

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

SAMUEL MAGALHÃES DE FREITAS

**DESAFIOS NA INTRODUÇÃO À GEOMETRIA E ÀS CONSTRUÇÕES
GEOMÉTRICAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA**

SÃO CARLOS – SP

2021

SAMUEL MAGALHÃES DE FREITAS

**DESAFIOS NA INTRODUÇÃO À GEOMETRIA E ÀS CONSTRUÇÕES
GEOMÉTRICAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas da Universidade Federal de São Carlos, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre.

Orientador: João Carlos Vieira Sampaio

SÃO CARLOS – SP

2021

de Freitas, Samuel Magalhães

DESAFIOS NA INTRODUÇÃO À GEOMETRIA E ÀS
CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS NA EDUCAÇÃO
BÁSICA / Samuel Magalhães de Freitas -- 2021.
85f.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São
Carlos, campus São Carlos, São Carlos

Orientador (a): João Carlos Vieira Sampaio

Banca Examinadora: Prof. Dr. João Carlos Vieira
Sampaio (UFSCar), Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti
(UNESP), Profa. Dra. Luciene Nogueira Bertocello
(UFSCar)

Bibliografia

1. CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS NA EDUCAÇÃO
BÁSICA. 2. USANDO O MODELE DE VAN HIELE. 3.
ESTUDO PRÁTICO REALIZADO EM SALA DE AULA. I.
de Freitas, Samuel Magalhães. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática
(SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Ronildo Santos Prado - CRB/8 7325



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Samuel Magalhães de Freitas, realizada em 16/02/2021.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. João Carlos Vieira Sampaio (UFSCar)

Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti (UNESP)

Profa. Dra. Luciene Nogueira Bertoncello (UFSCar)

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas.

DEDICATÓRIA

*Dedico a Deus em primeiro lugar, pois sem Ele eu nem existiria,
à minha mãe Sonia Maria e ao meu pai José Luiz que sempre acreditaram
em mim e que sempre me incentivaram a estudar,
à minha esposa Marina que permaneceu ao meu lado nas horas mais
difíceis, sendo meu porto seguro e que me fez seguir sempre em frente.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço a toda minha família, aos meus amigos, a todos os professores que já passaram por minha formação desde o ensino fundamental.

Gostaria de agradecer as pessoas que nos ensinaram a verdadeira extensão da matemática, nos mostraram que ela vai muito além do que imaginávamos, agradeço aos meus alunos pelos questionamentos e pela cumplicidade adquirida. Obrigado a todos os professores do PROFMAT-UFSCAR, em especial ao meu orientador João Carlos Sampaio e ao professor Ivo Machado da Costa.

Todas as culturas foram iluminadas pela Geometria, cujas formas despertam no espírito um sentimento de exatidão e de evidência absoluta.

Nadir Afonso

Deus é o grande geômetra. Deus geometriza sem cessar.

Platão

Resumo

FREITAS, Samuel Magalhães de. Desafios na Introdução à Geometria e às Construções Geométricas na Educação Básica. 2021. Dissertação (Mestrado no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2021.

O objetivo desse trabalho consiste em desenvolver uma proposta metodológica para melhor envolver os alunos em estudos e aprendizagem da geometria, com a finalidade de despertar no aluno motivação por procedimentos de investigação e dedutivos. Neste trabalho mostramos, por meio de construções com régua e compasso, que é possível explorar conceitos, propriedades e melhorar a compreensão de conceitos geométricos dos alunos. Como referencial teórico para análise tomamos como base a teoria de Van Hiele e, para a conduta metodológica de coleta e produção de dados nos inspiramos em princípios da Engenharia Didática, descrita por Artigue (1996). Assim, após estudos preliminares de textos didáticos e trabalhos de pesquisa já realizados sobre o tema, elaboramos uma sequência de atividades que envolve a construção de retas paralelas, retas perpendiculares, bissetrizes e mediatrizes com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental, durante o ano de 2020 em situação da pandemia. A aplicação e análise das atividades realizadas com os alunos permitiram observar que os alunos se envolveram nas atividades propostas e ampliaram seus conhecimentos sobre os conceitos geométricos tratados, assim como a motivação para aprender novos conceitos. Neste trabalho buscamos valorizar tanto aspectos teóricos quanto práticos e esperamos que ele sirva como subsídio para professores de matemática do ensino fundamental, em suas práticas em sala de aula ao abordarem conteúdos de Geometria, visto que esses recursos são de fácil acesso e podem instigar a curiosidade dos alunos quanto ao uso desses instrumentos de desenho e sobre a validade de propriedades geométricas.

Palavras-chave: Construções Geométricas, Lugares Geométricos, Teoria de Van Hiele, Ensino Fundamental.

Abstract

The objective of this work is to investigate the possibility of developing a methodological proposal to better involve students in studies and learning geometry, in order to awaken in the student motivation for investigative and deductive procedures. In this work we show, through constructions with ruler and compass, that it is possible to explore concepts, properties and improve the understanding of geometric concepts of students. As a theoretical framework for analysis, we take Van Hiele's theory as a basis and, for the methodological conduct of data collection and production, we are inspired by the principles of Didactic Engineering, described by Artigue. Thus, after preliminary studies of didactic texts and research work already carried out on the theme, we have elaborated a sequence of activities that involves the construction of parallel lines, perpendicular lines, bisectors and mediators with students from the 8th year of Elementary School. The application and analysis of the activities carried out with the students allowed us to observe that the students were involved in the proposed activities and expanded their knowledge about the geometric concepts treated, as well as the motivation to learn new concepts. In this work we seek to value both theoretical and practical aspects and we hope that it will serve as a basis for elementary school mathematics teachers, in their classroom practices when addressing Geometry content, since these resources are easily accessible and can instill curiosity of students regarding the use of these drawing instruments and the validity of geometric properties.

Keywords: Geometric Constructions, Geometric Places, Van Hiele's Theory, Elementary School.

LISTA DE FIGURAS

Figura1 - Osso de Ishango.....	4
Figura 2- Foto do Livro Os Elementos de Euclides	8
Figura 3 - Euclides de Alexandria	9
Figura 4 - Régua	15
Figura 5 - Compasso	16
Figura 6 - Transferidor	16
Figura 7 - Par de Esquadros	16
Figura 8 - Transposição de segmentos de retas -1	19
Figura 9 - Transposição de segmentos de retas -2	19
Figura 10 - Transposição de segmentos de retas -3	20
Figura 11 - Transposição de ângulos -1	20
Figura 12 - Transposição de ângulos - 2	21
Figura 13 - Transposição de ângulos -3	21
Figura 14 - Transposição de ângulos - 4	21
Figura 15 - Triângulo	23
Figura 16 - Triângulo - Lados	24
Figura 17 - Triângulo - Ângulos	24
Figura 18 - Congruência de triângulos LAL	25
Figura 19 - Congruência de triângulos LLL	26
Figura 20 - Congruência de triângulos ALA	26
Figura 21 - Congruência de triângulos LAA	27
Figura 22 - Circunferência como LG	28
Figura 23 - Demonstração Mediatriz	29
Figura 24 - Segmento	30
Figura 25 - Construção da Mediatriz	30
Figura 26 - Mediatriz	31
Figura 27 - Demonstração de Bissetriz	32
Figura 28 - Circunferência e ângulo $A\hat{O}B$	32

Figura 29 - Círculos	33
Figura 30 - Bissetriz	33
Figura 31 - Paralelas	34
Figura 32 - Paralela 1	35
Figura 33 - Paralela 2	35
Figura 34 - Paralela 3	35
Figura 35 - Paralela 4	36
Figura 36 - Paralelas 1	36
Figura 37 - Reta t que passa por PD paralela à reta r	37
Figura 38 - Construção de ângulo de 60° e 120°	38
Figura 39 - Construção de ângulo de 30° e 15°	38
Figura 40 - Construção de ângulo de 90°	39
Figura 41 - Construção de ângulo de 45° e 135°	39
Figura 42- Apresentação do Currículo do Estado de São Paulo	46
Figura 43 - Conteúdos e habilidades de matemática.....	48
Figura 44 - Conteúdo do 8º ano, 2º bimestre de 2020	49
Figura 45- Figuras planas	52
Figura 46- Revelando Figuras planas	53
Figura 47- Circunferência	54
Figura 48 - Gráfico da distribuição do total de pontos	64
Figura 49 - Resposta da questão 1 - teste Van Hiele.....	65
Figura 50 - Resposta da questão 2 - teste Van Hiele.....	65
Figura 51 - Resposta da questão 3 - teste Van Hiele.....	66
Figura 52 - Resposta da questão 4 - teste Van Hiele.....	67
Figura 53 - Resposta da questão 5 - teste Van Hiele.....	67
Figura 54 - Resposta da questão 6 - teste Van Hiele.....	68
Figura 55 - Resposta da questão 7 - teste Van Hiele.....	69
Figura 56 - Resposta da questão 8 - teste Van Hiele.....	69
Figura 57 - Resposta da questão 9 - teste Van Hiele.....	70
Figura 58 - Resposta da questão 10 - teste Van Hiele.....	70

Figura 59 - 2º Teste de Van Hiele.....	71
Figura 60 - 1ª questão do 2º Teste de Van Hiele.....	72
Figura 61 - 2ª questão do 2º Teste de Van Hiele.....	72
Figura 62 - 3ª questão do 2º Teste de Van Hiele.....	74
Figura 63 - 4ª questão do 2º Teste de Van Hiele.....	75
Figura 64 - 5ª questão do 2º Teste de Van Hiele.....	75
Figura 65- Construção do tangram por um aluno no GeoGebra.....	78
Figura 66- Construção do tangram por um aluno no Paint e no GeoGebra	78
Figura 67 - Construção do tangram por três alunos no GeoGebra e no Paint.....	79
Figura 68- Construções de um aluno durante a 2ª atividade	80
Figura 69- Construções de um aluno sobre a 2ª atividade, enunciados 1 e 2	81
Figura 70- Construções de um aluno sobre a 2ª atividade, enunciados 3 e 4	83
Figura 71- Construções de um aluno sobre a 2ª atividade, enunciados 5 e 6	84
Figura 72- Construções de triângulo equilátero por um aluno do 8º ano	85
Figura 73- Construção de triângulo equilátero por um aluno do 8º ano/GeoGebra.....	86
Figura 74-Construção de um quadrado e um hexágono por aluno do 8º ano ...	87

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	1
1.2 OBJETIVO GERAL	2
1.2.1 Objetivos específicos	2
2. ASPECTOS HISTÓRICOS E EPISTEMOLÓGICOS DAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS	4
2.1 EPISÓDIOS DA HISTÓRIA DA GEOMETRIA EUCLIDIANA.....	4
2.1.1 Euclides de Alexandria	9
2.1.2 Os Elementos de Euclides	10
2.2. ASPECTOS EPISTEMOLÓGICOS DAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS EM GEOMETRIA	14
2.2.1 Instrumentos utilizados em Construções Geométricas	14
2.2.1.1 A Régua	15
2.2.1.2 O Compasso	16
2.2.1.3 O Transferidor	16
2.2.1.4 Os Esquadros	16
2.2.2 Habilidade com instrumentos de desenho	17
2.2.2.1 Transposição de segmentos de reta	18
2.2.2.2 Transposição de ângulos	20
2.2.3 Triângulos	22
2.2.3.1 Elementos de um Triângulo	23
2.2.3.2 Classificação de Triângulos	24
2.2.3.3 Propriedades dos Triângulos	25
2.2.3.4 Congruência de Triângulos	25
2.2.3 Lugar Geométrico	27
2.2.3.1 Circunferência	28
2.2.3.2 Mediatriz	29
2.2.3.3 Bissetriz	31
2.2.3.4 Retas Paralelas	33
2.2.4 Construção de alguns ângulos com régua e compasso	37

2.2.4.1 Ângulos de 120°, 60°, 30°, e 15°	37
2.2.4.2 Ângulos de 90° e 45°	38
3. CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS EM ORIENTAÇÕES CURRICULARES E LIVROS DIDÁTICOS NO BRASIL E PESQUISAS.....	40
3.1 LIVROS DIDÁTICOS E ORIENTAÇÕES CURRICULARES NO ESTADO DE SP	44
	50
4. ASPECTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS DA PESQUISA	
4.1. O MODELO TEÓRICO DE VAN HIELE	50
4.2 ESCOLHAS METODOLÓGICAS	56
5. PARTE EXPERIMENTAL DA PESQUISA E ANÁLISE DE PRODUÇÕES DOS ALUNOS	61
5.1 O CONTEXTO DA ESCOLA E OS ALUNOS PARTICIPANTES	61
5.2 APLICAÇÃO DO TESTE DE VAN HIELE	62
5.2.1 Análise das questões dos Testes 1 e 2 de Van Hiele.....	64
5.3 APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES	76
5.3.1 Atividade 1- Tangram	77
5.3.2 Atividade 2 - Construções diversas usando régua e compasso	79
5.3.3 Atividade 3 - Construções diversas usando régua e compasso ou GeoGebra.....	84
5.4 BREVE ANÁLISE DOS RESULTADOS COMPARADA COM PESQUISAS AFINS	87
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS	92
7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	94
8. APÊNDICE.....	97
Apêndice I - 1º Teste de Van Hiele adaptado pelo pesquisador	97
Apêndice II- 2º Teste de Van Hiele adaptado pelo pesquisador	102
Apêndice III- Exercícios elaborados pelo pesquisador para os alunos do 8ºano.	103
9. ANEXOS	108
Anexo A. Construção do tangram usando o GeoGebra	108
Anexo B. Construções diversas usando régua e compasso	109

1. INTRODUÇÃO

A presente dissertação traz uma proposta de ensino da geometria para alunos do ensino fundamental de forma que se possa estimular o aprendizado dedutivo e intuitivo, que é a base do ensino da matemática. A proposta trazida insere-se em um contexto de constante mudança curricular, que se iniciou a partir da Lei de Diretrizes Básicas de nº 5692 de 1971. Desde essa época, o conteúdo de Construções Geométricas passou a não mais ser obrigatório nos currículos escolares, tendo sido abolido inclusive dos vestibulares dos cursos superiores de Engenharia e Arquitetura (OLIVEIRA, 2015).

A partir da década de 1990 percebe-se um movimento de retorno ao ensino das Construções Geométricas com o uso dos instrumentos euclidianos, sendo trazidas inclusive nos PCN. Os PCN para o 3º e 4º ciclo do ano de 1998 enfatizavam o ensino da geometria plana e espacial para um ensino da matemática "...que permita ao aluno compreender a realidade em que está inserido, desenvolver suas capacidades cognitivas e sua confiança para enfrentar desafios, de modo a ampliar os recursos necessários para o exercício da cidadania, ao longo de seu processo de aprendizagem." (BRASIL, p. 60, 1998).

Atualmente, no entanto, há um movimento de esvaziamento do currículo em diversas áreas, e a Construção Geométrica faz parte deste contexto, tendo sido abandonada do ensino fundamental e médio (PUTNOKI, 2013). Acredita-se, no entanto, que o ensino da Geometria utilizando a construção geométrica e/ou desenho geométrico, com uso de instrumentos como régua, compasso, transferidor e esquadro; permite que o aluno aprenda de forma mais lúdica e interativa. Diversos autores sinalizam nesse sentido, já que as Construções Geométricas permitem uma maior interpretação da realidade (WAGNER, 2000); facilitam o estudo da Geometria Analítica (ZUIN, 2001). Alguns autores são ainda mais rigorosos, como Hofer (*apud* OLIVEIRA, 2015) quando afirma que não há geometria sem o uso desses instrumentos, havendo apenas meia geometria.

Nosso trabalho insere-se neste contexto, ao trazer uma metodologia a ser aplicada em três etapas para o ensino da Geometria com alunos do ensino fundamental. Foi feito um experimento com alunos do 8º ano de uma escola privada no Município de Araraquara – SP, que teve como referencial teórico e metodológico modelo de Van Hiele (1995) para análise do conhecimento dos alunos, complementado com princípios metodológicos da Engenharia Didática.

A construção do trabalho foi dividida em quatro etapas, sendo a primeira etapa constituída de análises preliminares, que buscou tanto os aspectos históricos e epistemológicos das Construções Geométricas (capítulo 2), quanto a elaboração do referencial teórico que serviu de base para todo o projeto e está contido nos capítulos 3 e 4. Com esse estudo prévio em mãos, foi possível reconhecer o estado do conhecimento na área envolvendo o tema escolhido e também definir os procedimentos metodológicos a serem aplicados no estudo, que se encontram detalhados ainda no capítulo 4. Já no capítulo 5 são trazidos toda a parte experimental do estudo de forma detalhada e os principais resultados alcançados e comparados com estudos recentes e com os conhecimentos dos próprios alunos no início da parte experimental da pesquisa. O sexto e último capítulo traz a conclusão do estudo, com as considerações e perspectivas para a continuidade dos estudos e aplicação com alunos no ensino da geometria.

1.2 Objetivo Geral

O objetivo geral desse trabalho consiste em desenvolver uma proposta metodológica para melhor envolver os alunos em estudos e aprendizagem da geometria, com a finalidade de despertar neles motivação por procedimentos de investigação e dedutivos. Neste trabalho mostramos, por meio de construções com régua e compasso, que é possível explorar conceitos, propriedades e melhorar a compreensão de conceitos geométricos dos alunos.

1.2.1 Objetivos Específicos

1. Validar o teste de Van Hiele pré-adaptado por Nasser e Sant'anna (2015) para alunos do 8º ano em uma escola privada no Município de Araraquara-SP.

2. Avaliar o conhecimento prévio de conhecimentos em geometria desses alunos com o uso desta ferramenta.

3. Elaborar e adaptar atividades com base no método já consolidado de Engenharia Didática descrito por Artigue (1996) a partir dos dados obtidos com os testes de Van Hiele (item 1) já realizados; e avaliar o grau de conhecimento adquirido após a experimentação, de preferência com outro teste de Van Hiele.

2. ASPECTOS HISTÓRICOS E EPISTEMOLÓGICOS DAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

2.1 Episódios da História da Geometria Euclidiana

A origem do pensamento matemático já se fazia presente na antiguidade, mesmo que de forma rudimentar e abstrata, estudos modernos da cognição animal mostraram que a matemática não é um conceito exclusivamente humano. O que distingue basicamente a evolução da humanidade em relação ao princípio básico da contagem é o fato do ser humano usar objetos para registrar, armazenar dados. Historicamente a matemática é um conceito socialmente construído, nesse sentido a matemática se torna uma construção humana.

Roque e Carvalho (p. 2, 2012) relatam “...um registro relacionado com contagens, e cuja interpretação suscita discussões entre os especialistas, é o osso, encontrado em Ishango, na África, e datado entre vinte mil e dez mil anos a. E.C.”

Figura 1- Osso de Ishango



Fonte: Roque e Carvalho (2012)

As primeiras soluções de problemas aritméticos e geométricos se deram de maneira prática, com tentativas e erros. Historicamente é difícil saber se foram os egípcios ou os sumérios que primeiro produziram escritos de natureza matemática, pois os egípcios já usavam os papiros muito menos resistentes e facilmente degradáveis, pois aquele certo tipo de papel não resistiria ao passar

dos milênios como na civilização conhecida como sumérios que produzia seus escritos matemáticos em tabletas de barro cozido datados de 2200 a.C.

Por isso lemos sobre a origem da contagem para os alunos usando o exemplo dos pastores de ovelhas, que associavam a cada ovelha do seu rebanho que saía para pastar uma pedra. Essa ação é vinculada e associada depois com algumas formas de contagem, impressas em argila ou como no registro acima em ossos, relatadas para os alunos, que a matemática vem evoluindo junto com o ser humano e suas civilizações, criando os sistemas de contagem egípcio, babilônico, maia, romano, etc.

Sobre isso GARBI (2006, *apud* COSTA & ROSA, 2015) pontua que:

“Prova disso é que, na época de Hamurabi, quando a Suméria não mais existia, foram produzidos textos evidenciando que os babilônicos haviam herdado e desenvolvido impressionantes conhecimentos sobre Aritmética e Geometria. Eles já sabiam resolver equações do primeiro e segundo grau, conheciam a propriedade geral dos triângulos retângulos, hoje chamada Teorema de Pitágoras, calculavam corretamente áreas e volumes. (GARBI, 2006, p, 14, *apud* COSTA & ROSA, 2015).”

Nesse contexto histórico da matemática, é sabido que as construções geométricas sempre estiveram presentes nesse corpo evolutivo da civilização sendo um dos principais braços para esse progresso. No vale do Nilo, os egípcios desenvolveram uma matemática indutiva, para finalidades práticas como a Agrimensura, a Agricultura e a Arquitetura.

O grego Heródoto (Pai da história) escreveu o seguinte:

“Esse faraó (Sesóstris) realizou a partilha das terras, concedendo a cada egípcio uma porção igual, com a condição de ser-lhe pago todos os anos certos tributos; se o rio carregava alguma parte do lote de alguém, o prejudicado ia procurar o rei e expor-lhe o ocorrido. O soberano enviava agrimensores para o local, para determinar a redução sofrida pelo terreno, passando o proprietário a pagar um tributo proporcional ao que restara. Eis,

ao que me parece, a origem da Geometria, que teria passado do Egito para a Grécia”.

A Grécia foi o berço de grandes matemáticos e filósofos que com o passar do tempo deixaram uma vasta herança histórica, cultural, arquitetônica e principalmente com recursos diversos para estudos nas mais diversas áreas do conhecimento.

Na cidade de Jônia de Mileto viveu Tales aproximadamente entre 640 a.C a 564 a.C, considerado um dos sete sábios da Grécia Antiga. Tales de Mileto era admirador de astronomia, matemática e filosofia. Sobre Tales vem provérbio ao qual não sabemos a veracidade, mas estando Tales preocupado em olhar para o céu, não enxergava o que se passava por debaixo dos seus pés. Ficou famoso, pois em uma de suas andanças pelo Egito em companhia do faraó Amásis usando sombra de uma pirâmide e um bastão na vertical calculou a altura de uma pirâmide, usando semelhança de triângulos. As primeiras deduções lógicas em Geometria são atribuídas a Tales. Embora não tenha conseguido produzir a organização de um sistema axiomático completo, teve o grande mérito de iniciar o método dedutivo, fazendo com que a Geometria deixasse seu caráter experimental intuitivo.

Pitágoras residia em Samos, que se encontra na ilha de Jônia a aproximadamente 60 quilômetros de Mileto, e teria 20 anos quando Tales morreu. Estes fatos não são conhecidos com exatidão, pois sobre a vida desses pensadores existem muitas lendas apesar de existirem fatos relevantes. Pelo fato da expansão Persa em meados do século VI a.C. na região de Mileto, Pitágoras mudou-se para cidade de Crotona, ao sul da península italiana, fundando uma escola voltada ao estudo da Filosofia, das Ciências Naturais e da matemática. Garbi(2006, p, 24) diz que “apesar de seu comportamento místico-religioso, os pitagóricos desenvolveram estudos da melhor qualidade. Embora Tales tenha sido o primeiro a declarar que as verdades matemáticas devem ser provadas pelo raciocínio, acredita-se que foram os pitagóricos os primeiros a produzir demonstrações razoavelmente rigorosas”.

O interessante é que nessa época surgiu a ideia da axiomática proposta por Tales, pois ele acreditava que as verdades matemáticas devem ser

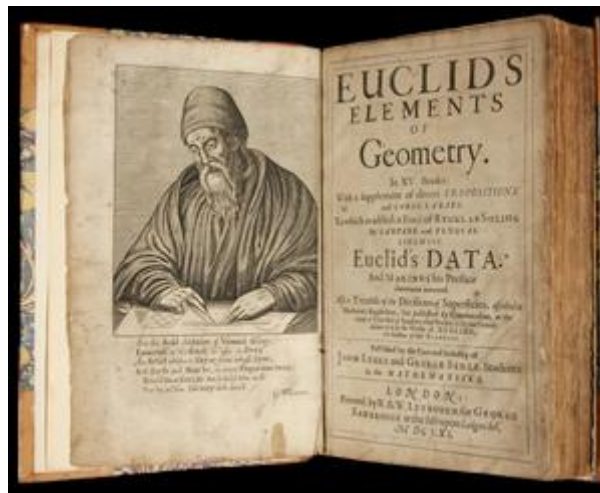
provadas, mas existem limites que não poderiam ser ultrapassados, esses limites se davam pelo fato que alguns princípios básicos deveriam ser admitidos sem demonstração. Foi também nesse período estabelecido que somente dois instrumentos poderiam ser utilizados nas construções geométricas a régua (sem marcas) e o compasso.

A descoberta das grandezas incomensuráveis é atribuída de certa forma à escola pitagórica. Esta situação evidencia que houve uma separação entre geometria e aritmética, a primeira devendo se dedicar a grandezas e situações onde a geometria deveria ser aplicada e a segunda na compreensão dos números. Roque e Carvalho (2019, p, 66) comenta que “a concepção de Pitágoras sobre a natureza parte da ideia de que há uma explicação global que permite simbolizar a totalidade do cosmos, e esta explicação é dada pelos números. Isto levou os pitagóricos a considerarem que as coisas são números, que elas consistem de números”. Além de poética a maneira que Pitágoras aborda o assunto é muito importante para a distinção entre a geometria e aritmética. Ele faz parte dos geômetras que surgiram na fase pré-euclidiana, e institucionalizaram o uso de régua e compasso para resolver vários problemas.

A primeira organização axiomática da geometria, atribui-se a Euclides (360 a.C-295 a.C), um matemático que organizou os conhecimentos geométricos e os teoremas formulados por pensadores gregos da Antiguidade e os reuniu em sua obra-prima denominada *Os Elementos* (COSTA & ROSA^a, 2015). Esta obra contém 13 volumes, que reúnem conhecimentos sobre aritmética, álgebra e geometria.

Importante ressaltar que os gregos resolviam os problemas matemáticos, principalmente da medição de terras para plantio, com a utilização de compasso e régua sem escalas, tomando por base elementos geométricos conhecidos naquela época e por este motivo as construções geométricas apresentavam tamanha importância para as operações matemáticas (COSTA & ROSA^a, 2015).

Figura 2. Foto do Livro Os Elementos de Euclides



Fonte: <https://esquadraodoconhecimento.wordpress.com/2015/04/20/euclides-e-os-elementos/>

Na história da geometria grega ficaram três problemas clássicos sem solução. Os três problemas clássicos da Geometria grega eram sobre como realizar uma construção geométrica usando somente régua e compasso. Tratava-se dos seguintes problemas:

Duplicação do cubo:

Dado um cubo (pela sua aresta), construir outro cubo (construindo sua aresta a partir da primeira) com o dobro do volume do cubo dado.

Trissecção do ângulo:

Dado um ângulo, construir um ângulo com um terço da amplitude (medida).

Quadratura do círculo:

Dado um círculo (pelo seu raio), construir um quadrado (construindo seu lado) com a mesma área.

Tais impasses (duplicação do cubo, quadratura do círculo e a trissecção de um ângulo) apresentados pela utilização estrita de régua e compasso foram comprovados por matemáticos como uma impossibilidade somente no século XIX (GARBI, 2010 *apud* COSTA & ROSA^a, 2015).

2.1.1 Euclides de Alexandria

Figura 3 - Euclides de Alexandria



Fonte: <https://www.ebiografia.com/euclides/>(03/04/2020)

Euclides de Alexandria foi mestre, escritor, matemático da escola platônica, e conhecido como o Pai da Geometria; nasceu na Síria aproximadamente em 330 a.C. e realizou seus estudos em Atenas. Ele é até hoje, na história da matemática, considerado como um dos mais significativos estudiosos deste campo na antiga Grécia.

A obra “Os Elementos de Euclides” dá uma ideia do quanto, aos gregos, uma ciência não tinha que ser enciclopédica, mas constituída de proposições fundamentais, com as quais seria construído um caminho ou maneira de provar as outras. Os Elementos de Euclides têm sido estudados exaustivamente, sobre a existência de tais teoremas, se são devidos ao próprio Euclides ou a alguns matemáticos anteriores. Nesse processo Hipócrates, da ilha jônia de Quios, ficando famoso pelo fato de ter produzido um livro que reuniu de modo lógico e organizado, a Geometria da época, tal livro acredita-se que originou várias proposições do Livro III de Euclides. O fato constitui um relato importante, pois mostra a construção da geometria a qual conhecemos hoje. E por volta do século III a.C temos uma geometria sólida e abrangente, construída por vários matemáticos, que ao longo do tempo foram contribuindo para a formulação do livro Os Elementos de Euclides.

Os Elementos de Euclides foram compostos como uma obra textual, dividida em treze volumes – cinco abordam a geometria plana; três enfocam os números; um destaca a teoria das proporções; um tem como núcleo central os incomensuráveis; e os três finais discorrem sobre a geometria no espaço. O que se sabe sobre Euclides foi extraído de textos elaborados, principalmente os escritos por Proclo e Pappus de Alexandria muitos séculos após sua morte. Toda a teoria desenvolvida nos elementos de Euclides é uma das mais importantes na trajetória da matemática, que levou este livro a ser um dos mais importante na história da matemática.

2.1.2 Os Elementos de Euclides

São 13 livros, que se referem a capítulos então são 13 capítulos, sendo separados da seguinte forma, seguindo Artmann [5].

1. Geometria plana – Livros I-VI;
2. Aritmética – Livros VII-IX
3. Geometria espacial – Livros X-XIII

Nos Elementos de Euclides o método utilizado é o axiomático-dedutivo, que se baseia nas definições, postulados e axiomas. O estudo deste trabalho está focado na geometria plana, e utilizamos esses postulados e axiomas para demonstrar propriedades de figuras geométricas, desenvolver problemas matemáticos e construir o conhecimento. Os primeiros princípios encontram-se no Livro I dos Elementos, que trazem as noções de ponto, reta e plano. Tais conceitos são essenciais para serem trabalhados com os alunos.

Definições de Euclides

- I. Ponto é o que não tem partes.
- II. Linha é o que tem comprimento sem largura.
- III. As extremidades da linha são pontos.
- IV. Linha reta é aquela que está posta igualmente entre as suas extremidades.

V. Superfície é o que tem comprimento e largura.

VI. As extremidades da superfície são linhas.

Axiomas de Euclides:

- Axioma 1: Coisas que são iguais a uma mesma coisa, são iguais entre si.
- Axioma 2: Se iguais são adicionados a iguais, os resultados são iguais.
- Axioma 3: Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
- Axioma 4: Coisas que coincidem uma com a outra, são iguais.
- Axioma 5: O todo é maior do que qualquer uma das suas partes.

Postulados de Euclides:

- Postulado 1: Dados dois pontos distintos, há um único segmento de reta que os une;
- Postulado 2: Um segmento de reta pode ser prolongado indefinidamente para construir uma reta;
- Postulado 3: Dados um ponto qualquer e uma distância qualquer, pode-se construir uma circunferência de centro naquele ponto e com raio igual à distância dada;
- Postulado 4: Todos os ângulos retos são congruentes (semelhantes);
- Postulado 5: Se duas linhas intersectam uma terceira linha de tal forma que a soma dos ângulos internos em um lado é menor que dois ângulos retos, então as duas linhas devem se intersectar neste lado se forem estendidas indefinidamente. (Postulado das Paralelas)

Vale ressaltar que hoje os postulados, axiomas e definições de Euclides não são usados inteiramente deixando uma lacuna no imaginário dos alunos. Assim muitos educadores não buscam apresentar para os alunos; assim como as apostilas e livros didáticos estão cada vez mais sintetizando esse conteúdo, sendo esses assuntos cada vez menos abordados na educação básica.

Contextualizando este apanhado histórico no ambiente escolar, tenta-se libertar o aluno de certas ataduras e paradigmas sociais/educacionais que hegemonizam a educação brasileira há algumas décadas. A abordagem clássica dos conteúdos na educação brasileira sempre valorizou a metodologia de conteúdo associado a um leque de exercícios de fixação propostos pelo professor.

Quando deixamos de lado a história da matemática passamos uma ideia para o aluno que o conhecimento matemático é linear e vai se acumulando com o passar do tempo. Essa ideia pode levar o aluno a pensar que matemática é coisa de gênio e que possui um grau de complexidade muito grande. Ao trabalhar elementos da história da matemática em sala de aula, mostrando que um dado conceito foi determinado por uma necessidade e por certa civilização em um determinado período de tempo na história da humanidade, essa matemática acaba se tornando, para quem está aprendendo, mais interessante e de certa forma ganha um sentido mais contextualizado, possibilitando até mesmo novas abordagens metodológicas de alguns conteúdos vinculados à aprendizagem matemática.

Conforme Bittar e Freitas (p.13, 2005) “contar, medir e observar formas geométricas são expressões da mente humana que refletem a razão contemplativa e a busca da perfeição estética”. Assim, sendo a matemática uma ciência abstrata, que lida com conceitos que não parecem corresponder à experiência sensível, os conceitos matemáticos se diluem no entendimento social de maneira prática e muitas vezes com conceitos mal interpretados.

No caso particular dos conceitos geométricos básicos como ponto, reta e plano, estes se tornam assuntos muito abstratos, uma vez que não existem no mundo físico, fazendo parte do imaginário social humano saturado de interpretações inadequadas ao rigor matemático. Ensinar matemática tornou-se um desafio para educadores e professores com o efeito em tentar deixar a disciplina mais concreta. Assim surgem perguntas como o que significam situações concretas: O que é concreto? Como uma criança aprende? E como se processa a construção do pensamento matemático? Como falar de termos e conceitos abstratos usados na geometria para alunos do 7º e 8º anos?

Observa-se que, de modo geral, os cursos para professores estão cada vez mais especializados no estudo das novas tecnologias e seu uso direto na educação, em particular nas aulas de matemática. Há uma grande variedade de softwares para matemática e também de smartphones com milhares de aplicativos que tem se tornado uma ferramenta acessível. No entanto, estamos esquecendo que esta tecnologia só se faz presente hoje, pois há milhares de anos a humanidade vem se desenvolvendo, para chegar ao que temos hoje em mãos. Com isso, meio que de forma natural, velhos instrumentos que ajudaram em muito nossa civilização a evoluir e a se desenvolver estão caindo no esquecimento de muitos alunos e se tornando um recurso cada vez mais escasso nas apostilas e livros didáticos.

Em muitos casos só usam a régua em sala de aula, sendo que compasso, transferidor e esquadro têm seu lugar cativo na lista de materiais, mas sendo pouco utilizados. Nos dias atuais como antigamente a matemática vem se desenvolvendo, buscando se despir de certas roupagens. Segundo Bittar e Freitas (p. 15, 2005) “É surpreendente observar que o desenvolvimento da matemática tem suas raízes em necessidades práticas, mas acaba sempre evoluindo e transcendendo os limites das aplicações imediatas”.

Nesse cenário as construções geométricas sempre estiveram presentes no desenvolvimento humano, se tornando uma grande ferramenta para edificações, entendimento dos Astros seus movimentos e interpretações, para melhor entender o plantio, calendário e etc.

O conhecimento matemático e a utilização de instrumentos como compasso e régua ajudaram na evolução humana, isso é fato. Com base nesses conceitos já estudados na vertente do conhecimento histórico. Sendo fato que instrumentos matemáticos como régua e compasso estarem perdendo espaço nas apostilas, faremos um estudo com o uso desses instrumentos para algumas construções geométricas usando alguns teoremas formulados há mais de mil anos, mas continuam imprescindíveis tanto para o conhecimento matemático individual quanto social.

2.2 Aspectos epistemológicos das construções geométricas em geometria

No âmbito da geometria encontramos em Zuin (p.177, 2001) algumas afirmações com as quais concordamos: “Não há geometria sem régua e compasso. [...] O aprendizado das construções geométricas pode ampliar as fronteiras do aluno e facilitar a compreensão das propriedades geométricas, pois permite uma espécie de "concretização do conhecimento. [...] Em todas as interfaces que a Matemática faz com a linguagem gráfica, o conhecimento de desenho geométrico entra como ferramenta enriquecedora”.

Por este motivo faz-se necessário uma breve introdução sobre os conceitos geométricos a serem utilizados neste trabalho, que foram devidamente explicados neste subtítulo. Para um melhor entendimento do conteúdo foi adotada a seguinte ordem de sequência didática: apresentação dos instrumentos (régua, compasso, transferidor, esquadro), transposição de segmentos de retas, transposição de ângulos, classificação de triângulos, lugar geométrico (circunferência, mediatriz, bissetriz e retas paralelas).

2.2.1 Instrumentos utilizados em construções geométricas

É fato que as construções com régua e compasso já aparecem desde o século V a.C. - Época dos pitagóricos, e foram conseqüentemente aprofundados pelos Elementos de Euclides; portanto, a Geometria Euclidiana acompanhou o desenho geométrico pré-existente pelos Pitagóricos (GARBI, 2006 *apud* COSTA & ROSA, 2015). Euclides teve como celeiro básico, na elaboração de sua obra, um estudo sobre como construir uma figura usando régua e compasso e não simplesmente a execução do traçado da figura com esses instrumentos.

Acreditamos que ensinar geometria sem que os alunos saibam como usar alguns instrumentos básicos de desenho geométrico, como régua e compasso, sem que seja na problematização de conteúdos relacionados à matemática particularmente, e privá-los de usar régua e compasso na sua função mais nobre, para abordar conceitos e conteúdos de geometria, pode ser um erro. Do mesmo modo, permitir que o aluno conclua o ensino fundamental sem

nunca ter manuseado modelos concretos de sólidos geométricos ou mesmo construí-los. Fica a impressão de estarmos mutilando a geometria ou atropelando os alunos, quando essa possibilidade de experimentação está sendo deixada de lado.

Resumindo, com este trabalho buscamos, de alguma forma, resgatar o uso da régua e compasso no estudo introdutório de alguns temas da geometria, pois consideramos importantes para aprendizagem do aluno. Além disso, buscamos articular a apresentação de conceitos e propriedades básicas de geometria com aspectos práticos como o uso do software GeoGebra em paralelo aos instrumentos de desenho.

2.2.1.1 A Régua

A régua é usada para ligar dois pontos e construir retas, semirretas ou segmentos de reta. Essa régua pode ser graduada ou não. As réguas usadas na escola normalmente são graduadas. Nas construções geométricas gregas antigas a régua não podia conter nenhuma marcação, menos ainda marcações que indicassem medidas, ou seja, a régua utilizada pelos geômetras gregos era “lisa” (GARBI, 2006 *apud* COSTA & ROSA, 2015).

Figura 4 - Régua



Fonte: Elaboração Própria

2.2.1.2 O Compasso

O compasso é um instrumento usado para construir circunferências, arcos, ângulos, transportes de ângulo e segmentos. Possui duas hastes: uma chamada ponta seca, onde encontramos uma ponta metálica e na outra se encontra o grafite.

Figura 5 - Compasso

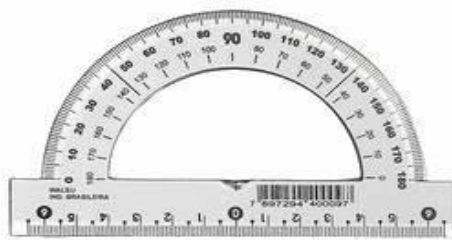


Fonte: Elaboração Própria

2.2.1.3 O Transferidor

Transferidor é um instrumento de desenho utilizado para medir ângulos. Existem os transferidores de meia volta ou 180° e de uma volta ou 360° .

Figura 6 - Transferidor

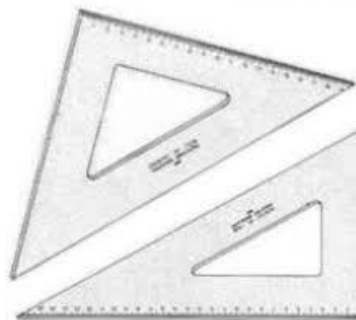


Fonte: Elaboração Própria

1.2.1.4 Os Esquadros

Existem dois tipos de esquadros, um deles possui os seguintes ângulos 45° , 45° e 90° (esse esquadro é chamado de esquadro de 45° ou ainda isósceles), o outro possui ângulos de 30° , 60° e 90° (sendo esse chamado de esquadro de 60° ou ainda escaleno).

Figura 7 - Par de Esquadros



Fonte: Elaboração Própria

Os esquadros são utilizados para traçar segmentos perpendiculares ou paralelos etambém alguns ângulos.

2.2.2 Habilidade com instrumentos de desenho

As habilidades de desenho devem ser trabalhadas de forma clara e com muita calma, pois os alunos não estão acostumados com a abordagem da geometria através das construções geométricas. Segundo Wagner (p. 18, 1993):

“Os problemas de construção são motivadores, às vezes intrigantes e frequentemente conduzem à descoberta de novas propriedades. São educativos no sentido que em cada um é necessária uma análise da situação onde se faz o planejamento da construção, seguindo-se a execução dessa construção, a posterior conclusão sobre o número de soluções distintas e também a compatibilidade dos dados”.

Nesse sentido a introdução desse determinado tipo de exercício matemático pode ser introduzido inicialmente de maneira lúdica e ir criando corpo e estrutura de algo mais relevante de termos da compreensão matemática de uma forma geral. Neste primeiro contato mostraremos como fazer as construções básicas utilizando a régua e o compasso. O Livro Construções Geométricas do Eduardo Wagner (1993) está dividido em cinco capítulos onde no primeiro capítulo Construções Elementares está a base dos exercícios aplicados aos alunos do Colégio Educativa. E, segundo o entendimento deste mesmo autor (WAGNER, p. 2, 1993):

“... a régua é capaz apenas de traçar uma reta quando dois de seus pontos são conhecidos e o compasso serve apenas para traçar um círculo de centro e raios dados. Portanto, o traçado de paralelas e perpendiculares são os primeiros problemas que precisamos resolver”.

Sendo assim é importante que os alunos saibam o que significa lugar geométrico, pois como os problemas relacionados ao traçado de paralelas e perpendiculares devem ser os primeiros a serem aprendidos por se encontrarem na base das construções e no entendimento básico da geometria

do uso de régua e compasso. As primeiras ferramentas das construções geométricas são os lugares geométricos básicos. Vamos analisar nesse texto quatro conceitos básicos sobre lugar geométrico, cujos conceitos servem para começar a entender desenho geométrico.

As construções matemáticas com régua e compasso já se faziam presentes no século V a.C, como já foi dito nesse trabalho, junto com os Pitagóricos, e tiveram enorme importância no desenvolvimento da Matemática grega. Esses mesmos conceitos hoje podem ser aplicados aos alunos, pois o conhecimento se encontra mais fácil, abrangente e existem novos mecanismos que podem ser aplicados junto com os alunos. Os computadores e seus vários programas podem gerar um leque ilimitado para novas formas de aprendizagem. Ainda, segundo D'Ambrósio (p. 09, 1996), “a invenção matemática é acessível a todo indivíduo e a importância dessa invenção depende do contexto social, político, econômico e ideológico”. Nesse contexto é importantíssimo que um aluno nunca se prive ou termine o ensino fundamental sem nunca ter utilizado um compasso e uma régua de maneira ao entendimento lógico matemático. Com base nesse conceito mesmo sabendo que esses materiais podem ser facilmente trocados por computadores e smartphones ou tablets se faz importante a interpretação desses materiais para depois fazer o uso de novas tecnologias.

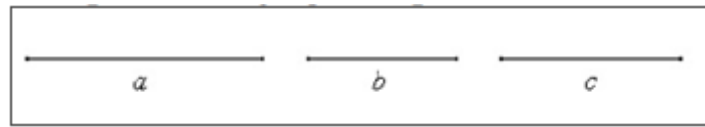
Neste item apresentamos algumas construções geométricas básicas que serão utilizadas e os lugares geométricos que serão abordados aqui. Inicialmente, apresentamos as noções básicas de transporte de segmentos e de ângulos, as quais são necessárias para a construção de triângulos, usando os casos de congruência. Por fim abordamos as construções concernentes aos lugares geométricos fundamentais.

Utilizamos o modelo proposto por Wagner (2009), que traz um passo a passo bastante didático na construção dos desenhos geométricos e auxiliam tanto docentes e discentes no manuseio da régua e do compasso e estão elucidados a seguir.

2.2.2.1 Transposição de segmentos de reta

Construção do triângulo ABC sendo dado os seus três lados:

Figura 8 – Transposição de segmentos de retas -1

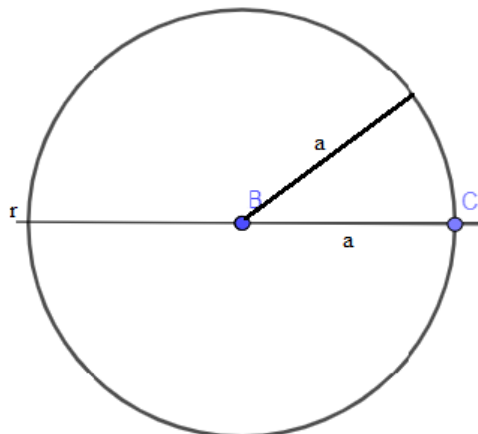


Fonte: Elaboração própria

Resolução

1. Devemos desenhar uma reta r qualquer e sobre ela assinalar o ponto B .
2. Para transportar o segmento a , devemos pegar o compasso, colocar a ponta seca em uma das extremidade e abrir até que a ponta do grafite coincida com a outra extremidade.
3. Devemos por a ponta seca em B e traçar com a outra ponta um pequeno arco cortando a reta r . Este será o ponto C tal que $BC = a$. (figura 9)

Figura 9 – Transposição de Segmentos de retas 2

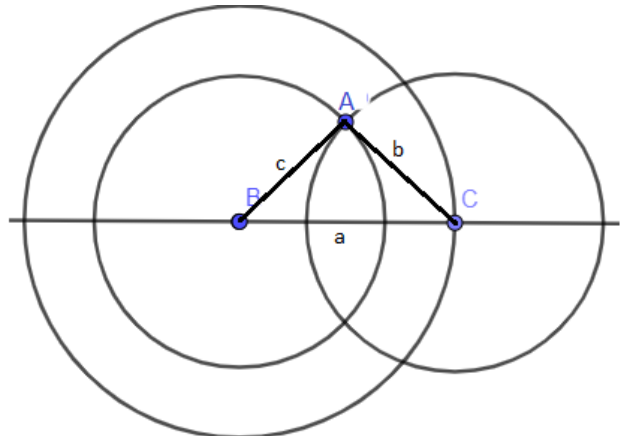


Fonte: Elaboração própria

4. Usando o mesmo procedimento devemos pegar o segmento b com o compasso, com centro em C desenhe, acima da reta r um arco de circunferência de raio b .
5. Para finalizar, devemos pegar o segmento c com o compasso e, com centro em B desenhe um arco de raio c . A interseção dos dois arcos será o vértice do triângulo. (figura 10)

6. Observamos que, devido à desigualdade triangular, uma condição necessária e suficiente para a solução do problema é a ocorrência simultânea das seguintes desigualdades: $a < b + c$, $b < a + c$, $c < a + b$.

Figura 10 – Transposição de segmentos de retas - 3



Fonte : Elaboração própria

2.2.2.2 Transposição de ângulos

As técnicas que apresentamos a seguir permitirão desenvolver um método de construção que é baseado nas propriedades das figuras.

Segue abaixo o modelo adotado por Wagner (2009) para a transposição de ângulos, que é uma ferramenta importante para a construção e o entendimento dos lugares geométricos.

Figura 11 – Transposição de ângulos - 1

Dados o ângulo α e a semirreta OX, construir o ângulo XOY = α .

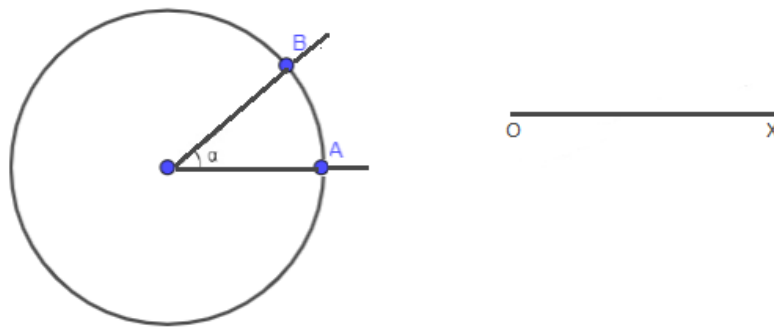


Fonte: Elaboração própria

Resolução

1. Com centro no vértice do ângulo dado trace um arco de circunferência cortando seus lados nos pontos A e B. (Figura 12)

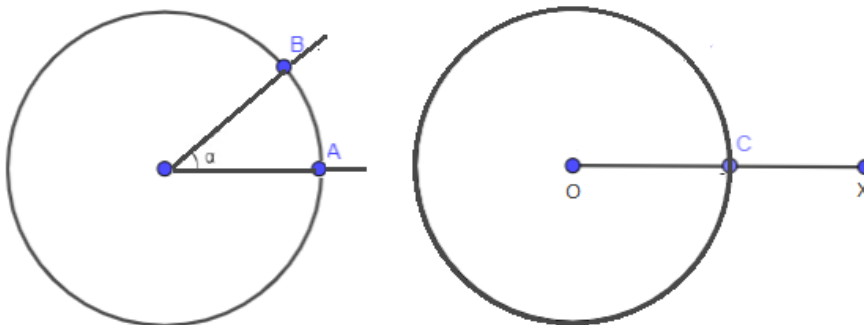
Figura 12 - Transposição de ângulos -2



Fonte: Elaboração própria

2. Sem modificar a abertura do compasso trace um arco com centro O cortando OX em C. (Figura 13)

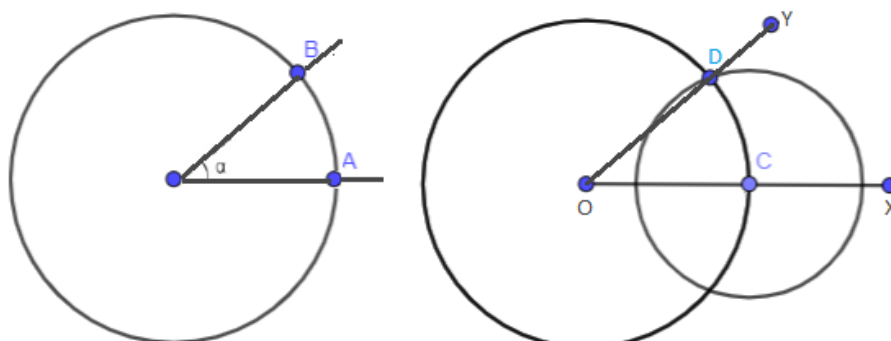
Figura 13 - Transposição de ângulos -3



Fonte: Elaboração própria

3. Pegaremos o compasso a distância AB e trace, com centro em C e com este raio, um arco determinado sobre o primeiro o ponto D. A semirreta OY que passa por D é tal que $X\hat{O}Y = \alpha$. (Figura 14)
- 4.

Figura 14 - Transposição de ângulos - 4



Fonte: Elaboração própria

Existem algumas outras construções fundamentais nas construções geométricas, que são os chamados lugares geométricos – LG. Vamos apresentar a seguir os seguintes LG: circunferência, mediatriz, retas paralelas e bissetriz. Esses quatro lugares geométricos podem ser explorados em nível de Ensino Fundamental, mas existe um quinto lugar geométrico, o “arco capaz”, mas que não vamos tratar dele, pois consideramos que extrapola o nível do Ensino Fundamental, sendo mais adequado para o Ensino Médio.

A seguir dar-se-á ênfase sobre o tópico dos triângulos, por sua importância e relevância no estudo da Geometria. Considera-se que o reconhecimento dos padrões e definições de triângulos são uma ferramenta fundamental para a comprovação dos principais Teoremas Matemáticos assim como de alguns Lugares Geométricos. Seu entendimento é, portanto, basilar para a elucidação das Construções Geométricas.

2.2.3 Triângulos

Triângulos são polígonos formados por três lados. Os polígonos, por sua vez, são figuras geométricas formadas por uma linha poligonal simples fechada, mas que não se cruzam em qualquer outro ponto. Sendo assim, os triângulos herdam dos polígonos algumas características e propriedades básicas. Como mencionado anteriormente, sabe-se que um triângulo é formado por três lados e cada um possui uma determinada medida, mas essas não podem ser escolhidas aleatoriamente. Só irá existir um triângulo se, e somente se, os seus lados obedecerem à seguinte regra: um de seus lados deve ser maior que o valor absoluto (módulo)¹ da diferença dos outros dois lados e menor que a soma desses dois lados. Em linguagem matemática, $|c - b| < a < c + b$. Sendo a , b e c os lados de um triângulo, esta desigualdade é equivalente a estas outras duas:

$$|c - a| < b < c + a; |b - a| < c < b + a$$

Cada uma das desigualdades apresentadas é equivalente à ocorrência simultânea das três desigualdades triangulares: $a < b + c$, $b < a + c$, $c < a + b$.

Para ver isto, da desigualdade $|c - b| < a < c + b$, supondo $c \geq b$, temos $c - b < a < c + b$, e então $c < a + b$ e $a < c + b$. E como $b \leq c$, temos $b < a + c$.

1. Módulo é definido como: “Dois números opostos ou simétricos têm sinais contrários. Os pontos que representam números simétricos na reta numerada estão à mesma distância da origem. Essa distância é chamada de módulo ou valor absoluto desses números”. BONJORNIO, BONJORNIO & OLIVARES (2006, P. 19)

Assim as três desigualdades triangulares são consequências da desigualdade $|c - b| < a < c + b$. O caso $b \geq c$ é tratado analogamente. Reciprocamente, se valem as três desigualdades triangulares, então supondo $c \geq b$, temos $c - b < a < c + b$, logo $|c - b| < a < c + b$, e se $b \geq c$, então analogamente deduziremos $|b - c| < a < b + c$, que é a mesma desigualdade. Para melhor entendimento do aluno, pode-se dizer que para construir um triângulo é necessário que a medida do maior lado seja menor que a soma de seus dois menores lados, isso garante a existência de um triângulo.

2.2.3.1 Elementos de um triângulo

Ostriângulospossuem os mesmos elementos dos polígonos, com exceção das diagonais. Os outros elementos dos polígonos que ostriângulospossuem são:

- Lados: são os segmentos de reta que formam o polígono;
- Vértices: são os pontos de encontro entre lados adjacentes (que possuem um vértice em comum);
- Ângulosinternos: são os ângulos que podem ser observados entre dois lados adjacentes de umtriângulo;
- Ângulosexternos: são os ângulos que podem ser observados entre um lado de umtriânguloe o prolongamento do lado adjacente a ele para além do vértice comum.

Figura 15 - Triângulo



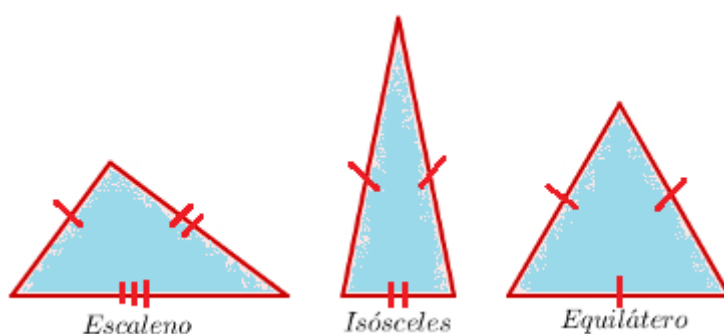
Fonte: Elaboração Própria

2.2.3.2 Classificação de Triângulos

Ostriângulos podem ser classificados a partir das medidas dos seus lados. Obrigatoriamente, um triângulo pertence a uma das classificações a seguir:

- Escaleno: triângulo que possui todos os lados com medidas diferentes;
- Isósceles: triângulo que possui dois lados com medidas iguais;
- Equilátero: triângulo que possui três lados com medidas iguais.

Figura 16 - Triângulos - Lados

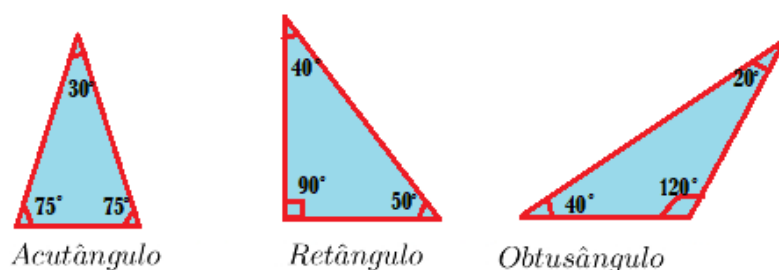


Fonte: Elaboração Própria

Outra classificação possível para os triângulos refere-se às medidas de seus ângulos.

- Acutângulo: Triângulo que possui todos os ângulos com medidas menores que 90° ;
- Retângulo: Triângulo que possui um ângulo com medida igual a 90° ;
- Obtusângulo: Triângulo que possui um ângulo com medida superior a 90° .

Figura 17 - Triângulos - Ângulos



Fonte: Elaboração Própria

2.2.3.3 Propriedades dos triângulos

As propriedades a seguir são válidas para qualquer triângulo, independentemente de sua forma ou tamanho e suas provas, enunciadas abaixo, podem ser encontradas em livros de Geometria Euclidiana.

- A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo sempre será igual a 180° ;
- A soma das medidas dos ângulos externos de um triângulo sempre será igual a 360° ;
- A medida de um ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele;
- A soma das medidas de dois lados de um triângulo é sempre maior que a medida do terceiro lado;
- O maior lado de um triângulo opõe-se ao seu maior ângulo;
- O menor lado de um triângulo opõe-se ao seu menor ângulo.

2.2.3.4 Congruência de triângulos

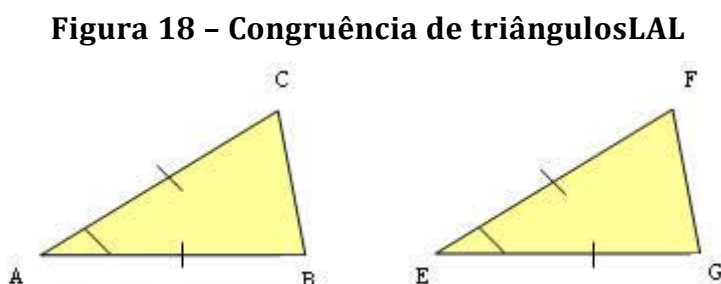
Temos que dois triângulos são congruentes:

Quando seus elementos (lados e ângulos) determinam a congruência entre os triângulos.

Quando dois triângulos determinam a congruência entre seus elementos.

Casos de congruência:

1º LAL (lado, ângulo, lado): dois lados congruentes e ângulos formados pelos dois lados também congruentes.

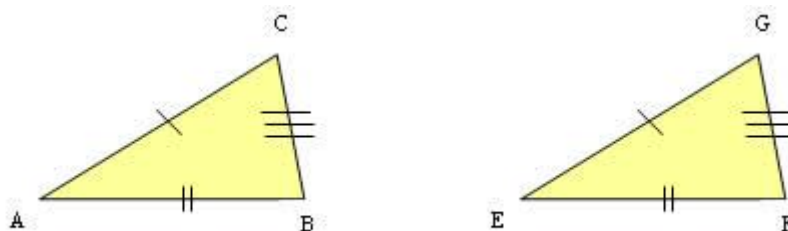


Fonte: Elaboração Própria

Nesse caso temos que os ângulos $\hat{C}\hat{A}\hat{B} \equiv \hat{F}\hat{E}\hat{G}$ são congruentes e lados $AC \equiv EF$, $AB \equiv EG$ são congruentes.

2º LLL (lado, lado, lado): três lados congruentes.

Figura 19 - Congruência de triângulos LLL

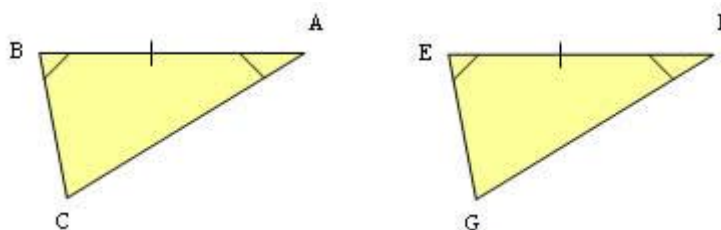


Fonte: Elaboração Própria

Nesse caso temos que os lados $AC \equiv EF$, $AB \equiv EG$ e $CB \equiv GF$ são congruentes.

3º ALA (ângulo, lado, ângulo): dois pares de ângulos congruentes e lado entre os ângulos congruentes.

Figura 20 - Congruência de triângulos ALA

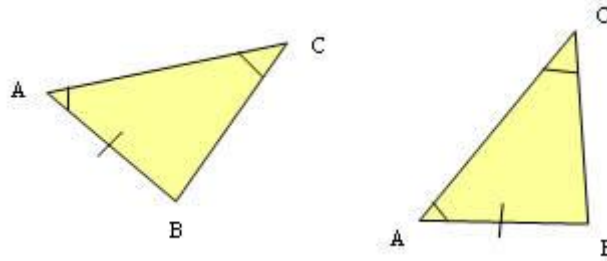


Fonte: Elaboração Própria

Nesse caso temos que $AB \equiv EF$ são congruentes e os ângulos $CBA \equiv GEF$ e $BAC \equiv EFG$ são congruentes.

4º LAA (lado, ângulo, ângulo): congruência do ângulo adjacente ao lado, e congruência do ângulo oposto ao lado.

Figura 21 - Congruência de triângulos LAA



Fonte: Elaboração Própria

Dando continuidade ao embasamento teórico das construções fundamentais nas construções geométricas, abordaremos os chamados lugares geométricos - LG.

2.2.3 Lugar Geométrico

MUNIZ NETO (p. 72, 2013) dada uma propriedade \wp relativa a pontos do plano, o lugar geométrico (LG) dos pontos que possuem a propriedade \wp é o subconjunto \mathcal{L} do plano que satisfaz as duas condições a seguir:

- (a) Todo ponto de \mathcal{L} possui (satisfaz) a propriedade \wp .
- (b) Todo ponto do plano que possui a propriedade \wp pertence a \mathcal{L}

Claro que essa definição é muito clássica e formal para alunos do ensino fundamental II, 8º ano, mas seria interessante eles terem em mente as noções de lugares geométricos básicos, ainda que o conceito de lugar geométrico seja assaz abstrato. A abstração matemática está fundamentada em duas unidades básicas: o número e o ponto. O primeiro serve para fazer cálculos algébricos e o segundo para compreender o espaço geométrico. Neste sentido, os lugares geométricos são conjuntos de pontos que compartilham a mesma propriedade.

Portanto, numa linguagem com menos formalismo matemático, podemos dizer que a *lugar geométrico* é um conjunto de pontos que satisfaz uma determinada propriedade e, para definir tal conjunto, devemos enunciar essa propriedade que esses pontos, e somente esses, devem ter.

Nesse sentido um dos objetivos seria que os alunos conseguissem compreender os quatro LGs (Circunferência, Mediatriz, Paralela e Bissetriz). O outro seria que eles conseguissem resolver alguns problemas, e para isso devem usar um lugar geométrico e/ou também alguns que precisam usar a técnica dos dois lugares geométricos, ou seja, problemas cuja solução implica em determinar os pontos que estão na intersecção de dois lugares geométricos.

2.2.3.1 Circunferência

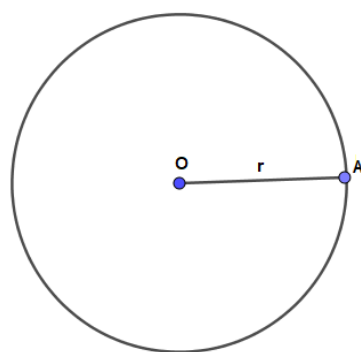
Apresentamos a seguir a definição de *circunferência* que é exibida em nível de Educação Básica. Nesse nível de escolaridade a circunferência corresponde ao contorno do *círculo*, que é caracterizado como o conjunto dos pontos do plano que pertencem ao interior da circunferência.

Definição de circunferência (Lugar Geométrico 1 - LG 1)

Circunferência é o lugar geométrico de uma figura geométrica pertencente ao plano que é constituída pelo conjunto de todos os pontos igualmente distantes de um ponto fixo desse plano.

Dados um real positivo r e um ponto O do plano, o lugar geométrico do plano dos pontos que estão a uma distância r do ponto O é o círculo de centro O e raio r : $AO = r \Leftrightarrow A \in \mathfrak{J}(O; r)$

Figura 22: circunferência como LG



Fonte: Elaboração Própria

2.2.3.2 Mediatriz

Apresentamos a seguir a definição e a construção do Lugar Geométrico 2 – LG 2.

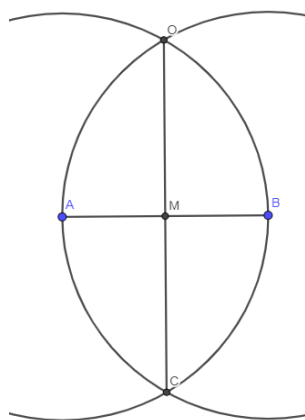
Definição: Dados dois pontos A e B no plano, a **mediatriz** do segmento AB é a reta perpendicular a AB e que passa pelo seu ponto médio.

Teorema. Um ponto pertence à mediatriz m de um segmento se e somente se ele equidista dos extremos desse segmento.

Utiliza-se a congruência de triângulos para a prova do Teorema, sendo comparados os elementos de um triângulo com os de outro triângulo. Existem quatro formas de comprovar: através do LAL (lado, ângulo, lado); do LLL (três lados iguais); ALA (ângulo, Lado, ângulo) ou LAAo (lado, ângulo adjacente e o ângulo oposto).

Demonstração:

Figura 23 – Demonstração mediatriz



Fonte: Elaboração própria

Sejam M o ponto médio e m a mediatriz de AB, (Figura 23). Se $O \in m$, então, pela definição de mediatriz, m é perpendicular a AB e passa pelo ponto M. No triângulo OAB, OM é perpendicular a AB. Temos então $AM = BM$, pois M é o ponto médio de AB. Temos também a igualdade dos ângulos $\widehat{OMA} = \widehat{OMB} = 90^\circ$ pois m é perpendicular a AB. Além disso, OM é comum aos triângulos OMA e OMB, que são portanto congruentes pelo caso LAL, logo $OA = OB$.

Reciprocamente, seja O um ponto no plano tal que $AO = OB$. Então o triângulo OAB é isósceles de base AB , de onde segue que a mediana e a altura relativas a AB coincidem. Como a mediana relativa a AB é o segmento OM , segue que OM é perpendicular a AB , o que é o mesmo que dizer que OM é mediatriz de AB . Assim concluímos a prova do Teorema.

Roteiro para a construção da mediatriz de um segmento (Lugar Geométrico - LG 2):

Construa, com régua e compasso, a mediatriz do segmento AB dado a seguir.

Figura 24 - Segmento

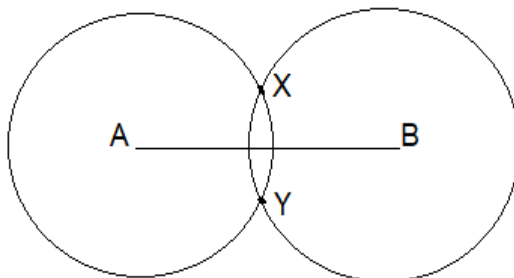


Fonte: Elaboração Própria

Roteiro da construção de uma mediatriz

1. Com uma mesma abertura r maior que a metade do segmento AB , trace os círculos de raio r , centrados em A e em B ; sendo X e Y os pontos de intersecção de tais círculos, então o segmento formado por XY é a mediatriz de AB .

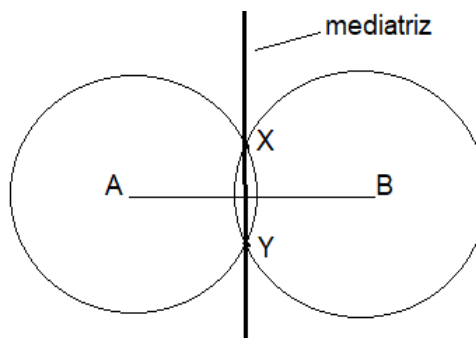
Figura 25 - Construção da Mediatriz



Fonte: Elaboração Própria

2. Traçamos uma reta pelos pontos X e Y formando assim a mediatriz.

Figura 26 - Mediatriz



Fonte: Elaboração Própria

2.2.3.3 Bissetriz

Definição: Bissetriz é uma semirreta que divide um ângulo em dois ângulos de mesma medida. (Lugar Geométrico 3 - LG 3)

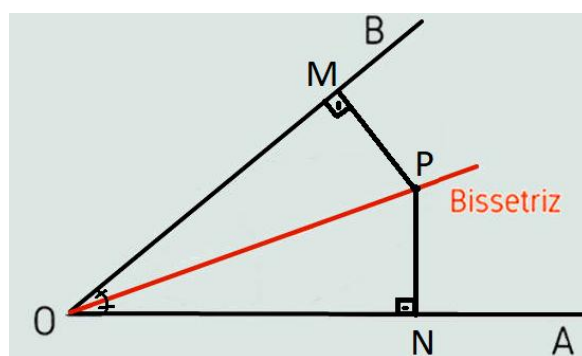
A bissetriz de um ângulo é o lugar geométrico dos pontos que equidistam de duas semirretas concorrentes e, por consequência, divide um ângulo em dois ângulos congruentes. É o que demonstraremos a seguir.

Teorema: Um ponto pertence à bissetriz de um ângulo se e somente se equidista dos lados desse ângulo.

Demonstração:

Vamos supor primeiro que P pertence a bissetriz de $\widehat{A\hat{O}B}$ (figura 27) e sejam M e N, respectivamente, os pés das perpendiculares baixadas do ponto P às retas AO e BO. Como $\widehat{M\hat{O}P} = \widehat{N\hat{O}P}$, e $\widehat{OMP} = \widehat{ONP} = 90^\circ$ e o lado OP é comum, segue os triângulos OMP e ONP são congruentes por LAAo. Daí $PM = PN$, ou seja, $d(P, \overrightarrow{OA}) = d(P, \overrightarrow{OB})$.

Figura 27 - Demonstração Bissetriz



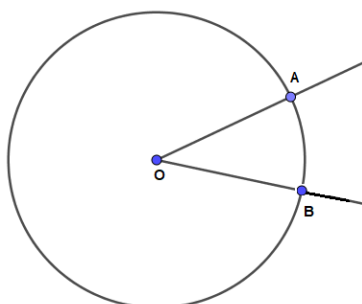
Fonte: Elaboração própria

Reciprocamente seja P um ponto no interior do ângulo $A\hat{O}B$, tal que $PM = PN$, onde M e N são os pés das perpendiculares baixadas de P respectivamente às semirretas OA e OB. Então, os triângulos MOP e NOP são novamente congruentes, pois, sendo triângulos retângulos, satisfazem $PM = PN$ e OP é hipotenusa comum, logo $M\hat{O}P = N\hat{O}P$ e P está na bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$.

Roteiro da construção de uma bissetriz

1. Traçar um arco com centro no vértice do ângulo dado, ponto O, usando uma abertura qualquer do compasso e localize dois pontos A e B.

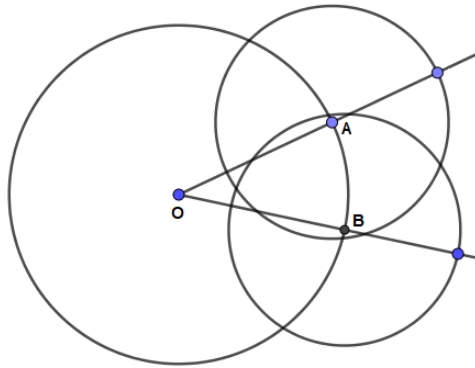
Figura 28- Circunferência e ângulo AOB



Fonte: Elaboração Própria

- Sem alterar o raio trace um arco com centro em **B**, sem alterar o raio trace um arco com centro em **A**, para localizar **D** na intersecção das circunferências.

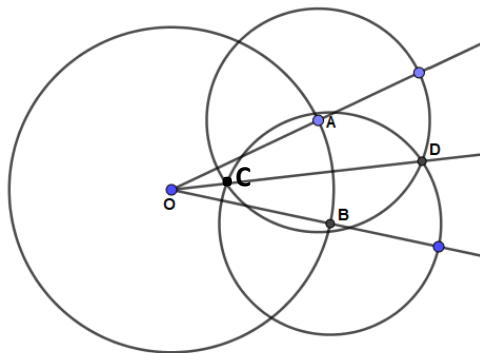
Figura 29 - Círculos



Fonte: Elaboração Própria

- Com a régua trace a semirreta de origem **O** que passa por **D**.

Figura 30 - Bissetriz



Fonte: Elaboração Própria

- A semirreta \overrightarrow{OD} é a bissetriz do ângulo $\sphericalangle AOB$.

2.2.3.4 Retas Paralelas

Retas paralelas têm uma grande importância no desenvolvimento da geometria, particularmente por causa das tentativas de estudos relacionados ao

5º postulado de Euclides, também conhecido como “postulado das paralelas” cujos estudos, por mais de dois milênios, culminaram na descoberta das *geometrias não-euclidianas*, no início do século XIX. Na antiguidade grega elas aparecem nos problemas de quadraturas, particularmente nos problemas de quadratura de polígonos. Hoje elas constituem um lugar geométrico importante nas construções geométricas com régua e compasso. Há várias possibilidades de construir retas paralelas com régua e compasso e vamos apresentar duas delas.

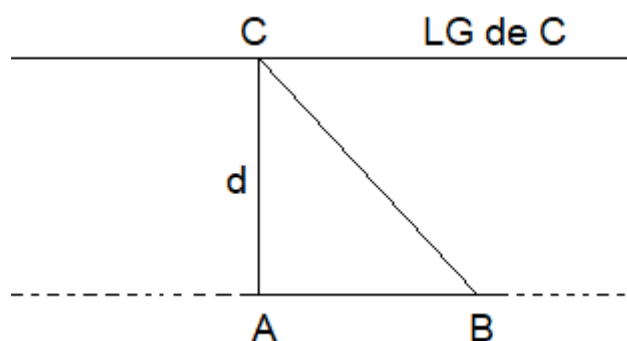
Definição: *Retas paralelas* são retas coplanares que não se intersectam.

Há várias formas de construir retas paralelas. De qualquer modo é necessário construir e justificar porque a construção corresponde de fato aquele lugar geométrico.

Imagine que a base AB de um triângulo ABC é dada e que a altura (d) relativa a esta base é também dada. Então, conhecemos a distância do vértice C até a reta AB e o lugar geométrico do vértice C é, portanto, uma reta paralela à reta AB distando d dela.

Assim sendo, a reta paralela à reta AB, passando por C, é o lugar geométrico dos pontos que distam a medida d da reta AB, e que se encontram em um dos semiplanos da reta AB (o semiplano contendo C).

Figura 31 - Paralelas



Fonte: Elaboração Própria

A seguir apresentamos duas maneiras distintas para a construção do lugar geométrico *reta paralela*, como mostram os roteiros abaixo.

Construção de uma reta paralela a r passando pelo ponto P:

1º Roteiro

Figura 32 - Paralela 1



Fonte: Elaboração Própria

1. Com um compasso e com a ponta seca em P fazer uma abertura maior que a distância entre P e a reta r. Traçar um arco passando por r no ponto M.

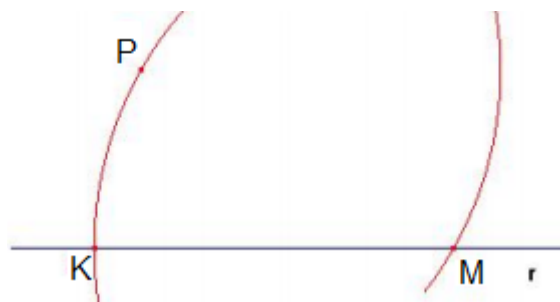
Figura 33 - Paralela 2



Fonte: Elaboração Própria

2. Com a ponta seca em M e com a mesma abertura, trace um arco passando por P, intersectando r em K.

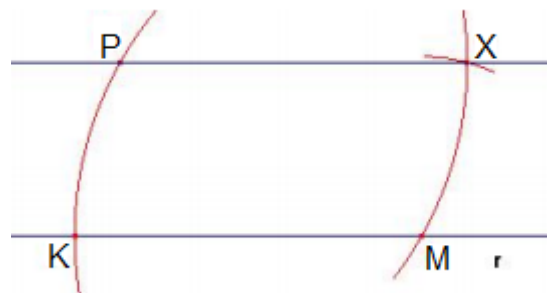
Figura 34 - Paralela 3



Fonte: Elaboração Própria

3. Agora com a mesma abertura de PK, com a ponta seca em M traçar um arco sobre o primeiro arco, marcando o ponto X. Assim temos a reta paralela a r passando pelos pontos PX. A justificativa para esta construção é que PKMX é um paralelogramo² pois tem lados opostos congruentes.

Figura 35 - Paralela 4



Fonte: Elaboração própria

2º Roteiro

Outra maneira de construir uma reta paralela é usando circunferências e formando um paralelogramo.

Figura 36 - Paralelas 1



Fonte: Elaboração Própria

1º Passo: Faça uma circunferência com centro em P cortando a reta r formando um ponto A.

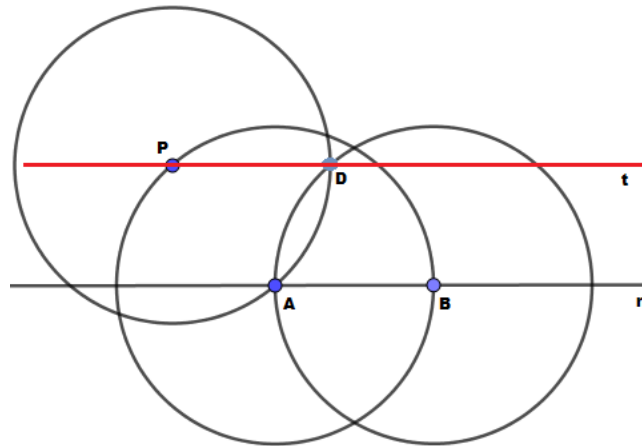
2º Passo: Mantenha a abertura do compasso e trace outra circunferência com centro em A e marque um ponto B na interseção com r.

3º Passo: Faça uma terceira circunferência com centro em B determinando com a primeira um ponto D.

2- Paralelogramo é um quadrilátero que tem os quatro lados paralelos dois a dois. 36 (BONGIOVANNI, p.9, 2010).

4º Passo: Trace uma reta passando por P e D. Assim o problema está resolvido.

Figura 37 – Reta t que passa por PD paralela à reta r



Fonte: Elaboração Própria

2.2.4. Construção de alguns ângulos com régua e compasso

Como foi observado anteriormente, os gregos sabiam construir ângulos retos, bem como outros ângulos que sabiam construir com régua e compasso e determinaram a medida por meio da comparação com a medida do ângulo reto. Por exemplo, 30° corresponde à terça parte do ângulo reto, 45° à metade do reto, 60° a dois terços do ângulo reto, 108° era o ângulo reto mais um quinto do ângulo reto. Para desenhar alguns desses ângulos usavam como baseo triângulo equilátero, retas perpendiculares e bissetrizes ângulos. Os ângulos notáveis 30° , 45° , 60° , 90° entre outrose seus complementos e suplementos podem ser facilmente construídos utilizando apenas régua e compasso.

2.2.4.1 Ângulos de 120° , 60° , 30° e 15°

Roteiro Construção de ângulos de 60° e 120°

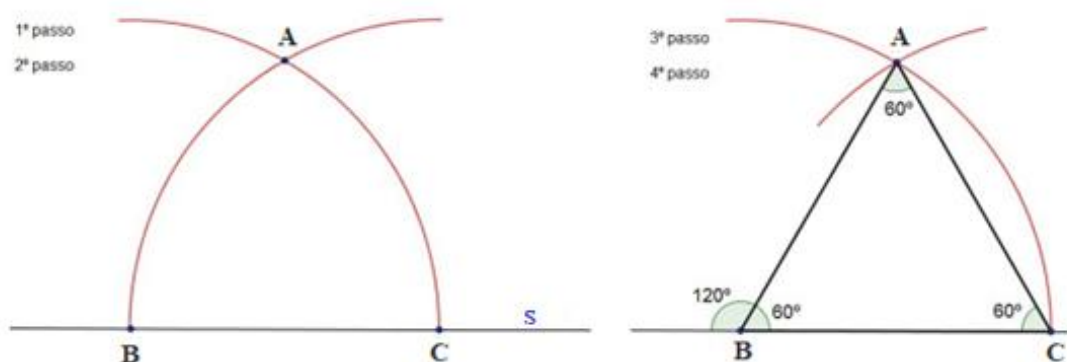
1º Passo: Desenhe uma reta s arbitrariamente.

2º Passo: Marque um ponto B e um ponto C na reta s .

3º Passo: Faça dois arcos de circunferências de raio BC (abra o compasso com tamanho BC), um com centro em B e o outro com centro em C.

4º Passo: Marque o ponto A na interseção dos arcos da circunferência e ligue os segmentos AB e AC formando o triângulo ABC.

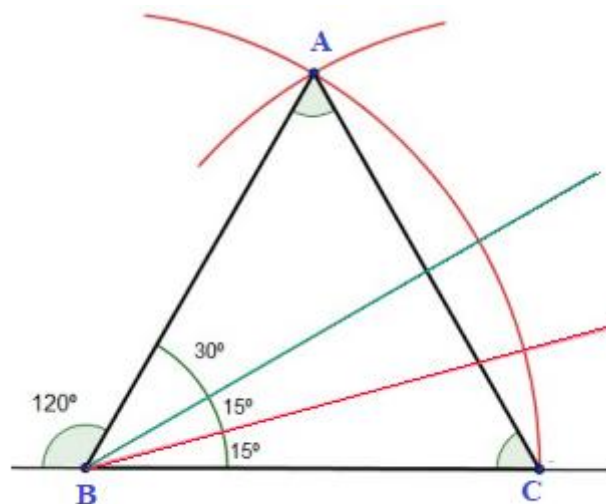
Figura 38. Construção de ângulo de 60° e 120°



Fonte: Elaboração própria

Como o triângulo construído na figura 38 é equilátero, os ângulos internos são congruentes e cada um mede 60°. Observe também que ao fazer essa construção, automaticamente desenhamos o ângulo de 120° que é o suplementar de 60°. Agora traçando uma bissetriz sobre o ângulo de 60° podemos construir o ângulo de 30°, e para desenhar o ângulo de 15°, devemos fazer o mesmo procedimento com o ângulo de 30° como mostra a figura 39.

Figura 39. Construção de ângulo de 30° e 15°



Fonte: Elaboração própria

2.2.4.2 Ângulos de 90° e 45°

Roteiro da Construção de ângulo de 90°

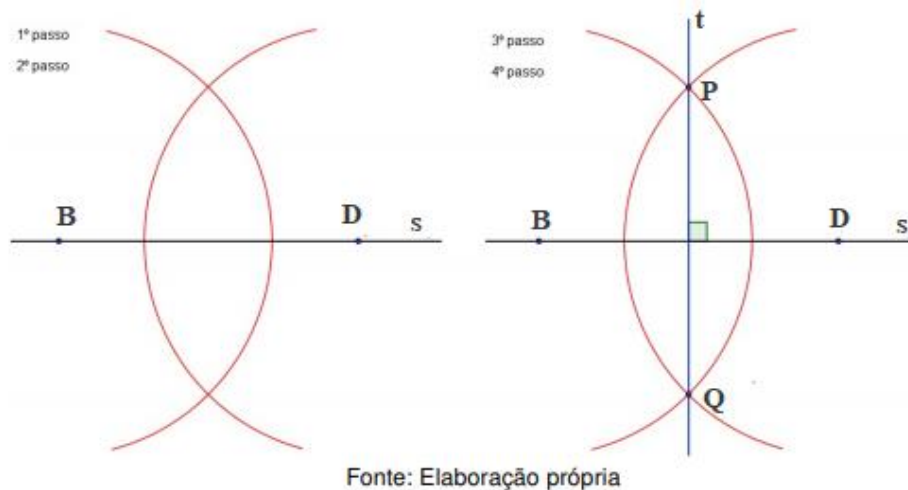
1º Passo: Desenhe uma reta r arbitrariamente.

2º Passo: Marque um ponto B e um ponto D na reta s.

3º Passo: Faça dois arcos de circunferências de raio congruentes com centro em B e D de modo que eles se encontrem em dois pontos.

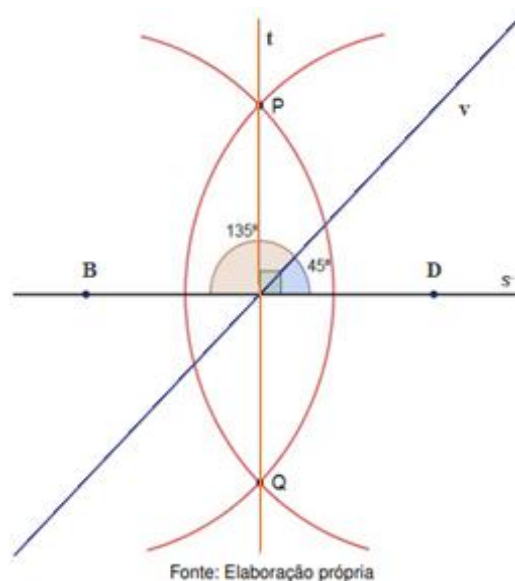
4º Passo: Marque os pontos P e Q na interseção dos arcos de circunferências e trace uma reta t passando por PQ.

Figura 40. Construção de ângulo de 90°



Agora para construir o ângulo de 45° basta traçar a bissetriz de 90°, observe que ao construir o ângulo de 45°, simultaneamente construímos o ângulo de 135°, pois este é o suplemento do ângulo de 45°.

Figura 41. Construção de ângulos de 45° e 135°-2



3. CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS EM ORIENTAÇÕES CURRICULARES, LIVROS DIDÁTICOS E PESQUISAS

Ficou claro no capítulo anterior a importância que as Construções Geométricas apresentam para a Geometria porque permitem correlacionar as figuras geométricas com suas representações gráficas, que são concretas e pertencem ao campo das imagens (COSTA & ROSA_a, 2015). Putnoki (p 13, 1988*apud* COSTA & ROSA_a, 2015) vai além quando diz que “desde a publicação do livro *Os Elementos*, o Desenho Geométrico se apresenta ligado à geometria de forma indissolúvel, não com esse título, mas com a denominação de Construções Geométricas.”

Neste contexto de suposta indissociabilidade entre as Construções Geométricas e a Geometria, buscar-se-á dentro deste capítulo, contextualizar a inserção das Construções Geométricas dentro das Estruturas Curriculares e conseqüentemente dos Livros Didáticos e Pesquisas no âmbito brasileiro.

No Brasil, até a vinda de D. João VI à nossa terra em 1808, o ensino do desenho geométrico estava restrito às escolas oficiais militares, principalmente em cursos de formação das Academias Militares com aulas de fortificação (COSTA & ROSA_b, 2015). O intuito era fazer com que estes pudessem trabalhar no levantamento de mapas e construir fortificações para a defesa, a partir dos métodos utilizados na França e Inglaterra (VALENTE, 2007 *apud* COSTA & ROSA_b, 2015).

Foi somente a vinda de D. João VI em 1808 que ocasionou mudanças em todas as áreas, principalmente no sistema educacional da colônia, que permitiu uma abertura curricular. A partir de então foi permitida a inclusão de cursos técnico-militares com conteúdo da Matemática escolar de nível secundário em liceus e preparatórios (COSTA & ROSA_b, 2015).

A Revolução Industrial ocorrida na Europa no século XVIII, com suas mudanças tecnológicas fez com que as ciências tivessem um papel de destaque; e o Desenho Geométrico era considerado um saber essencial que possibilitava a

modernização das máquinas industriais (MACHADO, 2012 *apud* COSTA & ROSA_a, 2015). Com isso, as Construções Geométricas foram desconectadas da Geometria como um saber escolar independente denominado Desenho Geométrico (FRANCO JR, 2001), tendo sido esta considerada uma ciência independente a partir da segunda metade do século XVIII (COSTA & ROSA_a, 2015).

No Brasil, o reflexo deste movimento veio a ocorrer a partir do século XIX, com a necessidade de mão de obra especializada para as demandas do processo de industrialização. A criação das Escolas Normais e dos Liceus Provinciais (1835) e do Colégio Pedro II em 1837 permitiu que o ensino do Desenho Geométrico fosse desvinculado das Escolas Militares (MACHADO, 2012 *apud* COSTA & ROSA_b, 2015). Ao mesmo tempo, houve a criação de cursos de Engenharia Civil apartados do âmbito militar e isso favoreceu o destaque do ensino das construções geométricas na matriz curricular, inseridas dentro da Geometria (ZUIN, 2001).

Rui Barbosa em 1882 elaborou um projeto de reforma de ensino integral e gratuito do ensino básico ao superior inspirado em países europeus (COSTA & ROSA_b, 2015). Barbosa (2019) relata que este foi um movimento denominado de “Escola Nova” advindo de educadores europeus e norte-americanos, que visava introduzir novas ideias e técnicas, substituindo provas tradicionais por testes, adaptando o ensino às fases de desenvolvimento e colocando o educando no centro do processo educativo.

O movimento escolanovista buscava a modernização, democratização, industrialização e urbanização do sistema de ensino brasileiro (BARBOSA, 2019); e neste processo, o Desenho Geométrico estava incluso como um saber escolar necessário (MACHADO, 2012 *apud* COSTA & ROSA_b, 2015). O ensino do Desenho Geométrico começou a ser estudado de maneira independente nas escolas brasileiras somente a partir do século XX (ZUIN, 2001), apresentando seu auge entre as décadas de 40 e 50.

Essa posição de destaque perdurou até os anos 50 no Brasil, quando teve início o debate do currículo da Matemática, sendo dividido em três correntes

diferentes: o tecnicismo, o Movimento da Matemática Moderna (MMM) e mais recentemente a divergência da matriz curricular (BARBOSA, 2019).

Para Barbosa (2019) o currículo brasileiro herdou características das três correntes, sendo que do tecnicismo foi a obrigatoriedade escolar de 8 anos e a introdução do ensino profissionalizante nos ginásios. Nesta corrente há a preocupação com a profissionalização com ênfase no desenvolvimento de habilidades, atitudes e conhecimentos correlatos à integração no processo produtivo.

Em 1961 foi criada a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – LDB 4024/61 que separava as disciplinas optativas e obrigatórias, relegando o Desenho Geométrico como disciplina curricular optativa (COSTA & ROSA_b, 2015). Em 1971, no contexto da ditadura militar, foi feita uma nova edição da LDB com a lei 5692/71 em que o Desenho Geométrico foi extirpado do currículo escolar brasileiro, tendo sido excluído inclusive dos vestibulares de Arquitetura e Urbanismo (COSTA & ROSA_b, 2015). O intuito da referida lei foi clara no sentido de “manter o controle ideológico sobre a sociedade e implementar um processo de homogeneização cultural mediante a ação da escola.” (SOUZA, 1999, p. 237 *apud* BARBOSA, 2019);

Ao mesmo tempo, a discussão para a reforma do ensino da Matemática, que vinha desde o início do século XX, perdurou com o Movimento da Matemática Moderna – MMM, mesmo com o advento da ditadura (BARBOSA, 2019); movimento este que solicitava a renovação do ensino da Matemática, visando aproximar o conhecimento científico das pesquisas aos conteúdos matemáticos trabalhados na escola básica (COSTA & ROSA_b, 2015). Nesta corrente buscou-se um ensino voltado à formação cidadã e não apenas voltada para a resolução de problemas e profissionalizante; influenciando definitivamente a partir de então os Parâmetros Curriculares Nacionais (BARBOSA, 2019).

A partir da década de 1980 ocorre um movimento de retorno do ensino do desenho geométrico, não como disciplina isolada, mas integrada ao ensino da Geometria. Este movimento foi incentivado por editoras importantes como a Scipione, Ática e a FTD; mas não teve o efeito esperado, pois sua inserção nos

livros didáticos não representou uma mudança no ensino. O desenho geométrico havia sido transformado em uma disciplina mecânica com “receitas memorizadas” cujo aproveitamento se restringia ao manejo dos instrumentos do desenho (COSTA, 1981 *apud* COSTA & ROSA_b, 2015).

Na década de 1990 iniciou-se a era das diretrizes, com a obrigatoriedade de um currículo de base comum e com parte diversificada adaptada à realidade regional (BARBOSA, 2019). A área da Geometria ficou marcada com o retorno das construções geométricas nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática – PCN, que incentivaram o uso de instrumentos para o ensino da Geometria (COSTA & ROSA_b, 2015).

Vale ressaltar a diferença entre Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN e Diretrizes Curriculares Nacionais – DCN, em que este são as normas obrigatórias para a Educação Básica e o planejamento curricular das escolas e sistemas de ensino; enquanto aquele são uma referência para os objetivos, conteúdos e didáticas de ensino que não vinculam os operadores da educação (BARBOSA, 2019).

Barbosa (2019) mostra que houve uma evolução nas propostas curriculares entre 1975 até o último currículo, de forma que atualmente há o reconhecimento da importância da história da Matemática e uma maior articulação com as demais disciplinas. Além disso, há uma maior autonomia das escolas para que elas definam seus próprios projetos pedagógicos, como se pode destacar da Lei de Diretrizes e Bases Nacional de 1996.

No que tange ao Desenho Geométrico/Construções Geométricas, apesar destes constarem atualmente no PCN, por sua característica não vinculante, fica fácil constatar a ausência de sua inserção nos currículos brasileiros. Para Costa e Rosa (b, 2015) atualmente, o Desenho Geométrico é considerado como uma disciplina independente, sendo que poucas escolas mantêm esse campo do conhecimento em sua matriz curricular dos dois últimos anos do Ensino Fundamental.

3.1 Livros Didáticos e Orientações Curriculares no Estado de SP

Conforme elucidado anteriormente, os livros didáticos devem seguir as orientações contidas nas Diretrizes Curriculares Nacionais, assim como o Currículo Oficial do Estado em que se insere, não obrigando a seguir os PCNs. No caso do Currículo Oficial do Estado de São Paulo, os livros didáticos de Matemática se baseiam no Currículo Oficial Paulista, que é o documento que norteia a grade curricular de todas as disciplinas no Estado de São Paulo. No caso da Matemática há o Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias (2011), em que todos os livros didáticos de matemática para o ensino fundamental e médio devem se basear.

Não existiam programas curriculares oficiais em São Paulo, quando após a Lei 5692/71 que fixou as Diretrizes e Bases Nacional para o ensino de 1º e 2º graus, o Estado de São Paulo inicia a edição de Guias Curriculares Propostos para as Matérias do Núcleo Comum do Ensino, apelidadas de “verdão” (BARBOSA, 2019).

Nestes documentos, que serviam apenas de referência para o professor, o currículo era organizado por meio de conteúdos específicos das matérias e eram reunidas em áreas temáticas, cujas escolas deveriam realizar a integração das disciplinas. Ao contrário do LDB nacional de 1971, a Secretaria Estadual de Educação contava com a colaboração dos docentes para o aprimoramento das estruturas educativas e para a efetivação na implantação das Diretrizes Nacionais “...inspirada no **princípio democrático** de maior oportunidade para todos.” (SÃO PAULO, p. VII, 1975). Era, portanto, considerado um modelo inovador, por adotar um modelo participativo e constantemente aberto a críticas (BARBOSA, 2019), cujos objetivos eram trazer “uma escola ministrada de cultura geral, instrumental, endereçada à formação integral da criança e do adolescente, introduzindo uma educação humanístico-cristã.” (SÃO PAULO, p. X, 1975).

Especificamente na área da matemática, foi buscado um tratamento intuitivo ao invés do axiomático, com base na manipulação de instrumentos e materiais didáticos adequados, em situações próximas ao concreto e ao aluno. A

ênfase, portanto, foi dada no sentido da modernização do ensino da matemática, deixando ao professor total liberdade para adaptação do currículo proposto com adaptação à realidade local.

Com a abertura democrática a partir da década de 1970, a Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas de SP (CENP) ficou responsável por organizar e promover novas propostas curriculares, que culminaram com uma primeira edição em 1986. O projeto defendia a recuperação da Escola Pública e a qualidade do ensino oferecido à sociedade, a reflexão das características políticas, econômicas, sociais e culturais da sociedade. Nesta proposta, na edição de 1992, quanto ao conteúdo “Número e Geometria foram definidos como grandes temas geradores e, Medidas, como sendo um fio que tece a junção desses dois grandes temas.” (SÃO PAULO, p. 11, 1992).

A característica marcante desse processo foi a participação dos professores na elaboração da proposta curricular da CENP, em um contexto de ampliação do debate e da participação pública (BARBOSA, 2019).

Já o Currículo Oficial Paulista, reforma produzida pela gestão do Governador José Serra em 2007, pretendeu unificar o currículo escolar em todas as escolas públicas do Estado de São Paulo, estabelecendo o que deveria ser ensinado e como deveria ser ensinado. Barbosa (2019) relata ainda que eram enviados cadernos do professor e do aluno organizados por disciplina, ano e bimestre; sendo essa proposta trazida como uma suposta salvação do ensino público no Estado. Seguiu a orientação dada pela Conferência Mundial de Educação para Todos ocorrida em 1990 na Tailândia tendo sido convocada pelo Banco Mundial, pela Organização das Nações Unidas pela Educação, Ciência e Cultura (UNESCO), pelo Fundo das Nações Unidas para a Infância (UNICEF) e pelo Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento (PNUD).

Em 2011 surge o Currículo Oficial de São Paulo que visa equilibrar a autonomia das escolas trazidas pela LDB de 96, com uma proposta de ação integrada e articulada com o objetivo de melhorar o sistema educacional do Estado. Nessa perspectiva, o documento anuncia os eixos estruturantes da proposta curricular: uma escola que aprende, o currículo como espaço de cultura, as competências como eixo de aprendizagem, a prioridade da

competência da leitura e escrita, a articulação das competências para aprender e a contextualização no mundo do trabalho; que podem ser vistas na figura 42.

Figura 42- Apresentação do Currículo do Estado de São Paulo

Apresentação do Currículo do Estado de São Paulo 7

Uma educação à altura dos desafios contemporâneos 8

Princípios para um currículo comprometido com o seu tempo 10

Uma escola que também aprende 10

O currículo como espaço de cultura 11

As competências como referência 12

Prioridade para a competência da leitura e da escrita 14

Articulação das competências para aprender 18

Articulação com o mundo do trabalho 20

A concepção do ensino na área de Matemática e suas tecnologias 25

O ensino de Matemática: breve histórico 25

Currículo de Matemática 29

Fundamentos para o ensino de Matemática 29

Matemática para o Ensino Fundamental (Ciclo II) e o Ensino Médio 35

Sobre a organização dos conteúdos básicos: Números, Geometria, Relações 38

Sobre o processo de ensino-aprendizagem dos conteúdos básicos 40

Ensinar é fazer escolhas: mapas e escalas 48

Sobre os subsídios para implantação do Currículo proposto 51

Sobre a organização das grades curriculares (série/ano por bimestre): conteúdos associados a habilidades 55

Quadro de conteúdos e habilidades de Matemática 57

Fonte: SÃO PAULO, 2011.

Entre as competências e habilidades, faz-se necessário que o aluno consiga tecer leituras críticas do mundo e para que isso ocorra, a escola e o plano do professor deveriam indicar o que o aluno deveria aprender. Neste

sentido, foi feita a apresentação dos conteúdos de matemática de forma sistematizada por bimestre, abordando um ou dois temas dominantes em cada bimestre. No caderno do professor, em cada bimestre, o tema principal foi dividido em oito unidades, correspondentes às oito semanas dos dois meses. Para a exploração das oito unidades, foram escolhidas quatro situações de aprendizagem. Para cada uma foram sugeridas a duração em semanas, mas apenas o professor poderia dimensionar o tempo dedicado a cada uma das situações, conforme se pode ver na figura 43, em que aparece o conteúdo a ser abordado no 3º e 4º bimestre por alunos da 9ª série/8º ano.

O plano estratégico para a matemática contempla a organização dos conteúdos básicos (Números, Geometria, Relações), o processo de ensino-aprendizagem dos conteúdos básicos, mapas e escalas do processo de ensinar, os subsídios para implantação do currículo proposto, a organização das grades curriculares, os conteúdos associados a habilidades e, por fim, o quadro de conteúdos e habilidades de matemáticas (BARBOSA, 2019).

Especificamente sobre a Geometria é mencionado o respeito à percepção de formas e de relações entre figuras planas e espaciais, a construção e representação de formas geométricas e a elaboração de concepções de espaço que sirvam de suporte para o mundo físico, tudo com vistas à contextualização dos conteúdos visando a abstração do contexto e a capacidade de imaginar situações fictícias (BARBOSA, 2019). Ressalta-se que o conhecimento geométrico apresenta quatro faces: a percepção, a concepção, a construção e a representação.

Por fim, o Currículo Oficial de SP evidencia que os documentos curriculares são mais do que a mera intenção de definir o que se deve ensinar, pois expressam as relações de poder e de concepção de mundo. Elas são expressão da disputa pela hegemonia, da disputa de qual tradição deve ser legada para as futuras gerações (BARBOSA, 2019).

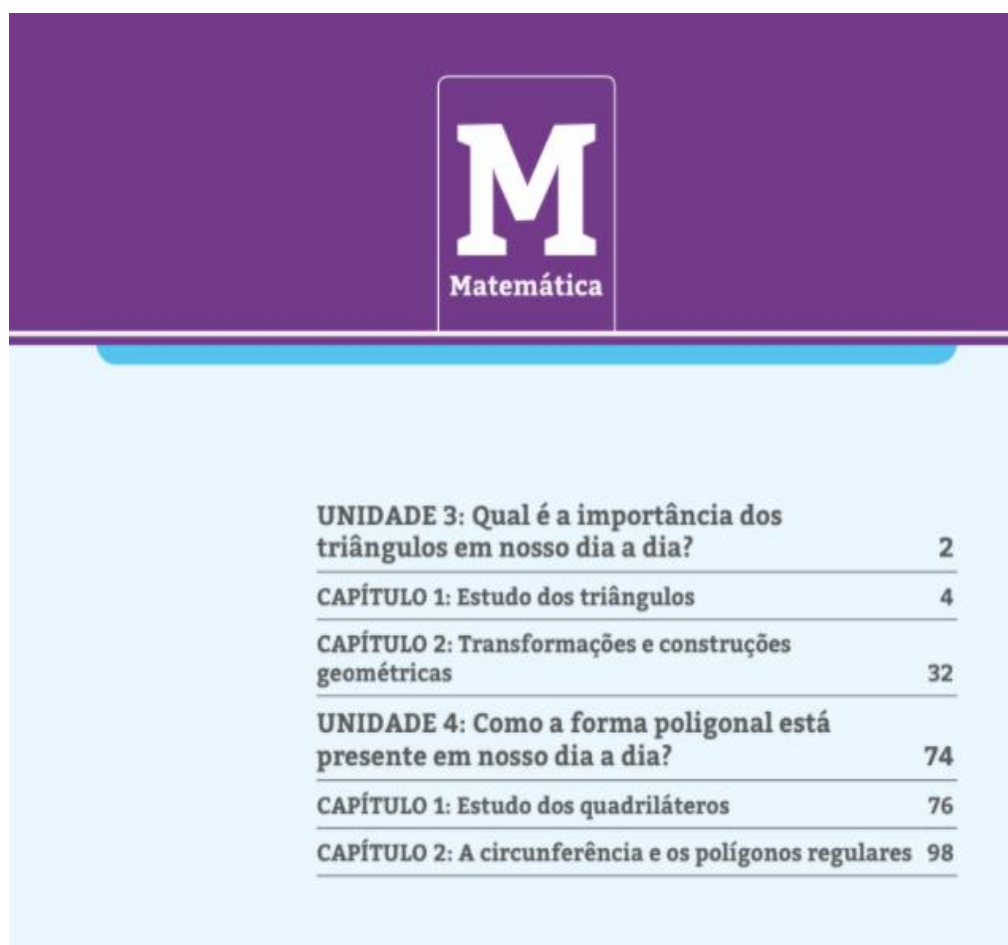
Figura - 43 Conteúdos e habilidades de Matemática

8ª série/9º ano do Ensino Fundamental		
	Conteúdos	Habilidades
3º Bimestre	<p>Geometria/Relações</p> <p>Proporcionalidade na Geometria</p> <ul style="list-style-type: none"> • O conceito de semelhança • Semelhança de triângulos • Razões trigonométricas 	<ul style="list-style-type: none"> • Saber reconhecer a semelhança entre figuras planas, a partir da igualdade das medidas dos ângulos e da proporcionalidade entre as medidas lineares correspondentes • Saber identificar triângulos semelhantes e resolver situações-problema envolvendo semelhança de triângulos • Compreender e saber aplicar as relações métricas dos triângulos retângulos, particularmente o teorema de Pitágoras, na resolução de problemas em diferentes contextos • Compreender o significado das razões trigonométricas fundamentais (seno, cosseno e tangente) e saber utilizá-las para resolver problemas em diferentes contextos
4º Bimestre	<p>Geometria/Números</p> <p>Corpos redondos</p> <ul style="list-style-type: none"> • O número π; a circunferência, o círculo e suas partes; área do círculo • Volume e área do cilindro <p>Probabilidade</p> <ul style="list-style-type: none"> • Problemas de contagem e introdução à probabilidade 	<ul style="list-style-type: none"> • Conhecer a circunferência, seus principais elementos, suas características e suas partes • Compreender o significado do π como uma razão e sua utilização no cálculo do perímetro e da área da circunferência • Saber calcular de modo compreensivo a área e o volume de um cilindro • Saber resolver problemas envolvendo processos de contagem – princípio multiplicativo • Saber resolver problemas que envolvam ideias simples sobre probabilidade

Fonte: SÃO PAULO, 2011.

Com relação ao método utilizado pela unidade de ensino avaliada pelo presente estudo, pôde-se perceber que há uma correlação muito próxima ao conteúdo e didática oferecida pelo currículo oficial de SP, variando muito pouco a abordagem. Na imagem abaixo representada na figura 44 temos a imagem do índice da apostila usada para lecionar o conteúdo do 8º ano do 2º bimestre de 2020 utilizada pela escola Educativa, bastante semelhante ao conteúdo trazido para o 3º bimestre do currículo oficial do Estado de SP, variando apenas na ordem do conteúdo apresentado.

Figura 44 - Conteúdo do 8º ano, 2º bimestre de 2020



UNIDADE 3: Qual é a importância dos triângulos em nosso dia a dia?	2
CAPÍTULO 1: Estudo dos triângulos	4
CAPÍTULO 2: Transformações e construções geométricas	32
UNIDADE 4: Como a forma poligonal está presente em nosso dia a dia?	74
CAPÍTULO 1: Estudo dos quadriláteros	76
CAPÍTULO 2: A circunferência e os polígonos regulares	98

Fonte:

Apostila da escola

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, p. 256, 1999) reforçam que “a Matemática ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, além de ser uma ferramenta para tarefas específicas em quase todas as atividades humanas” e por este motivo a análise curricular, principalmente na área da matemática se faz tão importante para avaliar o rendimento escolar em nível de pesquisa.

4. ASPECTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS DA PESQUISA

Neste capítulo apresentamos, de forma concisa, nossas escolhas concernentes aos referenciais teórico e metodológico desta pesquisa. Trouxemos alguns elementos que consideramos fundamentais para a coleta e análise de dados da pesquisa. Como referencial teórico tomamos como base o modelo teórico dos Van Hiele e na parte metodológica optamos por uma abordagem qualitativa, tanto para a análise da literatura sobre pesquisas relacionadas ao nosso objeto quanto das produções dos alunos na parte experimental, sendo que para a produção e análise dos dados dessa parte nos guiamos por alguns princípios metodológicos da Engenharia Didática descrita por Artigue (1996).

4.1 O modelo teórico de Van Hiele

Esse modelo se propõe a identificar e classificar hierarquicamente habilidades e conhecimentos dos alunos com relação à aprendizagem de conteúdos e conceitos matemáticos. Sobre elementos constituintes do conhecimento matemático, encontramos em Pais (1996), uma observação sobre a obra de Gonsseth (1945):

“A análise epistemológica da Geometria do espaço desenvolvida por Gonsseth (1945) distingue três aspectos fundamentais deste conhecimento: o intuitivo, o experimental e o teórico. A intuição é uma forma de conhecimento imediato que está sempre disponível no espírito das pessoas e cuja explicitação não requer uma dedução racional guiada por uma sequência lógica de argumentos deduzidos uns dos outros.” (PAIS, 1996, pág. 72).

Observações empíricas indicam que, de maneira geral, os alunos são capazes de reconhecer um quadrado, mas não sabem definir o quadrado, não compreendem que um quadrado é um retângulo. Nesse sentido existem diversas formas para desenvolver e entender como os alunos podem aprender

conceitos e resolver situações-problema com o uso da geometria, mas um dos grandes problemas na educação da geometria era o abismo didático e metodológico entre professor e aluno.

Um modelo teórico, que contribuiu bastante com os estudos sobre esse assunto, foi a teoria para o desenvolvimento do pensamento geométrico, construída pelo casal de professores e pesquisadores holandeses Pierre Marie van Hiele e Gina van Hiele-Geldof, no final da década de 1960 do século XX. Para os Van Hiele a aprendizagem da geometria se faz passando por níveis graduais de pensamento. Para Crowley (*apud* LINDQUIST & SHULTE, 1994), os Van Hiele atribuíram a principal razão da falha do currículo de geometria tradicional ao fato de que o conteúdo curricular era apresentado em um nível superior ao que os alunos se encontravam, ou seja, eles não conseguiam entender o professor, e o mesmo por sua vez não conseguia entender o porquê eles não conseguiam acompanhar a explicação. Essa situação é clássica quando o assunto é considerado demasiado fácil pelo professor e essa suposta facilidade não é compreendida pelos alunos. Sendo assim o estudo da geometria desenvolvido pelos Van Hiele é um importante modelo teórico para análise de conhecimentos geométricos de alunos, mas um guia educacional e fundamentalmente para as escolhas de atividades pelos professores durante a abordagem e também para avaliarem níveis de aprendizagem de geometria dos alunos.

O modelo de Van Hiele de pensamento geométrico emergiu dos trabalhos de doutoramento de Dina van Hiele-Geldof e seu parceiro Pierre van Hiele finalizados juntos na Universidade de Utrecht. O modelo de Van Hiele demorou um pouco a pegar corpo sendo utilizado primeiramente na antiga União Soviética cujo currículo de geometria foi reformulado para adaptar-se ao modelo de Van Hiele. Sendo esse modelo um guia para a aprendizagem e um instrumento para a avaliação das habilidades dos alunos em geometria, o modelo consiste em cinco níveis de compreensão. No modelo teórico de Van Hiele foram identificados níveis que informam quais são as características do processo de pensamento dos estudantes em geometria. Os níveis por eles identificados, que descreveremos com mais detalhes a seguir, são os seguintes:

Nível 0: Visualização ou reconhecimento; Nível 1: Análise; Nível 2: Ordenação ou classificação; Nível 3: Dedução formal e Nível 4: Rigor.

Vamos então descrever e analisar de forma um pouco mais detalhada os níveis elaborados pelos Van Hiele.

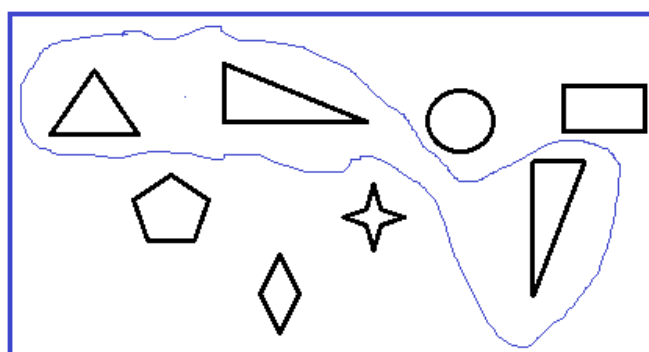
Nível 0 - Visualização

Nesse nível o aluno reconhece as figuras geométricas pela sua forma como um todo, interessante que para pesquisa dos Van Hiele o indivíduo não diferencia partes e nem componentes de uma figura. O aluno pode sim com certa facilidade reproduzir uma cópia de cada figura ou reconhecê-la. No entanto não é capaz de reconhecer ou explicar as propriedades que determinam as figuras. Nesse contexto seria similar com a maneira de entender a classificação dos animais proposta por Charles Darwin. O aluno até entenderia o que é um felino e o identificaria, mas não saberia classificar propriamente, apesar de conseguir comparar com outros animais. A maneira com que o indivíduo descreve as figuras são a princípio de maneira visual e tenta sempre comparar com elementos familiares de seu entorno. Não existindo assim uma linguagem geométrica básica para referir a figuras geométricas por nomes.

Exemplos:

- Identificar uma figura ou uma relação geométrica, num desenho simples, num conjunto de recortes, outros objetos manipuláveis.

Figura 45 - Figuras planas



Fonte: Elaboração própria

- Envolvendo objetos físicos da sala de aula e outras localidades.

- Criar figuras copiando em papel pontilhado, papel quadriculado ou papel-manteiga, usando geoplano.
- Descrever figuras geométricas e construções usando a linguagem-padrão e não padronizada.

Nível 1- Análise

O indivíduo nesse momento começa uma análise dos conceitos geométricos. O aluno já pode reconhecer e observar as partes e propriedades particulares de cada figura geométrica e reconhece, através das próprias características das figuras, que as figuras têm partes, e as figuras são reconhecidas por suas partes. Todavia o aluno neste nível ainda não consegue estabelecer relações entre propriedades, não faz inclusão de classes, não vê inter-relação entre figuras. Como muitas das definições geométricas se estabelecem a partir de propriedades, não pode elaborar definições.

Exemplos:

- Descrever uma classe de figuras por suas propriedades, sem usar nenhum desenho como apresentaria uma figura a alguém que nunca a viu.
- Comparar figuras quanto às suas propriedades características, notando como um quadrado e um losango são parecidos, mas em alguns casos são diferentes quanto aos ângulos.
- Identificar uma figura a partir de pistas visuais, revelando gradualmente uma figura, pedir para os alunos os possíveis nomes para cada figura.

Figura 46 – Revelando figuras Planas



Fonte: Elaboração própria

Nível 2 – Dedução informal

Neste nível os alunos conseguem fazer inter-relações tanto no interior das figuras como fora delas, comparando com outras figuras com propriedades semelhantes. Os alunos começam a formar uma rede de relações, onde devem conseguir determinar as figuras por suas propriedades e reconhecer como uma propriedade deriva de outra, construindo relações entre figuras e familiaridades entre elas. Estabelece as condições necessárias e suficientes que devem cumprir as figuras geométricas. Enquanto o raciocínio lógico deve seguir baseado na manipulação. Os alunos seguem as demonstrações, mas não têm conhecimento suficiente para entendê-las em sua globalidade. Em termos mais específicos, os alunos não têm embasamento teórico para compreender o sistema axiomático da matemática.

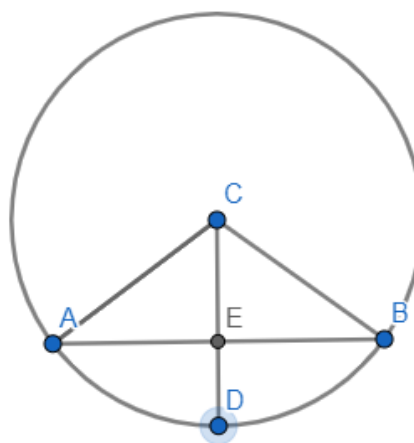
Exemplos de atividades:

- Identificar relações desenvolvidas nos níveis anteriores, buscando inclusões e implicações.
- No GEOPLANO, transformar um quadrilátero num trapézio, o trapézio em um paralelogramo, o paralelogramo num retângulo. E perguntar o que fizeram em cada mudança.
- Acompanhar argumentos dedutivos, eventualmente mostrando alguns passos que não foram dados.

Figura 47 – Um argumento dedutivo.

C é o centro da circunferência, assim:

- a) AC é congruente com BC
- b) $\angle CAB = \angle CBA$
- c) $\triangle ACE = \triangle BCE$
- d) $AE = EB$



Fonte: Elaboração própria

- Trabalhar e discutir situações que focalizem uma afirmação e sua recíproca. Por exemplo, na frase “todo quadrado é um losango”, o aluno poderia ser solicitado a analisar e justificar por que e se “todo losango é um quadrado”.

Nível 3 – Dedução formal

Nesse nível o indivíduo tem a oportunidade de identificar aquilo que foi dado e o que deve ser provado numa proposição, identificar informações implícitas numa figura ou numa dada informação. Realizar deduções, demonstrações, lógicas e formais, sentindo necessidade de reconhecer para justificar as proposições propostas e existentes em cada figura geométrica. Nesse nível o aluno já sabe usar as relações entre propriedades e sabe formalizar em sistemas axiomáticos, pois já entende a natureza dos conceitos e organizações dedutivas matemáticas. Assim, ele já compreende como se pode alcançar um mesmo resultado navegando por diferentes proposições ou utilizando demonstrações diferentes para chegar à mesma conclusão.

Nível 4 - Rigor

O rigor, no nível 4, é o estágio em que, segundo Crowley (*apud* LINDQUIST & SHULTE, p. 4, 1994) “o aluno é capaz de trabalhar em vários sistemas axiomáticos, por exemplo, podem estudar geometrias não-euclidianas e comparar sistemas diferentes. A geometria é vista no plano abstrato”. O modelo de Van Hiele possui uma organização hierárquica que permite identificar o aluno quanto ao nível da visualização de um conceito geométrico, em seguida ao nível da análise, depois ao da ordenação lógica, mais adiante ao nível da dedução e, por fim, a atingir o nível do rigor da conceituação. Neste ponto, o aluno torna-se capaz de entender e relacionar conceitos abstratos. O aluno nesse nível está com as noções matemáticas bem definidas, e capacitado para analisar com um grau elevado e um rigor matemático as noções mais elaboradas de vários sistemas dedutivos e compará-los entre si. É capaz de

entender a complexidade e a consistência dos axiomas geométricos fundamentados em sua plenitude.

Podemos encontrar em uma turma alunos com diferentes níveis de compreensão em relação ao pensamento geométrico descrito pela Teoria de Van Hiele. Neste contexto é importante observar que o fato de que, mesmo os estudantes estando em uma determinada série, não igualam sua situação de desenvolvimento cognitivo do pensamento geométrico. Essa possível situação sugere que o professor consiga criar e adotar metodologias distintas e diferenciadas para o aprendizado dos alunos. Assim, o professor estará sempre diante do desafio de encontrar uma metodologia onde o aluno seja valorizado de forma individual para que de fato consiga se envolver nas atividades propostas e adquirir novos conhecimentos.

4.2. Escolhas metodológicas

Nesse trabalho adotamos a metodologia qualitativa de investigação, que se caracteriza como um conjunto de procedimentos metodológicos e estratégias vinculadas a fenômenos que a análise quantitativa não dá conta de elucidar. Consideramos que para nossa investigação a pesquisa qualitativa é mais apropriada, pois visamos analisar e interpretar dados, em busca de compreender e descrever a complexidade do nosso problema, que é a possibilidade de uso das construções geométricas no ensino fundamental.

Segundo Denzin e Lincoln (2006) a pesquisa qualitativa envolve uma abordagem interpretativa do mundo, o que significa que seus pesquisadores estudam as coisas em seus cenários naturais, tentando entender os fenômenos em termos dos significados que as pessoas a eles conferem. Assim nesse contexto estrutural esse tipo de pesquisa tem como rigor a descrição e a análise detalhada dos acontecimentos e dos elementos que o envolvem a pesquisa.

Segundo Minayo (p. 21, 1994), esse tipo de pesquisa:

[...] responde a questões muito particulares. Ela se preocupa nas ciências sociais, com um nível de realidade que não pode ser

quantificado. Ou seja, ela trabalha com um universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que corresponde a um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos à operacionalização de variáveis.

Segundo Godoy (1995):

O ambiente como fonte direta dos dados e o pesquisador como instrumento chave; o processo é o foco principal de abordagem e não o resultado. A análise dos dados é realizada de forma intuitiva e indutivamente pelo pesquisador; não requer o uso de técnicas e métodos estatísticos; e, por fim, tem como preocupação maior a interpretação de fenômenos e a atribuição de resultados. (GODOY, 1995, p. 59).

Assim para Godoy a metodologia qualitativa não tem o intuito de mensurar, medir ou quantificar as propostas estudadas. As pesquisas qualitativas têm como identidade o reconhecimento da existência de uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, buscando a compreensão dos fenômenos segundo a perspectiva dos participantes da situação em estudo, com uma interdependência viva entre sujeito e objeto e de uma postura interpretativa, nesse caso possui como característica marcante o fato de que as questões a investigar não são definidas a partir da operacionalização de variáveis ou de hipóteses previamente formuladas, mas segundo objetivos de exploração, descrição e compreensão dos fenômenos em toda a sua complexidade, privilegiando um contato estreito e prolongado com os sujeitos no seu meio natural.

Os princípios metodológicos da pesquisa qualitativa permearam todas as fases do desenvolvimento desta pesquisa. Isso vai ocorrer tanto nas análises preliminares concernentes a trabalhos produzidos sobre construções geométricas, quanto sobre seus aspectos históricos e epistemológicos, orientações curriculares, livros didáticos, como nos procedimentos metodológicos utilizados durante a realização das outras etapas da Engenharia Didática, descrita por Artigue (1996).

Optou-se para o método de ensino dos alunos, a Engenharia Didática, que é um método já consolidado no ensino da matemática, principalmente na área de pesquisa acadêmica. O uso da Engenharia Didática na segunda fase do experimento, em detrimento do uso exclusivo da metodologia de Van Hiele se deu pelo conhecimento prévio do pesquisador com a metodologia da Engenharia Didática. O pesquisador se sentiu mais seguro em mesclar os métodos para um melhor aproveitamento da pesquisa, já que os testes de Van Hiele são mais específicos para a classificação do conhecimento dos alunos em Geometria; enquanto que a familiaridade prévia da Engenharia Didática pode permitir uma transmissão mais sólida dos conteúdos pelo pesquisador.

Destacamos inicialmente que a Engenharia Didática é constituída de quatro etapas principais ou fases, a saber: análises preliminares, concepção e análise a priori, experimentação e, por último, análise a posteriori e validação; que são etapas similares aos de Van Hiele. Vamos explanar, utilizando termos não muito teóricos para explicar as fases dos processos.

Com relação às *análises preliminares*, elas correspondem ao momento no qual o pesquisador (ou o professor) realiza um estudo, uma análise epistemológica e didática do conteúdo a ser abordado, uma procura minuciosa acerca das concepções e dos obstáculos epistemológicos correspondentes, bem como monta uma estrutura, elabora uma análise do ensino habitual e de seus efeitos. De acordo com Artigue (1996, p. 198), os trabalhos realizados neste momento “são retomados e aprofundados ao cabo das diferentes fases do trabalho, em função das necessidades, não sendo por isso prévios se não a um primeiro nível de elaboração”. O mais importante, com relação à primeira etapa, foi a realização de diversas leituras relacionadas às intenções iniciais da pesquisa e às posições que íamos assumindo com o passar do tempo e os caminhos que foram sendo construídos naturalmente durante o ano de 2020. Importante destacar que para esta fase foram utilizados os testes de Van Hiele por serem mais específicos.

Com relação aos tópicos existem aspectos importantes e relevantes referentes à geometria que foi abordada, mais especificamente sobre construções geométricas com o uso de régua e compasso e uma associação com

o uso do GeoGebra, entendimento das construções, validação de propriedades, por meio de demonstração ou prova. No decorrer das demais etapas, retomamos estes e outros estudos, relacionados aos nossos objetivos. Esta designação representa um modo interativo direto de recolher documentos com produções de alunos em sala de aula. O ano de 2020 foi completamente atípico e por isso a parte experimental de nossa pesquisa foi dividida em duas etapas, sendo a primeira presencial, antes da pandemia, e segunda remota, durante a pandemia. Assim, na primeira etapa os alunos tiveram contato físico com alguns materiais de desenho como régua, compasso, transferidor e esquadros, bem como algumas instruções básicas para melhor entendimento e manuseio dos materiais.

A segunda fase da Engenharia Didática é constituída de uma parte descritiva e outra preditiva, consistindo na *concepção*, elaboração de atividades e *da análise a priori*, identificação de variáveis didáticas, enfim, é uma parte importante da investigação do objeto da pesquisa. Nesta etapa, os elementos da sequência didática devem ser elaborados considerando as situações didáticas as quais se pretende criar, sempre tendo em vista o pressuposto de que o aluno deve ser o protagonista de sua aprendizagem. Assim, deve-se descrevê-los e prevê-los, no sentido de pensar em ações das quais o pesquisador deve lançar mão no momento da experimentação. Essa elaboração torna-se a parte mais complexa e delicada, pois grande parte do trabalho se baseia nessa construção. Assim o objetivo da análise a priori consiste na organização prévia do trabalho experimental, em determinar de que forma as escolhas efetuadas permitem controlar os comportamentos dos alunos e o sentido desses comportamentos.

A terceira etapa, que consistiu na *aplicação das atividades* em sala de aula, foi dividida em duas partes. Na primeira, modalidade presencial, de modo geral, foi realizado um planejamento da organização didática em sala de aula, sendo prevista a participação do professor como protagonista no início e encerramento de cada sessão, sendo que o protagonismo dos alunos deve ocorrer durante a busca e produção de respostas para as atividades realizadas em sala. A segunda parte da experimentação foi realizada durante a pandemia, de forma remota e seguindo os objetivos da investigação. Foram recolhidas as

produções dos alunos, virtualmente de modo online, ao final da participação dos alunos na resolução de atividades. Esses recursos, associados a várias fontes de informações coletadas nas análises preliminares e a priori, contribuíram para uma análise das produções dos alunos durante as experimentações realizadas no contexto das aulas ministradas presencialmente em sala de aula e na modalidade remota, à distância.

A última etapa da Engenharia Didática, denominada *análise a posteriori e validação*, consistiu das análises das produções dos alunos e da confrontação delas com os objetivos da pesquisa, sobretudo o que foi possível observar nas atividades iniciais e nas últimas que eles realizaram. A forma de validação consiste em comparar os alunos com eles mesmos, buscando observar conhecimentos e habilidades que eles aprenderam durante o processo, bem como as principais dificuldades encontradas. Essa fase acabou prejudicada, pois deveria ter sido aplicado um novo teste de Van Hiele para elucidação se houve o aumento do nível dos alunos; mas não foi possível pelo contexto da pandemia que acabou prejudicando o calendário escolar e esta fase teve que ser abandonada para cumprir o estabelecido pelo conteúdo programático exigido pela escola. No entanto, pôde-se notar durante as aulas um maior engajamento dos alunos, já que as aulas foram voltadas especificamente para o nível de aprendizado deles. No capítulo 5 tais resultados serão melhor elucidados.

5. PARTE EXPERIMENTAL DA PESQUISA E ANÁLISE DE PRODUÇÕES DOS ALUNOS

Neste capítulo vamos apresentar as atividades que foram propostas aos alunos que participaram da pesquisa. Optamos por dividir a apresentação deste capítulo em três partes. Na primeira parte trazemos um pouco do contexto da escola onde a pesquisa ocorreu e sobre os alunos participantes; na segunda parte analisamos as atividades propostas, bem como produções de alunos e por fim, na última parte, a aplicação de dois testes, o primeiro contendo 10 questões e o outro contendo 5 questões com a finalidade de analisar o desempenho dos alunos e elementos que auxiliem a identificar informações sobre pistas deixadas para possíveis enquadramentos nos níveis de Van Hiele.

5.1. O contexto da escola e os alunos participantes

A pesquisa ocorreu em um colégio privado da cidade onde o pesquisador reside, com duas turmas do 8º ano. Trata-se de uma escola cristã, focada nos valores cristãos, mas sem interferência nos materiais didáticos e nem na forma de ensinar. A escolha dessa escola para realizar a parte experimental da pesquisa se deu pela facilidade de acesso aos alunos e ao ambiente escolar pelo professor pesquisador, onde leciona disciplinas de matemática desde 2016, para alunos do Ensino Fundamental II e Médio.

Assim, o fato de o pesquisador já estar familiarizado com os alunos, bem como com os materiais e o espaço físico foi decisivo na escolha. Desse modo, as atividades foram elaboradas visando a melhor compreensão nesta disciplina e principalmente dos conceitos geométricos. O objetivo era proporcionar a esses alunos a possibilidade de realizarem atividades diversificadas concernentes a conteúdos básicos de geometria plana e construções geométricas básicas, que lhes dessem a oportunidade de interagirem com aspectos teóricos e práticos no processo de ensino/aprendizagem.

O presente estudo foi desenvolvido na parte prática entre fevereiro e agosto de 2020. A escolha do 8º ano de escolaridade deu-se por conta dos conteúdos de retas paralelas, triângulos e suas propriedades constarem no Currículo Mínimo proposto pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo em 2008, como currículo básico para as escolas da rede estadual nos níveis de Ensino Fundamental (Ciclo II).

Na turma do 8º A havia 29 alunos matriculados, porém 6 deles deixaram a escola e outros 9 não participaram de grande parte das atividades realizadas durante a pandemia, totalizando 15 participantes. Na turma do 8º B havia 30 alunos matriculados, sendo que 5 saíram durante a pandemia e 15 não frequentaram a maior parte das atividades realizadas, totalizando assim 10 participantes. Ressaltamos que as atividades realizadas em ambas as turmas foram sobre conteúdo do Capítulo 2 da apostila do segundo bimestre.

Lembramos que antes da pandemia a organização e desenvolvimento das aulas da disciplina de matemática eram realizadas em seis aulas semanais de cinquenta minutos, sendo que uma dessas aulas havia sido destinada à pesquisa, para aplicação das atividades previstas. Nos primeiros dois meses do período pós-pandemia a escola passou adotar aulas gravadas inicialmente e depois aulas online.

5.2 Aplicação do teste de Van Hiele

No Apêndice I está contido o teste de Van Hiele o qual foi elaborado pela equipe do Projeto Fundão (NASSER; SANTANNA, 1997) e modificado pelo pesquisador para facilitar a aplicação e melhorar seus aspectos visuais. Esse teste é composto de 15 questões, distribuídas em 2 provas teste, em cada uma dessas provas os testes tentam aproximar ao máximo as ideias que correspondem aos níveis do pensamento geométrico de Van Hiele. Os testes têm como objetivo investigar o nível de pensamento geométrico de cada aluno. O objetivo principal aqui é que ao elaborar as atividades, elas estejam de acordo com o nível alcançado pelos alunos, ou seja, tem o papel de uma avaliação diagnóstica.

Nesta segunda parte deste capítulo descrevemos e analisamos a aplicação do teste de Van Hiele (Apêndice I), cujo objetivo é investigar em que nível de pensamento geométrico os alunos se encontram. Essas atividades foram aplicadas utilizando um tempo de aula semanal da disciplina de matemática, de março até agosto de 2020 e no período da pandemia se tornou mais fácil a aplicação das atividades, pois provas e testes foram disponibilizados online para os alunos. Todavia ministrar aulas na modalidade virtual remota se tornou um grande desafio nesse período.

Com vistas à análise de produções dos alunos, visando identificar conhecimentos mobilizados por eles, por meio do modelo de Van Hiele, aplicamos um bloco contendo 10 questões, o qual ficou disponível na plataforma da escola por 2 dias, nas turmas do 8º ano A e 8º ano B, dos turnos matutino e vespertino do colégio. Alguns alunos deixaram de fazer as questões do teste ou faltaram no dia da aplicação, com isso dentre os 35 alunos que participaram da pesquisa, 5 alunos deixaram em branco ou não conseguiram enviar os exercícios. Os alunos haviam sido avisados previamente que ocorreria um teste, desse modo, a aplicação ficou disponível na plataforma para eles responderem as 10 questões.

O segundo teste, contendo 5 questões, ficou disponível na plataforma por 2 dias, mais precisamente desde o dia 11/06/2020 até 13/06/2020 nas turmas 8º ano A e 8º ano B do turno matutino e vespertino do Colégio. Nesse segundo momento a presença dos alunos se manteve em 32 alunos. Assim, 32 alunos participaram da pesquisa, sendo que 2 deles deixaram em branco ou não conseguiram enviar as respostas. Assim como no primeiro teste, os alunos foram previamente avisados que ocorreria um teste e conforme combinado, nos dois dias ficou permitido o acesso na plataforma para eles responderem as 5 questões.

5.2.1 Análise das questões dos testes 1 e 2 de Van Hiele

Figura 48 - Gráfico da distribuição do total de pontos

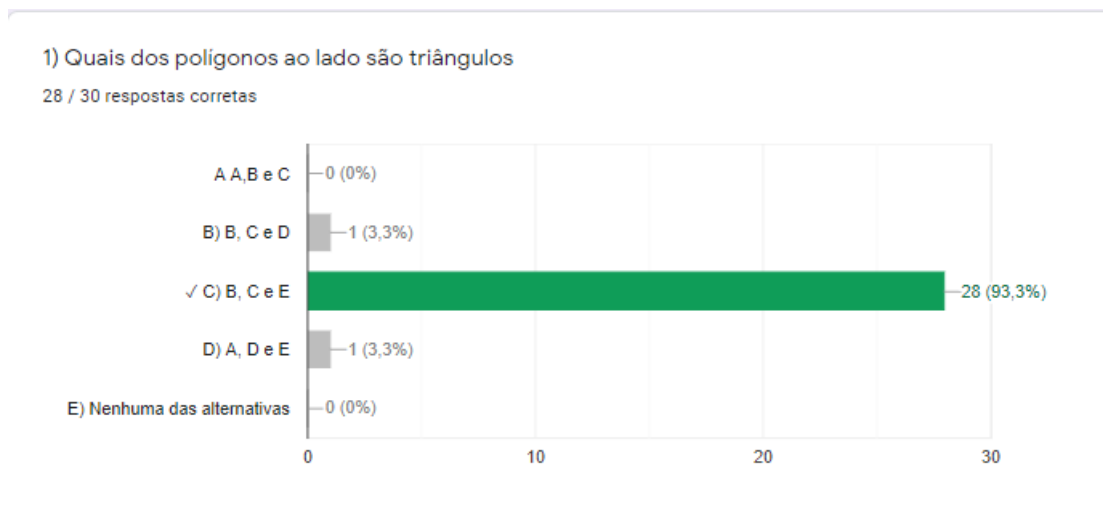


Fonte: Plataforma do colégio

Pela figura 48 nota-se que, de maneira geral, os alunos tiveram bom desempenho, pois como notamos a média ficou 7,7 e a moda da nota dos alunos foi 9, a maior parte. Por este primeiro teste, que teve o intuito de reconhecimento inicial dos alunos entre o nível 0 - Visualização (conhecimento das figuras sem conseguir classificá-los) a 2 - Dedução informal, somente (o aluno consegue estabelecer relações entre as diferentes figuras e suas propriedades). Pelo resultado global do teste, os alunos se apresentaram no nível 1, de análise, em que já reconhece as partes e propriedades de cada figura geométrica. Uma grande parte da turma obteve nota acima 9, o que certamente enquadraria no nível 2; mas por ser um teste inicial exclusivamente objetivo

não se pode caracterizar completamente nesta fase. O segundo teste foi essencial para o perfeito enquadramento dos alunos, pois contou com perguntas subjetivas; e através desse segundo teste foi possível classificar a turma no nível 1, conforme ficará claro na elucidação das questões a seguir.

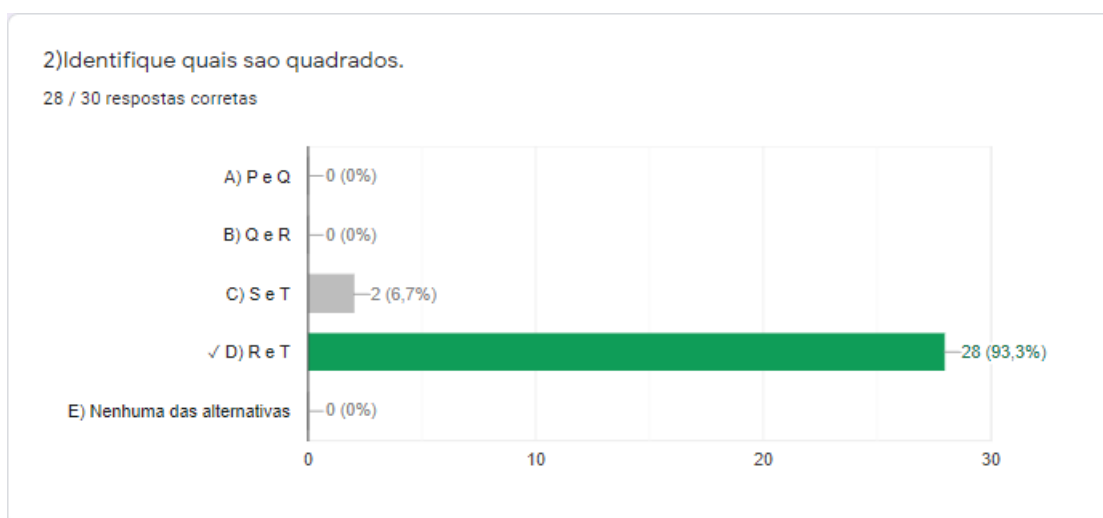
Figura 49 - Resposta da questão 1 - teste Van Hiele.



Fonte: Plataforma do colégio.

1) De acordo com o gráfico de barras acima (figura 49), observamos que 28 alunos acertaram a questão, identificando como triângulos as figuras B, C e E. Dois alunos marcaram apenas as alternativas B e D como corretas. É possível que o aluno que assinalou a alternativa D como correta, tenha considerado apenas a aparência global das figuras.

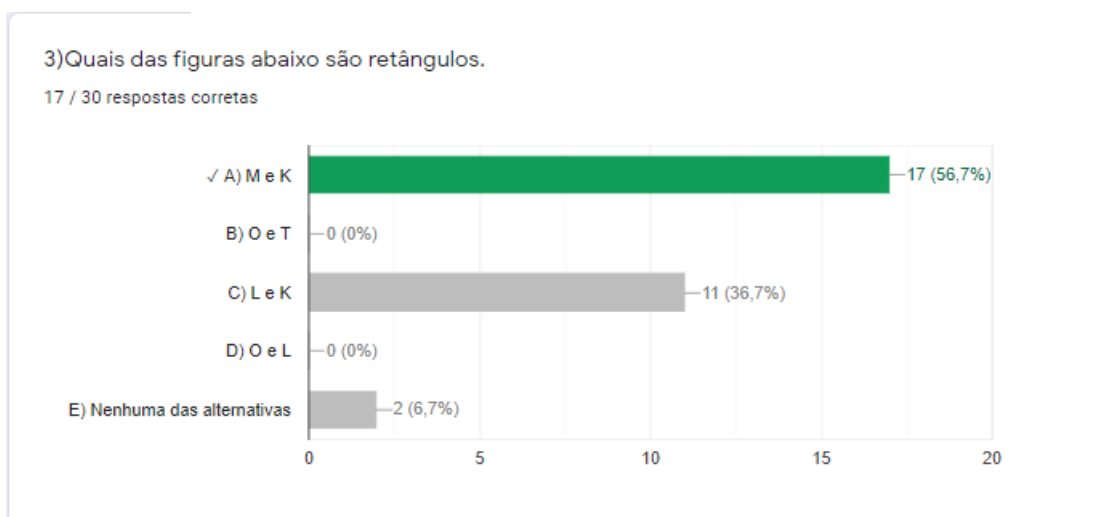
Figura 50 - Resposta da questão 2 - teste de Van Hiele



Fonte: Plataforma do colégio

2) Vinte e oito alunos acertaram essa questão marcando as duas opções corretas. Dois alunos marcaram apenas a letra C como correta. Isso talvez possa ter ocorrido pela dificuldade em diferenciar a definição de quadrado e de retângulo, por elas não estarem ainda consolidadas. Alguns podem não ter considerado a figura T como quadrado pelo fato dela não estar representada com os lados paralelos aos bordos da página.

Figura 51 - Resposta da questão 3 - teste Van Hiele

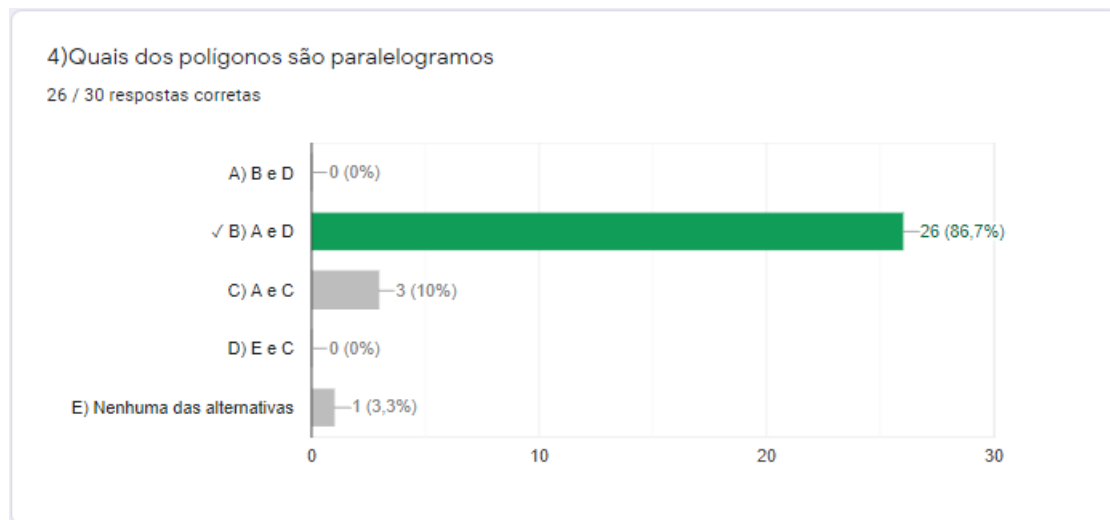


Fonte: Plataforma do colégio

3) Nessa questão, dezessete alunos acertaram a questão, pois marcaram as figuras M e K. No entanto, onze alunos consideraram a alternativa C como correta, identificando as figuras L e K como retângulo, devido ao fato deles terem se confundido e, talvez por achar que foi algum tipo de pegadinha, identificaram a figura K como retângulo e a figura ao lado que é um paralelogramo também como retângulo. Dois alunos não assinalaram nada, talvez tenham observado a figura M, mas não perceberam que a figura K seria um retângulo também.

Nesta questão, que apresentou um nível de dificuldade maior, com o reconhecimento das propriedades do retângulo, pode-se perceber que grande parte dos alunos não souberam identificar, trazendo a turma para o nível 1. Caso o exercício tivesse sido elaborado em sala de aula, poderia ter sido perguntado o conceito e interagido com os alunos para ver se os que acertaram realmente tinham o conhecimento das propriedades dos retângulos, no entanto, em situação de pandemia, tal análise não foi possível.

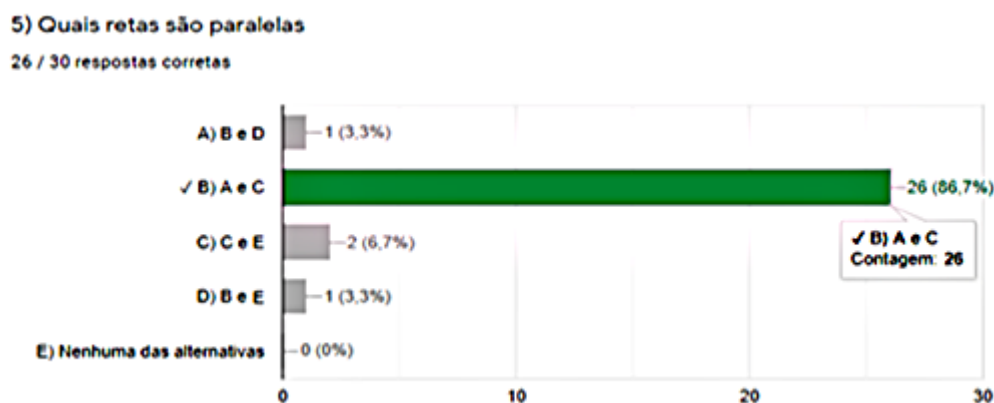
Figura 52 - Resposta da questão 4 - teste Van Hiele



Fonte: Plataforma do colégio

4) Vinte e seis alunos acertaram essa questão, três alunos marcaram apenas a Questão C onde havia a figura A e C sendo a figura C um trapézio. Neste ponto, claramente esses alunos não têm o reconhecimento das propriedades, e talvez nem mesmo possa ser classificado como nível 1 de Van Hiele. Um aluno não marcou nenhuma das alternativas, logo claramente não deve ter compreendido as definições e propriedades.

Figura 53 - Resposta da questão 5 - teste de Van Hiele

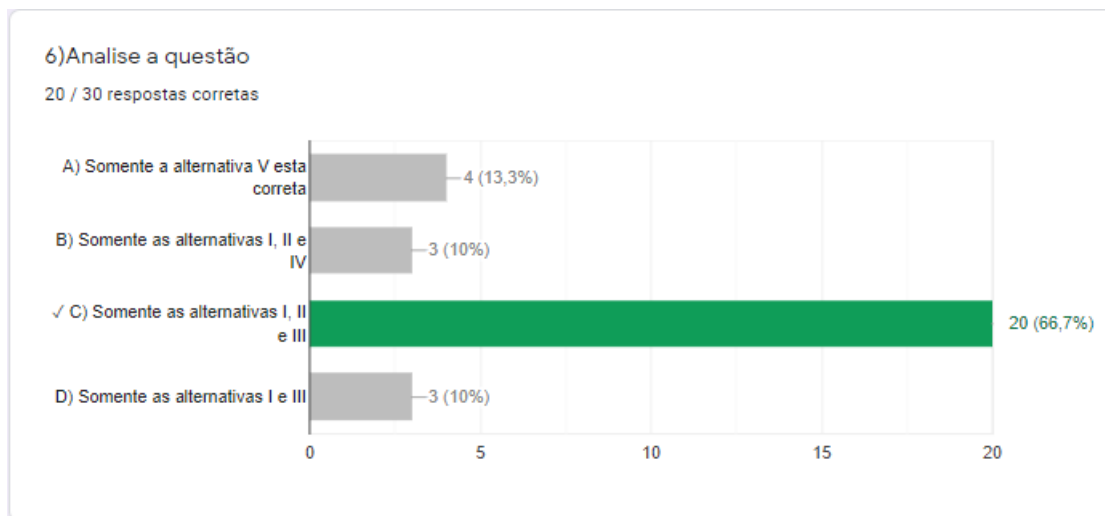


Fonte: Plataforma do colégio

5) Vinte e seis alunos marcaram a alternativa B com as figuras A e C, acertando assim a questão. Um aluno assinalou apenas a alternativa A como resposta. Provavelmente esse aluno não tenha identificado a diferença entre retas concorrentes e retas paralelas. Dois alunos assinalaram a alternativa C. Nesse caso é possível que os alunos tenham se confundido analisando somente a

primeira figura. Por fim, um aluno marcou a alternativa D como correta, provavelmente confundindo paralelas com perpendiculares.

Figura 54 - Resposta da questão 6 - teste de Van Hiele

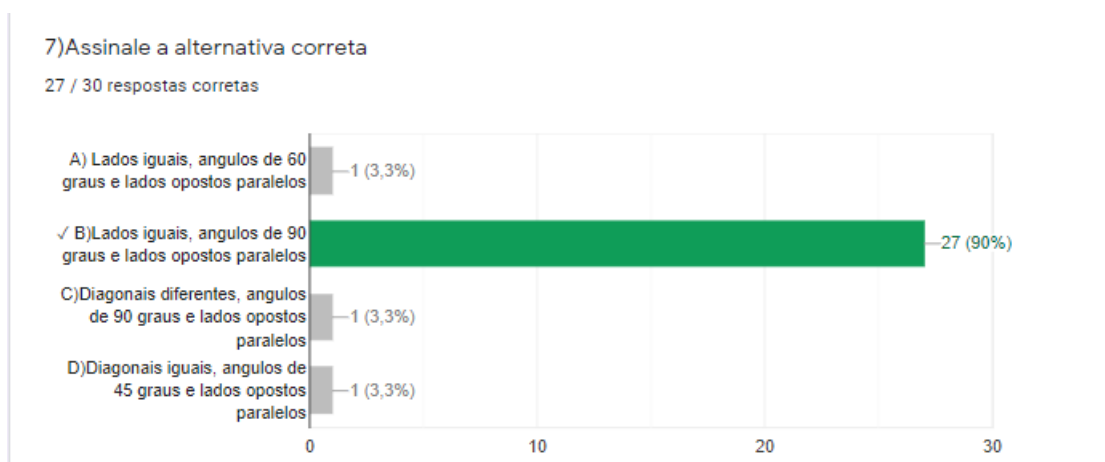


Fonte: Plataforma do colégio

6) Nesta questão vinte dos alunos marcaram apenas a alternativa C, sendo esta a questão correta. Dez alunos não acertaram, provavelmente não se atentando para a sutileza do exercício, deixando de analisar suas propriedades na totalidade. Quatro alunos assinalaram todas as alternativas como correta, talvez tenham ficado com dúvida sobre a figura ter todos os lados iguais, por um erro de configuração. Três alunos assinalaram a alternativa D onde essas duas afirmações estavam corretas, mas provavelmente ocorreu um erro de interpretação, pois podem não ter dado importância ao fato da questão conter a palavra *somente*.

A partir desta questão houve uma maior exigência do conhecimento da geometria, das propriedades das figuras, e era esperado um resultado com uma distribuição diferenciada em relação às questões anteriores. Esse tipo de questão traz uma melhor avaliação do nível de conhecimento dos alunos e conseqüentemente permite ao professor um planejamento mais adequado da sua metodologia de ensino às capacidade dos alunos.

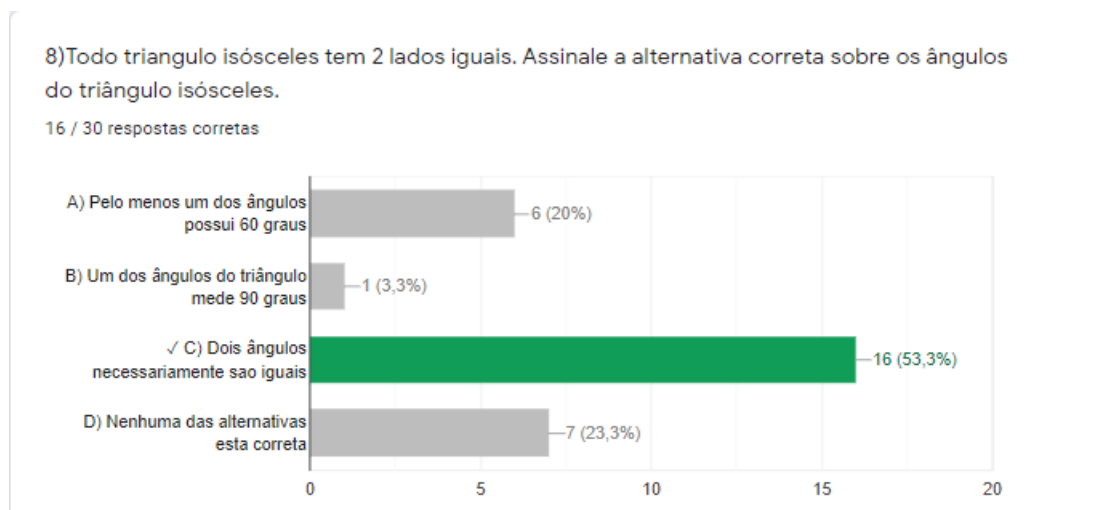
Figura 55- Resposta da questão 7 - teste Van de Hiele



Fonte: Plataforma do colégio

7) Essa era uma questão aberta, onde os alunos teriam que apresentar três propriedades para quadrados. A questão foi modificada para atender os recursos disponíveis sobre como resolver a questão online. Assim, 27 alunos resolveram essa questão de forma correta e três alunos erraram. Foi possível perceber que os alunos que acertaram conseguiram identificar melhor as propriedades ao invés de ter que enunciá-las.

Figura 56 - Resposta da questão 8 - teste de Van Hiele

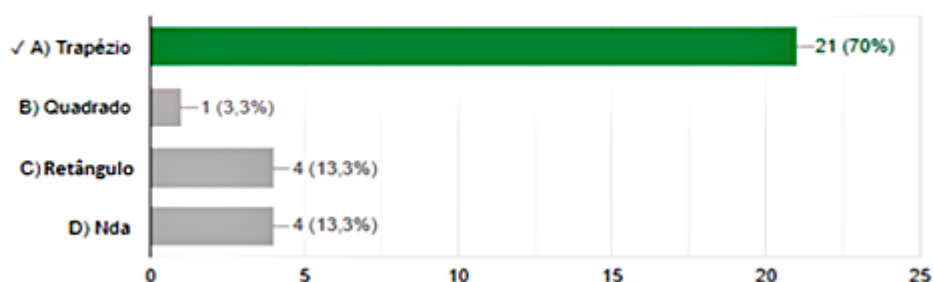


Fonte: Plataforma do colégio

8) Dezesesseis alunos acertaram a essa questão, certamente induzidos pela propriedade de triângulos equiláteros marcaram a alternativa A. Sete alunos marcaram a alternativa D que assume que as outras alternativas estão erradas, talvez pelo fato de não conseguirem enxergar que dois lados iguais de um triângulo isósceles têm consequentemente dois ângulos da base iguais.

Figura 57 - Resposta da questão 9 - teste de Van Hiele

9) Assinale a alternativa cuja o quadrilátero que não possui as diagonais do mesmo tamanho.
21 / 30 respostas corretas

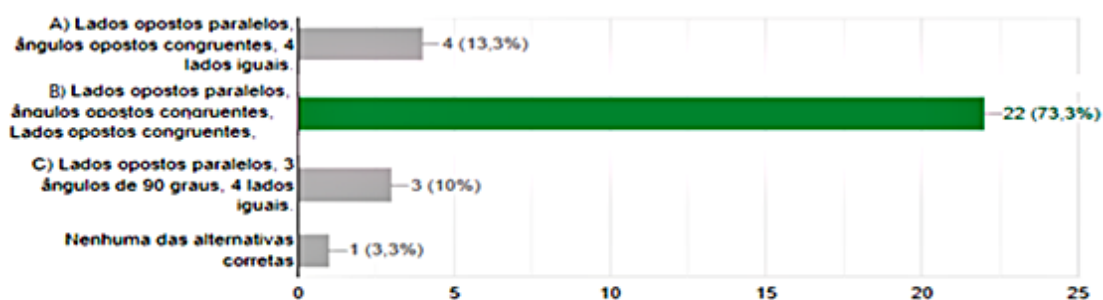


Fonte: Plataforma do colégio

9) Esta questão não tinha esse formato no teste de Van Hiele e foi feita uma adaptação pelo pesquisador, no caso ao questionar qual dentre os quadriláteros abaixo, não teria diagonais iguais o mestrando se esqueceu que o trapézio isósceles possui diagonais iguais. Assim, os resultados geram uma certa desconfiança que talvez possa ter induzido os alunos ao erro, por se limitarem a essa situação.

Figura 58 - Resposta da questão 10 - teste de Van Hiele

10) Assinale a afirmativa correta
22 / 30 respostas corretas



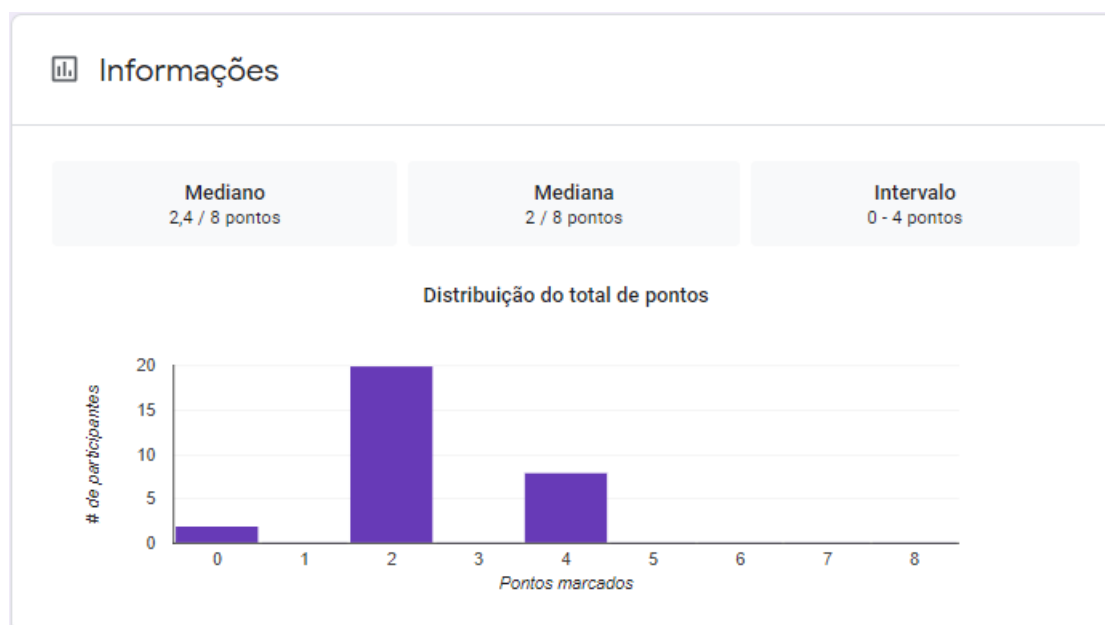
Fonte: Plataforma do colégio

10) Essa era uma questão aberta, parecida com a questão 7, onde os alunos teriam que colocar três propriedades para os paralelogramos. A questão foi modificada para atender os recursos disponíveis como fazer a questão online, com isso vinte e dois alunos resolveram essa questão de forma correta e oito alunos erraram. Foi possível perceber-se que os alunos que acertaram conseguiram identificar melhor as propriedades, ao invés de ter que enunciar

as propriedades se tornando uma questão de menor dificuldade para resolver. Quatro alunos assinalaram a alternativa A, talvez se confundindo com a figura que imaginaram corresponder a um losango.

No segundo teste de Van Hiele foram elaboradas cinco questões sendo duas dissertativas e três questões de assinalar, essas questões foram elaboradas com uma didática mais robusta e interações mais interpretativas em relação a primeira. No gráfico da figura 59 mostra como os trinta alunos foram nas questões de alternativa, pelo gráfico nota-se que nenhum dos 30 alunos acertaram as 3 questões de alternativa.

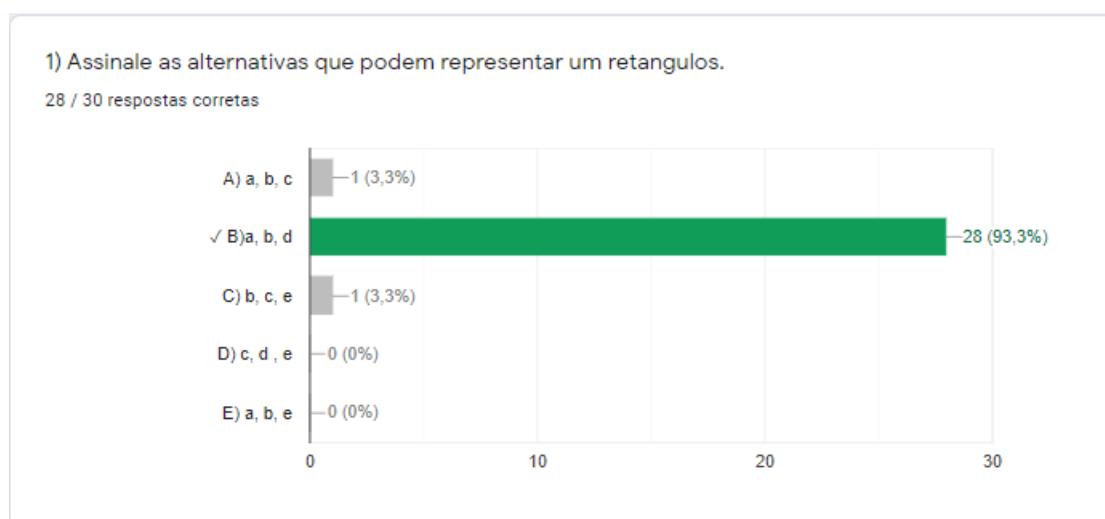
Figura 59 – 2º teste de Van Hiele



Fonte: Plataforma do colégio

1) Analisando a primeira questão de alternativa figura 59, nota-se que os alunos foram muito bem nessa questão, onde praticamente todos os alunos acertaram, ou melhor dizendo de trinta alunos, vinte e oito acertaram. A questão é uma análise visual e mostra que os alunos possuem percepção intuitiva, reconhecimento e visualização, sendo isso de conhecimento da maioria dos alunos.

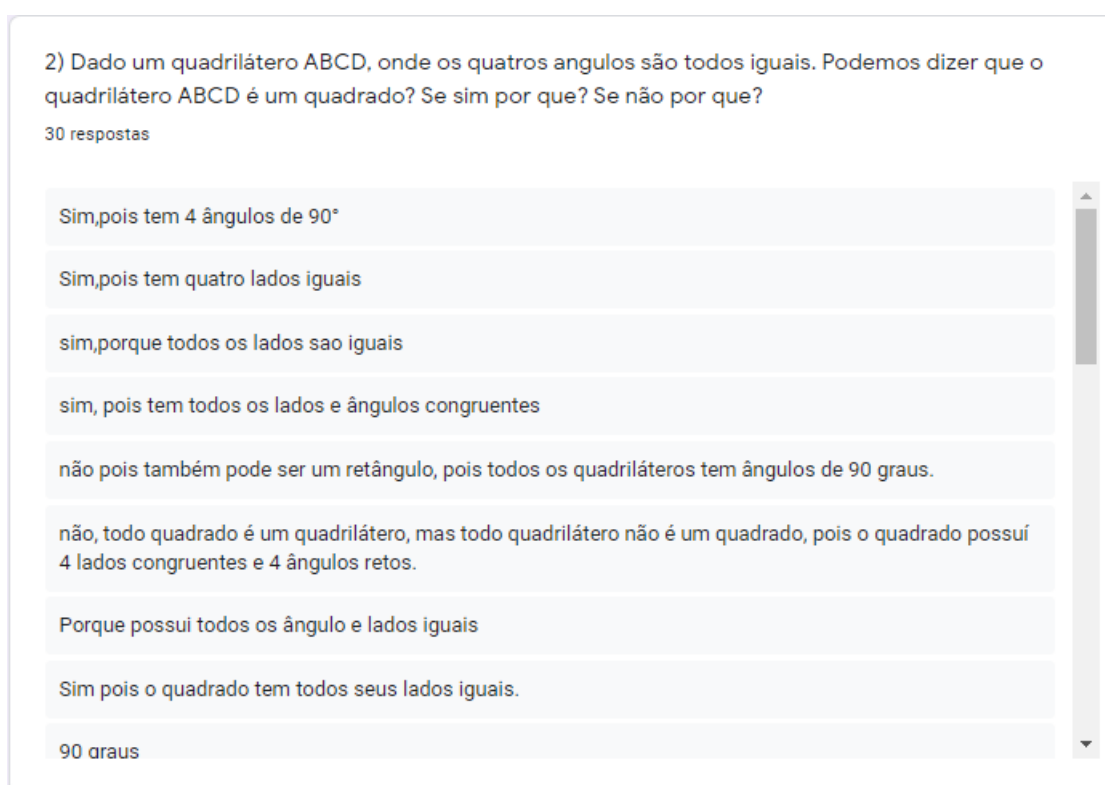
Figura 60 – 1ª questão do 2º teste de Van Hiele

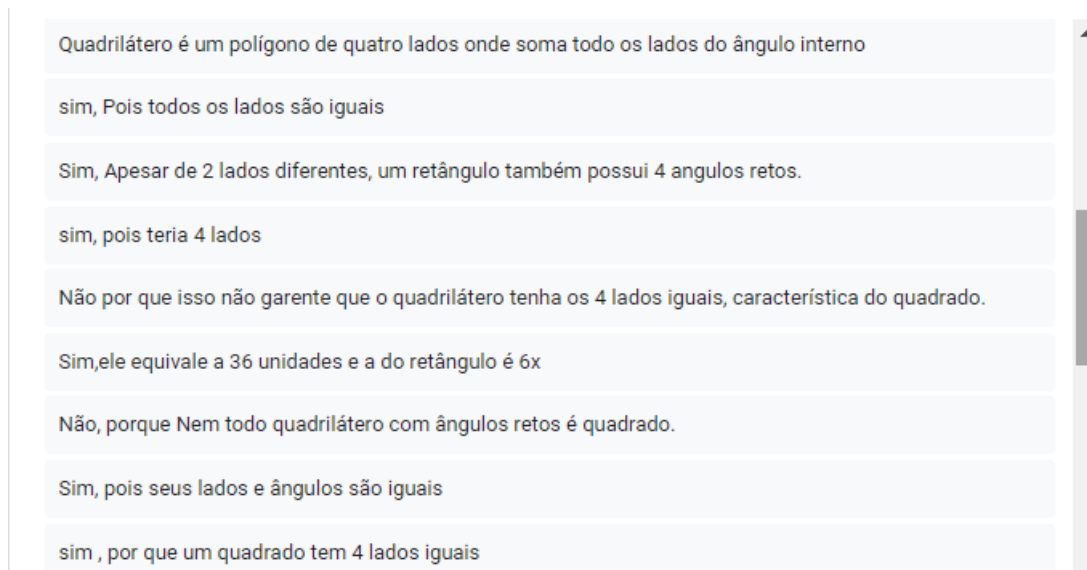


Fonte: Plataforma da escola

2) A segunda questão é aberta onde o aluno deveria responder claramente com suas palavras o que entendeu.

Figura 61 – 2ª questão do 2º teste de Van Hiele





Fonte: Plataforma da escola

Nota-se claramente que na questão 2, dessas 18 respostas a grande maioria respondeu sim para a questão, alguns colocaram sim e fizeram uma relação errônea a propriedade, alguns enunciaram alguma propriedade sem uma coerência ou ligação a algo, mostrando nesse caso que os alunos fizeram uma análise, mas não mantiveram uma coordenação ou entenderam a essência da geometria, com uma dedução informal abaixo do esperado. Analisando as trinta questões a situação se manteve parecida. Notamos assim que apenas 3 alunos possuem uma organização formal e dedução entre formal e informal bem estruturada.

Figura 62 – 3ª questão do 2º teste de Van Hiele

3) Podemos afirmar que um retângulo, é um paralelogramo ? Se sim por que ? Se não por que?

30 respostas

Sim,pois eles possuem 4 lados também

Sim,pois também tem 4 lados iguais

n,porque um retângulo todos os lados são diferentes

sim, pois como todo quadrilátero ,possui 4 lados

Os retângulos são paralelogramos cujo seus ângulos internos são retos, ou seja de 90 graus.

sim, pois os ângulos são retos (90 graus) e possuem diagonais congruentes.

Pois ele possui quatro lados e o paralelogramo também

Sim pois possuem dois pares de lados paralelos.

Sim, porque os ângulos internos são retos ou seja 90 graus

sim, pois os ângulos internos são retos(90).

sim,porque os ângulos internos são de 90 graus

Sim, pois um retângulo é um quadrilátero que possui todos os ângulos internos congruentes. Assim percebemos que todo retângulo é também um paralelogramo.

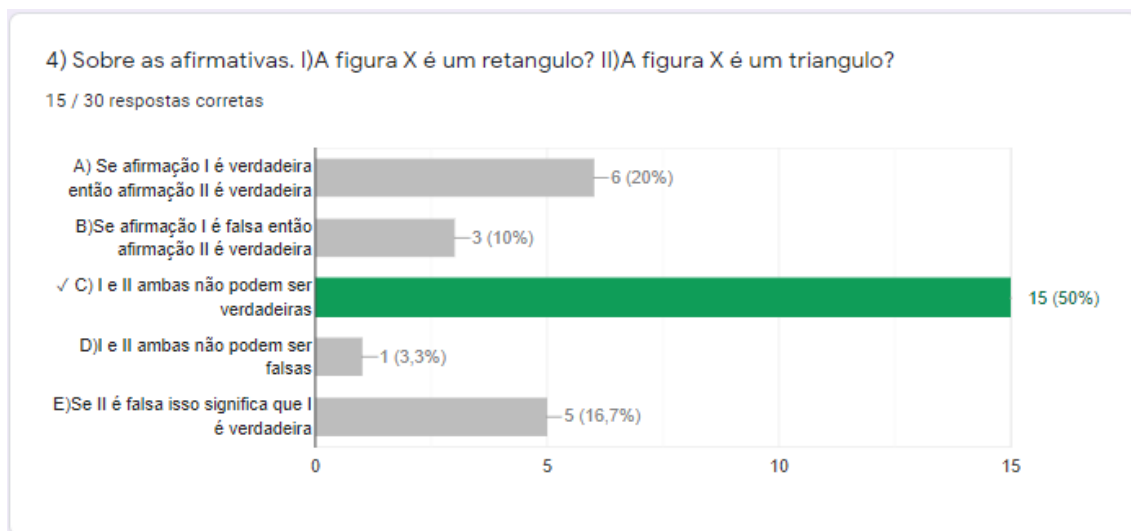
Fonte: Plataforma da Escola

3) Nessa questão foi colocada para os alunos uma questão aberta, onde o aluno deveria responder com objetividade usando suas palavras para explicar as propriedades do retângulo e comparar com o paralelogramo, conforme figura 62, em que trouxemos algumas das 30 respostas. Nessa questão notamos que a maioria dos alunos concorda com o tópico da questão o que é certo, mas a grande maioria não associa uma propriedade coesa em relação a resposta e a propriedade, apesar que alguns enunciam propriedades a esmo, mostrando que a dedução formal, organização formal se fazem deficitária, apesar dos alunos possuírem uma visualização e análise da Geometria, possuindo um certo reconhecimento sobre os aspectos geométrico.

4) Na questão 4, como mostra a figura 63, retornamos para questão de alternativa onde foram usados conceitos de geometria para descrever uma

situação de raciocínio lógico. Notamos que metade dos alunos acertaram a questão, que vem com uma roupagem diferente interpretativa.

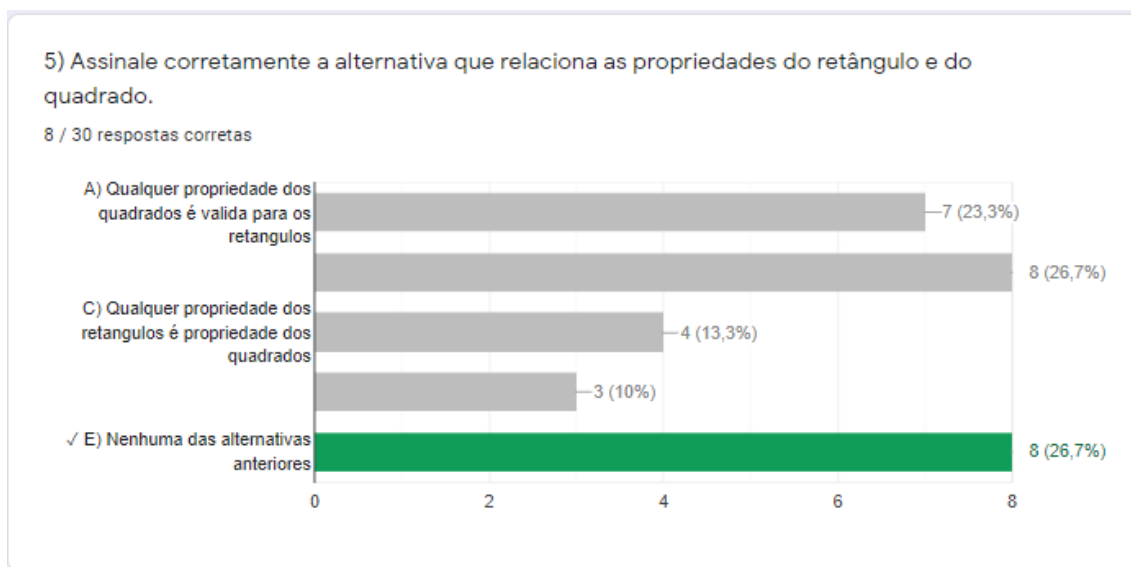
Figura 63 – 4ª questão do 2º teste de Van Hiele



Fonte: Plataforma da escola.

6. Na pergunta 5 temos novamente uma pergunta difícil, que busca correlacionar as propriedades do retângulo e do quadrado. Por este motivo tivemos uma distribuição heterogênea dos alunos, sendo que somente 8 alunos acertaram a questão.

Figura 64 – 5ª questão do 2º teste de Van Hiele



Fonte: Plataforma da escola

Em síntese, pelos resultados de ambos os testes, pudemos confirmar a heterogeneidade da classe no nível do conhecimento prévio em geometria, tendo alguns poucos alunos classificados como estando no nível 2 (dedução informal) e em contrapartida alguns alunos ainda no nível 0 (visualização). No entanto, a grande maioria dos alunos se encontra no nível 1 de conhecimento, tendo por base principalmente os resultados contidos no segundo teste, cujas questões foram um pouco mais elaboradas e exigiram um grau maior de compreensão dos conceitos e propriedades geométricas.

Com base nesta análise prévia, foi elaborado um método didático de ensino, com aplicação de atividades mais voltadas para o nível de conhecimento dos alunos. Acredita-se desta forma que os alunos terão melhor aproveitamento dos conteúdos trazidos e maior interesse, pois serão estimulados aos estudos de forma mais natural. Vale lembrar que para a aplicação das atividades foi utilizado o método da Engenharia Didática, pois o pesquisador já estava mais familiarizado com este método, conforme relatado no Capítulo 3 deste estudo.

5.3 Aplicação das Atividades

As atividades foram elaboradas com base em livros sobre Construções Geométricas, como o de Wagner (2000), o de Putinok (1993) e exercícios adaptados da apostila do 6º ano e 8º ano da escola onde foi realizada a parte experimental da pesquisa, adaptando-as para o nível do pensamento matemático e geométrico em que a maioria dos alunos se encontram, de acordo com o teste de Van Hiele. Com essas atividades, desejava-se que os alunos tivessem maior conhecimento dos conceitos matemáticos e geométricos de maneira geral, melhorando assim o uso da régua e do compasso para efetuar as construções básicas e vice-versa, pois mesmo a maioria dos alunos atingiram o nível 1 da teoria de Van Hiele. Essas atividades foram aplicadas utilizando um dos tempos semanais de matemática oferecida online, esta matéria foi um miniprojeto criado no início de 2020 para tentar sanar dificuldades e pequenas confusões que os alunos possuem em relação a geometria, realizados em atividades extraclasse.

Os exercícios do Anexo A e B teriam como base aprimorar a relação entre conhecimentos adquiridos e os conhecimentos geométricos e o uso dos instrumentos de desenho utilizados para construções geométricas e resolução de problemas de geometria. Considerando a experiência do professor com os alunos, as análises preliminares realizadas e o nível de conhecimento geométrico dos alunos do 8º ano, três atividades foram elaboradas. O tempo para aplicação das atividades foi organizado conforme as condições oferecidas para o desenvolvimento de maneira online e as restrições impostas pela pandemia que influenciaram direta e indiretamente na aplicação das atividades. Antes de começar a aplicação das atividades com os alunos, o pesquisador deve realizar análises preliminares e a priori, buscando identificar conhecimentos prévios dos alunos sobre ponto, retas paralelas e perpendiculares, bem como sobre habilidades com compasso, régua, transferidor e esquadros, inclusive sobre softwares como o GeoGebra. Pode-se inclusive, se julgar viável e necessário, realizar uma sondagem com questões sobre noções básicas dos alunos sobre esses alguns conteúdos e habilidades que eles deverão mobilizar durante a experimentação. Essa sondagem pode ser realizada por meio de um debate construtivo para ser aproveitado posteriormente durante a aplicação das atividades.

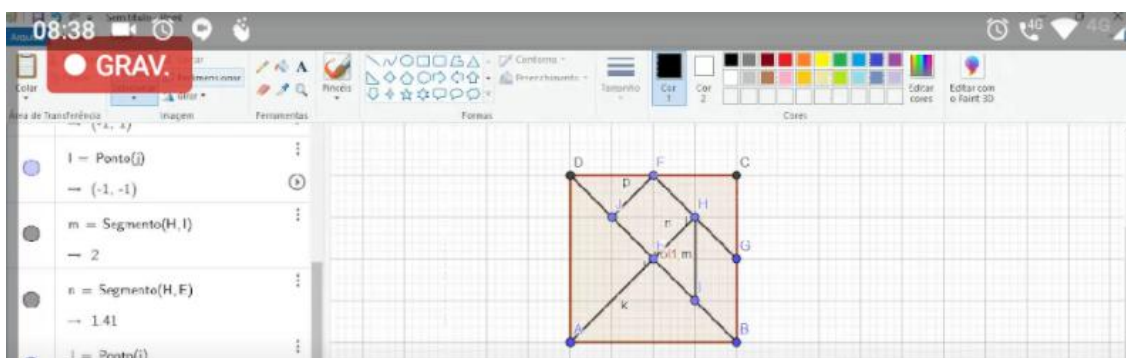
5.3.1 Atividade 1

A visualização e reconhecimento dessa atividade tem como finalidade apresentar e/ou lembrar os alunos sobre noções básicas de Geometria, especificamente sobre posições relativas entre duas retas, ângulos e identificação de propriedades básicas envolvendo triângulos e quadriláteros. Essa primeira atividade foi extraída da apostila do 6º ano e ela propõe que os alunos usem o GeoGebra para construir um tangram (anexo A). Assim, atenderia um dos objetivos iniciais que é conhecer instrumentos de desenho geométrico e suas respectivas utilidades. Nesse caso, os pontos devem ser associados aos vértices das figuras, assim como os segmentos de reta podem ser associados aos lados que formam polígonos. Devido às restrições impostas pela pandemia, essa atividade foi realizada de forma remota e individual. Sua

aplicação durou um dia, sendo realizada na plataforma de forma virtual e, mesmo assim, em seu desenvolvimento ocorreram diálogos e questionamentos sobre noções básicas.

O objetivo dessa primeira atividade foi explorar a visão geométrica da noção dos polígonos e suas propriedades manifestadas pelos alunos durante sua realização. Essa atividade foi realizada por 30 alunos, onde 6 deles entregaram em branco ou não foi possível abrir seus arquivos. A análise das produções mostrou que o enunciado era adequado, pois o que era para fazer estava bem detalhado e bastava seguir o passo a passo. Essa atividade foi realizada sem dificuldade pelos alunos, destacando que a maioria deles chegou ao mesmo resultado, como mostra a figura 65.

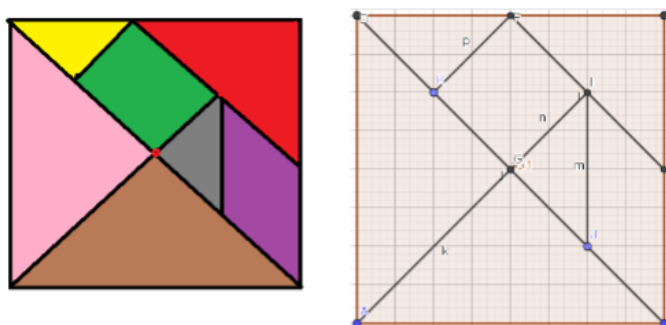
Figura 65- Construção do tangram por um aluno no GeoGebra



Fonte: Produção do aluno

Na figura 66 notamos que aluno construiu corretamente o tangram no GeoGebra, mas teve dificuldade para representá-lo no Paint. Observa-se que aluno entendeu quais eram as 7 peças do tangram, mas no Paint ele não conseguiu reproduzi-lo com exatidão.

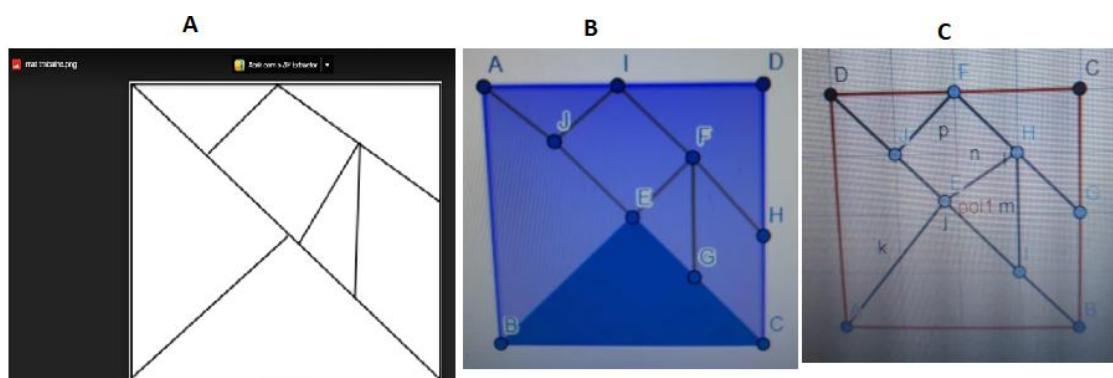
Figura 66- Construção do tangram por um aluno no Paint e no GeoGebra.



Fonte: Produção do aluno

Os alunos entenderam bem o enunciado da atividade, pois 21 deles a realizaram corretamente, apesar de que alguns tiveram dificuldade para resolver, talvez por não terem se envolvido de forma efetiva. Na figura 67 há 3 exemplos nos quais podemos observar que alguns alunos tiveram certa dificuldade para desenvolver a atividade. Pelos esboços abaixo pode-se conjecturar que, durante a abordagem do exemplo A, o aluno não deve ter participado da aula e por isso não sabia sequer como abrir o GeoGebra. Diante disso, ele certamente tentou fazer algo fora de contexto, nos exemplos B e C (figura 67) ficou faltando marcar os pontos adequadamente, gerando uma certa incongruência.

Figura 67 - Construção do tangram por três alunos no GeoGebra e Paint



Fonte: Produção de alunos

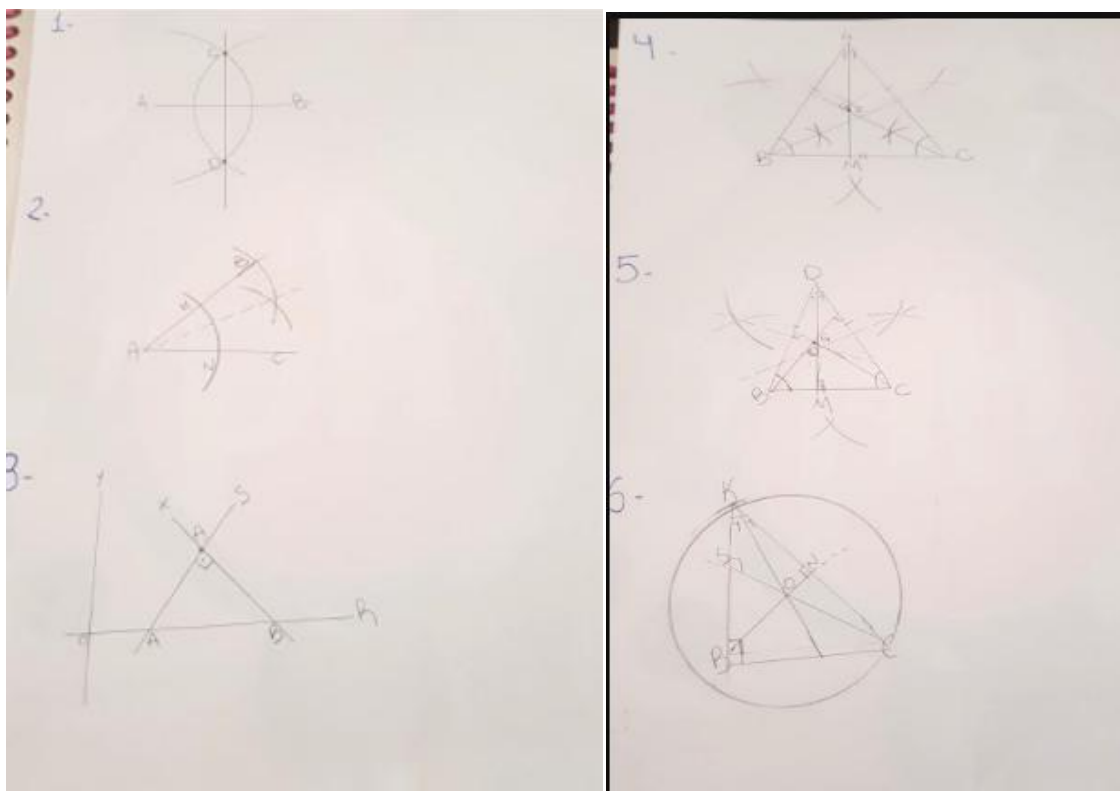
5.3.2 Atividade 2- Construções diversas usando régua e compasso

Na segunda atividade, que se encontra no apêndice III, um dos motivos do GeoGebra ter sido integrado foi o fato de que muitos alunos reclamaram, por não terem compasso ou pelo fato do compasso estar em condições não apropriadas para o uso. Mesmo assim foi preciso a intervenção do pesquisador que, com o auxílio, tanto do GeoGebra, quanto do uso do quadro, régua e compasso, construiu retas paralelas, concorrentes e perpendiculares para que eles pudessem ter um melhor entendimento e condições de participarem da atividade proposta.

Na figura 68 é possível perceber que a maior dificuldade que eles tiveram foi em assimilar o uso da régua e compasso e aceitarem que alguns conceitos e proposições básicas fazem parte da organização axiomática dedutiva da

geometria e precisam de uma certa coerência lógica, um tipo de rigor matemático. Assim, na atividade 2/exercício 1 muitos alunos conseguiram fazer a construção, mas não enunciaram o caso de congruência de triângulos e no exercício 3 da mesma atividade muitos não construíram a reta perpendicular. Apesar desses fatos, muitos o fizeram corretamente as atividades propostas e o trabalho realizado pode ser considerado satisfatório.

Figura 68- Construções de um aluno durante a 2ª atividade



Fonte: Produção do aluno

Na figura 68 podemos observar que a maior dificuldade que o aluno pode ter encontrado foi no que concerne ao rigor matemático. O aluno recebeu a tarefa por e-mail, teria que imprimir e fazer as construções sobre a folha impressa, mas não foi o caso, sendo observado na figura acima que o aluno foi capaz de realizar as construções com régua e compasso, mas não explicitou as propriedades matemáticas, e em mostrar que entendeu os conceitos e propriedades geométricas que garantem a solução apresentada. O mesmo ocorreu com a resolução da atividade 1, onde ele fez a construção, mas não mencionou o tipo de congruência que a justificava. Por outro lado, a atividade 3 está totalmente errada e mostra que o aluno não entendeu o que era para fazer.

Na atividade 6 o aluno deveria ter usado a imagem do exercício ao invés de tentar fazer seu próprio triângulo.

Na figura 69, o aluno fez a impressão da 2ª lista de matemática e resolveu as questões 1 e 2 da lista como mostra a figura a seguir. Na folha a aluna usou o rigor matemático e fez com bastante precisão e esmero, na primeira questão a aluna deixou de mencionar explicitamente qual o caso de congruência de triângulo que foi utilizado. Na segunda questão não foi perguntado sobre a relação de congruência, mas a construção da bissetriz ficou bem traçada e a resolução seguiu as definições e os conceitos abordados em sala de aula.

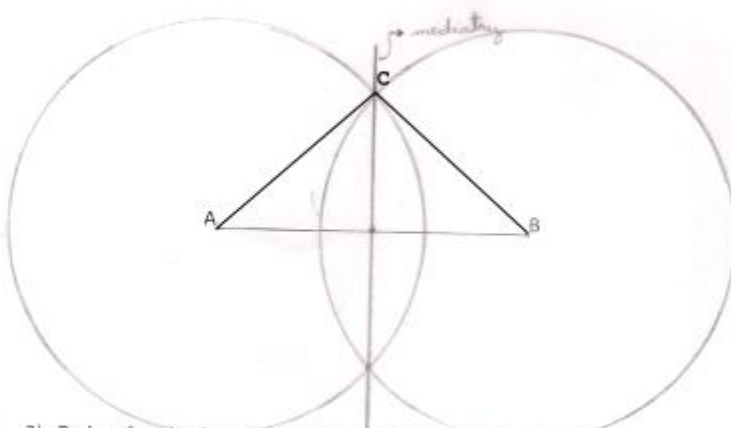
Figura 69- Construções de um aluno sobre a 2ª atividade, enunciados 1 e 2

1) Explique usando congruência de triângulos por que a mediatriz divide o segmento AB no ponto médio.

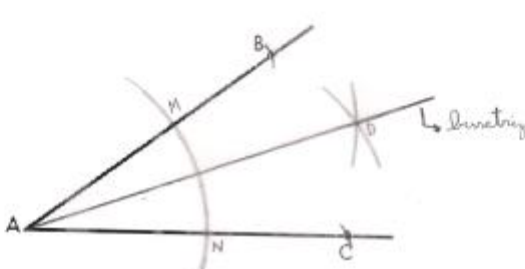
R: A mediatriz que divide o segmento AB, por semelhança de triângulos passa a ser a Bissetriz do triângulo ABC.

Trabalho de matemática 8 anos COLÉGIO EDUCATIVA
ALUNO: _____ Série: 8^a ano A

1) Dado o segmento abaixo gostaria usando uma régua e compasso determine a reta geratriz. Explique usando congruência de triângulos por que a geratriz divide o segmento AB no ponto médio.



2) Dado o ângulo abaixo determine sua bissetriz usando régua e compasso.

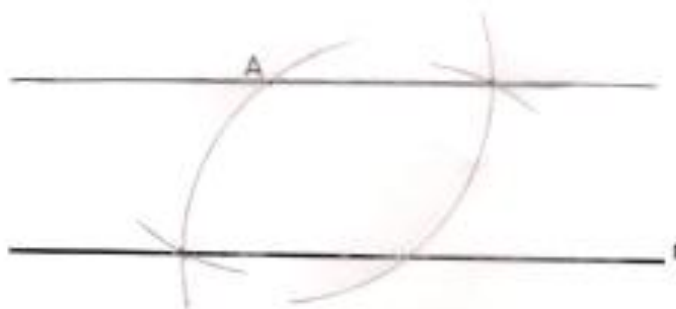


Fonte: Produção do aluno

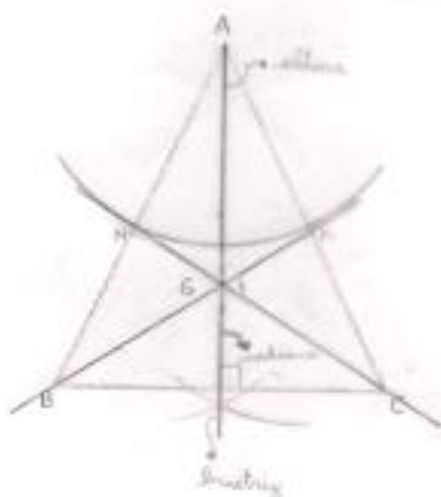
Na figura 70, abaixo, foi observado que, apesar do aluno fazer a construção das retas paralelas corretamente na atividade 3, da 2ª lista de matemática, percebe-se que a aluna não entendeu o enunciado, pois era para traçar uma reta perpendicular sobre o ponto A. Na atividade 4, da 2ª lista de matemática, a aluna construiu corretamente a altura do triângulo isósceles, mas não ficou claro como ela encontrou o baricentro ou incentro do triângulo. Provavelmente a aluna se confundiu com o caso em que o triângulo é equilátero e pensou que achando o baricentro automaticamente já teria encontrado o incentro. Trata-se de um erro conceitual e estrutural que a maioria dos alunos cometem.

Figura 70- Construções de um aluno sobre a 2ª atividade, enunciados 3 e 4.

- 3) Dado um ponto A e uma reta r fora dela determine uma reta perpendicular a reta r que passa pelo ponto A.



- 4) Considere o triângulo isósceles ABC da figura ($AB = AC$)

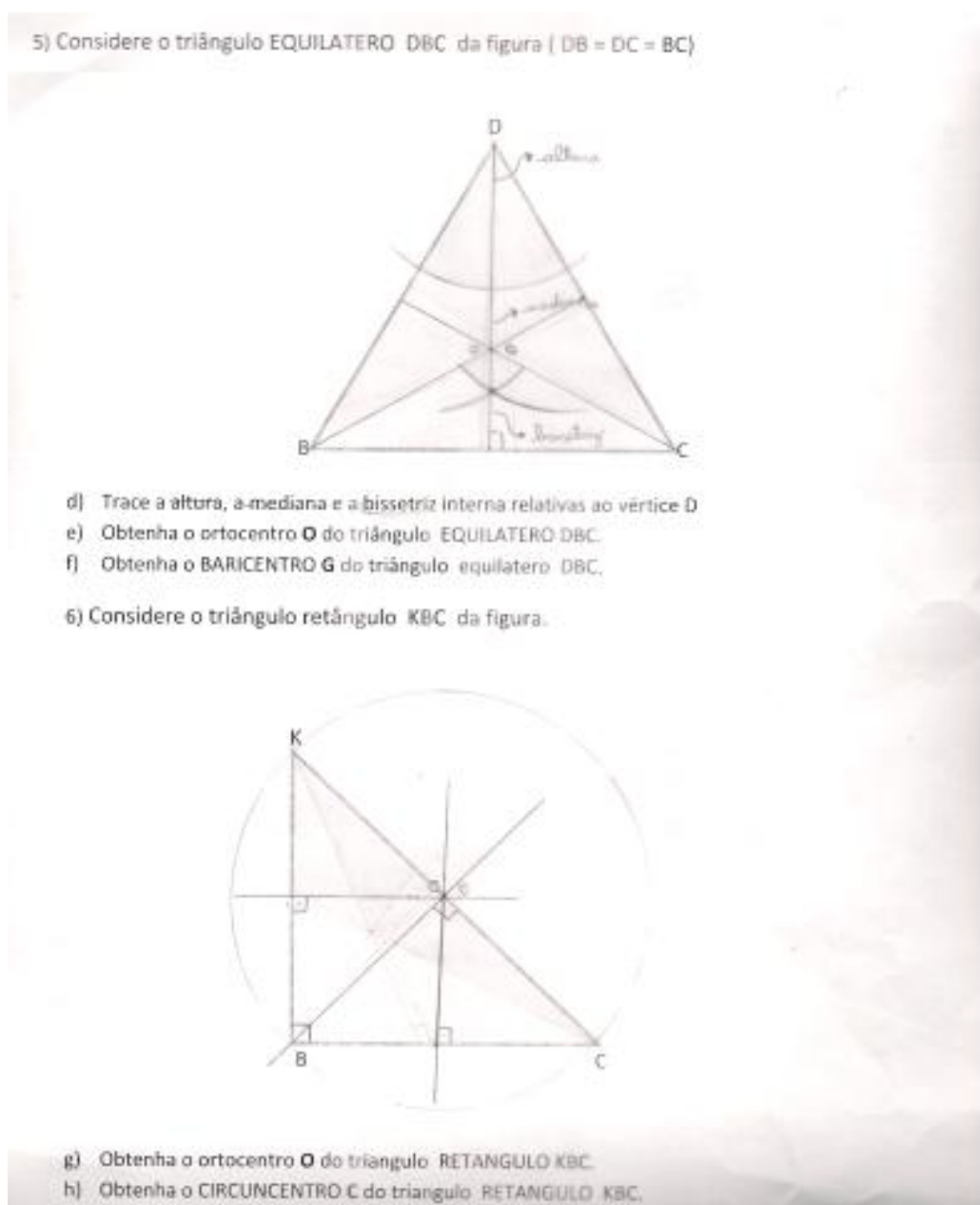


- a) Trace a altura, a mediana e a bissetriz interna relativas ao vértice A
b) Obtenha o BARICENTRO G do triângulo isósceles ABC.
c) Obtenha o INCENTRO I do triângulo isósceles ABC.

Fonte: Produção do aluno

O desenho na figura 70 acima mostra que o aluno percebeu que, encontrando a bissetriz do ângulo \widehat{BAC} , automaticamente estaria encontrando a mediana e a altura do triângulo ABC com relação ao vértice A.

Figura 71- Construções de um aluno sobre a 2ª atividade, enunciados 5 e 6.



Fonte: Elaborado pelo aluno

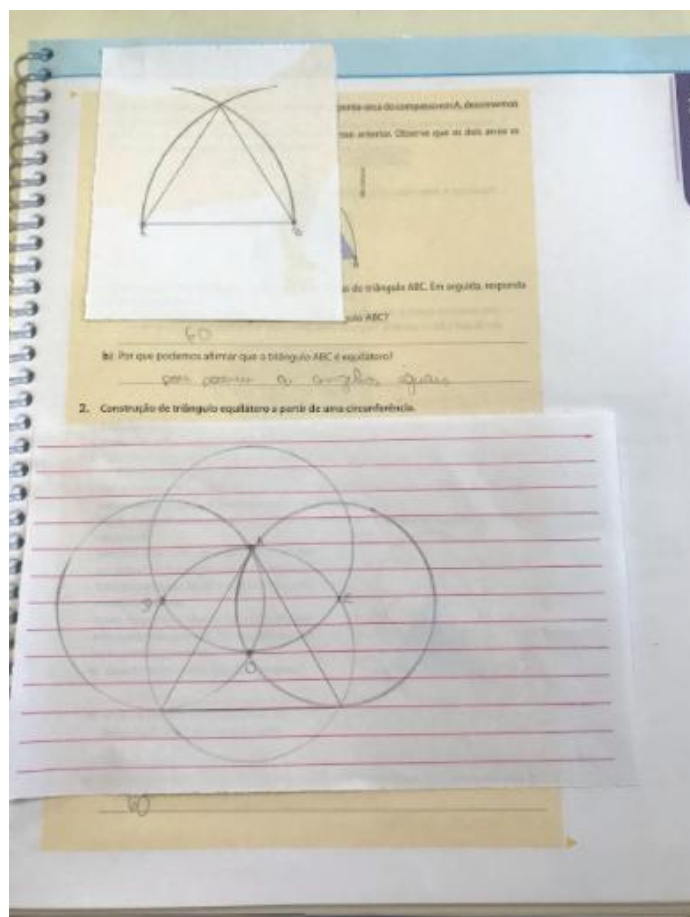
5.3.3 Atividade 3- Construções diversas usando régua e compasso ou GeoGebra.

A terceira atividade (contida no anexo B) trata-se de exercícios contidos na apostila dos alunos e foi aplicada avaliando-se o desenvolvimento de cada aluno. Vale ressaltar que tais atividades foram incluídas no projeto porque a metodologia proposta pela apostila estava inteiramente ligada nas construções geométricas com o uso de régua e compasso. Além disso, o fato das aulas

estarem sendo lecionadas por vídeo conferência, foi outro fator determinante para aplicação desses exercícios, visto que essas atividades tinham explicações bem detalhadas para os alunos.

Percebeu-se a importância de uma atividade com um guia mais detalhado para resolução dos exercícios, por conta da distância física que se tornava uma verdadeira barreira naquele momento. Mesmo os alunos tendo um conhecimento prévio sobre construções, constatados por meio dos testes de Van Hiele, foi preciso a intervenção do pesquisador em diversos momentos para auxiliar os alunos a entenderem algumas construções e alguns conceitos. Segue abaixo a atividade da construção de um triângulo equilátero na figura 72 resolvido por um dos alunos.

Figura 72- Construções de triângulo equilátero por um aluno do 8º ano.



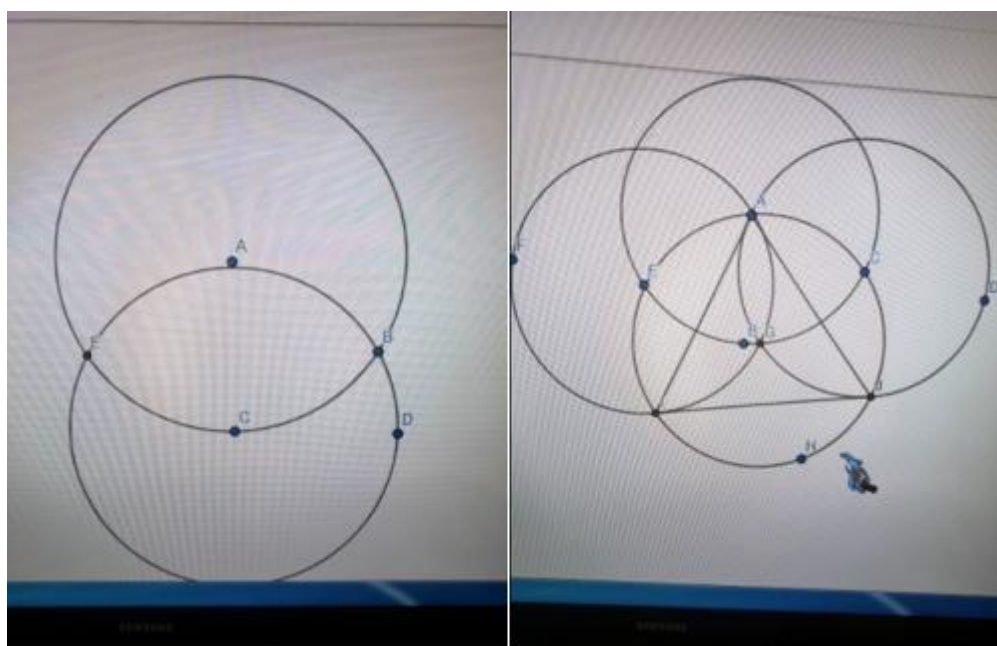
Fonte: Elaboração do aluno

Na figura 72 percebe-se que o aluno fez corretamente as construções usando as instruções e o passo a passo, e relevante ressaltar que o aluno ficou entusiasmado e motivado de fazer as duas maneiras diferentes de construir um

triângulo equilátero, fazendo as verificações no final para saber se os lados eram iguais e media com o transferidor para ver se o ângulo interno tinha 60° . Nesse intuito acredita-se que o aluno passa a ser um investigador do conhecimento e não mero receptor da informação, que vai aceitando a informação delegada pelo professor.

Já na figura 73 abaixo temos a mesma construção feita por um aluno, que usou o GeoGebra para fazer o triângulo equilátero. Nessa construção o instrumento motivador da pesquisa foi o fato do aluno se inserir no contexto da sala de aula, sendo de certa forma uma inclusão, visto que era um aluno que não participava alegando sempre que não tinha compasso. A primeira imagem da figura 73 seria um esboço.

Figura 73- Construção de triângulo equilátero por um aluno do 8 ano/ GeoGebra



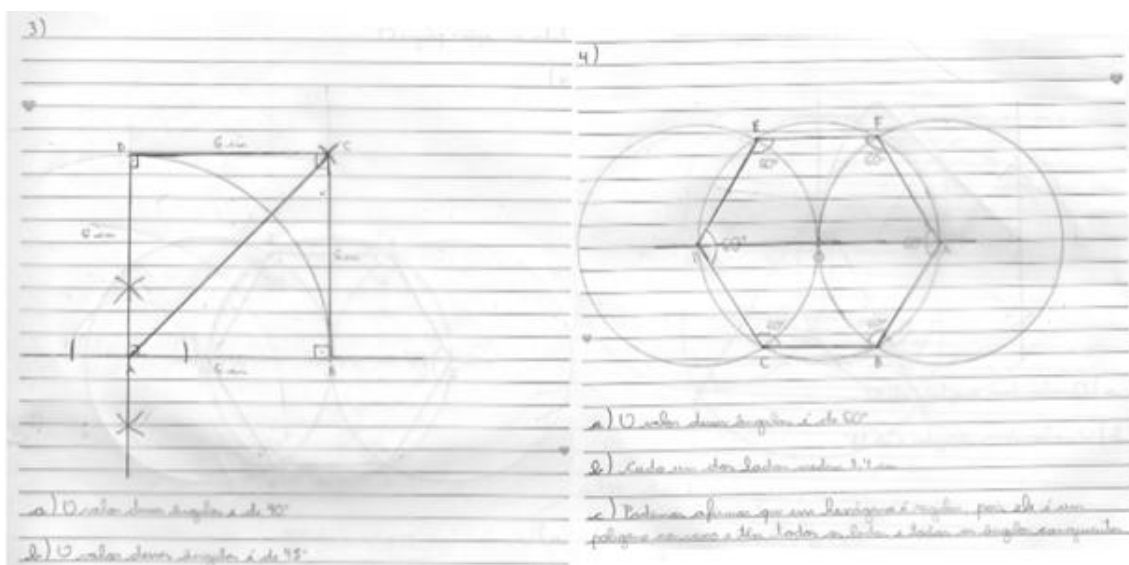
Fonte: construção do aluno

Na figura 74 a aluna fez as construções do quadrado e do hexágono usando régua e compasso, o exercício a aluna confessou que achou a construção do quadrado mais complicada e precisou de auxílio. Percebeu-se durante as atividades que vários outros alunos também precisaram de auxílio para construção do quadrado, enquanto que para a construção do hexágono, não precisaram de tanto auxílio, sendo considerado de maior facilidade de execução ou menos complicada. Muitos alunos confundiram o valor do ângulo interno do

hexágono e anotaram 60° que foi corrigido pelo professor. Tal intervenção foi feita de forma construtiva, ciente do papel do professor como peça fundamental na construção do conhecimento dos alunos. Nestes momentos o professor fez questionamentos a respeito e fez com que os próprios alunos verificassem seus erros se interpolarem a respeito. Desta forma, o protagonismo da aquisição do conhecimento resta permanentemente centrada no próprio aluno.

Neste exercício inquiriu-se sobre a possibilidade de ao ligar os vértices e formar seis triângulos, e em seguida os alunos foram questionados se esses triângulos são equiláteros. Através dessas interações ficou claro que houve um progresso em relação as interpretações dos testes de Van Hiele, já que os alunos passaram a ter uma dedução informal mais apurada e uma organização mais relevante sobre a Geometria.

Figura 74–Construção de um quadrado e um hexágono por um aluno do 8º ano.



Fonte: Construção do aluno.

5.4 Breve Análise dos Resultados comparada com pesquisas afins

Fazendo uma busca de pesquisas similares, tivemos a oportunidade de encontrar 2 estudos de revisão bibliográfica sistemática das pesquisas

ocorridas no Brasil que se utilizaram do método Van Hiele para o ensino da Geometria. No trabalho de Silva e Dias (2020) foi feito um mapeamento de todos os trabalhos apresentados nos Encontros Nacional de Educação Matemática (ENEM) que continham o método Van Hiele como proposta de trabalho entre os anos de 2001 até 2016, e foram obtidos 35 trabalhos.

Pôde-se notar um aumento expressivo de trabalhos utilizando o método Van Hiele desde a VII edição do ENEM (2001) até a XII edição (2016), tanto em comunicação científica como relato de experiência. Silva e Dias (2020) perceberam nos trabalhos estudados que a maioria dos pesquisadores notaram um ensino deficitário da geometria e essa foi a principal justificativa para o uso do método Van Hiele. Comparando com os resultados obtidos, os alunos do nosso estudo partiram de um conhecimento a priori um pouco mais avançado do que os relatados nos trabalhos coletados por Silva e Dias (2020), já que os nossos alunos apresentaram em média o desempenho no nível 1, enquanto que os da revisão sistemática em sua maioria estavam ainda no nível 0.

Esse resultado nos fez suscitar a dúvida sobre o sistema online que a situação de pandemia nos obrigou a trabalhar. Não podemos concluir realmente se os nossos alunos apresentaram um nível um pouco mais elevado por estarem em situação de home-office e poderem partilhar de conhecimentos e realizar consultas ou se já tinham realmente esse conhecimento prévio mais embasado. Tendemos a acreditar que a situação de pandemia permitiu um maior acesso ao conteúdo por parte dos alunos antes de resolver as questões, ainda que tivesse sido solicitado a não consulta de materiais extras.

Outra dificuldade na comparação do nivelamento dos alunos entre estudos de pesquisa diferentes é justamente o relatado por Silva e Dias (2020) no que tange à nomenclatura do nível dentro da classificação de Van Hiele. Neste estudo foi notado uma divergência de nomenclatura muito grande já que no primeiro nível foi apresentado 3 nomes diferentes, no segundo nível 2 nomes diferentes, no terceiro nível 7 nomes diferentes no quarto nível com 5 nomes diferentes e no quinto nível com 2 nomes diferentes. Essa divergência com certeza dificulta a comparação e principalmente a construção do conhecimento e utilização da ferramenta estudada.

Outro fator importante a ser relatado é que apenas um único trabalho (entre todos os 35 estudos) fez a associação de métodos (SILVA & DIAS, 2020), utilizando o Van Hiele e a Engenharia Didática, como foi feito no presente estudo. A grande maioria optou por utilizar somente o método Van Hiele na íntegra, desde o estudo a priori, perpassando pela técnica de didática até a análise do resultado final. Muito provavelmente esta opção se deu pelo fato de que o método Van Hiele é mais específico para o estudo da geometria, enquanto que a Engenharia Didática é um método mais amplo, podendo ser utilizado em uma gama ampla de áreas. No entanto, devido à facilidade do pesquisador com a ferramenta da Engenharia Didática, optou-se por mesclar os testes a priori de Van Hiele, por serem mais específicos para a geometria, e a didática oferecida pela Engenharia Didática. Ao fazer uma análise mais aprofundada deste único estudo que mesclava ambos os métodos, não foi possível elucidar o motivo pelo qual Martins (*et alli*, 2013) se utilizou também da Engenharia Didática como ferramenta aliado ao Van Hiele. Notou-se no entanto, que a construção da pesquisa desse autor foi bastante semelhante à relatada pelo nosso estudo, com a fase de diagnóstico utilizando os testes de Van Hiele e a Engenharia Didática na construção do material de ensino e do método didático.

Outro fato interessante a ser notado são os instrumentos utilizados pelos pesquisadores, que no geral se baseiam com o uso de tangram, fiplan, origami, construções geométricas com régua e compasso e também o uso de materiais sólidos geométricos (SILVA & DIAS, 2020). No nosso trabalho optamos pelo uso do tangram e construções geométricas com régua e compasso. Inicialmente havia se pensado em utilizar materiais sólidos, mas não foi possível pela situação de pandemia. O próprio uso do compasso ficou bastante aquém do esperado, já que o ensino à distância constituiu uma barreira para a manipulação deste instrumento para alguns alunos.

Por este motivo da distância, optou-se por incluir ambientes computacionais associado às atividades propostas. Na revisão sistemática de Silva e Dias (2020) foram utilizados os softwares Superlogo, Poly, Cabri Géomètre, Geometer's Sketchpad e animações em geral. Nenhum deles utilizou o GeoGebra, que foi o utilizado no nosso estudo. Optamos por este software por

ele apresentar um layout bastante simples e intuitivo, com a facilidade de apresentar a opção totalmente em português, ser totalmente online (não necessitando o download) e gratuito. Na verdade, foi uma grande surpresa perceber que nenhum dos trabalhos trazidos por Silva e Dias (2020) utilizaram o GeoGebra, já que é um software bastante comum no meio acadêmico matemático no Brasil.

Como síntese da comparação dos trabalhos, o que se pôde notar é que o ambiente do ensino à matemática nas escolas é bastante desafiador e o uso de ferramentas e métodos já consolidados traz um diferencial que permite ao professor um melhor aproveitamento para os alunos. Silva e Dias (2020) relata que o uso do método Van Hiele em todos os estudos permitiu que o professor se preparasse melhor em sala de aula e conseqüentemente acredita-se que haja um melhor aproveitamento por parte dos alunos.

No nosso caso específico, acreditamos que o uso consorciado de ambos os métodos traz um aprimoramento das técnicas de ensino, ainda que não tenha sido possível executá-lo da forma como havia sido planejado inicialmente. Ressalta-se que quase todo o desenvolvimento experimental da pesquisa teve que ser realizado durante o período de pandemia, algo que não havíamos previsto inicialmente. Desse modo, fomos obrigados a nos reinventar para dar conta do cumprimento do currículo que havia sido planejado para ser realizado na forma presencial e passou para a remota, na modalidade virtual.

As atividades da sequência didática que estávamos elaborando foram abruptamente modificadas, tanto na forma quanto no conteúdo, pois havia cobrança do cumprimento do currículo, pela escola e pelos pais. Estávamos diante do grande desafio de trabalhar home office e sendo obrigados a utilizar novas ferramentas e estratégias para as quais não havíamos sido preparados. Dar continuidade à pesquisa se tornou um grande desafio, pois de imediato percebemos que não haveria tempo e nem condições para a aplicação da sequência de atividades prevista para a modalidade presencial. Tanto é verdade que a avaliação do conhecimento adquirido foi avaliada a partir das atividades realizadas durante as aulas. A avaliação ideal nesta última fase do projeto, ao ver do pesquisador, deveria ter sido realizada através de novos testes do Van

Hiele, mas não foi possível de ser aplicada devido às intercorrências provenientes da pandemia.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS

O presente trabalho demonstrou claramente a utilidade do uso do modelo teórico de Van Hiele para aprimoramento da abordagem didática de conteúdos da Geometria para alunos do 8º ano. A partir do momento que o professor tem um diagnóstico prévio do conhecimento dos alunos em mãos, fica bem mais fácil planejar e depois trabalhar as atividades propostas. As aulas fluem de forma mais interativa, e os alunos podem se tornar verdadeiros detentores do próprio saber, buscando sanar e construir lacunas ou articulações entre conceitos.

Restou evidente que os testes de Van Hiele servem para nivelar o grau educacional de cada aluno, e este fato é uma informação importante para o professor projetar e preparar suas aulas. Tenta-se assim, maximizar o ensino em sala e ao mesmo tempo minimizar a exclusão de alunos com mais dificuldades e que muitas vezes passa despercebido pelo professor.

Além disso, o uso de instrumentos como régua, compasso, esquadro e transferidor; para as construções geométricas também se mostrou efetivo, pois os alunos percebem este momento como um aprendizado lúdico em que eles conseguem não somente visualizar como comprovar experimentalmente os postulados geométricos. Tal formato de aprendizado demonstrou essencial para a evolução do nível de Van Hiele. Vale ressaltar que o uso do software GeoGebra também foi um aliado importante porque complementou a construção geométrica realizada com os instrumentos.

A maioria dos alunos não apresentou dificuldades com o GeoGebra, mostrando ser uma ferramenta eficaz como auxílio do professor, pois até mesmo os alunos com dificuldade na manipulação dos instrumentos (ou ausência de material) foram capazes de realizar as atividades no software. Nesse sentido o software se mostrou além de um material diverso, uma ferramenta de inclusão, pois muitos alunos que não dispunham de compasso conseguiram acompanhar o desenvolvimento da sala sem ficar desmotivados.

Ressalta-se o grande número de abstenções nas atividades (quase 50%), que era esperado por não serem atividades obrigatórias e sem a possibilidade de pontuação extra pelos alunos. Acredita-se que o fato de estarem sendo realizadas de forma remota, por conta da situação de pandemia, deve ter contribuído para o índice de abstenção, sendo provavelmente o principal responsável pelo desinteresse por parte de alguns alunos. No entanto, no decorrer do curso, a interatividade teve um ligeiro aumento, o que demonstra novamente que um planejamento prévio das atividades com base em princípios da metodologia da Engenharia Didática, acaba por estimular os alunos a participarem ativamente das aulas.

O maior desafio apresentado pelo projeto sem dúvida foi a situação de pandemia, que se concretizou após o início do projeto e teve que ser adaptado quando este já se encontrava em curso. Com certeza esses fatores extraclasses influenciaram toda uma cadeia educacional, econômica e social em todo o mundo, e não seria diferente no nosso projeto. Até o momento é impossível mensurar e avaliar com precisão as implicações dessa pandemia de uma forma macro-educacional ou mundial, as perdas nessa área certamente são incomensuráveis e de maneira micro-educacional os prejuízos ainda estão sendo contabilizados.

Em síntese, é fato que o ensino tal qual proposto pelo projeto demanda uma dedicação maior do professor, já que ele terá que administrar o tempo desde a elaboração dos testes iniciais, até os testes finais, em constante aperfeiçoamento das escolhas didáticas, conforme foi observada na avaliação dos resultados apresentados pelos alunos. O gerenciamento deste tempo com a proposta curricular da escola é um desafio no qual a maioria dos professores não estão habituados, e acreditamos ser necessário treinamento constante estudos e formação continuada do professor para que não se desestimele no processo. No entanto, acreditamos que todas as dificuldades enfrentadas são prontamente relevadas quando se percebe a participação ativa dos alunos na construção do próprio conhecimento.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARTIGUE, M. Engenharia didática. In BRUN, Jean (Org.). **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Jean Piaget, 1996.
- BARBOSA, G. **O currículo de Matemática da Rede Estadual de Ensino de São Paulo**. São Paulo: Dissertação de Mestrado, UNINOVE, 2019.
- BITTAR, M. & FREITAS, J. L. M. **Fundamentos e metodologia de matemática para os ciclos iniciais do ensino fundamental** – 2ª ed. Campo Grande-MS: Ed. UFMS, 2005.
- BONJORNO, J. R.; BONJORNO, R. A.; OLIVARES, A. **Matemática Fazendo a Diferença. 6ª série, (Coleção Fazendo a Diferença)**. São Paulo/SP: FTD, 2006.
- BRASIL^a, BNCC – **Base Nacional Comum Curricular**, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wpcontent/uploads/2018/11/7._Orienta%C3%A7%C3%B5es_aos_Conselhos.pdf
- BRASIL^b, Ministério da Educação, (1999). **Parâmetros Curriculares Nacionais** para o Ensino Fundamental. Brasília, MEC/SEF. _____. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>.
- BRASIL^c. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC: Secretaria de Educação Fundamental, 1998.
- BONGIOVANNI, V. **Sobre definições de trapézio isósceles**. Revista do professor de Matemática, São Paulo: IME-USP, n. 72, 2010.
- COSTA, E. A. S. & ROSA, M.^a **Historiando o desenvolvimento do desenho geométrico: das inscrições nas cavernas à contemporaneidade**. Santa Maria: VIDYA, v. 35, n. 1, p. 57-69, jan/jun, 2015.
- COSTA, E. A. S. & ROSA, M.^b **Fragmentos Históricos do Desenho Geométrico no Currículo Matemático Brasileiro**. Artigo, Universidade Federal de Juiz de Fora, 2015.
- FRANCO JR., H. **A idade média: nascimento do ocidente**. São Paulo, SP: Brasiliense, 2001.

LINDQUIST, M. M. & SHULTE, A. P. **Aprendendo e Ensinando Geometria**. São Paulo: Atual, 1994.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **A transdisciplinaridade como acesso a uma história holística in: Rumo a nova transdisciplinaridade: sistemas abertos de conhecimento**. São Paulo, Summus, 1996.

DENZIN, Norman K; LINCOLN, Yvonna S. **O planejamento da pesquisa qualitativa: teoria e abordagens**. Artmed, 2006.

GODOY, A. S. Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades. *Revista de Administração de Empresas*, v. 35, n. 2, p. 57 – 63, Março/Abril 1995.

SILVA, M.A.R.; MARTINS, G. H.; PUGGIAN, C. **Seqüências didáticas para o ensino de geometria: uma experiência de apoio à escola técnica do Estado do Rio de Janeiro**. *Revista de Educação, Ciências e Matemática*, v. 2, n. 2, 2012.

MARTINS, G. H *et ali*. **Geometria finita como uma alternativa metodológica para o desenvolvimento do pensamento geométrico: uma experiência com alunos do ensino médio**. Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática, Curitiba, 2013.

MINAYO, C. S. **Pesquisa Social Teoria, Método e Criatividade**. Ed. Vozes. Petrópolis, RJ, 1994.

MUNIZ NETO, A. C. **Tópicos de Matemática Elementar Volume 2 Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro: SBM, 2ª ed., 2013.

NASSER, L.; SANTANNA, N. P. **Geometria segundo a teoria de van Hiele**. Dissertação (Mestrado) — UFRJ, Rio de Janeiro, 1997.

OLIVEIRA, S. G. da S. **Um estudo de argumentações produzidas por alunos do 8º ano em atividades de construções geométricas envolvendo pontos notáveis de triângulo**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Mestrado em Educação Matemática, Campo Grande, 2009.

PAIS, L. C. **Intuição, experiência e teoria geométrica**. Zetetike, vol. 4, n. 6, Campinas- SP: UNICAMP, 1996.

PUTNOKI, J. C. **Elementos de Geometria e Desenho Geométrico**. Rio de Janeiro: Scipione, 1993.

ROQUE, T & CARVALHO, J.B.P. **Tópicos de História da Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, Coleção PROFMAT, 03, 2012.

SANCHES, I. **Compreender, agir, mudar, incluir. da investigação - ação à educação inclusiva**. Revista Lusófona de Educação, n. 5, p. 127 – 142, 2005.

SANTOS, M. S. & SANT'ANNA, N. F. P. **O ensino de geometria e a Teoria de Van Hiele: Uma abordagem através do laboratório de ensino de matemática no 8º ano da Educação Básica**. Dissertação de Mestrado Profissional em Práticas de Educação Básica do Colégio Pedro II (MPPEB-CP II), Rio de Janeiro-RJ. Coletado em https://www.ufjf.br/ebrapem2015/files/2015/10/gd2_marcele_santos.pdf, no dia 15 de dezembro de 2020.

SÃO PAULO – SECRETARIA ESTADUAL DE EDUCAÇÃO. **Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática/ Coord. Maria Inês Fini**. São Paulo: SEE, 2008.

SÃO PAULO – SECRETARIA ESTADUAL DE EDUCAÇÃO. **Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias/ Secretaria da Educação**. São Paulo: SE, 1ª edição, 2011.

SÃO PAULO – SECRETARIA ESTADUAL DE EDUCAÇÃO. **Currículo Paulista- Versão 1- Encontros Regionais 22 a 30 de outubro/ Matemática**. São Paulo: SE, 1ª edição, 2018.

SILVA, G. F. & DIAS, M. O. **Modelo Geométrico de Van Hiele: Estado da Arte nos encontros nacionais de educação matemática (ENEM)**. Revista de Ensino de Ciências e Matemática – REnciMa, v. 11, n. 1, p. 169-188, 2020.

VAN HIELE, P. M. **The Van Hiele Model of thinking in Geometry among adolescents**. National Council of Teachers of Mathematics. Journal for research in Mathematics Education, Monograph Number 3, 1995.

WAGNER, E. **Construções Geométricas**. Rio de Janeiro: Graftex Comunicação Visual, 1993.

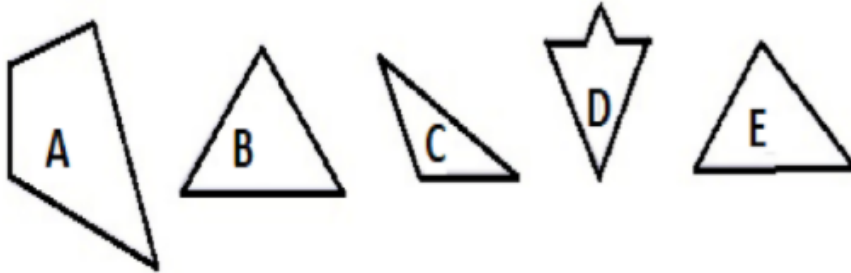
ZUIN, E. de S. L. **Da régua e do compasso: as construções geométricas como um saber escolar no Brasil**. Dissertação (Mestrado) — UFMG, Faculdade de Educação, 2001.

8. APÊNDICE

I - 1º TESTE DE VAN HIELE ADAPTADO PELO PESQUISADOR

1) Quais dos polígonos ao lado são triângulos *

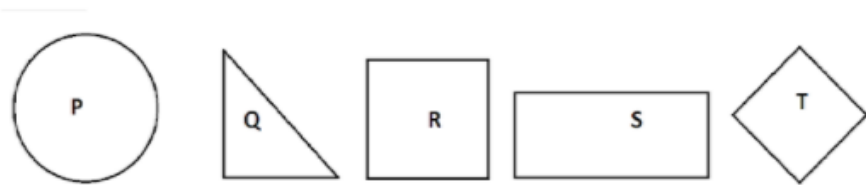
1 ponto



- A) A, B e C
- B) B, C e D
- C) B, C e E
- D) A, D e E
- E) Nenhuma das alternativas

2) Identifique quais são quadrados. *

1 ponto



- A) P e Q
- B) Q e R
- C) S e T
- D) R e T
- E) Nenhuma das alternativas

3)Quais das figuras abaixo são retângulos. *

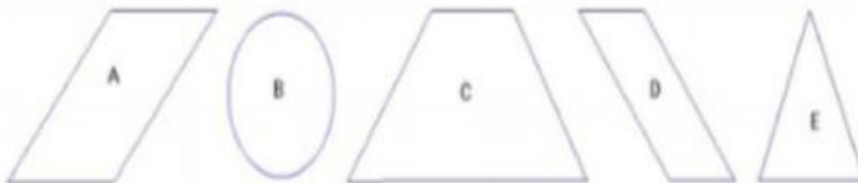
1 ponto



- A) M e K
- B) O e T
- C) L e K
- D) O e L
- E) Nenhuma das alternativas

4)Quais dos poligonos são paralelogramos *

1 ponto



- A) B e D
- B) A e D
- C) A e C
- D) E e C
- E) Nenhuma das alternativas

5) Quais retas são paralelas *

1 ponto



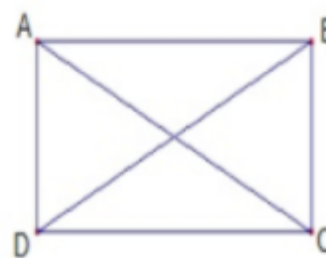
- A) B e D
- B) A e C
- C) C e E
- D) B e E
- E) Nenhuma das alternativas

6) Analise a questão *

1 ponto

– No retângulo ABCD, as linhas AC e BD são chamadas de diagonais.
Assinale a(s) afirmativa(s) verdadeira(s) para todos os retângulos:

- i) Têm 4 ângulos retos.
- ii) Têm lados opostos paralelos.
- iii) Têm diagonais de mesmo comprimento.
- iv) Têm os 4 lados iguais.
- v) Todas são verdadeiras.



- A) Somente a alternativa V esta correta
- B) Somente as alternativas I, II e IV
- C) Somente as alternativas I, II e III
- D) Somente as alternativas I e III

7) Assinale a alternativa correta *

1 ponto

- Dê 3 propriedades dos quadrados:

- 1 -
2 -
3 -



- A) Lados iguais, ângulos de 60 graus e lados opostos paralelos
- B) Lados iguais, ângulos de 90 graus e lados opostos paralelos
- C) Diagonais diferentes, ângulos de 90 graus e lados opostos paralelos
- D) Diagonais iguais, ângulos de 45 graus e lados opostos paralelos

8) Todo triângulo isósceles tem 2 lados iguais. Assinale a alternativa correta sobre os ângulos do triângulo isósceles. *

1 ponto

- A) Pelo menos um dos ângulos possui 60 graus
- B) Um dos ângulos do triângulo mede 90 graus
- C) Dois ângulos necessariamente são iguais
- D) Nenhuma das alternativas está correta

9) Assinale a alternativa cuja o quadrilátero que não possui as diagonais do mesmo tamanho. *

1 ponto

- A) Trapézio
- B) Quadrado
- C) Retângulo
- D) Nda

10) Assinale a afirmativa correta *

1 ponto

- Dê 3 propriedades dos paralelogramos.

1-

2-

3-



- A) Lados opostos paralelos, ângulos opostos congruentes, 4 lados iguais.
- B) Lados opostos paralelos, ângulos opostos congruentes, lados opostos congruentes.
- C) Lados opostos paralelos, 3 ângulos de 90 graus, 4 lados iguais.
- d) Nenhuma das alternativas corretas

II – 2º TESTE DE VAN HIELE ADAPTADO PELO PESQUISADOR

Atividade Matemática 2

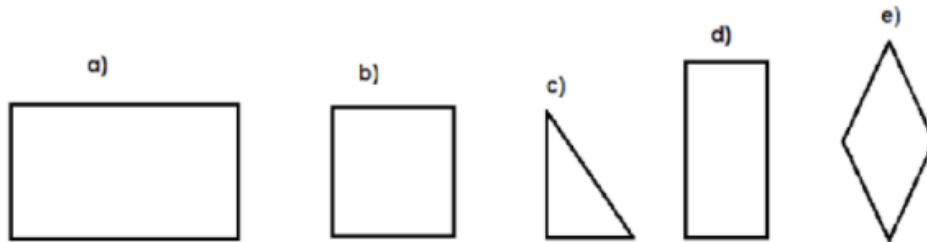
Descrição do formulário

Endereço de e-mail *

Endereço de e-mail válido

Este formulário coleta endereços de e-mail. [Alterar configurações](#)

1) Assinale as alternativas que podem representar um retângulo. *



- A) a, b, c
- B) a, b, d
- C) b, c, e
- D) c, d, e
- E) a, b, e

2) Dado um quadrilátero ABCD, onde os quatro ângulos são todos iguais. Podemos dizer que o quadrilátero ABCD é um quadrado? Se sim por que? Se não por que? *

Texto de resposta curta

3) Podemos afirmar que um retângulo, é um paralelogramo? Se sim por que? Se não por que?

Texto de resposta curta

4) Sobre as afirmativas.
II) A figura X é um triângulo?

I) A figura X é um retângulo?

*

- A) Se afirmação I é verdadeira então afirmação II é verdadeira
- B) Se afirmação I é falsa então afirmação II é verdadeira
- C) I e II ambas não podem ser verdadeiras
- D) I e II ambas não podem ser falsas
- E) Se II é falsa isso significa que I é verdadeira

5) Assinale corretamente a alternativa que relaciona as propriedades do retângulo e do quadrado.

*

- A) Qualquer propriedade dos quadrados é válida para os retângulos
- B) Uma propriedade dos quadrados nunca é propriedade dos retângulos
- C) Qualquer propriedade dos retângulos é propriedade dos quadrados
- D) Uma propriedade dos retângulos nunca é propriedade dos quadrados
- E) Nenhuma das alternativas anteriores

III- EXERCÍCIOS ELABORADOS PELO PESQUISADOR PARA OS ALUNOS DO 8º ANO

Trabalho de matemática 8 anos COLÉGIO EDUCATIVA

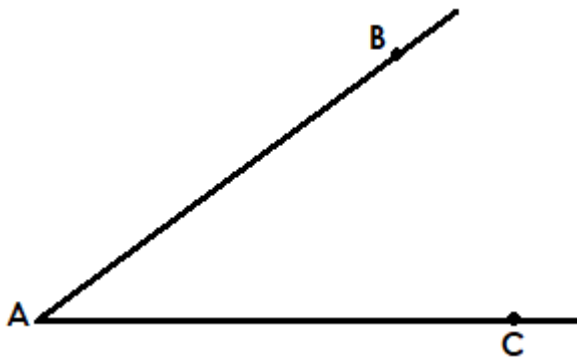
ALUNO:

Série:

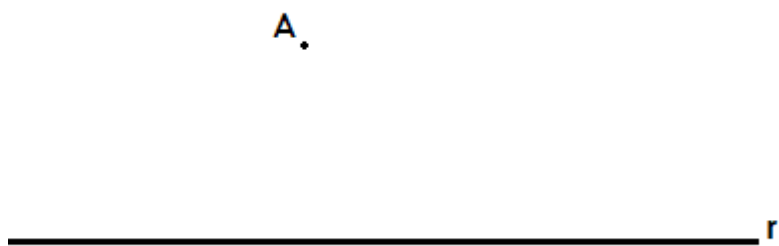
- 1) Dado o segmento abaixo, usando uma régua e compasso determine a reta mediatriz. Explique usando congruência de triângulos por que a mediatriz divide o segmento AB no ponto médio.

A _____ B

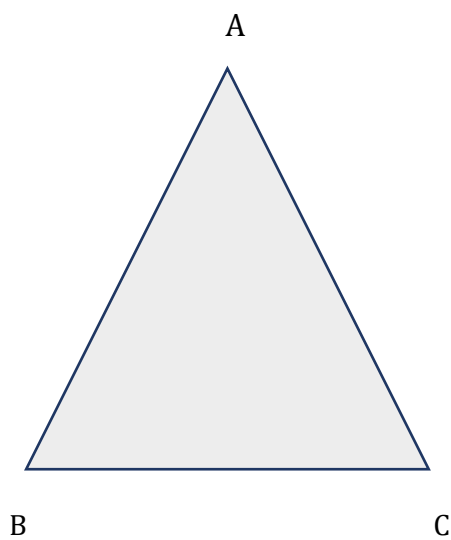
2) Dado o ângulo abaixo determine sua bissetriz usando régua e compasso.



- 3) Dado um ponto A e uma reta r não passando por ele determine uma reta perpendicular à reta r que passa pelo ponto A .

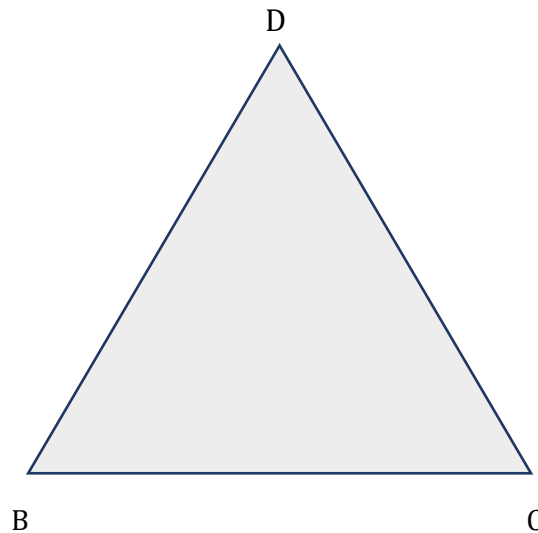


- 4) Considere o triângulo isósceles ABC da figura ($AB = AC$)

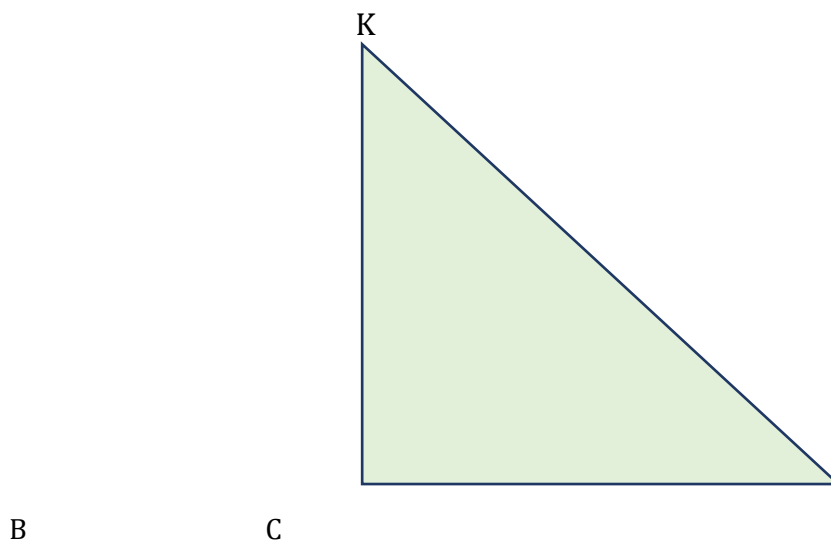


- a) Trace a altura, a mediana e a bissetriz interna relativas ao vértice A
- b) Obtenha o BARICENTRO **G** do triângulo isósceles ABC.
- c) Obtenha o INCENTRO **I** do triângulo isósceles ABC.

5) Considere o triângulo EQUILÁTERO DBC da figura ($DB = DC = BC$)



- d) Trace a altura, a mediana e a bissetriz interna relativas ao vértice D.
 - e) Obtenha o ortocentro **O** do triângulo EQUILÁTERO DBC.
 - f) Obtenha o BARICENTRO **G** do triângulo equilátero DBC.
- 6) Considere o triângulo retângulo KBC da figura.




- g) Obtenha o ortocentro **O** do triângulo retângulo KBC.
- h) Obtenha o CIRCUNCENTRO **C** do triângulo retângulo KBC.

9. ANEXOS

Anexo A. Construção do tangram usando o GeoGebra

ENTRE EM AÇÃO



O tangram é um quebra-cabeça de origem chinesa composto por quadriláteros e triângulos, conforme a figura a seguir.

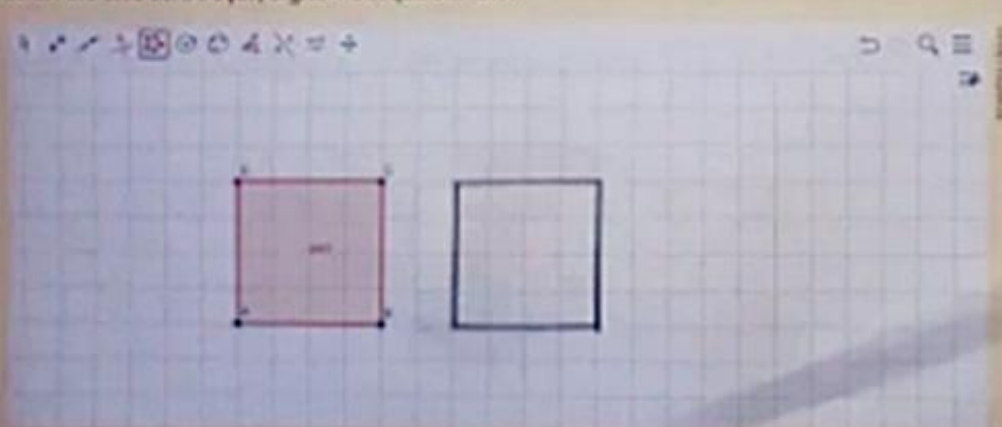


Nessa atividade, você construirá um tangram em software de geometria dinâmica. Para isso, acesse o site <<https://www.geogebra.org/classic>> (acesso em: 17 jan. 2023) e siga o algoritmo a seguir.

Orientações:

Desabilite a opção "Eixos". Para isso, com a seta do mouse em cima da malha, aperte o botão direito e clique em "Eixos".

Para a construção do tangram, precisamos gerar inicialmente um quadrado, ou seja, um polígono regular de 4 lados. Assim, selecione a opção  "Polígono", disponível na barra de ferramentas, localizada no canto superior esquerdo. Em seguida, selecione  "Polígono regular". Com a ferramenta selecionada, marque os pontos com distância de 4 unidades entre eles, na horizontal. Note que, ao selecionar os pontos, uma caixa se abrirá solicitando que indique o número de vértices que o polígono terá. Para essa construção, digite 4 e clique em "OK".



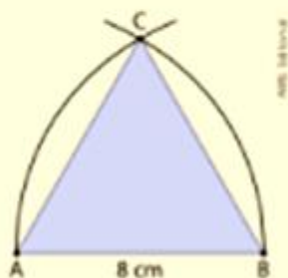
ANEXO B. Construções diversas usando régua e compasso

ENTRE EM AÇÃO

A proposta da seção é apresentar a construção de três polígonos regulares importantes, já apresentados: o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono regular. Para isso, precisaremos de régua, folhas de papel A4, compasso e transferidor.

1. Construção de triângulo equilátero conhecendo a medida de seu lado.

- Iniciamos a construção de um triângulo equilátero ABC com a construção de um segmento AB de medida igual a 8 cm.
- Em seguida, com a mesma abertura $AB = 8$ cm e com a ponta-seca do compasso em A, descrevemos um arco de raio igual a 8 cm.
- Com a ponta-seca do compasso em B, repita o processo anterior. Observe que os dois arcos se interceptam no ponto que nomearemos como C.



- Agora, meça com o transferidor os três ângulos internos do triângulo ABC. Em seguida, responda às questões propostas.
 - a) Qual é a medida de cada ângulo interno do triângulo ABC?

 - b) Por que podemos afirmar que o triângulo ABC é equilátero?

2. Construção de triângulo equilátero a partir de uma circunferência.

- Iniciamos a construção de uma circunferência de centro O e de raio igual a 8 cm.
- Marque um ponto qualquer na circunferência e nomeie esse ponto como ponto A .
- Com a ponta-seca do compasso em A , faça uma circunferência, de raio 8 cm, marcando dois pontos (D e E) nas interseções com a circunferência.
- Com o mesmo raio de 8 cm e com a ponta-seca do compasso em D , faça uma nova circunferência, marcando um ponto B , na interseção com a circunferência.
- Repita o procedimento anterior, com o mesmo raio de 8 cm e, agora, com a ponta-seca do compasso em E .
- Descreva uma nova circunferência, marcando um ponto C na interseção com a circunferência.
- Trace os segmentos AB , BC e AC . O triângulo ABC obtido é equilátero.
- Agora, meça com o transferidor os três ângulos internos do triângulo ABC . Em seguida, responda às questões propostas.

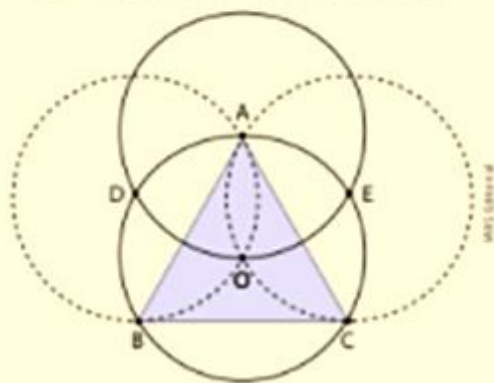
a) Qual é o valor desses ângulos, em graus?

60°

b) Qual é a medida, em centímetros, dos lados AB , AC e BC do triângulo ABC ?

Cerca de 14,1 cm.

c) Qual é a medida, em graus, do menor arco AC ? E do menor arco AB ? E do menor arco BC ?



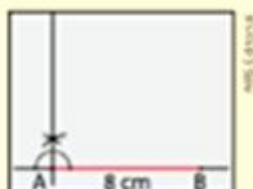
MAZ LIBRARY

3. Construção de quadrado conhecendo a medida de seu lado.

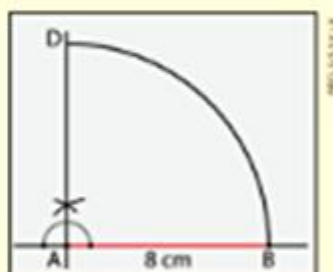
- Iniciamos a construção de um quadrado ABCD, traçando um segmento AB de medida igual a 8 cm.



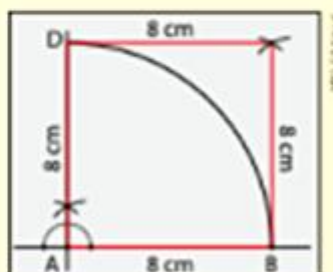
- Pelo ponto A, trace uma reta perpendicular a AB.



- Com centro no ponto A, trace um semicírculo de abertura igual a 8 cm. Ele intercepta a reta perpendicular a AB no ponto D. Tal ponto representa o terceiro vértice do quadrado ABCD.



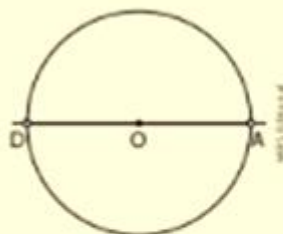
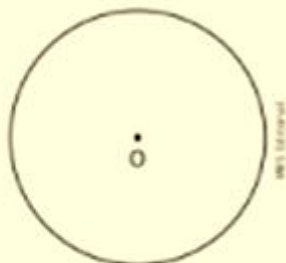
- Com centros em B e depois em D e com o compasso na abertura de 8 cm, trace semicírculos que se interceptam em C. Esse ponto representa o quarto vértice do quadrado ABCD.



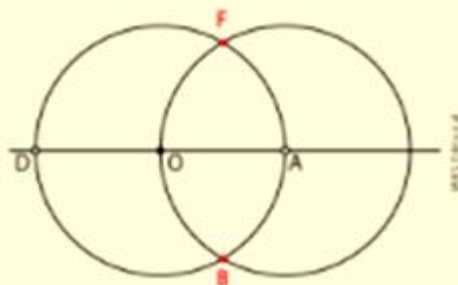
- Agora, meça com o transferidor os quatro ângulos internos do quadrado ABCD. Em seguida, responda às questões propostas.
 - a) Qual é o valor desses ângulos, em graus?
 - b) Trace o segmento AC e meça os ângulos \widehat{BAC} e \widehat{CAC} . Qual é o valor desses ângulos, em

4. Construção de hexágono regular.

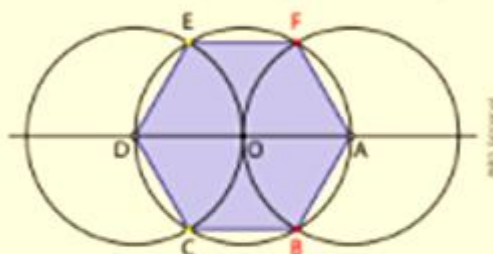
- Iniciamos a construção de um hexágono regular com a construção de uma circunferência de centro O com abertura qualquer.
- Trace uma reta passando pela origem O e, nas interseções com a circunferência, marque os pontos A e D .



- Com centro em A , construa uma circunferência de raio OA e marque os pontos B e F , interseções com a primeira circunferência.



- Com centro em D , descreva uma circunferência de raio OD e marque as interseções com a primeira circunferência como C e E . Temos um hexágono regular $ABCDEF$ ligando os pontos A , B , C , D , E e F .



- Agora, meça com o transferidor os seis ângulos internos do hexágono regular $ABCDEF$. Em seguida, responda às questões propostas.

a) Qual é o valor desses ângulos, em graus?

120°

b) Meça com uma régua todos os lados desse hexágono. Qual é a medida de cada um desses lados?