UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Graduações e identidades polinomiais graduadas para a álgebra de matrizes triangulares superiores

Lorrayne Cristina Silva Ferreira

São Carlos - SP
2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Graduações e identidades polinomiais graduadas para a álgebra de matrizes triangulares superiores

Lorrayne Cristina Silva Ferreira

Orientador: Prof. Dr. Dimas José Gonçalves

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

São Carlos - SP
2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Lorrayne Cristina Silva Ferreira, realizada em 03/12/2020.

Comissão Julgadora:

Dimas José Gonçalves
Prof. Dr. Dimas José Gonçalves (UFSCar)

Claudemir Fidelis Bezerra Jr
Prof. Dr. Claudemir Fidelis Bezerra Júnior (UFCG)

Felipe Y. Yasumura
Prof. Dr. Felipe Yukihide Yasumura (USP)

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.
O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Agradecimentos

Agradeço ao Programa de Pós-graduação em Matemática da UFSCar, e em especial ao professores que lecionaram as disciplinas do programa, que possibilitaram a continuidade dos meus estudos.

Agradeço especialmente ao Professor Dimas, por sua orientação, desde a Iniciação Científica até a conclusão deste trabalho. Receio que todas as palavras são insuficientes para demonstrar minha gratidão. Sua orientação e seus conselhos são lições valiosas que pretendo carregar por toda a vida.

Agradeço aos membros da banca examinadora, pela disponibilidade de participar e pelas contribuições pessoais para melhoria desta dissertação.

Agradeço aos amigos e colegas que me acompanharam nessa jornada. Em particular agradeço ao Devis e ao Rafael pelos momentos de estudos e conversas.

Agradeço a Megghan e ao Lucas, que abriram sua casa para mim, e se tornaram grandes amigos. Obrigada, pelas risadas e conversas que se estendiam pela madrugada.

Agradeço aos meus pais, Leocádia e José, e meus irmãos, que sempre me incentivaram, rezaram por mim, e acreditaram em meus objetivos. Obrigada, por me tornarem a pessoa que sou hoje.

Agradeço ao Reverson, por ser um amigo, um irmão, e um exemplo.

Agradeço ao Marcio, por seu apoio e carinho incondicional. Obrigada por acreditar em mim, mesmo quando eu duvidei, por ser minha força e minha segurança, e por me "empurrar" quando minha insegurança me paralisava. Novamente, me faltam palavras para descrever minha gratidão.

Por fim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Seja F um corpo e seja G um grupo. Denote por $UT_n(F)$ a álgebra das matrizes triangulares superiores $n \times n$ sobre F.

Os matemáticos Valenti e Zaicev descreveram todas as G-graduações de $UT_n(F)$, e os matemáticos Di Vincenzo, Koshlukov e Valenti descreveram o conjunto de todas as identidades polinomiais G-graduadas de $UT_n(F)$, quando F é um corpo infinito. Depois, Koshlukov e Yukihide descreveram as G-graduações elementares da álgebra de Lie $UT_n(F)^{(-)}$. Nesta dissertação, nós estudamos esses resultados.

Além disso, Koshlukov e Yukihide descreveram as identidades polinomiais $\mathbb{Z}_n$-graduadas da álgebra de Lie $UT_n(F)^{(-)}$ quando a graduação é a canônica e F tem característica 0 . Nesta dissertação, fornecemos outra demonstração desse fato.

Abstract

Let F be a field and let G be a group. Denote by $UT_n(F)$ the algebra of $n \times n$ upper triangular matrices over F.

The mathematicians Valenti and Zaicev described all G-gradings on $UT_n(F)$, and the mathematicians Di Vincenzo, Koshlukov and Valenti described the set of all G-graded polynomial identities of $UT_n(F)$ when F is an infinite field. After, Koshlukov and Yukihide described the elementary G-gradings on the Lie algebra $UT_n(F)^{(-)}$. In this dissertation, we study these results.

Moreover, Koshlukov and Yukihide described the $\mathbb{Z}_n$-graded polynomial identities of the Lie algebra $UT_n(F)^{(-)}$ when the grading is canonical and F has characteristic 0. In this dissertation, we give another proof of this fact.

Sumário

Introdução

Esta dissertação está inserida dentro da Teoria das álgebras graduadas e Teoria das álgebras que satisfazem Identidades Polinomiais (PI-álgebras). Ao longo dela, F denotará um corpo e G um grupo. Todas as álgebras e espaços vetoriais considerados serão sobre F.

Uma G-graduação em uma álgebra associativa A é uma decomposição de A numa soma direta de subespaços vetoriais

$$A = \bigoplus_{g \in G} A_g$$

tais que $A_g A_h \subseteq A_{gh}$ para todos $g, h \in G$. Neste caso, dizemos que um polinômio

$$f = f(x_{i_1}^{g_1}, x_{i_2}^{g_2}, \ldots, x_{i_r}^{g_r}) \in F\langle X \rangle,$$

onde $F\langle X \rangle$ é a álgebra associativa G-graduada livre, é uma identidade polinomial G-graduada para A se

$$f(a_{i_1}^{g_1}, a_{i_2}^{g_2}, \ldots, a_{i_r}^{g_r}) = 0,$$

para todos $a_{i_1}^{g_1} \in A_{g_1}, \ldots, a_{i_r}^{g_r} \in A_{g_r}$.

A descrição de todas as possíveis graduações de uma álgebra desempenha um importante papel na teoria de PI-álgebras. Por exemplo, se duas álgebras graduadas são isomorfas, então elas possuem as mesmas identidades graduadas. Observamos que nem sempre a recíproca deste fato é verdadeira, veja por exemplo [7] e também os artigos [1] e [2] que dizem respeito ao tema. Citamos também o famoso *Problema de Specht* que consiste na seguinte pergunta: o conjunto das identidades polinomiais de uma álgebra associativa é finitamente gerado como um T-ideal ? A resposta é positiva quando a característica de F é 0 e foi resolvido por Kemer [10] utilizando-se de álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas.

Seja $UT_n(F)$ a álgebra das matrizes triangulares superiores $n \times n$ com entradas em F, cujo produto é o produto usual de matrizes. Nesta dissertação, estudaremos as graduações e identidades graduadas de tal álgebra. A álgebra $UT_n(F)$ é muito importante para a área: o conjunto das suas identidades polinomiais foi descrito por Maltsev [14] e Siderov [15], e é utilizado no estudo de álgebras finitamente geradas que satisfazem uma identidade polinomial não matricial. Veja [13] e [5, Observação 5.2.2] para mais detalhes.

Dizemos que uma G-graduação em $UT_n(F) = A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ é elementar se existe uma n-upla $\varepsilon = (g_1, g_2, \ldots, g_n) \in G^n$ tal que

$$\deg E_{i,j} = g_i^{-1} g_j \quad \text{e} \quad A_g = \operatorname{span}\{E_{i,j} \mid g_i^{-1} g_j = g, i \leq j\}.$$

Denotamos a álgebra associativa $UT_n(F)$ munida com a G-graduação induzida pela sequência $\varepsilon \in G^n$ por $(UT_n(F), \varepsilon)$.

Os matemáticos Valenti e Zaicev descreveram, em [16], todas as graduações em $UT_n(F)$ quando F é corpo algebricamente fechado de característica 0 e G é abeliano. Em [17], eles generalizaram este resultado sem quaisquer restrições no grupo G ou no corpo F, obtendo o seguinte teorema:

Teorema 1. Seja F um corpo qualquer e seja G um grupo qualquer. Se

$$UT_n(F) = A = \bigoplus_{g\in G} A_g$$

é uma G-graduação, então A é isomorfa, como uma álgebra G-graduada, a $UT_n(F)$ com uma G-graduação elementar.

Ou seja, o teorema acima está dizendo que toda graduação em $UT_n(F)$ é elementar, a menos de um isomorfismo graduado. Porém, antes deste resultado ser publicado e motivados pelos resultados de [16], os matemáticos Di Vincenzo, Koshlukov e Valenti estudaram em [4] as graduações elementares de $UT_n(F)$, quando F é um corpo infinito, descrevendo estas graduações por meio das identidades graduadas que elas satisfazem. Eles provaram o seguinte:

Teorema 2. Se F é um corpo infinito e G é um grupo finito, então existem exatamente $|G|^{n-1}$ graduações elementares de $UT_n(F)$ distintas. Mais ainda, elas não são isomorfas.

O interessante da demonstração deste teorema e do enunciado do Teorema 1 é que duas graduações em $UT_n(F)$ são isomorfas se, e somente se, as respectivas álgebras satisfazem as mesmas identidades graduadas. Como já comentamos anteriormente, nem sempre esta equivalência é possível em outras álgebras.

Ainda em [4], se F é infinito, então os autores descreveram os geradores do T_G-ideal das identidades polinomiais G-graduadas de $UT_n(F)$, quando a álgebra em questão possui qualquer graduação elementar, isto é, qualquer graduação segundo o Teorema 1. Vale ressaltar que a descrição de tais identidades quando o corpo F é finito foi feita em [6].

Uma G-graduação em uma álgebra de Lie A é uma decomposição de A numa soma direta de subespaços vetoriais

$$A = \bigoplus_{g\in G} A_g$$

tais que $[A_g, A_h] \subseteq A_{gh}$ para todos $g, h \in G$. Aqui, o colchete é o produto na álgebra.

Denote por $UT_n(F)^{(-)}$ o espaço vetorial $UT_n(F)$ com o produto

$$[a, b] = ab - ba.$$

Assim, $UT_n(F)^{(-)}$ é uma álgebra de Lie e podemos definir, de maneira análoga, graduação elementar neste novo contexto. Pode ser mostrado que uma sequência $\eta = (g_1, g_2, \dots, g_{n-1}) \in G^{n-1}$ determina uma G-graduação elementar em $UT_n(F)^{(-)}$, fazendo $\deg E_{i,i+1} = g_i$ para todo i, e vice-versa. Denotamos por $(UT_n(F)^{(-)}, \eta)$ tal graduação elementar. Dizemos também que

$$\operatorname{rev}\eta = (g_{n-1}, g_{n-2}, \dots, g_2, g_1)$$

é a sequência reversa de η.

Enquanto no caso associativo todas as graduações são elementares, a menos de um isomorfismo graduado, na álgebra $UT_n(F)^{(-)}$ aparecem graduações não elementares chamadas de *mirror* (veja [12]). Em [11], os matemáticos Koshlukov e Yukihide classificaram as graduações elementares da álgebra de Lie $UT_n(F)^{(-)}$, quando F é um corpo infinito e obtiveram:

Teorema 3. Seja F um corpo infinito e sejam $\eta,\ \mu \in G^{n-1}$ duas sequências. Então $({UT_n}^{(-)}, \eta)$ e $({UT_n}^{(-)}, \mu)$ são isomorfas, como álgebras G-graduadas se, e somente se,

$$\eta = \mu \quad \text{ou} \quad \mu = \operatorname{rev} \eta.$$

Esta dissertação estuda os resultados obtidos nos artigos [4], [11] e [17], e está estruturada da seguinte maneira:

- No Capítulo 1 é apresentado alguns conceitos e resultados preliminares da teoria de PI-álgebras que serão utilizados ao longo do texto.
- No Capítulo 2 é apresentado alguns resultados de [17]. Em particular, é demonstrando o Teorema 1 desta introdução.
- No Capítulo 3 é apresentado alguns resultados de [4]. Em particular, é demonstrado o Teorema 2 desta introdução e é descrito o conjunto de todas as identidades polinomiais G-graduadas de $UT_n(F)$ quando F é um corpo infinito.
- No Capítulo 4 é apresentado alguns resultados de [11]. Em particular, é demonstrando o Teorema 3 desta introdução. Além disso, nesse capítulo damos uma demonstração diferente da apresentada em [11] para a descrição do $T_{\mathbb{Z}_n}$-ideal das identidades polinomiais $\mathbb{Z}_n$-graduadas da álgebra de Lie $UT_n(F)^{(-)}$ munido da $\mathbb{Z}_n$-graduação canônica, sendo F um corpo de característica 0.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo daremos ao leitor alguns conceitos básicos da área de PI-álgebra, discutiremos a respeito de álgebras graduadas por um grupo qualquer, e também falaremos um pouco sobre identidades graduadas.

1.1 Álgebras e PI-álgebras

Nesta primeira seção relembraremos alguns conceitos a respeito de álgebras, álgebras de Lie e também apresentaremos alguns resultados a respeito de identidades polinomiais ordinárias. Sugerimos as referências [3] e [5] para um maior aprofundamento do tema.

Ao longo de toda dissertação, F indicará um corpo e todas as álgebras e espaços vetoriais serão sobre F.

Definição 1.1. *Seja R uma álgebra com produto $*$. Dizemos que R é uma álgebra de Lie se cada $a, b, c \in R$ satisfaz:*

- $a * a = 0$,
- $(a * b) * c + (b * c) * a + (c * a) * b = 0$ *(identidade de Jacobi).*

Se R é uma álgebra associativa com produto $*$, denote por $R^{(-)}$ o espaço vetorial R com multiplicação $[\ ,\ ]$ definida por

$$[a, b] = a * b - b * a.$$

Proposição 1.2. *Se R é uma álgebra associativa, então $R^{(-)}$ é uma álgebra de Lie.*

Denotamos por $UT_n(F)$ a álgebra das matrizes triangulares superiores $n \times n$ com entradas em F, cujo produto é o produto usual de matrizes. Uma vez que $UT_n(F)$ é uma álgebra associativa, segue que $UT_n(F)^{(-)}$ é uma álgebra de Lie. Essas duas álgebras serão os principais objetos de estudo desta dissertação.

Definição 1.3. *Seja Γ uma classe de álgebras e $B \in \Gamma$ uma álgebra gerada por um conjunto X. A álgebra B é chamada de álgebra livre na classe Γ, livremente gerada pelo conjunto X, se para qualquer $R \in \Gamma$ toda função $\psi : X \to R$ pode ser estendida à um homomorfismo de álgebras $\overline{\psi} : B \to R$.*

Seja X um conjunto e denote por $F\langle X\rangle$ o espaço vetorial com base formada por 1 e pelas palavras

$$x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n},\ x_{i_j} \in X,\ n = 1, 2, \ldots.$$

Defina em $F\langle X\rangle$ uma multiplicação de tal modo que

$$(x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_r})(x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_s}) = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_r}x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_s} \text{ (justaposição).}$$

Observe que essa é uma álgebra associativa unitária. Os elementos de $F\langle X\rangle$ são chamados polinômios.

Proposição 1.4. *$F\langle X\rangle$ é livre na classe de todas as álgebras unitárias associativas.*

Demonstração. Seja R uma álgebra unitária associativa e considere uma função $\psi : X \to R$. Então a função

$$\overline{\psi} : F\langle X\rangle \to R$$

definida por

$$\overline{\psi}(f(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m})) = f(\psi(x_{i_1}), \psi(x_{i_2}), \ldots, \psi(x_{i_m}))$$

é um homomorfismo de álgebras que estende ψ. □

Definiremos os polinômios abaixo que serão muito importantes nesta dissertação:

• $[x_{i_1}, x_{i_2}] = x_{i_1}x_{i_2} - x_{i_2}x_{i_1}$. Nos referimos a este polinômio como comutador de comprimento 2.

• De maneira indutiva, definimos $[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_p}] = [[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{p-1}}], x_{i_p}]$, se $p \geq 3$. Estes polinômios são chamados de comutadores de comprimento p.

Ressaltaremos duas identidades satisfeitas pelos comutadores que usaremos com frequência:

a) $[x_1, x_2, x_3] + [x_2, x_3, x_1] + [x_3, x_1, x_2] = 0$ (identidade de Jacobi),

b) $[x_1x_2, x_3] = x_1[x_2, x_3] + [x_1, x_3]x_2$ (propriedade de derivação).

A próxima definição e os próximos dois teoremas nos ajudarão a encontrar uma "boa" base para $F\langle X\rangle$. Ela será muito útil para o estudo das identidades polinomiais.

Definição 1.5. *Sejam R uma álgebra associativa e B uma álgebra de Lie. Se B é isomorfa a uma subálgebra de $R^{(-)}$, dizemos que R é uma álgebra envolvente de B. Dizemos que uma álgebra $U = U(B)$ é a álgebra envolvente universal de B, se B é isomorfa a uma subálgebra de $U^{(-)}$ e U possui a seguinte propriedade universal: para cada álgebra associativa R e cada homomorfismos de álgebras $\phi : B \to R^{(-)}$ existe um único homomorfismo $\overline{\phi} : U \to R$ que estende ϕ.*

Abaixo enunciaremos o famoso Teorema de Poincaré–Birkhoff–Witt, que nos ajuda a encontrar uma base para uma álgebra envolvente universal.

Teorema 1.6 (Poincaré–Birkhoff–Witt)**.** *Cada álgebra de Lie B possui uma única (a menos de isomorfismo) álgebra envolvente universal $U(B)$. Se B possui uma base $\{e_i \mid i \in I\}$ e o conjunto de índices I é ordenado, então $U(B)$ possui como base os elementos*

$$e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_p},\ \textit{onde } i_k \in I,\ i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_p,\ p = 1, 2, \ldots.$$

Demonstração. Veja [5, Theorem 1.3.2]. □

O próximo teorema relaciona as álgebras livres de Lie e associativa.

Teorema 1.7 (Witt)**.** *A subálgebra de Lie $L(X)$, de $F\langle X\rangle^{(-)}$, gerada por X é isomorfa a álgebra de Lie livre, livremente gerada por X. Além disso, $U(L(X)) = F\langle X\rangle$.*

Demonstração. Veja [5, Theorem 1.3.5]. □

Seja $L\langle X\rangle$ a álgebra de Lie livre, livremente gerada por X, onde $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ é um conjunto enumerável. Pode ser mostrado que $L\langle X\rangle$ tem uma base formada por

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots < c_1 < c_2 < \ldots,$$

onde $c_1, c_2, \ldots$ são comutadores nas variáveis em X. Pelo Teorema de Witt temos que $F\langle X\rangle$ é a álgebra envolvente universal de $L\langle X\rangle$ e, pelo Teorema de PBW, $F\langle X\rangle$ possui uma base que consiste em todos os possíveis produtos da forma

$$x_1^{a_1} \cdots x_r^{a_r} c_1^{b_1} \cdots c_s^{b_s}, \tag{1.1}$$

onde $a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s, r, s \geq 0$.

Apresentaremos agora a definição e alguns resultados a respeito de identidades polinomiais. Iremos nos referir a estas como identidades polinomiais ordinárias, para que não haja confusão com a definição posterior de identidades polinomiais graduadas.

Definição 1.8. *Seja $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$ um polinômio, e R uma álgebra associativa unitária. Dizemos que f é uma identidade polinomial para R se*

$$f(a_1, \ldots, a_n) = 0, \text{ para todos } a_1, \ldots, a_n \in R.$$

Denotamos por $Id(R)$ o conjunto de todas as identidades polinomiais de R. Se $Id(R) \neq \{0\}$, dizemos que R é uma PI-álgebra.

Exemplo 1.9. *O comutador*

$$[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$$

é uma identidade polinomial para todas as álgebras comutativas. Consequentemente, todas as álgebras comutativas são PI-álgebras.

Exemplo 1.10. *O polinômio $f \in F\langle X\rangle$ definido por*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) = [x_1, x_2][x_3, x_4] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}]$$

é uma identidade polinomial para $UT_n(F)$.

De fato, se $A, B \in UT_n(F)$, então a diagonal principal da matriz $[A, B]$ é nula. E o produto de n matrizes de $UT_n(F)$ com diagonal principal nula resulta em uma matriz nula.

Definição 1.11. *Seja I um ideal de $F\langle X\rangle$. Dizemos que I é um T-ideal se ele for fechado por todos os endomorfismos ϕ de $F\langle X\rangle$, ou seja, $\phi(I) \subseteq I$.*

Se S é um subconjunto de $F\langle X\rangle$, definimos o T-ideal gerado por S como o menor T-ideal de $F\langle X\rangle$ que contém S, e escrevemos $\langle S\rangle^T$.

Note que $\langle S\rangle^T$ é a interseção de todos os T-ideais que contêm S. No resultado abaixo descrevemos explicitamente tal T-ideal.

Proposição 1.12. *$\langle S\rangle^T$ é gerado como um espaço vetorial por todos os elementos do tipo*

$$gf(g_1, \ldots, g_n)g',$$

onde $f(x_1, \ldots, x_n) \in S$ e $g_1, \ldots, g_n, g, g' \in F\langle X\rangle$.

Demonstração. Denote por J o subespaço vetorial de $F\langle X\rangle$ gerado pelos elementos

$$gf(g_1,\ldots,g_n)g', \tag{1.2}$$

onde $f(x_1,\ldots,x_n)\in S$ e $g_1,\ldots,g_n,g,g'\in F\langle X\rangle$. Queremos provar que $J=\langle S\rangle^T$.
Afirmação 1. *J é um T-ideal.*

Não é difícil ver que J é um ideal. Se φ é um endomorfismo de $F\langle X\rangle$, então aplicando φ em um elemento de (1.2) obtemos

$$\begin{aligned}\varphi(gf(g_1,\ldots,g_n)g') &= \varphi(g)\varphi(f(g_1,\ldots,g_n))\varphi(g')\\ &= \varphi(g)f(\varphi(g_1),\ldots,\varphi(g_n))\varphi(g')\in J.\end{aligned}$$

Provamos assim a Afirmação.

Por definição de $\langle S\rangle^T$ e pela Afirmação 1 temos $\langle S\rangle^T\subseteq J$.

Por outro lado, seja $f(x_1,\ldots,x_n)\in S$. Dado $g_1,\ldots,g_n\in F\langle X\rangle$, considere $\psi: X\to F\langle X\rangle$ a função tal que

$$\psi(x_i)=g_i,\ \text{para todo } i=1,\ldots,n.$$

Estendendo ψ para o endomorfismo $\overline{\psi}: F\langle X\rangle\to F\langle X\rangle$ temos que

$$\overline{\psi}(f(x_1,\ldots,x_n))=f(\overline{\psi}(x_1),\ldots,\overline{\psi}(x_n))=f(g_1,\ldots,g_n).$$

O fato de $\langle S\rangle^T$ ser fechado por endomorfismos implica que $f(g_1,\ldots,g_n)\in\langle S\rangle^T$, e o fato de $\langle S\rangle^T$ ser um ideal implica que, se $g,g'\in F\langle X\rangle$, então

$$gf(g_1,\ldots,g_n)g'\in\langle S\rangle^T.$$

Assim, $J\subseteq\langle S\rangle^T$ e portanto

$$J=\langle S\rangle^T$$

como era o desejado. □

Exemplo 1.13. *O conjunto I é um T-ideal se, e somente se, ele é igual a $Id(R)$ para alguma álgebra R. Note que se I é T-ideal, então*

$$Id(F\langle X\rangle/I)=I.$$

Definição 1.14. *Um polinômio $f\in F\langle X\rangle$ é chamado de próprio se ele pode ser escrito como uma combinação linear de produtos de comutadores.*

Exemplo 1.15. *O polinômio $f\in F\langle X\rangle$ definido por*

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_8)=[x_1,x_3][x_1,x_2,x_2]+3[x_2,x_5,x_5,x_4]+[x_5,x_6][x_4,x_6][x_6,x_7,x_8]$$

é próprio.

Proposição 1.16. *Seja I um T-ideal de $F\langle X\rangle$. Se F é infinito, então I é gerado, como um T-ideal, por seus polinômios multi-homogêneos.*

Demonstração. Seja $f=f(x_1,\ldots,x_n)\in F\langle X\rangle$, e escreva

$$f=\sum_{j=0}^{m}f_j(x_1,\ldots,x_n),$$

onde f_j é homogêneo com grau j em x_r, para algum r fixado. Para provar a proposição, basta mostrarmos que

$$\langle f\rangle^T = \langle f_0, f_1, \dots, f_m\rangle^T.$$

Suponha, sem perda de generalidade, que $x_r = x_1$. Como F é infinito existem $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in F$ distintos, e temos

$$f(\alpha_i x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=0}^{m} \alpha_i^j f_j(x_1, \dots, x_n),$$

para todo $i = 0, 1, \dots, m$. Logo,

$$\begin{pmatrix} \alpha_0^0 & \alpha_0^1 & \dots & \alpha_0^m \\ \alpha_1^0 & \alpha_1^1 & \dots & \alpha_1^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_m^0 & \alpha_m^1 & \dots & \alpha_m^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\alpha_0 x_1, \dots, x_n) \\ f(\alpha_1 x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f(\alpha_m x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Mas

$$V = \begin{pmatrix} \alpha_0^0 & \alpha_0^1 & \dots & \alpha_0^m \\ \alpha_1^0 & \alpha_1^1 & \dots & \alpha_1^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_m^0 & \alpha_m^1 & \dots & \alpha_m^m \end{pmatrix}$$

é uma matriz de Vandermonde, e $\det V = \prod_{k<l}(\alpha_l - \alpha_k) \neq 0$. Assim temos

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} = V^{-1} \begin{pmatrix} f(\alpha_0 x_1, \dots, x_n) \\ f(\alpha_1 x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f(\alpha_m x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix},$$

implicando que $f_0, f_1, \dots, f_m$ são combinações lineares de

$$f(\alpha_0 x_1, \dots, x_n), f(\alpha_1 x_1, \dots, x_n), \dots, f(\alpha_m x_1, \dots, x_n) \in \langle f\rangle^T.$$

Portanto,

$$\langle f_0, f_1, \dots, f_m\rangle^T \subseteq \langle f\rangle^T.$$

A recíproca é imediata. □

Proposição 1.17. *Seja I um T-ideal de $F\langle X\rangle$. Se F é infinito, então I é gerado, como um T-ideal, por seus polinômios próprios multi-homogêneos.*

Demonstração. Pela proposição anterior I é gerado, como um T-ideal, por seus elementos multi-homogêneos. Considere

$$f = f(x_1, \dots, x_n) \in I$$

um polinômio multi-homogêneo.

Como todos os elementos de $F\langle X\rangle$ podem ser escritos como combinações lineares de elementos da forma apresentada em (1.1), então podemos escrever

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum \alpha_a x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} w_a(x_1, \dots, x_n),$$

onde $\alpha_a \in F$ e $w_a(x_1, \dots, x_n)$ é próprio para todo $a = (a_1, \dots, a_n)$.

Como $\langle f\rangle^T$ é um T-ideal, podemos substituir a variável x_1 por x_1+1 e obter

$$f(x_1+1,x_2,\ldots,x_n)=\sum \alpha_a(x_1+1)^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}w_a(x_1+1,x_2,\ldots,x_n)\in\langle f\rangle^T.$$

Note que se substituímos uma das variáveis de um comutador por 1 ele se torna nulo. Então $w_a(x_1,\ldots,1,\ldots,x_n)=0$ e

$$f(x_1+1,x_2,\ldots,x_n)=\sum \alpha_a(x_1+1)^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}w_a(x_1,x_2,\ldots,x_n).$$

A componente homogênea de $f(x_1+1,x_2,\ldots,x_n)$ de menor grau em x_1 é obtida do termo onde a_1 é maximal. Como $\langle f\rangle^T$ é gerado por seus elementos multi-homogêneos temos

$$g=\sum_{a_1\ max}\alpha_a x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}w_a(x_1,\ldots,x_n)\in\langle f\rangle^T.$$

Repetindo esse processo em g, mas agora na variável x_2, e assim por diante, teremos após alguns passos que

$$\alpha_a w_a(x_1,\ldots,x_n)\in\langle f\rangle^T.$$

Ou seja, $\langle f\rangle^T=\langle\{w_a : a=(a_1,\ldots,a_n) \text{ e } \alpha_a\neq 0\}\rangle^T$, finalizando assim a demonstração. □

Os matemáticos Maltsev e Siderov provaram em [14] e [15], respectivamente, o seguinte teorema:

Teorema 1.18. *Se F é infinito, então o T-ideal $Id(UT_n(F))$, de todas as identidades polinomiais da álgebra $UT_n(F)$, é gerado pela identidade polinomial*

$$f(x_1,\ldots,x_{2n})=[x_1,x_2][x_3,x_4]\cdots[x_{2n-1},x_{2n}].$$

Demonstração. Veja [5, Theorem 5.2.1] □

1.2 Álgebras graduadas

O objetivo desta seção é fornecer ao leitor as ferramentas básicas para o estudo das graduações da álgebra das matrizes triangulares. Em particular falaremos da graduação elementar.

Ao longo desta seção, F denotará um corpo e todas álgebras e espaços vetoriais serão sobre F.

Definição 1.19. *Sejam $(G,*)$ um grupo e A uma álgebra. Uma G-graduação em A é uma decomposição de A numa soma direta de subespaços vetoriais*

$$A=\bigoplus_{g\in G}A_g$$

tais que $A_gA_h\subseteq A_{g*h}$ para todos $g,h\in G$.

Frequentemente omitiremos a notação $*$, escrevendo gh ao invés de $g*h$. O subespaço A_g é chamado de componente homogênea de A de grau g. A componente A_1, onde 1 é o elemento identidade de G, será chamada de componente neutra. Um elemento a, não nulo, é dito homogêneo se $a\in A_g$ para algum g, e neste caso escrevemos $\deg a=g$. Dado um elemento $a\in A$ a decomposição única

$$a=\sum_{g\in G}a_g,$$

onde $a_g \in A_g$, é chamada de decomposição de a na soma de componentes homogêneas. Um subespaço $V \subseteq A$ é chamado graduado se

$$V = \bigoplus_{g \in G} (V \cap A_g).$$

Note que V é um subespaço graduado de A se, e somente se, para cada $v \in V$, se decompomos

$$v = \sum_{g \in G} v_g, \text{ onde } v_g \in A_g,$$

então $v_g \in V$.

Exemplo 1.20. *Seja $A = M_n(F)$ a álgebra das matrizes $n \times n$ com entradas em F e produto usual. Denote por $E_{i,j}$ a matriz unitária com entrada (i, j) igual a 1 e demais entradas iguais a 0. Dada uma n-upla $\widehat{g} = (g_1, g_2, \ldots, g_n) \in G^n$, onde G é um grupo, definimos*

$$deg\ E_{i,j} = g_i^{-1} g_j \quad e \quad A_g = span\{E_{i,j} \mid g_i^{-1} g_j = g\}.$$

Então $A = \oplus_{g \in G} A_g$ é uma G-graduação de A, e é chamada de G-graduação elementar induzida pela n-upla $\widehat{g}$.

Detalharemos o exemplo acima: como os $E_{i,j}$'s formam uma base para A, temos que a igualdade $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ é verdadeira. Precisamos verificar que $A_g A_h \subseteq A_{gh}$. Se $E_{i,j} \in A_g$ e $E_{k,l} \in A_h$, então $E_{i,j} E_{k,l} = 0 \in A_{gh}$ (se $j \neq k$) ou $E_{i,j} E_{k,l} = E_{i,l}$ (se $j = k$). Neste último caso,

$$\deg E_{i,l} = g_i^{-1} g_l = g_i^{-1} g_j g_j^{-1} g_l = gh,$$

isto é, $E_{i,j} E_{k,l} \in A_{gh}$ como era o desejado.

Lema 1.21. *Seja $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ uma álgebra graduada por um grupo G, onde G tem elemento identidade 1. Se A tem um elemento identidade 1_A, então $1_A \in A_1$.*

Demonstração. Decomponha 1_A na soma de componentes homogêneas

$$1_A = \sum_{g \in G} a_g, a_g \in A_g. \tag{1.3}$$

Afirmamos que $1_A = a_1$. Como o elemento identidade em A é único, a nossa afirmação será verdadeira se provarmos que

$$a_1 b = b a_1 = b,$$

para todo $b \in A$. Para provar tais igualdades, basta considerar os elementos neos. Seja $b \in A_h$, onde $h \in G$. Fazendo o produto $b1_A$, temos, por (1.3), que

$$b1_A = \sum_{g \in G} b a_g = b.$$

Se $g \in G - \{1\}$, então $\deg b a_g = hg \neq h = \deg b$ e $b a_g = 0$. Logo, $b1_A = b a_1 = b$ como era desejado. Analogamente, $1_A b = a_1 b = b$ e o lema está finalizado. □

Lema 1.22. *Seja $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ uma álgebra graduada por um grupo G. Se $a \in A_g$ é invertível então $a^{-1} \in A_{g^{-1}}$.*

Demonstração. Decompondo a^{-1} na soma de componentes homogêneas temos

$$a^{-1} = \sum_{h \in G} a_h, \quad a_h \in A_h.$$

Logo

$$1 = a^{-1}a = \sum_{h \in G} a_h a.$$

Pelo lema anterior, $1 \in A_1$. Como $\deg a_h a = hg$, para todo h, segue que se $hg \neq 1$ então $a_h a = 0$ e

$$a_h = a_h a a^{-1} = 0a^{-1} = 0.$$

Portanto $a^{-1} = a_{g^{-1}} \in A_{g^{-1}}$. □

Definição 1.23. *Sejam $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ e $B = \bigoplus_{g \in G} B_g$ álgebras graduadas por um grupo G e $\psi : A \to B$. Dizemos que ψ é um homomorfismo de álgebras G-graduadas (ou homomorfismo graduado, se não houver confusão), se ψ é um homomorfismo de álgebras e*

$$\psi(A_g) \subseteq B_g,$$

para todo $g \in G$.

De maneira análoga, definimos endomorfismo, automorfismo, isomorfismo de álgebras G-graduadas.

Exemplo 1.24. *Seja A como definida no Exemplo 1.20 e considere $\psi : A \to A$ definida por*

$$\psi(X) = CXC^{-1},$$

onde C é uma matriz invertível fixada. Se o grupo G é abeliano e a matriz C é homogênea, então ψ é um isomorfismo graduado.

Lema 1.25. *Seja $\varphi : A \to A$ um isomorfismo de álgebras. Se $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ é uma graduação de A por um grupo G, então*

$$A = \bigoplus_{g \in G} \varphi(A_g)$$

também é uma graduação de A por G. Mais ainda, φ é um isomorfismo de álgebras G-graduadas.

Demonstração. Como φ é um isomorfismo de álgebras temos, em particular, que φ é um isomorfismo de espaços vetoriais. Logo, cada $\varphi(A_g)$ é um subespaço vetorial de A, e φ preserva a soma direta. Concluímos que

$$A = \bigoplus_{g \in G} \varphi(A_g). \tag{1.4}$$

Como φ preserva o produto, temos

$$\varphi(A_g)\varphi(A_h) = \varphi(A_g A_g) \subseteq \varphi(A_{gh}).$$

Portanto (1.4) é uma graduação de A por G e φ é um isomorfismo graduado. □

A seguir apresentaremos alguns resultados para a álgebra graduada $UT_n(F)$, que será o foco deste trabalho.

Exemplo 1.26. *Seja $A = UT_n(F)$ a álgebra das matrizes triangulares superiores $n \times n$ com entradas em F e produto usual de matrizes. Dada uma n-upla $\widehat{g} = (g_1, g_2, \dots, g_n) \in G^n$, definimos*

$$deg\ E_{i,j} = g_i^{-1} g_j \quad e \quad A_g = span\{E_{i,j} \mid g_i^{-1} g_j = g, i \le j\}.$$

Então a decomposição $A = \oplus_{g \in G} A_g$ é uma graduação em A, e a chamamos de graduação elementar induzida por $\widehat{g}$.

Proposição 1.27. *Considere uma G-graduação elementar em $UT_n(F) = A = \bigoplus_{g \in G} A_g$. Então todas a matrizes unitárias $E_{i,i}$ pertencem a componente homogênea neutra A_1 de A.*

Demonstração. Pela definição de graduação elementar temos que $\deg E_{i,i} = g_i^{-1} g_i = 1$. □

Se $M_n(F)$ tem uma G-graduação elementar, então $UT_n(F)$ é um subespaço graduado e a G-graduação induzida é elementar. Note também que se $UT_n(F)$ tem uma G-graduação elementar induzida por $\widehat{g} \in G^n$, então podemos estender esta G-graduação para $M_n(F)$ considerando a G-graduação elementar em $M_n(F)$ induzida pela mesma n-upla $\widehat{g}$.

Proposição 1.28. *Toda G-graduação elementar em $UT_n(F) = A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ é unicamente determinada pelos graus homogêneos das matrizes $E_{1,i}, i = 1, \dots, n$.*

Demonstração. Sejam $g_1, \dots, g_n \in G$ tais que $E_{1,r} \in A_{g_r}$, para todo $r = 1, \dots, n$. Nós temos, pelo lema anterior, que $E_{i,i} \in A_1$, a componente neutra de A, portanto $\deg E_{i,i} = \deg E_{1,1} = 1$ para todo i. Suponha que $E_{i,j} \in A_g$ para algum $g \in G$, e $i < j$. Como $E_{1,i} E_{i,j} = E_{1,j}$, temos $g_i g = g_j$ e portanto $g = g_i^{-1} g_j$ é unicamente determinado. □

Relembramos que o radical de Jacobson de $UT_n(F)$, denotado por $J(UT_n(F))$, é o conjunto das matrizes estritamente triangulares superiores. Dizemos que as matrizes da forma

$$C = \sum_{i=1}^{n-1} a_{i,i+1} E_{i,i+1},$$

onde $a_{i,i+1} \in F$, para todo i, formam a primeira diagonal de $J(UT_n(F))$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & & & \\ & 0 & a_{2,3} & & \text{\Large 0} \\ & & \ddots & \ddots & \\ & \text{\Large 0} & & 0 & a_{n-1,n} \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposição 1.29. *Toda G-graduação elementar em $UT_n(F) = A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ é unicamente determinada pelos graus homogêneos dos elementos $E_{1,2}, E_{2,3}, \dots, E_{n-1,n}$ da primeira diagonal de $J(UT_n(F))$.*

Demonstração. Pela proposição anterior é suficiente descrever os elementos $E_{1,j}$. Sejam $h_1, \dots, h_{n-1} \in G$ tais que $E_{r,r+1} \in A_{h_r}$ para todo $r = 1, \dots, n-1$. Temos que $E_{1,1} \in A_1$, a componente neutra. Suponha que $E_{1,j} \in A_h$ e $1 < j$. Então como

$$E_{1,j} = E_{1,2} E_{2,3} \cdots E_{j-1,j},$$

temos que $h = h_1 h_2 \cdots h_{j-1}$ é unicamente determinado. □

1.3 Identidades polinomiais G-graduadas

Ao longo desta seção, F será um corpo, e G um grupo qualquer. Todas as álgebras e espaços vetoriais serão sobre F.

Considere um conjunto X que seja uma união disjunta de conjuntos enumeráveis

$$X = \bigcup_{g \in G} X_g$$

tais que

$$X_g = \{x_1^g, x_2^g, x_3^g, \ldots\}, \text{ onde } g \in G.$$

A álgebra associativa livre $F\langle X\rangle$, livremente gerada por X, possui uma G-graduação natural, definida da seguinte forma:

$$\deg x_i^g = g, \text{ para todo } x_i^g \in X_g,$$

e também

$$\deg x_{i_1}^{g_1} \cdots x_{i_n}^{g_n} = g_1 \cdots g_n.$$

Com tal graduação, dizemos que $F\langle X\rangle$ é uma álgebra associativa G-graduada livre, livremente gerada por X. Note que se $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ é uma álgebra associativa G-graduada e $\psi : X \to A$ é uma função tal que $\psi(x_i^g) \in A_g$, então ψ pode ser estendida para um homomorfismo graduado $\overline{\psi} : F\langle X\rangle \to A$.

Para simplificar a notação usaremos x para denotar uma variável em X e x^g quando quisermos especificar que a variável pertence a componente homogênea X_g. Denotamos

$$Y = X_1 \text{ e } Z = \bigcup_{g\in G,\ g\neq 1} X_g.$$

Em alguns casos usaremos as letras y e z para denotarem elementos em Y e Z, respectivamente. Os elementos pertencentes a Y serão chamados de variáveis pares, e os elementos pertencentes a Z serão chamados de variáveis ímpares.

Definição 1.30. *Seja $f = f(x_{i_1}^{g_1}, x_{i_2}^{g_2}, \ldots, x_{i_r}^{g_r}) \in F\langle X\rangle$ um polinômio, e $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ uma álgebra G-graduada. Então f é uma identidade polinomial G-graduada (ou apenas identidade graduada) para A se*

$$f(a_{i_1}^{g_1}, a_{i_2}^{g_2}, \ldots, a_{i_r}^{g_r}) = 0,$$

para todos $a_{i_1}^{g_1} \in A_{g_1}, \ldots, a_{i_r}^{g_r} \in A_{g_r}$. Denotamos por $T_G(A)$ o conjunto de todas as identidades polinomiais G-graduadas de A.

Exemplo 1.31. *Seja $G = \langle g\rangle$ um grupo cíclico de ordem 2. Considere a G-graduação elementar induzida por $\varepsilon = (1, g)$ em $UT_2(F)$. Note que* $\deg E_{1,1} = \deg E_{2,2} = 1$ *e* $\deg E_{1,2} = g$. *Portanto, os polinômios*

$$[x_1^1, x_2^1] \text{ e } x_1^g x_2^g$$

são identidades graduadas para $UT_2(F)$. Note que eles não são identidades ordinárias para $UT_2(F)$.

Uma verificação direta mostra que o conjunto $T_G(A)$ de todas as identidades G-graduadas de uma álgebra G-graduada A é um ideal. Mais ainda, $T_G(A)$ é fechado por todos os endomorfismos G-graduados de $F\langle X\rangle$. Ideais com esta propriedade são chamados T-ideais G-graduados, ou T_G-ideais.

Se S é um subconjunto de $F\langle X\rangle$, definimos o T_G-ideal gerado por S como o menor T_G-ideal de $F\langle X\rangle$ que contém S, e escrevemos $\langle S\rangle^{T_G}$. Note que $\langle S\rangle^{T_G}$ é a interseção de todos os T_G-ideais que contêm S.

Lema 1.32. *Seja $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ uma álgebra graduada por um grupo G, e $B = \bigoplus_{g\in G} B_g$ uma subálgebra G-graduada de A. Então*

$$T_G(A) \subseteq T_G(B).$$

Demonstração. Como B é uma subálgebra G-graduada de A temos

$$B_g \subseteq A_g, \text{ para todo } g \in G.$$

Considere um polinômio $f(x_{i_1}^{g_1}, x_{i_2}^{g_2}, \ldots, x_{i_r}^{g_r}) \in T_G(A)$. Temos que

$$f(b_{i_1}^{g_1}, b_{i_2}^{g_2}, \ldots, b_{i_r}^{g_r}) = 0$$

para todo $b_{i_1}^{g_1} \in B_{g_1}, \ldots, b_{i_r}^{g_r} \in B_{g_r}$, pois $b_{i_1}^{g_1} \in A_{g_1}, \ldots, b_{i_r}^{g_r} \in A_{g_r}$. Portanto

$$f(x_{i_1}^{g_1}, x_{i_2}^{g_2}, \ldots, x_{i_r}^{g_r}) \in T_G(B).$$

□

Lema 1.33. *Sejam $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ e $B = \bigoplus_{g\in G} B_g$ álgebras graduadas por um grupo G. Se A e B são isomorfas, como álgebras G-graduadas, então*

$$T_G(A) = T_G(B).$$

Demonstração. Se A e B são isomorfas, como álgebras G-graduadas, então existe um isomorfismo de álgebras $\psi : A \to B$ tal que $\psi(A_g) = B_g$, para toda componente homogênea A_g de A. Considere um polinômio

$$f(x_{i_1}^{g_1}, x_{i_2}^{g_2}, \ldots, x_{i_r}^{g_r}) \in T_G(A).$$

Sejam $b_{i_1}^{g_1} \in B_{g_1}, \ldots, b_{i_r}^{g_r} \in B_{g_r}$, e $a_{i_1}^{g_1} \in A_{g_1}, \ldots, a_{i_r}^{g_r} \in A_{g_r}$, tais que

$$\psi(a_{i_t}^{g_t}) = b_{i_t}^{g_t},\ t = 1, \ldots, r.$$

Então temos

$$\begin{aligned} f(b_{i_1}^{g_1}, b_{i_2}^{g_2}, \ldots, b_{i_r}^{g_r}) &= f(\psi(a_{i_1}^{g_1}), \psi(a_{i_2}^{g_2}), \ldots, \psi(a_{i_r}^{g_r})) \\ &= \psi(f(a_{i_1}^{g_1}, a_{i_2}^{g_2}, \ldots, a_{i_r}^{g_r})) \\ &= \psi(0) = 0. \end{aligned}$$

Portanto $f(x_{i_1}^{g_1}, x_{i_2}^{g_2}, \ldots, x_{i_r}^{g_r}) \in T_G(B)$.

A reciproca é feita de maneira análoga, usando o fato que $\psi^{-1}(B_g) = A_g$ para todo $g \in G$. □

Proposição 1.34. *Seja I um T_G-ideal de $F\langle X\rangle$. Se F é infinito, então I é gerado, como um T_G-ideal, por seus polinômios multi-homogêneos.*

Demonstração. A prova segue os mesmos passos da demonstração da Proposição 1.16. □

Estabeleça uma relação de ordem no conjunto dos monômios de Lie em X de tal forma que:

$$y_1 < y_2 < \ldots < y_n < y_{n+1} < \ldots < z_1 < z_2 < \ldots < z_n < z_{n+1} < \ldots < c_1 < c_2 < \ldots,$$

onde $c_1, c_2, \ldots$ são comutadores, de comprimento maior ou igual a 2, nas variáveis em X. De maneira similar a (1.1) podemos mostrar que $F\langle X\rangle$ possui uma base que consiste em todos os possíveis produtos da forma

$$y_1^{a_1} \cdots y_m^{a_m} z_1^{b_1} \cdots z_n^{b_n} c_1^{d_1} \cdots c_s^{d_s}, \tag{1.5}$$

onde $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n, d_1, \ldots, d_s, m, n, s \geq 0$.

Definição 1.35. *Um polinômio $f \in F\langle X\rangle$ é chamado Y-próprio se é uma combinação linear de elementos da forma (1.5) onde*

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 0.$$

Note que um polinômio f é Y-próprio se na combinação linear de (1.5) as variáveis pares aparecem apenas dentro de comutadores.

Exemplo 1.36. *Considere os polinômios*

$$f(y_1, y_2, z_1, z_2, z_3, z_4) = z_1^2 z_3^5 [z_2, y_1]^3 + [z_3, y_1, y_2]^2 [z_4, y_2, y_2]^4 \ e$$

$$g(y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3, z_4) = [y_1, y_2] + y_1^3 z_4 [z_1, z_2]^7 [z_2, y_3, z_3]^2.$$

Temos que apenas f é Y-próprio. Note que se g fosse Y-próprio, então, em particular, deveríamos ter

$$g(1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3, z_4) = 0,$$

o que não ocorre.

O fato das identidades polinomiais ordinárias serem determinadas por seus elementos próprios, quando o corpo F é infinito, pode ser interpretado, no contexto de identidades G-graduadas, da seguinte maneira:

Proposição 1.37. *Seja I um T_G-ideal de $F\langle X\rangle$. Se F é infinito, então I é gerado, como um T_G-ideal, por seus polinômios Y-próprios multi-homogêneos.*

Demonstração. Como observado anteriormente I é gerado, como um T_G-ideal, por seus elementos multi-homogêneos. Considere

$$f = f(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n) \in I$$

um polinômio multi-homogêneo.

Como todos os elementos de $F\langle X\rangle$ podem ser escritos como combinações lineares de elementos da forma (1.5), então podemos escrever

$$f(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n) = \sum \alpha_a y_1^{a_1} \ldots y_m^{a_m} w_a(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n),$$

onde $\alpha_a \in F$ e $w_a(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n)$ é Y-próprio para todo $a = (a_1, \ldots, a_m)$.

Como 1 é um elemento homogêneo de G-grau igual a 1 (ver Lema 1.21), e como $\langle f\rangle^{T_G}$ é um T_G-ideal podemos substituir a variável $y_1 \in Y$ por $y_1 + 1$ e obter

$$f(y_1{+}1, y_2, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n) = \sum \alpha_a (y_1{+}1)^{a_1} y_2^{a_2} \ldots y_m^{a_m} w_a(y_1{+}1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n) \in \langle f\rangle^{T_G}.$$

Note que se substituirmos uma das variáveis de um comutador por 1 ele se torna nulo. Então $w_a(y_1, \ldots, 1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n) = 0$ e

$$f(y_1 + 1, y_2, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n) = \sum \alpha_a (y_1 + 1)^{a_1} y_2^{a_2} \ldots y_m^{a_m} w_a(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n).$$

A componente homogênea de $f(y_1 + 1, y_2, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n)$ de menor grau em y_1 é obtida do termo onde a_1 é maximal. Como $\langle f\rangle^{T_G}$ é gerado por seus elementos multi-homogêneos temos

$$g = \sum_{a_1 \ max} \alpha_a y_2^{a_2} \ldots y_m^{a_m} w_a(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n) \in \langle f\rangle^{T_G}.$$

Repetindo o processo em g, mas agora na variável y_2, e assim por diante, teremos após alguns passos que

$$\alpha_a w_a(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n) \in \langle f \rangle^{T_G}.$$

Ou seja,

$$\langle f \rangle^{T_G} = \langle \{w_a(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n) : \alpha_a \neq 0 \text{ e } a = (a_1, \ldots, a_m)\} \rangle^{T_G}.$$

Finalizando a demonstração. □

1.4 Pré-requisitos finais

Visando facilitar a leitura, apresentaremos nesta seção um resultado simples de Álgebra Linear que é quase sempre utilizado quando queremos descrever as identidades polinomiais (graduadas ou não) de uma álgebra.

Lema 1.38. *Sejam U e V subespaços vetoriais de um espaço vetorial W. Seja S um subconjunto de W tal que*

$$W/U = span\{f + U \mid f \in S\}.$$

Se $U \subseteq V$ e

$$\{f + V \mid f \in S\}$$

é linearmente independente no quociente W/V, então $U = V$.

Demonstração. Suponha que $U \subsetneq V$ e seja $g \in V - U$. Então, existem $\alpha_f \in F$ não todos nulos, tais que

$$g + U = \sum_{f \in S} \alpha_f f + U.$$

Logo,

$$g = \sum_{f \in S} \alpha_f f + h$$

para algum $h \in U$, e assim

$$V = g + V = \sum_{f \in S} \alpha_f f + h + V = \sum_{f \in S} \alpha_f f + V = \sum_{f \in S} \alpha_f (f + V).$$

Absurdo, como $\{f + V \mid f \in S\}$ é linearmente independente no quociente W/V todos os coeficientes α_f deveriam ser nulos. □

Capítulo 2

Graduações de $UT_n(F)$

Seja F um corpo qualquer e seja $UT_n(F)$ a álgebra das matrizes triangulares superiores $n\times n$. O objetivo deste capítulo é descrever todas as graduações de $UT_n(F)$ por um grupo G. Os resultados apresentados aqui foram extraídos de [17], cujos autores são Valenti e Zaicev.

2.1 Propriedades gerais das graduações de $UT_n(F)$

Ao longo desta seção, F será um corpo qualquer, G um grupo qualquer e denotaremos $UT_n(F) = UT_n$. Aqui exibiremos algumas propriedades das graduações de UT_n que serão de extrema importância para o objetivo final deste capítulo.

Nosso primeiro resultado tem como objetivo relacionar os idempotentes de UT_n a idempotentes diagonais. Relembramos que um elemento $a \in UT_n$ é um idempotente se $a^2 = a$. Mais ainda, duas matrizes $a, b \in UT_n$ são conjugadas se existe $c \in UT_n$, invertível, tal que $a = cbc^{-1}$.

Lema 2.1. *Todo idempotente em $A = UT_n$ é conjugado a um idempotente diagonal*

$$E_{i_1,i_1} + E_{i_2,i_2} + \cdots + E_{i_k,i_k},$$

para alguns índices $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_k \leq n$.

Demonstração. Seja V um espaço vetorial com dimensão $\dim V = n$ e base $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$. Considere a cadeia

$$V_1 \subseteq V_2 \subseteq \ldots \subseteq V_n \tag{2.1}$$

onde $\dim V_k = k$ e $V_k = \text{span}\{u_1, \ldots, u_k\}$ para todo k. Denote por $\overline{A}$ a álgebra de todos os operadores lineares de V que preservam a cadeia (2.1), isto é, todos os operadores a tais que $a(V_k) \subseteq V_k$, para todo k. Então a função $\psi : \overline{A} \to A$ definida por $\psi(a) = [a]_B$, onde $[a]_B$ é a matriz de a associada a base B, é um isomorfismo de álgebras.

Seja $[e]_B$ um idempotente em A, onde $e \in \overline{A}$. Para provar o lema é suficiente encontrar uma base $B' = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V, tal que $V_k = \text{span}\{v_1, \ldots, v_k\}$, e

$$e(v_i) = v_i \quad \text{ou} \quad e(v_i) = 0 \tag{2.2}$$

para todo i. De fato, caso isso ocorra, existirão $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_k \leq n$ tais que $[e]_{B'} = E_{i_1,i_1} + E_{i_2,i_2} + \cdots + E_{i_k,i_k}$ e por meio da matriz mudança de base $[Id]_B^{B'}$ teremos

$$[e]_B = ([Id]_B^{B'})([e]_{B'})([Id]_B^{B'})^{-1}.$$

Construiremos a base B' indutivamente. Escolha $v \in V_1$ onde $v \neq 0$. Uma vez que e preserva a cadeia (2.1) temos que $e(v) \in V_1$, e assim

$$e(v) = \alpha v,$$

para algum $\alpha \in F$. Note que

$$e(e(v)) = e^2(v) = e(v) = \alpha v.$$

E também,

$$e(e(v)) = e(\alpha v) = \alpha e(v) = \alpha^2 v.$$

Portanto $\alpha^2 = \alpha$, e consequentemente $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$. Ou seja, $v_1 = v$ satisfaz (2.2).

Supomos agora a existência de $v_1, \dots, v_{k-1}$ satisfazendo (2.2). Para construir v_k temos dois casos para analisar:

a) Se $e(u_k) \notin V_{k-1}$, então $v_k = e(u_k)$. Note que $e(v_k) = v_k$, pois e é idempotente.

b) Se $e(u_k) \in V_{k-1}$, então $v_k = u_k - e(u_k)$. Note que $e(v_k) = 0$.

Procedemos desta maneira até construir todos os vetores $v_1, \dots, v_n$. □

Lema 2.2. *Se e é um idempotente de $A = UT_n$, então a subálgebra eAe é isomorfa a UT_k, onde $k = \operatorname{tr}(e)$ (traço de e).*

Demonstração. No lema anterior vimos que e é conjugado a um idempotente diagonal $d = E_{i_1,i_1} + E_{i_2,i_2} + \cdots + E_{i_k,i_k}$, para alguns índices $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_k \leq n$. Assim, $e = cdc^{-1}$ para alguma matriz invertível $c \in UT_n$.

Primeiro definimos o isomorfismo de álgebras

$$\phi : dAd \to eAe \quad \text{por} \quad \phi(a) = cac^{-1}.$$

Note que se $a \in dAd$, então $a = da'd$ para algum $a' \in A$, e

$$\phi(a) = \phi(da'd) = c(da'd)c^{-1} = (cdc^{-1})(ca'c^{-1})(cdc^{-1}) = e(ca'c^{-1})e \in eAe.$$

Portanto, de fato ϕ está bem definida. A verificação que ϕ é um isomorfismo é simples e omitimos a demonstração.

Por propriedade da função traço obtemos

$$\operatorname{tr}(e) = \operatorname{tr}(cdc^{-1}) = \operatorname{tr}(dc^{-1}c) = \operatorname{tr}(d).$$

Portanto, provar o lema se resume a provar que a subálgebra dAd é isomorfa a UT_k, onde $k = \operatorname{tr}(d)$. Note que

$$dAd = \operatorname{span}\{E_{i,j} : i \leq j \ \text{ e } \ i, j \in \{i_1, \dots, i_k\}\}$$

e, finalmente, a função $\varphi : UT_k \to dAd$ definida por

$$\varphi\left(\sum_{t \leq r} \alpha_{t,r} E_{t,r}\right) = \sum_{t \leq r} \alpha_{t,r} E_{i_t,i_r}, \ \alpha_{t,r} \in F,$$

é o isomorfismo desejado. Portanto $eAe \cong dAd \cong UT_k$. □

Para o próximo lema relembramos ao leitor que dois elementos a, b de uma álgebra são ortogonais se $ab = 0$. Dizemos também que um conjunto é ortogonal quando todo par de elementos distintos, pertencentes a ele, são ortogonais.

Lema 2.3. *Todo conjunto $\{e_1, \ldots, e_n\}$ com n idempotentes ortogonais de UT_n é conjugado a $E_{1,1}, \ldots, E_{n,n}$, isto é, existe $c \in UT_n$ invertível tal que $e_i = cE_{i,i}c^{-1}$ para todo i.*

Demonstração. Seja V um espaço vetorial com dimensão $\dim V = n$ e base $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$. Considere a cadeia

$$V_1 \subseteq V_2 \subseteq \ldots \subseteq V_n, \tag{2.3}$$

onde $\dim V_k = k$ e $V_k = \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_k\}$ para todo k. Denote por $\overline{A}$ a álgebra de todos os operadores lineares de V que preservam a cadeia (2.3). Então a função $\psi : \overline{A} \to A$ definida por $\psi(a) = [a]_B$, onde $[a]_B$ é a matriz de a associada a base B, é um isomorfismo de álgebras.

Denote por $\{\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_n}\}$ o conjunto de idempotentes ortogonais de $\overline{A}$ tal que $[\overline{e_i}]_B = e_i$. Para provar este lema é suficiente encontrar uma base $\{w_1, \ldots, w_n\}$ de V, tal que $V_k = \operatorname{span}\{w_1, \ldots, w_k\}$ e

$$\overline{e_i}(w_j) = \delta_{i,j} w_j \tag{2.4}$$

para todos i, j, onde $\delta_{i,j}$ é o delta de Kronecker.

Denote por $(e_k)_{i,j}$ a entrada (i, j) da matriz e_k. Sabemos que se duas matrizes triangulares são conjugadas, então as suas diagonais principais coincidem. Portanto, pelo Lema 2.1, $(e_k)_{i,i} = 0$ ou $(e_k)_{i,i} = 1$, para todos i, k. Mais ainda, a diagonal principal de cada e_k é não nula. Como $e_1, \ldots, e_n$ são ortogonais, em quantidade n e

$$0 = (e_k e_l)_{i,i} = (e_k)_{i,i}(e_l)_{i,i},$$

então cada e_k tem precisamente uma entrada não nula em sua diagonal principal. Reordenando os e_i's, se necessário, podemos assumir que $(e_i)_{j,j} = \delta_{i,j}$.

Vamos definir $\{w_1, \ldots, w_n\}$ da seguinte forma:

$$w_i = \overline{e}_i(u_i),$$

para cada i. O fato de cada w_i satisfazer (2.4) é consequência direta de $\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n$ serem idempotentes ortogonais. Precisamos mostrar que $V_k = \operatorname{span}\{w_1, \ldots, w_k\}$, para todo k. Por hipótese $V_k = \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_k\}$, então basta mostrarmos que

$$\operatorname{span}\{w_1, \ldots, w_k\} = \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_k\}.$$

Faremos isso por indução em k. Para $k = 1$ temos $w_1 = \overline{e}_1(u_1) = u_1$, e portanto $\operatorname{span}\{w_1\} = \operatorname{span}\{u_1\}$. Suponha agora que a igualdade é valida para todo $r < k$. Como os $\overline{e}_i$'s preservam a cadeia (2.3), para todo i, temos que

$$\operatorname{span}\{w_1, \ldots, w_k\} \subseteq \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_k\}.$$

Por outro lado, pela hipótese de indução, temos que $\operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_{k-1}\} \subseteq \operatorname{span}\{w_1, \ldots, w_{k-1}\}$. Mais ainda $(e_k)_{k,k} = 1$, então

$$w_k = \overline{e}_k(u_k) = u_k + \sum_{r=1}^{k-1} \lambda_r u_r = u_k + \sum_{r=1}^{k-1} \alpha_r w_r,$$

para certos $\lambda_r, \alpha_r \in F$. Portanto

$$u_k = w_k - \sum_{r=1}^{k-1} \alpha_r w_r,$$

e $\operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_k\} \subseteq \operatorname{span}\{w_1, \ldots, w_k\}$. Completando nossa demonstração. □

Agora apresentaremos um lema preliminar, que será utilizado na demonstração do nosso próximo resultado.

Lema 2.4. *Seja B uma subálgebra de UT_n. Se B é simples e contém o elemento identidade E de UT_n, então $B = span\{E\}$.*

Demonstração. O conjunto formado por E e pelos elementos $E_{i,j}$, onde $1 \leq i \leq j \leq n$ e $(i,j) \neq (1,1)$, é uma base para o espaço vetorial UT_n.

Suponha que $\text{span}\{E\} \subsetneq B$. Então existe pelo menos um elemento $a \in B$ que não está no subespaço gerado por E. Pela base de UT_n acima podemos considerar

$$a = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \alpha_{i,j} E_{i,j},$$

onde $\alpha_{i,j} \in F$ e $\alpha_{1,1} = 0$, ou seja, a entrada $(1,1)$ de a é nula. O ideal bilateral de B gerado por a é não trivial, levando-nos a concluir que B não é simples. Absurdo. $\square$

Lema 2.5. *Seja $UT_n = A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ uma álgebra graduada por um grupo G, onde G tem elemento identidade 1. Então A_1 contém n idempotentes ortogonais.*

Demonstração. Nós procederemos por indução em n. Para $n = 1$ a declaração é imediata. Denote por E a matriz identidade em A. Pelo Lema 1.21, segue que $E \in A_1$.

Como a subálgebra gerada por E é semissimples e a dimensão de A_1 é finita, existe uma subálgebra B semissimples maximal de A_1 tal que $E \in B$. Considere C um somando direto simples de B, e seja e seu elemento unitário. Se $E - e \neq 0$, então como e é um idempotente, segue que

$$(E - e)e = Ee - e^2 = e - e = 0, \quad \text{e}$$
$$(E - e)^2 = (E - e)E - (E - e)e = (E - e).$$

Portanto, e e $E - e$ são dois idempotentes ortogonais ou $E = e$.

Vamos analisar os dois casos separadamente.

Caso 1. e e $E - e$ são dois idempotentes ortogonais.

Neste caso, segue do Lema 2.2 que

$$P = eAe \cong UT_k \;\text{ e }\; Q = (E - e)A(E - e) \cong UT_{n-k},$$

onde $k = \text{tr}(e)$. Considere um elemento $p \in P$, então p é da forma $p = ep'e$ para algum $p' \in A$. Como A é G-graduado podemos decompor p' na soma de suas componentes homogêneas:

$$p' = \sum_{g \in G} p'_g,$$

onde $p'_g \in A_g$. Portanto

$$p = e\left(\sum_{g \in G} p'_g\right)e = \sum_{g \in G} ep'_g e.$$

Como $e \in A_1$, segue que $ep'_g e \in (P \cap A_g)$ e portanto a subálgebra P é graduada na G-graduação. Analogamente, concluímos que a subálgebra Q também é graduada. Pela hipótese de indução podemos encontrar n idempotentes ortogonais $a_1, \ldots, a_n \in A_1$, sendo

$$a_1, \ldots, a_k \in P_1 = P \cap A_1 \;\text{ e }\; a_{k+1}, \ldots, a_n \in Q_1 = Q \cap A_1.$$

Portanto, o lema é verdadeiro neste Caso 1.

Caso 2. $E = e$.

Neste caso, como C é um ideal bilateral de B e $E \in C$, segue que $C = B$. Assim, B é simples e, pelo Lema 2.4, $B = FE$. Em particular, $\dim B = 1$. Vamos provar, por indução na ordem de G, que isso leva a uma contradição.

Se $|G| = 1$ então $A_1 = A = UT_n$, e a subálgebra semissimples maximal de A_1 é o conjunto das matrizes diagonais, que possui dimensão $n > 1$. Absurdo.

Suponha agora que para qualquer H-graduação em UT_n, onde $|H| < |G|$, a igualdade $\dim B = 1$ é impossível.

Afirmação 1. *Todo elemento homogêneo de A é nilpotente ou invertível.*

De fato, seja $a \in A_g$ um elemento homogêneo que não é nilpotente. Observe que os graus dos elementos

$$a, a^2, \ldots, a^m \ \ldots \quad \text{são} \quad g,\ g^2,\ \ldots,\ g^m, \ldots \in G,$$

respectivamente. Se a ordem de g fosse infinita os elementos $g,\ g^2,\ \ldots,\ g^m, \ldots$ seriam distintos e, consequentemente, $a,\ a^2,\ \ldots,\ a^m, \ldots$ seriam linearmente independentes, contrariando o fato da dimensão de A ser finita. Portanto, g deve ter ordem finita k, e $a^k \in A_1$. Como a^k não é nilpotente temos que $a^k \notin J(A_1)$. Por hipótese, $A_1/J(A_1) \cong FE$, disso segue que $a^k - \lambda E$ é nilpotente para algum $\lambda \in F, \lambda \neq 0$. Logo, a^k é invertível, pois possui todas as entradas de sua diagonal principal iguais a λ, e portanto a também o é.

Afirmação 2. *Todo elemento homogêneo de A é invertível.*

Suponha que exista um elemento nilpotente $0 \neq a \in A_g$, para algum $g \in G$. O anulador à esquerda de a,

$$L = \{x \in A : xa = 0\},$$

é um subespaço graduado de A. De fato, se $y \in L$, então y pode ser decomposto na soma de componentes homogêneas

$$y = \sum_{h \in G} y_h, \quad y_h \in A_h.$$

Mas $ya = 0$ implica em

$$\sum_{h \in G} y_h a = 0.$$

Como $\deg y_h a = hg$, temos que cada componente homogênea $y_h a$ deve ser nula, logo $y_h \in L$. Portanto, L é um subespaço graduado de A.

Como todo elemento invertível não é um divisor de 0, segue da Afirmação 1 que todo elemento homogêneo de L é nilpotente. Em particular, todo elemento de L é uma matriz estritamente triangular superior. Mas $E_{n,n} \in L$, o que é uma contradição.

Nós provamos que $J(A)$ não contém elementos homogêneos não nulos. Em particular, de $J(A_1) \subseteq J(A)$ obtemos que $J(A_1) = 0$. Então A_1 é semissimples e, pela maximilidade de B, $A_1 = B = FE$.

Afirmação 3. *O suporte de A, denotado por Supp $A = \{g \in G : A_g \neq 0\}$, é um subgrupo de G.*

Se $g, h \in$ Supp A, então existem $a \in A_g$ e $b \in A_h$ não nulos. Pela afirmação anterior, os elementos a e b são invertíveis. Pelo Lema 1.22 segue que $b^{-1} \in A_{h^{-1}}$. Assim, $ab^{-1} \in A_{gh^{-1}}$ e $gh^{-1} \in$ Supp A como era o desejado.

Note que Supp A é um grupo finito, pois a dimensão de A é finita. Além disso, podemos supor que o suporte de A é igual a G, caso contrário basta usarmos a hipótese de indução na ordem de G.

Afirmação 4. $\dim A_g = 1$*, para qualquer* $g \in G$.

De fato, suponha que existam $x, y \in A_g$ linearmente independentes. Pela Afirmação 2 segue que x^{-1} existe, e pelo Lema 1.22 temos que $x^{-1} \in A_{g^{-1}}$. Mais ainda, $yx^{-1} \in A_1 = B$, isto é, $yx^{-1} = \lambda E$ para algum $0 \neq \lambda \in F$. Portanto

$$(x - \lambda^{-1}y)x^{-1} = xx^{-1} - \lambda^{-1}yx^{-1} = 1 - 1 = 0.$$

Como x^{-1} é invertível, a igualdade acima implica que $x - \lambda^{-1}y = 0$, o que contradiz a hipótese de que x e y são linearmente independentes.

Afirmação 5. *O grupo G não é abeliano.*

Suponha que G é abeliano e considere dois elementos homogêneos quaisquer $x \in A_g$ e $y \in A_h$. Como todo elemento homogêneo é invertível podemos considerar o produto $xyx^{-1}y^{-1} \in A_{ghg^{-1}h^{-1}}$, mas neste caso $A_{ghg^{-1}h^{-1}} = A_1$. Assim temos

$$xyx^{-1}y^{-1} = \lambda E, \text{ para algum } \lambda \in F.$$

Note que as entradas da diagonal principal no produto $xyx^{-1}y^{-1}$ devem ser iguais a 1, logo $xyx^{-1}y^{-1} = E$ e portanto $xy = yx$. Em particular a igualdade $xy = yx$ é válida para todos $x, y \in A$ e temos que A é comutativa. Absurdo. Logo, G não é abeliano.

Denote por G' o subgrupo comutador de G, isto é, o subgrupo gerado por todos os elementos da forma $g^{-1}h^{-1}gh$, onde $g, h \in G$. O quociente G/G' é um grupo abeliano e ainda, como G não é abeliano, $|G/G'| < |G|$. Nós vamos analisar a seguinte graduação:

$$A = \bigoplus_{\bar{t} \in G/G'} A_{\bar{t}} \text{ onde } A_{\bar{t}} = \bigoplus_{h \in \bar{t}} A_h.$$

Em particular, quando $t = 1$, temos $A_{\bar{1}} = \bigoplus_{h \in G'} A_h$.

Podemos nos perguntar se esta graduação se enquadra no Caso 1 ou 2 da demonstração. No Caso 2 não pode ser, pois chegaríamos pela Afirmação 5 que G/G' não é abeliano. Logo, a graduação se enquadra no Caso 1 e portanto existem n idempotentes ortogonais $e_1, \dots, e_n$ em $A_{\bar{1}}$.

Seja $h = a^{-1}b^{-1}ab$ um gerador de G' e considere $0 \neq x \in A_a$, e $0 \neq y \in A_b$, então $z = x^{-1}y^{-1}xy$ é um elemento não nulo de A_h. Como $\dim A_h = 1$, podemos dizer que $A_h = \text{span}\{z\}$. Em particular, $A_{\bar{1}}$ é gerado, como uma álgebra, por todos elementos $x^{-1}y^{-1}xy$ onde x, y são homogêneos.

Todo elemento $x^{-1}y^{-1}xy$ é uma matriz da forma $E + a$, onde $a \in J(A)$. Em particular, cada $e_1, \dots, e_n \in A_{\bar{1}}$ é uma combinação linear de produtos de elementos desta forma. Portanto

$$e_i = \lambda_i E + a_i, \quad \lambda_i \in F, \ \lambda_i \neq 0,$$

para todo i. Mas então, se $j \neq i$ o produto $e_i e_j \neq 0$, contrariando a ortogonalidade dos e_i's.

Essa contradição nos mostra que $\dim B \neq 1$, completando a demonstração. □

2.2 Descrição das graduações de $UT_n(F)$

Ao longo desta seção, F será um corpo qualquer, G um grupo qualquer e denotaremos $UT_n(F) = UT_n$. Agora que apresentamos as propriedades das graduações de UT_n, estamos em condições de descrevê-las, e este é o objetivo desta seção.

Lema 2.6. *Seja $UT_n = A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ uma álgebra graduada por um grupo G. Então a graduação é elementar se, e somente se, todas as matrizes unitárias $E_{i,j}$, $1 \le i \le j \le n$, são homogêneas.*

Demonstração. Se a graduação é elementar então, por definição, as matrizes $E_{i,j}$ são homogêneas.

Suponha agora que todas as matrizes unitárias sejam homogêneas. Primeiro construiremos indutivamente $g_1, \ldots, g_n \in G$ tais que

$$\deg E_{i,i+1} = g_i^{-1} g_{i+1}, \tag{2.5}$$

para todo $i = 1, \ldots, n-1$. Definindo $g_1 = 1$ (elemento identidade de G) e $g_2 = \deg E_{1,2}$, temos que (2.5) é válida para $i = 1$. Assuma a existência de $g_1, \ldots, g_k$ tais que (2.5) é válida para $i = 1, \ldots, k-1$. Se $\deg E_{k,k+1} = h$, defina $g_{k+1} = g_k h$. Então

$$\deg E_{k,k+1} = h = g_k^{-1} g_k h = g_k^{-1} g_{k+1},$$

e portanto (2.5) também é válida para $i = k$.

Agora, dado $E_{i,j}$ com $1 \le i \le j \le n$, temos

$$E_{i,j} = E_{i,i+1} E_{i+1,i+2} \cdots E_{j-1,j}$$

e portanto

$$\begin{aligned} \deg E_{i,j} = &\ (\deg E_{i,i+1})(\deg E_{i+1,i+2}) \cdots (\deg E_{j-1,j}) \\ = &\ \quad g_i^{-1} g_{i+1} g_{i+1}^{-1} g_{i+2} \cdots g_{j-1}^{-1} g_j = g_i^{-1} g_j. \end{aligned}$$

Logo, a graduação é elementar e isso completa a nossa demonstração. □

Lema 2.7. *Seja $UT_n = A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ uma álgebra graduada por um grupo G, onde G tem elemento identidade 1. Então a graduação é elementar se, e somente se, as matrizes unitárias $E_{i,i}$ pertencem a A_1, para todo $1 \le i \le n$.*

Demonstração. Se a graduação é elementar então, por definição, $\deg E_{i,i} = g_i^{-1} g_i = 1$ e portanto $E_{i,i} \in A_1$, para todo i.

Por outro lado suponha que todas matrizes unitárias $E_{i,i}$ pertencem a A_1. O conjunto $A_{i,j} = E_{i,i} A E_{j,j}$ é um subespaço graduado de A. De fato, se $a \in A_{i,j}$, então $a = E_{i,i} a' E_{j,j}$, para algum $a' \in A$. Decompondo a' na soma de componentes homogêneas temos

$$a' = \sum_{g\in G} a'_g,\ a'_g \in A_g, \text{ e}$$

$$a = E_{i,i} \left(\sum_{g\in G} a'_g \right) E_{j,j} = \sum_{g\in G} E_{i,i} a'_g E_{j,j}.$$

Como as matrizes unitárias $E_{i,i}$ pertencem a A_1, temos que $E_{i,i} a'_g E_{j,j} \in (A_{i,j} \bigcap A_g)$, como era o desejado.

Como $E_{i,j} \in A_{i,j}$ e $A_{i,j}$ possui dimensão igual a 1, temos que toda matriz $E_{i,j}$ é homogênea. O Lema 2.6 nos garante que a graduação é elementar. □

Teorema 2.8. *Seja $UT_n = A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ uma álgebra graduada por um grupo G. Então A é isomorfa, como uma álgebra G-graduada, a UT_n com uma G-graduação elementar.*

Demonstração. Pelo Lema 2.5, A contém n idempotentes ortogonais $e_1, \ldots, e_n$ em A_1. Seja c a matriz invertível do Lema 2.3. Note que

$$A' = c^{-1}Ac = \bigoplus_{g\in G} \underbrace{c^{-1}A_g c}_{A'_g}$$

é uma nova G-graduação de UT_n, cuja componente homogênea de grau g é $A'_g = c^{-1}A_g c$. Portanto,

$$\{E_{1,1}, \ldots, E_{n,n}\} = \{c^{-1}e_1c, \ldots, c^{-1}e_nc\} \subset A'_1$$

e, pelo Lema 2.7, A' tem graduação elementar. A função $\psi : A \to A'$ definida por

$$\psi(a) = c^{-1}ac$$

é um isomorfismo graduado. A demonstração está finalizada. □

Capítulo 3

Identidades graduadas de $UT_n(F)$

Neste capítulo descreveremos o conjunto de todas as identidades polinomiais G-graduadas da álgebra $UT_n(F) = UT_n$, sendo F um corpo infinito e G um grupo qualquer. Os resultados apresentados aqui foram extraídos do artigo [4], cujos autores são Di Vincenzo, Koshlukov e Valenti.

No capítulo anterior foi provado que toda G-graduação em UT_n é uma G-graduação elementar, a menos de um isomorfismo graduado. Trata-se do Teorema 2.8. De agora em diante, neste capítulo, assumiremos que UT_n é equipado com a G-graduação elementar induzida pela n-upla $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in G^n$. Assim,

$$\deg E_{i,j} = \varepsilon_i^{-1}\varepsilon_j.$$

Nesse contexto graduado, relembraremos alguns fatos: denote por X a união disjunta de conjuntos enumeráveis

$$X = \bigcup_{g \in G} X_g \quad \text{tais que} \quad X_g = \{x_1^g, x_2^g, x_3^g, \ldots\}.$$

A álgebra associativa livre $F\langle X\rangle$ tem uma graduação natural, como foi visto no Capítulo 1. Denotamos

$$Y = X_1 \;\text{ e }\; Z = \bigcup_{g\in G,\ g\neq 1} X_g.$$

Em alguns casos usaremos as letras y e z para denotarem elementos em Y e Z, respectivamente. Os elementos pertencentes a Y serão chamados de variáveis pares, e os elementos pertencentes a Z serão chamados de variáveis ímpares.

Denotaremos por $T_G(UT_n, \varepsilon)$ o T_G-ideal de $F\langle X\rangle$ formado por todas identidades polinomiais G-graduadas de UT_n, quando UT_n tem a G-graduação elementar induzida por ε.

Definição 3.1. *Seja $\tilde{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$ um elemento de G^m. Dizemos que $\tilde{\eta}$ é uma sequência boa, com respeito a G-graduação elementar de UT_n induzida por ε, se existe uma sequência de matrizes unitárias $r_1, \ldots, r_m$ no radical de Jacobson $J(UT_n)$ de UT_n, tal que o produto*

$$r_1 r_2 \cdots r_m \neq 0 \quad e \quad \deg r_i = \eta_i,$$

para todo i. Neste caso, dizemos que $\tilde{\eta}$ é ε-boa e, caso contrário, dizemos que $\tilde{\eta}$ é ε-ruim.

Exemplo 3.2. *Seja $G = \langle g\rangle \cong \mathbb{Z}_4$ um grupo cíclico de ordem 4. Considere a G-graduação elementar em UT_4 induzida por $\varepsilon = (1, g, g^2, g^3)$. Defina as sequências*

$$\tilde{\eta} = (g, g^2) \in G^2 \;e\; \tilde{\mu} = (g, g, 1) \in G^3.$$

A sequência $\tilde{\eta}$ é ε-boa, pois

$$\deg E_{1,2} = g, \ \deg E_{2,4} = g^2 \quad e \quad E_{1,2}E_{2,4} \neq 0.$$

A sequência $\tilde{\mu}$ é ε-ruim. De fato, a única sequência de 3 matrizes unitárias em $J(UT_4)$ com produto não nulo é $(E_{1,2}, E_{2,3}, E_{3,4})$, implicando em (g, g, g) ser a única sequência ε-boa em G^3.

Para qualquer sequência $\tilde{\eta} \in G^m$ defina o polinômio $f_{\tilde{\eta}}$ por

$$f_{\tilde{\eta}} = f_{\tilde{\eta},1} f_{\tilde{\eta},2} \cdots f_{\tilde{\eta},m},$$

onde

$$f_{\tilde{\eta},i} = [y_{2i-1}, y_{2i}] \text{ se } \eta_i = 1, \quad \text{e} \quad f_{\tilde{\eta},i} = x_i^{\eta_i} \text{ se } \eta_i \neq 1.$$

Exemplo 3.3. *Nas mesmas condições do Exemplo 3.2 temos*

$$f_{\tilde{\eta}} = f_{\tilde{\eta},1} f_{\tilde{\eta},2} = x_1^g x_2^{g^2}, \ e$$

$$f_{\tilde{\mu}} = f_{\tilde{\mu},1} f_{\tilde{\mu},2} f_{\tilde{\mu},3} = x_1^g x_2^g [y_5, y_6].$$

Proposição 3.4. *Se $\tilde{\eta} \in G^m$, então*

$$f_{\tilde{\eta}} \in T_G(UT_n, \varepsilon) \Leftrightarrow \tilde{\eta} \text{ é } \varepsilon\text{-ruim}.$$

Demonstração. Veja em [4, Proposition 2.2]. □

Não demonstraremos a proposição acima para evitar um excesso de notações que muitas vezes dificultam o entendimento de algo tão simples. O exemplo a seguir representa de uma maneira bem clara os passos da demonstração. Seja

$$\tilde{\eta} = (\eta_1, \eta_2, 1, \eta_4) \in G^m,$$

onde $\eta_1, \eta_2, \eta_4 \neq 1$. Provaremos que

$$f_{\tilde{\eta}}(x_1^{\eta_1}, x_2^{\eta_2}, y_5, y_6, x_4^{\eta_4}) = x_1^{\eta_1} x_2^{\eta_2} [y_5, y_6] x_4^{\eta_4}$$

é uma identidade graduada para UT_n se, e somente se, $\tilde{\eta}$ é ε-ruim.

Suponha que $\tilde{\eta}$ é ε-ruim. Se $f_{\tilde{\eta}}$ não é uma identidade graduada para UT_n, então existem matrizes r_1, r_2, r_5, r_6, r_4, com grau $\eta_1, \eta_2, 1, 1, \eta_4$, respectivamente, tais que a avaliação $f_{\tilde{\eta}}(r_1, r_2, r_5, r_6, r_4)$ é não nula. Como $f_{\tilde{\eta}}$ é multilinear podemos escolher r_i entre as matrizes unitárias. Note ainda que $r_1, r_2, [r_5, r_6], r_4 \in J(UT_n)$. Logo

$$r_1, r_2, r_3, r_4, \quad r_3 = [r_5, r_6]$$

é uma sequência de matrizes unitárias, no radical de Jacobson, tais que

$$r_1 r_2 r_3 r_4 \neq 0,$$

e possuem grau $\eta_1, \eta_2, 1, \eta_4$, respectivamente. Contradizendo a hipótese de que $\tilde{\eta}$ é ε-ruim.

Suponha agora que $f_{\tilde{\eta}}$ é uma identidade graduada. Se $\tilde{\eta}$ é ε-boa, então existe uma sequência de matrizes unitárias $(E_{a_1,a_2}, E_{a_2,a_3}, E_{a_3,a_4}, E_{a_4,a_5})$ com produto não nulo e grau $\eta_1, \eta_2, 1, \eta_4$, respectivamente. Portanto, a avaliação

$$f_{\tilde{\eta}}(E_{a_1,a_2}, E_{a_2,a_3}, E_{a_3,a_4}, E_{a_4,a_4}, E_{a_4,a_5}) = E_{a_1,a_2} E_{a_2,a_3} E_{a_3,a_4} E_{a_4,a_5}$$

é não nula, absurdo.

Teorema 3.5. *Seja G um grupo qualquer. Então:*

i) As graduações em UT_n induzidas pelas n-uplas $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ e $(1, \varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_1^{-1}\varepsilon_n)$ de G^n são iguais.

ii) Sejam $\varepsilon = (1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ e $\varepsilon' = (1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_n)$ em G^n. Então:

$$\varepsilon = \varepsilon' \Leftrightarrow T_G(UT_n, \varepsilon) = T_G(UT_n, \varepsilon').$$

iii) Sejam $\varepsilon = (1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ e $\varepsilon' = (1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_n)$ em G^n. Então: $\varepsilon = \varepsilon'$ se, e somente se, as correspondentes G-graduações elementares induzidas em UT_n são isomorfas.

Demonstração. Com respeito ao item i), basta mostrar que toda matriz unitária possui o mesmo grau em relação as duas n-uplas. Em relação a primeira n-upla temos que

$$\deg E_{i,j} = \varepsilon_i^{-1}\varepsilon_j.$$

Em relação a segunda n-upla,

$$\deg E_{i,j} = (\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_i)^{-1}(\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_j) = \varepsilon_i^{-1}\varepsilon_1\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_j = \varepsilon_i^{-1}\varepsilon_j.$$

Logo, as duas n-uplas $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ e $(1, \varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_1^{-1}\varepsilon_n)$ induzem a mesma graduação.

ii) A ida é imediata. Observe que no conjunto $J(UT_n)$ existe uma única sequência com $n-1$ matrizes unitárias cujo o produto é não nulo:

$$E_{1,2}, E_{2,3}, E_{3,4}, \dots, E_{n-1,n}.$$

Então para cada n-upla $g \in G^n$, a sequência $d(g) \in G^{n-1}$, que descreve os graus dos elementos da primeira diagonal de $J(UT_n)$, com respeito a graduação induzida por g, é a única sequência g-boa de comprimento $n-1$.

Pela Proposição 1.28, toda G graduação elementar em UT_n é unicamente determinada pelos graus homogêneos das matrizes $E_{1,i}, i = 1, \dots, n$. Mas em relação as graduações induzidas por ε e ε' temos

$$\deg E_{1,i} = \varepsilon_i \text{ e } \deg E_{1,i} = \varepsilon'_i,$$

respectivamente. Se $\varepsilon \neq \varepsilon'$, então $\varepsilon_j \neq \varepsilon'_j$ para algum j. Como

$$E_{1,j} = E_{1,2}E_{2,3}\cdots E_{j-1,j}, \text{ e}$$

$$\deg E_{1,j} = \deg E_{1,2} \deg E_{2,3} \cdots \deg E_{j-1,j},$$

as n-uplas ε e ε' determinam duas sequências diagonais $d(\varepsilon)$ e $d(\varepsilon')$ diferentes. Logo $d(\varepsilon)$ é ε-bom e ε'-ruim.

Portanto

$$f_{d(\varepsilon)} \in T_G(UT_n, \varepsilon') \text{ mas } f_{d(\varepsilon)} \notin T_G(UT_n, \varepsilon).$$

Absurdo.

iii) Se $\varepsilon = \varepsilon'$, então as graduações induzidas são iguais e portanto isomorfas.

Suponha que $\varepsilon \neq \varepsilon'$. Então, pelo item ii), $T_G(UT_n, \varepsilon) \neq T_G(UT_n, \varepsilon')$ e portanto, pelo Lema 1.33, as graduações induzidas por ε e ε' em UT_n não são isomorfas. □

Corolário 3.6. *Se G é um grupo finito, então existem exatamente $|G|^{n-1}$ graduações elementares de UT_n distintas. Mais ainda, elas não são isomorfas.*

Demonstração. Como em G^n existem $|G|^{n-1}$ elementos diferentes da forma $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ com $\varepsilon_1 = 1$, o resultado segue do teorema anterior. $\square$

Notação 3.7. *Dado $\varepsilon \in G^n$, seja $I(\varepsilon)$ o T_G-ideal da álgebra associativa livre G-graduada $F\langle X\rangle$ gerado pelos polinômios multilineares $f_{\tilde{\eta}}$, onde $\tilde{\eta}$ pertence ao conjunto de todas as sequências ε-ruins.*

Nosso objetivo agora é provar que $I(\varepsilon)$ é o T_G-ideal de todas as identidades polinomiais G-graduadas de UT_n com respeito a G-graduação elementar induzida por ε. Para isso, usaremos os polinômios Y-próprios definidos no Capítulo 1. Mas antes, faremos um comentário sobre outro modo de olhar para eles: Usando a igualdade

$$ab = [a, b] + ba,$$

e o Teorema de PBW pode ser mostrado que o espaço dos polinômios Y-próprios é gerado, como espaço vetorial, pelos elementos

$$c_1c_2 \cdots c_m,$$

onde cada c_i é um comutador de comprimento maior ou igual a 2 ou uma variável em Z.

Por exemplo, $[y_1, z_1]z_2[z_3, y_2]$ é Y-próprio pois

$$[y_1, z_1]z_2[z_3, y_2] = z_2[y_1, z_1][z_3, y_2] + [y_1, z_1, z_2][z_3, y_2].$$

Por uma abuso de notação, diremos que toda variável em Z é um comutador de comprimento 1. Neste caso, um polinômio é Y-próprio se é a combinação linear de produtos de comutadores.

Lema 3.8. *Todo polinômio Y-próprio é uma combinação linear de produtos de comutadores, onde em cada comutador aparece no máximo uma variável $z \in Z$. E ainda, se a variável z participa de um comutador c podemos assumir que z é a primeira variável deste, isto é,*

$$c = z \quad ou \quad c = [z, y_{i_1}, \ldots, y_{i_t}],$$

para alguns $y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_t} \in Y$.

Demonstração. Como todo polinômio Y-próprio é combinação linear de produtos de comutadores, é suficiente provar a validade do lema para comutadores.

Seja $c = [x_1, x_2, \ldots, x_k]$. Faremos a demonstração por indução em k. Para $k = 1$ a demonstração é imediata. Vamos supor que o lema é válido para $k - 1$ e mostrar que isso implica sua validade para k.

Primeiro relembramos que $[uv, w] = [u, w]v + u[v, w]$. Por um processo indutivo observamos que

$$[u_1u_2 \cdots u_r, w] = \sum_{i=1}^{r} u_1 \cdots u_{i-1}[u_i, w]u_{i+1} \cdots u_r. \tag{3.1}$$

Se $x_k \in Y$, então $c' = [x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}]$ é de comprimento $k-1$ e, pela hipótese de indução, é uma combinação linear de produtos de comutadores da forma descrita no enunciado deste lema. Aplicando a relação (3.1) para $w = x_k$ obtemos uma combinação linear de produtos de comutadores Y-próprios que satisfazem as propriedades desejadas.

Se $x_k \in Z$ temos

$$[x_1, x_2, \ldots, x_k] = [x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}]x_k - x_k[x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}] = c'x_k - x_kc'.$$

Usando a hipótese de indução em c' e o fato dos dois somandos serem o produto de polinômios Y-próprios temos o resultado desejado. $\square$

Chamaremos de comutadores normais os comutadores Y-próprios com as propriedades descritas no lema anterior. Então, todo polinômio Y-próprio é uma combinação linear de produtos de comutadores normais. Note que todo comutador normal c é da seguinte forma

$$c = [z, y_{i_1}, \ldots, y_{i_n}], n \geq 0 \quad \text{ou} \quad c = [y_{i_1}, \ldots, y_{i_n}], n \geq 2,$$

para certos $z \in Z$ e $y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_n} \in Y$. Mais ainda, se $c = [z, y_{i_1}, \ldots, y_{i_n}]$ então $\deg c = \deg z$; se $c = [y_{i_1}, \ldots, y_{i_n}]$ então $\deg c = \deg y_{i_1} = 1$.

A seguir faremos um exemplo para deixar o conceito mais claro.

Exemplo 3.9. *Considere o comutador*

$$[y_1, y_2, z_1, y_3, z_2].$$

Vamos mostrar que ele pode ser escrito como uma combinação linear de produtos de comutadores normais utilizando as mesmas técnicas da demonstração do lema anterior. Temos

$$\begin{aligned}
[y_1, y_2, z_1, y_3] &= [[y_1, y_2]z_1 - z_1[y_1, y_2], y_3] \\
&= [[y_1, y_2]z_1, y_3] - [z_1[y_1, y_2], y_3] \\
&= [y_1, y_2][z_1, y_3] + [[y_1, y_2], y_3]z_1 - z_1[[y_1, y_2], y_3] - [z_1, y_3][y_1, y_2].
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
[y_1, y_2, z_1, y_3, z_2] = \; & [y_1, y_2][z_1, y_3]z_2 + [y_1, y_2, y_3]z_1z_2 - z_1[y_1, y_2, y_3]z_2 - [z_1, y_3][y_1, y_2]z_2 \\
& - z_2[y_1, y_2][z_1, y_3] - z_2[y_1, y_2, y_3]z_1 + z_2z_1[y_1, y_2, y_3] + z_2[z_1, y_3][y_1, y_2].
\end{aligned}$$

Finalizamos assim o exemplo.

Notação 3.10. *Considere $c = c_1c_2 \cdots c_m$ o produto de comutadores normais. A sequência $\tilde{\eta}_c = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$ é definida por*

$$\eta_i = \deg c_i, \text{ para todo } i = 1, \ldots, m.$$

Lema 3.11. *Se a sequência $\tilde{\eta}_c$ é ε-ruim, então o produto $c = c_1c_2 \cdots c_m \in T_G(UT_n, \varepsilon)$.*

Demonstração. Observe que $c = c_1c_2 \cdots c_m$ pertence ao T_G-ideal de $F\langle X\rangle$ gerado pelo polinômio multilinear $f_{\tilde{\eta}_c}$, pois $\deg f_{\tilde{\eta}_c, i} = \deg c_i$. Neste caso o resultado é consequência direta da Proposição 3.4. □

Exemplo 3.12. *O polinômio*

$$c = [z_1, y_{i_1}, y_{i_2}][y_{i_3}, y_{i_4}, y_{i_5}, y_{i_6}]$$

é consequência de

$$f_{\tilde{\eta}_c} = z[y_3, y_4],$$

onde $\tilde{\eta}_c = (\deg z_1, \deg y_{i_3})$. Se $\tilde{\eta}_c$ é ε-ruim, pela Proposição 3.4, temos $f_{\tilde{\eta}_c} \in T_G(UT_n, \varepsilon)$ e consequentemente $c \in T_G(UT_n, \varepsilon)$.

Fixado $\varepsilon \in G^n$, defina $W(\varepsilon)$ como o espaço vetorial dos polinômios Y-próprios na álgebra relativamente livre $F\langle X\rangle / I(\varepsilon)$ (veja Notação 3.7). Com o objetivo de descrever uma base para $W(\varepsilon)$ definimos:

- Um comutador normal $[y_{j_1}, \ldots, y_{j_p}]$ é semi-standard se os índices j_i satisfazem
$$j_1 > j_2 \leq j_3 \leq j_4 \leq \ldots \leq j_p.$$

- Um comutador normal $[z_{j_1}, y_{j_2}, \ldots, y_{j_p}]$ é semi-standard se os índices $j_2, \ldots, j_p$ satisfazem
$$j_2 \leq j_3 \leq j_4 \leq \ldots \leq j_p.$$

Lema 3.13. *Na álgebra $F\langle X\rangle/I(\varepsilon)$ todo polinômio Y-próprio é uma combinação linear de produtos $c_1 \cdots c_m$, onde cada c_i é um comutador semi-standard e a sequência*
$$\tilde{\eta} = (\deg c_1, \ldots, \deg c_m)$$
é ε-boa.

Demonstração. Seja $c = c_1 \cdots c_m$ um produto de comutadores normais e considere a sequência relacionada $\tilde{\eta}_c = (\deg c_1, \ldots, \deg c_m)$. O polinômio c pertence ao T_G-ideal de $F\langle X\rangle$ gerado por $f_{\tilde{\eta}_c}$.

Faremos a demonstração por indução inversa em m. Seja $m \geq n$. O radical de Jacobson de UT_n é nilpotente com índice de nilpotência n, então qualquer sequência de comprimento $m \geq n$ é ε-ruim. Neste caso o polinômio $f_{\tilde{\eta}_c} \in I(\varepsilon)$, e portanto c também, isto é, c é nulo no quociente $F\langle X\rangle/I(\varepsilon)$. Assuma agora que o lema é válido para $m = k + 1$. Precisamos mostrar que o mesmo vale para $m = k$.

Afirmação 1. *Cada comutador normal c_i é uma soma*
$$\overline{c_i} + g_{c_i},$$
onde $\overline{c_i}$ é uma combinação linear de comutadores semi-standard e g_{c_i} é uma combinação linear do produto de dois comutadores normais.

Analisaremos dois casos: o primeiro onde c_i tem uma variável em Z e o segundo onde não tem.

Caso 1. $c_i = [z, y_{j_1}, \ldots, y_{j_q}]$.

Provaremos que, para toda permutação $\sigma \in S_q$ (o grupo de todas as permutações do conjunto $\{1, 2, \ldots, q\}$), existe g_σ, que é uma combinação linear do produto de dois comutadores normais, tal que
$$[z, y_{j_1}, \ldots, y_{j_q}] = [z, y_{j_{\sigma(1)}}, \ldots, y_{j_{\sigma(q)}}] + g_\sigma. \tag{3.2}$$

Como toda permutação é um produto de transposições da forma $(t, t+1)$, é suficiente provar (3.2) apenas para $\sigma = (t, t+1)$, onde $t \in \{1, 2, \ldots, q-1\}$.

Definindo $c_i{}' = [z, y_{j_1}, \ldots, y_{j_{t-1}}]$, obtemos $c_i = [c_i{}', y_{j_t}, y_{j_{t+1}}, \ldots, y_{j_q}]$. Pela identidade de Jacobi temos
$$[c_i{}', y_{j_t}, y_{j_{t+1}}, y_{j_{t+2}}, \ldots, y_{j_q}] + [y_{j_t}, y_{j_{t+1}}, c_i{}', y_{j_{t+2}}, \ldots, y_{j_q}] + [y_{j_{t+1}}, c_i{}', y_{j_t}, y_{j_{t+2}}, \ldots, y_{j_q}] = 0,$$
logo
$$c_i = [y_{j_{t+1}}, y_{j_t}, c_i{}', y_{j_{t+2}}, \ldots, y_{j_q}] + [c_i{}', y_{j_{t+1}}, y_{j_t}, y_{j_{t+2}}, \ldots, y_{j_q}].$$
Neste caso, $g_\sigma = [[y_{j_{t+1}}, y_{j_t}]c_i{}', y_{j_{t+2}}, \ldots, y_{j_q}] - [c_i{}'[y_{j_{t+1}}, y_{j_t}], y_{j_{t+2}}, \ldots, y_{j_q}]$. De fato, podemos verificar por cálculos diretos que g_σ satisfaz (3.2). Como o comutador induz uma derivação, por um processo de indução em r obtemos que $[ab, x_1, \ldots, x_r]$ é uma combinação linear de comutadores da forma $[a, \ldots][b, \ldots]$.

Caso 2. $c_i = [y_a, y_b, y_{j_1}, \ldots, y_{j_q}]$.

Repetindo o mesmo argumento do Caso 1 obtemos que, para toda permutação $\sigma \in S_q$, existe h_σ que é uma combinação linear do produto de dois comutadores normais, tal que

$$[y_a, y_b, y_{j_1}, \ldots, y_{j_q}] = [y_a, y_b, y_{j_{\sigma(1)}}, \ldots, y_{j_{\sigma(q)}}] + h_\sigma.$$

Dessa forma podemos escolher σ que ordene os índices j_i de forma crescente. Se entre os índices $a, b, j_{\sigma(1)}$ o menor índice for b concluímos esta parte da demonstração. Caso o menor índice seja a basta usar o fato de que $[y_a, y_b] = -[y_b, y_a]$. Se o menor índice for $j_{\sigma(1)}$ usamos a identidade de Jacobi em $[y_a, y_b, y_{j_{\sigma(1)}}, \ldots, y_{j_{\sigma(q)}}]$ e obtemos

$$\begin{aligned}
[y_a, y_b, y_{j_{\sigma(1)}}, \ldots, y_{j_{\sigma(q)}}] &= -[y_b, y_{j_{\sigma(1)}}, y_a, \ldots, y_{j_{\sigma(q)}}] - [y_{j_{\sigma(1)}}, y_a, y_b, \ldots, y_{j_{\sigma(q)}}] \\
&= -[y_b, y_{j_{\sigma(1)}}, y_a, \ldots, y_{j_{\sigma(q)}}] + [y_a, y_{j_{\sigma(1)}}, y_b, \ldots, y_{j_{\sigma(q)}}]
\end{aligned}$$

Se necessário repetimos novamente o argumento do Caso 1 para ordenar de forma crescente os índices $a, j_{\sigma(2)}, \ldots, j_{\sigma(q)}$ e os índices $b, j_{\sigma(2)}, \ldots, j_{\sigma(q)}$.

Finalizamos a demonstração da Afirmação 1.

Por fim, seja $c = c_1 \cdots c_k$ um produto de k comutadores normais. Pela Afirmação 1, existem polinômios $\overline{c_1}, \ldots, \overline{c_k}$ e $g_{c_1}, \ldots, g_{c_k}$ tais que

$$c_i = \overline{c_i} + g_{c_i},$$

$\overline{c_i}$ é combinação linear de comutadores semi-standard e g_{c_i} é combinação linear do produto de dois comutadores normais. Logo,

$$\begin{aligned}
c_1 c_2 \cdots c_k &= (\overline{c_1} + g_{c_1})(\overline{c_2} + g_{c_2}) \cdots (\overline{c_k} + g_{c_k}) \\
&= \overline{c_1} \cdots \overline{c_k} + f,
\end{aligned}$$

onde f é combinação linear do produto de pelo menos $k+1$ comutadores normais.

Aplicando a hipótese de indução em f, finalizamos a demonstração. □

Vamos agora apresentar dois lemas que serão utilizados na demonstração do resultado principal deste capítulo. Para isso, seja $\Omega = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots\}$ um conjunto de variáveis comutativas e $F[\Omega]$ a álgebra associativa comutativa livre, livremente gerada por Ω sobre F.

Lema 3.14. *Nenhum polinômio não nulo $p \in F[\Omega]$ é uma identidade para a álgebra F, onde F é um corpo infinito.*

Demonstração. Se F é um corpo infinito, então o T-ideal das suas identidades polinomiais é gerado por seus elementos multi-homogêneos. Como Ω é um conjunto de variáveis comutativas um polinômio $p \in F[\Omega]$ é da forma

$$p(\xi_1, \ldots, \xi_r) = \sum_a \alpha_a \xi_1^{a_1} \xi_2^{a_2} \cdots \xi_r^{a_r},$$

onde $\alpha_a \in F$, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_r)$ e $a_i \geq 0$ para todo i.

As componentes multi-homogêneas de p são os monômios $p_a = \alpha_a \xi_1^{a_1} \cdots \xi_r^{a_r}$. Suponha que p é uma identidade para F. Substituindo

$$\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_r = 1$$

em p_a, obtemos

$$\alpha_a 1^{a_1} \cdots 1^{a_r} = 0$$

isto é, $\alpha_a = 0$ para todo a. E portanto o polinômio p é nulo. □

Lema 3.15. *Se $f = f(x_1^{g_1}, \ldots, x_m^{g_m}) \in T_G(UT_n(F), \varepsilon)$, então $f \in T_G(UT_n(F[\Omega]), \varepsilon)$.*

Demonstração. Suponha que $f \notin T_G(UT_n(F[\Omega]), \varepsilon)$. Então existem $a_1, \ldots, a_m \in UT_n(F[\Omega])$, onde

$$\deg a_l = g_l, \quad a_l = (a_{i,j}^l)_{i,j}, \quad a_{i,j}^l = a_{i,j}^l(\xi_1, \ldots, \xi_s) \in F[\Omega],$$

tais que

$$f(a_1, \ldots, a_m) \neq 0.$$

Assim,

$$f(a_1, \ldots, a_m) = (f_{i,j})_{i,j}, \text{ com } f_{i,j} = f_{i,j}(\xi_1, \ldots, \xi_s) \in F[\Omega],$$

e $f_{k,t} \neq 0$ para algum k, t. Pelo Lema 3.14, existem $\beta_1, \ldots, \beta_s \in F$ tais que $f_{k,t}(\beta_1, \ldots, \beta_s) \neq 0$. Como $f \in T_G(UT_n(F), \varepsilon)$ temos

$$\begin{aligned} 0 &= f((a_{i,j}^1(\beta_1, \ldots, \beta_s))_{i,j}, \ldots, (a_{i,j}^m(\beta_1, \ldots, \beta_s))_{i,j}) \\ &= (f_{i,j}(\beta_1, \ldots, \beta_s))_{i,j}. \end{aligned}$$

Implicando que $f_{i,j}(\beta_1, \ldots, \beta_s) = 0$ para todo i, j, que é uma contradição. □

Agora provaremos o resultado principal deste capítulo.

Teorema 3.16. *Seja G um grupo e $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in G^n$. Considere a graduação elementar induzida por ε em UT_n. Então:*

a) *O T_G-ideal $T_G(UT_n, \varepsilon)$ das identidades polinomiais G-graduadas de UT_n, com respeito a graduação induzida por ε, é gerado pelos polinômios multilineares $f_{\tilde{\eta}}$, onde $\tilde{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$ pertence ao conjunto de todas as sequências ε-ruins e $m \leq n$.*

b) *Uma base para os polinômios Y-próprios na álgebra relativamente livre $F\langle X\rangle/T_G(UT_n, \varepsilon)$ consiste do elemento 1 e dos polinômios $c = c_1 \cdots c_m$, onde cada c_i é um comutador semi-standard e a sequência $\tilde{\eta}_c = (\deg c_1, \deg c_2, \ldots, \deg c_m)$ é ε-boa.*

Demonstração. Seja $I(\varepsilon)$ o T_G-ideal de $F\langle X\rangle$ gerado pelos polinômios multilineares $f_{\tilde{\eta}}$, onde $\tilde{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$ pertence ao conjunto de todas as sequências ε-ruins, conforme a Notação 3.7. Observe que se $m \geq n$ então $\tilde{\eta}$ e sua subsequência $\eta' = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ são ε-ruins e o polinômio $f_{\tilde{\eta}}$ pertence ao ideal gerado por $f_{\eta'}$. Portanto $I(\varepsilon)$ é gerado por seus polinômios multilineares $f_{\tilde{\gamma}}$ correspondentes a sequências $\tilde{\gamma}$ que são ε-ruins e tem comprimento $m \leq n$.

Pela Proposição 3.4, $I(\varepsilon)$ está contido em $T_G(UT_n, \varepsilon)$, e pelo Lema 3.13 o espaço vetorial dos polinômios Y-próprios é gerado, módulo $I(\varepsilon)$, por 1 e pelos produtos $c = c_1 \cdots c_m$ de comutadores semi-standards, onde a sequência $\tilde{\eta}_c = (\deg c_1, \deg c_2, \ldots, \deg c_m)$ é ε-boa e $m \leq n-1$. Portanto, pela Proposição 1.37 e pelo Lema 1.38, resta apenas mostrar que estes polinômios são linearmente independentes módulo $T_G(UT_n, \varepsilon)$. Seja

$$f = \alpha 1 + \sum \alpha_c c,$$

uma combinação linear destes polinômios, onde $\alpha, \alpha_c \in F$, para todo c, e assuma que $f \in T_G(UT_n, \varepsilon)$. Nós precisamos provar que todos os coeficientes são nulos. Nossa prova será por indução em n. Seja $n = 1$. A álgebra UT_1 é igual ao corpo F e portanto $f = \alpha 1 \in T_G(UT_1, \varepsilon)$, implicando que $\alpha = 0$.

Agora provaremos que o resultado é válido para $n \geq 2$. Seja R_j a subálgebra G-graduada de UT_n que consiste das matrizes que possuem entradas nulas na linha j e coluna j

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,j-1} & 0 & a_{2,j+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{j-1,j-1} & 0 & a_{j-1,j+1} & \dots & a_{j-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{j+1,j+1} & \dots & a_{j+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Então R_j é isomorfa a álgebra graduada UT_{n-1} com a graduação elementar induzida por

$$\tilde{\varepsilon_j} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{j-1}, \varepsilon_{j+1}, \dots, \varepsilon_n).$$

Assim, para cada $j = 1, \dots, n$, nós obtemos

$$f \in T_G(UT_n, \varepsilon) \subseteq T_G(R_j, \varepsilon) = T_G(UT_{n-1}, \tilde{\varepsilon_j}). \tag{3.3}$$

Ver o Lema 1.32.

Seja $c = c_1 \cdots c_m$ um somando de f, e assuma que $m \leq n-2$. Como a sequência associada $\tilde{\eta}_c = (\deg c_1, \deg c_2, \dots, \deg c_m)$ é ε-boa, existe uma sequência de m matrizes unitárias $(E_{a_1,a_2}, E_{a_2,a_3}, \dots, E_{a_m,a_{m+1}})$ pertencentes a $J(UT_n)$, tal que o grau homogêneo de $E_{a_i,a_{i+1}}$ é $\deg c_i$. Como $m+1 \leq n-1$, todas essas matrizes estão na subálgebra G-graduada R_j, para algum j. Então, $\tilde{\eta}_c$ é uma boa sequência com respeito a graduação induzida por $\tilde{\varepsilon_j}$ em UT_{n-1}.

Considere

$$f_j = \sum \alpha_c c$$

a componente de f dada pelos somandos $\alpha_c c$, tais que as sequências associadas $\tilde{\eta}_c$ são $\tilde{\varepsilon_j}$-boas. Pelo Lema 3.11 e a inclusão (3.3) seque que

$$\alpha 1 + f_j \in T_G(UT_{n-1}, \tilde{\varepsilon_j}).$$

Pela hipótese de indução temos $\alpha = \alpha_c = 0$ para cada c tal que $\tilde{\eta}_c$ é $\tilde{\varepsilon_j}$-boa. Repetindo esse processo para todo j obtemos que $\alpha_c = 0$ para todo somando c de comprimento $m \leq n-2$.

Então podemos considerar f como uma combinação linear de produtos $c = c_1 \cdots c_{n-1}$ de comprimento $n-1$. Note que, como na prova do Teorema 3.5, existe uma única sequência ε-boa de comprimento $n-1$ em UT_n:

$$(\deg E_{1,2}, \deg E_{2,3}, \dots, \deg E_{n-1,n}).$$

Assim, no produto $c = c_1 \cdots c_{n-1}$, temos que $\deg c_i = \deg E_{i,i+1} = {\varepsilon_i}^{-1}\varepsilon_{i+1}$.

Como F é infinito podemos assumir que $f = f(x_1, \dots, x_r)$ é multi-homogêneo. E ainda, se Ω é um conjunto de variáveis comutativas então, pelo Lema 3.15, f é uma identidade polinomial graduada de $UT_n(F[\Omega])$, com respeito a extensão natural da graduação ε.

Estabeleça uma relação de ordem em X e para cada somando $\alpha_{c'}c' = \alpha_{c'}c_1 \cdots c_{n-1}$ não nulo de f considere o monômio

$$m_{c'} = x_{j_1} \cdots x_{j_{n-1}} \in F\langle X \rangle,$$

onde x_{j_t} é a variável na primeira posição do comutador c_t. Então x_{j_t} é par ou ímpar de acordo com o grau de c_t. Suponha que f possua coeficientes não nulos, então existe um monômio maximal $m = x_{i_1} \cdots x_{i_{n-1}}$ no conjunto $M_f = \{m_{c'} \mid \alpha_{c'}c' \text{ é um somando não nulo de } f\}$ com respeito a ordem dicionário e $\alpha_c c = \alpha_c[x_{i_1}, \ldots] \cdots [x_{i_{n-1}}, \ldots]$ é o somando de f correspondente.

Nós dizemos que $t, s \in \{1, \ldots, n-1\}$ são equivalentes se $x_{i_t} = x_{i_s}$, e denotamos por Γ_t a classe de equivalência de t.

Considere os elementos homogêneos $\overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_r$ de $UT_n(F[\Omega])$ definidos como:

- Se x_{i_t} é uma variável par, então

$$\overline{\xi}_{i_t} = \sum_{j \in \Gamma_t} E_{j,j+1} + \sum_{s=1}^{n} \xi_{i_t,s} E_{s,s},$$

  onde $\xi_{i_t,s} \in \Omega$ para todo i_t, s.

- Se x_{i_t} é uma variável ímpar, então

$$\overline{\xi}_{i_t} = \sum_{j \in \Gamma_t} E_{j,j+1}.$$

- Se $l \neq \{i_1, \ldots, i_{n-1}\}$, então

$$\overline{\xi}_l = \sum_{s=1}^{n} \xi_{l,s} E_{s,s},$$

  onde $\xi_{l,s} \in \Omega$ para todo l, s.

Vamos calcular $f(\overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_r)$. Como em cada somando não nulo $\alpha_{c'}c'$ de f, c' tem comprimento $n-1$ e existe uma única sequência ε-boa deste comprimento em UT_n, nós precisamos nos preocupar apenas com os somandos $\alpha_{c'}c'$, $c' = c'_1 \cdots c'_{n-1}$, que quando avaliados em $\overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_r$ possuem um elemento da forma $g_i E_{i,i+1}$, $g_i \in F[\Omega]$, como um dos somandos de $c'_i(\overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_r)$, para todo i, pois os outros somandos de f se anularão nesta avaliação.

Note que estes somandos que devemos nos preocupar são os somandos associados ao monômio maximal $m = x_{i_1} \cdots x_{i_{n-1}}$.

Seja

$$\alpha_{c'}c' = \alpha_{c'}c'_1 \cdots c'_{n-1} = \alpha_{c'}[x_{i_1}, x_{a_2}, \ldots, x_{a_p}][x_{i_2}, x_{b_2}, \ldots, x_{b_q}] \cdots [x_{i_{n-1}}, x_{d_2}, \ldots, x_{d_s}]$$

um somando não nulo de f associado a $m = x_{i_1} \cdots x_{i_{n-1}}$. Temos

$$c'_j(\overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_r) = g_j E_{j,j+1} + h_j,$$

onde $h_j \in UT_n(F[\Omega])$ é uma matriz com entrada $(j, j+1)$ nula, e por consequência será anulada no produto $c'_1 \cdots c'_{n-1}$.

Logo, precisamos calcular g_j, para $j = 1, \ldots, n-1$. Temos para $j = 1$,

$$c'_1(\overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_r) = [\overline{\xi}_{i_1}, \overline{\xi}_{a_2}, \ldots, \overline{\xi}_{a_p}].$$

Calculando o comutador $[\overline{\xi}_{i_1}, \overline{\xi}_{a_2}]$ obtemos

$$[\overline{\xi}_{i_1}, \overline{\xi}_{a_2}] = \xi_{a_2,2}E_{1,2} - \xi_{a_2,1}E_{1,2} + h_{1,2} = (\xi_{a_2,2} - \xi_{a_2,1})E_{1,2} + h_{1,2},$$

onde $h_{1,2}$ é combinação linear de elementos $E_{i,j} \neq E_{1,2}$. Calculando o comutador $[\overline{\xi}_{i_1}, \overline{\xi}_{a_2}, \overline{\xi}_{a_3}]$ obtemos

$$[\overline{\xi}_{i_1}, \overline{\xi}_{a_2}, \overline{\xi}_{a_3}] = (\xi_{a_2,2} - \xi_{a_2,1})(\xi_{a_3,2} - \xi_{a_3,1})E_{1,2} + h_{1,3},$$

onde $h_{1,3}$ é combinação linear de elementos $E_{i,j} \neq E_{1,2}$.

Indutivamente percebemos que

$$[\overline{\xi}_{i_1}, \overline{\xi}_{a_2}, \ldots, \overline{\xi}_{a_p}] = (\xi_{a_2,2} - \xi_{a_2,1})(\xi_{a_3,2} - \xi_{a_3,1}) \cdots (\xi_{a_p,2} - \xi_{a_p,1})E_{1,2} + h_1,$$

onde h_1 é combinação linear de elementos $E_{i,j} \neq E_{1,2}$.

Repetindo o processo para os outros comutadores e fazendo o produto $c'_1 \cdots c'_{n-1}$, concluímos que

$$f(\overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_r) = \sum_{c' \in C} \alpha_{c'} g_{c'} E_{1,n},$$

onde C é o conjunto dos c' associados ao monômio maximal m fixado anteriormente, e

$$g_{c'} = (\xi_{a_2,2} - \xi_{a_2,1})(\xi_{a_3,2} - \xi_{a_3,1}) \cdots (\xi_{a_p,2} - \xi_{a_p,1}) \cdots (\xi_{d_2,n} - \xi_{d_2,n-1})(\xi_{d_3,n} - \xi_{d_3,n-1}) \cdots (\xi_{d_s,n} - \xi_{d_s,n-1}).$$

Denote por C_1 o conjunto

$$C_1 = \{d' = d'_1 \cdots d'_{n-1} \in C \mid \text{o comprimento do comutador } d'_1 \text{ é maximal}\}.$$

Indutivamente denote

$$C_k = \{d' = d'_1 \cdots d'_{n-1} \in C_{k-1} \mid \text{o comprimento do comutador } d'_k \text{ é maximal}\}.$$

Fixado c' em C_{n-1}, note que o coeficiente do monômio

$$\xi_{a_2,1}\xi_{a_3,1} \cdots \xi_{a_p,1}\xi_{b_2,2}\xi_{b_3,2} \cdots \xi_{b_q,2} \cdots \xi_{d_2,n-1}\xi_{d_3,n-1} \cdots \xi_{d_s,n-1}$$

em $f(\overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_r)$ é exatamente $\alpha_{c'}$. Logo $f(\overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_r) \neq 0$, absurdo. E a demonstração está completa. □

Proposição 3.17. *Seja $d(\varepsilon) = (\eta_1, \ldots, \eta_{n-1})$ a sequência diagonal associada a graduação induzida por ε. Como mencionado anteriormente, essa sequência descreve os graus dos elementos da primeira diagonal de $J(UT_n)$, ou seja,*

$$\eta_i = \deg E_{i,i+1} = \varepsilon_i^{-1}\varepsilon_{i+1}.$$

Seja $\tilde{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m) \in G^m$ uma sequência de comprimento m. Então $\tilde{\gamma}$ é uma sequência ε-boa se, e somente se, existem $m+1$ inteiros positivos $1 \leq t_1 < \cdots < t_{m+1} \leq n$ tais que

$$\gamma_i = \eta_{t_i}\eta_{t_i+1} \cdots \eta_{t_{i+1}-1}, \tag{3.4}$$

para todo i.

Demonstração. Por definição, a sequência $\tilde{\gamma}$ é ε-boa se, e somente se, existem m matrizes unitárias $E_{t_1,t_2}, E_{t_2,t_3}, \ldots, E_{t_m,t_{m+1}}$ em $J(UT_n)$ tais que $\gamma_i = \deg E_{t_i,t_{i+1}}$, para todo i. Mas

$$E_{t_i,t_{i+1}} = E_{t_i,t_i+1}E_{t_i+1,t_i+2} \cdots E_{t_{i+1}-1,t_{i+1}}.$$

Portanto $\gamma_i = \deg E_{t_i,t_{i+1}} = \eta_{t_i}\eta_{t_i+1} \cdots \eta_{t_{i+1}-1}$. □

Exemplo 3.18. *Seja $G = \mathbb{Z}_4$ um grupo cíclico de ordem 4. Considere a G-graduação induzida por $\varepsilon = (\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3})$ em UT_4. Note que as matrizes de UT_4*

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{2,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{2,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ e \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{1,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

são homogêneas, na graduação induzida por ε, com grau $\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}$, respectivamente. De forma mais geral temos que:

$$\deg E_{i,j} = \overline{j-i} \text{ para todo } i \leq j.$$

Teorema 3.19. *Seja $G = \mathbb{Z}_n$ um grupo cíclico de ordem n. Considere a G-graduação elementar de UT_n induzida por $\varepsilon = (\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{n-1})$. Então $T_{\mathbb{Z}_n}(UT_n, \varepsilon)$ é gerado, como um $T_{\mathbb{Z}_n}$-ideal, pelos polinômios*

$$[x_1^{(\overline{0})}, x_2^{(\overline{0})}], \quad x_3^{(\overline{i})} x_4^{(\overline{j})}, \quad 1 \leq i, j \leq n-1, \quad n \leq i+j.$$

Demonstração. Pelo Teorema 3.16 temos que $T_{\mathbb{Z}_n}(UT_n, \varepsilon)$ é gerado pelos polinômios multilineares $f_{\tilde{\gamma}}$, onde $\tilde{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ pertence ao conjunto de todas as sequências ε-ruins e $m \leq n$.

A sequência diagonal $d(\varepsilon)$ neste caso é a sequência $(\overline{1}, \overline{1}, \ldots, \overline{1})$ de comprimento $n-1$. Pela proposição anterior a sequência $\tilde{\gamma}$ de comprimento $m \leq n$ é ε-ruim se não existem inteiros positivos $1 \leq t_1 < \cdots < t_{m+1} \leq n$ que satisfazem

$$\gamma_i = \eta_{t_i} + \eta_{t_i+1} + \cdots + \eta_{t_{i+1}-1} = \underbrace{\overline{1} + \cdots + \overline{1}}_{t_{i+1}-t_i \text{ fatores}}, \tag{3.5}$$

para todo i, ou seja, se um dos dois casos ocorrem:

a) $\tilde{\gamma}$ possui pelo menos uma entrada igual a $\overline{0}$, ou seja, $\gamma_i = \overline{0}$ para algum i. De fato, escrevendo $\gamma_i = \overline{0}$ como soma de elementos da sequência $d(\varepsilon) = (\overline{1}, \ldots, \overline{1})$ temos

$$\overline{0} = \gamma_i = \overline{1} + \overline{1} + \cdots + \overline{1}.$$

Como G é cíclico e de ordem n, o elemento $\overline{1}$ aparece na soma acima exatamente n vezes. Consequentemente, por (3.5), $\tilde{\gamma}$ é ε-ruim. Neste caso, temos que o polinômio $f_{\tilde{\gamma}}$ é consequência de $[x_1^{(\overline{0})}, x_2^{(\overline{0})}]$.

b) $\tilde{\gamma} = (\overline{i_1}, \overline{i_2}, \ldots, \overline{i_m}) \in G^m$, onde $1 \leq i_t \leq n-1$ e $i_1 + i_2 + \cdots + i_m \geq n$. Neste caso o polinômio $f_{\tilde{\gamma}} = x_{k_1}^{(\overline{i_1})} x_{k_2}^{(\overline{i_2})} \cdots x_{k_m}^{(\overline{i_m})}$ é consequência de $x_1^{(\overline{r})} x_2^{(\overline{s})}$, onde $r = i_1 + i_2 + \cdots + i_t$, $s = i_{t+1}$ e $t+1 \leq m$ é o primeiro índice em que $i_1 + i_2 + \cdots + i_{t+1} \geq n$. ☐

Com poucas modificações na demonstração do Teorema 3.19 podemos concluir também o teorema abaixo:

Teorema 3.20. *Seja $G = \mathbb{Z}$. Considere a G-graduação elementar de UT_n induzida por $\varepsilon = (0, 1, 2, \ldots, n-1)$. Então $T_{\mathbb{Z}}(UT_n, \varepsilon)$ é gerado, como um $T_{\mathbb{Z}}$-ideal, pelos polinômios*

$$[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}], \quad x_3^{(i)},$$

tal que $i \leq -1$ ou $i \geq n$.

Demonstração. A sequência diagonal $d(\varepsilon)$ neste caso é a sequência $(1, 1, \dots, 1)$ de comprimento $n - 1$. Seguindo os mesmos passos da demonstração do teorema anterior teríamos também dois casos para estudar:

- Na análise do caso a), quando pelo menos uma entrada de $\tilde{\gamma}$ é igual a 0, a conclusão de que $\tilde{\gamma}$ é ε-ruim decorre do fato de que

  $$1 + 1 + \cdots + 1 \neq 0$$

  sempre.

- Na análise do caso b), onde $\tilde{\gamma} = (i_1, i_2, \dots, i_m) \in G^m$ não possui entradas iguais a 0, não temos a restrição $1 \leq i_t \leq n - 1$. Note que os polinômios da forma

  $$f = x_1^{(i)}, \tag{3.6}$$

  onde $i \geq n$ ou $i \leq -1$, são identidades G-graduadas, e os polinômios $x_1^{(r)} x_2^{(s)}$, onde $n \leq r + s$, são consequências de (3.6).

$\square$

Capítulo 4

Graduações elementares na álgebra de Lie $UT_n(F)^{(-)}$

Nos capítulos anteriores nós descrevemos as graduações da álgebra associativa $UT_n(F)$, onde F é um corpo qualquer. Enquanto no caso associativo todas as graduações são elementares, a menos de um isomorfismo graduado, na álgebra $UT_n(F)^{(-)}$ aparecem graduações não elementares (veja [12]).

Ao estudar as identidades polinomiais da álgebra de Lie $UT_n(F)^{(-)}$ estaremos estudando polinômios na álgebra de Lie livre $L\langle X\rangle$. Por este motivo, a primeira seção deste capítulo relembra esse conceito, antes apenas citado, de forma um pouco mais detalhada.

O objetivo da segunda seção é estudar as graduações elementares da álgebra de Lie $UT_n(F)^{(-)}$ e classificá-las. Na terceira seção consideraremos a $\mathbb{Z}_n$-graduação canônica nesta álgebra e descreveremos o $T_{\mathbb{Z}_n}$-ideal das identidades polinomiais $\mathbb{Z}_n$-graduadas correspondente, quando o corpo F tem característica 0. Os resultados apresentados aqui foram extraídos de [11], cujos autores são Koshlukov e Yukihide.

4.1 A álgebra de Lie livre $L\langle X\rangle$

Seja X um conjunto e denote por $L\langle X\rangle$ a álgebra de Lie livre, livremente gerada por X. Como vimos no Teorema de Witt, $L\langle X\rangle$ é isomorfa a subálgebra de Lie de $F\langle X\rangle^{(-)}$ gerada por X.

Usando a identidade de Jacobi, pode ser mostrado que $L\langle X\rangle$ é o espaço vetorial gerado por

$$x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots \in X \text{ e por } [x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}],\ x_{i_l} \in X,\ n = 2, 3, \ldots.$$

Considere um conjunto X que seja uma união disjunta de conjuntos enumeráveis

$$X = \bigcup_{g\in G} X_g$$

tais que

$$X_g = \{x_1^g, x_2^g, x_3^g, \ldots\},\ \text{onde } g \in G.$$

A álgebra de Lie livre $L\langle X\rangle$, livremente gerada por X, possui uma G-graduação natural induzida pela G-graduação da álgebra associativa G-graduada livre $F\langle X\rangle$ (ver Capítulo 1, Seção 1.3).

Exemplo 4.1. *Considere o polinômio $f \in L\langle X\rangle$ definido por*

$$f(x_1^{g_1}, x_2^{g_2}, x_3^{g_3}) = [x_1^{g_1}, x_3^{g_3}, x_3^{g_3}, x_2^{g_2}].$$

Então

$$\deg f(x_1^{g_1}, x_2^{g_2}, x_3^{g_3}) = g_1 g_3 g_3 g_2.$$

Com tal graduação, dizemos que $L\langle X\rangle$ é uma álgebra de Lie G-graduada livre, livremente gerada por X. Note que se $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ é uma álgebra de Lie G-graduada e $\psi : X \to A$ é uma função tal que $\psi(x_i^g) \in A_g$, para todo i e g, então ψ pode ser estendida para um homomorfismo graduado $\overline{\psi} : L\langle X\rangle \to A$ de álgebras de Lie.

Definição 4.2. *Seja $f = f(x_{i_1}^{g_1}, x_{i_2}^{g_2}, \ldots, x_{i_r}^{g_r}) \in L\langle X\rangle$ um polinômio, e $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ uma álgebra de Lie G-graduada. Então f é uma identidade polinomial G-graduada (ou apenas identidade graduada) para A se*

$$f(a_{i_1}^{g_1}, a_{i_2}^{g_2}, \ldots, a_{i_r}^{g_r}) = 0,$$

para todos $a_{i_1}^{g_1} \in A_{g_1}, \ldots, a_{i_r}^{g_r} \in A_{g_r}$. Denotamos por $T_G(A)$ o conjunto de todas as identidades polinomiais G-graduadas de A em $L\langle X\rangle$.

Observe que na definição, estamos denotando um produto numa álgebra de Lie pela notação de colchete também.

Uma verificação direta mostra que o conjunto $T_G(A)$ é um ideal de $L\langle X\rangle$. Mais ainda, $T_G(A)$ é fechado por todos os endomorfismos G-graduados de $L\langle X\rangle$. Ideais com esta propriedade são chamados T-ideais G-graduados, ou T_G-ideais, de $L\langle X\rangle$.

Se S é um subconjunto de $L\langle X\rangle$, definimos o T_G-ideal gerado por S como o menor T_G-ideal de $L\langle X\rangle$ que contém S, e escrevemos $\langle S\rangle^{T_G}$. Note que $\langle S\rangle^{T_G}$ é a interseção de todos os T_G-ideais que contêm S.

4.2 Graduações elementares em $UT_n(F)^{(-)}$

Nesta seção, F denotará um corpo infinito e G será inicialmente um grupo qualquer. Denotaremos $UT_n(F)$ por UT_n e $UT_n(F)^{(-)}$ por $UT_n{}^{(-)}$. Relembramos que $UT_n{}^{(-)}$ é o espaço vetorial UT_n com multiplicação [,] definida por

$$[A, B] = AB - BA,$$

onde $A, B \in UT_n$. Primeiramente definiremos o conceito de graduação elementar em $UT_n{}^{(-)}$.

Definição 4.3. *Uma G-graduação em $UT_n{}^{(-)}$ é dita elementar se existe uma sequência $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ em G^n tal que cada matriz unitária $E_{i,j} \in UT_n{}^{(-)}$ é homogênea e*

$$\deg E_{i,j} = \varepsilon_i^{-1}\varepsilon_j.$$

O Teorema 3.5 nos diz que no caso associativo as graduações elementares de UT_n estão em correspondência biunívoca com o conjunto G^{n-1}. Mostraremos que o mesmo não acontece em $UT_n{}^{(-)}$.

Lema 4.4. *Considere a G-graduação elementar induzida por $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ em $UT_n{}^{(-)}$. Então:*

a) $\deg E_{i,i} = 1$, *para todo i.*

b) *A G-graduação elementar induzida por* $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ *em* ${UT_n}^{(-)}$ *é unicamente determinada pela sequência*

$$d(\varepsilon) = (\deg E_{1,2}, \deg E_{2,3}, \ldots, \deg E_{n-1,n}).$$

c) *Os elementos da sequência* $d(\varepsilon)$ *acima geram um subgrupo abeliano de* G *que contém o suporte, Supp* ${UT_n}^{(-)}$*, da graduação.*

Demonstração. a) Pela definição de graduação elementar temos que

$$\deg E_{i,i} = \varepsilon_i^{-1}\varepsilon_i = 1, \text{ para todo } i.$$

b) Como

$$E_{i,j} = [E_{i,i+1}, E_{i+1,i+2}, \ldots, E_{j-1,j}], \text{ então}$$
$$\deg E_{i,j} = \deg E_{i,i+1} \deg E_{i+1,i+2} \cdots \deg E_{j-1,j},$$

é unicamente determinado.

c) Agora, considere o subgrupo H de G gerado pelos elementos da sequência $d(\varepsilon)$. Se $g \in (\text{Supp } {UT_n}^{(-)})$, então $g = 1$ ou existe $E_{i,j}$, $i < j$, tal que $\deg E_{i,j} = g$. Mas

$$E_{i,j} = [E_{i,i+1}, E_{i+1,i+2}, \ldots, E_{j-1,j}] \text{ e}$$

$$g = \deg E_{i,j} = \deg E_{i,i+1} \deg E_{i+1,i+2} \cdots \deg E_{j-1,j} \in H.$$

Portanto, Supp ${UT_n}^{(-)} \subseteq H$.

Mostraremos agora que o grupo H é abeliano: para isso basta verificar que os geradores de H comutam. Denotando $\deg E_{i,i+1} = g_i$, verificaremos que $g_i g_j = g_j g_i$ para quaisquer $i, j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Suponha, sem perda de generalidade, que $i < j$. Temos dois casos para analisar:

i) $j = i + 1$.

Temos

$$g_i g_j = \deg[E_{i,i+1}, E_{j,j+1}] = \deg(-[E_{j,j+1}, E_{i,i+1}]) = \deg[E_{j,j+1}, E_{i,i+1}] = g_j g_i,$$

como era o desejado.

ii) $j \neq i + 1$.

Neste caso denotamos

$$a = g_{i+1} g_{i+2} \cdots g_{j-1} = \deg[E_{i+1,i+2}, E_{i+2,i+3}, \ldots, E_{j-1,j}] = \deg E_{i+1,j},$$

e verificamos que

$$a g_j = \deg[E_{i+1,j}, E_{j,j+1}] = \deg(-[E_{j,j+1}, E_{i+1,j}]) = \deg[E_{j,j+1}, E_{i+1,j}] = g_j a.$$

Logo,

$$\begin{aligned} g_i g_j a = g_i a g_j &= \deg[E_{i,i+1}, E_{i+1,j}, E_{j,j+1}] = \deg(-[E_{j,j+1}, [E_{i,i+1}, E_{i+1,j}]]) \qquad (4.1) \\ &= \deg[E_{j,j+1}, [E_{i,i+1}, E_{i+1,j}]] = g_j g_i a. \end{aligned}$$

Portanto $g_i g_j a = g_j g_i a$ e $g_i g_j = g_j g_i$ como gostaríamos.

Provamos assim que o grupo H é abeliano. $\square$

Convenção 4.5. *Com base no Lema 4.4 podemos assumir, sem perda de generalidade, que o grupo G é abeliano. Portanto, de agora em diante, G será um grupo abeliano qualquer.*

Observamos que

$$\eta = (g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}) \in G^{n-1}$$

determina uma G-graduação elementar em ${UT_n}^{(-)}$, fazendo $\deg E_{i,i+1} = g_i$ para todo i. Reciprocamente, dada uma G-graduação elementar em ${UT_n}^{(-)}$ obtemos $\eta \in G^{n-1}$ tal que

$$\eta = (\deg E_{1,2}, \deg E_{2,3}, \ldots, \deg E_{n-1,n}).$$

Denotaremos a álgebra de Lie ${UT_n}^{(-)}$ munida com a G-graduação induzida pela sequência η por $({UT_n}^{(-)}, \eta)$.

Definição 4.6. *Dada uma sequência $\eta = (g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}) \in G^{n-1}$ definimos a sequência reversa* $(\operatorname{rev} \eta) \in G^{n-1}$ *por*

$$\operatorname{rev} \eta = (g_{n-1}, g_{n-2}, \ldots, g_2, g_1).$$

Lema 4.7. *Se $\eta \in G^{n-1}$ então $({UT_n}^{(-)}, \eta)$ é isomorfa, como uma álgebra G-graduada, a $({UT_n}^{(-)}, \operatorname{rev} \eta)$.*

Demonstração. Seja $\psi : UT_n \to UT_n$ o único isomorfismo linear tal que $\psi(E_{i,j}) = -E_{n-j+1,n-i+1}$. Note que, se

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \ldots & b_{1,n-1} & b_{1,n} \\ 0 & b_{2,2} & \ldots & b_{2,n-1} & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & b_{n,n} \end{pmatrix},$$

então

$$\psi(B) = \begin{pmatrix} -b_{n,n} & -b_{n-1,n} & \ldots & -b_{2,n} & -b_{1,n} \\ 0 & -b_{n-1,n-1} & \ldots & -b_{2,n-1} & -b_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -b_{2,2} & -b_{1,2} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -b_{1,1} \end{pmatrix}.$$

Note que o isomorfismo ψ espelha a matriz $-B$ em torno de sua diagonal secundária.

Vamos mostrar que ψ é um automorfismo em ${UT_n}^{(-)}$. Neste caso, resta provar que

$$\psi([a, b]) = [\psi(a), \psi(b)],$$

para todo $a, b \in {UT_n}^{(-)}$. É suficiente verificar se a igualdade é válida para as matrizes unitárias. Sejam $E_{i,j}, E_{k,l} \in {UT_n}^{(-)}$, então

$$\psi([E_{i,j}, E_{k,l}]) = \psi(\delta_{k,j} E_{i,l} - \delta_{i,l} E_{k,j}),$$

onde $\delta_{k,j}$ e $\delta_{i,l}$ são os deltas de Kronecker. Logo,

$$\begin{aligned} \psi([E_{i,j}, E_{k,l}]) &= \delta_{k,j} \psi(E_{i,l}) - \delta_{i,l} \psi(E_{k,j}) \\ &= \delta_{i,l} E_{n-j+1,n-k+1} - \delta_{k,j} E_{n-l+1,n-i+1}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} [\psi(E_{i,j}), \psi(E_{k,l})] &= \psi(E_{i,j})\psi(E_{k,l}) - \psi(E_{k,l})\psi(E_{i,j}) \\ = E_{n-j+1,n-i+1} E_{n-l+1,n-k+1} &- E_{n-l+1,n-k+1} E_{n-j+1,n-i+1}. \end{aligned}$$

Como
$$n-i+1=n-l+1 \Leftrightarrow i=l, \quad \text{e} \quad n-k+1=n-j+1 \Leftrightarrow k=j,$$
então
$$[\psi(E_{i,j}),\psi(E_{k,l})]=\delta_{i,l}E_{n-j+1,n-k+1}-\delta_{k,j}E_{n-l+1,n-i+1},$$
e ψ é um automorfismo em ${UT_n}^{(-)}$.

Agora vamos verificar se ψ é um isomorfismo G-graduado da álgebra $({UT_n}^{(-)},\eta)$ em $({UT_n}^{(-)},\operatorname{rev}\eta)$.

Como uma graduação é unicamente determinada pelos graus dos elementos
$$E_{1,2},E_{2,3},\ldots,E_{n-1,n},$$
ver Lema 4.4-b, basta verificar como ψ se comporta nestes elementos. Temos que
$$\psi(E_{t,t+1})=-E_{n-t,n-t+1},$$
para todo t.

Denotando $\eta=(g_1,g_2,\ldots,g_{n-1})$, temos $\deg E_{t,t+1}=g_t$ em $({UT_n}^{(-)},\eta)$ e $\deg E_{n-t,n-t+1}=g_t$ em $({UT_n}^{(-)},\operatorname{rev}\eta)$, completando nossa demonstração. □

Defina em G^{n-1} a relação de equivalência $\sim$ como abaixo:
$$\eta\sim\mu \Leftrightarrow \eta=\mu \ \text{ ou } \ \mu=\operatorname{rev}\eta.$$
Mostraremos que duas graduações elementares de ${UT_n}^{(-)}$ isomorfas pertencem a uma mesma classe de equivalência.

Antes disso falaremos de identidades graduadas, que nos ajudarão a provar tal resultado. A próxima definição aborda alguns conceitos apresentados para a álgebra UT_n, adaptando-os para ${UT_n}^{(-)}$.

Definição 4.8. *Seja $\varepsilon\in G^{n-1}$ e considere a graduação elementar de ${UT_n}^{(-)}$ induzida por ε. Seja $\tilde{\eta}=(\eta_1,\ldots,\eta_m)$ um elemento de G^m. Dizemos que $\tilde{\eta}$ é uma sequência boa, com respeito a G-graduação elementar de $UT_n^{(-)}$ induzida por ε, se existe uma sequência de matrizes unitárias $r_1,\ldots,r_m$, estritamente triangulares superiores, tal que o produto*
$$[r_1,r_2,\ldots,r_m]\neq 0 \quad e \quad \deg r_i=\eta_i,$$
para todo i. Neste caso, dizemos que $\tilde{\eta}$ é ε-boa e, caso contrário, dizemos que $\tilde{\eta}$ é ε-ruim.

Exemplo 4.9. *Seja G um grupo e considere a G-graduação elementar em $UT_4^{(-)}$ induzida por $\varepsilon=(g_1,g_2,g_3)$, onde g_1,g_2,g_3 são distintos. Defina as sequências*
$$\tilde{\eta}=(g_2,g_1,g_3)\in G^3 \ e \ \tilde{\mu}=(g_1,g_3,g_2)\in G^3.$$
A sequência $\tilde{\eta}$ é ε-boa, pois
$$\deg E_{2,3}=g_2, \ \deg E_{1,2}=g_1, \quad \deg E_{3,4}=g_3 \quad e$$
$$[E_{2,3},E_{1,2},E_{3,4}]=-E_{1,4}\neq 0.$$
Note que a mesma sequência não é boa com relação a graduação elementar induzida por ε na álgebra associativa UT_4.

A sequência $\tilde{\mu}$ é ε-ruim, pois caso contrário obteríamos, na argumentação, que
$$[E_{1,2},E_{3,4},E_{2,3}]\neq 0,$$
o que é um absurdo.

Para qualquer sequência $\tilde{\eta} \in G^m$ defina o polinômio $f_{\tilde{\eta}} \in L\langle X \rangle$ por

$$f_{\tilde{\eta}} = [f_{\tilde{\eta},1}, f_{\tilde{\eta},2}, \dots, f_{\tilde{\eta},m}],$$

onde $f_{\tilde{\eta},i} = [y_{2i-1}, y_{2i}]$, se $\eta_i = 1$, ou $f_{\tilde{\eta},i} = {x_i}^{\eta_i}$, se $\eta_i \neq 1$.

Exemplo 4.10. *Sejam $\tilde{\eta} = (g_2, g_1, g_3) \in G^3$ e $\tilde{\mu} = (1, g_1) \in G^2$, onde $g_1, g_2, g_3 \neq 1$. Temos*

$$f_{\tilde{\eta}} = [f_{\tilde{\eta},1}, f_{\tilde{\eta},2}, f_{\tilde{\eta},3}] = [x_1^{g_2}, x_2^{g_1}, x_3^{g_3}], \text{ e}$$
$$f_{\tilde{\mu}} = [f_{\tilde{\mu},1}, f_{\tilde{\mu},2}] = [[y_1, y_2], x_2^{g_1}].$$

Notação 4.11. *Denotaremos por $T_G(UT_n^{(-)}, \varepsilon)$ o T_G-ideal de $L\langle X \rangle$ formado por todas identidades polinomiais G-graduadas de $UT_n^{(-)}$, quando $UT_n^{(-)}$ tem a G-graduação elementar induzida por ε.*

Lema 4.12. *Se $\tilde{\eta} \in G^m$, então*

$$f_{\tilde{\eta}} \in T_G(UT_n^{(-)}, \varepsilon) \Leftrightarrow \tilde{\eta} \text{ é } \varepsilon\text{-ruim}.$$

Demonstração. O polinômio $f_{\tilde{\eta}}$ é multilinear, portanto, podemos repetir os mesmos passos feitos para a Proposição 3.4, apenas alterando as notações para que se adequem a álgebra de Lie ${UT_n}^{(-)}$. Para mais detalhes veja [8, Lemma 4]. □

Denote por S_m o grupo simétrico das permutações no conjunto $\{1, 2, \dots, m\}$.

Definição 4.13. *Seja t um inteiro, $1 \leq t \leq m$. Defina como $\mathcal{T}_m^{(t)}$ o conjunto das permutações $\sigma \in S_m$ que satisfazem:*

a) $\sigma(t) = 1$,

b) *Se $k_1, k_2 \geq 0$ são inteiros tais que $k_1 + k_2 \leq m - 1$ e*

$$\{\sigma(t - k_1), \sigma(t - k_1 + 1), \dots, \sigma(t + k_2)\} = \{1, 2, \dots, k_1 + k_2 + 1\}, \tag{4.2}$$

então ou

$$t - k_1 - 1 \geq 1 \text{ e } \sigma(t - k_1 - 1) = k_1 + k_2 + 2,$$

ou

$$t + k_2 + 1 \leq m \text{ e } \sigma(t + k_2 + 1) = k_1 + k_2 + 2.$$

Denotaremos $\mathcal{T}_m = \bigcup_{t=1}^{m} \mathcal{T}_m^{(t)}$.

Observação 4.14. *Toda permutação $\theta \in S_m$ pode ser escrita na notação em duas linhas:*

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ \theta(1) & \theta(2) & \dots & \theta(m) \end{pmatrix}.$$

Então $\theta \in \mathcal{T}_m$ se, e somente se, para cada $r \in \{1, 2, \dots, m\}$ os elementos $1, 2, \dots, r$ aparecem juntos em um "bloco"na segunda linha. Outra forma de definir $\mathcal{T}_m^{(t)}$ pode ser encontrada em [8, Definition 5].

Exemplo 4.15. *Considere as permutações $\sigma, \tau \in S_6$, definidas da seguinte maneira:*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \text{ e } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Através de uma verificação direta, ou da observação anterior, vemos que $\sigma \in \mathcal{T}_6^{(4)} \subset \mathcal{T}_6$, e $\tau \notin \mathcal{T}_6$.

Detalharemos a verificação de que $\tau \notin \mathcal{T}_6$ no exemplo acima: como $\tau(3) = 1$ temos que $t = 3$, na Definição 4.13. Considerando $k_1 = 2$ e $k_2 = 0$, temos

$$\{\tau(t-k_1), \tau(t-k_1+1), \ldots, \tau(t+k_2)\} = \{\tau(1), \tau(2), \tau(3)\} = \{1, 2, 3\}.$$

Como $t - k_1 - 1 = 0 < 1$ e $\tau(t + k_2 + 1) = 6$ concluímos que $\tau \notin \mathcal{T}_6^{(3)}$.

Exemplo 4.16. *Considere as permutações*

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad e \quad \sigma_2 \circ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Então σ_1, $\sigma_2 \in \mathcal{T}_3$ mas $\sigma_2 \circ \sigma_1 \notin \mathcal{T}_3$. Portanto, $\mathcal{T}_m$ geralmente não é um subgrupo de S_m.

Lema 4.17. *Sejam $r_1, r_2, \ldots, r_m \in UT_n$ matrizes unitárias estritamente triangulares superiores, tais que o produto associativo*

$$r_1 r_2 \cdots r_m \neq 0,$$

e seja $\sigma \in S_m$. Então:

a) *$r_{\sigma^{-1}(1)} r_{\sigma^{-1}(2)} \cdots r_{\sigma^{-1}(m)} \neq 0$ se, e somente se, $\sigma = 1$ (aqui 1 é a permutação identidade).*

b) *$[r_{\sigma^{-1}(1)}, r_{\sigma^{-1}(2)}, \ldots, r_{\sigma^{-1}(m)}] \neq 0$ se, e somente se, $\sigma \in \mathcal{T}_m$.*

Demonstração. a) A primeira afirmação do lema é imediata.

b) Suponha $[r_{\sigma^{-1}(1)}, r_{\sigma^{-1}(2)}, \ldots, r_{\sigma^{-1}(m)}] \neq 0$. Denote $\sigma^{-1}(1) = t$. Se $\sigma \notin \mathcal{T}_m$, então existem k_1, k_2 inteiros positivos, $k_1 + k_2 \leq m - 1$, satisfazendo

$$\{\sigma^{-1}(1), \sigma^{-1}(2), \ldots, \sigma^{-1}(k_1 + k_2 + 1)\} = \{t - k_1, t - k_1 + 1, \ldots, t + k_2\},$$

com

$$\sigma^{-1}(k_1 + k_2 + 2) \neq t - k_1 - 1 \text{ e } \sigma^{-1}(k_1 + k_2 + 2) \neq t + k_2 + 1.$$

Por hipótese, $[r_{\sigma^{-1}(1)}, r_{\sigma^{-1}(2)}, \ldots, r_{\sigma^{-1}(k_1+k_2+1)}] \neq 0$ e por a) temos que o produto

$$r_{t-k_1} r_{t-k_1+1} \cdots r_{t+k_2},$$

é um termo deste comutador, mais ainda, é o único termo não nulo. Assim,

$$[r_{\sigma^{-1}(1)}, r_{\sigma^{-1}(2)}, \ldots, r_{\sigma^{-1}(k_1+k_2+1)}, r_{\sigma^{-1}(k_1+k_2+2)}] = [r_{t-k_1} r_{t-k_1+1} \cdots r_{t+k_2}, r_i],$$

onde $i \neq t - k_1 - 1$ e $i \neq t + k_2 + 1$. Como

$$[r_{t-k_1} r_{t-k_1+1} \cdots r_{t+k_2}, r_i] = r_{t-k_1} r_{t-k_1+1} \cdots r_{t+k_2} r_i - r_i r_{t-k_1} r_{t-k_1+1} \cdots r_{t+k_2},$$

por a) temos que

$$[r_{\sigma^{-1}(1)}, r_{\sigma^{-1}(2)}, \ldots, r_{\sigma^{-1}(k_1+k_2+1)}, r_{\sigma^{-1}(k_1+k_2+2)}] = 0,$$

e portanto

$$[r_{\sigma^{-1}(1)}, r_{\sigma^{-1}(2)}, \ldots, r_{\sigma^{-1}(k_1+k_2+1)}, r_{\sigma^{-1}(k_1+k_2+2)}, \ldots, r_{\sigma^{-1}(m)}] = 0.$$

Absurdo. Provamos assim a implicação.

Suponha agora que $\sigma \in \mathcal{T}_m$, e seja $\sigma^{-1}(1) = t$.

Afirmação 1. *Se $1 \leq d \leq m$ então*

$$\{\sigma^{-1}(1), \sigma^{-1}(2), \ldots, \sigma^{-1}(d)\} = \{t-j, \ldots, t, \ldots, t+(d-j)-1\},$$

para algum j.

Esta afirmação é equivalente a Observação 4.14 e nós detalharemos a sua demonstração.

Demonstraremos a afirmação por indução em d. Para $d = 1$ a afirmação é imediata. Considerando $d = 2$, a definição de $\mathcal{T}_m$ implica que $\sigma^{-1}(2) = t-1$ ou $\sigma^{-1}(2) = t+1$. Então

$$\{\sigma^{-1}(1), \sigma^{-1}(2)\} = \{t-1, t\} \text{ ou } \{\sigma^{-1}(1), \sigma^{-1}(2)\} = \{t, t+1\}.$$

Suponha que $\{\sigma^{-1}(1), \ldots, \sigma^{-1}(d)\} = \{t-j, \ldots, t, \ldots, t+(d-j)-1\}$, para um certo d, tal que $1 \leq d < m$. Como $\sigma \in \mathcal{T}_m$, temos que

$$\sigma^{-1}(d+1) = t-j-1 \ \text{ ou } \ \sigma^{-1}(d+1) = t+(d-j).$$

Então

$$\{\sigma^{-1}(1), \ldots, \sigma^{-1}(d), \sigma^{-1}(d+1)\} = \{t-j-1, t-j, \ldots, t, \ldots, t+(d-j)-1\} \ \text{ ou}$$

$$\{\sigma^{-1}(1), \ldots, \sigma^{-1}(d), \sigma^{-1}(d+1)\} = \{t-j, \ldots, t, \ldots, t+(d-j)-1, t+(d-j)\},$$

provando a afirmação.

Afirmação 2. $[r_{\sigma^{-1}(1)}, r_{\sigma^{-1}(2)}, \ldots, r_{\sigma^{-1}(d)}] \neq 0$, *para todo $2 \leq d \leq m$.*

Novamente vamos proceder por indução em d. Para $d = 2$, como $\sigma \in \mathcal{T}_m$, temos que

$$[r_{\sigma^{-1}(1)}, r_{\sigma^{-1}(2)}] = [r_t, r_{t+1}] = r_t r_{t+1} \ \text{ ou } \ [r_{\sigma^{-1}(1)}, r_{\sigma^{-1}(2)}] = [r_t, r_{t-1}] = -r_{t-1} r_t,$$

que, em ambos os casos, é não nulo, pois $r_1 r_2 \cdots r_m \neq 0$.

Suponha que $[r_{\sigma^{-1}(1)}, r_{\sigma^{-1}(2)}, \ldots, r_{\sigma^{-1}(d)}] \neq 0$, para um certo d, tal que $2 \leq d < m$. Pela Afirmação 1 existe um j tal que

$$[r_{\sigma^{-1}(1)}, r_{\sigma^{-1}(2)}, \ldots, r_{\sigma^{-1}(d)}] = \pm r_{t-j} \cdots r_t \cdots r_{t+(d-j)-1} \neq 0.$$

Como $\sigma \in \mathcal{T}_m$ temos

$$\begin{aligned} [r_{\sigma^{-1}(1)}, r_{\sigma^{-1}(2)}, \ldots, r_{\sigma^{-1}(d)}, r_{\sigma^{-1}(d+1)}] &= \pm[r_{t-j} \cdots r_t \cdots r_{t+(d-j)-1}, r_{t-j-1}] \\ &= \pm r_{t-j-1} r_{t-j} \cdots r_t \cdots r_{t+(d-j)-1} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} [r_{\sigma^{-1}(1)}, r_{\sigma^{-1}(2)}, \ldots, r_{\sigma^{-1}(d)}, r_{\sigma^{-1}(d+1)}] &= \pm[r_{t-j} \cdots r_t \cdots r_{t+(d-j)-1}, r_{t+(d-j)}] \\ &= \pm r_{t-j} \cdots r_t \cdots r_{t+(d-j)-1} r_{t+(d-j)}, \end{aligned}$$

que, em ambos os casos, é não nulo, pois $r_1 r_2 \cdots r_m \neq 0$. Finalizamos a demonstração do lema. □

Definição 4.18. *Sejam $\eta = (g_1, g_2, \ldots, g_m) \in G^m$, e $\sigma \in S_m$. Definimos a ação a esquerda $*$, de σ em η por*

$$\sigma * \eta := (g_{\sigma^{-1}(1)}, g_{\sigma^{-1}(2)}, \ldots, g_{\sigma^{-1}(m)}).$$

Lema 4.19 ([9]). *Sejam η, $\mu \in G^m$ duas sequências. Então $\eta = \mu$, ou $\eta = \operatorname{rev} \mu$ se, e somente se, para cada escolha de σ, $\tau' \in \mathcal{T}_m$ existem σ', $\tau \in \mathcal{T}_m$ tais que $\sigma * \eta = \sigma' * \mu$ e $\tau * \eta = \tau' * \mu$.*

O próximo resultado é consequência do Lema 4.17.

Lema 4.20. *O polinômio* f_μ, $\mu \in G^{n-1}$, *não é uma identidade* G*-graduada de* $({UT_n}^{(-)}, \eta)$ *se, e somente se,* $\mu = \sigma * \eta$, *para algum* $\sigma \in \mathcal{T}_{n-1}$.

Demonstração. Seja $\eta = (g_1, g_2, \dots, g_{n-1}) \in G^{n-1}$ e considere a G-graduação elementar induzida por η em ${UT_n}^{(-)}$. Como definido anteriormente,

$$\eta = (\deg E_{1,2}, \deg E_{2,3}, \dots, \deg E_{n-1,n}).$$

Note que se um comutador de comprimento $n-1$, cujas entradas são matrizes unitárias estritamente triangulares superiores, é não nulo, então o produto

$$E_{1,2}E_{2,3}\cdots E_{n-1,n}$$

é um somando deste comutador, mais ainda, é o único somando não nulo.

Considere o polinômio f_μ, $\mu \in G^{n-1}$. Se $\mu = \sigma * \eta$, para algum $\sigma \in \mathcal{T}_{n-1}$, então

$$\mu = (g_{\sigma^{-1}(1)}, g_{\sigma^{-1}(2)}, \dots, g_{\sigma^{-1}(n-1)}).$$

Denotando $r_i = E_{i,i+1}$ temos que

$$r_1 r_2 \cdots r_{n-1} \neq 0,$$

e pelo Lema 4.17-b)

$$[r_{\sigma^{-1}(1)}, r_{\sigma^{-1}(2)}, \dots, r_{\sigma^{-1}(n-1)}] \neq 0.$$

Portanto, μ é η-boa e f_μ não é uma identidade G-graduada de $({UT_n}^{(-)}, \eta)$ (veja Lema 4.12).

Por outro lado, seja $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}) \in G^{n-1}$. Se f_μ não é uma identidade G-graduada de $({UT_n}^{(-)}, \eta)$ então μ é η-boa e existem $\overline{r_1}, \overline{r_2}, \dots, \overline{r_{n-1}} \in UT_n$ matrizes unitárias estritamente triangulares superiores, tais que

$$[\overline{r_1}, \overline{r_2}, \dots, \overline{r_{n-1}}] \neq 0 \quad \text{e} \quad \deg \overline{r_i} = \mu_i,$$

para todo i. Denotando $r_i = E_{i,i+1}$ temos que

$$\{\overline{r_1}, \overline{r_2}, \dots, \overline{r_{n-1}}\} = \{r_1, r_2, \dots, r_{n-1}\},$$

e, como $r_1 r_2 \cdots r_{n-1} \neq 0$, pelo Lema 4.17-b) temos que

$$\overline{r_i} = r_{\sigma^{-1}(i)},$$

para algum $\sigma \in \mathcal{T}_{n-1}$. Como

$$\mu_i = \deg \overline{r_i} = \deg r_{\sigma^{-1}(i)} = g_{\sigma^{-1}(i)},$$

temos que

$$\mu = (g_{\sigma^{-1}(1)}, g_{\sigma^{-1}(2)}, \dots, g_{\sigma^{-1}(n-1)}) = \sigma * \eta,$$

como era o desejado. □

Corolário 4.21. *Sejam* η, $\mu \in G^{n-1}$ *duas sequências. Se* $\eta \neq \mu$ *e* $\eta \neq \operatorname{rev}\mu$, *então* $({UT_n}^{(-)}, \eta)$ *e* $({UT_n}^{(-)}, \mu)$ *não são isomorfas como álgebras graduadas.*

Demonstração. Temos, pelo Lema 4.19, que existe $\tau \in \mathcal{T}_{n-1}$, tal que

$$\tau * \eta \neq \tau' * \mu,$$

para todo $\tau' \in \mathcal{T}_{n-1}$ (comutando η e μ, se necessário). Portanto, $\tau * \eta$ é uma boa sequência para $({UT_n}^{(-)}, \eta)$, mas é uma sequência ruim para $({UT_n}^{(-)}, \mu)$. O que implica que $f_{\tau*\eta}$ é uma identidade graduada para $({UT_n}^{(-)}, \mu)$, mas não para $({UT_n}^{(-)}, \eta)$. Pelo Lema 1.33 (enunciado no contexto de Lie), temos que

$$({UT_n}^{(-)}, \eta) \ncong ({UT_n}^{(-)}, \mu),$$

completando a demonstração. □

Isso nos leva ao principal resultado desta seção.

Teorema 4.22. *Sejam η, $\mu \in G^{n-1}$ duas sequências. Então $({UT_n}^{(-)}, \eta)$ e $({UT_n}^{(-)}, \mu)$ são isomorfas, como álgebras G-graduadas se, e somente se,*

$$\eta = \mu \quad ou \quad \mu = \operatorname{rev} \eta.$$

4.3 Identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas em $UT_n(F)^{(-)}$

Nesta seção, F será um corpo de característica 0, $\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$ e X a união disjunta de conjuntos enumeráveis

$$X = \bigcup_{g \in \mathbb{Z}_n} X_g \text{ tais que } X_g = \{x_1^g, x_2^g, x_3^g, \ldots\}.$$

Iremos analisar as identidades polinomiais $\mathbb{Z}_n$-graduadas da álgebra $\mathbb{Z}_n$-graduada $UT_n(F)^{(-)} = UT_n^{(-)}$, cujas matrizes unitárias são homogêneas e

$$\deg E_{i,j} = \overline{j-i} \in \mathbb{Z}_n. \tag{4.3}$$

Ela é a graduação elementar induzida por $\eta = (\overline{1}, \overline{1}, \ldots, \overline{1}) \in \mathbb{Z}_n^{n-1}$, e é chamada de $\mathbb{Z}_n$-graduação canônica de $UT_n^{(-)}$. Observe que a mesma graduação foi definida no caso associativo, para $n = 4$, no Exemplo 3.18, e para um $n \geq 1$ qualquer no Teorema 3.19.

O $T_{\mathbb{Z}_n}$-ideal das identidades graduadas de UT_n para o caso associativo foi descrito no Capítulo 3. O objetivo desta seção é encontrar um resultado similar para a álgebra de Lie $UT_n^{(-)}$.

Teorema 4.23. *Seja F um corpo de característica* 0 *e considere em $UT_n^{(-)}$ a $\mathbb{Z}_n$-graduação canônica definida em (4.3). O $T_{\mathbb{Z}_n}$-ideal das identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas da álgebra de Lie $UT_n^{(-)}$ é gerado, como um $T_{\mathbb{Z}_n}$-ideal, pelos polinômios*

$$[x_1^{(\overline{0})}, x_2^{(\overline{0})}], \ [x_1^{(\overline{i})}, x_2^{(\overline{j})}], \quad i + j \geq n \ e \ 1 \leq i, j \leq n-1. \tag{4.4}$$

Demonstração. Denote por J o $T_{\mathbb{Z}_n}$-ideal de $L\langle X\rangle$ gerado pelos elementos (4.4), e por I o $T_{\mathbb{Z}_n}$-ideal das identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas da álgebra de Lie $UT_n^{(-)}$. Queremos provar que $J = I$.

É imediato que $J \subseteq I$. Precisamos mostrar que $I \subseteq J$. Para isso é suficiente mostrarmos que os geradores de I pertencem a J. Como a característica de F é 0, temos que I é gerado, como um $T_{\mathbb{Z}_n}$-ideal, por seus elementos multilineares.

Seja $f \in I$ um polinômio multilinear não nulo, e escreva f como uma combinação linear

$$f = \sum \alpha_{i,m}[x_{i_1}^{\overline{m_1}}, x_{i_2}^{\overline{m_2}}, \ldots, x_{i_r}^{\overline{m_r}}],$$

$i = (i_1, \ldots, i_r)$, $m = (m_1, \ldots, m_r)$, onde $0 \leq m_1, \ldots, m_r \leq n-1$, e $\alpha_{i,m} \in F$, para todos i e m.

Afirmação 1. *Se $m_1 + m_2 + \cdots + m_r \geq n$, então f é consequência dos polinômios*

$$[x_1^{(\bar{i})}, x_2^{(\bar{j})}], \quad i + j \geq n \text{ e } 1 \leq i, j \leq n-1.$$

De fato, seja

$$\alpha_{i,m}[x_{i_1}^{\overline{m_1}}, x_{i_2}^{\overline{m_2}}, \ldots, x_{i_r}^{\overline{m_r}}]$$

um somando não nulo de f e seja k o menor índice tal que $m_1 + m_2 + \cdots + m_k \geq n$. Então

$$\alpha_{i,m}[x_{i_1}^{\overline{m_1}}, x_{i_2}^{\overline{m_2}}, \ldots, x_{i_r}^{\overline{m_r}}] = \alpha_{i,m}[[[x_{i_1}^{\overline{m_1}}, x_{i_2}^{\overline{m_2}}, \ldots, x_{i_{k-1}}^{\overline{m_{k-1}}}], x_{i_k}^{\overline{m_k}}], x_{i_{k+1}}^{\overline{m_{k+1}}}, \ldots, x_{i_r}^{\overline{m_r}}]$$

é consequência de

$$[x_1^{(\bar{i})}, x_2^{(\bar{j})}], \ i = m_1 + m_2 + \cdots + m_{k-1} \text{ e } j = m_k.$$

Repetindo este processo para todos o somandos não nulos de f, provamos a afirmação.

Suponha que $m_1 + m_2 + \cdots + m_r < n$. Vamos analisar dois casos separadamente: o primeiro quando $m_j \neq 0$ para todo j, e o segundo quando $m_j = 0$ para algum j. Mas antes disso faremos duas afirmações a respeito dos comutadores.

Considere um comutador

$$[x_{j_1}, \ldots, x_{j_t}] \in L\langle X \rangle. \tag{4.5}$$

Afirmação 2. *Fixado uma variável x_{j_s}, podemos escrever o comutador (4.5) como uma combinação linear de comutadores cuja primeira entrada é x_{j_s}.*

Provaremos a afirmação por indução em t. Se $t = 2$ a afirmação é imediata, pois

$$[x_{j_1}, x_{j_2}] = -[x_{j_2}, x_{j_1}] \ \text{(Lei anticomutativa)}.$$

Suponha que a afirmação é verdadeira para $t-1$. Se $x_{j_s} \neq x_{j_t}$ temos que

$$[x_{j_1}, \ldots, x_{j_{s-1}}, x_{j_s}, x_{j_{s+1}}, \ldots, x_{j_t}] = [[x_{j_1}, \ldots, x_{j_{s-1}}, x_{j_s}], x_{j_{s+1}}, \ldots, x_{j_t}],$$

e pela hipótese de indução obtemos o resultado. Se $x_{j_s} = x_{j_t}$ denote

$$[x_{j_1}, \ldots, x_{j_{t-2}}] = c_1.$$

Usando a identidade de Jacobi e a Lei anticomutativa temos

$$[c_1, x_{j_{t-1}}, x_{j_t}] = [x_{j_t}, x_{j_{t-1}}, c_1] + [c_1, x_{j_t}, x_{j_{t-1}}].$$

Como $[c_1, x_{j_t}]$ é um comutador de comprimento $t-1$, pela hipótese de indução ele pode ser escrito como uma combinação linear de comutadores cuja primeira variável é x_{j_t}. Portanto o somando $[c_1, x_{j_t}, x_{j_{t-1}}]$ cumpre a afirmação. Escreva $[x_{j_t}, x_{j_{t-1}}] = x$, assim,

$$[x, c_1] = -[c_1, x] = -[x_{j_1}, \ldots, x_{j_{t-2}}, x]$$

é um comutador de comprimento $t-1$ e, pela hipótese de indução, ele pode ser escrito como uma combinação linear de comutadores cuja primeira variável é x. Substituindo x por $[x_{j_t}, x_{j_{t-1}}]$, demonstramos a afirmação.

Afirmação 3. *Módulo J, duas variáveis de grau $\overline{0}$ em entradas consecutivas, dentro de um comutador, comutam.*

Suponha que no comutador (4.5),

$$\deg x_{j_s} = \deg x_{j_{s+1}} = \overline{0}.$$

Se $s=1$ a afirmação é direta, pois $[x_{j_1}^{(\overline{0})}, x_{j_2}^{(\overline{0})}] \in J$. Suponha $s \neq 1$ e denote $[x_{j_1}, \ldots, x_{j_{s-1}}] = c_2$. Usando novamente a identidade de Jacobi e a Lei anticomutativa, obtemos que

$$[c_2, x_{j_s}^{(\overline{0})}, x_{j_{s+1}}^{(\overline{0})}, x_{j_{s+2}}, \ldots, x_{j_t}] = -[x_{j_s}^{(\overline{0})}, x_{j_{s+1}}^{(\overline{0})}, c_2, x_{j_{s+2}}, \ldots, x_{j_t}] + [c_2, x_{j_{s+1}}^{(\overline{0})}, x_{j_s}^{(\overline{0})}, x_{j_{s+2}}, \ldots, x_{j_t}].$$

Como

$$[x_{j_s}^{(\overline{0})}, x_{j_{s+1}}^{(\overline{0})}, c_2, x_{j_{s+2}}, \ldots, x_{j_t}] \in J$$

concluímos que, módulo J,

$$[c_2, x_{j_s}^{(\overline{0})}, x_{j_{s+1}}^{(\overline{0})}, x_{j_{s+2}}, \ldots, x_{j_t}] = [c_2, x_{j_{s+1}}^{(\overline{0})}, x_{j_s}^{(\overline{0})}, x_{j_{s+2}}, \ldots, x_{j_t}].$$

Provando assim a afirmação.

No polinômio f considere $m' = \min\{m_1, m_2, \ldots, m_r\}$. Fixe uma variável de grau $\overline{m'}$ e, sem perda de generalidade, suponha que ela seja $x_1^{\overline{m'}}$. Pelas Afirmações 2 e 3, temos que f é uma combinação linear de comutadores

$$f = \sum \alpha_{k,l}[x_1^{\overline{m'}}, x_{k_1}^{\overline{l_1}}, \ldots, x_{k_{r-1}}^{\overline{l_{r-1}}}], \tag{4.6}$$

$k = (k_1, \ldots, k_{r-1})$, $l = (l_1, \ldots, l_{r-1})$ onde $0 \leq l_1, \ldots, l_{r-1} \leq n-1$, e $\alpha_{k,l} \in F$, para todos k e l. E ainda, se $l_s = l_{s+1} = 0$ para algum s então $k_s < k_{s+1}$.

Caso 1. $m_j \neq 0$ para todo j.

Podemos considerar que f é uma combinação linear como a escrita em (4.6). Seja

$$\alpha_{k,l}[x_1^{\overline{m'}}, x_{k_1}^{\overline{l_1}}, \ldots, x_{k_{r-1}}^{\overline{l_{r-1}}}]$$

um somando não nulo de f.

Substitua

$$x_1^{\overline{m'}} = E_{1,a_1} \;\text{ e }\; x_{k_b}^{\overline{l_b}} = E_{a_b, a_{b+1}},$$

onde

$$a_1 = 1 + m' \;\text{ e }\; a_{b+1} = a_b + l_b,\; b = 1, \ldots, r-1.$$

Como $E_{1,a_1}E_{a_1,a_2}\ldots E_{a_{r-1},a_r} \neq 0$, e a única permutação $\sigma \in S_r$ que pertence a $\mathcal{T}_r^{(1)}$ é a permutação identidade, pelo Lema 4.17 temos que o somando

$$\alpha_{k,l}[E_{1,a_1}, E_{a_1,a_2}, \ldots, E_{a_{r-1},a_r}] \neq 0$$

e ele é o único somando não nulo de f. Logo esta é uma avaliação não nula de f, absurdo.

Portanto, se f é uma identidade polinomial graduada não nula para $UT_n^{(-)}$ o Caso 1 não ocorre.

Caso 2. $m_j = 0$ para algum j.

Podemos considerar que f é uma combinação linear como a escrita em (4.6), onde $m' = 0$, ou seja,

$$f = \sum \alpha_{k,l}[x_1^{\overline{0}}, x_{k_1}^{\overline{l_1}}, \ldots, x_{k_{r-1}}^{\overline{l_{r-1}}}].$$

Se $l_1 = 0$, para todo l, temos que $f \in J$ e a demonstração está encerrada. Suponha que $l_1 \neq 0$ para algum l. Neste caso, substitua

$$x_1^{\overline{0}} = E_{1,1}$$

$$x_{k_1}^{\overline{l_1}} = E_{1,a_1} \quad \text{e} \quad x_{k_b}^{\overline{l_b}} = E_{a_{b-1},a_b},$$

onde

$$a_1 = 1 + l_1 \quad \text{e} \quad a_b = a_{b-1} + l_b, \; b = 2, \ldots, r-1.$$

Portanto temos que o somando

$$\alpha_{k,l}[E_{1,1}, E_{1,a_1}, \ldots, E_{a_{r-2},a_{r-1}}] \neq 0,$$

e é o único somando não nulo de f. Logo esta é uma avaliação não nula de f, absurdo.

Portanto $l_1 = 0$, para todo l, e $f \in J$. Finalizando a demonstração. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] E. Aljadeff, D. Haile, *Simple G-graded algebras and their polynomial identities*, Amer. Math. Soc. 366 (2013), 1749–1771.

[2] A. Bianchi, D. Diniz, *Identities and isomorphisms of finite-dimensional graded simple algebras*, J. Algebra 526 (2019), 333–344.

[3] M. Bresăr, *Introduction to Noncommutative Algebra*. Springer International Publishing, Suíça, 2014.

[4] O. M. Di Vincenzo, P. Koshlukov, A. Valenti, *Gradings on the algebra of upper triangular matrices and their graded identities*, J. Algebra 275 (2004), 550–566.

[5] V. Drensky, *Free algebras and PI-algebras*. Springer-Verlag Singapore, Singapore, 2000.

[6] D. J. Gonçalves, E. Riva, *Graded polynomial identities for the upper triangular matrix algebra over a finite field*, J. Algebra 559 (2020), 625-645.

[7] A. Guimarães, A. Brandão Jr, C. Fidelis, *$\mathbb{Z}$-gradings of full support on the Grassmann algebra*. Preprint.

[8] E. A. Hitomi, P. Koshlukov, F. Yasumura, *Group gradings on the Lie and Jordan algebras of upper triangular matrices*, J. Math. Sci, São Paulo (2017), 11:326–347.

[9] E. A. Hitomi, F. Yasumura, *On the combinatorics of commutators of Lie algebras*, J. Algebra Appl. 19 (2020), No. 6.

[10] A. Kemer, *Ideals of Identities of Associative Algebras*, Transl. Math. Monogr., vol. 87, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1991).

[11] P. Koshlukov, F. Yukihide, *Elementary gradings on the Lie algebra $UT_n^{(-)}$*, J. Algebra 473 (2017), 66–79.

[12] P. Koshlukov, F. Yukihide, *Group gradings on the Lie algebra of upper triangular matrices*, J. Algebra 477 (2017), 294-311.

[13] V. N. Latyshev, *Generalization of Hilbert's theorem on the finiteness of bases*, Sib. Mat. Zh. 7 (1966), 1422–1424 (in Russian).

[14] Yu. N. Maltsev, *A basis for the identities of the algebra of upper triangular matrices*, Algebra Logika 10, Russian (1971), 393-400 . Translation: Algebra Logic 10 (1971), 242-247.

[15] P. N. Siderov, *A basis for the identities of an algebra of triangular matrices over an arbitrary field*, Pliska, Stud. Math. Bulg. 2, Russian (1981), 143-152.

[16] A. Valenti, M. V. Zaicev, *Abelian gradings on upper-triangular matrices* , Arch. Math. 80 (2003), 12–17.

[17] A. Valenti, M. V. Zaicev, *Group gradings on upper triangular matrices* , Arch. Math. 89 (2007), 33–40.