UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Modelos de Lévy de atividade infinita

Danila Maria Silva Fernandes de Almeida

Tese de Doutorado do Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística (PIPGEs)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Danila Maria Silva Fernandes de Almeida

Modelos de Lévy de atividade infinita

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP e ao Departamento de Estatística – DEs-UFSCar, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutora em Estatística – Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Estatística

Orientador: Prof. Dr. Dorival Leão Pinto Júnior

USP – São Carlos
Agosto de 2020

Danila Maria Silva Fernandes de Almeida

Infinity activity Lévy models

Thesis submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP and to the Department of Statistics – DEs-UFSCar – in accordance with the requirements of the Statistics Interagency Graduate Program, for the degree of Doctor in Statistics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Statistics

Advisor: Prof. Dr. Dorival Leão Pinto Júnior

USP – São Carlos
August 2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística

Folha de Aprovação

Defesa de Tese de Doutorado da candidata Danila Maria Silva Fernandes de Almeida, realizada em 12/06/2020.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Dorival Leão Pinto Junior (USP)

Prof. Dr. Paulo Régis Caron Ruffino (UNICAMP)

Prof. Dr. Alberto Masayoshi Faria Ohashi (UnB)

Prof. Dr. Ricardo Felipe Ferreira (UFSCar)

Prof. Dr. Christian Horacio Olivera (UNICAMP)

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.
O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística.

Este trabalho é dedicado ao meu esposo Marcelo
e aos meus filhos Miguel e Maria.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Prof. Dr. Dorival Leão Pinto Júnior, por ter me aceito para orientação, pela paciência e compreensão, por todo conhecimento que compartilhou comigo e por não ter desistido de mim.

Agradeço ao meu esposo Marcelo, muitas vezes orientador também e o maior incentivador para que eu fosse a São Carlos, fazer o doutorado.

Aos meus pais, Maria e Raimundo, por todas as palavras doces, nos momentos de incerteza.

Ao meu tio Washington que sempre esteve pronto para qualquer necessidade minha.

Aos amigos presentes ao longo desse trajeto, em especial: George e Vanessa, Cleber e Jay, Daiane e Inocência (Nô).

Aos professores Marinho e Katiane, por me receberem em São Carlos, por acreditarem em mim e sempre me apoiarem.

À CAPES pelo apoio financeiro durante o desenvolvimento deste trabalho.

“Se um homem não descobriu nada pelo qual morreria,
não está pronto para viver.”
(Martin Luther King)

RESUMO

ALMEIDA, D. M. S. F. **Modelos de Lévy de atividade infinita**. 2020. 65 p. Tese (Doutorado em Estatística – Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2020.

Neste trabalho, apresentamos uma classe de processos de Lévy A de puro salto, com filtração interna e decomposição de Itô-Lévy e estabelecemos formas explícitas para a representação martingale, principal componente do nosso processo. Além disso, propomos uma fórmula de Itô-Meyer ótima para um funcional de Lévy e um esquema de aproximação do tipo Euler-Maruyama para uma EDE path-dependent regida pelo processo de Lévy A. Para isso, primeiramente, aproximamos A por um processo de Poisson composto A^{ε}, que provamos convergir fortemente em $\mathbf{B}^2$ para A, quando $\varepsilon \downarrow 0$. Esse resultado é fundamental para mostrar que, dado um supermartingale envelope de Snell S, podemos aproximá-lo por meio de uma estrutura discreta de encaixe, que vem a ser a sequência de processos valor, associados a S.

Palavras-chave: Processos de Lévy, Martingale, Fórmula de Itô, Equações Diferencias Estocásticas, Parada ótima.

ABSTRACT

ALMEIDA, D. M. S. F. **Infinity activity Lévy models**. 2020. 65 p. Tese (Doutorado em Estatística – Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2020.

In this work, we present a class of pure jump Lévy processes A, with internal filtration and Itô-Lévy decomposition and we established an explicit forms for martingale representation, main component of our process. Furthermore, we propose an optimal Itô-Meyer formula for a Lévy functional and Euler-Maruyama approach scheme for a path-dependent SDE driven by A Lévy process. For that, first, we close A by a Poisson process composed of A^{ε}, that we proved to converge strongly in $\mathbf{B}^2$ to A, when $\varepsilon \downarrow 0$. This result is fundamental to show that, given a supermartingale Snell envelope S, we can approach it through an imbedded discrete structure , which is the sequence of value processes, associated with S.

Keywords: Lévy Processes, Martingale, Itô formula, Stochastic Differential Equation, Optimal Stopping.

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

No estudo do cálculo estocástico uma área de destaque por sua aplicabilidade é a classe dos processos de Lévy, em honra do matemático francês Paul Lévy. Modelos baseados em processos dessa natureza são mais flexíveis do que os modelos baseados somente no movimento browniano. Os processos de Lévy contém diversos ingredientes e exemplos interessantes para modelos estocásticos à tempo contínuo (ver, (TANKOV, 2003)). O processo de Poisson e o movimento browniano são os exemplos fundamentais de processos de Lévy.

Um processo estocástico $A = \{A(t) : 0 \leq t \leq T\}$ definido em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ com valores em $\mathbb{R}$ é denominado um processo de Lévy se satisfaz as seguintes propriedades:

- 1. Incrementos independentes: para cada sequência crescente de tempos $t_0, t_1, \cdots, t_n$ em $[0,T]$, as variáveis aleatórias $A(t_0), A(t_1) - A(t_0), \cdots, A(t_n) - A(t(n-1))$ são independentes.
- 2. Continuidade em probabilidade: $\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{h \to 0} \mathbb{P}(\mid A(t+h) - A(t) \mid \geq \varepsilon) = 0,\ 0 \leq t < T,$

no qual T é uma constante positiva. Sabemos que todo processo de Lévy tem uma modificação contínua à direita e com limite à esquerda (càdlàg), Teorema 2.68 em ((HE; WANG; YAN, 1992), p. 66). Neste trabalho, utilizamos a versão cadlag do processo de Lévy. A definição original de Lévy ainda considera que o processo seja estacionário. Neste trabalho, seguimos (HE; WANG; YAN, 1992) que caracterizaram a classe de processos com incrementos independentes e contínuos em probabilidade, também denominados processos de Lévy. A decomposição de Itô-Lévy nos diz que o processo de Lévy A pode ser decomposto nos seguintes elementos (ver Teorema 11.45 em (HE; WANG; YAN, 1992), p. 318)

$$\begin{aligned} A(t) &= A(0) + \tilde{A}(t) + \int_{\{[0,t]\times\{|x|>1\}\}} x d\mu + \int_{\{[0,t]\times\{|x|\leq 1\}\}} x d(\mu - \nu) \\ &= A(0) + \tilde{A}(t) + \int_{\{[0,t]\times\{|x|>1\}\}} x d\nu + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} x d(\mu - \nu) \end{aligned}$$

nos quais $A(0)$ é uma constante, $\tilde{A}$ é um processo de Lévy com trajetórias contínuas, $\tilde{A}(0) = 0$, μ é a medida de salto relacionado com o processo de Lévy A e ν a projeção previsível dual de μ.

Neste trabalho, consideramos a classe dos processos de Lévy puro salto quadrado integráveis com decomposição de Itô-Lévy tal que $\tilde{A}$ é uma função contínua de variação limitada. Com isso, obtemos a seguinte decomposição,

$$A(t) = A(0) + M(t) + N(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

no quais $M = \int\int xd(\mu - \nu)$ é um martingale quadrado integrável e $N = \tilde{A} + \int_{\{[0,\cdot]\times\{|x|>1\}\}} xd\nu$ é uma função contínua de variação limitada. Uma característica importante desta classe de processos estocásticos é o fato de que o martingale M não necessariamente tem trajetórias de variação limitada. Sabemos que M tem variação limitada (ver, (TANKOV, 2003), Proposição 3.9) se, e somente se,

$$\int_{\{[0,T]\times\{|x|\leq 1\}\}} |\, x \,|\, d\nu < \infty.$$

Esta classe dos processos de Lévy puro salto incluí os principais processos de Lévy sem o componente gaussiano, utilizados na literatura (ver (SCHOUTENS, 2003)). Por exemplo, a classe dos processos de Poisson composto, processos Gama, processos beta, entre outros.

O principal objetivo deste trabalho consiste em estudar representações para funcionais do processo de Lévy através do cálculo estocástico. Para isto, dado um processo de Lévy puro salto A com a filtragem interna $\mathbb{F}$, vamos estabelecer uma aproximação para o processo de Lévy A através do processo de Poisson composto A^{ε}. A partir desta aproximação, vamos estender a representação do funcional aplicado ao processo de Poisson composto para o funcional aplicado ao processo de Lévy. Com este trabalho, iniciamos a extensão do cálculo funcional de Itô, desenvolvido por (LEÃO *et al.*, 2018), para processos de Lévy puro salto.

A forma tradicional de discretizar um processo através de uma malha determinística, conforme descrito em (PROTTER PHILIP E TALAY, 1997) e (JACOD, 2004), apresenta dois problemas quando lidamos com um processo de Lévy puro salto. Primeiro, de forma geral, não sabemos como simular os incrementos do processo de Lévy. Segundo, um salto de tamanho "grande"ocorrendo entre dois pontos de discretização pode nos levar a erros grosseiros de discretização, ver (KOHATSU-HIGA ARTURO E TANKOV, 2010) e (TANKOV, 2012), pois afasta a aproximação do comportamento original do processo.

Uma ideia natural devido a (RUBENTHALER, 2003) consiste em truncar os saltos do processo de Lévy A por um $\varepsilon > 0$ e assim, aproximarmos A pelo processo de Poisson composto A^{ε} com saltos truncados por ε. Com isto, podemos estudar o comportamento de funcionais aplicados ao processo de Lévy via o comportamento do funcional aplicado ao processo de Poisson composto.

No Capítulo 2, apresentamos as principais propriedades dos processos de Lévy puro salto A e o esquema de aproximação. Dada a sequência de processos de Poisson composto não homogêneos $\{A^{\varepsilon} : \varepsilon > 0\}$, estendemos a estratégia de (RUBENTHALER, 2003) para o caso de processos não homogêneos. Para isto, aproximamos o processo de Lévy A, que é não homogêneo, por um processo de Poisson composto A^{ε} que também é não homogêneo tal que, A^{ε} converge para A fortemente em $\mathbf{B}^2$ quando $\varepsilon \downarrow 0$. A título de exemplificação apresentamos um caso particular de processo de Lévy com variação limitada e um algoritmo de simulação. Na sequência, apresentamos algoritmos para simular o processo Beta e Gama Estendido .

Dado a filtração interna do processo de Lévy puro salto A, um ponto fundamental da teoria de cálculo estocástico consiste em caracterizar a classe dos martingales quadrado integráveis. Como A é um processo de Lévy puro salto, sabemos que A tem a propriedade de representação fraca de martingales, ver ((HE; WANG; YAN, 1992), Theorem 13.49, pp. 390). No Capítulo 3 apresentamos uma forma explícita para aproximarmos a representação martingale através da aproximação do processo de Lévy puro salto pelo processo de Poisson composto. Além disso, mostramos que todo martingale quadrado integrável X pode ser escrito na forma,

$$X(t) = X(0) + \oint_0^t DX(s)dM(s), \quad 0 \le t \le T,$$

em que DX representa a derivada estocástica e $\oint$ a integral opcional. Após caracterizarmos a classe de martingales quadrado integráveis, apresentamos a decomposição de Doob-Meyer de forma bem geral.

Denotamos por $\mathbf{B}^p$ a classe dos processos estocásticos $\mathbb{F}$-adaptados Y, tal que

$$\mathbb{E} \sup_{0\le t\le T} | Y(t) |^p < \infty, \quad p \ge 1.$$

Dizemos que $X \in \mathbf{B}^2$ é um **funcional de Lévy** se ele é quase contínuo à direita (salta apenas em tempos totalmente inacessíveis) e tem energia finita

$$\mathbb{E} \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta X(T_n)|^2 \mathbb{1}_{\{T_n \le T\}} < \infty.$$

No Capítulo 4, provamos que X é um funcional de Lévy se, e só se, o processo estocástico $X \in \mathbf{B}^2$ admite decomposição de Doob-Meyer, na forma

$$X = X(0) + Z + W$$

em que Z é um $\mathbb{F}$-martingale quadrado integrável e $W \in \mathbf{B}^2$ é um processo de trajetórias contínuas $\mathbb{F}$-adaptado. Através da representação martingale, sabemos que

$$Z(t) = \oint_0^t DX(s)dM(s), \quad 0 \le t \le T,$$

no qual DX representa a derivada estocástica do funcional de Lévy X com respeito ao martingale M. Por outro lado, pouco sabemos a respeito do processo W, a não ser que ele tem trajetórias contínuas. No caso do movimento browniano, uma forma de caracterizarmos o processo W consiste na fórmula de mudança de variáveis de Itô. Sabemos que se B é o movimento browniano e $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2, temos

$$F(B(t)) = F(0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(B(s))dB(s) + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x}(B(s))ds, \quad 0 \le t \le T.$$

Neste caso, obtemos uma expressão para o componente previsível da decomposição de Doob-Meyer. Com este objetivo, vamos apresentar uma fórmula de Itô para funcionais de Lévy com respeito a funções $F : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $C^{1,1}$.

No capítulo 5, mostramos que a composição do funcional de Lévy A com uma função F de classe $C^{0,1}$ também é um funcional de Lévy. Como todo funcional de Lévy admite decomposição de Doob-Meyer, vamos utilizar nossa estratégia de aproximação do processo de Lévy pelo processo de Poisson composto para caracterizarmos o componente previsível da decomposição.

Dado um semimartingale X tal que $\sum_{s \le t} \mid \Delta X(s) \mid < \infty$ $\mathbb{P} - q.c$ e qualquer função F de classe C^1, (BOULEAU *et al.*, 1981) estabeleceram uma fórmula de Itô baseado na teoria de tempos locais para semimartingales. A partir da teoria de regularização, (RUSSO; VALLOIS, 1996) estabeleceram uma fórmula de Itô para uma função F de classe C^1 e um semimartingale contínuo, com a hipótese de que o semimartingale é reversível. Uma fórmula de Itô para processos estocásticos com saltos foi obtida por (ERRAMI; RUSSO; VALLOIS, 2002), sob a hipótese de que a derivada da função F seja λ-Hölder contínua e os saltos do processo satisfazem

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta X(T_n)|^{1+\lambda} \mathbb{1}_{\{T_n \le T\}} < \infty, \quad \mathbb{P} - q.c., \tag{1.1}$$

para $0 \le \lambda < 1$. Extensões da fórmula de (BOULEAU *et al.*, 1981) para o caso de funções em $C^{1,1}$ aplicadas ao processo de Lévy foram obtidas por (EISENBAUM, 2006), com a hipótese de que os saltos do processo de Lévy satisfaçam a Equação (1.1) com $\lambda = 0$. Dado que o funcional de Lévy tem energia finita, este processo não necessariamente satisfaz a Equação (1.1) e, então, não podemos aplicar as fórmulas de Itô desenvolvidas por estes autores.

Dado uma função F de classe $C^{0,1}$ e um processo de Dirichlet com saltos, (GOZZI; RUSSO, 2006) e (BANDINI; RUSSO, 2017) apresentam diversas representações para o funcional $F(t,X(t))$. Por exemplo, eles mostraram que $F(t,X(t))$ também é um processo de Dirichlet, mas não apresentam representações para o componente previsível.

No caso de processos com saltos, a fórmula de Itô clássica não representa a decomposição de Doob-Meyer. Na realidade, seja A o processo de Lévy puro salto e F uma função de classe C^2. Então, segue do Teorema 9.35 em ((HE; WANG; YAN, 1992), p. 235), que a fórmula de Itô clássica é dada por

$$
\begin{aligned}
F(A) &= F(A(0)) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(A(s^-))dA(s) + \sum_{s \le t} \left[F(A(s)) - F(A(s^-)) - \frac{\partial F}{\partial x}(A(s^-))\Delta A(s) \right] \\
&= F(A(0)) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(A(s^-))dM(s) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(A(s^-))dN(s) \\
&+ \sum_{s \le t} \left[F(A(s)) - F(A(s^-)) - \frac{\partial F}{\partial x}(A(s^-))\Delta A(s) \right]
\end{aligned}
$$

Como o termo previsível não é contínuo, concluímos que a fórmula clássica de Itô não representa a decomposição de Doob-Meyer. Uma fórmula de Itô que represente a decomposição de Doob-Meyer é denominada Fórmula de Itô Ótima. Uma extensão da fórmula de Itô ótima para processos de Lévy foi obtido por (EISENBAUM; WALSH *et al.*, 2009). Seja F uma função com primeira derivada de Radon-Nikodym localmente limitada. Com a hipótese de que a Equação (1.1) seja válida com $\lambda = 1$ e de que componente browniano seja diferente de zero, (EISENBAUM; WALSH *et al.*, 2009) obtiveram uma decomposição do processo $F(A)$ como a soma de um processo de Dirichlet com um processo de variação limitada.

Dado X um funcional de Lévy, tomamos uma aproximação X^k de variação limitada tal que X^k converge fortemente em $\mathbf{B}^2$ para X. Como X^k tem variação limitada, utilizamos a fórmula de mudança de variáveis para estabelecer a fórmula de Itô ótima para $F(\cdot, X^k(\cdot))$. Na sequência, mostramos que os componnentes da fórmula de Itô ótima para $F(\cdot, X^k(\cdot))$ convergem fracamente em $\mathbf{B}^1$ para os componentes da decomposição de Doob-Meyer do funcional de Lévy $F(\cdot, X(\cdot))$. Com isso, estabelecemos uma representação para o componente previsível da decomposição de Doob-Meyer do funcional de Lévy $F(\cdot, X(\cdot))$.

No Capítulo 6, construímos uma aproximação X^k de variação limitada para a solução de uma equação diferencial estocástica X dirigida por um processo de Lévy puro salto. Com isso, obtemos uma fórmula de Itô para a solução da equação diferencial estocástica X com uma função F de classe $C^{1,1}$.

Para ilustrarmos a abrangência da aproximação X^k, no Capítulo 7, aplicamos argumentos similares (LEÃO; OHASHI; RUSSO, 2019) para mostramos que o envelope de Snell de um funcional de Lévy pode ser aproximado pelo envelope de Snell de X^k. Na realidade, se X^k converge para X fortemente em $\mathbf{B}^2$, então o envelope de Snell de X^k também converge fortemente para o envelope de Snell de X.

CAPÍTULO

2

PROCESSO DE LÉVY DE PURO SALTO NÃO-HOMOGÊNEO

Em matemática financeira processos de Lévy são muito populares, uma vez que eles permitem modelos que são muito mais flexíveis que os modelos com movimento Browniano. Ao mesmo tempo, esses modelos são tratáveis do ponto de vista matemático e computacional. Entendemos por processo de Lévy um processo estocástico contínuo em probabilidade, com incrementos independentes e sem componente gaussiano. Considere A um processo de Lévy puro salto, definido num espaço que pode ser qualquer, mas utilizaremos o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$. O processo A tem decomposição de Lévy-Itô dada por

$$A(t,\omega) \;=\; A(0)+N(t)+M(t), \;\; 0 \leq t \leq T, \tag{2.1}$$

em que N é uma função determinística, uniformemente contínua e de variação limitada e M um martingale puro salto, tal que $N(0) = M(0) = 0$.

A filtração natural associada a A é definida por $\mathcal{A}_t = \sigma\{A(s,\cdot) : s \leq t\}$, para qualquer $t \in [0,T]$. É bem sabido que a filtração completa $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{A}_t \cup \mathcal{N}) : 0 \leq t \leq T\}$ é contínua à direita e quase contínua à esquerda (ver, (HE; WANG; YAN, 1992), pg.51) em que $\mathcal{N}$ é a família de conjuntos cuja medida é nula em $\mathcal{F}$.

Vamos supor que A é um processo quadrado-integrável, ou seja,

$$\mathbb{E} \mid A^{\star}(T) \mid^2 < \infty, \quad \text{em que} \quad A^{\star}(T) = \sup_{0 \leq t \leq T} \mid A(t) \mid . \tag{2.2}$$

Denotamos por $\{T_n : n \geq 1\}$ a sequência tempos de parada totalmente inacessíveis que representam os saltos do processo de Lévy puro salto A. Na sequência, associamos a A uma medida aleatória com valores inteiros $\mu : \Omega \times \beta([0,T]) \times \beta(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ dada por

$$\mu(\omega : [0,t], B) \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}_B[\Delta A(T_i(\omega),\omega)]\mathbb{1}_{\{T_i(\omega) \leq t\}}(\omega), \tag{2.3}$$

para todo $w \in \Omega$, $t \in [0,T]$ e $B \in \beta(\mathbb{R})$. Considere ε uma constante positiva e $B_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon)^c$ um subconjunto da reta que não contém o zero. Uma vez que $A(\cdot, \omega)$ tem no máximo um número finito de saltos em B_ε, concluimos que

$$\mu(\omega, [0,t], B_\varepsilon) \ < \ \infty \ ; \ \ \omega \in \Omega, \ t \in [0,T], \ \varepsilon > 0. \tag{2.4}$$

Então μ é uma medida aleatória com valores inteiros σ-finita, com compensador dado pela medida σ-finita ν em $([0,T] \times \mathbb{R}; \beta([0,T] \times \mathbb{R}))$ (ver (JACOD; SHIRYAEV, 2013) Proposição 1.21, pp 71)), satisfazendo

$$\nu([0,t], B) = E[\mu(\cdot, [0,t] \times B)].$$

Consequentemente, ν também é uma medida σ-finita, tal que

$$\nu([0,T], B_\varepsilon) \ < \ \infty, \ \text{ para cada } \ \varepsilon > 0. \tag{2.5}$$

Ao longo desse trabalho, supomos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\, x\,|^2 \, \nu([0,T], dx) \ < \ \infty. \tag{2.6}$$

Denotamos por $\tilde{\mathcal{O}}$ e $\tilde{\mathcal{P}}$ a sigma álgebra opcional e previsível, respectivamente, com respeito a $\mathbb{F}$. Neste trabalho, as projeções $\mathbb{F}$-dual previsível e opcional de um processo mensurável Y a valores reais será denotado por $[Y]^p$ e $[Y]^o$. Também denotamos por $[X,Y]$ e $\langle X,Y \rangle$ a variação quadrática usual e o *angle bracket* de um par de semimartingales, respecctivamente. O salto usual de um processo é denotado por $\Delta Y(t) = Y(t) - Y(t-)$, em que $Y(t-)$ é o limite à esquerda de um processo *cádlág* Y. Tomamos $Y(0-) = Y(0)$ por conveniência. Além disso, se T e S são tempos de parada, então $[[T,S]]$, $[[T,S[[$ e $]]T,S]]$ denotarão os intervalos estocásticos usuais. Para uma dada filtração $\mathbb{G} \subset \mathbb{F}$, denotamos $\mathbf{B}^2(\mathbb{G})$ o espaço dos processos estocásticos X, $\mathbb{G}$-adaptados, tal que

$$\mathbb{E}|X^*(T)|^2 < \infty, \ \text{ em que } \ X^*(T) := \sup_{0 \le t \le T} |X(t)|.$$

Também denotamos por $\mathbf{H}^2(\mathbb{G}) \subset \mathbf{B}^2(\mathbb{G})$ o espaço dos $\mathbb{G}$-martingales quadrado integráveis. Como consequência do pressuposto (2.2) e (2.6) o processo $A \in \mathbf{B}^2$ e satisfaz

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[A,A](T) = \langle A,A \rangle(T) \ &= \ \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} (A(t_n) - A(t_{n-1}))^2 \mathbb{1}_{\{T_n \le T\}}\right] \\
&= \ \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} (\Delta A(t_n))^2 \mathbb{1}_{\{T_n \le T\}}\right] \\
&= \ \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \mu(\cdot : [0,T], dx)\right] \\
&= \ \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \mathbb{E}[\mu(\cdot : [0,T], dx)] \\
&= \ \int_{-\infty}^{\infty} |\, x\,|^2 \, \nu([0,T], dx) \ < \ \infty.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Além disso, a componente martingale M da decomposição de Lévy-Itô para A tem a seguinte representação,

$$M(t)=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}x\left(\mu(\cdot,ds,dx)-\nu(ds,dx)\right),\quad 0\leq t\leq T.$$

Para qualquer $k\in\mathbb{N}$ e $0\leq t\leq T$, introduzimos

$$\begin{aligned}
A^k(t) &:= A(0)+M^k(t)+N(t)\\
&:= A(0)+\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}x\mathbb{1}_{\{|x|>2^{-k}\}}\left(\mu(\cdot,ds,dx)-\nu(ds,dx)\right)+N(t)\\
&= A(0)+\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}x\mathbb{1}_{\{|x|>2^{-k}\}}\mu(\cdot,ds,dx)-\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}x\mathbb{1}_{\{|x|>2^{-k}\}}\nu(ds,dx)+N(t)\\
&= A(0)+\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}x\mu^k(\cdot,ds,dx)-\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}x\nu^k(ds,dx)+N(t),
\end{aligned}$$

em que μ^k é a medida aleatória associada a A^k e ν^k a projeção previsível dual de μ^k.

Por definição

$$M^k(t)=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}x\mathbb{1}_{\{|x|>2^{-k}\}}\left(\mu(\cdot,ds,dx)-\nu(ds,dx)\right)=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}x\left(\mu^k(\cdot,ds,dx)-\nu^k(ds,dx)\right),\ 0\leq t\leq T.$$

é um $\mathbb{F}$-martingale quadrado integrável com incrementos independentes. Além disso, temos

$$\Delta M^k(T_n^k)=\Delta M(T_n^k),\quad n\geq 1.$$

Lema 1. A sequência de processos de Lévy de atividade finita $\{A^k:k\geq 1\}$ converge fortemente em $\mathbf{B}^2$ para o processo de Lévy de atividade infinita A, isto é,

$$\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}|A(t)-A^k(t)|^2\to 0,\quad \text{quando }\ k\to\infty.$$

Demonstração.

$$\sup_{0\leq t\leq T}|A(t)-A^k(t)|^2\leq\sup_{0\leq t\leq T}|M(t)-M^k(t)|^2\,. \tag{2.8}$$

Então, o fato de $M-M^k$ ser um $\mathbb{F}$-martingale quadrado integrável, a inequação de Burkholder-Davis-Gundy e o teorema da convergência dominada, implica em

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}|M(t)-M^k(t)|^2 &\leq \lim_{k\to\infty}\mathbb{E}[M-M^k,M-M^k](T)\\
&= \lim_{k\to\infty}\mathbb{E}\sum_{n=1}^{\infty}|\Delta A(T_n)|^2\,\mathbb{1}_{\{|\Delta A(T_n)|\leq 2^{-k}\}}\mathbb{1}_{\{T_n\leq T\}}\\
&= \lim_{k\to\infty}\mathbb{E}\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}|x|^2\,\mathbb{1}_{\{|x|\leq 2^{-k}\}}\mu(\cdot,ds,dx)\\
&= \lim_{k\to\infty}\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}|x|^2\,\mathbb{1}_{\{|x|\leq 2^{-k}\}}\nu(ds,dx)=0.
\end{aligned}\tag{2.9}$$

Portanto,

$$\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}|M(t)-M^k(t)|^2\leq\mathbb{E}[M(t)-M^k,M(t)-M^k(t)]\longrightarrow 0,\quad \text{quando}\quad k\to\infty.$$

Concluímos que

$$\mathbb{E} \sup_{0\le t\le T} \mid A(t) - A^k(t) \mid^2 \to 0, \quad \text{quando } \ k \to 0.$$

□

Contudo, $A^k(T_n^k) \neq A(T_n^k)$, pois A^k só "enxerga"os saltos maiores que ε e uma infinidade de saltos ficarão de fora e serão vistos por A que terá todos os saltos. Então eles podem não coincidir no tempo T_n^k.

Como consequência da inequação (2.9), obtemos uma taxa de convergência para a aproximação do martingale M pela sequência $\{M^k : k \geq 1\}$.

Corolário 1. Temos

$$\mathbb{E} \sup_{0\le t\le T} \mid M(t) - M^k(t) \mid^2 \le \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \mid x \mid^2 \mathbb{1}_{\{|x|\le 2^{-k}\}} \nu(ds, dx)$$

.

Observe que a taxa de convergência de A^k para A depende do comportamento de ν na vizinhança do zero. Assim, se A tem saltos concentrados em torno de zero, a convergência de A^k para A é lenta.

Como N e ν^k são funções determinísticas, a filtração natural associada a A^ké dada por

$$\mathcal{A}_t^k = \sigma\{A^k(s,\cdot) : s \le t\} = \sigma\{\int_0^s \int_{-\infty}^{\infty} x\mu^k(du, dx) : s \le t\},$$

para qualquer $t \in [0, T]$.

Segue disto que a filtração completa $\mathbb{F}^k = \{\mathcal{F}_t^k = \sigma(\mathcal{A}_t^k \cup \mathcal{N}^k) : 0 \le t \le T\}$ é uma filtração de salto do tipo discreta (ver, (HE; WANG; YAN, 1992), Definição 5.51, pg. 160). Além disso, o fato de que $\{T_n^k\}$ são tempos de parada $\mathbb{F}^k$ totalmente inacessíveis, concluímos que a filtração $\mathbb{F}^k$ é quase contínua à esquerda (ver, (HE; WANG; YAN, 1992), Teorema 5.64, pg 168). Finalmente, sabemos que

$$\mathcal{F}^k_{T_n^k} = \sigma\{T_1^k, \cdots, T_n^k; \Delta M^k(T_1^k), \cdots, \Delta M^k(T_n^k)\} = \sigma\{T_1^k, \cdots, T_n^k; \Delta M(T_1^k), \cdots, \Delta M(T_n^k)\},$$

e

$$\mathcal{F}^k_{T_n^k-} = \sigma\{T_1^k, \cdots, T_n^k; \Delta M^k(T_1^k), \cdots, \Delta M^k(T_{n-1}^k)\} = \sigma\{T_1^k, \cdots, T_n^k; \Delta M(T_1^k), \cdots, \Delta M(T_{n-1}^k)\},\ n \ge 1.$$

Na sequência, provaremos que a sequência de filtragens $\mathbb{F}^k$ converge fracamente no sentido de (COQUET; MÉMIN; SLOMINSKI, 2001)

Lema 2. A sequência de filtragens $\mathbb{F}^k$ converge fracamente para a filtração $\mathbb{F}$.

Demonstração. Consequência do Teorema 1 e da Proposição 2 em (COQUET; MÉMIN; SLOMINSKI, 2001).

□

Como M^k é um $\mathbb{F}$-martingale e $\mathbb{F}^j \subset \mathbb{F}$, segue que para $0 \leq s \leq t \leq T$ e $j \geq k$

$$\mathbb{E}\left(M^k(t) \mid \mathcal{F}_s^j\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(M^k(t) \mid \mathcal{F}_s\right) \mid \mathcal{F}_s^j\right) = \mathbb{E}\left(M^k(s) \mid \mathcal{F}_s^j\right) = M^k(s), \quad \text{quase certamente em } \mathbb{P}.$$

Consequentemente, M^k também é um $\mathbb{F}^j$-martingale quadrado integrável para todo $j \geq k$ e $k \geq 1$.

2.1 Convergência Fraca

Seja $\mathbf{B}^p(\mathbb{F})$ o conjunto de todos os processos $\mathbb{F}$-opcionais os quais são Böchner integráveis, com $1 \leq p < \infty$, isto é

$$\|X\|_{\mathbf{B}^p}^p = \mathbb{E}|X^*(T)|^p < \infty, \tag{2.10}$$

em que $X^*(T) := \sup_{0 \leq t \leq T} |X(t)|$. Sabemos que $\mathbf{B}^p(\mathbb{F})$ munido da norma $\|\cdot\|_{\mathbf{B}^p}$ é um espaço de Banach, em que o subespaço $\mathbf{H}^p(\mathbb{F})$ de todos os $\mathbb{F}$-martingales à partir de zero é fechado. Lembrando que a topologia dual $\mathbf{M}^q(\mathbb{F})$ de $\mathbf{B}^p(\mathbb{F})$ é o espaço de processos $A = (A^{pr}, A^{pd})$ tal que

(i) A^{pr} e A^{pd} são contínuos à direita, de variação limitada, tal que A^{pr} é $\mathbb{F}$ - previsível, com $A_0^{pr} = 0$ e A^{pd} é $\mathbb{F}$ - opcional e puramente descontínuo.

(ii) $Var(A^{pd}) + Var(A^{pr}) \in L^q : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

em que $Var(\cdot)$ denota a variação total de um processo de variação limitada no intervalo $[0, T]$. O espaço $\mathbf{M}^q(\mathbb{F})$ tem a topologia forte dada por

$$\|A\|_{M^q} := \|Var(A^{pr})\|_{L^q} + \|Var(A^{pd})\|_{L^q}.$$

O par de dualidades é dado por

$$(A, X) := \mathbb{E}\int_0^T X(s-)dA^{pr}(s) + \mathbb{E}\int_0^T X(s)dA^{pd}(s) : \quad X \in \mathrm{B}^p(\mathbb{F}),$$

em que a estimativa a seguir se aplica

$$|(A, X)| \leq \|A\|_{M^q}\|X\|_{\mathrm{B}^p},$$

para todo $A \in \mathbf{M}^q(\mathbb{F})$, $X \in \mathbf{B}^p(\mathbb{F})$ tal que $1 \leq p < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Denotamos por $M^\infty(\mathbb{F})$ o espaço dos processos de variação limitada $A = (A^{pr}, A^{pd})$ satisfazendo (i) e (ii) tal que $\|A\|_{M^\infty}$ é finito. Denotamos por $\sigma(\mathbf{B}^p, \mathbf{M}^q)$ a topologia fraca de $\mathbf{B}^p(\mathbb{F})$. Neste trabalho, os índices $p = 1, 2$ desempenharão um papel fundamental em nossos resultados de convergência. Em particular, os subespaços H^p para $p = 1, 2$. Ver os trabalhos ((DELLACHERIE; MEYER; YOR,

1978),(DELLACHERIE, 1974),(MEYER, 1977)) para uma discussão detalhada sobre a topologia fraca de $\mathbf{B}^p(\mathbb{F})$ restrita ao subespaço de martingales $\mathbf{H}^p(\mathbb{F})$.

Também será útil trabalhar com a seguinte noção de convergência. Pode-se mostrar que o conjunto Λ^∞ de processos de variação limitada $\mathbb{F}$-opcionais, da forma

$$C = g\mathbb{1}_{\{S\leq\cdot\}}: \quad g \in L^\infty(\mathcal{F}_S), \quad S \text{ é um } \mathbb{F}-\text{tempo de parada (limitado por T)},$$

preenche o espaço de Banach $\mathbf{B}^1(\mathbb{F})$ no sentido de

$$\|X\|_{\mathbf{B}^1} = \sup\left\{|(X,C)| : C \in \Lambda^\infty, \|C\|_{\mathrm{M}^\infty} \leq 1\right\}. \tag{2.11}$$

A relação (2.11) é dada em ((DELLACHERIE; MEYER, 1978); Lema 1) e, portanto, podemos dotar $\mathrm{B}^1(\mathbb{F})$ com a $\sigma(\mathrm{B}^1,\Lambda^\infty)$-topologia induzida pela família de seminormas

$$X \mapsto (X,C): \quad C \in \Lambda^\infty.$$

Observação 1. Obviamente, $\sigma(\mathrm{B}^1,\Lambda^\infty)$ é mais fraca que $\sigma(\mathrm{B}^1,\mathrm{M}^\infty)$. No entanto, a relação (2.11) nos diz que Λ^∞ é um subconjunto normado de M^∞ e portanto Λ^∞ é w^*-denso em M^∞.

Observação 2. Um resultado devido a Mokobodzki (MEYER, 1977) afirma que se X^n é uma sequência de processos opcionais tal que $\sup_{0\leq t\leq T}|X_t^n|$ é uniformemente integrável e para todo S tempo de parada a sequência X_S^n converge fracamente em L^1 relativamente para $\mathcal{F}_S$, então, existe um processo opcional X tal que $X^n \to X$ em $\sigma(\mathbf{B}^1,\mathrm{M}^\infty)$. Como consequência, se $X^n \to X$ em $\sigma(\mathrm{B}^1,\Lambda^\infty)$ e $\sup_{0\leq t\leq T}|X_t^n|$ é uniformemente integrável, temos a convergência em $\sigma(\mathbf{B}^1,\mathrm{M}^\infty)$. Ver também Dellacherie et al. (DELLACHERIE; MEYER, 1978) para mais detalhes.

2.2 Processo de Lévy de Variação Limitada

Considere Y um processo de Lévy puro salto na forma

$$Y(t,\omega) \quad = \quad \sum_{i=1}^{\infty} \Delta Y(T_i(\omega),\omega)\mathbb{1}_{\{T_i(\omega)\leq t\}}(\omega), \quad 0 \leq t \leq T \quad \text{e} \quad \text{q.s. } \omega \in \Omega, \tag{2.12}$$

tal que a série

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\, \Delta Y(T_i(\omega),\omega) \,|\, \mathbb{1}_{\{T_i(\omega)\leq T\}}(\omega) < \infty, \quad \text{q.s. } \omega \in \Omega.$$

Neste caso, dizemos que Y é um processo de Lévy puro salto com trajetórias de variação limitada. Da mesma forma, associamos ao processo Y a medida aleatória μ satisfazendo (2.3) e, tal que

$$Y(t,\omega) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} x\mu(\omega,ds,dx) \tag{2.13}$$

para todo $t \in [0,T]$ e $\omega \in \Omega$. Como consequência do processo Y ter variação limitada e ser integrável, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\nu([0,t],dx) \; < \; \infty \quad \forall t. \tag{2.14}$$

Além disso, do pressuposto (2.2) e (2.14), o processo $A \in \mathbf{B}^2$ e satisfaz (2.7). Agora, o componente martingale M da decomposição de Itô-Lévy para o processo de variação limitada A tem a seguinte forma,

$$M(t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} x\mu(\cdot, ds, dx) - \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} x\nu(ds, dx), \quad 0 \le t \le T, \tag{2.15}$$

no qual N é dado por

$$N(t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} x\nu(ds, dx) \quad \text{e} \quad \langle M, M\rangle(t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} x^2 d\nu(ds, dx), \quad 0 \le t \le T. \tag{2.16}$$

Da mesma forma, para qualquer $k \in \mathbb{N}$ e $0 \le t \le T$, tomamos

$$\begin{aligned}
Y^k(t) &:= Y(0) + M^k(t) + N(t) \\
&= Y(0) + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} x\mathbb{1}_{\{|x|>2^{-k}\}}\mu(\cdot, ds, dx) - \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} x\nu(ds, dx) \\
&\quad + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} x\nu(ds, dx) \\
&= Y(0) + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} x\mu^k(\cdot, ds, dx) - \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} x\nu(ds, dx) + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} x\nu(ds, dx) \\
&= Y(0) + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} x\mu^k(\cdot, ds, dx),
\end{aligned}$$

em que μ^k é a medida aleatória relacionada Y^k e ν a projeção previsível dual de μ.

Teorema 1. A sequência de processos de Lévy de atividade finita $\{Y^k : k \ge 1\}$ converge fracamente em $\mathbf{B}^2$ para o processo de Lévy de variação limitada Y, isto é,

$$|\, Y(t) - Y^k(t) \,|^2 \to 0, \quad \text{quando} \;\; k \to \infty.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} |\, Y(t) - Y^k(t)|^2 &= \lim_{k\to\infty} \left| \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} x\mu(\cdot, ds, dx) - \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} x\mathbb{1}_{\{|x|>2^{-k}\}}\mu(\cdot, ds, dx) \right|^2 \\
&= \lim_{k\to\infty} \left| \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} x(1 - \mathbb{1}_{\{|x|>2^{-k}\}})\mu(\cdot, ds, dx) \right|^2 \\
&= \lim_{k\to\infty} \left| \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} x\mathbb{1}_{\{|x|\le 2^{-k}\}}\mu(\cdot, ds, dx) \right|^2 = 0
\end{aligned}$$

□

2.3 Simulação do processo de Lévy puro salto

Seja A um processo de Lévy puro salto com representação de Itô-Lévy dado em 2.1. Através do Teorema 1, podemos aproximar o processo de Lévy A pelo processo A^k, que apresenta um número finito de saltos. Como A^k pode ser escrito na forma,

$$A^k(t) = A(0) + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} x\mu^k(\cdot, ds, dx) - \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} x\nu^k(ds, dx) + N^k(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{2.17}$$

nos quais

$$\int_0^{\cdot} \int_{-\infty}^{\infty} x\nu^k(ds,dx) \quad \text{e} \quad N^k(t)$$

são determinísticos, basta simularmos o processo de Poisson composto não homogêneo,

$$Y^k(t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} x\mu^k(\cdot,ds,dx), \quad 0 \le t \le T.$$

Uma vez que μ é uma medida σ-finita em $([0,T]\times(-\infty,\infty),\beta([0,T]\times(-\infty,\infty)))$, sabemos que μ pode ser desintegrada [(LEÃO; FRAGOSO; RUFFINO, 2004) (Teorema 3.1 e Corolário 3.1)]. Então para qualquer $\varepsilon > 0$, $t \in [0,T]$ e $B \in \beta(B_\varepsilon)$, obtemos

$$\nu([0,t],B) = \int_0^t \eta_\varepsilon(B|s)\nu(ds,B_\varepsilon)$$

em que η_ε é uma medida de transição de probabilidade de $([0,T],\beta[0,T])$ em $(B_\varepsilon,\beta(B_\varepsilon))$, satisfazendo

$$\eta_\varepsilon(B_\varepsilon|s) = 1, \quad \text{com } s \in (0,T)$$

. Assim, para qualquer $s \in (0,T)$, podemos estender $\eta_\varepsilon(\cdot|s)$ para $((-\infty,\infty),\beta((-\infty,\infty)))$ por $\eta_\varepsilon(G|s) = \eta_\varepsilon(G\cap B_\varepsilon|s)$, com $G \in \beta((-\infty,\infty))$. O par $(\nu(\cdot.\cdot \cap B_\varepsilon),\eta_\varepsilon)$ é chamado característica local da medida aleatória $\mu(\cdot,\cdot,\cdot\cap B_\varepsilon)$ ((BRÉMAUD, 1981), p. 247-248).

A seguir, mostraremos como a característica local pode ser usada para determinar a medida aleatória $\mu(\cdot,\cdot,\cdot\cap B_\varepsilon)$. Denotamos por $\{U_i^{B_\varepsilon} : i \ge 1\}$ a classe dos $\mathbb{F}^k$-tempos de parada totalmente inacessíveis que representam os saltos da medida aleatória $\mu(\cdot,\cdot,\cdot\cap B_\varepsilon)$.

Teorema 2. Para cada $\varepsilon > 0$, o processo estocástico $\mu(\cdot,\cdot,B_\varepsilon)$ é um processo de Poisson não homogênio com função de intensidade $\nu(B_\varepsilon)$. Além disso,

$$\mathbb{P}\left[\omega' \in \Omega :\ \Delta A(U_i^{B_\varepsilon}(\omega')) \in G | U_1^{B_\varepsilon},\ldots,U_i^{B_\varepsilon}; \Delta A(U_1^{B_\varepsilon}),\ldots,\Delta A(U_{i-1}^{B_\varepsilon})\right] =$$

$$\eta_\varepsilon(G|U_i^{B_\varepsilon}) = \frac{\nu\left((U_{i-1}^{B_\varepsilon}), G\cap B_\varepsilon\right)}{\nu\left((U_{i-1}^{B_\varepsilon}), B_\varepsilon\right)} \ ;\ \mathbb{P}-\text{quase certamente} \tag{2.18}$$

Então, uma versão da probabilidade condicional regular η_ε é dada por

$$\eta_\varepsilon(G|u_n) = \lim_{u_{n-1}\uparrow u_n} \frac{\nu((u_{n-1},u_n],G\cap B_\varepsilon)}{\nu((u_{n-1},u_n],B_\varepsilon)} \tag{2.19}$$

Para qualquer $G \in \beta((-\infty,\infty))$ e $u_n \in C$, tal que $C \in \beta((0,T))$ e $\mathbb{P}[(U_n^{B_\varepsilon})^{-1}(C)] = 1$.

Demonstração. Segue da definição que a medida aleatória $\mu(\cdot,\cdot,B_\varepsilon)$ tem um número finito de saltos, então é um processo de Poisson não homogêneo com função de intensidade $\nu(\cdot,B_\varepsilon)$. Além disso, segue de (BRÉMAUD, 1981)(Teorema 16, p. 247) e (SKOROHOD, 1991)(Teorema 19, p. 153) que a equação (2.18) é válida.

Considere o vetor aleatório $(U_{n-1}^{B_\varepsilon}, U_n^{B_\varepsilon})$ com valores em $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}$ com a σ-álgebra de Borel $\beta(E)$. Denotamos a probabilidade da imagem por $\lambda(D) = \mathbb{P}[(U_{n-1}^{B_\varepsilon}, U_n^{B_\varepsilon})^{-1}(D)]$, para todo $D \in \beta(E)$. Então, existe um conjunto de Borel $N \in \beta(E)$, com $\lambda(E) = 0$, tal que

$$\eta_\varepsilon(B|u_n) = \frac{\nu\left((u_{n-1}, u_n], B\right)}{\nu\left((u_{n-1}, u_n], B_\varepsilon\right)}$$

para todo $(u_{n-1}, u_n) \notin N$. Consequentemente, podemos tomar uma sequência $\{u_{n-1}^k\}$ tal que $(u_{n-1}^k, u_n) \notin N$ e $u_{n-1}^k \uparrow u_n$. Assim, obtemos

$$\eta_\varepsilon(B|u_n) = \lim_{k \uparrow \infty} \frac{\nu\left((u_{n-1}^k, u_n], B\right)}{\nu\left((u_{n-1}^k, u_n], B_\varepsilon\right)}$$

para qualquer $u_n \in C = Proj_y(E - N)$, em que $Proj_y[(x,y)] = y$ para qualquer $(x,y) \in E$. Finalmente, obtemos $\mathbb{P}[(U_n^{b_\varepsilon})^{-1}(C)] = \lambda[Proj_y^{-1}(C)] = \lambda(E - N) = 1$

□

Suponha que a medida de Lévy ν seja absolutamente contínua com respeito a medida σ-finita δ, isto é, para qualquer $G \in \beta((0,\infty))$ existe uma função mensurável $\lambda(G,\cdot) : [0,1] \to [0,\infty]$ tal que

$$\nu([0,t], G) = \int_0^t \lambda(G,s)\delta(ds). \tag{2.20}$$

Denotamos a probabilidade da imagem com respeito ao tempo de para $U_n^{B_\varepsilon}$ por $(U_n^{B_\varepsilon} \star \mathbb{P})(D) = \mathbb{P}[(U_n^{B_\varepsilon})^{-1}(D)]$, para qualquer $D \in \beta((0,T))$. Uma vez que o processo estocástico $\mu(\cdot,\cdot,B_\varepsilon)$ seja um processo de Poisson não homogêneo com medida de Lévy $\nu(\cdot, B_\varepsilon)$, concluímos que $(U_n^{B_\varepsilon} \star \mathbb{P})$ é absolutamente contínua com respeito a medida σ-finita δ. Então, segue do Teorema 2 que

$$\eta_\varepsilon(G|u_i) = \lim_{u_{t-1} \uparrow u_t} \frac{\int_{u_{t-1}}^{u_t} \lambda(G \cap B_\varepsilon, s)\delta(ds)}{\int_{u_{t-1}}^{u_t} \lambda(B_\varepsilon, s)\delta(ds)} = \frac{\lambda(G \cap B_\varepsilon, s)\delta(ds)}{\lambda(B_\varepsilon, s)\delta(ds)} \quad ; \quad \delta - \text{quase cert.}, \tag{2.21}$$

A seguir, com o resultado estabelecido nesta seção, iremos descrever um algoritmo para simular o processo de Lévy Y^k:

1) Se $\nu([0,t],(0,\infty)) < \infty$, então

   1.1) Gerar um processo de Poisson não homogêneo com intensidade $\nu((0,\infty))$: $u_1, u_2, \cdots, u_\ell$;

   1.2) Dados os tempos de saltos $u_1 < u_2 < \cdots < u_\ell < T$ e o tamanho dos saltos $x_0 = 0, x_1, \cdot, x_{i-1}$, gerar o tamanho do salto $\Delta Y(u_i)$ da Equação (2.19) com $\varepsilon = 0 : x_1, \cdots, x_\ell$;

   1.3) Então, a trajetória do processo de Lévy é

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{\ell} x_i \mathbb{1}_{\{u_t \leq t\}}$$

.

2) Se $\nu([0,t],(0,\infty)) = \infty$, dado $\varepsilon = 2^{-k}$, geramos Y^k seguindo os passos de (1.1) e (1.2), com medida de Lévy $\nu(\cdot,\cdot \cap B_{2^{-k}})$ e (1.3).

Em seguida, descrevemos o algoritmo para os casos particulares, considerando o processo Beta e o processo Gama estendido.

2.3.1 Amostrando o Processo Beta

Segue de (HJORT, 1990) e (KIM, 1999) que o processo Beta com parâmetros $(Y_0(t), c(t))$, denotado por $BP(Y_0, c)$ é um processo de Lévy com medida

$$\nu([0,t],B) = \int_0^t \int_B \frac{c(s)}{x}(1-x)^{c(s)-1} dx dY_0(s) \tag{2.22}$$

para qualquer $B \in \beta((0,1])$ e $t \in [0,T]$, em que Y_0 é uma função não negativa, contínua e não decrescente e $c(t)$ é uma função não negativa e contínua por partes. Como ν tem massa total infinita, aproximaremos o processo Beta Y por um processo de Poisson composto Y^ε com medida de Lévy $\nu([0,t],B_\varepsilon)$, para qualquer $\varepsilon > 0$.

Além disso, para qualquer $G \in \beta((0,1])$, segue do Teorema (2) que

$$\begin{aligned}
\eta_\varepsilon(G|u_i) &= \lim_{u_{t-1}\uparrow u_t} \frac{\int_{u_{t-1}}^{u_t} \int_{G\cap B_\varepsilon} \frac{c(s)}{x}(1-x)^{c(s)-1} dx dY_0(s)}{\int_{u_{t-1}}^{u_t} \int_{B_\varepsilon} \frac{c(s)}{x}(1-x)^{c(s)-1} dx dY_0(s)} \\
&= \frac{\int_{G\cap B_\varepsilon} \frac{c(u_t)}{x}(1-x)^{c(u_t)-1} dx}{\int_{B_\varepsilon} \frac{c(u_t)}{x}(1-x)^{c(u_t)-1} dx} \quad ; \quad dY_0(s) - \text{quase certamente,}
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Assim, o algoritmo para simular o processo Beta pode ser o seguinte:

1) Dado $\varepsilon > 0$, geramos um processo de Poisson não homogêneo com função de intensidade $\nu(\cdot, B_\varepsilon)$. Para gerar o processo de Poisson não-homogêneo, os seguintes passos podem ser seguidos:

   1.1) Primeiro, gerar o número de saltos ℓ de Y^ε como Poisson $(\nu([0,T],B_\varepsilon))$;

   1.2) Dado o número de pontos de salto ℓ, gerar os tempos de salto $u_1, < \cdots, < u_\ell < T$ como a estatística de ordem de ℓ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição de probabilidade comum, dada por

$$\frac{\nu([0,t],B_\varepsilon)}{\nu([0,T],B_\varepsilon)} \mathbb{1}_{\{0<t\leq T\}} = \frac{\int_0^t \int_{B_\varepsilon} \frac{c(s)}{x}(1-x)^{c(s)-1} dx dY_0(s)}{\int_0^T \int_{B_\varepsilon} \frac{c(s)}{x}(1-x)^{c(s)-1} dx dY_0(s)} \mathbb{1}_{\{0<t\leq T\}}; \tag{2.24}$$

2) Dados os tempos de salto $u_1 < \cdots < u_\ell < T$ e os tamanhos de salto $x_0, x_1, \cdots, x_{i-1}$, gerar o tamanho do salto $\Delta Y^\varepsilon(u_i)$ da Equação (2.23).

	$\varepsilon = 0.1$	$\varepsilon = 0.01$	$\varepsilon = 0.001$	$\varepsilon = 0.0001$	$\varepsilon = 0.00001$
Média	0.8180	0.9116	0.9008	0.8926	0.9025
Variância	0.3495	0.4395	0.4593	0.4556	0.4414

Tabela 1 – Média e Variância obtidas de 10000 amostas no ponto $t = 0.9$

3) Finalmente, a amostra da trajetória do processo Beta pode ser aproximado por

$$Y^{\varepsilon}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \mathbb{1}_{\{u_t \leq t\}}$$

Para ilustrar o algoritmo proposto, aplicamos ele para gerar amostras de trajetórias a partir de processos Beta homogêneos e não homogêneos. Primeiro, consideramos o processo Beta homogêneo $BP(Y_0(t) = t, c(t) = 1)$ no intervalo unitário. Para o processo Beta com parâmetros $Y_0(t) = t$ e $c(t) = 1$, temos

$$\nu([0,t],B) = \int_0^t \int_B \frac{1}{x} dxds$$

para qualquer $B \in \beta((0,1])$ e $t \in [0,1]$. Então a média amostral e a variância amostral do processo gerado em $t = 0,9$ são comparados com a média real

$$\mathbb{E}[Y(t)] = \int_0^t \int_0^1 x\nu(ds,dx) = \int_0^t \int_0^1 (ds,dx) = t$$

e a variância real

$$\mathbb{V}ar[Y(t)] = \int_0^t \int_0^1 x^2 \nu(ds,dx) = \int_0^t \int_0^1 x(ds,dx) = \frac{t}{2}$$

do processo Beta $BP(t,1)$, respectivamente. Os resultados da simulação são apresentados na Tabela 1. Como $\mathbb{E}[Y^{\varepsilon}] = t(1-\varepsilon)$ e $\mathbb{V}ar[Y^{\varepsilon}] = t(1-\varepsilon)^2/2$, quando o valor de ε decresce a média amostral e a variância amostral se aproximam do valor real.

A seguir, aplicamos o algoritmo proposto para gerar trajetórias do processo Beta não homogêneo com parâmetros $A_0(t) = t$ e $c(t) = (t+2)$ no intervalo unitário.

Neste caso,

$$\nu([0,t],B) = \int_0^t \int_B \frac{(s+2)}{x}(1+x)^{s+1} dxds$$

para qualquer $B \in \beta((0,1])$ e $t \in [0,1]$. A média amostral e a variância amostral do processo gerado em $t = 0.9$ são comparados com a média real

$$\mathbb{E}[Y(0.9)] = \int_0^{0.9} \int_0^1 x\nu(ds,dx) = \int_0^{0.9} \int_0^1 (s+2)(1+x)^{s+1}(ds,dx) = 0.9,$$

e a variância real

$$\mathbb{V}ar[Y(0.9)] = \int_0^{0.9} \int_0^1 x^2 \nu(ds,dx) = \int_0^{0.9} \int_0^1 x(s+2)(1+x)^{s+1}(ds,dx) = 0.2623$$

para o processo $BP(t,t+2)$, respectivamente. Os resultados da simulação são apresentados na Tabela 2

	$\varepsilon = 0.1$	$\varepsilon = 0.01$	$\varepsilon = 0.001$	$\varepsilon = 0.0001$	$\varepsilon = 0.00001$
Média	0.7628	0.8586	0.9026	0.90012	0.8992
Variância	0.2314	0.2675	0.2688	0.2655	0.2618

Tabela 2 – Média e Variância obtidas de 10000 amostas no ponto $t = 0.9$

2.3.2 Amostrando o Processo Gama Estendido

A classe de processos Gama Estendido foi definido por (DYKSTRA RL, 1981)(Teorema 2.1). Eles usaram a classe de processos estocásticos como uma priori para a taxa de risco da distribuição de probabilidade em um contexto de confiabilidade. Segue de (LAUD; SMITH; DAMIEN, 1996) que o processo Gama Estendida com parâmetros $(Y_0(t), c(t))$, denotado por $EG(Y_0, c)$, é um processo de Lévy com medida de Lévy

$$\nu([0,t], B) = \int_0^t \int_B \frac{1}{x} e^{-c(s)x} dx dY_0(s), \tag{2.25}$$

para qualquer $B \in \beta((0,\infty))$ e $t \in [0,1]$, em que Y_0 é uma função positiva, contínua à esquerda e não decrescente e $c(t)$ é uma função positiva, contínua a direita com limite à esquerda. Como ν tem massa total infinita, aproximamos o processo Gama Estendido Y por um processo de Poisson composto Y^{ε} com medida de Lévy $\nu(\cdot, \cdot \cap B_{\varepsilon})$, para qualquer $\varepsilon > 0$. Além disso, para qualquer $G \in \beta((0,\infty))$

$$\begin{aligned} \eta_{\varepsilon}(G|u_i) &= \lim_{u_{t-1} \uparrow u_t} \frac{\int_{u_{t-1}}^{u_t} \int_{G \cap B_{\varepsilon}} \frac{1}{x} e^{-c(s)x} dx dY_0(s)}{\int_{u_{t-1}}^{u_t} \int_{B_{\varepsilon}} \frac{1}{x} e^{-c(s)x} dx dY_0(s)} \\ &= \frac{\int_{G \cap B_{\varepsilon}} \frac{1}{x} e^{-c(u_t)x} dx}{\int_{B_{\varepsilon}} \frac{1}{x} e^{-c(u_t)x} dx} \quad ; \quad dY_0(s) - \text{quase certamente}, \end{aligned} \tag{2.26}$$

para todo $t \in [0,1]$. Sendo assim, o algoritmo para simular o processo Gama Estendido é o mesmo descrito na Seção (2.3.1) para simular o processo Beta. Para ilustrar o algoritmo proposto, aplicamos este algoritmo para gerar a trajetória amostral de $EG(Y_0(t) = t, c(t) = 1)$ no intervalo unitário. Para o processo Gama Estendido com parâmetros $Y_0(t) = t$ e $c(t) = 1$, temos

$$\nu([0,t], B) = \int_0^t \int_B \frac{1}{x} e^{-x} dx ds$$

para qualquer $B \in \beta((0,1])$. A média amostral e a variância amostral do processo gerado em $t = 0.9$ são comparados com a média real

$$\mathbb{E}[Y(t)] = \int_0^t \int_0^{\infty} x \nu(ds, dx) = \int_0^t \int_0^{\infty} e^{-x} dx ds = t$$

e a variância real

$$\mathbb{V}ar[Y(t)] = \int_0^t \int_0^{\infty} x^2 \nu(ds, dx) = \int_0^t \int_0^{\infty} x e^{-x} dx ds = t$$

	$\varepsilon = 0.1$	$\varepsilon = 0.01$	$\varepsilon = 0.001$	$\varepsilon = 0.0001$	$\varepsilon = 0.00001$
Média	0.8209	0.89128	0.8987	0.8903	0.9020
Variância	0.9397	0.8745	0.8830	0.8850	0.9089

Tabela 3 – Média e Variância obtidas de 10000 amostas no ponto $t = 0.9$

do processo Gama Estendido, respectivamente. Como pode ser observado na Tabela 3, quando ε decresce a média amostral e a variância amostral se aproximam do valor real. Os resultados da simulação são apresentados na Tabela 3.

CAPÍTULO

3

REPRESENTAÇÃO PREVISÍVEL FRACA DO MARTINGALE

Neste capítulo vamos obter uma representação explícita para martingales. Seja X um $\mathbb{F}$-martingale quadrado integrável. Deve ser observado que a filtração interna do processo de Lévy de atividade infinita A não é uma filtração de salto, como consequência, em geral, martingales não têm trajetórias de variação limitada. Contudo, a filtração interna do processo de Lévy de puro salto tem uma propriedade de representação previsível fraca (ver, (HE; WANG; YAN, 1992), Teorema 13.49, pp.390). Como consequência, sabemos que X é uma soma compensada de saltos com representação

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} W(s,x)\left(\mu(\cdot,ds,dx) - \nu(ds,dx)\right), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3.1}$$

em que $W = M_\mu^{\mathbb{P}}\left[\Delta X \mid \tilde{\mathcal{P}}\right]$ (ver, (JACOD, 1979), Teorema 3.75, pp. 103). Além disso, nós temos

$$W(T_n, \Delta X(T_n)) = \Delta X(T_n), \quad n \geq 1.$$

No restante desse trabalho faremos uso da integração estocástica opcional de W com respeito a medida $(\mu - \nu)$. Indicamos ao leitor (DELLACHERIE; MEYER, 1982) e (HE; WANG; YAN, 1992) para todos os detalhes sobre integrais opcionais usados neste trabalho. Queremos mencionar aqui que, desde que a filtração $\mathbb{F}$ seja quase contínua à esquerda, então as integrais opcionais relacionadas vão admitir as propriedades operacionais habituais das integrais estocásticas com integrandos previsíveis (ver e.g. observação 35 em (DELLACHERIE; MEYER, 1982), p. 346).

Neste trabalho, denotamos por $\oint_0^t Y(s)dM(s)$ a integral opcional de um processo $\mathbb{F}$-

opcional Y. Para um dado processo $\mathbb{F}$-opcional Y, satisfazendo

$$\mathbb{E}\int_0^T Y^2(s)d[M,M](s) = \mathbb{E}\sum_{n=1}^{\infty} \mid Y(T_n)\Delta M(T_n) \mid^2 \mathbb{1}_{\{T_n \leq T\}} < \infty,$$

a integral opcional de Y com respeito a M é o único $\mathbb{F}$-martingale quadrado integrável, tal que

$$[\oint_0^{\cdot} Y(s)dM(s), W](t) = \int_0^t Y(s)d[M,W](t), \quad \text{para todo } 0 \leq t \leq T \text{ e } W \in \mathbf{H}^2(\mathbb{F}).$$

Na sequência, apresentamos a derivada estocástica de X com respeito a M dada por

$$\mathcal{D}X(t) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta X(T_n)}{\Delta M(T_n)} \mathbb{1}_{\{[[T_n]]\}}(t)\mathbb{1}_{\{T_n \leq t\}}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Como X é um $\mathbb{F}$-martingale, quadrado integrável, concluímos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\int_0^T \mid \mathcal{D}X(t) \mid^2 d[M,M](t) &= \mathbb{E}\sum_{n=1}^{\infty} \mid \mathcal{D}X(T_n)\Delta M(T_n) \mid^2 \mathbb{1}_{\{T_n \leq T\}} \\ &= \mathbb{E}\sum_{j=1}^{\infty} \mid \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta X(T_n)}{\Delta M(T_n)} \mathbb{1}_{\{[[T_n]]\}}(t)\mathbb{1}_{\{T_n \leq t\}}\Delta M(T_n) \mid^2 \mathbb{1}_{\{T_j \leq T\}} \\ &= \mathbb{E}\sum_{j=1}^{\infty} \mid \Delta X(T_j) \mid^2 \mathbb{1}_{\{T_j \leq T\}} < \infty. \end{aligned}$$

Como consequência, a integral estocástica opcional $\oint \mathcal{D}X dM$ está bem definida e chegamos ao seguinte lema.

Lema 3. Todo $\mathbb{F}$-martingale quadrado integrável X tem a seguinte representação

$$X(t) = X(0) + \oint_0^t \mathcal{D}X(s)dM(s), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Em particular, qualquer martingale quadrado integrável W, tal que $[W,M] = 0$ é uma constante.

Demonstração. O lema é uma consequência da seguinte igualdade

$$\Delta \oint_0^{T_n} \mathcal{D}X(s)dM(s) = \mathcal{D}X(T_n)\Delta M(T_n) = \Delta X(T_n), \quad n \geq 1.$$

□

3.1 Esquema de Aproximação

Para qualquer $X \in \mathbf{H}^2(\mathbb{F})$ vamos aproximar X por uma sequência $\{X^k\}$ tal que X^k é um $\mathbb{F}^k$-martingale, para todo $k \geq 1$. Denotamos por

$$\delta^k X(t) = \mathbb{E}\left[X(T) \mid \mathcal{F}_t^k\right], \quad 0 \leq t \leq T,$$

a projeção opcional do $\mathbb{F}$-martingale X para a filtração $\mathbb{F}^k$, para todo $k \geq 1$. Como $\mathbb{F}^k$ converge fracamente para $\mathbb{F}$ e T é um ponto de continuidade de X, obtemos (ver, (COQUET; MÉMIN; SLOMINSKI, 2001), observação 4)

$$\mathbb{E} \mid \delta^k X(T) - X(T) \mid^2 \to 0, \quad \text{quando } k \to \infty. \tag{3.2}$$

Lema 4. Para todo $X \in \mathbf{H}^2(\mathbb{F})$, temos

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \mid \delta^k X(t) - X(t) \mid^2 \to 0, \quad \text{quando } k \to \infty.$$

A variação quadrática satisfaz,

$$\mathbb{E}[X - \delta^k X, X - \delta^k X](T) \to 0 \text{ e } \mathbb{E}[X - \delta^k X, W](t) \to 0, \tag{3.3}$$

quando $k \to \infty$ para todo $0 \leq t \leq T$ e W um $\mathbb{F}$-martingale quadrado integrável.

Demonstração. Como $\delta^k X - X$ é um $\mathbb{F}$-martingale quadrado integrável, segue da equação 3.2 e da desigualdade Doob que,

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \mid \delta^k X(t) - X(t) \mid^2 \leq 4\mathbb{E} \mid \delta^k X(T) - X(T) \mid \to 0.$$

Assim, o resultado é consequência da desiguldade de Burkholder, Davis e Gundy. Obtendo 3.3

□

Seja $\{X^k : k \geq 1\} \subset \mathbf{B}^2(\mathbb{F})$ uma família de processos estocásticos, tal que X^k é um $\mathbb{F}^k$-martingale, para todo $k \geq 1$. Se X^k converge para X fortemente em $\mathbf{B}^2(\mathbb{F})$, dizemos que a família $\{X^k : k \geq 1\}$ é uma **sequência de aproximação forte** (SAF) para o $\mathbb{F}$-martingale quadrado integrável X. Como consequência, obtemos que a família $\{X^k : k \geq 1\}$ tem energia finita

$$\sup_k \mathbb{E} \sum_{n=1}^{\infty} \mid \Delta X^k(T_n^k) \mid^2 \mathbb{1}_{\{T_n \leq T\}} < \infty.$$

De fato, como $X^k \to X$ fortemente em $\mathbf{B}^2(\mathbb{F})$, concluímos que

$$\sup_k \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \mid X^k(t) \mid^2 < \infty.$$

Então, a desigualdade de Burkholder-Davis-Gundy nos mostra que a família de processos $\{X^k : k \geq 1\}$ tem energia finita,

$$\sup_k \mathbb{E} \sum_{n=1}^{\infty} \mid \Delta X^k(T_n^k) \mid^2 \mathbb{1}_{\{T_n \leq T\}} = \sup_k \mathbb{E}[X^k, X^k](T) \leq C \sup_k \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \mid X^k(t) \mid^2 < \infty. \tag{3.4}$$

Além disso, temos

$$\mathbb{E}[X - X^k, X - X^k](T) \leq C\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \left| X(t) - X^k(t) \right|^2 \to 0, \quad k \to \infty. \tag{3.5}$$

Como uma aplicação do Lema 4, sabemos que a projeção opcional $\{\delta^k X : k \geq 1\}$ é um exemplo de SAF. O fato de $\mathbb{F}^k$ ser uma filtração do tipo discreta , resulta que qualquer $\mathbb{F}^k$-martingale é uma soma compensada de saltos. Então, concluímos que

$$\begin{aligned} X^k(t) &= X(0) + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} H^k(s,x) \left(\mu^k(\cdot, ds, dx) - \nu^k(ds, dx) \right) \\ &= X(0) + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} H^k(s,x) \mathbb{1}_{\{|x| > 2^{-k}\}} \left(\mu(\cdot, ds, dx) - \nu(ds, dx) \right), \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned} \tag{3.6}$$

em que $H^k = M^{\mathbb{P}}_{\mu^k}\left[\Delta X^k \mid \tilde{\mathcal{P}}^k\right]$ (ver, (JACOD, 2006), Teorema 3.75, pp. 103). Além do mais,

$$H^k(T_n, \Delta X^k(T^k_n)) = \Delta X^k(T^k_n), \quad n \geq 1.$$

Como $\tilde{\mathcal{P}}^k \subset \tilde{\mathcal{P}}$ para todo $k \geq 1$, concluímos que X^k é também um $\mathbb{F}$-martingale quadrado integrável.

Na sequência, introduzimos o seguinte processo derivada estocástica

$$\mathcal{D}X^k(\cdot) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta X^k(T^k_n)}{\Delta M(T^k_n)} \mathbb{1}_{\{[[T^k_n]]\}}(\cdot) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta X^k(T^k_n)}{\Delta M^k(T^k_n)} \mathbb{1}_{\{[[T^k_n]]\}}(\cdot) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta X^k(T_n)}{\Delta M(T_n)} \mathbb{1}_{\{\Delta M(T_n) \geq 2^{-k}\}} \mathbb{1}_{\{[[T_n]]\}}(\cdot). \tag{3.7}$$

Usando o fato da família $\{X^k : k \geq 1\}$ ter energia finita Equação (3.4), temos

$$\sup_k \mathbb{E} \sum_{n=1}^{\infty} \mid \mathcal{D}X^k(T^k_n) \Delta M^k(T^k_n) \mid^2 \mathbb{1}_{\{T^k_n \leq T\}} = \sup_k \mathbb{E} \sum_{n=1}^{\infty} \mid \Delta X^k(T^k_n) \mid^2 \mathbb{1}_{\{T_n \leq T\}} < \infty.$$

Consequentemente, a integral opcional está bem definida e podemos definir um esquema de aproximação para X por sequências de $\mathbb{F}^k$-martingales, como a seguir

$$X^k(t) = X(0) + \oint_0^t \mathcal{D}X^k(s) dM^k(s), \quad 0 \leq t \leq T. \tag{3.8}$$

O fato de $\mathcal{D}X^k$ ser diferente de zero apenas no conjunto $\{T^k_n : n \geq 1\}$ resulta em

$$X^k(t) = X(0) + \oint_0^t \mathcal{D}X^k(s) dM(s)$$

também é um martingale em relação à filtração $\mathbb{F}$. Como consequência, chegamos ao seguinte resultado.

Teorema 3. Para todo $X \in \mathbf{H}^2(\mathbb{F})$, temos

$$\mathbb{E} \int_0^T \mid \mathcal{D}X(s) - \mathcal{D}^k X(s) \mid^2 d[M,M](s) \to 0, \quad k \to \infty.$$

Além disso, a variação quadrática $[X^k, X^k]$ converge para a variação quadrática $[X,X]$ fortemente em $\mathbf{B}^1(\mathbb{F})$.

Demonstração. Pelo Lema 3, obtemos

$$X(t) - X^k(t) = \oint_0^t \mathcal{D}X(s) dM(s) - \oint_0^t \mathcal{D}X^k(s) dM(s) = \oint_0^t \left(\mathcal{D}X(s) - \mathcal{D}X^k(s)\right) dM(s), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Portanto, a equação (3.5) resulta em

$$\mathbb{E} \int_0^T \mid \mathcal{D}X(s) - \mathcal{D}X^k(s) \mid^2 d[M,M](s)$$

$$= \mathbb{E}[\oint_0^{\cdot} \left(\mathcal{D}X(s) - \mathcal{D}X^k(s)\right) dM(s), \oint_0^{\cdot} \left(\mathcal{D}X(s) - \mathcal{D}X^k(s)\right) dM(s)](T)$$

$$= \mathbb{E}[X - X^k, X - X^k](T) \to 0, \quad k \to \infty.$$

Segue, da desigualdade de Kunita-Watanabe que

$$\begin{aligned}
\left|[X,X](t) - [X^k,X^k](t)\right| &\leq \left|[X,X](t) - [X,X^k](t)\right| + \left|[X,X^k](t) - [X^k,X^k](t)\right| \\
&= \left|[X,X - X^k](t)\right| + \left|[X^k,X - X^k](t)\right| \\
&\leq [[X,X](t)]^{1/2}\left[[X - X^k, X - X^k](t)\right]^{1/2} \\
&+ \left[[X^k,X^k](t)\right]^{1/2}\left[[X - X^k, X - X^k](t)\right]^{1/2} \\
&\leq [[X,X](T)]^{1/2}\left[[X - X^k, X - X^k](T)\right]^{1/2} \\
&+ \left[[X^k,X^k](T)\right]^{1/2}\left[[X - X^k, X - X^k](T)\right]^{1/2}.
\end{aligned}$$

Como a família $\{X^k : k \geq 1\}$ tem energia finita e a Equação (3.4) e (3.5), obtemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \left|[X,X](t) - [X^k,X^k](t)\right| &\leq \mathbb{E}\,[[X,X](T)]^{1/2}\left[[X - X^k, X - X^k](T)\right]^{1/2} \\
&+ \mathbb{E}\left[[X^k,X^k](T)\right]^{1/2}\left[[X - X^k, X - X^k](T)\right]^{1/2} \\
&\leq [\mathbb{E}[X,X](T)]^{1/2}\left[\mathbb{E}[X - X^k, X - X^k](T)\right]^{1/2} \\
&+ \left[\mathbb{E}[X^k,X^k](T)\right]^{1/2}\left[\mathbb{E}[X - X^k, X - X^k](T)\right]^{1/2} \to 0,
\end{aligned}$$

quando $k \to \infty$

$\square$

Seja $\{X^k : k \geq 1\} \subset \mathbf{B}^2(\mathbb{F})$ uma família de processos estocásticos tal que X^k é um $\mathbb{F}^k$-martingale, para todo $k \geq 1$. Se X^k converge para X fracamente em $\mathbf{H}^2(\mathbb{F})$, dizemos que a família $\{X^k : k \geq 1\}$ é uma **sequência de aproximação fraca** (SAW) para o $\mathbb{F}$-martingale quadrado integrável X. Como $X^k \to X$ fracamente em $\mathbf{H}^2(\mathbb{F})$, segue do Teorema 5 em (DELLACHERIE; MEYER, 1978) que a família $\{X^k : k \geq 1\}$ tem energia finita

$$\sup_k \mathbb{E} \sum_{n=1}^{\infty} |\,\Delta X^k(T_n^k)\,|^2\, \mathbb{1}_{\{T_n \leq T\}} = \sup_k \mathbb{E}[X^k,X^k](T) < C \sup_k \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \left|X^k(t)\right|^2 < \infty. \tag{3.9}$$

O fato de $\mathbb{F}^k$ ser uma filtração do tipo discreta mostra que qualquer $\mathbb{F}^k$-martingale quadrado integrável é uma soma compensada de saltos. Logo, concluímos que

$$X^k(t) \;=\; X(0) + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} H^k(s,x) \mathbb{1}_{\{|x| > 2^{-k}\}} (\mu(\cdot, ds, dx) - \nu(ds, dx)), \quad 0 \leq t \leq T,$$

em que $H^k = M^{\mathbb{P}}_{\mu^k}\left[\Delta X^k \mid \tilde{\mathcal{P}}^k\right]$ (ver, (JACOD, 2006), Teorema 3.75, pp. 103). Além disso,

$$H^k(T_n, \Delta X^k(T_n^k)) = \Delta X^k(T_n^k), \quad n \geq 1.$$

Como $\tilde{\mathcal{P}}^k \subset \tilde{\mathcal{P}}$ para todo $k \geq 1$, concluímos que X^k é também um $\mathbb{F}$-martingale quadrado integrável. Usando o fato da família $\{X^k : k \geq 1\}$ ter energia finita Equação (3.9), temos

$$\sup_k \mathbb{E} \sum_{n=1}^{\infty} \mid \mathcal{D}X^k(T_n^k)\Delta M^k(T_n^k) \mid^2 1\!\!1_{\{T_n^k \leq T\}} = \sup_k \mathbb{E} \sum_{n=1}^{\infty} \mid \Delta X^k(T_n^k) \mid^2 1\!\!1_{\{T_n \leq T\}} < \infty. \tag{3.10}$$

Consequentemente, a integral opcional está bem definida e podemos definir um esquema de aproximação para X através da seguinte sequência de $\mathbb{F}^k$-martingales

$$X^k(t) = X(0) + \oint_0^t \mathcal{D}X^k(s)dM^k(s), \quad 0 \leq t \leq T. \tag{3.11}$$

O fato de $\mathcal{D}X^k$ ser diferente de zero somente no conjunto $\{T_n^k : n \geq 1\}$ mostra que

$$X^k(t) = X(0) + \oint_0^t \mathcal{D}X^k(s)dM(s)$$

é também um martingale, com respeito a filtração $\mathbb{F}$.

Proposição 1. Seja $\{X^k : k \geq 1\}$ uma SAF para $X \in \mathbf{H}^2(\mathbb{F})$. Então, obtemos a convergência de $[X^k, Y](t)$ para $[X, Y](t)$ fracamente em L^1, para todo $0 \leq t \leq T$ e Y um $\mathbb{F}$-martingale **bounded mean oscillation** (BMO). Em particular,

$$\mathcal{D}X^k(T_n)\mathbb{1}_{\{|\Delta M(T_n)| \leq C\}}[M,M](T_n) \to \mathcal{D}X(T_n)\mathbb{1}_{\{|\Delta M(T_n)| \leq C\}}[M,M](T_n), \quad k \to \infty,$$

fracamente em L^1, para cada constante positiva C e $n \geq 1$.

Demonstração. Como consequência do Teorema 7 em (DELLACHERIE; MEYER, 1978), obtemos a convergência de $[X^k, Y](t)$ para $[X, Y](t)$ fracamente em L^1. Para cada constante positiva C, considere o seguinte martingale

$$Y_C^n(t) := \Delta M(T_n)\mathbb{1}_{\{|\Delta M(T_n)| \leq C\}}\mathbb{1}_{\{T_n^k \leq t\}} - \left[\Delta M(T_n)\mathbb{1}_{\{|\Delta M(T_n)| \leq C\}}\mathbb{1}_{\{T_n^k \leq \cdot\}}\right]^p(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Como Y_C^n é um $\mathbb{F}$-martingale Z, concluímos que

$$\mathcal{D}X^k(T_n)\mathbb{1}_{\{|\Delta M(T_n)| \leq C\}}[M,M](T_n) = [X^k, Y_C^n](T) \to [X, Y_C^n](T) = \mathcal{D}X(T_n)\mathbb{1}_{\{|\Delta M(T_n)| \leq C\}}[M,M](T_n),$$

para cada $n \geq 1$.

$\square$

CAPÍTULO

4

DECOMPOSIÇÃO DE DOOB-MEYER PARA FUNCIONAIS DE LÉVY

Neste capítulo, vamos obter uma decomposição de Doob-Meyer explícita para funcionais de Lévy quadrado integráveis.

Definição 1. Dizemos que um processo X quase contínuo à direita a valores reais é um **funcional de Lévy** se $X \in \mathbf{B}^2(\mathbb{F})$ e tem energia finita

$$\mathbb{E}\sum_{n=1}^{\infty} \mid \Delta X(T_n) \mid^2 \mathbb{1}_{\{T_n \leq T\}} < \infty.$$

O ponto de partida do nosso cálculo funcional para o **funcional de Lévy** é a seguinte decomposição de Doob-Meyer.

Lema 5. Seja X um **funcional de Lévy**, então existe um único $\mathbb{F}$-martingale quadrado integrável Z e um processo $W \in \mathbf{B}^2(\mathbb{F})$ com trajetórias contínuas tal que $X = Z + W$ e

$$[Z,Z](t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mid \Delta X(T_n) \mid^2 \mathbb{1}_{\{T_n \leq t\}}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Por outro lado, qualquer processo estocástico $X \in \mathbf{B}^2(\mathbb{F})$ com decomposição $X = Z + W$, em que Z é um $\mathbb{F}$-martingale quadrado integrável e W é um processo contínuo $\mathbb{F}$-adaptado, é um funcional de Lévy.

Demonstração. Para todo $k \geq 1$, os saltos totalmente inascessíveis do funcional de Lévy são dados por

$$G^k(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta X(T_n^k) \mathbb{1}_{\{T_n^k \leq t\}}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Logo, existe um $\mathbb{F}$-martingale quadrado integrável $Z^k = G^k - [G^k]^p$, em que $[G^k]^p$ é a projeção $\mathbb{F}$-previsível dual de G^k. Como $Z^k - Z^{k-1}$ é um $\mathbb{F}$-martingale quadrado integrável e X é um funcional de Lévy, obtemos

$$\mathbb{E}[Z^k - Z^{k-1}, Z^k - Z^{k-1}](T) = \mathbb{E}\sum_{n=1}^{\infty} \mid \Delta X(T_n) \mid^2 \mathbb{1}_{\{2^{-k} \leq |\Delta A(T_n)| < 2^{-(k-1)}\}} \mathbb{1}_{\{T_n \leq T\}} \to 0, \quad \text{as} \quad k \to \infty.$$

Logo, concluímos que a sequência $\{Z^k : k \geq 1\}$ é de Cauchy em $\mathbf{H}^2(\mathbb{F})$. O fato de que $\mathbf{H}^2(\mathbb{F})$ é um espaço de Hilbert mostra que existe um único $\mathbb{F}$-martingale Z quadrado integrável tal que $Z^k \to Z$ fortemente em $\mathbf{H}^2(\mathbb{F})$. Definimos $W = X - Z$. Como X quase contínuo à direita, concluímos que W tem trajetórias contínuas.

Na sequência, mostraremos que a decomposição é única. Suponha que existe um $\mathbb{F}$-martingale quadrado integrável Z' e um processo contínuo W' tal que $X = Z' + W'$. Com isso, obtemos que $X = Z + W = Z' + W'$. Como W e W' tem trajetórias contínuas, concluímos que $\Delta X = \Delta Z = \Delta Z'$. Como os martingales na filtragem $\mathbb{F}$ são soma compensada de saltos, obtemos que $Z = Z'$ e a decomposição é única.

□

O ponto chave de nossa construção em direção a uma versão fraca do cálculo funcional estocástico para os processos de Lévy é o estudo da seguinte classe de processos.

Definição 2. Seja $\mathscr{Y} = \{X^k : k \geq 1\}$ uma família de processos de variação limitada em $\mathbf{B}^2(\mathbb{F})$ tal que X^k é $\mathbb{F}^k$-adaptado, tem energia finita

$$\sup_k \mathbb{E} \mid \Delta X^k(T_n^k) \mid^2 < \infty,$$

e decomposição canônica $X^k = Z^k + W^k$, em que Z^k é um $\mathbb{F}^k$-martingale quadrado integrável e W^k é um processo contínuo com trajetórias de variação limitada. Dizemos que $\mathscr{Y}$ é uma **sequência de aproximação forte** (SAF) (ou, **sequência de aproximação fraca** (SAW)) para um funcional de Lévy X com decomposição canônica $X = Z + W$, se

$$\lim_{k\to\infty} Z^k = Z \quad \text{e} \quad \lim_{k\to\infty} W^k = W$$

fortemente (fracamente) em $\mathbf{B}^2(\mathbb{F})$.

Seja $X \in \mathbf{B}^2(\mathbb{F})$ um semimartingale com decomposição canônica $X = Z + W$, em que W tem trajetórias contínuas com variação integrável. Como consequência do Lema 5, X é também um funcional de Lévy. Considere $X^{o,k}(t)$ a projeção $\mathbb{F}^k$-opcional do semimartingale X. Como a projeção opcional é linear, concluímos que $X^{o,k} = Z^{o,k} + W^{o,k}$, em que $Z^{o,k}$ $(W^{o,k})$ é a projeção $\mathbb{F}^k$-opcional de Z (W). Pela definição, $Z^{o,k}$ é também um $\mathbb{F}^k$-martingale quadrado integrável e, segue do Lema 4 que $Z^{o,k}$ converge fortemente em $\mathbf{B}^2(\mathbb{F})$ para Z. Como W tem trajetórias contínuas de variação integrável, a projeção opcional $W^{o,k}$ também tem trajetórias contínuas de variação integrável (ver (HE; WANG; YAN, 1992), Corolário 5.28, p. 151). Então, $(Z^{o,k}, W^{o,k})$ é uma decomposição de Doob-Meyer do processo de variação limitada $X^{o,k}$. Além disso, segue do Teorema 2 em (COQUET; MÉMIN; SLOMINSKI, 2001) que $W^{o,k}$ converge fortemente em $\mathbf{B}^2(\mathbb{F})$ para W. Como consequência, $\{X^{o,k} : k \geq 1\}$ é uma SAF para o funcional de Lévy X.

Considere X um funcional de Lévy com decomposição de Doob-Meyer $X = Z + W$. Na sequência, introduzimos a medida aleatória com valores inteiros $\mu^X : \Omega \times \beta([0,T]) \times \beta(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ com respeito ao $\mathbb{F}$-martingale X como seguinte

$$\mu^X(\omega : [0,t], B) := \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}_B[\Delta X(T_i(\omega), \omega)] \mathbb{1}_{\{T_i(\omega) \leq t\}}(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}_B[\Delta Z(T_i(\omega), \omega)] \mathbb{1}_{\{T_i(\omega) \leq t\}}(\omega), \tag{4.1}$$

para todo $\omega \in \Omega$, $t \in [0,T]$ e $B \in \beta(\mathbb{R})$. Considere $\varepsilon > 0$ e $B_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon)^c$. Como $X(\cdot;\omega)$ tem no máximo um número finito de saltos em B_ε, concluímos que

$$\mu^X(\omega, [0,t], B_\varepsilon) \ < \ \infty \ ; \ \omega \in \Omega, \ t \in [0,T], \ \varepsilon > 0.$$

Então, μ^X é uma medida aleatória com valores inteiros σ-finita. Como consequência, μ^X admite uma projeção previsível dual dada pela medida aleatória σ-finita ν^X em $(\Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}; \beta(\Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}))$ [ver (JACOD; SHIRYAEV, 2013) Proposição 1.21, p. 71)], tal que

$$\mathbb{E} \int_0^T \mathbb{1}_H(s) \nu^X(ds, B) = \mathbb{E} \int_0^T \mathbb{1}_H(s) \mu^X(ds, B),$$

para cada $H \in \mathcal{P}$ e $B \in \mathbb{R}$.

CAPÍTULO

5

FÓMULA DE ITÔ-MEYER ÓTIMA

O estudo das fórmulas de Itô é muito comum e amplamente encontrado em livros e artigos sobre cálculo estocástico. As propostas mais conhecidas tratam funções de classe C^2 aplicadas a semimartingales. Contudo, diversos autores propuseram fórmulas de Itô para função F pertence à classe de funções deriváveis de primeira ordem (C^1) a exemplo ver ((EISENBAUM; WALSH *et al.*, 2009)), ((EISENBAUM; KYPRIANOU, 2008)), ((EISENBAUM, 2006)), ((RUSSO; VALLOIS, 1996)), ((ERRAMI; RUSSO; VALLOIS, 2002)) e ((WILSON, 2019)).

Neste capítulo, estamos interessados em estabelecer critérios para a construção de uma fórmula de Itô ótima para funcionais de Lévy, baseada na decomposição de Doob-Meyer, definida no capítulo anterior, a qual requer apenas a existência de derivadas de primeira ordem e limitadas.

Seja $X \in \mathbf{B}^2(\mathbb{F})$ um funcional de Lévy com $X(0) = x$ e decomposição de Doob-Meyer $X = Z + W$. Considere $F : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua, tal que $\frac{\partial F}{\partial x}$ existe, é contínua e limitada ($F \in C^{0,1}$). Então, o processo estocástico $F(\cdot, X)$ tem energia finita

$$\mathbb{E}\sum_{n=1}^{\infty}\Big|\Delta F[T_n, X(T_n)]\Big|^2 \mathbb{1}_{\{T_n \leq T\}} \leq C\mathbb{E}\sum_{n=1}^{\infty}\Big|\Delta X(T_n)\Big|^2 \mathbb{1}_{\{T_n \leq T\}} < \infty. \tag{5.1}$$

Como consequência, concluímos que $F(\cdot, X)$ é um funcional de Lévy com decomposição de Doob-Meyer $F(\cdot, Y) = Z^F + W^F$ (ver, Lema 5). O fato dos $\mathbb{F}$-martingales quadrado integráveis serem somas compensadas de saltos, resulta em (ver, Lema 3)

$$Z^F(t) = \oint_0^t \mathcal{D}F(\cdot, X)(s)dM(s), \quad \text{no qual} \quad \mathcal{D}F(\cdot, X)(t) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Delta F[T_n, X(T_n)]}{\Delta M(T_n)}\mathbb{1}_{\{[[T_n]]\}}(t).$$

Como X tem energia finita e $F \in C^{0,1}$, a seguinte integral opcional

$$Z^F(t) = \oint_0^t \mathcal{D}^X F(\cdot, X)(s)dZ(s), \text{ em que } \mathcal{D}^X F(\cdot, X)(t) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Delta F[T_n, X(T_n)]}{\Delta X(T_n)}\mathbb{1}_{\{\Delta X(T_n) \neq 0\}}(t)\mathbb{1}_{\{[[T_n]]\}}(t),$$

está bem definida (Equação 5.1) e,

$$\Delta F(T_n, X(T_n)) = \Delta\oint_0^{T_n}\mathcal{D}^X F(\cdot, X)(s)dZ(s) = \Delta\oint_0^{T_n}\mathcal{D}F(\cdot, X)(s)dM(s) = \Delta Z^F(T_n), \quad n \geq 1.$$

Então, segue do Teorema 2.21 em (JACOD, 2006) que

$$Z^F(t) = \oint_0^t \mathcal{D}^X F(\cdot, X)(s) dZ(s), \quad 0 \le t \le T.$$

Na sequência, iremos caracterizar a componente previsível (W^F) da decomposição de Doob-Meyer. Considere $F : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua, tal que $\frac{\partial F}{\partial x}$ e $\frac{\partial F}{\partial t}$ existem e são contínuas e limitadas $(F \in C^{1,1})$.

Seja X^k um funcional de Lévy $\mathbb{F}^k$-adaptado com decomposição de Doob-Meyer (Z^k, W^k), em que Z^k é um $\mathbb{F}^k$-martingale quadrado integrável e W^k é um processo contínuo de variação limitada. Consequentemente, X^k é um funcional de Lévy com trajetórias de variação limitada. Então, segue de ((HE; WANG; YAN, 1992), Teorema 9.36, p. 246) que $F(\cdot, X^k)$ é também um processo estocástico com trajetórias de variação limitada, e

$$\begin{aligned} F(t, X^k(t)) \;-\; F(0,x) &= \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s, X^k(s^-)) dX^k(s) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial t}(s, X^k(s^-)) ds \\ &+ \sum_{0<s\le t} \left[F(s, X^k(s)) - F(s, X^k(s^-)) - \frac{\partial F}{\partial x}(s, X^k(s^-)) \Delta X^k(s) \right] \\ &= \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s, X^k(s^-)) dZ^k(s) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s, X^k(s^-)) dW^k(s) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial t}(s, X^k(s^-)) ds \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\Delta F(T_n^k, X^k(T_n^k)) - \frac{\partial F}{\partial x}(X^k(T_n^{k-})) \Delta Z^k(T_n^k) \right] \mathbb{1}_{\{T_n \le t\}}, \; 0 \le t \le T. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Como o último termo não é contínuo, esta fórmula não corresponde à decomposição de Doob-Meyer. Na sequência, reescreveremos a fórmula de mudança de variável para identificar os elementos da decomposição canônica do funcional $F(\cdot, X^k)$. Temos,

$$\begin{aligned} \oint_0^t \mathcal{D}^X F(\cdot, X^k)(s) dZ^k(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}^X F(X^k)(T_n^k) \Delta Z^k(T_n^k) \mathbb{1}_{\{T_n^k \le t\}} \\ &- \left[\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}^X F(X^k)(T_n^k) \Delta Z^k(T_n^k) \mathbb{1}_{\{T_n^k \le t\}} \right]^p \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \Delta F(T_n^k, X^k(T_n^k)) \mathbb{1}_{\{T_n \le t\}} - \left[\sum_{n=1}^{\infty} \Delta F(T_n^k, X^k(T_n^k)) \mathbb{1}_{\{T_n \le t\}} \right]^p, \end{aligned} \tag{5.3}$$

em que

$$\mathcal{D}^X F(X^k)(t) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta F[T_n^k, X^k(T_n^k)]}{\Delta Z^k(T_n^k)} \mathbb{1}_{\{\Delta X^k(T_n^k) \neq 0\}}(t) \mathbb{1}_{\{[[T_n^k]]\}}(t), \quad 0 \le t \le T.$$

Além disso, como $\{\frac{\partial F}{\partial x}(X^k(s^-)) : 0 < s \le T\}$ é um processo $\mathbb{F}^k$-previsível, concluímos que

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s, X^k(s^-)) dZ^k(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial F}{\partial x}(T_n^k, X^k(T_n^{k-})) \Delta Z^k(T_n^k) \mathbb{1}_{\{T_n^k \le t\}} \\ &- \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial F}{\partial x}(T_n^k, X^k(T_n^{k-})) \Delta Z^k(T_n^k) \mathbb{1}_{\{T_n^k \le t\}} \right]^p. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Somando as Equações 5.2 , 5.3 e 5.4, obtemos

$$\begin{aligned}
F(t,X^k(t)) \quad - \quad F(0,x) &= \oint_0^t \mathcal{D}^X F(\cdot,X^k)(s)dZ^k(s) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s,X^k(s^-))dW^k(s) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial t}(s,X^k(s^-))ds \\
&+ \left[\sum_{n=1}^{\infty} \Delta F(T_n^k,X^k(T_n^k))\mathbb{1}_{\{T_n\le t\}}\right]^p - \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial F}{\partial x}(T_n^k,X^k(T_n^{k-}))\Delta Z^k(T_n^k)\mathbb{1}_{\{T_n^k\le t\}}\right]^p \\
&= \oint_0^t \mathcal{D}^X F(\cdot,X^k)(s)dZ^k(s) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s,X^k(s^-))dW^k(s) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial t}(s,X^k(s^-))ds \\
&+ \left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\Delta F(T_n^k,X^k(T_n^k)) - \frac{\partial F}{\partial x}(T_n^k,X^k(T_n^{k-}))\Delta Z^k(T_n^k)\right)\mathbb{1}_{\{T_n^k\le t\}}\right]^p, \qquad (5.5)
\end{aligned}$$

para todo $0 \le t \le T$.

Lema 6. A projeção previsível $\mathbb{F}^k$-dual é dada pelo processo contínuo

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\Delta F(T_n^k,X^k(T_n^k)) - \frac{\partial F}{\partial x}(T_n^k,X^k(T_n^{k-}))\Delta Z^k(T_n^k)\right)\mathbb{1}_{\{T_n^k\le t\}}\right]^p =$$

$$\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\left(F(s,X^k(s^-)+z) - F(s,X^k(s^-)) - \frac{\partial F}{\partial x}(s,X^k(s^-))z\right)\nu^{Z^k}(ds,dz),$$

para todo $0 \le t \le T$.

Demonstração. Pela própria definição

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\Delta F(T_n^k,X^k(T_n^k)) - \frac{\partial F}{\partial x}(T_n^k,X^k(T_n^{k-}))\Delta Z^k(T_n^k)\right)\mathbb{1}_{\{T_n^k\le t\}} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\Delta F(T_n^k,X^k(T_n^{k-})+\Delta X^k(T_n^k)) - \frac{\partial F}{\partial x}(T_n^k,X^k(T_n^{k-}))\Delta Z^k(T_n^k)\right)\mathbb{1}_{\{T_n^k\le t\}} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(F(T_n^k,X^k(T_n^{k-})+\Delta Z^k(T_n^k)) - F(T_n^k,X^k(T_n^{k-})) - \frac{\partial F}{\partial x}(T_n^k,X^k(T_n^{k-}))\Delta Z^k(T_n^k)\right)\mathbb{1}_{\{T_n^k\le t\}} =$$

$$\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\left(\Delta F(s,X^k(s^-)+z) - F(s,X^k(s^-)) - \frac{\partial F}{\partial x}(s,X^k(s^-))z\right)\mu^{Z^k}(\cdot,ds,dz).$$

□

Pela aplicação da Equação 5.5 e lema 6, chegamos à decomposição de Doob-Meyer para o funcional de Lévy $F(\cdot,X^k)$

$$\begin{aligned}
F(t,X^k(t)) \quad - \quad F(0,x) &= \oint_0^t \mathcal{D}^X F(\cdot,X^k)(s)dZ^k(s) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s,X^k(s^-))dW^k(s) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s,X^k(s^-))ds \\
&+ \int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\left(F(s,X^k(s^-)+z) - F(s,X^k(s^-)) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial F}{\partial x}(s,X^k(s^-))z\right)\nu^{Z^k}(ds,dz),
\end{aligned}$$

para todo $0 \le t \le T$.

Seja $X \in \mathbf{B}^2(\mathbb{F})$ um funcional de Lévy e $F \in C^{1,1}$. Suponha que $\{X^k : k \ge 1\}$ e uma SAF X. Então, temos a convergência de $F(\cdot,X^k)$ para $F(\cdot,X)$ fortemente em $\mathbf{B}^2(\mathbb{F})$ e

$$\begin{aligned}
Z^{k,F} \quad &= \quad \oint_0^{\cdot} \mathcal{D}^{X^k} F(X^k)(s)dZ^k(s) = \oint_0^{\cdot} \mathcal{D}F(X^k)(s)dM^k(s) \\
&\to \quad \oint_0^{\cdot} \mathcal{D}F(X)(s)dM(s) = \oint_0^{\cdot} \mathcal{D}^X F(X)(s)dZ(s) = Z^F,
\end{aligned}$$

fracamente em $\mathbf{B}^1(\mathbb{F})$. Além do mais, a componente previsível da decomposição de Doob-Meyer satisfaz

$$\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \left(F(s,X^k(s^-)+z) - F(s,X^k(s^-)) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial F}{\partial x}(s,X^k(s^-))z \right) \nu^{Z^k}(ds,dz)$$

$$+ \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s,X^k(s^-))dW^k(s) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial t}(s,X^k(s^-))ds \to W^F,$$

fracamente em $\mathbf{B}^1(\mathbb{F})$.

Demonstração. Se $\{X^k : k \geq 1\}$ é uma SAF para X, segue do teorema do valor médio que

$$\mathbb{E} \sup_{0\leq t\leq T} \left| F(t,X(t)) - F(t,X^k(t)) \right| \leq C\mathbb{E} \sup_{0\leq t\leq T} \left| X(t) - X^k(t) \right| \to 0, \quad \text{quando } k \to \infty.$$

Da definição de integral opcional, temos

$$\begin{aligned} Z^{k,F}(t) = \oint_0^t D^k F(X^k)(s) dM^k(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} D^k F(X^k)(T_n^k) \Delta M^k(T_n^k) \mathbb{1}_{\{T_n^k \leq t\}} \\ &- \left[\sum_{n=1}^{\infty} D^k F(X^k)(T_n^k) \Delta M^k(T_n^k) \mathbb{1}_{\{T_n^k \leq t\}} \right]^p \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}F(X^k)(T_n^k) \mathbb{1}_{\{|\Delta M(T_n)| > 2^{-k}\}} \Delta M(T_n) \mathbb{1}_{\{T^k \leq t\}} \\ &- \left[\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}F(X^k)(T_n^k) \mathbb{1}_{\{|\Delta M(T_n)| > 2^{-k}\}} \Delta M(T_n) \mathbb{1}_{\{T_n^k \leq t\}} \right]^p \\ &= \oint_0^t \mathcal{D}F(X^k)(s) \mathbb{1}_{\{|\Delta M(T_n)| > 2^{-k}\}} dM(s). \end{aligned}$$

Na sequência, iremos provar que a sequência $\{Z^{k,F} : k \geq 1\}$ de $\mathbb{F}$-martingales quadrado integráveis tem energia finita,

$$\sup_k \mathbb{E}[\oint_0^{\cdot} \mathcal{D}F(X^k)(s) \mathbb{1}_{\{|\Delta M(T_n)| > 2^{-k}\}} dM(s), \oint_0^{\cdot} \mathcal{D}F(X^k)(s) \mathbb{1}_{\{|\Delta M(T_n)| > 2^{-k}\}} dM(s)](T) \leq$$

$$\sup_k \mathbb{E} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \Delta F(T_n^k, X^k(T_n^k)) \right|^2 \mathbb{1}_{\{T_n^k \leq T\}} \leq C \sup_k \mathbb{E} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \Delta X^k(T_n^k) \right|^2 \mathbb{1}_{\{T_n^k \leq T\}} < \infty.$$

Como consequência, segue do Teorema 5 em (DELLACHERIE; MEYER, 1978) que o conjunto $\{Z^{k,F} : k \geq 1\}$ é compacto relativamente fraco em $\mathbf{H}^1(\mathbb{F})$. Portanto, existe uma subsequência $\{Z^{k',F} : k' \geq 1\}$ tal que $Z^{k',F}$ converge para $\tilde{Z}^F$ fracamente em $\mathbf{H}^1(\mathbb{F})$. Para qualquer $n \geq 1$, montamos o $\mathbb{F}$-martingale quadrado integrável

$$H_n^j(t) = \left(\Delta M(T_n) \mathbb{1}_{\{|\Delta M(T_n)| \leq j\}} \right) \mathbb{1}_{\{T_n^k \leq t\}} - \left[\left(\Delta M(T_n) \mathbb{1}_{\{|\Delta M(T_n)| \leq j\}} \right) \mathbb{1}_{\{T_n \leq t\}} \right]^p,$$

para todo $0 \leq t \leq T$ e $j \geq 1$. Como H_n^j tem saltos limitados, concluímos que ele é um BMO $\mathbb{F}$-martingale. Segue do Teorema 7 em (DELLACHERIE; MEYER, 1978) que

$$\Delta F(T_n, X^{k'}(T_n)) \Delta M(T_n) \mathbb{1}_{\{|\Delta M(T_n)| \leq j\}} \mathbb{1}_{\{|\Delta M(T_n)| > 2^{-k'}\}} \mathbb{1}_{\{T_n \leq T\}} = [Z^{k',F}, H_n^j(t)](T)$$

$$\to [\tilde{Z}^F, H_n^j](T) = \Delta\tilde{Z}^F(T_n)\Delta M(T_n)\mathbb{1}_{\{|\Delta M(T_n)|\le j\}}\mathbb{1}_{\{T_n\le T\}}, \tag{5.6}$$

fracamente em L^1. Como F é uma função contínua, temos

$$\begin{aligned} \mid \Delta F(T_n,X(T_n)) &- \Delta F(T_n,X^k(T_n)) \mid^2 \\ &\le C\Big\{\mid F(T_n,X(T_n)) - F(T_n,X^k(T_n)) \mid^2 + \mid F(X^k(T_n,T_n^-)) - F(T_n,X(T_n^-)) \mid^2\Big\} \\ &\le C\Big\{\mid X(T_n) - X^k(T_n) \mid^2 + \mid X^k(T_n^-) - X(T_n^-) \mid^2\Big\} \le C \sup_{0\le t\le T} \mid X(t) - X^k(t) \mid^2, \end{aligned}$$

para todo $n \ge 1$. Logo, obtemos

$$\mathbb{E} \mid \Delta F(T_n,X(T_n)) - \Delta F(T_n,X^k(T_n)) \mid^2 \le C\, \mathbb{E} \sup_{0\le t\le T} \mid X(t) - X^k(t) \mid^2 \to 0, \text{ quando } k\to\infty.$$

Como consequência,

$$\Delta F(T_n,X^{k'}(T_n))\Delta M(T_n)\mathbb{1}_{\{|\Delta M(T_n)|\le j\}}\mathbb{1}_{\{\Delta M(T_n)>2^{-k'}\}}\mathbb{1}_{\{T_n\le T\}}$$

$$\to \Delta F(T_n,X(T_n))\Delta M(T_n)\mathbb{1}_{\{|\Delta M(T_n)|\le j\}}\mathbb{1}_{\{T_n\le T\}} \tag{5.7}$$

fracamente em L^1. Aplicando a unicidade da convergência fraca em L^1, segue da equação (5.6) e (5.7) que

$$\Delta F(T_n,X(T_n))\Delta M(T_n)\mathbb{1}_{\{|\Delta M(T_n)|\le j\}}\mathbb{1}_{\{T_n\le T\}} = \Delta\tilde{Z}^F(T_n)\Delta M(T_n)\mathbb{1}_{\{|\Delta M(T_n)|\le j\}}\mathbb{1}_{\{T_n\le T\}}, \quad n\ge 1.$$

Como $\Delta M(T_n) \neq 0$, concluímos que

$$\Delta F(T_n,X(T_n))\mathbb{1}_{\{|\Delta M(T_n)|\le j\}}\mathbb{1}_{\{T_n\le T\}} = \Delta\tilde{Z}^F(T_n)\mathbb{1}_{\{|\Delta M(T_n)|\le j\}}\mathbb{1}_{\{T_n\le T\}}, \quad n\ge 1.$$

Logo, concluímos que

$$\begin{aligned} \Delta Z^F(T_n)\mathbb{1}_{\{T_n\le T\}} &= \Delta F(T_n,X(T_n))\mathbb{1}_{\{T_n\le T\}} = \lim_{j\to\infty} \Delta F(T_n,X(T_n))\mathbb{1}_{\{|\Delta M(T_n)|\le j\}}\mathbb{1}_{\{T_n\le T\}} \\ &= \lim_{j\to\infty} \Delta\tilde{Z}^F(T_n)\mathbb{1}_{\{|\Delta M(T_n)|\le j\}}\mathbb{1}_{\{T_n\le T\}} = \Delta\tilde{Z}^F(T_n)\mathbb{1}_{\{T_n\le T\}}, \quad n\ge 1. \end{aligned}$$

Portanto, segue do Teorema 2.21 em (JACOD, 2006) que $Z^F = \tilde{Z}^F$. Consequentemente, concluímos que

$$Z^{k,F} = \oint_0^{\cdot} \mathcal{D}F(X^k)(s)dM^k(s) \to \oint_0^{\cdot} \mathcal{D}F(X)(s)dM(s) = Z^F$$

fracamente em $\mathbf{H}^1(\mathbb{F})$. □

Lema 7. Seja θ uma medida com sinal definida em $([0,T],\beta([0,T]))$ tal que $\mid\theta\mid([0,T]) < \infty$. Suponha que $\frac{\partial F}{\partial t}$ é uniformemente contínua em $[0,T]\times\mathbb{R}$, logo

$$\mathbb{E}\sup_{0\le t\le T}\Big|\int_0^t \frac{\partial F}{\partial t}(s,X(s^-))d\theta(s) - \int_0^t \frac{\partial F}{\partial t}(s,X^k(s^-))d\theta(s)\Big| \to 0,$$

quando $k\to\infty$.

Demonstração. É fato que qualquer função com valor real uniformemente contínua f definida em $[0,T]\times\mathbb{R}$ admite um módulo de continuidade tal que

$$|f(x)-f(y)|\leq \omega_f(|x-y|),\quad x,y\in[0,t]\times\mathbb{R},$$

em que $\omega_f:[0,\infty]\to[0,\infty]$ é uma função contínua, não decrescente tal que $\omega_f(0)=0$. Como $\frac{\partial F}{\partial t}$ é uniformemente contínua, obtemos

$$\sup_{0\leq t\leq T}\Big|\int_0^t\frac{\partial F}{\partial t}(s,X(s^-))d\theta(s)-\int_0^t\frac{\partial F}{\partial t}(s,X^k(s^-))d\theta(s)\Big|\leq\sup_{0\leq u\leq T}\int_0^t\Big|\frac{\partial F}{\partial t}(s,X(s^-))-\frac{\partial F}{\partial t}(s,X^k(s^-))\Big|d\theta(s)$$

$$\leq\sup_{0\leq t\leq T}\int_0^t\omega_{\frac{\partial F}{\partial t}}(|X(s^-)-X^k(s^-)|)d\theta(s)\leq\sup_{0\leq t\leq T}\int_0^t\omega_{\frac{\partial F}{\partial t}}\left(\sup_{0\leq u\leq T}|X(u^-)-X^k(u^-)|\right)d\theta(s)$$

$$\leq T\ \omega_{\frac{\partial F}{\partial t}}\left(\sup_{0\leq u\leq T}|X(u^-)-X^k(u^-)|\right)\to 0,$$

fortemente em L^1.

□

Corolário 2. Seja X um funcional de Lévy com decomposição de Doob-Meyer $X=Z+W$, em que W é uma medida com sinal definida em $([0,T],\beta([0,T]))$ tal que $|W|([0,T])<\infty$. Para uma dada SAF $\{X^k:k\geq 1\}$ com decomposição de Doob-Meyer $X^k=Z^k+W$ e $F\in C^{1,1}$, existe um processo contínuo $\tilde{W}^F$ tal que

$$F(t,X(t))-F(0,X(0))=\oint_0^t\mathcal{D}^X F(s,X(s))dZ(s)+\int_0^t\frac{\partial F}{\partial x}(s,X(s^-))dW(s)+\int_0^t\frac{\partial F}{\partial t}(s,X(s^-))ds+\tilde{W}^F(t),$$

em que

$$\int_0^{\cdot}\int_{-\infty}^{\infty}\left(F(s,X^k(s^-)+x)-F(s,X^k(s^-))-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial F}{\partial x}(s,X^k(s^-))x\right)\mathbb{1}_{\{|x|>2^{-k}\}}\nu^X(ds,dx)\to\tilde{W}^F$$

fracamente em $\mathbf{B}^1(\mathbb{F})$. Além disso, para cada $\varepsilon>0$, temos

$$\int_0^{\cdot}\int_{-\infty}^{\infty}\left(F(s,X^k(s^-)+x)-F(s,X^k(s^-))-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial F}{\partial x}(s,X^k(s^-))x\right)\mathbb{1}_{\{|x|>\varepsilon\}}\nu^X(ds,dx)$$

$$\to\int_0^{\cdot}\int_{-\infty}^{\infty}\left(F(s,X(s^-)+x)-F(s,X(s^-))-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial F}{\partial x}(s,X(s^-))x\right)\mathbb{1}_{\{|x|>\varepsilon\}}\nu^X(ds,dx),$$

fracamente em $\mathbf{B}^1(\mathbb{F})$.

CAPÍTULO

6

APROXIMAÇÃO PARA A SOLUÇÃO DA EDE

O estudo de equações diferenciais, regidas por processos de Lévy já se tornou comum. A princípio esse estudo partiu do estudo de difusão, que pode ser pensado como um processo de Markov com trajetórias contínuas ((PROTTER, 2004), (HE; WANG; YAN, 1992), (JACOD, 1979), (SHREVE; KARATZAS, 1991), (ØKSENDAL, 2003)).

Inspirado pelas investigações de Lévy sobre a trajetória das amostras, Itô estudou as difusões que poderiam ser representadas como soluções de Equações Diferenciais Estocásticas (EDE's) da forma

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t \sigma(s) dZ(s) \tag{6.1}$$

cujos componentes são: o "regente"da EDE, que é um semimartingale d-dimensional Z, definido numa base estocástica $\mathscr{B} = (\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$: uma condição inicial que é um processo càdlàg adaptado q-dimsensional Y e um coeficiente $\sigma : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q \otimes \mathbb{R}^d$, geralmente Lipschitz ((PROTTER, 2004), p.243).

Equações diferenciais regidas por um semimartingales, como na equação (6.1) admitem solução e esta solução é única (ver Teormea 6. pág. 249 (PROTTER, 2004)).

Este teorema se aplica a um número finito de diferenciais dZ^j, $1 \leq j \leq d$ e para um sistema de equações finito. Contudo, trataremos apenas do caso unidimensional.

Neste capítulo, faremos uso de coeficientes o mais gerais possível como, por exemplo, os usados na teoria do controle. Sendo mais específico, nosso coeficiente será uma função cujo domínio é um conjunto de funções.

6.1 EDE-Path Dependent

Introduzimos essa seção apresentando algumas notações e definições das quais faremos uso ao longo das próximas seções.

Seja $D([0,t] : \mathbb{R})$ o espaço das funções càdlàg definidas em $[0,t]$ a valores em $\mathbb{R}$ e $\Lambda := \{(t, \omega(\cdot \wedge t)) : t \in [0,T]; \omega \in D([0,t] : \mathbb{R})\}$ o conjunto das trajetórias interrompidas, munido da métrica d_β, a ser definida na equação 6.2.

Definimos a aplicação $F : [0,T] \times D([0,T] : \mathbb{R}) \to \mathbb{R} :\ (t,\omega) \to F(t,\omega)$, cuja métrica Λ_T é dada por

$$d_\beta((t,\omega);(t',\omega')) := \sup_{0\leq u\leq T} |\omega(u\wedge t) - \omega'(u\wedge t')| + |t-t'|^\beta. \tag{6.2}$$

em que $0 < \beta \leq 1$.

As definições a seguir são de grande importância para a análise de convergência envolvendo funcionais (ver (PROTTER, 2004), p. 250).

Definição 3. Funcional não-Antecipativo: Dizemos que F é um funcional *não-antecipativo* se é uma aplicação mensurável $F : \Lambda_T \to \mathbb{R} :\ (t,\omega_t) \to F(t,\omega) = F(t,\omega_t)$ para $(t,\omega_t) \in \Lambda_T$. Em outras palavras, F é um mapeamento de Borel.

Definição 4. Funcional Lipschitz: Um operador F que mapeia o espaço da funções càdlàg, $D([0,t] : \mathbb{R})$, a $\mathbb{R}$ é um funcional Lipschitz se para qualquer X, Y em D as seguintes condições são satisfeitas:

i) Para todo tempo de parada T, $X^{T-} = Y^{T-}$ implica em $F(X^{T-}) = F(Y^{T-})$, e

ii) Existe um processo crescente (finito) $k = (k_t)_{t>0}$ tal que $|F(X_t) - F(Y_t)| \leq K_t \|X-Y\|_t^*$ para todo $t \geq 0$. Em que $\|X-Y\|_t^* = \sup_t \|X-Y\|_t$.

Seja $X_t = \{X(u), u \in [0,t]\}$ a trajetória descrita por X, que vai de X_0 até o tempo t a solução da EDE unidimensional (6.3), para todo $0 \leq t \leq T$ e F um *funcional Lipschitz*. Neste caso, $X(t)$ denota o estado de X no instante t.

Estamos interessados no comportamento da EDE (6.3), quando esta é regida por um processo de Lévy A, de puro salto e variação não-limitada, ao longo de todo caminho percorrido por X, que vai de X_0 até o limite a esquerda de X no ponto s^-, ou seja, $X_{s^-}(\omega) = \lim_{t\to s, t<s} X_t(\omega)$.

$$X(t) = X(0) + \int_0^t F(s, X_{s^-}) dA(s). \tag{6.3}$$

Seja $\mathbf{B}^p(\mathbb{F})$ um espaço de Banach de todos os processos $\mathbb{F}$-adaptados a valores reais X tal que

$$\mathbb{E} \sup_{0\leq t\leq T} |X(t)|^p < \infty, \tag{6.4}$$

para $1 \leq p < \infty$ and $0 < T < +\infty$ é um tempo final fixado.

6.2 Esquema de Aproximação para EDE em Termos de A^k

Nesta seção, determinamos uma aproximação numérica X^k para um processo X, tal que a medida que k cresce, tanto quanto se queira, X^k se aproxima de X.

Quando falamos em aproximações numéricas que simulam o comportamento de EDE's, encontramos uma vasta literatura à disposição, como: (HIGHAM, 2001), (SAUER, 2012), (KLOEDEN; PLATEN, 1992) e (GLASSERMAN, 2004).

O método numérico que iremos utilizar lembra o proposto por Maruyama (MARUYAMA, 1955) baseado no método clássico de Euler para soluções numéricas. Porém, sem discretização determinística e terá ênfase sobre o processo A^k. Essa aproximação será imprescindível no Capítulo 7.

A princípio, considere a equação diferencial estocástica, dada por (6.3).

A aproximação de X^k para X, utilizando como condição inicial $X^k(t_0) = x(0)$, será dada por,

$$X^k(t) := x(0) + \int_0^t F(s, X^k(s^-))dA^k(s), \qquad 0 \leq t \leq T. \tag{6.5}$$

Lembrando que F é um funcional que atende as condições Lipschitzianas e de continuidade, descritas na Seção (6.1).

6.2.1 Convergência sob hipótese Lipschitz

Considere o esquema numérico de aproximação, descrito pela equação (6.5). Para o estudo da convergência, definimos convenientemente a seguinte aproximação da forma

$$\bar{X}^k(t) := x(0) + \int_0^t F(s, X^k(s^-))dA(s), \qquad 0 \leq t \leq T. \tag{6.6}$$

O teorema a seguir assegura que conforme k torna-se suficientemente grande, X^k converge fortemente em $\mathbf{B}^2$ para X.

Teorema 4. Sejam X^k a solução da equação (6.5) , X a solução de (6.3) e A um processo de Lévy puro salto. Sob a hipótese de F ser Lipschitz, X^k converge fortemente em $\mathbf{B}^2$ para X, ou seja

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E} \sup_{0\leq t\leq T} \mid X^k(t) - X(t) \mid^2 = 0 \tag{6.7}$$

Demonstração.

$$\mathbb{E} \sup_{0\leq t\leq T} \mid X^k(t) - X(t) \mid^2 \leq \mathbb{E} \sup_{0\leq t\leq T} \mid X^k(t) - \bar{X}^k(t) \mid^2 + \mathbb{E} \sup_{0\leq t\leq T} \mid \bar{X}^k(t) - X(t) \mid^2, \text{ para todo } t \in [0,T] \tag{6.8}$$

Olhando para o primeiro termo do lado direito da desigualdade, temos

$$\begin{aligned} \mid X^k(t) - \bar{X}^k(t) \mid &\leq C \mid X^k(t) - \bar{X}^k(t) \mid \\ &= C \left| \int_0^t F(s, X^k(s^-))dA^k(s) - \int_0^t F(s, X^k(s^-))dA(s) \right| \\ &= C \left| \int_0^t F(s, X^k(s^-))d(A^k(s) - A(s)) \right|. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Note que a equação (6.9) está restrita aos martingales $A^k - A = M^k - M$. Desta forma, temos a norma em $\mathbf{H^2}$, o que nos permite utilizar a desigualdade de Emery (ver (PROTTER, 2004), pág. 246) e obter o seguinte resultado.

$$\left| \int_0^t F(s, X^k(s^-))d(A^k(s) - A(s)) \right|_{\mathbf{H}^2} \leq \mid F(t, X^k(t)) \mid_{\mathbf{S}^\infty} \mid (A(t) - A^k(t) \mid_{\mathbf{H}^2} \tag{6.10}$$

Agora, é necessário verificar que $\mid (A(t)-A^k(t) \mid_{\mathbf{H}^2}$ converge para zero. De fato, (ver (PROTTER, 2004), pág. 244),

$$\mid A(t)-A^k(t) \mid_{\mathbf{H}^2} = \mid [M-M^k]_\infty^{1/2}(t) \mid_{\mathbf{L}^2} \tag{6.11}$$

Note que o termo da direita em (6.11) converge para zero, de acordo com (2.9).

Portanto $A(t)-A^k(t)$ converge em $\mathbf{H}^2$. Desta forma, validamos o resultado (6.10), ou seja

$$\mid X^k(t)-\bar{X}^k(t) \mid_{\mathbf{B}^2} \leq C \mid F(t,X^k) \mid_{\mathbf{S}^\infty} \mid (A(t)-A^k(t)) \mid_{\mathbf{H}^2} \tag{6.12}$$

Como $\mid A(t)-A^k(t) \mid \to 0$ quando $k\to\infty$ (ver Teorema 1) e F é um funcional Lipschitz e portanto contínuo e limitado, concluímos que $\mid X^k(t)-\bar{X}^k(t) \mid_{\mathbf{S}^2} \to 0$ quando $k\to\infty$. O que implica que

$$\mathbb{E} \sup_{0\leq t\leq T} \mid X^k(t)-\bar{X}^k(t) \mid^2 \to 0, \ \ \text{quando} \ \ k\to\infty. \tag{6.13}$$

A partir dessa convergência e usando a desigualdade de Cauchy-Swartz, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}^k &:= \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\sup_{0\leq s\leq T} \mid X^k(s)-\bar{X}^k(s) \mid^2\right) d(\langle M,M\rangle + N(s))\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \mid X^k(t)-\bar{X}^k(t) \mid^2 \int_0^T d(\langle M,M\rangle + N(s))\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\left|\sup_{0\leq t\leq T} \mid X^k(t)-\bar{X}^k(t) \mid^2\right|^2\right] \mathbb{E}\left[\left|\int_0^T d(\langle M,M\rangle + N(s))\right|^2\right] \\
&\longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad k\to\infty.
\end{aligned} \tag{6.14}$$

Consideremos agora o segundo termo do lado direito da desigualdade (6.8). Como $N(t)$ é uniformemente contínua e determinística e $M(t)$ é um martingale. Aplicando a desigualdade de Burkholder-Davis-Gundy e Jensen, temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T} \mid \bar{X}^k(t)-X(t) \mid^2 &= \mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t F(s,X^k(s^-))dA(s) - \int_0^t F(s,X(s^-))dA(s)\right|^2 \\
&\leq \mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t (F(s,X^k(s^-))-F(s,X(s^-)))dM(s)\right|^2 \\
&+ \mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t (F(s,X^k(s^-))-F(s,X(s^-)))dN(s)\right|^2 \\
&\leq C_1\mathbb{E}\int_0^T \mid F(s,X^k(s^-))-F(s,X(s^-)) \mid^2 d\langle M,M\rangle \\
&+ C_2\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}\int_0^t |F(s,X^k(s^-))-F(s,X(s^-))|^2 dN(s)
\end{aligned} \tag{6.15}$$

Na equação (6.15) foi feita uma normalização da medida para que pudéssemos aplicar Jensen (ver (SCHILLING, 2017), Teorema 12.14, p.15). Como dN é de variação limitada e portanto finita, então existe $C_2 \in \mathbb{R}$ constante, tal que $dN(\Omega) = C_2$.

Consideramos γ uma medida de probabilidade e definimos γ, tal que $\gamma = \frac{dN}{C_2}$. Assim, obtemos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E} \sup_{0\leq t\leq T} \mid \bar{X}^k(t) - X(t) \mid^2 &\leq C_1 \mathbb{E} \int_0^T \mid F(s, X^k(s^-)) - F(s, X(s^-)) \mid^2 d\langle M, M\rangle \\
&+ C_2 \mathbb{E} \sup_{0\leq t\leq T} \int_0^t |F(s, X^k(s^-)) - F(s, X(s^-))|^2 dN(s) \\
&\leq C_1 \mathbb{E} \left[\int_0^T \left(\sup_{0\leq s\leq T} \left\{ \mid X^k(s) - X(s) \mid^2 \right\} \right) d\langle M, M\rangle \right] \\
&+ C_2 \mathbb{E} \sup_{0\leq t\leq T} \int_0^t \left(\sup_{0\leq s\leq T} \left\{ \mid X^k(s) - X(s) \mid^2 \right\} \right) dN(s) \\
&\leq C_1 \mathbb{E} \left[\int_0^T \sup_{0\leq s\leq T} \mid X^k(s) - X(s) \mid^2 d\langle M, M\rangle \right] + C_2 \mathbb{E} \left[\int_0^T \sup_{0\leq s\leq T} \mid X^k(s) - X(s) \mid^2 dN(s) \right] \\
&\leq C_1 \mathbb{E} \left[\int_0^T \sup_{0\leq s\leq T} \mid X^k(s) - \bar{X}^k(s) + \bar{X}^k(s) - X(s) \mid^2 d\langle M, M\rangle \right] \\
&+ C_2 \mathbb{E} \left[\int_0^T \sup_{0\leq s\leq T} \mid X^k(s) - \bar{X}^k(s) + \bar{X}^k(s) - X(s) \mid^2 dN(s) \right] \\
&\leq C_1 \mathbb{E} \left[\int_0^T \sup_{0\leq s\leq T} \mid X^k(s) - \bar{X}^k(s) \mid^2 d\langle M, M\rangle \right] + C_1 \mathbb{E} \left[\int_0^T \sup_{0\leq s\leq T} \mid \bar{X}^k(s) - X(s) \mid^2 d\langle M, M\rangle \right] \\
&+ C_2 \mathbb{E} \left[\int_0^T \sup_{0\leq s\leq T} \mid X^k(s) - \bar{X}^k(s) \mid^2 dN(s) \right] + C_2 \mathbb{E} \left[\int_0^T \sup_{0\leq s\leq T} \mid \bar{X}^k(s) - X(s) \mid^2 dN(s) \right] \\
&\leq (C_1 + C_2)(\mathcal{C}^k + (C_1 + C_2) \left[\int_0^T \mathbb{E} \sup_{0\leq t\leq T} \mid \bar{X}^k(s) - X(s) \mid^2 d(\langle M, M\rangle + N(s)) \right]
\end{aligned}
\tag{6.16}
$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall em (6.16), temos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E} \sup_{0\leq t\leq T} \mid \bar{X}^k(t) - X(t) \mid^2 &\leq (C_1 + C_2).\mathcal{C}^k.e^{(C_1+C_2)\int_0^T d(\langle M,M\rangle + N)} \\
&\longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad k \to 0.
\end{aligned}
\tag{6.17}
$$

Portanto, juntando as desigualdades (6.13) e (6.17), obtemos a convergência desejada.

$$
\lim_{k\to\infty} \mathbb{E} \sup_{0\leq t\leq T} \mid X^k(t) - X(t) \mid^2 = 0 \tag{6.18}
$$

Concluindo que a aproximação, com saltos dados por um processo de Poisson composto não-homogêneo, converge para a solução da EDE regida pelo processo de Lévy puro salto. □

No capítulo seguinte, faremos uso do Teorema 4 para a análise de convergência de importantes processos ligados ao problema do tempo ótimo de parada, ou simplesmente *parada ótima*.

CAPÍTULO

7

PARADA ÓTIMA

Neste capítulo, discutimos em detalhes apresentando um exemplo concreto de como a teoria desenvolvida no último capítulo pode ser aplicada a uma caracterização não trivial do comportamento infinitesimal do envelope de Snell, decorrente do problema de tempo de parada ideal, regidos por funcionais de Lévy. Apesar de não tentarmos encontrar esse tempo ideal, estamos interessados em verificar que dado um supermartingale envelope de Snell S, podemos aproximá-lo pelo processo valor S^k, enquanto este depende de uma aproximação do tipo Euler-Maruyama para o processo X.

O problema de tempo de parada ótimo será descrito pelo supermartingale chamado envelope de Snell, com respeito a uma dada filtração $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$, hipótese **(H1)**, e faremos uma discretização do tipo Euler-Maruyama.

7.1 Envelope de Snell

Para todo $t \leq T$, denotamos por $\mathcal{T}_t(\mathbb{F})$ o conjunto de todos os τ que são $\mathbb{F}$-tempos de parada, tal que $t \leq \tau \leq T$, quase certamente. Assumimos também que o processo retorno Z é um processo contínuo $\mathbb{F}$-adaptado e satisfaz as condições de regularidade e integrabilidade

(H1) $\|Z\|^p_{\mathbf{B}^p} < \infty, \forall p \geq 1.$

Para um dado processo de retorno Z, seja S o envelope de Snell associado a Z

$$S(t) := \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_t(\mathbb{F})} \mathbb{E}[Z(\tau)|\mathcal{F}_t], \quad 0 \leq t \leq T. \tag{7.1}$$

em que o ess sup em (7.1) significa o supremo essencial da família $\mathbb{E}[Z(\tau)|\mathcal{F}_t]$ sobre o conjunto de todos os $\mathbb{F}-$tempos de parada τ pertencentes ao intervalo $[t,T]$, denotado acima por $\mathcal{T}_t(\mathbb{F})$. Assumimos que S satisfaz a seguinte condição de integrabilidade:

(H2) $\|S\|^p_{\mathbf{B}^p} < \infty, \forall p \geq 1.$

Seja $\{Z^k : k \geq 1\}$ a sequência de processos de puro salto e seja $\{S^k : k \geq 1\}$ o processo valor associado, dado por

$$S^k(t) := \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_t(\mathbb{F}^k)} \mathbb{E}[Z^k(\tau \wedge T)|\mathcal{F}_t^k], \quad 0 \leq t \leq T, \tag{7.2}$$

em que os $\mathbb{F}^k$-tempos de parada são do tipo $(\tau \wedge T)$.

7.2 Aplicação e Resultados

Nesta seção será apresentado um resultado que é de fato uma aplicação em parada ótima. Usaremos as seguintes notações: $D([0,t];\mathbb{R})$ o espaço linear de valores reais com trajetória càdlàg em $[0,t]$

$$d_\beta((t,\omega);(t',\omega')) := \sup_{0 \leq u \leq T} |\omega(u \wedge t) - \omega'(u \wedge t')| + |t - t'|^\beta$$

em que $0 < \beta \leq 1$.

Dizemos que G é um funcional não antecipativo se ele é um mapeamento de Borel e

$$G(t,\omega) = G(t,\omega(\cdot \wedge t)); (t,\omega) \in [0,T] \times D([0,T];\mathbb{R}). \tag{7.3}$$

Suposição I: O processo de retorno será dado por

$$Z(t) = G(t,X)$$

em que X é dada pela EDE path-dependent (6.3) e $G : \Lambda \to \mathbb{R}$ é um funcional não antecipativo Lipschitz, ou seja, existe uma constante $\|G\|$, tal que

$$|G(t,\omega) - G(t',\omega')| \leq \|G\| d_\beta((t,\omega) : (t',\omega'))$$

para todo $t,t' \in [0,T], \omega, \omega' \in D([0,T];\mathbb{R})$ em que $0 < \beta \leq 1$

Lembrando que, apesar de adotarmos as mesmas estratégias utilizadas por (LEÃO; OHASHI; RUSSO, 2019) e (BEZERRA *et al.*, 2018), não trabalhamos com a discretização do tempo. Afinal, nosso processo de retorno $G(t,X)$ é um funcional de uma EDE que depende de toda a trajetória $t \in [0,t]$.

Este resultado é mostrado a seguir.

Teorema 5. Seja S o envelope de Snell associado ao processo de retorno $G(t,X)$, em que G é um funcional não antecipativo que atende a (7.3) e a Suposição I e X dado por (6.3), satisfazendo as hipóteses **H1-H2**. Seja $\{X^k : k > 1\}$ a sequência de processos de puro salto dada por (6.5) e seja $\{S^k : k \geq 1\}$ o processo valor associado, dado por (7.2). Se $\mathcal{X} = ((X^k)_{k\geq 1}, \mathscr{D})$ é uma estrutura discreta de encaixe para X, então $\mathcal{S} = ((S^k)_{k\geq 1}, \mathscr{D})$ é uma estrutura discreta de encaixe para S, em que

$$\lim_{k \to +\infty} \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} |S^k(t) - S(t)| = 0.$$

Demonstração. Observe que, o processo de recompensa X é um processo regular [1] de classe D [2] e portanto, aplicando o Teorema 2.3.5 em (LAMBERTON, 2008) e a hipótese (**H2**), o envelope de Snell associado também é um processo regular D. Portanto, o envelope de Snell tem trajetórias contínuas sob as hipóteses (**H1-H2**).

Vamos definir a seguinte aproximação, para facilitar a análise de convergência

$$\delta^k S(t) := \mathbb{E}\left[\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_t(\mathbb{F})}\mathbb{E}[G(\tau,X)|\mathcal{F}_t]\middle|\mathcal{F}_t^k\right], \quad 0\leq t\leq T. \tag{7.4}$$

Agora,

$$\begin{aligned}|S^k(t)-S(t)| &= |S^k(t)-\delta^k S(t)+\delta^k S(t)-S(t)|\\ &= |S^k(t)-\delta^k S(t)|+|\delta^k S(t)-S(t)|\\ &= J_1+J_2.\end{aligned} \tag{7.5}$$

Analisando J_1 primeiramente e usando a definição de processo valor, dada por (7.2), a Proposição 3.1 em (LEÃO *et al.*, 2018) e Proposição 1.1.4 em (LAMBERTON, 2008) temos:

$$\begin{aligned}J_1 &= |S^k(t)-\delta^k S(t)|\\ &= \left|\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_t(\mathbb{F}^k)}\mathbb{E}[G(\tau\wedge T,X^k)|\mathcal{F}_t^k]-\mathbb{E}\left[\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_t(\mathbb{F})}\mathbb{E}[G(\tau,X)|\mathcal{F}_t]\middle|\mathcal{F}_t^k\right]\right|\\ &= \left|\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_t(\mathbb{F}^k)}\mathbb{E}[G(\tau\wedge T,X^k)|\mathcal{F}_t^k]-\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_t(\mathbb{F})}\mathbb{E}\left[\mathbb{E}G(\tau,X)|\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_t^k\right]\right| \qquad (7.6)\\ &\leq \left|\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_t(\mathbb{F})}\underbrace{\mathbb{E}[G(\tau\wedge T,X^k)|\mathcal{F}_t^k]}_{I_1}-\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_t(\mathbb{F})}\underbrace{\mathbb{E}[G(\tau,X)|\mathcal{F}_t^k]}_{I_2}\right| \qquad (7.7)\end{aligned}$$

Note que, na passagem de (7.6) para (7.7), estamos usando o fato de que os tempos de parada em $\mathbb{F}^k\subset\mathbb{F}$, o que nos permite afirmar que

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_t(\mathbb{F}^k)}\mathbb{E}[G(\tau\wedge T,X^k)|\mathcal{F}_t^k]\leq\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_t(\mathbb{F})}\mathbb{E}[G(\tau\wedge T,X^k)|\mathcal{F}_t^k]$$

Também usamos a propriedade de esperança condicional, para obtermos a segunda parcela da equação 7.7.

Vamos trabalhar primeiramente com I_1. Utilizando a desigualdade triangular, temos:

$$I_1 := \mathbb{E}[G(\tau\wedge T,X^k)|\mathcal{F}_t^k]\leq\mathbb{E}[|G(\tau\wedge T,X^k)-G(\tau,X)||\mathcal{F}_t^k]-\mathbb{E}[G(\tau,X)|\mathcal{F}_t^k] \tag{7.8}$$

. De maneira análoga, trabalhamos com I_2:

$$I_2 := \mathbb{E}[G(\tau,X)|\mathcal{F}_t^k]\leq\mathbb{E}[|G(\tau,X)-G(\tau\wedge T,X^k)||\mathcal{F}_t^k]-\mathbb{E}[G(\tau\wedge T,X^k)|\mathcal{F}_t^k] \tag{7.9}$$

[1] Um processo $(X_t)_{t\geq t}$ adaptado contínuo à direita é dito ser regular se, para todo $\tau\in\mathcal{T}$, X_τ é integrável e, para toda sequência não decrescente $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de tempos de parada, com $\tau=\lim_{n\to\infty}\tau_n$, temos o $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(X_{\tau_n})=\mathbb{E}(X_\tau)$

[2] Um processo é dito ser de classe D se a família $(X_\tau)_{\tau\in\mathcal{T}}$ é uniformemente integrável

. Agora, juntando I_1 e I_2 à equação (7.7), temos:

$$\begin{aligned} J_1 &\leq \left| \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_t(\mathbb{F})} \mathbb{E}[G(\tau,X)|\mathcal{F}_t^k] - \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_t(\mathbb{F})} \mathbb{E}[G(\tau\wedge T,X^k)|\mathcal{F}_t^k] \right| \\ &\leq \left| \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_t(\mathbb{F})} \mathbb{E}[\underbrace{G(\tau,X^k)-G(\tau,X)}_{*}|\mathcal{F}_t^k] \right| \end{aligned} \tag{7.10}$$

. Analisando $*$, temos

$$\begin{aligned} |G(\tau,X^k)-G(\tau,X)| &\leq \|G\| d_\beta((\tau,X^k);(\tau,X)) \\ &\leq \|G\| \sup_{0\leq t\leq T} |X^k(t\wedge\tau)-X(t\wedge\tau)| \end{aligned} \tag{7.11}$$

. Incorporando (7.11) à inequação (7.10), temos

$$J_1 \leq \|G\| \left| \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_t(\mathbb{F}^k)} \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X^k(t\wedge\tau)-X(t\wedge\tau)||\mathcal{F}_t^k \right] \right|$$

Note que $\sup_{0\leq t\leq T} |X^k(t\wedge\tau)-X(t\wedge\tau)| \to 0$ quando $k\to\infty$, como ja foi mostrado pelo Teorema 4. Fato que implica em dizer que $|S^k(t)-\delta^k S(t)| \to 0$, quando $k\to\infty$.

Agora, vamos analisar J_2 utilizando a definição de envelope de Snell, seguros pelo Lema 3.1 em (LEÃO *et al.*, 2018), a hipótese **H2** e a propriedade de esperança condicional. Logo,

$$\begin{aligned} J_2 &= |\delta^k S(t)-S(t)| \\ &\leq \left| \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_t(\mathbb{F})} \mathbb{E}[G(\tau,X)|\mathcal{F}_t^k] - \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_t(\mathbb{F})} \mathbb{E}[G(\tau,X)|\mathcal{F}_t] \right| \end{aligned}$$

. Pela construção da $\mathbb{F}^k \subset \mathbb{F} : k\geq 1$ e aplicando o Lema (2) e Teorema 1 em (COQUET; MÉMIN; SLOMINSKI, 2001), obtemos a convergência de J_2 para 0, quando $k\to\infty$. Com isso concluímos a demonstração.

$\square$

REFERÊNCIAS

BANDINI, E.; RUSSO, F. Weak dirichlet processes with jumps. **Stochastic Processes and their Applications**, Elsevier, v. 127, n. 12, p. 4139–4189, 2017. Citado na página 20.

BEZERRA, S. C.; OHASHI, A.; RUSSO, F.; SOUZA, F. de. Discrete-type approximations for non-markovian optimal stopping problems: Part ii. **Methodology and Computing in Applied Probability**, Springer, p. 1–35, 2018. Citado na página 60.

BOULEAU, N. *et al.* Sur la variation quadratique des temps locaux de certaines semimartingales. 1981. Citado na página 20.

BRÉMAUD, P. Point processes and queues: Martingale dynamics. 1981. Springer-Verlag, New York, 1981. Citado na página 30.

COQUET, F.; MÉMIN, J.; SLOMINSKI, L. On weak convergence of filtrations. **Séminaire de probabilités de Strasbourg**, v. 35, p. 306–328, 2001. Citado nas páginas 26, 38, 45 e 62.

DELLACHERIE, C. Capacites et processus stochastiques. Springer-Verlag, Editions du Centre National de la Recherche Scient, 1974. Citado na página 28.

DELLACHERIE, C.; MEYER, P.-A. Construction d'un processus prévisible ayant une valeur donnée en un temps d'arrêt. In: **Séminaire de Probabilités, XII (Univ. Strasbourg, Strasbourg, 1976/1977)**. [S.l.]: Springer, Berlin, 1978, (Lecture Notes in Math., v. 649). p. 425–427. Citado nas páginas 28, 41, 42 e 50.

____. **Probabilities and potential. B, volume 72 of North-Holland Mathematics Studies**. [S.l.]: North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1982. Citado na página 37.

DELLACHERIE, C.; MEYER, P.-A.; YOR, M. Sur certaines propriétés des espaces de banach h^1 et bmo. In: **Séminaire de Probabilités XII**. [S.l.]: Springer, 1978. p. 98–113. Citado na página 28.

DYKSTRA RL, L. P. A bayesian nonparametric approach to reliability. **The Annals of Statistics**, JSTOR, p. 356–367, 1981. Citado na página 34.

EISENBAUM, N. Local time-space stochastic calculus for Lévy processes. **Stochastic Process. Appl.**, v. 116, n. 5, p. 757–778, 2006. ISSN 0304-4149. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.spa.2005.12.002>. Citado nas páginas 20 e 47.

EISENBAUM, N.; KYPRIANOU, A. E. On the parabolic generator of a general one-dimensional Lévy process. **Electron. Commun. Probab.**, v. 13, p. 198–209, 2008. Disponível em: <https://doi.org/10.1214/ECP.v13-1366>. Citado na página 47.

EISENBAUM, N.; WALSH, A. *et al.* An optimal itô formula for lévy processes. **Electronic Communications in Probability**, The Institute of Mathematical Statistics and the Bernoulli Society, v. 14, p. 202–209, 2009. Citado nas páginas 21 e 47.

ERRAMI, M.; RUSSO, F.; VALLOIS, P. Itô's formula for c 1, λ-functions of a càdlàg process and related calculus. **Probability theory and related fields**, Springer, v. 122, n. 2, p. 191–221, 2002. Citado nas páginas 20 e 47.

GLASSERMAN, P. **Monte Carlo methods in financial engineering**. [S.l.]: Springer, 2004. v. 53. Citado na página 55.

GOZZI, F.; RUSSO, F. Weak dirichlet processes with a stochastic control perspective. **Stochastic Processes and their Applications**, Elsevier, v. 116, n. 11, p. 1563–1583, 2006. Citado na página 20.

HE, S.-w.; WANG, J.-g.; YAN, J.-a. **Semimartingale theory and stochastic calculus**. [S.l.]: Taylor & Francis, 1992. Citado nas páginas 17, 19, 20, 23, 26, 37, 44, 48 e 53.

HIGHAM, D. J. An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations. **SIAM Rev.**, v. 43, n. 3, p. 525–546, 2001. ISSN 0036-1445. Disponível em: <https://doi.org/10.1137/S0036144500378302>. Citado na página 55.

HJORT, N. L. Nonparametric bayes estimators based on beta processes in models for life history data. **The Annals of Statistics**, JSTOR, p. 1259–1294, 1990. Citado na página 32.

JACOD, J. Calcul stochastique et problèmes de martingales. Springer, distributed by Imported Publications, 1979. Citado nas páginas 37 e 53.

____. The euler scheme for lévy driven stochastic differential equations: limit theorems. **The Annals of Probability**, Institute of Mathematical Statistics, v. 32, n. 3, p. 1830–1872, 2004. Citado na página 18.

____. **Calcul stochastique et problemes de martingales**. [S.l.]: Springer, 2006. v. 714. Citado nas páginas 40, 41, 48 e 51.

JACOD, J.; SHIRYAEV, A. **Limit theorems for stochastic processes**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 288. Citado nas páginas 24 e 45.

KIM, Y. Nonparametric bayesian estimators for counting processes. **Annals of Statistics**, JSTOR, p. 562–588, 1999. Citado na página 32.

KLOEDEN, P. E.; PLATEN, E. **Numerical solution of stochastic differential equations**. [S.l.]: Springer, 1992. v. 23. Citado na página 55.

KOHATSU-HIGA ARTURO E TANKOV, P. Jump-adapted discretization schemes for lévy-driven sdes. **Stochastic Processes and their Applications**, Elsevier, v. 120, n. 11, p. 2258–2285, 2010. Citado na página 18.

LAMBERTON, D. Optimal stopping and american options. **Daiwa Lecture Ser., Kyoto**, 2008. Citado na página 61.

LAUD, P.; SMITH, A. F.; DAMIEN, P. Monte carlo methods for approximating a posterior hazard rate process. **Statistics and Computing**, Springer, v. 6, n. 1, p. 77–83, 1996. Citado na página 34.

LEÃO, D.; FRAGOSO, M.; RUFFINO, P. Regular conditional probability, disintegration of probability and radon spaces. **Proyecciones (Antofagasta)**, SciELO Chile, v. 23, n. 1, p. 15–29, 2004. Citado na página 30.

LEÃO, D.; OHASHI, A.; RUSSO, F. Discrete-type approximations for non-markovian optimal stopping problems: Part i. **Journal of Applied Probability**, Cambridge University Press, v. 56, n. 4, p. 981–1005, 2019. Citado nas páginas 21 e 60.

LEÃO, D.; OHASHI, A.; SIMAS, A. B. *et al.* A weak version of path-dependent functional itô calculus. **The Annals of Probability**, Institute of Mathematical Statistics, v. 46, n. 6, p. 3399–3441, 2018. Citado nas páginas 18, 61 e 62.

MARUYAMA, G. Continuous Markov processes and stochastic equations. **Rend. Circ. Mat. Palermo (2)**, v. 4, p. 48–90, 1955. ISSN 0009-725X. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF02846028>. Citado na página 55.

MEYER, P. A. Convergence faible de processus, d'après Mokobodzki. In: **Séminaire de Probabilités, XI (Univ. Strasbourg, Strasbourg, 1975/1976)**. [S.l.: s.n.], 1977. p. 109–119. Lecture Notes in Math., Vol. 581. Citado na página 28.

ØKSENDAL, B. **Stochastic differential equations**. [S.l.]: Springer, 2003. Citado na página 53.

PROTTER, P. E. **Stochastic Integration and Differential Equations: Version 2.1**. [S.l.]: Springer, 2004. v. 21. Citado nas páginas 53, 54, 55 e 56.

PROTTER PHILIP E TALAY, D. The euler scheme for lévy driven stochastic differential equations. **The Annals of Probability**, Institute of Mathematical Statistics, v. 25, n. 1, p. 393–423, 1997. Citado na página 18.

RUBENTHALER, S. Numerical simulation of the solution of a stochastic differential equation driven by a lévy process. **Stochastic processes and their applications**, Elsevier, v. 103, n. 2, p. 311–349, 2003. Citado nas páginas 18 e 19.

RUSSO, F.; VALLOIS, P. Ito formula forc 1-functions of semimartingales. **Probability theory and related fields**, Springer, v. 104, n. 1, p. 27–41, 1996. Citado nas páginas 20 e 47.

SAUER, T. Numerical solution of stochastic differential equations in finance. In: **Handbook of computational finance**. Springer, Heidelberg, 2012, (Springer Handb. Comput. Stat.). p. 529–550. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-17254-0_19>. Citado na página 55.

SCHILLING, R. L. **Measures, integrals and martingales**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2017. Citado na página 56.

SCHOUTENS, W. **Lévy processes in finance: pricing financial derivatives.** [S.l.]: Wiley, Chichester, 2003. Citado na página 18.

SHREVE, S.; KARATZAS, I. Brownian motion and stochastic calculus. **Newyork Berlin. Heidelberg. London Paris Tokyo**, 1991. Citado na página 53.

SKOROHOD, A. V. **Random processes with independent increments**. [S.l.]: Springer, 1991. v. 47. Citado na página 30.

TANKOV, P. **Financial modelling with jump processes**. [S.l.]: CRC press, 2003. v. 2. Citado nas páginas 17 e 18.

____. High order weak approximation schemes for lévy-driven sdes. Springer, p. 667–683, 2012. Citado na página 18.

WILSON, D. Change of variables with local time on surfaces for jump processes. **arXiv preprint arXiv:1901.04039**, 2019. Citado na página 47.

ICMC USP
SÃO CARLOS