

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA QUÍMICA**

**OTIMIZAÇÃO DOS CUSTOS DE PRODUÇÃO DE UMA EMPRESA DE BEBIDAS A  
PARTIR DA REALOCAÇÃO DA PRODUÇÃO UTILIZANDO O MÉTODO DE  
PROGRAMAÇÃO LINEAR**

**João Pedro Gomes de Moraes**

Trabalho de Graduação apresentado ao  
Departamento de Engenharia Química  
da Universidade Federal de São Carlos

Orientador: Prof. Felipe Fernando Furlan

**São Carlos – SP**

**2020**

## **BANCA EXAMINADORA**

Trabalho de Graduação apresentado no dia 15 de dezembro de 2020 perante a seguinte banca examinadora:

Orientador: Prof. Felipe Fernando Furlan, DEQ/UFSCar

Convidado: Prof. Antonio Carlos Luperni Horta, DEQ/UFSCar

Professor da Disciplina: Ruy de Sousa Júnior, DEQ/UFSCar

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por me proporcionar o dom da vida. À minha mãe, Sônia e meu pai, Libânio, pelo amor incondicional, pelo apoio, pela confiança, e pelo exemplo. Ao meu irmão, Mateus por dividir comigo as alegrias da infância, e os aprendizados e desafios da universidade. À minha companheira, Giovanna, pela cumplicidade, pela presença motivadora e pelos momentos compartilhados. Aos professores que compartilharam seu conhecimento e foram fundamentais para que os estudos se tornassem uma prática de aprendizado, encanto e esperança. Aos meus colegas de turma, de república e a todos os amigos que me acompanharam e tornaram os dias em São Carlos mais leves e divertidos. À comunidade acadêmica, e todos os trabalhadores que contribuem para o funcionamento da universidade pública. À ex-presidente Dilma Rousseff, por tornar possível o sonho de estudar na Alemanha, com a criação do programa Ciência Sem Fronteiras. À Genau Idiomas, pela confiança que tiveram em mim e por me proporcionarem a minha primeira experiência profissional. Aos colegas com quem trabalhei durante o estágio, que me ensinaram muito e me deram a chance de aplicar os conhecimentos adquiridos em projetos desafiadores. Sei que nunca conseguirei lhes retribuir da maneira que vocês merecem. Que a construção de uma carreira e uma vida baseada na responsabilidade social, no respeito e no sonho por um mundo melhor seja a maneira que eu possa retribuir para todos que me apoiaram e que me apoiarão nesta jornada.

## RESUMO

A soma dos custos de operação das 4 fábricas de uma empresa de bebidas é a função objetivo deste problema de otimização, no qual as variáveis são os volumes de produção de cada produto em cada fábrica, sendo que dos 138 produtos desta empresa, 26 podem ser produzidos em mais de uma fábrica e o restante dos produtos é produzido em apenas uma fábrica. Como o custo de produção de um produto que tenha possibilidade de produção em mais de uma fábrica será diferente dependendo da fábrica na qual ele será produzido, o custo total de operação das fábricas para atender as demandas de produção poderá ser maior, ou menor, dependendo de como os volumes de produção de cada produto forem distribuídos durante o planejamento. Este trabalho tem o objetivo de encontrar a distribuição que garanta o menor custo, utilizando o Solver do Excel, que aplica o método Simplex para a resolução de problemas de programação linear, e a linguagem de programação Python, que apresenta o método Simplex, assim como o método de ponto interior, para o cálculo da otimização do sistema composto pela função de custos de produção e as restrições de limite de capacidade das fábricas e volume de demanda dos produtos. Os resultados obtidos após a otimização da produção de cada período apresentaram uma redução média dos custos iniciais de 9%, sendo que a redução total dos custos de produção considerando todos os períodos foi de R\$: 593.709,45.

## ABSTRACT

The sum of the operation costs of the 4 factories belonging to a beverage manufacturing company serves as the objective function in this optimization problem, in which the variables are the production volumes of each product in each factory. Of the 138 products that this company sells, 26 can be produced in many factories and the remaining products can only be produced in one factory. The production costs of a product that can be produced in many factories is different for each factory that can produce it. As a consequence of that, the total operation costs of a production that satisfies the consumer demands may be greater, or smaller depending on how the production volumes are distributed among the factories. This work has the objective of finding the distribution that presents the minimum cost. The Microsoft Excel Solver is used in this work, and it optimizes the system applying the Simplex method. The Python programming language was also used for solving the minimization problem, and it presents the options of applying the Simplex method, as well as the interior-point method. The results of the optimization show an average cost reduction corresponding to 9% of the initial costs and a total cost reduction of R\$: 593.709,45 considering the total production.

## SUMÁRIO

<b>Banca Examinadora.....</b>	<b>i</b>
<b>Agradecimentos.....</b>	<b>ii</b>
<b>Resumo.....</b>	<b>iii</b>
<b>Abstract.....</b>	<b>iv</b>
<b>Lista de Figuras.....</b>	<b>vi</b>
<b>Lista de Tabelas e Quadros.....</b>	<b>viii</b>
<b>1- INTRODUÇÃO E OBJETIVOS.....</b>	<b>1</b>
<b>2- REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....</b>	<b>3</b>
2.1- Otimização.....	3
2.2- Otimização Irrestrita com Uma Variável.....	4
2.3- Otimização Irrestrita com Múltiplas Variáveis.....	5
2.4- Programação Linear.....	6
2.5- Método Simplex.....	9
2.6- Método de Ponto Interior.....	13
2.7-Programação Não Linear.....	14
2.8- Programação Inteira Mista.....	15
<b>3- MATERIAL E MÉTODOS.....</b>	<b>18</b>
3.1- Materiais.....	18
3.2- Procedimento Experimental.....	18
3.3- Bases de Dados.....	20
3.4- Procedimento de Cálculo.....	20
<b>4- RESULTADOS.....</b>	<b>24</b>
<b>5- CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....</b>	<b>35</b>
<b>APÊNDICE A .....</b>	<b>37</b>
<b>APÊNDICE B .....</b>	<b>56</b>
<b>APÊNDICE C .....</b>	<b>64</b>
<b>APÊNDICE D .....</b>	<b>68</b>
<b>APÊNDICE E .....</b>	<b>70</b>
<b>APÊNDICE F .....</b>	<b>76</b>
<b>APÊNDICE G .....</b>	<b>85</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>106</b>

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 2.1</b>	<b>Maximização de uma função de uma variável irrestrita</b>	<b>4</b>
<b>Figura 2.2</b>	<b>Função Irrestrita de Duas Variáveis</b>	<b>5</b>
<b>Figura 2.3</b>	<b>Representação Gráfica de um Problema de Programação Não Linear</b>	<b>14</b>
<b>Figura 4.1</b>	<b>Resposta da Otimização de Todos os Períodos com Python Utilizando o Método de Ponto Interior</b>	<b>33</b>
<b>Figura 4.2</b>	<b>Resposta da Otimização de Todos os Períodos com Python Utilizando o Método Simplex</b>	<b>34</b>
<b>Figura B.1</b>	<b>Planilha de Volumes</b>	<b>56</b>
<b>Figura B.2</b>	<b>Planilha de Custos</b>	<b>57</b>
<b>Figura B.3</b>	<b>Planilha de Fábricas</b>	<b>57</b>
<b>Figura B.4</b>	<b>Planilha de Otimização</b>	<b>58</b>
<b>Figura B.5</b>	<b>Planilha de Apoio</b>	<b>59</b>
<b>Figura B.6</b>	<b>Primeira Seção da Macro Organiza Apoio</b>	<b>60</b>
<b>Figura B.7</b>	<b>Segunda Seção da Macro Organiza Apoio</b>	<b>61</b>
<b>Figura B.8</b>	<b>Terceira Seção da Macro Organiza Apoio</b>	<b>62</b>
<b>Figura B.9</b>	<b>Planilha Apoio Após a Primeira Etapa</b>	<b>63</b>
<b>Figura C.1</b>	<b>Primeira Seção da Macro Matriz Otimização</b>	<b>64</b>
<b>Figura C.2</b>	<b>Segunda Seção da Macro Matriz Otimização</b>	<b>65</b>
<b>Figura C.3</b>	<b>Terceira Seção da Macro Matriz Otimização</b>	<b>66</b>
<b>Figura C.4</b>	<b>Planilha de Otimização Após a Segunda Etapa</b>	<b>67</b>
<b>Figura D.1</b>	<b>Ajustes de Parâmetros do Solver</b>	<b>68</b>
<b>Figura D.2</b>	<b>Resultado Obtido pelo Solver</b>	<b>69</b>
<b>Figura E.1</b>	<b>Parte 1 da Planilha Comparação Antes da Quarta Etapa</b>	<b>70</b>
<b>Figura E.2</b>	<b>Parte 2 da Planilha Comparação Antes da Quarta Etapa</b>	<b>71</b>
<b>Figura E.3</b>	<b>Primeira Seção da Macro Tabela Comparação</b>	<b>72</b>
<b>Figura E.4</b>	<b>Segunda Seção da Macro Tabela Comparação</b>	<b>73</b>
<b>Figura E.5</b>	<b>Terceira Seção da Macro Tabela Comparação</b>	<b>74</b>
<b>Figura E.6</b>	<b>Quarta Seção da Macro Tabela Comparação</b>	<b>74</b>
<b>Figura E.7</b>	<b>Parte 1 da Planilha Comparação Após a Quarta Etapa</b>	<b>75</b>
<b>Figura E.8</b>	<b>Parte 2 da Planilha Comparação Após a Quarta Etapa</b>	<b>75</b>
<b>Figura F.1</b>	<b>Importação das Bibliotecas no Jupyter Notebook</b>	<b>76</b>

<b>Figura F.2</b>	<b>Importação da Planilha Volumes no Jupyter Notebook</b>	<b>76</b>
<b>Figura F.3</b>	<b>Importação da Planilha Custo por Produto no Jupyter Notebook</b>	<b>77</b>
<b>Figura F.4</b>	<b>Importação da Planilha Fábricas no Jupyter Notebook</b>	<b>77</b>
<b>Figura F.5</b>	<b>Cálculo da Tabela de Produtos Otimizáveis</b>	<b>78</b>
<b>Figura F.6</b>	<b>Cálculo da Tabela de Capacidade Total das Fábricas</b>	<b>78</b>
<b>Figura F.7</b>	<b>Cálculo da Tabela de Produtos Otimizáveis</b>	<b>79</b>
<b>Figura F.8</b>	<b>Cálculo do Vetor de Custos Reduzidos</b>	<b>80</b>
<b>Figura F.9</b>	<b>Cálculo do Vetor de Demandas</b>	<b>80</b>
<b>Figura F.10</b>	<b>Cálculo do Número e Variáveis e Restrições</b>	<b>81</b>
<b>Figura F.11</b>	<b>Cálculo das Listas de Chaves, Produtos Demandados e Fábricas</b>	<b>81</b>
<b>Figura F.12</b>	<b>Cálculo da Matriz de Coeficientes das Inequações</b>	<b>82</b>
<b>Figura F.13</b>	<b>Cálculo da Matriz de Coeficientes das Restrições de Igualdade</b>	<b>83</b>
<b>Figura F.14</b>	<b>Cálculo da Otimização da Função Objetivo no Jupyter Notebook</b>	<b>83</b>



## LISTA DE TABELAS E QUADROS

### LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 4.1</b>	<b>Comparação dos Custos Totais para o Período 1</b>	<b>24</b>
<b>Tabela 4.2</b>	<b>Comparação dos Custos Totais para o Período 2</b>	<b>25</b>
<b>Tabela 4.3</b>	<b>Comparação dos Custos Totais para o Período 3</b>	<b>26</b>
<b>Tabela 4.4</b>	<b>Comparação dos Custos Totais para o Período 4</b>	<b>26</b>
<b>Tabela 4.5</b>	<b>Comparação dos Custos Totais para o Período 5</b>	<b>27</b>
<b>Tabela 4.6</b>	<b>Comparação dos Custos Totais para o Período 6</b>	<b>28</b>
<b>Tabela 4.7</b>	<b>Comparação dos Custos Totais para Todos os Períodos</b>	<b>28</b>
<b>Tabela 4.8</b>	<b>Volumes, Capacidades e Custos Iniciais e Otimizados para as Fábricas Considerando Todos Períodos</b>	<b>29</b>
<b>Tabela 4.9</b>	<b>Redução de Custos para Todos Períodos Detalhado por Produto Pt. 1</b>	<b>30</b>
<b>Tabela 4.10</b>	<b>Distribuição Inicial e Otimizada para Todos Períodos Pt. 1</b>	<b>31</b>
<b>Tabela 4.11</b>	<b>Distribuição Inicial e Otimizada para Todos Períodos Pt. 2</b>	<b>32</b>
<b>Tabela A.1</b>	<b>Volumes de Produção dos Produtos em cada Fábrica no Período 1 Parte 1</b>	<b>37</b>
<b>Tabela A.2</b>	<b>Volumes de Produção dos Produtos em cada Fábrica no Período 1 Parte 2</b>	<b>38</b>
<b>Tabela A.3</b>	<b>Volumes de Produção dos Produtos em cada Fábrica no Período 2 Parte 1</b>	<b>39</b>
<b>Tabela A.4</b>	<b>Volumes de Produção dos Produtos em cada Fábrica no Período 2 Parte 2</b>	<b>40</b>
<b>Tabela A.5</b>	<b>Volumes de Produção dos Produtos em cada Fábrica no Período 3 Parte 1</b>	<b>41</b>
<b>Tabela A.6</b>	<b>Volumes de Produção dos Produtos em cada Fábrica no Período 3 Parte 2</b>	<b>42</b>
<b>Tabela A.7</b>	<b>Volumes de Produção dos Produtos em cada Fábrica no Período 4 Parte 1</b>	<b>43</b>
<b>Tabela A.8</b>	<b>Volumes de Produção dos Produtos em cada Fábrica no Período 4 Parte 2</b>	<b>44</b>

<b>Tabela A.9</b>	<b>Volumes de Produção dos Produtos em cada Fábrica no Período 5 Parte 1</b>	<b>44</b>
<b>Tabela A.10</b>	<b>Volumes de Produção dos Produtos em cada Fábrica no Período 5 Parte 2</b>	<b>45</b>
<b>Tabela A.11</b>	<b>Volumes de Produção dos Produtos em cada Fábrica no Período 6 Parte 1</b>	<b>46</b>
<b>Tabela A.12</b>	<b>Volumes de Produção dos Produtos em cada Fábrica no Período 6 Parte 2</b>	<b>47</b>
<b>Tabela A.13</b>	<b>Volumes de Produção dos Produtos em cada Fábrica em todos Períodos Parte 1</b>	<b>47</b>
<b>Tabela A.14</b>	<b>Volumes de Produção dos Produtos em cada Fábrica em todos Períodos Parte 2</b>	<b>48</b>
<b>Tabela A.15</b>	<b>Volumes de Produção dos Produtos em cada Fábrica em todos Períodos Parte 3</b>	<b>49</b>
<b>Tabela A.16</b>	<b>Volumes de Produção dos Produtos em cada Fábrica em todos Períodos Parte 4</b>	<b>50</b>
<b>Tabela A.17</b>	<b>Volumes de Produção dos Produtos em cada Fábrica em todos Períodos Parte 5</b>	<b>51</b>
<b>Tabela A.18</b>	<b>Produção por Fábrica por Período</b>	<b>51</b>
<b>Tabela A.19</b>	<b>Custo de Produção Por Fábrica Parte 1</b>	<b>52</b>
<b>Tabela A.20</b>	<b>Custo de Produção Por Fábrica Parte 2</b>	<b>53</b>
<b>Tabela A.21</b>	<b>Custo de Produção Por Fábrica Parte 3</b>	<b>54</b>
<b>Tabela A.22</b>	<b>Custo de Produção Por Fábrica Parte 4</b>	<b>55</b>
<b>Tabela G.1</b>	<b>Volumes, Capacidades e Custos Iniciais e Otimizados das Fábricas Para o Período 1</b>	<b>85</b>
<b>Tabela G.2</b>	<b>Volumes, Capacidades e Custos Iniciais e Otimizados das Fábricas Para o Período 2</b>	<b>85</b>
<b>Tabela G.3</b>	<b>Volumes, Capacidades e Custos Iniciais e Otimizados das Fábricas Para o Período 3</b>	<b>86</b>
<b>Tabela G.4</b>	<b>Volumes, Capacidades e Custos Iniciais e Otimizados das Fábricas Para o Período 4</b>	<b>86</b>
<b>Tabela G.5</b>	<b>Volumes, Capacidades e Custos Iniciais e Otimizados das Fábricas Para o Período 5</b>	<b>87</b>

<b>Tabela G.6</b>	<b>Volumes, Capacidades e Custos Iniciais e Otimizados das Fábricas Para o Período 6</b>	<b>87</b>
<b>Tabela G.7</b>	<b>Redução de Custos para o Período 1 Detalhado por Produto</b>	<b>88</b>
<b>Tabela G.8</b>	<b>Redução de Custos para o Período 2 Detalhado por Produto</b>	<b>89</b>
<b>Tabela G.9</b>	<b>Redução de Custos para o Período 3 Detalhado por Produto</b>	<b>90</b>
<b>Tabela G.10</b>	<b>Redução de Custos para o Período 4 Detalhado por Produto</b>	<b>91</b>
<b>Tabela G.11</b>	<b>Redução de Custos para o Período 5 Detalhado por Produto</b>	<b>92</b>
<b>Tabela G.12</b>	<b>Redução de Custos para o Período 6 Detalhado por Produto</b>	<b>93</b>
<b>Tabela G.13</b>	<b>Distribuição Inicial e Otimizada para o Período 1 Parte 1</b>	<b>94</b>
<b>Tabela G.14</b>	<b>Distribuição Inicial e Otimizada para o Período 1 Parte 2</b>	<b>95</b>
<b>Tabela G.15</b>	<b>Distribuição Inicial e Otimizada para o Período 2 Parte 1</b>	<b>96</b>
<b>Tabela G.16</b>	<b>Distribuição Inicial e Otimizada para o Período 2 Parte 2</b>	<b>97</b>
<b>Tabela G.17</b>	<b>Distribuição Inicial e Otimizada para o Período 3 Parte 1</b>	<b>98</b>
<b>Tabela G.18</b>	<b>Distribuição Inicial e Otimizada para o Período 3 Parte 2</b>	<b>99</b>
<b>Tabela G.19</b>	<b>Distribuição Inicial e Otimizada para o Período 4 Parte 1</b>	<b>100</b>
<b>Tabela G.20</b>	<b>Distribuição Inicial e Otimizada para o Período 4 Parte 2</b>	<b>101</b>
<b>Tabela G.21</b>	<b>Distribuição Inicial e Otimizada para o Período 5 Parte 1</b>	<b>102</b>
<b>Tabela G.22</b>	<b>Distribuição Inicial e Otimizada para o Período 5 Parte 2</b>	<b>103</b>
<b>Tabela G.23</b>	<b>Distribuição Inicial e Otimizada para o Período 6 Parte 1</b>	<b>104</b>
<b>Tabela G.24</b>	<b>Distribuição Inicial e Otimizada para o Período 6 Parte 2</b>	<b>105</b>

## 1- INTRODUÇÃO E OBJETIVOS

Em uma empresa de bebidas, o processo de planejamento da produção envolve a interação entre as áreas de logística, comercial e industrial. A previsão de demanda de consumo de cada produto é estimada pela área comercial, que passa esta informação para a área de logística que, com base nos dados de estoque disponível de cada produto nos armazéns do centro de distribuição, determina a demanda de produção de cada produto.

Estão relacionados aos custos de produção de cada produto as matérias primas utilizadas na produção das bebidas, as embalagens, que podem ser garrafas, ou latas de diferentes volumes, as caixas nas quais os produtos serão transportados, a eletricidade utilizada na operação da fábrica, o combustível utilizado para a geração de vapor, a água utilizada tanto na composição das bebidas, quanto para limpeza da fábrica, o pagamento dos salários da equipe de produção das fábricas e o consumo dos materiais intermediários de processo, que são insumos de processo que não fazem parte da composição final do produto acabado, como por exemplo o material utilizado como meio filtrante na etapa de filtração do produto.

Durante o planejamento da produção, a demanda de produção de cada produto, informada pela área de logística, deve ser atendida. Para atender esta demanda, os produtos demandados que tem apenas uma unidade como possível fabricante são incluídos no planejamento, ocupando uma parte da capacidade produtiva das fábricas, e em seguida os volumes das bebidas que podem ser produzidas em mais de uma fábrica são distribuídos de modo que a capacidade máxima de produção de nenhuma fábrica seja ultrapassada. Nesta etapa em que é planejada a alocação dos volumes de demanda destes produtos que tem flexibilidade de produção, surgem diferentes possibilidades de distribuição destes volumes de produção entre as fábricas que satisfazem as restrições de demanda dos produtos e de limite de capacidade das fábricas. Para cada uma destas possíveis distribuições, o custo total de produção, que é composto pela soma dos custos de produção de todos os produtos, assumirá um valor diferente. A motivação deste trabalho é encontrar, dentre as diversas possibilidades, a distribuição dos volumes demandados destes produtos com flexibilidade de produção, que além de atender às especificidades do problema de alocação da produção desta empresa, também garanta o menor custo possível.

Dentre as diferentes categorias de problemas de otimização apresentadas, o problema analisado por este trabalho, de minimização dos custos de produção de bebidas, sujeito às restrições de demanda dos produtos e de capacidade máxima das fábricas, é classificado como um problema de programação linear, pois apresenta uma função objetivo linear e restrições

também lineares. Visto que esta é a categoria na qual o problema tratado neste trabalho se encaixa, a apresentação da programação linear no capítulo de revisão bibliográfica será mais aprofundada, visando cobrir a origem deste tipo de método de otimização, apresentar as definições dos modelos matemáticos que descrevem este tipo de problema, além de ilustrar a aplicação deste método com exemplos de diferentes áreas, e apresentar o método de resolução de problemas de programação linear conhecido como Simplex. Portanto, este trabalho apresenta como objetivo comparar os custos resultantes da alocação da produção desta empresa com os custos obtidos como resultado da aplicação do método de otimização de programação linear, calculados considerando as demandas de cada produto e as capacidades das fábricas em cada período de produção.

## 2- REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Esta revisão se concentra na apresentação do conceito de otimização e algumas possíveis classificações de problemas de otimização, contendo desde problemas mais simples como a otimização de funções irrestritas com uma única variável, até problemas com maior complexidade. O aumento de complexidade dos problemas de otimização pode ocorrer com a introdução de funções que tenham múltiplas variáveis, como também pela inclusão de outras equações e inequações além da função que se deseja maximizar, ou minimizar. Estas equações e inequações são chamadas de restrições, e poderão aparecer quando o problema de otimização apresentar condições específicas que devem ser seguidas e para as quais o valor ótimo da função objetivo deve ser encontrado. Os problemas de otimização também podem ser classificados como problemas lineares, ou não lineares, de acordo com a natureza das funções que representam o objetivo e as restrições do problema (EDGAR, HIMMELBLAU e LASDON, 2001).

### 2.1- Otimização

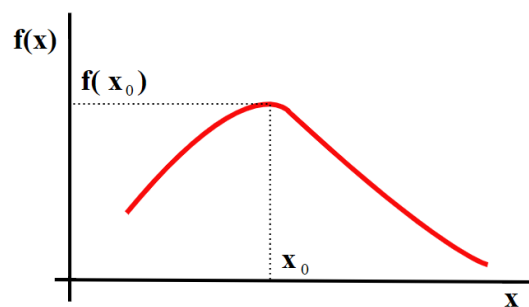
O uso cotidiano do termo otimização é frequentemente relacionado à melhoria de uma atividade, implicando muitas vezes em mudanças nas condições de execução desta atividade de modo que como consequência, o resultado obtido desta atividade após a mudança seja mais favorável. O uso do termo otimização está presente em variados ambientes e contextos, muitas vezes fazendo com que uma mesma expressão possa ter interpretações distintas. Um exemplo disto é a expressão otimização de tempo, que, no contexto da gestão de uma equipe em uma fábrica, pode receber o significado de organizar uma agenda de atividades, visando aumentar a produtividade. No entanto, a definição de otimização que é a adotada neste trabalho assume uma dimensão mais técnica e está relacionada à solução de problemas nos quais deseja-se maximizar, ou minimizar o valor de uma função alterando os valores de suas variáveis.

Esta função que se deseja otimizar é denominada função objetivo. Os problemas de otimização também podem apresentar restrições na forma de equações e inequações, que constituem o modelo do processo. Segundo a definição apresentada por Edgar, Himmelblau e Lasdon (2001, p. 4, tradução nossa) “Otimização é o uso de métodos específicos para determinar a solução para um problema, ou design para um processo, que seja mais rentável e eficiente. Esta técnica é uma das maiores ferramentas quantitativas na tomada de decisões na indústria”. Nas próximas seções serão abordados vários tipos de problemas de otimização.

## 2.2- Otimização Irrestrita com Uma Variável

Um problema de otimização é classificado como irrestrito quando a única função presente no problema é a função objetivo, não havendo restrições que representem um modelo de processo, ou algum limite no valor que uma variável poderá assumir. Um bom método de otimização de uma função de uma variável é essencial, porque alguns problemas que podem ser encontrados serão inerentemente problemas de uma única variável, e também porque outros métodos para a otimização de funções restritas, ou irrestritas envolvem o uso de uma busca unidimensional (EDGAR, HIMMELBLAU e LASDON, 2001) A figura 2.1 representa graficamente um problema de otimização irrestrita com uma variável.

**Figura 2.1. Maximização de uma função de uma variável irrestrita**



**Fonte: Wikimedia Commons<sup>1</sup>**

Antes da criação de computadores de alta velocidade, os métodos utilizados para a otimização de funções eram limitados aos métodos analíticos. Estes métodos analíticos utilizam os valores da função objetivo, suas derivadas analíticas e condições necessárias como base para encontrar um potencial extremo da função. Os computadores modernos tornaram possível a aplicação de métodos numéricos iterativos que utilizam os valores da função objetivo e de derivadas numéricas em uma sequência de pontos. Alguns métodos apresentados por Edgar, Himmelblau e Lasdon (2001) que podem ser utilizados para encontrar a solução deste tipo de problema de otimização são os métodos de Newton, Quase-Newton, aproximação do método de Newton por diferenças finitas, e métodos de aproximação polinomial, como os métodos de interpolação quadrática e interpolação cúbica. Estes métodos de otimização de funções de uma variável recebem o nome de métodos de busca unidimensional.

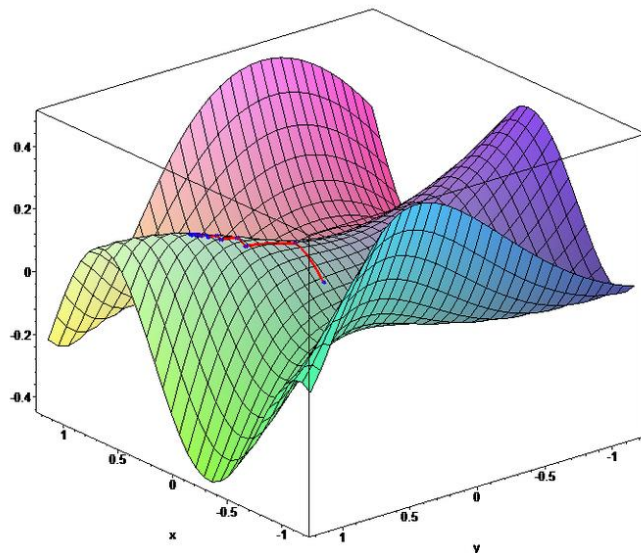
---

<sup>1</sup>Disponível em: < <https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Optimization> > Acesso em Out. 2020.

### 2.3- Otimização Irrestrita com Múltiplas Variáveis

A resolução de problemas de otimização com múltiplas variáveis pode se tornar uma tarefa complexa, pois uma função não linear de múltiplas variáveis pode apresentar regiões de concavidade e de convexidade, pontos de sela, máximos e mínimos locais, como ilustrado na Figura 2.2, que representa uma função de duas variáveis. Os métodos de otimização para estes tipos de problema devem apresentar duas características, sendo elas robustez e eficiência (EDGAR, HIMMELBLAU e LASDON, 2001).

**Figura 2.2. Função Irrestrita de Duas Variáveis**



Fonte: Wikimedia Commons<sup>1</sup>

A característica de robustez, que pode ser definida como a capacidade de atingir uma solução, se faz necessária para estes métodos de otimização de funções não lineares devido a comportamentos imprevisíveis que a função pode apresentar, que são consequência da presença de regiões de convexidade e concavidade, pontos de sela e múltiplos pontos de máximos e mínimos locais, como citado anteriormente. Já a característica de eficiência é necessária porque, como estes problemas de otimização requerem o uso de processos iterativos, a iteração por meio de métodos de tentativa e erro se torna inviável para a obtenção de uma solução quando há múltiplas variáveis no problema (EDGAR, HIMMELBLAU e LASDON, 2001).

São apresentados por Edgar, Himmelblau e Lasdon (2001) quatro tipos de métodos de otimização que podem ser utilizados para encontrar a solução deste tipo de problema, e que são divididos em métodos que utilizam apenas valores da função objetivo, métodos que usam a



primeira derivada da função do problema, método de Newton, e método Quase-Newton. Os procedimentos iterativos que compõem estes métodos partem de um ponto inicial da função objetivo, seguindo dois passos. O primeiro é escolher uma direção de busca, o segundo é minimizar a função objetivo nesta direção de busca para encontrar um novo ponto que será o ponto de partida da iteração seguinte. Além disso, também é necessário estabelecer um critério de convergência para o término das iterações. Os diferentes métodos de otimização de funções irrestritas de múltiplas variáveis diferem principalmente em como geram direções de busca, sendo que após encontrar a direção, podem ser empregados os métodos de busca unidimensional apresentados anteriormente.

## **2.4- Programação Linear**

O método de otimização conhecido como programação linear foi criado pelo matemático George Dantzig, e seu desenvolvimento foi feito enquanto ele trabalhava na força aérea dos Estados Unidos. No intuito de desenvolver estratégias para ganhar a segunda guerra mundial, diversos cientistas foram contratados para trabalhar para o governo americano desenvolvendo soluções para os problemas e desafios enfrentados pelos EUA no período. O contexto de guerra exigia que os países envolvidos no conflito direcionassem seus recursos para obter a vitória, e isto significava direcionar o uso de recursos naturais e a produção industrial para a guerra, como também gerenciar as atividades das tropas. Diante dessa necessidade de decisão de como alocar recursos com maior eficiência para atingir um objetivo, surgem inúmeras possibilidades de alocação, e frente a estas inúmeras possibilidades, a tomada de decisão pode se tornar difícil, por não conseguir avaliar as inúmeras possibilidades e escolher a que seja melhor. Ao se debruçar nos problemas apresentados na força aérea, buscando uma maneira de encontrar a melhor solução dentre as possibilidades, George Dantzig formulou o método de otimização conhecido como programação linear e o método Simplex. Um exemplo que ilustra um tipo de problema militar que pode ser resolvido por programação linear é encontrado no trabalho de Dantzig e Thapa (1997).

O problema apresentado pelos autores busca organizar 70 homens para a realização de 70 tarefas diferentes. Existem 4900 combinações distintas para isso. Para representar o benefício obtido da realização de uma tarefa  $j$ , é definida uma variável  $v_{ij}$ , que representa a realização da tarefa  $j$  pelo homem  $i$ . Este problema também apresenta duas condições que devem ser cumpridas. Nenhum homem poderá ficar sem tarefa, assim como não poderá haver nenhuma tarefa sem um homem alocado. Deste modo, como existem 70 homens e 70 tarefas

disponíveis no problema, para cada homem e cada tarefa haverá uma restrição, resultando em 140 restrições que devem ser satisfeitas. Além de satisfazer a todas as restrições, a solução final esperada após a otimização deste problema deve garantir o maior benefício possível. O benefício obtido da distribuição dos 70 homens nas 70 tarefas pode ser expresso como a soma das variáveis  $v_{ij}$ . O que se busca com esta otimização é encontrar a distribuição que maximize o benefício, ou seja, a função objetivo do problema. Infelizmente, existem  $70!$  distribuições possíveis, sendo que cada uma destas entregará um valor do benefício total. O problema se torna comparar os  $70!$  casos distintos e escolher dentre eles o que apresentar o maior valor da função objetivo. Acontece que  $70!$  é um número grande, maior do que  $10^{100}$ . Supondo que houvesse um computador capaz de realizar um milhão de cálculos por segundo em operação desde o Big Bang 15 bilhões de anos atrás até hoje, mesmo assim ele ainda não teria calculado o resultado de todas as possíveis combinações (DANTZIG e THAPA, 1997).

Este exemplo consegue demonstrar, com a história de um caso relativamente simples, a dificuldade encontrada ao lidar com sistemas que tenham muitas variáveis. Pode-se ver através deste exemplo, qual é a relevância do desenvolvimento da programação linear para a resolução de problemas complexos. No período de desenvolvimento da programação linear, os computadores estavam começando a ser desenvolvidos e como foi visto no exemplo apresentado, nem mesmo um computador poderia resolver este problema, caso dependesse de calcular o resultado para cada arranjo possível. Assim, a contribuição de George Dantzig com o estudo do método da programação linear para a resolução de problemas de otimização foi a de desenvolver um algoritmo que consiga garantir uma solução ótima sem que seja necessário calcular o resultado de todas as possíveis soluções de um problema (DANTZIG e THAPA, 1997).

Na definição apresentada no trabalho de Dantzig e Thapa (1997, p. 1, tradução nossa) “A programação linear se ocupa da maximização, ou minimização de uma função objetivo linear com múltiplas variáveis, sujeitas a equações e inequações lineares como restrições”. Outra afirmação sobre a programação linear é encontrada na obra de Edgar, Himmelblau e Lasdon (2001, p.223, tradução nossa) “A programação linear é um dos métodos de otimização mais amplamente usados e talvez o mais efetivo”.

Uma maneira de expressar um problema de programação linear em sua forma mais geral, é apresentada por Dantzig e Thapa (1997): A função objetivo que se deseja minimizar e as restrições do problema são expressas pelas equações 2.1, 2.2 e 2.3.

$$c^T x = z \quad (2.1)$$

$$Ax = b, \quad A: m \times n \quad (2.2)$$

$$x \geq 0 \quad (2.3)$$

Nesta definição geral do problema,  $c$ ,  $x$  e  $b$  são vetores, sendo que  $c$  e  $x$  tem  $n$  elementos e  $b$  tem  $m$  elementos, enquanto  $A$  é uma matriz de tamanho  $m$  por  $n$ , onde  $m$  é o número de restrições e  $n$  o número de variáveis do problema. Uma representação análoga deste problema na forma matricial é apresentada na Equação 2.4.

$$\begin{array}{cccccc} c_1 x_1 + & c_2 x_2 + & \dots + & c_n x_n & = & z \\ a_{11} x_1 + & a_{12} x_2 + & \dots + & a_{1n} x_n & = & b_1 \\ a_{21} x_1 + & a_{22} x_2 + & \dots + & a_{2n} x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} x_1 + & a_{m2} x_2 + & \dots + & a_{mn} x_n & = & b_m \end{array} \quad (2.4)$$

Alguns exemplos práticos de problemas que a programação linear consegue resolver são apresentados por Edgar, Himmelblau e Lasdon (2001). Os autores citam problemas como o de organizar uma equipe de produção em uma programação de turnos que garanta que em todos os dias da semana há um número adequado de trabalhadores e que a produtividade seja a maior possível, decidir quais produtos devem ser fabricados em um dado período, considerando a disponibilidade de recursos presentes e os custos desses recursos para obter a receita máxima, e projetar um plano de distribuição dos produtos entre diferentes plantas e armazéns, de modo que esta rede de distribuição tenha um custo total mínimo.

## 2.5- Método Simplex

O método simplex é definido por Edgar, Himmelblau e Lasdon (2001) como um método de otimização de duas fases, sendo que a fase 1 encontra uma solução inicial viável para o problema de programação linear, caso exista uma solução, e então esta solução inicial será utilizada como ponto de partida para a fase 2. Na segunda fase, após encontrar uma solução

para o sistema linear de equações compostas pela função objetivo e o conjunto de restrições, encontra-se a solução que maximize, ou minimize a função objetivo. O algoritmo Simplex pode ser aplicado tanto na fase 1 quanto na fase 2 do método de otimização, sendo que a sua aplicação na primeira fase se faz necessária quando uma solução básica viável para o problema não é conhecida, ou facilmente encontrada, como no caso de problemas com duas variáveis.

Para dar início ao processo de otimização da função objetivo utilizando o algoritmo Simplex, é necessário partir de uma solução básica viável do sistema de equações que representa o problema analisado. O algoritmo Simplex sempre é iniciado com um sistema de equações na forma canônica, que é representado na Equação 2.5, utilizando como exemplo o problema geral de minimização de uma função custo apresentado anteriormente pelas equações 2.1, 2.2 e 2.3. De acordo com a definição apresentada em Dantzig e Thapa (1997, p. 66, tradução nossa), “um sistema de  $m$  equações e  $n$  variáveis  $x_{ij}$  está na forma canônica quanto a um conjunto ordenado de variáveis  $(x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jm})$  se, e apenas se, a variável  $x_{ij}$  tiver um coeficiente unitário na equação  $i$  e coeficientes iguais a zero em todas as outras equações do sistema”.

$$\begin{array}{rcccccccc}
 -z & & & + \bar{c}_{m+1} x_{m+1} + & \dots + & \bar{c}_j x_j & + \dots + & \bar{c}_n x_n & = & -\bar{z}_0 \\
 x_1 & & & + \bar{a}_{1,m+1} x_{m+1} + & \dots + & \bar{a}_{1j} x_j & + \dots + & \bar{a}_{1n} x_n & = & \bar{b}_1 \\
 & x_2 & & + \bar{a}_{2,m+1} x_{m+1} + & \dots + & \bar{a}_{2j} x_j & + \dots + & \bar{a}_{2n} x_n & = & \bar{b}_2 \\
 & & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & & x_m & + \bar{a}_{m,m+1} x_{m+1} + & \dots + & \bar{a}_{mj} x_j & + \dots + & \bar{a}_{mn} x_n & = & \bar{b}_m
 \end{array} \quad (2.5)$$

Na forma canônica, uma solução para o sistema é facilmente encontrada, basta assumir que o valor das variáveis  $x_j$  de  $x_{m+1}$  a  $x_n$  é zero, pois assim, a solução deste sistema será  $z = \bar{z}_0$ ,  $x_j = \bar{b}_i$ , com  $i$  variando de 1 a  $m$ . Para que a solução encontrada seja uma solução básica viável, é necessário que não haja nenhuma variável  $x_j < 0$ , o que só ocorrerá num sistema na forma canônica caso algum dos valores de  $\bar{b}_i$  seja negativo. Por este motivo, é necessário manipular as equações das restrições de modo que nenhum  $\bar{b}_i$  seja negativo. As variáveis que apresentam valor igual a zero nesta solução são denominadas variáveis não básicas, e as variáveis que apresentam valor igual a  $\bar{b}_i$  são as variáveis básicas. Outra definição apresentada por Dantzig e Thapa (1997) é a de solução degenerada, que é a classificação para a solução básica na qual ao menos uma variável básica tem valor igual a zero. Na prática, isso ocorrerá quando ao menos uma constante  $\bar{b}_i$  apresentar valor igual a zero.

Em muitos casos práticos de otimização, o sistema de equações que representa o problema não se encontra na forma canônica. Nestes casos, se torna necessário na fase 1

introduzir variáveis artificiais cada uma das restrições do sistema e definir uma função que será a soma de todas as variáveis artificiais, para que seja utilizado o algoritmo Simplex que irá encontrar uma solução básica que será tomada como ponto de partida da otimização na fase 2. Utilizando como exemplo o problema geral de minimização apresentado anteriormente, pode-se definir uma variável artificial para cada restrição a partir da equação 2.6 representada a seguir:

$$y_i = b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \quad (2.6)$$

Após adicionar as variáveis artificiais ao sistema, outro passo necessário para encontrar uma solução básica viável inicial é incluir uma função  $w$  que seja a soma de todas as variáveis artificiais. Na fase 1 esta função desempenha o papel que a função objetivo tem na segunda fase. O algoritmo Simplex é utilizado na primeira fase para minimizar a função  $w$  até que seu valor se torne zero, para então encontrar uma solução básica viável que será utilizada na otimização da função objetivo na fase 2. A função  $w$  é representada pela equação 2.7.

$$w = \sum_{i=1}^m y_i, \quad i = (1, \dots, m) \quad (2.7)$$

Caso o valor de  $w$  ao fim da primeira fase seja maior que zero, não há solução viável para o problema de otimização (DANTZIG e THAPA, 1997). O sistema formado pela equação 2.7, sujeito às restrições 2.2 e 2.3, com adição das variáveis artificiais, pode ser escrito na forma matricial, como ilustrado na Equação 2.8.

$$\begin{array}{rcccccccc} -w & + d_1x_1 & + d_2x_2 + \dots + & d_nx_n & & & & = -\bar{w}_0 \\ & + a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 + \dots + & a_{1n}x_n & + y_1 & & & = b_1 \\ & + a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 + \dots + & a_{2n}x_n & + y_2 & & & = b_2 \\ & \vdots & & & & \ddots & & \\ & + a_{m1}x_1 & + a_{m2}x_2 + \dots + & a_{mn}x_n & + y_m & & & = b_m \end{array} \quad (2.8)$$

Como é mostrado na equação acima, para que o sistema esteja na forma canônica, a equação  $w$  deve ser reescrita em função das variáveis não artificiais, a partir da substituição da equação 2.4 na equação 2.5 apresentadas anteriormente. Esta substituição resultará nos coeficientes  $d_j$ , que terão um papel importante na fase 1 do método de otimização. Os coeficientes  $d_j$ , assim como os coeficientes  $c_j$  da função objetivo, são chamados de fatores de

custo relativo, ou custos reduzidos e seus valores definirão a escolha de qual variável não básica se tornará uma variável básica a partir das operações pivô do método Simplex.

O algoritmo do método Simplex é descrito em 6 passos por Dantzig e Thapa (1997). O primeiro passo consiste em encontrar o menor custo reduzido. Na Equação 2.9, a coluna que contém o menor custo reduzido é evidenciada na representação do sistema na forma canônica, onde  $d_s = \min(d_j)$ , considerando o exemplo analisado como um problema geral de minimização, após a adição das variáveis artificiais. O segundo passo é o teste de otimalidade: se o menor custo reduzido for maior que zero, a solução é ótima. O terceiro passo é o de seleção da variável de entrada: Esta é a variável não básica que se tornará básica nesta iteração do método Simplex, representada por  $x_s$ , cujo coeficiente na função objetivo é o menor custo reduzido.

$$\begin{array}{rcccccccc}
 -w & +d_1x_1 + \dots + & d_sx_s + \dots + & d_nx_n + & & & & = -\bar{w}_0 \\
 & +a_{11}x_1 + \dots + & a_{1s}x_s + \dots + & a_{1n}x_n + & y_1 & & & = b_1 \\
 & +a_{21}x_1 + \dots + & a_{2s}x_s + \dots + & a_{2n}x_n + & & y_2 & & = b_2 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\
 & +a_{m1}x_1 + \dots + & a_{ms}x_s + \dots + & a_{mn}x_n + & & & y_m & = b_m
 \end{array} \quad (2.9)$$

O quarto passo é o passo de teste da função objetivo ilimitada: Deve-se modificar o sistema, subtraindo os termos que contém a variável  $x_s$  de ambos os lados de todas as equações do sistema, como ilustra a Equação 2.8, de modo que, tornando todas as variáveis não básicas iguais a zero, exceto  $x_s$ , a solução do sistema será o conjunto de equações em função de  $x_s$ . Para que a função de otimização seja ilimitada, basta que o seu valor tenda a  $-\infty$  enquanto o valor de  $x_s$  tende a  $\infty$ .

$$\begin{array}{rcccccccc}
 -w & +d_1x_1 + \dots + & d_2x_2 + \dots + & d_nx_n + & & & & = -\bar{w}_0 - d_sx_s \\
 & +a_{11}x_1 + \dots + & a_{12}x_2 + \dots + & a_{1n}x_n + & y_1 & & & = b_1 - a_{1s}x_s \\
 & +a_{21}x_1 + \dots + & a_{22}x_2 + \dots + & a_{2n}x_n + & & y_2 & & = b_2 - a_{2s}x_s \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\
 & +a_{m1}x_1 + \dots + & a_{m2}x_2 + \dots + & a_{mn}x_n + & & & y_m & = b_m - a_{ms}x_s
 \end{array} \quad (2.10)$$

No quinto passo é feita a seleção da variável de saída: esta é a variável básica que se tornará não básica nesta iteração. Enquanto na função objetivo o valor de  $x_s$  pode crescer ilimitadamente, as restrições do problema podem apresentar limites de valores que  $x_s$  poderá assumir. Isto ocorre porque ao introduzir as variáveis do problema, e as variáveis artificiais, é colocada a condição de que nenhuma delas seja negativa. Para que esta condição seja respeitada,

deve-se conferir as restrições e encontrar o maior valor de  $x_s$  que satisfaça a condição de não negatividade de todas as variáveis básicas. Como para o início do algoritmo Simplex é necessário que os valores de  $b_i$  sejam não negativos em todas as restrições, o limite de  $x_s$  para que a condição de não negatividade de uma variável básica seja satisfeita depende apenas do valor do coeficiente  $a_{is}$ , sendo que o valor que  $x_s$  pode assumir é ilimitado nesta restrição caso  $a_{is} \leq 0$ , ou limitado caso  $a_{is} > 0$ . O valor limite de  $x_s$  em cada restrição é encontrado a partir da equação 2.9, a seguir:

$$r_{is} = \frac{b_i}{a_{is}} \quad (2.11)$$

A linha da variável de saída escolhida neste passo é aquela que está dentre as que apresentam  $a_{is} > 0$ , mas apresenta também o valor mínimo de  $r_{is}$ . A Equação 2.10 ilustra a variável de saída  $y_r$  no exemplo de minimização que está sendo acompanhado:

$$\begin{array}{rcccccccc} -w & +d_1x_1 + \dots + & d_sx_s + \dots + & d_nx_n + & & & & = -\bar{w}_0 \\ & +a_{11}x_1 + \dots + & a_{1s}x_s + \dots + & a_{1n}x_n + & y_1 & & & = b_1 \\ & +a_{21}x_1 + \dots + & a_{2s}x_s + \dots + & a_{2n}x_n + & & y_2 & & = b_2 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & & \\ & +a_{r1}x_1 + \dots + & a_{rs}x_s + \dots + & a_{rn}x_n + & & & y_r & = b_r \\ & \vdots & \vdots & \vdots & & & \ddots & \\ & +a_{m1}x_1 + \dots + & a_{ms}x_s + \dots + & a_{mn}x_n + & & & & y_m = b_m \end{array} \quad (2.12)$$

O sexto e último passo do algoritmo Simplex consiste em pivotar em torno do elemento  $a_{rs}$ , utilizando combinações lineares das restrições do problema para tornar unitário o coeficiente que multiplica  $x_s$  na linha r e tornar nulos todos os outros elementos da coluna s. Assim, a variável  $x_s$  se tornará básica e  $y_r$  se tornará não básica. Após o fim do sexto passo, uma nova solução básica viável é obtida para o sistema e uma nova iteração é feita, a não ser que a condição de otimalidade tenha sido atingida, ou seja, quando todos os custos relativos são positivos.

Ao fim das iterações da fase 1, se a função  $w$  foi minimizada e seu valor após a otimização é 0, uma solução básica viável do sistema é obtida. Com esta solução em mãos, é iniciada a fase 2, na qual o algoritmo Simplex será aplicado novamente, desta vez para minimizar a função custo do problema, representada por  $z$  na equação 2.1.

A solução obtida ao fim da fase 1 será uma solução na qual algumas variáveis artificiais se tornaram não básicas, enquanto algumas variáveis não artificiais se tornaram básicas. Para prosseguir para a fase 2, as variáveis artificiais são eliminadas do sistema e é necessário reescrever a função  $z$ , que será otimizada nesta fase em função das variáveis não básicas, eliminando as variáveis não artificiais que se tornaram básicas. Após este passo é iniciada a fase 2, que consiste em uma segunda aplicação do algoritmo Simplex, desta vez para minimizar o valor da função objetivo  $z$ , seguindo os 6 passos descritos na fase 1. Como resultado, ao fim da fase 2 é encontrada uma solução que entregará o menor valor de  $z$  para as condições impostas pelo sistema.

## **2.6- Método de Ponto Interior**

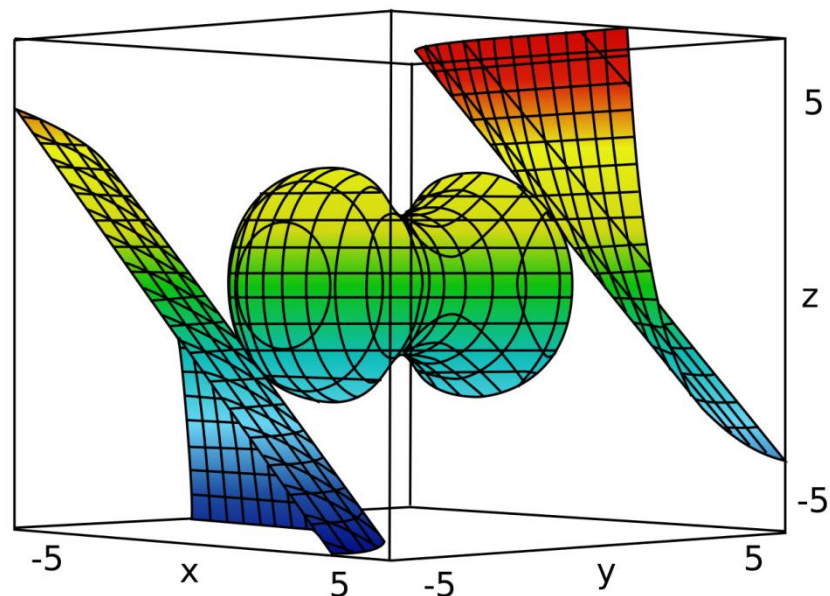
Os métodos de ponto interior para a resolução de problemas de programação linear são algoritmos que, diferentemente do algoritmo Simplex, que utiliza os pontos que se encontram nas extremidades da região factível do problema de otimização para encontrar a solução ótima do sistema, fazem o uso de passos utilizando pontos que estão no interior da região factível determinada pelas restrições. Existem diferentes variações de métodos de ponto interior, sendo que para algumas variações, seu funcionamento pode incluir uma elipsoide dentro da região factível, na qual o ponto interno de cada iteração assume a posição do centro desta elipsoide, e para outras, é necessário primeiro transformar a região factível para depois inscrever uma hiperesfera, que apresentará o ponto de cada iteração como ponto central. Depois deste passo, encontra-se uma direção para otimização da função objetivo, unindo o ponto central a um ponto de contorno da elipsoide, ou hiperesfera, que maximize, ou minimize a função objetivo e após encontrar esta direção, encontra-se um ponto que será utilizado na próxima iteração como ponto central. Durante o período de 1979 a 1996, houve um grande interesse no desenvolvimento de métodos de pontos interiores para a resolução deste tipo de problema. Alguns avanços nesta área ocorreram devido ao trabalho do matemático Khachian, que desenvolveu um algoritmo, cujo tempo de execução nos piores casos é significativamente menor do que o tempo de execução do algoritmo Simplex nos piores casos. Posteriormente, um novo algoritmo que utiliza pontos internos da região factível foi desenvolvido por Karmarkar, e sua performance foi significativamente melhor do que a do algoritmo de Khachian (DANTZIG e THAPA, 1997).



## 2.7- Programação Não Linear

Problemas de programação não linear possuem uma semelhança com os problemas de programação linear no sentido de que são compostos por uma função objetivo e restrições na forma de equações, ou inequações. A diferença que confere maior grau de complexidade aos problemas de programação não linear é a presença de variáveis de ordem maior do que 1 nas funções que representam o objetivo do problema, podendo também estar presentes nas restrições deste sistema. A Figura 2.3 apresentada abaixo representa graficamente a região factível de um problema de programação não linear que apresenta restrições não lineares.

**Figura 2.3. Representação Gráfica de um Problema de Programação Não Linear**



Fonte: Wikimedia Commons<sup>1</sup>

A solução de problemas mais simples de programação não linear, como por exemplo um problema que tenha duas variáveis e apresente uma função objetivo não linear e uma restrição linear pode ser encontrada por meio de um método analítico, como o método da substituição direta, no qual utiliza-se uma equação de restrição para isolar uma das variáveis e substituir esta variável na função objetivo, transformando um problema de otimização de duas variáveis com restrições em um problema de otimização irrestrita de uma função não linear. Outros métodos de resolução de problemas de programação não linear para problemas mais complexos são apresentados por Edgar, Himmelblau e Lasdon (2001), como por exemplo métodos de penalidade e barreira, programação linear sucessiva, programação quadrática sucessiva e gradiente reduzido generalizado.

## 2.8- Programação Inteira Mista

Há problemas encontrados na operação de uma fábrica, como o projeto de uma nova planta, ou a escolha de equipamentos para um processo produtivo, que apresentam variáveis discretas. Um exemplo deste tipo de problema é quando uma variável de decisão apresenta duas saídas possíveis, como por exemplo a decisão de instalar, ou não instalar um equipamento. Estes tipos de variáveis de decisão recebem o nome de variáveis binárias e podem assumir o valor de 0, ou 1. Em alguns casos que possuem variáveis discretas, é possível tratar estas variáveis como se elas fossem contínuas, esta aproximação pode ocorrer em problemas em que uma variável tem uma grande variedade de valores inteiros que podem ser assumidos, como por exemplo em um problema envolvendo uma coluna de destilação no qual a variável do número de pratos da coluna deve ser um número inteiro, mas há uma grande variedade de opções de números de pratos. Neste caso, o problema pode ser tratado como um problema contínuo e em seguida o valor ótimo encontrado pode ser arredondado para o valor inteiro mais próximo (EDGAR, HIMMELBLAU e LASDON, 2001).

Problemas que envolvem variáveis inteiras podem ser classificados quanto à natureza das demais variáveis presentes, de modo que, problemas nos quais todas as variáveis envolvidas são inteiras são classificados como problemas de programação inteira, e problemas que envolvem variáveis contínuas além de variáveis inteiras são classificados como problemas de programação inteira mista. No conjunto dos problemas de programação inteira, há também um caso especial que é classificado como programação binária, que é quando todas as variáveis apresentam apenas valores iguais a 0, ou 1 (EDGAR, HIMMELBLAU e LASDON, 2001).

Muitos problemas de otimização têm como objetivo otimizar uma função objetivo linear, estando sujeitos a restrições também lineares, sendo classificados então como problemas de programação inteira mista linear. Já problemas envolvendo variáveis discretas, mas que apresentam funções não lineares em sua composição são denominados de problemas de programação inteira mista não linear.

Existem alguns problemas clássicos que não são ligados à produção industrial, mas que ilustram de maneira clara o que são problemas de programação inteira. Edgar, Himmelblau e Lasdon (2001) apresentam em seu trabalho como exemplo de problema que envolve otimização com variáveis discretas o problema da mochila, no qual existem  $n$  objetos que apresentam um valor  $v_i$  e um peso  $w_i$  e que devem ser colocados em uma mochila de modo que, caso um objeto  $i$  seja incluído, a variável discreta  $y_i$  associado a ele assume o valor de 1 e caso ele não seja

incluído, assume o valor de 0, sendo que a soma do valor dos objetos presentes na mochila deve ser máxima, mas o peso total dos objetos dentro da mochila não pode ultrapassar um limite.

Um exemplo de problema de engenharia que apresenta variáveis discretas apresentado por Edgar, Himmelblau e Lasdon (2001) é o da decisão da perfuração de poços de petróleo, que pode ser interpretado como um caso específico do tipo geral de problema de alocação de plantas. Neste problema, existem diferentes localidades de novos poços e deve-se escolher a quantidade de novos poços que serão perfurados, as suas localizações e as taxas de extração de cada poço, de modo que a diferença entre a curva de produção-demanda e a curva de fluxo seja minimizada. As decisões de perfuração, ou não perfuração de cada poço são as variáveis discretas do problema e podem assumir os valores de 1, ou 0, representando perfuração e não perfuração respectivamente.

Problemas deste tipo podem ser resolvidos pelo método *Branch-and-bound*, construído para resolver problemas de programação inteira mista linear e problemas convexos de programação inteira mista não linear. Este método garante que uma solução seja encontrada para os tipos de problema citados e é o mais popular e utilizado pelos softwares comerciais para resolução de problemas de programação inteira mista. O funcionamento deste método de resolução envolve transformar o problema de programação linear inteira mista em um problema de programação linear no qual as variáveis podem assumir valores entre 0 e 1, sendo que caso a solução encontrada para o problema de programação linear apresente valores inteiros para todas as variáveis, esta solução satisfaz o problema de programação linear inteira mista. Caso haja variáveis não inteiras na solução encontrada, uma dessas variáveis deve ser selecionada para dar origem a dois novos problemas de programação linear distintos, nos quais a variável selecionada é fixada tendo valor igual a 0 e se alguma destas duas soluções apresentar valores inteiros para todas as variáveis, ela será a solução para o problema de otimização. Caso uma destas soluções apresente uma solução não-viável, ela deve ser descartada, e assim se dá continuidade às iterações até a resolução do problema 1 (EDGAR, HIMMELBLAU e LASDON, 2001).

### **3. MATERIAL E MÉTODOS**

#### **3.1- Materiais**

Os materiais utilizados neste trabalho são o programa Microsoft Excel, incluindo o seu suplemento Solver e a linguagem de programação VBA, voltada para aplicativos da Microsoft, e o Jupyter Notebook, que é um ambiente de desenvolvimento de algoritmos em Python online.

#### **3.2- Procedimento Experimental**

Devido a restrições da política de confidencialidade de dados da empresa, as informações originais de produção não foram utilizadas neste trabalho. No entanto, o cenário apresentado no trabalho simula o cenário de produção da empresa escolhendo um número de produtos que se aproxima ao original, mantendo o número de fábricas e parametrizando os volumes e custos, de modo que as proporções entre estas variáveis sejam semelhantes às encontradas na distribuição real. Os produtos, fábricas e períodos de produção são nomeados utilizando nomes genéricos e os numerando, como Produto 1, Produto 2, Fábrica 1, Fábrica 2, Período 1, Período 2.

Os dados de volumes apresentados no trabalho são correspondentes aos volumes que foram produzidos de cada produto em cada fábrica nos períodos de 1 a 6, sendo que estes períodos não correspondem necessariamente aos meses de janeiro a junho. Ao longo do texto, utilizam-se os termos demanda, volume demandado e demanda de produção no contexto do cálculo da otimização de custos de produção a partir da distribuição dos volumes dos produtos entre as fábricas. No entanto, esta demanda que é discutida não se refere à demanda de consumo de cada produto, mas sim à soma dos volumes produzidos dos produtos, considerando então que, para um mesmo produto que tenha sido produzido em fábricas diferentes em um mesmo período, sua demanda de produção, que é considerada nas restrições durante o cálculo da otimização, é a soma destes volumes produzidos em fábricas distintas no período em questão. Os volumes de demanda comercial dos produtos e os volumes em estoque nos armazéns não são utilizados no trabalho, mas foram citados na introdução para poder ilustrar o processo de interação entre as diferentes áreas da empresa no processo de planejamento da produção.

Os dados de custos de produção correspondem à soma dos custos dos diversos fatores de produção necessários para a fabricação destes produtos apresentados. Estão inclusos nestes fatores de produção que compõem o custo de cada produto em cada fábrica as matérias primas utilizadas na produção das bebidas, as embalagens, que podem ser garrafas, ou latas de diferentes volumes, as caixas nas quais os produtos serão transportados, a energia elétrica utilizada na operação da fábrica, o combustível utilizado pela caldeira para a geração de vapor,

o consumo de água, que é utilizada tanto na composição das bebidas, quanto para limpeza da fábrica, os custos relacionados à mão de obra, como o pagamento dos salários da equipe de produção das fábricas e encargos sociais trabalhistas, e o consumo dos materiais intermediários de processo, que são insumos de processo que não fazem parte da composição final do produto acabado, como por exemplo o material utilizado como meio filtrante na etapa de filtração dos produtos, ou os reagentes utilizados nas análises laboratoriais para o controle de qualidade dos produtos. Não estão inclusos os custos de transporte entre as fábricas e os armazéns e os custos de armazenamento dos produtos.

Dentre os custos citados, existem aqueles que são de natureza variável, que dependem diretamente do volume de produção de um produto, como os custos com matérias primas, embalagens, água, energia elétrica e combustível, pois quanto maior o volume de produção de um produto, maior será o consumo destes itens. O custo relacionado ao pagamento dos trabalhadores que produzem as bebidas é um custo de tipo fixo, pois não depende diretamente do volume produzido pelas fábricas, visto que o salário de um trabalhador é fixo e pago em cada período independente do volume produzido.

Os custos apresentados para cada produto são custos de produção por volume produzido. As diferenças entre os custos apresentados por produtos diferentes se justificam pois a composição destes produtos também é diferente, podendo apresentar matérias primas mais caras, ou uma quantidade maior de matéria prima consumida por volume produzido para um produto com custo mais alto, quando comparado a um produto com custo menor. A diferença de custo observada para um mesmo produto quando produzido em fábricas diferentes pode ter origem em diversos fatores. O preço de uma mesma matéria prima, ou embalagem pode ser diferente para fábricas diferentes, pois o custo do transporte destes materiais entre um fornecedor e as fábricas varia com a distância percorrida. Os custos referentes ao consumo de água e energia elétrica também podem apresentar variações dependendo da localidade da fábrica e de outros fatores, como por exemplo se a água consumida é retirada de um poço perfurado pela empresa, ou se é fornecida por uma empresa de tratamento de água, ou se a energia elétrica consumida é negociada com uma concessionária de eletricidade, ou negociada no mercado livre de energia elétrica. Além destes fatores, a capacidade de produção de cada fábrica também apresenta um papel importante, pois fábricas com capacidades de produção maiores podem apresentar uma diluição dos custos fixos, quando é feito o rateio destes custos de acordo com o volume de produção. Deste modo, há um ganho relativo associado às escalas de produção encontradas nas diferentes fábricas.

### **3.3- Bases de Dados**

A malha de produção, que contém as informações dos volumes de cada produto por fábrica e por período, a tabela de custos de produção dos produtos por fábrica, e a tabela de volume total e capacidade das fábricas por período são as bases utilizadas para construir o problema de otimização. Estas bases estão contidas em diferentes planilhas em um arquivo do Excel. As tabelas com os volumes produzidos dos diferentes produtos em cada fábrica e em cada período são apresentadas no Apêndice A. No Apêndice A também estão presentes as tabelas que contém os custos de produção para cada produto em cada fábrica, sendo que caso não seja possível determinado produto em uma determinada fábrica, seu custo será nulo nestas tabelas. Além disso, O Apêndice A também apresenta, para cada fábrica em cada período, o volume de produção total e capacidade total de cada fábrica, o volume de produção obrigatória, que corresponde ao volume dos produtos que têm apenas uma fábrica como alternativa para produção, e a capacidade de produção não comprometida, que é obtida a partir da diferença entre as capacidade de produção total de uma fábrica e seu volume de produção obrigatória, sendo então a parte da capacidade de produção de uma fábrica disponível para a produção dos produtos que podem ser produzidos em mais de uma fábrica. Esta capacidade de produção não comprometida desempenha um papel importante no processo de otimização da alocação da produção, pois é utilizada para compor as restrições de limite de volume para cada fábrica.

### **3.4 Procedimento de Cálculo**

#### **EXCEL**

Os dados apresentados pelas tabelas contidas no Apêndice A estão salvos em um arquivo de Excel e as planilhas presentes neste arquivo são apresentadas no Apêndice B, enquanto os códigos que compõem as etapas de resolução do problema de otimização estão apresentados nos Apêndices B, C, D e E. O procedimento de cálculo da otimização é composto por quatro etapas, nas quais são utilizadas macros em VBA para a manipulação dos dados das planilhas e o suplemento Solver presente no Excel. As etapas do processo de otimização utilizando o Excel são descritas de maneira geral neste capítulo, informando o objetivo e alterações feitas nas planilhas em cada etapa, e os detalhes de execução destas etapas encontram-se nos Apêndices, os quais contém figuras que ilustram as planilhas, os códigos desenvolvidos para o pré-tratamento dos dados, a aplicação do Solver, e os códigos utilizados na organização dos dados após a otimização, com o fim de comparação entre os dados obtidos da solução do problema de otimização e os dados iniciais de distribuição dos produtos.

As quatro etapas do processo de resolução do problema de programação linear no Excel são: a seleção do período de otimização e organização da planilha Apoio; depois os dados nesta planilha são utilizados para a organização da planilha Otimização; após a inserção dos dados do problema na planilha Otimização, utiliza-se o Solver; por fim a última etapa é a organização da planilha Comparação, com os dados iniciais do problema para o período escolhido e com os dados otimizados para este período.

A primeira etapa, na qual é organizada a planilha Apoio, apresenta três seções. A primeira seção tem o objetivo de listar todos os produtos com volumes de produção não nulos para o período selecionado. Na segunda seção são escolhidos dentre estes produtos, aqueles que apresentam múltiplas fábricas como alternativas de produção. Nesta seção encontra-se o número de variáveis presentes no problema de otimização, sendo que cada variável corresponde a uma combinação diferente entre um produto e uma fábrica na qual ele pode ser produzido. Supondo por exemplo que em um período escolhido haja apenas um produto que apresenta múltiplas alternativas de produção, e que este produto pode ser produzido em três das quatro fábricas, logo o número de variáveis neste problema de otimização será igual a três, pois existem três combinações entre produtos e fábricas. Em termos práticos, o número de produtos apresentados pelo problema é de 138, sendo que 26 destes apresentam possibilidade de ser produzidos em mais de uma fábrica. Na terceira seção desta primeira etapa, encontra-se os volumes totais de produção para os produtos com mais de uma alternativa de produção. Estes volumes correspondem às somas dos volumes produzidos de cada produto destes em cada fábrica na qual ele foi produzido.

A segunda etapa, na qual é organizada a planilha Otimização, utiliza a planilha Apoio como base para sua execução. Nesta etapa o código de VBA responsável por organizar a planilha Otimização também é dividido em três seções. A primeira seção distribui as variáveis do problema formando as colunas da matriz de otimização presente na planilha de mesmo nome. A segunda seção desta etapa insere as restrições que correspondem aos limites de capacidade das fábricas, sendo que neste momento são utilizadas as informações acerca das capacidades não comprometidas, mencionadas no capítulo anterior. Na terceira seção desta etapa, são inseridas as informações referentes às restrições que contém o volume total produzido para cada produto com múltiplas alternativas de produção no período de otimização selecionado. Ao fim da segunda etapa, todos os dados necessários para o cálculo da otimização do problema de programação linear estão presentes.

Deste modo, é possível executar a terceira etapa, na qual o Solver é utilizado e a solução para o problema de programação linear é encontrado. Nesta etapa, deve-se selecionar a célula da planilha Otimização que corresponde ao custo total de produção, depois é preciso selecionar a opção de minimização desta célula, após esta seleção são inseridas as restrições de capacidade das fábricas e de volume total de produção dos produtos, e por fim deve ser selecionado o método de otimização Simplex. Após estes ajustes, é possível executar o Solver e encontrar a solução para o problema de programação linear e encontrar a distribuição dos volumes de produção entre as fábricas que garanta que a produção respeite as capacidades de cada fábrica e mantenha o volume total de produção para cada produto do período selecionado.

Na quarta etapa, é feita a organização destes dados obtidos da solução encontrada pelo Solver. Nesta etapa, a planilha Comparação é organizada de modo que os dados iniciais de volume de produção e o custo de produção de cada produto são utilizados para calcular o custo representado pela distribuição inicial dos volumes de produção de cada produto entre as fábricas. Os dados da distribuição otimizada dos volumes de produção, que se encontram na planilha Otimização, também são inseridos na planilha Comparação. Deste modo, ao fim da execução da quarta etapa, é possível comparar os custos referentes à distribuição inicial dos volumes dos produtos e à distribuição final, obtida após a otimização pelo Solver.

Com a tabela de volumes da planilha Comparação preenchida após o fim de todas as etapas, as células presentes na planilha Comparação preenchidas com as fórmulas que somam o os volumes e custos são calculadas e com isso é possível comparar os valores entre a distribuição inicial para o período selecionado e a distribuição otimizada dos volumes de produção dos produtos. Na tabela que faz a comparação de volumes e custos por produto nota-se que na coluna “Diferença de Custo” há algumas células que apresentam valor igual a zero e outras células que apresentam valores negativos. No caso dos produtos que apresentam diferença de custo igual a zero, a distribuição original destes produtos entre as fábricas nas quais é possível produzi-los já se encontrava de uma maneira ótima em relação aos custos de produção, já para os produtos que apresentam valores negativos, houve uma diminuição dos seus custos de produção decorrente da nova distribuição dos seus volumes de produção entre as fábricas, tornando o custo de produção total menor do que no cenário de distribuição anterior. Os resultados da otimização para cada um dos períodos detalhados por produto e por fábrica são expostos no próximo capítulo.



## PYTHON

O procedimento de cálculo para a otimização utilizando a linguagem de programação Python parte das mesmas bases contidas nas planilhas de Excel e faz um pré-processamento dos dados para depois aplicar a função `linprog`, do pacote Scipy, que é utilizada para obter os resultados da otimização.

Este procedimento é utilizado com dois objetivos. O primeiro é poder comparar os resultados obtidos pelo Solver do Excel com os resultados obtidos utilizando o Python. O segundo objetivo é a comparação entre métodos distintos de resolução de problemas de programação linear. Os dois métodos utilizados para a resolução do problema de minimização dos custos totais de produção alterando a distribuição dos volumes de produção de cada produto em cada fábrica são o método Simplex, que também é utilizado pelo Solver do Excel, e o método de ponto interior, que a função `linprog` da biblioteca Scipy do Python apresenta, mas que não é encontrado no Excel.

Na parte de pré-processamento, as tabelas contendo os volumes e custos de produção de cada produto em cada fábrica, e a tabela contendo as informações de capacidades não comprometidas das fábricas são manipuladas para a obtenção de vetores e matrizes que servem como argumento da função `linprog`, que encontra a solução do problema. Já na parte em que a otimização é calculada, são necessários 6 argumentos diferentes: o vetor que contém todos os custos reduzidos para as variáveis do problema, que são os volumes associados às diferentes combinações entre produtos e fábricas; a matriz que contém os coeficientes das restrições que são inequações, que neste caso são as restrições de limite de capacidade de cada fábrica; o vetor que contém os valores dos limites de capacidade para cada fábrica; a matriz que contém os coeficientes das restrições de igualdade, que são as restrições de demanda de produção, ou de volume total produzido para cada produto no período; o vetor que contém os valores das demandas de produção para cada produto; e por fim o método de otimização que deve ser utilizado para a resolução do problema de programação linear.

Este processo de resolução do problema de minimização em Python é apresentado em detalhes no Apêndice F. No processo de cálculo da otimização utilizando Python, os resultados obtidos aplicando os métodos Simplex e de ponto interior no código em Python para todos os períodos de produção do 1 ao 6 apresentaram valores iguais ao resultado obtido para o conjunto de todos os períodos utilizando o Solver do Excel. Por este motivo, não foram feitas aplicações deste método para cada período individual. Os resultados apresentados no próximo capítulo são retirados de diversas seleções de período e de execução da otimização no arquivo de Excel.

#### 4.- RESULTADOS

O capítulo de resultados tem como objetivo apresentar as tabelas de comparação entre os custos referentes à distribuição inicial da produção e os custos obtidos com a distribuição encontrada após o processo de otimização. Neste capítulo, uma comparação dos custos totais é apresentada para cada um dos seis períodos apresentados na tabela da planilha Volumes e para o conjunto destes seis períodos. Além da comparação dos custos totais entre a distribuição inicial e a distribuição otimizada dos volumes, também são apresentados os resultados comparando estes custos detalhados por produto e por fábrica. Estes resultados detalhados são apresentados neste capítulo apenas para o conjunto dos seis períodos de produção. Os resultados detalhados para os demais períodos de produção são encontrados no Apêndice G.

As Tabelas 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6 e 4.7 apresentam as comparações entre os custos provenientes das distribuições iniciais e os custos totais obtidos do processo de otimização para cada um dos períodos de 1 a 6 e para o conjunto destes períodos. A primeira tabela apresentada neste capítulo é a Tabela 4.1, que traz estas comparações para o período 1.

**Tabela 4.1. Comparação dos Custos Totais para o Período 1**

<b>Volume Total Inicial (l)</b>	496859
<b>Volume Total Após Otimização (l)</b>	496859
<b>Custo Total Inicial (R\$)</b>	702113,54
<b>Custo Total Após Otimização (R\$)</b>	606032,05
<b>Diferença dos Custos Totais (R\$)</b>	-96081,49
<b>Redução de Custo Total</b>	-14%
<b>Volume Total Inicial (Alternativas de Produção &gt; 1) (l)</b>	308121
<b>Volume Total Após Otimização (Alternativas de Produção &gt; 1) (l)</b>	308121
<b>Custo Total Inicial (Alternativas de Produção &gt; 1) (R\$)</b>	412047,5
<b>Custo Total Após Otimização (Alternativas de Produção &gt; 1) (R\$)</b>	315966,01
<b>Diferença dos Custos Totais (Alternativas de Produção &gt; 1) (R\$)</b>	-96081,49
<b>Redução de Custo Total (Alternativas de Produção &gt; 1)</b>	-23%

Fonte: Elaborado pelo Autor

Considerando todos os produtos do primeiro período, a redução total de custo foi de 14% do custo inicial do período e se forem considerados apenas os produtos com mais de uma alternativa, a redução foi de 23%. O valor bruto da redução para o período 1 é de R\$: 96.081,49.

A segunda tabela apresentada neste capítulo é a Tabela 4.2, que traz as comparações de custos totais para o período 2.

**Tabela 4.2. Comparação dos Custos Totais para o Período 2**

<b>Volume Total Inicial (l)</b>	910638
<b>Volume Total Após Otimização (l)</b>	910638
<b>Custo Total Inicial (R\$)</b>	1092037,38
<b>Custo Total Após Otimização (R\$)</b>	1006883,75
<b>Diferença dos Custos Totais (R\$)</b>	-85153,63
<b>Redução de Custo Total</b>	-8%
<b>Volume Total Inicial (Alternativas de Produção &gt; 1) (l)</b>	320546
<b>Volume Total Após Otimização (Alternativas de Produção &gt; 1) (l)</b>	320546
<b>Custo Total Inicial (Alternativas de Produção &gt; 1) (R\$)</b>	411993,84
<b>Custo Total Após Otimização (Alternativas de Produção &gt; 1) (R\$)</b>	326840,21
<b>Diferença dos Custos Totais (Alternativas de Produção &gt; 1) (R\$)</b>	-85153,63
<b>Redução de Custo Total (Alternativas de Produção &gt; 1)</b>	-21%

Fonte: Elaborado pelo Autor

Considerando todos os produtos do segundo período, a redução total de custo foi de 8% do custo inicial do período e se forem considerados apenas os produtos com mais de uma alternativa, a redução foi de 21%. O valor bruto da redução para o período 2 é de R\$: 85.153,63.

A Tabela 4.3 a seguir apresenta as comparações de custos totais para o período 3. Para o terceiro período, a redução total de custo foi de 10% do custo inicial e se forem considerados apenas os produtos com mais de uma alternativa, a redução foi de 22%. A diferença entre o custo total inicial e o custo total após a otimização para o período 3 é de R\$: 82.516,02.

**Tabela 4.3. Comparação dos Custos Totais para o Período 3**

<b>Volume Total Inicial (l)</b>	626883
<b>Volume Total Após Otimização (l)</b>	626883
<b>Custo Total Inicial (R\$)</b>	857247,40
<b>Custo Total Após Otimização (R\$)</b>	774731,38
<b>Diferença dos Custos Totais (R\$)</b>	-82516,02
<b>Redução de Custo Total</b>	-10%
<b>Volume Total Inicial (Alternativas de Produção &gt; 1) (l)</b>	259103
<b>Volume Total Após Otimização (Alternativas de Produção &gt; 1) (l)</b>	259103
<b>Custo Total Inicial (Alternativas de Produção &gt; 1) (R\$)</b>	383665,38
<b>Custo Total Após Otimização (Alternativas de Produção &gt; 1) (R\$)</b>	301149,36
<b>Diferença dos Custos Totais (Alternativas de Produção &gt; 1) (R\$)</b>	-82516,02
<b>Redução de Custo Total (Alternativas de Produção &gt; 1)</b>	-22%

Fonte: Elaborado pelo Autor

A Tabela 4.4 apresenta os resultados da comparação de custos totais para o período 4

**Tabela 4.4. Comparação dos Custos Totais para o Período 4**

<b>Volume Total Inicial (l)</b>	658821
<b>Volume Total Após Otimização (l)</b>	658821
<b>Custo Total Inicial (R\$)</b>	829238,42
<b>Custo Total Após Otimização (R\$)</b>	756303,14
<b>Diferença dos Custos Totais (R\$)</b>	-72935,28
<b>Redução de Custo Total</b>	-9%
<b>Volume Total Inicial (Alternativas de Produção &gt; 1) (l)</b>	388308
<b>Volume Total Após Otimização (Alternativas de Produção &gt; 1) (l)</b>	388308
<b>Custo Total Inicial (Alternativas de Produção &gt; 1) (R\$)</b>	482567,90
<b>Custo Total Após Otimização (Alternativas de Produção &gt; 1) (R\$)</b>	409632,62
<b>Diferença dos Custos Totais (Alternativas de Produção &gt; 1) (R\$)</b>	-72935,28
<b>Redução de Custo Total (Alternativas de Produção &gt; 1)</b>	-15%

Fonte: Elaborado pelo Autor

Após a otimização da distribuição de volumes do quarto período, a redução total de custo foi de 9% do custo inicial e se forem considerados apenas os produtos com mais de uma alternativa, a redução foi de 15%. A diferença entre o custo total inicial e o custo total após a otimização para o período 4 é de R\$: 72.935,28.

Na Tabela 4.5 encontram-se os resultados da comparação de custos totais para o período 5.

**Tabela 4.5. Comparação dos Custos Totais para o Período 5**

<b>Volume Total Inicial (I)</b>	1010781
<b>Volume Total Após Otimização (I)</b>	1010781
<b>Custo Total Inicial (R\$)</b>	1321403,80
<b>Custo Total Após Otimização (R\$)</b>	1182937,50
<b>Diferença dos Custos Totais (R\$)</b>	-138466,30
<b>Redução de Custo Total</b>	-10%
<b>Volume Total Inicial (Alternativas de Produção &gt; 1) (I)</b>	495402
<b>Volume Total Após Otimização (Alternativas de Produção &gt; 1) (I)</b>	495402
<b>Custo Total Inicial (Alternativas de Produção &gt; 1) (R\$)</b>	681580,68
<b>Custo Total Após Otimização (Alternativas de Produção &gt; 1) (R\$)</b>	543114,38
<b>Diferença dos Custos Totais (Alternativas de Produção &gt; 1) (R\$)</b>	-138466,30
<b>Redução de Custo Total (Alternativas de Produção &gt; 1)</b>	-20%

Fonte: Elaborado pelo Autor

Os resultados apresentados na Tabela 4.5 mostram a redução total de custo, que foi de 10% do custo inicial para este período. Caso sejam considerados apenas os produtos que podem ser produzidos em mais de uma fábrica, a redução foi de 20%. A diferença entre o custo total inicial e o custo total após a otimização para o período 5 é de R\$: 138.466,30.

A Tabela 4.6 traz os resultados da comparação de custos totais para o período 6. Os resultados apresentados na Tabela 4.6 apresentam uma redução total de custo de 7% do custo inicial para este período. Considerando apenas os produtos que podem ser produzidos em mais de uma fábrica, a redução foi de 16%. A diferença entre o custo total inicial e o custo total após a otimização encontrada para o período 6 é de R\$: 114.830,98.

**Tabela 4.6. Comparação dos Custos Totais para o Período 6**

<b>Volume Total Inicial (l)</b>	1474758
<b>Volume Total Após Otimização (l)</b>	1474758
<b>Custo Total Inicial (R\$)</b>	1709243,70
<b>Custo Total Após Otimização (R\$)</b>	1594412,72
<b>Diferença dos Custos Totais (R\$)</b>	-114830,98
<b>Redução de Custo Total</b>	-7%
<b>Volume Total Inicial (Alternativas de Produção &gt; 1) (l)</b>	549576
<b>Volume Total Após Otimização (Alternativas de Produção &gt; 1) (l)</b>	549576
<b>Custo Total Inicial (Alternativas de Produção &gt; 1) (R\$)</b>	697490,90
<b>Custo Total Após Otimização (Alternativas de Produção &gt; 1) (R\$)</b>	582659,92
<b>Diferença dos Custos Totais (Alternativas de Produção &gt; 1) (R\$)</b>	-114830,98
<b>Redução de Custo Total (Alternativas de Produção &gt; 1)</b>	-16%

Fonte: Elaborado pelo Autor

Os resultados da otimização de custos considerando todos os períodos de produção são apresentados pela Tabela 4.7.

**Tabela 4.7. Comparação dos Custos Totais para Todos os Períodos**

<b>Volume Total Inicial (l)</b>	5178740
<b>Volume Total Após Otimização (l)</b>	5178740
<b>Custo Total Inicial (R\$)</b>	6511284,24
<b>Custo Total Após Otimização (R\$)</b>	5917574,79
<b>Diferença dos Custos Totais (R\$)</b>	-593709,45
<b>Redução de Custo Total</b>	-9%
<b>Volume Total Inicial (Alternativas de Produção &gt; 1) (l)</b>	2321056
<b>Volume Total Após Otimização (Alternativas de Produção &gt; 1) (l)</b>	2321056
<b>Custo Total Inicial (Alternativas de Produção &gt; 1) (R\$)</b>	3069346,20
<b>Custo Total Após Otimização (Alternativas de Produção &gt; 1) (R\$)</b>	2475636,75
<b>Diferença dos Custos Totais (Alternativas de Produção &gt; 1) (R\$)</b>	-593709,45
<b>Redução de Custo Total (Alternativas de Produção &gt; 1)</b>	-19%

Fonte: Elaborado pelo Autor

Os resultados apresentados para a otimização da distribuição dos volumes de produção dos produtos entre as quatro fábricas, considerando todos os períodos de produção mostram uma redução de 9% do custo total inicial. A porcentagem de redução do custo total, considerando apenas os produtos que têm mais de uma alternativa de produção é de 19% do custo total inicial para estes produtos. O valor da redução total de custos obtido após a otimização de todos os períodos é igual a R\$: 593.709,45. A soma das reduções de custo encontradas nas otimizações individuais de cada período de produção resulta em um valor total de R\$: 589.983,70. Comparando este valor com o valor obtido da aplicação do método de otimização considerando todos os períodos simultaneamente, encontra-se uma diferença igual a R\$: 3.725,75.

Os resultados apresentados pela Tabela 4.7 para o conjunto dos seis períodos de produção demonstram que houve uma redução significativa dos custos totais quando comparados aos custos referentes à distribuição inicial dos produtos, mas não é possível saber a partir apenas desta tabela quais são os produtos responsáveis por esta redução de custo, e como os volumes de produção foram redistribuídos entre as fábricas. Para atender a este questionamento, a Tabela 4.8 apresenta a diferença de custos e volumes para cada uma das fábricas.

**Tabela 4.8. Volumes, Capacidades e Custos Iniciais e Otimizados para as Fábricas Considerando Todos Períodos**

	<b>Fábrica 1</b>	<b>Fábrica 2</b>	<b>Fábrica 3</b>	<b>Fábrica 4</b>	<b>Total</b>
<b>Volume Real (l)</b>	507735	1190693	117720	3362592	5178740
<b>Volume Após Otimização (l)</b>	184804	765465	99981	4128490	5178740
<b>Capacidade Total (l)</b>	600000	1401000	153600	7575600	9730200
<b>Custo Real (R\$)</b>	1184395,35	1493282,32	379045,65	3454560,92	6511284,24
<b>Custo Após Otimização (R\$)</b>	458917,56	979988,94	341240,45	4137427,84	5917574,79
<b>Diferença de Custo (R\$)</b>	-725477,79	-513293,38	-37805,2	682866,92	-593709,45

Fonte: Elaborado pelo Autor

Os resultados mostrados na Tabela 4.8 apresentam uma comparação entre o cenário inicial de produção e o cenário encontrado após a resolução do problema de programação linear para cada uma das fábricas. Os dados trazidos nesta tabela mostram que há uma redução de volume e conseqüentemente uma redução de custos nas fábricas 1, 2 e 3, enquanto há um aumento de volume e de custos na fábrica 4. O aumento de custo na fábrica 4 é compensado pelas reduções de custo nas demais fábricas, que ao serem somadas representam uma economia para a empresa. Comparando as capacidades disponíveis nas fábricas para produção, nota-se

que na distribuição inicial, as fábricas 1, 2 e 3 estavam mais próximas de atingir seu limite de produção do que a fábrica 4. Mesmo com o incremento de volume da fábrica 4 após a otimização, o volume total que seria produzido nesta fábrica em condições ótimas corresponderia a 54% da sua capacidade total nos seis períodos observados.

A Tabela 4.9 apresenta os resultados de redução de custo detalhados por produto.

**Tabela 4.9. Redução de Custos para Todos Períodos Detalhado por Produto Pt. 1**

<b>Produto</b>	<b>Volume Inicial (l)</b>	<b>Volume Após Otimização (l)</b>	<b>Custo Inicial (R\$)</b>	<b>Custo Após Otimização (R\$)</b>	<b>Diferença de Custo (R\$)</b>
Produto 13	10234	10234	16990,01	13713,56	-3276,45
Produto 14	148256	148256	251516,68	134912,96	-116603,72
Produto 15	658149	658149	728341,89	658149	-70192,89
Produto 30	17035	17035	45313,1	16864,65	-28448,45
Produto 31	16588	16588	36991,24	21730,28	-15260,96
Produto 32	24235	24235	51620,55	28354,95	-23265,6
Produto 35	5968	5968	17187,84	13487,68	-3700,16
Produto 36	80905	80905	187214,29	136729,45	-50484,84
Produto 37	8209	8209	25148,53	24134,46	-1014,07
Produto 38	181543	181543	309195,98	185173,86	-124022,12
Produto 41	163340	163340	129038,6	73503	-55535,6
Produto 42	2966	2966	2313,48	1334,7	-978,78
Produto 43	174458	174458	162245,94	162245,94	0
Produto 47	7478	7478	4711,14	2392,96	-2318,18
Produto 48	1072	1072	664,64	343,04	-321,6
Produto 64	34164	34164	63886,68	42021,72	-21864,96
Produto 65	498872	498872	578479,4	528804,32	-49675,08
Produto 74	195850	195850	274190	274190	0
Produto 81	13128	13128	41705,84	34526,64	-7179,2
Produto 82	9586	9586	23475,02	22910,54	-564,48
Produto 83	7996	7996	14837,46	10954,52	-3882,94
Produto 84	28042	28042	45615,29	40380,48	-5234,81
Produto 85	23298	23298	39906,88	31219,32	-8687,56
Produto 97	6304	6304	12040,64	11851,52	-189,12
Produto 98	2018	2018	3814,02	3814,02	0
Produto 102	1362	1362	2901,06	1893,18	-1007,88
<b>Total</b>	<b>2321056</b>	<b>2321056</b>	<b>3069346,2</b>	<b>2475636,75</b>	<b>-593709,45</b>

Fonte: Elaborado pelo Autor

Nas tabelas de redução de custos por produto, há alguns produtos que apresentam valor igual a zero na coluna de diferença entre o custo inicial e o custo otimizado. Isto pode ocorrer por dois motivos, sendo um deles a ausência de produção do produto no período, e a segunda



condição para que este valor seja nulo para um produto é a de que o custo otimizado é igual ao custo inicial. Nas tabelas apresentadas para o conjunto de todos os períodos, não há nenhum caso de produto que não teve volume de produção, mas isso pode ocorrer nos casos onde apenas um período é otimizado. Pode-se afirmar que os produtos que cumprem a segunda condição já se encontravam distribuídos da maneira mais econômica nas condições iniciais. A maior redução observada foi de R\$: 124.022,12 para o produto 38.

As Tabelas 4.10 e 4.11 apresentam a comparação das distribuições inicial e otimizadas de volumes dos produtos com múltiplas alternativas de produção para o conjunto dos seis períodos.

**Tabela 4.10. Distribuição Inicial e Otimizada para Todos Períodos Pt. 1**

<b>Produto</b>	<b>Fábrica</b>	<b>Volume Inicial (l)</b>	<b>Custo Inicial (R\$)</b>	<b>Volume Após Otimização (l)</b>	<b>Custo Após Otimização (R\$)</b>
Produto 13	Fábrica 1	2953	3957,02	10234	13713,56
Produto 13	Fábrica 3	7281	13032,99	0	0
Produto 14	Fábrica 1	64522	145174,5	0	0
Produto 14	Fábrica 2	83734	106342,18	0	0
Produto 14	Fábrica 4	0	0	148256	134912,96
Produto 15	Fábrica 1	44024	81884,64	0	0
Produto 15	Fábrica 2	129329	161661,25	0	0
Produto 15	Fábrica 4	484796	484796	658149	658149
Produto 30	Fábrica 1	17035	45313,1	0	0
Produto 30	Fábrica 4	0	0	17035	16864,65
Produto 31	Fábrica 1	16588	36991,24	0	0
Produto 31	Fábrica 4	0	0	16588	21730,28
Produto 32	Fábrica 1	24235	51620,55	0	0
Produto 32	Fábrica 4	0	0	24235	28354,95
Produto 35	Fábrica 1	5968	17187,84	0	0
Produto 35	Fábrica 3	0	0	5968	13487,68
Produto 36	Fábrica 1	43829	118776,59	0	0
Produto 36	Fábrica 2	31118	52589,42	80905	136729,45
Produto 36	Fábrica 3	5958	15848,28	0	0
Produto 37	Fábrica 1	4409	13976,53	0	0
Produto 37	Fábrica 3	3800	11172	8209	24134,46
Produto 38	Fábrica 1	117268	238054,04	0	0
Produto 38	Fábrica 2	60603	61815,06	181543	185173,86
Produto 38	Fábrica 3	3672	9326,88	0	0

Fonte: Elaborado pelo Autor

Tabela 4.11. Distribuição Inicial e Otimizada para Todos Períodos Pt. 2

Produto	Fábrica	Volume Inicial (I)	Custo Inicial (R\$)	Volume Após Otimização (I)	Custo Após Otimização (R\$)
Produto 41	Fábrica 2	163340	129038,6	0	0
Produto 41	Fábrica 4	0	0	163340	73503
Produto 42	Fábrica 2	2966	2313,48	0	0
Produto 42	Fábrica 4	0	0	2966	1334,7
Produto 43	Fábrica 3	0	0	0	0
Produto 43	Fábrica 4	174458	162245,94	174458	162245,94
Produto 47	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 47	Fábrica 2	7478	4711,14	0	0
Produto 47	Fábrica 4	0	0	7478	2392,96
Produto 48	Fábrica 2	1072	664,64	0	0
Produto 48	Fábrica 4	0	0	1072	343,04
Produto 64	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 64	Fábrica 2	34164	63886,68	0	0
Produto 64	Fábrica 4	0	0	34164	42021,72
Produto 65	Fábrica 2	177411	237730,74	0	0
Produto 65	Fábrica 4	321461	340748,66	498872	528804,32
Produto 74	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 74	Fábrica 2	195850	274190	195850	274190
Produto 81	Fábrica 2	10256	34152,48	0	0
Produto 81	Fábrica 3	2872	7553,36	13128	34526,64
Produto 82	Fábrica 2	8914	21304,46	9586	22910,54
Produto 82	Fábrica 3	672	2170,56	0	0
Produto 83	Fábrica 2	5390	7384,3	7996	10954,52
Produto 83	Fábrica 3	2606	7453,16	0	0
Produto 84	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 84	Fábrica 2	23643	34045,92	28042	40380,48
Produto 84	Fábrica 3	4399	11569,37	0	0
Produto 85	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 85	Fábrica 2	17180	23021,2	23298	31219,32
Produto 85	Fábrica 3	6118	16885,68	0	0
Produto 97	Fábrica 1	0	0	6304	11851,52
Produto 97	Fábrica 3	6304	12040,64	0	0
Produto 98	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 98	Fábrica 3	2018	3814,02	2018	3814,02
Produto 102	Fábrica 1	0	0	1362	1893,18
Produto 102	Fábrica 3	1362	2901,06	0	0

Fonte: Elaborado pelo Autor

Nas tabelas de distribuição dos volumes de produção iniciais e otimizados, é possível acompanhar a migração dos volumes de produção dos produtos. Nestas tabelas há produtos como o produto 15, que nas condições iniciais apresentam volumes de produção distribuídos em múltiplas fábricas e após otimizados concentram seu volume total na fábrica em que apresenta menor custo. Por meio destas tabelas também é possível acompanhar casos de produtos como o produto 43, que não apresenta mudanças entre a distribuição do seu volume de produção inicial e otimizado.

Os resultados apresentados anteriormente neste capítulo foram calculados utilizando o suplemento Solver presente no Excel. No processo de cálculo da otimização do sistema de equações, o Solver utiliza o método Simplex para obter o resultado ótimo da função objetivo do problema de programação linear. Com os objetivos de comparar diferentes métodos de otimização para a resolução deste problema e de comparar os resultados obtidos utilizando o Excel com os resultados obtidos por meio da linguagem de programação Python, utilizou-se os mesmos dados do problema de otimização da distribuição do volume dos produtos no ambiente de desenvolvimento Jupyter Notebook, alterando o método de resolução. Os métodos de otimização utilizados para a resolução do problema em Python foram o método de ponto interior e o método Simplex, e foram utilizados os volumes dos produtos em todos os períodos.

A Figura 4.1 apresenta a aplicação do método de ponto interior.

#### **Figura 4.1. Otimização de Todos os Períodos com Python Utilizando o Método de Ponto Interior**

```
otimizacao = linprog(c = custos_reduzidos,
                    A_ub = matriz_ineq,
                    b_ub = capacidades,
                    A_eq = matriz_eq,
                    b_eq = demandas,
                    method = 'interior-point')
```

**Fonte: Elaborado pelo Autor**

O resultado encontrado para a função objetivo após a resolução do problema pelo método de ponto interior é igual a R\$: 2.475.636,75, valor igual ao encontrado pelo Solver na resolução do problema de otimização considerando todos os períodos produtivos. O número de iterações necessárias para a resolução do problema pelo método de ponto interior é igual a 12.

Uma outra execução da função linprog para este problema foi realizada, desta vez utilizando como parâmetro o método Simplex. A Figura 4.2 apresenta a aplicação do método Simplex.



## 5.- CONCLUSÕES E SUGESTÕES

A resolução do problema de otimização dos custos de produção por meio da alteração da alocação dos produtos de uma empresa de bebidas entre suas fábricas foi realizada utilizando métodos de resolução e cenários de produção distintos. O programa Excel foi utilizado neste trabalho para os fins de armazenamento dos dados de volume de produção, custo dos produtos por fábrica e capacidade das fábricas, assim como a linguagem de programação VBA e o suplemento Solver foram utilizados para o pré-processamento dos dados e a execução da otimização dos custos, sendo que o Solver apresenta apenas o método Simplex como opção para resolução de problemas do tipo de programação linear. O ambiente de desenvolvimento em Python Jupyter Notebook também foi utilizado para os fins de pré-processamento dos dados e otimização do sistema, utilizando para isto os métodos Simplex e de ponto interior.

Uma primeira conclusão que pode ser retirada da resolução dos problemas de otimização é a de que a maneira com a qual a alocação dos produtos é feita atualmente na empresa não garante o menor custo possível, tendo em vista que o custo total de produção sofreu uma redução em todos os cenários apresentados. O período que apresentou a menor redução foi o Período 6, com 7% de redução dos custos iniciais após a otimização, enquanto o período que apresentou a maior redução foi o Período 1, no qual obteve-se uma redução de 14% comparando a distribuição ótima com a alocação inicial dos produtos. A redução média dos custos dos períodos foi de 9%.

Somando as reduções de custo encontradas na otimização individual de cada período de produção, encontra-se uma redução total de R\$: 589.983,70. A redução de custos obtida a partir da otimização considerando todos os períodos de produção simultaneamente foi igual a R\$: 593.709,45. Assim, pode-se afirmar também que existe uma vantagem em realizar o processo de otimização considerando o conjunto de períodos.

Comparando o resultado da otimização para todos os períodos obtidos pelo Solver do Excel com os resultados para todos os períodos obtidos utilizando Python, as duas ferramentas de otimização convergiram para o mesmo resultado. Assim, pode-se afirmar que para um problema de programação linear com a quantidade de variáveis e restrições encontradas no problema resolvido, as duas ferramentas apresentam capacidade de resolução do problema. No entanto, ao desenvolver a programação em Python, foi necessário um número menor de linhas de comandos na etapa de elaboração do pré-processamento dos dados. Comparando os métodos Simplex e de ponto interior no Python, o método de ponto interior apresentou um menor número de iterações para atingir o resultado.

Como sugestão para continuidade do trabalho, propõe-se que o método de otimização de programação linear seja utilizado no processo de planejamento da produção nesta empresa de bebidas, tendo em vista que, ao utilizar este método para a otimização da distribuição dos volumes de produção de períodos passados, os resultados obtidos demonstram que há possibilidade de redução de custos.

Outras sugestões podem ser feitas, como a inclusão dos custos de logística, incluindo o transporte dos produtos e armazenamento na formulação do problema de programação linear, além das despesas de produção já presentes no problema. Além disso, este trabalho também levanta o questionamento acerca da adequação das fábricas para que mais produtos desta empresa tenham mais de uma alternativa de produção, afinal foi visto que esta flexibilidade de produção pode gerar uma economia para a empresa. Com isso, propõe-se que sejam levantados os custos de adequação das fábricas para a produção de uma maior diversidade de produtos e as possíveis reduções de custo de produção decorrentes desta adequação, de modo que o montante gasto com os ajustes de uma fábrica seja compensado pela economia obtida pela redução dos custos de produção.

## APÊNDICE A – DADOS DE PRODUÇÃO ANTES DA OTIMIZAÇÃO

**Tabela A.1 – Volumes de Produção dos Produtos em cada Fábrica no Período 1 Parte 1**

<b>Produto</b>	<b>Volume Fábrica 1 (l)</b>	<b>Volume Fábrica 2 (l)</b>	<b>Volume Fábrica 3 (l)</b>	<b>Volume Fábrica 4 (l)</b>	<b>Total (l)</b>
Produto 3	1306	X	X	X	1306
Produto 4	558	X	X	X	558
Produto 8	814	X	X	X	814
Produto 10	3560	X	X	X	3560
Produto 11	2310	X	X	X	2310
Produto 12	653	X	X	X	653
Produto 13	2575	X	2320	X	4895
Produto 14	7918	15797	X	0	23715
Produto 15	0	1000	X	0	1000
Produto 20	14357	X	X	X	14357
Produto 21	2819	X	X	X	2819
Produto 25	314	X	X	X	314
Produto 26	363	X	X	X	363
Produto 28	845	X	X	X	845
Produto 30	3394	X	X	0	3394
Produto 31	2006	X	X	0	2006
Produto 32	5326	X	X	0	5326
Produto 33	6735	X	X	X	6735
Produto 34	7197	X	X	X	7197
Produto 36	3049	5383	0	X	8432
Produto 37	0	X	940	X	940
Produto 38	26422	25038	3402	X	54862
Produto 39	X	176	X	X	176
Produto 40	X	653	X	X	653
Produto 41	X	46202	X	0	46202
Produto 42	X	1136	X	0	1136
Produto 45	X	145	X	X	145
Produto 46	X	94	X	X	94
Produto 47	0	3683	X	0	3683
Produto 48	X	426	X	0	426
Produto 49	X	369	X	X	369
Produto 50	X	606	X	X	606
Produto 51	X	473	X	X	473
Produto 52	X	25	X	X	25
Produto 53	X	183	X	X	183
Produto 54	X	11600	X	X	11600
Produto 56	X	113	X	X	113
Produto 57	X	164	X	X	164
Produto 58	X	12556	X	X	12556

Fonte: Elaborado pelo Autor

**Tabela A.2 – Volumes de Produção dos Produtos em cada Fábrica no Período 1 Parte 2**

<b>Produto</b>	<b>Volume Fábrica 1 (l)</b>	<b>Volume Fábrica 2 (l)</b>	<b>Volume Fábrica 3 (l)</b>	<b>Volume Fábrica 4 (l)</b>	<b>Total (l)</b>
Produto 59	X	631	X	X	631
Produto 62	X	965	X	X	965
Produto 63	X	1126	X	X	1126
Produto 64	0	5980	X	0	5980
Produto 65	X	16829	X	100061	116890
Produto 70	X	15584	X	X	15584
Produto 71	X	646	X	X	646
Produto 73	X	700	X	X	700
Produto 74	0	16288	X	X	16288
Produto 78	X	5111	X	X	5111
Produto 79	X	7811	X	X	7811
Produto 80	X	25	X	X	25
Produto 81	X	2500	0	X	2500
Produto 82	X	2597	0	X	2597
Produto 83	X	0	1688	X	1688
Produto 84	0	2884	0	X	2884
Produto 88	X	X	804	X	804
Produto 91	X	X	303	X	303
Produto 92	X	X	631	X	631
Produto 94	X	X	1543	X	1543
Produto 95	X	X	1499	X	1499
Produto 97	0	X	1306	X	1306
Produto 98	0	X	1025	X	1025
Produto 99	X	X	236	X	236
Produto 100	X	X	236	X	236
Produto 101	X	X	94	X	94
Produto 102	0	X	946	X	946
Produto 103	X	X	173	X	173
Produto 107	X	X	747	X	747
Produto 109	X	X	X	26698	26698
Produto 112	X	X	717	X	717
Produto 114	X	X	291	X	291
Produto 116	X	X	177	X	177
Produto 119	X	X	390	X	390
Produto 124	X	X	1603	X	1603
Produto 125	X	X	1150	X	1150
Produto 127	X	X	1464	X	1464
Produto 136	X	X	X	435	435
Produto 137	X	X	X	47960	47960

Fonte: Elaborado pelo Autor



**Tabela A.3 – Volumes de Produção dos Produtos em cada Fábrica no Período 2 Parte 1**

<b>Produto</b>	<b>Volume Fábrica 1 (l)</b>	<b>Volume Fábrica 2 (l)</b>	<b>Volume Fábrica 3 (l)</b>	<b>Volume Fábrica 4 (l)</b>	<b>Total (l)</b>
Produto 3	2746	X	X	X	2746
Produto 4	473	X	X	X	473
Produto 6	198	X	X	X	198
Produto 9	558	X	X	X	558
Produto 10	4933	X	X	X	4933
Produto 11	4857	X	X	X	4857
Produto 12	2196	X	X	X	2196
Produto 13	378	X	3172	X	3550
Produto 14	3972	14700	X	0	18672
Produto 15	0	6290	X	0	6290
Produto 20	9667	X	X	X	9667
Produto 21	1536	X	X	X	1536
Produto 27	672	X	X	X	672
Produto 30	2649	X	X	0	2649
Produto 31	945	X	X	0	945
Produto 32	2439	X	X	0	2439
Produto 34	1975	X	X	X	1975
Produto 36	6453	6683	0	X	13136
Produto 37	0	X	2029	X	2029
Produto 38	38079	33193	0	X	71272
Produto 39	X	189	X	X	189
Produto 40	X	486	X	X	486
Produto 41	X	36287	X	0	36287
Produto 42	X	1215	X	0	1215
Produto 43	X	X	0	99813	99813
Produto 45	X	78	X	X	78
Produto 46	X	69	X	X	69
Produto 47	0	2007	X	0	2007
Produto 48	X	520	X	0	520
Produto 49	X	407	X	X	407
Produto 51	X	833	X	X	833
Produto 52	X	75	X	X	75
Produto 53	X	154	X	X	154
Produto 54	X	4867	X	X	4867
Produto 56	X	28	X	X	28
Produto 57	X	50	X	X	50
Produto 58	X	16619	X	X	16619
Produto 59	X	299	X	X	299
Produto 60	X	312	X	X	312
Produto 62	X	1164	X	X	1164
Produto 63	X	321	X	X	321
Produto 65	X	13152	X	0	13152

Fonte: Elaborado pelo Autor

**Tabela A.4 – Volumes de Produção dos Produtos em cada Fábrica no Período 2 Parte 2**

<b>Produto</b>	<b>Volume Fábrica 1 (l)</b>	<b>Volume Fábrica 2 (l)</b>	<b>Volume Fábrica 3 (l)</b>	<b>Volume Fábrica 4 (l)</b>	<b>Total (l)</b>
Produto 67	X	1611	X	X	1611
Produto 70	X	820	X	X	820
Produto 73	X	375	X	X	375
Produto 74	0	33936	X	X	33936
Produto 78	X	7556	X	X	7556
Produto 79	X	4390	X	X	4390
Produto 80	X	25	X	X	25
Produto 83	X	2725	918	X	3643
Produto 84	0	5652	0	X	5652
Produto 86	X	X	454	X	454
Produto 87	X	X	110	X	110
Produto 88	X	X	1420	X	1420
Produto 91	X	X	170	X	170
Produto 92	X	X	220	X	220
Produto 93	X	X	189	X	189
Produto 94	X	X	1448	X	1448
Produto 95	X	X	631	X	631
Produto 97	0	X	2159	X	2159
Produto 98	0	X	868	X	868
Produto 99	X	X	208	X	208
Produto 100	X	X	63	X	63
Produto 102	0	X	312	X	312
Produto 103	X	X	31	X	31
Produto 104	X	X	1298	X	1298
Produto 105	X	X	277	X	277
Produto 106	X	X	432	X	432
Produto 107	X	X	1461	X	1461
Produto 108	X	X	837	X	837
Produto 109	X	X	X	73908	73908
Produto 110	X	X	200	X	200
Produto 112	X	X	970	X	970
Produto 113	X	X	282	X	282
Produto 118	X	X	290	X	290
Produto 120	X	X	606	X	606
Produto 122	X	X	625	X	625
Produto 123	X	X	222	X	222
Produto 125	X	X	1704	X	1704
Produto 127	X	X	1931	X	1931
Produto 130	X	X	X	119420	119420
Produto 132	X	X	X	240365	240365
Produto 137	X	X	X	69781	69781

Fonte: Elaborado pelo Autor

**Tabela A.5 – Volumes de Produção dos Produtos em cada Fábrica no Período 3 Parte 1**

<b>Produto</b>	<b>Volume Fábrica 1 (l)</b>	<b>Volume Fábrica 2 (l)</b>	<b>Volume Fábrica 3 (l)</b>	<b>Volume Fábrica 4 (l)</b>	<b>Total (l)</b>
Produto 1	246	X	X	X	246
Produto 2	340	X	X	X	340
Produto 3	1666	X	X	X	1666
Produto 5	928	X	X	X	928
Produto 7	378	X	X	X	378
Produto 10	2414	X	X	X	2414
Produto 11	1571	X	X	X	1571
Produto 12	1401	X	X	X	1401
Produto 13	0	X	994	X	994
Produto 14	11290	18320	X	0	29610
Produto 15	0	10459	X	0	10459
Produto 16	469	X	X	X	469
Produto 17	819	X	X	X	819
Produto 18	451	X	X	X	451
Produto 19	627	X	X	X	627
Produto 20	4947	X	X	X	4947
Produto 22	1612	X	X	X	1612
Produto 23	354	X	X	X	354
Produto 24	634	X	X	X	634
Produto 30	2323	X	X	0	2323
Produto 31	4648	X	X	0	4648
Produto 32	1405	X	X	0	1405
Produto 33	10575	X	X	X	10575
Produto 34	5093	X	X	X	5093
Produto 36	6231	16223	0	X	22454
Produto 37	2336	X	831	X	3167
Produto 38	20450	2372	270	X	23092
Produto 39	X	44	X	X	44
Produto 40	X	287	X	X	287
Produto 41	X	26846	X	0	26846
Produto 42	X	615	X	0	615
Produto 44	X	501	X	X	501
Produto 45	X	104	X	X	104
Produto 46	X	44	X	X	44
Produto 47	0	1259	X	0	1259
Produto 48	X	126	X	0	126
Produto 51	X	587	X	X	587
Produto 53	X	104	X	X	104
Produto 54	X	4147	X	X	4147
Produto 56	X	44	X	X	44

Fonte: Elaborado pelo Autor

**Tabela A.6 – Volumes de Produção dos Produtos em cada Fábrica no Período 3 Parte 2**

<b>Produto</b>	<b>Volume Fábrica 1 (l)</b>	<b>Volume Fábrica 2 (l)</b>	<b>Volume Fábrica 3 (l)</b>	<b>Volume Fábrica 4 (l)</b>	<b>Total (l)</b>
Produto 57	X	56	X	X	56
Produto 58	X	3825	X	X	3825
Produto 59	X	126	X	X	126
Produto 61	X	X	X	62277	62277
Produto 63	X	520	X	X	520
Produto 65	X	28713	X	36920	65633
Produto 69	X	784	X	X	784
Produto 70	X	4897	X	X	4897
Produto 73	X	493	X	X	493
Produto 74	0	45645	X	X	45645
Produto 79	X	1600	X	X	1600
Produto 81	X	2684	0	X	2684
Produto 82	X	2536	672	X	3208
Produto 83	X	2665	0	X	2665
Produto 85	0	11390	0	X	11390
Produto 88	X	X	694	X	694
Produto 91	X	X	710	X	710
Produto 92	X	X	157	X	157
Produto 94	X	X	738	X	738
Produto 95	X	X	315	X	315
Produto 97	0	X	880	X	880
Produto 99	X	X	255	X	255
Produto 100	X	X	189	X	189
Produto 104	X	X	1387	X	1387
Produto 109	X	X	X	39905	39905
Produto 111	X	X	613	X	613
Produto 112	X	X	1134	X	1134
Produto 115	X	X	204	X	204
Produto 117	X	X	115	X	115
Produto 120	X	X	506	X	506
Produto 121	X	X	1204	X	1204
Produto 122	X	X	1115	X	1115
Produto 124	X	X	1612	X	1612
Produto 125	X	X	881	X	881
Produto 127	X	X	1095	X	1095
Produto 128	X	X	1451	X	1451
Produto 129	X	X	1084	X	1084
Produto 132	X	X	X	152808	152808
Produto 137	X	X	X	44643	44643

Fonte: Elaborado pelo Autor

**Tabela A.7 – Volumes de Produção dos Produtos em cada Fábrica no Período 4 Parte 1**

<b>Produto</b>	<b>Volume Fábrica 1 (I)</b>	<b>Volume Fábrica 2 (I)</b>	<b>Volume Fábrica 3 (I)</b>	<b>Volume Fábrica 4 (I)</b>	<b>Total (I)</b>
Produto 3	615	X	X	X	615
Produto 10	1401	X	X	X	1401
Produto 11	909	X	X	X	909
Produto 12	814	X	X	X	814
Produto 14	11059	14525	X	0	25584
Produto 15	0	18747	X	229227	247974
Produto 20	9328	X	X	X	9328
Produto 21	1690	X	X	X	1690
Produto 28	811	X	X	X	811
Produto 30	4184	X	X	0	4184
Produto 31	1530	X	X	0	1530
Produto 32	8733	X	X	0	8733
Produto 36	10871	0	0	X	10871
Produto 39	X	176	X	X	176
Produto 40	X	546	X	X	546
Produto 41	X	10303	X	0	10303
Produto 45	X	91	X	X	91
Produto 47	0	47	X	0	47
Produto 49	X	28	X	X	28
Produto 50	X	75	X	X	75
Produto 52	X	31	X	X	31
Produto 53	X	249	X	X	249
Produto 54	X	2727	X	X	2727
Produto 56	X	385	X	X	385
Produto 57	X	94	X	X	94
Produto 58	X	3787	X	X	3787
Produto 63	X	274	X	X	274
Produto 64	0	7771	X	0	7771
Produto 65	X	32477	X	13570	46047
Produto 68	X	X	X	16481	16481
Produto 70	X	13045	X	X	13045
Produto 71	X	1344	X	X	1344
Produto 74	0	11793	X	X	11793
Produto 79	X	8986	X	X	8986
Produto 80	X	27	X	X	27
Produto 81	X	2652	1554	X	4206
Produto 84	0	5595	750	X	6345
Produto 85	0	2920	0	X	2920
Produto 96	X	X	15	X	15
Produto 112	X	X	1323	X	1323
Produto 122	X	X	1589	X	1589
Produto 124	X	X	2761	X	2761
Produto 127	X	X	1474	X	1474

Fonte: Elaborado pelo Autor

**Tabela A.8 – Volumes de Produção dos Produtos em cada Fábrica no Período 4 Parte 2**

<b>Produto</b>	<b>Volume Fábrica 1 (l)</b>	<b>Volume Fábrica 2 (l)</b>	<b>Volume Fábrica 3 (l)</b>	<b>Volume Fábrica 4 (l)</b>	<b>Total (l)</b>
Produto 131	X	X	X	41892	41892
Produto 132	X	X	X	32458	32458
Produto 134	X	X	X	38516	38516
Produto 136	X	X	X	29605	29605
Produto 137	X	X	X	56966	56966

Fonte: Elaborado pelo Autor

**Tabela A.9 – Volumes de Produção dos Produtos em cada Fábrica no Período 5 Parte 1**

<b>Produto</b>	<b>Volume Fábrica 1 (l)</b>	<b>Volume Fábrica 2 (l)</b>	<b>Volume Fábrica 3 (l)</b>	<b>Volume Fábrica 4 (l)</b>	<b>Total (l)</b>
Produto 3	1136	X	X	X	1136
Produto 10	1780	X	X	X	1780
Produto 11	1316	X	X	X	1316
Produto 12	833	X	X	X	833
Produto 14	16079	8897	X	0	24976
Produto 15	39918	53204	X	115122	208244
Produto 20	8190	X	X	X	8190
Produto 29	646	X	X	X	646
Produto 30	1680	X	X	0	1680
Produto 31	3809	X	X	0	3809
Produto 32	1656	X	X	0	1656
Produto 35	5968	X	0	X	5968
Produto 36	9060	2829	0	X	11889
Produto 38	7465	0	0	X	7465
Produto 39	X	195	X	X	195
Produto 40	X	325	X	X	325
Produto 41	X	14706	X	0	14706
Produto 47	0	28	X	0	28
Produto 49	X	142	X	X	142
Produto 52	X	18	X	X	18
Produto 53	X	78	X	X	78
Produto 54	X	3579	X	X	3579
Produto 55	X	132	X	X	132
Produto 56	X	230	X	X	230
Produto 57	X	157	X	X	157
Produto 58	X	8892	X	X	8892
Produto 63	X	473	X	X	473
Produto 64	0	5473	X	0	5473
Produto 65	X	64397	X	82638	147035
Produto 68	X	X	X	62357	62357
Produto 70	X	5336	X	X	5336
Produto 72	X	295	X	X	295

Fonte: Elaborado pelo Autor

**Tabela A.10 – Volumes de Produção dos Produtos em cada Fábrica no Período 5 Parte 2**

<b>Produto</b>	<b>Volume Fábrica 1 (l)</b>	<b>Volume Fábrica 2 (l)</b>	<b>Volume Fábrica 3 (l)</b>	<b>Volume Fábrica 4 (l)</b>	<b>Total (l)</b>
Produto 74	0	40129	X	X	40129
Produto 75	X	115	X	X	115
Produto 76	X	X	X	9316	9316
Produto 79	X	6429	X	X	6429
Produto 80	X	25	X	X	25
Produto 81	X	2420	0	X	2420
Produto 82	X	2497	0	X	2497
Produto 84	0	6772	570	X	7342
Produto 85	0	2870	6118	X	8988
Produto 89	X	X	94	X	94
Produto 90	X	X	126	X	126
Produto 93	X	X	18	X	18
Produto 94	X	X	151	X	151
Produto 95	X	X	157	X	157
Produto 96	X	X	78	X	78
Produto 97	0	X	899	X	899
Produto 98	0	X	94	X	94
Produto 99	X	X	66	X	66
Produto 100	X	X	63	X	63
Produto 102	0	X	104	X	104
Produto 107	X	X	1470	X	1470
Produto 109	X	X	X	35335	35335
Produto 112	X	X	3002	X	3002
Produto 120	X	X	886	X	886
Produto 122	X	X	3093	X	3093
Produto 124	X	X	897	X	897
Produto 125	X	X	2402	X	2402
Produto 126	X	X	1240	X	1240
Produto 127	X	X	896	X	896
Produto 131	X	X	X	72226	72226
Produto 133	X	X	X	26491	26491
Produto 134	X	X	X	161102	161102
Produto 136	X	X	X	37660	37660
Produto 137	X	X	X	36852	36852
Produto 138	X	X	X	19079	19079

**Fonte: Elaborado pelo Autor**

**Tabela A.11 – Volumes de Produção dos Produtos em cada Fábrica no Período 6 Parte 1**

<b>Produto</b>	<b>Volume Fábrica 1 (l)</b>	<b>Volume Fábrica 2 (l)</b>	<b>Volume Fábrica 3 (l)</b>	<b>Volume Fábrica 4 (l)</b>	<b>Total (l)</b>
Produto 3	3020	X	X	X	3020
Produto 4	416	X	X	X	416
Produto 5	852	X	X	X	852
Produto 8	681	X	X	X	681
Produto 10	4384	X	X	X	4384
Produto 11	2642	X	X	X	2642
Produto 12	1609	X	X	X	1609
Produto 13	0	X	795	X	795
Produto 14	14204	11495	X	0	25699
Produto 15	4106	39629	X	140447	184182
Produto 20	6792	X	X	X	6792
Produto 21	1429	X	X	X	1429
Produto 26	795	X	X	X	795
Produto 29	301	X	X	X	301
Produto 30	2805	X	X	0	2805
Produto 31	3650	X	X	0	3650
Produto 32	4676	X	X	0	4676
Produto 33	5459	X	X	X	5459
Produto 34	2888	X	X	X	2888
Produto 36	8165	0	5958	X	14123
Produto 37	2073	X	0	X	2073
Produto 38	24852	0	0	X	24852
Produto 39	X	290	X	X	290
Produto 40	X	511	X	X	511
Produto 41	X	28996	X	0	28996
Produto 43	X	X	0	74645	74645
Produto 45	X	12	X	X	12
Produto 46	X	25	X	X	25
Produto 47	0	454	X	0	454
Produto 49	X	94	X	X	94
Produto 50	X	426	X	X	426
Produto 52	X	63	X	X	63
Produto 53	X	170	X	X	170
Produto 54	X	7660	X	X	7660
Produto 56	X	195	X	X	195
Produto 57	X	157	X	X	157
Produto 58	X	12329	X	X	12329
Produto 61	X	X	X	66261	66261
Produto 63	X	321	X	X	321
Produto 64	0	14940	X	0	14940
Produto 65	X	21843	X	88272	110115
Produto 66	X	9545	X	X	9545
Produto 68	X	X	X	10203	10203

Fonte: Elaborado pelo Autor



**Tabela A.12 – Volumes de Produção dos Produtos em cada Fábrica no Período 6 Parte 2**

<b>Produto</b>	<b>Volume Fábrica 1 (l)</b>	<b>Volume Fábrica 2 (l)</b>	<b>Volume Fábrica 3 (l)</b>	<b>Volume Fábrica 4 (l)</b>	<b>Total (l)</b>
Produto 70	X	15688	X	X	15688
Produto 71	X	968	X	X	968
Produto 72	X	252	X	X	252
Produto 74	0	48059	X	X	48059
Produto 76	X	X	X	28595	28595
Produto 77	X	5700	X	X	5700
Produto 79	X	6884	X	X	6884
Produto 80	X	22	X	X	22
Produto 81	X	0	1318	X	1318
Produto 82	X	1284	0	X	1284
Produto 84	0	2740	3079	X	5819
Produto 86	X	X	217	X	217
Produto 87	X	X	110	X	110
Produto 88	X	X	252	X	252
Produto 94	X	X	909	X	909
Produto 95	X	X	426	X	426
Produto 97	0	X	1060	X	1060
Produto 98	0	X	31	X	31
Produto 109	X	X	X	19759	19759
Produto 112	X	X	1366	X	1366
Produto 120	X	X	920	X	920
Produto 126	X	X	63	X	63
Produto 127	X	X	998	X	998
Produto 131	X	X	X	250247	250247
Produto 133	X	X	X	56911	56911
Produto 134	X	X	X	144414	144414
Produto 135	X	X	X	6300	6300
Produto 136	X	X	X	61569	61569
Produto 137	X	X	X	183082	183082

Fonte: Elaborado pelo Autor

**Tabela A.13 – Volumes dos Produtos em cada Fábrica em todos Períodos Parte 1**

<b>Produto</b>	<b>Volume Fábrica 1 (l)</b>	<b>Volume Fábrica 2 (l)</b>	<b>Volume Fábrica 3 (l)</b>	<b>Volume Fábrica 4 (l)</b>	<b>Total (l)</b>
Produto 1	246	X	X	X	246
Produto 2	340	X	X	X	340
Produto 3	10489	X	X	X	10489
Produto 4	1447	X	X	X	1447
Produto 5	1780	X	X	X	1780
Produto 6	198	X	X	X	198

Fonte: Elaborado pelo Autor

**Tabela A.14 – Volumes dos Produtos em cada Fábrica em todos Períodos Parte 2**

<b>Produto</b>	<b>Volume Fábrica 1 (l)</b>	<b>Volume Fábrica 2 (l)</b>	<b>Volume Fábrica 3 (l)</b>	<b>Volume Fábrica 4 (l)</b>	<b>Total (l)</b>
Produto 7	378	X	X	X	378
Produto 8	1495	X	X	X	1495
Produto 9	558	X	X	X	558
Produto 10	18472	X	X	X	18472
Produto 11	13605	X	X	X	13605
Produto 12	7506	X	X	X	7506
Produto 13	2953	X	7281	X	10234
Produto 14	64522	83734	X	0	148256
Produto 15	44024	129329	X	484796	658149
Produto 16	469	X	X	X	469
Produto 17	819	X	X	X	819
Produto 18	451	X	X	X	451
Produto 19	627	X	X	X	627
Produto 20	53281	X	X	X	53281
Produto 21	7474	X	X	X	7474
Produto 22	1612	X	X	X	1612
Produto 23	354	X	X	X	354
Produto 24	634	X	X	X	634
Produto 25	314	X	X	X	314
Produto 26	1158	X	X	X	1158
Produto 27	672	X	X	X	672
Produto 28	1656	X	X	X	1656
Produto 29	947	X	X	X	947
Produto 30	17035	X	X	0	17035
Produto 31	16588	X	X	0	16588
Produto 32	24235	X	X	0	24235
Produto 33	22769	X	X	X	22769
Produto 34	17153	X	X	X	17153
Produto 35	5968	X	0	X	5968
Produto 36	43829	31118	5958	X	80905
Produto 37	4409	X	3800	X	8209
Produto 38	117268	60603	3672	X	181543
Produto 39	X	1070	X	X	1070
Produto 40	X	2808	X	X	2808
Produto 41	X	163340	X	0	163340
Produto 42	X	2966	X	0	2966
Produto 43	X	X	0	174458	174458
Produto 44	X	501	X	X	501
Produto 45	X	430	X	X	430
Produto 46	X	232	X	X	232
Produto 47	0	7478	X	0	7478

Fonte: Elaborado pelo Autor

**Tabela A.15 – Volumes dos Produtos em cada Fábrica em todos Períodos Parte 3**

<b>Produto</b>	<b>Volume Fábrica 1 (l)</b>	<b>Volume Fábrica 2 (l)</b>	<b>Volume Fábrica 3 (l)</b>	<b>Volume Fábrica 4 (l)</b>	<b>Total (l)</b>
Produto 48	X	1072	X	0	1072
Produto 49	X	1040	X	X	1040
Produto 50	X	1107	X	X	1107
Produto 51	X	1893	X	X	1893
Produto 52	X	212	X	X	212
Produto 53	X	938	X	X	938
Produto 54	X	34580	X	X	34580
Produto 55	X	132	X	X	132
Produto 56	X	995	X	X	995
Produto 57	X	678	X	X	678
Produto 58	X	58008	X	X	58008
Produto 59	X	1056	X	X	1056
Produto 60	X	312	X	X	312
Produto 61	X	X	X	128538	128538
Produto 62	X	2129	X	X	2129
Produto 63	X	3035	X	X	3035
Produto 64	0	34164	X	0	34164
Produto 65	X	177411	X	321461	498872
Produto 66	X	9545	X	X	9545
Produto 67	X	1611	X	X	1611
Produto 68	X	X	X	89041	89041
Produto 69	X	784	X	X	784
Produto 70	X	55370	X	X	55370
Produto 71	X	2958	X	X	2958
Produto 72	X	547	X	X	547
Produto 73	X	1568	X	X	1568
Produto 74	0	195850	X	X	195850
Produto 75	X	115	X	X	115
Produto 76	X	X	X	37911	37911
Produto 77	X	5700	X	X	5700
Produto 78	X	12667	X	X	12667
Produto 79	X	36100	X	X	36100
Produto 80	X	124	X	X	124
Produto 81	X	10256	2872	X	13128
Produto 82	X	8914	672	X	9586
Produto 83	X	5390	2606	X	7996
Produto 84	0	23643	4399	X	28042
Produto 85	0	17180	6118	X	23298
Produto 86	X	X	671	X	671
Produto 87	X	X	220	X	220
Produto 88	X	X	3170	X	3170

Fonte: Elaborado pelo Autor

Tabela A.16 – Volumes dos Produtos em cada Fábrica em todos Períodos Parte 4

<b>Produto</b>	<b>Volume Fábrica 1 (l)</b>	<b>Volume Fábrica 2 (l)</b>	<b>Volume Fábrica 3 (l)</b>	<b>Volume Fábrica 4 (l)</b>	<b>Total (l)</b>
Produto 89	X	X	94	X	94
Produto 90	X	X	126	X	126
Produto 91	X	X	1183	X	1183
Produto 92	X	X	1008	X	1008
Produto 93	X	X	207	X	207
Produto 94	X	X	4789	X	4789
Produto 95	X	X	3028	X	3028
Produto 96	X	X	93	X	93
Produto 97	0	X	6304	X	6304
Produto 98	0	X	2018	X	2018
Produto 99	X	X	765	X	765
Produto 100	X	X	551	X	551
Produto 101	X	X	94	X	94
Produto 102	0	X	1362	X	1362
Produto 103	X	X	204	X	204
Produto 104	X	X	2685	X	2685
Produto 105	X	X	277	X	277
Produto 106	X	X	432	X	432
Produto 107	X	X	3678	X	3678
Produto 108	X	X	837	X	837
Produto 109	X	X	X	195605	195605
Produto 110	X	X	200	X	200
Produto 111	X	X	613	X	613
Produto 112	X	X	8512	X	8512
Produto 113	X	X	282	X	282
Produto 114	X	X	291	X	291
Produto 115	X	X	204	X	204
Produto 116	X	X	177	X	177
Produto 117	X	X	115	X	115
Produto 118	X	X	290	X	290
Produto 119	X	X	390	X	390
Produto 120	X	X	2918	X	2918
Produto 121	X	X	1204	X	1204
Produto 122	X	X	6422	X	6422
Produto 123	X	X	222	X	222
Produto 124	X	X	6873	X	6873
Produto 125	X	X	6137	X	6137
Produto 126	X	X	1303	X	1303
Produto 127	X	X	7858	X	7858
Produto 128	X	X	1451	X	1451
Produto 129	X	X	1084	X	1084

Fonte: Elaborado pelo Autor

**Tabela A.17 – Volumes dos Produtos em cada Fábrica em todos Períodos Parte 5**

<b>Produto</b>	<b>Volume Fábrica 1 (l)</b>	<b>Volume Fábrica 2 (l)</b>	<b>Volume Fábrica 3 (l)</b>	<b>Volume Fábrica 4 (l)</b>	<b>Total (l)</b>
Produto 130	X	X	X	119420	119420
Produto 131	X	X	X	364365	364365
Produto 132	X	X	X	425631	425631
Produto 133	X	X	X	83402	83402
Produto 134	X	X	X	344032	344032
Produto 135	X	X	X	6300	6300
Produto 136	X	X	X	129269	129269
Produto 137	X	X	X	439284	439284
Produto 138	X	X	X	19079	19079

Fonte: Elaborado pelo Autor

**Tabela A.18 – Produção por Fábrica por Período**

<b>Fábrica</b>	<b>Período</b>	<b>Capacidade Produção Total (l)</b>	<b>Volume Total (l)</b>	<b>Volume Produção Obrigatória (l)</b>	<b>Capacidade Produção Não Obrigatória (l)</b>
Fábrica 1	1	94690	92521	41831	52859
Fábrica 1	2	94690	84726	29811	64879
Fábrica 1	3	94690	83208	33939	60751
Fábrica 1	4	94690	51945	14953	79737
Fábrica 1	5	94690	99536	12765	81925
Fábrica 1	6	94690	95799	26980	67710
Fábrica 2	1	233585	205499	59756	173829
Fábrica 2	2	233585	197088	40728	192857
Fábrica 2	3	233585	188016	18163	215422
Fábrica 2	4	233585	138695	31865	201720
Fábrica 2	5	233585	230643	26421	207164
Fábrica 2	6	233585	230752	61312	172273
Fábrica 3	1	25560	23685	12058	13502
Fábrica 3	2	25560	25537	16079	9481
Fábrica 3	3	25560	19106	15459	10101
Fábrica 3	4	25560	9466	7162	18398
Fábrica 3	5	25560	22424	14639	10921
Fábrica 3	6	25560	17502	5261	20299
Fábrica 4	1	1262600	175154	75093	1187507
Fábrica 4	2	1262600	603287	503474	759126
Fábrica 4	3	1262600	336553	299633	962967
Fábrica 4	4	1262600	458715	215918	1046682
Fábrica 4	5	1262600	658178	460418	802182
Fábrica 4	6	1262600	1130705	827341	435259

Fonte: Elaborado pelo Autor

Tabela A.19 – Custo de Produção Por Fábrica Parte 1

<b>Produto</b>	<b>Custo Fábrica 1 (R\$)</b>	<b>Custo Fábrica 2 (R\$)</b>	<b>Custo Fábrica 3 (R\$)</b>	<b>Custo Fábrica 4 (R\$)</b>	<b>Alternativas de Produção</b>
Produto 1	1,72	0	0	0	1
Produto 2	2,02	0	0	0	1
Produto 3	2	0	0	0	1
Produto 4	3,19	0	0	0	1
Produto 5	16,92	0	0	0	1
Produto 6	2,54	0	0	0	1
Produto 7	1,35	0	0	0	1
Produto 8	3,6	0	0	0	1
Produto 9	1,4	0	0	0	1
Produto 10	1,71	0	0	0	1
Produto 11	1,27	0	0	0	1
Produto 12	1,24	0	0	0	1
Produto 13	1,34	0	1,79	0	2
Produto 14	2,25	1,27	0	0,91	3
Produto 15	1,86	1,25	0	1	3
Produto 16	3,8	0	0	0	1
Produto 17	2,49	0	0	0	1
Produto 18	4,31	0	0	0	1
Produto 19	3,2	0	0	0	1
Produto 20	2,91	0	0	0	1
Produto 21	4,12	0	0	0	1
Produto 22	3,33	0	0	0	1
Produto 23	4,55	0	0	0	1
Produto 24	3,47	0	0	0	1
Produto 25	5,1	0	0	0	1
Produto 26	4,57	0	0	0	1
Produto 27	2,12	0	0	0	1
Produto 28	3,86	0	0	0	1
Produto 29	9,47	0	0	0	1
Produto 30	2,66	0	0	0,99	2
Produto 31	2,23	0	0	1,31	2
Produto 32	2,13	0	0	1,17	2
Produto 33	1,98	0	0	0	1
Produto 34	2,2	0	0	0	1
Produto 35	2,88	0	2,26	0	2
Produto 36	2,71	1,69	2,66	0	3
Produto 37	3,17	0	2,94	0	2
Produto 38	2,03	1,02	2,54	0	3
Produto 39	0	0,81	0	0	1
Produto 40	0	0,86	0	0	1
Produto 41	0	0,79	0	0,45	2
Produto 42	0	0,78	0	0,45	2

Fonte: Elaborado pelo Autor

Tabela A.20 – Custo de Produção Por Fábrica Parte 2

<b>Produto</b>	<b>Custo Fábrica 1 (R\$)</b>	<b>Custo Fábrica 2 (R\$)</b>	<b>Custo Fábrica 3 (R\$)</b>	<b>Custo Fábrica 4 (R\$)</b>	<b>Alternativas de Produção</b>
Produto 43	0	0	2,67	0,93	2
Produto 44	0	0,72	0	0	1
Produto 45	0	0,7	0	0	1
Produto 46	0	0,65	0	0	1
Produto 47	1,59	0,63	0	0,32	3
Produto 48	0	0,62	0	0,32	2
Produto 49	0	0,77	0	0	1
Produto 50	0	0,72	0	0	1
Produto 51	0	0,88	0	0	1
Produto 52	0	0,85	0	0	1
Produto 53	0	0,87	0	0	1
Produto 54	0	0,84	0	0	1
Produto 55	0	1,16	0	0	1
Produto 56	0	0,7	0	0	1
Produto 57	0	0,67	0	0	1
Produto 58	0	0,66	0	0	1
Produto 59	0	0,65	0	0	1
Produto 60	0	0,66	0	0	1
Produto 61	0	0	0	0,99	1
Produto 62	0	0,68	0	0	1
Produto 63	0	1,37	0	0	1
Produto 64	2,57	1,87	0	1,23	3
Produto 65	0	1,34	0	1,06	2
Produto 66	0	1,38	0	0	1
Produto 67	0	2,45	0	0	1
Produto 68	0	0	0	1,48	1
Produto 69	0	1,26	0	0	1
Produto 70	0	1,34	0	0	1
Produto 71	0	1,5	0	0	1
Produto 72	0	1,61	0	0	1
Produto 73	0	1,43	0	0	1
Produto 74	2,4	1,4	0	0	2
Produto 75	0	5,05	0	0	1
Produto 76	0	0	0	1,15	1
Produto 77	0	1,29	0	0	1
Produto 78	0	1,29	0	0	1
Produto 79	0	1,96	0	0	1
Produto 80	0	0,4	0	0	1
Produto 81	0	3,33	2,63	0	2
Produto 82	0	2,39	3,23	0	2
Produto 83	0	1,37	2,86	0	2
Produto 84	1,6	1,44	2,63	0	3

Fonte: Elaborado pelo Autor

Tabela A.21 – Custo de Produção Por Fábrica Parte 3

<b>Produto</b>	<b>Custo Fábrica 1 (R\$)</b>	<b>Custo Fábrica 2 (R\$)</b>	<b>Custo Fábrica 3 (R\$)</b>	<b>Custo Fábrica 4 (R\$)</b>	<b>Alternativas de Produção</b>
Produto 85	1,84	1,34	2,76	0	3
Produto 86	0	0	1,85	0	1
Produto 87	0	0	1,75	0	1
Produto 88	0	0	1,77	0	1
Produto 89	0	0	2,25	0	1
Produto 90	0	0	2,24	0	1
Produto 91	0	0	2,44	0	1
Produto 92	0	0	2,42	0	1
Produto 93	0	0	3,77	0	1
Produto 94	0	0	1,97	0	1
Produto 95	0	0	1,95	0	1
Produto 96	0	0	3,07	0	1
Produto 97	1,88	0	1,91	0	2
Produto 98	1,89	0	1,89	0	2
Produto 99	0	0	2,32	0	1
Produto 100	0	0	2,3	0	1
Produto 101	0	0	1,84	0	1
Produto 102	1,39	0	2,13	0	2
Produto 103	0	0	2,12	0	1
Produto 104	0	0	6,23	0	1
Produto 105	0	0	2,51	0	1
Produto 106	0	0	2,15	0	1
Produto 107	0	0	2,61	0	1
Produto 108	0	0	2,95	0	1
Produto 109	0	0	0	1,29	1
Produto 110	0	0	3,16	0	1
Produto 111	0	0	2,75	0	1
Produto 112	0	0	3,5	0	1
Produto 113	0	0	5,35	0	1
Produto 114	0	0	5,35	0	1
Produto 115	0	0	5,35	0	1
Produto 116	0	0	5,35	0	1
Produto 117	0	0	5,35	0	1
Produto 118	0	0	3,06	0	1
Produto 119	0	0	7,17	0	1
Produto 120	0	0	4,48	0	1
Produto 121	0	0	3,04	0	1
Produto 122	0	0	6,59	0	1
Produto 123	0	0	2,94	0	1
Produto 124	0	0	3,62	0	1
Produto 125	0	0	3,06	0	1
Produto 126	0	0	2,83	0	1

Fonte: Elaborado pelo Autor



**Tabela A.22 – Custo de Produção Por Fábrica Parte 4**

<b>Produto</b>	<b>Custo Fábrica 1 (R\$)</b>	<b>Custo Fábrica 2 (R\$)</b>	<b>Custo Fábrica 3 (R\$)</b>	<b>Custo Fábrica 4 (R\$)</b>	<b>Alternativas de Produção</b>
Produto 127	0	0	5,79	0	1
Produto 128	0	0	2,95	0	1
Produto 129	0	0	3,14	0	1
Produto 130	0	0	0	1,01	1
Produto 131	0	0	0	1,01	1
Produto 132	0	0	0	0,99	1
Produto 133	0	0	0	0,71	1
Produto 134	0	0	0	1,01	1
Produto 135	0	0	0	2,25	1
Produto 136	0	0	0	1,3	1
Produto 137	0	0	0	0,88	1
Produto 138	0	0	0	1,38	1

**Fonte: Elaborado pelo Autor**

## APÊNDICE B – APRESENTAÇÃO DAS PLANILHAS DE EXCEL E DESCRIÇÃO DA MACRO QUE ORGANIZA A PLANILHA APOIO

A Figura B.1 contém a base de volumes de produção de cada produto em cada uma das fábricas nos períodos de 1 a 6. Além disso, esta planilha apresenta as colunas “Chave”, na qual são concatenados o nome da fábrica e o nome do produto produzido, “Alternativas de Produção”, com a classificação do produto de acordo com o número de fábricas onde seria possível produzi-lo , e “Volume Total”, que contém para cada linha da tabela, ou para cada “chave” a soma dos volumes de todos os períodos. Esta coluna “Chave” irá apresentar um valor único para cada linha da tabela. Esta característica será utilizada após a otimização para construir a tabela de comparação entre a distribuição real dos volumes e após a otimização.

**Figura B.1. Planilha de Volumes**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Chave	Fábrica	Produto	Alternativas de produção	Volume Período 1	Volume Período 2	Volume Período 3	Volume Período 4	Volume Período 5	Volume Período 6	Volume Total
2	Fábrica 1_Produto 1	Fábrica 1	Produto 1	1	0	0	246	0	0	0	246
3	Fábrica 1_Produto 2	Fábrica 1	Produto 2	1	0	0	340	0	0	0	340
4	Fábrica 1_Produto 3	Fábrica 1	Produto 3	1	1306	2746	1666	615	1136	3020	10489
5	Fábrica 1_Produto 4	Fábrica 1	Produto 4	1	558	473	0	0	0	416	1447
6	Fábrica 1_Produto 5	Fábrica 1	Produto 5	1	0	0	928	0	0	852	1780
7	Fábrica 1_Produto 6	Fábrica 1	Produto 6	1	0	198	0	0	0	0	198
8	Fábrica 1_Produto 7	Fábrica 1	Produto 7	1	0	0	378	0	0	0	378
9	Fábrica 1_Produto 8	Fábrica 1	Produto 8	1	814	0	0	0	0	681	1495
10	Fábrica 1_Produto 9	Fábrica 1	Produto 9	1	0	558	0	0	0	0	558
11	Fábrica 1_Produto 10	Fábrica 1	Produto 10	1	3560	4933	2414	1401	1780	4384	18472
12	Fábrica 1_Produto 11	Fábrica 1	Produto 11	1	2310	4857	1571	909	1316	2642	13605
13	Fábrica 1_Produto 12	Fábrica 1	Produto 12	1	653	2196	1401	814	833	1609	7506
14	Fábrica 1_Produto 13	Fábrica 1	Produto 13	2	2575	378	0	0	0	0	2953
15	Fábrica 1_Produto 14	Fábrica 1	Produto 14	3	7918	3972	11290	11059	16079	14204	64522
16	Fábrica 1_Produto 15	Fábrica 1	Produto 15	3	0	0	0	0	39918	4106	44024
17	Fábrica 1_Produto 16	Fábrica 1	Produto 16	1	0	0	469	0	0	0	469
18	Fábrica 1_Produto 17	Fábrica 1	Produto 17	1	0	0	819	0	0	0	819
19	Fábrica 1_Produto 18	Fábrica 1	Produto 18	1	0	0	451	0	0	0	451
20	Fábrica 1_Produto 19	Fábrica 1	Produto 19	1	0	0	627	0	0	0	627
21	Fábrica 1_Produto 20	Fábrica 1	Produto 20	1	14357	9667	4947	9328	8190	6792	53281
22	Fábrica 1_Produto 21	Fábrica 1	Produto 21	1	2819	1536	0	1690	0	1429	7474
23	Fábrica 1_Produto 22	Fábrica 1	Produto 22	1	0	0	1612	0	0	0	1612
24	Fábrica 1_Produto 23	Fábrica 1	Produto 23	1	0	0	354	0	0	0	354
25	Fábrica 1_Produto 24	Fábrica 1	Produto 24	1	0	0	634	0	0	0	634
26	Fábrica 1_Produto 25	Fábrica 1	Produto 25	1	314	0	0	0	0	0	314
27	Fábrica 1_Produto 26	Fábrica 1	Produto 26	1	363	0	0	0	0	795	1158

**Fonte: Elaborado pelo Autor**

Na Figura B.2 é apresentada a base de custos de produção, na qual se encontram os custos de produção de cada um dos produtos nas fábricas aptas a produzi-los, sendo que caso um produto não possa ser produzido em uma determinada fábrica, o valor do custo de produção nesta tabela será igual a 0.

**Figura B.2. Planilha de Custos**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	<b>Produto</b>	<b>Fábrica 1</b>	<b>Fábrica 2</b>	<b>Fábrica 3</b>	<b>Fábrica 4</b>	<b>Alternativas de Produção</b>							
2	Produto 1	1,72	0	0	0	1							
3	Produto 2	2,02	0	0	0	1							
4	Produto 3	2	0	0	0	1							
5	Produto 4	3,19	0	0	0	1							
6	Produto 5	16,92	0	0	0	1							
7	Produto 6	2,54	0	0	0	1							
8	Produto 7	1,35	0	0	0	1							
9	Produto 8	3,6	0	0	0	1							
10	Produto 9	1,4	0	0	0	1							
11	Produto 10	1,71	0	0	0	1							
12	Produto 11	1,27	0	0	0	1							
13	Produto 12	1,24	0	0	0	1							
14	Produto 13	1,34	0	1,79	0	2							
15	Produto 14	2,25	1,27	0	0,91	3							
16	Produto 15	1,86	1,25	0	1	3							
17	Produto 16	3,8	0	0	0	1							
18	Produto 17	2,49	0	0	0	1							
19	Produto 18	4,31	0	0	0	1							
20	Produto 19	3,2	0	0	0	1							
21	Produto 20	2,91	0	0	0	1							
22	Produto 21	4,12	0	0	0	1							
23	Produto 22	3,33	0	0	0	1							
24	Produto 23	4,55	0	0	0	1							
25	Produto 24	3,47	0	0	0	1							
26	Produto 25	5,1	0	0	0	1							
27	Produto 26	4,57	0	0	0	1							

Fonte: Elaborado pelo Autor

A Figura B.3 mostra a tabela com as informações das fábricas para cada período, contendo o volume de produção de cada fábrica em cada período, o volume de produção obrigatória, a capacidade de produção total da fábrica e a capacidade não comprometida da fábrica.

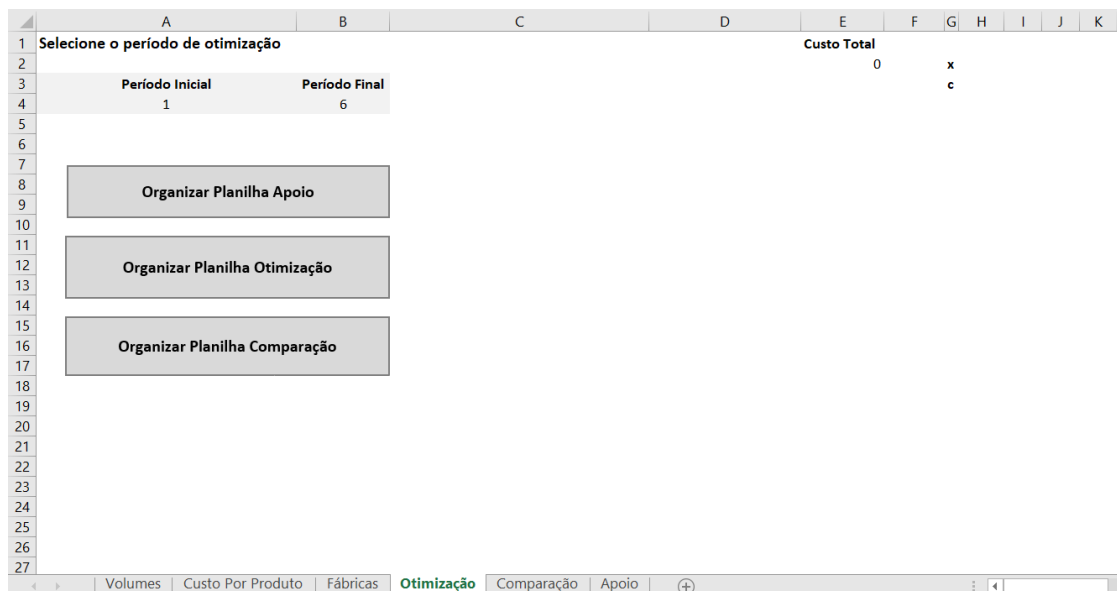
**Figura B.3. Planilha de Fábricas**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	<b>Fábrica</b>	<b>Período</b>	<b>Volume Total</b>	<b>Volume Produção Obrigatória</b>	<b>Capacidade Produção</b>	<b>Capacidade Não Comprometida</b>					
2	Fábrica 1	1	92521	41831	100000	58169					
3	Fábrica 1	2	84726	29811	100000	70189					
4	Fábrica 1	3	83208	34525	100000	65475					
5	Fábrica 1	4	51945	15568	100000	84432					
6	Fábrica 1	5	99536	13901	100000	86099					
7	Fábrica 1	6	95799	31268	100000	68732					
8	Fábrica 2	1	205499	59756	233500	173744					
9	Fábrica 2	2	197088	40728	233500	192772					
10	Fábrica 2	3	188016	18163	233500	215337					
11	Fábrica 2	4	138695	31865	233500	201635					
12	Fábrica 2	5	230643	26421	233500	207079					
13	Fábrica 2	6	230752	61312	233500	172188					
14	Fábrica 3	1	23685	12058	25600	13542					
15	Fábrica 3	2	25537	16079	25600	9521					
16	Fábrica 3	3	19106	15459	25600	10141					
17	Fábrica 3	4	9466	7162	25600	18438					
18	Fábrica 3	5	22424	14639	25600	10961					
19	Fábrica 3	6	17502	5261	25600	20339					
20	Fábrica 4	1	175154	75093	1262600	1187507					
21	Fábrica 4	2	603287	503474	1262600	759126					
22	Fábrica 4	3	336553	299633	1262600	962967					
23	Fábrica 4	4	458715	215918	1262600	1046682					
24	Fábrica 4	5	658178	460418	1262600	802182					
25	Fábrica 4	6	1130705	827341	1262600	435259					
26											
27											

Fonte: Elaborado pelo Autor

Na Figura B.4 é apresentada a planilha de otimização, na qual são escolhidos o período inicial e o período final que serão considerados para a otimização. Nesta planilha também se encontram ícones que, ao serem pressionados, fazem a ativação das macros que são utilizadas no processo de tratamento dos dados para a otimização. A ordem de execução dos botões é a seguinte: Primeiro é executada a macro que organiza a planilha Apoio, depois é executada a macro que organiza a planilha Otimização, em seguida, utiliza-se o Solver para encontrar o custo mínimo para a produção dos produtos que possuem mais de uma alternativa de produção, e por fim, é executada a macro que organiza a planilha comparação.

**Figura B.4. Planilha de Otimização**



**Fonte: Elaborado pelo Autor**

Visto que foram apresentadas as planilhas que contém os dados da produção neste apêndice e a ordem de execução das macros que compõem as etapas da solução do problema de otimização no capítulo 3, agora são apresentados os detalhes de execução de cada etapa e os códigos na linguagem de programação VBA que fazem parte das macros utilizadas. Este algoritmo é composto por três seções, e cada seção está ligada a uma parte diferente da planilha de apoio, mostrada na Figura B.5 a seguir.

**Figura B.5. Planilha de Apoio**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Produtos Período		Variável	Produto	Fábrica	Chave		Produto	Demanda Período				
2													
3													
4													
5													
6													
7													
8													
9													
10													
11													
12													
13													
14													
15													
16													
17													
18													
19													
20													
21													
22													
23													
24													
25													
26													
27													

**Fonte: Elaborado pelo Autor**

A primeira macro executada tem a função de inspecionar os dados da planilha Volumes e com base nestes dados construir a planilha Apoio. Antes de executar a macro, a planilha Apoio se encontra praticamente vazia, tendo apenas os cabeçalhos das tabelas que serão construídas no processo de execução dos comandos na linguagem de programação VBA.

Na primeira seção da macro “organiza\_apoio”, os valores do período de início e de período final são obtidos da planilha Otimização, e em seguida é feita a inspeção da planilha de volumes e os produtos que apresentam volume de produção diferente de zero no período escolhido são organizados na coluna Produtos Período da planilha Apoio. Os comandos que compõem esta seção da macro estão na Figura B.6 a seguir. No código apresentado, o primeiro laço de repetição altera o valor da variável `i_vol`, começando com o valor igual a 2 e indo até 154, que é a última linha da tabela de volumes. Depois, é atribuído à variável `produto` o nome do produto que consta na linha correspondente ao valor de `i_vol` na coluna B da planilha Volumes.

O próximo laço de repetição altera o valor da variável `período` do período de início ao período final. Estes dois laços juntos garantem que todas as linhas da tabela sejam inspecionadas e que apenas as colunas correspondentes ao período selecionado sejam levadas em consideração. Assim, para cada linha `i_vol`, serão conferidos os volumes de produção do produto correspondente a esta linha para todos os períodos selecionados. Caso o produto não apresente volume em nenhum dos períodos selecionados, o código segue para o próximo valor de `i_vol`. Se for apresentado volume no período selecionado, a próxima parte do código confere

se o nome do produto analisado já consta na planilha Apoio, sendo que, se o produto já estiver presente na coluna Produtos Período, o código segue para a próxima repetição, e se ele não estiver presente, o nome do produto é adicionado à coluna Produtos Período. Ao fim desta parte da macro, estarão presentes nesta coluna na planilha Apoio todos os produtos que não apresentaram volume igual a zero no período selecionado.

### Figura B.6. Primeira Seção da Macro Organiza Apoio

```
Sub organiza_apoio()

    ini = Sheets("Otimização").Range("A4")
    fim = Sheets("Otimização").Range("B4")

    'Preenche a coluna Produtos Período na planilha Apoio

    For i_vol = 2 To 154

        produto = Sheets("Volumes").Range("C" & i_vol)

        For periodo = ini To fim

            volume = Sheets("Volumes").Cells(i_vol, periodo + 4)

            If volume <> 0 Then

                On Error Resume Next

                corresp = WorksheetFunction.Match(produto, _
                    Sheets("Apoio").Range("A:A"), 0)

                If Err.Number <> 0 Then

                    Err.Clear

                    ul_1 = Sheets("Apoio").Range("A" & Rows.Count) _
                        .End(xlUp).Row

                    Sheets("Apoio").Range("A" & ul_1 + 1) = produto

                End If

            End If

        Next periodo

    Next i_vol

End Sub
```

**Fonte: Elaborado pelo Autor**

A segunda seção desta macro é apresentada pela Figura B.7. O primeiro passo nesta seção é conferir qual é a última linha da coluna de produtos do período, que corresponde à coluna A da planilha Apoio. A variável k na linha seguinte servirá como um contador que irá numerar as variáveis do problema de otimização. O primeiro laço de repetição altera a variável i\_a, que corresponde a cada linha da coluna de produtos do período. Em seguida, o nome do produto é obtido e encontra-se a linha correspondente a este produto na planilha Custo por Produto, que é atribuída à variável i\_c. Com a variável i\_c, encontra-se o número de alternativas de produção

do produto, sendo que apenas produtos com mais de uma alternativa de produção irão compor a tabela de variáveis. No caso de um produto com mais de uma alternativa de produção, um outro laço de repetição é feito, variando  $j_c$  de 1 a 4. O código dentro deste laço confere em quais fábricas é possível produzir o produto em questão. Caso o produto associado à linha  $i_a$  apresente um custo diferente de zero na fábrica associada à coluna  $j_c$ , o nome do produto e da fábrica serão adicionados à tabela de variáveis, junto a uma variável  $x_k$ .

### Figura B.7. Segunda Seção da Macro Organiza Apoio

```
'Preenche a tabela de variaveis na planilha Apoio
ul_1 = Sheets("Apoio").Range("A" & Rows.Count).End(xlUp).Row
k = 0

For i_a = 2 To ul_1

    produto = Sheets("Apoio").Range("A" & i_a)

    i_c = WorksheetFunction.Match(produto, _
        Sheets("Custo Por Produto").Range("A:A"), 0)

    alternativas = Sheets("Custo Por Produto").Cells(i_c, 6)

    If alternativas <> 1 Then

        For j_c = 1 To 4

            custo = Sheets("Custo Por Produto").Cells(i_c, j_c + 1)

            If custo <> 0 Then
                k = k + 1

                variavel = "x" & k

                ul_2 = Sheets("Apoio").Range("C" & Rows.Count).End(xlUp).Row

                fabrica = Sheets("Custo Por Produto").Cells(1, j_c + 1)

                Sheets("Apoio").Range("C" & ul_2 + 1) = variavel

                Sheets("Apoio").Range("D" & ul_2 + 1) = produto

                Sheets("Apoio").Range("E" & ul_2 + 1) = fabrica
            End If

        Next j_c

    End If

Next i_a
```

**Fonte: Elaborado pelo Autor**

Neste ponto, já é possível saber qual será o número de variáveis do problema de otimização, pois para cada combinação diferente de produção de um produto em uma fábrica haverá uma variável  $x$ , que corresponde ao volume produzido deste produto nesta fábrica. Na terceira seção desta macro, apresentada pela figura B.8, serão encontradas as restrições de volume demandado por produto no período em questão. No primeiro passo desta seção, encontra-se a última linha da tabela de variáveis. Em seguida, a coluna com o nome dos

produtos desta tabela é copiada e colada na coluna H da planilha Apoio. O próximo passo é remover desta coluna os valores duplicados, fazendo com que o nome de cada produto apareça apenas uma vez. Em seguida, é feito um laço de repetição que irá alterar o valor de *i\_a* de 2 até a última linha desta coluna onde se encontram os produtos do problema de otimização. Neste laço, a variável demanda começa com um valor igual a 0 e em seguida um novo laço é feito, variando o período. Deste modo, os volumes do produto em cada período no intervalo selecionado de período inicial e final serão calculados e somados para compor a demanda total de volume de produção do produto no período selecionado para a otimização.

### Figura B.8. Terceira Seção da Macro Organiza Apoio

```
'Preenche a tabela de Demanda Período na planilha Apoio
ul_2 = Sheets("Apoio").Range("C" & Rows.Count).End(xlUp).Row
Sheets("Apoio").Range("D2:D" & ul_2).Copy
Sheets("Apoio").Range("H2").Select
Selection.PasteSpecial Paste:=xlPasteValues, Operation:=xlNone, SkipBlanks:=False, Transpose:=False
Application.CutCopyMode = False
Sheets("Apoio").Range("H2:H" & ul_2).RemoveDuplicates Columns:=1, Header:=xlNo
'Preenche a demanda para cada produto
ul_3 = Sheets("Apoio").Range("H" & Rows.Count).End(xlUp).Row
For i_a = 2 To ul_3
    produto = Sheets("Apoio").Range("H" & i_a)
    demanda = 0
    For periodo = ini To fim
        If periodo = 1 Then coluna = "E3:E160"
        If periodo = 2 Then coluna = "F3:F160"
        If periodo = 3 Then coluna = "G3:G160"
        If periodo = 4 Then coluna = "H3:H160"
        If periodo = 5 Then coluna = "I3:I160"
        If periodo = 6 Then coluna = "J3:J160"
        volume = WorksheetFunction.SumIf(Sheets("Volumes").Range("C3:C160"), _
            produto, Sheets("Volumes").Range(coluna))
        demanda = demanda + volume
    Next periodo
    Sheets("Apoio").Range("I" & i_a) = demanda
Next i_a
End Sub
```

**Fonte: Elaborado pelo Autor**

Ao fim desta seção, encontram-se as restrições de volume demandado para cada um dos produtos do problema de otimização e encerra-se a macro de organização da planilha Apoio. A figura B.9 a seguir ilustra a planilha Apoio após a execução da primeira etapa.



**Figura B.9. Planilha Apoio Após a Primeira Etapa**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	Produtos Período		Variável	Produto	Fábrica	Chave		Produto	Demanda Período											
2	Produto 1		x1	Produto 13	Fábrica 1	Fábrica 1_Produto 13		Produto 13	10234											
3	Produto 2		x2	Produto 13	Fábrica 3	Fábrica 3_Produto 13		Produto 14	148256											
4	Produto 3		x3	Produto 14	Fábrica 1	Fábrica 1_Produto 14		Produto 15	658149											
5	Produto 4		x4	Produto 14	Fábrica 2	Fábrica 2_Produto 14		Produto 30	17035											
6	Produto 5		x5	Produto 14	Fábrica 4	Fábrica 4_Produto 14		Produto 31	16588											
7	Produto 6		x6	Produto 15	Fábrica 1	Fábrica 1_Produto 15		Produto 32	24235											
8	Produto 7		x7	Produto 15	Fábrica 2	Fábrica 2_Produto 15		Produto 35	5968											
9	Produto 8		x8	Produto 15	Fábrica 4	Fábrica 4_Produto 15		Produto 36	80905											
10	Produto 9		x9	Produto 30	Fábrica 1	Fábrica 1_Produto 30		Produto 37	8209											
11	Produto 10		x10	Produto 30	Fábrica 4	Fábrica 4_Produto 30		Produto 38	181543											
12	Produto 11		x11	Produto 31	Fábrica 1	Fábrica 1_Produto 31		Produto 41	163340											
13	Produto 12		x12	Produto 31	Fábrica 4	Fábrica 4_Produto 31		Produto 42	2966											
14	Produto 13		x13	Produto 32	Fábrica 1	Fábrica 1_Produto 32		Produto 43	174458											
15	Produto 14		x14	Produto 32	Fábrica 4	Fábrica 4_Produto 32		Produto 47	7478											
16	Produto 15		x15	Produto 35	Fábrica 1	Fábrica 1_Produto 35		Produto 48	1072											
17	Produto 16		x16	Produto 35	Fábrica 3	Fábrica 3_Produto 35		Produto 64	34164											
18	Produto 17		x17	Produto 36	Fábrica 1	Fábrica 1_Produto 36		Produto 65	498872											
19	Produto 18		x18	Produto 36	Fábrica 2	Fábrica 2_Produto 36		Produto 74	195850											
20	Produto 19		x19	Produto 36	Fábrica 3	Fábrica 3_Produto 36		Produto 81	13128											
21	Produto 20		x20	Produto 37	Fábrica 1	Fábrica 1_Produto 37		Produto 82	9586											
22	Produto 21		x21	Produto 37	Fábrica 3	Fábrica 3_Produto 37		Produto 83	7996											
23	Produto 22		x22	Produto 38	Fábrica 1	Fábrica 1_Produto 38		Produto 84	28042											
24	Produto 23		x23	Produto 38	Fábrica 2	Fábrica 2_Produto 38		Produto 85	23298											
25	Produto 24		x24	Produto 38	Fábrica 3	Fábrica 3_Produto 38		Produto 97	6304											
26	Produto 25		x25	Produto 41	Fábrica 2	Fábrica 2_Produto 41		Produto 98	2018											
27	Produto 26		x26	Produto 41	Fábrica 4	Fábrica 4_Produto 41		Produto 102	1362											
28	Produto 27		x27	Produto 42	Fábrica 2	Fábrica 2_Produto 42														
29	Produto 28		x28	Produto 42	Fábrica 4	Fábrica 4_Produto 42														

Fonte: Elaborado pelo Autor

## APÊNDICE C – DESCRIÇÃO DA MACRO QUE ORGANIZA A PLANILHA OTIMIZAÇÃO

Na segunda etapa do processo de otimização dos custos de produção, os dados na planilha Apoio serão utilizados para construir a estrutura da matriz de otimização, para que na terceira etapa o Solver seja utilizado e o custo mínimo de produção para os produtos com múltiplas alternativas de produção sejam encontrados. Nesta etapa também é executada uma macro, que fará este processo de construção da matriz na planilha Otimização. Esta macro está dividida em três seções, e a primeira seção é apresentada pela Figura C.1 a seguir.

**Figura C.1. Primeira Seção da Macro Matriz Otimização**

```
Sub matriz_otimizacao()
    ini = Sheets("Otimização").Range("A4")
    fim = Sheets("Otimização").Range("B4")
    'Inclui os custos reduzidos das variáveis do problema
    ul_1 = Sheets("Apoio").Range("C" & Rows.Count).End(xlUp).Row
    For i_a = 2 To ul_1
        variavel = Sheets("Apoio").Range("C" & i_a)
        produto = Sheets("Apoio").Range("D" & i_a)
        fabrica = Sheets("Apoio").Range("E" & i_a)
        num_prod = Mid(produto, 9, Len(produto) - 8)
        num_fabrica = Right(fabrica, 1)
        custo = Sheets("Custo Por Produto").Cells(num_prod + 1, num_fabrica + 1)
        Sheets("Otimização").Cells(1, i_a + 6) = variavel
        Sheets("Otimização").Cells(3, i_a + 6) = custo
    Next i_a
End Sub
```

**Fonte: Elaborado pelo Autor**

Nesta seção, os custos reduzidos do problema de otimização são incluídos na planilha Otimização. Os custos reduzidos neste problema são os custos de produção de cada produto em cada fábrica. Antes de executar esta parte da macro, as células das linhas 2 e 3 a partir da coluna H da planilha Otimização estão vazias e o valor da função custo é igual a zero, como foi mostrado anteriormente pela Figura B.4. Na segunda seção desta macro, as restrições de capacidade das fábricas são calculadas e adicionadas à planilha. O primeiro laço de repetição altera os valores de i de 1 a 4, representando cada uma das fábricas. Para cada fábrica, a variável capacidade começa com o valor de zero e no segundo laço são adicionados os valores de capacidade disponível em cada período, com base na planilha fábricas, baseando-se na capacidade não comprometida. Após o cálculo das capacidades, há um outro laço que irá

realizar o balanço para cada fábrica, atribuindo a todas as variáveis que na planilha apoio estão relacionadas a uma fábrica um coeficiente igual a 1 e atribuindo coeficiente igual a 0 para as demais variáveis. A segunda seção desta macro é apresentada na Figura C.2.

### Figura C.2. Segunda Seção da Macro Matriz Otimização

```

Next i_a
'Inclui as restrições de capacidade das fábricas
For i = 1 To 4
    Sheets("Otimização").Cells(i + 3, 4) = "Capacidade Fábrica " & i
    capacidade = 0
    For periodo = ini To fim
        capacidade_nc = WorksheetFunction.SumIfs(Sheets("Fábricas").Range("F:F"), _
            Sheets("Fábricas").Range("A:A"), "Fábrica " & i, _
            Sheets("Fábricas").Range("B:B"), periodo)
        capacidade = capacidade + capacidade_nc
    Next periodo
    Sheets("Otimização").Cells(i + 3, 6) = capacidade
    For i_a = 2 To ul_1
        fabrica = Sheets("Apoio").Range("E" & i_a)
        num_fabrica = CInt(Right(fabrica, 1))
        If num_fabrica = i Then
            Sheets("Otimização").Cells(i + 3, i_a + 6) = 1
        Else
            Sheets("Otimização").Cells(i + 3, i_a + 6) = 0
        End If
    Next i_a
Next i

```

**Fonte: Elaborado pelo Autor**

A última seção desta macro organiza as restrições de demanda de volume de cada produto de maneira semelhante à organização das restrições de capacidade por fábrica. Os códigos que compõem a terceira seção desta macro estão apresentados na Figura C.3. A terceira seção tem como objetivo em seu primeiro passo encontrar a última linha da tabela de demanda por produto na planilha Apoio. Em seguida, é feito um laço alterando o valor de i de 2 até a última linha da tabela, no qual são atribuídos à variável produto o nome do produto nesta linha e à variável demanda o volume demandado deste produto. Há um outro laço de repetição dentro deste primeiro, no qual a variável j é alterada de 2 até a última linha da tabela de variáveis. Neste segundo laço, todas as variáveis da tabela de variáveis são conferidas e aquelas que corresponderem ao mesmo produto, que se encontra na linha i da tabela de demanda recebem

um coeficiente com valor igual a 1 na matriz, já as que não correspondem ao mesmo produto recebem um coeficiente com valor igual a 0.

### Figura C.3. Terceira Seção da Macro Matriz Otimização

```
'Inclui as restrições de demanda dos produtos
ul_2 = Sheets("Apoio").Range("H" & Rows.Count).End(xlUp).Row
For i = 2 To ul_2
    produto = Sheets("Apoio").Range("H" & i)
    demanda = Sheets("Apoio").Range("I" & i)
    Sheets("Otimização").Cells(i + 6, 4) = "Demanda " & produto
    Sheets("Otimização").Cells(i + 6, 6) = demanda
    For j = 2 To ul_1
        prod = Sheets("Apoio").Range("D" & j)
        If prod = produto Then
            Sheets("Otimização").Cells(i + 6, j + 6) = 1
        Else
            Sheets("Otimização").Cells(i + 6, j + 6) = 0
        End If
    Next j
Next i
End Sub
```

**Fonte: Elaborado pelo Autor**

Ao fim da execução da macro de organização da planilha Otimização, a matriz A e os vetores x, b e c, representados de forma genérica pelas equações 2.1 e 2.2 na apresentação da Programação Linear no capítulo de revisão bibliográfica, aparecem na planilha e deste modo já é possível iniciar a terceira etapa, na qual o Solver é utilizado para a minimização dos custos industriais. A estrutura desta matriz e estes vetores é ilustrada na Figura C.4. Na planilha Otimização, a matriz A, que contém os coeficientes das restrições tem o número de colunas igual ao número de variáveis e o número de linhas igual ao número de restrições, sendo que as dimensões desta matriz serão diferentes para cada período selecionado. Na linha 2 da planilha encontra-se o vetor de variáveis, e na linha 3 encontra-se o vetor dos custos reduzidos, sendo que ambos iniciam a partir da coluna H. O vetor b está na coluna F e as células da coluna E, incluindo a célula na segunda linha, que contém o custo total, estão preenchidas com a fórmula de Excel SOMARPRODUTO, recebendo como argumento o vetor das variáveis e o vetor dos

custos reduzidos, no caso da célula de custo total, ou o vetor das variáveis e o vetor que contém os coeficientes de cada restrição nas demais células. Estas células apresentam valor igual a 0 na figura anterior, pois todas as variáveis estão zeradas.

**Figura C.4. Planilha de Otimização Após a Segunda Etapa**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	
1	Selecione o período de otimização				Custo Total		x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13	x14	x15	x16	x17	x18	x19		
2					0																						
3	Período Inicial	Período Final				c	1,34	1,79	2,25	1,27	0,91	1,86	1,25		1	2,66	0,99	2,23	1,31	2,13	1,17	2,88	2,26	2,71	1,69	2,66	
4	1	6		Capacidade Fábrica 1	0	407861	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	
5				Capacidade Fábrica 2	0	1163265	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
6				Capacidade Fábrica 3	0	82702	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
7				Capacidade Fábrica 4	0	5193723	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0
8	Organizar Planilha Apoio			Demanda Produto 13	0	10234	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9				Demanda Produto 14	0	148256	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10				Demanda Produto 15	0	658149	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	Organizar Planilha Otimização			Demanda Produto 30	0	17035	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12				Demanda Produto 31	0	16588	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
13				Demanda Produto 32	0	24235	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
14				Demanda Produto 35	0	5968	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
15	Organizar Planilha Comparação			Demanda Produto 36	0	80905	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
16				Demanda Produto 37	0	8209	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17				Demanda Produto 38	0	181543	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18				Demanda Produto 41	0	163340	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19				Demanda Produto 42	0	2966	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20				Demanda Produto 43	0	174458	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21				Demanda Produto 47	0	7478	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22				Demanda Produto 48	0	1072	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23				Demanda Produto 64	0	34164	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24				Demanda Produto 65	0	498872	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25				Demanda Produto 74	0	195850	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
26				Demanda Produto 81	0	13128	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
27				Demanda Produto 82	0	9586	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28				Demanda Produto 83	0	7996	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
29				Demanda Produto 84	0	28042	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30				Demanda Produto 85	0	23298	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
31				Demanda Produto 97	0	6304	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
32				Demanda Produto 98	0	2018	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
33				Demanda Produto 102	0	1362	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
34																											
35																											
36																											
37																											

Fonte: Elaborado pelo Autor

## APÊNDICE D – UTILIZAÇÃO DO SUPLEMENTO SOLVER DO EXCEL

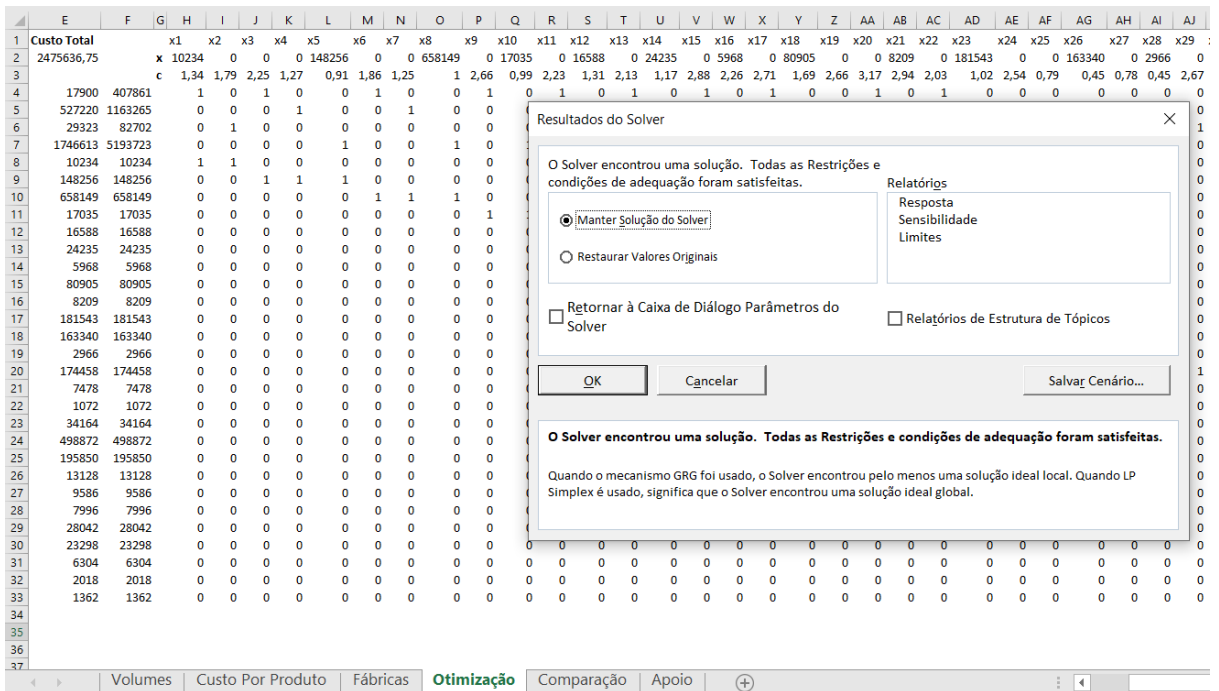
Após organizar a planilha Otimização, é possível executar o terceiro passo, no qual ocorre de fato a otimização do sistema. Para isto, utiliza-se o suplemento Solver do Excel. Ao iniciar o Solver, deve-se selecionar a célula que contém a função objetivo no campo “Definir Objetivo”, selecionar a opção para minimizar a função objetivo, inserir as células que contém os valores das variáveis do problema no campo “Alterando Células Variáveis”, adicionar as restrições, selecionar o método de solução LP Simplex, e selecionar o botão “Resolver”. Em seguida, o Solver irá executar o processo de otimização e retornará com uma solução para o problema. As Figuras D.1 e D.2 ilustram os passos descritos nesta terceira etapa.

**Figura D.1. Ajuste de Parâmetros do Solver**

The image shows the Excel Solver Parameters dialog box. The 'Definir Objetivo:' field is set to '\$E\$2'. The 'Para:' section has 'Mín.' selected. The 'Alterando Células Variáveis:' field is set to '\$H\$2:\$B\$2'. The 'Sujeito às Restrições:' section contains a list of constraints: '\$E\$29 = \$F\$29', '\$E\$30 = \$F\$30', '\$E\$31 = \$F\$31', '\$E\$32 = \$F\$32', '\$E\$33 = \$F\$33', '\$E\$4 <= \$F\$4', '\$E\$5 <= \$F\$5', '\$E\$6 <= \$F\$6', '\$E\$7 <= \$F\$7', '\$E\$8 = \$F\$8', and '\$E\$9 = \$F\$9'. The 'Tornar Variáveis Irrestritas Não Negativas' checkbox is checked. The 'Método de Solução:' dropdown is set to 'LP Simplex'. The 'Resolver' button is highlighted in blue.

Fonte: Elaborado pelo Autor

**Figura D.2. Resultado Obtido pelo Solver**



**Fonte: Elaborado pelo Autor**

Comparando as duas imagens da planilha otimização antes e após a execução do Solver, pode-se ver a alteração da função custo e dos valores das variáveis, visto que antes estavam todas zeradas, e com o processo de otimização, foram atribuídos valores às variáveis de modo que as restrições fossem satisfeitas e que o valor mínimo da função custo fosse atingido. Analisando também as células das colunas E e F da planilha, pode-se conferir o cumprimento de cada restrição de capacidade de produção das fábricas e de demanda.

## APÊNDICE E – DESCRIÇÃO DA MACRO QUE ORGANIZA A PLANILHA COMPARAÇÃO

Após encontrar a distribuição ótima dos volumes de cada produto em cada fábrica, a quarta etapa consiste em executar a macro que tem a função de organizar os dados reais e os dados obtidos com a resolução do problema de otimização, de modo que se possa comparar os dois cenários de distribuição de volumes e o custos associados a eles. As Figuras E.1 e E.2 apresentam a planilha Comparação antes da execução da macro que organiza os dados nesta planilha. Nesta planilha, as colunas B e C estão preenchidas com todas as possíveis combinações entre as fábricas e os produtos, e a coluna A está concatenando os conteúdos destas colunas para formar chaves para a distribuição dos resultados da otimização. Nas colunas J e K da planilha, estão as células que exibem os resultados da soma dos volumes e custos de todos os produtos, para que seja feita a comparação do custo total nos diferentes cenários de distribuição.

**Figura E.1. Parte 1 da Planilha Comparação Antes da Quarta Etapa**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Chave	Fábrica	Produto	Alternativas de produção	Volume Real	Custo Real	Volume Após Otimização	Custo Após Otimização			
2	Fábrica 1_Produto 1	Fábrica 1	Produto 1	1						Volume Total Real	0
3	Fábrica 1_Produto 2	Fábrica 1	Produto 2	1						Volume Total Após Otimização	0
4	Fábrica 1_Produto 3	Fábrica 1	Produto 3	1						Custo Total Real	0
5	Fábrica 1_Produto 4	Fábrica 1	Produto 4	1						Custo Total Após Otimização	0
6	Fábrica 1_Produto 5	Fábrica 1	Produto 5	1						Diferença dos Custos Totais	0
7	Fábrica 1_Produto 6	Fábrica 1	Produto 6	1						Redução de Custo Total %	0%
8	Fábrica 1_Produto 7	Fábrica 1	Produto 7	1						Volume Total Real (Alternativas de Produção > 1)	0
9	Fábrica 1_Produto 8	Fábrica 1	Produto 8	1						Volume Total Após Otimização (Alternativas de Produção > 1)	0
10	Fábrica 1_Produto 9	Fábrica 1	Produto 9	1						Custo Total Real (Alternativas de Produção > 1)	0
11	Fábrica 1_Produto 10	Fábrica 1	Produto 10	1						Custo Total Após Otimização(Alternativas de Produção > 1)	0
12	Fábrica 1_Produto 11	Fábrica 1	Produto 11	1						Diferença dos Custos Totais (Alternativas de Produção > 1)	0
13	Fábrica 1_Produto 12	Fábrica 1	Produto 12	1						Redução de Custo Total (Alternativas de Produção > 1) %	0%
14	Fábrica 1_Produto 16	Fábrica 1	Produto 16	1							
15	Fábrica 1_Produto 17	Fábrica 1	Produto 17	1							
16	Fábrica 1_Produto 18	Fábrica 1	Produto 18	1							
17	Fábrica 1_Produto 19	Fábrica 1	Produto 19	1							
18	Fábrica 1_Produto 20	Fábrica 1	Produto 20	1							
19	Fábrica 1_Produto 21	Fábrica 1	Produto 21	1							
20	Fábrica 1_Produto 22	Fábrica 1	Produto 22	1							
21	Fábrica 1_Produto 23	Fábrica 1	Produto 23	1							
22	Fábrica 1_Produto 24	Fábrica 1	Produto 24	1							
23	Fábrica 1_Produto 25	Fábrica 1	Produto 25	1							
24	Fábrica 1_Produto 26	Fábrica 1	Produto 26	1							
25	Fábrica 1_Produto 27	Fábrica 1	Produto 27	1							
26	Fábrica 1_Produto 28	Fábrica 1	Produto 28	1							
27	Fábrica 1_Produto 29	Fábrica 1	Produto 29	1							
28	Fábrica 1_Produto 33	Fábrica 1	Produto 33	1							
29	Fábrica 1_Produto 34	Fábrica 1	Produto 34	1							

Fonte: Elaborado pelo Autor

Na coluna N, estão todos os produtos que podem ser produzidos em mais de uma fábrica e as colunas de volume real, custo real, volume após otimização e custo após otimização estão preenchidas com a fórmula SOMASE, tendo como critério para a soma dos volumes, ou custos, o produto correspondente à cada linha da tabela. Após a execução da quarta etapa, será possível entender qual é a contribuição de cada produto para a redução dos custos de produção.



**Figura E.2. Parte 2 da Planilha Comparação Antes da Quarta Etapa**

	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA
1		Produto	Volume Real	Volume Após Otimização	Custo Real	Custo Após Otimização	Diferença de Custo				Fábrica 1	Fábrica 2	Fábrica 3	Fábrica 4	Total
2		Produto 13	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00			Volume Real	0	0	0	0	0
3		Produto 14	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00			Volume Após Otimização	0	0	0	0	0
4		Produto 15	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00			Custo Real	0	0	0	0	0
5		Produto 30	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00			Custo Após Otimização	0	0	0	0	0
6		Produto 31	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00			Diferença de Custo	0	0	0	0	0
7		Produto 32	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00								
8		Produto 35	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00								
9		Produto 36	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00								
10		Produto 37	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00								
11		Produto 38	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00								
12		Produto 41	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00								
13		Produto 42	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00								
14		Produto 43	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00								
15		Produto 47	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00								
16		Produto 48	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00								
17		Produto 64	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00								
18		Produto 65	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00								
19		Produto 74	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00								
20		Produto 81	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00								
21		Produto 82	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00								
22		Produto 83	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00								
23		Produto 84	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00								
24		Produto 85	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00								
25		Produto 97	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00								
26		Produto 98	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00								
27		Produto 102	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00								
28		<b>Total</b>	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00								
29															

**Fonte: Elaborado pelo Autor**

Nesta planilha encontra-se também uma tabela para comparação dos resultados de custo de cada fábrica após a solução do problema de otimização. Espera-se que na tabela organizada para a análise dos produtos os valores de volume total para cada produto sejam iguais, independente de se tratar da distribuição original, ou após a otimização da distribuição, enquanto para a tabela das fábricas, o volume total deve ser igual quando comparado. Estes valores podem ser utilizados para conferir se o processo de otimização é consistente com as restrições dadas pelo problema.

O código que compõe a última etapa do processo de otimização é composto de um laço que é usado para percorrer todas as linhas da tabela mostrada na figura E.1 e que, de acordo com a chave de cada linha, calcula os volumes e custos reais e otimizados para combinações de produtos e fábricas que estão presentes na planilha Volumes, ou calcula estes volumes e custos para combinações de produtos e fábricas que estão na tabela de comparação, mas não estão presentes na planilha Volumes. A Figura E.3 ilustra o início da macro que organiza a planilha Comparação.

### Figura E.3. Primeira Seção da Macro Tabela Comparação

```

Sub tabela_comparacao()
    ini = Sheets("Otimização").Range("A4")
    fim = Sheets("Otimização").Range("B4")
    For i = 2 To 173
        chave = Sheets("Comparação").Range("A" & i)
        fabrica = Sheets("Comparação").Range("B" & i)
        produto = Sheets("Comparação").Range("C" & i)
        num_alt = Sheets("Comparação").Range("D" & i)
        'Confere se a chave está presente na planilha Volumes
        On Error Resume Next
        i_vol = WorksheetFunction.Match(chave, Sheets("Volumes").Range("A:A"), 0)
        If Err.Number = 0 Then
            'Caso a chave esteja presente na planilha volumes
            'Calcula o volume real
            vol_real = 0
            For periodo = ini To fim
                volume = Sheets("Volumes").Cells(i_vol, periodo + 4)
                vol_real = vol_real + volume
            Next periodo
        End If
    Next i
End Sub

```

**Fonte: Elaborado pelo Autor**

A variável *i*, que é alterada no laço, representa cada linha da tabela de comparação. Nesta seção da macro, é conferido se a chave correspondente a cada linha *i* está presente na tabela que contém os dados da produção da empresa de bebidas. Após esta conferência, o código tomará caminhos diferentes, caso a chave esteja presente, ou caso não esteja presente. Na figura anterior, é apresentado o passo de cálculo do volume real para o caso no qual a chave procurada na planilha Volumes é encontrada. Na Figura E.4, a continuação desta seção da macro é apresentada. A figura mostra o cálculo do custo real, que é obtido multiplicando o volume real calculado anteriormente pelo custo de produção encontrado na planilha de custos, levando em consideração cada combinação de fábrica e produto. Em seguida são calculados os volumes e custos otimizados, sendo que, caso o produto da linha *i* tenha apenas uma alternativa de produção, os valores do volume e do custo otimizados serão iguais aos valores reais, pois estes produtos não são considerados na formulação do problema de otimização, e caso o produto tenha múltiplas alternativas de produção, estes valores serão calculados com base na planilha

apoio e na planilha de otimização. Após calcular os valores reais e otimizados do volume e do custo, estes valores devem ser incluídos na tabela de comparação.

#### Figura E.4. Segunda Seção da Macro Tabela Comparação

```
'Calcula o custo real
    i_custo = WorksheetFunction.Match(produto, Sheets("Custo Por Produto").Range("A:A"), 0)
    num_fab = CInt(Right(fabrica, 1))
    custo_prod = Sheets("Custo Por Produto").Cells(i_custo, num_fab + 1)
    custo_real = vol_real * custo_prod
'Calcula volume e custo otimizados
    If num_alt = 1 Then
        vol_ot = vol_real
        custo_ot = custo_real
    Else
        On Error Resume Next
        i_a = WorksheetFunction.Match(chave, Sheets("Apoio").Range("F:F"), 0)
        If Err.Number = 0 Then
            vol_ot = Sheets("Otimização").Cells(2, i_a + 6)
            custo_ot = vol_ot * custo_prod
        Else
            Err.Clear
            vol_ot = 0
            custo_ot = 0
        End If
    End If
Else
```

**Fonte: Elaborado pelo Autor**

Na figura E.5 é apresentada a seção do código que calcula os volumes e custos reais e otimizados para aquelas linhas da planilha de comparação cuja chave não foi encontrada na planilha Volumes. Em termos práticos, todas as combinações de produtos e fábricas presentes na tabela de comparação, mas que não foram encontrados na tabela de volumes, são referentes a combinações envolvendo produtos que possuem múltiplas alternativas de produção e alguma destas fábricas onde é possível produzi-lo. Os valores de volume e custo reais são nulos para estas combinações de produtos e fábricas, visto que eles não estão presentes na base que contém os dados de produção, ou seja, não houve, em nenhum período apresentado na tabela da planilha Volumes, a produção deste produto nesta fábrica em questão.

### Figura E.5. Terceira Seção da Macro Tabela Comparação

```
'Caso a chave não esteja presente na planilha volumes
'Calcula volume e custo real
Err.Clear
vol_real = 0
custo_real = 0
'Calcula volume e custo otimizados
On Error Resume Next
i_a = WorksheetFunction.Match(chave, Sheets("Apoio").Range("F:F"), 0)
If Err.Number = 0 Then
    vol_ot = Sheets("Otimização").Cells(2, i_a + 6)
    i_custo = WorksheetFunction.Match(produto, Sheets("Custo Por Produto").Range("A:A"), 0)
    num_fab = CInt(Right(fabrica, 1))
    custo_prod = Sheets("Custo Por Produto").Cells(i_custo, num_fab + 1)
    custo_ot = vol_ot * custo_prod
Else
    Err.Clear
    vol_ot = 0
    custo_ot = 0
End If
End If
```

**Fonte: Elaborado pelo Autor**

Para o cálculo do volume otimizado, primeiro encontra-se o índice da variável que corresponde à combinação de produto e fábrica na planilha Apoio, e depois encontra-se o valor da variável de otimização correspondente na planilha de otimização e seu custo. O custo de produção deste produto na fábrica correspondente à chave utilizada e o custo otimizado é calculado a partir da sua multiplicação pelo volume. Em seguida, os valores são incluídos na planilha de comparação, como mostra o código representado na figura E.6.

### Figura E.6. Quarta Seção da Macro Tabela Comparação

```
'Inclui os volumes e custos reais e otimizados na planilha Comparação
Sheets("Comparação").Range("E" & i) = vol_real
Sheets("Comparação").Range("F" & i) = custo_real
Sheets("Comparação").Range("G" & i) = vol_ot
Sheets("Comparação").Range("H" & i) = custo_ot
Next i
End Sub
```

**Fonte: Elaborado pelo Autor**

Após a execução desta última macro, o processo de otimização é concluído e é possível comparar os custos apresentados pela distribuição de volumes do período selecionado antes da otimização e após a otimização. As Figuras E.7 e E.8 apresentam a planilha Comparação após a conclusão da quarta etapa do processo de otimização.

**Figura E.7. Parte 1 da Planilha Comparação Após a Quarta Etapa**

Chave	Fábrica	Produto	Alternativas de produção	Volume Real	Custo Real	Volume Após Otimização	Custo Após Otimização
Fábrica_1_Produto 1	Fábrica 1	Produto 1	1	246	423,12	246	423,12
Fábrica_1_Produto 2	Fábrica 1	Produto 2	1	340	686,8	340	686,8
Fábrica_1_Produto 3	Fábrica 1	Produto 3	1	10489	20978	10489	20978
Fábrica_1_Produto 4	Fábrica 1	Produto 4	1	1447	4615,93	1447	4615,93
Fábrica_1_Produto 5	Fábrica 1	Produto 5	1	1780	30117,6	1780	30117,6
Fábrica_1_Produto 6	Fábrica 1	Produto 6	1	198	502,92	198	502,92
Fábrica_1_Produto 7	Fábrica 1	Produto 7	1	378	510,3	378	510,3
Fábrica_1_Produto 8	Fábrica 1	Produto 8	1	1495	5382	1495	5382
Fábrica_1_Produto 9	Fábrica 1	Produto 9	1	558	781,2	558	781,2
Fábrica_1_Produto 10	Fábrica 1	Produto 10	1	18472	31587,12	18472	31587,12
Fábrica_1_Produto 11	Fábrica 1	Produto 11	1	13605	17278,35	13605	17278,35
Fábrica_1_Produto 12	Fábrica 1	Produto 12	1	7506	9307,44	7506	9307,44
Fábrica_1_Produto 16	Fábrica 1	Produto 16	1	469	1782,2	469	1782,2
Fábrica_1_Produto 17	Fábrica 1	Produto 17	1	819	2039,31	819	2039,31
Fábrica_1_Produto 18	Fábrica 1	Produto 18	1	451	1943,81	451	1943,81
Fábrica_1_Produto 19	Fábrica 1	Produto 19	1	627	2006,4	627	2006,4
Fábrica_1_Produto 20	Fábrica 1	Produto 20	1	53281	155047,71	53281	155047,71
Fábrica_1_Produto 21	Fábrica 1	Produto 21	1	7474	30792,88	7474	30792,88
Fábrica_1_Produto 22	Fábrica 1	Produto 22	1	1612	5367,96	1612	5367,96
Fábrica_1_Produto 23	Fábrica 1	Produto 23	1	354	1610,7	354	1610,7
Fábrica_1_Produto 24	Fábrica 1	Produto 24	1	634	2199,98	634	2199,98
Fábrica_1_Produto 25	Fábrica 1	Produto 25	1	314	1601,4	314	1601,4
Fábrica_1_Produto 26	Fábrica 1	Produto 26	1	1158	5292,06	1158	5292,06
Fábrica_1_Produto 27	Fábrica 1	Produto 27	1	672	1424,64	672	1424,64
Fábrica_1_Produto 28	Fábrica 1	Produto 28	1	1656	6392,16	1656	6392,16
Fábrica_1_Produto 29	Fábrica 1	Produto 29	1	947	8968,09	947	8968,09
Fábrica_1_Produto 33	Fábrica 1	Produto 33	1	22769	45082,62	22769	45082,62
Fábrica_1_Produto 34	Fábrica 1	Produto 34	1	17153	37736,6	17153	37736,6
<b>Volume Total Real</b>							<b>5178740</b>
<b>Volume Total Após Otimização</b>							<b>5178740</b>
<b>Custo Total Real</b>							<b>6511284,24</b>
<b>Custo Total Após Otimização</b>							<b>5917574,79</b>
<b>Diferença dos Custos Totais</b>							<b>-593709,45</b>
<b>Redução de Custo Total %</b>							<b>-9%</b>
<b>Volume Total Real (Alternativas de Produção &gt; 1)</b>							<b>2321056</b>
<b>Volume Total Após Otimização (Alternativas de Produção &gt; 1)</b>							<b>2321056</b>
<b>Custo Total Real (Alternativas de Produção &gt; 1)</b>							<b>3069346,2</b>
<b>Custo Total Após Otimização(Alternativas de Produção &gt; 1)</b>							<b>2475636,75</b>
<b>Diferença dos Custos Totais (Alternativas de Produção &gt; 1)</b>							<b>-593709,45</b>
<b>Redução de Custo Total (Alternativas de Produção &gt; 1) %</b>							<b>-19%</b>

Fonte: Elaborado pelo Autor

**Figura E.8. Parte 2 da Planilha Comparação Após a Quarta Etapa**

Produto	Volume Real	Volume Após Otimização	Custo Real	Custo Após Otimização	Diferença de Custo
Produto 13	10234,00	10234,00	16990,01	13715,56	-3276,45
Produto 14	148256,00	148256,00	251516,68	134912,96	-116603,72
Produto 15	658149,00	658149,00	728341,89	658149,00	-70192,89
Produto 30	17035,00	17035,00	43313,10	16884,65	-28468,45
Produto 31	16588,00	16588,00	36991,24	21730,28	-15260,96
Produto 32	24235,00	24235,00	51620,55	28544,95	-23075,60
Produto 35	5968,00	5968,00	11387,84	13487,68	-3700,16
Produto 36	80905,00	80905,00	187214,29	136729,45	-50484,84
Produto 37	8209,00	8209,00	25148,53	24134,46	-1014,07
Produto 38	181543,00	181543,00	309195,98	185173,86	-124022,12
Produto 41	183340,00	183340,00	129038,60	79503,00	-55535,60
Produto 42	2966,00	2966,00	2313,48	1334,70	-978,78
Produto 43	174458,00	174458,00	162245,94	162245,94	0,00
Produto 47	7478,00	7478,00	4711,14	2392,26	-2318,18
Produto 48	1072,00	1072,00	664,64	343,04	-321,60
Produto 64	34164,00	34164,00	63886,68	42021,72	-21864,96
Produto 65	498872,00	498872,00	578479,40	528804,22	-49675,08
Produto 74	395890,00	395890,00	274190,00	274190,00	0,00
Produto 81	13128,00	13128,00	41705,84	34526,64	-7179,20
Produto 82	9586,00	9586,00	23475,02	22910,54	-564,48
Produto 83	7996,00	7996,00	14837,46	10954,52	-3882,94
Produto 84	28042,00	28042,00	45615,29	40380,48	-5234,81
Produto 85	23298,00	23298,00	39906,88	31219,32	-8687,56
Produto 97	6304,00	6304,00	12040,64	11851,52	-189,12
Produto 98	2018,00	2018,00	3814,02	3814,02	0,00
Produto 102	1362,00	1362,00	2901,06	1893,18	-1007,88
<b>Total</b>	<b>2321056,00</b>	<b>2321056,00</b>	<b>3069346,20</b>	<b>2475636,75</b>	<b>-593709,45</b>

Fonte: Elaborado pelo Autor

## APÊNDICE F – DESCRIÇÃO DO PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO EM PYTHON

O procedimento de cálculo em Python inicia com a importação das bibliotecas Pandas, Numpy e com a importação da função linprog da biblioteca Scipy. A biblioteca Pandas é importada pois nesta biblioteca há funções que propiciam a importação dos dados contidos no arquivo de Excel e o tratamento destes dados. Esta etapa do código é apresentada pela Figura F.1.

**Figura F.1. Importação das Bibliotecas no Jupyter Notebook**

```
import pandas as pd
import numpy as np
from scipy.optimize import linprog
```

Fonte: Elaborado pelo Autor

A importação das planilhas de Excel é feita utilizando a função read\_excel da biblioteca Pandas. Ao carregar uma planilha com esta função, esta planilha é transformada em um tipo de objeto denominado Dataframe. Na figura F.2 é mostrada a utilização desta função para a importação da planilha de volumes, que é atribuída à variável volumes.

**Figura F.2. Importação da Planilha Volumes no Jupyter Notebook**

```
volumes = pd.read_excel('Problema de Otimização - TG.xlsx', sheet_name = 'Volumes')
volumes
```

	Chave	Fábrica	Produto	Alternativas de produção	Volume Período 1	Volume Período 2	Volume Período 3	Volume Período 4	Volume Período 5	Volume Período 6	Volume Total
0	Fábrica 1_Produto 1	Fábrica 1	Produto 1	1.0	0	0	246	0	0	0	246
1	Fábrica 1_Produto 2	Fábrica 1	Produto 2	1.0	0	0	340	0	0	0	340
2	Fábrica 1_Produto 3	Fábrica 1	Produto 3	1.0	1306	2746	1666	615	1136	3020	10489
3	Fábrica 1_Produto 4	Fábrica 1	Produto 4	1.0	558	473	0	0	0	416	1447
4	Fábrica 1_Produto 5	Fábrica 1	Produto 5	1.0	0	0	928	0	0	852	1780
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
149	Fábrica 4_Produto 136	Fábrica 4	Produto 136	1.0	435	0	0	29605	37660	61569	129269
150	Fábrica 4_Produto 137	Fábrica 4	Produto 137	1.0	47960	69781	44643	56966	36852	183082	439284
151	Fábrica 4_Produto 138	Fábrica 4	Produto 138	1.0	0	0	0	0	19079	0	19079
152	Fábrica 4_Produto 109	Fábrica 4	Produto 109	1.0	26698	73908	39905	0	35335	19759	195605
153	NaN	NaN	NaN	NaN	496859	910638	626883	658821	1010781	1474758	5178740

Fonte: Elaborado pelo Autor

As planilhas Custos por Produto e Fábricas também foram carregadas por meio do mesmo processo. A planilha de custos foi atribuída à variável custos e a planilha de fábricas à tabela\_fabricas. O carregamento destas planilhas é apresentado pelas Figuras F.3 e F.4.

**Figura F.3. Importação da Planilha Custo por Produto no Jupyter Notebook**

```
custos = pd.read_excel('Problema de Otimização - TG.xlsm', sheet_name = 'Custo Por Produto')
custos
```

	Produto	Fábrica 1	Fábrica 2	Fábrica 3	Fábrica 4	Alternativas de Produção
0	Produto 1	1.72	0.0	0.0	0.00	1
1	Produto 2	2.02	0.0	0.0	0.00	1
2	Produto 3	2.00	0.0	0.0	0.00	1
3	Produto 4	3.19	0.0	0.0	0.00	1
4	Produto 5	16.92	0.0	0.0	0.00	1
...	...	...	...	...	...	...
133	Produto 134	0.00	0.0	0.0	1.01	1
134	Produto 135	0.00	0.0	0.0	2.25	1
135	Produto 136	0.00	0.0	0.0	1.30	1
136	Produto 137	0.00	0.0	0.0	0.88	1
137	Produto 138	0.00	0.0	0.0	1.38	1

Fonte: Elaborado pelo Autor

**Figura F.4. Importação da Planilha Fábricas no Jupyter Notebook**

```
tabela_fabricas = pd.read_excel('Problema de Otimização - TG.xlsm', sheet_name = 'Fábricas')
tabela_fabricas
```

	Fábrica	Período	Volume Total	Volume Produção Obrigatória	Capacidade Produção	Capacidade Não Comprometida
0	Fábrica 1	1	92521	41831	100000	58169
1	Fábrica 1	2	84726	29811	100000	70189
2	Fábrica 1	3	83208	34525	100000	65475
3	Fábrica 1	4	51945	15568	100000	84432
4	Fábrica 1	5	99536	13901	100000	86099
5	Fábrica 1	6	95799	31268	100000	68732
6	Fábrica 2	1	205499	59756	233500	173744
7	Fábrica 2	2	197088	40728	233500	192772
8	Fábrica 2	3	188016	18163	233500	215337
9	Fábrica 2	4	138695	31865	233500	201635
10	Fábrica 2	5	230643	26421	233500	207079
11	Fábrica 2	6	230752	61312	233500	172188
12	Fábrica 3	1	23885	12058	25600	13542
13	Fábrica 3	2	25537	16079	25600	9521
14	Fábrica 3	3	19106	15459	25600	10141
15	Fábrica 3	4	9466	7162	25600	18438
16	Fábrica 3	5	22424	14639	25600	10961
17	Fábrica 3	6	17502	5261	25600	20339
18	Fábrica 4	1	175154	75093	1262600	1187507
19	Fábrica 4	2	603287	503474	1262600	759126

Fonte: Elaborado pelo Autor

O próximo passo dá início ao pré-processamento dos dados, para que a função de otimização seja utilizada posteriormente. Nele, a variável que contém a tabela de volumes é filtrada para excluir os produtos que não têm múltiplas alternativas de produção e os volumes de produção de um mesmo produto em diferentes fábricas são somados, para calcular o volume de demanda de cada produto. As manipulações da tabela de volumes e seu resultado são apresentados pela Figura F.5.

**Figura F.5. Cálculo da Tabela de Produtos Otimizáveis**

```

produtos_otimizaveis = volumes.loc[volumes['Alternativas de produção'] > 1]
produtos_otimizaveis = produtos_otimizaveis.groupby('Produto').sum()
produtos_otimizaveis

```

	Alternativas de produção	Volume Período 1	Volume Período 2	Volume Período 3	Volume Período 4	Volume Período 5	Volume Período 6	Volume Total
Produto								
Produto 102	2.0	946	312	0	0	104	0	1362
Produto 13	4.0	4895	3550	994	0	0	795	10234
Produto 14	6.0	23715	18672	29610	25584	24976	25699	148256
Produto 15	9.0	1000	6290	10459	247974	208244	184182	658149
Produto 30	2.0	3394	2649	2323	4184	1680	2805	17035
Produto 31	2.0	2006	945	4648	1530	3809	3650	16588
Produto 32	2.0	5326	2439	1405	8733	1656	4676	24235
Produto 35	2.0	0	0	0	0	5968	0	5968
Produto 36	9.0	8432	13136	22454	10871	11889	14123	80905
Produto 37	4.0	940	2029	3167	0	0	2073	8209
Produto 38	9.0	54862	71272	23092	0	7465	24852	181543

**Fonte: Elaborado pelo Autor**

Na primeira linha, a planilha volumes é filtrada com o uso da função loc e atribuída à variável produtos\_otimizaveis. Em seguida, os produtos produzidos em fábricas distintas são agrupados e seus volumes somados. Este mesmo procedimento é utilizado para a tabela de fábricas, como ilustra a Figura F.6.

**Figura F.6. Cálculo da Tabela de Capacidade Total das Fábricas**

```

fabricas = tabela_fabricas.groupby('Fábrica').sum()
fabricas

```

	Período	Volume Total	Volume Produção Obrigatória	Capacidade Produção	Capacidade Não Comprometida
Fábrica					
Fábrica 1	21	507735	166904	600000	433096
Fábrica 2	21	1190693	238245	1401000	1162755
Fábrica 3	21	117720	70658	153600	82942
Fábrica 4	21	3362592	2381877	7575600	5193723

**Fonte: Elaborado pelo Autor**

Pode-se notar na tabela apresentada que os valores da coluna Fábrica foram mantidos e as outras colunas tiveram seus valores somados. Percebe-se que a coluna Período, por exemplo, apresenta o valor 21, que é a soma dos períodos de 1 a 6. Neste caso, os valores de capacidade e volumes das outras colunas representam a soma dos valores de todos os períodos. Em outros casos nos quais se deseja analisar outro intervalo de períodos, deve-se filtrar a tabela anteriormente, para apresentar apenas os valores dos períodos desejados e depois agregar os valores para obter o total.

No próximo passo encontra-se as variáveis do problema de otimização, sendo que, assim como no procedimento de cálculo realizado no Excel, cada combinação entre um produto com múltiplas alternativas de produção e uma fábrica dá origem a uma variável. Neste passo, a tabela de custo por fábrica é manipulada de modo que as colunas referentes às fábricas de 1 a 4 se



tornam linhas. Após esta transformação, a tabela é reordenada e filtrada para exibir apenas os produtos que possuem múltiplas alternativas de produção, as combinações de produtos e fábricas que possuem custo igual a zero são excluídas da tabela, e a coluna Chave é incluída, concatenando os valores de fábrica e produto para cada linha. A Figura F.7 apresenta esta parte do código e a tabela resultante, atribuída à variável denominada variáveis.

**Figura F.7. Cálculo da Tabela de Produtos Otimizáveis**

```
variáveis = custos.melt(id_vars = ['Produto', 'Alternativas de Produção'], var_name = 'Fábrica', value_name = 'Custo')
variáveis = variáveis.sort_values('Produto')
variáveis = variáveis.loc[variáveis['Alternativas de Produção'] > 1]
variáveis = variáveis.loc[variáveis['Custo'] > 0]
variáveis['Chave'] = variáveis['Fábrica']+'_'+variáveis['Produto']
variáveis
```

	Produto	Alternativas de Produção	Fábrica	Custo	Chave
377	Produto 102		2 Fábrica 3	2.13	Fábrica 3_Produto 102
101	Produto 102		2 Fábrica 1	1.39	Fábrica 1_Produto 102
12	Produto 13		2 Fábrica 1	1.34	Fábrica 1_Produto 13
288	Produto 13		2 Fábrica 3	1.79	Fábrica 3_Produto 13
427	Produto 14		3 Fábrica 4	0.91	Fábrica 4_Produto 14
13	Produto 14		3 Fábrica 1	2.25	Fábrica 1_Produto 14
151	Produto 14		3 Fábrica 2	1.27	Fábrica 2_Produto 14
152	Produto 15		3 Fábrica 2	1.25	Fábrica 2_Produto 15
428	Produto 15		3 Fábrica 4	1.00	Fábrica 4_Produto 15
14	Produto 15		3 Fábrica 1	1.86	Fábrica 1_Produto 15
29	Produto 30		2 Fábrica 1	2.66	Fábrica 1_Produto 30
443	Produto 30		2 Fábrica 4	0.99	Fábrica 4_Produto 30
444	Produto 31		2 Fábrica 4	1.31	Fábrica 4_Produto 31
30	Produto 31		2 Fábrica 1	2.23	Fábrica 1_Produto 31
31	Produto 32		2 Fábrica 1	2.13	Fábrica 1_Produto 32
445	Produto 32		2 Fábrica 4	1.17	Fábrica 4_Produto 32
310	Produto 35		2 Fábrica 3	2.26	Fábrica 3_Produto 35
34	Produto 35		2 Fábrica 1	2.88	Fábrica 1_Produto 35

**Fonte: Elaborado pelo Autor**

Nos próximos passos da manipulação dos dados, as tabelas obtidas até o momento são utilizadas como base para a elaboração de listas que servirão como argumento para a função de otimização. A função `linprog` da biblioteca `Scipy` do Python recebe os seguintes argumentos: `c` é o vetor que contém os valores dos custos reduzidos, que neste problema são os custos de produção de cada produto em cada fábrica, `A_ub` é a matriz que contém os coeficientes que multiplicam as variáveis nas restrições que são inequações, `b_ub` é o vetor que contém os valores das constantes do lado direito nas restrições que são inequações, `A_eq` é a matriz que contém os coeficientes que multiplicam as variáveis nas restrições de igualdade, `b_eq` é o vetor que contém os valores das constantes do lado direito das restrições de igualdade, e `method` é a variável utilizada para a escolha do método de otimização utilizado para a resolução do problema de programação linear, sendo que pode-se escolher entre o método Simplex, o método Simplex revisado e o método de ponto interior.

A primeira lista obtida que serve como argumento para a função de otimização é o vetor de custos reduzidos, que é obtido da tabela variáveis, selecionando a coluna Custo desta tabela e convertendo em lista, como apresenta a Figura F.8.

**Figura F.8. Cálculo do Vetor de Custos Reduzidos**

```
custos_reduzidos = variaveis['Custo'].tolist()
custos_reduzidos

[2.13,
 1.39,
 1.34,
 1.79,
 0.91,
 2.25,
 1.27,
 1.25,
 1.0,
 1.86,
```

**Fonte: Elaborado pelo Autor**

Na figura estão presentes apenas alguns valores dos custos reduzidos, pois não é possível exibir todos os valores simultaneamente na tela do programa. O tamanho deste vetor é igual ao número de variáveis, sendo estas as diferentes combinações entre produtos e fábricas. A próxima lista obtida contém as demandas dos produtos e seu cálculo é feito a partir da tabela de produtos otimizáveis. O procedimento de cálculo está apresentado na Figura F.9.

**Figura F.9. Cálculo do Vetor de Demandas**

```
demandas = produtos_otimizaveis['Volume Total'].tolist()
demandas

[1362,
 10234,
 148256,
 658149,
 17035,
 16588,
 24235,
 5968,
 80905,
 8209,
 181543,
 163340,
 2966,
```

**Fonte: Elaborado pelo Autor**

Na Figura F.10 são exibidos os comandos que calculam o vetor de capacidades que contém as capacidades não comprometidas de cada fábrica, o número de variáveis do problema,

o número de demandas, e o número de fábricas. Estes valores de contagem das variáveis, demandas e fábricas serão utilizados para a construção das matrizes das restrições.

**Figura F.10. Cálculo do Número e Variáveis e Restrições**

```
capacidades = fabricas['Capacidade Não Comprometida'].tolist()
capacidades

[433096, 1162755, 82942, 5193723]

num_variaveis = len(custos_reduzidos)
num_variaveis

60

num_demandas = len(demandas)
num_demandas

26

num_fabricas = len(capacidades)
num_fabricas

4
```

**Fonte: Elaborado pelo Autor**

Em seguida, os nomes dos produtos presentes no problema, os nomes das fábricas e as chaves com as combinações de fábricas e produtos são atribuídos às variáveis produtos\_demandados, lista\_fabricas e chaves, respectivamente. Os códigos que calculam estas variáveis são apresentados pela figura F.11.

**Figura F.11. Cálculo das Listas de Chaves, Produtos Demandados e Fábricas**

```
chaves = variaveis['Chave'].tolist()

colunas_saida = ['Alternativas de produção',
                 'Volume Período 1',
                 'Volume Período 2',
                 'Volume Período 3',
                 'Volume Período 4',
                 'Volume Período 5',
                 'Volume Período 6',
                 'Volume Total']
produtos_demandados = produtos_otimizaveis.drop(labels = colunas_saida,axis = 1)
produtos_demandados = produtos_demandados.reset_index()
produtos_demandados = produtos_demandados['Produto'].to_list()

colunas_saida = ['Período',
                 'Volume Total',
                 'Volume Produção Obrigatória',
                 'Capacidade Produção',
                 'Capacidade Não Comprometida']
lista_fabricas = fabricas.drop(labels = colunas_saida,axis = 1)
lista_fabricas = lista_fabricas.reset_index()
lista_fabricas = lista_fabricas['Fábrica'].to_list()
```

**Fonte: Elaborado pelo Autor**

A próxima parte do código organiza a matriz que contém os coeficientes das inequações de limite de capacidade das fábricas. O passo inicial nesta etapa cria uma matriz com todos elementos iguais a zero e com o número de linhas igual ao número de fábricas e o número de



**Figura F.13. Cálculo da Matriz de Coeficientes das Restrições de Igualdade**

```

num_linhas = num_demandas
num_colunas = num_variaveis

matriz_eq = [[0 for i in range(num_colunas)] for j in range(num_linhas)]

for i in produtos_demandados:
    nome_produto = i
    for j in chaves:
        nome_chave = j
        if nome_produto in nome_chave:
            matriz_eq[produtos_demandados.index(i)][chaves.index(j)] = 1

```

Fonte: Elaborado pelo Autor

Após esta etapa de cálculo da matriz que contém os coeficientes que multiplicam as variáveis de otimização nas restrições de demanda, todos os argumentos necessários para a execução da função `linprog`, que otimiza o sistema estão prontos.

O próximo passo consiste em incluir as variáveis `custos_reduzidos`, `matriz_ineq`, `capacidades`, `matriz_eq`, e `demandas` como argumentos da função `linprog`, e selecionar um método de otimização para o cálculo da minimização da função objetivo. A Figura F.14 ilustra este processo e o resultado obtido após a execução.

**Figura F.14. Cálculo da Otimização da Função Objetivo no Jupyter Notebook**

```

otimizacao = linprog(c = custos_reduzidos,
                    A_ub = matriz_ineq,
                    b_ub = capacidades,
                    A_eq = matriz_eq,
                    b_eq = demandas,
                    method = 'interior-point')

otimizacao

con: array([6.90561137e-08, 5.19547029e-07, 7.52785127e-06, 3.34182987e-05,
           8.64871254e-07, 8.42181180e-07, 1.23046993e-06, 3.02932676e-07,
           4.10803477e-06, 4.16719558e-07, 9.21791070e-06, 8.29374767e-06,
           1.50501364e-07, 8.85824556e-06, 3.79557605e-07, 5.43304850e-08,
           1.73458102e-06, 2.53309845e-05, 9.94463335e-06, 6.66494088e-07,
           4.86643330e-07, 4.05910214e-07, 1.42373392e-06, 1.18284879e-06,
           3.19993887e-07, 1.02364538e-07])
fun: 2475636.7500437777
message: 'Optimization terminated successfully.'
nit: 12
slack: array([ 414163.45158187, 635534.99998699, 54651.54830449,
              3447110.0002445 ])
status: 0
success: True
x: array([2.13025305e-06, 1.36200000e+03, 1.02340000e+04, 1.18982692e-05,
          1.48256000e+05, 4.00621870e-06, 1.49104520e-05, 2.14705751e-05,
          6.58149000e+05, 6.24233265e-06, 3.21375614e-06, 1.70350000e+04,
          1.65880000e+04, 5.83203315e-06, 5.59022163e-06, 2.42350000e+04,
          5.96799999e+03, 8.64485994e-06, 5.53261029e-06, 8.09050000e+04,
          5.26266013e-06, 8.20899998e+03, 2.32766358e-05, 1.81543000e+05,
          3.53137592e-06, 5.31517026e-06, 1.63340000e+05, 1.57872649e-05,
          1.57883133e-05, 2.96599998e+03, 1.74458000e+05, 3.08489929e-06,
          4.22424303e-06, 1.72550502e-05, 7.47799998e+03, 1.07199999e+03,
          6.85000018e-06, 3.41640000e+04, 8.38480926e-06, 4.00565350e-06,
          1.91688538e-05, 4.98872000e+05, 1.95850000e+05, 5.36831854e-06,
          7.66416068e-06, 1.31280000e+04, 6.38241821e-06, 9.58599999e+03,
          7.99600000e+03, 3.60015454e-06, 4.50907568e-06, 3.34908874e-05,
          2.80420000e+04, 3.77913507e-06, 2.32980000e+04, 1.07299933e-05,
          1.68750767e-04, 6.30399983e+03, 1.03254848e+03, 9.85451523e+02])

```

Fonte: Elaborado pelo Autor

Após a execução da função `linprog` com os parâmetros calculados na etapa de pré-processamento dos dados, obteve-se o resultado que minimiza a função custo para o sistema. Na Figura F.14 estão apresentados os resultados. Ao executar a linha que contém o nome da

variável `otimizacao`, à qual foi atribuído o resultado da função `linprog`, são retornados diferentes atributos que informam sobre o processo de otimização. O atributo `success` apresenta o status da execução do método de otimização, e na figura apresentada mostra o valor `True`, informando que a otimização foi concluída com sucesso. O status de execução do código também pode ser visto nos atributos `message` e `status`, sendo que para o atributo `status`, o valor apresentado igual a 0 significa que o problema foi otimizado com êxito. O atributo `x` apresenta os valores das variáveis do problema de otimização após o término das iterações, o atributo `nit` apresenta o número de iterações feitas para a obtenção do resultado, e o atributo `fun` mostra o valor otimizado da função custo.

## APÊNDICE G – RESULTADOS

**Tabela G.1. Volumes, Capacidades e Custos Iniciais e Otimizados das Fábricas  
Para o Período 1**

	<b>Fábrica 1</b>	<b>Fábrica 2</b>	<b>Fábrica 3</b>	<b>Fábrica 4</b>	<b>Total</b>
<b>Volume Real (l)</b>	92521	205499	23685	175154	496859
<b>Volume Após Otimização (l)</b>	48978	146507	16523	284851	496859
<b>Capacidade Total (l)</b>	100000	233500	25600	1262600	1621700
<b>Custo Real (R\$)</b>	214248,55	238917,85	65671,76	183275,38	702113,54
<b>Custo Após Otimização (R\$)</b>	116566,82	173462,98	50115,76	265886,49	606032,05
<b>Diferença de Custo (R\$)</b>	-97681,73	-65454,87	-15556	82611,11	-96081,49

Fonte: Elaborado pelo Autor

**Tabela G.2. Volumes, Capacidades e Custos Iniciais e Otimizados das Fábricas  
Para o Período 2**

	<b>Fábrica 1</b>	<b>Fábrica 2</b>	<b>Fábrica 3</b>	<b>Fábrica 4</b>	<b>Total</b>
<b>Volume Real (l)</b>	84726	197088	25537	603287	910638
<b>Volume Após Otimização (l)</b>	35832	168367	18976	687463	910638
<b>Capacidade Total (l)</b>	100000	233500	25600	1262600	1621700
<b>Custo Real (R\$)</b>	184421,06	222489,86	76976,22	608150,24	1092037,38
<b>Custo Após Otimização (R\$)</b>	75090,38	198137,25	63884,61	669771,51	1006883,75
<b>Diferença de Custo (R\$)</b>	- 109330,68	-24352,61	-13091,61	61621,27	-85153,63

Fonte: Elaborado pelo Autor

**Tabela G.3. Volumes, Capacidades e Custos Iniciais e Otimizados das Fábricas  
Para o Período 3**

	<b>Fábrica 1</b>	<b>Fábrica 2</b>	<b>Fábrica 3</b>	<b>Fábrica 4</b>	<b>Total</b>
<b>Volume Real (l)</b>	83208	188016	19106	336553	626883
<b>Volume Após Otimização (l)</b>	36399	126617	21310	442557	626883
<b>Capacidade Total (l)</b>	100000	233500	25600	1262600	1621700
<b>Custo Real (R\$)</b>	202747,56	244639,65	67027,55	342832,64	857247,4
<b>Custo Após Otimização (R\$)</b>	94989,92	171597,9	74637,89	433505,67	774731,38
<b>Diferença de Custo (R\$)</b>	- 107757,64	-73041,75	7610,34	90673,03	-82516,02

Fonte: Elaborado pelo Autor

**Tabela G.4. Volumes, Capacidades e Custos Iniciais e Otimizados das Fábricas  
Para o Período 4**

	<b>Fábrica 1</b>	<b>Fábrica 2</b>	<b>Fábrica 3</b>	<b>Fábrica 4</b>	<b>Total</b>
<b>Volume Real (l)</b>	51945	138695	9466	458715	658821
<b>Volume Após Otimização (l)</b>	15568	63794	11368	568091	658821
<b>Capacidade Total (l)</b>	100000	233500	25600	1262600	1621700
<b>Custo Real (R\$)</b>	130513,03	189023,37	39736,86	469965,16	829238,42
<b>Custo Após Otimização (R\$)</b>	43027,24	91543,77	44739,12	576993,01	756303,14
<b>Diferença de Custo (R\$)</b>	-87485,79	-97479,6	5002,26	107027,85	-72935,28

Fonte: Elaborado pelo Autor



**Tabela G.5. Volumes, Capacidades e Custos Iniciais e Otimizados das Fábricas  
Para o Período 5**

	<b>Fábrica 1</b>	<b>Fábrica 2</b>	<b>Fábrica 3</b>	<b>Fábrica 4</b>	<b>Total</b>
<b>Volume Real (l)</b>	99536	230643	22424	658178	1010781
<b>Volume Após Otimização (l)</b>	14998	104731	23027	868025	1010781
<b>Capacidade Total (l)</b>	100000	233500	25600	1262600	1621700
<b>Custo Real (R\$)</b>	221780,33	305940,71	80193,9	713488,86	1321403,8
<b>Custo Após Otimização (R\$)</b>	39982,9	143860,67	79545,13	919548,8	1182937,5
<b>Diferença de Custo (R\$)</b>	- 181797,43	-162080,04	-648,77	206059,94	-138466,3

Fonte: Elaborado pelo Autor

**Tabela G.6. Volumes, Capacidades e Custos Iniciais e Otimizados das Fábricas  
Para o Período 6**

	<b>Fábrica 1</b>	<b>Fábrica 2</b>	<b>Fábrica 3</b>	<b>Fábrica 4</b>	<b>Total</b>
<b>Volume Real (l)</b>	95799	230752	17502	1130705	1474758
<b>Volume Após Otimização (l)</b>	33123	170352	8683	1262600	1474758
<b>Capacidade Total (l)</b>	100000	233500	25600	1262600	1621700
<b>Custo Real (R\$)</b>	230684,82	292270,88	49439,36	1136848,64	1709243,7
<b>Custo Após Otimização (R\$)</b>	89437,96	220015,12	28140,28	1256819,36	1594412,72
<b>Diferença de Custo (R\$)</b>	- 141246,86	-72255,76	-21299,08	119970,72	-114830,98

Fonte: Elaborado pelo Autor

Tabela G.7. Redução de Custos para o Período 1 Detalhado por Produto

<b>Produto</b>	<b>Volume Inicial (l)</b>	<b>Volume Após Otimização (l)</b>	<b>Custo Inicial (R\$)</b>	<b>Custo Após Otimização (R\$)</b>	<b>Diferença de Custo (R\$)</b>
Produto 13	4895	4895	7603,3	6559,3	-1044
Produto 14	23715	23715	37877,69	21580,65	-16297,04
Produto 15	1000	1000	1250	1000	-250
Produto 30	3394	3394	9028,04	3360,06	-5667,98
Produto 31	2006	2006	4473,38	2627,86	-1845,52
Produto 32	5326	5326	11344,38	6231,42	-5112,96
Produto 35	0	0	0	0	0
Produto 36	8432	8432	17360,06	14250,08	-3109,98
Produto 37	940	940	2763,6	2763,6	0
Produto 38	54862	54862	87816,5	55959,24	-31857,26
Produto 41	46202	46202	36499,58	20790,9	-15708,68
Produto 42	1136	1136	886,08	511,2	-374,88
Produto 43	0	0	0	0	0
Produto 47	3683	3683	2320,29	1178,56	-1141,73
Produto 48	426	426	264,12	136,32	-127,8
Produto 64	5980	5980	11182,6	7355,4	-3827,2
Produto 65	116890	116890	128615,52	123903,4	-4712,12
Produto 74	16288	16288	22803,2	22803,2	0
Produto 81	2500	2500	8325	6575	-1750
Produto 82	2597	2597	6206,83	6206,83	0
Produto 83	1688	1688	4827,68	2312,56	-2515,12
Produto 84	2884	2884	4152,96	4152,96	0
Produto 85	0	0	0	0	0
Produto 97	1306	1306	2494,46	2455,28	-39,18
Produto 98	1025	1025	1937,25	1937,25	0
Produto 102	946	946	2014,98	1314,94	-700,04
<b>Total</b>	<b>308121</b>	<b>308121</b>	<b>412047,5</b>	<b>315966,01</b>	<b>-96081,49</b>

Fonte: Elaborado pelo Autor

Tabela G.8. Redução de Custos para o Período 2 Detalhado por Produto

<b>Produto</b>	<b>Volume Inicial (l)</b>	<b>Volume Após Otimização (l)</b>	<b>Custo Inicial (R\$)</b>	<b>Custo Após Otimização (R\$)</b>	<b>Diferença de Custo (R\$)</b>
Produto 13	3550	3550	6184,4	4757	-1427,4
Produto 14	18672	18672	27606	16991,52	-10614,48
Produto 15	6290	6290	7862,5	6290	-1572,5
Produto 30	2649	2649	7046,34	2622,51	-4423,83
Produto 31	945	945	2107,35	1237,95	-869,4
Produto 32	2439	2439	5195,07	2853,63	-2341,44
Produto 35	0	0	0	0	0
Produto 36	13136	13136	28781,9	22199,84	-6582,06
Produto 37	2029	2029	5965,26	5965,26	0
Produto 38	71272	71272	111157,23	72697,44	-38459,79
Produto 41	36287	36287	28666,73	16329,15	-12337,58
Produto 42	1215	1215	947,7	546,75	-400,95
Produto 43	99813	99813	92826,09	92826,09	0
Produto 47	2007	2007	1264,41	642,24	-622,17
Produto 48	520	520	322,4	166,4	-156
Produto 64	0	0	0	0	0
Produto 65	13152	13152	17623,68	13941,12	-3682,56
Produto 74	33936	33936	47510,4	47510,4	0
Produto 81	0	0	0	0	0
Produto 82	0	0	0	0	0
Produto 83	3643	3643	6358,73	4990,91	-1367,82
Produto 84	5652	5652	8138,88	8138,88	0
Produto 85	0	0	0	0	0
Produto 97	2159	2159	4123,69	4058,92	-64,77
Produto 98	868	868	1640,52	1640,52	0
Produto 102	312	312	664,56	433,68	-230,88
<b>Total</b>	<b>320546</b>	<b>320546</b>	<b>411993,84</b>	<b>326840,21</b>	<b>-85153,63</b>

Fonte: Elaborado pelo Autor

Tabela G.9. Redução de Custos para o Período 3 Detalhado por Produto

<b>Produto</b>	<b>Volume Inicial (l)</b>	<b>Volume Após Otimização (l)</b>	<b>Custo Inicial (R\$)</b>	<b>Custo Após Otimização (R\$)</b>	<b>Diferença de Custo (R\$)</b>
Produto 13	994	994	1779,26	1331,96	-447,3
Produto 14	29610	29610	48668,9	26945,1	-21723,8
Produto 15	10459	10459	13073,75	10459	-2614,75
Produto 30	2323	2323	6179,18	2299,77	-3879,41
Produto 31	4648	4648	10365,04	6088,88	-4276,16
Produto 32	1405	1405	2992,65	1643,85	-1348,8
Produto 35	0	0	0	0	0
Produto 36	22454	22454	44302,88	37947,26	-6355,62
Produto 37	3167	3167	9848,26	9310,98	-537,28
Produto 38	23092	23092	44618,74	23553,84	-21064,9
Produto 41	26846	26846	21208,34	12080,7	-9127,64
Produto 42	615	615	479,7	276,75	-202,95
Produto 43	0	0	0	0	0
Produto 47	1259	1259	793,17	402,88	-390,29
Produto 48	126	126	78,12	40,32	-37,8
Produto 64	0	0	0	0	0
Produto 65	65633	65633	77610,62	69570,98	-8039,64
Produto 74	45645	45645	63903	63903	0
Produto 81	2684	2684	8937,72	7058,92	-1878,8
Produto 82	3208	3208	8231,6	7667,12	-564,48
Produto 83	2665	2665	3651,05	3651,05	0
Produto 84	0	0	0	0	0
Produto 85	11390	11390	15262,6	15262,6	0
Produto 97	880	880	1680,8	1654,4	-26,4
Produto 98	0	0	0	0	0
Produto 102	0	0	0	0	0
<b>Total</b>	<b>259103</b>	<b>259103</b>	<b>383665,38</b>	<b>301149,36</b>	<b>-82516,02</b>

Fonte: Elaborado pelo Autor

**Tabela G.10. Redução de Custos para o Período 4 Detalhado por Produto**

<b>Produto</b>	<b>Volume Inicial (l)</b>	<b>Volume Após Otimização (l)</b>	<b>Custo Inicial (R\$)</b>	<b>Custo Após Otimização (R\$)</b>	<b>Diferença de Custo (R\$)</b>
Produto 13	0	0	0	0	0
Produto 14	25584	25584	43329,5	23281,44	-20048,06
Produto 15	247974	247974	252660,75	247974	-4686,75
Produto 30	4184	4184	11129,44	4142,16	-6987,28
Produto 31	1530	1530	3411,9	2004,3	-1407,6
Produto 32	8733	8733	18601,29	10217,61	-8383,68
Produto 35	0	0	0	0	0
Produto 36	10871	10871	29460,41	18371,99	-11088,42
Produto 37	0	0	0	0	0
Produto 38	0	0	0	0	0
Produto 41	10303	10303	8139,37	4636,35	-3503,02
Produto 42	0	0	0	0	0
Produto 43	0	0	0	0	0
Produto 47	47	47	29,61	15,04	-14,57
Produto 48	0	0	0	0	0
Produto 64	7771	7771	14531,77	9558,33	-4973,44
Produto 65	46047	46047	57903,38	48809,82	-9093,56
Produto 74	11793	11793	16510,2	16510,2	0
Produto 81	4206	4206	12918,18	11061,78	-1856,4
Produto 82	0	0	0	0	0
Produto 83	0	0	0	0	0
Produto 84	6345	6345	10029,3	9136,8	-892,5
Produto 85	2920	2920	3912,8	3912,8	0
Produto 97	0	0	0	0	0
Produto 98	0	0	0	0	0
Produto 102	0	0	0	0	0
<b>Total</b>	<b>388308</b>	<b>388308</b>	<b>482567,9</b>	<b>409632,62</b>	<b>-72935,28</b>

Fonte: Elaborado pelo Autor

**Tabela G.11. Redução de Custos para o Período 5 Detalhado por Produto**

<b>Produto</b>	<b>Volume Inicial (l)</b>	<b>Volume Após Otimização (l)</b>	<b>Custo Inicial (R\$)</b>	<b>Custo Após Otimização (R\$)</b>	<b>Diferença de Custo (R\$)</b>
Produto 13	0	0	0	0	0
Produto 14	24976	24976	47476,94	22728,16	-24748,78
Produto 15	208244	208244	255874,48	208244	-47630,48
Produto 30	1680	1680	4468,8	1663,2	-2805,6
Produto 31	3809	3809	8494,07	4989,79	-3504,28
Produto 32	1656	1656	3527,28	1937,52	-1589,76
Produto 35	5968	5968	17187,84	13487,68	-3700,16
Produto 36	11889	11889	29333,61	20092,41	-9241,2
Produto 37	0	0	0	0	0
Produto 38	7465	7465	15153,95	7614,3	-7539,65
Produto 41	14706	14706	11617,74	6617,7	-5000,04
Produto 42	0	0	0	0	0
Produto 43	0	0	0	0	0
Produto 47	28	28	17,64	8,96	-8,68
Produto 48	0	0	0	0	0
Produto 64	5473	5473	10234,51	6731,79	-3502,72
Produto 65	147035	147035	173888,26	155857,1	-18031,16
Produto 74	40129	40129	56180,6	56180,6	0
Produto 81	2420	2420	8058,6	6364,6	-1694
Produto 82	2497	2497	5967,83	5967,83	0
Produto 83	0	0	0	0	0
Produto 84	7342	7342	11250,78	10572,48	-678,3
Produto 85	8988	8988	20731,48	12043,92	-8687,56
Produto 97	899	899	1717,09	1690,12	-26,97
Produto 98	94	94	177,66	177,66	0
Produto 102	104	104	221,52	144,56	-76,96
<b>Total</b>	<b>495402</b>	<b>495402</b>	<b>681580,68</b>	<b>543114,38</b>	<b>-138466,3</b>

Fonte: Elaborado pelo Autor

**Tabela G.12. Redução de Custos para o Período 6 Detalhado por Produto**

<b>Produto</b>	<b>Volume Inicial (l)</b>	<b>Volume Após Otimização (l)</b>	<b>Custo Inicial (R\$)</b>	<b>Custo Após Otimização (R\$)</b>	<b>Diferença de Custo (R\$)</b>
Produto 13	795	795	1423,05	1065,3	-357,75
Produto 14	25699	25699	46557,65	23386,09	-23171,56
Produto 15	184182	184182	197620,41	187907,75	-9712,66
Produto 30	2805	2805	7461,3	2776,95	-4684,35
Produto 31	3650	3650	8139,5	4781,5	-3358
Produto 32	4676	4676	9959,88	5470,92	-4488,96
Produto 35	0	0	0	0	0
Produto 36	14123	14123	37975,43	23867,87	-14107,56
Produto 37	2073	2073	6571,41	6094,62	-476,79
Produto 38	24852	24852	50449,56	25349,04	-25100,52
Produto 41	28996	28996	22906,84	13048,2	-9858,64
Produto 42	0	0	0	0	0
Produto 43	74645	74645	69419,85	69419,85	0
Produto 47	454	454	286,02	145,28	-140,74
Produto 48	0	0	0	0	0
Produto 64	14940	14940	27937,8	18376,2	-9561,6
Produto 65	110115	110115	122837,94	116721,9	-6116,04
Produto 74	48059	48059	67282,6	67282,6	0
Produto 81	1318	1318	3466,34	3466,34	0
Produto 82	1284	1284	3068,76	3068,76	0
Produto 83	0	0	0	0	0
Produto 84	5819	5819	12043,37	8379,36	-3664,01
Produto 85	0	0	0	0	0
Produto 97	1060	1060	2024,6	1992,8	-31,8
Produto 98	31	31	58,59	58,59	0
Produto 102	0	0	0	0	0
<b>Total</b>	<b>549576</b>	<b>549576</b>	<b>697490,9</b>	<b>582659,92</b>	<b>-114830,98</b>

Fonte: Elaborado pelo Autor

**Tabela G.13. Distribuição Inicial e Otimizada para o Período 1 Parte 1**

<b>Produto</b>	<b>Fábrica</b>	<b>Volume Inicial (I)</b>	<b>Custo Inicial (R\$)</b>	<b>Volume Após Otimização (I)</b>	<b>Custo Após Otimização (R\$)</b>
Produto 13	Fábrica 1	2575	3450,5	4895	6559,3
Produto 13	Fábrica 3	2320	4152,8	0	0
Produto 14	Fábrica 1	7918	17815,5	0	0
Produto 14	Fábrica 2	15797	20062,19	0	0
Produto 14	Fábrica 4	0	0	23715	21580,65
Produto 15	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 15	Fábrica 2	1000	1250	0	0
Produto 15	Fábrica 4	0	0	1000	1000
Produto 30	Fábrica 1	3394	9028,04	0	0
Produto 30	Fábrica 4	0	0	3394	3360,06
Produto 31	Fábrica 1	2006	4473,38	0	0
Produto 31	Fábrica 4	0	0	2006	2627,86
Produto 32	Fábrica 1	5326	11344,38	0	0
Produto 32	Fábrica 4	0	0	5326	6231,42
Produto 35	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 35	Fábrica 3	0	0	0	0
Produto 36	Fábrica 1	3049	8262,79	0	0
Produto 36	Fábrica 2	5383	9097,27	8432	14250,08
Produto 36	Fábrica 3	0	0	0	0
Produto 37	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 37	Fábrica 3	940	2763,6	940	2763,6
Produto 38	Fábrica 1	26422	53636,66	0	0
Produto 38	Fábrica 2	25038	25538,76	54862	55959,24
Produto 38	Fábrica 3	3402	8641,08	0	0
Produto 41	Fábrica 2	46202	36499,58	0	0
Produto 41	Fábrica 4	0	0	46202	20790,9
Produto 42	Fábrica 2	1136	886,08	0	0
Produto 42	Fábrica 4	0	0	1136	511,2
Produto 43	Fábrica 3	0	0	0	0
Produto 43	Fábrica 4	0	0	0	0
Produto 47	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 47	Fábrica 2	3683	2320,29	0	0
Produto 47	Fábrica 4	0	0	3683	1178,56
Produto 48	Fábrica 2	426	264,12	0	0
Produto 48	Fábrica 4	0	0	426	136,32
Produto 64	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 64	Fábrica 2	5980	11182,6	0	0
Produto 64	Fábrica 4	0	0	5980	7355,4
Produto 65	Fábrica 2	16829	22550,86	0	0
Produto 65	Fábrica 4	100061	106064,66	116890	123903,4
Produto 74	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 74	Fábrica 2	16288	22803,2	16288	22803,2

Fonte: Elaborado pelo Autor



**Tabela G.14. Distribuição Inicial e Otimizada para o Período 1 Parte 2**

<b>Produto</b>	<b>Fábrica</b>	<b>Volume Inicial (l)</b>	<b>Custo Inicial (R\$)</b>	<b>Volume Após Otimização (l)</b>	<b>Custo Após Otimização (R\$)</b>
Produto 81	Fábrica 2	2500	8325	0	0
Produto 81	Fábrica 3	0	0	2500	6575
Produto 82	Fábrica 2	2597	6206,83	2597	6206,83
Produto 82	Fábrica 3	0	0	0	0
Produto 83	Fábrica 2	0	0	1688	2312,56
Produto 83	Fábrica 3	1688	4827,68	0	0
Produto 84	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 84	Fábrica 2	2884	4152,96	2884	4152,96
Produto 84	Fábrica 3	0	0	0	0
Produto 85	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 85	Fábrica 2	0	0	0	0
Produto 85	Fábrica 3	0	0	0	0
Produto 97	Fábrica 1	0	0	1306	2455,28
Produto 97	Fábrica 3	1306	2494,46	0	0
Produto 98	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 98	Fábrica 3	1025	1937,25	1025	1937,25
Produto 102	Fábrica 1	0	0	946	1314,94
Produto 102	Fábrica 3	946	2014,98	0	0

**Fonte: Elaborado pelo Autor**

Tabela G.15. Distribuição Inicial e Otimizada para o Período 2 Parte 1

Produto	Fábrica	Volume Inicial (I)	Custo Inicial (R\$)	Volume Após Otimização (I)	Custo Após Otimização (R\$)
Produto 13	Fábrica 1	378	506,52	3550	4757
Produto 13	Fábrica 3	3172	5677,88	0	0
Produto 14	Fábrica 1	3972	8937	0	0
Produto 14	Fábrica 2	14700	18669	0	0
Produto 14	Fábrica 4	0	0	18672	16991,52
Produto 15	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 15	Fábrica 2	6290	7862,5	0	0
Produto 15	Fábrica 4	0	0	6290	6290
Produto 30	Fábrica 1	2649	7046,34	0	0
Produto 30	Fábrica 4	0	0	2649	2622,51
Produto 31	Fábrica 1	945	2107,35	0	0
Produto 31	Fábrica 4	0	0	945	1237,95
Produto 32	Fábrica 1	2439	5195,07	0	0
Produto 32	Fábrica 4	0	0	2439	2853,63
Produto 35	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 35	Fábrica 3	0	0	0	0
Produto 36	Fábrica 1	6453	17487,63	0	0
Produto 36	Fábrica 2	6683	11294,27	13136	22199,84
Produto 36	Fábrica 3	0	0	0	0
Produto 37	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 37	Fábrica 3	2029	5965,26	2029	5965,26
Produto 38	Fábrica 1	38079	77300,37	0	0
Produto 38	Fábrica 2	33193	33856,86	71272	72697,44
Produto 38	Fábrica 3	0	0	0	0
Produto 41	Fábrica 2	36287	28666,73	0	0
Produto 41	Fábrica 4	0	0	36287	16329,15
Produto 42	Fábrica 2	1215	947,7	0	0
Produto 42	Fábrica 4	0	0	1215	546,75
Produto 43	Fábrica 3	0	0	0	0
Produto 43	Fábrica 4	99813	92826,09	99813	92826,09
Produto 47	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 47	Fábrica 2	2007	1264,41	0	0
Produto 47	Fábrica 4	0	0	2007	642,24
Produto 48	Fábrica 2	520	322,4	0	0
Produto 48	Fábrica 4	0	0	520	166,4
Produto 64	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 64	Fábrica 2	0	0	0	0
Produto 64	Fábrica 4	0	0	0	0
Produto 65	Fábrica 2	13152	17623,68	0	0
Produto 65	Fábrica 4	0	0	13152	13941,12
Produto 74	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 74	Fábrica 2	33936	47510,4	33936	47510,4

Fonte: Elaborado pelo Autor

**Tabela G.16. Distribuição Inicial e Otimizada para o Período 2 Parte 2**

<b>Produto</b>	<b>Fábrica</b>	<b>Volume Inicial (l)</b>	<b>Custo Inicial (R\$)</b>	<b>Volume Após Otimização (l)</b>	<b>Custo Após Otimização (R\$)</b>
Produto 81	Fábrica 2	0	0	0	0
Produto 81	Fábrica 3	0	0	0	0
Produto 82	Fábrica 2	0	0	0	0
Produto 82	Fábrica 3	0	0	0	0
Produto 83	Fábrica 2	2725	3733,25	3643	4990,91
Produto 83	Fábrica 3	918	2625,48	0	0
Produto 84	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 84	Fábrica 2	5652	8138,88	5652	8138,88
Produto 84	Fábrica 3	0	0	0	0
Produto 85	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 85	Fábrica 2	0	0	0	0
Produto 85	Fábrica 3	0	0	0	0
Produto 97	Fábrica 1	0	0	2159	4058,92
Produto 97	Fábrica 3	2159	4123,69	0	0
Produto 98	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 98	Fábrica 3	868	1640,52	868	1640,52
Produto 102	Fábrica 1	0	0	312	433,68
Produto 102	Fábrica 3	312	664,56	0	0

**Fonte: Elaborado pelo Autor**

**Tabela G.17. Distribuição Inicial e Otimizada para o Período 3 Parte 1**

<b>Produto</b>	<b>Fábrica</b>	<b>Volume Inicial (I)</b>	<b>Custo Inicial (R\$)</b>	<b>Volume Após Otimização (I)</b>	<b>Custo Após Otimização (R\$)</b>
Produto 13	Fábrica 1	0	0	994	1331,96
Produto 13	Fábrica 3	994	1779,26	0	0
Produto 14	Fábrica 1	11290	25402,5	0	0
Produto 14	Fábrica 2	18320	23266,4	0	0
Produto 14	Fábrica 4	0	0	29610	26945,1
Produto 15	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 15	Fábrica 2	10459	13073,75	0	0
Produto 15	Fábrica 4	0	0	10459	10459
Produto 30	Fábrica 1	2323	6179,18	0	0
Produto 30	Fábrica 4	0	0	2323	2299,77
Produto 31	Fábrica 1	4648	10365,04	0	0
Produto 31	Fábrica 4	0	0	4648	6088,88
Produto 32	Fábrica 1	1405	2992,65	0	0
Produto 32	Fábrica 4	0	0	1405	1643,85
Produto 35	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 35	Fábrica 3	0	0	0	0
Produto 36	Fábrica 1	6231	16886,01	0	0
Produto 36	Fábrica 2	16223	27416,87	22454	37947,26
Produto 36	Fábrica 3	0	0	0	0
Produto 37	Fábrica 1	2336	7405,12	0	0
Produto 37	Fábrica 3	831	2443,14	3167	9310,98
Produto 38	Fábrica 1	20450	41513,5	0	0
Produto 38	Fábrica 2	2372	2419,44	23092	23553,84
Produto 38	Fábrica 3	270	685,8	0	0
Produto 41	Fábrica 2	26846	21208,34	0	0
Produto 41	Fábrica 4	0	0	26846	12080,7
Produto 42	Fábrica 2	615	479,7	0	0
Produto 42	Fábrica 4	0	0	615	276,75
Produto 43	Fábrica 3	0	0	0	0
Produto 43	Fábrica 4	0	0	0	0
Produto 47	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 47	Fábrica 2	1259	793,17	0	0
Produto 47	Fábrica 4	0	0	1259	402,88
Produto 48	Fábrica 2	126	78,12	0	0
Produto 48	Fábrica 4	0	0	126	40,32
Produto 64	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 64	Fábrica 2	0	0	0	0
Produto 64	Fábrica 4	0	0	0	0
Produto 65	Fábrica 2	28713	38475,42	0	0
Produto 65	Fábrica 4	36920	39135,2	65633	69570,98
Produto 74	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 74	Fábrica 2	45645	63903	45645	63903

Fonte: Elaborado pelo Autor

**Tabela G.18. Distribuição Inicial e Otimizada para o Período 3 Parte 2**

<b>Produto</b>	<b>Fábrica</b>	<b>Volume Inicial (l)</b>	<b>Custo Inicial (R\$)</b>	<b>Volume Após Otimização (l)</b>	<b>Custo Após Otimização (R\$)</b>
Produto 81	Fábrica 2	2684	8937,72	0	0
Produto 81	Fábrica 3	0	0	2684	7058,92
Produto 82	Fábrica 2	2536	6061,04	3208	7667,12
Produto 82	Fábrica 3	672	2170,56	0	0
Produto 83	Fábrica 2	2665	3651,05	2665	3651,05
Produto 83	Fábrica 3	0	0	0	0
Produto 84	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 84	Fábrica 2	0	0	0	0
Produto 84	Fábrica 3	0	0	0	0
Produto 85	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 85	Fábrica 2	11390	15262,6	11390	15262,6
Produto 85	Fábrica 3	0	0	0	0
Produto 97	Fábrica 1	0	0	880	1654,4
Produto 97	Fábrica 3	880	1680,8	0	0
Produto 98	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 98	Fábrica 3	0	0	0	0
Produto 102	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 102	Fábrica 3	0	0	0	0

**Fonte: Elaborado pelo Autor**

Tabela G.19. Distribuição Inicial e Otimizada para o Período 4 Parte 1

Produto	Fábrica	Volume Inicial (l)	Custo Inicial (R\$)	Volume Após Otimização (l)	Custo Após Otimização (R\$)
Produto 13	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 13	Fábrica 3	0	0	0	0
Produto 14	Fábrica 1	11059	24882,75	0	0
Produto 14	Fábrica 2	14525	18446,75	0	0
Produto 14	Fábrica 4	0	0	25584	23281,44
Produto 15	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 15	Fábrica 2	18747	23433,75	0	0
Produto 15	Fábrica 4	229227	229227	247974	247974
Produto 30	Fábrica 1	4184	11129,44	0	0
Produto 30	Fábrica 4	0	0	4184	4142,16
Produto 31	Fábrica 1	1530	3411,9	0	0
Produto 31	Fábrica 4	0	0	1530	2004,3
Produto 32	Fábrica 1	8733	18601,29	0	0
Produto 32	Fábrica 4	0	0	8733	10217,61
Produto 35	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 35	Fábrica 3	0	0	0	0
Produto 36	Fábrica 1	10871	29460,41	0	0
Produto 36	Fábrica 2	0	0	10871	18371,99
Produto 36	Fábrica 3	0	0	0	0
Produto 37	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 37	Fábrica 3	0	0	0	0
Produto 38	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 38	Fábrica 2	0	0	0	0
Produto 38	Fábrica 3	0	0	0	0
Produto 41	Fábrica 2	10303	8139,37	0	0
Produto 41	Fábrica 4	0	0	10303	4636,35
Produto 42	Fábrica 2	0	0	0	0
Produto 42	Fábrica 4	0	0	0	0
Produto 43	Fábrica 3	0	0	0	0
Produto 43	Fábrica 4	0	0	0	0
Produto 47	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 47	Fábrica 2	47	29,61	0	0
Produto 47	Fábrica 4	0	0	47	15,04
Produto 48	Fábrica 2	0	0	0	0
Produto 48	Fábrica 4	0	0	0	0
Produto 64	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 64	Fábrica 2	7771	14531,77	0	0
Produto 64	Fábrica 4	0	0	7771	9558,33
Produto 65	Fábrica 2	32477	43519,18	0	0
Produto 65	Fábrica 4	13570	14384,2	46047	48809,82
Produto 74	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 74	Fábrica 2	11793	16510,2	11793	16510,2

Fonte: Elaborado pelo Autor

**Tabela G.20. Distribuição Inicial e Otimizada para o Período 4 Parte 2**

<b>Produto</b>	<b>Fábrica</b>	<b>Volume Inicial (I)</b>	<b>Custo Inicial (R\$)</b>	<b>Volume Após Otimização (I)</b>	<b>Custo Após Otimização (R\$)</b>
Produto 81	Fábrica 2	2652	8831,16	0	0
Produto 81	Fábrica 3	1554	4087,02	4206	11061,78
Produto 82	Fábrica 2	0	0	0	0
Produto 82	Fábrica 3	0	0	0	0
Produto 83	Fábrica 2	0	0	0	0
Produto 83	Fábrica 3	0	0	0	0
Produto 84	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 84	Fábrica 2	5595	8056,8	6345	9136,8
Produto 84	Fábrica 3	750	1972,5	0	0
Produto 85	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 85	Fábrica 2	2920	3912,8	2920	3912,8
Produto 85	Fábrica 3	0	0	0	0
Produto 97	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 97	Fábrica 3	0	0	0	0
Produto 98	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 98	Fábrica 3	0	0	0	0
Produto 102	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 102	Fábrica 3	0	0	0	0

Fonte: Elaborado pelo Autor

Tabela G.21. Distribuição Inicial e Otimizada para o Período 5 Parte 1

Produto	Fábrica	Volume Inicial (l)	Custo Inicial (R\$)	Volume Após Otimização (l)	Custo Após Otimização (R\$)
Produto 13	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 13	Fábrica 3	0	0	0	0
Produto 14	Fábrica 1	16079	36177,75	0	0
Produto 14	Fábrica 2	8897	11299,19	0	0
Produto 14	Fábrica 4	0	0	24976	22728,16
Produto 15	Fábrica 1	39918	74247,48	0	0
Produto 15	Fábrica 2	53204	66505	0	0
Produto 15	Fábrica 4	115122	115122	208244	208244
Produto 30	Fábrica 1	1680	4468,8	0	0
Produto 30	Fábrica 4	0	0	1680	1663,2
Produto 31	Fábrica 1	3809	8494,07	0	0
Produto 31	Fábrica 4	0	0	3809	4989,79
Produto 32	Fábrica 1	1656	3527,28	0	0
Produto 32	Fábrica 4	0	0	1656	1937,52
Produto 35	Fábrica 1	5968	17187,84	0	0
Produto 35	Fábrica 3	0	0	5968	13487,68
Produto 36	Fábrica 1	9060	24552,6	0	0
Produto 36	Fábrica 2	2829	4781,01	11889	20092,41
Produto 36	Fábrica 3	0	0	0	0
Produto 37	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 37	Fábrica 3	0	0	0	0
Produto 38	Fábrica 1	7465	15153,95	0	0
Produto 38	Fábrica 2	0	0	7465	7614,3
Produto 38	Fábrica 3	0	0	0	0
Produto 41	Fábrica 2	14706	11617,74	0	0
Produto 41	Fábrica 4	0	0	14706	6617,7
Produto 42	Fábrica 2	0	0	0	0
Produto 42	Fábrica 4	0	0	0	0
Produto 43	Fábrica 3	0	0	0	0
Produto 43	Fábrica 4	0	0	0	0
Produto 47	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 47	Fábrica 2	28	17,64	0	0
Produto 47	Fábrica 4	0	0	28	8,96
Produto 48	Fábrica 2	0	0	0	0
Produto 48	Fábrica 4	0	0	0	0
Produto 64	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 64	Fábrica 2	5473	10234,51	0	0
Produto 64	Fábrica 4	0	0	5473	6731,79
Produto 65	Fábrica 2	64397	86291,98	0	0
Produto 65	Fábrica 4	82638	87596,28	147035	155857,1
Produto 74	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 74	Fábrica 2	40129	56180,6	40129	56180,6

Fonte: Elaborado pelo Autor



**Tabela G.22. Distribuição Inicial e Otimizada para o Período 5 Parte 2**

<b>Produto</b>	<b>Fábrica</b>	<b>Volume Inicial (l)</b>	<b>Custo Inicial (R\$)</b>	<b>Volume Após Otimização (l)</b>	<b>Custo Após Otimização (R\$)</b>
Produto 81	Fábrica 2	2420	8058,6	0	0
Produto 81	Fábrica 3	0	0	2420	6364,6
Produto 82	Fábrica 2	2497	5967,83	2497	5967,83
Produto 82	Fábrica 3	0	0	0	0
Produto 83	Fábrica 2	0	0	0	0
Produto 83	Fábrica 3	0	0	0	0
Produto 84	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 84	Fábrica 2	6772	9751,68	7342	10572,48
Produto 84	Fábrica 3	570	1499,1	0	0
Produto 85	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 85	Fábrica 2	2870	3845,8	8988	12043,92
Produto 85	Fábrica 3	6118	16885,68	0	0
Produto 97	Fábrica 1	0	0	899	1690,12
Produto 97	Fábrica 3	899	1717,09	0	0
Produto 98	Fábrica 1	0	0	94	177,66
Produto 98	Fábrica 3	94	177,66	0	0
Produto 102	Fábrica 1	0	0	104	144,56
Produto 102	Fábrica 3	104	221,52	0	0

**Fonte: Elaborado pelo Autor**

**Tabela G.23. Distribuição Inicial e Otimizada para o Período 6 Parte 1**

<b>Produto</b>	<b>Fábrica</b>	<b>Volume Inicial (I)</b>	<b>Custo Inicial (R\$)</b>	<b>Volume Após Otimização (I)</b>	<b>Custo Após Otimização (R\$)</b>
Produto 13	Fábrica 1	0	0	795	1065,3
Produto 13	Fábrica 3	795	1423,05	0	0
Produto 14	Fábrica 1	14204	31959	0	0
Produto 14	Fábrica 2	11495	14598,65	0	0
Produto 14	Fábrica 4	0	0	25699	23386,09
Produto 15	Fábrica 1	4106	7637,16	0	0
Produto 15	Fábrica 2	39629	49536,25	14903	18628,75
Produto 15	Fábrica 4	140447	140447	169279	169279
Produto 30	Fábrica 1	2805	7461,3	0	0
Produto 30	Fábrica 4	0	0	2805	2776,95
Produto 31	Fábrica 1	3650	8139,5	0	0
Produto 31	Fábrica 4	0	0	3650	4781,5
Produto 32	Fábrica 1	4676	9959,88	0	0
Produto 32	Fábrica 4	0	0	4676	5470,92
Produto 35	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 35	Fábrica 3	0	0	0	0
Produto 36	Fábrica 1	8165	22127,15	0	0
Produto 36	Fábrica 2	0	0	14123	23867,87
Produto 36	Fábrica 3	5958	15848,28	0	0
Produto 37	Fábrica 1	2073	6571,41	0	0
Produto 37	Fábrica 3	0	0	2073	6094,62
Produto 38	Fábrica 1	24852	50449,56	0	0
Produto 38	Fábrica 2	0	0	24852	25349,04
Produto 38	Fábrica 3	0	0	0	0
Produto 41	Fábrica 2	28996	22906,84	0	0
Produto 41	Fábrica 4	0	0	28996	13048,2
Produto 42	Fábrica 2	0	0	0	0
Produto 42	Fábrica 4	0	0	0	0
Produto 43	Fábrica 3	0	0	0	0
Produto 43	Fábrica 4	74645	69419,85	74645	69419,85
Produto 47	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 47	Fábrica 2	454	286,02	0	0
Produto 47	Fábrica 4	0	0	454	145,28
Produto 48	Fábrica 2	0	0	0	0
Produto 48	Fábrica 4	0	0	0	0
Produto 64	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 64	Fábrica 2	14940	27937,8	0	0
Produto 64	Fábrica 4	0	0	14940	18376,2
Produto 65	Fábrica 2	21843	29269,62	0	0
Produto 65	Fábrica 4	88272	93568,32	110115	116721,9
Produto 74	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 74	Fábrica 2	48059	67282,6	48059	67282,6

Fonte: Elaborado pelo Autor

**Tabela G.24. Distribuição Inicial e Otimizada para o Período 6 Parte 2**

<b>Produto</b>	<b>Fábrica</b>	<b>Volume Inicial (l)</b>	<b>Custo Inicial (R\$)</b>	<b>Volume Após Otimização (l)</b>	<b>Custo Após Otimização (R\$)</b>
Produto 81	Fábrica 2	0	0	0	0
Produto 81	Fábrica 3	1318	3466,34	1318	3466,34
Produto 82	Fábrica 2	1284	3068,76	1284	3068,76
Produto 82	Fábrica 3	0	0	0	0
Produto 83	Fábrica 2	0	0	0	0
Produto 83	Fábrica 3	0	0	0	0
Produto 84	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 84	Fábrica 2	2740	3945,6	5819	8379,36
Produto 84	Fábrica 3	3079	8097,77	0	0
Produto 85	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 85	Fábrica 2	0	0	0	0
Produto 85	Fábrica 3	0	0	0	0
Produto 97	Fábrica 1	0	0	1060	1992,8
Produto 97	Fábrica 3	1060	2024,6	0	0
Produto 98	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 98	Fábrica 3	31	58,59	31	58,59
Produto 102	Fábrica 1	0	0	0	0
Produto 102	Fábrica 3	0	0	0	0

**Fonte: Elaborado pelo Autor**

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DANTZIG, George; THAPA, Mukund. Linear Programming 1: Introduction. Nova Iorque: Springer-Verlag New York Inc., 1997.

DANTZIG, George; THAPA, Mukund. Linear Programming 2: Theory and Extensions. Nova Iorque: Springer-Verlag New York Inc., 2001.

EDGAR, Thomas; HIMMELBLAU, David; LASDON, Leon. Optimization of Chemical Processes. Edição 2. Nova Iorque: McGraw-Hill Companies Inc., 2001.

HURLBERT, Glenn. Linear Optimization: The Simplex Workbook. Nova Iorque: Springer Science + Business Media LLC., 2010.

SCIPY.ORG. **scipy.optimize.linprog**. The Scipy Community, 2020. Disponível em: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.linprog.html>. Acesso em: 13 nov. 2020.

STOJILJKOVIC, Mirko. Hands-On Linear Programming: Optimization With Python. **Real Python**, 22 jun. 2020. Disponível em: <https://realpython.com/linear-programming-python/#using-scipy>. Acesso em: 13 nov. 2020.