operadores multiplicadores M_x que comutam com S, isto é,

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot y} g(y)\, dy = \lim_{|P| \to 0} \sum_{y_j \in P} m(B_j) e^{2\pi i x \cdot y_j} g(y_j) = \lim_{|P| \to 0} \sum_{y_j \in P} m(B_j) (M_x f)(y_j),$$

no qual $P = \bigcup_{j=1}^{N} B_j$ é uma partição de um cubo n-dimensional contendo o suporte de g e os conjuntos $B_1, \ldots, B_N$ são blocos n-dimensionais com interiores disjuntos.

Mostremos agora que, se $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $h \in L^2(\mathbb{R}^n)$, então o operador de multiplicação $h \mapsto hf$ comuta com S, isto é,

$$S(fh) = fSh.$$

Afirmação 2: Se $h \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $g \in C_c^\infty$ e $f = \hat{g}$, então $S(fh) = fSh$. De fato, segue do anterior que

$$\begin{aligned} f(x)h(x) &= h(x)\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot y} g(y)\,dy \\ &= h(x)\lim_{|P|\to 0}\sum_{y_j\in P} m(B_j)(M_x f)(y_j) \\ &= h(x)\lim_{|P|\to 0} f_P(x), \end{aligned}$$

no qual $f_P(x) = \sum\limits_{y_j\in P} m(B_j)(M_x f)(y_j)$. Como os operadores M_a comutam com S e a soma que define f_P é finita, então

$$S(f_P h) = f_P Sh,$$

para toda $h \in L^2(\mathbb{R}^n)$. No entanto, $f_P(x) \to f(x)$ uniformemente se $|P| \to 0$, pois

$$\begin{aligned} |f_P(x) - f(x)| &= \left|\sum_{y_j\in P} m(B_j)(M_x f)(y_j) - \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot y} g(y)\,dy\right| \\ &= \left|\sum_{j=1}^N m(B_j) e^{2\pi i x\cdot y_j} g(y_j) - \sum_{j=1}^N \int_{B_j} e^{2\pi i x\cdot y} g(y)\,dy\right| \\ &= \left|\sum_{j=1}^N \int_{B_j} e^{2\pi i x\cdot y_j} g(y_j)\,dy - \sum_{j=1}^N \int_{B_j} e^{2\pi i x\cdot y} g(y)\,dy\right| \\ &\le \sum_{j=1}^N \int_{B_j} \left|e^{2\pi i x\cdot y_j} g(y_j) - e^{2\pi i x\cdot y} g(y)\right| dy \\ &= \sum_{j=1}^N \int_{B_j} |\eta(y_j) - \eta(y)|\,dy, \end{aligned}$$

no qual $\eta(y) = e^{2\pi i x\cdot y} g(y)$ é uniformemente contínua, e portanto dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|\eta(y_j) - \eta(y)| < \varepsilon$ se $|y - y_j| \le \delta$. Logo,

$$|f_P(x) - f(x)| \le \varepsilon \sum_{j=1}^N m(B_j) \to 0$$

uniformemente se $|P| \to 0$.

Assim, podemos concluir que $f_P h \to fh$ em norma $L^2(\mathbb{R}^n)$, pois

$$\|f_P h - fh\|_2 = \left[\int_{\mathbb{R}^n} |(f_P h)(y) - (fh)(y)|^2\,dy\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\int_{\mathbb{R}^n} |h(y)(f_P - f)(y)|^2 \, dy\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sup_{y\in\mathbb{R}^n} |(f_P - f)(y)| \, \|h\|_2 \to 0
\end{aligned}
$$

se $|P| \to 0$. Analogamente, $f_P Sh \to fSh$ em norma L^2. Mais ainda, como S é um operador linear e limitado em L^2, temos que

$$S(f_P h) - S(fh) = S((f_P - f)h) \to S(0)$$

em norma L^2, e então

$$S(f_P h) \to S(fh)$$

em norma L^2. Assim, como $S(f_P h) = f_P Sh \to fSh$, obtemos que $S(fh) = fSh$, o que prova a Afirmação 2.

Afirmação 3: Se $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $h \in L^2(\mathbb{R}^n)$, então

$$S(fh) = fSh.$$

De fato, como $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, existe $g \in \mathcal{S}$ tal que $f = \hat{g}$. Defina então $g_\varepsilon(x) = \varphi(\varepsilon x)g(x)$, no qual $\varepsilon > 0$, $\varphi \in C_c^\infty$ e $\varphi(x) = 1$ se $|x| \leq 1$. Desta forma, note que $g_\varepsilon \to g$ em norma L^1, pois pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$
\begin{aligned}
\|g_\varepsilon - g\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} |g_\varepsilon(x) - g(x)| \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(\varepsilon x)g(x) - g(x)| \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)||\varphi(\varepsilon x) - 1| \, dx \to 0
\end{aligned}
$$

se $\varepsilon \to 0$.

Definindo $f_\varepsilon \doteq \widehat{g_\varepsilon}$, então $f_\varepsilon \to f$ uniformemente, pois

$$
\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f_\varepsilon(x) - f(x)| &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\widehat{g_\varepsilon}(x) - \hat{g}(x)| \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot y} g_\varepsilon(y) \, dy - \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot y} g(y) \, dy \right| \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |g_\varepsilon(y) - g(y)| \, dy \\
&= \|g_\varepsilon - g\|_1 \to 0
\end{aligned}
$$

se $\varepsilon \to 0$.

Por fim, como $g_\varepsilon \in C_c^\infty$ e $f_\varepsilon = \widehat{g_\varepsilon}$, então segue da Afirmação 2 que $S(f_\varepsilon h) = f_\varepsilon Sh$, e analogamente, obtemos que $S(f_\varepsilon h) \to S(fh)$ e $f_\varepsilon Sh \to fSh$ em norma L^2 se $\varepsilon \to 0$, e portanto $S(fh) = fSh$ sempre que $h \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Terceiro passo: Seja B_R a bola de raio $R > 0$ centrada na origem e defina a função $m_R \doteq S(\chi_{B_R})$. Se $f \in C_c^\infty(B_R)$, temos que $f(x) = f(x)\chi_{B_R}(x)$. Do passo anterior, obtemos que

$$Sf = S(f\chi_{B_R}) = fS\chi_{B_R} = m_R f$$

para $f \in C_c^\infty(B_R)$, ou seja,

$$Sf(x) = m_R(x)f(x), \tag{4.30}$$

o que representa S como um multiplicador para cada $f \in C_c^\infty(B_R)$. Por definição, $m_R \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Vejamos então que m_R é uma função limitada.

Quarto passo: Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto não vazio e $a \in L^\infty(\Omega)$. Defina o operador $Af(x) = a(x)f(x)$, $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Afirmação 4: $A \in \mathscr{L}(L^2) = \{T : L^2 \to L^2; T \text{ é linear e contínua}\}$ e $\|A\|_{\mathscr{L}(L^2)} = \|a\|_\infty$.
Com efeito, é evidente que A é um operador linear. Mais ainda, A é contínuo, pois dada uma sequência $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2$ que converge para $f \in L^2$, temos que

$$\|Af_n - Af\|_2 = \|a(f_n - f)\|_2 \leq \|a\|_\infty \|f_n - f\|_2 \to 0.$$

Assim,

$$\|A\|_{\mathscr{L}(L^2)} = \sup_{\|f\|_2 \leq 1} \|Af\|_2 \leq \|a\|_\infty \sup_{\|f\|_2 \leq 1} \|f\|_2 \leq \|a\|_\infty .$$

Por outro lado, para cada $\varepsilon > 0$, defina

$$U_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n; |a(x)| \geq \|a\|_\infty - \varepsilon\}.$$

Se $f = \chi_{U_\varepsilon}$, então $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e, para cada $x \in \mathbb{R}^n$,

$$|f(x)a(x)| = |\chi_{U_\varepsilon}(x)||a(x)| \geq |\chi_{U_\varepsilon}(x)||(\|a\|_\infty - \varepsilon)|,$$

e assim,

$$\begin{aligned} \|fa\|_2 &= \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)a(x)|^2 \, dx\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\geq \left[\int_{\mathbb{R}^n} |(\|a\|_\infty - \varepsilon)f(x)|^2 \, dx\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= (\|a\|_\infty - \varepsilon) \|f\|_2 , \end{aligned}$$

ou seja,

$$\left\| \frac{fa}{\|f\|_2} \right\|_2 \geq \|a\|_\infty - \varepsilon,$$

para todo $\varepsilon > 0$. Logo,

$$\left\| \frac{fa}{\|f\|_2} \right\|_2 \geq \|a\|_\infty , \text{ no qual } \left\| \frac{f}{\|f\|_2} \right\|_2 = 1,$$

e assim,

$$\|A\|_{\mathscr{L}(L^2)} = \sup_{\|g\|_2 \leq 1} \|ag\|_2 \geq \left\| \frac{fa}{\|f\|_2} \right\|_2 \geq \|a\|_\infty \,,$$

o que prova a Afirmação 4.

No entanto, não podemos aplicar a Afirmação 4 diretamente ao operador S, uma vez que a igualdade em (4.30) é válida apenas em um subespaço denso de $L^2(B_R)$ e também não sabemos se m_R é uma função limitada. Com efeito, vejamos a seguir que m_R é uma função essencialmente limitada.

Afirmação 5: A função $m_R \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e

$$\|m_R\|_{L^\infty(B_R)} \leq \|S\|_{\mathscr{L}(L^2(B_R))} \,.$$

De fato, seja $\lambda > 0$ e defina

$$a_\lambda(x) = \begin{cases} m_R(x), & |m_R(x)| < \lambda, \\ \lambda, & |m_R(x)| \geq \lambda. \end{cases}$$

Então $a_\lambda \in L^\infty(B_R)$ e, se $A_\lambda f(x) \doteq a_\lambda(x) f(x)$, então $A_\lambda \in \mathscr{L}(L^2)$ e $|a_\lambda(x)| \leq |m_R(x)|$. Da igualdade (4.30), segue que a estimativa pontual

$$|A_\lambda f(x)| = |a_\lambda(x) f(x)| \leq |m_R(x)||f(x)| = |Sf(x)|$$

vale para toda $f \in C_c^\infty(B_R)$, e como $C_c^\infty(B_R)$ é denso em $L^2(B_R)$, a continuidade de A_λ garante que a estimativa permanece válida para $f \in L^2(B_R)$, isto é,

$$|A_\lambda f(x)| \leq |Sf(x)|,$$

para toda $f \in L^2(B_R)$. Logo,

$$\begin{aligned} \|A_\lambda\|_{\mathscr{L}(L^2(B_R))} &= \sup_{\|f\|_2 \leq 1} \|A_\lambda f\|_2 \\ &= \sup_{\|f\|_2 \leq 1} \left[\int_{B_R} |A_\lambda f(x)|^2 \, dx \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sup_{\|f\|_2 \leq 1} \|Sf\|_2 \\ &= \|S\|_{\mathscr{L}(L^2(B_R))} \,. \end{aligned}$$

Mas pela definição de a_λ, se $\lambda < \|m_R\|_\infty$, então $\|a_\lambda\|_\infty = \lambda$, e pela Afirmação 4, segue que

$$\|A_\lambda\|_{\mathscr{L}(L^2)} = \|a_\lambda\|_\infty = \lambda.$$

Mas como $\|A_\lambda\|_{\mathscr{L}(L^2)} \leq \|S\|_{\mathscr{L}(L^2)}$, então $\lambda \leq \|S\|_{\mathscr{L}(L^2)}$, e portanto $\|m_R\|_\infty \leq \|S\|_{\mathscr{L}(L^2)}$. Logo, $m_R \in L^\infty$.

Em particular, o operador $f \mapsto m_R f$ é contínuo e, como coincide com S em C_c^∞, denso em L^2, então estes são iguais. Aplicando a Afirmação 4 ao conjunto $\Omega \setminus B_R$, vemos que a restrição de S, definido em todo $L^2(\mathbb{R}^n)$, ao subespaço $L^2(B_R)$ é representada pelo multiplicador $f \mapsto m_R f$.

Para concluir a demonstração da proposição, precisamos agora trocar o conjunto B_R por $\mathbb{R}^n$.

Quinto passo: Aplicando o passo anterior para a bola B_{2R}, temos que S é dado por $f \mapsto m_{2R} f$ em $L^2(B_{2R})$ e por $f \mapsto m_R f$ em $L^2(B_R)$, e portanto $m_{2R} = m_R$ em B_R, ou seja, m_{2R} é uma extensão de m_R à bola B_{2R}.

Repetindo este argumento, obtemos uma função bem definida e limitada m que, restrita à bola $B_{2^k R}$, fornece um operador multiplicador que coincide com a restrição de S em $L^2(B_{2^k R})$. Mais ainda, como

$$Sf(x) = m_{2^k R}(x) f(x)$$

para toda $f \in L^2(B_{2^k R})$ e $m(x) = m_{2^k R}(x)$ para $x \in B_{2^k R}$, $k > 0$, então

$$Sf(x) = m(x) f(x),$$

para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. E como $S = \mathscr{F} T \mathscr{F}^{-1}$, denotando por m' o operador $f \mapsto mf$, temos que $m' = S = \mathscr{F} T \mathscr{F}^{-1}$, e assim $\mathscr{F} T = m' \mathscr{F}$, isto é,

$$(Tf)\widehat{\ }(x) = m(x) \hat{f}(x),$$

para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Por fim, segue da Afirmação 4 que $\|S\|_{\mathscr{L}(L^2)} = \|m\|_\infty$, e como $S = \mathscr{F} T \mathscr{F}^{-1}$ e $\mathscr{F}$ é uma isometria em L^2, concluímos que

$$\|T\|_{\mathscr{L}(L^2)} = \|m\|_\infty .$$

■

Lema 4.2. *Seja T um operador linear e limitado em $L^2(\mathbb{R}^n)$ que comuta com translações. Então T comuta com dilatações se, e somente se, o multiplicador $m(x)$, definido na Proposição 4.1, é positivamente homogêneo de grau zero.*

Demonstração. Denote por τ_λ a dilatação por $\lambda > 0$, definida por $(\tau_\lambda f)(x) = f(\lambda x)$. Se T comuta com dilatações, então

$$((T\tau_\lambda) f)\widehat{\ }(x) = ((\tau_\lambda T) f)\widehat{\ }(x).$$

Para o primeiro termo da igualdade acima, note que

$$((T\tau_\lambda) f)\widehat{\ }(x) = m(x)(\tau_\lambda f)\widehat{\ }(x) = m(x) \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot y} f(\lambda y)\, dy = \frac{m(x)}{\lambda^n} \hat{f}\left(\frac{x}{\lambda}\right).$$

Analogamente para o segundo termo,

$$((\tau_\lambda T) f)\widehat{\ }(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot y} (Tf)(\lambda y)\, dy = \frac{1}{\lambda^n} (Tf)\widehat{\ }\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda^n} m\left(\frac{x}{\lambda}\right) \hat{f}\left(\frac{x}{\lambda}\right).$$

Igualando os termos obtidos, temos que

$$\begin{aligned} & \frac{m(x)}{\lambda^n}\hat{f}\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda^n}m\left(\frac{x}{\lambda}\right)\hat{f}\left(\frac{x}{\lambda}\right) \\ \Leftrightarrow \quad & m(x) = m\left(\frac{x}{\lambda}\right), \end{aligned}$$

e assim,

$$m(x) = m\left(\frac{\lambda x}{\lambda}\right) = m(\lambda x).$$

Logo, m é positivamente homogênea de grau zero.

Assuma agora que m seja uma função positivamente homogênea de grau zero. Sabemos do anterior que

$$((T\tau_\lambda)f)\widehat{\ }(x) = ((\tau_\lambda T)f)\widehat{\ }(x) \Leftrightarrow m(x) = m\left(\frac{x}{\lambda}\right).$$

Como $Tf \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $f \mapsto \hat{f}$ é uma aplicação bijetiva em $L^2(\mathbb{R}^n)$, concluímos que

$$(T\tau_\lambda)f = (\tau_\lambda T)f.$$

■

Considere τ_ε a aplicação dilatação $x \mapsto \varepsilon x$ e sua correspondente ação sobre funções $\tau_\varepsilon f(x) = f(\varepsilon x)$. Se T é um operador com núcleo K, vimos que $\tau_{\varepsilon^{-1}}T\tau_\varepsilon$ é um operador com núcleo $\varepsilon^{-n}K(\varepsilon^{-1}x)$. Assim, se $T = \tau_{\varepsilon^{-1}}T\tau_\varepsilon$, então $K(x) = \varepsilon^{-n}K(\varepsilon^{-1}x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, e portanto $K(\varepsilon x) = \varepsilon^{-n}K(x)$, para todo $\varepsilon > 0$, isto é, K é positivamente homogênea de grau $-n$. Consideremos assim o núcleo da forma

$$K(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^n},$$

no qual Ω é positivamente homogênea de grau zero, isto é, $\Omega(\varepsilon x) = \Omega(x)$, para todo $\varepsilon > 0$. Desta forma, Ω é completamente determinada por sua restrição à esfera unitária S^{n-1}.

Antes de enunciarmos o próximo resultado, vamos reinterpretar as condições do Teorema 4.2 em termos de Ω. Primeiramente, assumindo a condição (4.16), dada por

$$\begin{cases} |K(x)| \leq B|x|^{-n}, \quad |x| > 0, \\ \displaystyle\int_{|x|\geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)|\, dx \leq B, \quad |y| > 0, \end{cases}$$

Ω deve ser limitada e consequentemente integrável em S^{n-1}, pois

$$\int_{S^{n-1}} |\Omega(x)|\, d\sigma(x) = \int_{S^{n-1}} |x|^n|K(x)|\, d\sigma(x) \leq \int_{S^{n-1}} B|x|^n|x|^{-n}\, d\sigma(x) < \infty,$$

no qual $d\sigma$ é a medida induzida em S^{n-1}. Daí, a condição (4.17), que é dada por

$$\int_{R_1<|x|<R_2} K(x)\, dx = 0, \quad 0 < R_1 < R_2 < \infty,$$

é equivalente à condição

$$\int_{S^{n-1}} \Omega(x)\, d\sigma = 0, \tag{4.31}$$

pois

$$\begin{aligned}
\int_{R_1<|x|<R_2} K(x)\, dx &= \int_{R_1}^{R_2} \int_{S^{n-1}} K(rx') r^{n-1}\, d\sigma(x')\, dr \\
&= \int_{R_1}^{R_2} \int_{S^{n-1}} \frac{\Omega(rx')}{|rx'|^n} r^{n-1}\, d\sigma(x')\, dr \\
&= \int_{R_1}^{R_2} \int_{S^{n-1}} \frac{\Omega(x')}{r}\, d\sigma(x')\, dr \\
&= \int_{S^{n-1}} \Omega(x')\, d\sigma(x') \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r}\, dr \\
&= \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \int_{S^{n-1}} \Omega(x')\, d\sigma(x').
\end{aligned}$$

Por fim, vamos tratar do caso em que Ω satisfaz a seguinte condição do tipo Dini:

$$\text{Se} \sup_{\substack{|x-x'|\le\delta \\ |x|=|x'|=1}} |\Omega(x) - \Omega(x')| = \omega(\delta), \text{ então } \int_0^1 \frac{\omega(\delta)}{\delta}\, d\delta < \infty. \tag{4.32}$$

Teorema 4.3. *Seja Ω positivamente homogênea de grau zero e suponha que Ω satisfaça (4.31) e (4.32). Para $1 < p < \infty$ e $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, seja*

$$T_\varepsilon(f)(x) = \int_{|y|\ge\varepsilon} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} f(x-y)\, dy.$$

Então são válidas:

(a) Existe uma constante A_p, independente de f e ε, tal que

$$\|T_\varepsilon(f)\|_p \le A_p \|f\|_p .$$

(b) O limite $\lim_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon(f) = T(f)$ existe em norma L^p e

$$\|T(f)\|_p \le A_p \|f\|_p .$$

(c) Se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, então as transformadas de Fourier de f e Tf estão relacionadas pela igualdade

$$\widehat{(Tf)}(x) = m(x)\hat{f}(x),$$

no qual m é uma função positivamente homogênea de grau zero, expressa por

$$m(x) = \int_{S^{n-1}} \left[\frac{\pi i}{2} \operatorname{sgn}(x\cdot y) + \ln\left(\frac{1}{|x\cdot y|}\right)\right] \Omega(y)\, d\sigma(y), \quad |x| = 1. \tag{4.33}$$

Demonstração. Os itens (a) e (b) seguem como consequência do Teorema 4.2 se provarmos que todo $K(x) = \dfrac{\Omega(x)}{|x|^n}$ satisfaz

$$\int_{|x|\geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)|\, dx \leq B$$

para Ω satisfazendo (4.32). Para isso, escrevemos a expressão $K(x-y) - K(x)$ na forma

$$K(x-y) - K(x) = \frac{\Omega(x-y) - \Omega(x)}{|x-y|^n} + \Omega(x)\left[\frac{1}{|x-y|^n} - \frac{1}{|x|^n}\right] = (I) + (II).$$

Para (II), vejamos que

$$\int_{|x|\geq 2|y|} \left|\frac{1}{|x-y|^n} - \frac{1}{|x|^n}\right| dx \leq C.$$

Com efeito, se $|x| \geq 2|y|$, obtemos por meio do Teorema do Valor Médio que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{|x-y|^n} - \frac{1}{|x|^n}\right| &= \left|\frac{|x-y|^n - |x|^n}{|x-y|^n|x|^n}\right| \leq \left|\frac{|x-y|^n - |x|^n}{(|x|/2)^n|x|^n}\right| = \frac{2^n}{|x|^n}\left|\frac{|x-y|^n}{|x|^n} - \frac{|x|^n}{|x|^n}\right| \\
&= \frac{2^n}{|x|^n}\left||x'-y'|^n - |x'|^n\right| \leq \frac{2^n C_1|y'|}{|x|^n} = \frac{2^n C_1 |y|}{|x|^{n+1}},
\end{aligned}$$

no qual $x' = \dfrac{x}{|x|}$ e $y' = \dfrac{y}{|x|}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{|x|\geq 2|y|} \left|\frac{1}{|x-y|^n} - \frac{1}{|x|^n}\right| dx &\leq \int_{|x|\geq 2|y|} \frac{2^n C_1|y|}{|x|^{n+1}}\, dx \\
&= C_2|y|\int_{2|y|}^{\infty} \frac{1}{r^2}\, dr \\
&= \frac{C_2|y|}{2|y|} = C_3.
\end{aligned}$$

Como a função Ω é limitada, concluímos que a integral do termo (II) converge absolutamente se $|x| \geq 2|y|$, isto é,

$$\int_{|x|\geq 2|y|} |\Omega(x)| \left|\frac{1}{|x-y|^n} - \frac{1}{|x|^n}\right| dx < \infty.$$

Para o termo (I), note que a distância entre as projeções de $x-y$ e x sobre a esfera unitária é limitada por $\dfrac{C|y|}{|x|}$, no qual C é uma constante positiva, pois como $|x| \geq 2|y|$,

$$\left|\frac{x-y}{|x-y|} - \frac{x}{|x|}\right| = \left|\frac{(x-y)|x|^{-1}}{|x-y||x|^{-1}} - \frac{x}{|x|}\right| = \left|\frac{x'-y'}{|x'-y'|} - x'\right| \leq C|y'| = \frac{C|y|}{|x|},$$

no qual $x' = \dfrac{x}{|x|}$ e $y' = \dfrac{y}{|x|}$. Logo, segue da definição de ω em (4.32) que

$$\begin{aligned}
\int_{|x|\geq 2|y|} \left| \frac{\Omega(x-y)-\Omega(x)}{|x-y|^n} \right| dx &= \int_{|x|\geq 2|y|} \frac{1}{|x-y|^n} \left| \Omega\left(\frac{x-y}{|x-y|}\right) - \Omega\left(\frac{x}{|x|}\right) \right| dx \\
&\leq \int_{|x|\geq 2|y|} \frac{1}{|x-y|^n} \omega\left(\frac{C|y|}{|x|}\right) dx \\
&\leq \int_{|x|\geq 2|y|} \frac{2^n}{|x|^n} \omega\left(\frac{C|y|}{|x|}\right) dx \\
&= C' \int_{2|y|}^{\infty} \frac{1}{r} \omega\left(\frac{C|y|}{r}\right) dr \\
&= C'' \int_0^{\frac{c}{2}} \frac{\omega(s)}{s}\, ds < \infty,
\end{aligned}$$

pois como Ω satisfaz (4.32) e ω é limitada, então

$$\int_0^{\frac{c}{2}} \frac{\omega(s)}{s}\, ds = \int_0^{1} \frac{\omega(s)}{s}\, ds + \int_1^{\frac{c}{2}} \frac{\omega(s)}{s}\, ds < \infty.$$

Concluímos do anterior que

$$\int_{|x|\geq 2|y|} |K(x-y)-K(x)|\, dx \leq \int_{|x|\geq 2|y|} |(I)|\, dx + \int_{|x|\geq 2|y|} |(II)|\, dx < \infty,$$

e portanto os itens (a) e (b) seguem como consequência do Teorema 4.2.

Vejamos agora que T é um operador em $\mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$ que comuta com translações e dilatações positivas, e portanto podemos utilizar a Proposição 4.1 para provar o item (c).

De fato, se ψ_a é o operador de translação por $a \in \mathbb{R}^n$, definido por $(\psi_a f)(x) = f(x-a)$, então

$$\begin{aligned}
(\psi_a T_\varepsilon) f(x) &= \int_{|y|\geq\varepsilon} K(y) f(x-a-y)\, dy \\
&= \int_{|y|\geq\varepsilon} K(y) (\psi_a f)(x-y)\, dy \\
&= (T_\varepsilon \psi_a) f(x),
\end{aligned}$$

para toda $f \in L^2$, $\varepsilon > 0$. Como ψ_a é um operador linear e contínuo em L^2 e $T_\varepsilon f$ converge a Tf em norma L^2, então $(\psi_a T) f = (T\psi_a) f$ para toda $f \in L^2$.

Analogamente, se τ_λ é o operador de dilatação por $\lambda > 0$, então T comuta com τ_λ, pois

$$\begin{aligned}
(\tau_\lambda T_\varepsilon) f(x) &= \int_{|y|\geq\varepsilon} \frac{\Omega(\lambda x - y)}{|\lambda x - y|^n} f(y)\, dy \\
&= \int_{|y|\geq\varepsilon} \frac{\lambda^{-n}\Omega\left(x - \frac{y}{\lambda}\right)}{\left|x-\frac{y}{\lambda}\right|^n} f(y)\, dy
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{|y|\geq\varepsilon} \lambda^{-n} K\left(x - \frac{y}{\lambda}\right) f(y)\,dy \\
&= \int_{|y|\geq\frac{\varepsilon}{\lambda}} K(x-y) f(\lambda y)\,dy \\
&= \left(T_{\frac{\varepsilon}{\lambda}}\tau_\lambda\right) f(x)
\end{aligned}
$$

e ambos T_ε e $T_{\frac{\varepsilon}{\lambda}}$ convergem para T em norma L^2 quando $\varepsilon \to 0$, o que nos permite concluir que $\tau_\lambda T = T\tau_\lambda$.

Assim, segue da Proposição 4.1 que existe $\tilde{m} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$(Tf)\widehat{\ }(y) = \tilde{m}(y)\hat{f}(y)$$

para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Mais ainda, o Lema 4.2 nos garante que $\tilde{m}(x)$ é uma função positivamente homogênea de grau zero. Vejamos agora que é possível obtermos uma expressão explícita para $\tilde{m}(x)$ em termos do núcleo.

Seja $0 < \varepsilon < \eta < \infty$ e defina

$$K_{\varepsilon,\eta}(x) = \begin{cases} \dfrac{\Omega(x)}{|x|^n}, & \varepsilon \leq |x| \leq \eta, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Observe que $K_{\varepsilon,\eta} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, pois como Ω é limitada,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |K_{\varepsilon,\eta}(x)|\,dx = \int_{\varepsilon\leq|x|\leq\eta} \left|\frac{\Omega(x)}{|x|^n}\right| dx \leq C\int_\varepsilon^\eta \frac{1}{r}\,dr < \infty.$$

Se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, então

$$(K_{\varepsilon,\eta} * f)\widehat{\ }(y) = \widehat{K_{\varepsilon,\eta}}(y)\hat{f}(y).$$

Provemos agora dois fatos a respeito de $K_{\varepsilon,\eta}$.

(i) $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} |\widehat{K_{\varepsilon,\eta}}(x)| \leq A$, no qual A é uma constante independente de ε e η.

(ii) Se $x \neq 0$, $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \eta\to\infty}} \widehat{K_{\varepsilon,\eta}}(x) = m(x)$, no qual $m(x)$ é a função definida em (4.33).

Para isto, será conveniente utilizar coordenadas polares. Sejam $x = Rx'$ e $y = ry'$, nos quais $R = |x| > 0$, $r = |y| > 0$, $x' = \dfrac{x}{|x|} \in S^{n-1}$ e $y' = \dfrac{y}{|y|} \in S^{n-1}$.

Considere assim a seguinte integral auxiliar:

$$I_{\varepsilon,\eta}(x,y') = \int_\varepsilon^\eta \frac{e^{2\pi i Rrx'\cdot y'} - \cos(2\pi Rr)}{r}\,dr, \quad R > 0. \tag{4.34}$$

Afirmação 1: A parte imaginária de (4.34), dada por $\displaystyle\int_\varepsilon^\eta \frac{\operatorname{sen}(2\pi Rrx'\cdot y')}{r}\,dr$, é uniformemente limitada e converge para

$$\operatorname{sgn}(x'\cdot y')\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(x'\cdot y').$$

De fato, se $\alpha = 2\pi R x' \cdot y'$, então $\operatorname{sgn}(\alpha) = \operatorname{sgn}(x' \cdot y')$ e temos que

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon}^{\eta} \frac{\operatorname{sen}(2\pi R r x' \cdot y')}{r}\, dr &= \int_{\varepsilon}^{\eta} \frac{\operatorname{sen}(\alpha r)}{r}\, dr \\ &= \operatorname{sgn}(\alpha) \int_{\alpha\varepsilon}^{\alpha\eta} \frac{\operatorname{sen}(r)}{r}\, dr \\ &= \operatorname{sgn}(\alpha) \int_{\varepsilon'}^{\eta'} \frac{\operatorname{sen}(r)}{r}\, dr,\end{aligned}$$

no qual $\alpha\varepsilon = \varepsilon'$ e $\alpha\eta = \eta'$. Tomando N como o maior natural tal que $N\pi \leq \eta' \leq (N+1)\pi$, então $|N\pi - \eta'| < \pi$ e podemos expressar a integral acima por

$$\int_{\varepsilon}^{\eta} \frac{\operatorname{sen}(\alpha r)}{r}\, dr = \operatorname{sgn}(\alpha) \left[\int_{\varepsilon'}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(r)}{r}\, dr + \sum_{k=1}^{N-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\operatorname{sen}(r)}{r}\, dr + \int_{N\pi}^{\eta'} \frac{\operatorname{sen}(r)}{r}\, dr \right],$$

de forma que

$$\left| \int_{\varepsilon'}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(r)}{r}\, dr \right| \leq \left| \int_{0}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(r)}{r}\, dr \right| \leq \infty,$$

e também,

$$\left| \int_{N\pi}^{\eta'} \frac{\operatorname{sen}(r)}{r}\, dr \right| \leq \left| \int_{N\pi}^{(N+1)\pi} \frac{\operatorname{sen}(r)}{r}\, dr \right| \leq \infty.$$

Mais ainda,

$$\sum_{k=1}^{N-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\operatorname{sen}(r)}{r}\, dr = \sum_{k=1}^{N-1} (-1)^k \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\operatorname{sen}(r)|}{r}\, dr = \sum_{k=1}^{N-1} (-1)^k C_k,$$

no qual $C_{k+1} \leq C_k$, para todo $k \geq 1$, e $C_k \to 0$ se $k \to \infty$, pois

$$C_{k+1} = \int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} \frac{|\operatorname{sen}(r)|}{r}\, dr \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\operatorname{sen}(r)|}{r}\, dr = C_k,$$

uma vez que $|\operatorname{sen}(x)|$ possui período π e $\frac{1}{x}$ decresce para $x > 0$, e também

$$C_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\operatorname{sen}(r)|}{r}\, dr \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{1}{r}\, dr \leq \frac{(k+1)\pi - k\pi}{k\pi} = \frac{1}{k} \to 0$$

se $k \to \infty$.

Logo, $\sum_{k=1}^{N-1} (-1)^k C_k$ é uma soma alternada cujo termo geral tende a zero, e portanto é limitada, de forma que esta limitação não depende de η'. Logo, a parte imaginária de (4.34) é uniformemente limitada e

$$\operatorname{sgn}(\alpha) \int_{\varepsilon'}^{\eta'} \frac{\operatorname{sen}(r)}{r}\, dr \to \operatorname{sgn}(\alpha) \int_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(r)}{r}\, dr = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(x' \cdot y'),$$

se $\varepsilon \to 0$ e $\eta \to \infty$, o que prova a Afirmação 1.

Afirmação 2: Para a parte real de (4.34), temos que

$$\left| \int_{\varepsilon}^{\eta} \frac{\cos(2\pi R r x' \cdot y') - \cos(2\pi R r)}{r} \, dr \right| \leq \ln \left(\frac{1}{|x' \cdot y'|} \right) + C, \tag{4.35}$$

e também,

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \eta \to \infty}} \int_{\varepsilon}^{\eta} \frac{\cos(2\pi R r x' \cdot y') - \cos(2\pi R r)}{r} \, dr = \ln \left(\frac{\mu}{\lambda} \right), \tag{4.36}$$

no qual $\mu = R$, $\lambda = R|x' \cdot y'|$ e $0 < \lambda < \mu$.

Com efeito, sejam $h(r) = \cos(2\pi r)$, $\lambda = R|x' \cdot y'|$ e $\mu = R$. Então

$$\int_{\varepsilon}^{\eta} \frac{h(\lambda r) - h(\mu r)}{r} \, dr = \int_{\varepsilon}^{\eta} \frac{h(\lambda r)}{r} \, dr - \int_{\varepsilon}^{\eta} \frac{h(\mu r)}{r} \, dr,$$

no qual

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^{\eta} \frac{h(\lambda r)}{r} \, dr &= \int_{\varepsilon}^{\eta} \frac{h(\lambda r) - h(0)}{r} \, dr + \int_{\varepsilon}^{\eta} \frac{h(0)}{r} \, dr \\ &= \int_{\varepsilon}^{\eta} \frac{h(\lambda r) - h(0)}{r} \, dr + h(0) \ln \left(\frac{\eta}{\varepsilon} \right), \end{aligned}$$

e analogamente,

$$\int_{\varepsilon}^{\eta} \frac{h(\mu r)}{r} \, dr = \int_{\varepsilon}^{\eta} \frac{h(\mu r) - h(0)}{r} \, dr + h(0) \ln \left(\frac{\eta}{\varepsilon} \right).$$

Tomando a diferença, obtemos que

$$\int_{\varepsilon}^{\eta} \frac{h(\lambda r) - h(\mu r)}{r} \, dr = \int_{\varepsilon}^{\eta} \frac{h(\lambda r) - h(0)}{r} \, dr - \int_{\varepsilon}^{\eta} \frac{h(\mu r) - h(0)}{r} \, dr = I_{\lambda} - I_{\mu}.$$

Para a integral I_{λ}, observamos que

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^{\eta} \frac{h(\lambda r) - h(0)}{r} \, dr &= \int_{\varepsilon}^{\eta} \frac{\cos(2\pi \lambda r) - 1}{r} \, dr \\ &= \int_{2\pi\lambda\varepsilon}^{2\pi\lambda\eta} \frac{\cos(t) - 1}{t} \, dt \\ &= \int_{2\pi\lambda\varepsilon}^{1} \frac{\cos(t) - 1}{t} \, dt + \int_{1}^{2\pi\lambda\eta} \frac{\cos(t) - 1}{t} \, dt \\ &= I_{\lambda,1} + I_{\lambda,2}, \end{aligned}$$

no qual

$$I_{\lambda,1} = \int_{2\pi\lambda\varepsilon}^{1} \frac{1}{t} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m t^{2m}}{(2m)!} - 1 \right] dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{2\pi\lambda\varepsilon}^{1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m t^{2m-1}}{(2m)!}\, dt \\
&= \int_{2\pi\lambda\varepsilon}^{1} t \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m t^{2m-2}}{(2m)!}\right] dt \\
&\leq C \int_{2\pi\lambda\varepsilon}^{1} t\, dt < \infty,
\end{aligned}
$$

uma vez que a série acima converge para $|t| \leq 1$. E também,

$$
\begin{aligned}
I_{\lambda,2} &= \int_{1}^{2\pi\lambda\eta} \frac{\cos(t) - 1}{t}\, dt \\
&= \int_{1}^{2\pi\lambda\eta} \frac{\cos(t)}{t}\, dt - \int_{1}^{2\pi\lambda\eta} \frac{1}{t}\, dt \\
&= \frac{\operatorname{sen}(2\pi\lambda\eta)}{2\pi\lambda\eta} - \operatorname{sen}(1) + \int_{1}^{2\pi\lambda\eta} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t^2}\, dt - \ln(2\pi\lambda\eta) \\
&\leq \frac{\operatorname{sen}(2\pi\lambda\eta)}{2\pi\lambda\eta} - \operatorname{sen}(1) + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{t^2}\, dt - \ln(2\pi\lambda\eta) \\
&\leq C - \ln(2\pi\lambda\eta).
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
I_\lambda = I_{\lambda,1} + I_{\lambda,1} \leq C' - \ln(2\pi\lambda\eta),
$$

no qual C' é uma constante que não depende de η e λ. Analogamente, $I_\mu \leq C'' - \ln(2\pi\mu\eta)$, e portanto

$$
\begin{aligned}
\int_{\varepsilon}^{\eta} \frac{h(\lambda r) - h(\mu r)}{r}\, dr &= I_\lambda - I_\mu \\
&\leq C - \ln(2\pi\lambda\eta) + \ln(2\pi\mu\eta) \\
&= C + \ln\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) \\
&= C + \ln\left(\frac{1}{|x' \cdot y'|}\right),
\end{aligned}
$$

o que mostra a desigualdade (4.35) da Afirmação 2.

Para o limite em (4.36), considere $\lambda = 2\pi R|x' \cdot y'|$ e $\mu = 2\pi R$. Note que para ε suficientemente pequeno e η suficientemente grande, temos que $\mu\varepsilon < \lambda\eta$, e então

$$
\begin{aligned}
&\int_{\varepsilon}^{\eta} \frac{\cos(2\pi R r x' \cdot y') - \cos(2\pi R r)}{r}\, dr = \int_{\varepsilon}^{\eta} \frac{\cos(\lambda t) - \cos(\mu t)}{t}\, dt \\
&= \int_{\lambda\varepsilon}^{\lambda\eta} \frac{\cos(t)}{t}\, dt - \int_{\mu\varepsilon}^{\mu\eta} \frac{\cos(t)}{t}\, dt \\
&= \int_{\lambda\varepsilon}^{\mu\varepsilon} \frac{\cos(t)}{t}\, dt + \int_{\mu\varepsilon}^{\lambda\eta} \frac{\cos(t)}{t}\, dt - \int_{\mu\varepsilon}^{\lambda\eta} \frac{\cos(t)}{t}\, dt - \int_{\lambda\eta}^{\mu\eta} \frac{\cos(t)}{t}\, dt \\
&= \int_{\lambda\varepsilon}^{\mu\varepsilon} \frac{\cos(t)}{t}\, dt - \int_{\lambda\eta}^{\mu\eta} \frac{\cos(t)}{t}\, dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\lambda\varepsilon}^{\mu\varepsilon} \frac{\cos(t)-1}{t}\,dt + \int_{\lambda\varepsilon}^{\mu\varepsilon} \frac{1}{t}\,dt - \int_{\lambda\eta}^{\mu\eta} \frac{\cos(t)-1}{t}\,dt - \int_{\lambda\eta}^{\mu\eta} \frac{1}{t}\,dt \\
&= \int_{\lambda\varepsilon}^{\mu\varepsilon} \frac{\cos(t)-1}{t}\,dt + \int_{\lambda\eta}^{\mu\eta} \frac{1-\cos(t)}{t}\,dt,
\end{aligned}
$$

no qual

$$\int_{\lambda\varepsilon}^{\mu\varepsilon} \frac{\cos(t)-1}{t}\,dt \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \left|\frac{\cos(t)-1}{t}\right| (\mu-\lambda)\varepsilon = \mathcal{O}(\varepsilon)$$

e, por integração por partes,

$$
\begin{aligned}
\int_{\lambda\eta}^{\mu\eta} \frac{1-\cos(t)}{t}\,dt &= \left.\frac{t-\operatorname{sen}(t)}{t}\right|_{\lambda\eta}^{\mu\eta} + \int_{\lambda\eta}^{\mu\eta} \frac{t-\operatorname{sen}(t)}{t^2}\,dt \\
&\leq C\left(\frac{1}{\mu\eta}+\frac{1}{\lambda\eta}\right) + \int_{\lambda\eta}^{\mu\eta} \frac{1}{t}\,dt - \int_{\lambda\eta}^{\mu\eta} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t^2}\,dt \\
&\leq C\left(\frac{1}{\mu\eta}+\frac{1}{\lambda\eta}\right) + \ln\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) + \int_{\lambda\eta}^{\infty} \frac{1}{t^2}\,dt \\
&= C\left(\frac{1}{\mu\eta}+\frac{1}{\lambda\eta}\right) + \ln\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) + \frac{1}{\lambda\eta} \\
&= \ln\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\eta}\right).
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \eta\to\infty}} \int_{\varepsilon}^{\eta} \frac{\cos(\lambda t)-\cos(\mu t)}{t}\,dt = \ln\left(\frac{\mu}{\lambda}\right),$$

e portanto a Afirmação 2 está provada.

Voltando agora aos núcleos truncados $K_{\varepsilon,\eta}$, observe que

$$
\begin{aligned}
\widehat{K_{\varepsilon,\eta}}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot y} K_{\varepsilon,\eta}(y)\,dy \\
&= \int_{\varepsilon\leq|y|\leq\eta} \frac{e^{2\pi i x\cdot y}\,\Omega(y)}{|y|^n}\,dy \\
&= \int_{\varepsilon}^{\eta}\int_{S^{n-1}} \frac{e^{2\pi i x\cdot(ry')}\Omega(ry')r^{n-1}}{r^n}\,d\sigma(y')\,dr \\
&= \int_{S^{n-1}}\int_{\varepsilon}^{\eta} \frac{e^{2\pi i Rrx'\cdot y'}\Omega(y')r^{n-1}}{r^n}\,dr\,d\sigma(y') \\
&= \int_{S^{n-1}}\int_{\varepsilon}^{\eta} \frac{e^{2\pi i Rrx'\cdot y'}-\cos(2\pi Rr)}{r}\,dr\,\Omega(y')\,d\sigma(y') \\
&= \int_{S^{n-1}} I_{\varepsilon,\eta}(x,y')\Omega(y')\,d\sigma(y').
\end{aligned}
$$

Pelas afirmações 1 e 2, a parte imaginária de $I_{\varepsilon,\eta}(x,y')$ é uniformemente limitada e sua parte real é limitada por $\ln\left(\frac{1}{|x'\cdot y'|}\right)+C$. Logo,

$$|\widehat{K_{\varepsilon,\eta}}(x)| \leq A\int_{S^{n-1}} \left[1+\ln\left(\frac{1}{|x'\cdot y'|}\right)\right] |\Omega(y')|\,d\sigma(y'),$$

o que prova o item (i), uma vez que Ω é limitada e o termo anterior não depende de ε e η.

Mais ainda, como $\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \eta\to\infty}} \operatorname{Im}(I_{\varepsilon,\eta}(x,y')) = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(x'\cdot y')$ e $\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \eta\to\infty}} \operatorname{Re}(I_{\varepsilon,\eta}(x,y')) = \ln\left(\frac{1}{|x'\cdot y'|}\right)$, segue pelo Teorema da Convergência Dominada que

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \eta\to\infty}} \widehat{K_{\varepsilon,\eta}}(x) &= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \eta\to\infty}} \int_{S^{n-1}} I_{\varepsilon,\eta}(x,y')\Omega(y')\,d\sigma(y') \\
&= \int_{S^{n-1}} \left[\frac{\pi i\operatorname{sgn}(x'\cdot y')}{2} + \ln\left(\frac{1}{|x'\cdot y'|}\right)\right]\Omega(y')\,d\sigma(y') \\
&= m(x),
\end{aligned}$$

o que prova o item (ii).

Falta apenas mostrarmos que a função m é exatamente o multiplicador dado pela Proposição 4.1, isto é, $m = \tilde{m}$ e

$$(Tf)\widehat{\ }(x) = m(x)\hat{f}(x).$$

Assim, se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, então $K_{\varepsilon,\eta} * f$ converge em norma L^2 se $\varepsilon \to 0$ e $\eta \to \infty$. De fato, note que a sequência $\{K_{\varepsilon,\eta} * f\}_{\varepsilon,\eta\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em norma $L^2(\mathbb{R}^n)$, pois pelo Teorema de Parseval-Plancherel,

$$\begin{aligned}
\|K_{\varepsilon,\eta} * f - K_{\varepsilon',\eta'} * f\|_2 &= \left\|(K_{\varepsilon,\eta} * f)\widehat{\ } - (K_{\varepsilon',\eta'} * f)\widehat{\ }\right\|_2 \\
&= \left\|(\widehat{K_{\varepsilon,\eta}} - \widehat{K_{\varepsilon',\eta'}})\hat{f}\right\|_2 \\
&\le \left\|\widehat{K_{\varepsilon,\eta}} - \widehat{K_{\varepsilon',\eta'}}\right\|_\infty \|f\|_2 \to 0
\end{aligned}$$

se $\varepsilon,\varepsilon' \to 0$ e $\eta,\eta' \to \infty$, uma vez que $\widehat{K_{\varepsilon,\eta}}(x)$ e $\widehat{K_{\varepsilon',\eta'}}(x)$ convergem uniformemente para $m(x)$.

Logo, existe $h \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $K_{\varepsilon,\eta} * f \to h$ em norma L^2. Mais ainda, $\hat{h}(x) = m(x)\hat{f}(x)$, pois como $\widehat{K_{\varepsilon,\eta}}(x) \to m(x)$, então

$$\left\|\widehat{K_{\varepsilon,\eta}}\hat{f} - m\hat{f}\right\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{K_{\varepsilon,\eta}}(x) - m(x)|^2 |\hat{f}(x)|^2\,dx \to 0,$$

e se $\mathscr{F}$ denota a transformada de Fourier,

$$\hat{h} = \mathscr{F}\left(\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \eta\to\infty}} K_{\varepsilon,\eta} * f\right) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \eta\to\infty}} \widehat{K_{\varepsilon,\eta}}\hat{f} = m\hat{f},$$

sendo o limite acima tomado em norma L^2.

Suponha agora que $f \in L^1 \cap L^2$. Então para $\varepsilon > 0$ fixado, temos que $K_{\varepsilon,\eta} \to K_\varepsilon$ em norma L^2 se $\eta \to \infty$, pois

$$\|K_{\varepsilon,\eta} - K_\varepsilon\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |K_{\varepsilon,\eta}(x) - K_\varepsilon(x)|^2\,dx \to 0$$

se $\eta \to \infty$. Logo, segue da Desigualdade de Young que $K_{\varepsilon,\eta} * f \to K_\varepsilon * f = T_\varepsilon f$ em norma L^2, pois

$$\|K_{\varepsilon,\eta} * f - K_\varepsilon * f\|_2 = \|(K_{\varepsilon,\eta} - K_\varepsilon) * f\|_2 \leq \|K_{\varepsilon,\eta} - K_\varepsilon\|_2 \|f\|_1 \to 0$$

se $\eta \to \infty$. Mais ainda, sabemos pelo item (b) que $T_\varepsilon(f) \to T(f)$ em norma L^2 se $\varepsilon \to 0$.

Segue portanto que $Tf = h$, no qual $\hat{h} = (Tf)\widehat{\ } = m\hat{f}$, isto é,

$$Tf = (\mathscr{F}^{-1} m \mathscr{F})f, \quad f \in L^1 \cap L^2.$$

Como T e $\mathscr{F}^{-1} m \mathscr{F}$ são operadores lineares e contínuos em $L^2(\mathbb{R}^n)$ que coincidem em um subespaço denso de L^2, concluímos que

$$(Tf)\widehat{\ }(x) = m(x)\hat{f}(x), \quad f \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

o que prova o teorema.

■

Exemplo 4.2. As transformações descritas no teorema anterior não necessariamente são limitadas em L^1 ou L^∞. Como exemplo, considere a transformada de Hilbert H definida no Exemplo 4.1 por

$$(Hf)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{|y| \geq \varepsilon} \frac{f(x-y)}{y}\, dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Observe que tomando $\Omega(x) = \dfrac{\operatorname{sgn}(x)}{\pi}$, então Ω é positivamente homogênea de grau zero e

$$\frac{\Omega(x)}{|x|} = \frac{\operatorname{sgn}(x)}{\pi |x|} = \frac{1}{\pi x}.$$

Assim, se $f(x) = \chi_{(a,b)}(x)$, então

$$\begin{aligned}
(H\chi_{(a,b)})(x) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{|y| \geq \varepsilon} \frac{\chi_{(a,b)}(x-y)}{y}\, dy \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{|x-y| \geq \varepsilon} \frac{\chi_{(a,b)}(y)}{x-y}\, dy \\
&= \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{1}{x-y}\, dy \\
&= \frac{1}{\pi} \ln\left(\left|\frac{x-b}{x-a}\right|\right),
\end{aligned}$$

que não é limitada em $L^\infty(\mathbb{R})$ e em $L^1(\mathbb{R})$.

Observe agora que o teorema anterior nos garante a existência da transformação integral singular

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y| \geq \varepsilon} \frac{\Omega(y) f(x-y)}{|y|^n}\, dy \tag{4.37}$$

no sentido de convergência em norma L^p, $1 < p < \infty$, mas não no sentido de convergência em quase toda parte. O teorema a seguir nos garante os resultados a respeito de convergência q.t.p. como consequência dos resultados obtidos a respeito de convergência em norma L^p.

Teorema 4.4. *Suponha que Ω seja uma função que satisfaz as condições do Teorema 4.3. Para $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, considere*

$$(T_\varepsilon f)(x) = \int_{|y| \geq \varepsilon} \frac{\Omega(y) f(x-y)}{|y|^n}\, dy, \quad \varepsilon > 0.$$

Então a integral acima converge absolutamente para cada $x \in \mathbb{R}^n$ e são válidos os seguintes itens:

(a) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} (T_\varepsilon f)(x)$ *existe em quase toda parte.*

(b) Seja $(T^* f)(x) = \sup\limits_{\varepsilon > 0} |(T_\varepsilon f)(x)|$. *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então a aplicação $f \mapsto T^* f$ é do tipo fraco $(1,1)$, isto é,*

$$m(\{x \in \mathbb{R}^n; |(T^* f)(x)| > \alpha\}) \leq \frac{A \|f\|_1}{\alpha}.$$

(c) Se $1 < p < \infty$, então $\|T^* f\|_p \leq A_p \|f\|_p$.

Demonstração. A demonstração será dividida em duas etapas. No entanto, a demonstração do item (c) será adiada para o próximo capítulo, onde será feita com mais detalhes.

Primeira etapa: O argumento que será utilizado é análogo ao utilizado na demonstração do Teorema 4.1. Dados $\alpha > 0$, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, considere a Decomposição de Calderón-Zygmund apresentada no Teorema 3.3, ou seja, $\mathbb{R}^n = F \cup G$, com $F \cap G = \varnothing$, $|f(x)| \leq \alpha$ q.t.p. em F e $G = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} Q_j$, no qual os interiores dos cubos Q_j são mutuamente disjuntos. Desta forma, decompomos a função f em $f = g + b$, no qual g é definida por

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in F, \\ \dfrac{1}{m(Q_j)} \displaystyle\int_{Q_j} f(y)\, dy, & x \in Q_j, \end{cases}$$

e $\displaystyle\int_{Q_j} b(y)\, dy = 0$, assim como na demonstração do Teorema 4.1.

Considere para cada cubo Q_j da decomposição o cubo Q_j^*, com mesmo centro y_j, mas expandido $2\sqrt{n}$ vezes, e denote por G^* a união dos cubos expandidos. Faremos então algumas observações geométricas:

(i) Suponha $x \in (Q_j^*)^c$ e assuma que, para algum $y_0 \in Q_j$, $|x - y_0| = \varepsilon$. Então a bola fechada centrada em x e de raio $\gamma_n \varepsilon$ contém Q_j, isto é, $\overline{B(x,r)} \supset Q_j$, no qual $r = \gamma_n \varepsilon$ e γ_n depende apenas da dimensão n.

De fato, seja $x \in (Q_j^*)^c$ fixado. Por simplicidade, vamos assumir que Q_j é o cubo de lado um centrado na origem e Q_j^* é o cubo de lado $2\sqrt{n}$ centrado na origem.

Considere então o cubo Q_λ de lado 2λ centrado na origem e tal que $x \in \partial Q_\lambda$, de forma que $\operatorname{diam} Q_\lambda = 2\sqrt{n}\lambda$. Note que, para cada $y \in Q_j$,

$$|x - y| \geq \operatorname{dist}(\partial Q_j, \partial Q_\lambda) = \left(\sqrt{n} - \frac{1}{2}\right) + \left(\lambda - \sqrt{n}\right) = \lambda - \frac{1}{2},$$

e por outro lado,

$$|x - y| \leq \frac{\operatorname{diam} Q_\lambda}{2} + \frac{\operatorname{diam} Q_j}{2} = \frac{2\lambda\sqrt{n}}{2} + \frac{\sqrt{n}}{2} = \sqrt{n}\left(\lambda + \frac{1}{2}\right),$$

de forma que

$$\frac{|x - y|}{|x - y_0|} \leq \frac{\lambda\sqrt{n} + \frac{\sqrt{n}}{2}}{\lambda - \frac{1}{2}},$$

para todos $y, y_0 \in Q_j$. Considere agora a função $g(\lambda)$ dada por

$$g(\lambda) = \frac{\lambda\sqrt{n} + \frac{\sqrt{n}}{2}}{\lambda - \frac{1}{2}}.$$

Pela definição do cubo Q_λ, nos interessa estudar apenas o caso em que $\lambda \geq \sqrt{n}$. Mas observe que g é uma função decrescente em $[\sqrt{n}, \infty)$, e então

$$g(\lambda) \leq g(\sqrt{n}) = \frac{n + \frac{\sqrt{n}}{2}}{\sqrt{n} - \frac{1}{2}},$$

para todo $\lambda \geq \sqrt{n}$.

Logo, se $y_0 \in Q_j$ é tal que $|x - y_0| = \varepsilon$, então temos para todo $y \in Q_j$ que

$$\frac{|x - y|}{|x - y_0|} \leq \sup_{y_1, y_2 \in Q_j} \frac{|x - y_1|}{|x - y_2|} \leq g(\sqrt{n}) = \frac{n + \frac{\sqrt{n}}{2}}{\sqrt{n} - \frac{1}{2}}.$$

Tomando $\gamma_n = g(\sqrt{n})$, concluímos que

$$|x - y| \leq \gamma_n |x - y_0| = \gamma_n \varepsilon,$$

e portanto $y \in B(x, \gamma_n \varepsilon)$, para todo $y \in Q_j$.

(ii) Sob as mesmas hipóteses do item anterior, se $|x - y_0| = \varepsilon$, temos que $|x - y| \geq \gamma_n' \varepsilon$, para todo $y \in Q_j$, no qual γ_n' depende apenas da dimensão n.

De fato, seja $x \in (Q_j^*)^c$ fixado e considere os cubos Q_j, Q_j^* e Q_λ como no item anterior, de forma que

$$\frac{|x - y|}{|x - y_0|} \geq \frac{\lambda - \frac{1}{2}}{\lambda\sqrt{n} + \frac{\sqrt{n}}{2}},$$

para todos $y, y_0 \in Q_j$. De forma análoga ao item anterior, definimos a função

$$h(\lambda) = \frac{\lambda - \frac{1}{2}}{\lambda\sqrt{n} + \frac{\sqrt{n}}{2}},$$

que é crescente em $[\sqrt{n},\infty)$. Tomando $\gamma_n' = h(\sqrt{n})$, obtemos para todos y, y_0 que

$$\frac{|x-y|}{|x-y_0|} \geq \inf_{y_1,y_2\in Q_j} \frac{|x-y_1|}{|x-y_2|} \geq h(\sqrt{n}) = \frac{\sqrt{n}-\frac{1}{2}}{n+\frac{\sqrt{n}}{2}} = \gamma_n',$$

e portanto se $|x-y_0| = \varepsilon$, concluímos que

$$|x-y| \geq \gamma_n' \varepsilon,$$

para todo $y \in Q_j$.

Com estas observações, provemos agora que, se $x \in F^* = (G^*)^c$, então

$$\begin{aligned} \sup_{\varepsilon>0} |(T_\varepsilon b)(x)| \leq & \sum_j \int_{Q_j} |K(x-y) - K(x-y_j)||b(y)|\, dy \\ & + \; C \sup_{r>0} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |b(y)|\, dy, \end{aligned} \tag{4.38}$$

com $K(x) = \dfrac{\Omega(x)}{|x|^n}$. Para isto, fixe $x \in F^*$ e $\varepsilon > 0$. Os cubos Q_j podem pertencer a três classes:

1. $|x-y| < \varepsilon$, para todo $y \in Q_j$;
2. $|x-y| > \varepsilon$, para todo $y \in Q_j$;
3. Existe $y \in Q_j$ tal que $|x-y| = \varepsilon$.

Analisemos $T_\varepsilon b$ em cada um dos três casos. Por definição,

$$(T_\varepsilon b)(x) = \sum_j \int_{Q_j} K_\varepsilon(x-y) b(y)\, dy. \tag{4.39}$$

Para o primeiro caso, como $|x-y| < \varepsilon$, então $K_\varepsilon(x-y) = 0$ e portanto a integral sobre Q_j em (4.39) se anula.

Para o segundo caso, note que $K_\varepsilon(x-y) = K(x-y)$, e portanto a integral sobre Q_j é dada por

$$\int_{Q_j} K(x-y) b(y)\, dy = \int_{Q_j} [K(x-y) - K(x-y_j)] b(y)\, dy,$$

no qual y_j é o centro do cubo Q_j, e este termo é majorado em módulo por

$$\int_{Q_j} |K(x-y) - K(x-y_j)||b(y)|\, dy,$$

que aparece no lado direito de (4.38).

Para o terceiro caso, seja $x \in F^*$ fixado. Pelas observações geométricas feitas acima, se $r = \varepsilon\gamma_n$ temos que

$$\begin{aligned}\left|\int_{Q_j} K_\varepsilon(x-y)b(y)\,dy\right| &\leq \int_{Q_j} |K_\varepsilon(x-y)||b(y)|\,dy \\ &= \int_{B(x,r)\cap Q_j} |K_\varepsilon(x-y)||b(y)|\,dy.\end{aligned}$$

No entanto,

$$|K_\varepsilon(x-y)| \leq |K(x-y)| = \left|\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n}\right| \leq \frac{B}{(\gamma_n'\varepsilon)^n},$$

uma vez que Ω é limitada e, pela Observação (ii), $|x-y| \geq \gamma_n'\varepsilon$. Logo, escrevendo $r^n = (\varepsilon\gamma_n)^n = C_n(\varepsilon\gamma_n')^n$, temos que

$$\begin{aligned}\left|\int_{Q_j} K_\varepsilon(x-y)b(y)\,dy\right| &\leq \frac{B}{(\gamma_n'\varepsilon)^n}\int_{B(x,r)\cap Q_j} |b(y)|\,dy \\ &= \frac{B}{r^n/C_n}\int_{B(x,r)\cap Q_j} |b(y)|\,dy \\ &= \frac{C'}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)\cap Q_j} |b(y)|\,dy.\end{aligned}$$

Do anterior, somando sobre todos os cubos $Q_j \subset G$, obtemos que

$$\begin{aligned}|(T_\varepsilon b)(x)| &= \left|\sum_j \int_{Q_j} K_\varepsilon(x-y)b(y)\,dy\right| \\ &\leq \sum_j \left|\int_{Q_j} K_\varepsilon(x-y)b(y)\,dy\right| \\ &\leq \sum_j \frac{C'}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)\cap Q_j} |b(y)|\,dy \\ &= \frac{C'}{m(B(x,r))}\int_{\bigcup_j (B(x,r)\cap Q_j)} |b(y)|\,dy \\ &\leq \frac{C'}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)} |b(y)|\,dy.\end{aligned}$$

Tomando o supremo sobre $\varepsilon > 0$, obtemos a desigualdade (4.38), que pode ser escrita como

$$|(T^*b)(x)| \leq \Sigma + C(Mb)(x),$$

para $x \in F^*$, no qual Mb denota a função maximal de Hardy-Littlewood de b, e assim

$$m\left(\left\{x \in F^*; |(T^*b)(x)| > \frac{\alpha}{2}\right\}\right) \leq \qquad m\left(\left\{x \in F^*; \Sigma > \frac{\alpha}{4}\right\}\right)$$

$$+ \quad m\left(\left\{x \in F^*; C(Mb)(x) > \frac{\alpha}{4}\right\}\right).$$

Afirmação: São válidas as seguintes limitações para as parcelas acima:

$$m\left(\left\{x \in F^*; \Sigma > \frac{\alpha}{4}\right\}\right) \leq \frac{C_1}{\alpha}\|f\|_1$$

e também

$$m\left(\left\{x \in F^*; C(Mb)(x) > \frac{\alpha}{4}\right\}\right) \leq \frac{C}{\alpha}\|f\|_1.$$

De fato, seja $X = \{x \in F^*; \Sigma > \frac{\alpha}{4}\}$. Se $x \in X$, então $1 < \frac{4\Sigma}{\alpha}$, e assim

$$m(x) = \int_X 1\,dx \leq \int_{F^*} \frac{4}{\alpha}\left[\sum_j \int_{Q_j} |K(x-y) - K(x-y_j)||b(y)|\,dy\right] dx.$$

Mas pela demonstração do Teorema 4.1, sabemos que se $x \notin Q_j^*$, então $|x - y_j| \geq 2|y - y_j|$ para todo $y \in Q_j$, e então

$$\int_{F^*} |K(x-y) - K(x-y_j)|\,dx \leq \int_{|x'|\geq 2|y'|} |K(x'-y') - K(x')|\,dx' \leq B$$

no qual $x' = x - y_j$ e $y' = y - y_j$. Assim,

$$\begin{aligned}
m\left(\left\{x \in F^*; \Sigma > \frac{\alpha}{4}\right\}\right) &\leq \sum_j \int_{Q_j} \frac{4}{\alpha}\left[\int_{F^*} |K(x-y) - K(x-y_j)|\,dx\right]|b(y)|\,dy \\
&\leq \frac{4B}{\alpha}\sum_j \int_{Q_j} |f(y)| + |g(y)|\,dy \\
&\leq \frac{4B}{\alpha}\left[\int_G |f(y)|\,dy + \int_G |g(y)|\,dy\right] \\
&\leq \frac{C}{\alpha}\|f\|_1,
\end{aligned}$$

o que mostra a primeira desigualdade da afirmação. Agora, como $b \in L^1(\mathbb{R}^n)$, podemos utilizar o Teorema 3.1 a respeito da função maximal, e assim obtemos que

$$\begin{aligned}
m\left(\left\{x \in F^*; C(Mb)(x) > \frac{\alpha}{4}\right\}\right) &= m\left(\left\{x \in F^*; (Mb)(x) > \frac{\alpha}{4C}\right\}\right) \\
&\leq m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n; (Mb)(x) > \frac{\alpha}{4C}\right\}\right) \\
&\leq \frac{A}{\alpha/(4C)}\int_{\mathbb{R}^n} |b(y)|\,dy \\
&\leq \frac{C_1}{\alpha}\left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\,dy + \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|\,dy\right] \\
&= \frac{C_1}{\alpha}\left[\|f\|_1 + \int_G |g(y)|\,dy + \int_F |g(y)|\,dy\right] \\
&\leq \frac{C_1}{\alpha}(\|f\|_1 + C_2\|f\|_1 + C_3\|f\|_1)
\end{aligned}$$

$$= \frac{C_4}{\alpha} \|f\|_1 ,$$

o que prova a afirmação. Logo,

$$m\left(\left\{x \in F^*; |(T^*b)(x)| > \frac{\alpha}{2}\right\}\right) \leq \frac{C}{\alpha} \|f\|_1 .$$

Mas pelo Corolário 3.2, sabemos que

$$m((F^*)^c) = m(G^*) \leq 2\sqrt{n} m(G) \leq \frac{C}{\alpha} \|f\|_1 ,$$

e portanto

$$m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n; |(T^*b)(x)| > \frac{\alpha}{2}\right\}\right) \leq \frac{C}{\alpha} \|f\|_1 .$$

No entanto, sabemos que

$$\begin{aligned} m\left(\{x \in \mathbb{R}^n; |(T^*f)(x)| > \alpha\}\right) \leq & \quad m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n; |(T^*g)(x)| > \frac{\alpha}{2}\right\}\right) \\ & + \ m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n; |(T^*b)(x)| > \frac{\alpha}{2}\right\}\right), \end{aligned}$$

e aplicando o item (c) para $p = 2$, temos que

$$\|T^*g\|_2 \leq A_2 \|g\|_2 .$$

Mas novamente pela demonstração do Teorema 4.1,

$$m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n; |(T^*g)(x)| > \frac{\alpha}{2}\right\}\right) \leq \frac{C}{\alpha^2} \|g\|_2^2 ,$$

e como $\|g\|_2^2 \leq C'\alpha \|f\|_1$, então

$$m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n; |(T^*g)(x)| > \frac{\alpha}{2}\right\}\right) \leq \frac{C}{\alpha^2} C'\alpha \|f\|_1 = \frac{C''}{\alpha} \|f\|_1 .$$

Logo,

$$m(\{x \in \mathbb{R}^n; |(T^*f)(x)| > \alpha\}) \leq \frac{C}{\alpha} \|f\|_1 ,$$

e portanto T^* é do tipo fraco $(1, 1)$, o que prova o item (b).

A demonstração do item (a) segue um caminho semelhante ao utilizado na demonstração do Teorema de Diferenciação de Lebesgue 3.1. Para cada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, seja

$$(\Lambda f)(x) = \left| \limsup_{\varepsilon \to 0} (T_\varepsilon f)(x) - \liminf_{\varepsilon \to 0} (T_\varepsilon f)(x) \right| .$$

Como

$$|(T_\varepsilon f)(x)| \leq \sup_{\varepsilon > 0} |(T_\varepsilon f)(x)| = (T^*f)(x),$$

então

$$(\Lambda f)(x) \leq 2(T^*f)(x).$$

Agora, escrevemos $f = f_1 + f_2$, no qual $f_1 \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ e $\|f_2\|_p < \delta$. Como visto na demonstração do Teorema 4.2, se $f_1 \in C_c^1$, então $(T_\varepsilon f_1)(x)$ converge uniformemente se $\varepsilon \to 0$, e portanto $(\Lambda f_1)(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Porém, $(\Lambda f)(x) \leq (\Lambda f_1)(x) + (\Lambda f_2)(x)$, e então segue pelo item (c) que

$$\|\Lambda f_2\|_p \leq \|2T^* f_2\|_p \leq 2A_p \|f_2\|_p < 2A_p\delta,$$

se $1 < p < \infty$.

Como δ pode ser tomado tão pequeno quanto se queira, então $\|\Lambda f_2\|_p = 0$, e portanto $(\Lambda f_2)(x) = 0$ q.t.p. Logo, $(\Lambda f)(x) = 0$ q.t.p., o que mostra que o limite $\lim\limits_{\varepsilon \to 0}(T_\varepsilon f)(x)$ existe em quase toda parte se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$.

No caso em que $p = 1$, como $(\Lambda f)(x) \leq 2(T^* f)(x)$ e T^* é do tipo fraco $(1, 1)$, segue que

$$\begin{aligned}
m(\{x \in \mathbb{R}^n; |(\Lambda f)(x)| > \alpha\}) \leq & \quad m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n; |(\Lambda f_1)(x)| > \frac{\alpha}{2}\right\}\right) \\
& + \; m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n; |(\Lambda f_2)(x)| > \frac{\alpha}{2}\right\}\right) \\
\leq & \quad m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n; |2(T^* f_2)(x)| > \frac{\alpha}{2}\right\}\right) \\
\leq & \quad m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n; |(T^* f_2)(x)| > \frac{\alpha}{4}\right\}\right) \\
\leq & \quad \frac{C}{\alpha}\|f_2\|_1 \\
< & \quad \frac{C\delta}{\alpha},
\end{aligned}$$

e portanto $(\Lambda f)(x) = 0$ q.t.p., ou seja, o limite $\lim\limits_{\varepsilon \to 0}(T_\varepsilon f)(x)$ existe q.t.p., o que prova o item (a).

$\blacksquare$

Capítulo 5

Transformadas de Riesz e Integrais de Poisson

Apresentamos neste capítulo operadores integrais singulares conhecidos como transformadas de Riesz. Como veremos na seção a seguir, tais operadores compartilham propriedades semelhantes com a transformada de Hilbert, definida no Exemplo 4.1, uma vez que as transformas de Riesz surgiram como uma generalização da transformada de Hilbert para funções em $\mathbb{R}^n$.

5.1 As Transformadas de Riesz

Iniciamos esta seção com algumas observações a respeito da transformada de Hilbert, dada por

$$(Hf)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{|y| \geq \varepsilon} \frac{f(x-y)}{y}\, dy, \quad x \in \mathbb{R},$$

para $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, cujo núcleo $K(x)$ pode ser escrito como

$$K(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|} = \frac{1}{\pi x},$$

no qual $\Omega(x) = \dfrac{\operatorname{sgn}(x)}{\pi}$ é uma função positivamente homogênea de grau zero.

Proposição 5.1. *São válidas as seguintes propriedades:*

(a) Se $f \in L^2(\mathbb{R})$, então $(Hf)\widehat{\ } = m(x)\hat{f}(x)$, no qual $m(x) = i \operatorname{sgn}(x)$;

(b) O operador H é unitário em $L^2(\mathbb{R})$, isto é, H é um operador linear de L^2 em L^2 que é sobrejetivo e isométrico;

(c) Se ψ_a denota o operador translação por $a \in \mathbb{R}$, definido por $\psi_a f(x) = f(x-a)$, então

$$(H\psi_a)f(x) = (\psi_a H)f(x),$$

para toda $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$.

(d) *Se τ_δ denota o operador de dilatação por $\delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, definido por $(\tau_\delta f)(x) = f(\delta x)$, então*

$$(H\tau_\delta)f(x) = \operatorname{sgn}(\delta)(\tau_\delta H)f(x),$$

para toda $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$.

Demonstração. (a) Como o núcleo $K(x) = \dfrac{1}{\pi x}$ da transformada de Hilbert satisfaz as condições do Teorema 4.3, então

$$(Hf)\widehat{\ }(x) = m(x)\hat{f}(x),$$

no qual o multiplicador m é dado por $m(x) = i\operatorname{sgn}(x)$, pois se $\#$ denota a medida de contagem,

$$\begin{aligned} m(x) &= \int_{S^0} \left[\frac{\pi i}{2}\operatorname{sgn}(xy) + \ln\left(\frac{1}{|xy|}\right)\right]\Omega(y)\, d\#(y) \\ &= \int_{\{-1,1\}} \left[\frac{\pi i x y}{2|xy|} - \ln(|xy|)\right]\frac{y}{\pi|y|}\, d\#(y) \\ &= \int_{\{-1,1\}} \frac{ix}{2|x|}\, d\#(y) \\ &= i\operatorname{sgn}(x). \end{aligned}$$

(b) Pelo Teorema de Parseval-Plancherel, temos que

$$\|Hf\|_2 = \left\|(Hf)\widehat{\ }\right\|_2 = \|i\operatorname{sgn}\hat{f}\|_2 = \|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2\,,$$

e também, dado $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, podemos tomar $f(x) = \mathscr{F}^{-1}(-i\operatorname{sgn}\hat{g})(x)$, de forma que

$$(Hf)\widehat{\ }(x) = i\operatorname{sgn}(x)\hat{f}(x) = \hat{g}(x),$$

e portanto $(Hf)(x) = g(x)$.

(c) O resultado segue diretamente da demonstração do item (c) do Teorema 4.3, uma vez que o núcleo de H pode ser escrito como $K(x) = \dfrac{\Omega(x)}{|x|}$, com Ω homogênea de grau zero.

(d) Se $\delta > 0$, o resultado segue pela demonstração do Teorema 4.3 assim como no item anterior, e portanto H comuta com dilatações positivas. E se $\delta < 0$, temos que

$$\begin{aligned} (H\tau_\delta)f(x) &= \lim_{\varepsilon \to 0}\frac{1}{\pi}\int_{|y|\geq\varepsilon}\frac{f(\delta x - \delta y)}{y}\, dy \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0}\frac{1}{\pi}\int_{|y|\geq\varepsilon\delta}\frac{f(y - \delta x)}{y}\, dy \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0}\frac{1}{\pi}\int_{|y|\geq\varepsilon}\frac{-f(\delta x - y)}{y}\, dy \\ &= -(\tau_\delta H)f(x), \end{aligned}$$

e portanto $H\tau_\delta = -\tau_\delta H$ para $\delta < 0$.

∎

Pelo resultado anterior, vimos que a transformada de Hilbert comuta com translações e dilatações positivas, além de comutar, a menos de um sinal negativo, com dilatações negativas. O resultado a seguir no mostra que estas propriedades de fato caracterizam a transformada de Hilbert.

Proposição 5.2. *Suponha T um operador linear e limitado em $L^2(\mathbb{R})$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) T comuta com translações;

(b) T comuta com dilatações positivas;

(c) T anticomuta com a reflexão, isto é, se $(Rf)(x) = f(-x)$ é o operador de reflexão, então $TR = -RT$.

Então T é um múltiplo constante da transformada de Hilbert.

Demonstração. Como T é um operador linear e limitado em L^2 que comuta com translações, a Proposição 4.1 garante a existência de uma função limitada $m(x)$ tal que

$$(Tf)\widehat{\ }(x) = m(x)\hat{f}(x).$$

Se $\mathscr{F}$ denota a transformada de Fourier, vamos expressar a igualdade acima por $\mathscr{F}T = m\mathscr{F}$, no qual m denota o operador $f \mapsto mf$. Se τ_δ denota a dilatação por $\delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, então

$$\begin{aligned}
(\mathscr{F}\tau_\delta)f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi ixy} f(\delta y)\, dy \\
&= |\delta|^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \frac{xy}{\delta}} f(y)\, dy \\
&= |\delta|^{-1}(\tau_{\delta^{-1}}\mathscr{F})f(x)
\end{aligned}$$

para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, e por continuidade, para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Reescrevendo as hipóteses (b) e (c) como $T\tau_\delta = \operatorname{sgn}(\delta)\tau_\delta T$, segue do anterior que

$$\begin{aligned}
\tau_\delta m &= \tau_\delta \mathscr{F}T\mathscr{F}^{-1} = |\delta|^{-1}\mathscr{F}\tau_{\delta^{-1}}T\mathscr{F}^{-1} = \delta^{-1}\mathscr{F}T\tau_{\delta^{-1}}\mathscr{F}^{-1} = \delta^{-1}\mathscr{F}T\mathscr{F}^{-1}|\delta|\tau_\delta \\
&= \operatorname{sgn}(\delta)\mathscr{F}T\mathscr{F}^{-1}\tau_\delta = \operatorname{sgn}(\delta)m\mathscr{F}\mathscr{F}^{-1}\tau_\delta = \operatorname{sgn}(\delta)m\tau_\delta,
\end{aligned}$$

e portanto $\tau_\delta m = \operatorname{sgn}(\delta)m\tau_\delta$.

Mais ainda, se $f \in L^2(\mathbb{R})$, então

$$(\tau_\delta m)f(x) = (\tau_\delta(mf))(x) = m(\delta x)f(\delta x),$$

e também,

$$\operatorname{sgn}(\delta)(m\tau_\delta)f(x) = \operatorname{sgn}(\delta)m(x)f(\delta x).$$

Igualando os termos acima, obtemos que $m(\delta x) = \operatorname{sgn}(\delta)m(x)$ para todo $\delta \neq 0$, mas isto implica que $m(x) = \operatorname{sgn}(x)m(1)$, para todo $x \neq 0$, ou seja,

$$m(x) = C\operatorname{sgn}(x).$$

Voltando à transformada de Hilbert, sabemos que

$$(Hf)\widehat{\ }(x) = i\,\mathrm{sgn}(x)\hat{f}(x),$$

e do anterior,

$$(Tf)\widehat{\ } = C\,\mathrm{sgn}(x)\hat{f}(x) = C'i\,\mathrm{sgn}(x)\hat{f}(x) = C'(Hf)\widehat{\ }(x),$$

e portanto segue do Teorema de Parseval-Plancherel que T é um múltiplo constante de H.

∎

Observação 5.1. A partir da demonstração da proposição anterior, é possível observar também que as únicas transformações lineares e limitadas em $L^2(\mathbb{R})$ que comutam com translações e dilatações (positivas e negativas) são múltiplos constantes do operador identidade.

Com efeito, note que $(If)\widehat{\ }(x) = \hat{f}(x)$, e se T é um operador que comuta com translações e dilatações, então $T\tau_\delta = \tau_\delta T$ e, analogamente à demonstração da proposição, $\tau_\delta m = m\tau_\delta$. Daí, $m(\delta x) = m(x)$ para todo $\delta \neq 0$, isto é,

$$m(\delta x) = m(\delta) = C, \quad x \neq 0.$$

Assim,

$$(Tf)\widehat{\ }(x) = m(x)\hat{f}(x) = C\hat{f}(x) = C(If)\widehat{\ }(x),$$

e portanto segue o resultado da observação.

Com o objetivo de definirmos operadores em $L^p(\mathbb{R}^n)$ que possuam uma caracterização análoga à da transformada de Hilbert, vamos apresentar agora algumas observações sobre a interação entre a transformada de Fourier n-dimensional e as operações de dilatação e translação. Para isso, seja $\delta > 0$. Obtemos por definição que

$$\begin{aligned}
(\mathscr{F}\tau_\delta)f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot y} f(\delta y)\,dy \\
&= \delta^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \frac{x\cdot y}{\delta}} f(y)\,dy \\
&= \delta^{-n}(\tau_{\delta^{-1}}\mathscr{F})f(x),
\end{aligned}$$

que pode ser reescrito como

$$\mathscr{F}\tau_\delta = \delta^{-n}\tau_{\delta^{-1}}\mathscr{F}. \tag{5.1}$$

Seja ρ uma rotação qualquer em torno da origem em $\mathbb{R}^n$. Denote também por ρ sua ação induzida sobre funções, dada por $(\rho f)(x) = f(\rho^{-1}x)$. Então,

$$\begin{aligned}
(\mathscr{F}\rho)f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot y} f(\rho^{-1}y)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot \rho y} f(y)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \rho^{-1}x\cdot y} f(y)\,dy
\end{aligned}$$

$$= \quad (\rho\mathscr{F})f(x),$$

isto é,

$$\mathscr{F}\rho = \rho\mathscr{F}. \tag{5.2}$$

Seja agora $m(x) = (m_1(x), \ldots, m_n(x))$ uma n-tupla de funções definidas em $\mathbb{R}^n$. Para qualquer rotação ρ, denotamos sua representação matricial por $\rho = (\rho_{ik})_{n\times n}$. Suponha então que m se transforme como vetor, o que pode ser escrito como $m(\rho x) = \rho(m(x))$, ou mais explicitamente,

$$m(\rho x) = (m_1(\rho x), \ldots, m_n(\rho x)) = \rho(m_1(x), \ldots, m_n(x)) = (\rho_{jk})_{n\times n}(m_j(x))_{n\times 1},$$

e portanto

$$m_j(\rho x) = \sum_{k=1}^{n} \rho_{jk} m_k(x), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{5.3}$$

para toda rotação ρ em torno da origem.

Lema 5.1. *Seja m uma função positivamente homogênea de grau zero, isto é, $m(\delta x) = m(x)$, para todo $\delta > 0$. Se m se transforma de acordo com a igualdade em (5.3), então $m(x) = C\dfrac{x}{|x|}$ para alguma constante C, isto é,*

$$m_j(x) = C\frac{x_j}{|x|}. \tag{5.4}$$

Demonstração. Note que é suficiente provar o caso em que $x \in S^{n-1}$, uma vez que m é positivamente homogênea de grau zero, e assim se $x \in \mathbb{R}^n$,

$$m(x) = m\left(|x|\frac{x}{|x|}\right) = m\left(\frac{x}{|x|}\right).$$

Sejam $e_1, \ldots, e_n$ os vetores unitários canônicos em $\mathbb{R}^n$ e defina $C = m_1(e_1)$. Mostremos que $m_j(e_1) = 0$ sempre que $j \neq 1$. De fato, para toda rotação ρ tal que $\rho(e_1) = e_1$, temos que

$$(\rho_{ik})_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho_{22} & \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \rho_{n2} & \cdots & \rho_{nn} \end{pmatrix}$$

e então para cada $j = 2, \ldots, n$,

$$m_j(\rho e_1) = m_j(e_1) = \sum_{k=1}^{n} \rho_{jk} m_k(e_1) = \sum_{k=2}^{n} \rho_{jk} m_k(e_1).$$

Logo, o vetor $(n-1)$-dimensional $(m_2(e_1), \ldots, m_n(e_1))$ é deixado fixo para toda rotação neste espaço vetorial de dimensão $(n-1)$, e portanto $m_j(e_1) = 0$ para $j = 2, \ldots, n$.

Com isto, obtemos por (5.3) que

$$m_j(\rho e_1) = \sum_{k=1}^{n} \rho_{jk} m_k(e_1) = \rho_{j1} m_1(e_1) = C\rho_{j1}.$$

Mas se $\rho e_1 = x$, então $m_j(x) = C\rho_{j1}$, e como $\rho_{j1} = x_j$, segue que

$$m_j(x) = Cx_j,$$

para todo $j = 1, \ldots, n$, e portanto o lema está provado.

$\blacksquare$

Lema 5.2. *Sejam φ uma função no espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $0 < \alpha < n$. Então para cada $j = 1, \ldots, n$, vale a identidade*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j}{|x|^{1+n-\alpha}} \hat{\varphi}(x)\, dx = \gamma_\alpha \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j}{|x|^{1+\alpha}} \varphi(x)\, dx, \tag{5.5}$$

no qual

$$\gamma_\alpha = \frac{i\pi^{\frac{n}{2}-\alpha}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+n-\alpha}{2}\right)},$$

e Γ denota a função Gama, dada por

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\, dt, \quad x > 0.$$

Demonstração. Iniciamos a demonstração afirmando que

$$\mathscr{F}\left(t_j e^{-\pi\delta|t|^2}\right)(x) = i\delta^{-1-\frac{n}{2}} x_j e^{-\frac{\pi|x|^2}{\delta}}, \quad \delta > 0.$$

Mas antes de provarmos a afirmação, precisamos mostrar que vale a identidade

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\delta|t|^2} e^{-2\pi i t\cdot x}\, dt = \delta^{\frac{-n}{2}} e^{\frac{-\pi|x|^2}{\delta}}, \quad \delta > 0.$$

Com efeito, note que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\delta|t|^2} e^{-2\pi i t\cdot x}\, dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi\delta t_1^2} \cdots e^{-\pi\delta t_n^2} e^{-2\pi i t_1 x_1} \cdots e^{-2\pi i t_n x_n}\, dt_n \cdots dt_1 \\
&= \prod_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi\delta t_j^2} e^{-2\pi i t_j x_j}\, dt_j.
\end{aligned}$$

Reescrevendo os expoentes da exponencial acima de forma conveniente, obtemos

$$\begin{aligned}
-\pi\delta t_j^2 - 2\pi i t_j x_j &= -(\pi\delta t_j^2 + 2\pi i t_j x_j) \\
&= -\left[(\sqrt{\pi\delta} t_j)^2 + 2\pi i t_j x_j + \left(\frac{i\sqrt{\pi} x_j}{\sqrt{\delta}}\right)^2\right] - \frac{\pi x_j^2}{\delta} \\
&= -\left(\sqrt{\pi\delta} t_j + \frac{i\sqrt{\pi} x_j}{\sqrt{\delta}}\right)^2 - \frac{\pi x_j^2}{\delta},
\end{aligned}$$

e então temos para cada $j = 1, \ldots, n$ que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi\delta t_j^2} e^{-2\pi i t_j x_j}\, dt_j = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{\pi\delta} t_j + \frac{i\sqrt{\pi} x_j}{\sqrt{\delta}}\right)^2 - \frac{\pi x_j^2}{\delta}}\, dt_j$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{\pi\delta}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2 - \frac{\pi x_j^2}{\delta}}\, du \\
&= \frac{e^{-\frac{\pi x_j^2}{\delta}}}{\sqrt{\pi\delta}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\, du \\
&= \delta^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi x_j^2}{\delta}}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\delta|t|^2} e^{-2\pi i t\cdot x}\, dt = \prod_{j=1}^{n} \delta^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi x_j^2}{\delta}} = \delta^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\pi |x|^2}{\delta}},
$$

e portanto a identidade está provada.

Voltando à afirmação inicial, observe que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot y} y_j e^{-\pi\delta|y|^2}\, dy &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} y_j e^{2\pi i \sum_k x_k y_k} e^{-\pi\delta \sum_k y_k^2}\, dy_n \cdots dy_1 \\
&= \left(\prod_{k\neq j} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x_k y_k} e^{-\pi\delta y_k^2}\, dy_k \right) \int_{-\infty}^{\infty} y_j e^{2\pi i x_j y_j} e^{-\pi\delta y_j^2}\, dy_j,
\end{aligned}
$$

no qual

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} y_j e^{2\pi i x_j y_j} e^{-\pi\delta y_j^2}\, dy_j &= \frac{1}{\delta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x_j y_j - \pi\delta y_j^2} (\delta y_j - i x_j) + e^{2\pi i x_j y_j - \pi\delta y_j^2} \frac{i x_j}{\delta}\, dy_j \\
&= \frac{1}{\delta} \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{e^u}{2\pi}\, du + \frac{i x_j}{\delta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x_j y_j - \pi\delta y_j^2}\, dy_j \\
&= -\frac{e^{2\pi i x_j y_j - \pi\delta y_j^2}}{2\pi\delta}\bigg|_{-\infty}^{\infty} + \frac{i x_j}{\delta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x_j y_j - \pi\delta y_j^2}\, dy_j \\
&= i x_j e^{\frac{-\pi x_j^2}{\delta}} \delta^{-\frac{3}{2}}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} y_j e^{2\pi i x_j y_j} e^{-\pi\delta y_j^2}\, dy_j &= \left(\prod_{k\neq j} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x_k y_k} e^{-\pi\delta y_k^2}\, dy_k \right) i x_j e^{\frac{-\pi x_j^2}{\delta}} \delta^{-\frac{3}{2}} \\
&= \left(\prod_{k\neq j} e^{\frac{-\pi x_k^2}{\delta}} \delta^{-\frac{1}{2}} \right) i x_j e^{\frac{-\pi x_j^2}{\delta}} \delta^{-\frac{3}{2}} \\
&= i\delta^{-1-\frac{n}{2}} x_j e^{-\frac{\pi |x|^2}{\delta}},
\end{aligned}
$$

e portanto a afirmação inicial está provada.

Segue então da Fórmula de Multiplicação 2.7 que

$$
\int_{\mathbb{R}^n} x_j e^{-\pi\delta|x|^2} \hat{\varphi}(x)\, dx = i\delta^{-\frac{n}{2}-1} \int_{\mathbb{R}^n} x_j e^{-\frac{\pi|x|^2}{\delta}} \varphi(x)\, dx, \quad \delta > 0. \tag{5.6}
$$

Agora, multiplicando ambos os lados de (5.6) por $\delta^{\beta-1}$, com $\beta = \frac{1+n-\alpha}{2}$, e integrando em relação a δ, obtemos para o lado esquerdo que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \delta^{\beta-1} x_j e^{-\pi\delta|x|^2} \hat{\varphi}(x)\, dx\, d\delta &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^\infty e^{-\pi\delta|x|^2} \delta^{\beta-1}\, d\delta \right) \hat{\varphi}(x) x_j\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\pi|x|^2} \left[\int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{\pi|x|^2} \right)^{\beta-1} du \right] \hat{\varphi}(x) x_j\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(\pi|x|^2)^\beta} \left[\int_0^\infty e^{-u} u^{\beta-1}\, du \right] \hat{\varphi}(x) x_j\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(\pi|x|^2)^\beta} \Gamma(\beta) \hat{\varphi}(x) x_j\, dx \\
&= \pi^{\frac{-n-1+\alpha}{2}} \Gamma\left(\frac{1+n-\alpha}{2} \right) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j}{|x|^{1+n-\alpha}} \hat{\varphi}(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Analogamente, obtemos para o lado direito de (5.6) que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \frac{i x_j \delta^{\beta-1}}{\delta^{\frac{n}{2}+1}} e^{-\frac{\pi|x|^2}{\delta}} \varphi(x)\, dx\, d\delta &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^\infty i \delta^{\beta-1-\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{\pi|x|^2}{\delta}}\, d\delta \right) x_j \varphi(x)\, dx \\
&= i \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_0^\infty \left(\frac{\pi|x|^2}{u} \right)^{\frac{-\alpha-3}{2}} \frac{\pi|x|^2 e^{-u}}{u^2}\, du \right] x_j \varphi(x)\, dx \\
&= i\pi^{\frac{-\alpha-1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_0^\infty u^{\frac{\alpha+1}{2}-1} e^{-u}\, du \right] |x|^{-\alpha-1} x_j \varphi(x)\, dx \\
&= i\pi^{\frac{-\alpha-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2} \right) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j}{|x|^{\alpha+1}} \varphi(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Assim, segue de (5.6) e do anterior que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j}{|x|^{1+n-\alpha}} \hat{\varphi}(x)\, dx &= \frac{i\pi^{\frac{-\alpha-1}{2}}}{\pi^{\frac{-n-1+\alpha}{2}}} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+n-\alpha}{2}\right)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j}{|x|^{\alpha+1}} \varphi(x)\, dx \\
&= i\pi^{\frac{n}{2}-\alpha} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+n-\alpha}{2}\right)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j}{|x|^{\alpha+1}} \varphi(x)\, dx \\
&= \gamma_\alpha \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j}{|x|^{\alpha+1}} \varphi(x)\, dx,
\end{aligned}$$

o que prova o lema.

■

Teorema 5.1. *Sejam $T_1, \ldots, T_n$ operadores lineares, contínuos em L^2, que comutam com translações e definidos por*

$$(T_j f)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y| \geq \varepsilon} \frac{\Omega_j(y)}{|y|^n} f(x-y)\, dy, \quad j = 1, \ldots, n,$$

com núcleo dado por $K_j(x) = \dfrac{x_j}{|x|^{n+1}}$. *Então o multiplicador* m_j *correspondente a* T_j *é dado por*

$$m_j(x) = \gamma \frac{x_j}{|x|}, \quad \gamma = \frac{i\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}.$$

Demonstração. Sejam $\varphi, \hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Afirmamos que

$$\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j}{|x|^{1+n-\alpha}}\hat{\varphi}(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{x_j}{|x|^{1+n}}\hat{\varphi}(x)\,dx. \tag{5.7}$$

De fato, como a projeção x_j é uma função ímpar, sua integral se anula em $B(0,1)$, e então

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j}{|x|^{1+n-\alpha}}\hat{\varphi}(x)\,dx = \int_{|x|\leq 1} \frac{x_j}{|x|^{1+n-\alpha}}(\hat{\varphi}(x)-\hat{\varphi}(0))\,dx + \int_{|x|\geq 1} \frac{x_j}{|x|^{1+n-\alpha}}\hat{\varphi}(x)\,dx.$$

Tomando o limite para $\alpha \to 0$ na igualdade acima e aplicando o Teorema da Convergência Dominada, obtemos para o primeiro termo à direita que

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}} \int_{|x|\leq 1} \frac{x_j}{|x|^{1+n-\alpha}}(\hat{\varphi}(x)-\hat{\varphi}(0))\,dx &= \int_{|x|\leq 1} \frac{x_j}{|x|^{1+n}}(\hat{\varphi}(x)-\hat{\varphi}(0))\,dx\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon\leq|x|\leq 1} \frac{x_j}{|x|^{1+n}}\hat{\varphi}(x)\,dx,\end{aligned}$$

pois

$$\frac{|x_j|}{|x|^{1+n-\alpha}}|\hat{\varphi}(x)-\hat{\varphi}(0)| \leq \frac{|x_j||x|^\alpha}{|x|^{1+n}}\sup_{|x|\leq 1}|\nabla\hat{\varphi}(x)||x| \leq \frac{C}{|x|^{n+1}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j}{|x|^{1+n-\alpha}}\hat{\varphi}(x)\,dx &= \lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}}\left[\int_{|x|\leq 1} \frac{x_j}{|x|^{1+n-\alpha}}(\hat{\varphi}(x)-\hat{\varphi}(0))\,dx + \int_{|x|\geq 1}\frac{x_j\hat{\varphi}(x)}{|x|^{1+n-\alpha}}\,dx\right]\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{\varepsilon\leq|x|\leq 1} \frac{x_j}{|x|^{1+n}}\hat{\varphi}(x)\,dx + \int_{|x|\geq 1}\frac{x_j}{|x|^{1+n}}\hat{\varphi}(x)\,dx\right]\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{x_j}{|x|^{1+n}}\hat{\varphi}(x)\,dx,\end{aligned}$$

e portanto vale a identidade (5.7).

Por fim, seja $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ fixo, seja $f(x-y) = \hat{\varphi}(y)$. Então como

$$\mathscr{F}(\hat{\varphi})(y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i z\cdot y}\hat{\varphi}(z)\,dz = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i z\cdot(-y)}\hat{\varphi}(z)\,dz = \varphi(-y),$$

obtemos que

$$\varphi(y) = \mathscr{F}(\hat{\varphi})(-y) = \hat{f}(x+y) = e^{-2\pi i x\cdot y}\hat{f}(y).$$

Mas pelo Lema 5.2, segue que

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j}{|x|^{1+n-\alpha}}\hat{\varphi}(x)\,dx = \lim_{\alpha\to 0}\gamma_\alpha\int_{\mathbb{R}^n}\frac{x_j}{|x|^{1+\alpha}}\varphi(x)\,dx = \gamma\int_{\mathbb{R}^n}\frac{x_j}{|x|}\varphi(x)\,dx,$$

uma vez que $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e portanto $|x_j||x|^{-1-\alpha}|\varphi(x)| \leq C|x_j||x|^{-1-\alpha}|x|^{-n} \leq C|x|^{-n-\alpha}$.

Logo, como $\varphi(y) = \hat{f}(y)e^{-2\pi i x\cdot y}$ e $\hat{\varphi}(y) = f(x-y)$, segue que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|y|\geq\varepsilon}\frac{y_j}{|y|^{n+1}}f(x-y)\,dy = \gamma\int_{\mathbb{R}^n}\frac{y_j}{|y|}\hat{f}(y)e^{-2\pi i x\cdot y}\,dy. \tag{5.8}$$

Mas pela definição do multiplicador m_j, temos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|y|\geq\varepsilon}\frac{y_j}{|y|^{n+1}}f(x-y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} m_j(y)\hat{f}(y)e^{-2\pi i x\cdot y}\,dy,$$

no qual a convergência de ambas as integrais ocorre no sentido de norma L^2.

Do anterior e da identidade (5.8), segue que

$$m_j(x) = \gamma\frac{x_j}{|x|}, \quad f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Agora seja $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Por densidade, existe uma sequência $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $f_k \to f$ em norma $L^2(\mathbb{R}^n)$. Do anterior, temos para cada $k \in \mathbb{N}$ que

$$(T_j f_k)\widehat{\ }(x) = \gamma\frac{x_j}{|x|}\widehat{f_k}(x).$$

Mas como T_j é contínuo em $L^2(\mathbb{R}^n)$, então $(T_j f_k)\widehat{\ } \to (T_j f)\widehat{\ }$ em norma L^2. Mais ainda, como $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, então $m_j\widehat{f_k} \to m_j\hat{f}$ em norma L^2, e assim

$$(T_j f)\widehat{\ }(x) = \gamma\frac{x_j}{|x|}\hat{f}(x) = m_j(x)\hat{f}(x),$$

isto é,

$$m_j(x) = \gamma\frac{x_j}{|x|}, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

■

Munidos dos resultados anteriores, podemos então definir as n transformadas de Riesz.

Definição 5.1. *Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$. Definimos as transformadas de Riesz R_j por*

$$(R_j f)(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} c_n\int_{|y|\geq\varepsilon}\frac{y_j}{|y|^{n+1}}f(x-y)\,dy, \quad j = 1,\ldots,n, \tag{5.9}$$

no qual $c_n = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\pi^{-\frac{n+1}{2}}$.

Observe que R_j é um operador definido pelo núcleo $K_j(x) = \dfrac{c_n x_j}{|x|^{n+1}}$, que pode ser expresso como $K_j(x) = \dfrac{\Omega_j(x)}{|x|^n}$, no qual $\Omega_j(x) = \dfrac{c_n x_j}{|x|}$ é uma função positivamente homogênea de grau zero, e portanto

$$(R_j f)(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|y|\geq\varepsilon}\frac{\Omega_j(y)}{|y|^n}f(x-y)\,dy, \quad j = 1,\ldots,n.$$

Mais ainda, como cada Ω_j é uma função ímpar, então

$$\int_{S^{n-1}} \Omega_j(x)\, d\sigma = 0,$$

e portanto Ω_j satisfaz a condição (4.31).

Agora, se $x, x' \in S^{n-1}$ e $|x - x'| \leq \delta$, então

$$|\Omega_j(x) - \Omega_j(x')| = \left| \frac{c_n x_j}{|x|} - \frac{c_n x'_j}{|x'|} \right| = c_n |x_j - x'_j| \leq c_n \delta = \omega(\delta),$$

e daí segue que Ω_j satisfaz a condição (4.32), pois

$$\int_0^1 \frac{\omega(\delta)}{\delta}\, d\delta = \int_0^1 \frac{c_n \delta}{\delta}\, d\delta = c_n < \infty.$$

Logo, segue do Teorema 4.3 que R_j é um operador contínuo em $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 < p < \infty$, isto é,

$$\|R_j(f)\|_p \leq A_{jp} \|f\|_p\,, \quad j = 1, \ldots, n,$$

para $1 < p < \infty$.

Segue também do Teorema 4.3 que

$$(R_j f)\widehat{}(x) = m_j(x) \hat{f}(x), \quad j = 1, \ldots, n,$$

para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, no qual cada m_j é uma função positivamente homogênea de grau zero expressa por

$$\begin{aligned} m_j(x) &= \int_{S^{n-1}} \left[\frac{\pi i}{2} \operatorname{sgn}(x \cdot y) + \ln\left(\frac{1}{|x \cdot y|} \right) \right] \Omega_j(y)\, d\sigma(y), \quad |x| = 1 \qquad (5.10) \\ &= \int_{S^{n-1}} \gamma(x \cdot y) \Omega_j(y)\, d\sigma(y), \quad |x| = 1 \end{aligned}$$

com

$$\gamma(t) = \frac{\pi i}{2} \operatorname{sgn}(t) + \ln\left(\left| \frac{1}{t} \right| \right).$$

Observação 5.2. A aplicação $L(\Omega) = m$ sugerida por (5.10) comuta com rotações, pois

$$\begin{aligned} (\rho L)\Omega(x) &= \int_{S^{n-1}} \gamma(\rho^{-1} x \cdot y) \Omega(y)\, d\sigma(y) \\ &= \int_{S^{n-1}} \gamma(x \cdot \rho y) \Omega(y)\, d\sigma(y) \\ &= \int_{S^{n-1}} \gamma(x \cdot y) \Omega(\rho^{-1} y)\, d\sigma(y) \\ &= \int_{S^{n-1}} \gamma(x \cdot y) (\rho\Omega)(y)\, d\sigma(y) \\ &= (L\rho)\Omega(x). \end{aligned}$$

Note também que os núcleos

$$(K_1(x), \ldots, K_n(x)) = c_n \left(\frac{x_1}{|x|^{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{|x|^{n+1}} \right)$$

satisfazem a igualdade em (5.3), isto é,

$$K_j(\rho x) = \sum_{l=1}^{n} \rho_{jl} K_l(x), \quad j = 1, \ldots, n.$$

De fato, como $K(x) = \dfrac{c_n}{|x|^{n+1}} Id(x)$, então

$$\rho K(x) = \frac{c_n}{|x|^{n+1}} \rho(Id(x)) = \frac{c_n}{|x|^{n+1}} \rho x = \frac{c_n}{|x|^{n+1}} Id(\rho x) = K(\rho x).$$

Segue da comutatividade da aplicação $K_j \mapsto m_j$ com rotações que os multiplicadores m_j também satisfazem a igualdade em (5.3), pois

$$\begin{aligned}
m(\rho x) &= \int_{S^{n-1}} \gamma(\rho x \cdot y) \Omega(y) \, d\sigma(y) \\
&= \int_{S^{n-1}} \gamma(x \cdot \rho^{-1} y) |y|^n K(y) \, d\sigma(y) \\
&= \int_{S^{n-1}} \gamma(x \cdot y) |y|^n K(\rho y) \, d\sigma(y) \\
&= \int_{S^{n-1}} \gamma(x \cdot y) |y|^n \rho K(y) \, d\sigma(y) \\
&= \rho m(x).
\end{aligned}$$

Assim, como cada multiplicador m_j é positivamente homogêneo de grau zero e satisfaz (5.3), segue pelo Lema 5.1 que

$$m_j(x) = C \frac{x_j}{|x|}.$$

Mais ainda, aplicando o Teorema 5.1 para as Transformadas de Riesz, obtemos que

$$m_j(x) = c_n \gamma \frac{x_j}{|x|},$$

no qual

$$c_n \gamma = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \pi^{-\frac{n+1}{2}} i \pi^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} = i \pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = i,$$

pois

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty y^{-\frac{1}{2}} e^{-y} \, dy = 2 \int_0^\infty \frac{y^{-\frac{1}{2}} e^{-y}}{2} \, dy = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} \, du = \pi^{\frac{1}{2}}.$$

Logo, $m_j(x) = i \dfrac{x_j}{|x|}$, e então

$$(R_j f)\widehat{\ }(x) = i \frac{x_j}{|x|} \hat{f}(x), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{5.11}$$

Podemos então expressar a transformação (5.3) agindo sobre as transformadas de Riesz do seguinte modo:

$$\rho R_j \rho^{-1} f = \sum_{k=1}^{n} \rho_{kj} R_k f. \tag{5.12}$$

De fato, como

$$(R_j f)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} c_n \int_{|y| \geq \varepsilon} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} f(x-y)\, dy,$$

então

$$R_j(\rho^{-1} f)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} c_n \int_{|y| \geq \varepsilon} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} f(\rho x - \rho y)\, dy,$$

e portanto

$$\begin{aligned}
(\rho R_j \rho^{-1}) f(x) &= \lim_{\varepsilon \to 0} c_n \int_{|y| \geq \varepsilon} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} f(\rho^{-1}\rho x - \rho y)\, dy \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} c_n \int_{|y| \geq \varepsilon} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} f(x - \rho y)\, dy \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} c_n \int_{|\rho^{-1} z| \geq \varepsilon} \sum_{k=1}^{n} \rho_{jk}^{-1} z_k \frac{f(x-z)}{|\rho^{-1} z|^{n+1}}\, dz \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} c_n \int_{|y| \geq \varepsilon} \sum_{k=1}^{n} \rho_{kj} y_k \frac{f(x-y)}{|y|^{n+1}}\, dy \\
&= \sum_{k=1}^{n} \rho_{kj} \left(\lim_{\varepsilon \to 0} c_n \int_{|y| \geq \varepsilon} \frac{y_k}{|y|^{n+1}} f(x-y)\, dy \right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} \rho_{kj} R_k \right) f(x).
\end{aligned}$$

De forma análoga ao que ocorre com a transformada de Hilbert, o resultado a seguir nos mostra que as propriedades citadas acima caracterizam as transformadas de Riesz.

Proposição 5.3. *Seja $T = (T_1, \ldots, T_n)$ uma n-tupla de transformações limitadas em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Suponha que*

(a) Cada T_j comuta com translações em $\mathbb{R}^n$;

(b) Cada T_j comuta com dilatações positivas;

(c) Para cada rotação $\rho = (\rho_{jk})_{n \times n}$ em $\mathbb{R}^n$, vale a igualdade

$$\rho T_j \rho^{-1} f = \sum_{k=1}^{n} \rho_{kj} T_k f.$$

Então cada T_j é um múltiplo constante da transformada de Riesz R_j.

Demonstração. Como cada T_j é linear, limitada em $L^2(\mathbb{R}^n)$ e comuta com translações, sabemos pela Proposição 4.1 que existe m_j tal que $(T_j f)\widehat{}(x) = m_j(x)\hat{f}(x)$, para cada $j = 1, \dots, n$. Se $\mathscr{F}$ denota a transformada de Fourier, expressamos a igualdade anterior como $\mathscr{F}T_j = m_j\mathscr{F}$.

Assim, como cada T_j comuta com dilatações positivas e $\mathscr{F}\tau_\delta = \delta^{-n}\tau_{\delta^{-1}}\mathscr{F}$ para cada dilatação τ_δ, $\delta > 0$, temos que

$$\tau_\delta m_j\mathscr{F} = \tau_\delta\mathscr{F}T_j = \delta^{-n}\mathscr{F}\tau_{\delta^{-1}}T_j = \delta^{-n}\mathscr{F}T_j\tau_{\delta^{-1}} = \delta^{-n}m_j\mathscr{F}\tau_{\delta^{-1}} = \delta^{-n}m_j\delta^n\tau_\delta\mathscr{F} = m_j\tau_\delta\mathscr{F}$$

e portanto $\tau_\delta m_j = m_j\tau_\delta$, no qual

$$(\tau_\delta m_j)f(x) = (\tau_\delta(m_j f))(x) = m_j(\delta x)f(\delta x),$$

e também,

$$(m_j\tau_\delta)f(x) = m_j(x)f(\delta x),$$

para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Logo, cada m_j é positivamente homogênea de grau zero.

Por fim, a hipótese (c) implica a condição (5.3), pois como $\mathscr{F}T_j = m_j\mathscr{F}$, temos que

$$m_j\rho^{-1} = \mathscr{F}T_j\mathscr{F}^{-1}\rho^{-1} = \mathscr{F}T_j\rho^{-1}\mathscr{F}^{-1},$$

e assim

$$\begin{aligned} \rho m_j\rho^{-1} &= \rho\mathscr{F}T_j\rho^{-1}\mathscr{F}^{-1} = \mathscr{F}\rho T_j\rho^{-1}\mathscr{F}^{-1} = \mathscr{F}\left(\sum_{k=1}^{n}\rho_{kj}T_k\right)\mathscr{F}^{-1} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n}\rho_{kj}\mathscr{F}T_k\right)\mathscr{F}^{-1} = \left(\sum_{k=1}^{n}\rho_{kj}m_k\mathscr{F}\right)\mathscr{F}^{-1} = \sum_{k=1}^{n}\rho_{kj}m_k. \end{aligned}$$

Logo, $\rho m_j\rho^{-1} = \sum_{k=1}^{n}\rho_{kj}m_k$, no qual

$$(\rho m_j\rho^{-1})f(x) = (\rho m_j)f(\rho x) = \rho(m_j(x)f(\rho x)) = m_j(\rho^{-1}x)f(x),$$

e também

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\rho_{kj}m_k\right)f(x) = \sum_{k=1}^{n}\rho_{kj}(m_k(x)f(x)) = \left(\sum_{k=1}^{n}\rho_{kj}m_k(x)\right)f(x).$$

Do anterior, $m_j(\rho^{-1}x) = \sum_{k=1}^{n}\rho_{kj}m_k(x) = \rho^{-1}m_j(x)$, isto é, $m_j(\rho x) = \rho m_j(x)$, para toda rotação ρ em torno da origem, e portanto m_j se transforma como em (5.3).

Logo, segue pelo Lema 5.1 que $m_j(x) = C\dfrac{x_j}{|x|}$, e portanto $T_j = CR_j$, para $j = 1, \dots, n$. ■

Como aplicação, vejamos a seguir que a transformada de Riesz pode ser utilizada para estimar alguns operadores diferenciais.

Proposição 5.4. *Suponha $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ e seja Δ o operador Laplaciano, definido por*

$$\Delta f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}.$$

Então temos a seguinte limitação a priori:

$$\left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \right\|_p \leq A_p \left\| \Delta f \right\|_p, \quad 1 < p < \infty. \tag{5.13}$$

Demonstração. A desigualdade (5.13) segue de forma quase imediata se provarmos a identidade

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = -R_j R_k \Delta f. \tag{5.14}$$

Para isso, lembremos que se $f \in L^1$, então a transformada de Fourier de $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ é dada por $-2\pi i x_j \hat{f}(x)$, e assim

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \right)^{\widehat{}}(x) &= -2\pi i x_j(-2\pi i x_k \hat{f}(x)) \\
&= -4\pi^2 x_j x_k \hat{f}(x) \\
&= -\left(\frac{i x_j}{|x|} \right) \left(\frac{i x_k}{|x|} \right) (-4\pi^2 |x|^2) \hat{f}(x).
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$-(R_j R_k \Delta f)\widehat{}(x) = \frac{-i x_j}{|x|} (R_k \Delta f)\widehat{}(x) = \frac{-i x_j}{|x|} \frac{i x_k}{|x|} (\Delta f)\widehat{}(x),$$

no qual

$$\begin{aligned}
(\Delta f)\widehat{}(x) &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} \right)^{\widehat{}}(x) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left[-2\pi i x_j \left(-2\pi i x_j \hat{f}(x) \right) \right] \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left[-4\pi^2 x_j^2 \hat{f}(x) \right] \\
&= -4\pi^2 |x|^2 \hat{f}(x).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
-(R_j R_k \Delta f)\widehat{}(x) &= \frac{-i x_j}{|x|} \frac{i x_k}{|x|} \left(-4\pi^2 |x|^2 \hat{f}(x) \right) \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \right)^{\widehat{}}(x),
\end{aligned}$$

para toda $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$. Utilizando o Teorema de Parseval-Plancherel, a identidade (5.14) está provada.

Da identidade (5.14), obtemos que

$$\left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \right\|_p = \|R_j R_k \Delta f\|_p \leq A_{jp} \|R_k \Delta f\|_p \leq A_{jp} A_{kp} \|\Delta f\|_p = A_p \|\Delta f\|_p$$

para $1 < p < \infty$, e portanto vale a desigualdade (5.13).

■

Observação 5.3. Apesar da estimativa anterior, a desigualdade

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x) \right| \leq A_p |\Delta f(x)|$$

não vale pontualmente. Como exemplo, considere a função $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que $\varphi(x, y) = 1$ se $|(x, y)| \leq 1$ e seja $f(x, y) = xy\varphi(x, y)$. Então $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 < p < \infty$, e

$$\Delta f(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0.$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \varphi(0,0) = 1,$$

e portanto a desigualdade acima não é válida pontualmente.

Proposição 5.5. *Suponha $f \in C_c^1(\mathbb{R}^2)$. Então temos a seguinte limitação a priori:*

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\|_p + \left\| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\|_p \leq A_p \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} + i \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\|_p, \quad 1 < p < \infty.$$

Demonstração. A demonstração seguirá, de forma análoga à demonstração da Proposição 5.4, como consequência da identidade

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = -R_j(R_1 - iR_2)\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + i\frac{\partial f}{\partial x_2} \right), \quad j = 1, 2. \tag{5.15}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&-\left(R_j(R_1 - iR_2)\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + i\frac{\partial f}{\partial x_2} \right) \right)^{\widehat{}}(x) = \frac{-ix_j}{|x|}\left((R_1 - iR_2)\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + i\frac{\partial f}{\partial x_2} \right) \right)^{\widehat{}}(x) \\
&= \frac{-ix_j}{|x|}\left[\frac{-ix_1}{|x|}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + i\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^{\widehat{}}(x) - i\left(\frac{-ix_2}{|x|}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + i\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^{\widehat{}}(x) \right) \right] \\
&= \frac{x_j x_1}{|x|^2}\left(-2\pi i x_1 \hat{f}(x) + 2\pi x_2 \hat{f}(x) \right) - \frac{i x_j x_2}{|x|^2}\left(-2\pi i x_1 \hat{f}(x) + 2\pi x_2 \hat{f}(x) \right) \\
&= -2\pi i x_j \hat{f}(x)\left(\frac{x_1^2}{|x|^2} + \frac{i x_1 x_2}{|x|^2} - \frac{i x_1 x_2}{|x|^2} + \frac{x_2^2}{|x|^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -2\pi i x_j \hat{f}(x) \\
&= \widehat{\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)}(x),
\end{aligned}$$

para cada $j = 1, 2$ e $f \in C_c^1(\mathbb{R}^2) \subset L^2(\mathbb{R}^2)$, e portanto vale a identidade (5.15). Logo,

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right\|_p + \left\|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right\|_p &= \sum_{j=1}^{2} \left\| R_j(R_1 - iR_2)\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + i\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)\right\|_p \\
&\leq A_p \left\|\frac{\partial f}{\partial x_1} + i\frac{\partial f}{\partial x_2}\right\|_p,
\end{aligned}$$

o que mostra a proposição.

■

5.2 Integrais de Poisson e Aproximações da Identidade

Nesta seção, vamos considerar o espaço $\mathbb{R}^n$ como o hiperplano que constitui a fronteira do espaço $(n+1)$-dimensional $\mathbb{R}_+^{n+1}$, dado por

$$\mathbb{R}_+^{n+1} = \{(x, y); x \in \mathbb{R}^n, y > 0\}.$$

Para uma função f definida em $\mathbb{R}^n$, vejamos que a integral de Poisson de f é a solução para o seguinte problema de Dirichlet para $\mathbb{R}_+^{n+1}$: encontrar uma função harmônica $u(x, y)$ em $\mathbb{R}_+^{n+1}$ cujos valores de fronteira em $\mathbb{R}^n$ são dados por $f(x)$.

Assim, vamos estudar a solução deste problema no contexto da teoria em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Para isto, seja $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e considere

$$u(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(t) e^{-2\pi i t\cdot x} e^{-2\pi|t|y}\, dt, \quad y > 0. \tag{5.16}$$

Observe que a integral acima converge absolutamente, uma vez que $e^{-2\pi|t|y} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. De fato, note que

$$\begin{aligned}
\left\|e^{-2\pi|t|y}\right\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi|t|y}\, dt \\
&= \sigma(S^{n-1}) \int_0^\infty e^{-4\pi r y} r^{n-1}\, dr \\
&= \sigma(S^{n-1}) \int_0^\infty e^{-2\pi r y} \left(e^{-2\pi r y} r^{n-1}\right) dr \\
&\leq \frac{C}{2\pi y} < \infty,
\end{aligned}$$

pois $e^{-2\pi r y} r^{n-1}$ é decrescente e limitado em $[0, \infty)$, e portanto

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(t)| e^{-2\pi|t|y}\, dt \leq \|\hat{f}\|_2 \left\|e^{-2\pi|t|y}\right\|_2 < \infty.$$

Mais ainda, realizando-se a operação de diferenciação sob o sinal de integração, obtemos que

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0,$$

uma vez que $u(x, y)$ satisfaz as condições do Teorema 1.12. Com efeito, observe que para cada $t \in \mathbb{R}^n$ fixado, a função

$$v(x, y) = \hat{f}(t) e^{-2\pi i t \cdot x} e^{-2\pi |t| y}$$

é contínua e todas as suas derivadas parciais existem e são contínuas. Além disso, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial}{\partial y} \left[\hat{f}(t) e^{-2\pi i t \cdot x} e^{-2\pi |t| y} \right] \right| dt &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| (-2\pi |t|) \hat{f}(t) e^{-2\pi i t \cdot x} e^{-2\pi |t| y} \right| dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} 2\pi |t| |\hat{f}(t)| e^{-2\pi |t| y} \, dt < \infty, \end{aligned}$$

pois $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $|t| e^{-2\pi |t| y} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Analogamente, temos também para cada $k = 1, \ldots, n$ que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\hat{f}(t) e^{-2\pi i t \cdot x} e^{-2\pi |t| y} \right] \right| dt &= \int_{\mathbb{R}^n} 2\pi |t_k| |\hat{f}(t)| e^{-2\pi |t| y} \, dt \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} 2\pi |t| |\hat{f}(t)| e^{-2\pi |t| y} \, dt < \infty. \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema 1.12, obtemos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} 4\pi^2 |t|^2 \hat{f}(t) e^{-2\pi i t \cdot x} e^{-2\pi |t| y} \, dt. \tag{5.17}$$

E para cada $k = 1, \ldots, n$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_k}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(t) e^{-2\pi i \sum_j t_j x_j} e^{-2\pi |t| y} \, dt \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (-2\pi i t_k) \hat{f}(t) e^{-2\pi i t \cdot x} e^{-2\pi |t| y} \, dt, \end{aligned}$$

e portanto

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} (-4\pi^2 t_k^2) \hat{f}(t) e^{-2\pi i t \cdot x} e^{-2\pi |t| y} \, dt, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{5.18}$$

Assim, como

$$4\pi^2 |t|^2 + \sum_{k=1}^{n} (-4\pi^2 t_k^2) = 4\pi^2 |t|^2 - 4\pi^2 \sum_{k=1}^{n} t_k^2 = 0,$$

concluímos por (5.17) e (5.18) que

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0.$$

Antes de enunciarmos o próximo resultado, precisamos ainda de mais uma observação: a função $u(x,y) \to f(x)$ em norma L^2 se $y \to 0$. Com efeito, como

$$u(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(t) e^{-2\pi i t\cdot x} e^{-2\pi|t|y}\, dt = \mathscr{F}^{-1}\left(\hat{f}(t)e^{-2\pi|t|y}\right)(x),$$

segue do Teorema de Parseval-Plancherel e do Teorema da Convergência Dominada que

$$\begin{aligned}
\|u - f\|_2 &= \left\| \mathscr{F}^{-1}\left(\hat{f}e^{-2\pi|t|y}\right) - \mathscr{F}^{-1}(\hat{f}) \right\|_2 \\
&= \left\| \mathscr{F}^{-1}\left(\hat{f}e^{-2\pi|t|y} - \hat{f}\right) \right\|_2 \\
&= \left\| \hat{f}e^{-2\pi|t|y} - \hat{f} \right\|_2 \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(x)|^2 |e^{-2\pi|x|y} - 1|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \to 0
\end{aligned}$$

se $y \to 0$, uma vez que $|\hat{f}(x)|^2|e^{-2\pi|x|y} - 1|^2 \leq 4|\hat{f}(x)|^2$ e $|e^{-2\pi|x|y} - 1|^2 \to 0$ se $y \to 0$. Logo, $u \to f$ em norma L^2 se $y \to 0$.

Vejamos agora que a solução do problema de Dirichlet pode ser escrita sem o uso explícito da transformada de Fourier. Para isto, definimos o núcleo de Poisson $P_y(x)$ por

$$P_y(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i t\cdot x} e^{-2\pi|t|y}\, dt, \quad y > 0. \tag{5.19}$$

A proposição a seguir nos permitirá escrever a função $u(x,y)$ como a convolução $u(x,y) = (P_y * f)(x)$. Dizemos, assim, que $u(x,y)$ é a integral de Poisson de f.

Proposição 5.6. *O núcleo de Poisson pode ser escrito explicitamente como*

$$P_y(x) = \frac{c_n y}{(|x|^2 + y^2)^{\frac{n+1}{2}}}, \quad c_n = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\pi^{\frac{-n-1}{2}}. \tag{5.20}$$

Demonstração. Para provarmos a igualdade (5.20), vamos precisar das seguintes identidades:

(a) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\delta|t|^2} e^{-2\pi i t\cdot x}\, dt = \delta^{\frac{-n}{2}} e^{\frac{-\pi|x|^2}{\delta}}, \quad \delta > 0;$

(b) $\displaystyle e^{-\gamma} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u} e^{\frac{-\gamma^2}{4u}}}{\sqrt{u}}\, du, \quad \gamma > 0.$

A identidade (a) já foi provada no Lema 5.2. Com objetivo de deixar a demonstração mais clara, vamos provar a identidade (b) após a demonstração da proposição. Aplicando assim a identidade (b) para o termo $e^{-2\pi|t|y}$ que aparece no integrando em (5.20), obtemos que

$$\begin{aligned}
P_y(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i t\cdot x}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-u}e^{\frac{-4\pi^2|t|^2y^2}{4u}}}{\sqrt{u}}\,du\right)dt\\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_0^\infty \frac{e^{-u}e^{\frac{-\pi^2|t|^2y^2}{u}}}{\sqrt{u}}\,du\right)e^{-2\pi i t\cdot x}\,dt\\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^\infty\cdots\int_{-\infty}^\infty\left(\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}e^{\frac{-\pi^2y^2\sum_j t_j^2}{u}}\,du\right)e^{-2\pi i\sum_j t_jx_j}\,dt_n\cdots dt_1\\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\left(\int_{-\infty}^\infty\cdots\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}e^{\frac{-\pi^2y^2\sum_j t_j^2}{u}}e^{-2\pi i\sum_j t_jx_j}\,dt_n\cdots dt_1\right)du\\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-\pi^2y^2|t|^2}{u}}e^{-2\pi i t\cdot x}\,dt\right)du.
\end{aligned}$$

Escrevendo $e^{\frac{-\pi^2y^2|t|^2}{u}} = e^{-\pi\delta|t|^2}$, com $\delta = \frac{\pi y^2}{u} > 0$, e aplicando a identidade (a), temos do anterior que

$$\begin{aligned}
P_y(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-u}\delta^{\frac{-n}{2}}e^{\frac{-\pi|x|^2}{\delta}}}{\sqrt{u}}\,du\\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\frac{(\sqrt{u})^n}{(\sqrt{\pi})^n y^n}e^{\frac{-\pi|x|^2u}{\pi y^2}}\,du\\
&= \frac{1}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\int_0^\infty e^{-u}e^{\frac{-|x|^2u}{y^2}}u^{\frac{n-1}{2}}y^{-n}\,du\\
&= \frac{y^{-n}}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\int_0^\infty e^{-u\left(1+\frac{|x|^2}{y^2}\right)}u^{\frac{n-1}{2}}\,du\\
&= \frac{y^{-n}}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\frac{y^2}{y^2+|x|^2}\int_0^\infty e^{-t}\left(\frac{y^2t}{y^2+|x|^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}dt\\
&= \frac{y}{\pi^{\frac{n+1}{2}}(y^2+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}\int_0^\infty e^{-t}t^{\frac{n-1}{2}}\,dt\\
&= \frac{y}{[\pi(y^2+|x|^2)]^{\frac{n+1}{2}}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right),
\end{aligned}$$

o que prova a proposição.

■

Demonstração da identidade (b). Provemos primeiramente que

$$e^{-\gamma} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\gamma x}}{1+x^2}\,dx, \tag{5.21}$$

calculando a integral acima por meio do Teorema dos Resíduos, presente na página 112 da referência [1]. Para isso, defina $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ por $f(z) = \dfrac{e^{i\gamma z}}{1+z^2}$, que possui duas singularidades isoladas em $-i$ e i.

Considere então a curva σ dada pelo semicírculo superior de raio $R > 1$ centrado na origem em $\mathbb{C}$, isto é, $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, no qual

$$\begin{aligned} \sigma_1(t) &= Re^{it}, \quad t \in [0, \pi], \\ \sigma_2(t) &= (t, 0), \quad t \in [-R, R], \end{aligned}$$

e note que a singularidade i pertence ao interior da curva σ.

Assim, como $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, então

$$\int_\sigma f(z)\,dz = \int_{\sigma_1} f(z)\,dz + \int_{\sigma_2} f(z)\,dz,$$

no qual

$$\int_{\sigma_2} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{i\gamma t}}{1+t^2}\,dt.$$

Para a integral sobre σ_1, note que $|1+z^2| \geq |z|^2 - 1 = R^2 - 1$, e também

$$|e^{i\gamma z}| = |e^{i\gamma(x+iy)}| = |e^{i\gamma x}e^{-\gamma y}| \leq e^{-\gamma y} \leq 1,$$

pois $\gamma > 0$ e $0 \leq y \leq R$ se $z \in \{\sigma_1\}$. Assim,

$$\left|\int_{\sigma_1} f(z)\,dz\right| = \left|\int_{\sigma_1} \frac{e^{i\gamma z}}{1+z^2}\,dz\right| \leq \int_{\sigma_1} \frac{1}{|1+z^2|}\,|dz| \leq \frac{1}{R^2-1}\int_{\sigma_1} |dz| = \frac{\pi R}{R^2-1} \to 0$$

se $R \to \infty$.

Mas por outro lado, sabemos que f é uma função analítica em $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ e σ é uma curva que satisfaz as condições do Teorema dos Resíduos, e assim

$$\int_\sigma f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i) = \frac{2\pi i e^{-\gamma}}{2i} = \frac{\pi}{e^\gamma},$$

uma vez que o resíduo de f em i é dado por

$$\operatorname{Res}(f, i) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i} \frac{(z-i)e^{i\gamma z}}{1+z^2} = \lim_{z\to i} \frac{(z-i)e^{i\gamma z}}{(z-i)(z+i)} = \frac{e^{-\gamma}}{2i}.$$

Logo, concluímos que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\gamma x}}{1+x^2}\,dx &= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{i\gamma x}}{1+x^2}\,dx \\ &= \lim_{R\to\infty} \int_{\sigma_2} f(z)\,dz \\ &= \lim_{R\to\infty} \left[\int_\sigma f(z)\,dz - \int_{\sigma_1} f(z)\,dz\right] \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{e^{\gamma}},$$

o que prova a igualdade em (5.21).

Prosseguindo com a demonstração da identidade (b), observe que o termo $\dfrac{1}{1+x^2}$ pode ser expresso pela integral

$$\int_0^{\infty} e^{-(1+x^2)u}\,du = \left.\frac{-e^{-(1+x^2)u}}{1+x^2}\right|_0^{\infty} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Mais ainda, segue de forma análoga à demonstração da identidade (a) que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\gamma x}e^{-ux^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{u}x-\frac{i\gamma}{2\sqrt{u}}\right)^2-\frac{\gamma^2}{4u}}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{u}}e^{-\frac{\gamma^2}{4u}}.$$

Realizando a substituição em (5.21), obtemos que

$$\begin{aligned} e^{-\gamma} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\gamma x}\int_0^{\infty} e^{-(1+x^2)u}\,du\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-u}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\gamma x}e^{-ux^2}\,dx\right)du \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-u}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{u}}e^{-\frac{\gamma^2}{4u}}\right)du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{e^{-u}e^{\frac{-\gamma^2}{4u}}}{\sqrt{u}}\,du, \end{aligned}$$

o que prova a identidade (b).

■

O resultado a seguir lista algumas das propriedades do núcleo de Poisson.

Proposição 5.7. *(i) A integral de Poisson $u(x,y)$ de uma função $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ pode ser expressa como a convolução entre P_y e f, isto é,*

$$u(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} P_y(t)f(x-t)\,dt = (P_y * f)(x),$$

para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

(ii) $P_y(x) > 0$.

(iii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} P_y(x)\,dx = 1, \quad y > 0.$

(iv) P_y é positivamente homogênea de grau $-n$, isto é, se $\varepsilon > 0$,

$$P_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}P_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

(v) *P_y é uma função decrescente de $|x|$ e $P_y \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leq p \leq \infty$.*

(vi) *Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, então sua integral de Poisson é harmônica em $\mathbb{R}^{n+1}_+$.*

(vii) *Se $y_1, y_2 > 0$, então $P_{y_1} * P_{y_2} = P_{y_1+y_2}$, isto é, a aplicação $y \mapsto P_y$ é um homomorfismo de semigrupos.*

Demonstração. (i) Primeiramente, note que $P_y \in L^1(\mathbb{R}^n)$, pois pela Proposição 5.6,

$$\begin{aligned}
\|P_y\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{c_n y}{(|x|^2 + y^2)^{\frac{n+1}{2}}}\, dx \\
&= \sigma(S^{n-1}) c_n y \int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(r^2+y^2)^{\frac{n+1}{2}}}\, dr \\
&= \sigma(S^{n-1}) c_n y \left(\int_0^1 \frac{r^{n-1}}{(r^2+y^2)^{\frac{n+1}{2}}}\, dr + \int_1^\infty \frac{r^{n-1}}{(r^2+y^2)^{\frac{n+1}{2}}}\, dr \right) \\
&\leq C_1 + C_2 \int_1^\infty \frac{r^{n-1}}{(r^2+y^2)^{\frac{n+1}{2}}}\, dr \\
&\leq C_1 + C_2 \int_1^\infty \frac{1}{r^2}\, dr < \infty.
\end{aligned}$$

Logo, segue da Desigualdade de Young que $P_y * f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ para $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Mais ainda, temos pela definição do núcleo de Poisson que $P_y(x) = \mathscr{F}^{-1}(e^{-2\pi|t|y})(x)$.

Aplicando a transformada de Fourier $\mathscr{F}$, obtemos que

$$\mathscr{F}\left(P_y * f\right)(x) = \widehat{P_y}(x)\hat{f}(x) = e^{-2\pi|x|y}\hat{f}(x),$$

e também, para $y > 0$ fixado,

$$\mathscr{F}(u)(x) = \hat{f}(x)e^{-2\pi|x|y},$$

pois a integral de Poisson $u(x,y)$, vista como função de $x \in \mathbb{R}^n$, pode ser expressa por

$$u(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(t)e^{-2\pi i t\cdot x}e^{-2\pi|t|y}\, dt = \mathscr{F}^{-1}(\hat{f}e^{-2\pi|t|y})(x).$$

Logo, $u(x,y) = (P_y * f)(x)$.

(ii) Este item segue diretamente da Proposição 5.6.

(iii) Como observado no primeiro item, o núcleo de Poisson pode ser expresso por $P_y(x) = \mathscr{F}^{-1}(e^{-2\pi|t|y})(x)$, e portanto $\widehat{P_y}(x) = e^{-2\pi|x|y}$. Mas como $P_y \in L^1(\mathbb{R}^n)$, a igualdade anterior é equivalente a

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot t} P_y(t)\, dt = e^{-2\pi|x|y}.$$

Tomando $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ na igualdade anterior, concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} P_y(x)\, dx = 1.$$

(iv) Basta observar que

$$P_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \frac{c_n}{\left(\left|\frac{x}{\varepsilon}\right|^2+1\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{c_n}{\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\left(|x|^2+\varepsilon^2\right)\right]^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{c_n\varepsilon^{n+1}}{\left(|x|^2+\varepsilon^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \varepsilon^n P_\varepsilon(x).$$

(v) Pela Proposição 5.6, $P_y(x) > 0$ e $P_y(x) \to 0$ se $|x| \to \infty$. Logo, P_y é uma função decrescente de $|x|$ e, como $P_y(0) = \dfrac{c_n}{y^n}$, segue que $P_y \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Mais ainda, sabemos pelo primeiro item que $P_y \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Agora se $1 < p < \infty$, note que

$$\begin{aligned} \|P_y\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(c_n y)^p}{\left(|x|^2+y^2\right)^{\frac{p(n+1)}{2}}}\,dx \\ &= (c_n y)^p \sigma(S^{n-1}) \int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{\left(r^2+y^2\right)^{\frac{p(n+1)}{2}}}\,dr \\ &\leq C\int_0^\infty \frac{1}{r^{p(n+1)-n+1}}\,dr < \infty, \end{aligned}$$

pois $p(n+1)-n+1 > (n+1)-n+1 = 2$. Logo, $P_y \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leq p \leq \infty$.

(vi) Note que este resultado já foi mostrado para $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Para $1 \leq p \leq \infty$, vamos mostrar primeiramente que $P_y(x) = P(x,y)$ é uma função harmônica em $\mathbb{R}^{n+1}_+$. Por definição, sabemos que

$$P(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i t\cdot x} e^{-2\pi|t|y}\,dt.$$

Note que $P(x,y)$ satisfaz as condições do Teorema 1.12, pois a integral acima converge absolutamente e

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{\partial}{\partial y}\left[e^{-2\pi i t\cdot x}e^{-2\pi|t|y}\right]\right|\,dt &= \int_{\mathbb{R}^n} 2\pi|t|e^{-2\pi|t|y}\,dt \\ &= C_1\int_0^\infty r^n e^{-2\pi r y}\,dr \\ &= C_1\int_0^\infty \left(r^n e^{-\pi r y}\right)e^{-\pi r y}\,dr \\ &\leq C_2\int_0^\infty e^{-\pi r y}\,dr < \infty. \end{aligned}$$

Analogamente, para cada $k = 1,\dots,n$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{\partial}{\partial x_k}\left[e^{-2\pi i t\cdot x}e^{-2\pi|t|y}\right]\right|\,dt = \int_{\mathbb{R}^n} 2\pi|t_k|e^{-2\pi|t|y}\,dt < \infty.$$

Aplicando o Teorema 1.12, obtemos que

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,y) = 4\pi^2|t|^2\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i t\cdot x}e^{-2\pi|t|y}\,dt,$$

e para cada $k = 1, \ldots, n$,

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x_k^2}(x,y) = -4\pi^2 t_k^2 \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i t\cdot x} e^{-2\pi|t|y}\, dt.$$

Logo,

$$\Delta P(x,y) = \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,y) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 P}{\partial x_k^2}(x,y) = 0,$$

e portanto o núcleo de Poisson $P_y(x) = P(x,y)$ é uma função harmônica.

Mas agora, como

$$u(x,y) = (P_y * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} P_y(x-t) f(t)\, dt,$$

então

$$\begin{aligned}
\Delta u(x,y) &= \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}(x,y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x-t,y) f(t)\, dt + \sum_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2 P}{\partial x_k^2}(x-t,y) f(t)\, dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \Delta P_y(x-t) f(t)\, dt = 0,
\end{aligned}$$

e portanto $u(x,y)$ é uma função harmônica.

(vii) Sejam $y_1, y_2 > 0$. Pelo item (iii), sabemos que $\widehat{P_y}(x) = e^{-2\pi|x|y}$, e assim

$$(P_{y_1} * P_{y_2})\widehat{\ }(x) = \widehat{P_{y_1}}(x)\widehat{P_{y_2}}(x) = e^{-2\pi|x|y_1} e^{-2\pi|x|y_2} = e^{-2\pi|x|(y_1+y_2)}.$$

Logo, como $P_{y_1} * P_{y_2} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$(P_{y_1} * P_{y_2})(x) = \mathscr{F}^{-1}\left(e^{-2\pi|t|(y_1+y_2)}\right)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot t} e^{-2\pi|t|(y_1+y_2)}\, dt = P_{y_1+y_2}(x).$$

■

O resultado a seguir descreve o comportamento de fronteira das integrais de Poisson.

Teorema 5.2. *Suponha $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$, e seja $u(x,y)$ sua integral de Poisson. Então*

(a) $\sup_{y>0} |u(x,y)| \le Mf(x)$, *no qual Mf denota a função maximal de Hardy-Littlewood de f.*

(b) $\lim_{y\to 0} u(x,y) = f(x)$ *q.t.p.*

(c) Se $p < \infty$, $u(x,y)$ converge a f em norma L^p se $y \to 0$.

Este teorema será provado em um contexto mais geral, válido também para aproximações da identidade, definidas a seguir.

Definição 5.2 (Aproximação da Identidade)**.** *Seja φ uma função integrável em $\mathbb{R}^n$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx = 1$. Para cada $\varepsilon > 0$, considere φ_ε definida por*

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(\varepsilon^{-1}x).$$

Dizemos então que $\{\varphi_\varepsilon; \varepsilon > 0\}$ é uma aproximação da identidade.

Teorema 5.3. *Sejam φ, φ_ε como na definição anterior. Suponha que o menor majorante radial e decrescente de φ seja integrável, isto é, se $\psi(x) = \sup\limits_{|y|\geq|x|} |\varphi(y)|$, então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\,dx = A < \infty.$$

Então para tal valor A, são válidas:

(a) Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, então

$$\sup_{\varepsilon>0} |(f * \varphi_\varepsilon)(x)| \leq A(Mf)(x).$$

(b) Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, e $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx = 1$, então

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(f * \varphi_\varepsilon)(x) = f(x) \text{ q.t.p.}$$

(c) Se $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx = 1$ e $p < \infty$, então $\|f * \varphi_\varepsilon - f\|_p \to 0$ se $\varepsilon \to 0$.

Demonstração. Provemos primeiramente o item (c). Para isto, precisamos da seguinte afirmação:

Afirmação: Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p < \infty$, e $\Delta(y) \doteq \|f(x-y) - f(x)\|_p$, então $\Delta(y) \to 0$ se $y \to 0$.

De fato, note que se $g \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$, então $g(x-y) \to g(x)$ uniformemente se $y \to 0$, isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|g(x-y) - g(x)| < \varepsilon$ se $|y| < \delta$. Logo, se $|y| < \delta$,

$$\|g(x-y) - g(x)\|_p^p = \int_{\operatorname{supp} g} |g(x-y) - g(x)|^p\,dy \leq \varepsilon^p m(\operatorname{supp} g),$$

o que prova a afirmação para o caso em que $g \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$. Agora, se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p < \infty$, temos por densidade que existem $f_1 \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ e f_2 tais que $f = f_1 + f_2$ e $\|f_2\|_p < \delta$. Definindo $\Delta_1(y) = \|f_1(x-y) - f_1(x)\|_p$ e $\Delta_2(y) = \|f_2(x-y) - f_2(x)\|_p$, temos que

$$\begin{aligned}
\Delta(y) &= \|f(x-y) - f(x)\|_p \\
&\leq \|f_1(x-y) - f_1(x)\|_p + \|f_2(x-y) - f_2(x)\|_p \\
&= \Delta_1(y) + \Delta_2(y),
\end{aligned}$$

para os quais sabemos que $\Delta_1(y) \to 0$ se $y \to 0$, uma vez que a afirmação é válida para $f_1 \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$, e

$$\Delta_2(y) = \|f_2(x-y) - f_2(x)\|_p \leq \|f_2(x-y)\|_p + \|f_2(x)\|_p = 2\|f_2\|_p < 2\delta.$$

Logo, $\Delta(y) \to 0$ se $y \to 0$, o que prova a afirmação.

Agora note que podemos escrever

$$f * \varphi_\varepsilon - f = \int_{\mathbb{R}^n} [f(x-y) - f(x)]\varphi_\varepsilon(y)\, dy,$$

uma vez que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi_\varepsilon(y)\, dy = f(x)\varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\varepsilon^{-1}y)\, dy = f(x) \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\, dy = f(x).$$

Daí, obtemos pela Desigualdade de Minkowski para Integrais que

$$\begin{aligned}
\|f * \varphi_\varepsilon - f\|_p &= \left[\int_{\mathbb{R}^n} |(f * \varphi_\varepsilon - f)(x)|^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left|\int_{\mathbb{R}^n} [f(x-y) - f(x)]\varphi_\varepsilon(y)\, dy\right|^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)||\varphi_\varepsilon(y)|\, dy\right)^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p|\varphi_\varepsilon(y)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \|f(x-y) - f(x)\|_p |\varphi_\varepsilon(y)|\, dy \\
&= \varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \Delta(y)|\varphi(\varepsilon^{-1}y)|\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \Delta(\varepsilon y)|\varphi(y)|\, dy.
\end{aligned}$$

Mas note que, como

$$\Delta(\varepsilon y) = \|f(x-\varepsilon y) - f(x)\|_p \leq \|f(x-\varepsilon y)\|_p + \|f(x)\|_p = 2\|f\|_p < \infty,$$

então

$$\Delta(\varepsilon y)|\varphi(y)| \leq 2\|f\|_p |\varphi(y)|,$$

no qual $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, e portanto segue pela afirmação anterior e pelo Teorema da Convergência Dominada que

$$\|f * \varphi_\varepsilon - f\|_p \to 0$$

se $\varepsilon \to 0$, o que prova o item (c).

Para o item (a), seja $\psi(x) = \sup_{|y|\geq|x|} |\varphi(y)|$, assim como definida no enunciado. Como ψ é uma função radial, podemos escrever, com um certo abuso de notação, $\psi(x) = \psi(r)$ se $|x| = r$. Mais ainda, note que ψ é de fato uma função decrescente, pois

$$\psi(x_1) = \sup_{|y|\geq|x_1|} |\varphi(y)| \geq \sup_{|y|\geq|x_2|} |\varphi(y)| = \psi(x_2)$$

se $|x_1| \leq |x_2|$. Assim,

$$\int_{\frac{r}{2}\leq|x|\leq r} \psi(x)\, dx \geq \psi(r) \int_{\frac{r}{2}\leq|x|\leq r} dx = Cr^n\psi(r).$$

Como ψ é decrescente e $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então $r^n\psi(r) \to 0$ se $r \to \infty$, pois $r^n\psi(r) \leq C^{-1}\int_{\frac{r}{2}\leq|x|} \psi(x)\, dx \to 0$ se $r \to \infty$. E também, temos pelo Teorema da Convergência Dominada que

$$Cr^n\psi(r) \leq \int_{\frac{r}{2}\leq|x|\leq r} \psi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\chi_{\{\frac{r}{2}\leq|x|\leq r\}}(x)\, dx \to 0$$

se $r \to 0$.

Para provarmos o item (a), precisamos provar que

$$(f * \psi_\varepsilon)(x) \leq A(Mf)(x), \tag{5.22}$$

no qual $f \geq 0$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, $\varepsilon > 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\, dx = A$ e $\psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\psi(\varepsilon^{-1}x)$.

Note que a desigualdade (5.22) é invariante por translação em relação a f e invariante por dilatação em relação a ψ, isto é, tal desigualdade é equivalente a

$$(T_a f * \psi_\varepsilon)(x) \leq AM(T_a f)(x), \tag{5.23}$$

no qual $(T_a f)(x) = f(x - a)$. Com efeito, é imediato que a desigualdade (5.23) implica a desigualdade (5.22). Por outro lado, assumindo (5.22), temos que

$$(f * \psi_\varepsilon)(x - a) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y - a)\psi_\varepsilon(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} (T_a f)(x - y)\psi_\varepsilon(y)\, dy = (T_a f * \psi_\varepsilon)(x),$$

mas por (5.22),

$$(f * \psi_\varepsilon)(x - a) \leq A(Mf)(x - a) = AM(T_a f)(x),$$

e então

$$(T_a f * \psi_\varepsilon)(x) \leq AM(T_a f)(x).$$

Mais ainda, como $A = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \psi_\varepsilon(x)\, dx$, para todo $\varepsilon > 0$, e ψ_ε também é radial e decrescente, segue portanto que a desigualdade (5.23) vale para todo $\varepsilon > 0$.

Da equivalência anterior, é suficiente portanto provarmos que

$$(f * \psi)(0) \leq A(Mf)(0). \tag{5.24}$$

Para isto, assumimos que $Mf(0) < \infty$. Assim, definindo

$$\lambda(r) = \int_{S^{n-1}} f(rx)\, d\sigma(x) \quad \text{e} \quad \Lambda(r) = \int_{|x|\leq r} f(x)\, dx,$$

então $\Lambda(r) = \int_0^r \lambda(t)t^{n-1}\, dt$, pois

$$\begin{aligned}
\int_0^r \lambda(t)t^{n-1}\, dt &= \int_0^r \left(\int_{S^{n-1}} f(tx)\, d\sigma(x)\right) t^{n-1}\, dt \\
&= \int_0^r \int_{S^{n-1}} f(tx)t^{n-1}\, d\sigma(x)\, dt \\
&= \int_{|x|\leq r} f(x)\, dx \\
&= \Lambda(r).
\end{aligned}$$

Assim,

$$(f * \psi)(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\psi(x)\, dx = \int_0^\infty \lambda(r)\psi(r)r^{n-1}\, dr = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}} \int_\varepsilon^N \lambda(r)\psi(r)r^{n-1}\, dr.$$

Realizando integração por partes na última integral da igualdade acima, obtemos que

$$\begin{aligned}
(f * \psi)(0) &= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}} \left[\psi(r)\Lambda(r)\Big|_\varepsilon^N - \int_\varepsilon^N \Lambda(r)\, d\psi(r)\right] \\
&= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}} \left[\psi(N)\Lambda(N) - \psi(\varepsilon)\Lambda(\varepsilon) - \int_\varepsilon^N \Lambda(r)\, d\psi(r)\right]. \qquad (5.25)
\end{aligned}$$

Mas note que

$$\begin{aligned}
\Lambda(r) &= \int_{|x|\leq r} f(x)\, dx \\
&= \int_{B(0,r)} f(x)\, dx \\
&= m(B(0,r)) \left[\frac{1}{m(B(0,r))} \int_{B(0,r)} f(x)\, dx\right] \\
&\leq m(B(0,r)) \sup_{s>0} \frac{1}{m(B(0,s))} \int_{B(0,s)} f(x)\, dx \\
&= r^n m(B(0,1)) Mf(0),
\end{aligned}$$

e portanto segue da observação feita anteriormente que

$$\psi(\varepsilon)\Lambda(\varepsilon) \leq \psi(\varepsilon)\varepsilon^n m(B(0,1))Mf(0) \to 0$$

se $\varepsilon \to 0$, e também,

$$\psi(N)\Lambda(N) \to 0$$

se $N \to \infty$. Voltando à igualdade em (5.25), temos que

$$
\begin{aligned}
(f * \psi)(0) &= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}} \left[-\int_\varepsilon^N \Lambda(r)\, d\psi(r) \right] \\
&= \int_0^\infty \Lambda(r)\, d(-\psi(r)) \\
&\leq m(B(0,1))Mf(0) \int_0^\infty r^n\, d(-\psi(r)) \\
&= m(B(0,1))Mf(0) \left[-r^n\psi(r)\Big|_0^\infty + n\int_0^\infty \psi(r) r^{n-1}\, dr \right] \\
&= m(B(0,1))Mf(0) n \int_0^\infty \psi(r) r^{n-1}\, dr \\
&= m(B(0,1))Mf(0) \frac{n}{\sigma(S^{n-1})} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\, dx \\
&= AMf(0),
\end{aligned}
$$

pois ψ é radial e $nm(B(0,1)) = \sigma(S^{n-1})$. Logo, as desigualdades (5.24) e (5.22) estão provadas. Tomando o supremo sobre todo $\varepsilon > 0$, obtemos o item (a).

Provemos, por fim, o item (b). Para isso, observamos primeiramente que se $f_1 \in C_c(\mathbb{R}^n)$, então $(f_1 * \varphi_\varepsilon)(x) \to f_1(x)$ uniformemente se $\varepsilon \to 0$. De fato, para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$
\begin{aligned}
|f_1(x) - f_1 * \varphi_\varepsilon(x)| &= \left| f_1(x) - \int_{\mathbb{R}^n} f_1(x-y)\varphi_\varepsilon(y)\, dy \right| \\
&= \left| f_1(x) - \varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f_1(x-y)\varphi(\varepsilon^{-1}y)\, dy \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f_1(x)\varphi(y)\, dy - \int_{\mathbb{R}^n} f_1(x-\varepsilon y)\varphi(y)\, dy \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x) - f_1(x-\varepsilon y)||\varphi(y)|\, dy \\
&\leq \sup_{y\in\mathbb{R}^n} |f_1(x) - f_1(x-\varepsilon y)| \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(y)|\, dy \\
&\leq C \sup_{y\in\mathbb{R}^n} |f_1(x) - f_1(x-\varepsilon y)| \to 0
\end{aligned}
$$

se $\varepsilon \to 0$, pois φ é integrável e f_1 é uniformemente contínua.

O argumento que vamos utilizar a seguir é análogo ao que foi utilizado na demonstração do Teorema de Diferenciação de Lebesgue. Pelo item (c), sabemos que, para $p < \infty$, $f * \varphi_\varepsilon \to f$ em norma L^p se $\varepsilon \to 0$, e portanto existe uma sequência $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a zero e tal que

$$(f * \varphi_{\varepsilon_k})(x) \to f(x) \text{ q.t.p.}$$

Basta então mostrarmos que o limite pontual $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(f * \varphi_\varepsilon)(x)$ existe em quase toda parte, pois caso este exista, seu valor deve ser $f(x)$ por unicidade. Para isso, vamos supor sem perda de generalidade que $f * \varphi_\varepsilon$ seja real. Para o caso em que $f * \varphi_\varepsilon$ assume valores complexos, basta aplicar o resultado para as partes real e imaginária. Considere então a função Ω_f definida por

$$\Omega_f(x) = \limsup_{\varepsilon\to 0}(f * \varphi_\varepsilon)(x) - \liminf_{\varepsilon\to 0}(f * \varphi_\varepsilon)(x),$$

e note que o limite $\lim_{\varepsilon\to 0}(f * \varphi_\varepsilon)(x)$ existe em quase toda parte se, e somente se, $\Omega_f(x) = 0$ em quase toda parte.

Mas pelo item (a), temos que $\sup_{\varepsilon>0} |(f * \varphi_\varepsilon)(x)| \le A(Mf)(x)$ para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$. Assim, $\Omega_f(x) \le 2A(Mf)(x)$ e, como

$$\{x \in \mathbb{R}^n; \Omega_f(x) > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{x \in \mathbb{R}^n; \Omega_f(x) > \frac{1}{k}\right\},$$

então

$$\begin{aligned} m\left(\{x \in \mathbb{R}^n; \Omega_f(x) > 0\}\right) &\le \sum_{k=1}^{\infty} m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n; \Omega_f(x) > \frac{1}{k}\right\}\right) \\ &\le \sum_{k=1}^{\infty} m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n; Mf(x) > \frac{1}{2Ak}\right\}\right). \end{aligned} \tag{5.26}$$

Lembremos agora que, pelo Teorema 3.1 a respeito da função maximal de Hardy-Littlewood, a transformação $f \mapsto Mf$ é do tipo fraco $(1,1)$ e do tipo (p,p) para $1 < p \le \infty$, e em particular do tipo fraco (p,p) para todo $1 \le p \le \infty$, e portanto

$$m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n; Mf(x) > \frac{1}{2Ak}\right\}\right) \le (2C_nAk)^p \|f\|_p^p.$$

Agora, como $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, dada $\delta > 0$ qualquer, podemos escrever $f = f_1 + f_2$, no qual $f_1 \in C_c(\mathbb{R}^n)$ e $\|f_2\|_p < \delta$. Mais ainda, vale

$$\begin{aligned} \Omega_f(x) &= \limsup_{\varepsilon\to 0}(f * \varphi_\varepsilon)(x) - \liminf_{\varepsilon\to 0}(f * \varphi_\varepsilon)(x) \\ &= \limsup_{\varepsilon\to 0}(f_1 * \varphi_\varepsilon + f_2 * \varphi_\varepsilon)(x) - \liminf_{\varepsilon\to 0}(f_1 * \varphi_\varepsilon + f_2 * \varphi_\varepsilon)(x) \\ &\le \left(\limsup_{\varepsilon\to 0}(f_1 * \varphi_\varepsilon) + \limsup_{\varepsilon\to 0}(f_2 * \varphi_\varepsilon) - \liminf_{\varepsilon\to 0}(f_1 * \varphi_\varepsilon) - \liminf_{\varepsilon\to 0}(f_2 * \varphi_\varepsilon)\right)(x) \\ &= \Omega_{f_1}(x) + \Omega_{f_2}(x) \\ &= \Omega_{f_2}(x), \end{aligned}$$

uma vez que $f_1 \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Assim, como $\Omega_f(x) \le \Omega_{f_2}(x)$, então a condição $\Omega_f(x) > \frac{1}{k}$ implica que $\Omega_{f_2}(x) > \frac{1}{k}$, e portanto

$$\begin{aligned} m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n; \Omega_f(x) > \frac{1}{k}\right\}\right) &\le m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n; \Omega_{f_2}(x) > \frac{1}{k}\right\}\right) \\ &\le m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n; Mf_2(x) > \frac{1}{2Ak}\right\}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq (2C_nAk)^p \|f_2\|_p^p \\
&< (2C_nAk)^p\delta^p.
\end{aligned}
$$

Como $\delta > 0$ pode ser tomado arbitrariamente pequeno, temos que

$$
m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n; \Omega_f(x) > \frac{1}{k}\right\}\right) = 0,
$$

e portanto segue da desigualdade em (5.26) que $\Omega_f(x) = 0$ em quase toda parte, o que prova o item (b) para $1 \leq p < \infty$.

Suponha agora que $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Neste caso, é suficiente mostrarmos que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(f * \varphi_\varepsilon)(x) = f(x)$ em quase toda parte em uma bola $B \subset \mathbb{R}^n$ fixada e centrada na origem, uma vez que o espaço $\mathbb{R}^n$ pode ser expresso como uma união enumerável de bolas centradas na origem e a união enumerável de conjuntos de medida nula possui também medida nula.

Considere então B_1 uma bola que contenha B estritamente e seja δ a distância de B ao complementar de B_1. Defina funções f_1 e f_2 tais que

$$
f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \in B_1, \\ 0, & x \notin B_1, \end{cases}
$$

e $f_2 = f - f_1$. Note que $f_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, pois

$$
\int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)|\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\chi_{B_1}(x)\, dx \leq \|f\|_\infty\, m(B_1) < \infty,
$$

e portanto a conclusão do item (b) vale para f_1. Por outro lado, segue da definição de f_1 que

$$
f_2(x) = \begin{cases} f(x), & x \notin B_1, \\ 0, & x \in B_1, \end{cases}
$$

e assim, dado $x \in B$, $f_2(x-y) = f(x) \neq 0$ se, e somente se, $x - y \notin B_1$. Mas se y é tal que $x - y \notin B_1$, então $|y| > \delta$, pois caso contrário teríamos que $|x-y| \leq |x| + |y| < r_B + \delta$, no qual r_B é o raio de B, e então $x - y$ pertenceria a B_1.

Assim, dado $x \in B$, temos pelo Teorema da Convergência Dominada que

$$
\begin{aligned}
|(f_2 * \varphi_\varepsilon)(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} f_2(x-y)\varphi_\varepsilon(y)\, dy\right| \\
&= \left|\int_{x-y\in B_1^c} f_2(x-y)\varphi_\varepsilon(y)\, dy\right| \\
&\leq \int_{|y|>\delta>0} |f_2(x-y)||\varphi_\varepsilon(y)|\, dy \\
&\leq \|f\|_\infty\, \varepsilon^{-n} \int_{|y|>\delta>0} |\varphi(\varepsilon^{-1}y)|\, dy \\
&= \|f\|_\infty \int_{|y|>\frac{\delta}{\varepsilon}} |\varphi(y)|\, dy
\end{aligned}
$$

$$= \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(y)|\chi_{\{|y|>\frac{\delta}{\varepsilon}\}}(y)\, dy \to 0$$

se $\varepsilon \to 0$.

Por fim, temos que $f = f_1 + f_2$ e

$$(f * \varphi_\varepsilon)(x) = (f_1 * \varphi_\varepsilon)(x) + (f_2 * \varphi_\varepsilon)(x),$$

no qual $(f_2 * \varphi_\varepsilon)(x) \to 0$ e $(f_1 * \varphi_\varepsilon)(x) \to f_1(x)$ q.t.p. se $\varepsilon \to 0$. Mas como $f_1(x) = f(x)$ em B, concluímos que

$$(f * \varphi_\varepsilon)(x) \to f(x) \text{ q.t.p. em } B,$$

e portanto o item (b) está provado.

■

Observação 5.4. O Teorema 5.2 segue diretamente como consequência do Teorema 5.3. Com efeito, tomando $\varphi = P_1$ e $\varphi_\varepsilon = P_\varepsilon$, sabemos pela Proposição 5.7 que P_1 é integrável e $P_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} P_1(\varepsilon^{-1}x) = \varphi_\varepsilon(x)$, $\varepsilon > 0$. Mais ainda, sabemos pela Proposição 5.6 que

$$P_1(x) = \frac{c_n}{(|x|^2 + 1)^{\frac{n+1}{2}}}$$

é radial e decrescente, de forma que podemos tomar $\psi(x) = \varphi(x) = P_1(x)$ e

$$A = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} P_1(x)\, dx = 1.$$

Por fim, como $u(x, y) = (P_\varepsilon * f)(x)$, concluímos que o Teorema 5.2 segue diretamente do Teorema 5.3.

Corolário 5.1. *Sejam φ e φ_ε como no Teorema 5.3 e suponha que $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx = 1$. Se f é uma função contínua e limitada em $\mathbb{R}^n$, então $(f * \varphi_\varepsilon)(x) \to f(x)$ uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Sejam $\delta > 0$ e $K \subset \mathbb{R}^n$ um compacto. Como φ é integrável, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\int_{|y|\geq\lambda} |\varphi(y)|\, dy < \delta$, e portanto temos para cada $x \in K$ que

$$\begin{aligned}
|f(x) - (f * \varphi_\varepsilon)(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x - \varepsilon y)||\varphi(y)|\, dy \\
= &\int_{|y|\leq\lambda} |f(x) - f(x - \varepsilon y)||\varphi(y)|\, dy + \int_{|y|\geq\lambda} |f(x) - f(x - \varepsilon y)||\varphi(y)|\, dy \\
\leq &\sup_{\substack{x\in K \\ |y|\leq\lambda}} |f(x) - f(x - \varepsilon y)| \int_{|y|\leq\lambda} |\varphi(y)|\, dy + 2\,\|f\|_\infty\, \delta \\
\leq &\; C \sup_{|x-z|\leq\lambda\varepsilon} |f(x) - f(z)| + 2\,\|f\|_\infty\, \delta \\
\leq &\; (C + 2\,\|f\|_\infty)\delta,
\end{aligned}$$

pois $x \in K$ e $z = x - \varepsilon y \in K'$, no qual K' é outro compacto em $\mathbb{R}^n$. Como $\delta > 0$ é arbitrário, segue o resultado.

■

Em particular, os resultados anteriores mostram que, dada f contínua e limitada em $\mathbb{R}^n$, existe uma função

$$u(x,y) = (f * P_y)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-yt)P_1(t)\,dt$$

que é contínua no fecho de $\mathbb{R}^{n+1}_+$, harmônica em $\mathbb{R}^{n+1}_+$ e cuja restrição à fronteira é dada por f. Logo, o problema de Dirichlet está resolvido neste caso.

5.3 Funções Harmônicas

Veremos nesta seção algumas relações entre as transformadas de Riesz e as integrais de Poisson, ainda no contexto de funções em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 5.4. *Sejam $f, f_1, \ldots, f_n$ funções em $L^2(\mathbb{R}^n)$ e sejam $u_0(x,y) = P_y * f$, $u_1(x,y) = P_y * f_1, \ldots, u_n(x,y) = P_y * f_n$ suas respectivas integrais de Poisson. Então*

$$f_j = R_j(f), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{5.27}$$

se, e somente se, valem as seguintes equações de Cauchy-Riemann generalizadas:

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{n} \dfrac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \\ \\ \dfrac{\partial u_j}{\partial x_k} = \dfrac{\partial u_k}{\partial x_j}, \quad j \neq k,\ x_0 = y. \end{cases} \tag{5.28}$$

Observação 5.5. Note que, ao menos localmente, o sistema (5.28) é equivalente à existência de uma função harmônica H de $n+1$ variáveis tal que

$$u_j = \frac{\partial H}{\partial x_j}, \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

De fato, suponha $H : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ uma função harmônica e tal que $\dfrac{\partial H}{\partial x_j} = u_j$ para cada $j = 0, \ldots, n$. Como H é harmônica, então

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial x_j^2} = 0.$$

E também, como $H \in C^2(\mathbb{R}^{n+1})$, segue do Teorema de Schwarz que

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial H}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 H}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial^2 H}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial u_k}{\partial x_j},$$

e portanto vale o sistema (5.28). Por outro lado, assumindo que o sistema (5.28) é satisfeito, podemos definir uma função $H : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ de forma que $\dfrac{\partial H}{\partial x_j} = u_j$ para cada $j = 0, \ldots, n$. Assim,

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial x_j^2} = \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0,$$

e portanto H é harmônica.

Demonstração do Teorema 5.4. Suponha que $f_j = R_j(f)$ para $j = 1, \ldots, n$. Como $f, f_1, \ldots, f_n \in L^2(\mathbb{R}^n)$, segue da igualdade em (5.11) que

$$\widehat{f_j}(t) = (R_j(f))\widehat{\ }(t) = \frac{it_j}{|t|}\hat{f}(t),$$

e pela definição da integral de Poisson em (5.16), temos que

$$\begin{aligned} u_j(x,y) &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f_j}(t)e^{-2\pi it\cdot x}e^{-2\pi|t|y}\,dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{it_j}{|t|}\hat{f}(t)e^{-2\pi it\cdot x}e^{-2\pi|t|y}\,dt. \end{aligned} \tag{5.29}$$

Note que a integral acima converge absolutamente, pois

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|t_j|}{|t|}|\hat{f}(t)|e^{-2\pi|t|y}\,dt \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(t)|e^{-2\pi|t|y}\,dt \leq \|\hat{f}\|_2 \left\|e^{-2\pi|t|y}\right\|_2 < \infty.$$

E também, para $k = 1, \ldots, n$, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{it_j}{|t|}\hat{f}(t)e^{-2\pi it\cdot x}e^{-2\pi|t|y}\right]\right|\,dt &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2\pi|t_j||t_k|}{|t|}|\hat{f}(t)|e^{-2\pi|t|y}\,dt \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} 2\pi|t||\hat{f}(t)|e^{-2\pi|t|y}\,dt \\ &\leq 2\pi\|\hat{f}\|_2 \left\|te^{-2\pi|t|y}\right\|_2 < \infty. \end{aligned}$$

Para $x_0 = y$, tem-se analogamente que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{it_j}{|t|}\hat{f}(t)e^{-2\pi it\cdot x}e^{-2\pi|t|y}\right]\right|\,dt = \int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{-2\pi|t|it_j}{|t|}\hat{f}(t)e^{-2\pi it\cdot x}e^{-2\pi|t|y}\right|\,dt < \infty.$$

Assim, aplicando o Teorema 1.12 em (5.29), obtemos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_j}{\partial x_j} &= \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} (-2\pi it_j)\frac{it_j}{|t|}\hat{f}(t)e^{-2\pi it\cdot x}e^{-2\pi|t|y}\,dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2\pi}{|t|}\sum_{j=1}^n t_j^2\hat{f}(t)e^{-2\pi it\cdot x}e^{-2\pi|t|y}\,dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} 2\pi|t|\hat{f}(t)e^{-2\pi it\cdot x}e^{-2\pi|t|y}\,dt, \end{aligned}$$

e para $x_0 = y$,

$$\frac{\partial u_j}{\partial y} = \int_{\mathbb{R}^n} (-2\pi|t|)\hat{f}(t)e^{-2\pi it\cdot x}e^{-2\pi|t|y}\,dt,$$

e portanto vale a primeira equação do sistema (5.28).

Para a segunda equação, basta notar que, para $k \neq j$,

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2\pi t_j t_k}{|t|}\hat{f}(t)e^{-2\pi it\cdot x}e^{-2\pi|t|y}\,dt = \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$$

para $j, k = 1, \dots, n$, e

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_k} = \int_{\mathbb{R}^n} (-2\pi i t_k) \hat{f}(t) e^{-2\pi i t \cdot x} e^{-2\pi |t| y} \, dt = \int_{\mathbb{R}^n} (-2\pi |t|) \frac{i t_k}{|t|} \hat{f}(t) e^{-2\pi i t \cdot x} e^{-2\pi |t| y} \, dt = \frac{\partial u_k}{\partial y},$$

e portanto o sistema (5.28) é válido.

Reciprocamente, suponha válido o sistema (5.28) e sejam

$$u_j(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}_j(t) e^{-2\pi i t \cdot x} e^{-2\pi |t| y} \, dt$$

para cada $j = 0, 1, \dots, n$. Como

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_0} = \frac{\partial u_j}{\partial y},$$

nos quais

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_j} = \int_{\mathbb{R}^n} (-2\pi i t_k) \hat{f}(t) e^{-2\pi i t \cdot x} e^{-2\pi |t| y} \, dt$$

e

$$\frac{\partial u_j}{\partial y} = \int_{\mathbb{R}^n} (-2\pi |t|) \widehat{f_j}(t) e^{-2\pi i t \cdot x} e^{-2\pi |t| y} \, dt,$$

então temos que

$$\widehat{f_j}(t) = \frac{i t_k}{|t|} \hat{f}(t) = (R_j f)\widehat{\,}(t).$$

Pelo Teorema de Parseval-Plancherel, concluímos que $f_j = R_j(f)$, para cada $j = 1, \dots, n$. ■

Voltaremos agora a um resultado enunciado sem demonstração no item (c) do Teorema 4.4, a respeito de integrais singulares. Consideramos então o núcleo $K(x) = \Omega(x)|x|^{-n}$, no qual Ω é uma função positivamente homogênea de grau zero que satisfaz as condições (4.31) e (4.32), dadas respectivamente por

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{S^{n-1}} \Omega(x) \, d\sigma = 0, \\ \\ \displaystyle\sup_{\substack{|x - x'| \leq \delta \\ |x| = |x'| = 1}} |\Omega(x) - \Omega(x')| = \omega(\delta) \Rightarrow \int_0^1 \frac{\omega(\delta)}{\delta} \, d\delta < \infty. \end{cases}$$

No item (a) do Teorema 4.4, provamos a existência em quase toda parte do limite

$$\lim_{\varepsilon \to 0} T_\varepsilon(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y| \geq \varepsilon} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} f(x - y) \, dy,$$

e para isso utilizamos o resultado a seguir, que agora será demonstrado com o auxílio de resultados obtidos neste capítulo.

Lema 5.3. *Se* $(T^*f)(x) = \sup_{\varepsilon>0} |(T_\varepsilon f)(x)|$, *então*

$$\|T^*f\|_p \leq A_p \|f\|_p, \quad 1 < p < \infty.$$

Demonstração. Sabemos pelo Teorema 4.3 que o limite $\lim_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon(f) = T(f)$ existe em norma L^p. Vamos provar o lema mostrando que

$$(T^*f)(x) \leq C_1 M(Tf)(x) + C_2(Mf)(x).$$

Seja $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ uma função não negativa, radial e decrescente em $|x|$, cujo suporte pertence à bola unitária e tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx = 1$. Considere, para cada $\varepsilon > 0$,

$$K_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{\Omega(x)}{|x|^n}, & |x| \geq \varepsilon, \\ 0, & |x| < \varepsilon. \end{cases}$$

A partir de φ e K_ε, definimos uma função ϕ como

$$\phi = \varphi * K - K_1, \tag{5.30}$$

no qual

$$\begin{aligned} (\varphi * K)(x) &= \lim_{\varepsilon\to 0} (\varphi * K_\varepsilon)(x) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(x-y)\varphi(y)\, dy \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x-y|\geq\varepsilon} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n} \varphi(y)\, dy \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x-y|\geq\varepsilon} K(x-y)\varphi(y)\, dy. \end{aligned}$$

Com o objetivo de utilizar o Teorema 5.3, vamos mostrar que o menor majorante radial e decrescente de ϕ é integrável.

Se $|x| < 1$, então $\phi = \varphi * K$, que pode ser expressa por

$$\begin{aligned} \phi &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|y|\geq\varepsilon} \varphi(x-y)K(y)\, dy \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\int_{\varepsilon\leq|y|\leq 2} \varphi(x-y)K(y)\, dy - \int_{\varepsilon\leq|y|\leq 2} \varphi(x)K(y)\, dy \right] \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon\leq|y|\leq 2} [\varphi(x-y) - \varphi(x)]K(y)\, dy, \end{aligned}$$

pois $\operatorname{supp}\varphi \subset B(0,1)$ e se $|x-y| \leq 1$, então $|y| \leq 2$. Além disso, segue da propriedade de cancelamento de K que $\int_{\varepsilon\leq|y|\leq 2} K(y)\, dy = 0$.

E como $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, temos pelo Teorema do Valor Médio que $|\varphi(x-y) - \varphi(x)| \leq C|y|$, e assim

$$|\phi(x)| \leq \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon\leq|y|\leq 2} |\varphi(x-y) - \varphi(x)||K(y)|\, dy$$

$$
\begin{aligned}
&\le \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon\le|y|\le 2}\frac{C'|y|}{|y|^n}\,dy\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} C''\int_{\varepsilon}^{2}\frac{r^{n-1}}{r^{n-1}}\,dy<\infty.
\end{aligned}
$$

Se $1\le|x|<2$, então $\phi=\varphi*K-K$, e pelo anterior,

$$
\begin{aligned}
|\phi(x)| &\le |(\varphi*K)(x)|+|K(x)|\\
&= |(\varphi*K)(x)|+\frac{|\Omega(x)|}{|x|^n}\\
&\le \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon\le|y|\le 3}|\varphi(x-y)-\varphi(x)||K(y)|\,dy+C<\infty,
\end{aligned}
$$

pois $|x|^n\ge 1$ e $|y|\le 3$ se $|x-y|\le 1$ e $|x|<2$.

Suponha agora que $|x|\ge 2$ e note que podemos expressar

$$
|K(x-y)-K(x)|=\left|\frac{\Omega(x-y)-\Omega(x)}{|x|^n}+\Omega(x-y)\left(\frac{1}{|x-y|^n}-\frac{1}{|x|^n}\right)\right|=|(I)+(II)|.
$$

Mostremos que as integrais de (I) e (II) em $B(0,1)$ são majoradas por funções radiais, decrescentes e integráveis. Para (I), temos que

$$
(I)=\frac{1}{|x|^n}\left[\Omega\left(\frac{x-y}{|x-y|}\right)-\Omega\left(\frac{x}{|x|}\right)\right],
$$

pois Ω é uma função positivamente homogênea de grau zero. Agora note que

$$
\left|\frac{x-y}{|x-y|}-\frac{x}{|x|}\right|=\left|\frac{(x-y)|x|^{-1}}{|x-y||x|^{-1}}-\frac{x}{|x|}\right|=\left|\frac{x'-y'}{|x'-y'|}-x'\right|,
$$

no qual $x'=\frac{x}{|x|}$, $y'=\frac{y}{|x|}$ e $|y'|=\frac{|y|}{|x|}\le\frac{1}{2}$. Definindo $h(z)=\frac{x'-z}{|x'-z|}$, temos que $|x'-z|=0$ se, e somente se, $\frac{x}{|x|}=z$, isto é, se $|z|=1$, e portanto h é contínua e diferenciável no aberto $B(0,1/2)$. Aplicando o Teorema do Valor Médio para a função h em $B(0,1/2)$, obtemos que

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{x'-y'}{|x'-y'|}-x'\right| &= |h(y')-h(0)|\\
&\le |\nabla h(ty')||y'| \quad (0<t<1)\\
&\le C\frac{|y|}{|x|}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{|y|\le 1}\frac{1}{|x|^n}\left[\Omega\left(\frac{x-y}{|x-y|}\right)-\Omega\left(\frac{x}{|x|}\right)\right]dy\right| &\le \int_{|y|\le 1}\frac{1}{|x|^n}\left|\omega\left(\frac{C|y|}{|x|}\right)\right|dy\\
&\le \int_{|y|\le 1}\frac{1}{|x|^n}\,\omega\left(\frac{C}{|x|}\right)dy
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{|x|^n}\,\omega\left(\frac{C}{|x|}\right) m(B(0,1)),$$

que é uma função radial e decrescente em $|x|$. Mais ainda,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x|^n}\,\omega\left(\frac{C}{|x|}\right) dx &= \sigma(S^{n-1}) \int_2^\infty \frac{1}{r}\,\omega\left(\frac{C}{r}\right) dr \\
&= C' \int_0^{\frac{c}{2}} \frac{\omega(r)}{r}\, dr \\
&= C' \int_0^1 \frac{\omega(r)}{r}\, dr + C' \int_1^{\frac{c}{2}} \frac{\omega(r)}{r}\, dr < \infty,
\end{aligned}$$

pois ω é limitada e Ω satisfaz a condição (4.32). Logo, a integral de (I) sobre $B(0,1)$ é majorada por uma função radial, decrescente e integrável.

Para (II), note que

$$\left| \frac{1}{|x-y|^n} - \frac{1}{|x|^n} \right| = |h(y) - h(0)|,$$

no qual $h(y) = \frac{1}{|x-y|^n}$ e $|x-y| \geq |x| - |y| \geq 1$, pois $|x| \geq 2$ e $|y| \leq 1$. Aplicando o Teorema do Valor Médio no complementar de $B(0,1)$, obtemos

$$|h(y) - h(0)| \leq \sup_{y \leq 1} |\nabla h(y)||y| \leq \sup_{y \leq 1} \frac{n|y|}{|x-y|^{n+1}},$$

pois para cada $j = 1, \ldots, n$, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial y_j}(y) &= \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\frac{1}{((x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2)^{\frac{n}{2}}} \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2 \right]^{-\frac{n}{2}} \\
&= n(x_j - y_j) \left[\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2 \right]^{\frac{-n-2}{2}} \\
&= \frac{n(x_j - y_j)}{|x-y|^{n+2}},
\end{aligned}$$

e portanto

$$|\nabla h(y)| = \left[\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial h}{\partial y_j}(y) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{j=1}^n \frac{n^2 (x_j - y_j)^2}{|x-y|^{2n+4}} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{n|x-y|}{|x-y|^{n+2}} = \frac{n}{|x-y|^{n+1}}.$$

Mas como $|y| \leq 1$ e $|x| \geq 2$, então $|y| \leq \frac{|x|}{2}$, e assim

$$|x-y| \geq |x| - |y| \geq |x| - \frac{|x|}{2} = \frac{|x|}{2}.$$

Do anterior,

$$|h(y) - h(0)| \leq n \left(\frac{|x|}{2}\right)^{-n-1} = \frac{2^{n+1}n}{|x|^{n+1}},$$

e como Ω é limitada, então

$$\begin{aligned}
\int_{|y|\leq 1} |\Omega(x-y)| \left| \frac{1}{|x-y|^n} - \frac{1}{|x|^n} \right| dy &\leq \int_{|y|\leq 1} |\Omega(x-y)| \frac{2^{n+1}n}{|x|^{n+1}}\, dy \\
&\leq \sup_{y\in\mathbb{R}^n} |\Omega(y)| \frac{n2^{n+1}m(B(0,1))}{|x|^{n+1}},
\end{aligned}$$

que é uma função radial e decrescente em $|x|$. E também,

$$\int_{|x|\geq 2} \frac{1}{|x|^{n+1}}\, dx = C \int_2^\infty \frac{1}{r^2}\, dr < \infty,$$

e portanto a integral de (II) sobre $B(0,1)$ também é majorada por uma função radial, decrescente e integrável.

Assim, temos para $|x| \geq 2$ que

$$\begin{aligned}
|\phi(x)| &\leq \int_{|y|\leq 1} |K(x-y) - K(x)||\varphi(y)|\, dy \\
&\leq \sup_{|y|\leq 1} |\varphi(y)| \int_{|y|\leq 1} |K(x-y) - K(x)|\, dy \\
&\leq \sup_{|y|\leq 1} |\varphi(y)| \left[\int_{|y|\leq 1} \left| \frac{\Omega(x-y) - \Omega(x)}{|x|^n} \right| + |\Omega(x-y)| \left| \frac{1}{|x-y|^n} - \frac{1}{|x|^n} \right| dy \right] \\
&\leq \sup_{|y|\leq 1} |\varphi(y)| \left[\frac{m(B(0,1))}{|x|^n}\, \omega\left(\frac{C}{|x|}\right) + \sup_{y\in\mathbb{R}^n} |\Omega(y)| \frac{n2^{n+1}m(B(0,1))}{|x|^{n+1}} \right],
\end{aligned}$$

no qual a última expressão acima denota uma função radial, decrescente em $|x|$ e integrável para $|x| \geq 2$. Logo, a função ϕ satisfaz as condições do Teorema 5.3.

Considere agora a função $\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\phi(\varepsilon^{-1}x)$. Como o operador $\varphi \mapsto \varphi * K$ comuta com dilatações positivas e $\phi = \varphi * K - K_1$, temos que

$$\begin{aligned}
\phi_\varepsilon(x) &= \varepsilon^{-n} \left[(\varphi * K)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - K_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right] \\
&= \varepsilon^{-n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} K(y)\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon} - y\right) dy - K_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right] \\
&= \varepsilon^{-n} \left[\varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} K\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy - K_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right] \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^{-n} K\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) \varepsilon^{-n}\varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy - \varepsilon^{-n} K_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} K(y)\varphi_\varepsilon(x-y)\, dy - K_\varepsilon(x) \\
&= (\varphi_\varepsilon * K)(x) - K_\varepsilon(x),
\end{aligned}$$

pois

$$\varepsilon^{-n}K\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) = \frac{\varepsilon^{-n}\Omega(\varepsilon^{-1}y)}{|\varepsilon^{-1}y|^n} = \frac{\Omega(y)}{|y|^n} = K(y),$$

e também,

$$\begin{aligned}\varepsilon^{-n}K_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) &= \begin{cases}\varepsilon^{-n}K_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), & \left|\frac{x}{\varepsilon}\right| \geq 1,\\ 0, & \left|\frac{x}{\varepsilon}\right| < 1,\end{cases}\\ &= \begin{cases}\frac{\Omega(x)}{|x|^n}, & |x| \geq \varepsilon,\\ 0, & |x| < \varepsilon,\end{cases}\\ &= K_\varepsilon(x).\end{aligned}$$

Afirmação: Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, então

$$[(\varphi_\varepsilon * K) * f](x) = (Tf * \varphi_\varepsilon)(x), \tag{5.31}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Mais ainda, vale para cada $\delta > 0$ a identidade

$$[(\varphi_\varepsilon * K_\delta) * f](x) = [(T_\delta)f * \varphi_\varepsilon](x). \tag{5.32}$$

As identidades (5.31) e (5.32) serão assumidas por ora e provadas após a demonstração do lema.

Assim, como $\phi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon * K - K_\varepsilon$, segue de (5.31) que

$$f * \phi_\varepsilon = f * (\varphi_\varepsilon * K - K_\varepsilon) = Tf * \varphi_\varepsilon - f * K_\varepsilon = Tf * \varphi_\varepsilon - T_\varepsilon f,$$

e portanto

$$T_\varepsilon f = Tf * \varphi_\varepsilon - f * \phi_\varepsilon.$$

Tomando o supremo sobre todo $\varepsilon > 0$, obtemos que

$$T^* f = \sup_{\varepsilon>0} |T_\varepsilon(f)| \leq \sup_{\varepsilon>0} |Tf * \varphi_\varepsilon| + \sup_{\varepsilon>0} |f * \phi_\varepsilon|.$$

Mas pelo item (a) do Teorema 5.3,

$$\sup_{\varepsilon>0} |(f * \phi_\varepsilon)(x)| \leq C_1(Mf)(x) \quad \text{e} \quad \sup_{\varepsilon>0} |Tf * \varphi_\varepsilon| \leq C_2 M(Tf)(x),$$

e portanto

$$(T^* f)(x) \leq C[(Mf)(x) + M(Tf)(x)].$$

Por fim, sabemos pelo item (b) do Teorema 4.3 que $Tf \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $\|Tf\|_p \leq A_p \|f\|_p$, $1 < p < \infty$. Deste fato e pelo Teorema 3.1 a respeito da função maximal de Hardy-Littlewood, temos que

$$\|CM(f)\|_p \leq CA_{1,p} \|f\|_p,$$

e também,

$$\|CM(Tf)\|_p \leq CA_{2,p} \|Tf\|_p \leq CA_{2,p}A_{3,p} \|f\|_p.$$

Logo,

$$\|T^* f\|_p \leq A_p \|f\|_p$$

para $1 < p < \infty$, e portanto o lema está provado.

∎

Demonstração da Afirmação. Ao longo da demonstração do lema anterior, afirmamos que se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, então vale a identidade (5.31), dada por

$$[(\varphi_\varepsilon * K) * f](x) = (Tf * \varphi_\varepsilon)(x),$$

e para cada $\delta > 0$, vale a identidade (5.32), dada por

$$[(\varphi_\varepsilon * K_\delta) * f](x) = [(T_\delta)f * \varphi_\varepsilon](x).$$

Mostremos que ambos os lados da identidade (5.32) são iguais à integral dupla

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{|y|\geq\delta} K(y) f(z-y) \varphi_\varepsilon(x-z)\, dz\, dy,$$

e para isso, iniciamos mostrando que a integral acima converge absolutamente.

De fato, observe que se q é expoente conjugado de p, $1 < p < \infty$, então $1 < q < \infty$ e $K_\delta \in L^q(\mathbb{R}^n)$, pois

$$\|K_\delta\|_q^q = \int_{\mathbb{R}^n} |K_\delta(y)|^q\, dy = \int_{|y|\geq\delta} \frac{|\Omega(y)|^q}{|y|^{nq}}\, dy \leq C \int_\delta^\infty \frac{1}{r^{nq-n+1}}\, dr < \infty,$$

uma vez que $nq - n + 1 > 1$. Assim, como $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|y|\geq\delta} |K(y)||f(z-y)||\varphi_\varepsilon(x-z)|\, dz\, dy &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(z-y)||K_\delta(y)|\, dy |\varphi_\varepsilon(x-z)|\, dz \\ &\leq \|f\|_p \|K_\delta\|_q \|\varphi_\varepsilon\|_1 < \infty. \end{aligned}$$

Vejamos agora que ambos os lados da identidade (5.32) são iguais à integral acima. Com efeito, observe que

$$\begin{aligned} [(\varphi_\varepsilon * K_\delta) * f](x) &= \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_\varepsilon * K_\delta)(y) f(x-y)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(z) K_\delta(y-z)\, dz\, f(x-y)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(z) K_\delta(y) f(x-y-z)\, dy\, dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|y|\geq\delta} K(y) f(z-y) \varphi_\varepsilon(x-z)\, dz\, dy. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} [(T_\delta)f * \varphi_\varepsilon](x) &= \int_{\mathbb{R}^n} T_\delta(f)(x-y) \varphi_\varepsilon(y)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} K_\delta(z) f(x-y-z)\, dz\, \varphi_\varepsilon(y)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} K_\delta(z) f(x-y) \varphi_\varepsilon(y-z)\, dy\, dz \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} K_\delta(y-z)f(x-y)\varphi_\varepsilon(z)\,dz\,dy\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} K_\delta(y)f(x-y-z)\varphi_\varepsilon(z)\,dy\,dz\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{|y|\geq\delta} K(y)f(z-y)\varphi_\varepsilon(x-z)\,dz\,dy,
\end{aligned}
$$

e portanto a identidade (5.32) está provada.

Agora note que, como $\varphi_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, então $\varphi_\varepsilon \in L^q(\mathbb{R}^n)$ para $1 < q < \infty$ expoente conjugado de p. Assim, como $1 < p, q < \infty$, segue do item (b) do Teorema 4.3 que $T_\delta(f) \to Tf$ em norma L^p e $\varphi_\varepsilon * K_\delta = T_\delta(\varphi_\varepsilon) \to \varphi_\varepsilon * K$ em norma L^q se $\delta \to 0$.

Do anterior e pela identidade (5.32), temos que

$$
(\varphi_\varepsilon * K_\delta) * f \to (\varphi_\varepsilon * K) * f \text{ em norma } L^\infty \text{ se } \delta \to 0, \tag{5.33}
$$

pois pela Desigualdade de Young,

$$
\begin{aligned}
\|(\varphi_\varepsilon * K_\delta) * f - (\varphi_\varepsilon * K) * f\|_\infty &= \|(\varphi_\varepsilon * K_\delta - \varphi_\varepsilon * K) * f\|_\infty\\
&\leq \|\varphi_\varepsilon * K_\delta - \varphi_\varepsilon * K\|_q \|f\|_p \to 0
\end{aligned}
$$

se $\delta \to 0$. E também, como $T_\delta f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, então $T_\delta f * \varphi_\varepsilon \in L^p(\mathbb{R}^n)$, pois novamente pela Desigualdade de Young,

$$
\|T_\delta f * \varphi_\varepsilon\|_p \leq \|T_\delta f\|_p \|\varphi_\varepsilon\|_1 < \infty.
$$

Da identidade (5.32), temos que $(\varphi_\varepsilon * K_\delta) * f \in L^\infty \cap L^p$, $1 < p < \infty$, e ainda

$$
(\varphi_\varepsilon * K_\delta) * f \to Tf * \varphi_\varepsilon \text{ em norma } L^p \text{ se } \delta \to 0, \tag{5.34}
$$

pois

$$
\begin{aligned}
\|(\varphi_\varepsilon * K_\delta) * f - Tf * \varphi_\varepsilon\|_p &= \|T_\delta f * \varphi_\varepsilon - Tf * \varphi_\varepsilon\|_p\\
&\leq \|T_\delta f - Tf\|_p \|\varphi_\varepsilon\|_1 \to 0
\end{aligned}
$$

se $\delta \to 0$. Assim, a convergência em norma L^p em (5.34) implica que existe uma sequência $\{\delta_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de reais positivos tal que

$$
[(\varphi_\varepsilon * K_{\delta_j}) * f](x) \to (Tf * \varphi_\varepsilon)(x) \text{ q.t.p.}
$$

Mas por (5.33), sabemos que

$$
[(\varphi_\varepsilon * K_{\delta_j}) * f](x) \to [(\varphi_\varepsilon * K) * f](x)
$$

uniformemente. Por unicidade, concluímos que

$$
[(\varphi_\varepsilon * K) * f](x) = (Tf * \varphi_\varepsilon)(x),
$$

o que prova a identidade (5.31).

■

Referências Bibliográficas

[1] Conway, J. B. *Functions of One Complex Variable*. Springer, 1978. 5.2

[2] Duoandikoetxea, J. *Fourier Analysis*. American Mathematical Society, 2001.

[3] Folland, G. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, John Wiley & Sons, New York, 1999. 1, 1.1, 1.1, 1.1, 1.1, 1.1, 1.1, 1.1, 1.2, 1.2, 1.2, 1.2, 1.2, 1.2

[4] Hounie, J. G. *Teoria Elementar das Distribuições*. IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

[5] Isnard, C. *Introdução à medida e integração*. Projeto Euclides, IMPA, 2013. 1, 1.2, 1.2, 1.2, 2.3, 3.1

[6] Lima, E. L. *Análise no Espaço* $\mathbb{R}^n$. Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2013.

[7] Neri, U. *Singular Integrals*. Springer, 1971.

[8] Rudin, W. *Princípios de Análise Matemática*. Ao Livro Técnico, 1971. 2.2

[9] Rudin, W. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, 1987. 1, 1.2, 1.2

[10] Stein, E. M. *Harmonic Analysis*. Princeton University Press, Princeton, 1995.

[11] Stein, E. M. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*. Princeton University Press, Princeton, 1986.

[12] Stein, E. M.; Weiss, G. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*. Princeton University Press, Princeton, 1990.