UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMáTICA

Extensões auto-adjuntas do operador de Schrödinger magnético em domínios com pouca regularidade

Wagner Monteiro

SÃO CARLOS - SP

2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Extensões auto-adjuntas do operador de Schrödinger magnético em domínios com pouca regularidade

Wagner Monteiro

Orientador: Prof. Dr. César Rogério de Oliveira

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Doutor em Matemática.

SÃO CARLOS - SP

2020

Prof. Dr. César Rogério de Oliveira
Orientador

Banca Examinadora

Prof. Dr. César Rogério de Oliveira (DM/UFSCar)

Prof. Dr. Gustavo Hoepfner-DM/UFSCAR

Prof. Dr.Paulo Ferreira da Veiga-ICMC/USP

Prof. Dr. Pedro Taváres Paes Lopes-IME/USP

Prof. Dr. Severino Toscano-IME/USP

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado do candidato Wagner Monteiro, realizada em 20/02/2020:

Prof. Dr. Cesar Rogério de Oliveira
UFSCar

Prof. Dr. Gustavo Hoepfner
UFSCar

Pedro Tavares Paes Lopes

Prof. Dr. Pedro Tavares Paes Lopes
USP

Prof. Dr. Severino Toscano do Rego Melo
USP

Prof. Dr. Paulo Afonso Faria da Veiga
USP

Agradecimentos

Agradeço a minha esposa Fernanda Soares da Silva pelo apoio e pelo carinho a mim dedicados. Agradeço ao meu Orientador Cesár Rogério de Oliveira e agradeço também a CAPES pelo apoio finaceiro.

Resumo

Obteremos uma parametrização para as extensões auto-adjuntas do operador Schrödinger com potencial magnético com componentes em $W^1_\infty(\overline{\Omega})$, definido em um domínio quase-convexo com fronteira compacta. Esta parametrizações utiliza triplas de fronteira, o que em particular também permite uma nova caracterização das extensões auto-adjuntas do laplaciano em domínios quase-convexos. Em seguida, estudamos transformações de gauge para tais extensões e generalizamos, para todas as extensões auto-adjuntas, um critério de Helffer para equivalência unitária do operador de Schrödinger magnético com condição de Dirichlet e o laplaciano de Dirichlet. A relação com o efeito Aharonov-Bohm, incluindo solenóides irregulares, será discutida. Em particular, no caso dos domínios quase-convexos limitados, mostramos que se uma extensão qualquer é gauge equivalente a uma realização com potencial nulo, então o mesmo ocorre com todas as outras extensões.

Abstract

We find one parametrization of all self-adjoint extensions of the magnetic Schrödinger operator, in a quasi-convex domain with compact boundary, and magnetic potentials with components in $\mathrm{W}^1_\infty(\overline{\Omega})$. In this parametrization we use boundary-triples, which also gives a new characterization of all self-adjoint extensions of the Laplacian in quasi-convex domains. Then we discuss gauge transformations for such self-adjoint extensions and generalize, for all self-adjoint extensions, a characterization, due to Helffer, of the gauge equivalence of the Dirichlet magnetic operator with the Dirichlet Laplacian. The relation to the Aharonov-Bohm effect, including irregular solenoids, is also discussed. In particular, in case of (bounded) quasi-convex domains it is shown that if some extension is unitarily equivalent (through the multiplication by a smooth unit function) to a realization with zero magnetic potential, then the same occurs for all self-adjoint realizations.

Palavras Chave: *extensões auto-adjuntas, domínios quase-convexos, triplas de fronteiras, equivalência de gauge, efeito Aharonov-Bohm.*

Keywords: *self-adjoint extension, quasi-convex domains, Boundary triples, gauge equivalence, Aharonov-Bohm effect.*

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O operador de Schrödinger com expressão $H^A = (-i\nabla + A)^2$ (em unidades apropriadas), com potencial magnético real A, atuando em $\mathrm{L}^2(\Omega)$, é o ponto de partida para descrever o comportamento quântico não relativístico de uma partícula com carga elétrica em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sob a influência de um campo magnético, $\operatorname{rot} A$. Se $A = 0$, $H^0 = -\Delta$ (oposto do laplaciano), cujas extensões auto-adjuntas estão entre os mais importantes operadores da Física e da Matemática. Ser auto-adjunto é um requerimento para um operador descrever um *observável* em Mecânica Quântica.

Usualmente não é uma tarefa trivial classificar todas as extensões auto-adjuntas de um operador diferencial simétrico, especialmente em domínios com fronteiras irregulares; em adição ambos os índices de deficiência são infinitos. Um dos principais propósitos deste trabalho é parametrizar todas as extensões auto-adjuntas de H^A com domínio $\mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$, em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, é um domínio quase-convexo com fronteira compacta $\partial\Omega$ e A é um campo vetorial com componentes em $\mathrm{W}^1_\infty(\overline{\Omega})$ (veja o Teorema 6.3); por hora é suficiente observar que, intuitivamente, um domínio quase-convexo possui todas suas singularidades apontando para fora, em particular se $\Omega \in \mathrm{C}^{1,r}$, para $r > 1/2$, Ω é quase-convexo [8]. Outro propósito é aplicar esta parametrização para estudar o comportamento das extensões auto-adjuntas de H^A em relação a transformações de gauge (Teoremas 6.4 e 6.6). O primeiro propósito é atingido seguindo idéias desenvolvidas em [8], em que os autores consideram o caso do laplaciano. No entanto, estas idéias são suplementadas neste trabalho com a construção de triplas de fronteira e a possibilidade de Ω ser ilimitado com fronteira compacta, o que é de interesse na aplicação ao estudo do efeito Aharonov-Bohm

É de interesse prático a situação em que Ω não é simplesmente conexo, o campo magnético $\operatorname{rot} A$ é nulo em Ω e, no entanto, $A \neq 0$. Isto abre a possibilidade para o efeito Aharonov-Bohm [2, 17, 12], e nosso resultado fornece a primeira descrição de todas as extensões auto-adjuntas neste caso, e em particular para solenoides irregulares (veja [1, 6] para o caso $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$). Em [12] há uma interessante caracterização da ausência deste efeito no caso da extensão de Dirichlet, isto é, quando a extensão de Dirichlet é unitariamente equivalente à extensão de Dirichlet correspondente ao caso $A = 0$ (isto é, o laplaciano de Dirichlet). Usando transformações de gauge, estabelecemos uma versão deste resultado para todas as extensões auto-adjuntas, mas para Ω limitado e conexo (embora irregular). Pelo Teorema 6.6, concluímos que se uma extensão de H^A for unitariamente equivalente, através de uma transformação de gauge, a uma extensão do laplaciano, então o mesmo ocorre para todas as extensões; esta parece ser a primeira demonstração matemática deste fenômeno fisicamente esperado, dada aqui para regiões limitadas e quase-convexas.

A caracterização das extensões auto-adjuntas no caso magnético, em domínios quase-convexos, tem algumas diferenças em relação ao caso do laplaciano discutido originalmente em [8]. Além da presença do potencial magnético A em varias estimativas, as principais diferenças são relacionadas ao traço de Neumann, que influencia diretamente em fórmulas de integração por partes, e a introdução do espaço $N_A^{3/2}(\partial\Omega)$ (Definição 4.2) usado na extensão do traço de Neumann modificado para o domínio do operador maximal. É interessante notar que, diferentemente de [8], nós usamos triplas de fronteira, assim nossa parametrização de todas as extensões auto-adjuntas é dada em termos de operadores unitários no espaço $N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ (veja o Teorema 6.3). Para nós, este tipo de parametrização parece ter algumas vantagens, que são consequências do fato de usarmos aplicações unitárias nos espaços apropriados definidos na fronteira de $\partial\Omega$. Como consequência, obtivemos uma parametrização complementar à de [8, 3], para o caso $A = 0$ das extensões auto-adjuntas do laplaciano em domínios quase-convexos, que neste trabalho é permitido ser ilimitado mas com fronteira compacta.

Em [11] há, em particular, uma caracterização de todas as extensões auto-adjuntas de um operador elíptico simétrico minimal de ordem par em $\mathrm{L}^2(\Omega)$, para Ω regular (veja também [16] para uma parametrização geral que se reduz aos resultados em [11]). Agora mencionamos dois pontos que motivam a consideração de domínios quase-convexos, as diferenças dos resultados de [11] e sua relação com o laplaciano. Para Ω regular ou quase-convexo, o domínio do laplaciano de Dirichlet e Neumann são subespaços de $H^2(\Omega)$. No caso geral de domínios de Lipschitz, o domínio do laplaciano de Dirichlet é um subespaço de $H^{\frac{3}{2}}(\Omega)$, e este resultado não pode ser melhorado no caso geral. Para domínios de Lipschitz a imagem combinada do traço de Dirichlet e de Neumann, definidos em $H^2(\Omega)$, não é o produto cartesiano de espaços de Sobolev sobre a fronteira (veja o Teorema 4.1). Usando o conceito de *quase triplas de fronteiras*, em [3] os autores obtiveram uma parametrização da família de todas as extensões do laplaciano minimal em um domínio de Lipschitz limitado geral. Embora mais geral que o caso do domínio quase-convexo, o custo para a maior generalidade é a natureza mais abstrata da construção, e assim mais difícil de se empregar em aplicações; em particular neste caso, como anteriormente mencionado, os domínios do Laplaciano de Dirichlet e de Neumann não estão contidos em $H^2(\Omega)$, e esta regularidade é fundamental para alguns cálculo explícitos feitos no caso quase-convexo.

O conceito de quase-convexidade exibe um equilíbrio que permite caracterizar todas as extensões auto-adjuntas do operador laplaciano magnético, cujo nível de abstração não restringe a sua aplicabilidade prática, assim restringiremo-nos a este caso neste trabalho.

No Capítulo 2 revisaremos alguns fatos básicos sobre espaços de Sobolev em domínios de Lipschitz; várias notações serão introduzidas. No Capítulo 3 introduziremos os operadores maximal e minimal e mostraremos como cada um destes se relaciona com o outro, e então estabeleceremos algumas fórmulas de integração por partes e alguns resultados de densidade que serão importantes na sequência deste trabalho. No Capítulo 4 estenderemos o traço de Dirichlet e o traço magnético de Neumann para o domínio do operador maximal; as imagens destes operadores estão relacionadas aos importantes espaços $N^{1/2}(\partial\Omega)$ e $N_A^{3/2}(\partial\Omega)$. No Capítulo 5 revemos o conceito de domínio quase-convexo e apresentamos um resultado sobre regularidade sobre os domínios das extensões de Dirichlet e Neumann de H^A; esta é uma pequena generalização do resultado de regularidade obtido em [8]. No Capítulo 6 revemos brevemente o conceito de tripla de fronteira e o usamos para obter uma parametrização da família de todas as extensões auto-adjuntas de H^A em um domínio quase-convexo com fronteira compacta; então usamos esta parametrização para obter alguns resultados sobre equivalência de gauge das extensões auto-adjuntas correspondentes aos operadores H^A e H^B, em que A e B são potentiais magnéticos gauge equivalentes e possuem componentes em $\mathrm{W}^1_\infty(\overline{\Omega})$. Aplicações ao efeito Aharonov-Bohm serão também discutidas.

Capítulo 2

Fatos básicos sobre espaços de Sobolev em domínios de Lipschitz

Neste capítulo exibirei brevemente alguns fatos básicos acerca de espaços de Sobolev. Para mais detalhes, definições e demonstrações veja, por exemplo, [14].

2.1 Espaços de Sobolev e domínios de Lipschitz

Um aberto Ω de $\mathbb{R}^n$ com $n \geq 2$ é chamado de domínio de Lipschitz se existe uma cobertura aberta $\{O_i\}_{0\leq i\leq k}$ da fronteira $\partial\Omega$ de Ω, tal que para $i \in \{1, ..., k\}$, $O_i \cap \Omega$ é igual a parte de O_i jazendo abaixo do gráfico de uma função de Lipschitz $\varphi_i : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ (considerado em um sistema obtido a partir de uma mudança de coordenadas rígida). De forma similar se define um domínio de classe $C^{1,r}$ sendo que a única diferença é que as funções φ_i da definição anterior são assumidas ser de classe $C^{1,r}$. É importante notar que para um domínio de Lipschitz Ω é possivel definir a medida de volume $d^{n-1}\omega$ natural de $\partial\Omega$, e que existe um campo vetorial unitário normal ν apontando para fora de Ω definido $d^{n-1}\omega$-q.t.p em $\partial\Omega$.

Dado um aberto Ω de $\mathbb{R}^n$, defini-se o espaço de Sobolev $H^s(\Omega)$ para $s \in \mathbb{R}$ como,

$$H^s(\Omega) = \{ \quad u \in D'(\Omega) \quad | \quad \exists U \in H^s(\mathbb{R}^n) \quad \text{com} \quad u = U|_{\Omega}\}. \tag{2.1}$$

onde $D'(\Omega)$ é o conjunto das distribuições definidas em $C_0^\infty(\Omega)$ e $H^s(\mathbb{R}^n)$ é o espaço de Sobolev de indice s definido em R^n, veja por exemplo [14] para definição de $H^s(\mathbb{R}^n)$. Para o mesmo aberto também podemos introduzir o espaço

$$H_0^s(\Omega) = \left\{ u \in H^s(\mathbb{R}^n) | \quad \mathrm{supp}\,(u) \subseteq \overline{\Omega} \right\}, \quad s \in \mathbb{R}, \tag{2.2}$$

que é equipado com a norma induzida por $H^s(\mathbb{R}^n)$. Também introduzimos os espaços

$$\dot{H}^s(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)} \quad \text{em} \quad H^s(\Omega), \tag{2.3}$$

$$\tilde{H}_0^s(\Omega) = \left\{ u \in H^s(\Omega) | \quad \exists U \in H_0^s(\Omega) \qquad \text{com} \quad u = U_{|\Omega} \right\}. \tag{2.4}$$

Pode-se demonstrar que, para um aberto qualquer $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ [1],

$$(H_0^s(\Omega))^* = H^{-s}(\Omega) \quad \text{com} \quad s \in \mathbb{R} \tag{2.5}$$

e ainda,

$$(H^s(\Omega))^* = H_0^{-s}(\Omega) \quad \text{com} \quad s \in \mathbb{R} \tag{2.6}$$

Também é possível demonstrar que, se Ω for um domínio de Lipschitz com fronteira compacta, vale

$$\dot{H}^s(\Omega) = \tilde{H}_0^s(\Omega) \quad \text{para} \quad s > -\frac{1}{2} e \quad s \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} + N \right\}, \quad N \in \mathbb{N}, \tag{2.7}$$

e

$$(H^s(\Omega))^* = H^{-s}(\Omega) \quad \text{com} \quad -\frac{1}{2} < s < \frac{1}{2}. \tag{2.8}$$

Para um domínio de Lipschitz Ω com fronteira compacta também é possível definir os espaços de Sobolev de funções sobre a fronteira $\partial\Omega$. De fato, se Ω é a parte de baixo do gráfico de uma função de Lipschitz $\varphi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ então, para $s \in [0, 1]$

$$H^s(\partial\Omega) = \{ f \in L^2(\partial\Omega, d^{n-1}\omega) \quad | f(x', \varphi(x')) \in H^s(\mathbb{R}^{n-1}) \}. \tag{2.9}$$

Se Ω é um domínio de Lipschitz com fronteira compacta a definição de $H^s(\partial\Omega)$ segue do caso anterior via um argumento utilizando partições da unidade. Para $s \in [-1, 0)$,

[1]Neste trabalho a notação X^* sempre se referirá ao espaço adjunto de X, isto é, ao espaço dos funcionais anti-lineares contínuos de X. No caso dos espaços de Sobolev, pode-se identificar $(H_0^s(\Omega))^*$ com $H^{-s}(\Omega)$.

$H^s(\partial\Omega)$ é definido por $H^s(\partial\Omega) = (H^{-s}(\partial\Omega))^*$, para mais detalhes sobre $H^s(\partial\Omega)$ referimos novamente [14], em particular vale,

$$(H^s(\partial\Omega))^* = H^{-s}(\partial\Omega) \quad \text{com} \quad -1 \leq s \leq 1. \tag{2.10}$$

Agora introduzirei dois operadores que serão importantes na sequência deste trabalho. Seja então Ω um domínio de Lipschitz com fronteira compacta $\partial\Omega$, para uma dada função g de classe C^1 em uma vizinhança da fronteira $\partial\Omega$ definimos a seguinte função,

$$\frac{\partial g}{\partial \tau_{i,k}} = \nu_i(\partial_k g)|_{\partial\Omega} - \nu_k(\partial_i g)|_{\partial\Omega}. \tag{2.11}$$

Dada uma função $f \in L^1(\partial\Omega)$ definimos o funcional $\frac{\partial f}{\partial \tau_{i,k}}$ por

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{i,k}} : g \in C^1(\partial\Omega) \to \int_{\partial\Omega} d^{n-1}\omega f \frac{\partial g}{\partial \tau_{k,i}}. \tag{2.12}$$

é possível demonstrar que para $s \in [0,1]$ o operador $\frac{\partial}{\partial \tau_{j,k}}$ leva $H^s(\partial\Omega)$ em $H^{s-1}(\partial\Omega)$ continuamente, além disso tem-se,

Lema 2.1. *Seja Ω um domínio de Lipschitz com fronteira compacta, então para $s \in [0,1]$ valem*

$$H^s(\partial\Omega) = \left\{ f \in L^2(\partial\Omega, d^{n-1}\omega) | \quad \frac{\partial f}{\partial \tau_{j,k}} \in H^{s-1}(\partial\Omega), 1 \leq j,k \leq n \right\} \tag{2.13}$$

e

$$\| f \|_{H^s(\partial\Omega)} \approx \| f \|_{L^2(\partial\Omega, d^{n-1}\omega)} + \sum_{j,k=1}^{n} \| \frac{\partial f}{\partial \tau_{j,k}} \|_{H^{s-1}(\partial\Omega)} . \tag{2.14}$$

Para demonstrações veja [7].

A partir deste conceito podemos introduzir o operador,

$$\nabla_{\tan} : H^1(\partial\Omega) \to L^2_{\tan}(\partial\Omega, d^{n-1}\omega), \tag{2.15}$$

$$\nabla_{\tan} = \left(\sum_{k=1}^{n} \nu_k \frac{\partial}{\partial \tau_{k,1}}, ..., \sum_{k=1}^{n} \nu_k \frac{\partial}{\partial \tau_{k,n}} \right) \tag{2.16}$$

sendo

$$\begin{aligned} L^2_{\tan}(\partial\Omega, d^{n-1}\omega) \quad = \quad & \Big\{ f = (f_1, ..., f_n) | f_i \in L^2(\partial\Omega, d^{n-1}\omega), i = 1, ..., n, \\ & \nu \quad \cdot \quad f = 0 \quad \omega\text{-q.t.p.} \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \Big\}. \end{aligned}$$

Por fim fixamos a seguinte notação, a relação de dualidade entre $H^s(\Omega)$ e $(H^s(\Omega))^*$ será denotada por

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_s : (H^s(\Omega))^*(\Omega) \times H^s(\Omega) \to \mathbb{C}. \tag{2.17}$$

Dado $q \in \mathbb{N}$, seja $\mathrm{W}^q_\infty(\overline{\Omega})$ o espaço de Sobolev usual com subíndices q e ∞ , isto é, o conjunto das restrições $u = G_{|\Omega}$ de $G \in \mathrm{W}^q_\infty(\mathbb{R}^n)$ equipado com a norma

$$\|u\|_{\mathrm{W}^q_\infty(\overline{\Omega})} = \inf_{G_{|\Omega}=u} \|G\|_{\mathrm{W}^q_\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

É um fato conhecido que $u \in \mathrm{W}^1_\infty(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se, existe $K > 0$, que depende de u, de modo que u é limitada e localmente de Lipschitz com constante K em particular segue que, se $u \in \mathrm{W}^1_\infty(\overline{\Omega})$, então u é a restrição de uma função limitada, localmente de Lipschitz com constante K, definida em $\mathbb{R}^n$ para um certo $K > 0$.

Observação 2.1. *Note que se $f \in W^q_\infty(\overline{\Omega})$, então o operador de multiplição por f, M_f, mapeia $H^q(\Omega)$ nele mesmo; mais ainda, $M_f|_{H^q(\Omega)} : H^q(\Omega) \to H^q(\Omega)$ é limitado.*

2.2 Traço de Dirichlet e Neumann

Nesta seção introduzirei alguns fatos básicos sobre traços em domínios de Lipschitz; para demonstração dos resultados aqui apresentados veja, por exemplo, [14].

Seja Ω um domínio de Lipschitz com fronteira compacta, então o operador traço definido por

$$\gamma^0_D : C(\overline{\Omega}) \to C(\partial\Omega), \quad \gamma^0 u = u|_{\partial\Omega} \tag{2.18}$$

possui as seguintes extensões contínuas

$$\gamma_D \;:\; H^s(\Omega) \to H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), \quad \frac{1}{2} < s < \frac{3}{2} \tag{2.19}$$

$$\gamma_D \;:\; H^{\frac{3}{2}}(\Omega) \to H^{1-\epsilon}(\partial\Omega), \quad \epsilon \in (0,1)\,, \tag{2.20}$$

além disso $\gamma_D : H^s(\Omega) \to H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, $\frac{1}{2} < s < \frac{3}{2}$, possui um inverso à direita contínuo, em particular é sobrejetor.

Em grande parte deste trabalho estaremos considerando os seguintes operadores diferenciais associados ao campo vetorial real $A : \Omega \to \mathbb{R}^n$ com componentes em $\mathrm{W}^1_\infty(\overline{\Omega})$,

$$\nabla_A = \nabla + iA \quad \text{e} \quad H^A = (-i\nabla + A)^2. \tag{2.21}$$

Tendo em mente estes conceitos, podemos introduzir o *traço magnético de Neumann*

$$\gamma_N^A = \nu \cdot \gamma_D \nabla_A : H^{s+1}(\Omega) \to L^2(\partial\Omega), \quad \frac{1}{2} < s < \frac{3}{2}, \tag{2.22}$$

se $A = 0$ então o operador anterior é chamado de traço de Neumann e denotado por γ_N.

Observação 2.2. *Para $u \in L^2(\Omega)$ podemos definir $H^A u$ como distribuição, atuando em $C_0^\infty(\Omega)$, por $\langle H^A u, \varphi\rangle = \overline{(u, H^A \overline{\varphi})}_{L^2(\Omega)}$, para $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Para ver que esta definição faz sentido, note que vale, no sentido das distribuições,*

$$H^A u = -\triangle u - 2iA \cdot \nabla u + (|A|^2 - i\,\mathrm{div} A)u\,,$$

em que o termo $A \cdot \nabla u$ é bem definido como distribuição; de fato, uma vez que $A_i \in W^1_\infty(\overline{\Omega})$, $i = 1, ..., n$ e $\nabla u \in (H^{-1}(\Omega))^n$, segue que $A \cdot \nabla u \in H^{-1}(\Omega)$, em particular ele é uma distribuição. Note que se $u \in L^2(\Omega)$ e $H^A u \in L^2(\Omega)$, para $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ temos

$$(H^A u, \varphi)_{L^2(\Omega)} = \overline{\langle H^A u, \overline{\varphi}\rangle} = (u, H^A \varphi)_{L^2(\Omega)}\,.$$

Capítulo 3

Operadores inicial, minimal e maximal. Integração por partes em domínios de Lipschitz

Neste capítulo introduziremos os operadores inicial, maximal e minimal associados ao operador H_A introduzido em (2.21), em seguida estabeleceremos algumas fórmulas de integração por partes também relacionadas a este operador.

3.1 Operadores inicial, maximal e minimal

Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$; definimos o operador inicial H_0^A por,

$$\operatorname{Dom}(H_0^A) = C_0^\infty(\Omega) \quad \text{e} \quad H_0^A u = H^A u. \tag{3.1}$$

O operador H_0^A é simétrico e densamente definido, e assim é fechável e seu fecho é denotado por $H_{\min}^A$ e chamado de operador minimal. Também introduzimos o operador maximal $H_{\max}^A$ definido por

$$\operatorname{Dom} H_{\max}^A = \left\{ u \in L^2(\Omega) \quad | \quad H^A u \in L^2(\Omega) \quad \right\}, \quad H_{\max}^A = H^A u. \tag{3.2}$$

Sobre estes operadores podemos afirmar o seguinte.

Lema 3.1. *Seja Ω um domínio de Lipschitz com fronteira compacta; então*

$$(\overline{H_0^A})^* = (H_{\min}^A)^* = H_{\max}^A. \tag{3.3}$$

Se, além disso, Ω for limitado, vale ainda,

$$\operatorname{Dom} H^A_{\min} = H^2_0(\Omega). \tag{3.4}$$

Demonstração. Primeiramente demonstraremos que $(\overline{H^A_0})^* = H^A_{\max}$ ou, o que é equivalente, $(H^A_0)^* = H^A_{\max}$. Seja $f \in \operatorname{Dom}(H^A_0)^*$, então $f \in L^2(\Omega)$ e existe $g \in L^2(\Omega)$ de forma que

$$(g,u)_{L^2(\Omega)} = (f, H^A u)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega) \tag{3.5}$$

assim, pela observação 2.2, vale $H^A f = g \in L^2(\Omega)$ no sentido das distribuições. Deste modo, $f \in \operatorname{Dom} H^A_{\max}$ e vale $H^A f = g = (H^A_0)^* f$, portanto $(H^A_0)^* \subset H^A_{\max}$. Por outro lado, para $f \in \operatorname{Dom} H^A_{\max}$ vale,

$$(H^A f, u)_{L^2(\Omega)} = (f, H^A u)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega) \tag{3.6}$$

assim, segue imediatamente que $H^A_{\max} \subset (H^A_0)^*$, e isto demonstra a afirmação.

Suponha agora que Ω seja limitado. Para demonstrar a segunda igualdade, e finalizar a demonstração do lema, note que a norma

$$|| \cdot ||_A = (|| \cdot ||^2_{L^2(\Omega)} + ||H^A(\cdot)||^2_{L^2(\Omega)})^{1/2} \tag{3.7}$$

é equivalente à norma de $H^2(\Omega)$ em $H^2_0(\Omega)$. De fato, como $A \in (\mathrm{W}^1_\infty(\overline{\Omega}))^n$, é claro que $||u||_A \le C||u||_{H^2(\Omega)}$ para $u \in H^2_0(\Omega)$ e um certo $C > 0$. Por outro lado, como $H^A = -\triangle + L$, em que L é operador linear de ordem 1 dado por

$$Lu = -2iA \cdot \nabla u + (|A|^2 - i\operatorname{div}\vec{A})u,$$

segue que para $u \in H^2_0(\Omega)$ vale

$$\begin{aligned} ||\triangle(u)||_{L^2(\Omega)} &\le ||H^A(u)||_{L^2(\Omega)} + ||Lu||_{L^2(\Omega)} \\ &= ||H^A(u)||_{L^2(\Omega)} + C_0||u||_{L^2(\Omega)} + C_1||\nabla u||_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Além disso, como $u \in H^2_0(\Omega)$,

$$\begin{aligned} ||\nabla u||_{L^2(\Omega)} &= [(-\triangle u, u)_{L^2(\Omega)}]^{1/2} \\ &\le ||\triangle u||^{1/2}_{L^2(\Omega)}||u||^{1/2}_{L^2(\Omega)} \\ &\le \frac{\epsilon^2}{2}||\triangle u||_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2\epsilon^2}||u||_{L^2(\Omega)}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

para todo $\epsilon > 0$. Assim, combinando as desigualdades (3.8) e (3.9), obtemos

$$||\triangle u||_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{1 - C_1\epsilon^2/2}||H^A(u)||_{L^2(\Omega)} + \frac{C_0 + C_1\frac{1}{2\epsilon^2}}{1 - C_1\epsilon^2/2}||u||_{L^2(\Omega)}. \tag{3.10}$$

Pela desigualdade de Poincaré, a norma de $H^2(\Omega)$ é equivalente, em $H_0^2(\Omega)$, a

$$(||\cdot||^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=2} ||\partial^\alpha(\cdot)||^2_{L^2(\Omega)})^{1/2}, \tag{3.11}$$

além disso, note agora que para todo $f \in H_0^2(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|=2} ||\partial^\alpha f||^2_{L^2(\Omega)} &= \sum_{|\alpha|=2} (\partial^\alpha f, \partial^\alpha f)_{L^2(\Omega)} = \sum_{i,j=1}^{2} (\partial_i\partial_j f, \partial_i\partial_j f)_{L^2(\Omega)} \\ &= \sum_{i,j=1}^{2} (\partial_i^2 f, \partial_j^2 f)_{L^2(\Omega)} = ||\triangle f||^2_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

sendo que na penúltima igualdade realizou-se uma integração por partes, assim vale,

$$||u||_{H^2(\Omega)} \approx (||u||^2_{L^2(\Omega)} + ||\triangle u||^2_{L^2(\Omega)})^{1/2} \tag{3.12}$$

para todo $u \in H_0^2(\Omega)$. Portanto, combinando (3.10) e (3.12) obtemos que $||u||_{H^2(\Omega)} \leq C'||u||_A$ para todo $u \in H_0^2(\Omega)$, assim segue que $||\cdot||_A \approx ||\cdot||_{H^2(\Omega)}$ em $H_0^2(\Omega)$. De posse deste fato temos que

$$\mathrm{Dom}\, H^A_{\min} = \mathrm{Dom}\, \overline{H^A_0} = \overline{\mathrm{Dom}\, H^A_0}^{||\cdot||_A} = \overline{\mathrm{Dom}\, H^A_0}^{||\cdot||_{H^2(\Omega)}} = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{||\cdot||_{H^2(\Omega)}} = H_0^2(\Omega), \tag{3.13}$$

e isto encerra a demonstração. □

Na sequência introduziremos a primeira fórmula de integração por partes relacionada ao operador H^A.

Lema 3.2. *Sejam Ω um domínio de Lipschitz com fronteira compacta, $u \in H^2(\Omega)$ e $v \in H^1(\Omega)$; se*

$$\Phi_A(u, v) = (\nabla_A u, \nabla_A v)_{(L^2(\Omega))^n}, \tag{3.14}$$

então

$$\Phi_A(u, v) = (H^A u, v)_{L^2(\Omega)} + (\gamma_N^A u, \gamma_D v)_{L^2(\partial\Omega)}. \tag{3.15}$$

Demonstração. Basta demonstrar o resultado para $u, v \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ pois o caso geral segue usando um argumento de densidade. Note que,

$$H^A u = -\triangle u - 2i\vec{A}\cdot\nabla u + (|\vec{A}|^2 - i\mathrm{div}\vec{A})u \tag{3.16}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned}
\Phi_A(u,v) &= \int_\Omega d^n x(\overline{\nabla u}\cdot\nabla v + i\overline{\nabla u}\cdot\vec{A}v - i\vec{A}\cdot\overline{u}\nabla v + |\vec{A}|^2\overline{u}v) \\
&= (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} + i\int_\Omega d^n x(\overline{\nabla u}\cdot\vec{A}v - \vec{A}\cdot\overline{u}\nabla v) + \int_\Omega d^n x|\vec{A}|^2\overline{u}v \\
&= -(\triangle u, v)_{L^2(\Omega)} + (\gamma_N u, \gamma_D v)_{L^2(\partial\Omega)} \\
&+ i\int_\Omega d^n x(\overline{\nabla u}\cdot\vec{A}v - i\vec{A}\cdot\overline{u}\nabla v) + \int_\Omega d^n x|\vec{A}|^2\overline{u}v \\
&= -(\triangle u, v)_{L^2(\Omega)} + (\gamma_N u, \gamma_D v)_{L^2(\partial\Omega)} \\
&+ 2i\int_\Omega d^n x v\overline{\nabla u}\cdot\vec{A} + i\int_\Omega d^n x v\overline{u}\mathrm{div}\vec{A} - i\int_{\partial\Omega} d^{n-1}\omega\overline{u}v\vec{A}\cdot\nu + \int_\Omega d^n x|\vec{A}|^2\overline{u}v \\
&= (H^A u, v)_{L^2(\Omega)} + (\gamma_N^A u, \gamma_D v)_{L^2(\partial\Omega)}
\end{aligned}$$

sendo que na quarta igualdade usou-se $\overline{u}\vec{A}\cdot\nabla v = -v\overline{\nabla u}\cdot\vec{A} - v\overline{u}\mathrm{div}\vec{A} + \mathrm{div}(v\overline{u}\vec{A})$ e em seguida o Teorema 3.34 de [14] que é uma versão do teorema da divergênca para domínios de Lipschitz. □

O lema que segue será importante no decorrer deste trabalho, este lema é consequência do Teorema 6.9 de [15].

Lema 3.3. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio de Lipschitz com fronteira compacta. Então, para $0 \le s < 2$, $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ é denso em $H^s(A,\Omega) = \{u \in H^s(\Omega)| \quad H^A u \in L^2(\Omega)\}$, quando equipado com a norma $||\cdot||_{A,s} = ||\cdot||_{H^s(\Omega)} + ||H^A(\cdot)||_{L^2(\Omega)}$.*

Demonstração. Este resultado é consequência do fato de que $A \in (\mathrm{W}^1_\infty(\overline{\Omega}))^n$ e uma aplicação direta do Teorema 6.9 de [15]. □

Usando este resultado podemos estender o operador γ_N^A definido em (2.22) da seguinte maneira:

$$\tilde{\gamma}_N^A : H^1(A,\Omega) \to H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \tag{3.17}$$

sendo que para um dado $u \in H^1(A,\Omega)$, tem-se que $\tilde{\gamma}_N^A u \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ é definido por

$$\langle\tilde{\gamma}_N^A u, g\rangle_{\frac{1}{2}} = \Phi_A(u,G) - \langle l(H^A u), G\rangle_1, \quad g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega), \tag{3.18}$$

em que $G \in H^1(\Omega)$ é tal que $\gamma_D G = g$, $||G||_{H^1(\Omega)} \leq c||g||_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$ e $l : L^2(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ é a inclusão. Para ver que esta definição faz sentido basta mostrar que ela não depende da escolha de G que satisfaça as condições acima, o que, por linearidade é equivalente a dizer que se $G \in H^1(\Omega)$ é tal que $\gamma_D G = 0$ então $\Phi_A(u, G) - \langle l(H^A u), G\rangle_1 = 0$, mas isto segue do fato de que isto é válido para $u \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$, e de que $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ é denso em $H^1(A, \Omega)$.

3.2 Operadores de Dirichlet e de Neumann

Na sequência introduziremos dois operadores que ocupam um papel fundamental neste trabalho, o operador de Dirichlet H_D^A e o operador de Neumann H_N^A; demonstraremos que estes operadores são auto-adjuntos, antes porém estabeleceremos um resultado elementar.

Lema 3.4. *Seja Ω um domínio de Lipschitz com fronteira compacta; então existem $c > 0$ e $C < \infty$ de forma que para todo $u \in H^1(\Omega)$ vale*

$$\Phi_A(u, u) \geq c||u||^2_{H^1(\Omega)} - C||u||^2_{L^2(\Omega)}; \tag{3.19}$$

além disso, se Ω for limitado, existe $c' > 0$ de modo que para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ vale

$$\Phi_A(u, u) \geq c'||u||^2_{H^1(\Omega)}. \tag{3.20}$$

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned}
\Phi_A(u, u) &= ||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)} + 2\int_\Omega d^n x \mathrm{Im}\,\overline{u}\vec{A}\cdot\nabla u + \int_\Omega d^n x|\vec{A}|^2|u|^2 \\
&\geq ||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega d^n x|\vec{A}|^2|u|^2 - 2\int_\Omega d^n x|\mathrm{Im}\,\overline{u}\vec{A}\cdot\nabla u| \\
&\geq (1-\epsilon^2)||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)} + (1-\frac{1}{\epsilon^2})\int_\Omega d^n x|\vec{A}|^2|u|^2 \\
&\geq (1-\epsilon^2)||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

sendo que na última desigualdade utilizou-se que

$$|\mathrm{Im}\,\overline{u}\vec{A}\cdot\nabla u| \leq \frac{\frac{1}{\epsilon^2}|uA|^2 + \epsilon^2|\nabla u|^2}{2},$$

e disso segue a primeira afimação do lema. A segunda afirmação é consequência da desigualdade de Poincaré e da desigualdade acima. □

Considere os operadores H_D^A e H_N^A definidos da seguinte maneira:

$$\operatorname{Dom} H_D^A = \left\{ u \in H^1(\Omega) | \quad H^A u \in L^2(\Omega) \quad \gamma_D u = 0 \quad \text{em} \quad H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \right\}, \quad H_D^A u = H^A u \tag{3.21}$$

e

$$\operatorname{Dom} H_N^A = \left\{ u \in H^1(\Omega) | \quad H^A u \in L^2(\Omega) \quad \tilde{\gamma}_N u = 0 \quad \text{em} \quad H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \right\}, \quad H_N^A u = H^A u\,. \tag{3.22}$$

Proposição 3.1. *Seja Ω um domínio de Lipschitz com fronteira compacta, então os operadores H_D^A e H_N^A definidos acima são auto-adjuntos.*

Demonstração. Consideremos primeiro o caso do operador H_D^A. Seja $\Phi_{A,D}$ a seguinte forma sesquilinear

$$\Phi_{A,D}(u,v) = \Phi_A(u,v), \quad \operatorname{Dom} \Phi_{A,D} = H_0^1(\Omega); \tag{3.23}$$

usando a equação (3.19) podemos concluir que $\Phi_{A,D}$ é fechada e assim o operador $\tilde{H}_D^A$ definido por

$$\begin{aligned} \operatorname{Dom} \tilde{H}_D^A &= \Big\{ u \in H_0^1(\Omega) | \exists w_u \in L^2(\Omega) \quad \text{tal que} \\ &\qquad \Phi_{A,D}(v,u) = (v, w_u)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \Big\} \\ \tilde{H}_D^A u &= H^A u \end{aligned}$$

é auto-adjunto. Para concluirmos basta mostrar que $H_D^A = \tilde{H}_D^A$. Seja $v \in \operatorname{Dom} \tilde{H}_D^A$, então como $C_0^\infty(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ obtemos

$$\int_\Omega d^n x\ \overline{u} w_v = \Phi_{A,D}(u,v) = \int_\Omega d^n x\ \overline{u} H^A v, \quad \forall u \in C^\infty(\Omega), \tag{3.24}$$

sendo que a última igualdade segue de (3.15). Assim, tem-se que $w_v = H^A v$ no sentido das distribuições, em particular $H^A v \in L^2(\Omega)$, e segue que $\tilde{H}_D^A \subset H_D^A$.

Tome agora $v \in \operatorname{Dom} H_D^A$ e $w_v := H^A v \in L^2(\Omega)$; usando (3.18) obtemos

$$\int_\Omega d^n x\ \overline{u} w_v = \int_\Omega d^n x\ \overline{u} H^A v = \Phi_{A,D}(u,v) \tag{3.25}$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega)$, assim segue que $H_D^A \subset \tilde{H}_D^A$, o que conclui a demonstração de que H_D^A é auto-adjunto.

Passemos à demonstração de que H_N^A é auto-adjunto. Seja $\Phi_{A,N}$ a seguinte forma sesquilinear

$$\Phi_{A,N}(u,v) = \Phi_A(u,v), \quad \mathrm{Dom}\,\Phi_{A,N} = H^1(\Omega); \tag{3.26}$$

usando a equação (3.19), e o fato de que $\Phi_{A,N}$ é não negativa e por isso limitada inferiormente, podemos concluir que $\Phi_{A,N}$ é fechada e assim o operador $\tilde{H}_N^A$ definido por

$$\begin{aligned} \mathrm{Dom}\,\tilde{H}_N^A &= \Big\{u \in H^1(\Omega) | \exists w_u \in L^2(\Omega) \quad \text{talque} \\ &\qquad \Phi_{A,N}(v,u) = (v, w_u)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in H^1(\Omega)\Big\} \\ \tilde{H}_N^A u &= H^A u \end{aligned}$$

é auto-adjunto. Para concluirmos, basta mostrar que $H_N^A = \tilde{H}_N^A$. Seja $v \in \mathrm{Dom}\,\tilde{H}_N^A$, então como $C_0^\infty(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ obtemos

$$\int_\Omega d^n x\ \overline{u} w_v = \Phi_{A,N}(u,v) = \int_\Omega d^n x\ \overline{u} H^A v\,, \tag{3.27}$$

para todo $u \in C_0^\infty(\Omega)$, cuja última igualdade segue de (3.15). Logo $w_v = H^A v$ no sentido das distribuições, em particular $H^A v \in L^2(\Omega)$. Além disso, usando a equação (3.18) obtemos que para todo $u \in H^1(\Omega)$ vale,

$$\begin{aligned} \Phi_{A,N}(u,v) &= (u, H^A v)_{L^2(\Omega)} + \langle \tilde{\gamma}_N^A v, \gamma_D u \rangle_{\frac{1}{2}} && (3.28) \\ &= (u, w_v)_{L^2(\Omega)} + \langle \tilde{\gamma}_N^A v, \gamma_D u \rangle_{\frac{1}{2}} && (3.29) \\ &= \Phi_{A,N}(u,v) + \langle \tilde{\gamma}_N^A v, \gamma_D u \rangle_{\frac{1}{2}} && (3.30) \end{aligned}$$

e disso segue que $\tilde{\gamma}_N v = 0$ pois $\gamma_D : H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ é sobrejetor. Assim segue que $\tilde{H}_N^A \subset H_N^A$.

Por outro lado, se $u \in \mathrm{Dom}\,H_N^A$, então de forma análoga ao caso do operador H_D^A se demonstra que $u \in \mathrm{Dom}\,\tilde{H}_N^A$. Assim segue que $H_N^A = \tilde{H}_N^A$ e, portanto, H_N^A é auto-adjunto, e isto encerra a demonstração. □

Uma consequência da demonstração do resultado acima é que os operadores H_D^A e H_N^A são os operadores auto-adjuntos associados às formas sequilineares $\Phi_{A,D}$ e $\Phi_{A,N}$ positiva e não negativa, respectivamente. Em particular disto segue que $\mathrm{Dom}\,(H_D^A)^{1/2} = H_0^1(\Omega)$ e que $\mathrm{Dom}\,(H_N^A + C)^{1/2} = H^1(\Omega)$, $C > 0$. Em particular, vale o sequinte corolário.

Corolário 3.1. *Seja Ω um domínio de Lipschitz limitado, então H_N^A e H_D^A são discretos.*

Demonstração. De fato, do observado logo acima e usando a desigualdade (3.19) segue que, para a constante $C > 0$ daquela desigualdade, o operador $T : L^2(\Omega) \to H^1(\Omega)$ dado por $Tu = (H^A + C)^{-1/2}u$ é bem definido e contínuo. Assim, usando o fato de que a inclusão $i : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ é compacta se Ω for limitado, segue que

$$(H^A + C)^{-1} = (H^A + C)^{-1/2} \circ T \circ i$$

é compacto, o que demonstra o resultado para H_N^A. De forma, análoga demonstra-se que H_D^A é discreto. $\square$

Capítulo 4

Traços de Dirichilet e Neumann sobre o domínio do operador maximal

Nesse capítulo, relembramos alguns fatos estabelecidos em [8] que serão importantes em nosso trabalho, e então apresentaremos as extensões naturais de alguns desses conceitos para o estudo do problema que abordamos.

Um dos resultados que precisaremos na sequência é o seguinte teorema, cuja demonstração para o caso de Ω limitado pode ser encontrada em [8], o resultado para o caso Ω ilimitado com fronteira compacta será uma fácil consequência do caso limitado.

Teorema 4.1. *Seja Ω um domínio de Lipschitz com fronteira compacta, denote por ν o vetor unitário normal à fronteira $\partial\Omega$ de Ω. Então o operador*

$$\begin{aligned} \gamma_2 \quad &: \quad H^2(\Omega) \to \Big\{(g_0, g_1) \in H^1(\partial\Omega)\dot{+}L^2(\partial\Omega, d^{n-1}\omega) \\ &\quad \mid \quad \nabla_{\tan} g_0 + g_1\nu \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)^n\Big\}, \\ \gamma_2 u \quad &= \quad (\gamma_D u, \gamma_N u) \end{aligned}$$

está bem-definido, é linear, limitado, sobrejetor e possui um inverso à direita limitado, sendo o espaço $\Big\{(g_0, g_1) \in H^1(\partial\Omega)\dot{+}L^2(\partial\Omega, d^{n-1}\omega) \mid \quad \nabla_{\tan} g_0 + g_1\nu \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)^n\Big\}$ munido da norma

$$||((g_0, g_1)||_{\partial\Omega} = ||g_0||_{H^1(\partial\Omega)} + ||g_1||_{L^2(\partial\Omega, d^{n-1}\omega)} + ||\nabla_{\tan} g_0 + g_1\nu||_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)^n}. \tag{4.1}$$

Além disso, o núcleo de γ_2 é $H_0^2(\Omega)$.

Demonstração. Como já observado, para o caso em que Ω é limitado veja [8]. Para demonstrar o caso ilimitado, tome uma bola aberta de raio r, B_r, tal que $\partial\Omega \subset B_{r/2}$. Seja $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi(x) = 1, \quad \forall x \in B_{r/2}$ e $\varphi(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus B_{3/4r}$. Denote por $\gamma_2^L, \quad L = \Omega, \Omega \cap B_r$: A aplicação γ_2 com domínio $H^2(\Omega)$, e com domínio $H^2(\Omega \cap B_r)$, respectivamente. Note que, para todo $u \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ vale $\gamma_2^\Omega(u) = \gamma_2^{\Omega\cap B_r}(\varphi u)$. Assim,

$$||\gamma_2^\Omega(u)||_{\partial\Omega} = ||\gamma_2^{\Omega\cap B_r}(\varphi u)||_{\partial\Omega\cap B_r} \leq C||\varphi u||_{H^2(\Omega\cap B_r)} \leq C'||u||_{H^2(\Omega)}\,;$$

como $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ é denso em $H^2(\Omega)$, desta igualdade segue que γ_2, com domínio $C_0^\infty(\overline{\Omega})$, estende-se continuamente, e de forma única, a uma aplicação de $H^2(\Omega)$ em

$$\Big\{(g_0, g_1) \in H^1(\partial\Omega)\dot{+}L^2(\partial\Omega, d^{n-1}\omega)| \quad \nabla_{\tan} g_0 + g_1\nu \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)^n\Big\}.$$

Para ver que essa extensão possui um inverso à direita contínuo, basta notar que se ζ for um inverso à direta para $\gamma_2^{\Omega\cap B_r}$, então $E \circ \zeta$ é um inverso à direita contínuo para γ_2^Ω, sendo E um operador de extenção contínuo de $H^2(\Omega \cap B_r)$ a $H^2(\Omega)$. A última declaração do teorema segue facilmente do caso limitado e da construção acima. $\square$

O próximo espaço que definiremos abaixo foi introduzido em [8] e desempenha um papel importante na sequência.

Definição 4.1. *Seja Ω um domínio de Lipschitz com fronteira compacta. O espaço $N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ é definido por*

$$N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = \Big\{g \in L^2(\partial\Omega, d^{n-1}\omega)| \quad g\nu_i \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega), \quad 1 \leq i \leq n\Big\} \tag{4.2}$$

e munido da seguinte norma

$$||g||_{N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} ||g\nu_i||^2_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}}\,. \tag{4.3}$$

Esta norma, claramente, deriva de um produto interno, em particular este espaço é um espaço de Banach reflexivo, que mergulha continuamente em $L^2(\partial\Omega, d^{n-1}\omega)$. Mais ainda, se Ω for limitado e $\partial\Omega \in C^{1,r}$ com $r > 1/2$, vale $N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ com normas equivalentes; veja o Lema 6.2 de [8].

Como consequência direta do Lema 6.3 de [8] tem-se o seguinte resultado.

Lema 4.1. *Seja Ω um domínio de Lipschitz com fronteira compacta, então*

$$\gamma_N^A : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \tag{4.4}$$

é bem definido, linear, limitado, sobrejetor e possui um inverso à direita limitado. Além disso seu núcleo é igual a $H_0^2(\Omega)$.

O próximo resultado estende a definição do traço de Dirichlet para o domínio de $H_{\max}^A$.

Teorema 4.2. *Seja Ω um domínio de Lipschitz com fronteira compacta; então existe uma única extensão $\hat{\gamma}_D$ de γ_D,*

$$\hat{\gamma}_D : \left\{ u \in L^2(\Omega) | \quad H^A u \in L^2(\Omega) \right\} \to (N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))^*, \tag{4.5}$$

que é compatível com (2.19) no seguinte sentido:

Para $3/2 \geq s > 1/2$ e todo $u \in H^s(\Omega)$ com $H^A u \in L^2(\Omega)$, vale $\hat{\gamma}_D u = \gamma_D u$. Além disso, a imagem de $\hat{\gamma}_D$ é densa em $(N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))^*$ e vale a seguinte fórmula de integração por partes

$$\langle \gamma_N^A w, \hat{\gamma}_D u \rangle_{N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = -\left((H^A w, u)_{L^2(\Omega)} - (w, H^A u)_{L^2(\Omega)} \right), \tag{4.6}$$

em que $w \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e $u \in L^2(\Omega)$ com $H^A u \in L^2(\Omega)$ e

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} : N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \times (N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))^* \to \mathbb{C}$$

representa o emparelhamento entre um vetor e um funcional de $N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

Demonstração. Tome $u \in \left\{ u \in L^2(\Omega) | \quad H^A u \in L^2(\Omega) \right\}$, definiremos $\hat{\gamma}_D u \in (N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))^*$ como segue. Tome $g \in N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, pelo Lema 4.1 existe $w \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ tal que $\gamma_N^A(w) = g$ e $||w||_{H^2(\Omega)} \leq C||g||_{N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$. Defina, então, $\hat{\gamma}_D u \in (N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))^*$ por

$$\langle g, \hat{\gamma}_D u \rangle_{N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} := -\left((H^A w, u)_{L^2(\Omega)} - (w, H^A u)_{L^2(\Omega)} \right) \tag{4.7}$$

Para ver que $\hat{\gamma}_D u$ está bem-definido por essa equação, devemos mostrar que a definição acima não depende da escolha particular de w satisfazendo as condições acima ou, o que é equivalente, se $w \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ satisfaz $\gamma_N^A(w) = 0$ então vale $(H^A w, u)_{L^2(\Omega)} = (w, H^A u)_{L^2(\Omega)}$. Se $w \in C_0^\infty(\Omega)$ e $u \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ essa igualdade vale, o caso geral segue deste fato uma vez que que, pelo Lema 4.1, o espaço $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $H_0^2(\Omega)$ e $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ é denso em $\{u \in L^2(\Omega)| \quad H^A u \in L^2(\Omega)\}$. É claro que $\hat{\gamma}_D$ definido desta maneira é contínuo e satisfaz a fórmula de integração por partes referida no enunciado. A unicidade também segue do fato de que $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ é denso em $\{u \in L^2(\Omega)| \quad H^A u \in L^2(\Omega)\}$.

Demonstraremos agora que essa extensão é compatível com (2.19). Para isso, tome $u \in H^s(\Omega)$ com $H^A u \in L^2(\Omega)$, $3/2 \geq s > 1/2$, e considere $u_i \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ tal que $u_i \to u$ em $H^s(A, \Omega)$. Fixe também $w \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e tome $w_j \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ tal que $w_j \to w$ em $H^2(\Omega)$. Fixe agora i e considere o campo de vetores,

$$G_j = \overline{u_i} \nabla_A w_j \in H^1(\Omega), \quad j \in N. \tag{4.8}$$

por um cálculo simples obtém-se,

$$\begin{aligned} \mathrm{div} G_j &= \overline{\nabla_A u_i} \nabla_A w_j - \overline{u_i} H^A w_j & (4.9)\\ \nu \cdot \gamma_D G_j &= \overline{\gamma_D u_i} \gamma_N^A w_j \, . & (4.10) \end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned} (u_i, H^A w)_{L^2(\Omega)} &= \lim_{j\to\infty} (u_i, H^A w_j)_{L^2(\Omega)} \\ &= \lim_{j\to\infty} \Big\{ \Big(- \int_\Omega d^n x \quad \mathrm{div} G_j \Big) + \Phi_A(u_i, w_j) \Big\} \\ &= \lim_{j\to\infty} \Big(- \int_{\partial\Omega} d^{n-1} \omega \overline{\gamma_D u_i} \gamma_N^A w_j + \Phi_A(u_i, w_j) \Big) \\ &= \lim_{j\to\infty} \Big((H^A u_i, w_j)_{L^2(\Omega)} + (\gamma_N^A u_i, \gamma_D w_j)_{L^2(\Omega)} - \int_{\partial\Omega} d^{n-1} \omega \overline{\gamma_D u_i} \gamma_N^A w_j \Big) \\ &= (H^A u_i, w)_{L^2(\Omega)} - \int_{\partial\Omega} d^{n-1} \omega \overline{\gamma_D u_i} \gamma_N^A w \, , \end{aligned}$$

sendo que na ultima igualde utilizou-se o fato de que $\gamma_D w_j \to \gamma_D w = 0$. Assim,

$$(u_i, H^A w)_{L^2(\Omega)} = (H^A u_i, w)_{L^2(\Omega)} - \int_{\partial\Omega} d^{n-1} \omega \overline{\gamma_D u_i} \gamma_N^A w. \tag{4.11}$$

Fazendo $i \to \infty$ na equação anterior obtemos

$$\int_{\partial\Omega} d^{n-1} \omega \overline{\gamma_D u} \gamma_N^A w = \Big((H^A u, w)_{L^2(\Omega)} - (u, H^A w)_{L^2(\Omega)} \Big) = \overline{\langle \gamma_N^A w, \hat{\gamma}_D u \rangle}_{N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}. \tag{4.12}$$

Como $\gamma_N^A : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ é sobrejetor, a equação anterior mostra que $\gamma_D u$ e $\hat{\gamma}_D u$ coincidem como funcionais anti-lineares em $N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Em outras palavras, $\gamma_D u = \hat{\gamma}_D u$.

Resta agora demonstrar que $\hat{\gamma}_D$ possui imagem densa e, para isto, basta demonstrar que $\left\{u|_{\partial\Omega}| \quad u \in C_0^\infty(\overline{\Omega})\right\}$ é denso em $(N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))^*$. Tome então um elmento Ψ de $((N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))^*)^* = N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \hookrightarrow L^2(\partial\Omega)$ que se anula em $\left\{u|_{\partial\Omega}| \quad u \in C_0^\infty(\overline{\Omega})\right\}$, devemos demonstrar que Ψ é nulo. Por hipótese vale

$$\langle \Psi, \hat{\gamma}_D u \rangle_{N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = 0, \quad \forall u \in C_0^\infty(\overline{\Omega}). \tag{4.13}$$

mas pela compatibilidade de $\hat{\gamma}_D$ e γ_D demonstrada anteriormente segue que,

$$(\Psi, \gamma_D u)_{L^2(\partial\Omega)} = \langle \Psi, \hat{\gamma}_D u \rangle_{N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = 0, \quad \forall u \in C_0^\infty(\overline{\Omega}), \tag{4.14}$$

assim, como $\gamma_D C_0^\infty(\overline{\Omega})$ é denso em $L^2(\partial\Omega)$ (isto pode ser visto como uma consequência do Lema 3.1 de [8] e do Lema 3.3), segue que $\Psi = 0$ e isto demonstra a afirmação. $\square$

Como uma consequência simples deste resultado, recuperamos o Corolário 6.5 de [8].

Corolário 4.1. *Seja Ω um domínio de Lipschitz com fronteira compacta, então cada uma das seguintes inclusões é contínua e tem imagem densa,*

$$N^{1/2}(\partial\Omega) \hookrightarrow \mathrm{L}^2(\partial\Omega) \hookrightarrow (N^{1/2}(\partial\Omega))^*.$$

A seguir introduziremos o espaço $N_A^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$ que é uma generalização do espaço $N^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$ introduzido na Seção 6 de [8], que corresponde ao caso $A = 0$.

Definição 4.2. *Seja Ω um domínio de Lipschitz com fronteira compacta. Definimos o espaço $N_A^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$ por*

$$N_A^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega) = \left\{g \in H^1(\partial\Omega) : \quad \nabla_{\tan}^A g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\right\} \quad \text{sendo} \tag{4.15}$$

$$\nabla_{\tan}^A g = \left(\nabla_{\tan} - i(\nu \cdot \vec{A})\nu\right) g \tag{4.16}$$

(acima adotou-se o abuso de notação que consiste em denotarmos também por A a função $\gamma_D A$), e munimos $N_A^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$ da seguinte norma,

$$||\cdot||_{N_A^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)} = ||\cdot||_{H^1(\partial\Omega)} + ||\nabla_{\tan}^A \cdot||_{(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))^n}. \tag{4.17}$$

Sobre este espaço tem-se o seguinte resultado.

Lema 4.2. *Seja Ω um domínio de Lipschitz com fronteira compacta, então $N_A^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo que mergulha continuamente em $H^1(\partial\Omega)$.*

Demonstração. Que a inclusão de $N_A^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$ em $H^1(\partial\Omega)$ é continua é evidente. Para ver que este espaço é de Banach tome uma sequência de Cauchy $\{g_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ em $N_A^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$. Do que já observamos, segue que $\{g_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ é de Cauchy em $H^1(\partial\Omega)$, assim converge nesse espaço para g. Deste modo, $\nabla_{\tan}^A g_n$ converge em $L^2(\partial\Omega)$ para $\nabla_{\tan}^A g$ e como $\nabla_{\tan}^A g_n$ também é de Cauchy em $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ segue que esta sequência também converge para $\nabla_{\tan}^A g$ em $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Assim $g \in N_A^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$ e $\{g_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ converge para g em $N_A^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$, portanto, $N_A^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$ é um espaço de Banach. Que $N_A^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$ é reflexivo segue do fato de que $\Psi : g \to (g, \nabla_{\tan}^A g)$ é um isometria entre $N_A^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$ e um subespaço fechado de $H^1(\partial\Omega) \times (H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))^n$. $\square$

O próximo lema mostra que se Ω for limitado com fronteira regular, então $N_A^{3/2}(\partial\Omega)$ coincide com o espaço ordinário $H^{3/2}(\partial\Omega)$.

Lema 4.3. *Seja Ω um domínio limitado de classe $C^{1,r}$ com $r > 1/2$, então $N_A^{3/2}(\partial\Omega) = N^{3/2}(\partial\Omega) = H^{3/2}(\partial\Omega)$.*

Demonstração. Pelo lema 3.4 de [8],

$$M_\nu : u \in H^{1/2}(\partial\Omega) \longrightarrow \nu u \in (H^{1/2}(\partial\Omega))^n$$

é bem definido e limitado; assim,

$$\begin{aligned} \|M_{-i(\nu\cdot A)\nu}u\|_{(H^{1/2}(\partial\Omega))^n} &= \|-i(\nu\cdot A)\nu u\|_{(H^{1/2}(\partial\Omega))^n} \\ &\leq C''' \,\|(\gamma_D A)u\|_{(H^{1/2}(\partial\Omega))^n} \\ &= \|(\gamma_D(AU)\|_{(H^{1/2}(\partial\Omega))^n} \\ &\leq C'' \,\|(AU)\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq C' \,\|u\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \\ &\leq C \,\|u\|_{H^1(\partial\Omega)} \end{aligned}$$

para todo $u \in H^1(\partial\Omega) \hookrightarrow H^{1/2}(\partial\Omega)$, sendo que $U \in H^1(\Omega)$ é tal que $\gamma_D U = u$ e $\|U\|_{H^1(\Omega)} \leq K\|u\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$. Assim, $M_{-i(\nu\cdot\vec{A})\nu} : H^1(\partial\Omega) \to (H^{1/2}(\partial\Omega))^n$ é limitada. E como $\nabla_{\tan}^A u = \nabla_{\tan} u + M_{-i(\nu\cdot\vec{A})\nu}u$, segue que $N_A^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega) = N^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$ e que

$$||\cdot||_{H^1(\partial\Omega)} + ||\nabla_{\tan}^A \cdot||_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \approx ||\cdot||_{H^1(\partial\Omega)} + ||\nabla_{\tan} \cdot||_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}.$$

O restante da demonstração segue imediatamente do Lema 6.8 de [8]. $\square$

O lema que segue relaciona o espaço $N_A^{3/2}(\partial\Omega)$ com o operador γ_D.

Lema 4.4. *Seja Ω um domínio de Lipschitz com fronteira compacta, então*

$$\gamma_D : \{u \in H^2(\Omega) | \quad \gamma_N^A u = 0\} \to N_A^{3/2}(\partial\Omega) \tag{4.18}$$

está bem-definido, é linear, limitado, sobrejetor e possui um inverso à direita limitado; além disso seu núcleo é $H_0^2(\Omega)$.

Demonstração. Tome $u \in H^2(\Omega)$ com $\gamma_N^A u = 0$, então vale

$$\gamma_N u = -i(\nu \cdot \vec{A})\gamma_D u \tag{4.19}$$

e deste modo,

$$\gamma_2 u = (\gamma_D u, \gamma_N u) = (\gamma_D u, -i(\nu \cdot \vec{A})\gamma_D u). \tag{4.20}$$

Portanto, pelo Teorema 4.1,

$$\nabla_{\tan}^A(\gamma_D u) = \nabla_{\tan}(\gamma_D u) - i(\nu \cdot \vec{A})\nu(\gamma_D u) = \nabla_{\tan}(\gamma_D u) + (\gamma_N u)\nu \in (H^{1/2}(\partial\Omega))^n \tag{4.21}$$

e segue que

$$\begin{aligned}
||\gamma_D u||_{N_A^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)} &= ||\gamma_D u||_{H^1(\partial\Omega)} + ||\nabla_{\tan}^A(\gamma_D u)||_{(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))^n} && (4.22)\\
&= ||\gamma_D u||_{H^1(\partial\Omega)} + ||\nabla_{\tan}(\gamma_D u) + (\gamma_N u)||_{(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))^n} && (4.23)\\
&\leq ||\gamma_D u||_{H^1(\partial\Omega)} + ||\gamma_N u||_{L^2(\partial\Omega)} + ||\nabla_{\tan}(\gamma_D u) + (\gamma_N u)||_{(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))^n} && (4.24)\\
&\leq C||u||_{H^2(\Omega)}\,; && (4.25)
\end{aligned}$$

portanto, o operador está bem-definido e é limitado. Resta demonstrar agora a existência do inverso à direita limitado. Seja ξ um inverso à direita de γ_2 dado pelo Teorema 4.1, e considere o operador

$$\begin{aligned}
l : N_A^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega) &\to \{(g_0, g_1) \in H^1(\partial\Omega)\dot{+}L^2(\partial\Omega, d^{n-1}\omega) \,| \nabla_{\tan} g_0 + g_1\nu \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)^n\} && (4.26)\\
l(g) &= (g, -i(\nu \cdot \vec{A})g). && (4.27)
\end{aligned}$$

O operador l é limitado, pois

$$\begin{aligned}
||l(g)|| &= ||g||_{H^1(\partial\Omega)} + || - i(\nu \cdot \vec{A})g||_{L^2(\partial\Omega)} + ||\nabla_{\tan}^A g||_{(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))^n} && (4.28)\\
&\leq C(||g||_{H^1(\partial\Omega)} + ||\nabla_{\tan}^A g||_{(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))^n}). && (4.29)
\end{aligned}$$

Assim $\xi \circ l$ é limitado, além disso, para todo $g \in N_A^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$, pela equação (4.19),

$$\gamma_D \circ (\xi \circ l)(g) = \gamma_D(\xi(g, -i(\nu \cdot \vec{A})g)) = g \tag{4.30}$$

e

$$\begin{aligned} \gamma_N^A \circ (\xi \circ l)(g) &= \gamma_N(\xi(g, -i(\nu \cdot \vec{A})g)) + i(\nu \cdot \vec{A})\gamma_D(\xi(g, -i(\nu \cdot \vec{A})g)) \\ &= -i(\nu \cdot \vec{A})g + i(\nu \cdot \vec{A})g = 0. \end{aligned}$$

Logo, $\xi \circ l$ é um inverso á direita continuo do operador do enunciado, e isto encerra a demonstração. $\square$

O próximo resultado estende o traço de Neumann para o domínio do operador maximal.

Teorema 4.3. *Seja Ω um domínio de Lipschitz com fronteira compacta. Então existe uma única extensão $\hat{\gamma}_N^A$ de γ_N^A de forma que*

$$\hat{\gamma}_N^A : \{u \in L^2(\Omega)| \quad H^A u \in L^2(\Omega)\} \to (N_A^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega))^* \tag{4.31}$$

é compatível com (2.22) no seguinte sentido: para todo $s \geq 3/2$ vale

$$\hat{\gamma}_N^A u = \gamma_N^A u, \quad \forall u \in H^s(\Omega) \quad \text{tal que} \quad H^A u \in L^2(\Omega). \tag{4.32}$$

Além disso, esta extensão possui imagem densa e

$$\langle \hat{\gamma}_N^A u, \gamma_D w \rangle_{N^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)} = -\Big((w, H^A u)_{L^2(\Omega)} - (H^A w, u)_{L^2(\Omega)}\Big) \tag{4.33}$$

para todo $u \in \{u \in L^2(\Omega)| \quad H^A u \in L^2(\Omega)\}$ e $w \in H^2(\Omega)$ tal que $\gamma_N^A w = 0$, em que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{N_A^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)} : (N_A^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega))^* \times N_A^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega) \to \mathbb{C}$ representa o emparelhamento entre um funcional e um elemento de $N_A^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$.

Demonstração. Tome $u \in \{u \in L^2(\Omega)| \ H^A u \in L^2(\Omega)\}$; definiremos $\hat{\gamma}_N^A u \in (N_A^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega))^*$ da seguinte maneira: considere $g \in N_A^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$, pelo Lema 4.4 existe $w \in H^2(\Omega)$ com $\gamma_N^A w = 0$ de forma que $\gamma_D w = g$ e $||w||_{H^2(\Omega)} \leq C||g||_{N_A^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)}$, defina então,

$$\langle \hat{\gamma}_N^A u, g \rangle_{N_A^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)} = -\Big((w, H^A u)_{L^2(\Omega)} - (H^A w, u)_{L^2(\Omega)}\Big). \tag{4.34}$$

De forma análoga à demonstração do Lema 4.2, verifica-se que a definição acima faz sentido, é única e que $\hat{\gamma_N^A}$ assim definido é contínuo. Demonstraremos agora que esta definição é coerente com (2.22), assim , tome $u \in H^s(\Omega)$ com $H^A u \in L^2(\Omega)$ e $s \geq 3/2$. Então, para todo $w \in H^2(\Omega)$ com $\gamma_N^A w = 0$, usando (3.15) podemos escrever,

$$\begin{aligned}(H^A w, u)_{L^2(\Omega)} &= \Phi_A(w,u) - (\gamma_N^A w, \gamma_D u)_{L^2(\Omega)} \\ &= \Phi_A(w,u).\end{aligned}$$

Por outro lado, usando agora (3.18) obtemos

$$\Phi_A(u,w) = (H^A u, w)_{L^2(\Omega)} + (\gamma_N^A u, \gamma_D w)_{L^2(\Omega)},$$

assim, combinando as duas ultimas equações obtemos

$$(\gamma_N^A u, \gamma_D w)_{L^2(\Omega)} = (u, H^A w)_{L^2(\Omega)} - (H^A u, w)_{L^2(\Omega)} = \overline{\langle \hat{\gamma_N^A} u, \gamma_D w \rangle}_{N^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)}, \tag{4.35}$$

e isto mostra que $\hat{\gamma_N^A}$, como definido acima, é coerente com (2.22).

Para ver que a imagem de $\hat{\gamma_N^A}$ é densa, basta mostrar que $\gamma_N^A(C_0^\infty(\overline{\Omega}))$ é denso em $(N^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega))^*$. Seja $\Psi \in ((N_A^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega))^*)^* = N_A^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$ um funcional anti-linear que se anula em $\gamma_N^A(C_0^\infty(\overline{\Omega}))$, devemos demonstrar que Ψ é nulo. Como $\Psi \in N_A^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$, existe $w \in H^2(\Omega)$ com $\gamma_N^A w = 0$ satisfazendo $\gamma_D w = \Psi$. Assim,

$$\langle \hat{\gamma_N^A} u, \gamma_D w \rangle_{N_A^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)} = 0, \quad \forall u \in C_0^\infty(\overline{\Omega}), \tag{4.36}$$

usando, então, a equação (4.33) conclui-se que,

$$(u, H^A w)_{L^2(\Omega)} = (H^A u, w)_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \in C_0^\infty(\overline{\Omega}). \tag{4.37}$$

Por outro lado, usando a equação (3.15) obtemos para todo $u \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$,

$$(H^A w, u)_{L^2(\Omega)} = (\gamma_D w, \gamma_N^A u)_{L^2(\Omega)} - (\gamma_N^A w, \gamma_D u)_{L^2(\Omega)} + (w, H^A u)_{L^2(\Omega)}, \tag{4.38}$$

levando em consideração que $\gamma_N^A w = 0$ e que $\Psi = \gamma_D w$, obtém-se que

$$\int_{\partial\Omega} d^{n-1}\omega \overline{\Psi} \gamma_N^A u = 0 \quad \forall u \in C_0^\infty(\overline{\Omega}). \tag{4.39}$$

Portanto, para concluir que Ψ é nulo é suficiente notar que $\gamma_{\mathrm{N}}^A(\mathrm{C}_0^\infty(\overline{\Omega}))$ é denso em $\mathrm{L}^2(\partial\Omega)$. Mas isto segue do Lema 4.1, do Corolário 4.1, e do fato de que $\mathrm{C}_0^\infty(\overline{\Omega})$ é denso em $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. □

Corolário 4.2. *Seja Ω um domínio de Lipschitz com fronteira compacta, então as seguintes inclusões são contínuas e possuem imagens densas,*

$$N_A^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega) \hookrightarrow L^2(\partial\Omega) \hookrightarrow (N_A^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega))^*. \tag{4.40}$$

Demonstração. Denote por I a primeira inclusão e por J a segunda. Claramente a primeira inclusão é limitada pois $N_A^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega) \hookrightarrow H^1(\partial\Omega) \hookrightarrow L^2(\partial\Omega)$, assim a segunda inclusão também é limitada pois $J = I^*$. Que a imagen de J é densa segue do Teorema 4.3. A densidade da imagem de I segue da densidade imagem de J; de fato, seja $f \in L^2(\partial\Omega, d^{n-1}\omega)$ com $f(I(N_A^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega))) = 0$ então, $Jf(N_A^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)) = I^*f(N_A^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)) = f(I(N_A^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega))) = 0$, assim $Jf = 0$, como J é injetor segue que $f = 0$ e isto demonstra a densidade da imagem de I e encerra a demonstração. $\square$

Capítulo 5

Domínios quase-convexos

Nesse capítulo apresentarei o conceito de domínio quase-convexo, que, de forma simplificada, é uma classe particular de domínios de Lipschitz com fronteira compacta que, ou é de classe $C^{1,r}$ localmente, ou localmente sua fronteira possui uma certa propriedade de convexidade. Em [8] os autores demonstraram que para essa classe de domínios, as funções de $\operatorname{Dom} \triangle_D$ e $\operatorname{Dom} \triangle_N$ possuem regularidade $H^2(\Omega)$. Para um dominínio de Lipschitz limitado geral, pode-se apenas afirmar que as funções de $\operatorname{Dom} \triangle_D$ possuem regularidade $H^{3/2}(\Omega)$, veja o Teorema B.2. de [13]. Usando resultados estabelecidos em [8] acerca das funções de $\operatorname{Dom} \triangle_D, \operatorname{Dom} \triangle_N$, demonstraremos que as funções do domínio de H_D^A e H_N^A possuem regularidade $H^2(\Omega)$. Este resultado, por sua vez, será utilizado posteriormente para se classificar todas as extensões auto-adjuntas de H_{mim}^A.

5.1 Definições

Seja Ω um domínio de Lipschitz limitado de $\mathbb{R}^n$; dizemos que Ω é de classe $MH_\delta^{1/2}$, e denotamos $\partial\Omega \in MH_\delta^{1/2}$, se para as funções φ_i da definição de domínio de Lipschitz, temos que $\nabla\varphi_i$ pertence a $(MH_\delta^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1}))^{n-1}$ e vale $||\nabla\varphi||_{(MH_\delta^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1}))^{n-1}} \leq \delta$, em que

$$MH_\delta^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1}) = \left\{ f \in L^1(\mathbb{R}^n) |\ M_f \in B(H^{1/2}(\mathbb{R}^n)) \right\}, \tag{5.1}$$

sendo que M_f é o operador de multiplicação por f e $B(H^{1/2}(\mathbb{R}^n))$ é o conjunto dos operadores limitados em $H^{1/2}(\mathbb{R}^n)$, além disso,

$$||f||_{MH_\delta^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} = ||M_f||_{B(H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}. \tag{5.2}$$

Na sequência introduziremos a definição de domínio pene-convexo (termo que adotaremos neste trabalho como a versão em português do termo “almost-convex domain”).

Definição 5.1. *Um domínio de Lipschitz limitado de* $\mathbb{R}^n$ *é dito pene-convexo se existir uma famíla* $\{\Omega_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ *de abertos em* $\mathbb{R}^n$ *com as seguintes propriedades:*
i) $\partial\Omega_n \in C^2$ *e* $\overline{\Omega_n} \subset \Omega$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.
ii) $\Omega_n \nearrow \Omega$ *para* $n \to \infty$, *no sentido que* $\overline{\Omega_n} \subset \Omega_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathrm{N}$ *e* $\bigcup_{n\in\mathrm{N}} \Omega_n = \Omega$.
iii) Existem uma uma vizinhança U *de* $\partial\Omega$ *e uma função real* ρ_n *de classe* C^2, *para cada valor de* $n \in \mathrm{N}$, *definida em* U *de modo que* $\rho_n < 0$ *sobre* $U \cap \Omega_n$, $\rho_n > 0$ *sobre* $U \setminus \overline{\Omega_n}$ *e* $\rho_n = 0$ *sobre* $\partial\Omega_n$. *Além disso, existe* $C_1 \in (1, \infty)$ *de maneira que*

$$C_1^{-1} \leq |\nabla\rho_n(x)| \leq C_1, \quad \forall x \in \partial\Omega_n, \quad \text{e} \quad \forall n \in \mathrm{N}. \tag{5.3}$$

iv) Existe $C_2 \geq 0$ *de forma que para todo* $n \in \mathrm{N}$, *todo ponto* $x \in \Omega$ *e todo vetor* ξ *tangente à* $\partial\Omega_n$ *em* X *vale,*

$$\langle \mathrm{Hess}\rho_n \xi, \xi\rangle \geq -C_2|\xi|^2, \tag{5.4}$$

sendo que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *denota o produto interno de* $\mathbb{R}^n$ *e* $\mathrm{Hess}\rho_n = \left\{\frac{\partial^2\rho_n}{\partial x_i \partial x_j}\right\}_{1\leq i,j\leq n}$ *é a matriz Hessiana de* ρ_n.

Tendo estabelecido estes conceitos podemos introduzir neste texto, então, o conceito de domínio quase-convexo .

Definição 5.2. *Um domínio de Lipschitz com fronteira compacta* Ω *de* $\mathbb{R}^n$, *com* $n \geq 2$, *é dito quase-convexo se existir* $\delta > 0$ *suficientemente pequeno de forma que para todo* $x \in \partial\Omega$ *existe uma vizinhança aberta* Ω_x *de* x *em que uma das seguintes condições valem:*
i) $\Omega_x \cap \Omega$ *é de classe* $MH_\delta^{1/2}$ *se* $n \geq 3$, *e de classe* $C^{1,r}$ *para um certo* $r \in (1/2, 1)$ *se* $n = 2$;
ii) $\Omega_x \cap \Omega$ *é pene-convexo.*

O próximo resultado mostra que, para um domínio quase-convexo, as funções de $\mathrm{Dom}\, H_D^A$ estão em $H^2(\Omega)$; este resultado será importante na sequência e é consequência direta do Teorema 8.11 de [8].

Teorema 5.1. *Seja* Ω *um domínio quase-convexo. Então,* $\mathrm{Dom}\, H_D^A$ *e* $\mathrm{Dom}\, H_N^A \subset H^2(\Omega)$.

Demonstração. Suponha, primeiramente, que Ω seja limitado. Neste caso o resultado para H_D^A segue diretamente do Teorema 8.11 de [8] e da seguinte observação: Uma vez que $A \in (\mathrm{W}^1_\infty(\overline{\Omega}))^n$, vale $H^A = -\triangle + L$ com $L : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$. Assim, se $u \in H^1(\Omega)$ vale $H^A u \in L^2(\Omega)$ se, e somente se, $\triangle u \in L^2(\Omega)$ e as extensões de γ_D definidas em $\mathrm{Dom}\, H_D^A$ e $\mathrm{Dom}\, \triangle_D$ coincidem, portanto, $\mathrm{Dom}\, H_D^A = \mathrm{Dom}\, \triangle_D$.

Agora, ainda sob a hipótese de que Ω é limitado, demonstraremos o resultado para H_N^A. A demonstração é similar à do Teorema 8.11 de [8] (para o laplaciano). Tome $u \in \mathrm{Dom}\, H_{\mathrm{N}}^A$, pela definição de domínio quase-convexo (limitado) e um argumento de partição da unidade, é suficiente mostrar que, se Ω_x é como na definição de domínio quase-convexo e $\omega \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é tal que $\partial\Omega \cap \mathrm{supp}\,(\omega) \subset \partial\Omega \cap \partial\Omega_x$, então $v = (\omega u)|_{\Omega_x} \in H^2(\Omega_x)$. Uma vez que $u \in H^1(\Omega)$, $\Delta u \in L^2(\Omega)$ (o que vale pelo mesmo argumento do parágrafo acima) temos,

$$\Delta v = [(\Delta\omega)u + 2\nabla\omega \cdot \nabla u + \omega\Delta u]|_{\Omega_x} \in L^2(\Omega_x)\,,$$

e $v \in H^1(\Omega_x)$.

A conclusão da demonstração neste caso se divide em dois sub-casos.

caso I: Suponha que Ω_x é de classe $\mathrm{C}^{1,r}$, $r > 1/2$, ou que Ω_x é de classe $NH_\delta^{1/2}$ e $n \geq 3$. Neste caso o resultado é consequência do seguinte fato que foi estabelecido na demonstração do Teorema 8.11 de [8]: Seja Ω de classe $\mathrm{C}^{1,r}$ com $r > 1/2$ ou Ω de classe $NH_\delta^{1/2}$ e $n \geq 3$. Se $w \in H^1(\Omega)$ com

$$\Delta w \in L^2(\Omega), \quad \tilde{\gamma}_N w \in H^{1/2}(\Omega)\,, \tag{5.5}$$

então $w \in H^2(\Omega)$. De posse deste fato, dando prosseguimento à demonstração, temos que, $v \in H^1(\Omega_x)$ e $\Delta v \in L^2(\Omega_x)$, por outro lado,

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}_N^A v|_{\partial\Omega_x \cap \partial\Omega} &= \nu \cdot \gamma_D(\nabla_A \omega u)|\partial\Omega_x \cap \partial\Omega \\
&= [\gamma_D(\omega)\tilde{\gamma}_N^A u + \gamma_D(u)\tilde{\gamma}_N(\omega)|_{\partial\Omega_x \cap \partial\Omega} \\
&= [\gamma_D(u)\tilde{\gamma}_N(\omega)]|_{\partial\Omega_x \cap \partial\Omega} \in H^{1/2}(\Omega_x)\,,
\end{aligned}$$

assim,

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}_N v|_{\partial\Omega_x \cap \partial\Omega} &= \tilde{\gamma}_N^A v|_{\partial\Omega_x \cap \partial\Omega} - [i\nu \cdot \gamma_D(A\omega u)]|_{\partial\Omega_x \cap \partial\Omega} \\
&= [\gamma_D(u)\tilde{\gamma}_N(\omega)]|_{\partial\Omega_x \cap \partial\Omega} - [i\nu \cdot \gamma_D(Au)\gamma_D(\omega)]|_{\partial\Omega_x \cap \partial\Omega} \in H^{1/2}(\Omega_x)\,,
\end{aligned}$$

uma vez que, $\gamma_D(Au) \in H^{1/2}(\partial\Omega \cap \partial\Omega_x)$ e pelo fato de que, sob a hipótese de regularidade de Ω_x, assumida no inicio deste sub-caso, o operador de multiplicação por ν mapeia $H^{1/2}(\Omega_x)$ nele mesmo. Então, pelo fato mencionado acima, segue que $v \in H^2(\Omega_x)$ e isto finalisa a demonstração neste sub-caso.

caso II: Ω_x é pene-conexo. Este sub-caso é uma consequência simples do Lema 8.8 de [8] aplicado ao campo vetorial $(\omega\nabla_A u)|_{\Omega_x}$, assim $v \in H^2(\Omega_x)$ neste caso também, e isto finaliza a demonstração no caso em que Ω é limitado.

Suponha agora que Ω seja ilimitado. Consideremos primeiro o caso do operador H_D^A. Tome uma bola B_r de raio r tal que $\partial\Omega \subset B_{r/2}$, sejam φ_1, φ_2 uma partição da unidade associada à cobertura $\{\Omega \cap B_r, \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_{r/2}}\}$, note que como $\partial\Omega \subset B_{r/2}$, pelo teorema da alfandega devemos ter $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_{r/2}} \subset \Omega$. Assim, segue que para todo $u \in \operatorname{Dom} H_D^A$ em Ω vale, $u = \varphi_1 u + \varphi_2 u$, em que $u\varphi_1 \in \operatorname{Dom} H_D^A$. Como $\varphi_1 \in C_o^\infty(B_r)$ segue diretamente que $\varphi_1 u \in H_0^1(\Omega \cap B_r)$, por outro lado vale

$$H^A(\varphi_1 u) = \varphi_1 H^A(u) + [H^A, \varphi_1]u$$

em que $[H^A, \varphi_1]$ denota o comutador de H^A com o operador de multiplicação por φ_1, é um operador diferencial de ordem 1 que mapeia $H^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$. Portanto, como $H^A u \in L^2(\Omega)$ e $u \in H^1(\Omega)$, segue que $H^A(\varphi_1 u) \in L^2(\Omega \cap B_r)$ e assim $\varphi_1 u \in \operatorname{Dom} H_{D,1}^A$ (em que $H_{D,1}^A$ é o laplaciano de Dirichlet associado a H^A em $\Omega \cap B_r$). Portanto, pelo caso em que Ω é limitado segue que $\varphi_1 u \in H^2(\Omega \cap B_r)$. Por outro lado vale

$$H^A(\varphi_2 u) = \varphi_2 H^A(u) + [H^A, \varphi_2]u,$$

e como tanto φ_2 como suas derivadas de qualquer ordem são limitadas, segue que $H^A(\varphi_2 u) \in L^2(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_{r/2}})$, e como $\varphi_2 u \in H_0^1(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_{r/2}})$ seque que $\varphi_2 u \in \operatorname{Dom} \triangle_{D,2}$, onde $\triangle_{D,2}$ é o operador de Dirichlet associado ao laplaciano em $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_{r/2}}$. Mas é fato conhecido que o domínio de $\triangle_{D,2}$ está contido em $H^2(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_{r/2}})$, veja por exemplo [9] Teorema 8.12. Assim segue $u = \varphi_1 u + \varphi_2 u \in H^2(\Omega)$ e o resultado esta demonstrado neste caso.

O caso do operador H_N^A é tratado de um modo similar, de fato, se $u \in \operatorname{Dom} H_{\mathrm{N}}^A$ e φ_i $i = 1, 2$ são como definido acima, por uma argumento similar segue que $\varphi_1 u \in \operatorname{Dom} H_{\mathrm{N},1}^A \subset H^2(B_r \cap \Omega)$ em que $H_{\mathrm{N},1}^A$ é o operador de Neumann associado com H^A em $\Omega \setminus B_{r/2}$, e $\varphi_2 u \in \operatorname{Dom}\triangle_{\mathrm{D},2} \subset H^2(\Omega \setminus B_{r/2})$; assim, $u = \varphi_1 u + \varphi_2 u \in H^2(\Omega)$ e isto encerra a demonstração do teorema. $\square$

5.2 Traço de Neumann regularizado em domínios quase-convexos

Neste capítulo, introduzirei o conceito de traço de Neumann regularizado, esse conceito é definido no contexto dos domínios quase-convexos que introduzimos no capítulo anterior e nos permitirá construir uma tripla de fronteira para o operador $H^A_{\max}$.

Na seção anterior, vimos que $\operatorname{Dom} H^A_D \subset H^2(\Omega)$, assim, temos que $\operatorname{Dom} H^A_D = H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$. Com esta observação em mente, podemos introduzir o operador τ^A_N, chamado traço de Neumann regularizado, através da seguinte definição.

Definição 5.3. *Seja Ω um domínio quase-convexo. O operador traço de Neumann regularizado é dado por:*

$$\begin{aligned} \tau_N^{A,z} &: \left\{u \in L^2(\Omega) \middle| \quad H^A u \in L^2(\Omega)\right\} \longrightarrow N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \\ \tau_N^{A,z} u &= \gamma_N^A (H_D^A - z)^{-1}(H^A - z)u, \quad \text{em que} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H_D^A). \end{aligned}$$

Claramente, tal operador está bem-definido e limitado, além disso vale:

Teorema 5.2. *Sejam Ω um domínio quase-convexo e $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H^A_D)$, então o operador $\tau_N^{A,z}$ possui as seguintes propriedades:*
i) $\tau_N^{A,z}(H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)) = N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.
ii) $\operatorname{Ker} \tau_N^{A,z} = H^2_0(\Omega) \dotplus \left\{u \in L^2(\Omega) \middle| \quad (H^A - z)u = 0\right\}$
iii) $(H^A u, v)_{L^2(\Omega)} - (u, H^A v)_{L^2(\Omega)} = -\langle \tau_N^{A,z} u, \hat{\gamma}_D v\rangle_{N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} + \overline{\langle \tau_N^{A,\overline{z}} v, \hat{\gamma}_D u\rangle}_{N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$.

Demonstração. i) Basta notar que para $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H^A_D)$ o operador $(H^A - z) : H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega) \to L^2(\Omega)$ é sobrejetor e usar o Lema 4.1.

ii) É claro que $H^2_0(\Omega) \dotplus \left\{u \in L^2(\Omega) \middle| \quad (H^A - z)u = 0\right\} \subset \operatorname{Ker} \tau_N^{A,z}$, que a soma é direta segue do fato de que $H^A_D - z$ é invertível. Seja então $u \in \operatorname{Ker} \tau_N^{A,z}$, e defina $w = (H^A_D - z)^{-1}(H^A - z)u$, então, $w \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ e $\gamma_N^{\tilde{A},z} w = \tau_N^{A,z} u = 0$. Assim, $w \in H^2_0(\Omega)$, e vale, $u = (u - w) + w$, sendo $w \in H^2(\Omega)$ e $u - w \in L^2(\Omega)$ com $(H^A - z)(u - w) = 0$, logo, $\operatorname{Ker} \tau_N^{A,z} \subset H^2_0(\Omega) \dotplus \left\{u \in L^2(\Omega) \middle| \quad (H^A - z)u = 0\right\}$.

iii) Tome agora $u, v \in \left\{u \in L^2(\Omega) \middle| \quad H^A u \in L^2(\Omega)\right\}$ e defina, $\tilde{u} = (H^A_D - z)^{-1}(H^A - z)u$ e $\tilde{v} = (H^A_D - \overline{z})^{-1}(H^A - \overline{z})v$, ambos elementos de $H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$. Então, vale

$(H^A - z)\tilde{u} = (H^A - z)u$ e $(H^A - \overline{z})\tilde{v} = (H^A - \overline{z})v$, além disso $\widetilde{\gamma_N^A}\tilde{u} = \tau_N^{A,z}u$ e $\widetilde{\gamma_N^A}\tilde{v} = \tau_N^{A,\overline{z}}v$, assim,

$$\begin{aligned}
(H^A u, v)_{L^2(\Omega)} - (u, H^A v)_{L^2(\Omega)} &= ((H^A - z)u, v)_{L^2(\Omega)} - (u, (H^A - \overline{z})v)_{L^2(\Omega)} \\
&= ((H^A - z)\tilde{u}, v)_{L^2(\Omega)} - (u, (H^A - \overline{z})\tilde{v})_{L^2(\Omega)} \\
&= (\tilde{u}, (H^A - \overline{z})v)_{L^2(\Omega)} - \langle \widetilde{\gamma_N^A}\tilde{u}, \hat{\gamma}_D v \rangle_{N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} - (u, (H^A - \overline{z})\tilde{v})_{L^2(\Omega)} \\
&= (\tilde{u}, (H^A - \overline{z})v)_{L^2(\Omega)} - (u, (H^A - \overline{z})\tilde{v})_{L^2(\Omega)} - \langle \tau_N^{A,z}u, \hat{\gamma}_D v \rangle_{N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \\
&= (\tilde{u} - u, (H^A - \overline{z})v)_{L^2(\Omega)} - \langle \tau_N^{A,z}u, \hat{\gamma}_D v \rangle_{N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \\
&= \overline{\langle \tau_N^{A,\overline{z}}v, \hat{\gamma}_D u \rangle}_{N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} - \langle \tau_N^{A,z}u, \hat{\gamma}_D v \rangle_{N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}
\end{aligned}$$

em que na terceira equação utilizou-se (4.6), na quarta usou-se $\widetilde{\gamma_N^A}\tilde{u} = \tau_N^{A,z}u$, e na sexta usou-se novamente (4.6), $(H^A - z)(\tilde{u} - u) = 0$ e $\hat{\gamma}_D(\tilde{u} - u) = -\hat{\gamma}_D(u)$. E isto encerra a demonstração. □

Na sequência demonstaremos dois lemas que serão utilizados posteriormente.

Lema 5.1. *Seja Ω um domínio quase-convexo. Então o operador $\hat{\gamma}_D$, que satizfaz 4.5, é sobrejetor. Mais especificamente, para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H_D^A)$, existe $C > 0$ de forma que para cada $\theta \in (N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))^*$ existe $u_\theta \in L^2(\Omega)$ com $(H^A - z)u_\theta = 0$ tal que $\hat{\gamma}_D(u_\theta) = \theta$, mais ainda,*

$$\theta \in (N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))^* \to u_\theta \in L^2(\Omega)$$

é linear e limitado.

Demonstração. Fixe $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H_D^A)$, então, pela observação do início do capítulo, podemos escrever,

$$(H^A - \overline{z})^{-1} : L^2(\Omega) \to H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \tag{5.6}$$

e, como se verifica facilmente, esta aplicação é contínua. Assim, Dado $\theta \in (N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))^*$, usando o Lema 4.1 o funcional anti-linear

$$\theta\gamma_N^A(H^A - \overline{z})^{-1} : L^2(\Omega) \to \mathbb{C} \tag{5.7}$$

está bem-definido e é contínuo. Então, pelo Teorema de Representação de Riesz, existe um único $\tilde{u_\theta} \in L^2(\Omega)$ de modo que

$$\theta\gamma_N^A(H^A - \overline{z})^{-1}(f) = (f, \tilde{u_\theta})_{L^2(\Omega)} \tag{5.8}$$

e, ainda,

$$||\tilde{u_\theta}||_{L^2(\Omega)} = ||\theta\gamma_N^A(H^A-\overline{z})^{-1}||_{B(L^2(\Omega,C))} \leq C||\theta||_{(N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))^*}.$$

Além disso a aplicação $\theta \to \tilde{u_\theta}$ é linear. Fazendo $f = (H^A - \overline{z})w$ com $w \in H^2(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ em 5.8, obtemos

$$\theta(\gamma_N^A(w)) = ((H^A-\overline{z})w, \tilde{u_\theta})_{L^2(\Omega)}, \quad \forall w \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega). \tag{5.9}$$

Em particilar para $w \in C_0^\infty(\Omega)$ vale, $((H^A - \tilde{z})w, \tilde{u_\theta})_{L^2(\Omega)} = \theta(\gamma_N^A(w)) = \theta(0) = 0$; assim, $(H^A - z)\tilde{u_\theta} = 0$ no sentido das distribuições. Portanto, para $w \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ podemos escrever,

$$\begin{aligned} \theta(\gamma_N^A(w)) &= ((H^A-\overline{z})w, \tilde{u_\theta})_{L^2(\Omega)} - (w, (H^A - z)\tilde{u_\theta}) \\ &= -\langle \gamma_N^A w, \hat{\gamma}_D \tilde{u_\theta} \rangle_{N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}, \end{aligned}$$

em que na segunda equação usamos a equação (4.6). Como $\gamma_N^A : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ é sobrejetor, conclui-se que $\tilde{\gamma_D}(-\tilde{u_\theta}) = \theta$. Assim $u_\theta = -\tilde{u_\theta}$ satisfaz as propriedades do enuciado do lema, e isto encerra a demonstração. $\square$

Lema 5.2. *Seja Ω um domínio quase-convexo. Tome $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H_D^A)$, então, para todo $f \in L^2(\Omega)$ e todo $g \in (N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))^*$, o seguinte problema de valor de fronteira possui solução única u_D:*

$$\begin{aligned} (H^A - z)u &= f \quad \text{em} \quad \Omega \\ u &\in L^2(\Omega) \\ \hat{\gamma}_D u &= g \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{aligned}$$

Além disso, existe $C(z) > 0$ tal que $||u_D||_{L^2(\Omega)} \leq C(z)\big(||f||_{L^2(\Omega)} + ||g||_{(N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))^*}\big)$. Em particular, se $g = 0$ então $u_D \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Demonstração. Pelo lema anterior podemos tomar $v \in L^2(\Omega)$ tal que $H^A v = 0$, $\hat{\gamma}_D v = g$ e $||v||_{L^2(\Omega)} \leq C||g||_{(N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))^*}$. Defina $w = (H_D^A - z)^{-1}(f + zv) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, então,

$$||w||_{L^2(\Omega)} \leq C||f + zv||_{L^2(\Omega)} \leq C'\big(||f||_{L^2(\Omega)} + ||g||_{(N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))^*}\big). \tag{5.10}$$

Assim, verifica-se diretamente que $u = v + w$ é uma solução do problema e satisfaz a majoração do enunciado. Para ver que a solução é única devemos demonstrar que se

$u \in L^2(\Omega)$ satisfaz $(H^A - z)u = 0$ e $\hat{\gamma}_D u = 0$ então $u = 0$. Fixe, então, $f \in L^2(\Omega)$ e seja $u_f = (H_D^A(\Omega) - \overline{z})^{-1} f \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, então,

$$(f, u)_{L^2(\Omega)} = ((H_D^A(\Omega) - \overline{z})u_f, u)_{L^2(\Omega)} = (u_f, (H_0^A(\Omega) - z)u)_{L^2(\Omega)} - \langle \gamma_N^A u_f, \hat{\gamma}_D u \rangle_{N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = 0, \tag{5.11}$$

assim, segue que $u = 0$ e isso encerra a demonstração. □

Como consequência imediata destes dois lemas vale o seguinte corolário.

Corolário 5.1. *Sejam Ω um domínio quase-convexo e $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H_D^A)$. Então o operador*

$$\hat{\gamma}_D : \left\{ u \in L^2(\Omega) | \quad (H^A - z)u = 0 \right\} \to (N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))^* \tag{5.12}$$

é um isomorfismo contínuo com inverso contínuo.

Seja Ω um domínio quase-convexo, a partir destes resultados podemos introduzir o operador $M_{D,N}^A(z) : (N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))^* \to (N^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega))^*$ para $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H_D^A)$ definido por, $M_{D,N}^A(z) f = -\hat{\gamma}_N u_D$ onde u_D é a única solução de,

$$(H^A - z)u = 0, \quad u \in L^2(\Omega), \quad \hat{\gamma}_D u = f. \tag{5.13}$$

Este operador é claramente limitado e pode-se demonstrar facilmente que vale a seguinte relação,

$$\tau_N^{A,z} u = \hat{\gamma}_N u + M_{D,N}^A(z)(\hat{\gamma}_D u), \quad \forall u \in \mathrm{Dom} H_{\max}^A. \tag{5.14}$$

Capítulo 6

Triplas de fronteiras

Neste capítulo, definiremos o conceito de tripla de fronteira. Utilizando os resultados dos capítulos anteriores, construiremos uma tripla de fronteira para o operador $H^A_{\max}$ no caso em que Ω é quase-convexo, e assim obteremos uma parametrização para todas as extensões auto-adjuntas de $H^A_{\min}$ em termos de operadores unitários de $N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Em todo este capítulo, o espaço $N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ será considerado como um espaço de Hilbert munido de um produto interno $(\cdot,\cdot)_{N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$, cuja norma associada também será denotada por $||\cdot||_{N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$, que possui a seguinte propriedade: seja F uma função mensuravel com $|F(x)| = 1$ q.t.p., então M_F, o operador de multiplicação por F em $N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, é unitário e vale $(M_F)^* = M_{F^{-1}}$; um exemplo de tal de produto interno pode ser encontrado na Observação 6.14 de [8].

Denote por I a isometria sobrejetora $I : (N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))^* \to N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, definida por

$$\langle f, g\rangle_{N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = (f, Ig)_{N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}, \quad \forall f \in N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \quad \text{e} \quad g \in (N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))^*. \tag{6.1}$$

6.1 Fatos elementares sobre triplas de fronteira

Nesta seção, apresentarei a definição abstrata de tripla de fronteira juntamente com o teorema que relaciona este conceito com a teoria de extensão auto-adjunta; para mais detalhes sobre este assunto veja [4].

Definição 6.1. *Seja A um operador linear, simétrico, fechado e densamente definido em um espaço de Hilbert H. Então (G, Γ_1, Γ_2) é uma tripla de fronteira para A se G for um espaço de Hilbert e $\Gamma_1, \Gamma_2 : \operatorname{Dom} A \to G$ forem aplicações lineares satisfazendo:*

i)

$$\langle f, Ag\rangle - \langle Af, g\rangle = \langle \Gamma_1 f, \Gamma_2 g\rangle - \langle \Gamma_2 f, \Gamma_1 g\rangle, \quad \forall f, g \in \operatorname{Dom} A. \tag{6.2}$$

ii) A transformação $(\Gamma_1, \Gamma_2) : \operatorname{Dom} A \to G \times G$ *é sobrejetora.*

iii) O conjunto $\operatorname{Ker}(\Gamma_1, \Gamma_2)$ *é denso em* H*.*

Combinando os Teoremas 1.2 e 1.12 de [4], obtém-se o seguinte resultado.

Teorema 6.1. *Seja A um operador linear, simétrico, fechado e densamente definido em um espaço de Hilbert H e (G, Γ_1, Γ_2) uma tripla de fronteira para A^*. Então, a aplicação que associa a cada transformação unitária U de G o operador A_U definido por*

$$\begin{aligned} \operatorname{Dom} A_U &= \{x \in \operatorname{Dom} A^* | \quad i(\mathbf{1} + U)\Gamma_1 x = (\mathbf{1} - U)\Gamma_2 x\} \\ A_U u &:= A^* u, \end{aligned}$$

estabelece uma bijeção entre o conjunto das aplicações unitárias de G e o conjunto das extensões auto-adjuntas de A.

6.2 Extensões auto-adjuntas de $H^A_{\min}$ para Ω quase-convexo e transformação de gauge

O teorema que segue estabelece que $(\tau_N^{A,z}, \hat{\gamma}_D, N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$, com $z \in \mathbb{R} \setminus \sigma(H_D^A)$, é uma tripla de fronteira para $H^A_{\max} = (H^A_0)^*$ e permite, assim, uma descrição das extensões auto-adjuntas de $H^A_{\min}$.

Teorema 6.2. *Seja Ω um domínio quase-convexo, $z \in \mathbb{R} \setminus \sigma(H_D^A)$ e $A \in W^1_\infty(\overline{Omega})$. Então $(\tau_N^{A,z}, \hat{\Gamma}_D, N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ (onde $\hat{\Gamma}_D = I \circ \hat{\gamma}_D$) é uma tripla de fronteira para $H^A_{\max}$.*

Demonstração. i) Pelo item iii) do Teorema 5.2, temos

$$(u, H^A v)_{L^2(\Omega)} - (H^A u, v)_{L^2(\Omega)} = (\tau_N^{A,z} u, \hat{\Gamma}_D v)_{N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} - (\hat{\Gamma}_D u, \tau_N^{A,z} v)_{N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}. \tag{6.3}$$

Assim o item i) da Definição 6.1 vale.

ii) A validade do item ii) da Definição 6.1 é consequência do fato de que $\tau_N^{A,z}(\operatorname{Ker} \hat{\gamma}_D) = N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ e $\hat{\Gamma}_D(\operatorname{Ker} \tau_N^{A,z}) = N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, em que a primeira equação é consequência do item i) do Teorema 5.2, já a segunda é consequência do item ii) do mesmo teorema, juntamente com o fato de que, pelo Lema 5.2, $\hat{\gamma}_D(\{u \in L^2(\Omega)|\ (H^A - z)u = 0\}) = (N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))^*$.

iii) O item iii) da Definição 6.1 é trivialmente válido uma vez que $C_0^\infty(\Omega)$ está contido em $\mathrm{Ker}(\Gamma_1, \Gamma_2)$, e isto conclui a demonstração. □

Como consequência direta deste resultado e do Teorema 6.1, podemos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 6.3. *Seja Ω um domínio quase-convexo, $z \in \mathbb{R} \setminus \sigma(H^A_D)$ e $A \in W^1_\infty(\overline{\Omega})$. Então a aplicação que associa o operador $H^{A,z}_U$ definido por*

$$\begin{aligned} \mathrm{Dom}\, H^{A,z}_U &= \{u \in \mathrm{Dom}\, H^A_{\max}|\quad i(\mathbf{1} + U)\tau^{A,z}_N u = (\mathbf{1} - U)\hat{\Gamma}_D u\}, && (6.4) \\ H^{A,z}_U u &:= H^A u && (6.5) \end{aligned}$$

à transformação unitária U de $N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, estabelece uma bijeção entre as transformações unitárias de $N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ e as extensões auto-adjuntas de $H^A_{\min}$.

Observação 6.1. *Fixe $z = -1$. Uma vez que H^A_D é não negativo, $-1 \in \mathbb{R} \setminus \sigma(H^A_{\mathrm{D}})$. É interessante notar que o Teorema 6.3 nos fornece uma parametrização da família de todas as extensões auto-adjuntas de $H^A_{\min}$ em termos de U, que é independente do potencial magnético A. Isto estabelece uma bijeção natural entre os conjuntos das extensões auto-adjuntas $H^{A,-1}_U$ de $H^A_{\min}$ e $H^{B,-1}_U$ de $H^B_{\min}$, para todo par de potenciais magnéticos A e B em $(\mathrm{W}^1_\infty(\overline{\Omega}))^n$, dada por $H^{A,-1}_U \longleftrightarrow H^{B,-1}_U$.*

Observação 6.2. *Um caso particular de grande interesse é o caso de domínio quase-convexo, conexo e ilimitado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, com $\partial\Omega$ sendo uma curva simples fechada, e A é tomado de modo que $\mathrm{rot}\, A = 0$ em Ω, isto é, o campo magnético é nulo em Ω. Esta é a situação típica para o estudo do efeito Aharonov-Bohm e, até onde sabemos, o Teorema 6.3 fornece a primeira descrição de todas as extensões auto-adjuntas neste caso e, mais ainda, admite a possibilidade de que a fronteira $\partial\Omega$ seja irregular. Neste contexto, uma questão importante é sobre quais extensões auto-adjuntas $H^{A,z}_U$ são unitariamente equivalentes a uma com potencial magnetic nulo, isto é, a prenseça de A não tem consequências físicas. Comentaremos sobre isto após estabelecermos o Teorema 6.6.*

Observação 6.3. *Seguindo a mesma linha de raciocínio adotada em [8] e usando resultados aqui desenvolvidos, é possivel obter uma parametrização para as extensões auto-adjuntas de H^A_{min} análoga àquela dada pelo Teorema 14.3 de [8]; tal parametrização é obtida através de uma aplicação do Teorema II.2.1 de [11] em vez do uso de triplas de fronteiras.*

6.3 Transformação de gauge

A seguir introduziremos o conceito de equivalência de gauge para potenciais vetorias em $(\mathrm{W}^1_\infty(\overline{\Omega}))^n$ e mostraremos como as extenções auto-adjuntas de H^A_{mim} dadas pelo Teorema 6.3 se relacionam com esse conceito. Nesta seção, Ω é assumido ser um domínio quase-convexo.

Definição 6.2. *Seja Ω um domínio de Lipschtz conexo e sejam $A, B \in (\mathrm{W}^1_\infty(\overline{\Omega}))^n$ dois campos vetorias de Ω. Dizemos que A é gauge equivalente a B se valem as seguintes condições:*
i) $d(\omega_B - \omega_A) = 0$ (em que ω_A é a 1-forma diferencial associada a A, isto é, em coordenadas cartesianas $\omega_A = \sum_{i=1}^n A_i dx_i$, sendo $A = (A_1, ..., A_n)$.)
ii) Para todo caminho fechado, regular por partes, γ em Ω, existe um inteiro n_γ tal que $\int_\gamma (\omega_A - \omega_B) = 2\pi n_\gamma$.

Sejam A, B campos gauge equivalentes como na definição acima e fixe $x_0 \in \Omega$, então a função $F^\Omega : \Omega \to \mathbb{C}$ dada por

$$F^\Omega(x) = e^{i\int_{\gamma_x}(\omega_B - \omega_A)}, \quad x \in \Omega, \tag{6.6}$$

em que γ_x é uma caminho em Ω conectando x_0 a $x \in \Omega$; é bem-definida pelo item ii) da definição anterior, e $|F^\Omega| = 1$.

Lema 6.1. *Sejam $A, B \in (\mathrm{W}^1_\infty(\overline{\Omega})))^n$ campos vetorias gauge equivalentes em Ω. Então $\nabla F^\Omega = i(B - A)F^\Omega$; além disso, $F^\Omega \in \mathrm{W}^2$, em particular, $F^\Omega \in H^1_{loc}(\Omega)$.*

Demonstração. É suficiente demonstrar a primeira afirmação, pois o restante é uma consequência direta desta. Fixe $x_0 \in \Omega$ e uma bola aberta, $B_{x_0} \subset \Omega$, com centro x_0 tal que

$A-B$ é de Lipschitz com constante $K>0$ em B_{x_0}; basta demonstrar que a afirmação vale em B_{x_0}. Note que, para $x \in B_{x_0}$, vale $F^\Omega(x) = F^\Omega(x_0)e^{i\phi(x)}$, sendo $\phi(x) = \int_{[x_0,x]}(\omega_A - \omega_B)$ e $[x_0,x]$ é o seguimento de reta conectando x_0 a x; temos que $\nabla\phi(x) = (B-A)(x)$, $x \in B_{x_0}$. De fato, se $(B-A)(x) = (f_1(x), ..., f_n(x))$ vale,

$$\begin{aligned}
\partial^j\phi(x) &= \partial^j \int_0^1 [\sum_{i=1}^n f_i(x_0 + t(x-x_0))(x^i - x_0^i)]dt \\
&= \int_0^1 \partial^j [\sum_{i=1}^n f_i(x_0 + t(x-x_0))(x^i - x_0^i)]dt \\
&= \int_0^1 [f_j(x_0 + t(x-x_0)) + \sum_{i=1}^n \partial^j f_i(x_0 + t(x-x_0))t(x^i - x_0^i)]dt \\
&= \int_0^1 [f_j(x_0 + t(x-x_0)) + \sum_{i=1}^n \partial^i f_j(x_0 + t(x-x_0))\, t(x^i - x_0^i)]dt \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt}(tf_j(x_0 + t(x-x_0)) \\
&= f_j(x),
\end{aligned}$$

sendo que a segunda igualdade é justificada por uma aplicação do teorema da convergência dominada ao limite da definição da derivada, que pode ser aplicado pois o integrando deste limite é limitado uma vez que $(B-A)$ é de Lipschitz com constante K em B_{x_0}; a quarta iqualdade é consequência do fato que $\partial^i f_j = \partial^j f_i$, para todos $i, j = 1, ..., n$, e isto conclui a demonstração. □

Deste lema, segue que a seguinte função está bem definida:

$$F^{\partial\Omega} := \gamma_D F^\Omega. \tag{6.7}$$

Para uma transformação unitária U em $N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, definimos

$$\mathcal{F}_U := (F^{\partial\Omega})^{-1} U F^{\partial\Omega}. \tag{6.8}$$

Teorema 6.4. *Sejam A, B campos vetorias em $(\mathrm{W}^1_\infty(\overline{\Omega}))^n$ limitados e gauge equivalentes, e sejam F^Ω e $F^{\partial\Omega}$ as funções definidas acima. Então, sob as mesmas hipóteses do Teorema 6.3, a extensão auto-adjunta $H_U^{A,z}$ de $H^A_{\min}$ é unitariamente equivalente a $H^{B,z}_{\mathcal{F}_U}$. De fato,*

$$H_U^{A,z}(F^\Omega u) = F^\Omega H^{B,z}_{\mathcal{F}_U} u,$$

para todo $u \in \mathrm{Dom}\, H^{B,z}_{\mathcal{F}_U} = (F^\Omega)^{-1}\mathrm{Dom}\, H_U^{A,z}$. Equivalentemente, $H_U^{A,z}F^\Omega = F^\Omega H^{B,z}_{\mathcal{F}_U}$.

Demonstração. Note inicialmente que $H_D^B = (F^\Omega)^{-1} H_D^A F^\Omega$ (por abuso de notação o operador de multiplicação por F^Ω esta sendo denotado por F^Ω). De fato, na demonstração da Proposição 3.1, verificou-se que H_D^A é o único operador auto-adjunto associado à forma $\Phi_{A,D}$. A afimação segue então de,

$$\Phi_{B,D}(u,v) = \Phi_{A,D}(F^\Omega u, F^\Omega v), \quad \forall u,v \in H_0^1(\Omega).$$

Note agora que $\mathrm{Dom}\, H_{\max}^A = F^\Omega \mathrm{Dom}\, H_{\max}^B$. Além disso, $H_{\max}^A(F^\Omega u) = F^\Omega H_{\max}^B u$. De fato, é claro que para $u \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ vale $H_{\max}^A(F^\Omega u) = F^\Omega H_{\max}^B u$.

Fixe agora $u \in \mathrm{Dom}\, H_{\max}^B$, e tome uma sequência $\{u_i\}_{i\in N}$ em $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ convergindo para u em $\mathrm{Dom}\, H_{\max}^B$, na norma do gráfico $||\cdot||_B = ||\cdot||_{L^2(\Omega)} + ||H^B(\cdot)||_{L^2(\Omega)}$. Então, do que foi observado anteriormente, vale,

$$||H^A(F^\Omega u_i) - F^\Omega H^B u||_{L^2(\Omega)} = ||H^B(u_i) - H^B(u)|| \longrightarrow 0, \tag{6.9}$$

para $i \to \infty$, em particular, $\{F^\Omega u_i\}_{i\in N}$ é uma sequência de Cauchy na norma do gráfico de $H_{\max}^A$ e, portanto, convergente na norma do gráfico. Por outro lado, como $(F^\Omega u_i, H^A(F^\Omega u_i))$ converge em $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ para $(F^\Omega u, F^\Omega H^B(u))$, pelo fato de $H_{\max}^A$ ser fechado, segue que, $H^A(F^\Omega u) = F^\Omega H^B(u) \in L^2(\Omega)$. Assim, vale $F^\Omega \mathrm{Dom}\, H_{\max}^B \subset \mathrm{Dom}\, H_{\max}^A$ e $H^A(F^\Omega u) = F^\Omega H^B(u) \in L^2(\Omega)$ para todo $u \in \mathrm{Dom}\, H_{\max}^B$. Invertendo o papel de A e B no raciocínio acima obtém-se a inclusão oposta e uma igualdade análoga, e isso demonstra o afirmado.

Note agora que para $u \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ vale

$$\begin{aligned}
\tau_N^{A,z}(F^\Omega u) &= \gamma_N^A (H_D^A - z)^{-1}(H^A - z)(F^\Omega u) \\
&= \gamma_N^A (H_D^A - z)^{-1}(F^\Omega (H^B(u) - z)) \\
&= \gamma_N^A F^\Omega ((H_D^B - z)^{-1}(H^B(u) - z)) \\
&= \nu \cdot \gamma_D \nabla_A (F^\Omega ((H_D^B - z)^{-1}(H^B(u) - z)) \\
&= \nu \cdot \gamma_D F^\Omega \nabla_B ((H_D^B - z)^{-1}(H^B(u) - z)) \\
&= \nu \cdot F^{\partial\Omega} \gamma_D \nabla_B ((H_D^B - z)^{-1}(H^B(u) - z)) \\
&= F^{\partial\Omega} \tau_N^{B,z}(u).
\end{aligned}$$

Logo, usando a observação anterior e o fato de que $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ é denso em $\mathrm{Dom}\, H_{\max}^B$, conclui-se que $\tau_N^{A,z}(F^\Omega u) = F^\Omega \tau_N^{B,z}(u)$ para todo $u \in \mathrm{Dom}\, H_{\max}^B$. Note também que, para todo

$u \in \text{Dom}H^B_{\max}$, vale $\hat{\Gamma}_D(F^\Omega u) = F^{\partial\Omega}\hat{\Gamma}_D u$. De fato, verifca-se facilmente que isto vale para $u \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$, o caso geral segue do fato de que $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ é denso em $\text{Dom}H^B_{\max}$.

Tendo em mente estes fatos, para concluirmos a demonstração basta demonstrar que $\text{Dom}\, H^{B,z}_{\mathcal{F}_U} = (F^\Omega)^{-1}\text{Dom}\, H^{A,z}_U$, ou, o que é equivalente, $F^\Omega \text{Dom}\, H^{B,z}_{\mathcal{F}_U} = \text{Dom}\, H^{A,z}_U$. Tome então $u \in \text{Dom}\, H^{B,z}_{\mathcal{F}_U}$; assim, segue que $F^\Omega u \in \text{Dom}\, H^A_{\max}$ e vale, $\tau^{A,z}_N(F^\Omega u) = F^{\partial\Omega}\tau^{B,z}_N(u)$, portanto,

$$
\begin{aligned}
i(\mathbf{1}+U)\tau^{A,z}_N(F^\Omega) &= i(\mathbf{1}+U)F^{\partial\Omega}\tau^{B,z}_N u && (6.10)\\
&= F^{\partial\Omega} i\Big[(\mathbf{1}+(F^{\partial\Omega})^{-1}UF^{\partial\Omega})\Big])\tau^{B,z}_N u && (6.11)\\
&= F^{\partial\Omega}(\mathbf{1}-(F^{\partial\Omega})^{-1}UF^{\partial\Omega})\hat{\Gamma}_D u && (6.12)\\
&= (\mathbf{1}-U)F^{\partial\Omega}\hat{\Gamma}_D u && (6.13)\\
&= (\mathbf{1}-U)\hat{\Gamma}_D(F^\Omega u), && (6.14)
\end{aligned}
$$

e $F^\Omega u \in \text{Dom}\, H^A_U$, logo, $F^\Omega \text{Dom}\, H^{B,z}_{\mathcal{F}_U} \subset \text{Dom}\, H^A_U$. Invertendo o papel de A e B no raciocínio anterior, obtém-se a inclusão oposta, e isto encerra a demonstração. □

Como conseguência direta deste teorema obtemos a seguinte consequência

Corolário 6.1. *Sejam A, B campos vetorias limitados de classe $(\mathrm{W}^1_\infty(\overline{\Omega}))^n$ satisfazendo $B = A + \nabla\Lambda$, com $\Lambda \in \mathrm{W}^2_\infty(\overline{\Omega})$. Então, sobre as mesmas hipóteses do Teorema 6.3, a extensão auto-adjunta $H^{A,z}_U$ de $H^A_{\min}$ é unitariamente equivalente a $H^{B,z}_{(e^{-i\lambda}Ue^{i\lambda})}$, com $\lambda = \gamma_D\Lambda$. De fato,*

$$H^{A,z}_U(e^{i\Lambda}u) = e^{i\Lambda}H^{B,z}_{(e^{-i\lambda}Ue^{i\lambda})}u,$$

para todo $u \in \text{Dom}\, H^{B,z}_{(e^{-i\lambda}Ue^{i\lambda})} = e^{-i\Lambda}\text{Dom}\, H^{A,z}_U$.

Observação 6.4. *Dizemos que dois potenciais magnéticos A e B são classicamente gauge equivalentes se para cada $x \in \Omega$ existe uma função Λ_x, definida numa vizinhança de x, de modo que $B = A + \nabla\Lambda_x$ nessa vizinhança. Isto implica que os potenciais A and B geram o mesmo campo magnético, mas isto não garante que tais A and B são gauge equivalentes no sentido da Definição 6.2. Esta distinção está no cerne do efeito Aharonov-Bohm.*

O resultado a seguir pode ser encontrado em [12] como Proposição 1.1. O enunciado abaixo difere levemente do enunciado daquela proposição como apontarei melhor abaixo.

Teorema 6.5. *Sejam Ω um domínio de Lipschitz limitado e A um campo vetorial em $(\mathrm{W}^1_\infty(\overline{\Omega}))^n$. Denote por H^0_D (operador de Dirichlet associado ao compo vetorial nulo) por $-\triangle_D$ (laplaciano de Dirichlet), e sejam λ_0 e λ_{A0} o primeiro autovalor de $-\triangle_D$ e H^A_D respectivamente. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) $\lambda_0 = \lambda_{A0}$.

ii) A é gauge equivalente a 0.

iii) H^A_D é unitariamente equivalente a $-\triangle_D$.

A demonstração deste resultado é idêntica à da Proposição 1.1 de [12], no entanto este enunciado difere do daquela proposição nos seguintes aspectos: 1) Aqui Ω é suposto ser de Lipschitz e limitado e não, necessariamente, possuir fronteira regular. 2) No enunciado da Proposição 1.1 de [12] é adicionado ao operador H^A um potencial escalar $V(x)$ que diverge no infinito para asseguar que o operador de Dirichlet resultante seja discreto. No nosso caso, isto é uma consequência de Ω ser limitado. 3) Aqui o potencial A está em $(\mathrm{W}^1_\infty(\overline{\Omega}))^n$ e não é regular, como (em princípio) assumido em [12]. O fator principal na demonstração é a seguinte identidade

$$\left\|(\nabla - iA - \frac{\nabla u_0}{u_0})\varphi\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} = ((H^A - \lambda_0)\varphi, \varphi)_{\mathrm{L}^2(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in \mathrm{C}^\infty_0(\Omega),$$

sendo que $u_0(x) > 0$, para todo $x \in \Omega$, é o autovetor associado ao primeiro autovalor λ_0 de $-\Delta_D$, o qual é não degenerado. Esta identidade continua válida sob as hipóteses do Teorema 6.5.

Combinando o Teorema 6.4 com o Teorema 6.5 temos a seguinte contribuição neste contexto.

Teorema 6.6. *Sejam Ω um domínio quase-convexo limitado, A um campo vetorial em $(\mathrm{W}^1_\infty(\overline{\Omega}))^n$ e λ_0 e λ_{A0} o primeiro autovalor de $-\triangle_D$ e H^A_D, respectivamente; fixe $z \in \mathbb{R} \setminus \sigma(H^A_D)$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) $\lambda_0 = \lambda_{A,0}$.

ii) A é gauge equivalente a 0.

iii) Seja $F^\Omega = F^\Omega_{A,0}$ dada por (6.6). *Então para toda aplicação unitária U de $N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, temos,*

$$(F^\Omega)^{-1} H^{A,z}_U F^\Omega \;=\; H^{0,z}_{\mathcal{F}_U} \tag{6.15}$$

(com $\mathcal{F}_U$ dada por (6.8)).

iv) Existem aplicações unitárias U e V em $N^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ tais que

$$\mathcal{J}^{-1} H_U^{A,z} \mathcal{J} \; = \; H_V^{0,z},$$

para um certo $\mathcal{J} : \Omega \to \mathbb{C}$, $\mathcal{J} \in \mathrm{W}^2_\infty(\overline{\Omega})$, e com $|\mathcal{J}(x)| = 1$ para todo $x \in \Omega$.

Demonstração. A equivalência de i) e ii) se deve ao Teorema 6.5. Que ii) implica iii) segue do Teorema 6.4; o fato de que iii) implicar iv) é óbvio. Para ver que iv) implica ii), note que pela observação 2.1, o operador de multiplicação por J leva $H_0^2(\Omega)$ nele próprio, uma vez que $J \in \mathrm{W}^2_\infty(\overline{\Omega})$. Pelo item iv), $\mathcal{J}^{-1} H_U^{A,z} \mathcal{J} = H_V^{0,z}$ e temos,

$$H^0_{\min} u = H_V^{0,z} u = \mathcal{J}^{-1} H_U^{A,z} \mathcal{J} u = \mathcal{J}^{-1} H_{\min}^{A,z} \mathcal{J} u, \qquad \forall u \in H_0^2(\Omega); \tag{6.16}$$

assim, $\mathcal{J}^{-1} H^A_{\min} \mathcal{J} = H^0_{\min}$. Denote $G = \mathcal{J}^{-1}$; então $G : \Omega \to S^1 \subset \mathbb{R}^2$, e G leva $H_0^2(\Omega)$ nele próprio e (6.16) é equivalente a

$$-\triangle(Gu) = GH^A u, \quad \forall u \in H_0^2(\Omega).$$

Em particular,

$$-(G\triangle u + u\triangle G + 2\nabla G \cdot \nabla u) = G\{-\triangle u - 2iA \cdot \nabla u + (|A|^2 - i\,\mathrm{div}A)u\}, \quad \forall u \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega).$$

Assim,

$$u\{\triangle G - (|A|^2 - i\,\mathrm{div}A)G\} = \nabla u \cdot (-2\nabla G - 2iGA), \quad \forall u \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega).$$

Em particular, segue que $\frac{\nabla G}{iG} = -A$, ou, o que é equivalente, $\omega_A = -G^*(\frac{dz}{iz})$ (aqui G^* denota a operação "pullback" através de G). Em particular, ω_A é fechada, e para todo caminho fechado γ em Ω, temos

$$\int_\gamma \omega_A = \int_\gamma -G^*(\frac{dz}{iz}) = \int_{G\gamma} -\frac{dz}{iz} = 2\pi n\,,$$

para um certo $n \in \mathbb{Z}$, e ii) segue. □

Pelo Teorema 6.6 iv), se uma extensão de $H^A_{\min}$ for unitariamente equivalente (através da multiplicação por uma função $\mathcal{J}$) a uma extensão de $-\Delta = H^0$, então o mesmo acontece com cada uma das exensões auto-adjuntas de $H^A_{\min}$. Embora esta observação seja fisicamente esperada, nos parece que não havia, até o momento, uma demonstração matemática na literatura; e dada aqui para um domínio quase-convexo (limitado).

Para o efeito Aharonov-Bohm necessitamos um domínio multiplamente-conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $\operatorname{rot} A = 0$ em Ω (por simplicidade nos restringiremos ao caso de um domínio no plano); por exemplo, um anel quase-convexo (a fronteira interior e exterior dadas por curvas simples e fechadas; a fronteira interior representa um "solenóide" e a exterior uma circunferência, por exemplo, que apenas confina a partícula); então o Teorema 6.6 nos diz que se A não contribui fisicamente no caso de uma certa condição de fronteira, ou ainda, se o primeiro autovalor de Dirichlet para H^A coincide com o de $-\Delta$ (item i)), então A não contribui, fisicamente, para qualquer extensão auto-adjunta de $H^A_{\min}$.

Capítulo 7

Conclusão e apontamentos finais.

O teorema 6.3 fornece uma descrição da familia de todas as extensões auto-adjuntra do operadorH^A_{min} em um domínio quase-convexo. Este teorema parametriza tal familia usando tranformações unitárias definidas no espaço de funções da fronteira, $N^{1/2}(\partial\Omega)$, definido em 4.1. Aplicando tal resultado, obtivemos o teorema 6.4 que mostra como se comportam as extensões auto adjuntas de H^A_{min} quando realizamos uma transformação de gauge do potencial magnético A. Aplicando o teorema 6.4 obtivemos o teorema 6.6 que generaliza a proposição 1.1 de [12] para todas as extensões auto adjuntas de H^A_{min}. O teorema 6.4 fornece um criterio necessário e suficiente para que as extensões auto-adjuntas de H^A_{min} e $-\Delta_{min}$ sejam uniariamente equivalentes através de uma tranformação de gauge (isto é, via uma tranformação unitária de $L^2(\Omega)$ que é dada pela multiplicação por uma função J com $|J(x)| = 1$ para $x \in \Omega$ e $J \in W^2_\infty(\overline{\Omega})$) quando Ω é um domínio quase-convexo limitado. Observamos que o teorema 6.6 pode ser abordano no seguinte contexto: Ω é um domínio quase-convexo não limitado, e considerando o operador $H^{A,V} = (-i\nabla+A)^2+V(x)$ em vez de H^A, onde V é um potencial escalar que diverge quando $|x| \to \infty$. A principal dificuldade técnica para obter uma versão do teorema 6.6 neste contexto é a necessidade de se generalisar o lema 3.3 para esta situação.

Referências Bibliográficas

[1] Adami, R. and Teta, A., (1998) On the Aharonov-Bohm Hamiltonian. Lett. Math. Phys. 43, 43–54.

[2] Aharonov, Y., Bohm, D., (1959) Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. Phys. Rev. 115, 485–491.

[3] Behrndt, J., Micheler, T., (2014) Elliptic differential operator on Lipschitz domains and abstract boundary value problems. J. Funct. Anal. 267, 3657–3709.

[4] Brüning, J., Geyler V., Pankrashkin, K., (2008) Spectra of self-adjoint extensions and applications to solvable Schrödinger operators. Rev. Math. Phys. 20, 1–70.

[5] Costabel, M., Dauge, M., (1998) Un résultat de densité pour les équations de Maxwell régularisées dans un domaine Lipschitzien. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 327, 849–854.

[6] Dabrowski, L. and Šťovíček, P., (1998) Aharonov-Bohm effect with δ-type interaction. J. Math. Phys. 39, 47–62.

[7] Gesztesy, F., Mitrea, M., (2008) Generalized Robin boundary conditions, Robin to Dirichlet maps and Krein-type resolvent fórmulas for Schrödinger operators on bounded Lipschitz domains. Perspectives in partial differential equations, harmonic analysis and applications, 105–173, Proc. Sympos. Pure Math., 79, Amer. Math. Soc., Providence, RI.

[8] Gesztesy, F., Mitrea, M., (2011) A Description of all self-adjoint extensions of the Laplacian and Krein-Type resolvent fórmulas on non-smooth domains. J. Anal. Math. 113, 53–172.

[9] Gilbard, D., Trudinger, N. S., (1998) Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Springer, Berlin.

[10] Grisvard, P., (1985) Boundary Value Problems in Non-Smooth Domains. Pitman, London.

[11] Grubb, G., (1968) A Characterization of non-local boundary value problems associated with an elliptic operator. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) 22, 425–513.

[12] Helffer, B., (1988) Effect d' Aharonov Bohm sur un état borné de l'équation de Schrödinger. Commun. Math. Phys. 119, 315–329.

[13] Jerison, D., Kenig, C., (1995) The inhomogeneous Dirichlet problem in Lipschitz domains. J. Funct. Anal. 130, 161–219.

[14] McLean, W., (2000) Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations. Cambridge Univ. Press, Cambridge.

[15] Mikhailov, E., S., (2013) Solution regularity and co-normal derivatives for elliptic systems with non-smooth coefficients on Lipschitz domains. J. Math. Anal. Appl. 400, 48–67.

[16] Posilicano, A., (2008) Self-adjoint extensions of restrictions. Operators and Matrices 2, 109–147.

[17] Peshkin, M., Tonomura, A., (1989) The Aharonov-Bohm Effect. LNP340, Springer, Berlin.