**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

# Sobre fibrados e poliedros de dimensão finita

Kevin Moradel Bautista

Orientador: Prof. Dr. Luiz Roberto Hartmann Junior

São Carlos-SP
Janeiro de 2021

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

# Sobre fibrados e poliedros de dimensão finita

Kevin Moradel Bautista

Orientador: Prof. Dr. Luiz Roberto Hartmann Junior

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

| | |
|---|---|
| Data da defesa: | 01/02/2021 |
| Visto do orientador: | Luiz Roberto Hartmann Jr. |

São Carlos-SP
Janeiro de 2021

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

---

# Folha de Aprovação

---

Assinatura dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Kevin Moradel Bautista, realizada em 01/02/2021:

Prof. Dr. Luiz Roberto Hartmann Junior.
UFSCar

Prof. Dr. Edivaldo Lopes Dos Santos.
UFSCar

Prof. Dr. Thiago de Melo.
UNESP

*Dedico este trabalho*
*a Rosa Moradel Bautista,*
*minha mãe.*

# Agradecimentos

Agradeço a meu orientador, o professor Luiz Hartmann, pelo apoio e a paciência dados. Agradeço aos professores Ronald Bustamante e Marco Antei, que depositaram sua confiança em mim para esta viagem. Me sinto muito agradecido com os seguintes amigos e amigas: Rafael Sanabria Villalobos, Adriana Sánchez Chavarría, Débora Tamagnoni, Jocelyn Calderón Villarreal, Diana Suarez Bello, Jennifer Loría Sorio, Maricela Zamora Acuña, César Vargas Trejos, Daniel Aguilar Álvarez, Jonathan Ordoñez, Mariana Campos Picado e Trudy Jane Calderón Hortúa. Sem estas pessoas maravilhosas não teria acabado esta aventura. Um agradecimento especial a minha mãe, Rosa Moradel Bautista, meu sobrinho, Sebastian Aguilar Moradel, minhas sobrinhas, Dalia De Haan Moradel e Cassia De Haan Moradel, e minhas irmãs, Valeska Moradel Bautista e Joselyn Várquez Moradel.

Este trabalho contou com o apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

# Resumo

O objetivo deste trabalho é estabelecer a existência de fibrados universais e relacionar esta existência com poliedros de dimensão finita. Como consequência apresentamos exemplos de fibrados universais para o caso de grupos clássicos.

**Palavras-chave**: Fibrado, fibrado principal, fibrado universal, fibrados equivalentes, fibrados $G$-equivalentes.

# Abstract

The objective of this work is to establish the existence of universal bundles and to relate this existence to finite dimension polyhedra. As a consequence, we present examples of universal bundles for the case of classic groups.

**Key-words**: Bundle, principal bundle, universal bundle, equivalents bundles, *G*-equiavents bundles.

# Sumário

# Introdução

A noção de fibrado aparece nos anos 1930 com a topologia e a geometria de variedades. Nos anos 1950, a definição de fibrado foi melhor fundamentada. A primeira definição geral de fibrado foi dada por H. Whitney. Os trabalhos de H. Whitney, de H. Hopf e de E. Stiefel, mostrou a importância destes objetos para as aplicações da Topologia à Geometria Diferencial. O livro do Steenrod, que aparece em 1950, trata com coerência estes objetos.

No seguinte trabalho discutiremos três resultados importantes. O primeiro, a existência de um fibrado universal, com um poliedro de dimensão finita como seu espaço base e com o grupo de matrizes com determinante distinto de zero como seu grupo estrutural. O segundo resultado é a bijetividade de uma correspondência que, dado um subgrupo fechado $H$, de um grupo topológico $G$, associa classes de equivalência de fibrados principais com grupo estrutural $H$, com classes de equivalência de fibrados principais com grupo estrutural $G$. O terceiro resultado relaciona fibrados principais universais, onde seu grupo estrutural é um dos grupos clássicos, com poliedros de dimensão finita.

Neste trabalho $G$ representará um grupo topológico. A palavra ”aplicação” é usada para dizer que uma função é contínua.

# CAPÍTULO 1

# Resultados Básicos sobre Fibrados

Neste capítulo estudamos alguns resultados básicos sobre fibrados. Vemos alguns exemplos de fibrados e estabelecemos resultados que relacionam estes fibrados. Um dos resultados importantes deste capítulo é o Teorema 1.13. Este teorema é usado para garantir a existência do fibrado principal associado ou a $G$-imagem de um fibrado. Este teorema também é usado nas provas de vários resultados nos próximos capítulos. Definimos quando dois fibrados são equivalentes, Definição 1.21, e estabelecemos resultados que dão condições para saber quando dois fibrados são equivalentes. O Corolário 1.27 é outro resultado importante, que relaciona as funções de transição com a equivalência de fibrados. Definimos fibrado simples, Definição 1.40, como um exemplo de fibrados. No final do capítulo, a modo de introdução, definimos fibrado universal e apresentamos resultados que relacionam este com o fibrado produto.

## 1.1 Fibrados

O objetivo desta seção é apresentar algumas definições e notações. Iniciamos com a definição de grupo topológico, ação de grupo sobre um espaço topológico e a definição de fibrado. Continuamos com exemplos de fibrados e para finalizar esta seção, garantimos a existência de fibrados.

**Definição 1.1.** *Diremos que $G$ é um grupo topológico se $G$ é um espaço topológico e um grupo tal que as operações de multiplicação e inversão no grupo são funções contínuas.*

**Definição 1.2.** *Um grupo topológico $G$ atua sobre um espaço topológico $X$, pela esquerda, se existe uma aplicação $\lambda : G \times X \to X$, denotada por $\lambda(g,x) = gx$, que satisfaz:*

*(1)* $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$;

*(2)* $ex = x$, *onde $e$ é o elemento neutro de $G$.*

*Diremos que $G$ atua pela direita se existe una aplicação $\gamma : X \times G \to X$, denotada por $\gamma(x,g) = xg$, satisfazendo:*

*(1) $x(g_1g_2) = (xg_1)g_2$;*

*(2) $xe = x$.*

**Definição 1.3.** *A ação de $G$ sobre $X$ é efetiva se para todo $y$ em $X$ tem-se que $gy = y$ implica que $g = e$. A ação é chamada livre se $gy \neq y$, $\forall y \in X$, e $\forall g \in G$, com $g \neq e$.*

**Observação 1.4.** 1. Cada $g \in G$ determina um homeomorfismo $f_g : X \to X$, dado por $f_g(y) = gy$, onde seu inverso $(f_g)^{-1} : X \to X$ é dado por $(f_g)^{-1}(y) = g^{-1}y = f_{g^{-1}}(y)$. Temos que $f_g$ e $f_{g^{-1}}$ são contínuas porque a ação do grupo é contínua.

2. A ação de $G$ sobre $X$ ser efetiva é equivalente a dizer que o homomorfismo de grupos $\sigma : G \to Homeo(X)$, dado por $\sigma(g) = f_g$, é injetor. De fato, suponha que a ação de $G$ sobre $X$ é efetiva e sejam $g_1, g_2 \in G$ tais que $\sigma(g_1) = \sigma(g_2)$. Então $\sigma(g_1)(y) = \sigma(g_2)(y)$, $\forall y \in X$, assim temos que $g_1y = f_{g_1}(y) = \sigma(g_1)(y) = \sigma(g_2)(y) = f_{g_2}(y) = g_2y$, então $(g_2)^{-1}g_1y = y$, $\forall y \in X$. Como a ação é efetiva, $(g_2)^{-1}g_1 = e$, então $g_1 = g_2$. Portanto $\sigma$ é injetora.

   Agora suponha que $\sigma$ é injetora e seja $g \in G$ tal que $gy = y$, $\forall y \in X$. Temos que $\sigma(g)(y) = f_g(y) = gy = y = ey = f_e(y) = \sigma(e)(y)$. Então $\sigma(g) = \sigma(e)$ e como $\sigma$ é injetora, temos que $g = e$. Portanto, a ação de $G$ sobre $X$ é efetiva.

**Definição 1.5.** *Um fibrado, denotado por $\mathscr{F} = \{F, G; X, B; \pi, \phi_U\}$, consiste dos seguintes elementos:*

1. *Espaços topológicos $F$, chamado fibra, e $B$, chamado espaço base.*

2. *Um grupo topológico $G$, chamado grupo estrutural, que atua sobre a fibra $F$, pela esquerda.*

3. *Um conjunto $X$, chamado espaço total.*

4. *Uma função $\pi : X \to B$, chamada projeção.*

5. *Uma cobertura por abertos, $\{U\}$, de $B$ tais que para cada $U$ existe uma função bijetora*

$$\phi_U : U \times F \to \pi^{-1}(U)$$

   *satisfazendo $\pi \circ \phi_U(b,y) = b$. As funções $\phi_U$ são chamadas funções coordenadas de $\mathscr{F}$ e os conjuntos abertos $U$ são chamados vizinhanças coordenadas de $\mathscr{F}$.*

6. **(Condição de colagem)** *Dado $b \in U$, defina a função bijetora $\phi_{U,b} : F \to \pi^{-1}(b)$ por $\phi_{U,b}(y) = \phi_U(b,y)$. Se $b \in U \cap V$, onde $U$ e $V$ são vizinhanças coordenadas, então $\phi_{U,b}^{-1} \circ \phi_{V,b} \in G$ e depende continuamente de $b \in U \cap V$, isto é, existe uma aplicação $\alpha_{U,V} : U \cap V \to G$ dada por $\alpha_{U,V}(b) = \phi_{U,b}^{-1} \circ \phi_{V,b}$. Estas aplicações são chamadas funções de transição de $\mathscr{F}$.*

A topologia de $X$ é definida como segue:

Sejam $\{N\}$ uma base para a topologia de $F$ e $W$ um conjunto aberto contido numa vizinhança coordenada $U$. $X$ tem a topologia induzida dada pela condição de que os conjuntos $\phi_U(W \times N)$ formem uma base topológica.

Com esta topologia, $X$ é um espaço topológico, $\pi$ uma aplicação e $\{\phi_U\}$ são homeomorfismos. Diremos que $\mathscr{F}$ é um fibrado sobre $B$. Para cada $b \in B$, o conjunto $\pi^{-1}(b)$ é chamada fibra sobre $b$.

**Observação 1.6.** 1. Note que, para cada $b \in B$ e para cada vizinhança coordenada $U$ contendo $b$, as funções $\phi_{U,b}$ são homeomorfismos e portanto as fibras $\pi^{-1}(b)$ são homeomorfas ao espaço $F$, o que também quer dizer que todas as fibras de $X$, sobre os elementos de $B$, são homeomorfas entre si.

2. Se $\{U'\}$ é um refinamento de $\{U\}$, pode-se ver o fibrado $\mathscr{F}$ como um fibrado com vizinhanças coordenadas $\{U'\}$ restringindo cada $\phi_U$ a $U' \times F$, onde $U' \subset U$, para obter as novas funções coordenadas $\{\phi'_{U'}\}$.

3. Para $b \in U \cap V$ temos que $\phi_U(b,y) = \phi_V(b, \alpha_{V,U}(b)y)$.

4. As funções de transição satisfazem.

   (a) $\alpha_{U,W}(b)\alpha_{W,V}(b) = \alpha_{U,V}(b)$, para $b \in U \cap V \cap W$.

   (b) $\alpha_{U,U}(b) = e$, para $b \in U$.

   (c) $\alpha_{V,U}(b) = \alpha_{U,V}(b)^{-1}$, para $b \in U \cap V$.

**Observação 1.7.** É de utilidade introduzir a aplicação $\pi_U : \pi^{-1}(U) \to F$, dada por $\pi_U(x) = \phi_{U,b}^{-1}(x)$, onde $\pi(x) = b$. Temos as seguintes propriedades.

1. $\pi_U \circ \phi_U(b,y) = y, \quad \forall b \in U \forall y \in F$.

2. $\phi_U(\pi(x), \pi_U(x)) = x, \quad \forall x \in X$.

3. $\alpha_{U,V}(\pi(x))\pi_V(x) = \pi_U(x), \quad$ para $\pi(x) \in U \cap V$.

**Definição 1.8.** *Sejam $G$ um grupo topológico e $H$ um subgrupo fechado de $G$. Sejam $p : G \to G/H$ a aplicação dada por $p(g) = gH$ e $e_0$ o elemento neutro do grupo $G/H$. Uma seção local de $H$ em $G$ é uma aplicação $f : V \to G$ tal que $p \circ f(x) = x$, para todo $x \in V$, onde $V$ é uma vizinhança de $e_0$.*

**Exemplo 1.9.** Vamos construir um fibrado de grupos quocientes.

Sejam $G$ um grupo topológico, $H$ um subgrupo fechado de $G$ e $K$ um subgrupo fechado de $H$. Seja $K_0 = \bigcap_{h \in H} hKh^{-1}$. Considere as aplicações $\pi : G/K \to G/H$, dada por $\pi(gK) = gH$, $p : G \to G/H$, dada por $p(g) = gH$ e $q : G \to G/K$, dada por $q(g) = gK$. Temos que $\pi$, $p$ e $q$ são contínuas e satisfazem $p = \pi \circ q$. Denote o elemento neutro de $G/H$ por $e_0$. Como $K$ é um subgrupo de $H$, temos que $\pi(H/K) = \{e_0\}$. A ação de $G$ sobre $G/H$ é dada por $g \cdot (aH) = (ga)H = gaH$. Vamos definir um fibrado $\mathscr{F} = \{H/K, H/K_0; G/K, G/H; \pi, \phi_g\}$ como segue. Seja $f : V \to G$ uma seção local de $H$ em $G$, onde $V$ é uma vizinhança de $e_0$. As vizinhanças coordenadas de $\mathscr{F}$ são $V_g = g \cdot V$, com $g \in G$. Com o objetivo de definir as funções coordenadas, $\phi_g$, de $\mathscr{F}$ precisaremos da seguinte aplicação. Para $g \in G$ defina $f_g : V_g \to G$ por $f_g(b) = gf(g^{-1} \cdot b)$. Temos que $f_g$ é contínua, pois $f$, as operações em $G$ e a ação de $G$ em $G/H$ são contínuas. Temos que $p \circ f_g(b) = b$. De fato, $p \circ f_g(b) = p(gf(g^{-1} \cdot b)) = (gf(g^{-1} \cdot b))H = (gH)(f(g^{-1} \cdot b)H) = g \cdot (p \circ f(g^{-1} \cdot b)) = g \cdot (g^{-1} \cdot b) = b$. Como $q$ aplica $H$ em $H/K$, temos que para todo $y \in H/K$ existe $h \in H$ tal que $q(h) = y$. Temos que:

(1) $q(f_g(b)h) = (f_g(b)h)K = f_g(b) \cdot (hK) = f_g(b) \cdot q(h) = f_g(b) \cdot y$;

(2) $p(f_g(b)h) = (f_g(b)h)H = (f_g(b)H)(hH) = f_g(b)H = p \circ f_g(b)$;

(3) $p \circ f_g(b) = p(gf(g^{-1} \cdot b)) = (gf(g^{-1} \cdot b))H = (gH)(f(g^{-1} \cdot b)H) = g \cdot (p \circ f(g^{-1} \cdot b)) = (gg^{-1}) \cdot b = b$.

Então temos $q(f_g(b)h) = f_g(b) \cdot y$ e $p(f_g(b)h) = p \circ f_g(b) = b$. Agora vamos definir as funções coordenadas de $\mathscr{F}$ por $\phi_g : V_g \times H/K \to \pi^{-1}(V_g)$, dada por $\phi_g(b,y) = f_g(b) \cdot y$. A função $\phi_g$ é contínua, pois $f_g$ e a ação de $G$ sobre $G/H$ são contínuas. Temos que $\pi \circ \phi_g(b,y) = b$. De fato, $\pi \circ \phi_g(b,y) = \pi(f_g(b) \cdot y) = \pi \circ q(f_g(b) \cdot h) = p(f_g(b)h) = b$. Para mostrar que $\phi_g$ está bem definida precisamos da função $\pi_g : \pi^{-1}(V_g) \to H/K$ por $\pi_g(x) = f_g(\pi(x))^{-1} \cdot x$. A função $\pi_g$ é contínua, pois $f_g$, as operações em $G$ e a ação de $G$ sobre $G/H$ são contínuas. Temos $\pi_g \circ \phi_g(b,y) = f_g(\pi \circ \phi_g(b,y))^{-1} \cdot \phi_g(b,y) = f_g(b)^{-1} f_g(b) \cdot y = y$, então $\pi_g \circ \phi_g(b,y) = y$, logo $\phi_g(b,y) \in \pi_g^{-1}(y) \subset \pi^{-1}(V_g)$. Portanto, $\phi_g$ está bem definida. Agora vamos mostrar que $\phi_g$ é um homeomorfismo. Temos que $\phi_g(\pi(x), \pi_g(x)) = x$. De fato, $\phi_g(\pi(x), \pi_g(x)) = f_g(\pi(x)) \cdot \pi_g(x) = f_g(\pi(x)) f_g(\pi(x))^{-1} \cdot x = x$. Vamos mostrar que a função $\psi_g : \pi^{-1}(V_g) \to V_g \times H/K$, dada por $\psi_g(x) = (\pi(x), \pi_g(x))$, é a inversa de $\phi_g$. A função $\psi_g$ é contínua, pois $\pi$ e $\pi_g$ são contínuas. Além disso temos que:

(4) $\phi_g \circ \psi_g(x) = \phi(\pi(x), \pi_g(x)) = x$;

(5) $\psi_g \circ \phi_g(b,y) = (\pi \circ \phi_g(b,y), \pi_g \circ \phi_g(b,y)) = (b,y)$.

Então $\psi_g = \phi_g^{-1}$. Assim, $\phi_g$ é um homeomorfismo. Agora vamos ver como são as funções de transição de $\mathscr{F}$. Temos que $\phi_{g,b}^{-1} : \pi^{-1}(b) \to H/K$ é dada por $\phi_{g,b}^{-1}(x) = f_g(\pi(x))^{-1} \cdot x$, onde $\pi(x) = b$. Para $b \in V_{g_1} \cap V_{g_2}$ temos que $\phi_{g_1,b}^{-1} \circ \phi_{g_2,b}(y) = f_{g_1}(\pi \circ \phi_{g_2,b}(y))^{-1} \cdot \phi_{g_2,b}(y) = (f_{g_1}(b)^{-1} f_{g_2}(b)) \cdot y$. Então as funções de transição de $\mathscr{F}$ são dadas por $\alpha_{g_1,g_2}(b) = f_{g_1}(b)^{-1} f_{g_2}(b)$, para $b \in V_{g_1} \cap V_{g_2}$. Agora vamos mostrar que $H/K_0$ atua efetivamente sobre $H/K$. Como $p \circ f_{g_2}(b) = p \circ f_{g_1}(b)$, temos $p(f_{g_1}(b)^{-1} f_{g_2}(b)) = e_0$, logo $f_{g_1}(b)^{-1} f_{g_2}(b) \in H$. Denote $p(f_{g_1}(b)^{-1} f_{g_2}(b)) = a$ e seja $h \in H$ tal que $(aK_0)(hK) = hK$. Então $ahK = hK$ implica que $a \in hKh^{-1}$, logo $a \in hKh^{-1}$, para todo $h \in H$. Então $a \in \bigcap_{h \in H} hKh^{-1} = K_0$. Assim $aK_0 = K_0$. Portanto $H/K_0$ atua efetivamente sobre $H/K$. Também temos

que $K_0$ é o subgrupo maior de $K$ invariante em $H$. Assim temos que $\{H/K, H/K_0; G/K, G/H; \pi, \phi_g\}$ é um fibrado, com funções de transição $\alpha_{g_1,g_2}(b) = f_{g_1}(b)^{-1} f_{g_2}(b)$.
Para finalizar, se tomamos $K$ como o subgrupo trivial, temos que $\{H, H; G, G/H; p, \tilde{\phi}_g\}$ é um fibrado, onde $\tilde{\phi}_g : V_g \times H \to p^{-1}(V_g)$ é dada por $\tilde{\phi}_g(b,y) = f_g(b)y$.

**Exemplo 1.10.** Vamos ver que acontece quando restringimos o espaço base de um fibrado. Sejam $\mathscr{F} = \{F, G; X, B; \pi, \phi_U\}$ um fibrado e $B_0$ um subespaço de $B$. Definimos a restrição de $\mathscr{F}$ sobre $B_0$ como o fibrado $\mathscr{F}|_{B_0} = \{F, G; X|_{B_0}, B_0; \pi, \phi_{U\cap B_0}\}$ com vizinhanças coordenadas $\{U \cap B_0\}$, espaço total $X|_{B_0} = \bigcup\limits_{b\in B_0} \pi^{-1}(b)$ e funções coordenadas $\phi_{U\cap B_0}(b,y) = \phi_U(b,y)$, para $b \in U \cap B_0,\ y \in F$. Mostremos que $\mathscr{F}|_{B_0}$ é um fibrado. De fato, é claro que $\pi \circ \phi_{U\cap B_0}(b,y) = b$, para $b \in B_0$ e $y \in F$. Para a condição de colagem temos que $\phi_{U\cap B_0,b}(y) = \phi_{U\cap B_0}(b,y) = \phi_U(b,y) = \phi_{U,b}(y)$, então $\phi_{U\cap B_0,b} = \phi_{U,b}\ \ \forall b \in U \cap B_0$. Assim, a condição de colagem é satisfeita.

**Exemplo 1.11.** Vamos definir o produto cartesiano de um fibrado com o intervalo unitário.
Sejam $\mathscr{F} = \{F, G; X, B; \pi, \phi_U\}$ um fibrado e $I = [0,1]$ o intervalo unitário. Defina o fibrado $\mathscr{F} \times I = \{F, G; X \times I, B \times I; \pi \times id_I, \varphi_{U\times I}\}$ como segue. As vizinhanças coordenadas são $\{U \times I\}$. O espaço total é $X \times I = \bigcup\limits_{b\in B}(\pi^{-1}(b) \times I)$. A projeção $\pi \times id_I : X \times I \to B \times I$ está dada por $\pi \times id_I(c,t) = (\pi(c), t)$, onde $id_I$ é a aplicação identidade de $I$. As funções coordenadas, $\varphi_{U\times I} : U \times I \times F \to (\pi \times id_I)^{-1}(U \times I)$, são dadas por $\varphi_{U\times I}(b,t,y) = (\phi_U(b,y), t)$. Agora vamos verificar que $\mathscr{F} \times I$ é um fibrado. Mostremos que $(\pi \times id_I) \circ \varphi_{u\times I}(b,y,t) = (b,t)$, para $b \in U$ e para $t \in I$. De fato,

$$
\begin{aligned}
(\pi \times id_I) \circ \varphi_{u\times I}(b,y,t) =& (\pi \times id_I)(\phi_U(b,y), t) \\
=& (\pi \circ \phi_U(b,y), t) \\
=& (b,t).
\end{aligned}
$$

Para mostrar que $\mathscr{F} \times I$ satisfaz a condição de colagem precisamos de $\varphi_{U\times I,(b,t)}$ e de $\varphi^{-1}_{U\times I,(b,t)}$. Temos que:

$$
\begin{aligned}
\varphi_{U\times I,(b,t)}(y) =& \varphi_{U\times I}(b,t,y) \\
=& (\phi_U(b,y), t) \\
=& (\phi_{U,b}(y), t).
\end{aligned}
$$

Então $\varphi_{U\times I,(b,t)}(y) = (\phi_{U,b}(y), t)$ e sua inversa é $\varphi^{-1}_{U\times I,(b,t)}(x,t) = \phi^{-1}_{U,b}(x)$. De fato, temos que:

$$
\begin{aligned}
\varphi^{-1}_{U\times I,(b,t)} \circ \varphi_{U\times I,(b,t)}(y) =& \varphi^{-1}_{U\times I,(b,t)}(\phi_{U,b}(y), t) \\
=& \phi^{-1}_{U,b}(\phi_{U,b}(y)) \\
=& y
\end{aligned}
$$

e que:

$$\begin{aligned}\varphi_{U\times I,(b,t)} \circ \varphi^{-1}_{U\times I,(b,t)}(x,t) =& \varphi_{U\times I,(b,t)}(\phi^{-1}_{U,b}(x))\\ =& (\phi_{U,b}(\phi^{-1}_{U,b}(x)),t)\\ =& (x,t).\end{aligned}$$

Mostraremos que $\mathscr{F} \times I$ satisfaz a condição de colagem. Seja $(b,t) \in U \times I \cap V \times I$. Temos que:

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}_{U\times I,(b,t)} \circ \varphi_{V\times I,(b,t)}(y) =& \varphi^{-1}_{U\times I,(b,t)}(\phi_{V,b}(y),t)\\ =& \phi^{-1}_{U,b}(\phi_{V,b}(y))\\ =& \phi^{-1}_{U,b} \circ \phi_{V,b}(y).\end{aligned}$$

Então $\varphi^{-1}_{U\times I,(b,t)} \circ \varphi_{V\times I,(b,t)} = \phi^{-1}_{U,b} \circ \phi_{V,b}$, que pertence a $G$. Portanto $\mathscr{F} \times I$ é um fibrado.

Note que $\mathscr{F}$ e $\mathscr{F} \times I$ têm a mesma fibra, mesmo grupo estrutural e mesmas funções de transição, mas seus espaços base são diferentes.

Dado $t \in I$, denotamos por $\mathscr{F} \times \{t\}$ a restrição de $\mathscr{F} \times I$ sobre $B \times \{t\}$.

**Definição 1.12.** *Dado um fibrado $\mathscr{F} = \{F,G;X,B;\pi,\phi_U\}$ e uma aplicação $f : A \to B$, define-se o fibrado $f^\star(\mathscr{F}) = \{F,G;X_f,A;\pi_1,\varphi_{U_f}\}$, chamado o Pullback de $\mathscr{F}$ por $f$. As vizinhanças coordenadas são $\{f^{-1}(U)\}$, que denotaremos por $U_f = f^{-1}(U)$. O espaço total é $X_f = \{(a,x) \in A \times X : \pi(x) = f(a)\}$. A projeção $\pi_1 : X_f \to A$ é dada por $\pi_1(a,x) = a$. As funções coordenadas, $\{\varphi_{U_f} : U_f \times F \to \pi_1^{-1}(U_f)\}$, são dada por $\varphi_{U_f}(a,y) = (a,\phi_U(f(a),y))$.*

Vamos mostrar que o pullback $f^\star(\mathscr{F})$ é um fibrado. É claro que $\pi_1 \circ \varphi_{U_f}(a,y) = a$. Se $b = f(a) \in U$, temos que:

$$\begin{aligned}\varphi_{U_f,a}(y) =& \varphi_{U_f}(a,y)\\ =& (a,\phi_U(b,y))\\ =& (a,\phi_{U,b}(y)).\end{aligned}$$

Então $\varphi_{U_f,a}(y) = (a,\phi_{U,b}(y))$ e sua inversa é $\varphi^{-1}_{U_f,a}(a,x) = \phi^{-1}_{U,b}(x)$. De fato, temos que:

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}_{U_f,a} \circ \varphi_{U_f,a}(y) =& \varphi^{-1}_{U_f,a}(a,\phi_{U,b}(y))\\ =& \phi^{-1}_{U,b}(\phi_{U,b}(y))\\ =& y\end{aligned}$$

e que:

$$\begin{aligned}\varphi_{U_f,a} \circ \varphi^{-1}_{U_f,a}(a,x) =& \varphi_{U_f,a}(\phi^{-1}_{U,b}(x))\\ =& (a,\phi_{U,b}(\phi^{-1}_{U,b}(x)))\\ =& (a,x).\end{aligned}$$

Sejam $a \in U_f \cap V_f$ e $b = f(a) \in U$, temos que:

$$\begin{aligned}\varphi_{U_f,a}^{-1} \circ \varphi_{V_f,a}(y) =& \varphi_{U_f,a}^{-1}(a, \phi_{V,b}(y))\\ =& \phi_{U,b}^{-1}(\phi_{V,b}(y))\\ =& \phi_{U,b}^{-1} \circ \phi_{V,b}(y).\end{aligned}$$

Então $\varphi_{U_f,a}^{-1} \circ \varphi_{V_f,a} = \phi_{U,b}^{-1} \circ \phi_{V,b}$, que pertence a $G$. Portanto a condição de colagem é satisfeita.

Note que $\varphi_{U_f,a}^{-1}(a,x) = \phi_{U,b}^{-1}(x)$ e que as funções de transição de $f^{\star}(\mathscr{F})$ e de $\mathscr{F}$ são iguais, mas seus espaços base são distintos.

Note que $\pi_1^{-1}(a) = \{a\} \times \pi^{-1}(f(a))$. De fato, seja $(a,x) \in \pi_1^{-1}(a)$, como $\pi_1^{-1}(a) \in X_f$, temos que $\pi(x) = f(a)$, então $x \in \pi^{-1}(\pi(x)) = \pi^{-1}(f(a))$, assim $(a,x) \in \{a\} \times \pi^{-1}(f(a))$. Portanto $\pi_1^{-1}(a) \subset \{a\} \times \pi^{-1}(f(a))$. Seja $(a,x) \in \{a\} \times \pi^{-1}(f(a))$, então $x \in \pi^{-1}(f(a))$, então $\pi(x) \in \pi(\pi^{-1}(f(a))) = \{f(a)\}$, então $\pi(x) = f(a)$. Assim $(a,x) \in X_f$ e como $\pi_1(a,x) = a$, temos que $(a,x) \in \pi_1^{-1}(a)$. Portanto $\{a\} \times \pi^{-1}(f(a)) \subset \pi_1^{-1}(a)$. E assim temos que $\bigcup\limits_{a \in A} \pi_1^{-1}(a) = \bigcup\limits_{a \in A} \left(\{a\} \times \pi^{-1}(f(a))\right) = X_f$.

**Teorema 1.13** (Existência de fibrados). *Sejam $B$ e $F$ espaços topológicos, $G$ um grupo topológico que atua, pela esquerda, sobre $F$. Sejam $\{U_j\}_{j \in \Delta}$ uma cobertura por abertos de $B$ e $\{\alpha_{U,V} : U \cap V \to G\}$ um conjunto de aplicações tais que $\alpha_{U,W}(b)\alpha_{W,V}(b) = \alpha_{U,V}(b)$, para $b \in U \cap V \cap W$, onde $U,V,W$ são elementos da cobertura de $B$. Então existe um fibrado $\mathscr{F}$ sobre $B$, com grupo estrutural $G$, fibra $F$ e funções de transição $\{\alpha_{U,V}\}$.*

*Demonstração.* Em $B \times F$ defina a relação $\sim$ por $(b,y) \sim (c,z) \Leftrightarrow b = c$ e $\alpha_{U,V}(b)y = z$, para $b \in U \cap V$. A relação $\sim$ é reflexiva: Para $(b,y) \in B \times F$ temos que $b = b$ e como $\alpha_{U,U}(b) = e$, então $\alpha_{U,U}(b)y = y$. Portanto $(b,y) \sim (b,y)$. A relação $\sim$ é simétrica: Sejam $(b,y),(c,z) \in B \times F$ tais que $(b,y) \sim (c,z)$. Então $b = c$ e $\alpha_{U,V}(b)y = z$, então $c = b$ e $\alpha_{V,U}(b)z = \alpha_{U,V}(b)^{-1}z = y$. Portanto $(c,z) \sim (b,y)$. A relação $\sim$ é transitiva: Sejam $(b,y),(c,z),(d,x) \in B \times F$ tais que $(b,y) \sim (c,z)$ e $(c,z) \sim (d,x)$. Então $b = c$, $c = d$, $\alpha_{V,U}(b)y = z$ e $\alpha_{W,V}(b)z = x$, para $b \in U \cap V \cap W$, então $b = d$ e $\alpha_{W,U}(b)y = \alpha_{W,V}(b)\alpha_{V,U}(b)y = \alpha_{W,V}(b)z = x$. Portanto $(b,y) \sim (d,x)$. Então $\sim$ é uma relação de equivalência.

Denote por $[b,y]$ a classe de equivalência de $(b,y)$. Na continuação vamos construir um fibrado $\mathscr{F}$, com fibra $F$, grupo estrutural $G$ e espaço base $B$. O espaço total de $\mathscr{F}$ é $\tilde{X} = (B \times F)/\sim$, o conjunto quociente de $B \times F$ sob a relação $\sim$. A projeção de $\mathscr{F}$ é $\tilde{\pi} : \tilde{X} \to B$ dada por $\tilde{\pi}([b,y]) = b$. Pela relação de equivalência, $\tilde{\pi}$ está bem definida. Para mostrar que $\tilde{\pi}$ é contínua precisamos da função $\rho : B \times F \to \tilde{X}$, dada por $\rho(b,y) = [b,y]$. Temos que $W \subset \tilde{X}$ é aberto se $\rho^{-1}(W)$ é aberto em $B \times F$. Então $\rho$ é contínua. Vamos mostrar que $\tilde{\pi}$ é contínua. Se $O$ é um aberto em $B$, então $(\tilde{\pi} \circ \rho)^{-1}(O) = \rho^{-1}(\tilde{\pi}^{-1}(O)) = O \times F$, que é aberto em $B \times F$, então $\tilde{\pi}^{-1}(O)$ é um aberto em $X$. Portanto $\tilde{\pi}$ é contínua. As funções coordenadas de $\mathscr{F}$ são, $\{\tilde{\phi}_U : U \times F \to \tilde{\pi}^{-1}(U)\}$, dadas por $\tilde{\phi}_U(b,y) = \rho(b,y) = [b,y]$, onde $U$ é um elemento da cobertura por abertos de $B$. Como $\rho$ é contínua, $\tilde{\phi}_U$ também é contínua. Vamos mostrar que $\tilde{\phi}_U$ está bem definida. De fato $\tilde{\pi} \circ \tilde{\phi}_U(b,y) = \tilde{\pi}(\rho(b,y)) =$

$\tilde{\pi}([b,y]) = b$, então $\tilde{\pi} \circ \tilde{\phi}_U(b,y) = b \in U$, então $\tilde{\phi}_U(U \times F) \subset \tilde{\pi}^{-1}(U)$. Note que também mostramos que $\tilde{\pi} \circ \tilde{\phi}_U(b,y) = b$.

Agora vamos mostrar que $\tilde{\phi}_U$ é um homeomorfismo. A aplicação $\tilde{\phi}_U$ é sobrejetora. De fato, se $[b,y] \in \tilde{\pi}^{-1}(U)$, então $(b,y) \sim (b, \alpha_{U,V}(b)y)$, onde $V$ é outra vizinhança de $b$, então $\tilde{\phi}_U(b, \alpha_{U,V}(b)y) = \rho(b, \alpha_{U,V}(b)y) = [b, \alpha_{U,V}(b)y] = [b,y]$. A aplicação $\tilde{\phi}_U$ é injetora. De fato, suponha que $\tilde{\phi}_U(b,y) = \tilde{\phi}_U(c,z)$, então $[b,y] = [c,z]$, então $(b,y) \sim (c,z)$, com $b,c \in U$, então $b = c$ e $\alpha_{U,U}(b)y = z$. Como $\alpha_{U,U}(b)$ é o elemento neutro de $G$, temos que $y = z$ e assim $(b,y) = (c,z)$. Então temos que $\tilde{\phi}_U$ é bijetora. Para provar que $\tilde{\phi}_U^{-1}$ é contínua vamos mostrar que $\tilde{\phi}_U$ é uma aplicação aberta. Seja $W$ um aberto de $U \times F$. Temos que $\{V \times F\}$, onde $\{V\}$ denota a cobertura por abertos de $B$, é uma cobertura por abertos de $B \times F$. Para mostrar que $\tilde{\phi}_U$ é uma função aberta é suficiente mostrar que $\rho^{-1}(\tilde{\phi}_U(W)) \cap (V \times F)$ é um conjunto aberto. Temos $\rho^{-1}(\tilde{\phi}_U(W)) \cap (V \times F) \subset (U \cap V) \times F$, que é aberto em $B \times F$. Temos que $\rho$ restrito a $(U \cap V) \times F$ pode-se decompor como

$$(U \cap V) \times F \xrightarrow{\sigma} U \times F \xrightarrow{\tilde{\phi}_U} \tilde{X},$$

onde $\sigma(b,y) = (b, \alpha_{U,V}(b)y)$, que é contínua, logo $\sigma^{-1}(W)$ é aberto. Então

$$\begin{aligned}
\rho^{-1}(\tilde{\phi}_U(W)) &= (\tilde{\phi}_U \circ \sigma)^{-1}(\tilde{\phi}_U(W)) \\
&= \sigma^{-1} \circ \tilde{\phi}_U^{-1} \circ \tilde{\phi}_U(W) \\
&= \sigma^{-1}(W),
\end{aligned}$$

que é aberto e assim temos que $\rho^{-1}(\tilde{\phi}_U(W))$ é um aberto. Portanto $\tilde{\phi}_U$ é uma aplicação aberta e então $\tilde{\phi}_U^{-1}$ é contínua. Assim temos que $\tilde{\phi}_U$ é um homeomorfismo.

Agora vamos ver como são as funções de transição de $\mathscr{F}$. Considere $\tilde{\phi}_{U,b}^{-1} \circ \tilde{\phi}_{V,b}$, para $b \in U \cap V$. Seja $y \in F$. Se $z = \tilde{\phi}_{U,b}^{-1} \circ \tilde{\phi}_{V,b}(y)$, então $\tilde{\phi}_{U,b}(z) = \tilde{\phi}_{V,b}(y)$, então $\rho(b,z) = \rho(b,y)$, então $(b,z) \sim (b,y)$ o que implica que $z = \alpha_{U,V}(b)y$. Então para todo $y \in F$ temos $\tilde{\phi}_{U,b}^{-1} \circ \tilde{\phi}_{V,b}(y) = \alpha_{U,V}(b)y$, então $\tilde{\phi}_{U,b}^{-1} \circ \tilde{\phi}_{V,b} = \alpha_{U,V}(b)$. Portanto $\mathscr{F} = \{F, G; \tilde{X}, B; \tilde{\pi}, \tilde{\phi}_U\}$ é um fibrado com funções de transição $\{\alpha_{U,V}\}$. □

## 1.2 Morfismo de Fibrados

Nesta seção vamos definir o que é um morfismo entre dois fibrados, que é uma forma de estabelecer uma relação entre dois fibrados. Veremos exemplos de morfismos, que utilizaremos nas seções seguintes. Definiremos quando é que dois fibrados são equivalentes. Acabaremos a seção estabelecendo uma série de resultados que darão diferentes condições para dois fibrados serem equivalentes.

**Definição 1.14.** *Sejam $\mathscr{F} = \{F, G; X, B; \pi, \phi_U\}$ e $\tilde{\mathscr{F}} = \{F, G; \tilde{X}, \tilde{B}; \tilde{\pi}, \tilde{\phi}_{\tilde{U}}\}$ dois fibrados. Um morfismo de fibrados é um par de aplicações $h : X \to \tilde{X}$ e $\bar{h} : B \to \tilde{B}$ que satisfazem as seguintes condições.*

1. *O seguinte diagrama comuta*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & \tilde{X} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \tilde{\pi} \\ B & \xrightarrow[\bar{h}]{} & \tilde{B} \end{array}$$

*Ou seja,* $\tilde{\pi} \circ h = \bar{h} \circ \pi$.

2. *Para cada* $b \in U$ *e* $\bar{h}(b) = \tilde{b} \in \tilde{U}$, *onde* $U$ *e* $\tilde{U}$ *são vizinhanças coordenadas, temos que* $\tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{U},\tilde{b}} \circ h \circ \phi_{U,b}$ *é um elemento de* $G$. *Além disso, a função* $\bar{\alpha}_{\tilde{U},U} : U \cap \bar{h}^{-1}(\tilde{U}) \to G$, *dada por* $\bar{\alpha}_{\tilde{U},U}(b) = \tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{U},\tilde{b}} \circ h \circ \phi_{U,b}$ *é contínua.*

As funções $\bar{\alpha}_{\tilde{U},U}$ são chamadas funções de transformação. É claro que $\bar{\alpha}_{\tilde{U},U}(b)$ é um homeomorfismo. Denotaremos um morfismo de fibrados por $(h,\bar{h}) : \mathscr{F} \to \tilde{\mathscr{F}}$.

**Observação 1.15.** 1. Da definição anterior vemos que $h$ aplica homeomorficamente fibra em fibra. De fato, se $\tilde{b} = \bar{h}(b)$, então $h|_{\pi^{-1}(b)} : \pi^{-1}(b) \to \tilde{\pi}^{-1}(\bar{h}(b))$ é um homeomorfismo, pois $h = \tilde{\phi}_{\tilde{U},\tilde{b}} \circ \bar{\alpha}_{\tilde{U},U}(b) \circ \phi^{-1}_{U,b}$. Ou seja, para todo $b \in B$ temos que $h(\pi^{-1}(b)) = \tilde{\pi}^{-1}(\bar{h}(b))$.

2. A condição $h(\pi^{-1}(b)) = \tilde{\pi}^{-1}(\bar{h}(b))$, para $b \in B$, implica que $\tilde{\pi} \circ h = \bar{h} \circ \pi$. De fato, Seja $x \in X$. Temos que existe $b \in B$ tal que $x \in \pi^{-1}(b)$, então $h(x) \in h(\pi^{-1}(b)) = \tilde{\pi}^{-1}(\bar{h}(b))$, então $\tilde{\pi} \circ h(x) \in \tilde{\pi}(\tilde{\pi}^{-1}(\bar{h}(b))) = \{\bar{h}(b)\}$ e assim $\tilde{\pi} \circ h(x) = \bar{h}(b) = \bar{h} \circ \pi(x)$.

3. Uma aplicação $h : X \to \tilde{X}$ tal que, para cada $b \in B$ , acontece que $h(\pi^{-1}(b)) = \tilde{\pi}^{-1}(\tilde{b})$, com $\tilde{b} \in \tilde{B}$, induz uma aplicação $\bar{h} : B \to \tilde{B}$, dada por $h(b) = \tilde{b}$, tal que $\tilde{\pi} \circ h = \bar{h} \circ \pi$. Pela Observação 2, só é preciso mostrar que $\bar{h}$ é contínua. Seja $\tilde{U}$ um aberto em $\tilde{B}$. Como $\tilde{\pi}$ e $h$ são contínuas, temos que $h^{-1}(\tilde{\pi}^{-1}(\tilde{U}))$ é aberto em $X$. Pela topologia em $X$, existem uma vizinhança coordenada $U$ de $B$, um aberto $W$ em $B$ e um aberto $N$ da base topológica de $F$ tais que $W \subset U$ e $\phi_U(W \times N) \subset h^{-1}(\tilde{\pi}^{-1}(\tilde{U}))$. Então $W = \pi \circ \phi_U(W \times N) \subset \pi(h^{-1} \circ \tilde{\pi}^{-1}(\tilde{U})) = \pi(\pi^{-1} \circ \bar{h}^{-1}(\tilde{U})) \subset \bar{h}^{-1}(\tilde{U})$. Portanto $\bar{h}^{-1}(\tilde{U})$ é um aberto em $B$. Então $\bar{h}$ é contínua. Nestas condições, dizemos que $\bar{h}$ é a aplicação induzida por $h$.

4. As funções de transformação e de transição satisfazem

$$\begin{cases} \bar{\alpha}_{\tilde{U},V}(b)\alpha_{V,U}(b) = \bar{\alpha}_{\tilde{U},U}(b), & \text{para } b \in U \cap V \cap \bar{h}^{-1}(\tilde{U}) \\ \tilde{\alpha}_{\tilde{V},\tilde{U}}(\bar{h}(b))\bar{\alpha}_{\tilde{U},V}(b) = \bar{\alpha}_{\tilde{V},V}(b), & \text{para } b \in V \cap \bar{h}^{-1}(\tilde{U} \cap \tilde{V}) \end{cases}$$

De fato, $\bar{\alpha}_{\tilde{U},V}(b)\alpha_{V,U}(b) = \left(\tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{U},\tilde{b}} \circ h \circ \phi_{V,b}\right)\left(\phi^{-1}_{V,b} \circ \phi_{U,b}\right) = \tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{U},\tilde{b}} \circ h \circ \phi_{U,b} = \bar{\alpha}_{\tilde{U},U}(b)$,

$\tilde{\alpha}_{\tilde{V},\tilde{U}}(\bar{h}(b))\bar{\alpha}_{\tilde{U},V}(b) = \left(\tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{V},\tilde{b}} \circ \tilde{\phi}_{\tilde{U},\tilde{b}}\right)\left(\tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{U},\tilde{b}} \circ h \circ \phi_{V,b}\right) = \tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{V},\tilde{b}} \circ h \circ \phi_{V,b} = \bar{\alpha}_{\tilde{V},V}(b)$, com $\bar{h}(b) = \tilde{b}$.

**Exemplo 1.16.** Seja $\mathscr{F} = \{F,G;X,B;\pi,\phi_U\}$ um fibrado. Considere as aplicações $\mu_t : X \to X \times I$, dada por $\mu_t(x) = (x,t)$, e $\bar{\mu}_t : B \to B \times I$, dada por $\bar{\mu}_t(b) = (b,t)$. Temos que, para todo $t$ em $I$, $(\mu_t, \bar{\mu}_t) : \mathscr{F} \to \mathscr{F} \times I$ é um morfismo de fibrados. É claro que $\mu_t$ e $\bar{\mu}_t$ são contínuas. O seguinte diagrama comuta.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\mu_t} & X \times I \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi\times id_I} \\ B & \xrightarrow[\bar{\mu}_t]{} & B \times I \end{array}$$

De fato,

$$\begin{aligned}(\pi \times id_I)\circ \mu_t(x) =&(\pi \times id_I)(x,t)\\ =&(\pi(x),t)\\ =&\bar{\mu}_t(\pi(x))\\ =&\bar{\mu}_t \circ \pi(x).\end{aligned}$$

Então $(\pi \times id_I)\circ \mu_t = \bar{\mu}_t \circ \pi$, para toda $t \in I$. Seja $b \in U \cap V$. Temos que:

$$\begin{aligned}\phi^{-1}_{U\times I,(b,t)} \circ \mu_t \circ \phi_{V,b}(y) =&\phi^{-1}_{U\times I,(b,t)}(\phi_{V,b}(y),t)\\ =&\phi^{-1}_{U\times I,(b,t)} \circ \phi_{V\times I,(b,t)}(y).\end{aligned}$$

Então $\phi^{-1}_{U\times I,(b,t)} \circ \mu_t \circ \phi_{V,b} = \phi^{-1}_{U\times I,(b,t)} \circ \phi_{V\times I,(b,t)}$, que, pelo Exemplo 1.11, pertence a $G$. Portanto $(\mu_t, \bar{\mu}_t)$ é um morfismo de fibrados.

**Exemplo 1.17.** Seja $\mathscr{F} = \{F,G;X,B;\pi,\phi_U\}$ um fibrado e considere as aplicações $p : X \times I \to X$, dada por $p(x,t) = x$, e $\bar{p} : B \times I \to B$, dada por $\bar{p}(b,t) = b$. Temos que $(p, \bar{p}) : \mathscr{F} \times I \to \mathscr{F}$ é um morfismo de fibrados. É claro que $p_t$ e $\bar{p}_t$ são contínuas. O seguinte diagrama comuta.

$$\begin{array}{ccc} X \times I & \xrightarrow{p} & X \\ {\scriptstyle\pi\times id_I}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ B \times I & \xrightarrow[\bar{p}]{} & B \end{array}$$

De fato, $\bar{p}\circ(\pi \times id_I)(x,t) = \bar{p}(\pi(x),t) = \pi(x) = \pi \circ p(x,t)$, então $\bar{p}\circ(\pi\times id_I) = \pi \circ p$. Seja $b \in U \cap V$. Temos que:

$$\begin{aligned}\phi^{-1}_{U,b} \circ p \circ \phi_{V\times I,(b,t)}(y) =&\phi^{-1}_{U,b} \circ p(\phi_{V,b}(y),t)\\ =&\phi^{-1}_{U,b} \circ \phi_{V,b}(y).\end{aligned}$$

Então $\phi^{-1}_{U,b} \circ p \circ \phi_{V\times I,(b,t)} = \phi^{-1}_{U,b} \circ \phi_{V,b}$, que pertence a $G$. Portanto $(p, \bar{p})$ é um morfismo de fibrados.

**Exemplo 1.18.** Sejam $\mathscr{F} = \{F,G;X,B;\pi,\phi_U\}$ um fibrado e $f : A \to B$ uma aplicação. Considere o pullback $f^\star(\mathscr{F}) = \{F,G;X_f,A;\pi_1,\phi_{U_f}\}$ e defina a aplicação $h : X_f \to X$ por $h(a,x) = \phi_U(f(a),\pi_U(x))$, onde $f(a) \in U$ e $\pi_U$ é dada pela Observação 1.7. Temos que $(h, f) : f^\star(\mathscr{F}) \to \mathscr{F}$ é um morfismo de fibrados. A aplicação $h$ é chamada aplicação induzida pelo pullback $f^\star(\mathscr{F})$. Primeiro vejamos que $h$ não depende da vizinhança coordenada que contém $f(a)$. Seja $f(a) \in U \cap V$. Pela Observação 1.7, temos que:

$$
\begin{aligned}
\phi_U(f(a),\pi_U(x)) =& \phi_V(f(a),\alpha_{V,U}(f(a))\pi_U(x))\\
=& \phi_V(f(a),\alpha_{V,U}(\pi(x))\pi_U(x))\\
=& \phi_V(f(a),\pi_V(x)),
\end{aligned}
$$

onde $\{\alpha_{U,V}\}$são as funções de transição de $\mathscr{F}$. Também temos que $h$ é contínua. O seguinte diagrama comuta.

$$
\begin{tikzcd}
X_f \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\pi_1"'] & X \arrow[d, "\pi"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}
$$

De fato, $\pi\circ h(a,x) = \pi\circ\phi_U(f(a),\pi_U(x)) = f(a) = f\circ\pi_1(a,x)$. Então $\pi\circ h = f\circ\pi_1$. Seja $b = f(a)\in U\cap V$. Temos que:

$$
\begin{aligned}
\phi_{U,b}^{-1}\circ h\circ\phi_{V_f,a}(y) =& \phi_{U,b}^{-1}\circ h(a,\phi_V(f(a),y))\\
=& \phi_{U,b}^{-1}\circ\phi_V(f(a),\pi_V(\phi_V(f(a),y)))\\
=& \phi_{U,b}^{-1}\circ\phi_{V,b}(\phi_{v,b}^{-1}\circ\phi_{V,b}(y))\\
=& \phi_{U,b}^{-1}\circ\phi_{V,b}(y).
\end{aligned}
$$

Então $\phi_{U,b}^{-1}\circ h\circ\phi_{V_f,a} = \phi_{U,b}^{-1}\circ\phi_{V,b}$, que pertence a $G$. Portanto $(h,f)$ é um morfismo de fibrados.

**Definição 1.19.** *Um morfismo de fibrados $(h,\bar{h}) : \mathscr{F}\to\tilde{\mathscr{F}}$ é chamado isomorfismo de fibrados se existe um morfismo $(f,\bar{f}) : \tilde{\mathscr{F}}\to\mathscr{F}$ tal que $f\circ h$ e $\bar{f}\circ\bar{h}$ são a aplicação identidade de $X$ e de $B$, respectivamente.*

**Exemplo 1.20.** Seja $\mathscr{F} = \{F,G;X,B;\pi,\phi_U\}$ um fibrado. Para $t\in I$, os fibrados $\mathscr{F}\times\{t\}$ e $\mathscr{F}\times\{0\}$ são isomorfos. Temos que $\mathscr{F}\times\{t\} = \{F,G;(X\times I)|_{\{t\}},B\times\{t\};\pi\times\{t\},\varphi_{U\times\{t\}}\}$, onde a notação $\pi\times\{t\}$ quer dizer que a segunda coordenada é a aplicação constante igual a $t$. O espaço total é $(X\times I)|_{\{t\}} = \bigcup\limits_{b\in B}(\pi\times id_I)^{-1}(b,t) = \bigcup\limits_{b\in B}(\pi^{-1}(b)\times\{t\})$. Considere o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
(X\times I)|_{\{t\}} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\pi\times\{t\}"'] & (X\times I)|_{\{0\}} \arrow[d, "\pi\times\{0\}"] \\
B\times\{t\} \arrow[r, "\bar{h}"'] & B\times\{0\}
\end{tikzcd}
$$

onde $h(x,t) = (x,0)$ e $\bar{h}(b,t) = (b,0)$. É claro que $h$ e $\bar{h}$ são contínuas. Temos que o diagrama comuta. De fato, temos que:

$$
\begin{aligned}
(\pi\times\{0\})\circ h(x,t) =& (\pi\times\{0\})(x,0)\\
=& (\pi(x),0)\\
=& \bar{h}(\pi(x),t)\\
=& \bar{h}\circ(\pi\times\{t\})(x,t).
\end{aligned}
$$

Então $(\pi\times\{0\})\circ h=\bar{h}\circ(\pi\times\{t\})$. Seja $b\in U\cap V$. Temos que:

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}_{U\times\{0\},(b,0)}\circ h\circ\varphi_{V\times\{t\},(b,t)}(y)=&\varphi^{-1}_{U\times\{0\},(b,0)}\circ h(\phi_V(b,y),t)\\ =&\varphi^{-1}_{U\times\{0\},(b,0)}(\phi_V(b,y),0)\\ =&\varphi^{-1}_{U\times\{0\},(b,0)}\circ\varphi_{V\times\{0\},(b,0)}(y).\end{aligned}$$

Então $\varphi^{-1}_{U\times\{0\},(b,0)}\circ h\circ\varphi_{V\times\{t\},(b,t)}=\varphi^{-1}_{U\times\{0\},(b,0)}\circ\varphi_{V\times\{0\},(b,0)}$, que pelo Exemplo 1.11 pertence a $G$. Assim, $(h,\bar{h}):\mathscr{F}\times\{t\}\to\mathscr{F}\times\{0\}$ é um morfismo de fibrados. É claro que $h$ e $\bar{h}$ são invertíveis e que suas inversas $h^{-1}(x,0)=(x,t)$ e $\bar{h}^{-1}(b,0)=(b,t)$ também são contínuas. De forma similar temos que $(h^{-1},\bar{h}^{-1}):\mathscr{F}\times\{0\}\to\mathscr{F}\times\{t\}$ é um morfismo de fibrados. Portanto $(h,\bar{h})$ é um isomorfismo de fibrados e assim $\mathscr{F}\times\{t\}$ e $\mathscr{F}\times\{0\}$ são isomorfos.

**Definição 1.21.** *Dois fibrados $\mathscr{F}$ e $\tilde{\mathscr{F}}$, com a mesma fibra, mesmo grupo estrutural e mesmo espaço base, são equivalentes se existe um morfismo de fibrados $(h,id_B):\mathscr{F}\to\tilde{\mathscr{F}}$ tal que $h$ é um homeomorfismo e $id_B$ é a aplicação identidade do espaço base $B$.*

Usaremos a notação $\mathscr{F}\equiv\tilde{\mathscr{F}}$, para dizer que $\mathscr{F}$ e $\tilde{\mathscr{F}}$ são dois fibrados equivalentes. Note que uma equivalência de fibrados é um caso particular de um morfismo de fibrados.

A definição anterior define uma relação de equivalência entre fibrados com os mesmos elementos $F$, $G$, $B$. De fato:

Sejam $\mathscr{F}_1=\{F,G;X_1,B;\pi_1,\phi_{U_1}\}$, $\mathscr{F}_2=\{F,G;X_2,B;\pi_2,\varphi_{U_2}\}$ e $\mathscr{F}_3=\{F,G;X_3,B;\pi_3,\psi_{U_3}\}$ três fibrados.

Reflexividade de $\equiv$: Tomando $h:X\to X$ como a aplicação identidade, temos que $\mathscr{F}\equiv\mathscr{F}$.

Simetria de $\equiv$: Suponha que os fibrados $\mathscr{F}_1$ e $\mathscr{F}_2$ são equivalentes, então existe um homeomorfismo $h:X_1\to X_2$ tal que $(h,id_B):\mathscr{F}_1\to\mathscr{F}_2$ é um morfismo de fibrados. Para $b\in U_1\cap U_2$ temos que $\varphi^{-1}_{U_2,b}\circ h\circ\phi_{U_1,b}$ pertence a $G$. Pela Observação 1.15, para cada $b\in B$, temos que $h(\pi_1^{-1}(b))=\pi_2^{-1}(b)$. Como $h$ é um homeomorfismo, está definido o homeomorfismo $h^{-1}:X_2\to X_1$. Então, para cada $b\in B$ temos que $h^{-1}(\pi_2^{-1}(b))=\pi_1^{-1}(b)$ e pela Observação 1.15, o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{tikzcd} X_2 \arrow[r, "h^{-1}"] \arrow[d, "\pi_2"'] & X_1 \arrow[d, "\pi_1"] \\ B \arrow[r, "id_B"'] & B \end{tikzcd}$$

Para $b\in U_1\cap U_2$, temos que $\phi^{-1}_{U_1,b}\circ h^{-1}\circ\varphi_{U_2,b}=\left(\varphi^{-1}_{U_2,b}\circ h\circ\phi_{U_1,b}\right)^{-1}$, que pertence a $G$. Então $(h^{-1},id_B):\mathscr{F}_2\to\mathscr{F}_1$ é um morfismo de fibrados, onde $h^{-1}$ é um homeomorfismo. Portanto $\mathscr{F}_2$ e $\mathscr{F}_1$ são equivalentes.

Transitividade de $\equiv$: Suponha que os fibrados $\mathscr{F}_1$ e $\mathscr{F}_2$ são equivalentes e que $\mathscr{F}_2$ e $\mathscr{F}_3$ também são equivalentes. Então existem homeomorfismos $h:X_1\to X_2$ e $k:X_2\to X_3$ tais que $(h,id_B):\mathscr{F}_1\to\mathscr{F}_2$ e $(k,id_B):\mathscr{F}_2\to\mathscr{F}_3$ são morfismos de fibrados. Para $b\in U_1\cap U_2\cap U_3$ temos que $\varphi^{-1}_{U_2,b}\circ h\circ\phi_{U_1,b}$

e $\psi_{U_3,b}^{-1} \circ k \circ \varphi_{U_2,b}$ pertencem a $G$. Considere o homeomorfismo $l = k \circ h : X_1 \to X_3$. Para $b \in B$ tem-se que $l(\pi_1^{-1}(b)) = k(h(\pi_1^{-1}(b))) = k(\pi_2^{-1}(b)) = \pi_3^{-1}(b)$. Então, para todo $b \in B$, temos que $l(\pi_1^{-1}(b)) = \pi_3^{-1}(b)$, que pela Observação 1.15, temos que o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "l"] \arrow[d, "\pi_1"'] & X_3 \arrow[d, "\pi_3"] \\ B \arrow[r, "id_B"'] & B \end{tikzcd}$$

Para $b \in U_1 \cap U_3$, temos que:

$$\begin{aligned} \psi_{U_3,b}^{-1} \circ l \circ \phi_{U_1,b} =& \psi_{U_3,b}^{-1} \circ k \circ h \circ \phi_{U,b} \\ =& \left(\psi_{U_3,b}^{-1} \circ k \circ \varphi_{U_2,b}\right) \circ \left(\varphi_{U_2,b}^{-1} \circ l \circ \phi_{U,b}\right), \end{aligned}$$

que é um elemento de $G$. Então $(l, id_B) : \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}_3$ é um morfismo de fibrados, onde $l$ é um homeomorfismo. Portanto $\mathscr{F}_1$ e equivalente a $\mathscr{F}_3$.

**Teorema 1.22.** *Sejam $\mathscr{F}$ e $\tilde{\mathscr{F}}$ dois fibrados com a mesma fibra e o mesmo grupo estrutural. Seja $(h, \bar{h}) : \mathscr{F} \to \tilde{\mathscr{F}}$ um morfismo de fibrados tal que $\bar{h}$ é um homeomorfismo. Então $h$ possui uma aplicação inversa tal que $(h^{-1}, \bar{h}^{-1}) : \tilde{\mathscr{F}} \to \mathscr{F}$ é um morfismo de fibrados. Como consequência temos que $h$ é um homeomorfismo.*

*Demonstração.* Sejam $\mathscr{F} = \{F, G; X, B; \pi, \phi_U\}$ e $\tilde{\mathscr{F}} = \{F, G; \tilde{X}, \tilde{B}; \tilde{\pi}, \tilde{\phi}_{\tilde{U}}\}$. Para $\tilde{b} \in \tilde{V} \cap \bar{h}(U)$, seja $b = \bar{h}^{-1}(\tilde{b})$, onde $U$ é uma vizinhança coordenada que contem $b$ e $\tilde{V}$ uma vizinhança coordenada que contem $\tilde{b}$. Defina $\bar{\beta}_{\tilde{U},\tilde{V}} : \tilde{U} \cap \tilde{V} \to G$ por $\bar{\beta}_{\tilde{U},\tilde{V}}(\tilde{b}) = \phi_{U,b}^{-1} \circ (h|_{\pi^{-1}(b)})^{-1} \circ \tilde{\phi}_{\tilde{V},\tilde{b}}$, onde $\tilde{U} = \bar{h}(U)$. Pela Observação 1.15, $\bar{\beta}_{\tilde{U},\tilde{V}}$ está bem definida. Temos que $\bar{\beta}_{\tilde{U},\tilde{V}}(\tilde{b}) = \bar{\alpha}_{U,V}(b)^{-1}$, onde $\bar{\alpha}_{U,V} : U \cap V \to G$ é dada por $\bar{\alpha}_{U,V}(b) = \phi_{\tilde{V},\tilde{b}}^{-1} \circ (h|_{\pi^{-1}(b)}) \circ \phi_{U,b}$. Como $g \mapsto g^{-1}$ é contínua em $G$ e $\bar{\alpha}_{U,V}$ é contínua em $b$, temos que $\bar{\beta}_{\tilde{U},\tilde{V}}$ é contínua en $\tilde{b}$. Se $\tilde{\pi}(\tilde{x}) = \tilde{b} \in \tilde{V} \cap \bar{h}(U)$, então $h^{-1} : \tilde{X} \to X$ é dada por $h^{-1}(\tilde{x}) = \phi_U(\bar{h}^{-1}(\tilde{b}), \bar{\beta}_{\tilde{U},\tilde{V}}(\tilde{b})\tilde{\pi}_{\tilde{U}}(\tilde{x}))$, onde $\tilde{\pi}_{\tilde{U}}$ é dada pela Observação 1.7. Temos que $h^{-1}$ é contínua em $\tilde{\pi}^{-1}(\tilde{V} \cap \bar{h}(U))$. Como $\{\tilde{V} \cap \bar{h}(U)\}$ forma uma cobertura por abertos de $\tilde{B}$, temos que $h^{-1}$ é contínua em $\tilde{X}$. O seguinte diagrama comuta.

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, "h^{-1}"] \arrow[d, "\tilde{\pi}"'] & X \arrow[d, "\pi"] \\ \tilde{B} \arrow[r, "\bar{h}^{-1}"'] & B \end{tikzcd}$$

De fato, $\pi \circ h^{-1}(\tilde{x}) = \pi \circ \phi_U(\bar{h}^{-1}(\tilde{b}), \bar{\beta}_{\tilde{U},\tilde{V}}(\tilde{b})\tilde{\pi}_{\tilde{U}}(\tilde{x})) = \bar{h}^{-1}(\tilde{b}) = \bar{h}^{-1}(\tilde{\pi}(\tilde{x})) = \bar{h}^{-1} \circ \tilde{\pi}(\tilde{x})$. Então $\pi \circ h^{-1} = \bar{h}^{-1} \circ \tilde{\pi}$. Sejam $b \in U$ e $\tilde{b} = \bar{h}(b) \in \tilde{V} \cap \bar{h}(U)$. Temos $\left(\phi_{U,b}^{-1} \circ h^{-1} \circ \tilde{\phi}_{\tilde{V},\tilde{b}}\right)^{-1} = \tilde{\phi}_{\tilde{V},\tilde{b}}^{-1} \circ h \circ \phi_{U,b}$, que pertence a $G$. Então $\phi_{U,b}^{-1} \circ h^{-1} \circ \tilde{\phi}_{\tilde{V},\tilde{b}} \in G$. Portanto $(h^{-1}, \bar{h}^{-1})$ é um morfismo de fibrados. □

**Teorema 1.23.** *Se $(h, \bar{h}) : \mathscr{F} \to \tilde{\mathscr{F}}$ é um morfismo de fibrados, o pullback $\bar{h}^{\star}(\tilde{\mathscr{F}})$ é equivalente a $\mathscr{F}$.*

*Demonstração.* Sejam $\mathscr{F}=\{F,G;X,B;\pi,\phi\}$, $\tilde{\mathscr{F}}=\{F,G;\tilde{X},\tilde{B};\tilde{\pi},\tilde{\phi}\}$ e $\bar{h}^{\star}(\tilde{\mathscr{F}})=\{F,G;\tilde{X}_{\bar{h}},B;\pi_1,\varphi_{\tilde{U}_{\bar{h}}}\}$. Considere a aplicação $f:X\to\tilde{X}_{\bar{h}}$ dada por $f(x)=(\pi(x),h(x))$. É claro que $f$ é contínua. O seguinte diagrama comuta.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & \tilde{X}_f \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi_1} \\ B & \xrightarrow[id_B]{} & B \end{array}$$

De fato, $\pi_1\circ f(x)=\pi_1(\pi(x),h(x))=\pi(x)=id_B\circ\pi(x)$, então $\pi_1\circ f=id_B\circ\pi$. Para $b\in U\cap\tilde{U}_{\bar{h}}$ temos que:

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}_{\tilde{U}_{\bar{h}},b}\circ f\circ\phi_{U,b}(y)=&\varphi^{-1}_{\tilde{U}_{\bar{h}},b}(\pi\circ\phi_{U,b}(y),h\circ\phi_{U,b}(y))\\ =&\varphi^{-1}_{\tilde{U}_{\bar{h}}}(b,h\circ\phi_{U,b}(y))\\ =&\tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{U},\tilde{b}}\circ h\circ\phi_{U,b}(y),\end{aligned}$$

onde $\tilde{b}=\bar{h}(b)$. Então $\varphi^{-1}_{\tilde{U}_{\bar{h}},b}\circ f\circ\phi_{U,b}=\tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{U},\tilde{b}}\circ h\circ\phi_{U,b}$, que pertence a $G$, pois $(h,\bar{h})$ é um morfismo de fibrados. Então $(f,id_B):\mathscr{F}\to\bar{h}^{\star}(\tilde{\mathscr{F}})$ é um morfismo de fibrados. Como $id_B$ é um homeomorfismo, pelo Teorema 1.22, $f$ é um homeomorfismo. Portanto $\bar{h}^{\star}(\tilde{\mathscr{F}})$ e $\mathscr{F}$ são equivalentes. □

**Lema 1.24.** *Sejam $\mathscr{F}=\{F,G;X,B;\pi,\phi_U\}$ e $\tilde{\mathscr{F}}=\{F,G;\tilde{X},\tilde{B};\tilde{\pi},\tilde{\phi}_{\tilde{U}}\}$ dois fibrados com funções de transição $\{\alpha_{U,V}\}$ e $\{\tilde{\alpha}_{\tilde{U},\tilde{V}}\}$, respectivamente. Sejam $\bar{h}:B\to\tilde{B}$ uma aplicação e $\{\bar{\alpha}_{\tilde{U},U}:U\cap\bar{h}^{-1}(\tilde{U})\to G\}$ um conjunto de aplicações que satisfazem*

$$\begin{cases}\bar{\alpha}_{\tilde{U},U}(b)\alpha_{U,V}(b)=\bar{\alpha}_{\tilde{U},V}(b),\ \textit{para}\ b\in U\cap V\cap\bar{h}^{-1}(\tilde{U})\\ \tilde{\alpha}_{\tilde{V},\tilde{U}}(\bar{h}(b))\bar{\alpha}_{\tilde{U},U}(b)=\bar{\alpha}_{\tilde{V},U}(b),\ \textit{para}\ b\in U\cap\bar{h}^{-1}(\tilde{U}\cap\tilde{V})\end{cases}\tag{1.1}$$

*Então existe uma única aplicação $h:X\to\tilde{X}$ tal que $(h,\bar{h}):\mathscr{F}\to\tilde{\mathscr{F}}$ é um morfismo de fibrados e $\bar{\alpha}_{\tilde{U},U}(b)=\tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{U},\tilde{b}}\circ h\circ\phi_{U,b}$, com $\tilde{b}=\bar{h}(b)$.*

*Demonstração.* Para $\pi(x)=b\in U\cap\bar{h}^{-1}(\tilde{U})$ defina $h_{\tilde{U},U}:\pi^{-1}(U\cap\bar{h}^{-1}(\tilde{U}))\to\tilde{X}$ por $h_{\tilde{U},U}(x)=\tilde{\phi}_{\tilde{U}}(\bar{h}(b),\bar{\alpha}_{\tilde{U},U}(b)\pi_U(x))$. Temos que $h_{\tilde{U},U}$ e contínua em $x$ e que $\tilde{\pi}\circ h_{\tilde{U},U}=\bar{h}\circ\pi$. Sejam $\pi(x)=b\in U\cap V\cap\bar{h}(\tilde{U}\cap\tilde{V})$ e $\tilde{b}=\bar{h}(b)$. Pela Observação 1.6, temos que:

$$\begin{aligned}h_{\tilde{U},U}(x)=&\tilde{\phi}_{\tilde{U}}\left(\tilde{b},\bar{\alpha}_{\tilde{U},U}(b)\phi^{-1}_{U,b}(x)\right)\\ =&\tilde{\phi}_{\tilde{U}}\left(\tilde{b},\bar{\alpha}_{\tilde{U},U}(b)\alpha_{U,V}(b)\pi_V(x)\right)\\ =&\tilde{\phi}_{\tilde{U}}\left(\tilde{b},\bar{\alpha}_{\tilde{U},V}(b)\pi_V(x)\right)\\ =&\tilde{\phi}_{\tilde{U},\tilde{b}}\left((\tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{U},\tilde{b}}\circ\tilde{\phi}_{\tilde{V},\tilde{b}}\circ\tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{V},\tilde{b}}\circ\tilde{\phi}_{\tilde{U},\tilde{b}})\bar{\alpha}_{\tilde{U},V}(b)\pi_V(x)\right)\\ =&\tilde{\phi}_{\tilde{V}}\left(\tilde{b},\tilde{\alpha}_{\tilde{V},\tilde{U}}(\tilde{b})\bar{\alpha}_{\tilde{U},V}(b)\pi_V(x)\right)\\ =&\tilde{\phi}_{\tilde{V}}\left(\tilde{b},\bar{\alpha}_{\tilde{V},V}(b)\pi_V(x)\right)\\ =&h_{\tilde{V},V}(x).\end{aligned}$$

Então duas funções em $\{h_{\tilde{U},U}\}$ são iguais em seus domínios comuns. Como $\{U\cap V\cap \bar{h}^{-1}(\tilde{U}\cap\tilde{V})\}$ é uma cobertura por abertos de $B$, a função $h:X\to\tilde{X}$, dada por $h(x)=h_{\tilde{U},U}(x)$, para $\pi(x)\in U\cap\bar{h}^{-1}(\tilde{U})$, está bem definida e é contínua. A relação $\tilde{\pi}\circ h=\bar{h}\circ\pi$ segue do fato que $\tilde{\pi}\circ h_{\tilde{U},U}=\bar{h}\circ\pi$. Para $\bar{h}(b)=\tilde{b}\in\tilde{U}$ e $b\in U\cap\bar{h}^{-1}(\tilde{U})$, temos que:

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{U},\tilde{b}}\circ h\circ\phi_{U,b}(y) =&\tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{U},\tilde{b}}\circ\tilde{\phi}_{\tilde{U}}(\tilde{b},\bar{\alpha}_{\tilde{U},U}(b)\pi_U(\phi_{U,b}(y)))\\ =&\bar{\alpha}_{\tilde{U},U}(b)y.\end{aligned}$$

Então $\tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{U},\tilde{b}}\circ h\circ\phi_{U,b}=\bar{\alpha}_{\tilde{U},U}(b)$, que pertence a $G$. Portanto $(h,\bar{h}):\mathscr{F}\to\tilde{\mathscr{F}}$ é um morfismo de fibrados e $\bar{\alpha}_{\tilde{U},U}(b)=\tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{U},\tilde{b}}\circ h\circ\phi_{U,b}$, com $\tilde{b}=\bar{h}(b)$. □

**Lema 1.25.** *Sejam $\mathscr{F}=\{F,G;X,B;\pi,\phi_U\}$ e $\tilde{\mathscr{F}}=\{F,G;\tilde{X},B;\tilde{\pi},\tilde{\phi}_{\tilde{U}}\}$ dois fibrados, com funções de transição $\{\alpha_{U,V}\}$ e $\{\tilde{\alpha}_{\tilde{U},\tilde{V}}\}$, respectivamente. Os fibrados $\mathscr{F}$ e $\tilde{\mathscr{F}}$ são equivalentes se, e somente se, existem aplicações $\{\bar{\alpha}_{\tilde{U},U}:U\cap\tilde{U}\to G\}$ tais que*

$$\begin{cases}\bar{\alpha}_{\tilde{U},U}(b)\alpha_{U,V}(b)=\bar{\alpha}_{\tilde{U},V}(b), \textit{para } b\in U\cap V\cap\tilde{U}\\ \tilde{\alpha}_{\tilde{V},\tilde{U}}(b)\bar{\alpha}_{\tilde{U},U}(b)=\bar{\alpha}_{\tilde{V},U}(b), \textit{para } b\in\tilde{U}\cap\tilde{V}\cap U\end{cases}\tag{1.2}$$

*Demonstração.* Suponha que $\mathscr{F}$ e $\tilde{\mathscr{F}}$ são equivalentes. Então existe um morfismo $(h,id_B):\mathscr{F}\to\tilde{\mathscr{F}}$. Para cada $\tilde{U}$, $U$ defina as aplicações $\bar{\alpha}_{\tilde{U},U}:\tilde{U}\cap U\to G$ por $\bar{\alpha}_{\tilde{U},U}(b)=\tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{U},b}\circ h\circ\phi_{U,b}$. Tomando $\bar{h}=id_B$ no Lema 1.24, temos que $\{\bar{\alpha}_{\tilde{U},U}\}$ satisfazem as Equações (1.1) e então também satisfazem as Equações (1.2).

Suponha que existem aplicações $\{\bar{\alpha}_{\tilde{U},U}:\tilde{U}\cap U\to G\}$ que satisfazem (1.2). Tomando $\bar{h}=id_B$ no Lema 1.24 temos que estas funções satisfazem as Equações (1.1), então existe uma aplicação $h:X\to\tilde{X}$ tal que $(h,id_B):\mathscr{F}\to\tilde{\mathscr{F}}$ é um morfismo de fibrados. Como $id_B$ é um homeomorfismo, pelo Teorema 1.22, $h$ é um homeomorfismo. Então $\mathscr{F}$ e $\tilde{\mathscr{F}}$ são equivalentes. □

**Lema 1.26.** *Sejam $\mathscr{F}=\{F,G;X,B;\pi,\phi_U\}$ e $\tilde{\mathscr{F}}=\{F,G;\tilde{X},B;\tilde{\pi},\tilde{\phi}_U\}$ dois fibrados, com funções de transição $\{\alpha_{U,V}\}$ e $\{\tilde{\alpha}_{U,V}\}$, respectivamente. Então $\mathscr{F}$ e $\tilde{\mathscr{F}}$ são equivalentes se, e somente se, existem aplicações $\{\lambda_U:U\to G\}$ tal que $\tilde{\alpha}_{U,V}(b)=\lambda_U(b)^{-1}\alpha_{U,V}(b)\lambda_V(b)$.*

*Demonstração.* Suponha que $\mathscr{F}$ e $\tilde{\mathscr{F}}$ são fibrados equivalentes. Pelo Lema 1.25, existem aplicações $\{\bar{\alpha}_{U,V}:U\cap V\to G\}$ que satisfazem as Equações (1.2). Defina $\lambda_U:U\to G$ por $\lambda_U(b)=(\bar{\alpha}_{U,U}(b))^{-1}$. Das Equações (1.2) temos que $\bar{\alpha}_{\tilde{U},U}(b)=\bar{\alpha}_{\tilde{U},V}(b)\alpha_{U,V}(b)^{-1}$, então $\bar{\alpha}_{\tilde{U},U}(b)^{-1}=\alpha_{U,V}(b)\bar{\alpha}_{\tilde{U},V}(b)^{-1}$, e que $\tilde{\alpha}_{\tilde{V},\tilde{U}}(b)=\bar{\alpha}_{\tilde{V},U}(b)\bar{\alpha}_{\tilde{U},U}(b)^{-1}=\bar{\alpha}_{\tilde{V},U}(b)\alpha_{U,V}(b)\bar{\alpha}_{\tilde{U},V}(b)^{-1}$. Tomando $\tilde{V}=U$ e $\tilde{U}=V$, temos que $\tilde{\alpha}_{U,V}(b)=\lambda_U(b)^{-1}\alpha_{U,V}(b)\lambda_V(b)$.

Suponha que existem aplicações $\{\lambda_U:U\to G\}$ tais que $\tilde{\alpha}_{U,V}(b)=\lambda_U(b)^{-1}\alpha_{U,V}(b)\lambda_V(b)$. Defina $\bar{\alpha}_{U,V}:U\cap V\to G$ por $\bar{\alpha}_{U,V}(b)=\lambda_U(b)^{-1}\alpha_{U,V}(b)$. Para $b\in U\cap V\cap W$ e pela Observação 1.6, temos que:

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_{W,V}(b) =&\lambda_W(b)^{-1}\alpha_{W,V}(b)\\ =&\lambda_W(b)^{-1}\alpha_{W,U}(b)\alpha_{U,V}(b)\\ =&\bar{\alpha}_{W,U}(b)\alpha_{U,V}(b)\end{aligned}$$

e que:

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_{V,U}(b) =&\lambda_V(b)^{-1}\alpha_{V,U}(b)\\ =&\lambda_V(b)^{-1}\alpha_{V,W}(b)\alpha_{W,U}(b)\\ =&\lambda_V(b)^{-1}\alpha_{V,W}(b)\lambda_W(b)\lambda_W(b)^{-1}\alpha_{W,U}(b)\\ =&\tilde{\alpha}_{V,W}(b)\bar{\alpha}_{W,U}(b).\end{aligned}$$

Então $\{\bar{\alpha}_{U,V}\}$ satisfazem as Equações (1.2) e portanto $\mathscr{F}$ e $\tilde{\mathscr{F}}$ são equivalentes. □

**Corolário 1.27.** *Se dois fibrados têm mesmo espaço base, mesma fibra, mesmo grupo estrutural e mesmas funções de transição, então são equivalentes.*

*Demonstração.* No Lema 1.26, para cada vizinhança coordenada $U$, tome $\lambda_U$ como a aplicação constante igual ao elemento neutro do grupo. □

## 1.3 Fibrado Principal

Iniciamos esta seção com a definição de fibrado principal. Logo introduzimos as operações $\tau$ e $\tau_F^{-1}$, que relacionam fibrados com fibras diferentes. Continuamos estabelecendo resultados para ver relações entre as classes de equivalência de fibrados, os Pullback de fibrados e as operações $\tau$ e $\tau_F^{-1}$. Finalizaremos a seção definindo uma ação, pela direita, sobre o espaço total de um fibrado principal.

**Definição 1.28.** *Um fibrado $\mathscr{F}$ é chamado fibrado principal se sua fibra é igual a seu grupo estrutural. A ação é definida pela operação do grupo estrutural.*

**Definição 1.29.** *Seja $\mathscr{F} = \{F,G;X,B;\pi,\phi_U\}$ um fibrado com funções de transição $\{\alpha_{U,V}\}$. Define-se o fibrado principal associado a $\mathscr{F}$ como $\tau\mathscr{F} = \{G,G;(B\times G)/\sim,B;\tilde{\pi},\tilde{\phi}_U\}$, onde $(B\times G)/\sim$, $B$, $\tilde{\pi}$, e $\tilde{\phi}_U$ são dadas como na prova do Teorema 1.13 e com as mesmas funções de transição que o fibrado $\mathscr{F}$. Se $\mathscr{F} = \{G,G;X,B;\pi,\phi_U\}$ é um fibrado principal e $G$ atua, pela esquerda, sobre um espaço topológico $F$, defina $\tau_F^{-1}\mathscr{F} = \{F,G;(B\times F)/\sim,B;\hat{\pi},\hat{\phi}_U\}$, onde $(B\times F)/\sim,B$, $\hat{\pi}$, e $\hat{\phi}_U$ são dadas como na prova do Teorema 1.13 e com as mesmas funções de transição que o fibrado $\mathscr{F}$.*

Pela demostração do Teorema 1.13, $\tau\mathscr{F}$ e $\tau_F^{-1}\mathscr{F}$ são fibrados. Os fibrados $\mathscr{F}$ e $\tau\mathscr{F}$ têm o mesmo grupo estrutural, mesmo espaço base e mesmas funções de transição, mas suas fibras são distintas. Se $\mathscr{F}$ é um fibrado principal, então $\mathscr{F}$ e $\tau_F^{-1}\mathscr{F}$ têm mesmo grupo estrutural, mesmo espaço base e mesmas funções de transição, mas suas fibras são distintas.

**Teorema 1.30.** *Se $\mathscr{F}$ é um fibrado, com fibra $F$, então $\tau_F^{-1}\tau\mathscr{F}$ e $\mathscr{F}$ são equivalentes. Se $\mathscr{F}$ é um fibrado principal, e seu grupo estrutural atua, pela esquerda, sobre um espaço topológico $F$, temos que $\tau\tau_F^{-1}\mathscr{F}$ e $\mathscr{F}$ são equivalentes.*

*Demonstração.* Seja $\mathscr{F}$ um fibrado com fibra $F$. Temos que $\tau\mathscr{F}$ e $\mathscr{F}$ têm as mesmas funções de transição. Como $\tau\mathscr{F}$ é um fibrado principal, $\tau_F^{-1}\tau\mathscr{F}$ e $\tau\mathscr{F}$ têm as mesmas funções de transição, então $\mathscr{F}$ e $\tau_F^{-1}\tau\mathscr{F}$ têm as mesmas funções de transição. Além disso, $\mathscr{F}$ e $\tau_F^{-1}\tau\mathscr{F}$ têm mesma fibra, mesmo grupo estrutural e mesmo espaço base, então, pelo Corolário 1.27, $\tau_F^{-1}\tau\mathscr{F}$ e $\mathscr{F}$ são equivalentes.

Suponha que $\mathscr{F}$ é um fibrado principal. Então $\tau_F^{-1}\mathscr{F}$ e $\mathscr{F}$ têm as mesmas funções de transição. As funções de transição de $\tau\tau_F^{-1}\mathscr{F}$ e $\tau_F^{-1}\mathscr{F}$ são as mesmas, então $\tau\tau_F^{-1}\mathscr{F}$ e $\mathscr{F}$ têm as mesmas funções de transição. Além disso, $\tau\tau_F^{-1}\mathscr{F}$ e $\mathscr{F}$ têm mesma fibra, mesmo grupo estrutural e mesmo espaço base, então, pelo Corolário 1.27, $\tau\tau_F^{-1}\mathscr{F}$ e $\mathscr{F}$ são equivalentes. □

**Teorema 1.31** (Ehresmann)**.** *Dois fibrados são equivalentes se, e somente se, seus fibrados principais associados são equivalentes.*

*Demonstração.* Sejam $\mathscr{F}$ e $\tilde{\mathscr{F}}$ dois fibrados com funções de transição $\{\alpha_{U,V}\}$ e $\{\beta_{U,V}\}$, respectivamente. Suponha que $\mathscr{F}$ e $\tilde{\mathscr{F}}$ são equivalentes. Então $\mathscr{F}$ e $\tilde{\mathscr{F}}$ têm mesmo grupo estrutural, mesmo espaço base e, pelo Lema 1.26, existem aplicações $\{\lambda_U : U \to G\}$ que satisfazem $\alpha_{U,V}(b) = \lambda_U(b)^{-1}\beta_{U,V}(b)\lambda_V(b)$. Pela Definição 1.29, $\tau\mathscr{F}$ e $\tau\tilde{\mathscr{F}}$ têm mesma fibra, mesmo grupo estrutural, mesmo espaço base e mesmas funções de transição que $\mathscr{F}$ e $\tilde{\mathscr{F}}$, respectivamente. Pelo Lema 1.26, $\tau\mathscr{F}$ e $\tau\tilde{\mathscr{F}}$ são equivalentes.

Suponha que $\tau\mathscr{F}$ e $\tau\tilde{\mathscr{F}}$ são equivalentes. Pela definição 1.29, temos que $\tau\mathscr{F}$ e $\tau\tilde{\mathscr{F}}$ têm as mesmas funções de transição que $\mathscr{F}$ e $\tilde{\mathscr{F}}$, respectivamente. Temos que $\tau\mathscr{F}$ e $\tau\tilde{\mathscr{F}}$ têm mesmo grupo estrutural, mesmo espaço base e, do Lema 1.26, existem aplicações $\{\lambda_U : U \to G\}$ tais que $\alpha_{U,V}(b) = \lambda_U(b)^{-1}\beta_{U,V}(b)\lambda_V(b)$. Pela Definição 1.29, $\tau_F^{-1}\tau\mathscr{F}$ e $\tau_F^{-1}\tau\tilde{\mathscr{F}}$ têm mesma fibra, mesmo grupo estrutural, mesmo espaço base e mesmas funções de transição que $\tau\mathscr{F}$ e $\tau\tilde{\mathscr{F}}$, respectivamente. Pelo Lema 1.26, $\tau_F^{-1}\tau\mathscr{F}$ e $\tau_F^{-1}\tau\tilde{\mathscr{F}}$ são equivalentes. Pelo Teorema 1.30, $\mathscr{F}$ e $\tilde{\mathscr{F}}$ são equivalentes. □

**Teorema 1.32.** *Sejam $\mathscr{F}$ um fibrado sobre $B$ e $f : A \to B$ uma aplicação. Então $f^\star(\tau\mathscr{F})$ e $\tau f^\star(\mathscr{F})$ são equivalentes. Se $\mathscr{F}$ é um fibrado principal e seu grupo estrutural atua, pela esquerda, sobre o espaço topológico $F$, então $f^\star(\tau_F^{-1}\mathscr{F})$ e $\tau_F^{-1}f^\star(\mathscr{F})$ são equivalentes.*

*Demonstração.* Pelo comentário depois da Definição 1.12, temos que $\mathscr{F}$ e $f^\star(\mathscr{F})$ têm as mesmas funções de transição, então, pela Definição 1.29, $\tau\mathscr{F}$ e $\tau f^\star(\mathscr{F})$ têm as mesmas funções de transição. Pelo comentário depois da Definição 1.12, $\tau\mathscr{F}$ e $f^\star(\tau\mathscr{F})$ têm as mesmas funções de transição. Então $f^\star(\tau\mathscr{F})$ e $\tau f^\star(\mathscr{F})$ têm as mesmas funções de transição. Pelas Definições 1.12 e 1.29, $f^\star(\tau\mathscr{F})$ e $\tau f^\star(\mathscr{F})$ têm mesma fibra, mesmo grupo estrutural e mesmo espaço base. Então, pelo Corolário 1.27, $f^\star(\tau\mathscr{F})$ e $\tau f^\star(\mathscr{F})$ são equivalentes.

Suponha que $\mathscr{F}$ é um fibrado principal tal que seu grupo estrutural atua, pela esquerda, sobre $F$. Pelo comentário depois da Definição 1.12, temos que $\mathscr{F}$ e $f^\star(\mathscr{F})$ têm as mesmas funções de transição, então, pela Definição 1.29, $\tau_F^{-1}\mathscr{F}$ e $\tau_F^{-1}f^\star(\mathscr{F})$ têm as mesmas funções de transição. Pelo comentário depois da Definição 1.12, $\tau_F^{-1}\mathscr{F}$ e $f^\star(\tau_F^{-1}\mathscr{F})$ têm as mesmas funções de transição. Então

$f^\star(\tau_F^{-1}\mathscr{F})$ e $\tau_F^{-1}f^\star(\mathscr{F})$ têm as mesmas funções de transição. Pelas Definições 1.12 e 1.29, $f^\star(\tau_F^{-1}\mathscr{F})$ e $\tau_F^{-1}f^\star(\mathscr{F})$ têm mesma fibra, mesmo grupo estrutural e mesmo espaço base. Pelo Corolário 1.27, $f^\star(\tau_F^{-1}\mathscr{F})$ e $\tau_F^{-1}f^\star(\mathscr{F})$ são equivalentes. □

**Observação 1.33.** Seja $\mathscr{F} = \{G, G; X, B; \pi, \phi_U\}$ um fibrado principal. Vamos definir uma ação, pela direita, de $G$ sobre o espaço total de $\mathscr{F}$. Defina a ação como segue.

$$x \cdot g_0 = \phi_{U,b}(\phi_{U,b}^{-1}(x)g_0), \text{ onde } b = \pi(x) \in U.$$

O lado direito da igualdade anterior não depende da escolha da vizinhança de $b$. Seja $V$ outra vizinhança de $b$. Como $\phi_{U,b}^{-1} \circ \phi_{V,b} \in G$, existe $g_1 \in G$ tal que $\phi_{U,b}^{-1} \circ \phi_{V,b} = g_1$, então $\phi_{U,b}^{-1} \circ \phi_{V,b}(g) = g_1 g$, então $\phi_{V,b}(g) = \phi_{U,b}(g_1 g)$. Agora, temos que $\phi_{V,b}^{-1}(x) = g_1^{-1}\phi_{U,b}^{-1}(x)$. De fato, $\phi_{V,b}(g_1^{-1}\phi_{U,b}^{-1}(x)) = \phi_{U,b}(g_1 g_1^{-1}\phi_{U,b}^{-1}(x)) = x$ e também $g_1^{-1}\phi_{U,b}^{-1}(\phi_{V,b}(g)) = g_1^{-1}\phi_{U,b}^{-1}(\phi_{U,b}(g_1 g)) = g$. Então $\phi_{V,b}^{-1} \circ \phi_{U,b}(g) = g_1^{-1}g$. Assim temos que $g_1^{-1}(\phi_{U,b}^{-1}(x)g_0) = (g_1^{-1}\phi_{U,b}^{-1}(x))g_0$ se, e somente se, $\phi_{V,b}^{-1} \circ \phi_{U,b}(\phi_{U,b}^{-1}(x)g_0) = \phi_{V,b}^{-1}(x)g_0$ se, e somente se, $\phi_{U,b}(\phi_{U,b}^{-1}(x)g_0) = \phi_{V,b}(\phi_{V,b}^{-1}(x)g_0)$.

## 1.4 Fibrado Simples

Esta seção inicia com a definição de fibrado produto. Logo estabelecemos uma relação entre fibrados com distinto grupo estrutural. Continuamos com uma série de resultados que relacionam fibrados com o fibrado produto.

**Definição 1.34.** *Um fibrado $\mathscr{F}$ sobre $B$ é chamado fibrado produto se tem uma única vizinhança coordenada $U = B$ e seu grupo estrutural é o grupo trivial.*

**Teorema 1.35.** *Se um fibrado tem grupo estrutural trivial, então o fibrado é equivalente a um fibrado produto.*

*Demonstração.* Se o grupo estrutural de um fibrado é trivial, então suas funções de transição são as mesmas que as funções de transição de um fibrado produto, então, pelo Corolário 1.27, os fibrados são equivalentes. □

**Definição 1.36.** *Seja $H$ um subgrupo fechado de $G$. Seja $\mathscr{F}$ um fibrado com grupo estrutural $H$ e funções de transição $\{\alpha_{U,V}\}$. Se $G$ atua, pela esquerda, sobre a fibra de $\mathscr{F}$, definimos a $G$-imagem de $\mathscr{F}$ como um fibrado com mesma fibra e mesmas vizinhanças coordenadas que $\mathscr{F}$, com grupo estrutural $G$ e funções de transição $\beta_{U,V} : U \cap V \to G$ dadas por $\beta_{U,V}(b) = \alpha_{U,V}(b)$.*

**Observação 1.37.**

1. Se $G$ atua, pela esquerda, sobre a fibra de $\mathscr{F}$, então o Teorema 1.13 garante a existência da $G$-imagem de $\mathscr{F}$.

2. O Corolário 1.27 diz que se a $G$-imagem existe, então é única exceto por equivalência.

3. Se $H$ atua, pela esquerda, sobre $F$, nem sempre é possível estender ou definir uma ação de $G$, pela esquerda, sobre F.

4. Se $\mathscr{F}$ é um fibrado com grupo estrutural $G$, pelo Corolário 1.27, $\mathscr{F}$ é equivalente a sua $G$-imagem.

5. Se $\mathscr{F}_1$ e $\mathscr{F}_2$ são dois fibrados equivalentes com grupo estrutural $H$, pelo Lema 1.26, suas $G$-imagens são equivalentes.

**Definição 1.38.** *Sejam $H$ e $K$ subgrupos fechados de $G$ e $\mathscr{F}$ e $\tilde{\mathscr{F}}$ dois fibrados com grupos estruturais $H$ e $K$, respectivamente. Dizemos que $\mathscr{F}$ e $\tilde{\mathscr{F}}$ são $G$-equivalentes se as $G$-imagens de $\mathscr{F}$ e $\tilde{\mathscr{F}}$ são equivalentes. Se $K$ é o subgrupo trivial, então $\mathscr{F}$ é $G$-equivalente a um fibrado produto.*

**Definição 1.39.** *Seja $\mathscr{F} = \{F,G;X,B;\pi,\phi_U\}$ um fibrado. Uma aplicação $f : B \to X$ é uma seção global para $\mathscr{F}$ se $\pi \circ f = id_B$, onde $id_B$ é a aplicação identidade de $B$.*

**Definição 1.40.** *Seja $\mathscr{F} = \{F,G;X,B;\pi,\phi_U\}$ um fibrado. O fibrado $\mathscr{F}$ é chamado fibrado simples se seu fibrado principal associado admite uma seção global.*

**Teorema 1.41.** *Seja $\mathscr{F}$ um fibrado com funções de transição $\{\alpha_{U,V}\}$. Então $\mathscr{F}$ é $G$-equivalente a um fibrado produto se, e somente se, existem aplicações $\{\lambda_U : U \to G\}$ tais que $\alpha_{U,V}(b) = \lambda_U(b)\lambda_V(b)^{-1}$, para $b \in U \cap V$.*

*Demonstração.* Todas as funções de transição de um fibrado produto são aplicações constantes iguais a $e$, o elemento neutro de $G$. Pela Definição 1.36 e o Lema 1.26, temos que $\mathscr{F}$ é $G$-equivalente a um fibrado produto se, e somente se, existem aplicações $\{\lambda_U : U \to G\}$ tais que:

$$\alpha_{U,V}(b) = \lambda_U(b)^{-1} \text{ e } \lambda_V(b) = \lambda_U(b)^{-1}\lambda_V(b). \qquad \square$$

**Teorema 1.42.** *Um fibrado principal $\mathscr{F}$ é $G$-equivalente a um fibrado produto se, e somente se, $\mathscr{F}$ admite uma seção global.*

*Demonstração.* Sejam $B$, $X$, $\{\phi_U\}$ e $\{\alpha_{U,V}\}$ o espaço base, o espaço total, as funções coordenadas e as funções de transição de $\mathscr{F}$, respectivamente. Suponha que $\mathscr{F}$ é $G$-equivalente a um fibrado produto. Pelo Teorema 1.41, existem aplicações $\{\lambda_U : U \to G\}$ tais que $\alpha_{V,U}(b) = \lambda_V(b)\lambda_U(b)^{-1}$. Então $\alpha_{V,U}(b)\lambda_U(b) = \lambda_V(b)$. Defina $f : B \to X$ por $f(b) = \phi_U(b,\lambda_U(b))$, para $b \in U$. Para $b \in U \cap V$ e pela Observação 1.6, temos que $\phi_U(b,\lambda_U(b)) = \phi_V(b,\alpha_{V,U}(b)\lambda_U(b)) = \phi_V(b,\lambda_V(b))$. Então $f$ está bem definida e é contínua em $B$. Temos que $\pi \circ f(b) = \pi \circ \phi_U(b, f_U(b)) = b$. Então $f$ é uma seção global para $\mathscr{F}$.

Suponha que $f : B \to X$ é uma seção global para $\mathscr{F}$. Para cada vizinhança coordenada $U$ defina $\lambda_U : U \to G$ por $\lambda_U(b) = \pi_U(\lambda(b))$, onde $\pi_U$ é dada pela Observação 1.7. Para $b \in U \cap V$ e pela Observação 1.7, temos que $\alpha_{U,V}(b)\pi_V(b) = \pi_U(b)$. Tomando $x = \lambda(b)$, temos que $\alpha_{U,V}(b) = \lambda_U(b)\lambda_V(b)^{-1}$. Pelo Teorema 1.41, $\mathscr{F}$ é $G$-equivalente a um fibrado produto. $\square$

**Corolário 1.43.** *Seja $\mathscr{F}$ um fibrado com grupo estrutural $G$. $\mathscr{F}$ é $G$-equivalente a um fibrado produto se, e somente se, o fibrado principal associado a $\mathscr{F}$ admite uma seção global.*

*Demonstração.* Seja $\{\alpha_{U,V}\}$ as funções de transição de $\mathscr{F}$. Pelo Teorema 1.42, $\tau\mathscr{F}$ admite uma seção global se, e somente se, $\tau\mathscr{F}$ é $G$-equivalente a um fibrado produto. Pela Definição 1.29, $\tau\mathscr{F}$ tem funções de transição $\{\alpha_{U,V}\}$. Pelo Teorema 1.41, existem aplicações $\{\lambda_U : U \to G\}$ tais que $\alpha_{U,V}(b) = \lambda_U(b)\lambda_V(b)^{-1}$ se, e somente se, $\mathscr{F}$ é $G$-equivalente a um fibrado produto. □

## 1.5 Fibrado Universal

Nesta seção definimos o que é um fibrado universal e estabelecemos resultados que relacionam o Pullback de fibrados, fibrado produto, aplicações homotópicas e o fibrado universal.

**Definição 1.44.** *Sejam $A$ e $B$ dois espaços topológicos e $I = [0,1]$ o intervalo unitário. Duas aplicações $h_0, h_1 : A \to B$ são homotópicas se existe uma aplicação $h : A \times I \longrightarrow B$ tal que $h(a,0) = h_0(a)$ e $h(a,1) = h_1(a)$. A aplicação $h$ é chamada homotopia entre $h_0$ e $h_1$. Dizemos que $h_0$ e $h_1$ são homotópicas.*

**Definição 1.45.** *Um fibrado $\mathscr{F} = \{F, G; X, A; \pi, \phi_U\}$ é chamado fibrado universal relativo a $F, G, B$ se as seguintes condições são satisfeitas.*

1. *Para todo fibrado $\tilde{\mathscr{F}}$ sobre $B$, com fibra $F$ e grupo estrutural $G$, existe uma aplicação $f : B \to A$ tal que $\tilde{\mathscr{F}}$ e $f^\star(\mathscr{F})$ são equivalentes.*

2. *Para quaisquer duas aplicações $h_0, h_1 : B \to A$, temos que $h_0^\star(\mathscr{F})$ e $h_1^\star(\mathscr{F})$ são equivalentes se, e somente se, $h_0$ e $h_1$ são homotópicas.*

**Teorema 1.46.** *Seja $\mathscr{F}$ um fibrado sobre $B$, com grupo estrutural $G$. Se $f : A \to B$ é uma aplicação que aplica $A$ em um ponto $b_0 \in B$, então $f^\star(\mathscr{F})$ é $G$-equivalente a um fibrado produto.*

*Demonstração.* Se $\{U\}$ são as vizinhanças coordenadas de $\mathscr{F}$, temos que $f^{-1}(U) = \begin{cases} \emptyset, \text{ se } b_0 \notin U \\ A, \text{ se } b_0 \in U \end{cases}$. Então $f^\star(\mathscr{F})$ tem uma única vizinhança coordenada $V = A$. Então $f^\star(\mathscr{F})$ tem uma única função de transição, que tem que ser a aplicação constante igual ao elemento neutro do grupo $G$. Então as funções de transição do fibrado $f^\star(\mathscr{F})$ são as mesmas que as funções de transição de um fibrado produto. Pelo Teorema 1.35, $f^\star(\mathscr{F})$ é $G$-equivalente a um fibrado produto. □

**Teorema 1.47.** *Se $\mathscr{F} = \{F, G; X, A; \pi, \phi_U\}$ é um fibrado universal relativo a $F$, $G$, $B$ e $f : B \to A$ é uma aplicação, então $f^\star(\mathscr{F})$ é $G$-equivalente a um fibrado produto se, e somente se, $f$ é homotópica a uma constante.*

*Demonstração.* Suponha que $f$ e $g$ são homotópicas, onde $g : B \to A$ é uma aplicação constante igual a $a_0$. Como $\mathscr{F}$ é um fibrado universal, $f^\star(\mathscr{F})$ é equivalente a $g^\star(\mathscr{F})$. Pelo Teorema 1.46, $g^\star(\mathscr{F})$ é $G$-equivalente a um fibrado produto, então $f^\star(\mathscr{F})$ é $G$-equivalente a um fibrado produto.

Suponha que $f^\star(\mathscr{F})$ é $G$-equivalente a um fibrado produto. Seja $g : B \to A$ uma aplicação contante. Pelo Teorema 1.46, $g^\star(\mathscr{F})$ é $G$-equivalente a um fibrado produto. Então $f^\star(\mathscr{F})$ e $g^\star(\mathscr{F})$ são $G$-equivalentes. Pela Observação 1.37, $f^\star(\mathscr{F})$ e $g^\star(\mathscr{F})$ são equivalentes. Como $\mathscr{F}$ é um fibrado universal, $f$ e $g$ são homotópicas. Então $f$ é homotópica a uma constante. $\square$

# CAPÍTULO 2

# Fibrados e Poliedros Finitos

Neste capítulo apresentamos resultados que relacionam conceitos e exemplos dados no capítulo anterior. Também estabelecemos resultados que relacionam aplicações homotópicas e a equivalência entre os Pulback dados por estas aplicações, assim como uma série de resultados que apresentam condições de quando dois fibrados são equivalentes. Os Teoremas 2.10 e 2.15 estabelecem condições para estender morfismos de fibrados. Finalizamos com o objetivo principal deste capítulo, mostrar o Teorema 2.19, que estabelece a existência de um fibrado universal, para fibrados com grupo geral linear como seu grupo estrutural e a base sendo um poliedro de dimensão finita. Para mais informação sobre poliedros veja [4].

## 2.1 Poliedros

Esta é uma seção para apresentar a definição de poliedro finito e alguns resultados básicos necessários para as seguintes seções.

**Definição 2.1.** *Um complexo simplicial $K$ consiste de um conjunto $\{v\}$ de vértices e um conjunto $\{s\}$ de subconjuntos finitos não vazios de $\{v\}$, chamados simplexos, tais que*

1. *Todo conjunto que consiste de exatamente um vértice é um simplexo.*
2. *Todo subconjunto não vazio de um simplexo é um simplexo.*

**Definição 2.2.** *Seja $s$ um simplexo de um complexo simplicial $K$ e $p,m \in \mathbb{N}$.*

1. *$s$ é chamado $m$-simplexo se contém exatamente $m+1$ vértices.*
2. *Se $s'$ é um $p$-simplexo, que está contido em $s$, com $p \leq m$, dizemos que $s'$ é uma $p$-face de $s$. Se $p < m$, dizemos que $s'$ é uma $p$-face própria de $s$.*

3. *A fronteira de s, denotada por $\partial s$, é a união de todas as faces próprias de s. Se $m \geq 1$, então $\partial s$ é um $(m-1)$-simplexo que está contido em s.*

Note que os 0-simplexos são exatamente os vértices de $K$.

**Definição 2.3.** *Se K é um complexo simplicial, temos o seguinte.*

1. *A dimensão de K é n, para $n \in \mathbb{N}$, se K contém um n-simplexo mas não contém nenhum $(n+1)$-simplexo. Denotamos a dimensão de K por $dim(K)$.*

2. *Um subcomplexo L de K, denotado por $L \subset K$, é um subconjunto de K que também é um complexo simplicial.*

3. *O m-esqueleto de K, denotado por $K^m$, é um subcomplexo simplicial de K formado por todos os p-simplexos de K, com $p \leq m$.*

4. *Dizemos que K é finito se contém uma quantidade finita de simplexos.*

Note que se $K$ é finito, então é de dimensão finita.

**Definição 2.4.** *Para um complexo simplicial K, seja $|K| = \{\alpha : K \to I \mid \alpha$ é uma função e $I = [0,1]\}$ tal que*

1. *Para todo $\alpha \in |K|$, o conjunto $\{v \in K : \alpha(v) \neq 0\}$ é um simplexo de K. Em particular temos que $\alpha(v) \neq 0$ para um conjunto finito de vértices.*

2. *Para todo $\alpha \in |K|$, temos que $\sum_{v \in K} \alpha(v) = 1$ .*

O número $\alpha(v)$ é chamada coordenada baricêntrica de $v$.

Na continuação definiremos duas topologias em $|K|$. Defina a métrica $d(\alpha,\beta) = \sqrt{\sum_{v \in K} (\alpha(v) - \beta(v))^2}$. O conjunto $|K|$, com a topologia dada pela métrica $d$, é um espaço topológico, que denotaremos por $|K|_d$. Para $s \in K$, defina $|s| = \{\alpha \in |K| : \alpha(v) \neq 0 \Rightarrow v \in s\}$. Denote por $|s|_d$ ao conjunto $|s|$ como subespaço de $|K|_d$. Definiremos outra topologia sobre $|K|$ como segue. $A \subset |K|$ é fechado (ou aberto) se, e somente se, $A \cap |s|_d$ é fechado (ou aberto) em $|s|_d$, para todo $s \in K$. Se considerará ao conjunto $|K|$ com esta topologia.

Para um $m$-simplexo $s$, temos que.

1. $|s|$ é homeomorfo a $\mathbb{D}^m = \left\{ (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \leq 1 \right\}$.

2. A fronteira de $|s|$, denotada por $|\partial s|$, é homeomorfa a $\mathbb{S}^{m-1} = \left\{ (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^{m} x_i^2 = 1 \right\}$.

**Definição 2.5.** *Uma triangularização $(K, f)$ de um espaço topológico $X$ consiste de um complexo simplicial $K$ e um homeomorfismo $f : |K| \to X$. Um espaço topológico $X$ é chamado poliedro se tem uma triangularização.*

Para um poliedro $X$ com triangularização $(K, f)$, dizemos que $\sigma \subset X$ é um $m$-simplexo se existe um $m$-simplexo $s \in K$ tal que $f(|s|) = \sigma$. A fronteira de $\sigma$ é $\partial\sigma = f(|\partial s|)$. Assim temos que $\sigma$ é homeomorfa a $\mathbb{D}^m$ e que $\partial\sigma$ é homeomorfa a $\mathbb{S}^{m-1}$. Dizemos que $X^m$ é um $m$-esqueleto de $X$ se existe um $m$-esqueleto $K^m$ em $K$ tal que $f(|K^m|) = X^m$.

**Teorema 2.6.** *Para todo complexo simplicial $K$, temos que:*

1. *$|K|$ é um espaço normal e Hausdorff.*

2. *$K$ é finito se, e somente se, $|K|$ é compacto.*

Pelo Teorema 2.6, todo poliedro é um espaço normal e Hausdorff e todo poliedro finito é compacto.

Para um vértice $v \in K$, onde $K$ é um complexo simplicial, sua estrela se define por $st(v) = \{\alpha \in |K| : \alpha(v) \neq 0\}$. A estrela de um vértice em $K$ é um conjunto aberto de $|K|$.

**Definição 2.7.** *Para um poliedro $X$ e uma cobertura por abertos $\{U\}$ de $X$, dizemos que uma triangularização $(K, f)$ de $X$ é mais fina que $\{U\}$ se, para cada vértice $v \in K$ existe $U \in \mathscr{U}$ tal que $f(st(v)) \subset U$.*

**Teorema 2.8.** *Seja $\{U\}$ uma cobertura por abertos de um poliedro compacto $X$. Então $X$ tem uma triangularização mais fina que $\{U\}$.*

O teorema anterior é válido ainda se $X$ não é compacto.

**Observação 2.9.** O Teorema 2.8 diz que se $X$ é um poliedro compacto e se $\{U\}$ é uma cobertura, por abertos, de $X$, então $X$ pode-se decompor de tal forma que cada simplexo esteja contido em um aberto de $\{U\}$.

## 2.2 Fibrados Induzidos por Aplicações Homotópicas

Iniciamos esta seção com um resultado que estabelece condições para estender um morfismo de fibrados por meio de uma homotopia. Continuamos com resultados que são consequência deste primeiro. Um destes resultados estabelece relações entre aplicações homotópicas e Pullbacks de um fibrado.

**Teorema 2.10** (Primeiro Teorema de Recobrimento Homotópico)**.** *Sejam $\mathscr{F} = \{F, G; X, B; \pi, \phi_U\}$ e $\tilde{\mathscr{F}} = \{F, G; \tilde{X}, \tilde{B}; \tilde{\pi}, \tilde{\phi}_{\tilde{U}}\}$ dois fibrados. Suponha $B$ um espaço normal, Lindelöf e localmente compacto. Se $(h_0, \bar{h}_0) : \mathscr{F} \to \tilde{\mathscr{F}}$ é um morfismo de fibrados e $\bar{h} : B \times I \to \tilde{B}$ é uma homotopia de $\bar{h}_0$, então existe uma homotopia $h : X \times I \to \tilde{X}$ de $h_0$ tal que $(h, \bar{h}) : \mathscr{F} \times I \to \tilde{\mathscr{F}}$ é um morfismo de fibrados.*

*Demonstração.* Vamos dividir a prova em dois casos.

Caso $B$ compacto. Para $\{\tilde{U}\}$ uma cobertura de $\tilde{B}$, temos que $\{\bar{h}^{-1}(\tilde{U})\}$ é uma cobertura por abertos de $B \times I$, que tem a forma $\{U_i \times I_k\}$, onde $\{U_i\}$ é uma cobertura por abertos de $B$ e $\{I_k\}_{1 \leq k \leq r}$ é uma cobertura, finita, por abertos de $I$ tais que $I_k$ unicamente intersecta a $I_{k-1}$ e a $I_{k+1}$, para $k = 2, \ldots, r-1$. Escolha números $0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_r = 1$ tais que $t_k \in I_k \cap I_{k+1}$, para $k = 1 \ldots, r-1$. Note que $[t_k, t_{k+1}] \subset I_{k+1}$, para $k = 0, \ldots, r-1$.

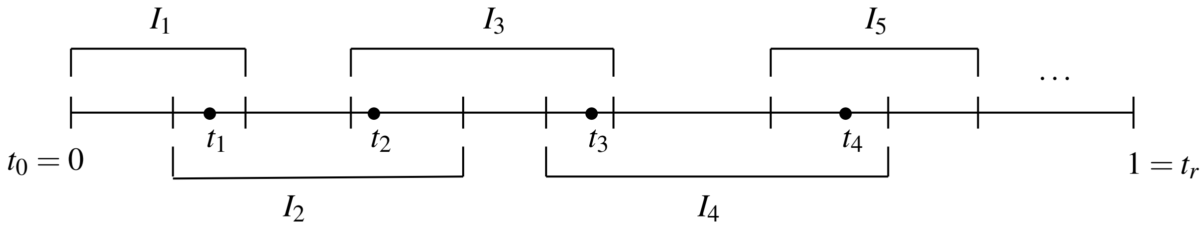


Figura 2.1: Representação da construção dos intervalos $I_k$.

Para cada $b \in B$, existe um par de abertos $(V, W)$ em $B$ tais que $b \in V$, $\bar{V} \subset W$ e $\bar{W} \subset U_i$, para algum $U_i$. Como $B$ é compacto, podemos tomar um número finito destes pares de abertos, digamos $\{(V_j, W_j)\}_{j=1,\ldots,s}$, que cobrem $B$. Pelo Lema de Urysohn, para cada $j \in \{1, \ldots, s\}$, existe uma aplicação $u_j : B \to [t_k, t_{k+1}]$ tais que $u_j(\bar{V}_j) = t_{k+1}$ e $u_j(B - W_j) = t_k$.

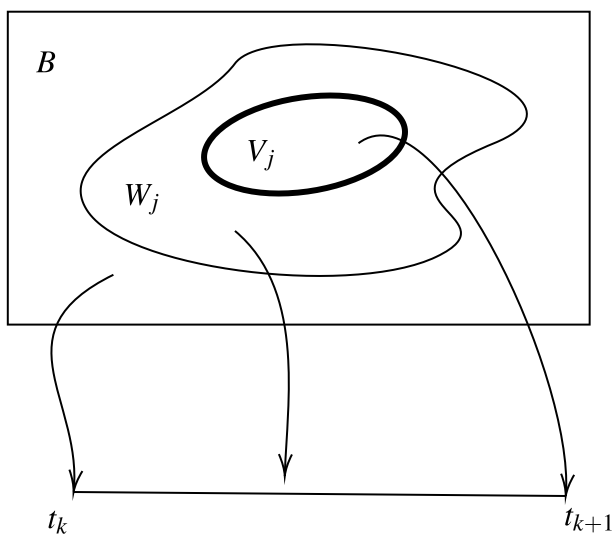


Figura 2.2: Representação das funções $u_j$.

Defina $\tau_0 : B \to [t_k, t_{k+1}]$ por $\tau_0(b) = t_k$, $\tau_j : B \to [t_k, t_{k+1}]$ por $\tau_j(b) = \max\{u_1(b), \ldots, u_j(b)\}$, para $j = 1, \ldots, s$. Então $t_k = \tau_0(b) \leq \tau_1(b) \leq \cdots \leq \tau_s(b) = t_{k+1}$. Note que a partição do intervalo $[t_k, t_{k+1}]$, pelas funções $\tau_j$, dependem do mesmo intervalo $[t_k, t_{k+1}]$ e de $b$.

Defina $B_j = \{(b,t) \in B \times [t_k, t_{k+1}] : t_k \leq t \leq \tau_j(b)\}$. Temos que $B \times \{t_k\} = B_0 \subset B_1 \subset \cdots \subset B_s = B \times [t_k, t_{k+1}]$ e que $B_j - B_{j-1} = \{(b,t) \in B \times [t_k, t_{k+1}] : \tau_{j-1}(b) < t \leq \tau_j(b)\}$.

Seja $\mathscr{F}_j$ a restrição de $\mathscr{F} \times I$ a $B_j$. Por abuso de notação, denotamos $\mathscr{F} \times \{t_k\} = \mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}_1 \subset \cdots \subset \mathscr{F}_s = \mathscr{F} \times [t_k, t_{k+1}]$. Temos que $B_0 \cap (B_j - B_{j-1}) = \emptyset$, para $1 \leq j \leq s$, então para cada $(b,t) \in$

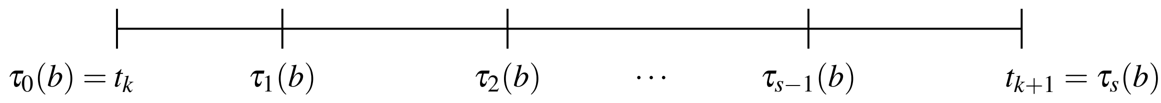


Figura 2.3: Representação da divisão do intervalo $[t_k, t_{k+1}]$ pelas aplicações $\tau_j$.

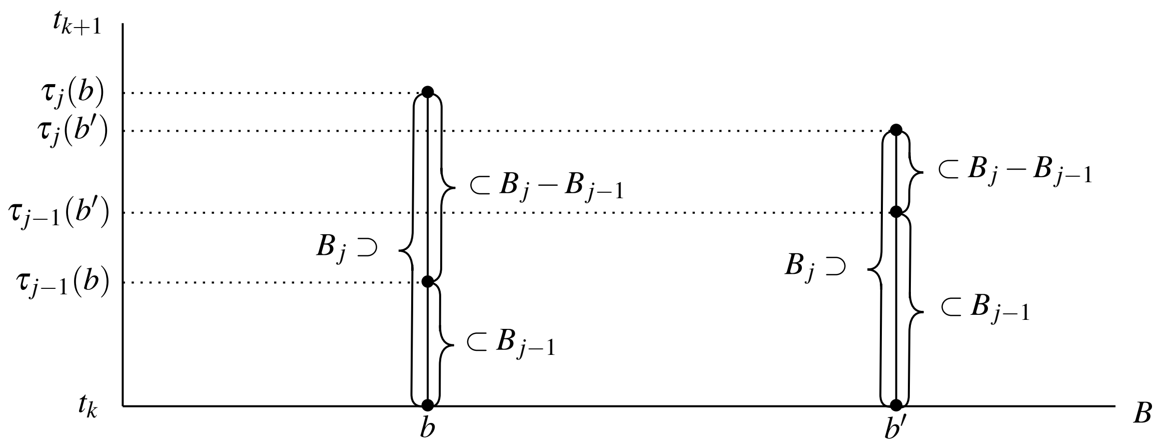


Figura 2.4: Representação dos conjuntos $B_j$ e $B_j - B_{j-1}$.

$B_j - B_{j-1}$ temos que $u_j(b) \neq t_k$, então $b \notin B - W_j$, logo $b \in W_j$. Assim $B_j - B_{j-1} \subset W_j \times [t_k, t_{k+1}] \subset \bar{W}_j \times [t_k, t_{k+1}] \subset U_i \times I_{k+1}$, que é aplicado por $\bar{h}$ em alguma vizinhança coordenada $\tilde{U}$ de $\tilde{\mathscr{F}}$. Note que $\tilde{U}$ depende de $i$ e de $k+1$.

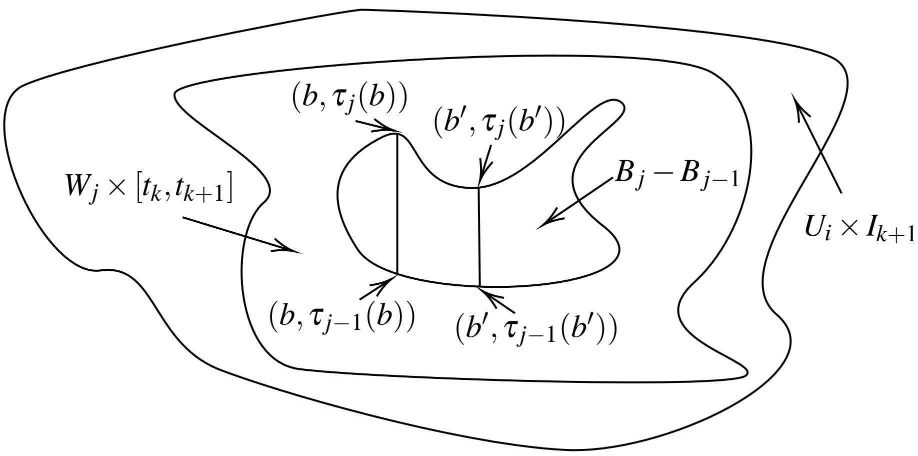


Figura 2.5: Relação entre os conjuntos $B_j - B_{j-1}$, $W_j \times [t_k, t_{k+1}]$, $\bar{W}_j \times [t_k, t_{k+1}]$ e $U_i \times I_{k+1}$.

Defina $h : X \times I \to \tilde{X}$ por $h(x, 0) = h_0(x)$ e $h(x, t) = \tilde{\phi}_{\tilde{U}}(\bar{h}(b, t), \tilde{\pi}_{\tilde{U}} \circ h(x, \tau_{j-1}(b)))$, onde $b = \pi(x) \in W_j$, $W_j \times [t_k, t_{k+1}] \subset U_i \times I_{k+1}$, $\bar{h}(U_i \times I_{k+1}) \subset \tilde{U}$, para $j = 1, \ldots, s$ e $\tilde{\pi}_{\tilde{U}}$ é dada pela Observação 1.7. Para $\bar{h}(b, t) \in \tilde{U} \cap \tilde{V}$ e pelas Observações 1.6 e 1.7, temos que:

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}_{\tilde{U}}(\bar{h}(b,t), \tilde{\pi}_{\tilde{U}} \circ h(x, \tau_{j-1}(b))) &= \tilde{\phi}_{\tilde{V}}(\bar{h}(b,t), \tilde{\alpha}_{\tilde{V},\tilde{U}}(\bar{h}(b,t)) \tilde{\pi}_{\tilde{U}} \circ h(x, \tau_{j-1}(b))) \\
&= \tilde{\phi}_{\tilde{V}}(\bar{h}(b,t), \tilde{\pi}_{\tilde{V}} \circ h(x, \tau_{j-1}(b))),
\end{aligned}$$

onde $\{\tilde{\alpha}_{\tilde{U},\tilde{V}}\}$ são funções de transição de $\tilde{\mathscr{F}}$. Então $h$ não depende das vizinhanças coordenadas de

$\tilde{\mathscr{F}}$ e portanto $h$ está bem definida e é contínua. Vamos ver o comportamento da aplicação $h$. Seja $x \in X$, com $b = \pi(x)$. No intervalo $[0, t_1]$, tem-se que $\bar{h}(U_{i_1} \times I_1) \subset \tilde{U}$. Para $t = 0$ temos $h(x, \tau_0(b)) = h(x, 0) = h_0(x)$. Para $0 < t \leq \tau_1(b)$ temos que:

$$\begin{aligned} h(x,t) =& \tilde{\phi}_{\tilde{U}}(\bar{h}(b,t), \tilde{\pi}_{\tilde{U}} \circ h(x, \tau_0(b))) \\ =& \tilde{\phi}_{\tilde{U}}(\bar{h}(b,t), \tilde{\pi}_{\tilde{U}} \circ h_0(x)). \end{aligned}$$

Para $\tau_1(b) < t \leq \tau_2(b)$ temos que:

$$\begin{aligned} h(x,t) =& \tilde{\phi}_{\tilde{U}}(\bar{h}(b,t), \tilde{\pi}_{\tilde{U}} \circ h(x, \tau_1(b))) \\ =& \tilde{\phi}_{\tilde{U}}(\bar{h}(b,t), \tilde{\pi}_{\tilde{U}} \circ h_0(x)). \end{aligned}$$

Continuando vemos que, para $(x,t) \in X \times [0, t_1]$, $h$ é dada por $h(x,t) = \tilde{\phi}_{\tilde{U}}(\bar{h}(b,t), \tilde{\pi}_{\tilde{U}} \circ h_0(x))$, para $t \neq 0$, e $h(x, 0) = h_0(x)$. Também temos que $h$ é contínua em $X \times [0, t_1]$, pois $\tilde{\phi}_{\tilde{U}}, \bar{h}, \tilde{\pi}_{\tilde{U}}$ são contínuas. No intervalo $[t_1, t_2]$, tem-se que $\bar{h}(U_{i_2} \times I_2) \subset \tilde{V}$. Para $t = t_1$ temos que $\tau_0(b) = t_1 \in [0, t_1]$, então $h(x, t_1) = \tilde{\phi}_{\tilde{U}}(\bar{h}(b, t_1), \tilde{\pi}_{\tilde{U}} \circ h_0(x))$, com $\bar{h}(b, t_1) \in \tilde{U} \cap \tilde{V}$. Para $t_1 < t \leq \tau_1(b)$ temos que:

$$\begin{aligned} h(x,t) =& \tilde{\phi}_{\tilde{V}}(\bar{h}(b,t), \tilde{\pi}_{\tilde{V}} \circ h(x, \tau_0(b))) \\ =& \tilde{\phi}_{\tilde{V}}(\bar{h}(b,t), \tilde{\pi}_{\tilde{V}} \circ h(x, t_1)). \end{aligned}$$

Para $\tau_1(b) < t \leq \tau_2(b)$ temos que:

$$\begin{aligned} h(x,t) =& \tilde{\phi}_{\tilde{V}}(\bar{h}(b,t), \tilde{\pi}_{\tilde{V}} \circ h(x, \tau_1(b))) \\ =& \tilde{\phi}_{\tilde{V}}(\bar{h}(b,t), \tilde{\pi}_{\tilde{V}} \circ h(x, t_1)). \end{aligned}$$

Continuando assim vemos que, para $(x,t) \in X \times [t_1, t_2]$, $h$ está dada por $h(x,t) = \tilde{\phi}_{\tilde{V}}(\bar{h}(b,t), \tilde{\pi}_{\tilde{V}} \circ h(x, t_1))$, se $t \neq t_1$ e $h(x, t_1) = \tilde{\phi}_{\tilde{U}}(\bar{h}(b, t_1), \tilde{\pi}_{\tilde{U}} \circ h_0(x))$, se $\bar{h}(b, t_1) \in \tilde{U} \cap \tilde{V}$. Note que $h$ é contínua em $(x, t_1)$. Como os $t_k$ e os $\tau_j$ são uma quantidade finita, continuando com este processo podemos definir $h$ em todo $X \times I$, tendo $h$ contínua. Agora vamos ver que o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{tikzcd} X \times I \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\pi \times id_I"'] & \tilde{X} \arrow[d, "\tilde{\pi}"] \\ B \times I \arrow[r, "\bar{h}"'] & \tilde{B} \end{tikzcd}$$

Para $b = \pi(x)$ e $\bar{h}(b,t) \in \tilde{U}$ tem-se que:

$$\begin{aligned} \tilde{\pi} \circ h(x,t) =& \tilde{\pi} \circ \tilde{\phi}_{\tilde{U}}(\bar{h}(b,t), \tilde{\pi}_{\tilde{U}} \circ h(x, \tau_{j-1}(b))) \\ =& \bar{h}(\pi(x), t) \\ =& \bar{h} \circ (\pi \times id_I)(x,t). \end{aligned}$$

Então $\tilde{\pi}\circ h=\bar{h}\circ(\pi\times id_I)$. Seja $b\in U$ e $\bar{h}(b,t)=\tilde{b}\in\tilde{U}$. No intervalo $[0,t_1]$, para $t=0$, temos que:

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{U},\tilde{b}}\circ h\circ\phi_{U\times I,(b,0)}(y) =&\tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{U},\tilde{b}}\circ h(\phi_U(b,y),0)\\ =&\tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{U},\tilde{b}}\circ h_0(\phi_U(b,y))\\ =&\tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{U},\tilde{b}}\circ h_0\circ\phi_{U,b}(y).\end{aligned}$$

Então $\tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{U},\tilde{b}}\circ h\circ\phi_{U\times I,(b,0)}=\tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{U},\tilde{b}}\circ h_0\circ\phi_{U,b}$, que pertence a $G$, pois $(h_0,\bar{h}_0)$ é um morfismo de fibrados. No intervalo $]0,t_1]$, pelo Exemplo 1.11, temos que:

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{U},\tilde{b}}\circ h\circ\phi_{U\times I,(b,t)}(y) =&\tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{U},\tilde{b}}\circ h(\phi_U(b,y),t)\\ =&\tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{U},\tilde{b}}\circ\tilde{\phi}_{\tilde{U}}(\bar{h}(b,t),\tilde{\pi}_{\tilde{U}}\circ h_0(\phi_U(b,y)))\\ =&\tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{U},\tilde{b}}\circ h_0\circ\phi_{U,b}(y).\end{aligned}$$

Então $\tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{U},\tilde{b}}\circ h\circ\phi_{U\times I,(b,t)}=\tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{U},\tilde{b}}\circ h_0\circ\phi_{U,b}$, que pertence a $G$, pois $(h_0,\bar{h}_0)$ é um morfismo de fibrados. No intervalo $]t_1,t_2]$ temos que:

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{V},\tilde{b}}\circ h\circ\phi_{U\times I,(b,t)}(y) =&\tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{V},\tilde{b}}\circ h(\phi_U(b,y),t)\\ =&\tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{V},\tilde{b}}\circ\tilde{\phi}_{\tilde{V}}(\bar{h}(b,t),\tilde{\pi}_{\tilde{V}}\circ h(\phi_U(b,y),t_1))\\ =&\tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{V},\tilde{b}}\circ h\circ\phi_{U,b}(y).\end{aligned}$$

Então $\tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{V},\tilde{b}}\circ h\circ\phi_{U\times I,(b,t)}=\tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{V},\tilde{b}}\circ h\circ\phi_{U,b}$, que pertence a $G$, pois $(h_0,\bar{h}_0)$ é um morfismo de fibrados. Os intervalos $]t_k,t_{k+1}]$ são uma quantidade finita e de forma similar temos que $\tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{U},\tilde{b}}\circ h\circ\phi_{U\times I,(b,t)}$ pertence a $G$, para todo $(b,t)\in B\times I$, onde $(b,t)\in(U\times I)\cap\bar{h}^{-1}(\tilde{U})$. Então $(h,\bar{h}):\mathscr{F}\times I\to\tilde{\mathscr{F}}$ é um morfismo de fibrados, onde $\bar{h}$ é uma homotopia de $\bar{h}_0$, se $B$ é compacto.

Agora vamos com o caso geral. Como $B$ é um espaço Lindelöf, temos que $B$ é a união de uma sequência de conjuntos abertos $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $\overline{W}_n$ é compacto e $\overline{W}_n\subset W_{n+1}$. Pelo Lema se Urysohn, para cada $n\in\mathbb{N}$ existe uma aplicação $\tau_n:B\to[0,1]$ tal que $\tau_n(\overline{W}_n)=1$ e $\tau_n(B-W_{n+1})=0$, para $n\neq 0$. Seja $\tau_0:B\to[0,1]$ dada por $\tau_0(b)=0$.

Temos que: $1=\tau_n(\overline{W}_n)=\tau_{n+1}(\overline{W}_n)=\tau_{n+1}(\overline{W}_{n+1})=\tau_{n+1}(W_{n+1}-\overline{W}_n)$. Também temos $0=\tau_n(B-W_{n+1})$, $\tau_n(W_{n+1}-\overline{W}_n)<1$ e $0\leq\tau_{n+1}(B-W_{n+1})$. Então para todo $b\in B$, temos que $\tau_n(b)\leq\tau_{n+1}(b)$. Também para todo $b\in B$, existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $\tau_n(b)=1$. Defina $B_n=\{(b,t)\in B\times I:0\leq t\leq\tau_n(b)\}$. Note que $B_0=B\times\{0\}$ é homeomorfo a $B$.

Seja $\mathscr{F}_n$ a restrição de $\mathscr{F}\times I$ a $B_n$. Note que $\mathscr{F}_0=\mathscr{F}\times\{0\}$ é isomorfo a $\mathscr{F}$. Seja $\bar{h}_n=\bar{h}|_{B_n}$, a restrição de $\bar{h}$ a $B_n$. Vamos continuar a prova por indução sobre $n$. Por hipótese, $(h_0,\bar{h}_0):\mathscr{F}_0\to\tilde{\mathscr{F}}$ é um morfismo de fibrados. Suponha que $(h_{n-1},\bar{h}_{n-1}):\mathscr{F}_{n-1}\to\tilde{\mathscr{F}}$ é um morfismo de fibrados, onde $\bar{h}$ é uma homotopia de $\bar{h}_{n-1}$. Então temos o seguinte diagrama comutativo.

$$\begin{tikzcd} X\times[0,\tau_{n-1}(b)] \arrow[r, "h_{n-1}"] \arrow[d, "\pi\times id_I"'] & \tilde{X} \arrow[d, "\tilde{\pi}"] \\ B_{n-1} \arrow[r, "\bar{h}_{n-1}"'] & \tilde{B} \end{tikzcd}$$

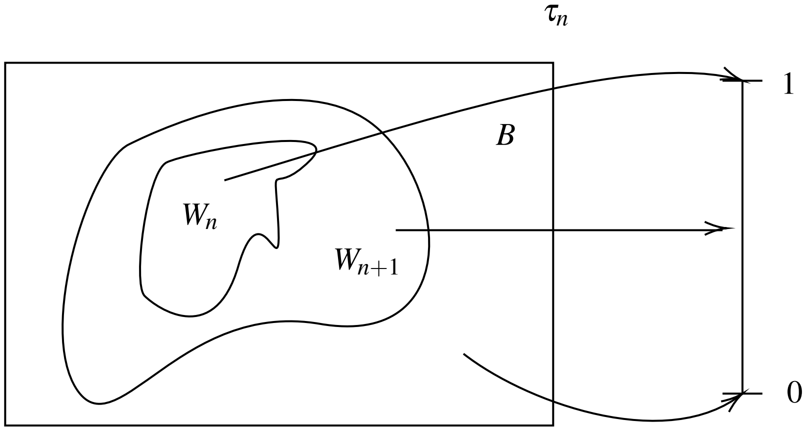


Figura 2.6: Representação da função $\tau_n$.

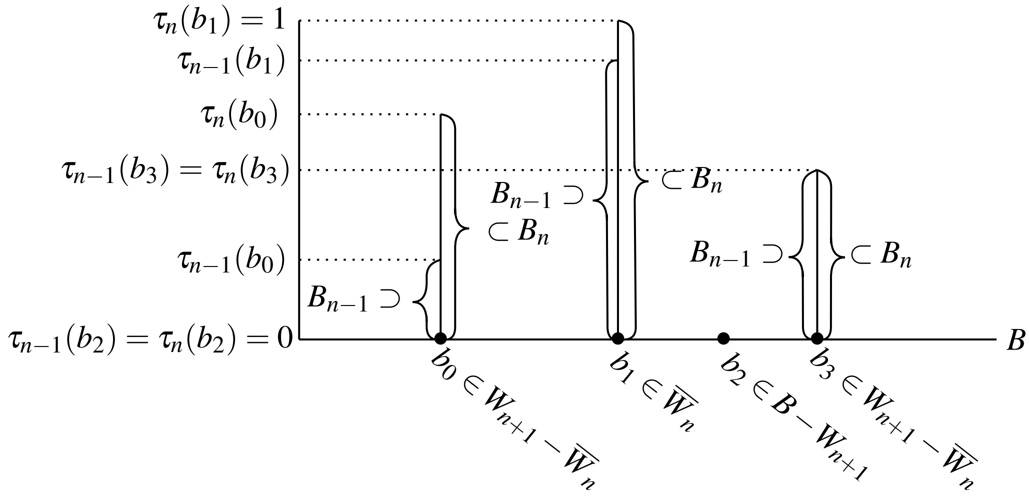


Figura 2.7: Representação dos conjuntos $B_n$.

O conjunto $A = \overline{W}_{n+1} - W_{n-1} = \{b \in B : \tau_{n-1}(b) < \tau_n(b)\}$ é compacto.

Para $b \in B$, seja $\lambda_b : I \to [\tau_{n-1}(b), \tau_n(b)]$ dada por $\lambda_b(s) = s\tau_n(b) + (1-s)\tau_{n-1}(b)$. Temos que $\lambda_b^{-1} : [\tau_{n-1}(b), \tau_n(b)] \to I$, é dada por $\lambda_b^{-1}(t) = \dfrac{t - \tau_{n-1}(b)}{\tau_n(b) - \tau_{n-1}(b)}$. Considere as seguintes aplicações. $h'_0 : \pi^{-1}(A) \to \tilde{X}$ dada por $h'_0(x) = h_{n-1}(x, \tau_{n-1}(\pi(x)))$. $\bar{h}' : A \times I \to \tilde{B}$ dada por $\bar{h}'(b,s) = \bar{h}(b, \lambda_b(s))$. $\bar{h}'_0 : A \to \tilde{B}$ dada por $\bar{h}'_0(b) = \bar{h}_{n-1}(b, \tau_{n-1}(b))$. Assim temos o seguinte diagrama comutativo.

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(A) & \xrightarrow{h'_0} & \tilde{X} \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\pi}} \\ A & \xrightarrow[\bar{h}'_0]{} & \tilde{B} \end{array}$$

Então $(h'_0, \bar{h}'_0) : \mathscr{F}|_A \to \tilde{\mathscr{F}}$ é um morfismo de fibrados, pois $(h_{n-1}, \bar{h}_{n-1})$ é um morfismo de fibrados. Também temos que $\bar{h}'$ é uma homotopia de $\bar{h}'_0$ e que $A$ é compacto. Então, pelo caso anterior, existe uma aplicação $h' : X \times I \to \tilde{X}$ tal que $(h', \bar{h}') : \mathscr{F}|_A \times I \to \tilde{\mathscr{F}}$ é um morfismo de fibrados. Defina

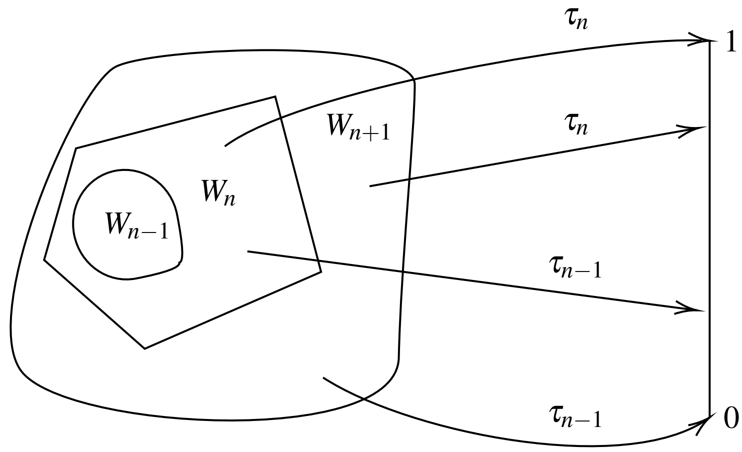


Figura 2.8: Representação das funções $\tau_n$ e $\tau_{n-1}$ sobre o conjunto $W_{n+1}$.

$$h_n(x,t) = \begin{cases} h_{n-1}(x,t) & \text{para } (x,t) \in X \times [0, \tau_{n-1}(b)] \text{ e } b = \pi(x) \\ h'(x, \lambda_b^{-1}(t)) & \text{para } (x,t) \in X \times [\tau_{n-1}(b), \tau_n(b)] \text{ e } b = \pi(x) \end{cases}$$

e defina

$$\bar{h}_n(b,t) = \begin{cases} \bar{h}_{n-1}(b,t) & \text{para } (b,t) \in B_{n-1} \\ \bar{h}'(b, \lambda_b^{-1}(t)) & \text{para } (b,t) \in A \times [\tau_{n-1}(b), \tau_n(b)] \end{cases}$$

Temos que $h_n$ é contínua exceto possivelmente nos pontos $(x,t)$ tais que $t = \tau_{n-1}(b) = \tau_n(b)$, com $b = \pi(x)$. Neste caso $\lambda_b^{-1}$ não está definida. Mas $\bar{h}'(b,s)$ é constante em $s$. A propriedade estacionária implica que $h'(x,s)$ também é constante em $s$. Se $\tilde{N}$ é uma vizinhança de $h'(x,s)$, então $h'^{-1}(\tilde{N})$ contém $\{x\} \times I$. Como $\{x\} \times I$ é compacto, existe uma vizinhança $N$ de $x$ tal que $h'(N \times I) \subset \tilde{N}$. Se $x_1 \in N$ é tal que $\tau_{n-1}(\pi(x_1)) < t < \tau_n(\pi(x_1))$, então $h_n(x,t) \in \tilde{N}$. Assim $h_n$ é contínua. Agora vamos mostrar que o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{array}{ccc} X \times [0, \tau_n(b)] & \xrightarrow{h_n} & \tilde{X} \\ {\scriptstyle \pi \times id_I}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \tilde{\pi}} \\ A \times [0, \tau_n(b)] & \xrightarrow[\bar{h}_n]{} & \tilde{B} \end{array}$$

Para $(x,t) \in X \times [0, \tau_{n-1}(b)]$ e $b = \pi(x)$ temos $h_n(x,t) = h_{n-1}(x,t)$ e assim $\tilde{\pi} \circ h_n(x,t) = \bar{h}_n \circ (\pi \times id_I)(x,t)$. Para $(x,t) \in X \times [\tau_{n-1}(b), \tau_n(b)]$ e $b = \pi(x)$ temos que:

$$\begin{aligned} \tilde{\pi} \circ h_n(x,t) =& \tilde{\pi} \circ h'(x, \lambda_b^{-1}(t)) \\ =& \bar{h}' \circ (\pi \times id_I)(x, \lambda_b^{-1}(t)) \\ =& \bar{h}'(\pi(x), \lambda_b^{-1}(t)) \\ =& \bar{h}_n(\pi(x), t) \\ =& \bar{h}_n \circ (\pi \times id_I)(x,t). \end{aligned}$$

Então $\tilde{\pi} \circ h_n = \bar{h}_n \circ (\pi \times id_I)$. Sejam $b \in B$ e $\tilde{b} = \bar{h}_n(b,t) \in \tilde{U}$. Temos, para $(b,t) \in A \times [0, \tau_{n-1}]$, que $h_n(b,t) = h_{n-1}(b,t)$ e então $\tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{U},\tilde{b}} \circ h_n \circ \phi_{U \times I,(b,t)}$ pertence a $G$. Para $(b,t) \in A \times [\tau_{n-1}, \tau_n(b)]$ temos:

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{U},\tilde{b}} \circ h_n \circ \phi_{U \times I,(b,t)}(y) &= \tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{U},\tilde{b}} \circ h_n(\phi_U(b,y),t)\\ &= \tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{U},\tilde{b}} \circ h'(\phi_U(b,y), \lambda_b^{-1}(t))\\ &= \tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{U},\tilde{b}} \circ h' \circ \phi_{U \times I,(b,\lambda_b^{-1}(t))}(y).\end{aligned}$$

Então $\tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{U},\tilde{b}} \circ h_n \circ \phi_{U \times I,(b,t)} = \tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{U},\tilde{b}} \circ h' \circ \phi_{U \times I,(b,\lambda_b^{-1}(t))}$, que pertence a $G$. Portanto $(h_n, \bar{h}_n) : \mathscr{F}_n \times I \to \tilde{\mathscr{F}}$ é um morfismo de fibrados e isto acaba com a indução.

Então $h : X \times I \to \tilde{X}$ dada por $h(x,t) = h_n(x,t)$, para $(x,t) \in X \times [0, \tau_n(b)]$, com $b = \pi(x)$ é contínua e como $B_{n-1} \subset B_n$, para $n \in \mathbb{N}$, temos que $(h, \bar{h}) : \mathscr{F} \times I \to \tilde{\mathscr{F}}$ é um morfismo de fibrados, onde $h$ é uma homotopia de $h_0$. □

**Teorema 2.11.** *Se $A$ é um espaço Lindelöf, então todo fibrado $\mathscr{F}$ sobre $A \times I$ é equivalente a um fibrado da forma $\tilde{\mathscr{F}} \times I$, onde $\tilde{\mathscr{F}}$ é um fibrado sobre $A$.*

*Demonstração.* Considere a aplicação $\bar{h}_0 : A \to A \times I$, dada por $\bar{h}_0(a) = (a, 0)$ e seja $\tilde{\mathscr{F}} = \bar{h}_0^{\star}(\mathscr{F})$. Sejam $\{\phi_U\}$ e $X$ as funções coordenadas e o espaço total de $\mathscr{F}$, respectivamente. Considere a aplicação $h_0 : X_{\bar{h}_0} \to X$ dada por $h_0(a,x) = \phi_U(\bar{h}_0(a), \pi_{U_{\bar{h}_0}}(a,x))$, para $\bar{h}_0(a) \in U$. Pelo Exemplo 1.18, temos que $(h_0, \bar{h}_0) : \bar{h}_0^{\star}(\mathscr{F}) \to \mathscr{F}$ é um morfismo de fibrados. Note que a aplicação identidade de $A \times I$, $id_{A \times I}$, é uma homotopia de $\bar{h}_0$. Pelo Teorema 2.10, existe uma homotopia, $h$, de $h_0$ tal que $(h, id_{A \times I}) : \bar{h}_0^{\star}(\mathscr{F}) \times I \to \mathscr{F}$ é um morfismo de fibrados. Como $id_{A \times I}$ é um homeomorfismo, pelo Teorema 1.22, temos que $h$ é um homeomorfismo. Então $\bar{h}_0^{\star}(\mathscr{F}) \times I$ e $\mathscr{F}$ são equivalentes. □

**Teorema 2.12.** *Sejam $\mathscr{F}$ um fibrado sobre $B$ e $A$ um espaço Lindelöf. Se $\bar{h}_0, \bar{h}_1 : A \to B$ são aplicações homotópicas, então $\bar{h}_0^{\star}(\mathscr{F})$ e $\bar{h}_1^{\star}(\mathscr{F})$ são equivalentes.*

*Demonstração.* Seja $\bar{h} : A \times I \to B$ uma homotopia entre $\bar{h}_0$ e $\bar{h}_1$. Considere a aplicação $\bar{\mu}_t : A \to A \times I$ dada por $\bar{\mu}_t(a) = (a,t)$. Temos que $\bar{h}_0 = \bar{h} \circ \bar{\mu}_0$ e $\bar{h}_1 = \bar{h} \circ \bar{\mu}_1$. Pelo Teorema 2.11, $\bar{h}^{\star}(\mathscr{F})$ é equivalente a um fibrado da forma $\tilde{\mathscr{F}} \times I$, onde $\tilde{\mathscr{F}}$ é um fibrado sobre $A$. Para $t = 0, 1$, temos que $\bar{h}_t^{\star}(\mathscr{F})$ é equivalente a $\bar{\mu}_t^{\star}(\bar{h}^{\star}(\mathscr{F}))$ que é equivalente a $\bar{\mu}_t^{\star}(\tilde{\mathscr{F}} \times I)$. Pelo Exemplo 1.16, $(\mu_t, \bar{\mu}_t) : \tilde{\mathscr{F}} \to \tilde{\mathscr{F}} \times I$ é um morfismo de fibrados, onde $t \in I$ e $\mu_t : \tilde{X} \to \tilde{X} \times I$ é dada por $\mu_t(\tilde{x}) = (\tilde{x}, t)$. Pelo Teorema 1.23, $\tilde{\mathscr{F}}$ é equivalente a $\bar{\mu}_t^{\star}(\tilde{\mathscr{F}} \times I)$, para todo $t \in I$. Então $\bar{h}_0^{\star}(\mathscr{F})$ é equivalente a $\bar{\mu}_0^{\star}(\tilde{\mathscr{F}} \times I)$, que é equivalente a $\tilde{\mathscr{F}}$, que é equivalente a $\bar{\mu}_1^{\star}(\tilde{\mathscr{F}} \times I)$, que é equivalente a $\bar{h}_1^{\star}(\mathscr{F})$. Portanto $\bar{h}_0^{\star}(\mathscr{F})$ é equivalente a $\bar{h}_1^{\star}(\mathscr{F})$. □

**Teorema 2.13** (Segundo Teorema de Recobrimento Homotópico)**.** *Sejam $\mathscr{F} = \{F, G; X, B; \pi, \phi_U\}$ um fibrado e $A$ um espaço Lindelöf. Se $f_0 : A \to X$ é uma aplicação e $\bar{f} : A \times I \to B$ é uma homotopia de $\pi \circ f_0 = \bar{f}_0$, então existe uma homotopia, $f : A \times I \to X$, de $f_0$ tal que o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{tikzcd} A \times I \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\bar{f}"'] & X \arrow[d, "\pi"] \\ & B \end{tikzcd}$$

*Demonstração.* Considere a aplicação $h_0 : X_{\bar{f}_0} \to X$ dada por $h_0(a,x) = \phi_U(\bar{f}_0(a), \pi_U(x))$, com $\bar{f}_0(a) \in U$. Pelo Exemplo 1.18, $(h_0, \bar{f}_0) : \bar{f}_0^\star(\mathscr{F}) \to \mathscr{F}$ é um morfismo de fibrados. Pelo Teorema 2.10, existe uma homotopia, $h : X_{\bar{f}_0} \times I \to X$, de $h_0$ tal que $(h, \bar{f}) : \bar{f}_0^\star(\mathscr{F}) \to \mathscr{F}$ é um morfismo de fibrados. Defina $\lambda : A \to X_{\bar{f}_0}$ por $\lambda(a) = (a, f_0(a))$. Temos que $\lambda$ é contínua e que $\pi_1 \circ \lambda(a) = \pi_1(a, f_0(a)) = a$. Então $\lambda$ é uma seção global para $\bar{f}_0^\star(\mathscr{F})$. Temos que $h_0 \circ \lambda = f_0$. De fato, $h_0 \circ \lambda(a) = h_0(a, f_0(a)) = \phi_U(\bar{f}_0(a), \pi_U(f_0(a))) = \phi_{U,b}(\pi_U \circ f_0(a)) = \phi_{U,b} \circ \phi_{U,b}^{-1}(f_0(a)) = f_0(a)$, onde $b = \bar{f}_0(a) = \pi \circ f_0(a) \in U$, onde $\pi_U$ é dada pela Observação 1.7. Defina a aplicação $f : A \times I \to X$ por $f(a,t) = h(\lambda(a), t)$. A aplicação $f$ é uma homotopia $f_0$. De fato, $f(a,0) = h(\lambda(a), 0) = h_0(\lambda(a)) = h_0 \circ \lambda(a) = f_0(a)$, então $f(a,0) = f_0(a)$. Agora vamos mostrar que $\pi \circ f = \bar{f}$. Temos $\pi \circ f(a,t) = \pi \circ h(\lambda(a), t) = \bar{f} \circ (\pi_1 \times id_I)(\lambda(a), t) = \bar{f}(\pi_1 \circ \lambda(a), t) = \bar{f}(a,t)$, então $\pi \circ f(a,t) = \bar{f}(a,t)$. $\square$

## 2.3 Fibrados Equivalentes

O primeiro resultado desta seção estabelece uma condição para a existência de um fibrado universal. Logo veremos resultados entre fibrados onde seu espaço base é um poliedro de dimensão finita e fibrados onde seu espaço total tem grupo de homotopia trivial. Estes resultados estabelecem relações entre fibrados equivalentes, pullback de fibrados, aplicações homotópicas e extensões de morfismos de fibrados.

**Teorema 2.14.** *Seja $\mathscr{F}_0$ um fibrado principal universal relativo a $G$, $G$, $B$. Se $G$ atua, pela esquerda, sobre um espaço topológico $F$, então $\tau_F^{-1}\mathscr{F}_0$ é um fibrado universal relativo a $F$, $G$, $B$.*

*Demonstração.* Seja $A$ a base de $\mathscr{F}_0$. Vamos mostrar que $\tau_F^{-1}\mathscr{F}_0$ satisfaz a condição 1 da Definição 1.45. Seja $\mathscr{F}$ um fibrado sobre $B$, com fibra $F$ e grupo estrutural $G$. Como $\mathscr{F}_0$ é um fibrado universal, pela Definição 1.45, existe uma aplicação $f : B \to A$ tal que $\tau\mathscr{F}$ é equivalente a $f^\star(\mathscr{F}_0)$. Então $\tau_F^{-1}\tau\mathscr{F}$ é equivalente a $\tau_F^{-1}f^\star(\mathscr{F}_0)$. Pelo Teorema 1.32, $\tau_F^{-1}f^\star(\mathscr{F}_0)$ é equivalente a $f^\star(\tau_F^{-1}\mathscr{F}_0)$. Então $\tau_F^{-1}\tau\mathscr{F}$ é equivalente a $f^\star(\tau_F^{-1}\mathscr{F}_0)$. Do Teorema 1.30, temos que $\mathscr{F}$ é equivalente a $f^\star(\tau_F^{-1}\mathscr{F}_0)$.

Agora vamos mostrar que $\tau_F^{-1}\mathscr{F}_0$ satisfaz a condição 2 da Definição 1.45. Sejam $h_0, h_1 : B \to A$ duas aplicações. Pelo Teorema 1.32, $h_0^\star(\tau_F^{-1}\mathscr{F}_0)$ e $h_1^\star(\tau_F^{-1}\mathscr{F}_0)$ são equivalentes se, e somente se, $\tau_F^{-1}h_0^\star(\mathscr{F}_0)$ e $\tau_F^{-1}h_1^\star(\mathscr{F}_0)$ são equivalentes. Pela Definição 1.29, $\tau_F^{-1}h_0^\star(\mathscr{F}_0)$ e $\tau_F^{-1}h_1^\star(\mathscr{F}_0)$ são equivalentes se, e somente se, $\tau\tau_F^{-1}h_0^\star(\mathscr{F}_0)$ e $\tau\tau_F^{-1}h_1^\star(\mathscr{F}_0)$ são equivalentes. Pelo Teorema 1.30, $\tau\tau_F^{-1}h_0^\star(\mathscr{F}_0)$ e $\tau\tau_F^{-1}h_1^\star(\mathscr{F}_0)$ são equivalentes se, e somente se, $h_0^\star(\mathscr{F}_0)$ e $h_1^\star(\mathscr{F}_0)$ são equivalentes. Como $\mathscr{F}_0$ é um fibrado universal, temos que $h_0^\star(\mathscr{F}_0)$ e $h_1^\star(\mathscr{F}_0)$ são equivalentes se, e somente se, $h_0$ e $h_1$ são homotópicas. Então $h_0^\star(\tau_F^{-1}\mathscr{F}_0)$ e $h_1^\star(\tau_F^{-1}\mathscr{F}_0)$ são equivalentes se, e somente se, $h_0$ e $h_1$ são homotópicas. Portanto $\tau_F^{-1}\mathscr{F}_0$ é um fibrado universal relativo a $F$, $G$, $B$. $\square$

**Teorema 2.15.** *Sejam $\mathscr{F} = \{G, G; X, B; \pi, \phi_U\}$ um fibrado principal, onde $B$ é um poliedro de dimensão $n$, e $\tilde{\mathscr{F}} = \{G, G; \tilde{X}, \tilde{B}; \tilde{\pi}, \tilde{\phi}_{\tilde{U}}\}$ um fibrado principal tal que $\pi_i(\tilde{X}) = 0$, para $0 \leq i \leq n-1$. Seja $B_0$ um subpoliedro de $B$ e $\mathscr{F}_0$ a restrição de $\mathscr{F}$ a $B_0$. Então todo morfismo $(f_0, \bar{f}_0) : \mathscr{F}_0 \to \tilde{\mathscr{F}}$,* *onde $\bar{f}_0$ é a aplicação induzida por $f_0$, pode-se estender a um morfismo $(f,\bar{f}) : \mathscr{F} \to \tilde{\mathscr{F}}$, onde $\bar{f}$ é a aplicação induzida por $f$.*

*Demonstração.* Pelo Teorema 2.6 e pela Observação 2.9, podemos supor que todo simplexo de $B$ está contido em uma vizinhança coordenada de $\mathscr{F}$. Seja $B^m$ o $m$-esqueleto de $B$, para $m \leq n$. Vamos proceder por indução sobre $m$, para definir um morfismo para cada $m$-simplexo de $B$ não contido em $B_0$. Para um 0-simplexo $\sigma^0$, não contido em $B_0$, escolha uma aplicação de $\pi^{-1}(\sigma_0)$ em $\tilde{X}$ que satisfaça as condições desejadas. Suponha que $f$ está definida sobre $\pi^{-1}(B_0 \cup B^{m-1})$. Seja $\sigma^m$ um $m$-simplexo não contido em $B_0$. Considere uma vizinhança coordenada $U$ contendo $\sigma^m$. Temos que $f \circ \phi_U(\cdot, e) : \partial\sigma^m \to \tilde{X}$, onde $e$ é o elemento neutro de $G$, é uma aplicação. Como $\pi_i(\tilde{X}) = 0$, para $0 \leq i \leq n-1$, temos que $f \circ \phi_U(\cdot, e)$ pode-se estender a uma aplicação $\hat{f} : \sigma^m \to \tilde{X}$, ver [3, Cap. 7]. Para $b \in \sigma^m \subset U$, defina $h : \pi^{-1}(\sigma^m) \to \tilde{X}$ por $h(\phi_U(b,g)) = \hat{f}(b) \cdot g$. Pela Observação 1.33, temos que $\hat{f}(b) \cdot g = \tilde{\phi}_{\tilde{U},\tilde{b}}(\tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{U},\tilde{b}}(\hat{f}(b))g)$, com $\tilde{b} = \tilde{\pi}(\hat{f}(b)) \in \tilde{U}$. Vamos mostrar que $h(\pi^{-1}(b)) = \tilde{\pi}^{-1}(\tilde{b})$, onde $\tilde{b} = \tilde{\pi}(\hat{f}(b))$. Seja $\tilde{x} \in h(\pi^{-1}(b))$. Existe $g \in G$ tal que $h(\phi_U(b,g)) = \tilde{x}$, então $\hat{f}(b) \cdot g = \tilde{x}$ e assim temos que:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\pi}(\tilde{x}) &= \tilde{\pi}(\hat{f}(b) \cdot g) \\
&= \tilde{\pi} \circ \tilde{\phi}_{\tilde{U},\tilde{b}}(\tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{U},\tilde{b}}(\hat{f}(b))g) \\
&= \tilde{\pi} \circ \tilde{\phi}_{\tilde{U}}(\tilde{b}, \tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{U},\tilde{b}}(\hat{f}(b))g) \\
&= \tilde{b}
\end{aligned}
$$

Então $\tilde{x} \in \tilde{\pi}^{-1}(\tilde{b})$. Seja $\tilde{y} \in \tilde{\pi}^{-1}(\tilde{b})$. Então existe $\tilde{g} \in G$ tal que $\tilde{\phi}_{\tilde{U},\tilde{b}}(\tilde{g}) = \tilde{y}$. Considere $g = \left(\tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{U},\tilde{b}}(\hat{f}(b))\right)^{-1} \tilde{g}$. Temos que:

$$
\begin{aligned}
h(\phi_U(b,g)) &= \hat{f}(b) \cdot g \\
&= \tilde{\phi}_{\tilde{U},\tilde{b}}\left(\tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{U},\tilde{b}}(\hat{f}(b))g\right) \\
&= \tilde{\phi}_{\tilde{U},\tilde{b}}\left(\tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{U},\tilde{b}}(\hat{f}(b))\left(\tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{U},\tilde{b}}(\hat{f}(b))\right)^{-1}\tilde{g}\right) \\
&= \tilde{\phi}_{\tilde{U},\tilde{b}}(\tilde{g}) \\
&= \tilde{y}.
\end{aligned}
$$

Então $\tilde{y} \in h(\pi^{-1}(b))$, pois $\phi_U(b,g) \in \pi^{-1}(b)$. Portanto $h(\pi^{-1}(b)) = \tilde{\pi}^{-1}(\tilde{b})$, onde $\tilde{b} = \tilde{\pi}(\hat{f}(b))$. Então, pela Observação 1.15, podemos definir $\bar{h} : \sigma^m \to \tilde{B}$, a aplicação induzida por $h$, e assim temos que o seguinte diagrama comuta

$$
\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(\sigma^m) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\pi"'] & \tilde{X} \arrow[d, "\tilde{\pi}"] \\
\sigma^m \arrow[r, "\bar{h}"'] & \tilde{B}
\end{tikzcd}
$$

Sejam $b \in U$ e $\tilde{b} = \tilde{\pi}(\hat{f}(b)) \in \tilde{U}$. Temos que:

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{U},\tilde{b}} \circ h \circ \phi_{U,b}(g) =& \tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{U},\tilde{b}} \circ h(\phi_U(b,g)) \\
=& \tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{U},\tilde{b}}(\hat{f}(b) \cdot g) \\
=& \tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{U},\tilde{b}} \circ \tilde{\phi}_{\tilde{U},\tilde{b}}(\tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{U},\tilde{b}}(\hat{f}(b))g) \\
=& \tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{U},\tilde{b}}(\hat{f}(b))g.
\end{aligned}$$

Então $\tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{U},\tilde{b}} \circ h \circ \phi_{U,b} = \tilde{\phi}^{-1}_{\tilde{U},\tilde{b}}(\hat{f}(b))$, que pertence a $G$. Então $(h,\bar{h}) : \mathscr{F}|_{\sigma^m} \to \tilde{\mathscr{F}}$ é um morfismo de fibrados e assim a indução está completa. Então, definindo um morfismo de fibrados para cada $m$-simplexo não contido em $B_0$, podemos estender $f_0$ a $\pi^{-1}(B)$. □

**Teorema 2.16.** *Sejam $\mathscr{F} = \{G,G;X,B;\pi,\phi_U\}$ um fibrado principal, onde $B$ é um poliedro de dimensão $n$, e $\tilde{\mathscr{F}} = \{G,G;\tilde{X},\tilde{B};\tilde{\pi},\tilde{\phi}_{\tilde{U}}\}$ um fibrado principal tal que $\pi_i(\tilde{X}) = 0$, para $0 \le i \le n-1$. Então existe uma aplicação $f : B \to \tilde{B}$ tal que $\mathscr{F}$ e $f^\star(\tilde{\mathscr{F}})$ são equivalentes.*

*Demonstração.* Tomando $B_0 = \emptyset$ no Teorema 2.15, temos que existe um morfismo $(h,\bar{h}) : \mathscr{F} \to \tilde{\mathscr{F}}$. Pelo Teorema 1.23, temos que $\mathscr{F}$ e $\bar{h}^\star(\tilde{\mathscr{F}})$ são equivalentes. Tomando $f = \bar{h}$ temos o resultado do teorema. □

**Teorema 2.17.** *Sejam $B$ é um poliedro de dimensão $n$ e $\mathscr{F} = \{G,G;X,A;\pi,\phi_U\}$ um fibrado principal tal que $\pi_i(X) = 0$, para $0 \le i \le n-1$. Se $f,g : B \to A$ são aplicações tais que $f^\star(\mathscr{F})$ e $g^\star(\mathscr{F})$ são equivalentes, então $f$ e $g$ são homotópicas.*

*Demonstração.* Considere as aplicações $h_0 : X_f \to X$, dada por $h_0(b,x) = \phi_U(f(b),\pi_U(x))$, para $f(b) \in U$, e $h_1 : X_g \to X$, dada por $h_1(b,x) = \phi_V(g(b),\pi_V(x))$, para $g(b) \in V$. Pelo Exemplo 1.18, $(h_0,f) : f^\star(\mathscr{F}) \to \mathscr{F}$ e $(h_1,g) : g^\star(\mathscr{F}) \to \mathscr{F}$ são morfismos de fibrados. Como $f^\star(\mathscr{F})$ e $g^\star(\mathscr{F})$ são equivalentes, existe um homeomorfismo $h : X_f \to X_g$ tal que $(h,id_B) : f^\star(\mathscr{F}) \to g^\star(\mathscr{F})$ é um morfismo de fibrados. Pelo Exemplo 1.11, $f^\star(\mathscr{F}) \times I$ é um fibrado. Pelo Exemplo 1.17, $(p,\bar{p}) : f^\star(\mathscr{F}) \times I \to f^\star(\mathscr{F})$, onde $p(b,x,t) = (b,x)$ e $\bar{p}(b,t) = b$, é um morfismo de fibrados. Sejam $\mathscr{F}_0$ e $\mathscr{F}_1$ as restrições de $f^\star(\mathscr{F}) \times I$ a $B \times \{0\}$ e a $B \times \{1\}$, respectivamente. Sejam $p_0$ e $p_1$ as restrições de $p$ a $X_f \times \{0\}$ e a $X_f \times \{1\}$, respectivamente. Defina o morfismo $(h',\bar{h}') : \mathscr{F}_0 \cup \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}$ por $h'|_{\mathscr{F}_0} = h_0 \circ p_0$ e $h'|_{\mathscr{F}_1} = h_1 \circ p_1$, onde $\bar{h}'$ é a plicação induzida por $h'$, dada na Observação 1.15. Então temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
X_f \times \{0\} \cup X_f \times \{1\} \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "\pi_1 \times id_I"'] & X \arrow[d, "\pi"] \\
B \times \{0\} \cup B \times \{1\} \arrow[r, "\bar{h}'"'] & B
\end{tikzcd}$$

Temos que

$$
\begin{aligned}
\bar{h}'(b,0) =& \bar{h}' \circ (\pi_1 \times id_I)(b,x,0)\\
=& \pi \circ h'(b,x,0)\\
=& \pi \circ h_0 \circ p_0(b,x,0)\\
=& \pi \circ h_0(b,x)\\
=& \pi \circ \phi_U(f(b),\pi_U(x))\\
=& f(b).
\end{aligned}
$$

Então $\bar{h}'(b,0) = f(b)$, para todo $b \in B$. Similarmente temos que $\bar{h}'(b,1) = g(b)$, para todo $b \in B$. Como $B \times \{0\} \cup B \times \{1\}$ é um subpoliedro de $B \times I$, pelo Teorema 2.15, $(h', \bar{h}')$ pode-se estender a um morfismo $(l, \bar{l}) : f^\star(\mathscr{F}) \times I \to \mathscr{F}$, onde $\bar{l} : B \times I \to B$ é a aplicação induzida por $l$. Temos que $\bar{l}(b,0) = \bar{h}'(b,0) = f(b)$ e que $\bar{l}(b,1) = \bar{h}'(b,1) = g(b)$. Então $\bar{l}$ é uma homotopia entre $f$ e $g$. $\square$

## 2.4 Existência de Fibrados Universais

O objetivo desta seção é mostrar a existência de um fibrado universal relativo a $F,\ G,\ B$, onde $B$ é um poliedro finito e $G$ é o grupo linear geral.

Denote por $GL(n)$ o grupo de matrizes reais $n \times n$ com determinante distinto de zero e por $GL^+(n)$ o grupo de matrizes reais $n \times n$ com determinante estritamente positivo. Sejam

$H(m,n) = \left\{ \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in GL(m+n) : I_m \text{ é a matriz identidade } m \times m,\ A \in GL(n) \right\}$,

$H^+(m,n) = \left\{ \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in GL(m+n) : I_m \text{ é a matriz identidade } m \times m,\ A \in GL^+(n) \right\}$,

$K(m,n) = \left\{ \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in GL(m+n) : B \in GL(m),\ A \in GL(n) \right\}$.

**Teorema 2.18.** *Os espaços* $\dfrac{GL(m+n)}{H(m,n)}$ *e* $\dfrac{GL^+(m+n)}{H^+(m,n)}$ *são conexo por caminhos,* $\pi_i\left(\dfrac{GL(m+n)}{H(m,n)}\right) = 0$ *e* $\pi_i\left(\dfrac{GL^+(m+n)}{H^+(m,n)}\right) = 0$*, para* $1 \le i \le n-1$.

*Demonstração.* Considere a aplicação $l : \dfrac{GL(m+n)}{H(m,n)} \to \dfrac{GL^+(m+n)}{H^+(m,n)}$ dada por $l([A]) = [S_A A]$, onde $S_A = \begin{pmatrix} I_{m+n-1} & 0 \\ 0 & sgn(\det(A)) \end{pmatrix}$ e $sgn(r) = \begin{cases} 1, & r \ge 0 \\ -1, & r < 0 \end{cases}$. Vamos mostrar que $l$ está bem definida. Primeiro note que $S_A A \in GL^+(m+n)$. Seja $[A] = [B] \in \dfrac{GL(m+n)}{H(m,n)}$. Então $AB^{-1} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, onde $C \in GL(n)$. Além disso, $\det(C) = \det(A)\det(B^{-1}) = \det(A)\dfrac{1}{\det(B)}$. Vamos mostrar que $[S_A A] = [S_B B]$.

Temos que:

$$\begin{aligned} S_A A (S_B B)^{-1} &= S_A A B^{-1} S_B \\ &= \begin{pmatrix} I_{m+n-1} & 0 \\ 0 & sgn(\det(A)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{m+n-1} & 0 \\ 0 & sgn(\det(B)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

onde $D = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & sgn(\det(A)) \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & sgn(\det(B)) \end{pmatrix}$. Mostraremos que $D \in GL^+(n)$. De fato, $\det(D) = sgn(\det(A))\det(C)sgn(\det(B)) = sgn(\det(A))\det(A)\dfrac{1}{\det(B)}sgn(\det(B)) > 0$. Consequentemente, $S_A A (S_B B)^{-1} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$, com $D \in GL^+(n)$. Logo $[S_A A] = [S_B B]$ e assim $l(A) = l(B)$. Portanto $l$ está bem definida. Também temos que $l$ é um homeomorfismo. Vamos mostrar que $\dfrac{GL^+(m+n)}{H^+(m,n)}$ é conexo por caminhos e seu grupo de homotopia $\pi_i$ é trivial, para $1 \leq i \leq n-1$. Temos que $\pi_i\left(\dfrac{GL^+(m+n)}{H^+(m,n)}\right)$ é isomorfo a $\pi_i(GL^+(m+n), H^+(m,n))$. Um elemento em $\pi_i(GL^+(m+n), H^+(m,n))$ está representado por uma aplicação $f : I^i \to GL^+(m+n)$ tal que $f(\partial I^i) \subset H^+(m,n)$. Considere a aplicação $\pi : GL^+(m+n) \to \dfrac{GL^+(m+n)}{H^+(m,n)}$ dada por $\pi(A) = [A]$. Temos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} \partial I^i \arrow[r, "f|_{\partial I^i}"] \arrow[dr, "\pi\circ f|_{\partial I^i}"'] & GL^+(m+n) \arrow[d, "\pi"] \\ & \dfrac{GL^+(m+n)}{H^+(m,n)} \end{tikzcd}$$

Note que $[\pi \circ f|_{\partial I^i}] = [0]$, então $\pi \circ f|_{\partial I^i}$ é homotópica a uma constante, ou seja, existe uma homotopia, $\bar{h} : \partial I^i \times I \to \dfrac{GL^+(m+n)}{H^+(m,n)}$, de $\pi \circ f|_{\partial I^i}$. Pelo Teorema 2.13, existe uma homotopia, $h : \partial I^i \times I \to GL^+(m+n)$, de $f|_{\partial I^i}$ tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} \partial I^i \times I \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "\bar{h}"'] & GL^+(m+n) \arrow[d, "\pi"] \\ & \dfrac{GL^+(m+n)}{H^+(m,n)} \end{tikzcd}$$

Como $\pi \circ f|_{\partial I^i}$ é homotópica a uma constante, temos que $f|_{\partial I^i}$ é homotópica a uma constante que pertence a $H^+(m,n)$. Portanto $f|_{\partial I^i}$ é contrátil. Então existe uma aplicação $\hat{f} : I^i \to H^+(m,n)$ que estende $f|_{\partial I^i}$, então $\hat{f}$ e $f$ são homotópicas em $\partial I^i$, ou seja, $f$ é contrátil em $GL^+(m+n)$. Então $[f] = [0]$. Portanto $\pi_i\left(\dfrac{GL^+(m+n)}{H^+(m,n)}\right) = 0$, para $1 \leq i \leq n-1$. □

**Teorema 2.19.** *Seja $B$ um poliedro de dimensão $n$. Para um fibrado $\mathscr{F}$ sobre $B$, com fibra $F$ e grupo estrutural $G = GL(m)$, existe um fibrado universal relativo a $F$, $G$, $B$.*

*Demonstração.* Considere o fibrado principal $\tilde{\mathscr{F}} = \{G, G; \tilde{X}, \tilde{B}; \tilde{\pi}, \tilde{\phi}_{\tilde{U}}\}$, onde $\tilde{X} = \dfrac{GL(m+n)}{H(m,n)}$ e $\tilde{B} = \dfrac{GL(m+n)}{K(m,n)}$. Vamos mostrar que $\tau_F^{-1}\tilde{\mathscr{F}}$ é um fibrado universal relativo a $F$, $G$, $B$. Seja $\mathscr{F}$ um fibrado principal sobre $B$, com grupo estrutural $G$. Pelo Teorema 2.18, $\pi_i(\tilde{X}) = 0$, para $0 \leq i \leq n-1$. Então, pelo Teorema 2.16, existe uma aplicação $f : B \to \tilde{B}$ tal que $\mathscr{F}$ e $f^{\star}(\tilde{\mathscr{F}})$ são equivalentes. Sejam $h_0, h_1 : B \to \tilde{B}$ duas aplicações. Se $h_0$ e $h_1$ são homotópicas, pelo Teorema 2.12, $h_0^{\star}(\tilde{\mathscr{F}})$ e $h_1^{\star}(\tilde{\mathscr{F}})$ são equivalentes. Se $h_0^{\star}(\tilde{\mathscr{F}})$ e $h_1^{\star}(\tilde{\mathscr{F}})$ são equivalentes, pelo Teorema 2.17, $h_0$ e $h_1$ são homotópicas. Então $\tilde{\mathscr{F}}$ é um fibrado principal universal relativo a $G$, $G$, $B$. Pelo Teorema 2.14, $\tau_F^{-1}\tilde{\mathscr{F}}$ é um fibrado universal relativo a $F$, $G$, $B$. $\square$

# CAPÍTULO 3

---

# Troca do Grupo Estrutural e Produto de Fibrados

---

Neste capítulo vamos ver sob que condições podemos trocar o grupo estrutural de um fibrado. Vamos ter resultados para saber quando pode ser estendido, a um grupo maior, ou reduzido, a um grupo menor, o grupo estrutural de um fibrado. O resultado principal, o Teorema 3.10, estabelece condições de quando podemos estender ou reduzir o grupo estrutural de fibrados principais. Finalizamos o capítulo discutindo sobre o produto de dois fibrados e como decompor um tipo de fibrado em dois fibrados tais que seu produto é equivalente ao fibrado inicial.

## 3.1 Troca do Grupo Estrutural

O objetivo desta seção é mostrar a existência de uma correspondência bijetora entre o conjunto de classes de equivalência de fibrado principais com grupo estrutural $G$ e classes de equivalência de fibrados principais com grupo estrutural $H$, onde $H$ é um subgrupo fechado de $G$.

Denote por $(B,G)$ o conjunto de fibrados principais relativos a $G$, $G$, $B$. Seja $H$ um subgrupo fechado de $G$. Considere a correspondência $\lambda : (B,H) \to (B,G)$ que associa um fibrado $\mathscr{F}$ em $(B,H)$ com um fibrado em $(B,G)$ que é $G$-equivalente a $\mathscr{F}$, ou seja, $\lambda(\mathscr{F})$ é $G$-equivalente a $\mathscr{F}$. Pela Observação 1.37, a correspondência $\lambda$ está bem definida.

**Teorema 3.1.** *Sejam $H$ um subgrupo fechado de $G$ e $\mathscr{F}$ um fibrado com fibra $G/H$ e grupo estrutural $G$. Se $\mathscr{F}$ é $G$-equivalente a um fibrado com grupo estrutural $H$, então $\mathscr{F}$ admite uma seção global.*

*Demonstração.* Suponha que $\mathscr{F}$ é $G$-equivalente ao fibrado $\tilde{\mathscr{F}}$, com grupo estrutural $H$. Sejam $\mathscr{F} = \{G/H, G; X, B; \pi, \phi_U\}$ e $\{\alpha_{U,V}\}$ suas funções de transição. Considere a aplicação $p : G \to G/H$ dada por $p(g) = gH$. Sejam $\{\beta_{U,V}\}$ as funções de transição de $\tilde{\mathscr{F}}$. Como $\mathscr{F}$ é $G$-equivalente a $\tilde{\mathscr{F}}$, pelo Lema 1.26, existem aplicações $\{\lambda_U : U \to G\}$ tais que $\beta_{V,U}(b) = \lambda_V(b)^{-1}\alpha_{V,U}(b)\lambda_U(b)$. Defina

$f : B \to X$ por $f(b) = \phi_U(b, p \circ \lambda_U(b))$, para $b \in U$. Vamos mostrar que $f$ está bem definida. Se $b \in U \cap V$, pela Observação 1.6, temos que

$$\begin{aligned}\phi_U(b, p \circ \lambda_U(b)) =& \phi_V(b, \alpha_{V,U}(b) \cdot p \circ \lambda_U(b))\\ =& \phi_V(b, p(\alpha_{V,U}(b)\lambda_U(b)))\\ =& \phi_V(b, p(\lambda_V(b)\beta_{V,U}(b)))\\ =& \phi_V(b, p \circ \lambda_V(b)),\end{aligned}$$

pois $\beta_{V,U}(b) \in H$. Então $f$ não depende da vizinhança coordenada. É claro que $\pi \circ f = id_B$. Pela Definição 1.39, $f$ é uma seção global para $\mathscr{F}$. □

**Teorema 3.2.** *Sejam $H$ um subgrupo fechado de $G$, que tem uma seção local em $G$, e $\mathscr{F}$ um fibrado com fibra $G/H$ e grupo estrutural $G$. Se $\mathscr{F}$ admite uma seção global, então $\mathscr{F}$ é $G$-equivalente a um fibrado com grupo estrutural $H$.*

*Demonstração.* Sejam $\mathscr{F} = \{G/H, G; X, B; \pi, \phi_U\}$ e $\{\alpha_{U,V}\}$ suas funções de transição. Sejam $f : B \to X$ uma seção global para $\mathscr{F}$ e $e_0$ o elemento neutro de $G/H$. Seja $d : W \to G$ uma seção local de $H$ em $G$, onde $W$ é uma vizinhança de $e_0$. Para cada $g \in G$ considere $W_g = g \cdot W$ e a aplicação $d_g : W_g \to G$ dada por $d_g(y) = g \cdot d(g^{-1} \cdot y)$. Pela Observação 1.6, podemos supor que $U$ é uma vizinhança coordenada de $\mathscr{F}$ tal que $\pi_U \circ f(U) \subset W_g$, para algum $g \in G$. Para cada $U$ escolha $g \in G$ e defina $\lambda_U : U \to G$ por $\lambda_U(b) = d_g \circ \pi_U \circ f(b)$, onde $\pi_U$ é dada pela Observação 1.7. Temos que:

$$\begin{aligned}p \circ \lambda_U(b) =& p(d_g \circ \pi_U \circ f(b))\\ =& p(g \cdot d(g^{-1} \cdot \pi_U \circ f(b)))\\ =& g \cdot d(g^{-1} \cdot \pi_U \circ f(b))H\\ =& (gH)(d(g^{-1} \cdot \pi_U \circ f(b))H)\\ =& g \cdot p \circ d(g^{-1} \cdot \pi_U \circ f(b))\\ =& gg^{-1} \cdot \pi_U \circ f(b)\\ =& \pi_U \circ f(b).\end{aligned}$$

Então $p \circ \lambda_U(b) = \pi_U \circ f(b)$, para $b \in U$. Defina a aplicação $\beta_{U,V} : U \cap V \to G$ por $\beta_{U,V}(b) = \lambda_U(b)^{-1}\alpha_{U,V}(b)\lambda_V(b)$. Pela Observação 1.7, temos que:

$$\begin{aligned}p \circ \beta_{U,V}(b) =& \lambda_U(b)^{-1}\alpha_{U,V}(b) \cdot p(\lambda_V(b))\\ =& \lambda_U(b)^{-1}\alpha_{U,V}(b) \cdot \pi_V \circ f(b)\\ =& \lambda_U(b)^{-1} \cdot \pi_U \circ f(b)\\ =& \lambda_U(b)^{-1} \cdot p(\lambda_U(b))\\ =& p(\lambda_U(b)^{-1}\lambda_U(b))\\ =& p(e)\\ =& e_0.\end{aligned}$$

Então $\beta_{U,V}(b) \in H$, para toda $b \in U \cap V$. Note que as aplicações $\{\beta_{U,V}\}$ satisfazem $\beta_{U,W}(b)\beta_{W,V}(b) = \beta_{U,V}(b)$. De fato,

$$\begin{aligned}\beta_{U,W}(b)\beta_{W,V}(b) =&\lambda_U(b)^{-1}\alpha_{U,W}(b)\lambda_W(b)\lambda_W(b)^{-1}\alpha_{W,V}(b)\lambda_V(b)\\ =&\lambda_U(b)^{-1}\alpha_{U,V}(b)\lambda_V(b)\\ =&\beta_{U,V}(b).\end{aligned}$$

Pelo Teorema 1.13, podemos definir um fibrado com mesma fibra e mesmo espaço base que $\mathscr{F}$, grupo estrutural $H$ e funções de transição $\{\beta_{U,V}\}$. Pelo Lema 1.26, a $G$-imagem deste fibrado é equivalente a $\mathscr{F}$. Então $\mathscr{F}$ é $G$-equivalente a um fibrado com grupo estrutural $H$ e funções de transição $\{\beta_{U,V}\}$. $\square$

**Lema 3.3.** *Sejam $\mathscr{F}$ e $\tilde{\mathscr{F}}$ dois fibrados equivalentes. Se $\mathscr{F}$ admite uma seção global, então $\tilde{\mathscr{F}}$ admite uma seção global.*

*Demonstração.* Sejam $f : B \to X$ uma seção global para $\mathscr{F}$ e $\pi$ e $\tilde{\pi}$ as projeções de $\mathscr{F}$ e $\tilde{\mathscr{F}}$, respectivamente. Como $\mathscr{F}$ e $\tilde{\mathscr{F}}$ são equivalentes, existe um homeomorfismo, $h$, entre os espaços totais de $\mathscr{F}$ e $\tilde{\mathscr{F}}$ tal que $(h, id_B) : \mathscr{F} \to \tilde{\mathscr{F}}$ é um morfismo de fibrados. Considere a aplicação $h \circ f : B \to \tilde{X}$, onde $\tilde{X}$ é o espaço total de $\tilde{\mathscr{F}}$. Temos que $\tilde{\pi} \circ (h \circ f) = id_B \circ \pi \circ f = \pi \circ f = id_B$. Portanto, $h \circ f$ é uma seção global para $\tilde{\mathscr{F}}$. $\square$

**Teorema 3.4.** *Sejam $B$ um poliedro de dimensão $n$ e $H$ um subgrupo fechado de $G$ tal que $\pi_i(G/H) = 0$, para $0 \le i \le n-1$. Se $\mathscr{F}$ é um fibrado sobre $B$, com fibra $G/H$ e grupo estrutural $G$, então $\mathscr{F}$ admite uma seção global.*

*Demonstração.* Seja $B_0$ o subconjunto de $B$ formado por todos os 0-simplexos de $B$. Considere o fibrado $\hat{\mathscr{F}} = \{G/H, G; (B \times G/H)/\sim, B; \hat{\pi}, \hat{\phi}_U\}$, dado como na prova do Teorema 1.13, e o fibrado produto $\tilde{\mathscr{F}} = \{G/H, G; B \times G/H, B; \pi_1, id_{B\times G/H}\}$, onde $\pi_1$ é a projeção na primeira coordenada. Defina $f_0 : \bigcup_{b\in B_0} \hat{\pi}^{-1}(b) \to B \times G/H$ por $f_0([b, gH]) = \hat{\phi}_U^{-1}([b, gH])$, para $b \in U$. Como $B_0$ está formado por uma quantidade finita de pontos, $f_0$ é contínua. Para $b \in B_0$ temos que $f_0|_{\hat{\pi}^{-1}(b)} = \hat{\phi}_{U,b}^{-1}$ e $\pi_1^{-1}(b) = \{b\} \times G/H$, então $f_0$ aplica homeomorficamente fibra em fibra, então $f_0$ induz uma aplicação de $B_0$ em $B$. Note que esta aplicação induzida por $f_0$ é a aplicação inclusão, que denotaremos por *incl*. Assim temos que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} \bigcup_{b\in B_0} \hat{\pi}^{-1}(b) \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "\hat{\pi}"'] & B \times G/H \arrow[d, "\pi_1"] \\ B_0 \arrow[r, "incl"'] & B \end{tikzcd}$$

Para $b \in U \cap V$ temos que $id_{B\times G/H} \circ f_0 \circ \hat{\phi}_{V,b} = \hat{\phi}_{U,b}^{-1} \circ \hat{\phi}_{V,b}$, que pertence a $G$. Então $(f_0, incl)$ é um morfismo de fibrados. Como $\pi_i(B \times G/H) = \pi_i(B) \times \pi_i(G/H) = 0$, para $0 \le i \le n-1$, pelo Teorema 2.15, $(f_0, incl)$ pode-se estender a um morfismo de fibrados $(f, id_B) : \hat{\mathscr{F}} \to \tilde{\mathscr{F}}$. Como $id_B$ é um homeomorfismo, pelo Teorema 1.22, $f$ é um homeomorfismo. Então $\hat{\mathscr{F}}$ é $G$-equivalente a um fibrado produto, logo $\hat{\mathscr{F}}$ admite uma seção global. Pela prova do Teorema 1.13, podemos supor que $\hat{\mathscr{F}}$ e $\mathscr{F}$ têm as mesmas funções de transição. Do Corolário 1.27, $\hat{\mathscr{F}}$ e $\mathscr{F}$ são equivalentes. Segue do Lema 3.3 que $\mathscr{F}$ admite uma seção global. □

**Teorema 3.5.** *Sejam $B$ um poliedro de dimensão $n$ e $H$ um subgrupo fechado de $G$ que tem uma seção local em $G$ e tal que $\pi_i(G/H) = 0$, para $0 \leq i \leq n-1$. Se $\mathscr{F}$ é um fibrado sobre $B$, com fibra $G/H$ e grupo estrutural $G$, então $\mathscr{F}$ é $G$-equivalente a um fibrado com grupo estrutural $H$.*

*Demonstração.* Pelo Teorema 3.4, $\mathscr{F}$ admite uma seção global. Como $H$ admite uma seção local em $G$, pelo Teorema 3.2, $\mathscr{F}$ é $G$-equivalente a um fibrado com grupo estrutural $H$. □

**Lema 3.6.** *Sejam $H$ um subgrupo fechado de $G$ e $\tilde{\mathscr{F}}$ um fibrado com fibra $G$ e grupo estrutural $H$. Se $G$ atua, pela esquerda, sobre o espaço topológico $F$ e o fibrado principal $\mathscr{F}$ é a $G$-imagem de $\tilde{\mathscr{F}}$, então $\tau_F^{-1}\mathscr{F}$ é a $G$-imagem de um fibrado com grupo estrutural $H$.*

*Demonstração.* Sejam $\{\alpha_{U,V}\}$ as funções de transição de $\tilde{\mathscr{F}}$. Pela Definição 1.36, temos que $\mathscr{F}$ é um fibrado principal com grupo estrutural $G$ e que suas funções de transição $\{\beta_{U,V} : U \cap V \to G\}$ são dadas por $\beta_{U,V}(b) = \alpha_{U,V}(b)$. Pelo Teorema 1.13, podemos definir um fibrado com fibra $F$, grupo estrutural $H$, mesmo espaço base e mesmas funções de transição que $\tilde{\mathscr{F}}$. Pela Definição 1.36, este fibrado tem como $G$-imagem a $\tau_F^{-1}\mathscr{F}$ . □

**Lema 3.7.** *Seja $H$ um subgrupo fechado de $G$. Se $\mathscr{F}$ é $G$-equivalente a um fibrado com grupo estrutural $H$, então $\tau\mathscr{F}$ é $G$-equivalente a um fibrado com grupo estrutural $H$.*

*Demonstração.* Seja $\tilde{\mathscr{F}}$ um fibrado com grupo estrutural $H$ tal que $\mathscr{F}$ é $G$-equivalente a $\tilde{\mathscr{F}}$. Sejam $\{\alpha_{U,V}\}$ e $\{\beta_{U,V}\}$ as funções de transição de $\mathscr{F}$ e de $\tilde{\mathscr{F}}$, respectivamente. Como $\mathscr{F}$ é $G$-equivalente a $\tilde{\mathscr{F}}$, pelo Lema 1.26, existem aplicações $\{\lambda_U : U \to G\}$ tais que $\alpha_{U,V}(b) = \lambda_U(b)^{-1}\beta_{U,V}(b)\lambda_V(b)$. Pelo Teorema 1.13, podemos definir um fibrado $\hat{\mathscr{F}}$ com fibra $G$, grupo estrutural $H$, mesmo espaço base e mesmas funções de transição que $\tilde{\mathscr{F}}$. Pelas Definições 1.29 e 1.36, $\tau\mathscr{F}$ e a $G$-imagem de $\hat{\mathscr{F}}$ têm mesma fibra, mesmo grupo estrutural e mesmo espaço base. Então, pelo Lema 1.26, $\tau\mathscr{F}$ e a $G$-imagem de $\hat{\mathscr{F}}$ são equivalentes. Portanto $\tau\mathscr{F}$ é $G$-equivalente a um fibrado com grupo estrutural $H$. □

**Teorema 3.8.** *Seja $\mathscr{F}$ um fibrado principal com grupo estrutural $G$. Se $H$ é um subgrupo fechado de $G$ que tem uma seção local em $G$, então $\mathscr{F}$ é $G$-equivalente a um fibrado com grupo estrutural $H$ se, e somente se, $\tau_{G/H}^{-1}\mathscr{F}$ admite uma seção global.*

*Demonstração.* Suponha que $\mathscr{F}$ é $G$-equivalente a um fibrado $\tilde{\mathscr{F}}$ com grupo estrutural $H$. Seja $\hat{\mathscr{F}}$ a $G$-imagem de $\tilde{\mathscr{F}}$. Pelo Lema 3.6, $\tau_{G/H}^{-1}\hat{\mathscr{F}}$ é a $G$-imagem de um fibrado com grupo estrutural $H$. Então $\tau_{G/H}^{-1}\hat{\mathscr{F}}$ é $G$-equivalente a um fibrado com grupo estrutural $H$. Do Teorema 3.1, $\tau_{G/H}^{-1}\hat{\mathscr{F}}$ admite uma seção global. Segue da Definição 1.38 e da Observação 1.37 que $\mathscr{F}$ e $\hat{\mathscr{F}}$ são equivalentes. Então $\tau_{G/H}^{-1}\mathscr{F}$ e $\tau_{G/H}^{-1}\hat{\mathscr{F}}$ são equivalentes. Pelo Lema 3.3, $\tau_{G/H}^{-1}\mathscr{F}$ admite uma seção global.

Suponha agora que $\tau_{G/H}^{-1}\mathscr{F}$ admite uma seção global. Pelo Teorema 3.2, $\tau_{G/H}^{-1}\mathscr{F}$ é $G$-equivalente a um fibrado $\tilde{\mathscr{F}}$ com grupo estrutural $H$. Pelo Lema 3.7, $\tau\tau_{G/H}^{-1}\mathscr{F}$ é $G$-equivalente a um fibrado com grupo estrutural $H$. Pelo Teorema 1.30, $\mathscr{F}$ e $\tau\tau_{G/H}^{-1}\mathscr{F}$ sao equivalentes. Então $\mathscr{F}$ é $G$-equivalente a um fibrado com grupo estrutural $H$. □

**Teorema 3.9.** *Sejam $B$ um poliedro de dimensão $n$ e $H$ um subgrupo fechado de $G$ que tem uma seção local em $G$ e tal que $\pi_i(G/H) = 0$, para $0 \leq i \leq n-1$. Sejam $\mathscr{F}_0$ e $\mathscr{F}_1$ dois fibrados sobre $B$, com fibra $G/H$ e grupo estrutural $H$. Se $\mathscr{F}_0$ e $\mathscr{F}_1$ são $G$-equivalentes, então $\mathscr{F}_0$ e $\mathscr{F}_1$ são equivalente.*

*Demonstração.* Pela Observação 1.6, podemos supor que as vizinhanças coordenadas de $\mathscr{F}_0$ e $\mathscr{F}_1$ são as mesmas, digamos $\{U\}$. Sejam $\{\alpha_{U,V}\}$ e $\{\beta_{U,V}\}$ as funções de transição de $\mathscr{F}_0$ e de $\mathscr{F}_1$, respectivamente. Temos que $\{U \times [0,1[\} \cup \{U \times ]0,1]\}$ é uma cobertura, por abertos, de $B \times I$. Como $\mathscr{F}_0$ e $\mathscr{F}_1$ são $G$-equivalentes, pelo Lema 1.26, existem aplicações $\{\lambda_U : U \to G\}$ tais que $\alpha_{U,V}(b) = \lambda_U(b)^{-1}\beta_{U,V}(b)\lambda_V(b)$. Defina

$$\gamma_{U,V}(b,t) = \begin{cases} \alpha_{U,V}(b) & \text{para } (b,t) \in \big(U \times [0,1[\big) \bigcup \big(V \times ]0,1[\big) \\ \beta_{U,V}(b) & \text{para } (b,t) \in \big(U \times ]0,1[\big) \bigcup \big(V \times ]0,1]\big) \\ \alpha_{U,V}(b)\lambda_V(b)^{-1} & \text{para } (b,t) \in \big(U \times [0,1[\big) \bigcup \big(V \times ]0,1]\big) \end{cases}$$

Note que $\gamma_{U,V}(b,t) = \alpha_{U,V}(b)\lambda_V(b)^{-1} = \lambda_U(b)^{-1}\beta_{U,V}(b)$ e que $\gamma_{U,U}(b,t) = \lambda_U(b)^{-1}$. Então $\{\gamma_{U,V}\}$ estão bem definidas. Pelo Teorema 1.13, existe um fibrado $\mathscr{F}$ sobre $B \times I$, com mesma fibra que $\mathscr{F}_0$ e que $\mathscr{F}_1$, com grupo estrutural $G$ e funções de transição $\{\gamma_{U,V}\}$.

A restrição de $\mathscr{F}$ a $B \times \{0\}$ tem funções de transição $\{\gamma_{U,V}(b,t) = \alpha_{U,V}(b)\}$, que pertencem a $H$. Como $\mathscr{F}$ tem fibra $G/H$ e $\pi_i(G/H) = 0$, para $0 \leq i \leq n-1$, pelo Teorema 3.4, $\mathscr{F}$ admite uma seção global. Pelo Teorema 3.2, $\mathscr{F}$ é $G$-equivalente a um fibrado $\tilde{\mathscr{F}}$ com grupo estrutural $H$. Então a restrição de $\mathscr{F}$ a $B \times \{0\}$ é equivalente a restrição de $\tilde{\mathscr{F}}$ a $B \times \{0\}$. Similarmente, temos que a restrição de $\mathscr{F}$ a $B \times \{1\}$ é equivalente a restrição de $\tilde{\mathscr{F}}$ a $B \times \{1\}$.

Pelo Lema 1.26, existem aplicações $\{\sigma_U : U \to H\}$ tais que $\alpha_{U,V}(b) = \sigma_U(b)^{-1}\delta_{U,V}(b)\sigma_V(b)$, onde $\{\delta_{U,V} : U \cap V \to H\}$ são as funções de transição de $\tilde{\mathscr{F}}$. Pelo Teorema 2.11, $\tilde{\mathscr{F}}$ é equivalente a um fibrado da forma $\hat{\mathscr{F}} \times I$, onde $\hat{\mathscr{F}}$ é um fibrado sobre $B$. Pela prova do Teorema 2.11 e por um comentário depois da Definição 1.12, podemos supor que as funções de transição de $\hat{\mathscr{F}}$ e de $\tilde{\mathscr{F}}$ são as mesmas. Então $\mathscr{F}_0$ e $\hat{\mathscr{F}}$ têm mesma fibra, mesmo grupo estrutural, mesmo espaço base. Então, pelo Lema 1.26, $\mathscr{F}_0$ e $\hat{\mathscr{F}}$ são equivalentes. Similarmente temos que $\mathscr{F}_1$ e $\hat{\mathscr{F}}$ são equivalentes. Portanto $\mathscr{F}_0$ e $\mathscr{F}_1$ são equivalentes. □

**Teorema 3.10.** *Sejam $B$ um poliedro de dimensão $n$ e $H$ um subgrupo fechado de $G$ que tem uma seção local em $G$ e tal que $\pi_i(G/H) = 0$, para $0 \leq i \leq n-1$. Então a correspondência $\lambda : (B,H) \to (B,G)$, que associa um fibrado $\mathscr{F}$ em $(B,H)$ com um fibrado em $(B,G)$ que é $G$-equivalente a $\mathscr{F}$, é bijetora.*

*Demonstração.* Vamos mostrar que a correspondência $\lambda$ é injetora. Sejam $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2 \in (B,H)$ tais que $\lambda(\mathscr{F}_1)$ e $\lambda(\mathscr{F}_2)$ são equivalentes. Sejam $\{\alpha_{U,V}\}$ e $\{\beta_{U,V}\}$ as funções de transição de $\mathscr{F}_1$ e $\mathscr{F}_2$, respectivamente. Como $\mathscr{F}_1$ e $\mathscr{F}_2$ são $G$-equivalentes, pelo Lema 1.26, existem aplicações $\{\lambda_U : U \to G\}$ tais que $\alpha_{U,V}(b) = \lambda_U(b)^{-1}\beta_{U,V}(b)\lambda_V(b)$. Temos que $\tau_{G/H}^{-1}\mathscr{F}_1$ e $\tau_{G/H}^{-1}\mathscr{F}_2$ têm mesma fibra e mesmo espaço base. Então, pela Definição 1.36, as $G$-imagens de $\tau_{G/H}^{-1}\mathscr{F}_1$ e $\tau_{G/H}^{-1}\mathscr{F}_2$ têm mesma fibra, mesmo grupo estrutural, mesmo espaço base e suas funções de transição são dadas pelas funções de transição $\{\alpha_{U,V}\}$ e $\{\beta_{U,V}\}$, respectivamente. Pelo Lema 1.26, temos que as $G$-imagens de $\tau_{G/H}^{-1}\mathscr{F}_1$ e $\tau_{G/H}^{-1}\mathscr{F}_2$ são equivalentes. Então $\tau_{G/H}^{-1}\mathscr{F}_1$ e $\tau_{G/H}^{-1}\mathscr{F}_2$ são $G$-equivalentes. Pelo Teorema 3.9, $\tau_{G/H}^{-1}\mathscr{F}_1$ e $\tau_{G/H}^{-1}\mathscr{F}_2$ são equivalentes. Então $\tau\tau_{G/H}^{-1}\mathscr{F}_1$ e $\tau\tau_{G/H}^{-1}\mathscr{F}_2$ são equivalentes. Pelo Teorema 1.30, $\mathscr{F}_1$ e $\mathscr{F}_2$ são equivalentes.

Agora vamos mostrar que a correspondência $\lambda$ é sobrejetora. Seja $\mathscr{F} \in (B,G)$. Como $B$ é um poliedro de dimensão $n$ e $\pi_i(G/H) = 0$, para $0 \leq i \leq n-1$, pelo Teorema 3.4, $\tau_{G/H}^{-1}\mathscr{F}$ admite uma seção global. Pelo Teorema 3.8, $\mathscr{F}$ é $G$-equivalente a um fibrado com grupo estrutural $H$. Então $\mathscr{F} = \lambda(\tilde{\mathscr{F}})$, onde $\tilde{\mathscr{F}} \in (B,H)$. □

## 3.2 Fibrado Universal e Produto de Fibrados

Nesta seção vamos definir o produto de dois fibrados que possuem o mesmo espaço base. Depois vamos decompor um fibrado em dois fibrados tais que seu produto é equivalente ao fibrado inicial. Para finalizar a seção vamos definir uma tripla de fibrados e dar um par de resultados, sem demostração, de sua relação com o fibrado universal.

**Definição 3.11.** *Sejam $\mathscr{F}_1 = \{F_1, G_1; X_1, B; \pi_1, \phi_{1U}\}$ e $\mathscr{F}_2 = \{F_2, G_2; X_2, B; \pi_2, \phi_{2U}\}$ dois fibrados com mesmas vizinhanças coordenadas. Define-se seu produto como o fibrado $\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2 = \{F_1 \times F_2, G_1 \times G_2; X, B; \pi, \phi_U\}$ onde a ação do grupo estrutural $G_1 \times G_2$ sobre a fibra $F_1 \times F_2$ é dada por $(g_1,g_2)(y_1,y_2) = (g_1y_1, g_2y_2)$, para $g_1, g_2 \in G$ e $y_1, y_2 \in F$. O espaço total deste produto é $X = \bigcup_{b\in B} (\phi_{1U,b}(F_1) \times \phi_{2U,b}(F_2))$. A projeção $\pi : X \to B$ é dada por $\pi(x_1,x_2) = b$, onde $x_i \in \phi_{iU,b}(F_i)$, para $i = 1,2$. As funções coordenadas, $\phi_U : U \times (F_1 \times F_2) \to \pi^{-1}(U)$, são dadas por $\phi_U(b,y_1,y_2) = (\phi_{1U}(b,y_1), \phi_{2U}(b,y_2))$.*

Note que para $b \in U$, temos que $\phi_{U,b}^{-1} = (\phi_{1U,b}^{-1}, \phi_{2U,b}^{-1})$. Vamos ver que a condição de colagem, da Definição 1.5, é satisfeita. Seja $b \in U \cap V$. Temos que:

$$\begin{aligned}\phi_{U,b}^{-1} \circ \phi_{V,b}(y_1,y_2) =& \phi_{U,b}^{-1}(\phi_{1V,b}(y_1), \phi_{2V,b}(y_2))\\ =& (\phi_{1U,b}^{-1} \circ \phi_{1V,b}(y_1), \phi_{2U,b}^{-1} \circ \phi_{2V,b}(y_2)).\end{aligned}$$

Então $\phi_{U,b}^{-1} \circ \phi_{V,b} = (\phi_{1U,b}^{-1} \circ \phi_{1V,b}, \phi_{2U,b}^{-1} \circ \phi_{2V,b})$, que pertence a $G_1 \times G_2$, pois $\mathscr{F}_1$ e $\mathscr{F}_2$ são fibrados.

Agora vamos decompor um fibrado em dois fibrados tais que seu produto é equivalente ao fibrado inicial. Seja $\{F_1 \times F_2, G_1 \times G_2; X, B; \pi, \phi_U\}$ um fibrado e considere as projeções $p_1 : F_1 \times F_2 \to F_1$, dada por $p_1(y_1,y_2)=y_1$, e $p_2: F_1\times F_2\to F_2$, dada por $p_2(y_1,y_2)=y_2$. Para $b\in U$, vamos definir duas relações de equivalência em $\pi^{-1}(b)$. Para a primeira relação, $z\sim_1 z'$ se, e somente se, $p_1(\phi_{U,b}^{-1}(z)) = p_1(\phi_{U,b}^{-1}(z'))$. Para a segunda relação, $z\sim_2 z'$ se, e somente se, $p_2(\phi_{U,b}^{-1}(z)) = p_2(\phi_{U,b}^{-1}(z'))$. As relações anteriores são relações de equivalência e são independentes da vizinhança coordenada $U$. Para a primeira relação temos que a classe de equivalência de $z$ em $\pi^{-1}(b)$ é $[z]_1=\{z'\in\pi^{-1}(b): p_1(\phi_{U,b}^{-1}(z)) = p_1(\phi_{U,b}^{-1}(z'))\}$. Denote por $Z_1(b)$ o conjunto de classes de equivalência desta primeira relação em $\pi^{-1}(b)$. De forma similar definimos $[z]_2$ e $Z_2(b)$.

Para $i=1,2$, defina os fibrados $\mathscr{F}_i=\{F_i,G_i;X_i,B;\pi_i,\phi_{iU}\}$, com espaço total $X_i=\bigcup\limits_{b\in B} Z_i(b)$, projeção, $\pi_i: X_i\to B$, dada por $\pi_i(Z_i(b))=\{b\}$ e funções coordenadas, $\{\phi_{iU}: U\times F_i\to\pi_i^{-1}(U)\}$, dadas por $\phi_{iU}(b,y_i)=[\phi_U(b,y_1,y_2)]_i$.

Com esta mesma notação temos o seguinte resultado.

**Teorema 3.12.** *O produto dos fibrados $\mathscr{F}_1=\{F_1,G_1;X_1,B;\pi_1,\phi_{1U}\}$ e $\mathscr{F}_2=\{F_2,G_2;X_2,B;\pi_2,\phi_{2U}\}$ é equivalente ao fibrado $\mathscr{F}=\{F_1\times F_2,G_1\times G_2;X,B;\pi,\phi_U\}$.*

*Demonstração.* Do parágrafo anterior e da Definição 3.11 temos que $\tilde\phi_{U,b}: F_1\times F_2\to\tilde\pi^{-1}(b)$ é dada por $\tilde\phi_{U,b}(y_1,y_2)=\big([\phi_{U,b}(y_1,y_2)]_1,[\phi_{U,b}(y_1,y_2)]_2\big)$. Sua inversa, $\tilde\phi_{U,b}^{-1}:\tilde\pi^{-1}(b)\to F_1\times F_2$, é dada por $\tilde\phi_{U,b}^{-1}([w]_1,[z]_2)=\Big(p_1\circ\phi_{U,b}^{-1}(w),p_2\circ\phi_{U,b}^{-1}(z)\Big)$. Se $b\in U\cap V$, temos que:

$$\begin{aligned}\tilde\phi_{U,b}^{-1}\circ\tilde\phi_{V,b}(y_1,y_2) =&\tilde\phi_{U,b}^{-1}([\phi_{V,b}(y_1,y_2)]_1,[\phi_{V,b}(y_1,y_2)]_2)\\ =&\Big(p_1\circ\phi_{U,b}^{-1}\circ\phi_{V,b}(y_1,y_2),p_2\circ\phi_{U,b}^{-1}\circ\phi_{V,b}(y_1,y_2)\Big).\end{aligned}$$

Então as funções de transição do fibrado $\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$ são $\tilde\phi_{U,b}^{-1}\circ\tilde\phi_{V,b}=\Big(p_1\circ\phi_{U,b}^{-1}\circ\phi_{V,b},p_2\circ\phi_{U,b}^{-1}\circ\phi_{V,b}\Big)$. Pelo cometário depois da Definição 3.11, as funções de transição de $\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$ são

$$\Big(\phi_{1U,b}^{-1}\circ\phi_{1V,b},\phi_{2U,b}^{-1}\circ\phi_{2V,b}\Big).$$

Então $\phi_{1U,b}^{-1}\circ\phi_{1V,b}=p_1\circ\phi_{U,b}^{-1}\circ\phi_{V,b}$ e $\phi_{2U,b}^{-1}\circ\phi_{2V,b}=p_2\circ\phi_{U,b}^{-1}\circ\phi_{V,b}$. Assim, as funções de transição do fibrado $\mathscr{F}$ são $\phi_{U,b}^{-1}\circ\phi_{V,b}=\Big(\phi_{1U,b}^{-1}\circ\phi_{1V,b},\phi_{2U,b}^{-1}\circ\phi_{2V,b}\Big)$. Portanto, os fibrados $\mathscr{F}$ e $\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$ têm as mesmas funções de transição. Além disso, $\mathscr{F}$ e $\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$ têm a mesma fibra, mesmo grupo estrutural e mesmo espaço base. Pelo Corolário 1.27, $\mathscr{F}$ e $\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$ são equivalentes. □

Agora vamos definir uma tríade e ver a sua relação com o fibrado universal.

**Definição 3.13.** *Considere os fibrados $\mathscr{F}_1=\{F_1,G_1;X_1,B;\pi_1,\phi_{1U}\}$ , $\mathscr{F}_2=\{F_2,G_2;X_2,B;\pi_2,\phi_{2U}\}$ e $\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$. Uma tríade com fibras $F_1$ e $F_2$, grupos estruturais $G_1$ e $G_2$ e espaço base $B$ é uma tripla de fibrados $\{\mathscr{F}_1,\mathscr{F}_2,\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2\}$.*

**Definição 3.14.** *Uma tríade $\{\mathscr{F}_1,\mathscr{F}_2,\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2\}$, com fibras $F_1$ e $F_2$, grupos estruturais $G_1$ e $G_2$ e espaço base $A$, é uma tríade universal de fibrados relativos a $F_1$, $F_2$, $G_1$, $G_2$, $B$ se satisfaz as seguintes condições.*

1. *Para toda tríade* $\{\tilde{\mathscr{F}}_1, \tilde{\mathscr{F}}_2, \tilde{\mathscr{F}}_1 \times \tilde{\mathscr{F}}_2\}$ *sobre* $B$*, existe uma aplicação* $f : B \to A$ *tal que* $\tilde{\mathscr{F}}_1 \equiv f^\star(\mathscr{F}_1)$*,* $\tilde{\mathscr{F}}_2 \equiv f^\star(\mathscr{F}_2)$ *e* $\tilde{\mathscr{F}}_1 \times \tilde{\mathscr{F}}_2 \equiv f^\star(\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2)$*.*

2. *Os respectivos pullback, pelas aplicações* $f_0, f_1 : B \to A$*, dos três fibrados* $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2$ *e* $\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2$ *são equivalentes se, e somente se,* $f_0$ *e* $f_1$ *são homotópicas.*

Para finalizar esta seção temos o seguinte resultado.

**Teorema 3.15.** *A tríade* $\{\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2\}$ *é uma tríade universal de fibrados relativos a* $F_1$*,* $F_2$*,* $G_1$*,* $G_2$*,* $B$ *se, e somente se, o fibrado* $\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2$ *é um fibrado universal relativo a* $F_1 \times F_2$*,* $G_1 \times G_2$*,* $B$*.*

*Demonstração.* Suponha que $\{\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2\}$ é uma tríade universal relativa a $F_1$, $F_2$, $G_1$, $G_2$, $B$. Vamos mostrar que a condição (1) da Definição 1.45 é satisfeita. Seja $\tilde{\mathscr{F}}$ um fibrado com fibra $F_1 \times F_2$, grupo estrutural $G_1 \times G_2$ e espaço base $B$. Pelo Teorema 3.12, $\mathscr{F}$ é equivalente a um fibrado da forma $\tilde{\mathscr{F}}_1 \times \tilde{\mathscr{F}}_2$. Temos que $\{\tilde{\mathscr{F}}_1, \tilde{\mathscr{F}}_2, \tilde{\mathscr{F}}_1 \times \tilde{\mathscr{F}}_2\}$ é uma tríade sobre $B$. Como $\{\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2\}$ é uma tríade universal, existe uma aplicação $f : B \to A$ tal que $\tilde{\mathscr{F}}_1 \times \tilde{\mathscr{F}}_2 \equiv f^\star(\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2)$. Então $\mathscr{F} \equiv f^\star(\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2)$.

Agora vamos mostrar que a condição (2) da Definição 1.45 é satisfeita. Sejam $f_0, f_1 : B \to A$ duas aplicações. Como $\{\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2\}$ é uma tríade universal, temos que $f_0^\star(\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2) \equiv f_1^\star(\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2)$ se, e somente se, $f_0$ e $f_1$ são homotópicas. Assim temos que $\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2$ é um fibrado universal relativo a $F_1 \times F_2$, $G_1 \times G_2$, $B$.

Suponha que $\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2$ é um fibrado universal relativo a $F_1 \times F_2$, $G_1 \times G_2$, $B$. Vamos mostrar que a condição (1) da Definição 3.14 é satisfeita. Seja $\{\tilde{\mathscr{F}}_1, \tilde{\mathscr{F}}_2, \tilde{\mathscr{F}}_1 \times \tilde{\mathscr{F}}_2\}$ uma tríade sobre $B$. Como $\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2$ é um fibrado universal, existe uma aplicação $f : B \to A$ tal que $\tilde{\mathscr{F}}_1 \times \tilde{\mathscr{F}}_2 \equiv f^\star(\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2)$. Temos que $\tilde{\mathscr{F}}_i$ e $f^\star(\mathscr{F}_i)$ têm a mesma fibra, mesmo grupo estrutural e mesmo espaço base, para $i = 1,2$. Sejam $\{\tilde{\alpha}_{iU,V}\}$ e $\{\alpha_{iU,V}\}$ as funções de transição de $\tilde{\mathscr{F}}_i$ e de $\mathscr{F}_i$, respectivamente, para $i = 1,2$. Pelo comentário depois da Definição 3.11, as funções de transição de $\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2$ são $\{(\alpha_{1U,V}, \alpha_{2U,V})\}$. Pelo Lema 1.26, $\tilde{\mathscr{F}}_1 \times \tilde{\mathscr{F}}_2 \equiv f^\star(\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2)$ se, e somente se, existem aplicações $\{(\lambda_{1U}, \lambda_{2U}) : U \to G_1 \times G_2\}$ tais que $(\tilde{\alpha}_{1U,V}(b), \tilde{\alpha}_{2U,V}(b)) = (\lambda_{1U}(b), \lambda_{2U}(b))^{-1}(\alpha_{1U,V}(b), \alpha_{2U,V}(b))(\lambda_{1V}(b), \lambda_{2V}(b))$, e isto acontece se, e somente se, $\tilde{\alpha}_{iU,V}(b) = \lambda_{iU}(b)^{-1}\alpha_{iU,V}(b)\lambda_{iV}(b)$, para $i = 1,2$. Então, do Lema 1.26, temos que $\tilde{\mathscr{F}}_i \equiv f^\star(\mathscr{F}_i)$, para $i = 1,2$.

Agora vamos mostrar que a condição (2) da Definição 3.11 é satisfeita. Sejam $f_0, f_1 : B \to A$ duas aplicações. Como $\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2$ é um fibrado universal, temos que $f_0^\star(\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2) \equiv f_1^\star(\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2)$ se, e somente se, $f_0$ e $f_1$ são homotópicas. Por um argumento similar, usado na prova da primeira condição da Definição 3.14, temos que $f_0^\star(\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2) \equiv f_1^\star(\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2)$ se, e somente se, $f_0^\star(\mathscr{F}_i) \equiv f_1^\star(\mathscr{F}_i)$, para $i = 1,2$. Então, para $i = 1,2$, temos que $f_0^\star(\mathscr{F}_i) \equiv f_1^\star(\mathscr{F}_i)$ se, e somente se, $f_0$ e $f_1$ são homotópicas. Assim, temos que $\{\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2\}$ é uma tríade universal relativa a $F_1$, $F_2$, $G_1$, $G_2$, $B$. $\square$

# CAPÍTULO 4

# Fibrado Universal para Grupos Clássicos

Neste capítulo vamos discutir a relação entre fibrados principais universais, grupos clássicos, poliedros de dimensão finita e variedades Grassmaniannas. Iniciaremos discutindo a relação entre fibrados principais universais, grupos clássicos e poliedros de dimensão finita. Para finalizar discutiremos fibrados principais universais, grupos clássicos e variedades Grassmaniannas.

Denote por $\mathbb{H}$ o conjunto dos quatérnios, por $\mathbb{F}$ o corpo dos números reais ou dos números complexos ou dos quatérnios, por $M_n(\mathbb{F})$ o grupo das matrizes quadradas $n \times n$ sobre o corpo $\mathbb{F}$. Para $P \subset M_m(\mathbb{F})$ e $Q \subset M_n(\mathbb{F})$ considere a notação $P \times Q = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in M_{m+n}(\mathbb{F}) : A \in P,\ B \in Q \right\}$. Sejam $K$, $H$ subgrupos fechados de $G$ tais que $K \subset H$. No Exemplo 1.9, construímos o fibrado $\{H/K, H; G/K, G/H; \pi, \phi_g\}$. Denote este fibrado por $\{G/K, G/H\}$. Considere os seguintes grupos clássicos.

$GL(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}$,

$GL^+(n) = \{A \in GL(n) : \det(A) > 0\}$,

$J(m,n) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix} \in GL(m+n) : A \in GL(m),\ B \in GL(n), \det(A) \cdot \det(B) > 0,\ C \text{ matriz } n \times m \right\}$,

$J^+(m,n) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix} \in GL^+(m+n) : A \in GL^+(m),\ B \in GL^+(n),\ C \text{ uma matriz } n \times m \right\}$,

$O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det(A) = \pm 1\}$,

$SO(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$,

$U(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : AA^* = I\}$,

$Sp(n) = \{A \in M_n(\mathbb{H}) : AA^* = I\}$.

Vamos trabalhar com grupos de matrizes quadradas onde os elementos de um grupo têm um tamanho diferente aos elementos de outro grupo de matrizes. Mas, podemos fazer um mergulho destes grupos em um grupo maior, para poder trabalhar com grupos nos quais todos os elementos tenham as mesmas dimensões. Usaremos a seguinte convenção. Podemos identificar, por exemplo, o grupo $SO(n)$ com $\{I_m\} \times SO(n)$, onde $I_m$ é a matriz identidade $m \times m$. Assim podemos fazer um mergulho de $SO(n)$ em $SO(m+n)$. Similarmente com os outros grupos clássicos.

Considere os seguintes fibrados:

$\mathscr{F}_{GL^+}(m,n) = \{GL^+(m+n)/GL^+(n), GL^+(m+n)/J^+(m+n)\}$,

$\mathscr{F}_{SO}(m,n) = \{SO(m+n)/SO(n), SO(m+n)/(SO(m)\times SO(n))\}$,

$\mathscr{F}_{U}(m,n) = \{U(m+n)/U(n), U(m+n)/(U(m)\times U(n))\}$,

$\mathscr{F}_{Sp}(m,n) = \{Sp(m+n)/Sp(n), Sp(m+n)/(Sp(m)\times Sp(n))\}$.

Para $(SO(m)\times SO(n))/SO(n) = (SO(m)\times SO(n))/(\{I_m\}\times SO(n))$ temos que:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & B'\end{pmatrix} \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & B'\end{pmatrix} \in \{I_m\}\times SO(n) \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} A^{-1}A' & 0 \\ 0 & B^{-1}B'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & C\end{pmatrix}, \text{ com } C\in SO(n) \\ \Leftrightarrow & A = A' \text{ e } B^{-1}B' = C.\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & B'\end{pmatrix} \Leftrightarrow & A = A',\ B^{-1}B' \in SO(n) \\ \text{e } \left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B\end{pmatrix}\right] = & \left\{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C\end{pmatrix} \in SO(m+n) : C \in SO(n)\right\}.\end{aligned}$$

Assim podemos definir o homeomorfismo $(SO(m)\times SO(n))/SO(n) \to SO(m)$, dado por

$$\left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B\end{pmatrix}\right] \mapsto A$$

Temos que $SO(m)\times SO(n)$ atua sobre $(SO(m)\times SO(n))/SO(n)$ por

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & B'\end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & B'\end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} AA' & 0 \\ 0 & BB'\end{pmatrix}\right]$$

Pelo homeomorfismo anterior, podemos identificar $\left[\begin{pmatrix} AA' & 0 \\ 0 & BB'\end{pmatrix}\right]$ com $AA'$ e assim vemos que a ação anterior está dada pela ação de $SO(m)$ sobre $SO(m)$, por multiplicação pela esquerda. Então podemos pensar que a fibra e o grupo estrutural de $\mathscr{F}_{SO}$ são $SO(m)$. Assim $\mathscr{F}_{SO}(m,n)$ é um fibrado principal com grupo estrutural $SO(m)$. Similarmente temos que os fibrados $\mathscr{F}_{GL^+}(m,n)$, $\mathscr{F}_{U}(m,n)$, $\mathscr{F}_{SP}(m,n)$ são fibrados principais com grupos estruturais $GL^+(m)$, $U(m)$ e $Sp(m)$, respectivamente.

**Lema 4.1.** *Para $m,n\in\mathbb{N}$ temos que $SO(m+n)/SO(n)$ é conexo por caminhos e $\pi_i(SO(m+n)/SO(n)) = 0$, para $1\le i\le n-1$.*

*Demonstração.* Sejam $e$ o elemento neutro de $SO(k)$, para $n<k\le m+n$, e $f\in F^i(SO(k),SO(n),e) = \{f : I^i\to SO(k) | f(\partial I^i)\subset SO(n), f(I^{i-1}) = e\}$. Considere a aplicação $p : SO(k)\to SO(k)/SO(k-1)$, dada por $p(A) = [A]$. Temos que $SO(k)/SO(k-1)$ é homeomorfo a esfera, $\mathbb{S}^{k-1}$, de dimensão $k-1$. Sabemos que $\pi_i(\mathbb{S}^{k-1}) = 0$, para $i<k-1$. Então existe uma homotopia $h : I^i\times I\to SO(m+n)/SO(n)$

tal que $h(x,0) = p \circ f$, $h(x,1) =$ constante e $h(\partial I^i, t) \subset p(e) = SO(k-1)$, para todo $i \in I$. Então a homotopia $h$ deforma $f$ em $f' \in F^i(SO(k-1), SO(n), e)$ e deixa $f(\partial I^i)$ fixa durante toda a homotopia. Se $f \in F^i(SO(m+n), SO(n), e)$ e se aplicarmos o argumento anterior para $k = m+n-1, m+n-2, \ldots, n+1$, obtemos uma sequência de homotopias que juntas dão uma homotopia de $f$ em uma aplicação $f' : I^i \to SO(n)$ tal que $f(\partial I^i)$ permanece fixo durante toda a homotopia. Isto implica que $\pi_i(SO(m+n), SO(n)) = 0$, para $2 \leq i \leq n-1$. Como $\pi_i(SO(m+n)/SO(n))$ é isomorfo a $\pi_i(SO(m+n), SO(n))$, temos que $\pi_i(SO(m+n)/SO(n)) = 0$, para $2 \leq i \leq n-1$. Para o caso $i = 1$, vamos supor que $n \geq 2$. Seja $C : I \to SO(m+n)/SO(n)$ uma curva fechada com ponto base $[SO(n)]$. Cubra $C$ por uma curva $C'$ em $SO(m+n)$ com ponto inicial em $e$ e ponto final dentro de $SO(n)$. Pelo argumento anterior, $C'$ pode-se contrair dentro de $SO(n)$, com seus pontos estremos em $SO(n)$. A imagem desta homotopia é uma contração de $C$ a um ponto, então $\pi_1(SO(m+n)/SO(n)) = 0$. □

**Teorema 4.2.** *Sejam $B$ um poliedro de dimensão $k$ e $\mathscr{F}$ um fibrado principal universal relativo a $G$, $G$, $B$. Quando $G$ é um grupo clássico, o correspondente $\mathscr{F}$ é dado pela seguinte tabela.*

| $G$ | $\mathscr{F}$ | $k$ |
|---|---|---|
| $SO(m)$ | $\mathscr{F}_{SO}(m,n)$ | $n$ |
| $GL^+(m)$ | $\mathscr{F}_{GL^+}(m,n)$ | $n$ |
| $U(m)$ | $\mathscr{F}_U(m,n)$ | $2n+1$ |
| $Sp(m)$ | $\mathscr{F}_{Sp}(m,n)$ | $4n+3$ |

*Demonstração.* Vamos fazer a prova para o fibrado $\mathscr{F}_{SO}(m,n)$. Já se mostrou que o fibrado $\mathscr{F}_{SO}(m,n)$ é um fibrado principal. Temos que $SO(n+1)/SO(n)$ é homeomorfo a esfera de dimensão $n$. Pelo Lema 4.1, $\pi_i(SO(m+n)/SO(n)) = 0$, para $0 \leq i \leq n-1$. Vamos mostrar que o fibrado $\mathscr{F}_{SO}(m,n)$ satisfaz a condição (1) da Definição 1.45. Seja $B$ um poliedro de dimensão $n$ e $\mathscr{F}$ um fibrado principal sobre $B$, com grupo estrutural $SO(m)$. Pelo Teorema 2.16, existe uma aplicação $f : B \to SO(m+n)/(SO(m) \times SO(n))$ tal que $\mathscr{F}$ e $f^\star(\mathscr{F}_{SO}(m,n))$ são equivalentes.

Agora vamos mostrar que o fibrado $\mathscr{F}_{SO}(m,n)$ satisfaz a condição (2) da Definição 1.45. Sejam $h_0, h_1 : B \to SO(m+n)/(SO(m) \times SO(n))$ duas aplicações. Pelo Teorema 2.17, se $h_0^\star(\mathscr{F}_{SO}(m,n))$ e $h_1^\star(\mathscr{F}_{SO}(m,n))$ são equivalentes, então $h_0$ e $h_1$ são homotópicas. Pelo Teorema 2.12, se $h_0$ e $h_1$ são homotópicas, então $h_0^\star(\mathscr{F}_{SO}(m,n))$ e $h_1^\star(\mathscr{F}_{SO}(m,n))$ são equivalentes. Então $\mathscr{F}_{SO}(m,n)$ é um fibrado universal.

Para os fibrados $\mathscr{F}_U(m,n)$ e $\mathscr{F}_{Sp}(m,n)$ é um argumento similar, sabendo que $U(n+1)/U(n)$ é homeomorfo a esfera de dimensão $2(n+1)-1$ e que $Sp(n+1)/Sp(n)$ é homeomorfo a esfera de dimensão $4(n+1)-1$. □

Quando o grupo estrutural é $O(m)$ temos que o fibrado correspondente é

$$\mathscr{F}_O(m,n) = \{SO(m+n)/SO(n), SO(m+n)/(SO(m) \otimes SO(n))\},$$

onde $SO(m) \otimes SO(n) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in O(m+n) : A \in O(m), B \in O(n) \text{ e } \det(A) = \det(B) \right\}$.

Por um argumento similar usado no fibrado $\mathscr{F}_{SO}(m,n)$, temos que $\mathscr{F}_O(m,n)$ é um fibrado principal com grupo estrutural $O(m)$ e, pelo Lema 4.1, $\pi_i(SO(m+n)/SO(n)) = 0$, para $0 \leq i \leq n-1$. Então a prova do Teorema 4.2 pode-se aplicar e assim temos que $\mathscr{F}_O(m,n)$ é um fibrado principal universal relativo a $O(m)$, $O(m)$, $B$, onde $B$ é um poliedro de dimensão $n$.

Quando o grupo estrutural é $GL(m)$, temos que o fibrado correspondente é

$$\mathscr{F}_{GL}(m,n) = \{GL(m+n)/GL(n), GL(m+n)/J(m,n)\}.$$

Um argumento similar ao anterior mostra que este é um fibrado principal universal relativo a $GL(m)$, $B$, donde $B$ é um poliedro de dimensão $n$.

Temos estes dois resultados resumidos no seguinte teorema.

**Teorema 4.3.** *Seja $B$ um poliedro de dimensão $n$. Então $\mathscr{F}_O(m,n)$ é um fibrado principal universal relativo a $O(m)$, $O(m)$, $B$ e $\mathscr{F}_{GL}(m,n)$ é um fibrado principal universal relativo a $GL(m)$, $GL(m)$, $B$.*

Agora vamos ver um pouco sobre a relação entre todos estes fibrados e as variedades Grassmannianas.

**Definição 4.4.** *Seja $V(m+n,\mathbb{F}) = \{(v_1,\ldots,v_{m+n}) \in \mathbb{F}^{m+n} : v_i \in \mathbb{F}$, para $1 \leq i \leq m+n\}$, o espaço vetorial, das $(m+n)$-tuplas, de dimensão $m+n$ sobre o corpo $\mathbb{F}$. Definimos a variedade Grassmanniana, $G(m,n,\mathbb{F})$, como o conjunto de todos os subespaços vetoriais de dimensão $m$ de $V(m+n,\mathbb{F})$. No caso real também definimos a variedade Grassmanniana orientável, $\tilde{G}(m,n,\mathbb{R})$, como o conjunto de todos os subespaços vetoriais orientáveis de dimensão $m$ de $V(m+n,\mathbb{R})$.*

Se pensarmos nos elementos de $V(m+n,\mathbb{R})$ como matrizes $(m+n)\times 1$, temos que o grupo $O(m+n)$ atua sobre $V(m+n,\mathbb{R})$ por multiplicação pela esquerda. Temos que $O(m+n)$ envia espaços de dimensão $m$ em espaços de dimensão $m$. Então a ação de $O(m+n)$ sobre $V(m+n,\mathbb{R})$ é transitiva. Agora, se $E^m \in G(m,n,\mathbb{R})$ e $E^n$ é seu complemento ortogonal, o subgrupo de $O(m+n)$ que aplica $E^m$ em si mesmo, se divide no produto direto $O'(m)\times O'(n)$, de dois subgrupos de $O(m+n)$ tais que $O'(m)$ fixa $E^n$, ponto a ponto, e $O'(n)$ fixa $E^m$, ponto a ponto. Então $G(m,n,\mathbb{R}) = O(m+n)/O'(m)\times O'(n)$, ver [6, Pág.123, Teorema 3.62]. Assim obtemos um fibrado isomorfo ao fibrado $\mathscr{F}_O(m,n)$, segundo a Definição 1.19. Com um argumento similar, para as outras variedades Grassmannianas e os grupos clássicos correspondentes, temos o seguinte teorema.

**Teorema 4.5.** *O espaço base dos fibrados principais universais, para grupos clássicos, podem-se trocar para obter fibrados principais universais isomorfos segundo a seguinte tabela.*

| *Fibrado* | *Espaço base* |
|---|---|
| $\mathscr{F}_{GL^+}(m,n)$ | $\tilde{G}(m,n,\mathbb{R})$ |
| $\mathscr{F}_{SO}(m,n)$ | $\tilde{G}(m,n,\mathbb{R})$ |
| $\mathscr{F}_U(m,n)$ | $G(m,n,\mathbb{C})$ |
| $\mathscr{F}_{Sp}(m,n)$ | $G(m,n,\mathbb{H})$ |
| $\mathscr{F}_O(m,n)$ | $G(m,n,\mathbb{R})$ |
| $\mathscr{F}_{GL}(m,n)$ | $G(m,n,\mathbb{R})$ |

# Referências Bibliográficas


[1] SHIING-SHEN, Chern.; YI-FONE, Sun. The imbedding theorem for fibre bundles. **American Mathematical Society.** vol 67, n.2, p 286-303, 1949.

[2] STEENROD, Norman. **The topology of fibre bundles.** 3 ed. Princeton: Princeton University Press, 1960. 237 p. (Princeton Mathematical, Series, 14).

[3] DAVIS, James F.; KIRK, Paul. **Lecture notes in algebraic topology.** 1 ed. American Mathematical Society, 2000. 382 p. (Graduate Studies in Mathematics, vol 35).

[4] SPANIER, Edwin H. **Algebraic topology.** 1 ed. New York: Springer, 1966.

[5] HUSEMOLLER, Dale. **Fibre bundles.** 3 ed. New York: Springer, 1994. (Graduate Text in Mathematics, 20).

[6] WARNER, Frank W. **Foundations of differentiable manifolds and Lie groups.** New York: Springer, 1983.

[7] MUNKRES, James R. **Topology.** 2 ed. Prentice Hall, 2000.