Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

Uma introdução à Teoria de Representação para grupos finitos

São Carlos, 15 de janeiro de 2021.

Uma introdução à Teoria de Representação para grupos finitos

Autor: Vinicius Gonçalves da Luz Gomes

Orientador: Prof. Dr. Leandro Nery de Oliveira

Disciplina: Trabalho de Conclusão do Curso A

Curso: Bacharelado em Matemática

Professores Responsáveis: Prof. Dr. Wladimir Seixas
Profa. Dra. Luciene Nogueira Bertoncello
Profa. Dra. Natália Andrea Viana Bedoya

Instituição: Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

São Carlos, 15 de janeiro de 2021.

Vinicius Gonçalves da Luz Gomes (aluno)

Prof. Dr. Leandro Nery de Oliveira
(orientador)

Agradecimentos

Agradeço ao meu pai, Clayton Cavalcante Gomes, que sempre me incentivou e guiou da melhor forma possível.

A minha família pelo apoio e carinho inesgotáveis.

Aos meus amigos de graduação por todas as experiências compartilhadas e todos os desafios que superamos.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Leandro Nery de Oliveira, pela dedicação e paciência durante o projeto.

Resumo

Este trabalho propõe-se a introduzir a Teoria de Representação de grupos finitos, apresentando o Lema de Schur e o Teorema de Maschke, dois resultados importantes à teoria. E ainda trata da decomposição isotípica de uma representação e dos caracteres de um grupo.
Palavras-chave : *Representações de grupos finitos, Lema de Schur, Teorema de Maschke, Decomposição isotípica, Caracteres de um grupo.*

Abstract

This work aims to introduce the Theory of Representation of finite groups, presenting Schur's Lemma and Maschke's Theorem, two important results to the theory. It also deals with the isotopic decomposition of a representation and the characters of a group.
Keywords: *Representations of finite groups, Schur's lemma, Maschke's theorem, isotopic decomposition, characters of a group.*

Sumário

Introdução

Os primeiros artigos sobre representações de grupos finitos foram publicados no final do século XIX por Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917), veja [1]. Entre as referências de Frobenius nesses artigos, detacamos o uso, mesmo que implícito, de caracteres de grupos abelianos finitos e pesquisas sobre álgebras de Lie. Como é de se esperar, a teoria de representação de grupos finitos encontra aplicação em álgebras de Lie, mas não se limita apenas a elas, podendo ser empregada, por exemplo, nos ramos da matemática da teoria invariante, teoria de Galois, geometria algébrica, teoria dos números e análise harmônica. Na época, os trabalhos de Frobenius sobre a teoria de representação de grupos finitos não eram introdutivos, pois requerem, por exemplo, referências de trabalhos anteriores dele e de Richard Dedekind (1831-1916). Entretanto, em 1905, Issai Schur (1875-1941), aluno de doutorado de Frobenius, formula uma introdução à teoria tomando como alicerce fatos elementares da álgebra linear e, assim, tornando-a acessível a um público maior. O objetivo deste trabalho é apresentar a teoria de representação de grupos finitos nos fundamentando em [2–7]. Para tanto, iniciamos o texto com uma breve introdução sobre teoria de grupos e álgebra linear. No segundo capítulo, abordamos as definições de ação de um grupo sobre um conjunto e de representação de um grupo finito. Por meio das representações de grupos finitos, obtemos uma perspectiva excepcional sobre grupos, transferindo e adaptando propriedades dos espaços vetoriais aos grupos em questão e, assim, oferecendo a eles aspectos mais corpulentos e maleáveis. Também apresentamos no segundo capítulo os conceitos de subrepresentações e de subrepresentações irredutíveis de uma representação e alguns exemplos de representações de grupos entre os quais estão destacados a soma direta de representações, a representação de permutação e a representação regular. No terceiro capítulo, estudamos homomorfismos de representações, consolidando o terreno para a introdução do Lema de Schur e o Teorema de Maschke, resultados que nos auxiliam a entender uma representação como a soma direta de subrepresentações irredutíveis dela, o que compreendemos como a decomposição isotípica da representação em questão. Finalmente, no último capítulo, definimos e analisamos os caracteres de representações, um objeto que nos permite perceber uma representação de um grupo como vetores da representação regular do grupo.

Capítulo 1

Preliminares

O intuito deste capítulo é expor noções, conceitos e resultados tanto de teoria de grupos quanto de álgebra linear que são pertinentes através do texto. Neste capítulo, nos fundamentamos em [3, 8–11] e os resultados não demonstrados aqui podem ser encontrados em tais referências.

1.1 Grupos

Definição 1.1. *Sejam G um conjunto não vazio e uma operação $* : G \times G \to G$ tal que $(g, h) \mapsto g * h$. Dizemos que $(G, *)$ é um* grupo *se*

i. A operação $*$ é associativa, isto é, que $(g*h)*k = g*(h*k)$, para todos $g, h, k \in G$;

ii. Existe um elemento neutro $e \in G$ tal que $g * e = e * g = g$, para todo $g \in G$;

iii. Existe um elemento inverso $g^{-1} \in G$ tal que $g*g^{-1} = g^{-1}*g = e$, para todo elemento $g \in G$.

Exemplo 1.2. *O conjunto $(\mathbb{Z}, +)$ é um grupo, pois a soma usual é associativa, o elemento neutro é 0 e o inverso de $x \in \mathbb{Z}$ é dado por $x^{-1} = -x \in \mathbb{Z}$. Os conjuntos $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{C}, +)$ também são grupos.*

Por vezes, denotamos o grupo $(G, *)$ apenas por G e a operação de dois elementos g e h de G é expressa por gh deixando subentendida a operação $*$ em ambos os casos. A proposição que segue reúne algumas das propriedades imediatas de um grupo.

Proposição 1.3. *Seja G um grupo. Então*

i. O elemento neutro é único;

ii. O inverso de cada elemento é único;

iii. O inverso do inverso de um elemento $g \in G$ é o próprio g.

Se a operação de um grupo G é comutativa, isto é, se $gh = hg$, para todos $g, h \in G$, dizemos que G é um grupo abeliano.

Exemplo 1.4. *O conjunto $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ é um grupo abeliano, pois a multiplicação usual é associativa, comutativa, o elemento neutro é a unidade e se $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^*$, então $(\frac{a}{b})^{-1} = \frac{b}{a} \in \mathbb{Q}^*$. Analogamente, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ e $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ também são grupos abelianos.*

Temos que $(\mathbb{Z}, +)$ é um grupo e também subconjunto do grupo $(\mathbb{Q}, +)$ e ambos compartilham a mesma operação. Dizemos que $\mathbb{Z}$ é subgrupo de $\mathbb{Q}$ e tratamos subgrupos formalmente na seguinte definição.

Definição 1.5. *Sejam G um grupo e H um subconjunto não vazio de G. Dizemos que H é um* subgrupo *de G se*

i. H é um grupo com a operação de G;

ii. H é fechado para a operação de G, isto é, $gh \in H$, para todos $g, h \in H$.

Exemplo 1.6. *O grupo $\mathbb{Q}^*$ é um subgrupo de $\mathbb{R}^*$, ambos com a multiplicação usual como operação, uma vez que $\mathbb{Q}^*$ é um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^*$ é um grupo e é fechado para a multiplicação.*

A proposição subsequente nos permite identificar subgrupos apenas ao operar elementos do conjunto em questão.

Proposição 1.7. *Sejam G um grupo e H um subconjunto não vazio de G. Então H é um subgrupo de G se, e somente se, $hk^{-1} \in H$, para todos $h, k \in H$.*

A definição a seguir expõe aplicações entre grupos que, por assim dizer, preservam as operações deles.

Definição 1.8. *Sejam $(G, *)$, $(H, \cdot)$ grupos e $f : G \to H$ uma aplicação. Dizemos que f é um* homomorfismo *entre os grupos G e H se*

$$f(g * h) = f(g) \cdot f(h),$$

para todos $g, h \in G$.

Podemos nos referir a um homomorfismo entre os grupos G e H apenas por homomorfismo de grupos sempre que os grupos G e H estiverem subentendidos. A proposição que segue reúne algumas propriedades de homomorfismos de grupos.

Proposição 1.9. *Sejam G, H e K grupos. Sejam também $f_1 : G \to H$ e $f_2 : H \to K$ homomorfismos de grupos. Então*

i. $f_1(e)$ é o elemento neutro de H se e é o elemento neutro de G;

ii. $f_1(g^{-1}) = (f_1(g))^{-1}$ se $g \in G$;

iii. A imagem de um subgrupo de G por f_1 é um subgrupo de H;

iv. A composição $f_2 \circ f_1 : G \to K$ é um homomorfismo de grupos.

Homomorfismos bijetores de grupos desempenham um papel relevante na teoria de grupos, uma vez que acabam por revelar grupos "idênticos", isto é, um homomorfismo bijetor de grupos, além de preservar as operações dos grupos, também gera uma correspondência biunívoca entre os elementos de ambos de forma a não haver necessidade em distinguirmos um grupo do outro.

Definição 1.10. *Seja $f : G \to H$ um homomorfismo de grupos. Dizemos que f é um* isomorfismo de grupos *se f é bijetor.*

Se existe um isomorfismo entre dois grupos G e H dizemos que G e H são isomorfos como grupos e denotamos $G \simeq H$.

Exemplo 1.11. *Os grupos $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ e $(\mathbb{R}, +)$ são isomorfos. De fato, seja $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ln(x)$, então, para todo $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, vale*

i. f é um homomorfismo de grupos, pois

$$f(xy) = ln(xy) = ln(x) + ln(y) = f(x) + f(y);$$

ii. f é injetora, pois se $f(x) = f(y)$, temos que

$$ln(xy^{-1}) = ln(x) - ln(y) = f(x) - f(y) = 0,$$

o que implica que $x = y$.

iii. f é sobrejetora, pois se $z \in \mathbb{R}$, temos que

$$f(e^z) = ln(e^z) = z.$$

Relações de equivalência e classes de equivalência (veja [9, seção III-1.2.]) assumem notável importância na teoria de grupos e a seguir abordamos algumas que são relevantes para este texto.

Proposição 1.12. *Sejam G um grupo, H um subgrupo de G e $g, h \in G$. A relação $\sim$ sobre G dada por $g \sim h$ se, e somente se, $gh^{-1} \in H$ é uma relação de equivalência.*

Note que a classe de equivalência $[k] = \{g \in G | g \sim k\}$ induzida pela relação da Proposição 1.12 pode ser escrita como $Hk = \{hk | h \in H\}$. Com efeito,

$$[k] = \{g \in G | g \sim k\} = \{g \in G | gk^{-1} \in H\} = \{g \in G | \exists h \in H : g = hk\} = Hk.$$

Dizemos que a classe de equivalência Hk é a *classe lateral* (ou *coclasse*) de k à direita de H em G.

De modo análogo, a relação $\approx$ sobre G definida por $g \approx k$ se, e somente se, $g^{-1}k \in H$ também é uma relação de equivalência e a classe de equivalência $kH = \{kh | h \in H\}$ é dita *classe lateral* (ou *coclasse*) de k à esquerda de H em G.

A relação de equivalência introduzida na próxima proposição e as classes de equivalência induzidas por ela são fundamentais para o quarto capítulo deste trabalho.

Proposição 1.13. *Sejam G um grupo e $g, h \in G$. A relação $\approxeq$ em G dada por $g \approxeq h$ se, e somente se, existe $k \in G$ tal que $g = khk^{-1}$ é uma relação de equivalência.*

De acordo com a Proposição 1.13, dizemos que g e h são elementos conjugados se $g \approxeq h$. Mais ainda, a classe de equivalência $[g] = \{h \in G | g \approxeq h\}$ é dita *classe de conjugação* de G.

1.2 Espaços vetoriais

Definição 1.14. *Sejam $(V, +)$ um grupo abeliano, $\mathbb{K}$ um corpo e $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ uma operação dita produto por escalar. Dizemos que V é um* espaço vetorial *sobre $\mathbb{K}$ se, para todos $u, v \in V$ e $a, b \in \mathbb{K}$, o produto por escalar satisfaz*

i. $a(v + u) = av + au$;

ii. $(a + b)v = av + bv$;

iii. $(ab)v = a(bv)$;

iv. $1v = v$.

Intuitivamente os elementos do espaço vetorial V e do corpo $\mathbb{K}$ são chamados de vetores e escalares, respectivamente, e o vetor neutro de V, denotado por 0, é dito vetor nulo.

Exemplo 1.15. *O grupo abeliando* $(\mathbb{R}, +)$ *é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$ *com a multiplicação de* $\mathbb{R}$ *como produto por escalar, pois a multiplicação é associativa e distributiva em relação à soma. Analogamente,* $(\mathbb{C}, +)$ *é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$ *e sobre* $\mathbb{C}$ *com a multiplicação de* $\mathbb{C}$ *como produto por escalar.*

Exemplo 1.16. *O conjunto* $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2)|x_i \in \mathbb{R}\}$ *é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$ *com a soma e produto por escalar usuais, isto é, a soma é* $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ *e o produto por escalar é* $a(x_1, x_2) = (ax_1, ax_2)$*, para* $a, x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$*. De fato, para todos* $a, b, x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$*, temos que:*

i. A soma de vetores é associativa, pois

$$\begin{aligned} ((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) + (z_1, z_2) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2) + (z_1, z_2) \\ &= (x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_2 + z_2) \\ &= (x_1, x_2) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2) \\ &= (x_1, x_2) + ((y_1, y_2) + (z_1, z_2)); \end{aligned}$$

ii. O vetor nulo de $\mathbb{R}^2$ *é* $(0, 0)$*;*

iii. Se $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$*, então seu inverso é dado por* $(-x_1, -x_2) \in \mathbb{R}^2$*;*

iv. A soma de vetores é comutativa, pois

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (y_1 + x_1, y_2 + x_2) = (y_1, y_2) + (x_1, x_2);$$

v. O produto por escalar é distributivo à esquerda em relação à soma de vetores,

$$\begin{aligned} a((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) &= a(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (ax_1 + ay_1, ax_2 + ay_2) \\ &= (ax_1, ax_2) + (ay_1, ay_2) = a(x_1, x_2) + a(y_1, y_2); \end{aligned}$$

vi. O produto por escalar é distributivo à direta em relação à soma de escalares,

$$\begin{aligned} (a + b)(x_1, x_2) &= ((a + b)x_1, (a + b)x_2) = (ax_1 + bx_1, ax_2 + bx_2) \\ &= a(x_1, x_2) + b(x_1, x_2); \end{aligned}$$

vii. $(ab)(x_1, x_2) = ((ab)x_1, (ab)x_2) = (a(bx_1), a(bx_2)) = a(bx_1, bx_2) = a(b(x_1, x_2))$*;*

viii. $1(x_1, x_2) = (1x_1, 1x_2) = (x_1, x_2)$*.*

Note que ao definirmos $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \cdots, x_n)|x_i \in \mathbb{R}\}$, onde $n \in \mathbb{N}$, obtemos um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e podemos provar isso com um argumento análogo ao usado no Exemplo 1.16. O mesmo vale para $\mathbb{C}^n = \{(x_1, \cdots, x_n)|x_i \in \mathbb{C}\}$, mas aqui $\mathbb{C}^n$ pode ser um espaço vetorial tanto sobre $\mathbb{R}$ quanto sobre $\mathbb{C}$. Como é de se esperar, podemos definir uma subestrutura para espaços vetoriais como segue.

Definição 1.17. *Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e W um subconjunto não vazio de V. Dizemos que W é um* subespaço vetorial *de V se W é fechado tanto para a soma quanto para o produto por escalar.*

Em outras palavras, a Definição 1.17 afirma que W é um subespaço vetorial de V se, para todos $u, v \in W$ e $a \in \mathbb{K}$, temos que $av + u \in W$.

Exemplo 1.18. *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. O espaço vetorial V é um subespaço dele mesmo, pois $av + u \in V$, para todos $u, v \in V$ e $a \in \mathbb{K}$. O conjunto $\{0\}$ é um subespaço de V, pois $a0 + 0 \in \{0\}$, para todo $a \in \mathbb{K}$. Dizemos que $\{0\}$ é o espaço* vetorial nulo.

Note que, se V é um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e W é um subespaço de V, como $av + u \in W$, para todos $u, v \in W$ e $a \in \mathbb{K}$, ao tomarmos $a = -1$ extraímos que $u - v \in W$, ou seja, W é um subgrupo abeliano de V. Mais ainda, os quatro itens da Definição 1.14 valem, em particular, para todos os vetores de W. Portanto, W é também um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$.

1.3 Base e Dimensão

Quaisquer vetores de um espaço vetorial podem ser determinados a partir de um conjunto de determinados vetores e, nesta seção, embora o conceito de dimensão de um espaço vetorial não tenha sido propriamente introduzido, buscamos entender tais vetores de espaços vetoriais de dimensão finita.

Definição 1.19. *Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $v_1, \cdots, v_n \in V$. Dizemos que $v \in V$ é a* combinação linear dos vetores *$v_1, \cdots, v_n$ se existem escalares $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{K}$ tais que $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$.*

Se existem vetores $v_1, \cdots, v_n \in V$ tais que todo vetor de V pode ser escrito como combinação linear desses vetores, dizemos que os vetores $v_1, \cdots, v_n$ geram o espaço vetorial V. A próxima definição nos auxilia a encontrar a menor lista possível de vetores de um espaço vetorial que o geram.

Definição 1.20. *Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $v_1, \cdots, v_n \in V$. Dizemos que os vetores $v_1, \cdots, v_n$ são* linearmente independentes (LI) *se a equação*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0 \tag{1.1}$$

implicar que todos $a_1 \cdots, a_n \in \mathbb{K}$ são nulos. Dizemos que $v_1, \cdots, v_n$ são linearmente dependentes (LD) *se existem $a_1 \cdots, a_n \in \mathbb{K}$, não todos nulos, tais que a equação (1.1) vale.*

Exemplo 1.21. *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. O vetor nulo de V é LD, pois o produto por escalar entre o vetor nulo e qualquer escalar é o vetor nulo. Qualquer $v \in V$ diferente do vetor nulo é LI, pois $av = 0$ se, e somente se, $a = 0$.*

Exemplo 1.22. *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ gerado pelos vetores não nulos v_1 e v_2 e seja $v_3 = v_1 + v_2$. Os três vetores são LD, pois $v_1 + v_2 - v_3 = 0$. Agora, se $v_1 = av_2$, para algum $a \in \mathbb{K}$, então os vetores v_1 e v_2 são LD, pois $v_1 - av_2 = 0$. Finalmente, se $v_1 \neq av_2$, para todo $a \in \mathbb{K}$, então v_1 e v_2 são LI, pois, se assumirmos que eles são LD, temos que existem $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$ não todos nulos tais que $a_1v_1 + a_2v_2 = 0$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $a_1 \neq 0$ e, assim, obtemos que $v_1 = -\frac{a_2}{a_1}v_2$, uma contradição.*

O Exemplo 1.22 mostra que dois vetores v_1 e v_2 de um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ são LD se, e somente se, existe um escalar a tal que $v_1 = av_2$. Se tal escalar existe, dizemos que v_1 e v_2 são paralelos. Note que v_1 e v_2 são LI se, e somente se, não existe $a \in \mathbb{K}$ tal que $v_1 = av_2$.

Definição 1.23. *Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo qualquer e $v_1, \cdots, v_n \in V$. Dizemos que $\{v_1, \cdots, v_n\}$ é uma* base *de V se $v_1, \cdots, v_n$ são LI e geram V.*

Exemplo 1.24. *Seja V o espaço vetorial dado no Exemplo 1.22. O conjunto $\{v_1, v_2\}$ é base de V se, e somente se, $v_1 \neq av_2$, para todo $a \in \mathbb{K}$.*

A proposição abaixo infere que uma base de um espaço vetorial V é o maior conjunto de vetores LI de V e o menor conjunto de vetores geradores de V.

Proposição 1.25. *Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ um base de V. Então $B \cup \{v\}$ é LD, qualquer que seja $v \in V$.*

Demonstração. Sejam $a \in \mathbb{K}$ um escalar não nulo e $v = 0$, então

$$a0 + \sum_{i=1}^{n} 0v_i = a0 = 0.$$

Logo, $B \cup \{0\}$ é um conjunto LD. Agora, se $v \neq 0$, existem $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{K}$ tais que $v = \sum_{i=1}^{n} a_iv_i$, porque B é base. Logo $B \cup \{v\}$ é LD, pois

$$v - \sum_{i=1}^{n} a_iv_i = 0.$$

□

A Proposição 1.25 garante que todas as bases de um espaço vetorial possuem o mesmo número de vetores. A definição abaixo trata de identificar esse número.

Definição 1.26. *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Dizemos que a* dimensão *de V é o número de vetores em uma base de V e a denotamos por* $\dim_{\mathbb{K}}(V)$.

Na Definição 1.26, se corpo $\mathbb{K}$ está subentendido, podemos denotar a dimensão de V por $\dim(V)$ e convencionamos que $\dim_{\mathbb{K}}(\{0\}) = 0$, pois o espaço vetorial $\{0\}$ não possui uma base.

Exemplo 1.27. *Seja $\mathbb{R}^2$ o espaço vetorial do Exemplo 1.16. Os vetores $(1,0)$ e $(0,1)$ formam uma base de V, pois: $(a_1, a_2) = a_1(1,0) + a_2(0,1) = (0,0)$ se, e somente se, $a_1 = a_2 = 0$; e qualquer vetor $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ é tal que $x_1(1,0) + x_2(0,1)$, isto é, $(1,0)$ e $(0,1)$ geram V. Portanto,* $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$.

1.4 Aplicações Lineares

Abaixo, assim como fizemos para grupos, definimos um morfismo entre espaços vetoriais. Tal aplicação não preserva apenas a soma de vetores, mas preserva também o produto por escalar dos espaços vetoriais envolvidos.

Definição 1.28. *Sejam V e W espaços vetoriais sobre um mesmo corpo $\mathbb{K}$ e $f : V \to W$ uma aplicação. Dizemos que f é uma* aplicação linear *entre os espaços vetoriais V e W se $f(av + u) = af(v) + f(u)$, para todos $u, v \in V$ e $a \in \mathbb{K}$.*

Analogamente aos homomorfismos de grupos, podemos nos referir a uma aplicação entre os espaços V e W apenas por aplicação linear sempre que os espaços vetoriais V e W estiverem implícitos. Note que, se $f : V \to W$ é uma aplicação linear, então f é um homomorfismo entre os grupos $(V, +)$ e $(W, +)$ e, assim, $f(0) = 0$.

Exemplo 1.29. *Sejam V e W espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ uma base de V. Se $f : V \to W$ é tal que*

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(v_i), \tag{1.2}$$

para todos $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{K}$, então f é uma aplicação linear. Com efeito, como, para todos $u, v \in V$, podemos escrever $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ e $u = \sum_{i=1}^{n} b_i v_i$, temos que

$$\begin{aligned} f(\lambda v + u) &= f\Big(\lambda \sum_{i=1}^{n} a_i v_i + \sum_{i=1}^{n} b_i v_i\Big) = f\Big(\sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i + b_i) v_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i + b_i) f(v_i) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i f(v_i) + \sum_{i=1}^{n} b_i f(v_i) = \lambda f\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\Big) + f\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i v_i\Big) = \lambda f(v) + f(u). \end{aligned}$$

Ou seja, com a equação (1.2), basta identificar os valores de f em uma base de V que sabemos o valor de f em qualquer vetor de V.

Exemplo 1.30. *Seja* $f : V \to W$ *um aplicação linear entre os espaços vetoriais* V *e* W*, ambos sobre o corpo* $\mathbb{K}$*. O* núcleo $\ker(f) = \{v \in V | f(v) = 0\}$ *é um subespaço de* V*, pois, para todos* $v_1, v_2 \in \ker(f)$ *e* $a \in \mathbb{K}$*, temos que* $f(av_1 + v_2) = af(v_1) + f(v_2) = 0$*, ou seja,* $av_1 + v_2 \in \ker(f)$*. A* imagem $f(V)$ *é um subespaço de* W*, pois, para todos* $w_1, w_2 \in f(V)$*, existem* u_1, u_2 *tais que* $f(u_1) = w_1$ *e* $f(u_2) = w_2$*, assim, para todo* $a \in K$*, vale*

$$aw_1 + w_2 = af(u_1) + f(u_2) = f(au_1 + u_2) \in f(V).$$

A partir de qualquer conjunto de vetores LI de um espaço vetorial V, podemos obter uma base de V como garante a proposição abaixo.

Proposição 1.31. *Seja* V *um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo* $\mathbb{K}$*. Qualquer conjunto de vetores LI de* V *pode ser completado de modo a formar uma base de* V*.*

Observe que, como o Exemplo 1.21 indica, se v é um vetor não nulo de um espaço vetorial V, então v é LI e a Proposição 1.31 garante que podemos obter uma base de V através desse vetor.

O teorema que segue relaciona as dimensões do domínio, imagem e núcleo de uma aplicação linear qualquer e, por conta disso, recebe o nome de Teorema do Núcleo e Imagem.

Teorema 1.32 (Núcleo e Imagem)**.** *Seja* $f : V \to W$ *uma aplicação linear entre os espaços vetoriais* V *e* W*, ambos sobre* $\mathbb{K}$*. Então*

$$\dim(\ker(f)) + \dim(f(V)) = \dim(V).$$

Do mesmo modo que isomorfismos de grupos se mostram úteis à teoria de grupos, é de se esperar que aplicações lineares bijetoras também o sejam. A seguir, definimos tais aplicações.

Definição 1.33. *Seja* $f : V \to W$ *uma aplicação linear. Dizemos que* f *é um* isomorfismo *de espaços vetoriais se* f *é bijetora.*

Se existe um isomorfismo entre os espaços vetoriais V e W, dizemos que V e W são espaços vetoriais isomorfos. Podemos identificar se dois espaços vetoriais são isomorfos mais facilmente com os seguinte resultados.

Proposição 1.34. *Sejam* V *e* W *espaços vetoriais de dimensão* n *ambos sobre um corpo* $\mathbb{K}$ *e* $f : V \to W$ *uma aplicação linear. Então, são equivalentes:*

i $\ker(f) = \{0\}$*;*

ii. f *é injetora;*

iii. *a imagem de qualquer base de* V *por* f *é uma base de* W*;*

iv f *é sobrejetora.*

Demonstração. Sejam $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ uma base de V e $u, v \in V$. Então

i. Assumindo que $\ker(f) = \{0\}$, se $f(v) = f(u)$, então $f(v - w) = f(v) - f(w) = 0$, ou seja, $v - w \in \ker(f)$, assim $v = w$. Portanto, f é injetora;

ii. Assumindo que f é injetora, os vetores $f(v_1), \cdots, f(v_n)$ são LI, uma vez que

$$f(0) = 0 = \sum_{i=1}^{n} a_i f(v_i) = f\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\Big)$$

implica que $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$ e, como B é base de V, $a_i = 0$, para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$. Agora, como $\dim(W) = n$, temos que $\{f(v_1), \cdots, f(v_n)\}$ é base de W. Portanto, a imagem de qualquer base de V por f é uma base de W;

iii. Assumindo que a imagem de qualquer base de V por f é uma base de W, então, para todo $w \in W$ podemos escrever $w = \sum_{i=1}^{n} a_i f(v_i) = f(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i)$. Portanto, f é sobrejetora;

iv. Assumindo que f é sobrejetora, então $\dim(f(V)) = \dim(W) = \dim(V)$ e o Teorema do Núcleo e Imagem garante que $\dim(\ker(f)) = 0$ e, portanto, $\ker(f) = \{0\}$. Portanto, $\ker(f) = \{0\}$.

□

Como a Proposição 1.34 indica, para que dois espaços vetoriais sejam isomorfos, basta que ambos possuam a mesma dimensão. A recíproca também é verdadeira como podemos ver a seguir.

Proposição 1.35. *Sejam* V *e* W *espaços vetoriais sobre o mesmo corpo* $\mathbb{K}$*. Se* V *e* W *são isomorfos como espaços vetoriais, então* $\dim(V) = \dim(W)$.

Demonstração. Sejam $f : V \to W$ o isomorfismo entre V e W. Como $f(0) = 0$ e f é, em particular, injetora, $\ker(f) = \{0\}$. Logo, o Teorema do Núcleo e Imagem nos garante que $\dim(f(V)) = \dim(V)$ e, como f é um isomorfismo de espaços vetoriais, $\dim(W) = \dim(f(V))$. Portanto, $\dim(W) = \dim(V)$. □

Abaixo, tratamos dos subespaços vetoriais que estão contidos neles mesmos através de alguma aplicação linear $f : V \to V$.

Definição 1.36. *Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, W um subespaço vetorial de V e $f : V \to V$ uma aplicação linear. Dizemos que W é* invariante *por f se $f(W) \subseteq W$.*

Exemplo 1.37. *Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $\{v_1, v_2\}$ uma base de V. Seja também $f : V \to V$ tal que $f(v_1) = v_1$ e $f(v_2) = v_1$. O subespaço W, gerado por v_1, é um subespaço invariante de V por f, pois, para todo $w \in W$, existe um escalar $a \in \mathbb{K}$ tal que $w = av_1$ e, portanto,*

$$f(w) = f(av_1) = af(v_1) = av_1 \in W.$$

Note que o subespaço vetorial U gerado por v_2 não é um subespaço invariante de V por f, pois $v_2 \in U$, mas $f(v_2) = v_1 \notin U$.

Vetores como o vetor v_1 do Exemplo 1.37 ganham destaque em álgebra linear como autovetores. Notamos que um autovetor v de uma aplicação linear $f : V \to V$ é um vetor não nulo de V tal que $f(v) = av$, para algum escalar $a \in \mathbb{K}$. Dizemos que a é um autovalor de v.

1.5 Soma Direta de Espaços Vetoriais

A próxima definição introduz os conceitos de soma direta de espaços vetoriais e soma direta interna de subespaços vetoriais.

Definição 1.38. *Sejam V um espaço vetorial e U e W subespaços de V. Dizemos que*

i. $U \oplus W = \{(u, w) | u \in U, w \in W\}$ *é a* soma direta *dos espaços vetoriais U e W.*

ii. *V é a* soma direta interna *de U e W se: $U \cap W = \{0\}$; e, para todo $v \in V$, existem $u \in U$ e $w \in W$ tais que $v = u + w$;*

As duas proposições que seguem expõem a razão de apresentarmos as definições de soma direta e soma direta interna juntas. Antes, note que, analogamente ao Exemplo 1.16, onde $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, a soma direta de U e W é também um espaço vetorial ao considerarmos a soma de vetores e o produto por escalar usadas no exemplo.

Proposição 1.39. *Sejam U e W espaços vetoriais e $U \oplus W$. Então existem U_1 e W_1 subespaços de $U \oplus W$, tais que U_1 e W_1 são isomorfos a U e W, respectivamente, e, ainda, $U \oplus W$ é a soma direta interna de U_1 e W_1.*

Proposição 1.40. *Sejam V um espaço vetorial e U e W subespaços de V. Se V é a soma direta interna de U e W, então V é isomorfo à $U \oplus W$.*

As proposições 1.39 e 1.40 garantem que a soma direta e a soma direta interna são, essencialmente, a mesma estrutura proposta de diferentes formas. Agora, sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e U e W subespaços de V. Dizemos que W é um *complemento* de U em V se V é soma direta W e U. Nos referimos também a U e W como subespaços complementares de V.

Proposição 1.41. *Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e U um subespaço de V. Então existe um subespaço W de V tal que W é um complemento de U em V.*

Dizemos que uma aplicação $f : V \to V$ tal que $f^2 = f$ é uma aplicação idempotente. Podemos usar aplicações lineares idempotentes para encontrar complementos de subespaços vetoriais, como vemos na seguinte proposição.

Proposição 1.42. *Sejam V um espaço vetorial e $f : V \to V$ uma aplicação linear tal que $f^2 = f$. Então $V = ker(f) \oplus f(V)$.*

1.6 Traço e Produto Interno

Nesta seção, quando nos referimos genericamente a um espaço vetorial nos referimos a um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensão finita. O conjunto das aplicações bijetoras de um conjunto X a ele mesmo, denotado por $S(X)$, é um grupo com a composição de funções como operação e possui um papel relevante na definição de ações no próximo capítulo. Fora isso, se V é um espaço vetorial, então o espaço vetorial de todos os isomorfismos de V a ele mesmo, denotado por $GL(V)$, é um subgrupo de $S(V)$ que, por sua vez, é fundamental para a teoria de representação por estar presente na definição de representação de grupos. Em vista disso, dedicamos atenção a eles nos seguintes parágrafos.

Se V é um espaço vetorial cuja dimensão é n, uma importante característica do grupo $GL(V)$ reside no fato de ser isomorfo a $GL_n[\mathbb{C}]$, o grupo das matrizes $n \times n$ inversíveis com o produto de matrizes como operação. Antes de validarmos esse isomorfismo entre espaços vetoriais, vejamos um pouco mais da teoria que o embasa.

Definição 1.43. *Sejam V um espaço vetorial de dimensão n com base $B = \{v_1, ..., v_n\}$ e $M_n[\mathbb{C}]$ o espaço vetorial das matrizes $n \times n$ com entradas complexas. Seja também $f : V \to V$ a aplicação linear definida por*

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} A_{ij} v_i,$$

para todo $v_j \in B$. Dizemos que a matriz de $M_n[\mathbb{C}]$ que tem como entradas os escalares A_{ij} é a matriz de f em relação à base B e a denotamos por $[f]_B$.

Como f é uma aplicação linear de V, ela é totalmente determinada ao atribuirmos valores para cada vetor da base B, isto é, sabemos determinar o vetor $f(v)$, para todo $v \in V$. De fato, seja $v \in V$ tal que $v = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j$ com $a_j \in \mathbb{C}$, então

$$f(v) = f\Big(\sum_{j=1}^{n} a_j v_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} a_j f(v_j) = \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{i=1}^{n} A_{ij} v_i = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} A_{ij} a_j\Big) v_i.$$

A proposição que segue é o primeiro passo que damos para provar que há um isomorfismo de grupos entre $GL(V)$ e $GL_n[\mathbb{C}]$.

Proposição 1.44. *Sejam V um espaço vetorial e $f \in GL(V)$. Então $[f]_B$ é inversível.*

Demonstração. Sejam $\dim(V) = n$ e $f : V \to V$ um isomorfismo tal que

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i.$$

Por ser um isomorfismo, f leva base em base e, assim, $B_1 = \{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ é uma base de V, mais precisamente, $\sum_{j=1}^{n} b_j f(v_j) = 0$ se, e somente se, $b_j = 0$, para todo $j \in \{1, \cdots, n\}$. Ou seja, o sistema de equações

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} b_j a_{1j} = & 0 \\ \quad\vdots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} b_j a_{nj} = & 0 \end{cases}$$

admite apenas a solução trivial e, portanto, $[f]_B$ é inversível. □

Com isso esboçamos uma função que leva aplicações de $GL(V)$ à matrizes do grupo $GL_n[\mathbb{C}]$, a proposição a seguir exprime com mais rigor essa função e com ele estabelece o isomorfismo entre os grupos.

Proposição 1.45. *Seja V um espaço vetorial de dimensão n com base $B = \{v_1, ..., v_n\}$. A função $F : GL(V) \to GL_n[\mathbb{C}]$, dada por $F(f) = [f]_B$, onde $[f]_B$ é a matriz de f em relação à base B, é linear e um isomorfismo de grupos.*

Demonstração. Nosso objetivo é provar que F é linear, bijetora e um homomorfismo de grupos. Primeiramente, considere $\lambda, A_{ij}, B_{ij} \in \mathbb{C}$, onde $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, e $f_1, f_2 \in GL(V)$ tais que

$$f_1(v_j) = \sum_{i=1}^{n} A_{ij} v_i \quad \text{e} \quad f_2(v_j) = \sum_{i=1}^{n} B_{ij} v_i, \tag{1.3}$$

então

$$(\lambda f_1 + f_2)(v_j) = \lambda f_1(v_j) + f_2(v_j) = \lambda \sum_{i=1}^{n} A_{ij} v_i + \sum_{i=1}^{n} B_{ij} v_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda A_{ij} + B_{ij}) v_i,$$

ou seja, as entradas de $[\lambda f_1 + f_2]_B$ são $\lambda A_{ij} + B_{ij}$, por definição. Por outro lado, a soma $\lambda[f_1]_B + [f_2]_B$ é, entrada a entrada, $\lambda A_{ij} + B_{ij}$. Daí, $\lambda[f_1]_B + [f_2]_B = [\lambda f_1 + f_2]_B$, uma vez que são matrizes iguais em todas as entradas. Portanto F é linear, pois

$$\lambda F(f_1) + F(f_2) = \lambda[f_1]_B + [f_2]_B = [\lambda f_1 + f_2]_B = F(\lambda f_1 + f_2).$$

Agora, se F não é injetora, então existem $f_1, f_2 \in GL(V)$ tais que $f_1 \neq f_2$ e $F(f_1) = F(f_2)$, assim

$$F(f_1 - f_2) = F(f_1) - F(f_2) = 0.$$

Daí $F(f_1 - f_2)$ é a matriz identicamente nula, mas a Proposição 1.44 garante que $F(f_1 - f_2)$ é inversível, uma contradição. Logo F é injetora. Para verificar que F é sobrejetora, seja $M \in GL_n[\mathbb{C}]$ com entradas a_{ij}. Considere $f : V \to V$ tal que

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i,$$

para todos os vetores de B, e

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(v_i),$$

para todos $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, temos que f é uma aplicação linear pelo Exemplo 1.29 e que $M = [f]_B$, por definição. Os vetores $f(v_j)$ são linearmente independentes. De fato, para todos $\beta_1, \cdots, \beta_n \in \mathbb{C}$, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \beta_j f(v_j) = 0 &\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \beta_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} \beta_j a_{ij}\Big) v_i = 0, \end{aligned}$$

como B é base de V, temos que

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \beta_j a_{1j} = & 0 \\ \qquad \vdots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \beta_j a_{nj} = & 0 \end{cases}$$

e, porque, M é uma matriz inversível, temos que $\beta_j = 0$, para $j \in \{1, \cdots, n\}$. Então $B_1 = \{f(v_1), ..., f(v_n), \}$ é uma base de V e, assim, f é bijetora, já que leva base em base. Em outras palavras, $f \in GL(V)$. Concluímos que, para toda matriz $M \in GL_n[\mathbb{C}]$, existe uma $f \in GL(V)$ tal que $F(f) = M$ e, portanto, F é sobrejetora. Finalmente, sejam $f_1, f_2 \in GL(V)$ como na equação (1.3). Note que

$$(f_1 \circ f_2)(v_j) \quad = \quad f_1(f_2(v_j)) = f_1\Big(\sum_{k=1}^{n} B_{kj} v_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} B_{kj} f_1(v_k) = \sum_{k=1}^{n} B_{kj} \sum_{i=1}^{n} A_{ik} v_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj} \Big) v_i$$

ou seja, as entradas de $[f_1 \circ f_2]_B$ são $C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}$, por definição. Por outro lado, as entradas do produto das matrizes $[f_1]_B$ e $[f_2]_B$ são também C_{ij}. Logo, vale a igualdade $[f_1 \circ f_2]_B = [f_1]_B [f_2]_B$. Portanto, F é um homomorfismo de grupos, pois

$$F(f_1 \circ f_2) = [f_1 \circ f_2]_B = [f_1]_B [f_2]_B = F(f_1) F(f_2).$$

□

A Proposição 1.45 garante que os grupos $GL(V)$ e $GL_n[\mathbb{C}]$ são essencialmente o mesmo grupo. A seguir vemos um modo de relacionar duas matrizes de $M_n[\mathbb{C}]$ que acaba por ampliar nosso conhecimento sobre aplicações lineares de espaços vetoriais.

Definição 1.46. *Sejam P e Q duas matrizes de $M_n[\mathbb{C}]$. Dizemos que P é* semelhante *a Q se existe uma matriz $M \in GL_n[\mathbb{C}]$ tal que $P = MQM^{-1}$.*

A semelhança de matrizes da Definição 1.46 é uma relação de equivalência, pois, para $P, Q, S \in M_n[\mathbb{C}]$, vale

i. Se $Id \in GL_n[\mathbb{C}]$ é a matriz identidade, então $P = IdPId$, ou seja, P é semelhante a ele mesmo;

ii. Se P é semelhante a Q, existe $M \in GL_n[\mathbb{C}]$ tal que $P = MQM^{-1}$, assim $Q = M^{-1}PM$, ou seja, Q é semelhante a P; e

iii. Se P é semelhante a Q e Q é semelhante a S, existem $M, N \in GL_n[\mathbb{C}]$ tais que $P = MQM^{-1}$ e $Q = NSN^{-1}$, assim

$$P = MQM^{-1} = MNSN^{-1}M^{-1} = MNS(MN)^{-1},$$

ou seja, P é semelhante a S.

A matriz de uma aplicação linear $f : V \to V$ em relação a uma base B do espaço vetorial V é semelhante a matriz de f em relação a qualquer outra base de V, veja [11, seção 3.4]. O traço de uma matriz é essencial para definirmos o caracter de uma representação e, portanto, introduzimos seu conceito propriamente a seguir.

Definição 1.47. *Sejam B uma base de um espaço vetorial V e $f : V \to V$ uma aplicação linear. Dizemos que a soma das entradas da diagonal da matriz $[f]_B$ é o* traço *de f e o denotamos por* $\mathrm{Tr}(f)$.

Em outras palavras, se $\dim(V) = n$ e a_{ij} são as entradas da matriz $[f]_B$, então

$$\mathrm{Tr}(f) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Note que, como a soma de matrizes é linear, então o traço é também linear. Mais ainda, o traço de $f : V \to V$ independe da base, pois, se P e Q são matrizes com entradas a_{ij} e b_{ij}, respectivamente, temos que

i. O traço da matriz PQ é igual ao traço da matriz QP, pois

$$\mathrm{Tr}(PQ) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij} = \mathrm{Tr}(QP);$$

ii. Se P é inversível, então

$$\mathrm{Tr}(PQP^{-1})\,\mathrm{Tr}(P^{-1}PQ) = \mathrm{Tr}(Q);$$

iii. Sejam B e C bases de V. Como $[f]_B$ e $[f]_C$ são semelhantes, existe uma matriz M tal que $[f]_B = M[f]_C M^{-1}$, assim

$$\mathrm{Tr}([f]_B) = \mathrm{Tr}(M[f]_C M^{-1}) = \mathrm{Tr}([f]_C).$$

Portanto, o traço de qualquer aplicação linear $f : V \to V$ independe das bases de V.

Agora, sejam V é um espaço vetorial de dimensão n e U e W subespaços de V tais que U é complemento de W em V. Considere as aplicações lineares $f_1 : U \to U$ e $f_2 : W \to W$. Como, para todo $v \in V$, existem $u \in U$ e $w \in W$ tais que $v = u + w$, temos que ao definirmos $f : V \to V$ por $f(v) = f(u+w) = f_1(u) + f_2(w)$, obtemos que f é uma aplicação linear e que U e W são invariantes por f. Mais ainda, como o traço é linear, temos que

$$\mathrm{Tr}([f]) = \mathrm{Tr}([f_1 + f_2]) = \mathrm{Tr}([f_1]) + \mathrm{Tr}([f_2]).$$

Ainda visando caracteres de uma representação, definimos abaixo o conceito de produto interno de espaços vetoriais.

Definição 1.48. *Sejam V um espaço vetorial e $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ uma aplicação tal que $(v, u) \mapsto \langle v, u \rangle$. Dizemos que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um* produto interno *de V se*

i. $\langle \lambda v, u \rangle = \lambda \langle v, u \rangle$, *para todos $u, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{C}$;*

ii. $\langle v + u, w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle u, w \rangle$, *para todos $u, v, w \in V$;*

iii. $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$, *para todos $u, v \in V$;*

iv. $\langle v, v\rangle \geq 0$ *para todo* $v \in V$ *e* $\langle v, v\rangle = 0$ *se, e somente se,* $v = 0$.

Note que, para que uma aplicação satisfaça os primeiros dois itens da Definição 1.48, basta que $\langle \lambda v + u, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle + \langle u, w\rangle$, para todos $u, v, w \in V$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, pois: tomando $u = v$ obtemos o primeiro item; e tomando $\lambda = 1$ obtemos o segundo item. Se V é um espaço vetorial com produto interno, dizemos que dois vetores são ortogonais em V se o produto interno entre os dois vetores é igual a zero. Destacamos também que se $u, v \in V$ são vetores não nulos e ortogonais, então, para quaisquer $a, b \in \mathbb{K}$, se $av + bu = 0$, vale

$$0 = \langle 0, v\rangle = \langle av + bu, v\rangle = a\langle v, v\rangle + b\langle u, v\rangle = a\langle v, v\rangle$$

e, assim, como v é um vetor não nulo, temos que $a = 0$. De modo análogo, $b = 0$ e, consequentemente, v e u são LI.

Proposição 1.49. *Sejam* V *um espaço vetorial,* $v \in V$ *um vetor não nulo e* W *um subespaço de* V*. Se* $\langle v, w\rangle = 0$*, para todo* $w \in W$*, então* $v \notin W$*.*

Demonstração. Seja $B' = \{w_1, \cdots, w_m, w_{m+1}, \cdots, w_n\}$ a base ortogonal de V tal que $B = \{w_1, \cdots, w_m\}$ é base de W. Existem $a_i \in \mathbb{C}$, com $i \in \{1, \cdots, n\}$, tais que

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i.$$

Por hipótese, $\langle v, w_j\rangle = 0$, para $j \in \{1, \cdots, m\}$, assim

$$0 = \langle v, w_j\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} a_i w_i, w_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i\langle w_i, w_j\rangle = a_j\langle w_j, w_j\rangle$$

e, como w_j é um vetor não nulo, temos que $a_j = 0$. Portanto, v não é gerado pela base B, isto é, $v \notin W$. $\square$

Capítulo 2

Representações de Grupos Finitos

Adiante, a menos que expressa atribuição de outros valores, todo grupo é finito e os espaços vetoriais são todos sobre o corpo dos complexos e possuem dimensão finita. Começamos a primeira seção deste capítulo com a definição de ação de um grupo sobre um corpo e a definição de representações de grupos finitos encontradas em [3], mas com a linguagem mais próxima de [4], e são seguidas de exemplos entre os quais destacamos a soma direta de representações, representação de permutação e a representação regular. Outros conceitos apresentados neste capítulo são os de subrepresentações e de subrepresentações irredutíveis de uma representação, que são fundamentais para entendermos as representações em si, como verificamos no terceiro capítulo.

2.1 Representação de Grupos finitos

Definição 2.1. *Seja G um grupo e X um conjunto. Uma* ação *de G sobre X pode ser definida das seguintes maneiras:*

i. Uma ação *φ de G sobre X é uma aplicação $\varphi : G \times X \to X$, com $\varphi(g, x) = \varphi_g(x)$, que, para quaisquer $g, h \in G$ e $x \in X$, satisfaz $\varphi_e(x) = x$ e $\varphi_{gh}(x) = (\varphi_g \circ \varphi_h)(x)$;*

ii. Seja $S(X)$ o grupo das aplicações bijetoras com a composição de funções como operação. Dizemos que a aplicação $\rho : G \to S(X)$ é uma ação *de G sobre X se é um homomorfismo de grupos. Denotamos $\rho(g) = \rho_g : X \to X$.*

Neste caso, dizemos que G age sobre X.

Os itens da Definição 2.1 são equivalentes, ou seja, a partir de qualquer um dos dois, podemos extrair o outro. Com efeito, assumindo o primeiro item e definindo $\rho : G \to S(X)$ por $\rho_g = \varphi_g$, temos que ρ é um homomorfismo de grupos, pois

$$\rho_{gh} = \varphi_{gh} = \varphi_g \circ \varphi_h = \rho_g \circ \rho_h.$$

Perceba também que ρ_g é bijetora, para qualquer $g \in G$, porque possui inversa $\rho_g^{-1} = \rho_{g^{-1}}$, isto é,

$$(\rho_g \circ \rho_{g^{-1}})(x) = \rho_{gg^{-1}}(x) = \rho_e(x) = \varphi_e(x) = x.$$

Logo, a aplicação ρ é uma ação de G sobre X como no segundo item da Definição 2.1. Agora, assumindo o item *ii.* e definindo $\varphi : G \times X \to X$ por $\varphi_g(x) = \rho_g(x)$, para todos $g \in G$ e $x \in X$, obtemos que

$$\varphi_g \circ \varphi_h = \rho_g \circ \rho_h = \rho_{gh} = \varphi_{gh}$$

e $\varphi_e(x) = \rho_e(x) = x$, uma vez que ρ é um homomorfismo de grupos, portanto φ é uma ação como no item *i.*.

Abaixo, vemos a definição de representações de grupos que, em linhas gerais, é uma ação de um grupo G sobre um espaço vetorial V cuja imagem está contida em $GL(V)$, o grupo dos isomorfismos de espaços vetoriais de V a ele mesmo no qual consideramos a composição de aplicações como operação.

Definição 2.2 (Representação de um grupo)**.** *Sejam G um grupo e V um espaço vetorial. Dizemos que V é uma* representação *do grupo G se existe um homomorfismo de grupos $\rho : G \to GL(V)$. Denotamos $\rho(g) = \rho_g$.*

Dizemos que o homomorfismo de grupos $\rho : G \to GL(V)$ está associado ao espaço vetorial V e vice-versa e, por vezes, nos referimos apenas ao espaço vetorial V ou ao homomorfismo de grupos ρ para indicar a representação de um grupo. Abaixo tratamos de alguns exemplos de representações.

Exemplo 2.3. *Sejam G um grupo e V um espaço vetorial. Ao definirmos $\rho : G \to GL(V)$ como $\rho_g = Id_V$, onde Id_V é a identidade de $GL(V)$, obtemos que ρ é uma representação de G. De fato, para $g, h \in G$, vale*

$$\rho_{gh} = Id_V = Id_V \circ Id_V = \rho_g \circ \rho_h.$$

Se $\dim(V) = n$, *dizemos que esta é representação trivial de dimensão n.*

Exemplo 2.4. *Seja S_n o grupo de permutação de ordem n e V um espaço vetorial. Obtemos um representação $\rho : S_n \to GL(V)$ de S_n ao definirmos $\rho_g = \delta(g)Id_V$ onde*

$$\delta(g) = \begin{cases} 1 & \textit{se } g \textit{ é par} \\ -1 & \textit{se } g \textit{ é ímpar} \end{cases}$$

De fato, como

$$\delta(gh) \;=\; \begin{cases} 1 & \textit{se } gh \textit{ é par} \\ -1 & \textit{se } gh \textit{ é ímpar} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & se\ g\ e\ h\ têm\ mesma\ paridade \\ -1 & se\ g\ e\ h\ têm\ diferentes\ paridades \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 1 & se\ \delta(g) = \delta(h) \\ -1 & se\ \delta(g) \neq \delta(h) \end{cases}$$
$$= \delta(g)\delta(h)$$

e, para $g, h \in G$, vale

$$\rho_{gh} = \delta(gh)Id_V = \delta(g)\delta(h)Id_V \circ Id_V = \delta(g)Id_V \circ \delta(h)Id_V = \rho_g \circ \rho_h.$$

Essa representação é chamada de representação por sinal de S_n.

Exemplo 2.5. *Sejam V uma representação de um grupo G associada ao homomorfismo de grupos $\rho : G \to GL(V)$ e H um subgrupo de G. Temos que V é uma representação de H ao a associarmos ao homomorfismo de grupos $\sigma = \rho|_H$. De fato, para $h, k \in H$, temos que*

$$\sigma_{hk} = \rho_{hk} = \rho_h \circ \rho_k = \sigma_h \circ \sigma_k.$$

Como $GL_n[\mathbb{C}]$, o grupo das matrizes $n \times n$ inversíveis com entradas complexas, é isomorfo ao grupo $GL(V)$ quando $\dim(V) = n$, podemos o identificar como o contradomínio da representação ρ, o que por vezes acaba por simplificar nossos raciocínios.

Exemplo 2.6. *Seja $H = \langle h \rangle$ o grupo cíclico de ordem n gerado por h. Ao definirmos $\rho : H \to GL(\mathbb{C})$ como $\rho_{h^m} = e^{\frac{2m\pi i}{n}}$, obtemos uma representação 1-dimensional de H, pois, para $a, b \in \mathbb{Z}$, a aplicação ρ satisfaz*

$$\rho_{h^a h^b} = \rho_{h^{(a+b)}} = e^{\frac{2(a+b)\pi i}{n}} = e^{\frac{2a\pi i}{n}} e^{\frac{2b\pi i}{n}} = \rho_{h^a}\rho_{h^b}.$$

Exemplo 2.7. *Seja $G = \{e, g\}$ o grupo cíclico de ordem 2. Ao definirmos $\rho : G \to GL_2[\mathbb{C}]$ como*

$$\rho_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad \rho_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

obtemos uma representação de G em $\mathbb{C}^2$, porque $\rho_{eg} = \rho_g = \rho_e\rho_g$ e os demais casos segue de modo análogo. Dizemos que $\mathbb{C}^2$ é uma representação 2-dimensional de G. Note que, ao identificarmos $GL_2[\mathbb{C}]$ por $GL(\mathbb{C}^2)$, o homomorfismo de grupos ρ é tal que $\rho_e(x, y) = (x, y)$ e $\rho_g(x, y) = (x, -y)$, para $(x, y) \in \mathbb{C}^2$.

Exemplo 2.8. *Seja $D_n = \{r, s \mid r^n = s^2 = (sr)^2 = e\}$ o grupo diedral do polígono regular de $n \geq 3$ lados, veja [5, capítulo 4]. Obtemos uma representação de D_n ao associarmos $\mathbb{C}^2$ à aplicação $\rho : D_n \to GL_2[\mathbb{C}]$ definida por*

$$r^m \mapsto \begin{bmatrix} cos(\frac{2\pi m}{n}) & -sen(\frac{2\pi m}{n}) \\ sen(\frac{2\pi m}{n}) & cos(\frac{2\pi m}{n}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s &\mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ sr^m &\mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos(\frac{2\pi m}{n}) & -sen(\frac{2\pi m}{n}) \\ sen(\frac{2\pi m}{n}) & cos(\frac{2\pi m}{n}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Primeiramente, note que, para $k, l \in \mathbb{Z}$, temos

$$\begin{aligned} \rho_{r^k}\rho_{r^l} &= \begin{bmatrix} cos(\frac{2\pi k}{n}) & -sen(\frac{2\pi k}{n}) \\ sen(\frac{2\pi k}{n}) & cos(\frac{2\pi k}{n}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos(\frac{2\pi l}{n}) & -sen(\frac{2\pi l}{n}) \\ sen(\frac{2\pi l}{n}) & cos(\frac{2\pi l}{n}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} cos\left(\frac{2\pi(k+l)}{n}\right) & -sen\left(\frac{2\pi(k+l)}{n}\right) \\ sen\left(\frac{2\pi(k+l)}{n}\right) & cos\left(\frac{2\pi(k+l)}{n}\right) \end{bmatrix} \\ &= \rho_{r^{k+l}} \end{aligned}$$

e assim verificamos

$$(\rho_r)^n = \rho_{r^n} = \begin{bmatrix} cos\left(\frac{2\pi n}{n}\right) & -sen\left(\frac{2\pi n}{n}\right) \\ sen\left(\frac{2\pi n}{n}\right) & cos\left(\frac{2\pi n}{n}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \rho_e.$$

Ademais, $(\rho_s)^2 = \rho_e$ e

$$\begin{aligned} (\rho_s\rho_r)^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & -sen\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ sen\left(\frac{2\pi}{n}\right) & cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & -sen\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ sen\left(\frac{2\pi}{n}\right) & cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & sen\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ -sen\left(\frac{2\pi}{n}\right) & cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & -sen\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ sen\left(\frac{2\pi}{n}\right) & cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} cos(0) & sen(0) \\ sen(0) & cos(0) \end{bmatrix} = \rho_e. \end{aligned}$$

Logo, $\rho(D_n) = \{\rho_r, \rho_s | (\rho_r)^n = (\rho_s)^2 = (\rho_s\rho_r)^2 = \rho_e\}$, ou seja, $\rho(D_n)$ é o mesmo grupo que D_n. Sejam $g, h \in D_n$ tais que $g = s^k r^l$, $h = s^p r^q$, para $k, p \in \{0, 1\}$ e $l, q \in \mathbb{Z}$, sabemos que

$$\rho_{s^k}\rho_{r^l} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)^k \begin{bmatrix} cos(\frac{2\pi l}{n}) & -sen(\frac{2\pi l}{n}) \\ sen(\frac{2\pi l}{n}) & cos(\frac{2\pi l}{n}) \end{bmatrix} = \rho_{s^k r^l},$$

$sr^l = r^{-l}s$ e $\rho_s(\rho_r)^l = (\rho_r)^{-l}\rho_s$. Portanto, para $k = p = 1$, temos

$$\begin{aligned} \rho_{gh} &= \rho_{sr^l sr^q} = \rho_{ssr^{-l}r^q} = \rho_{r^{-l+q}} = \rho_{r^{-l}}\rho_{r^q} = \rho_s\rho_s(\rho_r)^{-l}(\rho_r)^q = \rho_s(\rho_r)^l\rho_s(\rho_r)^q \\ &= \rho_s\rho_{r^l}\rho_s\rho_{r^q} = \rho_{sr^l}\rho_{sr^q} = \rho_g\rho_h. \end{aligned}$$

O caso em que $k = 0$ e $p = 1$ segue análogo, o caso em que $k = p = 0$ está foi compreendido acima e é análogo ao caso em que $k = 1$ e $p = 0$.

2.2 Subrepresentações

Assim como no caso de subespaços vetoriais e subgrupos é de se esperar que uma estrutura similar apareça para representações, a definição a seguir trata exatamente deste tópico.

Definição 2.9. *Sejam V uma representação de um grupo G e W um subespaço de V. Dizemos que W é uma* subrepresentação *de V se, para todo $g \in G$, temos $\rho_g(W) \subseteq W$.*

Em outras palavras, W é uma subrepresentação de V se W é um subespaço invariante de V por todos os isomorfismos ρ_g.

Uma subrepresentação é também uma representação. De fato, sejam V uma representação de G associada ao homomorfismo de grupos ρ e W uma subrepresentação de V. Ao tomarmos $\sigma : G \to GL(W)$ como $\sigma_g = \rho_g|_W$, para todo $g \in G$, temos que σ é um homomorfismo de grupos, isto é, para $g, h \in G$, vale

$$\sigma_{gh} = \rho_{gh}|_W = \rho_g|_W \circ \rho_h|_W = \sigma_g \circ \sigma_h.$$

Portanto, W é uma representação de G associada ao homomorfismo de grupos σ.

Exemplo 2.10. *A representação V de um grupo G é uma subrepresentação dela mesma, porque $\rho_g(V) \subseteq V$, para todo $g \in G$. Fora essa, nos referirmos a todas as outras subrepresentações de V por subrepresentações próprias de V. O subespaço vetorial nulo de V também é uma subrepresentação de V, porque é invariante por qualquer aplicação linear, ou seja, $\rho_g(\{0\}) = \{0\}$, para todo $g \in G$. Nos referimos a subrepresentação $\{0\}$ por subrepresentação nula de V.*

Exemplo 2.11. *Seja V a representação trivial G dada no Exemplo 2.3. Como, para todo $g \in G$, $\rho_g = Id_V$, temos que qualquer subespaço W de V é uma subrepresentação de V. De fato, para todos $g \in G$ e $w \in W$, vale*

$$\rho_g(w) = Id_V(w) = w \in W.$$

Exemplo 2.12. *Seja V uma representação de um grupo G. Ao definirmos*

$$W = \{v \in V \mid \rho_g(v) = v \text{ , para todo } g \in G\},$$

o subespaço gerado pelos vetores invariantes por ρ_g, para todo $g \in G$, temos que W é uma subrepresentação de V. Note que W é um subespaço de V, pois, para $v, w \in W$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, vale

$$\rho_g(\lambda v + w) = \lambda \rho_g(v) + \rho_g(w) = \lambda v + w \in W,$$

já que ρ_g é linear para qualquer $g \in G$. Além disso, $\rho_g|_W = Id_W$ e, como no Exemplo 2.11, W é uma subrepresentação de V.

Exemplo 2.13. *Seja V a representação de $G = \{e, g\}$ como no Exemplo 2.7. Os subespaços $W = \{(w, 0) \in \mathbb{C}^2 \mid w \in \mathbb{C}\}$ e $U = \{(0, u) \in \mathbb{C}^2 \mid u \in \mathbb{C}\}$ são subrepresentações de V, entretanto o subespaço $S = \{(s, s) \in \mathbb{C}^2 | s \in \mathbb{C}\}$ não é uma subrepresentação. De fato,*

i. O subespaço W é uma subrepresentação de V, pois

$$\rho_e \begin{bmatrix} w \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ 0 \end{bmatrix} \in W \text{ e } \rho_g \begin{bmatrix} w \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ 0 \end{bmatrix} \in W,$$

logo $\rho_g(W) = W$, qualquer que seja o $g \in G$;

ii. O subespaço U é uma subrepresentação de V, pois

$$\rho_e \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix} \in U \text{ e } \rho_g \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -u \end{bmatrix} \in U,$$

logo $\rho_g(U) = U$, qualquer que seja $g \in G$;

iii. O subespaço S não é uma subrepresentação de V, pois

$$\rho_g \begin{bmatrix} s \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ -s \end{bmatrix} \notin S,$$

ou seja, $\rho_g(S) \nsubseteq S$.

Se V é uma representação de um grupo G cuja dimensão é igual a 1, a única subrepresentação própria de V é a subrepresentação nula, porque os únicos subespaços de V são o próprio V e o subespaço nulo que por sua vez são subrepresentações de V como exposto no Exemplo 2.10. As representações que possuem apenas a subrepresentação nula como subrepresentação própria são destacadas na seguinte definição.

Definição 2.14. *Seja V uma representação de um grupo G. A representação V é dita* irredutível *se a única subrepresentação própria de V é a subrepresentação nula.*

Exemplo 2.15. *Como já discutido, se V é uma representação tal que* $\dim(V) = 1$*, então V é irredutível.*

Exemplo 2.16. *Seja V a representação trivial de G dada no Exemplo 2.3. As subrepresentações de V que possuem dimensão igual 1 são as únicas subrepresentações irredutíveis de V, pois se uma subrepresentação U de V tem dimensão maior ou igual a dois, qualquer subespaço de U de dimensão 1 é também uma subrepresentação de U.*

Exemplo 2.17. *A representação $\mathbb{C}^2$ de D_n como no Exemplo 2.8 é irredutível, pois supormos o contrário significa que existe uma subrepresentação W de $\mathbb{C}^2$ de dimensão 1. Então, para todos $w \in W$ e $g \in D_n$, vale que $\rho_g(w) = \lambda w$ para algum $\lambda_g \in \mathbb{C}$, em outras* *palavras, todo vetor de W é autovetor de ρ_g, para todo $g \in D_n$. Mas a última afirmação é uma contradição, pois os dois autovetores de ρ_e não são autovetores, por exemplo, de ρ_r, veja*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} cos(\frac{2\pi}{n}) \\ sen(\frac{2\pi}{n}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\frac{2\pi}{n}) & -sen(\frac{2\pi}{n}) \\ sen(\frac{2\pi}{n}) & cos(\frac{2\pi}{n}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -sen(\frac{2\pi}{n}) \\ cos(\frac{2\pi}{n}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\frac{2\pi}{n}) & -sen(\frac{2\pi}{n}) \\ sen(\frac{2\pi}{n}) & cos(\frac{2\pi}{n}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto a única subrepresentação de V é a subrepresentação nula.

Exemplo 2.18. *A representação $\{0\}$ de um grupo G não é irredutível, porque sequer possui subrepresentações próprias.*

2.3 Soma direta de Representações

Uma noção necessária, em especial para o Teorema de Maschke, é a soma direta de representações e a abordamos nesta seção. Sejam U e W representações de um grupo G associadas aos homomorfismos de grupos $\mu : G \to GL(U)$ e $\sigma : G \to GL(W)$, respectivamente e consideramos $U \oplus W$, a soma direta dos espaços vetoriais U e W. Para $g, h \in G$, $u \in U$ e $w \in W$, ao definirmos $\rho : G \to GL(U \oplus W)$ por $\rho_g(u, w) = (\mu_g(u), \sigma_g(w))$, vale

$$\begin{aligned} \rho_{gh}(u, w) &= (\mu_{gh}(u), \sigma_{gh}(w)) \\ &= (\mu_g \circ \mu_h(u), \sigma_g \circ \sigma_h(w)) \\ &= \rho_g(\mu_h(u), \sigma_h(w)) \\ &= (\rho_g \circ \rho_h)(u, w), \end{aligned}$$

ou seja, ρ é um homomorfismo e, portanto, $U \oplus W$ é uma representação de G associada ao homomorfismo de grupos ρ. Isso nos conduz à seguinte definição.

Definição 2.19. *Sejam U e W representações de um grupo G associadas aos homomorfismos de grupos μ e σ, respectivamente. Sejam também $g \in G$, $u \in U$ e $w \in W$. Dizemos que a representação $U \oplus W$ associada à aplicação $\rho : G \to GL(U \oplus W)$ tal que $\rho_g(u, w) = (\mu_g(u), \sigma_g(w))$ é a* soma direta *das representações U e W.*

Exemplo 2.20. *Seja L a representação trivial de um grupo G tal que $\dim(L) = 1$. Seja também σ o homomorfismo de grupos associado a L. Ao tomarmos $\rho : G \to GL(L \oplus L)$ tal que $\rho_g(x, y) = (\sigma_g(x), \sigma_g(y)) = (x, y)$ obtemos exatamente a representação trivial de G de dimensão 2. Analogamente, a representação trivial V de dimensão n é a representação trivial L somada n vezes.*

Agora, analogamente à soma direta interna de subespaços vetoriais, definimos a soma direta interna de subrepresentações de um representação a seguir.

Definição 2.21. *Sejam V uma representação de G e U e W subrepresentações de V. Dizemos que V é a* soma direta interna *das subrepresentações U e W se V é a soma direta interna dos subespaços vetoriais U e W.*

Observação 2.22. *Se V é a soma direta interna das subrepresentações U e W como na Definição 2.21 e ρ, μ e σ são, respectivamente, os homomorfismos de grupos associados a V, U e W tais que $\rho_g|_U = \mu_g$ e $\rho_g|_W = \sigma_g$, para todo $g \in G$. Como, para todo $v \in V$, existem $u \in U$ e $w \in W$ tais que $v = u + w$, podemos escrever, para todo $g \in G$,*

$$\rho_g(v) = \rho_g(u + w) = \rho_g(u) + \rho_g(w) = \mu_g(u) + \sigma_g(w).$$

Adiantamos que a soma direta de representações e a soma direta interna de subrepresentações são equivalentes, tal qual suas análogas no caso de álgebra linear, mas demonstramos esse fato apenas no terceiro capítulo onde apresentamos isomorfismos de representações. Entretanto, ressaltamos que, diferentemente da soma direta de espaços vetoriais, encontrar o “complementar” de uma subrepresentação não se dá de forma trivial, porque um subespaço complementar não é necessariamente uma subrepresentação como podemos ver no exemplo a seguir.

Exemplo 2.23. *Sejam, como no Exemplo 2.13, $U = \{(0, u) \in \mathbb{C}^2 \mid u \in \mathbb{C}\}$ a subrepresentação de $\mathbb{C}^2$ e $S = \{(s, s) \in \mathbb{C}^2 \mid s \in \mathbb{C}\}$ o subespaço de $\mathbb{C}^2$. Perceba que S não é uma subrepresentação de V, mesmo sendo um subespaço complementar de U em $\mathbb{C}^2$.*

2.4 Representações de Permutação

Nesta seção apresentamos dois exemplos de representações de grupos que devido a relevância que assumem através deste texto ganham destaque como definições. Primeiramente, consideramos X um conjunto finito e $V(X) = \{v : X \to \mathbb{C}\}$, o espaço vetorial das aplicações de X a $\mathbb{C}$ com soma de vetores dada por $(v + w)(x) = v(x) + w(x)$ e produto por escalar dado por $(\lambda v)(x) = \lambda v(x)$.

Definição 2.24. *Seja $\varphi : G \to S(X)$ uma ação de G sobre um conjunto X finito. Dizemos que $V(X)$ é a* representação de permutação *de G correspondente à ação φ quando associada à aplicação $\rho : G \to GL(V(X))$ tal que $\rho_g(v) = v \circ \varphi_{g^{-1}}$, para todo $g \in G$ e todo $v \in V(X)$.*

Observação 2.25. *$V(X)$ é uma representação de G, porque, para todos $g, h \in G$ e $v \in V(X)$, a aplicação ρ é um homomorfismo de grupos como segue*

$$\rho_{gh}(v) = v \circ \varphi_{(gh)^{-1}} = v \circ \varphi_{(h^{-1}g^{-1})} = v \circ (\varphi_{h^{-1}} \circ \varphi_{g^{-1}}) = (v \circ \varphi_{h^{-1}}) \circ \varphi_{g^{-1}}$$

$$= \quad \rho_h(v) \circ \varphi_{g^{-1}} = (\rho_g \circ \rho_h)(v).$$

Agora, buscando entender o nome dado a essa representação, consideramos

$$\begin{aligned} v_x \colon X &\longrightarrow \mathbb{C} \\ y &\longmapsto v_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = y \\ 0 & \text{se } x \neq y \end{cases}. \end{aligned}$$

O conjunto $B = \{v_x \in V(X) \,|\, x \in X\}$ é uma base de $V(X)$. Com efeito, os vetores v_x são linearmente independentes, pois, para $\lambda_x \in \mathbb{C}$, temos que

$$\sum_{x \in X} \lambda_x v_x(y) = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda_y v_y(y) = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda_y = 0,$$

para todo $y \in X$, ou seja, B é um conjunto de vetores LI e como, para qualquer $v \in V(X)$, podemos escrever

$$v = \sum_{x \in X} v(x) v_x, \tag{2.1}$$

vemos que $V(X)$ é gerado por B e, portanto, B é base. A representação de permutação $V(X)$ de G permuta os elementos v_x de B através de ρ_g, para todo $g \in G$, isto é, $\rho_g(v_x) = v_{\varphi_g(x)}$. De fato, para todos $g \in G$ e $x, y \in X$, vale

$$\begin{aligned} \rho_g(v_x)(y) = v_x(\varphi_{g^{-1}}(y)) &= \begin{cases} 1, & \text{se } x = \varphi_{g^{-1}}(y) \\ 0, & \text{se } x \neq \varphi_{g^{-1}}(y) \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, & \text{se } \varphi_g(x) = y \\ 0, & \text{se } \varphi_g(x) \neq y \end{cases} \\ &= v_{\varphi_g(x)}(y). \end{aligned}$$

Chamaremos a base B de base de permutação de $V(X)$. Se $|X|$ é a cardinalidade do conjunto X, concluímos que $\dim(V(X)) = |X|$, uma vez que esse é o número de vetores da base de permutação.

Definição 2.26. *Seja G um grupo. Dizemos que $V(G)$ é a* representação regular *de G se $V(G)$ é a representação de permutação de G correspondente à ação $\varphi : G \to S(G)$ definida por $\varphi_g(h) = gh$, para $g, h \in G$. Denotamos a representação regular por V_{reg}.*

Resumindo, a representação regular de G é uma representação de permutação cujo conjunto no qual G age é o próprio G. Note que, se ρ é o homomorfismo de grupos associado a V_{reg} e $h \in G$, temos que

$$\rho_h(v_g) = v_{\varphi_h(g)} = v_{hg} \tag{2.2}$$

para v_g na base de permutação de V_{reg}.

Exemplo 2.27. *Sejam $G = \{e, g\}$ um grupo, V_{reg} a representação regular de G associada ao homomorfismo de grupo ρ e $B = \{v_e, v_g\}$ a base de permutação de V_{reg}. O conjunto $B_1 = \{v_e + v_g, v_e - v_g\}$ é uma base de V_{reg}, assim ρ_g aplicada nos vetores de B_1*

$$\rho_g(v_e + v_g) = \rho_g(v_e) + \rho_g(v_g) = v_g + v_e = v_e + v_g$$

e, analogamente, $\rho_g(v_e - v_g) = -(v_e + v_g)$. Logo, a matriz de ρ_g em relação à base B_1 é

$$\rho_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Já a matriz de ρ_e em relação à base B_1 é a matriz identidade de $\mathbb{C}^2$. Portanto, a representação $\mathbb{C}^2$ exibida no Exemplo 2.7 é a representação regular de $G = \{e, g\}$.

Exemplo 2.28. *Sejam H um subgrupo do grupo G e $\varphi : G \to S(G/H)$ uma ação de G sobre G/H, o conjunto das coclasses à esquerda de H em G, onde $\varphi_g(kH) = (gk)H$, para todos $g, k \in G$.*

Se $H = G$, então $kH = G$, para todo $k \in G$, assim $G/H \simeq \{e\}$. Então a base de permutação $B = \{v_e\}$ tem apenas um elemento, assim $\dim V(G/H) = 1$. Logo $V(G/H)$, a representação de permutação de G correspondente à ação φ, é a representação trivial do Exemplo 2.3, pois

$$(\rho_g(v))(kH) = v(\varphi_{g^{-1}}(kH)) = v((g^{-1}k)H) = v(kH),$$

para todos $v \in V(G/H)$ e $g, k \in G$.

Se H é um subgrupo de $Z(G) = \{x \in G \,|\, xy = yx, \text{ para todo } y \in G\}$, então a representação de permutação $V(G/H)$ é a representação trivial, pois, para todos $v \in V(G/H)$ e $h, k \in H$, temos que

$$(\rho_h(v))(kH) = v(\varphi_{h^{-1}}(kH)) = v(h^{-1}kH) = v(kh^{-1}H) = v(kH).$$

Exemplo 2.29. *Sejam $\varphi : G \to S(X)$ uma ação do grupo G sobre o conjunto finito X e $V = V(X)$ a representação de permutação de G correspondente à ação φ. Seja também $v = \sum_{x\in X} v_x \in V$, onde $B = \{v_x\}_{x\in X}$ é a base de permutação de V. Então $\rho_g(v) = v$, para todo $g \in G$, como podemos ver a seguir*

$$\rho_g(v) = \rho_g\Big(\sum_{x\in X} v_x\Big) = \sum_{x\in X} \rho_g(v_x) = \sum_{x\in X} v_{\varphi_g(x)} = \sum_{\varphi_g(x)\in X} v_{\varphi_g(x)} = v.$$

Consequentemente, o subespaço U gerado por v é uma subrepresentação de V, pois acabamos de mostrar que $\rho_g(U) \subseteq U$, para todo $g \in G$.

Tomando $W = \left\{\sum_{x\in X} a_x v_x \,|\, \sum_{x\in X} a_x = 0\right\}$ obtemos uma subrepresentação de V. De fato, seja $w \in W$ tal que $w = \sum_{x\in X} b_x v_x$ com $b_x \in \mathbb{C}$, então

$$\rho_g(w) = \rho_g\Big(\sum_{x\in X} b_x v_x\Big) = \sum_{x\in X} b_x \rho_g(v_x) = \sum_{x\in X} b_x v_{\varphi_g(x)} = \sum_{y\in X} c_y v_y,$$

onde $y = \varphi_g(x)$ *e* $c_y = c_{\varphi_g(x)} = b_x$, *para todo* $x \in X$. *Como*

$$\sum_{y\in X} c_y = \sum_{x\in X} b_x = 0,$$

temos que $\rho_g(w) \in W$, *para quaisquer* $g \in G$ *e* $w \in W$.

A representação V *é a soma direta interna das subrepresentações* U *e* W, *pois se* $s \in W \cap U$, *então* $s \in W$, *ou seja, existem* $a_x \in \mathbb{C}$, *para todo* $x \in X$, *tais que*

$$s = \sum_{x\in X} a_x v_x \qquad e \qquad \sum_{x\in X} a_x = 0$$

e, como $s \in U$,

$$s = \lambda v = \lambda \sum_{x\in X} v_x.$$

O que implica que $\lambda = a_x$, *para todo* $x \in X$, *assim*

$$0 = \sum_{x\in X} a_x = \sum_{x\in X} \lambda = |X|\lambda,$$

onde $|X|$ *é a cardinalidade do conjunto* X, *mas isso implica que* $\lambda = 0$, *ou seja,* $s = 0$ *e, portanto, mostramos que* $W \cap U = \{0\}$. *Agora, sejam* $y \in X$ *e* $Y = X - \{y\}$. *Sejam também* $u_x = (v_y - v_x) \in W$, *para todo* $x \in Y$, *e* $v = \sum_{x\in X} v_x \in U$. *Esses vetores são linearmente independentes, porque, para* $a_x \in \mathbb{C}$ *com* $x \in X$, *vale*

$$\begin{aligned} 0 &= a_y v + \sum_{x\in Y} a_x u_x \\ &= a_y \sum_{x\in X} v_x + \sum_{x\in Y} a_x (v_y - v_x) \\ &= a_y v_y + \sum_{x\in Y} a_y v_x + \sum_{x\in Y} a_x v_y + \sum_{x\in Y} (-a_x v_x) \\ &= \Big(\sum_{x\in X} a_x\Big) v_y + \sum_{x\in Y} (a_y - a_x) v_x \end{aligned}$$

e, porque B *é a base de permutação de* V, *temos que* $(a_y - a_x) = 0$, *para todo* $x \in Y$, *e* $\sum_{x\in X} a_x = 0$, *logo*

$$0 = \sum_{x\in X} a_x = \sum_{x\in X} a_y = |X| a_y.$$

Portanto, $a_x = 0$, *para todo* $x \in X$, *e podemos concluir que* $\{u_x \in W \mid x \in X,\, x \neq y\} \cup \{v\}$ *é uma base de* V *por possuir* $\dim(V) = |X|$ *vetores. Finalmente,* V *é a soma direta interna de* U *e* W *como afirmamos acima.*

Capítulo 3

Homomorfismos de Representações

Na primeira seção deste capítulo apresentamos os homomorfismos de representações, uma estrutura que útil para o entendimento de algumas semelhanças entre representações de um mesmo grupo e que é alicerce tanto para o Lema de Schur quanto para o Teorema de Maschke. O Lema de Schur, resultado central da segunda seção, mostra que todos os homomorfismos de representações que existem entre uma representação irredutível e ela mesma é um múltiplo da identidade. Já na terceira seção, objetivamos o Teorema de Maschke que afirma que para toda subrepresentação U de uma representação V existe outra subrepresentação W tal que V é a soma direta de U e W e tratamos o teorema tomando a abordagem estabelecida em [3, 6, 7]. Finalizamos o capítulo com a seção de decomposição de representações regulares, onde começamos a entender as representações de grupos através de suas subrepresentações irredutíveis.

3.1 Homomorfismos de representações

Definição 3.1. *Sejam U e W representações de um grupo G associados aos homomorfismos de grupos $\mu : G \to GL(V)$ e $\sigma : G \to GL(W)$, respectivamente. Dizemos que uma aplicação linear $\psi : U \to W$ é um* homomorfismo de representações *se $\psi \circ \mu_g = \sigma_g \circ \psi$, para todo $g \in G$. Se ψ é também bijetora, ψ é dito* isomorfismo *de representações.*

Em outros termos, $\psi : U \to W$ é um homomorfismo de representações se o diagrama subsequente comuta para todos os elementos do grupo

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\mu_g} & U \\ {\scriptstyle\psi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\ W & \xrightarrow{\sigma_g} & W \end{array}$$

Se existe um isomorfismo de representações $\psi : U \to W$, dizemos que as representações U e W são isomorfas e denotamos $U \cong W$. Observamos também que, U e W serem espaços vetoriais isomorfos é uma condição necessária, mas não suficiente para que U e W sejam representações isomorfas.

Exemplo 3.2. *Seja V a representação trivial de um grupo G apresentada no Exemplo 2.3. Toda aplicação linear $\psi : V \to V$ é um homomorfismo de representações. De fato, para todos $g \in G$ e $v \in V$,*

$$\psi(\rho_g(v)) = \psi(v) = \rho_g(\psi(v)).$$

Mais ainda, temos que, se U e W são subrepresentações de V que possuem dimensões iguais, então $U \cong W$. De fato, U e W são isomorfos como espaços vetoriais, seja então $\varphi : U \to W$ um isomorfismo de espaços vetoriais entre eles. Sejam μ e σ os homomorfismos de grupos associados a U e W, respectivamente. Para todo $g \in G$, temos que

$$\varphi(\mu_g(u)) = \varphi(u) = \sigma_g(\varphi(u)).$$

Logo φ é um isomorfismo de representações e, portanto, U e W são isomorfos.

Exemplo 3.3. *Seja $\mathbb{C}^2$ a representação de $G = \{e, g\}$ introduzida no Exemplo 2.7. Os únicos homomorfismos $\psi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ são dados por $\psi(x, y) = (\lambda_1 x, \lambda_2 y)$, onde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. De fato, seja $A = [\psi]_B$ a matriz de ψ em relação a uma base $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ de $\mathbb{C}^2$ tal que*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

para $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Como queremos que ψ seja um homomorfismo de representações, tomamos $A\rho_g = \rho_g A$, assim

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ c & -d \end{bmatrix} = A\rho_g = \rho_g A = \begin{bmatrix} a & b \\ -c & -d \end{bmatrix}.$$

Logo $b = c = 0$ e, portanto, A é diagonal. Note que a matriz A é exatamente a matriz de $[\psi]_B$ se tomarmos $a = \lambda_1$ e $d = \lambda_2$.

Exemplo 3.4. *Seja $\mathbb{C}^2$ a representação de $G = \{e, g\}$ como no Exemplo 2.7 e considere as subrepresentações $W = \{(w, 0) \in \mathbb{C}^2 \mid w \in \mathbb{C}\}$ e $U = \{(0, u) \in \mathbb{C}^2 \mid u \in \mathbb{C}\}$ do Exemplo 2.13. Sejam também ρ, σ e μ os homomorfismos de grupos associados a $\mathbb{C}^2$, W e U, respectivamente, e lembramos que, para todo $v = w_1 + u_1 \in V$, podemos escrever $\rho_g(w_1 + u_1) = \mu_g(u_1) + \sigma_g(w_1)$, onde $w_1 \in W$ e $u_1 \in U$. Se $\varphi : U \to W$ é um homomorfismo de representações qualquer de U a W, ao tomarmos $\psi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ como $\psi|_U = \varphi$ e $\psi|_W = 0$ obtemos um homomorfismo da representação $\mathbb{C}^2$ a ela mesma, veja*

$$\begin{aligned}(\psi \circ \rho_g)(w_1 + u_1) &= \psi(\sigma_g(w_1)) + \psi(\mu_g(u_1)) = 0 + \varphi(\mu_g(u_1)) = \sigma_g(\psi(w_1)) + \mu_g(\varphi(u_1)) \\ &= \sigma_g(\psi(w_1)) + \mu_g(\psi(u_1)) = \rho_g(\psi(w_1) + \psi(u_1)) = (\rho_g \circ \psi)(w_1 + u_1).\end{aligned}$$

Perceba que, como $\psi(U) \subseteq W$, então para cada vetor $(0, y) \in U$, existe $(x, 0) \in W$ tal que $\psi(0, y) = (x, 0)$. O Exemplo 3.3 garante que $\psi(x, y) = (\lambda_1 x, \lambda_2 y)$ e, consequentemente, ψ e φ são identicamente nulos. Portanto, não existem isomorfismos de representações entre U e W, isto é, U e W não são isomorfos.

Perceba que no Exemplo 3.4, mesmo que as representações U e W possuam a mesma dimensão, ou seja, mesmo que elas sejam isomorfas como espaços vetoriais, elas não são isomorfas como representações.

Exemplo 3.5. *Seja $\mathbb{C}^2$ a representação de D_n como no Exemplo 2.8. A matriz de todo homomorfismo de representação $\psi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ é*

$$[\psi]_C = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

para $\lambda \in \mathbb{C}$. De fato, como no exemplo anterior obtemos que $[\psi]_C$ é diagonal por conta de ρ_s. Além disso, temos

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 cos(\frac{2\pi m}{n}) & -\lambda_1 sen(\frac{2\pi m}{n}) \\ \lambda_2 sen(\frac{2\pi m}{n}) & \lambda_2 cos(\frac{2\pi m}{n}) \end{bmatrix} = A\rho_{r^m} = \rho_{r^m} A = \begin{bmatrix} \lambda_1 cos(\frac{2\pi m}{n}) & -\lambda_2 sen(\frac{2\pi m}{n}) \\ \lambda_1 sen(\frac{2\pi m}{n}) & \lambda_2 cos(\frac{2\pi m}{n}) \end{bmatrix}$$

e assim $\lambda_1 = \lambda_2$.

Agora que introduzimos propriamente o conceito de isomorfismo entre representações, estamos aptos a demonstrar a seguinte proposição.

Proposição 3.6. *Seja $U \oplus W$ a soma direta das representações U e W de G. Existem U_1 e W_1 subrepresentações de $U \oplus W$ tais que: U_1 e W_1 são isomorfas a U e W, respectivamente; e $U \oplus W$ é a soma direta interna das subrepresentações U_1 e W_1.*

Demonstração. Sejam ρ, μ e σ os homomorfismos de grupos associados a $U \oplus W$, U e W, onde, por definição, $\rho_g(u, w) = (\mu_g(u), \sigma_g(w))$, para todo $g \in G$. Considere o subespaço U_1 de $U \oplus W$ tal que

$$U_1 = \{(u, 0) \in U \oplus W | u \in U\},$$

temos que U_1 é uma subrepresentação de $U \oplus W$, pois, para todo $(u, 0) \in U_1$, temos que $\rho_g(u, 0) = (\mu_g(u), 0) \in U_1$. Mais ainda, considerando $\psi : U_1 \to U$ dado por $\psi(u, 0) = u$, temos que ψ é linear, pois

$$\psi(\lambda(u_1, 0) + (u_2, 0)) = \psi(\lambda u_1 + u_2, 0) = \lambda u_1 + u_2 = \lambda\psi(u_1, 0) + \psi(u_2, 0),$$

para todos $u_1, u_2 \in U$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Se $(u, 0) \in \ker(\psi)$, então $u = 0$, ou seja, $\ker(\psi) = \{0\}$ e a Proposição 1.34 garante que ψ é uma aplicação bijetora. Finalmente, ψ é um isomorfismo de representações, pois

$$(\psi \circ \rho_g|_{U_1})(u, 0) = \psi(\mu_g(u), 0) = \mu_g(u) = \mu_g(\psi(u, 0)) = (\mu_g \circ \psi)(u).$$

Logo, U_1 e U são representações isomorfas. Analogamente, conjecturamos que

$$W_1 = \{(0, w) \in U \oplus W | w \in W\}$$

é uma subrepresentação de $U \oplus W$ isomorfo à representação W. Ademais, $U_1 \cap W_1 = \{0\}$ e, todo $(u, w) \in U \oplus W$ pode ser escrito como $(u, w) = (u, 0) + (0, w)$ e, portanto, $U \oplus W$ é a soma direta interna das subrepresentações U_1 e W_1. □

Em outras palavras, se $U \oplus W$ é a soma direta de representações U e W, então $U \oplus W$ pode ser vista como soma direta interna de subrepresentações isomorfas a U e W. Vale também a recíproca, isto é, a soma direta interna de subrepresentações U e W de uma representação V de G pode ser identificada como a soma direta das representações U e W e a verificamos com a proposição que segue.

Proposição 3.7. *Sejam V uma representação de G e U e W subrepresentações de V. Se V é a soma direta interna das subrepresentações U e W, então V é isomorfa à soma direta das representações U e W.*

Demonstração. Seja $\psi : U \oplus W \to V$ uma aplicação dada por $\psi(u, w) = u + w$. A aplicação ψ é linear, pois, para $(u_1, w_1), (u_2, w_2) \in U \oplus W$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, temos que

$$\begin{aligned} \psi(\lambda(u_1, w_1) + (u_2, w_2)) &= \psi(\lambda u_1 + u_2, \lambda w_1 + w_2) \\ &= \lambda u_1 + u_2 + \lambda w_1 + w_2 \\ &= \lambda(u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) \\ &= \lambda\psi(u_1, w_1) + \psi(u_2, w_2). \end{aligned}$$

Fora isso, se $(u_1, w_1) \in ker(\psi)$, então

$$u_1 + w_1 = \psi(u_1, w_1) = 0,$$

o que implica que $u_1 = -w_1 \in W$. Como $U \cap W = \{0\}$, por hipótese, temos que $(u_1, w_1) = (0, 0)$. Logo, $\ker(\psi) = \{0\}$ e a Proposição 1.34 garante que ψ é um isomorfismo de espaços vetoriais. Agora, sejam ν, μ, σ e ρ os homomorfismos de grupos associados às representações V, U, W e $U \oplus W$, respectivamente. Lembramos que, para todos $g \in G$, $u \in U$ e $w \in W$, a Observação 2.22 garante que

$$\nu_g(u + w) = \mu_g(u) + \sigma_g(w)$$

e, pela definição de soma direta de representações, temos que

$$\rho_g(u, w) = (\mu_g(u), \sigma_g(w)).$$

Finalmente, ψ é um isomorfismo de representações, pois

$$(\psi \circ \rho_g)(u, w) = \psi(\mu_g(u), \sigma_g(w)) = \mu_g(u) + \sigma_g(w) = \nu_g(u + w) = (\nu_g \circ \psi)(u, w).$$

Portanto, $U \oplus W$ e V são representações isomorfas. □

Como já observado, as proposições 3.6 e 3.7 nos permitem perceber a soma direta de representações e a soma direta interna de subrepresentações como o mesmo objeto. Fora isso, note que as proposições 1.39 e 1.40 são corolários das proposições 3.6 e 3.7, respectivamente.

Exemplo 3.8. *Seja $\mathbb{C}^2$ a representação de $G = \{e, g\}$ introduzida no Exemplo 2.7 e considere as subrepresentações U e W do Exemplo 2.13. A representação $\mathbb{C}^2$ de G é a soma direta das representações U e W, uma vez que $\mathbb{C}^2$ é a soma direta dos espaços vetoriais U e W.*

3.2 Lema de Schur

Começamos esta seção apresentando alguns resultados que são pertinentes à demonstração do Lema da Schur. O lema subsequente afirma que a imagem e o núcleo de um homomorfismo de representações são subrepresentações, respectivamente, do contradomínio e do domínio do homomorfismo de representações.

Lema 3.9. *Seja $\psi : V \to W$ um homomorfismo de representações. Então $\psi(V)$ é uma subrepresentação de W e $ker(\psi)$ é uma subrepresentação de V.*

Demonstração. Sejam ρ e σ os homomorfismos de grupos associados a V e W, respectivamente. Afirmar que $\psi(V)$ é uma subrepresentação de W é o mesmo que afirmar $\sigma_g(\psi(v)) \subseteq \psi(V)$, para todos $g \in G$ e $v \in V$, e é exatamente isso que a igualdade abaixo implica

$$\sigma_g(\psi(v)) = \psi(\rho_g(v)) \in \psi(V),$$

O núcleo $ker(\psi)$ é uma subrepresentação de V, pois $\rho_g(ker(\psi)) \subseteq ker(\psi)$, para todo $g \in G$. Com efeito, para $v \in ker(\psi)$, vale

$$\psi(\rho_g(v)) = \sigma_g(\psi(v)) = \sigma_g(0) = 0,$$

e assim $\rho_g(v) \in ker(\psi)$. □

Vale notar que um homomorfismo de representações ainda é uma aplicação linear e, portanto, preserva as propriedades da Proposição 1.34. Entretanto, para verificar a harmonia entre as teorias, vejamos um resultado similar em que usamos o que vimos até aqui.

Proposição 3.10. *Sejam V e W representações de G e $\psi : V \to W$ um homomorfismo de representações. Então $\ker(\psi) = \{0\}$ se, e somente se, ψ é injetora.*

Demonstração. Sejam ρ e σ os homomorfismos de grupos associados a V e W, respectivamente. Suponhamos que $v, u \in V$ são tais que $\psi(v) = \psi(u)$. Então

$$(\psi \circ \rho_g)(v) = (\sigma_g \circ \psi)(v) = (\sigma_g \circ \psi)(u) = (\psi \circ \rho_g)(u),$$

e assim

$$0 = (\psi \circ \rho_g)(v) - (\psi \circ \rho_g)(u) = \psi\big(\rho_g(v) - \rho_g(u)\big),$$

e, assumindo $\ker(\psi) = \{0\}$, $\rho_g(v) = \rho_g(u)$. A aplicação ρ_g é bijetora, implicando $v = u$. Portanto, ψ é injetora. Reciprocamente, seja $v \in \ker(\psi)$, isto é, $\psi(v) = 0$, temos que

$$(\psi \circ \rho_g)(v) = (\sigma_g \circ \psi)(v) = \sigma_g(0) = 0,$$

como $\psi(0) = 0$ e estamos supondo que ψ é injetora, $\rho_g(v) = 0$. A aplicação ρ_g é bijetora, implicando que $v = 0$. Concluímos que $\ker(\psi) = \{0\}$. □

Através do lema subsequente vemos como os homomorfismos entre representações irredutíveis se comportam.

Lema 3.11. *Seja $\psi : V \to W$ um homomorfismo de representações de um grupo G com V e W irredutíveis. Então ψ é um isomorfismo de representações ou é identidamente nulo.*

Demonstração. O Lema 3.9 garante que $\ker(\psi)$ é uma subrepresentação de V e, como V é irredutível, $\ker(\psi) = \{0\}$ ou $\ker(\psi) = V$. Se $\ker(\psi) = V$, então ψ é um homomorfismo de representações identicamente nulo. Caso contrário, $\ker(\psi) = \{0\}$ e, pela Proposição 3.10, temos que ψ é injetor. Por outro lado, ainda pelo Lema 3.9, $\psi(V)$ é uma subrepresentação de W e, como W é irredutível, $\psi(V) = \{0\}$ ou $\psi(V) = W$. Se $\psi(V) = \{0\}$, então ψ é identicamente nulo, caso contrário, $\psi(V) = W$ e, portanto, ψ é sobrejetor. □

O corolário que segue, diferente do Lema 3.11, não restringe o contradomínio do homomorfismo de representações em questão a uma representação irredutível e, ocasionalmente, pode ser aplicado em teses nas quais o lema não pode.

Corolário 3.12. *Seja $\psi : V \to W$ um homomorfismo de representações. Se V é irredutível, então $\psi(V)$ é uma subrepresentação irredutível de W ou é a subrepresentação nula.*

Demonstração. Sejam ρ e σ os homomorfismos de grupos associadas a V e W, respectivamente. O Lema 3.9 garante que $\psi(V)$ é uma subrepresentação de W e a demonstração do Lema 3.11 nos garante que ψ é identicamente nulo ou é injetor. Se ψ é identicamente nulo, então $\psi(V) = \{0\}$. Caso contrário, ou seja, se ψ é injetor, verificamos que $\psi(V)$ é irredutível, pois, se S é uma subrepresentação própria de $\psi(V)$, então existe $U \subset V$ tal que $\psi(U) = S$, assim

$$\psi(\rho_g(U)) = \sigma_g(\psi(U)) = \sigma_g(S) \subseteq S = \psi(U)$$

e, como supomos que ψ é injetor, segue que $\rho_g(U) \subseteq U$, isto é, U é uma subrepresentação própria de V. Logo, $U = \{0\}$, uma vez que V é irredutível. Portanto, a única subrepresentação própria de $\psi(V)$ é $\psi(\{0\}) = \{0\}$. $\square$

Agora mostramos que o conjunto de todos os homomorfismos de representação de V a W é um subespaço do espaço vetorial das aplicações lineares de V a W.

Proposição 3.13. *A soma de homomorfismos de representações é um homomorfismo de representações. Além disso, o produto de homomorfismo de representação por um escalar é um homomorfismo de representações.*

Demonstração. Sejam $\psi, \varphi : V \to W$ homomorfismos de representações entre V e W, representações de G. Sejam também ρ e σ os homomorfismos de grupos associados às representações V e W, respectivamente, e $g \in G$. Então

$$(\psi + \varphi) \circ \rho_g = \psi \circ \rho_g + \varphi \circ \rho_g = \sigma_g \circ \psi + \sigma_g \circ \varphi = \sigma_g \circ (\psi + \varphi).$$

Logo $(\psi + \varphi)$ é um homomorfismo de representações. Seja $\lambda \in \mathbb{C}$. Então

$$(\lambda\psi) \circ \rho_g = \lambda(\psi \circ \rho_g) = \lambda(\sigma_g \circ \psi) = \sigma_g \circ (\lambda\psi).$$

Portanto, $\lambda\psi$ é um homomorfismo de representações. $\square$

Usamos a Proposição 3.13 de fato na seção de decomposição de representações regulares, mas já colhemos seus frutos no Lema de Schur que segue.

Lema 3.14 (Schur)**.** *Sejam V uma representação irredutível de um grupo G e $\psi : V \to V$ um homomorfismo de representações. Então existe um $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\psi(v) = \lambda v$, para todo $v \in V$.*

Demonstração. Seja A a matriz de ψ. Como $\mathbb{C}$ é algebricamente fechado, existe um $\lambda \in \mathbb{C}$ que é autovalor de A. O Exemplo 3.2 mostra que V, a representação trivial de G, é um homomorfismo de representações e designando sua matriz, a matriz identidade, por Id_V, temos que $A - \lambda Id_V$ continua sendo um homomorfismo de representações e, ainda, $\ker(A - \lambda Id_V) \neq \{0\}$, isto é, $A - \lambda Id_V$ não é injetora. Logo, $A - \lambda Id_V$ é identicamente nula, pelo Lema 3.11, e, portanto, $A = \lambda Id_V$. $\square$

Corolário 3.15. *Sejam G um grupo abeliano e V uma representação irredutível de G. Então* $\dim(V) = 1$.

Demonstração. Seja ρ o homomorfismo de grupos associado a representação V. Perceba que, por G ser um grupo abeliano, ρ_h é um homomorfismo de representações qualquer que seja $h \in G$, pois, para todo $g \in G$, vale

$$\rho_h \circ \rho_g = \rho_{hg} = \rho_{gh} = \rho_g \circ \rho_h.$$

Agora, pelo Lema de Schur, para cada $h \in G$ existe um $\lambda_h \in \mathbb{C}$ tal que $\rho_h(v) = \lambda_h v$, para todo $v \in V$. Então, para qualquer $v \in V$ diferente do vetor nulo, o subespaço W gerado por v é uma subrepresentação de V. Como V é irredutível e escolhemos $v \neq 0$, $W = V$. Portanto $\dim(V) = 1$. □

Com o intuito de encontrarmos homomorfismos de representações que nos aproximem da demonstração do Corolário 3.15 sem impormos que o grupo G seja abeliano, definimos a aplicação $\gamma_v : V_{reg} \to V_{reg}$ tal que

$$\gamma_v(u) = \sum_{g \in G} v(g)\rho_g(u), \tag{3.1}$$

onde $v, u \in V_{reg} = \{w : G \to \mathbb{C}\}$ e ρ é o homomorfismo de grupos associado a V_{reg}. O lema a seguir garante que γ_v é determinado univocamente por $v \in V_{reg}$.

Lema 3.16. *Sejam V_{reg} a representação regular de um grupo G e $v_1, v_2 : G \to \mathbb{C}$. Se $\gamma_{v_1} = \gamma_{v_2}$, então $v_1 = v_2$.*

Demonstração. Lembramos que $\rho_h(v_g) = v_{hg}$, para todos $g, h \in G$, onde v_g é um vetor qualquer da base de permutação de V_{reg}. Então, usando as equações (2.1), (3.1) e dado que $\gamma_{v_1} = \gamma_{v_2}$, temos

$$\begin{aligned} v_1 &= \sum_{g \in G} v_1(g)v_g = \sum_{g \in G} v_1(g)\rho_g(v_e) = \gamma_{v_1}(v_e) = \gamma_{v_2}(v_e) = \sum_{g \in G} v_2(g)\rho_g(v_e) = \sum_{g \in G} v_2(g)v_g \\ &= v_2. \end{aligned}$$

□

Considere, para cada classe de conjugação C de G, a função $v_C : G \to \mathbb{C}$ tal que

$$v_C(g) = \begin{cases} 1 & \text{se } g \in C \\ 0 & \text{se } g \notin C \end{cases}. \tag{3.2}$$

Procuramos entender qual natureza de v torna γ_v em um homomorfismo de representações e as funções v_C definidas acima nos ajudam nessa tarefa como podemos ver na próxima proposição.

Proposição 3.17. *Sejam V_{reg} a representação regular de G, $v \in V_{reg}$ e X o conjunto das classes de conjugação de G. Então $\gamma_v : V_{reg} \to V_{reg}$ é um homomorfismo de representações se, e somente se, v é combinação linear de funções do conjunto $\{v_C\}_{C \in X}$.*

Demonstração. Sejam $v \in V_{reg}$ e ρ o homomorfismo de grupos associado a V_{reg}. Se γ_v é um homomorfismo de representações, então $\gamma_v \circ \rho_h = \rho_h \circ \gamma_v$, para todo $h \in G$. Logo,

$$\begin{aligned}\gamma_v &= \rho_h \circ \gamma_v \circ \rho_{h^{-1}} = \rho_h \circ \Big(\sum_{g \in G} v(g)\rho_g\Big) \circ \rho_{h^{-1}} = \sum_{g \in G} v(g)\rho_{hgh^{-1}} = \sum_{k \in G} v(h^{-1}kh)\rho_k \\ &= \sum_{k \in G} v_1(k)\rho_k = \gamma_{v_1},\end{aligned}$$

onde $k = hgh^{-1}$ e $v_1(k) = v(h^{-1}kh)$. O Lema 3.16 afirma que $v(g) = v_1(g) = v(h^{-1}gh)$, ou seja, v não varia quando aplicada a elementos de uma mesma classe de conjugação. Seja $\lambda_C = v(g)$ tal que g pertence à classe de conjugação C, então

$$v = \sum_{C \in X} \lambda_C v_C.$$

Reciprocamente, assumimos que v é combinação linear de funções do conjunto $\{v_C\}_{C \in X}$, ou seja,

$$v = \sum_{C \in X} \lambda_C v_C.$$

Tomando $l = h^{-1}gh$, temos

$$\begin{aligned}\gamma_v \circ \rho_h &= \Big(\sum_{g \in G} v(g)\rho_g\Big) \circ \rho_h = \sum_{g \in G} v(g)\rho_{gh} = \sum_{g \in G}\Big(\sum_{C \in X} \lambda_C v_C(g)\Big)\rho_{gh} \\ &= \sum_{l \in G}\Big(\sum_{C \in X} \lambda_C v_C(hlh^{-1})\Big)\rho_{hl} = \sum_{l \in G}\Big(\sum_{C \in X} \lambda_C v_C(l)\Big)\rho_{hl} = \sum_{l \in G} v(l)\rho_{hl} \\ &= \rho_h \circ \Big(\sum_{l \in G} v(l)\rho_l\Big) = \rho_h \circ \gamma_v.\end{aligned}$$

Portanto, γ_v é um homomorfismo de representações. $\square$

Observação 3.18. *As funções $v \in V_{reg}$ que, assim como na demonstração da Proposição 3.17, não variam para elementos de uma mesma classe de conjugação são chamadas de funções de classe de G.*

Note que, se $v \in V_{reg}$ é uma combinação linear de funções de classe, então v é também uma função de classe. Mais ainda, o conjunto das funções de classe de G é uma subespaço vetorial de V_{reg}. Esse fato se dá importante na seção de caracteres de representações onde é tratado de modo mais detalhado.

Observação 3.19. *Ao definirmos o produto $f : V_{reg} \times V_{reg} \to V_{reg}$ por $f(u,v) = \gamma_u(v)$, o espaço vetorial V_{reg} ganha a estrutura de anel. De fato, sejam $u, v, w \in V_{reg}$ e $g, h, k \in G$,*

i. O produto é distributivo em relação à soma, pois

$$f(v,u) + f(v,w) = \gamma_v(u) + \gamma_v(w) = \sum_{g \in G} v(g)\rho_g(u) + \sum_{g \in G} v(g)\rho_g(w)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{g\in G} v(g)(\rho_g(u)+\rho_g(w)) = \sum_{g\in G} v(g)\rho_g(u+w) \\ &= \gamma_v(u+w) = f(v,u+w), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f(v,w)+f(u,w) &= \gamma_v(w)+\gamma_u(w) = \sum_{g\in G} v(g)\rho_g(w) + \sum_{g\in G} u(g)\rho_g(w) \\ &= \sum_{g\in G}(v(g)+u(g))\rho_g(w) = \gamma_{v+u}(w) = f(v+u,w). \end{aligned}$$

ii. *Lembramos que* $\rho_h(v_g) = v_{hg}$*, para todo vetor* v_g *na base de permutação de* V_{reg}*. Fora isso, ainda temos que*

$$f(v_g,v) = \gamma_{v_g}(v) = \sum_{h\in G} v_g(h)\rho_h(v) = v_g(g)\rho_g(v) = \rho_g(v). \tag{3.3}$$

O produto é associativo, porque é associativo para todos os elementos da base de permutação de V_{reg}*. Com efeito,*

$$\begin{aligned} f(f(v_g,v_h),v_k) &= f(\rho_g(v_h),v_k) = f(v_{gh},v_k) = \rho_{gh}(v_k) = v_{ghk} = \rho_g(v_{hk}) \\ &= f(v_g,v_{hk}) = f(v_g,\rho_h(v_k)) = f(v_g,f(v_h,v_k)). \end{aligned}$$

3.3 Teorema de Maschke

Como já citado no Capítulo 2, encontrar complementos de subrepresentações não é uma tarefa trivial como é a de encontrar complementos de subespaços vetoriais. O Teorema de Maschke sana essa dificuldade. Antes de partirmos para o teorema, construímos um homomorfismo de representações especial e o fazemos com os lemas que seguem.

Lema 3.20. *Sejam* V *uma representação de um grupo* G *associada ao homomorfismo de grupos* ρ *e* $\mathscr{L}(V)$ *o espaço vetorial das aplicações lineares de* V *em* V*. Sejam também* $g\in G$ *e* $\psi\in\mathscr{L}(V)$*. Então*

i. *O espaço* $\mathscr{L}(V)$ *é uma representação de* G *quando associado a aplicação linear* $\tau : G \to GL[\mathscr{L}(V)]$ *definida por* $\tau_g(\psi) = (\rho_g \circ \psi \circ \rho_{g^{-1}})$*;*

ii. *A aplicação* $\psi : V \to V$ *é um homomorfismo de representações se, e somente se,* $\tau_g(\psi) = \psi$*, para todo* $g \in G$*.*

Demonstração. Sejam $g,h\in G$.

i. O espaço $\mathscr{L}(V)$ é uma representação de G, porque

$$\tau_{gh}(\psi) = \rho_{gh}\circ\psi\circ\rho_{(gh)^{-1}} = \rho_{gh}\circ\psi\circ\rho_{h^{-1}g^{-1}} = \rho_g\circ(\tau_h(\psi))\circ\rho_{g^{-1}} = \tau_g(\tau_h(\psi)).$$

ii. Assumindo que ψ é um homomorfismo de representações, temos

$$\tau_g(\psi) = \rho_g \circ \psi \circ \rho_{g^{-1}} = \psi \circ \rho_g \circ \rho_{g^{-1}} = \psi.$$

Reciprocamente, se $\tau_g(\psi) = \psi$, verificamos que $\rho_g \circ \psi = \psi \circ \rho_g$.

□

Resumindo, o Lema 3.20 reduz a tarefa de encontrar homomorfismos de representações de V a V a um problema de encontrar pontos fixos de uma determinada representação. O seguinte lema mostra uma forma de se obter um vetor com essa propriedade para qualquer representação.

Lema 3.21. *Seja V uma representação de um grupo G associada ao homomorfismo de grupos ρ. Sejam também $v \in V$ e $w = \sum_{g \in G} \rho_g(v)$. Então $\rho_g(w) = w$, para todo $g \in G$.*

Demonstração. Para todo $h \in G$, vale

$$\rho_h(w) = \rho_h\Big(\sum_{g \in G} \rho_g(v)\Big) = \sum_{g \in G} \rho_h(\rho_g(v)) = \sum_{g \in G} \rho_{hg}(v) = \sum_{k \in G} \rho_k(v) = w,$$

onde $k = hg$. □

Nosso objetivo com o próximo lema é apontar uma aplicação da representação $\mathscr{L}(V)$ que faça com que τ_g seja idempotente, para todo $g \in G$, para que possamos utilizar a Proposição 1.42 na prova do teorema de Maschke.

Lema 3.22. *Sejam V uma representação qualquer de G e $\mathscr{L}(V)$ a representação de G do Lema 3.20. Seja também $\pi : V \to V$ uma projeção de V a U tal que $\pi(u) = u$, para todo $u \in U$. Se U é uma subrepresentação de V, então, para todos $g, h \in G$, temos que*

i. $(\tau_g(\pi))(v) \in U$, *para todo* $v \in V$;

ii. $(\tau_g(\pi))(u) = u$, *para todo* $u \in U$;

iii. $\tau_g(\pi) \circ \tau_h(\pi) = \tau_h(\pi)$.

Demonstração. Para todos $g, h \in G$, $v \in V$ e $u \in U$,

i. Como $\pi(v) \in U$, então $(\pi \circ \rho_{g^{-1}})(v) \in U$ e, porque U é subrepresentação de V, temos que $(\tau_g(\pi))(v) = (\rho_g \circ \pi \circ \rho_{g^{-1}})(v) \in U$;

ii. Como U é subrepresentação de V, então $\rho_{g^{-1}}(u) \in U$ e, porque $\pi(u) = u$, temos que $(\pi \circ \rho_{g^{-1}})(u) = \rho_{g^{-1}}(u)$. Logo,

$$(\tau_g(\pi))(u) = (\rho_g \circ \pi \circ \rho_{g^{-1}})(u) = (\rho_g \circ \rho_{g^{-1}})(u) = \rho_e(u) = u;$$

iii. Pelo primeiro item, $(\tau_h(\pi))(v) \in U$ e, aplicando o segundo item, temos que

$$(\tau_g(\pi) \circ \tau_h(\pi))(v) = \tau_h(\pi)(v).$$

□

Reunindo o que apresentamos até aqui nesta seção, sejam V e $\mathscr{L}(V)$ as representações do grupo G associadas, respectivamente, aos homomorfismos de grupos ρ e $\tau : G \to GL[\mathscr{L}(V)]$, onde $\tau_g(\psi) = (\rho_g \circ \psi \circ \rho_{g^{-1}})$, para todo $g \in G$, e seja $\pi \in \mathscr{L}(V)$ a projeção de V a U tal que $\pi(u) = u$, para todo $u \in U$. Então, considerando a aplicação linear $\psi : V \to V$ definida por

$$\psi = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \tau_g(\pi), \tag{3.4}$$

onde $|G|$ é a ordem do grupo G, temos que ψ é:

i. Um ponto fixo de τ_g, para todo $g \in G$, pelo Lema 3.21;

ii. Um homomorfismo de representações de V a ele mesmo pelo segundo item do Lema 3.20; e

iii. Uma aplicação idempotente pelo terceiro item do Lema 3.22, pois

$$\begin{aligned}
\psi \circ \psi &= \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \tau_g(\pi)\right) \circ \left(\frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \tau_h(\pi)\right) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \tau_g(\pi) \circ \left(\frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \tau_h(\pi)\right) \\
&= \frac{1}{|G|^2} \sum_{g \in G} \sum_{h \in G} \tau_g(\pi) \circ \tau_h(\pi) \\
&= \frac{1}{|G|^2} \sum_{g \in G} \sum_{h \in G} \tau_h(\pi) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi \\
&= \psi.
\end{aligned}$$

Com esse homomorfismo de representações podemos demonstrar o Teorema de Maschke.

Teorema 3.23 (Maschke)**.** *Sejam V uma representação de um grupo G e U uma subrepresentação de V. Então existe uma subrepresentação W de V tal que $V = U \oplus W$.*

Demonstração. Seja $\psi : V \to V$ o homomorfismo de representações idempotente da equação (3.4). Note que $\psi(V) = U$, pois $(\tau_g(\pi))(V) = U$, para todo $g \in G$, pelos dois primeiros itens do Lema 3.22. Fora isso, o Lema 3.9 garante que $\ker(\psi)$ é uma subrepresentação de V, uma vez que ψ é um homomorfismo de representações. Tomando $W = \ker(\psi)$, a Proposição 1.42 garante que $V = \psi(V) \oplus \ker(\psi) = U \oplus W$. □

Nos referimos a W como subrepresentação complementar de U em V se temos que $V = U \oplus W$. Como corolário de Teorema de Maschke obtemos que qualquer representação não nula pode ser decomposta como soma direta de subrepresentações irredutíveis.

Corolário 3.24. *Seja V uma representação não nula de G. Então existem $L_1, \cdots, L_m$ subrepresentações irredutíveis de V tais que $V \cong L_1 \oplus \cdots \oplus L_m$.*

Demonstração. Por indução suponhamos que vale para representações de dimensão $n-1$ ou menor, vamos mostrar que vale para representações de dimensão n. Seja V uma representação tal que $\dim(V) = n$. Se V é irredutível, o resultado é imediato. Suponhamos que V não é irredutível e então escolhemos U uma subrepresentação própria de V diferente da nula. O Teorema de Maschke garante que existe W subrepresentação de V tal que $V = U \oplus W$, perceba que W é uma subrepresentação própria de V diferente da nula. Como $\dim(U), \dim(W) < n$, a hipótese de indução vale para U e W, ou seja, existem $U_1, \cdots, U_r$ subrepresentações irredutíveis de U e $W_1, \cdots, W_s$ subrepresentações irredutíveis de W tais que $U \cong U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$ e $W \cong W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$. Portanto, tomando $m = r + s$, obtemos m subrepresentações irredutíveis da representação V tais que vale o isomorfismo $V \cong U_1 \oplus \cdots \oplus U_r \oplus W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$. $\square$

Com o Teorema de Maschke e o Lema de Schur obtemos o seguinte resultado.

Proposição 3.25. *Seja $A \in GL_n[\mathbb{C}]$ tal que $A^m = Id$ para algum $m \in \mathbb{N}$. Então*

i. A matriz A é semelhante a uma matriz diagonal com autovalores iguais a raízes m-ésimas da unidade;

ii. Seja V uma representação de um grupo H associada ao homomorfismo de grupos σ, então σ_h é diagonalizável, para todo $h \in H$, e seus autovalores são iguais a raízes p-ésimas da unidade.

Demonstração. Sejam G o grupo cíclico gerado por g de ordem m e $\mathbb{C}^n$ a representação de G associada ao homomorfismo de grupos ρ tal que $\rho_{g^k} = A^k$. Note que ρ é um homomorfismo de grupos, porque $\rho_{g^k g^l} = \rho_{g^{k+l}} = A^{k+l} = A^k A^l = \rho_{g^k}\rho_{g^l}$.

i. Pelo Teorema de Maschke podemos decompor $\mathbb{C}^n$ em subrepresentações irredutíveis e, como G é abeliano, o Corolário 3.15 nos garante que tais subrepresentações possuem dimensão 1 e, consequentemente, a representação $\mathbb{C}^n$ possui n subrepresentações irredutíveis. Escolhendo um vetor em cada uma dessas subrepresentações construímos uma base $\{u_i\}$ de $\mathbb{C}^n$, para $i \in \{1, \cdots, n\}$, esta é uma base de autovetores de ρ_g, para todo $g \in G$, e com isso mostramos que ρ_g é semelhante a uma matriz diagonal. Agora, seja λ_i o autovalor de u_i, para $i \in \{1, \cdots, n\}$, temos que

$$u_i = \rho_e(u_i) = \rho_{g^m}(u_i) = \lambda_i^m u_i,$$

isto é, $\lambda_i^m = 1$. Logo, $A = \rho_g$ é semelhante a uma matriz diagonal com autovalores λ_i, raízes *m-ésimas* da unidade;

ii. Para cada $h_i \in H$ consideramos $\langle h_i \rangle$, o subgrupo de H gerado pelo elemento h_i. Como V é representação de H, então V é representação de $\langle h_i \rangle$ ao a associarmos a $\mu = \sigma|_{\langle h_i \rangle}$. Note que, se $p_i = |\, \langle h_i \rangle \,|$, então

$$(\mu_{h_i})^{p_i} = \mu_{h_i^{p_i}} = \mu_e = Id.$$

Segue do primeiro item que μ_h é diagonalizável e seus autovalores são iguais a raízes p_i*-ésimas* da unidade, para todo $h \in \langle h_i \rangle$. Como H é finito, existem q elementos h_j de H tais que os subgrupos $\langle h_j \rangle$ são disjuntos e a união deles é o próprio H. Portanto, concluímos que σ_h é diagonalizável, para todo $h \in H$, e seus autovalores são iguais a raízes p*-ésimas* da unidade, onde p é o produto de todos p_j com $j \in \{1, \cdots, q\}$.

□

3.4 Decomposição de Representações Regulares

Com o Lema de Schur e o Teorema de Maschke em mãos, voltamos nossos esforços para o conjunto dos homomorfismos de representações entre duas representações quaisquer de um mesmo grupo. Primeiramente, adotamos a notação $\mathrm{Hom}_G(V, W)$ para nos referirmos ao conjunto de todos os homomorfismos de representações de V a W, ambas representações de G. Note que, como visto na Proposição 3.13, $\mathrm{Hom}_G(V, W)$ é um subespaço vetorial de $\mathscr{L}(V, W)$, o espaço vetorial das aplicações lineares de V a W. Agora, considere o seguinte resultado.

Lema 3.26. *Sejam V, U e W representações de G. Então temos os seguintes isomorfismos de espaços vetoriais*

$$\mathrm{Hom}_G(V \oplus U, W) \cong \mathrm{Hom}_G(V, W) \oplus \mathrm{Hom}_G(U, W)$$

e

$$\mathrm{Hom}_G(V, U \oplus W) \cong \mathrm{Hom}_G(V, U) \oplus \mathrm{Hom}_G(V, W).$$

Demonstração. Sejam $v \in V$ e $u \in U$. Tome $\varphi : \mathscr{L}(V \oplus U, W) \to \mathscr{L}(V, W) \oplus \mathscr{L}(U, W)$ tal que

$$(\varphi(\alpha))(v, u) = (\alpha_1(v), \alpha_2(u)),$$

onde $\alpha_1 : V \to W$ é dada por $\alpha_1(v) = \alpha(v, 0)$ e $\alpha_2 : U \to W$, por $\alpha_2(u) = \alpha(0, u)$. A inversa de φ é a aplicação $\psi : \mathscr{L}(V, W) \oplus \mathscr{L}(U, W) \to \mathscr{L}(V \oplus U, W)$ definida por

$$\psi(\beta_1, \beta_2) = \beta,$$

onde $\beta : V \oplus U \to W$ tal que $\beta(v,0) = \beta_1(v)$ e $\beta(0,u) = \beta_2(u)$. De fato,

$$(\psi \circ \varphi(\alpha))(v,u) = \psi(\alpha_1(v), \alpha_2(u)) = \alpha_1(v) + \alpha_2(u) = \alpha(v,0) + \alpha(0,u) = \alpha(v,u).$$

As aplicações φ e ψ são lineares, pois, para $\lambda \in \mathbb{C}$, vale

$$\begin{aligned}\lambda(\varphi(\alpha))(v,u) + (\varphi(\beta))(v,u) &= (\lambda\alpha_1(v), \lambda\alpha_2(u)) + (\beta_1(v), \beta_2(u)) \\ &= ((\lambda\alpha_1 + \beta_1)(v), (\lambda\alpha_2 + \beta_2)(u)) \\ &= (\varphi(\lambda\alpha + \beta))(v,u),\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\lambda\psi(\alpha_1(v), \alpha_2(u)) + \psi(\beta_1(v), \beta_2(u)) &= \lambda\alpha_1(v) + \lambda\alpha_2(u) + \beta_1(v) + \beta_2(u) \\ &= \lambda\alpha_1(v) + \beta_1(v) + \lambda\alpha_2(u) + \beta_2(u) \\ &= \psi((\lambda\alpha_1 + \beta_1)(v), (\lambda\alpha_2 + \beta_2)(u)).\end{aligned}$$

Agora, sejam ρ, ν, μ e σ os homomorfismos de grupos associados a $V \oplus U, V, U$ e W, respectivamente, lembrando que $\rho_g(v,u) = (\nu_g(v), \mu_g(u))$, por definição. Se α é um vetor de $\mathrm{Hom}_G(V \oplus U, W)$, isto é, se $\alpha \circ \rho_g = \sigma_g \circ \alpha$, então $\alpha_1 \circ \nu_g = \sigma_g \circ \alpha_1$ e $\alpha_2 \circ \mu_g = \sigma_g \circ \alpha_2$. Com efeito,

$$(\alpha_1 \circ \nu_g(v), \alpha_2 \circ \mu_g(u)) \;\; = \;\; \varphi(\alpha)(\nu_g(v), \mu_g(u)) = \varphi(\alpha \circ \rho_g)(u,v) = \varphi(\sigma_g \circ \alpha)(u,v),$$

note que $(\sigma_g \circ \alpha_1)(v) = (\sigma_g \circ \alpha)(v,0)$ e $(\sigma_g \circ \alpha_2)(u) = (\sigma_g \circ \alpha)(0,u)$ e, portanto, a definição de φ nos dá

$$(\alpha_1 \circ \nu_g(v), \alpha_2 \circ \mu_g(u)) = \varphi(\sigma_g \circ \alpha)(u,v) = (\sigma_g \circ \alpha_1(v), \sigma_g \circ \alpha_2(u)).$$

Em outros termos, mostramos que $\alpha_1 \in \mathrm{Hom}_G(V,W)$ e $\alpha_2 \in \mathrm{Hom}_G(U,W)$. Logo a aplicação φ quando restrito a $\mathrm{Hom}_G(V \oplus U, W)$ tem como imagem $\mathrm{Hom}_G(V,W) \oplus \mathrm{Hom}_G(U,W)$ e, portanto, $\mathrm{Hom}_G(V \oplus U, W)$ e $\mathrm{Hom}_G(V,W) \oplus \mathrm{Hom}_G(U,W)$ são espaços vetoriais isomorfos. A demonstração do segundo isomorfismo de espaços vetoriais segue de modo análogo. □

Seja L_n uma representação qualquer. Com o objetivo de sintetizar a notação, ao invés de escrever $\bigoplus_{j=1}^{a_n} L_n = L_n \oplus \cdots \oplus L_n$ vamos tomar simplesmente $\bigoplus_{j=1}^{a_n} L_n = L_n^{a_n}$ e, por convenção, $L_n^0 = \{0\}$. Em outras palavras, usamos $L_n^{a_n}$ para nos referir a soma direta da representação L_n, a_n vezes. O Corolário 3.24 afirma que qualquer representação pode ser escrita como soma direta de suas subrepresentações irredutíveis e nos permite definir a decomposição apresentada abaixo.

Definição 3.27. *Seja V uma representação de um grupo G. Dizemos que uma decomposição em somas diretas da representação V é a* decomposição isotípica *se $V \cong \bigoplus_{i=1}^{n} L_i^{a_i}$ é tal que, para $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, L_i é uma subrepresentação irredutível de V e L_i e L_j são representações isomorfas somente quando $i = j$. Cada parcela $L_i^{a_i}$ é dita* componente isotópico*.*

Exemplo 3.28. *Seja V a representação trivial do Exemplo 2.3. Vimos no Exemplo 2.16 que as únicas subrepresentações irredutíveis de V são as subrepresentações que possuem dimensão igual a 1 e do Exemplo 2.20 extraímos que V é a soma direta delas. Mais ainda, o Exemplo 3.2 implica que essas subrepresentações são isomorfas. Se $\dim(V) = n$ e L é uma subrepresentação de V tal que $\dim(L) = 1$, temos que a decomposição isotípica de V é dada por $V \cong L^n$*

Exemplo 3.29. *Seja $\mathbb{C}^2$ a representação de $G = \{e, g\}$ como no Exemplo 2.7 e considere as subrepresentações $W = \{(w, 0) \in \mathbb{C}^2 \,|\, w \in \mathbb{C}\}$ e $U = \{(0, u) \in \mathbb{C}^2 \,|\, u \in \mathbb{C}\}$ do Exemplo 2.13. Temos que U e W são irredutíveis, pois $\dim(U) = \dim(W) = 1$. No Exemplo 3.4 vimos que U e W não são isomorfas e o Exemplo 3.8 garante que V é a soma direta das representações U e W. Portanto $V = U \oplus W$ é a decomposição isotípica de V.*

Note que a Definição 3.27 dá a entender que existe uma única decomposição isotípica de V ao afirmar que $V \cong \bigoplus_{i=1}^{n} L_i^{a_i}$ é "a" decomposição isotípica de V. Há um fundo de verdade nessa afirmação e a próxima proposição trata de esclarecer a unicidade que a decomposição isotípica de uma representação possui.

Proposição 3.30. *A decomposição isotípica de qualquer representação V é única a menos de isomorfismos.*

Demonstração. Seja V uma representação não nula. Se $\dim(V) = n$, vamos supor por indução que o resultado vale para todas representações cuja dimensão é menor que n. Se V é irredutível, o resultado é imediato. Agora, se V não é irredutível, podemos escolher um subrepresentação L_1 de V não nula tal que a dimensão de L_1 é a menor possível. Essa subrepresentação existe, porque a dimensão de V é finita. A subrepresentação L_1 é também irredutível, porque se não o fosse, existiria uma subrepresentação não nula de L_1 e, consequentemente, de V cuja dimensão seria menor que $\dim(L_1)$, uma contradição. Agora, digamos que existam a_1 subrepresentações de V que são isomorfas a L_1. Note que, da forma como o construímos, o componente $L_1^{a_1}$ é único. O Teorema de Maschke garante que existe uma subrepresentação W de V tal que $V \cong L_1^{a_1} \oplus W$. Como $\dim(W) < \dim(V)$, W possui decomposição isotípica única pela hipótese de indução e, portanto, V também possui decomposição isotípica única. □

Com a Proposição 3.30 ganhamos o seguinte corolário.

Corolário 3.31. *Duas representações são isomorfas se, e somente se, possuem mesma decomposição isotípica.*

Demonstração. Seja $\psi : V \to W$ isomorfismo de representações. Se $V \cong \bigoplus_{i=1}^{n} L_i^{a_i}$ é a decomposição isotípica de V, verificamos que

$$W = \psi(V) \cong \psi\Big(\bigoplus_{i=1}^{n} L_i^{a_i}\Big) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \psi(L_i^{a_i}) \cong \bigoplus_{i=1}^{n}\bigoplus_{j=1}^{a_i} \psi(L_i) = \bigoplus_{i=1}^{n}\bigoplus_{j=1}^{a_i} W_i,$$

onde $W_i = \psi(L_i)$, para $i \in \{1 \cdots, n\}$. Como $\psi|_{L_i} : L_i \to W_i$ é um isomorfismo de representações, temos que L_i é isomorfo à W_i e o Corolário 3.12 garante que W_i é subrepresentação irredutível de W, ou seja, encontramos a decomposição isotípica de W. Como $W_i \cong L_i$, para $i \in \{1 \cdots, n\}$, as representações V e W possuem mesma decomposição isotípica. Reciprocamente, temos que se V e W possuem mesma decomposição isotípica, então é imediato que eles são isomorfos quanto representações. $\square$

O Lema 3.26 juntamente com o que apresentamos sobre decomposições isotípicas nos auxiliam a determinar a dimensão de $\mathrm{Hom}_G(V, W)$ no seguinte resultado.

Proposição 3.32. *Sejam $V \cong \bigoplus_{i=1}^{n} L_i^{a_i}$ e $W \cong \bigoplus_{i=1}^{n} L_i^{b_i}$ decomposições isotípicas das representações V e W. Então*

$$\dim(\mathrm{Hom}_G(V, W)) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

e, em particular, $\dim(\mathrm{Hom}_G(L_i, W)) = b_i$ *e* $\dim(\mathrm{Hom}_G(V, L_i)) = a_i$.

Demonstração. O Lema 3.26 aplicado repetidas vezes fornece

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_G(V, W) &\cong \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Hom}_G(L_i^{a_i}, W) \\
&\cong \bigoplus_{i=1}^{n}\bigoplus_{k=1}^{a_i} \mathrm{Hom}_G(L_i, W) \\
&\cong \bigoplus_{i=1}^{n}\bigoplus_{k=1}^{a_i}\bigoplus_{j=1}^{n} \mathrm{Hom}_G(L_i, L_j^{b_j}) \\
&\cong \bigoplus_{i=1}^{n}\bigoplus_{k=1}^{a_i}\bigoplus_{j=1}^{n}\bigoplus_{l=1}^{b_j} \mathrm{Hom}_G(L_i, L_j).
\end{aligned}$$

Se $i = j$, o Lema de Schur implica que $\dim(\mathrm{Hom}_G(L_i, L_i)) = 1$. Se $i \neq j$, então $L_i \ncong L_j$ e o Lema 3.11 implica que o único elemento de $\mathrm{Hom}_G(L_i, L_j)$ é a aplicação identicamente nula, ou seja, $\dim(\mathrm{Hom}_G(L_i, L_j)) = 0$. Assim,

$$\dim(\mathrm{Hom}_G(V, W)) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{a_i}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{b_j} \dim(\mathrm{Hom}_G(L_i, L_j))$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{a_i}\sum_{l=1}^{b_i} \dim(\mathrm{Hom}_G(L_i, L_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.
\end{aligned}
$$

Analogamente, obtemos $\dim(\mathrm{Hom}_G(L_i, W)) = b_i$ e $\dim(\mathrm{Hom}_G(V, L_i)) = a_i$. □

Extraímos da Proposição 3.32 que, se $V \cong \bigoplus_{i=1}^{n} L_i^{a_i}$ é a decomposição isotípica de V, então as dimensões dos espaços $\mathrm{Hom}_G(L_i, V)$ e $\mathrm{Hom}_G(V, L_i)$ são iguais ao expoente de componente isotópico $L_i^{a_i}$. A decomposição isotípica da representação regular de um grupo qualquer G nos possibilita entender melhor todas a representações do grupo G como a proposição abaixo e seus corolários evidenciam.

Proposição 3.33. *Sejam V_{reg} a representação regular e V uma representação qualquer, ambas representações de G. Então* $\dim(\mathrm{Hom}_G(V_{reg}, V)) = \dim(V)$.

Demonstração. Sejam ρ e σ os homomorfismos de grupos associados a V_{reg} e V, respectivamente. Seja $\varphi : \mathrm{Hom}_G(V_{reg}, V) \to V$ tal que $\varphi(\psi) = \psi(v_e)$, onde v_e é o vetor da base de permutação B de V_{reg} correspondente ao elemento neutro de G. A aplicação φ é linear, pois

$$\varphi(\lambda\psi_1 + \psi_2) = (\lambda\psi_1 + \psi_2)(v_e) = \lambda\psi_1(v_e) + \psi_2(v_e) = \lambda\varphi(\psi_1) + \varphi(\psi_2).$$

Agora, se $\psi \in \ker(\varphi)$, temos que $\psi(v_e) = \varphi(\psi) = 0$ e, lembrando que, para todo $v_g \in B$, vale $v_g = v_{ge} = \rho_g(v_e)$ pela equação (2.2), temos que

$$\psi(v_g) = (\psi \circ \rho_g)(v_e) = (\sigma_g \circ \psi)(v_e) = \sigma_g(0) = 0,$$

ou seja, ψ leva todos os vetores de B ao vetor nulo de V. Logo, ψ é um homomorfismo de representações identicamente nulo e, assim, $\ker(\varphi) = \{0\}$, ou seja, φ é também bijetora. Mostramos até aqui que φ é um isomorfismo entre os espaços vetoriais $\mathrm{Hom}_G(V_{reg}, V)$ e V e, portanto, $\dim(\mathrm{Hom}_G(V_{reg}, V)) = \dim(V)$. □

Corolário 3.34. *Sejam V uma representação irredutível de G e $V_{reg} = \bigoplus_{i=1}^{n} L_i^{r_i}$ a decomposição isotípica da representação regular de G. Então*

i. $\dim(\mathrm{Hom}_G(V_{reg}, V)) > 0$;

ii. $V \cong L_i$, *para algum* $i \in \{1, \cdots, n\}$;

iii. O conjunto das representações irredutíveis de G é finito a menos de isomorfismos;

iv. $\dim(L_i) = r_i$, *para todo* $i \in \{1, \cdots, n\}$.

Demonstração. Lembramos que se V é irredutível, então V não é a subrepresentação nula.

i. Como V é irredutível, $\dim(V) > 0$ e o resultado segue da Proposição 3.33, porque $\dim(\mathrm{Hom}_G(V_{reg}, V)) = \dim(V) > 0$;

ii. Ao supormos que $V \not\cong L_i$, para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$, o Lema 3.11 nos garante que o único homomorfismo de representações entre V e L_i é identicamente nulo, assim $\dim(\mathrm{Hom}_G(L_i, V)) = 0$. Analogamente a demonstração da Proposição 3.32, temos que

$$\dim(\mathrm{Hom}_G(V_{reg}, V)) = \sum_{i=1}^{n} r_i \dim(\mathrm{Hom}_G(L_i, V)) = 0,$$

uma contradição, pois $\dim(\mathrm{Hom}_G(V_{reg}, V)) > 0$, como visto no primeiro item. Portanto, $V \cong L_i$, para algum $i \in \{1, \cdots, n\}$;

iii. Como toda representação irredutível de G é isomorfa a alguma subrepresentação irredutível de V_{reg} e a decomposição isotípica de V_{reg} é composta por um número finito de subrepresentações irredutíveis, temos que o conjunto das representações irredutíveis de G é finito a menos de isomorfismos;

iv. Pelas proposições 3.32 e 3.33, temos

$$\dim(L_i) = \dim(\mathrm{Hom}_G(V_{reg}, L_i)) = r_i.$$

□

Em outras palavras, a menos de isomorfismos, todas as representações irredutíveis de um grupo G estão compreendidas na decomposição isotípica da representação regular do grupo G. Mais ainda, ao analisarmos a decomposição isotípica de V_{reg}, temos que o expoente de um componente isotópico é a dimensão da subrepresentação irredutível correspondente a esse componente. Então, fixamos $L_1, \cdots, L_s$ tais que $V_{reg} \cong \bigoplus_{i=1}^{s} L_i^{r_i}$ é a decomposição isotípica da representação regular.

Corolário 3.35. *Seja V_{reg} a representação regular de um grupo G. Então*

$$|G| = \sum_{i=1}^{s} (\dim(L_i))^2.$$

Demonstração. Lembramos que $\dim(V_{reg}) = |G|$, porque a base de permutação de V_{reg} possui $|G|$ elementos, assim, aplicando as proposições 3.33 e 3.32 e o Corolário 3.34, temos

$$|G| = \dim(V_{reg}) = \dim(\mathrm{Hom}_G(V_{reg}, V_{reg})) = \sum_{i=1}^{s} r_i^2 = \sum_{i=1}^{s} (\dim(L_i))^2.$$

□

Capítulo 4

Caracteres de Representações

Começamos este capítulo definindo o caracter de uma representação, atrelando a cada representação um conjunto finito de números, de forma que não há necessidade em distinguirmos o caracter da representação. A segunda seção, embora breve, assenta como é o caracter de uma representação de permutação qualquer e o caracter da representação regular de um grupo. Por sua vez, na seção sobre produto interno de caracteres, aproveitamos que podemos entender caracteres como vetores da representação regular e utilizamos o produto interno para inferir resultados como, por exemplo, como se dá o produto interno entre caracteres de representações irredutíveis de um mesmo grupo. Concluímos esse trabalho abordando o conjunto das funções de classe de G que, além de ser um subespaço vetorial de V_{reg}, contém todos os caracteres do grupo.

4.1 Caracteres de Representações

O caracter de uma representação calcula o traço de cada matriz na imagem do homomorfismo de grupos associado à representação em questão, como podemos ver a seguir.

Definição 4.1. *Seja V uma representação de um grupo G. Dizemos que $\chi_V : G \to \mathbb{C}$ tal que $\chi_V(g) = \mathrm{Tr}(\rho_g)$ é o* caracter *da representação V.*

Exemplo 4.2. *Sejam V a representação trivial de G dada no Exemplo 2.3 e ρ o homomorfismo de grupos associado a V. Como ρ_g é a matriz identidade, para todo $g \in G$, temos que $\chi_V(g) = \dim(V)$.*

Exemplo 4.3. *Seja $\mathbb{C}^2$ a representação de G apresentada no Exemplo 2.7 associada ao homomorfismo de grupos ρ tal que*

$$\rho_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad \rho_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

O caracter $\chi_{\mathbb{C}^2} : G \to \mathbb{C}$ assume os valores $\chi_{\mathbb{C}^2}(e) = \mathrm{Tr}(\rho_e) = 2$ e $\chi_{\mathbb{C}^2}(g) = \mathrm{Tr}(\rho_g) = 0$.

Exemplo 4.4. *Seja $\mathbb{C}^2$ a representação de D_n apresentada no Exemplo 2.8 associada ao homomorfismo de grupos ρ tal que*

$$
\begin{aligned}
r^m &\mapsto \begin{bmatrix} cos(\frac{2\pi m}{n}) & -sen(\frac{2\pi m}{n}) \\ sen(\frac{2\pi m}{n}) & cos(\frac{2\pi m}{n}) \end{bmatrix};\\
s &\mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix};\\
sr^m &\mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} cos(\frac{2\pi m}{n}) & -sen(\frac{2\pi m}{n}) \\ sen(\frac{2\pi m}{n}) & cos(\frac{2\pi m}{n}) \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

O caracter $\chi_{\mathbb{C}^2} : D_n \to \mathbb{C}^2$ assume os valores $\chi_{\mathbb{C}^2}(r^m) = 2cos(\frac{2\pi m}{n})$, $\chi_{\mathbb{C}^2}(s) = 0$ e $\chi_{\mathbb{C}^2}(sr^m) = 0$.

Note que o caracter de qualquer representação aplicado no elemento neutro do grupo retorna a dimensão da representação, pois calcula o traço da matriz identidade daquela representação. A proposição a seguir reúne algumas propriedades de caracteres de representações. O

Proposição 4.5. *Sejam V uma representação de G e $g, h \in G$. Então*

i. $\chi_V(gh) = \chi_V(hg)$;

ii. *Se g e h pertencem a mesma classe de conjugação, então $\chi_V(g) = \chi_V(h)$;*

iii. *Se W é uma representação de G tal que $V \cong W$, então $\chi_V = \chi_W$.*

Demonstração. Sejam ρ e σ os homomorfismos de grupos associados às representações V e W, respectivamente. Temos que

i. $\chi_V(gh) = \mathrm{Tr}(\rho_{gh}) = \mathrm{Tr}(\rho_g\rho_h) = \mathrm{Tr}(\rho_h\rho_g) = \mathrm{Tr}(\rho_{hg}) = \chi_V(hg)$;

ii. Como g e h pertencem a mesma classe de conjugação, existe um $k \in G$ tal que $g = khk^{-1}$, assim

$$\chi_V(g) = \chi_V(khk^{-1}) = \chi_V(hk^{-1}k) = \chi_V(h);$$

iii. Seja $\psi : V \to W$ um isomorfismo das representações V e W. Verificamos

$$\chi_V(g) = \mathrm{Tr}(\rho_g) = \mathrm{Tr}(\psi^{-1}\sigma_g\psi) = \mathrm{Tr}(\sigma_g) = \chi_W(g),$$

para todo $g \in G$.

□

Lembramos que funções que não variam para elementos de uma mesma classe de conjugação são chamadas de funções de classe de G e o segundo item da Proposição 4.5 afirma que os caracteres de uma representação V são funções de classe de G.

O resultado a seguir nos ajuda a lidar com o caracter de uma representação de um grupo qualquer quando a identificamos pela decomposição isotípica dela.

Proposição 4.6. *Sejam V uma representação de G e U e W subrepresentações de V tais que $V = U \oplus W$. Então $\chi_V = \chi_U + \chi_W$.*

Demonstração. Sejam μ, σ e ρ os homomorfismos de grupos associados às representações U, W e V de G. Para todo $g \in G$, temos que $\rho_g|_U = \mu_g$ e $\rho_g|_W = \sigma_g$. Portanto

$$\chi_V(g) = \mathrm{Tr}(\rho_g) = \mathrm{Tr}(\rho_g|_U + \rho_g|_W) = \mathrm{Tr}(\mu_g) + \mathrm{Tr}(\sigma_g) = \chi_U(g) + \chi_W(g).$$

□

4.2 Caracter de uma Representação de Permutação

As bases de permutação já se mostraram úteis para extraírmos significantes resultados sobre suas representações e para os caracteres não será diferente como é de se esperar. A proposição a seguir nos mostra qual o valor dos caracteres de uma representação de permutação qualquer.

Proposição 4.7. *Sejam $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$ um conjunto finito e $V = V(X)$ a representação de permutação de G correspondente à ação $\varphi : G \to S(X)$. Então $\chi_V(g)$ é igual ao número de pontos fixos de φ_g.*

Demonstração. Sejam ρ o homomorfismo de grupos associado a V e $B = \{v_{x_1}, \cdots, v_{x_n}\}$ base de permutação de V. Identificamos $v_{x_i} = v_i$, para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$. Escrevemos $\rho_g(v_j)$ na base B da seguinte forma

$$\rho_g(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i.$$

Lembre-se que os escalares a_{ij} são as entradas da matriz de ρ_g na base B. Fora isso, ainda temos que, para todo $v_i \in B$, vale $\rho_g(v_i) = v_{\varphi_g(x_i)}$. Logo, $v_{\varphi_g(x_j)} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$ e

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } v_{\varphi_g(x_j)} = v_i \\ 0 & \text{se } v_{\varphi_g(x_j)} \neq v_i \end{cases}.$$

Como $\chi_V(g) = \mathrm{Tr}(\rho_g) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, as únicas entradas a_{ii} que são iguais a 1 são tais que $v_{\varphi_g(x_i)} = v_i = v_{x_i}$ e consequentemente $\varphi_g(x_i) = x_i$. Portanto, $\chi_V(g)$ é igual ao número de pontos fixos de φ_g. □

A representação regular de um grupo qualquer, sendo um caso particular de representações de permutação, se beneficia da Proposição 4.7 como podemos ver a seguir.

Corolário 4.8. *Seja $V = V_{reg}$ a representação regular de G. Então*

$$\chi_V(g) = \begin{cases} |G| & se\ g = e \\ 0 & se\ g \neq e \end{cases}.$$

Demonstração. Sejam φ a ação correspondente à V_{reg} e $g, h \in G$ quaisquer. Lembramos que, por definição, $\varphi_g(h) = gh$. Se h é ponto fixo de φ_g, temos que $h = \varphi_g(h) = gh$, o que implica que φ_g possui pontos fixos se, e somente se, $g = e$. Seja H o conjunto dos pontos fixos de φ_g, então $H = \emptyset$ se $g \neq e$ e $H = G$ se $g = e$. A Proposição 4.7 garante que o $\chi_V(g)$ é igual a cardinalidade de H e o resultado segue. □

Outra interpretação para o Proposição 4.7 é que o caracter da representação de permutação $V(X)$ aplicado em $g \in G$ conta quantos vetores na base de permutação de $V(X)$ são autovetores de ρ_g. Já o Corolário 4.8, nos garante que os vetores da base de permutação de V_{reg} são autovetores de ρ_g apenas quando $g = e$. Com isso em mente, extraímos o corolário abaixo.

Corolário 4.9. *Seja $V_{reg} \cong \bigoplus_{i=1}^{s} L_i^{r_i}$ a decomposição isotípica da representação regular de G. Então*

$$\chi_{L_i}(g) = \begin{cases} r_i & se\ g = e \\ 0 & se\ g \neq e \end{cases}.$$

Demonstração. Seja B a base de permutação de V_{reg}. O Corolário 3.34 garante que $\dim(L_i) = r_i$, logo L_i contém r_i vetores de B, seja B_1 a base de L_i formada por esses vetores. Sejam também ρ e σ os homomorfismos de grupos associados a V_{reg} e L_i, respectivamente, com $i \in \{1, \cdots, s\}$. Lembramos que $\sigma_g = \rho_g|_{L_i}$, para todo $g \in G$, e, consequentemente, um vetor de V_{reg} é autovetor de σ_g se, e somente se, é autovetor de ρ_g. Logo, o Corolário 4.8 garante que B contém autovetores de ρ_g somente quando g é um elemento neutro de G e, assim, B_1 contém autovetores de σ_g somente quando $g = e$. Portanto, $\chi_{L_i}(e) = r_i$ e $\chi_{L_i}(g) = 0$ se $g \neq e$. □

4.3 Produto Interno de Caracteres

Note que a representação regular de um grupo G, sendo uma representação de permutação, é tal que $V_{reg} = \{v : G \to \mathbb{C}\}$. A seguir, apresentamos um produto interno desse espaço vetorial e a partir dele ampliamos nosso conhecimento sobre os caracteres de uma representação qualquer, uma vez que os caracteres são vetores da representação regular.

Proposição 4.10. *Sejam $v_1, v_2 : G \to \mathbb{C}$. Então*

$$\langle v_1, v_2 \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} v_1(g)\overline{v_2(g)}$$

define um produto interno.

Demonstração. Sejam $v_1, v_2, v_3 : G \to \mathbb{C}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, então

i. o produto é linear em relação à primeira entrada, pois

$$\begin{aligned} \langle \lambda v_1 + v_2, v_3 \rangle_G &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\lambda v_1 + v_2)(g)\overline{v_3(g)} \\ &= \lambda \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} v_1(g)\overline{v_3(g)} + \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} v_2(g)\overline{v_3(g)} \\ &= \lambda \langle v_1, v_3 \rangle_G + \langle v_2, v_3 \rangle_G ; \end{aligned}$$

ii. o produto satisfaz a seguinte simetria, pois

$$\langle v_1, v_2 \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} v_1(g)\overline{v_2(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{v_2(g)\overline{v_1(g)}} = \overline{\langle v_2, v_1 \rangle}_G;$$

iii. o produto de um elemento por ele mesmo pertence a $\mathbb{R}$, pois

$$\langle v_1, v_1 \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} v_1(g)\overline{v_1(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |v_1(g)|^2 \in \mathbb{R}.$$

Mais ainda, $\langle v_1, v_1 \rangle_G = 0$ se, e somente se, v_1 é identicamente nulo.

□

Exemplo 4.11. *Seja V a representação trivial de G apresentada no Exemplo 2.3. O caracter de V é constante assim como é a imagem do homomorfismo de grupos associado a V, mais ainda, o valor que χ_V assume, para qualquer elemento do grupo, é a dimensão de V. Logo, o produto interno do caracter de V por ele mesmo é dado por*

$$\langle \chi_V, \chi_V \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g)\overline{\chi_V(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\dim(V))^2 = (\dim(V))^2.$$

Conhecemos o valor do caracter da representação regular aplicado em qualquer elemento do grupo em questão e, portanto, conhecemos o produto interno desse caracter por ele mesmo também, veja.

Corolário 4.12. *Seja $V = V_{reg}$ a representação regular de G. Então $\langle \chi_V, \chi_V \rangle_G = \chi_V(e)$.*

Demonstração. O Corolário 4.8 garante

$$\langle \chi_V, \chi_V \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \chi_V(h)\overline{\chi_V(h)} = \frac{1}{|G|} \chi_V(e)\overline{\chi_V(e)} = \chi_V(e).$$

□

Note que o Corolário 4.12 é um caso especial do produto interno entre o caracter da representação regular $V = V_{reg}$ e o caracter de qualquer outra representação U de G, veja

$$\langle \chi_U, \chi_V \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \chi_U(h)\overline{\chi_V(h)} = \frac{1}{|G|} \chi_U(e)\overline{\chi_V(e)} = \chi_U(e).$$

Mais ainda, $\chi_U(e)$ é a dimensão de U, pois é o traço da matriz identidade de U, assim obtemos que $\langle \chi_V, \chi_U \rangle_G = \overline{\langle \chi_U, \chi_V \rangle_G} = \langle \chi_U, \chi_V \rangle_G$, ou seja, o produto interno entre o caracter de uma representação qualquer e o caracter da representação regular comutam. Os próximos dois resultados nos asseguram que essa comutatividade é válida para o produto interno dos caracteres de quaisquer duas representações de um mesmo grupo.

Lema 4.13. *Sejam V uma representação de G e χ_V o caracter de V. Então, para qualquer $g \in G$, vale que $\chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V(g)}$.*

Demonstração. Seja ρ o homomorfismo de grupos associado a V. A Proposição 3.25 nos garante que ρ_g é diagonalizável e seus autovalores são raízes n-ésimas da unidade. Vamos mostrar que o inverso de qualquer raíz da unidade é o conjugado da raíz. Para tanto, seja $z \in \mathbb{C}$ uma raíz n-ésima de unidade, isto é, $z^n = 1$. Como, para quaisquer $x, y \in \mathbb{C}$, vale $|xy| = |x||y|$, temos que $|z|^n = |z^n| = 1$, assim $z\overline{z} = |z|^2 = 1$. Concluímos que $\overline{z}$ é o inverso de z, e o resultado segue. □

Proposição 4.14. *Sejam χ_U e χ_W caracteres, respectivamente, de U e W, ambas representações de G. Então $\langle \chi_U, \chi_W \rangle_G = \langle \chi_W, \chi_U \rangle_G$.*

Demonstração. O Lema 4.13 nos garante que, para qualquer representação V de G, vale $\chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V(g)}$, para todo $g \in G$, assim

$$\begin{aligned} \langle \chi_U, \chi_W \rangle_G &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_U(g)\overline{\chi_W(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_U(g^{-1})}\chi_W(g^{-1}) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \chi_W(h)\overline{\chi_U(h)} \\ &= \langle \chi_W, \chi_U \rangle_G, \end{aligned}$$

onde $h = g^{-1}$. □

Usamos adiante o produto $f : V_{reg} \times V_{reg} \to V_{reg}$, apresentado na Observação 3.19. Destacamos que, para todo vetor v_g na base de permutação de V_{reg} e todo $v \in V_{reg}$, vale que $f(v_g, v) = \rho_g(v)$, como visto na equação (3.3), onde ρ é o homomorfismo de grupos associado a V_{reg}. O próximo lema usa o produto f para definir um homomorfimo de representações de V_{reg} a ele mesmo.

Lema 4.15. *Sejam V_{reg} a representação regular, $v \in V_{reg}$ e f o produto da Observação 3.19. Então $\psi : V_{reg} \to V_{reg}$, dado por $\psi(w) = f(w, v)$, é um homomorfismo de representações.*

Demonstração. Seja ρ o homomorfismo de grupos associado a V_{reg}. Como, para qualquer vetor v_g na base de permutação de V_{reg}, vale $f(v_g, u) = \rho_g(u)$ e, assim,

$$\begin{aligned}(\psi \circ \rho_g)(w) &= f(\rho_g(w), v) = f(f(v_g, w), v) = f(v_g, f(w, v)) = \rho_g(f(w, v)) \\ &= (\rho_g \circ \psi)(w).\end{aligned}$$

Portanto ψ é um homomorfismo de representações de V_{reg}. □

A seguir buscamos entender, em linhas gerais, como o produto f se comporta entre vetores de subrepresentações de V_{reg} que não são isomorfas.

Proposição 4.16. *Seja $V_{reg} = U \oplus W$ onde U e W são subrepresentações de V_{reg} que não possuem subrepresentações irredutíveis isomorfas em comum e seja f o produto definido na Observação 3.19. Se $u \in U$ e $w \in W$,*

i. Então $f(u, w) = f(w, u) = 0$;

ii. Se $v_e = e_1 + e_2$, com $e_1 \in U$ e $e_2 \in W$, então $f(e_1, u) = u$ e $f(e_2, w) = w$.

Demonstração. Consideremos $\psi : W \to V$ tal que $\psi(w) = f(w, u)$.

i. Note que a equação (3.1) nos garante que $\psi(W) \subseteq U$, porque U é uma subrepresentação de V_{reg}. Pelo Lema 4.15, ψ é um homomorfismo de representações. Se L é uma subrepresentação irredutível de W sabemos que $\psi(L)$ é a subrepresentação nula de U pelo Corolário 3.12, uma vez que U e W não possuem subrepresentações irredutíveis isomorfas em comum. Como isso vale para toda subrepresentação de W, ψ é identicamente nula, isto é, $f(w, u) = 0$. Um argumento análogo mostra $f(u, w) = 0$;

ii. Pela Observação 3.19, $f(v_e, v) = \rho_e(v) = v$, para todo $v \in V_{reg}$. Por hipótese, $v_e = e_1 + e_2$. Logo $u = f(v_e, u) = f(e_1 + e_2, u) = f(e_1, u) + f(e_2, u)$. Como $u \in U$ e $e_2 \in W$, o primeiro item nos garante que $f(e_2, u) = 0$, assim $f(e_1, u) = u$. Um argumento análogo mostra $f(e_2, w) = w$.

□

Note que na Proposição 4.16 encontramos uma espécie de unidade nas respectivas subrepresentações de V_{reg} relativas ao produto f. O seguinte resultado explicita esse vetor.

Proposição 4.17. *Seja $V_{reg} = U \oplus W$ onde U e W são subrepresentações de V_{reg} que não possuem subrepresentações irredutíveis isomorfas em comum. Seja $v_e = e_1 + e_2$ com $e_1 \in U$ e $e_2 \in W$. Então*

$$e_1 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_U(g^{-1}) v_g.$$

Demonstração. Sejam ρ o homomorfismo de grupos associado a V_{reg} e f o produto definido na Observação 3.19. Tomamos $\psi : V_{reg} \to V_{reg}$ uma aplicação linear tal que $\psi(v) = f(v_{h^{-1}}, f(e_1, v))$ onde h é um elemento qualquer de G.

i. Sabemos que $\mathrm{Tr}(\psi) = \mathrm{Tr}(\psi|_U) + \mathrm{Tr}(\psi|_W)$. O traço de ψ restrita a W é zero, porque a Proposição 4.16 garante que $f(e_1, w) = 0$, para qualquer $w \in W$. Ainda pela Proposição 4.16 obtemos $\psi(u) = f(v_{h^{-1}}, f(e_1, u)) = f(v_{h^{-1}}, u) = \rho_{h^{-1}}(u)$ para $u \in U$, assim $\mathrm{Tr}(\psi|_U) = \chi_U(h^{-1})$. Logo $\mathrm{Tr}(\psi) = \chi_U(h^{-1})$.

ii. Note que como $e_1 \in V_{reg}$ podemos escrever $e_1 = \sum_{g \in G} e_1(g) v_g$ e, assim,

$$\begin{aligned}\psi(v) &= f(v_{h^{-1}}, f(e_1, v)) \\ &= f(v_{h^{-1}}, f(\sum_{g \in G} e_1(g) v_g, v)) \\ &= \sum_{g \in G} e_1(g) f(v_{h^{-1}}, f(v_g, v)).\end{aligned}$$

Agora, como $f(v_{h^{-1}}, f(v_g, v)) = f(v_{h^{-1}}, \rho_g(v)) = \rho_{h^{-1}} \rho_g(v) = \rho_{h^{-1}g}(v)$ e o traço é linear, temos que $\mathrm{Tr}(\psi) = \sum_{g \in G} e_1(g) \,\mathrm{Tr}(\rho_{h^{-1}g})$. Logo, o Corolário 4.8 garante que

$$\mathrm{Tr}(\rho_{h^{-1}g}) = \chi_{V_{reg}}(h^{-1}g) = \begin{cases} |G| & \text{se } g = h \\ 0 & \text{se } g \neq h \end{cases},$$

assim $\mathrm{Tr}(\psi) = e_1(h)|G|$.

Com os dois itens obtemos que $e_1(h)|G| = \chi_U(h^{-1})$ e, portanto,

$$e_1 = \sum_{g \in G} e_1(g) v_g = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_U(g^{-1}) v_g.$$

□

Considerando a Proposição 4.16 temos que $f(e_1, u) = u$, para todo $u \in U$. Em particular, $e_1 \in U$ e, assim, temos que $f(e_1, e_1) = e_1$ e podemos estudar essa igualdade com mais detalhes, pois a Proposição 4.17 nos mostra como e_1 é escrito na base de permutação de V_{reg} . Esse é exatamente o que o corolário abaixo se propõe a fazer.

Corolário 4.18. *Seja $V_{reg} = U \oplus W$ onde U e W são subrepresentações de V_{reg} que não possuem subrepresentações irredutíveis isomorfas em comum. Então $\langle \chi_U, \chi_U \rangle_G = \chi_U(e)$.*

Demonstração. Seja f o produto definido na Observação 3.19. As proposições Proposição 4.16 e Proposição 4.17 garantem que

$$f(e_1, e_1) = e_1 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_U(g^{-1}) v_g.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
f(e_1, e_1) &= f\Big(\frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\chi_U(h^{-1})v_h, \frac{1}{|G|}\sum_{k\in G}\chi_U(k^{-1})v_k\Big)\\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\chi_U(h^{-1})f\Big(v_h, \frac{1}{|G|}\sum_{k\in G}\chi_U(k^{-1})v_k\Big)\\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\chi_U(h^{-1})\rho_h\Big(\frac{1}{|G|}\sum_{k\in G}\chi_U(k^{-1})v_k\Big)\\
&= \frac{1}{|G|^2}\sum_{h\in G}\chi_U(h^{-1})\Big(\sum_{k\in G}\chi_U(k^{-1})\rho_h(v_k)\Big)\\
&= \frac{1}{|G|^2}\sum_{h\in G}\chi_U(h^{-1})\Big(\sum_{k\in G}\chi_U(k^{-1})v_{hk}\Big)\\
&= \frac{1}{|G|^2}\sum_{h\in G}\sum_{k\in G}\chi_U(h^{-1})\chi_U(k^{-1})v_{hk}.
\end{aligned}$$

Obtemos então a seguinte igualdade de vetores

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_U(g^{-1})v_g = \frac{1}{|G|^2}\sum_{h\in G}\sum_{k\in G}\chi_U(h^{-1})\chi_U(k^{-1})v_{hk}. \tag{4.1}$$

Os coeficientes de cada vetor v_g devem ser iguais. O coeficiente de v_e do lado esquerdo da equação (4.1) é $\frac{1}{|G|}\chi_U(e)$. Considerando agora

$$\sum_{k\in G}\chi_U(h^{-1})\chi_U(k^{-1})v_{hk},$$

note que nesse somatório o coeficiente de v_e é dado apenas por $\chi_U(h^{-1})\chi_U(h)$ e, assim, o coeficiente de v_e do lado direito da equação (4.1) é

$$\frac{1}{|G|^2}\sum_{h\in G}\chi_U(h^{-1})\chi_U(h).$$

Portanto, usando o Lema 4.13 obtemos que

$$\chi_U(e) = \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\chi_U(h^{-1})\chi_U(h) = \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\chi_U(h)\overline{\chi_U(h)} = \langle \chi_U, \chi_U\rangle_G.$$

$\square$

Sabemos que $V_{reg} \cong \bigoplus_{i=1}^{s} L_i^{r_i}$, a decomposição isotípica da representação regular de um grupo G, contém todas as representações irredutíveis de G, e com o Corolário 4.18 sabemos o valor do produto interno do caracter de cada componente isotópico de V_{reg} com ele mesmo. O seguinte teorema estabelece qual é o valor do produto interno do caracter de uma subrepresentação irredutível da representação regular não só entre ele mesmo, mas também entre todos os outros caracteres das subrepresentações irredutíveis de V_{reg}.

Teorema 4.19. *Seja $V_{reg} \cong \bigoplus_{i=1}^{s} L_i^{r_i}$ a decomposição isotípica da representação regular de G e denotamos o caracter de cada subrepresentação L_i por $\chi_{L_i} = \chi_i$. Então*

$$\langle \chi_i, \chi_j \rangle_G = \begin{cases} 1 & se\ i = j \\ 0 & se\ i \neq j \end{cases}.$$

Demonstração. Pela Proposição 4.6 sabemos que, para qualquer $i \in \{1, \cdots, s\}$, vale

$$\chi_{L_i^{r_i}} = \sum_{k=1}^{r_i} \chi_i = r_i \chi_i.$$

Aplicando que $\langle \chi_{L_i^{r_i}}, \chi_{L_i^{r_i}} \rangle_G = \chi_{L_i^{r_i}}(e)$ segundo o Corolário 4.18, obtemos

$$\begin{aligned} r_i \chi_i(e) &= \chi_{L_i^{r_i}}(e) = \langle \chi_{L_i^{r_i}}, \chi_{L_i^{r_i}} \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{L_i^{r_i}}(g) \overline{\chi_{L_i^{r_i}}(g)} \\ &= (r_i)^2 \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g) \overline{\chi_i(g)} = (r_i)^2 \langle \chi_i, \chi_i \rangle_G \end{aligned}$$

e, como $\chi_i(e) = r_i$ pelo Corolário 4.9, temos que o produto interno $\langle \chi_i, \chi_i \rangle_G = 1$. Agora, sejam $j \in \{1, \cdots, s\}$ tal que $i \neq j$ e $U = L_i^{r_i} \oplus L_j^{r_j}$. Sabemos que $\langle \chi_U, \chi_U \rangle_G = \chi_U(e)$ pelo Corolário 4.18 e como

$$\chi_U(e) = \chi_{L_i^{r_i}}(e) + \chi_{L_j^{r_j}}(e) = r_i \chi_i(e) + r_j \chi_j(e) = (r_i)^2 + (r_j)^2,$$

temos que

$$\begin{aligned} (r_i)^2 + (r_j)^2 &= \chi_U(e) \\ &= \langle \chi_U, \chi_U \rangle_G \\ &= \langle \chi_{L_i^{r_i}} + \chi_{L_j^{r_j}}, \chi_{L_i^{r_i}} + \chi_{L_j^{r_j}} \rangle_G \\ &= \langle \chi_{L_i^{r_i}}, \chi_{L_i^{r_i}} \rangle_G + 2\langle \chi_{L_i^{r_i}}, \chi_{L_j^{r_j}} \rangle_G + \langle \chi_{L_j^{r_j}}, \chi_{L_j^{r_j}} \rangle_G \\ &= (r_i)^2 \langle \chi_i, \chi_i \rangle_G + 2(r_i r_j) \langle \chi_i, \chi_j \rangle_G + (r_j)^2 \langle \chi_j, \chi_j \rangle_G. \\ &= (r_i)^2 + 2(r_i r_j) \langle \chi_i, \chi_j \rangle_G + (r_j)^2. \end{aligned}$$

Logo, $\langle \chi_i, \chi_j \rangle_G = 0$. □

Como o Teorema 4.19 trata de todas as subrepresentações irredutíveis da representação regular de G podemos estender o resultado para qualquer representação irredutível de G, como fazemos no corolário que segue.

Corolário 4.20. *Sejam U e W representações irredutíveis de G. Então*

$$\langle \chi_U, \chi_W \rangle_G = \begin{cases} 1 & se\ U \cong W \\ 0 & se\ U \ncong W \end{cases}.$$

Demonstração. O resultado é imediato do Teorema 4.19, uma vez que qualquer representação irredutível de G é isomorfa a alguma subrepresentação irredutível da representação regular de G. $\square$

O corolário subsequente nos dá que o produto interno de quaisquer dois caracteres de um grupo G pode ser calculado se soubermos as decomposições isotípicas das representações em questão.

Corolário 4.21. *Sejam V e W representações de G e $V \cong \bigoplus_{i=1}^{s} L_i^{a_i}$ e $W \cong \bigoplus_{i=1}^{s} L_i^{b_i}$ suas respectivas decomposições isotípicas. Então*

$$\langle \chi_V, \chi_W \rangle_G = \sum_{i=1}^{s} a_i b_i$$

e, em particular, $\langle \chi_V, \chi_i \rangle_G = a_i$ e $\langle \chi_i, \chi_W \rangle_G = b_i$.

Demonstração. Aplicando a Proposição 4.6, temos que

$$\langle \chi_V, \chi_W \rangle_G = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=1}^{a_i} \sum_{j=1}^{s} \sum_{l=1}^{b_j} \langle \chi_i, \chi_j \rangle_G = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} a_i b_j \langle \chi_i, \chi_j \rangle_G.$$

O Teorema 4.19 garante que

$$\langle \chi_i, \chi_j \rangle_G = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

e, portanto, $\langle \chi_V, \chi_W \rangle_G = \sum_{i=1}^{s} a_i b_i$. Analogamente, $\langle \chi_V, \chi_i \rangle_G = a_i$ e $\langle \chi_i, \chi_W \rangle_G = b_i$. $\square$

Considerando o papel crucial que os caracteres de representações irredutíveis têm com o que apresentamos até aqui introduzimos a seguinte definição.

Definição 4.22. *Seja V uma representação de um grupo G cujo caracter é χ_V. Dizemos que χ_V é* irredutível *se V é uma representação irredutível.*

Já sabemos o valor exato do produto interno de um caracter irredutível por ele mesmo e isso nos fornece um modo simples de determinar quando um caracter é irredutível como podemos ver no corolário que segue.

Corolário 4.23. *Seja V uma representação de um grupo G cujo caracter é χ_V. Então χ_V é irredutível se, e somente se, $\langle \chi_V, \chi_V \rangle_G = 1$.*

Demonstração. Seja $V \cong \bigoplus_{i=1}^{s} L_i^{a_i}$ a decomposição isotípica de V. Ao tomarmos como hipótese que $\langle \chi_V, \chi_V \rangle_G = 1$, o Corolário 4.21 garante que $\sum_{i=1}^{s} (a_i)^2 = 1$ e como $a_i \in \mathbb{Z}^+$, para todo $i \in \{1, \cdots, s\}$, existe único $j \in \{1, \cdots, s\}$ tal que $a_j \neq 0$ e $a_j = 1$. Logo, a decomposição isotípica de V é dada por $V \cong L_j$ e, portanto, o caracter χ_V é irredutível. Reciprocamente, se χ_V é irredutível, então o Corolário 4.20 implica que $\langle \chi_V, \chi_V \rangle_G = 1$. $\square$

O terceiro item da proposição 4.5 garante que se duas representações são isomorfas, então os caracteres delas são iguais. O corolário abaixo trata da recíproca dessa afirmação.

Corolário 4.24. *Sejam V e W representações de um grupo G tais que $\chi_V = \chi_W$. Então $V \cong W$.*

Demonstração. Seja $V_{reg} \cong \bigoplus_{i=1}^{s} L_i^{r_i}$ a decomposição isotípica da representação regular de G. Como $\chi_V = \chi_W$, por hipótese, temos que $\langle \chi_V, \chi_i \rangle_G = \langle \chi_W, \chi_i \rangle_G$, para todo $i \in \{1, \cdots, s\}$. Aplicando o Corolário 4.21 obtemos que qualquer representação irredutível ocorre em V e W o mesmo número de vezes, ou seja, V e W possuem mesma decomposição isotípica. O resultado segue do Corolário 3.31 que nos garante que duas representações são isomorfas se, e somente se, possuem mesma decomposição isotípica. $\square$

4.4 Número de Caracteres Irredutíveis de um Grupo

Encerramos este trabalho buscando estabelecer uma relação entre os caracteres irredutíveis de G e as classes de conjugação de G. Para tanto, consideramos $\mathrm{Cl}(G)$, o conjunto das funções de classe de G. Note que $\mathrm{Cl}(G)$ é um subespaço de V_{reg}, pois, para quaisquer $v, w \in \mathrm{Cl}(G)$, g e h em uma mesma classe de conjugação de G e $\lambda \in \mathbb{C}$, vale

$$(\lambda v + w)(g) = \lambda v(g) + w(g) = \lambda v(h) + w(h) = (\lambda v + w)(h),$$

isto é, $\lambda v + w \in \mathrm{Cl}(G)$. O raciocínio geral nesta seção pode ser divido em duas partes. Primeiro, mostramos que a dimensão de $\mathrm{Cl}(G)$ é igual ao número de classes de conjugação de G e, depois, provamos que os caracteres irredutíveis de G formam uma base de $\mathrm{Cl}(G)$.

Recorde que, se C é uma classe de conjugação de G, definimos, na equação (3.2), a função de classe $v_C : G \to \mathbb{C}$ tal que

$$v_C(g) = \begin{cases} 1 & \text{se } g \in C \\ 0 & \text{se } g \notin C \end{cases}.$$

Se X é o conjunto das classes de conjugação de G, então o conjunto $\{v_C\}_{C \in X}$ gera o espaço $\mathrm{Cl}(G)$, ou seja, para qualquer vetor $v \in \mathrm{Cl}(G)$, ao consideramos $\lambda_C = v(g)$ tal que g pertence a classe de conjugação C, vale que

$$v = \sum_{C \in X} \lambda_C v_C.$$

Além disso, se C_i e C_j são classes de conjugação de G, temos que

$$\langle v_{C_i}, v_{C_j} \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} v_{C_i}(g) \overline{v_{C_j}}(g) = \begin{cases} \frac{|C_i|}{|G|} & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases},$$

ou seja, $\{v_C\}_{C\in X}$ é uma base ortogonal de $\mathrm{Cl}(G)$ e, consequentemente, $\dim(\mathrm{Cl}(G)) = |X|$. Com isso em mente, podemos reformular o enunciado da Proposição 3.17 para: seja V_{reg} a representação regular de G e $v \in V_{reg}$, então a aplicação $\gamma_v : V_{reg} \to V_{reg}$ dada na equação (3.1) é um homomorfismo de representações se, e somente se, $v \in \mathrm{Cl}(G)$.

Sabemos que um caracter qualquer de G é um elemento de $\mathrm{Cl}(G)$ pela Proposição 4.5 e a seguir vemos como os caracteres irredutíveis interagem com outros vetores de $\mathrm{Cl}(G)$.

Proposição 4.25. *Sejam $V_{reg} \cong \bigoplus_{i=1}^{s} L_i^{r_i}$ a decomposição isotípica da representação regular de G e $v \in \mathrm{Cl}(G)$. Se $\langle v, \overline{\chi_i}\rangle_G = 0$, então $v = 0$.*

Demonstração. Sejam ρ o homomorfismo de grupos associado a V_{reg} e $\gamma_v : V_{reg} \to V_{reg}$ a aplicação definido na equação (3.1) por

$$\gamma_v = \sum_{g\in G} v(g)\rho_g.$$

Como $v \in \mathrm{Cl}(G)$, a Proposição 3.17 garante que γ_v é um homomorfismo de representações e, assim, o Corolário 3.12 e o Lema de Schur garantem que $\gamma_v|_{L_i} = \lambda_i Id_{L_i}$ para algum $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Logo $\mathrm{Tr}(\gamma_v|_{L_i}) = \lambda_i \dim(L_i)$. Por outro lado, seja σ o homomorfismo de grupos associado a L_i tal que $\sigma_g = \rho_g|_{L_i}$, para todo $g \in G$, como o traço é linear, vale que

$$\mathrm{Tr}(\gamma_v|_{L_i}) = \sum_{h\in G} v(h)\,\mathrm{Tr}(\sigma_h) = \sum_{h\in G} v(h)\chi_i(h) = |G|\langle v, \overline{\chi_i}\rangle_G.$$

Temos então que

$$\lambda_i = \frac{|G|}{\dim(L_I)}\langle v, \overline{\chi_i}\rangle_G,$$

mas, por hipótese, $\langle v, \overline{\chi_i}\rangle_G = 0$, ou seja, $\lambda_i = 0$. Consequentemente, $\gamma_v|_{L_i} = 0$ e como isso vale para toda subrepresentação irredutível de V_{reg}, $\gamma_v = 0$. Seja v_e o vetor da base de permutação de V_{reg}, sabemos que $\rho_g(v_e) = v_{ge} = v_g$ e, portanto,

$$v = \sum_{g\in G} v(g)v_g = \sum_{g\in G} v(g)\rho_g(v_e) = \gamma_v(v_e) = 0.$$

□

Em outras palavras a, Proposição 4.25 afirma que o único vetor de $\mathrm{Cl}(G)$ ortogonal a todos os caracteres irredutíveis de G é o vetor nulo e, aplicando a Proposição 1.49, concluímos que o conjunto dos caracteres irredutíveis de G gera $\mathrm{Cl}(G)$. Mais ainda, os caracteres irredutíveis de G formam uma base de $\mathrm{Cl}(G)$, porque são ortogonais dois a dois como visto no Teorema 4.19. Com isso posto, concluímos nossa linha de raciocínio como o corolário abaixo.

Corolário 4.26. *O número de classes de conjugação de G é igual ao número de caracteres irredutíveis de G.*

Demonstração. A dimensão de $\mathrm{Cl}(G)$ é igual tanto ao número de classes de conjugação de G quanto ao número de caracteres irredutíveis de G. □

Bibliografia

1. Curtis, C. W. *Pioneers of Representation Theory: Frobenius, Burnside, Schur, and Brauer* (American Mathematical Society, London Mathematical Society, 1999).
2. Fulton, W. & Harris, J. *Representation theory: a first course* (Springer Science & Business Media, 2013).
3. Kildetoft, T. *Introduction to the representation theory of finite groups* `https://cutt.ly/xjWHQKL`. Acessado em: 14/01/2021.
4. Penna, F. X. *Introdução às representações de grupos finitos: IIIo Colóquio de Matemática da Região Sul* `https://cutt.ly/njWJfNY`. Acessado em: 14/01/2021.
5. Humphreys, J. F. *A Course in Group Theory* (Oxford University Press, 1996).
6. Bartel, A. *Introduction to representation theory of finite groups* `https://cutt.ly/ojWJ8xI`. Acessado em: 14/01/2021.
7. Hiss, G., Kessar, R. & Külshammer, B. *An Introduction to the Representation Theory of Finite Groups* `https://cutt.ly/HjWLVDY`. Acessado em: 14/01/2021.
8. Boldrini, J. L., Costa, S. I., Figueredo, V. & Wetzler, H. G. *Álgebra Linear* (Harper & Row do Brasil, 1980).
9. Domingues, H. H. & Iezzi, G. *Álgebra Moderna* 4a edição reformulada (Atual, 2003).
10. Gonçalves, A. *Introdução à Álgebra* (IMPA, 2017).
11. Hoffman, K. & Kunze, R. *Álgebra Linear: tradução de Adalberto Panobianco Bergamasco.* (EDUSP e Polígono, 1970).