UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Teoremas Ergódicos para Sistemas Multívocos e Aleatórios com Aplicações a Semifluxos Generalizados

Gabriel Silva Lucidio

São Carlos - SP
2021.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Teoremas Ergódicos para Sistemas Multívocos e Aleatórios com Aplicações a Semifluxos Generalizados

Gabriel Silva Lucidio

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Cláudia Buttarello Gentile Moussa

São Carlos - SP
2021.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Gabriel Silva Lucidio, realizada em 05/02/2021.

Comissão Julgadora:

Profa. Dra. Claudia Buttarello Gentile Moussa (UFSCar)

Prof. Dr. Jacson Simsen (UNIFEI)

Prof. Dr. Cesar Rogerio de Oliveira (UFSCar)

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.
O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Dedico este trabalho a meu irmão,
Vinicius Silva Lucidio.

Agradecimentos

Agradeço a meus pais, Moisés e Natália, pelo apoio fornecido durante todos os projetos e trabalhos de minha vida.
Agradeço a meu irmão, Vinicius, pelo companheirismo, amizade, ensinamentos e momentos que passamos juntos.
Agradeço a minha orientadora, Cláudia, por tudo o que me ensinou durante os 5 anos em que estivemos trabalhando juntos. Aprendi muito, e com certeza a Cláudia foi fundamental em minha formação acadêmica.
Agradeço a meus colegas de graduação e pós-graduação pelo companheirismo em todos esses anos – em especial: Raphael, Gabriel, Jean, Gabriela, Amauri, Raquel e Pedro.
Agradeço a todos os professores do DM da UFSCar por sua dedicação em ensinar.

Christo nihil præponere.

Resumo

Este trabalho se concentra em quatro grandes temas: semifluxos; semifluxos generalizados; medida invariante para funções multívocas; e sistemas dinâmicos aleatórios.

O estudo de semifluxos tem o objetivo de compreender o comportamento assintótico de soluções para problemas com unicidade de solução. Já os semifluxos generalizados permitem que a solução para um dado inicial não seja única, permitindo assim uma variedade mais ampla de problemas. Ambos os estudos, neste trabalho, têm o objetivo principal de fornecer condições para a existência de atrator, e propriedades sobre ele.

Tratando de medidas invariantes para funções multívocas, é importante dizer que diferentes propostas foram feitas ao longo dos últimos anos para definir este conceito. Neste trabalho, quatro destas definições são apresentadas e, ao final, mostra-se que são todas equivalentes sob certas condições. Por fim, é apresentada uma versão de teorema ergódico para função multívoca, com uma aplicação a um sistema dinâmico que gera um semifluxo generalizado com atrator.

Finalmente, em sistemas dinâmicos aleatórios (discretos), o sistema não se resume às iteradas de uma única função, mas a sucessivas aplicações de funções escolhidas aleatoriamente dentro de uma certa família. É apresentada uma versão de teorema ergódico para este caso, com uma nova aplicação a um sistema dinâmico que gera um semifluxo generalizado com atrator.

Palavras-chave: semifluxo, sistema dinâmico, atrator, função multívoca, medida invariante, aleatório, ergódico.

Abstract

This work focuses on four major themes: semiflows; generalized semiflows; invariant measure for set-valued maps; and random dynamical systems.

The study of semiflows aims to understand the asymptotic behavior of solutions to problems with unique solutions. The generalized semiflows, on the other hand, allow the solution for an initial data to be not unique, thus allowing a wider variety of problems. Both studies, in this work, have the main goal of providing conditions for the existence of an attractor, and properties on it.

When dealing with invariant measures for set-valued maps, it is important to say that different proposals have been made over the past few years to define this concept. In this work, four of these definitions are presented, and at the end it is shown that they are all equivalent under certain conditions. Finally, a version of ergodic theorem for set-valued map is presented, with an application to a dynamical system wich generates a generalized semiflow with atractor.

Finally, in random (discrete) dynamical systems, the system is not limited to the iterations of a unique map, but to successive applications of maps chosen randomly within a certain family. A version of ergodic theorem is presented for this case, with a new application to a dynamical system wich generates a generalized semiflow with atractor.

Keywords: semiflow, dynamical system, atractor, set-valued map, invariant measure, random, ergodic.

Sumário

Introdução

O objetivo final deste trabalho é apresentar duas versões de *teoremas ergódicos*, uma para *funções multívocas* e outra para *sistemas aleatórios*. Esses resultados serão aplicados, apenas como um exemplo, a *semifluxos generalizados* que possuem *atratores* compactos.

O primeiro capítulo apresenta alguns conceitos preliminares e essenciais para o desenvolvimento do trabalho. Ele abrange noções de espaços métricos, teoria da medida, teoria ergódica e funções multívocas. Há um esforço particular neste capítulo para demonstrar algumas propriedades sobre o espaço $\mathbb{P}(X)$ das medidas de probabilidade, principalmente o fato de $\mathbb{P}(X)$ ser compacto se X também for.

No capítulo seguinte, é feito um estudo sobre *semifluxos* e *semigrupos de operadores*. São apresentadas algumas noções básicas, e resultados sobre semifluxos compactos e assintoticamente compactos. O objetivo final é apresentar condições para a existência de um *atrator global* compacto, e caracterizar esse conjunto de diferentes formas. Desse modo, o principal resultado é o seguinte.

Teorema 1. Sejam $\mathcal{S}$ um semifluxo assintoticamente compacto, limitado e pontualmente dissipativo, e $\{V_t\}$ um semigrupo contínuo em $\mathcal{S}$. Então existe um atrator global minimal não vazio $\mathcal{M}$, que é compacto e invariante.

Ao final do capítulo, a teoria é exemplificada com o problema de Chafee-Infante.

O capítulo 3 apresenta uma teoria análoga à do capítulo anterior, mas para *semifluxos generalizados*. A principal diferença é que, nesse caso, o estudo se dirige a problemas diferenciais cuja *existência* de solução é garantida, mas não a *unicidade*. O comportamento assintótico dessas soluções é estudado de forma teórica, e resultados similares ao caso anterior são obtidos. Desse modo, a condição para existência do atrator global compacto é que o semifluxo generalizado seja φ-dissipativo e assintoticamente compacto.

Teorema 2. Seja $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado φ-dissipativo e assintoticamente compacto. Então existe o atrator global fechado mínimo $\mathcal{A}$, que é compacto e invariante.

É importante observar que, no caso unívoco, φ-dissipatividade equivale a dissipatividade pontual.

Por fim, um caso ainda mais fraco é apresentado, chamado de φ-*atrator*. Aqui, cada trajetória é atraída em um tempo diferente. Com isso, as condições para existência do φ-atrator não garantem a compacidade desse conjunto.

Teorema 3. Seja $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado φ-assintoticamente compacto. Então existe o φ-atrator global fechado mínimo $\widehat{N}$.

Ao final do capítulo, a teoria é exemplificada com um problema de inclusões diferenciais envolvendo o p-Laplaciano.

No capítulo seguinte, é feito um estudo sobre *medidas invariantes para funções multívocas*. São apresentadas quatro diferentes definições deste conceito, que se mostram equivalentes sob hipóteses de compacidade.

Ao final do capítulo, é apresentada uma versão de teorema ergódico, com uma breve aplicação a um sistema dinâmico que gera um semifluxo generalizado com atrator.

No último capítulo, é realizado um estudo sobre *variáveis aleatórias* e *sistemas dinâmicos aleatórios*. Nesse caso, o sistema não se resume às sucessivas iteradas de uma mesma função, mas de uma família de funções.

Ao final do capítulo, é apresentada uma outra versão de teorema ergódico para sistemas aleatórios, com uma aplicação a um sistema dinâmico que gera um semifluxo generalizado com atrator.

Capítulo 1

Conceitos Preliminares

Neste capítulo serão introduzidos conceitos preliminares sobre espaços métricos e topológicos, teoria da medida, teoria ergódica e funções multívocas. Esses conceitos serão utilizados no desenvolvimento dos capítulos subsequentes. Os principais resultados terão suas provas omitidas por serem facilmente encontradas em livros clássicos.

1.1 Espaços Métricos e Topológicos

Definição 1.1.1. Seja $\{X_\gamma; \gamma \in \Gamma\}$ uma família de conjuntos não vazios. O *produto cartesiano* desses conjuntos, denotado por $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$, é o conjunto das funções de Γ a X.

Definição 1.1.2. Seja $\{(X_\gamma, \tau_\gamma); \gamma \in \Gamma\}$ uma família de espaços topológicos. Define-se em $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ a *topologia produto*, cujos abertos básicos são da seguinte forma:

$$\pi_{\gamma_1}^{-1}(A_{\gamma_1}) \cap \cdots \cap \pi_{\gamma_n}^{-1}(A_{\gamma_n}) = \left(\prod_{\substack{\gamma\in\Gamma \\ \gamma\neq\gamma_1,\ldots,\gamma_n}} X_\gamma \right) \times A_{\gamma_1} \times \cdots \times A_{\gamma_n},$$

em que $n \in \mathbb{N}$ e $A_{\gamma_j} \in \tau_{\gamma_j}$ para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Proposição 1.1.3. Seja $\{(X_\gamma, \tau_\gamma); \gamma \in \Gamma\}$ uma família de espaços topológicos. Considere ainda uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$, $x_n = (x_\gamma^n)_{\gamma\in\Gamma}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, e $x \in \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$, $x = (x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$. Então $x_n \to x$ se, e somente se, $x_\gamma^n \to x_\gamma$ para cada $\gamma \in \Gamma$.

Teorema 1.1.4. *(Teorema de Tychonoff)* Seja $\{X_\gamma; \gamma \in \Gamma\}$ uma família de espaços topológicos. Então $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ é compacto na topologia produto se, e somente se, cada X_γ é compacto.

Proposição 1.1.5. Seja $\{(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)\}$ uma família finita de espaços métricos, e considere o produto cartesiano $X := \prod_{j=1}^n X_j$. Então a topologia produto em X é metrizável pela *métrica produto*:

$$d((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) := \max\{d_j(x_j, y_j);\ j \in \{1, \ldots, n\}\}. \tag{1.1}$$

Prova. Denote por τ a topologia produto em X, e por τ_d a topologia em X gerada pela métrica d. Observe inicialmente que, se $(x_1,\ldots,x_n) \in X$ e $r > 0$, então:

$$B_d((x_1,\ldots,x_n),r) = B_{d_1}(x_1,r) \times \cdots \times B_{d_n}(x_n,r).$$

Logo, $\tau_d \subset \tau$. Por outro lado, seja $x := (x_1,\ldots,x_n) \in X$ e considere um aberto base de τ contendo x, $B := B_{d_1}(x_1,r_1) \times \cdots \times B_{d_n}(x_n,r_n)$. Defina $r := \min\{r_1,\ldots,r_n\} > 0$. Assim:

$$x \in B_d((x_1,\ldots,x_n),r) = B_{d_1}(x_1,r) \times \cdots \times B_{d_n}(x_n,r) \subset B.$$

Portanto, $\tau \subset \tau_d$. □

Definição 1.1.6. Sejam (X,τ) um espaço topológico e E uma relação de equivalência em X, ou seja, um subconjunto de $X \times X$. Denotando por $E(x)$ a classe de equivalência de cada elemento $x \in X$, fica definida a seguinte projeção natural no espaço quociente:

$$\begin{array}{rccc} \pi_E : & X & \to & X/E \\ & x & \mapsto & E(x). \end{array}$$

Podemos definir em X/E a *topologia quociente* da seguinte forma:

$$\tau(E) := \left\{ B \subset X/E; \pi_E^{-1}(B) \in \tau \right\}.$$

Proposição 1.1.7. Todo espaço métrico compacto é separável.

Lema 1.1.8. Seja (X,d) um espaço métrico. Dados $x,y \in X$ e $A \subset X$ não vazio:

$$|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y).$$

Prova. Será provado que $-d(x,y) \leq d(x,A) - d(y,A) \leq d(x,y)$. Por definição, para todo $z \in A$, $d(x,A) \leq d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, ou seja, $d(x,A) - d(y,z) \leq d(x,y)$. Como essa desigualdade vale para todo $z \in A$, segue que $d(x,A) - d(y,A) \leq d(x,y)$. De modo análogo:

$$\begin{array}{rcl} d(y,A) & \leq & d(y,z) \leq d(y,x) + d(x,z) \quad \forall z \in A \\ & \Rightarrow & -d(x,y) \leq d(x,z) - d(y,A) \quad \forall z \in A \\ & \Rightarrow & -d(x,y) \leq d(x,A) - d(y,A). \end{array}$$

Portanto, $|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$. □

Lema 1.1.9. Sejam (X,d) um espaço métrico, F um subconjunto fechado de X e $\delta > 0$. Então existe uma função Lipschitz $g_\delta : X \to [0,1]$ tal que $g_\delta \equiv 1$ em F e $g_\delta \equiv 0$ em $(F^\delta)^c$. Aqui, $F^\delta := \{x \in X; d(x,F) < \delta\}$.

Prova. Seja $h : \mathbb{R} \to [0,1]$ definida por:

$$h(t) := \begin{cases} 1, & t \in (-\infty, 0] \\ 1-t, & t \in (0,1) \\ 1, & t \in [1,\infty). \end{cases}$$

Defina $g_\delta : X \to [0,1]$ da seguinte forma:

$$g_\delta(x) := h\left(\frac{1}{\delta} d(x,F)\right).$$

Pelo lema precedente, g_δ é uma composição de funções Lipschitz, e portanto é Lipschitz. As outras condições sobre g_δ são imediatas. □

Lema 1.1.10. Sejam (X,d) um espaço métrico e $S \subset X$. Então S é *relativamente compacto*[1] se, e somente se, toda sequência em S possui subsequência convergente em $\overline{S}$.

Prova. Suponha que S seja relativamente compacto e considere uma sequência $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em S. Então $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é também uma sequência em $\overline{S}$, que é compacto. Existe então uma subsequência $(z_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge em $\overline{S}$.

Reciprocamente, considere uma sequência $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\overline{S}$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma sequência $(x_j^n)_{j\in\mathbb{N}}$ em S de modo que $z_n = \lim_{j\to\infty} x_j^n$. Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um natural J_n tal que, se $j \geq J_n$, então:

$$d(x_j^n, z_n) < \frac{1}{n}.$$

Como a sequência diagonal $(x_{J_n}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ está em S, segue da hipótese a existência de uma subsequência $(x_{J_{n_k}}^{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge para algum $x \in \overline{S}$. Resta mostrar que $z_{n_k} \to x$. Dado $\varepsilon > 0$, escolha $N \in \mathbb{N}$ satisfazendo as seguintes condições:

$$\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{e} \quad d(x_{J_{n_k}}^{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2} \ \text{ para } k \geq N.$$

Desse modo, para $k \geq N$:

$$d(z_{n_k}, x) \leq d(z_{n_k}, x_{J_{n_k}}^{n_k}) + d(x_{J_{n_k}}^{n_k}, x) < \frac{1}{n_k} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$ □

1.2 Teoria da Medida

Definição 1.2.1. Sejam X um conjunto não vazio. Uma família $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X é uma *álgebra* se satisfaz as seguintes propriedades:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$ e $X \in \mathcal{A}$;

[1] Um subconjunto de X é *relativamente compacto* se seu fecho é compacto.

- se $A, B \in \mathcal{A}$, então $A \cap B \in \mathcal{A}$, $A \cup B \in \mathcal{A}$ e $A \setminus B \in \mathcal{A}$.

Definição 1.2.2. Sejam X um conjunto não vazio. Uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X é uma *σ-álgebra* se satisfaz as seguintes propriedades:

- $\emptyset \in \mathcal{F}$ e $X \in \mathcal{F}$;
- se $A \in \mathcal{F}$, então $A^c := X \setminus A \in \mathcal{F}$;
- para toda família contável $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$, vale que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$.

Notação: Dados um conjunto não vazio X e uma σ-álgebra $\mathcal{F}$ em X, o par $(X, \mathcal{F})$ é um *espaço mensurável*. Os elementos de $\mathcal{F}$ são chamados de *conjuntos mensuráveis*.

Definição 1.2.3. Sejam $(X, \mathcal{F})$ e $(Y, \mathcal{G})$ espaços mensuráveis. Uma função $f : X \to Y$ é *mensurável* se $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ para todo $B \in \mathcal{G}$.

Proposição 1.2.4. Sejam X um conjunto não vazio e $\mathcal{C}$ uma família de subconjuntos de X. A interseção de todas as σ-álgebras contendo $\mathcal{C}$ é ainda uma σ-álgebra que contém $\mathcal{C}$.

Definição 1.2.5. Sejam X um conjunto não vazio e $\mathcal{C}$ uma família de subconjuntos de X. Tendo em vista a proposição precedente, define-se a *σ-álgebra gerada* por $\mathcal{C}$ como sendo a interseção de todas as σ-álgebras que contêm $\mathcal{C}$. Essa σ-álgebra é denotada por $\sigma(\mathcal{C})$.

Definição 1.2.6. Seja (X, τ) um espaço topológico. A σ-álgebra gerada pela topologia τ é chamada de *σ-álgebra de Borel*, e é denotada por $\mathcal{B}(X)$. Os elementos de $\mathcal{B}(X)$ são chamados de *conjuntos borelianos*.

Proposição 1.2.7. Sejam $(X, \mathcal{F})$ e $(Y, \mathcal{G})$ espaços mensuráveis em que $\mathcal{G}$ é gerada por uma família $\mathcal{C}$. Uma função $f : X \to Y$ é mensurável se, e somente se, $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ para todo $B \in \mathcal{C}$.

Definição 1.2.8. Sejam $\{(X_\gamma, \mathcal{F}_\gamma); \gamma \in \Gamma\}$ uma família de espaços mensuráveis e $X := \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$. Considere, para cada $\gamma \in \Gamma$, as *projeções*:

$$\begin{array}{rccc} \pi_\gamma : & X & \to & X_\gamma \\ & (x_\alpha)_{\alpha\in\Gamma} & \mapsto & x_\gamma. \end{array}$$

A *σ-álgebra produto* em X, denotada por $\bigotimes_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{F}_\gamma$, é a σ-álgebra gerada pela seguinte família:

$$\left\{\pi_\gamma^{-1}(A_\gamma); A_\gamma \in \mathcal{F}_\gamma, \gamma \in \Gamma\right\}.$$

Proposição 1.2.9. Seja $\{(X_\gamma, \mathcal{F}_\gamma); \gamma \in \Gamma\}$ uma família de espaços mensuráveis. Se Γ é contável, então:

$$\bigotimes_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{F}_\gamma = \sigma\left(\left\{\prod_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma; A_\gamma \in \mathcal{F}_\gamma\right\}\right).$$

Proposição 1.2.10. Seja $\{(X_\gamma, \mathcal{F}_\gamma); \gamma \in \Gamma\}$ uma família de espaços mensuráveis em que cada $\mathcal{F}_\gamma$ é gerada por uma família $\mathcal{C}_\gamma$. Então:

$$\bigotimes_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{F}_\gamma = \sigma\left(\left\{\pi_\gamma^{-1}(A_\gamma); A_\gamma \in \mathcal{C}_\gamma, \gamma \in \Gamma\right\}\right).$$

Além disso, se Γ é contável, então:

$$\bigotimes_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{F}_\gamma = \sigma\left(\left\{\prod_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma; A_\gamma \in \mathcal{C}_\gamma\right\}\right).$$

Proposição 1.2.11. Seja $\{(X_j, d_j); j \in \{1, \ldots, n\}\}$ uma família finita de espaços métricos. Considere o espaço produto $X := \prod_{j=1}^n X_j$ munido da métrica produto (1.1). Então:

$$\bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{B}(X_j) \subset \mathcal{B}(X).$$

Além disso, se cada X_j é separável, então vale a igualdade.

Definição 1.2.12. Sejam X um conjunto não vazio e $\mathcal{C}$ uma família de subconjuntos de X. Se $\nu : \mathcal{C} \to [0, \infty]$ é uma função, as seguinte definições são estabelecidas:

- ν é *aditiva* se $\nu(\bigcup_{j=1}^n A_j) = \sum_{j=1}^n \nu(A_j)$ para quaisquer conjuntos dois a dois disjuntos $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{C}$ tais que $\bigcup_{j=1}^n A_j \in \mathcal{C}$;

- ν é *σ-aditiva* se $\nu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=1}^\infty \nu(A_n)$ para toda família de conjuntos dois a dois disjuntos $\{A_n; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{C}$ tal que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}$.

Definição 1.2.13. Seja $(X, \mathcal{F})$ um espaço mensurável. Uma função $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ é uma *medida* se é σ-aditiva e $\mu(\emptyset) = 0$. Nesse caso, $(X, \mathcal{F}, \mu)$ é um *espaço com medida*.

Observação 1.2.14. É dito que μ é *finita* ou que $(X, \mathcal{F}, \mu)$ é *finito* se $\mu(X) < \infty$.

Observação 1.2.15. Se uma certa propriedade é válida em X com exceção de um subconjunto com medida nula por μ, diz-se que essa propriedade é válida *μ-q.t.p.*

Definição 1.2.16. Seja $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço com medida. A medida μ é uma *medida de probabilidade* se $\mu(X) = 1$. Nesse caso, $(X, \mathcal{F}, \mu)$ é chamado *espaço de probabilidade*.

Lema 1.2.17. Seja $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço com medida. Valem as seguintes propriedades:

(a) se $A, B \in \mathcal{F}$ e $A \subset B$, então $\mu(A) \leq \mu(B)$;

(b) se $\{A_n; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{F}$, então $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n)$;

(c) se $\{A_n; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{F}$ e $A_n \subset A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$;

(d) se $\{A_n; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{F}$, $A_n \supset A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\mu(A_1) < \infty$, então $\mu(\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

Proposição 1.2.18. Sejam (X,d) um espaço métrico e μ uma medida finita em $(X,\mathcal{B}(X))$. Então, para todo $B \in \mathcal{B}(X)$:

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \sup\{\mu(C); C \text{ é fechado e } C \subset B\} \\ &= \inf\{\mu(A); A \text{ é aberto e } A \supset B\}. \end{aligned}$$

Prova. Defina a coleção $\mathcal{A}$ da seguinte maneira:

$$E \in \mathcal{A} \Longleftrightarrow \begin{array}{l} \mu(E) = \sup\{\mu(C); C \text{ é fechado e } C \subset E\}, \text{ e} \\ \mu(E) = \inf\{\mu(A); A \text{ é aberto e } A \supset E\}. \end{array}$$

A fim de obter o resultado, será provado que $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{A}$. Isso será feito em duas etapas.

1. $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra:

   - É claro que $\emptyset \in \mathcal{A}$.

   - Sejam $E \in \mathcal{A}$ e $\varepsilon > 0$. Então existem um aberto A e um fechado C de sorte que $C \subset E \subset A$, $\mu(E) < \mu(C) + \varepsilon$ e $\mu(E) > \mu(A) - \varepsilon$. Logo, A^c é fechado, C^c é aberto, $A^c \subset E^c \subset C^c$ e:

   $$\begin{aligned} \mu(E^c) &= \mu(X) - \mu(E) > \mu(X) - \mu(C) - \varepsilon = \mu(C^c) - \varepsilon; \\ \mu(E^c) &= \mu(X) - \mu(E^c) < \mu(X) - \mu(A) + \varepsilon = \mu(A^c) + \varepsilon. \end{aligned}$$

   Portanto, $E^c \in \mathcal{A}$.

   - Sejam $\{E_n; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{A}$ e $\varepsilon > 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existem um aberto A_n e um fechado C_n de modo que $C_n \subset E_n \subset A_n$, $\mu(A_n) - \mu(E_n) < 2^{-n}\varepsilon$ e $\mu(E_n) - \mu(C_n) < 2^{-n-1}\varepsilon$. Assim, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ é aberto, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ e:

   $$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) - \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) &\leq \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \\ &\leq \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \setminus E_n)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \setminus E_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\mu(A_n) - \mu(E_n)) < \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

   Ademais, pelo Lema 1.2.17, $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n) = \lim_{k\to\infty} \mu(\bigcup_{n=1}^{k} C_n)$. Então existe $k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ de sorte que $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n) - \mu(\bigcup_{n=1}^{k(\varepsilon)} C_n) < \varepsilon/2$. Definindo $C := \bigcup_{n=1}^{k(\varepsilon)} C_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, segue que C é fechado e:

$$
\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) - \mu(C) &< \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) - \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\right) + \varepsilon/2 \\
&\leq \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\right) + \varepsilon/2 \\
&\leq \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (E_n \setminus C_n)\right) + \varepsilon/2 \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n \setminus C_n) + \varepsilon/2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (\mu(E_n) - \mu(C_n)) + \varepsilon/2 < \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{A}$.

2. $\mathcal{A}$ contém conjuntos abertos: será provado que $\mathcal{A}$ contém todos os fechados e, por ser uma σ-álgebra, isso garantirá que contém todos os abertos. Seja $C \subset X$ fechado e defina, para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n := \{x \in X; d(x,C) < 1/n\}$. Desse modo, $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, A_n é aberto e $A_n \supset A_{n+1}$. Assim, pelo Lema 1.2.17, $\mu(C) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \inf\{\mu(A_n); n \in \mathbb{N}\}$. Consequentemente:

$$\mu(C) \leq \inf\{\mu(A); A \text{ é aberto e } A \supset C\} \leq \inf\{\mu(A_n); n \in \mathbb{N}\} = \mu(C).$$

Destarte, $C \in \mathcal{A}$.

Conclusão: $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra que contém todos os abertos de X, portanto $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{A}$. □

Teorema 1.2.19. Sejam X um conjunto não vazio, $\mathcal{A}$ uma álgebra em X e $\hat{\mu} : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ uma função σ-aditiva. Então existe uma extensão de $\hat{\mu}$ a uma medida μ na σ-álgebra $\sigma(\mathcal{A})$, definida da seguinte forma:

$$\mu(A) := \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \hat{\mu}(A_n); A_n \in \mathcal{A}, A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right\} \quad \forall A \in \sigma(\mathcal{A}).$$

Definição 1.2.20. Sejam $(X,\mathcal{F},\mu)$ e $(Y,\mathcal{G},\nu)$ espaços com medida finitos. Considere, no espaço produto $X \times Y$, a álgebra $\mathcal{A}$ de todos os retângulos dois a dois disjuntos da forma $A \times B$, em que $A \in \mathcal{F}$ e $B \in \mathcal{G}$. Define-se, em $\mathcal{A}$, $\mu \times \nu(A \times B) := \mu(A)\nu(B)$. Como $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} = \sigma(\mathcal{A})$, é possível estender $\mu \times \nu$ a uma medida na σ-álgebra produto, chamada de *medida produto* e denotada por $\mu \otimes \nu$.

Observação 1.2.21. Uma demonstração explícita de que $\mu \otimes \nu$ está bem definida e é contavelmente aditiva em $\mathcal{A}$ pode ser obtida no Teorema 3.3.1 em (Bogachev, 2007, [4]).

Observação 1.2.22. Por indução, é possível definir uma medida produto para uma quantidade finita de espaços.

Definição 1.2.23. Seja $\{(X_n,\mathcal{F}_n,\mu_n); n\in\mathbb{N}\}$ uma família contável de espaços com medida finitos. Considere, para cada $n\in\mathbb{N}$, a seguinte família:

$$\varepsilon_n := \left\{E\times\prod_{j\geq n+1}X_j; E\in\bigotimes_{j=1}^{n}\mathcal{F}_j\right\}.$$

A união dessas famílias é uma álgebra, denotada aqui por $\mathcal{F}^0$. Se $A\in\mathcal{F}^0$, então $A\in\varepsilon_n$ para algum $n\in\mathbb{N}$, ou seja, $A=E\times\prod_{j\geq n+1}X_j$, com $E\in\bigotimes_{j=1}^{n}\mathcal{F}_j$. Fica definido:

$$\mu(A) := \mu_1\otimes\cdots\otimes\mu_n(E).$$

Como a σ-álgebra produto $\mathcal{F} := \bigotimes_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_n$ é gerada pela álgebra $\mathcal{F}^0$, é possível estender μ a uma medida em $\mathcal{F}$, chamada de *medida produto.*

Observação 1.2.24. Uma demonstração explícita de que μ está bem definida e é contavelmente aditiva em $\mathcal{F}^0$ pode ser obtida no Teorema 3.5.1 em (Bogachev, 2007, [4]).

1.2.1 Integração

Lema 1.2.25. A σ-álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ é gerada por cada uma das seguintes famílias:

- $\varepsilon_1 := \{(a,b); a<b\}$;
- $\varepsilon_2 := \{[a,b]; a<b\}$;
- $\varepsilon_3 := \{(a,b]; a<b\}$ ou $\varepsilon_4 := \{[a,b); a<b\}$;
- $\varepsilon_5 := \{(a,\infty); a\in\mathbb{R}\}$ ou $\varepsilon_6 := \{(-\infty,a); a\in\mathbb{R}\}$;
- $\varepsilon_7 := \{[a,\infty); a\in\mathbb{R}\}$ ou $\varepsilon_8 := \{(-\infty,a]; a\in\mathbb{R}\}$.

Observação 1.2.26. Nesta seção, o termo *intervalo semiaberto* será utilizado para designar os intervalos da forma $(a,b]$. O conjunto dos intervalos semiabertos será denotado por I.

Definição 1.2.27. Uma função crescente e contínua a direita $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é chamada *função de distribuição.*

Proposição 1.2.28. Toda função de distribuição $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ determina uma medida μ em $(\mathbb{R},B(\mathbb{R}))$ da seguinte forma:

$$\mu((a,b]) := f(b)-f(a) \quad \forall\,(a,b]\in I.$$

Definição 1.2.29. Uma medida μ em $(\mathbb{R},B(\mathbb{R}))$ é uma *medida de Lebesgue-Stieltjes* se, para todo conjunto limitado $A\in B(\mathbb{R})$, $\mu(A)<\infty$.

Proposição 1.2.30. Seja μ uma medida de Lebesgue-Stieltjes em $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$. Então existe uma função de distribuição $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\mu((a,b]) = f(b) - f(a) \quad \forall\, (a,b] \in I. \tag{1.2}$$

A seguir estão dois exemplos clássicos de medidas de Lebesgue-Stieltjes.

Exemplo 1.2.31. A *medida de Lebesgue* m é a medida de Lebesgue-Stieltjes definida em $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ pela função de distribuição $f(x) := x$. Esta naturalmente estende o comprimento de intervalos em I.

Exemplo 1.2.32. Dado $a \in \mathbb{R}$, a *medida de Dirac* $\delta_a : B(\mathbb{R}) \to [0,1]$ é definida por:

$$\delta_a(A) := \begin{cases} 1, \text{ se } a \in A \\ 0, \text{ se } a \notin A \end{cases}, \quad \forall A \in B(\mathbb{R}).$$

Esta é uma medida de Lebesgue-Stieltjes definida pela seguinte função de distribuição:

$$f_a(x) := \begin{cases} 1, \text{ se } x \geq a \\ 0, \text{ se } x < a \end{cases}.$$

Definição 1.2.33. Seja X um conjunto não vazio. Uma família K de subconjuntos de X é uma *classe compacta* se, para toda sequência $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de K tal que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n = \emptyset$, existe $N \in \mathbb{N}$ de modo que $\bigcap_{n=1}^{N} K_n = \emptyset$.

Teorema 1.2.34. Sejam X um conjunto não vazio, $\mathcal{A}$ uma álgebra em X e $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty)$ uma função aditiva. Suponha a existência de uma classe compacta K *aproximando* μ no seguinte sentido:

> para quaisquer $A \in \mathcal{A}$ e $\varepsilon > 0$, há $K_\varepsilon \in K$ e $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ de sorte que $A_\varepsilon \subset K_\varepsilon \subset A$ e $\mu(A \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$.

Então μ é contavelmente aditiva.

Prova. A prova deste resultado pode ser obtida no Teorema 1.4.3 em (Bogachev, 2007, [4]). $\square$

Definição 1.2.35. Seja $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço com medida. Uma função $h : X \to \mathbb{R}$ é uma *função elementar* se existem $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ e $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ de modo que:

$$h = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}.$$

Se $h(X) = \{d_1, \ldots, d_m\}$, defina $E_j := h^{-1}(\{d_j\})$. Nesse caso, a representação $h = \sum_{j=1}^{m} d_j \chi_{E_j}$ é chamada de *representação canônica* de h.

Definição 1.2.36. Sejam $(X,\mathcal{F},\mu)$ um espaço com medida e $h : X \to \mathbb{R}$ uma função elementar, $h = \sum_{i=1}^{n} c_i\chi_{A_i}$. A *integral de Lebesgue* de h em X com relação a μ é definida da seguinte forma:

$$\int_X h(x)\,\mu(dx) := \sum_{i=1}^{n} c_i\mu(A_i).$$

Além disso, se $A \in \mathcal{F}$, então $h\chi_A$ é elementar e define-se:

$$\int_A h(x)\,\mu(dx) := \int_X h\chi_A(x)\,\mu(dx).$$

Proposição 1.2.37. Sejam $(X,\mathcal{F},\mu)$ um espaço com medida e $g,h : X \to [0,\infty)$ funções elementares. Valem as seguintes propriedades:

(a) Se $c \geq 0$, então $\int_X (cg)(x)\,\mu(dx) = c\int_X g(x)\,\mu(dx)$;

(b) $\int_X (g+h)(x)\,\mu(dx) = \int_X g(x)\,\mu(dx) + \int h(x)\,\mu(dx)$;

(c) Se $g \leq h$, então $\int_X g(x)\,\mu(dx) \leq \int_X h(x)\,\mu(dx)$;

(d) A função $A \mapsto \int_A g(x)\,\mu(dx)$ é uma medida em $\mathcal{F}$.

Definição 1.2.38. Sejam $(X,\mathcal{F},\mu)$ um espaço com medida e $f : X \to [0,\infty)$ uma função mensurável. A *integral de Lebesgue* de f sobre μ é definida da seguinte forma:

$$\int_X f(x)\,\mu(dx) := \sup\left\{\int_X h(x)\,\mu(dx);\, h \text{ é elementar e } h \leq f\right\}.$$

Além disso, se $A \in \mathcal{F}$, define-se:

$$\int_A f(x)\mu(dx) := \int_X f\chi_A(x)\,\mu(dx).$$

Proposição 1.2.39. Sejam $(X,\mathcal{F},\mu)$ um espaço com medida e $f,g : X \to [0,\infty)$ funções mensuráveis. Valem as seguintes propriedades:

(a) Se $c \geq 0$, então $\int (cf)(x)\,\mu(dx) = c\int f(x)\,\mu(dx)$;

(b) Se $f \leq g$, então $\int f(x)\,\mu(dx) \leq \int g(x)\,\mu(dx)$.

Definição 1.2.40. Sejam $(X,\mathcal{F},\mu)$ um espaço com medida e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. As *partes positiva e negativa* de f são definidas, respectivamente, da seguinte forma:

$$f^+(x) := \max\{0, f(x)\}, \quad f^-(x) := \max\{0, -f(x)\}.$$

Lema 1.2.41. *(Lema de Olympia)* Seja $(X,\mathcal{F},\mu)$ um espaço com medida.

(a) Se $f : X \to [0,\infty)$ é uma função mensurável, então existe uma sequência $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções elementares tal que:

(i) $0 \leq h_1 \leq \cdots \leq h_n \leq \cdots \leq f$;

(ii) $h_n(x) \to f(x)$ para todo $x \in X$;

(iii) $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para f uniformemente em subconjuntos de X em que f é limitada.

(b) Se $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável, então existe uma sequência $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções elementares tal que:

(i) $0 \leq |h_1| \leq \cdots \leq |h_n| \leq \cdots \leq |f|$;

(ii) $h_n(x) \to f(x)$ para todo $x \in X$;

(iii) $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para f uniformemente em subconjuntos de X em que f é limitada.

Teorema 1.2.42. *(Teorema da Convergência Monótona)* Seja $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço com medida. Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência crescente de funções mensuráveis de X em $[0,\infty)$ convergindo pontualmente para f, então:

$$\int_X f(x)\,\mu(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\,\mu(dx).$$

Teorema 1.2.43. Seja $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço com medida. Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções mensuráveis de X em $[0,\infty)$ e $f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n$, então:

$$\int_X f(x)\,\mu(dx) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n(x)\,\mu(dx).$$

Definição 1.2.44. Sejam $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço com medida e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. A *integral de Lebesgue* de f sobre μ é definida da seguinte forma:

$$\int_X f(x)\,\mu(dx) := \int_X f^+(x)\,\mu(dx) - \int_X f^-(x)\,\mu(dx).$$

Além disso, se $A \in \mathcal{F}$, define-se:

$$\int_A f(x)\,\mu(dx) := \int_X (f\chi_A)(x)\,\mu(dx).$$

Por fim, f é *integrável* em $A \in \mathcal{F}$ se $\int_A f^+(x)\,\mu(dx)$ e $\int_A f^-(x)\,\mu(dx)$ são ambos finitos.

Proposição 1.2.45. Sejam $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço com medida e $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções mensuráveis.

(a) Se $a \in \mathbb{R}$, então:

$$\int (af+g)(x)\,\mu(dx) = a\int f(x)\,\mu(dx) + \int g(x)\,\mu(dx).$$

(b) Se $f \geq 0$ e $\int f(x)\mu(dx) = 0$, então:

$$\mu(\{x \in X; f(x) > 0\}) = 0.$$

Proposição 1.2.46. Sejam $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço com medida e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Então:

$$\left| \int_X f(x)\mu(dx) \right| \leq \int_X |f|(x)\mu(dx).$$

Proposição 1.2.47. Sejam $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço com medida e $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções mensuráveis. Então:

$$\int_A f(x)\mu(dx) = \int_A g(x)\mu(dx) \quad \forall A \in \mathcal{F} \iff f = g \;\; \mu\text{-q.t.p.}$$

Definição 1.2.48. Seja $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço com medida. No conjunto das funções integráveis em X, considere a seguinte relação de equivalência:

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \;\; \mu\text{-q.t.p.}$$

O espaço $L^1(X, \mu)$ (ou simplesmente L^1) é o conjunto das classes de equivalência:

$$L^1 := \{[f]; f : X \to \mathbb{R} \text{ é integrável}\}.$$

Por simplicidade, será escrito apenas $f \in L^1$ para a utilização de um representante da classe $[f]$.

Teorema 1.2.49. *(Teorema da Convergência Dominada)* Sejam $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço com medida e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em L^1 satisfazendo as seguintes condições:

(a) $f_n \to f$ μ-q.t.p.;

(b) existe uma função não negativa $g \in L^1$ tal que $|f_n| \leq g$ μ-q.t.p. para todo $n \in \mathbb{N}$.

Então:

$$\int_X f(x)\mu(dx) = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n(x)\mu(dx).$$

Proposição 1.2.50. Sejam $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço com medida e $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções mensuráveis.

(a) Se $A \in \mathcal{F}$ é um conjunto de medida nula, então:

$$\int_A f(x)\mu(dx) = 0.$$

(b) Se $f \leq g$, então:

$$\int_X f(x)\mu(dx) \leq \int_X g(x)\mu(dx).$$

Definição 1.2.51. Sejam $(X,\mathcal{F},\mu)$ um espaço com medida e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Se $p \in [1,\infty)$, define-se:

$$\|f\|_p := \left[\int_X |f|^p(x)\mu(dx)\right]^{1/p}.$$

Fazendo a mesma associação entre funções que coincidem μ-q.t.p., o espaço $L^p(\mu)$ (ou simplesmente L^p) é definido da seguinte forma:

$$L^p(\mu) := \{[f]; f : X \to \mathbb{R} \text{ é mensurável e } \|f\|_p < \infty\}.$$

Proposição 1.2.52. Seja $(X,\mathcal{F},\mu)$ um espaço com medida. Para todo $p \geq 1$, L^p é um espaço vetorial e $\|\cdot\|_p$ é uma norma nesse espaço.

Exemplo 1.2.53. Considere a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida da seguinte forma:

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}.$$

É conhecido da Análise Real que f não é integrável a Riemann. Entretanto, essa função é mensurável com relação à medida de Lebesgue, pois é uma função elementar. Além disso, como $\mathbb{Q}$ é contável, tem medida nula (já que é uma união enumerável de conjuntos unitários). Consequentemente, $m([0,1]\setminus\mathbb{Q}) = 1$ e, portanto:

$$\int_{[0,1]} f(x)\mu(dx) = m([0,1]\setminus\mathbb{Q}) = 1.$$

Definição 1.2.54. Sejam $(X,\mathcal{F},\mu)$ e $(Y,\mathcal{G},\nu)$ espaços com medida finitos e $(x,y) \in X \times Y$. Ficam estabelecidas as seguintes definições:

- se $E \in \mathcal{F}\otimes\mathcal{G}$, então $E^x := \{y \in Y; (x,y) \in E\}$ e $E_y := \{x \in X; (x,y) \in E\}$;

- se $(Z,\mathcal{H},\eta)$ é outro espaço com medida finito e $f : X \times Y \to Z$ é mensurável, então $f^x(y) = f_y(x) := f(x,y)$.

Teorema 1.2.55. Sejam $(X,\mathcal{F},\mu)$ e $(Y,\mathcal{G},\nu)$ espaços com medida finitos. Então os conjuntos E^x e E_y da definição precedente são mensuráveis, assim como as funções $f^x : Y \to Z$ e $f_y : X \to Z$. Além disso, as funções $x \mapsto \nu(E^x)$ e $y \mapsto \mu(E_y)$ são mensuráveis a Borel e valem as seguintes igualdades:

$$\mu\otimes\nu(E) = \int_X \nu(E^x)\mu(dx) = \int_Y \mu(E_y)\nu(dy).$$

Teorema 1.2.56. *(Teorema de Fubini)* Sejam $(X,\mathcal{F},\mu)$ e $(Y,\mathcal{G},\nu)$ espaços com medida finitos. Se $f \in L^1(X\times Y,\mu\times\nu)$, então $f^x \in L^1(Y,\nu)$ para μ-q.t.p. $x \in X$ e $f_y \in L^1(X,\mu)$ para ν-q.t.p. $y \in Y$. Além disso, as funções $x \mapsto \int_Y f^x(y)\nu(dy)$ e $y \mapsto \int_X f_y(x)\mu(dx)$, definidas q.t.p., pertencem a $L^1(X,\mu)$ e a $L^1(Y,\nu)$, respectivamente. Vale ainda o seguinte:

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\,(\mu\times\nu)(d(x,y)) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\nu(dy)\right)\mu(dx) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\mu(dx)\right)\nu(dy).$$

1.3 Teoria Ergódica

Definição 1.3.1. Sejam $(X,\mathcal{F},\mu)$ um espaço com medida e $f: X \to X$ uma função mensurável. A medida μ é *f-invariante* se $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{F}$.

Proposição 1.3.2. Sejam $(X,\mathcal{F},\mu)$ um espaço com medida e $f: X \to X$ uma função mensurável. Se μ é f-invariante e $A \in \mathcal{F}$, então, para todo $n \in \mathbb{N}$:

(a) $f^{-n}(A) \in \mathcal{F}$;

(b) $\mu(f^{-n}(A)) = \mu(A)$.

Definição 1.3.3. Sejam $(X,\mathcal{F},\mu)$ um espaço com medida e $f: X \to X$ uma função mensurável tal que μ é f-invariante. A medida μ é *f-ergódica* se $\mu(A) \in \{0,1\}$ para todo $A \in \mathcal{F}$ tal que $f^{-1}(A) = A$.

Observação 1.3.4. Um conjunto $A \in \mathcal{F}$ tal que $f^{-1}(A) = A$ é chamado *f-invariante*.

Lema 1.3.5. Se $A \in \mathcal{F}$ e $f^{-1}(A) = A$, então $f(A) = A$.

Definição 1.3.6. Sejam $(X,\mathcal{F},\mu)$ um espaço com medida e $f: X \to X$ uma função mensurável. Uma função mensurável a Borel $g: X \to \mathbb{R}$ é *f-invariante* se $g\circ f = g$ μ-q.t.p.

Proposição 1.3.7. Sejam $(X,\mathcal{F},\mu)$ um espaço de probabilidade e $f: X \to X$ uma função mensurável tal que μ é f-invariante. Então μ é f-ergódica se, e somente se, toda função f-invariante é constante μ-q.t.p.

Teorema 1.3.8. *(Teorema Ergódico de Birkhoff)* Sejam $(X,\mathcal{F},\mu)$ um espaço de probabilidade e $f: X \to X$ uma função mensurável. Se μ é f-ergódica e $g \in L^1(X,\mu)$, então, para μ-q.t.p. $x \in X$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} g\left(f^j(x)\right) = \int_X g(y)\mu(dy).$$

1.4 Espaço das Medidas de Probabilidade

1.4.1 Topologia

Definição 1.4.1. Seja (X,τ) um espaço topológico. O conjunto de todas as medidas de probabilidade em $\mathcal{B}(X)$ será denotado por $\mathbb{P}(X)$.

Notação: $C_b(X,\mathbb{R}) := \{u : X \to \mathbb{R};\, u$ é contínua e limitada$\}$. Se $u \in C_b(X,\mathbb{R})$, define-se:

$$\|u\|_\infty := \sup\{|u(x)|;\, x \in X\}.$$

Definição 1.4.2. Sejam τ_1 e τ_2 topologias em um conjunto X. A topologia τ_1 é *mais fraca* (ou *menos fina*) que τ_2 se $\tau_1 \subset \tau_2$.

Definição 1.4.3. Seja (X,d) um espaço métrico. Define-se, em $\mathbb{P}(X)$, a *topologia da convergência fraca* como sendo a topologia mais fraca em $\mathbb{P}(X)$ que faz a função $\mathbb{P}(X) \to \mathbb{R}$, $\mu \mapsto \int_X u(x)\mu(dx)$, ser contínua para cada $u \in C_b(X,\mathbb{R})$. Essa topologia será denotada por τ^*.

Observação 1.4.4. Construção explícita de τ^*: Considere, para cada $u \in C_b(X,\mathbb{R})$ a seguinte função:

$$\begin{array}{rccl} \Psi_u : & \mathbb{P}(X) & \to & \mathbb{R} \\ & \mu & \mapsto & \int_X u(x)\mu(dx). \end{array}$$

Como é preciso que cada uma das funções Ψ_u seja contínua, deve-se ter necessariamente $\Psi_u^{-1}(B)$ aberto para cada $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Seja $\mathcal{F}_0 := \{\Psi_u^{-1}(B);\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\, u \in C_b(X,\mathbb{R})\}$. É claro que $\mathcal{F}_0$ não precisa ser uma topologia, já que não é necessariamente fechada por interseções finitas e por uniões arbitrárias. Seja, pois, $\mathcal{F}_1$ a família constituída de todas as interseções finitas de elementos de $\mathcal{F}_0$. Em seguida, seja $\mathcal{F}_2$ a família construída a partir de uniões arbitrárias de elementos de $\mathcal{F}_1$. É natural que $\mathcal{F}_2$ seja o candidato a ser a topologia τ^*, restando apenas provar que tal família é fechada por interseções finitas. Para isso, considere n elementos de $\mathcal{F}_2$, a saber, $\bigcup_{\gamma_1\in\Gamma_1} A^1_{\gamma_1}, \dots, \bigcup_{\gamma_n\in\Gamma_n} A^n_{\gamma_n}$. Desse modo:

$$\left(\bigcup_{\gamma_1\in\Gamma_1} A^1_{\gamma_1}\right) \cap \cdots \cap \left(\bigcup_{\gamma_n\in\Gamma_n} A^n_{\gamma_n}\right) = \bigcup_{\gamma_1\in\Gamma_1} \cdots \bigcup_{\gamma_n\in\Gamma_n} \left(A^1_{\gamma_1} \cap \cdots \cap A^n_{\gamma_n\in\Gamma_n}\right) \in \mathcal{F}_2.$$

Assim, $\tau^* := \mathcal{F}_2$ é a topologia da convergência fraca em $\mathbb{P}(X)$. Segue ainda da construção que a família $\mathcal{F}_1$ é uma base para τ^*.

Proposição 1.4.5. Seja (X,d) um espaço métrico. Se $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $\mathbb{P}(X)$ e $\mu \in \mathbb{P}(X)$, então:

$$\mu_n \to \mu \text{ em } \tau^* \iff \int_X u(x)\mu_n(dx) \to \int_X u(x)\mu(dx) \quad \forall u \in C_b(X,\mathbb{R}). \tag{1.3}$$

Prova. Se $\mu_n \to \mu$ em τ^*, então $\Psi_u(\mu_n) \to \Psi_u(\mu)$ para todo $u \in C_b(X,\mathbb{R})$, já que cada Ψ_u é contínua. Logo, $\int_X u(x)\mu_n(dx) \to \int_X u(x)\mu(dx)$ para cada $u \in C_b(X,\mathbb{R})$. Reciprocamente, suponha que $\Psi_u(\mu_n) \to \Psi_u(\mu)$ para cada $u \in C_b(X,\mathbb{R})$, e seja $U \in \mathcal{F}_1$ um aberto base de τ^* contendo μ. Desse modo, existe $\Gamma \subset C(X,\mathbb{R})$ finito tal que $U = \bigcap_{u\in\Gamma} \Psi_u^{-1}(B_u)$, em que $B_u \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ para cada $u \in \Gamma$. Assim, para cada $v \in \Gamma$:

$$\Psi_v(\mu) \in \Psi_v(U) \subset \bigcap_{u\in\Gamma} \Psi_v(\Psi_u^{-1}(B_u)) = B_v \cap \left(\bigcap_{u\in\Gamma\setminus\{v\}} \Psi_v(\Psi_u^{-1}(B_u)) \right) \subset B_v.$$

Logo, $\Psi_v(\mu) \in B_v$ para cada $v \in \Gamma$. Pela hipótese, para cada $v \in \Gamma$ existe $N_v \in \mathbb{N}$ de sorte que, se $n \geq N_v$, então $\Psi_v(\mu_n) \in B_v$. Assim, $\mu_n \in \Psi_v^{-1}(B_v)$ para todo $n \geq N_v$. Definindo $N := \max\{N_v; v \in \Gamma\}$, segue que $\mu_n \in U$ para todo $n \geq N$, ou seja, $\mu_n \to \mu$ em τ^*. □

Lema 1.4.6. Seja $\{x_\gamma; \gamma \in \Gamma\}$ uma família não enumerável de números reais positivos. Então:

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma := \sup \left\{ \sum_{\gamma\in\tilde{\Gamma}} x_\gamma; \tilde{\Gamma} \subset \Gamma \text{ é finito} \right\} = \infty.$$

Prova. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina:

$$S_n := \left\{ \gamma \in \Gamma; x_\gamma > \frac{1}{n} \right\}.$$

Então $\Gamma = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$, e este conjunto é não enumerável por hipótese. Logo, há $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ de sorte que $S_{\tilde{n}}$ é não enumerável. Portanto:

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma \geq \sum_{\gamma\in S_{\tilde{n}}} x_\gamma \geq \sum_{\gamma\in S_{\tilde{n}}} \frac{1}{\tilde{n}} = \infty.$$ □

Teorema 1.4.7. Seja (X,d) um espaço métrico. Se $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $\mathbb{P}(X)$ e $\mu \in \mathbb{P}(X)$, então as seguintes condições são equivalentes:

(a) $\mu_n \to \mu$ em τ^*;

(b) $\limsup_{n\to\infty} \mu_n(C) \leq \mu(C)$ para todo conjunto fechado $C \subset X$;

(c) $\liminf_{n\to\infty} \mu_n(A) \geq \mu(A)$ para todo conjunto aberto $A \subset X$;

(d) $\mu_n(B) \to \mu(B)$ para todo $B \in \mathcal{B}(X)$ tal que $\mu(\partial B) = 0$.

Prova.

- (a)$\Rightarrow$(b): Seja $C \subset X$ fechado e não vazio, e defina, para cada $j \in \mathbb{N}$, o conjunto aberto $A_j := \{x \in X; d(x,C) < 1/j\}$. Então cada A_j^c é fechado e:

$$\inf\left\{d(x,y); x \in C, y \in A_j^c\right\} \geq \frac{1}{j}.$$

Defina[2], para cada $j \in \mathbb{N}$:

$$f_j(x) := \frac{d(x, A_j^c)}{d(x, A_j^c) + d(x, C)}.$$

Assim, para cada $j \in \mathbb{N}$, $f_j \in C_b(X, \mathbb{R})$, $0 \leq f_j \leq 1$ em X, $f_j \equiv 1$ em C e $f_j \equiv 0$ em A_j^c. Além disso, para quaisquer $n, j \in \mathbb{N}$:

$$\mu_n(C) = \int_X \chi_C(x)\mu_n(dx) \leq \int_X f_j(x)\mu_n(dx).$$

Segue da hipótese que, para cada $j \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \mu_n(C) &\leq \limsup_{n\to\infty} \int_X f_j(x)\mu_n(dx) = \int_X f_j(x)\mu(dx) \\
&\leq \int_X \chi_{A_j}(x)\mu(dx) = \mu(A_j).
\end{aligned}$$

Como C é fechado, $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j = C$. Pelo Lema 1.2.17 conclui-se que:

$$\mu(C) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j) \geq \limsup_{n\to\infty} \mu_n(C).$$

- (b)$\Rightarrow$(c): Seja $A \subset X$ aberto. Assim:

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \mu_n(A) &= \liminf_{n\to\infty} (\mu_n(X) - \mu_n(A^c)) = 1 - \limsup_{n\to\infty} \mu_n(A^c) \\
&\geq 1 - \mu(A^c) = \mu(X) - \mu(A^c) = \mu(A).
\end{aligned}$$

- (c)$\Rightarrow$(b): É feito de modo inteiramente análogo ao anterior.

- (b)+(c)$\Rightarrow$(d): Seja $B \in \mathcal{B}(X)$ com $\mu(\partial B) = 0$. Como $int(B) \subset B \subset \overline{B}$, sendo $int(B)$ aberto e $\overline{B}$ fechado, conclui-se o seguinte por (b) e (c):

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \mu_n(B) &\leq \limsup_{n\to\infty} \mu_n(\overline{B}) \leq \mu(\overline{B}) = \mu(B \cup \partial B) \\
&\leq \mu(B) + \mu(\partial B) = \mu(B); \\
\liminf_{n\to\infty} \mu_n(B) &\geq \liminf_{n\to\infty} \mu_n(int(B)) \geq \mu(int(B)) = \mu(B \setminus \partial B) \\
&\geq \mu(B) - \mu(\partial B) = \mu(B).
\end{aligned}$$

Portanto, $\mu_n(A) \to \mu(A)$.

- (d)$\Rightarrow$(a): Seja $u \in C_b(X, \mathbb{R})$. A ideia da demonstração é a seguinte: pela hipótese, se $\{B_j;\, j \in \{1, \ldots, m\}\} \subset \mathcal{B}(X)$ é uma família tal que $\mu(\partial B_j) = 0$ para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$,

[2] Se $E \subset X$ e $x \in X$, definimos $d(x, E) := \inf\{d(x, y);\, y \in E\}$.

então qualquer função simples da forma $h := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_{B_j}$ satisfaz:

$$\int_X h(x)\,\mu_n(dx) \to \int_X h(x)\,\mu(dx).$$

Seguindo isso, u será aproximada por funções simples dessa forma para obter o resultado.

Defina a seguinte medida em $\mathbb{P}(\mathbb{R})$:

$$\nu(B) := \mu(u^{-1}(B)) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Fixando $a < -\|u\|_\infty$ e $b > \|u\|_\infty$, segue que $\nu(\mathbb{R} \setminus (a,b)) = 0$. Como ν é finita, existe no máximo uma quantidade contável de elementos $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que $\nu(\{\alpha\}) > 0$ (pelo Lema 1.4.6). Assim, fixado $\varepsilon > 0$, existem $t_0, \ldots, t_m \in \mathbb{R}$ tais que:

(i) $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$;

(ii) $t_j - t_{j-1} < \varepsilon/3$ para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$;

(iii) $\nu(\{t_j\}) = 0$ para cada $j \in \{0, \ldots, m\}$.

De fato, suponha que exista $\varepsilon > 0$ de modo que qualquer partição de $[a,b]$ com comprimento menor que $\varepsilon/3$ admita pontos com medida ν positiva. Como o intervalo $(0,\varepsilon)$ é não enumerável, existe uma quantidade não contável de possíveis partições. Pode-se escolher um ponto distinto com medida positiva em cada uma dessas partições, obtendo uma quantidade não enumerável de conjuntos unitários com medida positiva, contradizendo o que foi afirmado previamente.

Agora, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, defina $B_j := u^{-1}([t_{j-1}, t_j))$. Então cada B_j pertence a $\mathcal{B}(X)$ e $X = \bigcup_{j=1}^{m} B_j$. Ademais, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$:

$$\begin{aligned} \overline{B}_j &\subset u^{-1}([t_{j-1}, t_j]) \text{ (pois este é um conjunto fechado contendo } B_j); \\ int(B_j) &\supset u^{-1}((t_{j-1}, t_j)) \text{ (pois este é um conjunto aberto contido em } B_j). \end{aligned}$$

Como consequência:

$$\begin{aligned} \mu(\partial B_j) &= \mu(\overline{B}_j \setminus int(B_j)) \leq \mu(u^{-1}(\{t_{j-1}, t_j\})) \\ &= \nu(\{t_{j-1}, t_j\}) = \nu(\{t_{j-1}\}) + \nu(\{t_j\}) = 0. \end{aligned}$$

Então, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, segue da hipótese que $\mu_n(B_j) \to \mu(B_j)$. Existe, pois, $N \in \mathbb{N}$ de sorte que:

$$|t_{j-1}| \cdot |\mu_n(B_j) - \mu(B_j)| < \frac{\varepsilon}{3m} \quad \forall n \geq N,\ \forall j \in \{1, \ldots, m\}.$$

Considere a seguinte função simples:

$$h := \sum_{j=1}^{m} t_{j-1}\chi_{B_j}.$$

Como $B_j \cap B_i = \emptyset$ se $j \neq i$, segue do item (ii) que $h(x) \leq u(x) \leq h(x) + \varepsilon/3$ para todo $x \in X$. Portanto, para cada $n \geq N$:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_X u(x)\,\mu_n(dx) - \int_X u(x)\,\mu(dx) \right| \\
= & \left| \int_X (u(x) - h(x))\,\mu_n(dx) + \int_X h(x)\,\mu_n(dx) - \int_X (u(x) - h(x))\,\mu(dx) \right. \\
& \hspace{20em} \left. - \int_X h(x)\,\mu(dx) \right| \\
\leq & \int_X |u(x) - h(x)|\,\mu_n(dx) + \left| \int_X h(x)\,\mu_n(dx) - \int_X h(x)\,\mu(dx) \right| \\
& \hspace{20em} + \int_X |u(x) - h(x)|\,\mu(dx) \\
\leq & \frac{\varepsilon}{3} \cdot \mu_n(X) + \left| \sum_{j=1}^{m} t_{j-1} \left(\mu_n(B_j) - \mu(B_j) \right) \right| + \frac{\varepsilon}{3} \cdot \mu(X) \\
\leq & \frac{2\varepsilon}{3} + \sum_{j=1}^{m} |t_{j-1}| \cdot |\mu_n(B_j) - \mu(B_j)| < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Com isso, conclui-se que $\int_X u(x)\,\mu_n(dx) \to \int_X u(x)\,\mu(dx)$. □

1.4.2 Métrica de Prokhorov

Definição 1.4.8. Seja (X,d) um espaço métrico. Dados $\mu, \nu \in \mathbb{P}(X)$, defina:

$$d_P(\mu,\nu) := \inf\left\{\alpha > 0;\, \mu(A) \leq \nu(A^\alpha) + \alpha \text{ e } \nu(A) \leq \mu(A^\alpha) + \alpha \;\; \forall A \in \mathcal{B}(X)\right\},$$

em que, para todo $\alpha > 0$:

$$A^\alpha := \{x \in X;\, d(x,A) < \alpha\} \text{ se } A \neq \emptyset, \;\; \emptyset^\alpha := \emptyset.$$

Proposição 1.4.9. Seja (X,d) um espaço métrico. Então d_P é uma métrica em $\mathbb{P}(X)$, chamada *métrica de Prokhorov*.

***Prova*.** Como qualquer $\alpha \geq 1$ pertence ao conjunto que define a fórmula de d_P, então o ínfimo está bem definido. Claramente $d_P(\mu,\nu) \geq 0$ e $d_P(\mu,\nu) = d_P(\nu,\mu)$ para quaisquer $\mu,\nu \in \mathbb{P}(X)$. Para provar as propriedades restantes que definem uma métrica, fixe $\mu,\nu,\eta \in \mathbb{P}(X)$.

- $d_P(\mu,\mu) = 0$: se $A \in \mathcal{B}(X)$ e $\alpha > 0$, então $A^\alpha \supset A$, ou seja, $\mu(A) \leq \mu(A^\alpha) \leq \mu(A^\alpha) + \alpha$. Logo, $d_P(\mu,\mu) \leq \alpha$ para todo $\alpha > 0$, o que implica $d_P(\mu,\mu) = 0$.

- $d_P(\mu,\nu) = 0 \Rightarrow \mu = \nu$: se $d_P(\mu,\nu) = 0$, então há uma sequência $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $(0,\infty)$, com $\alpha_n \to 0$, de modo que $\mu(A) \leq \nu(A^{\alpha_n}) + \alpha_n$ e $\nu(A) \leq \mu(A^{\alpha_n}) + \alpha_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\bar{A} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A^{\alpha_n}$, então $\mu(A) \leq \nu(\bar{A})$ e $\nu(A) \leq \mu(\bar{A})$. Em particular, $\mu(A) = \nu(A)$ sempre que $A \subset X$ é fechado. Portanto, $\mu = \nu$ pela Proposição 1.2.18.

- *Desigualdade triangular*: sejam $\alpha, \beta \in (0,\infty)$ tais que:

$$\mu(A) \leq \eta(A^{\alpha}) + \alpha \text{ e } \eta(A) \leq \mu(A^{\alpha}) + \alpha \quad \forall A \in \mathcal{B}(X); \quad \text{e}$$
$$\nu(A) \leq \eta(A^{\beta}) + \beta \text{ e } \eta(A) \leq \nu(A^{\beta}) + \beta \quad \forall A \in \mathcal{B}(X).$$

Assim, para todo $A \in \mathcal{B}(X)$:

$$\mu(A) \leq \eta(A^{\alpha}) + \alpha \leq \nu((A^{\alpha})^{\beta}) + \alpha + \beta; \quad \text{e}$$
$$\nu(A) \leq \eta(A^{\beta}) + \beta \leq \mu((A^{\beta})^{\alpha}) + \alpha + \beta.$$

Note que $(A^{\alpha})^{\beta} \subset A^{\alpha+\beta}$. De fato, se $x \in (A^{\alpha})^{\beta}$, então $d(x,A^{\alpha}) < \beta$. Assim, existe $y \in A^{\alpha}$ tal que $d(x,y) < \beta$. Como $y \in A^{\alpha}$, existe $a \in A$ de sorte que $d(y,a) < \alpha$. Logo, $d(x,a) \leq d(x,y) + d(y,a) < \alpha + \beta$, ou seja, $x \in A^{\alpha+\beta}$. De modo análogo, $(A^{\beta})^{\alpha} \subset A^{\alpha+\beta}$.

Desse modo, para cada $A \in \mathcal{B}(X)$:

$$\mu(A) \leq \nu(A^{\alpha+\beta}) + \alpha + \beta; \quad \text{e}$$
$$\nu(A) \leq \mu(A^{\alpha+\beta}) + \alpha + \beta.$$

Consequentemente, $d_P(\mu,\nu) \leq \alpha + \beta$. Isso sendo válido para quaisquer α, β acima definidos, pode-se tomar o ínfimo sobre α e sobre β para obter:

$$d_P(\mu,\nu) \leq d_P(\mu,\eta) + d_P(\eta,\nu).$$

Com isso, fica concluída a prova de que d_P é uma métrica em $\mathbb{P}(X)$. □

Lema 1.4.10. Sejam (X,d) um espaço métrico separável e μ uma medida finita em $(X,\mathcal{B}(X))$. Então, dado $\delta > 0$, existe uma família contável $\{B_n; n \in \mathbb{N}\}$ de bolas abertas (ou fechadas) com raio menor que δ, de modo que:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = X;$$
$$\mu(\partial B_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Prova. Seja D um subconjunto denso e enumerável de X. Fixado $x \in D$, defina, para cada $r > 0$, $S(x,r) := \{y \in X; d(x,y) = r\}$. Dado $\delta > 0$, os elementos de $\mathcal{S} := \{S(x,r); \delta/2 < r < \delta\}$ são dois a dois disjuntos. Pelo Lema 1.4.6, há apenas uma quantidade contável de elementos de $\mathcal{S}$ com medida μ positiva. Sendo $\mathcal{S}$ não enumerável, existe $r = r(x) \in (\delta/2, \delta)$ tal que $\mu(S(x,r)) = 0$.

Assim, para cada $x \in D$, existe uma bola aberta (ou fechada) $B_{x,r(x)}$ com raio $r(x) \in (\delta/2, \delta)$ cuja fronteira tem medida 0 por μ. Sendo D denso, pode-se cobrir X com a família $\{B_{x,r(x)}; x \in D\}$. Além disso, por D ser contável, essa família é contável. $\square$

Teorema 1.4.11. Seja (X,d) um espaço métrico separável. Se $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $\mathbb{P}(X)$ e $\mu \in \mathbb{P}(X)$, então:

$$\mu_n \to \mu \text{ em } \tau^* \iff d_P(\mu_n, \mu) \to 0.$$

***Prova*.** Suponha que $d_P(\mu_n, \mu) \to 0$. Então há uma sequência $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $(0,\infty)$, com $\alpha_n \to 0$, de modo que $\mu_n(A) \le \mu(A^{\alpha_n}) + \alpha_n$ e $\mu(A) \le \mu_n(A^{\alpha_n}) + \alpha_n$ para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{B}(X)$. Assim, para todo $A \in \mathcal{B}(X)$, o Lema 1.2.17 garante que:

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(A) \le \limsup_{n\to\infty} (\mu(A^{\alpha_n}) + \alpha_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A^{\alpha_n}) = \mu(\bar{A}).$$

Em particular, para todo conjunto fechado $C \subset X$, $\limsup_{n\to\infty} \mu_n(C) \le \mu(C)$. Portanto, $\mu_n \to \mu$ em τ^* pelo Teorema 1.4.7.

Reciprocamente, suponha que $\mu_n \to \mu$ em τ^*, e seja $\varepsilon \in (0,1)$. É preciso encontrar $N \in \mathbb{N}$ de sorte que, para todo $n \ge N$, $d_P(\mu_n, \mu) < \varepsilon$, ou seja, $\mu_n(B) \le \mu(B^\varepsilon) + \varepsilon$ e $\mu(B) \le \mu_n(B^\varepsilon) + \varepsilon$ para todo $B \in \mathcal{B}(X)$.

Fixe $\delta > 0$ tal que $\delta < \varepsilon/3$, e seja $\{B_j; j \in \mathbb{N}\}$ a família de bolas com raio menor que $\delta/2$ dada pelo lema precedente. Assim, $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j = X$ e $\mu(\partial B_j) = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Fixe agora $k \in \mathbb{N}$ de modo que:

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{k} B_j\right) \ge 1 - \delta.$$

Seja $\mathcal{A}$ a família finita formada por todas as possíveis uniões entre as bolas $B_1, \ldots, B_k$:

$$\mathcal{A} := \left\{\bigcup_{j\in J} B_j; J \subset \{1,\ldots,k\}\right\}.$$

Observe que, para cada $A \in \mathcal{A}$, $\partial A \subset \bigcup_{j=1}^{k} \partial B_j$ e, assim, $\mu(\partial A) \le \sum_{j=1}^{k} \mu(\partial B_j) = 0$. Como $\mu_n \to \mu$ em τ^*, então $\mu_n(A) \to \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}$ (pelo Teorema 1.4.7). Seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $|\mu_n(A) - \mu(A)| < \delta$ para quaisquer $n \ge N$ e $A \in \mathcal{A}$.

Em particular, para $n \ge N$:

$$\mu_n\left(\bigcup_{j=1}^{k} B_j\right) \ge \mu\left(\bigcup_{j=1}^{k} B_j\right) - \delta \ge 1 - 2\delta.$$

Fixe agora $B \in \mathcal{B}(X)$ e defina:

$$A := \bigcup \{B_j; j \in \{1,\ldots,k\}, B_j \cap B \neq \emptyset\} \in \mathcal{A}.$$

Então:

- $A \subset B^\delta$, pois o diâmetro de cada B_j é menor que δ;
- $B = \left[B \cap \bigcup_{j=1}^k B_j\right] \cup \left[B \cap \left(\bigcup_{j=1}^k B_j\right)^c\right] \subset A \cup \left(\bigcup_{j=1}^k B_j\right)^c$, pois $B \cap \bigcup_{j=1}^k B_j = \bigcup_{j=1}^k (B \cap B_j) \subset A$;
- $|\mu_n(A) - \mu(A)| < \delta$ para todo $n \geq N$;
- $\mu\left(\left(\bigcup_{j=1}^k B_j\right)^c\right) \leq \delta$, e $\mu_n\left(\left(\bigcup_{j=1}^k B_j\right)^c\right) \leq 2\delta$ para todo $n \geq N$.

Logo, para cada $n \geq N$:

$$\begin{aligned}
\mu(B) &\leq \mu(A) + \mu\left(\left(\bigcup_{j=1}^k B_j\right)^c\right) \leq \mu(A) + \delta \leq \mu_n(A) + 2\delta \\
&\leq \mu_n(B^\delta) + 2\delta \leq \mu_n(B^\varepsilon) + \varepsilon; \\
\mu_n(B) &\leq \mu_n(A) + \mu_n\left(\left(\bigcup_{j=1}^k B_j\right)^c\right) \leq \mu_n(A) + 2\delta \leq \mu(A) + 3\delta \\
&\leq \mu(B^\delta) + 3\delta \leq \mu(B^\varepsilon) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Como isso é válido para todo $B \in \mathcal{B}(X)$, segue que $d_P(\mu_n, \mu) \leq \varepsilon$ para todo $n \geq N$. $\square$

Lema 1.4.12. Sejam (X,d) um espaço métrico, $\mu \in \mathbb{P}(X)$ e $\varepsilon > 0$. Se $A \in \mathcal{B}(X)$ é tal que $\mu(\partial A) = 0$, então o conjunto $V := \{\nu \in \mathbb{P}(X); |\nu(A) - \mu(A)| < \varepsilon\}$ é aberto em τ^*.

***Prova*.** Observe inicialmente que $\mu(A) = \mu(\bar{A}) = \mu(intA)$. Como $\bar{A}$ é fechado, $\bar{A} = \bigcap_{\delta>0} \bar{A}^\delta$. Pelo Lema 1.2.17, $\mu(\bar{A}) = \lim_{\delta\to 0} \mu(\bar{A}^\delta)$. Fixe $\delta > 0$ de modo que $\mu(\bar{A}^\delta) - \mu(\bar{A}) < \varepsilon/2$. Segue do Lema 1.1.9 a existência de $u \in C_b(X,[0,1])$ de sorte que $\chi_{\bar{A}} \leq u \leq \chi_{\bar{A}^\delta}$. Considere o seguinte aberto de τ^*:

$$U_1 := \left\{\nu \in \mathbb{P}(X); \left|\int_X u(x)\nu(dx) - \int_X u(x)\mu(dx)\right| < \varepsilon/2\right\} = \Psi_u^{-1}\Big(\Psi_u(\mu) - \varepsilon/2, \Psi_u(\mu) + \varepsilon/2\Big).$$

De modo análogo, define-se U_2 trocando o fechado $\bar{A}$ pelo fechado $(intA)^c$. Seja $U := U_1 \cap U_2$. A fim de concluir o resultado, será provado que $U \subset V$. Fixe $\nu \in U$. Então:

$$\begin{aligned}
& \left|\int_X u(x)\nu(dx) - \int_X u(x)\mu(dx)\right| < \varepsilon/2 \\
\Rightarrow\ & \left|\int_X \chi_{\bar{A}}(x)\nu(dx)\right| - \left|\int_X \chi_{\bar{A}^\delta}(x)\mu(dx)\right| < \varepsilon/2 \\
\Rightarrow\ & \nu(\bar{A}) - \mu(\bar{A}^\delta) < \varepsilon/2 \Rightarrow \nu(\bar{A}) < \mu(\bar{A}) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Analogamente, $\nu((intA)^c) < \mu((intA)^c) + \varepsilon$. Logo:

$$\begin{aligned}
& \nu(A) \leq \nu(\bar{A}) < \mu(\bar{A}) + \varepsilon = \mu(A) + \varepsilon; \text{ e} \\
& 1 - \nu(intA) < 1 - \mu(intA) + \varepsilon \;\Rightarrow\; \nu(A) \geq \nu(intA) > \mu(intA) - \varepsilon = \mu(A) - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, $|\nu(A)-\mu(A)|<\varepsilon$, ou seja, $\nu \in V$. □

Teorema 1.4.13. Seja (X,d) um espaço métrico separável. Então a topologia τ^* da convergência fraca em $\mathbb{P}(X)$ coincide com a topologia induzida pela métrica de Prokhorov.

Prova. Seja $E \in \tau^*$ e considere uma sequência $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergindo para $\mu \in E$ na métrica d_P. Então $\mu_n \to \mu$ em τ^* (pelo Teorema 1.4.11) e, portanto, existe $N \in \mathbb{N}$ de modo que $\mu_n \in E$ para todo $n \geq N$. Isso garante que $E \in \tau_d$, em que τ_d denota a topologia induzida pela métrica de Prokhorov. Portanto, $\tau^* \subset \tau_d$.

Reciprocamente, seja $B(\mu,\varepsilon) \in \tau_d$ uma bola aberta, em que $\varepsilon \in (0,1)$ e $\mu \in \mathbb{P}(X)$. Para obter o resultado, basta encontrar um aberto em τ^* contido nesta bola. Considere $\delta > 0$ e a família $\mathcal{A}$ definidos na prova do Teorema 1.4.11. Então $V := \{\nu \in \mathbb{P}(X); |\nu(A)-\mu(A)| < \delta \ \forall A \in \mathcal{A}\}$ é um conjunto aberto em τ^* pelo Lema 1.4.12.

Desse modo, um elemento μ_n, com $n \geq N$, na demonstração do teorema mencionado equivale aqui a um elemento $\nu \in V$. Seguindo a mesma prova, conclui-se que $d_P(\nu,\mu) < \varepsilon$ para todo $\nu \in V$, ou seja, $V \subset B(\mu,\varepsilon)$. Portanto, $\tau_d \subset \tau^*$. □

1.4.3 Métrica B-Lipschitz

Seja (X,d) um espaço métrico e considere o seguinte espaço de funções:

$$BL(X,d) := \{u : X \to \mathbb{R};\ u \text{ é Lipschitz e limitada}\}.$$

Para $u \in BL(X,d)$, defina:

$$\begin{aligned} \|u\|_\infty &:= \sup\{|u(x)|;\ x \in X\}; \\ Lip(u) &:= \inf\{L > 0;\ |u(x)-u(y)| \leq Ld(x,y)\ \ \forall x,y \in X\}. \end{aligned}$$

Fica definida a seguinte norma em $BL(X,d)$:

$$\|u\|_{BL} := \|u\|_\infty + Lip(u) \quad \forall u \in BL(X,d).$$

A *métrica B-Lipschitz* em $\mathbb{P}(X)$ é definida da seguinte forma:

$$d_{BL}(\mu,\nu) := \sup\left\{\left|\int_X u(x)\mu(dx) - \int_X u(x)\nu(dx)\right|;\ u \in BL(X,d),\ \|u\|_{BL} \leq 1\right\}.$$

Lema 1.4.14. Sejam $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathbb{P}(X)$ e $\mu \in \mathbb{P}(X)$. Então $\mu_n \to \mu$ em τ^* se, e somente se, $\int_X u(x)\mu_n(dx) \to \int_X u(x)\mu(dx)$ para toda $u \in BL(X,\mathbb{R})$.

Prova. A condição “somente se” é imediata. Para a outra direção, ver Proposição 1.12 em (Gaans, 2006, [9]). □

Proposição 1.4.15. Seja (X,d) um espaço métrico. Então d_{BL} é uma métrica em $\mathbb{P}(X)$.

Prova. É claro que $d_{BL}(\mu,\mu) = 0$, $d_{BL}(\mu,\nu) \geq 0$ e $d_{BL}(\mu,\nu) = d_{BL}(\nu,\mu)$ para quaisquer $\mu,\nu \in \mathbb{P}(X)$. Se $d_{BL}(\mu,\nu) = 0$, então $\int_X u(x)\mu(dx) = \int_X u(x)\nu(dx)$ para qualquer $u \in BL(X,\mathbb{R})$. Pelo Lema 1.4.14, a sequência constante igual a μ converge em τ^* para ν e vice-versa. Segue do Teorema 1.4.7 que $\mu(A) \leq \nu(A)$ e $\nu(A) \leq \mu(A)$ para todo aberto $A \subset X$. Portanto, $\mu = \nu$ pela Proposição 1.2.18.

Por fim, resta provar a desigualdade triangular. Sejam $\mu,\nu,\eta \in \mathbb{P}(X)$. Assim, para qualquer $u \in BL(X,\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}\Big|\int_X u(x)\mu(dx) - \int_X u(x)\eta(dx)\Big| \;\leq\; & \Big|\int_X u(x)\mu(dx) - \int_X u(x)\nu(dx)\Big| \\ & +\Big|\int_X u(x)\nu(dx) - \int_X u(x)\eta(dx)\Big|.\end{aligned}$$

Portanto, $d_{BL}(\mu,\eta) \leq d_{BL}(\mu,\nu) + d_{BL}(\nu,\eta)$. □

Teorema 1.4.16. Seja (X,d) um espaço métrico separável. Se $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $\mathbb{P}(X)$ e $\mu \in \mathbb{P}(X)$, então:

$$\mu_n \to \mu \text{ em } \tau^* \iff d_{BL}(\mu_n,\mu) \to 0.$$

Prova. Se $d_{BL}(\mu_n,\mu) \to 0$, então $\int_X u(x)\mu_n(dx) \to \int_X u(x)\mu(dx)$ para toda $u \in BL(X,\mathbb{R})$ tal que $\|u\|_{BL} \leq 1$. Para $\|u\|_{BL} > 1$, basta dividir a função u por este valor e conclui-se a mesma convergência. Portanto, $\mu_n \to \mu$ em τ^* pelo Lema 1.4.14.

Para a recíproca, ver Teorema 1.14 em (Gaans, 2006, [9]). □

Observação 1.4.17. Como consequência deste resultado e do Teorema 1.4.11, as métricas B-Lipschitz e de Prokhorov são equivalentes.

1.4.4 Compacidade de $\mathbb{P}(X)$

O objetivo agora é provar que, se (X,d) é um espaço métrico compacto, então $(\mathbb{P}(X),\tau^*)$ também é compacto. Para isso, será necessário introduzir alguns conceitos e resultados da Análise Funcional.

Definição 1.4.18. Seja $(Y,\|\cdot\|)$ um espaço normado. O *dual* de Y, denotado por Y', é definido da seguinte forma:

$$Y' := \{\varphi : Y \to \mathbb{R};\ \varphi \text{ é linear e limitado}\}.$$

Proposição 1.4.19. Se $(Y,\|\cdot\|)$ é um espaço normado, então Y' é um espaço de Banach com a seguinte norma:

$$\|\varphi\|_{Y'} := \sup\{|\varphi(y)|;\ \|y\| \leq 1\}.$$

Definição 1.4.20. Seja (X,d) um espaço métrico. Uma função $\varphi : C_b(X,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ é *positiva* se $\varphi(u) \geq 0$ para toda $u \in C_b(X,\mathbb{R})$ tal que $u \geq 0$.

Observação 1.4.21. A função $\chi_X \equiv 1$ é contínua, e será utilizada a notação $\mathbb{1} := \chi_X$.

Observação 1.4.22. Em $C(X,\mathbb{R})$ será utilizada a seguinte norma:

$$\|u\|_\infty := \sup\{|u(x)|; x \in X\} \quad \forall u \in C(X,\mathbb{R}).$$

Teorema 1.4.23. Sejam (X,d) um espaço métrico e μ uma medida finita em $\mathcal{B}(X)$. Considere a seguinte função:

$$\begin{array}{rccl} \varphi_\mu : & C_b(X,\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & u & \mapsto & \int_X u(x)\mu(dx). \end{array} \tag{1.4}$$

Então φ_μ é linear, limitada, positiva e $\|\varphi_\mu\|_{C_b(X,\mathbb{R})'} = \mu(X)$.

Prova. O fato de ser linear e positivo é imediato. Observe ainda que, para cada $u \in C_b(X,\mathbb{R})$:

$$|\varphi_\mu(u)| \leq \int_X |u(x)|\mu(dx) \leq \|u\|_\infty \mu(X).$$

Isso garante que $\varphi_\mu \in C_b(X,\mathbb{R})'$ e que $\|\varphi_\mu\|_{C_b(X,\mathbb{R})'} \leq \mu(X)$. Por outro lado, como $\varphi_\mu(\mathbb{1}) = \mu(X) = \|\mathbb{1}\|_\infty \mu(X)$, então:

$$\|\varphi_\mu\|_{C_b(X,\mathbb{R})'} = \mu(X).$$ □

Lema 1.4.24. Seja (X,d) um espaço métrico. Se $\varphi \in C_b(X,\mathbb{R})'$ é positivo, então $\|\varphi\|_{C_b(X,\mathbb{R})'} = \varphi(\mathbb{1})$.

Prova. Inicialmente, observe que:

$$\varphi(\mathbb{1}) \leq \|\varphi\|_{C_b(X,\mathbb{R})'} \|\mathbb{1}\|_\infty = \|\varphi\|_{C_b(X,\mathbb{R})'}.$$

Por outro lado, se $u \in C_b(X,\mathbb{R})$, então:

$$-\|u\|_\infty \mathbb{1} \leq u \leq \|u\|_\infty \mathbb{1}.$$

Sendo φ linear e positivo, isso implica que:

$$-\|u\|_\infty \varphi(\mathbb{1}) \leq \varphi(u) \leq \|u\|_\infty \varphi(\mathbb{1}).$$

Logo, $|\varphi(u)| \leq \|u\|_\infty \varphi(\mathbb{1})$. Passando ao supremo, conclui-se que $\|\varphi\|_{C_b(X,\mathbb{R})'} \leq \varphi(\mathbb{1})$. □

Observação 1.4.25. Se (X,d) é um espaço métrico compacto, então $C_b(X,\mathbb{R}) = C(X,\mathbb{R})$.

Teorema 1.4.26. *(Teorema da Representação de Riesz)* Seja (X,d) um espaço métrico compacto. Se $\varphi \in C(X,\mathbb{R})'$ é positivo e $\|\varphi\|_{C(X,\mathbb{R})'} = 1$, então existe uma única $\mu \in \mathbb{P}(X)$ tal que:

$$\varphi(u) = \int_X u(x)\mu(dx) \quad \forall u \in C(X,\mathbb{R}). \tag{1.5}$$

Prova. Pelo Teorema 7.2 em (Folland, 1999, [8]), sabe-se que, se φ é apenas positiva, então existe uma única medida finita μ em $(X,\mathcal{B}(X))$ que satisfaz (1.5). Agora, como $\|\varphi\|_{C(X,\mathbb{R})'} = 1$, segue do Lema 1.4.24 que:

$$\mu(X) = \int_X \mathbb{1}(x)\mu(dx) \overset{(1.5)}{=} \varphi(\mathbb{1}) \overset{1.4.24}{=} 1.$$

Portanto, $\mu \in \mathbb{P}(X)$. $\square$

Definição 1.4.27. Seja (X,d) um espaço métrico. Define-se em $C_b(X,\mathbb{R})'$ a *topologia fraca** como sendo a topologia mais fraca em que, para cada $u \in C_b(X,\mathbb{R})$, a seguinte função é contínua:

$$\begin{array}{rccl} \Psi_u : & C_b(X,\mathbb{R})' & \to & \mathbb{R} \\ & \varphi & \mapsto & \varphi(u). \end{array}$$

Observe que $\Psi_u \in C_b(X,\mathbb{R})''$.

Lema 1.4.28. Seja (X,d) um espaço métrico. Uma sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $C_b(X,\mathbb{R})'$ converge na topologia fraca* para $\varphi \in C_b(X,\mathbb{R})'$ se, e somente se, $\Psi_u(\varphi_n) \to \Psi_u(\varphi)$ para todo $u \in C_b(X,\mathbb{R})$.

***Prova*.** A construção da topologia fraca* é inteiramente análoga a que foi feita na Observação 1.4.4. Assim, uma base para essa topologia é dada pela família $\mathcal{F}_1$, constituída de todas as interseções finitas dos elementos de $\mathcal{F}_0 := \{\Psi_u^{-1}(B); B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), u \in C_b(X,\mathbb{R})\}$.

Se $\varphi_n \to \varphi$ na topologia fraca*, então $\Psi_u(\varphi_n) \to \Psi_u(\varphi)$ para todo $u \in C_b(X,\mathbb{R})$, já que cada Ψ_u é contínua.

Reciprocamente, suponha que $\Psi_u(\varphi) \to \Psi_u(\varphi)$ para cada $u \in C_b(X,\mathbb{R})$, e seja $U \in \mathcal{F}_1$ um aberto básico da topologia fraca* contendo φ. Desse modo, existe $\Gamma \subset C(X,\mathbb{R})$ finito tal que $U = \bigcap_{u\in\Gamma} \Psi_u^{-1}(B_u)$, em que $B_u \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ para cada $u \in \Gamma$. Assim, para cada $v \in \Gamma$:

$$\Psi_v(\varphi) \in \Psi_v(U) \subset \bigcap_{u\in\Gamma} \Psi_v(\Psi_u^{-1}(B_u)) = B_v \cap \left(\bigcap_{u\in\Gamma\setminus\{v\}} \Psi_v(\Psi_u^{-1}(B_u)) \right) \subset B_v.$$

Logo, $\Psi_v(\varphi) \in B_v$ para cada $v \in \Gamma$. Pela hipótese, para cada $v \in \Gamma$ existe $N_v \in \mathbb{N}$ de sorte que, se $n \geq N_v$, então $\Psi_v(\varphi_n) \in B_v$. Assim, $\varphi_n \in \Psi_v^{-1}(B_v)$ para todo $n \geq N_v$. Definindo $N := \max\{N_v; v \in \Gamma\}$, segue que $\varphi_n \in U$ para todo $n \geq N$, ou seja, $\varphi_n \to \varphi$ na topologia fraca*. $\square$

Proposição 1.4.29. Seja (X,d) um espaço métrico compacto e considere o seguinte subespaço de $C_b(X,\mathbb{R})'$:

$$\Phi := \left\{ \varphi \in C_b(X,\mathbb{R})';\ \|\varphi\|_{C_b(X,\mathbb{R})'} = 1 \text{ e } \varphi \text{ é positivo} \right\}.$$

Defina ainda a seguinte função:

$$\begin{array}{rccl} T : & \mathbb{P}(X) & \to & \Phi \\ & \mu & \mapsto & \varphi_\mu, \end{array}$$

em que φ_μ está definida em (1.4). Então:

(a) T é uma bijeção;

(b) T é um *homeomorfismo sequencial* considerando em Φ a topologia fraca*. Isso significa que $\mu_n \to \mu$ em τ^* se, e somente se, $T(\mu_n) \to T(\mu)$ na topologia fraca* em Φ.

Prova.

(a) A injetividade de T segue do Teorema da Representação de Riesz, enquanto a sobrejetividade segue do Teorema 1.4.23.

(b) Pelo item anterior, cada $\varphi \in \Phi$ equivale a uma única $\mu \in \mathbb{P}(X)$ tal que $\varphi = \varphi_\mu$, seguindo a notação em (1.4). Assim, restringindo ao subespaço $\Phi \subset C_b(X,\mathbb{R})'$ no Lema 1.4.28, para cada $u \in C_b(X,\mathbb{R})$ segue que $\Psi_u(\varphi) = \int_X u(x)\mu(dx)$.

Se $\mu_n \to \mu$ em τ^*, segue da Proposição 1.4.5 que $\int_X u(x)\mu_n(dx) \to \int_X u(x)\mu(dx)$ para todo $u \in C_b(X,\mathbb{R})$. Logo, $\Psi_u(\varphi_{\mu_n}) \to \Psi_u(\varphi_\mu)$ para todo $u \in C_b(X,\mathbb{R})$. Assim, pelo Lema 1.4.28, $\varphi_{\mu_n} \to \varphi_\mu$ na topologia fraca* de Φ, ou seja, $T(\mu_n) \to T(\mu)$ fracamente* em Φ.

Reciprocamente, suponha que $\varphi_n \to \varphi$ na topologia fraca* de Φ. Então existem $\mu \in \mathbb{P}(X)$ e uma sequência $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{P}(X)$ de sorte que $\varphi = T(\mu) = \varphi_\mu$ e $\varphi_n = T(\mu_n) = \varphi_{\mu_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Pelo Lema 1.4.28, segue que $\Psi_u(\varphi_{\mu_n}) \to \Psi_u(\varphi_\mu)$ para todo $u \in C_b(X,\mathbb{R})$. Logo, $\int_X u(x)\mu_n(dx) \to \int_X u(x)\mu(dx)$ para cada $u \in C_b(X,\mathbb{R})$. Pela Proposição 1.4.5, $\mu_n \to \mu$ em τ^*. □

Lema 1.4.30. Seja (X,d) um espaço métrico. Então o subespaço Φ da proposição anterior é fechado na topologia fraca*.

Prova. Seja $B' := \left\{\varphi \in C_b(X,\mathbb{R})';\ \|\varphi\|_{C_b(X,\mathbb{R})'} \le 1\right\}$ a bola unitária em $C_b(X,\mathbb{R})'$. Para $\varphi \in B'$ positivo, $\|\varphi\|_{C_b(X,\mathbb{R})'} = 1$ se, e somente se, $\varphi(\mathbb{1}) = 1$. Logo:

$$\begin{aligned}
\Phi &= \{\varphi \in C_b(X,\mathbb{R})';\ \|\varphi\|_{C_b(X,\mathbb{R})'} = 1 \text{ e } \varphi \text{ é positivo}\} \\
&= \{\varphi \in C_b(X,\mathbb{R})';\ \|\varphi\|_{C_b(X,\mathbb{R})'} \le 1,\ \varphi(\mathbb{1}) = 1 \text{ e } \varphi(u) \ge 0 \text{ se } u \in C_b(X,\mathbb{R}) \text{ e } u \ge 0\} \\
&= \{\varphi \in B';\ \varphi(\mathbb{1}) = 1\} \cap \bigcap_{\substack{u \in C_b(X,\mathbb{R}) \\ u \ge 0}} \{\varphi \in B';\ \varphi(u) \ge 0\}.
\end{aligned}$$

Observe que, para cada $u \in C_b(X,\mathbb{R})$, a função $\Psi_u : B' \to \mathbb{R}$, $\varphi \mapsto \varphi(u)$, é contínua na topologia fraca*. Logo, para cada $u \ge 0$, os conjuntos $\{\varphi \in B';\ \varphi(u) \ge 0\} = \Psi_u^{-1}([0,\infty))$ e $\{\varphi \in B';\ \varphi(\mathbb{1}) = 1\} = \Psi_{\mathbb{1}}^{-1}(\{1\})$ são fechados na topologia fraca*. Portanto, Φ é fracamente* fechado. □

Teorema 1.4.31. *(Teorema de Banach-Alaoglu)* Seja E um espaço de Banach e considere a bola unitária $B' := \{f \in E';\ \|f\|_{E'} \le 1\}$ em E'. Então B' é compacta na topologia fraca*.

Prova. A prova deste resultado pode ser obtida no Teorema 3.16 em (Brezis, 2010, [5]). □

Teorema 1.4.32. Seja (X,d) um espaço métrico compacto. Então $(\mathbb{P}(X),\tau^*)$ é compacto.

Prova. Pelo Teorema 1.4.29, há um homeomorfismo sequencial entre $\mathbb{P}(X)$ e Φ. Agora, pelo Teorema de Banach-Alaoglu, a bola unitária $B' \subset C_b(X,\mathbb{R})'$ é compacta na topologia fraca*. Como $\Phi \subset B'$ é fracamente* fechado pelo Lema 1.4.30, então Φ é fracamente* compacto. Logo, Φ é sequencialmente compacto na topologia fraca*, o que nos garante que $\mathbb{P}(X)$ é sequencialmente compacto na topologia da convergência fraca. Sendo este último um espaço métrico (pelo Teorema 1.4.13), é então compacto. □

Observação 1.4.33. Como consequência, $\mathbb{P}(X)$ é compacto nas métricas B-Lipschitz e de Prokhorov.

1.5 Funções Multívocas

Definição 1.5.1. Sejam X_1 e X_2 conjuntos não vazios. Uma *função multívoca* (ou *relação*) $F : X_1 \rightsquigarrow X_2$ é um subconjunto de $X_1 \times X_2$. A cada $x \in X_1$ é associado o *valor* $F(x) \subset X_2$, $F(x) := \{y; (x,y) \in F\}$.

Observação 1.5.2. Uma função multívoca F é uma função se $F(x)$ é um conjunto unitário para cada $x \in X_1$.

- Dado $A \subset X_1$, $F(A) := \bigcup\{F(x); x \in A\} = \{y \in X_2; y \in F(x)$ para algum $x \in A\}$;

- A *função multívoca inversa* $F^{-1} : X_2 \rightsquigarrow X_1$ é dada por $F^{-1} := \{(y,x) \in X_2 \times X_1; (x,y) \in F\}$;

- Para cada $B \subset X_2$, $F^{-1}(B) := \{x \in X; F(x) \cap B \neq \emptyset\}$;

- $Dom(F) := \{x \in X_1; F(x) \neq \emptyset\} = F^{-1}(X_2)$;

- Se $F : X_1 \rightsquigarrow X_2$ e $G : X_2 \rightsquigarrow X_3$ são funções multívocas, define-se a *função multívoca composta* $G \circ F : X_1 \rightsquigarrow X_3$ por:

  $$G \circ F := \{(x,z) \in X_1 \times X_3; z \in G(y) \text{ para algum } y \in F(x)\}.$$

  Desse modo, $G \circ F$ é a projeção em $X_1 \times X_3$ do conjunto $(F \times X_3) \cap (X_1 \times G) \subset X_1 \times X_2 \times X_3$, pois:

  $$(x,y,z) \in (F \times X_3) \cap (X_1 \times G) \Leftrightarrow (x,y) \in F \text{ e } (y,z) \in G.$$

- Uma função multívoca $F : X_1 \rightsquigarrow X_2$ é *fechada* (*de Borel*) se F é um subconjunto fechado (de Borel) de $X_1 \times X_2$.

- A composta de funções multívocas fechadas é também fechada.

Proposição 1.5.3. Sejam (X_1,d_1) e (X_2,d_2) espaços métricos compactos. Uma função $f : X_1 \to X_2$ é contínua se, e somente se, é uma função fechada no sentido multívoco.

Prova. Suponha f contínua, e seja $(x_n, f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $f \subset X_1 \times X_2$ convergindo para $(x,y) \in X_1 \times X_2$. Então $x_n \to x$ e $f(x_n) \to y$. Sendo f contínua, segue que $f(x_n) \to f(x)$. Portanto, $f(x) = y$, ou seja, $(x,y) \in f$.

Reciprocamente, suponha que a função f seja uma função fechada no sentido multívoco, e considere uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X_1 convergindo para $x \in X_1$. Sendo X_2 compacto, a sequência $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência $(f(x_{n_j}))_{j\in\mathbb{N}}$ que converge para um certo $y \in X_2$. Desse modo, $(x_{n_j}, f(x_{n_j})) \to (x,y)$ e, sendo f fechada, conclui-se que $y = f(x)$.

Suponha que $f(x_n) \not\to f(x)$. Então há uma subsequência $(f(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ de $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ que está inteiramente contida no exterior de alguma bola $B(f(x),\varepsilon)$. Novamente por X_2 ser compacto, pode-se extrair uma subsequência $(f(x_{n_{k_l}}))_{l\in\mathbb{N}}$ que converge para algum $\tilde{y} \in B(f(x),\varepsilon)^c$. Desse modo, $(x_{n_{k_l}}, f(x_{n_{k_l}})) \to (x,\tilde{y})$ e, sendo f fechada, segue que $\tilde{y} = f(x)$, uma contradição. Portanto, $f(x_n) \to f(x)$ e, assim, f é contínua. $\square$

Observação 1.5.4. Uma função multívoca $F : X \rightsquigarrow X$ determina um sistema dinâmico da seguinte forma:

$$\begin{aligned} F^0 &:= Id_X; \\ F^1 &:= F; \\ F^n &:= F \circ F^{n-1} \;\; \forall n \in \mathbb{N}; \\ F^{-n} &:= (F^{-1})^n \;\; \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Definição 1.5.5. Sejam $(\Omega, \mathcal{F})$ um espaço mensurável e (X,d) um espaço métrico completo separável. Uma função multívoca $F : \Omega \rightsquigarrow X$ com valores fechados é *mensurável* se $F^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ para todo aberto $B \subset X$.

Observação 1.5.6. Essa noção de mensurabilidade apresentada é muitas vezes chamada de *mensurabilidade fraca*: uma função multívoca é fracamente mensurável se a imagem inversa de abertos são mensuráveis. Em contrapartida, há o conceito de *mensurabilidade forte*: uma função multívoca é fortemente mensurável se a imagem inversa de fechados são mensuráveis. Todavia, aqui o estudo será feito apenas com espaços de probabilidade, e ambas as noções são equivalentes neste caso, como veremos a seguir. Por conta disso, será utilizada apenas a nomenclatura "mensurável".

Teorema 1.5.7. Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço com medida σ-finito completo e (X,d) um espaço métrico completo separável. Se $F : \Omega \rightsquigarrow X$ é uma função multívoca com valores não vazios e fechados, então as seguintes condições são equivalentes:

(a) F é mensurável;

(b) $F^{-1}(C) \in \mathcal{F}$ para todo conjunto fechado $C \subset X$;

(c) $F^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ para todo $B \in \mathcal{B}(X)$.

Prova.

- (c) $\Rightarrow$ (b) É imediato, já que todo conjunto fechado é boreliano.
- (b) $\Rightarrow$ (a) Seja $A \subset X$ um conjunto aberto, e considere, para cada $n \in \mathbb{N}$, o seguinte conjunto fechado:
$$C_n := \{x \in X; d(x, A^c) \geq 1/n\}.$$
Assim, $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} C_n$. Consequentemente, para $z \in \Omega$, $F(z) \cap A \neq \emptyset$ se, e somente se, $F(z) \cap C_n \neq \emptyset$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Portanto:
$$F^{-1}(A) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F^{-1}(C_n) \in \mathcal{F}.$$
- (a) $\Rightarrow$ (c) A prova desta implicação pode ser obtida no Teorema 8.1.4 em (Aubin e Frankowska, 2009, [2]). $\square$

Teorema 1.5.8. Sejam (Ω, d_1) um espaço métrico e $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço com medida σ-finito completo tal que $\mathcal{B}(\Omega) \subset \mathcal{F}$. Considere ainda um espaço métrico completo separável (X, d). Se $F : \Omega \rightsquigarrow X$ é uma função multívoca fechada com valores não vazios, então F é mensurável.

Prova. A prova deste resultado pode ser obtida na Proposição 8.2.1 em (Aubin e Frankowska, 2009, [2]). $\square$

Definição 1.5.9. Sejam $(\Omega, \mathcal{F})$ um espaço mensurável e (X, d) um espaço métrico completo separável. Considere ainda uma função multívoca $F : \Omega \rightsquigarrow X$. Uma função $f : \Omega \to X$ é uma *seleção* de F se $f(z) \in F(z)$ para todo $z \in \Omega$.

Teorema 1.5.10. Sejam $(\Omega, \mathcal{F})$ um espaço mensurável e (X, d) um espaço métrico completo separável. Se $F : \Omega \rightsquigarrow X$ é uma função multívoca mensurável com valores não vazios e fechados, então existe uma seleção de F mensurável a Borel.

Prova. Seja $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ um subconjunto denso e contável de X (que existe por X ser separável). Será construída indutivamente uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções de Ω a X mensuráveis convergindo uniformemente para uma seleção mensurável f de F.

Para cada $z \in \Omega$, seja $n(z) \in \mathbb{N}$ o menor natural tal que $F(z) \cap B(x_{n(z)}, 1) \neq \emptyset$, e defina $f_1(z) := x_{n(z)}$. A função $f_1 : \Omega \to X$ assim definida é mensurável. Além disso:
$$d(f_1(z), F(z)) < 1 \ \ \forall z \in \Omega.$$

Assuma agora que, para $j \in \{1, \ldots, m\}$, já estejam construídas funções mensuráveis $f_j : \Omega \to \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ satisfazendo:
$$d(f_j(z), F(z)) < \frac{1}{2^j} \qquad \forall j \in \{1, \ldots, m\}, \forall z \in \Omega; \text{ e} \tag{1.6}$$
$$d(f_j(z), f_{j+1}(z)) < \frac{1}{2^{j-1}} \qquad \forall j \in \{1, \ldots, m-1\}, \forall z \in \Omega. \tag{1.7}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina:

$$S_n := \{z \in \Omega; f_m(z) = x_n\}.$$

Assim, $S_{n_1} \cap S_{n_2} = \emptyset$ se $n_1 \neq n_2$, e $\Omega = \cup_{n\in\mathbb{N}} S_n$. Ademais, segue de (1.6) que:

$$F(z) \cap B(x_n, 2^{-m}) \neq \emptyset \ \ \forall z \in S_n.$$

Fixe $z \in \Omega$ e seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $z \in S_n$. Considere o menor natural k tal que:

$$F(z) \cap B(x_n, 2^{-m}) \cap B(x_k, 2^{-(m+1)}) \neq \emptyset.$$

Seja $f_{m+1}(z) := x_k$. Logo:

$$\begin{aligned} d(f_m(z), f_{m+1}(z)) &\leq \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} < \frac{1}{2^{m-1}}; \text{ e} \\ d(f_{m+1}(z), F(z)) &< \frac{1}{2^{m+1}}. \end{aligned}$$

Desse modo, fica construída uma função mensurável $f_{m+1} : \Omega \to \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$, e as equações (1.6) e (1.7) são válidas substituindo m por $m+1$. Segue de (1.7) que a sequência $(f_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ assim definida é de Cauchy em X para cada $z \in \Omega$. Sendo X completo, tal sequência converge para um certo $f(z)$. Ainda de (1.7) segue que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para f, o que implica f mensurável. Finalmente, por (1.6), conclui-se que $d(f(z), F(z)) = 0$ para todo $z \in \Omega$ e, como F tem valores fechados, isso garante que $f(z) \in F(z)$ para todo $z \in \Omega$, ou seja, f é uma seleção mensurável de F. □

Corolário 1.5.11. Se X_1, X_2 são espaços topológicos e $F : X_1 \rightsquigarrow X_2$ é uma função multívoca fechada com $Dom(F) = X_1$, então existe uma seleção de F mensurável a Borel.

Prova. Primeiro observe que, como $Dom(F) = X_1$, então F tem valores não vazios. Além disso, sendo F fechada, em particular F tem valores fechados. De fato, seja $x \in X_1$ e considere uma sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $F(x)$ convergindo para $y \in X_2$. Então $(x, y_n) \in F$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $(x, y_n) \to (x, y)$. Sendo F fechada segue que $(x, y) \in F$, ou seja, $y \in F(x)$. O resultado segue então do teorema precedente. □

Capítulo 2

Semifluxos

O estudo de *semifluxos* é útil no tratamento de sistemas dinâmicos contínuos. Em particular, é comumente utilizado para compreender o comportamento qualitativo de soluções para equações diferenciais. Este capítulo é feito com base em (Ladyzhenskaya, 1991, [14]).

2.1 Noções Básicas

Nesta seção alguns conceitos básicos são apresentados, como *semifluxo, semigrupo de operadores, atrator, absorvente, dissipatividade,* ω*-limite, invariância*, entre outros, bem como alguns resultados introdutórios.

Durante todo o capítulo, (X,d) é um espaço métrico completo.

Definição 2.1.1. Um *semifluxo* $\mathcal{S}$ em X é uma família de funções $\varphi : [0,\infty) \to X$ satisfazendo as seguintes condições:

(H1) (Existência e unicidade) Para cada $z \in X$ existe uma única $\varphi \in \mathcal{S}$ de modo que $\varphi(0) = z$.

(H2) (Concatenação) Se $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$, e $\psi(0) = \varphi(\tau)$ para algum $\tau \geq 0$, então $\theta \in \mathcal{S}$, em que:

$$\theta(t) := \begin{cases} \varphi(t), & \text{se } t \in [0,\tau] \\ \psi(t-\tau), & \text{se } t \in (\tau,\infty). \end{cases}$$

(H3) (Continuidade nos dados iniciais) Se $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $\mathcal{S}$ e $\varphi_n(0) \to z$, então existem $\varphi \in \mathcal{S}$ e uma subsequência $(\varphi_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de modo que $\varphi(0) = z$ e $\varphi_{n_j}(t) \to \varphi(t)$ para todo $t \geq 0$.

Ao longo deste capítulo, $\mathcal{S}$ será um semifluxo em X.

Observação 2.1.2. Segue de (H1) e (H2) a seguinte propriedade de translação:

- Se $\varphi \in \mathcal{S}$ e $\tau \geq 0$, então $\varphi^\tau \in \mathcal{S}$, em que $\varphi^\tau(t) := \varphi(t+\tau)$ para todo $t \in [0,\infty)$.

Além disso, segue de (H1) que, em (H2), $\theta = \varphi$ e $\psi = \varphi^\tau$.

Definição 2.1.3. O semifluxo $\mathcal{S}$ é *contínuo* se cada $\varphi \in \mathcal{S}$ é uma função contínua de $[0,\infty)$ a X.

Definição 2.1.4. Um *semigrupo em* $\mathcal{S}$ é uma família de funções $V_t : X \to X$, $t \in [0,\infty)$, de modo que, para cada $t \geq 0$, $V_t(z) := \varphi(t)$, sendo $\varphi \in \mathcal{S}$ definida por $\varphi(0) = z$.
Esta família será denotada por $\{V_t, t \in [0,\infty), X\}$ ou simplesmente $\{V_t\}$.

Observação 2.1.5. Segue de (H1) que, para um dado semifluxo $\mathcal{S}$, o semigrupo $\{V_t\}$ em $\mathcal{S}$ é único. Por esse motivo, o termo $\{V_t\}$ será sempre utilizado para referir-se a esse semigrupo.

Teorema 2.1.6. Para cada $t \in [0,\infty)$, V_t é uma função contínua e, além disso, vale a propriedade de semigrupo para a família $\{V_t\}$:

$$V_{t_1} \circ V_{t_2} = V_{t_1+t_2}, \quad \text{e} \quad V_0 = id_X.$$

***Prova*.** Para cada $z \in X$, $V_0(z) = \varphi(0)$ em que $\varphi(0) = z$, ou seja, $V_0(z) = z$.

Agora, fixados $t_1, t_2 \in [0,\infty)$, $V_{t_1}(V_{t_2}(z)) = \psi(t_1)$, em que $\psi(0) = V_{t_2}(z)$. Do mesmo modo, $V_{t_2}(z) = \varphi(t_2)$, em que $\varphi(0) = z$. Então $\psi(0) = \varphi(t_2)$ e, por (H3), $\theta \in \mathcal{S}$, em que:

$$\theta(\tau) := \begin{cases} \varphi(\tau), & \text{se } \tau \in [0,t_2] \\ \psi(\tau - t_2), & \text{se } \tau \in [t_2,\infty). \end{cases}$$

Logo, $\theta(0) = z$ e $\theta(t_1+t_2) = \psi(t_1) = V_{t_1}(V_{t_2}(z))$. Pela unicidade em (H1), $\theta(t_1+t_2) = V_{t_1+t_2}(z)$.

Para a continuidade de V_t, considere uma sequência $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X convergindo para $z \in X$. É preciso mostrar que, para cada $t > 0$, $V_t(z_n) \to V_t(z)$. Suponha que isso não seja válido, ou seja, que exista $t > 0$ de modo que $V_t(z_n) \not\to V_t(z)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\varphi_n \in \mathcal{S}$ tal que $\varphi_n(0) = z_n$, e seja $\varphi \in \mathcal{S}$ tal que $\varphi(0) = z$. Pela suposição feita, existe $\varepsilon > 0$ de modo que, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $n_j \geq j$ tal que:

$$d(\varphi_{n_j}(t), \varphi(t)) \geq \varepsilon. \tag{2.1}$$

Como $\varphi_{n_j}(0) \to z$, segue de (H4) a existência de $\psi \in \mathcal{S}$ e de uma subsequência $(\varphi_{n_{j_k}})_{k\in\mathbb{N}}$, de modo que $\psi(0) = z$ e $\varphi_{n_{j_k}}(t) \to \psi(t)$. Pela unicidade em (H1), $\psi = \varphi$ e, consequentemente, $\varphi_{n_{j_k}}(t) \to \varphi(t)$, contradizendo (2.1). Portanto, V_t é contínua para cada $t \in [0,\infty)$. $\square$

Definição 2.1.7. O semigrupo $\{V_t\}$ em $\mathcal{S}$ é *pontualmente contínuo* se, para cada $z \in X$, a função $t \mapsto V_t(z)$ é contínua. Além disso, $\{V_t\}$ é *contínuo* se a função $(t,z) \mapsto V_t(z)$ é contínua.

Notações: Para $z \in X$ e $A \subset X$, as seguintes notações serão utilizadas:

$$\begin{aligned}
\gamma^+(z) &:= \{V_t(z); t \in [0,\infty)\} = \{\varphi(t); t \in [0,\infty), \varphi \in \mathcal{S}, \varphi(0) = z\};\\
\gamma^+_{[t_1,t_2]}(z) &:= \{V_t(z); t \in [t_1,t_2]\} = \{\varphi(t); t \in [t_1,t_2], \varphi \in \mathcal{S}, \varphi(0) = z\};\\
\gamma^+_t(z) &:= \{V_\tau(z); \tau \in [t,\infty)\} = \{\varphi(\tau); \tau \in [t,\infty), \varphi \in \mathcal{S}, \varphi(0) = z\};\\
\gamma^+(A) &:= \bigcup_{z\in A} \gamma^+(z) = \{\varphi(t); t \in [0,\infty), \varphi \in \mathcal{S}, \varphi(0) \in A\};\\
\gamma^+_{[t_1,t_2]}(A) &:= \bigcup_{z\in A} \gamma^+_{[t_1,t_2]}(z) = \{\varphi(t); t \in [t_1,t_2], \varphi \in \mathcal{S}, \varphi(0) \in A\};\\
\gamma^+_t(A) &:= \bigcup_{z\in A} \gamma^+_t(z) = \{\varphi(\tau); \tau \in [t,\infty), \varphi \in \mathcal{S}, \varphi(0) \in A\}.
\end{aligned}$$

Observação 2.1.8. Para cada $z \in X$, o conjunto $\gamma^+(z)$ pode ser visto como uma curva em X, que é chamada de *semi-trajetória positiva* de z.

Proposição 2.1.9. Seja A um subconjunto de X. Então $V_t(\gamma^+(A)) = \gamma^+_t(A)$ para todo $t \in [0,\infty)$.

Prova.

$$\begin{aligned}
z \in V_t(\gamma^+(A)) &\Leftrightarrow \exists z_1 \in \bigcup_{x\in A} \gamma^+(x) \text{ tal que } z = V_t(z_1)\\
&\Leftrightarrow \exists x \in A, \exists z_1 \in \gamma^+(x) \text{ tais que } z = V_t(z_1)\\
&\Leftrightarrow \exists x \in A, \exists t_1 \in [0,\infty) \text{ tais que } z = V_{t+t_1}(x)\\
&\Leftrightarrow \exists x \in A, \exists t_2 \in [t,\infty) \text{ tais que } z = V_{t_2}(x)\\
&\Leftrightarrow \exists x \in A \text{ tal que } z \in \gamma^+_t(x)\\
&\Leftrightarrow z \in \gamma^+_t(A).
\end{aligned}$$
$\square$

Notação: A família de todos os subconjuntos limitados de X será denotada por $\mathfrak{B}$.

Definição 2.1.10. O semifluxo $\mathcal{S}$ é *localmente limitado* se $\gamma^+_{[0,t]}(B) \in \mathfrak{B}$ para quaisquer $B \in \mathfrak{B}$ e $t \in [0,\infty)$. Além disso, $\mathcal{S}$ é *limitado* se $\gamma^+(B) \in \mathfrak{B}$ para cada $B \in \mathfrak{B}$.

Notação: Se $A \subset X$, denota-se por $O_\varepsilon(A)$ a ε-*vizinhança* de A (para um dado $\varepsilon > 0$), que é definida como sendo a união de todas as bolas com raio ε e centradas nos pontos de A.

Definição 2.1.11. Sejam A e M subconjuntos de X.

- A *atrai* M (ou M *é atraído por* A) se, dado $\varepsilon > 0$, existe $t_1 = t_1(\varepsilon, M) \in [0,\infty)$ tal que $V_t(M) \subset O_\varepsilon(A)$ para todo $t \geq t_1$. Equivalentemente, se $\varphi(t) \in O_\varepsilon(A)$ para todo $t \geq t_1$ e para toda $\varphi \in \mathcal{S}$ tal que $\varphi(0) \in M$.

- A *atrai um ponto* $z \in X$ se A atrai o conjunto unitário $\{z\}$.

- A é um *atrator global de pontos de* $\mathcal{S}$ se A atrai todos os pontos de X.

- A é um *atrator global de* $\mathcal{S}$ se A atrai todos os subconjuntos limitados de X.
- $\mathcal{S}$ é *pontualmente dissipativo* se existe um atrator global de pontos limitado.
- $\mathcal{S}$ é *dissipativo* se existe um atrator global limitado.

Definição 2.1.12. Seja A um subconjunto de X.

- A é *invariante* (com relação ao semifluxo $\mathcal{S}$) se $V_t(A) = A$ para todo $t \in [0,\infty)$.
- A é *pontualmente absorvente* se, dado $z \in X$, existe $t_1 = t_1(z) \in [0,\infty)$ de modo que $V_t(z) \in A$ para todo $t \geq t_1$. Equivalentemente, se $\varphi(t) \in A$ para todo $t \geq t_1$, em que $\varphi \in \mathcal{S}$ e $\varphi(0) = z$.
- A é *absorvente* se, dado $B \in \mathfrak{B}$, existe $t_1 = t_1(B) \in [0,\infty)$ de modo que $V_t(B) \subset A$ para todo $t \geq t_1$. Equivalentemente, se $\varphi(t) \in A$ para todo $t \geq t_1$, em que $\varphi \in \mathcal{S}$ e $\varphi(0) \in B$.

Definição 2.1.13. Sejam $z \in X$ e $A \subset X$.

- $\omega(z)$ é o conjunto dos limites de sequências da forma $(V_{t_n}(z))_{n\in\mathbb{N}}$, em que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $[0,\infty)$ tal que $t_n \to \infty$. Equivalentemente:

$$\omega(z) = \{x \in X;\, \varphi(t_n) \to x,\, t_n \to \infty,\, \varphi \in \mathcal{S},\, \varphi(0) = z\}.$$

- $\omega(A)$ é o conjunto dos limites de sequências da forma $(V_{t_n}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$, em que $\{z_n; n \in \mathbb{N}\} \subset A$ e $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $[0,\infty)$ tal que $t_n \to \infty$. Equivalentemente:

$$\omega(A) = \{z \in X;\, \varphi_n(t_n) \to z,\, t_n \to \infty,\, \{\varphi_n; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{S},\, \{\varphi_n(0); n \in \mathbb{N}\} \subset A\}.$$

Lema 2.1.14. Se $z \in X$ e $A \subset X$, então:

$$\omega(z) = \bigcap_{t\geq 0} \overline{\gamma_t^+(z)}, \quad \omega(A) = \bigcap_{t\geq 0} \overline{\gamma_t^+(A)}.$$

Prova.

- Se $x \in \omega(z)$, então existe uma sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $[0,\infty)$, com $t_n \to \infty$, de modo que $V_{t_n}(z) \to x$. Logo, dado $t \geq 0$, existe $n_t \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq n_t$, então $t_n \geq t$ e $V_{t_n}(z) \to x$. Ou seja, para todo $t \geq 0$, $x \in \overline{\gamma_t^+(z)}$. Portanto, $x \in \bigcap_{t\geq 0} \overline{\gamma_t^+(z)}$.
  Reciprocamente, se $x \in \bigcap_{t\geq 0} \overline{\gamma_t^+(z)}$, então, para cada $t \geq 0$, existe uma sequência $(t_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em $[0,\infty)$, com $t_j \geq t$ para todo $j \in \mathbb{N}$, de modo que $V_{t_j}(z) \to x$. Para $t = 1$, considere a sequência $(1_j)_{j\in\mathbb{N}}$, de sorte que $1_j \geq 1$ e $V_{1_j}(z) \to x$. Defina então $\tau_1 := 1_1$. Indutivamente, para cada $n \in \mathbb{N}$, considere a sequência $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$, de modo que $n_j \geq n$ e $V_{n_j}(z) \to x$. Fica então definida a sequência $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por $\tau_n := n_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Assim, $\tau_n \to \infty$ e $V_{\tau_n}(z) \to x$, ou seja, $x \in \omega(z)$.

- Se $z \in \omega(A)$, então existem sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em A e $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $[0,\infty)$, com $t_n \to \infty$, de modo que $V_{t_n}(x_n) \to z$. Logo, dado $t \geq 0$, existe $n_t \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq n_t$, então $t_n \geq t$, e $V_{t_n}(x_n) \to z$. Assim, para todo $t \geq 0$, $z \in \overline{\gamma_t^+(A)}$. Portanto, $z \in \bigcap_{t\geq 0} \overline{\gamma_t^+(A)}$.
  Reciprocamente, se $z \in \bigcap_{t\geq 0} \overline{\gamma_t^+(x)}$, então, para cada $t \geq 0$, existem uma sequência $(x_j^t)_{j\in\mathbb{N}}$ em A e outra sequência $(t_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em $[0,\infty)$, com $t_j \geq t$ para todo $j \in \mathbb{N}$, de sorte que $V_{t_j}(x_j^t) \to z$. Do mesmo modo como foi feito no item anterior, pode-se construir uma sequência $\tau_n \to \infty$ e outra sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em A ($x_n := x_n^n$), de modo que $V_{\tau_n}(x_n) \to z$. Portanto, $z \in \omega(A)$. □

2.2 Semifluxos Compactos

Definição 2.2.1. O semifluxo $\mathcal{S}$ é *compacto* se, para cada $t > 0$, o operador V_t é *compacto*, ou seja, se $V_t(B)$ é relativamente compacto para todo $B \in \mathfrak{B}$. Equivalentemente, se, para todo $B \in \mathfrak{B}$ e toda sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{S}$ tal que $\{\varphi_n(0); n \in \mathbb{N}\} \subset B$, existe uma subsequência $(\varphi_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de modo que $(\varphi_{n_j}(t))_{j\in\mathbb{N}}$ é convergente para todo $t > 0$.

Lema 2.2.2. *(Teorema da interseção de Cantor)* Sejam (X,d) um espaço métrico e $\{A_\lambda\}_{\lambda\geq 0}$ uma família de subconjuntos não vazios de X satisfazendo as seguintes condições:

- $A_{\lambda_2} \subset A_{\lambda_1}$ se $\lambda_2 \geq \lambda_1$;
- A_0 é compacto;
- A_λ é fechado para todo $\lambda \geq 0$.

Então $\bigcap_{\lambda\geq 0} A_\lambda \neq \emptyset$.

Prova. Suponha que $\bigcap_{\lambda\geq 0} A_\lambda = \emptyset$. Então $\left(\bigcap_{\lambda\geq 0} A_\lambda\right)^c = X$, ou seja, $\bigcup_{\lambda\geq 0} A_\lambda^c = X$. Consequentemente, $A_0 \subset \bigcup_{\lambda>0} A_\lambda^c$. Como cada A_λ é fechado, seus complementares são abertos. Sendo A_0 compacto, há portanto uma subcobertura finita $\{A_{\lambda_1}^c, \ldots, A_{\lambda_n}^c\}$ de A_0, com $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$. Desse modo, $A_{\lambda_1}^c \subset A_{\lambda_2}^c \subset \cdots \subset A_{\lambda_n}^c$. Logo, existe $k \in \{1,\ldots,n\}$ de modo que $A_0 \subset A_{\lambda_k}^c$. Desse modo, $A_{\lambda_k} \subset A_{\lambda_k}^c$, o que implica $A_{\lambda_k} = \emptyset$, uma contradição. □

Teorema 2.2.3. Sejam $\mathcal{S}$ compacto e $A \subset X$. Se existe $T \in [0,\infty)$ tal que $\gamma_T^+(A) \in \mathfrak{B}$, então:

(a) $\omega(A)$ é não vazio e compacto;

(b) $\omega(A)$ atrai A;

(c) $\omega(A)$ é invariante;

(d) $\omega(A)$ é o conjunto fechado mínimo que atrai A;

(e) $\omega(A)$ é conexo desde que A seja conexo e que o semigrupo $\{V_t\}$ seja contínuo.

Prova.

(a) Dado $t > 0$, $V_t(\gamma_T^+(A)) = \gamma_{t+T}^+(A)$ pela Proposição 2.1.9. Além disso, esses conjuntos são relativamente compactos para cada $t > 0$, e $\gamma_{t_2+T}^+(A) \subset \gamma_{t_1+T}^+(A)$ se $t_2 > t_1$. Ainda, pelo Lema 2.1.14:

$$\omega(A) = \bigcap_{t>0} \overline{\gamma_{t+T}^+(A)}.$$

Desse modo, $\omega(A)$ é a interseção de uma família ordenada de conjuntos compactos. Segue então do Lema 2.2.2 que $\omega(A)$ é não vazio. Além disso, por ser uma interseção de compactos em um espaço métrico, $\omega(A)$ é compacto.

(b) Suponha que A não seja atraído por $\omega(A)$. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $\tau \in [0,\infty)$, há $t_\tau > \tau + T$ de modo que $V_{t_\tau}(A) \not\subset O_\varepsilon(\omega(A))$. Logo, existe $z_\tau \in V_{t_\tau}(A)$ de modo que $z_\tau \notin O_\varepsilon(\omega(A))$. Como $z_\tau \in V_{t_\tau}(A)$, existe então $x_\tau \in A$ de sorte que $z_\tau = V_{t_\tau}(x_\tau)$.
Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$, existem $t_n > n + T$ e $x_n \in A$ tais que $V_{t_n}(x_n) \notin O_\varepsilon(\omega(A))$. Assim, pela construção das sequências $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, segue que $t_n \to \infty$ e $V_{t_n}(x_n) \subset \gamma_{T+1}^+(A) = V_1(\gamma_T^+(A))$. Esse último, por sua vez, é um conjunto relativamente compacto. Desse modo, existem subsequências $(t_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $t_{n_j} \to \infty$ e $z_{t_{n_j}} := V_{t_{n_j}}(x_{n_j}) \to z$. Por definição, $z \in \omega(A)$, o que é uma contradição.

(c) Considere inicialmente $z \in \omega(A)$. Então $z = \lim_{n\to\infty} V_{t_n}(x_n)$ para certas sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em A e $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $[0,\infty)$, com $t_n \to \infty$. Logo, $V_t(z) = V_t(\lim_{n\to\infty} V_{t_n}(x_n)) \overset{[1]}{=} \lim_{n\to\infty} V_{t+t_n}(x_n)$. Ou seja, $V_t(z) \in \omega(A)$, provando assim que $V_t(\omega(A)) \subset \omega(A)$.
Por outro lado, dado $x \in \omega(A)$, $x = \lim_{n\to\infty} V_{t_n}(x_n)$ para certas sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em A e $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $[0,\infty)$, com $t_n \to \infty$. Como $t_n \to \infty$, pode-se assumir, sem perda de generalidade, que $1 + T + t \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots$.
Os pontos $z_n := V_{t_n - t}(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, pertencem ao conjunto relativamente compacto $\gamma_{T+1}^+(A)$. Há então uma subsequência $(z_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge para algum $z \in \omega(A)$. Consequentemente:

$$x = \lim_{j\to\infty} V_{t_{n_j}}(x_{n_j}) = \lim_{j\to\infty} V_t(z_{n_j}) = V_t\left(\lim_{j\to\infty} z_{n_j}\right) = V_t(z).$$

Portanto, $\omega(A) \subset V_t(\omega(A))$.

(d) Seja F um conjunto fechado que atrai A. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $t_0 := t_0(\varepsilon, A)$ tal que $V_t(A) \subset O_\varepsilon(F)$ se $t \geq t_0$.
Seja $z \in \omega(A)$. Então existem sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em A e $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $[0,\infty)$, com $t_n \to \infty$, de modo que $V_{t_n}(x_n) \to z$. Logo, há $n_{t_0} \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq n_{t_0}$, então $t_n \geq t_0$ e, por conseguinte, $z \in \overline{O_\varepsilon(F)}$. Como isso é válido para todo $\varepsilon > 0$, segue que $z \in \overline{F} = F$, ou seja, $\omega(A) \subset F$.

[1] Pela continuidade de V_t.

(e) Suponha que A seja conexo e que o semigrupo $\{V_t\}$ seja contínuo. Se $\omega(A)$ não é conexo, é possível decompô-lo da seguinte forma: $\omega(A) = F_1 \cup F_2$, em que F_1 e F_2 são subconjuntos não vazios, fechados e disjuntos. Desse modo, as ε-vizinhanças $O_\varepsilon(F_1)$ e $O_\varepsilon(F_2)$ não se intersectam para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Além disso, $O_\varepsilon(\omega(A)) = O_\varepsilon(F_1) \cup O_\varepsilon(F_2)$. Uma vez que $\omega(A)$ atrai A, há $t_1 = t_1(\varepsilon, A) \geq 0$ tal que $\gamma_t^+(A) \subset O_\varepsilon(\omega(A))$ para todo $t \geq t_1$. Mas, sendo $\{V_t\}$ um semigrupo contínuo, $\gamma_t^+(A)$ é conexo por ser a imagem do conexo $[t,\infty) \times A$ pela função contínua $(\tau, x) \mapsto V_\tau(x)$. Logo, para todo $t \geq t_1$, ou $\gamma_t^+(A) \subset O_\varepsilon(F_1)$ ou $\gamma_t^+(A) \subset O_\varepsilon(F_2)$. Assim, ou $\omega(A) \subset F_1$ ou $\omega(A) \subset F_2$. Consequentemente, $F_1 = \emptyset$ ou $F_2 = \emptyset$, o que é uma contradição. Portanto, $\omega(A)$ é conexo. □

Definição 2.2.4. Existe uma *trajetória completa* por $z \in X$ se há uma função $\psi : \mathbb{R} \to X$ tal que $\psi(0) = z$ e, para todo $\tau \in \mathbb{R}$, $\psi^\tau|_{[0,\infty)} \in \mathcal{S}$. Equivalentemente, se $\psi(0) = z$ e, para quaisquer $t \in [0,\infty)$ e $\tau \in \mathbb{R}$, $V_t(\psi(\tau)) = \psi(t+\tau)$. Nesse caso, a *órbita completa de* ψ é definida da seguinte forma:

$$\gamma(z) := \operatorname{Im}\psi = \{\psi(t); t \in \mathbb{R}\}.$$

A *semitrajetória negativa* de z relativa à trajetória completa $\gamma(z)$ é definida como sendo o conjunto $\gamma^-(z) := \{\psi(t); t \in (-\infty, 0]\}$.

Observação 2.2.5. Em geral, para $z \in X$ arbitrário, uma trajetória completa $\gamma(z)$ pode não existir e, caso exista, pode não ser única.

Lema 2.2.6. Seja $A \subset X$ um conjunto invariante.

(a) Para todo $z \in A$, existe uma trajetória completa $\gamma(z)$.

(b) Se o semigrupo $\{V_t\}$ é pontualmente contínuo, então qualquer trajetória completa passando por um ponto $z \in A$ é uma curva contínua em A.

(c) Se os operadores V_t, $t \in [0,\infty)$, são invertíveis em A, então:

  (i) por cada $z \in A$ passa uma única trajetória completa $\gamma(z)$;

  (ii) a família $\{V_t, t \in \mathbb{R}, A\}$, em que $V_t := V_{-t}^{-1}$ para $t < 0$, tem a propriedade de grupo: $V_{t_1+t_2} = V_{t_1} \circ V_{t_2}$ para quaisquer $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Se, adicionalmente, A é compacto, então $\{V_t, t \in \mathbb{R}, A\}$ é um grupo de operadores contínuos.

Prova.

(a) Construção de γ: Fixado $z \in A$, existe ao menos um ponto $z_{-1} \in A$ de modo que $V_1(z_{-1}) = z$; para z_{-1}, existe outro ponto $z_{-2} \in A$ tal que $V_1(z_{-2}) = z_{-1}$; e segue-se dessa forma em diante. Para cada $n \in \mathbb{N}$, ligam-se os pontos z_{-n-1} e z_{-n} pela curva $\{V_t(z_{-n-1}); t \in [0,1]\}$. Fica então definido, para cada $n \in \mathbb{N}$, o seguinte "trecho" de curva:

$$\psi_n(t) := V_{t+n+1}(z_{-n-1}) \quad \forall t \in [-n-1, -n].$$

A curva $\psi : \mathbb{R} \to X$ é definida da seguinte forma:

$$\psi(t) := \begin{cases} \psi_n(t), & \text{se } t \in [-n-1,-n] \\ V_t(z), & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$$

Afirmação: ψ define uma trajetória completa passando por z. De fato, é preciso checar inicialmente que ψ está bem definida. Dado $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} \psi_k(-n) = V_{-n+n+1}(z_{-n-1}) = V_1(z_{-n-1}) = z_{-n} \\ \psi_{n-1}(-n) = V_{-n+(n-1)+1}(z_{-(n-1)-1}) = V_0(z_{-n}) = z_{-n} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \psi(-n) = z_{-n}.$$

Além disso, para $n = 0$:

$$\psi_0(0) = V_1(z_{-1}) = x = V_0(z) \Rightarrow \psi(0) = z.$$

Por fim, dados $t \in [0,\infty)$ e $\tau \in \mathbb{R}$, é preciso analisar os seguintes casos:

- $\tau \geq 0$. Nesse caso, $V_t(\psi(\tau)) = V_t(V_\tau(z)) = V_{t+\tau}(z) = \psi(t+\tau)$.
- $\tau \leq 0$ e $t+\tau \geq 0$. Nesse caso, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\tau \in [-n-1,-n]$. Logo:

$$\begin{aligned} V_t(\psi(\tau)) &= V_t(\psi_n(\tau)) = V_t(V_{\tau+n+1}(z_{-n-1})) = V_{t+\tau+n+1}(z_{-n-1}) \\ &= V_{t+\tau}(V_{n+1}(z_{-n-1})) = V_{t+\tau}(z) = \psi(t+\tau). \end{aligned}$$

- $\tau \leq 0$ e $t+\tau \leq 0$. Nesse caso, existem $n,m \in \mathbb{N}$ de modo que $\tau \in [-n-1,-n]$ e $t+\tau \in [-m-1,-m]$. Logo, $m \leq n$ e, consequentemente, há $k \in \mathbb{N}$ de modo que $n = m+k$. Assim:

$$\begin{aligned} V_t(\psi(\tau)) &= V_t(\psi_n(\tau)) = V_t(V_{\tau+n+1}(z_{-n-1})) = V_{t+\tau+n+1}(z_{-n-1}) \\ &= V_{t+\tau+m+k+1}(z_{-m-k-1}) = V_{t+\tau+m+1}(V_k(z_{-m-k-1})) \\ &= V_{t+\tau+m+1}(z_{-m-1}) = \psi_m(t+\tau) = \psi(t+\tau). \end{aligned}$$

(b) Suponha que $\{V_t\}$ seja pontualmente contínuo, e seja ψ uma trajetória completa passando por $z \in X$. Então, dados $\varepsilon > 0$, $t \in [0,\infty)$ e $\tau \in \mathbb{R}$, existe $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon,t,\tau) > 0$ de modo que:

$$|h-t| < \delta_1 \Rightarrow d(V_h(\psi(\tau)),V_t(\psi(\tau))) < \varepsilon \Rightarrow d(\psi(\tau+h),\psi(t+\tau)) < \varepsilon.$$

Fixando $t = 0$, conclui-se que $\delta = \delta(\varepsilon,\tau) > 0$ é tal que:

$$|h| < \delta \Rightarrow d(\psi(\tau),\psi(\tau+h)) < \varepsilon.$$

Logo, ψ é uma função contínua.

(c) Suponha que os operadores V_t, $t \in [0,\infty)$, sejam invertíveis em A.

(i) Sejam ψ_1 e ψ_2 duas trajetórias completas por $z \in A$, ou seja, $\psi_1(0) = z = \psi_2(0)$. Para $t > 0$:

$$\psi_1(t) = V_t(\psi_1(0)) = V_t(z) = V_t(\psi_2(0)) = \psi_2(t).$$

Para $t < 0$:

$$\psi_1(t) = V_{-t}^{-1}(V_{-t}(\psi_1(t))) = V_{-t}^{-1}(\psi_1(0)) = V_{-t}^{-1}(\psi_2(0)) = V_{-t}^{-1}(V_{-t}(\psi_2(t))) = \psi_2(t).$$

(ii) A propriedade de grupo já é satisfeita para $t_1, t_2 \in [0,\infty)$. Se $t_1 < 0$ e $t_2 < 0$, então:

$$V_{t_1+t_2} = V_{t_2+t_1} = V_{-t_2-t_1}^{-1} = (V_{-t_2} \circ V_{-t_1})^{-1} = V_{-t_1}^{-1} \circ V_{-t_2}^{-1} = V_{t_1} \circ V_{t_2}.$$

Considere agora $t_1 < 0$ e $t_2 > 0$. Fixado $z \in A$, considere a trajetória completa ψ passando por z. Se $t_1 + t_2 \geq 0$, então:

$$\begin{aligned} V_{t_2+t_1}(z) &= V_{t_2+t_1}(\psi(0)) = \psi(t_1+t_2) = V_{t_2}(\psi(t_1)) = V_{t_2}(V_{t_1}(V_{-t_1}(\psi(t_1)))) \\ &= V_{t_2}(V_{t_1}(\psi(0))) = V_{t_2} \circ V_{t_1}(z). \end{aligned}$$

Se $t_1 + t_2 < 0$, então:

$$\begin{aligned} V_{t_2+t_1}(z) &= V_{t_2+t_1}(\psi(0)) = V_{t_2+t_1}(V_{-t_2-t_1}(\psi(t_2+t_1))) = \psi(t_2+t_1) = V_{t_2}(\psi(t_1)) \\ &= V_{t_2}(V_{t_1}(V_{-t_1}(\psi(t_1)))) = V_{t_2}(V_{t_1}(\psi(0))) = V_{t_2} \circ V_{t_1}(z). \end{aligned}$$

Por fim, suponha adicionalmente que A seja compacto. Já se sabe, por definição, que $\{V_t, t \in [0,\infty), A\}$ é um semigrupo de operadores contínuos. Para $t < 0$ fixado, considere uma sequência $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em A convergindo para algum ponto $z \in A$. É preciso mostrar que $V_t(z_n) \to V_t(z)$.
Como A é compacto, a sequência $(V_t(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência $(V_t(z_{n_j}))_{j\in\mathbb{N}}$ que converge para algum $x \in A$. Assim:

$$\begin{aligned} & V_{-t}(V_t(z_{n_j})) = V_t(V_{-t}(z_{n_j})) \to V_t(V_{-t}(z)) = z \\ \Rightarrow\ & x = V_t(z). \end{aligned}$$

Ficou assim provado, em particular, que toda subsequência convergente de $(V_t(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $V_t(z)$. Suponha agora que $(V_t(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ não convirja para $V_t(z)$. Desse modo, existe $\varepsilon > 0$ de sorte que, para todo $j \in \mathbb{N}$, existe $n_j > j$ tal que:

$$V_t(z_{n_j}) \notin O_\varepsilon(V_t(z)).$$

Desse modo, foi construída uma subsequência $(V_t(z_{n_j}))_{j\in\mathbb{N}}$ que está inteiramente contida no exterior de uma ε-vizinhança de $V_t(z)$. Mas sendo A compacto, essa subsequência possui uma subsequência convergente. Entretanto, já foi provado que toda subsequência convergente tem por limite o ponto $V_t(z)$, o que contradiz a construção de $(V_t(z_{n_j}))_{j\in\mathbb{N}}$. □

O objetivo agora é encontrar um atrator global fechado *minimal* para um semifluxo compacto $\mathcal{S}$, que será denotado por $\mathcal{M}$, e também encontrar um atrator global de pontos fechado *minimal*, que será denotado por $\widehat{\mathcal{M}}$.

Definição 2.2.7. Dentre uma família de conjuntos, A é um conjunto *minimal* satisfazendo uma certa propriedade $\mathfrak{P}$ se qualquer outro conjunto nessa família que satisfaz $\mathfrak{P}$ e está contido em A coincide com A.

Teorema 2.2.8. Seja $\mathcal{S}$ compacto, e suponha que $\mathcal{S}$ seja ou dissipativo ou limitado e pontualmente dissipativo. Então existe um atrator global minimal $\mathcal{M}$ para $\mathcal{S}$, que é compacto e invariante. Além disso, se X é conexo, $\mathcal{M}$ também é.

Prova. Considere inicialmente o caso em que existe um conjunto absorvente limitado $B_0 \in \mathfrak{B}$. Então, para todo $B \in \mathfrak{B}$, existe $t(B) \in [0,\infty)$ de modo que $V_t(B) \subset B_0$ para $t \geq t(B)$. Em particular, $V_t(B_0) \subset B_0$ para $t \geq t(B_0)$ e, por conseguinte, $\gamma^+_{t(B_0)}(B_0) \subset B_0$. Em vista do Teorema 2.2.3, o conjunto $\omega(B_0)$ é não vazio, compacto e invariante. Ademais, $\omega(B_0)$ atrai B_0. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $t_1 = t_1(\varepsilon) \in [0,\infty)$ de modo que $V_t(B_0) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(\omega(B_0))$ para $t \geq t_1$. Assim, dado $B \in \mathfrak{B}$, $V_t(B) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(\omega(B_0))$ para $t \geq t_1 + t(B)$. Consequentemente, $\omega(B_0)$ é um atrator global fechado. Ainda, pelo Teorema 2.2.3, $\omega(B_0)$ é o conjunto fechado mínimo que atrai B_0. Como todo atrator global deve atrair B_0, segue a minimalidade de $\omega(B_0)$ como atrator global de $\mathcal{S}$. Portanto, $\mathcal{M} = \omega(B_0)$.

Assuma agora que $\mathcal{S}$ seja dissipativo e que B_1 seja seu atrator global limitado. Então, para $\varepsilon_1 > 0$ fixado, $\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(B_1)$ é um conjunto absorvente limitado. Segue então do primeiro caso que $\mathcal{M} = \omega(\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(B_1))$.

Suponha agora que $\mathcal{S}$ seja limitado e pontualmente dissipativo. Em particular, existe um atrator global limitado, digamos B_2. Escolha $\varepsilon_2 > 0$, e defina $B_1 := \mathcal{O}_{\varepsilon_2}(\omega(B_2))$ e $B_0 := \gamma^+(B_1)$. Será provado que $\mathcal{M} = \omega(B_1)$ é um atrator global minimal.

Como B_2 é um atrator global, para cada $z \in X$, existe $t(z) \in [0,\infty)$ tal que $V_{t(z)}(z) \in B_1$. Uma vez que B_1 é aberto e que o operador $V_{t(z)}$ é contínuo, $V_{t(z)}(\mathcal{O}_{\varepsilon(z)}(z)) \subset B_1$ para algum $\varepsilon(z) > 0$. Logo, $V_{t+t(z)}(\mathcal{O}_{\varepsilon(z)}(z)) \subset V_t(B_1) \subset \gamma^+(B_1) = B_0$ para todo $t \in [0,\infty)$. Afirmação: para todo compacto K, existem $\varepsilon(K) > 0$ e $t(K) \in [0,\infty)$ de sorte que:

$$V_t(\mathcal{O}_{\varepsilon(K)}(K)) \subset B_0 \quad \forall t \geq t(K). \tag{2.2}$$

De fato, para todo $z \in K$, existem $t(z) \in [0,\infty)$ e $\varepsilon(z) > 0$ tais que:

$$V_{t+t(z)}(O_{\varepsilon(z)}(z)) \subset B_0 \quad \forall t \in [0,\infty).$$

Como $\{O_{\varepsilon(z)}(z); z \in K\}$ é uma cobertura aberta do compacto K, é possível extrair uma subcobertura finita $\{O_{\varepsilon(z_1)}(z_1), \dots, O_{\varepsilon(z_n)}(z_n)\}$. Defina:

$$\begin{aligned} \varepsilon(K) &:= \min\{\varepsilon(z_j); j = 1, \dots, n\}; \\ t(K) &:= \max\{t(z_j); j = 1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Desse modo, dado $z \in K$, existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $z \in O_{\varepsilon(z_j)}(z_j)$. Logo, para todo $t \geq t(K)$:

$$V_t(O_{\varepsilon(K)}(z)) \subset V_t(O_{\varepsilon(z_j)}(z_j)) \subset B_0.$$

Pelo Teorema 2.2.3, todo conjunto limitado B é atraído por seu ω-limite $\omega(B)$. Logo, dado $\varepsilon_1 > 0$, $V_t(B) \subset O_{\varepsilon_1}(\omega(B))$ para todo $t \geq t_1 = t_1(\varepsilon_1, B)$. Como $\omega(B)$ é compacto, pode-se escolher $\varepsilon_1 = \varepsilon(\omega(B))$ em (2.2) e, com isso, obter $V_{t+t_1}(B) \subset B_0$ para todo $t \geq t(\omega(B))$. Portanto, B_0 é um conjunto absorvente limitado e, como já visto, $\mathcal{M} = \omega(B_0)$.

Note que $V_t(B_0) = \gamma_t^+(B_1)$ pela Proposição 2.1.9. Além disso, $\gamma_t^+(B_1) \to \omega(B_1)$ se $t \to \infty$. Logo, $\omega(B_0) = \omega(B_1)$. A minimalidade de $\omega(B_1)$ segue do Teorema 2.2.3.

Por fim, se existe um conexo $B \supset \mathcal{M}$, então $V_t(B)$ é conexo para todo $t \in [0,\infty)$. Assim, para cada $\varepsilon > 0$, $\mathcal{M} = V_t(\mathcal{M}) \subset V_t(B) \subset O_\varepsilon(\mathcal{M})$ para $t \geq t_1(\varepsilon, B)$. Suponha que $\mathcal{M}$ não seja conexo. Então $\mathcal{M} = F_1 \cup F_2$, em que F_1 e F_2 são não vazios, fechados e disjuntos. Desse modo, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, $O_\varepsilon(F_1)$ e $O_\varepsilon(F_2)$ são disjuntos e, ainda, $O_\varepsilon(\mathcal{M}) = O_\varepsilon(F_1) \subset O_\varepsilon(F_2)$. Logo, para $t \geq t_1(\varepsilon, B)$, ou $V_t(B) \subset O_\varepsilon(F_1)$ ou $V_t(B) \subset O_\varepsilon(F_2)$. Assim, ou $\mathcal{M} \subset F_1$ ou $\mathcal{M} \subset F_2$. Consequentemente, $F_1 = \emptyset$ ou $F_2 = \emptyset$, o que é uma contradição. $\square$

Corolário 2.2.9. Seja $\mathcal{S}$ um semifluxo compacto em X. Se $\mathcal{S}$ é limitado e pontualmente dissipativo, então existe um conjunto limitado B_0 de modo que, para todo compacto K, vale (2.2) para certos $\varepsilon(K) > 0$ e $t(K) \in [0,\infty)$, e ainda $V_t(B_0) \subset B_0$ para todo $t \in [0,\infty)$.

A proposição a seguir fornece informações úteis sobre a estrutura do atrator global $\mathcal{M}$.

Proposição 2.2.10. Sob as hipóteses do Teorema 2.2.8, o atrator global minimal pode ser caracterizado das seguintes formas:

(a) $\mathcal{M} = \bigcup_{B \in \mathfrak{B}} \omega(B)$;

(b) $\mathcal{M} = \bigcup_{K \in \mathcal{K}} \omega(K)$, em que $\mathcal{K}$ é a família de todos os subconjuntos compactos de X;

(c) $\mathcal{M}$ é união de todas as trajetórias completas limitadas em X;

(d) $\mathcal{M}$ é a união de todas as trajetórias completas relativamente compactas de X;

(e) $\mathcal{M}$ é o conjunto invariante limitado máximo em X;

(f) $\widehat{\mathcal{M}} = \overline{\bigcup_{z\in X}\omega(z)}$, em que $\widehat{\mathcal{M}}$ denota o atrator global de pontos fechado minimal.

***Prova*.**

(a) Todo conjunto limitado B é atraído por seu ω-limite $\omega(B)$ e por $\mathcal{M}$; portanto, é atraído pela interseção $\omega(B)\cap\mathcal{M}$. Como $\omega(B)$ é o conjunto mínimo atraindo B, deve estar contido em $\mathcal{M}$. Por outro lado, sendo $\mathcal{M}$ invariante e compacto, $\omega(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$.

(b) Como todo compacto é limitado, segue do item (a) que $\bigcup_{K\in\mathcal{K}}\omega(K)\subset\mathcal{M}$. Por outro lado, $\mathcal{M}$ é compacto e invariante, o que implica $\mathcal{M} = \omega(\mathcal{M})\subset\bigcup_{K\in\mathcal{K}}\omega(K)$.

(c) Fixado $z\in\mathcal{M}$, segue do Lema 2.2.6 a existência de uma trajetória completa $\gamma(z)$. Sendo $\mathcal{M}$ compacto e invariante, tal trajetória está contida em $\mathcal{M}$ e, consequentemente, é limitada e relativamente compacta. Por outro lado, seja $\gamma(x) = \{\psi(t); t\in\mathbb{R}\}$ uma trajetória completa e limitada passando por algum ponto $x = \psi(0)\in X$. Como $\gamma(x)$ é invariante e limitado, é também relativamente compacto[2]. Logo, $B := \overline{\gamma(x)}$ é um conjunto invariante[3] e compacto. Portanto, $\omega(B) = B$ e $B\subset\mathcal{M}$ (pelo item (a)).

(d) Mesma prova do item (c).

(e) Se B é um conjunto limitado e invariante, então $V_t(B) = B$ e, pois, $\omega(B) = B$ e $B\subset\mathcal{M}$. Por outro lado, $\mathcal{M}$ é um conjunto limitado e invariante.

(f) Para cada $z\in X$, $\omega(z)$ atrai $\{z\}$. Logo, $\overline{\bigcup_{z\in X}\omega(z)}$ é um conjunto fechado que atrai todos os elementos de X, ou seja, é um atrator global de pontos fechado. Seja $A\subset X$ outro atrator global de pontos fechado de $\mathcal{S}$. Então, fixado $z\in X$, A atrai $\{z\}$. Pelo Teorema 2.2.3, $\omega(z)$ é o menor conjunto fechado que atrai $\{z\}$ e, pois, $\omega(z)\subset A$. Sendo A fechado, segue que $\overline{\bigcup_{z\in X}\omega(z)}\subset A$. □

Definição 2.2.11. Seja $z\in X$ e suponha a existência de uma trajetória completa limitada $\gamma(z) = \{\psi(t); t\in\mathbb{R}\}$ por z. O α-*limite* de $\gamma(z)$ é definido da seguinte maneira:

$$\alpha(\gamma(z)) := \bigcap_{\tau\le 0}\overline{\gamma_\tau^-(z)}, \quad \text{em que} \quad \gamma_\tau^-(z) := \{\psi(t); t\le\tau\}. \tag{2.3}$$

Lema 2.2.12. Seja $\mathcal{S}$ compacto, limitado e pontualmente dissipativo. Para cada $z\in\mathcal{M}$, considere uma trajetória completa limitada $\gamma(z) = \{\psi(t); t\in\mathbb{R}\}$ por z. Valem as seguintes afirmações:

(a) $\alpha(\gamma(z))$ é não vazio e compacto;

[2]Pois $\gamma(x) = \{\psi(t); t\in\mathbb{R}\} = V_\pi(\{\psi(t); t\in\mathbb{R}\})$, e este é um conjunto relativamente compacto por conta da compacidade do operador V_π.

[3]Seja $y = \lim_{n\to\infty} y_n$ um elemento de $\overline{\gamma(x)}$. Para cada $t\in[0,\infty)$, segue da continuidade de V_t que $V_t(y) = V_t(\lim_{n\to\infty} y_n) = \lim_{n\to\infty} V_t(y_n)\in\overline{\gamma(x)}$.

(b) $\alpha(\gamma(z))$ é invariante, ou seja, $V_t(\alpha(\gamma(z))) = \alpha(\gamma(z))$ para todo $t \in [0, \infty)$;

(c) $\psi(t) \to \alpha(\gamma(z))$ se $t \to -\infty$.

Prova.

(a) Como a trajetória completa é limitada, cada conjunto $\gamma_\tau^-(z)$ em (2.3) é limitado. Ainda, pela Proposição 2.2.10, $\gamma(z) \subset \mathcal{M}$. Como $\mathcal{M}$ é compacto, cada $\gamma_\tau^-(z)$ é relativamente compacto. Desse modo, $\alpha(\gamma(z))$ é a interseção de uma família ordenada de conjuntos compactos. Pelo Lema 2.2.2, $\alpha(\gamma(z))$ é não vazio. Além disso, sendo a interseção de compactos em um espaço métrico, $\alpha(\gamma(z))$ é compacto.

(b) Seja $t \in [0, \infty)$ fixado. Para provar a inclusão $V_t(\alpha(\gamma(z))) \subset \alpha(\gamma(z))$, fixe $x \in \alpha(\gamma(z))$. Então $x \in \overline{\gamma_\tau^-(z)}$ para todo $\tau \leq 0$. Assim, dado $\tau \leq 0$, existe uma sequência $(x_n^\tau)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\gamma_{\tau-t}^-(z)$ de modo que $x = \lim_{n\to\infty} x_n^\tau$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $t_n^\tau \leq \tau - t$ de sorte que $x_n^\tau = \psi(t_n^\tau)$ e, ainda:

$$V_t(x) = V_t(\lim_{n\to\infty} \psi(t_n^\tau)) = \lim_{n\to\infty} V_t(\psi(t_n^\tau)) = \lim_{n\to\infty} \psi(t_n^\tau + t).$$

Observe que a sequência $(\psi(t_n^\tau + t))_{n\in\mathbb{N}}$ está contida em $\gamma_\tau^-(z)$. Portanto, para cada $\tau \leq 0$, $V_t(x) \in \overline{\gamma_\tau^-(z)}$, ou seja, $V_t(x) \in \alpha(\gamma(z))$.

Para a outra inclusão, fixe $x \in \alpha(\gamma(z))$. Então $x \in \overline{\gamma_\tau^-(z)}$ para todo $\tau \leq 0$. Logo, para cada $\tau \leq 0$ fixado, existe uma sequência $(t_n^\tau)_{n\in\mathbb{N}}$, com $t_n^\tau \leq \tau$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de modo que $x = \lim_{n\to\infty} \psi(t_n^\tau)$. Em particular, fazendo $-\tau$ variar nos naturais, segue que, para cada $j \in \mathbb{N}$, a sequência $(t_n^{-j})_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaz:

$$t_n^{-j} \leq -j \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{e} \quad \psi(t_n^{-j}) \to x \ \text{ se } \ n \to \infty.$$

Considere a subsequência diagonal $(t_n^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$, e denote, para cada $n \in \mathbb{N}$, $s_n := t_n^{-n}$. Desse modo, $s_n \to -\infty$ e $\psi(s_n) \to x$. Além disso, pela compacidade do conjunto $\overline{\gamma_{-1-t}^-(z)}$, a sequência $(\psi(s_n - t))_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência $(\psi(s_{n_k} - t))_{k\in\mathbb{N}}$ que converge para algum y.

Afirmação: $y \in \alpha(\gamma(z))$. De fato, como $\lim_{k\to\infty}(s_{n_k} - t) = -\infty$, dado $\tau \leq 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $s_{n_k} - t \leq \tau$ e $\varphi(s_{n_k} - t) \to y$ se $k \geq k_0$. Isso significa que, para cada $\tau \leq 0$, $y \in \overline{\gamma_\tau^-(z)}$, ou seja, $y \in \alpha(\gamma(z))$.

Por fim:

$$V_t(y) = V_t\left(\lim_{k\to\infty} \psi(s_{n_k} - t)\right) = \lim_{k\to\infty} V_t \psi(s_{n_k} - t) = \lim_{k\to\infty} \psi(s_{n_k}) = x.$$

(c) É preciso provar que $\psi(t)$ converge para $\alpha(\gamma(z))$ se $t \to -\infty$. Para isso, considere uma sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$ tal que $t_n \to -\infty$. É necessário encontrar algum ponto em $\alpha(\gamma(z))$ que é limite da sequência $(\psi(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Como $\gamma(z) \subset \mathcal{M}$ e $\mathcal{M}$ é compacto, $(\psi(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente, digamos $(\psi(t_{n_j}))_{j\in\mathbb{N}}$. Seja $y := \lim_{j\to\infty}\psi(t_{n_j})$. Desse modo, $t_{n_j} \to -\infty$ se $j \to \infty$. Logo, dado $\tau \leq 0$, existe $J \in \mathbb{N}$ de modo que, se $j \geq J$, então $t_{n_j} \leq \tau$, e $\psi(t_{n_j}) \to y$. Em outras palavras, para cada $\tau \leq 0$, $y \in \overline{\gamma_\tau^-(z)}$, ou seja, $y \in \alpha(\gamma(z))$.

Ficou assim provado, em particular, que toda subsequência convergente de $(\psi(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para algum ponto de $\alpha(\gamma(z))$. Suponha que $(\psi(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ não convirja para um ponto de $\alpha(\gamma(z))$. Existe então $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $j \in \mathbb{N}$:

$$\psi(t_{n_j}) \notin \mathcal{O}_\varepsilon(\alpha(\gamma(z))) \quad \text{para algum} \ \ n_j \geq j.$$

Foi então construída uma subsequência $(\psi(t_{n_j}))_{j\in\mathbb{N}}$ que está inteiramente contida no exterior de uma ε-vizinhança de $\alpha(\gamma(z))$. Mas, novamente por compacidade, tal subsequência possui uma subsequência convergente e, como já foi provado, esta deve convergir para algum ponto de $\alpha(\gamma(z))$, o que é uma contradição. Portanto, $(\psi(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para algum ponto de $\alpha(\gamma(z))$. □

Definição 2.2.13. Uma função $\mathcal{L} : X \to \mathbb{R}$ é uma *função de Lyapunov estrita* para o semifluxo $\mathcal{S}$ se satisfaz as seguintes propriedades:

- $\mathcal{L}$ é contínua e limitada inferiormente;
- com exceção dos *pontos estacionários* $z \in X$, ou seja, aqueles em que $V_t(z) = z$ para todo $t \in [0,\infty)$, $\mathcal{L}$ é estritamente decrescente ao longo de cada órbita positiva $\gamma^+(z)$, isto é, $\mathcal{L}(V_{t_1}(z)) > \mathcal{L}(V_{t_2}(z))$ se $0 \leq t_1 < t_2$.

A estrutura de $\mathcal{M}$ pode ser mais simples do que no caso geral se, para o semigrupo $\{V_t\}$, existir uma função de Lyapunov estrita.

Teorema 2.2.14. Seja $\mathcal{S}$ compacto, e suponha que $\gamma^+(z) \in \mathfrak{B}$ para cada $z \in X$. Se $\mathcal{S}$ admite uma função de Lyapunov estrita $\mathcal{L}$, então seu atrator global de pontos minimal $\widehat{\mathcal{M}}$ é não vazio e coincide com o conjunto $Z(\mathcal{S})$ de todos os pontos estacionários de $\mathcal{S}$. Se $Z(\mathcal{S})$ é um conjunto limitado e $\mathcal{S}$ é limitado, então $\mathcal{S}$ tem um atrator global minimal $\mathcal{M}$ que satisfaz as propriedades do Teorema 2.2.8. Ambos os finais de qualquer trajetória completa $\gamma(z) \subset \mathcal{M}$ convergem para $Z(\mathcal{S})$ (se $t \to \pm\infty$). Se X é conexo e $Z(\mathcal{S})$ não é, então $Z(\mathcal{S})$ é um subconjunto próprio de $\mathcal{M}$ e o atrator global $\mathcal{M}$ consiste de trajetórias completas que conectam pontos de $Z(\mathcal{S})$.

Prova. Será provado inicialmente que o conjunto $Z(\mathcal{S})$ de todos os pontos estacionários de $\mathcal{S}$ coincide com o atrator global de pontos minimal $\widehat{\mathcal{M}}$. De fato, para cada $z \in X$, existem $l_+(z) := \lim_{t\to\infty}\mathcal{L}(V_t(z))$ e um compacto $\omega(z)$, com $\mathcal{L}|_{\omega(z)} \equiv l_+(z) \equiv constante$. Segue da definição de função de Lyapunov estrita que $\omega(z) \subset Z(\mathcal{S})$. Consequentemente, z é atraído por $Z(\mathcal{S})$. Por outro lado, se $x \in Z(\mathcal{S})$, então $\omega(x) = x$, o que implica $x \in \widehat{\mathcal{M}}$. Logo, $Z(\mathcal{S}) = \widehat{\mathcal{M}}$.

Suponha agora que o semifluxo $\mathcal{S}$ seja limitado e que $Z(\mathcal{S})$ seja um conjunto limitado. Desse modo, $\mathcal{S}$ é pontualmente dissipativo e o Teorema 2.2.8 garante a existência de um atrator global compacto $\mathcal{M}$. Para cada $z \in \mathcal{M}$, é possível escolher uma trajetória completa limitada $\gamma(z) = \{\psi(t); t \in \mathbb{R}\}$ contida em $\mathcal{M}$ e determinar, para ela, o α-limite $\alpha(\gamma(z))$. Pelo Lema 2.2.12, esse α-limite é não vazio e invariante, e $\psi(t) \to \alpha(\gamma(z))$ se $t \to -\infty$. Esse α-limite também pertence a $Z(\mathcal{S})$, já que $\mathcal{L}|_{\alpha(\gamma(z))} \equiv \lim_{t\to-\infty} \mathcal{L}(\varphi(t)) \equiv constante$.

Pode-se então dizer que ambos os finais da trajetória $\gamma(z)$ convergem para $Z(\mathcal{S})$.

Por fim, se X é conexo e $Z(\mathcal{S})$ não é, então $\mathcal{M}$ (que é conexo) contém não apenas pontos de $Z(\mathcal{S})$, mas também trajetórias completas conectando pontos de $Z(\mathcal{S})$ (então $Z(\mathcal{S})$ é menor do que $\mathcal{M}$). □

2.3 Semifluxos Assintoticamente Compactos

Definição 2.3.1. O semifluxo $\mathcal{S}$ é *assintoticamente compacto* se, para cada conjunto $B \in \mathfrak{B}$ tal que $\gamma^+(B) \in \mathfrak{B}$, e para quaisquer sequências $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em B e $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $[0,\infty)$, com $t_n \to \infty$, a sequência $(V_{t_n}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ possui subsequência convergente.

Equivalentemente se, para cada conjunto $B \in \mathfrak{B}$ tal que $\gamma^+(B) \in \mathfrak{B}$, e para quaisquer sequências $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{S}$ e $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $[0,\infty)$, com $\{\varphi_n(0); n \in \mathbb{N}\} \subset B$ e $t_n \to \infty$, a sequência $(\varphi_n(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ possui subsequência convergente.

O estudo aqui será restrito a semifluxos assintoticamente compactos que determinam um *semigrupo contínuo*.

Proposição 2.3.2. Se o semigrupo $\{V_t\}$ é contínuo, então, para todo compacto $K \subset X$ e todo $t \in [0,\infty)$, o conjunto $\gamma^+_{[0,t]}(K)$ é compacto.

***Prova*.** Basta observar que $\gamma^+_{[0,t]}(K)$ é a imagem do compacto $[0,t] \times K$ pela função contínua $(t,x) \mapsto V_t(x)$. □

Proposição 2.3.3. Se o semigrupo $\{V_t\}$ é contínuo, $K \subset X$ é compacto e $\gamma^+(K)$ é relativamente compacto, então $\omega(K)$ é um conjunto não vazio, compacto e invariante que atrai K.

***Prova*.** O conjunto $K_1 := \overline{\gamma^+(K)}$ é compacto e, além disso, $V_t(K_1) \subset K_1$ para todo $t \in [0,\infty)$. Fica determinado um semigrupo $\{V_t, t \in [0,\infty), K_1\}$ de operadores contínuos V_t em um espaço métrico K_1. Então $\mathcal{S}$ é compacto em K_1 e, portanto, pode-se aplicar o Teorema 2.2.3 para obter o resultado. □

Proposição 2.3.4. Sejam $\mathcal{S}$ assintoticamente compacto e $\{V_t\}$ um semigrupo contínuo em $\mathcal{S}$. Se $K \subset X$ é um conjunto compacto tal que $\gamma^+(K)$ é limitado, então $\gamma^+(K)$ é relativamente compacto e, consequentemente, a conclusão da Proposição 2.3.3 é válida.

***Prova*.** Seja $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência arbitrária de elementos de $\gamma^+(K)$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, $z_n = V_{t_n}(x_n)$ para certos $x_n \in K$ e $t_n \in [0,\infty)$. Se o conjunto $\{t_n; n \in \mathbb{N}\}$ é limitado, então o conjunto $\{z_n; n \in \mathbb{N}\}$ é relativamente compacto pela Proposição 2.3.2. Logo, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui subsequência convergente pelo Lema 1.1.10.

Se o conjunto $\{t_n; n \in \mathbb{N}\}$ é ilimitado, existe uma subsequência $(t_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$, com $t_{n_j} \to \infty$, de modo que a sequência $(V_{t_{n_j}}(x_{n_j}))_{j\in\mathbb{N}}$ possui subsequência convergente pelo fato de $\mathcal{S}$ ser assintoticamente compacto.

Em ambos os casos, o resultado segue do Lema 1.1.10. $\square$

Proposição 2.3.5. Seja $\mathcal{S}$ assintoticamente compacto e suponha que $\gamma^+(B) \in \mathfrak{B}$ para algum $B \in \mathfrak{B}$. Então $\omega(B)$ é um conjunto não vazio, compacto e invariante atraindo B. Além disso, se B é conexo, então $\omega(B)$ também é.

Prova. Para cada $z \in B$, como $\gamma^+(z) \in \mathfrak{B}$, segue da Proposição 2.3.3 que $\omega(z)$ é não vazio. Consequentemente, $\omega(B) \neq \emptyset$. Note ainda que $\omega(B)$ é fechado (pelo Lema 2.1.14) e limitado (pois está contido no limitado $\overline{\gamma^+(B)}$).

Para provar que $\omega(B)$ é invariante, basta checar a inclusão $\omega(B) \subset V_t(\omega(B))$, já que a outra sempre é válida por conta da continuidade dos operadores V_t (ver prova do Teorema 2.2.3). Seja $z \in \omega(B)$. Então $z = \lim_{n\to\infty} V_{t_n}(z_n)$ para certas sequências $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em B e $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $[0,\infty)$, com $t_n \to \infty$. Fixe $t \geq 0$ e observe que, para $t_n \geq t$, $V_{t_n}(z_n) = V_t(V_{t_n-t}(z_n))$. O conjunto $\{V_{t_n-t}(z_n); t_n \geq t, n \in \mathbb{N}\}$ é relativamente compacto, uma vez que $\mathcal{S}$ é assintoticamente compacto. Considere então uma subsequência convergente $(V_{t_{n_j}-t}(z_{n_j}))_{j\in\mathbb{N}}$, e seja x o seu limite. Claramente $x \in \omega(B)$ e $V_t(x) = z$. Desse modo, a inclusão $\omega(B) \subset V_t(\omega(B))$ está provada e, portanto, $\omega(B)$ é invariante.

Seja agora $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\omega(B)$. Pela invariância de $\omega(B)$, tal sequência pode ser representada como $z_n = V_n(\tilde{z}_n)$, em que $\tilde{z}_n \in \omega(B)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Novamente por $\omega(B)$ ser invariante, segue que $\gamma^+(\omega(B)) = \omega(B)$ e, consequentemente, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui subsequência convergente (pois $\mathcal{S}$ é assintoticamente compacto). Portanto, $\omega(B)$ é compacto.

Resta ainda provar que $\omega(B)$ atrai B. Suponha que isso não seja válido. Pode-se então escolher $\varepsilon > 0$ e sequências $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em B e $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $[0,\infty)$, com $t_n \to \infty$, de modo que $\{V_{t_n}(z_n); n \in \mathbb{N}\} \subset X \setminus O_\varepsilon(\omega(B))$. A compacidade assintótica de $\mathcal{S}$ implica que o conjunto $\{V_{t_n}(z_n); n \in \mathbb{N}\}$ é relativamente compacto. Como todos os pontos de acumulação desse conjunto pertencem a $\omega(B)$, então $V_{t_n}(z_n) \in O_\varepsilon(\omega(B))$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Isso é, porém, uma contradição.

Por fim, se B é conexo, então $\omega(B)$ também é, pelo mesmo argumento utilizado na prova do Teorema 2.2.3. $\square$

Teorema 2.3.6. Sejam $\mathcal{S}$ assintoticamente compacto, limitado e pontualmente dissipativo, e $\{V_t\}$ um semigrupo contínuo em $\mathcal{S}$. Então existe um atrator global minimal não vazio $\mathcal{M}$ para $\mathcal{S}$, que é compacto e invariante. Além disso, se X é conexo então $\mathcal{M}$ também é.

Prova. Pelo Corolário 2.2.9, existe um conjunto limitado B_0 de modo que, para todo compacto K, existem $\varepsilon(K) > 0$ e $t(K) \in [0,\infty)$ tais que:

$$V_t(O_{\varepsilon(K)}(K)) \subset B_0 \quad \forall t \geq t(K). \tag{2.4}$$

Além disso, $V_t(B_0) \subset B_0$ para todo $t \in [0,\infty)$. Como $\mathcal{S}$ é limitado, a Proposição 2.3.5 garante que, para todo $B \in \mathfrak{B}$, $\omega(B)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai B. Em particular, isso vale para $\omega(B_0)$.

Afirmação: $\omega(B_0) = \mathcal{M}$, ou seja, $\omega(B_0)$ é um atrator global minimal. Para provar isso, é preciso garantir que $\omega(B_0)$ atrai todos os conjuntos limitados. Ora, se $B \in \mathfrak{B}$, então B é atraído pelo compacto $K := \omega(B)$. Fixe $\varepsilon(K)$ dado pela equação (2.4). Como K atrai B, existe $t(B) \in [0,\infty)$ de modo que $V_t(B) \subset O_{\varepsilon(K)}(K)$ para todo $t \geq t(B)$. Agora, por (2.4), $V_{t+t(B)}(B) \subset B_0$ para todo $t \geq t(K)$. Todavia, B_0 é atraído por $\omega(B_0)$. Portanto, B é atraído por $\omega(B_0)$.

Por fim, se X é conexo, a prova da conexidade de $\mathcal{M}$ é análoga à feita no Teorema 2.2.8. □

Teorema 2.3.7. Sejam $\mathcal{S}$ assintoticamente compacto e limitado, e $\{V_t\}$ um semigrupo contínuo em $\mathcal{S}$. Suponha a existência de uma função de Lyapunov estrita $\mathcal{L} : X \to \mathbb{R}$ para $\mathcal{S}$. Então todas as condições do Teorema 2.2.14 são válidas para $\mathcal{S}$.

Prova. A prova desse teorema é a mesma que foi feita para o Teorema 2.2.14, tendo em vista agora os resultados do Teorema 2.3.6. □

2.4 O problema de Chafee-Infante

A teoria desenvolvida será agora exemplificada através do conhecido problema de Chafee-Infante. Considere o seguinte *problema de valores inicial e de fronteira*:

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx} + \lambda f(u), && t > 0, \quad \text{e} \quad 0 \leq x \leq \pi \\ &u(0,t) = u(\pi,t) = 0, && t > 0 \\ &u(x,0) = \phi(x), && \qquad\qquad 0 \leq x \leq \pi. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Aqui, λ é um parâmetro não negativo, $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ e $\phi \in C^1([0,\pi],\mathbb{R})$ é tal que $\phi(0) = \phi(\pi) = 0$. As seguintes hipóteses serão assumidas sobre f:

(a) $f(0) = 0$;

(b) $f'(0) > 0$;

(c) $\limsup_{|u|\to\infty} f(u)u^{-1} \leq 0$;

(d) $\operatorname{sgn} f''(u) = -\operatorname{sgn} u$, em que, para $z \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{sgn} z := \begin{cases} \dfrac{z}{|z|}, & z \neq 0; \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

Definição 2.4.1. Seja $\Omega := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0\}$. Uma função contínua $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma *solução* de (2.5) se valem as seguintes condições:

(a) as derivadas parciais u_t e u_{xx} existem e são contínuas em $\tilde{\Omega} := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq \pi, t > 0\}$;

(b) u satisfaz as três relações em (2.5).

Seja $X := C^1([0,\pi],\mathbb{R})$. Fixado $\lambda \geq 0$, denota-se por $u_\phi(t)$ a solução $u(x,t)$ de (2.5) tal que $u(x,0) = \phi(x)$ para todo $x \in [0,\pi]$. Pelo Teorema 2.1 em (Bruschi, 1997, [6]), fica definido um semifluxo $\mathcal{S}^\lambda$ da seguinte forma:

$$\mathcal{S}^\lambda := \left\{u_\phi : [0,\infty) \to X; \phi \in X\right\}.$$

Desse modo, fica definido um semigrupo em X por:

$$\begin{array}{rccc} V_t^\lambda : & X & \to & X \\ & \phi & \mapsto & u_\phi(t). \end{array}$$

Teorema 2.4.2. Valem as seguintes propriedades:

(a) para cada $\phi \in X$, a órbita positiva $\gamma^+(\phi)$ é relativamente compacta;

(b) existe uma função de Lyapunov para o semifluxo $\mathcal{S}$, dada por:

$$\mathcal{L}^\lambda(\phi) = \int_0^\pi \left[\frac{1}{2}\phi_x^2(x) - \lambda \int_0^{\phi(x)} f(s)ds\right] dx.$$

(c) $\mathcal{S}$ é assintoticamente compacto e pontualmente dissipativo.

Prova. A prova deste resultado pode ser obtida no Teorema 2.2 em (Bruschi, 1997, [6]). □

Corolário 2.4.3. Para cada $\phi \in X$, o conjunto $\omega(\phi)$ é não vazio, compacto, invariante, conexo e atrai ϕ. Ademais, o conjunto $Z(\mathcal{S})$ é o atrator global de pontos minimal de $\mathcal{S}$ e, além disso, $\mathcal{S}$ admite um atrator global minimal $\mathcal{M}$, que consiste das trajetórias completas que conectam pontos de $Z(\mathcal{S})$.

Prova. Basta utilizar o teorema precedente juntamente com os seguintes resultados: Teorema 2.3.6, Teorema 2.3.7, Proposição 2.3.5. □

Capítulo 3

Semifluxos Generalizados

O estudo de *semifluxos generalizados* é útil para compreender o comportamento qualitativo de soluções para equações diferenciais que não possuem, necessariamente, unicidade de solução. Esse capítulo é feito com base em [10] e auxílio de [3] e [7].

Noções Básicas

Durante todo o capítulo, (X,d) será um espaço métrico completo.
Notações. As seguintes notações serão utilizadas:

- $\mathcal{P}$: família dos subconjuntos não vazios de X;
- $\mathfrak{B}$: família dos subconjuntos não vazios e limitados de X;
- $\mathfrak{C}$: família dos subconjuntos não vazios e fechados de X;
- $\mathfrak{BC}$: família dos subconjuntos não vazios, limitados e fechados de X;
- $\mathcal{K}$: família dos subconjuntos não vazios e compactos de X.

Além disso, se $z \in X$, $A,B \in \mathcal{P}$ e $\varepsilon > 0$, então:

$$\begin{aligned}
d(z,A) &:= \inf\{d(z,a);\, a \in A\};\\
dist(A,B) &:= \sup\{d(a,B);\, a \in A\} = \sup\{\inf\{d(a,b);\, b \in B\};\, a \in A\};\\
d_H(A,B) &:= \max\{dist(A,B),\, dist(B,A)\};\\
\mathcal{O}_\varepsilon(A) &:= \{x \in X;\, d(x,A) < \varepsilon\}.
\end{aligned}$$

Definição 3.0.1. Uma família $\mathcal{G}$ de funções $\varphi : [0,\infty) \to X$ é um *semifluxo generalizado* se valem as seguintes condições:

(H1) (Existência) Para cada $z \in X$, existe ao menos um elemento $\varphi \in \mathcal{G}$ de modo que $\varphi(0) = z$.

(H2) (Translação) Se $\varphi \in \mathcal{G}$ e $\tau \geq 0$, então $\varphi^\tau \in \mathcal{G}$, em que $\varphi^\tau(t) := \varphi(t+\tau)$ para todo $t \in [0,\infty)$.

(H3) (Concatenação) Se $\varphi, \psi \in \mathcal{G}$ e $\psi(0) = \varphi(\tau)$ para algum $\tau \geq 0$, então $\theta \in \mathcal{G}$, em que:

$$\theta(t) := \begin{cases} \varphi(t), & \text{se } t \in [0,\tau] \\ \psi(t-\tau), & \text{se } t \in (\tau,\infty). \end{cases}$$

(H4) (Semicontinuidade superior nos dados iniciais) Se $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $\mathcal{G}$ e $\varphi_n(0) \to z$, então existem $\varphi \in \mathcal{G}$ e uma subsequência $(\varphi_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de modo que $\varphi(0) = z$ e $\varphi_{n_j}(t) \to \varphi(t)$ para todo $t \geq 0$.

Ao longo desse capítulo, $\mathcal{G}$ será um semifluxo generalizado em X.

Definição 3.0.2. O semifluxo generalizado $\mathcal{G}$ é um *contínuo* se cada $\varphi \in \mathcal{G}$ é uma função contínua.

Definição 3.0.3. Um *semigrupo multívoco em $\mathcal{G}$* é uma família de funções multívocas $V_t : X \rightsquigarrow X$, $t \in [0,\infty)$, definidas da seguinte forma:

$$V_t(z) := \{\varphi(t); \varphi \in \mathcal{G} \text{ e } \varphi(0) = z\}.$$

Essa família será denotada por $\{V_t, t \in [0,\infty), X\}$ ou simplesmente $\{V_t\}$.
Desse modo, se $E \in \mathcal{P}$, então:

$$V_t(E) = \{\varphi(t); \varphi \in \mathcal{G} \text{ e } \varphi(0) \in E\}.$$

Proposição 3.0.4. Valem as seguintes afirmações:

(a) $\{V_t\}$ é um semigrupo em X, ou seja, $V_0 = Id$ e $V_{t+s} = V_t \circ V_s$ para quaisquer $t,s \in [0,\infty)$;

(b) para cada $t \geq 0$, V_t é monótona com relação à ordem parcial de inclusão, ou seja, $E \subset F$ implica $V_t(E) \subset V_t(F)$;

(c) $V_t(z)$ é compacto para quaisquer $z \in X$ e $t \geq 0$;

(d) sejam $K \in \mathcal{K}$ e $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de elementos de $\mathcal{K}$. Se $\lim_{n\to\infty} dist(K_n, K) = 0$, então $\lim_{n\to\infty} dist(V_t(K_n), V_t(K)) = 0$ para todo $t \geq 0$;

(e) para cada $t \geq 0$, $V_t : X \rightsquigarrow \mathcal{K}$ é uma função multívoca semicontínua superiormente e possui gráfico fechado.

***Prova*.**

(a) Fixado $z \in X$, segue de (H1) a existência de $\varphi \in \mathcal{G}$ tal que $\varphi(0) = z$. Logo, $V_0(z) = \{\varphi(0); \varphi \in \mathcal{G} \text{ e } \varphi(0) = z\} = \{z\}$.

Sejam $t,s \in [0,\infty)$ e $z \in X$. Se $x \in V_{t+s}(z)$, existe $\varphi \in \mathcal{G}$ tal que $\varphi(0) = z$ e $\varphi(t+s) = x$. Por (H2), $\varphi^s \in \mathcal{G}$. Como $\varphi^s(0) = \varphi(s) \in V_s(z)$ e $\varphi^s(t) = x$, então $x \in V_t(V_s(z))$, ou seja, $V_{t+s}(z) \subset V_t \circ V_s(z)$. Para a inclusão contrária, considere $x \in V_t \circ V_s(z)$. Então $x = \psi(t)$ para alguma função $\psi \in \mathcal{G}$ tal que $\psi(0) \in V_s(z)$. Assim, existe $\varphi \in \mathcal{G}$ de modo que $\varphi(s) = \psi(0)$ e $\varphi(0) = z$. Utilizando (H3), pode-se definir $\theta \in \mathcal{G}$ da seguinte forma:

$$\theta(\tau) := \begin{cases} \varphi(\tau), & \text{se } \tau \in [0,s] \\ \psi(\tau - s), & \text{se } \tau \in (s,\infty). \end{cases}$$

Então $\theta(0) = z$ e $\theta(t+s) = \psi(t) = x$, ou seja, $x \in V_{t+s}(z)$.

(b) Sejam $E,F \in \mathcal{P}$ tais que $E \subset F$. Assim, se $\varphi(0) \in E$, então $\varphi(0) \in F$. Logo, para cada $t \geq 0$, $V_t(E) = \{\varphi(t); \varphi \in \mathcal{G} \text{ e } \varphi(0) \in E\} \subset \{\varphi(t); \varphi \in \mathcal{G} \text{ e } \varphi(0) \in F\} = V_t(F)$.

(c) Fixados $z \in X$ e $t \geq 0$, considere uma sequência $(\varphi_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ em $V_t(z)$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n \in \mathcal{G}$ e $\varphi_n(0) = z$. Em particular, $\varphi_n(0) \to z$, o que implica, por (H4), a existência de uma subsequência $(\varphi_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ e de uma função $\varphi \in \mathcal{G}$ tais que $\varphi(0) = z$ e $\varphi_{n_j}(t) \to \varphi(t)$. Desse modo, a sequência $(\varphi_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente, provando assim que $V_t(z)$ é compacto.

(d) Seja $t \geq 0$, e suponha que o resultado não seja válido. Assim, existem $\varepsilon > 0$, uma subsequência $(K_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e elementos $\varphi_{n_j}(t) \in V_t(K_{n_j})$ para cada $j \in \mathbb{N}$, de modo que:

$$d(\varphi_{n_j}(t), V_t(K)) > \varepsilon \quad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Como $\varphi_{n_j}(0) \in K_{n_j}$ para cada $j \in \mathbb{N}$ e $dist(K_n, K) \to 0$, com K sendo compacto, existem $z \in K$ e uma subsequência $(\varphi_{n_{j_k}})_{k\in\mathbb{N}}$ de sorte que $\varphi_{n_{j_k}}(0) \to z$. De fato, como K é compacto, $dist(K_{n_j}, K) \to 0$ significa que:

$$\sup\{\min\{d(x_{n_j}, z); z \in K\}; x_{n_j} \in K_{n_j}\} \to 0.$$

Considere a sequência $(\varphi_{n_j}(0))_{j\in\mathbb{N}}$ acima. Assim, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $z_{n_j} \in K$ tal que $\min\{d(\varphi_{n_j}(0), z); z \in K\} = d(\varphi_{n_j}(0), z_{n_j})$. Logo, $d(\varphi_{n_j}(0), z_{n_j}) \to 0$. Novamente por K ser compacto, $(z_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência $(z_{n_{j_k}})_{k\in\mathbb{N}}$ convergindo para algum elemento $z \in K$. Assim, por construção, $\varphi_{n_{j_k}}(0) \to z$.

Segue agora de (H4) a existência de uma função $\psi \in \mathcal{G}$ e de outra subsequência $(\varphi_{n_{j_{k_l}}})_{l\in\mathbb{N}}$ tais que $\varphi_{n_{j_{k_l}}}(t) \to \psi(t)$ e $\psi(0) = z$. Então $\psi(t) \in V_t(K)$, o que contradiz (3.1).

(e) O item (d) aplicado a um elemento $z \in X$ coincide com a seguinte afirmação: dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de modo que, se $d(x,z) < \delta$, então $dist(V_t(x), V_t(z)) < \varepsilon$. Considere agora uma vizinhança U de $V_t(z)$. A fim de mostrar que V_t é semicontínua superiormente em z, é preciso encontrar $\eta > 0$ de modo que, se $x \in B(z,\eta)$, então $V_t(x) \subset U$. Para cada $y \in U$, pode-se definir o valor $\varepsilon_1(y) := d(y, X \setminus U)$. Como $V_t(z)$ é compacto (item (c)), essa função contínua $\varepsilon_1(y)$ possui um mínimo em $V_t(z)$, digamos ε_1. Definindo $\varepsilon := \varepsilon_1/2$, existe $\eta > 0$ de modo que:

$$x \in B(z,\eta) \Rightarrow dist(V_t(x), V_t(z)) < \varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{2} \Rightarrow V_t(x) \subset U.$$

Por fim, sendo V_t semicontínua superiormente e com valores fechados, V_t tem gráfico fechado pela Proposição 2 em (Aubin e Cellina, 1984, [1] p. 41). □

Definição 3.0.5. A *órbita positiva* de $\varphi \in \mathcal{G}$ e a *órbita positiva* de $E \subset X$ são definidas, respectivamente, por $\gamma^+(\varphi) := \{\varphi(t); t \geq 0\}$ e $\gamma^+(E) := \bigcup_{t\geq 0} V_t(E)$. Se $\tau > 0$, ficam também definidos $\gamma^+_\tau(\varphi) := \{\varphi(t); t \geq \tau\}$ e $\gamma^+_\tau(E) := \bigcup_{t\geq\tau} V_t(E)$.

Definição 3.0.6. Existe uma *órbita completa* por $z \in X$ se há uma função $\psi : \mathbb{R} \to X$ tal que $\psi(0) = z$ e, para todo $s \in \mathbb{R}$, $\psi^s|_{[0,\infty)} \in \mathcal{G}$. Nesse caso, a *órbita completa de* ψ é definida da seguinte forma:

$$\gamma(\psi) := \operatorname{Im}\psi = \{\psi(t); t \in \mathbb{R}\}.$$

Em alguns momentos ψ será também referida como uma *órbita completa por* z.

Definição 3.0.7. Uma órbita completa $\psi : \mathbb{R} \to X$ é *estacionária* se existe $z \in X$ tal que $\psi(t) = z$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Fica então definido o seguinte conjunto:

$$Z(\mathcal{G}) := \{z \in X; \text{ existe uma órbita completa } \psi \text{ estacionária em } z\}.$$

Observação 3.0.8. Um elemento $z \in Z(\mathcal{G})$ pode ser visto como uma *solução estacionária* em $\mathcal{G}$, uma vez que $z \in Z(\mathcal{G})$ se, e somente se, existe $\phi \in \mathcal{G}$ tal que $\phi(t) = z$ para todo $t \geq 0$.

Observação 3.0.9. O conjunto $Z(\mathcal{G})$ é fechado. De fato, seja $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $Z(\mathcal{G})$ convergindo para um certo $z \in X$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma órbita completa ψ_n estacionária em z_n, ou seja, $\psi_n(s) = z_n$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Em particular, $\psi^0_n(0) \to z$ e $\psi^0_n|_{[0,\infty)} \in \mathcal{G}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Segue de (H4) a existência de uma subsequência $(\psi^0_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ e de $\varphi \in \mathcal{G}$ tais que $\varphi(0) = z$ e $\psi^0_{n_j}(t) \to \varphi(t)$ para todo $t \geq 0$. Pela unicidade do limite, $\varphi(t) = z$ para todo $t \in [0,\infty)$. Segue da observação precedente que $z \in Z(\mathcal{G})$.

Definição 3.0.10. Um conjunto $A \subset X$ é:

- *positivamente invariante* se $V_t(A) \subset A$ para todo $t \geq 0$;
- *negativamente invariante* se $A \subset V_t(A)$ para todo $t \geq 0$;
- *invariante* se $V_t(A) = A$ para todo $t \geq 0$;
- *quasi-invariante* se, para cada $z \in A$, existe uma órbita completa ψ passando por z tal que $\psi(t) \in A$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Proposição 3.0.11. Seja A um subconjunto de X.

(a) Se A é invariante, então A é quasi-invariante;

(b) Se A é quasi-invariante, então A é negativamente invariante.

Prova.

(a) A prova é análoga à que foi feita no Lema 2.2.6.

(b) Seja $z \in A$. Por hipótese, existe uma órbita completa ψ por z tal que $\psi(t) \in A$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Fixado $t \geq 0$, defina $\varphi_t := \psi^{-t}$ em $[0,\infty)$, ou seja, $\varphi_t(s) := \psi(s-t)$ para todo $s \geq 0$. Desse modo, $\varphi_t \in \mathcal{G}$, $z = \varphi_t(t)$ e $\varphi_t(0) = \psi(-t) \in A$. Portanto, $z \in V_t(A)$ para todo $t \geq 0$. □

Definição 3.0.12. Seja $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado.

- $\mathcal{G}$ é *definitivamente limitado* se, para todo $B \in \mathfrak{B}$, existe $\tau = \tau(B) \geq 0$ de modo que $\gamma^+_\tau(B) \in \mathfrak{B}$;

- $\mathcal{G}$ é *compacto* se, para toda sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{G}$ tal que $\{\varphi_n(0); n \in \mathbb{N}\} \in \mathfrak{B}$, existe uma subsequência $(\varphi_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de modo que $(\varphi_{n_j}(t))_{j\in\mathbb{N}}$ é convergente para todo $t > 0$;

- $\mathcal{G}$ é *assintoticamente compacto* se, para toda sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{G}$ tal que $\{\varphi_n(0); n \in \mathbb{N}\} \in \mathfrak{B}$ e para toda sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $[0,\infty)$, com $t_n \to \infty$, a sequência $(\varphi_n(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente. Equivalentemente, se, para toda sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $[0,\infty)$, com $t_n \to \infty$, e para todo $B \in \mathfrak{B}$, qualquer sequência $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com $\xi_n \in V_{t_n}(B)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, possui uma subsequência convergente;

- $\mathcal{G}$ é *condicionalmente assintoticamente compacto* se, para toda sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $[0,\infty)$, com $t_n \to \infty$, e para todo $B \in \mathfrak{B}$ tal que $\gamma^+_{\tau(B)}(B) \in \mathfrak{B}$ para algum $\tau(B) \geq 0$, qualquer sequência $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com $\xi_n \in V_{t_n}(B)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, possui uma subsequência convergente.

Lema 3.0.13. Seja $\mathcal{G}$ assintoticamente compacto. Se $B \in \mathfrak{BC}$ é negativamente invariante, então B é compacto.

Prova. Sejam $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em B e $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $[0,\infty)$ tal que $t_n \to \infty$. Como B é negativamente invariante, $B \subset V_{t_n}(B)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $z_n \in V_{t_n}(B)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sendo $\mathcal{G}$ assintoticamente compacto, existe então uma subsequência convergente de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cujo limite pertence ao fechado B. □

Proposição 3.0.14. Seja $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado.

(a) Se $\mathcal{G}$ é assintoticamente compacto, então $\mathcal{G}$ é definitivamente limitado.

(b) Se $\mathcal{G}$ é definitivamente limitado e compacto, então $\mathcal{G}$ é assintoticamente compacto.

Prova.

(a) Suponha que $\mathcal{G}$ não seja definitivamente limitado. Então existe $B \in \mathfrak{B}$ de modo que, para todo $t \geq 0$, $\gamma_t^+(B) \notin \mathfrak{B}$. Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$, existem $t_n \geq n$ e $\varphi_n \in \mathcal{G}$ de modo que $\varphi_n(0) \in B$ e $d(\varphi_n(t_n), z) > n$ para todo $z \in X$. Logo, $t_n \to \infty$ e, por construção, $(\varphi_n(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ não admite subsequência convergente, o que contradiz o fato de $\mathcal{G}$ ser assintoticamente compacto.

(b) Considere uma sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{G}$ tal que $\{\varphi_n(0); n \in \mathbb{N}\} \in \mathfrak{B}$ e uma sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $[0,\infty)$, com $t_n \to \infty$. Seja $B := \{\varphi_n(0); n \in \mathbb{N}\} \in \mathfrak{B}$. Como $\mathcal{G}$ é definitivamente limitado, existe $\tau = \tau(B) \geq 0$ de modo que $\gamma_\tau^+(B) \in \mathfrak{B}$. Como $t_n \to \infty$, podemos escolher $N \in \mathbb{N}$ de sorte que, para $n \geq N$, $t_n \geq \tau + 1$. Logo, $B_1 := \{\varphi_n^{t_n-1}(0); n \geq N\} \in \mathfrak{B}$. Sendo $\mathcal{G}$ compacto, $(\varphi_n^{t_n-1}(1))_{n\in\mathbb{N}}$ admite subsequência convergente. □

Corolário 3.0.15. O semifluxo generalizado $\mathcal{G}$ é assintoticamente compacto se, e somente se, é definitivamente limitado e condicionalmente assintoticamente compacto.

3.1 Atratores para $\mathcal{G}$

Nesta seção, serão introduzidos os conceitos de ω-*limite*, α-*limite* e *atrator* para $\mathcal{G}$. O objetivo é apresentar condições para a existência do atrator global fechado mínimo, e o mesmo para o atrator de pontos.

Definição 3.1.1. Sejam ψ uma órbita completa, $\varphi \in \mathcal{G}$ e $E \subset X$. Ficam definidos os seguintes conjuntos:

- $\omega(\varphi) := \{z \in X; \varphi(t_n) \to z$ para alguma sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $[0,\infty)$ tal que $t_n \to \infty\}$;
- $\alpha(\psi) := \{z \in X; \psi(t_n) \to z$ para alguma sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$ tal que $t_n \to -\infty\}$;
- $\omega_B(E) := \{z \in X; \varphi_n(t_n) \to z$ para certas sequências $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $[0,\infty)$ e $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{G}$ tais que $t_n \to \infty$, $\{\varphi_n(0); n \in \mathbb{N}\} \in \mathfrak{B}$ e $\{\varphi_n(0); n \in \mathbb{N}\} \subset E\}$;
- $\omega(E) := \bigcap_{t\geq 0} \overline{\gamma_t^+(E)}$.

Observação 3.1.2. $\omega(\varphi) = \bigcap_{t\geq 0} \overline{\gamma_t^+(\varphi)}$.

Observação 3.1.3. O conjunto $\omega(E)$ consiste dos limites de todas as sequências convergentes $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, em que $\xi_n \in V_{t_n}(E)$ para alguma sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $[0,\infty)$, com $t_n \to \infty$. Além disso, $\omega_B(E) \subset \omega(E)$, e $\omega_B(E) = \omega(E)$ se E é limitado.

Definição 3.1.4. Um conjunto $A \subset X$ *atrai* outro conjunto $E \subset X$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\tau = \tau(\varepsilon, E) \geq 0$ de modo que $V_t(E) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(A)$ para todo $t \geq \tau$. Equivalentemente, se é válido que $\lim_{t\to\infty} dist(V_t(E), A) = 0$. Em vista disso, os seguintes conceitos são estabelecidos:

- $A \subset X$ é um *atrator global* se atrai todos os subconjuntos limitados de X;

- $A \subset X$ é um *atrator global de pontos* se atrai todos os subconjuntos unitários de X.

Definição 3.1.5. Seja $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado.

- $\mathcal{G}$ é *dissipativo* se existe um atrator global limitado para $\mathcal{G}$;

- $\mathcal{G}$ é *pontualmente dissipativo* se existe um atrator global de pontos limitado para $\mathcal{G}$;

- $\mathcal{G}$ é *φ-dissipativo* se existe um $B_0 \in \mathfrak{B}$ tal que, para toda $\varphi \in \mathcal{G}$, há $\tau = \tau(\varphi) \geq 0$ de modo que $\varphi(t) \in B_0$ para todo $t \geq \tau$.

Observação 3.1.6. Dissipativo $\Rightarrow$ pontualmente dissipativo $\Rightarrow$ φ-dissipativo.

Lema 3.1.7. Sejam $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado, $F \in \mathfrak{C}$ e $A \in \mathcal{P}$. Se F atrai A, então $\omega_B(A) \subset \omega(A) \subset F$. Se $\omega(A)$ atrai A, então ele é o único conjunto fechado minimal que atrai A. Ainda, para quaisquer $A \in \mathcal{P}$ e $\tau \geq 0$, $\omega(\gamma_\tau^+(A)) = \omega(A)$.

Prova. Como F atrai A, dado $\varepsilon > 0$, existe $\tau = \tau(\varepsilon, A) \geq 0$ tal que, se $t \geq \tau$, então $V_t(A) \subset O_\varepsilon(F)$. Seja $z \in \omega(A)$. Então existem sequências $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $[0,\infty)$ e $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $\xi_n \in V_{t_n}(A)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $t_n \to \infty$ e $\xi_n \to z$. Logo, há $N \in \mathbb{N}$ de modo que, se $n \geq N$, então $t_n \geq \tau$. Consequentemente, $z \in \overline{O_\varepsilon(F)}$. Como isso é válido para todo $\varepsilon > 0$, segue que $z \in \overline{F} = F$, ou seja, $\omega(A) \subset F$.

Isso prova não só que $\omega(A)$ é um fechado minimal que atrai A, mas também que é o fechado mínimo com essa propriedade. Consequentemente, é o único fechado minimal que atrai A.

Por fim, a igualdade $\omega(\gamma_\tau^+(A)) = \omega(A)$ segue de (H2). □

Teorema 3.1.8.

a) Se $F \subset X$ é um atrator global de pontos fechado, então $\overline{\bigcup_{z\in X} \omega(z)} \subset F$. Em particular, se $\overline{\bigcup_{z\in X} \omega(z)}$ é um atrator global de pontos, ele é o único atrator global de pontos fechado minimal, e é denotado por $\widehat{\mathcal{M}}$.

b) Se $\omega(z)$ atrai z para cada $z \in X$, então existe um único atrator global de pontos fechado minimal $\widehat{\mathcal{M}}$, sendo $\widehat{\mathcal{M}} = \overline{\bigcup_{z\in X} \omega(z)}$.

c) Se $F \subset X$ é um atrator global fechado, então $\overline{\bigcup_{B\in\mathfrak{B}} \omega(B)} \subset F$. Em particular, se $\overline{\bigcup_{B\in\mathfrak{B}} \omega(B)}$ é um atrator global, ele é o único atrator global fechado minimal, e é denotado por $\mathcal{M}$.

d) Se $\omega(B)$ atrai B para cada $B \in \mathfrak{B}$, então existe um único atrator global fechado minimal $\mathcal{M}$, sendo $\mathcal{M} = \overline{\bigcup_{B\in\mathfrak{B}} \omega(B)}$.

Prova. Segue do lema precedente. □

Lema 3.1.9. Sejam $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado, $K \in \mathcal{K}$ e $A \in \mathcal{P}$. Se K atrai A e $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $[0,\infty)$ tal que $t_n \to \infty$, então toda sequência $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com $\xi_n \in V_{t_n}(A)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, possui uma subsequência que converge para algum ponto de K.

Prova. Como K atrai A, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ de modo que $V_{t_n}(A) \subset O_\varepsilon(K)$ para todo $n \geq N$. Logo, dada uma sequência $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\xi_n \in V_{t_n}(A)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, segue que $d(\xi_n, K) < \varepsilon$ para $n \geq N$, ou seja, $d(\xi_n, K) \to 0$. Sendo K compacto, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $z_n \in K$ de modo que $d(\xi_n, K) = d(\xi_n, z_n)$. Novamente por K ser compacto, há uma subsequência $(z_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ que converge para algum $z \in K$. Como $d(\xi_n, z_n) \to 0$, então $d(\xi_{n_j}, z) \to 0$, ou seja, $(\xi_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência convergente de $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cujo limite pertence a K. □

Proposição 3.1.10. Seja $A \in \mathcal{P}$ tal que $\omega(A)$ é um conjunto compacto e não vazio atraindo A. Então $\omega(A)$ é quasi-invariante e, consequentemente, negativamente invariante. O mesmo é válido para $\omega_B(A)$ caso este seja um conjunto compacto e não vazio atraindo A.

Prova. Seja $z \in \omega(A)$. Então existem sequências $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $[0,\infty)$ e $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{G}$ tais que $\{\varphi_n(0); n \in \mathbb{N}\} \subset A$, $\varphi_n(t_n) \to z$ e $t_n \to \infty$. Por (H2), $\varphi_n^{t_n} \in \mathcal{G}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\varphi_n^{t_n}(0) \to z$, segue de (H4) a existência de uma subsequência (que não será reindexada) e de uma função $\psi_0 \in \mathcal{G}$ de modo que $\psi_0(0) = z$ e $\varphi_n^{t_n}(t) \to \psi_0(t)$ para todo $t \geq 0$.

Por construção, $\psi_0(t) \in \omega(A)$ para todo $t \geq 0$. Seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \geq 1$ se $n \geq N$, e considere a sequência $(\varphi_n^{t_n-1})_{n\geq N}$. Desse modo, $\varphi_n^{t_n-1}(0) = \varphi_n(t_n - 1)$ e, como $\omega(A)$ é um compacto que atrai A, podemos usar o lema precedente para garantir (após passar por uma subsequência) que $(\varphi_n^{t_n-1}(0))_{n\geq N}$ é convergente. Utilizando novamente (H4), temos (após passar por uma nova subsequência) a existência de uma função $\psi_1 \in \mathcal{G}$, com $\varphi_n^{t_n-1}(t) \to \psi_1(t)$ para todo $t \geq 0$. Desse modo:

$$\psi_1^1(t) = \psi_1(t+1) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n^{t_n-1}(t+1) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n^{t_n}(t) = \psi_0(t).$$

Prosseguindo de modo indutivo, obtemos uma sequência $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{G}$ de modo que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\psi_n^1 = \psi_{n-1}$ e $\psi_n(t) \in \omega(A)$ para todo $t \geq 0$. Agora, para cada $t \in \mathbb{R}$, considere qualquer $n \in \mathbb{N}$ tal que $t + n \geq 0$, e defina $\psi(t) := \psi_n(t+n)$. Então ψ está bem definida, é uma órbita completa passando por z, e $\psi(t) \in \omega(A)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto, $\omega(A)$ é quasi-invariante. □

Lema 3.1.11. Seja $A \in \mathcal{P}$. Suponha que, para quaisquer sequências $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X e $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $[0,\infty)$ tais que $t_n \to \infty$ e $\xi_n \in V_{t_n}(A)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui subsequência convergente. Então $\omega(A)$ é um conjunto não vazio e fechado minimal que atrai A, além de ser compacto e quasi-invariante.

Prova. Pelos resultados precedentes, é necessário apenas provar que $\omega(A)$ é não vazio, compacto e atrai A.

Fixe qualquer sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $[0,\infty)$ tal que $t_n \to \infty$. Como A é não vazio, existe (por (H1)), para cada $n \in \mathbb{N}$, um elemento $\xi_n \in V_{t_n}(A)$. Segue da hipótese a existência de uma subsequência convergente de $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cujo limite pertence a $\omega(A)$. Portanto, $\omega(A)$ é não vazio.

Considere agora uma sequência $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\omega(A)$. Por definição, para cada $n \in \mathbb{N}$, existem sequências $(t_j^n)_{j\in\mathbb{N}}$ em $[0,\infty)$ e $(\xi_j^n)_{j\in\mathbb{N}}$ tais que $\lim_{j\to\infty} t_j^n = \infty$, $\xi_j^n \in V_{t_j^n}(A)$ para cada $j \in \mathbb{N}$ e $z_n = \lim_{j\to\infty} \xi_j^n$. Defina, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\xi_n := \xi_n^n$ e $t_n := t_n^n$. Então $\xi_n \in V_{t_n}(A)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e $t_n \to \infty$. Por hipótese, existe uma subsequência $(\xi_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge para algum $z \in \omega(A)$. Então $z_{n_j} \to z$ e, portanto, $\omega(A)$ é compacto.

Suponha agora que A não seja atraído por $\omega(A)$. Então existe $\varepsilon > 0$ de modo que, para todo $n \in \mathbb{N}$, há $t_n > n$ tal que $V_{t_n}(A) \not\subset O_\varepsilon(\omega(A))$. Então $t_n \to \infty$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\xi_n \in V_{t_n}(A)$ tal que $\xi_n \notin O_\varepsilon(\omega(A))$. Pela hipótese, existe uma subsequência $(\xi_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge para algum z. Por definição, $z \in \omega(A)$, o que contradiz a própria construção de $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Pelos resultados apresentados até aqui, os teoremas a seguir seguem de imediato.

Teorema 3.1.12. Seja $A \in \mathcal{P}$. O conjunto $\omega(A)$ é um compacto não vazio e quasi-invariante que atrai A se, e somente se, para quaisquer sequências $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X e $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $[0,\infty)$ tais que $t_n \to \infty$ e $\xi_n \in V_{t_n}(A)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui subsequência convergente. Neste caso, $\omega(A)$ é um conjunto fechado minimal que atrai A.

Teorema 3.1.13. Se $K \in \mathcal{K}$ atrai $A \in \mathcal{P}$, então $\omega(A)$ é um conjunto não vazio e fechado minimal que atrai A, além de ser compacto e quasi-invariante.

Corolário 3.1.14. Seja $A \in \mathcal{P}$ tal que $\overline{\gamma^+(A)} \in \mathcal{K}$. Então $\omega(A)$ é um conjunto não vazio, compacto e quasi-invariante que atrai A.

Prova. Segue diretamente do teorema anterior, visto que $\overline{\gamma^+(A)}$ é um compacto que atrai A. □

Lema 3.1.15. Seja $\mathcal{G}$ assintoticamente compacto.

(a) Se $B \in \mathfrak{B}$, então $\omega(B)$ é não vazio, compacto, quasi-invariante, e é um fechado minimal que atrai B. Se $V_{t_0}(\omega(B)) \subset B$ para algum $t_0 \geq 0$, então $\omega(B)$ é invariante.

(b) Se $\varphi \in \mathcal{G}$, então $\omega(\varphi)$ é não vazio, compacto e quasi-invariante. Além disso:

$$\lim_{t\to\infty} d(\varphi(t), \omega(\varphi)) = 0.$$

(c) Se ψ é uma órbita completa limitada, então $\alpha(\psi)$ é não vazio, compacto e quasi-invariante. Além disso:

$$\lim_{t\to-\infty} d(\psi(t), \alpha(\psi)) = 0.$$

Prova.

(a) Pelo Lema 3.1.11, basta provar a invariância de $\omega(B)$. Será provado inicialmente que $\omega(B) \subset B$. Dado $z \in \omega(B)$, segue da quasi-invariância de $\omega(B)$ a existência de uma órbita completa ψ em $\omega(B)$ tal que $\psi(0) = z$. Então $\psi^{-t_0}(0) \in \omega(B)$ e, como $V_{t_0}(\omega(B)) \subset B$, $z = \psi^{-t_0}(t_0) \in B$.

Considere agora $\varphi \in \mathcal{G}$ tal que $\varphi(0) \in \omega(B)$, e fixe $\tau \geq 0$. Afirmação: $\varphi(\tau) \in \omega(B)$. De fato, pela quasi-invariância de $\omega(B)$, existe uma órbita completa $\tilde{\psi}$ contida em $\omega(B)$ tal que $\tilde{\psi}(0) = \varphi(0)$. Considere a concatenação:

$$\psi(t) := \begin{cases} \tilde{\psi}(t), & \text{se } t \in (-\infty, 0] \\ \varphi(t), & \text{se } t \in [0, \infty). \end{cases}$$

Para cada $n \geq \tau$, seja $\psi_n(t) := \psi(t - n + \tau)$. Então $\psi_n(0) = \psi(\tau - n) = \tilde{\psi}(\tau - n) \in \omega(B) \subset B$, e $\psi_n(n) = \psi(\tau) = \varphi(\tau)$. Fazendo $n \to \infty$, obtém-se uma sequência constante $(\psi_n(n))_{n\in\mathbb{N}}$ e, portanto, $\varphi(\tau) \in \omega(B)$ (pois $\varphi(\tau) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(n)$ com $\psi_n \in G$ e $\psi_n(0) \in B$ para todo $n \in \mathbb{N}$).

(b) Sendo $\mathcal{G}$ assintoticamente compacto, pode-se provar que $\omega(\varphi)$ é compacto e não vazio de modo análogo à prova do Lema 3.1.11. A construção de uma órbita completa por cada ponto de $\omega(\varphi)$ pode ser feita similarmente à feita na Proposição 3.1.10.

(c) Se $t_n \to -\infty$, então $\psi(t_n) = \psi^{2t_n}(-t_n)$ e $\{\psi^{2t_n}(0); n \in \mathbb{N}\}$ é limitado. Da compacidade assintótica, segue a existência de uma subsequência convergente. O restante da demonstração segue como no item (b). □

Teorema 3.1.16. Sejam $\mathcal{G}$ condicionalmente assintoticamente compacto e $A \in \mathcal{P}$. Se existe $\tau \geq 0$ de modo que $\gamma_\tau^+(A) \in \mathfrak{B}$, então $\omega(A)$ é não vazio, compacto, quasi-invariante, e é um fechado minimal que atrai A.

Prova. Considere sequências $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $[0,\infty)$ e $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $t_n \to \infty$ e $\xi_n \in V_{t_n}(A)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Fixe uma subsequência $(t_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de modo que $t_{n_j} \geq \tau$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Afirmação: $\gamma_\tau^+(\gamma_\tau^+(A)) \in \mathfrak{B}$. De fato, seja $\varphi(t) \in V_t(\gamma_\tau^+(A))$ para qualquer $t \geq \tau$ fixado. Então $\varphi(0) \in \gamma_\tau^+(A)$, ou seja, existe $s \geq \tau$ de modo que $\varphi(0) \in V_s(A)$. Logo, $\varphi(t) \in V_t(V_s(A)) = V_{t+s}(A)$ e, como $t + s \geq \tau$, então $\varphi(t) \in \gamma_\tau^+(A)$. Portanto, $\gamma_\tau^+(\gamma_\tau^+(A)) \subset \gamma_\tau^+(A) \in \mathfrak{B}$.

Além disso, $V_{t_{n_j}}(A) = V_{t_{n_j}-\tau}(V_\tau(A))$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo, $\xi_{n_j} \in V_{t_{n_j}-\tau}(\gamma_\tau^+(A))$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e, por $\mathcal{G}$ ser condicionalmente assintoticamente compacto, há uma subsequência convergente de $(\xi_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$. O resultado segue então do Lema 3.1.11. □

Lema 3.1.17. Seja $\mathcal{G}$ φ-dissipativo e definitivamente limitado. Então há um conjunto limitado B_1 de modo que, para qualquer $K \in \mathcal{K}$, existem $\varepsilon(K) > 0$ e $t_1(K) > 0$ tais que $V_t(O_{\varepsilon(K)}(K)) \subset B_1$ para todo $t \geq t_1(K)$.

Prova. Sendo $\mathcal{G}$ φ-dissipativo, considere o conjunto B_0 da Definição 3.1.5. Fixado $\delta > 0$, como $\mathcal{G}$ é definitivamente limitado, existe $\tau \geq 0$ de modo que $B_1 := \gamma_\tau^+(O_\delta(B_0))$ é limitado.

Suponha por contradição que existam um compacto K e sequências $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de modo que $\varepsilon_n \to 0$, $t_n \to \infty$, $\varphi_n(0) \in O_{\varepsilon_n}(K)$ e $\varphi_n(t_n) \notin B_1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Fixe $n \in \mathbb{N}$

tal que $t_n \geq \tau$. Como $\varphi_n(t_n) = \varphi_n^t(t_n - t) \notin B_1$, então, para $t_n - t \geq \tau$, $\varphi_n^t(0) = \varphi_n(t) \notin O_\delta(B_0)$. Ou seja, $\varphi_n(t) \notin O_\delta(B_0)$ para $0 \leq t \leq t_n - \tau$.

Além disso, como $\varphi_n(0) \in O_{\varepsilon_n}(K)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e K é compacto, a menos de passar por uma subsequência, pode-se assumir que existe $z \in K$ de modo que $\varphi_n(0) \to z$. De fato, suponha que isso não ocorra. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $j \in \mathbb{N}$, existe $n_j \geq j$ de modo que $\varphi_{n_j}(0) \notin O_\varepsilon(K)$. Assim, para cada $k \in \mathbb{N}$, existem $j_k \geq k$ e $n_{j_k} \geq j_k$ de sorte que $\varepsilon_{n_{j_k}} < \varepsilon$ e $\varphi_{n_{j_k}}(0) \notin O_{\varepsilon_{n_{j_k}}}(K)$, o que é uma contradição.

Por (H4), existem $\varphi \in \mathcal{G}$ e uma subsequência $(\varphi_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de modo que $\varphi_{n_j} \to \varphi$ pontualmente, $\varphi(0) = z$ e $\varphi(t) \notin B_0$ para todo $t \geq 0$. Isso contradiz a definição de B_0. $\square$

Teorema 3.1.18. Se $\mathcal{G}$ possui um atrator global compacto invariante, então $\mathcal{G}$ é φ-dissipativo e assintoticamente compacto. Reciprocamente, se $\mathcal{G}$ é φ-dissipativo e assintoticamente compacto, então $\mathcal{G}$ possui um atrator global compacto invariante $\mathcal{A}$, que é único e dado por:

$$\mathcal{A} = \omega(B_1) = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} \omega(B) = \omega_B(X). \tag{3.2}$$

Aqui, B_1 é o conjunto do Lema 3.1.17. Além disso, $\mathcal{A}$ é o subconjunto compacto e invariante máximo de X, e é o mínimo dentre os atratores globais fechados.

Prova. Seja $\mathcal{A}$ um atrator global compacto invariante para $\mathcal{G}$, e defina $B_0 := O_\delta(\mathcal{A})$ para algum $\delta > 0$ fixado. Dado $\varphi \in \mathcal{G}$, o conjunto unitário $\{\varphi(0)\}$ é limitado e, consequentemente, é atraído por $\mathcal{A}$. Logo, $\varphi(t) \in B_0$ para t suficientemente grande, ou seja, $\mathcal{G}$ é φ-dissipativo.

Considere agora uma sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{G}$ tal que $B := \{\varphi_n(0); n \in \mathbb{N}\} \in \mathfrak{B}$. Assim, B é atraído por $\mathcal{A}$ e, consequentemente, se $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $[0,\infty)$ tal que $t_n \to \infty$, então $d(\varphi_n(t_n), \mathcal{A}) \to 0$. De fato, se isso não ocorre, então há $\varepsilon > 0$ de modo que, para todo $j \in \mathbb{N}$, existe $n_j \geq j$ tal que $\varphi_{n_j}(t_{n_j}) \notin O_\varepsilon(\mathcal{A})$. Seja $\tau = \tau(B,\varepsilon) \geq 0$ o tempo de atração do conjunto B a $\mathcal{A}$. Como $t_n \to \infty$, existe $j \in \mathbb{N}$ de sorte que $t_{n_j} \geq \tau$. Desse modo, $\varphi_{n_j}(t_{n_j}) \in O_\varepsilon(\mathcal{A})$, o que é uma contradição.

Já que $d(\varphi_n(t_n), \mathcal{A}) \to 0$ e $\mathcal{A}$ é compacto, há uma subsequência convergente de $(\varphi_n(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$, provando assim que $\mathcal{G}$ é assintoticamente compacto.

Reciprocamente, suponha que $\mathcal{G}$ seja φ-dissipativo e assintoticamente compacto. Pelo Corolário 3.0.15, $\mathcal{G}$ é definitivamente limitado. Considere o conjunto B_1 do lema precedente, e defina $\mathcal{A} := \omega(B_1)$. Pelo Lema 3.1.15, $\mathcal{A}$ é compacto e atrai B_1. Afirmação: $\mathcal{A}$ atrai conjuntos limitados. De fato, seja $B \in \mathfrak{B}$, e defina $K := \omega(B)$. Pelo Lema 3.1.15, K é compacto e atrai B. Considere $\varepsilon(K)$ e $t_1 = t_1(K)$ como no lema precedente, e fixe $\varepsilon \in (0, \varepsilon(K))$. Como K atrai B, $V_{t_0}(B) \subset O_\varepsilon(K)$ para algum $t_0 > 0$. Desse modo:

$$V_{t_0+t_1}(B) = V_{t_1}(V_{t_0}(B)) \subset V_{t_1}(O_\varepsilon(K)) \subset V_{t_1}(O_{\varepsilon(K)}(K)) \subset B_1.$$

Logo, $V_{t_0+t_1+t}(B) \subset V_t(B_1)$ para todo $t \geq 0$, e assim, como B_1 é atraído por $\mathcal{A}$, B também é. Novamente pelo lema precedente, existe $t_2 \geq 0$ tal que $V_{t_2}(\omega(B_1)) \subset B_1$. Pelo Lema 3.1.15,

$\mathcal{A}$ é invariante. Logo, $\mathcal{A}$ é um atrator global fechado e, pelo Lema 3.1.7, $\omega(B) \subset \mathcal{A}$ para todo $B \in \mathfrak{B}$. Isso conclui a igualdade em (3.2).

Para a maximalidade de $\mathcal{A}$, seja A_1 um subconjunto compacto e invariante de X. Então $\omega(A_1) = A_1$ e, consequentemente, $A_1 \subset \mathcal{A}$ por (3.2).

Para a minimalidade de $\mathcal{A}$, seja A_2 um atrator global fechado. Como $\mathcal{A}$ é limitado, para cada $\varepsilon > 0$ existe $t(\varepsilon) \geq 0$ de modo que $V_t(\mathcal{A}) \subset O_\varepsilon(A_2)$ para todo $t \geq t(\varepsilon)$. Sendo $\mathcal{A}$ invariante, segue que $\mathcal{A} \subset O_\varepsilon(A_2)$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário e A_2 é fechado, conclui-se que $\mathcal{A} \subset A_2$. $\square$

3.2 Caracterizações do Atrator Global

Serão agora apresentadas algumas caracterizações do atrator global, compacto e invariante maximal.

Teorema 3.2.1. Seja $\mathcal{G}$ assintoticamente compacto e φ-dissipativo. Então o atrator global, compacto e invariante maximal $\mathcal{A}$ pode ser caracterizado das seguintes formas:

(a) $\mathcal{A} = \bigcup_{B \in \mathfrak{B}} \omega(B)$;

(b) $\mathcal{A} = \omega_B(X)$;

(c) $\mathcal{A} = \omega_B(B_1)$, em que $B_1 \in \mathfrak{B}$ é o conjunto do Lema 3.1.17;

(d) $\mathcal{A} = \bigcup_{K \in \mathcal{K}} \omega(K)$;

(e) $\mathcal{A}$ é a união de todas as órbitas completas limitadas em X;

(f) $\mathcal{A}$ é a união de todas as órbitas completas relativamente compactas em X;

(g) $\mathcal{A}$ é o conjunto limitado e invariante máximo em X.

Prova. Os itens (a), (b) e (c) seguem do Teorema 3.1.18.

(d) Como $\mathcal{A}$ é compacto e invariante, $\omega(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. Assim:

$$\bigcup_{K \in \mathcal{K}} \omega(K) \subset \bigcup_{B \in \mathfrak{B}} \omega(B) = \mathcal{A} = \omega(\mathcal{A}) \subset \bigcup_{K \in \mathcal{K}} \omega(K).$$

(e) e (f) Como $\mathcal{A}$ é invariante, é quasi-invariante. Logo, dado $z \in \mathcal{A}$, existe uma órbita completa ψ tal que $\psi(0) = z$ e $\psi(t) \in \mathcal{A}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Seja $\gamma(\psi) := \{\psi(t); t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{A} \in \mathfrak{B}$. Então $\gamma(\psi)$ é limitado e relativamente compacto, já que $\overline{\gamma(\psi)} \subset \mathcal{A}$. Desse modo, $\mathcal{A}$ está contido na união das órbitas completas limitadas de X e também na união das órbitas completas relativamente compactas de X.

Por outro lado, se $z \in X$ e ψ_z é uma órbita completa limitada (ou relativamente compacta) tal que $\psi(0) = z$, considere o conjunto $\gamma(\psi_z) := \{\psi_z(t); t \in \mathbb{R}\}$. Observe que $\gamma(\psi_z)$ é negativamente invariante, pois se $\psi_z(t) \in \gamma(\psi_z)$, então $\psi_z(t) = V_t(\psi_z(0)) \in V_t(\gamma(\psi_z))$ para todo $t \geq 0$. Logo:

$$\gamma(\psi_z) \subset \overline{\gamma(\psi_z)} = \bigcap_{\tau \geq 0} \overline{\gamma(\psi_z)} \subset \bigcap_{\tau \geq 0} \overline{\gamma_\tau^+(\gamma(\psi_z))} = \omega(\gamma(\psi_z)) \subset \bigcup_{B \in \mathfrak{B}} \omega(B) = \mathcal{A}.$$

(g) Seja $D \subset X$ um conjunto limitado e invariante. Então:

$$D \subset \bigcap_{\tau \geq 0} \overline{\gamma_\tau^+(D)} = \omega(D) \subset \bigcup_{B \in \mathfrak{B}} \omega(B) = \mathcal{A}.$$ □

Definição 3.2.2. Uma função $\mathcal{L} : X \to \mathbb{R}$ é uma *função de Lyapunov para $\mathcal{G}$* se as seguintes condições são válidas:

- $\mathcal{L}$ é contínua;
- $\mathcal{L}(\varphi(t)) \leq \mathcal{L}(\varphi(s))$ sempre que $\varphi \in \mathcal{G}$ e $t \geq s \geq 0$;
- se $\mathcal{L}(\psi) \equiv constante$ para alguma órbita completa ψ, então ψ é estacionária.

Lema 3.2.3. Seja $z \in X$. Se existem uma órbita completa ψ_z por z e um compacto K de modo que $\{\psi_z(t); t \leq 0\} \subset K$, então $\alpha(\psi_z)$ é quasi-invariante.

Prova. Seja $x \in \alpha(\psi_z)$. Então existe uma sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$ (que será suposta, sem perda de generalidade, decrescente e não positiva) de modo que $t_n \to -\infty$ e $\psi_z(t_n) \to x$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\psi_z^{t_n} \in \mathcal{G}$, e, além disso, $\psi_z^{t_n}(0) \to x$. Segue de (H4) a existência de uma subsequência (que não será reindexada) e de uma função $g_0 \in \mathcal{G}$ de sorte que $g_0(0) = x$ e $\psi_z^{t_n}(t) \to g_0(t)$ para todo $t \geq 0$. Como $t_n + t \to -\infty$, então $g_0(t) \in \alpha(\psi_z)$ para todo $t \geq 0$.

Observe agora que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $t_n - 1 \leq 0$ e, portanto, $\psi_z^{t_n-1}(0) = \psi_z(t_n - 1) \in K$. Sendo K compacto, pode-se passar a uma subsequência (que novamente não será reindexada), de modo que $\psi_z^{t_n-1}(0) \to y$ para algum $y \in K$. Por (H4), existem uma subsequência (não reindexada) e uma função $g_1 \in \mathcal{G}$ tais que $g_1(0) = y$ e $\psi_z^{t_n-1}(t) \to g_1(t)$ para todo $t \geq 0$. Desse modo, $g_1(t) \in \alpha(\psi_z)$ para todo $t \geq 0$ e, além disso, $g_1^1 = g_0$. De fato, para cada $t \geq 0$:

$$g_1^1(t) = g_1(t+1) = \lim_{n\to\infty} \psi_z^{t_n-1}(t+1) = \lim_{n\to\infty} \psi_z^{t_n}(t) = g_0(t).$$

Prosseguindo de modo indutivo, encontra-se, para cada $n \in \mathbb{N}$, uma função $g_n \in \mathcal{G}$ tal que $g_n^1 = g_{n-1}$ e $g_n(t) \in \alpha(\psi_z)$ para todo $t \geq 0$. Agora, dado $t \in \mathbb{R}$, considere qualquer natural n de modo que $t + n \geq 0$, e defina $g(t) := g_n(t+n)$. Então g está bem definida, é uma órbita completa passando por x e $g(t) \in \alpha(\psi_z)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto, $\alpha(\psi_z)$ é quasi-invariante. □

Lema 3.2.4. Suponha a existência de uma função de Lyapunov $\mathcal{L}: X \to \mathbb{R}$ para $\mathcal{G}$. Seja $z \in X$ tal que existem uma órbita completa ψ_z por z e um compacto K de modo que $\{\psi_z(t); t \leq 0\} \subset K$. Então $\alpha(\psi_z) \subset Z(\mathcal{G})$.

Prova. Considere inicialmente uma sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$ estritamente decrescente tal que $t_n \to -\infty$ e $t_1 \leq 0$. Por hipótese, há uma subsequência convergente $(\psi_z(t_{n_j}))_{j\in\mathbb{N}}$ de $(\psi_z(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Então $(\mathcal{L}(\psi_z(t_{n_j})))_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência crescente. De fato, se $k \geq j$, então $t_{n_j} \geq t_{n_k}$, ou seja, existe $r > 0$ tal que $t_{n_j} = t_{n_k} + r$. Logo, $\psi_z(t_{n_j}) = \psi_z(t_{n_k} + r) = \psi_z^{t_{n_k}}(r)$ e $\psi_z^{t_{n_k}} \in \mathcal{G}$. Desse modo:

$$\mathcal{L}(\psi_z(t_{n_j})) = \mathcal{L}(\psi_z^{t_{n_k}}(r)) \leq \mathcal{L}(\psi_z^{t_{n_k}}(0)) = \mathcal{L}(\psi_z(t_{n_k})).$$

Como a sequência $(\psi_z(t_{n_j}))_{j\in\mathbb{N}}$ converge e $\mathcal{L}$ é contínua, então a sequência $(\mathcal{L}(\psi_z(t_{n_j})))_{j\in\mathbb{N}}$ converge, ou seja, é limitada superiormente; sendo também crescente, conclui-se que:

$$\lim_{j\to\infty} \mathcal{L}(\psi_z(t_{n_j})) = \sup\{\mathcal{L}(\psi_z(t_{n_j})); j \in \mathbb{N}\} =: L.$$

Observe que, por conta dessa igualdade, o limite não depende da sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$. De fato, sejam $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\tilde{\tau}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ duas sequências nas condições acima, e suponha que $\sup\{\mathcal{L}(\psi_z(\tau_n)); n \in \mathbb{N}\} > \sup\{\mathcal{L}(\psi_z(\tilde{\tau}_k)); k \in \mathbb{N}\}$. Então há $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{L}(\psi_z(\tau_{n_0})) > \sup\{\mathcal{L}(\psi_z(\tilde{\tau}_k)); k \in \mathbb{N}\}$. Seja $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\tilde{\tau}_{k_0} < \tau_{n_0}$. Logo, $\mathcal{L}(\psi_z(\tilde{\tau}_{k_0})) \geq \mathcal{L}(\psi_z(\tau_{n_0})) > \sup\{\mathcal{L}(\psi_z(\tilde{\tau}_k)); k \in \mathbb{N}\}$, uma contradição.

Considere agora $x \in \alpha(\psi_z)$. Como $x \in \alpha(\psi_z)$, existe uma sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$ tal que $t_n \to -\infty$ e $\psi_z(t_n) \to x$. Há então uma subsequência estritamente decrescente $(t_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $t_{n_1} \leq 0$. Assim, $\lim_{j\to\infty} \psi_z(t_{n_j}) = x$ e, pelo que foi feito, $\lim_{j\to\infty} \mathcal{L}(\psi_z(t_{n_j})) = L$. Pela continuidade de $\mathcal{L}$, segue que $\mathcal{L}(x) = L$. Isso mostra que $\mathcal{L}(\alpha(\psi_z)) = \{L\}$.

Agora, pelo lema precedente, sabemos que $\alpha(\psi_z)$ é quasi-invariante. Desse modo, existe uma órbita completa $\tilde{\psi}$ passando por x tal que $\tilde{\psi}(t) \in \alpha(\psi_z)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim, $\mathcal{L}(\tilde{\psi}(t)) = L = \mathcal{L}(x)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, ou seja, $\tilde{\psi}$ é uma solução estacionária e $x \in Z(\mathcal{G})$. □

Teorema 3.2.5. Seja $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado contínuo e suponha que exista uma função de Lyapunov $\mathcal{L}: X \to \mathbb{R}$ para $\mathcal{G}$. Suponha ainda que $\mathcal{A}$ seja um atrator global, compacto e invariante maximal para $\mathcal{G}$. Então $\mathcal{A} = W^u(Z(\mathcal{G}))$, em que $W^u(Z(\mathcal{G}))$ é o *conjunto instável* de $Z(\mathcal{G})$:

$$W^u(Z(\mathcal{G})) := \left\{ z \in X;\ \text{existe uma órbita completa } \psi_z \text{ por } z, \text{ com } d(\psi_z(-t), Z(\mathcal{G})) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0 \right\}.$$

Prova. Seja $z \in \mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ é invariante, existe uma órbita completa ψ_z por z tal que $\psi_z(t) \in \mathcal{A}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Por $\mathcal{A}$ ser compacto, segue do lema precedente que $\alpha(\psi_z) \subset Z(\mathcal{G})$.

Afirmação: $\lim_{t\to\infty} d(\psi_z(-t), \alpha(\psi_z)) = 0$. De fato, suponha que isso não ocorra. Então há $\varepsilon > 0$ de modo que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $t_n \geq n$ tal que $\psi_z(-t_n) \notin \mathcal{O}_\varepsilon(\alpha(\psi_z))$. Como $\{\psi_z(-t_n); n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{A}$ e $\mathcal{A}$ é compacto, há uma subsequência convergente de $(\psi_z(-t_n))_{n\in\mathbb{N}}$, cujo limite pertence a $\alpha(\psi_z)$ por definição. Isso contradiz a construção de $(\psi_z(-t_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Como $\alpha(\psi_z)\subset Z(\mathcal{G})$, segue da afirmação que $\lim_{t\to\infty} d(\psi_z(-t),Z(\mathcal{G}))=0$. Isso implica que $z\in W^u(Z(\mathcal{G}))$.

Reciprocamente, seja $z\in W^u(Z(\mathcal{G}))$. Então existe uma órbita completa ψ_z por z de sorte que $\lim_{t\to\infty} d(\psi_z(-t),Z(\mathcal{G}))=0$. Como $Z(\mathcal{G})\subset\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}$ é um atrator global, então, dado $\varepsilon>0$, existe $t_0\geq 0$ tal que $V_t(z)\subset O_\varepsilon(\mathcal{A})\in\mathfrak{B}$ e $\psi_z(-t)\in O_\varepsilon(\mathcal{A})$ para todo $t\geq t_0$. Logo, ψ_z é limitada em $(-\infty,-t_0]\cup[t_0,\infty)$. Como $\mathcal{G}$ é contínuo, ψ_z é limitada no compacto $[-t_0,t_0]$. Desse modo, $\gamma(\psi_z)=\{\psi_z(t);t\in\mathbb{R}\}\in\mathfrak{B}$ e, consequentemente, $\mathcal{A}$ atrai $\gamma(\psi_z)$. Uma vez que $\gamma(\psi_z)$ é negativamente invariante, $z\in O_\varepsilon(\mathcal{A})$ para todo $\varepsilon>0$. Portanto, $z\in\mathcal{A}$. $\square$

3.3 O φ-atrator Global

Será agora introduzido o conceito de φ-atrator, que é ainda mais fraco que o atrator de pontos. A principal diferença é que o φ-atrator atrai cada trajetória em um tempo diferente, enquanto o atrator de pontos atrai todas as trajetórias que partem de um determinado ponto ao mesmo tempo. A partir disso, alguns conceitos e resultados serão adaptados para esse caso.

Definição 3.3.1. Se $A\in\mathcal{P}$, fica definido:

$$\omega_\varphi(A):=\bigcup_{\substack{\varphi\in\mathcal{G}\\ \varphi(0)\in A}}\omega(\varphi).$$

Definição 3.3.2.

(a) Um conjunto $A\in\mathcal{P}$ φ-*atrai* outro conjunto $M\in\mathcal{P}$ se, para quaisquer $\varepsilon>0$ e $\varphi\in\mathcal{G}$, com $\varphi(0)\in M$, existe $t_0=t_0(\varphi,\varepsilon)\geq 0$ de modo que $\varphi(t)\in O_\varepsilon(A)$ para todo $t\geq t_0$. Além disso, A φ-atrai um ponto $z\in X$ se A φ-atrai $\{z\}$.

(b) Um conjunto $A\in\mathcal{P}$ é um φ-*atrator global* se A φ-atrai todos os elementos de X.

(c) O semifluxo generalizado $\mathcal{G}$ é φ-*definitivamente limitado* se, para todo $\varphi\in\mathcal{G}$, existe $t_0=t_0(\varphi)\geq 0$ de modo que $\gamma^+_{t_0}(\varphi)\in\mathfrak{B}$.

(d) O semifluxo generalizado $\mathcal{G}$ é φ-*assintoticamente compacto* se, para toda sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $[0,\infty)$, com $t_n\to\infty$, e para qualquer $\varphi\in\mathcal{G}$, a sequência $(\varphi(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ possui subsequência convergente em X.

(e) O semifluxo generalizado $\mathcal{G}$ é φ-*condicionalmente assintoticamente compacto* se, para toda sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $[0,\infty)$, com $t_n\to\infty$, e para qualquer $\varphi\in\mathcal{G}$ tal que $\gamma^+_{t_0}(\varphi)\in\mathfrak{B}$ para algum $t_0=t_0(\varphi)\geq 0$, a sequência $(\varphi(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ possui subsequência convergente em X.

Proposição 3.3.3.

(a) $\mathcal{G}$ φ-dissipativo $\Leftrightarrow$ existe um φ-atrator global limitado para $\mathcal{G}$.

(b) Atrator $\Rightarrow$ atrator de pontos $\Rightarrow$ φ-atrator.

(c) $\mathcal{G}$ assintoticamente compacto $\Rightarrow$ $\mathcal{G}$ φ-assintoticamente compacto.

(d) $\mathcal{G}$ definitivamente limitado $\Rightarrow$ $\mathcal{G}$ φ-definitivamente limitado.

(e) $\mathcal{G}$ φ-assintoticamente compacto $\Leftrightarrow$ $\mathcal{G}$ φ-condicionalmente assintoticamente compacto e φ-definitivamente limitado.

Prova. Os itens de (a) a (d) seguem diretamente da definição. Para o item (e), vale a mesma prova feita na Proposição 3.0.14. □

Lema 3.3.4. Seja $F \in \mathfrak{C}$. Se F φ-atrai $A \in \mathcal{P}$, então $\overline{\omega_\varphi(A)} \subset F$ e, para cada $\varphi \in \mathcal{G}$ tal que $\varphi(0) \in A$, $\omega(\varphi) \subset F$. Em particular, se $\omega_\varphi(A)$ φ-atrai A, então $\overline{\omega_\varphi(A)}$ é o conjunto fechado mínimo que φ-atrai A.

Prova. Seja $\varphi \in \mathcal{G}$ com $\varphi(0) \in A$. Como F φ-atrai A, dado $n > 0$, existe $t_n(\varphi) \geq 0$ de modo que $\varphi(t) \in O_{1/(2n)}(F)$ para todo $t \geq t_n(\varphi)$. Seja $z \in \omega(\varphi)$. Então $z = \lim_{n\to\infty} \varphi(t_n)$ para alguma sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $[0,\infty)$ tal que $t_n \to \infty$. Pode-se extrair uma subsequência crescente $(t_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $t_{n_j} \geq t_j(\varphi)$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e $z = \lim_{j\to\infty} \varphi(t_{n_j})$.

Desse modo, para cada $j \in \mathbb{N}$, $\varphi(t_{n_j}) \in O_{1/(2k)}(F)$ para todo $k \leq j$. Fazendo $j \to \infty$, conclui-se que $z \in \overline{O_{1/(2k)}(F)} \subset O_{1/k}(F)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Então $z \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} O_{1/k}(F) = F$. Portanto, $\omega(\varphi) \subset F$ e $\overline{\omega_\varphi(A)} \subset F$. □

Lema 3.3.5. Sejam $A, M \in \mathcal{P}$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) A φ-atrai M;

(b) Para cada $\tau \geq 0$, A φ-atrai $\gamma_\tau^+(M)$.

Prova.

(a) $\Rightarrow$ (b) Fixe $\tau \geq 0$. Sejam $\varepsilon > 0$ e $\varphi \in \mathcal{G}$, com $\varphi(0) \in \gamma_\tau^+(M)$. Então existem $\tilde{\varphi} \in \mathcal{G}$ e $t_0 \geq \tau$ de modo que $\tilde{\varphi}(0) \in M$ e $\tilde{\varphi}(t_0) = \varphi(0)$. Considere a concatenação $\theta \in \mathcal{G}$ de $\tilde{\varphi}$ e φ. Então $\theta(0) \in M$ e, como A φ-atrai M, existe $t_1 \geq t_0$ de modo que $\theta(s) \in O_\varepsilon(A)$ para todo $s \geq t_1$. Logo, $\varphi(s) \in O_\varepsilon(A)$ para todo $s \geq t_1$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Basta fixar $\tau = 0$. □

Lema 3.3.6. Sejam $A \in \mathcal{P}$ e $\tau \geq 0$. Então $\omega_\varphi(\gamma_\tau^+(A)) = \omega_\varphi(A)$.

Prova. Seja $z \in \omega_\varphi(\gamma_\tau^+(A))$. Então existem $\varphi \in \mathcal{G}$ e uma sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $[0,\infty)$ de modo que $t_n \to \infty$, $\varphi(0) \in \gamma_\tau^+(A)$ e $z = \lim_{n\to\infty} \varphi(t_n)$. Há, portanto, $t_0 \geq \tau$ e $\tilde{\varphi} \in \mathcal{G}$ tais que $\tilde{\varphi}(0) \in A$ e $\tilde{\varphi}(t_0) = \varphi(0)$. Seja $\theta \in \mathcal{G}$ a concatenação de $\tilde{\varphi}$ com φ. Então $\theta(0) \in A$ e, escolhendo uma subsequência $(t_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de sorte que $t_{n_j} \geq t_0$ para todo $j \in \mathbb{N}$, conclui-se que $\lim_{j\to\infty}\theta(t_{n_j}) = z$, ou seja, $z \in \omega_\varphi(A)$.

Considere agora $z \in \omega_\varphi(A)$. Então existem $\varphi \in \mathcal{G}$ e uma sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $[0,\infty)$ de modo que $t_n \to \infty$, $\varphi(0) \in A$ e $z = \lim_{n\to\infty}\varphi(t_n)$. Considere uma subsequência $(t_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de sorte que $t_{n_j} \geq \tau$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Desse modo, $\varphi^\tau(0) \in \gamma_\tau^+(A)$ e $\varphi^\tau(t_{n_j} - \tau) \to z$, com $t_{n_j} - \tau \to \infty$. Portanto, $z \in \omega_\varphi(\gamma_\tau^+(A))$. $\square$

Teorema 3.3.7.

(a) Se $F \subset X$ é um φ-atrator global fechado, então $\overline{\bigcup_{z\in X}\omega_\varphi(z)} \subset F$. Em particular, se $\overline{\bigcup_{z\in X}\omega_\varphi(z)}$ for um φ-atrator global, será então um φ-atrator global fechado minimal, denotado por $\widehat{N}$.

(b) Se, para cada $z \in X$, $\omega_\varphi(z)$ φ-atrai z, então existe um φ-atrator global fechado minimal $\widehat{N}$:

$$\widehat{N} = \overline{\bigcup_{z\in X}\omega_\varphi(z)} = \omega_\varphi(X).$$

Prova.

(a) Como F é um φ-atrator global fechado, então F φ-atrai cada $z \in X$. Segue do Lema 3.3.4 que $\omega_\varphi(z) \subset F$ para cada $z \in X$. Portanto, $\overline{\bigcup_{z\in X}\omega_\varphi(z)} \subset F$.

(b) Seja $\xi \in X$. Como $\omega_\varphi(\xi)$ φ-atrai ξ, então $\overline{\bigcup_{z\in X}\omega_\varphi(z)}$ φ-atrai ξ. Logo, $\overline{\bigcup_{z\in X}\omega_\varphi(z)}$ é um φ-atrator global fechado. Segue do item (a) que é o mínimo com essa propriedade. $\square$

Lema 3.3.8. Seja $K \in \mathcal{K}$. Se $\varphi \in \mathcal{G}$ é tal que $\lim_{t\to\infty} d(\varphi(t), K) = 0$, então, para toda sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $[0,\infty)$ tal que $t_n \to \infty$, a sequência $(\varphi(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente, cujo limite pertence a K.

Prova. Como $t_n \to \infty$, segue da hipótese que $\lim_{n\to\infty} d(\varphi(t_n), K) = 0$. Sendo K compacto, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $z_n \in K$ de modo que $d(\varphi(t_n), K) = d(\varphi(t_n), z_n)$. Novamente por K ser compacto, pode-se extrair uma subsequência $(z_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge para algum $z \in K$. Desse modo, $d(\varphi(t_{n_j}), z) \to 0$, ou seja, $\varphi(t_{n_j}) \to z$. $\square$

Teorema 3.3.9. Seja $A \in \mathcal{P}$. Se, para toda sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $[0,\infty)$, com $t_n \to \infty$, e para qualquer $\varphi \in \mathcal{G}$ tal que $\varphi(0) \in A$, a sequência $(\varphi(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ possui subsequência convergente em X, então $\omega_\varphi(A)$ é não vazio, quasi-invariante e φ-atrai A. O conjunto $\overline{\omega_\varphi(A)}$ é o fechado mínimo que φ-atrai A. Além disso, se $\varphi \in \mathcal{G}$ é tal que $\varphi(0) \in A$, então $\omega(\varphi)$ é um conjunto não vazio, compacto e quasi-invariante, e $\lim_{t\to\infty} d(\varphi(t), \omega(\varphi)) = 0$.

Prova. Sendo A não vazio, segue de (H1) a existência de $\varphi \in \mathcal{G}$ tal que $\varphi(0) \in A$. Seja $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $[0,\infty)$ tal que $t_n \to \infty$. Por hipótese, $(\varphi(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência $(\varphi(t_{n_j}))_{j\in\mathbb{N}}$ que converge para algum $\xi \in \omega(\varphi) \subset \omega_\varphi(A)$. Então $\omega(\varphi) \neq \emptyset$ e, assim, $\omega_\varphi(A) \neq \emptyset$.

Para provar que $\omega_\varphi(A)$ φ-atrai A, suponha que isso não ocorra. Então existem $\varepsilon_0 > 0$ e $\varphi \in \mathcal{G}$, com $\varphi(0) \in A$, de modo que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(t_n) \notin O_{\varepsilon_0}(\omega_\varphi(A))$ para algum $t_n > n$.

Assim, $t_n \to \infty$ e, por hipótese, $(\varphi(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admite uma subsequência $(\varphi(t_{n_j}))_{j\in\mathbb{N}}$ que converge para algum $\zeta \in \omega(\varphi) \subset \omega_\varphi(A)$, o que é uma contradição. Portanto, $\omega_\varphi(A)$ φ-atrai A. Além disso, pelo Lema 3.3.4, $\overline{\omega_\varphi(A)}$ é o fechado mínimo que φ-atrai A.

Seja agora $\varphi \in \mathcal{G}$ tal que $\varphi(0) \in A$. A fim de provar que $\omega(\varphi)$ é quasi-invariante, basta repetir a prova da Proposição 3.1.10, construindo uma órbita completa em $\omega(\varphi)$. Isso também implica que $\omega_\varphi(A)$ é quasi-invariante.

Para provar que $\omega(\varphi)$ é compacto, considere uma sequência $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\omega(\varphi)$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $t_n > n$ tal que $d(\varphi(t_n), z_n) < 1/n$. Como $(\varphi(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergindo para algum $\zeta \in \omega(\varphi)$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência que converge para ζ. Portanto, $\omega(\varphi)$ é compacto.

Por fim, para mostrar que $\lim_{t\to\infty} d(\varphi(t), \omega(\varphi)) = 0$, suponha que isso não seja válido. Então existe $\varepsilon_0 > 0$ de modo que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $d(\varphi(t_n), \omega(\varphi)) > \varepsilon_0$ para algum $t_n > n$. Isso, por sua vez, contradiz a hipótese e a definição de $\omega(\varphi)$. □

Observação 3.3.10. Comparando o teorema precedente com o Lema 3.1.11, observa-se que a condição de $\omega_\varphi(A)$ ser compacto não é garantida.

Corolário 3.3.11. Sejam $z \in X$ e $K \in \mathcal{K}$. Se $\lim_{t\to\infty} d(\varphi(t), K) = 0$ para qualquer $\varphi \in \mathcal{G}$ tal que $\varphi(0) = z$, então $\omega_\varphi(z)$ é não vazio, quasi-invariante e φ-atrai z. O conjunto $\overline{\omega_\varphi(z)}$ é o fechado mínimo que φ-atrai z.

Prova. Segue imediatamente do Lema 3.3.8 e do Teorema 3.3.9. □

Observação 3.3.12. Os itens (a) e (b) do Lema 3.1.15 permanecem válidos com a hipótese de que $\mathcal{G}$ é φ-assintoticamente compacto.

Proposição 3.3.13. Se $\mathcal{G}$ é φ-dissipativo, então $\mathcal{G}$ é φ-definitivamente limitado e $\omega_\varphi(X)$ é limitado. Por outro lado, se $\mathcal{G}$ é φ-assintoticamente compacto e $\omega_\varphi(X) \in \mathfrak{B}$, então $\mathcal{G}$ é φ-dissipativo.

Prova. Se $\mathcal{G}$ é φ-dissipativo, então há $B_0 \in \mathfrak{B}$ tal que, para cada $\varphi \in \mathcal{G}$, existe $t_0 = t_0(\varphi) \geq 0$ de modo que $\varphi(t) \in B_0$ para todo $t \geq t_0$. Desse modo, $\gamma^+_{t_0}(\varphi) \subset B_0 \in \mathfrak{B}$ e, consequentemente, $\mathcal{G}$ é φ-definitivamente limitado. Além disso:

$$\omega(\varphi) = \bigcap_{t\geq 0} \overline{\gamma^+_t(\varphi)} \subset \overline{\gamma^+_{t_0}(\varphi)} \subset \overline{B_0}.$$

Logo:

$$\omega_\varphi(X) = \bigcup_{\substack{\varphi\in\mathcal{G} \\ \varphi(0)\in X}} \omega(\varphi) \subset \overline{B_0} \in \mathfrak{B}.$$

Agora, se $\mathcal{G}$ é φ-assintoticamente compacto e $\omega_\varphi(X) \in \mathfrak{B}$, segue do Teorema 3.3.9 que $\omega_\varphi(X)$ é um φ-atrator global limitado. Portanto, $\mathcal{G}$ é φ-dissipativo. □

Observação 3.3.14. Sejam $A \in \mathcal{P}$ e $\varphi \in \mathcal{G}$ tais que $\varphi(0) \in A$. Se $\overline{\gamma^+(\varphi)} \in \mathcal{K}$, ou se $\mathcal{G}$ é φ-condicionalmente assintoticamente compacto e $\gamma^+(\varphi) \in \mathfrak{B}$, então, para toda sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $[0,\infty)$ tal que $t_n \to \infty$, a sequência $(\varphi(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ possui subsequência convergente. Se isso acontecer para toda $\varphi \in \mathcal{G}$ tal que $\varphi(0) \in A$, será possível aplicar o Teorema 3.3.9.

Teorema 3.3.15. Se $\mathcal{G}$ é φ-assintoticamente compacto, então existe o mínimo φ-atrator global fechado e não vazio $\widehat{N}$:

$$\widehat{N} = \overline{\bigcup_{z\in X} \omega_\varphi(z)} = \overline{\omega_\varphi(X)}. \tag{3.3}$$

Prova. Sejam $z \in X$ e $\varphi \in \mathcal{G}$, com $\varphi(0) = z$. Considere uma sequência arbitrária $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $[0,\infty)$ tal que $t_n \to \infty$. Como $\mathcal{G}$ é φ-assintoticamente compacto, a sequência $(\varphi(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admite subsequência convergente. Logo, pelo Teorema 3.3.9, $\omega_\varphi(z)$ é não vazio, quasi-invariante e φ-atrai z. Desse modo, pelo Teorema 3.3.7, existe o mínimo φ-atrator global fechado $\widehat{N}$, dado por (3.3). Como $\widehat{N} \supset \omega_\varphi(z)$, então $\widehat{N} \neq \emptyset$. $\square$

Proposição 3.3.16. Se $\mathcal{G}$ é assintoticamente compacto e φ-dissipativo, então seu φ-atrator global fechado mínimo $\widehat{N} = \overline{\omega_\varphi(X)}$ pode ser caracterizado por $\widehat{N} = \overline{\omega_\varphi(B_1)}$, em que B_1 é o conjunto do Lema 3.1.17.

Prova. Seja $B_1 \in \mathfrak{B}$ como no Lema 3.1.17, e defina $D := \overline{\omega_\varphi(B_1)}$. Como $\mathcal{G}$ é φ-assintoticamente compacto, o Teorema 3.3.9 implica que $\omega_\varphi(B_1)$ é não vazio, quasi-invariante e φ-atrai B_1. Pelo Teorema 3.3.15, $\widehat{N} = \overline{\bigcup_{z\in X} \omega_\varphi(z)}$ é o mínimo φ-atrator global fechado. Resta provar que $\widehat{N} = D$. Observe que:

$$D = \overline{\omega_\varphi(B_1)} \subset \overline{\bigcup_{z\in X} \omega_\varphi(z)} = \widehat{N}.$$

Por outro lado, se $x \in \bigcup_{z\in X} \omega_\varphi(z)$, então $x \in \omega_\varphi(z)$ para algum $z \in X$. Logo, $x \in \omega(\varphi)$ para alguma $\varphi \in \mathcal{G}$ tal que $\varphi(0) = z$. Pelo Lema 3.1.15, $\omega(\varphi)$ é não vazio, compacto e quasi-invariante, e $\lim_{t\to\infty} d(\varphi(t), \omega(\varphi)) = 0$. Assim, se $K := \omega(\varphi) \in \mathcal{K}$, existem, pelo Lema 3.1.17, $\varepsilon(K) > 0$ e $t_0 = t_0(K) > 0$ de modo que $V_t(O_{\varepsilon(K)}(K)) \subset B_1$ para todo $t \geq t_0$. Fixe $\varepsilon \in (0, \varepsilon(K))$. Então existe $t_1 = t_1(\varphi, \varepsilon) \geq 0$ de sorte que $\varphi(t) \in O_\varepsilon(K)$ para todo $t \geq t_1$. Assim:

$$\varphi^{t_1}(t) \in V_t(O_\varepsilon(K)) \subset V_t(O_{\varepsilon(K)}(K)) \subset B_1 \quad \forall t \geq t_0.$$

Como $\mathcal{G}$ é assintoticamente compacto, para toda $\psi \in \mathcal{G}$ tal que $\psi(0) \in B_1$, e para toda sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $[0,\infty)$ tal que $t_n \to \infty$, a sequência $(\psi(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ possui subsequência convergente. Assim, pelo Teorema 3.3.9, $\omega_\varphi(B_1)$ φ-atrai B_1. Desse modo, existe $t_2 = t_2(\varphi, t_0, \varepsilon) \geq 0$ tal que $\varphi^{t_0+t_1}(t) \in O_\varepsilon(\omega_\varphi(B_1))$ para todo $t \geq t_2$. Logo, se $\tau := t_0 + t_1 + t_2$, conclui-se que $\gamma^+_\tau(\varphi) \subset O_\varepsilon(D)$. Assim:

$$\omega(\varphi) = \bigcap_{t\geq 0} \overline{\gamma^+_t(\varphi)} \subset \overline{\gamma^+_\tau(\varphi)} \subset \overline{O_\varepsilon(D)}.$$

Portanto:

$$x \in \omega(\varphi) \subset \bigcap_{0<\varepsilon<\varepsilon(K)} \overline{O_\varepsilon(D)} = D.$$

Consequentemente, $\bigcup_{z\in X}\omega_\varphi(z)\subset D$, ou seja, $\widehat{N}=\overline{\bigcup_{z\in X}\omega_\varphi(z)}\subset\overline{D}=D$. □

Teorema 3.3.17. Se $\mathcal{G}$ é φ-assintoticamente compacto e há uma função de Lyapunov $\mathcal{L}:X\to\mathbb{R}$, então o φ-atrator global fechado mínimo $\widehat{N}$ é não vazio, e $\widehat{N}=Z(\mathcal{G})$.

Prova. Seja $\varphi\in\mathcal{G}$. Pela Observação 3.3.12, $\omega(\varphi)$ é não vazio, compacto e quasi-invariante, e $\lim_{t\to\infty}d(\varphi(t),\omega(\varphi))=0$. Considere uma sequência estritamente crescente $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$ tal que $t_n\to\infty$ e $t_1\geq 0$. Pelo Lema 3.3.8, $(\varphi(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente $(\varphi(t_{n_j}))_{j\in\mathbb{N}}$. Assim, a sequência $(\mathcal{L}(\varphi(t_{n_j})))_{j\in\mathbb{N}}$ converge (como visto no Lema 3.2.4). Como a sequência $(\mathcal{L}(\varphi(t_{n_j})))_{j\in\mathbb{N}}$ é não-crescente, ela converge para seu ínfimo:

$$\lim_{j\to\infty}\mathcal{L}(\varphi(t_{n_j}))=\inf\{\mathcal{L}(\varphi(t_{n_j}));\, j\in\mathbb{N}\}=:L.$$

Observe que, por conta dessa igualdade, o limite não depende da sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (como visto na prova do Lema 3.2.4).

Considere agora $y\in\omega(\varphi)$. Então $y=\lim_{n\to\infty}\varphi(t_n)$, em que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $[0,\infty)$ tal que $t_n\to\infty$. Passando para uma subsequência de $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (que não será reindexada) estritamente crescente e não negativa, o limite é mantido e conclui-se, pelo que foi feito acima, que $\mathcal{L}(y)=\lim_{n\to\infty}\mathcal{L}(\varphi(t_n))=L$. Como $\omega(\varphi)$ é quasi-invariante, existe uma órbita completa $\tilde{\psi}$ passando por y e contida em $\omega(\varphi)$. Logo, $\mathcal{L}(\tilde{\psi}(t))=L=\mathcal{L}(y)$ para todo $t\in\mathbb{R}$, o que implica $\tilde{\psi}$ ser estacionária. Portanto, $y\in Z(\mathcal{G})$ e $\omega(\varphi)\subset Z(\mathcal{G})$.

Como, para cada $\varphi\in\mathcal{G}$, $\lim_{t\to\infty}d(\varphi(t),\omega(\varphi))=0$ e $\omega(\varphi)\subset Z(\mathcal{G})$, então $Z(\mathcal{G})$ é um φ-atrator global. Pelo Teorema 3.3.15, $\emptyset\neq\widehat{N}\subset Z(\mathcal{G})$.

Por outro lado, se $z\in Z(\mathcal{G})$, há uma órbita completa estacionária ψ passando por z. Seja $\varphi:=\psi|_{[0,\infty)}\in\mathcal{G}$. Como $\widehat{N}$ é um φ-atrator global, dado $\varepsilon>0$, existe $t_0=t_0(\varepsilon,\varphi)\geq 0$ de modo que $z=\varphi(t)\in O_\varepsilon(\widehat{N})$ para todo $t\geq t_0$. Portanto, $z\in\widehat{N}$ e $Z(\mathcal{G})\subset\widehat{N}$. □

3.4 Sistema de Inclusões Diferenciais com o p-Laplaciano

Será agora apresentado um sistema de EDP's que define um semifluxo generalizado φ-dissipativo e assintoticamente compacto, ou seja, que possui um atrator global com todas as propriedades estudadas até aqui. Os detalhes dos resultados podem ser obtidos em [11].

Sejam H um espaço de Hilbert, $A,B:H\to H$ operadores monótonos e $F,G:H\times H\rightsquigarrow H$ funções multívocas. Considere o seguinte sistema de inclusões diferenciais:

$$(P)\begin{cases}\frac{du}{dt}+Au\in F(u,v)\\ \frac{dv}{dt}+Bv\in G(u,v)\\ u(0)=u_0,\; v(0)=v_0.\end{cases}$$

Definição 3.4.1. Uma *solução* de (P) é um par (u,v) satisfazendo as seguintes condições:

- $u, v \in C([0,T]; H)$;
- existem $f, g \in L^1(0,T;H)$ tais que $f(t) \in F(u(t), v(t))$ e $g(t) \in G(u(t), v(t))$ para $q.t.p.$ $t \in (0,T)$;
- (u, v) é uma solução do sistema (P1) abaixo:

$$(P1)\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = f \\ \frac{dv}{dt} + Bv = g \\ u(0) = u_0,\ v(0) = v_0. \end{cases}$$

Aqui, entende-se por solução de (P1) um par (u, v) de funções contínuas em $[0,T]$, absolutamente contínuas em cada compacto de $(0,T)$ e que verificam as equações em (P1) $q.t.p.$ em $(0,T)$.

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto limitado, conexo e suave, $p, q > 2$ e $D_1, D_2 \in L^\infty(\Omega)$ tais que $D_i(x) \in [\sigma, M]$ para $q.t.p.$ $x \in \Omega$, em que $\sigma, M \in (0, \infty)$.

Defina $H := L^2(\Omega)$ e:

$$\begin{aligned} Au &:= -\text{div}(D_1|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + |u|^{p-2}u, \\ Bv &:= -\text{div}(D_2|\nabla v|^{q-2}\nabla v) + |v|^{q-2}v. \end{aligned}$$

Como as funções u e v agora são de duas variáveis, uma condição de Neumann será colocada na fronteira de Ω. O sistema (P) então se transforma no seguinte:

$$(S)\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \text{div}(D_1|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + |u|^{p-2}u \in F(u,v) & \text{em } (0,T)\times\Omega \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \text{div}(D_2|\nabla v|^{q-2}\nabla v) + |v|^{q-2}v \in G(u,v) & \text{em } (0,T)\times\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n}(t,x) = \frac{\partial v}{\partial n}(t,x) = 0 & \text{em } (0,T)\times\partial\Omega \\ (u(0), v(0)) \in L^2(\Omega)\times L^2(\Omega). \end{cases}$$

Aqui, $\frac{\partial u}{\partial n} := D_1|\nabla u|^{p-2}\langle\nabla u, \vec{\eta}\rangle$, em que $\vec{\eta}$ é o vetor normal unitário externo de $\partial\Omega$.

Definição 3.4.2. Um par (F, G) de funções multívocas $F, G : H \times H \rightsquigarrow H$, que levam conjuntos limitados em conjuntos limitados, é chamado de *positivamente sublinear* se existem $a, b, c, m_0 \in (0, \infty)$ de modo que, para cada par $(u, v) \in H \times H$ tal que $\|u\| > m_0$ ou $\|v\| > m_0$ e tal que existe $f_0 \in F(u, v)$ satisfazendo $\langle u, f_0\rangle > 0$ ou existe $g_0 \in G(u, v)$ satisfazendo $\langle v, g_0\rangle > 0$, as seguintes condições são válidas para quaisquer $f \in F(u, v)$ e $g \in G(u, v)$:

$$\|f\| \le a\|u\| + b\|v\| + c, \quad \|g\| \le a\|u\| + b\|v\| + c.$$

Teorema 3.4.3. Se F e G são limitadas, semicontínuas superiormente e (F, G) é positivamente sublinear, então (S) admite solução global para cada dado inicial $(u_0, v_0) \in H \times H$. Seja $D(u_0, v_0)$ o conjunto das soluções de (S) com dado inicial (u_0, v_0).

Então $\mathcal{G} := \bigcup_{(u_0,v_0)\in H\times H} D(u_0,v_0)$ é um semifluxo generalizado.

Teorema 3.4.4. O semifluxo generalizo $\mathcal{G}$ associado ao sistema (S) é φ-dissipativo e assintoticamente compacto. Desse modo, o Teorema 3.1.18 é válido, garantindo a existência do atrator global e todas as suas propriedades subsequentes.

Capítulo 4

Medida Invariante para Funções Multívocas

O objetivo deste capítulo, baseado em [15], é apresentar diferentes definições do conceito de *medida invariante* para funções multívocas, e mostrar que são todas equivalentes. Ao final, é apresentada uma versão de teorema ergódico para o caso de funções multívocas.

4.1 Medida Invariante para Funções

Definição 4.1.1. Seja (X,d) um espaço métrico separável. Para cada $x \in X$, é associada uma medida $\delta_x \in \mathbb{P}(X)$, chamada *medida de probabilidade concentrada em* x, definida da seguinte forma:

$$\delta_x(A) := \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A, \\ 0, & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Desse modo, pode-se *mergulhar*[1] X em $\mathbb{P}(X)$ através da seguinte aplicação:

$$\begin{array}{rccc} \delta: & X & \to & \mathbb{P}(X) \\ & x & \mapsto & \delta_x. \end{array}$$

Observação 4.1.2. A seguir serão utilizadas as notações da Definição 1.4.8.

Lema 4.1.3. Sejam (X,d) um espaço métrico separável e $x,y \in X$. Então:

$$d_P(\delta_x, \delta_y) = \min\{d(x,y), 1\}.$$

Prova. Por definição, $d_P(\mu,\nu) \leq 1$ para quaisquer $\mu,\nu \in \mathbb{P}(X)$. Seja $\alpha > d(x,y)$. Assim, para cada $A \in \mathcal{B}(X)$:

$$x \in A \Rightarrow y \in A^{\alpha} \quad \text{e} \quad y \in A \Rightarrow x \in A^{\alpha}.$$

[1] Uma função contínua e injetora $f : X \to Y$ entre espaços topológicos X e Y é um *mergulho* se $f^{-1} : f(X) \to X$ é contínua.

Logo:

$$\delta_x(A) \leq \delta_y(A^\alpha) + \alpha \quad \text{e} \quad \delta_y(A) \leq \delta_x(A^\alpha) + \alpha.$$

Desse modo, $d_P(\delta_x, \delta_y) \leq \alpha$. Sendo $\alpha > d(x,y)$ arbitrário, conclui-se que $d_P(\delta_x, \delta_y) \leq d(x,y)$. Assuma agora que $d_P(\delta_x, \delta_y) < 1$, e seja $\alpha \in (d_P(\delta_x, \delta_y), 1)$. Assim, para cada $A \in \mathcal{B}(X)$:

$$\delta_x(A) \leq \delta_y(A^\alpha) + \alpha \quad \text{e} \quad \delta_y(A) \leq \delta_x(A^\alpha) + \alpha.$$

Escolhendo $A := \{x\}$:

$$1 \leq \delta_y(B(x,\alpha)) + \alpha.$$

Como $\alpha < 1$, então $y \in B(x,\alpha)$, ou seja, $d(x,y) < \alpha$. Sendo $\alpha \geq d_P(\delta_x, \delta_y)$ arbitrário, conclui-se que $d(x,y) \leq d_P(\delta_x, \delta_y)$. □

Teorema 4.1.4. A aplicação δ apresentada na Definição 4.1.1 é de fato um mergulho.

Prova.

- δ é injetora: se $x \neq y$, então $\delta_x(\{x\}) = 1 \neq 0 = \delta_y(\{x\})$, ou seja, $\delta_x \neq \delta_y$. Observe que conjuntos unitários são sempre mensuráveis na σ-álgebra de Borel, já que são fechados e, portanto, são complementares de abertos.

- δ é um homeomorfismo com sua imagem:

$$\begin{aligned}
x_n \to x \text{ em } X \quad &\Leftrightarrow \quad d(x_n, x) \to 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \min\{d(x_n,x), 1\} \to 0 \\
&\Leftrightarrow \quad d_P(\delta_{x_n}, \delta_x) \to 0 \\
&\overset{\text{Lema 4.1.3}}{\Leftrightarrow} \quad \delta_{x_n} \to \delta_x \text{ em } \tau^* \\
&\Leftrightarrow \quad \delta(x_n) \to \delta(x) \text{ em } \tau^*.
\end{aligned}$$

□

Definição 4.1.5. Seja (X,d) um espaço métrico. O *suporte* de uma medida $\mu \in \mathbb{P}(X)$, denotado por $|\mu|$, é o menor subconjunto fechado de X medindo 1 por μ, ou seja:

$$|\mu| := \bigcap \{A \in \mathcal{B}(X); A \text{ é fechado e } \mu(A) = 1\}.$$

Observação 4.1.6. Se $A \subset |\mu|^c$, então $\mu(A) = 0$.

Definição 4.1.7. Sejam X_1 e X_2 espaços topológicos munidos das respectivas σ-álgebras de Borel. Se $f : X_1 \to X_2$ é mensurável, fica definido o *push-forward* f_* da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
f_* : \quad \mathbb{P}(X_1) \quad &\to \quad \mathbb{P}(X_2) \\
\mu \quad &\mapsto \quad f_*(\mu).
\end{aligned}$$

Aqui, $f_*(\mu)(B) := \mu(f^{-1}(B))$ para todo $B \in \mathcal{B}(X_2)$.

Observação 4.1.8. Sejam (X,d) um espaço métrico e $f : X \to X$ uma função mensurável. Uma medida $\mu \in \mathbb{P}(X)$ é f-*invariante* se, e somente se, $f_*(\mu) = \mu$.

Proposição 4.1.9. Sejam (X,d) um espaço métrico e $f : X \to X$ uma função mensurável. Então uma medida $\mu \in \mathbb{P}(X)$ é f-invariante se, e somente se, para qualquer $g \in L^1(X,\mu)$:

$$\int_X g(x)\,\mu(dx) = \int_X g(f(x))\,\mu(dx).$$

Prova. Suponha que a igualdade de integrais seja válida para qualquer $g \in L^1(X,\mu)$. Se $A \in \mathcal{B}(X)$, considere $g := \chi_A$. Desse modo:

$$f_*(\mu)(A) = \mu(f^{-1}(A)) = \int_X \chi_{f^{-1}(A)}(x)\,\mu(dx) = \int_X \chi_A \circ f(x)\,\mu(dx) = \int_X \chi_A(x)\,\mu(dx) = \mu(A).$$

Reciprocamente, se $f_*(\mu) = \mu$, então, para qualquer $A \in \mathcal{B}(X)$:

$$\int_X \chi_A \circ f(x)\,\mu(dx) = \int_X \chi_{f^{-1}(A)}(x)\,\mu(dx) = \mu(f^{-1}(A)) = \mu(A) = \int_X \chi_A(x)\,\mu(dx).$$

Por linearidade, a igualdade permanece válida trocando χ_A por qualquer função simples. Para uma função qualquer $g \in L^1(X,\mu)$, basta aplicar o Lema de Olympia (1.2.41) e o Teorema da Convergência Monótona (1.2.42) às partes positiva e negativa de g, e conclui-se o resultado:

$$\int_X g(x)\,\mu(dx) = \int_X g(f(x))\,\mu(dx). \qquad \square$$

Lema 4.1.10. Sejam $(X,d_1),(Y,d_2)$ espaços métricos e $\mu \in \mathbb{P}(X)$. Se $f : X \to Y$ é uma função mensurável sobrejetora e $g \in L^1(Y, f_*\mu)$, então, para todo $A \in \mathcal{B}(X)$:

$$\int_{f(A)} g(y)\, f_*\mu(dy) = \int_{f^{-1}(f(A))} g \circ f(x)\,\mu(dx).$$

Prova. Será provado inicialmente para funções características $g = \chi_B$, com $B \in \mathcal{B}(Y)$. Nesse caso:

$$\begin{aligned}
\int_{f(A)} \chi_B(y)\, f_*\mu(dy) &= f_*\mu(B \cap f(A)) = \mu(f^{-1}(B \cap f(A))) = \mu(f^{-1}(B) \cap f^{-1}(f(A))) \\
&= \int_X \chi_{f^{-1}(B)\cap f^{-1}(f(A))}(x)\,\mu(dx) = \int_{f^{-1}(f(A))} (\chi_B \circ f)(x)\,\mu(dx).
\end{aligned}$$

Por linearidade, o mesmo é válido para funções elementares. Suponha agora que g seja uma função integrável não negativa. Pelo Lema 1.2.41, existe uma sequência crescente $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções elementares convergindo para g. Logo, a sequência $(g_n \circ f)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência crescente de funções elementares convergindo para $g \circ f$. Portanto, pelo Teorema 1.2.42:

$$\begin{aligned} \int_A g \circ f(x)\,\mu(dx) &= \lim_{n\to\infty} \int_A g_n \circ f(x)\,\mu(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_{f^{-1}(f(A))} g_n(y)\, f_*\mu(dy) \\ &= \int_{f^{-1}(f(A))} g(y)\, f_*\mu(dy). \end{aligned}$$

Para funções integráveis g, o mesmo argumento é aplicado para as partes positiva e negativa, g^+ e g^-. □

Proposição 4.1.11. Sejam $(X,d_1),(Y,d_2)$ espaços métricos. Se $f : X \to Y$ é contínua, então $f_* : \mathbb{P}(X) \to \mathbb{P}(Y)$ é contínua na topologia da convergência fraca.

Prova. Seja $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathbb{P}(X)$ convergindo para $\mu \in \mathbb{P}(X)$ na topologia da convergência fraca. Assim, para toda função contínua $g : Y \to \mathbb{R}$:

$$\int_Y g(y)\, f_*(\mu_n)(dy) \overset{4.1.10}{=} \int_X (g\circ f)(x)\,\mu_n(dx) \overset{2}{\longrightarrow} \int_X (g\circ f)(x)\,\mu(dx) \overset{4.1.10}{=} \int_Y g(y)\, f_*(\mu)(dy).$$

Portanto, $(f_*(\mu_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $f_*(\mu)$ na topologia da convergência fraca, ou seja, f_* é contínua. □

Teorema 4.1.12. *(Teorema de Krylov-Bogolubov)* Seja (X,d) um espaço métrico compacto. Se $f : X \to X$ é uma função contínua, então existe uma medida f-invariante $\mu \in \mathbb{P}(X)$.

Prova. Fixe $\mu_0 \in \mathbb{P}(X)$ e considere, para cada $n \in \mathbb{N}$, a seguinte medida de probabilidade:

$$\mu_n := \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} (f_*)^i(\mu_0). \tag{4.1}$$

A compacidade de $\mathbb{P}(X)$ garante que a sequência $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência $(\mu_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ que converge na topologia da convergência fraca. Seja $\mu := \lim\limits_{j\to\infty} \mu_{n_j}$. Pela proposição precedente, $f_*(\mu_{n_j}) \to f_*(\mu)$. Além disso, pela linearidade de f_*, para cada $j \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} f_*(\mu_{n_j}) &= f_*\left(\frac{1}{n_j}\sum_{i=0}^{n_j-1}(f_*)^i(\mu_0)\right) = \frac{1}{n_j}\sum_{i=0}^{n_j-1}(f_*)^{i+1}(\mu_0) \\ &= \frac{1}{n_j}\sum_{i=0}^{n_j-1}(f_*)^i(\mu_0) - \frac{1}{n_j}\mu_0 + \frac{1}{n_j}(f_*)^{n_j}(\mu_0) \\ &= \mu_{n_j} - \frac{1}{n_j}\mu_0 + \frac{1}{n_j}(f_*)^{n_j}(\mu_0). \end{aligned}$$

Fazendo $j \to \infty$, os dois últimos termos desta expressão convergem para 0. De fato, se o termo $(f_*)^{n_j}(\mu_0)$ fosse ilimitado, a expressão $\frac{1}{n_j}(f_*)^{n_j}(\mu_0)$ seria maior do que zero, contradizendo o fato da medida limite $f_*(\mu)$ ser de probabilidade.

[2]Como f é contínua, a composta $g \circ f$ também é.

Portanto:

$$f_*(\mu) = \lim_{j\to\infty} f_*(\mu_{n_j}) = \mu. \qquad \square$$

4.2 Medida Invariante para Funções Multívocas

O objetivo dessa seção é introduzir quatro definições de medida invariante para uma função multívoca $F : X \rightsquigarrow X$ e, ao final, mostrar que são todas equivalentes.

4.2.1 Primeira Definição

Essa definição é devida a Aubin, Frankowska e Lasota (1991).

Definição 4.2.1. Sejam (X,d) um espaço métrico compacto e $F : X \rightsquigarrow X$ uma função multívoca mensurável. Uma medida $\mu \in \mathbb{P}(X)$ é *invariante*$_1$ por F se:

$$\mu(B) \leq \mu(F^{-1}(B)) \quad \forall B \in \mathcal{B}(X). \tag{4.2}$$

Lema 4.2.2. Sejam X_1 e X_2 conjuntos não vazios. Se $f : X_1 \to X_2$ é uma função, então $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$ para todo $A \subset X_2$.

Prova. Se $x \in f^{-1}(A^c)$, então $f(x) \in A^c$, ou seja, $f(x) \notin A$. Desse modo, $x \notin f^{-1}(A)$, ou seja, $x \in (f^{-1}(A))^c$. Reciprocamente, se $x \in (f^{-1}(A))^c$, então $x \notin f^{-1}(A)$, ou seja, $f(x) \notin A$. Assim, $f(x) \in A^c$, isto é, $x \in f^{-1}(A^c)$. $\square$

Teorema 4.2.3. Seja (X,d) um espaço métrico compacto. Aplicando a Definição 4.2.1 ao caso de funções, é obtido o conceito de medida invariante já conhecido previamente.

Prova. Seja $F = f$ uma função na Definição 4.2.1. Então $f^{-1}(B)$ e $f^{-1}(B^c)$ são disjuntos. Aplicando (4.2) a B e a B^c, conclui-se que:

$$\mu(B) \leq \mu(f^{-1}(B)) \quad \text{e} \quad \mu(B^c) \leq \mu(f^{-1}(B^c)) = \mu((f^{-1}(B))^c).$$

Como $\mu(B^c) = 1 - \mu(B)$ e $\mu((f^{-1}(B))^c) = 1 - \mu(f^{-1}(B))$, então:

$$\mu(f^{-1}(B)) \leq \mu(B).$$

Portanto, $\mu(f^{-1}(B)) = \mu(B)$. $\square$

4.2.2 Segunda Definição

Para a segunda definição, é preciso estabelecer inicialmente o conceito de *kernel de Markov*.

Definição 4.2.4. Sejam (X_1,d_1) e (X_2,d_2) espaços métricos compactos. Uma função $\kappa : X_1 \to \mathbb{P}(X_2)$, $x \mapsto \kappa_x$, é um *kernel de Markov* de X_1 a X_2 se, para cada $A \in \mathcal{B}(X_2)$ fixado, a aplicação $x \mapsto \kappa_x(A)$ é uma função a valores reais mensurável a Borel.

Exemplo 4.2.5. Seja $f : X_1 \to X_2$ mensurável a Borel e considere a seguinte função:

$$\begin{array}{rccl} \delta_f : & X_1 & \to & \mathbb{P}(X_2) \\ & x & \mapsto & \delta_{f(x)}. \end{array}$$

Então δ_f é um *kernel* de Markov. De fato, fixe $A \in \mathcal{B}(X_2)$, e considere a aplicação $x \mapsto \delta_{f(x)}(A) =: \kappa_A(x)$. Assim, $\kappa_A : X_1 \to \{0,1\} \subset \mathbb{R}$ e, dado um aberto $B \subset \mathbb{R}$, há quatro casos a analisar:

- se $B \cap \{0,1\} = \emptyset$, então $\kappa_A^{-1}(B) = \emptyset \in \mathcal{B}(X_1)$;
- se $1 \in B$ e $0 \notin B$, então $\kappa_A^{-1}(B) = \{x \in X; f(x) \in A\} = f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(X_1)$;
- se $0 \in B$ e $1 \notin B$, então $\kappa_A^{-1}(B) = \{x \in X; f(x) \notin A\} = f^{-1}(A^c) \in \mathcal{B}(X_1)$;
- se $\{0,1\} \subset B$, então $\kappa_A^{-1}(B) = X_1 \in \mathcal{B}(X_1)$.

Em todos os casos, $\kappa_A^{-1}(B) \in \mathcal{B}(X_1)$, ou seja, δ_f é um *kernel* de Markov, que será chamado de *kernel de Markov associado a f*.

Dado um *kernel* de Markov $\kappa : X_1 \to \mathbb{P}(X_2)$, existe uma aplicação induzida nos espaços de medida:

$$\begin{array}{rccl} \kappa_* : & \mathbb{P}(X_1) & \to & \mathbb{P}(X_2) \\ & \mu & \mapsto & \kappa_*(\mu), \end{array}$$

em que:

$$\kappa_*(\mu)(B) = \int_{X_1} \kappa_x(B)\mu(dx) \quad \forall B \in \mathcal{B}(X_2).$$

Observação 4.2.6. A medida $\kappa_*(\mu)$ depende apenas das medidas κ_x para $x \in |\mu|$. De fato, como $\mu(A) = 0$ se $A \subset |\mu|^c$, então:

$$\int_{X_1} \kappa_x(B)\mu(dx) = \int_{|\mu|} \kappa_x(B)\mu(dx) + \int_{|\mu|^c} \kappa_x(B)\mu(dx) = \int_{|\mu|} \kappa_x(B)\mu(dx).$$

Exemplo 4.2.7. Seja $f : X_1 \to X_2$ mensurável a Borel. Se $\kappa := \delta_f$, então $\kappa_* = f_*$. De fato, para $\mu \in \mathbb{P}(X_1)$ e $B \in \mathcal{B}(X_2)$:

$$\begin{aligned} \kappa_*(\mu)(B) &= \int_{X_1} k_x(B)\mu(dx) = \int_{X_1} \delta_{f(x)}\mu(dx) \\ &= \int_{f^{-1}(B)} \delta_{f(x)}(B)\mu(dx) + \int_{(f^{-1}(B))^c} \delta_{f(x)}(B)\mu(dx) \\ &= \int_{f^{-1}(B)} 1\,\mu(dx) + 0 = \mu(f^{-1}(B)) \\ &= f_*(\mu)(B). \end{aligned}$$

Definição 4.2.8. Sejam (X_1,d_1), (X_2,d_2) espaços métricos compactos e $F : X_1 \rightsquigarrow X_2$ uma função multívoca. Um *kernel* de Markov $\kappa : X_1 \to \mathbb{P}(X_2)$ é *suportado* por F se:

$$|\kappa_x| \subset F(x) \quad \forall x \in X_1.$$

Observação 4.2.9. Se κ é suportado por F e $B \in \mathcal{B}(X_2)$ é tal que $B \cap F(x) = \emptyset$, então $B \subset (F(x))^c \subset |\kappa_x|^c$, ou seja, $\kappa_x(B) = 0$.

Exemplo 4.2.10. Sejam $F : X_1 \rightsquigarrow X_2$ uma função multívoca fechada e $f : X_1 \to X_2$ uma seleção de F mensurável a Borel (que existe pelo Corolário 1.5.11). Então δ_f é um *kernel* de Markov suportado por F. De fato, fixado $x \in X_1$, sabemos que, para cada $B \in \mathcal{B}(X_2)$, $\delta_{f(x)}(B) = 1$ se, e somente se, $f(x) \in B$. Logo:

$$\begin{aligned} |\delta_{f(x)}| &= \bigcap \{B \in \mathcal{B}(X_2); B \text{ é fechado e } \delta_{f(x)}(B) = 1\} \\ &= \bigcap \{B \in \mathcal{B}(X_2); B \text{ é fechado e } f(x) \in B\} \\ &= \{f(x)\} \subset F(x). \end{aligned}$$

Será agora apresentada a segunda definição de medida invariante por funções multívocas, que é devida a Miller (1995).

Definição 4.2.11. Sejam (X,d) um espaço métrico compacto e $F : X \rightsquigarrow X$ uma função multívoca fechada. Uma medida $\mu \in \mathbb{P}(X)$ é *invariante*$_2$ por F se existe um *kernel* de Markov $\kappa : X \to \mathbb{P}(X)$ tal que:

- $|\kappa_x| \subset F(x)$ para todo $x \in |\mu|$; e
- $\mu = \kappa_*(\mu)$.

Teorema 4.2.12. Seja (X,d) um espaço métrico compacto. Aplicando a Definição 4.2.11 ao caso de funções contínuas, é obtido o conceito de medida invariante já conhecido previamente.

Prova. Seja $F = f$ uma função contínua na Definição 4.2.11. Então δ_f é o único *kernel* de Markov suportado por f. De fato, se κ é um *kernel* de Markov suportado por f, então $|\kappa_x| = \{f(x)\}$ para cada $x \in X$, já que f é função. Assim, dado $A \in \mathcal{B}(X)$:

- se $f(x) \in A$, então $\kappa_x(A) \geq \kappa_x(\{f(x)\}) = 1 = \delta_{f(x)}(A)$;
- se $f(x) \notin A$, então $A \subset |\kappa_x|^c$ e, consequentemente, $\kappa_x(A) = 0 = \delta_{f(x)}(A)$.

Assim, $\kappa_x = \delta_{f(x)}$ para todo $x \in X$, ou seja, $\kappa = \delta_f$. Além disso, pelo Exemplo 4.2.7, $(\delta_f)_* = f_*$. Portanto, $\mu = f_*(\mu)$, ou seja, μ é invariante por f no sentido já conhecido para funções mensuráveis. $\square$

4.2.3 Terceira Definição

Definição 4.2.13. Sejam (X_1,d_1), (X_2,d_2) espaços métricos e $\mu_{12} \in \mathbb{P}(X_1 \times X_2)$. Para cada $j \in \{1,2\}$, a projeção $\pi_j : X_1 \times X_2 \to X_j$ induz a chamada *medida marginal* $\mu_j := \pi_{j*}(\mu_{12})$, ou seja:

$$\mu_j(B) = \mu_{12}(\pi_j^{-1}(B_j)) \quad \forall B_j \in \mathcal{B}(X_j).$$

Definição 4.2.14. Sejam (X,d) um espaço métrico compacto e $F : X \rightsquigarrow X$ uma função multívoca fechada. Uma medida $\mu \in \mathbb{P}(X)$ é *invariante*$_3$ por F se existe $\mu_{12} \in \mathbb{P}(X \times X)$ tal que:

$$|\mu_{12}| \subset F \quad \text{e} \quad \pi_{1*}(\mu_{12}) = \mu = \pi_{2*}(\mu_{12}). \tag{4.3}$$

Teorema 4.2.15. Seja (X,d) um espaço métrico compacto. Aplicando a Definição 4.2.14 ao caso de funções contínuas, é obtido o conceito de medida invariante já conhecido previamente.

Prova. Seja $F = f$ uma função contínua em X, e escreva $f = \{(x,f(x)); x \in X\} \subset X \times X$. Afirmação: $\pi_1|_f : f \to X$, $(x,f(x)) \mapsto x$, é um homeomorfismo.

- Injetora: sejam $(x,f(x)),(y,f(y)) \in f$. Se $\pi_1(x,f(x)) = \pi_1(y,f(y))$, então $x = y$. Logo, $(x,f(x)) = (y,f(y))$.

- Sobrejetora: se $x \in X$, então $\pi_1(x,f(x)) = x$.

- Contínua: se $(x_n,f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em f convergindo para $(x,f(x))$ em f, então $x_n \to x$ em X, ou seja, $\pi_1(x_n,f(x_n)) \to \pi_1(x,f(x))$.

- Inversa contínua: denote por $Grph_f$ a aplicação inversa de $\pi_1|_f$:

  $$\begin{array}{rccl} Grph_f : & X & \to & X \times X \\ & x & \mapsto & (x,f(x)). \end{array}$$

  Considere então uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X convergindo para $x \in X$. Sendo f contínua, $f(x_n) \to f(x)$ e, portanto, $Grph_f(x_n) \to Grph_f(x)$.

Afirmação: a única medida $\mu_{12} \in \mathbb{P}(X \times X)$ com suporte em f e satisfazendo $\pi_{1*}(\mu_{12}) = \mu$ é dada por $\mu_{12} = (Grph_f)_*(\mu)$. De fato, observe inicialmente que a medida $(Grph_f)_*(\mu)$ satisfaz a igualdade, já que, para todo $B \in \mathcal{B}(X)$:

$$\begin{aligned} \pi_{1*}((Grph_f)_*(\mu))(B) &= (Grph_f)_*(\mu)(\pi_1^{-1}(B)) = \mu(Grph_f^{-1}(\pi_1^{-1}(B))) \\ &= \mu(Grph_f^{-1}(\{(x,f(x)); x \in B\})) = \mu(B). \end{aligned}$$

Além disso, note que $f \subset X \times X$ é fechado e $(Grph_f)_*(\mu)(f) = 1$. Agora, se $B \in \mathcal{B}(X \times X)$ é fechado e $(Grph_f)_*(\mu)(B) = 1$, há dois casos possíveis:

- se $B \cap f = \emptyset$, então $Grph_f^{-1}(B) = \emptyset$. Logo, $(Grph_f)_*(\mu)(B) = 0$, uma contradição;

- se $B\cap f\neq\emptyset$, então $B\cap f\subset f$ é fechado e:

$$(Grph_f)_*(\mu)(B\cap f)=\mu(\{x\in X;\,(x,f(x))\in B\cap f\})=\mu(Grph_f^{-1}(B))=1.$$

Portanto, o menor fechado com medida 1 por $(Grph_f)_*(\mu)$ está contido em f. Desse modo, $|(Grph_f)_*(\mu)|\subset f$, ou seja, $(Grph_f)_*(\mu)$ satisfaz as condições.

Suponha agora que $\mu_{12}\in\mathbb{P}(X)$ seja uma medida com suporte em f e tal que $\pi_{1*}(\mu_{12})=\mu$. Seja $B\in\mathcal{B}(X)$.

- Se $B\cap f=\emptyset$, então $\mu_{12}(B)=0=(Grph_f)_*(\mu)(B)$.

- Se $B\cap f\neq\emptyset$, então:

$$\begin{aligned}(Grph_f)_*(\mu)(B) &= \mu(Grph_f^{-1}(B))=\mu(Grph_f^{-1}(B\cap f))\\ &= \mu(\pi_1(B\cap f))=\pi_{1*}(\mu_{12})(\pi_1(B\cap f))\\ &= \mu_{12}(\pi_1^{-1}(\pi_1(B\cap f)))\overset{3}{=}\mu_{12}(B\cap f)=\mu_{12}(B).\end{aligned}$$

A afirmação está provada. Observe ainda que $\pi_2\circ Grph_f=f$.

Por fim, resta provar que $f_*(\mu)=\mu$. Se $B\in\mathcal{B}(X)$, como $|\mu_{12}|\subset f$, então:

$$\begin{aligned}\mu(f^{-1}(B)) &= \mu(\pi_1(Grph_f(f^{-1}(B))))=\pi_{1*}(\mu_{12})(\pi_1(Grph_f(f^{-1}(B))))\\ &= \mu_{12}(\pi_1^{-1}(\pi_1(Grph_f(f^{-1}(B)))))=\mu_{12}(Grph_f(f^{-1}(B)))\\ &\overset{4}{=} \mu_{12}(\pi_2^{-1}(\pi_2(Grph_f(f^{-1}(B)))))=\pi_{2*}(\mu_{12})(\pi_2(Grph_f(f^{-1}(B))))\\ &= \mu(\pi_2(Grph_f(f^{-1}(B))))=\mu(f(f^{-1}(B)))\leq\mu(B).\end{aligned}$$

Aplicando essa desigualdade para B^c, conclui-se que:

$$\mu(f^{-1}(B^c))\leq\mu(B^c).$$

Como $f^{-1}(B^c)=(f^{-1}(B))^c$ e $\mu(X)=1$, então:

$$1-\mu(f^{-1}(B))\leq 1-\mu(B).$$

Portanto, $\mu(B)\leq\mu(f^{-1}(B))$, ou seja, $\mu(B)=\mu(f^{-1}(B))$. □

[3]Como $|\mu_{12}|\subset f$, então $\mu_{12}(\pi_1^{-1}(\pi_1(B\cap f)))=\mu_{12}(\{(x,y);\,(x,f(x))\in B,\,y\in X\}\cap f)=\mu_{12}(\{(x,f(x));\,(x,f(x))\in B\})=\mu_{12}(B\cap f)$.

[4]Como $|\mu_{12}|\subset f$, então, para $A\subset f$, $\mu_{12}(\pi_2^{-1}(\pi_2(A)))=\mu_{12}(\{(x,y);\,(x,f(x))\in A,\,y\in X\}\cap f)=\mu_{12}(A)$.

4.2.4 Quarta Definição

Notações: Seja X um espaço topológico. Será utilizada a notação $X^{\mathbb{Z}} := \prod_{n\in\mathbb{Z}} X$. Nesse caso, $X^{\mathbb{Z}}$ é chamado de espaço das *sequências bi-infinitas* em X, e seus elementos são da forma:

$$\xi = (\ldots,\xi_{-2},\xi_{-1},\xi_0,\xi_1,\xi_2,\ldots) \in X^{\mathbb{Z}}.$$

Denota-se ainda por π_0 a seguinte projeção:

$$\begin{array}{rccc} \pi_0 : & X^{\mathbb{Z}} & \to & X \\ & \xi & \mapsto & \xi_0. \end{array}$$

Observação 4.2.16. Se X é compacto, então $X^{\mathbb{Z}}$ é também compacto pelo Teorema 1.1.4.

Definição 4.2.17. Seja (X,d) um espaço métrico compacto. O *homeomorfismo shift* é definido da seguinte forma:

$$\begin{array}{rccc} s : & X^{\mathbb{Z}} & \to & X^{\mathbb{Z}} \\ & \xi = (\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}} & \mapsto & (\xi_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}. \end{array}$$

Proposição 4.2.18. A função s da definição anterior é de fato um homeomorfismo.

Prova.

- Injetora: se $(\xi_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}} = (\eta_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$, então $\xi_{n+1} = \eta_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Logo, $\xi_n = \eta_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, ou seja, $(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (\eta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

- Sobrejetora: seja $\xi = (\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in X^{\mathbb{Z}}$. Se $\eta := (\xi_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$, então $\xi = s(\eta)$. Logo:

$$\begin{array}{rccc} s^{-1} : & X^{\mathbb{Z}} & \to & X^{\mathbb{Z}} \\ & \xi = (\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}} & \mapsto & (\xi_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}. \end{array}$$

- Contínua: será utilizada a Proposição 1.1.3. Seja $(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $X^{\mathbb{Z}}$, sendo $\xi_j = (\xi_n^j)_{n\in\mathbb{Z}}$ para cada $j \in \mathbb{N}$, e seja $\eta \in X^{\mathbb{Z}}$, $\eta = (\eta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, de modo que $\xi_j \to \eta$. Então $\xi_n^j \to \eta_n$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Em particular, $\xi_{n+1}^j \to \eta_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Consequentemente, $s(\xi_j) \to s(\eta)$.

- Inversa contínua: segue de modo análogo ao item anterior. $\square$

Definição 4.2.19. Sejam (X,d) um espaço métrico compacto e $F : X \rightsquigarrow X$ uma função multívoca fechada. O *espaço das trajetórias* determinado por F, denotado por X_F, é definido da seguinte forma:

$$X_F := \left\{\xi \in X^{\mathbb{Z}};\, \xi_{n+1} \in F(\xi_n)\ \forall n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Proposição 4.2.20. Sejam (X,d) um espaço métrico compacto e $F : X \rightsquigarrow X$ uma função multívoca fechada. Então X_F é fechado e s-invariante.

Prova. Seja $(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência convergente em X_F, sendo $\xi_j = (\xi_n^j)_{n\in\mathbb{Z}}$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Considere $\eta = (\eta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ o limite dessa sequência. Fixado $n \in \mathbb{Z}$, $\xi_{n+1}^j \in F(\xi_n^j)$ para todo $j \in \mathbb{N}$, ou seja, $(\xi_{n+1}^j, \xi_n^j) \in F$. Fazendo $j \to \infty$, como F é fechada, conclui-se que:

$$\eta_{n+1} \in F(\eta_n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, $\eta \in X_F$. $\square$

Observação 4.2.21. Como consequência da última proposição, $s|_{X_F} : X_F \to X_F$ é um homeomorfismo, que será denotado por s_F.

Definição 4.2.22. Sejam (X,d) um espaço métrico compacto e $F : X \rightsquigarrow X$ uma função multívoca fechada. Uma medida $\nu \in \mathbb{P}(X^{\mathbb{Z}})$ é uma *medida de trajetória* se $|\nu| \subset X_F$. Essa medida ν é ainda chamada de *medida de trajetória invariante* se é invariante por s (ou, equivalentemente, se é invariante por s_F vista como uma medida em X_F).

Definição 4.2.23. Sejam (X,d) um espaço métrico compacto e $F : X \rightsquigarrow X$ uma função multívoca fechada. Uma medida $\mu \in \mathbb{P}(X)$ é *invariante*$_4$ por F se existe uma medida de trajetória invariante cuja "projeção" via π_{0*} resulta em μ. Em outras palavras, se existe $\nu \in \mathbb{P}(X^{\mathbb{Z}})$ de modo que $|\nu| \subset X_F$, $s_*(\nu) = \nu$ e $\pi_{0*}(\nu) = \mu$.

Teorema 4.2.24. Seja (X,d) um espaço métrico compacto. Aplicando a Definição 4.2.23 ao caso de homeomorfismos, é obtido o conceito de medida invariante já conhecido previamente.

Prova. Seja $F = f$ um homeomorfismo em X. Assim:

$$X_f = \left\{(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in X^{\mathbb{Z}}; \xi_{n+1} = f(\xi_n)\right\} = \left\{(f^n(x))_{n\in\mathbb{Z}}; x \in X\right\}.$$

Então $\pi_f := \pi_0|_{X_f}$ é um homeomorfismo de X_f em X. De fato:

- Injetora: sejam $(f^n(x))_{n\in\mathbb{Z}}, (f^n(y))_{n\in\mathbb{Z}} \in X_F$, com $\pi_f((f^n(x))_{n\in\mathbb{Z}}) = \pi_f((f^n(y))_{n\in\mathbb{Z}})$. Então $x = y$ e, portanto, $f^n(x) = f^n(y)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Assim, $(f^n(x))_{n\in\mathbb{Z}} = (f^n(y))_{n\in\mathbb{Z}}$.

- Sobrejetora: se $x \in X$, então $\pi_f((f^n(x))_{n\in\mathbb{Z}}) = x$ e $(f^n(x))_{n\in\mathbb{Z}} \in X_f$. Além disso:

$$\begin{array}{rccl} \pi_f^{-1}: & X_f & \to & X \\ & x & \mapsto & (f^n(x))_{n\in\mathbb{Z}}. \end{array} \tag{4.4}$$

- Contínua: para cada $j \in \mathbb{N}$, fixe $x_j \in X$, e considere o elemento $\xi_j := (f^n(x_j))_{n\in\mathbb{Z}} \in X_f$. Suponha que a sequência $(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ convirja para $\xi \in X_f$, sendo $\xi = (f^n(x))_{n\in\mathbb{Z}}$ para algum $x \in X$. Pela Proposição 1.1.3, $f^n(x_j) \to f^n(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Em particular, $x_j \to x$, ou seja, $\pi_f(\xi_j) \to \pi_f(\xi)$.

- Inversa contínua: sejam $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X convergindo para $x \in X$. Como f é homeomorfismo, então $f^n(x_j) \to f^n(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Por (4.4) e pela Proposição 1.1.3, $\pi_f^{-1}(x_j) \to \pi_f^{-1}(x)$.

Além disso, $f = \pi_f \circ s_f \circ \pi_f^{-1}$. De fato, se $x \in X$ então:

$$\pi_f(s_f(\pi_f^{-1}(x))) = \pi_f(s_f((f^n(x))_{n\in\mathbb{Z}})) = \pi_f((f^{n+1}(x))_{n\in\mathbb{Z}}) = f(x).$$

Finalmente, se $B \in \mathcal{B}(X)$, então:

$$\begin{aligned}
\mu(f^{-1}(B)) &= \mu((s_f \circ \pi_f^{-1})^{-1}(B)) = \mu(\pi_f(s_f^{-1}(\pi_f^{-1}))(B)) \\
&= \pi_{0*}(\nu)(\pi_f(s_f^{-1}(\pi_f^{-1}))(B)) = \nu(\pi_0^{-1}(\pi_f(s_f^{-1}(\pi_f^{-1}))(B))) \\
&\overset{5}{=} \nu(\pi_f^{-1}(\pi_f(s_f^{-1}(\pi_f^{-1}))(B))) = \nu(s_f^{-1}(\pi_f^{-1}(B))) \\
&= s_{f*}(\nu)(\pi_f^{-1}(B)) = \nu(\pi_f^{-1}(B)) = \pi_{f*}(\nu)(B) \\
&= \mu(B).
\end{aligned}$$

□

4.2.5 Equivalência entre as definições

Definição 4.2.25. Sejam $(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ um espaço de probabilidade e (X,d) um espaço métrico. Considere uma função $f : \Omega \to X$ mensurável de $\mathcal{G}$ a $\mathcal{B}(X)$ e uma σ-álgebra $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Uma função $Q : \Omega \times \mathcal{B}(X) \to [0,\infty)$ é uma *distribuição condicional regular* se valem as seguintes condições:

- para $B \in \mathcal{B}(X)$ fixado, a função $z \mapsto Q(z,B)$ é $\mathcal{F}$-mensurável;

- para $z \in \Omega$ fixado, a função $B \mapsto Q(z,B)$ é uma medida de probabilidade em $(X, \mathcal{B}(X))$;

- para quaisquer $B \in \mathcal{B}(X)$ e $E \in \mathcal{F}$:

$$\int_E Q(z,B)\,\mu(dz) = \mu(f^{-1}(B) \cap E).$$

Teorema 4.2.26. Sejam $(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ um espaço de probabilidade e (X,d) um espaço métrico completo e separável. Considere uma função $f : \Omega \to X$ mensurável de $\mathcal{G}$ a $\mathcal{B}(X)$ e uma σ-álgebra $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Então existe uma distribuição condicional regular Q como na definição anterior.

Prova. A prova deste resultado pode ser obtida no Teorema I.3.3 em (Gikhman e Skorokhod, 1974, [12]). □

[5] Pois $|\nu| \subset X_f$.

Teorema 4.2.27. Sejam X_1, X_2 espaços topológicos finitos e $F : X_1 \rightsquigarrow X_2$ uma função multívoca fechada e com valores não vazios. Para cada $j \in \{1,2\}$, considere uma medida $\mu_j \in \mathbb{P}(X_j)$. Então existe $\mu_{12} \in \mathbb{P}(X_1 \times X_2)$ suportada por F e com medidas marginais μ_1 e μ_2 se, e somente se, para todo $B \in \mathcal{B}(X_2)$, $\mu_2(B) \leq \mu_1(F^{-1}(B))$.

Prova. A prova deste resultado pode ser obtida no Teorema 2.1 em (Miller e Akin, 1999, [15]). Note que, pelo Teorema 1.5.8, F é mensurável e, portanto, faz sentido medir o conjunto $F^{-1}(B)$. □

Lema 4.2.28. Seja (X,d) um espaço métrico compacto. Considere uma relação de equivalência E em X de modo que $E \in \mathcal{B}(X \times X)$ e o diâmetro de cada classe de equivalência $E(x)$ não excede um certo $\varepsilon > 0$. Se $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{P}(X)$ são tais que $(\pi_E)_*(\mu_1) = (\pi_E)_*(\mu_2)$ em $\mathbb{P}(X/E)$, então $d_{BL}(\mu_1, \mu_2) \leq 2\varepsilon$.

Prova. A prova deste resultado pode ser obtida no Lema 2.2 em (Miller e Akin, 1999, [15]). Está sendo considerada, em X/E, a topologia quociente apresentada na Definição 1.1.6. □

Teorema 4.2.29. Sejam (X_1, d_1), (X_2, d_2) espaços métricos compactos e $F : X_1 \rightsquigarrow X_2$ uma função multívoca fechada e com valores não vazios. Se $\mu_1 \in \mathbb{P}(X_1)$ e $\mu_2 \in \mathbb{P}(X_2)$, então as seguintes condições são equivalentes:

(a) para todo $A_2 \in \mathcal{B}(X_2)$, $\mu_2(A_2) \leq \mu_1(F^{-1}(A_2))$;

(b) existe uma função $\kappa : X_1 \to \mathbb{P}(X_2)$, $x \mapsto \kappa_x$, de modo que, para todo $A_2 \in \mathcal{B}(X_2)$, a função $x \mapsto \kappa_x(A_2)$ é mensurável a Borel em X_1 e, além disso:

$$\mu_2(A_2) = \int_{X_1} \kappa_x(A_2)\mu_1(dx) \quad \text{e} \quad |\kappa_x| \subset F(x) \quad \forall x \in |\mu_1|; \tag{4.5}$$

(c) existe uma medida $\mu_{12} \in \mathbb{P}(X_1 \times X_2)$ de modo que $\pi_{1*}(\mu_{12}) = \mu_1$, $\pi_{2*}(\mu_{12}) = \mu_2$ e $|\mu_{12}| \subset F$.

Prova. Observe inicialmente que, pelo Teorema 1.5.8, F é mensurável e, portanto, faz sentido medir o conjunto $F^{-1}(A_2)$ se $A_2 \in \mathcal{B}(X_2)$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Seja κ a função do item (b). Considere a álgebra $\mathcal{A}$ formada por conjuntos disjuntos da forma $A_1 \times A_2$, em que $A_1 \in \mathcal{B}(X_1)$ e $A_2 \in \mathcal{B}(X_2)$. Então $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(X_1 \times X_2)$. Para $A_1 \times A_2 \in \mathcal{A}$, defina:

$$\tilde{\mu}_{12}(A_1 \times A_2) := \int_{A_1} \kappa_x(A_2)\mu_1(dx). \tag{4.6}$$

Seja então μ_{12} a extensão de $\tilde{\mu}_{12}$ em $\mathcal{B}(X_1 \times X_2)$ dada pelo Teorema 1.2.19. Desse modo, $\mu_{12} \in \mathbb{P}(X_1 \times X_2)$. Logo, se $A_1 \in \mathcal{B}(X_1)$ e $A_2 \in \mathcal{B}(X_2)$, então:

$$\begin{aligned}
\pi_{1*}(\mu_{12})(A_1) &= \mu_{12}(A_1 \times X_2) = \int_{A_1} \kappa_x(X_2)\mu_1(dx) = \mu_1(A_1); \\
\pi_{2*}(\mu_{12})(A_2) &= \mu_{12}(X_1 \times A_2) = \int_{X_1} \kappa_x(A_2)\mu_1(dx) = \mu_2(A_2).
\end{aligned}$$

Resta mostrar que $|\mu_{12}| \subset F$. Fixe $A_1 \times A_2 \in A$ e observe o seguinte:

$$\begin{aligned}\int_{X_1\times X_2} \chi_{A_1\times A_2}(x,y)\mu_{12}(d(x,y)) &= \mu_{12}(A_1\times A_2) = \int_{A_1} \kappa_x(A_2)\mu_1(dx)\\ &= \int_{X_1}\left(\int_{X_2}\chi_{A_1\times A_2}(x,y)\,\kappa_x(dy)\right)\mu_1(dx).\end{aligned}$$

Se $A \in \mathcal{B}(X_1 \times X_2)$, essa igualdade é também válida para χ_A usando a fórmula que define a medida de extensão no Teorema 1.2.19. De fato:

$$\begin{aligned}&\mu_{12}(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\hat{\mu}(A_1^n\times A_2^n);\, A_1^n\times A_2^n \in \mathcal{A}, A\subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_1^n\times A_2^n\right\}\\ &= \inf\left\{\int_{X_1}\left(\int_{X_2}\chi_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}(A_1^n\times A_2^n)}(x,y)\,\kappa_x(dy)\right)\mu_1(dx);\, A_1^n\times A_2^n\in\mathcal{A}, A\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_1^n\times A_2^n\right\}\\ &= \int_{X_1}\left(\int_{X_2}\chi_A(x,y)\,\kappa_x(dy)\right)\mu_1(dx).\end{aligned}$$

Por linearidade, a igualdade acima vale também trocando a função característica por qualquer função simples. Assim, se $u : X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$ é integrável e limitada, é possível, pelo Lema 1.2.41, aproximar u por uma sequência de funções simples $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, e conclui-se, pelo Teorema 1.2.49:

$$\begin{aligned}\int_{X_1\times X_2} u(x,y)\mu_{12}(d(x,y)) &= \lim_{n\to\infty}\int_{X_1\times X_2} h_n(x,y)\mu_{12}(d(x,y))\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{X_1}\left(\int_{X_2} h_n(x,y)\,\kappa_x(dy)\right)\mu_1(dx)\\ &= \int_{X_1}\left(\int_{X_2}\lim_{n\to\infty} h_n(x,y)\,\kappa_x(dy)\right)\mu_1(dx)\\ &= \int_{X_1}\left(\int_{X_2} u(x,y)\,\kappa_x(dy)\right)\mu_1(dx). \qquad (4.7)\end{aligned}$$

Para concluir que $|\mu_{12}| \subset F$, basta provar que, se $A \in \mathcal{B}(X_1 \times X_2)$ é tal que $A \cap F = \emptyset$, então $\mu_{12}(A) = 0$. Seja, pois, $A \in \mathcal{B}(X_1 \times X_2)$ tal que $A \cap F = \emptyset$, e considere $u = \chi_A$. Pela equação (4.7):

$$\begin{aligned}\mu_{12}(A) &= \int_{X_1\times X_2}\chi_A(x,y)\mu_{12}(d(x,y)) = \int_{X_1}\left(\int_{X_2}\chi_A(x,y)\,\kappa_x(dy)\right)\mu_1(dx)\\ &= \int_{|\mu_1|}\left(\int_{|\kappa_x|}\chi_A(x,y)\,\kappa_x(dy)\right)\mu_1(dx) \overset{|\kappa_x|\subset F(x)}{=} 0.\end{aligned}$$

(c) $\Rightarrow$ (b) Sendo $X_1 \times X_2$ compacto pelo Teorema 1.1.4, é separável e completo. Considere a seguinte σ-álgebra em $X_1 \times X_2$:

$$\mathcal{F} := \{\pi_1^{-1}(A_1); A_1 \in \mathcal{B}(X_1)\}.$$

Então $\mathcal{F} \subset \mathcal{B} := \mathcal{B}(X_1 \times X_2)$ e, pelo Teorema 4.2.26 (com $\Omega = X = X_1 \times X_2$, $\mathcal{G} = \mathcal{B}$, $\mu = \mu_{12}$, $f = Id_{X_1 \times X_2}$), existe uma distribuição condicional regular $Q : (X_1 \times X_2) \times \mathcal{B} \to \mathbb{R}$. Assim, Q satisfaz as seguintes propriedades:

(i) para $B \in \mathcal{B}$ fixado, a função $(x,y) \mapsto Q((x,y),B)$ é $\mathcal{F}$-mensurável;

(ii) para $(x,y) \in X_1 \times X_2$ fixado, a função $B \mapsto Q((x,y),B)$ é uma medida de probabilidade em $(X_1 \times X_2, \mathcal{B})$;

(iii) para quaisquer $B \in \mathcal{B}$ e $E \in \mathcal{F}$:

$$\int_E Q((x,y),B)\mu_{12}(d(x,y)) = \mu_{12}(B \cap E).$$

Considere então o seguinte *kernel* de Markov em $X_1 \times X_2$:

$$\begin{array}{rccl} \tilde{\kappa}: & X_1 \times X_2 & \to & \mathbb{P}(X_1 \times X_2) \\ & (x,y) & \mapsto & \tilde{\kappa}_{(x,y)} := Q((x,y),\cdot). \end{array}$$

Serão utilizados o item (iii) e um procedimento análogo ao que foi feito para obter (4.7). Assim, se $u : X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$ é integrável e limitada e $A_1 \in \mathcal{B}(X_1)$, então:

$$\int_{A_1 \times X_2} u(x,y)\mu_{12}(d(x,y)) = \int_{A_1 \times X_2} \left(\int_{X_1 \times X_2} u(z,w)\,\tilde{k}_{(x,y)}(d(z,w)) \right) \mu_{12}(d(x,y)). \quad (4.8)$$

Fixe $y_0 \in X_2$, e defina a seguinte função:

$$\begin{array}{rccl} \hat{\kappa}: & X_1 & \to & \mathbb{P}(X_2) \\ & x & \mapsto & \hat{\kappa}_x := \pi_{2*}(\tilde{\kappa}_{(x,y_0)}). \end{array}$$

Agora, para cada $A_1 \times A_2 \in \mathcal{S}$, escolhendo $u = \chi_{X_1 \times A_2}$ em (4.8), como $\pi_{1*}(\mu_{12}) = \mu_1$, segue do Lema 4.1.10 que:

$$\mu_{12}(A_1 \times A_2) = \int_{A_1} \hat{\kappa}_x(A_2)\mu_1(dx).$$

Fazendo $A_1 = X_1$, como $\pi_{2*}(\mu_{12}) = \mu_2$, conclui-se que, para cada $A_2 \in \mathcal{B}(X_2)$:

$$\mu_2(A_2) = \mu_{12}(\pi_2^{-1}(A_2)) = \int_{X_1} \hat{\kappa}_x(A_2)\mu_1(dx). \quad (4.9)$$

Será agora construído um conjunto $N \in \mathcal{B}(X_1)$, com $\mu_1(N) = 0$, de modo que, se $x \in N^c$, então $|\hat{\kappa}_x| \subset F(x)$. Ora, se $U_1 \times U_2$ é um aberto em $X_1 \times X_2$ e $(U_1 \times U_2) \cap F = \emptyset$, como $|\mu_{12}| \subset F$, então $\mu_{12}(U_1 \times U_2) = 0$. Assim, por (4.9), $\hat{\kappa}_x(U_2) = 0$ μ_1-q.t.p. $x \in U_1$. Logo, $\mu_1(\{x \in U_1; \hat{\kappa}_x(U_2) = 0\}) = 1$, o que implica:

$$\mu_1\left(U_1^c \cup \{x \in U_1; \hat{\kappa}_x(U_2) > 0\}\right) = 0. \quad (4.10)$$

Sejam $E_1 := \{U_n^1; n \in \mathbb{N}\}$ e $E_2 := \{U_n^2; n \in \mathbb{N}\}$ bases enumeráveis para X_1 e X_2, e defina:

$$E := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{U_n^1 \times U_n^2; U_n^1 \in E_1, U_n^2 \in E_2, (U_n^1 \times U_n^2) \cap F = \emptyset\right\}.$$

Observe que E cobre o aberto F^c. Ademais, considere os seguintes borelianos:

$$\begin{aligned} V_1 &:= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{U_n^1 \in E_1; U_n^1 \times U_n^2 \in E\}; \\ V_2 &:= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{U_n^2 \in E_2; U_n^1 \times U_n^2 \in E\}. \end{aligned}$$

O conjunto N fica definido da seguinte forma:

$$N := V_1^c \cup \left\{x \in U_n^1; U_n^1 \times U_n^2 \in E, \hat{\kappa}_x(U_n^2) > 0, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Assim:

$$\mu_1(N) = \sum_{\substack{n=1 \\ U_n^1 \times U_n^2 \in E}}^{\infty} \mu_1\left((U_n^1)^c \cup \left\{x \in U_n^1; \hat{\kappa}_x(U_n^2) > 0\right\}\right) \overset{(4.10)}{=} 0.$$

Além disso, se $x \in N^c$, então, para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $U_n^1 \times U_n^2 \in E$, $x \in (U_n^1)^c$ e $\hat{\kappa}_x(U_n^2) = 0$. Logo, se $A_2 \in \mathcal{B}(X_2)$ é tal que $A_2 \cap F(x) = \emptyset$, então $A_2 \subset U_2$, ou seja, há $\tilde{\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ de modo que $A_2 \subset \bigcup_{n\in\tilde{\mathbb{N}}} U_n^2$ e $U_n^1 \times U_n^2 \in E$ para todo $n \in \tilde{\mathbb{N}}$. Assim, $x \in (U_n^1)^c$ para cada $n \in \tilde{\mathbb{N}}$ e, consequentemente, $\hat{\kappa}_x(A_2) \leq \sum_{n\in\tilde{\mathbb{N}}} \kappa_x(U_n^2) = 0$. Logo, $|\hat{\kappa}_x| \subset F(x)$ sempre que $x \in N^c$. Agora, como $|\mu_{12}| \subset F$, então $|\mu_1| = |\pi_{1*}(\mu_{12})| \subset \pi_1(F) = Dom(F) = X_1$. Pelo Lema 1.5.11, há uma seleção de F mensurável, $f : X_1 \to X_2$. Defina κ_x por:

$$\kappa_x := \begin{cases} \delta_{f(x)}, & \text{se } x \in N \cap |\mu_1|, \\ \hat{\kappa}_x, & \text{se } x \in (N \cap |\mu_1|)^c. \end{cases}$$

Para provar que κ_x satisfaz as condições em (4.5), fixe $x \in |\mu_1|$ e $A_2 \in \mathcal{B}(X_2)$ tais que $A_2 \cap F(x) = \emptyset$. Se $x \in N$, então $\kappa_x(A_2) = \delta_{f(x)}(A_2) = 0$, ou seja, $|\kappa_x| \subset F(x)$. Agora, se $x \in N^c$, então $|\kappa_x| = |\hat{\kappa}_x| \subset F(x)$. Portanto, $|\kappa_x| \subset F(x)$ para todo $x \in |\mu_1|$.
Por fim, como $\mu_1(N) = 0$, então:

$$\begin{aligned} \int_{X_1} \kappa_x(A_2)\mu_1(dx) &= \int_{N\cap|\mu_1|} \delta_{f(x)}(A_2)\mu_1(dx) + \int_{(N\cap|\mu_1|)^c} \hat{\kappa}_x(A_2)\mu_1(dx) \\ &= 0 + \int_{N^c\cup|\mu_1|^c} \hat{\kappa}_x(A_2)\mu_1(dx) \\ &= \int_{N^c} \hat{\kappa}_x(A_2)\mu_1(dx) + \int_{|\mu_1|^c} \hat{\kappa}_x(A_2)\mu_1(dx) \\ &= \int_{N^c} \hat{\kappa}_x(A_2)\mu_1(dx) = \int_{X_1} \hat{\kappa}_x(A_2)\mu_1(dx) \\ &\overset{(4.9)}{=} \mu_2(A_2). \end{aligned}$$

(c) $\Rightarrow$ (a) Seja $A_2 \in \mathcal{B}(X_2)$. Será provado inicialmente que:

$$(X_1 \times A_2) \cap F \subset F^{-1}(A_2) \times X_2. \tag{4.11}$$

Se $(x,y) \in (X_1 \times A_2) \cap F$, então $y \in F(x) \cap A_2$. Assim, $F(x) \cap A_2 \neq \emptyset$ e $x \in F^{-1}(A_2)$. Logo, $(x,y) \in F^{-1}(A_2) \times X_2$, o que prova (4.11). Como já mencionado previamente, $F^{-1}(A_2)$ é mensurável. Finalmente:

$$\begin{aligned} \mu_2(A_2) &= \mu_{12}(X_1 \times A_2) \overset{|\mu_{12}| \subset F}{=} \mu_{12}((X_1 \times A_2) \cap F) \\ &\overset{(4.11)}{\leq} \mu_{12}(F^{-1}(A_2) \times X_2) = \mu_1(F^{-1}(A_2)). \end{aligned}$$

(a) $\Rightarrow$ (c) Fixe $\varepsilon > 0$, e cubra cada X_j por finitas bolas $B_1^j(x_1^j, \varepsilon/3), \ldots, B_{n(j)}^j(x_{n(j)}^j, \varepsilon/3)$. Defina:

$$B_k^j := B_k^j(x_k^j, \varepsilon/3); \quad U_1^j := B_1^j, \; U_2^j := B_2^j \setminus B_1^j, \; \ldots \;, \; U_{n(j)}^j := B_{n(j)}^j \setminus \cup_{k=1}^{n(j)-1} B_k^j.$$

Logo, $\bigcup_{k=1}^{n(j)} U_k^j = X_j$ e $U_k^j \cap U_l^j = \emptyset$ se $k \neq l$. Tem-se assim uma partição finita de X_j, que define uma relação de equivalência finita E_j tal que o diâmetro de cada classe de equivalência não excede ε. Se $x \in X_j$, seja $E_j(x)$ a classe de equivalência de x. Considere ainda a projeção natural:

$$\begin{aligned} \pi_{E_j} : \; X_j &\rightarrow X_j/E_j \\ x &\mapsto E_j(x). \end{aligned}$$

Defina agora $E := E_1 \times E_2$ em $X_1 \times X_2$ da seguinte forma:

$$E(x,y) := E_1(x) \times E_2(y).$$

A projeção aqui é dada por:

$$\pi_E(x,y) := \{(\tilde{x},\tilde{y}); \tilde{x} \in E_1(x), \tilde{y} \in E_2(y)\} = \pi_{E_1}(x) \times \pi_{E_2}(y).$$

Considere o espaço quociente com a topologia apresentada na Definição 1.1.6. Defina ainda a seguinte função multívoca F_E em $(X_1/E_1) \times (X_2/E_2)$:

$$F_E := (\pi_{E_1} \times \pi_{E_2})(F).$$

Desse modo:

$$\begin{aligned} (E_1(x), E_2(y)) \in F_E &\Leftrightarrow (E_1(x), E_2(y)) \in (\pi_{E_1} \times \pi_{E_2})(F) \\ &\Leftrightarrow (E_1(x) \times E_2(y)) \cap F \neq \emptyset \qquad (4.12) \\ &\Leftrightarrow F(E_1(x)) \cap E_2(y) \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow E_1(x) \cap F^{-1}(E_2(y)) \neq \emptyset. \qquad (4.13) \end{aligned}$$

Considere agora, para cada $j \in \{1,2\}$, a seguinte medida ν_j em $\mathbb{P}(X_j/E_j)$:

$$\nu_j := (\pi_{E_j^*})(\mu_j).$$

Seja ainda $w : X_1/E_1 \times X_2/E_2 \to X_1 \times X_2$ uma *seção adaptada para* F, ou seja, um função satisfazendo:

$$(E_1(x), E_2(y)) \in F_E \Rightarrow w(E_1(x), E_2(x)) \in F.$$

Observe que a existência de w é garantida por (4.12). Afirmação: se $B_2 \subset X_2/E_2$, então:

$$(\pi_{E_1})^{-1}(F_E^{-1}(B_2)) = E_1(F^{-1}((\pi_{E_2})^{-1}(B_2))).$$

De fato, se $x \in (\pi_{E_1})^{-1}(F_E^{-1}(B_2))$, então:

$$\begin{aligned}
x \in (\pi_{E_1})^{-1}(F_E^{-1}(B_2)) &\Leftrightarrow E_1(x) \in F_E^{-1}(B_2) \\
&\Leftrightarrow F_E(E_1(x)) \cap B_2 \neq \emptyset \\
&\Leftrightarrow \exists y \in X_2; E_2(y) \in F_E(E_1(x)) \cap B_2 \\
&\Leftrightarrow \exists y \in X_2; (E_1(x), E_2(y)) \in F_E \text{ e } E_2(y) \in B_2 \\
&\overset{(4.13)}{\Leftrightarrow} \exists y \in (\pi_{E_2})^{-1}(B_2); E_1(x) \cap F^{-1}(E_2(y)) \neq \emptyset \\
&\Leftrightarrow \exists y \in (\pi_{E_2})^{-1}(B_2) \text{ e } \exists \tilde{x} \in E_1(x) \cap F^{-1}(E_2(y)).
\end{aligned}$$

Logo, $E_2(y) \subset (\pi_{E_2})^{-1}(B_2)$ e, consequentemente, $\tilde{x} \in E_1(x) \cap F^{-1}((\pi_{E_2})^{-1}(B_2)$. Assim, $\tilde{x} \in E_1(\tilde{x}) \subset E_1(F^{-1}((\pi_{E_2})^{-1}(B_2))$. Como $E_1(x) = E_1(\tilde{x})$, então $x \in E_1(F^{-1}((\pi_{E_2})^{-1}(B_2))$.

Por outro lado, seja $x \in E_1(F^{-1}((\pi_{E_2})^{-1}(B_2)))$. Então existe $\tilde{x} \in F^{-1}((\pi_{E_2})^{-1}(B_2))$ de modo que $x \in E_1(\tilde{x})$. Logo, $F(\tilde{x}) \cap (\pi_{E_2})^{-1}(B_2) \neq \emptyset$, o que garante a existência de $\tilde{y} \in F(\tilde{x}) \cap (\pi_{E_2})^{-1}(B_2)$. Assim, $E_2(\tilde{y}) \in B_2$. Como $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in F$, então $(E_1(\tilde{x}), E_2(\tilde{y})) \in F_E$. Desse modo, $\tilde{x} \in (\pi_{E_1})^{-1}(F_E^{-1}(B_2))$ e, como $E_1(x) = E_1(\tilde{x})$, então $x \in (\pi_{E_1})^{-1}(F_E^{-1}(B_2))$.

Conclui-se assim a afirmação, ou seja, se $B_2 \subset X_2/E_2$, então:

$$(\pi_{E_1})^{-1}(F_E^{-1}(B_2)) = E_1(F^{-1}((\pi_{E_2})^{-1}(B_2))) \supset F^{-1}((\pi_{E_2})^{-1}(B_2)). \tag{4.14}$$

Portanto, se $B_2 \in \mathcal{B}(X_2/E_2)$, então:

$$\begin{aligned}
\nu_2(B_2) &= \mu_2((\pi_{E_2})^{-1}(B_2)) \leq \mu_1(F^{-1}((\pi_{E_2})^{-1}(B_2))) \\
&\overset{(4.14)}{\leq} \mu_1((\pi_{E_1})^{-1}(F_E^{-1}(B_2))) = \nu_1(F_E^{-1}(B_2)).
\end{aligned}$$

Pelo Teorema 4.2.27 aplicado a F_E, existe $\nu_{12} \in \mathbb{P}((X_1/E_1) \times (X_2/E_2))$ de modo que $\pi_{1*}(\nu_{12}) = \nu_1$, $\pi_{2*}(\nu_{12}) = \nu_2$ e $|\nu_{12}| \subset F_E$. Considere então a medida finita $\mu_\varepsilon := w_*(\nu_{12})$ em $X_1 \times X_2$. Como w é uma seção adaptada de F e ν_{12} é suportada por F_E, então $|\mu_\varepsilon| =$

$|w_*(\nu_{12})| \subset w(F_E) \subset F$.

Além disso, para cada $j \in \{1,2\}$:

$$\begin{array}{ccccc} X_1 \times X_2 & \xrightarrow{\pi_{E_1}\times\pi_{E_2}} & X_1/E_1 \times X_2/E_2 & \xrightarrow{\pi_j} & X_j/E_j \\ (x_1,x_2) & \longmapsto & (E_1(x_1),E_2(x_2)) & \longmapsto & E_j(x_j). \end{array}$$

Consequentemente:

$$\pi_j \circ (\pi_{E_1} \times \pi_{E_2}) = \pi_{E_j} \circ \pi_j : X_1 \times X_2 \to X_j/E_j. \tag{4.15}$$

Ademais, $(\pi_{E_1} \times \pi_{E_2}) \circ w = Id_{F_E}$. De fato, se $(E_1(x),E_2(y)) \in F_E$, então $w(E_1(x),E_2(y)) = (\tilde{x},\tilde{y}) \in F$, com $\tilde{x} \in E_1(x)$ e $\tilde{y} \in E_2(y)$. Desse modo, $\pi_{E_1} \times \pi_{E_2}(\tilde{x},\tilde{y}) = (E_1(\tilde{x}),E_2(\tilde{y})) = (E_1(x),E_2(y))$. Disso tudo decorre que:

$$\begin{aligned} (\pi_{E_j})_*(\pi_j)_*(\mu_\varepsilon) &= (\pi_{E_j} \circ \pi_j)_*(w_*(\nu_{12})) \overset{(4.15)}{=} (\pi_j \circ (\pi_{E_1} \times \pi_{E_2}))_*(w_*(\nu_{12})) \\ &= (\pi_j)_*((\pi_{E_1} \times \pi_{E_2}) \circ w)_*(\nu_{12}) = (\pi_j)_*(\nu_{12}) \\ &= \nu_j = (\pi_{E_j})_*(\mu_j). \end{aligned}$$

Pelo Lema 4.2.28:

$$d_{BL}((\pi_j)_*(\mu_\varepsilon),\mu_j) \leq 2\varepsilon. \tag{4.16}$$

Sendo $\mathbb{P}(X_1 \times X_2)$ compacto, há ao menos um ponto de acumulação para o conjunto $\{\mu_\varepsilon; \varepsilon > 0\}$. Fixe μ_{12} como sendo um tal ponto de acumulação. Como cada μ_ε é suportada por F, então $|\mu_{12}| \subset F$. Por fim, de (4.16), conclui-se que $\pi_{j*}(\mu_{12}) = \mu_j$ para $j \in \{1,2\}$.
$\square$

Observação 4.2.30. Para o próximo teorema, é necessário estabelecer as seguintes notações. Sejam T um conjunto não vazio e $(\Omega_t, \mathcal{F}_t)$, $t \in T$, espaços mensuráveis. Para cada subconjunto não vazio $\Lambda \subset T$, Ω_Λ denota o produto dos espaços Ω_t, $t \in \Lambda$, munido da σ-álgebra produto, denotada por $\mathcal{F}_\Lambda$. Será utilizado também o conceito de *classe de aproximação compacta* introduzido no Teorema 1.2.34.

Teorema 4.2.31. *(Teorema de Kolmogorov)* Seja T um conjunto não vazio. Para cada $t \in T$, seja (Ω_t, d_t) um espaço métrico completo e separável munido de sua σ-álgebra de Borel. Suponha que, para todo subconjunto finito $\Lambda \subset T$, exista uma medida de probabilidade μ_Λ em $(\Omega_\Lambda, \mathcal{B}(\Omega_\Lambda))$ de modo que a seguinte *condição de compatibilidade* seja satisfeita:

> se $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$, então a imagem da medida μ_{Λ_2} pelo *push-forward* da projeção natural de Ω_{Λ_2} a Ω_{Λ_1} coincide com μ_{Λ_1}.

Então há uma medida de probabilidade μ no espaço produto $(\prod_{t\in T} \Omega_t, \bigotimes_{t\in T} \mathcal{B}(\Omega_t))$ de sorte que a imagem de μ pelo *push-forward* da projeção natural de $\prod_{t\in T} \Omega_t$ a Ω_Λ coincide com μ_Λ para cada subconjunto finito $\Lambda \subset T$.

Prova. A prova deste resultado pode ser obtida no Corolário 7.7.2 em (Bogachev, 2007, [4]). □

Teorema 4.2.32. Sejam (X,d) um espaço métrico compacto e $F : X \rightsquigarrow X$ uma função multívoca fechada. Se $\mu \in \mathbb{P}(X)$, então as seguintes condições são equivalentes:

- μ é invariante$_1$ por F (ver Definição 4.2.1);
- μ é invariante$_2$ por F (ver Definição 4.2.11);
- μ é invariante$_3$ por F (ver Definição 4.2.14);
- μ é invariante$_4$ por F (ver Definição 4.2.23).

Desse modo, uma medida $\mu \in \mathbb{P}(X)$ será chamada *invariante* por F se qualquer das condições acima for satisfeita. Além disso, o subconjunto $\mathbb{P}_F(X)$ das medidas invariantes por F é convexo e compacto em $\mathbb{P}(X)$. Tal conjunto é ainda não vazio se, e somente se, X_F é não vazio, o que acontece se, e somente se, $\pi_0(X_F)$ é não vazio. Em geral, se $\mu \in \mathbb{P}_F(X)$, então $|\mu| \subset \pi_0(X_F)$.

Prova. As equivalências invariante$_1$ $\Leftrightarrow$ invariante$_2$ $\Leftrightarrow$ invariante$_3$ seguem do Teorema 4.2.29.

- invariante$_4$ $\Rightarrow$ invariante$_3$: para $\xi = (\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in X^{\mathbb{Z}}$, denote por $\pi_j : X^{\mathbb{Z}} \to X$ a projeção dada por $\pi_j(\xi) = \xi_j$, para cada $j \in \mathbb{Z}$. Denote também por $\pi_{01} : X^{\mathbb{Z}} \to X \times X$ a projeção dada por $\pi_{01}(\xi) = (\xi_0, \xi_1)$. Já para $(x_1,x_2) \in X \times X$, sejam π_1 e π_2 as projeções canônicas já conhecidas, $\pi_1(x_1,x_2) = x_1$, $\pi_2(x_1,x_2) = x_2$. Defina $\mu_{12} \in \mathbb{P}(X \times X)$ por:

$$\mu_{12} := (\pi_{01})_*(\nu).$$

Pela definição de X_F, o aberto $\pi_{01}^{-1}(F^c)$ é disjunto de X_F. Como $|\nu| \subset X_F$, segue que $\mu_{12}(F^c) = 0$, ou seja, $|\mu_{12}| \subset F$. Além disso:

$$\begin{aligned}
(\pi_1)_*(\mu_{12}) &= (\pi_1)_*(\pi_{01})_*(\nu) = (\pi_1 \circ \pi_{01})_*(\nu) \\
&= (\pi_0)_*(\nu) = \mu \\
&= (\pi_0)_*(s_F)_*(\nu) = (\pi_0 \circ s_F)_*(\nu) \\
&= (\pi_1)_*(\nu) = (\pi_2 \circ \pi_{01})_*(\nu) \\
&= (\pi_2)_*(\pi_{01})_*(\nu) = (\pi_2)_*(\mu_{12}).
\end{aligned}$$

- invariante$_2$ $\Rightarrow$ invariante$_4$: para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $X^n := \prod_{j=1}^n X$. Será construída indutivamente uma sequência de medidas $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$, em que $\mu_n \in X^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Seja $\mu_1 := \mu$, e defina $\mu_2 \in \mathbb{P}(X^2)$ seguindo a medida μ_{12} em (4.6), ou seja:

$$\mu_2(A_1 \times A_2) := \int_{A_1} k_x(A_2)\mu_1(dx).$$

Defina $\kappa^1 := \kappa$, $F_1 := F$. Fixado $n \in \mathbb{N}$, suponha que estejam definidos, para cada $j \in \{1,\ldots,n\}$, κ^{j-1}, F_{j-1} e μ_j como segue. O *kernel* de Markov κ^{j-1} é o seguinte:

$$\begin{array}{rccl} \kappa^{j-1}: & X^{j-1} & \to & \mathbb{P}(X) \\ & x = (x_1,\ldots,x_{j-1}) & \mapsto & \kappa_{\pi_{j-1}(x)} = \kappa_{x_{j-1}}. \end{array}$$

A função multívoca $F_{j-1} : X^{j-1} \to X$ é dada por $F_{j-1}(x_1,\ldots,x_{j-1}) = F(x_{j-1})$. A medida $\mu_j \in \mathbb{P}(X^j)$ é dada por:

$$\mu_j(A_1 \times \cdots \times A_j) = \int_{A_1\times\cdots\times A_{j-1}} k_x^{j-1}(A_j)\mu_{j-1}(dx) \quad \forall A_1 \times \cdots \times A_j \in \mathcal{B}(X^j).$$

Observe que, fixado $A \in \mathcal{B}(X)$, se $I \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, então:

$$\left(\kappa_{(\cdot)}^{j-1}(A)\right)^{-1}(I) = X^{j-2} \times \left(\kappa_{x_{j-1}}(A)\right)^{-1}(I) \in \mathcal{B}(X^{j-1}).$$

Logo, $\kappa_{(\cdot)}^{j-1}(A)$ é mensurável. Agora, como $\mu = \kappa_*(\mu)$, então:

$$\mu(A) = \int_{X^{j-1}} \kappa_x^{j-1}(A)\mu_{j-1}(dx) \quad \forall A \in \mathcal{B}(X).$$

Ademais, se $x \in |\mu_j|$, então $x_j = \pi_j(x) \in |\mu|$. De fato, se $A = A_1 \times \cdots \times A_{j-1} \times A_j \in \mathcal{B}(X^j)$ é tal que $A_j \subset |\mu|^c$, então:

$$\mu_j(A) = \int_{A_1\times\cdots\times A_{j-1}} \kappa_x^{j-1}(A_j)\mu_{j-1}(dx) = 0.$$

Desse modo, $|\kappa_x^{j-1}| = |\kappa_{x_{j-1}}| \subset F(x_{j-1}) = F_{j-1}(x)$ para todo $x \in |\mu_{j-1}|$.

Para definir μ_{n+1}, considere o seguinte *kernel* de Markov:

$$\begin{array}{rccl} \kappa^n: & X^n & \to & \mathbb{P}(X) \\ & x = (x_1,\ldots,x_n) & \mapsto & \kappa_{\pi_n(x)} = \kappa_{x_n}. \end{array}$$

Defina ainda a seguinte função multívoca $F_n : X^n \to X$:

$$F_n(x_1,\ldots,x_n) := F(x_n).$$

De modo análogo ao que foi feito acima, conclui-se que $|\kappa_x^n| \subset F_n(x)$ e, além disso:

$$\mu(A) = \int_{X^n} \kappa_x^n(A)\mu_n(dx) \quad \forall A \in \mathcal{B}(X).$$

Assim, foi provada a validade do item (b) no Teorema 4.2.29, com $X_1 = X^n$ e $X_2 = X$. Portanto, é possível utilizar novamente a equação (4.6) para definir a medida $\mu_{n+1} \in$

$\mathbb{P}(X^{n+1})$ da seguinte forma:

$$\mu_{n+1}(A \times A_{n+1}) := \int_A \kappa_x(A_{n+1})\mu_n(dx) \quad \forall A \in \mathcal{B}(X_1 \times \cdots X_n).$$

Da demonstração de (b) $\Rightarrow$ (c) no Teorema 4.2.29, conclui-se que $\mu_n(A) = \mu_{n+1}(A \times X)$ para todo $A \in \mathcal{B}(X_1 \times \cdots \times X_n)$, $\mu(A_{n+1}) = \mu_{n+1}(X^n \times A_{n+1})$ para todo $A_{n+1} \in \mathcal{B}(X)$, e $|\mu_{n+1}| \subset F_n$.

Desse modo, ficou construída a sequência $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{P}(X^n)$. Será provada a condição de compatibilidade para esta sequência a fim de aplicar o Teorema de Kolmogorov (4.2.31). Sejam $n, m \in \mathbb{N}$ com $n < m$, e considere a projeção natural $\pi_{mn} : X^m \to X^n$. Será provado que $(\pi_{mn})_*(\mu_m) = \mu_n$. Seja $A \in \mathcal{B}(X_1 \times \cdots \times X_n)$. Se $l \in \mathbb{N}$ é tal que $m = n + l$, então:

$$\mu_m(A \times X^l) = \mu_m((A \times X^{l-1}) \times X) = \mu_{m-1}(A \times X^{l-1}) = \cdots = \mu_n(A).$$

De modo inteiramente análogo, é feita toda a construção para os inteiros negativos. Pelo Teorema de Kolmogorov (4.2.31), segue a existência de uma medida $\nu \in \mathbb{P}(X^{\mathbb{Z}})$ cuja imagem pelo *push-forward* da projeção natural de $X^{\mathbb{Z}}$ a X^n coincide com μ_n para todo $n \in \mathbb{Z}$. A partir da construção, é imediato que $s_*(\nu) = \nu$. Para provar que $|\nu| \subset X_F$, observe que $\mu_2(X^2 \setminus F) = 0$. Ademais, se $\pi_{n,n+1} : X^{\mathbb{Z}} \to X \times X$ é dada por $\pi_{n,n+1}(\xi) := (\xi_n, \xi_{n+1})$ para cada $n \in \mathbb{Z}$, então $X^{\mathbb{Z}} \setminus X_F = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \pi^{-1}_{n,n+1}(X^2 \setminus F)$. Logo, $\nu(X^{\mathbb{Z}} \setminus X_F) = 0$, ou seja, $|\nu| \subset X_F$.

Agora será provado que $\mathbb{P}_F(X)$ é convexo e compacto. Note que $\mathbb{P}_F(X) = (\pi_0)_*(\mathbb{P}_{s_F}(X_F))$. Pela Proposição 4.2.20, X_F é compacto e s_F invariante. Assim, $\mathbb{P}(X_F)$ é compacto na topologia da convergência fraca. Afirmação: $\mathbb{P}_{s_F}(X_F)$ é também compacto. De fato, seja $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathbb{P}_{s_F}(X_F)$ convergindo para $\nu \in \mathbb{P}(X_F)$ na topologia da convergência fraca. Assim, se $A \subset X_F$ é aberto, então:

$$(s_F)_*(\nu)(A) = \nu(s_F^{-1}(A)) \overset{1.4.7}{=} \lim_{n\to\infty} \nu_n(s_F^{-1}(A)) = \lim_{n\to\infty} \nu_n(A) \overset{1.4.7}{=} \nu(A).$$

Isso prova que $(s_F)_*(\nu)$ coincide com ν nos elementos da topologia de X_F. Consequentemente, essas medidas coincidem em $\mathcal{B}(X_F)$, ou seja, $\nu \in \mathbb{P}_{s_F}(X_F)$, o que conclui a afirmação. Como $(\pi_0)_*$ é contínua pela Proposição 4.1.11, então $\mathbb{P}_F(X)$ é compacto. Além disso, é imediato que $\mathbb{P}_{s_F}(X_F)$ é convexo e, portanto, $\mathbb{P}_F(X)$ é convexo.

Por fim, se $\mathbb{P}_F(X) \neq \emptyset$, então $\mathbb{P}(X_F) \neq \emptyset$, ou seja, $X_F \neq \emptyset$ e $\pi_0(X_F) \neq \emptyset$. Reciprocamente, se $\pi_0(X_F) \neq \emptyset$, então $X_F \neq \emptyset$. Pelo Teorema de Krylov-Bogolubov (4.1.12), conclui-se que $\mathbb{P}_{s_F}(X_F) \neq \emptyset$ e, portanto, $\mathbb{P}_F(X) \neq \emptyset$. $\square$

4.2.6 Teorema Ergódico

Definição 4.2.33. Seja E um conjunto convexo e não vazio. Um elemento $x \in E$ é um *ponto extremo* se a igualdade $x = tx_1 + (1-t)x_2$, com $x_1, x_2 \in E$ e $t \in (0,1)$, implica $x_1 = x_2 = x$. Em outras palavras, se x está no meio de algum segmento, então este segmento liga x a ele próprio.

Lema 4.2.34. Sejam (X,d) um espaço métrico, $f : X \to X$ uma função contínua e $\mu \in \mathbb{P}(X)$ uma medida f-invariante. Se μ é um ponto extremo de $\mathbb{P}_f(X)$, então μ é f-ergódica.

Prova. Observe que, pela Proposição 1.5.3, f pode ser vista como uma função multívoca fechada, e isso nos permite aplicar o Teorema 4.2.32 para concluir que $\mathbb{P}_f(X)$ é convexo.
Suponha que μ não seja f-ergódica. Existe então $A \in \mathcal{B}(X)$ de modo que $f^{-1}(A) = A$ e $\mu(A) \in (0,1)$. Considere as seguintes medidas em $\mathbb{P}_f(X)$:

$$\mu_1(B) := \frac{\mu(B \cap A)}{\mu(A)}, \quad \mu_2(B) := \frac{\mu(B \cap A^c)}{\mu(A^c)} \quad \forall B \in \mathcal{B}(X).$$

Desse modo:

$$\mu = \mu(A)\mu_1 + \mu(A^c)\mu_2 = \mu(A)\mu_1 + (1-\mu(A))\mu_2.$$

Isso implica que μ não é ponto extremo de $\mathbb{P}_f(X)$, uma contradição. □

Observação 4.2.35. A recíproca do lema precedente é também válida, e sua demonstração pode ser encontrada na Proposição 4.17 em (Rasmussen, 2015, [17]).

Teorema 4.2.36. Sejam (X,d) um espaço métrico compacto, $F : X \rightsquigarrow X$ uma função multívoca fechada e μ um ponto extremo de $\mathbb{P}_F(X)$. Considere o seguinte subconjunto convexo e compacto de $\mathbb{P}(X_F)$:

$$C_\mu := \{\nu \in \mathbb{P}(X_F); \nu \text{ é } s_F\text{-invariante e } (\pi_0)_*(\nu) = \mu\}.$$

Desse modo, se $\nu \in C_\mu$ e $g \in L^1(X,\mu)$, então, para ν-q.t.p. $\xi \in X_F$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} g(\xi_j) = \int_X g(x)\mu(dx).$$

Prova. Defina $\tilde{g} : X_F \to \mathbb{R}$ por $\tilde{g}(\zeta) := g(\zeta_0) = g \circ \pi_0(\zeta)$. Então $g \in L^1(X_F, \nu)$. Afirmação: ν é s_F-ergódica. De fato, se $\nu = t\nu_1 + (1-t)\nu_2$, com $t \in (0,1)$ e $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{P}_{s_F}(X_F)$, então $(\pi_0)_*(\nu)(B) = (\pi_0)_*(t\nu_1 + (1-t)\nu_2)(B)$ para todo $B \in \mathcal{B}(X)$. Assim, para cada $B \in \mathcal{B}(X)$:

$$\begin{aligned}\mu(B) &= (t\nu_1 + (1-t)\nu_2)(\pi_0^{-1}(B)) = t\nu_1(\pi_0^{-1}(B)) + (1-t)\nu_2(\pi_0^{-1}(B)) \\ &= t(\pi_0)_*(\nu_1)(B) + (1-t)(\pi_0)_*(\nu_2)(B).\end{aligned}$$

Observe agora que, da Definição 4.2.23, $\mu_1 := (\pi_0)_*(\nu_1)$ e $\mu_2 := (\pi_0)_*(\nu_2)$ pertencem a $\mathbb{P}_F(X)$. Assim, a igualdade $\mu = t\mu_1 + (1-t)\mu_2$ implica $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, já que μ é ponto extremo de $\mathbb{P}_F(X)$. Isso nos garante que ν_1, ν_2 e ν coincidem em conjuntos da forma $\pi_0^{-1}(B)$, com $B \in \mathcal{B}(X)$. Se $n \in \mathbb{Z}$, então $\pi_n^{-1}(B) = s_F(\pi_0^{-1}(B))$ para todo $B \in \mathcal{B}(X)$. Como s_F é homeomorfismo, então $s_F^{-1}(s_F(\pi_n^{-1}(B))) = \pi_n^{-1}(B)$. Sendo ν, ν_1 e ν_2 s_F-invariantes, segue que:

$$\nu(\pi_n^{-1}(B)) = \nu(s_F(\pi_n^{-1}(B))) = \nu(\pi_0^{-1}(B)) = \nu_1(\pi_0^{-1}(B)) = \nu_2(\pi_0^{-1}(B)).$$

Isso implica que $\nu(\pi_n^{-1}(B)) = \nu_1(\pi_n^{-1}(B)) = \nu_2(\pi_n^{-1}(B))$ para todo $B \in \mathcal{B}(X)$. Pela definição de σ-álgebra produto (1.2.8), os conjuntos da forma $\pi_n^{-1}(B)$, com $B \in \mathcal{B}(X)$ e $n \in \mathbb{Z}$, geram $\mathcal{B}(X_F)$. Logo, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, provando assim que ν é ponto extremo de $\mathbb{P}_{s_F}(X_F)$ e, portanto, s_F-ergódica pelo Lema 4.2.34.

Desse modo, é possível aplicar o Teorema Ergódico de Birkhoff (1.3.8). Assim, para ν-q.t.p. $\xi \in X_F$:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} g(\xi_j) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \tilde{g}(s_F^j(\xi)) = \int_{X_F} \tilde{g}(\zeta)\,\nu(d\zeta) \\ &\overset{4.1.10}{=} \int_{\pi_0(X_F)} g(x)\,(\pi_0)_*(\nu)(dx) = \int_X g(x)\,\mu(dx).\end{aligned}$$ □

Exemplo 4.2.37. Sejam (Y,d) um espaço métrico completo e $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado φ-dissipativo e assintoticamente compacto. Considere ainda $X = \mathcal{A}$ o atrator global compacto (cuja existência é garantida pelo Teorema 3.1.18) e $F = V_1$. Como $V_1 : X \rightsquigarrow X$ é fechada, é possível aplicar o Teorema 4.2.36. Assim, se μ é ponto extremo de $\mathbb{P}_{V_1}(X)$, $\nu \in C_\mu$ e $g \in L^1(X,\mu)$, então para ν-q.t.p. $\xi \in X_{V_1}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} g(\xi_j) = \int_X g(x)\,\mu(dx). \tag{4.17}$$

Observe que $\xi_j \in V_j(\xi_0)$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Ou seja, $(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência sobre trajetórias de $\mathcal{G}$ e a variável $n \in \mathbb{N}$ é na verdade a variável temporal no semigrupo multívoco $\{V_t\}$. Assim, a equação (4.17) diz que, dentro do atrator, a média temporal de funções integráveis sobre pontos de trajetórias converge para a média espacial.

Além disso, fixe $\widehat{N} \subset X$ como sendo o φ-atrator global fechado mínimo de $\mathcal{G}$, ou seja, $\widehat{N} = \overline{\omega_\varphi(X)}$ pela Proposição 3.3.16. Definindo $g := \chi_{\widehat{N}}$, conclui-se de (4.17) que:

$$\mu(\widehat{N}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \chi_{\widehat{N}}(\xi_j).$$

Capítulo 5

Sistemas Dinâmicos Aleatórios

Nesse último capítulo, é apresentado um breve estudo sobre sistemas dinâmicos aleatórios, com o intuito de apresentar os conceitos de invariância e ergodicidade para este caso. Ao final, apresenta-se uma outra versão de teorema ergódico.

5.1 Variáveis Aleatórias

Definição 5.1.1. Sejam $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de probabilidade e $(Y, \mathcal{G})$ um espaço mensurável. Uma função mensurável $h : X \to Y$ é chamada de *variável aleatória com valores em* Y. Se $(Y, \mathcal{G}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, então h é chamada apenas de *variável aleatória*.

Definição 5.1.2. Sejam $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de probabilidade e $(Y, \mathcal{G})$ um espaço mensurável.

- Se $h : X \to Y$ é uma variável aleatória com valores em Y, a *distribuição* de h é definida como sendo a medida de probabilidade *push-forward* $h_*(\mu)$ em $\mathcal{G}$.

- Seja $\{h_\alpha; \alpha \in \Gamma\}$ uma família de variáveis aleatórias com valores em Y. Essa família é *identicamente distribuída* se $(h_\alpha)_*(\mu) = (h_\beta)_*(\mu)$ para quaisquer $\alpha, \beta \in \Gamma$.

Definição 5.1.3. Sejam $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de probabilidade e $\{A_\alpha; \alpha \in \Gamma\}$ uma família de conjuntos mensuráveis em $\mathcal{F}$. Essa família é *independente* se, para qualquer $\Gamma' \subset \Gamma$ finito, a seguinte igualdade é válida:

$$\mu\left(\bigcap_{\alpha\in\Gamma'} A_\alpha\right) = \prod_{\alpha\in\Gamma'} \mu(A_\alpha).$$

Definição 5.1.4. Sejam $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de probabilidade e $\{\mathcal{A}_\alpha; \alpha \in \Gamma\}$ uma família de subconjuntos da σ-álgebra $\mathcal{F}$, ou seja, uma família de subfamílias de $\mathcal{F}$. Essa família é *independente* se, para todo $\Gamma' \subset \Gamma$ finito e qualquer escolha $A_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha$, $\alpha \in \Gamma'$, a seguinte igualdade é válida:

$$\mu\left(\bigcap_{\alpha\in\Gamma'} A_\alpha\right) = \prod_{\alpha\in\Gamma'} \mu(A_\alpha).$$

Definição 5.1.5. Sejam X um conjunto não vazio, $(Y,\mathcal{G})$ um espaço mensurável e $h: X \to Y$ uma função. O conjunto $h^{-1}(\mathcal{G}) := \{h^{-1}(E); E \in \mathcal{G}\}$ é a menor σ-álgebra com respeito a qual h é mensurável. Então $\sigma(h) := h^{-1}(\mathcal{G})$ é a σ-álgebra em X *gerada por* h.
Agora, se $\mathcal{Y} = \{(Y_\alpha, \mathcal{G}_\alpha); \alpha \in \Gamma\}$ é uma família de espaços mensuráveis e $\mathcal{C} := \{h_\alpha; \alpha \in \Gamma\}$ é uma família de variáveis aleatórias tal que h_α tem valores em Y_α para cada $\alpha \in \Gamma$, a *σ-álgebra gerada pela família* $\mathcal{C}$ fica definida da seguinte forma:

$$\sigma(h_\alpha, \alpha \in \Gamma) := \sigma\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} \sigma(h_\alpha)\right) = \sigma\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} h_\alpha^{-1}(\mathcal{G}_\alpha)\right).$$

Definição 5.1.6. Sejam $(X,\mathcal{F},\mu)$ um espaço de probabilidade, $\{(Y_\alpha,\mathcal{G}_\alpha); \alpha\in\Gamma\}$ uma família de espaços mensuráveis e $\{h_\alpha; \alpha\in\Gamma\}$ uma família de variáveis aleatórias tal que h_α tem valores em Y_α para cada $\alpha\in\Gamma$. A família $\{h_\alpha; \alpha\in\Gamma\}$ é *independente* se $\{\sigma(h_\alpha); \alpha\in\Gamma\}$ é independente.

5.2 Sistemas Dinâmicos Aleatórios

Definição 5.2.1. Sejam (X,d_x) e (Λ,d_Λ) espaços métricos compactos. Considere ainda uma medida $\gamma \in \mathbb{P}(\Lambda)$ e uma função contínua $f: X\times\Lambda \to X$, para qual serão utilizadas as notações $f^x(\lambda) = f_\lambda(x) = f(x,\lambda)$. Assim, (f,X,Λ,γ) é um *sistema dinâmico aleatório* com *espaço de fase* X e *espaço de parâmetros aleatórios* (Λ,γ).

Observação 5.2.2. Durante todo o capítulo, ao referir-se a um sistema dinâmico aleatório (f,X,Λ,γ), estarão subentendidas as hipóteses da definição precedente.

Definição 5.2.3. Seja (f,X,Λ,γ) um sistema dinâmico aleatório. Considere o espaço $\Omega := \Lambda^{\mathbb{N}}$ munido da σ-álgebra produto $\mathcal{F} := \bigotimes_{\mathbb{N}} \mathcal{B}(\Lambda)$ e da medida de probabilidade produto $p := \gamma^{\mathbb{N}}$ (ver Definição 1.2.23). Considere a seguinte sequência de variáveis aleatórias com valores em Λ:

$$\begin{array}{rccc} \lambda_n: & \Omega & \to & \Lambda \\ & \omega & \mapsto & \omega_n. \end{array} \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{5.1}$$

Observação 5.2.4. Durante este capítulo, Ω será sempre o espaço descrito na definição precedente.

Proposição 5.2.5. A família de variáveis aleatórias $\{\lambda_n; n\in\mathbb{N}\}$ é independente e igualmente distribuída, com distribuição γ.

Prova. Para cada $n\in\mathbb{N}$, considere a σ-álgebra gerada por λ_n:

$$\sigma(\lambda_n) = \{\lambda_n^{-1}(E); E \in \mathcal{B}(\Lambda)\}.$$

Será provado que a família $\{\sigma(\lambda_n); n\in\mathbb{N}\}$ é independente. Para isso, considere $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ finito, $\mathbb{N}' = \{n_1,\ldots,n_k\}$, e fixe $A_{n_j} \in \sigma(\lambda_{n_j})$ para cada $j\in\{1,\ldots,k\}$. Então, para cada $j\in\{1,\ldots,k\}$,

$A_{n_j} = \lambda_{n_j}^{-1}(E_{n_j})$ para algum $E_{n_j} \in \mathcal{B}(\Lambda)$. Assim:

$$\bigcap_{j=1}^{k} A_{n_j} = \bigcap_{j=1}^{k} \lambda_{n_j}^{-1}(E_{n_j}) = \bigcap_{j=1}^{k} \left(E_{n_j} \times \prod_{\substack{l \in \mathbb{N} \\ l \neq n_j}} \Lambda \right) = E_{n_1} \times \cdots \times E_{n_k} \times \prod_{\substack{l \in \mathbb{N} \\ l \neq n_1, \ldots, n_k}} \Lambda.$$

Portanto:

$$p\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{n_j}\right) = \gamma(E_{n_1}) \cdots \gamma(E_{n_k}) = \prod_{j=1}^{k} p(A_{n_j}).$$

Isso prova que as variáveis aleatórias em questão são independentes, restando provar que cada uma delas tem distribuição γ. Ora, se $n \in \mathbb{N}$ e $E \in \mathcal{B}(\Lambda)$, então:

$$(\lambda_n)_*(p)(E) = p(\lambda_n^{-1}(E)) = p\left(E \times \prod_{\substack{l \in \mathbb{N} \\ l \neq n}} \Lambda \right) = \gamma(E). \qquad \square$$

Definição 5.2.6. O operador *shift* em Ω é definido da seguinte forma:

$$\begin{array}{rccl} \sigma : & \Omega & \to & \Omega \\ & \omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} & \mapsto & (\omega_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}. \end{array}$$

Além disso, a *transformação skew produto* é definida da seguinte forma:

$$\begin{array}{rccl} \tau : & X \times \Omega & \to & X \times \Omega \\ & (x, \omega) & \mapsto & (f_{\omega_1}(x), \sigma(\omega)), \end{array}$$

em que f_{ω_1} é como na Definição 5.2.1.

Observação 5.2.7. A primeira coordenada da n-ésima iterada $\tau^n(x, \omega)$ acima é dada por:

$$X_n^x(\omega) = f_{\omega_n} \circ \cdots \circ f_{\omega_1}(x). \tag{5.2}$$

Defina $X_0^x(\omega) := x$. Para (x, ω) fixado, a sequência $(X_n^x(\omega))_{n \in \mathbb{N}_0}$ é uma *órbita* do sistema aleatório (f, X, Λ, γ).

Proposição 5.2.8. Sejam (f, X, Λ, γ) um sistema dinâmico aleatório e $\kappa : X \to \mathbb{P}(X)$, $x \mapsto \kappa_x$, definida da seguinte forma:

$$\kappa_x(A) := \int_{\Lambda} \chi_A(f^x(\lambda))\, \gamma(d\lambda) \quad \forall A \in \mathcal{B}(X). \tag{5.3}$$

Então κ é um *kernel* de Markov.

Prova. Primeiro observe a seguinte igualdade:

$$\gamma(\{\lambda \in \Lambda; f^x(\lambda) \in A\}) = \int_\Lambda \chi_A(f^x(\lambda))\,\gamma(d\lambda) = \kappa_x(A) = \int_X \chi_A(y)\,\kappa_x(dy). \tag{5.4}$$

- Fixe $x \in X$. É preciso provar que $\kappa_x \in \mathbb{P}(X)$. É claro que $\kappa_x(\emptyset) = 0$. Agora, se $\{A_n; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{B}(X)$ é uma família dois a dois disjunta, então:

$$\begin{aligned}\kappa_x\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= \gamma\left(\left\{\lambda \in \Lambda; f^x(\lambda) \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right\}\right) = \gamma\left((f^x)^{-1}(\lambda) \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)\\ &= \gamma\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (f^x)^{-1}(A_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma((f^x)^{-1}(A_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_x(A_n).\end{aligned}$$

  Além disso, $\kappa_x(X) = \gamma((f^x)^{-1}(X)) = \gamma(\Lambda) = 1$.

- Fixe $A \in \mathcal{B}(X)$ e observe que a função $x \mapsto \kappa_x(A)$ coincide com a seguinte função mensurável:

$$x \mapsto \int_\Lambda \chi_A \circ f_\lambda(x)\,\gamma(d\lambda).$$

□

Observação 5.2.9. Pela igualdade (5.4), aplicando os teoremas de convergência para integral, conclui-se que, para qualquer $g : X \to \mathbb{R}$ integrável e limitada :

$$\int_X g(y)\,\kappa_x(dy) = \int_\Lambda g(f^x(\lambda))\,\gamma(d\lambda). \tag{5.5}$$

Observação 5.2.10. A partir daqui, o *kernel* de Markov κ será sempre o definido em (5.3).

Definição 5.2.11. Seja (f, X, Λ, γ) um sistema dinâmico aleatório. O *operador de transição* de κ, $\kappa : C(X,\mathbb{R}) \to F(X,\mathbb{R})$, é definido da seguinte forma:

$$(\kappa(g))(x) := \int_X g(y)\,\kappa_x(dy) = \int_\Lambda g(f^x(\lambda))\,\gamma(d\lambda) \quad \forall g \in C(X,\mathbb{R}).$$

Lema 5.2.12. Para cada $g \in C_b(X,\mathbb{R})$, $\kappa(g)$ é contínua em X.

Prova. Se $g \equiv 0$, o resultado é imediato; suponha então $g \not\equiv 0$. Para $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$, defina:

$$\Phi_n^\varepsilon(x) := \{\lambda \in \Lambda; |g(f(\lambda,x)) - g(f(\lambda,y))| < \varepsilon/2 \;\; \forall y \in B(x,1/n)\}.$$

Observe que $\Phi_n^\varepsilon(x) = (g(f^x))^{-1}(B(g(f_\lambda(B(x,1/n))),\varepsilon/2))$ é mensurável. Se $d(x,y) < 1/n$, então:

$$\begin{aligned}&|(\kappa(g))(x) - (\kappa(g))(y)|\\ &\quad = \left|\int_{\Phi_n^\varepsilon(x)} (g(f^x(\lambda)) - g(f^y(\lambda)))\,\gamma(d\lambda) + \int_{\Lambda\setminus\Phi_n^\varepsilon(x)} (g(f^x(\lambda)) - g(f^y(\lambda)))\,\gamma(d\lambda)\right|\\ &\quad \le \frac{\varepsilon}{2} + 2\|g\|_\infty \gamma(\Lambda \setminus \Phi_n^\varepsilon(x)).\end{aligned}$$

Além disso, dado $\lambda \in \Lambda$, pela continuidade de $g \circ f_\lambda$, existe $n(\varepsilon, x, \lambda) \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq n(\varepsilon, x, \lambda)$ e $d(x,y) < 1/n$, então $|g(f(\lambda, x)) - g(f(\lambda, y))| < \varepsilon/2$. Isso garante que $\lambda \in \Phi_n^\varepsilon(x)$ para todo $n \geq n(\varepsilon, x, \lambda)$. Consequentemente, $\Lambda \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Phi_n^\varepsilon(x)$. Ainda, como $\Phi_j^\varepsilon(x) \subset \Phi_k^\varepsilon(x)$ se $j \leq k$, então $\gamma(\Phi_n^\varepsilon(x)) \to \gamma(\Lambda) = 1$. Existe então $n(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ de modo que, se $n \geq n(\varepsilon, x)$, então:

$$\gamma(\Lambda \setminus \Phi_n^\varepsilon(x)) < \frac{\varepsilon}{4\|g\|_\infty}.$$

Portanto, se $n \geq n(\varepsilon, x)$ e $d(x,y) < 1/n$, então:

$$|(\kappa(g))(x) - (\kappa(g))(y)| < \varepsilon. \qquad \square$$

Corolário 5.2.13. A função $\kappa : X \to \mathbb{P}(X)$, $x \mapsto \kappa_x$, é contínua com relação à topologia da convergência fraca em $\mathbb{P}(X)$.

Prova. Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X convergindo para $x \in X$ e $g : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua e limitada. Então:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X g(y)\, \kappa_{x_n}(dy) = \lim_{n\to\infty} (\kappa(g))(x_n) = (\kappa(g))(x) = \int_X g(y)\, \kappa_x(dy). \qquad \square$$

Observação 5.2.14. Se $A \in \mathcal{B}(X)$ e $\mu \in \mathbb{P}(X)$, então:

$$\begin{aligned}
\int_X (\kappa(\chi_A))(x)\, \mu(dx) &= \int_X \left(\int_X \chi_A(y)\, \kappa_x(dy) \right) \mu(dx) = \int_X \kappa_x(A)\, \mu(dx) = \kappa_*(\mu)(A) \\
&= \int_X \chi_A(x)\, (\kappa_*)(\mu)(dx).
\end{aligned}$$

Aplicando os teoremas de convergência para integrais, conclui-se que, para qualquer $g : X \to \mathbb{R}$ integrável e limitada:

$$\int_X (\kappa(g))(x)\, \mu(dx) = \int_X g(x)\, (\kappa_*)(\mu)(dx). \tag{5.6}$$

Definição 5.2.15. Seja (f, X, Λ, γ) um sistema dinâmico aleatório. A *aplicação induzida* por κ, $\kappa_* : \mathbb{P}(X) \to \mathbb{P}(X)$, é definida da seguinte forma:

$$\kappa_*(\mu)(A) := \int_X k_x(A)\, \mu(dx) \quad \forall A \in \mathcal{B}(X).$$

Definição 5.2.16. Uma medida $\mu \in \mathbb{P}(X)$ é κ_**-invariante* se $\kappa_*(\mu) = \mu$.

Proposição 5.2.17. Existe ao menos uma medida em $\mathbb{P}(X)$ que é κ_*-invariante.

Prova. Fixe $\rho \in \mathbb{P}(X)$ qualquer e defina, para cada $n \in \mathbb{N}$, a seguinte medida de probabilidade em X:

$$\mu_n := \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (\kappa_*)^j(\rho).$$

Sendo $\mathbb{P}(X)$ compacto na topologia τ^* da convergência fraca, existe uma subsequência $(\mu_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge para alguma $\mu \in \mathbb{P}(X)$. Assim:

$$\kappa_*(\mu_{n_k}) = \frac{1}{n_k}\sum_{j=1}^{n_k}(\kappa_*)^j(\rho) \longrightarrow \mu \text{ em } \tau^*.$$

Por outro lado, se $g \in C(X,\mathbb{R})$, como $\kappa(g)$ é contínua, segue de (5.6) que:

$$\int_X g(x)\,(\kappa_*)(\mu_{n_k})(dx) = \int_X (\kappa(g))(x)\,\mu_{n_k}(dx) \longrightarrow \int_X (\kappa(g))(x)\,\mu(dx) = \int_X g(x)\,(\kappa_*(\mu))(dx).$$

Logo, $\kappa_*(\mu_{n_k}) \to \kappa_*(\mu)$ em τ^*. Pela unicidade do limite, $\kappa_*(\mu) = \mu$. □

Teorema 5.2.18. Uma medida $\mu \in \mathbb{P}(X)$ é κ_*-invariante se, e somente se, $\mu \times p$ é τ-invariante, em que $p = \gamma^{\mathbb{N}}$.

Prova. Se $g \in L^1(X\times\Omega, \mu\times p)$, defina:

$$\hat{g}(x) := \int_\Omega g(x,\omega)\,p(d\omega).$$

Pelo Teorema de Fubini (1.2.56), $\hat{g} \in L^1(X,\mu)$ e, assim:

$$\begin{aligned}
\int_X \hat{g}(x)\,\kappa_*(\mu)(dx) &= \int_X (\kappa(\hat{g}))(x)\,\mu(dx) = \int_X \left(\int_\Lambda \hat{g}(f(x,\lambda))\,\gamma(d\lambda)\right)\mu(dx)\\
&= \int_X \left(\int_\Lambda \left(\int_\Omega g(f(x,\lambda),\omega)\,p(d\omega)\right)\gamma(d\lambda)\right)\mu(dx)\\
&= \int_X \left(\int_{\Lambda\times\Omega} g(f(x,\lambda),\omega)\,(\gamma\times p)(d(\lambda,\omega))\right)\mu(dx)\\
&= \int_X \left(\int_\Omega g(f(x,\omega_1),\sigma(\omega))\,p(d\omega)\right)\mu(dx)\\
&= \int_{X\times\Omega} g(\tau(x,\omega))\,(\mu\times p)(d(x,\omega)).
\end{aligned}$$

Suponha que $\kappa_*(\mu) = \mu$. Então, para qualquer $g \in L^1(X\times\Omega, \mu\times p)$:

$$\begin{aligned}
\int_{X\times\Omega} g(x,\omega)\,(\mu\times p)(d(x,\omega)) &= \int_X \hat{g}(x)\,\mu(dx) = \int_X \hat{g}(x)\,\kappa_*(\mu)(dx)\\
&= \int_{X\times\Omega} g(\tau(x,\omega))\,(\mu\times p)(d(x,\omega)).
\end{aligned}$$

Logo, $\mu\times p$ é τ-invariante pela Proposição 4.1.9. Reciprocamente, se $\mu\times p$ é τ-invariante, considere $A \in \mathcal{B}(X)$ e defina $g := \chi_{A\times\Omega}$. Assim:

$$\begin{aligned}
\int_X \hat{g}(x)\,\kappa_*(\mu)(dx) &= \int_{X\times\Omega} g(\tau(x,\omega))\,(\mu\times p)(d(x,\omega))\\
&= \int_{X\times\Omega} g(x,\omega)\,(\mu\times p)(d(x,\omega)) = \int_X \hat{g}(x)\,\mu(dx).
\end{aligned}$$

Portanto, $\kappa_*(\mu)(A) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{B}(X)$, ou seja, μ é κ_*-invariante. □

5.3 Ergodicidade

Definição 5.3.1. Seja $\rho \in \mathbb{P}(X \times \Omega)$ τ-invariante. Então ρ é τ-*ergódica* se $\rho(B) \in \{0,1\}$ para todo $B \in \mathcal{B}(X \times \Omega)$ tal que $\tau^{-1}(B) = B$ (cf. Definição 1.3.3).

Observação 5.3.2. $\tau^{-1}(B) = B \Longleftrightarrow \chi_B \circ \tau = \chi_B$.

Definição 5.3.3. Seja $\mu \in \mathbb{P}(X)$ κ_*-invariante. Então μ é κ-*ergódica* se $\mu(A) \in \{0,1\}$ para todo $A \in \mathcal{B}(X)$ tal que $\kappa(\chi_A) = \chi_A$ μ-q.t.p.

Lema 5.3.4. Seja $\mu \in \mathbb{P}(X)$ κ_*-invariante. Então μ é κ-ergódica se, e somente se, para toda função mensurável $h : X \to \mathbb{R}$ tal que $\kappa(h) = h$ μ-q.t.p., h é constante μ-q.t.p.

Prova. A prova deste resultado pode ser obtida no Lema 2.4 em (Kifer, 1986, [13]). □

Lema 5.3.5. Seja $\mu \in \mathbb{P}(X)$, e defina $\rho := \mu \times p$. Para quaisquer $\varepsilon > 0$ e $E \in \mathcal{B}(X \times \Omega)$, com $\rho(E) > 0$, existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ de modo que:

$$\mu\left(\{x \in X;\, p((\tau^n(E))^x) > 1 - \varepsilon\}\right) \geq (1-\varepsilon)\rho(E) \quad \forall n \geq n(\varepsilon).$$

Prova. A prova deste resultado pode ser obtida no Lema 3.1 em (Ohno, 1983, [16]). □

Teorema 5.3.6. Uma medida $\mu \in \mathbb{P}(X)$ é κ-ergódica se, e somente se, $\rho := \mu \times p \in \mathbb{P}(X \times \Omega)$ é τ-ergódica.

Prova. Suponha que ρ seja τ-ergódica, e seja $A \in \mathcal{B}(X)$ tal que $\kappa(\chi_A) = \chi_A$ μ-q.t.p. Então, para μ-q.t.p. $x \in X$:

$$\chi_A(x) = \kappa_x(A) = \int_\Lambda \chi_A(f(\lambda, x))\gamma(d\lambda).$$

Isso garante que, para μ-q.t.p $x \in X$, se $\chi_A(x)$ é igual a 0 ou a 1, então, para γ-q.t.p. $\lambda \in \Lambda$, $\chi_A(f(\lambda, x))$ é igual a 0 ou a 1, respectivamente. Assim, se $B := A \times \Omega$, então:

$$\chi_B(\tau(x,\omega)) = \chi_B(f(\omega_1, x), \sigma(\omega)) = \chi_A(f(\omega_1, x)) = \chi_A(x) = \chi_B(x,\omega) \quad \rho\text{-q.t.p.}$$

Como ρ é τ-ergódica, segue do Lema 5.3.4 que $\chi_B \equiv$ constante ρ-q.t.p. Logo, $\chi_A \equiv$ constante μ-q.t.p. Com isso, $\mu(A) \in \{0,1\}$.

Suponha agora que μ seja κ-ergódica, e fixe um conjunto $E \in \mathcal{B}(X \times \Omega)$ tal que $\rho(E) > 0$ e $\tau^{-1}(E) = E$. Para cada $x \in X$, defina $E^x := \{\omega;\, (x,\omega) \in E\}$. Seja $F := \{x \in X;\, p(E^x) = 1\}$. Como $\tau^{-1}(E) = E$, então $\tau^n(E) \subset E$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Logo, para quaisquer $\varepsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$:

$$\mu\left(\{x \in X;\, p(E^x) > 1 - \varepsilon\}\right) \geq \mu\left(\{x \in X;\, p((\tau^n(E))^x) > 1 - \varepsilon\}\right).$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ no Lema 5.3.5, conclui-se que $\mu(F) \geq \rho(E)$. Por outro lado, $\mu(F) \leq \rho(E)$, pois:

$$\mu(F) = \mu(F) \cdot p\left(\bigcap_{x\in F} E^x\right) = \rho\left(F \times \bigcap_{x\in F} E^x\right) \leq \rho(E).$$

Portanto, $\mu(F) = \rho(E)$. Além disso, pelo Teorema 1.2.55:

$$\rho(E) = \int_X p(E^x)\mu(dx) = \mu(F) + \int_{F^c} p(E^x)\mu(dx).$$

Como $\mu(F) = \rho(E)$, essa igualdade mostra que $p(E^x) = 0$ para μ-q.t.p. $x \in F^c$. Ainda:

$$\begin{aligned}
p(E^x) &= p((\tau^{-1}(E))^x) = \int_\Lambda p\left([(\tau^{-1}(E))^x]^\lambda\right)\gamma(d\lambda) \\
&= \int_\Lambda p\left(\{\omega \in \Omega; (f_{\omega_1}(x), \sigma(\omega)) \in E\}^\lambda\right)\gamma(d\lambda) \\
&= \int_\Lambda p\left(\{\omega \in \Omega; (f_\lambda(x), \omega) \in E\}\right)\gamma(d\lambda) \\
&= \int_\Lambda p\left(E^{f_\lambda(x)}\right)\gamma(d\lambda).
\end{aligned}$$

Logo, $x \in F$ se, e somente se, $f_\lambda(x) \in F$ para γ-q.t.p. $\lambda \in \Lambda$; e $x \notin F$ se, e somente se, $f_\lambda(x) \notin F$ para γ-q.t.p. $\lambda \in \Lambda$. Assim:

$$(\kappa(\chi_F))(x) = \int_\Lambda \chi_F(f_\lambda(x))\gamma(d\lambda) = \chi_F(x).$$

O fato de μ ser κ-ergódica garante, portanto, que $\rho(E) = \mu(F) = 1$. □

Lema 5.3.7. Sejam I_κ o espaço das medidas de probabilidade κ_*-invariantes e ε_κ o subespaço das medidas de probabilidade κ-ergódicas. Então ambos os espaços admitem uma estrutura mensurável. Se $\mu \in I_\kappa$, então existe uma única medida de probabilidade ν_μ em I_κ de modo que μ pode ser representada como uma integral:

$$\mu = \int_{\varepsilon_\kappa} \eta\, \nu_\mu(d\eta). \tag{5.7}$$

A representação (5.7) é chamada de *decomposição ergódica* de μ.

Prova. A prova deste resultado por ser encontrada no Teorema 1.1 do Apêndice em (Kifer, 1986, [13]). □

Observação 5.3.8. Se μ tem uma decomposição ergódica, então $\mu \times p$ admite também a seguinte decomposição ergódica:

$$\mu \times p = \int_{\varepsilon_\kappa} (\eta \times p)\,\nu_\mu(d\eta). \tag{5.8}$$

Proposição 5.3.9. Sejam $\mu \in \mathbb{P}(X)$ uma medida κ_*-invariante e $h : X \times \Omega \to \mathbb{R}$ uma função mensurável tal que $h \circ \tau = h$ $\mu \times p$-q.t.p. Então, para $\mu \times p$-q.t.p. $(x, \omega) \in X \times \Omega$:

$$h(x,\omega) = \int_\Omega h(x,\zeta)\, p(d\zeta).$$

Prova. Seja $\hat{h}(x) := \int_\Omega h(x,\zeta)\, p(d\zeta)$. Então, para μ-q.t.p. $x \in X$:

$$\begin{aligned}
(\kappa(\hat{h}))(x) &= \int_X \hat{h}(y)\, \kappa_x(dy) = \int_\Lambda \hat{h}(f^x(\lambda))\, \gamma(d\lambda) \\
&= \int_\Lambda \int_\Omega h(f^x(\lambda),\zeta)\, p(d\zeta)\, \gamma(d\lambda) \\
&= \int_\Omega h(f^x(\zeta_1),\sigma(\zeta))\, p(d\zeta) \\
&= \int_\Omega h(\tau(x,\zeta))\, p(d\zeta) \\
&= \int_\Omega h(x,\zeta)\, p(d\zeta) = \hat{h}(x).
\end{aligned}$$

Suponha inicialmente que μ seja κ-ergódica. Sendo assim, $\hat{h}$ é constante μ-q.t.p. pelo Lema 5.3.4. Logo, para μ-q.t.p. $x \in X$:

$$\int_\Omega h(x,\zeta)\, p(d\zeta) = \hat{h}(x) = \int_X \hat{h}(y)\, \mu(dy) = \int_{X\times\Omega} h(y,\zeta)\, (\mu \times p)(d(y,\zeta)).$$

Além disso, $\mu \times p$ é τ-ergódica pelo Teorema 5.3.6. Então h é constante $\mu \times p$-q.t.p. Assim, para $\mu \times p$-q.t.p. $(x,\omega) \in X \times \Omega$:

$$h(x,\omega) = \int_{X\times\Omega} h(y,\zeta)\, (\mu \times p)(d(y,\zeta)) = \int_\Omega h(x,\zeta)\, p(d\zeta).$$

Suponha agora que μ seja κ_*-invariante e não necessariamente κ-ergódica. Pelo Lema 5.3.7, existe $\nu_\mu \in \mathbb{P}(X)$ de modo que, para cada $A \in \mathcal{B}(X)$:

$$\mu(A) = \int_{\varepsilon_\kappa} \eta(A)\, \nu_\mu(d\eta).$$

É possível então utilizar a decomposição ergódica da medida produto em (5.8). Defina:

$$B_h := \left\{ (x,\omega) \in X \times \Omega;\, h(x,\omega) \neq \int_\Omega h(x,\zeta)\, p(d\zeta) \right\}.$$

Então:

$$\mu \times p(B_h) = \int_{\varepsilon_\kappa} (\eta \times p)(B_h)\, \mu_\mu(d\eta) = 0. \qquad \square$$

Teorema 5.3.10. Sejam $\mu \in \mathbb{P}(X)$ uma medida κ-ergódica e $g \in L^1(X,\mu)$. Então, para $\mu \times p$-

q.t.p. $(x,\omega) \in X \times \Omega$:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} g(X_j^x(\omega)) = \int_X g(y)\mu(dy).$$

Prova. Seja $h : X \times \Omega \to \mathbb{R}$ definida por $h(x,\omega) := g(x)$. Então $h \in L^1(X \times \Omega, \mu \times p)$. Além disso, $\mu \times p$ é τ-ergódica pelo Teorema 5.3.6. Assim, pelo Teorema Ergódico de Birkhoff (1.3.8), para $\mu \times p$-q.t.p. $(x,\omega) \in X \times \Omega$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} g(X_n^x(\omega)) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} h(\tau^j(x,\omega)) \\
&= \int_{X\times\Omega} h(y,\zeta)\,(\mu \times p)(d(y,\zeta)) \\
&= \int_X g(y)\mu(dy).
\end{aligned}$$
□

Corolário 5.3.11. Sejam $\mu \in \mathbb{P}(X)$ uma medida κ_*-invariante e $g \in L^1(X,\mu)$. Então existe uma função mensurável $\tilde{g} : X \times \Omega \to \mathbb{R}$ constante com respeito a ω de modo que, para $\mu \times p$-q.t.p. $(x,\omega) \in X \times \Omega$:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} g(X_j^x(\omega)) = \tilde{g}(x,\omega).$$

Prova. Defina:
$$B := \left\{ (x,\omega) \in X \times \Omega;\ \nexists \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} g(X_j^x(\omega)) \right\}.$$
Do Teorema 5.3.10, segue que $\eta \times p(B) = 0$ para qualquer medida κ-ergódica $\eta \in \mathbb{P}(X)$. Logo, pelo lema 5.3.7:
$$\mu \times p(B) = \int_{\varepsilon_\kappa} (\eta \times p)(B)\mu_\mu(d\eta) = 0.$$
Então o limite existe $\mu \times p$-q.t.p. Defina:

$$\tilde{g}(x,\omega) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} g(X_j^x(\omega)).$$

Desse modo, para $\mu \times p$-q.t.p. $(x,\omega) \in X \times \Omega$:

$$\tilde{g}\circ\tau(x,\omega) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} g\left(X_j^{f_{\omega_1}(x)}(\sigma(\omega))\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n} \left(g(X_j^x(\omega)) - g(x)\right) = \tilde{g}(x,\omega).$$

Portanto, pela Proposição 5.3.9, $\tilde{g}$ depende apenas da primeira variável. □

Exemplo 5.3.12. Sejam (Y,d) um espaço métrico completo e $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado φ-dissipativo e assintoticamente compacto. Considere ainda $X = \mathcal{A}$ o atrator global compacto (cuja existência é garantida pelo Teorema 3.1.18) e $F = V_1$. Suponha adicionalmente que exista uma família $\{f_\lambda : X \to X; \lambda \in [\lambda_m, \lambda_M]\}$ de seleções em $V_1 : X \rightsquigarrow X$, de modo que $f(x,\lambda) :=$

$f_\lambda(x)$ é contínua nas duas variáveis. Definindo $\Lambda := [\lambda_m, \lambda_M]$, conclui-se que (f, X, Λ, γ) é um sistema dinâmico aleatório, escolhendo γ como sendo a medida de Lebesgue normalizada na reta. Neste caso, é possível aplicar o Teorema 5.3.10 à dinâmica do atrator para concluir que, se $\mu \in \mathbb{P}(X)$ é κ-ergódica e $g \in L^1(X,\mu)$, então, para $\mu \times p$-q.t.p. $(x,\omega) \in X \times \Omega$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} g(X_j^x(\omega)) = \int_X g(y)\,\mu(dy). \tag{5.9}$$

Assim como no Exemplo 4.2.37, $X_j^x(\omega) \in V_j(x)$ para quaisquer $j \in \mathbb{N}$ e $\omega \in \Omega$. Ou seja, $(X_j^x(\omega))_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência aleatória sobre trajetórias de $\mathcal{G}$ e a variável $n \in \mathbb{N}$ representa a variável temporal no semigrupo multívoco $\{V_t\}$. Assim, a equação (5.9) diz que, dentro do atrator, a média temporal de funções integráveis sobre pontos de trajetórias converge para a média espacial.

Além disso, fixe $\widehat{N} \subset X$ como sendo o φ-atrator global fechado mínimo de $\mathcal{G}$, ou seja, $\widehat{N} = \overline{\omega_\varphi(X)}$ pela Proposição 3.3.16. Definindo $g := \chi_{\widehat{N}}$, conclui-se de (5.9) que:

$$\mu(\widehat{N}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_{\widehat{N}}(X_j^x(\omega)).$$

Referências Bibliográficas

[1] AUBIN, Jean-Pierre; CELLINA, Arrigo. **Differential Inclusions:** Set-Valued Maps and Viability Theory. 1. ed. Springer-Verlag, 1984. 342 p.

[2] AUBIN, Jean-Pierre; FRANKOWSKA, Hélène. **Set-Valued Analysis.** 1 ed. Boston: Birkhauser, 2009. v. 2, 461 p. (Systems & Control: Foundations & Applications).

[3] BALL, John M. Continuity Properties and Global Attractors of Generalized Semiflows and the Navier-Stokes Equations. **J. Nonlinear Sci.** v. 7, p. 475-502, out. 1997. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s003329900037>. Acesso em: mar. 2020.

[4] BOGACHEV, Vladimir I. **Measure Theory.** Berlim: Springer, 2007. Volumes 1 e 2.

[5] BREZIS, Haim. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.** New York: Springer, 2010. 600 p.

[6] BRUSCHI, Simone Mazzini. **Atratores para o problema de Chafee-Infante.** Dissertação de Mestrado em Matemática - Instituto de Ciências Matemáticas, USP, São Carlos, 1997.

[7] CARABALLO, Tomás; MARÍN-RUBIO, Pedro; ROBINSON, James C. A Comparison between Two Theories for Multi-Valued Semiflows and Their Asymptotic Behaviour. **Set-Valued Analysis.** v. 11, p. 297-322, set. 2003. Disponível em: <https://doi.org/10.1023/A:1024422619616>. Acesso em: mar. 2020.

[8] FOLLAND, Gerald B. **Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications.** 2. ed. John Wiley & Sons, 1999. 386 p.

[9] GAANS, Onno van. Notes of the seminar Evolution Equations in Probability Spaces and the Continuity Equation. Mathematical Institute of Leiden University: 2006. Disponível em: <https://www.math.leidenuniv.nl/~vangaans/semEEPSCE_12_4.pdf>. Acesso em: dez. 2020.

[10] GENTILE, Cláudia B.; Simsen, Jacson. On Attractors for Multivalued Semigroups Defined by Generalized Semiflows. **Set-Valued Anal**, São Carlos, v. 16, p. 105-124, mar. 2008. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s11228-006-0037-1>. Acesso em: mar. 2020.

[11] GENTILE, Cláudia B.; Simsen, Jacson. On p-Laplacian differential inclusions – Global existence, compactness properties and asymptotic behavior. **Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications**, v. 71, p. 3488-3500, out. 2009.

[12] GIKHMAN Iosif; SKOROKHOD, Anatolij. **The Theory of Stochastic Processes I.** 1 ed. Springer, 1974, 574 p.

[13] KIFER, Yuri. **Ergodic Theory of Random Transformation.** 1 ed. Birkhäuser, 1986. 211 p.

[14] LADYZHENSKAYA, Olga. **Attractors for Semigroups and Evolution Equations.** New York: Cambridge University Press, 1991. 73 p.

[15] MILLER, Walter; AKIN, Ethan. Invariant Measures for Set-Valued Dynamical Systems. **Transactions of the American Mathematical Society.** v. 351, n. 3, p. 1203-1225, mar. 1999. Disponível em: <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-99-02424-1>. Acesso em: dez. 2020.

[16] OHNO, Taijiro. Asymptotic Behaviors of Dynamical Systems with Random Parameters. **Publications of The Research Institute for Mathematical Sciences**, Kyoto University, v. 19, p. 83-98, 1983. Disponível em: <https://www.jstage.jst.go.jp/article/kyotoms1969/19/1/19_1_83/_pdf/-char/ja>. Acesso em: dez. 2020.

[17] RASMUSSEN, Martin. **Ergodic Theory.** London: Imperial College, 2015. Lecture Notes.