UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – UFSCar
CAMPUS SOROCABA

Ricardo Campanha Almagro

UM PRODUTO EDUCACIONAL PARA O LETRAMENTO PROBABILÍSTICO

Sorocaba
2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – UFSCar
CAMPUS SOROCABA

Ricardo Campanha Almagro

UM PRODUTO EDUCACIONAL PARA O LETRAMENTO PROBABILÍSTICO

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado junto à Banca Examinadora da Universidade Federal de São Carlos – Campus Sorocaba, como exigência parcial para a obtenção do título de LICENCIADO EM MATEMÁTICA.

Orientação: Prof. Dr. Paulo César Oliveira.

Sorocaba
2020

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DE SOROCABA - CCML-So/CCTS

Rod. João Leme dos Santos km 110 - SP-264, s/n - Bairro Itinga, Sorocaba/SP, CEP 18052-780

Telefone: (15) 32298874 - http://www.ufscar.br

DP-TCC-FA nº 1/2020/CCML-So/CCTS

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)

FOLHA DE APROVAÇÃO

RICARDO CAMPANHA ALMAGRO

UM PRODUTO EDUCACIONAL PARA O LETRAMENTO PROBABILÍSTICO

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – Campus Sorocaba

Sorocaba, 18 de dezembro de 2020

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

Cargo/Função	Nome Completo
Orientador	Prof. Dr. Paulo César Oliveira
Membro da Banca 1	Prof.ª Dr.ª Graciele P. Silveira
Membro da Banca 2	Prof.ª Dr.ª Magda da Silva Peixoto

Documento assinado eletronicamente por **Paulo Cesar Oliveira**, **Docente**, em 24/12/2020, às 15:05, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Graciele Paraguaia Silveira**, **Docente**, em 24/12/2020, às 22:22, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Magda da Silva Peixoto**, **Docente**, em 28/12/2020, às 22:22, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufscar.br/autenticacao, informando o código verificador **0302762** e o código CRC **1E71311E**.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Paulo César Oliveira
DFQM – UFSCar – Orientador

Prof. Dr.ª Graciele Paraguaia Silveira
DFQM – UFSCar

Prof.ª Dr.ª Magda da Silva Peixoto
DFQM – UFSCar

"Não é suficiente ter uma boa mente: o principal é usá-la bem".
René Descartes

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço imensamente à minha família, meus pais Antonio e Odete, bem como minha querida irmã Nádia, todos verdadeiros alicerces da minha vida e que muito vem me ajudado nas minhas batalhas ao longo da vida.

Ao caro Prof. Dr. Paulo César Oliveira pela paciência, sapiência e humanidade com quais sempre me orientou não somente durante essa monografia, mas ao longo de todas as aulas e conversas que tivemos. Seja como professor, seja como pesquisador, eu o tenho como um grande exemplo do que melhor posso objetivar para ser um profissional digno e competente.

Às prezadas Prof. Dr.ª Graciele Paraguaia Silveira e Prof.ª Dr.ª Magda da Silva Peixoto que gentilmente aceitaram compor a banca da minha monografia e contribuírem para o mesmo.

Agradeço também a direção, a coordenação, corpo docente e corpo discente da Escola Estadual Vereador Odilon Batista Jordão, em especial a Prof. Ms.ª Silvia Andrea Alexandre Miranda, o Prof. Ms.º Miguel Rodrigo de Medeiros e a Profª Raquel por terem me disponibilizado suas aulas para que eu pudesse aplicar o produto educacional.

Por fim, meus agradecimento a instituição UFSCar - Campus Sorocaba e todo seu corpo docentes e de funcionários que mantém viva a chama da educação superior de qualidade, por mais que não faltem tantos ataques à Educação nesse país.

RESUMO

O produto educacional consiste em um conjunto de tarefas pautada nos referenciais teóricos do modelo de letramento probabilístico proposto por Iddo Gal e os registros de representação semiótica de Raymond Duval. O objetivo do produto educacional é poder nortear o trabalho do professor em sala de aula, revelando possibilidades para que o letramento probabilístico seja desenvolvido em seus diversos elementos cognitivos e de disposição. Para seu desenvolvimento formulamos a seguinte questão de investigação: que registros de representação semiótica são mobilizados e coordenados por estudantes da 2ª série do Ensino Médio envolvidos com atividades de letramento probabilístico? A criação desse produto educacional decorreu da análise das orientações didático-pedagógicas contidas no Caderno do professor (SÃO PAULO, 2014-2017); o material de apoio ao Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2012).

Palavras-chave: Probabilidade, Ensino Médio, Letramento, Semiótica.

ABSTRACT

The educational product consists of a set of tasks based on the theoretical frameworks of the probabilistic literacy model proposed by Iddo Gal and the records of semiotic representation by Raymond Duval. The objective of the educational product is to be able to guide the work of the teacher in the classroom, revealing possibilities for the probabilistic literacy to be developed in its various cognitive and disposition elements. For its development, we formulated the following research question: what records of semiotic representation are mobilized and coordinated by high school students involved in probabilistic literacy activities? The creation of this educational product resulted from the analysis of the didactic-pedagogical guidelines contained in the Teacher's Notebook (SÃO PAULO, 2014-2017); support material for the São Paulo State Curriculum (SÃO PAULO, 2012).

Keywords: Probability, High school, literacy, semiotics.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

Sumário

1. INTRODUÇÃO

É notável que os fenômenos do acaso permeiam nossas vidas de várias maneiras. Noções sobre probabilidade, incerteza e risco aparecem em várias situações cotidianas, tais como: rentabilidade em aplicações financeiras, profissionais de saúde informando sobre possibilidades epidêmicas, ou previsões médicas em determinadas intervenções cirúrgicas (chances de cura, efeitos colaterais de medicamentos, entre outras situações). Adicionalmente, temos a tecnologia que tem recorrido à utilização da Estatística e da Probabilidade para aperfeiçoar o desempenho e eficácia de sistemas dos mais diversos, desde distribuição de propagandas de empresas, até a sugestão de filmes e séries em plataformas de streamming; uma tecnologia de transmissão de dados pela internet, sem a necessidade de baixar o conteúdo.

Em termos escolares, Gal (2005, 2012) sustenta que os estudantes devem se familiarizar com as diferentes formas de cálculo da probabilidade de eventos, para que, desta maneira, possam entender as afirmações probabilísticas feitas por outras pessoas, gerar estimativas sobre a probabilidade de eventos e ter condições de se comunicar adequadamente.

Nestas condições, para avaliar se um aluno é letrado em termos probabilísticos, Gal (2005) propôs um modelo composto por elementos de disposição e cognitivos, os quais serão expostos em detalhes no capítulo do aporte teórico.

O tema ‘Letramento Estatístico e Probabilístico’ tem sido apreendido e constituiu um problema de pesquisa, a partir das discussões e produções acadêmicas em nível de artigos, dissertações de Mestrado, entre outras, envolvendo membros do Grupo de Estudos e Planejamento de Aulas de Matemática – GEPLAM[1]. O grupo é coordenado pelo Profº Dr. Paulo Cesar Oliveira e é composto por docentes e pesquisadores da UFSCar e de outras instituições brasileiras, além de alunos do Curso de Licenciatura em Matemática do Campus Sorocaba, professores da rede pública e mestrandos

1 http://www.geplam.ufscar.br/

do PPGECE (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas) e PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional).

Dessa produção, destacamos um capítulo de livro intitulado “Um olhar para as pesquisas brasileiras sobre o letramento probabilístico de 2007 a 2018”, no qual foi feito um mapeamento de teses e dissertações brasileiras com foco no letramento probabilístico na perspectiva de Iddo Gal, tomando por base o acervo digital da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES e a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações - BDTD (OLIVEIRA; PAIM; CUSTÓDIO; ALMAGRO, 2020).

Os resultados expostos por esses autores apontam possíveis avanços nessa temática de estudo, contribuindo de forma significativa na formulação da questão de investigação dessa pesquisa. Mais especificamente, Oliveira, Paim, Custódio e Almagro (2020), alertaram que em relação aos elementos cognitivos do modelo de Gal (2005, 2012) é necessário ampliar os contextos utilizados, pois, a utilização de jogos de azar na Educação Básica é o mais frequente e, em determinados casos, o único. Outro ponto importante para os propósitos de desta pesquisa diz respeito às potencialidades dos registros de representação semiótica no desenvolvimento do letramento probabilístico, dado o pressuposto da teoria de Raymond Duval de que a mobilização e coordenação de pelo menos, dois registros distintos dessa natureza, promove a aprendizagem do estudante.

O problema de pesquisa aqui desenvolvido se apoia no que denominamos de produto educacional, fruto do domínio do objeto de estudo sob a forma de um conjunto de tarefas probabilísticas, cujos resultados de análise de sua aplicabilidade em estudantes do Ensino Médio, possam servir para outros profissionais da educação.

A formulação das tarefas probabilísticas levou em conta dois aportes teóricos metodológicos; o modelo de letramento probabilístico proposto por Iddo Gal e a teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval. Considerou-se também a análise sobre o tema Probabilidade nas seguintes fontes documentais: orientações curriculares complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio denominado como PCN+ (BRASIL, 2002), Currículo do Estado de São Paulo – CESP (SÃO

PAULO, 2012), o Caderno do Professor e o Caderno do Aluno como materiais de apoio ao CESP e a Base Nacional Curricular Comum – BNCC (BRASIL, 2018).

Os sujeitos participantes dessa pesquisa foram estudantes de turmas de 2ª série do Ensino Médio de uma unidade escolar rede pública estadual do município de Pilar do Sul – SP. Em relação ao conteúdo do produto educacional apresentamos para cada uma das seis tarefas, o seu conteúdo alinhado aos aportes teóricos metodológicos, uma proposta de resolução, a análise quantitativa e qualitativa do desempenho dos estudantes.

As etapas de apresentação do aporte teórico metodológico da pesquisa, a análise das fontes documentais e a respectiva formulação das tarefas probabilísticas (produto educacional), constituíram o conteúdo da comunicação oral apresentada na oitava edição da Jornada Nacional de Educação Matemática, na Universidade de Passo Fundo (ALMAGRO; OLIVEIRA, 2020).

Dado o cenário de uma pesquisa qualitativa, a análise da atividade dos alunos foi feita a partir da produção escrita (protocolos) gerada pela resolução das tarefas propostas. Os resultados obtidos pelo pesquisador visam a busca por respostas à questão de investigação: **que registros de representação semiótica são mobilizados e coordenados por estudantes da 2ª série do Ensino Médio envolvidos com atividades de letramento probabilístico?**

Em síntese, seguimos a redação desse relatório de pesquisa expondo no Capítulo 2 o aporte teórico envolvendo a teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval e o modelo de letramento probabilístico de Iddo Gal.

No Capítulo 3 analisamos o conteúdo matemático de Probabilidade em alguns documentos curriculares em nível nacional e estadual.

O percurso metodológico que engloba a natureza da pesquisa e a descrição do contexto escolar é apresentado no Capítulo 4, quando também apresentamos o conteúdo do produto educacional, as expectativas e motivações relacionadas a cada problema proposto.

A análise da produção de informações obtidas é apresentada no Capítulo 5, tomando como base o aporte teórico metodológico mediante a análise dos protocolos dos alunos.

No capítulo 6, descrevemos nossas reflexões resultantes do processo de pesquisa desenvolvido, bem como as implicações da pesquisa para o ensino de Probabilidade.

A redação desse trabalho de pesquisa é concluída apresentando as referências bibliográficas pertinentes ao percurso investigativo.

2. APORTE TEÓRICO METODOLÓGICO

O objeto de estudo nessa pesquisa é a Probabilidade, cuja abordagem envolve a mobilização e coordenação dos registros de representação semiótica em consonância com o desenvolvimento do letramento probabilístico.

2.1 Os registros de representação semiótica

A semiótica é a ciência que tem por objeto de investigação todas as linguagens possíveis, ou seja, que tem por objetivo o exame dos modos de constituição de todo e qualquer fenômeno suscetível de produção de significado e sentido (SANTAELLA, 1983).

No caso da Matemática, a linguagem extrapola o uso da língua materna, principalmente via registros escritos, pois nos comunicamos também por meio de gráficos, tabelas, simbologias algébricas, entre outras formas de registros de representação semiótica.

A teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (2003, 2009) é um dos pilares teóricos-metodológicos utilizados nas produções acadêmicas vinculadas ao grupo de pesquisa GEPLAM (Grupo de Estudos e Planejamento de Aulas de Matemática), por concentrar seus estudos na aprendizagem da Matemática, segundo os aspectos cognitivos para a compreensão da mesma. Do ponto de vista cognitivo, o processo de aprendizagem requer a mobilização de diferentes registros semióticos de representação para que não haja confusão entre o objeto matemático e a representação do mesmo, bem como, a coordenação entre os diferentes registros.

Duval (2009) afirma que não é possível estudar os fenômenos relativos ao conhecimento sem recorrer à noção de representação. Em termos de registros de representação semiótica, temos o signo que é relacionado com um objeto concreto, para especificidade matemática, o símbolo (signo) representa o objeto abstrato por meio da ação do sujeito do conhecimento (significante ou conceito). Em relação ao objeto e sua representação: "não se pode ter compreensão em matemática, se nós não distinguimos um objeto de sua representação" (DUVAL, 2009, p. 14).

Se considerarmos o conceito de probabilidade na condição de objeto, podemos representá-lo sob diversos enfoques: clássico, frequentista, subjetivo e axiomático. Por exemplo, no enfoque clássico, a probabilidade é definida como a razão entre o número de casos favoráveis em relação ao número total de casos possíveis, desde que todos os resultados sejam admitidos como igualmente prováveis de ocorrer (GODINO, BATANERO, CAÑIZARES, 1996).

No contexto frequentista, a probabilidade é definida a partir do cálculo das frequências relativas de ocorrências de sucessos provenientes de repetidos experimentos, nas mesmas condições. A principal característica deste enfoque é que o valor matemático da probabilidade emerge do processo de experimentação (GODINO, BATANERO, CAÑIZARES, 1996).

Cada forma de apresentar um registro de representação semiótica possui um conteúdo diferente estabelecido pelo sistema no qual ele foi produzido, nos exemplos dados, o sistema está vinculado ao enfoque ilustrado. A apreensão das características diferentes só terá sucesso quando o indivíduo que aprende for capaz de efetuar distintas transformações nos registros (tratamento e conversão), bem como coordená-los adequadamente.

Para Duval (2009), os registros de representação são formas de representar um objeto matemático, e ainda o sistema que podemos representar um objeto matemático, o autor denomina: registro semiótico. O acesso ao objeto matemático, segundo ao autor, deve ser enfatizado por meio de duas transformações de representação semiótica, e essas são profundamente diferentes: os tratamentos e as conversões.

> Os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro, por exemplo: efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação. As conversões são transformações de representação que consistem em mudança de registro conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo, reconhecer a escrita algébrica de uma equação em sua representação gráfica (DUVAL, 2003, p.16).

No caso do objeto de estudo desta pesquisa, a Probabilidade, Canaveze (2013) e Oliveira (2014) utilizaram os seguintes registros para efetuar e coordenar as conversões: registro da língua natural materna (conteúdos dos enunciados ou abordagem de termos probabilísticos), registro figural (tabela de dupla entrada ou de contingência, além do diagrama de árvore) e registro simbólico na forma algébrica (uso de fórmulas) ou numérico (razão para quantificar a probabilidade).

Na perspectiva de Duval (2012), quando abordamos a conversão de representações semióticas entre registros, tratamos de fatores de congruência e não congruência. Não vamos mencionar a palavra semântica, devido às orientações elaboradas por Raymond Duval: após a publicação desse artigo original em 1988, “eu não mais falei de congruência semântica e de não congruência semântica”, e, sim, “de fatores de congruência e não congruência na conversão de representações” (DUVAL, 2012, p.98), o que consistiu em uma adequação de terminologia.

O discurso em Matemática desenvolve-se principalmente por substituição; seja em uma atividade intra-registro (interna ao registro) ou inter-registro (entre registros); o que difere do discurso em linguagem natural. A cada passo do desenvolvimento do raciocínio, do cálculo ou de um procedimento de resolução, a nova expressão vem, ao contrário, substituir a expressão do passo anterior, em virtude das definições, dos axiomas, dos teoremas e das tabelas de operações, entre outros procedimentos, para que o pensamento progrida a partir dos dados iniciais. A substituição é uma característica fundamental do funcionamento cognitivo do pensamento matemático, denotando importância aos fenômenos de congruência e não congruência (DUVAL, 2012).

Em termos de probabilidade destacamos o estudo de Oliveira (2014, p.46) que tratou o fenômeno de congruência propondo aos estudantes, sujeitos da sua pesquisa, “a construção e o desenvolvimento de uma estrutura que denominamos árvore de probabilidades na versão completa”. Nesta proposta, destacou-se a “forma explícita nas quais as probabilidades são expressas nessa representação e a facilidade do acesso às probabilidades simples, condicionais e principalmente as da intersecção”.

Como exemplo desse estudo, destacamos a situação problema a seguir:

> Um teste é usado para identificar uma determinada doença. Se uma pessoa que possui a doença realiza o teste, há uma chance de 80% que o teste seja positivo. Se uma pessoa que não está doente e realiza o teste há 10% de chance de que o

> teste apresente positivo como resultado. Aproximadamente 1% de a população está doente. Smith realiza o teste e tem como resultado positivo. Qual a probabilidade de que ele esteja doente? (OLIVEIRA, 2014, p.46).

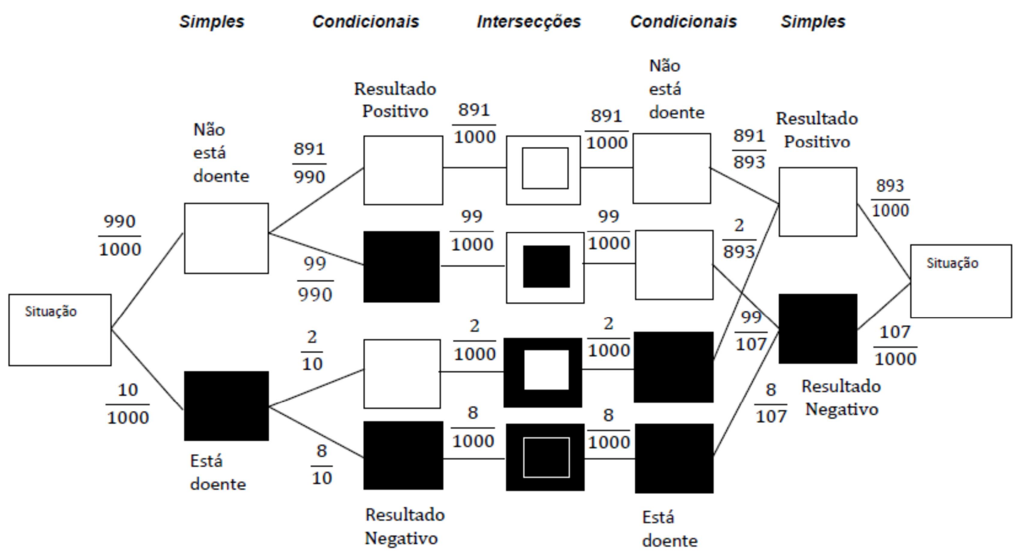
Com relação a esta tarefa, Oliveira (2014) propôs uma árvore de probabilidades na qual foram nomeadas as variáveis em cada nível de bloco. O autor chamou de ramo cada segmento que interligou os vários níveis.

> As variáveis são encontradas dentro de cada nível e as probabilidades são encontradas nos ramos, sendo que as probabilidades simples se encontram nos primeiros ramos e as condicionais nos ramos seguintes. Para obter as probabilidades utilizando o método Laplaciano, o resultado presente em cada ramo é obtido pela razão entre a frequência do valor do bloco desejado pela frequência do bloco anterior (OLIVEIRA, 2014, p.47).

No respectivo diagrama de probabilidades exposto na ‘Figura 1’, em termos de congruência, Oliveira (2014) obedeceu o critério que envolve a ordem dentro da organização das unidades de composição (variáveis e probabilidades calculadas sob o enfoque clássico de cada uma das representações (níveis de blocos).

De acordo com Oliveira (2014, p.46), há diferenciais na árvore de probabilidades na versão completa quando comparada ao modelo convencional: “destacam-se a forma explícita nas quais as probabilidades são expressas nessa representação e a facilidade do acesso às probabilidades simples, condicionais e principalmente as da intersecção”.

Figura 1: Árvore de probabilidades na versão completa.



Fonte: Oliveira (2014, p.47)

Dois critérios, segundo Oliveira (2014) com base na teoria de Raymond Duval, são utilizados na verificação de uma congruência em uma conversão: a associação de cada unidade do significante de partida (variável) com cada unidade significante da representação de chegada (probabilidade). Já a unicidade ocorre quando cada unidade significante de representação de saída corresponde a uma só unidade significante do registro de chegada. Neste caso, cada valor de probabilidade no método Laplaciano levou em conta o tipo de probabilidade (simples, condicional ou de intersecção).

Na pesquisa de Oliveira (2014) o diagrama de árvore na versão completa também foi utilizado para abordar o critério de unicidade, invertendo o sentido das unidades significantes de representação, ou seja, do registro de chegada para o registro de saída. Mais especificamente, tal diagrama permitiu também explorar o cálculo das inversas das probabilidades condicionais. Considerando o enunciado da situação-problema que apresentamos, ilustramos uma questão sobre a inversa da probabilidade condicional: “Partindo da representação da árvore, determine a probabilidade de o aluno sorteado gostar de leitura, sabendo que ele não pratica esporte. Explique como pensou.” (OLIVEIRA, 2014, p.98)

2.2 O letramento probabilístico

Historicamente, Soares (2004) destaca que a concepção do letramento como um conjunto de fenômenos distintos da alfabetização surge simultaneamente em diferentes lugares o mundo. Especificamente no Brasil, em meados dos anos de 1980, e também em países europeus como Portugal, pelo uso do termo “literacia”, e na França como “illettrisme”.

Apesar de coincidentemente o termo emergir como resultado das práticas sociais de leitura e de escrita em um mesmo momento histórico em diferentes regiões do globo, cada uma diferentemente caracterizada pela sua própria cultura, sociedade e economia, o contexto e as causas em cada localidade são essencialmente diferentes, podendo ser distinguidas características típicas nos países em desenvolvimento, como o Brasil, e em países desenvolvidos, como a França, os Estados Unidos e a Inglaterra. Sem fazer uma ampla análise em cada caso, mas destacando uma diferença crucial, Soares (2004) identifica que a diferença reside sobretudo na importância reconhecida nas relações entre as práticas sociais de leitura e de escrita, bem como na aprendizagem do sistema de escrita, ou em outras palavras, entre uma clara distinção do conceito de letramento (illettrisme, literacy) e do conceito de alfabetização (alphabétisation, readinginstruction, beginning literacy).

No Brasil, desde o surgimento do termo letramento, este esteve diretamente associada ao conceito de alfabetização, mas é relevante destacar que a alfabetização e o letramento têm diferentes dimensões, o que em termos de aprendizagem inicial da língua escrita, acaba exigindo múltiplas metodologias.

Em relação ao ensino, Soares (2004, p.15) associa o letramento como “imersão das crianças na cultura escrita, participação em experiências variadas com a leitura e a escrita, conhecimento e interação com diferentes tipos e gêneros de material escrito”. Já a alfabetização envolve a consciência fonológica e fonêmica, identificação das relações fonema–grafema, habilidades de codificação e decodificação da língua escrita, conhecimento e reconhecimento dos processos de tradução da forma sonora da fala para a forma gráfica da escrita (SOARES, 2004, p.15).

Nessa pesquisa não temos a pretensão de apresentar uma discussão sobre as múltiplas facetas envolvendo os termos letramento e alfabetização como foi muito bem tratado por Soares (2004). O propósito é apresentar suscintamente o modelo de letramento probabilístico de Gal (2005) e a importância da diversidade e coordenação dos registros de representação semiótica na aprendizagem de conteúdos de Probabilidade.

Nestas condições, para avaliar se um aluno atingiu o letramento probabilístico, Gal (2005) propôs um modelo composto por elementos cognitivos e de disposição (atitudes do estudante em relação ao conhecimento: criticidade, crenças e atitudes e sentimentos pessoais).

No ‘Quadro 1’ dispomos o conjunto de elementos cognitivos:

Quadro 1: Elementos Cognitivos do modelo de Iddo Gal.

Elemento cognitivo ou blocos	Breve descrição
Grandes Ideias	Aleatoriedade, independência, variação, previsibilidade e incerteza e outras.
Cálculos Probabilísticos	Diferentes formas de encontrar ou estimar a probabilidade de eventos.
Linguagem	Os termos e os métodos utilizados para expressar os resultados probabilísticos.
Contexto	Compreensão do papel e dos significados de mensagens probabilísticas em diferentes contextos.
Questões críticas	Reflexões sobre assuntos no contexto de Probabilidade.

Fonte: traduzido e adaptado de (GAL, 2005, p.51)

No há uma hierarquização entre os elementos, mas eles são interrelacionados, conforme abordagem exposta na sequência.

As ‘Grandes Ideias’ são conceitos fundamentais à Probabilidade, os quais permitem representar ou trabalhar uma declaração probabilística. Muitos aspectos dessas Grandes Ideias podem ser representados por símbolos matemáticos ou termos estatísticos, mas em sua essência não podem ser totalmente contida por notações técnicas. Dada ou não a sua complexidade, os estudantes devem apreender a natureza abstrata geral dessas ideias apenas intuitivamente, sem o uso de uma definição matematicamente formal, mas como blocos de construção para a compreensão do conjunto das Grandes Ideias. GAL (2005) aponta a aleatoriedade, a independência, a variação, a previsibilidade e a incerteza como principais conceitos desse elemento cognitivo.

Lopes (2003) declara que a aleatoriedade não tem uma definição única, da mesma forma que há várias concepções de probabilidade. A autora destaca que a aleatoriedade está sempre associada à ideia da ausência de certeza. Coloquialmente, se arremete às ideias de sorte ou azar. Ao longo da história, a forma de entender ou tentar definir o azar ou a sorte, normalmente se fez uma associação com as crenças mais permeadas em cada período. Assim, em civilizações antigas, o azar era tido como um ente mágico, na greco-romana, influenciada pelos pensamentos aristotélicos, o azar passou a ser visto como uma aparente casualidade, enquanto na Idade Média, representava a vontade de Deus. Dos séculos XVII até o início do XX, com a revolução renascentista e moderna, passou a ser o resultado da falta de entendimento do homem perante o universo e os fenômenos. Posteriormente, a partir da década de 70, no séc. XX, o azar passou a ser entendido como parte da complexidade resultante da interação de múltiplas causas e elementos.

Segundo Kyburg (1974), a aleatoriedade é um conceito muito associado com a gama de informações que conhecemos e que não conhecemos, já que determinar que um evento seria um sucesso esperado depende de um juízo de julgamento, que por sua vez, depende do corpo de conhecimentos de quem analisa o evento. Assim, por depender desse juízo, não há uma forma única, definitiva e amplamente válida para defini-la, como é comum para vários conceitos matemáticos.

Logo, uma boa noção de aleatoriedade está diretamente associada a como compreendemos a realidade e o conhecimento, sendo um crivo para nossa tomada de decisão. Consequentemente, o entendimento da aleatoriedade tem uma grande importância para o pleno entendimento dos demais conceitos probabilísticos e estatísticos.

A independência, segundo Lopes (2003), consiste em eventos que estão desconectados em termos de ocorrência, de forma que um evento não pode ser previsto a partir de outro. No contexto da probabilidade, a variação está associada à concepção frequentista e expressa o quanto a certeza da ocorrência eventos e processos pode se alterar.

A previsibilidade e a incerteza estão relacionadas ao quanto conhecimento temos sobre a probabilidade de um determinado evento. Embora possamos descrever a probabilidade de um determinado evento com uma declaração probabilística, a previsibilidade desse evento depende de suposições atreladas ao processo que interferem na ocorrência desse evento e na qualidade das informações disponíveis que permitem inferir uma determinada probabilidade do evento. Por exemplo, o Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos - CPTEC, no dia 30 de dezembro de 2020, apresenta o seguinte evento para a cidade de Votorantim: “variação de nuvens pela manhã com pancadas de chuva localizadas que poderão ser fortes e vir acompanhadas de trovoadas a partir da tarde”. Para esta declaração, associa-se “80% de probabilidade de chuva”, dada uma estimativa de variação de temperatura prevista para Votorantim entre 19 e 31 graus (CPTEC, 2020).

No elemento Cálculo de Probabilidades é mencionada a importância do estudante dominar as estratégias para calcular as probabilidades dos eventos em seus três enfoques de probabilidade: clássica, frequentista e subjetiva. É ressaltada também a importância do entendimento por parte dos estudantes do raciocínio combinatório para a quantificação de eventos.

A definição de Probabilidade depende das diferentes interpretações, de acordo com a concepção adotada (CARVALHO; OLIVEIRA, 2002). Dada a complexidade conceitual da Probabilidade, é inviável estabelecer uma definição ou interpretação concisa e ampla utilizável no contexto educativo. Dessa forma, por mais paradoxal que pareça para a maioria das pessoas que sempre associam a Matemática com um campo do conhecimento humano em que as definições são sempre precisas e bem colocadas, para a probabilidade podemos elencar quatro concepções possíveis: a clássica, a frequentista, a axiomática e a subjetiva.

A primeira concepção, e a mais popular no meio educacional, corresponde à primeira tentativa de definir a probabilidade com rigor matemático e deve-se à Laplace por meio da sua obra "Teoríe analytique des probabilités", publicada em 1812. Nessa concepção, a probabilidade é definida como a razão entre o número de casos favoráveis em relação ao número total de casos possíveis, uma vez que seja admitido que todos os resultados são igualmente prováveis de ocorrer.

Como referenciado no próprio Caderno do Professor (SÃO PAULO, 2014), jogos de azar que envolvem o uso de dados, moedas e cartas ou sorteios que trabalham com a extração de bolas em urnas estão plenamente adequados a essa perspectiva teórica da concepção clássica, pois tratam de fenômenos de variável discreta em que pode-se pressupor como espaço amostral um conjunto de resultados que atendam a equiprobabilidade. Nesse contexto, seja por conta das simetrias físicas do objeto ou de outro tipo pressuposição nas situações-problema, como propor que em uma grande série de lançamentos a divergência dos resultados obtidos é desprezível, é que se supõe que nenhum dos resultados possíveis tenha maior vantagem que os restantes e que, portanto, podemos associar a mesma probabilidade ou equiprobabilidade. Portanto, um dado “honesto” teria uma simetria que “garantiria” que nenhuma face se distinguiria das demais, e pela definição de Laplace, temos a probabilidade de 1/6 para cada uma das possíveis faces. É através do cálculo desses casos elementares que podemos calcular a probabilidade de eventos mais sofisticados e complexos utilizando propriedades da Probabilidade.

Uma ressalva interessante, uma vez que mencionamos a ligação da Probabilidade com os jogos de azar, é justamente o fato de que a Probabilidade foi por muito tempo considerado um ramo menor ou desprestigiado da Matemática, mesmo tendo sido objeto de interesse de grandes nomes da Matemática como Blaise Pascal, Pierre Fermat, Christian Huygens e Jacques Bernoulli, além do já mencionado Laplace.

Outra perspectiva que infelizmente não é devidamente explorada pelos documentos educacionais analisados é a frequentista. Tal concepção deriva do cálculo das frequências relativas de ocorrências de sucessos provenientes de um evento em estudo a partir de repetidos experimentos. A característica mais notável dessa concepção é o fato de que o valor obtido do cálculo é proveniente de um processo de experimentação

Se considerarmos um determinado evento em estudo que chamaremos de A e as ocorrências de um sucesso específico de X, sendo que a quantidade de vezes que A ocorre é n_A e a quantidade de ocorrências bem sucedidas é n_X, como n_A é o total de repetições do experimento, então $n_A \geq n_X$. A razão frequencial ou a frequência relativa de que X ocorra, dada por n_A/n_X, tende a um limite à medida que o número total de experimentações tenda ao infinito, ou seja, $P(X) = \lim_{n_A \to \infty} \frac{n_X}{n_A}$. Logo, nessa concepção o valor da probabilidade é dado pela frequência relativa dos sucessos obtidos na realização de um experimento.

Carvalho e Oliveira (2002) mencionam em seu trabalho um curioso experimento computacional de Godino que simulou uma sequência de 14.000 lançamentos de uma moeda e constatou que a frequência de obtenção de caras era $50{,}266429\%$, o que é muito próximo de $1/2$. Tal experimento exemplifica muito bem como quanto maior o número de repetições, maior a proximidade entre a probabilidade calculada com base na verificação dos resultados do experimento, ou “a posteriori”, e a probabilidade calculada segundo a teoria clássica, sem que haja a manipulação experimental, ou “a priori”.

Em paralelo, o experimento exemplifica a impossibilidade de avaliar a probabilidade com precisão, uma vez que embora com infinitos experimentos possamos alcançar a probabilidade exata, no mundo concreto esse número de experimentos é sempre limitado. Nesse caso, Carvalho e Oliveira (2002) lembram que existem outros recursos da Probabilidade e Estatística que podem suprir essas limitações como a Lei dos Grandes Números.

Ao longo do tempo a teoria clássica da probabilidade foi sendo aprimorada até os dias atuais em que com o trabalho de Kolmogorov traduzido para o inglês com o título "Foundations of the theory of probability" e publicado em 1933 deu origem à teoria axiomática. Utilizando a Teoria dos Conjuntos, Kolmogorov define a probabilidade como uma função em um espaço amostral E associado a um experimento aleatório A como um subconjunto formado pelos sucessos de E. Assim, a função P definida sobre A é uma medida de probabilidade de E se três condições forem observadas:

(i) Todo sucesso $S \in A$ corresponde a um número $P(S)$, tal que $0 < P(S) < 1$;

(ii) A probabilidade do sucesso certo é dado por $P(E) = 1$;

(iii) A probabilidade de um sucesso impossível é dado por $P(E) = 0$.

Logo, a teoria axiomática surgiu em oposição às restrições existentes na concepção clássica de Laplace, em que a equiprobabilidade para os casos favoráveis e número finito de elementos na composição do espaço amostral. Tais limitações tornaram-se um problema quando se passou a observar fenômenos que não eram equiprováveis ou finitos.

Por fim, Carvalho e Oliveira (2002) também colocam que podemos:

> (...) interpretar a probabilidade de forma subjetiva, como expressão da crença ou percepção pessoal. Trata-se de medir a confiança que um indivíduo expressa sobre a veracidade de um fenômeno levando em conta sua própria experiência ou conhecimento sobre o tema da situação em estudo. Neste caso, diferentes pessoas podem atribuir diferentes valores de probabilidade para um mesmo sucesso. (CARVALHO e OLIVEIRA, 2002, pg. 4)

Ainda que a concepção subjetiva não tenha um caráter propriamente matemático ou experimental, mas sim muito centrada na percepção do indivíduo, é tipicamente encontrada em jogadores de jogos de azar.

Gal (2005) aponta para a importância dos estudantes se familiarizarem com as diferentes formas de cálculo da probabilidade de um evento, para que possam amplamente compreender as afirmações probabilísticas feitas por outras pessoas, poderem por conta própria gerar estimativas sobre a probabilidade de eventos e ter boas condições de comunicar suas ponderações.

É destacado por Gal (2012) que os estudantes tendem a estimar utilizando-se de certos métodos, sem necessariamente pensar sobre aleatoriedade, variação, independência ou os riscos que podem surgir ao utilizar caminhos diferentes daqueles provenientes de aspectos formais.

O elemento ou o bloco linguagem faz alusão à importância que Gal (2005) estabelece à comunicação clara e eficiente de declarações probabilísticas, de forma que o estudante tenha domínio sobre a "linguagem do acaso" e familiaridade com a terminologia característica da probabilidade.

O domínio da probabilidade requer familiaridade com vários conceitos complexos, especialmente algumas das Grandes Ideias, como variabilidade, aleatoriedade, independência e previsibilidade e certeza, e também a ausência dessas duas últimas, a imprevisibilidade e a incerteza, além da chance e do risco. Tais termos são abstratos e geralmente não têm definições precisas que possam ser explicadas em linguagem simples ou através de referências a objetos concretos e tangíveis. Assim, o entendimento do significado desses conceitos não é trivial e só pode ser alcançado após um processo cumulativo.

As palavras que descrevem esses conceitos abstratos são abundantes e usadas de diferentes maneiras, dentro e fora da sala de aula. Os estudantes também devem ter em mente que, como ocorre em outras áreas do ensino de Matemática, os significados de alguns dos termos usados nas aulas geralmente são mais restritos ou precisos do que quando usados no discurso cotidiano.

Os termos usados em uma aula de Matemática podem não necessariamente carregar a mesma carga semântica implícita no discurso cotidiano e essa situação pode implicar em problemas de compreensão dos alunos e aumentar a chance de desentendimentos ou ambiguidades nas discussões em sala de aula. Assim, cabe aos professores atentar para a importância de uma explicação dos conceitos abstratos em linguagem clara e sua utilização de maneira consistente, mas também monitorar nos estudantes a forma como tais termos são entendidos e empregados na comunicação.

O elemento do Contexto faz referência a um “conhecimento do mundo”. Isso se deve ao fato de que a compreensão do contexto é pedagogicamente importante na medida em que ajuda a explicar por que há uma necessidade de saber mais sobre a probabilidade ou a incerteza em diferentes circunstâncias da vida. Essa compreensão é uma chave para motivação do estudo de probabilidades e incorporação do aprendizado em um contexto socialmente significativo.

Gal (2005) sugere dez áreas-chave de exemplos úteis que podem ser usados para ilustrar a presença e a importância da aleatoriedade, variação, probabilidade e risco, como mostrado no Quadro 2.

Quadro 2: 10 áreas-chave de exemplos úteis segundo modelo de Iddo Gal.

Nº	Áreas-chave de exemplos úteis
1	O mundo natural e físico (as condições climatéricas, evolução);
2	Processos tecnológicos (controle de qualidade, fabricação);
3	Comportamento humano (serviços, esportes, transportes);
4	Medicina, saúde pública (doenças genéticas, riscos relacionadas com o tabagismo);
5	Justiça e crime (correspondência de impressões digitais ou DNA);
6	Finanças e negócios (mercados de investimento, seguros);
7	Pesquisa e estatística (amostragem e inferência estatística);
8	A política de interesse público, previsão (imunização);
9	Jogos de azar e apostas (lançamento de dados, as loterias);
10	Decisões pessoais (uso de cintos de segurança, ser aceito em uma faculdade)

Fonte: Gal (2005, p.51, traduzido pelo autor)

A sugestão desses temas busca retratar a onipresença do acaso e aleatoriedade em toda a série de contextos da vida em diferentes funções e atividades humanas, tais como trabalhadores, administradores, gestores e planejadores, famílias, os consumidores, os pacientes, profissionais da saúde, estudantes, cidadãos, ambientalistas, ativistas comunitários, esportistas e entusiastas de esportes, investidores e acionistas, jogadores e analistas de jogos, entre muitos outros.

O último elemento do modelo de letramento probabilístico apresentado por Gal (2005) releva a capacidade que o estudante deve desenvolver de questionar criticamente uma declaração de probabilidade, de incerteza, ou uma estimativa probabilística. O autor destaca a importância de ser capaz de formular perguntas críticas não somente de forma qualitativa, mas incluindo aquelas sobre as declarações quantitativas, pelo fato de que esse é um meio do aluno aprimorar sua capacidade crítica e poder encontrar o propósito segundo o qual um autor de uma declaração de probabilidade a fez: Qual é seu objetivo? Qual seria seu raciocínio por trás dessa proposta?

Isso é mais ainda necessário se considerarmos que a probabilidade está intimamente ligada a uma ampla gama de situações do mundo real e processos em ambas as formas (implícitas e explícitas), logo, o estudante deve ser capaz de efetivamente saber lidar com as situações que requerem interpretação de declarações probabilísticas, a geração de mensagens ou a tomada de decisão.

Diante isso Gal (2005) sugere que uma discussão no sentido de avaliar declarações probabilísticas em contextos interpretativos pode ser feita com auxílio das questões apresentadas no Quadro 3.

Quadro 3: Perguntas críticas para interpretação de declarações probabilísticas segundo modelo de Iddo Gal.

Breve descrição
1. Contexto. Qual é a natureza do domínio sobre o qual uma declaração probabilística está sendo feita? Até que ponto o problema em questão envolvem aleatoriedade, independência, variação, entre outros?
2. Fonte. Quem é a fonte de uma reivindicação probabilística (por exemplo, organização, pessoa) e quais são suas qualificações, conhecimentos, características e motivações?
3. Processo. Como essa fonte chegou à reivindicação feita? Que tipos de fontes de informação foram usadas (por exemplo, uma análise "clássica" de eventos equiprováveis; informações freqüentisticas ou dados relacionados, como estatísticas oficiais ou resultados de estudos; estimativas subjetivas)? Qual é a relevância desses dados para o problema em questão e qual é a qualidade deles? Se várias fontes foram usadas, como as informações foram integradas ou os conflitos entre as fontes de dados foram resolvidos?
4. Significado da mensagem. Qual é o significado da afirmação probabilística (numérica ou verbal) e ela deve ser traduzida ou representada de outra maneira

para ser mais clara? A que exatamente se refere a declaração de probabilidade? (A questão do significado pode surgir quando uma declaração pode confundir $P(A \vee B)$ e $P(B \vee A)$, ou quando uma fonte usa frases de probabilidade vagas.)
5. Interpretação reflexiva. Como a mensagem deve ser interpretada? Deveria ser questionado, dado o que se sabe sobre o contexto, a fonte, o processo de derivação e a clareza do significado da mensagem? Quão razoáveis são as estimativas feitas à luz do conhecimento do mundo? É possível que as próprias suposições e conhecimentos possam estar com defeito? Ou é possível que a probabilidade tenha sido superestimada ou subestimada pela fonte que a gerou, devido a interesses egoístas, motivos ocultos, necessidade de errar por precaução, aversão ao risco, etc?

Fonte: Gal (2005, p.51, traduzido e adaptado pelo autor)

As perguntas estão relacionadas aos elementos cognitivos do modelo de letramento probabilístico, mas outras questões poderiam ser feitas e também não se supõe que todas as perguntas listadas sejam relevantes em todas as circunstâncias.

Com o aporte teórico apresentado, temos os subsídios para articular na análise das fontes documentais curriculares; conteúdo exposto no próximo capítulo.

3. ENSINO DE PROBABILIDADE NOS DOCUMENTOS CURRICULARES E MATERIAIS PARA O ENSINO MÉDIO

Neste capítulo apresentamos uma análise sobre o que é proposto para o ensino de probabilidade nas orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio - PCN+ (BRASIL, 2002), na Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2018) e no Currículo do Estado de São Paulo – CESP (SÃO PAULO, 2012).

3.1 Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+ Ensino Médio)

Nas orientações curriculares complementares aos Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio, denominado como PCN+ (BRASIL, 2002, p.112), é enfatizada a importância da resolução de problemas como caminho para o ensino da Matemática, devido ao processo de ‘pensar e mobilizar’. O documento não especifica uma concepção de resolução de problemas, mas enfatiza que esta modalidade de tarefa não pode ser simples exercícios, técnicas ou algoritmos. Pelo contrário, o conteúdo das tarefas devem instigar o aluno a analisar e ponderar sobre diferentes formas de abordar o problema e os diversos caminhos para a resolução. Adotar essa postura ajuda o aluno a adquirir mais autonomia e criticidade para perseverar na busca por uma solução.

Nos PCN+ (BRASIL, 2002) são elencadas três competências estabelecidas como metas para serem almejadas ao longo do Ensino Médio e como complementação do Ensino Fundamental. A primeira é a representação e comunicação, que abrange a leitura, a interpretação e a elaboração de comunicação escrita tanto na língua portuguesa como na linguagem matemática, sejam equações, gráficos, diagramas, entre outros, bem como a correta utilização de instrumentos de medição e de desenho.

Investigação e compreensão é a segunda competência caracterizada pela resolução de situações-problema mediante conceitos e procedimentos, ou seja, o ‘fazer e pensar das ciências’. A última competência é a contextualização no âmbito sociocultural, em que a Matemática é utilizada na interpretação e intervenção da realidade, de forma de crítica e transformadora.

Embora tais competências não tenham ligação explícita com as ideias de Gal (2005, 2012), indiretamente elas associam-se ao modelo de letramento probabilístico. A ‘investigação e compreensão’ tem associação direta com a ‘Linguagem’, bem como a ‘contextualização’ no âmbito sociocultural com os elementos cognitivos ‘Contexto e Questões Críticas’, além dos ‘elementos de disposição’.

São três eixos estruturadores (álgebra, geometria e análise de dados) que compõem as orientações curriculares complementares aos Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio. A análise de dados abrange as unidades temáticas de estatística, contagem e probabilidade. A abordagem dos conteúdos de estatística e probabilidade ocorre mediante a manipulação de dados e informações considerando estritamente conjuntos finitos e trabalhando com procedimentos que permitem chegar a conclusões com um grau de incerteza controlado. Para a probabilidade, é mencionada a importância de confrontar os conceitos de probabilidade clássico e a probabilidade frequentista, cujo cálculo das probabilidades envolve um processo de experimentações.

Nos PCN+ (BRASIL, 2002) destaca-se ainda que a Estatística e a Probabilidade devem ser abordadas "em questões do mundo real, mais especificamente, aquelas provenientes de outras áreas" (BRASIL, 2002, p.126).

A contagem é um recurso instrumental para o desenvolvimento do raciocínio combinatório, de forma que o aluno possa ter autonomia para decidir a forma mais apropriada para organizar informações e quantificar determinados casos possíveis e espaços amostrais mediante a identificação de regularidades e padrões, evitando o uso mecanizado de fórmulas matemáticas.

3.2 Currículo do Estado de São Paulo

A partir de 2008, o estado de São Paulo, através da Secretaria da Educação propôs um currículo básico para as escolas da rede estadual nos níveis de Ensino Fundamental (Ciclo II) e Ensino Médio em sua Proposta Curricular (SÃO PAULO, 2008). Em 2010, com algumas mudanças, o referido documento passou a ser denominado de Currículo do Estado de São Paulo -

CESP, com a sua primeira edição atualizada em 2012 (SÃO PAULO, 2012). Em termos educacionais, o CESP tem como propósito orientar a ação docente segundo o desenvolvimento de competências e habilidades dos estudantes.

De maneira diferente dos PCN (BRASIL, 1998), o CESP não destina um bloco temático exclusivo para Probabilidade, Combinatória e Estatística, pois os conteúdos pertinentes a estes temas estão distribuídos nos blocos Números, Geometria e Relações. Dessa forma, o CESP estabelece uma estruturação na forma de quadro de conteúdos e habilidades por série e ano, de acordo com o segmento escolar, subdivididos em quatro bimestres.

Ao longo do Ensino Fundamental II, os conteúdos de probabilidade e combinatória estão distribuídos esparsamente de forma a não estabelecer claramente a conexão de um tema com o outro. Isso também ocorre com os conteúdos associados com estatística, como leitura e construção de gráficos e tabelas, medidas de tendência central e construção de gráficos de setores ou barras, que não são distribuídos de modo a promover de maneira eficiente a construção do raciocínio estatístico.

O Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2012) destaca o uso da problematização e contextualização, seja nas relações interdisciplinares, ou em temáticas transdisciplinares, e também a resolução de problemas como recursos de grande valor para o aprendizado dos alunos. Especificamente sobre a problematização, é colocado que “problematizar é explicitar perguntas bem formuladas a respeito de determinado tema. E, uma vez formuladas as perguntas, para respondê-las, é necessário discernir o que é relevante e o que não é relevante no caminho para a resposta” (SÃO PAULO, 2012, p.46-47).

A contextualização na forma de tratar conteúdos é vista como algo que deve ir além de problemas meramente estereotipados cuja resolução consista em aplicar procedimentos utilizando os dados do enunciado e com eles encontrar o que é pedido, os problemas devem constituir um meio para exercitar a capacidade de inquirir do aluno em cada situação concreta, desenvolvendo seu senso crítico.

Os conteúdos que primeiramente são abordados são aqueles associados com a estatística e a combinatória no 4º bimestre do 6º ano. Mais especificamente, são trabalhados a “leitura e construção de gráficos e tabelas visando a compreensão das informações transmitidas, como construir gráficos elementares (de barras, linhas ou pontos) em escala e o cálculo e interpretação de informações vinculadas às medidas de tendência central” (SÃO PAULO, 2012, p.58). Com relação à contagem, problemas de contagem são abordados para uma compreensão básica do processo de contagem, visando a compreensão da ideia do Princípio Multiplicativo de contagem e utilização de diagramas de árvore.

Em seguida, no 3º bimestre do 7º ano, temos o primeiro conteúdo de probabilidade estudado: “problemas simples que envolvam a ideia básica de probabilidade como uma porcentagem que represente a possibilidade de ocorrência de um evento” (SÃO PAULO, 2012, p.60). A construção de gráficos de setores também é abordada, mas atrelada à utilização do conceito de razão em diversos contextos.

Problemas de contagem são novamente trabalhados no 1º bimestre do 8º ano (SÃO PAULO, 2012, p.61), mas como um item integrante do conteúdo de "potenciação", sem que seja vinculada uma habilidade específica.

Por fim, no 4º bimestre do 9º ano (SÃO PAULO, 2012, p.64), a probabilidade é explicitamente apresentada como "problemas de contagem e introdução à probabilidade" e tem duas habilidades vinculadas: resolver problemas envolvendo processos de contagem, especialmente com o Princípio Multiplicativo, e resolver problemas que envolvam ideias simples sobre probabilidade.

No Ensino Médio, os conteúdos de Combinatória e Probabilidade são apresentados uma única vez, sendo nesse momento diretamente associados no 3º bimestre do 2º ano. Vinculados à combinatória temos os itens "Princípios Multiplicativo e Aditivo" e "arranjos, combinações e permutações" atrelados à habilidade de usar os raciocínios combinatórios para resolução de situações problemas de contagem que justamente revelarão a quantidade de possibilidades de ocorrência de um evento específico (SÃO PAULO, 2012, p.68).

Como dito anteriormente, a intenção é que se estabeleça um raciocínio ajustado à situação e não a mera aplicação de fórmulas. A Probabilidade está presente nos seguintes itens: probabilidade simples, probabilidade da reunião e/ou da intersecção de eventos, probabilidade condicional e distribuição binomial de probabilidades: o triângulo de Pascal e o binômio de Newton.

As habilidades almejadas seriam a resolução de problemas que envolvam o cálculo de probabilidades de eventos simples repetidos, portanto eventos equiprováveis, podendo ser exploradas as propriedades do binômio de Newton e do triângulo de Pascal. Igualmente, a Estatística é trabalhada de forma única no 4º bimestre do 3º ano (SÃO PAULO, 2012, p.70) segundo os itens "Gráficos estatísticos: cálculo e interpretação de índices estatísticos", "Medidas de tendência central: média, mediana e moda", "Medidas de dispersão: desvio médio e desvio padrão" e "Elementos de amostragem".

A intenção é desenvolver no aluno capacidade de construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências a partir de dados oriundos de amostras estatísticas, além de calcular e interpretar medidas de tendência central e medidas de dispersão de uma distribuição de dados. O aluno deve também estar apto a analisar e interpretar índices estatísticos de diferentes tipos, bem como reconhecer conjuntos de dados distribuídos normalmente.

No Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2012) não está explícito qual a finalidade da abordagem da probabilidade ou combinatória para os estudantes. Como em linhas gerais o documento defende que o aluno encontre "autonomia da vida adulta e profissional" (SÃO PAULO, 2012, p.9), podemos inferir que espera-se que os conteúdos preparem o aluno para o pleno exercício de atividades profissionais e interpretação do mundo ao seu redor, por exemplo.

3.3 Caderno do Professor e o Caderno do Aluno

O Caderno do Professor é considerado um material de apoio ao Currículo Oficial do Estado de São Paulo, com a primeira edição atualizada do Currículo do Estado de São Paulo sendo publicada em 2012, a formatação dos Cadernos do Professor e do aluno foi alterada, fazendo com que cada ano do Ensino Fundamental II e do Ensino Médio tivessem dois volumes, um para cada semestre. A última versão do material tinha validade prevista até o ano de 2017, sendo prorrogada para 2018. Em 2019, foi iniciada a construção do novo Caderno do Professor e do Aluno, caracterizando 2019 com um ano de transição, um vez que os materiais de apoio devem ser reconstruídos à luz da BNCC (BRASIL, 2018) e do Currículo Paulista. Esse novo material, chamado de SP FAZ ESCOLA, é uma versão alterada do material anterior, notoriamente mais condensada.

O material vigente até 2018, contém orientações didáticas pedagógicas em oito Situações de Aprendizagem em cada um dos seus volumes. Assim, os conteúdos de Combinatória e Probabilidade presentes no segundo volume do segundo ano do Ensino Médio são abordados nas quatro primeiras Situações de Aprendizagem (S1, S2, S3 e S4). Custódio (2017) desenvolveu uma pesquisa qualitativa, de natureza documental, na qual analisou essas Situações de Aprendizagem, conforme conteúdo descrito no Quadro 4:

Quadro 4: Conteúdo das Situações de Aprendizagem, de S1 a S4.

	Título	Objetivo
S1	Probabilidade e proporcionalidade: No início era o jogo...	Explorar a noção teórica de Probabilidade por intermédio de jogos pedagógicos
S2	Análise combinatória: Raciocínios aditivo e multiplicativo	Resolução de situações-problema que envolvam simultaneamente raciocínio combinatório e cálculo de probabilidades
S3	Probabilidades e raciocínio combinatório	Problemas que envolvam o cálculo de probabilidades sob dois aspectos: a independência de dois ou mais eventos para os quais se quer calcular a Probabilidade e as diferentes possibilidades de ordenação para ocorrência simultânea
S4	Probabilidades e raciocínio combinatório: o binômio de Newton e o triângulo de Pascal	Cálculo de probabilidade e o raciocínio combinatório envolvendo o Binômio de Newton e o Triângulo de Pascal

Fonte: Custódio (2017, p. 42).

A Situação de Aprendizagem S1 consiste em um conjunto de 10 tarefas, sendo que a noção teórica da Probabilidade é explorada pedagogicamente com jogos e rememorando o aspecto histórico de que a Probabilidade se desenvolveu quando associada diretamente aos jogos de azar na busca pela melhor estratégia ou condições para que o jogador obtivesse mais vitórias ou vantagens.

A associação da Probabilidade aos jogos de azar não é negativa em si, mas por ser exclusiva nesse sentido, não abre a possibilidade de explorar outros contextos que seriam oportunidades ricas de aprendizado aos alunos. Logo, a Situação de Aprendizagem S1 não atende plenamente o elemento cognitivo de Contexto.

Custódio (2017) destaca em sua análise que o termo ‘sorteio’ é utilizado com conotação clássica, na qual, a probabilidade é expressa na forma fracionária (relação parte – todo), ignorando a concepção do sorteio como uma forma de experimento aleatório. Isso não colabora para o desenvolvimento do letramento probabilístico proposto por Gal (2005), uma vez que compromete os elementos cognitivos das Grandes Ideias e dos cálculos probabilísticos, dada a limitação conceitual e de cálculo clássico da probabilidade.

Posteriormente, Custódio (2017) mostrou que duas tarefas (problemas 1 e 2) foram construídas de forma que o aluno é apresentado aos registros figurais na forma de tabela de dupla entrada, bastante comum no contexto escolar, e na forma de diagrama de árvore. Embora seja louvável a utilização dos recursos figurais nas atividades, pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2009), para que a conversão entre registros seja bem sucedida, é necessário que o conteúdo das informações dispostas na tabela de dupla entrada seja interpretado de forma que exista uma coordenação na mudança de registro permitindo a continuidade do preenchimento das informações necessárias.

A terceira tarefa envolve o clássico processo de lançamento de dados, mais especificamente dois, a fim, novamente, de aplicar a concepção clássica de probabilidade, cujo cálculo é estabelecido pela razão entre a quantidade de configurações esperadas e o total de configurações possíveis. Nesse problema temos mais uma vez o uso de uma temática muito convencional no estudo da probabilidade (lançamento de dados) para tratar estritamente da definição clássica de probabilidade, o que entra em choque com o elemento cognitivo de Cálculo de Probabilidades na proposta de Gal (2005).

Especialmente na Situação de Aprendizagem S1, como aponta Custódio (2017), os problemas de 4 a 10 não trabalham com o conceito de aleatoriedade, o que é um aspecto da Situação de Aprendizagem S1 que compromete o elemento cognitivo das Grandes Ideias de Gal (2005) e que colabora para que os alunos não compreendam adequadamente fatos como o de que experimentos realizados sob mesmas condições não produzem necessariamente os mesmos resultados, além de prejudicar a interpretação dos alunos sobre outros conceitos probabilísticos, como variabilidade, e o de alguns experimentos realizados. Esse mesmo subconjunto de problemas possui a mesma deficiência observada no problema 3, que consiste em utilizar somente o enfoque clássico de cálculo de probabilidades, ainda sem destacar a condição de equiprobabilidade. Logo, os problemas de 4 a 10 não atendem os elementos cognitivos das Grandes Ideias e do Cálculo de Probabilidades segundo a proposta de Gal (2005).

A Situação de Aprendizagem 2 concentra-se na Combinatória, especialmente trabalhando com a resolução de situação-problema, utilizando estratégias de raciocínio combinatório, sem um uso intensivo de fórmulas. Serão trabalhados ao longo da Situação 38 problemas que envolvem a contagem de agrupamentos de elementos. São problemas que são resolvidos com operações entre naturais, quase sempre envolvendo a multiplicação.

Desses 38 problemas somente dois, problemas 37 e 38, trabalham efetivamente com o Cálculo de Probabilidades em uma mesma situação, 12 pessoas sentadas em uma arquibancada.

No problema 37 "Uma das pessoas sentadas será sorteada ao acaso. Qual é a probabilidade de que seja sorteado um homem da fileira da frente?" Note que resolução não envolve propriamente o raciocínio combinatório, apenas a aplicação da definição clássica na forma da razão entre o número de homens sentados na fileira da frente (4) em relação ao total de pessoas (12). Já no problema 38 "Se forem sorteadas duas pessoas, uma da fileira da frente e outra da fileira de trás, qual é a probabilidade de que sejam sorteadas duas pessoas de óculos?" A resolução envolve dois eventos independentes, um com probabilidade de 2/6 e outro com 2/6, logo probabilidade solicitada é 2/6x2/6 = 1/9. (SÃO PAULO, 2014-2017, p.43).

Com relação aos registros de representação semiótica, esse conjunto de problemas de análise combinatória da Situação de Aprendizado S2 mobilizou e coordenou os seguintes registros: registros de língua natural nos enunciados e respostas dos problemas; registros numéricos com a aplicação do Princípio Aditivo e Multiplicativo tanto com a utilização do fatorial, como sem; registro algébrico na aplicação de fórmulas pertinentes aos agrupamentos e registro figural pela utilização do diagrama de árvores.

Do ponto de vista do letramento probabilístico segundo Gal (2005), o conjunto de problemas não trouxeram contribuições significativas, exceto pelos problemas 37 e 38 que associaram o Cálculo de Probabilidades com a combinatória.

Na Situação de Aprendizagem 3, há um conjunto de 10 problemas em que o Caderno do Professor não utilizou a fórmula convencional da probabilidade condicional nas resoluções, já que pretende mobilizar raciocínio combinatório em detrimento de um uso ostensivo de fórmulas. No entanto, ao propor "identificar as semelhanças e as diferenças entre os diversos casos de probabilidade, no que diz respeito à ordenação ou não dos elementos que compõem os eventos" (SÃO PAULO, 2014-2017, p.44), acaba por não explicitar o que seriam as diferenças entre os diversos casos de probabilidade.

Custódio (2017) destaca que nenhum dos 10 problemas da Situação de Aprendizagem 3 valorizou o diagrama de árvore como forma de registro figural em suas resoluções, o que é uma oportunidade perdida de aproveitar esse recurso, visto que há congruência articulando a fórmula da probabilidade condicional com o desenvolvimento uma estrutura de árvore de probabilidades na versão completa.

Como nas situações anteriores, mais uma vez o enfoque em termos de concepção probabilística foi clássico. No entanto, apenas o problema 8 teve em sua resolução o cálculo da probabilidade baseado na utilização de eventos complementares, mas sem um devido tratamento conceitual.

Com relação ao letramento probabilístico, os problemas 5, 6 e 7 contribuem com os elementos cognitivos do Contexto e das Questões Críticas ao discutir o jogo de loteria oficial Mega-Sena, chamando a atenção para aspectos críticos sobre o quanto vale a pena fazer apostas.

Por fim, na Situação de Aprendizagem 4, o bloco de atividades objetiva que o aluno interprete o resultado da probabilidade de ocorrência de um evento com n repetições de um mesmo experimento condicionado e de forma binomial (há apenas duas possibilidades, sucesso ou fracasso).

Do ponto de vista do letramento probabilístico o elemento cognitivo do Contexto não é bem atendido, já que não há instruções claras para o professor sobre o experimento probabilístico.

3.4 Base Nacional Curricular Comum

A Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018) é um documento cuja previsão de sua elaboração se encontrava registrada desde a Constituição Federal de 1988, sendo um conjunto de orientações que norteariam os currículos das escolas públicas e privadas de ensino básico do Brasil. Antes, à medida que um estado era mais organizado, ele elaborava algum documento, seja na forma de guias curriculares, parâmetros curriculares, currículos, segundo as interpretações realizadas pelas diretrizes curriculares do Conselho Nacional de Educação e dos seus respectivos conselhos estaduais ou municipais.

O próprio PCN era um conjunto de orientações genéricas que deveriam ser ajustadas às realidades de cada região para servir de subsídio para construção dessas documentações em cada estado ou município. Portanto, a BNCC (BRASIL, 2018) tem a pretensão de ser um documento amplo e unificado para abranger todas as regiões do país e é o documento mais atual no cenário educativo brasileiro.

Segundo a BNCC (BRASIL, 2018, p. 8), a competência seria o resultado da mobilização de quatro diferentes aspectos vinculados à vida cotidiana, à cidadania e à relação com o mercado de trabalho: o conhecimento, na forma de conceitos e procedimentos; habilidades, sejam elas práticas, de manipulação de conhecimentos (cognitivas) ou de interação interpessoal com indivíduos ou grupos sociais (socioemocionais); e atitudes e valores do indivíduo frente a sociedade.

Ao longo do documento são mencionadas dez competências gerais, de caráter amplo, que são tidas como necessárias para os alunos garantirem o aprendizado essencial por, justamente, concatenar direitos de aprendizagem e desenvolvimento em termos pedagógicos. Tais competências gerais inter-relacionam e resultam no tratamento didático que promove a edificação de conhecimentos, desenvolvimento de habilidades e construção de atitudes e valores ao longo de toda a Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio). Em 2017, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei nº 9.394/1996) foi alterada através da Lei nº 13.415/2017 e a legislação brasileira passa a adotar como nomenclaturas das finalidades da educação os termos direitos e objetivos de aprendizagem, bem como competências e habilidades.

As habilidades correspondem às aprendizagens essenciais que devem ser promovidas aos alunos no ambiente escolar, estando associadas às competências específicas de cada área do conhecimento. São também denominadas por uma codificação estruturada, um código alfanumérico. Uma habilidade é composta de pelo menos três elementos: verbos esclarecem os processos cognitivos envolvidos na habilidade; complementos do verbo, que pormenorizam quais seriam os conhecimentos trabalhados ou os objetos do conhecimento; e os modificadores que podem se referir tanto aos verbos quanto aos complementos e especificar ainda mais os objetivos de aprendizagem esperados.

De forma complementar, cada área possui ainda competências específicas que são orientativas para a elaboração dos itinerários formativos relativos a essas correspondentes áreas. Elas estão adequadamente configuradas para o Ensino Fundamental e para o Ensino Médio, conforme as especificidades de formação dos alunos:

> A área de Matemática, no Ensino Fundamental, centra-se no desenvolvimento da compreensão de conceitos e procedimentos em seus diferentes campos, visando à resolução de situações-problema. No Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem utilizar conceitos, procedimentos e estratégias não apenas para resolver problemas, mas também para formulá-los, descrever dados, selecionar modelos matemáticos e desenvolver o pensamento computacional, por meio da utilização de diferentes recursos da área (BRASIL, 2018, p. 470).

No Ensino Fundamental são eleitas oito competências específicas, sendo fortemente destacada a importância do Letramento Matemático e dos processos matemáticos. Reconhece-se na primeira competência sua importância para o desenvolvimento do pensamento matemático, bem como o pensamento crítico:

> O Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. É também o letramento matemático que assegura aos alunos reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (fruição) (BRASIL, 2018, p. 266).

Sobre os processos matemáticos, são apontados a resolução de problemas, processos de investigação, o desenvolvimento de projetos e a modelagem como atividade matemática privilegiada, por serem eficientes na desenvolvimento do raciocínio, representação, comunicação e argumentação matemáticos, além do pensamento computacional.

No Ensino Médio, dada a sua continuidade do Ensino Fundamental, tais aprendizagens (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) são ainda trabalhados, mas de forma muito mais integrada e contextualizada à realidade. Para tal, o documento lança mão de utilizar um conjunto de pares de ideias fundamentais diretamente associados e importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático em vários campos, como Álgebra, Aritmética, Geometria, Probabilidade e Estatística, Grandezas e Medidas. Esses pares de ideias fundamentais são: variação e constância; certeza e incerteza; movimento e posição; relações e inter-relações. Cabe ressaltar que tais ideias não são importantes somente para a Matemática, mas também para outras áreas do conhecimento, o que é uma oportunidade de interdisciplinaridade relevante.

O par variação e constância está relacionado com observar, representar, descrever padrões que podem ou não se alterar, reconhecendo as características comuns e diferentes do objeto em questão. Esse par está associado com diversas definições e propriedades na Matemática, o que evidencia sua importância, além de que quando associado a imaginação de cenários pode mobilizar processos de abstração e generalização, exercitando a criatividade na Matemática.

A certeza e incerteza é um par frequentemente presente na investigação de fenômenos em que há a aleatoriedade, como a medição de grandezas no mundo físico, bem como estimativas e inferências estatísticas. Ainda sim, não está restrita a esse repertório que por si só já é amplo. Na Matemática, a validação/demonstração de ideias consiste em uma busca de certeza e tanto a certeza como a incerteza são necessárias para construção de conjecturas e previsões, além da sua importância para comunicação social de informações, o que envolve elementos da Estatística e suas representações.

O par movimento e posição está envolvido tanto na localização de entes matemáticos como reconhecimento de padrões na natureza, seja como primeiro caso com a localização de números em retas, de figuras geométricas ou tridimensionais, na direção e sentido de vetores, na formação de ângulos, paralelismo e perpendicularidade, ou no segundo caso, em transformações geométricas isométricas (que conservam as medidas) e homotéticas (que mantém as formas), bem como características e padrões das distribuições de dados. É um par que possui também muitas contextualizações com a realidade, trabalhando com mapeamentos ou utilização de GPS, além de ideias importantes da cartografia e na movimentação humana em transportes.

Por fim, as relações e inter-relações podem ser contextualizadas com a ideia de proporcionalidade de grandezas ou interdependência. Por tal aspecto, as relações estão diretamente relacionadas com a criação da noção de função. Já a concepção de inter-relação tem maior apelo com áreas como a Estatística e a Probabilidade, além da Álgebra e da Geometria. Um exemplo para este caso seria trabalhar a medida como uma função que associa um número real positivo a um comprimento, curva, área ou volume. As medidas estatísticas em uma pesquisa são inter-relações que pode inclusive contribuir para ampliar o repertório e a compreensão de outros tópicos matemáticos.

Para o Ensino Médio, são propostas pela BNCC (BRASIL, 2018) cinco competências específicas que podem ter uma mesma habilidade vinculada a mais de uma competência, de maneira que ela acabou sendo vinculada à competência específica com que tem mais afinidade. O documento ainda ressalta que possam haver alunos não tenham plena compreensão dos conceitos tratados no Ensino Fundamental, as habilidades propostas devem ser desenvolvidas no trabalho escolar, pois entende-se que o processo investigativo em que os alunos estarão engajados possibilitará o atendimento dos objetivos de aprendizagem previstos.

Embora as intenções da BNCC (BRASIL, 2018) sejam de orientar de forma abrangente as unidades escolares do país

> (...) o currículo do ensino médio será composto pela Base Nacional Comum Curricular e por itinerários formativos, que deverão ser organizados por meio da oferta de diferentes arranjos curriculares, conforme a relevância para o contexto local e a possibilidade dos sistemas de ensino, a saber:
> I – linguagens e suas tecnologias;
> II – matemática e suas tecnologias;
> III – ciências da natureza e suas tecnologias;
> IV – ciências humanas e sociais aplicadas;
> V – formação técnica e profissional (LDB, Art. 36; ênfases adicionadas) (BRASIL, 2018, p. 475).

Logo, as diferentes demandas que uma região pode possuir são abarcadas pela configuração dos itinerários formativos que devem ser contextualizados conforme a região, as culturas locais, as necessidades de formação, seja de uma disciplina ou de formação técnica-profissionalizante, e as demandas e aspirações dos estudantes. Para que isso seja feito, é defendido que se construa um ambiente com situações de trabalho mais colaborativas, que se organizem com base nos interesses dos estudantes, favorecendo seu protagonismo e promovendo atividade em grupo como oficinas, clubes, laboratórios, núcleos de estudos, entre outros.

A BNCC (BRASIL, 2018) levou também em consideração a possibilidade de interdisciplinaridade de diferentes áreas do conhecimento, trabalhando com itinerários adaptados denominados como itinerários integrados. No que se refere à Matemática, BNCC (BRASIL, 2018) recomenda:

> (...) aprofundamento de conhecimentos estruturantes para aplicação de diferentes conceitos matemáticos em contextos sociais e de trabalho, estruturando arranjos curriculares que permitam estudos em resolução de problemas e análises complexas, funcionais e não lineares, análise de dados estatísticos e probabilidade, geometria e topologia, robótica, automação, inteligência artificial, programação, jogos digitais, sistemas dinâmicos, dentre outros, considerando o contexto local e as possibilidades de oferta pelos sistemas de ensino (BRASIL, 2018, p. 477).

Convencionalmente, antes da BNCC (BRASIL, 2018), o conceito de probabilidade era abordado apenas no Ensino Médio, e na maioria dos casos, apenas no 2º Ano do Ensino Médio. A maior novidade da BNCC (BRASIL, 2018) com relação ao conteúdo de Probabilidade e Estatística é justamente o trabalho com a Probabilidade e Estatística desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Como apresentado nesse trabalho, documentos educacionais anteriores já propunham um trabalho mais vinculado ao desenvolvimento de um raciocínio matemático em detrimento do uso de fórmulas e a importância de ajudar o aluno a expressar e comunicar informações probabilísticas. Na BNCC (BRASIL, 2018), tais diretrizes são reforçadas e orientadas a propiciar ao aluno do Ensino Fundamental o contato com conceitos de probabilidade através de diferentes estratégias e abordagens significativas.

Nos Quadros 5, 6 e 7 são apresentadas as habilidades almejadas nos cinco anos que compõem os anos iniciais do Ensino Fundamental, nos quatro anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, respectivamente.

Quadro 5: Habilidades da BNCC (BRASIL, 2018) relacionadas com a Probabilidade consideradas nos cinco anos iniciais do Ensino Fundamental.

Código da Habilidade	Descrição da Habilidade
EF01MA20	Classificar eventos envolvendo o acaso, tais como “acontecerá com certeza”, “talvez aconteça” e “é impossível acontecer”, em situações do cotidiano.
EF02MA21	Classificar resultados de eventos cotidianos aleatórios como “pouco prováveis”, “muito prováveis”, “improváveis” e “impossíveis”.
EF03MA25	Identificar, em eventos familiares aleatórios, todos os resultados possíveis, estimando os que têm maiores ou menores chances de ocorrência. (o reconhecimento da variação dos resultados possíveis, como por exemplo: reconhecer que há diferentes respostas para uma pergunta, que há diferentes resultados em sorteio).
EF04MA26	Identificar, entre eventos aleatórios cotidianos, aqueles que têm maior chance de ocorrência, reconhecendo características de resultados mais prováveis, sem utilizar frações.
EF05MA22	Apresentar todos os possíveis resultados de um experimento aleatório, estimando se esses resultados são igualmente prováveis ou não. Cálculo de probabilidade de eventos equiprováveis.
EF05MA23	Determinar a probabilidade de ocorrência de um resultado em eventos aleatórios, quando todos os resultados possíveis têm a mesma chance de ocorrer (equiprováveis).

Fonte: (BRASIL, 2018, p. 278-297).

Quadro 6: Habilidades da BNCC (BRASIL, 2018) relacionadas com a Probabilidade consideradas nos quatro anos finais do Ensino Fundamental.

Código da Habilidade	Descrição da Habilidade
EF06MA30	Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos.
EF07MA34	Planejar e realizar experimentos aleatórios ou simulações que envolvem cálculo de probabilidades ou estimativas por meio de frequência de ocorrências.
EF08MA22	Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.
EF09MA20	Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.

Fonte: (BRASIL, 2018, p. 300-319).

Quadro 7: Habilidades da BNCC (BRASIL, 2018) relacionadas com a Probabilidade consideradas no Ensino Médio.

Código da Habilidade	Descrição da Habilidade
EM13MAT310	Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore.
EM13MAT311	Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade de eventos aleatórios, identificando e descrevendo o espaço amostral e realizando contagem das possibilidades.
EM13MAT312	Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
EM13MAT511	Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, de eventos equiprováveis ou não, e investigar as implicações no cálculo de probabilidades.

Fonte: (BRASIL, 2018, p. 532-541).

Os conjuntos de habilidades referidos anteriormente não devem ser entendidos como limitações rígidas para o trabalho em sala de aula, mas diretrizes. Os professores tem plena liberdade de ir além dessas habilidades e deve ser encarado como louvável que o conteúdo de Probabilidade seja articulado com outros conteúdos correlatos, como a Combinatória e a Estatística.

A análise dos documentos educacionais oficiais e dos materiais de apoio amplia a compreensão de letramento probabilístico é realizado e quais são as lacunas que são deixadas. Tal conhecimento, aliado com o aporte teórico apresentado no Capítulo 2, constituem a base para a elaboração do Produto Educacional que será exposta no Capítulo 4.

4. PERCURSO METODOLÓGICO

A seguir apresentamos o desenvolvimento de um conjunto de tarefas pautado nos referenciais teóricos, além de materiais e documentos curriculares, analisados previamente. Tais tarefas constituem um produto educacional pensado para nortear o trabalho do professor em sala de aula, revelando possibilidades para que o letramento probabilístico seja desenvolvido em seus diversos elementos cognitivos e de disposição.

4.1 Proposta de Produto Educacional

Em face das análises dos capítulos anteriores, verificamos que os diversos materiais e documentos não consideram aspectos tidos como essenciais na proposta de Gal (2005). Desses aspectos, podemos destacar:

(i) Não aproveitamento em atividades de conceitos básicos da probabilidade, especialmente a aleatoriedade (Elemento cognitivo das Grandes Ideias);

(ii) Utilização majoritária do conceito clássico de cálculo de probabilidade, sem cogitar as outras definições de probabilidade, como a frequentista (Elemento cognitivo do Cálculo de Probabilidades);

(iii) Não promoção da experimentação de forma apropriada nas atividades (Elemento cognitivo das Grandes Ideias);

(iv) Uso deficitário de representações figurais, bem como poucas oportunidades para que o aluno possa exercitar a comunicação e expressão de informações probabilísticas (Elementos cognitivos da Linguagem e Contexto);

(v) Exploração limitada de outros contextos, especialmente relacionados com o cotidiano e realidade dos alunos, em que a probabilidade está presente (Elementos cognitivos das Questões Críticas e Contexto);

Adicionalmente destacamos a importância da conexão do conteúdo de Probabilidade com a Combinatória, o que acaba atuando como um pré-requisito para que o aluno possa dimensionar quantitativamente um evento específico no caso em análise.

Por inspiração das constatações listadas, foram propostos os seis problemas apresentados a seguir tomando por base a fundamentação teórica.

1) No nosso cotidiano muitas situações são de natureza aleatória; ou seja, situações nas quais suas ocorrências não podem ser antecipadas, embora satisfaçam condições básicas para podermos fazer previsões sobre os acontecimentos.

a) Conte sobre alguma situação que você julga ser de natureza aleatória.

b) Por que essa situação é de natureza aleatória?

2) Com base no Boletim Epidemiológico do Sarampo no Brasil (edição de setembro de 2019) apresentamos na 'Tabela 1' a distribuição de casos de sarampo confirmados até 12 set. 2019:

Tabela 1: Distribuição de casos de sarampo por faixa etária.

Faixa etária (anos)	*População*[2]	*Número de casos*
<1	800.000	436
1 a 4	3000.000	489
5 a 9	3.900.000	88
10 a 14	4.500.000	62
15 a 19	4.600.000	455
20 a 29	10.500.000	1084
30 a 39	9.500.000	481
40 a 49	7.900.000	149
>50	12.500.000	95
Total	57.200.000	3339

2 A população de 57.200.000 pessoas envolve os estados de São Paulo, Rio de Janeiro, Maranhão, Santa Catarina, Mato Grosso do Sul, Minas Gerais, Pernambuco, Paraná, Distrito Federal, Espírito Santo, Piauí, Goiás, Rio Grande do Norte, Bahia, Sergipe e Rio Grande do Sul.

Fonte: Secretaria de Vigilância em Saúde

Em qual faixa etária é maior a probabilidade de incidência de sarampo? E a menor chance de incidência de sarampo está em que faixa etária? Apresente o seu raciocínio.

3) Considere o lançamento de dois dados não viciados, um de cada vez, e a respectiva multiplicação dos valores das faces superiores. Sem lançar os dados, em 20 jogadas, qual o resultado da multiplicação você acha que terá maior chance de ocorrer? Por que?

4) Proponho agora que você faça o lançamento dos dois dados, um de cada vez e, por meio de uma tabela ou gráfico, registre os resultados de cada uma das 20 jogadas, bem como o respectivo valor da multiplicação dos números das duas faces voltadas para cima. Qual resultado da multiplicação que ocorreu mais vezes? Compare essa resposta com aquela que você deu na questão 3 e escreva sobre sua conclusão.

5) Em um globo usado para sorteio em loteria foram colocadas três bolas idênticas numeradas com 2, 5 e 7. Vamos formar números de três algarismos sorteando essas bolas. Depois de cada sorteio, a bola é recolocada no globo. Assim, podemos formar números com três algarismos como, por exemplo: 252, 777 e 725.

a) Quantos números diferentes podem ser formados dessa maneira?

b) Qual é a probabilidade de sortearmos 257?

c) Qual é a probabilidade de o número ser 222?

d) Podemos afirmar que um número formado por três algarismos repetidos tem menos chance de ocorrência que um número com algarismos não repetidos? Argumente.

6) Um jovem executivo se dirige ao seu restaurante favorito para almoçar. O cardápio do restaurante está apresentado no Quadro 8.:

Quadro 8: Cardápio do restaurante.

Prato do dia:	*Acompanhamento:*
Arroz e feijão	Farofa

Mistura: Frango cozido com molho Pernil assado Carne de panela com mandioca Macarrão ao sugo *Salada:* Pepino Tomate Alface	Batata frita Purê de batatas Legumes refogados Repolho refogado *Sobremesa:* Mousse de maracujá Sorvete artesanal de iogurte com frutas vermelhas Pavê de leite condensado Sagu

Fonte: Arquivo da pesquisa

(a) Quantas configurações diferentes de refeições com uma mistura, uma salada, um acompanhamento e uma sobremesa ele pode fazer?

(b) Caso o jovem decida fazer uma refeição mais reforçada, com duas misturas e três acompanhamentos, de quantas formas ele pode montar uma refeição?

No primeiro problema enfatizamos o conceito de aleatoriedade, o que nos remete ao elemento cognitivo das Grandes Ideias. Para um aluno no contexto escolar do Ensino Médio, o que se espera ao ser questionado sobre a definição de aleatoriedade não é uma definição precisa – que nem existe – mas que ele consiga descrever a aleatoriedade pelas suas características típicas, como ausência de certeza ou previsibilidade de seus resultados, o que pode depender de que tipo de referência está sendo considerada.

Esperamos que o aluno ao se deparar com o problema 1 mobilize um tratamento nos dois itens, mantendo o registro da língua materna. No item (a) ele é convidado a descrever um evento aleatório e no item (b) a justificar o porquê esse evento seria dessa natureza.

Paralelamente, ao solicitar um exemplo em que haja a natureza de aleatoriedade, estamos trabalhando com o elemento cognitivo do Contexto, segundo a proposta de Gal (2005), visando a valorização do conhecimento prévio dos alunos com possibilidade de ampliação do vocabulário apropriado à Probabilidade. Um aspecto também interessante desse item é romper com um tipo de cultura existente entre os alunos no ambiente escolar de que as questões de Matemática são sempre fechadas, quando na realidade podemos trabalhar com questões abertas.

Como no caso anterior, a intenção é que o aluno imagine preferencialmente algo relacionado com seu contexto de vida, ou pelo menos algo do mundo real. Assim, entre os exemplos mais comuns estão sorteios das lotéricas, ou uma situação em que se sorteie algo entre os alunos na sala; Lançamento de dados ou moedas, bem como a extração de cartas de um amontoado ou de bolas de uma urna também são possíveis, embora sejam exemplos clássicos. Como exemplos mais sofisticados, temos a atribuição de processos aos juízes do STF, ou as chances que um casal tem de ter filhos com um determinado fenótipo.

Do segundo ao quinto problema tivemos como propósito explorar o elemento cognitivo Cálculo de Probabilidade com base em enunciados que demandam a interpretação, mobilização e coordenação de diferentes registros de representação semiótica. Optamos por trabalhar dessa forma, pois de fato há um enfoque nos materiais analisado muito pobre na exploração tanto das definições de probabilidade como na mobilização de registros, o que nos motivou a trabalhar com esse elemento cognitivo em tantos problemas.

Assim, no problema 2 temos uma situação-problema que trabalha simultaneamente os elementos cognitivos de Cálculo de Probabilidades, ao trabalhar com a definição frequentista de probabilidade, e de Contexto, devido à exploração de uma questão atual que é a epidemia do sarampo no país.

É esperado que o aluno interprete as informações apresentadas na Tabela 1 e aplique a definição frequentista em cada uma das faixas etárias. Fazendo isso, ele constatará que a maior probabilidade de incidência de sarampo é na faixa etária de 20 a 29 anos (0,001895%) e a menor chance de incidência de sarampo está na faixa etária de 10 a 14 anos (0,000108%).

Do ponto de vista da Teoria de Representações Semióticas de Duval, espera-se que nesse problema ocorra a interpretação do enunciado do problema e mobilize uma conversão do Registro Figural na forma da tabela de contingência (Tabela 1) para o Registro Simbólico na forma numérica, que é efetivamente o cálculo da probabilidade pela definição frequencial.

Os problemas 3 e 4 estão correlacionados por envolver o confronto entre duas concepções probabilísticas diferentes: a clássica e a frequentista. Além de trabalhar o elemento cognitivo de Cálculo de Probabilidades, as duas questões permitem que o aluno vivencie o processo de experimentação. Tal processo, especialmente quando bem mediado pelo professor, colabora muito em suscitar a criticidade nos alunos.

Assim, no problema 3 é esperado que o aluno considere o evento equiprovável e analise as possibilidades de resultado e os produtos que podem ser obtidos em cada configuração de sorteio. Isso pode ser feito pensando em uma tabela, como mostrado na Tabela 2, ou pode ser feito como mostrado na Figura 2. Em ambos os casos, os produtos que mais aparecem são destacados em amarelo.

Tabela 2: Resultados do Problema 3.

Resultados do Dado 1	Resultados do Dado 2	Produto	Resultados do Dado 1	Resultados do Dado 2	Produto
1	1	1	1	4	4
2	1	2	2	4	8
3	1	3	3	4	12
4	1	4	4	4	16
5	1	5	5	4	20
6	1	6	6	4	24
1	2	2	1	5	5
2	2	4	2	5	10
3	2	6	3	5	15
4	2	8	4	5	20
5	2	10	5	5	25
6	2	12	6	5	30
1	3	3	1	6	6
2	3	6	2	6	12
3	3	9	3	6	18
4	3	12	4	6	24
5	3	15	5	6	30
6	3	18	6	6	36

Fonte: Próprio autor.

Figura 2: Resultados do Problema 3.

		Resultados do Dado 1					
		1	2	3	4	5	6
Resultados do Dado 2	1	1	2	3	4	5	6
	2	2	4	6	8	10	12
	3	3	6	9	12	15	18
	4	4	8	12	16	20	24
	5	5	10	15	20	25	30
	6	6	12	18	24	30	36

Fonte: Próprio autor.

Dessa forma o aluno perceberia que, talvez diferente do esperado, o exercício comporta dois casos que em um experimento equiprovável atende as condições do problema, que são quando o produto é 6 e 12, já que ambos tem uma Probabilidade de $4/36 = 1/9$. Como se tratam de 20 lançamentos, então a probabilidade final será $1/9^{20}$, no entanto, a expectativa que o aluno responda a pergunta do enunciado informando os produtos que tinham a maior chance de ocorrer mostrando qual produto pode aparecer mais vezes, de forma justificada.

Do ponto de vista da Teoria de Representações Semiótica de Duval, para o problema 3 o esperado é que o aluno mobilize a conversão do enunciado do problema na forma de um Registro da Língua Natural Materna para um Registro Simbólico na forma numérica, que consiste no cálculo da probabilidade segundo a concepção clássica, identificando os dois números com maiores chances de serem sorteados, calculando o espaço amostral e quantidades dos eventos favoráveis. Em um segundo momento, de posse desse Registro Simbólico na forma numérica, resta calcular a probabilidade considerando os 20 lançamentos, o que corresponderá à probabilidade calculada elevada ao expoente 20. Para o problema 4, após a realização da experimentação, partindo do Registro Figural de tabela de contingência, é esperado que o aluno identifique o resultado com maior frequência e, tendo em vista as especificidades de cada definição de probabilidade, perceba que é esperado que os resultados sejam diferentes, sendo que para que haja uma aproximação com os resultados do problema 3, teríamos que dispor de mais lançamentos. Com essa constatação, basta que ele faça a conversão desse resultado como um registro da língua materna ou uma redação explicando suas ponderações.

Realizando o procedimento para o problema 4, temos que cada aluno irá sortear diferentes configurações de conjuntos de dados e calcular as probabilidades pela concepção frequentista. No entanto, apesar dos desvios que o cálculo pode apresentar, o fundamental é que o aluno perceba a diferença no uso das duas definições de probabilidade e entenda que elas são esperadas. Mas do que o esperado é que o aluno constate que se ele utilizasse mais lançamentos, a probabilidade pela definição frequentista seria mais próxima do valor encontrado na concepção clássica.

Novamente, no problema 5, o elemento cognitivo de Cálculo de Probabilidade também é explorado. No item (a), utilizando a Combinatória, recurso importantíssimo para o cálculo de probabilidades, e mais precisamente, o Princípio Multiplicativo, temos que a quantidade de números diferentes que podem ser formados é $3.3.3=27$. Nos itens (b) e (c), pela concepção clássica, a probabilidade é a mesma, ou seja, $1/27$. No 'item d', o aluno é convidado a avaliar a veracidade da afirmação proposta. Isso implicará que ele faça o questionamento do que muda ao considerar um numeral com dígitos iguais e com dígitos diferentes. Assim, para um numeral com os dígitos iguais, temos que são possíveis 3 configurações. Já para um numeral com dígitos diferentes, temos $3.2.1=6$. Logo, a probabilidade que o numeral tenha dígitos iguais é de $3/27=1/9$, enquanto que a probabilidade que o numeral tenha dígitos diferentes é de $6/27=2/9$. Portanto, a afirmativa é verdadeira.

No item (a), espera-se que o aluno mobilize uma conversão do registro da língua natural materna presente no enunciado para um registro simbólico na forma numérica que consiste na aplicação do Princípio Multiplicativo. Nos itens

(b) e (d), é utilizada a quantidade calculada no item (a) para os cálculos de probabilidade. Nesse caso, há também conversão do registro na língua natural materna, como enunciado para um registro simbólico na forma numérica, que corresponderá à aplicação do conceito clássico de probabilidade. Finalmente, no item (d), para dar suporte ao argumento que validaria a afirmação, seria necessário fazer o cálculo das probabilidades em cada um dos casos, o que implicaria em uma conversão do registro da língua natural materna presente no enunciado para um registro simbólico na forma numérica, um tratamento entre esses registros simbólicos numéricos, os comparando para validar a informação e uma nova conversão da comparação dos registros simbólicos na forma numérica para um registro da língua natural materna na forma de uma redação explicando suas conclusões.

Para o letramento probabilístico segundo a proposta de Gal (2005), o problema 5 desenvolve o elemento cognitivo do Cálculo de Probabilidades especialmente nos itens (b) e (c). O item (a) é basicamente uma questão de Combinatória, mas que tem importância fundamental para quantificar o espaço amostral. Já o item (d), além de estimular o cálculo dos dois casos envolvidos na afirmação, exercita o elemento cognitivo das Questões Críticas, convidando o aluno a desenvolver seu espírito crítico ao articular fatos probabilísticos para validar uma afirmação.

Por fim, o ‘problema 6’ foi devidamente formulado pensando em uma situação corriqueira que parecesse verossímil para o aluno e que contempla o exercício do livre arbítrio. É um problema que trabalha com o elemento cognitivo do Contexto, justamente por conta desse aspecto. Com esse enunciado é desejável verificar o entendimento do raciocínio combinatório dos alunos, um componente de importância para o cálculo de probabilidades, dada a utilização do processo de contagem na análise do evento formulado. No item (a), pelo Princípio Multiplicativo, temos $4.3.5.4=240$ configurações de diferentes de refeições conforme o enunciado. No item (b), como existe a condição de trabalhar com duas misturas e três acompanhamentos e a ordem não é relevante para essa escolha, devemos excluir a permutação desses elementos, assim temos $\frac{4.3}{2!}.3.\frac{5.4.3}{3!}.4 = 6.3.10.4 = 720$ configurações de diferentes de refeições. Uma outra forma de resolver esse item é utilizando a fórmula de combinação, de maneira que $C_2^4.3.C_3^5.4 = 6.3.10.4 = 720$. No entanto, em prol do desenvolvimento do raciocínio combinatório, procuramos trabalhar o mínimo possível com fórmulas, admitindo porém que o aluno que já tenha um melhor domínio dos conceitos de combinatória possa vir a utilizar esse recurso.

4.2 Procedimentos metodológicos

Com a proposta apresentada, aplicamos o Produto Educacional na escola estadual Vereador Odilon Batista Jordão, localizada no centro de Pilar do Sul, no dia 1 de outubro de 2019. Trabalhamos com as quatro turmas do 2º Ano do Ensino Médio, sendo que as turmas A, B, C e D tinham respectivamente 19, 23, 21 e 24 alunos, o que totalizou 87 protocolos para cada problema.

Figura 3: Escola Estadual Vereador Odilon Batista Jordão

Fonte: Próprio autor.

A E. E. Vereador Odilon Batista Jordão é uma escola integral que trabalha com alunos no Ensino Médio. No SAEB de 2017 alcançou a nota média de 4,98, sendo a nota na área da Matemática de 292,73. Sua seleção para essa pesquisa se deu por conta de ser uma das escolas utilizada na pesquisa de pós-doutorado do Profº Dr. Paulo César Oliveira.

Ao longo de todo o dia em foi feita a aplicação, os alunos fazem menção a um programa de mentoria em que professores e coordenadores orientam alunos. As orientações não se restringem somente a assuntos escolares, como dificuldades em uma disciplina, mas abrangem questões como relacionamentos, planos para o futuro, entre outras. Outros alunos relataram que participam de competições científicas, como olimpíadas de Matemática, além de apresentarem bastante interesse em carreiras nas áreas de ciências exatas e biológicas, perguntando sobre como é a universidade pública, quais cursos existem e como ingressar na Ufscar.

O produto educacional foi aplicado em um mesmo dia, aproveitando que todas as turmas teriam aulas de Matemática ao longo do dia. Em cada turma, os alunos foram orientados que se tratava de uma pesquisa e o que era solicitado para eles era que respondessem o mais descritivamente possível. Justamente por se tratar de uma pesquisa, eles não deveria se preocupar com notas, uma preocupação recorrente da cultura escolar que temos, mas em expor suas ponderações sobre o que era questionado em cada problema para que pudéssemos dimensionar o entendimento dos alunos com um todo. Logo, não seria necessário colocar o nome e não seriam respondidas perguntas sobre o conteúdo das questões, somente alguma dúvida sobre a interpretação do enunciado que não comprometesse a resolução o problema. Foram disponibilizados, além da folha com as questões, uma folha de almaço para que fizessem seus registros e um par de dados para que fizessem os lançamentos para o problema 4.

Os alunos submetidos à aplicação do produto educacional haviam trabalhado com os conteúdos de Combinatória e Probabilidade no terceiro bimestre, logo já estavam familiarizados com os temas.

Na Figura 4 é apresentada uma avaliação aplicada pelos professores no final do 3º bimestre para os alunos do 2º Ano do Ensino Médio após os conteúdos de Combinatória e Probabilidade serem trabalhados.

Figura 4: Avaliação aplicada no 3º bimestre para os alunos do 2º Ano do Ensino Médio.

Matemática (/Setembro/2019)

EMTI – E.E. "Vereador Odilon Batista Jordão".

(Habilidade: interpretar informações contidas em enunciados de situações problema, com o objetivo de caracterizar a necessidade de mobilizar raciocínio combinatório. Resolver problemas envolvendo cálculo de probabilidade).

PROVA – ANÁLISE COMBINATÓRIA

01) Simplifique:

a) $\dfrac{n!}{(n-1)!}$ b) $\dfrac{9!}{5!}$ c) $\dfrac{12!}{5!.10!}$ d) $\dfrac{(estrela+4)!}{(estrela)!}$

02) Quantos anagramas é possível formar com as palavras:
a) "LIVRO"? b) "COSSENO"?

03) Numa competição com 10 países, de quantas maneiras podem ser distribuídas as medalhas de ouro, prata e bronze?

04) De quantas maneiras diferentes é possível escolher um presidente e um relator para uma CPI (Comissão Parlamentas de Inquérito), entre 5 parlamentares?

05) Quantos números de 4 algarismos **distintos** podemos formar com os algarismos de 1 a 9?

06) Num grupo de 4 rapazes e 7 moças, quantas comissões com 2 rapazes e 2 moças podemos formar?

07) No lançamento simultâneo de 3 moedas perfeitas distinguíveis, qual é a probabilidade de serem obtidas exatamente 2 caras?
a)1/8 b)1/4 c)3/8 d)1/2

08) Em uma urna há quatro bolas brancas, duas bolas pretas, três bolas azuis e uma bola vermelha. Retirando uma bola da urna qual é a probabilidade de retirar uma bola azul ou preta?

09) De uma certa linha do triângulo de pascal sabe-se que a soma dos dois primeiros termos é 11. Qual o maior termo dessa linha? Quantos elementos dessa linha são menores que 100?

10) Uma fábrica de roupas duas máquinas A e B pra produzir o mesmo tipo de camiseta. A porcentagem de camisetas defeituosas produzidos respectivamente, pelas máquinas A e B é de 20% e 15%. Foram colocadas numa prateleira 100 camisetas produzidas pela máquina A e 100 produzidas pela B. Se tiramos uma camiseta ao acaso e ela for defeituosa, a probabilidade de que tenha sido produzida pela máquina B é?

Fonte: Próprio autor.

A primeira questão tem caráter mais operacional, avaliando se o aluno consegue trabalhara adequadamente com expressões envolvendo fatoriais, sendo os itens (b) e (c) expressões numéricas e os itens (a) e (d) questões algébricas. Curioso que no item (d) é utilizada a expressão "estrela" com uma incógnita, possivelmente para que os alunos se acostumem a trabalhar com nominalmente qualquer variável e não somente variáveis convencionais, como x, y, z ou n.

A segunda questão é um exercício que trabalha com a construção se anagramas, sendo o item (a) o anagrama se letras iguais, resolvido por uma permutação, e o item (b) é um anagrama com letras iguais, solucionado com uma permutação com elementos repetitivos. Tanto a primeira quanto a segunda questão não demandam maior custo cognitivo quanto a tratamento e conversão de registros, sendo exercícios diretos de verificação do conteúdo.

Como as duas primeiras questões, as questões 3, 4, 5 e 6 também trabalham com conteúdos de Combinatória, mas são problemas que exploram cada uma um tema distinto. Na questão 3 e na questão 4, respectivamente, há um arranjo simples de 10 elementos tomados 3 a 3 e um arranjo simples de 5 elementos tomados 2 a 2. A questão 5 trata da formação de números em que há uma restrição explicita, os números devem ter os 4 algarismos distintos. Sua resolução consiste em um arranjo de 9 elementos tomados 4 a 4, sendo também possível trabalhar com o Princípio Multiplicativo. Na questão 6, explora-se as combinações. O maior custo cognitivo para resolução desse subconjunto de questões está na questão 5, em que há uma restrição que precisa ser mediada pelo aluno.

As questões 7 e 8 tratam efetivamente do tema da probabilidade, ambas de eventos aleatórios (lançamentos de dados e sorteio de bolas), explorando exclusivamente a definição clássica da probabilidade e utilizando a Combinatória como recurso chave para quantificar os espaços amostrais e os eventos favoráveis.

A questão 9 aborda o triângulo de Pascal e pode ser facilmente resolvida se for utilizada a definição do triângulo e construindo o mesmo até a linha 11, onde as perguntas do enunciado podem se respondidas.

Por fim, a questão 10 é a com maior custo cognitivo para que o aluno possa calcular o espaço amostral e, principalmente, a quantidade no evento favorável nas condições apresentadas. Como as questões anteriores, é aplicado o conceito clássico de probabilidade.

Em termos de letramento probabilístico segundo a proposta de Gal (2005), não são plenamente desenvolvidos os elementos cognitivos de

Grandes Ideias, Linguagem e Questões Críticas, sendo atendido o Contexto somente na questão 10 (item 2 - Processos tecnológicos, do Quadro 2 de áreas-chaves para exemplos úteis) e em Cálculo de Probabilidade só ser abordada a definição clássica de probabilidade. Outros recursos como experimentação e elementos figurais (como tabelas ou quadros com informações) não foram explorados, embora existam problemas que possam ser resolvidos através do diagrama de árvore.

A aplicação do produto educacional ocorreu sem maiores dificuldades, havendo um ou outro questionamento sobre o enunciado dos problemas, ou se haviam alguma instrução para responder os problemas, como uma ordem de resolução dos problemas, ou se a folha de questões poderia ser rasurada. Foi explicado para cada turma do que se tratava a pesquisa, sua importância e combinado que o aluno deveria ser o mais descritivo possível e responder o que pudesse ou se sentisse seguro para tal, e até estava convidado a registrar na folha caso não se sentisse apto para resolver algum problema ou qualquer impressão desse tipo.

O produto educacional foi aplicado no período de tempo correspondente a duas aulas, o que equivale a 1 hora e 40 minutos. Todos os alunos que participaram tiveram tempo suficiente nesse período para escrever suas manifestações, sendo que antes do final das duas aulas, todos os alunos devolveram o produto respondido. Assim, consideramos que as questões deixadas em branco, são aquelas em que o aluno não sabia como resolver.

Após a apresentação metodológica desse capítulo, em que foi apresentado o Produto Educacional e as expectativas de resolução, bem como o contexto escolar envolvido na aplicação, faremos no Capítulo 5 a análise dos protocolos gerados pelos alunos.

5. ANÁLISE DOS DADOS GERADOS

Nesse capítulo apresentamos a análise dos registros produzidos pelos alunos no 2º Ano do Ensino Médio da escola estadual Vereador Odilon Batista Jordão quando o produto educacional foi aplicado. São analisados tanto os erros cometidos, como os registros produzidos e confrontados esses resultados com a fundamentação teórica apresentada anteriormente. De maneira geral, relevamos na correção dos resultados apresentados pelos alunos os erros de cálculo mais simples e também erros de arredondamento.

5.1 Análise dos resultados do Problema 1

Realizando a correção dos registros feitos pelos alunos para o primeiro problema, consolidamos os resultados na Tabela 3.

Tabela 3: Resultado da correção dos registros referentes ao Problema 1.

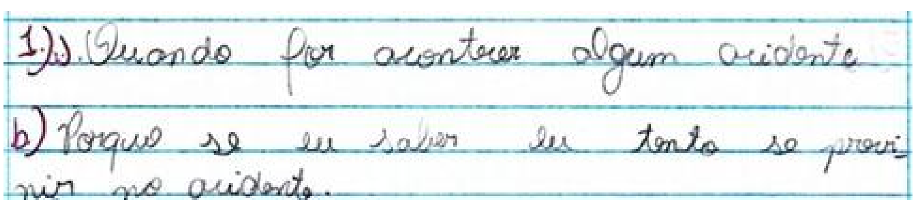
Aluno	P1(a)				P1(b)			
	Turma A	Turma B	Turma C	Turma D	Turma A	Turma B	Turma C	Turma D
1	✓	✓	✓	✓	✓	✗	✓	✓
2	✗	✗	✗	✓	✓	✗	✗	✗
3	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✗	✓
4	✗	✓	✓	✓	✗	✗	✗	✓
5	✓	✗	✓	✓	✓	✗	✓	✓
6	✓	✓	✓	✓	✗	✗	✗	✓
7	✗	✓	✓	✓	✗	✓	✗	✓
8	✓	✓	✓	✓	✗	✓	✗	✓
9	✓	✗	✓	✓	✗	✓	✗	✓
10	✓	✓	✗	✓	✗	✗	✗	✗
11	✗	✓	✓	✓	✗	✗	✓	✓
12	✓	✓	✗	✗	✓	✗	✗	✗
13	✗	✓	✗	✗	✗	✓	✗	✗
14	✓	✓	✗	✓	✗	✗	✗	✗
15	✓	✓	✓	✗	✗	✗	✓	✓
16	✓	✓	✓	✓	✓	✗	✓	✓
17	✗	✓	✓	✗	✗	✗	✗	✗
18	✗	✓	✓	✓	✓	✗	✓	✓
19	✗	✓	✓	✗	✗	✗	✗	✗
20	-	✓	✓	✗	-	✗	✗	✗
21	-	✓	✗	✓	-	✗	✗	✓
22	-	✓	-	✓	-	✗	-	✓
23	-	✓	-	✓	-	✗	-	✓
24	-	-	-	✓	-	-	-	✓
Média	57,89%	86,96%	71,43%	75,00%	36,84%	21,74%	30,00%	66,67%

Fonte: Próprio autor.

Nessa tabela é apresentado o percentual de acertos em cada turma. Para cada problema ou itens analisados, temos o símbolo verde ✓ para demonstrar o acerto da questão e o símbolo vermelho ✗ para expressar um erro. Como mencionado anteriormente, em função dos alunos terem tido tempo suficiente para entregar o produto, consideramos os problemas deixados em branco como errados. Trabalharemos dessa mesma forma para o Problema 1 e os demais problemas do Produto Educacional.

De imediato, pela Tabela 3, pela quantidade de acertos no item (a) em relação item (b), notamos que os alunos tiveram mais facilidade em dar um exemplo de aleatoriedade do que justificar com suas próprias palavras porque essa situação seria um exemplo de aleatoriedade, como ilustra o exemplo selecionado da Figura 5. Apesar da impossibilidade de uma definição única e ampla de aleatoriedade, é esperado que o aluno consiga justificar o motivo de uma situação se adequar a esse termo associando características como a ausência de certeza de um resultado concreto, mesmo havendo a possibilidade de cogitar os resultados possíveis, ou a imprevisibilidade para tal. No exemplo da Figura 5, é apresentada uma situação aleatória (ocorrência de um acidente), mas o aluno não justifica a aleatoriedade da situação associando à falta de certeza na previsão quando ela pode ocorrer ou em que circunstâncias ocorre.

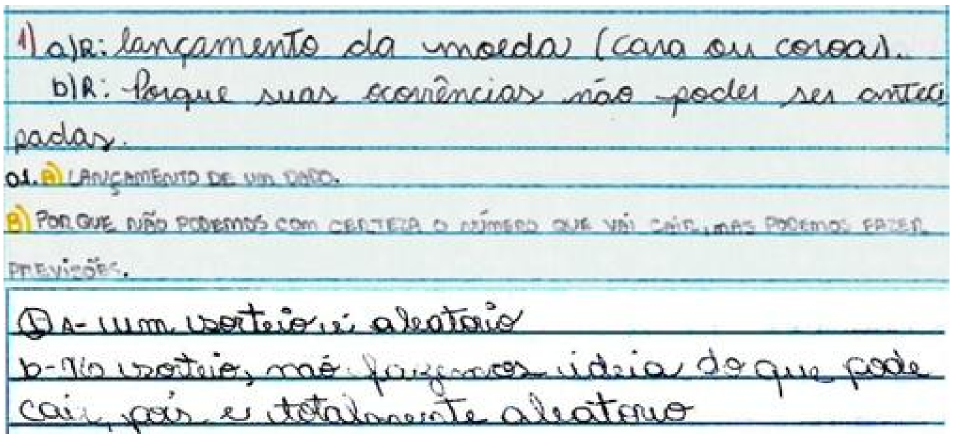
Figura 5: Exemplo de dificuldade do aluno em justificar a aleatoriedade na situação apresentada.



Fonte: Próprio autor.

Em termos dos exemplos apresentados, os alunos indicaram corretamente exemplos clássicos relacionados a jogos de azar, ou seja, lançamentos de dados ou moedas, e também os sorteios, dados em respostas como mostrado na Figura 6. O uso desses exemplos ocorre possivelmente por influência das aulas em que o uso desses elementos é comum e muitas vezes majoritário ou exclusivo, o que por outro lado limita as possibilidades de se trabalhar com outras áreas-chaves, como sugerido no Quadro 2, que destaca 10 áreas-chave de exemplos úteis segundo modelo de Iddo Gal (2005).

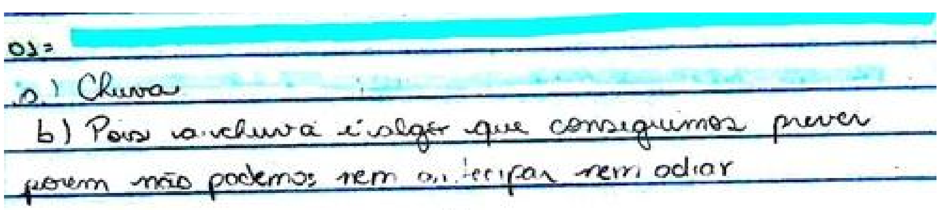
Figura 6: Três exemplos apresentados pelos alunos de situações de aleatoriedade relacionadas com jogos de azar.


1) a)R: lançamento da moeda (cara ou coroa).
b)R: Porque suas ocorrências não poder ser antecipadas.
01. a) LANÇAMENTO DE UM DADO.
B) POR QUE NÃO PODEMOS COM CERTEZA O NÚMERO QUE VAI CAIR, MAS PODEMOS FAZER PREVISÕES.
1 A- um sorteio é aleatorio
b- No sorteio, não fazemos ideia do que pode cair, pois é totalmente aleatorio

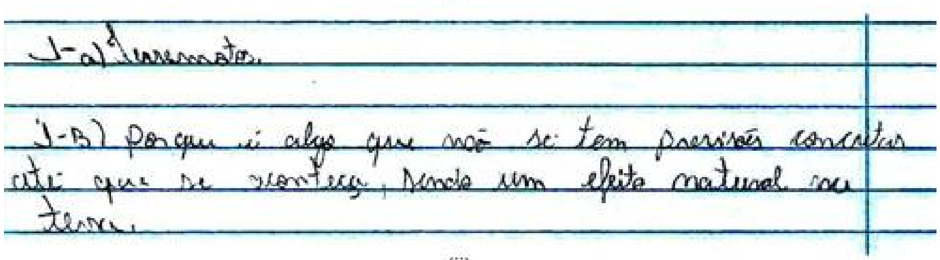
Fonte: Próprio autor.

Existe também a referência a eventos cataclísmicos ou a fenômenos climáticos, como apresentado na Figura 7.

Figura 7: Dois exemplos de eventos cataclísmicos ou fenômenos climáticos associados à aleatoriedade pelos alunos.


01 =
a) Chuva
b) Pois a chuva é algo que conseguimos prever porem não podemos nem antecipar nem adiar

(i)


1-a) Terremoto.
1-B) Porque é algo que não se tem previsões concretas até que se aconteça, sendo um efeito natural na terra.

(ii)

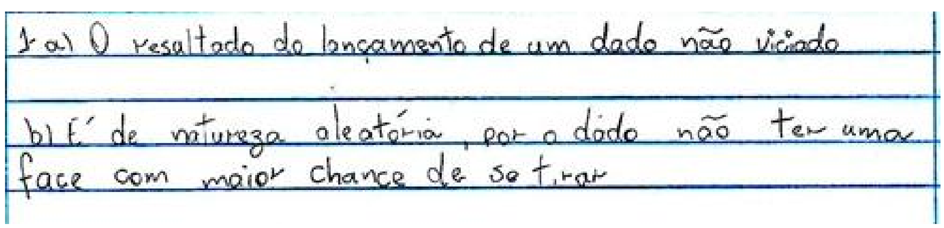
Fonte: Próprio autor.

A chuva, enquanto fenômeno climático, é o exemplo selecionado pelo autor do protocolo (i) na Figura 7. O exemplo é correto e notamos que a justificativa do aluno destaca que a previsibilidade com a ressalva de que a ocorrência da mesma não pode ser antecipada. Isso, nesse contexto, faz referência à falta da certeza que existe com relação à ocorrência da chuva. Ao final ele indica a falta de controle que é desnecessária na explicação. Consideramos a resposta correta e entendemos que ao aluno justificaria apenas chamar a atenção ao fato de que a aleatoriedade não faz referência à falta de controle.

No protocolo (ii) da Figura 7, o aluno declara como exemplo um terremoto, corretamente. A justificativa, igualmente correta, utiliza o termo “previsões concretas” que faz justamente alusão ao fato de que não podemos estimar com certeza em todos os casos quando o terremoto irá ocorrer.

Há casos em que os alunos confundiram a aleatoriedade com eventos equiprováveis, como exibido na Figura 8. É interessante que aluno destaca o fato de que o exemplo seria de um dado não viciado e justifica (erroneamente) que isso seria o motivo da situação que ele apontou ser aleatória.

Figura 8: Exemplo de associação da aleatoriedade com eventos equiprováveis.

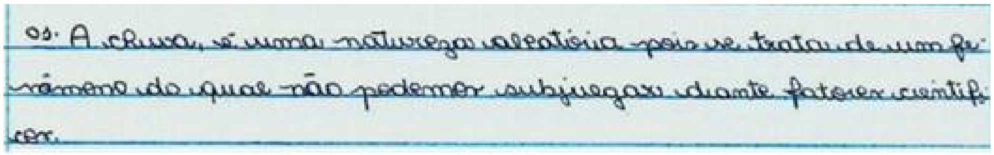

1 a) O resultado do lançamento de um dado não viciado

b) É de natureza aleatória, por o dado não ter uma face com maior chance de se tirar

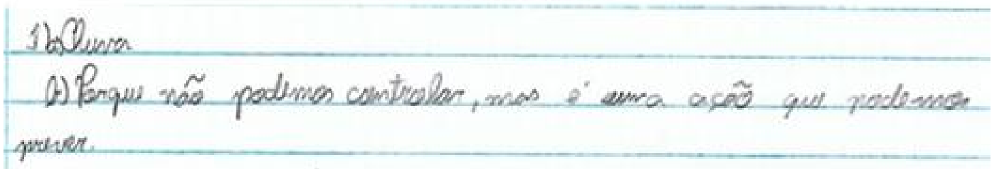
Fonte: Próprio autor.

A Figura 9 apresenta dois exemplos de redações de alunos que se equivocaram ao associar a aleatoriedade com o controle sobre a ocorrência de um evento.

Figura 9: Dois exemplos de associação da aleatoriedade com o controle.



(i)



(ii)

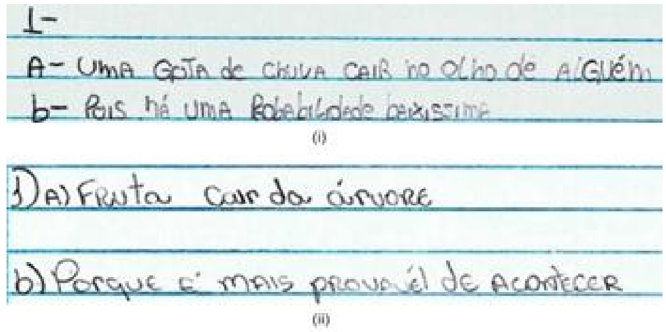
Fonte: Próprio autor.

No protocolo (i) da Figura 9, o aluno considera a chuva um evento aleatório por não podermos “subjugar” ou controlar, correlacionando isso ainda a “fatores científicos”. Potencialmente, o aluno pretendia expressar que por mais que a meteorologia e a previsão do tempo trabalhem de forma cientifica, não podemos ter plena certeza da previsão de ocorrência de uma chuva, mas note que utiliza o termo “subjugar”, ao invés de falta de certeza ou imprevisibilidade. No protocolo (ii) da Figura 9, o aluno utiliza a mesma a situação justificando que se trata de uma aleatoriedade por conta da falta de controle, mas em seguida faz alusão à previsibilidade da chuva, novamente, por conta da associação com a previsão do tempo.

Em menor proporção, alunos erroneamente associaram o conceito de aleatoriedade a eventos com maior ou menor possibilidade de ocorrência, como apresentado na Figura 10.

No protocolo (i) exposto na Figura 10, o aluno seleciona um exemplo e atribui uma justificativa em que parece confundir a viabilidade de ocorrência da situação, na figura de uma “probabilidade baixíssima”, com a falta de certeza ou a imprevisibilidade da ocorrência da mesma. Como no caso anterior, embora a ocorrência de uma situação tão incomum como essa possa ser realmente baixa, não é por isso que ela é aleatória.

Figura 10: Dois exemplos de associação da aleatoriedade a eventos com maior ou menor possibilidade de ocorrência.

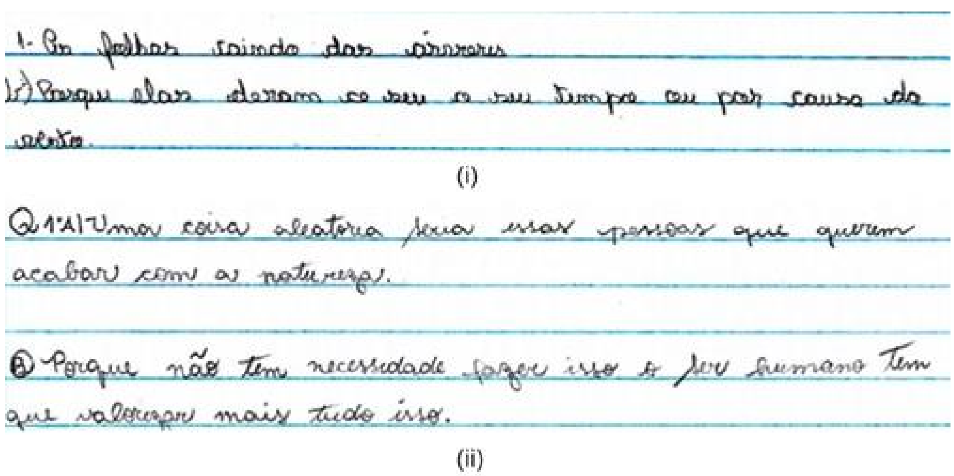

1-
A- Uma gota de chuva cair no olho de alguém
b- Pois há uma probabilidade baixíssima
(i)
1) A) Fruta cair da árvore
b) Porque é mais provável de acontecer
(ii)

Fonte: Próprio autor.

Já no protocolo (ii) da Figura 10, o aluno segue uma linha raciocínio diferente, mas também incorreta. Para ele, uma fruta caindo de uma árvore parece ter uma “maior” probabilidade de ocorrer e, provavelmente, ele confundiu os atributos da aleatoriedade de falta de certeza na determinação da ocorrência do fenômeno, associando isso com a maior probabilidade de ocorrência do fenômeno em si.

Em outras redações dos alunos, as situações ou as justificativas não faziam sentido probabilístico nenhum, ou eram contraditórias. A Figura 11 tem dois exemplos desse tipo de ocorrência.

Figura 11: Dois exemplos de associações equivocadas com aleatoriedade dos alunos.


1- As folhas saindo das árvores
1b) Porque elas deram o seu o seu tempo ou por causa do vento.
(i)
Q1ºA) Uma coisa aleatória seria essas pessoas que querem acabar com a natureza.
B) Porque não tem necessidade fazer isso o ser humano tem que valorizar mais tudo isso.
(ii)

Fonte: Próprio autor.

O aluno apontou no protocolo (i) da Figura 11 um exemplo correto mas redigiu uma justificativa para a sua escolha que não tem base probabilística adequada. O protocolo (ii) da mesma Figura apresenta um caso mais grave em que tanto o exemplo como a justificativa não são adequadas ou contextualizadas com a Probabilidade, denotando uma dificuldade mais aprofundada do que seria um exemplo de situação aleatória, como também como justificar que essa situação é aleatória. Por conta dessa limitação conceitual, ambos os alunos, frente ao problema 1, buscaram em seus repertórios de conhecimento o que mais adequadamente poderia responder o questionamento e apresentaram essas produções textuais.

Logo, os casos apresentados nos protocolos das Figuras 5, 8, 9, 10 e 11 denotam uma lacuna no entendimento do que é a aleatoriedade, o que por sua vez, comprova que no elemento cognitivo das Grandes Ideias, segundo a proposta de Gal (2005), há uma deficiência que precisa ser suprida.

Vale destacar que esse problema permite que o aluno mobilize o tratamento do registro de língua natural para descrever as situações aleatórias e justificar por que ela seria dessa natureza usando vocabulário próprio da probabilidade, como os termos chance, provável, possibilidade, prever, ter certeza, antever entre outros termos. Tal tipo de atividade é pouco explorado nos materiais analisados e acaba por limitar o desenvolvimento de uma boa comunicação por parte dos alunos. Em algumas resoluções, os alunos, quando não conseguem fazer a correção com esses termos, tentam utilizar construções mais sofisticadas, como por exemplo, ao querer se referir a um sorteio que é imprevisível, no sentido de que não há certeza do resultado final, ele escreve "não fazemos ideia do que pode cair" ou "porque ninguém sabe o número que vai ser sorteado".

5.2 Análise dos resultados do Problema 2

Os resultados das produções dos alunos para o Problema 2 estão apresentados na Tabela 4. A quantidade de erros no problema é significativa, já que 58 dos 87 alunos erraram. O maior diferencial desse problema com os demais é a necessidade de interpretação dos dados da Tabela 2 e o uso exclusivo da definição frequentista da probabilidade.

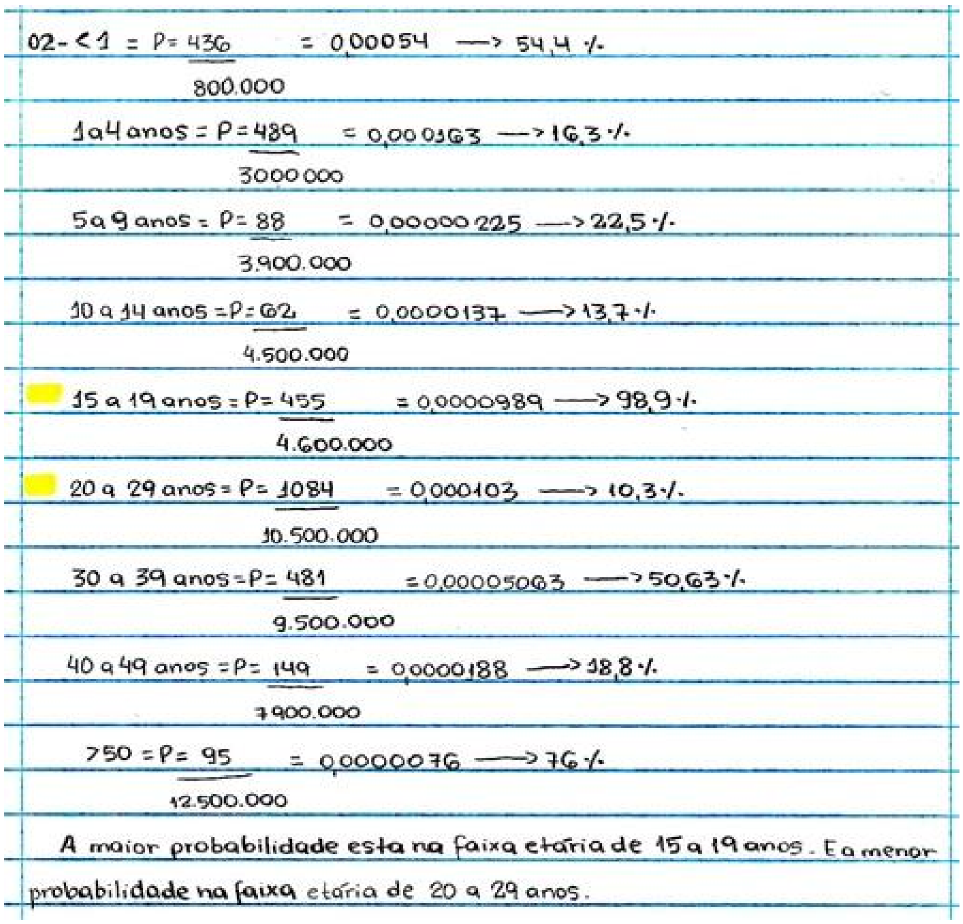
Tabela 4: Resultado da correção dos registros referentes ao Problema 2.

Aluno	P2			
	Turma A	Turma B	Turma C	Turma D
1	✓	✗	✓	✗
2	✗	✗	✗	✓
3	✓	✗	✗	✓
4	✓	✗	✗	✗
5	✗	✓	✗	✗
6	✗	✗	✗	✗
7	✓	✗	✓	✓
8	✗	✗	✗	✓
9	✓	✗	✓	✓
10	✓	✗	✓	✓
11	✓	✗	✗	✗
12	✓	✓	✗	✗
13	✓	✗	✗	✓
14	✗	✓	✗	✗
15	✗	✓	✗	✗
16	✓	✗	✗	✗
17	✗	✗	✗	✗
18	✓	✗	✗	✓
19	✓	✗	✗	✓
20	-	✗	✗	✗
21	-	✗	✗	✗
22	-	✗	-	✗
23	-	✗	-	✗
24	-	-	-	✗
Média	63,16%	17,39%	19,05%	37,50%

Fonte: Próprio autor.

O erro mais comum encontrado nesses registros dos alunos foi a tentativa de calcular as probabilidades solicitadas associando os casos de uma determinada faixa de idade com o subtotal da população daquela faixa e não com a quantidade da população como um todo, como mostrado na Figura 12. Nesse protocolo, o aluno seleciona as quantidades de casos observados em cada faixa e divide pela correspondente quantidade de pessoas que compõem a faixa etária em questão. Ao tentar calcular a probabilidade de incidência de sarampo solicitada no enunciado pela razão entre os contaminados de uma faixa etária em relação à população com essa faixa etária, há um problema de interpretação com a identificação do espaço amostral a ser considerado. Uma observação adicional é o fato de que ainda há erros na atribuição de casas decimais na divisão, de forma que a porcentagens indicadas não estão corretas.

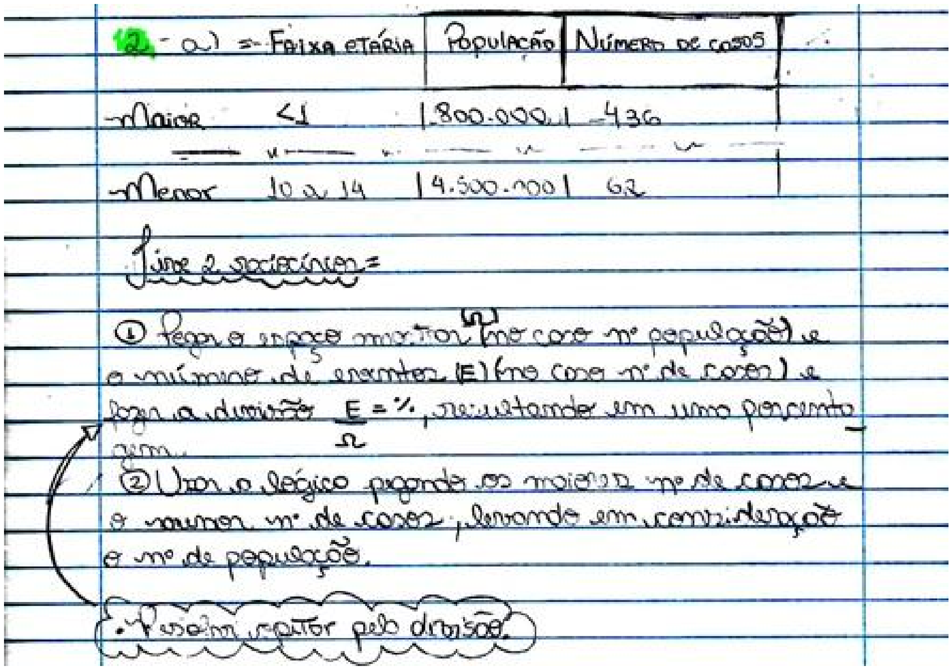
Figura 12: Exemplo do cálculo das probabilidades utilizando os subtotais de cada faixa etária.



Fonte: Próprio autor.

O protocolo apresentado na Figura 13, diferente da grande maioria dos alunos que participaram da aplicação do instrumento, exibe uma resolução um pouco mais detalhada, ainda que transparecendo as dúvidas que teve ao resolver a questão. Nele, o aluno evidencia dois raciocínios que teve para resolver o problema: O primeiro corresponde analogamente ao mesmo tipo de raciocínio do protocolo anterior, utilizando a quantidade de casos em cada faixa etária e o correspondente subtotal da população. O segundo, que é o raciocínio correto, consiste em considerar a quantidade de casos em uma faixa etária pelo total da população como um todo.

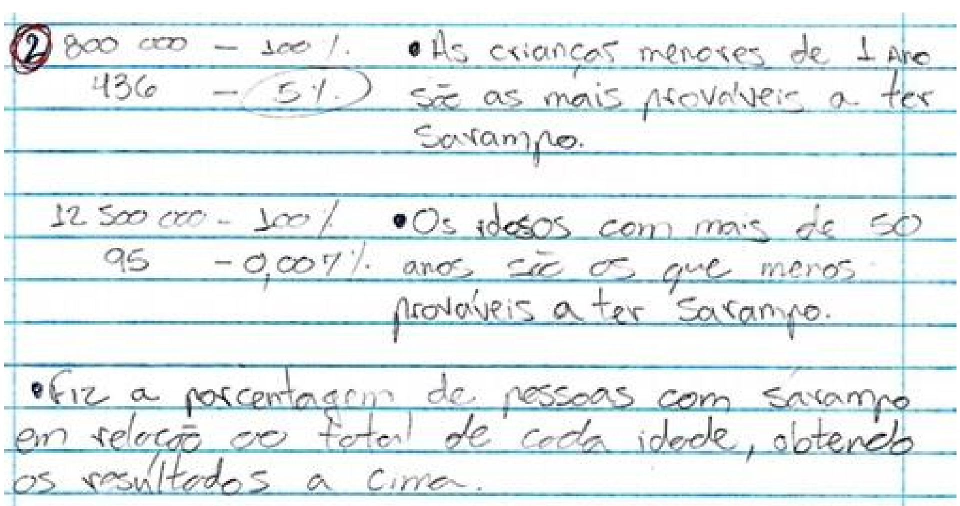
Figura 13: Outro exemplo do cálculo das probabilidades utilizando os subtotais de cada faixa etária.



Fonte: Próprio autor.

Adicionalmente, chamamos a atenção para o protocolo da Figura 14, em que o aluno realizou, infelizmente, o mesmo raciocínio dos casos apresentados anteriormente, além de erros de cálculo, mas diferencia-se por calcular as porcentagens por regra de três.

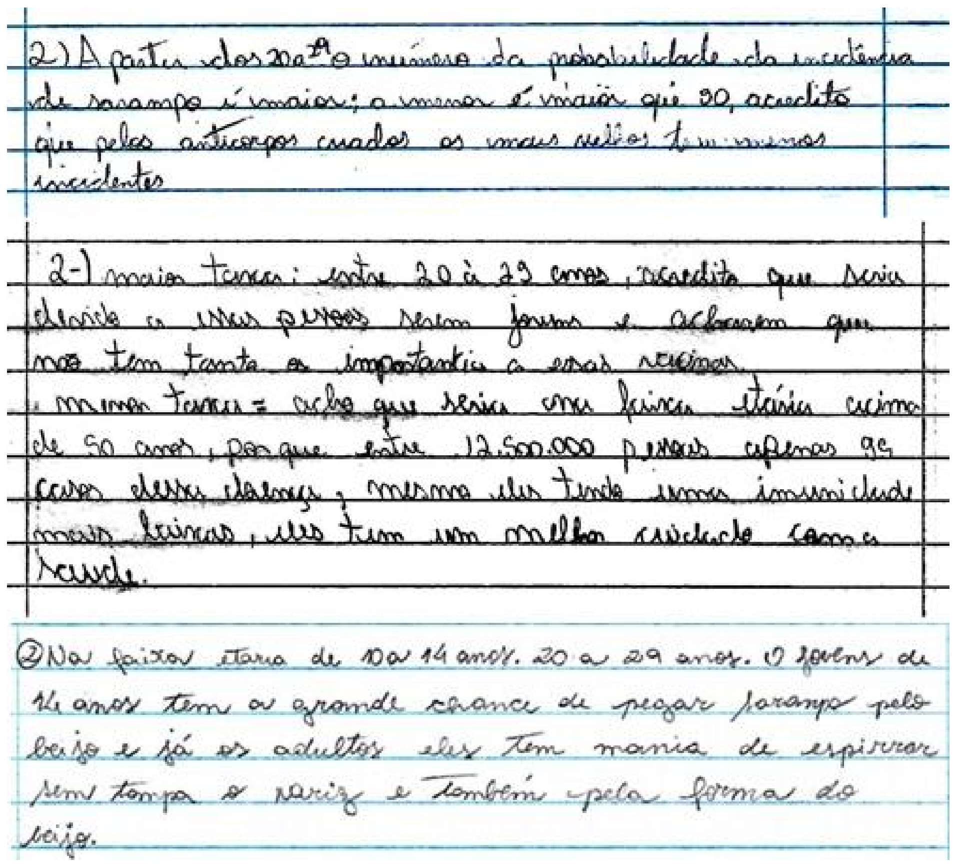
Figura 14: Exemplo do cálculo das probabilidades utilizando os subtotais de cada faixa etária e regra de três.



Fonte: Próprio autor.

Um fato curioso é que ao elaborar uma resposta vinculada ao tema da epidemia de sarampo, alguns alunos não elegeram uma faixa de idade com a maior probabilidade de incidência de sarampo e outra com a menor segundo uma justificativa matemática, mas utilizando justificativas de cunho biológico, como nos protocolos apresentados na Figura 15.

Figura 15: Exemplos de justificativas de cunho biológico apresentadas pelos alunos para o Problema 2.



2) A partir dos 20 a 29 o número da probabilidade da incidência de sarampo é maior; o menor é maior que 50, acredito que pelos anticorpos criados os mais velhos tem menos incidentes

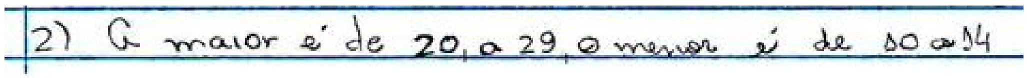
2-) maior taxa: entre 20 à 29 anos, acredito que seria devido a essas pessoas serem jovens e acharem que não tem tanta a importância a essas vacinas.
menor taxa = acho que seria na faixa etária acima de 50 anos, porque entre 12.500.000 pessoas apenas 95 casos dessa doença, mesmo eles tendo uma imunidade mais fraca, eles tem um melhor cuidado com a saúde.

② Na faixa etária de 10 a 14 anos. 20 a 29 anos. O jovens de 14 anos tem a grande chance de pegar sarampo pelo beijo e já os adultos eles tem mania de espirrar sem tampa o nariz e também pela forma do beijo.

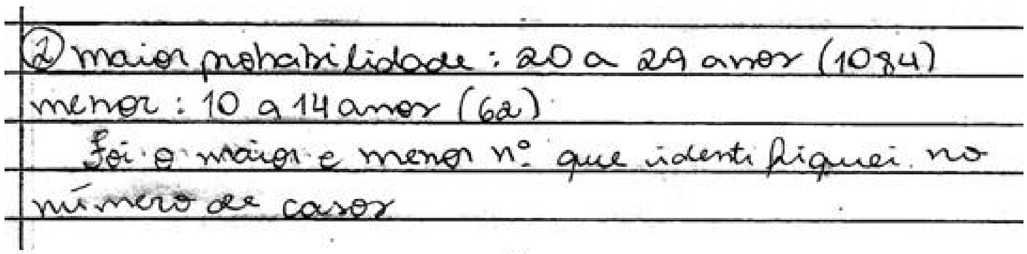
Fonte: Próprio autor.

Por fim, como apresentado na Figura 16, alguns alunos responderam corretamente o problema, mas não justificaram claramente (protocolo (i)) ou apresentaram uma justificativa sem efetivamente fazer um cálculo (protocolo (ii)), apenas argumentando que haviam selecionado as faixas etárias com a maior e a menor quantidade de casos de sarampo. Nessas condições, fica subentendido que eles observaram o espaço amostral como sendo o total da população do país.

Figura 16: Dois exemplos de resposta sem cálculo para o problema 2.


2) A maior é de 20, a 29, o menor é de 10 a 14

(i)


② maior probabilidade: 20 a 29 anos (1084)
menor: 10 a 14 anos (62)
Foi o maior e menor nº que identifiquei no número de casos

(ii)

Fonte: Próprio autor.

Do ponto da Teoria de Representações Semióticas de Duval, esperava-se que nesse problema ocorresse a interpretação do enunciado do problema e que esse mobilizasse uma conversão do Registro Figural na forma da tabela de contingência (Tabela 1) para o Registro Simbólico na forma numérica, que é efetivamente o cálculo da probabilidade pela definição frequencial. Embora os registros por parte dos alunos sejam escassos – e isso será um problema recorrente nos próximos problemas também – podemos identificar com base nos exemplos apresentados nessa seção diversos problemas, como identificação do espaço amostral ou a quantidade nos eventos favoráveis para cálculo da probabilidade, uso de justificativas não probabilísticas para seleção de uma faixa etária e erros de cálculo.

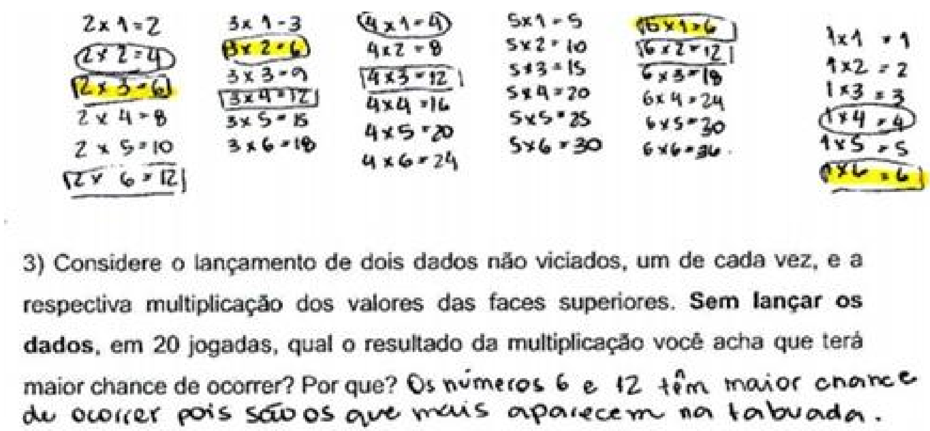
Segundo a proposta de letramento probabilístico de Gal (2005), o problema está de acordo com o elemento cognitivo de Contexto, especialmente, por utilizar o tema 4 (Saúde pública) do Quadro 2 de Áreas-chave de exemplos úteis, o que acaba indiretamente servindo como uma forma de exemplificar a importância da probabilidade para além da sala de aula, em um caso real que foi notícia em diversos veículos de informação. Esse problema também aborda adequadamente o elemento cognitivo de Cálculo de Probabilidades em um aspecto que tem sido muitas vezes negligenciado: A concepção frequencial de probabilidade. A dificuldade que os alunos apresentam em reconhecer essa definição e aplicá-la denota uma lacuna de aprendizagem que deve ser considerada.

5.3 Análise dos resultados dos Problemas 3 e 4

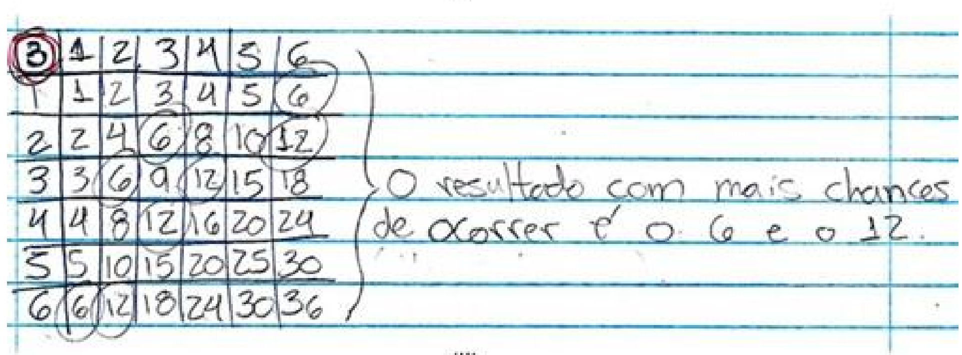
Como os Problemas 3 e 4 estão associados e, essencialmente, tratam do confronto de duas definições distintas de probabilidade, entendemos que sua análise deve ser feita conjuntamente.

Somente quatro alunos, todos da Turma D, responderam corretamente o Problema 3, justificando sua resposta em função da frequência com que os produtos 6 e 12 aparecem, a exemplo do apresentado na Figura 17. No protocolo (i), o aluno executou o mesmo procedimento exibido na Tabela 2, enquanto no protocolo (ii) foi utilizado o formato da Figura 2.

Figura 17: Dois exemplos de respostas corretas para o problema 3.



(i)

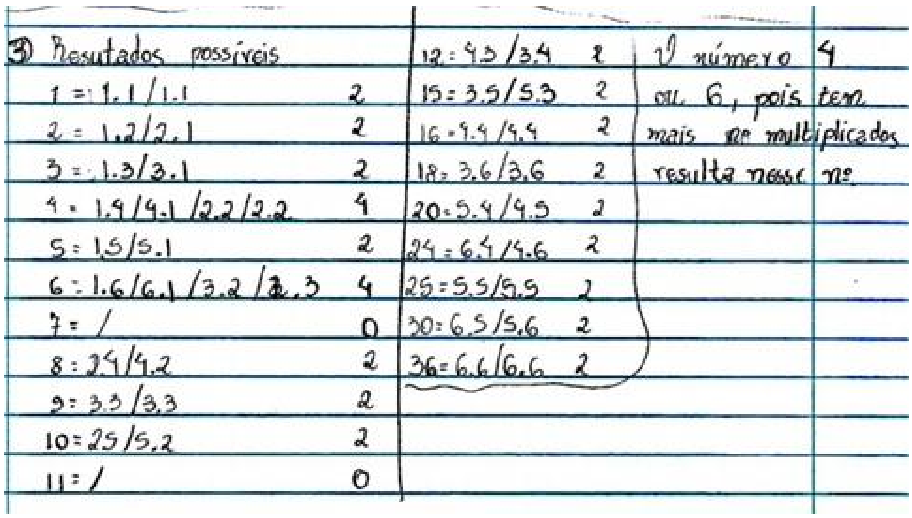


(ii)

Fonte: Próprio autor.

Mesmo alguns dos alunos que não responderam corretamente fizeram um levantamento de todas as possibilidades como mostrado na Tabela 2 ou como na Figura 2, ou então o mais próximo possível disso. No protocolo da Figura 18, o aluno tabelou alguns resultados, mas cometeu dois erros: Não percebeu que contou duas vezes o resultado 2x2, um erro cometido para outros lançamentos como 1x1, 3x3, 4x4, 5x5 e 6x6; Não considerou o sorteio 2x6 e 6x2. Logo, acabou respondendo erroneamente.

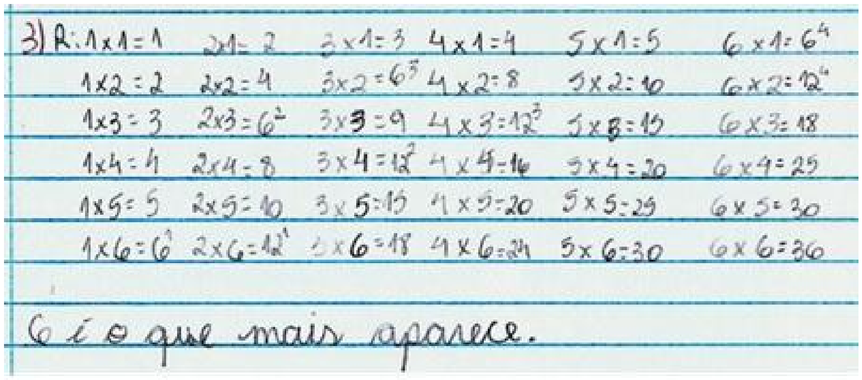
Figura 18: Exemplo de tabelamento feito incorretamente no problema 3.



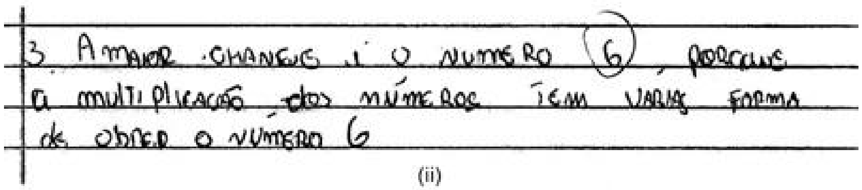
Fonte: Próprio autor.

Por impulsividade ou por imaginarem que haveria somente um produto que poderia aparecer mais vezes, mesmo fazendo o levantamento completo, esses alunos acabavam selecionando somente um dos produtos, mais comumente o 6. No protocolo (i) da Figura 19, o aluno também tabelou os resultados, determinando todas as configurações e contando os resultados mais frequentes, com um índice colocado na posição de um expoente. Mas, infelizmente ele considerou como resposta somente o número 6, sem apresentar mais explicações. Já no protocolo (ii), o aluno simplesmente aponta número 6 como resposta sem apresentar uma justificativa mais elaborada, senão um argumento errôneo.

Figura 19: Exemplos de respostas apontando para o número 6 no problema 3.


3) R: 1x1=1 2x1=2 3x1=3 4x1=4 5x1=5 6x1=6
1x2=2 2x2=4 3x2=6 4x2=8 5x2=10 6x2=12
1x3=3 2x3=6 3x3=9 4x3=12 5x3=15 6x3=18
1x4=4 2x4=8 3x4=12 4x4=16 5x4=20 6x4=25
1x5=5 2x5=10 3x5=15 4x5=20 5x5=25 6x5=30
1x6=6 2x6=12 3x6=18 4x6=24 5x6=30 6x6=36
6 é o que mais aparece.

(i)


3. A MAIOR CHANCE É O NUMERO 6, PORQUE A MULTIPLICAÇÃO DOS NÚMEROS TEM VARIAS FORMA DE OBTER O NUMERO 6

(ii)

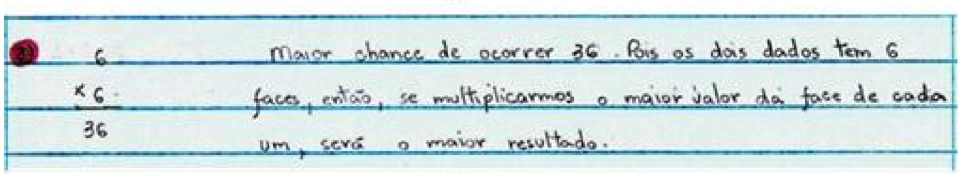
Fonte: Próprio autor.

Outro problema recorrente encontrado na redação dos alunos é uma confusão entre o que é mais provável de ser sorteado, e, portanto, nesse contexto, mas frequente, com o maior produto que pode ser resultado do sorteio. Assim, alguns alunos justificaram que a resposta correta do problema 3 seria $6 \times 6 = 36$. Na Figura 20 são apresentados dois protocolos em que isso ocorre. No protocolo (i), o aluno simplesmente aponta resposta do problema 3 como sendo $6 \times 6 = 36$, sem justificativa. No protocolo (ii), é oferecida uma justificativa que não tem embasamento probabilístico correto.

Figura 20: Dois exemplos em que os alunos confundem o número com maior chance de aparecer com o maior número no problema 3.


03- 2 dados = 6 x 6 = 36

(i)

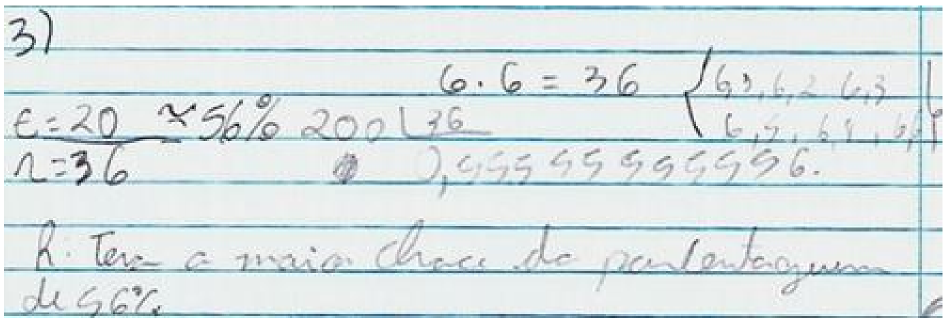

6
x 6
36
Maior chance de ocorrer 36. Pois os dois dados tem 6 faces, então, se multiplicarmos o maior valor da face de cada um, será o maior resultado.

(ii)

Fonte: Próprio autor.

Alguns alunos demonstraram dificuldade em como utilizar a informação apresentada no enunciado de que haveria 20 lançamentos. Sem perceber que os 20 lançamentos para um evento com probabilidade de $1/36$ implicariam em $1/36^{20}$, eles pensaram em $20/36$. Isso é exibido no protocolo da Figura 21.

Figura 21: Exemplo de erro de interpretação dos lançamentos no problema 3.



Fonte: Próprio autor.

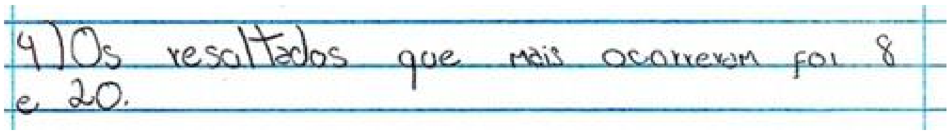
Do ponto de vista da Teoria de Representações Semiótica de Duval, o esperado é que o aluno mobilize a conversão do enunciado do problema na forma de um Registro da Língua Natural Materna para um Registro Simbólico na forma numérica, para o cálculo da probabilidade segundo a concepção clássica, identificando os dois números com maiores chances de serem sorteados, calculando o espaço amostral e quantidades dos eventos favoráveis. Em um segundo momento, de posse desse Registro Simbólico na forma numérica, resta calcular a probabilidade considerando os 20 lançamentos, o que corresponderá à probabilidade calculada elevada a 20.

Efetivamente, esse problema trabalha com a definição clássica da probabilidade, que é a mais amplamente abordada nas atividades. Em termos da proposta de letramento probabilístico de Gal (2005), esse problema atende o elemento cognitivo de Cálculo de Probabilidades. Entretanto, é visível que os alunos tem uma dificuldade em correlacionar esse conceito com a definição frequentista de probabilidade, o que ficou mais explícito no Problema 4.

Embora tenha sido unânime a execução dos sorteios sugeridos no Problema 4, nenhum aluno conseguiu responder a questão plenamente. Por 49 dos 87 alunos não ter registrado mais nenhuma informação além dos resultados dos 20 lançamentos, soa estranha para os alunos a comparação da frequência de ocorrência dos produtos com a probabilidade dos mesmos.

Na Figura 22 é apresentado um protocolo de um aluno que, a exemplo do que alguns outros fizeram, apenas apresentou os resultados da experimentação sem justificar a diferença dos resultados dos problemas 3 e 4.

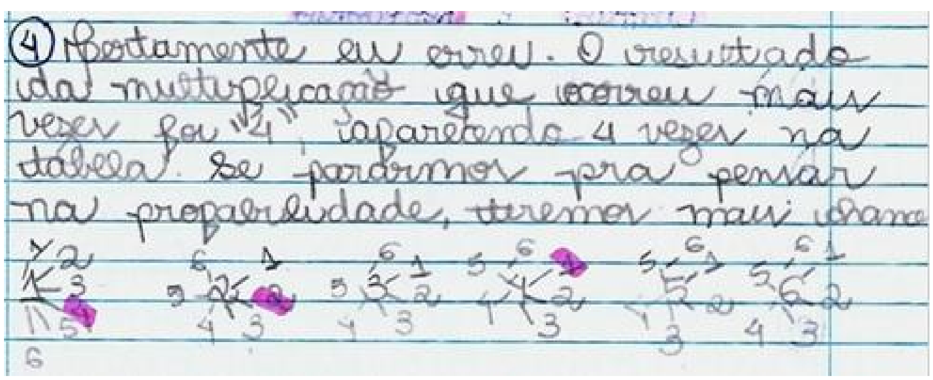
Figura 22: Exemplo de resposta para o problema 4 sem justificativa.



Fonte: Próprio autor.

Alguns alunos, não associaram a divergência entre os resultados previstos e os resultados encontrados no sorteio, começaram a especular que teriam “errado”, de alguma forma, o sorteio ou a previsão, como exibido no protocolo da Figura 23.

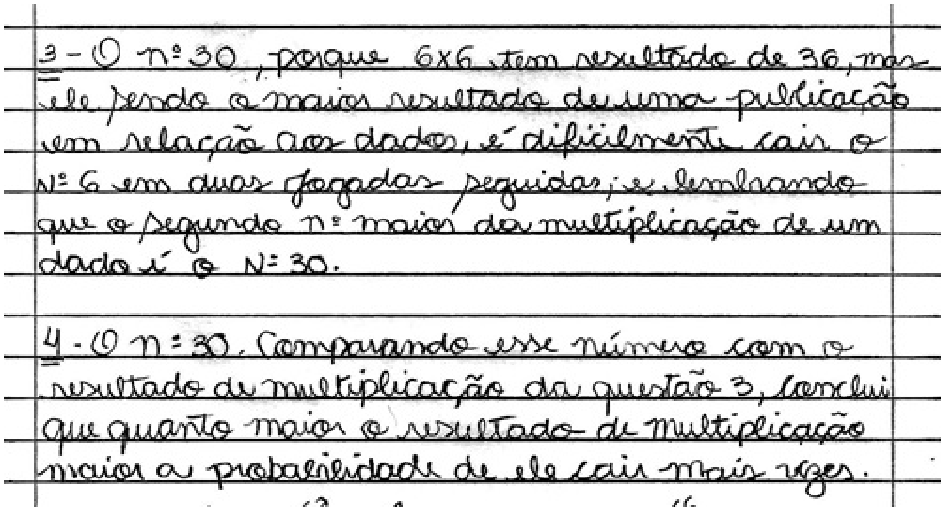
Figura 23: Exemplo de resposta para o problema 4 supondo erro operacional.



Fonte: Próprio autor.

Finalmente, alguns alunos tentaram justificar a divergência entre os resultados dos problemas 3 e 4 com argumentos errôneos. No protocolo da Figura 24 temos as respostas apresentadas para os dois problemas, 3 e 4, em que o aluno tenta estabelecer uma explicação mas sem fundamentação adequada.

Figura 24: Exemplo de resultado do problema 4 justificado com argumentos errôneos.


3 - O nº 30, porque 6x6 tem resultado de 36, mas ele sendo o maior resultado de uma publicação em relação aos dados, é dificilmente cair o Nº 6 em duas jogadas seguidas; e lembrando que o segundo nº maior da multiplicação de um dado é o Nº 30.

4 - O nº 30. Comparando esse número com o resultado de multiplicação da questão 3, conclui que quanto maior o resultado de multiplicação maior a probabilidade de ele cair mais vezes.

Fonte: Próprio autor.

Assim, de forma geral, os alunos não tem consciência que um evento, quando calculado segundo as concepções clássica e frequentista irá apresentar divergências, mas que isso não está errado. É também desconhecido que essa diferença é mitigada à medida que se aumenta a quantidade de lançamentos, supondo, é claro, que não se tratem de dados viciados.

Com relação à semiótica, após a realização da experimentação, partindo do Registro Figural de tabela de contingência, era esperado que o aluno identificasse o resultado com maior frequência e, tendo em vista as especificidades de cada definição de probabilidade, percebesse que era esperado que os resultados fossem diferentes, sendo que para que houvesse uma aproximação com os resultados do problema 3, teríamos que dispor de mais lançamentos. Com essa constatação, bastaria que ele fizesse a conversão desse resultado como um registro da língua materna ou uma redação explicando.

Logo, claramente há uma deficiência no elemento cognitivo de Cálculo de Probabilidades, especialmente no que diz respeito às definições de probabilidade além da clássica para um pleno desenvolvimento do letramento probabilístico na concepção de Gal (2005).

5.4 Análise dos resultados do Problema 5

Nas Tabelas 5 e 6 são apresentados os resultados dos quatro itens do Problema 5. O item (a), que é uma questão que envolve Combinatória. Os itens (b) e (c), que eram bastante análogos e buscavam chamar a atenção dos alunos por se tratarem de um numeral com dígitos iguais (222) e um numeral com dígitos diferentes (257), tiveram, apesar disso, índices de acertos diferentes. O resultado mais delicado, no entanto, foi no item (d), em que os alunos demonstraram muita dificuldade para avaliar a validade de uma declaração utilizando a probabilidade.

Tabela 5: Resultados dos itens (a) e (b) do Problema 5.

Aluno	P5(a)				P5(b)			
	Turma A	Turma B	Turma C	Turma D	Turma A	Turma B	Turma C	Turma D
1	✓	✓	✗	✓	✓	✓	✗	✓
2	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
3	✓	✗	✓	✓	✗	✗	✗	✓
4	✗	✗	✗	✓	✗	✗	✗	✓
5	✓	✗	✓	✓	✓	✗	✗	✓
6	✓	✗	✓	✓	✓	✗	✗	✓
7	✓	✗	✗	✓	✗	✗	✗	✓
8	✓	✓	✓	✓	✓	✗	✗	✓
9	✗	✗	✓	✓	✗	✗	✓	✓
10	✗	✓	✓	✓	✗	✓	✗	✓
11	✗	✓	✗	✓	✗	✓	✗	✗
12	✗	✓	✗	✓	✗	✓	✗	✓
13	✓	✗	✗	✓	✓	✗	✗	✓
14	✗	✓	✓	✓	✗	✓	✗	✓
15	✗	✓	✓	✗	✗	✓	✗	✗
16	✗	✓	✓	✓	✗	✓	✗	✓
17	✗	✗	✗	✓	✗	✗	✗	✓
18	✓	✗	✗	✓	✗	✗	✗	✓
19	✗	✗	✗	✓	✗	✗	✗	✓
20	-	✓	✗	✓	-	✓	✗	✓
21	-	✗	✓	✓	-	✗	✗	✓
22	-	✓	-	✓	-	✗	-	✓
23	-	✗	-	✓	-	✗	-	✓
24	-	-	-	✓	-	-	-	✓
Média	42,11%	43,48%	47,62%	91,67%	26,32%	34,78%	5,00%	87,50%

Fonte: Próprio autor.

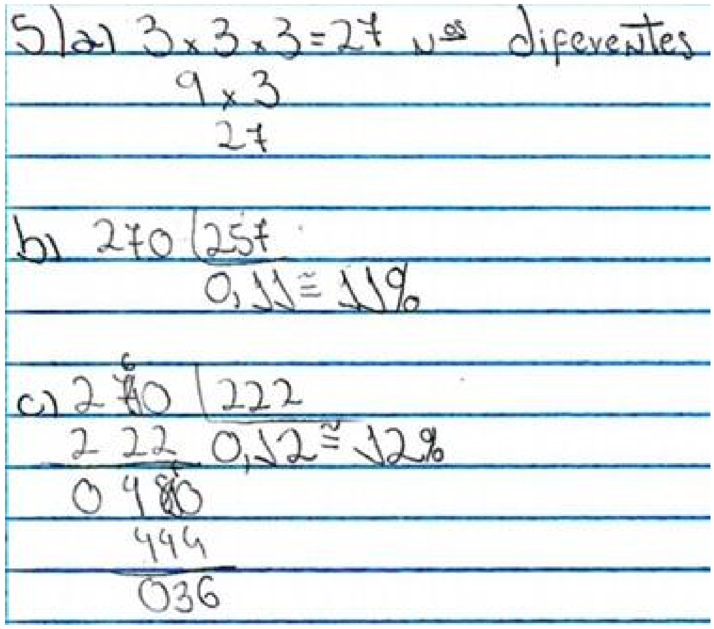
Tabela 6: Resultados dos itens (c) e (d) do Problema 5.

Aluno	P5(c)				P5(d)			
	Turma A	Turma B	Turma C	Turma D	Turma A	Turma B	Turma C	Turma D
1	✓	✓	✗	✓	✗	✗	✗	✗
2	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
3	✓	✗	✗	✓	✗	✗	✗	✗
4	✗	✗	✗	✓	✗	✗	✗	✗
5	✓	✗	✗	✓	✗	✗	✗	✗
6	✓	✗	✗	✓	✗	✗	✗	✗
7	✓	✗	✗	✓	✗	✗	✗	✗
8	✓	✗	✗	✓	✗	✗	✗	✗
9	✗	✗	✓	✓	✗	✗	✗	✗
10	✗	✓	✗	✓	✗	✗	✗	✗
11	✗	✓	✗	✓	✗	✗	✗	✗
12	✗	✓	✗	✓	✗	✗	✗	✗
13	✓	✗	✗	✓	✗	✓	✗	✗
14	✗	✓	✗	✓	✗	✗	✗	✗
15	✗	✓	✗	✗	✗	✗	✗	✗
16	✗	✗	✗	✓	✗	✗	✗	✗
17	✗	✗	✗	✓	✗	✗	✗	✗
18	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
19	✗	✗	✗	✓	✗	✗	✗	✗
20	-	✓	✗	✓	-	✓	✗	✗
21	-	✗	✗	✓	-	✗	✗	✗
22	-	✗	-	✗	-	✗	-	✗
23	-	✗	-	✗	-	✗	-	✗
24	-	-	-	✗	-	-	-	✗
Média	36,84%	30,43%	4,76%	75,00%	0,00%	8,70%	0,00%	0,00%

Fonte: Próprio autor.

A questão trata do cálculo de probabilidades de um evento aleatório, relativamente comum. No item (a) é solicitado que se calcule o espaço amostral, que será utilizado posteriormente. A maioria dos estudantes fizeram o raciocínio trabalhando com o Princípio Multiplicativo.

Figura 25: Exemplo com aplicação do Princípio Multiplicativo no problema 5.

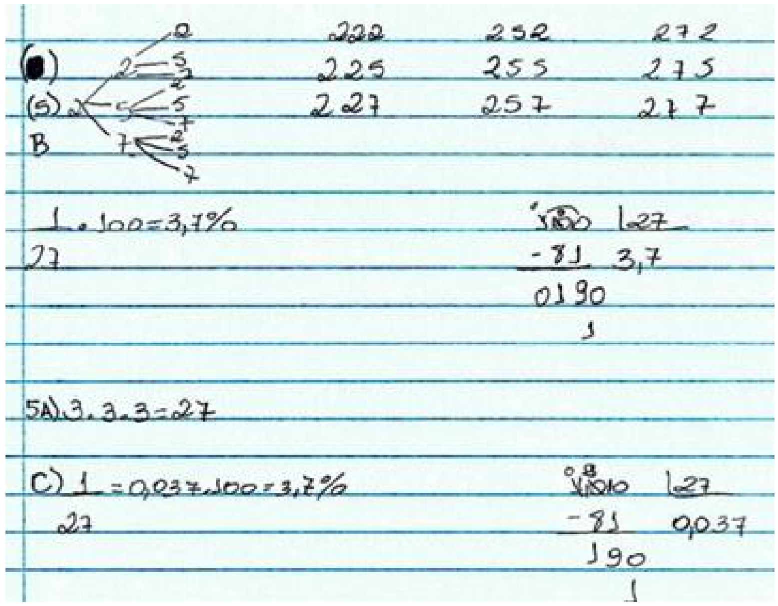


Fonte: Próprio autor.

No protocolo da Figura 25, o aluno responde corretamente o item (a), aplicando o Princípio Multiplicativo para quantificar o total de configurações que numerais de três algarismos podem ser sorteados. No entanto, para os itens (b) e (c), há uma má interpretação dos elementos do problema 5: o aluno associa a probabilidade de sorteio dos números 257 e 222 com as divisões de 27 por 257 e 222. Embora isso sugira que o aluno tem ainda lacunas de entendimento do Cálculo de Probabilidades, denota também uma confusão com a identificação dos numerais sorteados (257 e 222) e os números 257 e 222.

Houve estudantes que utilizaram registros gráficos para nortear suas resoluções, montando diagrama de árvore. O uso do registro gráfico no estudo da probabilidade é um recurso de representação semiótica que pode promover conexões com a análise combinatória, bem como também a estatística, promovendo o exercício da leitura e interpretação das informações obtidas em pesquisas estatísticas. A utilização de diagramas de árvore ajuda a orientar o aluno, sendo também uma forma ordenada e clara de expor sua linha de raciocínio. Ainda sim, há alunos que demonstram dificuldades em manusear esse recurso e acabam se perdendo na sua estruturação.

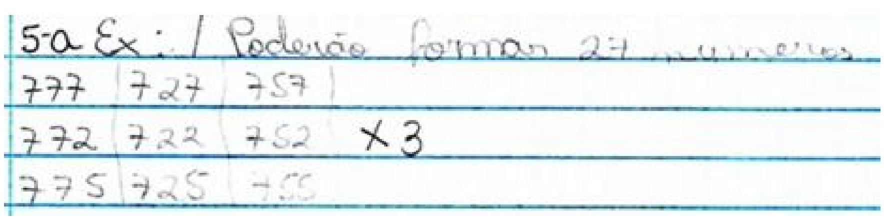
Figura 26: Exemplo de construção equivocada do diagrama de árvore no problema 5.



Fonte: Próprio autor.

Embora a disposição da resolução tenha ficado confusa e não muito bem organizada, no protocolo da Figura 26 percebemos que o aluno empregou no item (a) a construção de um diagrama de árvore incompleto e ao lado deixou tabuladas as configurações resultantes do ramo do diagrama de árvores que ele fez. Mais abaixo dessa construção, respondeu diretamente o item (a) com um registro numérico em que está aplicado o Princípio Multiplicativo e então encontrou o resultado final correto.

Figura 27: Exemplo de tabelamento dos resultados dos sorteios no problema 5.



Fonte: Próprio autor.

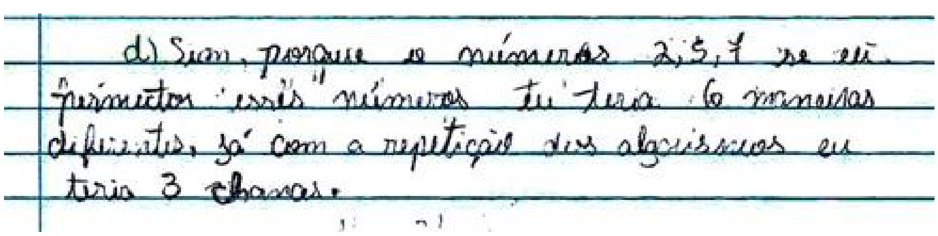
No protocolo da Figura 27, o aluno lista todas as configurações de sorteio que podem ser feitas se o primeiro algarismo sorteado for 7. No entanto, não repetiu esse procedimento para os algarismos 2 e 5, limitando-se à indicação “x3” para induzir que o resultado (correto) informado acima de 27 é fruto da repetição desse procedimento. De fato, a apresentação do raciocínio é pouco ortodoxa e limitada, mas percebe-se que o aluno entendeu o conceito envolvido no item (a).

Nos itens (b) e (c) existem aplicações diretas da definição clássica de probabilidade. Em vários registros, não são demonstradas claramente as contas feitas ou quando são apresentadas, não é exposto o motivo da escolha desses números. No entanto, chama a atenção o fato de que a maioria dos alunos não percebeu que esses dois itens são bastante análogos e tem um mesmo resultado.

Voltando ao protocolo da Figura 26, nos itens (b) e (c), embora o aluno tenha registrado poucas informações, foram calculadas as probabilidades corretamente. Duas ressalvas ficam aos fatos de que 1/27 é aproximadamente 3,7% e o fator de 100 que multiplica essa fração não está com um símbolo de porcentagem, mas a resposta final está corretamente apresentada com o símbolo da porcentagem.

Com relação ao item (d), somente dois alunos apresentaram uma justificativa plausível para tomar a afirmação como verdadeira, o que demonstra uma dificuldade em manusear na argumentação informações probabilísticas para validar ou não uma afirmação. No protocolo da Figura 28 é apresentado um exemplo disso, em que o aluno não chega a fazer o calculo das probabilidades, mas demonstra que uma condição teria mais eventos favoráveis que a outra, o que já permitiria validar a afirmativa.

Figura 28: Exemplo de justificativa correta do item (d) do problema 5.

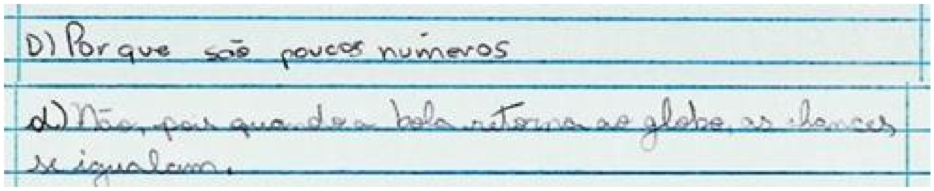


d) Sim, porque os números 2,5,7 se eu permutar "esses" números eu teria 6 maneiras diferentes, já com a repetição dos algarismos eu teria 3 chanses.

Fonte: Próprio autor.

Em contrapartida, alguns alunos tiveram dificuldades em articular uma justificativa para validar ou não a afirmação, recaindo em declarações erradas ou pobres do ponto de vista probabilístico, como apresentado nos protocolos da Figura 29.

Figura 29: Dois exemplos de justificativas incorretas do item (d) do problema 5.



Fonte: Próprio autor.

No item (a), esperávamos que o aluno mobilizasse uma conversão do registro da língua natural materna presente no enunciado para um registro simbólico na forma numérica que consiste na aplicação do Princípio Multiplicativo. Essa conversão pode ser intermediada por um registro figural de um diagrama de árvore, como mostrado anteriormente. Nos itens (b) e (d), é utilizado a quantidade calculada no item (a) para os cálculos de probabilidade. Nesse caso, há também conversão do registro na língua natural materna, como enunciado para um registro simbólico na forma numérica, que corresponderá à aplicação do conceito clássico de probabilidade. Finalmente, no item (d), para dar suporte ao argumento que validaria a afirmação, seria necessário fazer o cálculo das probabilidades em cada um dos casos, o que implicaria em uma conversão do registro da língua natural materna presente no enunciado para um registro simbólico na forma numérica, um tratamento entre esses registros simbólicos numéricos, os comparando para validar a informação e uma nova conversão da comparação dos registros simbólicos na forma numérica para um registro da língua natural materna na forma de uma redação explicando suas conclusões. O mais próximo que tivemos disso foi o protocolo da Figura 28.

Os itens (b), (c) e (d) contemplam o elemento cognitivo do Cálculo de Probabilidades segundo a proposta de Gal (2005) para o letramento probabilístico. Adicionalmente, o elemento cognitivo de Questões Críticas é abordado especificamente no item (d), ao convidar o aluno a utilizar conhecimentos probabilísticos para validar uma afirmação.

Embora a duração da atividade foi suficiente para todos entregarem, muitos alunos deixaram esse problema em branco. Fenômeno parecido também ocorreu com o Problema 6.

5.5 Análise dos resultados do Problema 6

Por fim, os resultados das produções dos alunos para o Problema 6 estão apresentados na Tabela 7. O item (a), também é um problema de Combinatória em que deve ser calculado o total de configurações que uma refeição pode ter. No item (b), essa situação é alterada. Embora, a alteração não seja radical, os alunos demonstraram dificuldade em lidar com essa nova composição da refeição.

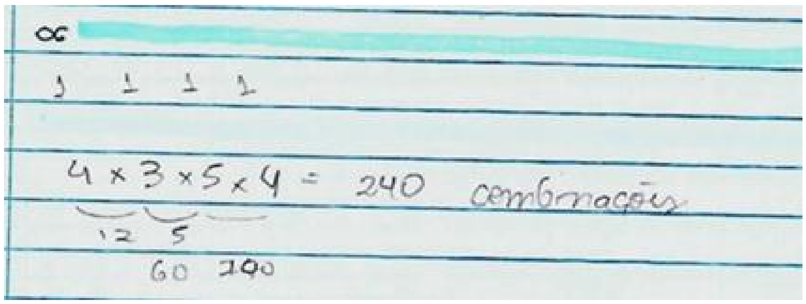
Tabela 7: Resultados dos itens (a) e (b) do Problema 6.

Aluno	P6(a)				P6(b)			
	Turma A	Turma B	Turma C	Turma D	Turma A	Turma B	Turma C	Turma D
1	✗	✓	✗	✓	✗	✗	✗	✗
2	✗	✗	✗	✓	✗	✗	✗	✗
3	✗	✗	✗	✓	✗	✗	✗	✓
4	✗	✗	✗	✓	✗	✗	✗	✗
5	✓	✗	✗	✗	✓	✗	✗	✗
6	✓	✗	✗	✓	✗	✗	✗	✗
7	✗	✗	✓	✓	✗	✗	✗	✗
8	✓	✗	✓	✓	✓	✗	✗	✗
9	✗	✓	✓	✓	✗	✗	✗	✗
10	✗	✓	✓	✓	✗	✗	✗	✗
11	✓	✗	✓	✗	✗	✗	✗	✗
12	✗	✓	✗	✓	✗	✗	✗	✗
13	✗	✓	✗	✓	✗	✗	✗	✗
14	✗	✓	✗	✗	✗	✗	✗	✗
15	✓	✓	✓	✓	✗	✗	✗	✗
16	✓	✓	✗	✓	✗	✗	✗	✗
17	✓	✗	✗	✓	✗	✗	✗	✗
18	✗	✓	✗	✓	✗	✗	✗	✗
19	✗	✓	✗	✓	✗	✗	✗	✓
20	-	✓	✗	✓	-	✗	✗	✓
21	-	✗	✗	✓	-	✗	✗	✗
22	-	✗	-	✓	-	✗	-	✗
23	-	✗	-	✓	-	✗	-	✗
24	-	-	-	✓	-	-	-	✗
Média	36,84%	47,83%	28,57%	87,50%	10,53%	0,00%	0,00%	12,50%

Fonte: Próprio autor.

Nesse problema, fica mais evidente a abstenção de alguns alunos e a falta de apresentação de maiores detalhamentos no raciocínio, mas ainda assim, no item (a), todos os alunos que acertaram a questão trabalharam aplicando o Princípio Multiplicativo, como ilustrado no protocolo da Figura 30.

Figura 30: Exemplo de justificativa correta do item (a) do problema 6.



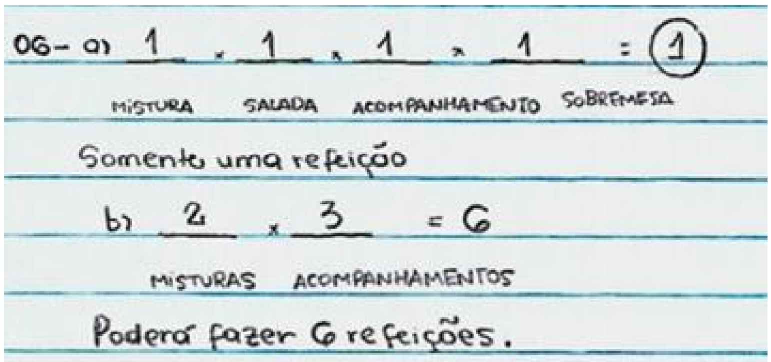
Fonte: Próprio autor.

No item (b), houveram apenas 5 acertos, 2 da Turma A e 3 da Turma D. Os erros mais comuns foram com a interpretação da possibilidade de escolha de duas misturas e três acompanhamentos. No contexto do problema, o aluno deveria avaliar a escolha de um prato principal (só havia um prato principal), duas misturas, uma salada, três acompanhamentos e uma sobremesa. Assim, alguns alunos interpretaram que deveriam considerar uma refeição com duas misturas e três acompanhamentos (não muito usual).

Outros interpretaram a composição da refeição corretamente, mas não conseguiram fazer os cálculos. Ao invés de considerar para mistura e acompanhamento a permutação das duas opções de mistura e das três opções de acompanhamento, já que a ordem não é relevante, esses alunos consideraram mais configurações do que deveriam.

A Figura 31 possui dois protocolos que exemplificam isso. No item (a), o aluno considerou uma refeição, mas sem efetivamente calcular as opções de configuração. Como o protocolo é pobre de registros, podemos apenas levantar a hipótese de que ele tenha se confundido e ao invés de permutar as opções de cada um dos componentes da refeição, ele considerou somente as quantidade de escolha de cada componente, ou seja, como a refeição tem um prato principal, uma mistura, um acompanhamento, uma salada e uma sobremesa, então o resultado seria o apresentado. Já no item (b), há um tipo de confusão similar, em que foram considerados efetivamente a possibilidade de selecionar duas misturas e três acompanhamentos mas não as quantidades de opções de configurar a refeição.

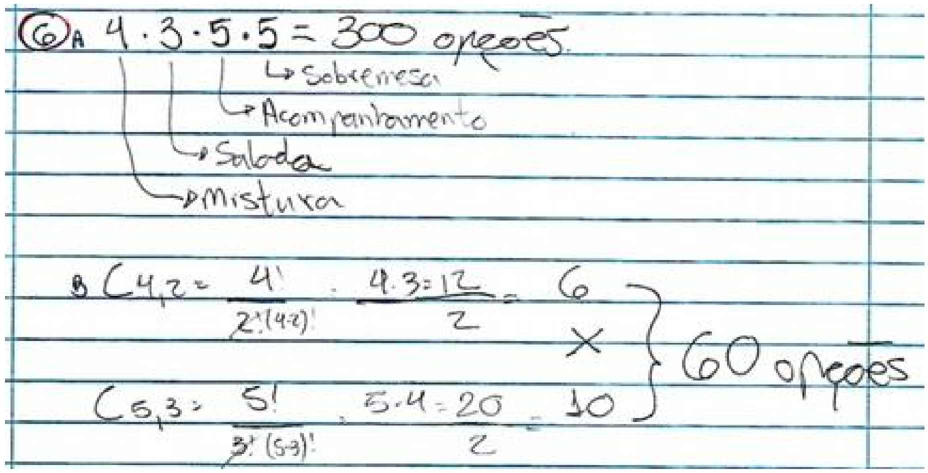
Figura 31: Exemplo de erro na resolução do problema 6.



Fonte: Próprio autor.

Na Figura 32 temos mais um exemplo de erro de interpretação no problema 6. No item (a), o aluno se distraiu e ao invés de considerar 4 opções de sobremesa, considerou 5. Podemos especular que isso tenha ocorrido por conta da descrição de uma das sobremesas ser mais longa e demandar mais do que uma linha no cardápio, o que constituiria um erro de atenção. No item (b), o aluno se enganou ao interpretar que a refeição teria somente duas misturas e três acompanhamentos, embora tenha calculado corretamente a quantidade de formas de escolher duas misturas e três acompanhamentos como a combinação de 4 tomado 2 a 2 e de 5 tomado 3 a 3, respectivamente. Poucos alunos fizeram o uso da fórmula da combinação como feito por esse aluno.

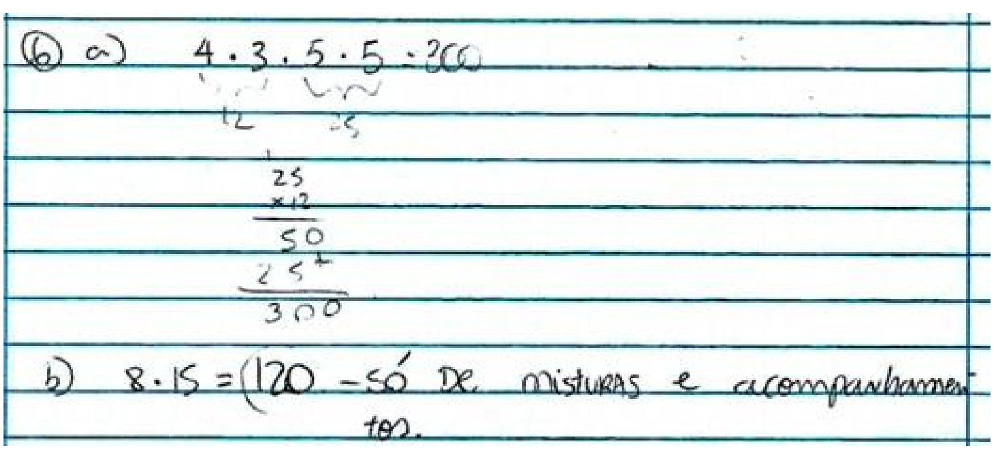
Figura 32: Exemplo de erro de interpretação no problema 6.



Fonte: Próprio autor.

Por fim, na Figura 33, temos novamente o mesmo erro observado no protocolo da Figura 32, item (a), com relação a quantidade de opções de sobremesa, além de, no item (b), o aluno ter se confundido diante da possibilidade de escolha de duas misturas e três acompanhamentos e interpretado a quantidade de formas de escolher duas misturas e três acompanhamentos como 2.4 e 3.5, respectivamente.

Figura 33: Outro exemplo de erro de interpretação do problema 6.



Fonte: Próprio autor.

Do ponto de vista da semiótica na perspectiva de Duval, os dois itens do problema 6 se assemelham ao item (a) do problema 5. Só se diferenciam pela situação-problema atuar em outro contexto e o item (b) demandar um custo cognitivo maior para poder equacionar a possibilidade de escolhe duas misturas e três acompanhamentos.

O problema 6 foi devidamente formulado pensando em uma situação corriqueira que parecesse verossímil para o aluno, o que o aproximaria do elemento de Contexto, e que contempla o exercício do livre arbítrio. Sua contextualização e enunciado foi configurada dessa forma para verificar o entendimento do raciocínio combinatório dos alunos, uma vez que é um componente de importância para o cálculo de probabilidades.

Como o objetivo do produto educacional é que ele possa atuar como um auxiliar do trabalho do professor em sala de aula, evidenciando possibilidades para que o letramento probabilístico seja adequadamente desenvolvido, sugerimos que o professor pode aplicá-lo na sua totalidade, ao finalizar os conteúdos de Combinatória e Probabilidade, ou ao longo desse processo, até mesmo trabalhando com as questões individualmente. No entanto, recomendamos que ele sempre o aplique de forma que haja tempo hábil para elaborar um plano de ação de acordo com os problemas evidenciados.

Outra recomendação que entendemos como relevante é que o professor estimule os alunos a elaborar suas resoluções com maior riqueza de registros. Isso não somente comunica muito melhor o entendimento do aluno sobre o tema, como permite uma análise dos registros de representação semiótica mais profundo.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho tem um caráter investigativo com foco no aluno, segundo um referencial teórico amplamente aceito na academia e que leva em consideração documentos educacionais oficiais do governo, a partir do qual desejamos levantar aspectos que devem ser trabalhados e analisados.

No Capítulo 3 desse trabalho, notamos que ao longo do tempo, os documentos e currículos foram reconhecendo a importância da Probabilidade e Estatística como segmentos da Matemática que devem ser prestigiados e trabalhados de forma contextualizada com os alunos. Entretanto, a análise documental mostrou que ainda existem, em termos de letramento probabilístico, fragilidades:

a) pouca representação gráfica no conteúdo das Situações de Aprendizagem do material de apoio ao Currículo do Estado de São Paulo (2002);

b) o elemento cognitivo ‘contexto’ não é devidamente aproveitado, com exceção do tratamento histórico da Probabilidade que gerou algumas das tarefas contidas na Situação de Aprendizagem (S1);

c) ausência de tarefas envolvendo a noção de aleatoriedade, contida no elemento cognitivo ‘Grandes Ideias’;

d) uso ostensivo da concepção clássica da probabilidade, em detrimento de outras formas de cálculo, o que compromete o elemento cognitivo do Cálculo de Probabilidade;

e) escassez de tarefas que demanda do aluno a interpretação de informações probabilísticas na língua materna;

f) falta de exploração da experimentação como recurso didático nas tarefas;

g) ausência da abordagem de questões críticas.

Em função desses aspectos elaboramos os seis problemas do instrumento e aplicamos nos 87 alunos das quatro turmas do 2º Ano do Ensino Médio da escola estadual Vereador Odilon Batista Jordão, em Pilar do Sul/SP.

Apesar de, em sua maioria, os protocolos dos estudantes não conterem o detalhamento que consideramos adequado para poder analisar à contento os registros que são mobilizados e coordenados pelos alunos e, ainda, por conta da pandemia de covid-19 não podermos efetuar novas aplicações, há vários elementos na análise que indicam evidências de registros que são mobilizados ou erros que são cometidos pelos alunos, podendo nos auxiliar a entender o que ajuda ou não o desenvolvimento do letramento probabilístico.

Assim, nossa pergunta orientadora, "**que registros de representação semiótica são mobilizados e coordenados por estudantes da 2ª série do Ensino Médio envolvidos com atividades de letramento probabilístico?"** pode ser respondida a partir das análises feitas no capítulo anterior.

No problema 1 há o tratamento de um registro na língua natural materna e envolve diretamente o pleno entendimento do conceito da aleatoriedade no elemento cognitivo das Grandes Ideias; No exercício 2 há primordialmente uma conversão do Registro Figural na forma da tabela de contingência (Tabela 1) para o Registro Simbólico na forma numérica para cálculo da probabilidade pela definição frequencial, remetendo no letramento probabilístico os elementos de Contexto e Cálculo de Probabilidade; No problema 3 há a conversão do enunciado do problema na forma de um Registro da Língua Natural Materna para um Registro Simbólico na forma numérica, para o cálculo da probabilidade segundo a concepção clássica, o que o remete ao elemento de Cálculo de Probabilidades, bem como o problema 4, em que após a experimentação, partindo do Registro Figural de tabela de contingência, há uma conversão para o registro da língua materna para que o aluno identificasse o resultado com maior frequência e explicasse a sua diferença em relação ao problema anterior; No problema 5 ocorre nos itens (b) e (c) a conversão do registro na língua natural materna, como enunciado para um registro simbólico na forma numérica, que corresponderá à aplicação do conceito clássico de probabilidade e no item (d), por sua vez, ocorre uma conversão do registro da língua natural materna presente no enunciado para um registro simbólico na forma numérica, um tratamento entre esses registros simbólicos numéricos, os comparando para validar a informação e uma nova conversão da comparação dos registros simbólicos na forma numérica para um registro da língua natural materna.

Portanto, os alunos da 2ª série do Ensino Médio, de fato, mobilizam e coordenam os registros da língua natural materna (nos conteúdos dos enunciados ou nas abordagens de termos probabilísticos), os registros figurais (sejam como tabela de dupla entrada ou de contingência, ou como diagrama de árvore) e os registros simbólicos na forma algébrica (pela utilização de fórmulas) ou na forma numérica (razão para quantificar a probabilidade), a fim de poder desenvolver adequadamente os cinco elementos cognitivos na perspectiva de Gal (2005), que são as Grandes Ideias, o Contexto, o Cálculo de Probabilidades, a Linguagem e as Questões Críticas.

Em paralelo, o produto educacional apresentado auxilia na identificação de lacunas no desenvolvimento probabilístico dos alunos. O professor pode utilizá-lo na íntegra, ao final do estudo dos conteúdos de Combinatória e Probabilidade, ou parcialmente, à medida que as aulas apresentem os temas, mas sempre de forma que o professor possa elaborar em tempo um plano de ação de acordo com os resultados obtidos.

Para que o professor que os utilize no futuro e possa aproveitá-lo da melhor forma possível, recomendamos que desde cedo estimule seus alunos a apresentar de forma escrita suas ponderações ao resolver os problemas, para que ele possa analisar mais apropriadamente os registros dos alunos.

Em termos de trabalhos futuros, pretendemos enquanto aluno regularmente matriculado no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas – PPGECE, da UFSCar (campus Sorocaba), construir uma escala de autoeficácia para o letramento probabilístico. Outros trabalhos que estão em avaliação para serem desenvolvidos consistem em desenvolver produtos educacionais ou sequências didáticas tratando da abordagem de temas como experimentação em atividades, probabilidade na concepção frequencial, além do Letramento Probabilístico dos alunos no Ensino Fundamental II no contexto da BNCC (BRASIL, 2018).

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMAGRO, Ricardo Campanha; OLIVEIRA, Paulo César. Um produto educacional para o desenvolvimento do letramento probabilístico. In: **VIII Jornada Nacional de Educação Matemática**, 2020, Passo Fundo. Jornada Nacional de Educação Matemática,. Passo Fundo: EDIUPF, 2020.

APÓS polêmica, PSDB tira do ar gráfico que distorce intenções de voto em Doria. **Folha de S. Paulo**, 30 de mai. de 2018. Disponível em: <https://www1.folha.uol.com.br/poder/2018/05/grafico-mostra-barra-distorcida-de-intencoes-de-voto-em-doria-e-e-retirado-por-psdb.shtml>. Acesso em: 20 de ago. de 2020.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais:** Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148p.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+:** Ensino médio - orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília: MEC, 2002.141p.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Orientações curriculares para o ensino médio**: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, 135p., 2006, v.2.

CABERLIM, Cristiane Candido Luz. **Letramento probabilístico no ensino médio:** um estudo de invariantes operatórios mobilizados por alunos. 2015. 141f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2015.

CANAVEZE, Leila. **O ensino-aprendizagem de probabilidade em uma escola pública de Sorocaba/SP**. 2013. 209f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas). Sorocaba: Universidade Federal de São Carlos, 2014.

CARVALHO, D. L.; OLIVEIRA, P. C. Quatro concepções de probabilidade manifestadas por alunos ingressantes na licenciatura em matemática: clássica, frequentista, subjetiva e formal. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPEd, 25., 2002, Caxambu. **Anais...** Caxambu: Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, 2002. Disponível em: http://25reuniao.anped.org.br/texced251.htm#gt19

CENTRO DE PREVISÃO DE TEMPO E ESTUDOS CLIMÁTICOS – CPTEC. Votorantim/SP- Previsão de tempo por período (30/12/2020). Disponível em: <https://www.cptec.inpe.br/previsao-tempo/sp/votorantim>. Acesso em: 30 dez. 2020.

COBELLO, Lucas Soares; OLIVEIRA, Paulo César. História e análise do currículo de matemática na escola básica no Estado de São Paulo. In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4., 2015, Ilhéus. **Anais...** 12p. Ilhéus: UESC, 2015. CD-ROM.

COLOMBO, Janecler Aparecida Amorin; BUEHRING, Roberta Schnorr; MORETTI, Méricles Thadeu. Registros de representação semiótica, tarefas e análise de dados: articulações em torno do currículo de matemática. **REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v.4, n.8, p. 90-113, 2009.

COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. Probabilidade: contexto e construção do letramento probabilístico. In: III CIVEEST, 2019, Granada. **Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística**. Granada: Universidad de Granada, 2019. v. 1. p. 1-11.

COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva; SILVA, Maria José Ferreira da; ALMOULOUD, Saddo Ag. Desenvolvimento do Pensamento Estatístico e sua Articulação com a Mobilização de Registros de Representação Semiótica. **Bolema**, Rio Claro, v.24, n.39, p.495-514, 2011.

CUSTÓDIO, Leandro Aparecido Alves. **Letramento probabilístico: um olhar sobre as situações de aprendizagem do caderno do professor**. 2016. 64p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas). Sorocaba: Universidade Federal de São Carlos, 2016.

DUVAL, Raymond. Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. **REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v.7, n.1, p.97-117, 2012.

FERREIRA, Norma Sandra de Almeida. As pesquisas denominadas “estado da arte”. **Educação & Sociedade**, Campinas, v. 23, n. 79, p. 257-272, ago. 2002.

FERREIRA, Robson dos Santos. **Ensino de probabilidade com o uso do programa estatístico R numa perspectiva construcionista**. 2011. 155f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Universidade Bandeirante de São Paulo, 2011.

GAL, Iddo. Developing probability literacy: Needs and pressures stemmings from framewoks of adult competencies an mathematics curricula. In: INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 12., 2012, Seoul. **Anais...** Seoul: COEX, 2012.

GAL, Iddo. Towards 'probability literacy' for all citizens. In: Graham A. Jones (ed.). **Exploring probability in school:** Challenges for teaching and learning. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2005, p. 43-71.

GIL, Antonio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6ª ed. São Paulo: Atlas, 2012.

GODINO, Juan Diaz, BATANERO, Carmen; CAÑIZARES, Maria Jesus. **Azar y Probabilidad.** España: Editorial Síntesis, 1996.

KYBURG, Henry The logical foundations of Statistical Inference. Dordrecht: Reidel, 1974.

LOPES, Celi Aparecida Espasandin. **O conhecimento profissional dos professores e suas relações com estatística e probabilidade na educação infantil.** 2003. 281p. Tese (Doutorado em Educação). Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 2003.

OLIVEIRA, Fábio Francisco de. **Probabilidade condicional:** proposta de um experimento de ensino envolvendo registros de representações semióticas. 2014. 223f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Universidade Anhanguera de São Paulo, 2014.

OLIVEIRA, Paulo César. **O processo de aprender noções de Probabilidade e suas relações no cotidiano das séries iniciais do Ensino Fundamental**: uma história de parceria. 2003. 199f. Tese (Doutorado em Educação). Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 2003.

OLIVEIRA, Paulo César; PAIM, Sandra Aparecida de Oliveira Coelho; CUSTÓDIO, Leandro Aparecido Alves; ALMAGRO, Ricardo Campanha. Um olhar para as pesquisas brasileiras sobre o letramento probabilístico de 2007 a 2018. In: GUILHERME, Willian Douglas (org.). **A educação como diálogo intercultural e sua relação com as políticas públicas**. Ponta Grossa: Atena, v.2, 2020.

OLIVEIRA, Priscila Glauce de. **Probabilidade:** concepções construídas e mobilizadas por alunos do Ensino Médio à luz da teoria das concepções (CKc). 2010. 197f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2010.

SANTAELLA, L**. O que é Semiótica.** São Paulo: Brasiliense, 1983.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Proposta curricular do Estado de São Paulo**: Matemática. Coord. Maria Inês Fini. São Paulo: SEE, 2008. 64p.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo:** Matemática e suas tecnologias – Ensino Fundamental (Ciclo II) e Ensino Médio. Coordenação de área: Nilson José Machado. 1ª ed. atual. São Paulo, SEE, 2012. 72p.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Material de apoio ao Currículo do Estado de São Paulo - Caderno do Professor:** 2ª série do Ensino Médio, Matemática. São Paulo: SEE, 2014-2017, v.2.

SOARES, Magda. Letramento e alfabetização: as muitas facetas. **Revista Brasileira de Educação**, n.25, p.5-17, jan-abr. 2004.

ANEXO A

TERMO DE CONSENTIMENTO

Eu, ________________________, portador do CPF nº ___________, gestor da escola ____, aceito que alunos desta instituição participem de forma voluntária, no desenvolvimento da pesquisa, intitulada "Um produto educacional para o letramento probabilístico". Esta pesquisa é parte integrante para a obtenção do título de licenciado em Matemática, orientada pelo Professor Doutor Paulo Cesar Oliveira, no curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Federal de São Carlos. Assinando esse Termo de Consentimento, estou ciente de que, o professor pesquisador Ricardo Campanha Almagro irá desenvolver sua pesquisa em Educação Matemática com diferentes estudantes da 2ª Série do Ensino Médio, desenvolvimento esse sob responsabilidade do mesmo e já devidamente autorizado por mim. Tenho clareza que os estudantes envolvidos nesta pesquisa serão mantidos em anonimato. Também sei que os resultados obtidos no âmbito desta instituição serão utilizados unicamente para fins de divulgação científica, preservando o anonimato já assinalado acima.

____

Assinatura e carimbo do responsável da Instituição/Escola

____

Local e data

ANEXO B

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Declaro, por meio deste termo, que concordei em participar na pesquisa referente a pesquisa intitulada " Um produto educacional para o letramento probabilístico ", desenvolvida pelo professor pesquisador Ricardo Campanha Almagro. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é orientada pelo Professor Doutor Paulo Cesar Oliveira, a quem poderei contatar/consultar a qualquer momento que julgar necessário através do seu e-mail.

Afirmo que aceitei participar por minha própria vontade, sem receber qualquer incentivo financeiro ou ter qualquer ônus e com a finalidade exclusiva de colaborar para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais busca propor aos professores de Matemática, inclusive, um produto educacional para o desenvolvimento do letramento probabilístico. Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações por mim oferecidas estão submetidos às normas éticas destinadas à pesquisa envolvendo seres humanos, da Comissão Nacional de Ética em Pesquisa (CONEP). Minha colaboração se fará de forma anônima por meio de diversos registros. O acesso e a análise dos dados coletados se farão apenas pelo pesquisador e seu orientador. Fui ainda informado(a) de que posso me retirar desse estudo/programa a qualquer momento, sem prejuízo para meu acompanhamento ou sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Atesto recebimento de uma cópia assinada deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, conforme recomendações da Comissão Nacional de Ética em Pesquisa (CONEP).

Assinatura do(a) participante: ____

Assinatura do(a) pesquisador(a):______________________________________

Assinatura do(a) responsável pelo estudante:____________________________