DM - UFSCar
Bacharelado em Matemática
Trabalho de Conclusão de Curso

Superfícies de Weingarten no Espaço Hiperbólico

Autor: Rafael da Silva Belli

Orientador: Alexandre Paiva Barreto

São Carlos
01/2020

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

Desde o surgimento da definição de superfícies parametrizadas, foi questionado sobre suas propriedades que independem da parametrização. Propriedades essas que caracterizam objetivamente a geometria dessa família facilitando muito a sua compreensão. No século 19, com o aperfeiçoamento da geometria semi-Riemanniana feito por Bernhard Riemann e Carl Friedrich Gauss, foi introduzida na literatura a noção das curvaturas média (H), gaussiana (K) e principais $(k_1, ..., k_{n-1})$ onde $n-1$ é a dimensão da superfície. Essas noções independem da parametrização e são fundamentais na caracterização de uma superfície.

O objetivo desse trabalho é o estudo e a caracterização de superfícies de Weingarten em espaços não triviais como , por exemplo, o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3$, o espaço lorentziano $\mathbb{L}^3$ e o hiperboloide $\mathbb{I}_3$ contido no espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^4$. Definimos uma superfície de Weingarten (de dimensão 2) como uma superfície dotada de uma relação entre suas curvaturas principais k_1 e k_2 dada por $W(k_1, k_2) = 0$. Notemos que essa família generaliza exemplos clássicos de superfícies já estudadas atualmente, como as superfícies mínimas, onde $W(k_1, k_2) = k_1 + k_2$. Esse trabalho terá um enfoque especial no caso em que $W(k_1, k_2) = k_1^2 + k_2^2 + C$, onde C é uma constante real. Que é um caso não linear, um pouco distante da literatura atual.

O segundo capítulo introduz alguns pré-requisitos de geometria Semi-Riemanniana, que serão admitidos como verdade de modo a dar suporte para todos cálculos realizados nos capítulos seguintes. O terceiro capítulo será uma breve introdução ao caso mais natural possível, onde as superfícies serão imersas no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$. O capítulo quatro englobará quase toda a teoria do primeiro capítulo aplicada no espaço hiperbólico, com enfoque nas imersões isométricas de hipersuperfícies e exemplos. O quinto capítulo abrangerá a mesma teoria do primeiro capítulo, agora aplicada no espaço de Lorentz-Minkowiski. Já no sexto capítulo, falaremos de um subconjunto do $\mathbb{L}^4$ que se relaciona com o $\mathbb{H}^3$: O hiperboloide $\mathbb{I}_3$, com muito enfoque, novamente, na teoria de imersões isométricas de hipersuperfícies. Nesse capítulo vamos relacionar os três modelos hiperbólicos de modo a facilitar determinado problema, que talvez possa ser complexo em um determinado modelo mas não em outro. Por fim, vamos estudar o problema de superfícies de Weingarten numa dimensão maior, tratando novamente de um caso bem natural: Superfícies dentro do $\mathbb{R}^4$.

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo, introduziremos conceitos fundamentais de geometria semi-riemanniana que serão de suma importância para a obtenção dos resultados nos capítulos posteriores. Deixando claro que admitiremos como conhecidas as definições de variedades diferenciáveis, planos tangentes e campos diferenciáveis de vetores; chamaremos uma variedade diferenciável simplesmente de variedade; dada uma variedade M chamaremos o conjuntos dos campos vetoriais diferenciáveis em M de $\mathfrak{X}(M)$. Dado $p \in M$, também definimos um (k, r) tensor T como uma transformação r-linear $T : [T_P M]^r \longrightarrow C^\infty(M)$ se $k = 0$ ou $T : [T_P M]^r \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ se $k = 1$.

2.1 Métrica Semi-Riemanniana

Definição 2.1.1 *Uma métrica semi-Riemanniana g, é um $(0, 2)$ tensor simétrico em uma variedade diferenciável que varia diferenciavelmente. Ou seja temos que uma métrica semi-Riemanniana uma função $g : T_p M \times T_p M \longrightarrow C^\infty(M)$ tal que $g(X, Y) = g(Y, X)$*

Com isso, chamamos uma variedade M munida de uma métrica semi-riemanniana g de variedade semi-riemanniana. Observemos que se $g(v, v) \geq 0$ e $g(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$ para todo $v \in T_P M$, então g será um produto interno e nomeado por métrica-riemanniana e o par (M, g), chamado de variedade riemanniana. Podemos também classificar os vetores de uma variedade semi-riemanniana M de acordo com sua relação com g :

1. spacelike se $g(v, v) > 0$ ou $v = 0$,
2. null se $g(v, v) = 0$ e $v \neq 0$,
3. timelike (ou lightlike) se $g(v, v) < 0$.

Pode-se demonstrar que uma base ortogonal admite um, e somente um vetor timelike. Pode-se provar também que uma variedade M, sempre admite uma métrica riemanniana g. Portanto, de agora em diante, vamos trabalhar sempre com variedades semi-riemannianas da forma (M, g), mas iremos chamá-las apenas de variedades e, sempre que não houver confusão, denotá-las apenas por M.

Dentre todos os campos vetoriais suaves em M destacaremos um que será crucial para o desenvolvimento da geometria das variedades: O campo conexão afim.

Definição 2.1.2 *Uma conexão afim em uma variedade M é uma aplicação $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ que se indica por $(X, Y) \overset{\nabla}{\longmapsto} \nabla_X Y$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_y Z$,
2. $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,
3. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X(Y) + X(f)Y$,

onde $X, Y, Z \in \chi(M)$ e $f, g \in C^\infty(M)$.

Note que, dados dois campos vetoriais $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Podemos tomar o seguinte campo vetorial $[X, Y] : M \longrightarrow TM$ onde $([X, Y](p))(f) = X(p)(Y(p)(f)) - Y(p)(X(p)(f))$ e o chamamos de campo colchete. Dada uma variedade M .Uma conexão afim ∇ é dita ser Levi-Civita se $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ e $X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Pode-se provar, também, que dada uma variedade M, existe uma única conexão afim ∇ que é Levi-Civita.

Segue disso que trataremos sempre uma variedade M como o terna (M, g, ∇) onde g e ∇ são a métrica semi-riemanniana e a conexão Levi-Civita de M respectivamente. Mas denotaremos a terna simplesmente por M.

Observação 2.1.3 *Pode mostrar que, numa carta local, a conexão Levi-Civita ∇ de uma variedade Semi-Riemanniana M é da seguinte forma:*

$$(\nabla_X Y)(p) = \sum_k \left(\sum_{i,j} x_i(p) y_j(p) \Gamma^k_{i,j}(p) + X(p)(y_k) \right) \partial_k(p).$$

onde $\{\partial_k\}_{k=1}^n$ é base de T_pM, $X(p) = \sum_i x_i(p)\partial_i(p)$, $Y(p) = \sum_j y_j(p)\partial_j(p)$ e:

$$\Gamma^m_{i,j}(p) = \frac{1}{2} \sum_k \{\partial_i(g_{jk}) + \partial_j(g_{ki}) - \partial_k(g_{ij})\} g^{km}.$$

onde $(g_{ij}) = (g(\partial_i, \partial_j))$ e $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ são a matriz da métrica e sua inversa, respectivamente.

2.2 Curvaturas

Nesta seção vamos introduzir alguns conceitos que nos ajudarão entender como uma variedade se comporta. Abordaremos aqui o tensor curvatura, as curvaturas seccional, de Ricci e escalar.

Definição 2.2.1 *Definimos o tensor curvatura como $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ onde:*

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_X(\nabla_Y Z) + \nabla_{[X,Y]}Z.$$

Como $R(X,Y)Z$ é um campo, gostaríamos de saber suas coordenadas locais na base $\{\partial_k\}_{k=1}^n$. Pode-se provar que elas são dadas por:

$$(R(X,Y)Z)(p) = \sum_{i,j,k,l} R^l_{i,j,k} u^i(p) v^j(p) w^k(p) \partial_l(p).$$

onde $X(p) = \sum_i u^i(p)\partial_i(p)$, $Y(p) = \sum_j v^j(p)\partial_j(p)$, $Z(p) = \sum_k w^k(p)\partial_k(p)$ e:

$$R^s_{i,j,k} = \sum_l \Gamma^l_{i,k}\Gamma^s_{j,l} - \sum_l \Gamma^l_{j,k}\Gamma^s_{i,l} + \partial_j(\Gamma^s_{i,k}) - \partial_i(\Gamma^s_{j,k}).$$

Agora, dado $\sigma \subset T_pM$ um subespaço de dimensão dois de T_pM e sejam $x, y \in \sigma$ dois vetores linearmente independentes. Gostaríamos de estudar o seguinte quociente:

$$\frac{g(R(x,y)x,y)}{|x \wedge y|^2}.$$

Pode-se provar que o quociente acima não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$.Segue disso que podemos definir a curvatura seccional de um subespaço bi-dimensional σ, como:

$$K(\sigma) = K(x,y) = \frac{g(R(x,y)x,y)}{|x \wedge y|^2}.$$

Para as próximas duas curvaturas considere $x \in T_pM$ um vetor unitário, tomemos uma base ortonormal $\{z_1, ..., z_{n-1}\}$ do hiperplano de T_pM ortogonal a x. Segue dissoque podemos definir também as curvaturas de Ricci e Escalar, respectivamente por:

$$Ric_p(x) = \frac{1}{n-1} \sum_i g(R(x,z_i)x,z_i), \qquad i = 1, ..., n-1.$$
$$Esc(p) = \frac{1}{n} \sum_j Ric_p(z_j) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j} g(R(z_i,z_j)z_i,z_j), \qquad j = 1, ..., n.$$

2.3 Imersões Isométricas (Hipersuperfícies)

Aqui vamos estudar variedades imersas isometricamente em outras. Veremos algumas propriedades, focando no caso que a variedade imersa é uma hipersuperfície. E disso obteremos mais conceitos que nos ajudaram a caracterizá-las. Iremos tratar a variedade imersa por (M, g, ∇) ; e a variedade na qual M for imersa, por $\left(\bar{M}, \bar{g}, \bar{\nabla}\right)$, mas, sempre que não houver confusão, as denotaremos apenas por M e $\bar{M}$, respectivamente. E denotaremos a expressão "imerso em"pelo símbolo $\hookrightarrow$. Denotemos por $(T_pM)^{\perp}$ o subespaço de $T_p\bar{M}$ ortogonal a T_pM.

Definição 2.3.1 *Dizemos que uma variedade de dimensão n M está imersa isometricamente em uma variedade de dimensão n+k $\bar{M}$ se existir uma imersão $f : M \longrightarrow \bar{M}$ tal que $x, y \in T_pM$ implica que $g(x, y) = \bar{g}(df_p.x, df_p.y)$.No caso em que $k = 1$, temos a imersão $f : M^n \longrightarrow M^{n+1}$ e temos que $f(M^n)$ é denominada hipersuperfície.*

Agora vamos trabalhar com um operador que a partir do mesmo, obteremos as curvaturas mais estudadas na literatura atual, a gaussiana, a média e as principais.

Definição 2.3.2 *Seja $M \hookrightarrow \bar{M}$ e sejam $p \in M$, $x \in T_pM$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$. Seja N uma extensão local de η normal a M. Definimos a aplicação S_η da seguinte forma:*

$$S_\eta : x \in T_pM \mapsto -\left(\bar{\nabla}_x N\right)^T \in T_pM.$$

Agora iremos tratar apenas dos casos em que M é uma hipersuperfície de $\bar{M}$. Seja $p \in T_pM$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$ um vetor unitário. Como S_η é uma transformação linear auto-adjunta, segue que existe uma base ortonormal de autovetores $\{e_i\}_{i=1}^n$. No caso de hipersuperfície e da imposição de orientações para M e $\bar{M}$ temos que η fica univocamente determinado. Portanto temos apenas uma S_η, segue disso as seguintes definições:

Definição 2.3.3 *Das observações acima podemos definir as curvaturas principais de uma hipersuperfície M como os λ_i's tais que $S_\eta(e_i) = \lambda_i e_i$, $i = 1, ..., n$; definimos a curvatura Gaussiana de uma hipersuperfície como $\det([S_\eta]) = \lambda_1 ... \lambda_n$; por fim, definimos a curvatura Média de uma hipersuperfície de dimensão n como $\frac{Tr([S_\eta])}{n} = \frac{\lambda_1 + ... + \lambda_n}{n}$.*

Capítulo 3

Superfícies no Euclidiano

Esse capítulo será utilizado como uma pequena amostra do que será feito nos capítulos posteriores, em ambientes menos triviais e menos explorados na literatura atual. Aqui iremos mostrar algumas propriedades do espaço euclidiano $\left(\mathbb{R}^3, g\right)$,onde g é a métrica canônica, ou seja, se $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$:

$$g\left(v, w\right) = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3.$$

Nesse capítulo e nos próximos, para fins de simplificação, cada operador calculado de determinada variedade, se não houver ambiguidade, não será indexado com a nomenclatura da variedade, basta apenas observarmos o contexto para descobrirmos sobre qual variedade determinado operador se refere. Por exemplo: As curvaturas gaussianas do $\mathbb{R}^3$ e do $\mathbb{H}^3$ serão ambas denotadas por K.

3.0.1 Conexão Levi-Civita e Curvaturas

Como a métrica canônica do $\mathbb{R}^3$ não depende do ponto em questão e pela fórmula dos símbolos de Christoffel, segue que :

$$\Gamma^m_{i,j}(p) = \frac{1}{2}\sum_k \left\{\partial_i\left(g_{jk}\right) + \partial_j\left(g_{ki}\right) - \partial_k\left(g_{ij}\right)\right\} g^{km} = 0.$$

Como os símbolos de Christoffel são todos nulos, segue que :

$$\left(\nabla_X Y\right)(p) = \sum_k \left(\sum_{i,j} x_i(p) y_j(p) \Gamma^k_{i,j}(p) + X(p)(y_k)\right)\partial_k(p) = \sum_k \left(X(p)(y_k)\right)\partial_k(p) = dY_p\left(X(p)\right).$$

Como os símbolos de Christoffel são todos nulos, segue que :

$$R^s_{i,j,k} = \sum_l \Gamma^l_{i,k}\Gamma^s_{j,l} - \sum_l \Gamma^l_{j,k}\Gamma^s_{i,l} + \partial_j(\Gamma^s_{i,k}) - \partial_i(\Gamma^s_{j,k}) = 0.$$

E portanto a curvatura escalar é nula. Segue diretamente das fórmulas das curvaturas seccional, de Ricci, escalar e do fato de que $R \equiv 0$ que todas essas outras curvaturas sitadas são nulas também.

3.0.2 Imersões Isométricas

Nosso primeiro objetivo é encontrar a matriz de S_η. Após isso, calcularemos seu determinante e seu traço determinando as curvaturas gaussiana e média.

Dada uma imersão $x : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e sendo $\{x_u(p), x_v(p)\}$ base de $T_{x(p)}\mathbb{R}^3$ onde $x_u(p) = dx_p.e_1$ e $x_v(p) = dx_p.e_2$, segue que:

$$N(p) = \frac{x_u(p) \wedge x_v(p)}{\|x_u(p) \wedge x_v(p)\|}.$$

Como $||N|| \equiv 1$ e pela compatibilidade da conexão com a métrica, segue que:

$$0 = y(1) = y\left(g(N, N)\right) = 2g(\bar{\nabla}_y N, N).$$

Concluímos que $\bar{\nabla}_y N \in T_pM$ para todo $y \in T_pM$. Portanto temos que $S_\eta(y) = -\left(\bar{\nabla}_y N\right)^T = -\bar{\nabla}_y N$.

Dada uma imersão $x : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$, seja $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\alpha(t) = x(u(t), v(t))$ uma curva em $x(S)$ com $\alpha(0) = p$.Temos que pela regra da cadeia $\alpha' = x_u u' + x_v v'$ e $dN(\alpha') = [N(u(t), v(t))]' = N_u u' + N_v v'$.

Acabamos de ver que $\left(\bar{\nabla}_{\alpha'} N\right) \in T_pM$, segue disso que $N_u, N_v \in T_pM$. Portanto:

$$\begin{aligned} N_u &= a_{11} x_u + a_{21} x_v. \\ N_v &= a_{12} x_u + a_{22} x_v. \end{aligned}$$

Assim segue que:

$$\begin{aligned} dN(\alpha') &= \left(a_{11} x_u + a_{21} x_v\right) u' + \left(a_{12} x_u + a_{22} x_v\right) v' \\ &= \left(u' a_{11} + v' a_{12}\right) x_u + \left(u' a_{21} + v' a_{22}\right) x_v. \end{aligned}$$

Assim, na base $\{x_u, x_v\}$ obtemos o seguinte resultado:

$$dN \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Ou seja, a matriz de dN na base $\{x_u, x_v\}$ é (a_{ij}). Agora denotando:

$$\begin{aligned} e &:= -g\left(N_u, x_u\right) = g\left(N, x_{uu}\right), \\ f &:= -g\left(N_v, x_u\right) = g\left(N, x_{uv}\right) = g\left(N, x_{vu}\right) = -g\left(N_u, x_v\right), \\ g &:= -g\left(N_v, x_v\right) = g\left(N, x_{vv}\right), \\ E &:= g\left(x_u, x_u\right), \\ F &:= g\left(x_u, x_v\right), \\ G &:= g\left(x_v, x_v\right). \end{aligned}$$

Temos as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} -f &= g\left(N_u, x_v\right) = g\left(a_{11} x_u + a_{21} x_v, x_v\right) = a_{11} F + a_{21} G, \\ -f &= g\left(N_v, x_u\right) = g\left(a_{12} x_u + a_{22} x_v, x_u\right) = a_{12} E + a_{22} F, \\ -e &= g\left(N_u, x_u\right) = a_{11} E + a_{21} F, \\ -g &= g\left(N_v, x_v\right) = a_{12} F + a_{22} G. \end{aligned}$$

Podemos reescrever da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \\ &= -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{G}{GE-F^2} & -\frac{F}{GE-F^2} \\ -\frac{F}{GE-F^2} & \frac{E}{GE-F^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{(Ge-Ff)}{GE-F^2} & -\frac{fE-Fe}{GE-F^2} \\ \frac{(Fg-Gf)}{GE-F^2} & -\frac{gE-Ff}{GE-F^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por fim, conseguimos encontrar a matriz de S_η na base $\{x_u, x_v\}$ temos que $(S_\eta) = -(dN)$, ou seja:

$$(S_\eta) = \begin{pmatrix} \frac{(Ge-Ff)}{GE-F^2} & \frac{fE-Fe}{GE-F^2} \\ \frac{(Gf-Fg)}{GE-F^2} & \frac{gE-Ff}{GE-F^2} \end{pmatrix}.$$

Já temos ferramentas suficientes para calcular as curvaturas gaussiana e média. Temos que:

$$\begin{aligned} K &= \det\left[S_\eta\right] = \frac{ge - f^2}{GE - F^2} = k_1 k_2, \\ H &= \frac{Tr\left(\left[S_\eta\right]\right)}{2} = \frac{1}{2} \frac{(gE + Ge - 2Ff)}{(GE - F^2)} = \frac{1}{2}\left(k_1 + k_2\right). \end{aligned}$$

Nosso objetivo final, nesta seção, é o cálculo das curvaturas principais, ou seja, os autovalores da aplicação S_η. Ou seja, se k é autovalor de S_η e v é um autovetor subordinado a k, segue que $(S_\eta)(v) = kI(v) \Rightarrow (S_\eta - kI)(v) = 0$. Como não queremos $v = 0$, devemos exigir que:

$$\begin{aligned}\det(S_\eta - kI) &= \det\begin{pmatrix} -a_{11}-k & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22}-k \end{pmatrix} \\ &= k^2 + (a_{11}+a_{22})k + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \\ &= k^2 + 2Hk + K = 0.\end{aligned}$$

Logo as raízes desse polinômio são os autovalores de S_η, ou seja, são as curvaturas principais:

$$\begin{aligned}k_1 &= H + \sqrt{H^2 - K}, \\ k_2 &= H - \sqrt{H^2 - K}.\end{aligned}$$

3.1 Exemplos

O objetivo desses exemplos é verificar, como são as curvaturas de determinadas superfícies imersas no $\mathbb{R}^3$.

Para isso, iniciaremos explicitando a parametrização X da superfície em questão. Após isso vamos calcular os campos X_s e X_t nos habilitando, assim, à calcular os coeficientes E, F, G e o campo normal N. Continuaremos com o cálculo das segundas derivadas X_{ss}, X_{st} e X_{tt}, com isso conseguiremos calcular os coeficientes e, f e g. Com todos os coeficientes calculados, estaremos aptos à encontrar as curvaturas gaussiana e média. Por fim, utilizando a expressão das curvaturas principais em termos de K e H, ou por observação, concluiremos quais são as curvaturas principais da superfície.

3.1.1 Esfera de Centro (a,b,c) e Raio r

Temos que, uma esfera de centro (a, b, c) e raio r é parametrizada da seguinte forma:

$$X(s,t) = (a + r\cos(s)\sin(t), b + r\sin(s)\sin(t), c + r\cos(t)).$$

Vamos calcular as curvaturas gaussiana e média da esfera. Comecemos com as derivadas de X :

$$X_s = (-r\sin(s)\sin(t), r\cos(s)\sin(t), 0) \qquad X_t = (r\cos(s)\cos(t), r\sin(s)\cos(t), -r\sin(t)).$$

Já estamos aptos a encontrar E, F e G :

$$E = g(X_s, X_s) = (-r\sin(s)\sin(t))^2 + (r\cos(s)\sin(t))^2 = r^2\sin^2 t,$$

$$F = g(X_s, X_t) = -r\sin(s)\sin(t)r\cos(s)\cos(t) + r\cos(s)\sin(t)r\sin(s)\cos(t) = 0,$$

$$G = g(X_t, X_t) = (r\cos(s)\cos(t))^2 + (r\sin(s)\cos(t))^2 + (-r\sin(t))^2 = r^2.$$

Com X_s e X_t encontrados, podemos calcular também o campo normal à esfera:

$$\begin{aligned}X_s \wedge X_t &= \begin{pmatrix} -r\sin(t)r\cos(s)\sin(t) \\ -r\sin(s)\sin(t)r\sin(t), \\ -r\sin(s)\sin(t)r\sin(s)\cos(t) - r\cos(s)\sin(t)r\cos(s)\cos(t) \end{pmatrix} \\ &= \left(-r^2\sin^2 t\cos s, -r^2\sin^2 t\sin s, -r^2\sin t\cos t\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|X_s \wedge X_t\| &= \sqrt{\left(-r^2\sin^2 t\cos s\right)^2 + \left(-r^2\sin^2 t\sin s\right)^2 + \left(-r^2\sin t\cos t\right)^2} \\ &= \sqrt{r^4\cos^2 s\sin^4 t + r^4\cos^2 t\sin^2 t + r^4\sin^2 s\sin^4 t} = r^2\sin t,\end{aligned}$$

$$N = \frac{X_s \wedge X_t}{\|X_s \wedge X_t\|} = \left(\frac{-r^2\sin^2 t\cos s}{r^2\sin t}, \frac{-r^2\sin^2 t\sin s}{r^2\sin t}, \frac{-r^2\sin t\cos t}{r^2\sin t}\right) = (-\sin t\cos s, -\sin t\sin s, -\cos t).$$

Com o campo normal encontrado, nos resta calcular os coeficientes X_{ss}, X_{ts} e X_{tt}, para podermos, por fim encontrar e, f e g :

$$\begin{aligned}
X_{ss} &= (-r\cos s\sin t, -r\sin s\sin t, 0)\,, \\
X_{ts} &= (-r\sin s\cos t, r\cos s\cos t, 0)\,, \\
X_{tt} &= (-r\cos s\sin t, -r\sin s\sin t, -r\cos t)\,.
\end{aligned}$$

Agora estamos aptos à calcular os últimos coeficientes, e, f e g :

$$e = g(N, X_{ss}) = (-\sin t\cos s)(-r\cos s\sin t) + (-\sin t\sin s)(-r\sin s\sin t) = r\left(\sin^2 t\right),$$

$$f = g(N, X_{st}) = (-\sin t\cos s)(-r\sin s\cos t) + (-\sin t\sin s)(r\cos s\cos t) = 0,$$

$$g = g(N, X_{tt}) = (-\sin t\cos s)(-r\cos s\sin t) + (-\sin t\sin s)(-r\sin s\sin t) + (-\cos t)(-r\cos t) = r.$$

Com os coeficientes todos calculados, podemos enfim obter as curvaturas gaussiana e média da esfera:

$$K = \frac{ge - f^2}{GE - F^2} = \frac{rr\left(\sin^2 t\right)}{r^2 r^2 \sin^2 t} = \frac{1}{r^2} \qquad , \qquad H = \frac{1}{2}\frac{(gE + Ge - 2Ff)}{(GE - F^2)} = \frac{1}{r}.$$

Como $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ e $K = k_1 k_2$. Dos resultados acima é fácil concluir quais são as curvaturas principais da esfera:

$$k_1 = \frac{1}{r} \qquad , \qquad k_2 = \frac{1}{r}.$$

3.1.2 Gráfico de função

Como a métrica g do $\mathbb{R}^3$ independe da escolha do ponto e, portanto de cada uma de suas coordenadas, podemos supor, sem perda de generalidade, que a a função h em questão sairá do plano XY. Logo, a parametrização que iremos trabalhar é:

$$X(s,t) = (s, t, h(s,t)).$$

Vamos calcular as curvaturas dessa família. Temos que as derivadas de X são dadas por:

$$X_s = (1, 0, h_s) \qquad , \qquad X_t = (0, 1, h_t)\,.$$

Já estamos aptos a encontrar E, F e G :

$$E = g(X_s, X_s) = h_s^2 + 1,$$

$$F = g(X_s, X_t) = h_s h_t,$$

$$G = g(X_t, X_t) = h_t^2 + 1.$$

Com X_s e X_t encontrados, podemos calcular também o campo normal ao gráfico:

$$X_s \wedge X_t = (-h_s, -h_t, 1)\,,$$

$$||X_s \wedge X_t|| = \sqrt{h_s^2 + h_t^2 + 1},$$

$$N = \frac{X_s \wedge X_t}{||X_s \wedge X_t||} = \left(-\frac{h_s}{\sqrt{h_s^2 + h_t^2 + 1}}, -\frac{h_t}{\sqrt{h_s^2 + h_t^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{h_s^2 + h_t^2 + 1}}\right).$$

Com o campo normal encontrado, nos resta calcular os coeficientes X_{ss}, X_{ts} e X_{tt}, para podermos, por fim encontrar e, f e g :

$$X_{ss} = (0, 0, h_{ss}) \qquad , \qquad X_{st} = (0, 0, h_{st}) \qquad , \qquad X_{tt} = (0, 0, h_{tt})\,.$$

Agora estamos aptos à calcular os últimos coeficientes, e, f e g :

$$e = g(N, X_{ss}) = \frac{h_{ss}}{\sqrt{h_s^2 + h_t^2 + 1}},$$

$$f = g(N, X_{st}) = \frac{h_{st}}{\sqrt{h_s^2 + h_t^2 + 1}},$$

$$g = g(N, X_{tt}) = \frac{h_{tt}}{\sqrt{h_s^2 + h_t^2 + 1}}.$$

Com os coeficientes todos calculados, podemos enfim obter as curvaturas gaussiana e média do gráfico:

$$K = \frac{ge - f^2}{GE - F^2} = \frac{\left(\frac{h_{ss}}{\sqrt{h_s^2+h_t^2+1}}\right)\left(\frac{h_{tt}}{\sqrt{h_s^2+h_t^2+1}}\right) - \left(\frac{h_{st}}{\sqrt{h_s^2+h_t^2+1}}\right)^2}{\left(h_s^2+1\right)\left(h_t^2+1\right) - \left(h_s h_t\right)^2} = \frac{h_{ss}h_{tt} - h_{st}^2}{\left(h_s^2 + h_t^2 + 1\right)^2},$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\frac{(gE + Ge - 2Ff)}{(GE - F^2)} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\left(\frac{h_{tt}}{\sqrt{h_s^2+h_t^2+1}}\right)\left(h_s^2+1\right) + \left(\frac{h_{ss}}{\sqrt{h_s^2+h_t^2+1}}\right)\left(h_t^2+1\right) - 2\left(\frac{h_{st}}{\sqrt{h_s^2+h_t^2+1}}\right)\left(h_s h_t\right)}{\left(h_s^2+1\right)\left(h_t^2+1\right) - \left(h_s h_t\right)^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{h_{tt}\left(h_s^2+1\right) + h_{ss}\left(h_t^2+1\right) - 2h_{st}\left(h_s h_t\right)}{\left(h_s^2 + h_t^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}}}\right). \end{aligned}$$

Usando as expressões das curvaturas principais, obtemos que:

$$k_1 = \frac{\Upsilon + \sqrt{\Delta}}{2\left(h_s^2 + h_t^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad , \qquad k_2 = \frac{\Upsilon - \sqrt{\Delta}}{2\left(h_s^2 + h_t^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Onde Δ e Υ são dados pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \Upsilon &= h_{tt}\left(h_s^2+1\right) + h_{ss}\left(h_t^2+1\right) - 2h_{st}\left(h_s h_t\right), \\ \Delta &= \left(h_{tt}\left(h_s^2+1\right) + h_{ss}\left(h_t^2+1\right) - 2h_{st}\left(h_s h_t\right)\right)^2 - \left(4h_{ss}h_{tt} - 4h_{st}^2\right)\left(h_s^2 + h_t^2 + 1\right). \end{aligned}$$

3.1.3 Superfície Helicoidal

Pelo mesmo motivo da parametrização anterior, vamos supor uma superfície helicoidal com relação ao eixo z. Definimos uma superfície helicoidal com relação ao eixo z e inclinação h, uma superfície que admite a seguinte parametrização:

$$X(s,t) = (s\cos t, s\sin t, \lambda(s) + ht) \;\; , \; \lambda \in C^2 \; , \; h \in \mathbb{R}.$$

Temos que:

$$X_s = (\cos t, \sin t, \lambda') \qquad , \qquad X_t = (-s\sin t, s\cos t, h)$$

Já estamos aptos a encontrar E, F e G :

$$E = g(X_s, X_s) = \cos^2 t + \sin^2 t + (\lambda')^2 = (\lambda')^2 + 1,$$

$$F = g(X_s, X_t) = -s\sin t\cos t + s\cos t\sin t + h\lambda' = h\lambda',$$

$$G = g(X_t, X_t) = (-s\sin t)^2 + (s\cos t)^2 + h^2 = s^2 + h^2.$$

Com X_s e X_t encontrados, podemos calcular também o campo normal à superfície helicoidal:

$$X_s \wedge X_t = (h\sin t - s\lambda'\cos t, -s\lambda'\sin t - h\cos t, s\cos t\cos t + s\sin t\sin t) = (h\sin t - s\lambda'\cos t, -s\lambda'\sin t - h\cos t, s),$$

$$||X_s \wedge X_t|| = \sqrt{(h\sin t - s\lambda'\cos t)^2 + (-s\lambda'\sin t - h\cos t)^2 + s^2} = \sqrt{h^2 + s^2(\lambda')^2 + s^2},$$

$$N = \frac{X_s \wedge X_t}{||X_s \wedge X_t||} = \left(\frac{h\sin t - s\lambda'\cos t}{\sqrt{h^2 + s^2(\lambda')^2 + s^2}}, -\frac{s\lambda'\sin t + h\cos t}{\sqrt{h^2 + s^2(\lambda')^2 + s^2}}, \frac{s}{\sqrt{h^2 + s^2(\lambda')^2 + s^2}}\right).$$

Com o campo normal encontrado, nos resta calcular os coeficientes X_{ss}, X_{ts} e X_{tt}, para podermos, por fim encontrar e, f e g :

$$X_{ss} = (0, 0, \lambda''), \qquad X_{st} = (-\sin t, \cos t, 0), \qquad X_{tt} = (-s\cos t, -s\sin t, 0).$$

Agora estamos aptos à calcular os últimos coeficientes, e, f e g :

$$e = g(N, X_{ss}) = \frac{s\lambda''}{\sqrt{h^2 + s^2(\lambda')^2 + s^2}},$$

$$f = g(N, X_{st}) = \left(\frac{h\sin t - s\lambda'\cos t}{\sqrt{h^2 + s^2(\lambda')^2 + s^2}}\right)(-\sin t) + \left(-\frac{s\lambda'\sin t + h\cos t}{\sqrt{h^2 + s^2(\lambda')^2 + s^2}}\right)(\cos t) = -\frac{h}{\sqrt{h^2 + s^2(\lambda')^2 + s^2}},$$

$$g = g(N, X_{tt}) = \left(\frac{h\sin t - s\lambda'\cos t}{\sqrt{h^2 + s^2(\lambda')^2 + s^2}}\right)(-s\cos t) + \left(-\frac{s\lambda'\sin t + h\cos t}{\sqrt{h^2 + s^2(\lambda')^2 + s^2}}\right)(-s\sin t) = \frac{s^2\lambda'}{\sqrt{h^2 + s^2(\lambda')^2 + s^2}}.$$

Com os coeficientes todos calculados, podemos enfim obter as curvaturas gaussiana e média da superfície helicoidal:

$$K = \frac{ge - f^2}{GE - F^2} = \frac{\left(\frac{s\lambda''}{\sqrt{h^2+s^2(\lambda')^2+s^2}}\right)\left(\frac{s^2\lambda'}{\sqrt{h^2+s^2(\lambda')^2+s^2}}\right) - \left(-\frac{h}{\sqrt{h^2+s^2(\lambda')^2+s^2}}\right)^2}{\left((\lambda')^2 + 1\right)(s^2 + h^2) - (h\lambda')^2} = \frac{s^3\lambda'\lambda'' - h^2}{(h^2 + s^2(\lambda')^2 + s^2)^2},$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\frac{(gE + Ge - 2Ff)}{(GE - F^2)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\left(\left(\frac{s^2\lambda'}{\sqrt{h^2+s^2(\lambda')^2+s^2}}\right)\left((\lambda')^2 + 1\right) + \left(s^2 + h^2\right)\left(\frac{s\lambda''}{\sqrt{h^2+s^2(\lambda')^2+s^2}}\right) - 2\left(h\lambda'\right)\left(-\frac{h}{\sqrt{h^2+s^2(\lambda')^2+s^2}}\right)\right)}{\left((\lambda')^2 + 1\right)(s^2 + h^2) - (h\lambda')^2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{s^2\lambda'\left((\lambda')^2 + 1\right) + s\lambda''\left(s^2 + h^2\right) + 2h^2\lambda'}{(h^2 + s^2(\lambda')^2 + s^2)^{\frac{3}{2}}}\right). \end{aligned}$$

Usando as expressões das curvaturas principais, obtemos que:

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{\Upsilon + \sqrt{\Delta}}{2\left(h^2 + s^2(\lambda')^2 + s^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \\ k_2 &= \frac{\Upsilon - \sqrt{\Delta}}{2\left(h^2 + s^2(\lambda')^2 + s^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Onde Δ e Υ são dados pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \Upsilon &= s^2\lambda'\left((\lambda')^2 + 1\right) + s\lambda''\left(s^2 + h^2\right) + 2h^2\lambda', \\ \Delta &= \left(s^2\lambda'\left((\lambda')^2 + 1\right) + s\lambda''\left(s^2 + h^2\right) + 2h^2\lambda'\right)^2 - \left(4s^3\lambda'\lambda'' - 4h^2\right)\left(h^2 + s^2(\lambda')^2 + s^2\right). \end{aligned}$$

Teorema 3.1.1 *As superfícies helicoidais com curvatura gaussiana nula* ($K = 0$) *são dadas pela seguinte parametrização:*

$$X(s,t) = (s\cos t, s\sin t, C) \;, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Prova. De fato, supondo essa equação satisfeita, segue que:

$$\frac{s^3\lambda'\lambda'' - h^2}{\left(h^2 + s^2(\lambda')^2 + s^2\right)^2} = K = 0.$$

Segue que apenas o numerador, ou seja:

$$s^3\lambda'\lambda'' - h^2 = 0 \Rightarrow \lambda'\lambda'' = \frac{h^2}{s^3}.$$

Integrando ambos os lados em s obtemos:

$$\frac{(\lambda')^2}{2} = -\frac{h^2}{2s^2} \Rightarrow (\lambda')^2 = -\frac{h^2}{s^2}.$$

Segue dessa equação que não há superfície heicoidal com $K = 0$ à não que sua inclinação seja nula, ou seja, $h = 0$. Nesse caso, temos:

$$\lambda' = 0.$$

Integrando novamente em s, obtemos:

$$\lambda(s) = C.$$

Segue disso que a família de superfcíes com curvatura gaussiana nula tem a seguinte parametrização:

$$X(s,t) = (s\cos t, s\sin t, C)\,, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

■

3.1.4 Superfície de Revolução

Sem perda de generalidade, podemos supor que a revolução é em torno do eixo z.

Seja $\gamma(s) = (x(s), z(s))$ uma curva diferenciável parametrizada pelo comprimento de arco euclidiano e $x(s) > 0$ contida no plano XZ. Então uma superfície de revolução (em torno do eixo z) é parametrizada da seguinte maneira:

$$X(s,t) = (x(s)\cos t, x(s)\sin t, z(s))\,.$$

Vejamos como são dadas as curvaturas dessa família. As derivadas de X são dadas por:

$$X_s = (x'\cos t, x'\sin t, z') \qquad , \qquad X_t = (-x\sin t, x\cos t, 0)$$

Já estamos aptos a encontrar E, F e G :

$$E = g(X_s, X_s) = (x'\cos t)^2 + (x'\sin t)^2 + (z')^2 = (x')^2 + (z')^2 = 1,$$

$$F = g(X_s, X_t) = -x\,(\sin t)\,x'\cos t + x'\,(\sin t)\,x\cos t = 0,$$

$$G = g(X_t, X_t) = (-x\sin t)^2 + (x\cos t)^2 = x^2.$$

Com X_s e X_t encontrados, podemos calcular também o campo normal à superfície de revolução:

$$X_s \wedge X_t = (-z'x\cos t, -xz'\sin t, x'\cos t\,(x\cos t) - x'\sin t\,(-x\sin t)) = (-xz'\cos t, -xz'\sin t, xx')\,,$$

$$||X_s \wedge X_t|| = \sqrt{(-xz'\cos t)^2 + (-xz'\sin t)^2 + (xx')^2} = \sqrt{x^2\left((x')^2 + (z')^2\right)} = x,$$

$$N = \frac{X_s \wedge X_t}{||X_s \wedge X_t||} = \frac{1}{x}\,(-xz'\cos t, -xz'\sin t, xx') = (-z'\cos t, -z'\sin t, x')\,.$$

Com o campo normal encontrado, nos resta calcular os coeficientes X_{ss}, X_{ts} e X_{tt}, para podermos, por fim encontrar e, f e g :

$$X_{ss} = (x'' \cos t, x'' \sin t, z'') , \qquad X_{st} = (-x' \sin t, x' \cos t, 0) , \qquad X_{tt} = (-x \cos t, -x \sin t, 0) .$$

Agora estamos aptos à calcular os últimos coeficientes, e, f e g :

$$e = g(N, X_{ss}) = (-z' \cos t)\,(x'' \cos t) + (-z' \sin t)\,(x'' \sin t) + (x')\,(z'') = x'z'' - x''z',$$

$$f = g(N, X_{st}) = (-z' \cos t)\,(-x' \sin t) + (-z' \sin t)\,(x' \cos t) = 0,$$

$$g = g(N, X_{tt}) = (-z' \cos t)\,(-x \cos t) + (-z' \sin t)\,(-x \sin t) = xz'.$$

Com os coeficientes todos calculados, podemos enfim obter as curvaturas gaussiana e média da superfície de revolução:

$$K = \frac{ge - f^2}{GE - F^2} = \frac{(x'z'' - x''z')\,z'}{x},$$

$$H = \frac{1}{2}\frac{(gE + Ge - 2Ff)}{(GE - F^2)} = \frac{1}{2}\frac{xz' + x^2\,(x'z'' - x''z')}{x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{z'}{x} + (x'z'' - x''z')\right).$$

Observando as equações, facilmente concluímos que as curvaturas principais são:

$$k_1 = \frac{z'}{x} \qquad , \qquad k_2 = (x'z'' - x''z')$$

Teorema 3.1.2 *As superfícies de revolução que têm curvatura gaussiana nula* ($K = 0$) *são dadas pela seguinte parametrização:*

$$X(s,t) = (((\cos C_2)\,s + C_3) \cos t, ((\cos C_2)\,s + C_3) \sin t, (\sin C_2)\,s + C_4) , \qquad (C_2, C_3, C_4) \in \mathbb{R}^3.$$

Prova. Supondo a equação satisfeita,segue que:

$$\frac{(x'z'' - x''z')\,z'}{x} = K = 0.$$

Ou seja, concluímos que:

$$z' = 0 \text{ ou } (x'z'' - x''z') = 0.$$

Para resolver ambos os casos vamos usar que a curva está parametrizada pelo comprimento de arco euclidiano. Logo segue que existe uma função suave $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 2\pi]$ tal que:

$$x' = \cos\varphi \Rightarrow x'' = -\varphi' \sin\varphi,$$
$$z' = \sin\varphi \Rightarrow z'' = \varphi' \cos\varphi.$$

Se $z' = 0$, integrando ambos os lados em s obtemos:

$$z(s) = C_0.$$

Como $z' = 0$ podemos usar isso para calcular x :

$$\sin\varphi = z' = 0 \Rightarrow x' = \cos\varphi = \pm 1.$$

Integrando novamente em s obtemos:

$$x(s) = \pm s + C_1.$$

Agora substituindo no segundo caso obtemos:

$$0 = (x'z'' - x''z') = \left(\varphi' \cos^2\varphi + \varphi' \sin^2\varphi\right) = \varphi'.$$

Integrando ambos os lados em s obtemos:

$$\varphi = C_2.$$

Segue disso que podemos calcular $x\,(s)$ e $z(s)$:

$$x' = \cos\varphi = \cos C_2.$$

Integrando, concluímos que:

$$x(s) = (\cos C_2)\, s + C_3.$$

Analogamente, temos que $z(s)$ é dado por:

$$z(s) = (\sin C_2)\, s + C_4.$$

Concluímos de ambos os casos que a família de superfícies de revolução que é solução de $K = 0$ é parametrizada por

$$X(s,t) = (((\cos C_2)\, s + C_3) \cos t, ((\cos C_2)\, s + C_3) \sin t, (\sin C_2)\, s + C_4), \qquad (C_2, C_3, C_4) \in \mathbb{R}^3.$$

■

Teorema 3.1.3 *As superfícies mínimas de revolução têm a seguinte parametrização:*

$$X(s,t) = \left(\left(\sqrt{(s+C_2)^2 + C_1^2} \right) \cos t, \left(\sqrt{(s+C_2)^2 + C_1^2} \right) \sin t, \ln \left| \frac{1}{|C_1|}(s+C_2) + \sqrt{\frac{(s+C_2)^2 + C_1^2}{C_1^2}} \right| + C_3 \right),$$

onde $(C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3$.

Prova. Vamos agora caracterizar as superfícies de revolução que têm curvatura média nula, ou seja, que respeitam a equação $H = 0$ (vamos supor $x > 0$ pois não fará diferenção após a rotação). Supondo a equação satisfeita segue que:

$$0 = H = \frac{1}{2}\left(\frac{z'}{x} + (x'z'' - x''z') \right) = \frac{\sin \varphi}{x} + \varphi'.$$

Separando a equação e multiplicando ambos os lados por $x' = \cos \varphi$ obtemos:

$$\frac{\varphi' \cos \varphi}{\sin \varphi} = -\frac{x'}{x}.$$

Integrando ambos os lados concluímos que:

$$\ln |\sin \varphi| = -\ln(x) + C_0 \Rightarrow \sin \varphi = \pm \frac{C_1}{x} \neq 0$$
$$\Rightarrow \varphi = \arcsin\left(\pm \frac{C_1}{x} \right).$$

Com isso, já podemos encontrar as coordenadas da curva γ. Temos que:

$$x' = \cos \varphi = \cos\left(\arcsin\left(\pm \frac{C_1}{x} \right) \right) = \sqrt{-\frac{1}{x^2}(C_1^2 - x^2)}$$
$$\Rightarrow \frac{xx'}{\sqrt{-(C_1^2 - x^2)}} = 1.$$

Integrando ambos os lados obtemos:

$$\sqrt{x^2 - C_1^2} = s + C_2$$
$$\Rightarrow x(s) = \sqrt{(s+C_2)^2 + C_1^2}.$$

Nos resta apenas encontrar $z(s)$:

$$z' = \sin \varphi = \sin \arcsin\left(\frac{C_1}{x} \right) = \frac{C_1}{x} = \frac{C_1}{\sqrt{(s+C_2)^2 + C_1^2}}$$
$$\Rightarrow z' = \frac{C_1}{\sqrt{(s+C_2)^2 + C_1^2}}.$$

Integrando ambos os lados concluímos que:

$$z(s) = \ln \left| \frac{1}{|C_1|}(s+C_2) + \sqrt{\frac{(s+C_2)^2 + C_1^2}{C_1^2}} \right| + C_3.$$

Segue disso que a família solução de $H = 0$ é parametrizada por:

$$X(s,t) = \left(\left(\sqrt{(s+C_2)^2 + C_1^2} \right) \cos t, \left(\sqrt{(s+C_2)^2 + C_1^2} \right) \sin t, \ln \left| \frac{1}{|C_1|}(s+C_2) + \sqrt{\frac{(s+C_2)^2 + C_1^2}{C_1^2}} \right| + C_3 \right),$$

onde $(C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3$.

■

3.1.5 Superfície Cíclica

Seja $\gamma : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva suave parametrizada pelo comprimento de arco euclidiano, logo $||\gamma'|| \equiv 1$. Por outro lado:

$$0 = \frac{d}{dt}(1) = \frac{d}{dt}(||\gamma'||^2) = 2g(\gamma'', \gamma').$$

Ou seja, denominando $T = \gamma'$, acabamos de encontrar uma campo unitário normal a T : o campo $N = \frac{\gamma''}{||\gamma''||}$. Por fim, podemos encontrar um terceiro campo unitário, que é normal a T e N : o campo $B = T \wedge N$. Definidos esses campos, segue que a parametrização de uma superfície cíclica com curva central γ e raio $r : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ é:

$$X(s,t) := \gamma(s) + (r(s)\cos t)\, N(s) + (r(s)\sin t)\, B(s).$$

Temos as seguintes relações:

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

Vamos trabalhar com a seguinte função ξ :

$$\begin{aligned} \xi(s,t) &= (1 - r\kappa \cos t), \\ \xi_s(s,t) &= -(\cos t)(r'\kappa + r\kappa'), \\ \xi_t(s,t) &= r\kappa \sin t. \end{aligned}$$

Usaremos elas de modo a simplicação dos cálculos:

$$\begin{aligned} X_s &= T + (\cos t)(r'N + rN') + (\sin t)(r'B + rB') \\ &= T + (\cos t)(r'N + r(-\kappa T + \tau B)) + (\sin t)(r'B + r(-\tau N)) \\ &= (1 - r\kappa\cos t)\, T + (r'\cos t - r\tau \sin t)\, N + (r'\sin t + r\tau\cos t)\, B \\ &= \xi T + (r'\cos t - r\tau\sin t)\, N + (r'\sin t + r\tau\cos t)\, B. \end{aligned}$$

$$X_t = -r(\sin t)\, N + r(\cos t)\, B.$$

Já estamos aptos a encontrar E, F e G :

$$\begin{aligned} E = g(X_s, X_s) &= g(\xi T + (r'\cos t - r\tau\sin t)\, N + (r'\sin t + r\tau\cos t)\, B, \xi T + (r'\cos t - r\tau\sin t)\, N + (r'\sin t + r\tau\cos t)\, B) \\ &= \xi^2 + (r'\cos t - r\tau\sin t)^2 + (r'\sin t + r\tau\cos t)^2 = r^2\tau^2 + (r')^2 + \xi^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F = g(X_s, X_t) &= g(\xi T + (r'\cos t - r\tau\sin t)\, N + (r'\sin t + r\tau\cos t)\, B, -\sin(t)rN + \cos(t)rB) \\ &= -\sin(t)r(r'\cos t - r\tau\sin t) + (r'\sin t + r\tau\cos t)\cos(t)r = r^2\tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G = g(X_t, X_t) &= g(-\sin(t)rN + \cos(t)rB, -\sin(t)rN + \cos(t)rB) \\ &= (-\sin(t)r)^2 + (\cos(t)r)^2 = r^2. \end{aligned}$$

Com X_s e X_t encontrados, podemos calcular também o campo normal à superfície de revolução:

$$\begin{aligned} X_s \wedge X_t &= (\xi T + (r'\cos t - r\tau\sin t) N + (r'\sin t + r\tau\cos t) B) \wedge (-\sin(t) rN + \cos(t) rB) \\ &= (-\sin(t) r\xi) B - (\cos(t) r\xi) N + ((r'\cos t - r\tau\sin t)\cos(t) r) T - (-\sin(t) r (r'\sin t + r\tau\cos t)) T \\ &= rr'T + (-r\xi\cos t) N + (-r\xi\sin t) B, \end{aligned}$$

$$\|X_s \wedge X_t\| = \sqrt{(rr')^2 + (-r\xi\cos t)^2 + (-r\xi\sin t)^2} = r\sqrt{(r')^2 + \xi^2},$$

$$\mathcal{N} = \frac{X_s \wedge X_t}{||X_s \wedge X_t||} = \frac{r'}{\sqrt{(r')^2 + \xi^2}} T + \frac{(-\xi\cos t)}{\sqrt{(r')^2 + \xi^2}} N + \frac{(-\xi\sin t)}{\sqrt{(r')^2 + \xi^2}} B.$$

Com o campo normal encontrado, nos resta calcular os coeficientes X_{ss}, X_{ts} e X_{tt}, para podermos, por fim encontrar e, f e g :

$$X_{ss} = uT + vN + wB.$$

Onde u, v, w são dados por:

$$\begin{aligned} u &= (-(\cos t)(r\kappa' + r'\kappa) - \kappa(r'\cos t - r\tau\sin t)), \\ v &= (r''\cos t + \kappa\xi - (\sin t)(r\tau' + r'\tau) - \tau(r'\sin t + r\tau\cos t)), \\ w &= (r''\sin t + (\cos t)(r\tau' + r'\tau) + \tau(r'\cos t - r\tau\sin t)). \end{aligned}$$

As outras derivadas têm as seguintes expressões:

$$X_{tt} = -r(\cos t) N - r(\sin t) B,$$

$$\begin{aligned} X_{st} &= -(\sin t)(r'N + rN') + (\cos t)(r'B + rB') \\ &= -(\sin t)(r'N + r(-\kappa T + \tau B)) + (\cos t)(r'B + r(-\tau N)) \\ &= (r\kappa\sin t) T + (-r'\sin t - r\tau\cos t) N + (r'\cos t - r\tau\sin t) B. \end{aligned}$$

Agora estamos aptos à calcular os últimos coeficientes, e, f e g :

$$e = g(\mathcal{N}, X_{ss}) = -\frac{\left(2\kappa(\cos t)(r')^2 - r\kappa(\sin t) r'\tau + r\kappa'(\cos t) r' - r\tau^2\xi + \kappa(\cos t)\xi^2 + r''\xi\right)}{\sqrt{(r')^2 + \xi^2}},$$

$$f = g(\mathcal{N}, X_{st}) = \frac{(r\tau\xi + rr'\kappa\sin t)}{\sqrt{(r')^2 + \xi^2}},$$

$$g = g(\mathcal{N}, X_{tt}) = r\frac{\xi}{\sqrt{(r')^2 + \xi^2}}.$$

Com os coeficientes todos calculados, podemos enfim obter as curvaturas gaussiana e média da superfície de revolução:

$$K = \frac{ge - f^2}{GE - F^2} = -\frac{\left(r''\xi^2 + \kappa\xi^3\cos t + 2(r')^2\kappa\xi\cos t + r(r')^2\kappa^2\sin^2 t + rr'\xi\kappa'\cos t + rr'\kappa\tau\xi\sin t\right)}{r\left((r')^2 + \xi^2\right)^2},$$

$$H = \frac{1}{2}\frac{(gE + Ge - 2Ff)}{(GE - F^2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\xi^3 + (r')^2\xi - rr''\xi - 2r(r')^2\kappa\cos t - r^2r'\kappa'\cos t - r\kappa\xi^2\cos t - r^2r'\kappa\tau\sin t}{r\left((r')^2 + \xi^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Usando as expressões das curvaturas principais, obtemos que:

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{\Upsilon + \sqrt{\Delta}}{2r\left((r')^2 + \xi^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \\ k_2 &= \frac{\Upsilon - \sqrt{\Delta}}{2r\left((r')^2 + \xi^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Onde Υ e Δ são dados por:

$$\begin{aligned}
\Upsilon &= \xi^3 + (r')^2\xi - rr''\xi - 2r(r')^2\kappa\cos t - r^2r'\kappa'\cos t - r\kappa\xi^2\cos t - r^2r'\kappa\tau\sin t,\\
\Delta &= \mu^2 + \omega,\\
\mu &= \left(\xi^3 + (r')^2\xi - rr''\xi - 2r(r')^2\kappa\cos t - r^2r'\kappa'\cos t - r\kappa\xi^2\cos t - r^2r'\kappa\tau\sin t\right),\\
\omega &= 4r\left((r')^2+\xi^2\right)\left(r''\xi^2 + \kappa\xi^3\cos t + 2(r')^2\kappa\xi\cos t + r(r')^2\kappa^2\sin^2 t + rr'\xi\kappa'\cos t + rr'\kappa\tau\xi\sin t\right).
\end{aligned}$$

3.1.6 Superfície Cilíndrica (Plano XZ)

Dada uma curva parametrizada pelo comprimento de arco euclidiano no plano XZ, $\gamma(t) = (x(t), 0, z(t))$ e um vetor unitário $v = (a, b, c)$ que não pertence ao plano da curva, segue que uma superfície cilíndrica gerada por γ e v é parametrizada da seguinte forma:

$$X(s,t) = \gamma(t) + sv = (x(t) + as, bs, z(t) + cs).$$

Vamos calcular as curvaturas média e gaussiana dessa família, para isso, comecemos com o cálculo das derivadas da parametrização:

$$X_s = (a, b, c) \qquad , \qquad X_t = (x', 0, z')$$

Vamos calcular E, F, G e o campo normal N :

$$E = g(X_s, X_s) = a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

$$F = g(X_s, X_t) = ax' + cz',$$

$$G = g(X_t, X_t) = (x')^2 + (z')^2 = 1,$$

$$X_s \wedge X_t = (bz', cx' - az', -bx'),$$

$$\begin{aligned}
\|X_s \wedge X_t\| &= \sqrt{(bz')^2 + (cx'-az')^2 + (-bx')^2}\\
&= \sqrt{a^2(z')^2 - 2acx'z' + b^2(x')^2 + b^2(z')^2 + c^2(x')^2}\\
&= \sqrt{a^2\left(1-(x')^2\right) - 2acx'z' + b^2(x')^2 + b^2(z')^2 + c^2\left(1-(z')^2\right)}\\
&= \sqrt{1 - a^2(x')^2 - 2acx'z' - c^2(z')^2} = \sqrt{1-(ax'+cz')^2},
\end{aligned}$$

$$N = \frac{X_s \wedge X_t}{\|X_s \wedge X_t\|} = \left(\frac{bz'}{\sqrt{1-(ax'+cz')^2}}, \frac{cx'-az'}{\sqrt{1-(ax'+cz')^2}}, -\frac{bx'}{\sqrt{1-(ax'+cz')^2}}\right).$$

Vamos agora calcular as segundas derivadas de X para podermos encontrar os últimos coeficientes:

$$X_{ss} = (0,0,0), \qquad X_{st} = (0,0,0), \qquad X_{tt} = (x'', 0, z'').$$

Segue que e, f e g já podem ser calculados. E são dados por:

$$e = g(N, X_{ss}) = 0,$$

$$f = g(N, X_{st}) = 0,$$

$$g = g(N, X_{tt}) = \frac{bz'x'' - bx'z''}{\sqrt{1-(ax'+cz')^2}}.$$

Portanto as curvaturas média e gaussiana são expressadas por:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = 0,$$

$$H = \frac{1}{2}\frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{bz'x'' - bx'z''}{\left(1 - (ax' + cz')^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Segue dessas expressões que, facilmente, podemos ver que as curvaturas principais são dadas por:

$$k_1 = 0 \qquad , \qquad k_2 = \frac{bz'x'' - bx'z''}{\left(1 - (ax' + cz')^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

3.1.7 Superfície Parabólica

Dada uma curva (sem perda de generalidade) no plano XZ, $\gamma(t) = (x(t), 0, z(t))$ parametrizada pelo comprimento de arco euclidiano, a ideia de uma superfície parabólica é transladar a curva por um vetor. Vamos tomar o vetor $v(s) = (0, s, 0)$. Segue disso que a parametrização de uma superfície parabólica relacionada à curva γ e o vetor v é:

$$X(s,t) = (x(t), s, z(t)).$$

Vamos calcular as curvaturas média e gaussiana. Comecemos derivando a parametrização:

$$X_s = (0, 1, 0) \qquad , \qquad X_t = (x', 0, z')\,.$$

Com isso, já podemos calcular os coeficientes E, F e G :

$$E = g(X_s, X_s) = 1,$$

$$F = g(X_s, X_t) = 0,$$

$$G = g(X_t, X_t) = (x')^2 + (z')^2 = 1.$$

Com X_s e X_t encontrados, podemos calcular também o campo normal:

$$X_s \wedge X_t = (z', 0, -x')\,,$$

$$\|X_s \wedge X_t\| = \sqrt{(z')^2 + (x')^2} = 1,$$

$$N = \frac{X_s \wedge X_t}{\|X_s \wedge X_t\|} = (z', 0, -x')\,.$$

Para o cálculo dos outros coeficientes, é necessário a obtenção das segundas derivadas da parametrização:

$$X_{ss} = (0, 0, 0), \qquad X_{st} = (0, 0, 0), \qquad X_{tt} = (x'', 0, z'').$$

Agora podemos calcular os últimos coeficientes:

$$e = g(N, X_{ss}) = 0,$$

$$f = g(N, X_{st}) = 0,$$

$$g = g(N, X_{tt}) = x''z' - z''x'.$$

Com isso já podemos calcular as curvaturas média e gaussiana:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = 0 \qquad , \qquad H = \frac{1}{2}\left(\frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2}\right) = \frac{1}{2}\left(x''z' - z''x'\right).$$

Vendo os resultados acima, obtemos facilmente as curvaturas principais:

$$k_1 = 0 \qquad , \qquad k_2 = \left(x''z' - z''x'\right).$$

Teorema 3.1.4 *As superfícies parabólicas com norma da segunda forma igual a 1* $\left(k_1^2 + k_2^2 = 1\right)$ *são dadas pela seguinte parametrização:*

$$X(s,t) = \begin{pmatrix} \sin(t+C) \\ 0 \\ -\cos(t+C) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 \\ s \\ C_2 \end{pmatrix} \qquad \text{com } (C, C_1, C_2) \in \mathbb{R}^3.$$

Prova. Vamos agora caracterizar as superfícies que respeitam a equação $k_1^2 + k_2^2 = 1$. Supondo a equação resolvida, obtemos:

$$(x''z' - z''x')^2 = k_1^2 + k_2^2 = 1.$$

Como γ está parametrizada pelo comprimento de arco euclidiano, segue que existe uma função suave $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 2\pi]$ tal que:

$$x' = \cos\varphi \Rightarrow x'' = -\varphi' \sin\varphi,$$
$$z' = \sin\varphi \Rightarrow z'' = \varphi' \cos\varphi.$$

Substituindo os valores de x', x'', z' e z'' obtemos:

$$(x''z' - z''x')^2 = ((-\varphi' \sin\varphi)\sin\varphi - (\varphi' \cos\varphi)\cos\varphi)^2 = (\varphi')^2 = 1.$$

Podemos supor que $\varphi' = 1$ a menos de reparametrização. Integrando obtemos:

$$\varphi = t + C.$$

Portanto podemos calcular as coordenadas x e z da curva γ :

$$x'(t) = \cos\varphi = \cos(t + C).$$

Ao integrar concluímos que:

$$x(t) = \sin(t + C) + C_1.$$

Para a coordenada z nó temos:

$$z' = \sin\varphi = \sin(t + C).$$

Integrando concluímos que:

$$z(t) = -\cos(t + C) + C_2.$$

Logo, as superfície parabólicas que têm a norma da segunda forma fundamental igual a 1 são dadas por

$$X(s,t) = \begin{pmatrix} \sin(t+C) \\ 0 \\ -\cos(t+C) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 \\ s \\ C_2 \end{pmatrix} \qquad \text{com } (C, C_1, C_2) \in \mathbb{R}^3.$$

■

Teorema 3.1.5 *As superfícies parabólicas que respeitam a equação* $P_n(H, K) = 0$, *onde* P_n *é um polinômio de grau* n, *podem ter apenas uma dessas duas parametrizações:*

$$X(s,t) = \left(\frac{1}{C}\sin(Ct + K), s, -\frac{1}{C}\cos(Ct + K)\right) \qquad \text{onde } (C, K) \in \mathbb{R}^2,$$

$$X(s,t) = (\cos(K)\,t + K_1, s, \sin(K)\,t + K_2) \qquad \text{onde } (K, K_1, K_2) \in \mathbb{R}^3.$$

Prova. Vamos agora caracterizar as superfícies parabólicas que respeita a equação $P_n(H, K) = 0$, ou seja, usando que a curvatura gaussiana é nula, segue que $P_n(H, K) = a_0 + a_1 H + ... + a_n H^n = 0$, $P_n \neq 0$. Segue que:

$$0 = a_0 + a_1 H + ... + a_n H^n = a_0 + a_1(-\varphi') + ... + a_n(-\varphi')^n.$$

Segue que esse polinômio tem no máximo n raízes reais. Porém, $\varphi' \in C^\infty(\mathbb{R})$. Logo, ela não poderia assumir apenas estes valores (finitos) que zeram o polinômio, à não ser que $\varphi' = C$, onde C é uma raiz do polinômio. Segue disso que:

$$\varphi' = C.$$

Integrando obtemos que:

$$\varphi(t) = Ct + K, \qquad (C, K) \in \mathbb{R}^2.$$

Agora podemos encontrar as coordenadas da curva γ. Supondo primeiramente que $C \neq 0$, temos que:

$$x' = \cos\varphi = \cos(Ct + K).$$

Integrando ambos os lados concluímos que:

$$x(t) = \frac{1}{C}\sin(Ct + K).$$

Para coordenada z temos exatamente o mesmo procedimento:

$$z' = \sin\varphi = \sin(Ct + K).$$

Integrando novamente concluímos que:

$$z(t) = -\frac{1}{C}\cos(Ct + K).$$

Logo, segue que a família de superfícies parabólicas que verificam $P_n(H, K) = 0$ é parametrizada por:

$$X(s,t) = \left(\frac{1}{C}\sin(Ct + K), s, -\frac{1}{C}\cos(Ct + K)\right), \qquad \text{onde } (C, K) \in \mathbb{R}^2.$$

Caso $C = 0$ o resultado muda um pouco:

$$x' = \cos\varphi = \cos(K).$$

Integrando obtemos:

$$x(t) = \cos(K)\, t + K_1.$$

Para z temos:

$$z' = \sin\varphi = \sin(K).$$

Por fim, integrando concluímos que:

$$z(t) = \sin(K)\, t + K_2.$$

Ou seja, a outra possível parametrização é dada por:

$$X(s,t) = (\cos(K)\, t + K_1, s, \sin(K)\, t + K_2), \qquad \text{onde } (K, K_1, K_2) \in \mathbb{R}^3.$$

■

3.1.8 Superfície de Translação (Plano XZ e YZ)

Suponha duas curvas (sem perda de generalidade) parametrizadas pelo comprimento de arco $\gamma(t) = (a(t), 0, c(t))$ e $\xi(s) = (0, y(s), z(s))$.Temos que uma superfície de translação gerada pelas curvas γ e ξ é parametrizada por:

$$X(s,t) = \gamma(t) + \xi(s).$$

Vamos calcular as curvaturas média e gaussiana desse caso. Comecemos derivando X :

$$X_s = \xi'(s) \qquad , \qquad X_t = \gamma'(t).$$

Com isso, já podemos calcular E, F e G :

$$E = g(X_s, X_s) = (y')^2 + (z')^2 = 1,$$

$$F = g(X_s, X_t) = c'z',$$

$$G = g(X_t, X_t) = (a')^2 + (c')^2 = 1.$$

Com X_s e X_t calculados, podemos também encontrar o campo normal:

$$X_s \wedge X_t = (y'c', z'a', -y'a'),$$

$$\begin{aligned}\|X_s \wedge X_t\| &= \sqrt{(y'c')^2 + (z'a')^2 + (-y'a')^2} = \sqrt{((y')^2 + (z')^2)\,(a')^2 + (y')^2(c')^2} \\ &= \sqrt{(a')^2 + (y')^2(c')^2} = \sqrt{1 - (z'c')^2},\end{aligned}$$

$$N = \frac{X_s \wedge X_t}{\|X_s \wedge X_t\|} = \left(\frac{y'c'}{\sqrt{1-(z'c')^2}}, \frac{z'a'}{\sqrt{1-(z'c')^2}}, \frac{-y'a'}{\sqrt{1-(z'c')^2}} \right).$$

Vamos agora calcular as segundas derivadas da parametrização para encontrar os últimos coeficientes:

$$X_{ss} = \xi''(s) \qquad , \qquad X_{st} = (0,0,0) \qquad , \qquad X_{tt} = \gamma''(t)$$

Portanto, os últimos coeficientes ficam com as seguintes expressões:

$$e = g(N, X_{ss}) = \frac{(z'a')\,y'' + (-y'a')\,z''}{\sqrt{1-(z'c')^2}},$$

$$f = g(N, X_{ts}) = 0,$$

$$g = g(N, X_{tt}) = \frac{(y'c')\,a'' + (-y'a')\,c''}{\sqrt{1-(z'c')^2}}.$$

Já podemos calcular as curvaturas média e gaussiana:

$$\begin{aligned}K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} &= \frac{\left(\frac{(z'a')y'' + (-y'a')z''}{\sqrt{1-(z'c')^2}}\right)\left(\frac{(y'c')a'' + (-y'a')c''}{\sqrt{1-(z'c')^2}}\right)}{1-(c'z')^2} \\ &= \left(\frac{((z'a')\,y'' + (-y'a')\,z'')\,((y'c')\,a'' + (-y'a')\,c'')}{\left(1-(c'z')^2\right)^2} \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H = \frac{1}{2}\left(\frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{(z'a')y'' + (-y'a')z''}{\sqrt{1-(z'c')^2}} + \frac{(y'c')a'' + (-y'a')c''}{\sqrt{1-(z'c')^2}}}{1-(c'z')^2} \right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{(z'a')\,y'' + (-y'a')\,z''}{\left(1-(c'z')^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{(y'c')\,a'' + (-y'a')\,c''}{\left(1-(c'z')^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right).\end{aligned}$$

Teorema 3.1.6 *Temos que as superfícies de translação com curvatura gaussiana constante* $(K = C)$ *têm as seguintes parametrizações para* $C \neq 0$ *e* $C = 0$*, respectivamente::*

$$X(s,t) = \begin{pmatrix} K_1 t + P_1 \\ K_5 \\ (\pm s + K_4) + (t + P_0) \end{pmatrix}, \qquad (P_1, K_1, K_5, K_4, P_0) \in \mathbb{R}^5.$$

$$X(s,t) = (K_1 t + P_1, y(s), K_0 t + P_0 + z(s)), \qquad (K_0, K_1, P_0, P_1) \in \mathbb{R}^4.$$

Prova. Vamos agora caracterizar a família de superfície de translação que verificam a equação: $K = C \in \mathbb{R}$. Usando que as curvas são parametrizadas pelo comprimento de arco, segue que existem funções suaves $\varphi, \omega : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 2\pi]$ tais que:

$$\left\{ \begin{array}{c} y' = (\cos\varphi)\,, \\ z' = (\sin\varphi)\,, \\ y'' = (-\varphi'\sin\varphi)\,, \\ z'' = (\varphi'\cos\varphi)\,. \end{array} \right. \qquad \text{e} \qquad \left\{ \begin{array}{c} a' = (\cos\omega)\,, \\ c' = (\sin\omega)\,, \\ a'' = (-\omega'\sin\omega)\,, \\ c'' = (\omega'\cos\omega)\,. \end{array} \right.$$

Substituindo na equação obtemos o seguinte polinômio:

$$C = K = \left(\frac{((z'a')\,y'' + (-y'a')\,z'')\,((y'c')\,a'' + (-y'a')\,c'')}{\left(1-(c'z')^2\right)^2} \right).$$

Isolando toda a equação obtemos:

$$(((z'a')\,y'' + (-y'a')\,z'')\,((y'c')\,a'' + (-y'a')\,c'')) - C\left(1-(c'z')^2\right)^2 = 0.$$

Agora vamos substituir as derivadas pelas funções ângulos:

$$A + B + D + E + F + G = C.$$

Onde as expressões das letras são dadas por:

$$\begin{array}{cc} A = (-C)\sin^4\varphi\sin^4\omega, & B = \omega'\varphi'\sin^2\varphi\cos\varphi\sin^2\omega\cos\omega, \\ D = \omega'\varphi'\sin^2\varphi\cos\varphi\cos^3\omega, & E = 2C\sin^2\varphi\sin^2\omega, \\ F = \omega'\varphi'\cos^3\varphi\sin^2\omega\cos\omega, & G = \omega'\varphi'\cos^3\varphi\cos^3\omega. \end{array}$$

Suponhamos que uma das curvas não seja um gráfico de função, como a expressão acima é simétrica em relação a φ e ω segue que podemos supor, sem perda de generalidade, que existe um ponto φ_0 tal que o vetor velocidade da curva seja vertical, ou seja, $\cos\varphi_0 = 0$ e $\sin\varphi_0 = \pm 1$ substituindo na expressão acima temos:

$$(-C)\sin^4\omega + 2C\sin^2\omega - C = 0.$$

Temos aqui um polinômio de grau 4 em $\sin\omega$ se anulando, segue que $\sin\omega$ pode assumir, no máximo, 4 valores, mas essa função é suave, logo segue que $\sin\omega = K_0 \in \mathbb{R}$ e , portanto, $\cos\omega = K_1$. Analogamente (pois o polinômio é simétrico) segue que $\sin\varphi = H_0 \in \mathbb{R}$ e $\cos\varphi = H_1$. Substituindo no sistema temos:

$$c' = \sin\omega = K_0.$$

Integrando obtemos:

$$c(t) = K_0 t + P_0.$$

Fazendo exatamente o mesmo processo, obtemos:

$$a(t) = K_1 t + P_1.$$

Com isso, segue que as seguintes igualdades são válidas:

$$\begin{cases} c' = K_0, \\ a' = K_1, \\ c'' = a'' = 0. \end{cases}$$

Substituindo na equação da curvatura gaussiana obtemos:anterior obtemos:

$$0 = (((z'a')\,y'' + (-y'a')\,z'')\,((y'c')\,a'' + (-y'a')\,c'')) - C\left(1-(c'z')^2\right)^2 = -C\left(1-(K_0 z')^2\right)^2.$$

Supondo $C \neq 0$ (isso implica da definição de K_0 que $K_0 \neq 0$)obtemos o seguinte resultado:

$$1 - (K_0 z')^2 = 0.$$

Segue disso que z'´tem dois possíveis valores:

$$z' = \pm\frac{1}{K_0^2}.$$

Integrando ambos os lados obtemos:

$$z(s) = \pm\frac{1}{K_0^2}s + K_4.$$

Com isso, já podemos encontrar a coordenada y :

$$(y')^2 = 1 - (z')^2 = 1 - \left(\pm\frac{1}{K_0^2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{K_0^4}.$$

Porém, como $K_0 = \sin\omega$ segue que ele é um valor entre 0 e 1.n Ou seja, a igualdade:

$$(y')^2 = 1 - \frac{1}{K_0^4} \geq 0.$$

Só é válida se $K_0 = 1$. Segue disso que:
Isolando y' e integrando, obtemos:

$$y' = 0.$$

Integrando ambos os lados obtemos:

$$\begin{aligned} y(s) &= K_5, \\ z(s) &= \pm s + K_4. \end{aligned}$$

Ou seja, a família solução de $K = C \in \mathbb{R} - \{0\}$ tem a seguinte parametrização:

$$X(s,t) = \begin{pmatrix} K_1 t + P_1 \\ K_5 \\ (\pm s + K_4) + (t + P_0) \end{pmatrix}, \qquad (K_0, K_1, K_5, P_0) \in \mathbb{R}^4.$$

Se $C = 0$ voltando na primeira equação e usando novamente que γ não é um gráfico de função ($a'' = c'' = 0$) obtemos:

$$(((z'a')\, y'' + (-y'a')\, z'')\, ((y'c')\, a'' + (-y'a')\, c'')) - C\left(1 - (c'z')^2\right)^2 = 0 \Rightarrow 0 = 0.$$

Portanto, segue que ξ pode ser qualquer curva. Ou seja, a parametrização da família que resolve $K = 0$ é dada por:

$$X(s,t) = (K_1 t + P_1, y(s), K_0 t + P_0 + z(s)), \qquad (K_0, K_1, P_0, P_1) \in \mathbb{R}^4.$$

■

3.1.9 Superfície de Translação (Uma Curva Espacial)

Suponhamos agora, que uma das curvas, digamos γ seja uma curva espacial (parametrizada pelo comprimento de arco euclidiano), ou seja, $\gamma(t) = (a(t), b(t), c(t))$. Vamos aora calcular as curvaturas média e gaussiana da superfície:

$$X_s = (0, y', z') \qquad , \qquad X_t = (a', b', c').$$

Já podemos calcular os primeiros coefinicentes e o campo normal:

$$E = g(X_s, X_s) = (y')^2 + (z')^2 = 1,$$

$$F = g(X_s, X_t) = y'b' + z'c',$$

$$G = g(X_t, X_t) = (a')^2 + (b')^2 + (c')^2 = 1,$$

$$X_s \wedge X_t = (y'c' - z'b', z'a', -y'a'),$$

$$\begin{aligned} \|X_s \wedge X_t\| &= \sqrt{(y'c' - z'b')^2 + (z'a')^2 + (y'a')^2} = \sqrt{(y')^2(a')^2 + (y')^2(c')^2 - 2y'z'b'c' + (z')^2(a')^2 + (z')^2(b')^2} \\ &= \sqrt{(y')^2\,(1 - (b')^2) - 2y'z'b'c' + (z')^2\,(1 - (c')^2)} = \sqrt{1 - (y'b' + z'c')^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N &= \frac{X_s \wedge X_t}{\|X_s \wedge X_t\|} \\ &= \left(\frac{y'c' - z'b'}{\sqrt{1 - (y'b' + z'c')^2}}, \frac{z'a'}{\sqrt{1 - (y'b' + z'c')^2}}, -\frac{y'a'}{\sqrt{1 - (y'b' + z'c')^2}} \right). \end{aligned}$$

Vamos agora derivar novamente a parametrização:

$$X_{ss} = (0, y'', z'') \qquad , \qquad X_{ts} = (0,0,0) \qquad , \qquad X_{tt} = (a'', b'', c'')\,.$$

Portanto os coeficientes e, f e g são dados por:

$$e = g(N, X_{ss}) = \frac{z'a'y'' - y'a'z''}{\sqrt{1-(y'b'+z'c')^2}},$$

$$f = g(N, X_{st}) = 0,$$

$$g = g(N, X_{tt}) = \frac{(y'c' - z'b')\,a'' + z'a'b'' - y'a'c''}{\sqrt{1-(y'b'+z'c')^2}}.$$

Por fim, podemos calcular as curvaturas média e gaussiana. E elas são dadas por:

$$\begin{aligned} K &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\ &= \frac{\left(\frac{z'a'y'' - y'a'z''}{\sqrt{1-(y'b'+z'c')^2}}\right)\left(\frac{(y'c'-z'b')a''+z'a'b''-y'a'c''}{\sqrt{1-(y'b'+z'c')^2}}\right)}{1-(y'b'+z'c')^2} \\ &= \frac{(z'a'y'' - y'a'z'')\left((y'c'-z'b')\,a''+z'a'b''-y'a'c''\right)}{\left(1-(y'b'+z'c')^2\right)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\left(\frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\left(\frac{z'a'y'' - y'a'z''}{\sqrt{1-(y'b'+z'c')^2}}\right) + \left(\frac{(y'c'-z'b')a''+z'a'b''-y'a'c''}{\sqrt{1-(y'b'+z'c')^2}}\right)}{1-(y'b'+z'c')^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{(z'a'y'' - y'a'z'') + \left((y'c'-z'b')\,a''+z'a'b''-y'a'c''\right)}{\left(\sqrt{1-(y'b'+z'c')^2}\right)^3}\right). \end{aligned}$$

3.1.10 Superfície Regrada

Dada uma curva parametrizada pelo comprimento de arco euclidiano, $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ podemos tomar um campo de vetores unitário $V(t) = (u(t), v(t), w(t))$ ao longo da curva. Vamos definir uma superfície gerada tomando um ponto $\gamma(t_0)$ da curva e andando na direção de $V(t_0)$ por um tempo s. Segue que a parametrização da de uma superfície regrada é dada por:

$$X(s,t) = \gamma(t) + sV(t).$$

Vamos calcular as curvaturas média e gaussiana dessa superfície. Comecemos com o cálculo das derivadas de X :

$$X_s = V = (u, v, w)\,,$$

$$X_t = \gamma' + sV' = (x' + su', y' + sv', z' + sw')\,.$$

Já podemos calcular os coeficientes E, F e G, e o campo normal N :

$$E = g(X_s, X_s) = g(V, V) = 1,$$

$$F = g\left(X_s, X_t\right) = g(V, \gamma') + sg(V', V) = g(V, \gamma') = ux' + vy' + wz',$$

$$G = g(X_t, X_t) = g\left(\gamma' + sV', \gamma' + sV'\right) = 1 + 2s\left(u'x' + v'y' + w'z'\right) + s^2\left(\left(u'\right)^2 + \left(v'\right)^2 + \left(w'\right)^2\right),$$

$$X_s \wedge X_t = \begin{pmatrix} v\left(z' + sw'\right) - w\left(y' + sv'\right) \\ w\left(x' + su'\right) - u\left(z' + sw'\right) \\ u\left(y' + sv'\right) - v\left(x' + su'\right) \end{pmatrix},$$

$$\sqrt{A} = ||X_s \wedge X_t|| = \sqrt{\left(v\left(z' + sw'\right) - w\left(y' + sv'\right)\right)^2 + \left(w\left(x' + su'\right) - u\left(z' + sw'\right)\right)^2 + \left(u\left(y' + sv'\right) - v\left(x' + su'\right)\right)^2},$$

$$N = \frac{X_s \wedge X_t}{||X_s \wedge X_t||} = \left(\frac{v\left(z' + sw'\right) - w\left(y' + sv'\right)}{\sqrt{A}}, \frac{w\left(x' + su'\right) - u\left(z' + sw'\right)}{\sqrt{A}}, \frac{u\left(y' + sv'\right) - v\left(x' + su'\right)}{\sqrt{A}}\right).$$

Vamos agora derivar novamente a parametrização:

$$X_{ss} = (0, 0, 0),$$

$$X_{st} = V',$$

$$X_{tt} = \gamma'' + sV'' = \left(x'' + su'', y'' + sv'', z'' + sw''\right).$$

Vamos calcular os últimos coeficientes:

$$e = g\left(N, X_{ss}\right) = 0,$$

$$\begin{aligned} f &= g\left(N, X_{st}\right) \\ &= u'\left(\frac{v\left(z' + sw'\right) - w\left(y' + sv'\right)}{\sqrt{A}}\right) + v'\left(\frac{w\left(x' + su'\right) - u\left(z' + sw'\right)}{\sqrt{A}}\right) + w'\left(\frac{u\left(y' + sv'\right) - v\left(x' + su'\right)}{\sqrt{A}}\right) \\ &= \frac{\left(uy'w' - uz'v' - vx'w' + vz'u' + wx'v' - wy'u'\right)}{\sqrt{A}}, \end{aligned}$$

$$g = g\left(N, X_{tt}\right) = \frac{R + S}{\sqrt{A}}.$$

Onde as letras têm o seguinte significado:

$$\begin{aligned} S &= \left(w\left(x' + su'\right) - u\left(z' + sw'\right)\right)\left(y'' + sv''\right) + \left(u\left(y' + sv'\right) - v\left(x' + su'\right)\right)\left(z'' + sw''\right), \\ R &= \left(v\left(z' + sw'\right) - w\left(y' + sv'\right)\right)\left(x'' + su''\right). \end{aligned}$$

Logo as curvaturas média e gaussiana são dadas por:

$$\begin{aligned} K &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\ &= \frac{\left(uy'w' - uz'v' - vx'w' + vz'u' + wx'v' - wy'u'\right)^2}{AB}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\left(\frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{C + D + E - F}{\left(1 + 2s\left(u'x' + v'y' + w'z'\right) + s^2\left(\left(u'\right)^2 + \left(v'\right)^2 + \left(w'\right)^2\right)\right) - \left(ux' + vy' + wz'\right)^2}\right). \end{aligned}$$

Onde B, C, D, E, F são dados por:

$$
\begin{aligned}
B &= B_1 + B_2,\\
B_1 &= u^2(x')^2 - s^2(u')^2 - s^2(v')^2 + v^2(y')^2 - s^2(w')^2 + w^2(z')^2,\\
B_2 &= -2sx'u' - 2sy'v' - 2sz'w' + 2uvx'y' + 2uwx'z' + 2vwy'z' - 1,\\
C &= \left(\frac{(v\,(z'+sw') - w\,(y'+sv'))\,(x''+su'')}{\sqrt{A}}\right),\\
D &= \left(\frac{(w\,(x'+su') - u\,(z'+sw'))\,(y''+sv'')}{\sqrt{A}}\right),\\
E &= \left(\frac{(u\,(y'+sv') - v\,(x'+su'))\,(z''+sw'')}{\sqrt{A}}\right),\\
F &= \left(\frac{2\,(uy'w' - uz'v' - vx'w' + vz'u' + wx'v' - wy'u')\,(ux' + vy' + wz')}{\sqrt{A}}\right).
\end{aligned}
$$

3.1.11 Superfícies Cônicas

Dada uma curva parametrizada pelo comprimento de arco euclidiano $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ segue que uma superfície cônica é parametrizada da seguinte forma:

$$X(s,t) = s\gamma(t).$$

Vamos agora calcular suas curvaturas média e gaussiana. Para isso, comecemos com o cálculo das derivadas de X :

$$X_s = (x, y, z),$$

$$X_t = (sx', sy', sz')\,.$$

Já podemos calcular os primeiros coeficientes e o campo normal:

$$E = g(X_s, X_s) = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$F = g\,(X_s, X_t) = s\,(xx' + yy' + zz')\,,$$

$$G = g\,(X_t, X_t) = s^2|\gamma'| = s^2,$$

$$X_s \wedge X_t = s\,(yz' - zy', zx' - xz', xy' - yx')\,,$$

$$
\begin{aligned}
\|X_s \wedge X_t\| &= s\sqrt{(yz' - zy')^2 + (zx' - xz')^2 + (xy' - yx')^2},\\
&= s\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2) - ((xx' + yy' + zz'))^2} = s\sqrt{A},
\end{aligned}
$$

$$N = \frac{X_s \wedge X_t}{\|X_s \wedge X_t\|} = \left(\frac{yz' - zy'}{\sqrt{A}}, \frac{zx' - xz'}{\sqrt{A}}, \frac{xy' - yx'}{\sqrt{A}}\right).$$

Vamos derivar novamente a parametrização:

$$X_{ss} = (0,0,0) \qquad , \qquad X_{st} = (x', y', z') \qquad , \qquad X_{tt} = (sx'', sy'', sz'')$$

Segue que os coeficientes e, f e g têm a seguinte expressão:

$$e = g\,(N, X_{ss}) = 0,$$

$$f = g\,(N, X_{st}) = \left(\frac{yz' - zy'}{\sqrt{A}}\right)(x') + \left(\frac{zx' - xz'}{\sqrt{A}}\right)(y') + \left(\frac{xy' - yx'}{\sqrt{A}}\right)(z') = 0,$$

$$\begin{aligned} g &= g\left(N, X_{tt}\right) \\ &= \left(\frac{yz' - zy'}{\sqrt{A}}\right)(sx'') + \left(\frac{zx' - xz'}{\sqrt{A}}\right)(sy'') + \left(\frac{xy' - yx'}{\sqrt{A}}\right)(sz'') \\ &= s\frac{xy'z'' - xy''z' - yx'z'' + yx''z' + zx'y'' - zx''y'}{\sqrt{A}}. \end{aligned}$$

Segue que as curvaturas média e gaussiana são dadas por:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = 0,$$

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2}\right) = \frac{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\left(xy'z'' - xy''z' - yx'z'' + yx''z' + zx'y'' - zx''y'\right)}{2s\left(\sqrt{A}\right)^3}.$$

Teorema 3.1.7 *Não existem superfícies cônicas que respeitam a equação:* $k_1^2 + k_2^2 = 1$.

Prova. Vamos encontrar a família de cônicas que satisfazem a equação $k_1^2 + k_2^2 = 1$. Suponha a equação satisfeita, segue que:

$$1 = k_1^2 + k_2^2 = 4H^2 - 2K = 4\left(\frac{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\left(xy'z'' - xy''z' - yx'z'' + yx''z' + zx'y'' - zx''y'\right)}{2s\left(\sqrt{A}\right)^3}\right)^2.$$

Isolando s obtemos:

$$\frac{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2\left(xy'z'' - xy''z' - yx'z'' + yx''z' + zx'y'' - zx''y'\right)^2}{(A)^3} = s^2,$$

Fixando $t = t_0$ segue que $s = F(t_0)$. Onde F é dada por:

$$F(t) = \pm\sqrt{\left(\frac{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2\left(xy'z'' - xy''z' - yx'z'' + yx''z' + zx'y'' - zx''y'\right)^2}{(A)^3}\right)(t)}.$$

Mas isso é um absurdo pois s pode assumir infinitos valores. Logo a equação $k_1^2 + k_2^2 = 1$ não tem solução. ■

Teorema 3.1.8 *Não existem superfícies cônicas que respeitam a equação* $P_n\left(H, K\right) = 0$.

Prova. Suponha a equação satisfeita. Como $K = 0$ segue que $0 = P_n\left(H, K\right) = a_0 + a_1 H + ... + a_n H^n$. Segue que

os denominadores das potências de H são dados por:

$$D\left(H\right) = 2s\left(\sqrt{A}\right)^3, ..., D\left(H\right) = \left(2s\left(\sqrt{A}\right)^3\right)^n.$$

No polinômio, podemos igualar os denominadores colocando num denominador comum. Para isso é necessário fazer a seguinte multiplicação:

$$H^i\left(2s\left(\sqrt{A}\right)^3\right)^{n-i} = g_i(t)s^{n-i}, \qquad 0 \leq i \leq n.$$

Como a fração final se iguala a zero, segue que podemos considerar apenas o numerador. Ou seja, temos que:

$$g_0(t)s^n + g_1(t)s^{n-1} + ... + g_n(t) = 0.$$

Segue que s pode assumir no máximo n valores, mas isso é um absurdo. ■

3.1.12 Superfície Algébrica (Grau 2)

Vamos estudar agora uma classe de superfícies que são dadas por ´$S = f^{-1}(0)$ onde $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave e $\nabla f(p) \neq 0$ para todo $p \in S$. Para o nosso caso (superfície algébrica), tomaremos :

$$f(x, y, z) = Ax^2 + Bxy + Cxz + Dx + Ey^2 + Fyz + Gy + Hz^2 + Iz + J.$$

Para isso, vamos primeiramente definir alguns operadores que serão muito úteis em nosso trabalho:

Definição 3.1.9 *Dada uma função suave $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, podemos obter um campo de vetores chamado campo gradiente de f e denotado por ∇f, onde:*

$$g(\nabla f, X) = X(f), \qquad \text{para todo } X \in \mathfrak{X}(M).$$

Vamos mostrar agora o lugar em que situa essa campo na imagem inversa de um valor regular.

Proposição 3.1.10 *O campo ∇f é ortogonal à superfície $S = f^{-1}(\{0\})$*

Prova. De fato, dado um ponto $p \in S$ e $v \in T_pS$ podemos tomar uma curva $\gamma(t) = (x(t), y(t)z(t)) \in S$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Como γ está contida em S segue que:

$$f(\gamma(t)) = 0.$$

Derivando ambos os lados temos:

$$g(\nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)) = 0.$$

colocando $t = 0$, obtemos que $g(\nabla f(p), v) = 0$. Como v é um vetor arbitrário o resultado segue. ∎

Logo, podemos tomar o seguinte campo normal unitário:

$$N = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|}.$$

Definição 3.1.11 *Dada uma função suave $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, definimos a aplicação $x \mapsto \nabla_x (\nabla f)$ como $Hess(f)(x)$.*

Definição 3.1.12 *Definimos o operador laplaciano de f, denotado por $\triangle f$, onde $\triangle f = Tr(Hess(f))$.*

Portanto, já podemos calcular a aplicação S_N. Temos que:

$$S_N(x) = -\left(\nabla_x N\right)^T = -\nabla_x N = -\nabla_x \left(-\frac{\nabla f}{|\nabla f|}\right) = \frac{1}{|\nabla f|}\nabla_x (\nabla f) = \frac{1}{|\nabla f|} Hess(f)(x).$$

Segue disso que, podemos tomar uma base ortonormal de T_pS, $\{v, w\}$ e portanto, podemos encontrar os elementos da diagonal da matriz de $S_N(x)$ obtendo, por fim, a curvatura média de S :

$$S_(v) = \frac{1}{|\nabla f|} Hess(f)(v) = \alpha_1 v + \beta_1 w \Rightarrow \frac{1}{|\nabla f|} g(Hess(f)(v), v) = \alpha_1,$$

$$S_N(w) = \frac{1}{|\nabla f|} Hess(f)(w) = \alpha_2 v + \beta_2 w \Rightarrow \frac{1}{|\nabla f|} g(Hess(f)(w), w) = \beta_2.$$

Temos que a matriz de S_N é dada por:

$$(S_N) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}.$$

Segue que a curvatura média de S é dada por:

$$H = \frac{1}{2} Tr\left(S_N\right) = \frac{1}{2|\nabla f|}\left(g(Hess(f)(v), v) + g(Hess(f)(w), w)\right).$$

Gostaríamos de não precisar encontrar uma base ortonormal para obter a curvatura média, portanto vamos encontrar uma forma de evitar isso. Façamos as seguintes observações:

Primeiramente, como $\triangle f = Tr(Hess(f))$ segue que, dada uma base ortonormal do $\mathbb{R}^3$ $\left\{v, w, \frac{\nabla f}{|\nabla f|}\right\}$ temos que:

$$\begin{aligned}\triangle f &= g\left(Hess(f)\left(\frac{\nabla f}{|\nabla f|}\right), \frac{\nabla f}{|\nabla f|}\right) + g\left(Hess(f)\left(v\right), v\right) + g\left(Hess(f)\left(w\right), w\right)\\ &\Rightarrow g\left(Hess(f)\left(v\right), v\right) + g\left(Hess(f)\left(w\right), w\right) = \triangle f - g\left(Hess(f)\left(\frac{\nabla f}{|\nabla f|}\right), \frac{\nabla f}{|\nabla f|}\right).\end{aligned}$$

A segunda observação é que, pela definição de gradiente de uma função e usando a função $h = g(\nabla f, \nabla f) = |\nabla f|^2$ e o campo $X = \nabla f$ segue que:

$$g(\nabla h, X) = X(h) \Rightarrow g(\nabla|\nabla f|^2, \nabla f) = \nabla f\left(|\nabla f|^2\right) \Rightarrow g(\nabla|\nabla f|^2, \nabla f) = \nabla f\left(g(\nabla f, \nabla f)\right).$$

Usando a compatibilidade da mátrica obtemos:

$$g(\nabla|\nabla f|^2, \nabla f) = \nabla f\left(g(\nabla f, \nabla f)\right) = 2g(\nabla_{\nabla f} f, \nabla f) = 2g(Hess(f)(\nabla f), \nabla f).$$

Notemos que o operador Hessiano é linear no seu argumento, de fato:

$$Hess(f)(\alpha v) = \nabla_{\alpha v}\left(\nabla f\right) = \alpha \nabla_v \left(\nabla f\right) = \alpha Hess(f)(v).$$

Dessa observação e da anterior, obtemos que:

$$\begin{aligned}g\left(Hess(f)\left(v\right), v\right) + g\left(Hess(f)\left(w\right), w\right) &= \triangle f - g\left(Hess(f)\left(\frac{\nabla f}{|\nabla f|}\right), \frac{\nabla f}{|\nabla f|}\right)\\ &= \triangle f - \frac{1}{|\nabla f|^2} g\left(Hess(f)\left(\nabla f\right), \nabla f\right)\\ &= \triangle f - \frac{1}{|\nabla f|^2}\left(\frac{1}{2} g(\nabla|\nabla f|^2, \nabla f)\right)\\ &= \frac{2\left|\nabla f\right|^2 \triangle f - \left(g(\nabla|\nabla f|^2, \nabla f)\right)}{2\left|\nabla f\right|^2}.\end{aligned}$$

Substituindo na expressão da curvatura média, concluímos que:

$$\begin{aligned}H &= \frac{1}{2|\nabla f|}\left(g(Hess(f)(v), v) + g(Hess(f)(w), w)\right)\\ &= \frac{1}{2|\nabla f|}\left(\frac{2\left|\nabla f\right|^2 \triangle f - \left(g(\nabla|\nabla f|^2, \nabla f)\right)}{2\left|\nabla f\right|^2}\right)\\ &= \frac{2\left|\nabla f\right|^2 \triangle f - g(\nabla|\nabla f|^2, \nabla f)}{4|\nabla f|^3}\\ &= \frac{2\left(f_x^2 + f_y^2 + f_z^2\right)\left(f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}\right) - g(\nabla\left(f_x^2 + f_y^2 + f_z^2\right), (f_x, f_y, f_z))}{4\left(\sqrt{\left(f_x^2 + f_y^2 + f_z^2\right)}\right)^3}\\ &= \frac{2\left(f_x^2 + f_y^2 + f_z^2\right)\left(f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}\right) - g\left(\begin{pmatrix} 2f_xf_{xx} + 2f_yf_{xy} + 2f_zf_{xz}\\ 2f_xf_{xy} + 2f_yf_{yy} + 2f_zf_{yz}\\ 2f_xf_{xz} + 2f_yf_{zy} + 2f_zf_{zz}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_x\\ f_y\\ f_z\end{pmatrix}\right)}{4\left(\sqrt{\left(f_x^2 + f_y^2 + f_z^2\right)}\right)^3}\\ &= \frac{A - B - C - D}{E}.\end{aligned}$$

Onde as letras maiúsculas têm as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}A &= \left(f_x^2 + f_y^2 + f_z^2\right)\left(f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}\right),\\ B &= \left(f_xf_{xx} + f_yf_{xy} + f_zf_{xz}\right) f_x,\\ C &= \left(f_xf_{xy} + f_yf_{yy} + f_zf_{yz}\right) f_y,\\ D &= \left(f_xf_{xz} + f_yf_{zy} + f_zf_{zz}\right) f_z,\\ E &= 2\left(\sqrt{\left(f_x^2 + f_y^2 + f_z^2\right)}\right)^3.\end{aligned}$$

Essa expressão nos permite calcular a curvatura média sem a obtenção de uma base ortonormal para T_pS.

Agora vamos encontrar a expressão da curvatura gaussiana. Temos que toda superfície é, localmente, um gráfico de função. Logo, se uma superfície é implicitamente definida por $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ com $f(x, y, z) = 0$, segue que, localmente, $z = z(x, y)$. E portanto temos que S tem uma parametrização local de:

$$\varphi(x, y) = (x, y, z(x, y)).$$

Cujas curvaturas média e gaussiana são dadas por:

$$K = \frac{z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2}{\left(z_x^2 + z_y^2 + 1\right)^2},$$

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{z_{yy}\left(z_x^2+1\right) + z_{xx}\left(z_y^2+1\right) - 2z_{xy}\left(z_x z_y\right)}{\left(z_x^2 + z_y^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Primeiramente, notemos que, como a superfície é localmente um gráfico de função, segue que que o plano tangente (localmente) não é vertical, ou seja, o gradiente de f (localmente) não é horizontal, ou seja $f_z \neq 0$ (localmente).

Logo temos $f(x, y, z(x, y)) = 0$. Derivando ambos os lados em x e y obtemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\left[f(x, y, z(x, y))\right] = 0\\
&\Rightarrow g\left(\nabla f, (1, 0, z_x)\right) = 0\\
&\Rightarrow f_x + z_x f_z = 0\\
&\Rightarrow z_x = -\frac{f_x}{f_z}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial y}\left[f(x, y, z(x, y))\right] = 0\\
&\Rightarrow g\left(\nabla f, (0, 1, z_y)\right) = 0\\
&\Rightarrow f_y + z_y f_z = 0\\
&\Rightarrow z_y = -\frac{f_y}{f_z}.
\end{aligned}$$

Vamos derivar novamente para obter z_{xx}, z_{xy} e z_{yy} :

$$\begin{aligned}
z_{xx}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{f_x(x, y, z(x, y))}{f_z(x, y, z(x, y))}\right)\\
&= -\frac{\left(g\left(\nabla f_x, (1, 0, z_x)\right) f_z - g\left(\nabla f_z, (1, 0, z_x)\right) f_x\right)}{f_z^2}\\
&= -\frac{\left(\left(f_{xx} + f_{xz}z_x\right) f_z - \left(f_{xz} + f_{zz}z_x\right) f_x\right)}{f_z^2}\\
&= -\frac{\left(\left(f_{xx} + f_{xz}\left(-\frac{f_x}{f_z}\right)\right) f_z - \left(f_{xz} + f_{zz}\left(-\frac{f_x}{f_z}\right)\right) f_x\right)}{f_z^2}\\
&= -\frac{\left(f_{xx}f_z - f_{xz}f_x - \left(f_{xz}f_x - \frac{f_{zz}f_x^2}{f_z}\right)\right)}{f_z^2}\\
&= -\frac{\left(f_{xx}f_z^2 - 2f_{xz}f_xf_z + f_{zz}f_x^2\right)}{f_z^3}.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
z_{xy}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{f_x(x,y,z(x,y))}{f_z(x,y,z(x,y))}\right)\\
&= -\frac{\left(g\left(\nabla f_x,(0,1,z_y)\right)f_z - g\left(\nabla f_z,(0,1,z_y)\right)f_x\right)}{f_z^2}\\
&= -\frac{\left(\left(f_{xy}+f_{xz}z_y\right)f_z-\left(f_{zy}+f_{zz}z_y\right)f_x\right)}{f_z^2}\\
&= -\frac{\left(\left(f_{xy}+f_{xz}\left(-\frac{f_y}{f_z}\right)\right)f_z-\left(f_{zy}+f_{zz}\left(-\frac{f_y}{f_z}\right)\right)f_x\right)}{f_z^2}\\
&= -\frac{\left(f_{xy}f_z^2-f_{xz}f_yf_z-f_{zy}f_xf_z+f_xf_yf_{zz}\right)}{f_z^3}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_{yy}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{f_y(x,y,z(x,y))}{f_z(x,y,z(x,y))}\right)\\
&= -\frac{\left(f_{yy}f_z^2-2f_{yz}f_yf_z+f_{zz}f_y^2\right)}{f_z^3}.
\end{aligned}
$$

O caso z_{yy} é exatamente igual ao caso z_{xx}, por isso omitimos o processo. Substituindo os valores das derivadas de z nas expressões de K e H obtemos expressões para ambas apenas em termos das derivadas da função f :

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2}{\left(z_x^2+z_y^2+1\right)^2}\\
&= \frac{\left(-\frac{\left(f_{xx}f_z^2-2f_{xz}f_xf_z+f_{zz}f_x^2\right)}{f_z^3}\right)\left(-\frac{\left(f_{yy}f_z^2-2f_{yz}f_yf_z+f_{zz}f_y^2\right)}{f_z^3}\right)-\left(-\frac{\left(f_{xy}f_z^2-f_{xz}f_yf_z-f_{zy}f_xf_z+f_xf_yf_{zz}\right)}{f_z^3}\right)^2}{\left(\left(-\frac{f_x}{f_z}\right)^2+\left(-\frac{f_y}{f_z}\right)^2+1\right)^2}\\
&= \frac{\left(f_{xx}f_z^2-2f_{xz}f_xf_z+f_{zz}f_x^2\right)\left(f_{yy}f_z^2-2f_{yz}f_yf_z+f_{zz}f_y^2\right)-\left(f_{xy}f_z^2-f_{xz}f_yf_z-f_{zy}f_xf_z+f_xf_yf_{zz}\right)^2}{f_z^6\left(\left(\frac{f_x}{f_z}\right)^2+\left(\frac{f_y}{f_z}\right)^2+1\right)^2}\\
&= \frac{\left(f_{xx}f_z^2-2f_{xz}f_xf_z+f_{zz}f_x^2\right)\left(f_{yy}f_z^2-2f_{yz}f_yf_z+f_{zz}f_y^2\right)-\left(f_{xy}f_z^2-f_{xz}f_yf_z-f_{zy}f_xf_z+f_xf_yf_{zz}\right)^2}{f_z^2\left(f_x^2+f_y^2+f_z^2\right)^2}\\
&= \frac{AB-C}{(f_z)^2\left((f_x)^2+(f_y)^2+(f_z)^2\right)^2}.
\end{aligned}
$$

Onde A, B e C são dados por:

$$
\begin{aligned}
A &= \left[(f_z)\left((f_{xx})(f_z)-2(f_{xz})(f_x)\right)+(f_{zz})(f_x)^2\right],\\
B &= \left[(f_z)\left((f_{yy})(f_z)-2(f_{yz})(f_y)\right)+(f_{zz})(f_y)^2\right],\\
C &= \left((f_z)\left[(f_{xy})(f_z)-(f_{xz})(f_y)-(f_{zy})(f_x)\right]+(f_x)(f_y)(f_{zz})\right)^2.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2}\left(\frac{z_{yy}\left(z_x^2+1\right)+z_{xx}\left(z_y^2+1\right)-2z_{xy}\left(z_xz_y\right)}{\left(z_x^2+z_y^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{-\left(f_{yy}f_z^2-2f_{yz}f_yf_z+f_{zz}f_y^2\right)\left(f_x^2+f_z^2\right)-\left(f_{xx}f_z^2-2f_{xz}f_xf_z+f_{zz}f_x^2\right)\left(f_y^2+f_z^2\right)+2\left(f_{xy}f_z^2-f_{xz}f_yf_z-f_{zy}f_xf_z+f_xf_yf_{zz}\right)f_xf_y}{f_z^5}}{\frac{\left(f_x^2+f_y^2+f_z^2\right)^{\frac{3}{2}}}{f_z^3}}\right)\\
&= -\frac{\Delta+\Upsilon}{2\left((f_x)^2+(f_y)^2+(f_z)^2\right)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}
$$

Onde Δ e Υ são dados por:

$$\begin{aligned}\Delta &= (f_x)^2(f_{yy}) + (f_z)^2(f_{yy}) + (f_y)^2(f_{xx}) + (f_z)^2(f_{xx}) + (f_x)^2(f_{zz}),\\ \Upsilon &= (f_y)^2(f_{zz}) - 2(f_x)(f_y)(f_{xy}) - 2(f_x)(f_z)(f_{xz}) - 2(f_y)(f_z)(f_{yz}).\end{aligned}$$

Que tem o mesmo módulo da expressão anterior (nesse caso o campo normal foi contrário ao outro, por isso a diferença de sinal).

Portanto, vamos calcular as curvaturas média e gaussiana para um polinômio de grau 2. Comecemos calculando suas derivadas:

$$f(x,y,z) = Ax^2 + Bxy + Cxz + Dx + Ey^2 + Fyz + Gy + Hz^2 + Iz + J,$$

$$f_x = (2Ax + By + Cz + D), \qquad f_y = (Bx + 2Ey + Fz + G), \qquad f_z = (Cx + Fy + 2Hz + I),$$

$$\begin{array}{ll} f_{xx} = 2A, & f_{xy} = B,\\ f_{xz} = C, & f_{yy} = 2E,\\ f_{yz} = F, & f_{zz} = 2H.\end{array}$$

Basta substituir os valores das derivadas de f nas expressões de K e H que obtemos as curvaturas gaussiana e média para essa família.

Cilíndro elíptico

Temos que a função que gera o cilindro elíptico é dada por:

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1.$$

Segue que os coeficientes são dados por:

$$\begin{array}{lllll} A = \frac{1}{a^2}, & B = 0, & C = 0, & D = 0, & E = 0,\\ F = 0, & G = 0, & H = \frac{1}{b^2}, & I = 0, & J = -1.\end{array}$$

Substituindo os valores dos coeficientes na expressão de K e H obtemos:

$$K = 0,$$

$$\begin{aligned} H &= -\frac{\left((2Hz)^2 2A + (2Ax)^2 2H\right)}{2\left((2Ax)^2 + (2Hz)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\\ &= -4\frac{a^2z^2 + b^2x^2}{a^4b^4\left(\sqrt{\frac{4}{a^4}x^2 + \frac{4}{b^4}z^2}\right)^3}.\end{aligned}$$

Cilindro Hiperbólico

Temos que a função que gera o cilindro elíptico é dada por:

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} - 1.$$

Segue que os coeficientes são dados por:

$$\begin{array}{lllll} A = \frac{1}{a^2}, & B = 0, & C = 0, & D = 0, & E = 0,\\ F = 0, & G = 0, & H = -\frac{1}{b^2}, & I = 0, & J = -1.\end{array}$$

Substituindo os valores dos coeficientes na expressão de K e H obtemos:

$$K = 0,$$

$$
\begin{aligned}
H &= -\frac{\left((2Ax)^2 2H + (2Hy)^2 2A\right)}{2\left((2Ax)^2 + (2Hy)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&= -4\frac{(az)^2 - (bx)^2}{a^4 b^4 \left(\sqrt{\frac{4}{a^4}x^2 + \frac{4}{b^4}z^2}\right)^3}.
\end{aligned}
$$

Cilindro Parabólico

Temos que a função que gera o cilindro elíptico é dada por:

$$f(x,y,z) = z - ax^2, \quad a > 0.$$

Segue que os coeficientes são dados por:

$$
\begin{array}{ccccc}
A = -a, & B = 0, & C = 0, & D = 0, & E = 0, \\
F = 0, & G = 0, & H = 0, & I = 1, & J = 0.
\end{array}
$$

Substituindo os valores dos coeficientes na expressão de K e H obtemos:

$$K = 0,$$

$$
\begin{aligned}
H &= -\frac{\left((I)^2 2A\right)}{2\left((2Ax)^2 + (I)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&= -\frac{a}{\left(\sqrt{4a^2x^2 + 1}\right)^3}.
\end{aligned}
$$

Cone Elíptico

Temos que a função que gera o cilindro elíptico é dada por:

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}, \quad a,b,c > 0.$$

Segue que os coeficientes são dados por:

$$
\begin{array}{ccccc}
A = \frac{1}{a^2}, & B = 0, & C = 0, & D = 0, & E = \frac{1}{b^2}, \\
F = 0, & G = 0, & H = -\frac{1}{c^2}, & I = 0, & J = 0.
\end{array}
$$

Substituindo os valores dos coeficientes na expressão de K e H obtemos:

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{\left[(2Hz)\left((2A)(2Hz)\right) + 2H(2Ax)^2\right]\left[(2Hz)\left(2E(2Hz)\right) + 2H(2Ey)^2\right] - \left((2Ax)(2Ey)2H\right)^2}{(2Hz)^2\left((2Ax)^2 + (2Ey)^2 + (2Hz)^2\right)^2} \\
&= \frac{\left(a^2b^2z^2 - a^2c^2y^2 - b^2c^2x^2\right)a^4b^4c^4}{\left(a^4b^4z^2 + a^4c^4y^2 + b^4c^4x^2\right)^2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H &= -\frac{\left((2Ax)^2 2E + (2Hz)^2 2E + (2Ey)^2 2A + (2Hz)^2 2A + (2Ax)^2 2H + (2Ey)^2 2H\right)}{2\left((2Ax)^2 + (2Ey)^2 + (2Hz)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&= -4\frac{a^2b^4z^2 + a^2c^4y^2 + a^4b^2z^2 - a^4c^2y^2 + b^2c^4x^2 - b^4c^2x^2}{\left(\sqrt{\frac{4}{a^4}x^2 + \frac{4}{b^4}y^2 + \frac{4}{c^4}z^2}\right)^3 a^4b^4c^4}.
\end{aligned}
$$

Elipsóide

Temos que a função que gera o cilindro elíptico é dada por:

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1, \quad a,b,c > 0.$$

Segue que os coeficientes são dados por:

$$\begin{array}{ccccc} A = \frac{1}{a^2}, & B = 0, & C = 0, & D = 0, & E = \frac{1}{b^2}, \\ F = 0, & G = 0, & H = \frac{1}{c^2}, & I = 0, & J = -1. \end{array}$$

Substituindo os valores dos coeficientes na expressão de K e H obtemos:

$$\begin{aligned} K &= \frac{\left[(2Hz)\left((2A)(2Hz)\right) + 2H(2Ax)^2\right]\left[(2Hz)\left(2E(2Hz)\right) + 2H(2Ey)^2\right] - \left((2Ax)(2Ey)2H\right)^2}{(2Hz)^2\left((2Ax)^2 + (2Ey)^2 + (2Hz)^2\right)^2} \\ &= \frac{\left(a^2b^2z^2 + a^2c^2y^2 + b^2c^2x^2\right)a^4b^4c^4}{\left(a^4b^4z^2 + a^4c^4y^2 + b^4c^4x^2\right)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H &= -\frac{\left((2Ax)^2 2E + (2Hz)^2 2E + (2Ey)^2 2A + (2Hz)^2 2A + (2Ax)^2 2H + (2Ey)^2 2H\right)}{2\left((2Ax)^2 + (2Ey)^2 + (2Hz)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -4\frac{a^2b^4z^2 + a^2c^4y^2 + a^4b^2z^2 + a^4c^2y^2 + b^2c^4x^2 + b^4c^2x^2}{\left(\sqrt{\frac{4}{a^4}x^2 + \frac{4}{b^4}y^2 + \frac{4}{c^4}z^2}\right)^3 a^4b^4c^4}. \end{aligned}$$

Hiperbolóide de Uma Folha

Temos que a função que gera o cilindro elíptico é dada por:

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1, \quad a,b,c > 0.$$

Segue que os coeficientes são dados por:

$$\begin{array}{ccccc} A = \frac{1}{a^2}, & B = 0, & C = 0, & D = 0, & E = \frac{1}{b^2}, \\ F = 0, & G = 0, & H = -\frac{1}{c^2} & I = 0, & J = -1. \end{array}$$

Substituindo os valores dos coeficientes na expressão de K e H obtemos:

$$\begin{aligned} K &= \frac{\left[(2Hz)\left((2A)(2Hz)\right) + 2H(2Ax)^2\right]\left[(2Hz)\left(2E(2Hz)\right) + 2H(2Ey)^2\right] - \left((2Ax)(2Ey)2H\right)^2}{(2Hz)^2\left((2Ax)^2 + (2Ey)^2 + (2Hz)^2\right)^2} \\ &= \frac{\left(a^2b^2z^2 - a^2c^2y^2 - b^2c^2x^2\right)a^4b^4c^4}{\left(a^4b^4z^2 + a^4c^4y^2 + b^4c^4x^2\right)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H &= -\frac{\left((2Ax)^2 2E + (2Hz)^2 2E + (2Ey)^2 2A + (2Hz)^2 2A + (2Ax)^2 2H + (2Ey)^2 2H\right)}{2\left((2Ax)^2 + (2Ey)^2 + (2Hz)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -4\frac{a^2b^4z^2 + a^2c^4y^2 + a^4b^2z^2 - a^4c^2y^2 + b^2c^4x^2 - b^4c^2x^2}{\left(\sqrt{\frac{4}{a^4}x^2 + \frac{4}{b^4}y^2 + \frac{4}{c^4}z^2}\right)^3 a^4b^4c^4}. \end{aligned}$$

Hiperbolóide de Duas Folhas

Temos que a função que gera o cilindro elíptico é dada por:

$$f(x,y,z) = -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1, \quad a,b,c > 0.$$

Segue que os coeficientes são dados por:

$$\begin{array}{ccccc} A = -\frac{1}{a^2}, & B = 0, & C = 0, & D = 0, & E = -\frac{1}{b^2}, \\ F = 0, & G = 0, & H = \frac{1}{c^2}, & I = 0, & J = -1. \end{array}$$

Substituindo os valores dos coeficientes na expressão de K e H obtemos:

$$\begin{aligned} K &= \frac{\left[(2Hz)\left((2A)(2Hz)\right) + 2H(2Ax)^2\right]\left[(2Hz)\left(2E(2Hz)\right) + 2H(2Ey)^2\right] - \left((2Ax)(2Ey)2H\right)^2}{(2Hz)^2\left((2Ax)^2 + (2Ey)^2 + (2Hz)^2\right)^2} \\ &= \frac{\left(a^2b^2z^2 - a^2c^2y^2 - b^2c^2x^2\right)a^4b^4c^4}{\left(a^4b^4z^2 + a^4c^4y^2 + b^4c^4x^2\right)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H &= -\frac{\left((2Ax)^2 2E + (2Hz)^2 2E + (2Ey)^2 2A + (2Hz)^2 2A + (2Ax)^2 2H + (2Ey)^2 2H\right)}{2\left((2Ax)^2 + (2Ey)^2 + (2Hz)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= 4\frac{a^2b^4z^2 + a^2c^4y^2 + a^4b^2z^2 - a^4c^2y^2 + b^2c^4x^2 - b^4c^2x^2}{\left(\sqrt{\frac{4}{a^4}x^2 + \frac{4}{b^4}y^2 + \frac{4}{c^4}z^2}\right)^3 a^4b^4c^4}. \end{aligned}$$

Parabolóide Elíptico

Temos que a função que gera o cilindro elíptico é dada por:

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z, \quad a,b,c > 0.$$

Segue que os coeficientes são dados por:

$$\begin{array}{ccccc} A = \frac{1}{a^2}, & B = 0, & C = 0, & D = 0, & E = \frac{1}{b^2}, \\ F = 0, & G = 0, & H = 0, & I = -1, & J = -1. \end{array}$$

Substituindo os valores dos coeficientes na expressão de K e H obtemos:

$$\begin{aligned} K &= \frac{\left[(I)\left((2A)(I)\right)\right]\left[(I)\left(2E(I)\right)\right]}{(I)^2\left((2Ax)^2 + (2Ey)^2 + (I)^2\right)^2} \\ &= \frac{4a^6b^6}{\left(a^4b^4 + 4a^4y^2 + 4b^4x^2\right)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H &= -\frac{\left((2Ax)^2 2E + (I)^2 2E + (2Ey)^2 2A + (I)^2 2A\right)}{2\left((2Ax)^2 + (2Ey)^2 + (I)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\frac{a^2b^4 + a^4b^2 + 4a^2y^2 + 4b^2x^2}{\left(\sqrt{\frac{4}{a^4}x^2 + \frac{4}{b^4}y^2 + 1}\right)^3 a^4b^4}. \end{aligned}$$

Parabolóide Hiperbólico

Temos que a função que gera o cilindro elíptico é dada por:

$$f(x,y,z) = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z, \qquad a,b,c > 0.$$

Segue que os coeficientes são dados por:

$$\begin{array}{ccccc} A = -\frac{1}{a^2}, & B = 0, & C = 0, & D = 0, & E = \frac{1}{b^2}, \\ F = 0, & G = 0, & H = 0, & I = -1, & J = -1. \end{array}$$

Substituindo os valores dos coeficientes na expressão de K e H obtemos:

$$\begin{aligned} K &= \frac{[(I)((2A)(I))][(I)(2E(I))]}{(I)^2\left((2Ax)^2 + (2Ey)^2 + (I)^2\right)^2} \\ &= -\frac{4a^6b^6}{\left(a^4b^4 + 4a^4y^2 + 4b^4x^2\right)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H &= -\frac{\left((2Ax)^2 2E + (I)^2 2E + (2Ey)^2 2A + (I)^2 2A\right)}{2\left((2Ax)^2 + (2Ey)^2 + (I)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{a^2b^4 - a^4b^2 + 4a^2y^2 - 4b^2x^2}{\left(\sqrt{\frac{4}{a^4}x^2 + \frac{4}{b^4}y^2 + 1}\right)^3 a^4b^4}. \end{aligned}$$

Capítulo 4

Espaço Hiperbólico $\mathbb{H}^3$

Como foi feito no inicio do capítulo anterior, aqui iremos mostrar algumas propriedades do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3$. Novamente, para fins de simplificação, cada operador calculado de determinada variedade, se não houver ambiguidade, não será indexado com a nomenclatura da variedade, basta apenas observarmos o contexto para descobrirmos sobre qual variedade determinado operador se refere.

Vamos nos aprofundar nos exemplos de hipersuperfícies imersas, como, superfícies helicoidais e de revolução. Adicionaremos alguns exemplos de superfícies particulares que tornam o espaço hiperbólico diferente do euclidiano, como os gráficos geodésicos e gráficos de função em diferentes planos.

Procuraremos relacionar cada resultado obtido aqui com os resultados no euclidiano, de modo a compreeder o grau de mudança das conclusões obtidas de um espaço para outro e como isso afeta no nível de dificuldade para a caracterização das superfícies.

Definição 4.0.13 *Definimos o espaço hiperbólico como* $\mathbb{H}^3 = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : c > 0\right\}$ *munido da métrica hiperbólica* g *, ou seja, se* $v = (v_1, v_2, v_3)$*,* $w = (w_1, w_2, w_3) \in T_p\mathbb{H}^3$ *e* $\Pi_3(p_1, p_2, p_3) = p_3$*, segue que:*

$$g\,(v, w) = \frac{v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3}{\Pi_3^2(p)}.$$

4.1 *Conexão Levi-Civita e Curvaturas*

Para uma variedade riemanniana qualquer, temos que os símbolos de Christoffel são dados por:

$$\Gamma_{i,j}^m = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\left\{\partial_i(g_{jk}) + \partial_j(g_{ki}) - \partial_k(g_{ij})\right\} g^{km}.$$

onde $\{\partial_i\}_{i=1}^n$ é base e (g_{ij}) é a matriz da métrica riemanniana de T_PM, e $\left(g^{ij}\right)$ é sua matriz inversa.

Seja $P = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{H}^3$ e seja $\alpha_i(t) = P + te_i$ uma curva em $\mathbb{H}^3$, vemos que $\alpha_i(0) = P$ e $\alpha_i'(0) = e_i$. Portanto, temos que:

$$e_a(g_{bc}) = (g_{bc} \circ \alpha_a)'(0).$$

Por exemplo:

$$e_3(g_{11}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Pi_3^2(p + te_3)}\right)_{t=0} = \left[\frac{1}{(p_3 + t)^2}\right]_{t=0}' = \frac{-2}{(p_3 + t)^3}_{t=0} = \frac{-2}{p_3^3}.$$

Com isso, já conseguimos obter a matriz da métrica hiperbólica, (g_{ij}) , e sua inversa, $\left(g^{ij}\right)$:

$$(g_{ij})(p) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Pi_3^2(p)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Pi_3^2(p)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Pi_3^2(p)} \end{bmatrix},$$

$$(g^{ij})(P) = \begin{bmatrix} \Pi_3^2(p) & 0 & 0 \\ 0 & \Pi_3^2(p) & 0 \\ 0 & 0 & \Pi_3^2(p) \end{bmatrix}.$$

Segue disso, que estamos aptos a calcular todos os símbolos de Christoffel hiperbólicos, e eles são dados por:

$$\left(\Gamma_{ij}^1\right)(p) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\Pi_3(p)} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\Pi_3(p)} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\left(\Gamma_{ij}^2\right)(p) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\Pi_3(p)} \\ 0 & -\frac{1}{\Pi_3(p)} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\left(\Gamma_{ij}^3\right)(p) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Pi_3(p)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Pi_3(p)} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\Pi_3(p)} \end{bmatrix}.$$

Agora vamos obter a expressão da conexão hiperbólica. Seja os campos $X, Y : M \longrightarrow TM$, onde:

$$X(P) = \sum_{i=1}^{3} x_i(P)\partial_i(P)\ ; \quad Y(P) = \sum_{j=1}^{3} y_j(P)\partial_j(P)$$

Usando que, no $\mathbb{H}^3$, $\partial_j = e_j \quad j = 1, ..., 3$ e os símbolos de Christóffel já encontrados, segue que:

$$\begin{aligned}
(\nabla_X Y)(p) &= \textstyle\sum_{k=1}^{3} \left(\sum_{i,j=1}^{3} x_i(p)y_j(p)\Gamma_{i,j}^k(p) + X(p)(y_k) \right) e_k(p) \\
&= \begin{pmatrix} x_1(p)y_3(p)\Gamma_{1,3}^1(p) + x_3(p)y_1(p)\Gamma_{3,1}^1(p) \\ x_2(p)y_3(p)\Gamma_{2,3}^2(p) + x_3(p)y_2(p)\Gamma_{3,2}^2(p) \\ x_1(p)y_1(p)\Gamma_{1,1}^3(p) + x_2(p)y_2(p)\Gamma_{2,2}^3(p) + x_3(p)y_3(p)\Gamma_{3,3}^3(p) \end{pmatrix} + \textstyle\sum_{k=1}^{3} X(p)(y_k)e_k(p) \\
&= \begin{pmatrix} x_1(p)y_3(p)\left(-\frac{1}{\Pi_3(p)}\right) + x_3(p)y_1(p)\left(-\frac{1}{\Pi_3(p)}\right) \\ x_2(p)y_3(p)\left(-\frac{1}{\Pi_3(p)}\right) + x_3(p)y_2(p)\left(-\frac{1}{\Pi_3(p)}\right) \\ x_1(p)y_1(p)\left(\frac{1}{\Pi_3(p)}\right) + x_2(p)y_2(p)\left(\frac{1}{\Pi_3(p)}\right) + x_3(p)y_3(p)\left(-\frac{1}{\Pi_3(p)}\right) \end{pmatrix} + dY_p.X \\
&= -\frac{1}{\Pi_3(p)} \begin{pmatrix} x_1(p)y_3(p) + x_3(p)y_1(p) \\ x_2(p)y_3(p) + x_3(p)y_2(p) \\ -x_1(p)y_1(p) - x_2(p)y_2(p) + x_3(p)y_3(p) \end{pmatrix} + dY_p.X \\
&= -\frac{1}{\Pi_3(p)} \begin{pmatrix} x_1(p)y_3(p) + x_3(p)y_1(p) \\ x_2(p)y_3(p) + x_3(p)y_2(p) \\ -x_1(p)y_1(p) - x_2(p)y_2(p) + x_3(p)y_3(p) \end{pmatrix} + \left(\nabla_X^{\mathbb{R}^3} Y\right)(p).
\end{aligned}$$

Vamos agora calcular as curvaturas do espaço hiperbólico. Sejam os campos $X, Y, Z : \mathbb{H}^3 \longrightarrow T\mathbb{H}^3$, com

$$X(P) = \sum_{i=1}^{3} x_i(P)\partial_i(P), \qquad Y(P) = \sum_{j=1}^{3} y_j(P)\partial_j(P), \qquad Z(P) = \sum_{k=1}^{3} z_k(P)\partial_k(P).$$

Usando a expressão dos $\left(R_{i,j,k}^l\right)' s$ e os símbolos de Christoffel do $\mathbb{H}^3$, obtemos que:

$$\begin{bmatrix} (R_{i,j,1}^1) & (R_{i,j,2}^1) & (R_{i,j,3}^1) \\ (R_{i,j,1}^2) & (R_{i,j,2}^2) & (R_{i,j,3}^2) \\ (R_{i,j,1}^3) & (R_{i,j,2}^3) & (R_{i,j,3}^3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\Pi_3^2(p)} & 0 \\ -\frac{1}{\Pi_3^2(p)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\Pi_3^2(p)} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\Pi_3^2(p)} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\Pi_3^2(p)} & 0 \\ \frac{1}{\Pi_3^2(p)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Pi_3^2(p)} \\ 0 & -\frac{1}{\Pi_3^2(p)} & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\Pi_3^2(p)} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\Pi_3^2(p)} & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\Pi_3^2(p)} \\ 0 & \frac{1}{\Pi_3^2(p)} & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Substituindo na fórmula, obtemos que:

$$
\begin{aligned}
(R(X,Y)Z)(p) &= \begin{pmatrix} \left(R^1_{212}x_2y_1z_2 + R^1_{313}x_3y_1z_3 + R^1_{122}x_1y_2z_2 + R^1_{133}x_1y_3z_3\right)(p) \\ \left(R^2_{121}x_1y_2z_1 + R^2_{323}x_3y_2z_3 + R^2_{211}x_2y_1z_1 + R^2_{233}x_2y_3z_3\right)(p) \\ \left(R^3_{131}x_1y_3z_1 + R^3_{232}x_2y_3z_2 + R^3_{311}x_3y_1z_1 + R^3_{322}x_3y_2z_2\right)(p) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{\Pi_3^2(p)}x_2y_1z_2 - \frac{1}{\Pi_3^2(p)}x_3y_1z_3 + \frac{1}{\Pi_3^2(p)}x_1y_2z_2 + \frac{1}{\Pi_3^2(p)}x_1y_3z_3\right)(p) \\ \left(-\frac{1}{\Pi_3^2(p)}x_1y_2z_1 - \frac{1}{\Pi_3^2(p)}x_3y_2z_3 + \frac{1}{\Pi_3^2(p)}x_2y_1z_1 + \frac{1}{\Pi_3^2(p)}x_2y_3z_3\right)(p) \\ \left(-\frac{1}{\Pi_3^2(p)}x_1y_3z_1 - \frac{1}{\Pi_3^2(p)}x_2y_3z_2 + \frac{1}{\Pi_3^2(p)}x_3y_1z_1 + \frac{1}{\Pi_3^2(p)}x_3y_2z_2\right)(p) \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{\Pi_3^2(p)} \begin{pmatrix} (x_2y_1z_2 + x_3y_1z_3 - x_1y_2z_2 - x_1y_3z_3) \\ (x_1y_2z_1 + x_3y_2z_3 - x_2y_1z_1 - x_2y_3z_3) \\ (x_1y_3z_1 + x_2y_3z_2 - x_3y_1z_1 - x_3y_2z_2) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Sejam $x = (x_1, x_2, x_3)$; $y = (y_1, y_2, y_3) \in T_P\mathbb{H}^3$ dois vetores L.I. Usando a fórmula do tensor curvatura, obtemos a curvatura seccional:

$$
\begin{aligned}
K(\sigma) &= \frac{\langle R(x,y)x, y\rangle}{|x \wedge y|^2} \\
&= \frac{\frac{-1}{p_3^2}\left\langle \begin{pmatrix} x_2y_1x_2 + x_3y_1x_3 - x_1y_2x_2 - x_1y_3x_3 \\ x_1y_2x_1 + x_3y_2x_3 - x_2y_1x_1 - x_2y_3x_3 \\ x_1y_3x_1 + x_2y_3x_2 - x_3y_1x_1 - x_3y_2x_2 \end{pmatrix}, (y_1, y_2, y_3) \right\rangle_H}{|x \wedge y|^2} \\
&= \frac{-1}{p_3^4}\left(\frac{x_1^2y_2^2 + x_1^2y_3^2 - 2x_1x_2y_1y_2 - 2x_1x_3y_1y_3 + x_2^2y_1^2 + x_2^2y_3^2 - 2x_2x_3y_2y_3 + x_3^2y_1^2 + x_3^2y_2^2}{|x \wedge y|^2}\right) \\
&= \frac{-1}{p_3^2}\left(\frac{x_1^2y_2^2 + x_1^2y_3^2 - 2x_1x_2y_1y_2 - 2x_1x_3y_1y_3 + x_2^2y_1^2 + x_2^2y_3^2 - 2x_2x_3y_2y_3 + x_3^2y_1^2 + x_3^2y_2^2}{|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2}\right) \\
&= \frac{-1}{p_3^4}\left(\frac{x_1^2y_2^2 + x_1^2y_3^2 - 2x_1x_2y_1y_2 - 2x_1x_3y_1y_3 + x_2^2y_1^2 + x_2^2y_3^2 - 2x_2x_3y_2y_3 + x_3^2y_1^2 + x_3^2y_2^2}{\frac{\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)\left(y_1^2+y_2^2+y_3^2\right) - (x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2}{p_3^4}}\right) \\
&= \frac{-1}{p_3^4}\left(\frac{x_1^2y_2^2 + x_1^2y_3^2 - 2x_1x_2y_1y_2 - 2x_1x_3y_1y_3 + x_2^2y_1^2 + x_2^2y_3^2 - 2x_2x_3y_2y_3 + x_3^2y_1^2 + x_3^2y_2^2}{\frac{x_1^2y_2^2+x_1^2y_3^2-2x_1x_2y_1y_2-2x_1x_3y_1y_3+x_2^2y_1^2+x_2^2y_3^2-2x_2x_3y_2y_3+x_3^2y_1^2+x_3^2y_2^2}{p_3^4}}\right) \\
&= -\frac{p_3^4}{p_3^4}\left(\frac{x_1^2y_2^2 + x_1^2y_3^2 - 2x_1x_2y_1y_2 - 2x_1x_3y_1y_3 + x_2^2y_1^2 + x_2^2y_3^2 - 2x_2x_3y_2y_3 + x_3^2y_1^2 + x_3^2y_2^2}{x_1^2y_2^2 + x_1^2y_3^2 - 2x_1x_2y_1y_2 - 2x_1x_3y_1y_3 + x_2^2y_1^2 + x_2^2y_3^2 - 2x_2x_3y_2y_3 + x_3^2y_1^2 + x_3^2y_2^2}\right) \\
&= -1.
\end{aligned}
$$

Seja $x = (x_1, x_2, x_3) \in T_P\mathbb{H}^3$ um vetor unitário e tomemos uma base ortonormal $\{z_1, z_2\}$ do hiperplano de $T_P\mathbb{H}^3$ ortogonal a x. $z_1 = (z_{11}, z_{12}, z_{13})$ $z_2 = (z_{21}, z_{22}, z_{23})$. Temos que:

$$
\begin{aligned}
Ric_P(x) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\langle R(x, z_i)x, z_i\rangle \\
&= \frac{-1}{2\Pi_3^2(p)}\left[g\left(\left(\begin{pmatrix} (x_2^2z_{11} + x_3^2z_{11} - x_1z_{12}x_2 - x_1z_{13}x_3) \\ (x_1^2z_{12} + x_3^2z_{12} - x_2z_{11}x_1 - x_2z_{13}x_3) \\ (x_1^2z_{13} + x_2^2z_{13} - x_3z_{11}x_1 - x_3z_{12}x_2) \end{pmatrix}, z_1\right)\right) + g\left(\left(\begin{pmatrix} (x_2^2z_{21} + x_3^2z_{21} - x_1z_{22}x_2 - x_1z_{23}x_3) \\ (x_1^2z_{22} + x_3^2z_{22} - x_2z_{21}x_1 - x_2z_{23}x_3) \\ (x_1^2z_{23} + x_2^2z_{23} - x_3z_{21}x_1 - x_3z_{22}x_2) \end{pmatrix}, z\right.\right.\right. \\
&= -\frac{[x_1z_{12} - x_2z_{11}]^2 + [x_1z_{13} - x_3z_{11}]^2 + [x_2z_{13} - x_3z_{12}]^2 + [x_1z_{22} - x_2z_{21}]^2 + [x_1z_{23} - x_3z_{21}]^2 + [x_2z_{23} - x_3z_{22}]^2}{2\Pi_3^4(p)}.
\end{aligned}
$$

Seja $\{z_1, z_2, z_3\}$ base ortonormal de $T_P\mathbb{H}^3$, então:

$$
\begin{aligned}
K(P) &= \tfrac{1}{3}\left[Ric_P(z_1) + Ric_P(z_2) + Ric_P(z_3)\right] \\
&\ \tfrac{1}{3}\left[\begin{array}{l} \left(-\frac{\left\{[z_{11}z_{12}-z_{12}z_{11}]^2+[z_{11}z_{13}-z_{13}z_{11}]^2+[z_{12}z_{13}-z_{13}z_{12}]^2+[z_{11}z_{22}-z_{12}z_{21}]^2+[z_{11}z_{23}-z_{13}z_{21}]^2+[z_{12}z_{23}-z_{13}z_{22}]^2\right\}}{2\Pi_3^4(p)}\right) + \\ \left(-\frac{\left\{[z_{21}z_{12}-x_2z_{11}]^2+[z_{21}z_{13}-z_{23}z_{11}]^2+[z_{22}z_{13}-z_{23}z_{12}]^2+[z_{21}z_{22}-z_{22}z_{21}]^2+[z_{21}z_{23}-z_{23}z_{21}]^2+[z_{22}z_{23}-z_{23}z_{22}]^2\right\}}{2\Pi_3^4(p)}\right) + \\ \left(-\frac{\left\{[z_{31}z_{12}-z_{32}z_{11}]^2+[z_{31}z_{13}-z_{33}z_{11}]^2+[z_{32}z_{13}-z_{33}z_{12}]^2+[z_{31}z_{22}-z_{32}z_{21}]^2+[z_{31}z_{23}-z_{33}z_{21}]^2+[z_{32}z_{23}-z_{33}z_{22}]^2\right\}}{2\Pi_3^4(p)}\right) \end{array}\right] \\
&= -\tfrac{A+B}{3\Pi_3^4(p)}.
\end{aligned}
$$

Onde A e B são dados por:

$$A = [z_{11}z_{22} - z_{21}z_{12}]^2 + [z_{11}z_{23} - z_{13}z_{21}]^2 + [z_{12}z_{23} - z_{13}z_{22}]^2 + [z_{11}z_{32} - z_{12}z_{31}]^2 + [z_{11}z_{33} - z_{13}z_{31}]^2,$$
$$B = [z_{12}z_{33} - z_{13}z_{32}]^2 + [z_{31}z_{22} - z_{32}z_{21}]^2 + [z_{31}z_{23} - z_{33}z_{21}]^2 + [z_{32}z_{23} - z_{33}z_{22}]^2.$$

4.2 Imersões Isométricas

Vamos agora, encontrar as curvaturas média, gaussiana e principais para melhor entender as superfícies imersas no $\mathbb{H}^3$.

Seja S uma superfície em $\mathbb{H}^3$e $x : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S \subset \mathbb{H}^3$ sua parametrização. Seja $dx.e_1, dx.e_2$ denotados por x_u, x_v respectivamente. Temos que $\{x_u, x_v\}$ é base de T_PS, para todo $p \in S$. Definimos o normal unitário η por:

$$\eta(P) = \frac{x_u(P) \wedge x_v(P)}{\|x_u(P) \wedge x_v(P)\|} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3).$$

Já estamos aptos ao cálculo da aplicação S_n que é de suma importância para a obtenção das curvaturas da superfície imersa. Seja $N : \mathbb{H}^3 \longrightarrow T\mathbb{H}^3$ tal que $N|_S = \eta$. Temos

$$S_\eta : x \in T_PS \mapsto -(\nabla_x N)^T \in T_pS.$$

Note que se $y = (y_1, y_2, y_3)$, então:

$$(\nabla_y N)(p) = -\frac{1}{\Pi_3(p)} (y_1\eta_3 + y_3\eta_1, y_2\eta_3 + y_3\eta_2, -y_1\eta_1 - y_2\eta_2 + y_3\eta_3) + dN_{\mathbb{H}^3}.y.$$

Agora temos que descobrir as coordenadas $\eta_1, \eta_2,$ e η_3.Seja $x_u(p) = (x_{u_1}(p), x_{u_2}(p), x_{u_3}(p))$ e $x_v(p) = (x_{v_1}(p), x_{v_2}(p), x_{v_3}(p))$

Notemos que temos uma relação entre o normal euclidiano e o normal hiperbólico:

$$N(p) = \frac{x_u(p) \wedge x_v(p)}{\|x_u(p) \wedge x_v(p)\|} = \Pi_3(p)\frac{x_u(p) \wedge x_v(p)}{||x_u(p) \wedge x_v(p)||_{\mathbb{R}^3}} = \Pi_3(p)N_{\mathbb{R}^3}(p),$$

$$\Omega = x_u \wedge x_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_{u_1} & x_{u_2} & x_{u_3} \\ x_{v_1} & x_{v_2} & x_{v_3} \end{vmatrix} = (x_{u_2}x_{v_3} - x_{u_3}x_{v_2}, x_{u_3}x_{v_1} - x_{u_1}x_{v_3}, x_{u_1}x_{v_2} - x_{u_2}x_{v_1}).$$

Logo, temos que:

$$N(p) = \Pi_3(p)\frac{(x_{u_2}x_{v_3} - x_{u_3}x_{v_2}, x_{u_3}x_{v_1} - x_{u_1}x_{v_3}, x_{u_1}x_{v_2} - x_{u_2}x_{v_1})}{\sqrt[2]{J}}.$$

Onde J é dado por:

$$J = \left[(x_{u_2}x_{v_3} - x_{u_3}x_{v_2})^2 + (x_{u_3}x_{v_1} - x_{u_1}x_{v_3})^2 + (x_{u_1}x_{v_2} - x_{u_2}x_{v_1})^2\right].$$

Assim, segue que as coordenadas do campo normal são dadas por:

$$\eta_1(p) = \frac{\Pi_3(p)}{\sqrt[2]{J}}[x_{u_2}x_{v_3} - x_{u_3}x_{v_2}] = \frac{\Pi_3(p)}{\sqrt[2]{J}}\Pi_1(\Omega),$$

$$\eta_2(p) = \frac{\Pi_3(p)}{\sqrt[2]{J}}[x_{u_3}x_{v_1} - x_{u_1}x_{v_3}] = \frac{\Pi_3(p)}{\sqrt[2]{J}}\Pi_2(\Omega),$$

$$\eta_3(p) = \frac{\Pi_3(p)}{\sqrt[2]{J}}[x_{u_1}x_{v_2} - x_{u_2}x_{v_1}] = \frac{\Pi_3(p)}{\sqrt[2]{J}}\Pi_3(\Omega).$$

Vamos fazer as seguintes notacções:

$$
\begin{aligned}
A &= -\frac{1}{\sqrt[2]{J}}\left(y_1\Pi_3(\Omega)+y_3\Pi_1(\Omega), y_2\Pi_3(\Omega)+y_3\Pi_2(\Omega), -y_1\Pi_1(\Omega)-y_2\Pi_2(\Omega)+y_3\Pi_3(\Omega)\right),\\
B &= -\frac{1}{\sqrt[2]{J}}\left(y_1\Pi_3(\Omega), y_2\Pi_3(\Omega), -y_1\Pi_1(\Omega)-y_2\Pi_2(\Omega)\right),\\
C &= -\frac{y_3}{\sqrt[2]{J}}(\Pi_1(\Omega), \Pi_2(\Omega), \Pi_3(\Omega)).
\end{aligned}
$$

Portanto, sendo $\alpha(t)=p+ty$ uma curva diferenciável com $\alpha(0)=p, \alpha'(0)=y$:

$$
\begin{aligned}
(\nabla_y N)(P) &= A+\tfrac{d}{dt}\left(N_{\mathbb{H}^3}\circ\alpha\right)|_{t=0}\\
&= -A+\tfrac{d}{dt}\left([\Pi_3 N_{\mathbb{R}^3}]\circ\alpha\right)|_{t=0}\\
&= -A+(\Pi_3\circ\alpha)'\left(N_{\mathbb{R}^3}\circ\alpha\right)|_{t=0}+\left[(\Pi_3\circ\alpha)|_{t=0}\right]dN_{\mathbb{R}^3}.y\\
&= B+C+y_3(N_{\mathbb{R}^3}\circ\alpha)|_{t=0}+\left[(\Pi_3\circ\alpha)|_{t=0}\right]dN_{\mathbb{R}^3}.y\\
&= B+C+y_3(N_{\mathbb{R}^3}\circ\alpha)|_{t=0}+\left[(\Pi_3\circ\alpha)|_{t=0}\right]dN_{\mathbb{R}^3}.y\\
&= B-y_3(N_{\mathbb{R}^3}\circ\alpha)|_{t=0}+y_3(N_{\mathbb{R}^3}\circ\alpha)|_{t=0}+\left[(\Pi_3\circ\alpha)|_{t=0}\right]dN_{\mathbb{R}^3}.y\\
&= B+\Pi_3(p)dN_{\mathbb{R}^3}.y.
\end{aligned}
$$

Note que, como $\langle N,N\rangle=(||N||)^2\equiv 1$, então, de contas que já fizemos, concluímos que: $\nabla_y N=(\nabla_y N)^T$.
Por fim, concluímos que:

$$
\begin{aligned}
S_\eta(y) &= -(\nabla_y N)^T=\tfrac{1}{\sqrt[2]{J}}\left(y_1\Pi_3(\Omega), y_2\Pi_3(\Omega), -y_1\Pi_1(\Omega)-y_2\Pi_2(\Omega)\right)-\Pi_3(p)dN_{\mathbb{R}^3}.y\\
&= I_1(y)-I_2(y).
\end{aligned}
$$

onde:

$$
\begin{aligned}
I_1(y) &= \tfrac{1}{\sqrt[2]{J}}\left(y_1\Pi_3(\Omega), y_2\Pi_3(\Omega), -y_1\Pi_1(\Omega)-y_2\Pi_2(\Omega)\right),\\
I_2(y) &= \Pi_3(p)dN_{\mathbb{R}^3}.y.
\end{aligned}
$$

Vamos encontrar as matrizes de I_1 e I_2 na base $\{x_u, x_v\}$, obtendo assim a matriz de S_η. Para isso, vamos trabalhar novamente com os seguintes coeficientes:

$$
\begin{aligned}
e &= \langle N_{\mathbb{R}^3}, x_{uu}\rangle_{\mathbb{R}^3}, \quad f=\langle N_{\mathbb{R}^3}, x_{uv}\rangle_{\mathbb{R}^3}, \quad g=\langle N_{\mathbb{R}^3}, x_{vv}\rangle_{\mathbb{R}^3},\\
E &= \langle x_u, x_u\rangle_{\mathbb{R}^3}, \quad F=\langle x_u, x_v\rangle_{\mathbb{R}^3}, \quad G=\langle x_v, x_v\rangle_{\mathbb{R}^3}.
\end{aligned}
$$

Pelos cálculos que já fizemos no euclidiano, é fácil concluir que:

$$
[I_2]=[\Pi_3 dN_{\mathbb{R}^3}](p)=\Pi_3(p)\begin{bmatrix}\frac{fF-eG}{EG-F^2} & \frac{gF-fG}{EG-F^2}\\ \frac{eF-fE}{EG-F^2} & \frac{fF-gE}{EG-F^2}\end{bmatrix}.
$$

Nos resta descobrir a matriz de I_1, então vamos aplicar na base para obtermos suas coordenadas:

$$
I_1(x_u)=\frac{[x_{u_1}x_{v_2}-x_{u_2}x_{v_1}]}{\sqrt[2]{J}}x_u \quad , \quad I_1(x_v)=\frac{[x_{u_1}x_{v_2}-x_{u_2}x_{v_1}]}{\sqrt[2]{J}}x_v.
$$

Com isso temos a matriz de I_1 :

$$
[I_1]=\begin{bmatrix}\frac{[x_{u_1}x_{v_2}-x_{u_2}x_{v_1}]}{\sqrt[2]{J}} & 0\\ 0 & \frac{[x_{u_1}x_{v_2}-x_{u_2}x_{v_1}]}{\sqrt[2]{J}}\end{bmatrix}.
$$

Agora basta somar as matrizes $[I_1]$ e $[I_2]$ e obtemos a matriz $[S_\eta]$:

$$
[S_\eta]=\begin{bmatrix}\frac{[x_{u_1}x_{v_2}-x_{u_2}x_{v_1}]}{\sqrt[2]{J}}-\Pi_3(p)\frac{fF-eG}{EG-F^2} & \Pi_3(p)\frac{gF-fG}{EG-F^2}\\ \Pi_3(p)\frac{eF-fE}{EG-F^2} & \frac{[x_{u_1}x_{v_2}-x_{u_2}x_{v_1}]}{\sqrt[2]{J}}-\Pi_3(p)\frac{fF-gE}{EG-F^2}\end{bmatrix}.
$$

Já possuímos ferramentas para calcular as curvaturas média, gaussiana e principais, temos que:

$$
\begin{aligned}
K(p) &= \left(\frac{[x_{u_1}x_{v_2}-x_{u_2}x_{v_1}]}{\sqrt[2]{J}}-\Pi_3(p)\frac{fF-eG}{EG-F^2}\right)\left(\frac{[x_{u_1}x_{v_2}-x_{u_2}x_{v_1}]}{\sqrt[2]{J}}-\Pi_3(p)\frac{fF-gE}{EG-F^2}\right)-\left(\Pi_3(p)\frac{gF-fG}{EG-F^2}\right)\left(\Pi_3(p)\frac{eF-fE}{EG-F^2}\right)\\
&= \frac{\Pi_3^2(x_u\wedge x_v)}{\Pi_3^2(p)|x_u\wedge x_v|_H^2}-\frac{\Pi_3(x_u\wedge x_v)}{|x_u\wedge x_v|_H}\left(\frac{2fF-eG-gE}{EG-F^2}\right)+\Pi_3^2(p)\left(\frac{eg-f^2}{EG-F^2}\right)\\
&= \frac{\Pi_3^2(x_u\wedge x_v)}{|x_u\wedge x_v|_{\mathbb{R}}^2}-\frac{\Pi_3(p)\Pi_3(x_u\wedge x_v)}{|x_u\wedge x_v|_{\mathbb{R}}}\left(\frac{2fF-eG-gE}{EG-F^2}\right)+\Pi_3^2(p)\left(\frac{eg-f^2}{EG-F^2}\right)\\
&= \frac{\Pi_3^2(x_u\wedge x_v)}{|x_u\wedge x_v|_{\mathbb{R}}^2}+2\frac{\Pi_3(p)\Pi_3(x_u\wedge x_v)}{|x_u\wedge x_v|_{\mathbb{R}}}H_{\mathbb{R}^3}(p)+\Pi_3^2(p)K_{\mathbb{R}^3}(p).
\end{aligned}
$$

Seja $[S_\eta]=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}$.

Temos que a curvatura média é dada por:

$$\begin{aligned}
H(p) &= \tfrac{A_{11}+A_{22}}{2}\\
&= \tfrac{\Pi_3(x_u\wedge x_v)}{|x_u\wedge x_v|_{\mathbb{R}}} - \tfrac{\Pi_3(p)}{2}\left(\tfrac{2fF-eG-gE}{EG-F^2}\right)\\
&= \tfrac{\Pi_3(x_u\wedge x_v)}{|x_u\wedge x_v|_{\mathbb{R}}} + \Pi_3(p)H_{\mathbb{R}^3}(p).
\end{aligned}$$

As curvaturas principais são os autovalores da aplicação S_η.
Procuremos seu polinômio característico:

$$P(\lambda) = \det\left([S_\eta - \lambda I]\right) = \det\begin{bmatrix} A_{11}-\lambda & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}-\lambda\end{bmatrix} = \lambda^2 + \lambda(-A_{11}-A_{22}) + (A_{11}A_{22}-A_{21}A_{12}).$$

Ou seja:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2H_{\mathbb{H}^3}\lambda + K_{\mathbb{H}^3}.$$

Cujas raízes são as curvaturas principais:

$$\begin{aligned}
k_1 &= H + \sqrt[2]{H^2-K},\\
k_2 &= H - \sqrt[2]{H^2-K}.
\end{aligned}$$

Vamos procurar relações entre os coeficientes euclidianos e os hiperbólicos. Note que, para uma variedade semi-Riemanniana $(M,\nabla,\langle .,.\rangle)$:

$$\begin{aligned}
e_{\mathbb{H}^3}(p) &= \left\langle N(p), \left(\nabla_{x_u}x_u\right)(p)\right\rangle_H\\
&= \left\langle \Pi_3(p)N_{\mathbb{R}^3}(p), -\tfrac{1}{\Pi_3(p)}\left(2x_{u_1}x_{u_3}, 2x_{u_2}x_{u_3}, -x_{u_1}^2 - x_{u_2}^2 + x_{u_3}^2\right) + d\left(x_u\right)_p.x_u\right\rangle_H\\
&= \left\langle \Pi_3(p)N_{\mathbb{R}^3}(p), -\tfrac{1}{\Pi_3(p)}\left(2x_{u_1}x_{u_3}, 2x_{u_2}x_{u_3}, -x_{u_1}^2 - x_{u_2}^2 + x_{u_3}^2\right) + x_{uu}\right\rangle_H\\
&= -\left\langle N_{\mathbb{R}^3}(p), \left(2x_{u_1}x_{u_3}, 2x_{u_2}x_{u_3}, -x_{u_1}^2 - x_{u_2}^2 + x_{u_3}^2\right)\right\rangle_H + \Pi_3(p)\left\langle N_{\mathbb{R}^3}(p), x_{uu}\right\rangle_H\\
&= -\left\langle \tfrac{\left(x_{u_2}x_{v_3}-x_{u_3}x_{v_2}, x_{u_3}x_{v_1}-x_{u_1}x_{v_3}, x_{u_1}x_{v_2}-x_{u_2}x_{v_1}\right)}{\sqrt[2]{J}}, \left(2x_{u_1}x_{u_3}, 2x_{u_2}x_{u_3}, -x_{u_1}^2 - x_{u_2}^2 + x_{u_3}^2\right)\right\rangle_H + \tfrac{1}{\Pi_3(p)}e_{\mathbb{R}^3}(p)\\
&= -\tfrac{1}{\sqrt[2]{J}}\left\langle \left(\Pi_1(\Omega),\Pi_2(\Omega),\Pi_3(\Omega)\right), \left(2x_{u_1}x_{u_3}, 2x_{u_2}x_{u_3}, -x_{u_1}^2 - x_{u_2}^2 + x_{u_3}^2\right)\right\rangle_H + \tfrac{1}{\Pi_3(p)}e_{\mathbb{R}^3}(p)\\
&= -\tfrac{\left(x_{u_2}x_{v_3}-x_{u_3}x_{v_2}\right)\left(2x_{u_1}x_{u_3}\right)+\left(x_{u_3}x_{v_1}-x_{u_1}x_{v_3}\right)\left(2x_{u_2}x_{u_3}\right)+\left(x_{u_1}x_{v_2}-x_{u_2}x_{v_1}\right)\left(-x_{u_1}^2-x_{u_2}^2+x_{u_3}^2\right)}{\Pi_3^2(p)\sqrt[2]{J}} + \tfrac{1}{\Pi_3(p)}e_{\mathbb{R}^3}(p)\\
&= \left(x_{u_1}^2 + x_{u_2}^2 + x_{u_3}^2\right)\tfrac{x_{u_1}x_{v_2}-x_{u_2}x_{v_1}}{\sqrt{J}\Pi_3^2} + \tfrac{1}{\Pi_3(p)}e_{\mathbb{R}^3}(p)\\
&= E_{\mathbb{R}^3}(p)\tfrac{\Pi_3(x_u\wedge x_v)}{\Pi_3^2(p)||x_u\wedge x_v||_{\mathbb{R}}} + \tfrac{1}{\Pi_3(p)}e_{\mathbb{R}^3}(p),\\
f_{\mathbb{H}^3}(p) &= \left\langle N(p), \left(\nabla_{x_u}x_v\right)(p)\right\rangle_H\\
&= \left\langle \Pi_3(p)N_{\mathbb{R}^3}(p), -\tfrac{1}{\Pi_3(p)}\left(x_{u_1}x_{v_3}+x_{u_3}x_{v_1}, x_{u_2}x_{v_3}+x_{u_3}x_{v_2}, -x_{u_1}x_{v_1}-x_{u_2}x_{v_2}+x_{u_3}x_{v_3}\right) + d\left(x_v\right)_p.x_u\right\rangle_H\\
&= -\left\langle N_{\mathbb{R}^3}(p), \left(x_{u_1}x_{v_3}+x_{u_3}x_{v_1}, x_{u_2}x_{v_3}+x_{u_3}x_{v_2}, -x_{u_1}x_{v_1}-x_{u_2}x_{v_2}+x_{u_3}x_{v_3}\right)\right\rangle_H + \Pi_3(p)\left\langle N_{\mathbb{R}^3}(p), x_{uv}\right\rangle_H\\
&= -\tfrac{1}{\sqrt[2]{J}}\left\langle \left(\Pi_1(\Omega),\Pi_2(\Omega),\Pi_3(\Omega)\right), \left(x_{u_1}x_{v_3}+x_{u_3}x_{v_1}, x_{u_2}x_{v_3}+x_{u_3}x_{v_2}, -\left\langle x_u, x_v\right\rangle_{\text{mink}}\right)\right\rangle_H + \tfrac{1}{\Pi_3(p)}f_{\mathbb{R}^3}(p)\\
&= -\tfrac{\Pi_1(\Omega)\left(x_{u_1}x_{v_3}+x_{u_3}x_{v_1}\right)+\Pi_2(\Omega)\left(x_{u_2}x_{v_3}+x_{u_3}x_{v_2}\right)+\Pi_3(\Omega)\left(-x_{u_1}x_{v_1}-x_{u_2}x_{v_2}+x_{u_3}x_{v_3}\right)}{\Pi_3^2(p)\sqrt[2]{J}} + \tfrac{1}{\Pi_3(p)}f_{\mathbb{R}^3}(p)\\
&= \tfrac{1}{\Pi_3^2(p)\sqrt{J}}\left(x_{u_1}x_{v_2}-x_{u_2}x_{v_1}\right)\left(x_{u_1}x_{v_1}+x_{u_2}x_{v_2}+x_{u_3}x_{v_3}\right) + \tfrac{1}{\Pi_3(p)}f_{\mathbb{R}^3}(p)\\
&= F_{\mathbb{R}^3}(p)\tfrac{\Pi_3(x_u\wedge x_v)}{\Pi_3^2(p)||x_u\wedge x_v||_{\mathbb{R}}} + \tfrac{1}{\Pi_3(p)}f_{\mathbb{R}^3}(p),\\
g_{\mathbb{H}^3}(p) &= \left\langle N(p), \left(\nabla_{x_v}x_v\right)(p)\right\rangle\\
&= \left\langle \Pi_3(p)N_{\mathbb{R}^3}(p), -\tfrac{1}{\Pi_3(p)}\left(2x_{v_1}x_{v_3}, 2x_{v_2}x_{v_3}, -x_{v_1}^2 - x_{v_2}^2 + x_{v_3}^2\right) + d\left(x_v\right)_p.x_v\right\rangle_H\\
&= \left\langle \Pi_3(p)N_{\mathbb{R}^3}(p), -\tfrac{1}{\Pi_3(p)}\left(2x_{v_1}x_{v_3}, 2x_{v_2}x_{v_3}, -x_{v_1}^2 - x_{v_2}^2 + x_{v_3}^2\right) + x_{vv}\right\rangle_H\\
&= -\left\langle N_{\mathbb{R}^3}(p), \left(2x_{v_1}x_{v_3}, 2x_{v_2}x_{v_3}, -x_{v_1}^2 - x_{v_2}^2 + x_{v_3}^2\right)\right\rangle_H + \Pi_3(p)\left\langle N_{\mathbb{R}^3}(p), x_{vv}\right\rangle_H\\
&= -\left\langle \tfrac{\left(x_{u_2}x_{v_3}-x_{u_3}x_{v_2}, x_{u_3}x_{v_1}-x_{u_1}x_{v_3}, x_{u_1}x_{v_2}-x_{u_2}x_{v_1}\right)}{\sqrt[2]{J}}, \left(2x_{v_1}x_{v_3}, 2x_{v_2}x_{v_3}, -x_{v_1}^2 - x_{v_2}^2 + x_{v_3}^2\right)\right\rangle_H + \tfrac{1}{\Pi_3(p)}g_{\mathbb{R}^3}(p)\\
&= -\tfrac{1}{\sqrt[2]{J}}\left\langle \left(\Pi_1(\Omega),\Pi_2(\Omega),\Pi_3(\Omega)\right), \left(2x_{v_1}x_{v_3}, 2x_{v_2}x_{v_3}, -x_{v_1}^2 - x_{v_2}^2 + x_{v_3}^2\right)\right\rangle_H + \tfrac{1}{\Pi_3(p)}g_{\mathbb{R}^3}(p)\\
&= -\tfrac{\left(x_{u_2}x_{v_3}-x_{u_3}x_{v_2}\right)\left(2x_{v_1}x_{v_3}\right)+\left(x_{u_3}x_{v_1}-x_{u_1}x_{v_3}\right)\left(2x_{v_2}x_{v_3}\right)+\left(x_{u_1}x_{v_2}-x_{u_2}x_{v_1}\right)\left(-x_{v_1}^2-x_{v_2}^2+x_{v_3}^2\right)}{\Pi_3^2(p)\sqrt[2]{J}} + \tfrac{1}{\Pi_3(p)}g_{\mathbb{R}^3}(p)\\
&= \left(x_{u_1}^2 + x_{u_2}^2 + x_{u_3}^2\right)\tfrac{\left(x_{u_1}x_{v_2}-x_{u_2}x_{v_1}\right)}{\sqrt{J}\Pi_3^2(p)} + \tfrac{1}{\Pi_3(p)}g_{\mathbb{R}^3}(p)\\
&= G_{\mathbb{R}^3}(p)\tfrac{\Pi_3(x_u\wedge x_v)}{\Pi_3^2(p)||x_u\wedge x_v||_{\mathbb{R}}} + \tfrac{1}{\Pi_3(p)}g_{\mathbb{R}^3}(p).
\end{aligned}$$

Com as relações acima, segue que temos o seguinte teorema que relaciona os coeficientes hiperbólicos e euclidianos.

Teorema 4.2.1 *Os coeficientes hiperbólicos e euclidianos se relacionam da seguinte forma:*

$$
\begin{aligned}
e_{\mathbb{H}^3}(p) &= \frac{\Pi_3(x_u \wedge x_v) E_{\mathbb{R}^3} + ||x_u \wedge x_v||_{\mathbb{R}} \Pi_3(p) e_{\mathbb{R}^3}}{||x_u \wedge x_v||_{\mathbb{R}} \Pi_3^2(p)} &\Rightarrow\quad e_{\mathbb{R}^3}(p) &= \frac{e_{\mathbb{H}^3} ||x_u \wedge x_v||_{\mathbb{R}} \Pi_3^2(p) - \Pi_3(x_u \wedge x_v) E_{\mathbb{R}^3}}{||x_u \wedge x_v||_{\mathbb{R}} \Pi_3(p)}, \\
f_{\mathbb{H}^3}(p) &= \frac{\Pi_3(x_u \wedge x_v) F_{\mathbb{R}^3} + ||x_u \wedge x_v||_{\mathbb{R}} \Pi_3(p) f_{\mathbb{R}^3}}{|||x_u \wedge x_v||_{\mathbb{R}} \Pi_3^2(p)} &\Rightarrow\quad f_{\mathbb{R}^3}(p) &= \frac{f_{\mathbb{H}^3} ||x_u \wedge x_v||_{\mathbb{R}} \Pi_3^2(p) - \Pi_3(x_u \wedge x_v) F_{\mathbb{R}^3}}{||x_u \wedge x_v||_{\mathbb{R}} \Pi_3(p)}, \\
g_{\mathbb{H}^3}(p) &= \frac{\Pi_3(x_u \wedge x_v) G_{\mathbb{R}^3} + ||x_u \wedge x_v||_{\mathbb{R}} \Pi_3(p) g_{\mathbb{R}^3}}{||x_u \wedge x_v||_{\mathbb{R}} \Pi_3^2(p)} &\Rightarrow\quad g_{\mathbb{R}^3}(p) &= \frac{g_{\mathbb{H}^3} ||x_u \wedge x_v||_{\mathbb{R}} \Pi_3^2(p) - \Pi_3(x_u \wedge x_v) G_{\mathbb{R}^3}}{||x_u \wedge x_v||_{\mathbb{R}} \Pi_3(p)}.
\end{aligned}
$$

Prova. Foi demonstrado logo acima. ■

Substituindo esses resultados nas fórmulas das curvaturas Gaussiana e Média e usando que:

$$
\begin{aligned}
E_{\mathbb{H}^3}(p) = \langle x_u(p), x_u(p) \rangle_{T_P \mathbb{H}^3} &= \frac{1}{\Pi_3^2(p)} E_{\mathbb{R}^3}(p) \Rightarrow E_{\mathbb{R}^3}(p) = \Pi_3^2(p) E_{\mathbb{H}^3}(p), \\
F_{H^3}(p) = \langle x_u(p), x_v(p) \rangle_{T_P \mathbb{H}^3} &= \frac{1}{\Pi_3^2(p)} F_{\mathbb{R}^3}(p) \Rightarrow F_{\mathbb{R}^3}(p) = \Pi_3^2(p) F_{\mathbb{H}^3}(p), \\
G_{H^3}(p) = \langle x_v(p), x_v(p) \rangle_{T_P \mathbb{H}^3} &= \frac{1}{\Pi_3^2(p)} G_{\mathbb{R}^3}(p) \Rightarrow G_{\mathbb{R}^3}(p) = \Pi_3^2(p) G_{\mathbb{H}^3}(p).
\end{aligned}
$$

Vamos fazer as seguintes notações:

$$
\begin{aligned}
\Omega &= x_u \wedge x_v, \\
a_1 &= 2\left(f_{\mathbb{H}^3} ||\Omega||_{\mathbb{R}} \Pi_3^2(p) - \Pi_3(\Omega) F_{\mathbb{R}^3}\right)\left(\Pi_3^2(p) F_{\mathbb{H}^3}\right), \\
a_2 &= \left(e_{\mathbb{H}^3} ||\Omega||_{\mathbb{R}} \Pi_3^2(p) - \Pi_3(\Omega) E_{\mathbb{R}^3}\right)\left(\Pi_3^2(p) G_{\mathbb{H}^3}\right), \\
a_3 &= \left(g_{\mathbb{H}^3} ||\Omega||_{\mathbb{R}} \Pi_3^2(p) - \Pi_3(\Omega) G_{\mathbb{R}^3}\right)\left(\Pi_3^2(p) E_{\mathbb{H}^3}\right), \\
A &= \Pi_3(p) \Pi_3(\Omega), \\
B &= \left(\frac{a_1 - a_2 - a_3}{\left(\left(\Pi_3^2(p) E_{\mathbb{H}^3}\right)\left(\Pi_3^2(p) G_{\mathbb{H}^3}\right) - \left(\Pi_3^2(p) F_{\mathbb{H}^3}\right)^2\right) ||\Omega||_{\mathbb{R}}^2 \Pi_3(p)}\right), \\
C &= \Pi_3^2(p)\left(\frac{\left(e_{\mathbb{H}^3} ||\Omega||_{\mathbb{R}} \Pi_3^2(p) - \Pi_3(\Omega) E_{\mathbb{R}^3}\right)\left(g_{\mathbb{H}^3} ||\Omega||_{\mathbb{R}} \Pi_3^2(p) - \Pi_3(\Omega) G_{\mathbb{R}^3}\right) - \left(f_{\mathbb{H}^3} ||\Omega||_{\mathbb{R}} \Pi_3^2(p) - \Pi_3(\Omega) F_{\mathbb{R}^3}\right)^2}{\left(\left(\Pi_3^2(p) E_{\mathbb{H}^3}(p)\right)\left(\Pi_3^2(p) G_{\mathbb{H}^3}(p)\right) - \left(\Pi_3^2(p) F_{\mathbb{H}^3}(p)\right)^2\right) ||\Omega||_{\mathbb{R}} \Pi_3(p)}\right).
\end{aligned}
$$

Obtemos expressões para as curvaturas gaussiana e média que se assemelham às do euclidiano:

$$
\begin{aligned}
K(p) &= \frac{\Pi_3^2(x_u \wedge x_v)}{|x_u \wedge x_v|_{\mathbb{R}}^2} - \frac{\Pi_3(p)\Pi_3(x_u \wedge x_v)}{|x_u \wedge x_v|_{\mathbb{R}}}\left(\frac{2fF - eG - gE}{EG - F^2}\right) + \Pi_3^2(p)\left(\frac{eg - f^2}{EG - F^2}\right) \\
&= \frac{\Pi_3^2(\Omega)}{|\Omega|_{\mathbb{R}}^2} - AB + C \\
&= \frac{e_{\mathbb{H}^3} g_{\mathbb{H}^3} - f_{\mathbb{H}^3}^2}{E_{\mathbb{H}^3} G_{\mathbb{H}^3} - F_{\mathbb{H}^3}^2}, \\
H_{\mathbb{H}^3}(p) &= \frac{\Pi_3(x_u \wedge x_v)}{|x_u \wedge x_v|_{\mathbb{R}}} - \frac{\Pi_3(p)}{2}\left(\frac{2fF - eG - gE}{EG - F^2}\right) \\
&= \frac{\Pi_3(\Omega)}{|\Omega|_{\mathbb{R}}} - \frac{\Pi_3(p)}{2}\left(\frac{a_1 - a_2 - a_3}{\left(\left(\Pi_3^2(p) E_{\mathbb{H}^3}(p)\right)\left(\Pi_3^2(p) G_{\mathbb{H}^3}(p)\right) - \left(\Pi_3^2(p) F_{\mathbb{H}^3}(p)\right)^2\right) ||\Omega||_{\mathbb{R}} \Pi_3(p)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{-2 f_{\mathbb{H}^3} F_{\mathbb{H}^3} + e_{\mathbb{H}^3} G_{\mathbb{H}^3} + g_{\mathbb{H}^3} E_{\mathbb{H}^3}}{E_{\mathbb{H}^3} G_{\mathbb{H}^3} - F_{\mathbb{H}^3}^2}\right].
\end{aligned}
$$

4.3 Exemplos

Repetiremos aqui os exemplos do euclidiano, adicionando mais exemplos particulares do hiperbólico, além de caracterizar algumas superfícies de weingarten.

4.3.1 Gráfico de Função (plano XY)

Dada uma função $h : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ suave, segue que a parametrização do gráfico de h é dada por:

$$X(u, v) = (u, v, h(u, v)), \qquad (u, v) \in U$$

Dos exemplos de superfícies imersas no $\mathbb{R}^3$, já temos os coeficientes euclidianos. Só nos resta encontrar os coeficientes hiperbólicos obtendo, por fim, as curvaturas:

$$
\begin{aligned}
e_{\mathbb{H}^3} &= \frac{\Pi_3(x_u \wedge x_v)E_{\mathbb{R}^3} + ||x_u \wedge x_v||_{\mathbb{R}}\Pi_3(p)e_{\mathbb{R}^3}}{||x_u \wedge x_v||_{\mathbb{R}}\Pi_3^2(p)} \\
&= \frac{h_u^2 + 1 + hh_{uu}}{\left(h_u^2 + h_v^2 + 1\right)^{1/2} h^2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{\mathbb{H}^3} &= \frac{\Pi_3(x_u \wedge x_v)F_{\mathbb{R}^3} + ||x_u \wedge x_v||_{\mathbb{R}}\Pi_3(p)f_{\mathbb{R}^3}}{|||x_u \wedge x_v||_{\mathbb{R}}\Pi_3^2(p)} \\
&= \frac{h_u h_v + hh_{uv}}{\left(h_u^2 + h_v^2 + 1\right)^{1/2} h^2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{\mathbb{H}^3} &= \frac{\Pi_3(x_u \wedge x_v)G_{\mathbb{R}^3} + ||x_u \wedge x_v||_{\mathbb{R}}\Pi_3(p)g_{\mathbb{R}^3}}{||x_u \wedge x_v||_{\mathbb{R}}\Pi_3^2(p)} \\
&= \frac{h_v^2 + 1 + hh_{vv}}{\left(h_u^2 + h_v^2 + 1\right)^{1/2} h^2}.
\end{aligned}
$$

$$
E_{\mathbb{H}^3} = \frac{h_u^2 + 1}{h^2} \qquad F_{\mathbb{H}^3} = \frac{h_u h_v}{h^2} \qquad G_{\mathbb{H}^3} = \frac{h_v^2 + 1}{h^2}
$$

Logo, obtemos as curvaturas gaussiana e média:

$$
\begin{aligned}
K_{\mathbb{H}^3} = \frac{e_{\mathbb{H}^3}g_{\mathbb{H}^3} - f_{\mathbb{H}^3}^2}{E_{\mathbb{H}^3}G_{\mathbb{H}^3} - F_{\mathbb{H}^3}^2} &= \frac{\left(\frac{h_u^2+1+hh_{uu}}{(h_u^2+h_v^2+1)^{1/2}h^2}\right)\left(\frac{h_v^2+1+hh_{vv}}{(h_u^2+h_v^2+1)^{1/2}h^2}\right) - \left(\frac{h_u h_v+hh_{uv}}{(h_u^2+h_v^2+1)^{1/2}h^2}\right)^2}{\frac{(h_u^2+1)(h_v^2+1)-(h_u h_v)^2}{h^4}} \\
&= \left(\frac{\left(h_u^2 + 1 + hh_{uu}\right)\left(h_v^2 + 1 + hh_{vv}\right) - \left(h_u h_v + hh_{uv}\right)^2}{\left(h_u^2 + h_v^2 + 1\right)^2}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H_{\mathbb{H}^3} &= \frac{1}{2}\left[\frac{-2f_{\mathbb{H}^3}F_{\mathbb{H}^3} + e_{\mathbb{H}^3}G_{\mathbb{H}^3} + g_{\mathbb{H}^3}E_{\mathbb{H}^3}}{E_{\mathbb{H}^3}G_{\mathbb{H}^3} - F_{\mathbb{H}^3}^2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{-2\left(\frac{h_u h_v+hh_{uv}}{(h_u^2+h_v^2+1)^{1/2}h^2}\right)\left(\frac{h_u h_v}{h^2}\right) + \left(\frac{h_u^2+1+hh_{uu}}{(h_u^2+h_v^2+1)^{1/2}h^2}\right)\left(\frac{h_v^2+1}{h^2}\right) + \left(\frac{h_v^2+1+hh_{vv}}{(h_u^2+h_v^2+1)^{1/2}h^2}\right)\left(\frac{h_u^2+1}{h^2}\right)}{\frac{(h_u^2+1)(h_v^2+1)-(h_u h_v)^2}{h^4}}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2h_u^2 + 2h_v^2 + hh_{uu} + hh_{vv} + hh_v^2 h_{uu} + hh_u^2 h_{vv} - 2hh_u h_v h_{uv} + 2}{\left(h_u^2 + h_v^2 + 1\right)^{3/2}}\right).
\end{aligned}
$$

Segue disso que as curvaturas principais são expressadas da seguinte forma:

$$
k_1 = \frac{\Upsilon + \sqrt{\Delta}}{2\left(h_u^2 + h_v^2 + 1\right)^{3/2}} \qquad , \qquad k_2 = \frac{\Upsilon - \sqrt{\Delta}}{2\left(h_u^2 + h_v^2 + 1\right)^{3/2}}
$$

Onde Δ e Υ são dados por:

$$
\begin{aligned}
&\Upsilon = 2h_u^2 + 2h_v^2 + hh_{uu} + hh_{vv} + hh_v^2 h_{uu} + hh_u^2 h_{vv} - 2hh_u h_v h_{uv} + 2, \\
&\Delta = b^2 - 4ac, \\
&b = \left(2h_u^2 + 2h_v^2 + hh_{uu} + hh_{vv} + hh_v^2 h_{uu} + hh_u^2 h_{vv} - 2hh_u h_v h_{uv} + 2\right), \\
&a = \left(\left(h_u^2 + 1 + hh_{uu}\right)\left(h_v^2 + 1 + hh_{vv}\right) - \left(h_u h_v + hh_{uv}\right)^2\right), \\
&c = \left(h_u^2 + h_v^2 + 1\right).
\end{aligned}
$$

4.3.2 Gráfico de Função (plano XZ)

O raciocínio para um gráfico de função no plano YZ é totalmente análogo. Esse é o caso no qual a função não está na terceira coordenada da parametrização. Seja S um gráfico de uma função h. Logo, temos que ela é parametrizada por:

$$X(s,t) = (s, h(s,t), t).$$

Vamos, usando as fórmulas anteriores, calcular as curvaturas Gaussiana, Média e Principais:

$$X_s = (1, h_s, 0) \qquad , \qquad X_t = (0, h_t, 1)$$

Já estamos aptos a encontrar E, F e G :

$$E = g(X_s, X_s) = h_s^2 + 1,$$

$$F = g(X_s, X_t) = h_s h_t,$$

$$G = g(X_t, X_t) = h_t^2 + 1.$$

Com X_s e X_t encontrados, podemos calcular também o campo normal ao gráfico:

$$X_s \wedge X_t = (h_s, -1, h_t)\,,$$

$$\|X_s \wedge X_t\| = \sqrt{h_s^2 + h_t^2 + 1},$$

$$N = \frac{X_s \wedge X_t}{\|X_s \wedge X_t\|} = \left(\frac{h_s}{\sqrt{h_s^2 + h_t^2 + 1}}, -\frac{1}{\sqrt{h_s^2 + h_t^2 + 1}}, \frac{h_t}{\sqrt{h_s^2 + h_t^2 + 1}} \right).$$

Com o campo normal encontrado, nos resta calcular os coeficientes X_{ss}, X_{ts} e X_{tt}, para podermos, por fim encontrar e, f e g :

$$X_{ss} = (0, h_{ss}, 0) \qquad , \qquad X_{st} = (0, h_{st}, 0) \qquad , \qquad X_{tt} = (0, h_{tt}, 0)$$

Agora estamos aptos à calcular os últimos coeficientes, e, f e g :

$$e = g(N, X_{ss}) = \frac{-h_{ss}}{\sqrt{h_s^2 + h_t^2 + 1}},$$

$$f = g(N, X_{st}) = \frac{-h_{st}}{\sqrt{h_s^2 + h_t^2 + 1}},$$

$$g = g(N, X_{tt}) = \frac{-h_{tt}}{\sqrt{h_s^2 + h_t^2 + 1}}.$$

Vamos calcular também os coeficientes hiperbólicos:

$$e_{\mathbb{H}^3} = \frac{\Pi_3(x_u \wedge x_v) E_{\mathbb{R}^3} + ||x_u \wedge x_v||_{\mathbb{R}} \Pi_3(p) e_{\mathbb{R}^3}}{||x_u \wedge x_v||_{\mathbb{R}} \Pi_3^2(p)} = \frac{h_t \left(h_s^2 + 1\right) - h_{ss} t}{t^2 \sqrt{h_s^2 + h_t^2 + 1}},$$

$$f_{\mathbb{H}^3} = \frac{\Pi_3(x_u \wedge x_v) F_{\mathbb{R}^3} + ||x_u \wedge x_v||_{\mathbb{R}} \Pi_3(p) f_{\mathbb{R}^3}}{||x_u \wedge x_v||_{\mathbb{R}} \Pi_3^2(p)} = \frac{h_s h_t^2 - t h_{st}}{t^2 \sqrt{h_s^2 + h_t^2 + 1}},$$

$$g_{\mathbb{H}^3} = \frac{\Pi_3(x_u \wedge x_v) G_{\mathbb{R}^3} + ||x_u \wedge x_v||_{\mathbb{R}} \Pi_3(p) g_{\mathbb{R}^3}}{||x_u \wedge x_v||_{\mathbb{R}} \Pi_3^2(p)} = \frac{h_t^3 + h_t - h_{tt} t}{t^2 \sqrt{h_s^2 + h_t^2 + 1}},$$

$$E_{\mathbb{H}^3} = \frac{h_s^2 + 1}{t^2} \qquad , \qquad F_{\mathbb{H}^3} = \frac{h_s h_t}{t^2} \qquad , \qquad G_{\mathbb{H}^3} = \frac{h_t^2 + 1}{t^2}.$$

Vamos usar os coeficientes hiperbólicos para encontrar as curvaturas:

$$
\begin{aligned}
K_{\mathbb{H}^3} = \frac{e_{\mathbb{H}^3} g_{\mathbb{H}^3} - f_{\mathbb{H}^3}^2}{E_{\mathbb{H}^3} G_{\mathbb{H}^3} - F_{\mathbb{H}^3}^2} &= \frac{\left(\frac{h_t\left(h_s^2+1\right)-h_{ss}t}{t^2\sqrt{h_s^2+h_t^2+1}}\right)\left(\frac{h_t^3+h_t-h_{tt}t}{t^2\sqrt{h_s^2+h_t^2+1}}\right)-\left(\frac{h_s h_t^2-th_{st}}{t^2\sqrt{h_s^2+h_t^2+1}}\right)^2}{\left(\frac{h_s^2+1}{t^2}\right)\left(\frac{h_t^2+1}{t^2}\right)-\left(\frac{h_s h_t}{t^2}\right)^2} \\
&= \frac{\left(h_t\left(h_s^2+1\right)-h_{ss}t\right)\left(h_t^3+h_t-h_{tt}t\right)-\left(h_s h_t^2-th_{st}\right)^2}{\left(h_s^2+h_t^2+1\right)^2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H_{\mathbb{H}^3} &= \frac{1}{2}\left[\frac{-2f_{\mathbb{H}^3}F_{\mathbb{H}^3}+e_{\mathbb{H}^3}G_{\mathbb{H}^3}+g_{\mathbb{H}^3}E_{\mathbb{H}^3}}{E_{\mathbb{H}^3}G_{\mathbb{H}^3}-F_{\mathbb{H}^3}^2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{-2\left(\frac{h_s h_t^2-th_{st}}{t^2\sqrt{h_s^2+h_t^2+1}}\right)\left(\frac{h_s h_t}{t^2}\right)+\left(\frac{h_t\left(h_s^2+1\right)-h_{ss}t}{t^2\sqrt{h_s^2+h_t^2+1}}\right)\left(\frac{h_t^2+1}{t^2}\right)+\left(\frac{h_t^3+h_t-h_{tt}t}{t^2\sqrt{h_s^2+h_t^2+1}}\right)\left(\frac{h_s^2+1}{t^2}\right)}{\left(\frac{h_s^2+1}{t^2}\right)\left(\frac{h_t^2+1}{t^2}\right)-\left(\frac{h_s h_t}{t^2}\right)^2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{-2\left(h_s h_t^2-th_{st}\right)h_s h_t+\left(h_t\left(h_s^2+1\right)-h_{ss}t\right)\left(h_t^2+1\right)+\left(h_t^3+h_t-h_{tt}t\right)\left(h_s^2+1\right)}{\left(h_s^2+h_t^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}\right).
\end{aligned}
$$

Usando as expressões das curvaturas principais em termos de H e K obtemos que:

$$
k_1 = \frac{\Upsilon+\sqrt{\Delta}}{2\left(h_s^2+h_t^2+1\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad , \qquad k_2 = \frac{\Upsilon-\sqrt{\Delta}}{2\left(h_s^2+h_t^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}.
$$

Onde Δ e Υ são dados por:

$$
\begin{aligned}
\Delta &= b^2-4ac, \\
\Upsilon &= -2\left(h_s h_t^2-th_{st}\right)h_s h_t+\left(h_t\left(h_s^2+1\right)-h_{ss}t\right)\left(h_t^2+1\right)+\left(h_t^3+h_t-h_{tt}t\right)\left(h_s^2+1\right), \\
b &= \left(-2\left(h_s h_t^2-th_{st}\right)h_s h_t+\left(h_t\left(h_s^2+1\right)-h_{ss}t\right)\left(h_t^2+1\right)+\left(h_t^3+h_t-h_{tt}t\right)\left(h_s^2+1\right)\right), \\
a &= \left(\left(h_t\left(h_s^2+1\right)-h_{ss}t\right)\left(h_t^3+h_t-h_{tt}t\right)-\left(h_s h_t^2-th_{st}\right)^2\right), \\
c &= \left(h_s^2+h_t^2+1\right).
\end{aligned}
$$

4.3.3 Superfícies Helicoidais Euclidianas no $\mathbb{H}^3$(eixo Z)

Definimos uma superfície helicoidal com relação ao eixo z e inclinação h, uma superfície que admite a seguinte parametrização:

$$
X(s,t) = (s\cos t, s\sin t, \lambda(s)+ht) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ 0 \\ \lambda(s) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ht \end{pmatrix}, \lambda \in C^2 \ , \ h \in \mathbb{R}.
$$

Vamos calcular as curvaturas média e gaussiana. Derivando X segue que:

$$
X_s = (\cos t, \sin t, \lambda') \qquad , \qquad X_t = (-s\sin t, s\cos t, h).
$$

Já estamos aptos a encontrar E, F e G :

$$
E = g(X_s, X_s) = (\lambda')^2+1,
$$

$$
F = g(X_s, X_t) = h\lambda',
$$

$$
G = g(X_t, X_t) = s^2+h^2.
$$

Com X_s e X_t encontrados, podemos calcular também o campo normal ao gráfico:

$$
\begin{aligned}
X_s \wedge X_t &= (h\sin t-\lambda' s\cos t, -\lambda' s\sin t-h\cos t, s\cos t\cos t+s\sin t\sin t) \\
&= (h\sin t-\lambda' s\cos t, -\lambda' s\sin t-h\cos t, s),
\end{aligned}
$$

$$\|X_s \wedge X_t\| = \sqrt{(h\sin t - \lambda' s\cos t)^2 + (-\lambda' s\sin t - h\cos t)^2 + s^2}$$
$$= \sqrt{h^2 + s^2(\lambda')^2 + s^2},$$

$$N = \frac{X_s \wedge X_t}{\|X_s \wedge X_t\|} = \left(\frac{h\sin t - \lambda' s\cos t}{\sqrt{h^2+s^2(\lambda')^2+s^2}}, \frac{-\lambda' s\sin t - h\cos t}{\sqrt{h^2+s^2(\lambda')^2+s^2}}, \frac{s}{\sqrt{h^2+s^2(\lambda')^2+s^2}} \right).$$

Com o campo normal encontrado, nos resta calcular os coeficientes X_{ss}, X_{ts} e X_{tt}, para podermos, por fim encontrar e, f e g :

$$X_{ss} = (0,0,\lambda'') \quad , \quad X_{tt} = (-s\cos t, -s\sin t, 0) \quad , \quad X_{ts} = (-\sin t, \cos t, 0)$$

Agora estamos aptos à calcular os últimos coeficientes, e, f e g :

$$e_{\mathbb{R}^3} = \langle N_{\mathbb{R}^3}, X_{ss}\rangle_{\mathbb{R}^3} = \frac{\lambda'' s}{\sqrt{h^2+s^2(\lambda')^2+s^2}},$$

$$f_{\mathbb{R}^3} = \langle N_{R\mathbb{R}^3}, X_{st}\rangle_{\mathbb{R}^3} = (-\sin t)\left(\frac{h\sin t - \lambda' s\cos t}{\sqrt{h^2+s^2(\lambda')^2+s^2}}\right) + (\cos t)\left(\frac{-s(\sin t)\lambda' - h\cos t}{\sqrt{h^2+s^2(\lambda')^2+s^2}}\right)$$
$$= -\frac{h}{\sqrt{h^2+s^2(\lambda')^2+s^2}},$$

$$g_{\mathbb{R}^3} = \langle N_{\mathbb{R}^3}, X_{tt}\rangle_{\mathbb{R}^3} = (-s\cos t)\left(\frac{h\sin t - \lambda' s\cos t}{\sqrt{h^2+s^2(\lambda')^2+s^2}}\right) + (-s\sin t)\left(\frac{-s(\sin t)\lambda' - h\cos t}{\sqrt{h^2+s^2(\lambda')^2+s^2}}\right)$$
$$= \frac{s^2\lambda'}{\sqrt{h^2+s^2(\lambda')^2+s^2}}.$$

Vamos calcular também os coeficientes hiperbólicos:

$$e_{\mathbb{H}^3} = \frac{\Pi_3(x_u \wedge x_v)E_{\mathbb{R}^3} + ||x_u \wedge x_v||_{\mathbb{R}}\Pi_3(p)e_{\mathbb{R}^3}}{||x_u \wedge x_v||_{\mathbb{R}}\Pi_3^2(p)}$$
$$= \frac{s\left((\lambda')^2+1\right) + (\lambda+ht)\sqrt{h^2+s^2(\lambda')^2+s^2}\frac{\lambda'' s}{\sqrt{h^2+s^2(\lambda')^2+s^2}}}{(\lambda+ht)^2\sqrt{h^2+s^2(\lambda')^2+s^2}}$$
$$= \frac{s\left((\lambda')^2+1\right) + (\lambda+ht)\lambda'' s}{(\lambda+ht)^2\sqrt{h^2+s^2(\lambda')^2+s^2}},$$

$$f_{\mathbb{H}^3} = \frac{\Pi_3(x_u \wedge x_v)F_{\mathbb{R}^3} + ||x_u \wedge x_v||_{\mathbb{R}}\Pi_3(p)f_{\mathbb{R}^3}}{||x_u \wedge x_v||_{\mathbb{R}}\Pi_3^2(p)} = \frac{s\lambda' h - (\lambda+ht)h}{(\lambda+ht)^2\sqrt{h^2+s^2(\lambda')^2+s^2}},$$

$$g_{\mathbb{H}^3} = \frac{\Pi_3(x_u \wedge x_v)F_{\mathbb{R}^3} + ||x_u \wedge x_v||_{\mathbb{R}}\Pi_3(p)f_{\mathbb{R}^3}}{||x_u \wedge x_v||_{\mathbb{R}}\Pi_3^2(p)} = \frac{s\left(s^2+h^2\right) + (\lambda+ht)s^2\lambda'}{(\lambda+ht)^2\sqrt{h^2+s^2(\lambda')^2+s^2}}.$$

$$E_{\mathbb{H}^3} = \frac{(\lambda')^2+1}{(\lambda+ht)^2} \qquad F_{\mathbb{H}^3} = \frac{h\lambda'}{(\lambda+ht)^2} \qquad G_{\mathbb{H}^3} = \frac{s^2+h^2}{(\lambda+ht)^2}$$

Vamos usar os coeficientes hiperbólicos para encontrar as curvaturas:

$$K_{\mathbb{H}^3} = \frac{e_{\mathbb{H}^3}g_{\mathbb{H}^3} - f_{\mathbb{H}^3}^2}{E_{\mathbb{H}^3}G_{\mathbb{H}^3} - F_{\mathbb{H}^3}^2}$$
$$= \frac{\left(\frac{s\left((\lambda')^2+1\right)+(\lambda+ht)\lambda'' s}{(\lambda+ht)^2\sqrt{h^2+s^2(\lambda')^2+s^2}}\right)\left(\frac{s\left(s^2+h^2\right)+(\lambda+ht)s^2\lambda'}{(\lambda+ht)^2\sqrt{h^2+s^2(\lambda')^2+s^2}}\right) - \left(\frac{s\lambda' h-(\lambda+ht)h}{(\lambda+ht)^2\sqrt{h^2+s^2(\lambda')^2+s^2}}\right)^2}{\frac{\left((\lambda')^2+1\right)(s^2+h^2)-(\lambda' h)^2}{(\lambda+ht)^4}}$$
$$= \frac{\left(s\left((\lambda')^2+1\right)+(\lambda+ht)\lambda'' s\right)\left(s\left(s^2+h^2\right)+(\lambda+ht)s^2\lambda'\right) - \left(s\lambda' h-(\lambda+ht)h\right)^2}{\left(h^2+s^2(\lambda')^2+s^2\right)^2},$$

$$\begin{aligned}
H_{\mathbb{H}^3} &= \frac{1}{2}\left[\frac{-2f_{\mathbb{H}^3}F_{\mathbb{H}^3}+e_{\mathbb{H}^3}G_{\mathbb{H}^3}+g_{\mathbb{H}^3}E_{\mathbb{H}^3}}{E_{\mathbb{H}^3}G_{\mathbb{H}^3}-F_{\mathbb{H}^3}^2}\right]\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{t\lambda''h^3s+t\lambda'hh^2+(\lambda\lambda'')h^2s+\lambda\lambda'h^2+t\lambda''hs^3+\lambda\lambda''s^3+\left(h^2+s^2\left((\lambda')^2+1\right)\right)(\lambda\lambda'+\lambda'th+2s)}{(h^2+s^2(\lambda')^2+s^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{(\lambda\lambda'+\lambda'th+2s)}{(h^2+s^2(\lambda')^2+s^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{t\lambda''h^3s+t\lambda'hh^2+(\lambda\lambda'')h^2s+\lambda\lambda'h^2+t\lambda''hs^3+\lambda\lambda''s^3}{(h^2+s^2(\lambda')^2+s^2)^{\frac{3}{2}}}\right).
\end{aligned}$$

Usando as expressões das curvaturas principais, segue que:

$$k_1=\frac{\Upsilon+\sqrt{\Delta}}{2\,(h^2+s^2(\lambda')^2+s^2)^{\frac{3}{2}}}\qquad,\qquad k_2=\frac{\Upsilon-\sqrt{\Delta}}{2\,(h^2+s^2(\lambda')^2+s^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Onde Δ e Υ são dados por:

$$\begin{aligned}
\Upsilon &= t\lambda''h^3s+t\lambda'hh^2+(\lambda\lambda'')h^2s+\lambda\lambda'h^2+t\lambda''hs^3+\lambda\lambda''s^3+\left(h^2+s^2\left((\lambda')^2+1\right)\right)(\lambda\lambda'+\lambda'th+2s),\\
\Delta &= b^2-4ac,\\
b &= \left(t\lambda''h^3s+t\lambda'hh^2+(\lambda\lambda'')h^2s+\lambda\lambda'h^2+t\lambda''hs^3+\lambda\lambda''s^3+\left(h^2+s^2\left((\lambda')^2+1\right)\right)(\lambda\lambda'+\lambda'th+2s)\right),\\
a &= \left(\left(s\left((\lambda')^2+1\right)+(\lambda+ht)\lambda''s\right)\left(s\left(s^2+h^2\right)+(\lambda+ht)s^2\lambda'\right)-\left(s\lambda'h-(\lambda+ht)h\right)^2\right),\\
c &= \left(h^2+s^2(\lambda')^2+s^2\right).
\end{aligned}$$

Teorema 4.3.1 *As superfícies helicoidais com curvatura gaussiana e inclinação nulas têm a seguinte parametrização:*

$$X(s,t)=\left(s\cos t, s\sin t, \pm\sqrt{-s^2+C_1s+C_2}\right).$$

Prova. Vamos caracterizar agora as superfícies de Weingarten que respeita a equação $K=0$ e inclinação $h=0$. Substituindo a expressão de K na equação e usando que a inclinação nula, obtemos:

$$\begin{aligned}
0=K &= \frac{\left(s\left((\lambda')^2+1\right)+(\lambda+ht)\lambda''s\right)\left(s\left(s^2+h^2\right)+(\lambda+ht)s^2\lambda'\right)-\left(s\lambda'h-(\lambda+ht)h\right)^2}{(h^2+s^2(\lambda')^2+s^2)^2}\\
&= \frac{\left(s\left((\lambda')^2+1\right)+(\lambda)\lambda''s\right)\left(s\left(s^2\right)+(\lambda)s^2\lambda'\right)}{(s^2(\lambda')^2+s^2)^2}\\
&= \left(s\left((\lambda')^2+1\right)+(\lambda)\lambda''s\right)\left(s\left(s^2\right)+(\lambda)s^2\lambda'\right)=\left(s\left((\lambda')^2+1\right)+\lambda\lambda''s\right)\left(ss^2+\lambda s^2\lambda'\right).
\end{aligned}$$

Ou seja, concluímos que:

$$(\lambda')^2+\lambda\lambda''+1=0\qquad\text{ou}\qquad s+\lambda\lambda'=0.$$

Vamos resolver a primeira equação. Integrando e usando a integração por partes segue que:

$$\begin{aligned}
\int(\lambda')^2ds+\int\lambda\lambda''ds+\int ds &= \lambda'\lambda-\int\lambda''\lambda ds+\int\lambda\lambda''ds+\int ds\\
&= \lambda'\lambda+s=\int 0ds=C.
\end{aligned}$$

Integrando novamente obtemos:

$$\frac{\lambda^2}{2}=\int\lambda'\lambda ds=\int(C-s)\,ds=Cs-\frac{s^2}{2}+K.$$

Portanto concluímos que:

$$\lambda(s)=\pm\sqrt{2Cs-s^2+2K},\qquad\text{onde } C,K\in\mathbb{R}.$$

Vamos resolver agora a segunda equação. Integrando obtemos:

$$\frac{s^2}{2}+\frac{\lambda^2}{2}=\int sds+\int\lambda\lambda'ds=\int 0ds=C.$$

Por fim, concluímos que:

$$\lambda(s) = \pm\sqrt{-s^2 + 2C}.$$

Vemos que a família de superfícies helicoidais com curvatura gaussiana e inclinação nulas é dada por:

$$X(s,t) = \left(s\cos t, s\sin t, \pm\sqrt{-s^2 + C_1 s + C_2}\right).$$

Onde $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ desde que $-s^2 + C_1 s + C_2 \geq 0$. ■

4.3.4 Superfície Helicoidal Hiperbólica

Temos que a parametrização de uma superfície helicoidal hiperbólica é dada pela aplicação da função loxodrômica em umgráfico de função $(s, \lambda(s))$ no plano XZ ou seja:

$$X(s,t) = e^{at}\begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt & 0 \\ \sin bt & \cos bt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ 0 \\ \lambda(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\,(\cos bt)\,e^{at} \\ se^{at}\sin bt \\ \lambda(s)e^{at} \end{pmatrix}\ ,\ \lambda \in C^2\ ,\ h \in \mathbb{R}.$$

Vamos calcular as curvaturas dessa superfície, começando peo cálculo das primeiras derivadas da parametrização:

$$X_s = \left(e^{at}\cos bt, e^{at}\sin bt, \lambda' e^{at}\right),$$

$$X_t = \left(s\left(-be^{at}\sin bt + ae^{at}\cos bt\right), s\left(ae^{at}\sin bt + be^{at}\cos bt\right), a\lambda e^{at}\right).$$

Já podemos calcular os coeficientes E, F e G, e o campo normal N :

$$\begin{aligned} E &= g(X_s, X_s) \\ &= \left(e^{at}\cos bt\right)^2 + \left(e^{at}\sin bt\right)^2 + \left(\lambda' e^{at}\right)^2 \\ &= e^{2(at)}\left((\lambda')^2 + 1\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= g(X_s, X_t) \\ &= \left(e^{at}\cos bt\right)\left(s\left(-be^{at}\sin bt + ae^{at}\cos bt\right)\right) + \left(e^{at}\sin bt\right)\left(s\left(ae^{at}\sin bt + be^{at}\cos bt\right)\right) + \left(\lambda' e^{at}\right)\left(a\lambda e^{at}\right) \\ &= e^{2(at)} a\left(\lambda\lambda' + s\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= g(X_t, X_t) \\ &= \left(s\left(-be^{at}\sin bt + ae^{at}\cos bt\right)\right)^2 + \left(s\left(ae^{at}\sin bt + be^{at}\cos bt\right)\right)^2 + \left(a\lambda e^{at}\right)^2 \\ &= e^{2(at)}\left(a^2\lambda^2 + a^2 s^2 + b^2 s^2\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_s \wedge X_t &= \begin{pmatrix} a\lambda e^{at}e^{at}\sin bt - \lambda' e^{at} s\left(ae^{at}\sin bt + be^{at}\cos bt\right) \\ \lambda' e^{at} s\left(-be^{at}\sin bt + ae^{at}\cos bt\right) - a\lambda e^{at}e^{at}\cos bt \\ s\left(ae^{at}\sin bt + be^{at}\cos bt\right)e^{at}\cos bt - s\left(-be^{at}\sin bt + ae^{at}\cos bt\right)e^{at}\sin bt \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{2(at)}\left(a\lambda\sin bt - bs\lambda'\cos bt - as\lambda'\sin bt\right) \\ e^{2(at)}\left(-a\lambda\cos bt + as\lambda'\cos bt - bs\lambda'\sin bt\right) \\ e^{2(at)}bs \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|X_s \wedge X_t\| &= \sqrt{\left(e^{2(at)}\left(a\lambda\sin bt - bs\lambda'\cos bt - as\lambda'\sin bt\right)\right)^2 + \left(e^{2(at)}\left(-a\lambda\cos bt + as\lambda'\cos bt - bs\lambda'\sin bt\right)\right)^2 + \left(e^{2(at)}bs\right)^2} \\ &= e^{2at}\sqrt{(b^2s^2 + a^2\lambda^2 + a^2s^2(\lambda')^2 + b^2s^2(\lambda')^2 - 2a^2s\lambda\lambda'}), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
N &= \frac{X_s \wedge X_t}{\|X_s \wedge X_t\|} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{e^{2(at)}\left(a\lambda \sin bt - bs\lambda' \cos bt - as\lambda' \sin bt\right)}{e^{2at}\sqrt{(b^2s^2+a^2\lambda^2+a^2s^2(\lambda')^2+b^2s^2(\lambda')^2-2a^2s\lambda\lambda')}} \\ \frac{e^{2(at)}\left(-a\lambda \cos bt + as\lambda' \cos bt - bs\lambda' \sin bt\right)}{e^{2at}\sqrt{(b^2s^2+a^2\lambda^2+a^2s^2(\lambda')^2+b^2s^2(\lambda')^2-2a^2s\lambda\lambda')}} \\ \frac{e^{2(at)}bs}{e^{2at}\sqrt{(b^2s^2+a^2\lambda^2+a^2s^2(\lambda')^2+b^2s^2(\lambda')^2-2a^2s\lambda\lambda')}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\left(a\lambda \sin bt - bs\lambda' \cos bt - as\lambda' \sin bt\right)}{\sqrt{(b^2s^2+a^2\lambda^2+a^2s^2(\lambda')^2+b^2s^2(\lambda')^2-2a^2s\lambda\lambda')}} \\ \frac{\left(-a\lambda \cos bt + as\lambda' \cos bt - bs\lambda' \sin bt\right)}{\sqrt{(b^2s^2+a^2\lambda^2+a^2s^2(\lambda')^2+b^2s^2(\lambda')^2-2a^2s\lambda\lambda')}} \\ \frac{bs}{\sqrt{(b^2s^2+a^2\lambda^2+a^2s^2(\lambda')^2+b^2s^2(\lambda')^2-2a^2s\lambda\lambda')}} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Vamos agora calcular as segundas derivadas da parametrização para poder encontrar os últimos coeficientes:

$$X_{ss} = \left(0, 0, \lambda'' e^{at}\right),$$

$$X_{st} = \left(ae^{at}\cos bt - be^{at}\sin bt, ae^{at}\sin bt + be^{at}\cos bt, \lambda' a e^{at}\right),$$

$$
\begin{aligned}
X_{tt} &= \begin{pmatrix} s\left(-b\left(ae^{at}\sin bt + be^{at}\cos bt\right) + a\left(ae^{at}\cos bt - e^{at}b\sin bt\right)\right) \\ s\left(a\left(ae^{at}\sin bt + be^{at}\cos bt\right) + b\left(ae^{at}\cos bt - e^{at}b\sin bt\right)\right) \\ a^2\lambda e^{at} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} se^{at}\left(a^2\cos bt - b^2\cos bt - 2ab\sin bt\right) \\ se^{at}\left(a^2\sin bt - b^2\sin bt + 2ab\cos bt\right) \\ a^2\lambda e^{at} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Portanto já podemos obter os coeficientes e, f e g que são dados por:

$$
\begin{aligned}
e &= g(N, X_{ss}) \\
&= \left(\frac{bs\lambda'' e^{at}}{\sqrt{(b^2s^2+a^2\lambda^2+a^2s^2(\lambda')^2+b^2s^2(\lambda')^2-2a^2s\lambda\lambda')}}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f &= g(N, X_{ts}) \\
&= \left(\frac{e^{at}ab\left(-\lambda + s\lambda'\right)}{\sqrt{a^2\lambda^2+b^2s^2+a^2s^2(\lambda')^2+b^2s^2(\lambda')^2-2a^2s\lambda\lambda'}}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g &= g(N, X_{tt}) \\
&= \left(\frac{e^{at}bs\left(a^2\lambda - 2a^2\lambda + a^2s\lambda' + b^2s\lambda'\right)}{\sqrt{a^2\lambda^2+b^2s^2+a^2s^2(\lambda')^2+b^2s^2(\lambda')^2-2a^2s\lambda\lambda'}}\right).
\end{aligned}
$$

Agora, por fim, podemos encontrar as curvaturas média e gaussiana da superfície:

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{\Pi_3^2(x_u \wedge x_v)}{|x_u \wedge x_v|^2_{\mathbb{R}}} - \frac{\Pi_3(p)\Pi_3(x_u \wedge x_v)}{|x_u \wedge x_v|_{\mathbb{R}}}\left(\frac{2fF - eG - gE}{EG - F^2}\right) + \Pi_3^2(p)\left(\frac{eg - f^2}{EG - F^2}\right) \\
&= \frac{b^2\left(A + B\right)}{\left(a^2\lambda^2+b^2s^2+a^2s^2(\lambda')^2+b^2s^2(\lambda')^2-2a^2s\lambda\lambda'\right)^2}.
\end{aligned}
$$

onde A e B são dados por:

$$
\begin{aligned}
A &= -a^2\lambda^4 + b^2s^4 + 2a^2s^2\lambda^2 + a^2s^4(\lambda')^2 + b^2s^4(\lambda')^2 - 4a^2s^2\lambda^2(\lambda')^2 + 4a^2s\lambda^3\lambda' - 3a^2s^3\lambda\lambda', \\
B &= a^2s^4\lambda\lambda'' + b^2s^3\lambda\lambda' + b^2s^4\lambda\lambda'' + a^2s^3\lambda(\lambda')^3 + b^2s^3\lambda(\lambda')^3 + a^2s^3\lambda^2\lambda'\lambda'' + b^2s^3\lambda^2\lambda'\lambda''.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{\Pi_3(x_u \wedge x_v)}{|x_u \wedge x_v|_{\mathbb{R}}} - \frac{\Pi_3(p)}{2}\left(\frac{2fF - eG - gE}{EG - F^2}\right) \\ &= \frac{b\,(C+D)}{2\left(a^2s^2(\lambda')^2 - 2a^2s\lambda\lambda' + a^2\lambda^2 + b^2s^2(\lambda')^2 + b^2s^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Onde C e D são dados por:

$$\begin{aligned} C &= \lambda'' a^2 s^3 \lambda + 2a^2s^3(\lambda')^2 + a^2s^2\lambda(\lambda')^3 - 5a^2s^2\lambda\lambda' + \lambda'' a^2 s\lambda^3 - 3a^2s\lambda^2(\lambda')^2, \\ D &= 3a^2s\lambda^2 + 2a^2\lambda^3\lambda' + \lambda'' b^2s^3\lambda + 2b^2s^3(\lambda')^2 + 2b^2s^3 + b^2s^2\lambda(\lambda')^3 + b^2s^2\lambda\lambda'. \end{aligned}$$

4.3.5 Caso Particular (Helicoide)

A parametrização de um helicoide qualquer é:

$$\varphi(u,v) = (v\cos(u), v\sin(u), au), \quad a \neq 0.$$

Vamos, usando as fórmulas anteriores, calcular as curvaturas Gaussiana, Média e Principais. Comecemos com todas as derivadas da parametrização φ :

$$\varphi_u = (-v\sin(u), v\cos(u), a),$$

$$\varphi_v = (\cos(u), \sin(u), 0),$$

$$\varphi_{uu} = (-v\cos(u), -v\sin(u), 0),$$

$$\varphi_{uv} = (-\sin(u), \cos(u), 0),$$

$$\varphi_{vv} = (0,0,0).$$

Segue disso que já podemos calcular E,F,G e o campo normal N

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = (-a\sin(u), a\cos(u), -v),$$

$$|\varphi_u \wedge \varphi_v|_{\mathbb{R}^3} = \left(a^2 + v^2\right)^{1/2},$$

$$E_{\mathbb{R}^3} = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle_{\mathbb{R}^3} = v^2 + a^2,$$

$$F_{\mathbb{R}^3} = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle_{\mathbb{R}^3} = 0,$$

$$G_{\mathbb{R}^3} = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle_{\mathbb{R}^3} = 1.$$

Por fim, vamos calcular e, f e g :

$$e_{\mathbb{R}^3} = \langle N_{\mathbb{R}^3}, \varphi_{uu} \rangle = \frac{av\sin(u)\cos(u) - av\sin(u)\cos(u)}{\left(a^2+v^2\right)^{1/2}} = 0,$$

$$f_{\mathbb{R}^3} = \langle N_{\mathbb{R}^3}, \varphi_{uv} \rangle = \frac{a\sin^2(u) + a\cos^2(u)}{\left(a^2+v^2\right)^{1/2}} = \frac{a}{\left(a^2+v^2\right)^{1/2}},$$

$$g_{\mathbb{R}^3} = \langle N_{\mathbb{R}^3}, \varphi_{vv} \rangle = \frac{0}{\left(a^2+v^2\right)^{1/2}} = 0.$$

Segue disso que as curvaturas média, gaussiana e principais são dadas por:

$$
\begin{aligned}
K_{\mathbb{H}^3} &= \frac{dz^2(\varphi_u \wedge \varphi_v)}{p_3^2|\varphi_u \wedge \varphi_v|^2_{\mathbb{H}^3}} - \frac{dz(\varphi_u \wedge \varphi_v)}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|_{\mathbb{H}^3}}\left(\frac{2fF - eG - gE}{EG - F^2}\right) + p_3^2\left(\frac{eg - f^2}{EG - F^2}\right) \\
&= \frac{v^2}{a^2 + v^2} - (au)^2\,\frac{a^2}{(v^2 + a^2)^2} = \frac{v^2}{a^2 + v^2} - (au)^2\,\frac{a^2}{(v^2 + a^2)^2} \\
&= \frac{-a^4u^2 + a^2v^2 + v^4}{(a^2 + v^2)^2},
\end{aligned}
$$

$$
H_{\mathbb{H}^3} = \frac{dz(\varphi_u \wedge \varphi_v)}{p_3|\varphi_u \wedge \varphi_v|_{\mathbb{H}^3}} - \frac{p_3}{2}\left(\frac{2fF - eG - gE}{EG - F^2}\right) = \frac{-v}{(a^2 + v^2)^{1/2}},
$$

$$
\begin{aligned}
k_1 &= H + \sqrt[2]{H^2 - K} = -\frac{v}{\sqrt{a^2 + v^2}} + \frac{a^2u}{a^2 + v^2}, \\
k_2 &= H - \sqrt[2]{H^2 - K} = -\frac{v}{\sqrt{a^2 + v^2}} - \frac{a^2u}{a^2 + v^2}.
\end{aligned}
$$

4.3.6 Esfera de Centro (a,b,c) e Raio r

Temos que, a parametrização de uma esfera de centro (a,b,c) e raio r é:

$$\varphi(u, v) = (r\sin(u)\cos(v) + a, r\sin(u)\sin(v) + b, r\cos(u) + c).$$

Vamos, usando as fórmulas anteriores, calcular as curvaturas Gaussiana, Média e Principais:

$$\varphi_u = (r\cos(u)\cos(v), r\cos(u)\sin(v), -r\sin(u)),$$

$$\varphi_v = (-r\sin(u)\sin(v), r\sin(u)\cos(v), 0).$$

Já podemos calcular os primeiros coeficientes e o campo normal:

$$E_{\mathbb{R}^3} = \langle\varphi_u, \varphi_u\rangle_{\mathbb{R}^3} = r^2,$$

$$F_{\mathbb{R}^3} = \langle\varphi_u, \varphi_v\rangle_{\mathbb{R}^3} = 0,$$

$$G_{\mathbb{R}^3} = \langle\varphi_v, \varphi_v\rangle_{\mathbb{R}^3} = r^2\sin^2(u),$$

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = (r^2\sin^2(u)\cos(v), r^2\sin^2(u)\sin(v), r^2\sin(u)\cos(u)),$$

$$|\varphi_u \wedge \varphi_v|_{\mathbb{R}^3} = \left(\left(r^2\sin^2(u)\cos(v)\right)^2 + \left(r^2\sin^2(u)\sin(v)\right)^2 + \left(r^2\sin(u)\cos(u)\right)^2\right)^{1/2} = r^2\sin(u),$$

$$N_{\mathbb{R}^3} = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|_{\mathbb{R}^3}} = (\sin(u)\cos(v), \sin(u)\sin(v), \cos(u)).$$

Vamos agora derivar novamente a parametrização:

$$\varphi_{uu} = (-r\sin(u)\cos(v), -r\sin(u)\sin(v), -r\cos(u)),$$

$$\varphi_{vv} = (-r\sin(u)\cos(v), -r\sin(u)\sin(v), 0),$$

$$\varphi_{uv} = (-r\cos(u)\sin(v), r\cos(u)\cos(v), 0).$$

Temos que os últimos coeficientes têm as seguintes expressões:

$$e_{\mathbb{R}^3} = \langle N_{\mathbb{R}^3}, \varphi_{uu}\rangle = -r\sin^2(u)\cos^2(v) - r\sin^2(u)\sin^2(v) - r\cos^2(u) = -r,$$

$$f_{\mathbb{R}^3} = \langle N_{\mathbb{R}^3}, \varphi_{uv}\rangle = -r\sin(u)\cos(u)\sin(v)\cos(v) + r\sin(u)\sin(v)\cos(u)\cos(v) = 0,$$

$$g_{\mathbb{R}^3} = \langle N_{\mathbb{R}^3}, \varphi_{vv} \rangle = -r\sin^2(u)\cos^2(v) - r\sin^2(u)\sin^2(v) = -r\sin^2(u).$$

Segue que as curvaturas média, gaussiana e principais são dadas por:

$$\begin{aligned} K_{\mathbb{H}^3}(P) &= \frac{dz^2(\varphi_u \wedge \varphi_v)}{p_3^2|\varphi_u \wedge \varphi_v|^2_{\mathbb{H}^3}} - \frac{dz(\varphi_u \wedge \varphi_v)}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|_{\mathbb{H}^3}}\left(\frac{2fF - eG - gE}{EG - F^2}\right) + p_3^2\left(\frac{eg - f^2}{EG - F^2}\right) \\ &= \frac{r^4\sin^2(u)\cos^2(u)}{r^4\sin^2(u)} - (r\cos(u) + c)\frac{r^2\sin(u)\cos(u)}{r^2\sin(u)}\left(\frac{r^3\sin^2(u) + r^3\sin^2(u)}{r^4\sin^2(u)}\right) + (r\cos(u)+c)^2\left(\frac{r^2\sin^2(u)}{r^4\sin^2(u)}\right) \\ &= \frac{c^2}{r^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{\mathbb{H}^3}(P) &= \frac{dz(\varphi_u \wedge \varphi_v)}{p_3|\varphi_u \wedge \varphi_v|_{\mathbb{H}^3}} - \frac{p_3}{2}\left(\frac{2fF - eG - gE}{EG - F^2}\right) \\ &= \frac{r^2\sin(u)\cos(u)}{r^2\sin(u)} - \frac{(r\cos(u) + c)}{2}\left(\frac{r^3\sin^2(u) + r^3\sin^2(u)}{r^4\sin^2(u)}\right) = -\frac{c}{r}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{1_{\mathbb{H}^3}} &= H_{\mathbb{H}^3} + \sqrt[2]{H^2_{\mathbb{H}^3} - K_{\mathbb{H}^3}} = -\frac{c}{r} + \left(\left(-\frac{c}{r}\right)^2 - \frac{c^2}{r^2}\right)^{1/2} = -\frac{c}{r}, \\ k_{2_{\mathbb{H}^3}} &= H_{\mathbb{H}^3} - \sqrt[2]{H^2_{\mathbb{H}^3} - K_{\mathbb{H}^3}} = -\frac{c}{r} - \left(\left(-\frac{c}{r}\right)^2 - \frac{c^2}{r^2}\right)^{1/2} = -\frac{c}{r}. \end{aligned}$$

4.3.7 Superfície Parabólica Euclidiana

Dos raciocínios no euclidiano, já temos a parametrização da superfície e os coeficientes euclidianos. Nos resta apenas calcular os coeficientes hiperbólicos e, por fim, as curvaturas. A parametrização é:

$$X(s,t) = (x(t), s, z(t))\,.$$

Segue que todos os coeficientes hiperbólicossão dados por:

$$e_{\mathbb{H}^3} = \frac{\Pi_3(x_u \wedge x_v)E_{\mathbb{R}^3} + ||x_u \wedge x_v||_{\mathbb{R}}\Pi_3(p)e_{\mathbb{R}^3}}{||x_u \wedge x_v||_{\mathbb{R}}\Pi_3^2(p)} = -\frac{x'}{z^2},$$

$$f_{\mathbb{H}^3} = \frac{\Pi_3(x_u \wedge x_v)F_{\mathbb{R}^3} + ||x_u \wedge x_v||_{\mathbb{R}}\Pi_3(p)f_{\mathbb{R}^3}}{||x_u \wedge x_v||_{\mathbb{R}}\Pi_3^2(p)} = 0,$$

$$g_{\mathbb{H}^3} = \frac{\Pi_3(x_u \wedge x_v)G_{\mathbb{R}^3} + ||x_u \wedge x_v||_{\mathbb{R}}\Pi_3(p)g_{\mathbb{R}^3}}{||x_u \wedge x_v||_{\mathbb{R}}\Pi_3^2(p)} = \frac{-x' + z\,(x''z' - z''x')}{z^2},$$

$$E_{\mathbb{H}^3} = \frac{1}{z^2},$$

$$F_{\mathbb{H}^3} = 0,$$

$$G_{\mathbb{H}^3} = \frac{1}{z^2}.$$

Portanto, já podemos calcular as curvaturas média e gaussiana:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{\left(-\frac{x'}{z^2}\right)\left(\frac{-x'+z\left(x''z'-z''x'\right)}{z^2}\right)}{\left(\frac{1}{z^2}\right)\left(\frac{1}{z^2}\right)} = x'\,(x' + zx'z'' - zx''z')\,,$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\left(\frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\left(-\frac{x'}{z^2}\right)\left(\frac{1}{z^2}\right) + \left(\frac{-x'+z\left(x''z'-z''x'\right)}{z^2}\right)\left(\frac{1}{z^2}\right)}{\left(\frac{1}{z^2}\right)\left(\frac{1}{z^2}\right)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\,(-2x' - zx'z'' + zx''z')\,. \end{aligned}$$

Disso, é fácil concluir quais são as curvaturas principais:

$$k_1 = -x',$$
$$k_2 = -\left(x' + zx'z'' - zx''z'\right).$$

Teorema 4.3.2 *Seja $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 2\pi]$ a função ângulo da curva $\gamma(t) = (x(t), z(t))$. Temos que todas as superfícies parabólicas que respeitam a equação $k_1^2 + k_2^2 = 1$ têm função ângulo da curva geratriz respeitando a seguinte equação:*

$$\varphi' = \frac{-\cos\varphi \pm \sin\varphi}{z}$$

Prova. Vamos caracterizar as superfícies parabólicas tais que $k_1^2 + k_2^2 = 1$:

Vamos usar que a curva γ está parametrizada pelo comprimento de arco euclidiano, ou seja, existe uma função suave $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 2\pi]$ tal que:

$$\begin{cases} x' = (\cos\varphi) \Rightarrow x'' = (-\varphi' \sin\varphi), \\ z' = (\sin\varphi) \Rightarrow z'' = \varphi' \cos\varphi. \end{cases}$$

Logo, podemos simplificar a equação que queremos resolver:

$$z^2(\varphi')^2 + 2z\varphi'\cos\varphi + \cos 2\varphi = (x')^2 + (x' + zx'z'' - zx''z')^2 - 1 = k_1^2 + k_2^2 - 1 = 0.$$

Ou seja, temos uma equação de 2^o grau em φ'. Por Bhaskara temos o nosso resultado. ■

4.3.8 Gráfico Geodésico no $\mathbb{H}^3$

Gráficos euclidiano (à esquerda) e Hiperbólico (à direita) da função $f(x, z) = x + z$:

Estudaremos o gráfico geodésico de uma função $h(x, z)$ no plano XZ

Definição 4.3.3 *Por definição, o gráfico de uma função $h(x, z)$ no plano XZ, é o conjunto de todos os pontos que são obtidos da seguinte forma: Tomemos um ponto $A = (x, z) \in XZ$ e andamos uma distância $h(x, z)$ pela geodésica que parte do ponto A com vetor velocidade ortogonal ao plano XZ. O ponto obtido pertence ao gráfico geodésico.*

Observação 4.3.4 *Note que essa definição generaliza noça noção de gráfico de função no $\mathbb{R}^n$. Pois lá as geodésicas em questão são retas perpendiculares aos planos de referência dos gráficos.*

No $\mathbb{H}^3$, as geodésicas que cortam o plano XZ de forma ortogonal são arcos de circunferências centradas em pontos do plano XY. Ou seja, dado um ponto $P = (x, 0, z) \in XZ$, segue que o centro da geodésica que corta o plano XZ de forma ortogonal e contém P é $C = (x, 0, 0) \in XY$. Como a geodésica é um arco de circunferência, sendo γ sua parametrização, temos que:

$$d(\gamma(t), C) = |P - C| = z \quad , \quad \forall t \in Dom(\gamma).$$

Com isso, já conseguimos parametrizar a geodésica:

$$\gamma(t) = (x, z\sin(t), z\cos(t)).$$

Agora precisamos verifica qual o tempo necessário para andar na geodésica de modo a alcançar a distância $h(x, z)$, para isso, precisaremos da seguinte definição:

Definição 4.3.5 *Dada uma curva diferenciável $\gamma : (a, b) \longrightarrow M$. Definimos o comprimento da curva γ num intervalo $(c, d) \subset (a, b)$ como:*

$$L_\gamma[(c, d)] = \int_c^d |\gamma'(t)|_{T_{\gamma(t)}M} dt.$$

Portanto temos que:

$$\gamma'(t) = (0, z\cos(t), -z\sin(t)).$$

Ou seja, o módulo é dado pela seguinte expreessão:

$$|\gamma'(t)|_{T_{\gamma(t)}M} = \frac{\left((z\cos(t))^2 + (-z\sin(t))^2\right)^{1/2}}{z\cos(t)} = \frac{1}{\cos(t)}.$$

Vamos impor que $L_\gamma[(0,k)] = h(x,z)$ e descobrir k, ou seja:

$$\int_0^k \frac{1}{\cos(t)}dt = h(x,z).$$

Mas observemos o seguinte:

$$h(x,z) = \int_0^k \frac{1}{\cos(t)}dt = \ln\left(|\tan(t)+\sec(t)|\right)|_0^k = \ln\left(|\tan(k)+\sec(k)|\right) = \ln\left(\left|\frac{\sin(k)+1}{\cos(k)}\right|\right)$$
$$\Rightarrow \left|\frac{\sin(k)+1}{\cos(k)}\right| = e^{h(x,z)}.$$

Elevando ambos os lados ao quadrado, usando que $\cos^2 k = 1 - \sin^2 k$ e isolando a equação inteira, segue que:

$$(1+e^{2h(x,z)})\sin^2(k) + 2\sin(k) + (1-e^{2h(x,z)}) = 0.$$

Que é um polinômio de grau 2 em $\sin k$ por Bháskara segue que:

$$\sin(k) = \frac{-2 \pm \left(4 - 4\left(1 - e^{4h(x,z)}\right)\right)^{1/2}}{2\left(1+e^{2h(x,z)}\right)} = \frac{-1 \pm e^{2h(x,z)}}{1+e^{2h(x,z)}} = -1 \qquad \text{ou} \qquad \frac{e^{2h(x,z)}-1}{e^{2h(x,z)}+1}.$$

Com $h(x,z)$ não é necessariamente uma função constante, é natural pensar que o tempo em questão dependa intimamente dela. Logo temos que:

$$\sin(t) = \frac{e^{2h(x,z)}-1}{e^{2h(x,z)}+1}.$$

Isolando temos que

$$t = \arcsin\left(\frac{e^{2h(x,z)}-1}{e^{2h(x,z)}+1}\right).$$

Portanto, dada uma função $h(x,z)$ que sai do plano XZ. Conseguimos encontrar a parametrização de seu gráfico geodésico no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3$:

$$\varphi(x,z) = \left(x, z\sin\left(\arcsin\left(\left(\frac{e^{2h(x,z)}-1}{e^{2h(x,z)}+1}\right)\right)\right), z\cos\left(\arcsin\left(\left(\frac{e^{2h(x,z)}-1}{e^{2h(x,z)}+1}\right)\right)\right)\right)$$
$$= \left(x, z\left(\frac{e^{2h(x,z)}-1}{e^{2h(x,z)}+1}\right), z\left(1 - \left(\frac{e^{2h(x,z)}-1}{e^{2h(x,z)}+1}\right)^2\right)^{1/2}\right).$$

Vamos, usando as fórmulas anteriores, calcular as curvaturas Gaussiana, Média e Principais: Comecemos derivando a parametrização:

$$\varphi_x = \left(1, z\left(\frac{e^h\frac{\partial h}{\partial x}\left(e^h+1\right) - e^h\frac{\partial h}{\partial x}\left(e^h-1\right)}{\left(e^h+1\right)^2}\right), 2z\left(\frac{e^{\frac{h}{2}}\frac{\frac{\partial h}{\partial x}\left(e^h+1\right)}{2} - e^h\frac{\partial h}{\partial x}e^{\frac{h}{2}}}{\left(e^h+1\right)^2}\right)\right)$$
$$= \left(1, z\left(\frac{2e^h\frac{\partial h}{\partial x}}{\left(e^h+1\right)^2}\right), z\left(\frac{e^{\frac{h}{2}}\frac{\partial h}{\partial x} - e^{\frac{3h}{2}}\frac{\partial h}{\partial x}}{\left(e^h+1\right)^2}\right)\right),$$

$$\varphi_z = \left(0, \frac{e^{2h} + 2z^2e^h\frac{\partial h}{\partial z} - 1}{\left(e^h+1\right)^2}, 2\frac{\left(e^{\frac{3h}{2}} + e^{\frac{h}{2}} + z^2\left(e^{\frac{h}{2}}\frac{\partial h}{\partial z} - e^{\frac{3h}{2}}\frac{\partial h}{\partial z}\right)\right)}{\left(e^h+1\right)^2}\right).$$

Já podemos calcular E, F, G e o campo normal N :

$$E_{\mathbb{R}^3} = \langle \varphi_x, \varphi_x \rangle_{\mathbb{R}^3} = \frac{e^h \left(\frac{\partial h}{\partial x}^2 z^2 + e^h + 2 \right) + 1}{\left(e^h + 1\right)^2},$$

$$F_{\mathbb{R}^3} = \langle \varphi_x, \varphi_z \rangle_{R\mathbb{R}^3} = \frac{2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial z} z^3 e^h \left(e^{2h} + 1\right)}{\left(e^h + 1\right)^4},$$

$$G_{\mathbb{R}^3} = \langle \varphi_z, \varphi_z \rangle_{\mathbb{R}^3} = \frac{e^{4h} + 4e^{3h} \left(\frac{\partial h}{\partial z}^2 z^4 - \frac{\partial h}{\partial z} z^2 + 1 \right) + \left(6 - 4 \frac{\partial h}{\partial z}^2 z^4 \right) e^{2h} + 4e^h \left(\frac{\partial h}{\partial z} z^2 + \frac{\partial h}{\partial z}^2 z^4 + 1 \right) + 1}{\left(e^h + 1\right)^4},$$

$$\varphi_x \wedge \varphi_z = \begin{pmatrix} 2z \left(\frac{2e^h \frac{\partial h}{\partial x}}{(e^h+1)^2} \right) \frac{\left(e^{\frac{3h}{2}} + e^{\frac{h}{2}} + z^2 \left(e^{\frac{h}{2}} \frac{\partial h}{\partial z} - e^{\frac{3h}{2}} \frac{\partial h}{\partial z} \right) \right)}{(e^h+1)^2} - z \left(\frac{e^{\frac{h}{2}} \frac{\partial h}{\partial x} - e^{\frac{3h}{2}} \frac{\partial h}{\partial x}}{(e^h+1)^2} \right) \left(\frac{e^{2h} + 2z^2 e^h \frac{\partial h}{\partial z} - 1}{(e^h+1)^2} \right) \\ \frac{2\left(\frac{\partial h}{\partial z} z^2 \left(e^{\frac{3h}{2}} - e^{\frac{h}{2}} \right) - e^{\frac{3h}{2}} - e^{\frac{h}{2}} \right)}{(e^h+1)^2} \\ \frac{e^{2h} + 2z^2 e^h \frac{\partial h}{\partial z} - 1}{(e^h+1)^2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{z \frac{\partial h}{\partial x} \left(4e^{\frac{5h}{2}} + 4e^{\frac{3h}{2}} + 2z^2 \frac{\partial h}{\partial z} e^{\frac{3h}{2}} - 2z^2 \frac{\partial h}{\partial z} e^{\frac{5h}{2}} - e^{\frac{5h}{2}} + e^{\frac{h}{2}} + e^{\frac{7h}{2}} - e^{\frac{3h}{2}} \right)}{(e^h+1)^4} \\ \frac{2\left(\frac{\partial h}{\partial z} z^2 \left(e^{\frac{3h}{2}} - e^{\frac{h}{2}} \right) - e^{\frac{3h}{2}} - e^{\frac{h}{2}} \right)}{(e^h+1)^2} \\ \frac{e^{2h} + 2z^2 e^h \frac{\partial h}{\partial z} - 1}{(e^h+1)^2} \end{pmatrix},$$

$$|\varphi_x \wedge \varphi_z|_{\mathbb{R}^3} = \left(A^2 + B^2 + C^2 \right)^{1/2}.$$

Onde A, B e C são dados por:

$$A = \left(\frac{z \frac{\partial h}{\partial x} \left(4e^{\frac{5h}{2}} + 4e^{\frac{3h}{2}} + 2z^2 \frac{\partial h}{\partial z} e^{\frac{3h}{2}} - 2z^2 \frac{\partial h}{\partial z} e^{\frac{5h}{2}} - e^{\frac{5h}{2}} + e^{\frac{h}{2}} + e^{\frac{7h}{2}} - e^{\frac{3h}{2}} \right)}{\left(e^h + 1\right)^4} \right),$$

$$B = \left(\frac{\left(2z^2 \frac{\partial h}{\partial z} - 2\right) e^{\frac{3h}{2}} - \left(2 + 2z^2 \frac{\partial h}{\partial z}\right) e^{\frac{h}{2}}}{\left(e^h + 1\right)^2} \right),$$

$$C = \left(\frac{e^{2h} + 2z^2 e^h \frac{\partial h}{\partial z} - 1}{\left(e^h + 1\right)^2} \right).$$

Portanto o campo normal tem a seguinte expressão:

$$N = \frac{1}{\left(A^2 + B^2 + C^2\right)^{1/2}} \begin{pmatrix} \frac{z \frac{\partial h}{\partial x} \left(4e^{\frac{5h}{2}} + 4e^{\frac{3h}{2}} + 2z^2 \frac{\partial h}{\partial z} e^{\frac{3h}{2}} - 2z^2 \frac{\partial h}{\partial z} e^{\frac{5h}{2}} - e^{\frac{5h}{2}} + e^{\frac{h}{2}} + e^{\frac{7h}{2}} - e^{\frac{3h}{2}} \right)}{(e^h+1)^4} \\ \frac{2\left(\frac{\partial h}{\partial z} z^2 \left(e^{\frac{3h}{2}} - e^{\frac{h}{2}} \right) - e^{\frac{3h}{2}} - e^{\frac{h}{2}} \right)}{(e^h+1)^2} \\ \frac{e^{2h} + 2z^2 e^h \frac{\partial h}{\partial z} - 1}{(e^h+1)^2} \end{pmatrix},$$

$$\varphi_{xx} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2ze^h \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \left(1 - e^h\right) + \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} e^h \right)}{(e^h+1)^3} \\ \frac{ze^{\frac{h}{2}} \left(\left(\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) e^{2h} - 6 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 e^h + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)}{2(e^h+1)^4} \end{pmatrix},$$

$$\varphi_{xz} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2e^h \left(\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial z} z^2 + \frac{\partial h}{\partial x} e^h + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial z} z^2 + \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial z} z^2 e^h - \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial z} z^2 e^h \right)}{(e^h+1)^3} \\ \frac{\left(3e^{\frac{3h}{2}} + e^{\frac{h}{2}} \right) \frac{\partial h}{\partial x} + 2z^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial z} \left(e^{\frac{h}{2}} - e^{\frac{3h}{2}} \right) + z^2 \frac{\partial h}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial x} \left(e^{\frac{h}{2}} - 3e^{\frac{3h}{2}} \right)}{(e^h+1)^4} \end{pmatrix},$$

$$\varphi_{zz} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2e^h\left(\left(-e^h+1\right)\left(z\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2+\left(1+e^h\right)\left(2\frac{\partial h}{\partial z}z+\frac{\partial h}{\partial z}+z^2\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}\right)\right)}{\left(e^h+1\right)^3} \\ \frac{\left(\left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2z^2+2\frac{\partial h}{\partial z}z+\frac{\partial h}{\partial z}+\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}z^2\right)e^{\frac{h}{2}}+\left(1-2\frac{\partial h}{\partial z}z^2\right)2\frac{\partial h}{\partial z}e^{\frac{3h}{2}}+\left(\frac{\partial h}{\partial z}-\left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2z^2-2\frac{\partial h}{\partial z}z-\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}z^2\right)e^{\frac{5h}{2}}}{\left(e^h+1\right)^3} \end{pmatrix},$$

$$e_{\mathbb{R}^3} = \langle N_{\mathbb{R}^3}, \varphi_{xx}\rangle_{\mathbb{R}^3} = \alpha + \beta,$$

$$f_{\mathbb{R}^3} = \langle N_{\mathbb{R}^3}, \varphi_{xz}\rangle = \gamma + \delta,$$

$$g_{\mathbb{R}^3} = \langle N_{\mathbb{R}^3}, \varphi_{zz}\rangle = \kappa + \omega.$$

Onde α, β, γ,δ, κ e ω são dados por:

$$\alpha = \frac{4\left(\frac{\partial h}{\partial z}z^2\left(e^{\frac{3h}{2}}-e^{\frac{h}{2}}\right)-e^{\frac{3h}{2}}-e^{\frac{h}{2}}\right)\left(2ze^h\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\left(1-e^h\right)+\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}e^h\right)\right)\left(e^h+1\right)}{2|\varphi_x\wedge\varphi_z|_{\mathbb{R}^3}\left(e^h+1\right)^6},$$

$$\beta = \frac{\left(e^{2h}+2z^2e^h\frac{\partial h}{\partial z}-1\right)\left(ze^{\frac{h}{2}}\left(\left(\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2-2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)e^{2h}-6\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2e^h+\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)\right)}{2|\varphi_x\wedge\varphi_z|_{\mathbb{R}^3}\left(e^h+1\right)^6},$$

$$\gamma = \frac{4e^h\left(\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial z}z^2+\frac{\partial h}{\partial x}e^h+\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial z}z^2+\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial z}z^2e^h-\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial z}z^2e^h\right)\left(e^h+1\right)\left(\frac{\partial h}{\partial z}z^2\left(e^{\frac{3h}{2}}-e^{\frac{h}{2}}\right)-e^{\frac{3h}{2}}-e^{\frac{h}{2}}\right)}{\left(e^h+1\right)^6|\varphi_x\wedge\varphi_z|_{\mathbb{R}^3}},$$

$$\delta = \frac{\left(\left(3e^{\frac{3h}{2}}+e^{\frac{h}{2}}\right)\frac{\partial h}{\partial x}+2z^2\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial z}\left(e^{\frac{h}{2}}-e^{\frac{3h}{2}}\right)+z^2\frac{\partial h}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial x}\left(e^{\frac{h}{2}}-3e^{\frac{3h}{2}}\right)\right)\left(e^{2h}+2z^2e^h\frac{\partial h}{\partial z}-1\right)}{\left(e^h+1\right)^6|\varphi_x\wedge\varphi_z|_{\mathbb{R}^3}},$$

$$\kappa = \frac{4e^h\left(\left(-e^h+1\right)\left(z\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2+\left(1+e^h\right)\left(2\frac{\partial h}{\partial z}z+\frac{\partial h}{\partial z}+z^2\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}\right)\right)\left(\frac{\partial h}{\partial z}z^2\left(e^{\frac{3h}{2}}-e^{\frac{h}{2}}\right)-e^{\frac{3h}{2}}-e^{\frac{h}{2}}\right)}{\left(e^h+1\right)^5|\varphi_x\wedge\varphi_z|_{\mathbb{R}^3}},$$

$$\omega = \frac{\left(\left(\left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2z^2+2\frac{\partial h}{\partial z}z+\frac{\partial h}{\partial z}+\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}z^2\right)e^{\frac{h}{2}}+\left(1-2\frac{\partial h}{\partial z}z^2\right)2\frac{\partial h}{\partial z}e^{\frac{3h}{2}}+\left(\frac{\partial h}{\partial z}-\left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2z^2-2\frac{\partial h}{\partial z}z-\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}z^2\right)e^{\frac{5h}{2}}\right)\left(e^{2h}+2z^2e^h\frac{\partial h}{\partial z}-1\right)}{\left(e^h+1\right)^5|\varphi_x\wedge\varphi_z|_{\mathbb{R}^3}}.$$

Juntando os coeficientes acima, obtemos as curvauras da superfície.

4.3.9 Superfície de Revolução

Seja $\gamma(t) = (x(t), z(t))$ uma curva diferenciável contida no plano XZ vamos supor, sem perda de generalidade que $x > 0$. Então uma superfície de revolução (em torno do eixo Z) é parametrizada da seguinte maneira:

$$\varphi(u,t) = (x(t)\cos(u), x(t)\sin(u), z(t)).$$

Vamos supor, ainda, que γ é parametrizada pelo comprimento de arco hiperbólico. Ou seja;

$$|\gamma'(t)|_{\mathbb{H}^3} = 1 \Rightarrow (x'(t))^2 + (z'(t))^2 = z(t)^2.$$

Segue que existe uma função diferenciável $\theta(t)$ tal que:

$$\gamma'(t) = (x'(t), z'(t)) = (z\cos(\theta), z\sin(\theta)).$$

Vamos, usando as fórmulas anteriores, calcular as curvaturas Gaussiana, Média e Principais. As derivadas de φ são dadas por:

$$\varphi_u = (-x(t)\sin(u), x(t)\cos(u), 0),$$

$$\varphi_t = (x'(t)\cos(u), x'(t)\sin(u), z'(t)).$$

Os coeficientes E, F, G e o campo normal N têm a seguinte expressão:

$$E_{\mathbb{R}^3} = \langle\varphi_u, \varphi_u\rangle_{\mathbb{R}^3} = x(t)^2,$$

$$F_{\mathbb{R}^3} = \langle\varphi_u, \varphi_t\rangle_{\mathbb{R}^3} = 0,$$

$$G_{\mathbb{R}^3} = \langle\varphi_t, \varphi_t\rangle_{\mathbb{R}^3} = (x'(t))^2 + (z'(t))^2 = z(t)^2,$$

$$\varphi_u \wedge \varphi_t = (x(t)z'(t)\cos(u), x(t)z'(t)\sin(u), -x(t)x'(t)),$$

$$|\varphi_u \wedge \varphi_t|_{\mathbb{R}^3} = \left((x(t)z'(t))^2 + (x(t)x'(t))^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(x(t)^2 z(t)^2\right)^{\frac{1}{2}} = x(t)z(t),$$

$$N = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_t}{|\varphi_u \wedge \varphi_t|_{\mathbb{R}^3}} = \left(\frac{z'(t)\cos(u)}{z(t)}, \frac{z'(t)\sin(u)}{z(t)}, -\frac{x'(t)}{z(t)}\right).$$

Derivando novamente a parametrização obtemos:

$$\varphi_{uu} = (-x(t)\cos(u), -x(t)\sin(u), 0),$$

$$\varphi_{ut} = \left(-x'(t)\sin(u), x'(t)\cos(u), 0\right),$$

$$\varphi_{tt} = (x''(t)\cos(u), x''(t)\sin(u), z''(t)),$$

Já podemos calcular os últimos coeficientes:

$$e_{\mathbb{R}^3} = \langle N_{\mathbb{R}^3}, \varphi_{uu}\rangle = \frac{-x(t)^2 z'(t)}{x(t)z(t)} = \frac{x(t)z'(t)}{z(t)}.$$

$$f_{\mathbb{R}^3} = \langle N_{\mathbb{R}^3}, \varphi_{ut}\rangle = 0,$$

$$g_{\mathbb{R}^3} = \langle N_{\mathbb{R}^3}, \varphi_{tt}\rangle = \frac{(z'(t)x''(t) - x'(t)z''(t))}{z(t)}.$$

Também podemos calcular todos os coeficientes hiperbólicos. Eles são dados por:

$$e_{\mathbb{H}^3} = \frac{dz(x_u \wedge x_v)E_{\mathbb{R}^3} + |x_u \wedge x_v|_{\mathbb{R}^3} p_3 e_{\mathbb{R}^3}}{|x_u \wedge x_v|_{\mathbb{R}^3} p_3^2} = \frac{-x(t)^3 x'(t) + x(t)^2 z(t) z'(t)}{x(t)z(t)^3} = \frac{xz'}{z^2} - \frac{x^2 x'}{z^3},$$

$$f_{\mathbb{H}^3} = \frac{dz(x_u \wedge x_v)F_{\mathbb{R}^3} + |x_u \wedge x_v|_{\mathbb{R}^3} p_3 f_{\mathbb{R}^3}}{|x_u \wedge x_v|_{\mathbb{R}^3} p_3^2} = 0,$$

$$\begin{aligned} g_{\mathbb{H}^3} &= \frac{dz(x_u \wedge x_v)G_{\mathbb{R}^3} + |x_u \wedge x_v|_{\mathbb{R}^3} p_3 g_{\mathbb{R}^3}}{|x_u \wedge x_v|_{\mathbb{R}^3} p_3^2} = \frac{-x(t)x'(t)z(t)^2 + x(t)z(t)\left(z'(t)x''(t) - x'(t)z''(t)\right)}{x(t)z(t)^3} \\ &= \frac{(z'x'' - x'z'')}{z^2} - \frac{x'}{z}, \end{aligned}$$

$$E_{\mathbb{H}^3} = \frac{x^2}{z^2} \quad , \quad F_{\mathbb{H}^3} = 0 \quad , \quad G_{\mathbb{H}^3} = 1.$$

Segue que as curvaturas média, gaussiana e principais têm a seguinte expressão:

$$K_{\mathbb{H}^3}(P) = \frac{e_{\mathbb{H}^3} g_{\mathbb{H}^3} - f_{\mathbb{H}^3}^2}{E_{\mathbb{H}^3} G_{\mathbb{H}^3} - F_{\mathbb{H}^3}^2} = \frac{z^2\left(\frac{xz'}{z^2} - \frac{x^2x'}{z^3}\right)\left(\frac{(z'x''-x'z'')}{z^2} - \frac{x'}{z}\right)}{x^2} = \frac{(xx' - zz')(zx' + x'z'' - x''z')}{xz^3},$$

$$\begin{aligned} H_{\mathbb{H}^3}(P) &= \frac{1}{2}\left[\frac{-2f_{\mathbb{H}^3}F_{\mathbb{H}^3} + e_{\mathbb{H}^3}G_{\mathbb{H}^3} + g_{\mathbb{H}^3}E_{\mathbb{H}^3}}{E_{\mathbb{H}^3}G_{\mathbb{H}^3} - F_{\mathbb{H}^3}^2}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{z^2\left(\frac{xz'}{z^2} - \frac{x^2x'}{z^3}\right) + \left(\frac{(z'x''-x'z'')}{z^2} - \frac{x'}{z}\right)x^2}{x^2}\right) \\ &= \frac{\left(z'z^2 - 2xx'z - xx'z'' + xx''z'\right)}{2xz^2}. \end{aligned}$$

Sabemos que H e K são relacionadas pela seguinte expressão:

$$\begin{cases} K_{\mathbb{H}^3} = k_{1_{\mathbb{H}^3}} k_{2_{\mathbb{H}^3}}. \\ H_{\mathbb{H}^3}(P) = \frac{k_{1_{\mathbb{H}^3}} + k_{2_{\mathbb{H}^3}}}{2}. \end{cases}$$

Portanto, observando os valores de $K_{\mathbb{H}^3}$ e $H_{\mathbb{H}^3}$ concluímos que:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= -\frac{(xx' - zz')}{xz},\\
k_2 &= -\frac{(zx' + x'z'' - x''z')}{z^2}.
\end{aligned}
$$

Teorema 4.3.6 *Temos que as superfícies de revolução que respeitam a equação $k_1^2 + k_2^2 = 1$ têm a função ângulo da curva geratriz respeitando a seguinte equação:*

$$\left(\cos\theta - \frac{z}{x}\sin\theta\right)^2 + (\theta' + \cos\theta)^2 = 1.$$

Prova. Seja a seguinte função suave $\theta : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 2\pi]$ tal que:

$$
\begin{aligned}
x' = z\cos\theta &\Rightarrow x'' = \left(z'\cos(\theta) - z\sin(\theta)\theta'\right),\\
z' = z\sin\theta &\Rightarrow z'' = \left(z'\sin(\theta) + z\cos(\theta)\theta'\right).
\end{aligned}
$$

Substituindo nas curvaturas principais obtemos:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= -\frac{\left(x\left(z\cos(\theta)\right) - zz\sin(\theta)\right)}{xz} = -\frac{1}{x}\left(x\cos\theta - z\sin\theta\right) = -\left(\cos\theta - \frac{z}{x}\sin\theta\right),\\
k_2 &= -\frac{\left(zz\cos(\theta) + z\cos(\theta)\left(z'\sin(\theta) + z\cos(\theta)\theta'\right) - \left(z'\cos(\theta) - z\sin(\theta)\theta'\right)z\sin(\theta)\right)}{z^2} = -\theta' - \cos\theta.
\end{aligned}
$$

■

Por fim, substituindo na equação de Weingarten estudada obtemos:

$$1 = k_1^2 + k_2^2 = \left(\cos\theta - \frac{z}{x}\sin\theta\right)^2 + (\theta' + \cos\theta)^2.$$

Teorema 4.3.7 *As superfícies de revolução com $K = 0$ são dadas pelas seguintes parametrizações:*

$$\varphi(u,t) = \left(\sqrt{z(t) + 2C}\cos(u), \sqrt{z(t) + 2C}\sin(u), z(t)\right), \qquad C \in \mathbb{R} : z(t) + 2C \geq 0.$$

$$\varphi(u,t) = \left(\cot(C)e^{(\sin(C)t + C_0)}\cos(u), \cot(C)e^{(\sin(C)t + C_0)}\sin(u), e^{(\sin(C)t + C_0)}\right).$$

ou a curva respeita o seguinte sistema:

$$
\begin{aligned}
z(t) &= C_4 e^{1 + e^{2(C_0 + t)} - t},\\
x'(t) &= z(t)\cos\theta(t).
\end{aligned}
$$

Prova. Supondo a equação satisfeita segue que:

$$0 = K = \frac{(xx' - zz')\left(zx' + x'z'' - x''z'\right)}{xz^3} = (xx' - zz')\left(zx' + x'z'' - x''z'\right).$$

Ou seja , concluímos que:

$$(xx' - zz') = 0 \qquad \text{ou} \qquad (zx' + x'z'' - x''z') = 0.$$

Para o primeiro caso temos:

$$(xx' - zz') = 0 \Rightarrow xx' = zz'.$$

Integrando ambos os lados obtemos que:

$$\frac{x^2}{2} = \frac{z^2}{2} + C \Rightarrow x = \sqrt{z + 2C}.$$

onde C é uma constante tal que $z + 2C \geq 0$ para todo $z(t)$. Portanto a parametrização é dada por:

$$\varphi(u,t) = \left(\sqrt{z(t) + 2C}\cos(u), \sqrt{z + 2C}\sin(u), z(t)\right).$$

Para o segundo caso temos:

$$(zx' + x'z'' - x''z') = 0.$$

Deixando em termos da função ângulo obtemos:

$$z^2(\theta' + \cos\theta) = 0.$$

Como $z > 0$, segue que

$$(\theta' + \cos\theta) = 0.$$

Se $\cos\theta = 0$, então:

$$\theta' = 0 \Rightarrow \theta = C.$$

Logo o vetor velocidade da curva é dado por:

$$\gamma'(t) = (x'(t), z'(t)) = (z\cos(C), z\sin(C)).$$

Ou seja, temos:

$$\begin{cases} z' = z\sin(C), \\ x' = z\cos(C). \end{cases}$$

Na primeira equação temos:

$$\frac{z'}{z} = \sin(C).$$

Integrando ambos os lados conluímos que:

$$\ln(z(t)) = \sin(C)t + C_0 \Rightarrow z(t) = e^{(\sin(C)t + C_0)}.$$

Na segunda equação temos:

$$x' = z\cos(C) = \cos(C)e^{(\sin(C)t + C_0)}.$$

Integrando ambos os lados concluímos que:

$$x(t) = \cot(C)e^{(\sin(C)t + C_0)}.$$

Nesse caso, a família de superfícies solução têm a seguinte parametrização:

$$\varphi(u,t) = \left(\cot(C)e^{(\sin(C)t + C_0)}\cos(u), \cot(C)e^{(\sin(C)t + C_0)}\sin(u), e^{(\sin(C)t + C_0)}\right).$$

Se $\cos\theta > 0$, então:

$$\theta' = -\cos\theta \Rightarrow -\frac{\theta'}{\cos\theta} = 1.$$

Integrando ambos os lados obtemos:

$$\ln|\tan\theta + \sec\theta| = t + C_0 \Rightarrow \frac{\sin\theta + 1}{\cos\theta} = \pm e^{(t+C_0)}.$$

Elevando ambos os lados ao quadrado, usando que $\cos^2\theta = 1 - \sin^2(\theta)$ e isolando a equação obtemos:

$$\left(1 + e^{2(t+C_0)}\right)\sin^2\theta + 2\sin\theta + \left(1 - e^{2(t+C_0)}\right) = 0.$$

Logo temos um polinômio de segundo grau em $\sin\theta$. Por Bháskara concluímos que:

$$\sin\theta = \frac{-2 \pm \sqrt{4\left(1 - \left(1 + e^{2(t+C_0)}\right)\left(1 - e^{2(t+C_0)}\right)\right)}}{2\left(1 + e^{2(t+C_0)}\right)} = \frac{-1 \pm e^{2(t+C_0)}}{\left(1 + e^{2(t+C_0)}\right)} = -1 \qquad \text{ou} \qquad \frac{-1 + e^{2(t+C_0)}}{1 + e^{2(t+C_0)}}.$$

Suponha que a seguinte igualdade vale:

$$\frac{-1 + e^{2(t+C_0)}}{1 + e^{2(t+C_0)}} = -1.$$

Isolando a equação concluímos que:

$$e^{2(t+C_0)} = 0.$$

que é uma contradição. Logo, os dois possíveis valores de $\sin\theta$ não se tocam.

Portanto segue que podemos dividir em dois casos. Para o primeiro caso temos:

$$\theta = \arcsin(-1) = \frac{3}{2}\pi.$$

Vamos encontrar as coordenadas da curva γ :

$$\begin{aligned} x' &= z\cos\theta = 0, \\ z' &= z\sin\theta = -z. \end{aligned}$$

Integrando ambas a equações concluímos que:

$$x(t) = C_0 z(t) = C_2 e^{-t},$$

Portanto vale a seguinte parametrização:

$$\varphi(u,t) = \left(C_0\cos(u), C_0\sin(u), C_2 e^{-t}\right).$$

Para o segundo caso temos:

$$\theta = \arcsin\left(\frac{-1+e^{2(t+C_0)}}{1+e^{2(t+C_0)}}\right).$$

Encontremos novamente as coordenadas da curva:

$$z' = z\sin\theta = \left(\frac{-1+e^{2(t+C_0)}}{1+e^{2(t+C_0)}}\right).$$

Integrando ambos os lados concluímos que:

$$\ln(z) = \ln\left|1+e^{2(C_0+t)}\right| - C_0 - t + C_3 \Rightarrow z(t) = C_4 e^{1+e^{2(C_0+t)}-t}.$$

Para a coordenada x temos:

$$x' = z\cos\theta.$$

Onde a coordenada z foi encontrada acima. ■

4.3.10 Superfície Cíclica Euclidiana no $\mathbb{H}^3$ (Plano XZ)

Seja $\gamma : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(s) = (x(s), 0, z(s))$ uma curva suave parametrizada pelo comprimento de arco e seja $r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ a função raio.

$$\begin{aligned} T &= (x', 0, z'), \\ N &= (-z', 0, x'), \\ B &= (0,1,0). \end{aligned}$$

Temos a seguinte parametrização para uma superfície cíclica de curva central γ e raio r :

$$\begin{aligned} (s,t) \longmapsto X(s,t) &:= \gamma(s) + (r(s)\cos t)\, N(s) + (r(s)\sin t)\, B(s) \\ &= (x - z'(r\cos t), r\sin t, (z + x'(r\cos t))). \end{aligned}$$

Tomemos a seguinte função, que será de suma importância nos cálculos:

$$\begin{aligned} \xi(s,t) &= (1 - r\kappa\cos t) \\ \tfrac{\partial\xi}{\partial s} &= -\cos(t)\,(r'\kappa + r\kappa') \\ \tfrac{\partial\xi}{\partial t} &= r\kappa\sin(t), \end{aligned}$$

Vamos, usando as fórmulas anteriores, calcular as curvaturas Gaussiana, Média e Principais. Comecemos com as primeiras derivadas da parametrização:

$$\begin{aligned} X_s &= \gamma' + \cos(t)\,(r'N + rN') + \sin(t)\,(r'B + rB') \\ &= T + \cos(t)\,(r'N + r(-\kappa T)) + \sin(t)\,(r'B) \\ &= (1 - r\kappa\cos t)\, T + (r'\cos t)\, N + (r'\sin t)\, B \\ &= \xi T + (r'\cos t)\, N + (r'\sin t)\, B, \end{aligned}$$

$$X_t = -\sin(t)rN + \cos(t)rB,$$

Já podemos calcular os primeiros coeficientes e o campo normal:

$$\begin{aligned} E &= \langle X_s, X_s \rangle \\ &= \langle \xi T + (r'\cos t)\, N + (r'\sin t)\, B, \xi T + (r'\cos t)\, N + (r'\sin t)\, B \rangle \\ &= \xi^2 + (r'\cos t)^2 + (r'\sin t)^2 \\ &= (r')^2 + \xi^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= \langle X_s, X_t \rangle \\ &= \langle \xi T + (r'\cos t)\, N + (r'\sin t)\, B, -\sin(t)rN + \cos(t)rB \rangle \\ &= -\sin(t)r\,(r'\cos t) + (r'\sin t)\cos(t)r \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= \langle X_t, X_t \rangle \\ &= \langle -\sin(t)rN + \cos(t)rB, -\sin(t)rN + \cos(t)rB \rangle \\ &= (-\sin(t)r)^2 + (\cos(t)r)^2 \\ &= r^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_s \wedge X_t &= (\xi T + (r'\cos t - r\tau\sin t)\, N + (r'\sin t + r\tau\cos t)\, B) \wedge (-\sin(t)rN + \cos(t)rB) \\ &= (-\sin(t)r\xi)\, B - (\cos(t)r\xi)\, N + ((r'\cos t)\cos(t)r)\, T - (-\sin(t)r\,(r'\sin t))\, T \\ &= rr'T + (-r\xi\cos t)\, N + (-r\xi\sin t)\, B \\ &(rr'x' + z'r\xi\cos t, -r\xi\sin t, (rr'z' - x'r\xi\cos t)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ||X_s \wedge X_t|| &= \sqrt{(rr')^2 + ((-r\xi\cos t))^2 + ((-r\xi\sin t))^2} \\ &= r\sqrt{(r')^2 + \xi^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \tfrac{X_s \times X_t}{||X_s \times X_t||} \\ &= \tfrac{rr'T + (-r\xi\cos t)N + (-r\xi\sin t)B}{r\sqrt{(r')^2+\xi^2}} \\ &= \tfrac{r'T + (-\xi\cos t)N + (-\xi\sin t)B}{\sqrt{(r')^2+\xi^2}}, \end{aligned}$$

Derivando novamente a parametrização, obtemos:

$$\begin{aligned} X_{ss} &= \tfrac{\partial\xi}{\partial s}T + \xi T' + (r''\cos(t))\, N + (r'\cos t)\, N' + (r''\sin(t))\, B + (r'\sin t)\, B' \\ &= -\cos(t)\,(r'\kappa + r\kappa')\, T + \xi\kappa N + (r''\cos(t))\, N + (r'\cos t)\,(-\kappa T) + (r''\sin(t))\, B \\ &= (-2r'\kappa\cos t - r\kappa'\cos t)\, T + (r''\cos t + \kappa\xi)\, N + (r''\sin t)\, B, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{st} &= \tfrac{\partial\xi}{\partial t}T + (-\sin(t)r')\, N + (r'\cos(t))\, B \\ &= r\kappa\sin(t)T + (-\sin(t)r')\, N + (r'\cos(t))\, B, \end{aligned}$$

$$X_{tt} = -\cos(t)rN - \sin(t)rB,$$

Já podemos calcular os ultimos coeficientes. Eles têm as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} e &= \langle \mathcal{N}, X_{ss} \rangle \\ &= \left\langle \tfrac{r'T + (-\xi\cos t)N + (-\xi\sin t)B}{\sqrt{(r')^2+\xi^2}}, (-2r'\kappa\cos t - r\kappa'\cos t)\, T + (r''\cos t + \kappa\xi)\, N + (r''\sin t)\, B \right\rangle \\ &= \tfrac{r'\left(-2r'\kappa\cos t - r\kappa'\cos t\right) + (-\xi\cos t)\left(r''\cos t + \kappa\xi\right) + (-\xi\sin t)\left(r''\sin t\right)}{\sqrt{(r')^2+\xi^2}} \\ &= \left(-\tfrac{\left(2\kappa(\cos t)(r')^2 + r\kappa'(\cos t)r' + \kappa(\cos t)\xi^2 + r''\xi\right)}{\sqrt{(r')^2+\xi^2}}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &= \langle \mathcal{N}, X_{st} \rangle \\ &= \left\langle \tfrac{r'T + (-\xi\cos t)N + (-\xi\sin t)B}{\sqrt{(r')^2+\xi^2}}, r\kappa\sin(t)T + (-\sin(t)r' - r\tau\cos(t))\, N + (r'\cos(t) - r\tau\sin(t))\, B \right\rangle \\ &= \tfrac{r'r\kappa\sin(t) + (-\xi\cos t)\left(-\sin(t)r'\right) + (-\xi\sin t)\left(r'\cos(t)\right)}{\sqrt{(r')^2+\xi^2}} \\ &= \left(\tfrac{rr'\kappa\sin t}{\sqrt{(r')^2+\xi^2}}\right), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
g &= \langle \mathcal{N}, X_{tt} \rangle \\
&= \left\langle \frac{r'T+(-\xi\cos t)N+(-\xi\sin t)B}{\sqrt{(r')^2+\xi^2}}, -\cos(t)rN - \sin(t)rB \right\rangle \\
&= \frac{-\cos(t)r(-\xi\cos t)-\sin(t)r(-\xi\sin t)}{\sqrt{(r')^2+\xi^2}} \\
&= \left(r\frac{\xi}{\sqrt{(r')^2+\xi^2}} \right).
\end{aligned}
$$

Segue que as curvaturas média e gaussiana são dadas por:

$$
\begin{aligned}
K_{\mathbb{H}} &= \frac{\Pi_3^2(x_u \wedge x_v)}{|x_u \wedge x_v|_{\mathbb{R}}^2} - \frac{\Pi_3(p)\Pi_3(x_u \wedge x_v)}{|x_u \wedge x_v|_{\mathbb{R}}} \left(\frac{2fF-eG-gE}{EG-F^2} \right) + \Pi_3^2(p) \left(\frac{eg-f^2}{EG-F^2} \right) \\
&= \left(\frac{A\sin^2 t\cos^2 t + B\sin^2 t\cos t + C\sin^2 t + D\cos^4 t + E\cos^3 t + F\cos^2 t + G\cos t + H}{r^2\left((r')^2+(1-r\kappa\cos t)^2\right)^2} \right).
\end{aligned}
$$

Onde os coeficientes acima são dados por:

$$
\begin{aligned}
A &= \left(-r^4(x')^2(r')^2\kappa^2\right), \\
B &= \left(-2r^3zx'(r')^2\kappa^2\right), \\
C &= \left(-r^2z^2(r')^2\kappa^2\right), \\
D &= a_D + b_D + c_D + d_D, \\
E &= a_E - b_E + c_E + d_E, \\
F &= a_F + b_F + c_F + d_F + e_F, \\
G &= (a_G + b_G - c_G), \\
H &= \left(r^2(z')^2(r')^2\left((r')^2+1\right) - rz^2r'' + rzz'r'\left((r')^2 - rr'' + 1\right)\right).
\end{aligned}
$$

Onde os outros coeficientes são dados por:

$$
\begin{aligned}
a_D &= r^4z^2\kappa^4 - rx'\left(5r^3x'\kappa^2 + 2r^4z'r'\kappa^3 + r^2x'\kappa\left(2r\kappa + r\left(2\kappa(r')^2 + r\kappa'r' + \kappa - rr''\kappa\right) + r\kappa\left((r')^2+1\right)\right)\right), \\
b_D &= 4r^4(x')^2\kappa^2 + r^2\kappa^2\left(2z'r'\kappa r^3x' + r^2(x')^2\right), \\
c_D &= r^3(x')^2\left(2r\kappa^2 + r\kappa\left(2\kappa(r')^2 + r\kappa'r' + \kappa - rr''\kappa\right)\right), \\
d_D &= r^4zx'\kappa^3 + r^4(x')^2\kappa^2\left((r')^2+1\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_E &= rx'\left(rx'\left(2r\kappa + r\left(2\kappa(r')^2 + r\kappa'r' + \kappa - rr''\kappa\right) + r\kappa\left((r')^2+1\right)\right) + 5r^3z'r'\kappa^2 + r^2x'\kappa\left((r')^2 - rr'' + 1\right)\right), \\
b_E &= z\left(5r^3x'\kappa^2 + 2r^4z'r'\kappa^3 + r^2x'\kappa\left(2r\kappa + r\left(2\kappa(r')^2 + r\kappa'r' + \kappa - rr''\kappa\right) + r\kappa\left((r')^2+1\right)\right)\right), \\
c_E &= -3r^3z^2\kappa^3 - r^3(x')^2\left(2\kappa(r')^2 + r\kappa'r' + \kappa - 2rr''\kappa\right) - 2r\kappa\left(2z'r'\kappa r^3x' + r^2(x')^2\right), \\
d_E &= -2r^3(x')^2\kappa\left((r')^2+1\right) + 2r^2zx'\left(2r\kappa^2 + r\kappa\left(2\kappa(r')^2 + r\kappa'r' + \kappa - rr''\kappa\right)\right) - 2r^4x'z'r'\kappa^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_F &= \left(2z'r'\kappa r^3x' + r^2(x')^2\right)\left((r')^2+1\right), \\
b_F &= z\left(rx'\left(2r\kappa + r\left(2\kappa(r')^2 + r\kappa'r' + \kappa - rr''\kappa\right) + r\kappa\left((r')^2+1\right)\right) + 5r^3z'r'\kappa^2 + r^2x'\kappa\left((r')^2 - rr'' + 1\right)\right), \\
c_F &= rz^2\left(2r\kappa^2 + r\kappa\left(2\kappa(r')^2 + r\kappa'r' + \kappa - rr''\kappa\right)\right), \\
d_F &= -r^3(x')^2r'' - rx'\left(rx'\left((r')^2 - rr'' + 1\right) + rz'r'\left(2r\kappa + r\left(2\kappa(r')^2 + r\kappa'r' + \kappa - rr''\kappa\right) + r\kappa\left((r')^2+1\right)\right)\right), \\
e_F &= -2r^2zx'\left(2\kappa(r')^2 + r\kappa'r' + \kappa - 2rr''\kappa\right) + r^4(z')^2(r')^2\kappa^2 + 4r^3x'z'r'\kappa,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_G &= r^2x'z'r'\left((r')^2 - rr'' + 1\right) - rz^2\left(2\kappa(r')^2 + r\kappa'r' + \kappa - 2rr''\kappa\right), \\
b_G &= -2r^2zx'r'' - 2r^3(z')^2(r')^2\kappa - 2r^2x'z'r'\left((r')^2+1\right), \\
c_G &= z\left(rx'\left((r')^2 - rr'' + 1\right) + rz'r'\left(2r\kappa + r\left(2\kappa(r')^2 + r\kappa'r' + \kappa - rr''\kappa\right) + r\kappa\left((r')^2+1\right)\right)\right).
\end{aligned}
$$

Segue que a curvatura média é dada por:

$$\begin{aligned} H_{\mathbb{H}} &= \frac{\Pi_3(x_u\wedge x_v)}{|x_u\wedge x_v|_{\mathbb{R}}} - \frac{\Pi_3(p)}{2}\left(\frac{2fF-eG-gE}{EG-F^2}\right) \\ &= \left(-\frac{A\cos^3 t+B\cos^2 t+C\cos t+D}{2r\left(\sqrt{(r')^2+(1-r\kappa\cos t)^2}\right)^3}\right). \end{aligned}$$

Onde os coeficientes são dados por:

$$\begin{aligned} A &= \left(2zr^3\kappa^3 + x'r^3\kappa^2\right), \\ B &= \left(x'\kappa' r^3 r' - 2z'r^3r'\kappa^2 - x'r''r^3\kappa + x'r^2(r')^2\kappa - 5zr^2\kappa^2 - 2x'r^2\kappa\right), \\ C &= \left(rx' + 4rz\kappa + rx'(r')^2 + r^2x'r'' + 3rz(r')^2\kappa - r^2zr''\kappa + r^2zr'\kappa' + 4r^2z'r'\kappa\right), \\ D &= \left(rzr'' - z(r')^2 - 2rz'r' - z - 2rz'(r')^3\right). \end{aligned}$$

4.3.11 Cíclicas com Raio Constante (Tubos)

Nesse caso, temos que o r é uma constante real. Segue disso que $r' = r'' = 0$. Logo a parametrização de um tubo com curva geratriz no plano XZ é dada por:

$$\begin{aligned} (s,t) \longmapsto X(s,t) &:= \gamma(s) + (r\cos t)\,N(s) + (r\sin t)\,B(s) \\ &= (x - z'(r\cos t), r\sin t, (z + x'(r\cos t))), \qquad r\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

Portanto as curvaturas média e gaussiana ficam da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} K_{\mathbb{H}} &= \frac{\Pi_3^2(x_u\wedge x_v)}{|x_u\wedge x_v|^2_{\mathbb{R}}} - \frac{\Pi_3(p)\Pi_3(x_u\wedge x_v)}{|x_u\wedge x_v|_{\mathbb{R}}}\left(\frac{2fF-eG-gE}{EG-F^2}\right) + \Pi_3^2(p)\left(\frac{eg-f^2}{EG-F^2}\right) \\ &= \left(\frac{A\cos^5 t+B\cos^4 t+C\cos^3 t+D\cos^2 t+E\cos t}{r^2\left((1-r\kappa\cos t)^2\right)^2}\right). \end{aligned}$$

Onde os coeficientes são dados por:

$$\begin{aligned} A &= \left(rx'\left(5r^4x'\kappa^3 + 2r^3\kappa^3(rx' - rz\kappa)\right) - r\kappa\left(3r^4(x')^2\kappa^2 - 2r^4zx'\kappa^3\right) - 4r^5(x')^2\kappa^3\right), \\ B &= \left(r\kappa\left(r^3z^2\kappa^3 - 6r^3zx'\kappa^2 + 3r^3(x')^2\kappa\right) - rx'\left(4r^3x'\kappa^2 - 2r^3z\kappa^3 + 5r^2\kappa^2(rx' - rz\kappa)\right) + 6r^4(x')^2\kappa^2\right), \\ C &= \left(rx'\left(r^2x'\kappa - 5r^2z\kappa^2 + 4r\kappa(rx' - rz\kappa)\right) - r\kappa\left(3r^2z^2\kappa^2 - 6r^2zx'\kappa + r^2(x')^2\right) - 4r^3(x')^2\kappa\right), \\ D &= \left(r^2(x')^2 - r\kappa\left(2rzx' - 3rz^2\kappa\right) - rx'(rx' - 5rz\kappa)\right), \\ E &= \left(-r\kappa z^2 - rx'z\right). \end{aligned}$$

E a curvatura média tem a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} H_{\mathbb{H}} &= \frac{\Pi_3(x_u\wedge x_v)}{|x_u\wedge x_v|_{\mathbb{R}}} - \frac{\Pi_3(p)}{2}\left(\frac{2fF-eG-gE}{EG-F^2}\right) \\ &= \left(-\frac{-z(1-r\kappa\cos t)^3+rx'(1-r\kappa\cos t)^3\cos t+rz\kappa(1-r\kappa\cos t)^2\cos t+r^2x'\kappa(1-r\kappa\cos t)^2\cos^2 t}{2r\left(\sqrt{(1-r\kappa\cos t)^2}\right)^3}\right). \end{aligned}$$

Vamos agora encontrar a família de tubos que resolve qa equação $K = 0$. Supondo o problema resolvido e usando a expressão de K, obtemos:

$$A\cos^4 t + B\cos^3 t + C\cos^2 t + D\cos t = 0.$$

Onde os coeficientes são dados por:

$$\begin{aligned} A &= r^4z\kappa^3(x' + z\kappa), \\ B &= -3r^3z\kappa^2(x' + z\kappa), \\ C &= 3r^2z\kappa(x' + z\kappa), \\ D &= -rz(x' + z\kappa). \end{aligned}$$

Como a superfície está no $\mathbb{H}^3$ a curva geratriz não é uma reta e o tubo não é degenerado, segue que $z, r, \kappa > 0$. Notemos que temos um polinômio em $\cos t$ se anulando. Segue que, se houver algum coeficiente não nulo, $\cos t$

só poderá assumir no máximo 4 valores (grau do polinômio) mas isso é um absurdo. Ou seja, precisamos que todos os coeficientes sejam nulos. Observando os coeficientes e as informações já dadas, segue que:

$$x' + z\kappa = 0.$$

Como a curva γ é parametrizada pelo comprimento de arco euclidiano, segue que existe uma função suave $\omega : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 2\pi]$ tal que:

$$\begin{aligned} x' &= \cos\omega \Rightarrow x'' = (-\omega' \sin\omega), \\ y' &= \sin\omega \Rightarrow y'' = \omega' \cos\omega. \end{aligned}$$

Substituindo na equação acima obtemos:

$$0 = x' + z\kappa = x' + z\sqrt{(x'')^2 + (y'')^2}.$$

Segue disso a seguinte igualdade:

$$(x')^2 = z^2\left((x'')^2 + (y'')^2\right).$$

Colocando em termos as funções angulares, concluímos que:

$$\frac{\omega'}{\cos\omega} = \pm\frac{1}{z}.$$

Muyltiplicando ambos os lados por $\sin\omega$ segue que:

$$\frac{\omega' \sin\omega}{\cos\omega} = \pm\frac{z'}{z}.$$

Integrando ambos os lados, concluímos que:

$$\omega = \arccos\left(\pm C_1 z^{\pm 1}\right).$$

Já podemos calcular as coordenadas de γ :

$$z' = \sin\omega = \sin\arccos\left(\pm C_1 z^{\pm 1}\right) = \sqrt{1 - z^{\pm 2} C_1^2}.$$

Ou seja, temos a seguinte igualdade:

$$\frac{z'}{\sqrt{1 - z^{\pm 2} C_1^2}} = 1.$$

Integrando ambos os lados, concluímos que:

$$z = \left(\frac{1}{C_1}\sin(C_1 s + C_3)\right) \qquad \text{ou} \qquad z = \sqrt{(s + C_2)^2 + C_1^2}.$$

Para o primeiro caso segue que a coordenada x é dada por:

$$x' = \cos\omega = \pm C_1 z = \pm\sin(C_1 s + C_3).$$

Integrando ambos os lados, obtemos:

$$x = \left(\pm\frac{1}{C_1}\cos(C_1 s + C_3)\right).$$

Para os segundo caso, obtemos:

$$x' = \cos\omega = \pm C_1 z^{-1} = \pm\frac{C_1}{\sqrt{(s + C_2)^2 + C_1^2}}.$$

Integrando ambos os lados, concluímos que:

$$x = \pm C_1\left(\frac{1 + \frac{(s+C_2)}{\sqrt{(s+C_2)^2 + C_1^2}}}{\left|\frac{1}{C_1}\left(s + C_2 + \sqrt{(s + C_2)^2 + C_1^2}\right)\right|}\right).$$

Portanto há duas famílias de tubos com $K=0$ e elas são parametrizadas da seguinte maneira:

$$X(s,t)=\begin{pmatrix} \left(\pm\frac{1}{C_1}\cos\left(C_1s+C_3\right)\right)-\cos\left(C_1s+C_3\right)\left(R\cos t\right)\\ R\sin t\\ \left(\frac{1}{C_1}\sin\left(C_1s+C_3\right)\right)+\left(\pm\sin\left(C_1s+C_3\right)\right)\left(R\cos t\right)\end{pmatrix},\qquad \text{onde } (C_1,C_3,R)\in\mathbb{R}^3,\ C_1,R>0.$$

$$X(s,t)=\begin{pmatrix} \left(\pm C_1\ln\left|\frac{1}{C_1}\left(s+C_2+\sqrt{\left(s+C_2\right)^2+C_1^2}\right)\right|\right)-\left(\frac{s+C_2}{\sqrt{(s+C_2)^2+C_1^2}}\right)R\cos t\\ R\sin t\\ \sqrt{\left(s+C_2\right)^2+C_1^2}+\left(\pm C_1\left(\frac{1+\frac{s+C_2}{\sqrt{(s+C_2)^2+C_1^2}}}{\left|\frac{1}{C_1}\left(s+C_2+\sqrt{(s+C_2)^2+C_1^2}\right)\right|}\right)\right)R\cos t\end{pmatrix},\qquad (C_1,C_2,R)\in\mathbb{R}^3.$$

Vamos agora resolver a equação $H=0$. Supondo solucionado e usando a expressão de H, obtemos:

$$H=A\cos 3t+B\cos 2t+C\cos t+D=0.$$

Onde os coeficientes são dados por:

$$\begin{aligned}
A&=-2zr^3\kappa^3-x'r^3\kappa^2,\\
B&=5zr^2\kappa^2+2x'r^2\kappa,\\
C&=-rx'-4rz\kappa,\\
D&=z.
\end{aligned}$$

Pelo mesmo raciocínio já apresentado, precisaríamos que todos oscoeficientes fossem nulos. Note que $D=z>0$, disso temos um absurdo, portanto a equação $H=0$ não tem solução para a classe dos tubos.

Vamos analisar agora a equação $K=C\in\mathbb{R}-\{0\}$. Supondo solucionado e usando a expressão de K, obtemos:

$$K=C\Rightarrow A\cos^4 t+B\cos^3 t+C\cos^2 t+D\cos t+E=0.$$

Onde os coeficientes são dados por:

$$\begin{aligned}
A&=r^4\kappa^3\left(zx'+z^2\kappa-Cr^2\kappa\right),\\
B&=r^3\kappa^2\left(-3zx'-3z^2\kappa+4Cr^2\kappa\right),\\
C&=-3r^2\kappa\left(-zx'-z^2\kappa+2Cr^2\kappa\right),\\
D&=r\left(-zx'-z^2\kappa+4Cr^2\kappa\right),\\
E&=-Cr^2.
\end{aligned}$$

Vemos que o coeficiente E nunca é zero, segue que essa equação também não tem solução.

Continuando, vamos analisar a equação $H=C\in\mathbb{R}-\{0\}$. Supondo solucionado e usando a expressão de H, obtemos:

$$\begin{aligned}
&H=C\\
&\quad\Rightarrow A\cos^6 t+B\cos^5 t+C\cos^4 t+D\cos^3 t+E\cos^2 t+F\cos t+G=0.
\end{aligned}$$

Onde os coeficientes são dados por:

$$\begin{aligned}
A&=\left(2zr^3\kappa^3+x'r^3\kappa^2\right)^2-4C^2r^8\kappa^6,\\
B&=24C^2r^7\kappa^5-2\left(2zr^3\kappa^3+x'r^3\kappa^2\right)\left(5zr^2\kappa^2+2x'r^2\kappa\right),\\
C&=\left(5zr^2\kappa^2+2x'r^2\kappa\right)^2+2\left(rx'+4rz\kappa\right)\left(2zr^3\kappa^3+x'r^3\kappa^2\right)-60C^2r^6\kappa^4,\\
D&=\left(80C^2r^5\kappa^3-2\left(rx'+4rz\kappa\right)\left(5zr^2\kappa^2+2x'r^2\kappa\right)-2z\left(2zr^3\kappa^3+x'r^3\kappa^2\right)\right),\\
E&=2z\left(5zr^2\kappa^2+2x'r^2\kappa\right)+\left(rx'+4rz\kappa\right)^2-60C^2r^4\kappa^2,\\
F&=24C^2r^3\kappa-2z\left(rx'+4rz\kappa\right),\\
G&=z^2-4C^2r^2.
\end{aligned}$$

Pelo coeficiente G, obtemos que $z^2 = 4C^2r^2$. Substituindo essa igualdade no coeficiente A e fatorando, obtemos que:

$$A = r^6\kappa^4 (x' + z\kappa)(x' + 3z\kappa).$$

Ou seja, temos que $x' = -3z\kappa$ ou $x' = -z\kappa$. Porém, substituindo x' por $-3z\kappa$ em B obtemos:

$$B = 2r^5\kappa^5 \left(12C^2r^2 - z^2\right) = 2r^5\kappa^5 \left(8C^2r^2\right) \neq 0.$$

Já ao substituirmos x' por $-z\kappa$ nos outros coeficientes, segue que todos eles se anulam. Note que essa equação $(x' = -z\kappa)$ é a mesma do caso $K = 0$ segue que os tubos com curvatura gaussiana nulas têm curvatura média constante não nulas. Mas nesse caso $z = 4C^2r^2$ é constante. Ou seja:

$$\begin{aligned} 1 = 1 &= (x')^2 + (z')^2 = (x')^2 \\ &\Rightarrow x' = \pm 1. \end{aligned}$$

Integrando ambos os lados obtemos:

$$x(s) = \pm s + C_0.$$

Segue que a parametrização é dada por:

$$X(s,t) = \left(\pm s + C_0, r\sin t, \left(4C^2r^2 \pm (r\cos t)\right)\right) \qquad (C, C_0, r) \in \mathbb{R}^3.$$

Prosseguindo vamos resolver a equação $k_1^2 + k_2^2 = 1$. Supondo a equação resolvida e usando a expressão da equação obtemos:

$$\begin{aligned} &k_1^2 + k_2^2 = 1 \\ &\quad \Rightarrow A\cos^6 t + B\cos^5 t + C\cos^4 t + D\cos^3 t + E\cos^2 t + F\cos t + G = 0. \end{aligned}$$

Onde os coeficientes são dados por:

$$\begin{aligned} A &= r^6\kappa^4 \left(-r^2\kappa^2 + 2z^2\kappa^2 + (x')^2 + 2zx'\kappa\right), \\ B &= 2r^5\kappa^3 \left(3r^2\kappa^2 - 5z^2\kappa^2 - 2(x')^2 - 4zx'\kappa\right), \\ C &= -3r^4\kappa^2 \left(5r^2\kappa^2 - 7z^2\kappa^2 - 2(x')^2 - 4zx'\kappa\right), \\ D &= 4r^3\kappa \left(5r^2\kappa^2 - 6z^2\kappa^2 - (x')^2 - 2zx'\kappa\right), \\ E &= r^2 \left(-15r^2\kappa^2 + 16z^2\kappa^2 + (x')^2 + 2zx'\kappa\right), \\ F &= 6r\kappa (r - z)(r + z), \\ G &= z^2 - r^2. \end{aligned}$$

Dos coeficientes F e G obtemos que $z = r$, ou seja, z é uma constante igual ao raio. Usando essa igualdade nos outros coeficientes obtemos novos resultados:

$$\begin{aligned} A &= r^6\kappa^4 (x' + r\kappa)^2, \\ B &= -4r^5\kappa^3 (x' + r\kappa)^2, \\ C &= 6r^4\kappa^2 (x' + r\kappa)^2, \\ D &= -4r^3\kappa (x' + r\kappa)^2, \\ E &= r^2 (x' + r\kappa)^2, \\ F &= 0, \\ G &= 0. \end{aligned}$$

Obtemos a mesma equação já solucionada. Porém, nesse caso, z é uma constante, por isso vamos resolvê-la novamente para analisar o grau de distinção das duas soluções.

Como a curva está parametrizada pelo comprimento de arco e z é uma constante, obtemos que:

$$1 = (x')^2 + (z')^2 = (x')^2$$
$$\Rightarrow x' = \pm 1.$$

Integrando ambos os lados obtemos:

$$x = \pm s + C_0.$$

Logo, a parametrização é dada por:

$$X(s,t) = (\pm s + C_0, r\sin t, (r + \pm (r\cos t))), \qquad \text{onde } (r, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Por fim vamos encontrar a solução da equação $aK + bH = c$. Supondo a equação selecionada e usando as expressões de K e H obtemos:

$$\begin{aligned} &aK + bH = c \\ &\quad \Rightarrow A\cos^8 t + B\cos^7 t + C\cos^6 t + D\cos^5 t + E\cos^4 t + F\cos^3 t + G\cos^2 t + H\cos t + I = 0. \end{aligned}$$

Onde os coeficientes são dados por:

$$\begin{aligned}
A &= r^8\kappa^6 \left(brx' - 2azx' + 2cr^2\kappa - 2az^2\kappa + 2brz\kappa\right)\left(brx' + 2azx' - 2cr^2\kappa + 2az^2\kappa + 2brz\kappa\right), \\
B &= 2r^7\kappa^5 (b_1 + b_2), \\
C &= r^6\kappa^4 (c_1 + c_2), \\
D &= 2r^5\kappa^3 (d_1 + d_2), \\
E &= -5r^4\kappa^2 (e_1 + e_2), \\
F &= 2r^3\kappa (f_1 + f_2), \\
G &= r^2 (g_1 + g_2), \\
H &= -2r^3 \left(-16c^2r^2\kappa + 5b^2z^2\kappa + b^2zx' + 4aczx' + 4acz^2\kappa\right), \\
I &= r^2 (-2cr + bz)(2cr + bz).
\end{aligned}$$

Onde os outros coeficientes são dados por:

$$\begin{aligned}
b_1 &= -3b^2r^2(x')^2 + 12a^2z^2(x')^2 + 16c^2r^4\kappa^2 + 12a^2z^4\kappa^2, \\
b_2 &= -14b^2r^2z^2\kappa^2 + 24a^2z^3x'\kappa - 13b^2r^2zx'\kappa - 28acr^2z^2\kappa^2 - 28acr^2zx'\kappa, \\
c_1 &= 15b^2r^2(x')^2 - 60a^2z^2(x')^2 - 112c^2r^4\kappa^2 - 60a^2z^4\kappa^2, \\
c_2 &= 85b^2r^2z^2\kappa^2 - 120a^2z^3x'\kappa + 72b^2r^2zx'\kappa + 168acr^2z^2\kappa^2 + 168acr^2zx'\kappa, \\
d_1 &= -10b^2r^2(x')^2 + 40a^2z^2(x')^2 + 112c^2r^4\kappa^2 + 40a^2z^4\kappa^2, \\
d_2 &= -73b^2r^2z^2\kappa^2 + 80a^2z^3x'\kappa - 55b^2r^2zx'\kappa - 140acr^2z^2\kappa^2 - 140acr^2zx'\kappa, \\
e_1 &= -3b^2r^2(x')^2 + 12a^2z^2(x')^2 + 56c^2r^4\kappa^2 + 12a^2z^4\kappa^2 - 31b^2r^2z^2\kappa^2, \\
e_2 &= +24a^2z^3x'\kappa - 20b^2r^2zx'\kappa - 56acr^2z^2\kappa^2 - 56acr^2zx'\kappa, \\
f_1 &= -3b^2r^2(x')^2 + 12a^2z^2(x')^2 + 112c^2r^4\kappa^2 + 12a^2z^4\kappa^2 - 52b^2r^2z^2\kappa^2, \\
f_2 &= 24a^2z^3x'\kappa - 27b^2r^2zx'\kappa - 84acr^2z^2\kappa^2 - 84acr^2zx'\kappa, \\
g_1 &= b^2r^2(x')^2 - 4a^2z^2(x')^2 - 112c^2r^4\kappa^2 - 4a^2z^4\kappa^2 + 43b^2r^2z^2\kappa^2, \\
g_2 &= -8a^2z^3x'\kappa + 16b^2r^2zx'\kappa + 56acr^2z^2\kappa^2 + 56acr^2zx'\kappa.
\end{aligned}$$

Segue do coeficiente I que se c, b tiverem sinais iguais então $(2cr - bz) = 0$, caso contrário obtemos $(2cr + bz) = 0$. Substituindo ambos os valores em A obtemos:

$$A = (x' + z\kappa)(2az \pm br)\left(\mp brx' + 2azx' + 2az^2\kappa \mp 3brz\kappa\right).$$

Disso obtemos que $(x' + z\kappa) = 0$ zera A e acaba zerando dos os outros coeficientes taambém. Portanto a a solução dos outros resultados acima também é uma solução para esse problema.

4.3.12 Cilindro Euclidiano no $\mathbb{H}^3$ (Eixo de Rotação Z)

Como os cálculos independem de qual plano a curva de rotação está (XZ ou YZ) vamos supor que ela está no plano XZ. Temos que, para essa superfície, a curva que devemos rotacionar é:

$$\gamma(s) = (x(s), z(s)) = (C, s) \qquad C \in \mathbb{R}^+.$$

Logo, a parametrização que procuramos é dada por:

$$X(s,t) = (C\cos t, C\sin t, s).$$

Para cada altura s_0 fixada, temos uma circunferência cujo raio euclidiano é dado por:

$$|X(s_0,t) - (0,0,s_0)| = \sqrt{C^2\cos^2 t + C^2\sin^2 t} = |C| = C.$$

Logo, essa é a parametrização de um cilindro euclidiano de raio C em torno do eixo Z.

Vamos agora calcular as curvaturas média e gaussiana do cilindro. Comecemos primeiro com as derivadas de X :

$$X_s = (0,0,1) \qquad X_t = (-C\sin t, C\cos t, 0).$$

Já podemos calcular E, F, G e o campo normal N :

$$E = g(X_s, X_s) = 1,$$

$$F = g(X_s, X_t) = 0,$$

$$G = g(X_t, X_t) = (C\sin t)^2 + (C\cos t)^2 = C^2.$$

$$X_s \wedge X_t = (-C\cos t, -C\sin t, 0),$$

$$\|X_s \wedge X_t\| = \sqrt{(C\sin t)^2 + (C\cos t)^2} = C,$$

$$N = \frac{X_s \wedge X_t}{\|X_s \wedge X_t\|} = (-\cos t, -\sin t, 0).$$

Derivando novamente a parametrização, obtemos:

$$X_{ss} = (0,0,0) \qquad , \qquad X_{st} = (0,0,0) \qquad , \qquad X_{tt} = (-C\cos t, -C\sin t, 0)$$

Segue que e, f e g são dados por:

$$e = g(N, X_{ss}) = 0,$$

$$f = g(N, X_{st}) = 0,$$

$$g = g(N, X_{tt}) = C\cos t\cos t + C\sin t\sin t = C.$$

Portanto, concluímos disso que as curvaturas do cilindro são dadas por:

$$K = \frac{\Pi_3^2(x_u \wedge x_v)}{|x_u \wedge x_v|_{\mathbb{R}}^2} - \frac{\Pi_3(p)\Pi_3(x_u \wedge x_v)}{|x_u \wedge x_v|_{\mathbb{R}}}\left(\frac{2fF - eG - gE}{EG - F^2}\right) + \Pi_3^2(p)\left(\frac{eg - f^2}{EG - F^2}\right) = 0,$$

$$H = \frac{\Pi_3(x_u \wedge x_v)}{|x_u \wedge x_v|_{\mathbb{R}}} - \frac{\Pi_3(p)}{2}\left(\frac{2fF - eG - gE}{EG - F^2}\right) = \frac{s}{2C}.$$

Das fórmulas acima, concluímos facilmente que as curvaturas principais são dadas por:

$$k_1 = 0 \qquad , \qquad k_2 = \frac{s}{C}.$$

4.3.13 Cone Euclidiano no $\mathbb{H}^3$

Como os cálculos indepedem de qual plano a curva de rotação está (XZ ou YZ) vamos supor que ela está no plano XZ. Para um cone qualquer, a curva que vamos rotacionar é representada pela função:

$$f(x) = ax.$$

Onde a é uma constante real. Logo, a curva que procuramos é a seguinte:

$$\gamma(s) = (s, as), \qquad a, s \in \mathbb{R}^+.$$

Como o cone é uma superfície de revolução, segue que $a \in \mathbb{R}^+$ já abranje todos os cones euclidianos possíveis. Segue que a paramtrização do cone é dada por:

$$X(s,t) = (s\cos t, s\sin t, as).$$

Vamos calcular todas as curvaturas dessa superfície. Comecemos com as derivadas de X :

$$X_s = (\cos t, \sin t, a) \qquad , \qquad X_t = (-s\sin t, s\cos t, 0).$$

Segue que os coeficientes E, F, G e o campo normal N são dados por:

$$E = g(X_s, X_s) = \cos^2 t + \sin^2 t + a^2 = \left(a^2+1\right),$$

$$F = g(X_s, X_t) = -s\sin t\cos t + s\cos t\sin t = 0,$$

$$G = g(X_s, X_s) = (s\sin t)^2 + (s\cos t)^2 = s^2,$$

$$\begin{aligned} X_s \wedge X_t &= (-as\cos t, -as\sin t, s\cos t\cos t + s\sin t\sin t) \\ &= (-as\cos t, -as\sin t, s), \end{aligned}$$

$$\|X_s \wedge X_t\| = \sqrt{(as\cos t)^2 + (as\sin t)^2 + s^2} = s\sqrt{a^2+1},$$

$$N = \frac{X_s \wedge X_t}{\|X_s \wedge X_t\|} = \left(-\frac{a\cos t}{\sqrt{a^2+1}}, -\frac{a\sin t}{\sqrt{a^2+1}}, \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\right).$$

Derivando novamente a parametrização, obtemos:

$$X_{ss} = (0,0,0), \qquad X_{st} = (-\sin t, \cos t, 0), \qquad X_{tt} = (-s\cos t, -s\sin t, 0).$$

Com isso já podemos encontrar os últimos coeficientes:

$$e = g(N, X_{ss}) = 0,$$

$$f = g(N, X_{st}) = \frac{a\cos t\sin t}{\sqrt{a^2+1}} - \frac{a\sin t\cos t}{\sqrt{a^2+1}} = 0,$$

$$g = g(N, X_{ss}) = \frac{sa\cos^2 t}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{sa\sin^2 t}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{sa}{\sqrt{a^2+1}}.$$

Portanto, temos que as curvaturas do cone são dadas por:

$$\begin{aligned} K &= \frac{\Pi_3^2(x_u \wedge x_v)}{|x_u \wedge x_v|_{\mathbb{R}}^2} - \frac{\Pi_3(p)\Pi_3(x_u \wedge x_v)}{|x_u \wedge x_v|_{\mathbb{R}}}\left(\frac{2fF - eG - gE}{EG - F^2}\right) + \Pi_3^2(p)\left(\frac{eg - f^2}{EG - F^2}\right) \\ &= \frac{1}{(a^2+1)} + \frac{as}{\sqrt{a^2+1}}\left(\frac{\frac{sa}{\sqrt{a^2+1}}\left(a^2+1\right)}{\left(a^2+1\right)s^2}\right) = \frac{1}{(a^2+1)} + \left(\frac{a^2}{(a^2+1)}\right) = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{\Pi_3(x_u \wedge x_v)}{|x_u \wedge x_v|_{\mathbb{R}}} - \frac{\Pi_3(p)}{2}\left(\frac{2fF - eG - gE}{EG - F^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{as}{2}\left(\frac{\frac{sa}{\sqrt{a^2+1}}\left(a^2+1\right)}{\left(a^2+1\right)s^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}}. \end{aligned}$$

4.3.14 Superfície Cilíndrica (1^a Generalização)

Como vimos no euclidiano, uma superfície cilíndrica euclidiana é uma curva suave num plano euclidiano, na qual foi aplicada a isometria translação, e a função translação é uma isometria euclidiana. Vamos tentar generalizar essa noção no hiperbólico. Vamos tomar uma curva no plano hiperbólico e aplicar uma isometria nela para então criar o que chamamos de uma superfície cilíndrica hiperbólica, a isometria escolhida é a multiplicação da curva por um escalar. Portanto, tomemos uma curva $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ parametrizada pelo comprimento de arco euclidiano contida na esfera euclidiana de centro $(0;0;0)$ e raio 1, ou seja, segue que $x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) = 1$, assim ,a parametrização da superfície em questão, com curva geratriz é dada por:

$$X(s,t) = (sx(t), sy(t), sz(t)).$$

Vamos encontrar as expressões das curvaturas média e gaussiana dessa classe. Para tanto, comecemos derivando a parametrização:

$$X_s = (x, y, z) \qquad X_t = (sx', sy', sz').$$

Já podemos calcular E, F, G e o campo normal N :

$$E = g(X_s, X_s) = x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

$$F = g(X_s, X_t) = sxx' + syy' + szz' = s(xx' + yy' + zz') = 0,$$

$$G = g(X_t, X_t) = x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

$$X_s \wedge X_t = (syz' - zsy', zsx' - xsz', xsy' - ysx'),$$

$$\begin{aligned}
\|X_s \wedge X_t\| &= \sqrt{(syz' - zsy')^2 + (zsx' - xsz')^2 + (xsy' - ysx')^2} \\
&= s\sqrt{x^2(1-(x')^2) + y^2(1-(y')^2) + z^2(1-(z')^2) - 2xyx'y' - 2xzx'z' - 2yzy'z'} \\
&= s\sqrt{(1 - x^2(x')^2 - y^2(y')^2 - z^2(z')^2 - 2xyx'y' - 2xzx'z' - 2yzy'z')} \\
&= s\sqrt{1} = s,
\end{aligned}$$

$$N = \frac{X_s \wedge X_t}{\|X_s \wedge X_t\|} = (yz' - zy', zx' - xz', xy' - yx'),$$

Derivando novamente a parametrização, obtemos:

$$X_{ss} = (0,0,0) \qquad , \qquad X_{st} = (x', y', z') \qquad , \qquad X_{tt} = (sx'', sy'', sz'').$$

Segue que os coeficientes e, f e g têm a seguinte expressão:

$$e = g(N, X_{ss}) = 0,$$

$$f = g(N, X_{ts}) = (yz' - zy')x' + (zx' - xz')y' + (xy' - yx')z' = 0,$$

$$g = g(N, X_{tt}) = (yz' - zy')sx'' + (zx' - xz')sy'' + (xy' - yx')sz''.$$

Portanto as curvaturas média e gaussiana da superfície são dadas por:

$$\begin{aligned}
K &= \frac{\Pi_3^2(x_u \wedge x_v)}{|x_u \wedge x_v|^2_{\mathbb{R}}} - \frac{\Pi_3(p)\Pi_3(x_u \wedge x_v)}{|x_u \wedge x_v|_{\mathbb{R}}}\left(\frac{2fF - eG - gE}{EG - F^2}\right) + \Pi_3^2(p)\left(\frac{eg - f^2}{EG - F^2}\right) \\
&= \frac{(xsy' - ysx')^2}{s^2} + \frac{sz(xsy' - ysx')}{s}\left((yz' - zy')sx'' + (zx' - xz')sy'' + (xy' - yx')sz''\right) \\
&= (xy' - yx')\left(xy' - yx' + s^2z^2x'y'' - s^2z^2x''y' + s^2xzy'z'' - s^2xzy''z' - s^2yzx'z'' + s^2yzx''z'\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H &= \frac{\Pi_3(x_u \wedge x_v)}{|x_u \wedge x_v|_{\mathbb{R}}} - \frac{\Pi_3(p)}{2}\left(\frac{2fF - eG - gE}{EG - F^2}\right) \\
&= xy' - yx' + \frac{sz}{2}\left((yz' - zy')sx'' + (zx' - xz')sy'' + (xy' - yx')sz''\right),
\end{aligned}$$

4.3.15 Superfície Cilíndrica (2^a Generalização)

Dada uma curva $\gamma(s) = (x(s), z(s))$ no plano XZ, parametrizada pelo comprimento de arco euclidiano, segue que a parametrização de uma superfície cilíndrica hiperbólica é dada por :

$$X(s,t) = (x(s), z(s)\cos t, z(s)\sin t)\,.$$

Vamos calcular as curvaturas média e gaussiana da superfície. Comecemos derivando a parametrização:

$$X_s = (x', z'\cos t, z'\sin t) \qquad , \qquad X_t = (0, -z\sin t, z\cos t)\,.$$

Já podemos calcular E, F, G e N, que são dados por:

$$E = g\left(X_s, X_s\right) = (x')^2 + (z'\cos t)^2 + (z'\sin t)^2 = (x')^2 + (z')^2 = 1,$$

$$F = g\left(X_s, X_t\right) = -zz'\cos t\sin t + zz'\cos t\sin t = 0,$$

$$G = g\left(X_t, X_t\right) = (z\sin t)^2 + (z\cos t)^2 = z^2,$$

$$X_s \wedge X_t = \begin{pmatrix} zz'\cos t\cos t + z'z\sin t\sin t \\ -x'z\cos t \\ -zx'\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} zz' \\ -x'z\cos t \\ -zx'\sin t \end{pmatrix},$$

$$\|X_s \wedge X_t\| = \sqrt{(zz')^2 + (x'z\cos t)^2 + (zx'\sin t)^2} = z\sqrt{(z')^2 + (x')^2} = z,$$

$$N = \frac{X_s \wedge X_t}{\|X_s \wedge X_t\|} = (z', -x'\cos t, -x'\sin t)\,.$$

Derivando novamente X obtemos:

$$X_{ss} = (x'', z''\cos t, z''\sin t) \qquad , \qquad X_{st} = (0, -z'\sin t, z'\cos t) \qquad , \qquad X_{tt} = (0, -z\cos t, -z\sin t)\,.$$

Segue que os últimos coeficientes são dados por:

$$e = g\left(N, X_{ss}\right) = x''z' - z''x'\cos t\cos t - z''x'\sin t\sin t = x''z' - z''x',$$

$$f = g\left(N, X_{ts}\right) = z'x'\sin t\cos t - x'z'\cos t\sin t = 0,$$

$$g = g\left(N, X_{tt}\right) = zx'\cos t\cos t + x'z\sin t\sin t = x'z.$$

Portanto as curvaturas média e gaussiana dessa classe são dadas por:

$$\begin{aligned} K &= \frac{\Pi_3^2(x_u \wedge x_v)}{|x_u \wedge x_v|_{\mathbb{R}}^2} - \frac{\Pi_3(p)\Pi_3(x_u \wedge x_v)}{|x_u \wedge x_v|_{\mathbb{R}}}\left(\frac{2fF - eG - gE}{EG - F^2}\right) + \Pi_3^2(p)\left(\frac{eg - f^2}{EG - F^2}\right) \\ &= \frac{(zx'\sin t)^2}{z^2} - \frac{(z\sin t)(-zx'\sin t)}{z}\left(\frac{-(x''z' - z''x')z^2 - x'z}{z^2}\right) + (z\sin t)^2\left(\frac{(x''z' - z''x')x'z}{z^2}\right) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{\Pi_3(x_u \wedge x_v)}{|x_u \wedge x_v|_{\mathbb{R}}} - \frac{\Pi_3(p)}{2}\left(\frac{2fF - eG - gE}{EG - F^2}\right) \\ &= \frac{-zx'\sin t}{z} - \frac{z\sin t}{2}\left(\frac{-(x''z' - z''x')z^2 - x'z}{z^2}\right) = -\frac{(\sin t)(x' + zx'z'' - zx''z')}{2}. \end{aligned}$$

Teorema 4.3.8 *Se $H \neq 0$, então não existe superfície cilíndrica hiperbólica (2^a generalização) verificando $P_n(H, K) = 0$ onde P_n denota o polinômio não nulo de grau n nas variáveis K e H.*

Prova. Como $K = 0$, segue que $P_n(H,K) = a_0 + a_1 H + ... + a_n H^n$. Observando a expressão de H e fixando $s = s_0$ de modo que H não se anule, segue que:

$$P_n(H,K) = a_0 + A_1 \sin t + ... + A_n \sin^n t.$$

onde os coeficientes maiúsculos são dados por:

$$A_i = a_i \left(-\frac{(x'(s_0) + z(s_0)x'(s_0)z''(s_0) - z(s_0)x''(s_0)z'(s_0))}{2} \right)^i.$$

Logo possuimos um polinômio não nulo em $\sin t$ resultando em zero. Portanto, segue que $\sin t$ só pode assumir, no máximo n valores. Absurdo. ■

Capítulo 5

Espaço de Lorentz Minkowski $\mathbb{L}^3$

Como no espaço euclidiano e no hiperbólico, agora vamos estudar superfícies imersas no $\mathbb{L}^3$. Portanto, nesse capítulo iremos, primeiramente, introduzir as propriedades do $\mathbb{L}^3$, após isso, estudaremos a teoria de imersões nesse espaço e encontraremos as fórmulas das curvaturas dessas superfícies. Por fim, faremos vários exemplos de imersões obtendo suas curvaturas com o objetivo de classificar famílias de superfícies que são soluções de determinadas equações de Weingarten. Por não ser uma variedade Riemanniana, estaremos na obrigação de generalizar algumas definições, como curvaturas gaussiana e média, para variedades semi-Riemannianas. Além disso, teremos de ramificar nossa teoria em duas frentes (superfícies spacelike e timelike), pois uma métrica semi-Riemanniana não degenerada não é necessariamente positiva definida.

Definição 5.0.9 *Definimos o espaço de Lorentz-Minkowski,* $\mathbb{L}^3$ *como o conjunto* $\{(a,b,c) : a,b,c \in \mathbb{R}\}$ *munido da métrica* g *onde:*

$$g\left(\left(v_1,v_2,v_3\right),\left(w_1,w_2,w_3\right)\right) = v_1w_1 + v_2w_2 - v_3w_3.$$

Observemos que se $w = (0,0,1)$ então:

$$g\left(w,w\right) = -1 < 0.$$

Ou seja, concluímos que g não é uma métrica, portanto $\mathbb{L}^3$ não é uma variedade riemanniana (apenas semi).

5.1 Conexão Levi-Civita e Curvaturas

Seja $\{e_1,e_2,e_3\}$ base de $T_p\mathbb{L}^3$ para todo $p \in \mathbb{L}^3$. Usando a seguinte notação: $g_{ij} := g\left(e_i,e_j\right)$ Podemos expressar a matriz da pseudo-métrica g, $\left(g_{ij}\right)$, e sua matriz inversa, $\left(g^{ij}\right)$:

$$\left(g_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \left(g^{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Primeiramente, vamos determinar os símbolos de Christoffel do $\mathbb{L}^3$ pois eles aparecem na expressão da conexão Levi-Civita. Os símbolos são dados da seguinte maneira:

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\left\{e_i\left(g_{jk}\right) + e_j\left(g_{ki}\right) - e_k\left(g_{ij}\right)\right\}g^{km}.$$

Porém, observando a matriz da métrica, vemos que os $g_{ij}'s$ são todos constantes, ou seja $e_k\left(g_{ij}\right) = 0$ para todo $i,j,k = 1,2,3$. Segue disso que todos os símbolos de Christoffel são nulos.

Portanto a conexão do $\mathbb{L}^3$ é dada pela seguinte expressão:

$$\nabla_X Y = \sum_{k=1}^{3}\left(\sum_{i,j=1}^{3} x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X\left(y_k\right)\right)e_k = \sum_{k=1}^{3} X\left(y_k\right)e_k = dY.X.$$

Para o tensor curvatura, sejam $X(p) = \sum_i u^i(p)\partial_i(p)$, $Y(p) = \sum_j v^j(p)\partial_j(p)$, $Z(p) = \sum_k w^k(p)\partial_k(p)$ campos, usando que:

$$\left(R(X,Y)Z\right)(p) = \sum_{i,j,k,l} R_{i,j,k}^l u^i(p)v^j(p)w^k(p)\partial_l(p).$$

onde os coeficientes são nulos pois os símbolos de Christoffel o são:

$$R^s_{i,j,k} = \sum_l \Gamma^l_{i,k}\Gamma^s_{j,l} - \sum_l \Gamma^l_{j,k}\Gamma^s_{i,l} + \partial_j(\Gamma^s_{i,k}) - \partial_i(\Gamma^s_{j,k}) = 0.$$

Ou seja, o tensor curvatura é nulo. Usando as expressões gerais das outras curvaturas e pelo fato do tensor ser nulo, concluímos que as curvaturas seccional, de Ricci e escalar também se anulam. Segue disso que todas as curvaturas desse ambiente são nulas.

5.2 Imersões Isométricas

Dada uma imersão $x : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S \subset \mathbb{L}^3$denotamos $dx.e_1$ e $dx.e_2$ respectivamente por $x_u = (x_{u_1}, x_{u_2}, x_{u_3})$ e $x_v = (x_{v_1}, x_{v_2}, x_{v_3})$ Vamos definir o campo normal unitário da superfície. Tomemos o seguinte determinante:

$$\eta = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_{u_1} & x_{u_2} & -x_{u_3} \\ x_{v_1} & x_{v_2} & -x_{v_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{u_3}x_{v_2} - x_{u_2}x_{v_3} \\ x_{u_1}x_{v_3} - x_{u_3}x_{v_1} \\ x_{u_1}x_{v_2} - x_{u_2}x_{v_1} \end{pmatrix}.$$

Notemos que o vetor η é ortogonal à base coordenada da superfície, de fato:

$$g(\eta, x_u) = (x_{u_3}x_{v_2} - x_{u_2}x_{v_3})\, x_{u_1} + (x_{u_1}x_{v_3} - x_{u_3}x_{v_1})\, x_{u_2} - (x_{u_1}x_{v_2} - x_{u_2}x_{v_1})\, x_{u_3} = 0,$$

$$g(\eta, x_v) = (x_{u_3}x_{v_2} - x_{u_2}x_{v_3})\, x_{v_1} + (x_{u_1}x_{v_3} - x_{u_3}x_{v_1})\, x_{v_2} - (x_{u_1}x_{v_2} - x_{u_2}x_{v_1})\, x_{v_3} = 0.$$

Ou seja, podemos definir o campo normal unitário à superfície S como $N = \frac{\eta}{|\eta|}$.

Temos uma certa ambiguidade quanto ao valor de N pois $|\eta| = \pm\eta$. Com isso, iremos separar a teoria como se segue:

Definição 5.2.1 *Definimos uma superfície S imersa no $\mathbb{L}^3$ como spacelike, se T_pS não tocar no cone de equação $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ para todo $p \in S$. Caso contrário, S é dita ser timelike.*

Vamos mostrar que basta olhar para o campo normal N para deduzir se uma superfície imersa é spacelike ou timelike.

Proposição 5.2.2 *Se N é timelike, então S é spacelike. E se N é spacelike, então S é timelike.*

Prova. De fato, suponha que N seja timelike, logo podemos tomar uma base ortogonal $\{v, w\}$ de T_pS tal que ambos os vetores sejam spacelike. Logo se $u \in T_pS$, então $u = \alpha v + \beta w$. Segue disso que $g(u,u) = \alpha^2 g(v,v) + \alpha\beta g(v,w) + \beta^2 g(w,w) = \alpha^2 g(v,v) + \beta^2 g(w,w) > 0$ como o vetor u é arbitrário, segue que o plano T_pS toca no cone $x^2 + y^2 - z^2$, ou seja, S é spacelike. Suponhamos agora que N seja um vetor spacelike. Segue disso que toda base ortogonal $\{v, w\}$ de T_pS é composta de um vetor spacelike e de outro timelike. Sem perda de generalidade, suponha que v é spacelike e w seja timelike. Dado $u \in T_pS$ segue que $u = \alpha v + \beta w$ e portanto $g(u,u) = \alpha^2 g(v,v) + \alpha\beta g(v,w) + \beta^2 g(w,w) = \alpha^2 g(v,v) + \beta^2 g(w,w)$. Note que a função $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(\alpha, \beta) = \alpha^2 g(v,v) + \beta^2 g(w,w)$ é positiva para $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ e negativa para $(\alpha, \beta) = (0, 1)$. Como $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, segue que existe $(\alpha_0, \beta_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que $F(\alpha_0, \beta_0) = 0$. Concluímos que S toca o cone e portanto é timelike. ∎

Como nosso ambiente de trabalho é uma variedade semi-riemanniana, segue que temos definições mais gerais para as curvaturas média e gaussiana, vamos mostrá-las agora:

5.2.1 K e H das Superfícies no $\mathbb{L}^3$

Nesta seção vamos efetuar alguns cáculos de modo à encontrar as expressões das curvaturas média e gaussiana das superfícies imersas do $\mathbb{L}^3$

Seja $x : M \longrightarrow \mathbb{L}^3$ uma imersão spacelike ou timelike. Denotemos por ∇^0 a conexão Levi-Civita do $\mathbb{L}^3$. Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ nós temos a seguinte decomposição:

$$\nabla^0_X Y = \left(\nabla^0_X Y\right)^T + \left(\nabla^0_X Y\right)^\perp.$$

Façamos a seguinte notação:

$$\sigma(X, Y) := \left(\nabla^0_X Y\right)^\perp.$$

Portanto podemos reescrever a relação acima da seguinte forma:

$$\nabla^0_X Y = \left(\nabla^0_X Y\right)^T + \sigma(X, Y).$$

Agora, fixando um campo normal, ξ, temos as seguintes igualdades:

$$g\left(\nabla^0_X Y, \xi\right) = g\left(\left(\nabla^0_X Y\right)^T, \xi\right) + g\left(\sigma(X, Y), \xi\right) = g\left(\sigma(X, Y), \xi\right).$$

Usando a compatibilidade da conexão com a métrica obtemos:

$$X\left(g(Y, \xi)\right) - g\left(Y, \nabla^0_X \xi\right) = g\left(\nabla^0_X Y, \xi\right) = g\left(\sigma(X, Y), \xi\right).$$

Mas Y é tangente e ξ é normal, segue desse fato e da igualdade acima que:

$$-g\left(Y, \nabla^0_X \xi\right) = g\left(\sigma(X, Y), \xi\right).$$

Podemos separar a conexão em parte tangente e parte normal, obtendo o seguinte:

$$g\left(\sigma(X, Y), \xi\right) = -g\left(Y, \nabla^0_X \xi\right) = -g\left(Y, \left(\nabla^0_X \xi\right)^T + \left(\nabla^0_X \xi\right)^{\perp}\right) = -g\left(Y, \left(\nabla^0_X \xi\right)^T\right) = g\left(Y, -\left(\nabla^0_X \xi\right)^T\right).$$

Logo, encontramos nossa familiar aplicação $S_\xi(X) = -\left(\nabla^0_X \xi\right)^T$, ou seja, a igualdade acima se resume ao seguinte:

$$g\left(\sigma(X, Y), \xi\right) = g\left(Y, S_\xi(X)\right).$$

Antes de continuar o raciocínio, note que:

$$\left(\left(\nabla^0_{e_i} e_j\right)^{\perp} - \left(\nabla^0_{e_j} e_i\right)^{\perp}\right)(f) = [e_i, e_j](f) = (e_i e_j - e_j e_i)(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0.$$

Ou seja, aplicação σ é simétrica na base. Como ela é bilinear, segue que σ é simétrica. Logo, voltando ao raciocínio, segue que:

$$g\left(Y, S_\xi(X)\right) = g\left(\sigma(X, Y), \xi\right) = g\left(\sigma(Y, X), \xi\right) = g\left(X, S_\xi(Y)\right).$$

Ou seja, S_ξ é auto-adjunta com relação à métrica g. Pela proposição anterior, podemos fazer a seguinte notação para o campo normal unitário N:

$$g(N, N) = \varepsilon = \begin{cases} -1 & \text{se } M \text{ for spacelike,} \\ 1 & \text{se } M \text{ for timelike.} \end{cases}$$

Logo, tomando $\xi = N$ e pela compatibilidade da conexão com a métrica :

$$0 = X\left(g(N, N)\right) = 2g\left(\nabla^0_X N, N\right).$$

Portanto $\left(\nabla^0_X N\right)^T = \nabla^0_X N$ segue disso que a aplicação S_N tem a seguinte expressão:

$$S_N(X) = -\left(\nabla^0_X N\right)^T = -\nabla^0_X N = -dN.X.$$

como $\sigma(X, Y)$ é um múltiplo de N, obtemos o seguinte:

$$\sigma(X, Y) = \alpha N \Rightarrow g\left(\sigma(X, Y), N\right) = \alpha g(N, N) = \alpha\varepsilon \Rightarrow \alpha = \varepsilon g\left(\sigma(X, Y), N\right).$$

Portanto, já sabemos o valor do escalar que multiplica N :

$$\sigma(X, Y) = \varepsilon g\left(\sigma(X, Y), N\right) N = \varepsilon g\left(S_\xi(X), Y\right) N.$$

Ou seja, voltando à primeira identidade, segue que podemos reescrevê-la da seguinte maneira:

$$\nabla^0_X Y = \left(\nabla^0_X Y\right)^T + \varepsilon g\left(S_\xi(X), Y\right) N.$$

Agora daremos as definições de H e K para uma variedade semi-riemanniana qualquer:

Definição 5.2.3 *Definimos o vetor curvatura média, $\overrightarrow{H}$, e a função curvatura média, H, respectivamente por:*

$$\overrightarrow{H} = \frac{1}{2} Tr(\sigma) = HN.$$

Tomando uma base ortonormal de $\mathfrak{X}(M)$, $\{e_1, e_2\}$, tal que, sem perda de generalidade, e_1 seja spacelike e e_2 tenha um sinal distinto de N ou seja, que $g(e_2, e_2) = -\varepsilon$. Segue que:

$$Tr(\sigma) = \sum_{i=1}^{2} g(e_i, e_i)\,\sigma(e_i, e_i) = \sigma(e_1, e_1) - \varepsilon\sigma(e_2, e_2).$$

Ou seja, o vetor curvatura média é dado por:

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \frac{1}{2}Tr(\sigma) = \frac{1}{2}(\sigma(e_1, e_1) - \varepsilon\sigma(e_2, e_2)) = \frac{1}{2}(\varepsilon g(S_\xi(e_1), e_1)N - \varepsilon\varepsilon g(S_\xi(e_2), e_2)N) \\ &= \frac{\varepsilon}{2}(g(S_\xi(e_1), e_1) - \varepsilon g(S_\xi(e_2), e_2))N = \frac{\varepsilon}{2}Tr(S_N)N = HN.\end{aligned}$$

Ou seja, nossa função curvatura média é dada pela seguinte expressão:

$$H = \frac{\varepsilon}{2}Tr(S_N).$$

Agora nos resta encontrar a expressão da curvatura gaussiana.

Definição 5.2.4 *Sendo Esc a curvatura escalar de S. Definimos a curvatura gaussiana, K, por:*

$$K = \frac{Esc}{2}.$$

Denotando R^0 e R para os tensores curvatura de $\mathbb{L}^3$ e M, respectivamente, e ∇ e ∇^0 para as conexões Levi-Civita de M e $\mathbb{L}^3$, respectivamente. Como $R^0 \equiv 0$, podemos calcular R. Sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Sabemos que:

$$R^0(X, Y)Z = \nabla^0_X\left(\nabla^0_Y Z\right) - \nabla^0_Y\left(\nabla^0_X Z\right) - \nabla^0_{[X,Y]}Z$$

Também sabemos que $\nabla^0_Y Z = \left(\nabla^0_Y Z\right)^T + \sigma(Y, Z) = \left(\nabla^0_Y Z\right)^T + \varepsilon g(S_N(Y), Z)N$. Portanto, usando também que $\left(\nabla^0_X N\right)^T = \nabla^0_X N$ obtemos a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned}\nabla^0_X\left(\nabla^0_Y Z\right) &= \nabla^0_X\left(\left(\nabla^0_Y Z\right)^T + \varepsilon g(S_N(Y), Z)N\right) = \nabla^0_X\left(\nabla^0_Y Z\right)^T + \nabla^0_X(\varepsilon g(S_N(Y), Z)N) \\ &= \nabla^0_X(\nabla_Y Z) + \varepsilon\nabla^0_X(g(S_N(Y), Z)N) \\ &= \nabla^0_X(\nabla_Y Z) + \varepsilon g(S_N(Y), Z)\nabla^0_X(N) + \varepsilon X(g(S_N(Y), Z))N \\ &= \left(\nabla^0_X(\nabla_Y Z)\right)^T + \left(\nabla^0_X(\nabla_Y Z)\right)^\perp - \varepsilon g(S_N(Y), Z)\left(-\nabla^0_X(N)\right)^T + \varepsilon X(g(S_N(Y), Z))N \\ &= \nabla_X(\nabla_Y Z) + \sigma(X, \nabla_Y Z) - \varepsilon g(S_N(Y), Z)S_N(X) + \varepsilon X(g(S_N(Y), Z))N.\end{aligned}$$

Vemos que a parte tantente é dada por:

$$\nabla_X(\nabla_Y Z) - \varepsilon g(S_N(Y), Z)S_N(X).$$

Realizando exatamente o mesmo raciocínio, de modo simétrico obtemos que:

$$\nabla^0_Y\left(\nabla^0_X Z\right) = \nabla_Y(\nabla_X Z) + \sigma(Y, \nabla_X Z) - \varepsilon g(S_N(X), Z)S_N(Y) + \varepsilon Y(g(S_N(X), Z))N.$$

Vemos que, nesse caso, a parte tantente é dada por:

$$\nabla_Y(\nabla_X Z) - \varepsilon g(S_N(X), Z)S_N(Y).$$

Sabemos que $R(X, Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]}Z$ pelos resultados acima e usando que $R^0 \equiv 0$, então segue que:

$$\begin{aligned}0 = R^0(X, Y)Z &= \nabla^0_X\left(\nabla^0_Y Z\right) - \nabla^0_Y\left(\nabla^0_X Z\right) - \nabla^0_{[X,Y]}Z \\ &= \left(\nabla_X(\nabla_Y Z) - \varepsilon g(S_N(Y), Z)S_N(X) - (\nabla_Y(\nabla_X Z) - \varepsilon g(S_N(X), Z)S_N(Y)) - \nabla_{[X,Y]}Z\right) + R^\perp.\end{aligned}$$

Isolando as partes tangente e normal obtemos:

$$R = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]}Z = \varepsilon g(S_N(Y), Z)S_N(X) - \varepsilon g(S_N(X), Z)S_N(Y).$$

Assim, podemos calcular as curvaturas de Ricci e escalar.Temos que:

$$\begin{aligned}
Ric\,(X,Y) &= Tr\,(v \mapsto R(X,v)Y) = g\,(e_1,e_1)\,g\,(R(X,e_1)Y,e_1) + g\,(e_2,e_2)\,g\,(R(X,e_2)Y,e_2) \\
&= g\,(R(X,e_1)Y,e_1) - \varepsilon g\,(R(X,e_2)Y,e_2) \\
&= \varepsilon g\,(S_N(X), e_1 g\,(S_N\,(e_1)\,,Y)) - g\,(S_N(X), e_2 g\,(S_N\,(e_2)\,,Y)) + g\,(S_N\,(X)\,,Y)\,(g\,(S_N(e_2),e_2) - \varepsilon g\,(S_N(e_1),e_1)) \\
&= \varepsilon g\,(S_N(X), e_1 g\,(S_N\,(e_1)\,,Y) - \varepsilon e_2 g\,(S_N\,(e_2)\,,Y)) - \varepsilon g\,(S_N\,(X)\,,Y)\,(-\varepsilon g\,(S_N(e_2),e_2) + g\,(S_N(e_1),e_1)) \\
&= \varepsilon g\,(S_N(X), S_N(Y)) - \varepsilon g\,(S_N\,(X)\,,Y)\,Tr\,(S_N) \\
&= \varepsilon g\,(S_N(X), S_N(Y)) - 2Hg\,(S_N\,(X)\,,Y)\,.
\end{aligned}$$

Nos resta calcular a curvatura Escalar, segue que:

$$\begin{aligned}
Esc &= Tr\,(Ric) = g\,(e_1,e_1)\,Ric(e_1,e_1) + g\,(e_2,e_2)\,Ric(e_2,e_2) \\
&= Ric(e_1,e_1) - \varepsilon Ric(e_2,e_2) \\
&= \varepsilon g\,(S_N(e_1), S_N(e_1)) - 2Hg\,(S_N\,(e_1)\,,e_1) - g\,(S_N(e_2), S_N(e_2)) + 2H\varepsilon g\,(S_N\,(e_2)\,,e_2) \\
&= \varepsilon\,((S_N(e_1), S_N(e_1)) - \varepsilon g\,(S_N(e_2), S_N(e_2))) - 2H\,(g\,(S_N\,(e_1)\,,e_1) - \varepsilon g\,(S_N\,(e_2)\,,e_2)) \\
&= \varepsilon\,((S_N \circ S_N(e_1),(e_1)) - \varepsilon g\,(S_N \circ S_N(e_2),e_2))) - 2HTr\,(S_N) \\
&= \varepsilon Tr\,(S_N \circ S_N) - 2HTr\,(S_N) = \varepsilon Tr\,(S_N \circ S_N) - 4H^2\varepsilon \\
&= \varepsilon\left(Tr\,(S_N \circ S_N) - 4H^2\right) = 2\varepsilon \det\,(S_N)\,.
\end{aligned}$$

Segue disso e da definição de curvatura gaussiana que:

$$K = \varepsilon \det\,(S_N)\,.$$

5.3 Exemplos:

Assim como nos outros capítulos, o objetivo desses exemplos é verificar, como são as curvaturas de determinadas superfícies imersas no $\mathbb{L}^3$. Para isso, iniciaremos explicitando a parametrização X da superfície em questão. Após isso vamos calcular os campos X_s e X_t nos habilitando, assim, à calcular os coeficientes $E; F; G$ e o campo normal N: Continuaremos com o cálculo das segundas derivadas $X_{ss}; X_{st}$e X_{tt}; com isso conseguiremos calcular os coeficientes $e; f$ e g: Com todos os coeficientes calculados, estaremos aptos à encontrar as curvaturas gaussiana e média. Por fim, utilizando a expressão das curvaturas principais em termos de K e H, ou por observação, concluiremos quais são as curvaturas principais da superfície.

5.3.1 Esfera Lorentziana de Centro (a,b,c) e Raio r :

Temos que uma esferaq lorentziana de centro (a,b,c) e raio r é o conjunto $\left\{(x,y,z) : (x-a)^2 + (y-b)^2 - (z-c)^2 = r^2\right\}$. Com isso, segue que a parametrização da esfera lorentziana é dada por:

$$X(s,t) = (a + r\cos s\cosh t, b + r\sin s\cosh t, c + r\sinh t)\,.$$

Vamos calcular as curvaturas média e gaussiana da superfície, para isso, comecemos com o cálculo das derivadas da parametrização:

$$X_s = (-r\sin s\cosh t, r\cos s\cosh t, 0) \qquad , \qquad X_t = (r\cos s\sinh t, r\sin s\sinh t, r\cosh t)\,.$$

Já podemos calcular os primeiros coeficientes, o campo normal e o coeficiente ε:

$$E = g\,(X_s,X_s) = (-r\sin s\cosh t)^2 + (r\cos s\cosh t)^2 = (r\cosh t)^2\,,$$

$$F = g\,(X_s,X_t) = (-r\sin s\cosh t)\,r\cos s\sinh t + (r\cos s\cosh t)\,r\sin s\sinh t = 0,$$

$$G = g\,(X_t,X_t) = (r\cos s\sinh t)^2 + (r\sin s\sinh t)^2 - (r\cosh t)^2 = -r^2,$$

$$\eta = \begin{pmatrix} x_{s_3}x_{t_2} - x_{s_2}x_{t_3} \\ x_{s_1}x_{t_3} - x_{s_3}x_{t_1} \\ x_{s_1}x_{t_2} - x_{s_2}x_{t_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r^2\cos s\cosh^2 t \\ -r^2\sin s\cosh^2 t \\ -r^2\,(\sinh t\cosh t) \end{pmatrix},$$

$$|\eta| = \sqrt{\left|\left(-r^2 \cos s \cosh^2 t\right)^2 + \left(-r^2 \sin s \cosh^2 t\right)^2 - \left(-r^2 \left(\sinh t \cosh t\right)\right)^2\right|} = r^2 \cosh t,$$

$$N = \frac{\eta}{|\eta|} = \left(-\cos s \cosh t, -\sin s \cosh t, -\sinh t\right),$$

$$\varepsilon = g\left(N, N\right) = \left(-\cos s \cosh t\right)^2 + \left(-\sin s \cosh t\right)^2 - \left(-\sinh t\right)^2 = 1.$$

Ou seja, a superfície em questão é timelike. Vamos derivar novamente a parametrização para encontrar os outros coeficientes:

$$\begin{aligned} X_{ss} &= \left(-r \cos s \cosh t, -r \sin s \cosh t, 0\right), \\ X_{st} &= \left(-r \sin s \sinh t, r \cos s \sinh t, 0\right), \\ X_{tt} &= \left(r \cos s \cosh t, r \sin s \cosh t, r \sinh t\right). \end{aligned}$$

Segue que os últimos coeficientes são dados pelas seguintes expressões:

$$e = g\left(N, X_{ss}\right) = \left(-\cos s \cosh t\right)\left(-r \cos s \cosh t\right) + \left(-\sin s \cosh t\right)\left(-r \sin s \cosh t\right) = r\left(\cosh^2 t\right),$$

$$f = g\left(N, X_{st}\right) = \left(-\cos s \cosh t\right)\left(-r \sin s \sinh t\right) + \left(-\sin s \cosh t\right)\left(r \cos s \sinh t\right) = 0,$$

$$g = g\left(N, X_{tt}\right) = \left(-\cos s \cosh t\right)\left(r \cos s \cosh t\right) + \left(-\sin s \cosh t\right)\left(r \sin s \cosh t\right) - \left(-\sinh t\right)\left(r \sinh t\right) = -r.$$

Com isso já estamos aptos à calcular as curvaturas média e gaussiana da esfera lorentziana. Segue que:

$$K = \varepsilon \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{r^2\left(\cosh^2 t\right)}{r^2\left(r \cosh t\right)^2} = \frac{1}{r^2},$$

$$H = \frac{\varepsilon}{2} \frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2} = \frac{1}{2} \frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2} = \frac{1}{2} \frac{-r^2 r\left(\cosh^2 t\right) - r\left(r \cosh t\right)^2}{-r^2\left(r \cosh t\right)^2} = \frac{1}{r}.$$

Observando as expressões, conclui-se facilmente que as curvaturas principais são dadas por:

$$k_1 = \frac{1}{r} \qquad , \qquad k_2 = \frac{1}{r}.$$

De fato, note que com esses valores obtemos que $k_1 k_2 = K$ e $\frac{1}{2}(k_1 + k_2) = H$.

5.3.2 Gráfico de Função (Plano XY)

Temos que a parametrização do gráfico de uma função suave $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ no plano XY é dada por:

$$X(s, t) = \left(s, t, h(s, t)\right).$$

Vamos calcular as curvaturas média e gaussiana da superfície. Para isso, comecemos com as derivadas de X :

$$X_s = \left(1, 0, h_s\right) \qquad , \qquad X_t = \left(0, 1, h_t\right).$$

Já podemos calcular E, F, G, o campo normal N e o coeficiente ε :

$$E = g\left(X_s, X_s\right) = \left(1 - h_s^2\right),$$

$$F = g\left(X_s, X_t\right) = \left(-h_s h_t\right),$$

$$G = g\left(X_t, X_t\right) = \left(1 - h_t^2\right),$$

$$\eta = \left(h_s, h_t, 1\right),$$

$$|\eta| = \sqrt{|h_s^2 + h_t^2 - 1|},$$

$$N = \frac{\eta}{|\eta|} = \left(\frac{h_s}{\sqrt{|h_s^2 + h_t^2 - 1|}}, \frac{h_t}{\sqrt{|h_s^2 + h_t^2 - 1|}}, \frac{1}{\sqrt{|h_s^2 + h_t^2 - 1|}} \right),$$

Vamos derivar novamente a parametrização:

$$X_{ss} = (0, 0, h_{ss}) \qquad , \qquad X_{st} = (0, 0, h_{st}) \qquad , \qquad X_{tt} = (0, 0, h_{tt}).$$

Vamos agora separar em 2 casos:

Caso spacelike

Nesse caso segue que $\varepsilon = g(N, N) = -1$. Observando o campo normal, devemos exigir que:

$$h_s^2 + h_t^2 < 1.$$

Onde isso acontece, o campo normal fica da seguinte maneira:

$$N = \left(\frac{h_s}{\sqrt{1 - h_s^2 - h_t^2}}, \frac{h_t}{\sqrt{1 - h_s^2 - h_t^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 - h_s^2 - h_t^2}} \right).$$

Portanto já podemos calcular e, f e g:

$$e = g(N, X_{ss}) = \left(-\frac{h_{ss}}{\sqrt{1 - h_s^2 - h_t^2}} \right),$$

$$f = g(N, X_{st}) = \left(-\frac{h_{st}}{\sqrt{1 - h_s^2 - h_t^2}} \right),$$

$$g = g(N, X_{tt}) = \left(-\frac{h_{tt}}{\sqrt{1 - h_s^2 - h_t^2}} \right).$$

Portanto as curvaturas média e gaussiana são dadas por:

$$\begin{aligned}
K &= \varepsilon \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\
&= -\frac{\left(-\frac{h_{ss}}{\sqrt{1-h_s^2-h_t^2}} \right)\left(-\frac{h_{tt}}{\sqrt{1-h_s^2-h_t^2}} \right) - \left(-\frac{h_{st}}{\sqrt{1-h_s^2-h_t^2}} \right)^2}{(1 - h_s^2)(1 - h_t^2) - (h_s h_t)^2} \\
&= -\left(\frac{h_{ss} h_{tt} - h_{st}^2}{(1 - h_s^2 - h_t^2)^2} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H &= \frac{\varepsilon}{2} \frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2} = -\frac{1}{2} \frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2} \\
&= -\frac{1}{2} \left(\frac{\left(-\frac{h_{ss}(1-h_t^2)}{\sqrt{1-h_s^2-h_t^2}} \right) + \left(-\frac{h_{tt}(1-h_s^2)}{\sqrt{1-h_s^2-h_t^2}} \right) - 2\left(\frac{h_{st}(h_s h_t)}{\sqrt{1-h_s^2-h_t^2}} \right)}{(1 - h_s^2)(1 - h_t^2) - (h_s h_t)^2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{h_{ss}(1 - h_t^2) + h_{tt}(1 - h_s^2) + 2h_{st}(h_s h_t)}{(1 - h_s^2 - h_t^2)^{\frac{3}{2}}} \right).
\end{aligned}$$

Caso Timelike

Nesse caso segue que $\varepsilon = g(N,N) = 1$. Observando o campo normal, devemos exigir que:

$$h_s^2 + h_t^2 > 1.$$

Onde isso acontece, o campo normal fica da seguinte maneira:

$$N = \left(\frac{h_s}{\sqrt{h_s^2 + h_t^2 - 1}}, \frac{h_t}{\sqrt{h_s^2 + h_t^2 - 1}}, \frac{1}{\sqrt{h_s^2 + h_t^2 - 1}} \right).$$

Portanto já podemos calcular e, f e g:

$$e = g(N, X_{ss}) = \left(-\frac{h_{ss}}{\sqrt{h_s^2 + h_t^2 - 1}} \right),$$

$$f = g(N, X_{st}) = \left(-\frac{h_{st}}{\sqrt{h_s^2 + h_t^2 - 1}} \right),$$

$$g = g(N, X_{tt}) = \left(-\frac{h_{tt}}{\sqrt{h_s^2 + h_t^2 - 1}} \right).$$

Portanto as curvaturas média e gaussiana são dadas por:

$$\begin{aligned}
K &= \varepsilon \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\
&= \frac{\left(-\frac{h_{ss}}{\sqrt{h_s^2+h_t^2-1}} \right)\left(-\frac{h_{tt}}{\sqrt{h_s^2+h_t^2-1}} \right) - \left(-\frac{h_{st}}{\sqrt{h_s^2+h_t^2-1}} \right)^2}{\left(1 - h_s^2\right)\left(1 - h_t^2\right) - \left(h_s h_t\right)^2} \\
&= -\frac{\left(-\frac{h_{ss}}{\sqrt{h_s^2+h_t^2-1}} \right)\left(-\frac{h_{tt}}{\sqrt{h_s^2+h_t^2-1}} \right) - \left(-\frac{h_{st}}{\sqrt{h_s^2+h_t^2-1}} \right)^2}{\left(h_s h_t\right)^2 - \left(1 - h_s^2\right)\left(1 - h_t^2\right)} \\
&= -\left(\frac{h_{ss}h_{tt} - h_{st}^2}{\left(h_s^2 + h_t^2 - 1\right)^2} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H &= \frac{\varepsilon}{2} \frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2} = \frac{1}{2} \frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\left(-\frac{h_{ss}\left(1-h_t^2\right)}{\sqrt{h_s^2+h_t^2-1}} \right) + \left(-\frac{h_{tt}\left(1-h_s^2\right)}{\sqrt{h_s^2+h_t^2-1}} \right) - 2\left(\frac{h_{st}\left(h_s h_t\right)}{\sqrt{h_s^2+h_t^2-1}} \right)}{\left(1 - h_s^2\right)\left(1 - h_t^2\right) - \left(h_s h_t\right)^2} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left(\frac{\left(-\frac{h_{ss}\left(1-h_t^2\right)}{\sqrt{h_s^2+h_t^2-1}} \right) + \left(-\frac{h_{tt}\left(1-h_s^2\right)}{\sqrt{h_s^2+h_t^2-1}} \right) - 2\left(\frac{h_{st}\left(h_s h_t\right)}{\sqrt{h_s^2+h_t^2-1}} \right)}{\left(h_s h_t\right)^2 - \left(1 - h_s^2\right)\left(1 - h_t^2\right)} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{h_{ss}\left(1 - h_t^2\right) + h_{tt}\left(1 - h_s^2\right) + 2h_{st}\left(h_s h_t\right)}{\left(h_s^2 + h_t^2 - 1\right)^{\frac{3}{2}}} \right).
\end{aligned}$$

5.3.3 Superfície Helicoidal (Tipo 1)

Já vimos dos exemplos do espaço euclidiano que a parametrização de uma superfície helicoidal de função suave $\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e a inclinação, h, no eixo Z é dada por:

$$X(s,t) = (s\cos t, s\sin t, \lambda(s) + ht), \qquad \lambda \in C^2, h \in \mathbb{R}.$$

Vamos encontrar as curvaturas dessa superfície, para tanto, necessitamos primeiramente das derivadas da parametrização:

$$X_s = (\cos t, \sin t, \lambda') \qquad , \qquad X_t = (-s\sin t, s\cos t, h)\,.$$

Com isso, já estamos aptos ao cálculo dos primeiros coeficientes E; F e G; do campo normal N e do coeficiente ε:

$$E = g\left(X_s, X_s\right) = \cos^2 t + \sin^2 t - \left(\lambda'\right)^2 = 1 - \left(\lambda'\right)^2,$$

$$F = g\left(X_s, X_t\right) = -s\sin t\left(\cos t\right) + s\cos t\sin t - h\lambda' = -h\lambda',$$

$$G = g\left(X_t, X_t\right) = \left(-s\sin t\right)^2 + \left(s\cos t\right)^2 - h^2 = s^2 - h^2,$$

$$\eta = \left(-\left(h\sin t - s\lambda'\cos t\right), h\cos t + s\lambda'\sin t, s\right),$$

$$\begin{aligned}|\eta| &= \sqrt{\left|\left(h\sin t - s\lambda'\cos t\right)^2 + \left(h\cos t + s\lambda'\sin t\right)^2 - s^2\right|}\\ &= \sqrt{|h^2 + s^2(\lambda')^2 - s^2|},\end{aligned}$$

$$N = \frac{\eta}{|\eta|} = \left(-\frac{(h\sin t - s\lambda'\cos t)}{\sqrt{|h^2 + s^2(\lambda')^2 - s^2|}}, \frac{h\cos t + s\lambda'\sin t}{\sqrt{|h^2 + s^2(\lambda')^2 - s^2|}}, \frac{s}{\sqrt{|h^2 + s^2(\lambda')^2 - s^2|}}\right).$$

Vamos derivar novamente a parametrização:

$$\begin{aligned}X_{ss} &= (0, 0, \lambda'')\,,\\ X_{st} &= (-\sin t, \cos t, 0)\,,\\ X_{tt} &= (-s\cos t, -s\sin t, 0)\,.\end{aligned}$$

Vamos separa o problema em 2 casos:

Caso Spacelike

Nesse caso devemos ter $\varepsilon = g\left(N, N\right) = -1$ e para isso, temos que exigir que:

$$h^2 + s^2(\lambda')^2 < s^2.$$

Onde a desigualdade acima é satisfeita estaremos no caso spacelike. Nesse caso o campo normal é dado por:

$$N = \left(-\frac{(h\sin t - s\lambda'\cos t)}{\sqrt{s^2 - h^2 - s^2(\lambda')^2}}, \frac{h\cos t + s\lambda'\sin t}{\sqrt{s^2 - h^2 - s^2(\lambda')^2}}, \frac{s}{\sqrt{s^2 - h^2 - s^2(\lambda')^2}}\right).$$

Portanto, os coeficientes e, f e g são dados por:

$$e = g\left(N, X_{ss}\right) = -\frac{s\lambda''}{\sqrt{s^2 - h^2 - s^2(\lambda')^2}},$$

$$\begin{aligned}f = g\left(N, X_{st}\right) &= \left(-\frac{-\sin t\left(h\sin t - s\lambda'\cos t\right)}{\sqrt{s^2 - h^2 - s^2(\lambda')^2}}\right) + \frac{\cos t\left(h\cos t + s\lambda'\sin t\right)}{\sqrt{s^2 - h^2 - s^2(\lambda')^2}}\\ &= \frac{h}{\sqrt{-s^2(\lambda')^2 - h^2 + s^2}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g = g\left(N, X_{tt}\right) &= \left(-\frac{-s\cos t\left(h\sin t - s\lambda'\cos t\right)}{\sqrt{s^2 - h^2 - s^2(\lambda')^2}}\right) + \frac{-s\sin t\left(h\cos t + s\lambda'\sin t\right)}{\sqrt{s^2 - h^2 - s^2(\lambda')^2}}\\ &= \frac{-s^2\lambda'}{\sqrt{-s^2(\lambda')^2 - h^2 + s^2}}.\end{aligned}$$

Portanto segue que as curvaturas média e gaussiana são dadas por:

$$
\begin{aligned}
K &= \varepsilon \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\
&= -\frac{\left(-\frac{s\lambda''}{\sqrt{s^2-h^2-s^2(\lambda')^2}}\right)\left(\frac{-s^2\lambda'}{\sqrt{-s^2(\lambda')^2-h^2+s^2}}\right) - \left(\frac{h}{\sqrt{-s^2(\lambda')^2-h^2+s^2}}\right)^2}{\left(1-(\lambda')^2\right)(s^2-h^2) - (-h\lambda')^2} \\
&= -\left(\frac{s^3\lambda''\lambda' - h^2}{(s^2-h^2-s^2(\lambda')^2)^2}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{\varepsilon}{2}\frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2} = -\frac{1}{2}\frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2} \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{\left(-\frac{s\lambda''(s^2-h^2)}{\sqrt{s^2-h^2-s^2(\lambda')^2}}\right) + \left(\frac{-s^2\lambda'\left(1-(\lambda')^2\right)}{\sqrt{-s^2(\lambda')^2-h^2+s^2}}\right) + 2\left(\frac{h(h\lambda')}{\sqrt{-s^2(\lambda')^2-h^2+s^2}}\right)}{\left(1-(\lambda')^2\right)(s^2-h^2) - (-h\lambda')^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{s\lambda''\left(s^2-h^2\right) + s^2\lambda'\left(1-(\lambda')^2\right) - 2h\left(h\lambda'\right)}{\left(\sqrt{s^2-h^2-s^2(\lambda')^2}\right)^3}\right).
\end{aligned}
$$

Caso Timelike

Nesse caso devemos ter $\varepsilon = g(N,N) = 1$ e para isso, temos que exigir que:

$$h^2 + s^2(\lambda')^2 > s^2.$$

Onde a desigualdade acima é satisfeita estaremos no caso spacelike. Nesse caso o campo normal é dado por:

$$N = \left(-\frac{(h\sin t - s\lambda'\cos t)}{\sqrt{h^2+s^2(\lambda')^2-s^2}}, \frac{h\cos t + s\lambda'\sin t}{\sqrt{h^2+s^2(\lambda')^2-s^2}}, \frac{s}{\sqrt{h^2+s^2(\lambda')^2-s^2}}\right).$$

Portanto, os coeficientes e, f e g são dados por:

$$e = g(N, X_{ss}) = -\frac{s\lambda''}{\sqrt{h^2+s^2(\lambda')^2-s^2}},$$

$$
\begin{aligned}
f = g(N, X_{st}) &= \left(-\frac{-\sin t\,(h\sin t - s\lambda'\cos t)}{\sqrt{h^2+s^2(\lambda')^2-s^2}}\right) + \frac{\cos t\,(h\cos t + s\lambda'\sin t)}{\sqrt{h^2+s^2(\lambda')^2-s^2}} \\
&= \frac{h}{\sqrt{h^2+s^2(\lambda')^2-s^2}},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g = g(N, X_{tt}) &= \left(-\frac{-s\cos t\,(h\sin t - s\lambda'\cos t)}{\sqrt{h^2+s^2(\lambda')^2-s^2}}\right) + \frac{-s\sin t\,(h\cos t + s\lambda'\sin t)}{\sqrt{h^2+s^2(\lambda')^2-s^2}} \\
&= \frac{-s^2\lambda'}{\sqrt{h^2+s^2(\lambda')^2-s^2}}.
\end{aligned}
$$

Portanto segue que as curvaturas média e gaussiana são dadas por:

$$
\begin{aligned}
K &= \varepsilon \frac{eg-f^2}{EG-F^2} = \frac{eg-f^2}{EG-F^2} \\
&= \frac{\left(-\frac{s\lambda''}{\sqrt{h^2+s^2(\lambda')^2-s^2}}\right)\left(\frac{-s^2\lambda'}{\sqrt{h^2+s^2(\lambda')^2-s^2}}\right) - \left(\frac{h}{\sqrt{h^2+s^2(\lambda')^2-s^2}}\right)^2}{\left(1-(\lambda')^2\right)(s^2-h^2) - (-h\lambda')^2} \\
&= -\frac{\left(-\frac{s\lambda''}{\sqrt{h^2+s^2(\lambda')^2-s^2}}\right)\left(\frac{-s^2\lambda'}{\sqrt{h^2+s^2(\lambda')^2-s^2}}\right) - \left(\frac{h}{\sqrt{h^2+s^2(\lambda')^2-s^2}}\right)^2}{(-h\lambda')^2 - \left(1-(\lambda')^2\right)(s^2-h^2)} \\
&= -\left(\frac{s^3\lambda''\lambda' - h^2}{(h^2+s^2(\lambda')^2-s^2)^2}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{\varepsilon}{2}\frac{eG+gE-2fF}{EG-F^2} = \frac{1}{2}\frac{eG+gE-2fF}{EG-F^2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\left(-\frac{s\lambda''(s^2-h^2)}{\sqrt{h^2+s^2(\lambda')^2-s^2}}\right) + \left(\frac{-s^2\lambda'\left(1-(\lambda')^2\right)}{\sqrt{h^2+s^2(\lambda')^2-s^2}}\right) + 2\left(\frac{h(h\lambda')}{\sqrt{h^2+s^2(\lambda')^2-s^2}}\right)}{\left(1-(\lambda')^2\right)(s^2-h^2) - (-h\lambda')^2}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{\left(-\frac{s\lambda''(s^2-h^2)}{\sqrt{h^2+s^2(\lambda')^2-s^2}}\right) + \left(\frac{-s^2\lambda'\left(1-(\lambda')^2\right)}{\sqrt{h^2+s^2(\lambda')^2-s^2}}\right) + 2\left(\frac{h(h\lambda')}{\sqrt{h^2+s^2(\lambda')^2-s^2}}\right)}{(-h\lambda')^2 - \left(1-(\lambda')^2\right)(s^2-h^2)}\right). \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{s\lambda''\left(s^2-h^2\right) + s^2\lambda'\left(1-(\lambda')^2\right) - 2h\,(h\lambda')}{\left(\sqrt{h^2+s^2(\lambda')^2-s^2}\right)^3}\right)
\end{aligned}
$$

5.3.4 Superfície Helicoidal (Tipo 2)

Temos a seguinte parametrização dessa superfície helicoidal:

$$X(s,t) = (ht, s\cosh t, s\sinh t).$$

Vamos encontrar as curvaturas dessa superfície, comecemos com as primeiras derivadas da parametrização:

$$X_s = (0, \cosh t, \sinh t) \qquad , \qquad X_t = (h, s\sinh t, s\cosh t).$$

Vamos agora calcular E, F, G, e o campo normal N :

$$E = g\left(X_s, X_s\right) = \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1,$$

$$F = g\left(X_s, X_t\right) = s\sinh t\cosh t - s\cosh t\sinh t = 0,$$

$$G = g\left(X_t, X_t\right) = h^2 + (s\sinh t)^2 - (s\cosh t)^2 = h^2 - s^2,$$

$$\eta = \begin{pmatrix} x_{s_3}x_{t_2} - x_{s_2}x_{t_3} \\ x_{s_1}x_{t_3} - x_{s_3}x_{t_1} \\ x_{s_1}x_{t_2} - x_{s_2}x_{t_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\sinh t\sinh t - s\cosh t\cosh t \\ -h\sinh t \\ -h\cosh t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s \\ -h\sinh t \\ -h\cosh t \end{pmatrix},$$

$$|\eta| = \sqrt{\left|s^2 + (h\sinh t)^2 - (h\cosh t)^2\right|} = \sqrt{|s^2-h^2|},$$

$$N = \frac{\eta}{|\eta|} = \left(-\frac{s}{\sqrt{|s^2-h^2|}}, -\frac{h\sinh t}{\sqrt{|s^2-h^2|}}, -\frac{h\cosh t}{\sqrt{|s^2-h^2|}}\right),$$

Vamos derivar novamente a parametrização:

$$X_{ss} = (0,0,0) \quad , \quad X_{ts} = (0, \sinh t, \cosh t) \quad , \quad X_{tt} = (0, s\cosh t, s\sinh t)\,.$$

Temos que separar em 2 casos.

Caso Spacelike

Segue caso devemos ter $\varepsilon = g(N,N) = -1$. Para isso devemos exigir que:

$$s^2 < h^2.$$

Com isso segue que o campo normal é dado por:

$$N = \left(-\frac{s}{\sqrt{h^2-s^2}}, -\frac{h\sinh t}{\sqrt{h^2-s^2}}, -\frac{h\cosh t}{\sqrt{h^2-s^2}}\right).$$

Vamos calcular e, f e g :

$$e = g(N, X_{ss}) = 0,$$

$$f = g(N, X_{st}) = -\frac{h\sinh t\sinh t}{\sqrt{h^2-s^2}} + \frac{h\cosh t\cosh t}{\sqrt{h^2-s^2}} = \frac{h}{\sqrt{h^2-s^2}},$$

$$g = g(N, X_{tt}) = -\frac{sh\cosh t\sinh t}{\sqrt{h^2-s^2}} + \frac{hs\sinh t\cosh t}{\sqrt{h^2-s^2}} = 0.$$

Portanto, as curvaturas média e gaussiana são dadas por:

$$\begin{aligned} K &= \varepsilon\frac{eg-f^2}{EG-F^2} = -\frac{eg-f^2}{EG-F^2} \\ &= -\frac{-\left(\frac{h}{\sqrt{h^2-s^2}}\right)^2}{h^2-s^2} = \frac{h^2}{(h^2-s^2)^2}, \\ H &= \frac{\varepsilon}{2}\frac{eG+gE-2fF}{EG-F^2} = -\frac{1}{2}\frac{eG+gE-2fF}{EG-F^2} = 0. \end{aligned}$$

Caso Timelike

Segue caso devemos ter $\varepsilon = g(N,N) = 1$. Para isso devemos exigir que:

$$s^2 > h^2.$$

Com isso segue que o campo normal é dado por:

$$N = \left(-\frac{s}{\sqrt{s^2-h^2}}, -\frac{h\sinh t}{\sqrt{s^2-h^2}}, -\frac{h\cosh t}{\sqrt{s^2-h^2}}\right).$$

Vamos calcular e, f e g :

$$e = g(N, X_{ss}) = 0,$$

$$f = g(N, X_{st}) = -\frac{h\sinh t\sinh t}{\sqrt{s^2-h^2}} + \frac{h\cosh t\cosh t}{\sqrt{s^2-h^2}} = \frac{h}{\sqrt{s^2-h^2}},$$

$$g = g(N, X_{tt}) = -\frac{sh\cosh t\sinh t}{\sqrt{s^2-h^2}} + \frac{hs\sinh t\cosh t}{\sqrt{s^2-h^2}} = 0.$$

Portanto, as curvaturas média e gaussiana são dadas por:

$$\begin{aligned} K &= \varepsilon\frac{eg-f^2}{EG-F^2} = \frac{eg-f^2}{EG-F^2} \\ &= \frac{-\left(\frac{h}{\sqrt{s^2-h^2}}\right)^2}{h^2-s^2} = -\frac{-\left(\frac{h}{\sqrt{s^2-h^2}}\right)^2}{s^2-h^2} = \frac{h^2}{(s^2-h^2)^2}, \\ H &= \frac{\varepsilon}{2}\frac{eG+gE-2fF}{EG-F^2} = \frac{1}{2}\frac{eG+gE-2fF}{EG-F^2} = 0. \end{aligned}$$

5.3.5 Superfície de Cayley

A parametrização de uma superfície de Cayley com parâmetro h é dada por:

$$X(s,t) = \left(st - ht + h\frac{t^3}{3}, s + ht^2, st + ht + h\frac{t^3}{3} \right).$$

Vamos calcular as curvaturas média e gaussiana da superfície. Comecemos derivando X :

$$X_s = (t,1,t) \qquad , \qquad X_t = \left(s - h + ht^2, 2ht, s + h + ht^2\right).$$

Segue disso que os primeiros coeficientes e o normal são dados por:

$$E = g\left(X_s, X_s\right) = t^2 + 1 - t^2 = 1,$$

$$F = g\left(X_s, X_t\right) = t\left(s - h + ht^2\right) + 2ht - t\left(s + h + ht^2\right) = 0,$$

$$G = g\left(X_t, X_t\right) = \left(s - h + ht^2\right)^2 + (2ht)^2 - \left(s + h + ht^2\right)^2 = -4hs,$$

$$\eta = \begin{pmatrix} t\,(2ht) - \left(s + h + ht^2\right) \\ t\left(s + h + ht^2\right) - t\left(s - h + ht^2\right) \\ t\,(2ht) - \left(s - h + ht^2\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h - s + ht^2 \\ 2ht \\ h - s + ht^2 \end{pmatrix},$$

$$|\eta| = \sqrt{\left|(-h - s + ht^2)^2 + (2ht)^2 - (h - s + ht^2)^2\right|} = 2\sqrt{|hs|},$$

$$N = \frac{\eta}{|\eta|} = \left(\frac{-h - s + ht^2}{2\sqrt{|hs|}}, \frac{ht}{\sqrt{|hs|}}, \frac{h - s + ht^2}{2\sqrt{|hs|}} \right).$$

Vamos derivar novamente X :

$$X_{ss} = (0,0,0) \qquad , \qquad X_{st} = (1,0,1) \qquad , \qquad X_{tt} = (2ht, 2h, 2ht).$$

Vamos separar em dois casos:

Caso Spacelike

Nesse caso precisamos exigir que $\varepsilon = g\,(N,N) = -1$. E para isso devemos ter:

$$hs < 0.$$

Com isso, o campo normal fica da forma:

$$N = \left(\frac{-h - s + ht^2}{2\sqrt{-hs}}, \frac{ht}{\sqrt{-hs}}, \frac{h - s + ht^2}{2\sqrt{-hs}} \right).$$

Vamos agora calcular e, f e g :

$$e = g\left(N, X_{ss}\right) = 0,$$

$$f = g\left(N, X_{st}\right) = \left(\frac{-h - s + ht^2}{2\sqrt{-hs}} \right) - \left(\frac{h - s + ht^2}{2\sqrt{-hs}} \right) = -\frac{h}{\sqrt{-hs}},$$

$$g = g\left(N, X_{tt}\right) = \left(\frac{2ht\left(-h - s + ht^2\right)}{2\sqrt{-hs}} \right) + \left(\frac{2hht}{\sqrt{-hs}} \right) - \left(\frac{2ht\left(h - s + ht^2\right)}{2\sqrt{-hs}} \right) = 0.$$

Portanto as curvaturas média e gaussiana são dadas por:

$$\begin{aligned} K &= \varepsilon\frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\ &= -\frac{-\left(-\frac{h}{\sqrt{-hs}}\right)^2}{-4hs} = \frac{1}{4s^2}, \end{aligned}$$

$$H = \frac{\varepsilon}{2}\frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2} = -\frac{1}{2}\frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2} = 0.$$

Caso Timelike

Nesse caso precisamos exigir que $\varepsilon = g(N,N) = 1$. E para isso devemos ter:

$$hs > 0.$$

Com isso, o campo normal fica da forma:

$$N = \left(\frac{-h - s + ht^2}{2\sqrt{hs}}, \frac{ht}{\sqrt{hs}}, \frac{h - s + ht^2}{2\sqrt{hs}} \right).$$

Vamos agora calcular e, f e g :

$$e = g(N, X_{ss}) = 0,$$

$$f = g(N, X_{st}) = \left(\frac{-h - s + ht^2}{2\sqrt{hs}} \right) - \left(\frac{h - s + ht^2}{2\sqrt{hs}} \right) = -\frac{h}{\sqrt{hs}},$$

$$g = g(N, X_{tt}) = \left(\frac{2ht\left(-h - s + ht^2\right)}{2\sqrt{hs}} \right) + \left(\frac{2hht}{\sqrt{hs}} \right) - \left(\frac{2ht\left(h - s + ht^2\right)}{2\sqrt{hs}} \right) = 0.$$

Portanto as curvaturas média e gaussiana são dadas por:

$$\begin{aligned} K &= \varepsilon \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\ &= \frac{-\left(-\frac{h}{\sqrt{hs}}\right)^2}{-4hs} = \frac{1}{4s^2}, \end{aligned}$$

$$H = \frac{\varepsilon}{2} \frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2} = \frac{1}{2} \frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2} = 0.$$

5.3.6 Superfície de Revolução (Eixo Z)

Dada uma curva $\gamma(s) = (x(s), z(s))$ (suponha, semperda de generalidade, que $x > 0$) parametrizada pelo comprimento de arco lorentziano no plano XZ,segue que a parametrização de uma superfície de revolução no eixo Z é dada por:

$$X(s,t) = (x(s)\cos t, x(s)\sin t, z(s)).$$

Vamos calcular as curvaturas dessa superfície, para tanto, precisamos das primeiras derivadas da parametrização:

$$X_s = (x' \cos t, x' \sin t, z') \qquad , \qquad X_t = (-x \sin t, x \cos t, 0).$$

Segue que podemos encontrar alguns coeficientes e o campo normal:

$$E = g(X_s, X_s) = (x' \cos t)^2 + (x' \sin t)^2 - (z')^2 = (x')^2 - (z')^2 = 1,$$

$$F = g(X_s, X_t) = -xx' \sin t \cos t + x'x \cos t \sin t = 0,$$

$$G = g(X_t, X_t) = (-x \sin t)^2 + (x \cos t)^2 = x^2,$$

$$\eta = (z'x \cos t, z'x \sin t, x'x),$$

$$|\eta| = \sqrt{\left| (z'x \cos t)^2 + (z'x \sin t)^2 - (x'x) \right|} = \sqrt{|-x^2|} = x,$$

$$N = \frac{\eta}{|\eta|} = (z' \cos t, z' \sin t, x').$$

O coeficiente ε tem sempre a seguinte expressão:

$$\varepsilon = g(N,N) = (z')^2 - (x')^2 = -1.$$

Ou seja, essa superfície é sempre spacelike. Note que isso só acontece se $x > 0$, caso contrário a superfície será timelike.

Vamos derivar novamente a parametrização:

$$X_{ss} = (x'' \cos t, x'' \sin t, z''), \qquad X_{st} = (-x' \sin t, x' \cos t, 0), \qquad X_{tt} = (-x \cos t, -x \sin t, 0).$$

Segue que os últimos coeficientes são dados por:

$$e = g(N, X_{ss}) = z'x'' \cos t \cos t + z'x'' \sin t \sin t - x'z'' = -(x'z'' - x''z'),$$

$$f = g(N, X_{st}) = -z'x' \sin t \cos t + z'x' \cos t \sin t = 0,$$

$$g = g(N, X_{tt}) = -z'x \cos t \cos t - z'x \sin t \sin t = -xz'.$$

Portanto as curvaturas média e gaussiana são dadas por:

$$\begin{aligned} K &= \varepsilon \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\ &= -\frac{(x'z'' - x''z')\, z'}{x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{\varepsilon}{2} \frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2} = -\frac{1}{2} \frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{-(x'z'' - x''z')\, x^2 - xz'}{x^2} = \frac{(z' + xx'z'' - xx''z')}{2x}. \end{aligned}$$

5.3.7 Superfície Clíndrica (Plano XZ)

Dada uma curva no plano XZ, $\gamma(t) = (x(t), 0, z(t))$ parametrizada pelo comprimento de arco lorentziano, a ideia de uma superfície cilíndrica é transladar a curva por um vetor que não pertença ao plano da curva, ou seja, um vetor unitário $v = (a, b, c)$ tal que $a \neq 0$. Segue disso que a parametrização de uma superfície cilíndrica relacionada à curva γ e ao vetor v é dada por:

$$X(s,t) = \gamma(t) + sv = (x(t) + as, bs, z(t) + cs).$$

Vamos calcular as curvaturas média e gaussiana dessa superfície. Derivando X, obtemos:

$$X_s = (a, b, c) \qquad , \qquad X_t = (x', 0, z').$$

Segue que E, F, G e N são dados por:

$$E = g(X_s, X_s) = a^2 + b^2 - c^2 = 1,$$

$$F = g(X_s, X_t) = ax' - cz',$$

$$G = g(X_t, X_t) = (x')^2 - (z')^2 = 1,$$

$$\eta = \begin{pmatrix} x_{s_3} x_{t_2} - x_{s_2} x_{t_3} \\ x_{s_1} x_{t_3} - x_{s_3} x_{t_1} \\ x_{s_1} x_{t_2} - x_{s_2} x_{t_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -bz' \\ az' - cx' \\ -bx' \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} |\eta| &= \sqrt{\left|(bz')^2 + (az' - cx')^2 - (bx')^2\right|} = \sqrt{|a^2 (z')^2 - b^2 + c^2 (x')^2 - 2acx'z'|} \\ &= \sqrt{|a^2 \left((x')^2 - 1\right) - b^2 + c^2 \left(1 + (z')^2\right) - 2acx'z'|} \\ &= \sqrt{|-a^2 - b^2 + c^2 + (a^2 (x')^2 + c^2 (z')^2 - 2acx'z')|} \\ &= \sqrt{\left|(ax' - cz')^2 - 1\right|}, \end{aligned}$$

$$N = \frac{\eta}{|\eta|} = \left(-\frac{bz'}{\sqrt{\left|(ax'-cz')^2-1\right|}}, \frac{az'-cx'}{\sqrt{\left|(ax'-cz')^2-1\right|}}, -\frac{bx'}{\sqrt{\left|(ax'-cz')^2-1\right|}} \right).$$

Derivando novamente a parametrização, obtemos:

$$X_{ss} = (0,0,0) \qquad , \qquad X_{ts} = (0,0,0) \qquad , \qquad X_{tt} = (x'', 0, z'') \,.$$

Vamos novamente separar em 2 casos:

Caso Spacelike

Nesse caso, $\varepsilon = g(N,N) = -1$. Logo, devemos exigir que:

$$(ax'-cz')^2 < 1.$$

POortanto o campo normal fica dado da seguinte maneira:

$$N = \left(-\frac{bz'}{\sqrt{1-(ax'-cz')^2}}, \frac{az'-cx'}{\sqrt{1-(ax'-cz')^2}}, -\frac{bx'}{\sqrt{1-(ax'-cz')^2}} \right).$$

Segue que os últimos coeficientes têm a seguinte expressão;

$$e = g(N, X_{ss}) = 0,$$

$$f = g(N, X_{st}) = 0,$$

$$g = g(N, X_{tt}) = -\frac{bz'x''}{\sqrt{1-(ax'-cz')^2}} + \frac{bx'z''}{\sqrt{1-(ax'-cz')^2}} = \frac{b(x'z''-x''z')}{\sqrt{1-(ax'-cz')^2}}.$$

Portanto as curvaturas média e gaussiana ficam da seguinte maneira:

$$K = \varepsilon \frac{eg-f^2}{EG-F^2} = -\frac{eg-f^2}{EG-F^2} = 0,$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{\varepsilon}{2}\frac{eG+gE-2fF}{EG-F^2} = -\frac{1}{2}\frac{eG+gE-2fF}{EG-F^2} \\ &= -\frac{1}{2}\frac{b(x'z''-x''z')}{\left(\sqrt{1-(ax'-cz')^2}\right)^3}. \end{aligned}$$

Caso Timelike

Nesse caso, $\varepsilon = g(N,N) = 1$. Logo, devemos exigir que:

$$(ax'-cz')^2 > 1.$$

Portanto o campo normal fica dado da seguinte maneira:

$$N = \left(-\frac{bz'}{\sqrt{(ax'-cz')^2-1}}, \frac{az'-cx'}{\sqrt{(ax'-cz')^2-1}}, -\frac{bx'}{\sqrt{(ax'-cz')^2-1}} \right).$$

Segue que os últimos coeficientes têm a seguinte expressão;

$$e = g(N, X_{ss}) = 0,$$

$$f = g(N, X_{st}) = 0,$$

$$g = g\left(N, X_{tt}\right) = -\frac{bz'x''}{\sqrt{\left(ax' - cz'\right)^2 - 1}} + \frac{bx'z''}{\sqrt{\left(ax' - cz'\right)^2 - 1}} = \frac{b\left(x'z'' - x''z'\right)}{\sqrt{\left(ax' - cz'\right)^2 - 1}}.$$

Portanto as curvaturas média e gaussiana ficam da seguinte maneira:

$$K = \varepsilon\frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = 0,$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{\varepsilon}{2}\frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2} = \frac{1}{2}\frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\frac{b\left(x'z'' - x''z'\right)}{\sqrt{(ax' - cz')^2 - 1}}}{1 - \left(ax' - cz'\right)^2} = -\frac{1}{2}\frac{\frac{b\left(x'z'' - x''z'\right)}{\sqrt{(ax' - cz')^2 - 1}}}{\left(ax' - cz'\right)^2 - 1} = -\frac{1}{2}\frac{b\left(x'z'' - x''z'\right)}{\left(\sqrt{\left(ax' - cz'\right)^2 - 1}\right)^3}. \end{aligned}$$

Teorema 5.3.1 *As superfícies cilíndricas com $H = 0$ têm a seguinte parametrização:*

$$X(s,t) = \left(t\cosh C + C_0 + as, bs, t\sinh C + C_1 + cs\right), \qquad (C, C_0, C_1, a, b, c) \in \mathbb{R}^6.$$

Prova. Vamos agora classificar as superfícies que respeitam $H = 0$. Como a curva γ é parametrizada pelo comprimento de arco lorentziano, segue que existe uma função suave $\theta : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 2\pi]$ tal que:

$$x' = \cosh\theta \Rightarrow x'' = \theta'\sinh\theta,$$
$$z' = \sinh\theta \Rightarrow z'' = \theta'\cosh\theta.$$

Supondo a equação $H = 0$ e colocando a expressão de H em termos de θ e notando que apenas o numerador da fração é importante nesse caso, segue que:

$$H = 0 \Rightarrow 0 = b\left(x'z'' - x''z'\right) = b\left(\theta'\cosh\theta\cosh\theta - \theta'\sinh\theta\sinh\theta\right) = b\theta'.$$

Como $b \neq 0$ por hipótese, segue que:

$$\theta' = 0.$$

Integrando ambos os lados concluímos que:

$$\theta = C.$$

Portanto, substituindo no sistema acima:

$$x' = \cosh\theta = \cosh C \qquad , \qquad z' = \sinh\theta = \sinh C.$$

Integrando ambos os lados nas duas equações obtemos:

$$x(t) = t\cosh C + C_0 \qquad , \qquad z(t) = t\sinh C + C_1.$$

Ou seja a família de superfícies com curvatura média nula é dada por:

$$X(s,t) = \left(t\cosh C + C_0 + as, bs, t\sinh C + C_1 + cs\right), \qquad (C, C_0, C_1, a, b, c) \in \mathbb{R}^6.$$

Note que como só o numerador de H importava, segue que a solução é a mesma nos casos spacelike e timelike.

■

5.3.8 Superfície Parabólica (Plano XZ)

Essa classe de superfície é um caso particular das cilíndricas. Nesse caso, $v = (0, 1, 0)$. Ou seja, A parametrização de uma superfície parabólica é dada por:

$$X(s,t) = \left(x(t), s, z(t)\right).$$

Vamos calcular as curvaturas média e gaussiana dessa superfície. Derivando X, obtemos:

$$X_s = (0, 1, 0) \qquad , \qquad X_t = \left(x', 0, z'\right).$$

Segue que E, F, G e N são dados por:

$$E = g\left(X_s, X_s\right) = 1,$$

$$F = g\left(X_s, X_t\right) = 0,$$

$$G = g\left(X_t, X_t\right) = \left(x'\right)^2 - \left(z'\right)^2 = 1,$$

$$\eta = \begin{pmatrix} x_{s_3}x_{t_2} - x_{s_2}x_{t_3} \\ x_{s_1}x_{t_3} - x_{s_3}x_{t_1} \\ x_{s_1}x_{t_2} - x_{s_2}x_{t_1} \end{pmatrix} = \left(-z', 0, -x'\right),$$

$$|\eta| = \sqrt{\left|\left(z'\right)^2 - \left(x'\right)^2\right|} = \sqrt{|-1|} = 1,$$

$$N = \frac{\eta}{|\eta|} = \left(-z', 0, -x'\right).$$

Note que o coeficiente ε, nesse caso, é sempre dado por:

$$\varepsilon = g\left(N, N\right) = \left(z'\right)^2 - \left(x'\right)^2 = -1.$$

Ou seja, as superfícies parabólicas são sempre do tipo spacelike
Derivando novamente a parametrização, obtemos:

$$X_{ss} = (0,0,0) \qquad , \qquad X_{ts} = (0,0,0) \qquad , \qquad X_{tt} = \left(x'', 0, z''\right).$$

Segue que os últimos coeficientes têm a seguinte expressão;

$$e = g\left(N, X_{ss}\right) = 0,$$

$$f = g\left(N, X_{st}\right) = 0,$$

$$g = g\left(N, X_{tt}\right) = -z'x'' + x'z'' = \left(x'z'' - x''z'\right).$$

Portanto as curvaturas média e gaussiana ficam da seguinte maneira:

$$K = \varepsilon\frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\frac{eg - f^2}{EG - F^2} = 0,$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{\varepsilon}{2}\frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2} = -\frac{1}{2}\frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2} \\ &= -\frac{1}{2}\left(x'z'' - x''z'\right). \end{aligned}$$

Corolario 5.3.2 *As superfícies parabólicas com $H = 0$ têm a seguinte parametrização:*

$$X(s,t) = \left(t\cosh C + C_0, s, t\sinh C + C_1\right), \qquad (C, C_0, C_1) \in \mathbb{R}^3.$$

Prova. Como as superfícies parabólicas são cilíndricas, basta tomar $(a,b,c) = (0,1,0)$ no teorema anteior. ■

Teorema 5.3.3 *As superfícies parabólicas com $k_1^2 + k_2^2 = 1$ têm a seguinte parametrização:*

$$X(s,t) = \left(\frac{1}{2}\sinh\left(2t + C\right), s, \frac{1}{2}\cosh\left(2t + C\right)\right), \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Prova. de fato,c supondo a equação verdadeira, colocando em função de H e K e usando suas expressões em termos da função ângulo, obtemos:

$$1 = k_1^2 + k_2^2 = 4H^2 - 2\varepsilon K = \left(x'z'' - x''z'\right)^2 = \left(\theta'\right)^2.$$

Ou seja, segue que temos a seguinte equação diferencial:

$$\theta' = \pm 1.$$

Isolando θ' e integrando ambos os lados, concluímos que:

$$\theta(t) = \pm t + C.$$

Portanto podemos encontrar as coordenadas da curva geratriz:

$$x' = \cosh\theta = \cosh(\pm t + C) \qquad , \qquad z' = \sinh\theta = \sinh(\pm t + C).$$

Integrando ambos os lados, obtemos:

$$x(t) = \pm\sinh(\pm t + C) \qquad , \qquad z(t) = \pm\cosh(\pm t + C).$$

Portanto a parametrização fica da seguinte forma:

$$X(s,t) = (\pm\sinh(\pm t + C), s, \pm\cosh(\pm t + C)), \qquad C \in \mathbb{R}.$$

■

5.3.9 Superfície de Translação (Plano XZ e YZ)

Suponha (sem perda de generalidade) duas curvas parametrizadas pelo comprimento de arco lorentziano, $\gamma(t) = (a(t), 0, c(t))$ e $\xi(s) = (0, y(s), z(s))$. Temos que uma superfície de translação gerada pelas curvas γ e ξ é parametrizada por:

$$X(s,t) = \gamma(t) + \xi(s) = (a(t), y(s), c(t) + z(s)).$$

Vamos agora calcular as curvaturas média e gaussiana da superfície. Para isso, comecemos com o cálculo das derivadqas de X :

$$X_s = (0, y', z') \qquad , \qquad X_t = (a', 0, c').$$

Segue que os coeficientes E, F, G e o campo normal N são dados por:

$$E = g(X_s, X_s) = (y')^2 - (z')^2 = 1,$$

$$F = g(X_s, X_t) = -z'c',$$

$$G = g(X_t, X_t) = (a')^2 - (c')^2 = 1,$$

$$\eta = \begin{pmatrix} x_{s_3}x_{t_2} - x_{s_2}x_{t_3} \\ x_{s_1}x_{t_3} - x_{s_3}x_{t_1} \\ x_{s_1}x_{t_2} - x_{s_2}x_{t_1} \end{pmatrix} = (-y'c', -z'a', -y'a'),$$

$$\begin{aligned} |\eta| &= \sqrt{\left|(y'c')^2 + (z'a')^2 - (y'a')^2\right|} \\ &= \sqrt{|-(y')^2(a')^2 + (y')^2(c')^2 + (z')^2(a')^2|} \\ &= \sqrt{|(1 + (z')^2)(c')^2 + ((z')^2 - (y')^2)(a')^2|} \\ &= \sqrt{|(z')^2(c')^2 + (c')^2 - (a')^2|} \\ &= \sqrt{|(z')^2(c')^2 - 1|}, \end{aligned}$$

$$N = \frac{\eta}{|\eta|} = \left(-\frac{y'c'}{\sqrt{|(z')^2(c')^2 - 1|}}, -\frac{z'a'}{\sqrt{|(z')^2(c')^2 - 1|}}, -\frac{y'a'}{\sqrt{|(z')^2(c')^2 - 1|}}\right).$$

Derivando novamente a parametrização, obtemos que:

$$X_{ss} = (0, y'', z'') \qquad , \qquad X_{st} = (0,0,0) \qquad , \qquad X_{tt} = (a'', 0, c'').$$

Vamos agora separar novamente em dois casos:

Caso Spacelike

Nesse caso, $\varepsilon = g(N,N) = -1$. Para isso, devemos exigir que:

$$(z')^2(c')^2 < 1.$$

Com isso, o campo normal fica dado por:

$$N = \left(-\frac{y'c'}{\sqrt{1-(z')^2(c')^2}}, -\frac{z'a'}{\sqrt{1-(z')^2(c')^2}}, -\frac{y'a'}{\sqrt{1-(z')^2(c')^2}}\right).$$

Portanto, os últimos coeficientes têm a seguinte expressão:

$$e = g(N, X_{ss}) = -\frac{z'a'y''}{\sqrt{1-(z')^2(c')^2}} + \frac{y'a'z''}{\sqrt{1-(z')^2(c')^2}} = \frac{a'(y'z''-y''z')}{\sqrt{1-(z')^2(c')^2}},$$

$$f = g(N, X_{st}) = 0,$$

$$g = g(N, X_{tt}) = -\frac{y'c'a''}{\sqrt{1-(z')^2(c')^2}} + \frac{y'a'c''}{\sqrt{1-(z')^2(c')^2}} = \frac{y'(a'c''-a''c')}{\sqrt{1-(z')^2(c')^2}}.$$

Portanto, as curvaturas média e gaussiana têm a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} K &= \varepsilon\frac{eg-f^2}{EG-F^2} = -\frac{eg-f^2}{EG-F^2} \\ &= -\frac{\frac{y'\left(a'c''-a''c'\right)}{\sqrt{1-(z')^2(c')^2}}\frac{a'\left(y'z''-y''z'\right)}{\sqrt{1-(z')^2(c')^2}}}{1-(z'c')^2} = -\frac{a'y'(a'c''-a''c')(y'z''-y''z')}{\left(1-(z'c')^2\right)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{\varepsilon}{2}\frac{eG+gE-2fF}{EG-F^2} = -\frac{1}{2}\frac{eG+gE-2fF}{EG-F^2} \\ &= -\frac{1}{2}\frac{\frac{a'\left(y'z''-y''z'\right)}{\sqrt{1-(z')^2(c')^2}} + \frac{y'\left(a'c''-a''c'\right)}{\sqrt{1-(z')^2(c')^2}}}{1-(z'c')^2} = -\frac{1}{2}\frac{a'(y'z''-y''z')+y'(a'c''-a''c')}{\left(\sqrt{1-(z')^2(c')^2}\right)^3}. \end{aligned}$$

Caso Timelike

Nesse caso, $\varepsilon = g(N,N) = 1$. Para isso, devemos exigir que:

$$(z')^2(c')^2 > 1.$$

Com isso, o campo normal fica dado por:

$$N = \left(-\frac{y'c'}{\sqrt{(z')^2(c')^2-1}}, -\frac{z'a'}{\sqrt{(z')^2(c')^2-1}}, -\frac{y'a'}{\sqrt{(z')^2(c')^2-1}}\right).$$

Portanto, os últimos coeficientes têm a seguinte expressão:

$$e = g(N, X_{ss}) = -\frac{z'a'y''}{\sqrt{(z')^2(c')^2-1}} + \frac{y'a'z''}{\sqrt{(z')^2(c')^2-1}} = \frac{a'(y'z''-y''z')}{\sqrt{(z')^2(c')^2-1}},$$

$$f = g(N, X_{st}) = 0,$$

$$g = g(N, X_{tt}) = -\frac{y'c'a''}{\sqrt{(z')^2(c')^2-1}} + \frac{y'a'c''}{\sqrt{(z')^2(c')^2-1}} = \frac{y'(a'c''-a''c')}{\sqrt{(z')^2(c')^2-1}}.$$

Portanto, as curvaturas média e gaussiana têm a seguinte expressão:

$$
\begin{aligned}
K &= \varepsilon \frac{eg-f^2}{EG-F^2} = \frac{eg-f^2}{EG-F^2} \\
&= \frac{\frac{y'\left(a'c''-a''c'\right)}{\sqrt{(z')^2(c')^2-1}} \frac{a'\left(y'z''-y''z'\right)}{\sqrt{(z')^2(c')^2-1}}}{1-\left(z'c'\right)^2} = -\frac{\frac{y'\left(a'c''-a''c'\right)}{\sqrt{(z')^2(c')^2-1}} \frac{a'\left(y'z''-y''z'\right)}{\sqrt{(z')^2(c')^2-1}}}{\left(z'c'\right)^2-1} \\
&= -\frac{a'y'\left(a'c''-a''c'\right)\left(y'z''-y''z'\right)}{\left(\left(z'c'\right)^2-1\right)^2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{\varepsilon}{2}\frac{eG+gE-2fF}{EG-F^2} = \frac{1}{2}\frac{eG+gE-2fF}{EG-F^2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\frac{a'\left(y'z''-y''z'\right)}{\sqrt{(z')^2(c')^2-1}} + \frac{y'\left(a'c''-a''c'\right)}{\sqrt{(z')^2(c')^2-1}}}{1-\left(z'c'\right)^2} = -\frac{1}{2}\frac{\frac{a'\left(y'z''-y''z'\right)+y'\left(a'c''-a''c'\right)}{\sqrt{(z')^2(c')^2-1}}}{\left(z'c'\right)^2-1} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{a'\left(y'z''-y''z'\right)+y'\left(a'c''-a''c'\right)}{\left(\sqrt{\left(z'c'\right)^2-1}\right)^3}.
\end{aligned}
$$

Teorema 5.3.4 *A equação $k_1^2+k_2^2=1$ não tem solução se pelo menos uma das curvas não for gráfico de função.*

Prova. Vamos encontrar a família de superfícies de translação que que são soluções da equação $k_1^2+k_2^2=1$. Notemos primeiramente que, como ambas as curvas estão parametrizadas pelo comprimento de arco lorentziano, segue que existem duas funções suaves, $\theta,\varphi:\mathbb{R}\longrightarrow[0,2\pi]$ tais que:

$$
\left\{\begin{array}{l} a'=\cosh\theta \Rightarrow a''=\theta'\sinh\theta, \\ c'=\sinh\theta \Rightarrow c''=\theta'\cosh\theta. \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} y'=\cosh\varphi \Rightarrow y''=\varphi'\sinh\varphi, \\ z'=\sinh\varphi \Rightarrow z''=\varphi'\cosh\varphi. \end{array}\right.
$$

Colocando a equaçãoem função de H e K, e usando suas expressões, obtemos:

$$
\begin{aligned}
1 &= k_1^2+k_2^2 = 4H^2-2\varepsilon K \\
&= 4\left(\frac{1}{2}\frac{a'\left(y'z''-y''z'\right)+y'\left(a'c''-a''c'\right)}{\left(\sqrt{\left(z'c'\right)^2-1}\right)^3}\right)^2 + 2\varepsilon\frac{a'y'\left(a'c''-a''c'\right)\left(y'z''-y''z'\right)}{\left(\left(z'c'\right)^2-1\right)^2} \\
&= \frac{\left(\varphi'\cosh\theta+\theta'\cosh\varphi\right)^2+2\varepsilon\theta'\varphi'\left(\left(\sinh\varphi\sinh\theta\right)^2-1\right)\cosh\theta\cosh\varphi}{\left(\left(\sinh\varphi\sinh\theta\right)^2-1\right)^3}.
\end{aligned}
$$

Isolando a equação, obtemos o seguinte:

$$
\begin{aligned}
0 &= \left(\varphi'\cosh\theta+\theta'\cosh\varphi\right)^2+2\varepsilon\theta'\varphi'\left(\left(\sinh\varphi\sinh\theta\right)^2-1\right)\cosh\theta\cosh\varphi-\left(\left(\sinh\varphi\sinh\theta\right)^2-1\right)^3 \\
&= A+B+C+D+E+F+G.
\end{aligned}
$$

Onde as letras têm os seguintes valores:

$$
\begin{aligned}
A &= 3\sinh^4\theta\sinh^4\varphi, \\
B &= -\sinh^6\theta\sinh^6\varphi, \\
C &= 2\varepsilon\theta'\varphi'\sinh^2\theta\cosh\theta\cosh\varphi\sinh^2\varphi, \\
D &= -3\sinh^2\theta\sinh^2\varphi, \\
E &= (\varphi')^2\cosh^2\theta, \\
F &= (2\theta'\varphi'-2\varepsilon\theta'\varphi')\cosh\theta\cosh\varphi, \\
G &= (\theta')^2\cosh^2\varphi+1.
\end{aligned}
$$

Como o polinômio em senos e cossenos hiperbólicos é simétrico em relação a φ e θ, segue que o raciocínio que faremos agora vale para ambas as curvas, mas escolheremos uma sem perda de generalidade. Suponha que a curva ξ não é um gráfico de função, ou seja, existe um ponto s_0 tal que $|\sinh\varphi(s_0)| = 1$ e $\cosh\varphi(s_0) = 0$. Colocando $s = s_0$ no polinômio, obtemos:

$$3\sinh^4\theta - \sinh^6\theta + \left((\varphi'(s_0))^2 - 3\right)\sinh^2\theta + \left((\varphi'(s_0))^2 + 1\right) = 0.$$

Que é um polinômio de grau 6 em $\sinh\theta$. Concluímos disso que $\sinh\theta$ pode assumir no máximo 6 valores, mas isso é um absurdo pois ele pode assumir infinitos valores.

Logo, a equação $k_1^2 + k_2^2 = 1$ não tem solução se pelo menos uma das curvas não for gráfico de função. ■

5.3.10 Superfície de Translação (Plano XZ e YZ, Ambas as Curvas são Gráficos)

Para esse caso temos que as curvas são da seguinte forma: $\gamma(t) = (t, 0, c(t))$ e $\xi(s) = (0, s, z(s))$. Logo, a parametrização fica da seguinte forma:

$$X(s,t) = \gamma(t) + \xi(s) = (t, s, c(t) + z(s)).$$

Portanto, a única diferença que obtemos é que:

$$a' = y' = 1 \Rightarrow a'' = y'' = 0.$$

Usando isso nas expressões de K e H concluímos que suas expressões ficam da seguinte maneira:

Caso Spacelike

$$K = -\frac{c''z''}{\left(1 - (z'c')^2\right)^2},$$

$$H = -\frac{1}{2}\frac{z'' + c''}{\left(\sqrt{1 - (z')^2(c')^2}\right)^3}.$$

Caso Timelike

$$K = -\frac{c''z''}{\left((z'c')^2 - 1\right)^2},$$

$$H = -\frac{1}{2}\frac{z'' + c''}{\left(\sqrt{(z'c')^2 - 1}\right)^3}.$$

Teorema 5.3.5 *As superfícies desse tipo com $H = 0$ têm a seguinte parametrização:*

$$X(s,t) = \begin{pmatrix} t \\ s \\ C\frac{s^2}{2} + C_1 s + C_2 - C\frac{t^2}{2} + C_3 t + C_4 \end{pmatrix}, \qquad (C, C_1, C_2, C_3, C_4) \in \mathbb{R}^5.$$

Prova. Vamos supor a equação $H = 0$ resolvida, usar que só o numerador da fração é importante e colocar tudo em funções angulares, obtemos o seguinte:

$$0 = H = z'' + c''.$$

Segue que temos uma função de s igual a uma função de t:

$$z'' = -c''.$$

Mas isso só ocorre se ambas forem funções constantes, ou seja:

$$z'' = C \qquad c'' = -C.$$

Integrando ambos os lados duas vezes, concluímos que:

$$z(s) = C\frac{s^2}{2} + C_1 s + C_2 \qquad , \qquad c(t) = -C\frac{t^2}{2} + C_3 t + C_4.$$

Portanto a parametrização fica da seguinte forma:

$$X(s,t) = \begin{pmatrix} t \\ s \\ C\frac{s^2}{2} + C_1 s + C_2 - C\frac{t^2}{2} + C_3 t + C_4 \end{pmatrix}, \qquad (C, C_1, C_2, C_3, C_4) \in \mathbb{R}^5.$$

■

Capítulo 6

O Hiperboloide $\mathbb{I}_3$

Em alguns casos é interessante passar o problema para um outro espaço isométrico ao $\mathbb{H}^3$: Assim, o objetivo dessa seção é apresentar as propriedades do hiperboloide lorentziano, que é um outro modelo hiperbólico, isométrico ao $\mathbb{H}^3$: Entender esse modelo nos possibilita passar um problema, que é mais difícil no $\mathbb{H}^3$; para um mundo onde talvez o problema fique mais fácil, tentaremos fazer isso com o hiperboloide $\mathbb{I}_3$:

Definição 6.0.6 *Definimos o hiperboloide* $\mathbb{I}_3$ *como o conjunto* $\left\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a^2 + b^2 + c^2 - d^2 = -1, d > 0\right\}$ *munido da métrica do* $\mathbb{L}^4$.

6.1 Imersões Isométricas

Seja S uma superfície em $\mathbb{I}_3$ e $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S \subset \mathbb{I}_3$ sua parametrização. Seja $dX.e_1, dX.e_2$ denotados por x_u, x_v respectivamente. Temos que $\{x_u, x_v\}$ é base de T_pS para todo $p \in S$. Note que dado um ponto $p \in \mathbb{I}_3$ e $v \in T_p\mathbb{I}_3$, sempre podemos tomar uma curva suave $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t), \gamma_4(t)) \in \mathbb{I}_3$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Segue disso que $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - \gamma_4^2 = -1$

Derivando ambos os lados, obtemos que:

$$0 = 2\gamma_1\gamma_1' + 2\gamma_2\gamma_2' + 2\gamma_3\gamma_3' - 2\gamma_4\gamma_4' = 2g\left(\gamma, \gamma'\right).$$

Em particular, para $t = 0$, obtemos que $p \perp v$. Vamos usar v como o vetor normal que queremos encontrar. Façamos o seguinte determinante:

$$\eta = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ x_{u_1} & x_{u_2} & x_{u_3} & -x_{u_4} \\ x_{v_1} & x_{v_2} & x_{v_3} & -x_{v_4} \\ a & b & c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -bx_{u_3}x_{v_4} + bx_{u_4}x_{v_3} + cx_{u_2}x_{v_4} - cx_{u_4}x_{v_2} - dx_{u_2}x_{v_3} + dx_{u_3}x_{v_2} \\ ax_{u_3}x_{v_4} - ax_{u_4}x_{v_3} + dx_{u_1}x_{v_3} - dx_{u_3}x_{v_1} - cx_{u_1}x_{v_4} + cx_{v_1}x_{u_4} \\ -ax_{u_2}x_{v_4} + ax_{u_4}x_{v_2} + bx_{u_1}x_{v_4} - bx_{v_1}x_{u_4} - dx_{u_1}x_{v_2} + dx_{u_2}x_{v_1} \\ -ax_{u_2}x_{v_3} + ax_{u_3}x_{v_2} + bx_{u_1}x_{v_3} - bx_{u_3}x_{v_1} - cx_{u_1}x_{v_2} + cx_{u_2}x_{v_1} \end{pmatrix}.$$

Note que esse vetor é ortogonal à base coordenada e ao ponto $p = (a, b, c, d) \in \mathbb{I}_3$. Portanto podemos definir nosso compo normal unitário como sendo:

$$N = \frac{\eta}{|\eta|}.$$

Por um raciocínio exatamente igual ao efetuado no $\mathbb{R}^3$ obtemos novamente que as curvaturas média e gaussiana são dadas por:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2},$$

$$H = \frac{1}{2}\frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2}.$$

Sendo os coeficientes todos dados da seguinte maneira:

$$e = g\left(N, X_{ss}\right), \quad f = g\left(N, X_{st}\right), \quad g = g\left(N, X_{tt}\right),$$
$$E = g\left(X_s, X_s\right), \quad F = g\left(X_t, X_s\right), \quad G = g\left(X_t, X_t\right).$$

Observação 6.1.1 *O raciocínio para chegar Às expressões é exatamente igual ao caso do euclidiano, a única mudança é o significado da métrica* g *onde aqui ela significa a métrica do* $\mathbb{L}^4$ *enquanto o caso anterior se referia à métrica canônica euclidiana.*

6.2 Os Três Modelos Hiperbólicos e Suas Relações

Os três modelos hiperbólicos são semi-plano superior, o hiperboloide e o disco de Poincaré. Já estamos bem familiarizados com os dois primeirs modelos. Para entender o disco de Poincaré, vamos definir a seguinte aplicação:

$$\pi : \mathbb{L}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$
$$\pi(x) = \frac{(x_1, x_2, x_3)}{1 + x_4}.$$

Que projeta o hiperboloide no plano abaixo, com relação ao ponto focal $P = (0, 0, 0, -1)$Temos que π leva o hiperboloide difeomorficamente no disco de Poincaré. Logo esse modelo é definido como:

$$D^3 = \{\pi(\mathbb{I}_3); g_d\}.$$

Onde a métrica do disco é o push forward da métrica do hiperboloide, ou seja, sendo g_d a métrica do disco e g_h a métrica do hiperboloide, temos:

$$g_d = g_h \circ \pi^{-1}.$$

Temos que todos os três modelos são isométricos entre si. Nos resta apresentar a última isometria em questão para fechar o ciclo. E ela é dada por:

$$i : D^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$
$$i(x) = 2\frac{x + e_3}{\|x + e_3\|^2_{\mathbb{R}^3}} - e_3.$$

leva o disco de Poincaré difeomorficamente no semi-plano superior.

Vamos agora encontrar a expressão da função que leva o hiperboloide no semi-plano superior, e sua inversa também. Denotando a função por $\Psi : \mathbb{I}_3 \longrightarrow \mathbb{H}^3$ segue que:

$$\begin{aligned}
\Psi(x) = i \circ \pi(x) &= i\left(\frac{(x_1, x_2, x_3)}{1 + x_4}\right) \\
&= 2\frac{\left(\frac{(x_1,x_2,x_3)}{1+x_4}\right) + e_3}{\left\|\left(\frac{(x_1,x_2,x_3)}{1+x_4}\right) + e_3\right\|^2_{\mathbb{R}^3}} - e_3 = 2\frac{\left(\frac{(x_1,x_2,x_3+x_4+1)}{1+x_4}\right)}{\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{(1+x_4)^2} + \frac{2x_3}{(1+x_4)} + 1} - e_3 \\
&= 2\left(\frac{(1 + x_4)(x_1, x_2, x_3 + x_4 + 1)}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_3(1 + x_4) + (1 + x_4)^2}\right) - e_3 \\
&= 2\left(\frac{(1 + x_4)(x_1, x_2, x_3 + x_4 + 1)}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_3x_4 + 2x_3 + 2x_4 + 1}\right) - e_3 \\
&= \left(\frac{(1 + x_4)(x_1, x_2, x_3 + x_4 + 1)}{x_4^2 + x_3x_4 + x_3 + x_4}\right) - e_3 \\
&= \frac{(1 + x_4)(x_1, x_2, x_3 + x_4 + 1)}{x_4^2 + x_3x_4 + x_3 + x_4} - \frac{(0, 0, x_4^2 + x_3x_4 + x_3 + x_4)}{x_4^2 + x_3x_4 + x_3 + x_4} \\
&= \frac{(x_1, x_2, 1)}{x_3 + x_4}.
\end{aligned}$$

Agora vamos encontrar Ψ^{-1} para isso, precisamos das inversas de i e π. Primeiramente notemos que:

$$\begin{aligned}
i \circ i(x) &= 2\frac{(i(x)) + e_3}{\|(i(x)) + e_3\|^2_{\mathbb{R}^3}} - e_3 = 2\frac{\left(2\frac{(x)+e_3}{\|(x)+e_3\|^2_{\mathbb{R}^3}} - e_3\right) + e_3}{\left\|\left(2\frac{(x)+e_3}{\|(x)+e_3\|^2_{\mathbb{R}^3}} - e_3\right) + e_3\right\|^2_{\mathbb{R}^3}} - e_3 \\
&= 2\frac{2\frac{(x)+e_3}{\|(x)+e_3\|^2_{\mathbb{R}^3}}}{\frac{4}{\|(x+e_3\|^4_{\mathbb{R}^3}}\|x + e_3\|^2_{\mathbb{R}^3}} - e_3 \\
&= 4\frac{(x) + e_3}{4} - e_3 = x + e_3 - e_3 = x.
\end{aligned}$$

Portanto a própria função i é a sua inversa, ou seja:

$$i^{-1} = i.$$

Como π é uma projeção, vamos inverter o sentido da reta de projeção para encontrar a função que leva o disco no hiperboloide, ou seja, π^{-1}. Seja $P = (0, 0, 0, -1)$ o ponto focal, r uma reta arbitrária que liga um ponto do disco à um ponto do hiperboloide, e seja $Q = (x_1, x_2, x_3, 0)$ o ponto de contato de r co o plano que se situa abaixo do hiperboloide. Segue que:

$$r(t) = P + t\,(Q - P) = (0, 0, 0, -1) + t\,((x_1, x_2, x_3, 0) - (0, 0, 0, -1)) = (tx_1, tx_2, tx_3, t - 1)\,.$$

Queremos encontrar o valor de t para o qual a reta r toca o hiperboloide $\mathbb{I}_3$. Ou seja, queremos que:

$$(tx_1)^2 + (tx_2)^2 + (tx_3)^2 - (t - 1)^2 = -1.$$

Disso, obtemos o valor de t da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
0 &= (tx_1)^2 + (tx_2)^2 + (tx_3)^2 - (t - 1)^2 + 1 \\
&= \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) t^2 - \left(t^2 - 2t + 1\right) + 1 \\
&= \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1\right) t^2 + 2t = 0 \\
&\Rightarrow t = 0 \qquad \text{ou} \qquad t = -\frac{2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)}.
\end{aligned}$$

Logo,$t = 0$ vale pois P pertence a folha inferior do hiperboloide, por conseguinte $t_0 = -\frac{2}{\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1\right)}$ toca em $\mathbb{I}_3$. Aplicando r para esse valor de t concluímos que:

$$r\left(t_0\right) = \left(-\frac{2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)}x_1, -\frac{2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)}x_2, -\frac{2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)}x_3, -\frac{2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)} - 1\right).$$

Que é, justamente a inversa da função π, que pegava um ponto do hiperboloide e projetava no $\mathbb{R}^3$ com respeito ao ponto P. Ou seja:

$$\pi^{-1} : D_3 \longrightarrow \mathbb{I}_3,$$

$$\pi^{-1}(x_1, x_2, x_3) = r\left(t_0\right).$$

De fato, compondo ambas as funções obtemos:

$$\begin{aligned}
&\pi \circ \pi^{-1}(x_1, x_2, x_3) \\
&= \pi\left(\left(-\frac{2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)}x_1, -\frac{2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)}x_2, -\frac{2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)}x_3, -\frac{2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)} - 1\right)\right) \\
&= \frac{\left(-\frac{2}{\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1\right)}x_1, -\frac{2}{\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1\right)}x_2, -\frac{2}{\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1\right)}x_3\right)}{\left(-\frac{2}{\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1\right)} - 1\right) + 1} \\
&= \frac{\left(-\frac{2}{\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1\right)}x_1, -\frac{2}{\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1\right)}x_2, -\frac{2}{\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1\right)}x_3\right)}{-\frac{2}{\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1\right)}} = (x_1, x_2, x_3)\,.
\end{aligned}$$

Por outro lado, também temos a mesma identidade:

$$
\begin{aligned}
\pi^{-1}\circ\pi(x_1,x_2,x_3,x_4) &= \pi^{-1}\left(\frac{x_1}{1+x_4},\frac{x_2}{1+x_4},\frac{x_3}{1+x_4}\right)\\
&= \begin{pmatrix}
-\frac{2}{\left(\left(\frac{x_1}{1+x_4}\right)^2+\left(\frac{x_2}{1+x_4}\right)^2+\left(\frac{x_3}{1+x_4}\right)^2-1\right)}\frac{x_1}{1+x_4}\\
-\frac{2}{\left(\left(\frac{x_1}{1+x_4}\right)^2+\left(\frac{x_2}{1+x_4}\right)^2+\left(\frac{x_3}{1+x_4}\right)^2-1\right)}\frac{x_2}{1+x_4}\\
-\frac{2}{\left(\left(\frac{x_1}{1+x_4}\right)^2+\left(\frac{x_2}{1+x_4}\right)^2+\left(\frac{x_3}{1+x_4}\right)^2-1\right)}\frac{x_3}{1+x_4}\\
-\frac{2}{\left(\left(\frac{x_1}{1+x_4}\right)^2+\left(\frac{x_2}{1+x_4}\right)^2+\left(\frac{x_3}{1+x_4}\right)^2-1\right)}-1
\end{pmatrix}\\
&= \left(-\frac{2x_1\,(1+x_4)}{-2\,(x_4+1)},-\frac{2x_2\,(1+x_4)}{-2\,(x_4+1)},-\frac{2x_3\,(1+x_4)}{-2\,(x_4+1)},-\frac{2\,(1+x_4)}{-2\,(x_4+1)}-1\right)\\
&= (x_1,x_2,x_3,x_4)\,.
\end{aligned}
$$

Portanto já podemos encontrar a expressão de $\Psi^{-1}:\mathbb{H}^3\longrightarrow\mathbb{I}_3$:

$$
\begin{aligned}
\Psi^{-1}(x_1,x_2,x_3) &= \pi^{-1}\circ i^{-1}(x_1,x_2,x_3) = \pi^{-1}\circ i(x_1,x_2,x_3)\\
&= \pi^{-1}\left(\frac{2(x_1,x_2,x_3+1)}{\|(x_1,x_2,x_3+1)\|^2_{\mathbb{R}^3}}-e_3\right)\\
&= \begin{pmatrix}
-\frac{\left(\frac{4x_1}{(x_1^2+x_2^2+(x_3+1)^2)}\right)}{\left(\left(\frac{2x_1}{(x_1^2+x_2^2+(x_3+1)^2)}\right)^2+\left(\frac{2x_2}{(x_1^2+x_2^2+(x_3+1)^2)}\right)^2+\left(\frac{2(x_3+1)-\left(x_1^2+x_2^2+(x_3+1)^2\right)}{(x_1^2+x_2^2+(x_3+1)^2)}\right)^2-1\right)},\\
-\frac{\frac{4x_2}{(x_1^2+x_2^2+(x_3+1)^2)}}{\left(\left(\frac{2x_1}{(x_1^2+x_2^2+(x_3+1)^2)}\right)^2+\left(\frac{2x_2}{(x_1^2+x_2^2+(x_3+1)^2)}\right)^2+\left(\frac{2(x_3+1)-\left(x_1^2+x_2^2+(x_3+1)^2\right)}{(x_1^2+x_2^2+(x_3+1)^2)}\right)^2-1\right)},\\
-\frac{\frac{4(x_3+1)-2\left(x_1^2+x_2^2+(x_3+1)^2\right)}{(x_1^2+x_2^2+(x_3+1)^2)}}{\left(\left(\frac{2x_1}{(x_1^2+x_2^2+(x_3+1)^2)}\right)^2+\left(\frac{2x_2}{(x_1^2+x_2^2+(x_3+1)^2)}\right)^2+\left(\frac{2(x_3+1)-\left(x_1^2+x_2^2+(x_3+1)^2\right)}{(x_1^2+x_2^2+(x_3+1)^2)}\right)^2-1\right)},\\
-\frac{2}{\left(\left(\frac{2x_1}{(x_1^2+x_2^2+(x_3+1)^2)}\right)^2+\left(\frac{2x_2}{(x_1^2+x_2^2+(x_3+1)^2)}\right)^2+\left(\frac{2(x_3+1)-\left(x_1^2+x_2^2+(x_3+1)^2\right)}{(x_1^2+x_2^2+(x_3+1)^2)}\right)^2-1\right)}-1
\end{pmatrix}\\
&= \left(\frac{x_1}{x_3},\frac{x_2}{x_3},-\frac{\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1\right)}{2x_3},\frac{\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+1\right)}{2x_3}\right).
\end{aligned}
$$

De fato, compondo ambas as funções obtemos:

$$
\begin{aligned}
\Psi\circ\Psi^{-1}(x_1,x_2,x_3) &= \Psi\left(\left(\frac{x_1}{x_3},\frac{x_2}{x_3},-\frac{\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1\right)}{2x_3},\frac{\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+1\right)}{2x_3}\right)\right)\\
&= \frac{\left(\frac{x_1}{x_3},\frac{x_2}{x_3},1\right)}{\frac{1}{x_3}} = (x_1,x_2,x_3)\,.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, sendo $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ teremos a mesma identidade:

$$
\begin{aligned}
\Psi^{-1} \circ \Psi(x) &= \Psi^{-1}\left(\frac{x_1}{x_3+x_4}, \frac{x_2}{x_3+x_4}, \frac{1}{x_3+x_4}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c}
\frac{\frac{x_1}{x_3+x_4}}{\frac{1}{x_3+x_4}}, \frac{\frac{x_2}{x_3+x_4}}{\frac{1}{x_3+x_4}} \\
-\frac{\left(\frac{x_1}{x_3+x_4}\right)^2+\left(\frac{x_2}{x_3+x_4}\right)^2+\left(\frac{1}{x_3+x_4}\right)^2-1}{\frac{2}{x_3+x_4}} \\
\frac{\left(\frac{x_1}{x_3+x_4}\right)^2+\left(\frac{x_2}{x_3+x_4}\right)^2+\left(\frac{1}{x_3+x_4}\right)^2+1}{\frac{2}{x_3+x_4}}
\end{array}\right) \\
&= \left(x_1, x_2, -\frac{\left(x_1^2+x_2^2-x_3^2-2x_3x_4-x_4^2+1\right)}{2\left(x_3+x_4\right)}, \frac{\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_3x_4+x_4^2+1\right)}{2\left(x_3+x_4\right)}\right) \\
&= \left(x_1, x_2, -\frac{\left(x_4^2-1-2x_3^2-2x_3x_4-x_4^2+1\right)}{2\left(x_3+x_4\right)}, \frac{\left(x_4^2-1+2x_3x_4+x_4^2+1\right)}{2\left(x_3+x_4\right)}\right) \\
&= \left(x_1, x_2, x_3, x_4\right).
\end{aligned}
$$

Portanto temos o seguinte ciclo que relaciona os três modelos:

$$\mathbb{I}_3 \xrightarrow{\pi} D_3 \xrightarrow{i} \mathbb{H}^3 \xrightarrow{\Psi^{-1}} \mathbb{I}_3.$$

6.3 Transportando o Problema

Determinados problemas são muito mais fáceis de se resolver em um determinado local, que em outro. Temos que $\mathbb{I}_3$ e $\mathbb{H}^3$ são difeomorfos pela função Ψ^{-1}. Vamos levar alguns problemas para o $\mathbb{I}_3$ de modo a facilitar sua resolução.

6.3.1 Superfície de Revolução Euclidiana no $\mathbb{I}_3$

Primeiramente, precisamos definir um plano que conterá um eixo de rotação e uma curva na qual será rotacionada ao redor desse eixo. De modo a facilitar os cálculos, vamos tomar o seguinte plano:

Seja o plano $\Pi = \{(x,y,z) : y = 0\}$, no qual foi usado no nosso exemplo anterior. O plano que vamos trabalhar no Lorentziano é:

$$\Pi_L = \Psi^{-1}(\Pi) = \left\{\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, -\frac{\left(x^2+z^2-1\right)}{2z}, \frac{\left(x^2+z^2+1\right)}{2z}\right) : z > 0\right\}.$$

Proposição 6.3.1 *Temos a seguinte igualdade de conjuntos:* $\Pi_L = \{\langle e_1, e_3, e_4\rangle\} \cap \mathbb{I}_3$

Prova. De fato, dado $v \in \Pi_L$, segue que existem x_0, z_0 fixos tais que $v = \frac{x}{z}e_1 - \frac{\left(x^2+z^2-1\right)}{2z}e_3 + \frac{\left(x^2+z^2+1\right)}{2z}e_4$ e $\langle v, v\rangle_M = \left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(-\frac{\left(x^2+z^2-1\right)}{2z}\right)^2 - \left(\frac{\left(x^2+z^2+1\right)}{2z}\right)^2 = -1$, ou seja, $\Pi_L \subset \{\langle e_1, e_3, e_4\rangle\} \cap \mathbb{I}_3$. Agora dado $w \in \{\langle e_1, e_3, e_4\rangle\} \cap \mathbb{I}_3$, temos que $w = (a, 0, c, d)$ e $a^2 + c^2 - d^2 = -1$. Tome $z = \frac{d-c}{a^2+1}$ e $x = a\frac{d-c}{a^2+1}$.Segue que:

$$\frac{x}{z} = \frac{a\frac{d-c}{a^2+1}}{\frac{d-c}{a^2+1}} = a,$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{\left(x^2+z^2-1\right)}{2z} &= -\frac{\left(\left(a\frac{d-c}{a^2+1}\right)^2 + \left(\frac{d-c}{a^2+1}\right)^2 - 1\right)}{2\frac{d-c}{a^2+1}} = -\frac{\left(a^2-c^2+2cd-d^2+1\right)}{2c-2d} \\
&= -\frac{\left(-1-2c^2+2cd+1\right)}{2c-2d} = c,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\left(x^2+z^2+1\right)}{2z} &= \frac{\left(a\frac{d-c}{a^2+1}\right)^2 + \left(\frac{d-c}{a^2+1}\right)^2 + 1}{2\frac{d-c}{a^2+1}} = -\frac{\left(a^2+c^2-2cd+d^2+1\right)}{2c-2d} \\
&= -\frac{\left(-1-2cd+2d^2+1\right)}{2c-2d} = d.
\end{aligned}
$$

Logo , segue que $w \in \Pi_L$ ■

Dessa proposição, obtemos que uma curva em Π_L é da forma:

$$c(t) = (x(t), 0, z(t), w(t)) : (x(t))^2 + (z(t))^2 - (w(t))^2 = -1.$$

Vamos obter uma parametrização de uma superfície de revolução em $\mathbb{I}_3$ levando a curva c para o $\mathbb{H}^3$ rotacionando em torno do eixo z e trazendo essa parametrização de volta para o $\mathbb{I}_3$:

$$c_H(t) = \Psi \circ c(t) = \Psi(x, 0, z, w) = \left(\frac{x}{z+w}, 0, \frac{1}{z+w}\right).$$

Já sabemos, do exemplo anterior a estrutura da parametrização de uma superfície de revolução euclidiana no $\mathbb{H}^3$, nesse caso temos a seguinte parametrização:

$$X(u,v) = \left(\frac{x(u)}{z(u)+w(u)}\cos v, \frac{x(u)}{z(u)+w(u)}\sin v, \frac{1}{z(u)+w(u)}\right).$$

Concluímos disso, que a parametrização de uma boa parametrização para uma superfície de revolução euclidiana no $\mathbb{I}_3$ é:

$$\varphi(u,v) = (x(u)\cos v, x(u)\sin v, z(u), w(u)).$$

Agora vamos calcular suas curvaturas Gaussiana e Média. Comecemos derivando a parametrização

$$\varphi_u = (x'\cos v, x'\sin v, z', w'),$$

$$\varphi_v = (-x\sin v, x\cos v, 0, 0).$$

Segue disso que já podemos calcular E, F, G e o campo normal N :

$$E = g(\varphi_u, \varphi_u) = (x'\cos v)^2 + (x'\sin v)^2 + (z')^2 - (w')^2 = (x')^2 + (z')^2 - (w')^2 = 1,$$

$$F = g(\varphi_u, \varphi_v) = -x\sin v x'\cos v + x'\sin v x\cos v = 0,$$

$$G = g(\varphi_v, \varphi_v) = (-x\sin v)^2 + (x\cos v)^2 = x^2,$$

$$\eta = (x(\cos v)(wz' - zw'), x(\sin v)(wz' - zw'), x(xw' - wx'), x(xz' - zx')),$$

$$\begin{aligned}
|\eta| &= \sqrt{(x(\cos v)(wz' - zw'))^2 + (x(\sin v)(wz' - zw'))^2 + (x(wx' - xw'))^2 - (x(xz' - zx'))^2} \\
&= x\sqrt{((\cos v)(wz' - zw'))^2 + ((\sin v)(wz' - zw'))^2 + ((wx' - xw'))^2 - ((xz' - zx'))^2} \\
&= x\sqrt{w^2((x')^2 + (z')^2) - 2wxx'w' - 2wzz'w' - x^2((z')^2 - (w')^2) + 2xzx'z' - z^2((x')^2 - (w')^2)} \\
&= x\sqrt{w^2(1 + (w')^2) - 2wxx'w' - 2wzz'w' - x^2(1 - (x')^2) + 2xzx'z' - z^2(1 - (z')^2)} \\
&= x\sqrt{1 + w^2(w')^2 - 2wxx'w' - 2wzz'w' + x^2(x')^2 + 2xzx'z' + z^2(z')^2} \\
&= x\sqrt{1 + ww'(ww' - xx' - zz') + xx'(xx' + zz' - ww') + xzx'z' + zz'(zz' + xx' - ww')} \\
&= x\sqrt{1} = x,
\end{aligned}$$

$$N = ((\cos v)(wz' - zw'), (\sin v)(wz' - zw'), xw' - wx', xz' - zx'),$$

$$\varphi_{uu} = (x''\cos v, x''\sin v, z'', w''),$$

$$\varphi_{vv} = (-x\cos v, -x\sin v, 0, 0),$$

$$\varphi_{vu} = (-x'\sin v, x'\cos v, 0, 0).$$

Segue que os coeficientes e, f, e g não dados pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
e &= g\left(N, \varphi_{uu}\right) \\
&= \left(\cos v\right)\left(wz' - zw'\right)x'' \cos v + \left(\sin v\right)\left(wz' - zw'\right)x'' \sin v + z''\left(xw' - wx'\right) - w''\left(xz' - zx'\right) \\
&= \left(wz' - zw'\right)x'' + \left(xw' - wx'\right)z'' + \left(zx' - xz'\right)w'',
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f &= g\left(N, \varphi_{vu}\right) \\
&= -x' \sin v \left(\cos v\right)\left(wz' - zw'\right) + x' \cos v \left(\sin v\right)\left(wz' - zw'\right) = 0,
\end{aligned}$$

$$g = g\left(N, \varphi_{vv}\right) = -\left(\cos v\right)\left(wz' - zw'\right)x \cos v - \left(\sin v\right)\left(wz' - zw'\right)x \sin v = -x\left(wz' - zw'\right).$$

Segue disso que as curvaturas média e gaussiana da superfície são dadas por:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{\left(wx'z'' + xz'w'' - xz''w' - zx'w'' + zx''w' - vwx''z'\right)\left(wz' - zw'\right)}{x},$$

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2}\frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2} = \frac{1}{2}\frac{\left(\left(wz' - zw'\right)x'' + \left(xw' - wx'\right)z'' + \left(zx' - xz'\right)w''\right)x^2 + x\left(zw' - wz'\right)}{x^2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\left(wz' - zw'\right)x'' + \left(xw' - wx'\right)z'' + \left(zx' - xz'\right)w''\right) + \frac{\left(zw' - wz'\right)}{x}\right).
\end{aligned}$$

Observando ambas as expressões, concluímos facilmente que as curvaturas principais são dadas por:

$$\begin{aligned}
k_1 &= \left(\left(vwz' - zw'\right)x'' + \left(xw' - wx'\right)z'' + \left(zx' - xz'\right)w''\right), \\
k_2 &= \frac{\left(zw' - wz'\right)}{x}.
\end{aligned}$$

Agora vamos colocar uma das curvaturas principais em função de x e de suas derivadas:

$$\begin{aligned}
z = \sqrt{\left(x^2 + 1\right)} \sinh \varphi &\Rightarrow z' = \left(\frac{x \sinh \varphi}{\left(x^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}}} + \left(x^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}} \varphi' \cosh \varphi\right), \\
w = \sqrt{\left(x^2 + 1\right)} \cosh \varphi &\Rightarrow w' = \left(\frac{x \cosh \varphi}{\left(x^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}}} + \left(x^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}} \varphi' \sinh \varphi\right).
\end{aligned}$$

Para a segunda curvatura principal, obtemos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
k_2 &= \frac{\left(zw' - wz'\right)}{x} \\
&= \frac{\left(\sqrt{\left(x^2 + 1\right)} \sinh \varphi \left(\frac{x \cosh \varphi}{\left(x^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}}} + \left(x^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}} \varphi' \sinh \varphi\right) - \sqrt{\left(x^2 + 1\right)} \cosh \varphi \left(\frac{x \sinh \varphi}{\left(x^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}}} + \left(x^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}} \varphi' \cosh \varphi\right)\right)}{x} \\
&= \frac{\left(\left(x^2 - 1\right)\varphi' \sinh^2 \varphi - \left(x^2 - 1\right)\varphi' \cosh^2 \varphi\right)}{x} \\
&= \frac{-\left(x^2 - 1\right)\varphi'}{x}.
\end{aligned}$$

Agora, precisamos, de alguma forma, colocar φ' em termos de x e de suas derivadas. Temos que:

$$\left(x'\right)^2 + \left(z'\right)^2 - \left(w'\right)^2 = 1 \Rightarrow \left(x'\right)^2 = 1 - \left(z'\right)^2 + \left(w'\right)^2.$$

Colocando em termos da função ângulo φ obtemos:

$$\begin{aligned}
\left(x'\right)^2 &= 1 - \left(\frac{x \sinh \varphi}{\left(x^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}}} + \left(x^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}} \varphi' \cosh \varphi\right)^2 + \left(\frac{x \cosh \varphi}{\left(x^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}}} + \left(x^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}} \varphi' \sinh \varphi\right)^2 \\
&= \frac{2x^2 - (\varphi')^2 + 2x^2(\varphi')^2 - x^4(\varphi')^2 - 1}{\left(x^2 - 1\right)}.
\end{aligned}$$

Isolando φ' encontramos a seguinte expressão:

$$\varphi' = \sqrt{-\frac{(x^2(x')^2 - 2x^2 - (x')^2 + 1)}{(x^2-1)^2}} = \frac{\sqrt{-x^2(x')^2 + 2x^2 + (x')^2 - 1}}{x^2 - 1}.$$

Agora podemos voltar na equação anterior e usar o valor de φ' :

$$k_2 = \frac{-\left(x^2-1\right)\varphi'}{x} = \frac{-\sqrt{-x^2(x')^2 + 2x^2 + (x')^2 - 1}}{x}.$$

Capítulo 7

Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^4$

Agora vamos estudar a teoria de imersões isométricas em uma variedade com uma dimensão maior que a usual. Vamos generalizar as expressões das curvaturas média e gaussiana e também os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais. Apresentaremos todos os operadores adaptados para o $\mathbb{R}^4$ e as expressões das curvaturas das superfícies imersas. Finalizaremos com o exemplo de superfícies que são gráficos de alguma função.

7.1 Conexão Levi-Civita e Curvaturas

Primeiramente vamos encontrar a matriz da métrica e sua inversa e com isso encontraremos os símbolos de Christoffel. Segue que:

$$(g_{ij}) = (g^{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para uma variedade riemanniana qualquer, temos que a conexão de Christoffel é dada por:

$$\Gamma_{i,j}^m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} \left\{ \partial_i(g_{jk}) + \partial_j(g_{ki}) - \partial_k(g_{ij}) \right\} g^{km}.$$

onde $\{\partial_i\}_{i=1}^n$ é base e (g_{ij}) é a matriz da métrica riemanniana de $T_P M$, e $\left(g^{ij}\right)$ é sua matriz inversa. Como os g_{ij}'s são constantes para todo $i, j = 1, ..., 4$, segue que:

$$e_\lambda(g_{ij}) = 0 \quad \forall i, j, \lambda = 1, ..., 4.$$

Portanto temos que:

$$\Gamma_{i,j}^m = 0 \quad \forall i, j, m = 1, ..., 4.$$

Agora vamos calcular aconexão do ambiente. Seja os campos $X, Y : M \longrightarrow TM$, onde:

$$X(P) = \sum_{i=1}^{4} x_i(P)\partial_i(P) \ ; \quad Y(P) = \sum_{j=1}^{4} y_j(P)\partial_j(P).$$

Usando a expressão geral da conexão e que os símbolos de Christoffel são todos nulos segue que a conexão do ambiente é dada por:

$$\nabla_X Y(P) = \left[\sum_{k=1}^{4} \left(\sum_{i,j=1}^{3} x_i y_j \Gamma_{i,j}^k + X(y_k) \right) \partial_k \right](P) = \sum_{k=1}^{3} X(y_k)\, e_k = \left(X(y_1), X(y_2), X(y_3), X(y_4) \right) = dY_P.X.$$

Vamos agora efetuar o cálculo as curvaturas do ambiente. Sejam os campos $X, Y, Z : M \longrightarrow TM$, com

$$X(P) = \sum_{i=1}^{4} x_i(P)\partial_i(P) \qquad Y(P) = \sum_{j=1}^{4} y_j(P)\partial_j(P) \qquad Z(P) = \sum_{k=1}^{4} z_k(P)\partial_k(P).$$

Logo, o tensor curvatura é:

$$(R(X,Y)Z)(P) = \sum_{i,j,k,l=1}^{4} R^l_{i,j,k}(P)x_i(P)y_j(P)z_k(P)e_l.$$

Onde os coeficientes são dados por:

$$R^s_{i,j,k} = (\sum_{l=1}^{4}\Gamma^l_{i,k}\Gamma^s_{j,l} - \sum_{l=1}^{4}\Gamma^l_{j,k}\Gamma^s_{i,l} + e_j\left(\Gamma^s_{i,k}\right) - e_i(\Gamma^s_{j,k}) \equiv 0, \qquad i,j,k,s = 1,...,4.$$

Como todos os coeficientes são nulos concluímos que:

$$R(X,Y)Z \equiv 0.$$

Pela expressão geral da curvatura seccional e pelo fato do tensor curvatura ser nulo, segue que ela é zero, o mesmo vale para a curvatura de Ricci. Como a curvatura de Ricci é nula, concluímos que a curvatura escalar também é. Portanto todas as curvaturas do ambiente são nulas.

7.2 Imersões Isométricas

Seja S uma superfície em $\mathbb{R}^4$ e $x : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^4$ sua parametrização. Seja $dx.e_1, dx.e_2$ e $dx.e_3$ denotados por x_u, x_v e x_w respectivamente. Temos que $\{x_u, x_v, x_w\}$ é base de T_PS, para todo $p \in S$.

Seja $\{e_i\}_{i=1}^4$ base canônica euclidiana. Vamos calcular o seguinte determinante:

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ x_{u_1} & x_{u_2} & x_{u_3} & x_{u_4} \\ x_{v_1} & x_{v_2} & x_{v_3} & x_{v_4} \\ x_{w_1} & x_{w_2} & x_{w_3} & x_{w_4} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} x_{u_2}x_{v_3}x_{w_4} - x_{u_2}x_{v_4}x_{w_3} - x_{u_3}x_{v_2}x_{w_4} + x_{u_3}x_{v_4}x_{w_2} + x_{u_4}x_{v_2}x_{w_3} - x_{u_4}x_{v_3}x_{w_2} \\ -x_{u_1}x_{v_3}x_{w_4} + x_{u_1}x_{v_4}x_{w_3} + x_{u_3}x_{v_1}x_{w_4} - x_{u_3}x_{w_1}x_{v_4} - x_{v_1}x_{u_4}x_{w_3} + x_{u_4}x_{v_3}x_{w_1} \\ x_{u_1}x_{v_2}x_{w_4} - x_{u_1}x_{v_4}x_{w_2} - x_{u_2}x_{v_1}x_{w_4} + x_{u_2}x_{w_1}x_{v_4} + x_{v_1}x_{u_4}x_{w_2} - x_{u_4}x_{v_2}x_{w_1} \\ x_{u_1}x_{v_3}x_{w_2} - x_{u_1}x_{v_2}x_{w_3} + x_{u_2}x_{v_1}x_{w_3} - x_{u_2}x_{v_3}x_{w_1} - x_{u_3}x_{v_1}x_{w_2} + x_{u_3}x_{v_2}x_{w_1} \end{pmatrix}.$$

Note que o vetor encontrado é ortogonal aos vetores da base de T_PS, ou seja:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_{u_2}x_{v_3}x_{w_4} - x_{u_2}x_{v_4}x_{w_3} - x_{u_3}x_{v_2}x_{w_4} + x_{u_3}x_{v_4}x_{w_2} + x_{u_4}x_{v_2}x_{w_3} - x_{u_4}x_{v_3}x_{w_2} \\ -x_{u_1}x_{v_3}x_{w_4} + x_{u_1}x_{v_4}x_{w_3} + x_{u_3}x_{v_1}x_{w_4} - x_{u_3}x_{w_1}x_{v_4} - x_{v_1}x_{u_4}x_{w_3} + x_{u_4}x_{v_3}x_{w_1} \\ x_{u_1}x_{v_2}x_{w_4} - x_{u_1}x_{v_4}x_{w_2} - x_{u_2}x_{v_1}x_{w_4} + x_{u_2}x_{w_1}x_{v_4} + x_{v_1}x_{u_4}x_{w_2} - x_{u_4}x_{v_2}x_{w_1} \\ x_{u_1}x_{v_3}x_{w_2} - x_{u_1}x_{v_2}x_{w_3} + x_{u_2}x_{v_1}x_{w_3} - x_{u_2}x_{v_3}x_{w_1} - x_{u_3}x_{v_1}x_{w_2} + x_{u_3}x_{v_2}x_{w_1} \end{pmatrix}, x_u \right\rangle = 0,$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_{u_2}x_{v_3}x_{w_4} - x_{u_2}x_{v_4}x_{w_3} - x_{u_3}x_{v_2}x_{w_4} + x_{u_3}x_{v_4}x_{w_2} + x_{u_4}x_{v_2}x_{w_3} - x_{u_4}x_{v_3}x_{w_2} \\ -x_{u_1}x_{v_3}x_{w_4} + x_{u_1}x_{v_4}x_{w_3} + x_{u_3}x_{v_1}x_{w_4} - x_{u_3}x_{w_1}x_{v_4} - x_{v_1}x_{u_4}x_{w_3} + x_{u_4}x_{v_3}x_{w_1} \\ x_{u_1}x_{v_2}x_{w_4} - x_{u_1}x_{v_4}x_{w_2} - x_{u_2}x_{v_1}x_{w_4} + x_{u_2}x_{w_1}x_{v_4} + x_{v_1}x_{u_4}x_{w_2} - x_{u_4}x_{v_2}x_{w_1} \\ x_{u_1}x_{v_3}x_{w_2} - x_{u_1}x_{v_2}x_{w_3} + x_{u_2}x_{v_1}x_{w_3} - x_{u_2}x_{v_3}x_{w_1} - x_{u_3}x_{v_1}x_{w_2} + x_{u_3}x_{v_2}x_{w_1} \end{pmatrix}, x_v \right\rangle = 0,$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_{u_2}x_{v_3}x_{w_4} - x_{u_2}x_{v_4}x_{w_3} - x_{u_3}x_{v_2}x_{w_4} + x_{u_3}x_{v_4}x_{w_2} + x_{u_4}x_{v_2}x_{w_3} - x_{u_4}x_{v_3}x_{w_2} \\ -x_{u_1}x_{v_3}x_{w_4} + x_{u_1}x_{v_4}x_{w_3} + x_{u_3}x_{v_1}x_{w_4} - x_{u_3}x_{w_1}x_{v_4} - x_{v_1}x_{u_4}x_{w_3} + x_{u_4}x_{v_3}x_{w_1} \\ x_{u_1}x_{v_2}x_{w_4} - x_{u_1}x_{v_4}x_{w_2} - x_{u_2}x_{v_1}x_{w_4} + x_{u_2}x_{w_1}x_{v_4} + x_{v_1}x_{u_4}x_{w_2} - x_{u_4}x_{v_2}x_{w_1} \\ x_{u_1}x_{v_3}x_{w_2} - x_{u_1}x_{v_2}x_{w_3} + x_{u_2}x_{v_1}x_{w_3} - x_{u_2}x_{v_3}x_{w_1} - x_{u_3}x_{v_1}x_{w_2} + x_{u_3}x_{v_2}x_{w_1} \end{pmatrix}, x_w \right\rangle = 0.$$

De modo a otimizar a leitura, faremos a seguinte notação:

Notação 7.2.1 $$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_{u_2}x_{v_3}x_{w_4} - x_{u_2}x_{v_4}x_{w_3} - x_{u_3}x_{v_2}x_{w_4} + x_{u_3}x_{v_4}x_{w_2} + x_{u_4}x_{v_2}x_{w_3} - x_{u_4}x_{v_3}x_{w_2} \\ -x_{u_1}x_{v_3}x_{w_4} + x_{u_1}x_{v_4}x_{w_3} + x_{u_3}x_{v_1}x_{w_4} - x_{u_3}x_{w_1}x_{v_4} - x_{v_1}x_{u_4}x_{w_3} + x_{u_4}x_{v_3}x_{w_1} \\ x_{u_1}x_{v_2}x_{w_4} - x_{u_1}x_{v_4}x_{w_2} - x_{u_2}x_{v_1}x_{w_4} + x_{u_2}x_{w_1}x_{v_4} + x_{v_1}x_{u_4}x_{w_2} - x_{u_4}x_{v_2}x_{w_1} \\ x_{u_1}x_{v_3}x_{w_2} - x_{u_1}x_{v_2}x_{w_3} + x_{u_2}x_{v_1}x_{w_3} - x_{u_2}x_{v_3}x_{w_1} - x_{u_3}x_{v_1}x_{w_2} + x_{u_3}x_{v_2}x_{w_1} \end{pmatrix}.$$

Vemos que esse vetor é ortogonal a x_u, x_v e x_w.Logo, podemos definir o campo normal em S como :

$$\eta = \frac{1}{(\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 + \eta_4^2)^{\frac{1}{2}}}\left(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4\right).$$

Definido dessa ,maneira ele se torna unitário.

Agora vamos encontrar as expressões das curvaturas média e gaussiana. Comecemos com a definição da aplicação S_N. Seja N tal que $(N)|_S = \eta$. Temos:

$$\begin{gathered} S_N : T_P S \longrightarrow T_P S, \\ S_N(x) = -(\nabla_x N)^T. \end{gathered}$$

Pela compatibilidade da conexão com a métrica , segue que $\nabla_y (N) = (\nabla_y N)^T$. De fato:

$$2\langle \nabla_y N, N\rangle = y\left(\langle N, N\rangle\right) = y(1) = 0.$$

Sendo x a parametrização da hipersuperfície e fazendo a identificação:

$$N \circ x \cong N.$$

Segue que a expressão da aplicação S_N é dada por:

$$\nabla_y N(P) = dN_P.y.$$

Seja $\alpha(t) = x \circ (u(t), v(t), w(t))$ uma curva tal que $\alpha(0) = P$ e $\alpha'(0) = y$. Note que:

$$\alpha'(t) = \frac{d}{dt}\left(x \circ (u(t), v(t), w(t))\right) = dx_{(u(t),v(t),w(t))}.(u'(t), v'(t), w'(t)) = u'(t)x_u + v'(t)x_v + w'(t)x_w.$$

Aplicando a diferencial do campo normal no vetor α' obtemos:

$$dN(\alpha') = \frac{d}{dt}\left(N \circ x \circ (u(t), v(t), w(t))\right) = \frac{d}{dt}\left(N_\xi \circ (u(t), v(t), w(t))\right) = u'(t)N_u + v'(t)N_v + w'(t)N_w.$$

Acabamos de ver que $dN(\alpha')$ cai em $T_P S$. Logo:

$$\begin{cases} N_u = a_{11}x_u + a_{21}x_v + a_{31}x_w, \\ N_v = a_{12}x_u + a_{22}x_v + a_{32}x_w, \\ N_w = a_{13}x_u + a_{23}x_v + a_{33}x_w. \end{cases}$$

Concluímos que a expressão de $dN(\alpha')$ é a seguinte:

$$\begin{aligned} dN(\alpha') &= u'\left(a_{11}x_u + a_{21}x_v + a_{31}x_w\right) + v'\left(a_{12}x_u + a_{22}x_v + a_{32}x_w\right) + w'\left(a_{13}x_u + a_{23}x_v + a_{33}x_w\right) \\ &= \left(u'a_{11} + v'a_{12} + w'a_{13}\right)x_u + \left(u'a_{21} + v'a_{22} + w'a_{23}\right)x_v + \left(u'a_{31} + v'a_{32} + w'a_{33}\right)x_w. \end{aligned}$$

Ou seja, na base $\{x_u, x_v, x_w\}$ obtemos:

$$dN\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{bmatrix}.$$

Vamos usar alguns coeficientes para as expressões das curvaturas, e esses coeficientes têm o seguinte significado:

Notação 7.2.2
$$\begin{aligned} E &= \langle x_u, x_u\rangle, & e &= \langle N, x_{uu}\rangle, \\ F_1 &= \langle x_u, x_v\rangle, & f_1 &= \langle N, x_{uv}\rangle, \\ F_2 &= \langle x_u, x_w\rangle, & f_2 &= \langle N, x_{uw}\rangle, \\ F_3 &= \langle x_v, x_w\rangle, & f_3 &= \langle N, x_{vw}\rangle, \\ G &= \langle x_v, x_v\rangle, & g &= \langle N, x_{vv}\rangle, \\ H &= \langle x_w, x_w\rangle, & h &= \langle N, x_{ww}\rangle. \end{aligned}$$

Precisamos encontrar os valores das entradas da matriz de dN para isso efetuemos alguns cálculos que nos darão os valores das entradas em termos dos coeficientes acima:

$$\begin{aligned} -f &= -\langle N, x_{uv}\rangle \\ &= -x_u\left(\langle N, x_v\rangle\right) + \langle \nabla_{x_u} N, x_v\rangle \\ &= \langle N_u, x_v\rangle \\ &= \langle \left(a_{11}x_u + a_{21}x_v + a_{31}x_w\right), x_v\rangle \\ &= a_{11}F + a_{21}G + a_{31}F, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-f_1 &= -\langle N, x_{vu}\rangle \\
&= -x_v(\langle N, x_u\rangle) + \langle \nabla_{x_v} N, x_u\rangle \\
&= \langle N_v, x_u\rangle \\
&= \langle (a_{12}x_u + a_{22}x_v + a_{32}x_w), x_u\rangle \\
&= a_{12}E + a_{22}F_1 + a_{32}F_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-f_2 &= -\langle N, x_{uw}\rangle \\
&= -x_u(\langle N, x_w\rangle) + \langle \nabla_{x_u} N, x_w\rangle \\
&= \langle N_u, x_w\rangle \\
&= \langle (a_{11}x_u + a_{21}x_v + a_{31}x_w), x_w\rangle \\
&= a_{11}F_2 + a_{21}F_3 + a_{31}H,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-f_2 &= -\langle N, x_{wu}\rangle \\
&= -x_w(\langle N, x_u\rangle) + \langle \nabla_{x_w} N, x_u\rangle \\
&= \langle N_w, x_u\rangle \\
&= \langle (a_{13}x_u + a_{23}x_v + a_{33}x_w), x_u\rangle \\
&= a_{13}E + a_{23}F_1 + a_{33}F_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-f_3 &= -\langle N, x_{vw}\rangle \\
&= -x_v(\langle N, x_w\rangle) + \langle \nabla_{x_v} N, x_w\rangle \\
&= \langle N_v, x_w\rangle \\
&= \langle (a_{12}x_u + a_{22}x_v + a_{32}x_w), x_w\rangle \\
&= a_{12}F_2 + a_{22}F_3 + a_{32}H,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-f_3 &= -\langle N, x_{wv}\rangle \\
&= -x_w(\langle N, x_v\rangle) + \langle \nabla_{x_w} N, x_v\rangle \\
&= \langle N_w, x_v\rangle \\
&= \langle (a_{13}x_u + a_{23}x_v + a_{33}x_w), x_v\rangle \\
&= a_{13}F_1 + a_{23}G + a_{33}F_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-e &= -\langle N, x_{uu}\rangle \\
&= -x_u(\langle N, x_u\rangle) + \langle \nabla_{x_u} N, x_u\rangle \\
&= \langle N_u, x_u\rangle \\
&= \langle (a_{11}x_u + a_{21}x_v + a_{31}x_w), x_u\rangle \\
&= a_{11}E + a_{21}F_1 + a_{31}F_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-g_\xi &= -\langle N, x_{vv}\rangle \\
&= -x_v(\langle N, x_v\rangle) + \langle \nabla_{x_v} N_\xi, x_v\rangle \\
&= \langle N_v, x_v\rangle \\
&= \langle (a_{12}x_u + a_{22}x_v + a_{32}x_w), x_v\rangle \\
&= a_{12}F_1 + a_{22}G + a_{32}F_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-h &= -\langle N, x_{ww}\rangle \\
&= -x_w(\langle N, x_w\rangle) + \langle \nabla_{x_w} N, x_w\rangle \\
&= \langle N_w, x_w\rangle \\
&= \langle (a_{13}x_u + a_{23}x_v + a_{33}x_w), x_w\rangle \\
&= a_{13}F_2 + a_{23}F_3 + a_{33}H.
\end{aligned}$$

Podemos expressar estas relações da seguinte maneira:

$$-\begin{bmatrix} e & f_1 & f_2 \\ f_1 & g & f_3 \\ f_2 & f_3 & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F_1 & F_2 \\ F_1 & G & F_3 \\ F_2 & F_3 & H \end{bmatrix}.$$

Isolando a matriz de dN obtemos os valores de cada entrada

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} e & f_1 & f_2 \\ f_1 & g & f_3 \\ f_2 & f_3 & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F_1 & F_2 \\ F_1 & G & F_3 \\ F_2 & F_3 & H \end{bmatrix}^{-1}.$$

Usando que a expressão da matriz inversa dos coeficientes maiúsculos é dada por:

$$\begin{bmatrix} E & F_1 & F_2 \\ F_1 & G & F_3 \\ F_2 & F_3 & H \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{F_3^2-GH}{HF_1^2-2F_1F_2F_3+GF_2^2+EF_3^2-GHE} & \frac{HF_1-F_2F_3}{HF_1^2-2F_1F_2F_3+GF_2^2+EF_3^2-GHE} & \frac{GF_2-F_1F_3}{HF_1^2-2F_1F_2F_3+GF_2^2+EF_3^2-GHE} \\ \frac{HF_1-F_2F_3}{HF_1^2-2F_1F_2F_3+GF_2^2+EF_3^2-GHE} & -\frac{HE-F_2^2}{HF_1^2-2F_1F_2F_3+GF_2^2+EF_3^2-GHE} & \frac{EF_3-F_1F_2}{HF_1^2-2F_1F_2F_3+GF_2^2+EF_3^2-GHE} \\ \frac{GF_2-F_1F_3}{HF_1^2-2F_1F_2F_3+GF_2^2+EF_3^2-GHE} & \frac{EF_3-F_1F_2}{HF_1^2-2F_1F_2F_3+GF_2^2+EF_3^2-GHE} & -\frac{GE-F_1^2}{HF_1^2-2F_1F_2F_3+GF_2^2+EF_3^2-GHE} \end{bmatrix}$$

Portanto, fazendo a multiplicação, segue que:

$$a_{11} = -\frac{\left(eF_3^2 + GF_2f_2 + HF_1f_1 - eGH - F_1F_3f_2 - f_1F_2F_3\right)}{HF_1^2 - 2F_1F_2F_3 + GF_2^2 + EF_3^2 - EGH},$$

$$a_{21} = -\frac{\left(f_1F_2^2 + eHF_1 - eF_2F_3 - EHf_1 + EF_3f_2 - F_1F_2f_2\right)}{HF_1^2 - 2F_1F_2F_3 + GF_2^2 + EF_3^2 - EGH},$$

$$a_{31} = -\frac{\left(F_1^2f_2 + Ef_1F_3 - F_1f_1F_2 + eGF_2 - EGf_2 - eF_1F_3\right)}{HF_1^2 - 2F_1F_2F_3 + GF_2^2 + EF_3^2 - EGH},$$

$$a_{12} = -\frac{\left(f_1F_3^2 + HgF_1 - gF_2F_3 - GHf_1 + GF_2f_3 - F_1F_3f_3\right)}{HF_1^2 - 2F_1F_2F_3 + GF_2^2 + EF_3^2 - EGH},$$

$$a_{22} = -\frac{\left(gF_2^2 + EF_3f_3 + HF_1f_1 - EHg - F_1F_2f_3 - f_1F_2F_3\right)}{HF_1^2 - 2F_1F_2F_3 + GF_2^2 + EF_3^2 - EGH},$$

$$a_{32} = -\frac{\left(F_1^2f_3 + Gf_1F_2 - F_1f_1F_3 + EgF_3 - EGf_3 - gF_1F_2\right)}{HF_1^2 - 2F_1F_2F_3 + GF_2^2 + EF_3^2 - EGH},$$

$$a_{13} = -\frac{\left(F_3^2f_2 + HF_1f_3 - F_2F_3f_3 + GhF_2 - hF_1F_3 - GHf_2\right)}{HF_1^2 - 2F_1F_2F_3 + GF_2^2 + EF_3^2 - EGH},$$

$$a_{23} = -\frac{\left(F_2^2f_3 + HF_1f_2 - F_2F_3f_2 + EhF_3 - EHf_3 - hF_1F_2\right)}{HF_1^2 - 2F_1F_2F_3 + GF_2^2 + EF_3^2 - EGH},$$

$$a_{33} = -\frac{\left(hF_1^2 + EF_3f_3 + GF_2f_2 - EGh - F_1F_2f_3 - F_1F_3f_2\right)}{HF_1^2 - 2F_1F_2F_3 + GF_2^2 + EF_3^2 - EGH}.$$

Portanto, obtemos a matriz da aplicação S_η na base $\{x_u, x_v, x_w\}$:

$$[S_N] = -\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Onde os $a'_{ij}s$ foram calculados acima.

Calculando o determinante e a metade do traço da matriz de S_N encontramos as curvaturas gaussiana e média, respectivamente:

$$K = \det(S_\eta) = \frac{\left(hf_1^2 - 2f_1f_2f_3 + gf_2^2 + ef_3^2 - egh\right)}{HF_1^2 - 2F_1F_2F_3 + GF_2^2 + EF_3^2 - EGH},$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}Tr(S_\eta) \\ &= \frac{F_1^2h + eF_3^2 + gF_2^2 - 2f_1F_2F_3 + 2EF_3f_3 - 2F_1F_2f_3 - 2F_1F_3f_2 + 2GF_2f_2 - EGh - EHg - eGH + 2F_1Hf_1}{2\left(HF_1^2 - 2F_1F_2F_3 + GF_2^2 + EF_3^2 - EGH\right)}. \end{aligned}$$

7.3 Exemplos

7.3.1 Gráfico de Função

Seja $h:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função suave. Segue que o gráfico dessa função é parametrizado da seguinte maneira:

$$X(s,t,u)=(s,t,u,h(s,t,u))\,.$$

Vamos encontrar as curvaturas média e gaussiana da superfície. Comecemos primeiramente derivando a parametrização:

$$X_s=(1,0,0,h_s)\qquad,\qquad X_t=(0,1,0,h_t)\qquad,\qquad X_u=(0,0,1,h_u)\,.$$

Já podemos calcular os primeiros coeficientes e o campo normal:

$$E=g\left(X_s,X_s\right)=\left(h_s^2+1\right)\qquad G=g\left(X_t,X_t\right)=\left(h_t^2+1\right)\qquad H=g\left(X_u,X_u\right)=\left(h_u^2+1\right),$$

$$F_1=g\left(X_s,X_t\right)=h_sh_t\qquad F_2=g\left(X_s,X_u\right)=h_sh_u\qquad F_3=g\left(X_u,X_t\right)=h_uh_t,$$

$$\eta=\left(h_s,h_t,h_u,-1\right),$$

$$|\eta|=\sqrt{h_s^2+h_t^2+h_u^2+1},$$

$$N=\frac{\eta}{|\eta|}=\left(\frac{h_s}{\sqrt{h_s^2+h_t^2+h_u^2+1}},\frac{h_t}{\sqrt{h_s^2+h_t^2+h_u^2+1}},\frac{h_u}{\sqrt{h_s^2+h_t^2+h_u^2+1}},-\frac{1}{\sqrt{h_s^2+h_t^2+h_u^2+1}}\right).$$

Deribando novamente a parametrização, obtemos:

$$X_{ss}=(0,0,0,h_{ss})\qquad,\qquad X_{tt}=(0,0,0,h_{tt})\qquad,\qquad X_{uu}=(0,0,0,h_{uu})\,.$$

$$X_{st}=(0,0,0,h_{st})\qquad,\qquad X_{su}=(0,0,0,h_{us})\qquad,\qquad X_{tu}=(0,0,0,h_{tu})\,.$$

Segue que os últimos coeficientes são dados por:

$$e=g\left(N,X_{ss}\right)=\left(-\frac{h_{ss}}{\sqrt{h_s^2+h_t^2+h_u^2+1}}\right),\qquad f_1=g\left(N,X_{st}\right)=\left(-\frac{h_{st}}{\sqrt{h_s^2+h_t^2+h_u^2+1}}\right),$$

$$f_2=g\left(N,X_{su}\right)=\left(-\frac{h_{su}}{\sqrt{h_s^2+h_t^2+h_u^2+1}}\right),\qquad f_3=g\left(N,X_{tu}\right)=\left(-\frac{h_{tu}}{\sqrt{h_s^2+h_t^2+h_u^2+1}}\right),$$

$$g=g\left(N,X_{tt}\right)=\left(-\frac{h_{tt}}{\sqrt{h_s^2+h_t^2+h_u^2+1}}\right),\qquad h=g\left(N,X_{uu}\right)=\left(-\frac{h_{uu}}{\sqrt{h_s^2+h_t^2+h_u^2+1}}\right).$$

Segue disso que as curvaturas média e gaussiana são dadas pelas seguintes expressões:

$$K=\frac{h_{st}^2h_{uu}+h_{su}^2h_{tt}+h_{tu}^2h_{ss}-2h_{st}h_{su}h_{tu}-h_{ss}h_{tt}h_{uu}}{\left(h_s^2+h_t^2+h_u^2+1\right)^{\frac{5}{2}}},$$

$$H=-\frac{h_{ss}+h_{tt}+h_{uu}+h_t^2h_{ss}+h_s^2h_{tt}+h_u^2h_{ss}+h_s^2h_{uu}+h_u^2h_{tt}+h_t^2h_{uu}-2h_sh_th_{st}-2h_sh_uh_{su}-2h_th_uh_{tu}}{2\left(h_s^2+h_t^2+h_u^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Capítulo 8

Referências

[1] M.P.do Carmo : Geometria Riemanniana, SBM-IMPA-1988,
[2] M.P.do Carmo : Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies, SBM-IMPA-1976,
[3] Barrett O'Neil : Semi Riemannian Geometry with Applications to Relativity, Academic Press-1983,
[4] Rafael López : Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski Space, I.E.J.G. - 2014,
[5] M.P.do Carmo and M. Dajczer : Rotation Hypersurfaces in Spaces of Constant Curvature, T.A.M.S - 1983,
[6] U. Dursun : Rotational Weingarten Surfaces in Hyperbolic 3-Space, Springer - 2020.