UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Existência de pullback atrator exponencial para uma família de problemas dominados por uma perturbação do $p(x)$-Laplaciano com difusão grande localizada, via método das ℓ-trajetórias.

Thays Regina Santana Couto

São Carlos - SP
Dezembro de 2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Existência de pullback atrator exponencial para uma família de problemas dominados por uma perturbação do $p(x)$-Laplaciano com difusão grande localizada, via método das ℓ-trajetórias.

Thays Regina Santana Couto

Orientadora Profa. Dra. Vera Lúcia Carbone

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Doutora em Matemática.

São Carlos - SP
Novembro de 2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Defesa de Tese de Doutorado da candidata Thays Regina Santana Couto, realizada em 22/12/2020.

Comissão Julgadora:

Profa. Dra. Vera Lucia Carbone (UFSCar)

Profa. Dra. Claudia Buttarello Gentile Moussa (UFSCar)

Prof. Dr. Ma To Fu (USP)

Profa. Dra. Mariza Stefanello Simsen (UNIFEI)

Prof. Dr. Rodrigo Antonio Samprogna (UNIFAL)

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.
O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Agradecimentos

É incrível como o acaso influi no processo de criação, por isso, antes de agradecer a algumas pessoas que contribuíram para a conclusão deste trabalho, quero agradecer ao que nos move, a energia que flui em todo universo, ao que não é físico, e nem compreendido por nós enquanto seres humanos. Resumo isso na palavra Deus, e deixo aqui a minha imensa e profunda gratidão a Ele.

À minha orientadora, Profa. Vera, que não mediu esforços para a conclusão deste trabalho. Obrigada por toda sua dedicação, empenho e parceria. Se hoje concluo este trabalho, é porque você acreditou nele, e o fez possível, junto comigo. Deixo aqui a minha imensa gratidão.

Ao Bruno Marchi, meu companheiro e amigo. Não só compartilhamos deste mesmo sonho, como vivemos ele juntos. Agradeço pela sua companhia, principalmente nos momentos mais difíceis, em que você se fez chão quando esse me faltou.

Aos meus pais, Couto e Sueli. Sei que este trabalho representa um marco da vossa luta pela formação acadêmica, minha e de minhas irmãs. Agradeço a todo o esforço empregado, por terem nos ensinado o valor da leitura e do conhecimento. Obrigada pelo apoio, pelas orações e, principalmente, por acreditarem nos meus sonhos, fazendo-os vosso.

Às minhas irmãs Irys e Elys, por ouvirem e serem um veículo de aconchego. Estamos distante, cada uma seguindo seus projetos, mas sei que sempre posso contar com minhas irmãs, minhas melhores amigas. A conclusão deste trabalho tem grande apoio de vocês, obrigada.

Aos meus vizinhos, Joyce e Janailton. Obrigada pelas conversas, torcida e orações.

Aos professores e colegas do Programa de Pós-Graduação em Matemática com os quais convivi. Em especial, à Profa. Cláudia Gentile, pela disponibilidade em ler, conversar e acrescentar sugestões para este trabalho, foram de grande ajuda, obrigada.

Aos membros da banca examinadora pelas sugestões e correções propostas para melhorar este trabalho. Muito obrigada.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001. Deixo aqui meu agradecimento.

Resumo

Neste trabalho usamos o método das $\ell-$trajetórias para provar a existência de uma família de atratores exponenciais para equações de reação-difusão autônomas não-lineares, envolvendo o $p(x)$-Laplaciano com difusão grande localizada. No caso não autônomo, utilizamos uma generalização do método das $\ell-$trajetórias para garantir a existência de uma família de pullback atratores exponenciais.

Palavras-Chave: método das $\ell-$trajetórias; atrator exponencial; pullback atrator exponencial; $p(x)$-Laplaciano; difusão grande.

Abstract

In this work, we use the method of $\ell-$trajectories to prove the existence of a family of exponential attractors for autonomous nonlinear reaction-diffusion equations, involving the $p(x)$-Laplacian with large localized diffusion. In the non-autonomous case, we use a generalization of the method of $\ell-$trajectories to guarantee the existence of a family of pullback exponential attractors.

Keywords: method of $\ell-$trajectories; exponential attractor; pullback exponential attractor; $p(x)$-Laplacian; large diffusion.

Conteúdo

Introdução

Na análise assintótica de um sistema dinâmico, a existência do atrator global constitui uma conclusão importante, já que o atrator global é definido como o menor compacto para os quais os pontos evoluem, através da dinâmica do sistema, e uma vez contido nesse compacto permanece nele, indicando dessa forma o comportamento das soluções para tempo grande.

Um outro objeto, de interesse deste trabalho, que também fornece informações acerca do comportamento assintótico das soluções, é o atrator exponencial. A definição apresentada a seguir, foi proposta em [16].

Seja $(\mathrm{M}, \mathrm{d_M})$ *um espaço métrico. Um subconjunto* $\mathcal{E} \subset \mathrm{M}$ *é um atrator exponencial para o semigrupo* $\{S(t);\, t \geqslant 0\}$ *se* $\mathcal{E} \neq \emptyset$ *é compacto, tem dimensão fractal finita* $\dim_{\mathrm{f}}(\mathcal{E}) < \infty$*, é semi-invariante, isto é,* $S(t)\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$ *para todo* $t \geqslant 0$*, e para todo subconjunto limitado* $D \subset \mathrm{M}$ *existem constantes* $c_1, c_2 > 0$ *tais que*

$$\mathrm{dist_H}(\mathrm{S(t)D}, \mathcal{E}) \leqslant \mathrm{c_1 e^{-c_2 t}}, \text{ para todo } \mathrm{t} \geqslant 0.$$

Aqui $\dim_{\mathrm{f}}(\mathrm{A}) = \limsup_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\log \mathrm{N}_{\varepsilon}^{\mathrm{M}}(\mathrm{A})}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}$*, e* $\mathrm{N}_{\varepsilon}^{\mathrm{M}}(\mathrm{A})$ *denota o número mínimo de* ε*-bolas no espaço* M *com centros em* A *necessárias para cobrir o subconjunto* $A \subset \mathrm{M}$.

Notamos que diferentemente do atrator global, o atrator exponencial não tem unicidade e por isso o algoritmo utilizado para sua construção assume papel importante para seu entendimento. Além disso, outro contraste é a taxa de absorção exponencial das soluções uma vez contida em um conjunto invariante e absorvente, isso indica que o atrator exponencial é mais robusto diante de pertubações se comparado ao atrator global.

Para fazermos a construção do atrator exponencial associado a uma equação de evolução autônoma, há duas principais técnicas: através da propriedade squeezing, ver [16], ou de propriedades de suavidade, ver [19]. Em ambas as estratégias, visando garantir a dimensão fractal finita do atrator exponencial, é imposta uma hipótese adicional sob o semigrupo, exigindo Hölder continuidade na variável tempo, o que nem sempre é uma tarefa fácil de ser feita, por exemplo, quando a solução tem falta de regularidade.

Nos últimos anos, tem-se dado mais atenção aos processos gerados por equações diferenciais não autônomas, como em [24, 40, 43]. No que se refere a construção do atrator exponencial do tipo pullback, o qual iremos denominar ao longo do trabalho por pullback atrator exponencial, em [18], os autores usaram o conceito de atração do tipo forward e, baseando-se nas propriedades de suavidade do processo de evolução, descobriram um algoritmo explícito para o caso discreto. Esse trabalho estendeu a construção do atrator exponencial para semigrupos discretos feita em [19] para problemas não autônomos.

Nos trabalhos, [14] e [27], estendeu-se essa construção do pullback atrator discreto para processos de evolução com tempo contínuo. Um ponto importante, em ambos, é a existência de um conjunto limitado pullback absorvente fixado, permitindo que o pullback atrator possa ser ilimitado no futuro, mas sempre será limitado no passado.

Em [11], os autores provaram a existência de pullback atrator exponencial para processos assintoticamente compactos, sob hipóteses de regularidade do processo de evolução, significativamente mais fracas. Nessa construção, os autores se basearam na existência de uma família de conjuntos absorventes dependentes do tempo, a qual, pode inclusive, crescer no passado, e estabeleceram a existência de um pullback atrator exponencial, cujas as seções não são, necessariamente, uniformemente limitadas no passado. Também foram obtidas estimativas melhores para a dimensão fractal das seções do pullback atrator exponencial.

Além de estabelecer a existência de atrator para o sistema Timoshenko, no caso não autônomo, em [32], os autores mostraram a existência de um pullback atrator exponencial utilizando a teoria proposta em [11]. Para isso foi necessário demonstrar que o processo de evolução pode ser representado como a soma $S + C$, onde a família de operadores S satisfaz certas propriedades de suavidade com respeito a um espaço V e W, sendo W um espaço auxiliar compactamente imerso em V, e C é uma família de contrações no espaço V. Neste trabalho, não foi possível obter uma decomposição desse tipo para os processos associados aos problemas de evolução, que serão apresentados a seguir. A dificuldade esteve na determinação do espaço W, tendo em vista que W deverá ser um espaço de potência fracionária.

Este trabalho pode ser dividido em duas partes. Na primeira parte, temos o Capítulo 2 no qual fazemos uma explanação detalhada do método das $\ell-$trajetórias, desenvolvido em [34], e o Capítulo 3, que é dedicado a aplicação de tal método para uma família de problemas dissipativos e autônomos, envolvendo o $p(x)$-Laplaciano, e o seu problema limite. Na segunda parte, temos o Capítulo 4, em que generalizamos a teoria apresentada em [34] para problemas não autônomos e a seguir, no Capítulo 5, aplicamos essa teoria para uma família de problemas dissipativos e não autônomos, envolvendo o $p(x)$-Laplaciano, e o seu problema limite.

A seguir descrevemos, rapidamente, a família de problemas que iremos abordar e o seu problema limite. Sejam $n \geqslant 1$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, conexo, limitado e suave com fronteira $\Gamma = \partial\Omega$. Consideremos a seguinte família de equações

$$(P_\lambda)\begin{cases} u_t^\lambda - \operatorname{div}(d_\lambda(x)(|\nabla u^\lambda|^{p(x)-2} + \eta)\nabla u^\lambda) + |u^\lambda|^{p(x)-2}u^\lambda = B(u^\lambda), & \text{em } \Omega \\ u^\lambda = 0, & \text{em } \Gamma \\ u^\lambda(0) = u_0^\lambda \in L^2(\Omega), \end{cases}$$

sendo $\lambda \in (0,1]$ um parâmetro, η uma constante positiva, $p \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^+)$ com $p(x) > 2$ e $B\colon L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ uma função globalmente Lipschitz.

O objetivo do parâmetro λ, em (P_λ), é indicar que quando $\lambda \to 0$ a difusão d_λ se torna grande em partes do interior do conjunto Ω, digamos Ω_0. Essa situação descreve, por exemplo, modelos de calor em que o material de condução é composto, assim a condução do calor é variada sendo difundido mais rapidamente em certas regiões do material.

Seja Ω_0 um subconjunto aberto e suave de Ω tal que $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$ e $\Omega_0 = \bigcup_{i=1}^{m} \Omega_{0,i}$ onde m é um inteiro positivo e $\Omega_{0,i}$ são subconjuntos, abertos, suaves e conexos de Ω satisfazendo $\overline{\Omega}_{0,i} \cap \overline{\Omega}_{0,j} = \emptyset$, para $i \neq j$. Definimos $\Omega_1 = \Omega \setminus \overline{\Omega}_0$, $\Gamma_{0,i} = \partial\Omega_{0,i}$ e $\Gamma_0 = \bigcup_{i=1}^{m} \Gamma_{0,i}$ as fronteiras de $\Omega_{0,i}$ e Ω_0, respectivamente. Na Figura 1, temos uma ilustração para os conjuntos Ω, Ω_0 e Ω_1.

Os coeficientes de difusão $d_\lambda\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são funções suaves em Ω, satisfazendo

$$0 < m_0 \leqslant d_\lambda(x) \leqslant M_\lambda,$$

para todo $x \in \Omega$ e $0 < \lambda \leqslant 1$, tal que

$$d_\lambda(x) \xrightarrow{\lambda \to 0} \begin{cases} d_0(x), & \text{uniformemente em } \Omega_1; \\ \infty, & \text{uniformemente em subconjuntos compactos de } \Omega_0, \end{cases}$$

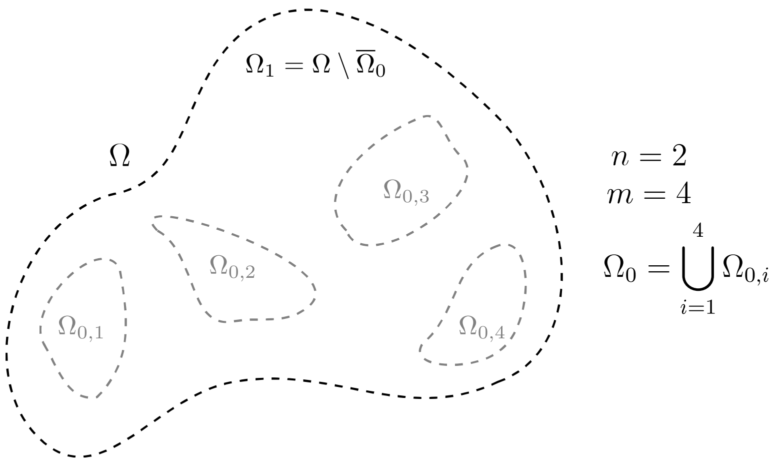

Figura 1: Esboço de Ω e Ω_0

onde $d_0 \colon \overline{\Omega}_1 \to (0, \infty)$ é uma função suave com

$$0 < m_0 \leqslant d_0(x) \leqslant M_0,$$

para todo $x \in \Omega_1$.

Como assumimos uma difusão grande em Ω_0 conforme $\lambda \to 0$, é esperado ter uma rápida redistribuição das não homogeneidades espaciais, isto é, para pequenos valores de λ é esperado que a solução associada a (P_λ), u^λ, se torne espacialmente constante nas regiões de difusão grande. Fazendo essas considerações, podemos escrever o problema limite da seguinte forma

$$(P_0)\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(d_0(x)(|\nabla u|^{p(x)-2} + \eta)\nabla u) + |u|^{p(x)-2}u = B(u), & \text{em } \Omega_1 \\ u_{|\Omega_{0,i}} := u_{\Omega_{0,i}}, & \text{em } \Omega_{0,i} \\ \dot{u}_{\Omega_{0,i}} + \dfrac{1}{|\Omega_{0,i}|}\left[\displaystyle\int\limits_{\Gamma_{0,i}} d_0(x)(|\nabla u|^{p(x)-2} + \eta)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\, dx + \int\limits_{\Omega_{0,i}} |u_{\Omega_{0,i}}|^{p(x)-2} u_{\Omega_{0,i}}\, dx\right] = B(u_{\Omega_{0,i}}) & \\ u^\lambda = 0, & \text{em } \Gamma \\ u^\lambda(0) = u_0^\lambda. & \end{cases}$$

Para garantirmos a existência de uma família de atratores exponenciais, $\{\mathcal{E}_\lambda\}_{\lambda \in [0,1]}$, associada aos problemas $(P_\lambda) - (P_0)$, usaremos uma adaptação do método conhecido como método das $\ell-$trajetórias, sugerido por Málek e Pražák em [34]. Nesse trabalho os autores provaram a existência de um atrator global de dimensional fractal finita e a existência de um atrator exponencial, através do método das $\ell-$trajetórias, para problemas da forma

$$\begin{cases} u'(t) = F(u(t)), \quad t > 0, \quad \text{em} \quad X, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{1}$$

onde X é um espaço de Banach, $F : X \to X$ é um operador não necessariamente linear e $u_0 \in X$.

Seja $\ell > 0$ uma constante. Resumidamente, o método das $\ell-$trajetórias, é proveniente da observação de que há um sistema dinâmico equivalente, definido em um espaço de trajetórias de amplitude $\ell > 0$, no qual podemos obter conclusões sobre o comportamento assintótico mais facilmente e carregar essas conclusões, através de uma aplicação com boas propriedades, para o sistema dinâmico original definido no espaço fase.

As referências [35] e [36] utilizam o método das $\ell-$trajetórias para garantir a existência de atrator exponencial, e foram úteis para o desenvolvimento do Capítulo 3. Em [36], o autor estuda a equação logística generalizada

$$u_t - \operatorname{div}(\nu \nabla u + \widetilde{\mu}|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \kappa u(1 - \int_0^\tau u(x, t-s) d\mu(s)), \tag{2}$$

em $\Omega \times (0, \infty) \subset \mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$, onde o retardo é capturado pelo tempo de convolução com medida de Borel μ não-negativa, com $\mu([0, \tau]) = 1$, e constantes $\nu > 0$, $\widetilde{\mu} \geqslant 0$ e $p \geqslant 2$, demonstrando a existência de atrator exponencial, uma vez provado que as soluções são assintoticamente limitadas. Assim como nos problemas $(P_\lambda) - (P_0)$, considerando $p(x)$ constante igual a p, em (2), a difusão está no Laplaciano acrescido do p-Laplaciano.

Em [35], os autores usaram o método das $\ell-$trajetórias para construir um atrator exponencial para o sistema dinâmico associado à equação

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(a(x, u, \nabla u)) + f(u) = g(x), & (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty) \\ u(\cdot, t)|_{\partial\Omega} = 0, & t \in (0, +\infty) \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

onde $a \colon \Omega \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ satisfaz algumas hipóteses, dentre elas

$$|a(x, u, \nabla u) - a(x, v, \nabla v)|_{\mathbb{R}^n} \leqslant \beta_0 |\nabla u - \nabla v|_{\mathbb{R}^n} + \beta_1 |u - v|. \tag{3}$$

Um típico exemplo, citado em [35], é

$$u_t - \operatorname{div}((((|\nabla u|^2 + \varepsilon)^{\frac{p-2}{2}} + \eta)\nabla u) + |u|^q u - |u|^r u = g(x),$$

onde $p \in]1, 2[$, $\varepsilon > 0$, $q > r \geqslant 0$ e $\eta > 0$.

A propriedade (3) não é satisfeita para

$$a(x, u, \nabla u) = d(x)(|\nabla u|^{p(x)-2} + \eta)\nabla u,$$

já que $p(x) > 2$. Entretanto é possível contornarmos essa situação, através de um resultado técnico que nos permite estimar

$$||\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u - |\nabla v|^{p(x)-2}\nabla v|$$

a custa de $|\nabla u - \nabla v|$ e $|\nabla u| + |\nabla v|$, e ainda utilizarmos o método das $\ell-$trajetórias. Esse resultado pode ser encontrado em [4], porém devida a sua importância nas conclusões obtidas no Capítulo 3, enunciamos e demonstramos tal resultado no Lema 1.2.9, estabelecido no Capítulo 1, Capítulo esse dedicado a enunciar alguns resultados importantes que foram utilizados, visando o completamento deste trabalho.

O caso no qual, em $(P_\lambda) - (P_0)$, fazemos $\eta = 0$, não obtivemos conclusões sobre a finitude da dimensão fractal do atrator global $\mathcal{A}_\lambda$, para cada $\lambda \in (0, 1]$. Em [45], por exemplo, os autores concluíram que o atrator global em $L^2(\Omega)$, associado a problemas da forma

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) + f(x,u) = g, & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u = 0, & \text{em} \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = 0, & \text{em} \Omega, \end{cases} \tag{4}$$

onde $g, u_0 \in L^2(\Omega)$, $p \in C(\overline{\Omega})$ com $2 \leqslant p(x) < \infty$, para todo $x \in \overline{\Omega}$, e f satisfazendo algumas hipóteses; possui dimensão fractal infinita. Já em [31], supondo, em (4), $p(x)$ constante igual a p e $f(x,u) = f(u)$, os autores mostraram que o atrator global associado a (4), admite dimensão fractal finita em $L^{q+\delta}(\Omega)$, onde q é o expoente conjugado de p e $\delta \in [0, +\infty)$.

Na segunda parte, nos propomos a garantir a existência de pullback atrator exponencial para a seguinte famílias de problemas em $\lambda \in (0,1]$,

$$(P_\lambda)' \begin{cases} u_t^\lambda - \operatorname{div}(d_\lambda(t)(|\nabla u^\lambda|^{p(x)-2} + \eta)\nabla u^\lambda) + |u^\lambda|^{p(x)-2}u^\lambda = B(t, u^\lambda), & t > \tau, \text{ em } \Omega \\ u^\lambda(t) = 0, & \text{em } \partial\Omega \\ u^\lambda(\tau) = u_\tau^\lambda \in L^2(\Omega), & \tau \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

e para o problema limite associado, obtido fazendo $\lambda \to 0$,

$$(P_0)' \begin{cases} u_t(t) - \operatorname{div}(d_0(t)(|\nabla u(t)|^{p(x)-2} + \eta)\nabla u(t)) + |u(t)|^{p(x)-2}u(t) = B(t, u(t)), \ t > \tau, \text{ em } \Omega_1 \\ u(t)_{|\Omega_{0,i}} := u_{\Omega_{0,i}}(t), \text{ em } \Omega_{0,i} \\ \dot{u}_{\Omega_{0,i}}(t) + \dfrac{1}{|\Omega_{0,i}|}\left[\displaystyle\int_{\Gamma_{0,i}} d_0(t)(|\nabla u(t)|^{p(x)-2} + \eta)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(t)\, dx \right. \\ \qquad\qquad \left. + \displaystyle\int_{\Omega_{0,i}} |u_{\Omega_{0,i}}(t)|^{p(x)-2}u_{\Omega_{0,i}}(t)\, dx \right] = B(t, u_{\Omega_{0,i}}(t)), \ t > \tau \\ u(t) = 0, \text{ em } \partial\Omega \\ u(\tau) = u_\tau, \ \tau \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

em condições similares as impostas aos problemas $(P_\lambda) - (P_0)$.

Com esse propósito desenvolvemos a teoria do Capítulo 4 que generaliza o método das $\ell-$trajetórias apresentado em [34], para o caso em que temos unicidade de solução. A ideia do desenvolvimento foi determinar uma dinâmica equivalente, tal como a dinâmica considerada no Capítulo 2, capturando informações sobre o processo, porém facilitando algumas conclusões como a estimativa da dimensão fractal. Notamos que a dinâmica equivalente obtida é definida em espaços que dependem do tempo, denominamos por espaço tempo-dependente.

As referências [13] e [28] foram úteis para as conclusões do Capítulo 4. Em [13], foi apresentada a noção de atrator dependente do tempo associado a uma família de operadores $U(t,\tau)\colon X_\tau \to X_t$, onde, para cada $t \in \mathbb{R}$, X_t é um espaço normado e são satisfeitas

- Para todo $\tau \in \mathbb{R}$, $U(\tau,\tau)$ é a aplicação identidade do espaço X_τ;
- $U(t,\tau)U(\tau,\sigma) = U(t,\sigma)$, para todos os reais t, τ, σ onde $t \geqslant \tau \geqslant \sigma$.

Sob as condições acima dizemos que $\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$ é um TDS-processo sob $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$. O atrator que depende do tempo associado ao TDS-processo $\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$, é uma família $\{\mathcal{A}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ em que para cada $t \in \mathbb{R}$, temos $\mathcal{A}_t \subset X_t$, uniformemente limitado, não-vazio e compacto, respeitando a invariância com relação ao TDS-processo, isto é, $U(t,\tau)\mathcal{A}_\tau = \mathcal{A}_t$, $t \geqslant \tau$, e para todo $R > 0$,

$\{\mathcal{A}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ é a menor família que satisfaz

$$\lim_{\tau\to-\infty} \operatorname{dist}_H(U(t,\tau)\mathbb{B}_\tau(R),\mathcal{A}_t)=0,$$

onde $\mathbb{B}_\tau(R)$ denota a bola fechada de X_τ com centro na origem e raio $R>0$. Dizemos que $\{\mathcal{A}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ é um TDS-pullback atrator. Foi baseada nessa ideia de pullback atração em espaço tempo-dependente, contida em [13], que estabelecemos a noção de pullback atrator exponencial dependente do tempo, denominado TDS-pullback atrator exponencial, objeto definido no Capítulo 4.

Já em [28], foi apresentada uma extensão do método abordado nos Capítulos 2 e 3 de [16] para semigrupos, obtendo conclusões sobre a existência de pullback atrator exponencial. Em resumo, o método presente em [16], usado no Capítulo 2 através do Lema 2.1.4, determina condições para a contração de qualquer volume n-dimensional no espaço de fase através da evolução das soluções, obtendo uma limitação da dimensão fractal do atrator global.

Nós estendemos o método apresentado em [28] para TDS-processos e garantimos condições para a existência de um TDS-pullback atrator exponencial. Vale ressaltar que não foi possível demonstrarmos que os problemas $(P_\lambda)'-(P_0)'$ satisfazem a propriedade squeezing, diferentemente do processo tempo-dependente determinado através das $\ell-$trajetórias, logo a teoria apresentada em [28] não pôde ser aplicada diretamente aos problemas $(P_\lambda)'-(P_0)'$.

Um resultado em destaque, para o caso não autônomo, que faz paralelo ao Lema 2.1.4, utilizado no método das $\ell-$trajetórias como um resumo da teoria dos Capítulos 2 e 3 em [16], é o Teorema 4.1.3, enunciado a seguir, o qual representou a maior dificuldade na generalização do método das $\ell-$trajetórias, não havendo resultados precedentes em [28].

Teorema. *Sejam $\widehat{H}=\{H_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ uma família de espaços Hilbert separáveis, $\{L(t,s)\}_{t\geqslant s}$ um TDS-processo em $\widehat{H}$ e $\widehat{\mathcal{B}}=\{\mathcal{B}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ uma família uniformemente limitada de conjuntos compactos $\mathcal{B}_t\subset H_t$, para todo $t\in\mathbb{R}$. Suponhamos que*

(i) para todo $\tau\in\mathbb{R}$ fixado, dado $R>0$, existe $t_0=t_0(R)>0$ tal que

$$L(t,\tau)\mathbb{B}_\tau(R)\subset\mathcal{B}_t,\qquad \textit{para todo } t\geqslant t_0+\tau,$$

(ii) existe $C>0$, independente de $t,s\in\mathbb{R}$, tal que

$$\|L(t,t-s)u-L(t,t-s)v\|_{H_t}\leqslant C\|u-v\|_{H_{t-s}},\quad \forall u,v\in H_{t-s},\quad T\leqslant s\leqslant 2T,$$

onde $T=T(\widehat{\mathcal{B}})>0$, satisfaz $L(T+s,s)\mathcal{B}_s\subset\mathcal{B}_{T+s}$, para todo $s\in\mathbb{R}$, e

(iii) para todo $\tau\in\mathbb{R}$ fixado, a família $\{\widetilde{L}(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, definida para cada $n\in\mathbb{Z}$ por

$$\widetilde{L}(n):=L((n+1)T+\tau,nT+\tau),$$

satisfaz a propriedade squeezing uniforme sob $\widehat{\mathcal{B}^d}=\{\mathcal{B}_{nT+\tau}\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Então, $\{L(t,s)\}_{t\geqslant s}$ possui um TDS-pullback atrator exponencial $\{\mathcal{M}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$.

O método das $\ell-$trajetórias já foi aplicado para problemas não autônomos buscando garantir a existência de pullback atrator exponencial. Os autores, em [29], inspirados na ideia do método das $\ell-$trajetórias proposta em [33], demonstraram a existência de um pullback atrator exponencial para equações de Navier-Stokes não autônomas, tri-dimensionais, com decaimento não-linear. Este trabalho vêm em paralelo ao que foi feito [29], sendo uma ferramenta a mais de utilização do método das $\ell-$trajetórias.

Por fim, no Capítulo 5, aplicamos a teoria do Capítulo 4 e demonstramos que os problemas $(P_\lambda)' - (P_0)'$ admitem pullback atrator exponencial.

Capítulo 1

Resultados Auxiliares

Neste capítulo apresentamos uma coletânea de resultados utilizados ao longo deste trabalho.

1.1 Os espaços $L^{p(x)}(\Omega)$, $W^{1,p(x)}(\Omega)$ e $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável e $p \in L^\infty(\Omega)$, com $p(x) \geqslant 1$. Nesta seção estudamos o espaço de Lebesgue generalizado $L^{p(x)}(\Omega)$ e os espaços de Sobolev generalizados $W^{1,p(x)}(\Omega)$ e $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Apresentamos resultados básicos que serão importantes para a compreensão da teoria desenvolvida neste trabalho. A referência [20] é a principal para esta seção.

O espaço generalizado, $L^{p(x)}$ é definido por

$$L^{p(x)}(\Omega) = \left\{ v\colon \Omega \to \mathbb{R}; v \text{ é mensurável e } \int_\Omega |v(x)|^{p(x)}\, dx < \infty \right\}.$$

Para todo $v \in L^{p(x)}(\Omega)$ e $p \in L_+^\infty(\Omega) = \{u \in L^\infty(\Omega) : \operatorname{inf\,ess} u \geqslant 1\}$, definimos

$$\rho(v) = \int_\Omega |v(x)|^{p(x)}\, dx, \tag{1.1}$$

$$p^- = \operatorname{inf\,ess} p \qquad \text{e} \qquad p^+ = \operatorname{sup\,ess} p.$$

A função ρ definida em (1.1) é chamada modular.

Em $L^{p(x)}(\Omega)$ podemos considerar a seguinte norma

$$\|v\|_{L^{p(x)}(\Omega)} = \|v\|_{p(x)} := \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho\left(\frac{v}{\lambda}\right) \leqslant 1 \right\}.$$

O próximo resultado apresenta algumas propriedades da função modular.

Proposição 1.1.1. *Sejam $u, v \in L^{p(x)}(\Omega)$.*

1. $\rho(u) = 0$ *se, e somente se,* $u = 0$.
2. $\rho(-u) = \rho(u)$.
3. $\rho(tu + (1-t)v) \leqslant t\rho(u) + (1-t)\rho(v)$, *para todo* $t \in [0,1]$, *ou seja,* ρ *é uma função convexa.*
4. $\rho(u+v) \leqslant 2^{p^+}(\rho(u) + \rho(v))$;

5. *Se $\lambda > 1$, então*
$$\rho(u) \leqslant \lambda\rho(u) \leqslant \lambda^{p^-}\rho(u) \leqslant \rho(\lambda u) \leqslant \lambda^{p^+}\rho(u),$$
e se $0 < \lambda < 1$, temos
$$\lambda^{p^+}\rho(u) \leqslant \rho(\lambda u) \leqslant \lambda^{p^-}\rho(u) \leqslant \lambda\rho(u) \leqslant \rho(u).$$

6. *Para cada $u \in L^{p(x)}(\Omega) \setminus \{0\}$, $\rho(\lambda u)$ é uma função crescente, contínua e convexa em $\lambda \in [0, \infty)$.*

Proposição 1.1.2. *Seja $u \in L^{p(x)}(\Omega) \setminus \{0\}$. Então,*
$$\|u\|_{p(x)} = a \quad \text{se, e somente se,} \quad \rho\left(\frac{u}{a}\right) = 1.$$

O próximo resultado dá flexibilidade a muitas estimativas obtidas nos Capítulos 3 e 5.

Proposição 1.1.3. *Seja $u \in L^{p(x)}(\Omega)$.*

(i) Se $\|u\|_{p(x)} \geqslant 1$, então $\|u\|_{p(x)}^{p^-} \leqslant \rho(u) \leqslant \|u\|_{p(x)}^{p^+}$.

(ii) Se $\|u\|_{p(x)} \leqslant 1$, então $\|u\|_{p(x)}^{p^+} \leqslant \rho(u) \leqslant \|u\|_{p(x)}^{p^-}$.

Demonstração. (i) O caso em que $\|u\|_{p(x)} = 1$ é trivial. Se $\|u\|_{p(x)} = a > 1$, então segue da Proposição 1.1.2, que $\rho\left(\frac{u}{a}\right) = 1$. Sendo $\frac{1}{a} < 1$, pelo item *5*. da Proposição 1.1.1 temos
$$\frac{1}{a^{p^+}}\rho(u) \leqslant \rho\left(\frac{u}{a}\right) = 1 < \frac{1}{a^{p^-}}\rho(u).$$
Logo
$$\|u\|_{p(x)}^{p^-} \leqslant \rho(u) \leqslant \|u\|_{p(x)}^{p^+}.$$

(ii) O resultado segue de modo análogo ao item (i). □

Teorema 1.1.1. *São válidas as seguintes propriedades.*

1. *$L^{p(x)}(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

2. *Se $p^- > 1$, então $L^{p(x)}(\Omega)$ é um espaço reflexivo.*

3. *Suponhamos $|\Omega| < \infty$ e $p, q \in L_+^\infty(\Omega)$. Então*
$$L^{p(x)}(\Omega) \subset L^{q(x)}(\Omega)$$
se, e somente se, $q(x) \leqslant p(x)$, quase sempre em Ω. Neste caso a imersão é contínua e a constante de imersão é $|\Omega| + 1$.

Proposição 1.1.4 (Desigualdade de Hölder)**.** *Seja $p^- > 1$ e seja $q \in L_+^\infty(\Omega)$ tal que*
$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1, \quad \text{para todo } x \in \Omega.$$
Se $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ e $v \in L^{q(x)}(\Omega)$, então
$$\left|\int_\Omega u(x)v(x)\,dx\right| \leqslant \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{q^-}\right)\|u\|_{p(x)}\|v\|_{q(x)}.$$

Demonstração. Sejam $\|u\|_{p(x)} = a$ e $\|v\|_{q(x)} = b$. Segue da Desigualdade de Young e da Proposição 1.1.2, que

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega \frac{u(x)}{a}\frac{v(x)}{b}\,dx\right| &\leqslant \int_\Omega \frac{|u(x)|}{a}\frac{|v(x)|}{b}\,dx \\
&\leqslant \int_\Omega \frac{1}{p(x)}\left|\frac{u(x)}{a}\right|^{p(x)} dx + \frac{1}{q(x)}\int_\Omega \left|\frac{v(x)}{b}\right|^{q(x)} dx \\
&\leqslant \int_\Omega \frac{1}{p^-}\left|\frac{u(x)}{a}\right|^{p(x)} dx + \frac{1}{q^-}\int_\Omega \left|\frac{v(x)}{b}\right|^{q(x)} dx \\
&= \frac{1}{p^-} + \frac{1}{q^-},
\end{aligned}$$

de onde concluímos o resultado. □

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, um subconjunto aberto, conexo e limitado. O espaço de Sobolev generalizado $W^{1,p(x)}(\Omega)$ é definido por

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \left\{u \in L^{p(x)}(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^{p(x)}(\Omega), j = 1, \ldots, n\right\},$$

onde $\dfrac{\partial u}{\partial x_j}$ denota a j-ésima derivada fraca de u, ou seja, se

$$\int_\Omega u\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\,dx = -\int_\Omega v_j\varphi\,dx, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty,$$

então $\dfrac{\partial u}{\partial x_j} = v_j$.

Em $W^{1,p(x)}(\Omega)$ temos a seguinte norma,

$$|||u||| = \|u\|_{p(x)} + \sum_{j=1}^{n}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|_{p(x)}.$$

Se $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$, definimos $\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right)$. Assim podemos escrever o espaço $W^{1,p(x)}(\Omega)$ como

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \{u \in L^{p(x)}(\Omega) : |\nabla u| \in L^{p(x)}(\Omega)\}.$$

Neste caso, é conveniente usarmos a norma quivalente

$$\|u\| = \|u\|_{p(x)} + \|\nabla u\|_{p(x)}.$$

O próximo resultado estabelece algumas boas propriedades dos espaços $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

Teorema 1.1.2. *As seguintes propriedades se verificam.*

1. *$W^{1,p(x)}(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

2. *Se $p^- > 1$, então $W^{1,p(x)}(\Omega)$ é um espaço reflexivo e separável.*

3. *Sejam Ω limitado, $p, q \in L^\infty_+(\Omega)$ tais que $q(x) \leqslant p(x)$, quase sempre em Ω. Então,*

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \subset W^{1,q(x)}(\Omega),$$

e tal imersão é contínua.

4. *Sejam $p, q \in C(\overline{\Omega})$ tais que $p^-, q^- \geqslant 1$. Consideremos*

$$p^*(x) = \begin{cases} n\frac{p(x)}{n-p(x)}, & se \quad p(x) < n, \\ \infty, & se \quad p(x) \geqslant n. \end{cases}$$

Se $q(x) < p^*(x)$, para todo $x \in \overline{\Omega}$, então

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \subset L^{q(x)}(\Omega),$$

e tal imersão é contínua e compacta.

Definição 1.1.1. *Definimos o espaço $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ em $W^{1,p(x)}(\Omega)$.*

Das propriedades de $W^{1,p(x)}(\Omega)$ e da definição de $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 1.1.3. *Se $p^- > 1$, então $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ é um espaço de Banach, separável e reflexivo.*

No próximo resultado apresentamos a importante e útil Desigualdade de Poincaré.

Teorema 1.1.4 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Seja $p \in C(\overline{\Omega})$ tal que $p^- > 1$. Então, existe $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_{p(x)} \leqslant C\|\nabla u\|_{p(x)}, \qquad \text{para todo } u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega).$$

1.2 Resultados gerais

A seguir apresentamos uma coletânea de resultados que serão utilizados ao longo do trabalho.

Proposição 1.2.1. *Sejam $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequencia em X. Temos que:*

(i) *Se $x_n \rightharpoonup x$ então $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall f \in X'$.*

(ii) *Se $x_n \to x$ então $x_n \rightharpoonup x$.*

(iii) *Se $x_n \rightharpoonup x$ então $\|x_n\|$ é limitada e $\|x\| \leqslant \liminf \|x_n\|$.*

(iv) *Se $x_n \rightharpoonup x$ e $\|f_n - f\|_{X'} \to 0$ então $\langle f_n, x_n\rangle_{X',X} \to \langle f, x\rangle_{X',X}$.*

Demonstração. Podemos encontrar a demonstração deste resultado na Proposição 3.5, página 58 de [6]. □

Teorema 1.2.1 (Eberlein-Šmulian)**.** *1. Assuma que E é espaço de Banach tal que toda sequência, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitada em E, admite uma subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge fracamente em E. Então E é reflexivo.*

2. *Sejam E um espaço de Banach reflexivo e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em E. Então existe uma subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge fracamente em E.*

Demonstração. A referência [6] pode ser consultada para a demonstração do resultado. □

Fazendo uma adaptação da demonstração em [37], página 80, obtemos a Desigualdade de Tartar.

Lema 1.2.1 (Desigualdade de Tartar)**.** *Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $p \geqslant 2$. Então*

$$\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x-y\rangle \geqslant \frac{2^{3-p}}{p}|x-y|^p. \tag{1.2}$$

Lema 1.2.2 (Grönwall)**.** *Consideremos a e b reais tais que $a < b$. Seja $m \in L^1(a,b;\mathbb{R})$ tal que $m \geqslant 0$ quase sempre em (a,b), e seja ainda $\alpha \geqslant 0$ constante. Se $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que*

$$\frac{1}{2}\phi^2(t) \leqslant \frac{1}{2}\alpha^2 + \int_a^t m(s)\phi(s)\mathrm{d}s,$$

para todo $t \in [a,b]$. Então,

$$|\phi(t)| \leqslant \alpha + \int_a^t m(s)\mathrm{d}s,$$

para todo $t \in [a,b]$.

Demonstração. Podemos consultar o Corolário 6.6 de [22]. □

Teorema 1.2.2. *Sejam $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$ tais que*

$$\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Então, existe uma subsequência $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ e uma função $h \in L^p(\Omega)$ tais que:

(i) *$f_{n_k}(x) \to f(x)$ quase sempre em Ω,*

(ii) *$|f_{n_k}(x)| \leqslant h(x)$, para todo k e quase sempre em Ω.*

Demonstração. A demonstração deste resultado pode ser encontrada no Teorema 4.9, página 94, de [6]. □

Teorema 1.2.3 (Projeção sobre um Convexo Fechado)**.** *Sejam H um espaço de Hilbert e $K \subset H$ um convexo fechado não vazio. Então, para todo $f \in H$, existe um único $u \in K$ tal que*

$$\|f-u\| = \min_{v\in K}\|f-v\|. \tag{1.3}$$

Além disso, u se caracteriza por

$$\begin{cases} u \in K \\ (f-u, v-u) \leqslant 0, \ \forall v \in K. \end{cases} \tag{1.4}$$

Escrevemos $u = P_K f$ a ***projeção*** *de f sobre K.*

Demonstração. A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [6]. □

Os próximos dois resultados são teoremas clássicos no estudo de equações ordinárias e parciais. Particularmente o Lema de Grönwall-Bellman é extremamente utilizado ao longo do trabalho.

Lema 1.2.3 (Grönwall- Bellman). *Consideremos a e b reais tais que $a < b$. Seja $m \in L^1(a, b; \mathbb{R})$ tal que $m \geqslant 0$ quase sempre em (a, b), e seja ainda $\alpha \geqslant 0$ constante. Se $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua verificando*

$$\phi(t) \leqslant \alpha + \int_a^t m(s)\phi(s)\mathrm{d}s$$

para todo $t \in [a, b]$. Então,

$$\phi(t) \leqslant \alpha e^{\int_a^t m(s)\mathrm{d}s},$$

para todo $t \in [a, b]$.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [22]. □

Lema 1.2.4 (Lema Uniforme de Gronwall). *Sejam g, h, y funções localmente integráveis, positivas em $[t_0, +\infty)$ tais que y' é localmente integrável em $[t_0, +\infty)$, e que satisfazem*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \leqslant gy + h, \qquad \text{para } t \geqslant t_0,$$

$$\int_t^{t+r} g(s)\,ds \leqslant a_1, \quad \int_t^{t+r} h(s)\,ds \leqslant a_2, \quad \int_t^{t+r} y(s)\,ds \leqslant a_3, \qquad \text{para } t \geqslant t_0$$

onde r, a_1, a_2 e a_3 são constates positivas. Então

$$y(t + r) \leqslant \left(\frac{a_3}{r} + a_2\right) e^{a_1}, \qquad \text{para todo } t \geqslant t_0.$$

Demonstração. O Lema 1.1 de [44] pode ser consultado para uma demonstração detalhada. □

Lema 1.2.5. *Seja y uma função absolutamente contínua positiva em $(0, +\infty)$ que satisfaz*

$$y' + \gamma y^q \leqslant \delta$$

com $q > 1$, $\gamma > 0$ e $\delta \geqslant 0$. Então, para todo $t \geqslant 0$

$$y(t) \leqslant \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{q}} + (\gamma(q - 1)t)^{-\frac{1}{q-1}}.$$

Demonstração. A demonstração deste resultado pode ser consultada no Lema 5.1, de [44]. □

O próximo teorema é de muita relevância no desenvolvimento deste trabalho, uma vez que ele apresenta uma estimativa da derivada de soluções no espaço $L^2(0, T; H)$, onde $T > 0$ e H é um espaço de Hilbert.

Teorema 1.2.4. *Seja H um espaço de Hilbert. Suponhamos que $A = \partial\phi$, onde $\phi\colon H \to (-\infty, \infty]$ é uma função própria, convexa e semicontínua inferiormente com $\min \phi = 0$, $K := \{v \in H; \phi(v) = 0\}$ e $D(\phi) := \{u \in H; \phi(u) < +\infty\}$.*

Se $f \in L^2(0, T; H)$, então toda solução fraca de $\dfrac{du}{dt} + Au \ni f$ é uma solução forte e

$\sqrt{t}\dfrac{du}{dt} \in L^2(0,T;H)$. *Temos as estimativas*

$$\left(\int_0^T \left|\frac{du}{dt}\right|^2 t\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int_0^T |f(t)|^2 t\,dt\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^T |f(t)|dt + \frac{1}{\sqrt{2}} dist(u(0),K)$$

e

$$\left(\int_\delta^T \left|\frac{du}{dt}\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int_0^T |f(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\delta}}\int_0^\delta |f(t)|dt + \frac{1}{\sqrt{2\delta}} dist(u(0),K), \quad \forall \delta \in (0,T).$$

Além disso, a função $t \mapsto \phi(u(t))$ *pertence a* $L^1(0,T)$ *e é absolutamente contínua sob todo intervalo* $[\delta,T]$, *para todo* $\delta \in (0,T)$, *com* $\left|\dfrac{du}{dt}\right|^2 + \dfrac{d}{dt}\phi(u) = \left(f, \dfrac{du}{dt}\right)$ *quase sempre em* $(0,T)$.

Em particular, se $u(0) \in D(\phi)$ *então* $\dfrac{du}{dt} \in L^2(0,T;H)$ *com*

$$\left(\int_0^T \left|\frac{du}{dt}\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int_0^T |f(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\phi(u(0))},$$

e a função $t \mapsto \phi(u(t))$ *é absolutamente contínua em* $[0,T]$.

Demonstração. A demonstração deste resultado é encontrada em [5], página 72. □

Um resultado importante que nos permitirá garantir a existência de solução para o caso não autônomo, é o Teorema estabelecido na página 626 em [46], o qual iremos enunciar a seguir.

Consideremos o problema de evolução não-linear

$$\frac{du}{dt}(t) + \partial\phi^t(u(t)) \ni f(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1.5}$$

em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Para quase todo $t \in [0,T]$, $\partial\phi^t$ denota o subdiferencial de uma função convexa, semicontínua inferiormente, $\phi^t\colon \mathcal{H} \to (-\infty,\infty]$.

Sabendo que o domínio efetivo, $D(\phi^t)$, é definido por

$$D(\phi^t) = \{u \in \mathcal{H}\,;\phi^t(u) < +\infty\},$$

considere a hipótese a seguir.

Hipótese A. Seja $T > 0$ fixado.

(A.1) Existe um conjunto $Z \subset [0,T]$ de medida nula, com $0 \notin Z$, tal que $\phi^t\colon \mathcal{H} \to (-\infty,\infty]$ é uma função própria, convexa e semicontínua inferiormente, com um domínio efetivo não-vazio para cada $t \in [0,T] - Z$.

(A.2) Para todo inteiro $r > 0$ existem uma constante $K_r > 0$, uma função $g_r\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ absolutamente contínua, com $g_r' \in L^\beta(0,T)$, e uma função $h_r\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ de variação limitada tais que, se $t \in [0,T] - Z$, $w \in D(\phi^t)$ com $|w| \leqslant r$ e $s \in [t,T] - Z$, então existe um elemento $\tilde{w} \in D(\phi^s)$ satisfazendo

$$|\tilde{w} - w| \leqslant |g_r(s) - g_r(t)|(\phi^t(w) + K_r)^\alpha,$$
$$\phi^s(\tilde{w}) \leqslant \phi^t(w) + |h_r(s) - h_r(t)|(\phi^t(w) + K_r),$$

onde α é uma constante fixada, com $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ e

$$\beta := \begin{cases} 2, & \text{se } 0 \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{1-\alpha}, & \text{se } \dfrac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1. \end{cases}$$

Teorema 1.2.5. *Suponha a Hipótese A. Então para cada $f \in L^2(0,T;\mathcal{H})$ e $u_0 \in \overline{D(\phi^0)}$, o problema (1.5) tem única solução forte em $[0,T]$, com $u(0) = u_0$. Além disso, u satisfaz as seguintes propriedades*

(i) Para todo $t \in (0,T] - Z$, $u(t) \in D(\phi^t)$ e satisfaz $t\phi^t(u(t)) \in L^\infty(0,T)$ e $\phi^t(u(t)) \in L^1(0,T)$. Além disso, para todo $0 < \delta < T$, $\phi^t(u(t))$ é de variação limitada em $[\delta,T] - Z$.

(ii) Para todo $0<\delta<T$, u é fortemente absolutamente contínua em $[\delta,T]$ e $t^{\frac{1}{2}}\frac{du}{dt} \in L^2(0,T;\mathcal{H})$.

Em particular, se $u_0 \in D(\phi^0)$, então u satisfaz

(i)' Para todo $t \in [0,T]-Z$, $u(t)$ está em $D(\phi^t)$ e $\phi^t(u(t))$ é de variação limitada em $[0,T]-Z$.

(ii)' u é fortemente absolutamente contínua em $[0,T]$ e satisfaz $\frac{du}{dt} \in L^2(0,T;\mathcal{H})$.

Demonstração. Consultar [46]. □

Outra conclusão útil para este trabalho foi obtida no Lema 6.11, em [46].

Lema 1.2.6. *Seja u solução forte de (1.5) em $[0,T]$, com $u(0) = u_0 \in D(\phi^0)$. Então, existe $L_1 = L_1(\|f\|_{L^2(0,T,\mathcal{H})}, |u_0|, \phi^0(u_0)) > 0$ tal que*

$$\int_0^T \left|\frac{du}{d\tau}\right|^2 d\tau \leqslant L_1.$$

Lema 1.2.7. *Sejam $A : D(A) \subset H \to \mathcal{P}(H)$ operador monótono, $f, g \in L^1(0,T;H)$. Se u e v são soluções fracas das inclusões $\dfrac{du}{dt} + Au \ni f$ e $\dfrac{dv}{dt} + Av \ni g$, respectivamente. Então*

$$\|u(t) - v(t)\|_H \leqslant \|u(0) - v(0)\|_H + \int_0^t \|f(s) - g(s)\|_H \mathrm{d}s, \tag{1.6}$$

para todo $t \in [0,T]$.

Demonstração. A demonstração deste resultado é encontrada em [5]. □

Lema 1.2.8. *Sejam $f, g \in L^2(\tau,T;H)$. Considere u e v soluções fortes para as equações*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + A(t)u(t) = f(t), \\ u(\tau) = u_\tau \in H \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \dfrac{dv}{dt} + A(t)v(t) = g(t), \\ v(\tau) = v_\tau \in H, \end{cases}$$

respectivamente. Se $A(t) : D(A(t)) \subset H \to \mathcal{P}(H)$ é um operador monótono, para todo $t \in [\tau,T]$, então, para $\tau \leqslant s < t \leqslant T$, temos

$$\|u(t) - v(t)\|_H \leqslant \|u(s) - v(s)\|_H + \int_s^t \|f(r) - g(r)\|_H dr.$$

Demonstração. Como $A(t)$ é operador monótono, $f(t) - \dfrac{du}{dt} = A(t)u(t)$ e $g(t) - \dfrac{dv}{dt} = A(t)v(t)$, quase sempre em (τ, T), então

$$\begin{aligned}
0 \leqslant & \langle A(t)u(t) - A(t)v(t), u(t) - v(t)\rangle_H \\
= & \left\langle f(t) - \frac{du}{dt} - \left(g(t) - \frac{dv}{dt}\right), u(t) - v(t)\right\rangle_H \\
= & \langle f(t) - g(t), u(t) - v(t)\rangle_H - \left\langle \frac{du}{dt} - \frac{dv}{dt}, u(t) - v(t)\right\rangle_H \\
= & \langle f(t) - g(t), u(t) - v(t)\rangle_H - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t) - v(t)\|_H^2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t) - v(t)\|_H^2 \leqslant \langle f(t) - g(t), u(t) - v(t)\rangle_H \leqslant \|f(t) - g(t)\|_H \|u(t) - v(t)\|_H.$$

Integrando de t a s com $\tau \leqslant s < t \leqslant T$, temos

$$\frac{1}{2}\|u(t) - v(t)\|_H^2 \leqslant \frac{1}{2}\|u(s) - v(s)\|_H^2 + \int_s^t \|f(\theta) - g(\theta)\|_H \|u(\theta) - v(\theta)\|_H \, d\theta.$$

Pelo Lema 1.2.2 (Gronwall), concluímos que

$$\|u(t) - v(t)\|_H \leqslant \|u(s) - v(s)\|_H + \int_s^t \|f(\theta) - g(\theta)\|_H \, d\theta,$$

para $\tau \leqslant s < t \leqslant T$. □

Proposição 1.2.2. *Seja K um conjunto compacto de X. Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X tal que*

$$d(x_n, K) \to 0 \quad \textit{quando } n \to \infty,$$

então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite subsequência convergente em K.

Demonstração. Partindo da hipótese concluímos que dado $j \in \mathbb{N}$ existe $n_j \in \mathbb{N}$ e $y_j \in K$ tais que

$$d(x_{n_j}, y_j) < \frac{1}{j},$$

podemos supor que $n_j < n_{j+1}$ para todo j natural. Determinamos assim, a sequência $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em K, que é compacto, admite subsequência convergente, a qual continuamos denotando por $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$, isto é, existe $y_0 \in K$ tal que $y_j \xrightarrow{j\to\infty} y_0$. Assim,

$$d(x_{n_j}, y_0) \leqslant d(x_{n_j}, y_j) + d(y_j, y_0) \xrightarrow{j\to\infty} 0.$$

Portanto, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite subsequência convergente. □

1.2.1 Um lema técnico

O próximo lema nos ajudará a demonstrar a continuidade forte do semigrupo shift definido no Capítulo 3.

Lema 1.2.9. *Sejam $p \in (2,\infty)$ e $\delta \geqslant 0$. Existem constantes $C_1 = C_1(p,n)$ e $C_2 = C_2(p)$ positivas, dependendo de p e da dimensão do espaço, tais que para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$*

$$||x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y| \leqslant C_1|x-y|^{1-\delta}(|x|+|y|)^{p-2+\delta} \tag{1.7}$$

e

$$(|x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x-y) \geqslant C_2|x-y|^{2+\delta}(|x|+|y|)^{p-2-\delta} \tag{1.8}$$

Demonstração. Consideremos $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, dada por $f(x) = |x|^{p-2}x$. Isto é, $f = (f_1, \ldots, f_n)$, com $f_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dadas por $f_i(x) = |x|^{p-2}x_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Segue, para $x \neq 0$, que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x) =& \frac{p-2}{2}(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{p-2}{2}-1}2x_ix_i + |x|^{p-2}\\ =&(p-2)(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{p-4}{2}}x_i^2 + |x|^{p-2}\\ =&(p-2)|x|^{p-4}x_i^2 + |x|^{p-2}.\end{aligned}$$

Como $p > 2$, temos por definição que

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(0) = \lim_{t\to 0}\frac{f_i(te_i) - f_i(0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{|te_i|^{p-2}t}{t} = \lim_{t\to 0}|t|^{p-2} = 0.$$

Sejam $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ com $i \neq j$, temos para todo $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) =& \frac{p-2}{2}(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{p-2}{2}-1}2x_ix_j\\ =&(p-2)(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{p-4}{2}}x_ix_j\\ =&(p-2)|x|^{p-4}x_ix_j.\end{aligned}$$

Além disso, por definição

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(0) = \lim_{t\to 0}\frac{f_j(te_i) - f_j(0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{|te_i|^{p-2}0}{t} = 0.$$

Ou seja,

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x) = \begin{cases}(p-2)|x|^{p-4}x_i^2 + |x|^{p-2}, & \text{se } x \neq 0\\ 0, & \text{se } x = 0.\end{cases} \tag{1.9}$$

e

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) = \begin{cases}(p-2)|x|^{p-4}x_ix_j, & \text{se } x \neq 0\\ 0, & \text{se } x = 0.\end{cases} \tag{1.10}$$

Vamos agora verificar a continuidade das funções $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. De fato, considere $\varepsilon > 0$ arbitrário. Se $i = j$, tomando $|x| < \delta \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{p-1}\right)^{\frac{1}{p-2}}$ temos

$$\begin{aligned}|(p-2)|x|^{p-4}x_i^2 + |x|^{p-2}| \leqslant&(p-2)|x|^{p-4}|x_i|^2 + |x|^{p-2}\\ \leqslant&(p-2)|x|^{p-4}|x|^2 + |x|^{p-2} = (p-1)|x|^{p-2}\\ <&(p-1)\delta^{p-2} \leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x)=\lim_{x\to 0}(p-2)|x|^{p-4}x_i^2+|x|^{p-2}=0=\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(0).$$

Se $i\neq j$. Para $|x|<\delta\leqslant\left(\frac{\varepsilon}{p-2}\right)^{\frac{1}{p-2}}$ temos

$$|(p-2)|x|^{p-4}x_ix_j|\leqslant(p-2)|x|^{p-4}|x_i||x_j|\leqslant(p-2)|x|^{p-4}|x|^2=(p-2)|x|^{p-2}<(p-2)\delta^{p-2}\leqslant\varepsilon.$$

Logo,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)=\lim_{x\to 0}(p-2)|x|^{p-4}x_ix_j=0=\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(0),$$

concluindo a continuidade das derivadas parciais. Com isso, temos que f é diferenciável.

Sejam $x,y\in\mathbb{R}^n$, pela Desigualdade do Valor Médio, temos

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|\sup_{t\in[0,1]}\|f'(tx+(1-t)y)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)}\leqslant|x-y|\sup_{z\in\overline{B}(0,|x|+|y|)}\|f'(z)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)},\quad(1.11)$$

já que $tx+(1-t)y\in\overline{B}(0,|x|+|y|)$, para todo $t\in[0,1]$.

Agora, vamos estimar o termo $\|f'(z)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)}$. Considere $x\in\mathbb{R}^n$ temos

$$\begin{aligned}|f'(z)x|&=\left|\left[\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(z)\right]_{n\times n}[x_j]_{n\times 1}\right|\\&=\left|\left(\sum_{i=1}^n\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(z)x_i,\ldots,\sum_{i=1}^n\frac{\partial f_i}{\partial x_n}(z)x_i\right)\right|\\&=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(z),x\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}(z),x\right)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^n\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(z),x\right)\right|^2}\\&\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(z)\right|^2|x|^2}=|x|\sqrt{\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(z)\right|^2}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\|f'(z)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)}=\sup_{|x|\leqslant 1}|f'(z)x|\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(z)\right|^2}.\quad(1.12)$$

Por sua vez, de (1.9)-(1.10), para $z\neq 0$, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i}(z)=&\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(z),\ldots,\frac{\partial f_n}{\partial x_i}(z)\right)\\=&((p-2)|z|^{p-4}z_iz_1,\ldots,(p-2)|z|^{p-4}z_iz_n)+|z|^{p-2}e_i\\=&(p-2)|z|^{p-4}z_iz+|z|^{p-2}e_i.\end{aligned}$$

Assim,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(z)\right|=|(p-2)|z|^{p-4}z_iz+|z|^{p-2}e_i|$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant (p-2)|z|^{p-4}|z_i||z| + |z|^{p-2} \\
&\leqslant (p-2)|z|^{p-4}|z||z| + |z|^{p-2} = (p-1)|z|^{p-2}.
\end{aligned}
$$

Substituindo em (1.12), temos

$$
\|f'(z)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(p-1)^2|z|^{2(p-2)}} = \sqrt{n(p-1)^2|z|^{2(p-2)}}.
$$

Retornando a estimativa (1.11), concluímos que

$$
\begin{aligned}
|f(x)-f(y)| &\leqslant |x-y| \sup_{|z|\leqslant |x|+|y|} \sqrt{n(p-1)^2|z|^{2(p-2)}} \\
&= |x-y| \sup_{|z|\leqslant |x|+|y|} \sqrt{n}(p-1)|z|^{p-2} \\
&\leqslant |x-y|\sqrt{n}(p-1)(|x|+|y|)^{p-2}.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
||x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y| \leqslant \sqrt{n}(p-1)|x-y|(|x|+|y|)^{p-2}, \tag{1.13}
$$

obtendo (1.7) com $\delta = 0$ e $C_1 = \sqrt{n}(p-1)$.

Seja $\delta > 0$, como $|x-y| \leqslant |x|+|y|$, pelo crescimento da função $\mathbb{R}^+ \ni \theta \mapsto \theta^\delta$ temos

$$
|x-y|^\delta \leqslant (|x|+|y|)^\delta. \tag{1.14}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
|x-y|(|x|+|y|)^{p-2} &= |x-y|^{1-\delta}|x-y|^\delta(|x|+|y|)^{p-2} \\
&\leqslant |x-y|^{1-\delta}(|x|+|y|)^\delta(|x|+|y|)^{p-2} \\
&= |x-y|^{1-\delta}(|x|+|y|)^{p-2+\delta}. \qquad (1.15)
\end{aligned}
$$

De (1.15) e (1.13) obtemos (1.7), para todo $\delta \geqslant 0$.

Vamos demonstrar a desigualdade (1.8). Primeiramente observamos que

$$
\begin{aligned}
(|x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x-y) &= |x|^{p-2}(x,x) - |x|^{p-2}(x,y) - |y|^{p-2}(y,x) + |y|^{p-2}(y,y) \\
&= |x|^p - (|x|^{p-2}+|y|^{p-2})(x,y) + |y|^p.
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
&(|x|^{p-1}-|y|^{p-1})(|x|-|y|) + (|x|^{p-2}+|y|^{p-2})(|x||y|-(x,y)) \\
&= |x|^p - |x|^{p-1}|y| - |y|^{p-1}|x| + |y|^p + |x|^{p-1}|y| - |x|^{p-2}(x,y) + |x||y|^{p-1} - |y|^{p-2}(x,y) \\
&= |x|^p - (|x|^{p-2}+|y|^{p-2})(x,y) + |y|^p.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
(|x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x-y) = (|x|^{p-1}-|y|^{p-1})(|x|-|y|) + (|x|^{p-2}+|y|^{p-2})(|x||y|-(x,y)). \tag{1.16}
$$

Agora, existe constante positiva $C > 0$ tal que

$$
(|x|^{p-1}-|y|^{p-1})(|x|-|y|) \geqslant C(|x|-|y|)^2(|x|^{p-2}+|y|^{p-2}), \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n. \tag{1.17}
$$

De fato, podemos supor, sem perda de generalidade, que $|x| \geqslant |y|$ e $|x| = 1$. Como $|y| \leqslant 1$, pelo não-crescimento da função $\mathbb{R} \ni \theta \mapsto |y|^\theta$, temos que $|y|^{p-1} \leqslant |y|$, já que $p > 2$. Logo,

$$1 - |y|^{p-1} \geqslant 1 - |y|. \tag{1.18}$$

Além disso, pelo não-decrescimento da função $\mathbb{R}^+ \ni \theta \to \theta^{p-2}$, temos que $|y|^{p-2} \leqslant 1$, logo

$$1 + |y|^{p-2} \leqslant 2. \tag{1.19}$$

Com isso, de (1.18) e (1.19), temos que

$$\begin{aligned}(|x|^{p-1} - |y|^{p-1})(|x| - |y|) &= (1 - |y|^{p-1})(1 - |y|) \geqslant (1 - |y|)(1 - |y|) = \frac{2}{2}(1 - |y|)^2 \\ &\geqslant \frac{1}{2}(1 - |y|)^2(1 + |y|^{p-2}) = \frac{1}{2}(|x| - |y|)^2(|x|^{p-2} + |y|^{p-2}).\end{aligned}$$

Portanto, concluímos (1.17) com $C = \frac{1}{2}$.

Substituindo (1.17) em (1.16), obtemos que

$$\begin{aligned}(|x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x - y) \geqslant &\frac{1}{2}(|x| - |y|)^2(|x|^{p-2} + |y|^{p-2}) + (|x|^{p-2} + |y|^{p-2})(|x||y| - (x, y)) \\ =&(|x|^{p-2} + |y|^{p-2}) \left(\frac{1}{2}(|x| - |y|)^2 + |x||y| - (x, y)\right) \\ =&\frac{1}{2}(|x|^{p-2} + |y|^{p-2})[(|x| - |y|)^2 + 2(|x||y| - (x, y))].\end{aligned}$$

Por sua vez, $(|x| + |y|)^{p-2} \leqslant 2^{p-2}(|x|^{p-2} + |y|^{p-2})$ e $|x - y|^2 = (|x| - |y|)^2 + 2(|x||y| - (x, y))$, logo

$$(|x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x - y) \geqslant \frac{1}{2^{p-1}}|x - y|^2(|x| + |y|)^{p-2}.$$

Portanto, (1.8) ocorre com $C_2 = \frac{1}{2^{p-1}}$ e $\delta = 0$. Se $\delta > 0$, então de (1.14) temos

$$\begin{aligned}|x - y|^2(|x| + |y|)^{p-2} =&|x - y|^2(|x| + |y|)^{p-2-\delta}(|x| + |y|)^\delta \\ \geqslant&|x - y|^2(|x| + |y|)^{p-2-\delta}|x - y|^\delta \\ =&|x - y|^{2+\delta}(|x| + |y|)^{p-2-\delta},\end{aligned}$$

finalizando a demonstração. □

Em geral, o Lema 1.2.9 pode ser enunciado para todo $p \in (1, \infty)$, para mais detalhes o leitor pode consultar a referência [4].

Capítulo 2

Existência de atrator exponencial via método das ℓ-trajetórias

Ao analisarmos o comportamento de sistemas de evolução não-lineares para tempo grande, podemos utilizar uma abordagem alternativa conhecida como método das $\ell-$trajetórias. Em [34] os autores propuseram uma nova ferramenta, utilizando o método das $\ell-$trajetórias, para demonstrar a existência de um atrator com dimensão fractal finita e a existência de um atrator exponencial para problemas de evolução da forma

$$\begin{cases} u'(t) = F(u(t)), \quad t > 0, \quad \text{em} \quad X, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde X é um espaço de Banach, $F : X \to X$ é um operador não-linear, e $u_0 \in X$.

O método das $\ell-$trajetórias, o qual iremos explicar com mais detalhes, é baseado na observação de que o comportamento limite das soluções para um sistema dinâmico em um espaço fase de origem pode ser equivalentemente capturado pelo comportamento limite das $\ell-$trajetórias; entendemos por ℓ-trajetória as partes contínuas da trajetória de solução que são parametrizadas por um intervalo de tempo de duração ℓ, com $\ell > 0$.

Para explicar melhor tal método, suponhamos que (2.1) admite única solução, definimos a família dos operadores solução $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$, isto é, $T(t)u_0 = u(t)$, onde u é a única solução de (2.1), assumimos que $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ forma um semigrupo e admite um atrator global $\mathcal{A} \subset X$.

Vamos considerar duas aplicações para descrever a dinâmica de maneira equivalente. A primeira aplicação $\mathbf{b}$ associa para todo $u_0 \in X$ a ℓ-trajetória que começa em u_0, Figura 2.1, isto é, consideramos $\mathbf{b}$ como uma aplicação de X para o subconjunto $X_\ell = L^2(0, \ell; X)$ por

$$\begin{aligned} \mathbf{b}\colon X &\to \ X_\ell \\ u_0 &\mapsto \ \mathbf{b}(u_0)\colon [0,\ell] \to X \\ & \qquad\qquad\quad \tau \mapsto T(\tau)u_0. \end{aligned}$$

Para a segunda aplicação, $\mathbf{e}$, atribuímos para qualquer ℓ-trajetória χ seu ponto final, Figura 2.2, isto é,

$$\mathbf{e}(\chi) = \chi(\ell).$$

Observamos que se as trajetórias são supostas contínuas, pelo menos na topologia fraca de X, então faz sentido o valor pontual $\chi(\ell)$.

Podemos utilizar a aplicação $\mathbf{b}$ para introduzir a família $\{L(t)\}_{t\geqslant 0}$ agindo no conjunto das

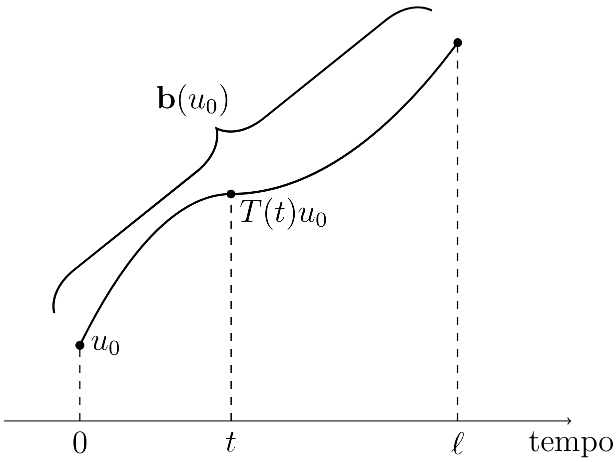

Figura 2.1: Aplicação **b**

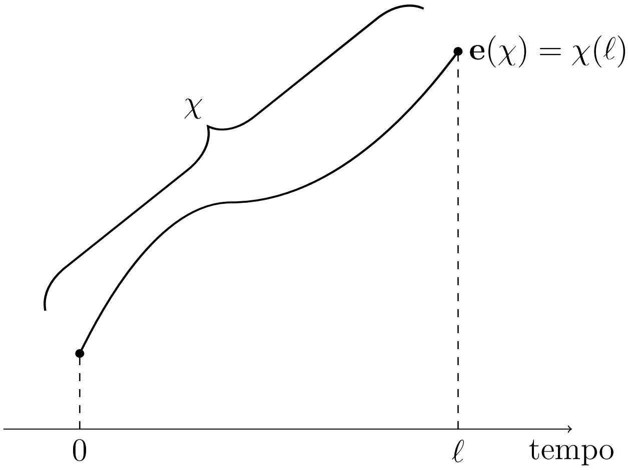

Figura 2.2: Aplicação **e**

$\ell-$trajetórias, Figura 2.3, definida por

$$L(t)(\mathbf{b}(u_0)) := \mathbf{b}(T(t)u_0), \quad u_0 \in X.$$

Seja u solução de (2.1), parametrizada no intervalo $[0, \ell]$, então

$$L(0)(u) = L(0)(\mathbf{b}(u(0))) = \mathbf{b}(T(0)u(0)) = \mathbf{b}(u(0)) = u,$$

além disso,

$$\begin{aligned} L(t+s)(u) =& L(t+s)(\mathbf{b}(u(0))) = \mathbf{b}(T(t+s)u(0)) = \mathbf{b}(T(t)(T(s)u(0))) \\ =& L(t)(\mathbf{b}(T(s)u(0))) = L(t)L(s)(\mathbf{b}(u(0))) = L(t)L(s)(u). \end{aligned}$$

Logo, $\{L(t)\}_{t\geqslant 0}$ determina um semigrupo no espaço das $\ell-$trajetórias.

Consideramos

$$\mathcal{A}_\ell := \mathbf{b}(\mathcal{A}) = \{\mathbf{b}(u_0); u_0 \in \mathcal{A}\},$$

em geral, $\mathcal{A}_\ell$ é um atrator global associado a $\{L(t)\}_{t\geqslant 0}$. Com isso, temos a relação indicada na Figura 2.4.

Uma questão que surge é sobre a vantagem de considerarmos este ponto de vista alternativo

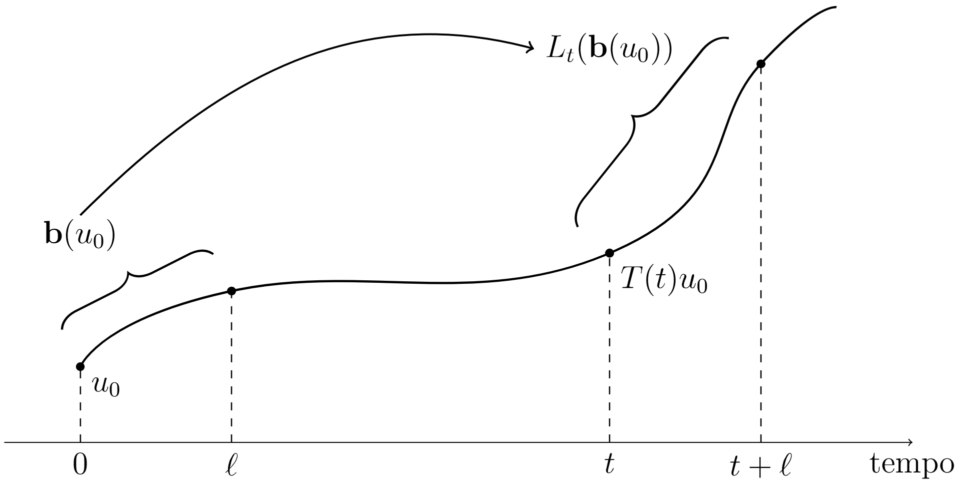

Figura 2.3: Atuação do operador $L(t)$

para $\mathcal{A}$. A vantagem está na estimativa da dimensão fractal de $\mathcal{A}$, pois temos a possibilidade de estimarmos a dimensão fractal de $\mathcal{A}_\ell$ na topologia de X_ℓ, que é interessante por ser mais fácil. E uma vez verificada que a dimensão fractal de $\mathcal{A}_\ell$ é finita, podemos utilizar a aplicação $\mathbf{e}$ para concluir sobre a dimensão fractal de $\mathcal{A}$, pois se a aplicação $\mathbf{e}$ é Lipschitz (ou pelo menos α-Hölder) contínua, então a dimensão fractal de $\mathcal{A}$ não pode aumentar (ou aumentar no máximo $\frac{1}{\alpha}$ vezes).

Observamos que as funções $\mathbf{b}$ e $\mathbf{e}$ são diferentes, enquanto $\mathbf{b}$ define a dinâmica em X_ℓ através da dinâmica de X, a aplicação $\mathbf{e}$ é responsável por levar as propriedades de $\mathcal{A}_\ell$ para $\mathcal{A}$, assim no propósito deste Capítulo a função $\mathbf{e}$ desempenha um papel mais importante do que a função $\mathbf{b}$.

Vale ressaltar que podemos trabalhar com a hipótese de $\mathcal{A}$ e $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ não estarem definidas em X, tal caso pode ocorrer quando a solução não é única ou quando a solução não tem regularidade suficiente para construir o atrator global $\mathcal{A}$. É possível, ainda assim, introduzir a dinâmica $\{L(t)\}_{t\geqslant 0}$, sendo construído primeiramente o atrator $\mathcal{A}_\ell$, e depois de avaliarmos sua dimensão fractal definimos $\mathcal{A}$ como o conjunto $\mathbf{e}(\mathcal{A}_\ell)$. Assumindo que $\mathbf{e}$ é Lipschitz contínua ou Hölder contínua, é possível concluir que $\mathcal{A}$ tem dimensão fractal finita e satisfaz as propriedades de atrator global em X. Iremos desenvolver a teoria neste Capítulo assumindo esse cenário.

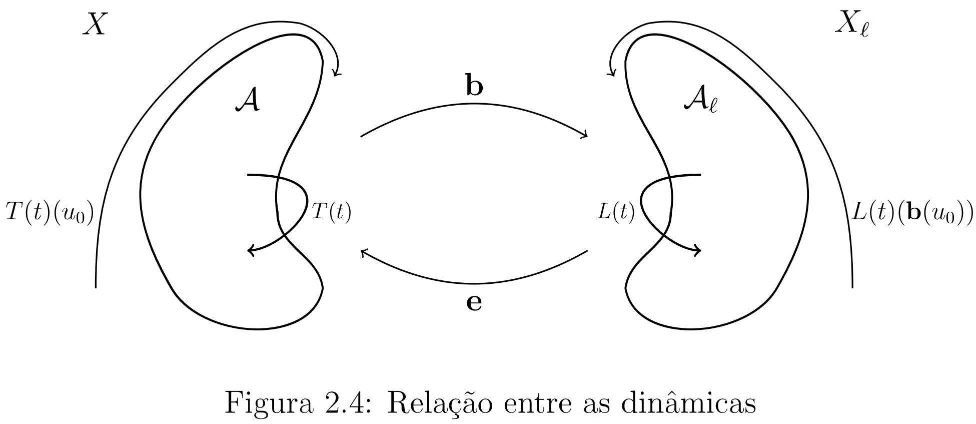

Figura 2.4: Relação entre as dinâmicas

2.1 Preliminares

Iniciaremos com as noções que são necessárias acerca da teoria de sistemas dinâmicos para o entendimento do capítulo. Destacamos as referências [12, 23, 26].

Definição 2.1.1. *Seja M um espaço métrico. Dizemos que a família $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ de aplicações $T(t)\colon M \to M$ (não-lineares), com $t \geqslant 0$, é um semigrupo em M se,*

(i) $T(t+s) = T(t)T(s)$, *para todo* $t, s \geqslant 0$.

(ii) $T(0) = Id_M$.

Iremos nos referir ao par $(\{T(t)\}_{t\geqslant 0}, M)$, ou simplesmente $(T(t), M)$, por sistema dinâmico.

Um típico exemplo de semigrupo é aquele formado pelo operador solução de um certo problema de evolução, definido em algum espaço apropriado de condições iniciais, para qual exista uma única solução.

Denotaremos $\mathrm{dist}(A, B)$ a semi-distância de Hausdorff entre dois subconjuntos A e B de M, mais precisamente

$$\mathrm{dist}(A, B) := \sup_{a\in A} \inf_{b\in B} d(a, b).$$

A distância usual entre os conjuntos A e B será denotada por $\mathrm{d}(A, B) := \inf_{a\in A} \inf_{b\in B} d(a, b)$.

Definição 2.1.2. *Dizemos que $\mathcal{A} \subset M$ é atrator global associado ao semigrupo $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$, ou simplesmente, que $\mathcal{A}$ é atrator global para $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$, se $\mathcal{A}$ é compacto; invariante, isto é, $T(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$ e atrai subconjuntos limitados de M sob $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$, ou seja, para todo $B \subset M$ limitado* $\mathrm{dist}(T(t)B, \mathcal{A}) \xrightarrow{t\to\infty} 0$.

Observamos que o atrator global para o semigrupo é único, afinal se $\mathcal{A}$ e $\widetilde{\mathcal{A}}$ são atratores globais para $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$, então pela invariância de $\mathcal{A}$ e atração de $\widetilde{\mathcal{A}}$, temos

$$\mathrm{dist}(\mathcal{A}, \widetilde{\mathcal{A}}) = \mathrm{dist}(T(t)\mathcal{A}, \widetilde{\mathcal{A}}) \xrightarrow{t\to\infty} 0,$$

com isso $\mathcal{A} \subset \widetilde{\mathcal{A}}$, analogamente $\widetilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$.

Definição 2.1.3. *Seja $C \subset M$ não-vazio, dizemos que*

(i) C é positivamente invariante com respeito ao sistema dinâmico $(T(t), M)$, se $T(t)C \subset C$, para todo $t \geqslant 0$.

(ii) C absorve uniformemente, ou ainda, é uniformemente absorvente com respeito a $(T(t), M)$, se para todo $B \subset M$ limitado existe $t_0 = t_0(B) \geqslant 0$ tal que $T(t)B \subset C$, para todo $t \geqslant t_0$.

Lema 2.1.1. *Seja $(T(t), M)$ um sistema dinâmico. Suponhamos que existe um compacto $K \subset M$ que é positivamente invariante e uniformemente absorvente com respeito a $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$. Além disso, se para todo $t \geqslant 0$ temos $T(t)$ contínua sobre K, então $(T(t), M)$ tem um atrator global.*

Demonstração. Vamos mostrar que o conjunto ω-limite de K,

$$\omega(K) = \{v \in M; \exists\text{'m } (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+ \text{ e } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K \text{ tais que } t_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty \text{ e } T(t_n)v_n \xrightarrow{n\to\infty} v\},$$

é o atrator global para $(T(t), M)$. Primeiramente, $\omega(K)$ é invariante. De fato, considere $v \in \omega(K)$ então existem sequências $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ e $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ com $t_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ e $T(t_n)v_n \xrightarrow{n\to\infty} v$. Note que como K é positivamente invariante temos $T(t_n)v_n \in K$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $t \geqslant 0$ qualquer, pela continuidade de $T(t)$ em K segue que

$$T(t + t_n)v_n \xrightarrow{n\to\infty} T(t)v,$$

logo $T(t)v \in \omega(K)$. Ou seja, para todo $t \geqslant 0$ temos $T(t)\omega(K) \subset \omega(K)$.

Para a inclusão contrária seja $t \geqslant 0$ qualquer. Para todo $t_n \geqslant t$ temos

$$T(t_n)v_n = T(t - t + t_n)v_n = T(t)T(t_n - t)v_n.$$

Como K é positivamente invariante segue que $T(t_n - t)v_n \in K$, para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \geqslant t$. Segue da compacidade de K a existência de $u \in K$ e de uma subsequência de $(T(t_n - t)v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente, ainda denotando essa subsequência por $(T(t_n - t)v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com

$$T(t_n - t)v_n \xrightarrow{n\to\infty} u.$$

Dessa convergência podemos concluir que $u \in \omega(K)$. Além disso, pela continuidade de $T(t)$ sobre K, temos que $T(t_n)v_n \xrightarrow{n\to\infty} T(t)u$. Assim, da unicidade do limite, concluímos que $T(t)u = v$. Logo $v \in T(t)\omega(K)$, obtendo a inclusão contrária.

É fácil notar que $\omega(K) \subset K$. Como $\omega(K)$ é um conjunto fechado e K é compacto, concluímos a compacidade de $\omega(K)$.

Resta verificarmos a atração de $\omega(K)$. Primeiramente mostraremos que $\omega(K)$ atrai K. Para isso suponhamos o contrário, isto é, $\operatorname{dist}(T(t)K, \omega(K)) \not\to 0$ quando $t \to \infty$. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $R > 0$, temos

$$\operatorname{dist}(T(t)K, \omega(K)) > \varepsilon, \text{ para algum } t > R.$$

Assim existe $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ com $t_n \to \infty$ e $\operatorname{dist}(T(t_n)K, \omega(K)) > \varepsilon$, isto é, existe $u_n \in K$ tal que $\mathrm{d}(T(t_n)u_n, \omega(K)) > \varepsilon$. Por sua vez $(T(t_n)u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência no compacto K, logo possui subsequência, a qual ainda denotaremos por $(T(t_n)u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, convergente; isto é, existe $v \in K$ tal que

$$T(t_n)u_n \xrightarrow{n\to\infty} v.$$

Assim $v \in \omega(K)$, logo chegamos a contradição $0 = \lim_{n\to\infty} \mathrm{d}(T(t_n)u_n, \omega(K)) > \varepsilon > 0$. Portanto, dado $\varepsilon > 0$ existe $t_1 \in \mathbb{R}^+$ tal que $\operatorname{dist}(T(t)K, \omega(K)) < \varepsilon$, para todo $t \geqslant t_1$.

Mostraremos agora que $\omega(K)$ atrai limitados. Seja $B \subset M$ limitado, por hipótese K absorve B, ou seja, existe $t_0 \geqslant 0$ tal que $T(t)B \subset K$ para todo $t \geqslant t_0$. Seja $t \geqslant t_0 + t_1$. Temos que

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(T(t)B, \omega(K)) &= \operatorname{dist}(T(t - t_0)T(t_0)B, \omega(K))\\ &\leqslant \operatorname{dist}(T(t - t_0)K, \omega(K)) < \varepsilon.\end{aligned}$$

Portanto $\omega(K)$ atrai B, concluindo a demonstração. □

Definição 2.1.4. *Seja M um espaço métrico. Para todo $K \subset M$ compacto e não-vazio, a dimensão fractal de K é o número*

$$\dim_F(K) := \limsup_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\log(N_\varepsilon^M(K))}{\log(\frac{1}{\varepsilon})},$$

onde $N_\varepsilon^M(K)$ *denota o número mínimo de bolas abertas em* M *com raio* $\varepsilon > 0$ *que são necessárias para cobrir* K*. Quando houver necessidade de explicitar o espaço em que a dimensão fractal é calculada usaremos a notação* $\dim_F^M(K)$*.*

Lema 2.1.2. *Sejam* M, N *espaços métricos,* $C \subset M$ *um subconjunto compacto e* $f\colon M \to N$ *uma função* α*-Hölder contínua sob* C*. Então*

$$\dim_F^N(f(C)) \leqslant \frac{1}{\alpha}\dim_F^M(C).$$

Demonstração. Seja k uma constante da condição de α-Hölder contínua de f, temos

$$f\left(B^M\left(u, \left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right) \subset B^N(f(u), \varepsilon), \tag{2.2}$$

para toda $B^M\left(u, \left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right) \subset C$. De fato, seja $v \in B^M\left(u, \left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)$ note que

$$\|f(u) - f(v)\|_N \leqslant k\|u - v\|_M^\alpha < k\left[\left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^\alpha = \varepsilon.$$

Assim $f(v) \in B^N(f(u), \varepsilon)$, obtendo (2.2).

Denotando $\eta = \left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, se $C = \bigcup_{i=1}^{N_\eta^M(C)} B^M(u_i, \eta)$ então

$$f(C) = \bigcup_{i=1}^{N_\eta^M(C)} f(B^M(u_i, \eta)) \subset \bigcup_{i=1}^{N_\eta^M(C)} B^M(f(u_i), \varepsilon).$$

Logo $N_\varepsilon^N(f(C)) \leqslant N_\eta^M(C)$.

Usando o crescimento da função logaritmo, segue que

$$\frac{\log N_\varepsilon^N(f(C))}{\log \frac{1}{\varepsilon}} \leqslant \frac{\log N_\eta^M(C)}{\log \frac{1}{\varepsilon}} = \frac{\log N_\eta^M(C)}{\log \frac{1}{k\eta^\alpha}} = \frac{\log N_\eta^M(C)}{\alpha \log \frac{1}{\eta} - \log k}.$$

Fazendo o limite superior quando $\varepsilon \to 0^+$, temos que

$$\dim_F^N(f(C)) \leqslant \limsup_{\eta \to 0^+}\left(\frac{\log N_\eta^M(C)}{\alpha \log \frac{1}{\eta} - \log k}\right) = \frac{1}{\alpha}\limsup_{\eta \to 0^+}\left(\frac{\log N_\eta^M(C)}{\log \frac{1}{\eta} - \frac{\log k}{\alpha}}\right) = \frac{1}{\alpha}\dim_F^M(C),$$

afinal

$$\begin{aligned}\limsup_{\eta \to 0^+}\left(\frac{\log N_\eta^M(C)}{\log \frac{1}{\eta} - \frac{\log k}{\alpha}}\right) =& \limsup_{\eta \to 0^+}\left(\frac{\log N_\eta^M(C)}{\log \frac{1}{\eta}}\right)\left(\frac{\log \frac{1}{\eta}}{\log \frac{1}{\eta} - \frac{\log k}{\alpha}}\right)\\ =& \dim_F^M(C)\limsup_{\eta \to 0^+}\frac{\log \frac{1}{\eta}}{\log \frac{1}{\eta} - \frac{\log k}{\alpha}}\\ =& \dim_F^M(C).\end{aligned}$$

□

Lema 2.1.3. *Sejam* E, F *espaços normados tais que* $F \hookrightarrow\hookrightarrow E$*, isto é,* F *está compactamente imerso em* E*, e* $C \subset E$ *limitado. Suponhamos que exista uma aplicação* f*, tal que* $C \subset f(C)$ *e*

$f\colon E\to F$ é Lipschitz contínua em C. Então $\dim_F^E(C)$ é finita.

Demonstração. Seja k a constante de Lipschitz de f. Como $F \hookrightarrow\hookrightarrow E$, temos que

$$B^F(0,1)\subset \overline{B^F(0,1)}^E \subset \bigcup_{1\leqslant i\leqslant N} B^E\left(y_i,\frac{1}{2^2k}\right),$$

onde $y_1,\dots,y_N\in E$. Escolhemos $R>0$ e $u\in C$, de modo que $C\subset B^E(u,R)$. Assim, por (2.2) para $\alpha=1$ e $R=\frac{\varepsilon}{k}$, segue que

$$\begin{aligned}C&\subset f(C)\subset f(B^E(u,R))\subset B^F(f(u),kR)=f(u)+kRB^F(0,1)\\&\subset f(u)+kR\left(\bigcup_{1\leqslant i\leqslant N} B^E\left(y_i,\frac{1}{2^2k}\right)\right)\\&=\bigcup_{1\leqslant i\leqslant N} B^E\left(\hat{u}_i,\frac{R}{2^2}\right),\end{aligned}$$

onde $\hat{u}_i=f(u)+kRy_i\in E$. Podemos assumir que $C\cap B^E(\hat{u}_i,\frac{R}{4})\neq\emptyset$, o que nos garante que

$$C\subset \bigcup_{1\leqslant i\leqslant N} B^E\left(u_i,\frac{R}{2}\right), \tag{2.3}$$

onde $u_i\in C$.

Agora, considerando (2.3), temos

$$C\subset f(C)\subset f\left(\bigcup_{1\leqslant i\leqslant N} B^E\left(u_i,\frac{R}{2}\right)\right)\subset \bigcup_{1\leqslant i\leqslant N} B^F\left(f(u_i),k\frac{R}{2}\right)\subset \bigcup_{1\leqslant i\leqslant N^2} B^E\left(\hat{\hat{u}}_i,\frac{R}{2^3}\right),$$

onde $\hat{\hat{u}}_i=f(u_i)+k\frac{R}{2}y_i$. Podemos assumir que $C\cap B^E(\hat{\hat{u}}_i,\frac{R}{2^3})\neq\emptyset$, o que nos garante que

$$C\subset \bigcup_{1\leqslant i\leqslant N^2} B^E\left(v_i,\frac{R}{2^2}\right),$$

onde $v_i\in C$.

Repetindo esta argumentação, concluímos que $N^E_{\frac{R}{2^n}}(C)\leqslant N^n$, para todo $n\in\mathbb{N}$. Com isso, para qualquer $\varepsilon\leqslant R$, positivo, existe $\mathbb{N}\ni n\geqslant 0$ tal que $\frac{R}{2^n}\geqslant\varepsilon>\frac{R}{2^{n+1}}$, então $N^E_\varepsilon(C)\leqslant N^E_{\frac{R}{2^{n+1}}}(C)\leqslant N^{n+1}$, logo

$$\frac{\log N^E_\varepsilon(C)}{\log(\frac{1}{\varepsilon})}\leqslant\frac{(n+1)\log N}{\log(\frac{2^n}{R})}=\frac{(n+1)\log N}{n\log 2-\log R}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}\dim_F^E(C)&=\limsup_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\log N^E_\varepsilon(C)}{\log\frac{1}{\varepsilon}}\\&\leqslant\limsup_{n\to\infty}\frac{(n+1)\log N}{n\log 2-\log R}=\limsup_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\log N}{\log 2-\frac{\log R}{n}}=\frac{\log N}{\log 2}.\end{aligned}$$

□

Definição 2.1.5. *Sob as hipóteses do Lema 2.1.1 dizemos que um conjunto $\mathcal{E} \subset K$ é atrator exponencial com respeito ao sistema dinâmico $(T(t), K)$ se*

(i) $\mathcal{E}$ *é compacto,*

(ii) $\mathcal{E}$ *é positivamente invariante com respeito a* $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$*,*

(iii) $\dim_F(\mathcal{E})$ *é finita e*

(iv) existem constantes $c_1, c_2 > 0$ *tais que*

$$\mathrm{dist}(T(t)K, \mathcal{E}) \leqslant c_1 \mathrm{e}^{-c_2 t}, \qquad \text{para todo } t \geqslant 0.$$

Comparado com o atrator global, o atrator exponencial é esperado ser mais robusto sob perturbações. Apesar disso, diferentemente do atrator global, um atrator exponencial não é necessariamente único, pois se $\mathcal{E}$ é um atrator exponencial então $T(t)\mathcal{E}$ também é atrator exponencial associado ao sistema dinâmico $(T(t), K)$, para todo $t \geqslant 0$. Assim, a construção do atrator exponencial depende do algoritmo considerado.

Observamos que, se $\mathcal{A}$ é uma atrator global associado ao sistema dinâmico $(T(t), K)$ então necessariamente $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$. Afinal,

$$\mathrm{dist}(\mathcal{A}, \mathcal{E}) = \mathrm{dist}(T(t)\mathcal{A}, \mathcal{E}) \leqslant \mathrm{dist}(T(t)K, \mathcal{E}) \leqslant c_1 \mathrm{e}^{-c_2 t} \xrightarrow{t\to\infty} 0.$$

A ideia básica por trás do atrator exponencial é ampliar o atrator global de modo que a taxa de convergência se torne exponencial, mantendo ainda boas propriedades. O lema seguinte resume um critério de existência de atrator exponencial obtido em [16].

Lema 2.1.4. *Sejam H um espaço de Hilbert e $K \subset H$ satisfazendo as hipóteses do Lema 2.1.1. Suponhamos que exista $\tau > 0$, tal que*

(A1) $T(\tau)\colon H \to H$ *é Lipschitz contínua em* K*,*

(A2) existe $\delta \in (0, \frac{1}{4})$ *e uma projeção ortogonal* $P\colon H \to H$ *de dimensão finita tal que, para todo* $x_1, x_2 \in K$*, temos*

$$\|T(\tau)x_1 - T(\tau)x_2\|_H \leqslant \sqrt{2}\|P(T(\tau)x_1 - T(\tau)x_2)\|_H$$

ou

$$\|T(\tau)x_1 - T(\tau)x_2\|_H \leqslant \delta\|x_1 - x_2\|_H,$$

(A3) a aplicação $G\colon H \times [0, \tau] \to H$ *definida por* $G(x,t) := T(t)x$ *é Hölder contínua em* $K \times [0, \tau]$.

Então o sistema dinâmico $(T(t), K)$ *possui um atrator exponencial.*

O item (A2) do Lema 2.1.4 é conhecido como **propriedade squeezing**.

Lema 2.1.5. *Sejam E um espaço normado e H um espaço de Hilbert tais que $E \hookrightarrow\hookrightarrow H$. Então, para qualquer $\epsilon > 0$ dado existe um subespaço finito-dimensional $H^n \subset H$ tal que, denotando por $P\colon H \to H^n$ a projeção ortogonal sobre H^n, temos*

$$\|(I - P)u\|_H \leqslant \epsilon\|u\|_E, \qquad \text{para todo } u \in E.$$

Demonstração. Seja $u \in S = \{v \in E; \|v\|_E = 1\}$. Como $E \hookrightarrow\hookrightarrow H$ segue que $\overline{S} \subset H$ compacto, assim existem $u_1, u_2, \ldots, u_n \in H$ tais que

$$S \subset \overline{S} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(u_i, \epsilon).$$

Considere $H^n = \text{span}\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$. Se $u \in S \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(u_i, \epsilon)$, então existe $x \in H^n$ tal que $\|u - x\|_H < \epsilon$. Segue do Teorema 1.2.3 que $\|u - Pu\|_H \leqslant \|u - x\|_H < \epsilon$.

Em geral, se $u \in E \setminus \{0\}$ temos

$$\left\| \frac{u}{\|u\|_E} - P\left(\frac{u}{\|u\|_E}\right) \right\|_H < \epsilon,$$

logo $\|u - Pu\|_H < \epsilon \|u\|_E$. Portanto

$$\|(I - P)u\|_H \leqslant \epsilon \|u\|_E, \qquad \text{para todo } u \in E.$$

□

A título de completude do trabalho enunciamos o conhecido Lema de Aubin-Lions. Para mais detalhes consulte [41].

Lema 2.1.6. *Sejam $p_1 \in (1, \infty]$ e $p_2 \in [1, \infty)$. Sejam X um espaço de Banach e Y, Z espaços de Banach separáveis e reflexivos de modo que $Y \hookrightarrow\hookrightarrow X \hookrightarrow Z$. Então para todo $T \in (0, \infty)$,*

$$\{u \in L^{p_1}(0, T; Y); u' \in L^{p_2}(0, T; Z)\} \hookrightarrow\hookrightarrow L^{p_1}(0, T; X).$$

2.2 Condições para existência de atrator global e exponencial para (2.1) via método das ℓ-trajetórias

Em ordem apresentamos as hipóteses necessárias para garantir a existência de atrator finito-dimensional e exponencial para (2.1). Iniciamos com a noção de solução e a definição da dinâmica sobre o espaço das l-trajetórias.

Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$,$(Y, \|\cdot\|_Y)$ e $(Z, \|\cdot\|_Z)$ três espaços de Banach, Y, Z reflexivos e separáveis tais que

$$Y \hookrightarrow\hookrightarrow X \qquad \text{e} \qquad X \hookrightarrow Z.$$

Para $p_1 \in [2, \infty)$, $p_2 \in [1, \infty)$ e $\tau > 0$ fixados nos denotamos

$$X_\tau := L^2(0, \tau; X),$$

e

$$Y_\tau := \{u \in L^{p_1}(0, \tau; Y); u' \in L^{p_2}(0, \tau; Z)\}.$$

Como $p_1 \geqslant 2$, então $L^{p_1}(0, \tau; X) \hookrightarrow L^2(0, \tau; X) = X_\tau$. Segue, do Lema 2.1.6, que

$$Y_\tau \hookrightarrow\hookrightarrow X_\tau.$$

De agora em diante, entendemos por solução de (2.1) no intervalo $[0, \tau]$, com dado inicial u_0, uma função $u \in Y_\tau$ tal que $u \colon [0, \tau] \to (X, \sigma(X, X'))$ é contínua e satisfaz (2.1) em algum sentido fraco escolhido. Aqui $\sigma(X, X')$ denota a topologia fraca em X.

Vamos requerer,

(H1) Para todo $u_0 \in X$ e $T > 0$ qualquer, existe, e não é necessariamente única, $u \in Y_T$ com $u\colon [0,T] \to (X, \sigma(X,X'))$ contínua, uma solução para (2.1) em $[0,T]$ com $u(0) = u_0$. Além disso, para toda solução, a estimativa de $\|u\|_{Y_T}$ é uniforme com respeito a $\|u(0)\|_X$.

(H2) Existe um limitado $B_0 \subset X$ com as seguintes propriedades: se u é uma solução arbitrária de (2.1) com condição $u(0) = u_0 \in X$

(i) existe $t_0 = t_0(\|u_0\|_X) > 0$ tal que $u(t) \in B_0$, para todo $t \geqslant t_0$;

(ii) se $u_0 \in B_0$ então $u(t) \in B_0$, para todo $t \geqslant 0$.

Seja $\ell > 0$ um número fixado arbitrariamente. Por ℓ-trajetória entendemos como sendo qualquer solução de (2.1) definida em um intervalo de tempo $[0,\ell]$. O conjunto de todas as $\ell-$trajetórias é denotado por $\mathfrak{X}_\ell$ e munido com a topologia de $X_\ell = L^2(0,\ell;X)$.

Como uma ℓ-trajetória $\chi\colon [0,\ell] \to (X,\sigma(X,X'))$ é contínua, faz sentido considerar o valor pontual de uma ℓ-trajetória. Porém, é possível que mais de uma ℓ-trajetória inicie em $u_0 \in X$, já que não foi exigida unicidade de solução, logo iremos impor que

(H3) Cada ℓ-trajetória tem, entre todas as soluções, continuação única.

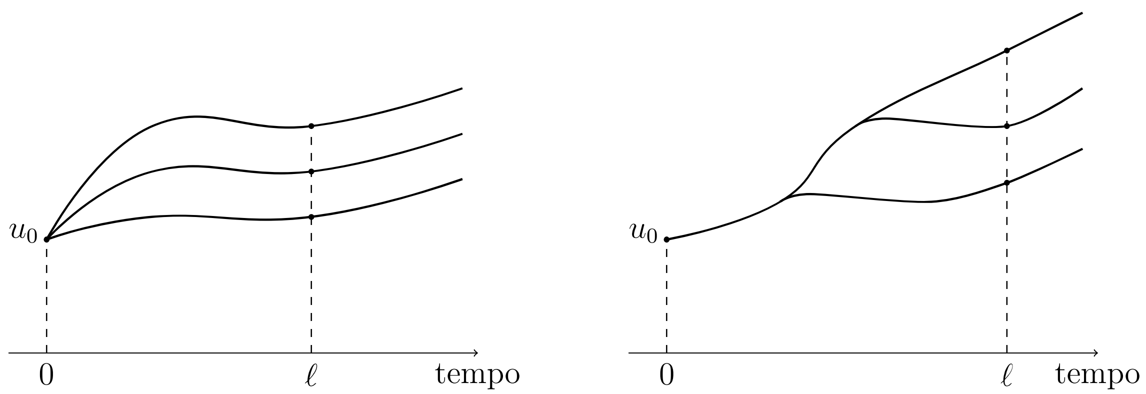

Figura 2.5: Continuação única da solução

Em outras palavras, de um ponto final de uma ℓ-trajetória se inicia no máximo uma solução de (2.1), Figura 2.5. Combinando com a Hipótese (H1), que trata a existência global de solução, temos em particular que dada $\chi \in \mathfrak{X}_\ell$ e $T > \ell$ existe uma única solução u de (2.1), em $[0,T]$, tal que $\chi = u|_{[0,\ell]}$.

Usando as Hipóteses (H1) e (H3) podemos definir o semigrupo $\{L(t)\}_{t\geqslant 0}$, em $\mathfrak{X}_\ell$, por

$$\begin{aligned} L(t)\colon \mathfrak{X}_\ell \to\ & \mathfrak{X}_\ell \\ \chi \mapsto\ & L(t)\chi\colon [0,\ell] \to X \\ & \qquad\qquad \theta \mapsto u(t+\theta), \end{aligned} \tag{2.4}$$

onde u é a única solução de (2.1) em $[0, t+\ell]$, tal que $\chi = u|_{[0,\ell]}$, conforme Figura 2.6.

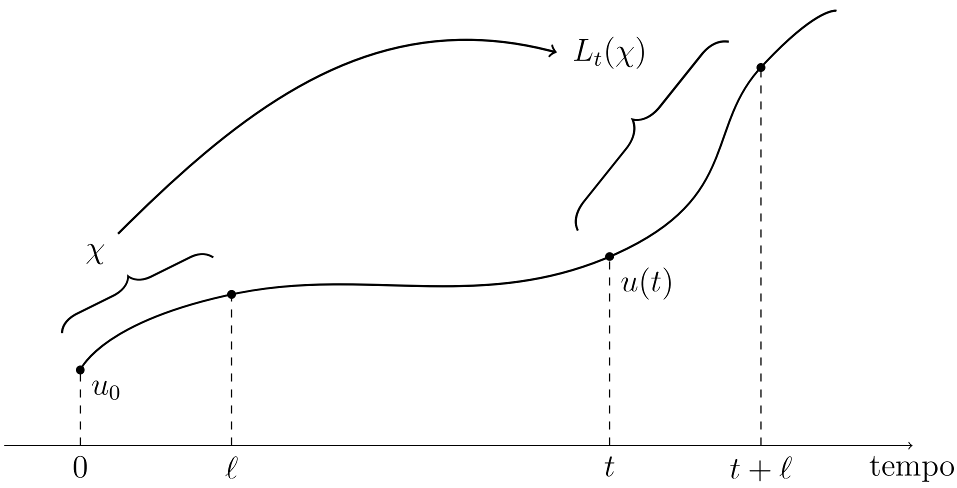

Figura 2.6: Atuação do operador $L(t)$ em $\mathfrak{X}_\ell$

2.2.1 Existência e finitude da dimensão fractal do atrator de ℓ-trajetórias

Definimos $\mathcal{B}_\ell^0$ como o conjunto de todas as $\ell-$trajetórias começando em qualquer ponto do conjunto B_0, considerado na Hipótese (H2). Simbolicamente

$$\mathcal{B}_\ell^0 = \{\chi \in \mathfrak{X}_\ell; \chi(0) \in B_0\}. \tag{2.5}$$

Devido à (H2) temos que $\mathcal{B}_\ell^0$ é positivamente invariante com respeito a $\{L(t)\}_{t\geqslant 0}$. De fato, seja $\chi \in \mathcal{B}_\ell^0$. Dado $t \geqslant 0$, temos

$$(L(t)\chi)(\tau) = u(t+\tau), \text{ para cada } \tau \in [0, \ell],$$

onde u é a única solução de (2.1) em $[0, t+\ell]$ tal que $\chi = u|_{[0,\ell]}$. Como $\chi(0) = u(0) \in B_0$, de (H2), segue que $u|_{\mathbb{R}^+} \in B_0$. Assim, $(L(t)\chi)(0) = u(t) \in B_0$, implicando que $L(t)\chi \in \mathcal{B}_\ell^0$, para todo $t \geqslant 0$. Portanto $L(t)(\mathcal{B}_\ell^0) \subset \mathcal{B}_\ell^0$, para todo $t \geqslant 0$.

Adicionalmente iremos supor,

(H4) Para todo $t > 0$, $L(t)\colon \mathfrak{X}_\ell \to \mathfrak{X}_\ell$ é contínua em $\mathcal{B}_\ell^0$,

(H5) Para algum $\tau > 0$, temos $\overline{L(\tau)(\mathcal{B}_\ell^0)}^{X_\ell} \subset \mathcal{B}_\ell^0$.

A Hipótese (H5) representa um ponto crucial sobre o problema de incompletude de $\mathfrak{X}_\ell$, pois ela afirma que o fecho de $L(\tau)(\mathcal{B}_\ell^0)$ está contido em $\mathfrak{X}_\ell$, assim temos o espaço completo $\overline{L(\tau)(\mathcal{B}_\ell^0)}^{X_\ell}$ contido no espaço de $\ell-$trajetórias.

Defina

$$\mathcal{B}_\ell^1 := \overline{L(\tau)(\mathcal{B}_\ell^0)}^{X_\ell}. \tag{2.6}$$

No próximo resultado, com objetivo de garantir a existência de atrator global para $(L(t), \mathfrak{X}_\ell)$, iremos verificar que $\mathcal{B}_\ell^1$ está nas condições do Lema 2.1.1.

Considere as hipóteses alternativas para (H1) e (H5),

(H1)' Para todo $u_0 \in X$ e $T > 0$ qualquer, existe, não necessariamente única, solução u para (2.1) em $[0, T]$, com $u(0) = u_0$ e $u\colon [0, T] \to (X, \sigma(X, X'))$ contínua.

(H5)' $\mathcal{B}_\ell^0$ é compacto em $X_\ell = L^2(0,\ell;X)$.

Com as Hipóteses $(H1)'$ e (H3), podemos definir $\{L(t)\}_{t\geqslant 0}$ tal como em (2.4).

Teorema 2.2.1. *(i) Suponhamos* (H1)-(H5)*. Então o sistema dinâmico* $(L(t),\mathfrak{X}_\ell)$ *possui um atrator global* $\mathcal{A}_\ell$*.*

(ii) Suponhamos $(H1)'$, (H2)-(H4) *e* $(H5)'$*. Então o sistema dinâmico* $(L(t),\mathfrak{X}_\ell)$ *possui um atrator global* $\mathcal{A}_\ell$*.*

Demonstração. Vamos iniciar demonstrando o item (i). Considere $\mathcal{B}_\ell^1$ como definido em (2.6), claro que $\mathcal{B}_\ell^1$ é fechado em X_ℓ.

Dada $\chi \in L(\tau)(\mathcal{B}_\ell^0)$ qualquer, temos $\chi(0) \in B_0$. Assim, pela Hipótese (H2) deve existir uma constante $k > 0$ tal que $\|\chi(0)\|_X \leqslant k$, por sua vez de (H1) temos a existência de uma constante $c = c(k) > 0$ tal que

$$\|\chi\|_{Y_\ell} \leqslant c.$$

Portanto $L(\tau)(\mathcal{B}_\ell^0)$ é limitado em Y_ℓ. Como $Y_\ell \hookrightarrow\hookrightarrow X_\ell$ segue que $\overline{L(\tau)(\mathcal{B}_\ell^0)}^{X_\ell}$ é compacto em X_ℓ, isto é, $\mathcal{B}_\ell^1$ é um subconjunto compacto de $\mathfrak{X}_\ell$.

Segue, da Hipótese (H4) e de $\mathcal{B}_\ell^0$ ser positivamente invariante, que

$$\begin{aligned} L(t)\mathcal{B}_\ell^1 =& L(t)(\overline{L(\tau)(\mathcal{B}_\ell^0)}^{X_\ell}) \subset \overline{L(t)(L(\tau)\mathcal{B}_\ell^0)}^{X_\ell} \\ =& \overline{L(t+\tau)\mathcal{B}_\ell^0}^{X_\ell} = \overline{L(\tau)(L(t)\mathcal{B}_\ell^0)}^{X_\ell} \\ \subset& \overline{L(\tau)(\mathcal{B}_\ell^0)}^{X_\ell} = \mathcal{B}_\ell^1, \end{aligned}$$

para todo $t \geqslant 0$. Logo $\mathcal{B}_\ell^1$ é positivamente invariante com respeito a $\{L(t)\}_{t\geqslant 0}$.

Por fim vamos mostrar que $\mathcal{B}_\ell^1$ é uniformemente absorvente com respeito a $\{L(t)\}_{t\geqslant 0}$. Para isso é suficiente demonstrar a absorção uniforme de $\mathcal{B}_\ell^0$; de fato, se $\mathcal{B}_\ell^0$ é uniformemente absorvente então, dado $D \subset \mathfrak{X}_\ell$ limitado, existe $t_0 = t_0(D) \geqslant 0$ tal que

$$L(t)(D) \subset \mathcal{B}_\ell^0,$$

para todo $t \geqslant t_0$. Seja $t_1 := t_0 + \tau$. Para todo $t \geqslant t_1$ temos que $t - \tau \geqslant t_0$, assim

$$L(t-\tau)(D) \subset \mathcal{B}_\ell^0 \;\Rightarrow\; L(\tau)L(t-\tau)(D) \subset L(\tau)\mathcal{B}_\ell^0 \subset \overline{L(\tau)\mathcal{B}_\ell^0} \;\Rightarrow\; L(t)(D) \subset \mathcal{B}_\ell^1,$$

Portanto $\mathcal{B}_\ell^1$ é uniformemente absorvente.

Com o objetivo de demonstrar que $\mathcal{B}_\ell^0$ é uniformemente absorvente com respeito à $(T(t),\mathfrak{X}_\ell)$, considere um conjunto limitado $\mathcal{B} \subset \mathfrak{X}_\ell$ e seja C sua constante de limitação. Assim, dada $\chi \in \mathcal{B}$ temos $\|\chi\|_{\mathfrak{X}_\ell} \leqslant C$, ou ainda,

$$0 \leqslant \int_0^\ell \|\chi(s)\|_X^2\, ds = \|\chi\|_{\mathfrak{X}_\ell}^2 \leqslant C^2.$$

Se $\|\chi(t)\|_X > \frac{C}{\sqrt{\ell}}$, para todo $t \in [0,\ell]$, então

$$\int_0^\ell \|\chi(t)\|_X^2\, dt > \int_0^\ell \frac{C^2}{\ell}\, dt = C^2,$$

com isso deve existir $\tau \in [0,\ell]$ tal que $\|\chi(\tau)\|_X \leqslant \frac{C}{\sqrt{\ell}}$. Seja u a continuação única da ℓ-trajetória

χ, a existência segue de (H3). Considere

$$t \overset{\widetilde{u}}{\mapsto} u(t+\tau), \quad t \in [0,\ell]$$

note que $\widetilde{u}(0) = u(\tau) = \chi(\tau)$. Por (H2), existe $t_1 = t_1(\|\chi(\tau)\|_X) = t_1(C) > 0$ tal que $\widetilde{u}(t) \in B^0$, para todo $t \geqslant t_1$. Com isso, para todo $t \geqslant t_1 + \ell \geqslant t_1 + \tau$, temos $u(t) \in B^0$, já que

$$u(t) = u(t-\tau+\tau) = \tilde{u}(t-\tau) \in B^0, \quad \text{pois } t-\tau \geqslant t_1.$$

Seja $t_0 := t_1 + \ell$. Dado $t \geqslant t_0$ temos que $L(t)\chi(0) = u(t) \in B^0$, isto é, $L(t)\chi \in \mathcal{B}^0_\ell$. Portanto existe $t_0 = t_0(C) > 0$ tal que $L(t)\mathcal{B} \subset \mathcal{B}^0_\ell$, para todo $t \geqslant t_0$; ficando demonstrado que $\mathcal{B}^0_\ell$ é uniformemente absorvente.

Aplicando o Lema 2.1.1 para $K = \mathcal{B}^1_\ell$, $T(t) = L(t)$ e $X = \mathfrak{X}_\ell$ temos a existência de atrator global $\mathcal{A}_\ell$ para $(L(t), \mathfrak{X}_\ell)$.

Para o item (ii), já mostramos que $\mathcal{B}^0_\ell$ é uniformemente absorvente com respeito a $(L(t), \mathfrak{X}_\ell)$. Usando (H2), verificamos que $\mathcal{B}^0_\ell$ é positivamente invariante com respeito a $(L(t), \mathfrak{X}_\ell)$. Juntamente com (H4), temos que $\mathcal{B}^0_\ell$ satisfaz as hipóteses do Lema 2.1.1. Logo, $(L(t), \mathfrak{X}_\ell)$ possui um atrator global $\mathcal{A}_\ell$. □

A hipótese que lida com a finitude da dimensão fractal e que também é um passo chave na construção do atrator exponencial é a seguinte

(H6) Existe um espaço W_ℓ com $W_\ell \hookrightarrow\hookrightarrow X_\ell$ e $\tau > 0$ tal que $L(\tau)\colon X_\ell \to W_\ell$ é Lipschitz contínua em $\mathcal{B}^1_\ell$.

Vale a pena destacar um espaço onde a Hipótese (H6) pode ser verificada, tipicamente, com

$$W_\ell = \{u \in L^2(0,\ell;W); u' \in L^1(0,\ell;U')\},$$

onde $W \hookrightarrow\hookrightarrow X$ e U é algum espaço de funcionais suficientemente regulares.

Teorema 2.2.2. *(i) Suponhamos* (H1)-(H6). *Então a dimensão fractal de $\mathcal{A}_\ell$ em X_ℓ é finita.*

(ii) Suponhamos (H1)′, (H2)-(H4)*, (H5)′ e* (H6). *Então a dimensão fractal de $\mathcal{A}_\ell$ em X_ℓ é finita.*

Demonstração. Aplicamos o Lema 2.1.3 com $E = X_\ell$, $F = W_\ell$, $f = L(t)$ e $C = \mathcal{A}_\ell$. Como $\mathcal{A}_\ell \subset X_\ell$ é um compacto, $L(t)\mathcal{A}_\ell = \mathcal{A}_\ell$ e (H6) é satisfeita, temos todas as hipóteses do Lema 2.1.3 verificadas. □

2.2.2 Existência e finitude da dimensão fractal do atrator no espaço fase de origem

Introduzimos agora a aplicação $\mathbf{e}\colon \mathfrak{X}_\ell \to X$, que a cada ℓ-trajetória associa seu ponto final, ou seja,

$$\mathbf{e}(\chi) = \chi(\ell), \quad \forall \chi \in \mathfrak{X}_\ell.$$

Desse modo, construímos uma conexão entre os espaços $\mathfrak{X}_\ell$ e X. Note que devido a continuidade fraca das soluções, presente na Hipótese (H1), a aplicação $\mathbf{e}$ está bem definida.

Seja
$$B_1 := \mathbf{e}(\mathcal{B}^1_\ell).$$

Com relação a aplicação $\mathbf{e}$, fazemos a seguinte suposição,

(H7) $\mathbf{e}\colon \mathfrak{X}_\ell \to X$ é contínua em $\mathcal{B}^1_\ell$.

Iremos definir o semigrupo associado as soluções de (2.1) em B_1. Para isso, precisamos mostrar que se $u_0 \in B_1$, então existe única solução u de (2.1) com $u(0) = u_0$, de modo que $u(t) \in B_1$, para todo $t \geqslant 0$.

Seja $u_0 \in B_1 = \mathbf{e}(\overline{L(\tau)\mathcal{B}^0_\ell}^{X_\ell})$, existe $\chi_0 \in \overline{L(\tau)\mathcal{B}^0_\ell}^{X_\ell}$ de modo que $u_0 = \chi_0(\ell)$. Por sua vez, como $\chi_0 \in \overline{L(\tau)\mathcal{B}^0_\ell}^{X_\ell}$, existe sequência $(\chi_{n,0})_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{B}^0_\ell$, tal que

$$L(\tau)\chi_{n,0} \xrightarrow{n\to\infty} \chi_0, \qquad \text{em } X_\ell.$$

Seja $t > \ell$. Pela continuidade do operador $L(t-\ell)$ em $\mathcal{B}^0_\ell$, devido a Hipótese (H4), e por (H5) podemos concluir que

$$L(\tau)(L(t-\ell)\chi_{n,0}) = L(t-\ell)(L(\tau)\chi_{n,0}) \xrightarrow{n\to\infty} L(t-\ell)\chi_0, \qquad \text{em } X_\ell.$$

Segue da continuidade da aplicação e, Hipótese (H7), que

$$\mathbf{e}(L(\tau)(L(t-\ell)\chi_{n,0})) \xrightarrow{n\to\infty} \mathbf{e}(L(t-\ell)\chi_0), \qquad \text{em } X.$$

Como $\mathcal{B}^0_\ell$ é positivamente invariante com respeito a $\{L(t)\}_{t\geqslant 0}$, temos que $L(t-\ell)\chi_{n,0} \in \mathcal{B}^0_\ell$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Ou seja, $\mathbf{e}(L(t-\ell)\chi_0) \in \overline{\mathbf{e}(L(\tau)(\mathcal{B}^0_\ell))}^X$, para todo $t \geqslant \ell$. Por sua vez,

$$\begin{aligned} L(t-\ell)\chi_0\colon [0,\ell] &\to X \\ \theta &\mapsto v(\theta + t - \ell), \end{aligned}$$

onde v é a única solução de (2.1), com $v|_{[0,\ell]} = \chi_0$. Assim,

$$\mathbf{e}(L(t-\ell)\chi_0) = (L(t-\ell)\chi_0)(\ell) = v(t),$$

logo $v(t) \in \overline{\mathbf{e}(L(\tau)(\mathcal{B}^0_\ell))}^X$, para todo $t \geqslant \ell$.

Seja
$$\begin{aligned} u\colon \mathbb{R}^+ &\to X \\ \theta &\mapsto v(\theta + \ell), \end{aligned}$$

temos por (H3), que u é a única solução de (2.1) com $u(0) = u_0$. Logo, concluímos que $u(t) \in \overline{\mathbf{e}(L(\tau)(\mathcal{B}^0_\ell))}^X$, para todo $t \geqslant 0$. Portanto,

$$u(t) \in \overline{\mathbf{e}(L(\tau)(\mathcal{B}^0_\ell))}^X \subset \overline{\mathbf{e}(\mathcal{B}^1_\ell)}^X = \mathbf{e}(\mathcal{B}^1_\ell) = B_1, \quad \forall t \geqslant 0. \tag{2.7}$$

Para todo $t \geqslant 0$, podemos definir o semigrupo

$$\begin{aligned} T(t)\colon B_1 &\to B_1 \\ u_0 &\mapsto T(t)u_0 = u(t; u_0), \end{aligned}$$

onde $u(t;u_0)$ denota a única solução de (2.1) com $u(0) = u_0$, calculada no instante de tempo t. Além disso, concluímos de (2.7) que B_1 é positivamente invariante com respeito a $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$.

Observação 2.2.1. *Seja $\psi \in \mathcal{A}_\ell$. Então $T(t)(\mathbf{e}(\psi)) = T(t)(\psi(\ell)) = \tilde{\psi}(t+\ell)$, onde $\tilde{\psi}$ e a única solução de* (2.1) *começando em $\psi(\ell)$. Naturalmente, $\psi(\ell) \in B_1$, pois $\psi(\ell) = \mathbf{e}(\psi) \in \mathbf{e}(\mathcal{A}_\ell) \subset \mathbf{e}(\mathcal{B}_\ell^1) = B_1$.*

Por outro lado temos, $\mathbf{e}(L(t)(\psi)) = \mathbf{e}(\tau \overset{\tau\in[0,\ell]}{\longmapsto} \tilde{\psi}(t+\tau)) = \tilde{\psi}(t+\ell)$. Assim a aplicação **e** *e os semigrupos $T(t)$ e $L(t)$, satisfazem a seguinte relação*

$$T(t)(\mathbf{e}(\mathcal{A}_\ell)) = \mathbf{e}(L(t)\mathcal{A}_\ell).$$

Definamos

$$\mathcal{A} := \mathbf{e}(\mathcal{A}_\ell). \tag{2.8}$$

Obtemos o seguinte resultado.

Teorema 2.2.3. *(i) Sejam* (H1)-(H5) *e* (H7) *satisfeitas. Então $\mathcal{A}$ definido como em* (2.8) *é um atrator global para o sistema dinâmico $(T(t), B_1)$.*

(ii) Sejam $(H1)'$, (H2)-(H4) *e $(H5)'$ satisfeitas, além disso, assumimos* (H7) *substituindo $\mathcal{B}_\ell^1$ por $\mathcal{B}_\ell^0$. Então, $\mathcal{A}$ definido como em* (2.8) *é um atrator global para o sistema dinâmico $(T(t), \mathbf{e}(\mathcal{B}_\ell^0))$.*

Demonstração. Segue do Teorema 2.2.1 a existência de $\mathcal{A}_\ell$ atrator global para $(L(t), \mathfrak{X}_\ell)$. Sabemos ainda que $\mathcal{A}_\ell = \omega(\mathcal{B}_\ell^1) \subset \mathcal{B}_\ell^1$ e pela Hipótese (H7), temos **e** contínua em $\mathcal{A}_\ell$. Logo, como $\mathcal{A}_\ell$ é compacto em $\mathfrak{X}_\ell$, segue que $\mathcal{A}$, definido em (2.8), é compacto em X. Além disso, pela Observação 2.2.1,

$$T(t)(\mathcal{A}) = T(t)(\mathbf{e}(\mathcal{A}_\ell)) = \mathbf{e}(L(t)(\mathcal{A}_\ell)) = \mathbf{e}(\mathcal{A}_\ell) = \mathcal{A}.$$

Para verificarmos que $\mathcal{A}$ atrai limitados, procedemos por contradição. Suponhamos que existem sequências $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B_1$ e $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$, com $t_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, e existe $\delta > 0$ tais que

$$\mathrm{d}(T(t_n)u_n, \mathcal{A}) \geqslant \delta. \tag{2.9}$$

Por definição de B_1, existe sequência $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}_\ell^1$ com $\mathbf{e}(\chi_n) = u_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\mathcal{B}_\ell^1$ é compacto em $\mathfrak{X}_\ell$, então $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em X_ℓ, e por $\mathcal{A}_\ell$ ser atrator global com respeito a $\{L(t)\}_{t\geqslant 0}$, temos, extraindo uma subsequência se necessário, que

$$L(t_n)\chi_n \xrightarrow{n\to\infty} \chi \in \mathcal{A}_\ell.$$

Pela continuidade da aplicação **e**, segue que

$$T(t_n)u_n = T(t_n)(\mathbf{e}(\chi_n)) = \mathbf{e}(L(t_n)\chi_n) \xrightarrow{n\to\infty} \mathbf{e}(\chi) \in \mathcal{A},$$

o que contradiz (2.9).

A demonstração do item *(ii)* pode ser feita analogamente, substituindo $\mathcal{B}_\ell^1$ por $\mathcal{B}_\ell^0$. □

Observação 2.2.2. *O atrator $\mathcal{A}$ também é atrator global para o sistema dinâmico* (2.1) *no espaço X, no seguinte sentido, se $B \subset X$ é um conjunto limitado e B_t denota o conjunto de todos os valores de todas as soluções de* (2.1) *começando em B, no tempo t, então*

$$\mathrm{dist}^X(B_t, \mathcal{A}) \xrightarrow{t\to\infty} 0.$$

De fato, seja $\mathcal{B} = \{\chi \in \mathfrak{X}_\ell; \chi(0) \in B\}$, claro que $\mathcal{B}$ é limitado. Vimos na demonstração do Teorema 2.2.1 a propriedade de absorção uniforme de $\mathcal{B}_\ell^1$, em particular existe $t_0 = t_0(\mathcal{B}) \geqslant 0$

tal que $L(t)\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_\ell^1$, *para todo* $t \geqslant t_0$. *Assim, para todo* $t \geqslant t_0$,

$$T(t)(\mathbf{e}(\mathcal{B})) = \mathbf{e}(L(t)\mathcal{B}) \subset \mathbf{e}(\mathcal{B}_\ell^1) = B_1.$$

Como B_1 *é positivamente invariante com respeito a* $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$, *fixado* $\tau \geqslant 0$, *temos*

$$T(\tau + t)(\mathbf{e}(\mathcal{B})) = T(\tau)T(t)(\mathbf{e}(\mathcal{B})) \subset T(\tau)(B_1) \subset B_1,$$

para todo $t \geqslant t_0$. *Ou seja,* $B_t \subset B_1$, *para todo* $t \geqslant \tau + t_0$. *Seja* $t = t_1 + \tau + t_0$, *com* $t_1 \geqslant 0$, *temos que*

$$B_t = T(t)(\mathbf{e}(\mathcal{B})) = T(t_1)T(\tau + t_0)(\mathbf{e}(\mathcal{B})) = T(t_1)B_{\tau+t_0} \subset T(t_1)B_1 = T(t - (t_0 + \tau))B_1.$$

Logo, $B_t \subset T(t-(t_0+\tau))B_1$, *para* t *suficientemente grande, implicando que* $\operatorname{dist}^X(B_t, \mathcal{A}) \xrightarrow{t\to\infty} 0$.

Se fortalecemos (H7) e exigirmos que

(H8) $\mathbf{e}\colon \mathfrak{X}_\ell \to X$ é α-Hölder contínua em $\mathcal{B}_\ell^1$,

temos o seguinte resultado.

Teorema 2.2.4. *(i) Suponhamos* (H1)-(H6) *e* (H8). *Então a dimensão fractal de* $\mathcal{A}$ *em* X *é finita e*

$$\dim_F^X(\mathcal{A}) \leqslant \frac{1}{\alpha} \dim_F^{X_\ell}(\mathcal{A}_\ell) \tag{2.10}$$

(ii) Suponhamos (H1)′, (H2)-(H4), *(H5)′ e* (H8). *Então a dimensão fractal de* $\mathcal{A}$ *em* X *é finita e obtemos* (2.10).

Demonstração. Basta aplicarmos o Lema 2.1.2 para $M = \mathfrak{X}_\ell$, $N = X$, $f = e$ e $C = \mathcal{A}_\ell$ para obtermos (2.10). O Teorema 2.2.2 conclui a demonstração. □

2.2.3 Atrator exponencial para (2.1)

Primeiramente vamos construir o atrator exponencial no espaço das $\ell-$trajetórias. Para isso exigimos,

(H9) Para todo $\tau > 0$, os operadores $L(t)\colon \mathfrak{X}_\ell \to \mathfrak{X}_\ell$ são uniformemente Lipschitz contínuos em $\mathcal{B}_\ell^1$, com respeito a $t \in [0,\tau]$, ou seja, existe constante L > 0 tal que, para toda $\chi_1, \chi_2 \in \mathcal{B}_\ell^1$ e $t \in [0,\tau]$, temos
$$\|L(t)\chi_1 - L(t)\chi_2\|_{X_\ell} \leqslant \mathrm{L}\|\chi_1 - \chi_2\|_{X_\ell}.$$

(H10) Para todo $\tau > 0$, existem $c > 0$ e $\beta \in (0,1]$ tais que, para todo $\chi \in \mathcal{B}_\ell^1$ e $t_1, t_2 \in [0,\tau]$ temos que
$$\|L(t_1)\chi - L(t_2)\chi\|_{X_\ell} \leqslant c|t_1 - t_2|^\beta.$$

Teorema 2.2.5. *Seja* X *é um espaço de Hilbert.*

(i) Assumindo as Hipóteses (H1)-(H6) *e* (H9)-(H10). *Então* $(L(t), \mathcal{B}_\ell^1)$ *possui atrator exponencial* $\mathcal{E}_\ell$.

(ii) Assumindo as hipóteses $(H1)'$, (H2)-(H4), $(H5)'$, (H6) *e* (H9)-(H10) *em* $\mathcal{B}_\ell^0$. *Então* $(L(t), \mathcal{B}_\ell^0)$ *possui atrator exponencial* $\mathcal{E}_\ell$.

Demonstração. Aplicaremos o Lema 2.1.4 com $H = X_\ell$, $T(t) = L(t)$ e $K = \mathcal{B}_\ell^1$. Como X é Hilbert, segue que X_ℓ é Hilbert. Vimos na demonstração do Teorema 2.2.1 que $\mathcal{B}_\ell^1$ satisfaz as hipóteses do Lema 2.1.1. Vamos agora verificar as propriedades (A1)-(A3). Fixando $\tau > 0$ tal que (H6) ocorre, claramente (A1) segue de (H6) ou (H9).

Seja k a constante de Lipschitz da aplicação $L(\tau)\colon X_\ell \to W_\ell$ em $\mathcal{B}_\ell^1$. Aplicando o Lema 2.1.5 com $H = X_\ell$, $E = W_\ell$ e $\varepsilon = \frac{1}{8k}$, existe uma projeção finita-dimensional P tal que

$$\|(I - P)\chi\|_{X_\ell} \leqslant \frac{1}{8k}\|\chi\|_{W_\ell},$$

para todo $\chi \in W_\ell$. Assim, para $\chi_1, \chi_2 \in \mathcal{B}_\ell^1$, temos

$$\begin{aligned}\|L(\tau)\chi_1 - L(\tau)\chi_2\|_{X_\ell}^2 =& \|P(L(\tau)\chi_1 - L(\tau)\chi_2)\|_{X_\ell}^2 + \|(I-P)(L(\tau)\chi_1 - L(\tau)\chi_2)\|_{X_\ell}^2 \\ \leqslant& \|P(L(\tau)\chi_1 - L(\tau)\chi_2)\|_{X_\ell}^2 + \frac{1}{64k^2}\|L(\tau)\chi_1 - L(\tau)\chi_2\|_{W_\ell}^2 \\ \leqslant& \|P(L(\tau)\chi_1 - L(\tau)\chi_2)\|_{X_\ell}^2 + \frac{1}{64}\|\chi_1 - \chi_2\|_{X_\ell}^2,\end{aligned}$$

a qual pode ser reescrita como

$$\frac{1}{2}\|L(\tau)\chi_1 - L(\tau)\chi_2\|_{X_\ell}^2 + \frac{1}{2}\|L(\tau)\chi_1 - L(\tau)\chi_2\|_{X_\ell}^2 \leqslant \|P(L(\tau)\chi_1 - L(\tau)\chi_2)\|_{X_\ell}^2 + \frac{1}{64}\|\chi_1 - \chi_2\|_{X_\ell}^2.$$

Porém sempre que $a + b \leqslant c + d$ com a, b, c e d não-negativos, então necessariamente $a \leqslant b$ ou $c \leqslant d$, pois se supormos o contrário, isto é, $a > b$ e $c > d$ temos $a + b > c + d$. Logo (A2) é satisfeita para $\delta = (4\sqrt{2})^{-1}$.

Finalmente por (H9) e (H10) temos

$$\begin{aligned}\|G(\chi_1, t_1) - G(\chi_2, t_2)\|_{X_\ell} =& \|L(t_1)\chi_1 - L(t_2)\chi_2\|_{X_\ell} \\ \leqslant& \|L(t_1)\chi_1 - L(t_1)\chi_2\|_{X_\ell} + \|L(t_1)\chi_2 - L(t_2)\chi_2\|_{X_\ell} \\ \leqslant& \max\{\mathrm{L}, c\}(|t_1 - t_2|^\beta + \|\chi_1 - \chi_2\|_{X_\ell}),\end{aligned}$$

para toda $\chi_1, \chi_2 \in \mathcal{B}_\ell^1$ e $t_1, t_2 \in [0, \tau]$. Finalizando a demonstração do item (i). Para o item (ii), a demonstração segue análoga trocando $\mathcal{B}_\ell^1$ por $\mathcal{B}_\ell^0$. □

De modo análogo ao que foi feito para o atrator global, $\mathcal{A}$, obtemos o atrator exponencial $\mathcal{E}$ como imagem de $\mathcal{E}_\ell$, isto é,

$$\mathcal{E} := \mathbf{e}(\mathcal{E}_\ell). \tag{2.11}$$

Teorema 2.2.6. *Seja X um espaço de Hilbert.*

(i) Sejam (H1)-(H6) *e* (H8)-(H10) *satisfeitas. Então $\mathcal{E}$, definido em* (2.11), *é um atrator exponencial para o sistema dinâmico* $(T(t), B_1)$.

(ii) Sejam $(H1)'$, (H2)-(H4), $(H5)'$, (H6) *e* (H8)-(H10) *satisfeitas em* $\mathcal{B}_\ell^0$. *Então $\mathcal{E}$, definido em* (2.11), *é um atrator exponencial para o sistema dinâmico* $(T(t), \mathbf{e}(\mathcal{B}_\ell^0))$.

Demonstração. Estamos sob as hipóteses do Teorema 2.2.5, logo existe $\mathcal{E}_\ell$ atrator exponencial para o sistema dinâmico $(L(t), \mathcal{B}_\ell^1)$.

Por (H8) temos que $\mathbf{e}$ é α-Hölder contínua em $\mathcal{B}^1_\ell$, assim $\mathcal{E} = \mathbf{e}(\mathcal{E}_\ell)$ é compacto. Além disso, para todo $t \geqslant 0$, temos

$$L(t)(\mathcal{E}_\ell) \subset \mathcal{E}_\ell \;\Rightarrow\; \mathbf{e}(L(t)(\mathcal{E}_\ell)) \subset \mathbf{e}(\mathcal{E}_\ell) \;\Rightarrow\; T(t)(\mathbf{e}(\mathcal{E}_\ell)) \subset \mathbf{e}(\mathcal{E}_\ell),$$

logo $\mathcal{E}$ é positivamente invariante com respeito a $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$.

Como $\mathcal{E}_\ell$ tem dimensão fractal finita, segue do Teorema 2.2.4 que

$$\dim_F(\mathcal{E}) = \dim_F(\mathbf{e}(\mathcal{E}_\ell)) \leqslant \frac{1}{\alpha}\dim_F(\mathcal{E}_\ell) < \infty.$$

Por fim, $\mathcal{E}_\ell$ atrai com taxa exponencial o sistema dinâmico $(L(t), \mathcal{B}^1_\ell)$, isto é, existem constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$\operatorname{dist}(L(t)(\mathcal{B}^1_\ell), \mathcal{E}_\ell) \leqslant c_1 \mathrm{e}^{-c_2 t}, \quad \forall t \geqslant 0.$$

Seja $\widetilde{k}$ a constante da α-Hölder continuidade da aplicação $\mathbf{e}$, temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}(T(t)B_1, \mathcal{E}) &= \operatorname{dist}(T(t)(\mathbf{e}(\mathcal{B}^1_\ell)), \mathbf{e}(\mathcal{E}_\ell)) \\
&= \operatorname{dist}(\mathbf{e}(L(t)(\mathcal{B}^1_\ell)), \mathbf{e}(\mathcal{E}_\ell)) \\
&= \sup_{\varphi\in L(t)(\mathcal{B}^1_\ell)} \inf_{\psi\in\mathcal{E}_\ell} \|\mathbf{e}(\varphi) - \mathbf{e}(\psi)\|_X \\
&\leqslant \sup_{\varphi\in L(t)(\mathcal{B}^1_\ell)} \inf_{\psi\in\mathcal{E}_\ell} k\|\varphi - \psi\|^\alpha_{X_\ell} \\
&= \widetilde{k}\left(\sup_{\varphi\in L(t)(\mathcal{B}^1_\ell)} \inf_{\psi\in\mathcal{E}_\ell} k\|\varphi - \psi\|_{X_\ell}\right)^\alpha \\
&= \widetilde{k}\,\operatorname{dist}(L(t)(\mathcal{B}^1_\ell), \mathcal{E}_\ell)^\alpha \\
&\leqslant \widetilde{k}(c_1\mathrm{e}^{-c_2 t})^\alpha = \widetilde{k}c_1^\alpha \mathrm{e}^{-c_2\alpha t}, \quad \forall t \geqslant 0
\end{aligned}$$

Portanto $\mathcal{E}$ é atrator exponencial para $(T(t), B_1)$.

A demonstração do item (ii) é feita de forma análoga.

□

Capítulo 3

Existência de atrator exponencial para uma família de problemas envolvendo o $p(x)$-Laplaciano com difusão grande localizada

Neste Capítulo garantimos a existência de atrator exponencial para a seguinte família de problemas

$$\begin{cases} u_t^\lambda - \operatorname{div}(d_\lambda(x)(|\nabla u^\lambda|^{p(x)-2}+\eta)\nabla u^\lambda) + |u^\lambda|^{p(x)-2}u^\lambda = B(u^\lambda), & \text{em } \Omega \\ u^\lambda = 0, & \text{em } \partial\Omega \\ u^\lambda(0) = u_0^\lambda \in L^2(\Omega), \end{cases} \tag{3.1}$$

e seu problema limite,

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(d_0(x)(|\nabla u|^{p(x)-2}+\eta)\nabla u) + |u|^{p(x)-2}u = B(u), & \text{em } \Omega_1 \\ u_{|\Omega_{0,i}} := u_{\Omega_{0,i}}, & \text{em } \Omega_{0,i} \\ \dot{u}_{\Omega_{0,i}} + \dfrac{1}{|\Omega_{0,i}|}\left[\displaystyle\int_{\Gamma_{0,i}} d_0(x)(|\nabla u|^{p(x)-2}+\eta)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\,dx + \int_{\Omega_{0,i}} |u_{\Omega_{0,i}}|^{p(x)-2}u_{\Omega_{0,i}}\,dx\right] = B(u_{\Omega_{0,i}}) & \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega \\ u(0) = u_0. & \end{cases}$$

O parâmetro $\lambda \in (0,1]$, $\eta > 0$, e $B\colon L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ uma aplicação globalmente Lipschitz, com constante de Lipschitz $L_B > 0$.

3.1 A família de problemas

Inicialmente vamos apresentar as condições envolvendo o problema. Para tal consideramos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, aberto, conexo, limitado e suave com fronteira $\Gamma = \partial\Omega$. Denotaremos por Ω_0 um subconjunto de Ω aberto e suave tal que $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$ e $\Omega_0 = \bigcup_{i=1}^{m} \Omega_{0,i}$ onde m é um inteiro positivo e $\Omega_{0,i}$ são subconjuntos, abertos, suaves e conexos de Ω satisfazendo $\overline{\Omega}_{0,i} \cap \overline{\Omega}_{0,j} = \emptyset$, para $i \neq j$. Sejam $\Omega_1 = \Omega \setminus \overline{\Omega}_0$, $\Gamma_{0,i} = \partial\Omega_{0,i}$ e $\Gamma_0 = \bigcup_{i=1}^{m} \Gamma_{0,i}$ as fronteiras de $\Omega_{0,i}$ e Ω_0, respectivamente, onde $\Gamma \cap \Gamma_0 = \emptyset$, ver Figura 3.1. Note que $\partial\Omega_1 = \Gamma \cup \Gamma_0$.

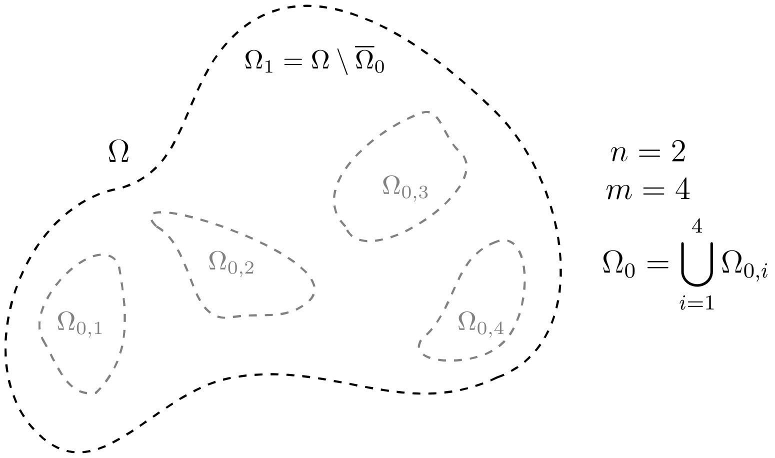

Figura 3.1: Esboço de Ω e do subconjunto Ω_0 de Ω

Em (3.1) consideramos $p \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^+)$ com

$$2 < p^- := \min_{x \in \overline{\Omega}} p(x) \leqslant p(x) \leqslant \max_{x \in \overline{\Omega}} p(x) =: p^+.$$

Além disso, $d_\lambda \colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \to (0, \infty)$ são funções limitadas e suaves em Ω, satisfazendo

$$0 < m_0 \leqslant d_\lambda(x) \leqslant M_\lambda,$$

para todo $x \in \Omega$ e $0 < \lambda \leqslant 1$. Assumimos ainda uma difusão grande em Ω_0 conforme $\lambda \to 0$, mais precisamente,

$$d_\lambda(x) \xrightarrow{\lambda \to 0} \begin{cases} d_0(x), & \text{uniformemente em } \ \Omega_1; \\ \infty, & \text{uniformemente em subconjuntos compactos de } \ \Omega_0, \end{cases} \tag{3.2}$$

onde $d_0 \colon \overline{\Omega}_1 \to (0, \infty)$ é uma função suave com

$$0 < m_0 \leqslant d_0(x) \leqslant M_0, \tag{3.3}$$

para todo $x \in \Omega_1$.

Em termos práticos, os problemas (3.1) descrevem modelos de condução de calor onde o material de condução é composto, consequentemente a condução do calor é variada podendo ocorrer rapidamente em certas regiões e lentamente em outras.

Logo assumiremos uma difusão d_λ grande em regiões localizadas dentro do domínio Ω. Assim, conforme $\lambda \to 0$, esperamos ter uma rápida redistribuição das não homogeneidades espaciais, com isso é natural esperar que para pequenos valores de λ a solução, u^λ, se torne espacialmente constante nas regiões de difusão grande. Por essa razão, suponha que u^λ converge para u quando $\lambda \to 0$, em algum sentido, e que u assume sobre Ω_0 um valor espacialmente constante, que iremos denotar por $u_{\Omega_0}(t)$.

Neste contexto pretendemos obter a equação que descreve o problema limite. Notemos que, como a função limite u é constante em Ω_0, $u_{\Omega_0}(t)$, então u não pode ser arbitrária. Além disso, em $\Gamma_0 = \partial\Omega_0$, devemos ter $u_{|\Gamma_0} = u_{\Omega_0}(t)$. Em Ω_1, temos

$$u_t^\lambda - \operatorname{div}(d_\lambda(x)(|\nabla u^\lambda|^{p(x)-2} + \eta)\nabla u^\lambda) + |u^\lambda|^{p(x)-2}u^\lambda = B(u^\lambda). \tag{3.4}$$

Das propriedades de convergência da função $d_\lambda(x)$ em Ω_1, fazendo $\lambda \to 0$, segue que

$$u_t - \operatorname{div}(d_0(x)(|\nabla u|^{p(x)-2} + \eta)\nabla u) + |u|^{p(x)-2}u = B(u), \text{ para } u \in W^{1,p(x)}(\Omega).$$

Em Ω_0 temos,

$$\int_{\Omega_0} u_t^\lambda \,\mathrm{d}x - \int_{\Omega_0} \operatorname{div}(d_\lambda(x)(|\nabla u^\lambda|^{p(x)-2} + \eta)\nabla u^\lambda)\; dx + \int_{\Omega_0} |u^\lambda|^{p(x)-2}u^\lambda \,\mathrm{d}x = \int_{\Omega_0} B(u^\lambda)\,\mathrm{d}x,$$

Segue do Teorema da divergência de Gauss que

$$\int_{\Omega_0} u_t^\lambda \,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_0} d_\lambda(x)(|\nabla u^\lambda|^{p(x)-2} + \eta)\frac{\partial u^\lambda}{\partial \vec{n}} \,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_0} |u^\lambda|^{p(x)-2}u^\lambda \,\mathrm{d}x = \int_{\Omega_0} B(u^\lambda)\,\mathrm{d}x,$$

onde $\vec{n}$ denota o vetor normal unitário na fronteira de Ω_0 voltado para o interior de Ω_0. Segue de (3.2) e da continuidade das funções d_λ, para todo $\lambda \in [0,1]$, que $d_\lambda(x) \xrightarrow{\lambda \to 0} d_0(x)$ uniformemente em $\overline{\Omega}_1$. Logo, tomando o limite quando $\lambda \to 0$, obtemos a seguinte equação diferencial ordinária,

$$\dot{u}_{\Omega_0}(t) + \frac{1}{|\Omega_0|}\left(\int_{\Gamma_0} d_0(x)(|\nabla u|^{p(x)-2} + \eta)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_0} |u_{\Omega_0}(t)|^{p(x)-2}u_{\Omega_0}(t)\,\mathrm{d}x\right) = B(u_{\Omega_0}(t)).$$

Com essas considerações escrevemos o problema limite da seguinte forma

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(d_0(x)(|\nabla u|^{p(x)-2} + \eta)\nabla u) + |u|^{p(x)-2}u = B(u), & \text{em } \Omega_1 \\ u_{|\Omega_{0,i}} := u_{\Omega_{0,i}}, & \text{em } \Omega_{0,i} \\ \dot{u}_{\Omega_{0,i}} + \dfrac{1}{|\Omega_{0,i}|}\left[\displaystyle\int_{\Gamma_{0,i}} d_0(x)(|\nabla u|^{p(x)-2} + \eta)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\, dx + \int_{\Omega_{0,i}} |u_{\Omega_{0,i}}|^{p(x)-2}u_{\Omega_{0,i}}\, dx\right] = B(u_{\Omega_{0,i}}) & \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega \\ u(0) = u_0. & \end{cases} \tag{3.5}$$

3.2 Existência de soluções para (3.1) e (3.5)

Nesta seção iremos apresentar os operadores associados aos problemas e estabelecer algumas de suas propriedades. Em adicional garantiremos a existência de uma única solução para (3.1)-(3.5).

Vamos considerar os seguintes espaços e notações.

$$V := W_0^{1,p(x)}(\Omega), \qquad V_0 := W_{\Omega_0,0}^{1,p(x)}(\Omega) := \{u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) : u \text{ é constante em } \Omega_0\},$$
$$H := L^2(\Omega), \qquad H_0 := L^2_{\Omega_0}(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) : u \text{ é constante em } \Omega_0\}.$$

No Capítulo 1, Seção 1.1, o leitor pode consultar algumas propriedades espaciais de $L^{p(x)}(\Omega)$, $W^{1,p(x)}(\Omega)$ e $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Por definição,

$$L^{p(x)}(\Omega) = \left\{ v\colon \Omega \to \mathbb{R}; v \text{ é mensurável e } \int_\Omega |v(x)|^{p(x)}\, dx < \infty \right\}.$$

Para todo $v \in L^{p(x)}(\Omega)$, denotando por $\rho(v)$ a integral $\int_\Omega |v(x)|^{p(x)}\, dx$, temos a seguinte norma em $L^{p(x)}(\Omega)$

$$\|v\|_{L^{p(x)}(\Omega)} = \|v\|_{p(x)} := \inf\left\{ \lambda > 0 : \rho\left(\frac{v}{\lambda}\right) \leqslant 1 \right\}.$$

As seguintes propriedades, obtidas pela Proposição 1.1.3 para todo $v \in L^{p(x)}(\Omega)$, são extremamente úteis

$$\min\{\rho(v)^{\frac{1}{p^-}}, \rho(v)^{\frac{1}{p^+}}\} \leqslant \|v\|_{p(x)} \leqslant \max\{\rho(v)^{\frac{1}{p^-}}, \rho(v)^{\frac{1}{p^+}}\} \tag{3.6}$$

e

$$\min\{\|v\|_{p(x)}^{p^-}, \|v\|_{p(x)}^{p^+}\} \leqslant \rho_p(v) \leqslant \max\{\|v\|_{p(x)}^{p^-}, \|v\|_{p(x)}^{p^+}\}. \tag{3.7}$$

O espaço V_0 é munido da norma em V, dada por

$$\|v\|_V := \|v\|_{L^{p(x)}(\Omega)} + \|\nabla v\|_{L^{p(x)}(\Omega)}.$$

Temos que V e V_0 são espaços de Banach reflexivos, V é denso no espaço de Hilbert H e V_0 denso em H_0. Além disso, $V \hookrightarrow\hookrightarrow H \hookrightarrow V'$ e $V_0 \hookrightarrow\hookrightarrow H_0 \hookrightarrow V_0'$.

Considere os operadores $A_\lambda : V \to V^{'}$, para todo $\lambda \in (0,1]$, e $A_0 : V_0 \to V_0^{'}$ dados, respectivamente, por

$$\begin{aligned}\langle A_\lambda u, v\rangle_{V',V} &:= \int_\Omega -\operatorname{div}(d_\lambda(x)(|\nabla u|^{p(x)-2} + \eta)\nabla u)v\, dx + \int_\Omega |u|^{p(x)-2}uv\, dx \\ &= \int_\Omega d_\lambda(x)(|\nabla u|^{p(x)-2} + \eta)\nabla u \nabla v\, dx + \int_\Omega |u|^{p(x)-2}uv\, dx, \quad \forall v \in V,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\langle A_0 u, v\rangle_{V_0',V_0} := &\int_{\Omega_1} -\operatorname{div}(d_0(x)(|\nabla u|^{p(x)-2} + \eta)\nabla u)v\, dx + \int_\Omega |u|^{p(x)-2}uv\, dx \\ &+ \int_{\Gamma_0} d_0(x)(|\nabla u|^{p(x)-2} + \eta)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} v\, dx, \quad \forall v \in V_0.\end{aligned}$$

Os próximos resultados tratam de algumas propriedades importantes dos operadores A_λ, $\lambda \in [0,1]$.

Lema 3.2.1. *Para todo $\lambda \in (0,1]$, temos*

$$\langle A_\lambda u, u\rangle_{V',V} \geqslant \begin{cases} \dfrac{\min\{m_0,1\}}{2^{p^+}}\|u\|_V^{p^+}, & se\ \|u\|_V \leqslant 1,\\ \dfrac{\min\{m_0,1\}}{2^{p^+}}\|u\|_V^{p^-}, & se\ \|u\|_V \geqslant 1.\end{cases}$$

Além disso,

$$\langle A_0 u, u\rangle_{V_0',V_0} \geqslant \begin{cases} \dfrac{\min\{m_0,1\}}{2^{p^+}}\|u\|_{V_0}^{p^+}, & se\ \|u\|_{V_0} \leqslant 1,\\ \dfrac{\min\{m_0,1\}}{2^{p^+}}\|u\|_{V_0}^{p^-}, & se\ \|u\|_{V_0} \geqslant 1.\end{cases}$$

Demonstração. Demonstraremos o caso $\lambda = 0$, o caso $\lambda \in (0,1]$ pode ser demonstrado similarmente. Seja $u \in V_0$ arbitrário, pelo Teorema da Divergência, temos

$$\begin{aligned}
\langle A_0 u, u\rangle_{V_0',V_0} &= \int_{\Omega_1} -\operatorname{div}(d_0(x)(|\nabla u|^{p(x)-2}+\eta)\nabla u)u\ dx + \int_\Omega |u|^{p(x)-2}uu\ dx\\
&\qquad + \int_{\Gamma_0} d_0(x)(|\nabla u|^{p(x)-2}+\eta)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}u\ dx\\
&= \int_{\Gamma\cup\Gamma_0} -d_0(x)(|\nabla u|^{p(x)-2}+\eta)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}u\ dx + \int_{\Omega_1} d_0(x)(|\nabla u|^{p(x)-2}+\eta)\nabla u\nabla u\ dx\\
&\qquad + \int_\Omega |u|^{p(x)}\ dx + \int_{\Gamma_0} d_0(x)(|\nabla u|^{p(x)-2}+\eta)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}u\ dx\\
&= \int_{\Omega_1} d_0(x)|\nabla u|^{p(x)}\ dx + \int_{\Omega_1} d_0(x)\eta|\nabla u|^2\ dx + \int_\Omega |u|^{p(x)}\ dx\\
&\geqslant m_0\int_{\Omega_1} |\nabla u|^{p(x)}\ dx + m_0\eta\|\nabla u\|_{H_0}^2 + \int_\Omega |u|^{p(x)}\ dx\\
&\geqslant m_0\int_{\Omega_1} |\nabla u|^{p(x)}\ dx + \int_\Omega |u|^{p(x)}\ dx\\
&\geqslant \min\{m_0,1\}(\rho(|\nabla u|)+\rho(u)).
\end{aligned}\tag{3.8}$$

Suponhamos que $\|u\|_{V_0} \leqslant 1$, então necessariamente $\|u\|_{p(x)} \leqslant 1$ e $\|\nabla u\|_{p(x)} \leqslant 1$. Pela Proposição 1.1.3, temos que $\rho(u) \geqslant \|u\|_{p(x)}^{p^+}$ e $\rho(|\nabla u|) \geqslant \|\nabla u\|_{p(x)}^{p^+}$. Assim,

$$\rho(u)+\rho(|\nabla u|) \geqslant \|u\|_{p(x)}^{p^+} + \|\nabla u\|_{p(x)}^{p^+} \geqslant \frac{1}{2^{p^+}}(\|u\|_{p(x)}+\|\nabla u\|_{p(x)})^{p^+} = \frac{1}{2^{p^+}}\|u\|_{V_0}^{p^+}. \tag{3.9}$$

Logo, de (3.8), segue que

$$\langle A_0 u, u\rangle_{V_0',V_0} \geqslant \min\{m_0,1\}\frac{1}{2^{p^+}}\|u\|_{V_0}^{p^+}, \quad \text{se} \quad \|u\|_{V_0} \leqslant 1. \tag{3.10}$$

Para o caso em que $\|u\|_{V_0} = \|u\|_{p(x)} + \|\nabla u\|_{p(x)} \geqslant 1$, devemos analisar quatro possibilidades.

(i) Caso em que $\|u\|_{p(x)} \leqslant 1$ e $\|\nabla u\|_{p(x)} \leqslant 1$.

Segue a mesma conclusão obtida em (3.9). Por sua vez, pelo não-decrescimento da função $\mathbb{R} \ni \theta \mapsto \|u\|_{V_0}^{\theta}$, temos que $\|u\|_{V_0}^{p^-} \leqslant \|u\|_{V_0}^{p^+}$. Logo, em (3.9) concluímos que

$$\rho(u) + \rho(|\nabla u|) \geqslant \frac{1}{2^{p^+}} \|u\|_{V_0}^{p^-}.$$

(ii) Caso em que $\|u\|_{p(x)} \leqslant 1$ e $\|\nabla u\|_{p(x)} \geqslant 1$.

Pela Proposição 1.1.3, temos que $\rho(u) \geqslant \|u\|_{p(x)}^{p^+}$ e $\rho(|\nabla u|) \geqslant \|\nabla u\|_{p(x)}^{p^-}$. Notemos que,

$$\rho(u) + \rho(|\nabla u|) \geqslant \|u\|_{p(x)}^{p^+} + \|\nabla u\|_{p(x)}^{p^-} \geqslant \|\nabla u\|_{p(x)}^{p^-} = \frac{1}{2^{p^-}} (2\|\nabla u\|_{p(x)})^{p^-}.$$

Pelo crescimento da função $\mathbb{R}^+ \ni x \mapsto x^{p^-}$, e o fato de $2\|\nabla u\|_{p(x)} \geqslant \|u\|_{p(x)} + \|\nabla u\|_{p(x)}$, já que $\|u\|_{p(x)} \leqslant \|\nabla u\|_{p(x)}$, temos

$$(2\|\nabla u\|_{p(x)})^{p^-} \geqslant (\|u\|_{p(x)} + \|\nabla u\|_{p(x)})^{p^-}.$$

Logo, pelo decrescimento da função exponencial de base meio, concluímos que

$$\rho(u) + \rho(|\nabla u|) \geqslant \frac{1}{2^{p^-}} \|u\|_{V_0}^{p^-} \geqslant \frac{1}{2^{p^+}} \|u\|_{V_0}^{p^-}.$$

(iii) Caso em que $\|u\|_{p(x)} \geqslant 1$ e $\|\nabla u\|_{p(x)} \leqslant 1$.

Pela Proposição 1.1.3, temos que $\rho(u) \geqslant \|u\|_{p(x)}^{p^-}$ e $\rho(|\nabla u|) \geqslant \|\nabla u\|_{p(x)}^{p^+}$. Assim,

$$\rho(u) + \rho(|\nabla u|) \geqslant \|u\|_{p(x)}^{p^-} + \|\nabla u\|_{p(x)}^{p^+} \geqslant \|u\|_{p(x)}^{p^-} = \frac{1}{2^{p^-}} (2\|u\|_{p(x)})^{p^-}.$$

Pelo crescimento da função $\mathbb{R}^+ \ni x \mapsto x^{p^-}$, e o fato de $2\|u\|_{p(x)} \geqslant \|u\|_{p(x)} + \|\nabla u\|_{p(x)}$, já que $\|u\|_{p(x)} \geqslant \|\nabla u\|_{p(x)}$, temos

$$(2\|u\|_{p(x)})^{p^-} \geqslant (\|u\|_{p(x)} + \|\nabla u\|_{p(x)})^{p^-} = \|u\|_{V_0}^{p^-}.$$

Logo, pelo decrescimento da função exponencial de base meio, concluímos que

$$\rho(u) + \rho(|\nabla u|) \geqslant \frac{1}{2^{p^-}} \|u\|_{V_0}^{p^-} \geqslant \frac{1}{2^{p^+}} \|u\|_{V_0}^{p^-}.$$

(iv) Caso em que $\|u\|_{p(x)} \geqslant 1$ e $\|\nabla u\|_{p(x)} \geqslant 1$.

Pela Proposição 1.1.3, temos que $\rho(u) \geqslant \|u\|_{p(x)}^{p^-}$ e $\rho(\nabla u) \geqslant \|\nabla u\|_{p(x)}^{p^-}$. Assim,

$$\rho(u) + \rho(|\nabla u|) \geqslant \|u\|_{p(x)}^{p^-} + \|\nabla u\|_{p(x)}^{p^-} \geqslant \frac{1}{2^{p^-}} (\|u\|_{p(x)} + \|\nabla u\|_{p(x)})^{p^-} = \frac{1}{2^{p^-}} \|u\|_{V_0}^{p^-}.$$

Logo, pelo decrescimento da função exponencial de base meio, concluímos que

$$\rho(u) + \rho(|\nabla u|) \geqslant \frac{1}{2^{p^-}} \|u\|_{V_0}^{p^-} \geqslant \frac{1}{2^{p^+}} \|u\|_{V_0}^{p^-}.$$

Em conclusão, se $\|u\|_{V_0} \geqslant 1$ temos

$$\rho(u) + \rho(|\nabla u|) \geqslant \frac{1}{2^{p^+}} \|u\|_{V_0}^{p^-}.$$

Logo, de (3.8), segue que

$$\langle A_0 u, u \rangle_{V_0', V_0} \geqslant \min\{m_0, 1\} \frac{1}{2^{p^+}} \|u\|_{V_0}^{p^-}, \quad \text{se} \quad \|u\|_{V_0} \geqslant 1.$$

Juntamente com (3.10), concluímos a demonstração. $\square$

Teorema 3.2.1. *Para cada $\lambda \in [0,1]$, o operador A_λ é monótono, hemicontínuo e coercivo.*

Demonstração. Provaremos o caso $\lambda = 0$. Para $\lambda \in (0,1]$ a demonstração segue de forma análoga. Sejam $u, v \in V_0$ quaisquer, então

$$\begin{aligned}
&\langle A_0 u - A_0 v, u - v \rangle_{V_0', V_0} = \langle A_0 u, u - v \rangle_{V_0', V_0} - \langle A_0 v, u - v \rangle_{V_0', V_0} \\
&= \int_{\Omega_1} - \operatorname{div}(d_0(x)(|\nabla u|^{p(x)-2} + \eta)\nabla u)(u - v)\ dx + \int_{\Omega} |u|^{p(x)-2} u (u - v)\ dx \\
&\qquad + \int_{\Gamma_0} d_0(x)(|\nabla u|^{p(x)-2} + \eta) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} (u - v)\ dx + \int_{\Omega_1} \operatorname{div}(d_0(x)(|\nabla v|^{p(x)-2} + \eta)\nabla v)(u - v)\ dx \\
&\qquad\qquad - \int_{\Omega} |v|^{p(x)-2} v (u - v)\ dx - \int_{\Gamma_0} d_0(x)(|\nabla v|^{p(x)-2} + \eta) \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} (u - v)\ dx.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Pelo Teorema da Divergência,

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_1} - \operatorname{div}(d_0(x)(|\nabla u|^{p(x)-2} + \eta)\nabla u)(u - v)\, dx \\
&\quad = \int_{\Gamma_0 \cup \Gamma} - d_0(x)(|\nabla u|^{p(x)-2} + \eta) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} (u - v)\, dx + \int_{\Omega_1} d_0(x)(|\nabla u|^{p(x)-2} + \eta) \nabla u \nabla (u - v)\, dx \\
&\quad = \int_{\Gamma_0} - d_0(x)(|\nabla u|^{p(x)-2} + \eta) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} (u - v)\, dx + \int_{\Omega_1} d_0(x)(|\nabla u|^{p(x)-2} + \eta) \nabla u \nabla (u - v)\, dx.
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_1} \operatorname{div}(d_0(x)(|\nabla v|^{p(x)-2} + \eta)\nabla v)(u - v)\, dx \\
&\quad = \int_{\Gamma_0} d_0(x)(|\nabla v|^{p(x)-2} + \eta) \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} (u - v)\, dx - \int_{\Omega_1} d_0(x)(|\nabla v|^{p(x)-2} + \eta) \nabla v \nabla (u - v)\, dx.
\end{aligned}$$

Retornando a (3.11), segue que

$$\langle A_0 u - A_0 v, u - v \rangle_{V_0', V_0}$$

$$= \int_{\Gamma_0} -d_0(x)(|\nabla u|^{p(x)-2}+\eta)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(u-v)\,dx + \int_{\Omega_1} d_0(x)(|\nabla u|^{p(x)-2}+\eta)\nabla u\nabla(u-v)\,dx$$
$$+ \int_{\Omega} |u|^{p(x)-2}u(u-v)\ dx + \int_{\Gamma_0} d_0(x)(|\nabla u|^{p(x)-2}+\eta)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(u-v)\ dx$$
$$+ \int_{\Gamma_0} d_0(x)(|\nabla v|^{p(x)-2}+\eta)\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}(u-v)\,dx - \int_{\Omega_1} d_0(x)(|\nabla v|^{p(x)-2}+\eta)\nabla v\nabla(u-v)\,dx$$
$$- \int_{\Omega} |v|^{p(x)-2}v(u-v)\ dx - \int_{\Gamma_0} d_0(x)(|\nabla v|^{p(x)-2}+\eta)\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}(u-v)\ dx$$
$$= \int_{\Omega_1} d_0(x)(|\nabla u|^{p(x)-2}+\eta)\nabla u\nabla(u-v)\,dx + \int_{\Omega} |u|^{p(x)-2}u(u-v)\ dx$$
$$- \int_{\Omega_1} d_0(x)(|\nabla v|^{p(x)-2}+\eta)\nabla v\nabla(u-v)\,dx - \int_{\Omega} |v|^{p(x)-2}v(u-v)\ dx$$
$$= \int_{\Omega_1} d_0(x)(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u - |\nabla v|^{p(x)-2}\nabla v)\nabla(u-v)\,dx + \eta\int_{\Omega_1} d_0(x)\nabla(u-v)\nabla(u-v)\,dx$$
$$+ \int_{\Omega} (|u|^{p(x)-2}u - |v|^{p(x)-2}v)(u-v)\,dx.$$

Sendo $p(x) \leqslant p^+$, para todo $x \in \Omega$, e a função exponencial de base dois crescente, segue de (1.2) e de (3.3), que

$$\begin{aligned}
&\langle A_0u - A_0v, u-v\rangle_{V_0',V_0} \\
&\quad\geqslant m_0\int_{\Omega_1} \frac{2^{3-p(x)}}{p(x)}|\nabla(u-v)|^{p(x)}\,dx + m_0\eta\int_{\Omega_1}|\nabla(u-v)|^2\,dx + \int_{\Omega}\frac{2^{3-p(x)}}{p(x)}|u-v|^{p(x)}\,dx \\
&\quad\geqslant m_0\frac{2^{3-p^+}}{p^+}\int_{\Omega_1}|\nabla(u-v)|^{p(x)}\,dx + m_0\eta\int_{\Omega_1}|\nabla(u-v)|^2\,dx + \frac{2^{3-p^+}}{p^+}\int_{\Omega}|u-v|^{p(x)}\,dx \\
&\quad= m_0\frac{2^{3-p^+}}{p^+}\rho(|\nabla(u-v)|) + m_0\eta\|\nabla(u-v)\|_{H_0}^2 + \frac{2^{3-p^+}}{p^+}\rho(u-v) \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Portanto A_0 é um operador monótono.

Para verificarmos a hemicontinuidade de A_0, consideremos $u, v, w \in V_0$ e $0 < t < 1$ arbitrários, temos

$$\begin{aligned}
&|\langle A_0(u+tv) - A_0(u), w\rangle_{V_0',V_0}| \\
&= |\langle A_0(u+tv), w\rangle_{V_0',V_0} - \langle A_0(u), w\rangle_{V_0',V_0}| \\
&= \Bigg|\int_{\Omega_1} -\operatorname{div}(d_0(x)(|\nabla(u+tv)|^{p(x)-2}+\eta)\nabla(u+tv))w\ dx + \int_{\Omega}|u+tv|^{p(x)-2}(u+tv)w\ dx \\
&\quad + \int_{\Gamma_0} d_0(x)(|\nabla(u+tv)|^{p(x)-2}+\eta)\frac{\partial(u+tv)}{\partial\vec{n}}w\ dx + \int_{\Omega_1}\operatorname{div}(d_0(x)(|\nabla u|^{p(x)-2}+\eta)\nabla u)w\ dx
\end{aligned}$$

$$- \int_{\Omega} |u|^{p(x)-2}uw \, dx - \int_{\Gamma_0} d_0(x)(|\nabla u|^{p(x)-2} + \eta)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} w \, dx \Bigg|$$

$$= \Bigg| \int_{\Omega_1} d_0(x)(|\nabla(u+tv)|^{p(x)-2} + \eta)\nabla(u+tv)\nabla w \, dx + \int_{\Omega} |u+tv|^{p(x)-2}(u+tv)w \, dx$$

$$- \int_{\Omega_1} d_0(x)(|\nabla u|^{p(x)-2} + \eta)\nabla u \nabla w \, dx - \int_{\Omega} |u|^{p(x)-2}uw \, dx \Bigg|$$

$$\leqslant \Bigg| \int_{\Omega_1} d_0(x)[(|\nabla(u+tv)|^{p(x)-2} + \eta)\nabla(u+tv) - (|\nabla u|^{p(x)-2} + \eta)\nabla u]\nabla w \, dx \Bigg|$$

$$+ \Bigg| \int_{\Omega} (|u+tv|^{p(x)-2}(u+tv) - |u|^{p(x)-2}u)w \, dx \Bigg|.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}|d_0(x)[(|\nabla(u+tv)|^{p(x)-2} + \eta)\nabla(u+tv) - (|\nabla u|^{p(x)-2} + \eta)\nabla u]\nabla w| \\ \leqslant M_0 \left(|\nabla(u+tv)|^{p(x)-1} + \eta|\nabla(u+tv)| + |\nabla u|^{p(x)-1} + \eta|\nabla u|\right)|\nabla w|.\end{aligned}$$

Sendo $t < 1$, temos $|\nabla(u+tv)| = |\nabla u + t\nabla v| \leqslant |\nabla u| + t|\nabla v| < |\nabla u| + |\nabla v|$. Como $p(x) > 2$, pelo crescimento das funções $\mathbb{R}^+ \ni y \mapsto y^{p(x)-1}$ e $\mathbb{R} \ni y \mapsto 2^y$, segue que

$$\begin{aligned}|\nabla(u+tv)|^{p(x)-1} &\leqslant (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-1} \leqslant 2^{p(x)-1}(|\nabla u|^{p(x)-1} + |\nabla v|^{p(x)-1}) \\ &\leqslant 2^{p^+-1}(|\nabla u|^{p(x)-1} + |\nabla v|^{p(x)-1}).\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}&|d_0(x)[(|\nabla(u+tv)|^{p(x)-2} + \eta)\nabla(u+tv) - (|\nabla u|^{p(x)-2} + \eta)\nabla u]\nabla w| \\ &\quad \leqslant M_0[2^{p^+-1}(|\nabla u|^{p(x)-1} + |\nabla v|^{p(x)-1}) + \eta(|\nabla u| + |\nabla v|) + |\nabla u|^{p(x)-1} + \eta|\nabla u|]|\nabla w|,\end{aligned} \tag{3.12}$$

onde a função do lado direito de (3.12) pertence a $L^1(\Omega)$. Analogamente,

$$\begin{aligned}|(|u+tv|^{p(x)-2}(u+tv) - |u|^{p(x)-2}u)w| &\leqslant (|u+tv|^{p(x)-1} + |u|^{p(x)-1})|w| \\ &\leqslant [2^{p^+-1}(|u|^{p(x)-1} + |v|^{p(x)-1}) + |u|^{p(x)-1}]|w|,\end{aligned} \tag{3.13}$$

onde a função do lado direito de (3.13) pertence a $L^1(\Omega)$. Pelo Teorema da Convergência Dominada, concluímos que

$$|\langle A_0(u+tv), w\rangle_{V_0',V_0} - \langle A_0(u), w\rangle_{V_0',V_0}| \xrightarrow{t\to 0} 0.$$

Logo, A_0 é hemicontínuo.

Por fim, resta verificarmos a coercividade do operador A_0. Consideremos $\|u\|_{V_0} \geqslant 1$, segue, do Lema 3.2.1, que

$$\frac{\langle A_0 u, u\rangle_{V_0',V_0}}{\|u\|_{V_0}} \geqslant \frac{1}{2^{p^+}} \min\{m_0, 1\}\|u\|_{V_0}^{p^- -1}.$$

Como $p^- > 2$, fazendo $\|u\|_{V_0} \to +\infty$, temos que

$$\frac{\langle A_0 u, u\rangle_{V_0', V_0}}{\|u\|_{V_0}} \to +\infty.$$

Finalizando a demonstração. □

Definimos os conjuntos

$$\begin{aligned} &D(A_\lambda^H) := \{v \in V : A_\lambda v \in H\}, \quad \text{para} \quad \lambda \in (0,1] \text{ e} \\ &D(A_0^{H_0}) := \{v \in V_0 : A_0 v \in H_0\}. \end{aligned}$$

Consideremos os operadores $A_\lambda^H : D(A_\lambda^H) \subset H \to H$, para todo $\lambda \in (0,1]$, e $A_0^{H_0} : D(A_0^{H_0}) \subset H_0 \to H_0$ dados, respectivamente, por

$$\begin{aligned} &A_\lambda^H(u) = A_\lambda u, \quad \forall u \in D(A_\lambda^H) \quad \text{para} \quad \lambda \in (0,1] \text{ e} \\ &A_0^{H_0}(u) = A_0 u, \quad \forall u \in D(A_0^{H_0}). \end{aligned}$$

Proposição 3.2.1. *Considere V um espaço de Banach reflexivo, tal que V está imerso continuamente em H que por sua vez está imerso continuamente em V'. Além disso V é denso em H. Seja $A : V \to V'$ um operador monótono, hemicontínuo e coercivo. Então o operador realização $A_H \colon D(A_H) \subset H \to H$, dado por*

$$\begin{aligned} &D(A_H) = \{v \in V : \exists \alpha_v \in H \text{ tal que } \langle Av, w\rangle_{V',V} = (\alpha_v, w)_H, \forall w \in V\} \text{ e} \\ &A_H v = \alpha_v, \quad \forall v \in D(A_H), \end{aligned}$$

é operador maximal monótono.

Demonstração. Sendo A monótono e dados $u, v \in D(A_H)$

$$\begin{aligned} (A_H u - A_H v, u - v)_H =& (\alpha_u - \alpha_v, u - v)_H \\ =& (\alpha_u, u)_H - (\alpha_u, v)_H - (\alpha_v, u)_H + (\alpha_v, v)_H \\ =& \langle Au, u\rangle_{V',V} - \langle Au, v\rangle_{V',V} - \langle Av, u\rangle_{V',V} - \langle Av, v\rangle_{V',V} \\ =& \langle Au, u - v\rangle_{V',V} - \langle Av, u - v\rangle_{V',V} \\ =& \langle Au - Av, u - v\rangle_{V',V} \geq 0. \end{aligned}$$

Logo A_H é operador monótono. Segue do Teorema 2 em [7], que a equação $x + Ax = y$ tem solução $x \in V$, para todo $y \in V'$. Em particular, a equação admite solução em H. Logo $H \subset R(I + A)$ o que é equivalente a A_H ser operador maximal monótono. □

Segue da Proposição 3.2.1 e Teorema 3.2.1, que A_λ^H e $A_0^{H_0}$ são operadores maximais monótonos. Além disso, esses operadores também são do tipo subdiferencial, isto é, $A_\lambda^H = \partial \varphi^\lambda$, onde, para cada $\lambda \in (0,1]$, $\varphi^\lambda : H \to (-\infty, \infty]$ é uma função convexa, semicontínua inferiormente, dada por

$$\varphi^\lambda(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \frac{d_\lambda(x)}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)}\, dx + \int_\Omega \frac{d_\lambda(x)\eta}{2} |\nabla u|^2\, dx + \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |u|^{p(x)}\, dx, & \text{se } u \in V \\ \infty, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Se $\lambda = 0$, $A_0^{H_0} = \partial\varphi$ onde $\varphi : H_0 \to (-\infty, \infty]$ é a função convexa, semicontínua inferiormente, dada por

$$\varphi(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega_1} \frac{d_0(x)}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)}\, dx + \int_{\Omega_1} \frac{d_0(x)\eta}{2} |\nabla u|^2\, dx + \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |u|^{p(x)}\, dx, & \text{se } u \in V_0 \\ \infty, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{3.14}$$

A formulação abstrata de (3.1) e (3.5) é dada, respectivamente, por

$$\begin{cases} u_t^\lambda + A_\lambda^H u^\lambda = B(u^\lambda) \\ u^\lambda(0) = u_0^\lambda, \end{cases} \tag{3.15}$$

para todo $\lambda \in (0,1]$, e

$$\begin{cases} u_t + A_0^{H_0} u = B(u) \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{3.16}$$

O próximo lema nos garante a densidade dos conjuntos $D(A_0^{H_0})$ e $D(A_\lambda^H)$ para cada $\lambda \in (0,1]$.

Lema 3.2.2. *O conjunto $D(A_0^{H_0})$ é denso em H_0. Para cada $\lambda \in (0,1]$, $D(A_\lambda^H)$ é denso em H.*

Demonstração. Considere $C_c^\infty(\Omega)$ o espaço das funções com suporte compacto em Ω que admitem infinitas derivadas contínuas. Definimos

$$C_{c,0}^\infty(\Omega) := \{f \in C_c^\infty(\Omega); f \text{ é constante em } \Omega_0\}$$

e

$$L_{\Omega_0}^\infty := \{f \in L^\infty(\Omega); f \text{ é constante em } \Omega_0\}.$$

Seja $u \in C_{c,0}^\infty(\Omega)$, vamos mostrar que $u \in D(A_0^{H_0})$. Primeiramente $u \in V_0$, pois

$$C_{c,0}^\infty(\Omega) \subset \overline{C_{c,0}^\infty(\Omega)}^{W^{1,p(x)}(\Omega)} = W_{\Omega_0,0}^{1,p(x)}(\Omega) = V_0.$$

Além disso, denotando por χ_E a função característica do conjunto E, considere

$$\begin{aligned} \alpha_u :=& (-\operatorname{div}(d_0(\cdot)(|\nabla u|^{p(\cdot)-2} + \eta)\nabla u) + |u|^{p(\cdot)-2}u)\chi_{\Omega_1} \\ &+ \sum_{i=1}^m \frac{1}{|\Omega_{0,i}|} \left(\int_{\Gamma_{0,i}} d_0(x)(|\nabla u|^{p(x)-2} + \eta) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\, dx + \int_{\Omega_{0,i}} |u_{\Omega_{0,i}}|^{p(x)-2} u_{\Omega_{0,i}}\, dx \right) \chi_{\Omega_{0,i}}. \end{aligned}$$

Note que, se $u = 0$ então $\alpha_u = 0$. Ou seja, o suporte da função α_u está contido no suporte da u. Como $u \in C_{c,0}^\infty(\Omega)$, então o suporte de α_u é limitado. Isto é, $\alpha_u \in L_{\Omega_0}^\infty(\Omega)$. Em particular, $\alpha_u \in H_0$.

Seja $w \in V_0$ arbitrário. Como $w_{\Omega_{0,i}} = w_{|\Gamma_{0,i}}$ temos que

$$\begin{aligned} (\alpha_u, w)_{H_0} =& \int_{\Omega_1} (-\operatorname{div}(d_0(x)(|\nabla u|^{p(x)-2} + \eta)\nabla u) + |u|^{p(x)-2}u) w\, dx \\ &+ \sum_{i=1}^m \int_{\Omega_{0,i}} \frac{1}{|\Omega_{0,i}|} \left(\int_{\Gamma_{0,i}} d_0(y)(|\nabla u|^{p(x)-2} + \eta) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\, dy + \int_{\Omega_{0,i}} |u_{\Omega_{0,i}}|^{p(y)-2} u_{\Omega_{0,i}}\, dy \right) w\, dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&\int\limits_{\Omega_1} -\operatorname{div}(d_0(x)(|\nabla u|^{p(x)-2}+\eta))\nabla u\, w\, dx + \int\limits_{\Omega_1}|u|^{p(x)-2}uw\, dx\\
&+\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{\Omega_{0,i}}\frac{1}{|\Omega_{0,i}|}\left(\int\limits_{\Gamma_{0,i}} d_0(y)(|\nabla u|^{p(y)-2}+\eta)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\, dy\right) wdx\\
&+\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{\Omega_{0,i}}\frac{1}{|\Omega_{0,i}|}\left(\int\limits_{\Omega_{0,i}} |u_{\Omega_{0,i}}|^{p(y)-2}u_{\Omega_{0,i}}\, dy\right) w\, dx\\
=&\int\limits_{\Omega_1} -\operatorname{div}(d_0(x)(|\nabla u|^{p(x)-2}+\eta))\nabla u\, w\, dx + \int\limits_{\Omega_1}|u|^{p(x)-2}uw\, dx\\
&+\sum_{i=1}^{m}\left(\int\limits_{\Gamma_{0,i}} d_0(y)(|\nabla u|^{p(y)-2}+\eta)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\, dy\right)\int\limits_{\Omega_{0,i}}\frac{1}{|\Omega_{0,i}|}wdx\\
&+\sum_{i=1}^{m}\left(\int\limits_{\Omega_{0,i}} |u_{\Omega_{0,i}}|^{p(y)-2}u_{\Omega_{0,i}}\, dy\right)\int\limits_{\Omega_{0,i}}\frac{1}{|\Omega_{0,i}|}w\, dx\\
=&\int\limits_{\Omega_1} -\operatorname{div}(d_0(x)(|\nabla u|^{p(x)-2}+\eta))\nabla u\, w\, dx + \int\limits_{\Omega_1}|u|^{p(x)-2}uw\, dx\\
&+\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{\Gamma_{0,i}} d_0(y)(|\nabla u|^{p(y)-2}+\eta)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}w\, dy + \sum_{i=1}^{m}\int\limits_{\Omega_{0,i}} |u_{\Omega_{0,i}}|^{p(y)-2}u_{\Omega_{0,i}}w\, dy\\
=&\int\limits_{\Omega_1} -\operatorname{div}(d_0(x)(|\nabla u|^{p(x)-2}+\eta))\nabla u\, w\, dx + \int\limits_{\Omega}|u|^{p(x)-2}uw\, dx\\
&+\int\limits_{\Gamma_0} d_0(x)(|\nabla u|^{p(y)-2}+\eta)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}w\, dx\\
=&\langle A_0u, w\rangle_{V_0', V_0}.
\end{aligned}
$$

Com isso, $\alpha_u = A_0^{H_0}u$ e $u \in D(A_0^{H_0})$. Ou seja, $C_{c,0}^{\infty}(\Omega) \subset D(A_0^{H_0})$. Portanto,

$$
H_0 = \overline{C_{c,0}^{\infty}(\Omega)}^{H_0} \subset \overline{D(A_0^{H_0})}^{H_0}.
$$

O caso em que $\lambda \in (0,1]$, segue de modo análogo. □

A seguir apresentamos o conceito de solução forte e fraca para (3.15) e (3.16).

Definição 3.2.1. *1. Seja $T > 0$. Dizemos que $u^{\lambda} \in C([0,T];H)$ é solução forte de (3.15), se*

(i) u^{λ} é absolutamente contínua em qualquer subintervalo compacto de $(0,T)$;

(ii) $u^{\lambda}(t) \in D(A_{\lambda}^{H})$ quase sempre em $(0,T)$, com $u^{\lambda}(0) = u_0^{\lambda}$;

(iii) $\dfrac{du^{\lambda}}{dt}(t) + A_{\lambda}^{H}(u^{\lambda}(t)) = B(u^{\lambda}(t))$, ocorre quase sempre em $(0,T)$.

Dizemos que $u^\lambda \in C([0,T];H)$ *é solução fraca de* (3.15), *se existe uma sequência de soluções fortes, de* (3.15), *que converge para* u^λ *em* $C([0,T];H)$.

2. *Seja* $T > 0$. *Dizemos que* $u \in C([0,T];H_0)$ *é solução forte de* (3.16), *se*

   (i) *u é absolutamente contínua em qualquer subintervalo compacto de* $(0,T)$*;*

   (ii) $u(t) \in D(A_0^{H_0})$ *quase sempre em* $(0,T)$, *com* $u(0) = u_0$*;*

   (iii) $\dfrac{du}{dt}(t) + A_0^{H_0}(u(t)) = B(u(t))$, *ocorre quase sempre em* $(0,T)$.

   Dizemos que $u \in C([0,T];H_0)$ *é solução fraca de* (3.16), *se existe uma sequência de soluções fortes, de* (3.16), *que converge para* u *em* $C([0,T];H_0)$.

Segue, da Proposição 1, em [10], e do Lema 3.2.2, que (3.15) admite uma única solução global fraca $u^\lambda(\cdot, u_0^\lambda)$ iniciando em $u^\lambda(0) = u_0^\lambda \in \overline{D(A_\lambda^H)}^H = H$. Se $u_0^\lambda \in D(A_\lambda^H)$, então a função $u^\lambda(\cdot, u_0^\lambda)$ é solução forte de (3.15), Lipschitz contínua, para cada $\lambda \in (0,1]$. Analogamente para (3.16).

Para $\lambda \in (0,1]$, podemos definir em H um semigrupo $\{T_\lambda(t)\}_{t\geqslant 0}$ de operadores não-lineares, associados a (3.15), por $T_\lambda(t)u_0^\lambda = u^\lambda(t, u_0^\lambda)$, $t \geqslant 0$.

Para simplificar, denotaremos a solução $u^0(t, u_0)$ de (3.16) somente por $u(t, u_0)$. Assim, se $\lambda = 0$, podemos definir em $\overline{D(A_0^{H_0})}^{H_0} = H_0$ um semigrupo $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ de operadores não-lineares, associados a (3.16), por $T_0(t)u_0 = u(t, u_0)$, $t \geqslant 0$.

Além disso, temos que as aplicações $\mathbb{R}^+ \times H \ni (t, u_0^\lambda) \mapsto T_\lambda(t)u_0^\lambda \in H$, para todo $\lambda \in (0,1]$, e $\mathbb{R}^+ \times H_0 \ni (t, u_0) \mapsto T_0(t)u_0 \in H_0$ são contínuas.

3.3 Estimativas envolvendo as soluções de (3.15) e (3.16)

Um dos propósitos desta seção é garantir a existência de uma bola absorvente em H para os sistemas dinâmicos $(T_\lambda(t), H)$, para todo $\lambda \in (0,1]$, e $(T_0(t), H_0)$.

Lema 3.3.1. *Seja u solução forte de* (3.16). *Então*

(i) *Existem constantes positivas t_0 e r_0 tais que* $\|u(t)\|_{H_0} \leqslant r_0$, *para todo* $t \geqslant t_0$.

(ii) *Existem constantes positivas t_1 e r tais que* $\|u(t)\|_{V_0} \leqslant r_1$, *para todo* $t \geqslant t_1$.

Obtemos a mesma estimativa se u^λ é solução forte de (3.15), *uniformemente para λ em* $(0,1]$.

Demonstração. Seja u uma solução de (3.16). Tomando o produto escalar com $u(t)$ em (3.16), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{H_0}^2 + \langle A_0 u(t), u(t)\rangle_{V_0', V_0} &= \left(\frac{du}{dt}(t), u(t)\right)_{H_0} + (A_0^{H_0}u(t), u(t))_{H_0} \\
&= (B(u(t)), u(t))_{H_0} \\
&= (B(u(t)) - B(0) + B(0), u(t))_{H_0} \\
&\leqslant \|B(u(t)) - B(0)\|_{H_0}\|u(t)\|_{H_0} + \|B(0)\|_{H_0}\|u(t)\|_{H_0}. \quad (3.17)
\end{aligned}$$

Consideremos $I_1 = \{t \geqslant 0; \|u(t)\|_{V_0} \geqslant 1\}$ e $I_2 = \{t \geqslant 0; \|u(t)\|_{V_0} < 1\}$. Seja $t \in I_1$, segue pelo Lema 3.2.1 que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{H_0}^2 + \frac{\min\{m_0,1\}}{2^{p^+}}\|u(t)\|_{V_0}^{p^-} &\leqslant \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{H_0}^2 + \langle A_0u(t), u(t)\rangle_{V_0',V_0}\\ &\leqslant L_B\|u(t)\|_{H_0}^2 + \|B(0)\|_{H_0}\|u(t)\|_{H_0}.\end{aligned}$$

Como $V_0 \hookrightarrow H_0$ então $\|u(t)\|_{H_0} \leqslant \mu\|u(t)\|_{V_0}$, sendo $\mu = |\Omega| + 1$, logo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{H_0}^2 + \frac{c}{2^{p^+}}\|u(t)\|_{V_0}^{p^-} \leqslant c_1\|u(t)\|_{V_0}^2 + c_2\|u(t)\|_{V_0}, \tag{3.18}$$

onde $c = \min\{m_0, 1\}$, $c_1 = L_B\mu^2$ e $c_2 = \mu\|B(0)\|_{H_0}$.

Considere $\theta = \dfrac{p^-}{2}$ e $\varepsilon > 0$, escolhido de modo que $\dfrac{c}{2^{p^+}} - \dfrac{1}{\theta}\varepsilon^\theta - \dfrac{1}{p^-}\varepsilon^{p^-} > 0$. Segue da desigualdade de Young, que

$$\begin{aligned}c_1\|u(t)\|_{V_0}^2 + c_2\|u(t)\|_{V_0} &= \varepsilon\|u(t)\|_{V_0}^2\frac{c_1}{\varepsilon} + \varepsilon\|u(t)\|_{V_0}\frac{c_2}{\varepsilon}\\ &\leqslant \frac{1}{\theta}\varepsilon^\theta\|u(t)\|_{V_0}^{p^-} + \frac{1}{\theta'}\left(\frac{c_1}{\varepsilon}\right)^{\theta'} + \frac{1}{p^-}\varepsilon^{p^-}\|u(t)\|_{V_0}^{p^-} + \frac{1}{q}\left(\frac{c_2}{\varepsilon}\right)^q,\end{aligned}$$

onde $q = (p^-)'$. Seja $\gamma = \dfrac{c}{2^{p^+}} - \dfrac{1}{\theta}\varepsilon^\theta - \dfrac{1}{p^-}\varepsilon^{p^-} > 0$, então de (3.18) temos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{H_0}^2 + \gamma\|u(t)\|_{V_0}^{p^-} \leqslant \frac{1}{\theta'}\left(\frac{c_1}{\varepsilon}\right)^{\theta'} + \frac{1}{q}\left(\frac{c_2}{\varepsilon}\right)^q.$$

Novamente por $V_0 \hookrightarrow H_0$, podemos concluir que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{H_0}^2 + \frac{2\gamma}{\mu^{p^-}}\|u(t)\|_{H_0}^{p^-} &\leqslant \frac{d}{dt}\|u(t)\|_{H_0}^2 + 2\gamma\|u(t)\|_{V_0}^{p^-}\\ &\leqslant \frac{2}{\theta'}\left(\frac{c_1}{\varepsilon}\right)^{\theta'} + \frac{2}{q}\left(\frac{c_2}{\varepsilon}\right)^q, \quad \forall t \in I_1.\end{aligned}$$

Tomando $\delta = \dfrac{2}{\theta'}\left(\dfrac{c_1}{\varepsilon}\right)^{\theta'} + \dfrac{2}{q}\left(\dfrac{c_2}{\varepsilon}\right)^q$, $\tilde{\gamma} = \dfrac{2\gamma}{\mu^{p^-}}$ e $y(t) = \|u(t)\|_{H_0}^2$ temos

$$\frac{d}{dt}y(t) + \tilde{\gamma}y(t)^{\frac{p^-}{2}} \leqslant \delta, \quad \forall t \in I_1.$$

Pelo Lema 1.2.5, concluímos que

$$y(t) \leqslant \left(\frac{\delta}{\tilde{\gamma}}\right)^{\frac{2}{p^-}} + \left(\tilde{\gamma}\left(\frac{p^- - 2}{2}\right)t\right)^{-\frac{2}{p^- - 2}}, \;\; \forall t \in I_1.$$

Isto é,

$$\|u(t)\|_{H_0} \leqslant \left(\left(\frac{\delta}{\tilde{\gamma}}\right)^{\frac{2}{p^-}} + \left(\tilde{\gamma}\left(\frac{p^- - 2}{2}\right)t\right)^{-\frac{2}{p^- - 2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \left(\frac{\delta}{\tilde{\gamma}}\right)^{\frac{1}{p^-}} + \left(\tilde{\gamma}\left(\frac{p^- - 2}{2}\right)t\right)^{-\frac{1}{p^- -2}}, \ \forall t \in I_1.$$

Fixado $t_0 > 0$, pelo não-crescimento da função $t \mapsto \left(\tilde{\gamma}\left(\frac{p^- - 2}{2}\right)t\right)^{-\frac{1}{p^- -2}}$, segue que $\|u(t)\|_{H_0} \leqslant k_1$, para todo $t \geqslant t_0$ em I_1, onde $k_1 = \left(\frac{\delta}{\tilde{\gamma}}\right)^{\frac{1}{p^-}} + \left(\tilde{\gamma}\left(\frac{p^- -2}{2}\right)t_0\right)^{-\frac{1}{p^- -2}}$.

O caso em que $t \in I_2$, temos que $\|u(t)\|_{H_0} \leqslant \mu\|u(t)\|_{V_0} < \mu$. Consequentemente,

$$\begin{cases} \|u(t)\|_{H_0} \leqslant k_1, & \text{se } t \in I_1 \cap [t_0, \infty), \\ \|u(t)\|_{H_0} \leqslant \mu, & \text{se } t \in I_2. \end{cases}$$

Seja $r_0 = \max\{k_1, \mu\}$, então

$$\|u(t)\|_{H_0} \leqslant r_0, \ \ \forall t \geqslant t_0,$$

o que concluí a demonstração do item *(i)*.

Para o item *(ii)*, usando a desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\varphi(u) &= (\partial\varphi(u), u_t)_{H_0} = (A_0^{H_0}u, u_t)_{H_0} = (B(u) - u_t, u_t)_{H_0} \\ &= (B(u) - u_t, u_t - B(u) + B(u))_{H_0} \\ &= (B(u) - u_t, u_t - B(u))_{H_0} + (B(u) - u_t, B(u))_{H_0} \\ &= -\|B(u) - u_t\|_{H_0}^2 + (B(u) - u_t, B(u))_{H_0} \\ &\leqslant -\|B(u) - u_t\|_{H_0}^2 + \|B(u) - u_t\|_{H_0}\|B(u)\|_{H_0} \\ &\leqslant -\|B(u) - u_t\|_{H_0}^2 + \frac{1}{2}\|B(u) - u_t\|_{H_0}^2 + \frac{1}{2}\|B(u)\|_{H_0}^2 \\ &= -\frac{1}{2}\|B(u) - u_t\|_{H_0}^2 + \frac{1}{2}\|B(u)\|_{H_0}^2 \\ &\leqslant \frac{1}{2}\|B(u)\|_{H_0}^2 = \frac{1}{2}(\|B(u) - B(0)\|_{H_0} + \|B(0)\|_{H_0})^2 \\ &\leqslant \frac{1}{2}(L_B\|u\|_{H_0} + \|B(0)\|_{H_0})^2. \end{aligned}$$

O que nos garante, pelo item *(i)*, que

$$\frac{d}{dt}\varphi(u) \leqslant \frac{1}{2}\|B(u)\|_{H_0}^2 \leqslant \frac{1}{2}k_2^2, \quad \forall t \geqslant t_0,$$

onde $k_2 := L_B r_0 + \|B(0)\|_{H_0}$. Pela definição de subdiferencial

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_{H_0}^2 + \varphi(u) &= (u_t, u)_{H_0} + \varphi(u) \\ &\leqslant (u_t, u)_{H_0} + (\partial\varphi(u), u)_{H_0} = (B(u), u)_{H_0} \\ &\leqslant \|B(u)\|_{H_0}\|u\|_{H_0} \leqslant k_2 r_0, \ \forall t \geqslant t_0. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Fixado $k > 0$ e integrando a estimativa (3.19) em $[t, t+k]$, com $t \geqslant t_0$, temos

$$\int_t^{t+k} k_2 r_0 \, ds \geqslant \frac{1}{2}\|u(t+k)\|_{H_0}^2 - \frac{1}{2}\|u(t)\|_{H_0}^2 + \int_t^{t+k} \varphi(u) \, ds.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_t^{t+k} \varphi(u) \, ds &\leqslant \frac{1}{2}\|u(t+k)\|_{H_0}^2 + \int_t^{t+k} \varphi(u) \, ds \\ &\leqslant \frac{1}{2}\|u(t)\|_{H_0}^2 + \int_t^{t+k} k_2 r_0 \, ds \\ &= \frac{1}{2}\|u(t)\|_{H_0}^2 + k k_2 r_0 \leqslant \frac{1}{2} r_0^2 + k k_2 r_0 := k_3.\end{aligned}$$

Usando o Lema Uniforme de Gronwall, Lema 1.2.4, para $y = \varphi(u)$, $g = 0$ e $h = \frac{1}{2}k_2^2$ concluímos que

$$\varphi(u(t+k)) \leqslant \frac{k_3}{k} + \frac{1}{2}k_2^2 k := k_4, \quad \forall t \geqslant t_0. \tag{3.20}$$

Logo, de (3.14) e (3.20), temos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{p^+}\min\{m_0, 1\}(\rho(u) + \rho(|\nabla u|)) &= \frac{1}{p^+}\min\{m_0, 1\}\left(\int_\Omega |u(t,x)|^{p(x)} \, dx + \int_{\Omega_1} |\nabla u(t,x)|^{p(x)} \, dx\right) \\ &\leqslant \int_\Omega \frac{1}{p^+}|u(t,x)|^{p(x)} \, dx + \int_{\Omega_1} m_0 \frac{1}{p^+}|\nabla u(t,x)|^{p(x)} \, dx \\ &\leqslant \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|u(t,x)|^{p(x)} \, dx + \int_{\Omega_1} d_0(x)\frac{1}{p(x)}|\nabla u(t,x)|^{p(x)} \, dx \\ &\leqslant \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|u(t,x)|^{p(x)} \, dx + \int_{\Omega_1} \frac{d_0(x)}{p(x)}|\nabla u(t,x)|^{p(x)} \, dx + \int_{\Omega_1} \frac{d_0(x)\eta}{2}|\nabla u(t,x)|^2 \, dx \\ &= \varphi(u(t)) \\ &\leqslant k_4, \quad \forall t \geqslant t_0 + k.\end{aligned} \tag{3.21}$$

O caso em que $\|u(t)\|_{V_0} \leqslant 1$, não há o que demonstrar. Se $\|u(t)\|_{V_0} \geqslant 1$, então vamos analisar os casos a seguir:

(a) Caso em que $\|u\|_{p(x)} \leqslant 1$ e $\|\nabla u\|_{p(x)} \geqslant 1$.

Segue da Proposição 1.1.3, que

$$\|u\|_{p(x)}^{p^+} \leqslant \rho(u) \leqslant \|u\|_{p(x)}^{p^-} \quad \text{e} \quad \|\nabla u\|_{p(x)}^{p^-} \leqslant \rho(|\nabla u|) \leqslant \|\nabla u\|_{p(x)}^{p^+}.$$

Como $\rho(u) \geqslant 0$ e $\rho(|\nabla u|) \geqslant 0$, então

$$\|u\|_{p(x)}^{p^+} \leqslant \rho(u) + \rho(|\nabla u|) \quad \text{e} \quad \|\nabla u\|_{p(x)}^{p^-} \leqslant \rho(u) + \rho(|\nabla u|).$$

Segue, de (3.21) e do crescimento das funções $\mathbb{R}^+ \ni x \mapsto x^{\frac{1}{p^+}}$ e $\mathbb{R}^+ \ni x \mapsto x^{\frac{1}{p^-}}$, que

$$\begin{aligned}\|u\|_{V_0} =& \|u\|_{p(x)} + \|\nabla u\|_{p(x)} \\ \leqslant& (\rho(u) + \rho(|\nabla u|))^{\frac{1}{p^+}} + (\rho(u) + \rho(|\nabla u|))^{\frac{1}{p^-}} \\ \leqslant& \left(\frac{p^+ k_4}{\min\{m_0, 1\}}\right)^{\frac{1}{p^+}} + \left(\frac{p^+ k_4}{\min\{m_0, 1\}}\right)^{\frac{1}{p^-}}, \forall t \geqslant t_0 + k.\end{aligned}$$

(b) Caso em que $\|u\|_{p(x)} \geqslant 1$ e $\|\nabla u\|_{p(x)} \leqslant 1$.

Segue de forma similar ao item (a). De fato, pela Proposição 1.1.3, temos

$$\|u\|_{p(x)}^{p^-} \leqslant \rho(u) \leqslant \|u\|_{p(x)}^{p^+} \quad \text{e} \quad \|\nabla u\|_{p(x)}^{p^+} \leqslant \rho(|\nabla u|) \leqslant \|\nabla u\|_{p(x)}^{p^-}.$$

Logo,

$$\|u\|_{p(x)}^{p^-} \leqslant \rho(u) + \rho(|\nabla u|) \quad \text{e} \quad \|\nabla u\|_{p(x)}^{p^+} \leqslant \rho(u) + \rho(|\nabla u|).$$

Assim, usando (3.21), segue que

$$\begin{aligned}\|u\|_{V_0} =& \|u\|_{p(x)} + \|\nabla u\|_{p(x)} \\ \leqslant& (\rho(u) + \rho(|\nabla u|))^{\frac{1}{p^-}} + (\rho(u) + \rho(|\nabla u|))^{\frac{1}{p^+}} \\ \leqslant& \left(\frac{p^+ k_4}{\min\{m_0, 1\}}\right)^{\frac{1}{p^-}} + \left(\frac{p^+ k_4}{\min\{m_0, 1\}}\right)^{\frac{1}{p^+}}, \forall t \geqslant t_0 + k.\end{aligned}$$

(c) Caso em que $\|u\|_{p(x)} \geqslant 1$ e $\|\nabla u\|_{p(x)} \geqslant 1$.

Novamente, pela Proposição 1.1.3, temos que

$$\|u\|_{p(x)}^{p^-} \leqslant \rho(u) \leqslant \|u\|_{p(x)}^{p^+} \quad \text{e} \quad \|\nabla u\|_{p(x)}^{p^-} \leqslant \rho(|\nabla u|) \leqslant \|\nabla u\|_{p(x)}^{p^+}.$$

Então,

$$\begin{aligned}\|u\|_{V_0}^{p^-} =& (\|u\|_{p(x)} + \|\nabla u\|_{p(x)})^{p^-} \\ \leqslant& 2^{p^-}(\|u\|_{p(x)}^{p^-} + \|\nabla u\|_{p(x)}^{p^-}) \\ \leqslant& 2^{p^-}(\rho(u) + \rho(|\nabla u|)).\end{aligned}$$

Segue de (3.21) que

$$\|u\|_{V_0} \leqslant 2\left(\frac{p^+ k_4}{\min\{m_0, 1\}}\right)^{\frac{1}{p^-}}, \quad \forall t \geqslant t_0 + k.$$

(d) Caso em que $\|u\|_{p(x)} \leqslant 1$ e $\|\nabla u\|_{p(x)} \leqslant 1$.

Segue de forma similar ao item (c), basta trocarmos p^- por p^+. Neste caso, temos

$$\|u\|_{V_0} \leqslant 2\left(\frac{p^+ k_4}{\min\{m_0, 1\}}\right)^{\frac{1}{p^+}}, \quad \forall t \geqslant t_0 + k.$$

Portanto, para todo $t \geqslant t_1 := t_0 + k$, concluímos que

$$\|u(t)\|_{V_0} \leqslant \max\left\{2\left[\left(\frac{p^+ k_4}{\min\{m_0, 1\}}\right)^{\frac{1}{p^+}} + \left(\frac{p^+ k_4}{\min\{m_0, 1\}}\right)^{\frac{1}{p^-}}\right], 1\right\} =: r_1.$$

No caso em que u^λ é solução forte de (3.15), podemos estimar pelas mesmas constantes, isto é, $r_0^\lambda = r_0$ e $r^\lambda = r_1$, para todo $\lambda \in (0, 1]$. Ou seja, obtemos estimativas uniformes em $\lambda \in (0, 1]$.

$\square$

Lema 3.3.2. *Sejam u solução forte de (3.16), com $u(0) = u_0 \in V_0$, e $T > 0$. Existe constante $R > 0$, dependendo de $\|u_0\|_{V_0}$, tal que $\|u(t)\|_{V_0} \leqslant R$, para todo $0 \leqslant t \leqslant T$.*

Além disso, se u^λ é solução forte de (3.15), com $u^\lambda(0) = u_0^\lambda \in V$, existe $R_\lambda > 0$, dependendo de $\|u_0^\lambda\|_V$, tal que $\|u(t)\|_V \leqslant R_\lambda$, para todo $0 \leqslant t \leqslant T$.

Demonstração. Primeiramente, mostraremos que existe $R_0 > 0$, dependendo de $\|u_0\|_{H_0}$, tal que $\|u(t)\|_{H_0} \leqslant R_0$, para todo $t \geqslant 0$. Notemos que para os dados iniciais em subconjuntos limitados de H_0, temos R_0 definida uniformemente.

Pelo Lema 3.3.1, existem $t_0 > 0$ e $r_0 > 0$ tais que $\|u(t)\|_{H_0} \leqslant r_0$, para todo $t \geqslant t_0$. Sejam $0 < t \leqslant t_0$ e $s \in (0, t)$, procedendo como em (3.17), podemos concluir que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(s)\|_{H_0}^2 &\leqslant L_B\|u(s)\|_{H_0}^2 + \|B(0)\|_{H_0}\|u(s)\|_{H_0} \\ &\leqslant L_B\|u(s)\|_{H_0}^2 + \frac{1}{2}\|B(0)\|_{H_0}^2 + \frac{1}{2}\|u(s)\|_{H_0}^2 \\ &= \left(L_B + \frac{1}{2}\right)\|u(s)\|_{H_0}^2 + \frac{1}{2}\|B(0)\|_{H_0}^2 \\ &\leqslant \max\left\{L_B + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\|B(0)\|_{H_0}^2\right\}(\|u(s)\|_{H_0}^2 + 1).\end{aligned}$$

Seja $c_1 = \max\left\{L_B + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\|B(0)\|_{H_0}^2\right\}$. Integrando essa última desigualdade para s variando no intervalo $[0, t]$, temos

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_{H_0}^2 - \frac{1}{2}\|u(0)\|_{H_0}^2 \leqslant c_1\int_0^t (\|u(s)\|_{H_0}^2 + 1)ds,$$

o que implica

$$\|u(t)\|_{H_0}^2 - \|u(0)\|_{H_0}^2 \leqslant 2c_1\int_0^t (\|u(s)\|_{H_0}^2 + 1)ds, \quad \forall t \in [0, t_0].$$

Aplicando o Lema de Grönwall-Bellman, Lema 1.2.3, para $\phi(t) = \|u(t)\|_{H_0}^2 + 1$, concluímos que

$$\|u(t)\|_{H_0}^2 + 1 \leqslant (\|u(0)\|_{H_0}^2 + 1)e^{\int_0^t 2c_1\, ds}, \quad \forall t \in [0, t_0],$$

isto é,

$$\|u(t)\|_{H_0}^2 \leqslant (\|u(0)\|_{H_0}^2 + 1)e^{2c_1 t} - 1, \quad \forall t \in [0, t_0].$$

Logo, pelo crescimento da função exponencial, temos

$$\|u(t)\|_{H_0} \leqslant \sqrt{(\|u(0)\|_{H_0}^2 + 1)e^{2c_1 t_0} - 1}, \quad \forall t \in [0, t_0].$$

Portanto,

$$\|u(t)\|_{H_0} \leqslant R_0, \quad \forall t \geqslant 0, \tag{3.22}$$

onde $R_0 = \max\left\{\sqrt{(\|u(0)\|_{H_0}^2 + 1)e^{2c_1 t_0} - 1}, r_0\right\}$. Mais precisamente,

$$R_0 = \max\left\{\sqrt{(\|u(0)\|_{H_0}^2 + 1)e^{2c_1 t_0} - 1}, \left(\frac{\delta}{\tilde{\gamma}}\right)^{\frac{1}{p^-}} + \left(\tilde{\gamma}\left(\frac{p^- - 2}{2}\right)t_0\right)^{-\frac{1}{p^- - 2}}, \mu\right\},$$

onde t_0 é um real fixado positivo.

Novamente pelo Lema 3.3.1, usando (3.22), temos que

$$\frac{d}{dt}\varphi(u) \leqslant \frac{1}{2}(L_B\|u\|_{H_0} + \|B(0)\|_{H_0})^2 \leqslant \frac{1}{2}K_2^2, \quad \forall t \geqslant 0,$$

onde $K_2 := L_B R_0 + \|B(0)\|_{H_0}$.

Seja $t > 0$. Integrando em $(0,t)$ a desigualdade anterior, obtemos

$$\varphi(u(t)) - \varphi(u(0)) \leqslant \frac{1}{2}K_2^2 t.$$

Assim, para todo $0 \leqslant t \leqslant T$ temos

$$\varphi(u(t)) \leqslant \varphi(u(0)) + \frac{T}{2}K_2^2. \tag{3.23}$$

Por sua vez, como $u(0) = u_0 \in V_0$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\varphi(u(0)) &= \varphi(u_0)\\
&= \int_{\Omega_1} \frac{d_0(x)}{p(x)}|\nabla u_0|^{p(x)}\,dx + \int_{\Omega_1} \frac{d_0(x)\eta}{2}|\nabla u_0|^2\,dx + \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)}|u_0|^{p(x)}\,dx\\
&\leqslant \int_{\Omega_1} \frac{M_0}{p^-}|\nabla u_0|^{p(x)}\,dx + \int_{\Omega_1} \frac{M_0\eta}{2}|\nabla u_0|^2\,dx + \int_{\Omega} \frac{1}{p^-}|u_0|^{p(x)}\,dx\\
&= \frac{M_0}{p^-}\rho_p(|\nabla u_0|) + \frac{M_0\eta}{2}\|\nabla u_0\|^2_{L^2(\Omega_1)} + \frac{1}{p^-}\rho_p(u_0).
\end{aligned}$$

Vamos analisar quatro casos.

(i) Se $\|\nabla u_0\|_{L^{p(x)}(\Omega_1)} \leqslant 1$ e $\|u_0\|_{L^{p(x)}(\Omega_1)} \leqslant 1$, como $L^{p(x)}(\Omega_1) \hookrightarrow L^2(\Omega_1)$, temos

$$\|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega_1)} \leqslant \mu\|\nabla u_0\|_{L^{p(x)}(\Omega_1)} \leqslant \mu.$$

Assim, pela Proposição 1.1.3, temos

$$\varphi(u(0)) \leqslant \frac{M_0}{p^-}\|\nabla u_0\|^{p^-}_{L^{p(x)}(\Omega_1)} + \frac{M_0\eta}{2}\mu^2 + \frac{1}{p^-}\|u_0\|^{p^-}_{L^{p(x)}(\Omega_1)} \leqslant \frac{M_0}{p^-} + \frac{M_0\eta\mu^2}{2} + \frac{1}{p^-}.$$

Como $\|u_0\|_{V_0} = \|\nabla u_0\|_{L^{p(x)}(\Omega_1)} + \|u_0\|_{L^{p(x)}(\Omega_1)} \leqslant 2$, segue que

$$1 \leqslant \frac{\|u_0\|^{p^+}_{V_0}}{2^{p^+}} \leqslant \frac{\|u_0\|^{p^+}_{V_0}}{2} \leqslant 2\|u_0\|^{p^+}_{V_0} \leqslant 2(\|u_0\|^{p^+}_{V_0} + 1).$$

Logo,

$$\varphi(u(0)) \leqslant \frac{M_0}{p^-} + \frac{M_0\eta\mu^2}{2} + \frac{1}{p^-} \leqslant 2\left(\frac{M_0}{p^-} + \frac{M_0\eta\mu^2}{2} + \frac{1}{p^-}\right)(\|u_0\|^{p^+}_{V_0} + 1).$$

(ii) Se $\|\nabla u_0\|_{L^{p(x)}(\Omega_1)} \leqslant 1$ e $\|u_0\|_{L^{p(x)}(\Omega_1)} \geqslant 1$, como $L^{p(x)}(\Omega_1) \hookrightarrow L^2(\Omega_1)$, temos

$$\|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega_1)} \leqslant \mu\|\nabla u_0\|_{L^{p(x)}(\Omega_1)} \leqslant \mu.$$

Assim, pela Proposição 1.1.3,

$$\varphi(u(0)) \leqslant \frac{M_0}{p^-}\|\nabla u_0\|^{p^-}_{L^{p(x)}(\Omega_1)} + \frac{M_0\eta}{2}\mu^2 + \frac{1}{p^-}\|u_0\|^{p^+}_{L^{p(x)}(\Omega_1)} \leqslant \frac{M_0}{p^-} + \frac{M_0\eta\mu^2}{2} + \frac{1}{p^-}\|u_0\|^{p^+}_{L^{p(x)}(\Omega_1)}.$$

Como $\|u_0\|_{L^{p(x)}(\Omega_1)} \leqslant \|u_0\|_{V_0}$, segue que

$$\begin{aligned}
\varphi(u(0)) &\leqslant \frac{M_0}{p^-} + \frac{M_0\eta\mu^2}{2} + \frac{1}{p^-}\|u_0\|^{p^+}_{L^{p(x)}(\Omega_1)} \\
&\leqslant \frac{M_0}{p^-} + \frac{M_0\eta\mu^2}{2} + \frac{1}{p^-}\|u_0\|^{p^+}_{V_0} \\
&\leqslant \max\left\{\frac{M_0}{p^-} + \frac{M_0\eta\mu^2}{2}, \frac{1}{p^-}\right\}(\|u_0\|^{p^+}_{V_0} + 1) \\
&\leqslant 2\left(\frac{M_0}{p^-} + \frac{M_0\eta\mu^2}{2} + \frac{1}{p^-}\right)(\|u_0\|^{p^+}_{V_0} + 1).
\end{aligned}$$

(iii) Se $\|\nabla u_0\|_{L^{p(x)}(\Omega_1)} \geqslant 1$ e $\|u_0\|_{L^{p(x)}(\Omega_1)} \leqslant 1$, como $L^{p(x)}(\Omega_1) \hookrightarrow L^2(\Omega_1)$, temos

$$\|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega_1)} \leqslant \mu\|\nabla u_0\|_{L^{p(x)}(\Omega_1)}.$$

Assim, pela Proposição 1.1.3 e pelo não-decrescimento da função $\theta \mapsto \|\nabla u_0\|^{\theta}_{L^{p(x)}(\Omega_1)}$,

$$\begin{aligned}
\varphi(u(0)) &\leqslant \frac{M_0}{p^-}\|\nabla u_0\|^{p^+}_{L^{p(x)}(\Omega_1)} + \frac{M_0\eta}{2}\|\nabla u_0\|^2_{L^2(\Omega_1)} + \frac{1}{p^-}\|u_0\|^{p^-}_{L^{p(x)}(\Omega_1)} \\
&\leqslant \frac{M_0}{p^-}\|\nabla u_0\|^{p^+}_{L^{p(x)}(\Omega_1)} + \frac{M_0\eta\mu^2}{2}\|\nabla u_0\|^2_{L^{p(x)}(\Omega_1)} + \frac{1}{p^-} \\
&\leqslant \frac{M_0}{p^-}\|\nabla u_0\|^{p^+}_{L^{p(x)}(\Omega_1)} + \frac{M_0\eta\mu^2}{2}\|\nabla u_0\|^{p^+}_{L^{p(x)}(\Omega_1)} + \frac{1}{p^-} \\
&= \left(\frac{M_0}{p^-} + \frac{M_0\eta\mu^2}{2}\right)\|\nabla u_0\|^{p^+}_{L^{p(x)}(\Omega_1)} + \frac{1}{p^-}.
\end{aligned}$$

Como $\|\nabla u_0\|_{L^{p(x)}(\Omega_1)} \leqslant \|u_0\|_{V_0}$, segue que

$$\begin{aligned}
\varphi(u(0)) &\leqslant \left(\frac{M_0}{p^-} + \frac{M_0\eta\mu^2}{2}\right)\|\nabla u_0\|^{p^+}_{L^{p(x)}(\Omega_1)} + \frac{1}{p^-} \\
&\leqslant \left(\frac{M_0}{p^-} + \frac{M_0\eta\mu^2}{2}\right)\|u_0\|^{p^+}_{V_0} + \frac{1}{p^-} \\
&\leqslant \max\left\{\frac{M_0}{p^-} + \frac{M_0\eta\mu^2}{2}, \frac{1}{p^-}\right\}(\|u_0\|^{p^+}_{V_0} + 1) \\
&\leqslant 2\left(\frac{M_0}{p^-} + \frac{M_0\eta\mu^2}{2} + \frac{1}{p^-}\right)(\|u_0\|^{p^+}_{V_0} + 1).
\end{aligned}$$

(iv) Se $\|\nabla u_0\|_{L^{p(x)}(\Omega_1)} \geqslant 1$ e $\|u_0\|_{L^{p(x)}(\Omega_1)} \geqslant 1$, pela Proposição 1.1.3 e pela inclusão $L^{p(x)}(\Omega_1) \hookrightarrow L^2(\Omega_1)$, temos

$$\varphi(u(0)) \leqslant \frac{M_0}{p^-}\|\nabla u_0\|^{p^+}_{L^{p(x)}(\Omega_1)} + \frac{M_0\eta}{2}\|\nabla u_0\|^2_{L^2(\Omega_1)} + \frac{1}{p^-}\|u_0\|^{p^+}_{L^{p(x)}(\Omega_1)}$$

$$\leqslant \frac{M_0}{p^-}\|\nabla u_0\|^{p^+}_{L^{p(x)}(\Omega_1)} + \frac{M_0\eta\mu^2}{2}\|\nabla u_0\|^{2}_{L^{p(x)}(\Omega_1)} + \frac{1}{p^-}\|u_0\|^{p^+}_{L^{p(x)}(\Omega_1)}.$$

Como $\|\nabla u_0\|_{p(x)} \geqslant 1$, a função $\theta \mapsto \|\nabla u_0\|^{\theta}_{L^{p(x)}(\Omega_1)}$ é não-decrescente, assim

$$\|\nabla u_0\|^{p^+}_{L^{p(x)}(\Omega_1)} \geqslant \|\nabla u_0\|^{2}_{L^{p(x)}(\Omega_1)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\varphi(u(0)) &\leqslant \frac{M_0}{p^-}\|\nabla u_0\|^{p^+}_{L^{p(x)}(\Omega_1)} + \frac{M_0\eta\mu^2}{2}\|\nabla u_0\|^{p^+}_{L^{p(x)}(\Omega_1)} + \frac{1}{p^-}\|u_0\|^{p^+}_{L^{p(x)}(\Omega_1)} \\
&= \left(\frac{M_0}{p^-} + \frac{M_0\eta\mu^2}{2}\right)\|\nabla u_0\|^{p^+}_{L^{p(x)}(\Omega_1)} + \frac{1}{p^-}\|u_0\|^{p^+}_{L^{p(x)}(\Omega_1)} \\
&\leqslant \max\left\{\frac{M_0}{p^-} + \frac{M_0\eta\mu^2}{2}, \frac{1}{p^-}\right\}(\|\nabla u_0\|^{p^+}_{L^{p(x)}(\Omega_1)} + \|u_0\|^{p^+}_{L^{p(x)}(\Omega_1)}) \\
&\leqslant \max\left\{\frac{M_0}{p^-} + \frac{M_0\eta\mu^2}{2}, \frac{1}{p^-}\right\}2(\|\nabla u_0\|_{L^{p(x)}(\Omega_1)} + \|u_0\|_{L^{p(x)}(\Omega_1)})^{p^+} \\
&= 2\max\left\{\frac{M_0}{p^-} + \frac{M_0\eta\mu^2}{2}, \frac{1}{p^-}\right\}\|u_0\|^{p^+}_{V_0} \\
&\leqslant 2\left(\frac{M_0}{p^-} + \frac{M_0\eta\mu^2}{2} + \frac{1}{p^-}\right)(\|u_0\|^{p^+}_{V_0} + 1).
\end{aligned}$$

Em todos os casos obtemos a mesma conclusão,

$$\varphi(u(0)) \leqslant 2\left(\frac{M_0}{p^-} + \frac{M_0\eta\mu^2}{2} + \frac{1}{p^-}\right)(\|u_0\|^{p^+}_{V_0} + 1) := K_3. \tag{3.24}$$

Retomando a (3.23), temos

$$\varphi(u(t)) \leqslant K_3 + \frac{T}{2}K_2^2 := K_4, \quad \forall\, t \in [0,T].$$

Do mesmo modo que foi feito em (3.21), podemos concluir que

$$\frac{1}{p^+}\min\{m_0, 1\}(\rho(u) + \rho(|\nabla u|)) \leqslant \varphi(u(t)) \leqslant K_4, \quad \forall\, t \in [0,T].$$

Procedendo como na análise de casos (a)-(b)-(c)-(d) do Lema 3.3.1, fazendo $t_0 = 0$ e substituindo k_4 por K_4, obtemos

$$\|u(t)\|_{V_0} \leqslant \max\left\{2\left[\left(\frac{p^+K_4}{\min\{m_0,1\}}\right)^{\frac{1}{p^+}} + \left(\frac{p^+K_4}{\min\{m_0,1\}}\right)^{\frac{1}{p^-}}\right], 1\right\} := R, \quad \forall\, 0 \leqslant t \leqslant T.$$

A demonstração para u^λ solução forte de (3.15), pode ser feita de maneira análoga. Nesse caso, além da dependência de $\|u_0^\lambda\|_V$, a constante $R > 0$ fica escrita em termos da constante M_λ, ou seja, a estimativa não é uniforme em λ variando no intervalo $(0,1]$. $\square$

Este último Lema nos permite concluir que dado $T > 0$ e um limitado $D \subset V_0$, o conjunto $\bigcup_{t\in[0,T]} T_0(t)D$ é limitado em V_0. Analogamente, para cada $\lambda \in (0,1]$, $\bigcup_{t\in[0,T]} T_\lambda(t)D$ é limitado em

V, sendo $D \subset V$ limitado.

O resultado a seguir será importante para garantir a compacidade do conjunto $\mathcal{B}_0^\ell$, definido na próxima seção, no espaço de $\ell-$trajetórias, onde $\ell > 0$ fixado.

Lema 3.3.3. *Sejam u solução forte de* (3.16) *e $T > 0$. Existe constante $C_1 > 0$, dependendo de T e de $\|u_0\|_{H_0}$, tal que*

$$\int_0^T \int_{\Omega_1} |\nabla u(t,x)|^{p(x)} dxdt \leqslant C_1.$$

Obtemos a mesma conclusão se u^λ é solução forte de (3.15)*, onde $\lambda \in (0,1]$. Mais precisamente, para cada $\lambda \in (0,1]$, existe $C_1^\lambda > 0$, dependendo de T e de $\|u_0^\lambda\|_H$, tal que*

$$\int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u^\lambda(t,x)|^{p(x)} dxdt \leqslant C_1^\lambda.$$

Demonstração. Como $u \in V_0 = W^{1,p(x)}_{\Omega_0,0}(\Omega)$ é uma solução forte de (3.16), então $u_t + A_0^{H_0} u = B(u)$. Fazendo $(\cdot, u)_{H_0}$ temos

$$(u_t, u)_{H_0} + (A_0^{H_0} u, u)_{H_0} = (B(u), u)_{H_0}. \tag{3.25}$$

Logo

$$\begin{aligned}
(A_0^{H_0} u, u)_{H_0} =& \langle A_0^{H_0} u, u\rangle_{V_0', V_0} = -\int_{\Gamma_0 \cup \Gamma} d_0(x)(|\nabla u|^{p(x)-2} + \eta)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} u \; dx + \int_\Omega |u|^{p(x)-2}|u|^2 \; dx \\
&+ \int_{\Omega_1} d_0(x)(|\nabla u|^{p(x)-2} + \eta)\nabla u \nabla u \; dx \; dx + \int_{\Gamma_0} d_0(x)(|\nabla u|^{p(x)-2} + \eta)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} u \; dx \\
=& \int_{\Omega_1} d_0(x)|\nabla u|^{p(x)} \, dx + \int_{\Omega_1} d_0(x)\eta|\nabla u|^2 \, dx + \int_\Omega |u|^{p(x)} \, dx.
\end{aligned}$$

Retomando (3.25) e usando a desigualdade de Young obtemos,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_{H_0}^2 + \int_{\Omega_1} d_0(x)|\nabla u|^{p(x)} \, dx + \int_{\Omega_1} d_0(x)\eta|\nabla u|^2 \, dx + \int_\Omega |u|^{p(x)} \, dx &= (B(u), u)_{H_0} \\
&\leqslant |(B(u), u)_{H_0}| \leqslant \|B(u)\|_{H_0}\|u\|_{H_0} \\
&= \|B(u) - B(0) + B(0)\|_{H_0}\|u\|_{H_0} \\
&\leqslant (\|B(u) - B(0)\|_{H_0} + \|B(0)\|_{H_0})\|u\|_{H_0} \\
&\leqslant L_B\|u\|_{H_0}^2 + \|B(0)\|_{H_0}\|u\|_{H_0} \\
&\leqslant L_B\|u\|_{H_0}^2 + \frac{1}{2}\|B(0)\|_{H_0}^2 + \frac{1}{2}\|u\|_{H_0}^2. \qquad (3.26)
\end{aligned}$$

Como $\displaystyle\int_{\Omega_1} d_0(x)\eta|\nabla u|^2 \, dx \geqslant m_0\eta\|\nabla u\|_{L^2(\Omega_1)}^2 \geqslant 0$ e $\rho(u) = \displaystyle\int_\Omega |u|^{p(x)} \, dx \geqslant 0$, obtemos a desigualdade

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_{H_0}^2 + m_0 \int_{\Omega_1} |\nabla u|^{p(x)} \, dx \leqslant \left(L_B + \frac{1}{2}\right)\|u\|_{H_0}^2 + \frac{1}{2}\|B(0)\|_{H_0}^2. \tag{3.27}$$

Integrando (3.27) com respeito a $t \in [0,T]$, segue que

$$\frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}\|u(t)\|_{H_0}^2\,dt + m_0\int_0^T\int_{\Omega_1}|\nabla u(t)|^{p(x)}\,dx\,dt$$
$$\leqslant \int_0^T\left(L_B+\frac{1}{2}\right)\|u(t)\|_{H_0}^2\,dt + \int_0^T \frac{1}{2}\|B(0)\|_{H_0}^2\,dt.$$

Assim

$$\|u(T)\|_{H_0}^2 + 2m_0\int_0^T\int_{\Omega_1}|\nabla u(t)|^{p(x)}\,dx\,dt$$
$$\leqslant 2\left(L_B+\frac{1}{2}\right)\int_0^T\|u(t)\|_{H_0}^2\,dt + \|B(0)\|_{H_0}^2 T + \|u(0)\|_{H_0}^2,$$

o que implica

$$2m_0\int_0^T\int_{\Omega_1}|\nabla u(t)|^{p(x)}\,dx\,dt \leqslant (2L_B+1)\int_0^T\|u(t)\|_{H_0}^2\,dt + \|B(0)\|_{H_0}^2 T + \|u(0)\|_{H_0}^2. \tag{3.28}$$

Negligenciando o segundo termo do lado esquerdo de (3.27), já que $\rho(|\nabla u|) \geqslant 0$, e integrando sob $[0,t]$, onde $0 < t < T$, obtemos

$$\|u(t)\|_{H_0}^2 - \|u(0)\|_{H_0}^2 \leqslant \|B(0)\|_{H_0}^2 t + (2L_B+1)\int_0^t\|u(\theta)\|_{H_0}^2\,d\theta$$
$$\leqslant \|B(0)\|_{H_0}^2 T + (2L_B+1)\int_0^t\|u(\theta)\|_{H_0}^2\,d\theta.$$

isto é,

$$\|u(t)\|_{H_0}^2 \leqslant \|u_0\|_{H_0}^2 + \|B(0)\|_{H_0}^2 T + (2L_B+1)\int_0^t\|u(\theta)\|_{H_0}^2\,d\theta.$$

Usando o Lema 1.2.3, de Grönwal-Belmann, obtemos

$$\|u(t)\|_{H_0}^2 \leqslant (\|u_0\|_{H_0}^2 + \|B(0)\|_{H_0}^2 T)\exp((2L_B+1)t), \text{ para todo } t\in[0,T].$$

Integrando essa última desigualdade com respeito a $t \in [0,T]$, concluímos

$$\int_0^T\|u(t)\|_{H_0}^2\,dt \leqslant \int_0^T(\|u_0\|_{H_0}^2 + \|B(0)\|_{H_0}^2 T)\exp((2L_B+1)t)\,dt$$
$$= \frac{1}{(2L_B+1)}(\|u_0\|_{H_0}^2 + \|B(0)\|_{H_0}^2 T)(\exp((2L_B+1)T)-1).$$

Retornando a equação (3.28), podemos escrever

$$2m_0\int_0^T\int_{\Omega_1}|\nabla u(t)|^{p(x)}\,dx\,dt$$
$$\leqslant (\|u_0\|_{H_0}^2 + \|B(0)\|_{H_0}^2 T)(\exp((2L_B+1)T)-1) + \|B(0)\|_{H_0}^2 T + \|u_0\|_{H_0}^2$$
$$= (\|u_0\|_{H_0}^2 + \|B(0)\|_{H_0}^2 T)\exp((2L_B+1)T).$$

Ou seja, denotando $C_1 = \dfrac{1}{2m_0}(\|u_0\|_{H_0}^2 + \|B(0)\|_{H_0}^2 T)\exp((2L_B+1)T)$ temos

$$\int_0^T \int_{\Omega_1} |\nabla u(t)|^{p(x)}\, dx\, dt \leqslant C_1,$$

concluindo a demonstração. $\square$

Lema 3.3.4. *Seja $T > 0$. Se u é solução fraca de (3.16) em $[0,T]$, então existe constante $k_0 = k_0(\|u(0)\|_{H_0}, T) > 0$, tal que*

$$\int_0^T \|B(u(t))\|_{H_0}^2\, dt \leqslant k_0.$$

Obtemos a mesma conclusão se u^λ é solução fraca de (3.15) em $[0,T]$, onde $\lambda \in [0,1)$. Mais precisamente, para cada $\lambda \in (0,1]$, existe $k_0^\lambda = k_0^\lambda(\|u^\lambda(0)\|_H, T) > 0$, tal que

$$\int_0^T \|B(u^\lambda(t))\|_H^2\, dt \leqslant k_0^\lambda.$$

Demonstração. Como u é solução fraca de (3.16) em $[0,T]$, então $u \in C([0,T]; H_0)$. Logo,

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|B(u(t))\|_{H_0}^2\, dt \leqslant & \int_0^T (\|B(u(t)) - B(0)\|_{H_0} + \|B(0)\|_{H_0})^2\, dt \\
\leqslant & \int_0^T 2(\|B(u(t)) - B(0)\|_{H_0}^2 + \|B(0)\|_{H_0}^2)\, dt \\
=& 2\int_0^T \|B(u(t)) - B(0)\|_{H_0}^2\, dt + 2\int_0^T \|B(0)\|_{H_0}^2\, dt \\
\leqslant & 2L_B^2 \int_0^T \|u(t)\|_{H_0}^2\, dt + 2\|B(0)\|_{H_0}^2 T \\
\leqslant & 2L_B^2 \int_0^T (\sup_{\theta\in[0,T]} \|u(\theta)\|_{H_0})^2\, dt + 2\|B(0)\|_{H_0}^2 T \\
=& 2L_B^2 T \|u\|_{C([0,T];H_0)}^2 + 2\|B(0)\|_{H_0}^2 T.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Sendo u é solução fraca de (3.16), existe sequência $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de soluções fortes de (3.16) tal que

$$\|u - u_i\|_{C([0,T];H_0)} \xrightarrow{i\to\infty} 0.$$

Para cada $i \in \mathbb{N}$, temos

$$\left(\frac{du_i}{dt}, u_i\right)_{H_0} + (A_0^{H_0} u_i, u_i)_{H_0} = (B(u_i), u_i)_{H_0},$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_i\|_{H_0}^2 + \langle A_0^{H_0} u_i, u_i\rangle_{V_0', V_0} = (B(u_i), u_i)_{H_0}.$$

Como em (3.26) obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_i\|_{H_0}^2 + \int_{\Omega_1} d_0(x)|\nabla u_i|^{p(x)}\,dx + \int_{\Omega_1} d_0(x)\eta|\nabla u_i|^2\,dx + \int_{\Omega}|u_i|^{p(x)}\,dx &= (B(u_i),u_i)_{H_0}\\ &\leqslant \left(L_B+\frac{1}{2}\right)\|u_i\|_{H_0}^2 + \frac{1}{2}\|B(0)\|_{H_0}^2. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Negligenciando as três parcelas positivas no lado esquerdo de (3.30) temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_i\|_{H_0}^2 \leqslant \left(L_B+\frac{1}{2}\right)\|u_i\|_{H_0}^2 + \frac{1}{2}\|B(0)\|_{H_0}^2. \tag{3.31}$$

Integrando (3.31) sob $[0,t]$, com $t\in[0,T]$, segue que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|u_i(t)\|_{H_0}^2 - \frac{1}{2}\|u_i(0)\|_{H_0}^2 &\leqslant \int_0^t \left(L_B+\frac{1}{2}\right)\|u_i(\theta)\|_{H_0}^2\,d\theta + \int_0^t \frac{1}{2}\|B(0)\|_{H_0}^2\,d\theta\\ &= \left(L_B+\frac{1}{2}\right)\int_0^t \|u_i(\theta)\|_{H_0}^2\,d\theta + t\frac{1}{2}\|B(0)\|_{H_0}^2.\end{aligned}$$

Assim,

$$\|u_i(t)\|_{H_0}^2 \leqslant \|u_i(0)\|_{H_0}^2 + T\|B(0)\|_{H_0}^2 + (2L_B+1)\int_0^t \|u_i(\theta)\|_{H_0}^2\,d\theta, \quad \forall t\in[0,T].$$

Segue do Lema 1.2.3, de Grönwal-Belmann, que,

$$\|u_i(t)\|_{H_0}^2 \leqslant (\|u_i(0)\|_{H_0}^2 + T\|B(0)\|_{H_0}^2)e^{(2L_B+1)t}, \quad \forall t\in[0,T].$$

Logo,

$$\|u_i(t)\|_{H_0} \leqslant \sqrt{\|u_i(0)\|_{H_0}^2 + T\|B(0)\|_{H_0}^2}\; e^{(L_B+\frac{1}{2})T}, \quad \forall t\in[0,T], \forall i\in\mathbb{N}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}\|u\|_{C([0,T];H_0)} &\leqslant \|u-u_i\|_{C([0,T];H_0)} + \|u_i\|_{C([0,T];H_0)}\\ &\leqslant \|u-u_i\|_{C([0,T];H_0)} + \|u_i(0)\|_{H_0}e^{(L_B+\frac{1}{2})T} + \sqrt{T}\|B(0)\|_{H_0}e^{(L_B+\frac{1}{2})T}.\end{aligned} \tag{3.32}$$

Como

$$|\,\|u_i(0)\|_{H_0} - \|u(0)\|_{H_0}\,| \leqslant \|u_i(0)-u(0)\|_{H_0} \leqslant \|u-u_i\|_{C([0,T];H_0)} \xrightarrow{i\to\infty} 0,$$

fazendo $i\to\infty$ em (3.32), temos

$$\|u\|_{C([0,T];H_0)} \leqslant \|u(0)\|_{H_0}e^{(L_B+\frac{1}{2})T} + \sqrt{T}\|B(0)\|_{H_0}e^{(L_B+\frac{1}{2})T} := \text{const}(\|u(0)\|_{H_0},T). \tag{3.33}$$

Substituindo (3.33) em (3.29) obtemos,

$$\int_0^T \|B(u(t))\|_{H_0}^2 \leqslant k_0,$$

sendo $k_0 := 2L_B^2 T(\text{const}(\|u(0)\|_{H_0}, T))^2 + 2T\|B(0)\|_{H_0}^2$. $\square$

3.4 Existência de atrator exponencial para $(T_\lambda(t), H)$ via método das ℓ-trajetórias

O principal objetivo desta seção é demonstrar que $(T_\lambda(t), H)$ tem atrator exponencial, para todo $\lambda \in [0,1]$. Em particular, isso implica que $(T_\lambda(t), H)$ tem um atrator global com dimensão fractal finita, para todo $\lambda \in [0,1]$.

Seja r a constante positiva obtida no item (ii) do Lema 3.3.1, associada a $t_0 = 1$ e $k = 1$. Consideramos o conjunto

$$B_1 = \{u \in V_0; \|u\|_{p(x)} \leqslant r \text{ e } \|\nabla u\|_{p(x)} \leqslant r\}. \tag{3.34}$$

Seja u solução fraca de (3.16), com $u(0) \in V_0$. De (3.14), temos

$$D(\varphi) := \{u \in H_0; \varphi(u) < +\infty\} = V_0.$$

Usando o Lema 3.3.4, podemos aplicar o Teorema 1.2.4 para $H = H_0$, $\phi = \varphi$ e $f = B(u)$. Como $u(0) \in D(\varphi)$, concluímos que $t \mapsto \varphi(u(t))$ é absolutamente contínua em $[0,T]$, onde $T > 0$ fixado arbitrário. Em particular $\varphi(u(t))$ é limitada, para todo $t \in [0,T]$, ou seja, $u(t) \in D(\varphi) = V_0$, para todo $t \in [0,T]$. Logo $T_0(t)u_0 = u(t) \in V_0$, para todo $t \geqslant 0$. Isto é,

$$T_0(t)V_0 \subset V_0, \quad \forall t \geqslant 0. \tag{3.35}$$

Segue do Teorema 1.2.4 que u é solução forte de (3.16). Assim, pela demonstração do Lema 3.3.1, fixando os valores positivos $t_0 = 1$ e $k = 1$, temos que

$$\|u(t)\|_{V_0} \leqslant r, \quad \forall t \geqslant 2.$$

Com isso, $\|u(t)\|_{p(x)} \leqslant r$ e $\|\nabla u(t)\|_{p(x)} \leqslant r$, para todo $t \geqslant 2$. Portanto, como $B_1 \subset V_0$, temos

$$T_0(t)B_1 \subset T_0(t)V_0 \subset B_1, \quad \text{para todo } t \geqslant 2. \tag{3.36}$$

Definimos

$$B_0 = \bigcup_{t\in[0,2]} T_0(t)B_1. \tag{3.37}$$

Observamos que, $B_0 \subset V_0$. De fato, dado $u \in B_0$ arbitrário, existem $\tilde{t} \in [0,2]$ e $b_1 \in B_1$ tais que $u = T_0(\tilde{t})b_1$. Como $B_1 \subset V_0$, então $u = T_0(\tilde{t})b_1 \in T_0(\tilde{t})V_0$. Por (3.35), temos que $u \in V_0$.

Para $\lambda \in (0,1]$, consideramos $B_1^\lambda = \{u \in V; \|u\|_{p(x)} \leqslant r \text{ e } \|\nabla u\|_{p(x)} \leqslant r\}$ e

$$B_0^\lambda = \bigcup_{t\in[0,2]} T_\lambda(t)B_1^\lambda. \tag{3.38}$$

Notemos que $B_1 \subset \overline{B^{V_0}(0,2r)}$ e $B_1^\lambda \subset \overline{B^V(0,2r)}$, para cada $\lambda \in (0,1]$, assim B_1 e B_1^λ são conjuntos limitados em V_0. Logo, pelo Lema 3.3.2, B_0 é limitado em V_0 e, para cada $\lambda \in (0,1]$, B_0^λ é limitado em V.

Lema 3.4.1. *O conjunto B_0, definido em (3.37), é um subconjunto compacto de H_0. Além disso, B_0 é positivamente invariante com respeito a $\{T_0(t)\}_{t\geqslant 0}$.*

Para cada $\lambda \in (0,1]$, o conjunto B_0^λ, definido em (3.38), é um subconjunto compacto de H. Além disso, B_0^λ é positivamente invariante com respeito a $\{T_\lambda(t)\}_{t\geqslant 0}$.

Demonstração. Primeiramente, vamos verificar que B_0 é positivamente invariante com respeito a $\{T_0(t)\}_{t\geqslant 0}$. Seja $\tau \geqslant 0$ arbitrário, temos que

$$T_0(\tau)B_0 = T_0(\tau)\left(\bigcup_{t\in[0,2]} T_0(t)B_1\right) = \bigcup_{t\in[0,2]} T_0(t)T_0(\tau)B_1.$$

Se $\tau \geqslant 2$, de (3.36), temos que $T_0(\tau)B_1 \subset B_1$. Logo,

$$T_0(\tau)B_0 = \bigcup_{t\in[0,2]} T_0(t)T_0(\tau)B_1 \subset \bigcup_{t\in[0,2]} T_0(t)B_1 = B_0, \quad \forall \tau \geqslant 2. \tag{3.39}$$

Agora, se $0 \leqslant \tau < 2$, temos $0 < 2-\tau \leqslant 2$. Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} T_0(\tau)B_0 &= \bigcup_{t\in[0,2]} T_0(t)T_0(\tau)B_1 \\ &= \left(\bigcup_{t\in[0,2-\tau]} T_0(t+\tau)B_1\right) \cup \left(\bigcup_{t\in[2-\tau,2]} T_0(t+\tau)B_1\right), \quad \forall\, 0 \leqslant \tau < 2. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Para $t \in [0, 2-\tau]$ temos $\tau \leqslant t+\tau \leqslant 2$, ou seja, $0 \leqslant t+\tau \leqslant 2$. Logo,

$$\bigcup_{t\in[0,2-\tau]} T_0(t+\tau)B_1 \subset \bigcup_{t+\tau\in[0,2]} T_0(t+\tau)B_1 = B_0. \tag{3.41}$$

Para $t \in [2-\tau, 2]$ temos $t+\tau \geqslant 2$, logo de (3.36) temos que $T_0(t+\tau)B_1 \subset B_1$. Assim,

$$\bigcup_{t\in[2-\tau,2]} T_0(t+\tau)B_1 \subset B_1 = T_0(0)B_1 \subset \bigcup_{t\in[0,2]} T_0(t)B_1 = B_0. \tag{3.42}$$

Substituindo (3.41) e (3.42) em (3.40), concluímos que

$$T_0(\tau)B_0 \subset B_0, \quad \forall\, 0 \leqslant \tau < 2.$$

Juntamente com (3.39), temos $T_0(\tau)B_0 \subset B_0$, para todo $\tau \geqslant 0$.

Vamos agora demonstrar a compacidade de B_0, inicialmente observamos que $\overline{B_1}^{H_0}$ é um subconjunto compacto de H_0. Segue da definição de B_1, que

$$\|u\|_{V_0} = \|u\|_{p(x)} + \|\nabla u\|_{p(x)} \leqslant 2r, \quad \forall\, u \in B_1.$$

Logo, B_1 é um subconjunto limitado de V_0. Como $V_0 \hookrightarrow\hookrightarrow H_0$, temos que $\overline{B_1}^{H_0}$ é compacto em H_0.

Por sua vez, B_1 é um subconjunto fechado em H_0. De fato, considere $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma sequência em B_1 e $u \in H_0$, tais que

$$\|u_i - u\|_{H_0} \xrightarrow{i\to\infty} 0. \tag{3.43}$$

Vamos mostrar que $u \in B_1$. Como $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ está em B_1, então $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em V_0. Segue do Teorema 1.2.1 que $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ admite subsequência, $(u_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$, que converge fracamente em V_0, isto é, existe $\tilde{u} \in V_0$ tal que

$$u_{i_k} \xrightarrow{k\to\infty} \tilde{u}.$$

Assim, dado $f \in V_0'$ arbitrário, segue da Proposição 1.2.1 que

$$(f, u_{i_k} - \tilde{u})_{H_0} = \langle f, u_{i_k} - \tilde{u}\rangle_{V_0', V_0} \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Logo,

$$u_{i_k} \xrightarrow{k\to\infty} \tilde{u}, \quad \text{em } H_0.$$

Por sua vez, pela convergência (3.43), temos que $u_{i_k} \xrightarrow{k\to\infty} u$ em H_0. Pela unicidade do limite, segue que $\tilde{u} = u$. Logo, $u \in V_0$.

Resta mostrarmos que $\|u\|_{p(x)} \leqslant r$ e $\|\nabla u\|_{p(x)} \leqslant r$. Pelo Teorema 1.2.2, restringindo a uma subsequência se necessário, a qual ainda denotaremos por $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$, temos que

$$u_i(x) \xrightarrow{i\to\infty} u(x), \text{ quase sempre em } \Omega.$$

Assim, para $0 < \dfrac{\varepsilon}{|\Omega|} < 1$ existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|u_i(x) - u(x)| < \frac{\varepsilon}{|\Omega|}, \qquad \text{para todo } i \geqslant i_0 \text{ e para quase todo } x \in \Omega.$$

Como $p(x) \geqslant p^- > 2 > 1$, segue do crescimento da função $\mathbb{R}^+ \ni y \mapsto y^{p(x)}$, e do decrescimento da função $\mathbb{R} \ni t \mapsto \left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|}\right)^t$ que

$$|u_i(x) - u(x)|^{p(x)} < \left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|}\right)^{p(x)} < \frac{\varepsilon}{|\Omega|}, \qquad \text{para todo } i \geqslant i_0 \text{ e para quase todo } x \in \Omega.$$

Portanto,

$$\rho(u_i - u) = \int_\Omega |u_i(x) - u(x)|^{p(x)}\, dx \leqslant \int_\Omega \frac{\varepsilon}{|\Omega|}\, dx = \varepsilon, \quad \forall i \geqslant i_0.$$

Logo, para todo $i \geqslant i_0$, temos que $\rho(u_i - u)^{\frac{1}{p^+}} \leqslant \varepsilon^{\frac{1}{p^+}}$. Fixado $i \geqslant i_0$ qualquer, segue de (3.6), que

$$\|u\|_{p(x)} \leqslant \|u_i - u\|_{p(x)} + \|u_i\|_{p(x)} \leqslant \max\{\rho(u_i - u)^{\frac{1}{p^-}}, \rho(u_i - u)^{\frac{1}{p^+}}\} + r \leqslant \max\{\varepsilon^{\frac{1}{p^-}}, \varepsilon^{\frac{1}{p^+}}\} + r,$$

Como ε pode ser tão pequeno quanto se queira, concluímos que $\|u\|_{p(x)} \leqslant r$.

Para a limitação $\|\nabla u\|_{p(x)} \leqslant r$, observamos que $(\nabla u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^{p(x)}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, pois $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em B_1. Segue do Teorema 1.1.1 que $L^{p(x)}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ é um espaço reflexivo, assim pelo Teorema 1.2.1, passando a uma subsequência se necessário, a qual ainda denotaremos por $(\nabla u_i)_{i\in\mathbb{N}}$, existe $v \in L^{p(x)}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ tal que

$$\nabla u_i \xrightarrow{i\to\infty} v.$$

Segue da Proposição 1.2.1, que $\|v\|_{p(x)} \leqslant \liminf_{i\to\infty} \|\nabla u_i\|_{p(x)} \leqslant r$. Basta concluirmos que

$v = \nabla u$, para tal, considere $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ arbitrária, temos que

$$\int_\Omega u_i \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\, dx = -\int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\phi\, dx, \quad \forall i \in \mathbb{N}. \tag{3.44}$$

Segue pela desigualdade de Hölder e por (3.43), que

$$\left|\int_\Omega (u_i - u)\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\, dx\right| \leqslant \int_\Omega \left|(u_i - u)\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right| dx \leqslant \|u_i - u\|_{H_0} \left\|\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{i\to\infty} 0.$$

Ou seja,

$$\int_\Omega u_i \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\, dx \xrightarrow{i\to\infty} \int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\, dx. \tag{3.45}$$

Além disso, como $\nabla u_i \xrightarrow{i\to\infty} v$, isto é, $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} \xrightarrow{i\to\infty} v_j$, temos que

$$\int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\phi\, dx \xrightarrow{i\to\infty} \int_\Omega v_j \phi\, dx. \tag{3.46}$$

Fazendo $i \to \infty$ em (3.44),segue de (3.45) e (3.46), que

$$\int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\, dx = -\int_\Omega v_j \phi\, dx.$$

Logo, $\dfrac{\partial u}{\partial x_j} = v_j$ para todo $j = 1, \ldots, n$, ou seja, $\nabla u = v$.

Portanto, $u \in B_1$ e B_1 é fechado em H_0. Com isso, $B_1 = \overline{B_1}^{H_0}$ é compacto em H_0 e, consequentemente, $[0,2] \times B_1$ é compacto em $\mathbb{R}^+ \times H_0$. Pela continuidade do operador $\mathbb{R}^+ \times H_0 \ni (t, u_0) \mapsto T_0(t)u_0 \in H_0$, concluímos que $B_0 = T_0([0,2])B_1$ é compacto.

A conclusão para B_0^λ, com $\lambda \in (0,1]$, segue de forma análoga. $\square$

Vamos denotar por $\mathfrak{X}$ o conjunto das 1-trajetórias, isto é, o conjunto de todas as soluções fracas de (3.16) definidas no intervalo $[0,1]$, munido com a topologia do espaço $L^2(0,1;H_0)$.

Consideramos $\{L(t)\}_{t\geqslant 0}$ o semigrupo shift das 1-trajetórias, isto é,

$$\begin{aligned} L(t)\colon \mathfrak{X} &\to \mathfrak{X} \\ \chi &\mapsto L(t)\chi\colon [0,1] \to H_0 \\ &\qquad\qquad\quad \theta \mapsto u(t+\theta), \end{aligned}$$

onde u é a única solução fraca de (3.16) com $\chi = u|_{[0,1]}$.

Para cada $\lambda \in (0,1]$, denotaremos por $\mathfrak{X}_\lambda$ o conjunto das 1-trajetórias associadas a (3.15), isto é, o conjunto de todas as soluções fracas de (3.15) definidas no intervalo $[0,1]$, munido com a topologia do espaço $L^2(0,1;H)$.

Seja $\lambda \in (0,1]$. Consideramos $\{L_\lambda(t)\}_{t\geqslant 0}$ o semigrupo shift das 1-trajetórias, isto é,

$$\begin{aligned} L_\lambda(t)\colon \mathfrak{X}_\lambda &\to \mathfrak{X}_\lambda \\ \chi &\mapsto L_\lambda(t)\chi\colon [0,1] \to H \\ &\qquad\qquad\quad \theta \mapsto u^\lambda(t+\theta), \end{aligned}$$

onde u^λ é a única solução fraca de (3.15) com $\chi = u^\lambda|_{[0,1]}$.

Definimos

$$\mathcal{B}_0 = \{\chi \in \mathfrak{X}; \chi(0) \in B_0\} \tag{3.47}$$

e

$$\mathcal{B}_0^\lambda = \{\chi \in \mathfrak{X}_\lambda; \chi(0) \in B_0^\lambda\}, \tag{3.48}$$

para todo $\lambda \in (0,1]$.

Lema 3.4.2. *O conjunto $\mathcal{B}_0$, definido em (3.47), é compacto em $L^2(0,1;H_0)$ e positivamente invariante com respeito a $\{L(t)\}_{t\geqslant 0}$. Para cada $\lambda \in (0,1]$, o conjunto $\mathcal{B}_0^\lambda$, definido em (3.48), é compacto em $L^2(0,1;H)$ e positivamente invariante com respeito a $\{L_\lambda(t)\}_{t\geqslant 0}$.*

Demonstração. Inicialmente, vamos verificar que $\mathcal{B}_0$ é positivamente invariante com respeito a $\{L(t)\}_{t\geqslant 0}$. Sejam $\chi \in \mathcal{B}_0$ e $\tau \geqslant 0$, por definição temos que

$$(L(\tau)\chi)(s) = u(\tau + s), \quad \forall s \in [0,1],$$

onde u é a única solução fraca de (3.16) em $[0, \tau+1]$ tal que $\chi = u|_{[0,1]}$.

Como $u(0) = \chi(0) \in B_0$, pelo Lema 3.4.1, segue que $u(t) = T_0(t)u_0 \in B_0$, para todo $t \geqslant 0$. Assim, $(L(\tau)\chi)(0) = u(\tau) \in B_0$ implicando que $L(\tau)\chi \in \mathcal{B}_0$, para todo $\tau \geqslant 0$. Portanto $L(\tau)(\mathcal{B}_0) \subset \mathcal{B}_0$, para todo $\tau \geqslant 0$.

Para verificarmos a compacidade, mostramos primeiramente que $\mathcal{B}_0$ é limitado em

$$\{u \in L^2(0,1;V_0);\ u_t \in L^2(0,1;H_0)\}.$$

De fato, dada $\chi \in \mathcal{B}_0$ arbitrária, existe u solução de (3.16), tal que $\chi(t) = u(t) = T_0(t)u_0$, para todo $t \in [0,1]$, onde $u_0 = \chi(0) \in B_0 \subset V_0 = D(\varphi)$. Pelo Teorema 1.2.4,

$$\begin{aligned}\|\chi_t\|^2_{L^2(0,1;H_0)} &= \int_0^1 \|(T_0(t)u_0)_t\|^2_{H_0}\,dt = \int_0^1 \left\|\frac{du}{dt}\right\|^2_{H_0} dt \\ &\leqslant \left[\left(\int_0^1 \|B(u(t))\|^2_{H_0}\,dt\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\varphi(u(0))}\right]^2.\end{aligned}$$

Por consequência do Lema 3.3.4 e da desigualdade (3.24), existe uma constante $k_5 > 0$ tal que

$$\|\chi_t\|^2_{L^2(0,1;H_0)} \leqslant \left[\left(\int_0^1 \|B(u(t))\|^2_{H_0}\,dt\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\varphi(u(0))}\right]^2 \leqslant k_5, \quad \forall \chi \in \mathcal{B}_0,$$

basta considerar $k_5 := 2(k_0 + K_3)$. Notemos que k_5 é uniforme com respeito aos dados iniciais $u_0 = \chi(0) \in B_0$, já que pelo Lema 3.3.2, B_0 é um subconjunto limitado de V_0.

Além disso, segue do Teorema 1.1.4, desigualdade de Poincaré, que existe $C_2 > 0$ tal que

$$\|\chi\|^2_{L^2(0,1;V_0)} = \int_0^1 (\|\chi(t)\|_{p(x)} + \|\nabla\chi(t)\|_{p(x)})^2\,dt \leqslant C_2 \int_0^1 \|\nabla T_0(t)u_0\|^2_{p(x)}\,dt. \tag{3.49}$$

Vamos considerar o caso em que $\|\nabla T_0(t)u_0\|_{p(x)} \geqslant 1$. Como $2 < p^- \leqslant p(x)$ segue, do não-decrescimento da função $\mathbb{R} \ni \theta \mapsto \|\nabla T_0(t)u_0\|^\theta_{p(x)}$ e da Proposição 1.1.3, que

$$\|\nabla T_0(t)u_0\|^2_{p(x)} \leqslant \|\nabla T_0(t)u_0\|^{p^-}_{p(x)} \leqslant \rho_p(\nabla T_0(t)u_0).$$

Assim, retornando a (3.49) e aplicando o Lema 3.3.3, temos que existe constante $C_1 > 0$ tal que

$$\|\chi\|^2_{L^2(0,1;V_0)} \leqslant C_2 \int_0^1 \int_\Omega |\nabla T_0(t)u_0|^{p(x)}\, dxdt \leqslant C_2 C_1.$$

Notemos que a constante $C_1 = C_1(\|u_0\|_{H_0})$ é uniforme com respeito aos dados iniciais $u_0 = \chi(0) \in B_0$, já que pelo Lema 3.4.1, podemos concluir que B_0 é um subconjunto limitado de H_0.

O caso em que $\|\nabla T_0(t)u_0\|_{p(x)} \leqslant 1$, temos de (3.49) que $\|\chi\|^2_{L^2(0,1;V_0)} \leqslant C_2$. Logo,

$$\|\chi\|^2_{L^2(0,1;V_0)} \leqslant \min\{C_2, C_1C_2\}, \quad \forall \chi \in \mathcal{B}_0.$$

Como $V_0 \hookrightarrow\hookrightarrow H_0$, pelo Lema 2.1.6 temos que

$$\{u \in L^2(0,1;V_0); u_t \in L^2(0,1;H_0)\} \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(0,1;H_0).$$

Assim, $\overline{\mathcal{B}_0}^{L^2(0,1;H_0)}$ é um compacto em $L^2(0,1;H_0)$.

Por sua vez, $\mathcal{B}_0$ é fechado em $L^2(0,1;H_0)$. De fato, seja $\chi \in \overline{\mathcal{B}_0}^{L^2(0,1;H_0)}$ arbitrária, então existe $(\chi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{B}_0$ tal que

$$\|\chi_i - \chi\|_{L^2(0,1;H_0)} \xrightarrow{i\to\infty} 0. \tag{3.50}$$

Para todo $i \in \mathbb{N}$, temos que $\chi_i \in \mathcal{B}_0$, ou seja, χ_i é solução fraca de (3.16), em $[0,1]$, com $\chi_i(0) \in B_0$. Em particular $\chi_i \in C([0,1];H_0)$, assim $B(\chi_i) \in C([0,1];H_0)$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Sejam $i,j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$, aplicando o Lema 1.2.7, para $u = \chi_j$, $v = \chi_i$, $A = A_0^{H_0}$, $f = B(\chi_j)$ e $g = B(\chi_i)$, temos

$$\begin{aligned}\|\chi_j(t) - \chi_i(t)\|_{H_0} \leqslant& \|\chi_j(0) - \chi_i(0)\|_{H_0} + \int_0^t \|B(\chi_j(s)) - B(\chi_i(s))\|_{H_0}\, ds\\ \leqslant& \|\chi_j(0) - \chi_i(0)\|_{H_0} + L_B \int_0^t \|\chi_j(s) - \chi_i(s)\|_{H_0}\, ds,\end{aligned}$$

para todo $t \in [0,1]$. Pelo Lema 1.2.3, Grönwall-Bellman, concluímos que

$$\begin{aligned}\|\chi_j(t) - \chi_i(t)\|_{H_0} \leqslant& \|\chi_j(0) - \chi_i(0)\|_{H_0} e^{L_B t}\\ \leqslant& \|\chi_j(0) - \chi_i(0)\|_{H_0} e^{L_B},\ \forall t \in [0,1],\ \forall i,j \in \mathbb{N}.\end{aligned} \tag{3.51}$$

Por sua vez, $(\chi_i(0))_{i\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em B_0 que, pelo Lema 3.4.1, é um conjunto compacto em H_0. Assim, $(\chi_i(0))_{i\in\mathbb{N}}$ admite subsequência, $(\chi_{i_k}(0))_{k\in\mathbb{N}}$, convergente em H_0, em particular $(\chi_{i_k}(0))_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em H_0. Logo, em (3.51), temos

$$\sup_{t\in[0,1]} \|\chi_{i_{k+1}}(t) - \chi_{i_k}(t)\|_{H_0} \leqslant e^{L_B} \|\chi_{i_{k+1}}(0) - \chi_{i_k}(0)\|_{H_0} \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Ou seja, $(\chi_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $C([0,1];H_0)$. Como $C([0,1];H_0)$ é um espaço completo, restringindo a uma subsequência se necessário, existe $\tilde{\chi} \in C([0,1];H_0)$ tal que

$$\|\chi_{i_k} - \tilde{\chi}\|_{C([0,1];H_0)} \xrightarrow{k\to\infty} 0. \tag{3.52}$$

Assim,

$$\|\chi_{i_k} - \tilde{\chi}\|_{L^2(0,1;H_0)} = \left(\int_0^1 \|\chi_{i_k}(t) - \tilde{\chi}(t)\|_{H_0}^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int_0^1 (\sup_{\theta\in[0,1]} \|\chi_{i_k}(\theta) - \tilde{\chi}(\theta)\|_{H_0})^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \sup_{\theta\in[0,1]} \|\chi_{i_k}(\theta) - \tilde{\chi}(\theta)\|_{H_0} = \|\chi_{i_k} - \tilde{\chi}\|_{C([0,1];H_0)} \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Segue de (3.50) que $\tilde{\chi} = \chi$, logo $\chi \in C([0,1]; H_0)$.

Como $(\chi_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de soluções fracas de (3.16) em $[0,1]$, então para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $(\varphi_n^{i_k})_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de soluções fortes de (3.16) em $[0,1]$, tal que

$$\|\varphi_n^{i_k} - \chi_{i_k}\|_{C([0,1];H_0)} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Assim, para $k = 1$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\varphi_n^{i_1} - \chi_{i_1}\|_{C([0,1];H_0)} \leqslant \frac{1}{2}, \quad \forall n \geqslant n_1.$$

Definimos $\phi_1 = \varphi_{n_1}^{i_1}$. Para $k = 2$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$, $n_2 \geqslant n_1$ tal que

$$\|\varphi_n^{i_2} - \chi_{i_2}\|_{C([0,1];H_0)} \leqslant \frac{1}{4}, \quad \forall n \geqslant n_2.$$

Definimos $\phi_2 = \varphi_{n_2}^{i_2}$. Em geral, dado $k \in \mathbb{N}$ existe $n_k \in \mathbb{N}$, $n_k \geqslant n_{k-1}$ tal que

$$\|\varphi_n^{i_k} - \chi_{i_k}\|_{C([0,1];H_0)} \leqslant \frac{1}{2^k}, \quad \forall n \geqslant n_k.$$

Definimos $\phi_k = \varphi_{n_k}^{i_k}$. Desta forma obtemos a sequência $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de soluções fortes de (3.16), em [0,1], além disso

$$\begin{aligned}\|\phi_k - \chi\|_{C([0,1];H_0)} &\leqslant \|\phi_k - \chi_{i_k}\|_{C([0,1];H_0)} + \|\chi_{i_k} - \chi\|_{C([0,1];H_0)}\\ &= \|\varphi_{n_k}^{i_k} - \chi_{i_k}\|_{C([0,1];H_0)} + \|\chi_{i_k} - \chi\|_{C([0,1];H_0)}\\ &\leqslant \frac{1}{2^k} + \|\chi_{i_k} - \chi\|_{C([0,1];H_0)} \xrightarrow{k\to\infty} 0.\end{aligned}$$

Logo, por definição, χ é solução fraca de (3.16) em $[0,1]$. Segue de (3.52) que

$$\|\chi_{i_k}(0) - \chi(0)\|_{H_0} \leqslant \sup_{\theta\in[0,1]} \|\chi_{i_k}(\theta) - \chi(\theta)\|_{H_0} = \|\chi_{i_k} - \tilde{\chi}\|_{C([0,1];H_0)} \xrightarrow{k\to\infty} 0,$$

ou seja, $\chi(0) \in \overline{B_0}^{H_0} = B_0$. Portanto, $\chi \in \mathcal{B}_0$ e com isso $\mathcal{B}_0$ é fechado em $L^2(0,1;H_0)$, logo temos a compacidade de $\mathcal{B}_0$.

A demonstração pode ser feita de maneira análoga para $\mathcal{B}_0^\lambda$, onde $\lambda \in (0,1]$.

□

Seja $W^{1,2}_{\Omega_0,0}(\Omega) = \{f \in W_0^{1,2}(\Omega); f$ é constante em $\Omega_0\}$. Consideremos os conjuntos

$$Y_0 = \left\{\chi \in L^2(0,1; W^{1,2}_{\Omega_0,0}(\Omega)); \frac{d\chi}{dt} \in L^2(0,1; V_0')\right\}$$

e

$$Y = \left\{ \chi \in L^2(0,1; W_0^{1,2}(\Omega)); \frac{d\chi}{dt} \in L^2(0,1; V') \right\},$$

onde $V_0 = W^{1,p(x)}_{\Omega_0,0}(\Omega) = \{f \in W_0^{1,p(x)}(\Omega); f$ é constante em $\Omega_0\}$, como definido no início da seção 3.2.

Pelo Lema 2.1.6, obtemos as seguintes inclusões compactas, $Y_0 \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(0,1;H_0)$ e $Y \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(0,1;H)$. Munimos Y, e Y_0, com a seguinte norma

$$\|u\|_Y = \|\nabla u\|_{L^2(0,1;H)} + \|u_t\|_{L^2(0,1;V')}.$$

Em particular, se $u \in Y_0$ temos

$$\|u\|_{Y_0} = \|\nabla u\|_{L^2(0,1;H_0)} + \|u_t\|_{L^2(0,1;V_0')}.$$

No próximo resultado vamos demonstrar a propriedade de Lipschitz para os operadores $L(1)\colon L^2(0,1;H_0) \to Y_0$, em $\mathcal{B}_0$, e $L_\lambda(1)\colon L^2(0,1;H) \to Y$, em $\mathcal{B}_0^\lambda$, para todo $\lambda \in (0,1]$.

Lema 3.4.3. *Existem constantes $\omega_1 > 0$ e $\omega_1^\lambda > 0$ tais que*

$$\|L(1)\chi_1 - L(1)\chi_2\|_{Y_0} \leqslant \omega_1 \|\chi_1 - \chi_2\|_{L^2(0,1;H_0)}, \ \forall \chi_1, \chi_2 \in \mathcal{B}_0,$$

e

$$\|L_\lambda(1)\chi_1 - L_\lambda(1)\chi_2\|_{Y} \leqslant \omega_1^\lambda \|\chi_1 - \chi_2\|_{L^2(0,1;H)}, \ \forall \chi_1, \chi_2 \in \mathcal{B}_0^\lambda.$$

Demonstração. Provaremos a propriedade de Lipschitz para $L(1)\colon L^2(0,1;H_0) \to Y_0$, em $\mathcal{B}_0$. A demonstração para os operadores $L_\lambda(1)\colon L^2(0,1;H) \to Y$, onde $\lambda \in (0,1]$, pode ser feita de forma análoga.

Sejam $\chi_1, \chi_2 \in \mathcal{B}_0$ arbitrárias, então existem únicas u e v soluções fortes de (3.16) tais que $u|_{[0,1]} = \chi_1$ e $v|_{[0,1]} = \chi_2$. Temos que

$$u_t + A_0^{H_0} u = Bu \quad \text{ e } \quad v_t + A_0^{H_0} v = Bv,$$

fazendo a diferença das equações e denotando $w = u - v$, podemos escrever

$$w_t + A_0^{H_0} u - A_0^{H_0} v = Bu - Bv. \tag{3.53}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
\|L(1)\chi_1 - L(1)\chi_2\|_{Y_0} &= \|\nabla(L(1)\chi_1 - L(1)\chi_2)\|_{L^2(0,1;H_0)} + \|(L(1)\chi_1 - L(1)\chi_2)_t\|_{L^2(0,1;V_0')} \\
&= \left(\int_0^1 \|\nabla (L(1)\chi_1 - L(1)\chi_2)(\theta)\|_{H_0}^2 d\theta \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^1 \|(L(1)\chi_1 - L(1)\chi_2)_t(\theta)\|_{V_0'}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_0^1 \|\nabla u(1+\theta) - \nabla v(1+\theta)\|_{H_0}^2 d\theta \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^1 \|u_t(1+\theta) - v_t(1+\theta)\|_{V_0'}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_0^1 \|\nabla w(1+\theta)\|_{H_0}^2 d\theta \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^1 \|w_t(1+\theta)\|_{V_0'}^2 \, d\theta \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Inicialmente, tendo em vista o termo $\|(L(1)\chi_1 - L(1)\chi_2)_t\|_{L^2(0,1;V_0')}$, estimaremos a norma $\|w_t(1+\theta)\|_{V_0'}$, para quase todo $\theta \in [0,1]$.

Seja $\psi \in V_0 = W^{1,p(x)}_{\Omega_0,0}(\Omega)$, então

$$\begin{aligned}|(w_t,\psi)_{H_0}| &\leqslant |(A_0^{H_0}u - A_0^{H_0}v,\psi)_{H_0}| + |(Bu-Bv,\psi)_{H_0}|\\ &\leqslant |\langle A_0u - A_0v,\psi\rangle_{V_0',V_0}| + \|Bu-Bv\|_{H_0}\|\psi\|_{H_0}\\ &\leqslant |\langle A_0u - A_0v,\psi\rangle_{V_0',V_0}| + L_B\|w\|_{H_0}\|\psi\|_{H_0}.\end{aligned} \tag{3.54}$$

Por sua vez,

$$\begin{aligned}|\ \langle A_0u - A_0v,\psi\rangle_{V_0',V_0}| = \Big| &\int_{\Omega_1} -\mathrm{div}(d_0(x)\Big[(|\nabla u|^{p(x)-2}+\eta)\nabla u - (|\nabla v|^{p(x)-2}+\eta)\nabla v\Big])\psi dx\\ &+ \int_\Omega (|u|^{p(x)-2}u - |v|^{p(x)-2}v)\psi dx\\ &+ \int_{\Gamma_0} d_0(x)\Big[(|\nabla u|^{p(x)-2}+\eta)\frac{\partial u}{\partial\vec{n}} - (|\nabla v|^{p(x)-2}+\eta)\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}\Big]\psi dx\ \Big|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \Big| -\int_{\Gamma\cup\Gamma_0} d_0(x)\Big[(|\nabla u|^{p(x)-2}+\eta)\frac{\partial u}{\partial\vec{n}} - (|\nabla v|^{p(x)-2}+\eta)\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}\Big]\psi dx\\ &\quad + \int_{\Omega_1} d_0(x)[(|\nabla u|^{p(x)-2}+\eta)\nabla u - (|\nabla v|^{p(x)-2}+\eta)\nabla v]\nabla\psi dx\\ &\quad + \int_\Omega (|u|^{p(x)-2}u - |v|^{p(x)-2}v)\psi dx\\ &\quad + \int_{\Gamma_0} d_0(x)\Big[(|\nabla u|^{p(x)-2}+\eta)\frac{\partial u}{\partial\vec{n}} - (|\nabla v|^{p(x)-2}+\eta)\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}\Big]\psi dx\ \Big|\\ &\leqslant \Big|\ \int_{\Omega_1} d_0(x)\Big[(|\nabla u|^{p(x)-2}+\eta)\nabla u - (|\nabla v|^{p(x)-2}+\eta)\nabla v\Big]\nabla\psi dx\ \Big|\\ &\quad + \Big|\int_\Omega (|u|^{p(x)-2}u - |v|^{p(x)-2}v)\psi dx\ \Big|\\ &= \Big|\ \int_{\Omega_1} d_0(x)\Big[|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u - |\nabla v|^{p(x)-2}\nabla v\Big]\nabla\psi dx + \int_{\Omega_1} d_0(x)\eta(\nabla u - \nabla v)\nabla\psi dx\ \Big|\\ &\quad + \Big|\int_\Omega (|u|^{p(x)-2}u - |v|^{p(x)-2}v)\psi dx\ \Big|\\ &\leqslant M_0\int_{\Omega_1} ||\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u - |\nabla v|^{p(x)-2}\nabla v||\nabla\psi|dx + M_0\eta\int_{\Omega_1}|\nabla w||\nabla\psi|dx\\ &\quad + \int_\Omega ||u|^{p(x)-2}u - |v|^{p(x)-2}v||\psi|dx.\end{aligned}$$

Retomando (3.54), temos

$$\begin{aligned}|(w_t,\psi)_{H_0}| \leqslant &M_0\int_{\Omega_1} ||\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u - |\nabla v|^{p(x)-2}\nabla v||\nabla\psi|dx\\ &+ M_0\eta\int_{\Omega_1}|\nabla w||\nabla\psi|dx + \int_\Omega ||u|^{p(x)-2}u - |v|^{p(x)-2}v||\psi|dx + L_B\|w\|_{H_0}\|\psi\|_{H_0}.\end{aligned} \tag{3.55}$$

Seja $\widetilde{\Omega}_1 := \{x \in \Omega_1 \colon \nabla w(t,x) \neq \vec{0}\}$. Segue da desigualdade de Hölder, que

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_1} ||\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u - |\nabla v|^{p(x)-2}\nabla v||\nabla\psi|dx \\
&= \int_{\widetilde{\Omega}_1} ||\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u - |\nabla v|^{p(x)-2}\nabla v||\nabla\psi|dx \\
&= \int_{\widetilde{\Omega}_1} ||\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u - |\nabla v|^{p(x)-2}\nabla v|^{\frac{1}{2}}|\nabla w|^{\frac{1}{2}}\frac{||\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u - |\nabla v|^{p(x)-2}\nabla v|^{\frac{1}{2}}}{|\nabla w|^{\frac{1}{2}}}|\nabla\psi|\; dx \\
&\leqslant \left(\int_{\widetilde{\Omega}_1} ||\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u - |\nabla v|^{p(x)-2}\nabla v||\nabla w|dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad\qquad \left(\int_{\widetilde{\Omega}_1} \frac{||\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u - |\nabla v|^{p(x)-2}\nabla v|}{|\nabla w|}|\nabla\psi|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_{\Omega_1} ||\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u - |\nabla v|^{p(x)-2}\nabla v||\nabla w|dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad\qquad \left(\int_{\widetilde{\Omega}_1} \frac{||\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u - |\nabla v|^{p(x)-2}\nabla v|}{|\nabla w|}|\nabla\psi|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
\tag{3.56}
$$

Para cada $x \in \widetilde{\Omega}_1$, segue do Lema 1.2.9, com $\delta = 0$, que

$$
\begin{aligned}
&||\nabla u(t,x)|^{p(x)-2}\nabla u(t,x) - |\nabla v(t,x)|^{p(x)-2}\nabla v(t,x)| \\
&\qquad \leqslant \sqrt{n}(p(x)-1)|\nabla u(t,x) - \nabla v(t,x)|(|\nabla u(t,x)| + |\nabla v(t,x)|)^{p(x)-2}.
\end{aligned}
\tag{3.57}
$$

Logo, de (3.56) podemos concluir que

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_1} ||\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u - |\nabla v|^{p(x)-2}\nabla v||\nabla\psi|dx \\
&\quad \leqslant \left(\int_{\Omega_1} ||\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u - |\nabla v|^{p(x)-2}\nabla v||\nabla w|dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad\qquad \left(\int_{\widetilde{\Omega}_1} \frac{\sqrt{n}(p(x)-1)|\nabla w|(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-2}}{|\nabla w|}|\nabla\psi|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \leqslant \sqrt[4]{n}\sqrt{p^+ - 1}\left(\int_{\Omega_1} ||\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u - |\nabla v|^{p(x)-2}\nabla v||\nabla w|dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad\qquad \left(\int_{\widetilde{\Omega}_1} (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-2}|\nabla\psi|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
\tag{3.58}
$$

Por sua vez, pela Proposição 1.1.4, temos que

$$
\int_{\widetilde{\Omega}_1} (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-2}|\nabla\psi|^2dx \leqslant \left(\frac{1}{r^-} + \frac{1}{s^-}\right)\||\nabla\psi|^2\|_{L^{r(x)}(\widetilde{\Omega}_1)}\|(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-2}\|_{L^{s(x)}(\widetilde{\Omega}_1)},
\tag{3.59}
$$

onde $r(x) = \frac{p(x)}{2}$ e $s(x)$ é obtida fazendo $\frac{1}{s(x)} + \frac{1}{r(x)} = 1$, isto é, $s(x) = \frac{p(x)}{p(x)-2}$. Observamos que

$|\nabla\psi|^2 \in L^{r(x)}(\widetilde{\Omega}_1)$ e $(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-2} \in L^{s(x)}(\widetilde{\Omega}_1)$, pois $\psi, u, v \in V_0$,

$$\rho_r(|\nabla\psi|^2) = \int_{\widetilde{\Omega}_1} |\nabla\psi|^{2r(x)}dx = \int_{\widetilde{\Omega}_1} |\nabla\psi|^{p(x)}dx \leqslant \int_{\Omega_1} |\nabla\psi|^{p(x)}dx \tag{3.60}$$

e

$$\begin{aligned}
\rho_s((|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-2}) &= \int_{\widetilde{\Omega}_1} ||\nabla u| + |\nabla v||^{(p(x)-2)s(x)}dx \\
&= \int_{\widetilde{\Omega}_1} (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)}dx \\
&\leqslant \int_{\Omega_1} (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)}dx \qquad (3.61)\\
&\leqslant \int_{\Omega_1} 2^{p(x)}(|\nabla u|^{p(x)} + |\nabla v|^{p(x)})dx \\
&\leqslant 2^{p^+}\left(\int_{\Omega_1} |\nabla u|^{p(x)}dx + \int_{\Omega_1} |\nabla v|^{p(x)}dx\right).
\end{aligned}$$

Assim, de (3.6) e (3.60), segue que

$$\begin{aligned}
\||\nabla\psi|^2\|_{L^{r(x)}(\widetilde{\Omega}_1)} &\leqslant \max\{\rho_r(|\nabla\psi|^2)^{\frac{1}{r^-}}, \rho_r(|\nabla\psi|^2)^{\frac{1}{r^+}}\} \\
&\leqslant \max\left\{\left(\int_{\Omega_1} |\nabla\psi|^{p(x)}dx\right)^{\frac{1}{r^-}}, \left(\int_{\Omega_1} |\nabla\psi|^{p(x)}dx\right)^{\frac{1}{r^+}}\right\} \\
&= \max\{\rho_p(\nabla\psi)^{\frac{1}{r^-}}, \rho_p(\nabla\psi)^{\frac{1}{r^+}}\}. \qquad (3.62)
\end{aligned}$$

Por (3.7) temos que $\rho_p(\nabla\psi) \leqslant \max\{\|\nabla\psi\|_{p(x)}^{p^-}, \|\nabla\psi\|_{p(x)}^{p^+}\}$, implicando

$$\rho_p(\nabla\psi)^{\frac{1}{r^\mp}} \leqslant \left(\max\{\|\nabla\psi\|_{p(x)}^{p^-}, \|\nabla\psi\|_{p(x)}^{p^+}\}\right)^{\frac{1}{r^\mp}} = \max\{(\|\nabla\psi\|_{p(x)}^{p^-})^{\frac{1}{r^\mp}}, (\|\nabla\psi\|_{p(x)}^{p^+})^{\frac{1}{r^\mp}}\}.$$

Retornando a (3.62), temos

$$\begin{aligned}
\||\nabla\psi|^2\|_{L^{r(x)}(\widetilde{\Omega}_1)} &\leqslant \max\{\max\{\|\nabla\psi\|_{p(x)}^{\frac{p^-}{r^-}}, \|\nabla\psi\|_{p(x)}^{\frac{p^+}{r^-}}\}, \max\{\|\nabla\psi\|_{p(x)}^{\frac{p^-}{r^+}}, \|\nabla\psi\|_{p(x)}^{\frac{p^+}{r^+}}\}\} \\
&= \max\{\|\nabla\psi\|_{p(x)}^{\frac{p^-}{r^-}}, \|\nabla\psi\|_{p(x)}^{\frac{p^+}{r^-}}, \|\nabla\psi\|_{p(x)}^{\frac{p^-}{r^+}}, \|\nabla\psi\|_{p(x)}^{\frac{p^+}{r^+}}\} := \xi_{\nabla\psi}. \qquad (3.63)
\end{aligned}$$

Analogamente, de (3.6), (3.7) e (3.61) temos

$$\begin{aligned}
&\|(|\nabla u|+|\nabla v|)^{p(x)-2}\|_{L^{s(x)}(\widetilde{\Omega}_1)} \leqslant \max\{\rho_s((|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-2})^{\frac{1}{s^-}}, \rho_s((|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-2})^{\frac{1}{s^+}}\} \\
&\leqslant \max\left\{\left(\int_{\Omega_1} (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)}dx\right)^{\frac{1}{s^-}}, \left(\int_{\Omega_1} (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)}dx\right)^{\frac{1}{s^+}}\right\} \\
&= \max\{\rho_p(|\nabla u| + |\nabla v|)^{\frac{1}{s^-}}, \rho_p(|\nabla u| + |\nabla v|)^{\frac{1}{s^+}}\} \\
&\leqslant \max\{\||\nabla u| + |\nabla v|\|_{p(x)}^{\frac{p^-}{s^-}}, \||\nabla u| + |\nabla v|\|_{p(x)}^{\frac{p^+}{s^-}}, \||\nabla u| + |\nabla v|\|_{p(x)}^{\frac{p^-}{s^+}}, \||\nabla u| + |\nabla v|\|_{p(x)}^{\frac{p^+}{s^+}}\} \\
&:= \xi_{|\nabla u|+|\nabla v|}. \qquad (3.64)
\end{aligned}$$

Retomando a desigualdade (3.58) e usando (3.59), (3.63) e (3.64), concluímos que

$$\int_{\Omega_1} ||\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u - |\nabla v|^{p(x)-2}\nabla v||\nabla\psi|dx$$
$$\leqslant \sqrt[4]{n}\sqrt{p^+-1}\left[\left(\frac{1}{r^-}+\frac{1}{s^-}\right)\xi_{\nabla\psi}\xi_{|\nabla u|+|\nabla v|}\right]^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega_1} ||\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u - |\nabla v|^{p(x)-2}\nabla v||\nabla w|dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.65}$$

Procedendo de forma análoga, podemos concluir que

$$\int_{\Omega} ||u|^{p(x)-2}u - |v|^{p(x)-2}v||\psi|dx$$
$$\leqslant \sqrt{p^+-1}\left[\left(\frac{1}{r^-}+\frac{1}{s^-}\right)\xi_{\psi}\xi_{|u|+|v|}\right]^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega} ||u|^{p(x)-2}u - |v|^{p(x)-2}v||w|dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.66}$$

Retornando a (3.55), utilizando (3.65), (3.66) e a desigualdade de Hölder, segue que

$$|(w_t,\psi)_{H_0}|$$
$$\leqslant M_0\sqrt[4]{n}\sqrt{p^+-1}\left[\left(\frac{1}{r^-}+\frac{1}{s^-}\right)\xi_{\nabla\psi}\xi_{|\nabla u|+|\nabla v|}\right]^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega_1} ||\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u - |\nabla v|^{p(x)-2}\nabla v||\nabla w|\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$+\sqrt{p^+-1}\left[\left(\frac{1}{r^-}+\frac{1}{s^-}\right)\xi_{\psi}\xi_{|u|+|v|}\right]^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega} ||u|^{p(x)-2}u - |v|^{p(x)-2}v||w|\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$+M_0\eta\|\nabla w\|_{H_0}\|\nabla\psi\|_{H_0}+L_B\|w\|_{H_0}\|\psi\|_{H_0}. \tag{3.67}$$

Como $u, v, \psi \in V_0$, $p(x) \geqslant p^- > 2$ e $|\Omega| < \infty$, então, usando o Teorema 1.1.2, podemos concluir que $u, v, \psi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Pela desigualdade de Poincaré, existe $\alpha > 0$ tal que

$$\|w\|_{H_0} \leqslant \alpha\|\nabla w\|_{H_0} \quad \text{e} \quad \|\psi\|_{H_0} \leqslant \alpha\|\nabla\psi\|_{H_0}.$$

Segue de (3.67) atuando em $t = 1+\theta$, onde $\theta \in [0,1]$, que

$$\sup_{\|\psi\|_{V_0}\leqslant 1}|(w_t(1+\theta),\psi)_{H_0}|$$
$$\leqslant M_0\sqrt[4]{n}\sqrt{p^+-1}\left[\left(\frac{1}{r^-}+\frac{1}{s^-}\right)\xi_{|\nabla u(1+\theta)|+|\nabla v(1+\theta)|}\right]^{\frac{1}{2}}\sup_{\|\psi\|_{V_0}\leqslant 1}(\xi_{\nabla\psi})^{\frac{1}{2}}$$
$$\left(\int_{\Omega_1} ||\nabla u(1+\theta)|^{p(x)-2}\nabla u(1+\theta) - |\nabla v(1+\theta)|^{p(x)-2}\nabla v(1+\theta)||\nabla w(1+\theta)|\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$+\sqrt{p^+-1}\left[\left(\frac{1}{r^-}+\frac{1}{s^-}\right)\xi_{|u(1+\theta)|+|v(1+\theta)|}\right]^{\frac{1}{2}}\sup_{\|\psi\|_{V_0}\leqslant 1}(\xi_{\psi})^{\frac{1}{2}}$$
$$\left(\int_{\Omega} ||u(1+\theta)|^{p(x)-2}u(1+\theta) - |v(1+\theta)|^{p(x)-2}v(1+\theta)||w(1+\theta)|\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ M_0\eta\|\nabla w(1+\theta)\|_{H_0} \sup_{\|\psi\|_{V_0}\leqslant 1}\|\nabla\psi\|_{H_0} + L_B\alpha\|\nabla w(1+\theta)\|_{H_0}\alpha \sup_{\|\psi\|_{V_0}\leqslant 1}\|\nabla\psi\|_{H_0}. \tag{3.68}$$

Como $\|\psi\|_{V_0} = \|\psi\|_{p(x)} + \|\nabla\psi\|_{p(x)}$, então $\|\psi\|_{p(x)} \leqslant \|\psi\|_{V_0}$ e $\|\nabla\psi\|_{p(x)} \leqslant \|\psi\|_{V_0}$. Assim, se $\|\psi\|_{V_0} \leqslant 1$,

$$\begin{aligned}
\xi_{\nabla\psi} &= \max\{\|\nabla\psi\|_{p(x)}^{\frac{p^-}{r^-}}, \|\nabla\psi\|_{p(x)}^{\frac{p^+}{r^-}}, \|\nabla\psi\|_{p(x)}^{\frac{p^-}{r^+}}, \|\nabla\psi\|_{p(x)}^{\frac{p^+}{r^+}}\} \\
&\leqslant \max\{\|\psi\|_{V_0}^{\frac{p^-}{r^-}}, \|\psi\|_{V_0}^{\frac{p^+}{r^-}}, \|\psi\|_{V_0}^{\frac{p^-}{r^+}}, \|\psi\|_{V_0}^{\frac{p^+}{r^+}}\} \\
&\leqslant 1.
\end{aligned}$$

Analogamente, se $\|\psi\|_{V_0} \leqslant 1$ temos

$$\begin{aligned}
\xi_{\psi} &= \max\{\|\psi\|_{p(x)}^{\frac{p^-}{r^-}}, \|\psi\|_{p(x)}^{\frac{p^+}{r^-}}, \|\psi\|_{p(x)}^{\frac{p^-}{r^+}}, \|\psi\|_{p(x)}^{\frac{p^+}{r^+}}\} \\
&\leqslant \max\{\|\psi\|_{V_0}^{\frac{p^-}{r^-}}, \|\psi\|_{V_0}^{\frac{p^+}{r^-}}, \|\psi\|_{V_0}^{\frac{p^-}{r^+}}, \|\psi\|_{V_0}^{\frac{p^+}{r^+}}\} \\
&\leqslant 1.
\end{aligned}$$

Além disso, como $L^{p(x)} \hookrightarrow L^2$ existe constante $\alpha_1 > 0$, tal que

$$\|\nabla\psi\|_{H_0} \leqslant \alpha_1\|\nabla\psi\|_{p(x)} \leqslant \alpha_1\|\psi\|_{V_0}.$$

Concluímos, de (3.68), que

$$\begin{aligned}
&\sup_{\|\psi\|_{V_0}\leqslant 1}|(w_t(1+\theta),\psi)_{H_0}| \\
&\quad\leqslant M_0\sqrt[4]{n}\sqrt{p^+-1}\left[\left(\frac{1}{r^-}+\frac{1}{s^-}\right)\xi_{|\nabla u(1+\theta)|+|\nabla v(1+\theta)|}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad\left(\int_{\Omega_1}||\nabla u(1+\theta)|^{p(x)-2}\nabla u(1+\theta) - |\nabla v(1+\theta)|^{p(x)-2}\nabla v(1+\theta)||\nabla w(1+\theta)|\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad + \sqrt{p^+-1}\left[\left(\frac{1}{r^-}+\frac{1}{s^-}\right)\xi_{|u(1+\theta)|+|v(1+\theta)|}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad\left(\int_{\Omega}||u(1+\theta)|^{p(x)-2}u(1+\theta) - |v(1+\theta)|^{p(x)-2}v(1+\theta)||w(1+\theta)|\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad + M_0\eta\alpha_1\|\nabla w(1+\theta)\|_{H_0} + L_B\alpha^2\alpha_1\|\nabla w(1+\theta)\|_{H_0}.
\end{aligned}$$

Sabendo que $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$, isto é, $(a+b+c)^2 \leqslant 4(a^2+b^2)+2c^2$, temos

$$\begin{aligned}
&\left(\sup_{\|\psi\|_{V_0}\leqslant 1}|(w_t(1+\theta),\psi)_{H_0}|\right)^2 \\
&\quad\leqslant 4M_0^2\sqrt{n}(p^+-1)\left(\frac{1}{r^-}+\frac{1}{s^-}\right)\xi_{|\nabla u(1+\theta)|+|\nabla v(1+\theta)|} \\
&\qquad\int_{\Omega_1}||\nabla u(1+\theta)|^{p(x)-2}\nabla u(1+\theta) - |\nabla v(1+\theta)|^{p(x)-2}\nabla v(1+\theta)||\nabla w(1+\theta)|\,dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+4(p^+-1)\left(\frac{1}{r^-}+\frac{1}{s^-}\right)\xi_{|u(1+\theta)|+|v(1+\theta)|}\\
&\quad\int_\Omega ||u(1+\theta)|^{p(x)-2}u(1+\theta)-|v(1+\theta)|^{p(x)-2}v(1+\theta)||w(1+\theta)|\;dx\\
&\qquad+2(M_0\eta\alpha_1+L_B\alpha^2\alpha_1)^2\|\nabla w(1+\theta)\|^2_{H_0}.
\end{aligned}
\tag{3.69}
$$

Como

$$
\begin{aligned}
\|(L(1)\chi_1-L(1)\chi_2)_t\|^2_{L^2(0,1;V_0')} &= \int_0^1 \|w_t(1+\theta)\|^2_{V_0'}\;d\theta\\
&=\int_0^1\left(\sup_{\|\psi\|_{V_0}\leqslant 1}|\langle w_t(1+\theta),\psi\rangle_{V_0',V_0}|\right)^2 d\theta\\
&=\int_0^1\left(\sup_{\|\psi\|_{V_0}\leqslant 1}|(w_t(1+\theta),\psi)_{H_0}|\right)^2 d\theta.
\end{aligned}
$$

Considerando as notações

$$
\mathcal{I}_{(f,g)} := \int_\Omega ||f|^{p(x)-2}f-|g|^{p(x)-2}g||f-g|\;dx
$$

e

$$
\mathcal{I}_{1(f,g)} := \int_{\Omega_1} ||f|^{p(x)-2}f-|g|^{p(x)-2}g||f-g|\;dx,
$$

segue de (3.69) que

$$
\begin{aligned}
&\|(L(1)\chi_1-L(1)\chi_2)_t\|^2_{L^2(0,1;V_0')}\\
&\quad\leqslant 4M_0^2\sqrt{n}(p^+-1)\left(\frac{1}{r^-}+\frac{1}{s^-}\right)\int_0^1 \xi_{|\nabla u(1+\theta)|+|\nabla v(1+\theta)|}\mathcal{I}_{1(\nabla u(1+\theta),\nabla v(1+\theta))}\;d\theta\\
&\qquad+4(p^+-1)\left(\frac{1}{r^-}+\frac{1}{s^-}\right)\int_0^1 \xi_{|u(1+\theta)|+|v(1+\theta)|}\mathcal{I}_{(u(1+\theta),v(1+\theta))}\;d\theta\\
&\qquad\quad+2(M_0\eta\alpha_1+L_B\alpha^2\alpha_1)^2\int_0^1\|\nabla w(1+\theta)\|^2_{H_0}\;d\theta.
\end{aligned}
\tag{3.70}
$$

Por sua vez,

$$
\begin{aligned}
\|\;|\nabla u(1+\theta)|+|\nabla v(1+\theta)|\;\|_{p(x)} &\leqslant \|\nabla u(1+\theta)\|_{p(x)}+\|\nabla v(1+\theta)\|_{p(x)}\\
&\leqslant \sup_{\theta\in[0,1]}(\|\nabla u(1+\theta)\|_{p(x)}+\|\nabla v(1+\theta)\|_{p(x)})\\
&= \sup_{t\in[1,2]}(\|\nabla u(t)\|_{p(x)}+\|\nabla v(t)\|_{p(x)})\\
&\leqslant \sup_{t\in[1,2]}(\|u(t)\|_{V_0}+\|v(t)\|_{V_0}),
\end{aligned}
$$

para todo $\theta\in[0,1]$. Segue da demonstração do Lema 3.3.1, considerando $t_0=\frac{1}{2}$ e $k=\frac{1}{2}$, que existe $r_2 > 0$ de modo que $\|u(t)\|_{V_0} \leqslant r_2$, para todo $t \geqslant t_1 = t_0 + k = 1$, com isso

$$\| \, |\nabla u(1+\theta)| + |\nabla v(1+\theta)| \, \|_{p(x)} \leqslant 2r_2, \quad \forall \theta \in [0,1].$$

Logo,

$$\xi_{|\nabla u(1+\theta)|+|\nabla v(1+\theta)|} \leqslant \max\{(2r_2)^{\frac{p^-}{s^-}}, (2r_2)^{\frac{p^+}{s^-}}, (2r_2)^{\frac{p^-}{s^+}}, (2r_2)^{\frac{p^+}{s^+}}\} := \kappa_1.$$

Da mesma forma, podemos concluir que $\xi_{|u(1+\theta)|+|v(1+\theta)|} \leqslant \kappa_1$. Assim, em (3.70), temos

$$\begin{aligned}
&\|(L(1)\chi_1 - L(1)\chi_2)_t\|^2_{L^2(0,1;V_0')} \\
&\leqslant 4M_0^2\sqrt{n}(p^+ - 1)\left(\frac{1}{r^-} + \frac{1}{s^-}\right)\kappa_1 \int_0^1 \mathcal{I}_{1(\nabla u(1+\theta), \nabla v(1+\theta))}\, d\theta \\
&\qquad + 4(p^+ - 1)\left(\frac{1}{r^-} + \frac{1}{s^-}\right)\kappa_1 \int_0^1 \mathcal{I}_{(u(1+\theta), v(1+\theta))}\, d\theta \\
&\qquad + 2(M_0\eta\alpha_1 + L_B\alpha^2\alpha_1)^2 \int_0^1 \|\nabla w(1+\theta)\|^2_{H_0}\, d\theta \\
&\leqslant \gamma\left(\int_0^1 \mathcal{I}_{1(\nabla u(1+\theta), \nabla v(1+\theta))}\, d\theta + \int_0^1 \mathcal{I}_{(u(1+\theta), v(1+\theta))}\, d\theta + \int_0^1 \|\nabla w(1+\theta)\|^2_{H_0}\, d\theta\right),
\end{aligned} \tag{3.71}$$

onde $\gamma = \max\left\{4M_0^2\sqrt{n}(p^+ - 1)\left(\frac{1}{r^-} + \frac{1}{s^-}\right)\kappa_1, 4(p^+ - 1)\left(\frac{1}{r^-} + \frac{1}{s^-}\right)\kappa_1, 2(M_0\eta\alpha_1 + L_B\alpha^2\alpha_1)^2\right\}$.

Nosso próximo objetivo é mostrar a existência de uma constante, $\beta_1 > 0$, tal que

$$\int_0^1 \mathcal{I}_{1(\nabla u(1+\theta), \nabla v(1+\theta))}\, d\theta \leqslant \beta_1 \int_0^1 \|w(\theta)\|^2_{H_0}\, d\theta. \tag{3.72}$$

Fazendo o produto $(\cdot, w)_{H_0}$ na equação (3.53) temos

$$(w_t, w)_{H_0} + (A_0^{H_0}u - A_0^{H_0}v, w)_{H_0} = (Bu - Bv, w)_{H_0},$$

onde

$$\begin{aligned}
(A_0^{H_0}u - A_0^{H_0}v, w)_{H_0} &= \langle A_0u - A_0v, w\rangle_{V_0', V_0} \\
&= \int_{\Omega_1} d_0(x)\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u - |\nabla v|^{p(x)-2}\nabla v\right)\nabla w\, dx + \int_{\Omega_1} d_0(x)\eta(\nabla u - \nabla v)\nabla w\, dx \\
&\qquad + \int_\Omega (|u|^{p(x)-2}u - |v|^{p(x)-2}v)w\, dx \\
&\geqslant m_0 \int_{\Omega_1} (|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u - |\nabla v|^{p(x)-2}\nabla v)\nabla w\, dx + m_0\eta \int_{\Omega_1} |\nabla w|^2\, dx \\
&\qquad + \int_\Omega (|u|^{p(x)-2}u - |v|^{p(x)-2}v)w\, dx.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2_{H_0} + m_0\mathcal{I}_{1(\nabla u, \nabla v)} + m_0\eta\int_{\Omega_1} |\nabla w|^2\, dx + \mathcal{I}_{(u,v)} &\leqslant (w_t, w)_{H_0} + (A_0^{H_0}u - A_0^{H_0}v, w)_{H_0} \\
&= (Bu - Bv, w)_{H_0} \\
&\leqslant |(Bu - Bv, w)_{H_0}|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leqslant \|Bu - Bv\|_{H_0}\|w\|_{H_0} \\ &\leqslant L_B\|u - v\|_{H_0}\|w\|_{H_0} \\ &= L_B\|w\|_{H_0}^2. \end{aligned} \tag{3.73}$$

Para cada $x \in \Omega_1$, segue de (1.8), com $\delta = 0$, que

$$(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u - |\nabla v|^{p(x)-2}\nabla v)\nabla w \geqslant \frac{1}{2^{p(x)-1}}|\nabla u - \nabla v|^2(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-2}$$

e

$$(|u|^{p(x)-2}u - |v|^{p(x)-2}v)w \geqslant \frac{1}{2^{p(x)-1}}|u - v|^2(|u| + |v|)^{p(x)-2}.$$

Logo, de (3.73), temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|_{H_0}^2 + m_0\int_{\Omega_1} \frac{1}{2^{p(x)-1}}|\nabla w|^2(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-2}\, dx + m_0\eta\int_{\Omega_1} |\nabla w|^2\, dx& \\ + \int_{\Omega} \frac{1}{2^{p(x)-1}}|w|^2(|u| + |v|)^{p(x)-2}\, dx& \\ \leqslant \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|_{H_0}^2 + m_0\mathcal{I}_{1(\nabla u,\nabla v)} + m_0\eta\int_{\Omega_1} |\nabla w|^2\, dx + \mathcal{I}_{(u,v)}& \\ \leqslant L_B\|w\|_{H_0}^2.& \end{aligned} \tag{3.74}$$

Observamos que $m_0\eta\int_{\Omega_1} |\nabla w|^2\, dx \geqslant 0$. Como $p(x) \leqslant p^+$ e $\mathbb{R}^+ \ni x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$ é decrescente, então $\frac{1}{2^{p(x)-1}} \geqslant \frac{1}{2^{p^+-1}}$. Assim, também concluímos que

$$\int_{\Omega_1} \frac{1}{2^{p(x)-1}}|\nabla w|^2(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-2}\, dx \geqslant \frac{1}{2^{p^+-1}}\int_{\Omega_1} |\nabla w|^2(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-2}\, dx \geqslant 0$$

e

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2^{p(x)-1}}|w|^2(|u| + |v|)^{p(x)-2}\, dx \geqslant \frac{1}{2^{p^+-1}}\int_{\Omega_1} |w|^2(|u| + |v|)^{p(x)-2}\, dx \geqslant 0.$$

Logo, de (3.74) podemos escrever

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|_{H_0}^2 + m_0\frac{1}{2^{p^+-1}}\int_{\Omega_1} |\nabla w|^2(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-2}\, dx \leqslant L_B\|w\|_{H_0}^2, \tag{3.75}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|_{H_0}^2 + m_0\eta\int_{\Omega_1} |\nabla w|^2\, dx \leqslant L_B\|w\|_{H_0}^2 \tag{3.76}$$

e

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|_{H_0}^2 + \frac{1}{2^{p^+-1}}\int_{\Omega} |w|^2(|u| + |v|)^{p(x)-2}\, dx \leqslant L_B\|w\|_{H_0}^2. \tag{3.77}$$

Negligenciando o segundo termo da soma em (3.75) e integrando para θ variando no intervalo $[s, t]$, onde $0 \leqslant s < t$, segue que

$$\|w(t)\|_{H_0}^2 \leqslant \|w(s)\|_{H_0}^2 + 2L_B\int_s^t \|w(\theta)\|_{H_0}^2\, d\theta.$$

Pelo Lema 1.2.3, Lema de Grönwall Bellman, temos

$$\|w(t)\|_{H_0}^2 \leqslant \|w(s)\|_{H_0}^2 \exp(2L_B(t - s)), \quad \text{para } \ 0 \leqslant s < t. \tag{3.78}$$

Retornando a (3.75) e integrando no intervalo $[\tau, 2]$, com $\tau \in [0,1]$, obtemos

$$\frac{1}{2}\|w(2)\|_{H_0}^2 - \frac{1}{2}\|w(\tau)\|_{H_0}^2 + \frac{m_0}{2^{p^+-1}}\int_\tau^2\int_{\Omega_1}|\nabla w|^2(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-2}\,dx\,d\theta \leqslant L_B\int_\tau^2 \|w(\theta)\|_{H_0}^2\,d\theta.$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
&\frac{m_0}{2^{p^+-2}}\int_\tau^2\int_{\Omega_1}|\nabla w|^2(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-2}\,dx\,d\theta \\
&\qquad\leqslant \frac{m_0}{2^{p^+-2}}\int_\tau^2\int_{\Omega_1}|\nabla w|^2(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-2}\,dx\,d\theta + \|w(2)\|_{H_0}^2 \\
&\qquad= 2\left(\frac{1}{2}\|w(2)\|_{H_0}^2 + \frac{m_0}{2^{p^+-1}}\int_\tau^2\int_{\Omega_1}|\nabla w|^2(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-2}\,dx\,d\theta\right) \\
&\qquad\leqslant 2\left(\frac{1}{2}\|w(\tau)\|_{H_0}^2 + L_B\int_\tau^2 \|w(\theta)\|_{H_0}^2\,d\theta\right) \\
&\qquad= \|w(\tau)\|_{H_0}^2 + 2L_B\int_\tau^2\|w(\theta)\|_{H_0}^2\,d\theta. \qquad (3.79)
\end{aligned}$$

Vamos agora estimar o lado esquerdo da desigualdade (3.79). Como $0 \leqslant \tau \leqslant \theta \leqslant 2$ então por (3.78), com $s = \tau$ e $t = \theta$, temos

$$\|w(\theta)\|_{H_0}^2 \leqslant \|w(\tau)\|_{H_0}^2 \exp(2L_B(\theta - \tau)).$$

Integrando esta última desigualdade para θ variando em $[\tau, 2]$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\tau^2 \|w(\theta)\|_{H_0}^2\,d\theta \leqslant& \int_\tau^2 \|w(\tau)\|_{H_0}^2\exp(2L_B(\theta-\tau))\,d\theta \\
=&\frac{1}{2L_B}\|w(\tau)\|_{H_0}^2(\exp(2L_B(2-\tau)) - 1),
\end{aligned}$$

isto é,

$$2L_B\int_\tau^2\|w(\theta)\|_{H_0}^2\,d\theta \leqslant \|w(\tau)\|_{H_0}^2\exp(2L_B(2-\tau)) - \|w(\tau)\|_{H_0}^2. \qquad (3.80)$$

Substituindo em (3.79) e usando o crescimento da função $\exp(\cdot)$, concluímos que

$$\begin{aligned}
\frac{m_0}{2^{p^+-2}}\int_\tau^2\int_{\Omega_1}|\nabla w|^2(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-2}\,dx\,d\theta \leqslant& \|w(\tau)\|_{H_0}^2\exp(2L_B(2-\tau)) \\
\leqslant& \|w(\tau)\|_{H_0}^2\exp(4L_B), \quad \forall \tau \in [0,1]. \qquad (3.81)
\end{aligned}$$

Logo, de (3.81) e (3.57), temos

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\int_{\Omega_1}||\nabla u(1+\theta)|^{p(x)-2}\nabla u(1+\theta) - |\nabla v(1+\theta)|^{p(x)-2}\nabla v(1+\theta)||\nabla w(1+\theta)|\;dxd\theta \\
&\quad= \int_1^2\int_{\Omega_1}||\nabla u(t)|^{p(x)-2}\nabla u(t) - |\nabla v(t)|^{p(x)-2}\nabla v(t)||\nabla w(t)|\;dxdt \\
&\quad\leqslant \int_\tau^2\int_{\Omega_1}||\nabla u(t)|^{p(x)-2}\nabla u(t) - |\nabla v(t)|^{p(x)-2}\nabla v(t)||\nabla w(t)|\;dxdt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \int_\tau^2 \int_{\Omega_1} \sqrt{n}(p(x)-1)|\nabla u(t) - \nabla v(t)|(|\nabla u(t)| + |\nabla v(t)|)^{p(x)-2}|\nabla w(t)|\; dxdt \\
&\leqslant \int_\tau^2 \int_{\Omega_1} \sqrt{n}(p^+-1)|\nabla w(t)|^2(|\nabla u(t)| + |\nabla v(t)|)^{p(x)-2}\; dxdt \\
&= \sqrt{n}(p^+-1)\int_\tau^2 \int_{\Omega_1} |\nabla w|^2(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-2}\; dxdt \\
&\leqslant \sqrt{n}(p^+-1)\left(\frac{2^{p^+-2}}{m_0}\|w(\tau)\|_{H_0}^2 \exp(4L_B)\right), \quad \forall \tau \in [0,1].
\end{aligned}
$$

Integrando essa última desigualdade para τ variando em $[0,1]$ temos

$$
\int_0^1 \mathcal{I}_{1(\nabla u(1+\theta), \nabla v(1+\theta))}\; d\theta \leqslant \frac{2^{p^+-2}}{m_0}\sqrt{n}(p^+-1)\exp(4L_B)\int_0^1 \|w(\tau)\|_{H_0}^2\, d\tau.
$$

Portanto (3.72) ocorre para $\beta_1 = 2^{p^+-2}m_0^{-1}\sqrt{n}(p^+-1)\exp(4L_B)$.

Procedendo de forma análoga, concluímos a existência de $\beta_2 > 0$, tal que

$$
\int_0^1 \mathcal{I}_{(u(1+\theta), v(1+\theta))}\; d\theta \leqslant \beta_2 \int_0^1 \|w(\theta)\|_{H_0}^2\, d\theta. \tag{3.82}
$$

De fato, usando a mesma argumentação feita para (3.75), na página 86, para (3.77), segue de (3.80) que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2^{p^+-2}}\int_\tau^2 \int_\Omega |w|^2(|u|+|v|)^{p(x)-2}\, dx\, d\theta &\leqslant \frac{1}{2^{p^+-2}}\int_\tau^2 \int_\Omega |w|^2(|u|+|v|)^{p(x)-2}\, dx\, d\theta + \|w(2)\|_{H_0}^2 \\
&= 2\left(\frac{1}{2}\|w(2)\|_{H_0}^2 + \frac{1}{2^{p^+-1}}\int_\tau^2 \int_\Omega |w|^2(|u|+|v|)^{p(x)-2}\, dx\, d\theta\right) \\
&\leqslant 2\left(\frac{1}{2}\|w(\tau)\|_{H_0}^2 + L_B\int_\tau^2 \|w(\theta)\|_{H_0}^2\, d\theta\right) \\
&\leqslant \|w(\tau)\|_{H_0}^2 \exp(4L_B), \quad \forall \tau \in [0,1].
\end{aligned} \tag{3.83}
$$

Para cada $x \in \Omega$, obtemos de (1.7), com $\delta = 0$, que

$$
||u(t,x)|^{p(x)-2}u(t,x) - |v(t,x)|^{p(x)-2}v(t,x)| \leqslant (p(x)-1)|w(t,x)|(|u(t,x)|+|v(t,x)|)^{p(x)-2}. \tag{3.84}
$$

Logo, de (3.83) e (3.84), concluímos que

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_\Omega ||u(1+\theta)|^{p(x)-2}u(1+\theta) - |v(1+\theta)|^{p(x)-2}v(1+\theta)||w(1+\theta)|\; dxd\theta \\
&\qquad = \int_1^2 \int_\Omega ||u(t)|^{p(x)-2}u(t) - |v(t)|^{p(x)-2}v(t)||w(t)|\; dxdt \\
&\qquad \leqslant \int_\tau^2 \int_\Omega ||u(t)|^{p(x)-2}u(t) - |v(t)|^{p(x)-2}v(t)||w(t)|\; dxdt \\
&\qquad \leqslant \int_\tau^2 \int_\Omega (p(x)-1)|u(t)-v(t)|(|u(t)|+|v(t)|)^{p(x)-2}|w(t)|\; dxdt \\
&\qquad \leqslant \int_\tau^2 \int_\Omega (p^+-1)|w(t)|^2(|u(t)|+|v(t)|)^{p(x)-2}\; dxdt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=(p^+ - 1)\int_\tau^2 \int_\Omega |w|^2(|u|+|v|)^{p(x)-2}\, dxdt\\
&\leqslant (p^+ - 1)\left(2^{p^+-2}\|w(\tau)\|_{H_0}^2 \exp(4L_B)\right), \quad \forall \tau \in [0,1].
\end{aligned}
$$

Integrando essa última desigualdade para τ variando em $[0,1]$ temos

$$
\int_0^1 \mathcal{I}_{(u(1+\theta),v(1+\theta))}\, d\theta \leqslant 2^{p^+-2}(p^+-1)\exp(4L_B)\int_0^1 \|w(\tau)\|_{H_0}^2\, d\tau,
$$

obtendo (3.82), com $\beta_2 = 2^{p^+-2}(p^+-1)\exp(4L_B)$.

Além disso, temos a existência de $\beta_3 > 0$ tal que

$$
\|\nabla w(1+\cdot)\|_{L^2(0,1;H_0)}^2 = \int_0^1 \int_{\Omega_1} |\nabla w(1+\theta)|^2\, dxd\theta \leqslant \beta_3 \int_0^1 \|w(\theta)\|_{H_0}^2\, d\theta. \tag{3.85}
$$

De fato, integrando ambos os lados de (3.76) sob o intervalo $[\tau, 2]$, para $\tau \in [0,1]$, segue de (3.80), que

$$
\begin{aligned}
2m_0\eta \int_\tau^2 \int_{\Omega_1} |\nabla w(\theta,x)|^2\, dx\, d\theta \leqslant & 2m_0\eta \int_\tau^2 \int_{\Omega_1} |\nabla w(\theta,x)|^2\, dx\, d\theta + \|w(2)\|_{H_0}^2\\
=& 2\left(\frac{1}{2}\|w(2)\|_{H_0}^2 + m_0\eta \int_\tau^2 \int_{\Omega_1} |\nabla w(\theta,x)|^2\, dx\, d\theta\right)\\
\leqslant & 2\left(\frac{1}{2}\|w(\tau)\|_{H_0}^2 + L_B \int_\tau^2 \|w(\theta)\|_{H_0}^2\, d\theta\right)\\
\leqslant & \|w(\tau)\|_{H_0}^2 \exp(4L_B), \quad \forall \tau \in [0,1].
\end{aligned}
$$

Consequentemente,

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \int_\Omega |\nabla w(1+\theta,x)|^2\, dx\, d\theta &= \int_1^2 \int_\Omega |\nabla w(t,x)|^2\, dx\, dt\\
&\leqslant \int_\tau^2 \int_{\Omega_1} |\nabla w(t,x)|^2\, dx\, dt\\
&\leqslant \frac{\exp(4L_B)}{2m_0\eta}\|w(\tau)\|_{H_0}^2, \quad \forall \tau \in [0,1].
\end{aligned} \tag{3.86}
$$

Logo, integrando essa última desigualdade em (3.86) para τ variando em $[0,1]$, obtemos (3.85) com $\beta_3 = \exp(4L_B)(2m_0\eta)^{-1}$.

Finalmente, segue de (3.71), (3.72), (3.82) e (3.85) que

$$
\begin{aligned}
\|L(1)\chi_1 - L(1)\chi_2\|_{Y_0} &= \|\nabla(L(1)\chi_1 - L(1)\chi_2)\|_{L^2(0,1;H_0)} + \|(L(1)\chi_1 - L(1)\chi_2)_t\|_{L^2(0,1;V_0')}\\
&= \|\nabla w(1+\cdot)\|_{L^2(0,1;H_0)} + (\|(L(1)\chi_1 - L(1)\chi_2)_t\|_{L^2(0,1;V_0')}^2)^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant \|\nabla w(1+\cdot)\|_{L^2(0,1;H_0)}\\
&\quad + \gamma^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1 \mathcal{I}_{1(\nabla u(1+\theta),\nabla v(1+\theta))}\, d\theta + \|\nabla w(1+\cdot)\|_{L^2(0,1;H_0)}^2 + \int_0^1 \mathcal{I}_{(u(1+\theta),v(1+\theta))}\, d\theta\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\leqslant &\|\nabla w(1+\cdot)\|_{L^2(0,1;H_0)} + \gamma^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1 \mathcal{I}_{1(\nabla u(1+\theta),\nabla v(1+\theta))}\, d\theta\right)^{\frac{1}{2}} + \gamma^{\frac{1}{2}}\|\nabla w(1+\cdot)\|_{L^2(0,1;H_0)} \\
&\qquad + \gamma^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1 \mathcal{I}_{(u(1+\theta),v(1+\theta))}\, d\theta\right)^{\frac{1}{2}} \\
\leqslant &(1+\gamma^{\frac{1}{2}})\left(\beta_3\int_0^1 \|w(\theta)\|_{H_0}^2\, d\theta\right)^{\frac{1}{2}} + \gamma^{\frac{1}{2}}\left(\beta_1\int_0^1 \|w(\theta)\|_{H_0}^2\, d\theta\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad + \gamma^{\frac{1}{2}}\left(\beta_2\int_0^1 \|w(\theta)\|_{H_0}^2\, d\theta\right)^{\frac{1}{2}} \\
= &[(1+\gamma^{\frac{1}{2}})\beta_3^{\frac{1}{2}} + \gamma^{\frac{1}{2}}\beta_1^{\frac{1}{2}} + \gamma^{\frac{1}{2}}\beta_2^{\frac{1}{2}}]\left(\int_0^1 \|w(\theta)\|_{H_0}^2\, d\theta\right)^{\frac{1}{2}} \\
= &[(1+\gamma^{\frac{1}{2}})\beta_3^{\frac{1}{2}} + \gamma^{\frac{1}{2}}\beta_1^{\frac{1}{2}} + \gamma^{\frac{1}{2}}\beta_2^{\frac{1}{2}}]\left(\int_0^1 \|\chi_1(\theta)-\chi_2(\theta)\|_{H_0}^2\, d\theta\right)^{\frac{1}{2}} \\
= &\omega_1\|\chi_1-\chi_2\|_{L^2(0,1;H_0)},
\end{aligned}
$$

onde $\omega_1 = [(1+\gamma^{\frac{1}{2}})\beta_3^{\frac{1}{2}} + \gamma^{\frac{1}{2}}\beta_1^{\frac{1}{2}} + \gamma^{\frac{1}{2}}\beta_2^{\frac{1}{2}}]$. Concluindo a demonstração. □

Destacamos que nesse último Lema, a constante $\omega_1^\lambda > 0$ não pode ser tomada uniformemente com respeito ao parâmetro $\lambda \in (0,1]$, tendo em vista que a constante $M_\lambda > 0$, determinada pela limitação da difusão d_λ, compõe a constante ω_1^λ.

Considere as aplicações

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e} :&\mathfrak{X} \to H_0 \\
&\chi \mapsto \chi(1)
\end{aligned}
\tag{3.87}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e}_\lambda :&\mathfrak{X}_\lambda \to H \\
&\chi \mapsto \chi(1),
\end{aligned}
\tag{3.88}
$$

para todo $\lambda \in (0,1]$.

Lema 3.4.4. *As aplicações* $\mathbf{e}$ *e* $\mathbf{e}_\lambda$ *definidas, respectivamente, em* (3.87) *e* (3.88)*, são Lipschitz contínuas em* $\mathcal{B}_0$ *e* $\mathcal{B}_0^\lambda$ *respectivamente.*

Demonstração. Demonstraremos que $\mathbf{e}$ é Lipschitz contínua, a demonstração para $\mathbf{e}_\lambda$ é feita de forma similar.

Sejam $\chi_1, \chi_2 \in \mathcal{B}_0$, então existem únicas u e v soluções de (3.16) com $u(0), v(0) \in B_0$ tal que $u|_{[0,1]} = \chi_1$ e $v|_{[0,1]} = \chi_2$, denotamos por w a diferença $u-v$. Procedendo como na demonstração do Lema 3.4.3, podemos concluir (3.78). Em particular,

$$
\|w(1)\|_{H_0}^2 \leqslant \|w(\theta)\|_{H_0}^2 \exp(2L_B(1-\theta)) \leqslant \|w(\theta)\|_{H_0}^2 \exp(2L_B), \quad \forall \theta \in [0,1].
$$

Integrando essa última desigualdade, para θ variando em $[0,1]$, temos

$$
\int_0^1 \|w(1)\|_{H_0}^2\, d\theta \leqslant \int_0^1 \|w(\theta)\|_{H_0}^2 \exp(2L_B)\, d\theta = \exp(2L_B)\int_0^1 \|w(\theta)\|_{H_0}^2\, d\theta,
$$

isto é,

$$\|w(1)\|_{H_0} \leqslant \exp(L_B)\left(\int_0^1 \|w(\theta)\|_{H_0}^2\, d\theta\right)^{\frac{1}{2}} = \exp(L_B)\|w\|_{L^2(0,1;H_0)}. \tag{3.89}$$

Logo, de (3.89) segue que

$$\begin{aligned}\|\mathbf{e}(\chi_1) - \mathbf{e}(\chi_2)\|_{H_0} =& \|\chi_1(1) - \chi_2(1)\|_{H_0} = \|w(1)\|_{H_0}\\ \leqslant& \exp(L_B)\|w\|_{L^2(0,1;H_0)} = \exp(L_B)\|u - v\|_{L^2(0,1;H_0)}\\ =& \exp(L_B)\|\chi_1 - \chi_2\|_{L^2(0,1;H_0)}.\end{aligned}$$

□

Proposição 3.4.1. *Existe constante $c_3 > 0$ tal que*

$$\|L(s)\chi_1 - L(t)\chi_2\|_{L^2(0,1;H_0)} \leqslant c_3(|s-t|^{\frac{1}{2}} + \|\chi_1 - \chi_2\|_{L^2(0,1;H_0)}),$$

para todo $t, s \in [0,1]$ e para todo $\chi_1, \chi_2 \in \mathcal{B}_0$. Para cada $\lambda \in (0,1]$, existe $\tilde{c}_3 > 0$ tal que

$$\|L_\lambda(s)\chi_1 - L_\lambda(t)\chi_2\|_{L^2(0,1;H)} \leqslant \tilde{c}_3(|s-t|^{\frac{1}{2}} + \|\chi_1 - \chi_2\|_{L^2(0,1;H)}),$$

para todo $t, s \in [0,1]$ e para todo $\chi_1, \chi_2 \in \mathcal{B}_0^\lambda$.

Demonstração. Primeiramente vamos demonstrar que existe $c > 0$ de modo que

$$\|T_0(s)u_0 - T_0(t)v_0\|_{H_0} \leqslant c(|s-t|^{\frac{1}{2}} + \|u_0 - v_0\|_{H_0}),$$

para todo $s, t \in [0,1]$ e $u_0, v_0 \in B_0$. De fato, para todo $s, t \in [0,1]$ e $u_0, v_0 \in B_0$

$$\|T_0(s)u_0 - T_0(t)v_0\|_{H_0} \leqslant \|T_0(s)u_0 - T_0(t)u_0\|_{H_0} + \|T_0(t)u_0 - T_0(t)v_0\|_{H_0}. \tag{3.90}$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, desigualdade de Hölder, Teorema de Fubini e Teorema 1.2.4, já que $u_0 \in B_0 \subset V_0 = D(\varphi)$, temos

$$\begin{aligned}\|T_0(s)u_0 - T_0(t)u_0\|_{H_0}^2 &= \int_\Omega |T_0(s)u_0(x) - T_0(t)u_0(x)|^2\, dx\\ &= \int_\Omega \left|\int_t^s (T_0(\theta)u_0(x))_\theta\, d\theta\right|^2 dx\\ &\leqslant \int_\Omega \left(\int_t^s |(T_0(\theta)u_0(x))_\theta|\, d\theta\right)^2 dx\\ &\leqslant \int_\Omega \left(\int_t^s |(T_0(\theta)u_0(x))_\theta|^2\, d\theta |s-t|\right) dx\\ &\leqslant |s-t| \int_\Omega \int_t^s |(T_0(\theta)u_0(x))_\theta|^2\, d\theta\, dx\\ &= |s-t| \int_t^s \int_\Omega |(T_0(\theta)u_0(x))_\theta|^2\, dx\, d\theta\\ &= |s-t| \int_t^s \|(T_0(\theta)u_0)_\theta\|_{H_0}^2\, d\theta\\ &\leqslant |s-t| \int_0^1 \|(T_0(\theta)u_0)_\theta\|_{H_0}^2\, d\theta\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= |s-t| \|(T_0(\cdot)u_0)_t\|^2_{L^2(0,1;H_0)} \\
&\leqslant |s-t| c_1^2.
\end{aligned}
$$

Além disso, segue de (3.78) que,

$$\|T_0(t)u_0 - T_0(t)v_0\|_{H_0} \leqslant c_2 \|u_0 - v_0\|_{H_0}.$$

Assim, retornando a (3.90), temos que

$$\|T_0(s)u_0 - T_0(t)v_0\|_{H_0} \leqslant c_1 |s-t|^{\frac{1}{2}} + c_2(T)\|u_0 - v_0\|_{H_0} \tag{3.91}$$

para todo $t, s \in [0,1]$ e $u_0, v_0 \in B_0$. Agora,

$$
\begin{aligned}
\|L(s)\chi_1 - L(t)\chi_2\|^2_{L^2(0,1;H_0)} &= \int_0^1 \|(L(s)\chi_1)(\theta) - (L(t)\chi_2)(\theta)\|^2_{H_0} \, d\theta \\
&= \int_0^1 \|T_0(s+\theta)u_0 - T_0(t+\theta)v_0\|^2_{H_0} \, d\theta \\
&= \int_0^1 \|T_0(s)T_0(\theta)u_0 - T_0(t)T_0(\theta)v_0\|^2_{H_0} \, d\theta.
\end{aligned}
$$

Como $u_0 = \chi_1(0) \in B_0$, $v_0 = \chi_2(0) \in B_0$, segue do Lema 3.4.1, que $T_0(\theta)u_0, T_0(\theta)v_0 \in B_0$, para todo $\theta \in [0,1]$. De (3.91), temos

$$
\begin{aligned}
\|L(s)\chi_1 - L(t)\chi_2\|^2_{L^2(0,1;H_0)} &\leqslant \int_0^1 (c_1+c_2)^2 (|s-t|^{\frac{1}{2}} + \|T_0(\theta)u_0 - T_0(\theta)v_0\|_{H_0})^2 \, d\theta \\
&\leqslant \int_0^1 2^2 (c_1+c_2)^2 (|s-t| + \|T_0(\theta)u_0 - T_0(\theta)v_0\|^2_{H_0}) \, d\theta \\
&= 4(c_1+c_2)^2 (|s-t| + \int_0^1 \|T_0(\theta)u_0 - T_0(\theta)v_0\|^2_{H_0} \, d\theta) \\
&= 4(c_1+c_2)^2 (|s-t| + \|\chi_1 - \chi_2\|^2_{L^2(0,1;H_0)}).
\end{aligned}
$$

Portanto, para $c_3 = 2(c_1 + c_2)$, concluímos o resultado para $\{L(t)\}_{t \geqslant 0}$. A estimativa para o caso $\lambda \in (0,1]$, segue analogamente. □

Agora, enunciamos o principal resultado do capítulo.

Teorema 3.4.1. *O sistema dinâmico associado a* (3.16)*, possui um atrator global* $\mathcal{A}_0$*. Além disso, existe um subconjunto* B *de* H_0*, positivamente invariante, com* $\mathcal{A}_0 \subset B$ *de modo que o sistema dinâmico* $(T_0(t), B)$ *admite um atrator exponencial* $\mathcal{E}_0$*.*

Para cada $\lambda \in (0,1]$*, o sistema dinâmico associado a* (3.15)*, possui um atrator global* $\mathcal{A}_\lambda$*. Além disso, existe um subconjunto* B_λ *de* H*, positivamente invariante, com* $\mathcal{A}_\lambda \subset B_\lambda$ *de modo que o sistema dinâmico* $(T_\lambda(t), B_\lambda)$ *admite um atrator exponencial* $\mathcal{E}_\lambda$*.*

Demonstração. Sejam $u_0 \in H_0$ e $T > 0$, vimos na Seção 3.2 que (3.16) admite única $u \in C([0,T]; H_0)$ solução fraca em $[0,T]$. Devido o Lema 3.3.4, podemos aplicar o Teorema 1.2.4, concluindo, com isso, que u é a única solução forte de (3.16), desta forma a Hipótese $(H1)'$ está satisfeita. Pela demonstração do Lema 3.3.1, fixando os valores $t_0 = k = 1$, temos que

$$\|u(t)\|_{V_0} \leqslant r, \quad \forall t \geqslant 2.$$

Ou seja, $\|u(t)\|_{p(x)} \leqslant r$ e $\|\nabla u(t)\|_{p(x)} \leqslant r$, para todo $t \geqslant 2$. Portanto,

$$u(t) \in B_1 \subset \bigcup_{s\in[0,2]} T_0(s)B_1 = B_0, \quad \forall t \geqslant 2. \tag{3.92}$$

O Lema 3.4.1 e (3.92), asseguram a Hipótese (H2) do Capítulo 2. Pela Proposição 3.4.1, as Hipóteses (H4), (H9) e (H10) estão satisfeitas. Pelos Lemas 3.4.3 e 3.4.4, temos, respectivamente, que as Hipóteses (H6) e (H8) estão verificadas. Devido ao Lema 3.4.2, a Hipótese $(H5)'$ está satisfeita. Logo, o Teorema 2.2.1 nos assegura que $(L(t), \mathfrak{X})$ admite atrator global $\mathcal{A}_0$.

Segue do Teorema 2.2.5 que o sistema dinâmico $(L(t), \mathcal{B}_0)$ admite um atrator exponencial. Finalmente, o Teorema 2.2.6, garante que $(T_0(t), \mathbf{e}(\mathcal{B}_0))$ possui atrator exponencial em $\mathcal{E}_0$.

Procedendo de forma análoga, concluímos a existência de atrator exponencial para o sistema dinâmico $(T_\lambda(t), \mathbf{e}_\lambda(\mathcal{B}_0^\lambda))$, onde $\lambda \in (0, 1]$. $\square$

Capítulo 4

Existência de pullback atrator exponencial via método das ℓ-trajetórias

Neste Capítulo iremos estabelecer os resultados abstratos sobre a existência de pullback atrator exponencial para processos de evolução usando uma nova abordagem envolvendo o método das $\ell-$trajetórias. Consideramos um sistema não-linear de equações diferenciais escrito como o problema de evolução abstrato

$$\begin{cases} u'(t) = F(t, u(t)), & t > \tau, \text{ em } X, \\ u(\tau) = u_\tau, & \tau \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{4.1}$$

onde X é um espaço de Banach, $F\colon \mathbb{R} \times X \to X$ é um operador não-linear, e $u(\tau) = u_\tau \in X$ é o dado inicial.

Consideramos a *família dos operadores solução* $\{U(t,s)\}_{t \geqslant s}$ associados a (4.1), isto é, $U(t,\tau)u(\tau) = u(t)$ e a *família de operadores shifts* $\{L(t,s)\}_{t \geqslant s}$ associados a solução definida sob um intervalo de amplitude ℓ, com $\ell > 0$ fixado, o qual neste caso será um processo definido em um espaço tempo-dependente.

Descrevemos um arranjo dessas dinâmicas ao introduzirmos duas aplicações, **e** e **b**, que irão transferir as propriedades de uma dinâmica para outra, tais como a atração pullback ou ainda a dimensão fractal finita, sob certas suposições.

Aplicaremos essa teoria, no próximo Capítulo, para concluir a existência de um pullback atrator exponencial para uma família de equações.

4.1 Espaço tempo-dependente

Inicialmente, nesta seção, apresentamos a teoria de pullback atração para espaços que dependem do tempo, abreviadamente, espaços tempo-dependentes, conforme abordada em [13]. Destacamos a referência [25] como precursora no desenvolvimento da teoria de pullback atração envolvendo espaços tempo-dependentes. Outra abordagem teórica pode ser consultada em [15].

Definição 4.1.1. *Seja $\widehat{E} = \{E_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ uma família de espaços normados. Um processo tempo-dependente, ou abreviadamente TDS-processo, em $\widehat{E}$ é uma família $\{L(t,s)\}_{t \geqslant s}$ de operadores* *de dois-parâmetros, isto é,*

$$L(t,s)\colon E_s \to E_t, \quad \forall t,s \in \mathbb{R}, t \geqslant s,$$

satisfazendo as seguintes propriedades,

(i) $L(t,t)$ *é a identidade sob* E_t*, para todo* $t \in \mathbb{R}$*;*

(ii) $L(\tau,t)L(t,s) = L(\tau,s)$*, para todo* $s \in \mathbb{R}$ *e todo* $s \leqslant t \leqslant \tau$*.*

Se os espaços E_t *são todos o mesmo espaço normado* E*, então a família de operadores* $\{L(t,s)\}_{t \geqslant s}$ *é dita um processo.*

Seja $R > 0$. Para todo $t \in \mathbb{R}$, a R-bola em E_t é definida como

$$\mathbb{B}_t(R) = \{x \in E_t \colon \|x\|_{E_t} \leqslant R\}.$$

Definição 4.1.2. *Uma família* $\widehat{B} = \{B_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ *de conjuntos limitados,* $B_t \subset E_t$*, é uniformemente limitada se existe* $R > 0$ *tal que*

$$B_t \subset \mathbb{B}_t(R),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$*.*

Definição 4.1.3. *Uma família* $\widehat{B} = \{B_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ *é dita pullback absorvente com respeito ao TDS-processo* $\{L(t,s)\}_{t \geqslant s}$*, se é uniformemente limitada e, para cada* $t \in \mathbb{R}$ *e para todo* $R > 0$*, existe* $t_0 = t_0(t,R) \leqslant t$ *tal que*

$$L(t,\tau)\mathbb{B}_\tau(R) \subset B_t,$$

para todo $\tau \leqslant t_0$*. Dizemos que o processo é dissipativo, sempre que admitir uma família pullback absorvente.*

Para cada $\varepsilon > 0$, introduzimos a ε-vizinhança de um conjunto $B \subset E_t$ por

$$O_t^\varepsilon(B) = \bigcup_{x \in B} \{y \in E_t \colon \|y - x\|_{E_t} < \varepsilon\}.$$

Proposição 4.1.1. *Seja* $\widehat{K} = \{K_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ *uma família de conjuntos limitados com* $K_t \subset E_t$*, para todo* $t \in \mathbb{R}$*. A família* $\widehat{K}$ *é uniformemente limitada se, e somente se, a família* $\{O_t^\varepsilon(K_t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ *é uniformemente limitada para todo* $\varepsilon > 0$*.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Dado $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$ de modo que

$$O^\varepsilon(K_t) \subset \mathbb{B}_t(R), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Como $K_t \subset O^\varepsilon(K_t)$, para todo $\varepsilon > 0$, então

$$K_t \subset \mathbb{B}_t(R), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

ou seja, $\widehat{K} = \{K_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ é uniformemente limitada.
($\Rightarrow$) Por hipótese, a família $\{K_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ é uniformemente limitada, isto é, existe $R > 0$ de modo que

$$K_t \subset \mathbb{B}_t(R), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Fixamos $\varepsilon > 0$ e $t \in \mathbb{R}$. Seja $z \in O_t^\varepsilon(K_t)$ arbitrário, consideremos $x \in K_t$ de modo que $\|z - x\|_{E_t} < \varepsilon$, temos

$$\|z\|_{E_t} \leqslant \|z - x\|_{E_t} + \|x\|_{E_t} < \varepsilon + R.$$

Ou seja, $\|z\|_{E_t} < \varepsilon + R$, para todo $z \in O_t^\varepsilon(K_t)$.

Portanto, para cada $\varepsilon > 0$, temos que

$$O_t^\varepsilon(K_t) \subset \mathbb{B}_t(\varepsilon + R), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

o que conclui a equivalência. $\square$

Definição 4.1.4. *Uma família $\widehat{K} = \{K_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ é dita pullback atraente com respeito ao TDS-processo $\{L(t,s)\}_{t\geqslant s}$ se, para todo $\varepsilon > 0$, a família $\{O_t^\varepsilon(K_t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é pullback absorvente.*

Denotamos a semidistância de Hausdorff de dois conjuntos não-vazios $B, C \subset E_t$ por

$$\mathrm{dist}_t(B,C) = \sup_{x\in B} \mathrm{d}_{E_t}(x,C) = \sup_{x\in B}\inf_{y\in C} \|x-y\|_{E_t}.$$

Podemos definir a pullback atração, equivalentemente, em termos da semidistância de Hausdorff.

Proposição 4.1.2. *Seja $\widehat{K} = \{K_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ uma família de conjuntos limitados com $K_t \subset E_t$, para todo $t \in \mathbb{R}$. A família $\widehat{K} = \{K_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ é pullback atraente com respeito ao TDS-processo $\{L(t,s)\}_{t\geqslant s}$ se, e somente se, $\widehat{K}$ é uniformemente limitada e*

$$\lim_{s\to-\infty} \mathrm{dist}_t(L(t,s)D_s, K_t) = 0,$$

para toda família $\widehat{D} = \{D_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ uniformemente limitada e todo $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Suponhamos que $\widehat{K}$ é pullback atraente, então para todo $\varepsilon > 0$, $\{O_t^\varepsilon(K_t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é pullback absorvente, isto é, $\{O_t^\varepsilon(K_t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é uma família uniformemente limitada e, fixado $t \in \mathbb{R}$, temos, para qualquer $\eta > 0$, a existência de $t_0 = t_0(t,\eta) \leqslant t$ tal que

$$L(t,\tau)\mathbb{B}_\tau(\eta) \subset O_t^\varepsilon(K_t), \quad \forall \tau \leqslant t_0.$$

Logo, para todo $b \in \mathbb{B}_\tau(\eta)$ e para algum $k \in K_t$, temos

$$\|L(t,\tau)b - k\|_{E_t} < \varepsilon, \quad \forall \tau \leqslant t_0.$$

Com isso, para todo $\tau \leqslant t_0$,

$$\inf_{y\in K_t} \|L(t,\tau)b - y\|_{E_t} \leqslant \|L(t,\tau)b - k\|_{E_t} < \varepsilon, \quad \forall b \in \mathbb{B}_\tau(\eta). \tag{4.2}$$

Tomando o supremo para $b \in \mathbb{B}_\tau(\eta)$ em (4.2), segue que

$$\mathrm{dist}_t(L(t,\tau)\mathbb{B}_\tau(\eta), K_t) \leqslant \varepsilon, \quad \forall \tau \leqslant t_0.$$

Ou seja,

$$\lim_{\tau\to-\infty} \mathrm{dist}_t(L(t,\tau)\mathbb{B}_\tau(\eta), K_t) = 0, \qquad \text{para todo } t \in \mathbb{R} \text{ e } \eta > 0.$$

Seja $\widehat{D} = \{D_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ uma família uniformemente limitada arbitrária, então existe $R > 0$ de modo que

$$D_t \subset \mathbb{B}_t(R), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Assim,

$$L(t,\tau)D_\tau \subset L(t,\tau)\mathbb{B}_\tau(R).$$

Com isso,

$$\mathrm{dist}_t(L(t,\tau)D_\tau, K_t) \leqslant \mathrm{dist}_t(L(t,\tau)\mathbb{B}_\tau(R), K_t) \xrightarrow{\tau\to-\infty} 0, \qquad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Além disso, segue da Proposição 4.1.1, que $\widehat{K}$ é uniformemente limitada.

Para a recíproca, notamos que dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe $\tau_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sup_{b\in D_\tau} \inf_{y\in K_t} \|L(t,\tau)b - y\|_{E_t} = \mathrm{dist}_t(L(t,\tau)D_\tau, K_t) < \varepsilon, \quad \forall \tau \leqslant \tau_0.$$

Assim, para todo $b \in D_\tau$, temos que

$$\inf_{y\in K_t} \|L(t,\tau)b - y\|_{E_t} < \varepsilon, \quad \forall \tau \leqslant t_0.$$

Logo, existe $k \in K_t$ de modo que

$$\|L(t,\tau)b - k\|_{E_t} < \varepsilon, \quad \forall \tau \leqslant t_0,\ \forall b \in D_\tau.$$

Com isso $L(t,\tau)b - k \in \mathbb{B}_t(\varepsilon)$, para todo $\tau \leqslant \tau_0$ e todo $b \in D_\tau$. Disso temos que

$$L(t,\tau)b = k + L(t,\tau)b - k \in \{k\} + \mathbb{B}_t(\varepsilon) \subset O_t^\varepsilon(K_t),$$

para todo $\tau \leqslant \tau_0$ e $b \in D_\tau$. Portanto,

$$L(t,\tau)D_\tau \subset O_t^\varepsilon(K_t), \quad \forall \tau \leqslant t_0.$$

Em particular, essa inclusão vale para as famílias da forma $\{\mathbb{B}_t(\eta)\}_{t\in\mathbb{R}}$, onde $\eta > 0$. A conclusão segue da Proposição 4.1.1. □

Podemos ainda, descrever a pullback atração através de sequências. Seja

$$\begin{aligned}\Sigma_t := \{(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\,;\, y_n = L(t,\tau_n)x_n, \forall n \in \mathbb{N},\ &\text{com } \tau_n \to -\infty \text{ e } x_n \in E_{\tau_n},\ \text{onde}\\ &(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\ \text{determina uma sequência uniformemente limitada}\}.\end{aligned}$$

Mais precisamente, dizemos que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com $x_n \in E_{\tau_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, determina uma sequência uniformemente limitada, se existe $R > 0$ tal que $x_n \in \mathbb{B}_{\tau_n}(R)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para cada $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma_t$, definimos o conjunto

$$\mathcal{L}_t(y) = \{x \in E_t\,;\, \|y_{n_i} - x\|_{E_t} \xrightarrow{i\to\infty} 0,\ \text{para alguma subsequência } (y_{n_i})_{i\in\mathbb{N}} \text{ de } (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\}.$$

Proposição 4.1.3. *Seja $\widehat{K} = \{K_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ uma família uniformemente limitada. A família $\widehat{K}$ é pullback atraente com respeito ao TDS-processo $\{L(t,s)\}_{t\geqslant s}$ se, e somente se,*

$$\mathrm{d}_{E_t}(y_n, K_t) \xrightarrow{n\to\infty} 0, \quad \forall (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma_t, \tag{4.3}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Fixemos $t \in \mathbb{R}$. Seja $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma_t$ qualquer, temos que existem sequências $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (-\infty, t]$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com $x_n \in E_{\tau_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $\tau_n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$, de modo que $y_n = L(t,\tau_n)x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ determina uma sequência uniformemente limitada, então existe $R > 0$, tal que $x_n \in \mathbb{B}_{\tau_n}(R)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, assim

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}_{E_t}(y_n, K_t) &= \mathrm{d}_{E_t}(L(t,\tau_n)x_n, K_t) \\
&\leqslant \sup_{x\in\mathbb{B}_{\tau_n}(R)} \mathrm{d}_{E_t}(L(t,\tau_n)x, K_t) \\
&= \mathrm{dist}_t(L(t,\tau_n)\mathbb{B}_{\tau_n}(R), K_t) \xrightarrow{n\to\infty} 0.
\end{aligned}
$$

($\Leftarrow$) Suponhamos que existem $t \in \mathbb{R}$ e $R > 0$ de modo que

$$\lim_{\tau\to-\infty} \mathrm{dist}_t(L(t,\tau)\mathbb{B}_\tau(R), K_t) \neq 0,$$

assim, deve existir $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $A > 0$, existe $\tau \leqslant -A$ de modo que

$$\mathrm{dist}_t(L(t,\tau)\mathbb{B}_\tau(R), K_t) \geqslant \varepsilon,$$

ou seja, existe $\tau \leqslant -A$ com $\mathrm{d}_{E_t}(L(t,\tau)x, K_t) \geqslant \varepsilon$, para algum $x \in \mathbb{B}_\tau(R)$.

Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$, existem $\tau_n \leqslant -n$ e $x_n \in \mathbb{B}_{\tau_n}(R)$ com

$$\mathrm{d}_{E_t}(L(t,\tau_n)x_n, K_t) \geqslant \varepsilon.$$

Obtemos assim, a sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y_n = L(t,\tau_n)x_n$, onde $\tau_n \to -\infty$, $x_n \in \mathbb{B}_{\tau_n}(R)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e

$$\mathrm{d}_{E_t}(y_n, K_t) \geqslant \varepsilon,$$

o que é uma contradição, pois $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma_t$. A conslusão segue da Proposição 4.1.2. $\square$

Consideramos os conjuntos

$$A_t = \bigcup_{y\in\Sigma_t} \mathcal{L}_t(y), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{4.4}$$

Lema 4.1.1. *Se $\widehat{K} = \{K_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ é uma família de conjuntos fechados, pullback atraente com respeito ao TDS-processo $\{L(t,s)\}_{t\geqslant s}$. Então,*

$$A_t \subset K_t, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Pela Proposição 4.1.3, temos que cada elemento de $\mathcal{L}_t(y)$, onde $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma_t$, pertence ao fecho de K_t. De fato, se $x \in \mathcal{L}_t(y)$, onde $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma_t$, então existe subsequência $(y_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$y_{n_i} \xrightarrow{i\to\infty} x, \quad \text{em } E_t.$$

Pela Proposição 4.1.3, temos que

$$\mathrm{d}_{E_t}(y_{n_i}, K_t) \xrightarrow{i\to\infty} 0.$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$ existe $i_0 \in \mathbb{N}$ de modo que, para todo $i \geqslant i_0$,

$$\|y_{n_i} - x\|_{E_t} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad \mathrm{d}_{E_t}(y_{n_i}, K_t) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Observamos que

$$\mathrm{d}_{E_t}(x, K_t) \leqslant \mathrm{d}_{E_t}(x, y_{n_{i_0}}) + \mathrm{d}_{E_t}(y_{n_{i_0}}, K_t) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, temos que $\mathrm{d}_{E_t}(x, K_t) = 0$, com isso $x \in \overline{K}_t$.

Portanto, como K_t é fechado para todo $t \in \mathbb{R}$, obtemos

$$A_t = \bigcup_{y \in \Sigma_t} \mathcal{L}_t(y) \subset \overline{K}_t = K_t, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

□

Lema 4.1.2. *Se o TDS-processo $\{L(t,s)\}_{t \geqslant s}$ é dissipativo, então $\widehat{A} = \{A_t\}_{t \in \mathbb{R}}$, definida em (4.4), coincide com o conjunto ω-limite tempo-dependente de qualquer família pullback absorvente, isto é,*

$$A_t = \bigcap_{s \leqslant t} \overline{\bigcup_{\tau \leqslant s} L(t,\tau) B_\tau}^{E_t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{4.5}$$

onde $\widehat{B} = \{B_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ é uma família pullback absorvente. Em particular, A_t é fechado e está contido em $\overline{B}_t$, para todo $t \in \mathbb{R}$, consequentemente $\widehat{A}$ é uniformemente limitada.

Demonstração. Seja $\widehat{B} = \{B_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ uma família pullback absorvente, isto é, $\widehat{B}$ é uniformemente limitada e para cada $t \in \mathbb{R}$ e $R > 0$, existe $t_0 = t_0(t, R) \leqslant t$, tal que

$$L(t,\tau)\mathbb{B}\tau(R) \subset B_t, \quad \text{para todo } \tau \leqslant t_0.$$

Vamos mostrar a igualdade (4.5).

($\supseteq$) Seja $x \in \bigcap_{s \leqslant t} \overline{\bigcup_{\tau \leqslant s} L(t,\tau) B_\tau}^{E_t}$ qualquer, então $x \in \overline{\bigcup_{\tau \leqslant s} L(t,\tau) B_\tau}^{E_t}$, para todo $s \leqslant t$. Em particular, como $t - n \leqslant t$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$x \in \overline{\bigcup_{\tau \leqslant t-n} L(t,\tau) B_\tau}^{E_t}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim,

$$B^{E_t}\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap \left(\bigcup_{\tau \leqslant t-n} L(t,\tau) B_\tau\right) \neq \emptyset, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ou seja, para cada $n \in \mathbb{N}$, existem $\tau_n \leqslant t - n \leqslant t$ e $x_n \in B_{\tau_n}$, tais que $L(t,\tau_n)x_n \in B^{E_t}\left(x, \frac{1}{n}\right)$, isto é,

$$\|L(t,\tau_n)x_n - x\|_{E_t} < \frac{1}{n}.$$

Fazendo $n \to \infty$, obtemos que $\tau_n \to -\infty$ e $y_n := L(t,\tau_n)x_n \to x$ em E_t, onde $x_n \in B_{\tau_n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Sigma_t$ e $x \in \mathcal{L}_t(y)$, concluindo assim que $x \in A_t$.

($\subseteq$) Para a inclusão contrária, consideramos $x \in A_t$ arbitrário, então $x \in \mathcal{L}_t(y)$ para algum $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Sigma_t$, isto é, existem $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (-\infty, t]$ e uma subsequência uniformemente limitada $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, com $x_n \in E_{\tau_n}$, de modo que $\tau_n \to -\infty$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dada por

$$y_n = L(t,\tau_n)x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

possui subsequência $(y_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ que converge para x em E_t. Podemos supor que tal subsequência é a própria $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, pois basta nos restringirmos a tal subsequência $(y_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$.

Como $(x_n)_{n\in\mathbb{R}}$ determina uma sequência uniformemente limitada, então existe $R_1 > 0$ tal que

$$\|x_n\|_{E_{\tau_n}} \leqslant R_1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Seja $s \leqslant t$ qualquer, notemos que

$$L(t,\tau_n)x_n = L(t,s)L(s,\tau_n)x_n \in L(t,s)L(s,\tau_n)\mathbb{B}_{\tau_n}(R_1),$$

para todo $\tau_n \leqslant s$, como $\{B_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ é pullback absorvente, existe $t_0 = t_0(s,R_1) \leqslant s$, tal que

$$L(t,\tau_n)x_n \in L(t,s)L(s,\tau_n)\mathbb{B}_{\tau_n}(R_1) \subset L(t,s)B_s \subset \bigcup_{\tau\leqslant s} L(t,\tau)B_\tau,$$

para todo $\tau_n \leqslant t_0 \leqslant s$. Como $L(t,\tau_n)x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ em E_t, então

$$x \in \overline{\bigcup_{\tau\leqslant s} L(t,\tau)B_\tau}^{E_t},$$

como isso é válido para $s \leqslant t$ qualquer, então $x \in \bigcap_{s\leqslant t} \overline{\bigcup_{\tau\leqslant s} L(t,\tau)B_\tau}^{E}_{t}$.

Logo, fica demonstrada a igualdade de conjuntos. Em particular, A_t é fechado, para todo $t \in \mathbb{R}$. Além disso, pela pullback absorção da família $\{B_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, temos

$$A_t = \bigcap_{s\leqslant t}\overline{\bigcup_{\tau\leqslant s} L(t,\tau)B_\tau}^{E_t} \subset \overline{\bigcup_{\tau\leqslant t_0} L(t,\tau)B_\tau}^{E_t} \subset \overline{B}_t.$$

Consequentemente a família $\widehat{A}$ é uniformemente limitada, finalizando a demonstração. $\square$

Lema 4.1.3. *Seja $\widehat{K} = \{K_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ uma família uniformemente limitada de conjuntos compactos. Então, $\widehat{K}$ é pullback atraente com respeito ao TDS-processo $\{L(t,s)\}_{t\geqslant s}$ se, e somente se, para todo $t \in \mathbb{R}$*

$$\emptyset \neq \mathcal{L}_t(y) \subset K_t, \quad \forall y \in \Sigma_t.$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma_t$, então $y_n = L(t,\tau_n)x_n$, onde $\tau_n \to -\infty$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência uniformemente limitada. Pela Proposição 4.1.3 temos

$$\mathrm{d}_{E_t}(y_n, K_t) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Como os conjuntos $K_t \subset E_t$ são compactos, para cada $t \in \mathbb{R}$, segue da Proposição 1.2.2 que $(y_n)_{n\in\mathbb{R}}$ possui subsequência, $(y_{n_i})_{i\in\mathbb{R}}$, convergente em K_t, isto é, existe $k \in K_t$ tal que

$$y_{n_i} \xrightarrow{i\to\infty} k, \quad \text{em } E_t,$$

assim $k \in \mathcal{L}_t(y)$, ou seja, $\mathcal{L}_t(y) \neq \emptyset$.

Consideremos $x \in \mathcal{L}_t(y)$, com $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma_t$, temos que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui subsequência, que ainda denotaremos por $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, convergindo para x, isto é,

$$\mathrm{d}_{E_t}(x, y_n) = \|x - y_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Novamente, segue da Proposição 4.1.3 que

$$0 \leqslant \mathrm{d}_{E_t}(x, K_t) \leqslant \mathrm{d}_{E_t}(x, y_n) + \mathrm{d}_{E_t}(y_n, K_t) \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

logo $\mathrm{d}_{E_t}(x, K_t) = 0$, assim $x \in \overline{K}_t = K_t$. Portanto, $\mathcal{L}_t(y) \subset K_t$, para toda $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma_t$. ($\Leftarrow$) Seja $\emptyset \neq \mathcal{L}_t(y) \subset K_t$, para toda $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma_t$. Suponhamos que $\widehat{K}$ não é pullback atraente então, pela Proposição 4.1.2, existem $t \in \mathbb{R}$ e $R > 0$ de modo que

$$\mathrm{dist}_t(L(t,\tau)\mathbb{B}_\tau(R), K_t) \nrightarrow 0, \qquad \text{quando } \tau \to -\infty,$$

ou seja, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $A > 0$, temos que existe $\tau \leqslant -A$, de modo que,

$$\mathrm{dist}_t(L(t,\tau)\mathbb{B}_\tau(R), K_t) = \sup_{x\in\mathbb{B}_\tau(R)} \mathrm{d}_{E_t}(L(t,\tau)x, K_t) > \varepsilon,$$

isto é, $\tau \leqslant -A$ e $\mathrm{d}_{E_t}(L(t,\tau)x, K_t) > \varepsilon$ para algum $x \in \mathbb{B}_\tau(R)$. Em particular, para cada $n \in \mathbb{N}$ existem $\tau_n \leqslant -n$ e $x_n \in \mathbb{B}_{\tau_n}(R)$, tal que

$$\mathrm{d}_{E_t}(L(t,\tau_n)x_n, K_t) > \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $y_n = L(t,\tau_n)x_n$, temos que $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma_t$ e

$$\mathrm{d}_{E_t}(y_n, K_t) > \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por hipótese $\emptyset \neq \mathcal{L}_t(y) \subset K_t$, assim existe $x \in \mathcal{L}_t(y) \subset K_t$, ou seja, existe $x \in K_t$ e subsequência $(y_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que

$$y_{n_i} \xrightarrow{i\to\infty} x.$$

Por sua vez,

$$\varepsilon < \mathrm{d}_{E_t}(y_{n_i}, K_t) \leqslant \mathrm{d}_{E_t}(y_{n_i}, x) + \mathrm{d}_{E_t}(x, K_t) \xrightarrow{i\to\infty} \mathrm{d}_{E_t}(x, K_t),$$

logo $\mathrm{d}_{E_t}(x, K_t) \geqslant \varepsilon$, o que contradiz $x \in K_t$. □

Definição 4.1.5. *Uma família uniformemente limitada $\{\mathcal{A}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ de $\widehat{E} = \{E_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ é dita um TDS-pullback atrator para o TDS-processo $\{L(t,s)\}_{t\geqslant s}$ agindo em $\widehat{E}$ se:*

(i) $\emptyset \neq \mathcal{A}_t \subset E_t$ é compacto, para todo $t \in \mathbb{R}$;

(ii) a família $\{\mathcal{A}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ é invariante, isto é,

$$L(t,s)\mathcal{A}_s = \mathcal{A}_t, \qquad \textit{para todo } t \geqslant s;$$

(iii) $\{\mathcal{A}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ é pullback atraente com respeito ao TDS-processo $\{L(t,s)\}_{t\geqslant s}$, isto é, para todo $R > 0$ e todo $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{s\to-\infty} \mathrm{dist}_t(L(t,s)\mathbb{B}_s(R), \mathcal{A}_t) = 0,$$

e é minimal dentre as famílias de subconjuntos fechados com respeito a pullback atração.

Definição 4.1.6. *O TDS-processo $\{L(t,s)\}_{t\geqslant s}$ é dito*

(i) fechado se $L(t,s)$ é uma aplicação fechada para todo par de tempos fixados $t \geqslant s$, isto é, se

$$\begin{cases} x_n \to x & \textit{em } E_s \\ L(t,s)x_n \to \zeta & \textit{em } E_t \end{cases}$$

então $L(t,s)x = \zeta$.

(ii) T-fechado, para algum $T > 0$, se $L(t, t-T)$ é uma aplicação fechada para todo $t \in \mathbb{R}$.

Proposição 4.1.4. *Seja $\widehat{K} = \{K_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ uma família pullback atraente com respeito ao TDS-processo $\{L(t,s)\}_{t\geqslant s}$ definido em $\widehat{E} = \{E_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, com K_t subconjunto fechado de E_t para todo $t \in \mathbb{R}$. Se existe $T > 0$, tal que*

$$K_t \subset L(t, t-T)K_{t-T}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

então $\widehat{K}$ é invariante com respeito a $\{L(t,s)\}_{t\geqslant s}$.

Demonstração. Fixado $t \in \mathbb{R}$, para cada $r \geqslant t$, por indução, temos

$$L(r,t)K_t \subset L(r, t-nT)K_{t-nT}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.6}$$

De fato, por hipótese $K_t \subset L(t, t-T)K_{t-T}$, logo

$$L(r,t)K_t \subset L(r,t)L(t,t-T)K_{t-T} = L(r, t-T)K_{t-T}.$$

Suponhamos que $L(r,t)K_t \subset L(r, t-nT)K_{t-nT}$, para algum $n \in \mathbb{N}$ fixado. Por hipótese,

$$K_{t-nT} \subset L(t-nT, t-nT-T)K_{t-nT-T},$$

assim,

$$\begin{aligned} L(r,t)K_t &\subset L(r,t-nT)K_{t-nT} \\ &\subset L(r,t-nT)L(t-nT, t-(n+1)T)K_{t-(n+1)T} \\ &= L(r, t-(n+1)T)K_{t-(n+1)T}. \end{aligned}$$

Logo, pelo princípio da indução finita, (4.6) ocorre para todo $n \in \mathbb{N}$.

De (4.6), temos, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}_r(L(r,t)K_t, K_r) &= \sup_{x\in L(r,t)K_t} \mathrm{d}_{E_r}(x, K_r) \\ &\leqslant \sup_{x\in L(r,t-nT)K_{t-nT}} \mathrm{d}_{E_r}(x, K_r) \\ &= \mathrm{dist}_r(L(r,t-nT)K_{t-nT}, K_r). \end{aligned}$$

Como $\widehat{K}$ é pullback atraente com respeito ao TDS-processo $\{L(t,s)\}_{t\geqslant s}$, segue pela Proposição 4.1.2 que

$$\mathrm{dist}_r(L(r,t-nT)K_{t-nT}, K_r) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Logo, $\mathrm{dist}_r(L(r,t)K_t, K_r) = 0$, com isso, $L(r,t)K_t \subset \overline{K_r} = K_r$. Isto é,

$$L(r,t)K_t \subset K_r, \quad \forall r \geqslant t. \tag{4.7}$$

Em particular, de (4.6), para $r = t$, e (4.7), temos $K_t \subset L(t, t-nT)K_{t-nT} \subset K_t$, isto é,

$$K_t = L(t, t-nT)K_{t-nT}. \tag{4.8}$$

Sejam $\tau \leqslant t$ e n suficientemente grande de modo que $\tau \geqslant t - nT$, segue de (4.7) e de (4.8) que

$$K_t = L(t,t-nT)K_{t-nT} = L(t,\tau)L(\tau, t-nT)K_{t-nT} \subset L(t,\tau)K_\tau \subset K_t.$$

Portanto, $L(t,\tau)K_\tau = K_t$ para todo $t \geqslant \tau$. □

Teorema 4.1.1. *Sejam $\widehat{E} = \{E_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ uma família de espaços normados e $\{L(t,s)\}_{t\geqslant s}$ um TDS-processo T-fechado, para algum $T > 0$. Suponhamos que existe uma família $\widehat{\mathcal{K}} = \{\mathcal{K}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ uniformemente limitada, com $\mathcal{K}_t \subset E_t$ compacto, para todo $t \in \mathbb{R}$, de modo que, para todo $\tau \in \mathbb{R}$ e $R > 0$ dado, existe $t_0 = t_0(R) > 0$ tal que*

$$L(t,\tau)\mathbb{B}_\tau(R) \subset \mathcal{K}_t, \qquad \textit{para todo } t \geqslant t_0 + \tau.$$

Então, o TDS-processo $\{L(t,s)\}_{t\geqslant s}$ admite um TDS-pullback atrator $\widehat{\mathcal{A}} = \{\mathcal{A}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$.

Demonstração. Sejam $t \in \mathbb{R}$ e $R > 0$. Por hipótese, que existe $t_0 = t_0(R) > 0$ de modo que, para todo $\tau \leqslant t - t_0$, temos

$$L(t,\tau)\mathbb{B}_\tau(R) \subset \mathcal{K}_t.$$

O que implica que

$$\lim_{\tau\to-\infty} \mathrm{dist}_t(L(t,\tau)\mathbb{B}_\tau(R), \mathcal{K}_t) = 0.$$

Pela Proposição 4.1.2 temos que $\widehat{\mathcal{K}}$ é pullback atraente com respeito a $\{L(t,s)\}_{t\geqslant s}$. Pelo Lema 4.1.3, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que

$$\emptyset \neq \bigcup_{y\in\Sigma_t} \mathcal{L}_t(y) \subset \mathcal{K}_t,$$

isto é, $\emptyset \neq A_t \subset \mathcal{K}_t$, onde A_t foi definida em (4.4).

Além disso, por ser $\widehat{\mathcal{K}}$ pullback atraente com respeito ao TDS-processo $\{L(t,s)\}_{t\geqslant s}$, a família $\{O_t^\varepsilon(\mathcal{K}_t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é pullback absorvente, para cada $\varepsilon > 0$, assim $\{L(t,s)\}_{t\geqslant s}$, é dissipativo. Segue do Lema 4.1.2 que $\widehat{A} = \{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ é uma família uniformemente limitada e $A_t \subset \mathcal{K}_t$ é um conjunto fechado, para todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto $\widehat{A} = \{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ é uma família uniformemente limitada de conjuntos compactos.

Como para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}_t(y) \subset A_t, \quad \forall y \in \Sigma_t,$$

o Lema 4.1.3 nos garante que $\widehat{A}$ é pullback atraente com respeito ao TDS-processo $\{L(t,s)\}_{t\geqslant s}$. Além disso, pelo Lema 4.1.1, $\widehat{A}$ é minimal com respeito a pullback atração.

Resta verificarmos a invariância da família $\widehat{A}$. Pela Proposição 4.1.4, basta mostrarmos que

$$A_t \subset L(t, t-T)A_{t-T}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{4.9}$$

Seja $y \in A_t$ qualquer, temos que $y \in \mathcal{L}_t((y_n)_{n\in\mathbb{N}})$, onde $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma_t$. Assim, restringindo a uma subsequência se necessário, segue que

$$y_n = L(t,\tau_n)x_n \xrightarrow{n\to\infty} y,$$

onde $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (-\infty, t]$, com $\tau_n \to -\infty$, quando $n \to \infty$, e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com $x_n \in \mathbb{B}_{\tau_n}(R)$, para algum $R > 0$ e para todo $n \in \mathbb{N}$.

Consideremos a sequência $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por

$$w_n = L(t-T, \tau_n)x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $\widehat{A}$ é pullback atraente, temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_{E_{t-T}}(w_n, A_{t-T}) &\leqslant \sup_{x\in\mathbb{B}_{\tau_n}(R)} \mathrm{d}_{E_{t-T}}(L(t-T,\tau_n)x, A_{t-T}) \\
&= \mathrm{dist}_{t-T}(L(t-T,\tau_n)\mathbb{B}_{\tau_n}(R), A_{t-T}) \xrightarrow{n\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Assim, pela Proposição 1.2.2 deve existir $w \in A_{t-T}$, tal que

$$w_n \xrightarrow{n\to\infty} w. \tag{4.10}$$

Por outro lado,

$$L(t,t-T)w_n = L(t,t-T)L(t-T,\tau_n)x_n = L(t,\tau_n)x_n = y_n \xrightarrow{n\to\infty} y,$$

juntamente com (4.10), já que $L(t,t-T)$ é fechado, concluímos que

$$L(t,t-T)w = y.$$

Logo, $y \in L(t,t-T)A_{t-T}$, ficando demonstrada a inclusão (4.9). □

Em complemento a teoria de espaço dependente do tempo, contida em [13], estabelecemos a seguir a noção de pullback atrator exponencial dependente do tempo, denominado TDS-pullback atrator exponencial.

Definição 4.1.7. *Uma família uniformemente limitada $\{\mathcal{M}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ de $\widehat{E} = \{E_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ é dita um TDS-pullback atrator exponencial para o TDS-processo $\{L(t,s)\}_{t\geqslant s}$, $L(t,s): E_s \to E_t$, se*

(i) $\emptyset \neq \mathcal{M}_t \subset E_t$ *é compacto para todo* $t \in \mathbb{R}$*;*

(ii) a família é positivamente semi-invariante, isto é,

$$L(t,s)\mathcal{M}_s \subset \mathcal{M}_t, \qquad \text{para todo } t \geqslant s;$$

(iii) a dimensão fractal em E_t das seções $\mathcal{M}_t$, $t \in \mathbb{R}$, é uniformemente limitada; isto é, existe uma constante positiva $C > 0$, independente de $t \in \mathbb{R}$, tal que

$$\dim_{\mathrm{F}}(\mathcal{M}_t) \leqslant C, \qquad \text{para todo } t \in \mathbb{R};$$

(iv) existe um expoente $\omega > 0$ tal que, para todo $R > 0$ e $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{s\to+\infty} e^{\omega s}\mathrm{dist}_t(L(t,t-s)\mathbb{B}_{t-s}(R), \mathcal{M}_t) = 0.$$

Nos próximos resultados, estendemos os métodos em [16, 28] para garantir a existência de TDS-pullback atrator exponencial para TDS-processos agindo em uma família de espaços tempo-dependentes.

Seja $\{H_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ uma família de espaços Hilbert separáveis. Consideramos $\{L(n,m)\}_{n\geqslant m}$ com

$$L(n,m)\colon H_m \to H_n, \qquad \text{para todo } n,m \in \mathbb{Z}, \text{ com } n \geqslant m$$

um TDS-processo discreto. Seja $L(n) := L(n+1,n)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Um operador de

2-parâmetros $L(n,m)$ pode ser reduzido ao operador de 1-parâmetro $L(n)$ fazendo

$$\begin{aligned} L(n+k,n) &= L(n+k,n+k-1)L(n+k-1,n+k-2)\dots L(n+1,n) \\ &= L(n+k-1)L(n+k-2)\dots L(n), \quad \forall n \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Definição 4.1.8. *Seja $\mathcal{B}_n \subset H_n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. A família de aplicações $\{L(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ com $L(n)\colon \mathcal{B}_n \to \mathcal{B}_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, é dita satisfazer a propriedade squeezing uniforme (discreta) em $\widehat{\mathcal{B}} = \{\mathcal{B}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ se existe uma projeção ortogonal $P_N^{n+1}\colon H_{n+1} \to H_{n+1}$ cuja a dimensão da imagem é N, que é independente de n, tal que para todo $u, v \in \mathcal{B}_n$ ocorre*

$$\|L(n)u - L(n)v\|_{H_{n+1}} \leqslant \sqrt{2}\|P_N^{n+1}(L(n)u - L(n)v)\|_{H_{n+1}}$$

ou

$$\|L(n)u - L(n)v\|_{H_{n+1}} \leqslant \frac{1}{8}\|u - v\|_{H_n}.$$

O Capítulo 2, em [16], traz mais detalhes sobre a propriedade squeezing.

De agora em diante, nesta seção, denotamos $\widehat{\mathcal{B}} = \{\mathcal{B}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ uma família uniformemente limitada de conjuntos compactos, com $\mathcal{B}_n \subset H_n$ e $\overline{B}_k(a,r)$ uma bola fechada em H_k, com centro $a \in \mathcal{B}_k$ e raio $r > 0$.

Seja $\{L(n,m)\}_{n\geqslant m}$, com $n, m \in \mathbb{Z}$, um TDS-processo, suponhamos que $L(n)\colon H_n \to H_{n+1}$ é contínua, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Fixado $r > 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, consideramos

$$Z(n) := L(n,n-1)(\overline{B}_{n-1}(a,r) \cap \mathcal{B}_{n-1}) \subset L(n,n-1)\mathcal{B}_{n-1},$$

onde $a \in \mathcal{B}_{n-1}$. Definimos $E(n)$ como o subconjunto de $Z(n)$ maximal com relação a propriedade do cone, dada por

$$\|u - v\|_{H_n} \leqslant \sqrt{2}\|P_N^n(u - v)\|_{H_n}, \qquad \forall u, v \in E(n),\ n \in \mathbb{Z}. \tag{4.11}$$

A existência do conjunto $E(n)$ é garantida pelo Lema de Zorn. Além disso, o conjunto $E(n)$ é fechado em H_n. De fato, seja $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset E(n) \subset Z(n)$ tal que

$$\|x_i - x\|_{H_n} \xrightarrow{i\to\infty} 0.$$

Como $x_i \in E(n)$, para todo $i \in \mathbb{N}$, então

$$\|y - x_i\|_{H_n} \leqslant \sqrt{2}\|P_N^n(y - x_i)\|_{H_n}, \qquad \forall y \in E(n),\ \forall i \in \mathbb{N},$$

fazendo $i \to \infty$, segue que

$$\|y - x\|_{H_n} \leqslant \sqrt{2}\|P_N^n(y - x)\|_{H_n}, \qquad \forall y \in E(n),$$

ou seja, $E(n) \cup \{x\}$ satisfaz a propriedade do cone, (4.11). Além disso, como $x \in \overline{Z(n)}^{H_n}$ e $Z(n)$ é compacto, temos que $x \in Z(n)$, isto é, $E(n) \cup \{x\} \subset Z(n)$. Pela maximalidade do conjunto $E(n)$, segue que $x \in E(n)$.

Lema 4.1.4. *Seja $\{L(n,m)\}_{n\geqslant m}$ um TDS-processo, $n, m \in \mathbb{Z}$, satisfazendo*

$$L(n,m)\colon \mathcal{B}_m \to \mathcal{B}_n, \qquad \text{para todo } n \geqslant m.$$

Suponhamos que $\{L(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é uniformemente Lipschitz (com respeito a $n \in \mathbb{Z}$) e verifica a propriedade squeezing uniforme em $\widehat{\mathcal{B}} = \{\mathcal{B}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Então, para todo $n \in \mathbb{Z}$, existe uma cobertura *finita de $Z(n)$, por K_0 bolas com raio $\frac{r}{2}$ cujos centros estão em $E(n)$. Além disso, seja $C \neq C(n)$ uma constante da propriedade uniformemente Lipschitz de $\{L(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, em $\widehat{\mathcal{B}}$, e N dado pela Definição 4.1.8, vale a estimativa*

$$K_0 \leqslant (4C\sqrt{2N}+1)^N.$$

Demonstração. Pela propriedade squeezing, existe $P_N^n\colon H_n \to H_n$ projeção ortogonal e como $E(n) \subset Z(n) \subset H_n$, temos

$$P_N^n(E(n)) \subset P_N^n(Z(n)) \subset P_N^n(H_n).$$

Assim, $\operatorname{diam}(P_N^n(E(n))) \leqslant \operatorname{diam}(P_N^n(Z(n)))$. Além disso, P_N^n é uma aplicação linear e contínua com $\|P_N^n\|_{\mathcal{L}(H_n,H_n)} = 1$, ou seja,

$$\|P_N^n(u) - P_N^n(v)\|_{H_n} \leqslant \|u-v\|_{H_n}, \quad \forall u,v \in H_n.$$

Com isso, temos

$$\operatorname{diam}(P_N^n(Z(n))) = \sup_{u,v\in Z(n)} \|P_N^n(u) - P_N^n(v)\|_{H_n} \leqslant \sup_{u,v\in Z(n)} \|u-v\|_{H_n} = \operatorname{diam}(Z(n)).$$

Como $L(n,n-1)\colon \mathcal{B}_{n-1} \to \mathcal{B}_n$ é uniformemente Lipschitz, existe constante $C>0$, independente de n, tal que

$$\|L(n,n-1)u - L(n,n-1)v\|_{H_n} \leqslant C\|u-v\|_{H_{n-1}}, \quad \forall u,v \in \overline{B}_{n-1}(a,r)\cap\mathcal{B}_{n-1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\operatorname{diam}(P_N^n(E(n))) &\leqslant \operatorname{diam}(P_N^n(Z(n))) \\
&\leqslant \operatorname{diam}(Z(n)) \\
&= \sup_{u,v\in\overline{B}_{n-1}(a,r)\cap\mathcal{B}_{n-1}} \|L(n,n-1)u - L(n,n-1)v\|_{H_n} \\
&\leqslant C \sup_{u,v\in\overline{B}_{n-1}(a,r)\cap\mathcal{B}_{n-1}} \|u-v\|_{H_{n-1}} \\
&\leqslant C2r. \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

Como P_N^n tem dimensão da imagem finita, segue que $\overline{P_N^n(E(n))}^{H_n}$ é um conjunto compacto, afinal é fechado e, pela estimativa (4.12), limitado.

Consideramos a cobertura

$$\overline{P_N^n(E(n))}^{H_n} \subset \bigcup_{y\in E(n)} B^{P_N^n(H_n)}\left(P_N^n(y), \frac{r}{4\sqrt{2}}\right).$$

Pela compacidade, deve existir $K_0 \in \mathbb{N}$ de modo que

$$P_N^n(E(n)) \subset \overline{P_N^n(E(n))}^{H_n} \subset \bigcup_{i=1}^{K_0} B^{P_N^n(H_n)}\left(P_N^n(y_i), \frac{r}{4\sqrt{2}}\right), \qquad (4.13)$$

onde $y_i \in E(n)$, para todo $i = 1,\dots,K_0$.

Seja $y \in E(n)$, claro que $P_N^n(y) \in P_N^n(E(n))$, assim deve existir $i_0 \in \{1, \ldots, K_0\}$ tal que

$$P_N^n(y) \in B^{P_N^n(H_n)}\left(P_N^n(y_{i_0}), \frac{r}{4\sqrt{2}}\right), \qquad \text{com } y_{i_0} \in E(n),$$

isto é, $\|P_N^n(y) - P_N^n(y_{i_0})\|_{H_n} \leqslant \frac{r}{4\sqrt{2}}$. Além disso, como $y, y_{i_0} \in E(n)$, segue da relação (4.11) que

$$\|y - y_{i_0}\|_{H_n} \leqslant \sqrt{2}\|P_N^n(y - y_{i_0})\|_{H_n} < \sqrt{2}\left(\frac{r}{4\sqrt{2}}\right) = \frac{r}{4},$$

logo $y \in B^{H_n}(y_{i_0}, \frac{r}{4})$. Portanto, $\left\{B^{H_n}(y_i, \frac{r}{4})\right\}_{i=1}^{K_0}$ determina uma cobertura finita de $E(n)$.

Seja, $z \in Z(n) \setminus E(n)$, pela definição de $Z(n)$ devem existir $u \in \overline{B}_{n-1}(a, r) \cap \mathcal{B}_{n-1}$, tal que $z = L(n, n-1)u$, e $y \in E(n)$, isto é, $y = L(n, n-1)v$ com $v \in \overline{B}_{n-1}(a, r) \cap \mathcal{B}_{n-1}$, de modo que

$$\|z - y\|_{H_n} > \sqrt{2}\|P_N^n(z - y)\|_{H_n},$$

pois caso contrário, teríamos $\|z - y\|_{H_n} \leqslant \sqrt{2}\|P_N^n(z - y)\|_{H_n}$, para todo $y \in E(n)$, implicando que $\{z\} \cup E(n)$ satisfaz a propriedade (4.11). Pela maximalidade segue que $\{z\} \cup E(n) \subset E(n)$, isto é, $z \in E(n)$, o que não ocorre.

Como $\{L(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaz a propriedade squeezing em $\widehat{\mathcal{B}}$, temos

$$\|z - y\|_{H_n} = \|L(n, n-1)u - L(n, n-1)v\|_{H_n} \leqslant \frac{1}{8}\|u - v\|_{H_{n-1}}.$$

Além disso, $y \in E(n)$, assim deve existir $y_i \in E(n)$, onde $i \in \{1, \ldots, K_0\}$, de modo que

$$\|y - y_i\|_{H_n} \leqslant \frac{r}{4}.$$

Como $u, v \in \overline{B}_{n-1}(a, r)$, segue que

$$\begin{aligned}
\|z - y_i\|_{H_n} &\leqslant \|z - y\|_{H_n} + \|y - y_i\|_{H_n} \\
&\leqslant \frac{1}{8}\|u - v\|_{H_{n-1}} + \|y - y_i\|_{H_n} \\
&< \frac{1}{8}2r + \frac{r}{4} = \frac{2r}{4} = \frac{r}{2},
\end{aligned}$$

isto é, $z \in B^{H_n}(y_i, \frac{r}{2})$. Com isso, $\left\{B^{H_n}(y_i, \frac{r}{2})\right\}_{i=1}^{K_0}$ é uma cobertura para $Z(n) \setminus E(n)$.

Portanto,

$$Z(n) \subset (Z(n) \setminus E(n)) \cup E(n) \subset \left(\bigcup_{i=1}^{K_0} B^{H_n}\left(y_i, \frac{r}{2}\right)\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{K_0} B^{H_n}\left(y_i, \frac{r}{4}\right)\right) \subset \bigcup_{i=1}^{K_0} B^{H_n}\left(y_i, \frac{r}{2}\right).$$

Para estimarmos a constante K_0, determinada em (4.13), basta estimar $N_{\frac{r}{4\sqrt{2}}}^{P_N^n(H_n)}(P_N^n(E(n)))$, isto é, o menor número de bolas, com raio $\frac{r}{4\sqrt{2}}$, em $P_N^n(H_n)$ necessárias para cobrir o espaço $P_N^n(E(n))$. Para isso, vamos cobrir o espaço $P_N^n(E(n))$ com quadrados e mergulharmos esses quadrados nas bolas de raio $\frac{r}{4\sqrt{2}}$.

Seja $\{e_i\}_{i=1}^N$ uma base ortonormal para $P_N^n(Z(n))$. Para todo $x \in P_N^n(Z(n))$, com $x =$

$\displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i e_i$, definimos a norma

$$\|x\|_{P_N^n(Z(n))} = \max\{|x_i|; i = 1, \ldots, N\}.$$

Temos que

$$B^{P_N^n(Z(n))}\left(0, \frac{r}{4\sqrt{2N}}\right) \subset B^{P_N^n(H_n)}\left(0, \frac{r}{4\sqrt{2}}\right).$$

De fato, para todo $x \in B^{P_N^n(Z(n))}\left(0, \frac{r}{4\sqrt{2N}}\right)$,

$$\|x\|_{P_N^n(H(n))} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \leqslant \sqrt{N \max\{x_i^2; i = 1, \ldots, N\}} = \sqrt{N}\|x\|_{P_N^n(Z(n))}.$$

Logo, $N_{\frac{r}{4\sqrt{2N}}}^{P_N^n(Z(n))}(P_N^n(E(n))) \geqslant N_{\frac{r}{4\sqrt{2}}}^{P_N^n(H(n))}(P_N^n(E(n)))$. Assim, temos

$$\begin{aligned} N_{\frac{r}{4\sqrt{2}}}^{P_N^n(H(n))}(P_N^n(E(n))) &\leqslant N_{\frac{r}{4\sqrt{2N}}}^{P_N^n(Z(n))}(P_N^n(E(n))) \\ &\leqslant \left(\frac{\operatorname{diam}(P_N^n(E(n)))}{2\frac{r}{4\sqrt{2N}}} + 1\right)^N \\ &\leqslant \left(\frac{2Cr}{2\frac{r}{4\sqrt{2N}}} + 1\right)^N \\ &= (4\sqrt{2N}C + 1)^N, \end{aligned}$$

ou seja, $K_0 \leqslant (4\sqrt{2N}C + 1)^N$, o que completa a demonstração. □

Observação 4.1.1. *Seja $R > 0$, fixado qualquer. Podemos considerar no Lema 4.1.4*

$$Z(n) = L(n, n-1)(\overline{B}_{n-1}(a, R) \cap \mathcal{C}_{n-1}),$$

onde $\mathcal{C}_{n-1} \subset \mathcal{B}_{n-1}$, e $E(n) \subset Z(n)$ maximal com respeito a propriedade (4.11).

Sob as hipóteses do Lema 4.1.4 consideramos $R > 0$, tal que $\mathcal{B}_{n-1} \subset \overline{B}_{n-1}(a, R)$, com $a \in \mathcal{B}_{n-1}$. Denotamos por $E_1(n, n-1)$ o subconjunto de $L(n-1)\mathcal{B}_{n-1}$ maximal com respeito a propriedade (4.11). Notamos que

$$L(n-1)\mathcal{B}_{n-1} = L(n, n-1)(\mathcal{B}_{n-1} \cap \overline{B}_{n-1}(a, R))$$

e pelo Lema 4.1.4, com $Z(n) = L(n, n-1)(\mathcal{B}_{n-1} \cap \overline{B}_{n-1}(a, R))$ e $E(n) = E_1(n, n-1)$, existem $a_{j_1} \in E_1(n, n-1)$, com $j_1 = 1, \ldots, K_0$, tais que

$$L(n-1)\mathcal{B}_{n-1} = L(n, n-1)\mathcal{B}_{n-1} \subset \bigcup_{j_1=1}^{K_0} \left(\overline{B}_n\left(a_{j_1}, \frac{R}{2}\right) \cap L(n, n-1)\mathcal{B}_{n-1}\right). \tag{4.14}$$

Atuando $L(n+1, n)$ em (4.14), temos

$$L(n+1, n-1)\mathcal{B}_{n-1} \subset \bigcup_{j_1=1}^{K_0} L(n+1, n)\left(\overline{B}_n\left(a_{j_1}, \frac{R}{2}\right) \cap L(n, n-1)\mathcal{B}_{n-1}\right).$$

Agora, refinamos essa cobertura para obter uma cobertura para $L(n+1,n-1)\mathcal{B}_{n-1}$. Seja $E_{2,j_1}(n+1,n-1)$ o conjunto maximal com respeito a relação (4.11) em

$$L(n+1,n)\left(\overline{B}_n\left(a_{j_1},\frac{R}{2}\right)\cap L(n,n-1)\mathcal{B}_{n-1}\right),\quad 1\leqslant j_1\leqslant K_0.$$

Pelo Lema 4.1.4 e pela Observação 4.1.1, existem $a_{j_1,j_2}\in E_{2,j_1}(n+1,n-1)$, onde $j_2=1,\ldots,K_0$, tais que

$$L(n)\left(\overline{B}_n\left(a_{j_1},\frac{R}{2}\right)\cap L(n,n-1)\mathcal{B}_{n-1}\right)\subset\bigcup_{j_2=1}^{K_0}\overline{B}_{n+1}\left(a_{j_1,j_2},\frac{R}{4}\right).$$

Além disso, $L(n+1,n)\left(\overline{B}_n\left(a_{j_1},\frac{R}{2}\right)\cap L(n,n-1)\mathcal{B}_{n-1}\right)\subset L(n+1,n-1)\mathcal{B}_{n-1}$, então

$$L(n)\left(\overline{B}_n\left(a_{j_1},\frac{R}{2}\right)\cap L(n,n-1)\mathcal{B}_{n-1}\right)\subset\bigcup_{j_2=1}^{K_0}\left(\overline{B}_{n+1}\left(a_{j_1,j_2},\frac{R}{4}\right)\cap L(n+1,n-1)\mathcal{B}_{n-1}\right). \tag{4.15}$$

Usando (4.14) e (4.15), temos

$$\begin{aligned}L(n+1,n-1)\mathcal{B}_{n-1}=&L(n)L(n-1)\mathcal{B}_{n-1}\\ \subset&L(n)\left(\bigcup_{j_1=1}^{K_0}\overline{B}_n\left(a_{j_1},\frac{R}{2}\right)\cap L(n,n-1)\mathcal{B}_{n-1}\right)\\ \subset&\bigcup_{j_1=1}^{K_0}\bigcup_{j_2=1}^{K_0}\left(\overline{B}_{n+1}\left(a_{j_1,j_2},\frac{R}{4}\right)\cap L(n+1,n-1)\mathcal{B}_{n-1}\right).\end{aligned}$$

Notamos que

$$\begin{aligned}\bigcup_{j_1=1}^{K_0}E_{2,j_1}(n+1,n-1)\subset&\bigcup_{j_1=1}^{K_0}L(n+1,n)\left(\overline{B}_n\left(a_{j_1},\frac{R}{2}\right)\cap L(n,n-1)\mathcal{B}_{n-1}\right)\\ \subset&\, L(n+1,n-1)\mathcal{B}_{n-1}.\end{aligned}$$

Procedendo dessa forma obtemos uma família de conjuntos $E_{k+1;j_1,j_2,\ldots,j_k}(n+k,n-1)$ com $j_1,j_2,\ldots,j_k=1,\ldots,K_0$, e $k=0,1,2\ldots$, satisfazendo

$$\begin{aligned}&E^{(k+1)}(n+k,n-1):=\textstyle\bigcup_{j_1,j_2,\ldots,j_{k+1}=1}^{K_0}E_{k+1;j_1,j_2,\ldots,j_k}(n+k,n-1)\\ &\subset\textstyle\bigcup_{j_1,j_2,\ldots,j_{k+1}=1}^{K_0}L(n+k,n+k-1)\left(\overline{B}_{n+k-1}\left(a_{j_1,j_2,\ldots,j_k},\frac{R}{2^k}\right)\cap L(n+k-1,n-1)\mathcal{B}_{n-1}\right)\\ &\subset L(n+k,n-1)\mathcal{B}_{n-1},\end{aligned} \tag{4.16}$$

e

$$L(n+k,n-1)\mathcal{B}_{n-1}\subset\bigcup_{j_1,j_2,\ldots,j_{k+1}=1}^{K_0}\left(\overline{B}_{n+k}\left(a_{j_1,j_2,\ldots,j_{k+1}},\frac{R}{2^{k+1}}\right)\cap L(n+k,n-1)\mathcal{B}_{n-1}\right), \tag{4.17}$$

onde $a_{j_1,j_2,\ldots,j_{k+1}}\in E_{k+1;j_1,j_2,\ldots,j_k}(n+k,n-1)$.

Os conjuntos $E^{(k+1)}(n+k,n-1)$, $k\geqslant 0$ inteiro, são importantes para construir o TDS-pullback atrator exponencial no teorema seguinte, o qual consiste de uma adaptação do Teorema 2.2 em [28].

Teorema 4.1.2. *Considere $\widehat{H} = \{H_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ uma família de espaços Hilbert separáveis. Seja $\widehat{\mathcal{B}} = \{\mathcal{B}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ uma família uniformemente limitada com $\mathcal{B}_n \subset H_n$ compacto, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Suponhamos que $\{L(n,m)\}_{n\geqslant m}$ é um TDS-processo discreto com $L(n,m)\colon \mathcal{B}_m \to \mathcal{B}_n$, para todo $n,m \in \mathbb{Z}$ onde $n \geqslant m$, e $\{L(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é uniformemente Lipschitz satisfazendo a propriedade squeezing uniforme sob $\widehat{\mathcal{B}}$. Seja $\widehat{\mathcal{A}} = \{\mathcal{A}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ um TDS-pullback atrator para o TDS-processo $\{L(n,m)\}_{n\geqslant m}$, então $\{L(n,m)\}_{n\geqslant m}$ possui um TDS-pullback atrator exponencial, $\{\mathcal{M}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, dado por*

$$\mathcal{M}_n = \mathcal{A}_n \cup \left(\bigcup_{j=0}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{\infty} L(n,n-j)E^{(k+1)}(n-j,n-j-k-1) \right), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{4.18}$$

Antes de demonstrarmos o Teorema 4.1.2, consideramos os conjuntos

$$C_\infty(n-j) := \overline{\bigcup_{k=0}^{\infty} E^{(k+1)}(n-j,n-j-k-1)}^{H_{n-j}}, \quad n \in \mathbb{Z},\ j = 0,1,2,\dots$$

e

$$\Gamma_\infty(n) := \overline{\bigcup_{j=0}^{\infty} L(n,n-j)C_\infty(n-j)}^{H_n}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Segue de (4.16), que

$$E^{(k+1)}(n-j,n-j-k-1) \subset L(n-j,n-j-k-1)\mathcal{B}_{n-j-k-1} \subset \mathcal{B}_{n-j}.$$

Com isso,

$$C_\infty(n-j) \subset \overline{\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}_{n-j}}^{H_{n-j}} = \mathcal{B}_{n-j},$$

isto é, $C_\infty(n-j)$ é um subconjunto fechado de um conjunto compacto. Logo, para cada $j \in \{0,1,2\dots\}$, temos que $C_\infty(n-j)$ é compacto. Similarmente, concluímos que $\Gamma_\infty(n)$ é compacto, já que $\Gamma_\infty(n) \subset \mathcal{B}_n$.

Observamos ainda que fixado $N_0 \in \{1,2,3,\dots\}$, de (4.16), para $k \geqslant N_0$ e $j \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, temos

$$\begin{aligned} E^{(k+1)}(n-j,n-j-k-1) \subset\, & L(n-j,n-j-k-1)\mathcal{B}_{n-j-k-1} \\ =\, & L(n-j,n-j-N_0-1)L(n-j-N_0-1,n-j-k-1)\mathcal{B}_{n-j-k-1} \\ \subset\, & L(n-j,n-j-N_0-1)\mathcal{B}_{n-j-N_0-1}, \end{aligned}$$

já que, $n-j-k-1 \leqslant n-j-N_0-1 \leqslant n-j$. Assim, podemos escrever

$$C_\infty(n-j) \subset \left(\overline{\bigcup_{k=0}^{N_0-1} E^{(k+1)}(n-j,n-j-k-1)}^{H_{n-j}} \right) \cup L(n-j,n-j-N_0-1)\mathcal{B}_{n-j-N_0-1}. \tag{4.19}$$

Os próximos lemas nos auxiliarão na demonstração do Teorema 4.1.2.

Lema 4.1.5. *Suponhamos que as hipóteses do Teorema 4.1.2 estão satisfeitas. Então,*

$$\dim_F(\mathcal{A}_n) \leqslant N\frac{\log(4C\sqrt{2N}+1)}{\log 2}, \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{Z}. \tag{4.20}$$

Demonstração. Como $\widehat{\mathcal{B}} = \{\mathcal{B}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é uniformemente limitado, existe $R > 0$, de modo que $\mathcal{B}_n \subset \mathbb{B}_n(R) = \{x \in H_n : \|x\|_{H_n} \leqslant R\}$.

Seja $\frac{R}{2^{k+1}} < \varepsilon < \frac{R}{2^k}$, com $k \in \mathbb{N}$. Usando (4.17) e a invariância de $\widehat{\mathcal{A}}$ temos

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_n =& L(n, n-k-1)\mathcal{A}_{n-k-1} \subset L(n, n-k-1)\mathcal{B}_{n-k-1}\\ \subset& \bigcup_{j_1,j_2,\ldots,j_{k+1}=1}^{K_0} \left(\overline{B}_n\left(a_{j_1,j_2,\ldots,j_{k+1}}, \frac{R}{2^{k+1}}\right) \cap L(n, n-k-1)\mathcal{B}_{n-k-1}\right),\end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}N_\varepsilon(\mathcal{A}_n) \leqslant& N_\varepsilon(L(n, n-k-1)\mathcal{B}_{n-k-1})\\ \leqslant& N_\varepsilon\left(\bigcup_{j_1,j_2,\ldots,j_{k+1}=1}^{K_0} \overline{B}_n\left(a_{j_1,j_2,\ldots,j_{k+1}}, \frac{R}{2^{k+1}}\right)\right)\\ \leqslant& N_\varepsilon\left(\bigcup_{j_1,j_2,\ldots,j_{k+1}=1}^{K_0} \overline{B}_n\left(a_{j_1,j_2,\ldots,j_{k+1}}, \varepsilon\right)\right)\\ \leqslant& K_0^{k+1}.\end{aligned}$$

Com isso,

$$\frac{\log(N_\varepsilon(\mathcal{A}_n))}{\log\frac{1}{\varepsilon}} \leqslant \frac{\log K_0^{k+1}}{\log\frac{1}{\varepsilon}} \leqslant \frac{\log K_0^{k+1}}{\log\frac{2^k}{R}}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\dim_F(\mathcal{A}_n) &= \limsup_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\log N_\varepsilon(\mathcal{A}_n)}{\log\frac{1}{\varepsilon}} \leqslant \limsup_{k\to\infty} \frac{\log K_0^{k+1}}{\log\frac{2^k}{R}} = \limsup_{k\to\infty} \frac{(k+1)\log K_0}{k\log 2 - \log R}\\ &= \frac{\log K_0}{\log 2} \leqslant \frac{N\log(4C\sqrt{2N}+1)}{\log 2}.\end{aligned}$$

Com isso, obtemos (4.20). □

Lema 4.1.6. *Suponhamos que as hipóteses do Teorema 4.1.2 estão satisfeitas. Então,*

$$\dim_F(C_\infty(n-j)) \leqslant N\max\left\{1, \frac{\log(4C\sqrt{2N}+1)}{\log 2}\right\}, \quad \textit{para cada } j \in \{0, 1, 2, \ldots\}. \tag{4.21}$$

Demonstração. Sejam N_0 obtido em (4.19) e $\frac{R}{2^{N_0+1}} < \varepsilon < \frac{R}{2^{N_0}}$, segue de (4.17), que

$$\begin{aligned}&L(n-j, n-j-N_0-1)\mathcal{B}_{n-j-N_0-1}\\ &\subset \bigcup_{j_1,\ldots,j_{N_0+1}=1}^{K_0} \left(\overline{B}_{n-j}(a_{j_1,\ldots,j_{N_0+1}}, \varepsilon) \cap L(n-j, n-j-N_0-1)\mathcal{B}_{n-j-N_0-1}\right).\end{aligned}$$

Para cada inteiro $0 \leqslant k \leqslant N_0 - 1$, de (4.16) e (4.17), temos

$$P_N^{n-j}E^{(k+1)}(n-j, n-j-k-1)$$

$$
\begin{aligned}
&\subset \bigcup_{j_1,\ldots,j_{k+1}=1}^{K_0} P_N^{n-j}\left(\overline{B}_{n-j}\left(a_{j_1,\ldots,j_{k+1}}, \frac{R}{2^{k+1}}\right)\right) \cap P_N^{n-j}(L(n-j,n-j-k-1)\mathcal{B}_{n-j-k-1}) \\
&\subset \bigcup_{j_1,\ldots,j_{k+1}=1}^{K_0} \overline{B}^{P_N^{n-j}H_{n-j}}\left(P_N^{n-j}(a_{j_1,\ldots,j_{k+1}}), \frac{R}{2^{k+1}}\right).
\end{aligned}
$$

Por sua vez, para cada $0 \leqslant k \leqslant N_0 - 1$, o conjunto

$$
\overline{B}^{P_N^{n-j}H_{n-j}}\left(P_N^{n-j}(a_{j_1,\ldots,j_{k+1}}), \frac{R}{2^{k+1}}\right)
$$

é compacto, pois é fechado e limitado em espaço de dimensão finita, assim podemos cobri-lo com N^* bolas de radio $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$. Com isso,

$$
\begin{aligned}
P_N^{n-j}E^{(k+1)}(n-j,n-j-k-1) &\subset \bigcup_{j_1,\ldots,j_{k+1}=1}^{K_0} \overline{B}^{P_N^{n-j}H_{n-j}}\left(P_N^{n-j}(a_{j_1,\ldots,j_{k+1}}), \frac{R}{2^{k+1}}\right) \\
&\subset \bigcup_{j_1,\ldots,j_{k+1}=1}^{K_0} \bigcup_{i=1}^{N^*} B^{P_N^{n-j}H_{n-j}}\left(b_i, \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right),
\end{aligned}
$$

ou seja, podemos cobrir o conjunto $P_N^{n-j}E^{(k+1)}(n-j,n-j-k-1)$ com $\mathbb{M} := K_0^{k+1}N^*$ bolas de raio $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$.

Vamos agora estimar o número N^*, para cada $0 \leqslant k \leqslant N_0 - 1$. Para isso cobrimos o conjunto $\overline{B}^{P_N^{n-j}H_{n-j}}(\cdot, \frac{R}{2^{k+1}})$ com quadrados de diâmetro $\frac{2R}{2^{k+1}}$ e mergulhamos esses quadrados nas bolas de raio $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, assim

$$
N^* \leqslant \left(\frac{\frac{R}{2^{k+1}}\sqrt{N}}{\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}} + 1\right)^N = \left(\frac{\sqrt{N}R\sqrt{2}}{2^{k+1}\varepsilon} + 1\right)^N.
$$

Segue de $\frac{R}{2^{N_0+1}} < \varepsilon$ que $\frac{1}{\varepsilon} < \frac{2^{N_0+1}}{R}$, logo

$$
N^* \leqslant \left(\frac{\sqrt{N}R\sqrt{2}2^{N_0+1}}{2^{k+1}R} + 1\right)^N = \left(\frac{\sqrt{N}\sqrt{2}2^{N_0+1}}{2^{k+1}} + 1\right)^N = \left(\frac{\sqrt{N}\sqrt{2}2^{N_0}}{2^{k}} + 1\right)^N. \tag{4.22}
$$

Como $0 \leqslant k \leqslant N_0 - 1 \leqslant N_0$, temos pelo crescimento da função exponencial de base dois que $2^k \leqslant 2^{N_0}$. Além disso, como N é a dimensão da imagem de $P_N^n H_n$, claro que $N \geqslant 1$, em particular

$$
N \geqslant \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; 2N \geqslant 1 \;\Rightarrow\; \sqrt{2N} \geqslant 1.
$$

Com isso, segue de (4.22) que

$$
N^* \leqslant \left(\frac{\sqrt{N}\sqrt{2}2^{N_0}}{2^k} + \frac{\sqrt{N}\sqrt{2}2^{N_0}}{2^k}\right)^N = 2^N(2N)^{\frac{N}{2}}\left(\frac{1}{2^k 2^{-N_0}}\right)^N = 2^N(2N)^{\frac{N}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{(k-N_0)N} \tag{4.23}
$$

Como determinamos uma cobertura de $P_N^{n-j}E^{(k+1)}(n-j,n-j-k-1)$ por $\mathbb{M}$ bolas de raio

$\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, segue da relação (4.11) que

$$E^{(k+1)}(n-j,n-j-k-1) \subset \bigcup_{j_1,\dots,j_{N_0+1}=1}^{K_0} \overline{B}^{P_N^{n-j}H_{n-j}}(P_N^{n-j}(a_{j_1,\dots,j_{N_0+1}})), \frac{R}{2^{k+1}}).$$

De fato, seja $y \in E^{(k+1)}(n-j,n-j-k-1)$ temos que $P_N^{n-j}y \in P_N^{n-j}E^{(k+1)}(n-j,n-j-k-1)$. Por sua vez, para cada $i \in \{1,\dots,\mathbb{M}\}$ existem $b_i \in P_N^{n-j}E^{(k+1)}(n-j,n-j-k-1)$ tais que

$$P_N^{n-j}E^{(k+1)}(n-j,n-j-k-1) \subset \bigcup_{i=1}^{\mathbb{M}} B^{P_N^{n-j}H_{n-j}}\left(b_i, \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right).$$

Assim, deve existir $1 \leqslant i_0 \leqslant \mathbb{M}$ e $y_{i_0} \in E^{(k+1)}(n-j,n-j-k-1)$ de modo que

$$P_N^{n-j}y \in B^{P_N^{n-j}H_{n-j}}\left(P_N^{n-j}y_{i_0}, \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right).$$

Como y e y_{i_0} estão em $E^{(k+1)}(n-j,n-j-k-1)$, pela propriedade (4.11) temos

$$\|y-y_{i_0}\|_{H_{n-j}} \leqslant \sqrt{2}\|P_N^{n-j}y - P_N^{n-j}y_{i_0}\|_{H_{n-j}} \leqslant \sqrt{2}\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} = \varepsilon,$$

ou seja,

$$y \in \overline{B}_{n-j}(y_{i_0},\varepsilon) \subset \bigcup_{i=1}^{\mathbb{M}} \overline{B}_{n-j}(y_i,\varepsilon).$$

Portanto,

$$E^{(k+1)}(n-j,n-j-k-1) \subset \bigcup_{i=1}^{\mathbb{M}} \overline{B}_{n-j}(y_i,\varepsilon). \tag{4.24}$$

Segue de (4.17), (4.19) e (4.24) que

$$\begin{aligned} C_\infty(n-j) &\subset \overline{\bigcup_{k=0}^{N_0-1} E^{(k+1)}(n-j,n-j-k-1)} \cup L(n-j,n-j-N_0-1)\mathcal{B}_{n-j-N_0-1} \\ &\subset \bigcup_{k=0}^{N_0-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\mathbb{M}(k)} \overline{B}_{n-j}(y_i,\varepsilon)\right) \cup \left(\bigcup_{j_1,\dots,j_{N_0+1}=1}^{K_0} B_{n-j}\left(a_{j_1,\dots,j_{N_0+1}}, \frac{R}{2^{N_0+1}}\right)\right), \end{aligned}$$

ou seja, podemos cobrir $C_\infty(n-j)$ com $\sum_{k=0}^{N_0-1} K_0^{k+1}N^* + K_0^{N_0+1}$ bolas de raio ε. Assim, de (4.23) temos

$$\begin{aligned} N_\varepsilon(C_\infty(n-j)) &\leqslant \sum_{k=0}^{N_0-1} K_0^{k+1}N^* + K_0^{N_0+1} \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{N_0-1} K_0^{k+1}2^N(2N)^{\frac{N}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{(k-N_0)N} + K_0^{N_0+1} \\ &=2^N(2N)^{\frac{N}{2}}K_0\left(\frac{1}{2}\right)^{-N_0N}\left(\sum_{k=0}^{N_0-1} K_0^k\left(\frac{1}{2}\right)^{kN}\right) + K_0^{N_0+1} \end{aligned}$$

$$=2^N(2N)^{\frac{N}{2}}K_0 2^{N_0 N}\sum_{k=0}^{N_0-1}\left(K_0\left(\frac{1}{2}\right)^N\right)^k + K_0^{N_0+1}. \tag{4.25}$$

Vamos analisar os casos em que $K_0\left(\frac{1}{2}\right)^N \leqslant 1$ e $K_0\left(\frac{1}{2}\right)^N > 1$.

(i) Se $K_0\left(\frac{1}{2}\right)^N \leqslant 1$, então

$$\sum_{k=0}^{N_0-1}\left(K_0\left(\frac{1}{2}\right)^N\right)^k \leqslant \sum_{k=0}^{N_0-1} 1 = N_0.$$

Assim em (4.25), temos

$$N_\varepsilon(C_\infty(n-j)) \leqslant 2^N(2N)^{\frac{N}{2}}K_0 2^{N_0 N}N_0 + K_0^{N_0+1},$$

com isso,

$$\begin{aligned}\dim_F(C_\infty(n-j)) &= \limsup_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\log N_\varepsilon(C_\infty(n-j))}{\log\frac{1}{\varepsilon}}\\ &\leqslant \limsup_{N_0\to\infty}\frac{\log(2^N(2N)^{\frac{N}{2}}K_0 2^{N_0 N}N_0 + K_0^{N_0+1})}{\log\frac{2^{N_0}}{R}}.\end{aligned}$$

Por sua vez, como $K_0\left(\frac{1}{2}\right)^N \leqslant 1$, segue que

$$K_0 \leqslant 2^N \;\Rightarrow\; K_0^{N_0+1} \leqslant (2^N)^{N_0+1} = 2^{NN_0}2^N,$$

assim,

$$\begin{aligned}2^N(2N)^{\frac{N}{2}}K_0 2^{N_0 N}N_0 + K_0^{N_0+1} &\leqslant 2^N 2^{N_0 N}(2N)^{\frac{N}{2}}K_0 N_0 + 2^{NN_0}2^N\\ &= 2^N 2^{N_0 N}((2N)^{\frac{N}{2}}K_0 N_0 + 1).\end{aligned}$$

Dessa forma

$$\begin{aligned}\frac{\log(2^N(2N)^{\frac{N}{2}}K_0 2^{N_0 N}N_0 + K_0^{N_0+1})}{\log\frac{2^{N_0}}{R}} &\leqslant \frac{\log(2^N 2^{N_0 N}((2N)^{\frac{N}{2}}K_0 N_0 + 1))}{N_0\log 2 - \log R}\\ &= \frac{\log 2^{N(N_0+1)} + \log((2N)^{\frac{N}{2}}K_0 N_0 + 1)}{N_0\log 2 - \log R}\\ &= \frac{N(N_0+1)\log 2 + \log((2N)^{\frac{N}{2}}K_0 N_0 + 1)}{N_0\log 2 - \log R}\\ &= \frac{(N+\frac{N}{N_0})\log 2}{\log 2 - \frac{\log R}{N_0}} + \frac{\log((2N)^{\frac{N}{2}}K_0 N_0 + 1)}{N_0\log 2 - \log R},\end{aligned}$$

fazendo $N_0\to\infty$, temos

$$\dim_F(C_\infty(n-j)) \leqslant \frac{N\log 2}{\log 2} + \lim_{N_0\to\infty}\frac{\log((2N)^{\frac{N}{2}}K_0 N_0 + 1)}{N_0\log 2 - \log R} = N,$$

uma vez que, $\lim_{x\to\infty}\frac{\log(ax+b)}{cx+d} = 0$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, com $c \neq 0$.

(ii) Se $K_0\left(\frac{1}{2}\right)^N > 1$, então

$$\sum_{k=0}^{N_0-1}\left(K_0\left(\frac{1}{2}\right)^N\right)^k = \frac{\left(K_0\left(\frac{1}{2}\right)^N\right)^{N_0}-1}{K_0\left(\frac{1}{2}\right)^N-1}.$$

Pelo crescimento da função exponencial de base $K_0\left(\frac{1}{2}\right)^N$, temos que

$$\left(K_0\left(\frac{1}{2}\right)^N\right)^{N_0} \leqslant \left(K_0\left(\frac{1}{2}\right)^N\right)^{N_0+1} \leqslant \left(K_0\left(\frac{1}{2}\right)^N\right)^{N_0+1}+1,$$

ou seja,

$$\left(K_0\left(\frac{1}{2}\right)^N\right)^{N_0}-1 \leqslant \left(K_0\left(\frac{1}{2}\right)^N\right)^{N_0+1}.$$

Como $2^N \geqslant 1$, segue de (4.25), que

$$\begin{aligned}
N_\varepsilon(C_\infty(n-j)) &\leqslant 2^N(2N)^{\frac{N}{2}}K_0 2^{N_0N}\left(\frac{\left(K_0\left(\frac{1}{2}\right)^N\right)^{N_0}-1}{K_0\left(\frac{1}{2}\right)^N-1}\right)+K_0^{N_0+1}\\
&= \frac{2^N(2N)^{\frac{N}{2}}K_0 2^{N_0N}}{K_0\left(\frac{1}{2}\right)^N-1}K_0^{N_0+1}\frac{1}{2^{NN_0}2^N}+K_0^{N_0+1}\\
&\leqslant \frac{(2N)^{\frac{N}{2}}K_0}{K_0\left(\frac{1}{2}\right)^N-1}K_0^{N_0+1}+K_0^{N_0+1}\\
&= K_0^{N_0+1}\left(\frac{(2N)^{\frac{N}{2}}K_0}{K_0\left(\frac{1}{2}\right)^N-1}+1\right).
\end{aligned}$$

Logo, usando o Lema 4.1.4, temos

$$\begin{aligned}
\dim_F(C_\infty(n-j)) &= \limsup_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\log N_\varepsilon(C_\infty(n-j))}{\log\frac{1}{\varepsilon}}\\
&\leqslant \limsup_{N_0\to\infty}\frac{\log\left(K_0^{N_0+1}\left(\frac{(2N)^{\frac{N}{2}}K_0}{K_0\left(\frac{1}{2}\right)^N-1}+1\right)\right)}{\log\frac{2^{N_0}}{R}}\\
&= \limsup_{N_0\to\infty}\frac{\log K_0^{N_0+1}+\log\left(\frac{(2N)^{\frac{N}{2}}K_0}{K_0\left(\frac{1}{2}\right)^N-1}+1\right)}{N_0\log 2-\log R}\\
&= \limsup_{N_0\to\infty}\frac{(N_0+1)\log K_0}{N_0(\log 2-\frac{\log R}{N_0})}+\frac{\log\left(1+\frac{(2N)^{\frac{N}{2}}K_0}{K_0\left(\frac{1}{2}\right)^N-1}\right)}{N_0\log 2-\log R}\\
&= \frac{\log K_0}{\log 2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \frac{\log(4C\sqrt{2N}+1)^N}{\log 2}\\
&= N\frac{\log(4C\sqrt{2N}+1)}{\log 2}.
\end{aligned}
$$

Em conclusão, obtemos (4.21), isto é,

$$
\dim_F(C_\infty(n-j)) \leqslant N\max\left\{1, \frac{\log(4C\sqrt{2N})}{\log 2}\right\}.
$$

□

Lema 4.1.7. *Suponhamos que as hipóteses do Teorema 4.1.2 estão satisfeitas. Então,*

$$
\dim_F(\Gamma_\infty(n)) \leqslant N\max\left\{1, \frac{\log(4C\sqrt{2N}+1)}{\log 2}\right\}, \qquad \textit{para todo } n\in\mathbb{Z}. \tag{4.26}
$$

Demonstração. Sejam N_0 obtido em (4.19) e $\frac{R}{2^{N_0+1}} < \varepsilon < \frac{R}{2^{N_0}}$. Note que $C_\infty(n-j)\subset\mathcal{B}_{n-j}$, assim temos

$$
\begin{aligned}
L(n,n-j)C_\infty(n-j) &\subset L(n,n-j)\mathcal{B}_{n-j}\\
&= L(n,n-N_0-1)L(n-N_0-1,n-j)\mathcal{B}_{n-j}\\
&\subset L(n,n-N_0-1)\mathcal{B}_{n-N_0-1}, \quad \forall j\geqslant N_0+1.
\end{aligned}
$$

Com isso,

$$
\begin{aligned}
\Gamma_\infty(n) &= \overline{\bigcup_{j=0}^{\infty} L(n,n-j)C_\infty(n-j)}^{H_n}\\
&= \overline{\bigcup_{j=0}^{N_0} L(n,n-j)C_\infty(n-j)}^{H_n} \cup \overline{\bigcup_{j=N_0+1}^{\infty} L(n,n-j)C_\infty(n-j)}^{H_n}\\
&\subset \overline{\bigcup_{j=0}^{N_0} L(n,n-j)C_\infty(n-j)}^{H_n} \cup \overline{L(n,n-N_0-1)\mathcal{B}_{n-N_0-1}}^{H_n}\\
&= \bigcup_{j=0}^{N_0} L(n,n-j)C_\infty(n-j)\cup L(n,n-N_0-1)\mathcal{B}_{n-N_0-1}.
\end{aligned}
$$

Por (4.17) e usando que $\frac{R}{2^{N_0+1}} < \varepsilon$, temos

$$
\begin{aligned}
L(n,n-N_0-1)\mathcal{B}_{n-N_0-1} &= L(n-N_0+N_0,n-N_0-1)\mathcal{B}_{n-N_0-1}\\
&\subset \bigcup_{j_1,\dots,j_{N_0-1}=1}^{K_0}\left(\overline{B}_n\left(a_{j_1,\dots,j_{N_0-1}},\frac{R}{2^{N_0+1}}\right)\cap L(n,n-N_0-1)\mathcal{B}_{n-N_0-1}\right)\\
&\subset \bigcup_{j_1,\dots,j_{N_0-1}=1}^{K_0}\overline{B}_n\left(a_{j_1,\dots,j_{N_0-1}},\frac{R}{2^{N_0+1}}\right).
\end{aligned}
$$

Segue que,

$$\Gamma_\infty(n) \subset \bigcup_{j=0}^{N_0} L(n,n-j)C_\infty(n-j) \cup \bigcup_{j_1,\ldots,j_{N_0-1}=1}^{K_0} \overline{B}_n\left(a_{j_1,\ldots,j_{N_0-1}}, \frac{R}{2^{N_0+1}}\right),$$

assim,

$$\begin{aligned} N_\varepsilon(\Gamma_\infty(n)) &\leqslant N_\varepsilon\left(\bigcup_{j=0}^{N_0} L(n,n-j)C_\infty(n-j)\right) + N_\varepsilon\left(\bigcup_{j_1,\ldots,j_{N_0-1}=1}^{K_0} \overline{B}_n\left(a_{j_1,\ldots,j_{N_0-1}}, \frac{R}{2^{N_0+1}}\right)\right) \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{N_0} N_\varepsilon(L(n,n-j)C_\infty(n-j)) + K_0^{N_0+1}. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Por sua vez, para cada $j \in \{0,1,2,\ldots\}$ temos que o conjunto $C_\infty(n-j)$ é compacto em $\mathcal{B}_{n-j}$ e pelo Lema 4.1.6, $C_\infty(n-j)$ tem dimensão fractal finita. Para cada $j \in \{0,1,2,\ldots\}$, consideremos

$$\limsup_{\varepsilon'\to 0} \frac{\log N_{\varepsilon'}(C_\infty(n-j))}{\log \frac{1}{\varepsilon'}} = \dim_F(C_\infty(n-j)) = \overline{d}$$

Seja $d := N \max\left\{1, \frac{\log(4C\sqrt{2N}+1)}{\log 2}\right\}$, temos em particular que $d \geqslant \overline{d}$. Como

$$\limsup_{\varepsilon'\to 0} \frac{\log N_{\varepsilon'}(C_\infty(n-j))}{\log \frac{1}{\varepsilon'}} = \inf_{\eta>0}\left(\sup_{0<\varepsilon'\leqslant\eta} \frac{\log N_{\varepsilon'}(C_\infty(n-j))}{\log \frac{1}{\varepsilon'}}\right) = \overline{d},$$

deve existir $\varepsilon_0 > 0$, tal que

$$\sup_{0<\varepsilon'\leqslant\eta}\left(\frac{\log N_{\varepsilon'}(C_\infty(n-j))}{\log \frac{1}{\varepsilon'}}\right) \leqslant \overline{d} + (d-\overline{d}) = d, \quad \text{para todo } 0 < \varepsilon' \leqslant \varepsilon_0.$$

Isto é, para todo $0 < \varepsilon' \leqslant \varepsilon_0$, temos

$$\frac{\log N_{\varepsilon'}(C_\infty(n-j))}{\log \frac{1}{\varepsilon'}} \leqslant d.$$

Assim, $\log N_{\varepsilon'}(C_\infty(n-j)) \leqslant d \log\left(\frac{1}{\varepsilon'}\right) = \log\left(\frac{1}{\varepsilon'}\right)^d$, logo

$$N_{\varepsilon'}(C_\infty(n-j)) \leqslant \left(\frac{1}{\varepsilon'}\right)^d, \quad \text{para todo } 0 < \varepsilon' \leqslant \varepsilon_0. \tag{4.28}$$

Por outro lado, se $\varepsilon_0 \leqslant \varepsilon' \leqslant R$, então as bolas de raio ε_0 estão contidas nas bolas de raio ε', logo

$$N_{\varepsilon'}(C_\infty(n-j)) \leqslant N_{\varepsilon_0}(C_\infty(n-j)) \leqslant \left(\frac{1}{\varepsilon_0}\right)^d = \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon_0}\right)^d \left(\frac{1}{\varepsilon'}\right)^d \leqslant c_d \left(\frac{1}{\varepsilon'}\right)^d,$$

onde $c_d = \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon_0}\right)^d \geqslant \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0}\right)^d = 1$.

Em todo caso, se $0 < \varepsilon' \leqslant R$ então

$$N_{\varepsilon'}(C_\infty(n-j)) \leqslant c_d \left(\frac{1}{\varepsilon'}\right)^d, \quad \forall j \in \{0,1,2,\ldots\}. \tag{4.29}$$

Por consequência do Lema 4.1.4, fixando $\rho > 0$, obtemos

$$N_{\frac{\rho}{2^j}}(L(n,n-j)C_\infty(n-j)) \leqslant K_0^j N_\rho(C_\infty(n-j)). \tag{4.30}$$

De fato, seja $a \in H_{n-j}$ de modo que $\mathcal{B}_{n-j} \cap \overline{B}_{n-j}(a,\rho) \neq \emptyset$. Pelo Lema 4.1.4, existem $a_{i_1} \in H_{n-j+1}$, onde $i_1 = 1, \ldots, K_0$, tais que

$$L(n-j+1,n-j)(\mathcal{B}_{n-j} \cap \overline{B}_{n-j}(a,\rho)) \subset \bigcup_{i_1=1}^{K_0} (\overline{B}_{n-j+1}(a_{i_1}, \frac{\rho}{2}) \cap \mathcal{B}_{n-j+1}).$$

Atuando o operador $L(n-j+2,n-j+1)$ nessa última inclusão, segue que

$$\begin{aligned} L(n-j+2,n-j)(\mathcal{B}_{n-j} &\cap \overline{B}_{n-j}(a,\rho)) \\ &= L(n-j+2,n-j+1)L(n-j+1,n-j)(\mathcal{B}_{n-j} \cap \overline{B}_{n-j}(a,\rho)) \\ &\subset \bigcup_{i_1=1}^{K_0} L(n-j+2,n-j+1)(\overline{B}_{n-j+1}(a_{i_1}, \frac{\rho}{2}) \cap \mathcal{B}_{n-j+1}). \end{aligned} \tag{4.31}$$

Aplicando o Lema 4.1.4 no lado esquerdo de (4.31) temos, para cada $i_1, i_2 \in \{1, \ldots, K_0\}$ a existência de $a_{i_1,i_2} \in H_{n-j+2}$, de modo que

$$\begin{aligned} L(n-j+2,n-j)(\mathcal{B}_{n-j} \cap \overline{B}_{n-j}(a,\rho)) &\subset \bigcup_{i_1=1}^{K_0} \bigcup_{i_2=1}^{K_0} (\overline{B}_{n-j+2}(a_{i_1,i_2}, \frac{\rho}{2^2}) \cap \mathcal{B}_{n-j+2}) \\ &= \bigcup_{i=1}^{K_0^2} (\overline{B}_{n-j+2}(b_i, \frac{\rho}{2^2}) \cap \mathcal{B}_{n-j+2}), \end{aligned}$$

onde

$$b_i := \begin{cases} a_{1,i}\ , & \text{se } i \in \{1, \ldots, K_0\} \\ a_{2,i-K_0}\ , & \text{se } i \in \{K_0+1, \ldots, 2K_0\} \\ a_{3,i-2K_0}\ , & \text{se } i \in \{2K_0+1, \ldots, 3K_0\} \\ & \vdots \\ a_{K_0,i-(K_0-1)K_0}\ , & \text{se } i \in \{(K_0-1)K_0+1, \ldots, K_0^2\}. \end{cases}$$

Procedendo dessa forma, temos a existência de $b_i \in H_n$, com $i \in \{1, \ldots, K_0^j\}$, de modo que

$$L(n,n-j)(\mathcal{B}_{n-j} \cap \overline{B}_{n-j}(a,\rho)) = L(n-j+j,n-j)(\mathcal{B}_{n-j} \cap \overline{B}_{n-j}(a,\rho)) \subset \bigcup_{i=1}^{K_0^j} (\overline{B}_n(b_i, \frac{\rho}{2^j}) \cap \mathcal{B}_n).$$

Suponhamos que $N_\rho(C_\infty(n-j)) = m$. Então existem elementos $\alpha_i \in H_{n-j}$ e $\beta_i \in H_n$ de modo que

$$\begin{aligned} L(n,n-j)C_\infty(n-j) &\subset L(n,n-j)\left(\bigcup_{i=1}^{m} (\overline{B}_n(\alpha_i,\rho) \cap \mathcal{B}_{n-j})\right) \\ &= \bigcup_{i=1}^{m} L(n,n-j)(\overline{B}_{n-j}(\alpha_i,\rho) \cap \mathcal{B}_{n-j}) \end{aligned}$$

$$= \bigcup_{i=1}^{mK_0^j} (\overline{B}_n(\beta_i, \frac{\rho}{2^j}) \cap \mathcal{B}_n),$$

isto é,

$$N_{\frac{\rho}{2^j}}(L(n, n-j)C_\infty(n-j)) \leqslant mK_0^j = K_0^j N_\rho(C_\infty(n-j)),$$

concluindo assim a equação (4.30).

Para cada $j \in \{1, \ldots, N_0\}$, podemos escrever

$$\varepsilon = \frac{2^j}{2^j}\varepsilon = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-j} \varepsilon}{2^j},$$

assim, tomando $\rho = \varepsilon' = \left(\frac{1}{2}\right)^{-j} \varepsilon$, de (4.27) e (4.30) segue que

$$\begin{aligned} N_\varepsilon(\Gamma_\infty(n)) &\leqslant \sum_{j=0}^{N_0} N_\varepsilon(L(n, n-j)C_\infty(n-j)) + K_0^{N_0+1} \\ &= \sum_{j=0}^{N_0} N_{\frac{\rho}{2^j}}(L(n, n-j)C_\infty(n-j)) + K_0^{N_0+1} \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{N_0} K_0^j N_\rho(C_\infty(n-j)) + K_0^{N_0+1}. \end{aligned}$$

Como $\varepsilon < \frac{R}{2^{N_0}}$, pelo decrescimento da função exponencial de base meio temos, para todo $j \in \{0, \ldots, N_0\}$, que $\varepsilon < \frac{R}{2^j}$, assim

$$\rho = \left(\frac{1}{2}\right)^{-j} \varepsilon = 2^j \varepsilon < R.$$

Por (4.29), para $\rho = \varepsilon' = \left(\frac{1}{2}\right)^{-j} \varepsilon$, temos que

$$\begin{aligned} N_\varepsilon(\Gamma_\infty(n)) &\leqslant \sum_{j=0}^{N_0} K_0^j c_d \left(\frac{1}{\rho}\right)^d + K_0^{N_0+1} \\ &= \sum_{j=0}^{N_0} K_0^j c_d \left(\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-j} \varepsilon\right)^{-1}\right)^d + K_0^{N_0+1} \\ &= \sum_{j=0}^{N_0} K_0^j c_d \left(\frac{1}{2}\right)^{jd} \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d + K_0^{N_0+1} \\ &= c_d \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d \sum_{j=0}^{N_0} \left(K_0 \left(\frac{1}{2}\right)^d\right)^j + K_0^{N_0+1}. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Em (4.32), vamos considerar os casos em que $K_0 \left(\frac{1}{2}\right)^d \leqslant 1$ e $K_0 \left(\frac{1}{2}\right)^d > 1$.

(i) Se $K_0\left(\frac{1}{2}\right)^d \leqslant 1$, então

$$\sum_{j=0}^{N_0}\left(K_0\left(\frac{1}{2}\right)^d\right)^j \leqslant N_0+1.$$

Assim, (4.32) temos

$$N_\varepsilon(\Gamma_\infty(n)) \leqslant c_d\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d (N_0+1)+K_0^{N_0+1}.$$

Com isso

$$\begin{aligned}
\dim_F(\Gamma_\infty(n)) &= \limsup_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\log N_\varepsilon(\Gamma_\infty(n))}{\log\frac{1}{\varepsilon}}\\
&\leqslant \limsup_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\log\left(c_d\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d(N_0+1)+K_0^{N_0+1}\right)}{\log\frac{1}{\varepsilon}}\\
&\leqslant \limsup_{N_0\to\infty}\frac{\log\left(c_d\left(\frac{2^{N_0+1}}{R}\right)^d(N_0+1)+K_0^{N_0+1}\right)}{\log\frac{2^{N_0}}{R}}.
\end{aligned}$$

Por sua vez $K_0\left(\frac{1}{2}\right)^d \leqslant 1$, assim

$$\begin{aligned}
c_d\left(\frac{2^{N_0+1}}{R}\right)^d(N_0+1)+K_0^{N_0+1} &\leqslant c_d\frac{2^{d(N_0+1)}}{R^d}(N_0+1)+(2^d)^{N_0+1}\\
&= 2^{d(N_0+1)}\left(c_d\frac{1}{R^d}(N_0+1)+1\right)
\end{aligned}$$

Logo, pelo crescimento da função logaritmo, já que podemos considerar uma base maior do que um, temos

$$\begin{aligned}
\dim_F(\Gamma_\infty(n)) &\leqslant \limsup_{N_0\to\infty}\frac{\log\left(2^{d(N_0+1)}\left(c_d\frac{(N_0+1)}{R^d}+1\right)\right)}{\log\frac{2^{N_0}}{R}}\\
&= \limsup_{N_0\to\infty}\left(\frac{\log 2^{d(N_0+1)}}{N_0\log 2-\log R}+\frac{\log\left(N_0\frac{c_d}{R^d}+\frac{c_d}{R^d}+1\right)}{N_0\log 2-\log R}\right)\\
&= \limsup_{N_0\to\infty}\frac{d(N_0+1)\log 2}{N_0\left(\log 2-\frac{\log R}{N_0}\right)}+\limsup_{N_0\to\infty}\frac{\log\left(N_0\frac{c_d}{R^d}+\frac{c_d}{R^d}+1\right)}{N_0\log 2-\log R}\\
&= d\frac{\log 2}{\log 2}+0=d,
\end{aligned}$$

uma vez que $\lim_{x\to\infty}\frac{\log(ax+b)}{cx+d}=0$, onde $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ com $c\neq 0$.

(ii) Se $K_0\left(\frac{1}{2}\right)^d > 1$, então em (4.32) temos

$$
\begin{aligned}
N_\varepsilon(\Gamma_\infty(n)) &\leqslant c_d\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d \frac{\left(\left(K_0\left(\frac{1}{2}\right)^d\right)^{N_0+1}-1\right)}{\left(K_0\left(\frac{1}{2}\right)^d-1\right)} + K_0^{N_0+1} \\
&< c_d\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d \frac{\left(K_0\left(\frac{1}{2}\right)^d\right)^{N_0+1}}{\left(K_0\left(\frac{1}{2}\right)^d-1\right)} + K_0^{N_0+1}.
\end{aligned}
$$

Com isso

$$
\begin{aligned}
\dim_F(\Gamma_\infty(n)) &= \limsup_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\log N_\varepsilon(\Gamma_\infty(n))}{\log\frac{1}{\varepsilon}} \\
&\leqslant \limsup_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\log\left(c_d\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d \frac{\left(K_0\left(\frac{1}{2}\right)^d\right)^{N_0+1}}{\left(K_0\left(\frac{1}{2}\right)^d-1\right)} + K_0^{N_0+1}\right)}{\log\frac{1}{\varepsilon}} \\
&\leqslant \limsup_{N_0\to\infty} \frac{\log\left(c_d\left(\frac{2^{N_0+1}}{R}\right)^d \frac{\left(K_0\left(\frac{1}{2}\right)^d\right)^{N_0+1}}{\left(K_0\left(\frac{1}{2}\right)^d-1\right)} + K_0^{N_0+1}\right)}{\log\frac{2^{N_0}}{R}}.
\end{aligned}
\tag{4.33}
$$

Notamos que

$$
\begin{aligned}
c_d\left(\frac{2^{N_0+1}}{R}\right)^d \frac{\left(K_0\left(\frac{1}{2}\right)^d\right)^{N_0+1}}{\left(K_0\left(\frac{1}{2}\right)^d-1\right)} + K_0^{N_0+1} &= c_d\frac{2^{d(N_0+1)}}{R^d}\frac{K_0^{N_0+1}}{\left(K_0\left(\frac{1}{2}\right)^d-1\right)}\frac{1}{2^{d(N_0+1)}} + K_0^{N_0+1} \\
&= K_0^{N_0+1}\left(\frac{c_d}{R^d\left(K_0\left(\frac{1}{2}\right)^d-1\right)}+1\right).
\end{aligned}
$$

Assim retornando a (4.33), temos

$$
\begin{aligned}
\dim_F(\Gamma_\infty(n)) &\leqslant \limsup_{N_0\to\infty} \frac{\log\left(K_0^{N_0+1}\left(\frac{c_d}{R^d\left(K_0\left(\frac{1}{2}\right)^d-1\right)}+1\right)\right)}{\log\frac{2^{N_0}}{R}} \\
&= \limsup_{N_0\to\infty}\left(\frac{\log K_0^{N_0+1}}{N_0\log 2-\log R} + \frac{\log\left(\frac{c_d}{R^d\left(K_0\left(\frac{1}{2}\right)^d-1\right)}+1\right)}{N_0\log 2-\log R}\right) \\
&= \limsup_{N_0\to\infty}\frac{(N_0+1)\log K_0}{N_0\left(\log 2-\frac{\log R}{N_0}\right)} + \limsup_{N_0\to\infty}\frac{\log\left(\frac{c_d}{R^d\left(K_0\left(\frac{1}{2}\right)^d-1\right)}+1\right)}{N_0\log 2-\log R}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\log K_0}{\log 2} \\
&\leqslant N\frac{\log K_0}{\log 2} \\
&\leqslant \max\left\{N, N\frac{\log K_0}{\log 2}\right\} = d.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\dim_F(\Gamma_\infty(n)) \leqslant N \max\left\{1, \frac{\log(4C\sqrt{2N}+1)}{\log 2}\right\},
$$

como queríamos demonstrar. □

Lema 4.1.8. *Suponhamos que as hipóteses do Teorema 4.1.2 estão satisfeitas. Então* $\{\mathcal{M}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$*, definido em* (4.18)*, é fechado e coincide com*

$$
\mathcal{M}_n = \mathcal{A}_n \cup \Gamma_\infty(n), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.
$$

Demonstração. Primeiramente vamos mostrar que $\mathcal{M}_n$ é fechado, para isso suponhamos que existe sequência $(y_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_n$ tal que

$$
y_i \xrightarrow{i\to\infty} y \quad \text{ e } \quad y \notin \mathcal{M}_n.
$$

Notemos que a sequência $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ pode ser reduzida a uma sequência em $\bigcup_{j=0}^{\infty}\bigcup_{k=0}^{\infty} L(n, n-j)E^{(k+1)}(n-j, n-j-k-1)$, pois caso contrário, deve existir um índice i_0 tal que $y_i \in A_n$, para todo $i \geqslant i_0$, implicando que $\lim_{i\to\infty} y_i = y \in \overline{\mathcal{A}_n}^{H_n}$. Em particular, $\mathcal{A}_n$ é fechado, assim $y \in \mathcal{A}_n \subset \mathcal{M}_n$, o que é uma contradição.

Como

$$
y_i \in \bigcup_{N=0}^{\infty}\bigcup_{k=0}^{\infty} L(n, n-N)E^{(k+1)}(n-N, n-N-k-1),
$$

então, segue de (4.16) que, para cada $i \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, existem $N_i, k_i \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ tais que

$$
x_i \in E^{(k_i+1)}(n-N_i, n-N_i-k_i-1) \subset L(n-N_i, n-N_i-k_i-1)\mathcal{B}_{n-N_i-k_i-1} \subset \mathcal{B}_{n-N_i}
$$

de modo que $y_i = L(n, n-N_i)x_i$.

Agora, se $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é uma sequência ilimitada de números inteiros não-negativos, então

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}_{H_n}(y_i, \mathcal{A}_n) &= \mathrm{d}_{H_n}(L(n, n-N_i)x_i, \mathcal{A}_n) \\
&\leqslant \sup_{z\in L(n,n-N_i)\mathcal{B}_{n-N_i}} \mathrm{d}_{H_n}(z, \mathcal{A}_n) \\
&= \mathrm{dist}(L(n, n-N_i)\mathcal{B}_{n-N_i}, \mathcal{A}_n) \xrightarrow{i\to\infty} 0.
\end{aligned}
$$

Segue da Proposição 1.2.2 que $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ admite uma subsequência, que ainda denotaremos por $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$, convergente em $\mathcal{A}_n$, isto é, $y \in \mathcal{A}_n \subset \mathcal{M}_n$, o que é uma contradição.

Assim, deve existir N^* tal que $N_i = N^*$, para infinitos índices i's. Para tais índices temos

$$
x_i \in E^{(k_i+1)}(n-N^*, n-N^*-k_i-1) \subset \bigcup_{j=0}^{\infty} E^{(j+1)}(n-N^*, n-N^*-j-1) \subset C_\infty(n-N^*).
$$

Restringimos $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ a uma subsequência, se necessário, de modo que $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset C_\infty(n-N^*)$. Pela compacidade de $C_\infty(n-N^*)$, restringindo a uma subsequência, a qual ainda denotaremos por $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, temos que existe $x \in C_\infty(n-N^*)$ tal que

$$x_i \xrightarrow{i\to\infty} x.$$

Como $\{L(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente Lipschitz, segue que

$$L(n,n-N^*)x_i \xrightarrow{i\to\infty} L(n,n-N^*)x,$$

assim, $L(n,n-N^*)x = y$.

Suponhamos que $k_i \xrightarrow{i\to\infty} k^*$. Então $k_i = k^*$ para infinitos índices, restringindo $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ a uma subsequência, a qual ainda denotaremos por $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, para tais índices, temos

$$x_i \in E^{(k^*+1)}(n-N^*, n-N^*-k^*-1), \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Pela compacidade de $E^{(k^*+1)}(n-N^*, n-N^*-k^*-1)$ temos que existe $\tilde{x} \in E^{(k^*+1)}(n-N^*, n-N^*-k^*-1)$, tal que

$$x_i \xrightarrow{i\to\infty} \tilde{x},$$

assim

$$y_i = L(n,n-N^*)x_i \xrightarrow{i\to\infty} L(n,n-N^*)\tilde{x},$$

com isso $y = L(n,n-N^*)\tilde{x} \in \mathcal{M}_n$, o que é uma contradição. Logo, devemos ter $k_i \xrightarrow{i\to\infty} \infty$.

Notemos que, $y \notin \mathcal{M}_n$ implica que $x \notin E^{(k+1)}(n-N^*, n-N^*-k-1)$, para todo $k \geqslant 0$ e $y \notin \mathcal{A}_n$, pois se $x \in E^{(k_0+1)}(n-N^*, n-N^*-k_0-1)$, para algum $k_0 \geqslant 0$, então

$$x \in \bigcup_{k=0}^{\infty} E^{(k+1)}(n-N^*, n-N^*-k-1),$$

assim,

$$y = L(n,n-N^*)x \in \bigcup_{k=0}^{\infty} L(n,n-N^*)E^{(k+1)}(n-N^*, n-N^*-k-1) \subset \mathcal{M}_n.$$

Todavia, concluímos, restringindo a uma subsequência se necessário, que

$$x_i \in E^{(k_i+1)}(n-N^*, n-N^*-k_i-1), \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Segue de (4.16) que $x_i \in L(n-N^*, n-N^*-k_i-1)\mathcal{B}_{n-N^*-k_i-1}$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Pela propriedade (iii), da Definição 4.1.5, aplicada para $\mathcal{A}_{n-N^*}$, deve existir uma subsequência de $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, a qual ainda denotaremos por $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, de modo que

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_{H_{n-N^*}}(x_i, \mathcal{A}_{n-N^*}) &\leqslant \sup_{b\in\mathcal{B}_{n-N^*-k_i-1}} \mathrm{d}_{H_{n-N^*}}(L(n-N^*, n-N^*-k_i-1)b, \mathcal{A}_{n-N^*}) \\ &= \mathrm{dist}_{n-N^*}(L(n-N^*, n-N^*-k_i-1)\mathcal{B}_{n-N^*-k_i-1}, \mathcal{A}_{n-N^*}) \xrightarrow{i\to\infty} 0.\end{aligned}$$

Assim, pela Proposição 1.2.2, temos que $x = \lim_{i\to\infty} x_i \in \mathcal{A}_{n-N^*}$ e pela invariância

$$y = L(n,n-N^*)x \in \mathcal{A}_n \subset \mathcal{M}_n,$$

o que é uma contradição. Portanto $\mathcal{M}_n$ é fechado, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Resta mostrarmos que $\mathcal{M}_n = \mathcal{A}_n \cup \Gamma_\infty(n)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, para isso basta mostrarmos que $\Gamma_\infty(n) \subset \mathcal{M}_n$. Seja $x \in C_\infty(n-j)$, onde $j \in \{0,1,2,\ldots\}$. Existem $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$ e $x_i \in E^{(k_i+1)}(n-j, n-j-k_i-1)$, com $x_i \xrightarrow{i\to\infty} x$. Por (4.16)

$$x_i \in L(n-j, n-j-k_i-1)\mathcal{B}_{n-j-k_i-1},$$

assim pela propriedade (iii), da Definição 4.1.5, aplicada para $\mathcal{A}_{n-j}$, restringindo a uma subsequência de $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, se necessário, temos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_{H_{n-j}}(x_i, \mathcal{A}_{n-j}) &\leqslant \sup_{b\in\mathcal{B}_{n-j-k_i-1}} \mathrm{d}_{H_{n-N^*}}(L(n-j, n-j-k_i-1)b, \mathcal{A}_{n-j}) \\
&= \mathrm{dist}_{n-j}(L(n-j, n-j-k_i-1)\mathcal{B}_{n-j-k_i-1}, \mathcal{A}_{n-j}) \xrightarrow{i\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Pela invariância do pullback atrator, já que pela Proposição 1.2.2, $x \in \mathcal{A}_{n-j}$, segue que

$$L(n, n-j)x \in \mathcal{A}_n \subset \mathcal{M}_n,$$

ou seja, $L(n,n-j)C_\infty(n-j) \subset \mathcal{M}_n$, para cada $j \in \{0,1,2,\ldots\}$. Portanto $\Gamma_\infty(n) \subset \mathcal{M}_n$. $\square$

Demonstração Teorema 4.1.2. Pelo Lema 4.1.8 temos que

$$\dim_F(\mathcal{M}_n) = \dim_F(\mathcal{A}_n \cup \Gamma_\infty(n)) = \max\{\dim_F(\mathcal{A}_n), \dim_F(\Gamma_\infty(n))\}.$$

Segue dos Lema 4.1.5 e Lema 4.1.7, que

$$\dim_F(\mathcal{M}_n) \leqslant \max\left\{N, \frac{N\log(4C\sqrt{2N}+1)}{\log 2}\right\} = N\max\left\{1, \frac{\log(4C\sqrt{2N}+1)}{\log 2}\right\}.$$

Do Lema 4.1.8 obtemos que $\mathcal{M}_n = \mathcal{A}_n \cup \Gamma_\infty(n)$. A compacidade de $\mathcal{M}_n$ segue da compacidade dos conjuntos $\mathcal{A}_n$ e $\Gamma_\infty(n)$.

Sejam $l, n \in \mathbb{Z}$, $l \geqslant n$. Segue da invariância de $\{\mathcal{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e de (4.18) que

$$\begin{aligned}
L(l,n)\mathcal{M}_n &= L(l,n)\left(\mathcal{A}_n \cup \left(\bigcup_{j=0}^{\infty}\bigcup_{k=0}^{\infty} L(n,n-j)E^{(k+1)}(n-j,n-j-k-1)\right)\right) \\
&= L(l,n)\mathcal{A}_n \cup \left(\bigcup_{j=0}^{\infty}\bigcup_{k=0}^{\infty} L(l,n)L(n,n-j)E^{(k+1)}(n-j,n-j-k-1)\right) \\
&= \mathcal{A}_l \cup \left(\bigcup_{j=0}^{\infty}\bigcup_{k=0}^{\infty} L(l,n-j)E^{(k+1)}(n-j,n-j-k-1)\right) \\
&\subset \mathcal{A}_l \cup \left(\bigcup_{j=0}^{\infty}\bigcup_{k=0}^{\infty} L(l,l-j)E^{(k+1)}(l-j,l-j-k-1)\right),
\end{aligned}$$

para concluirmos essa última inclusão, fixamos $k_0, j_0 \in \{0,1,2,\ldots\}$ e consideramos $m \geqslant 0$ de modo que $l = n+m$, então

$$\begin{aligned}
&L(l, n-j_0)E^{(k_0+1)}(n-j_0, n-j_0-k_0-1) \\
&\qquad = L(l, n+m-m-j_0)E^{(k_0+1)}(n+m-m-j_0, n+m-m-j_0-k_0-1)
\end{aligned}$$

$$= L(l, l-m-j_0)E^{(k_0+1)}(l-m-j_0, l-m-j_0-k_0-1),$$

onde

$$L(l, l-(m+j_0))E^{(k_0+1)}(l-(m+j_0), l-(m+j_0)-k_0-1) \in \bigcup_{j=0}^{\infty}\bigcup_{k=0}^{\infty} L(l, l-j)E^{(k+1)}(l-j, l-j-k-1).$$

Logo, a família $\{\mathcal{M}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é positivamente invariante, isto é,

$$L(l, n)\mathcal{M}_n \subset \mathcal{M}_l, \text{ para todo } l \geqslant n.$$

Resta verificarmos a propriedade de pullback atração para $\{\mathcal{M}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Por (4.17) temos que

$$L(n, n-k-1)\mathcal{B}_{n-k-1} \subset \bigcup_{j_1,\dots,j_{k+1}=1}^{K_0} \overline{B}_n\left(a_{j_1,\dots,j_{k+1}}, \frac{R}{2^{k+1}}\right),$$

onde $a_{j_1,\dots,j_{k+1}} \in E_{k+1,j_1,\dots,j_{k+1}}(n, n-k-1)$. Assim, dado $x \in \mathcal{B}_{n-k-1}$ existe $\tilde{a}_{j_1,\dots,j_{k+1}} \in E^{(k+1)}(n, n-k-1)$ tal que

$$\|L(n, n-k-1)x - \tilde{a}_{j_1,\dots,j_{k+1}}\|_{H_n} \leqslant \frac{R}{2^{k+1}}.$$

Como $E^{(k+1)}(n, n-k-1) \subset \mathcal{M}_n$, temos, para todo $x \in \mathcal{B}_{n-k-1}$, que

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_{H_n}(L(n, n-k-1)x, \mathcal{M}_n) &= \inf_{y\in\mathcal{M}_n} \|L(n, n-k-1)x - y\|_{H_n} \\ &\leqslant \inf_{y\in E^{(k+1)}(n,n-k-1)} \|L(n, n-k-1)x - y\|_{H_n} \\ &\leqslant \|L(n, n-k-1)x - \tilde{a}_{j_1,\dots,j_{k+1}}\|_{H_n} \\ &\leqslant \frac{R}{2^{k+1}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\mathrm{dist}_n(L(n, n-k-1)\mathcal{B}_{n-k-1}, \mathcal{M}_n) = \sup_{x\in\mathcal{B}_{n-k-1}} \mathrm{d}_{H_n}(L(n, n-k-1)x, \mathcal{M}_n) \leqslant \frac{R}{2^{k+1}}.$$

Pela sobrejetividade da função exponencial em $(0, +\infty)$, temos a existência de $c > 0$ tal que

$$e^{-c} = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; (e^{-c})^{k+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \;\Rightarrow\; \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} R = e^{-c(k+1)}R.$$

Logo, para todo $n \in \mathbb{Z}$,

$$\mathrm{dist}_n(L(n, n-k-1)\mathcal{B}_{n-k-1}, \mathcal{M}_n) \leqslant e^{-c(k+1)}R,$$

isto é,

$$\mathrm{dist}_n(L(n, n-k)\mathcal{B}_{n-k}, \mathcal{M}_n) \leqslant e^{-ck}R.$$

Com isso, fixado $0 < \omega < c$, temos

$$\lim_{k\to+\infty} e^{\omega k}\mathrm{dist}_n(L(n, n-k)\mathcal{B}_{n-k}, \mathcal{M}_n) = 0,$$

o que completa a demonstração.

□

A seguir concluímos um importante resultado que garante a existência de TDS-pullback atrator exponencial, sob certas hipóteses.

Teorema 4.1.3. *Sejam $\widehat{H} = \{H_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ uma família de espaços Hilbert separáveis, $\{L(t,s)\}_{t\geqslant s}$ um TDS-processo em $\widehat{H}$ e $\widehat{\mathcal{B}} = \{\mathcal{B}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ uma família uniformemente limitada de conjuntos compactos $\mathcal{B}_t \subset H_t$, para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Suponhamos que

(i) para todo $\tau \in \mathbb{R}$ fixado, dado $R > 0$, existe $t_0 = t_0(R) > 0$ tal que

$$L(t,\tau)\mathbb{B}_\tau(R) \subset \mathcal{B}_t, \qquad \text{para todo } t \geqslant t_0 + \tau, \tag{4.34}$$

(ii) existe $C > 0$, independente de $t, s \in \mathbb{R}$, tal que

$$\|L(t,t-s)u - L(t,t-s)v\|_{H_t} \leqslant C\|u-v\|_{H_{t-s}}, \quad \forall u,v \in H_{t-s}, \quad T \leqslant s \leqslant 2T,$$

onde $T = T(\widehat{\mathcal{B}}) > 0$, satisfaz $L(T+s,s)\mathcal{B}_s \subset \mathcal{B}_{T+s}$, para todo $s \in \mathbb{R}$, e

(iii) para todo $\tau \in \mathbb{R}$ fixado, a família $\{\widetilde{L}(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, definida para cada $n \in \mathbb{Z}$ por

$$\widetilde{L}(n) := L((n+1)T+\tau, nT+\tau),$$

satisfaz a propriedade squeezing uniforme sob $\widehat{\mathcal{B}^d} = \{\mathcal{B}_{nT+\tau}\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Então, $\{L(t,s)\}_{t\geqslant s}$ possui um TDS-pullback atrator exponencial $\{\mathcal{M}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$.

Demonstração. Sejam $\tau \in \mathbb{R}$ fixado e

$$\widehat{\mathcal{B}^d} = \{\mathcal{B}^d_n\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{\mathcal{B}_{nT+\tau}\}_{n\in\mathbb{Z}},$$

onde T é tomado satisfazendo *(ii)*. Podemos definir o TDS-processo agindo sob $\widehat{\mathcal{B}^d}$ com tempo discreto, $\widetilde{L}(n,m)\colon \mathcal{B}_{mT+\tau} \to \mathcal{B}_{nT+\tau}$, por

$$\widetilde{L}(n,m) := L(nT+\tau, mT+\tau), \qquad \text{para todo } n,m \in \mathbb{Z} \text{ com } n \geqslant m,.$$

De *(ii)* obtemos que $L(t,t-T)$ é T-fechado, assim pelo Teorema 4.1.1 existe $\widehat{\mathcal{A}} = \{\mathcal{A}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ um TDS-pullback atrator para $\{L(t,s)\}_{t\geqslant s}$. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, vamos considerar

$$\mathcal{A}^d_n = \mathcal{A}_{nT+\tau}.$$

A família $\{\mathcal{A}^d_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é um TDS-pullback atrator para $\{\widetilde{L}(n,m)\}_{n\geqslant m}$. De fato, como $\widehat{\mathcal{A}}$ é uma família uniformemente limitada de conjuntos compactos não vazios, em particular, temos que $\{\mathcal{A}_{nT+\tau}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é uniformemente limitada, com $\emptyset \neq \mathcal{A}_{nT+\tau} \subset H_{nT+\tau}$ compacto, para cada $n \in \mathbb{Z}$. Além disso,

$$\widetilde{L}(n,m)\mathcal{A}^d_m = L(nT+\tau, mT+\tau)\mathcal{A}_{mT+\tau} = \mathcal{A}_{nT+\tau} = \mathcal{A}^d_n, \quad \forall n \geqslant m.$$

Para a pullback atração notamos que, para cada $R > 0$ e $n \in \mathbb{Z}$, temos

$$\begin{aligned}&\operatorname{dist}_{nT+\tau}(\widetilde{L}(n, n-k)\mathbb{B}_{(n-k)T+\tau}(R), \mathcal{A}_n^d)\\&= \operatorname{dist}_{nT+\tau}(L(nT+\tau, nT+\tau-kT)\mathbb{B}_{nT+\tau-kT}(R), \mathcal{A}_{nT+\tau}) \xrightarrow{k\to+\infty} 0.\end{aligned}$$

A minimalidade é concluída pela minimalidade de $\widehat{\mathcal{A}}$.

Fazendo $t = (n+1)T + \tau$ e $s = T$, no item *(ii)*, concluímos que $\{\widetilde{L}(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é uniformemente Lipschitz sob $\widehat{\mathcal{B}^d}$. Consideremos, para $n \in \mathbb{Z}$, o conjunto

$$\mathcal{M}_{n,\tau} = \mathcal{A}_{nT+\tau} \cup \left(\bigcup_{j=0}^{\infty}\bigcup_{k=0}^{\infty} \widetilde{L}(n, n-j)E^{(k+1)}((n-j)T+\tau, (n-j-k-1)T+\tau)\right).$$

Pelo Teorema 4.1.2 temos que $\{\mathcal{M}_{n,\tau}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é um TDS-pullback atrator exponencial para $\{\widetilde{L}(n,m)\}_{n\geqslant m}$. Consideremos

$$\mathcal{M}_t = L(t, nT+\tau)\mathcal{M}_{n,\tau}, \quad (n+1)T+\tau \leqslant t < (n+2)T+\tau, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Seja $t \in \mathbb{R}$, então $(n+1)T+\tau \leqslant t < (n+2)T+\tau$, para $n \in \mathbb{Z}$. Usando o item *(ii)* para $s = t - nT - \tau$, temos que o operador $L(t, nT+\tau)$ é uniformemente Lipschitz, em particular $L(t, nT+\tau)$ é um operador contínuo. Logo, pela compacidade de $\mathcal{M}_{n,\tau}$ temos que o conjunto $\mathcal{M}_t$ é compacto em H_t, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Além disso, pelo Lema 2.1.2, obtemos

$$\dim_F(\mathcal{M}_t) = \dim_F(L(t, nT+\tau)\mathcal{M}_{n,\tau}) \leqslant \dim_F(\mathcal{M}_{n,\tau}), \quad t \in [(n+1)T+\tau, (n+2)T+\tau[.$$

Pelos Lemas 4.1.5, 4.1.7 e 4.1.8, obtemos, nomeadamente

$$\dim_F(\mathcal{M}_t) \leqslant N \max\left\{1, \frac{\log(4C\sqrt{2N}+1)}{\log 2}\right\}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Sejam $t, s \in \mathbb{R}$, com $t \geqslant s$, podemos escrever $s - \tau = kT + s_1$ e $t - \tau = mT + t_1$ para algum $k, m \in \mathbb{Z}$, $m \geqslant k$ e $s_1, t_1 \in [T, 2T[$. Se $m \geqslant k+1$, obtemos

$$\begin{aligned}L(t,s)\mathcal{M}_s =&L(mT+t_1+\tau, kT+s_1+\tau)\mathcal{M}_{kT+s_1+\tau}\\=&L(mT+t_1+\tau, kT+s_1+\tau)L(kT+s_1+\tau, kT+\tau)\mathcal{M}_{k,\tau}\\=&L(mT+t_1+\tau, kT+\tau)\mathcal{M}_{k,\tau}\\=&L(mT+t_1+\tau, mT+\tau)L(mT+\tau, kT+\tau)\mathcal{M}_{k,\tau}\\\subset&L(mT+t_1+\tau, mT+\tau)\mathcal{M}_{m,\tau}\\=&L(t, mT+\tau)\mathcal{M}_{m,\tau} = \mathcal{M}_t.\end{aligned}$$

Por outro lado, para $m = k$, temos $s - \tau = kT + s_1$ e $t - \tau = kT + t_1$ para algum $s_1, t_1 \in [T, 2T[$ e

$$\begin{aligned}L(t,s)\mathcal{M}_s =&L(kT+t_1+\tau, kT+s_1+\tau)\mathcal{M}_{kT+s_1+\tau}\\=&L(kT+t_1+\tau, kT+s_1+\tau)L(kT+s_1+\tau, kT+\tau)\mathcal{M}_{k,\tau}\\=&L(kT+t_1+\tau, kT+\tau)\mathcal{M}_{k,\tau} = \mathcal{M}_{kT+t_1+\tau} = \mathcal{M}_t.\end{aligned}$$

Assim, $\{\mathcal{M}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ é positivamente semi-invariante com respeito a $\{L(t,s)\}_{t\geqslant s}$.

A propriedade de pullback atração exponencial de $\{\mathcal{M}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ segue da propriedade de pullback atração exponencial da família $\{\mathcal{M}_{n,\tau}\}_{n\in\mathbb{Z}}$. De fato, sejam $t, s \in \mathbb{R}$, com $t > s + 4T$, podemos escrever $s - \tau = kT + s_1$ e $t - \tau = mT + t_1$, sendo $s_1 \in [0, T[$, $t_1 \in [T, 2T[$, e $k, m \in \mathbb{Z}$ com $m > k + 2$. Notemos que

$$\begin{aligned}
&\mathrm{dist}_t(L(t,s)\mathbb{B}_s(R), \mathcal{M}_t)\\
&= \mathrm{dist}_t(L(t, mT+\tau)L(mT+\tau, kT+s_1+\tau)\mathbb{B}_s(R), L(t, mT+\tau)\mathcal{M}_{m,\tau})\\
&\leqslant C\mathrm{dist}_{mT+\tau}(L(mT+\tau, kT+s_1+\tau)\mathbb{B}_s(R), \mathcal{M}_{m,\tau})\\
&= C\mathrm{dist}_{mT+\tau}(L(mT+\tau, (k+2)T+\tau)L((k+2)T+\tau, kT+s_1+\tau)\mathbb{B}_s(R), \mathcal{M}_{m,\tau}).
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Além disso, existe $\widetilde{R} > 0$ tal que $L((k+2)T+\tau, kT+s_1+\tau)\mathbb{B}_s(R) \subset \mathbb{B}_{(k+2)T+\tau}(\widetilde{R})$. De fato, sejam $u \in \mathbb{B}_s(R)$ e $a \in \mathcal{A}_s$, arbitrários, temos que

$$\begin{aligned}
&\|L((k+2)T+\tau, kT+s_1+\tau)u\|_{H_{(k+2)T+\tau}}\\
&\qquad\leqslant \|L((k+2)T+\tau, s)(u-a)\|_{H_{(k+2)T+\tau}} + \|L((k+2)T+\tau, s)a\|_{H_{(k+2)T+\tau}}\\
&\qquad\leqslant C\|u-a\|_{H_s} + \overline{R},
\end{aligned}$$

nessa última desigualdade utilizamos o item *(ii)* e o fato da família $\{\mathcal{A}_n^d\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ser uniformemente limitada, com constante de limitação $\overline{R} > 0$. Assim, considerando $\widetilde{R} := C(R+\overline{R})+\overline{R}$, podemos concluir que

$$\|L((k+2)T+\tau, kT+s_1+\tau)u\|_{H_{(k+2)T+\tau}} \leqslant \widetilde{R}.$$

Logo, segue de (4.35) que

$$\mathrm{dist}_t(L(t,s)\mathbb{B}_s(R), \mathcal{M}_t) \leqslant C\mathrm{dist}_{mT+\tau}(\widetilde{L}(m, k+2)\mathbb{B}_{(k+2)T+\tau}(\widetilde{R}), \mathcal{M}_{m,\tau}). \tag{4.36}$$

Como $\{\mathcal{M}_{n,\tau}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é pullback atrator exponencial associado a $\{\widetilde{L}(n,m)\}_{n\geqslant m}$, existe $\omega > 0$ tal que

$$\lim_{n\to-\infty} e^{\omega(m-n)}\mathrm{dist}_{mT+\tau}(\widetilde{L}(m,n)\mathbb{B}_{nT+\tau}(\widetilde{R}), \mathcal{M}_{m,\tau}) = 0.$$

Segue de $0 < t - s < (m-k+2)T$ e (4.36), que

$$\begin{aligned}
&\lim_{s\to-\infty} e^{\frac{\omega}{T}(t-s)}\mathrm{dist}_t(L(t,s)\mathbb{B}_s(R), \mathcal{M}_t)\\
&\qquad\leqslant C\lim_{k\to-\infty} e^{\frac{\omega}{T}T(m-k+2)}\mathrm{dist}_{mT+\tau}(\widetilde{L}(m,k+2)\mathbb{B}_{(k+2)T+\tau}(\widetilde{R}), \mathcal{M}_{m,\tau})\\
&\qquad= C\lim_{k\to-\infty} e^{\omega(m-k+2-4)}e^{4\omega}\mathrm{dist}_{mT+\tau}(\widetilde{L}(m,k+2)\mathbb{B}_{(k+2)T+\tau}(\widetilde{R}), \mathcal{M}_{m,\tau})\\
&\qquad= Ce^{4\omega}\lim_{k\to-\infty} e^{\omega(m-k-2)}\mathrm{dist}_{mT+\tau}(\widetilde{L}(m,k+2)\mathbb{B}_{(k+2)T+\tau}(\widetilde{R}), \mathcal{M}_{m,\tau}) = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $\{\mathcal{M}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ é um TDS-pullback atrator exponencial para o processo contínuo $\{L(t,s)\}_{t\geqslant s}$.

□

Observação 4.1.2. *A existência de $T = T(\widehat{\mathcal{B}}) > 0$ na suposição (ii) do Teorema 4.1.3 segue da hipótese (i) do Teorema 4.1.3 imposta a família $\{\mathcal{B}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$. De fato, seja $R_0 > 0$ a constante da definição de limitação uniforme, isto é*

$$\mathcal{B}_t \subset \mathbb{B}_t(R_0),\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Por (4.34), *para todo* $\tau \in \mathbb{R}$ *fixado, existe* $T = T(R_0) > 0$, *tal que*

$$L(t,\tau)\mathcal{B}_\tau \subset L(t,\tau)\mathbb{B}_\tau(R_0) \subset \mathcal{B}_t, \ \textit{para todo}\ t \geqslant T+\tau.$$

Em particular

$$L(T+\tau,\tau)\mathcal{B}_\tau \subset \mathcal{B}_{T+\tau}.$$

4.2 Condições para existência de pullback atrator global e exponencial para (4.1) pelo método das ℓ-trajetórias

Nesta seção para construção do pullback atrator exponencial associado a (4.1) apresentamos uma adaptação do método das $\ell-$trajetórias desenvolvido no Capítulo 2.

4.2.1 O espaço das (τ,ℓ)-trajetórias

Sejam $(X,\|\cdot\|_X)$, $(Y,\|\cdot\|_Y)$ e $(Z,\|\cdot\|_Z)$ espaços de Banach onde Y e Z são reflexivos e separáveis, de modo que

$$Y \hookrightarrow\hookrightarrow X \qquad \text{e} \qquad X \hookrightarrow Z.$$

Para $p_1 \in [2,\infty)$, $p_2 \in [1,\infty)$ e $T > 0$ fixados denotamos, para cada $\tau \in \mathbb{R}$, os conjuntos

$$X_{\tau,T} := L^2(\tau,\tau+T;X) \ \ \text{e}$$

$$Y_{\tau,T} := \{u \in L^{p_1}(\tau,\tau+T;Y); u' \in L^{p_2}(\tau,\tau+T;Z)\}.$$

Como $p_1 \geqslant 2$ então $L^{p_1}(\tau,\tau+T;Y) \hookrightarrow L^2(\tau,\tau+T;X) = X_{\tau,T}$. Segue do Lema 2.1.6, que

$$Y_{\tau,T} \hookrightarrow\hookrightarrow X_{\tau,T}.$$

Entendemos por solução de (4.1) sob o intervalo $[\tau,\tau+T]$, com condição u_τ, a função $u \in Y_{\tau,T}$ tal que $u\colon [\tau,\tau+T] \to (X,\sigma(X,X'))$ é contínua e satisfaz (4.1) em algum sentido fraco escolhido.

Supomos

(H1) Para todo $(\tau,u_\tau) \in \mathbb{R}\times X$ e $T > 0$, existe única $u \in Y_{\tau,T}$ onde $u\colon [\tau,\tau+T] \to (X,\sigma(X,X'))$ é contínua e é uma solução para (4.1) em $[\tau,\tau+T]$, com $u(\tau) = u_\tau$. Além disso, para toda solução a estimativa de $\|u\|_{Y_{\tau,T}}$ é uniforme com respeito a $\|u(\tau)\|_X$.

(H2) Existe uma família $\{B_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ uniformemente limitada em X com a seguinte propriedade: se u é uma solução arbitrária de (4.1) com dado inicial $u(\tau) = u_\tau \in X$, temos que

(i) existe $t_\tau = t_\tau(\|u_\tau\|_X) > 0$ tal que $u(t) \in B_t$, para todo $t \geqslant \tau + t_\tau$;

(ii) se $u_\tau \in B_\tau$ então $u(t) \in B_t$, para todo $t \geqslant \tau$.

Seja $\ell > 0$ fixado arbitrariamente. Para cada $\tau \in \mathbb{R}$ e $x \in X$, entendemos por $(\tau,\ell)-$trajetória toda solução de (4.1), com dado inicial $u(\tau) = x$, definida em $[\tau,\tau+\ell]$. O conjunto de todas as $(\tau,\ell)-$trajetórias é denotado por $\mathfrak{X}_{\tau,\ell}$ e munido com a topologia de $X_{\tau,\ell}$, isto é,

$$\mathfrak{X}_{\tau,\ell} = \{\chi\colon [\tau,\tau+\ell] \to X,\ \text{solução de (4.1)},\ \text{com}\ \chi(\tau) = u_\tau; u_\tau \in X\}.$$

Notamos que faz sentido tratar o valor pontual de uma $(\tau, \ell)-$trajetória, χ, uma vez que $\chi\colon [\tau, \tau + T] \to (X, \sigma(X, X'))$ é contínua.

Usando (H1) podemos definir o processo em espaço tempo-dependente, ou TDS-processo abreviadamente, $\{L(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$, por

$$\begin{array}{rl} L(t,\tau)\colon \mathfrak{X}_{\tau,\ell} \to & \mathfrak{X}_{t,\ell} \\ \chi \mapsto & L(t,\tau)\chi\colon [t, t+\ell] \to X \\ & \qquad\qquad \theta \mapsto u(\theta), \end{array} \tag{4.37}$$

onde u é a única solução de (4.1), em $[\tau, t+\ell]$, tal que $\chi = u|_{[\tau,\tau+\ell]}$, conforme a Figura 4.1. Pode-se facilmente verificar que a família $\{L(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$ é um TDS-processo em $\{\mathfrak{X}_{\tau,\ell}\}_{\tau\in\mathbb{R}}$.

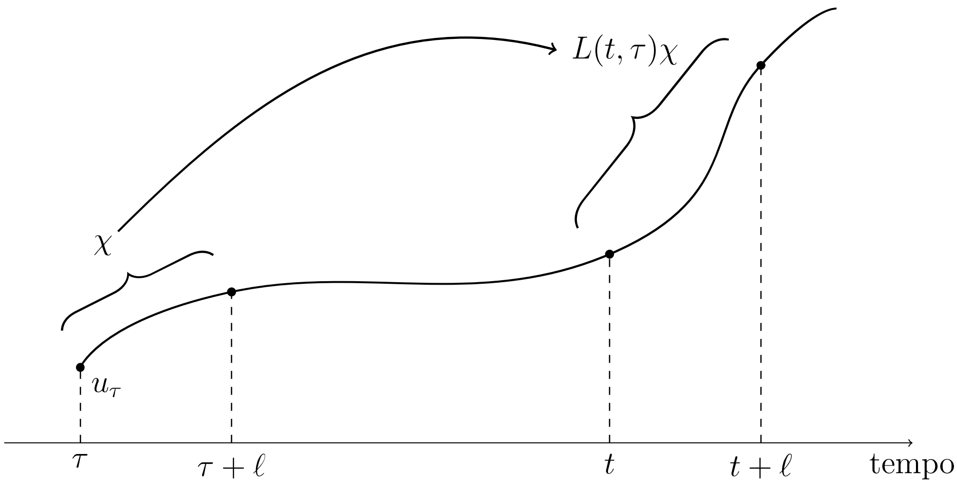

Figura 4.1: Atuação do operador $L(t,\tau)$ em $\{\mathfrak{X}_{t,\ell}\}_{t\in\mathbb{R}}$

4.2.2 A existência do TDS-pullback atrator para o TDS-processo definido em (4.37)

Consideramos $\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$ a dinâmica associada a (4.1), isto é,

$$\begin{array}{rl} U(t,\tau)\colon X \to & X \\ u_\tau \mapsto & U(t,\tau)u_\tau := u(t) = u(t;\tau,u_\tau), \end{array}$$

onde $u(t;\tau,u_\tau)$ denota a única solução de (4.1), com dado inicial $u(\tau) = u_\tau$, atuando no instante de tempo $t \in \mathbb{R}$. A Hipótese (H2) nos garante a existência de uma família $\{B_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ uniformemente limitada em X, de subconjuntos de X, que são positivamente semi-invariantes com respeito a $\{U(t,s)\}_{t\geqslant s}$, isto é, $U(t,s)B_s \subset B_t$, para todo $t \geqslant s$. Adicionalmente, dado $D \subset X$ um conjunto limitado e $s \in \mathbb{R}$ existe $s_0 > 0$, tal que

$$U(t,s)D \subset B_t, \qquad \text{para todo } t \geqslant s + s_0.$$

Com a finalidade de construir um TDS-pullback atrator para $\{L(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$, usando a família $\widehat{B} = \{B_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ descrita na Hipótese (H2), para cada $\tau \in \mathbb{R}$, definimos,

$$\mathcal{B}_{\tau,\ell} = \{\chi \in \mathfrak{X}_{\tau,\ell}; \chi(\tau) \in B_\tau\}. \tag{4.38}$$

Observemos que $\widehat{\mathcal{B}} = \{\mathcal{B}_{t,\ell}\}_{t\in\mathbb{R}}$ é uma família uniformemente limitada. De fato, sejam $t \in \mathbb{R}$ e $\chi \in \mathcal{B}_{t,\ell}$ arbitrária, temos

$$\|\chi\|^2_{X_{t,\ell}} = \int_0^\ell \|\chi(\theta + t)\|^2_X \, d\theta.$$

Por sua vez, segue do item (ii) da Hipótese (H2), que $\chi(\theta + t) = U(t + \theta, t)\chi(t) \in B_{t+\theta}$, para todo $\theta \in [0, \ell]$. Como a família $\{B_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ é uniformemente limitada, temos a existência de uma constante $c_{\widehat{B}} > 0$, tal que

$$\|\chi(\theta + t)\|_X \leqslant c_{\widehat{B}}, \quad \forall\, \theta \in [0, \ell].$$

Com isso,

$$\|\chi\|^2_{X_{t,\ell}} = \int_0^\ell \|\chi(\theta + t)\|^2_X \, d\theta \leqslant c^2_{\widehat{B}}\ell.$$

Logo,

$$\|\chi\|_{X_{t,\ell}} \leqslant c_{\widehat{B}}\sqrt{\ell}, \quad \forall \chi \in \mathcal{B}_{t,\ell} \text{ e } \forall t \in \mathbb{R},$$

isto é, a família $\widehat{\mathcal{B}} = \{\mathcal{B}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ é uniformemente limitada.

Além disso, $\{\mathcal{B}_{\tau,\ell}\}_{\tau\in\mathbb{R}}$ é positivamente semi-invariante com respeito a $\{L(t, \tau)\}_{t\geqslant\tau}$. De fato, sejam $\tau \in \mathbb{R}$ e $\chi \in \mathcal{B}_{\tau,\ell}$ quaisquer. Para $t \geqslant \tau$ arbitrário, temos

$$L(t, \tau)\chi(s) = u(s), \quad \forall s \in [t, t + \ell],$$

onde u é a única solução de (4.1) em $[\tau, t+\ell]$, tal que $u|_{[\tau,\tau+\ell]} = \chi$. Em particular, $u(\tau) = \chi(\tau) \in B_\tau$, segue do item (ii) da Hipótese (H2) que $u(t) \in B_t$, para todo $t \geqslant \tau$. Assim, $L(t, \tau)\chi \in \mathfrak{X}_{t,\ell}$ e

$$(L(t, \tau)\chi)(t) = L(t, \tau)\chi(t) = u(t) \in B_t.$$

Assim, $L(t, \tau)\chi \in \mathcal{B}_{t,\ell}$ e com isso mostramos que $L(t, \tau)\mathcal{B}_{\tau,\ell} \subset \mathcal{B}_{t,\ell}$.

Para construir um TDS-pullback atrator para $\{L(t, \tau)\}_{t\geqslant\tau}$ supomos,

(H3) $L(t, \tau)\colon \mathfrak{X}_{\tau,\ell} \to \mathfrak{X}_{t,\ell}$ é contínua em $\mathcal{B}_{\tau,\ell}$, para todo $t \geqslant \tau$,

(H4) $\overline{\bigcup_{r\geqslant 0} L(t, t - r)\mathcal{B}_{t-r,\ell}}^{X_{t,\ell}} \subset \mathcal{B}_{t,\ell}$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Denotamos

$$\widetilde{\mathcal{B}}_{t,\ell} := \overline{\bigcup_{r\geqslant 0} L(t, t - r)\mathcal{B}_{t-r,\ell}}^{X_{t,\ell}}, \tag{4.39}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

A Hipótese (H4) resolve a questão da incompletude de $\mathfrak{X}_{t,\ell}$ para cada $t \in \mathbb{R}$, uma vez que $\widetilde{\mathcal{B}}_{t,\ell}$ é um subconjunto fechado contido em $\mathfrak{X}_{t,\ell}$.

Suponhamos as Hipóteses alternativas para (H1) e (H4).

(H1)' Para todo $(\tau, u_\tau) \in \mathbb{R} \times X$ e $T > 0$, existe única $u \in Y_{\tau,T}$, onde $u\colon [\tau, \tau + T] \to (X, \sigma(X, X^{'}))$ é contínua e é a solução para (4.1) em $[\tau, \tau + T]$, com $u(\tau) = u_\tau$.

(H4)' $\mathcal{B}_{t,\ell}$, definido em (4.38), é compacto, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Lema 4.2.1. *(i) Suponhamos* (H1), (H2) *e* (H4). *A família* $\{\widetilde{\mathcal{B}}_{t,\ell}\}_{t\in\mathbb{R}}$, *definida em* (4.39), *é uma família uniformemente limitada de conjuntos compactos,* $\widetilde{\mathcal{B}}_{t,\ell} \subset X_{t,\ell}$, *de modo que para todo* $s \in \mathbb{R}$ *e* $R > 0$ *dado, existe* $s_0 = s_0(R) > 0$, *tal que*

$$L(t, s)\mathbb{B}_s(R) \subset \widetilde{\mathcal{B}}_{t,\ell}, \qquad \textit{para todo } t \geqslant s + s_0.$$

(ii) Suponhamos (H1)$'$, (H2) *e (H4)$'$. A família $\{\mathcal{B}_{t,\ell}\}_{t\in\mathbb{R}}$, definida em* (4.38)*, é uma família uniformemente limitada de conjuntos compactos, $\mathcal{B}_{t,\ell}\subset X_{t,\ell}$, de modo que para todo $s\in\mathbb{R}$ e $R>0$ dado, existe $s_0=s_0(R)>0$, tal que*

$$L(t,s)\mathbb{B}_s(R)\subset\mathcal{B}_{t,\ell},\qquad \textit{para todo } t\geqslant s+s_0.$$

Demonstração. Pelas Hipóteses (H1) e (H2) temos que o conjunto

$$\bigcup_{r\geqslant 0}L(t,t-r)\mathcal{B}_{t-r,\ell}$$

é limitado em $Y_{t,\ell}$, para cada $t\in\mathbb{R}$. Realmente, como $\{\mathcal{B}_{\tau,\ell}\}_{\tau\in\mathbb{R}}$ é positivamente semi-invariante com respeito a $\{L(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$, temos que

$$\bigcup_{r\geqslant 0}L(t,t-r)\mathcal{B}_{t-r,\ell}\subset\mathcal{B}_{t,\ell}.$$

Por sua vez, $\{\mathcal{B}_{t,\ell}\}_{t\in\mathbb{R}}$ é uniformemente limitada em $Y_{t,\ell}$. De fato, seja $\chi\in\mathcal{B}_{t,\ell}$, segue da Hipótese (H2) que existe uma constante $k>0$, tal que $\|\chi(t)\|_X\leqslant k$. Assim pela Hipótese (H1) temos a existência de uma constante $c=c(k)>0$ tal que

$$\|\chi\|_{Y_{t,\ell}}\leqslant c.$$

Isto é, $\mathcal{B}_{t,\ell}\subset\mathbb{B}_{Y_{t,\ell}}(c)$, para todo $t\in\mathbb{R}$. Portanto, $\bigcup_{r\geqslant 0}L(t,t-r)\mathcal{B}_{t-r,\ell}$ é limitado em $Y_{t,\ell}$, para cada $t\in\mathbb{R}$.

Como $Y_{t,\ell}\hookrightarrow\hookrightarrow X_{t,\ell}$, obtemos que $\widetilde{\mathcal{B}}_{t,\ell}$ é compacto em $X_{t,\ell}$. Além disso, $\{\widetilde{\mathcal{B}}_{t,\ell}\}_{t\in\mathbb{R}}$ é uma família uniformemente limitada, já que, pela Hipótese (H4), $\widetilde{\mathcal{B}}_{t,\ell}\subset\mathcal{B}_{t,\ell}$, para todo $t\in\mathbb{R}$.

Sejam $R>0$ e $\chi\in\mathbb{B}_s(R)=\{\psi\in\mathfrak{X}_{s,\ell};\|\psi\|_{X_{s,\ell}}\leqslant R\}$ quaisquer, notemos que existe $\tau\in[0,\ell]$ de modo que

$$\|\chi(s+\tau)\|_X\leqslant\frac{R}{\sqrt{\ell}}.$$

Suponhamos o contrário, isto é, se $\|\chi(s+\theta)\|_X>\frac{R}{\sqrt{\ell}}$, para todo $\theta\in[0,\ell]$, então

$$\|\chi\|^2_{X_{s,\ell}}=\int_s^{s+\ell}\|\chi(\theta)\|_X^2\,d\theta=\int_0^{\ell}\|\chi(s+\theta)\|_X^2\,d\theta>\int_0^{\ell}\frac{R^2}{\ell}\,dt=R^2,$$

o que contradiz $\chi\in\mathbb{B}_s(R)$.

Agora verificaremos que $L(t,s)\mathbb{B}_s(R)\subset\mathcal{B}_{t,l}$, para todo $t\geqslant s+s_0$. Pelo item (i) da Hipótese (H2), existe $s_1=s_1(\|\chi(s+\tau)\|_X)=s_1(R)>0$, tal que

$$U(t,s+\tau)\chi(s+\tau)\in B_t,\ \text{para todo } t\geqslant s+\tau+s_1.$$

Por sua vez,

$$U(t,s+\tau)\chi(s+\tau)=U(t,s+\tau)U(s+\tau,s)\chi(s)=U(t,s)\chi(s).$$

Assim, para todo $t\geqslant s+\ell+s_1\geqslant s+\tau+s_1$, considerando $s_0=s_1+\ell>0$, segue que

$$(L(t,s)\chi)(t)=U(t,s)\chi(s)\in B_t,\ \text{para todo } t\geqslant s+s_0;$$

ou seja, $L(t,s)\mathbb{B}_s(R)\subset\mathcal{B}_{t,l}$, para todo $t\geqslant s+s_0$. Ficando demonstrado o item (ii).

Portanto, para todo $t \geqslant s + s_0$, temos

$$\begin{aligned} L(t,s)\mathbb{B}_s(R) =& L(t,s+s_0)L(s+s_0,s)\mathbb{B}_s(R) \\ \subset& L(t,s+s_0)\mathcal{B}_{s+s_0,\ell} \\ \subset& \bigcup_{r\geqslant 0} L(t,t-r)\mathcal{B}_{t-r,\ell} \\ \subset& \overline{\bigcup_{r\geqslant 0} L(t,t-r)\mathcal{B}_{t-r,\ell}}^{X_{t,\ell}} = \widetilde{\mathcal{B}}_{t,\ell}. \end{aligned}$$

□

Proposição 4.2.1. *(i) Suponhamos que as Hipóteses* (H1)-(H4) *estejam satisfeitas, então o TDS-processo $\{L(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$ admite TDS-pullback atrator $\{\mathcal{A}_{t,\ell}\}_{t\in\mathbb{R}}$.*

(ii) Suponhamos que as Hipóteses $(H1)'$, (H2), (H3) *e $(H4)'$ estejam satisfeitas, então o TDS-processo $\{L(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$ admite TDS-pullback atrator $\{\mathcal{A}_{t,\ell}\}_{t\in\mathbb{R}}$.*

Demonstração. Claramente a Hipótese (H3) nos garante que $L(t,t-T)$ é uma aplicação T-fechada, para todo $T>0$. Sob as hipóteses em questão segue o Lema 4.2.1. Assim, aplicando o Teorema 4.1.1, concluímos que $\{L(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$ possui um TDS-pullback atrator $\{\mathcal{A}_{t,\ell}\}_{t\in\mathbb{R}}$. □

4.2.3 A existência de pullback atrator exponencial para $\{U(t,s)\}_{t\geqslant s}$

Nesta seção reuniremos alguns resultados que nos permitirão concluir a existência de pullback atrator exponencial para a dinâmica $\{U(t,s)\}_{t\geqslant s}$ associada a (4.1).

(H5) Existe $W_{t,\ell} \hookrightarrow\hookrightarrow X_{t,\ell}$ tal que, $L(t,s): X_{s,\ell} \to W_{t,\ell}$ é Lipschitz contínua em $\widetilde{\mathcal{B}}_{s,\ell}$, para todo $t,s\in\mathbb{R}$, com $t\geqslant s$.

Observação 4.2.1. *Um espaço típico onde a condição acima pode ser verificada é*

$$W_{t,\ell} = \{u \in L^2(t,t+\ell,W); u' \in L^1(t,t+\ell,U')\},$$

onde $W \hookrightarrow\hookrightarrow X$ e U são espaços regulares.

Lema 4.2.2. *(i) Suponha as Hipóteses* (H1)-(H5)*. Então, a propriedade (iii) do Teorema 4.1.3 é satisfeita.*

(ii) Suponha as Hipóteses $(H1)'$, (H2), (H3), *$(H4)'$ e* (H5), *substituindo $\{\widetilde{\mathcal{B}}_{t,\ell}\}_{t\in\mathbb{R}}$ por $\{\mathcal{B}_{t,\ell}\}_{t\in\mathbb{R}}$. Então, a propriedade (iii) do Teorema 4.1.3 é satisfeita.*

Demonstração. Pelo Lema 4.2.1 e pela Observação 4.1.2, temos a existência de $T>0$ de modo que

$$L(T+\tau,\tau)\widetilde{\mathcal{B}}_{\tau,\ell} \subset \widetilde{\mathcal{B}}_{T+\tau,\ell}, \quad \text{para todo } \tau\in\mathbb{R}.$$

Sejam $n,m\in\mathbb{Z}$, com $n\geqslant m$, $\tau\in\mathbb{R}$ fixado e k a constante de Lipschitz da aplicação

$$L(nT+\tau, mT+\tau)\colon X_{mT+\tau,\ell} \to W_{nT+\tau,\ell}$$

sob $\widetilde{\mathcal{B}}_{mT+\tau,\ell}$. Usando o Lema 2.1.5, para $H = X_{mT+\tau,\ell}$, $E = W_{mT+\tau,\ell}$ e $\varepsilon = \frac{1}{8k}$, existe um subespaço finito-dimensional $X^N_{mT+\tau,\ell} \subset X_{mT+\tau,\ell}$ e uma projeção ortogonal P_m sobre $X^N_{mT+\tau,\ell}$, tal que

$$\|(I - P_m)\chi\|_{X_{mT+\tau,\ell}} \leqslant \frac{1}{8k}\|\chi\|_{W_{mT+\tau,\ell}}, \text{ para todo } \chi \in W_{mT+\tau,\ell}.$$

Denotando $\widetilde{L}(n,m) = L(nT+\tau, mT+\tau)$, para $\chi_1, \chi_2 \in \widetilde{\mathcal{B}}_{mT+\tau,\ell}$ temos

$$\begin{aligned}
&\|\widetilde{L}(n,m)\chi_1 - \widetilde{L}(n,m)\chi_2\|^2_{X_{mT+\tau,\ell}} \\
&= \|P_m(\widetilde{L}(n,m)\chi_1 - \widetilde{L}(n,m)\chi_2)\|^2_{X_{mT+\tau,\ell}} + \|(I-P_m)(\widetilde{L}(n,m)\chi_1 - \widetilde{L}(n,m)\chi_2)\|^2_{X_{mT+\tau,\ell}} \\
&\leqslant \|P_m(\widetilde{L}(n,m)\chi_1 - \widetilde{L}(n,m)\chi_2)\|^2_{X_{mT+\tau,\ell}} + \frac{1}{64k^2}\|\widetilde{L}(n,m)\chi_1 - \widetilde{L}(n,m)\chi_2\|^2_{W_{mT+\tau,\ell}} \\
&\leqslant \|P_m(\widetilde{L}(n,m)\chi_1 - \widetilde{L}(n,m)\chi_2)\|^2_{X_{mT+\tau,\ell}} + \frac{1}{64}\|\chi_1 - \chi_2\|^2_{X_{mT+\tau,\ell}},
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|\widetilde{L}(n,m)\chi_1 - \widetilde{L}(n,m)\chi_2\|^2_{X_{mT+\tau,\ell}} + \frac{1}{2}\|\widetilde{L}(n,m)\chi_1 - \widetilde{L}(n,m)\chi_2\|^2_{X_{mT+\tau,\ell}} \\
&\leqslant \|P_m(\widetilde{L}(n,m)\chi_1 - \widetilde{L}(n,m)\chi_2)\|^2_{X_{mT+\tau,\ell}} + \frac{1}{64}\|\chi_1 - \chi_2\|^2_{X_{mT+\tau,\ell}}.
\end{aligned}$$

Então, necessariamente, ocorre

$$\frac{1}{2}\|\widetilde{L}(n,m)\chi_1 - \widetilde{L}(n,m)\chi_2\|^2_{X_{mT+\tau,\ell}} \leqslant \|P_m(\widetilde{L}(n,m)\chi_1 - \widetilde{L}(n,m)\chi_2)\|^2_{X_{mT+\tau,\ell}}$$

ou

$$\frac{1}{2}\|\widetilde{L}(n,m)\chi_1 - \widetilde{L}(n,m)\chi_2\|^2_{X_{mT+\tau,\ell}} \leqslant \frac{1}{64}\|\chi_1 - \chi_2\|^2_{X_{mT+\tau,\ell}}.$$

Implicando no item (iii) do Teorema 4.1.3, isto é, $\widetilde{L}(n) = \widetilde{L}(n+1,n)$ satisfaz a propriedade squeezing uniforme sob a família $\{\widetilde{\mathcal{B}}_{nT+\tau,\ell}\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

A demonstração do item *(ii)* segue de maneira análoga. □

Finalmente, para construirmos o TDS-pullback atrator exponencial associado a $\{L(t,s)\}_{t\geqslant s}$, consideramos

(H6) Para algum $A > 0$, o operador $L(t, t-s)\colon \mathfrak{X}_{t-s,\ell} \to \mathfrak{X}_{t,\ell}$ é uniformemente, com respeito a $s \in [A, 2A]$, Lipschitz contínuo. Isto é, existe $C > 0$, independente de $t, s \in \mathbb{R}$, tal que

$$\|L(t,t-s)\chi_1 - L(t,t-s)\chi_2\|_{X_{t,\ell}} \leqslant C\|\chi_1 - \chi_2\|_{X_{t-s,\ell}}, \quad \forall \chi_1, \chi_2 \in \mathfrak{X}_{t-s,\ell}, \quad A \leqslant s \leqslant 2A.$$

Estamos prontos para enunciar o seguinte resultado.

Lema 4.2.3. *Seja X um espaço de Hilbert.*

(i) Suponha (H1)-(H6). *Então, $\{L(t,s)\}_{t\geqslant s}$ possui um TDS-pullback atrator exponencial $\{\mathcal{M}_{t,\ell}\}_{t\in\mathbb{R}}$.*

(ii) Suponha (H1)′, (H2), (H3), *(H4)′,* (H5) *e* (H6), *substituindo $\{\widetilde{\mathcal{B}}_{t,\ell}\}_{t\in\mathbb{R}}$ por $\{\mathcal{B}_{t,\ell}\}_{t\in\mathbb{R}}$. Então, $\{L(t,s)\}_{t\geqslant s}$ possui um TDS-pullback atrator exponencial $\{\mathcal{M}_{t,\ell}\}_{t\in\mathbb{R}}$.*

Demonstração. Consideremos a família $\{\widetilde{\mathcal{B}}_{t,\ell}\}_{t\in\mathbb{R}}$, definida em (4.39), usando o Lema 4.2.1 concluímos a propriedade (i) do Teorema 4.1.3. Pela Observação 4.1.2, existe uma constante $T = T(\{\widetilde{\mathcal{B}}_{t,\ell}\}_{t\in\mathbb{R}}) > 0$, a qual podemos supor $T \geqslant A$, tal que

$$L(T+t,t)\widetilde{\mathcal{B}}_{t,\ell} \subset \widetilde{\mathcal{B}}_{T+t,\ell}.$$

Usando a propriedade (H6) repetidas vezes, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos a existência de $C > 0$, independente de $t, s \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|L(t,t-s)\chi_1 - L(t,t-s)\chi_2\|_{X_{t,\ell}} \leqslant C^n \|\chi_1 - \chi_2\|_{X_{t-s,\ell}}, \quad \forall \chi_1, \chi_2 \in \mathfrak{X}_{t-s,\ell}, \quad A \leqslant s \leqslant (n+1)A, \tag{4.40}$$

basta notar que $A < \frac{s}{n} \leqslant \frac{(n+1)}{n}A < 2A$ e

$$L(t,t-s) = L\left(t, t-\frac{s}{n}\right) L\left(t-\frac{s}{n}, t-\frac{s}{n}-\frac{s}{n}\right) \dots L\left(t-\frac{(n-1)s}{n}, t-\frac{(n-1)s}{n}-\frac{s}{n}\right).$$

Como T é um número real, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2T \leqslant (n_0+1)A$. Desta forma, $[T, 2T] \subset [A, (n_0+1)A]$ e (4.40) ocorre para todo $T \leqslant s \leqslant 2T$, logo obtemos (ii) do Teorema 4.1.3. A demonstração segue pelo Lema 4.2.2 e pelo Teorema 4.1.3. $\square$

Nosso próximo passo é estabelecer uma relação entre a família $\{\mathfrak{X}_{t,\ell}\}_{t\in\mathbb{R}}$ e o espaço X. Para cada $\tau \in \mathbb{R}$, consideremos as aplicações,

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_\tau \colon \mathfrak{X}_{\tau,\ell} &\to X \\ \chi &\mapsto \chi(\tau) \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} \mathbf{e}_\tau \colon \mathfrak{X}_{\tau,\ell} &\to X \\ \chi &\mapsto \chi(\tau+\ell), \end{aligned}$$

indicadas na Figura 4.2. Pela Hipótese (H1) essas definições fazem sentido, já que as trajetórias são fracamente contínuas.

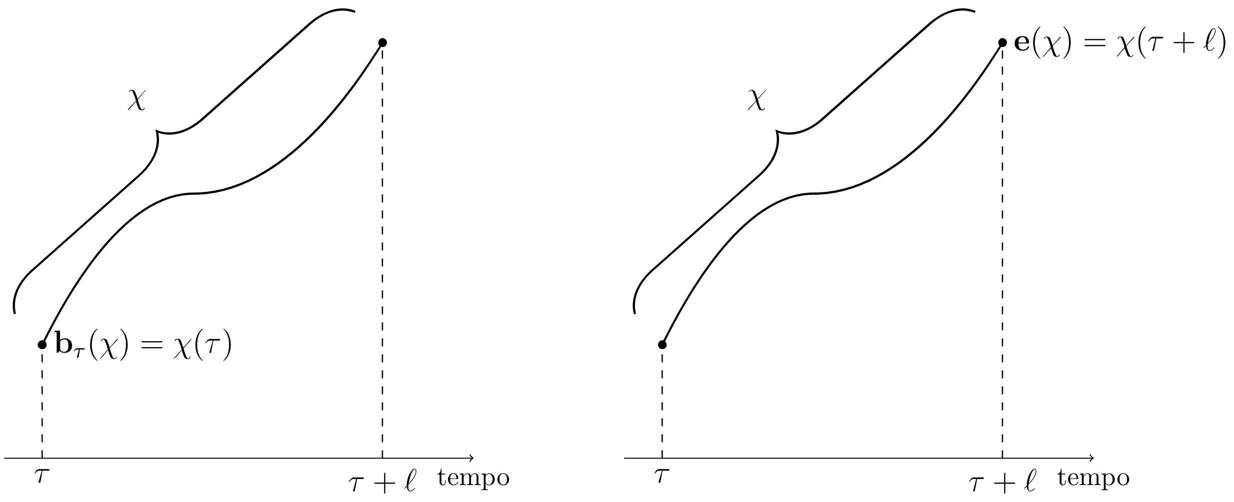

Figura 4.2: Representação das aplicações $\mathbf{b}_\tau$ e $\mathbf{e}_\tau$, $\tau \in \mathbb{R}$

Notemos que

$$B_\tau = \mathbf{b}_\tau(\mathcal{B}_{\tau,\ell}), \quad \forall \tau \in \mathbb{R}.$$

Seja $\chi \in \mathcal{B}_{\tau,\ell}$, temos que $\mathbf{b}_\tau(\chi) = \chi(\tau) \in B_\tau$, ou seja, $\mathbf{b}_\tau(\mathcal{B}_{\tau,\ell}) \subset B_\tau$. Por outro lado, consideremos $x \in B_\tau$ arbitrário, pela hipótese (H1), existe única solução u para o problema (4.1), com $u(\tau) = x$. Seja $\chi = u|_{[\tau,\tau+\ell]}$, segue que $\chi \in \mathcal{B}_{\tau,\ell}$ e

$$x = u(\tau) = \chi(\tau) = \mathbf{b}_\tau(\chi) \in \mathbf{b}_\tau(\mathcal{B}_{\tau,\ell}),$$

isto é, $B_\tau \subset \mathbf{b}_\tau(\mathcal{B}_{\tau,\ell})$, ficando demonstrada a igualdade.

Seja $\{\mathcal{A}_{t,\ell}\}_{t\in\mathbb{R}}$ um TDS-pullback atrator para o TDS-processo $\{L(t,s)\}_{t\geqslant s}$. Suponhamos

(H7) $\mathbf{b}_\tau\colon \mathfrak{X}_{\tau,\ell}\to X$ é contínua em $\mathcal{B}_{\tau,\ell}$, para todo $\tau\in\mathbb{R}$.

Considerando o conjunto

$$\mathcal{A}_t := \mathbf{b}_t(\mathcal{A}_{t,\ell}) \tag{4.41}$$

obtemos o seguinte resultado,

Lema 4.2.4. *(i) Se* (H1)- (H4) *e* (H7) *são satisfeitas. Então,* $\{\mathcal{A}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$*,* $\mathcal{A}_t$ *definido em* (4.41)*, é um pullback atrator para o processo* $\{U(t,s)\}_{t\geqslant s}$ *associado a* (4.1)*.*

(ii) Se $(H1)'$, (H2), (H3), $(H4)'$ *e* (H7) *são satisfeitas. Então,* $\{\mathcal{A}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$*,* $\mathcal{A}_t$ *definido em* (4.41)*, é um pullback atrator para o processo* $\{U(t,s)\}_{t\geqslant s}$ *associado a* (4.1)*.*

Demonstração. Segue de (H7) que $\mathcal{A}_t$ é um conjunto compacto, pois é a imagem do compacto $\mathcal{A}_{t,\ell}$ por $\mathbf{b}_t$, para todo $t\in\mathbb{R}$.

Seja $t\geqslant\tau$, então $U(t,\tau)\mathbf{b}_\tau(\mathcal{A}_{\tau,\ell})=\mathbf{b}_t(L(t,\tau)\mathcal{A}_{\tau,\ell})$. De fato, seja $\chi\in\mathcal{A}_{\tau,\ell}$, temos

$$U(t,\tau)\mathbf{b}_\tau(\chi)=U(t,\tau)\chi(\tau)=(L(t,\tau)\chi)(t)=\mathbf{b}_t(L(t,\tau)\chi). \tag{4.42}$$

Com isso,

$$U(t,\tau)\mathcal{A}_\tau=U(t,\tau)\mathbf{b}_\tau(\mathcal{A}_{\tau,\ell})=\mathbf{b}_t(L(t,\tau)\mathcal{A}_{\tau,\ell})=\mathbf{b}_t(\mathcal{A}_{t,\ell})=\mathcal{A}_t.$$

Para demonstrar a propriedade de pullback atração, devido a Hipótese (H2), é suficiente garantir que

$$\lim_{\tau\to-\infty}\operatorname{dist}(U(t,\tau)B_\tau,\mathcal{A}_t)=0. \tag{4.43}$$

Já verificamos previamente que $\{\mathcal{B}_{t,\ell}\}_{t\in\mathbb{R}}$ é uma família uniformemente limitada. Sendo a família $\{\mathcal{A}_{t,\ell}\}_{t\in\mathbb{R}}$ um TDS-pullback atrator para o TDS-processo $\{L(t,s)\}_{t\geqslant s}$, segue da propriedade (iii), da Definição 4.1.5, que

$$\lim_{\tau\to-\infty}\operatorname{dist}_t(L(t,\tau)\mathcal{B}_{\tau,\ell},\mathcal{A}_{t,\ell})=0,$$

isto é, dado $\eta>0$, existe $\tau_0<0$, tal que $\mathrm{d}_{X_{t,\ell}}(L(t,\tau)\chi,\mathcal{A}_{t,\ell})<\eta$, para todo $\tau\leqslant\tau_0$ e todo $\chi\in\mathcal{B}_{\tau,\ell}$.

Como $\mathbf{b}_t\colon\mathfrak{X}_{t,\ell}\to X$ é contínua em $\mathcal{B}_{t,\ell}$ e $\mathcal{A}_{t,\ell}\subset\mathcal{B}_{t,\ell}\subset\mathfrak{X}_{t,\ell}$ é um conjunto compacto, dado $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$, dependendo somente de ε e $\mathcal{A}_{t,\ell}$, tal que, para todo $\chi\in\mathcal{B}_{t,\ell}$ e $\widetilde{\chi}\in\mathcal{A}_{t,\ell}$, com $\|\chi-\widetilde{\chi}\|_{X_{t,\ell}}<\delta$, temos

$$\|\mathbf{b}_t(\chi)-\mathbf{b}_t(\widetilde{\chi})\|_X<\varepsilon.$$

Para $\eta=\delta>0$, existe $\tau_0<0$ tal que, para todo $\tau\leqslant\tau_0$ e todo $\psi\in\mathcal{A}_{t,\ell}$ com $\|L(t,\tau)\chi-\psi\|_{X_{t,\ell}}<\delta$, onde $\chi\in\mathcal{B}_{\tau,\ell}$ é arbitrária, temos

$$\|\mathbf{b}_t(L(t,\tau)\chi)-\mathbf{b}_t(\psi)\|_X<\varepsilon,$$

assim,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_X(U(t,\tau)\chi(\tau),\mathcal{A}_t)&=\inf_{y\in\mathcal{A}_t}\|U(t,\tau)\chi(\tau)-y\|_X\\&\leqslant\|U(t,\tau)\chi(\tau)-\mathbf{b}_t(\psi)\|_X\\&=\|\mathbf{b}_t(L(t,\tau)\chi)-\mathbf{b}_t(\psi)\|_X<\varepsilon.\end{aligned}$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, temos a existência de $\tau_0 < 0$ tal que, para todo $\tau \leqslant \tau_0$,

$$\operatorname{dist}(U(t,\tau)B_\tau, \mathcal{A}_t) = \sup_{\chi \in \mathcal{B}_{\tau,\ell}} \mathrm{d}_X(U(t,\tau)\mathbf{b}_\tau(\chi), \mathcal{A}_t) = \sup_{\chi \in \mathcal{B}_{\tau,\ell}} \mathrm{d}_X(U(t,\tau)\chi(\tau), \mathcal{A}_t) \leqslant \varepsilon.$$

Obtemos então (4.43) e, consequentemente, $\{\mathcal{A}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ é um pullback atrator para $\{U(t,s)\}_{t\geqslant s}$. □

Observação 4.2.2. *Para cada $\tau \in \mathbb{R}$, considere um conjunto não vazio $\mathcal{C}_\tau \subset \mathfrak{X}_{\tau,\ell}$. Pelas mesmas igualdades obtidas em* (4.42) *com $\chi \in \mathcal{C}_\tau$, podemos concluir que*

$$U(t,\tau)\mathbf{b}_\tau(\mathcal{C}_\tau) = \mathbf{b}_t(L(t,\tau)\mathcal{C}_\tau).$$

Finalmente, suponhamos

(H8) $\mathbf{e}_\tau\colon \mathfrak{X}_{\tau,\ell} \to X$ é α-Hölder contínua sob $\mathcal{B}_{\tau,\ell}$, para todo $\tau \in \mathbb{R}$.

Sob as hipóteses do Lema 4.2.3, existe $\{\mathcal{M}_{t,\ell}\}_{t\in\mathbb{R}}$ um TDS-pullback atrator exponencial para $\{L(t,s)\}_{t\geqslant s}$. Consideramos

$$\mathcal{M}_{t+\ell} := \mathbf{e}_t(\mathcal{M}_{t,\ell}), \qquad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \tag{4.44}$$

Teorema 4.2.1. *Seja X um espaço de Hilbert.*

(i) Suponhamos que (H1)-(H6) *e* (H8) *são satisfeitas. Então $\{\mathcal{M}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, definido em* (4.44)*, é um pullback atrator exponencial para $\{U(t,s)\}_{t\geqslant s}$.*

(ii) Suponhamos que (H1)$'$, (H2), (H3), *(H4)$'$,* (H5), (H6) *e* (H8) *são satisfeitas, substituindo $\{\widetilde{\mathcal{B}}_{t,\ell}\}_{t\in\mathbb{R}}$ por $\{\mathcal{B}_{t,\ell}\}_{t\in\mathbb{R}}$. Então $\{\mathcal{M}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, definido em* (4.44)*, é um pullback atrator exponencial para $\{U(t,s)\}_{t\geqslant s}$.*

Demonstração. Claramente $\mathcal{M}_t \subset X$ é um conjunto compacto, para todo $t \in \mathbb{R}$. Notemos que $\mathcal{M}_{t+\ell} = U(t+\ell,t)\mathbf{b}_t(\mathcal{M}_{t,\ell})$, já que

$$U(t+\ell,t)\mathbf{b}_t(\chi) = \mathbf{e}_t(\chi),$$

para todo $\chi \in \mathcal{M}_{t,\ell}$ e todo $t \in \mathbb{R}$. Assim, pela Observação 4.2.2, para $t \geqslant s$ temos

$$\begin{aligned} U(t,s)\mathcal{M}_s =& U(t,s)U(s,s-\ell)\mathbf{b}_{s-\ell}(\mathcal{M}_{s-\ell,\ell}) \\ =& U(t,s-\ell)\mathbf{b}_{s-\ell}(\mathcal{M}_{s-\ell,\ell}) \\ =& U(t,t-\ell)U(t-\ell,s-\ell)\mathbf{b}_{s-\ell}(\mathcal{M}_{s-\ell,\ell}) \\ =& U(t,t-\ell)\mathbf{b}_{t-\ell}(L(t-\ell,s-\ell)\mathcal{M}_{s-\ell,\ell}) \\ \subset& U(t,t-\ell)\mathbf{b}_{t-\ell}(\mathcal{M}_{t-\ell,\ell}) = \mathcal{M}_t. \end{aligned}$$

Usando o Lema 2.1.2, concluímos a dimensão fractal finita de $\{\mathcal{M}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$.

Observando que

$$\mathbf{e}_{t-\ell}(L(t-\ell,s)\chi) = (L(t-\ell,s)\chi)(t) = U(t,s)\chi(s) = U(t,s)\mathbf{b}_s(\chi),$$

para todo $t \geqslant s$ e $\chi \in \mathcal{B}_{s,\ell}$, isto é,

$$\mathbf{e}_{t-\ell}(L(t-\ell,s)\mathcal{B}_{s,\ell}) = U(t,s)\mathbf{b}_s(\mathcal{B}_{s,\ell}).$$

Segue da Hipótese (H8), que

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(U(t,s)B_s,\mathcal{M}_t) =&\operatorname{dist}(\mathbf{e}_{t-\ell}(L(t-\ell,s)\mathcal{B}_{s,\ell}),\mathbf{e}_{t-\ell}(\mathcal{M}_{t-\ell,\ell}))\\ \leqslant& C_{\mathbf{e}_{t-\ell}}\operatorname{dist}_{t-\ell}(L(t-\ell,s)\mathcal{B}_{s,\ell},\mathcal{M}_{t-\ell,\ell})^{\alpha},\end{aligned}$$

onde $C_{\mathbf{e}_{t-\ell}} > 0$ é uma constante positiva associada aplicação $\mathbf{e}_{t-\ell}$.

Pela propriedade de TDS-pullback atração de $\{\mathcal{M}_{t,\ell}\}_{t\in\mathbb{R}}$ com respeito a $\{L(t,s)\}_{t\geqslant s}$, existe $\omega > 0$ tal que

$$\lim_{s\to-\infty} e^{\omega(t-\ell-s)}\operatorname{dist}_{t-\ell}(L(t-\ell,s)\mathcal{B}_{s,\ell},\mathcal{M}_{t-\ell,\ell}) = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}e^{\alpha\omega(t-s)}\operatorname{dist}(U(t,s)B_s,\mathcal{M}_t) &\leqslant C_{\mathbf{e}_{t-\ell}}e^{\alpha\omega(t-s)}\operatorname{dist}_{t-\ell}(L(t-\ell,s)\mathcal{B}_{s,\ell},\mathcal{M}_{t-\ell,\ell})^{\alpha}\\ &= C_{\mathbf{e}_{t-\ell}}\left(e^{\omega(t-s)}\operatorname{dist}_{t-\ell}(L(t-\ell,s)\mathcal{B}_{s,\ell},\mathcal{M}_{t-\ell,\ell})\right)^{\alpha}\\ &= C_{\mathbf{e}_{t-\ell}}e^{\omega\ell\alpha}\left(e^{\omega(t-\ell-s)}\operatorname{dist}_{t-\ell}(L(t-\ell,s)\mathcal{B}_{s,\ell},\mathcal{M}_{t-\ell,\ell})\right)^{\alpha},\end{aligned}$$

fazendo $s\to-\infty$, obtemos a pullback atração exponencial. $\square$

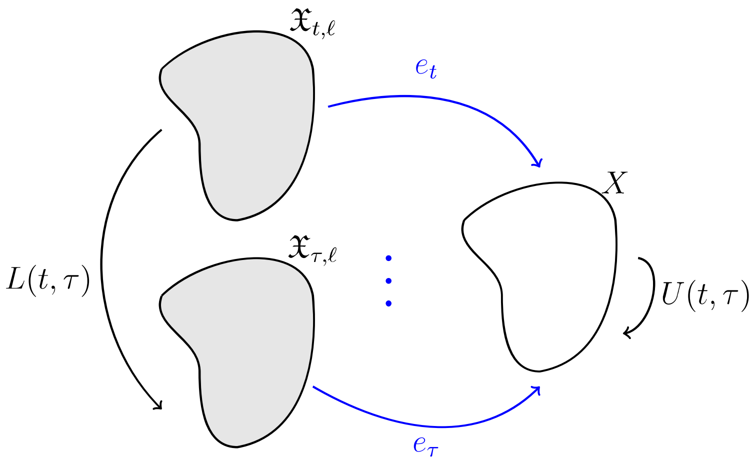

Figura 4.3: Relação entre as dinâmicas $L(t,\tau)$ e $U(t,\tau)$

Capítulo 5

Existência de pullback atrator exponencial para uma família de problemas envolvendo o $p(x)$-Laplaciano com difusão grande localizada

Neste Capítulo iremos aplicar a teoria apresentada no Capítulo 4 com o objetivo de concluir a existência de pullback atrator exponencial para a seguinte família de problemas não autônomos,

$$\begin{cases} u_t^\lambda - \operatorname{div}(d_\lambda(t)(|\nabla u^\lambda|^{p(x)-2} + \eta)\nabla u^\lambda) + |u^\lambda|^{p(x)-2}u^\lambda = B(t, u^\lambda), & t > \tau, \text{ em } \Omega \\ u^\lambda(t) = 0, & \text{em } \partial\Omega \\ u^\lambda(\tau) = u_\tau^\lambda \in L^2(\Omega), & \tau \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{5.1}$$

onde $\lambda \in (0, 1]$ e $\eta > 0$, bem como para o problema limite

$$\begin{cases} u_t(t) - \operatorname{div}(d_0(t)(|\nabla u(t)|^{p(x)-2} + \eta)\nabla u(t)) + |u(t)|^{p(x)-2}u(t) = B(t, u(t)), \ t > \tau, \text{ em } \Omega_1 \\ u(t)_{|\Omega_{0,i}} := u_{\Omega_{0,i}}(t), \text{ em } \Omega_{0,i} \\ \dot{u}_{\Omega_{0,i}}(t) + \dfrac{1}{|\Omega_{0,i}|}\Bigg[\displaystyle\int_{\Gamma_{0,i}} d_0(t)(|\nabla u(t)|^{p(x)-2} + \eta)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(t)\, dx \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_{\Omega_{0,i}} |u_{\Omega_{0,i}}(t)|^{p(x)-2}u_{\Omega_{0,i}}(t)\, dx\Bigg] = B(t, u_{\Omega_{0,i}}(t)), \ t > \tau \\ u(t) = 0, \text{ em } \partial\Omega \\ u(\tau) = u_\tau, \ \tau \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

obtido na próxima seção, fazendo $\lambda \to 0$.

5.1 Apresentação da família de problemas

Consideramos as mesmas condições espaciais apresentadas na Seção 3.1, do Capítulo 3, isto é, assumimos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, com $n \geq 1$, aberto, conexo, limitado e suave com fronteira $\Gamma = \partial\Omega$. Denotaremos por Ω_0 um subconjunto aberto de Ω suave tal que $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$ e $\Omega_0 = \bigcup\limits_{i=1}^{m} \Omega_{0,i}$ onde

m é um inteiro positivo e $\Omega_{0,i}$ são subconjuntos, abertos, suaves e conexos de Ω satisfazendo $\overline{\Omega}_{0,i} \cap \overline{\Omega}_{0,j} = \emptyset$, para $i \neq j$. Sejam $\Omega_1 = \Omega \setminus \overline{\Omega}_0$, $\Gamma_{0,i} = \partial\Omega_{0,i}$ e $\Gamma_0 = \bigcup\limits_{i=1}^{m} \Gamma_{0,i}$ as fronteiras de $\Omega_{0,i}$ e Ω_0, respectivamente, temos $\Gamma \cap \Gamma_0 = \emptyset$. Note que $\partial\Omega_1 = \Gamma \cup \Gamma_0$.

Em (5.1) consideramos η uma constante positiva e $p \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^+)$ com

$$2 < p^- := \inf \ \text{ess}\ p \leqslant p(x) \leqslant \sup \ \text{ess}\ p := p^+.$$

Seja $T > \tau$, assumimos que a aplicação $B\colon [\tau, T] \times L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ satisfaz as hipóteses enunciadas a seguir

(B1) Existe constante $L_B \geqslant 0$, tal que

$$\|B(t, x_1) - B(t, x_2)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant L_B \|x_1 - x_2\|_{L^2(\Omega)},$$

para todo $t \in [\tau, T]$ e $x_1, x_2 \in L^2(\Omega)$.

(B2) A função $t \mapsto \|B(t, 0)\|_{L^2(\Omega)}$ é limitada, isto é, existe constante $b_0 > 0$, tal que $\|B(t, 0)\|_{H_0} \leqslant b_0$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

(B3) Para todo $x \in L^2(\Omega)$ a aplicação $t \mapsto B(t, x)$ pertence a $L^2(\tau, T; L^2(\Omega))$.

Suponhamos que $d_\lambda(t, \cdot)\colon \Omega \to (0, \infty)$ são funções suaves em Ω e existem constantes m_0 e M_λ, satisfazendo

$$0 < m_0 \leqslant d_\lambda(t, x) \leqslant M_\lambda,$$

para quase todo $(t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega$ e $0 < \lambda \leqslant 1$. Assumimos ainda uma difusão grande em Ω_0 conforme $\lambda \to 0$, mais precisamente, fixado $t \in \mathbb{R}$, temos

$$d_\lambda(t, x) \xrightarrow{\lambda \to 0} \begin{cases} d_0(t, x), & \text{uniformemente em } \Omega_1; \\ \infty, & \text{uniformemente em subconjuntos compactos de } \Omega_0, \end{cases} \tag{5.2}$$

onde $d_0(t, \cdot)\colon \overline{\Omega_1} \to (0, \infty)$ é uma função suave satisfazendo

$$0 < m_0 \leqslant d_0(t, x) \leqslant M_0, \tag{5.3}$$

para quase todo $(t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega_1$.

Vamos assumir ainda, para cada $\lambda \in [0, 1]$, que $d_\lambda(t, x) \geqslant d_\lambda(s, x)$, para todo $x \in \Omega$ e $t \leqslant s$.

Como a difusão $d_\lambda(t)$ é grande em regiões localizadas dentro do domínio Ω, então, conforme $\lambda \to 0$, esperamos ter uma rápida redistribuição das não homogeneidades espaciais. Assim, é natural esperar que para pequenos valores de λ a solução, $u^\lambda(t)$, se torne espacialmente constante nas regiões de difusão grande. Por essa razão, suponha que $u^\lambda(t)$ converge para $u(t)$ quando $\lambda \to 0$, em algum sentido, e que $u(t)$ assume sobre Ω_0 um valor espacialmente constante, que iremos denotar por $u_{\Omega_0}(t)$.

Neste contexto pretendemos obter a equação que descreve o problema limite. Notemos que, como a função limite $u(t)$ é constante em Ω_0, denotamos $u_{\Omega_0}(t)$, então $u(t)$ não pode ser arbitrária. Além disso, em $\Gamma_0 = \partial\Omega_0$, devemos ter $u(t, \cdot)_{|\Gamma_0} = u_{\Omega_0}(t)$. Em Ω_1, temos

$$u_t^\lambda(t) - \operatorname{div}(d_\lambda(t)(|\nabla u^\lambda(t)|^{p(x)-2} + \eta)\nabla u^\lambda(t)) + |u^\lambda(t)|^{p(x)-2} u^\lambda(t) = B(t, u^\lambda(t)).$$

Das propriedades de convergência da função $d_\lambda(t,\cdot)$ em Ω_1, fazendo $\lambda \to 0$, segue, para $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$, que

$$u_t(t) - \operatorname{div}(d_0(t)(|\nabla u(t)|^{p(x)-2} + \eta)\nabla u(t)) + |u(t)|^{p(x)-2}u(t) = B(t, u(t)).$$

Sobre Ω_0, temos

$$\int_{\Omega_0} u_t^\lambda(t)\, dx - \int_{\Omega_0} \operatorname{div}(d_\lambda(t)(|\nabla u^\lambda(t)|^{p(x)-2}+\eta)\nabla u^\lambda(t))\, dx + \int_{\Omega_0} |u^\lambda(t)|^{p(x)-2}u^\lambda(t)\, dx = \int_{\Omega_0} B(t, u^\lambda(t))\, dx.$$

Segue do Teorema da divergência de Gauss que

$$\int_{\Omega_0} u_t^\lambda(t)\, dx + \int_{\Gamma_0} d_\lambda(t)(|\nabla u^\lambda(t)|^{p(x)-2} + \eta)\frac{\partial u^\lambda}{\partial \vec{n}}(t)\, dx + \int_{\Omega_0} |u^\lambda(t)|^{p(x)-2}u^\lambda(t)\, dx = \int_{\Omega_0} B(t, u^\lambda(t))\, dx,$$

onde $\vec{n}$ denota o vetor normal unitário na fronteira de Ω_0 voltado para o interior de Ω_0. Decorre de (5.2) e da continuidade das funções d_λ, para todo $\lambda \in [0,1]$, que $d_\lambda(t,x) \xrightarrow{\lambda\to 0} d_0(t,x)$ uniformemente em $\overline{\Omega}_1$. Logo, tomando o limite quando $\lambda \to 0$, obtemos a seguinte equação diferencial ordinária,

$$\dot{u}_{\Omega_0}(t) + \frac{1}{|\Omega_0|}\left(\int_{\Gamma_0} d_0(t)(|\nabla u(t)|^{p(x)-2} + \eta)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(t)\, dx + \int_{\Omega_0} |u_{\Omega_0}(t)|^{p(x)-2}u_{\Omega_0}(t)\, dx \right) = B(t, u_{\Omega_0}(t)).$$

Com essas considerações escrevemos o problema limite da seguinte forma

$$\begin{cases} u_t(t) - \operatorname{div}(d_0(t)(|\nabla u(t)|^{p(x)-2} + \eta)\nabla u(t)) + |u(t)|^{p(x)-2}u(t) = B(t, u(t)),\ t > \tau, \text{ em } \Omega_1 \\ u(t)_{|\Omega_{0,i}} := u_{\Omega_{0,i}}(t), \text{ em } \Omega_{0,i} \\ \dot{u}_{\Omega_{0,i}}(t) + \dfrac{1}{|\Omega_{0,i}|}\Bigg[\displaystyle\int_{\Gamma_{0,i}} d_0(t)(|\nabla u(t)|^{p(x)-2} + \eta)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(t)\, dx \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_{\Omega_{0,i}} |u_{\Omega_{0,i}}(t)|^{p(x)-2}u_{\Omega_{0,i}}(t)\, dx \Bigg] = B(t, u_{\Omega_{0,i}}(t)),\ t > \tau \\ u(t) = 0, \text{ em } \partial\Omega \\ u(\tau) = u_\tau,\ \tau \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{5.4}$$

5.2 Existência de solução para (5.1) e (5.4)

Nesta seção, iremos apresentar os operadores associados aos problemas (5.1) e (5.4) e algumas de suas propriedades. Por fim, garantiremos a existência de uma única solução para (5.1) e (5.4).

Consideramos as notações,

$$V := W_0^{1,p(x)}(\Omega), \quad V_0 := W_{\Omega_0,0}^{1,p(x)}(\Omega) := \{u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) : u \text{ é constante em } \Omega_0\},$$
$$H := L^2(\Omega), \quad H_0 := L^2_{\Omega_0}(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) : u \text{ é constante em } \Omega_0\}.$$

Munimos o espaço V_0 com a norma em V, isto é,

$$\|v\|_V := \|v\|_{L^{p(x)}(\Omega)} + \|\nabla v\|_{L^{p(x)}(\Omega)}.$$

Os espaços V e V_0 são espaços de Banach reflexivos, V denso no espaço de Hilbert H e V_0 denso em H_0. Além disso, $V \hookrightarrow\hookrightarrow H \hookrightarrow V'$ o que implica que $V_0 \hookrightarrow\hookrightarrow H_0 \hookrightarrow V_0'$.

Para cada $\lambda \in (0,1]$, consideremos o operador $A_\lambda(t)$ definido em V tal que, para cada $u \in V$, associamos o seguinte elemento de V', $A_\lambda(t)u\colon V \to \mathbb{R}$, dado por

$$\begin{aligned}\langle A_\lambda(t)u, v\rangle_{V',V} &:= \int_\Omega -\operatorname{div}(d_\lambda(t,x)(|\nabla u|^{p(x)-2} + \eta)\nabla u)v\ dx + \int_\Omega |u|^{p(x)-2}uv\ dx \\ &= \int_\Omega d_\lambda(t,x)(|\nabla u|^{p(x)-2} + \eta)\nabla u \nabla v\ dx + \int_\Omega |u|^{p(x)-2}uv\ dx, \quad \forall v \in V.\end{aligned}$$

Consideremos $A_0(t)$ definido em V_0 tal que, para cada $u \in V_0$, associamos o seguinte elemento de V_0', $A_0(t)u\colon V_0 \to \mathbb{R}$, dado por

$$\begin{aligned}\langle A_0(t)u, v\rangle_{V_0',V_0} := &\int_{\Omega_1} -\operatorname{div}(d_0(t,x)(|\nabla u|^{p(x)-2} + \eta)\nabla u)v\ dx + \int_\Omega |u|^{p(x)-2}uv\ dx \\ &+ \int_{\Gamma_0} d_0(t,x)(|\nabla u|^{p(x)-2} + \eta)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} v\ dx, \quad \forall v \in V_0.\end{aligned}$$

A seguir concluímos algumas propriedades envolvendo os operadores $A_\lambda(t)\colon V \to V'$, para todo $\lambda \in (0,1]$, e $A_0(t)\colon V_0 \to V_0'$.

Lema 5.2.1. *Sejam $T > \tau$, $t \in [\tau, T]$ e $u \in V$, temos*

$$\langle A_\lambda(t)u, u\rangle_{V',V} \geqslant \begin{cases} \dfrac{\min\{m_0,1\}}{2^{p^+}}\|u\|_V^{p^+}, & se\ \|u\|_V \leqslant 1, \\ \dfrac{\min\{m_0,1\}}{2^{p^+}}\|u\|_V^{p^-}, & se\ \|u\|_V \geqslant 1, \end{cases}$$

para todo $\lambda \in (0,1]$. Além disso, se $u \in V_0$ temos

$$\langle A_0(t)u, u\rangle_{V_0',V_0} \geqslant \begin{cases} \dfrac{\min\{m_0,1\}}{2^{p^+}}\|u\|_{V_0}^{p^+}, & se\ \|u\|_{V_0} \leqslant 1, \\ \dfrac{\min\{m_0,1\}}{2^{p^+}}\|u\|_{V_0}^{p^-}, & se\ \|u\|_{V_0} \geqslant 1. \end{cases}$$

Demonstração. Demonstraremos o caso $\lambda = 0$, o caso $\lambda \in (0,1]$ pode ser demonstrado similarmente. Seja $u \in V_0$ qualquer, pelo Teorema da Divergência, temos

$$\langle A_0(t)u, u\rangle_{V_0',V_0} = \int_{\Omega_1} -\operatorname{div}(d_0(t,x)(|\nabla u|^{p(x)-2} + \eta)\nabla u)u\ dx + \int_\Omega |u|^{p(x)-2}uu\ dx$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad\qquad\qquad + \int_{\Gamma_0} d_0(t,x)(|\nabla u|^{p(x)-2}+\eta)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} u \; dx \\
&= \int_{\Gamma_0} - d_0(t,x)(|\nabla u|^{p(x)-2}+\eta)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} u \; dx + \int_{\Omega_1} d_0(t,x)(|\nabla u|^{p(x)-2}+\eta)\nabla u \nabla u \; dx \\
&\qquad + \int_{\Omega} |u|^{p(x)-2} u u \; dx + \int_{\Gamma_0} d_0(t,x)(|\nabla u|^{p(x)-2}+\eta)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} u \; dx \\
&= \int_{\Omega_1} d_0(t,x)|\nabla u|^{p(x)} \; dx + \int_{\Omega_1} d_0(t,x)\eta|\nabla u|^2 \; dx + \int_{\Omega} |u|^{p(x)} \; dx \\
&\geqslant m_0 \int_{\Omega_1} |\nabla u|^{p(x)} \; dx + m_0\eta\|\nabla u\|_{H_0}^2 + \int_{\Omega} |u|^{p(x)} \; dx \\
&\geqslant m_0 \int_{\Omega_1} |\nabla u|^{p(x)} \; dx + \int_{\Omega} |u|^{p(x)} \; dx \\
&\geqslant \min\{m_0, 1\}(\rho(|\nabla u|)+\rho(u)). \qquad (5.5)
\end{aligned}
$$

Suponhamos que $\|u\|_{V_0} \leqslant 1$, então necessariamente $\|u\|_{p(x)} \leqslant 1$ e $\|\nabla u\|_{p(x)} \leqslant 1$. Pela Proposição 1.1.3, temos que $\rho(u) \geqslant \|u\|_{p(x)}^{p^+}$ e $\rho(|\nabla u|) \geqslant \|\nabla u\|_{p(x)}^{p^+}$. Assim,

$$\rho(u) + \rho(|\nabla u|) \geqslant \|u\|_{p(x)}^{p^+} + \|\nabla u\|_{p(x)}^{p^+} \geqslant \frac{1}{2^{p^+}}(\|u\|_{p(x)} + \|\nabla u\|_{p(x)})^{p^+} = \frac{1}{2^{p^+}}\|u\|_{V_0}^{p^+}. \qquad (5.6)$$

Logo, de (5.5), segue que

$$\langle A_0(t)u, u\rangle_{V_0', V_0} \geqslant \min\{m_0, 1\}\frac{1}{2^{p^+}}\|u\|_{V_0}^{p^+}, \quad \forall \|u\|_{V_0} \leqslant 1. \qquad (5.7)$$

Para o caso em que $\|u\|_{V_0} = \|u\|_{p(x)} + \|\nabla u\|_{p(x)} \geqslant 1$, devemos analisar quatro possibilidades ($\|u\|_{p(x)}, \|\nabla u\|_{p(x)} \leqslant 1$; $\|u\|_{p(x)} \geqslant 1$ e $\|\nabla u\|_{p(x)} \leqslant 1$; $\|u\|_{p(x)} \leqslant 1$ e $\|\nabla u\|_{p(x)} \geqslant 1$; e $\|u\|_{p(x)}, \|\nabla u\|_{p(x)} \geqslant 1$). Para essa análise podemos proceder tal como no Lema 3.2.1. Concluímos assim que se $\|u\|_{V_0} \geqslant 1$, então

$$\rho(u) + \rho(|\nabla u|) \geqslant \frac{1}{2^{p^+}}\|u\|_{V_0}^{p^-}.$$

Logo, de (5.5), segue que

$$\langle A_0(t)u, u\rangle_{V_0', V_0} \geqslant \min\{m_0, 1\}\frac{1}{2^{p^+}}\|u\|_{V_0}^{p^-}, \quad \forall \|u\|_{V_0} \geqslant 1.$$

Juntamente com (5.7), concluímos a demonstração. □

O próximo resultado nos fornece propriedades importantes dos operadores A_λ, $\lambda \in [0,1]$.

Teorema 5.2.1. *Para todo $\lambda \in [0,1]$, operador $A_\lambda(t)$ é monótono, hemicontínuo e coercivo, para cada $t \in [\tau, T]$.*

Demonstração. Vamos demonstrar o caso $\lambda = 0$, o caso $\lambda \in (0,1]$ é demonstrado de forma análoga. Primeiramente, para cada $t \in [\tau, T]$, temos que $A_0(t)\colon V_0 \to V_0'$ é monótono. De fato, sejam $u, v \in V_0$, quaisquer, segue que

$$\begin{aligned}
&\langle A_0(t)u - A_0(t)v, u-v\rangle_{V_0',V_0} = \langle A_0(t)u, u-v\rangle_{V_0',V_0} - \langle A_0(t)v, u-v\rangle_{V_0',V_0}\\
&= \int_{\Omega_1} - \operatorname{div}(d_0(t,x)(|\nabla u|^{p(x)-2}+\eta)\nabla u)(u-v)\ dx + \int_{\Omega} |u|^{p(x)-2}u(u-v)\ dx\\
&\quad + \int_{\Gamma_0} d_0(t,x)(|\nabla u|^{p(x)-2}+\eta)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(u-v)\ dx + \int_{\Omega_1} \operatorname{div}(d_0(t,x)(|\nabla v|^{p(x)-2}+\eta)\nabla v)(u-v)\ dx\\
&\quad - \int_{\Omega} |v|^{p(x)-2}v(u-v)\ dx - \int_{\Gamma_0} d_0(t,x)(|\nabla v|^{p(x)-2}+\eta)\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}(u-v)\ dx. \qquad (5.8)
\end{aligned}$$

Pelo Teorema da Divergência, temos

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_1} -\operatorname{div}(d_0(t,x)(|\nabla u|^{p(x)-2}+\eta)\nabla u)(u-v)\, dx\\
&\quad = \int_{\Gamma_0\cup\Gamma} - d_0(t,x)(|\nabla u|^{p(x)-2}+\eta)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(u-v)\, dx + \int_{\Omega_1} d_0(t,x)(|\nabla u|^{p(x)-2}+\eta)\nabla u\nabla(u-v)\, dx\\
&\quad = \int_{\Gamma_0} - d_0(t,x)(|\nabla u|^{p(x)-2}+\eta)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(u-v)\, dx + \int_{\Omega_1} d_0(t,x)(|\nabla u|^{p(x)-2}+\eta)\nabla u\nabla(u-v)\, dx.
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_1} \operatorname{div}(d_0(t,x)(|\nabla v|^{p(x)-2}+\eta)\nabla v)(u-v)\, dx\\
&\quad = \int_{\Gamma_0} d_0(t,x)(|\nabla v|^{p(x)-2}+\eta)\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}(u-v)\, dx - \int_{\Omega_1} d_0(t,x)(|\nabla v|^{p(x)-2}+\eta)\nabla v\nabla(u-v)\, dx.
\end{aligned}$$

Assim, em (5.8), segue que

$$\begin{aligned}
&\langle A_0(t)u - A_0(t)v, u-v\rangle_{V_0',V_0}\\
&= -\int_{\Gamma_0} d_0(t,x)(|\nabla u|^{p(x)-2}+\eta)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(u-v)\ dx + \int_{\Omega_1} d_0(t,x)(|\nabla u|^{p(x)-2}+\eta)\nabla u\nabla(u-v)\ dx\\
&\quad + \int_{\Omega} |u|^{p(x)-2}u(u-v)\ dx + \int_{\Gamma_0} d_0(t,x)(|\nabla u|^{p(x)-2}+\eta)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(u-v)\ dx\\
&\quad + \int_{\Gamma_0} d_0(t,x)(|\nabla v|^{p(x)-2}+\eta)\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}(u-v)\ dx - \int_{\Omega_1} d_0(t,x)(|\nabla v|^{p(x)-2}+\eta)\nabla v\nabla(u-v)\ dx\\
&\quad - \int_{\Omega} |v|^{p(x)-2}v(u-v)\ dx - \int_{\Gamma_0} d_0(t,x)(|\nabla v|^{p(x)-2}+\eta)\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}(u-v)\ dx\\
&= \int_{\Omega_1} d_0(t,x)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla(u-v)\ dx + \int_{\Omega_1} d_0(t,x)\eta\nabla u\nabla(u-v)\ dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int\limits_{\Omega}|u|^{p(x)-2}u(u-v)\;dx-\int\limits_{\Omega_1}d_0(t,x)|\nabla v|^{p(x)-2}\nabla v\nabla(u-v)\;dx\\
&-\int\limits_{\Omega_1}d_0(t,x)\eta\nabla v\nabla(u-v)\;dx-\int\limits_{\Omega}|v|^{p(x)-2}v(u-v)\;dx\\
=&\int\limits_{\Omega_1}d_0(t,x)(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u-|\nabla v|^{p(x)-2}\nabla v)\nabla(u-v)\;dx+\int\limits_{\Omega_1}d_0(t,x)\eta(\nabla u-\nabla v)\nabla(u-v)\;dx\\
&+\int\limits_{\Omega}(|u|^{p(x)-2}u-|v|^{p(x)-2}v)(u-v)\;dx.
\end{aligned}
$$

Sendo $p(x)\leqslant p^+$, para todo $x\in\Omega$, e a função exponencial de base dois crescente, segue da Desigualdade de Tartar (1.2) e de (5.3), que

$$
\begin{aligned}
&\langle A_0(t)u-A_0(t)v,u-v\rangle_{V_0',V_0}\\
&\geqslant\int\limits_{\Omega_1}d_0(t,x)\frac{2^{3-p(x)}}{p(x)}|\nabla(u-v)|^{p(x)}\;dx+\eta\int\limits_{\Omega_1}d_0(t,x)|\nabla(u-v)|^2\;dx+\int\limits_{\Omega}\frac{2^{3-p(x)}}{p(x)}|u-v|^{p(x)}\;dx\\
&\geqslant m_0\frac{2^{3-p^+}}{p^+}\int\limits_{\Omega_1}|\nabla(u-v)|^{p(x)}\;dx+m_0\eta\int\limits_{\Omega_1}|\nabla(u-v)|^2\;dx+\frac{2^{3-p^+}}{p^+}\int\limits_{\Omega}|u-v|^{p(x)}\;dx\\
&=m_0\frac{2^{3-p^+}}{p^+}\rho(|\nabla(u-v)|)+m_0\eta\|\nabla(u-v)\|_{H_0}^2+\frac{2^{3-p^+}}{p^+}\rho(u-v)\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Portanto A_0 é um operador monótono.

Para verificarmos a hemicontinuidade de $A_0(t)$, consideremos $u,v,w\in V_0$ e $0<\theta<1$ arbitrários, temos

$$
\begin{aligned}
&|\langle A_0(t)(u+\theta v)-A_0(t)(u),w\rangle_{V_0',V_0}|\\
&=|\langle A_0(t)(u+\theta v),w\rangle_{V_0',V_0}-\langle A_0(t)(u),w\rangle_{V_0',V_0}|\\
&=\Bigg|\int\limits_{\Omega_1}-\operatorname{div}(d_0(t,x)(|\nabla(u+\theta v)|^{p(x)-2}+\eta)\nabla(u+\theta v))w\;dx+\int\limits_{\Omega}|u+\theta v|^{p(x)-2}(u+\theta v)w\;dx\\
&\quad+\int\limits_{\Gamma_0}d_0(t,x)(|\nabla(u+\theta v)|^{p(x)-2}+\eta)\frac{\partial(u+\theta v)}{\partial\vec{n}}w\;dx\\
&\quad+\int\limits_{\Omega_1}\operatorname{div}(d_0(t,x)(|\nabla u|^{p(x)-2}+\eta)\nabla u)w\;dx\\
&\quad-\int\limits_{\Omega}|u|^{p(x)-2}uw\;dx-\int\limits_{\Gamma_0}d_0(t,x)(|\nabla u|^{p(x)-2}+\eta)\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}w\;dx\Bigg|\\
&=\Bigg|\int\limits_{\Omega_1}d_0(t,x)(|\nabla(u+\theta v)|^{p(x)-2}+\eta)\nabla(u+\theta v)\nabla w\;dx+\int\limits_{\Omega}|u+\theta v|^{p(x)-2}(u+\theta v)w\;dx\\
&\quad-\int\limits_{\Omega_1}d_0(t,x)(|\nabla u|^{p(x)-2}+\eta)\nabla u\nabla w\;dx-\int\limits_{\Omega}|u|^{p(x)-2}uw\;dx\Bigg|
\end{aligned}
$$

$$\leqslant \left| \int_{\Omega_1} d_0(t,x)[(|\nabla(u+\theta v)|^{p(x)-2}+\eta)\nabla(u+\theta v) - (|\nabla u|^{p(x)-2}+\eta)\nabla u]\nabla w \, dx \right|$$
$$+ \left| \int_{\Omega} (|u+\theta v|^{p(x)-2}(u+\theta v) - |u|^{p(x)-2}u) w \, dx \right|.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} &|d_0(t,x)[(|\nabla(u+\theta v)|^{p(x)-2}+\eta)\nabla(u+\theta v) - (|\nabla u|^{p(x)-2}+\eta)\nabla u]\nabla w| \\ &\qquad \leqslant M_0 \left(|\nabla(u+\theta v)|^{p(x)-1} + \eta|\nabla(u+\theta v)| + |\nabla u|^{p(x)-1} + \eta|\nabla u| \right) |\nabla w|. \end{aligned}$$

Sendo $\theta < 1$, temos $|\nabla(u+\theta v)| = |\nabla u + \theta \nabla v| \leqslant |\nabla u| + \theta|\nabla v| < |\nabla u| + |\nabla v|$. Como $p(x) > 2$, pelo crescimento das funções $\mathbb{R}^+ \ni y \mapsto y^{p(x)-1}$ e $\mathbb{R} \ni y \mapsto 2^y$, segue que

$$\begin{aligned} |\nabla(u+\theta v)|^{p(x)-1} \leqslant& (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-1} \leqslant 2^{p(x)-1}(|\nabla u|^{p(x)-1} + |\nabla v|^{p(x)-1}) \\ \leqslant& 2^{p^+-1}(|\nabla u|^{p(x)-1} + |\nabla v|^{p(x)-1}). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} &|d_0(t,x)[(|\nabla(u+\theta v)|^{p(x)-2}+\eta)\nabla(u+\theta v) - (|\nabla u|^{p(x)-2}+\eta)\nabla u]\nabla w| \\ &\quad \leqslant M_0[2^{p^+-1}(|\nabla u|^{p(x)-1} + |\nabla v|^{p(x)-1}) + \eta(|\nabla u| + |\nabla v|) + |\nabla u|^{p(x)-1} + \eta|\nabla u|]|\nabla w|, \end{aligned} \tag{5.9}$$

onde a função do lado direito de (5.9) pertence a $L^1(\Omega)$. Analogamente,

$$\begin{aligned} |(|u+\theta v|^{p(x)-2}(u+\theta v) - |u|^{p(x)-2}u)w| &\leqslant (|u+\theta v|^{p(x)-1} + |u|^{p(x)-1})|w| \\ &\leqslant [2^{p^+-1}(|u|^{p(x)-1} + |v|^{p(x)-1}) + |u|^{p(x)-1}]|w|, \end{aligned} \tag{5.10}$$

onde a função do lado direito de (5.10) pertence a $L^1(\Omega)$. Pelo Teorema da Convergência Dominada, concluímos que

$$|\langle A_0(t)(u+\theta v), w\rangle_{V_0',V_0} - \langle A_0(t)(u), w\rangle_{V_0',V_0}| \xrightarrow{\theta \to 0} 0.$$

Logo, $A_0(t)$ é hemicontínuo.

Por fim, resta verificarmos a coercividade do operador $A_0(t)$. Consideremos $\|u\|_{V_0} \geqslant 1$, segue, do Lema 5.2.1, que

$$\frac{\langle A_0(t)u, u\rangle_{V_0',V_0}}{\|u\|_{V_0}} \geqslant \frac{1}{2^{p^+}} \min\{m_0, 1\} \|u\|_{V_0}^{p^- - 1}.$$

Como $p^- > 2$, fazendo $\|u\|_{V_0} \to +\infty$, temos que

$$\frac{\langle A_0(t)u, u\rangle_{V_0',V_0}}{\|u\|_{V_0}} \to +\infty.$$

Finalizando a demonstração.

□

Definimos os conjuntos

$$D(A_\lambda^H(t)) := \{v \in V; A_\lambda(t)v \in H\}, \quad \text{para} \quad \lambda \in (0,1],$$
$$D(A_0^{H_0}(t)) := \{v \in V_0; A_0(t)v \in H_0\},$$

e consideramos os operadores $A_\lambda^H(t)\colon D(A_\lambda^H(t)) \subset H \to H$, dados por

$$A_\lambda^H(t)(u) = A_\lambda(t)u, \quad \forall u \in D(A_\lambda^H(t)), \quad \text{para} \quad \lambda \in (0,1] \text{ e}$$
$$A_0^{H_0}(t)(u) = A_0(t)u, \quad \forall u \in D(A_0^{H_0}(t)).$$

Temos pelo Teorema 5.2.1 e pela Proposição 3.2.1 que $A_\lambda^H(t)$ e $A_0^{H_0}(t)$ são operadores maximais monótonos. Além disso, esses operadores são do tipo subdiferencial, isto é, para cada $\lambda \in (0,1]$ temos $A_\lambda^H(t) = \partial\varphi^\lambda(t)$, onde $\varphi^\lambda(t)\colon H \to (-\infty, \infty]$ é a função convexa e semicontínua inferiormente, dada por

$$\varphi^\lambda(t)(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \frac{d_\lambda(t,x)}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{d_\lambda(t,x)\eta}{2}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|u|^{p(x)}\,\mathrm{d}x, & \text{se } u \in V \\ \infty, & \text{senão.} \end{cases}$$

Se $\lambda = 0$ temos $A_0^{H_0}(t) = \partial\varphi(t)$, onde $\varphi(t)\colon H_0 \to (-\infty,\infty]$ é a função convexa e semicontínua inferiormente, dada por

$$\varphi(t)(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega_1} \frac{d_0(t,x)}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_1} \frac{d_0(t,x)\eta}{2}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|u|^{p(x)}\,\mathrm{d}x, & \text{se } u \in V_0 \\ \infty, & \text{senão.} \end{cases} \tag{5.11}$$

Os problemas (5.1) e (5.4) podem ser escritos abstratamente como

$$\begin{cases} u_t^\lambda + A_\lambda^H(t)u^\lambda = B(t,u^\lambda), & t > \tau \\ u^\lambda(\tau) = u_\tau^\lambda, \end{cases} \tag{5.12}$$

para todo $\lambda \in (0,1]$, e

$$\begin{cases} u_t + A_0^{H_0}(t)u = B(t,u), & t > \tau \\ u(\tau) = u_\tau. \end{cases} \tag{5.13}$$

No lema seguinte, garantimos a densidade dos conjuntos $D(A_0^{H_0}(t))$ e $D(A_\lambda^H(t))$, para cada $\lambda \in (0,1]$ e $t \in [\tau,T]$, onde $T > \tau$.

Lema 5.2.2. *Sejam $T > \tau$ e $t \in [\tau,T]$. O conjunto $D(A_0^{H_0}(t))$ é denso em H_0. E para cada $\lambda \in (0,1]$, $D(A_\lambda^H(t))$ é denso em H.*

Demonstração. Considere $C_c^\infty(\Omega)$ o espaço das funções com suporte compacto em Ω que admitem infinitas derivadas contínuas. Definimos

$$C_{c,0}^\infty(\Omega) := \{f \in C_c^\infty(\Omega); f \text{ é constante em } \Omega_0\}$$

e

$$L_{\Omega_0}^\infty := \{f \in L^\infty(\Omega); f \text{ é constante em } \Omega_0\}.$$

Sejam $T > \tau$, $t \in [\tau,T]$ e $u(t) \in C_{c,0}^\infty(\Omega)$, vamos mostrar que $u(t) \in D(A_0^{H_0}(t))$. Primeiramente $u(t) \in V_0$, pois

$$C^\infty_{c,0}(\Omega) \subset \overline{C^\infty_{c,0}(\Omega)}^{W^{1,p(x)}(\Omega)} = W^{1,p(x)}_{\Omega_0,0}(\Omega) = V_0.$$

Além disso, denotando por χ_E a função característica do conjunto E, considere

$$\begin{aligned}\alpha_{u(t)} :=&(-\operatorname{div}(d_0(t,\cdot)(|\nabla u(t)|^{p(\cdot)-2}+\eta)\nabla u(t)) + |u(t)|^{p(\cdot)-2}u(t))\chi_{\Omega_1}\\ &+\sum_{i=1}^m \frac{1}{|\Omega_{0,i}|}\left(\int_{\Gamma_{0,i}} d_0(t,x)(|\nabla u(t)|^{p(x)-2}+\eta)\frac{\partial u(t)}{\partial \vec{n}}\,dx + \int_{\Omega_{0,i}} |u_{\Omega_{0,i}}(t)|^{p(x)-2}u_{\Omega_{0,i}}(t)\,dx\right)\chi_{\Omega_{0,i}}.\end{aligned}$$

Note que, se $u(t)=0$ então $\alpha_{u(t)}=0$. Ou seja, o suporte da função $\alpha_{u(t)}$ está contido no suporte da $u(t)$. Como $u(t) \in C^\infty_{c,0}(\Omega)$, então o suporte de $\alpha_{u(t)}$ é limitado. Isto é, $\alpha_{u(t)} \in L^\infty_{\Omega_0}(\Omega)$. Em particular, $\alpha_{u(t)} \in H_0$.

Seja $w \in V_0$ arbitrário. Como $w_{\Omega_{0,i}} = w_{|\Gamma_{0,i}}$, temos que

$$\begin{aligned}&(\alpha_{u(t)}, w)_{H_0}\\ &= \int_{\Omega_1}(-\operatorname{div}(d_0(t,x)(|\nabla u(t)|^{p(x)-2}+\eta)\nabla u(t)) + |u(t)|^{p(x)-2}u(t))w\,dx\\ &\quad+\sum_{i=1}^m \int_{\Omega_{0,i}} \frac{1}{|\Omega_{0,i}|}\left(\int_{\Gamma_{0,i}} d_0(t,y)(|\nabla u(t)|^{p(x)-2}+\eta)\frac{\partial u(t)}{\partial \vec{n}}\,dy + \int_{\Omega_{0,i}} |u_{\Omega_{0,i}}(t)|^{p(y)-2}u_{\Omega_{0,i}}(t)\,dy\right)w\,dx\\ &= \int_{\Omega_1} -\operatorname{div}(d_0(t,x)(|\nabla u(t)|^{p(x)-2}+\eta))\nabla u(t)\,w\,dx + \int_{\Omega_1}|u(t)|^{p(x)-2}u(t)w\,dx\\ &\quad+\sum_{i=1}^m \int_{\Omega_{0,i}} \frac{1}{|\Omega_{0,i}|}\left(\int_{\Gamma_{0,i}} d_0(t,y)(|\nabla u(t)|^{p(y)-2}+\eta)\frac{\partial u(t)}{\partial \vec{n}}\,dy\right)w\,dx\\ &\quad+\sum_{i=1}^m \int_{\Omega_{0,i}} \frac{1}{|\Omega_{0,i}|}\left(\int_{\Omega_{0,i}} |u_{\Omega_{0,i}}(t)|^{p(y)-2}u_{\Omega_{0,i}}(t)\,dy\right)w\,dx\\ &= \int_{\Omega_1} -\operatorname{div}(d_0(t,x)(|\nabla u(t)|^{p(x)-2}+\eta))\nabla u(t)\,w\,dx + \int_{\Omega_1}|u(t)|^{p(x)-2}u(t)w\,dx\\ &\quad+\sum_{i=1}^m \left(\int_{\Gamma_{0,i}} d_0(t,y)(|\nabla u(t)|^{p(y)-2}+\eta)\frac{\partial u(t)}{\partial \vec{n}}\,dy\right)\int_{\Omega_{0,i}}\frac{1}{|\Omega_{0,i}|}w\,dx\\ &\quad+\sum_{i=1}^m \left(\int_{\Omega_{0,i}} |u_{\Omega_{0,i}}(t)|^{p(y)-2}u_{\Omega_{0,i}}(t)\,dy\right)\int_{\Omega_{0,i}}\frac{1}{|\Omega_{0,i}|}w\,dx\\ &= \int_{\Omega_1} -\operatorname{div}(d_0(t,x)(|\nabla u(t)|^{p(x)-2}+\eta))\nabla u(t)\,w\,dx + \int_{\Omega_1}|u(t)|^{p(x)-2}u(t)w\,dx\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{i=1}^{m}\int_{\Gamma_{0,i}} d_0(t,y)(|\nabla u(t)|^{p(y)-2}+\eta)\frac{\partial u(t)}{\partial \vec{n}} w\,dy + \sum_{i=1}^{m}\int_{\Omega_{0,i}} |u_{\Omega_{0,i}}(t)|^{p(y)-2}u_{\Omega_{0,i}}(t) w\,dy\\
&= \int_{\Omega_1} -\operatorname{div}(d_0(t,x)(|\nabla u(t)|^{p(x)-2}+\eta))\nabla u(t)\,w\,dx + \int_{\Omega} |u(t)|^{p(x)-2}u(t) w\,dx\\
&\qquad + \int_{\Gamma_0} d_0(t,x)(|\nabla u(t)|^{p(y)-2}+\eta)\frac{\partial u(t)}{\partial \vec{n}} w\,dx\\
&= \langle A_0(t)u(t), w\rangle_{V_0',V_0}.
\end{aligned}
$$

Com isso, $\alpha_{u(t)} = A_0^{H_0}(t)u(t)$ e $u(t) \in D(A_0^{H_0}(t))$. Ou seja, $C_{c,0}^{\infty}(\Omega) \subset D(A_0^{H_0}(t))$. Portanto,

$$H_0 = \overline{C_{c,0}^{\infty}(\Omega)}^{H_0} \subset \overline{D(A_0^{H_0}(t))}^{H_0}.$$

O caso em que $\lambda \in (0,1]$, segue de modo análogo. □

Definição 5.2.1. *1. Seja $T > \tau$. Dizemos que $u^\lambda \in C([\tau,T];H)$ é solução forte de* (5.12)*, se:*

(i) u^λ é absolutamente contínua em qualquer subintervalo compacto de (τ,T);

(ii) $u^\lambda(t) \in D(A_\lambda^H(t))$ quase sempre em (τ,T), com $u^\lambda(\tau) = u_\tau^\lambda$;

(iii) $\dfrac{du^\lambda}{dt}(t) + A_\lambda^H(t)u^\lambda(t) = B(t,u^\lambda(t))$ quase sempre em (τ,T).

Dizemos que $u^\lambda \in C([\tau,T];H)$ é solução fraca de (5.12)*, se existe uma sequência de soluções fortes, de* (5.12)*, que converge para u^λ em $C([\tau,T];H)$.*

2. Seja $T > \tau$. Dizemos que $u \in C([\tau,T];H_0)$ é solução forte de (5.13)*, se:*

(i) u é absolutamente contínua em qualquer subintervalo compacto de (τ,T);

(ii) $u(t) \in D(A_0^{H_0}(t))$ quase sempre em (τ,T), com $u(\tau) = u_\tau$;

(iii) $\dfrac{du}{dt}(t) + A_0^{H_0}(t)u(t) = B(t,u(t))$ quase sempre em (τ,T).

Dizemos que $u \in C([\tau,T];H_0)$ é solução fraca de (5.13)*, se existe uma sequência de soluções fortes, de* (5.13)*, que converge para u em $C([\tau,T];H_0)$.*

O Teorema 1.2.5 nos permite garantir a existência de uma única solução global forte para (5.13) e (5.12).

Teorema 5.2.2. *Suponhamos que $B\colon [\tau,T]\times H \to H$ satisfaz as Hipóteses (B1) e (B3).*

(i) Se $u_\tau \in H_0$, então existe uma única solução global forte para (5.13)*, ou seja, existe $u \in C([\tau,T];H_0)$ com $u(\tau) = u_\tau$ e*

$$\frac{du}{dt}(t) + A_0^{H_0}(t)u(t) = B(t,u(t)), \quad \textit{quase sempre em } (\tau,T).$$

Em particular, se $u_\tau \in V_0$, então $u(t) \in V_0$, para todo $t \in [\tau,T]$; além disso, u é absolutamente contínua em $[\tau,T]$ e satisfaz $\dfrac{du}{dt} \in L^2(\tau,T;H_0)$.

(ii) Se $u_\tau^\lambda \in H$, então existe uma única solução global forte para (5.12)*, ou seja, existe $u^\lambda \in C([\tau, T]; H)$ com $u^\lambda(\tau) = u_\tau^\lambda$ e*

$$\frac{du^\lambda}{dt}(t) + A_\lambda^H(t)u^\lambda(t) = B(t, u^\lambda(t)), \quad \textit{quase sempre em } (\tau, T).$$

Em particular, se $u_\tau^\lambda \in V$, então $u^\lambda(t) \in V$, para todo $t \in [\tau, T]$; além disso, u^λ é absolutamente contínua em $[\tau, T]$ e satisfaz $\dfrac{du^\lambda}{dt} \in L^2(\tau, T; H)$.

Demonstração. Vamos verificar a Hipótese A, utilizada no Teorema 1.2.5, para (5.13), isto é, $\mathcal{H} = H_0$ e $\phi^t = \varphi(t)$. Primeiramente (A1) é satisfeita com $Z = \emptyset$. Para verificarmos (A2), dado $r \in \mathbb{Z}^+$, consideramos

$$K_r := r, g_r(t) := t + r \ \text{ e } h_r(t) := r.$$

Para cada $t \in [0, T]$, $w \in D(\varphi(t))$ com $\|w\|_{V_0} \leqslant r$ e $s \in [t, T]$, consideramos o elemento $\widetilde{w} := w \in V_0 = D(\varphi(t))$. Tomando $\alpha = \frac{1}{2}$, temos que a condição (A2) é satisfeita para $\beta = 2$, de fato,

$$\begin{aligned} g_r' \colon [0, T] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto g_r'(t) = 1, \end{aligned}$$

ou seja, $g_r' \in L^2(0, T)$. Temos ainda,

$$\begin{aligned} |g_r(s) - g_r(t)|(\varphi(t)(w) + K_r)^\alpha &= |s + r - t - r|(\varphi(t)(w) + r)^{\frac{1}{2}} \\ &= |s - t|(\varphi(t)(w) + r)^{\frac{1}{2}} \geqslant 0 = \|w - \widetilde{w}\|_{V_0}. \end{aligned}$$

Como $t \leqslant s$, segue que $d_0(t, x) \geqslant d_0(s, x)$, com isso teremos $\varphi(s)(w) \leqslant \varphi(t)(w)$, assim

$$\varphi(s)(\widetilde{w}) = \varphi(s)(w) \leqslant \varphi(t)(w) = \varphi(t)(w) + |r - r|(\varphi(t)(w) + r).$$

Procedendo que maneira similar, temos a Hipótese A para (5.12), nesse caso $\mathcal{H} = H$ e $\phi^t = \varphi^\lambda(t)$.

Pelo Lema 5.2.2 e pelo Teorema 1.2.5, concluímos a demonstração.

□

Segue do Teorema 5.2.2, que dado $u_\tau \in H_0$, existe uma única solução u de (5.13). Denotaremos por $u(t; \tau, u_\tau)$ a solução u calculada no instante de tempo t. Podemos definir o processo de evolução $\{U(t, \tau)\}_{t \geqslant \tau}$, em H_0, associado a (5.13), da seguinte forma

$$\begin{aligned} U(t, \tau) \colon H_0 &\to H_0 \\ u_\tau &\mapsto U(t, \tau)u_\tau := u(t; \tau, u_\tau). \end{aligned} \tag{5.14}$$

Analogamente, dado $u_\tau^\lambda \in H$, existe uma única solução u^λ de (5.12). Denotaremos por $u^\lambda(t; \tau, u_\tau^\lambda)$ a solução u^λ calculada no instante de tempo t. Podemos definir o processo de evolução $\{U_\lambda(t, \tau)\}_{t \geqslant \tau}$, em H, associado a (5.12), da seguinte forma

$$\begin{aligned} U_\lambda(t, \tau) \colon H &\to H \\ u_\tau^\lambda &\mapsto U_\lambda(t, \tau)u_\tau^\lambda := u^\lambda(t; \tau, u_\tau^\lambda). \end{aligned} \tag{5.15}$$

Proposição 5.2.1. *As aplicações $U(t, \tau) \colon H_0 \to H_0$ e $U_\lambda(t, \tau) \colon H \to H$, $\lambda \in (0, 1]$, definidas, respectivamente em* (5.14) *e* (5.15)*, são Lipschitz contínuas.*

Demonstração. Demonstraremos que $U(t,\tau)\colon H_0 \to H_0$ é Lipschitz contínua. As aplicações $U_\lambda(t,\tau)\colon H \to H$, $\lambda \in (0,1]$, são Lipschitz contínuas por argumentos análogos.

Sejam $u_\tau, v_\tau \in H_0$, consideramos u e v soluções fortes de (5.13), com $u(\tau) = u_\tau$ e $v(\tau) = v_\tau$, respectivamente. Seja $\theta > \tau$, temos que

$$u_t(\theta) + A_0^{H_0}(\theta)u(\theta) = B(\theta, u(\theta)) \quad \text{e} \quad v_t(\theta) + A_0^{H_0}(\theta)v(\theta) = B(\theta, v(\theta)),$$

denotando $w = u - v$, segue que

$$w_t(\theta) + A_0^{H_0}(\theta)u(\theta) - A_0^{H_0}(\theta)v(\theta) = B(\theta, u(\theta)) - B(\theta, v(\theta)).$$

Fazendo $(\cdot, w(\theta))_{H_0}$, podemos escrever

$$\begin{aligned}(w_t(\theta), w(\theta))_{H_0} + (A_0^{H_0}(\theta)u(\theta) - A_0^{H_0}(\theta)v(\theta), w(\theta))_{H_0} &= (B(\theta, u(\theta)) - B(\theta, v(\theta)), w(\theta))_{H_0} \\ &\leqslant |(B(\theta, u(\theta)) - B(\theta, v(\theta)), w(\theta))_{H_0}| \\ &\leqslant \|B(\theta, u(\theta)) - B(\theta, v(\theta))\|_{H_0}\|w(\theta)\|_{H_0} \\ &\leqslant L_B\|w(\theta)\|_{H_0}^2. \qquad (5.16)\end{aligned}$$

Pelo Teorema 5.2.1, o operador $A_0(t)\colon V_0 \to V_0$ é monótono, assim

$$(A_0^{H_0}(\theta)u(\theta) - A_0^{H_0}(\theta)v(\theta), w(\theta))_{H_0} = \langle A_0^{H_0}(\theta)u(\theta) - A_0^{H_0}(\theta)v(\theta), w(\theta)\rangle_{V_0,V_0'} \geqslant 0.$$

Logo, em (5.16), concluímos,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(\theta)\|_{H_0}^2 \leqslant L_B\|w(\theta)\|_{H_0}^2, \quad \forall\, \theta > \tau.$$

Integrando essa última desigualdade para θ variando no intervalo $[t,\tau]$, segue que

$$\|w(t)\|_{H_0}^2 \leqslant \|w(\tau)\|_{H_0}^2 + 2L_B\int_\tau^t \|w(\theta)\|_{H_0}^2 d\theta.$$

Pelo Lema 1.2.3, de Grönwall-Bellman,

$$\|U(t,\tau)u_\tau - U(t,\tau)v_\tau\|_{H_0}^2 = \|w(t)\|_{H_0}^2 \leqslant \|w(\tau)\|_{H_0}^2 e^{2L_B(t-\tau)}\|u_\tau - v_\tau\|_{H_0}^2 e^{2L_B(t-\tau)}.$$

Portanto,

$$\|U(t,\tau)u_\tau - U(t,\tau)v_\tau\|_{H_0} \leqslant e^{L_B(t-\tau)}\|u_\tau - v_\tau\|_{H_0}, \qquad (5.17)$$

concluindo a demonstração. □

5.3 Estimativas envolvendo as soluções de (5.12) e (5.13)

Iniciamos esta seção com a demonstração do resultado seguinte, que trata a limitação uniforme das soluções de (5.12) e (5.13).

Lema 5.3.1. *Seja u solução forte de* (5.13). *Então*

(i) Existem constantes positivas τ_1 e C_1 tais que $\|u(t)\|_{H_0} \leqslant C_1$, para todo $t \geqslant \tau + \tau_1$.

(ii) Existem constantes positivas τ_2 e C_2 tais que $\|u(t)\|_{V_0} \leqslant C_2$, para todo $t \geqslant \tau + \tau_2$.

Obtemos a mesma estimativa se u^λ é solução forte de (5.12)*, uniformemente para λ em* $(0,1]$.

Demonstração. Seja u uma solução de (5.13). Tomando o produto escalar com $u(t)$ em (5.13), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{H_0}^2 + \langle A_0(t)u(t), u(t)\rangle_{V_0',V_0} &= \left(\frac{du}{dt}(t), u(t)\right)_{H_0} + (A_0^{H_0}(t)u(t), u(t))_{H_0} \\
&= (B(t,u(t)), u(t))_{H_0} \\
&= (B(t,u(t)) - B(t,0) + B(t,0), u(t))_{H_0} \\
&\leqslant \|B(t,u(t)) - B(t,0)\|_{H_0}\|u(t)\|_{H_0} + \|B(t,0)\|_{H_0}\|u(t)\|_{H_0}.
\end{aligned}$$

Consideremos $I_1 = \{t \geqslant \tau; \|u(t)\|_{V_0} \geqslant 1\}$ e $I_2 = \{t \geqslant \tau; \|u(t)\|_{V_0} < 1\}$. Seja $t \in I_1$, segue pelo Lema 5.2.1 que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{H_0}^2 + \frac{\min\{m_0,1\}}{2^{p^+}}\|u(t)\|_{V_0}^{p^-} &\leqslant \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{H_0}^2 + \langle A_0(t)u(t), u(t)\rangle_{V_0',V_0} \\
&\leqslant L_B\|u(t)\|_{H_0}^2 + \|B(t,0)\|_{H_0}\|u(t)\|_{H_0}.
\end{aligned}$$

Como $V_0 \hookrightarrow H_0$ então $\|u(t)\|_{H_0} \leqslant \mu\|u(t)\|_{V_0}$, sendo $\mu = |\Omega| + 1$, logo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{H_0}^2 + \frac{c}{2^{p^+}}\|u(t)\|_{V_0}^{p^-} \leqslant c_1\|u(t)\|_{V_0}^2 + c_2\|u(t)\|_{V_0}, \tag{5.18}$$

onde $c = \min\{m_0, 1\}$, $c_1 = L_B\mu^2$ e $c_2 = \mu b_0$.

Considere $\theta = \dfrac{p^-}{2}$ e $\varepsilon > 0$, escolhido de modo que $\dfrac{c}{2^{p^+}} - \dfrac{1}{\theta}\varepsilon^\theta - \dfrac{1}{p^-}\varepsilon^{p^-} > 0$. Segue da desigualdade de Young, que

$$\begin{aligned}
c_1\|u(t)\|_{V_0}^2 + c_2\|u(t)\|_{V_0} &= \varepsilon\|u(t)\|_{V_0}^2\frac{c_1}{\varepsilon} + \varepsilon\|u(t)\|_{V_0}\frac{c_2}{\varepsilon} \\
&\leqslant \frac{1}{\theta}\varepsilon^\theta\|u(t)\|_{V_0}^{p^-} + \frac{1}{\theta'}\left(\frac{c_1}{\varepsilon}\right)^{\theta'} + \frac{1}{p^-}\varepsilon^{p^-}\|u(t)\|_{V_0}^{p^-} + \frac{1}{q}\left(\frac{c_2}{\varepsilon}\right)^q,
\end{aligned}$$

onde $q = (p^-)'$. Seja $\gamma = \dfrac{c}{2^{p^+}} - \dfrac{1}{\theta}\varepsilon^\theta - \dfrac{1}{p^-}\varepsilon^{p^-} > 0$, então de (5.18) temos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{H_0}^2 + \gamma\|u(t)\|_{V_0}^{p^-} \leqslant \frac{1}{\theta'}\left(\frac{c_1}{\varepsilon}\right)^{\theta'} + \frac{1}{q}\left(\frac{c_2}{\varepsilon}\right)^q.$$

Novamente por $V_0 \hookrightarrow H_0$, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{H_0}^2 + \frac{2\gamma}{\mu^{p^-}}\|u(t)\|_{H_0}^{p^-} &\leqslant \frac{d}{dt}\|u(t)\|_{H_0}^2 + 2\gamma\|u(t)\|_{V_0}^{p^-} \\
&\leqslant \frac{2}{\theta'}\left(\frac{c_1}{\varepsilon}\right)^{\theta'} + \frac{2}{q}\left(\frac{c_2}{\varepsilon}\right)^q, \quad \forall t \in I_1.
\end{aligned}$$

Tomando $\delta = \dfrac{2}{\theta'}\left(\dfrac{c_1}{\varepsilon}\right)^{\theta'} + \dfrac{2}{q}\left(\dfrac{c_2}{\varepsilon}\right)^q$, $\tilde{\gamma} = \dfrac{2\gamma}{\mu^{p^-}}$ e $y(t) = \|u(t)\|_{H_0}^2$ temos

$$\frac{d}{dt}y(t) + \tilde{\gamma}y(t)^{\frac{p^-}{2}} \leqslant \delta, \quad \forall t \in I_1.$$

Pelo Lema 1.2.5, concluímos que

$$y(t) \leqslant \left(\frac{\delta}{\tilde{\gamma}}\right)^{\frac{2}{p^-}} + \left(\tilde{\gamma}\left(\frac{p^- - 2}{2}\right)(t-\tau)\right)^{-\frac{2}{p^- - 2}}, \quad \forall t \in I_1.$$

Isto é,

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_{H_0} &\leqslant \left(\left(\frac{\delta}{\tilde{\gamma}}\right)^{\frac{2}{p^-}} + \left(\tilde{\gamma}\left(\frac{p^- - 2}{2}\right)(t-\tau)\right)^{-\frac{2}{p^- - 2}}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \left(\frac{\delta}{\tilde{\gamma}}\right)^{\frac{1}{p^-}} + \left(\tilde{\gamma}\left(\frac{p^- - 2}{2}\right)(t-\tau)\right)^{-\frac{1}{p^- - 2}}, \quad \forall t \in I_1.\end{aligned}$$

Seja $\tau_1 > 0$, tal que

$$\left(\tilde{\gamma}\left(\frac{p^- - 2}{2}\right)\tau_1\right)^{-\frac{1}{p^- - 2}} \leqslant 1,$$

pelo decrescimento da função $x \mapsto x^{-\frac{1}{p^- - 2}}$, segue que $\|u(t)\|_{H_0} \leqslant k_1$, para todo $t \in I_1$ com $t \geqslant \tau + \tau_1$, onde $k_1 := \left(\frac{\delta}{\tilde{\gamma}}\right)^{\frac{1}{p^-}} + 1$.

No caso em que $t \in I_2$, temos que $\|u(t)\|_{H_0} \leqslant \mu\|u(t)\|_{V_0} < \mu$. Consequentemente,

$$\begin{cases} \|u(t)\|_{H_0} \leqslant k_1, & \text{se } t \in I_1 \cap [\tau + \tau_1, \infty), \\ \|u(t)\|_{H_0} \leqslant \mu, & \text{se } t \in I_2. \end{cases}$$

Seja $C_1 = \max\{k_1, \mu\}$, então

$$\|u(t)\|_{H_0} \leqslant C_1, \ \ \forall t \geqslant \tau + \tau_1,$$

o que concluí a demonstração do item (i).

Para o item (ii), usando a desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\varphi(t)(u(t)) &= \left(\partial\varphi(t)(u(t)), \frac{du}{dt}(t)\right)_{H_0} \\ &= \left(A_0^{H_0}(t)u(t), \frac{du}{dt}(t)\right)_{H_0} = \left(B(t,u(t)) - \frac{du}{dt}(t), \frac{du}{dt}(t)\right)_{H_0} \\ &= \left(B(t,u(t)) - \frac{du}{dt}(t), \frac{du}{dt}(t) - B(t,u(t)) + B(t,u(t))\right)_{H_0} \\ &= -\left\|B(t,u(t)) - \frac{du}{dt}(t)\right\|_{H_0}^2 + \left(B(t,u(t)) - \frac{du}{dt}(t), B(t,u(t))\right)_{H_0} \\ &\leqslant -\left\|B(t,u(t)) - \frac{du}{dt}(t)\right\|_{H_0}^2 + \left\|B(t,u(t)) - \frac{du}{dt}(t)\right\|_{H_0}\|B(t,u(t))\|_{H_0}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant -\left\|B(t,u(t)) - \frac{du}{dt}(t)\right\|_{H_0}^2 + \frac{1}{2}\left\|B(t,u(t)) - \frac{du}{dt}(t)\right\|_{H_0}^2 + \frac{1}{2}\|B(t,u(t))\|_{H_0}^2\\
&= -\frac{1}{2}\left\|B(t,u(t)) - \frac{du}{dt}(t)\right\|_{H_0}^2 + \frac{1}{2}\|B(t,u(t))\|_{H_0}^2\\
&\leqslant \frac{1}{2}\|B(t,u(t))\|_{H_0}^2 = \frac{1}{2}(\|B(t,u(t)) - B(t,0)\|_{H_0} + \|B(t,0)\|_{H_0})^2\\
&\leqslant \frac{1}{2}(L_B\|u(t)\|_{H_0} + \|B(t,0)\|_{H_0})^2.
\end{aligned}
$$

O que nos garante, pelo item (i), que

$$
\frac{d}{dt}\varphi(t)(u(t)) \leqslant \frac{1}{2}\|B(t,u(t))\|_{H_0}^2 \leqslant \frac{1}{2}k_2^2, \quad \forall t \geqslant \tau + \tau_1, \tag{5.19}
$$

onde $k_2 := L_B C_1 + b_0$.

Pela definição de subdiferencial, temos

$$
\varphi(t)(u(t)) \leqslant (\partial\varphi(t)(u(t)), u(t))_{H_0},
$$

segue de (5.19) que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{H_0}^2 + \varphi(t)(u(t)) &= \left(\frac{du}{dt}(t), u(t)\right)_{H_0} + \varphi(t)(u(t))\\
&\leqslant \left(\frac{du}{dt}(t), u(t)\right)_{H_0} + (\partial\varphi(t)(u(t)), u(t))_{H_0} = (B(t,u(t)), u(t))_{H_0}\\
&\leqslant \|B(t,u(t))\|_{H_0}\|u(t)\|_{H_0} \leqslant k_2 C_1, \quad \forall t \geqslant \tau + \tau_1. \qquad (5.20)
\end{aligned}
$$

Fixado $k > 0$ e integrando a estimativa (5.20) em $[t, t+k]$, com $t \geqslant \tau + \tau_1$, temos

$$
\int_t^{t+k} k_2 C_1 \, ds \geqslant \frac{1}{2}\|u(t+k)\|_{H_0}^2 - \frac{1}{2}\|u(t)\|_{H_0}^2 + \int_t^{t+k} \varphi(s)(u(s)) \, ds.
$$

Assim, temos que

$$
\begin{aligned}
\int_t^{t+k} \varphi(s)(u(s)) \, ds &\leqslant \frac{1}{2}\|u(t+k)\|_{H_0}^2 + \int_t^{t+1} \varphi(s)(u(s)) \, ds\\
&\leqslant \frac{1}{2}\|u(t)\|_{H_0}^2 + \int_t^{t+k} k_2 C_1 \, ds\\
&= \frac{1}{2}\|u(t)\|_{H_0}^2 + k k_2 C_1 \leqslant \frac{1}{2}C_1^2 + k k_2 C_1 := k_3.
\end{aligned}
$$

Usando o Lema Uniforme de Gronwall, Lema 1.2.4, para $y = \varphi(s)(u(s))$, $g = 0$ e $h = \frac{1}{2}k_2^2$, concluímos que

$$
\varphi(t+k)(u(t+k)) \leqslant \frac{k_3}{k} + \frac{1}{2}k_2^2 k := k_4, \quad \forall t \geqslant \tau + \tau_1. \tag{5.21}
$$

Logo, de (5.11) e (5.21) temos, para todo $t \geqslant \tau + \tau_1 + k$,

$$
\frac{1}{p^+}\min\{m_0, 1\}(\rho(u(t)) + \rho(|\nabla u(t)|))
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{p^+}\min\{m_0,1\}\left(\int_\Omega |u(t,x)|^{p(x)}\,dx + \int_{\Omega_1} |\nabla u(t,x)|^{p(x)}\,dx\right)\\
&\leqslant \int_\Omega \frac{1}{p^+}|u(t,x)|^{p(x)}\,dx + \int_{\Omega_1} m_0\frac{1}{p^+}|\nabla u(t,x)|^{p(x)}\,dx\\
&\leqslant \int_\Omega \frac{1}{p^+}|u(t,x)|^{p(x)}\,dx + \int_{\Omega_1} d_0(t,x)\frac{1}{p^+}|\nabla u(t,x)|^{p(x)}\,dx\\
&\leqslant \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|u(t,x)|^{p(x)}\,dx + \int_{\Omega_1} d_0(t,x)\frac{1}{p(x)}|\nabla u(t,x)|^{p(x)}\,dx\\
&\leqslant \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|u(t,x)|^{p(x)}\,dx + \int_{\Omega_1} \frac{d_0(t,x)}{p(x)}|\nabla u(t,x)|^{p(x)}\,dx + \int_{\Omega_1} \frac{d_0(t,x)\eta}{2}|\nabla u(t,x)|^{2}\,dx\\
&= \varphi(t)(u(t)) \leqslant k_4.
\end{aligned}
\tag{5.22}
$$

O caso em que $\|u(t)\|_{V_0} \leqslant 1$, não há o que demonstrar. Se $\|u(t)\|_{V_0} \geqslant 1$, então vamos analisar os casos a seguir:

(a) Caso em que $\|u(t)\|_{p(x)} \leqslant 1$ e $\|\nabla u(t)\|_{p(x)} \geqslant 1$.

Segue da Proposição 1.1.3, que

$$\|u(t)\|_{p(x)}^{p^+} \leqslant \rho(u(t)) \leqslant \|u(t)\|_{p(x)}^{p^-} \quad \text{e} \quad \|\nabla u(t)\|_{p(x)}^{p^-} \leqslant \rho(|\nabla u(t)|) \leqslant \|\nabla u(t)\|_{p(x)}^{p^+}.$$

Como $\rho(u(t)) \geqslant 0$ e $\rho(|\nabla u(t)|) \geqslant 0$, então

$$\|u(t)\|_{p(x)}^{p^+} \leqslant \rho(u(t)) + \rho(|\nabla u(t)|) \quad \text{e} \quad \|\nabla u(t)\|_{p(x)}^{p^-} \leqslant \rho(u(t)) + \rho(|\nabla u(t)|).$$

Segue, de (5.22) e do crescimento das funções $\mathbb{R}^+ \ni x \mapsto x^{\frac{1}{p^+}}$ e $\mathbb{R}^+ \ni x \mapsto x^{\frac{1}{p^-}}$ que, para todo $t \geqslant \tau + \tau_1 + k$,

$$
\begin{aligned}
\|u(t)\|_{V_0} =&\|u(t)\|_{p(x)} + \|\nabla u(t)\|_{p(x)}\\
\leqslant&(\rho(u(t)) + \rho(|\nabla u(t)|))^{\frac{1}{p^+}} + (\rho(u(t)) + \rho(|\nabla u(t)|))^{\frac{1}{p^-}}\\
\leqslant&\left(\frac{p^+k_4}{\min\{m_0,1\}}\right)^{\frac{1}{p^+}} + \left(\frac{p^+k_4}{\min\{m_0,1\}}\right)^{\frac{1}{p^-}}.
\end{aligned}
$$

(b) Caso em que $\|u(t)\|_{p(x)} \geqslant 1$ e $\|\nabla u(t)\|_{p(x)} \leqslant 1$.

Segue de forma similar ao item (a). De fato, pela Proposição 1.1.3, temos

$$\|u(t)\|_{p(x)}^{p^-} \leqslant \rho(u(t)) \leqslant \|u(t)\|_{p(x)}^{p^+} \quad \text{e} \quad \|\nabla u(t)\|_{p(x)}^{p^+} \leqslant \rho(|\nabla u(t)|) \leqslant \|\nabla u(t)\|_{p(x)}^{p^-}.$$

Logo,

$$\|u(t)\|_{p(x)}^{p^-} \leqslant \rho(u(t)) + \rho(|\nabla u(t)|) \quad \text{e} \quad \|\nabla u(t)\|_{p(x)}^{p^+} \leqslant \rho(u(t)) + \rho(|\nabla u(t)|).$$

Assim, para todo $t \geqslant \tau + \tau_1 + k$, segue de (5.22) que

$$
\begin{aligned}
\|u(t)\|_{V_0} =&\|u(t)\|_{p(x)} + \|\nabla u(t)\|_{p(x)}\\
\leqslant&(\rho(u(t)) + \rho(|\nabla u(t)|))^{\frac{1}{p^-}} + (\rho(u(t)) + \rho(|\nabla u(t)|))^{\frac{1}{p^+}}
\end{aligned}
$$

$$\leqslant \left(\frac{p^+ k_4}{\min\{m_0,1\}}\right)^{\frac{1}{p^-}} + \left(\frac{p^+ k_4}{\min\{m_0,1\}}\right)^{\frac{1}{p^+}}.$$

(c) Caso em que $\|u(t)\|_{p(x)} \geqslant 1$ e $\|\nabla u(t)\|_{p(x)} \geqslant 1$.

Novamente, pela Proposição 1.1.3, temos que

$$\|u(t)\|_{p(x)}^{p^-} \leqslant \rho(u(t)) \leqslant \|u(t)\|_{p(x)}^{p^+} \quad \text{e} \quad \|\nabla u(t)\|_{p(x)}^{p^-} \leqslant \rho(|\nabla u(t)|) \leqslant \|\nabla u(t)\|_{p(x)}^{p^+}.$$

Então,

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_{V_0}^{p^-} =&(\|u(t)\|_{p(x)} + \|\nabla u(t)\|_{p(x)})^{p^-}\\ \leqslant& 2^{p^-}(\|u(t)\|_{p(x)}^{p^-} + \|\nabla u(t)\|_{p(x)}^{p^-})\\ \leqslant& 2^{p^-}(\rho(u(t)) + \rho(|\nabla u(t)|)).\end{aligned}$$

Segue de (5.22) que

$$\|u(t)\|_{V_0} \leqslant 2\left(\frac{p^+ k_4}{\min\{m_0,1\}}\right)^{\frac{1}{p^-}}, \quad \forall t \geqslant \tau + \tau_1 + k.$$

(d) Caso em que $\|u(t)\|_{p(x)} \leqslant 1$ e $\|\nabla u(t)\|_{p(x)} \leqslant 1$.

Segue de forma similar ao item (c), basta trocarmos p^- por p^+. Neste caso, temos

$$\|u(t)\|_{V_0} \leqslant 2\left(\frac{p^+ k_4}{\min\{m_0,1\}}\right)^{\frac{1}{p^+}}, \quad \forall t \geqslant \tau + \tau_1 + k.$$

Portanto, seja $\tau_2 := \tau_1 + k$, para todo $t \geqslant \tau + \tau_2$, concluímos que

$$\|u(t)\|_{V_0} \leqslant \max\left\{2\left[\left(\frac{p^+ k_4}{\min\{m_0,1\}}\right)^{\frac{1}{p^+}} + \left(\frac{p^+ k_4}{\min\{m_0,1\}}\right)^{\frac{1}{p^-}}\right], 1\right\} =: C_2.$$

No caso em que u^λ é solução forte de (5.12), podemos estimar pelas mesmas constantes, isto é, $C_1^\lambda = C_1$ e $C_2^\lambda = C_2$, para todo $\lambda \in (0,1]$. Ou seja, obtemos estimativas uniformes em $\lambda \in (0,1]$. □

Lema 5.3.2. *Sejam u solução forte de* (5.13) *e $T > \tau$. Existe constante $\alpha_1 > 0$, dependendo de T e de $\|u_\tau\|_{H_0}$, tal que*

$$\int_\tau^T \int_{\Omega_1} |\nabla u(t,x)|^{p(x)} dx dt \leqslant \alpha_1.$$

Obtemos a mesma conclusão se u^λ, $\lambda \in (0,1]$, é solução forte de (5.12).

Demonstração. Como u é uma solução forte de (5.13), então $u_t(t) + A_0^{H_0}(t)u(t) = B(t,u(t))$. Fazendo $(\cdot,u)_{H_0}$ temos

$$(u_t(t),u(t))_{H_0} + (A_0^{H_0}(t)u(t),u(t))_{H_0} = (B(t,u(t)),u(t))_{H_0}. \tag{5.23}$$

Por sua vez

$$
\begin{aligned}
&(A_0^{H_0}(t)u(t), u(t))_{H_0}\\
&\quad = \langle A_0^{H_0}(t)u(t), u(t)\rangle_{V_0',V_0}\\
&\quad = -\int_{\Gamma_0\cup\Gamma} d_0(t)(|\nabla u(t)|^{p(x)-2}+\eta)\frac{\partial u(t)}{\partial \vec{n}}u(t)\ dx + \int_{\Omega} |u(t)|^{p(x)-2}|u(t)|^2\ dx\\
&\qquad + \int_{\Omega_1} d_0(t)(|\nabla u(t)|^{p(x)-2}+\eta)\nabla u(t)\nabla u(t)\ dxdx + \int_{\Gamma_0} d_0(t)(|\nabla u(t)|^{p(x)-2}+\eta)\frac{\partial u(t)}{\partial \vec{n}}u(t)\ dx\\
&\quad = \int_{\Omega_1} d_0(t)|\nabla u(t)|^{p(x)}\, dx + \int_{\Omega_1} d_0(t)\eta|\nabla u(t)|^2\, dx + \int_{\Omega} |u(t)|^{p(x)}\, dx.
\end{aligned}
$$

Retomando (5.23) e usando a desigualdade de Young obtemos,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{H_0}^2 + \int_{\Omega_1} d_0(t)|\nabla u(t)|^{p(x)}\, dx + \int_{\Omega_1} d_0(t)\eta|\nabla u(t)|^2\, dx + \int_{\Omega} |u(t)|^{p(x)}\, dx&\\
= (B(t,u(t)), u(t))_{H_0}&\\
\leqslant |(B(t,u(t)), u(t))_{H_0}|&\\
\leqslant \|B(t,u(t))\|_{H_0}\|u(t)\|_{H_0}&\\
= \|B(t,u(t)) - B(t,0) + B(t,0)\|_{H_0}\|u(t)\|_{H_0}&\\
\leqslant (\|B(t,u(t)) - B(t,0)\|_{H_0} + \|B(t,0)\|_{H_0})\|u(t)\|_{H_0}&\\
\leqslant L_B\|u(t)\|_{H_0}^2 + \|B(t,0)\|_{H_0}\|u(t)\|_{H_0}&\\
\leqslant L_B\|u(t)\|_{H_0}^2 + \frac{1}{2}\|B(t,0)\|_{H_0}^2 + \frac{1}{2}\|u(t)\|_{H_0}^2.& \qquad (5.24)
\end{aligned}
$$

Pela Hipótese (B2), existe constante $b_0 > 0$, tal que $\|B(t,0)\|_{H_0} \leqslant b_0$. Além disso, como $\displaystyle\int_{\Omega_1} d_0(t,x)\eta|\nabla u(t,x)|^2\, dx \geqslant m_0\eta\|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega_1)}^2 \geqslant 0$ e $\rho(u(t)) = \displaystyle\int_{\Omega} |u(t,x)|^{p(x)}\, dx \geqslant 0$, obtemos a desigualdade

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{H_0}^2 + m_0\int_{\Omega_1} |\nabla u(t,x)|^{p(x)}\, dx \leqslant \left(L_B + \frac{1}{2}\right)\|u(t)\|_{H_0}^2 + \frac{1}{2}b_0^2. \qquad (5.25)
$$

Integrando (5.25) com respeito a $t \in [\tau, T]$, segue que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_\tau^T \frac{d}{dt}\|u(t)\|_{H_0}^2\, dt + m_0\int_\tau^T\int_{\Omega_1} |\nabla u(t,x)|^{p(x)}\, dx\, dt&\\
\leqslant \int_\tau^T \left(L_B + \frac{1}{2}\right)\|u(t)\|_{H_0}^2\, dt + \int_\tau^T \frac{1}{2}b_0^2\, dt.&
\end{aligned}
$$

Assim

$$
\begin{aligned}
\|u(T)\|_{H_0}^2 + 2m_0\int_\tau^T\int_{\Omega_1} |\nabla u(t,x)|^{p(x)}\, dx\, dt&\\
\leqslant 2\left(L_B + \frac{1}{2}\right)\int_\tau^T \|u(t)\|_{H_0}^2\, dt + b_0^2T + \|u(\tau)\|_{H_0}^2,&
\end{aligned}
$$

o que implica

$$2m_0 \int_\tau^T \int_{\Omega_1} |\nabla u(t,x)|^{p(x)}\, dx\, dt \leqslant (2L_B+1)\int_\tau^T \|u(t)\|_{H_0}^2\, dt + b_0^2 T + \|u(\tau)\|_{H_0}^2. \tag{5.26}$$

Negligenciando o segundo termo do lado esquerdo de (5.25), já que $\rho(|\nabla u(t)|) \geqslant 0$, e integrando sob $[\tau, t]$, onde $\tau < t < T$, obtemos

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_{H_0}^2 - \|u(\tau)\|_{H_0}^2 &\leqslant b_0^2 t + (2L_B+1)\int_\tau^t \|u(\theta)\|_{H_0}^2\, d\theta \\ &\leqslant b_0^2 T + (2L_B+1)\int_\tau^t \|u(\theta)\|_{H_0}^2\, d\theta.\end{aligned}$$

isto é,

$$\|u(t)\|_{H_0}^2 \leqslant \|u_\tau\|_{H_0}^2 + b_0^2 T + (2L_B+1)\int_\tau^t \|u(\theta)\|_{H_0}^2\, d\theta.$$

Usando o Lema 1.2.3, de Grönwal-Belman, obtemos

$$\|u(t)\|_{H_0}^2 \leqslant (\|u_\tau\|_{H_0}^2 + b_0^2 T)\exp((2L_B+1)t), \text{ para todo } t \in [\tau, T].$$

Integrando essa última desigualdade com respeito a $t \in [\tau, T]$, concluímos

$$\begin{aligned}\int_\tau^T \|u(t)\|_{H_0}^2\, dt &\leqslant \int_\tau^T (\|u_\tau\|_{H_0}^2 + b_0^2 T)\exp((2L_B+1)t)\, dt \\ &= \frac{1}{(2L_B+1)}(\|u_\tau\|_{H_0}^2 + b_0^2 T)(\exp((2L_B+1)T) - 1).\end{aligned}$$

Retornando a equação (5.26), podemos escrever

$$\begin{aligned}&2m_0 \int_\tau^T \int_{\Omega_1} |\nabla u(t,x)|^{p(x)}\, dx\, dt \\ &\qquad \leqslant (\|u_\tau\|_{H_0}^2 + b_0^2 T)(\exp((2L_B+1)T) - 1) + b_0^2 T + \|u_\tau\|_{H_0}^2 \\ &\qquad \leqslant (\|u_\tau\|_{H_0}^2 + b_0^2 T)\exp((2L_B+1)T).\end{aligned}$$

Ou seja, denotando $\alpha_1 = \dfrac{1}{2m_0}(\|u_\tau\|_{H_0}^2 + b_0^2 T)\exp((2L_B+1)T)$ temos

$$\int_\tau^T \int_{\Omega_1} |\nabla u(t,x)|^{p(x)}\, dx\, dt \leqslant \alpha_1.$$

A demonstração pode ser feita da mesma forma para u^λ solução forte de (5.12), onde α_1 não depende de λ, uma vez que $m_0 \leqslant d_\lambda(t,x)$.

□

Lema 5.3.3. *Seja $T > \tau$. Se u é solução forte de (5.13) em $[\tau, T]$, então existe constante $k_0 = k_0(\|u(\tau)\|_{H_0}, T) > 0$, tal que*

$$\int_\tau^T \|B(t, u(t))\|_{H_0}^2\, dt \leqslant k_0.$$

Obtemos a mesma conclusão se u^λ é solução forte de (5.12) *em* $[\tau, T]$, *onde* $\lambda \in [0,1)$. *Mais precisamente, para cada* $\lambda \in (0,1]$, *existe* $k_0^\lambda = k_0^\lambda(\|u^\lambda(\tau)\|_H, T) > 0$, *tal que*

$$\int_\tau^T \|B(t, u^\lambda(t))\|_H^2 \, dt \leqslant k_0^\lambda.$$

Demonstração. Como u é solução forte de (5.13) em $[\tau, T]$, então $u \in C([\tau,T]; H_0)$. Logo,

$$\begin{aligned}
\int_\tau^T \|B(t,u(t))\|_{H_0}^2 \, dt &\leqslant \int_\tau^T (\|B(t,u(t)) - B(t,0)\|_{H_0} + \|B(t,0)\|_{H_0})^2 \, dt \\
&\leqslant \int_\tau^T 2(\|B(t,u(t)) - B(t,0)\|_{H_0}^2 + \|B(t,0)\|_{H_0}^2) \, dt \\
&= 2\int_\tau^T \|B(t,u(t)) - B(t,0)\|_{H_0}^2 \, dt + 2\int_\tau^T \|B(t,0)\|_{H_0}^2 \, dt \\
&\leqslant 2L_B^2 \int_\tau^T \|u(t)\|_{H_0}^2 \, dt + 2\|B(t,0)\|_{H_0}^2 T \\
&\leqslant 2L_B^2 \int_\tau^T (\sup_{\theta \in [\tau,T]} \|u(\theta)\|_{H_0})^2 \, dt + 2\|B(t,0)\|_{H_0}^2 T \\
&= 2L_B^2 T \|u\|_{C([\tau,T];H_0)}^2 + 2\|B(t,0)\|_{H_0}^2 T.
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Como em (5.24) obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{H_0}^2 + \int_{\Omega_1} d_0(x)|\nabla u(t)|^{p(x)} \, dx + \int_{\Omega_1} d_0(x)\eta|\nabla u(t)|^2 \, dx + \int_\Omega |u(t)|^{p(x)} \, dx \\
\leqslant \left(L_B + \frac{1}{2}\right)\|u(t)\|_{H_0}^2 + \frac{1}{2}\|B(t,0)\|_{H_0}^2.
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Negligenciando as três parcelas positivas no lado esquerdo de (5.28) e pela Hipótese (B2), temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{H_0}^2 \leqslant \left(L_B + \frac{1}{2}\right)\|u(t)\|_{H_0}^2 + \frac{1}{2}b_0^2.$$

Integrando essa última desigualdade sob $[\tau, t]$, com $t \in [\tau, T]$, segue que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|u(t)\|_{H_0}^2 - \frac{1}{2}\|u(\tau)\|_{H_0}^2 &\leqslant \int_\tau^t \left(L_B + \frac{1}{2}\right)\|u(\theta)\|_{H_0}^2 \, d\theta + \int_\tau^t \frac{1}{2}b_0^2 \, d\theta \\
&= \left(L_B + \frac{1}{2}\right)\int_\tau^t \|u(\theta)\|_{H_0}^2 \, d\theta + t\frac{1}{2}b_0^2.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\|u(t)\|_{H_0}^2 \leqslant \|u(\tau)\|_{H_0}^2 + Tb_0^2 + (2L_B + 1)\int_\tau^t \|u(\theta)\|_{H_0}^2 \, d\theta, \quad \forall t \in [\tau, T].$$

Segue do Lema 1.2.3, de Grönwal-Belmann, que

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_{H_0}^2 &\leqslant (\|u(\tau)\|_{H_0}^2 + Tb_0^2)e^{(2L_B+1)t}\\ &\leqslant (\|u(\tau)\|_{H_0}^2 + Tb_0^2)e^{(2L_B+1)T}, \quad \forall t \in [\tau, T].\end{aligned}$$

Logo

$$\|u\|_{C([\tau,T];H_0)} \leqslant \sqrt{\|u(\tau)\|_{H_0}^2 + Tb_0^2}\; e^{(L_B+\frac{1}{2})T}.$$

Portanto, em (5.27),

$$\int_\tau^T \|B(t,u(t))\|_{H_0}^2 \leqslant k_0,$$

sendo $k_0 := 2L_B^2 T(\|u(\tau)\|_{H_0}^2 + Tb_0^2)e^{(2L_B+1)T} + 2Tb_0^2$.

Seja u^λ é solução forte de (5.12). Substituindo u por u^λ nas contas acima, obtemos a mesma conclusão, nesse caso $k_0^\lambda := 2L_B^2 T(\|u^\lambda(\tau)\|_{H_0}^2 + Tb_0^2)e^{(2L_B+1)T} + 2Tb_0^2$. □

5.4 Existência de pullback atrator exponencial para os processos de evolução associados a (5.12) e (5.13)

Nesta seção vamos demonstrar, para cada $\lambda \in (0,1]$, os processos $\{U_\lambda(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$ e $\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$ admitem pullback atrator exponencial.

Sendo C_2 a constante positiva obtida no Lema 5.3.1, consideramos o conjunto

$$B_1 = \{u \in V_0; \|u\|_{p(x)} \leqslant C_2 \text{ e } \|\nabla u\|_{p(x)} \leqslant C_2\}. \tag{5.29}$$

Seja $u_\tau \in V_0$, pelo Teorema 5.2.2, existe u solução forte de (5.13), com $u(\tau) = u_\tau$, e além disso para todo $t \geqslant \tau$, temos que $u(t) \in V_0$. Pelo Lema 5.3.1, existe $\tau_2 \in \mathbb{R}$ de modo que

$$\|u(t)\|_{V_0} \leqslant C_2, \quad \forall t \geqslant \tau + \tau_2.$$

Assim, $\|u(t)\|_{p(x)} \leqslant C_2$ e $\|\nabla u(t)\|_{p(x)} \leqslant C_2$, para todo $t \geqslant \tau + \tau_2$. Portanto, como $B_1 \subset V_0$, temos que

$$U(t,\tau)B_1 \subset U(t,\tau)V_0 \subset B_1, \quad \text{para todo } t \geqslant \tau + \tau_2. \tag{5.30}$$

Pela demonstração do Lema 5.3.1 é possível notar que $\max\{\tau_1, \tau_2\} = \tau_2$.

Para cada $t \in \mathbb{R}$, definimos

$$B_t^0 = \overline{\bigcup_{r\geqslant\tau_2} U(t,t-r)B_1}^{H_0}. \tag{5.31}$$

Para $\lambda \in (0,1]$, consideramos $B_1^\lambda = \{u \in V; \|u\|_{p(x)} \leqslant C_2 \text{ e } \|\nabla u\|_{p(x)} \leqslant C_2\}$ e

$$B_t^\lambda = \overline{\bigcup_{r\geqslant\tau_2} U^\lambda(t,t-r)B_1^\lambda}^{H}. \tag{5.32}$$

Lema 5.4.1. *Seja $t \in \mathbb{R}$ qualquer, o conjunto B_t^0, definido em (5.31), é um subconjunto* *compacto de H_0. Além disso, a família $\{B_t^0\}_{t\in\mathbb{R}}$ é uniformemente limitada e positivamente invariante com respeito a $\{U(t,s)\}_{t\geqslant s}$.*

Para cada $\lambda \in (0,1]$ e $t \in \mathbb{R}$, o conjunto B_t^λ, definido em (5.32), é um subconjunto compacto de H. Além disso, a família $\{B_t^\lambda\}_{t\in\mathbb{R}}$ é uniformemente limitada e positivamente invariante com respeito a $\{U^\lambda(t,s)\}_{t\geqslant s}$.

Demonstração. Primeiramente, note que B_1 é um subconjunto limitado de $V_0 \hookrightarrow\hookrightarrow H_0$, assim $\overline{B_1}^{H_0}$ é um subconjunto compacto de H_0.

De (5.30), podemos concluir que

$$\bigcup_{r\geqslant\tau_2} U(t,t-r)B_1 \subset B_1.$$

Com isso,

$$B_t^0 = \overline{\bigcup_{r\geqslant\tau_2} U(t,t-r)B_1}^{H_0} \subset \overline{B_1}^{H_0},$$

ou seja, B_t^0 é um subconjunto fechado contido em um compacto, portanto B_t^0 é um subconjunto compacto de H_0.

Sejam $t,s \in \mathbb{R}$ com $t \geqslant s$, pela continuidade de $U(t,s)\colon H_0 \to H_0$, Proposição 5.2.1, segue que

$$\begin{aligned}
U(t,s)B_s^0 =& U(t,s)\overline{\left(\bigcup_{r\geqslant\tau_2} U(s,s-r)B_1\right)}^{H_0} \\
\subset& \overline{\bigcup_{r\geqslant\tau_2} U(t,s)U(s,s-r)B_1}^{H_0} \\
=& \overline{\bigcup_{r\geqslant\tau_2} U(t,s-r)B_1}^{H_0} \\
=& \overline{\bigcup_{r\geqslant\tau_2} U(t,t-(t-s+r))B_1}^{H_0},
\end{aligned}$$

como $t \geqslant s$ e $r \geqslant \tau_2$, temos $t-s+r \geqslant \tau_2$, assim

$$\bigcup_{r\geqslant\tau_2} U(t,t-(t-s+r))B_1 \subset \bigcup_{r\geqslant\tau_2} U(t,t-r)B_1,$$

ou seja,

$$U(t,s)B_s^0 \subset \overline{\bigcup_{r\geqslant\tau_2} U(t,t-r)B_1}^{H_0} = B_t^0.$$

Resta mostrarmos que a família $\{B_t^0\}_{t\in\mathbb{R}}$ é uniformemente limitada, para isso basta verificarmos que $\{\bigcup_{r\geqslant\tau_2} U(t,t-r)B_1\}_{t\in\mathbb{R}}$ é uniformemente limitada.

Seja $t \in \mathbb{R}$ arbitrário, consideremos $b_t \in \bigcup_{r\geqslant\tau_2} U(t,t-r)B_1$, então existem $b_1 \in B_1$ e $r_0 \geqslant \tau_2$, tais que

$$b_t = U(t,t-r_0)b_1.$$

Como $t-(t-r_0) = r_0 \geqslant \tau_2 > \tau_1$, segue do Lema 5.3.1 a existência de uma constante $C_1 > 0$, independente de t, tal que

$$\|b_t\|_{H_0} = \|U(t, t - r_0)b_1\|_{H_0} \leqslant C_1.$$

Isto é, $\|b_t\|_{H_0} \leqslant C_1$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Logo, $\{\bigcup_{r \geqslant \tau_2} U(t, t-r)B_1\}_{t\in\mathbb{R}}$ é uniformemente limitada, o que implica que

$$\left\{ \overline{\bigcup_{r\geqslant\tau_2} U(t, t-r)B_1}^{H_0} \right\}_{t\in\mathbb{R}} = \{B_t^0\}_{t\in\mathbb{R}}$$

é uniformemente limitada.

A demonstração para $\{B_t^\lambda\}_{t\in\mathbb{R}}$, com $\lambda \in (0, 1]$, segue analogamente. □

Fixado $\ell > 0$, para cada $\tau \in \mathbb{R}$, consideramos o conjunto das $(\tau, \ell)-$trajetórias associado ao problema (5.13),

$$\mathfrak{X}_{\tau,\ell} = \{\chi \colon [\tau, \tau + \ell] \to H_0, \text{ solução forte de (5.13)}, \text{ com } \chi(\tau) = u_\tau; u_\tau \in H_0\}.$$

Munimos $\mathfrak{X}_{\tau,\ell}$ com a topologia de $L^2(\tau, \tau + \ell; H_0)$.

Vamos considerar o TDS-processo $\{L(t, \tau)\}_{t\geqslant\tau}$ atuando em $\mathfrak{X}_{\tau,\ell}$, isto é,

$$\begin{aligned} L(t,\tau)\colon \mathfrak{X}_{\tau,\ell} &\to \mathfrak{X}_{t,\ell} \\ \chi &\mapsto L(t,\tau)\chi\colon [t, t+\ell] \to H_0 \\ &\qquad\qquad\qquad \theta \mapsto u(\theta), \end{aligned}$$

onde u é a única solução forte de (5.13) em $[\tau, t + \ell]$, com $\chi = u|_{[\tau,\tau+\ell]}$.

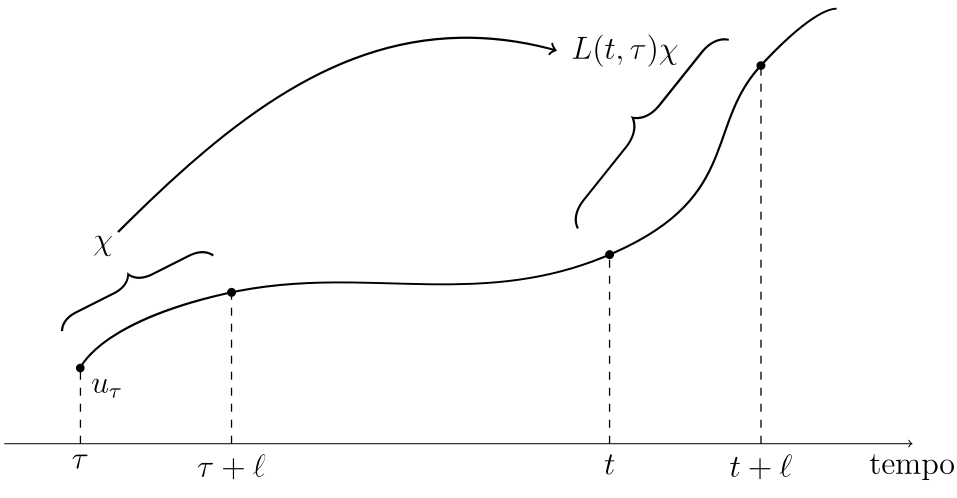

Figura 5.1: Atuação do operador $L(t, \tau)$ em $\{\mathfrak{X}_{t,\ell}\}_{t\in\mathbb{R}}$

Para cada $\lambda \in (0, 1]$ e cada $\tau \in \mathbb{R}$, consideramos o conjunto das $(\tau, \ell)-$trajetórias associado ao problema (5.12),

$$\mathfrak{X}^\lambda_{\tau,\ell} = \{\chi \colon [\tau, \tau + \ell] \to H, \text{ solução forte de (5.12)}, \text{ com } \chi(\tau) = u^\lambda_\tau; u^\lambda_\tau \in H\},$$

e munimos com a topologia de $L^2(\tau, \tau + \ell; H)$.

Seja $\lambda \in (0,1]$. Vamos considerar o TDS-processo $\{L^\lambda(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$ atuando em $\mathfrak{X}^\lambda_{\tau,\ell}$, isto é,

$$\begin{aligned} L^\lambda(t,\tau)\colon \mathfrak{X}^\lambda_{\tau,\ell} &\to \quad \mathfrak{X}^\lambda_{t,\ell} \\ \chi &\mapsto \quad L^\lambda(t,\tau)\chi\colon [t,t+\ell] \to H \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \theta \mapsto u^\lambda(\theta), \end{aligned}$$

onde u^λ é a única solução forte de (5.12) em $[\tau, t+\ell]$, com $\chi = u^\lambda|_{[\tau,\tau+\ell]}$.

Para cada $\tau \in \mathbb{R}$, definimos

$$\mathcal{B}^0_{\tau,\ell} = \{\chi \in \mathfrak{X}_{\tau,\ell}; \chi(\tau) \in B^0_\tau\} \tag{5.33}$$

e

$$\mathcal{B}^\lambda_{\tau,\ell} = \{\chi \in \mathfrak{X}^\lambda_{\tau,\ell}; \chi(\tau) \in B^\lambda_\tau\}, \tag{5.34}$$

para todo $\lambda \in (0,1]$.

Lema 5.4.2. *Para cada $\tau \in \mathbb{R}$, o conjunto $\mathcal{B}^0_{\tau,\ell}$, definido em* (5.33)*, é compacto em $L^2(\tau,\tau+\ell;H_0)$.*

Para cada $\lambda \in (0,1]$ e $\tau \in \mathbb{R}$, o conjunto $\mathcal{B}^\lambda_{\tau,\ell}$, definido em (5.34)*, é compacto em $L^2(\tau,\tau+\ell;H)$.*

Demonstração. Mostraremos primeiramente que $\mathcal{B}^0_{\tau,\ell}$ é limitado em

$$\{u \in L^2(\tau,\tau+\ell;V_0);\ u_t \in L^2(\tau,\tau+\ell;H_0)\}.$$

De fato, seja $\chi \in \mathcal{B}^0_{\tau,\ell}$, então $\chi(\theta) = U(\theta,\tau)\chi(\tau)$, onde $\theta \in [\tau,\tau+\ell]$ e $\chi(\tau) \in B^0_\tau$. Temos que

$$\|\chi_t\|^2_{L^2(\tau,\tau+\ell;H_0)} = \int_\tau^{\tau+\ell} \left\| \frac{d}{d\theta} U(\theta,\tau)\chi(\tau) \right\|^2_{H_0} d\theta = \left\| \frac{d}{dt} U(\cdot,\tau)\chi(\tau) \right\|^2_{L^2(\tau,\tau+\ell;H_0)}.$$

Pelo Lema 1.2.6, existe uma constante $k_\tau > 0$, tal que

$$\left\| \frac{d}{dt} U(\cdot,\tau)\chi(\tau) \right\|^2_{L^2(\tau,\tau+\ell;H_0)} \leqslant k_\tau,$$

isto é, $\|\chi_t\|_{L^2(\tau,\tau+\ell;H_0)} \leqslant k_\tau$. Pelo Lema 5.3.3 e por contas análogas as feitas em (3.24), temos que k_τ é uniforme com respeito a $\|\chi(\tau)\|_{V_0}$, já que $\chi(\tau) \in B^0_\tau$ e $B^0_\tau \subset V_0$ limitado.

Além disso, pela desigualdade de Poincaré, existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|\chi\|^2_{L^2(\tau,\tau+\ell;V_0)} &= \int_\tau^{\tau+\ell} (\|\chi(\theta)\|_{p(x)} + \|\nabla\chi(\theta)\|_{p(x)})^2 d\theta \\ &\leqslant \alpha_0 \int_\tau^{\tau+\ell} \|\nabla\chi(\theta)\|^2_{p(x)} d\theta \\ &= \alpha_0 \int_\tau^{\tau+\ell} \|\nabla U(\theta,\tau)\chi(\tau)\|^2_{p(x)} d\theta. \end{aligned} \tag{5.35}$$

Vamos considerar o caso em que $\|\nabla U(\theta,\tau)\chi(\tau)\|_{p(x)} \geqslant 1$. Como $2 < p^- \leqslant p(x)$ segue, do não-decrescimento da função $\mathbb{R} \ni \theta \mapsto \|\nabla U(\theta,\tau)\chi(\tau)\|^\theta_{p(x)}$ e da Proposição 1.1.3, que

$$\|\nabla U(\theta,\tau)\chi(\tau)\|^2_{p(x)} \leqslant \|\nabla U(\theta,\tau)\chi(\tau)\|^{p^-}_{p(x)} \leqslant \rho_p(|\nabla U(\theta,\tau)\chi(\tau)|).$$

Assim, retornando a (5.35) e aplicando o Lema 5.3.2 , temos que existe constante $\alpha_1 > 0$ tal que

$$\|\chi\|^2_{L^2(\tau,\tau+\ell;V_0)} \leqslant \alpha_0 \int_\tau^{\tau+\ell} \int_{\Omega_1} |\nabla U(\theta,\tau)\chi(\tau)|^{p(x)} dx d\theta \leqslant \alpha_0\alpha_1.$$

Notemos que $\alpha_1 > 0$ é uniforme com respeito a $\|\chi(\tau)\|_{H_0}$, já que $\chi(\tau) \in B^0_\tau$ e B^0_τ é limitado em H_0.

O caso em que $\|\nabla U(\theta,\tau)\chi(\tau)\|_{p(x)} \leqslant 1$, temos de (5.35) que $\|\chi\|^2_{L^2(0,1;V_0)} \leqslant \alpha_0\ell$. Logo,

$$\|\chi\|^2_{L^2(0,1;V_0)} \leqslant \min\{\alpha_0\alpha_1, \alpha_0\ell\}.$$

Como $V_0 \hookrightarrow\hookrightarrow H_0$, pelo Lema 2.1.6, temos

$$\{u \in L^2(\tau,\tau+\ell;V_0); u_t \in L^2(\tau,\tau+\ell;H_0)\} \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\tau,\tau+\ell;H_0).$$

Assim, $\overline{\mathcal{B}^0_{\tau,\ell}}^{L^2(\tau,\tau+\ell;H_0)}$ é um compacto em $L^2(\tau,\tau+\ell;H_0)$.

Por sua vez, $\mathcal{B}^0_{\tau,\ell}$ é fechado em $L^2(\tau,\tau+\ell;H_0)$. De fato, seja $\chi \in \overline{\mathcal{B}^0_{\tau,\ell}}^{L^2(\tau,\tau+\ell;H_0)}$ arbitrária, então existe $(\chi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{B}^0_{\tau,\ell}$ tal que

$$\|\chi_i - \chi\|_{L^2(\tau,\tau+\ell;H_0)} \xrightarrow{i\to\infty} 0. \tag{5.36}$$

Para todo $i \in \mathbb{N}$, temos que $\chi_i \in \mathcal{B}^0_{\tau,\ell}$, ou seja, χ_i é solução forte de (5.13), em $[\tau,\tau+\ell]$, com $\chi_i(\tau) \in B^0_\tau$.

Sejam $i,j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$, aplicando o Lema 1.2.8, para $u = \chi_j$, $v = \chi_i$, $A(t) = A_0^{H_0}(t)$, $f(t) = B(t,\chi_j(t))$ e $g(t) = B(t,\chi_i(t))$, temos

$$\begin{aligned}\|\chi_j(t) - \chi_i(t)\|_{H_0} \leqslant & \|\chi_j(\tau) - \chi_i(\tau)\|_{H_0} + \int_\tau^t \|B(s,\chi_j(s)) - B(s,\chi_i(s))\|_{H_0}\, ds \\ \leqslant & \|\chi_j(\tau) - \chi_i(\tau)\|_{H_0} + L_B \int_\tau^t \|\chi_j(s) - \chi_i(s)\|_{H_0}\, ds,\end{aligned}$$

para todo $t \in [\tau,\tau+\ell]$. Pelo Lema 1.2.3, Grönwall-Bellman, concluímos que

$$\begin{aligned}\|\chi_j(t) - \chi_i(t)\|_{H_0} \leqslant & \|\chi_j(\tau) - \chi_i(\tau)\|_{H_0} e^{L_B(t-\tau)} \\ \leqslant & \|\chi_j(\tau) - \chi_i(\tau)\|_{H_0} e^{L_B\ell}, \ \forall t \in [\tau,\tau+\ell], \forall i,j \in \mathbb{N}.\end{aligned} \tag{5.37}$$

Por sua vez, $(\chi_i(\tau))_{i\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em B^0_τ que, pelo Lema 5.4.1, é um conjunto compacto em H_0. Assim, $(\chi_i(\tau))_{i\in\mathbb{N}}$ admite subsequência, $(\chi_{i_k}(\tau))_{k\in\mathbb{N}}$, convergente em H_0, em particular $(\chi_{i_k}(\tau))_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em H_0. Logo, em (5.37), temos

$$\sup_{t\in[\tau,\tau+\ell]} \|\chi_{i_{k+1}}(t) - \chi_{i_k}(t)\|_{H_0} \leqslant e^{L_B\ell}\|\chi_{i_{k+1}}(\tau) - \chi_{i_k}(\tau)\|_{H_0} \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Ou seja, $(\chi_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $C([\tau,\tau+\ell];H_0)$. Como $C([\tau,\tau+\ell];H_0)$ é um espaço completo, restringindo a uma subsequência se necessário, existe $\tilde{\chi} \in C([\tau,\tau+\ell];H_0)$ tal que

$$\|\chi_{i_k} - \tilde{\chi}\|_{C([\tau,\tau+\ell];H_0)} \xrightarrow{k\to\infty} 0. \tag{5.38}$$

Assim,

$$\|\chi_{i_k}-\tilde{\chi}\|_{L^2(\tau,\tau+\ell;H_0)} = \left(\int_\tau^{\tau+\ell}\|\chi_{i_k}(t)-\tilde{\chi}(t)\|_{H_0}^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int_\tau^{\tau+\ell}(\sup_{\theta\in[\tau,\tau+\ell]}\|\chi_{i_k}(\theta)-\tilde{\chi}(\theta)\|_{H_0})^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$=\sqrt{\ell}\sup_{\theta\in[\tau,\tau+\ell]}\|\chi_{i_k}(\theta)-\tilde{\chi}(\theta)\|_{H_0} = \sqrt{\ell}\|\chi_{i_k}-\tilde{\chi}\|_{C([\tau,\tau+\ell];H_0)} \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Segue de (5.36) que $\tilde{\chi}=\chi$, logo $\chi\in C([\tau,\tau+\ell];H_0)$. Além disso, por (5.38),

$$\|\chi_{i_k}(\tau)-\chi(\tau)\|_{H_0} \leqslant \sup_{\theta\in[\tau,\tau+\ell]}\|\chi_{i_k}(\theta)-\chi(\theta)\|_{H_0} = \|\chi_{i_k}-\tilde{\chi}\|_{C([\tau,\tau+\ell];H_0)} \xrightarrow{k\to\infty} 0,$$

ou seja, $\chi(\tau)\in\overline{B_\tau^0}^{H_0}=B_\tau^0$. Portanto, $\chi\in\mathcal{B}_{\tau,\ell}^0$ e com isso $\mathcal{B}_{\tau,\ell}^0$ é fechado em $L^2(\tau,\tau+\ell;H_0)$, logo temos a compacidade de $\mathcal{B}_{\tau,\ell}^0$.

A demonstração pode ser feita de maneira análoga para $\mathcal{B}_{\tau,\ell}^\lambda$, onde $\lambda\in(0,1]$.

□

Seja $W_{\Omega_0,0}^{1,2}(\Omega)=\{f\in W_0^{1,2}(\Omega); f \text{ é constante em } \Omega_0\}$. Consideremos os conjuntos

$$W_{t,\ell}^0=\left\{\chi\in L^2(t,t+\ell;W_{\Omega_0,0}^{1,2}(\Omega));\ \frac{d\chi}{dt}\in L^2(t,t+\ell;V_0^{'})\right\}$$

e

$$W_{t,\ell}=\left\{\chi\in L^2(t,t+\ell;W_0^{1,2}(\Omega));\ \frac{d\chi}{dt}\in L^2(t,t+\ell;V')\right\},$$

onde $V_0=W_{\Omega_0,0}^{1,p(x)}(\Omega)=\{f\in W_0^{1,p(x)}(\Omega); f \text{ é constante em } \Omega_0\}$, como definido no início da seção 5.2.

Pelo Lema 2.1.6, obtemos as seguintes inclusões compactas, $W_{t,\ell}^0\hookrightarrow\hookrightarrow L^2(t,t+\ell;H_0)$ e $W_{t,\ell}\hookrightarrow\hookrightarrow L^2(t,t+\ell;H)$. Munimos $W_{t,\ell}$, e $W_{t,\ell}^0$, com a seguinte norma

$$\|u\|_{W_{t,\ell}}=\|\nabla u\|_{L^2(t,t+\ell;H)}+\|u_t\|_{L^2(t,t+\ell;V')}.$$

Em particular, se $u\in W_{t,\ell}^0$ temos

$$\|u\|_{W_{t,\ell}^0}=\|\nabla u\|_{L^2(t,t+\ell;H_0)}+\|u_t\|_{L^2(t,t+\ell;V_0')}.$$

A seguir verificaremos a propriedade de Lipschitz para os operadores $L(t,\tau)\colon L^2(\tau,\tau+\ell;H_0)\to W_{t,\ell}^0$, em $\mathcal{B}_{\tau,\ell}^0$, e $L_\lambda(t,\tau)\colon L^2(\tau,\tau+\ell;H)\to W_{t,\ell}$, em $\mathcal{B}_{\tau,\ell}^\lambda$, para todo $\lambda\in(0,1]$.

Lema 5.4.3. *Sejam $t,\tau\in\mathbb{R}$ quaisquer, com $t\geqslant\tau$. Existem constantes $\omega_0=\omega_0(t,\tau,\ell)>0$ e $\omega_0^\lambda=\omega_0^\lambda(t,\tau,\ell,\lambda)>0$, tais que*

$$\|L(t,\tau)\chi_1-L(t,\tau)\chi_2\|_{W_{t,\ell}^0}\leqslant\omega_0\|\chi_1-\chi_2\|_{L^2(\tau,\tau+\ell;H_0)},\ \forall\chi_1,\chi_2\in\mathcal{B}_{\tau,\ell}^0,$$

e

$$\|L_\lambda(t,\tau)\chi_1-L_\lambda(t,\tau)\chi_2\|_{W_{t,\ell}}\leqslant\omega_0^\lambda\|\chi_1-\chi_2\|_{L^2(\tau,\tau+\ell;H)},\ \forall\chi_1,\chi_2\in\mathcal{B}_{\tau,\ell}^\lambda.$$

Demonstração. Demonstraremos a propriedade de Lipschitz para $L(t,\tau)\colon L^2(\tau,\tau+\ell;H_0)\to W_{t,\ell}^0$, em $\mathcal{B}_{\tau,\ell}^0$. A demonstração para os operadores $L_\lambda(t,\tau)\colon L^2(\tau,\tau+\ell;H)\to W_{t,\ell}$, onde $\lambda\in(0,1]$, pode ser feita de maneira análoga.

Sejam $\chi_1, \chi_2 \in \mathcal{B}^0_{\tau,\ell}$ arbitrárias, existem únicas u e v soluções fortes de (5.13) definidas em $[\tau, t+\ell]$, tais que $u|_{[\tau,\tau+\ell]} = \chi_1$ e $v|_{[\tau,\tau+\ell]} = \chi_2$. Considere $\theta \in [t, t+\ell]$, temos que

$$u_t(\theta) + A_0^{H_0}(\theta)u(\theta) = B(\theta, u(\theta)) \quad \text{ e } \quad v_t(\theta) + A_0^{H_0}(\theta)v(\theta) = B(\theta, v(\theta)).$$

Fazendo a diferença das equações e denotando $w = u - v$, podemos escrever

$$w_t(\theta) + A_0^{H_0}(\theta)u(\theta) - A_0^{H_0}(\theta)v(\theta) = B(\theta, u(\theta)) - B(\theta, v(\theta)). \tag{5.39}$$

Seja $\psi \in V_0 = W^{1,p(x)}_{\Omega_0,0}(\Omega)$, notemos que

$$\begin{aligned}
|(w_t(\theta), \psi)_{H_0}| &\leqslant |(A_0^{H_0}(\theta)u(\theta) - A_0^{H_0}(\theta)v(\theta), \psi)_{H_0}| + |(B(\theta, u(\theta)) - B(\theta, v(\theta)), \psi)_{H_0}| \\
&\leqslant |\langle A_0(\theta)u(\theta) - A_0(\theta)v(\theta), \psi\rangle_{V_0', V_0}| + \|B(\theta, u(\theta)) - B(\theta, v(\theta))\|_{H_0}\|\psi\|_{H_0} \\
&\leqslant |\langle A_0(\theta)u(\theta) - A_0(\theta)v(\theta), \psi\rangle_{V_0', V_0}| + L_B\|w(\theta)\|_{H_0}\|\psi\|_{H_0}.
\end{aligned} \tag{5.40}$$

Por sua vez,

$$\begin{aligned}
&| \langle A_0(\theta)u(\theta) - A_0(\theta)v(\theta), \psi\rangle_{V_0', V_0}| \\
&\leqslant \Bigg| \int_{\Omega_1} - \operatorname{div}\left(d_0(\theta)\Big[(|\nabla u(\theta)|^{p(x)-2} + \eta)\nabla u(\theta) - (|\nabla v(\theta)|^{p(x)-2} + \eta)\nabla v(\theta) \Big]\right) \psi dx \\
&\qquad + \int_{\Omega} (|u(\theta)|^{p(x)-2}u(\theta) - |v(\theta)|^{p(x)-2}v(\theta))\psi dx \\
&\qquad\qquad + \int_{\Gamma_0} d_0(\theta)\left[(|\nabla u(\theta)|^{p(x)-2} + \eta)\frac{\partial u(\theta)}{\partial \vec{n}} - (|\nabla v(\theta)|^{p(x)-2} + \eta)\frac{\partial v(\theta)}{\partial \vec{n}} \right]\psi dx \ \Bigg| \\
&= \Bigg| - \int_{\Gamma\cup\Gamma_0} d_0(\theta)\left[(|\nabla u(\theta)|^{p(x)-2} + \eta)\frac{\partial u(\theta)}{\partial \vec{n}} - (|\nabla v(\theta)|^{p(x)-2} + \eta)\frac{\partial v(\theta)}{\partial \vec{n}} \right]\psi dx \\
&\qquad + \int_{\Omega_1} d_0(\theta)[(|\nabla u(\theta)|^{p(x)-2} + \eta)\nabla u(\theta) - (|\nabla v(\theta)|^{p(x)-2} + \eta)\nabla v(\theta)]\nabla\psi dx \\
&\qquad + \int_{\Omega} (|u(\theta)|^{p(x)-2}u(\theta) - |v(\theta)|^{p(x)-2}v(\theta))\psi dx \\
&\qquad\qquad + \int_{\Gamma_0} d_0(\theta)\left[(|\nabla u(\theta)|^{p(x)-2} + \eta)\frac{\partial u(\theta)}{\partial \vec{n}} - (|\nabla v(\theta)|^{p(x)-2} + \eta)\frac{\partial v(\theta)}{\partial \vec{n}} \right]\psi dx \ \Bigg| \\
&\leqslant \Bigg| \int_{\Omega_1} d_0(\theta)\Big[(|\nabla u(\theta)|^{p(x)-2} + \eta)\nabla u(\theta) - (|\nabla v(\theta)|^{p(x)-2} + \eta)\nabla v(\theta) \Big]\nabla\psi dx \ \Bigg| \\
&\qquad\qquad\qquad + \left| \int_{\Omega} (|u(\theta)|^{p(x)-2}u(\theta) - |v(\theta)|^{p(x)-2}v(\theta))\psi dx \ \right| \\
&= \left| \int_{\Omega_1} d_0(\theta)\Big[|\nabla u(\theta)|^{p(x)-2}\nabla u(\theta) - |\nabla v(\theta)|^{p(x)-2}\nabla v(\theta) \Big]\nabla\psi dx + \int_{\Omega_1} d_0(\theta)\eta(\nabla u(\theta) - \nabla v(\theta))\nabla\psi dx \right|
\end{aligned}$$

$$+\left|\int_{\Omega}(|u(\theta)|^{p(x)-2}u(\theta)-|v(\theta)|^{p(x)-2}v(\theta))\psi dx\right|$$

$$\leqslant M_0\int_{\Omega_1}|\,|\nabla u(\theta)|^{p(x)-2}\nabla u(\theta)-|\nabla v(\theta)|^{p(x)-2}\nabla v(\theta)\,|\,|\nabla\psi|dx+M_0\eta\int_{\Omega_1}|\nabla w|\,|\nabla\psi|dx$$
$$+\int_{\Omega}|\,|u(\theta)|^{p(x)-2}u(\theta)-|v(\theta)|^{p(x)-2}v(\theta)\,|\,|\psi|dx.$$

Retomando (5.40), temos

$$|(w_t(\theta),\psi)_{H_0}|\leqslant M_0\int_{\Omega_1}||\nabla u(\theta)|^{p(x)-2}\nabla u(\theta)-|\nabla v(\theta)|^{p(x)-2}\nabla v(\theta)||\nabla\psi|dx+M_0\eta\int_{\Omega_1}|\nabla w(\theta)||\nabla\psi|dx$$
$$+\int_{\Omega}||u(\theta)|^{p(x)-2}u(\theta)-|v(\theta)|^{p(x)-2}v(\theta)|\,|\psi|dx+L_B\|w(\theta)\|_{H_0}\|\psi\|_{H_0}. \tag{5.41}$$

Seja $\widetilde{\Omega}_1:=\{x\in\Omega_1\colon\nabla w(\theta,x)\neq\vec{0}\}$. Segue da desigualdade de Hölder, que

$$\int_{\Omega_1}||\nabla u(\theta)|^{p(x)-2}\nabla u(\theta)-|\nabla v(\theta)|^{p(x)-2}\nabla v(\theta)||\nabla\psi|dx$$
$$=\int_{\widetilde{\Omega}_1}||\nabla u(\theta)|^{p(x)-2}\nabla u(\theta)-|\nabla v(\theta)|^{p(x)-2}\nabla v(\theta)||\nabla\psi|dx$$
$$=\int_{\widetilde{\Omega}_1}||\nabla u(\theta)|^{p(x)-2}\nabla u(\theta)-|\nabla v(\theta)|^{p(x)-2}\nabla v(\theta)|\frac{|\nabla w(\theta)|^{\frac12}}{|\nabla w(\theta)|^{\frac12}}|\nabla\psi|\;dx$$
$$\leqslant\left(\int_{\widetilde{\Omega}_1}||\nabla u(\theta)|^{p(x)-2}\nabla u(\theta)-|\nabla v(\theta)|^{p(x)-2}\nabla v(\theta)||\nabla w(\theta)|dx\right)^{\frac12}$$
$$\left(\int_{\widetilde{\Omega}_1}\frac{||\nabla u(\theta)|^{p(x)-2}\nabla u(\theta)-|\nabla v(\theta)|^{p(x)-2}\nabla v(\theta)|}{|\nabla w(\theta)|}|\nabla\psi|^2dx\right)^{\frac12}$$
$$=\left(\int_{\Omega_1}||\nabla u(\theta)|^{p(x)-2}\nabla u(\theta)-|\nabla v(\theta)|^{p(x)-2}\nabla v(\theta)||\nabla w(\theta)|dx\right)^{\frac12}$$
$$\left(\int_{\widetilde{\Omega}_1}\frac{||\nabla u(\theta)|^{p(x)-2}\nabla u(\theta)-|\nabla v(\theta)|^{p(x)-2}\nabla v(\theta)|}{|\nabla w(\theta)|}|\nabla\psi|^2dx\right)^{\frac12}. \tag{5.42}$$

Para cada $x \in \widetilde{\Omega}_1$, segue do Lema 1.2.9, com $\delta = 0$, que

$$||\nabla u(\theta, x)|^{p(x)-2}\nabla u(\theta, x) - |\nabla v(\theta, x)|^{p(x)-2}\nabla v(\theta, x)| \\ \leqslant \sqrt{n}(p(x)-1)|\nabla u(\theta, x) - \nabla v(\theta, x)|(|\nabla u(\theta, x)| + |\nabla v(\theta, x)|)^{p(x)-2}. \tag{5.43}$$

Logo, de (5.42) podemos concluir que

$$\int_{\Omega_1} ||\nabla u(\theta)|^{p(x)-2}\nabla u(\theta) - |\nabla v(\theta)|^{p(x)-2}\nabla v(\theta)||\nabla \psi| dx$$
$$\leqslant \left(\int_{\Omega_1} ||\nabla u(\theta)|^{p(x)-2}\nabla u(\theta) - |\nabla v(\theta)|^{p(x)-2}\nabla v(\theta)||\nabla w(\theta)| dx\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\left(\int_{\widetilde{\Omega}_1} \frac{\sqrt{n}(p(x)-1)|\nabla w(\theta)|(|\nabla u(\theta)| + |\nabla v(\theta)|)^{p(x)-2}}{|\nabla w(\theta)|}|\nabla \psi|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant \sqrt[4]{n}\sqrt{p^+ - 1}\left(\int_{\Omega_1} ||\nabla u(\theta)|^{p(x)-2}\nabla u(\theta) - |\nabla v(\theta)|^{p(x)-2}\nabla v(\theta)||\nabla w(\theta)| dx\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\left(\int_{\widetilde{\Omega}_1} (|\nabla u(\theta)| + |\nabla v(\theta)|)^{p(x)-2}|\nabla \psi|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.44}$$

Por sua vez, pela Proposição 1.1.4 (Desigualdade de Hölder), temos que

$$\int_{\widetilde{\Omega}_1} (|\nabla u(\theta)| + |\nabla v(\theta)|)^{p(x)-2}|\nabla \psi|^2 dx \\ \leqslant \left(\frac{1}{r^-} + \frac{1}{s^-}\right) \||\nabla \psi|^2\|_{L^{r(x)}(\widetilde{\Omega}_1)}\|(|\nabla u(\theta)| + |\nabla v(\theta)|)^{p(x)-2}\|_{L^{s(x)}(\widetilde{\Omega}_1)}, \tag{5.45}$$

onde $r(x) = \frac{p(x)}{2}$ e $s(x)$ é obtida fazendo $\frac{1}{s(x)} + \frac{1}{r(x)} = 1$, isto é, $s(x) = \frac{p(x)}{p(x)-2}$. Observamos que $|\nabla \psi|^2 \in L^{r(x)}(\widetilde{\Omega}_1)$ e $(|\nabla u(\theta)| + |\nabla v(\theta)|)^{p(x)-2} \in L^{s(x)}(\widetilde{\Omega}_1)$, pois $\psi, u(\theta), v(\theta) \in V_0$,

$$\rho_r(|\nabla \psi|^2) = \int_{\widetilde{\Omega}_1} |\nabla \psi|^{2r(x)} dx = \int_{\widetilde{\Omega}_1} |\nabla \psi|^{p(x)} dx \leqslant \int_{\Omega_1} |\nabla \psi|^{p(x)} dx \tag{5.46}$$

e

$$\begin{aligned}
\rho_s((|\nabla u(\theta)|+|\nabla v(\theta)|)^{p(x)-2}) &= \int_{\widetilde{\Omega}_1} ||\nabla u(\theta)|+|\nabla v(\theta)||^{(p(x)-2)s(x)}dx \\
&= \int_{\widetilde{\Omega}_1} (|\nabla u(\theta)|+|\nabla v(\theta)|)^{p(x)}dx \\
&\leqslant \int_{\Omega_1} (|\nabla u(\theta)|+|\nabla v(\theta)|)^{p(x)}dx \\
&\leqslant \int_{\Omega_1} 2^{p(x)}(|\nabla u(\theta)|^{p(x)}+|\nabla v(\theta)|^{p(x)})dx \\
&\leqslant 2^{p^+}\left(\int_{\Omega_1} |\nabla u(\theta)|^{p(x)}dx+\int_{\Omega_1} |\nabla v(\theta)|^{p(x)}dx\right).
\end{aligned} \tag{5.47}$$

Assim, de (3.6) e (5.46), segue que

$$\begin{aligned}
\||\nabla\psi|^2\|_{L^{r(x)}(\widetilde{\Omega}_1)} &\leqslant \max\{\rho_r(|\nabla\psi|^2)^{\frac{1}{r^-}},\rho_r(|\nabla\psi|^2)^{\frac{1}{r^+}}\} \\
&\leqslant \max\left\{\left(\int_{\Omega_1}|\nabla\psi|^{p(x)}dx\right)^{\frac{1}{r^-}},\left(\int_{\Omega_1}|\nabla\psi|^{p(x)}dx\right)^{\frac{1}{r^+}}\right\} \\
&= \max\{\rho_p(\nabla\psi)^{\frac{1}{r^-}},\rho_p(\nabla\psi)^{\frac{1}{r^+}}\}.
\end{aligned} \tag{5.48}$$

Por (3.7) temos que $\rho_p(\nabla\psi)\leqslant\max\{\|\nabla\psi\|_{p(x)}^{p^-},\|\nabla\psi\|_{p(x)}^{p^+}\}$, implicando

$$\rho_p(\nabla\psi)^{\frac{1}{r^\mp}}\leqslant\left(\max\{\|\nabla\psi\|_{p(x)}^{p^-},\|\nabla\psi\|_{p(x)}^{p^+}\}\right)^{\frac{1}{r^\mp}}=\max\{(\|\nabla\psi\|_{p(x)}^{p^-})^{\frac{1}{r^\mp}},(\|\nabla\psi\|_{p(x)}^{p^+})^{\frac{1}{r^\mp}}\}.$$

Retornando a (5.48), temos

$$\begin{aligned}
\||\nabla\psi|^2\|_{L^{r(x)}(\widetilde{\Omega}_1)} &\leqslant \max\{\max\{\|\nabla\psi\|_{p(x)}^{\frac{p^-}{r^-}},\|\nabla\psi\|_{p(x)}^{\frac{p^+}{r^-}}\},\max\{\|\nabla\psi\|_{p(x)}^{\frac{p^-}{r^+}},\|\nabla\psi\|_{p(x)}^{\frac{p^+}{r^+}}\}\} \\
&= \max\{\|\nabla\psi\|_{p(x)}^{\frac{p^-}{r^-}},\|\nabla\psi\|_{p(x)}^{\frac{p^+}{r^-}},\|\nabla\psi\|_{p(x)}^{\frac{p^-}{r^+}},\|\nabla\psi\|_{p(x)}^{\frac{p^+}{r^+}}\}:=\xi_{\nabla\psi}.
\end{aligned} \tag{5.49}$$

Analogamente, de (3.6), (3.7) e (5.47) temos

$$\begin{aligned}
&\|(|\nabla u(\theta)|+|\nabla v(\theta)|)^{p(x)-2}\|_{L^{s(x)}(\widetilde{\Omega}_1)} \\
&\quad\leqslant \max\{\rho_s((|\nabla u(\theta)|+|\nabla v(\theta)|)^{p(x)-2})^{\frac{1}{s^-}},\rho_s((|\nabla u(\theta)|+|\nabla v(\theta)|)^{p(x)-2})^{\frac{1}{s^+}}\} \\
&\quad\leqslant \max\left\{\left(\int_{\Omega_1}(|\nabla u(\theta)|+|\nabla v(\theta)|)^{p(x)}dx\right)^{\frac{1}{s^-}},\left(\int_{\Omega_1}(|\nabla u(\theta)|+|\nabla v(\theta)|)^{p(x)}dx\right)^{\frac{1}{s^+}}\right\} \\
&\quad= \max\{\rho_p(|\nabla u(\theta)|+|\nabla v(\theta)|)^{\frac{1}{s^-}},\rho_p(|\nabla u(\theta)|+|\nabla v(\theta)|)^{\frac{1}{s^+}}\} \\
&\quad\leqslant \max\{\||\nabla u(\theta)|+|\nabla v(\theta)|\|_{p(x)}^{\frac{p^-}{s^-}},\||\nabla u(\theta)|+|\nabla v(\theta)|\|_{p(x)}^{\frac{p^+}{s^-}}, \\
&\qquad\qquad \||\nabla u(\theta)|+|\nabla v(\theta)|\|_{p(x)}^{\frac{p^-}{s^+}},\||\nabla u(\theta)|+|\nabla v(\theta)|\|_{p(x)}^{\frac{p^+}{s^+}}\} \\
&\quad:= \xi_{|\nabla u(\theta)|+|\nabla v(\theta)|}.
\end{aligned} \tag{5.50}$$

Para facilitar a escrita iremos considerar as notações

$$\mathcal{I}_{(f,g)} := \int\limits_{\Omega} ||f|^{p(x)-2}f - |g|^{p(x)-2}g||f-g|\ dx$$

e

$$\mathcal{I}_{1(f,g)} := \int\limits_{\Omega_1} ||f|^{p(x)-2}f - |g|^{p(x)-2}g||f-g|\ dx.$$

Retomando a desigualdade (5.44) e usando (5.45), (5.49) e (5.50), concluímos que

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega_1} &||\nabla u(\theta)|^{p(x)-2}\nabla u(\theta) - |\nabla v(\theta)|^{p(x)-2}\nabla v(\theta)||\nabla\psi|dx \\ &\leqslant \sqrt[4]{n}\sqrt{p^+-1}\left[\left(\frac{1}{r^-}+\frac{1}{s^-}\right)\xi_{\nabla\psi}\xi_{|\nabla u(\theta)|+|\nabla v(\theta)|}\right]^{\frac{1}{2}}\left(\mathcal{I}_{1(\nabla u(\theta),\nabla v(\theta))}\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{5.51}$$

Procedendo de forma análoga, podemos deduzir

$$\int\limits_{\Omega} ||u(\theta)|^{p(x)-2}u(\theta) - |v(\theta)|^{p(x)-2}v(\theta)||\psi|dx \leqslant \sqrt{p^+-1}\left[\left(\frac{1}{r^-}+\frac{1}{s^-}\right)\xi_{\psi}\xi_{|u(\theta)|+|v(\theta)|}\right]^{\frac{1}{2}}\left(\mathcal{I}_{(u(\theta),v(\theta))}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.52}$$

Retornando a (5.41), utilizando (5.51), (5.52) e a desigualdade de Hölder, segue que

$$\begin{aligned}&|(w_t(\theta),\psi)_{H_0}| \\ &\leqslant M_0\sqrt[4]{n}\sqrt{p^+-1}\left[\left(\frac{1}{r^-}+\frac{1}{s^-}\right)\xi_{\nabla\psi}\xi_{|\nabla u(\theta)|+|\nabla v(\theta)|}\right]^{\frac{1}{2}}\left(\mathcal{I}_{1(\nabla u(\theta),\nabla v(\theta))}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\qquad + \sqrt{p^+-1}\left[\left(\frac{1}{r^-}+\frac{1}{s^-}\right)\xi_{\psi}\xi_{|u(\theta)|+|v(\theta)|}\right]^{\frac{1}{2}}\left(\mathcal{I}_{(u(\theta),v(\theta))}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\qquad\qquad + M_0\eta\|\nabla w(\theta)\|_{H_0}\|\nabla\psi\|_{H_0} + L_B\|w(\theta)\|_{H_0}\|\psi\|_{H_0}.\end{aligned} \tag{5.53}$$

Como $u(\theta), v(\theta), \psi \in V_0$, $p(x) \geqslant p^- > 2$ e $|\Omega| < \infty$, então, usando o Teorema 1.1.2, podemos concluir que $u(\theta), v(\theta), \psi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Pela desigualdade de Poincaré, existe $\alpha > 0$ tal que

$$\|w(\theta)\|_{H_0} \leqslant \alpha\|\nabla w(\theta)\|_{H_0} \quad \text{e} \quad \|\psi\|_{H_0} \leqslant \alpha\|\nabla\psi\|_{H_0}.$$

Segue de (5.53), que

$$\begin{aligned}&\sup_{\|\psi\|_{V_0}\leqslant 1}|(w_t(\theta),\psi)_{H_0}| \\ &\leqslant M_0\sqrt[4]{n}\sqrt{p^+-1}\left[\left(\frac{1}{r^-}+\frac{1}{s^-}\right)\xi_{|\nabla u(\theta)|+|\nabla v(\theta)|}\right]^{\frac{1}{2}}\sup_{\|\psi\|_{V_0}\leqslant 1}(\xi_{\nabla\psi})^{\frac{1}{2}}\left(\mathcal{I}_{1(\nabla u(\theta),\nabla v(\theta))}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \sqrt{p^+-1}\left[\left(\frac{1}{r^-}+\frac{1}{s^-}\right)\xi_{|u(\theta)|+|v(\theta)|}\right]^{\frac{1}{2}}\sup_{\|\psi\|_{V_0}\leqslant 1}(\xi_{\psi})^{\frac{1}{2}}\left(\mathcal{I}_{(u(\theta),v(\theta))}\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

$$+ M_0\eta\|\nabla w(\theta)\|_{H_0} \sup_{\|\psi\|_{V_0}\leqslant 1} \|\nabla\psi\|_{H_0} + L_B\alpha\|\nabla w(\theta)\|_{H_0}\alpha \sup_{\|\psi\|_{V_0}\leqslant 1} \|\nabla\psi\|_{H_0}. \tag{5.54}$$

Como $\|\psi\|_{V_0} = \|\psi\|_{p(x)} + \|\nabla\psi\|_{p(x)}$, então $\|\psi\|_{p(x)} \leqslant \|\psi\|_{V_0}$ e $\|\nabla\psi\|_{p(x)} \leqslant \|\psi\|_{V_0}$. Assim, se $\|\psi\|_{V_0} \leqslant 1$,

$$\begin{aligned}\xi_{\nabla\psi} &= \max\{\|\nabla\psi\|_{p(x)}^{\frac{p^-}{r^-}}, \|\nabla\psi\|_{p(x)}^{\frac{p^+}{r^-}}, \|\nabla\psi\|_{p(x)}^{\frac{p^-}{r^+}}, \|\nabla\psi\|_{p(x)}^{\frac{p^+}{r^+}}\}\\ &\leqslant \max\{\|\psi\|_{V_0}^{\frac{p^-}{r^-}}, \|\psi\|_{V_0}^{\frac{p^+}{r^-}}, \|\psi\|_{V_0}^{\frac{p^-}{r^+}}, \|\psi\|_{V_0}^{\frac{p^+}{r^+}}\}\\ &\leqslant 1.\end{aligned}$$

Analogamente, se $\|\psi\|_{V_0} \leqslant 1$ temos

$$\begin{aligned}\xi_{\psi} &= \max\{\|\psi\|_{p(x)}^{\frac{p^-}{r^-}}, \|\psi\|_{p(x)}^{\frac{p^+}{r^-}}, \|\psi\|_{p(x)}^{\frac{p^-}{r^+}}, \|\psi\|_{p(x)}^{\frac{p^+}{r^+}}\}\\ &\leqslant \max\{\|\psi\|_{V_0}^{\frac{p^-}{r^-}}, \|\psi\|_{V_0}^{\frac{p^+}{r^-}}, \|\psi\|_{V_0}^{\frac{p^-}{r^+}}, \|\psi\|_{V_0}^{\frac{p^+}{r^+}}\}\\ &\leqslant 1.\end{aligned}$$

Além disso, como $L^{p(x)} \hookrightarrow L^2$ existe constante $\alpha_1 > 0$, tal que

$$\|\nabla\psi\|_{H_0} \leqslant \alpha_1\|\nabla\psi\|_{p(x)} \leqslant \alpha_1\|\psi\|_{V_0}.$$

Concluímos, de (5.54), que

$$\begin{aligned}&\sup_{\|\psi\|_{V_0}\leqslant 1} |(w_t(\theta),\psi)_{H_0}|\\ &\leqslant M_0\sqrt[4]{n}\sqrt{p^+-1}\left[\left(\frac{1}{r^-}+\frac{1}{s^-}\right)\xi_{|\nabla u(\theta)|+|\nabla v(\theta)|}\right]^{\frac{1}{2}} \left(\mathcal{I}_{1(\nabla u(\theta),\nabla v(\theta))}\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\quad + \sqrt{p^+-1}\left[\left(\frac{1}{r^-}+\frac{1}{s^-}\right)\xi_{|u(\theta)|+|v(\theta)|}\right]^{\frac{1}{2}} \left(\mathcal{I}_{(u(\theta),v(\theta))}\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\quad + M_0\eta\alpha_1\|\nabla w(\theta)\|_{H_0} + L_B\alpha^2\alpha_1\|\nabla w(\theta)\|_{H_0}.\end{aligned}$$

Sabendo que $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$, isto é, $(a+b+c)^2 \leqslant 4(a^2+b^2)+2c^2$, temos

$$\begin{aligned}&\left(\sup_{\|\psi\|_{V_0}\leqslant 1} |(w_t(\theta),\psi)_{H_0}|\right)^2\\ &\leqslant 4M_0^2\sqrt{n}(p^+-1)\left(\frac{1}{r^-}+\frac{1}{s^-}\right)\xi_{|\nabla u(\theta)|+|\nabla v(\theta)|}\,\mathcal{I}_{1(\nabla u(\theta),\nabla v(\theta))}\\ &\quad + 4(p^+-1)\left(\frac{1}{r^-}+\frac{1}{s^-}\right)\xi_{|u(\theta)|+|v(\theta)|}\,\mathcal{I}_{(u(\theta),v(\theta))}\\ &\quad + 2(M_0\eta\alpha_1 + L_B\alpha^2\alpha_1)^2\|\nabla w(\theta)\|_{H_0}^2.\end{aligned} \tag{5.55}$$

Como

$$
\begin{aligned}
\|(L(t,\tau)\chi_1 - L(t,\tau)\chi_2)_t\|^2_{L^2(t,t+\ell;V_0')} &= \int_t^{t+\ell} \|(L(t,\tau)\chi_1 - L(t,\tau)\chi_2)_t(\theta)\|^2_{V_0'}\, d\theta \\
&= \int_t^{t+\ell} \|w_t(\theta)\|^2_{V_0'}\, d\theta \\
&= \int_t^{t+\ell} \left(\sup_{\|\psi\|_{V_0}\leqslant 1} |\langle w_t(\theta), \psi\rangle_{V_0',V_0}| \right)^2 d\theta \\
&= \int_t^{t+\ell} \left(\sup_{\|\psi\|_{V_0}\leqslant 1} |(w_t(\theta), \psi)_{H_0}| \right)^2 d\theta.
\end{aligned}
$$

Segue de (5.55) que

$$
\begin{aligned}
&\|(L(t,\tau)\chi_1 - L(t,\tau)\chi_2)_t\|^2_{L^2(t,t+\ell;V_0')} \\
&\qquad \leqslant 4M_0^2\sqrt{n}(p^+-1)\left(\frac{1}{r^-}+\frac{1}{s^-}\right)\int_t^{t+\ell} \xi_{|\nabla u(\theta)|+|\nabla v(\theta)|}\mathcal{I}_{1(\nabla u(\theta),\nabla v(\theta))}\, d\theta \\
&\qquad\qquad + 4(p^+-1)\left(\frac{1}{r^-}+\frac{1}{s^-}\right)\int_t^{t+\ell} \xi_{|u(\theta)|+|v(\theta)|}\mathcal{I}_{(u(\theta),v(\theta))}\, d\theta \\
&\qquad\qquad\qquad + 2(M_0\eta\alpha_1 + L_B\alpha^2\alpha_1)^2 \int_t^{t+\ell} \|\nabla w(\theta)\|^2_{H_0}\, d\theta. \qquad (5.56)
\end{aligned}
$$

Por sua vez,

$$
\begin{aligned}
\|\ |\nabla u(\theta)| + |\nabla v(\theta)|\ \|_{p(x)} &\leqslant \|\nabla u(\theta)\|_{p(x)} + \|\nabla v(\theta)\|_{p(x)} \\
&\leqslant \sup_{\theta\in[t,t+\ell]} (\|\nabla u(\theta)\|_{p(x)} + \|\nabla v(\theta)\|_{p(x)}) \\
&\leqslant \sup_{\theta\in[t,t+\ell]} (\|u(\theta)\|_{V_0} + \|v(\theta)\|_{V_0}).
\end{aligned}
$$

Segue da demonstração do Lema 5.3.1, considerando $\tau_1 = \frac{t-\tau}{2}$ e $k = \frac{t-\tau}{2}$, que $\|u(s)\|_{V_0} \leqslant C_2$, para todo $s \geqslant \tau + \tau_2 = \tau + \tau_1 + k = t$. Com isso

$$
\|\ |\nabla u(\theta)| + |\nabla v(\theta)|\ \|_{p(x)} \leqslant 2C_2, \quad \forall \theta \in [t, t+\ell].
$$

Logo,

$$
\xi_{|\nabla u(1+\theta)|+|\nabla v(1+\theta)|} \leqslant \max\{(2C_2)^{\frac{p^-}{s^-}}, (2C_2)^{\frac{p^+}{s^-}}, (2C_2)^{\frac{p^-}{s^+}}, (2C_2)^{\frac{p^+}{s^+}}\} := k_1.
$$

Da mesma forma, podemos concluir que $\xi_{|u(1+\theta)|+|v(1+\theta)|} \leqslant k_1$. Assim, em (5.56), temos

$$
\begin{aligned}
&\|(L(t,\tau)\chi_1 - L(t,\tau)\chi_2)_t\|^2_{L^2(t,t+\ell;V_0')} \\
&\leqslant 4M_0^2\sqrt{n}(p^+-1)\left(\frac{1}{r^-}+\frac{1}{s^-}\right) k_1 \int_t^{t+\ell} \mathcal{I}_{1(\nabla u(\theta),\nabla v(\theta))}\, d\theta \\
&+ 4(p^+-1)\left(\frac{1}{r^-}+\frac{1}{s^-}\right) k_1 \int_t^{t+\ell} \mathcal{I}_{(u(\theta),v(\theta))}\, d\theta + 2(M_0\eta\alpha_1 + L_B\alpha^2\alpha_1)^2 \int_t^{t+\ell} \|\nabla w(\theta)\|^2_{H_0}\, d\theta
\end{aligned}
$$

$$\leqslant \gamma \left(\int_t^{t+\ell} \mathcal{I}_{1(\nabla u(\theta), \nabla v(\theta))} \, d\theta + \int_t^{t+\ell} \mathcal{I}_{(u(\theta), v(\theta))} \, d\theta + \int_t^{t+\ell} \|\nabla w(\theta)\|_{H_0}^2 \, d\theta \right), \tag{5.57}$$

onde $\gamma = \max\left\{4M_0^2\sqrt{n}(p^+ - 1)\left(\frac{1}{r^-} + \frac{1}{s^-}\right)k_1, 4(p^+ - 1)\left(\frac{1}{r^-} + \frac{1}{s^-}\right)k_1, 2(M_0\eta\alpha_1 + L_B\alpha^2\alpha_1)^2\right\}$.

Nosso próximo objetivo é mostrar a existência de uma constante, $\beta_1 = \beta_1(t, \ell, \tau) > 0$, tal que

$$\int_t^{t+\ell} \mathcal{I}_{1(\nabla u(\theta), \nabla v(\theta))} \, d\theta \leqslant \beta_1 \int_\tau^{\tau+\ell} \|w(\theta)\|_{H_0}^2 \, d\theta. \tag{5.58}$$

Fazendo o produto $(\cdot, w(\theta))_{H_0}$ na equação (5.39) temos

$$(w_t, w(\theta))_{H_0} + (A_0^{H_0}(\theta)u(\theta) - A_0^{H_0}(\theta)v(\theta), w(\theta))_{H_0} = (B(\theta, u(\theta)) - B(\theta, v(\theta)), w(\theta))_{H_0},$$

onde

$$\begin{aligned}
(A_0^{H_0}(\theta)u(\theta) - A_0^{H_0}(\theta)v(\theta), w(\theta))_{H_0} &= \langle A_0(\theta)u(\theta) - A_0(\theta)v(\theta), w(\theta)\rangle_{V_0', V_0} \\
&= \int_{\Omega_1} d_0(\theta)\left(|\nabla u(\theta)|^{p(x)-2}\nabla u(\theta) - |\nabla v(\theta)|^{p(x)-2}\nabla v(\theta)\right)\nabla w(\theta)\, dx \\
&\quad + \int_{\Omega_1} d_0(\theta)\eta(\nabla u(\theta) - \nabla v(\theta))\nabla w(\theta)\, dx \\
&\quad + \int_\Omega (|u(\theta)|^{p(x)-2}u(\theta) - |v(\theta)|^{p(x)-2}v(\theta))w(\theta)\, dx \\
&\geqslant m_0 \int_{\Omega_1} (|\nabla u(\theta)|^{p(x)-2}\nabla u(\theta) - |\nabla v(\theta)|^{p(x)-2}\nabla v(\theta))\nabla w(\theta)\, dx \\
&\quad + m_0\eta \int_{\Omega_1} |\nabla w(\theta)|^2\, dx + \int_\Omega (|u(\theta)|^{p(x)-2}u(\theta) - |v(\theta)|^{p(x)-2}v(\theta))w(\theta)\, dx.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(\theta)\|_{H_0}^2 + m_0\mathcal{I}_{1(\nabla u(\theta), \nabla v(\theta))} + m_0\eta \int_{\Omega_1} |\nabla w(\theta)|^2\, dx + \mathcal{I}_{(u(\theta), v(\theta))}& \\
\leqslant (w_t(\theta), w(\theta))_{H_0} + (A_0^{H_0}u(\theta) - A_0^{H_0}v(\theta), w(\theta))_{H_0}& \\
= (B(\theta, u(\theta)) - B(\theta, v(\theta)), w(\theta))_{H_0}& \\
\leqslant |(B(\theta, u(\theta)) - B(\theta, v(\theta)), w(\theta))_{H_0}|& \\
\leqslant \|B(\theta, u(\theta)) - B(\theta, v(\theta))\|_{H_0}\|w(\theta)\|_{H_0}& \\
\leqslant L_B\|u(\theta) - v(\theta)\|_{H_0}\|w(\theta)\|_{H_0}& \\
= L_B\|w(\theta)\|_{H_0}^2.&
\end{aligned} \tag{5.59}$$

Para cada $x \in \Omega_1$, segue de (1.8), com $\delta = 0$, que

$$\begin{aligned}
(|\nabla u(\theta, x)|^{p(x)-2}\nabla u(\theta, x) - |\nabla v(\theta, x)|^{p(x)-2}\nabla v(\theta, x))\nabla w(\theta, x)& \\
\geqslant \frac{1}{2^{p(x)-1}}|\nabla u(\theta, x) - \nabla v(\theta, x)|^2(|\nabla u(\theta, x)| + |\nabla v(\theta, x)|)^{p(x)-2}&
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(|u(\theta, x)|^{p(x)-2}u(\theta, x) - |v(\theta, x)|^{p(x)-2}v(\theta, x))w(\theta, x)& \\
\geqslant \frac{1}{2^{p(x)-1}}|u(\theta, x) - v(\theta, x)|^2(|u(\theta, x)| + |v(\theta, x)|)^{p(x)-2}.&
\end{aligned}$$

Logo, de (5.59), temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(\theta)\|_{H_0}^2 + m_0\int_{\Omega_1}\frac{1}{2^{p(x)-1}}|\nabla w(\theta)|^2(|\nabla u(\theta)|+|\nabla v(\theta)|)^{p(x)-2}\,dx + m_0\eta\int_{\Omega_1}|\nabla w(\theta)|^2\,dx \\
+\int_{\Omega}\frac{1}{2^{p(x)-1}}|w(\theta)|^2(|u(\theta)|+|v(\theta)|)^{p(x)-2}\,dx \\
\leqslant \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(\theta)\|_{H_0}^2 + m_0\mathcal{I}_{1(\nabla u(\theta),\nabla v(\theta))} + m_0\eta\int_{\Omega_1}|\nabla w(\theta)|^2\,dx + \mathcal{I}_{(u(\theta),v(\theta))} \\
\leqslant L_B\|w(\theta)\|_{H_0}^2. \qquad (5.60)
\end{aligned}$$

Observamos que $m_0\eta\int\limits_{\Omega_1}|\nabla w(\theta)|^2\,dx \geqslant 0$. Como $p(x)\leqslant p^+$ e $\mathbb{R}^+\ni x\mapsto\left(\frac{1}{2}\right)^x$ é decrescente, então $\frac{1}{2^{p(x)-1}}\geqslant\frac{1}{2^{p^+-1}}$. Assim, também concluímos que

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega_1}\frac{1}{2^{p(x)-1}}|\nabla w(\theta)|^2(|\nabla u(\theta)|+|\nabla v(\theta)|)^{p(x)-2}\,dx \\
&\qquad\geqslant\frac{1}{2^{p^+-1}}\int\limits_{\Omega_1}|\nabla w(\theta)|^2(|\nabla u(\theta)|+|\nabla v(\theta)|)^{p(x)-2}\,dx\geqslant 0
\end{aligned}$$

e

$$\int\limits_{\Omega}\frac{1}{2^{p(x)-1}}|w(\theta)|^2(|u(\theta)|+|v(\theta)|)^{p(x)-2}\,dx\geqslant\frac{1}{2^{p^+-1}}\int\limits_{\Omega_1}|w(\theta)|^2(|u(\theta)|+|v(\theta)|)^{p(x)-2}\,dx\geqslant 0.$$

Logo, de (5.60), podemos escrever

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(\theta)\|_{H_0}^2 + m_0\frac{1}{2^{p^+-1}}\int\limits_{\Omega_1}|\nabla w(\theta)|^2(|\nabla u(\theta)|+|\nabla v(\theta)|)^{p(x)-2}\,dx\leqslant L_B\|w(\theta)\|_{H_0}^2, \qquad (5.61)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(\theta)\|_{H_0}^2 + m_0\eta\int\limits_{\Omega_1}|\nabla w(\theta)|^2\,dx\leqslant L_B\|w(\theta)\|_{H_0}^2 \qquad (5.62)$$

e

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(\theta)\|_{H_0}^2 + \frac{1}{2^{p^+-1}}\int\limits_{\Omega}|w(\theta)|^2(|u(\theta)|+|v(\theta)|)^{p(x)-2}\,dx\leqslant L_B\|w(\theta)\|_{H_0}^2. \qquad (5.63)$$

Negligenciando o segundo termo da soma em (5.61) e integrando para θ variando no intervalo $[\bar{s},\bar{t}]$, onde $0\leqslant\bar{s}<\bar{t}$, segue que

$$\|w(\bar{t})\|_{H_0}^2\leqslant\|w(\bar{s})\|_{H_0}^2 + 2L_B\int_{\bar{s}}^{\bar{t}}\|w(\theta)\|_{H_0}^2\,d\theta.$$

Pelo Lema 1.2.3, Lema de Grönwall Bellman, temos

$$\|w(\bar{t})\|_{H_0}^2\leqslant\|w(\bar{s})\|_{H_0}^2\exp(2L_B(\bar{t}-\bar{s})),\qquad\text{para }\ 0\leqslant\bar{s}<\bar{t}. \qquad (5.64)$$

Retornando a (5.61) e integrando no intervalo $[a, t+\ell]$, onde $a \in [\tau, \min\{t, \tau+\ell\}]$, obtemos

$$\frac{1}{2}\|w(t+\ell)\|^2_{H_0} - \frac{1}{2}\|w(a)\|^2_{H_0} + \frac{m_0}{2^{p^+-1}}\int_a^{t+\ell}\int_\Omega |\nabla w(\theta)|^2(|\nabla u(\theta)| + |\nabla v(\theta)|)^{p(x)-2}\,dx\,d\theta$$
$$\leqslant L_B \int_a^{t+\ell} \|w(\theta)\|^2_{H_0}\,d\theta.$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
&\frac{m_0}{2^{p^+-2}}\int_a^{t+\ell}\int_\Omega |\nabla w(\theta)|^2(|\nabla u(\theta)| + |\nabla v(\theta)|)^{p(x)-2}\,dx\,d\theta \\
&\qquad\leqslant \frac{m_0}{2^{p^+-2}}\int_a^{t+\ell}\int_\Omega |\nabla w(\theta)|^2(|\nabla u(\theta)| + |\nabla v(\theta)|)^{p(x)-2}\,dx\,d\theta + \|w(t+\ell)\|^2_{H_0} \\
&\qquad= 2\left(\frac{1}{2}\|w(t+\ell)\|^2_{H_0} + \frac{m_0}{2^{p^+-1}}\int_a^{t+\ell}\int_\Omega |\nabla w(\theta)|^2(|\nabla u(\theta)| + |\nabla v(\theta)|)^{p(x)-2}\,dx\,d\theta\right) \\
&\qquad\leqslant 2\left(\frac{1}{2}\|w(a)\|^2_{H_0} + L_B\int_a^{t+\ell}\|w(\theta)\|^2_{H_0}\,d\theta\right) \\
&\qquad= \|w(a)\|^2_{H_0} + 2L_B\int_a^{t+\ell}\|w(\theta)\|^2_{H_0}\,d\theta. \qquad (5.65)
\end{aligned}$$

Vamos agora estimar o lado esquerdo da desigualdade (5.65). Como $0 \leqslant a \leqslant \theta \leqslant t+\ell$ então por (5.64), com $\bar{s} = a$ e $\bar{t} = \theta$, temos

$$\|w(\theta)\|^2_{H_0} \leqslant \|w(a)\|^2_{H_0}\exp(2L_B(\theta - a)).$$

Integrando esta última desigualdade para θ variando em $[a, t+\ell]$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_a^{t+\ell}\|w(\theta)\|^2_{H_0}\,d\theta &\leqslant \int_a^{t+\ell}\|w(a)\|^2_{H_0}\exp(2L_B(\theta - a))\,d\theta \\
&= \frac{1}{2L_B}\|w(a)\|^2_{H_0}(\exp(2L_B(t+\ell-a)) - 1),
\end{aligned}$$

isto é,

$$2L_B\int_a^{t+\ell}\|w(\theta)\|^2_{H_0}\,d\theta \leqslant \|w(a)\|^2_{H_0}\exp(2L_B(t+\ell-a)) - \|w(a)\|^2_{H_0}. \qquad (5.66)$$

Substituindo em (5.65) e usando o crescimento da função $\exp(\cdot)$, concluímos, para todo $a \in [\tau, \min\{t, \tau+\ell\}]$, que

$$\begin{aligned}
\frac{m_0}{2^{p^+-2}}\int_a^{t+\ell}\int_{\Omega_1} |\nabla w(\theta)|^2(|\nabla u(\theta)| + |\nabla v(\theta)|)^{p(x)-2}\,dx\,d\theta &\leqslant \|w(a)\|^2_{H_0}\exp(2L_B(t+\ell-a)) \\
&\leqslant \|w(a)\|^2_{H_0}\exp(2L_B(t+\ell-\tau)).
\end{aligned} \qquad (5.67)$$

Logo, de (5.43) e (5.67), temos

$$
\begin{aligned}
\int_t^{t+\ell}\int_{\Omega_1} &||\nabla u(\theta)|^{p(x)-2}\nabla u(\theta)-|\nabla v(\theta)|^{p(x)-2}\nabla v(\theta)||\nabla w(\theta)|\;dxd\theta\\
&\leqslant \int_a^{t+\ell}\int_{\Omega_1} ||\nabla u(\theta)|^{p(x)-2}\nabla u(\theta)-|\nabla v(\theta)|^{p(x)-2}\nabla v(\theta)||\nabla w(\theta)|\;dxd\theta\\
&\leqslant \int_a^{t+\ell}\int_{\Omega_1} \sqrt{n}(p(x)-1)|\nabla u(\theta)-\nabla v(\theta)|(|\nabla u(\theta)|+|\nabla v(\theta)|)^{p(x)-2}|\nabla w(\theta)|\;dxd\theta\\
&\leqslant \int_a^{t+\ell}\int_{\Omega_1} \sqrt{n}(p^+-1)|\nabla w(\theta)|^2(|\nabla u(\theta)|+|\nabla v(\theta)|)^{p(x)-2}\;dxd\theta\\
&=\sqrt{n}(p^+-1)\int_a^{t+\ell}\int_{\Omega_1}|\nabla w(\theta)|^2(|\nabla u(\theta)|+|\nabla v(\theta)|)^{p(x)-2}\;dxd\theta\\
&\leqslant \sqrt{n}(p^+-1)\left(\frac{2^{p^+-2}}{m_0}\|w(a)\|_{H_0}^2\exp(2L_B(t+\ell-\tau))\right),\quad \forall a\in[\tau,\min\{t,\tau+\ell\}].
\end{aligned}
$$

Integrando essa última desigualdade para a variando em $[\tau,\min\{t,\tau+\ell\}]$ temos

$$
\begin{aligned}
(\min\{t,\tau+\ell\}-\tau)\int_t^{t+\ell}&\mathcal{I}_{1(\nabla u(\theta),\nabla v(\theta))}\;d\theta\\
&\leqslant \frac{2^{p^+-2}}{m_0}\sqrt{n}(p^+-1)\exp(2L_B(t+\ell-\tau))\int_\tau^{\min\{t,\tau+\ell\}}\|w(a)\|_{H_0}^2\,da\\
&\leqslant \frac{2^{p^+-2}}{m_0}\sqrt{n}(p^+-1)\exp(2L_B(t+\ell-\tau))\int_\tau^{\tau+\ell}\|w(\theta)\|_{H_0}^2\,d\theta.
\end{aligned}
$$

Portanto (5.58) ocorre para $\beta_1=2^{p^+-2}[m_0(\min\{t,\tau+\ell\}-\tau)]^{-1}\sqrt{n}(p^+-1)\exp(2L_B(t+\ell-\tau)$.

Procedendo de forma análoga, concluímos a existência de $\beta_2=\beta_2(t,\ell,\tau)>0$, tal que

$$
\int_t^{t+\ell}\mathcal{I}_{(u(\theta),v(\theta))}\;d\theta\leqslant\beta_2\int_\tau^{\tau+\ell}\|w(\theta)\|_{H_0}^2\,d\theta. \tag{5.68}
$$

De fato, usando a mesma argumentação que acabamos de fazer em (5.61) para (5.63), segue de (5.66) que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2^{p^+-2}}\int_a^{t+\ell}\int_\Omega &|w(\theta)|^2(|u(\theta)|+|v(\theta)|)^{p(x)-2}\,dx\,d\theta\\
&\leqslant\frac{1}{2^{p^+-2}}\int_a^{t+\ell}\int_\Omega|w(\theta)|^2(|u(\theta)|+|v(\theta)|)^{p(x)-2}\,dx\,d\theta+\|w(a)\|_{H_0}^2\\
&=2\left(\frac{1}{2}\|w(a)\|_{H_0}^2+\frac{1}{2^{p^+-1}}\int_a^{t+\ell}\int_\Omega|w(\theta)|^2(|u(\theta)|+|v(\theta)|)^{p(x)-2}\,dx\,d\theta\right)\\
&\leqslant 2\left(\frac{1}{2}\|w(a)\|_{H_0}^2+L_B\int_a^{t+\ell}\|w(\theta)\|_{H_0}^2\,d\theta\right)\\
&\leqslant\|w(a)\|_{H_0}^2\exp(2L_B(t+\ell-\tau)),\quad\forall a\in[\tau,\min\{t,\tau+\ell\}].
\end{aligned} \tag{5.69}
$$

Para cada $x \in \Omega$, obtemos de (1.7), com $\delta = 0$, que

$$||u(\theta,x)|^{p(x)-2}u(\theta,x) - |v(\theta,x)|^{p(x)-2}v(\theta,x)| \leqslant (p(x)-1)|w(\theta,x)|(|u(\theta,x)|+|v(\theta,x)|)^{p(x)-2}. \tag{5.70}$$

Logo, de (5.69) e (5.70), concluímos que

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+\ell}\int_\Omega &||u(\theta)|^{p(x)-2}u(\theta) - |v(\theta)|^{p(x)-2}v(\theta)||w(\theta)|\; dxd\theta \\
&\leqslant \int_a^{t+\ell}\int_\Omega ||u(\theta)|^{p(x)-2}u(\theta) - |v(\theta)|^{p(x)-2}v(\theta)||w(\theta)|\; dxd\theta \\
&\leqslant \int_a^{t+\ell}\int_\Omega (p(x)-1)|u(\theta)-v(\theta)|(|u(\theta)|+|v(\theta)|)^{p(x)-2}|w(\theta)|\; dxd\theta \\
&\leqslant \int_a^{t+\ell}\int_\Omega (p^+-1)|w(\theta)|^2(|u(\theta)|+|v(\theta)|)^{p(x)-2}\; dxd\theta \\
&=(p^+-1)\int_a^{t+\ell}\int_\Omega |w|^2(|u|+|v|)^{p(x)-2}\; dxd\theta \\
&\leqslant(p^+-1)\left(2^{p^+-2}\|w(a)\|_{H_0}^2\exp(2L_B(t+\ell-\tau))\right),\ \forall a\in[\tau,\min\{t,\tau+\ell\}].
\end{aligned}$$

Integrando essa última desigualdade para a variando em $[\tau,\min\{t,\tau+\ell\}]$ temos

$$\begin{aligned}
(\min\{t,\tau+\ell\}-\tau)\int_t^{t+\ell}\mathcal{I}_{(u(\theta),v(\theta))}\; d\theta &\leqslant 2^{p^+-2}(p^+-1)\exp(2L_B(t+\ell-\tau))\int_\tau^{\min\{t,\tau+\ell\}}\|w(a)\|_{H_0}^2\, da \\
&\leqslant 2^{p^+-2}(p^+-1)\exp(2L_B(t+\ell-\tau))\int_\tau^{\tau+\ell}\|w(a)\|_{H_0}^2\, da,
\end{aligned}$$

obtendo (5.68), com $\beta_2 = 2^{p^+-2}(p^+-1)\exp(2L_B(t+\ell-\tau))(\min\{t,\tau+\ell\}-\tau)^{-1}$.

Além disso, temos a existência de $\beta_3 = \beta_3(t,\tau,\ell) > 0$ tal que

$$\|\nabla w\|_{L^2(t,t+\ell;H_0)}^2 = \int_t^{t+\ell}\int_{\Omega_1}|\nabla w(\theta)|^2\; dxd\theta \leqslant \beta_3\int_\tau^{\tau+\ell}\|w(\theta)\|_{H_0}^2\; d\theta. \tag{5.71}$$

De fato, integrando ambos os lados de (5.62) sob o intervalo $[a,t+\ell]$, onde $a\in[\tau,\min\{t,\tau+\ell\}]$, segue de (5.66), que

$$\begin{aligned}
2m_0\eta\int_a^{t+\ell}\int_{\Omega_1}|\nabla w(\theta,x)|^2\,dx\,d\theta &\leqslant 2m_0\eta\int_a^{t+\ell}\int_{\Omega_1}|\nabla w(\theta,x)|^2\,dx\,d\theta + \|w(t+\ell)\|_{H_0}^2 \\
&=2\left(\frac{1}{2}\|w(t+\ell)\|_{H_0}^2 + m_0\eta\int_a^{t+\ell}\int_{\Omega_1}|\nabla w(\theta,x)|^2\,dx\,d\theta\right) \\
&\leqslant 2\left(\frac{1}{2}\|w(a)\|_{H_0}^2 + L_B\int_a^{t+\ell}\|w(\theta)\|_{H_0}^2\,d\theta\right) \\
&\leqslant \|w(a)\|_{H_0}^2\exp(2L_B(t+\ell-\tau)),\quad \forall a\in[\tau,\min\{t,\tau+\ell\}].
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\int_t^{t+\ell}\int_\Omega|\nabla w(\theta,x)|^2\,dx\,d\theta \leqslant \int_a^{t+\ell}\int_\Omega|\nabla w(\theta,x)|^2\,dx\,d\theta$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_a^{t+\ell}\int_{\Omega_1} |\nabla w(\theta,x)|^2\,dx\,d\theta \\
&\leqslant \frac{\exp(2L_B(t+\ell-\tau))}{2m_0\eta}\|w(a)\|_{H_0}^2, \quad \forall a\in[\tau,\min\{t,\tau+\ell\}]. \qquad (5.72)
\end{aligned}
$$

Logo, integrando ambos os lados de (5.72) para a variando em $[\tau,\min\{t,\tau+\ell\}]$, obtemos (5.71) com $\beta_3=\exp(2L_B(t+\ell-\tau))[2m_0\eta(\min\{t,\tau+\ell\}-\tau)]^{-1}$.

Finalmente, segue de (5.57), (5.58), (5.68) e (5.71) que

$$
\begin{aligned}
&\|L(t,\tau)\chi_1-L(t,\tau)\chi_2\|_{W^0_{t,\ell}} \\
&\quad=\|\nabla(L(t,\tau)\chi_1-L(t,\tau)\chi_2)\|_{L^2(t,t+\ell;H_0)}+\|(L(t,\tau)\chi_1-L(t,\tau)\chi_2)_t\|_{L^2(t,t+\ell;V_0')} \\
&\quad=\left(\int_t^{t+\ell}\|\nabla u(\theta)-\nabla v(\theta)\|_{H_0}^2 d\theta\right)^{\frac12}+\left(\|(L(t,\tau)\chi_1-L(t,\tau)\chi_2)_t\|_{L^2(t,t+\ell;V_0')}^2\right)^{\frac12} \\
&\quad\leqslant \|\nabla w\|_{L^2(t,t+\ell;H_0)} \\
&\qquad\quad + \gamma^{\frac12}\left(\int_t^{t+\ell}\mathcal{I}_{1(\nabla u(\theta),\nabla v(\theta))}\,d\theta+\|\nabla w\|_{L^2(t,t+\ell;H_0)}^2+\int_t^{t+\ell}\mathcal{I}_{(u(\theta),v(\theta))}\,d\theta\right)^{\frac12} \\
&\quad\leqslant \|\nabla w\|_{L^2(t,t+\ell;H_0)}+\gamma^{\frac12}\left(\int_t^{t+\ell}\mathcal{I}_{1(\nabla u(\theta),\nabla v(\theta))}\,d\theta\right)^{\frac12}+\gamma^{\frac12}\|\nabla w\|_{L^2(t,t+\ell;H_0)} \\
&\qquad\quad + \gamma^{\frac12}\left(\int_t^{t+\ell}\mathcal{I}_{(u(\theta),v(\theta))}\,d\theta\right)^{\frac12} \\
&\quad\leqslant (1+\gamma^{\frac12})\left(\beta_3\int_\tau^{\tau+\ell}\|w(\theta)\|_{H_0}^2\,d\theta\right)^{\frac12}+\gamma^{\frac12}\left(\beta_1\int_\tau^{\tau+\ell}\|w(\theta)\|_{H_0}^2\,d\theta\right)^{\frac12} \\
&\qquad\quad + \gamma^{\frac12}\left(\beta_2\int_\tau^{\tau+\ell}\|w(\theta)\|_{H_0}^2\,d\theta\right)^{\frac12} \\
&\quad=[(1+\gamma^{\frac12})\beta_3^{\frac12}+\gamma^{\frac12}\beta_1^{\frac12}+\gamma^{\frac12}\beta_2^{\frac12}]\left(\int_\tau^{\tau+\ell}\|w(\theta)\|_{H_0}^2\,d\theta\right)^{\frac12} \\
&\quad=[(1+\gamma^{\frac12})\beta_3^{\frac12}+\gamma^{\frac12}\beta_1^{\frac12}+\gamma^{\frac12}\beta_2^{\frac12}]\left(\int_\tau^{\tau+\ell}\|\chi_1(\theta)-\chi_2(\theta)\|_{H_0}^2\,d\theta\right)^{\frac12} \\
&\quad=\omega_0\|\chi_1-\chi_2\|_{L^2(\tau,\tau+\ell;H_0)},
\end{aligned}
$$

onde $\omega_0=[(1+\gamma^{\frac12})\beta_3^{\frac12}+\gamma^{\frac12}\beta_1^{\frac12}+\gamma^{\frac12}\beta_2^{\frac12}]$. Concluindo a demonstração. ☐

Seja $\tau\in\mathbb{R}$, consideramos as aplicações

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e}_\tau\colon \mathfrak{X}_{\tau,\ell} &\to H_0 \\
\chi &\mapsto \chi(\tau+\ell)
\end{aligned} \qquad (5.73)
$$

e

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e}^\lambda_\tau\colon \mathfrak{X}^\lambda_{\tau,\ell} &\to H \\
\chi &\mapsto \chi(\tau+\ell),
\end{aligned} \qquad (5.74)
$$

para todo $\lambda\in(0,1]$.

Lema 5.4.4. *Para cada $\tau \in \mathbb{R}$, as aplicações $\mathbf{e}_\tau$ e $\mathbf{e}_\tau^\lambda$ definidas, respectivamente, em* (5.73) *e* (5.74)*, são Lipschitz contínuas em $\mathcal{B}^0_{\tau,\ell}$ e $\mathcal{B}^\lambda_{\tau,\ell}$ respectivamente.*

Demonstração. Demonstraremos que $\mathbf{e}_\tau$ é Lipschitz contínua, a demonstração para $\mathbf{e}_\tau^\lambda$ é feita de forma similar.

Sejam $\chi_1, \chi_2 \in \mathcal{B}^0_{\tau,\ell}$, então existem únicas u e v soluções fortes de (5.13) com $u(\tau), v(\tau) \in B^0_\tau$ tais que $u|_{[\tau,\tau+\ell]} = \chi_1$ e $v|_{[\tau,\tau+\ell]} = \chi_2$, denotamos por w a diferença $u - v$. Procedendo como na demonstração do Lema 5.4.3, podemos concluir (5.64). Em particular,

$$\|w(\tau+\ell)\|^2_{H_0} \leqslant \|w(\theta)\|^2_{H_0} \exp(2L_B(\tau+\ell-\theta)) \leqslant \|w(\theta)\|^2_{H_0} \exp(2L_B\ell), \quad \tau \leqslant \theta < \tau+\ell.$$

Integrando essa última desigualdade, para θ variando em $[\tau, \tau+\ell]$, temos

$$\int_\tau^{\tau+\ell} \|w(\tau+\ell)\|^2_{H_0}\, d\theta \leqslant \int_\tau^{\tau+\ell} \|w(\theta)\|^2_{H_0} \exp(2L_B\ell)\, d\theta = \exp(2L_B\ell) \int_\tau^{\tau+\ell} \|w(\theta)\|^2_{H_0}\, d\theta,$$

isto é,

$$\sqrt{\ell}\|w(\tau+\ell)\|_{H_0} \leqslant \exp(L_B\ell) \left(\int_\tau^{\tau+\ell} \|w(\theta)\|^2_{H_0}\, d\theta\right)^{\frac{1}{2}} = \exp(L_B\ell)\|w\|_{L^2(\tau,\tau+\ell;H_0)}. \tag{5.75}$$

Logo, de (5.75) segue que

$$\begin{aligned}\|\mathbf{e}_\tau(\chi_1) - \mathbf{e}_\tau(\chi_2)\|_{H_0} =& \|\chi_1(\tau+\ell) - \chi_2(\tau+\ell)\|_{H_0} = \|w(\tau+\ell)\|_{H_0}\\ \leqslant& \frac{\sqrt{\ell}}{\ell}\exp(L_B\ell)\|w\|_{L^2(\tau,\tau+\ell;H_0)}\\ =& \frac{\sqrt{\ell}}{\ell}\exp(L_B\ell)\|u-v\|_{L^2(\tau,\tau+\ell;H_0)}\\ =& \frac{\sqrt{\ell}}{\ell}\exp(L_B\ell)\|\chi_1-\chi_2\|_{L^2(\tau,\tau+\ell;H_0)}.\end{aligned}$$

□

Proposição 5.4.1. *Sejam $t, s \in \mathbb{R}$. Existem constantes $C_0 = C_0(L_B, \ell) > 0$ e $C_0^\lambda = C_0^\lambda(L_B, \ell) > 0$ tais que*

$$\|L(t,t-s)\chi_1 - L(t,t-s)\chi_2\|_{L^2(t,t+\ell;H_0)} \leqslant C_0\|\chi_1-\chi_2\|_{L^2(t-s,t-s+\ell;H_0)},\ \forall \chi_1,\chi_2 \in \mathfrak{X}_{t-s,\ell},$$

e

$$\|L^\lambda(t,t-s)\chi_1 - L^\lambda(t,t-s)\chi_2\|_{L^2(t,t+\ell;H)} \leqslant C_0^\lambda\|\chi_1-\chi_2\|_{L^2(t-s,t-s+\ell;H)},\ \forall \chi_1,\chi_2 \in \mathfrak{X}_{t-s,\ell},$$

para todo $\ell \leqslant s \leqslant 2\ell$.

Demonstração. Consideremos $\chi_1, \chi_2 \in \mathfrak{X}_{t-s,\ell}$ quaisquer. Notemos que

$$\begin{aligned}&\|L(t,t-s)\chi_1 - L(t,t-s)\chi_2\|^2_{L^2(t,t+\ell;H_0)}\\ &\qquad= \int_t^{t+\ell} \|(L(t,t-s)\chi_1)(\theta) - (L(t,t-s)\chi_2)(\theta)\|^2_{H_0}\, d\theta\\ &\qquad= \int_t^{t+\ell} \|U(\theta,t-s)\chi_1(t-s) - U(\theta,t-s)\chi_2(t-s)\|^2_{H_0}\, d\theta.\end{aligned}$$

Suponhamos $s \geqslant \ell$. Seja $\tau \in [t-s, t-s+\ell]$, temos $t-s \leqslant \tau \leqslant t-s+\ell \leqslant t \leqslant \theta$, assim $U(\theta, t-s) = U(\theta,\tau)U(\tau, t-s)$, além disso $\chi_1(\tau) = U(\tau, t-s)\chi_1(t-s)$ e $\chi_2(\tau) = U(\tau, t-s)\chi_2(t-s)$. Segue de (5.17) e do crescimento da função exponencial, que

$$\begin{aligned}
&\|L(t,t-s)\chi_1 - L(t,t-s)\chi_2\|^2_{L^2(t,t+\ell;H_0)}\\
&\qquad = \int_t^{t+\ell} \|U(\theta,\tau)\chi_1(\tau) - U(\theta,\tau)\chi_2(\tau)\|^2_{H_0}\, d\theta\\
&\qquad \leqslant \int_t^{t+\ell} e^{2L_B(\theta-\tau)}\|\chi_1(\tau)-\chi_2(\tau)\|^2_{H_0}\, d\theta\\
&\qquad = e^{-2L_B\tau}\|\chi_1(\tau)-\chi_2(\tau)\|^2_{H_0}\frac{e^{2L_B\theta}}{2L_B}\Big|_{\theta=t}^{\theta=t+\ell}\\
&\qquad = \frac{1}{2L_B}(e^{2L_B(t+\ell-\tau)} - e^{2L_B(t-\tau)})\|\chi_1(\tau)-\chi_2(\tau)\|^2_{H_0}\\
&\qquad \leqslant \frac{e^{2L_B(s+\ell)}}{2L_B}\|\chi_1(\tau)-\chi_2(\tau)\|^2_{H_0}, \quad \forall \tau \in [t-s, t-s+\ell].
\end{aligned}$$

Integrando a desigualdade para τ variando no intervalo $[t-s, t-s+\ell]$, temos

$$\ell\|L(t,t-s)\chi_1 - L(t,t-s)\chi_2\|^2_{L^2(t,t+\ell;H_0)} \leqslant \frac{e^{2L_B(s+\ell)}}{2L_B}\int_{t-s}^{t-s+\ell} \|\chi_1(\tau)-\chi_2(\tau)\|^2_{H_0} d\tau.$$

Portanto, supondo $\ell \leqslant s \leqslant 2\ell$, concluímos

$$\|L(t,t-s)\chi_1 - L(t,t-s)\chi_2\|_{L^2(t,t+\ell;H_0)} \leqslant \frac{e^{3L_B\ell}}{(2L_B\ell)^{\frac{1}{2}}}\|\chi_1-\chi_2\|_{L^2(t-s,t-s+\ell;H_0)}.$$

A demonstração para $L^\lambda(t,t-s)$, $\lambda \in [0,1]$, pode ser feita de modo análogo. □

Observemos que as constantes $C_0^\lambda > 0$, $\lambda \in (0,1]$, da Proposição 5.4.1, são uniformes em λ, dependendo somente da constante de Lipschitz $L_B \geqslant 0$ e da constante $\ell > 0$.

Por fim, enunciamos o principal resultado do capítulo.

Teorema 5.4.1. *O processo associado a* (5.13)*, admite pullback atrator exponencial* $\{\mathcal{E}_t^0\}_{t\in\mathbb{R}}$.

Para cada $\lambda \in (0,1]$*, o processo associado a* (5.12)*, admite um pullback atrator exponencial* $\{\mathcal{E}_t^\lambda\}_{t\in\mathbb{R}}$.

Demonstração. Vamos verificar que estamos sob as hipóteses do Teorema 4.2.1. Pelo Teorema 5.2.2 temos, para cada $u_\tau \in H_0$ e $T > \tau$, que (5.13) admite única $u \in C([\tau,T];H_0)$ solução forte em $[\tau,T]$.

Além disso, pelo Lema 5.3.1, temos

$$\|u(t)\|_{V_0} \leqslant C_2, \quad \forall t \geqslant \tau + \tau_2.$$

Em particular, $\|u(\tau+\tau_2)\|_{V_0} \leqslant C_2$, com isso,

$$\|u(\tau+\tau_2)\|_{p(x)} \leqslant C_2 \quad \text{e} \quad \|\nabla u(\tau+\tau_2)\|_{p(x)} \leqslant C_2.$$

Assim,

$$u(t) = U(t,\tau+\tau_2)U(\tau+\tau_2,\tau)u_\tau \in U(t,\tau+\tau_2)B_1, \quad \forall t \geqslant \tau+\tau_2.$$

Ou seja,

$$u(t) \in \bigcup_{r \geqslant \tau_2} U(t, t-r)B_1, \quad \forall\, t \geqslant 2\tau_2 + \tau.$$

Em adicional, pelo Lema 5.4.1, a Hipótese (H2) do Capítulo 4 é assegurada. Pelo Lema 5.4.2, temos a Hipótese $(H4)'$.

As Hipóteses (H5) e (H6) seguem, respectivamente, do Lema 5.4.3 e da Proposição 5.4.1.

Assim, pelo Lema 4.2.3, o TDS-processo $\{L(t,s)\}_{t \geqslant s}$ admite um TDS-pullback atrator exponencial $\{\mathcal{E}^0_{t,\ell}\}_{t \in \mathbb{R}}$.

Em razão do Lema 5.4.4, a Hipótese (H8) é assegurada. Logo, o Teorema 4.2.1 garante que $\{U(t,s)\}_{t \geqslant s}$ possui pullback atrator exponencial $\{\mathcal{E}^0_t\}_{t \in \mathbb{R}}$, definido por $\mathcal{E}^0_{t+\ell} := \mathbf{e}_t(\mathcal{E}^0_{t,\ell})$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Procedendo de forma análoga, concluímos a existência de pullback atrator exponencial para o processo $\{U^\lambda(t,s)\}_{t \geqslant s}$, onde $\lambda \in (0,1]$.

□

Bibliografia

[1] C. O. Alves, S. Shmarev, J. Simsen, M. S. Simsen, *The Cauchy problem for a class of parabolic equations in weighted variable Sobolev spaces: Existence and asymptotic behavior,* Journal of Mathematical Analysis and Applications, 443, 265-294, 2016.

[2] G. Baravdish, O. Svensson, F. Åström, *On Backward $p(x)$-Parabolic Equations for Image Enhancement,* Numerical Functional Analysis and Optimization, 36:2, 147-168, 2015.

[3] V. Barbu. *Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Space*, Noordhoff International, 1976.

[4] J. Barrett, W. Liu. *Finite element approximation of the parabolic p-Laplacian*, SIAM J. Numer. Anal. 31, 413-428, 1994.

[5] H. Brézis, *Operateurs Maximaux Monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1973.

[6] H. Brézis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differencial Equations*, Springer, New York, 2011.

[7] F. Browder, *Nonlinear elliptic boundary value problems*, Bull. Amer. Math. Soc., 862-874, 1963.

[8] V. L. Carbone, A. N. Carvalho, K. Schiabel-Silva, *Continuity of the dynamics in a localized large diffusion problem with nonlinear boundary conditions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 356, 69-85, 2009.

[9] V. L. Carbone, C. B. Gentile, K. Schiabel-Silva, *Asymptotic properties in parabolic problems dominated by p-Laplacian operator with localized large diffusion,* Nonlinear Analysis, 4002-4011, 2011.

[10] A. N. Carvalho, J. W. Cholewa, T. Dlotko, *Global Attractors for Problems with Monotone Operators,* Bolletino U. M. I, (8) 2-B, 693-706, 1999.

[11] A. N. Carvalho, S. Sonner, *Pullback exponential attractors for evolution processes in Banach spaces: theoretical results*, Commun. Pure Appl. Anal. 12, 3047–3071, 2013.

[12] J.W. Cholewa, T. Dlotko, *Global Attractors in Abstract Parabolic Problems*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[13] M. Conti, V. Pata, R. Temam, *Attractors for processes on time-dependent spaces. Applications to wave equations,* J. Differential Equations 255, 1254-1277, 2013.

[14] R. Czaja, M. Efendiev, *Pullback exponential attractors for nonautonomous equations part I: semilinear parabolic equations*, J. Math. Anal. Appl., 381, 748-765, 2011.

[15] F. Di Plinio, G. S. Duane, R. Temam, *Time dependent attractor for the oscillon equation*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 29, 141–167, 2011.

[16] A. Eden, C. Foias, B. Nicolaenko, R. Temam, *Exponential Attractors for Dissipative Evolution Equations,* Research in Applied Mathematics, vol. 37. Wiley, Paris, 1994.

[17] M. Efendiev, A. Miranville, *The dimension of the global attractor for dissipative reaction-diffusion systems.* Appl. Math. Lett., 351–355, 2003.

[18] M. Efendiev, A. Miranville, S. Zelik, *Exponential attractors and finite-dimensional reduction for non-autonomous dynamical systems*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 135A, 703-730, 2005.

[19] M. Efendiev, A. Miranville, S. Zelik, *Exponential attractors for a nonlinear reaction-difussion system in* $\mathbb{R}^3$, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math., 330, 713-718, 2000.

[20] X. L. Fan, D. Zhao, *On the Spaces* $L^{p(x)}$ *and* $W^{m,p(x)}$*,* Journal of Mathematical Analysis and Applications, 263, 424-446, 2001.

[21] Z. Guoa, Q. Liu, J. Sun, B. Wu, *Reaction–diffusion systems with* $p(x)$*-growth for image denoising,* Nonlinear Analysis Real World Appl 12, 2904-2918, 2011.

[22] J. K. Hale, *Ordinary Differential Equations,* Krieger Publishing Company Malabar, Flórida, 1980.

[23] J. K. Hale, *Asymptotic Behavoir of Dissipative Systems*, AMS, Providence, R.I., 1988.

[24] P. E. Kloeden, J. Simsen, *Pullback attractors for non-autonomous evolution equation with spatially variable exponents*, Commun. Pure Appl. Anal. 13 (6), 2543–2557, 2014.

[25] P. E. Kloeden, P. Marín-Rubio e J. Real, *Pullback attractors for a semilinear heat equation in a non-cylindrical domain*, J. Differential Equations 244, 2062-2090, 2008.

[26] O. A. Ladyzhenskaya, *Attractors for Semigroups and Evolution Equations*, Cambridge University Press, 1991.

[27] J. A. Langa, A. Miranville, J. Real, *Pullback exponential attractors*, Discrete Contin. Dyn. Syst., 26, 1329-1357, 2010.

[28] X. Li, *Pullback exponential attractors for evolution processes with the difference of 2 solutions lacking smoothing property*, Math Meth Appl Sci., 41: 3790– 3819, 2018.

[29] F. Li, B. You. *Pullback exponential attractors for the three dimensional non-autonomous Navier-Stokes equations with nonlinear damping.* Discrete e Continuous Dynamical Systems - B, 25 (1) : 55-80, 2020.

[30] J. L. Lions, *Quelques Méthods de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires*, Dunod, Paris, 1969.

[31] Y. Liu, L. Yang, C. Zhong, *Asymptotic regularity for p-Laplacian equation*, Journal of Mathematical Physics 51, 052702, 2010.

[32] T. F. Ma, R. N. Monteiro, A. C. Pereira, *Pullback Dynamics of Non-autonomous Timoshenko Systems*, Appl. Math. Optim, 2017.

[33] J. Málek, J. Nečas, *A finite-dimensional attractor for three-dimensional flow of incompressible fluids*, J. Differential Equations, 127, 498-518, 1996.

[34] J. Málek, D. Pražák, *Large time behavior via the method of l-trajectories,* J. Differential Equations, 181, 243-279, 2002.

[35] K. Matsuura, M. Ôtani, *Exponential Attractors for a Quasilinear Parabolic Equation,* Discrete and Continuous Dynamical Systems Supplement, 713-720, 2007.

[36] D. Pražák, *Exponential Attractor for the Delayed Logistic Equation with a Nonlinear Diffusion,* Proceedings of the Fourth International conference on Dynamical Systems and Differential Equations, pp. 717-726, Wilmington, NC, USA, 2002.

[37] I. Peral, *Multiplicity of solutions for the p-Laplacian,* Second School for Quasilinear Functional Analysis and Applications to Differential Equations, Miramere-Trieste, 1997.

[38] K. Rajagopal, M. Ružicka, *Mathematical modeling of electrorheological materials,* Contin. Mech. Thermodyn 13, 2001, 59–78. 2001.

[39] M. Ružicka, *Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory,* Lecture Notes in Mathematics, vol. 1748, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[40] R. A. Samprogna, J. Simsen, *Robustness with respect to exponents for nonautonomous reaction-diffusion equations*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, No.11, 1-15, 2018.

[41] J. Simon, *Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$*, Ann. Mat. Pura Appl. 146, 65-96, 1987.

[42] J. Simsen, *A global attractor for a $p(x)$-Laplacian inclusion,* C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 351, 87-90, 2013.

[43] J. Simsen, M. S. Simsen, A. Zimmermann, *Study of ODE limit problems for reaction-diffusion equations*, Opuscula Math. 38, No. 1, 117–131, 2018.

[44] R. Temam, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics,* Springer-Verlag, New York, 1988.

[45] N. Weisheng, *Long-time behavior for a nonlinear parabolic problem with variables exponents,* Journal of Mathematical Analysis and Applications, 393, 56-65, 2012.

[46] S. Yotsutani, *Evolution equations associated with the subdifferentials,* J. Math. Soc. Japan, 31, 623-646, 1978.

Índice