



Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

Grupos de tranças de superfícies finitamente perfuradas e grupos cristalográficos

Renato dos Santos Diniz

Orientador: *Daniel Ventrúscolo*

Coorientador: *Oscar Eduardo Ocampo Uribe*

São Carlos
Dezembro de 2020

Grupos de tranças de superfícies finitamente perfuradas e grupos cristalográficos

Renato dos Santos Diniz

Orientador: *Daniel Ventrúscolo*

Coorientador: *Oscar Eduardo Ocampo Uribe*

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Matemática, área de concentração: Topologia Algébrica.

São Carlos
Dezembro de 2020



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Defesa de Tese de Doutorado do candidato Renato dos Santos Diniz, realizada em 07/12/2020.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Daniel Ventrúscolo (UFSCar)

Prof. Dr. Oscar Eduardo Ocampo Uribe (UFBA)

Profa. Dra. Carolina de Miranda e Pereiro (UFES)

Prof. Dr. Daciberg Lima Gonçalves (USP)

Prof. Dr. John Guaschi (UNICAEN)

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática.

*Com muito amor e carinho dedico este trabalho aos meus avós, Bernadete e Jaime, à
minha mãe, Ivone Alves, e meus irmãos, Diego e Mylena.*

"Na realidade, o processo de criar uma nova matemática é uma busca apaixonada, uma experiência profundamente pessoal, exatamente como criar arte e música. Exige amor e dedicação, uma luta contra o desconhecido e consigo mesmo que provoca emoções fortes."(Livro: Amor e Matemática - Cap.18 - Em Busca da fórmula do amor - p. 274)

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente a Deus, pela força e saúde durante toda minha caminhada, sendo minha verdadeira fortaleza. Sem Ele nada disso seria possível.

Meus professores e orientadores, Daniel Vandrúscolo e Oscar Ocampo, quero deixar aqui registrado o meu agradecimento e gratidão pelas incansáveis horas disponibilizadas e dedicadas para comigo. Vocês são pessoas incríveis e profissionais admiráveis, os quais me inspiram e os tenho como exemplos. Espero que um dia eu me torne para meus orientandos metade do que vocês são para mim e, assim, já estarei satisfeito! Não tenho palavras para externar o carinho e o respeito que tenho por vocês dois. Muito obrigado por confiar este projeto de pesquisa, não teria conseguido sem ajuda de vocês. Obrigado por me apoiarem nas horas difíceis que me encontrei, sempre dizendo: “estamos juntos!” Isso fez toda diferença na minha caminhada.

Aos membros da banca julgadora, Carolina de Miranda e Pereiro, Daciberg Lima Gonçalves e John Guaschi. Agradeço pelas valiosas contribuições. Aproveito para registrar meu carinho e admiração pela carreira acadêmica.

Minha família, em especial meus avós, Jaime e Bernadete, minha mãe Ivone, meus irmãos, Diego e Mylena, meus tios, Naldinho, Ivete e Ivonete e minhas primas, Jullianny e Fabrícia.

Minhas amigas e anjos, as quais me guardaram em suas orações durante minha caminhada, Dona Nina, Elisângela, Guida e Inacinha.

Aos meus tesouros encontrados em São Carlos, pessoas que considero família e as quais tenho um amor muito grande. Essas pessoas fizeram meus dias mais coloridos e cheios de vida, quando tudo parecia triste e cinza, ali estavam eles para me animar e apoiar: Carolzinha (Meu L2), Karina (Moça virtuosa) e Wagner (Binho), amo muito vocês.

Esta pesquisa foi apoiada pela Universidade Federal do Recôncavo da Bahia. Agradeço ao Centro de Formação de Professores da UFRB, em específico, aos docentes da área de Matemática Pura e Aplicada, Elias Santiago, Felipe Fonseca, Ícaro Vidal e Olívio Santana.

Abstract

The link between braid groups on surfaces and crystallographic groups has become such an interesting topic. In the last years some advances were found in the studies of this relation, specially in the case of Artin braid groups and braid groups on closed surfaces (orientable or non-orientable). Our thesis work was strongly inspired by the works in [39] and [42], since here we finish the last cases about surfaces, to which we could ask: is there a relation between braid groups on surfaces and crystallographic groups? Here we analyse, with details, the interaction between braid groups on closed surfaces (orientable or non-orientable) with a finite number of points removed and crystallographic groups. Let X be a closed and finitely punctured surface (orientable or non-orientable). We present new results when X is a closed and finitely punctured surface (orientable or non-orientable) that has a link with crystallographic groups. We prove that the quotient group $B_n(X)/P'_n(X)$ is a crystallographic group, we characterize the finite order elements, i. e., we analyse its torsion subgroup and study the conjugacy classes of the finite order elements. When X is a non-orientable closed and finitely punctured surface with genus $g \geq 2$, we calculate a presentation for the braid groups $P_n(X)$ and $B_n(X)$. In the case of $P_n(X)$, we couldn't find any other presentation in the literature.

Keywords braid groups on finitely punctured surfaces; crystallographic groups; torsion subgroup; conjugacy classes of finite order elements.

Resumo

A conexão entre grupos de tranças de superfícies e os grupos cristalográficos é um tópico que tem se apresentado bem interessante. Nos últimos anos foram obtidos avanços consideráveis no estudo desta relação, no caso dos grupos de tranças de Artin e grupos de tranças de superfícies (orientáveis e não orientáveis) compactas e sem bordo. Indicamos que este trabalho de tese está fortemente inspirado e ligado aos trabalhos [39] e [42], uma vez que esta tese encerra todos os últimos casos de superfícies, para os quais cabe a pergunta: existe relação entre o grupo de tranças de superfícies e grupos cristalográficos? Nesta tese analisamos com detalhes a interação do grupo de tranças de superfícies (orientáveis e não orientáveis) compactas com um número finito de pontos retirados e os grupos cristalográficos. Seja X uma superfície (orientável ou não orientável) finitamente perfurada. Mostramos novos resultados quando X for uma superfície (orientável ou não orientável) finitamente perfurada que estabelecem conexão com os grupos cristalográficos. Demonstramos que o grupo quociente $B_n(X)/P'_n(X)$ é um grupo cristalográfico, caracterizamos os elementos de ordem finita, ou seja, analisamos o seu subgrupo de torção e estudamos as classes de conjugação dos elementos de ordem finita. Quando X é uma superfície não orientável compacta finitamente perfurada de genus $g \geq 2$, calculamos uma apresentação para os grupos de tranças $P_n(X)$ e $B_n(X)$. No caso do grupo de tranças puras $P_n(X)$ não encontramos nenhuma apresentação na literatura.

Palavras chave: grupos de tranças de superfícies finitamente perfuradas; grupos cristalográficos; subgrupo de torção; classes de conjugação de elementos finito.

Sumário

Introdução	xvii
1 Preliminares	1
1.1 Espaços de configuração e grupos de tranças de superfície	1
1.2 Apresentação de uma extensão de grupos	4
1.3 Grupos cristalográficos e grupos de Bieberbach	5
2 Grupos de tranças da esfera finitamente perfurada e grupos cristalográficos	9
2.1 O grupo quociente $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ é um grupo cristalográfico	9
2.2 Torção do grupo $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$	26
2.3 Classes de conjugação de elementos de ordem finita de $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$	40
3 Grupo de tranças de superfícies orientáveis de genus $g \geq 1$ finitamente perfuradas e grupos cristalográficos	53
3.1 O grupo quociente $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$ é um grupo cristalográfico	53
3.2 Elementos de ordem finita e suas classes de conjugação no grupo quociente $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$	68
4 Grupos de tranças de superfícies não orientáveis finitamente perfuradas e grupos cristalográficos	79
4.1 Uma apresentação do grupo de tranças puras de superfícies não orientáveis finitamente perfuradas	80
4.2 O grupo quociente $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$ é um grupo cristalográfico	90
4.3 Elementos de ordem finita e suas classes de conjugação no grupo quociente $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$	103
Apêndice A	113
Apêndice B	115
Referências Bibliográficas	141

Lista de Figuras

4.1	Representação geométrica do gerador $A_{i,j}$ (planar).	115
4.2	Representação geométrica do gerador σ_j (planar).	116
4.3	Representação geométrica do gerador $A_{i,j}$ (espacial).	116
4.4	Representação geométrica do gerador σ_j (espacial).	117
4.5	Representação geométrica de $\beta \in B_5(M_{0,2+1})$.	117
4.6	Representação geométrica de $\tilde{\beta} \in B_5(M_{0,2+1})$.	118
4.7	Representação geométrica de $\alpha \in B_4(M_{0,3+1})$.	118
4.8	Representação geométrica de $\tilde{\alpha} \in B_4(M_{0,3+1})$.	119
4.9	Representação geométrica de $\alpha_1 \in B_4(M_{0,3+1})$.	119
4.10	Representação geométrica de $\tilde{\alpha} \in B_4(M_{0,3+1})$.	120
4.11	Representação geométrica de $\gamma \in B_4(M_{0,3+1})$.	120
4.12	Representação geométrica de $\tilde{\gamma} \in B_4(M_{0,3+1})$.	121
4.13	Representação geométrica de $\gamma_1 \in B_4(M_{0,3+1})$.	121
4.14	Representação geométrica de $\gamma_2 \in B_4(M_{0,3+1})$.	122
4.15	Representação geométrica de $\gamma \in B_4(M_{0,3+1})$.	122
4.16	Representação geométrica da trança $\sigma_{p+1}\sigma_{p+2}\sigma_{p+3}\sigma_{p+1}\sigma_{p+2}$ em $B_n(M_{0,p+1})^+$.	123
4.17	Representação geométrica da trança $\sigma_{p+2}\sigma_{p+1}\sigma_{p+3}\sigma_{p+2}\sigma_{p+3}$ em $B_n(M_{0,p+1})^+$.	123
4.18	Representação geométrica do gerador a_r de $B_n(M_{g,p})$.	124
4.19	Representação geométrica do gerador b_r de $B_n(M_{g,p})$.	124
4.20	Representação geométrica do gerador z_t de $B_n(M_{g,p})$.	125
4.21	Representação geométrica do gerador σ_i de $B_n(M_{g,p})$.	125
4.22	Representação dos geradores de $P_n(M_{g,p})$ (espacial).	126
4.23	Duas representações geométricas do gerador $B_{i,j}$.	126
4.24	Geradores $\rho_{i,1}$ (em azul) e $\rho_{j,g}^{-1}$ (em vermelho).	127
4.25	Representação geométrica plana do gerador $B_{i,j}$ (em azul) e $B_{i,j}^{-1}$ (em vermelho) do grupo de tranças puras $P_n(N_{g,p})$.	127
4.26	Representação geométrica espacial do gerador $B_{i,j}$ (em azul) e $B_{i,j}^{-1}$ (em vermelho) do grupo de tranças puras $P_n(N_{g,p})$.	128
4.27	Representação geométrica plana do gerador $\rho_{j,k}$ (em azul) e $\rho_{j,k}^{-1}$ (em vermelho) do grupo de tranças puras $P_n(N_{g,p})$.	128

4.28	Representação geométrica espacial do gerador $\rho_{j,k}$ (em azul) e $\rho_{j,k}^{-1}$ (em vermelho) do grupo de tranças puras $P_n(N_{g,p})$.	129
4.29	Representação geométrica da relação $\prod_{i=1}^{p+n} B_{i,p+n+1} = \rho_{p+n+1,1}^2 \rho_{p+n+1,2}^2 \cdots \rho_{p+n+1,g}^2$ em $P_n(N_{g,p})$.	129
4.30	Representação geométrica da relação $B_{j,p+n+1} = \left(\prod_{l=1}^g \rho_{j,l}^2 \right) \left(\prod_{s=1+j}^{p+n} B_{j,s} \right)^{-1} \left(\prod_{r=1}^{j-1} B_{r,j} \right)^{-1}$ em $P_n(N_{g,p})$.	130
4.31	Representação geométrica da relação $B_{r,s} B_{i,j} B_{r,s}^{-1} = B_{i,j}$ em $P_n(N_{g,p})$, quando $r < i < j < s$ ou $r < s < i < j$.	131
4.32	Representação geométrica da relação $B_{r,s} B_{i,j} B_{r,s}^{-1} = B_{s,j}^{-1} B_{i,j} B_{s,j}$ em $P_n(N_{g,p})$, quando $i = r < s < j$.	132
4.33	Representação geométrica da relação $B_{r,s} B_{i,j} B_{r,s}^{-1} = B_{i,j}^{-1} B_{r,j}^{-1} B_{i,j} B_{r,j} B_{i,j}$ em $P_n(N_{g,p})$, quando $r < i = s < j = p + n + 1$.	133
4.34	Representação geométrica da relação $\rho_{i,k} \rho_{j,l} \rho_{i,k}^{-1} = \rho_{j,l}$ em $P_n(N_{g,p})$, quando $k < l$.	134
4.35	Representação geométrica da relação $\rho_{i,k} \rho_{j,l} \rho_{i,k}^{-1} = \rho_{j,k}^{-1} B_{i,j}^{-1} \rho_{j,k}^2$ em $P_n(N_{g,p})$, quando $p + 1 \leq i < j \leq p + n$ e $k = l$.	135
4.36	Representações geométricas (plana e espacial) da relação $\rho_{k,l} B_{i,j} \rho_{k,l}^{-1} = B_{i,j}$ em $P_n(N_{g,p})$, quando $k < i$ ou $j < k$.	136
4.37	Representações geométricas (plana e espacial) da relação $\rho_{k,l} B_{i,j} \rho_{k,l}^{-1} = \rho_{j,l}^{-1} B_{i,j}^{-1} \rho_{j,l}$ em $P_n(N_{g,p})$, quando $k = i$.	137
4.38	A relação $\rho_{i,k} \rho_{j,l} \rho_{i,k}^{-1} = \rho_{j,k}^{-1} B_{i,j}^{-1} \rho_{j,k} B_{i,j}^{-1} \rho_{j,l} B_{i,j} \rho_{j,k}^{-1} B_{i,j} \rho_{j,k}$ em $P_n(N_{g,p})$, quando $j = p + n + 1$ e $k > l$.	138
4.39	A relação $\rho_{i,k} \rho_{j,l} \rho_{i,k}^{-1} = \rho_{j,k}^{-1} B_{i,j}^{-1} \rho_{j,k} B_{i,j}^{-1} \rho_{j,l} B_{i,j} \rho_{j,k}^{-1} B_{i,j} \rho_{j,k}$ em $P_n(N_{g,p})$, quando $j = p + n + 1$ e $k > l$. (Representação geométrica Espacial)	138
4.40	A relação $\sigma_i^{-1} \rho_{i,l} \sigma_i = \rho_{i+i,l}$ em $B_n(N_{g,p})$.	139

Introdução

O matemático alemão Emil Artin foi quem introduziu os primeiros estudos aprofundados dos grupos de tranças do plano no trabalho intitulado: *Theorie der Zöpfe*, no ano de 1925. Esse trabalho foi publicado em alemão e, segundo Guaschi e Pineda em [44], os grupos de tranças do plano foram abordados de forma geométrica e de maneira bem intuitiva em [1] e posteriormente estudados em 1947 de um ponto de vista mais rigoroso e algébrico em [2, 3], publicados por Artin, mas já em inglês.

Os grupos de tranças do plano possuem uma representação geométrica/pictórica similar ao que vemos no nosso dia-a-dia. Ao falarmos de tranças, o senso comum nos remete imediatamente ao objeto físico por nós conhecido, seja no artesanato com cordas, na ornamentação dos cabelos e até mesmo na culinária (ao se trançar a massa de pães). Assim, fazer essa relação da trança - objeto físico já conhecido - a um elemento abstrato daquela estrutura de grupo, para todos nós fica fácil abstrair uma imagem do que seria um elemento pertencente ao grupo de tranças do plano. Conforme [60, p.xxi], os grupos de tranças são interessantes por si só, todavia têm um papel importantíssimo em diferentes áreas da Matemática, por exemplo, em Topologia, Geometria, Álgebra, Sistemas Dinâmicos e Física teórica.

O matemático O. Zariski, em [73, 74], foi quem introduziu inicialmente a noção de grupo de tranças sobre superfícies. Tal noção generaliza de forma natural a definição de grupos de tranças do plano, dada por E. Artin, como afirma [60, p. xxi] e [44, p.26]. R. Fox e L. Neuwirth na década de 60, como pode ser visto em [27], usaram espaços de configuração para generalizar os grupos de tranças total e os grupos de tranças puras para qualquer variedade compacta, de dimensão maior do que ou igual a dois, ou para uma variedade com uma quantidade finita de pontos retirados. A matemática Joan Birman, em [9], demonstrou que o grupo de tranças puras $P_n(M)$ de uma variedade M compacta de dimensão maior do que ou igual a três é isomorfa ao produto de n cópias de $\pi_1(M, x_0)$. Por isso, o estudo de grupos de tranças é mais interessante quando temos uma superfície.

E. Fadell e J. Van Buskirk [23] em 1962 deram uma apresentação para $B_n(\mathbb{S}^2)$, em seguida, J. Van Buskirk, em [69] no ano de 1966 mostrou uma apresentação para $B_n(\mathbb{R}P^2)$. Os grupos de tranças $B_n(\mathbb{S}^2)$ e $B_n(\mathbb{R}P^2)$ são de grande importância e são excepcionais, uma vez que \mathbb{S}^2 e $\mathbb{R}P^2$ são as únicas superfícies em que seus espaços de configuração não são espaços de Eilenberg-Mac Lane. Mais ainda, tais grupos são particulares no estudo de tranças de superfícies, pois tais grupos têm centro não trivial [23, 69], têm elementos de

torção [23, 58, 69] e sob condições em n , alguns são finitos, ver [23, 69]. Outros trabalhos que exploram esses grupos são [29, 31, 32, 33] e [37].

Um dos objetivos principais para quem trabalha com teoria de tranças é calcular apresentações de grupos. Por isso destacamos alguns trabalhos nesse sentido, os quais trabalharam com superfícies diferentes de \mathbb{S}^2 e $\mathbb{R}P^2$. A primeira apresentação para o grupo de tranças do toro foi dada por Birman no ano de 1969, em [9]; mais tarde em 2015, outra matemática, C. Pereiro em [64], mostra uma outra apresentação para o grupo de tranças do toro. Em [9], J. Birman encontrou apresentações para grupos de tranças de outras superfícies orientáveis. G. Scott, em [67], no ano de 1970 mostrou apresentações para toda superfície fechada, orientável ou não. Outras apresentações de grupos de tranças de superfícies são encontradas na literatura, incluindo as apresentações no caso de superfícies com um número finito de pontos removidos, ver [5, 29, 36, 43]. Compreendemos que cada autor calcula a apresentação mais conveniente ao desenvolvimento do seu trabalho e ao seu propósito específico.

Uma outra ênfase que damos aos grupos de tranças é que eles podem ser estudados e abordados de variadas maneiras e aspectos, a priori, tendo em vista o objetivo de estudo é que se escolhe a definição mais vantajosa ao desenvolvimento de seu trabalho, podemos ver em [11] e [44] essas diferentes abordagens da definição de grupo de tranças. Como supracitado a correlação dos grupos de tranças com outras áreas, destacamos e citamos algumas referências de trabalhos nessa vertente. No estudo de nós e enlaçamentos [55]; na definição de invariantes topológicos como o polinômio de Jones e os invariantes de Vassiliev [48, 55]; dos Mapping Class Groups [10], [25] e [71]; da propriedade de Borsuk-Ulam para aplicações em superfícies [35]; aplicações na biologia, robótica e criptografia [8]. Por fim, teoria de homotopia clássica [14] e K -teoria [44, 49].

Algumas leituras clássicas introdutórias ao estudo do grupo de tranças as quais referenciamos são os livros de V.L. Hansen [45], de C. Kassel e V. Turaev [50] e de K. Murasugi e B. Kurpita [59]. Para leituras mais avançadas, resultados recentes e contextualização histórica desta teoria, recomendamos J. Birman e T. Brendle [11], J. Guaschi e D. Juan-Pineda [44] e W. Magnus [53].

Alguns quocientes do grupo de tranças do plano têm sido estudados em diferentes contextos afim de explorar propriedades que podem auxiliar no estudo do próprio B_n . Para elucidarmos e contextualizar essa última afirmação vamos citar a seguir alguns trabalhos nesse sentido. Como um primeiro exemplo podemos citar o trabalho do matemático H.S.M. Coxeter, publicado em 1957, cujo título em inglês é: *Factor groups of the braid groups*, ver [16]. Coxeter, dentre outros resultados mostrou que os poliedros de Platão se relacionam de alguma maneira com quocientes do grupo de tranças de Artin, para mais detalhes ver [16].

Outro trabalho que destacamos é artigo publicado em 2017, pelos matemáticos Gonçalves, Guaschi e Ocampo, este trabalho leva o seguinte título em inglês: *A quotient of the Artin braid groups related to crystallographic groups*, ver [39]. Os autores estudam

o grupo quociente $B_n/\Gamma_2(P_n)$, onde B_n é o grupo de tranças de Artin, P_n é o subgrupo de tranças puras de B_n e $\Gamma_2(P_n)$ é o subgrupo comutador de P_n . Dentre outros resultados, os autores demonstram que o grupo quociente $B_n/\Gamma_2(P_n)$ é um grupo cristalográfico, mostram também que tal grupo quociente não possui elemento de ordem par e estudaram as classes de conjugação dos elementos de ordem finita. Usando diferentes técnicas, I. Marin generalizou os resultados de [39] para grupos de tranças generalizadas associados a grupos de reflexão complexos arbitrários [56].

Matemáticos, como por exemplo, A. Bravais (em 1848), C. Jordan (em 1867) e E. S. Fedorov (em 1885-1889), propuseram-se estudar as simetrias na natureza, particularmente as que aparecem presentes nos cristais, ver [52, 70]. Segundo [52], a classificação completa de todos os cristais ocorreu em 1889 e 1891, pelos matemáticos E. Fedorov e A. M. Schoenflies, respectivamente. Eles provaram, com trabalhos independentes, que existem apenas 230 grupos de cristais que podem ser encontrados na natureza. Posteriormente, a teoria e os conceitos que envolviam os estudos iniciais dos cristais tornaram-se mais abstratos e sofisticados, como podemos ver em [17]. Destacamos a importância da tese de doutorado do matemático de L. Bieberbach em 1910, cujo trabalho, traz dentre muitas contribuições, a definição do que é “grupo de cristais” em dimensões maiores que três, os chamados grupos cristalográficos, ver [19, 68, 70]. Indicamos a leitura de [17, 19, 68, 70] para mais detalhes da teoria que envolve os grupos cristalográficos.

Os grupos cristalográficos e os grupos de Bieberbach (grupos cristalográficos livres de torção), vêm sendo bastante estudados nas últimas décadas. Suas propriedades algébricas são muito interessantes e em vista dos Teoremas de Bieberbach eles estão relacionados com variedades Riemannianas compactas planas cujo grupo fundamental é o grupo de Bieberbach, ver [17, 72], e portanto, são de interesse na Geometria Diferencial, Topologia Algébrica e Sistemas Dinâmicos. Destacamos também os trabalhos [39] e [60], dos quais os seus autores encontraram uma conexão inesperada entre o grupo de tranças de Artin e os grupos cristalográficos.

V. Beck e I. Marin, em seu trabalho: *Torsion subgrupos of quase-abelianized braid groups* [4], estendem o trabalho de D. Gonçalves, J. Guaschi e O. Ocampo [39] e Marin [56]. No caso específico do grupo de tranças de Artin, os autores descrevem todos os seus subgrupos finitos, mostrando que todo grupo finito de ordem ímpar pode ser “mergulhado” em $B_n/[P_n, P_n]$, quando o número de cordas vai para o infinito. Independentemente, D. Gonçalves, J. Guaschi e O. Ocampo também estudaram a realização de grupos finitos nos quocientes do grupo de trança de Artin $B_n/\Gamma_k(P_n)$, com $k = 1, 2, 3$, ver [41].

Outros trabalhos que seguem nesse sentido estudando quocientes do grupos de tranças de Artin são [40, 61, 62]. Em [62], os autores lidam com problema de conjugação no quociente $B_n/[P_n, P_n]$. Já em [61] são realizados subgrupos de Bieberbach de $B_n/[P_n, P_n]$ e variedades de curvatura zero com grupo de holonomia cíclico \mathbb{Z}_{2^d} , onde $d \geq 1$. Por fim, em [40], os seus autores estudam quocientes do grupo de tranças de Artin por elementos

da série central $(\Gamma_k(P_n))_{k \in \mathbb{N}}$ do grupo de tranças puras de Artin P_n . Também em [40] é mostrado que, para todos $n, k \geq 3$, o quociente $B_n/\Gamma_k(P_n)$ de B_n por $\Gamma_k(P_n)$ é um grupo *almost-crystallographic* e investigam, mais detalhadamente, o caso $B_n/\Gamma_3(P_n)$.

Os trabalhos [7, 42] investigam quocientes de grupos de tranças de superfícies. Em [42] estudam os quocientes $B_n(M)/[P_n(M), P_n(M)]$, quando M é uma superfície orientável (ou não orientável), compactas e sem bordo. Foi mostrado em [42] que os quocientes $B_n(M)/[P_n(M), P_n(M)]$ são grupos cristalográficos, quando M é uma superfície orientável fechada de genus maior ou igual a um. Todavia, quando $M = \mathbb{S}^2$ ou é uma superfície não orientável, os autores de [42] provaram que o quociente $B_n(M)/[P_n(M), P_n(M)]$ não é cristalográfico. Em [7] são estudados quocientes abelianos e metabelianos do grupo de tranças de superfícies orientáveis com bordo.

O objetivo principal deste trabalho consiste em explorar novas conexões entre a teoria de tranças de superfícies finitamente perfuradas e os grupos cristalográficos. Evidenciamos que este trabalho de tese está fortemente inspirado e ligado aos trabalhos [39] e [42].

Esta tese está organizada em quatro capítulos e dois apêndices, os quais serão apresentados em linhas gerais a seguir. Outro fato importante é que a ordem dos resultados apresentados nesta tese e a maneira como a dividimos em capítulos, se dá a partir da solução cronológica dos seus resultados. Destacamos que a leitura dos Capítulos 2, 3 e 4 pode ser feita de maneira independente, por exemplo, não há necessidade da leitura sequenciada do Capítulo 2 para entender o Capítulo 3. Chamamos sua atenção à seguinte convenção adotada por nós neste trabalho: os resultados enunciados, cuja autoria não seja nossa, os colocaremos entre parênteses, destacando e referenciando a fonte bibliográfica.

O Capítulo 1 chamamos de Preliminares, está dividido em três seções. Nele constam noções fundamentais usadas para o desenvolvimento e entendimento deste trabalho, como por exemplo, definição de grupo de tranças de superfícies via espaços de configuração, apresentação de extensões de grupos, grupos cristalográficos, entre outros. Na Seção 1 começamos definindo espaços de configuração e, a partir daí, definimos grupos de tranças (total) e grupos de tranças puras de superfícies. Ainda nesta seção, damos destaque à sequência exata curta de Fadell-Newirth. Na Seção 2 descrevemos um método bastante utilizado na literatura para apresentações de extensões de grupos. Na Seção 3 são trazidas noções básicas que envolvem grupos cristalográficos e grupos de Bieberbach, como por exemplo, definição geométrica e caracterização algébrica de grupos cristalográficos.

O Capítulo 2 que trata dos grupos de tranças da esfera finitamente perfurada, aqui denotada por $M_{0,p+1}$, está dividido em três seções. Na Seção 1, especificamente na Proposição [2.5], descrevemos qual é a ação por conjugação do grupo quociente $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ no subgrupo normal $P_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$, vejamos:

Proposição 2.5. *Sejam $n, p \in \mathbb{Z}$, com $n \geq 2$ e $p \geq 1$. Consideremos $\alpha \in B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ e $\tau = \bar{\pi}(\alpha^{-1}) \in S_n$. Então*

$$\alpha A_{i,j} \alpha^{-1} = A_{\tau(i), \tau(j)},$$

em $P_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$.

E, como consequência direta da Proposição 2.5, demonstramos que o grupo quociente $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ é um grupo cristalográfico (Teorema 2.6):

Teorema 2.6. *Sejam $n, p \in \mathbb{Z}$, com $n, p \geq 1$. Existe uma sequência exata curta*

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^{n(n+2p-1)/2} \longrightarrow B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1}) \xrightarrow{\bar{\pi}} S_n \longrightarrow 1$$

e o grupo

$$B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$$

é um grupo cristalográfico.

Finalizando a Seção 1, provamos que o grupo $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ não possui elementos de ordem par (Teorema 2.21) e que possui subgrupos de Bieberbach (Corolário 2.23), isto é, respectivamente:

Teorema 2.21. *Sejam $n, p \in \mathbb{Z}$, com $n, p \geq 1$. Então o grupo quociente $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ não possui elementos de ordem finita par, com exceção do elemento trivial.*

Corolário 2.23. *Sejam $n, p \in \mathbb{Z}$, com $n \geq 2$ e $p \geq 1$. Se H um 2-subgrupo de S_n , então o grupo $\tilde{H}_n = \pi^{-1}(H)/P'_n(M_{0,p+1})$ é um grupo de Bieberbach de dimensão $n(n+2p-1)/2$.*

Na Seção 2 estudamos os elementos de torção do grupo quociente $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$,

Teorema 2.27. *Sejam $n, p \in \mathbb{Z}$, onde $n \geq 3$ e $p \geq 1$, com n ímpar, então $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ possui uma infinidade de elementos de ordem n .*

Ademais, aplicando o Lema dos cinco e a sequência exata curta de Fadell-Newirth provamos

Teorema 2.33. *Sejam $n, p \in \mathbb{Z}$, com $n \geq 2$ e $p \geq 1$. Então $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ é um subgrupo cristalográfico do grupo $B_{p+n}(\mathbb{D}^2)/P'_{p+n}(\mathbb{D}^2)$.*

O Teorema 2.33 estabelece uma relação do grupo $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ com o grupo quociente B_{p+n}/P'_{p+n} estudado por D. Gonçalves, J. Guaschi e O. Ocampo em [39].

Agora, concluindo o Capítulo 2, na Seção 3, Teorema 2.38, demonstramos que existe uma relação biunívoca entre as classes de isomorfismo de subgrupos finitos abelianos do grupo quociente estudado neste capítulo, e as classes de isomorfismo de subgrupos abelianos do grupo das permutações, ou seja,

Teorema 2.38. *Sejam $k, n, p \in \mathbb{Z}$, com $k \geq 3$ ímpar, $n \geq 3$ e $p \geq 1$. Dois elementos de $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ de ordem k são conjugados se, e somente se, suas permutações possuem a mesma estrutura cíclica.*

Ainda na Seção 3, calculamos as classes de conjugação dos elementos de ordem finita do grupo quociente $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$

Teorema 2.41. *Sejam $k, n, p \in \mathbb{Z}$, com $k \geq 3$ ímpar, $n \geq 3$ e $p \geq 1$. Dois elementos de $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ de ordem k são conjugados se, e somente se, suas permutações possuem a mesma estrutura cíclica.*

E, como consequência direta do Teorema 2.41, obtemos o seguinte resultado:

Corolário 2.42. *Dois subgrupos cíclicos de $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ de ordem k são conjugados se, e somente se, suas imagens por $\bar{\pi}$ são conjugadas em S_n .*

O Capítulo 3, que trata dos grupos de tranças de superfícies orientadas finitamente perfuradas, denotadas por $M_{g,p}$, com $g \geq 1$, está dividido em duas seções. Inicialmente, da Seção 3.1, destacamos dois resultados fundamentais para responder um dos nossos problemas principais, são eles Teorema 3.5 e Teorema 3.6. Esses descrevem as ações por conjugação do grupo $B_n(M_{g,p})$ em $P_n(M_{g,p})$ e, do grupo quociente $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$ no seu subgrupo quociente $P_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$.

Teorema 3.6. *Sejam $g, n, p \in \mathbb{Z}$, com $g, n, p \geq 1$. Consideremos o homomorfismo π de $B_n(M_{g,p})$ em S_n , definido por*

$$\pi(\sigma_i) = (2g + p - 1 + i, 2g + p - 1 + i + 1),$$

$$\pi(a_r) = \pi(b_r) = \pi(z_k) = 1,$$

para todos $1 \leq i \leq n - 1$, $1 \leq r \leq g$ e $1 \leq k \leq p - 1$ e o homomorfismo $\bar{\pi}: B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p}) \rightarrow S_n$ induzido por π (ver (3.1) e (3.3)). Se

$$\bar{\alpha} \in B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$$

e

$$\bar{\pi}(\bar{\alpha}^{-1}) = \tau \in S_n,$$

então

$$\bar{\alpha}\mathcal{A}_{i,j}\bar{\alpha}^{-1} = \mathcal{A}_{i,\tau(j)} \in P_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p}),$$

onde $1 \leq i \leq 2g + p - 1$, $2g + p \leq j \leq 2g + p + n - 1$ e $i < j$.

Ainda na Seção 3.1 relacionamos grupo cristalográfico e grupo de tranças de superfícies orientáveis finitamente perfuradas, como podemos ver a seguir.

Teorema 3.7. *Sejam $g, n, p \in \mathbb{Z}$, com $g, n, p \geq 1$. Existe uma sequência exata curta*

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^{(2g+p-1)n} \longrightarrow B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p}) \xrightarrow{\bar{\pi}} S_n \longrightarrow 1$$

e o grupo

$$B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$$

é um grupo cristalográfico.

Como consequência do Teorema 3.7, e da aplicação direta, de um método para obtenção de apresentações de grupos, do Teorema 1.6, temos que o grupo quociente possui a seguinte apresentação.

Teorema 3.8. *Sejam $g, n, p \in \mathbb{Z}$, com $g, n, p \geq 1$. O grupo $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$ admite a seguinte apresentação:*

Geradores: $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}\} \cup \{\mathcal{A}_{i,j} \mid 1 \leq i \leq 2g + p - 1, 2g + p \leq j \leq 2g + p + n - 1, i < j\}$

Relações:

(a) Relações de Artin:

$$\begin{aligned} \sigma_k \sigma_i &= \sigma_i \sigma_k, & \text{se } |k - i| > 1; \\ \sigma_k \sigma_{k+1} \sigma_k &= \sigma_{k+1} \sigma_k \sigma_{k+1}, & \text{se } 1 \leq k \leq n - 2. \end{aligned}$$

(b) $\sigma_i^2 = 1$, para todo $i = 1, \dots, n - 1$.

(c) $\mathcal{A}_{i,j}$ comuta com $\mathcal{A}_{r,s}$, para todo $1 \leq i, r \leq 2g + p - 1$, $2g + p \leq j, s \leq 2g + p + n - 1$.

$$(d) \sigma_k \mathcal{A}_{i,j} \sigma_k^{-1} = \begin{cases} \mathcal{A}_{i,j-1}, & \text{se } k = j - 2g - p + 1, \\ \mathcal{A}_{i,j}, & \text{se } k \neq j - 2g - p + 1, j - 2g - p + 2, \\ \mathcal{A}_{i,j+1}, & \text{se } k = j - 2g - p + 2. \end{cases}$$

E com isso, finalizando a Seção 3.1, a partir do Teorema 3.8, mostramos que:

Corolário 3.9. *Sejam $g, n, p \in \mathbb{Z}$, com $g, n, p \geq 1$. Existe um homomorfismo injetor p de S_n em $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$. Mais ainda, a sequência exata curta do Teorema 3.2 cinde, isto é, o grupo cristalográfico $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$ é isomorfo a $S_n \times_{\varphi} \mathbb{Z}^{(2g+p-1)n}$, onde φ é a ação definida no Teorema 3.7.*

Corolário 3.10. *Sejam $g, n, p \in \mathbb{Z}$, com $g \geq 1$, $n \geq 2$ e $p \geq 1$. Seja H subgrupo de S_n . Então, o grupo $\frac{\pi^{-1}(H)}{P'_n(M_{g,p})}$ é um grupo cristalográfico de dimensão $(2g+p-1)n$, com grupo de holonomia H .*

Na Seção 3.2 estudamos os elementos de ordem finita e suas classes de conjugação no grupo quociente $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$. No Teorema 3.17 caracterizamos os elementos de torção.

Teorema 3.17. *Sejam $g, n, p \in \mathbb{Z}$, com $g \geq 1$, $n \geq 2$, $p \geq 1$ e $f = 2g + p - 1$. consideremos $2 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_t$, com $\sum_{j=1}^t k_j \leq n$ e $\eta = \eta_{1,k_1} \eta_{1+k_1,k_2} \dots \eta_{1+\sum_{i=1}^{t-1} k_i, k_t}$ em*

$B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$. *Seja $\mathcal{T}_{\theta} = \{f + 1, f + k_1 + 1, \dots, f + \sum_{j=1}^{i-1} k_j + 1, \dots, f + \sum_{j=1}^{t-1} k_j + 1\}$ uma transversal associada à permutação θ . Se $\theta = \bar{\pi}(\eta^{-1}) \in S_n$ e $\mathcal{A} = \prod_{i=1}^f \mathcal{A}_{i,f+1}^{m_{i,f+1}} \mathcal{A}_{i,f+2}^{m_{i,f+2}} \dots \mathcal{A}_{i,f+n}^{m_{i,f+n}} \in P_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$, com $m_{i,f+1}, m_{i,f+2}, \dots, m_{i,f+n} \in \mathbb{Z}$ para todo $1 \leq i \leq f$, então o elemento $\eta \mathcal{A}$ é de ordem $\text{mmc}(k_1, \dots, k_t)$ se, e somente se,*

para cada $j \in \mathcal{T}_\theta$, o sistema de equações

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{q \in \mathcal{O}_\theta(j)} m_{1,q} = 0, \\ \sum_{q \in \mathcal{O}_\theta(j)} m_{2,q} = 0, \\ \vdots \\ \sum_{q \in \mathcal{O}_\theta(j)} m_{i,q} = 0, \\ \vdots \\ \sum_{q \in \mathcal{O}_\theta(j)} m_{f,q} = 0, \end{array} \right.$$

possui solução no conjunto dos números inteiros.

Agora, no Teorema 3.20, determinamos as classes de conjugação dos elementos de ordem finita no grupo quociente $B_n(M_{g,p}/P'_n(M_{g,p}))$ e, deduzimos daí quando dois grupos finitos cíclicos de $B_n(M_{g,p}/P'_n(M_{g,p}))$ são conjugados, ou seja,

Teorema 3.20. *Sejam $g, n, p \in \mathbb{Z}$, com $g \geq 1$, $n \geq 1$, $p \geq 1$ e $f = 2g + p - 1$. consideremos o homomorfismo $\bar{\pi}$ (ver [\[3.3\]](#)). Dois elementos de $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$ de ordem l são conjugados se, e somente se, suas imagens por $\bar{\pi}$ em S_n são permutações que possuem a mesma estrutura cíclica.*

Corolário 3.22. *Dois subgrupos cíclicos de $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$ de ordem k são conjugados se, e somente se, suas imagens por $\bar{\pi}$ são conjugadas em S_n .*

O Capítulo 4 que trata dos grupos de tranças de superfícies não orientadas finitamente perfuradas, denotadas por $N_{g,p}$, está dividido em três seções. Na Seção 4.1 calculamos uma apresentação para o grupo de tranças puras de superfícies não orientáveis finitamente perfurada com genus maior do que dois, em seguida o seu grupo abelianizado, como nos mostra os resultados a seguir.

Teorema 4.7. *Sejam $p, n, g \in \mathbb{Z}$, com $p, n \geq 1$ e $g \geq 2$. Seja $N_{g,p}$ uma superfície de genus g , não orientável e p -perfurada. O grupo de tranças puras $P_n(N_{g,p})$ admite a seguinte apresentação:*

Geradores: $B_{i,j}$ e $\rho_{r,k}$, onde $1 \leq i < j$, $p+1 \leq j, r \leq p+n$ e $1 \leq k \leq g$.

Relações:

(a) *As relações de Artin entre os $B_{i,j}$ que decorrem do $P_n(\mathbb{D}^2)$:*

$$B_{r,s} B_{i,j} B_{r,s}^{-1} = \begin{cases} B_{i,j}, & \text{se } i < r < s < j, \text{ ou } r < s < i < j \\ B_{s,j}^{-1} B_{i,j} B_{s,j}, & \text{se } i = r < s < j \\ B_{i,j}^{-1} B_{r,j}^{-1} B_{i,j} B_{r,j} B_{i,j}, & \text{se } r < i = s < j \\ B_{s,j}^{-1} B_{r,j}^{-1} B_{s,j} B_{r,j} B_{i,j} B_{r,j}^{-1} B_{s,j}^{-1} B_{r,j} B_{s,j}, & \text{se } r < i < s < j. \end{cases}$$

(b) Para todo $p+1 \leq i < j \leq p+n$ e $1 \leq k, l \leq g$,

$$\rho_{i,k} \rho_{j,l} \rho_{i,k}^{-1} = \begin{cases} \rho_{j,l}, & \text{se } k < l \\ \rho_{j,k}^{-1} B_{i,j}^{-1} \rho_{j,k}^2, & \text{se } k = l \\ \rho_{j,k}^{-1} B_{i,j}^{-1} \rho_{j,k} B_{i,j}^{-1} \rho_{j,l} B_{i,j} \rho_{j,k}^{-1} B_{i,j} \rho_{j,k}, & \text{se } k > l. \end{cases}$$

(c) Para todo $p+1 \leq i \leq p+n$, a “relação de superfície”

$$\prod_{l=1}^g \rho_{i,l}^2 = B_{1,i} \cdots B_{i-1,i} B_{i,1+i} \cdots B_{i,p+n}.$$

Observemos que, no caso $i = p+n$, temos $\prod_{l=1}^g \rho_{p+n,l}^2 = B_{1,p+n} B_{2,p+n} \cdots B_{p+n-1,p+n}$.

(d) Para todo $1 \leq i < j$, $p+1 \leq j, k \leq p+n$, $k \neq j$ e $1 \leq l \leq g$,

$$\rho_{k,l} B_{i,j} \rho_{k,l}^{-1} = \begin{cases} B_{i,j}, & \text{se } k < i \text{ ou } j < k \\ \rho_{j,l}^{-1} B_{i,j}^{-1} \rho_{j,l}, & \text{se } k = i \\ \rho_{j,l}^{-1} B_{k,j}^{-1} \rho_{j,l} B_{k,j}^{-1} B_{i,j} B_{k,j} \rho_{j,l}^{-1} B_{k,j} \rho_{j,l}, & \text{se } i < k < j. \end{cases}$$

Corolário 4.8. *Sejam $p, n, g \in \mathbb{Z}$, com $p, n, g \geq 1$. O grupo $P_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$ é isomorfo ao grupo livre abeliano $\mathbb{Z}^{n(g+p-1)}$, onde $P'_n(N_{g,p})$ é o subgrupo comutador de $P_n(N_{g,p})$.*

Na Seção 4.2 calculamos uma apresentação para o grupo de tranças puras de superfícies não orientáveis finitamente perfuradas com genus maior do que um.

Teorema 4.10. *Sejam $g, n, p \in \mathbb{Z}$, $g, n, p \geq 1$. O grupo de tranças $B_n(N_{g,p})$ admite a seguinte apresentação:*

Geradores: $\sigma_{p+1}, \dots, \sigma_{p+n-1}$, $B_{i,j}$ e $\rho_{r,k}$, onde $1 \leq i < j$, $p+1 \leq j, r \leq p+n$ e $1 \leq k \leq g$.

Relações:

(a) As relações de Artin entre os $B_{i,j}$ que decorrem do $P_n(\mathbb{D}^2)$:

$$B_{r,s} B_{i,j} B_{r,s}^{-1} = \begin{cases} B_{i,j}, & \text{se } i < r < s < j \\ & \text{ou } r < s < i < j \\ B_{s,j}^{-1} B_{i,j} B_{s,j}, & \text{se } i = r < s < j \\ B_{i,j}^{-1} B_{r,j}^{-1} B_{i,j} B_{r,j} B_{i,j}, & \text{se } r < i = s < j \\ B_{s,j}^{-1} B_{r,j}^{-1} B_{s,j} B_{r,j} B_{i,j} B_{r,j}^{-1} B_{s,j}^{-1} B_{r,j} B_{s,j}, & \text{se } r < i < s < j. \end{cases}$$

(b) Para todo $p+1 \leq i < j \leq p+n$ e $1 \leq k, l \leq g$,

$$\rho_{i,k} \rho_{j,l} \rho_{i,k}^{-1} = \begin{cases} \rho_{j,l}, & \text{se } k < l \\ \rho_{j,k}^{-1} B_{i,j}^{-1} \rho_{j,k}^2, & \text{se } k = l \\ \rho_{j,k}^{-1} B_{i,j}^{-1} \rho_{j,k} B_{i,j}^{-1} \rho_{j,l} B_{i,j} \rho_{j,k}^{-1} B_{i,j} \rho_{j,k}, & \text{se } k > l. \end{cases}$$

(c) Para todo $p + 1 \leq i \leq p + n$, a “relação de superfície”

$$\prod_{l=1}^g \rho_{i,l}^2 = B_{1,i} \cdots B_{i-1,i} B_{i,1+i} \cdots B_{i,p+n}.$$

(d) Para todo $1 \leq i < j$, $p + 1 \leq j, k \leq p + n$, $k \neq j$ e $1 \leq l \leq g$,

$$\rho_{k,l} B_{i,j} \rho_{k,l}^{-1} = \begin{cases} B_{i,j}, & \text{se } k < i \text{ ou } j < k \\ \rho_{j,l}^{-1} B_{i,j}^{-1} \rho_{j,l}, & \text{se } k = i \\ \rho_{j,l}^{-1} B_{k,j}^{-1} \rho_{j,l} B_{k,j}^{-1} B_{i,j} B_{k,j} \rho_{j,l}^{-1} B_{k,j} \rho_{j,l}, & \text{se } i < k < j. \end{cases}$$

(e)

$$\begin{aligned} (\sigma_{i+1} \sigma_i)^{-3} &= B_{i,i+1} B_{i,i+2} B_{i+1,i+2}, & p + 1 \leq i \leq p + n - 2 \\ (\sigma_r \sigma_s)^2 &= B_{r,r+1}^{-1} B_{s,s+1}^{-1}, & |r - s| \geq 2 \text{ e } p + 1 \leq r \neq s \leq p + n - 1 \\ \sigma_i^2 &= B_{i,i+1}^{-1}, & p + 1 \leq i \leq p + n - 1 \end{aligned}$$

(f) Para todo $p + 1 \leq i, k \leq p + n$ e $1 \leq l \leq g$,

$$\sigma_k \rho_{i,l} \sigma_k^{-1} = \begin{cases} \rho_{i,l}, & \text{se } k \neq i, i - 1 \\ \rho_{i-1,l}, & \text{se } k = i - 1 \\ \rho_{i,l}^{-1} \sigma_i^2 \rho_{i,l} \sigma_i^2 \rho_{i+1,l}, & \text{se } k = i. \end{cases}$$

(g) Para todo $1 \leq i < j$, $1 \leq p$ e $p + 1 \leq j, k \leq p + n + 1$,

$$\sigma_k B_{i,j} \sigma_k^{-1} = \begin{cases} B_{i,j}, & \text{se } k \neq i - 1, i, j - 1, j \\ B_{i,j-1}, & \text{se } j - 1 = k \\ B_{i,j} B_{i,j+1} B_{i,j}^{-1}, & \text{se } j = k \\ B_{i-1,j}, & \text{se } i - 1 = k < j - 1 \\ B_{i-1,j} B_{i,j} B_{i-1,j}^{-1}, & \text{se } i = k. \end{cases}$$

No Teorema 4.15 relacionamos o grupo quociente $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$ com os grupos cristalográficos, para demonstrarmos este resultado, a representação inteira tem um papel fundamental no Lema [1.15](#), ou seja, quando buscamos usar a caracterização algébrica de grupos cristalográficos tal homomorfismo é crucial na determinação de um grupo ser, ou não, cristalográfico. O próximo resultado vem nessa direção, nos apresentando uma descrição da representação inteira φ de S_n em $\text{Aut}\left(\frac{P_n(N_{g,p})}{P'_n(N_{g,p})}\right)$, induzida por conjugação de $\frac{B_n(N_{g,p})}{P'_n(N_{g,p})}$ em $\frac{P_n(N_{g,p})}{P'_n(N_{g,p})}$, descrita em seus geradores.

Lema 4.14. *Sejam g, n, p inteiros positivos. Consideremos a representação inteira*

$$\varphi : S_n \longrightarrow \text{Aut}\left(\frac{P_n(N_{g,p})}{P'_n(N_{g,p})}\right),$$

induzida por conjugação de $\frac{B_n(N_{g,p})}{P'_n(N_{g,p})}$ em $\frac{P_n(N_{g,p})}{P'_n(N_{g,p})}$. A representação φ é dada por

$$\varphi(\tau)(B_{i,j}) = \alpha B_{i,j} \alpha^{-1} = B_{i,\tau(j)}$$

e

$$\varphi(\tau)(\rho_{s,k}) = \alpha \rho_{s,k} \alpha^{-1} = \rho_{\tau(s),k},$$

onde $B_{i,j}, \rho_{s,k} \in P_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$, para todo $1 \leq i \leq p, p+1 \leq j, s \leq p+n$ e $1 \leq k \leq g$, com $\alpha \in B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$ tal que $\bar{\pi}(\alpha^{-1}) = \tau \in S_n$.

Donde obtemos o seguinte resultado,

Teorema 4.15. *Sejam $g, n, p \in \mathbb{Z}, g, n, p \geq 1$. Existe uma sequência exata curta*

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^{(g+p-1)n} \longrightarrow B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p}) \xrightarrow{\bar{\pi}} S_n \longrightarrow 1$$

e o grupo

$$B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$$

é um grupo cristalográfico.

Entretanto, quando $M = \mathbb{S}^2$ ou é uma superfície não orientável, os autores de [42] demonstraram que o grupo quociente $B_n(M)/[P_n(M), P_n(M)]$ não é um grupo cristalográfico.

Por fim, na Seção 4.3 dentre outros resultados mostrados, destacamos o Teorema 4.23 e o Teorema 4.25, que caracterizam os elementos de ordem finita e suas classes de conjugação no grupo $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$, respectivamente.

Teorema 4.23. *Sejam $g, n, p \in \mathbb{Z}$, com $g, p \geq 1$ e $n \geq 2$. Consideremos $2 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_t$, com $\sum_{j=1}^t k_j \leq n$ e $\xi = \xi_{1,k_1} \xi_{1+k_1, k_2} \dots \xi_{1+\sum_{i=1}^{t-1} k_i, k_t}$ em $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$.*

Suponhamos

$$\theta = \bar{\pi}(\xi^{-1}) \in S_n$$

e

$$B = \prod_{l=1}^g \rho_{p+1,l}^{m_{p+1,l}} \dots \rho_{p+n,l}^{m_{p+n,l}} \cdot \prod_{i=2}^p B_{i,p+1}^{n_{i,p+1}} \dots B_{i,p+n}^{n_{i,p+n}} \in P_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p}),$$

onde $m_{p+1,l}, \dots, m_{p+n,l}, n_{i,p+1}, \dots, n_{i,p+n} \in \mathbb{Z}$, com $1 \leq l \leq g, 2 \leq i \leq p$. Seja

$$\mathcal{T}_\theta = \left\{ p+1, p+k_1+1, \dots, p+\sum_{j=1}^{i-1} k_j+1, p+\sum_{j=1}^{t-1} k_j+1 \right\}$$

uma transversal associada a θ . Então, o elemento ξB possui ordem igual ao

$\text{mmc}(k_1, \dots, k_t)$ se, e somente se, para cada $j \in \mathcal{T}_\theta$, o sistema de equações

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{q \in \mathcal{O}_\theta(j)} m_{q,1} = 0, \\ \vdots \\ \sum_{q \in \mathcal{O}_\theta(j)} m_{q,g} = 0, \\ \sum_{q \in \mathcal{O}_\theta(j)} n_{2,q} = 0, \\ \vdots \\ \sum_{q \in \mathcal{O}_\theta(j)} n_{p,q} = 0, \end{array} \right.$$

possui solução no conjunto dos números inteiros.

Teorema 4.25. *Sejam $g, n, p \in \mathbb{Z}$, com $g, p \geq 1$ e $n \geq 2$. Dois elementos de $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$ de ordem u são conjugados se, e somente se, suas permutações possuem o mesmo tipo cíclico.*

No Apêndice A enunciamos e demonstramos uma proposição, cuja aplicação direta se dá na demonstração do Teorema 3.17 e do Teorema 4.23, vejamos:

Proposição 4.27. *Seja Ω um inteiro positivo. Consideremos um grupo H e $\mathbb{Z}^\Omega = \langle z_1, \dots, z_\Omega \rangle$ um grupo abeliano livre finitamente gerado. Suponha que $G = \mathbb{Z}^\Omega \rtimes_\varphi H$ o produto semidireto de \mathbb{Z}^Ω por H via φ , onde φ é a ação induzida por conjugação de G em \mathbb{Z}^Ω . Dado $g \in G$, $g = zh$, em que $z = \prod_{i=1}^\Omega z_i^{m_i} \in \mathbb{Z}^\Omega$ e $h \in H$, com $m_i \in \mathbb{Z}$ para todo $1 \leq i \leq \omega$. Seja h é um elemento de ordem finita k e a ação por conjugação $*$ do grupo cíclico $\langle h \rangle$ no conjunto $\{z_1, \dots, z_\Omega\}$, dada por $*(x, z_i) = xz_i x^{-1} = z_j$ com $i \neq j$. Sejam $\mathcal{T}_h = \{y_1, \dots, y_N\}$ uma transversal da ação $*$ e N um múltiplo de k . Então, $g \in G$ possui ordem finita k se, e somente se, para cada $y_i \in \mathcal{T}_h$, tem-se*

$$\sum_{j \in \text{conj}_{\mathcal{O}_h(y_i)}} m_j = 0,$$

onde $\text{conj}_{\mathcal{O}_h(y_i)} = \{j \mid z_j \in \mathcal{O}_h(y_i)\} \subseteq \{1, 2, \dots, \Omega\}$.

Finalizamos este tese com Apêndice B, onde concentramos todas as figuras, produzidas por nós, usadas neste trabalho.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Espaços de configuração e grupos de tranças de superfície

Os espaços de configuração são importantes e de grande interesse para várias áreas do conhecimento, para além da Matemática, como mostra [8], [15] e [21]. A próxima definição é devida a Fox [27] (de acordo com Magnus [53], a idéia apareceu pela primeira vez no trabalho de Hurwitz) e tem consequências muito importantes.

É nosso interesse a relação entre espaços de configuração e os grupos de tranças de superfícies, como podemos ver em [27], no caso do disco, e em [22], para qualquer superfície, por isso consideraremos os espaços de configuração sobre superfícies.

Definição 1.1. Seja M uma superfície conexa e sem bordo, o conjunto

$$F_n(M) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in M \times \dots \times M \mid x_i \neq x_j \text{ se } i \neq j\},$$

munido da topologia induzida de $M^n = M \times \dots \times M$, é chamado de *n -ésimo espaço de configuração ordenado de M* .

Observemos que, neste caso, $F_n(M)$ é uma variedade conexa de dimensão $2n$. Existe uma ação livre de S_n sobre $F_n(M)$ que permuta as coordenadas. Assim, $F_n(M)$ é um recobrimento de $F_n(M)/S_n$. Denotamos o espaço de órbitas, chamado de espaço de configuração de pontos não ordenados, por $D_n(M) = F_n(M)/S_n$.

Agora, seja p um inteiro não negativo e $Q_p = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ um conjunto de p pontos distintos de M . Observemos que Q_0 é o conjunto vazio. Denotamos por $F_{p,n}(M)$ o n -ésimo espaço de configuração ordenado de $M \setminus Q_p$,

$$F_{p,n}(M) = F_n(M \setminus Q_p).$$

Observemos que $F_{p,n}(M)$ também é uma variedade de dimensão $2n$. Além disso, $F_{0,n}(M) = F_n(M)$ e $F_{p,1}(M) = M \setminus Q_p$.

Valendo-se do estudo de espaços de configuração feito por Fox, os grupos de tranças foram generalizados por Fox e Neuwirth [27], para qualquer superfície compacta M , podendo esta superfície ser com ou sem uma quantidade finita de pontos retirados. Vejamos.

Definição 1.2. *O grupo de tranças puras de M com n cordas* é definido por

$$P_n(M) = \pi_1(F_n(M), (x_1, \dots, x_n)),$$

onde (x_1, \dots, x_n) é um ponto base em $F_n(M)$.

Definição 1.3. *O grupo de tranças (total) de M com n cordas* é definido por

$$B_n(M) = \pi_1(D_n(M), [(x_1, \dots, x_n)]),$$

onde $[(x_1, \dots, x_n)]$ é um ponto base em $D_n(M)$.

Quando $M = \mathbb{D}^2$ na definição anterior, o grupo $B_n(\mathbb{D}^2)$ é chamado grupo de tranças de Artin e denotado por B_n . A apresentação clássica de B_n é dada em [59, Capítulo 2, Teorema 2.2], cuja representação geométrica de seus geradores pode ser vista na Figura 4.2. Definimos o elemento *full-twist* como

$$\Delta_n^2 = (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1})^n. \quad (1.1)$$

Usando [59, Capítulo 2, Exercício 4.1] mostra-se que $\Delta_n^2 = (\sigma_{n-1} \sigma_{n-2} \cdots \sigma_1)^n$. Note também que $\Delta_n^2 \in P_n(\mathbb{D}^2)$. Uma apresentação para o grupo de tranças puras $P_n(\mathbb{D}^2)$ pode ser encontrada em [59, Capítulo 3, Teorema 3.8], cuja representação geométrica de seus geradores é dada pela Figura 4.1. Em [69], V. Buskirk provou que o full-twist gera o centro do grupo B_n .

Uma das ferramentas mais usadas quando se estuda grupos de tranças é a fibração de Fadell-Neuwirth e suas generalizações, ver [12], [13], [15], [18] e [22]. Vejamos o seguinte resultado sobre a estrutura topológica dos espaços $F_{p,n}(M)$.

Teorema 1.4 ([22, Teorema 1]). *Sejam $1 \leq r < n$ e $p \geq 0$. Suponhamos que M é uma superfície sem bordo. Então a aplicação*

$$p_{n,r}: F_{p,n}(M) \longrightarrow F_{p,r}(M) \quad (1.2)$$

definida por

$$p_{n,r}(x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_r)$$

é uma fibração localmente trivial com fibra típica $F_{p+r,n-r}(M)$.

Demonstração. Ver [22, Teorema 1]. □

Notemos que a fibra sobre o ponto (x_1, \dots, x_r) do espaço base é $F_{p,n-r}(M \setminus \{x_1, \dots, x_r\})$, o qual podemos considerá-lo como subespaço do espaço total via a aplicação

$$i: F_{p,n-r}(M \setminus \{x_1, \dots, x_r\}) \longrightarrow F_{p,n}(M)$$

definido por

$$i(y_1, \dots, y_{n-r}) = (x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_{n-r}).$$

Podemos tomar a sequência exata longa de homotopia destes espaços via a fibração de Fadell-Neuwirth e obtemos a sequência exata curta de Fadell-Neuwirth:

$$1 \longrightarrow P_{n-r}(M \setminus Q_{p+r}) \xrightarrow{i_*} P_n(M \setminus Q_p) \xrightarrow{(p_{n,r})^*} P_r(M \setminus Q_p) \longrightarrow 1, \quad (1.3)$$

onde, $p = 0$ e $3 \leq r \leq n - 1$ se M é a esfera \mathbb{S}^2 [23], [24]; $p = 0$ e $2 \leq r \leq n - 1$ se M é o plano projetivo real $\mathbb{R}P^2$ [69] e $p \geq 0$ e $1 \leq r \leq n - 1$ nos outros casos [22].

Observação 1.5. Notemos que para usar as fibrações de Fadell-Neuwirth no caso disco, considera-se o disco aberto.

Observação 1.6. [44, Observação 8] Seja $1 \leq r \leq n - 1$. Seja $n \geq 4$ se $M = \mathbb{S}^2$, $n \geq 3$ se $M = \mathbb{R}P^2$, e $n \geq 2$ para os outros casos.

(a) A projeção $P_n(M \setminus Q_p) \longrightarrow P_r(M \setminus Q_p)$ pode ser interpretada geometricamente como o epimorfismo que “esquece” as últimas $n - r$ cordas.

Dois casos especiais derivados da sequência exata curta de Fadell-Neuwirth (1.3), os quais são referidos frequentemente na literatura, são apresentados nos itens (b) e (c), vejamos:

(b) Seja $p = 0$. Para $M = \mathbb{S}^2$, suponhamos $r \geq 3$, e para $M = \mathbb{R}P^2$, suponhamos $r \geq 2$. Neste caso a sequência exata curta (1.3), torna-se

$$1 \longrightarrow P_{n-r}(M \setminus Q_r) \xrightarrow{i_*} P_n(M) \xrightarrow{(p_{n,r})^*} P_r(M) \longrightarrow 1. \quad (1.4)$$

(c) Seja $z_0 \in M$. Se $p = 0$ e $r = n - 1$, neste caso a sequência exata curta (1.3), torna-se

$$1 \longrightarrow \pi_1(M \setminus Q_{n-1}, z_0) \xrightarrow{i_*} P_n(M) \xrightarrow{(p_{n,r})^*} P_{n-1}(M) \longrightarrow 1. \quad (1.5)$$

(d) Cada elemento do $\text{Ker}((p_{n,n-1})_*)$ pode ser interpretado como uma trança de n cordas, onde as primeiras $n - 1$ cordas são verticais.

(e) Essa sequência exata curta se presta naturalmente à indução, e pode ser usada, por exemplo, para resolver o problema da palavra em grupos de tranças de superfície [2], [28], [67] e obter apresentações de grupos, por exemplo, como faremos no Capítulo 4.

Se M é uma superfície sem bordo, então, como no Teorema 1.4, obtemos uma fibração localmente trivial

$$q_{n,r}: F_{n,r}/(S_r \times S_{n-r}) \longrightarrow D_r(M),$$

definido esquecendo as últimas $n - r$ coordenadas, ou seja,

$$q_{n,r}(x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_r) \in F_r(M)/S_r.$$

O grupo

$$B_{r,n-r}(M) = \pi_1(F_{n,r}/(S_r \times S_{n-r}))$$

é chamado de grupo de tranças “*mistas*” e é definido independente de M ter, ou não ter, bordo. Como no caso do grupo de tranças puras, obtemos a seguinte generalização de (1.5), ver [30]:

$$1 \longrightarrow B_{n-r}(M \setminus Q_r) \xrightarrow{i_*} B_{r,n-r}(M) \xrightarrow{(q_{n,r})^*} B_r(M) \longrightarrow 1, \quad (1.6)$$

a qual é chamada de *Sequência exata curta de Fadell-Neuwirth generalizada*.

1.2 Apresentação de uma extensão de grupos

Descrevemos a seguir o método, que foi utilizado neste trabalho para encontrar apresentação de grupos, quando temos uma extensão de grupos. Para maiores detalhes referenciamos [47, Capítulo 10, Proposição 1].

Dada uma extensão

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{i} \tilde{G} \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1$$

e as apresentações dos grupos G e A , respectivamente,

$$G = \langle X \mid R \rangle \text{ e } A = \langle Y \mid S \rangle$$

podemos encontrar uma apresentação para o grupo \tilde{G} .

Inicialmente, seja

$$\tilde{Y} = \{\tilde{y} = i(y) \mid y \in Y\},$$

e seja

$$\tilde{S} = \{\tilde{s} = i(s) \mid s \in S\}$$

o conjunto de palavras de \tilde{Y} obtido de S pela substituição de cada y por \tilde{y} .

Agora, seja

$$\tilde{X} = \{\tilde{x} \mid x \in X\}$$

elementos de uma transversal de $\text{Im}(i)$ em \tilde{G} . Para cada $r \in R$, seja \tilde{r} uma palavra em \tilde{X} obtidos pela substituição em r de cada x por \tilde{x} . Sabemos que p envia cada \tilde{r} no elemento neutro, portanto $\tilde{r} \in \text{Ker}(p) = \text{Im}(i)$, que é gerada por \tilde{Y} , assim cada \tilde{r} pode ser descrito como uma palavra, digamos v_r em \tilde{Y} .

Definimos

$$\tilde{R} = \{\tilde{r}v_r^{-1} \mid r \in R\}.$$

Finalmente, como $\text{Im}(i) \trianglelefteq \tilde{G}$, cada conjugado $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{x}^{-1}$ com $\tilde{x} \in \tilde{X}$ e $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ pertence a $\text{Im}(i)$, portanto é uma palavra, digamos que $w_{x,y}$, em \tilde{Y} .

Definimos

$$\tilde{T} = \{\tilde{x}\tilde{y}\tilde{x}^{-1}w_{x,y}^{-1} \mid x \in X, y \in Y\},$$

temos o seguinte resultado.

Teorema 1.7 ([47, Capítulo 10, Proposição 1]). *O grupo \tilde{G} admite a seguinte apresentação*

$$\langle \tilde{X}, \tilde{Y} \mid \tilde{S}, \tilde{R}, \tilde{T} \rangle.$$

Demonstração. Ver [47, Capítulo 10, Proposição 1]. □

Observação 1.8. Chamaremos as relações \tilde{S} de relações Tipo I, as relações \tilde{R} de Tipo II e as relações \tilde{T} de Tipo III.

1.3 Grupos cristalográficos e grupos de Bieberbach

Nesta seção, relembremos brevemente a definição de grupos cristalográficos e de Bieberbach, também caracterizamos grupos cristalográficos em termos de uma representação que surge de certas extensões de grupo cujo núcleo é um grupo Abelian livre de posto finito e cujo quociente é finito. Caso haja interesse do leitor em se aprofundar no estudo de grupos cristalográficos e grupos de Bieberbach referenciamos [17] e [19].

Definição 1.9. Seja G um grupo topológico Hausdorff. Um subgrupo H de G é dito ser um *subgrupo discreto*, se é um subconjunto discreto.

Definição 1.10. Seja G um grupo topológico e H subgrupo fechado de G . Se G/H , espaço das órbitas, com topologia quociente é compacto, então H é dito *uniforme*.

Definição 1.11. Seja $\text{Aff}(\mathbb{R}^n)$ o espaço afim de \mathbb{R}^n . Um subgrupo discreto e uniforme Π de $\mathbb{R}^n \rtimes O(n, \mathbb{R}) \subseteq \text{Aff}(\mathbb{R}^n)$ é dito *grupo Cristalográfico* de dimensão n . Se Π for livre de torção, então Π é chamado grupo de *Bieberbach de dimensão n* .

Observação 1.12.

- (a) Seja P um grupo. Denotamos por P' o *subgrupo comutador* $[P, P]$ de P . E por convenção denotamos um *elemento comutador* por $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$.

(b) Seja G um grupo e $P \leq G$. Se $P \trianglelefteq G$, então $P' \trianglelefteq G$. Com efeito, seja $h \in G$ e $g \in P' = \langle \{[a, b] \mid a, b \in P\} \rangle$. Observemos que,

$$\begin{aligned} hgh^{-1} &= h[a, b]h^{-1} \\ &= haba^{-1}b^{-1}h \\ &= (hah^{-1})(hbh^{-1})(ha^{-1}h^{-1})(hb^{-1}h^{-1}) \\ &= [hah^{-1}, hbh^{-1}]; \end{aligned}$$

Como, hah^{-1} e $hbh^{-1} \in P$, segue que $[hah^{-1}, hbh^{-1}] \in P$ e, portanto, $hgh^{-1} \in P'$, como queríamos.

Uma outra forma de provarmos a sentença: Se $P \trianglelefteq G$, então $P' \trianglelefteq G$, é aplicando o Teorema 1.5.6(iii) de [65], que nos diz: Se H é um subgrupo característico em K e $K \trianglelefteq G$, então $H \trianglelefteq G$.

Definição 1.13. Seja Φ um grupo. Uma representação inteira de posto n de Φ é definida por um homomorfismo $\Theta: \Phi \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}^n)$. Duas representações são ditas *equivalentes* se suas imagens são conjugadas em $\text{Aut}(\mathbb{Z}^n)$. Dizemos que Θ é uma *representação fiel* se é injetora.

Segundo [19, p.15] o próximo lema mostra-nos efetivamente a estrutura algébrica de um grupo cristalográfico, mais ainda, o item (a) do Lema 1.14 é devido ao primeiro teorema de Bieberbach, em [17], e o item (b) do Lema 1.14 é encontrado em [75].

Lema 1.14 ([19, Teorema 2.1.4]).

(a) Seja Π um grupo cristalográfico de dimensão n , então $\Lambda = \Pi \cap \mathbb{R}^n$ é o único subgrupo abeliano normal maximal de Π .

(b) Seja Q um grupo abstrato, tal que $\Lambda \leq Q$, maximal abeliano e $\Lambda \cong \mathbb{Z}^n$, para algum $n \in \mathbb{N}$, então existe um monomorfismo $\Psi: Q \rightarrow \text{Aff}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\Psi(Q)$ é um grupo cristalográfico.

Demonstração. A demonstração do item (a) consta em [17, Proposição 4.1, p.18] e para demonstração do item (b) veja [75, apud [19]]. \square

A seguinte caracterização de grupos cristalográficos é bem conhecida dos especialistas na área, de acordo com os autores de [39, p.397].

Lema 1.15 ([39, Lema 8]). *Seja Π um grupo. Então Π é um grupo cristalográfico se, e somente se, existe $n \in \mathbb{N}$ e uma sequência exata curta*

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^n \longrightarrow \Pi \xrightarrow{\quad \zeta \quad} \Phi \longrightarrow 1 \tag{1.7}$$

tal que:

(a) Φ é um grupo finito;

(b) A representação inteira $\Theta: \Phi \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}^n)$, induzida por conjugação em \mathbb{Z}^n e definida por $\Theta(\varphi)(x) = \pi x \pi^{-1}$, onde $x \in \mathbb{Z}^n, \varphi \in \Phi$ e $\pi \in \Pi$ é tal que $\varsigma(\pi) = \varphi$, é fiel.

Demonstração. Suponhamos Π um grupo cristalográfico. Definimos o homomorfismo r de $\mathbb{R}^n \rtimes O(n, \mathbb{R})$ em $O(n, \mathbb{R})$, como $r(s, M) = M$. Donde, $r(\Pi) \cong \Pi/\Pi \cap \mathbb{R}^n$. Agora, por [17, Teorema 3.1], sabe-se que $\Pi/\Pi \cap \mathbb{R}^n$ é finito e $\Pi \cap \mathbb{R}^n \cong \mathbb{Z}^n$. Logo, existe a sequência exata curta:

$$1 \longrightarrow \Pi \cap \mathbb{R}^n \xrightarrow{i} \Pi \xrightarrow{\bar{r}} \Pi/\Pi \cap \mathbb{R}^n \longrightarrow 1.$$

Além disso, em [17, Proposição 6.1], a representação

$$\Theta: r(\Pi) \longrightarrow \text{Aut}(\Pi \cap \mathbb{R}^n)$$

definida por $\Theta(r(\pi))(x) = \pi x \pi^{-1}$, onde $\pi = (s, M), \pi^{-1} = (-M^{-1}s, M^{-1})$ e $x = (z, I)$, é fiel.

Reciprocamente, fazendo $Q = \Pi$ e $\Lambda = i(\mathbb{Z}^n)$, no Lema [1.14(b)]. Afirmamos que Λ é normal, maximal abeliano e isomorfo a \mathbb{Z}^n . De fato, por hipótese a sequência [1.7] é exata curta, ou seja, $i(\mathbb{Z}^n) = \ker(\varsigma)$, logo Λ é subgrupo normal de Q e é isomorfo a \mathbb{Z}^n .

Por fim, mostraremos que Λ é maximal com relação a abelianidade. Suponha que Λ não é abeliano maximal em Q . Então existe um subgrupo normal A de Q , tal que $\Lambda \leq A$. Tomemos $a \in A \setminus \Lambda$, isto é, $a \in A$ e $a \notin \Lambda$. Logo, $\varsigma(a) \neq 1$. Assim, $\Theta(\varsigma(a))(x) = axa^{-1} = x$, o que contradiz a hipótese de injetividade da representação inteira Θ . Portanto, pelo Lema [1.14(b)], existe $\Psi: \Pi \rightarrow \text{Aff}(\mathbb{R}^n)$ monomorfismo, tal que $\Psi(\Pi)$ é cristalográfico. Notemos que $\Psi(\Pi) \cong \Pi$ nos permite o abuso de notação e daí, concluímos que Π é grupo cristalográfico. \square

Observação 1.16. Consideremos a sequência exata curta [1.7]. Dado $z \in \Phi$, existe $\pi \in \Pi$ tal que $\varsigma(\pi) = z$, cuja definição da representação Θ usa da escolha de π . A representação Θ independe da escolha de π na fibra de z .

Com efeito, sejam $\pi_1, \pi_2 \in \Pi$ tais que $\varsigma(\pi_1) = \varsigma(\pi_2) = z \in \Phi$. Queremos mostrar $\Theta(\varsigma(\pi_1))(x) = \Theta(\varsigma(\pi_2))(x)$, ou seja, $\pi_1 x \pi_1^{-1} = \pi_2 x \pi_2^{-1}$, com $x \in \mathbb{Z}^n = \text{Im}(i)$. Por hipótese, sabe-se $\varsigma(\pi_1^{-1}\pi_2) = 0$, implicando que $\pi_1^{-1}\pi_2 \in \ker(\varsigma)$. Pela sequência exata curta [1.7], tem-se $\pi_1^{-1}\pi_2 \in \text{Im}(i)$. Sabemos que $\text{Im}(i) = \mathbb{Z}^n$ e $\text{Im}(i) \trianglelefteq \Pi$. Então, $1 = \pi_1 \pi_1^{-1} \pi_2 \pi_2^{-1} = \pi_1 (\pi_1^{-1} \pi_2) (x x^{-1}) \pi_2^{-1} = \pi_1 x (\pi_1^{-1} \pi_2) x^{-1} \pi_2^{-1} = (\pi_1 x \pi_1^{-1}) (\pi_2 x^{-1} \pi_2^{-1})$, segue a prova da afirmação.

Definição 1.17. Se Π é um grupo cristalográfico, o inteiro n citado no Lema [1.15], é chamado de *dimensão do grupo cristalográfico* Π , o grupo finito Φ é chamado de *grupo de holonomia do grupo cristalográfico* Π , e a representação $\Theta: \Phi \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}^n)$ é chamada de *representação de holonomia de* Π .

Lema 1.18 ([39, Lema 9]). *Sejam G, L grupos e $f: G \rightarrow L$ homomorfismo, cujo kernel é livre de torção. Se K é um subgrupo finito de G , então a restrição $f|_K: K \rightarrow f(K)$*

de f a K é um isomorfismo. Em particular, com a notação do Lema 1.15, se Π é um grupo cristalográfico, então a restrição $f|_K: K \rightarrow \varsigma(K)$ de ς a qualquer subgrupo K de Π é um isomorfismo.

Demonstração. Se a torção do núcleo da aplicação f é trivial, ou seja, $Tor(\text{Ker}(f)) = \{1\}$, então $\text{Ker}(f) \cap K = \{1\}$. De fato, suponhamos que $a \in \text{Ker}(f) \cap K$, com $a \neq 1$. Então, $a \in K$ e $a^{|K|} = 1$, pois K é subgrupo finito. Mas isto contradiz a hipótese do $\text{Ker}(f)$ ser livre de torção. Por isso, $f|_K: K \rightarrow f(K)$ é injetiva, i.e., $\text{Ker}(f|_K) = \{1\}$. Como $f|_K$ é sobrejetora e, portanto, $f|_K$ é bijetora. \square

Corolário 1.19 ([39, Corolário 10]). *Sejam Π um grupo cristalográfico de dimensão n e Φ seu grupo de holonomia e seja H subgrupo de Φ . Então, existe um subgrupo cristalográfico de Π de dimensão n , com H como grupo de holonomia.*

Demonstração. Consideremos a sequência exata curta (1.7). Provaremos inicialmente a seguinte afirmação: o grupo de torção $Tor(\text{Ker}(\varsigma))$ do núcleo de ς é trivial, ou seja, $Tor(\text{Ker}(\varsigma)) = \{1\}$. De fato, sabemos que $\text{Ker}(\varsigma) = \text{Im}(i)$. Dado $x \in \text{Ker}(\varsigma) = \text{Im}(i)$, com $x = i(z)$, para algum $z \in \mathbb{Z}^n$ e $z \neq 0$. Suponha que exista $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n = 1$, ou seja, $x \in Tor(\text{Ker}(\varsigma))$. Se

$$x^n = i(z)^n = i(nz) = 1,$$

então, pela injetividade da aplicação i , tem-se $n = 0$. Logo, $x = 1$. Portanto, $\text{Ker}(\varsigma) = \{1\}$.

Agora, do Lema 1.18, segue que $\varsigma|_{\varsigma^{-1}(H)}: \varsigma^{-1}(H) \rightarrow H$ é isomorfismo. Observemos que $\varsigma^{-1}(H)$ é subgrupo de Π . Por hipótese, H é um subgrupo finito de Φ e Θ é a representação de holonomia de Π . Então $\Theta|_{\varsigma^{-1}(H)}$ é uma representação fiel de $\varsigma^{-1}(H)$. Assim, aplicando o Lema 1.15 à sequência exata curta

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^n \rightarrow \varsigma^{-1}(H) \xrightarrow{\Theta|_{\varsigma^{-1}(H)}} 1,$$

temos $\varsigma^{-1}(H)$ é subgrupo cristalográfico do grupo Π . \square

Capítulo 2

Grupos de tranças da esfera finitamente perfurada e grupos cristalográficos

Motivados pelo artigo [39], neste capítulo vamos estudar um quociente do grupo de tranças da esfera finitamente perfurada, o qual definiremos mais a frente. A divisão deste capítulo se dá em três seções, a saber, Seções 2.1, 2.2 e 2.3, onde basicamente estabelecemos a conexão do grupo de tranças da esfera finitamente perfurada, estudamos a torção e as classes de conjugação de elementos de ordem finita do grupo do meio da sequência exata curta (2.4).

As técnicas empregadas neste capítulo são baseadas no conjunto de métodos utilizados pelos autores Gonçalves, Guaschi e Ocampo em [39] adaptados ao novo ambiente. Foi demonstrado em [42, Proposição 17] que o quociente $B_n(\mathbb{S}^2)/P'_n(\mathbb{S}^2)$ do grupo de tranças $B_n(\mathbb{S}^2)$ da esfera pelo subgrupo comutador $P'_n(\mathbb{S}^2)$ do grupo de tranças puras da esfera não é um grupo cristalográfico. Neste capítulo, a conexão entre grupos de tranças da esfera finitamente perfurada e grupos cristalográficos se dá a partir, como um dos principais resultados, quando mostramos que diferentemente de [42, Proposição 17] o grupo quociente $B_n(X)/P'_n(X)$, se X é a esfera finitamente perfurada, é um grupo cristalográfico. Isso nos motivou a fazer alguns questionamentos a respeito desse novo ambiente, motivados pelos resultados de [39]. Por exemplo, qual dimensão desse grupo cristalográfico obtido, se há subgrupos de Bieberbach e como podemos obtê-los, dentre outras questões.

2.1 O grupo quociente $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ é um grupo cristalográfico

Inicialmente recordamos alguns fatos sobre grupos de tranças da esfera finitamente perfurada e para uma leitura mais detalhada desses grupos referenciamos [31] e [51]. Sejam $n, p \in \mathbb{Z}$, com $n, p \geq 1$. Por [34, Proposição 2.5], temos que o grupo de tranças da

esfera finitamente perfurada

$$B_n(\mathbb{S}^2 \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_p\})$$

é isomorfo ao grupo de tranças

$$B_n(\mathbb{D}^2 \setminus \{x_1, \dots, x_p\}).$$

Observemos que o grupo de tranças $B_n(\mathbb{D}^2 \setminus \{x_1, \dots, x_p\})$ do disco \mathbb{D}^2 finitamente perfurado foi denotada por $B_{p,n}$ em [51]. Essa mesma notação $B_{p,n}$ também tem sido usada para grupo de tranças mistas em [34]. Por isso, para que não haja ambiguidade com as notações usadas em [34] e [51], neste trabalho denotamos *o grupo de tranças com n cordas da esfera finitamente perfurada* por

$$B_n(M_{0,p+1}),$$

onde $M_{0,p+1} = \mathbb{S}^2 \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_p\}$ é a esfera finitamente perfurada.

Uma apresentação do grupo de tranças $B_n(M_{0,p+1})$ foi inicialmente dada em [51] no ano de 1998. Em 2005, uma outra apresentação foi dada ao grupo $B_n(M_{0,p+1})$, como podemos ver em [31, Proposição 9]. Por questões técnicas, neste capítulo vamos considerar a apresentação dada em [51].

Teorema 2.1 ([51, Teorema 3]). *Sejam $n, p \in \mathbb{Z}$, com $n, p \geq 1$. O grupo de tranças da esfera finitamente perfurada $B_n(M_{0,p+1})$ possui a seguinte apresentação*

Geradores: $\sigma_{p+1}, \sigma_{p+2}, \dots, \sigma_{p+n-1}, A_{1,p+1}, A_{2,p+1}, \dots, A_{p,p+1}$.

Relações:

(a) *As relações de Artin*

$$\begin{aligned} \sigma_k \sigma_{k+1} \sigma_k &= \sigma_{k+1} \sigma_k \sigma_{k+1}, & \text{se } p+1 \leq k \leq p+n-2 \\ \sigma_k \sigma_i &= \sigma_i \sigma_k, & \text{se } |k-i| > 1. \end{aligned}$$

(b) *Para todo $k \geq p+2$ e $1 \leq i \leq p$, $A_{i,p+1} \sigma_k = \sigma_k A_{i,p+1}$.*

(c) *$A_{i,p+1} \sigma_{p+1} A_{i,p+1} \sigma_{p+1} = \sigma_{p+1} A_{i,p+1} \sigma_{p+1} A_{i,p+1}$, se $1 \leq i \leq p$.*

(d) *$A_{i,p+1} (\sigma_{p+1} A_{r,p+1} \sigma_{p+1}^{-1}) = (\sigma_{p+1} A_{r,p+1} \sigma_{p+1}^{-1}) A_{i,p+1}$, se $1 \leq r < i \leq p$.*

Demonstração. Ver [51, Teorema 3]. □

Observação 2.2. De acordo com [34, Proposição 2.5(ii)], se $p = 0$ então o grupo de tranças $B_n(\mathbb{S}^2 \setminus \{x_0\})$ é isomorfo ao grupo de tranças de Artin B_n , por isso consideremos $p \geq 1$. Além disso, $B_n(M_{0,p+1})$ é subgrupo do grupo de tranças de Artin B_{p+n} , segundo [34, Proposição 2.5(iii)] e [51, p.274].

A partir da Observação [2.2] e de [34, Observação 2.2], representaremos geometricamente os geradores do grupo $B_n(M_{0,p+1})$ nas Figuras [4.1], [4.2] (planares) e Figuras [4.3], [4.4] (espaciais).

Sejam $n, p \in \mathbb{Z}$, com $n, p \geq 1$. Consideremos $S = \{p+1, \dots, p+n\}$. Seja S_n o grupo das permutações do conjunto S com a seguinte apresentação:

$$S_n = \left\langle \begin{array}{l|l} s_{p+1}, \dots, s_{p+n-1} & \begin{array}{l} s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}, \quad p+1 \leq i \leq p+n-2 \\ s_j s_r = s_r s_j, \quad |j-r| \geq 2 \\ s_i^2 = 1, \quad p+1 \leq i \leq p+n-1 \end{array} \end{array} \right\rangle. \quad (2.1)$$

Seja

$$\pi: B_n(M_{0,p+1}) \longrightarrow S_n \quad (2.2)$$

o homomorfismo definido nos geradores do grupo de tranças da esfera finitamente perfurada $B_n(M_{0,p+1})$ no grupo das permutações S_n , dado por

$$\pi(\sigma_{p+i}) = s_{p+i} = (p+i, p+i+1)$$

e

$$\pi(A_{k,p+1}) = 1,$$

para todo $1 \leq i \leq n-1$ e $1 \leq k \leq p$.

Sejam $n, p \in \mathbb{Z}$, com $n, p \geq 1$. Sabemos que o grupo de tranças puras da esfera finitamente perfurada $P_n(M_{0,p+1})$ é o núcleo do homomorfismo π , isto é, $\text{Ker}(\pi) = P_n(M_{0,p+1})$. Assim, obtemos a sequência exata curta a seguir.

$$1 \longrightarrow P_n(M_{0,p+1}) \longrightarrow B_n(M_{0,p+1}) \xrightarrow{\pi} S_n \longrightarrow 1. \quad (2.3)$$

Por [51, Teorema 1] temos que o grupo de tranças puras da esfera finitamente perfurada possui a seguinte apresentação.

Teorema 2.3 ([51, Teorema 1]). *Sejam $n, p \in \mathbb{Z}$, com $n, p \geq 1$. O grupo de tranças puras da esfera finitamente perfurada $P_n(M_{0,p+1})$ possui a seguinte apresentação*

Geradores: $A_{i,j}$, com $1 \leq i < j \leq p+n$ e $p+1 \leq j$.

Relações: As relações de Artin para o grupo de tranças puras

$$A_{i,j}^{-1} A_{r,s} A_{i,j} = \begin{cases} A_{r,s}, & \text{se } i < j < r < s \text{ ou } r < i < j < s \\ A_{i,s} A_{r,s} A_{i,s}^{-1}, & \text{se } i < r = j < s \\ A_{i,s} A_{j,s} A_{i,s} A_{j,s}^{-1} A_{i,s}^{-1}, & \text{se } r = i < j < s \\ A_{i,s} A_{j,s} A_{i,s}^{-1} A_{j,s}^{-1} A_{r,s} A_{j,s} A_{i,s} A_{j,s}^{-1} A_{i,s}^{-1}, & \text{se } i < r < j < s, \end{cases}$$

onde $A_{i,j} = \sigma_{j-1} \dots \sigma_{i+1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1}^{-1} \dots \sigma_{j-1}^{-1}$.

Demonstração. Ver [51, Teorema 1]. □

As representações geométricas dos geradores do grupo de tranças puras da esfera finitamente perfurada $P_n(M_{0,p+1})$ são dadas pelas Figuras 4.1 (planar) e 4.3 (espacial).

O próximo resultado nos traz informação a respeito do grupo abelianizado $P_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ do subgrupo de tranças puras da esfera finitamente perfurada $P_n(M_{0,p+1})$, vejamos.

Corolário 2.4. *Sejam $n, p \in \mathbb{Z}$, com $n, p \geq 1$. Então,*

$$P_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1}) \cong \mathbb{Z}^{n(n+2p-1)/2},$$

onde $P'_n(M_{0,p+1})$ é o subgrupo comutador do grupo $P_n(M_{0,p+1})$.

Demonstração. Sejam $n, p \in \mathbb{Z}$, com $n, p \geq 1$. Vamos dividir a demonstração desse corolário em duas partes: a primeira parte é para $n = 1$ e $p \geq 1$; a segunda parte é $n \geq 2$ e $p \geq 1$.

Suponhamos $n = 1$ e $p \geq 1$. Seja $\hat{x}_0 \in M_{0,p+1}$. Pelo Teorema de Seifert–van Kampen sabemos que o grupo fundamental da esfera $p + 1$ perfurada é isomorfo ao grupo livre $F[a_1, \dots, a_p]$ com p geradores livres. Sabemos também que

$$P_1(M_{0,p+1}) = \pi_1(M_{0,p+1}, \hat{x}_0)$$

e, portanto,

$$P_1(M_{0,p+1})/P'_1(M_{0,p+1}) = \pi_1(M_{0,p+1}, \hat{x}_0)/\pi'_1(M_{0,p+1}, \hat{x}_0)$$

é isomorfo ao grupo abeliano

$$F[a_1, \dots, a_p]/F'[a_1, \dots, a_p].$$

Como $F[a_1, \dots, a_p]/F'[a_1, \dots, a_p]$ é isomorfo ao grupo abeliano livre \mathbb{Z}^p , então

$$P_1(M_{0,p+1})/P'_1(M_{0,p+1}) \cong \mathbb{Z}^p.$$

Agora, suponhamos $n \geq 2$ e $p \geq 1$. Da apresentação de $P_n(M_{0,p+1})$ dada pelo Teorema 2.3, sabe-se que

$$A_{i,j}^{-1} A_{r,s} A_{i,j} = \begin{cases} A_{r,s}, & \text{se } i < j < r < s \text{ ou } r < i < j < s \\ A_{i,s} A_{r,s} A_{i,s}^{-1}, & \text{se } i < r = j < s \\ A_{i,s} A_{j,s} A_{i,s} A_{j,s}^{-1} A_{i,s}^{-1}, & \text{se } r = i < j < s \\ A_{i,s} A_{j,s} A_{i,s}^{-1} A_{j,s}^{-1} A_{r,s} A_{j,s} A_{i,s} A_{j,s}^{-1} A_{i,s}^{-1}, & \text{se } i < r < j < s, \end{cases}$$

em $P_n(M_{0,p+1})$, para todo $1 \leq i < j \leq p+n$ e $p+1 \leq j$. De onde segue-se que os geradores $A_{1,p+1}, \dots, A_{1,p+n}, A_{2,p+1}, \dots, A_{2,p+n}, \dots, A_{p,p+1}, \dots, A_{p,p+n}, A_{p+1,p+2}, \dots, A_{p+1,p+n}, \dots,$

$A_{p+n-1,p+n}$ são geradores livres em $P_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$. Afim de não carregarmos a notação, abusamos da notação quando denotamos simplesmente por $A_{i,j}$ o representante de classe $\bar{A}_{i,j}$ em $P_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$.

Observemos que o conjunto

$$\{A_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq p+n \text{ e } p+1 \leq j\}$$

possui cardinalidade igual a

$$n(n+2p-1)/2.$$

Dessa maneira, concluímos a demonstração. □

Da Observação [1.12](#), como

$$P'_n(M_{0,p+1}) \trianglelefteq P_n(M_{0,p+1})$$

e

$$P_n(M_{0,p+1}) \trianglelefteq B_n(M_{0,p+1}),$$

obtemos os grupos quocientes

$$P_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1}) \text{ e } B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1}).$$

Portanto, da equação [\(2.3\)](#) conseguimos a sequência exata curta a seguir:

$$1 \longrightarrow P_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1}) \longrightarrow B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1}) \xrightarrow{\bar{\pi}} S_n \longrightarrow 1,$$

isto é,

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^{n(n+2p-1)/2} \longrightarrow B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1}) \xrightarrow{\bar{\pi}} S_n \longrightarrow 1, \quad (2.4)$$

onde $\bar{\pi}$ é o homomorfismo induzido por [\(2.2\)](#).

Estamos interessados na ação por conjugação de $B_n(M_{0,p+1})$ em $P_n(M_{0,p+1})$, para obter a ação por conjugação de $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ em $P_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$. Saber a descrição da ação por conjugação de $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ em $P_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ é importante aqui no nosso contexto, pois é uma condição suficiente para responder se o quociente $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ é ou não cristalográfico.

Segundo [\[51\]](#), Definição 2, p.277] (ver também [\[39\]](#), Proposição 12]), para todo $i \in \{1, 2, \dots, p+n-1\}$, $j \in \{p+1, \dots, p+n\}$ e $i < j$, temos

$$\sigma_{p+k}^{-1} A_{i,j} \sigma_{p+k} = \begin{cases} A_{i,j}, & \text{se } k \leq i-2 \text{ ou } i+1 \leq k \leq j-2 \text{ ou } k \geq j+1 \\ A_{i-1,j}, & \text{se } k = i-1 \\ A_{i,j} A_{i+1,j} A_{i,j}^{-1}, & \text{se } k = i \\ A_{i,j-1}, & \text{se } k = j-1 \\ A_{i,j} A_{i,j+1} A_{i,j}^{-1}, & \text{se } k = j. \end{cases}$$

Ou seja,

$$\sigma_{p+k} A_{i,j} \sigma_{p+k}^{-1} = \begin{cases} A_{i,j}, & \text{se } p+k \neq i-1, i, j-1, j \\ A_{i,j+1}, & \text{se } j = p+k \\ A_{i,j}^{-1} A_{i,j-1} A_{i,j}, & \text{se } j = p+k+1 \\ A_{i+1,j}, & \text{se } i = p+k < j-1 \\ A_{i,j}^{-1} A_{i-1,j} A_{i,j}, & \text{se } i = p+k+1. \end{cases} \quad (2.5)$$

Agora, diante a ação por conjugação de $B_n(M_{0,p+1})$ em $P_n(M_{0,p+1})$ dada em (2.5), obtemos a Proposição 2.5, a qual nos dá a ação por conjugação de $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ em $P_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ e, por conseguinte, chegamos à representação inteira de S_n em $\text{Aut}(\mathbb{Z}^{\frac{n(n+2p-1)}{2}})$.

Proposição 2.5. *Sejam $n, p \in \mathbb{Z}$, com $n \geq 2$ e $p \geq 1$. Consideremos $\alpha \in B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ e $\tau = \bar{\pi}(\alpha^{-1}) \in S_n$. Então*

$$\alpha A_{i,j} \alpha^{-1} = A_{\tau(i), \tau(j)},$$

em $P_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$.

Demonstração. Sejam $n, p \in \mathbb{Z}$, com $n \geq 2$ e $p \geq 1$. Consideremos

$$\alpha \in B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1}),$$

onde $\alpha = bP'_n(M_{0,p+1})$ com $b \in B_n(M_{0,p+1})$. Então, para todo $i \in \{1, \dots, p+n-1\}$, $j \in \{p+1, \dots, p+n\}$ e $i < j$, temos

$$\alpha A_{i,j} \alpha^{-1} = (bP'_n(M_{0,p+1}))(A_{i,j}P'_n(M_{0,p+1}))(b^{-1}P'_n(M_{0,p+1})) = (bA_{i,j}b^{-1})P'_n(M_{0,p+1}).$$

Como $bA_{i,j}b^{-1} \in P_n(M_{0,p+1})$, então $bA_{i,j}b^{-1} \in P_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ (houve um abuso de notação ao denotarmos a classe do elemento por simplesmente $bA_{i,j}b^{-1}$).

Suponhamos $b = \sigma_{i_1}^{\epsilon_1} \sigma_{i_2}^{\epsilon_2} \cdots \sigma_{i_r}^{\epsilon_r}$, com $\sigma_{i_k} \in \{\sigma_{p+1}, \sigma_{p+2}, \dots, \sigma_{p+n-1}\}$ e $\epsilon_k \in \{-1, +1\}$. Então

$$bA_{i,j}b^{-1} = \sigma_{i_1}^{\epsilon_1} \sigma_{i_2}^{\epsilon_2} \cdots \sigma_{i_r}^{\epsilon_r} A_{i,j} \sigma_{i_r}^{-\epsilon_r} \cdots \sigma_{i_2}^{-\epsilon_2} \sigma_{i_1}^{-\epsilon_1}.$$

Provaremos esta proposição usando o Princípio de Indução Finita em r . Se $r = 1$, então $b = \sigma_{i_1}^{\epsilon_1}$ e $\tau = \bar{\pi}(\sigma_{i_1}^{\epsilon_1}) \in S_n$. Por (2.5) temos:

Caso 1: Quando $i_1 \neq i-1, i, j-1, j$,

$$\sigma_{i_1}^{\epsilon_1} A_{i,j} \sigma_{i_1}^{-\epsilon_1} = A_{i,j} = A_{\tau(i), \tau(j)},$$

onde $\tau = (i_1, i_1 + 1) = \bar{\pi}(\sigma_{i_1}^{-1}) \in S_n$.

Caso 2: Quando $i_1 = j$, então

$$\sigma_{i_1}^{\epsilon_1} A_{i,j} \sigma_{i_1}^{-\epsilon_1} = A_{i,j+1} = A_{\tau(i), \tau(j)},$$

onde $\tau = (j, j + 1) = \bar{\pi}(\sigma_{i_1}^{-1}) \in S_n$.

Caso 3: Quando $j = i_1 + 1$, então

$$\sigma_{i_1}^{\epsilon_1} A_{i,j} \sigma_{i_1}^{-\epsilon_1} = A_{i,j}^{-1} A_{i,j-1} A_{i,j} = A_{i,j-1} = A_{\tau(i),\tau(j)},$$

onde $\tau = (j - 1, j) = \bar{\pi}(\sigma_{i_1}^{-1}) \in S_n$.

Caso 4: Quando $i = i_1 < j - 1$, então

$$\sigma_{i_1}^{\epsilon_1} A_{i,j} \sigma_{i_1}^{-\epsilon_1} = A_{i+1,j} = A_{\tau(i),\tau(j)},$$

onde $\tau = (i, i + 1) = \bar{\pi}(\sigma_{i_1}^{-1}) \in S_n$.

Caso 5: Quando $j = i_1 + 1$, então

$$\sigma_{i_1}^{\epsilon_1} A_{i,j} \sigma_{i_1}^{-\epsilon_1} = A_{i,j}^{-1} A_{i-1,j} A_{i,j} = A_{i-1,j} = A_{\tau(i),\tau(j)},$$

onde $\tau = (i - 1, i) = \bar{\pi}(\sigma_{i_1}^{-1}) \in S_n$.

Agora, por hipótese de indução, suponhamos

$$\alpha = \sigma_{i_1}^{\epsilon_1} \sigma_{i_2}^{\epsilon_2} \cdots \sigma_{i_r}^{\epsilon_r} P'_n(M_{0,p+1})$$

e

$$\alpha A_{i,j} \alpha^{-1} = A_{\tau(i),\tau(j)},$$

com $r \geq 2$ e $\tau = \bar{\pi}(\alpha^{-1}) \in S_n$.

Consideremos $\beta = \alpha \sigma_{r+1}^{\epsilon_{r+1}} \in B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ de comprimento $r + 1$, onde $\sigma_{r+1} \in \{\sigma_{p+1}, \sigma_{p+2}, \dots, \sigma_{p+n-1}\}$ e $\epsilon_{r+1} \in \{-1, +1\}$. Se $\sigma = \bar{\pi}(\beta^{-1})$, então para todo $1 \leq i \leq p + n - 1$, $p + 1 \leq j \leq p + n$ e $i < j$:

$$\begin{aligned} \beta A_{i,j} \beta^{-1} &= \alpha \sigma_{r+1}^{\epsilon_{r+1}} A_{i,j} (\alpha \sigma_{r+1}^{\epsilon_{r+1}})^{-1} \\ &= \alpha (\sigma_{r+1}^{\epsilon_{r+1}} A_{i,j} \sigma_{r+1}^{-\epsilon_{r+1}}) \alpha^{-1} \\ &= \alpha (A_{\bar{\pi}(\sigma_{r+1}^{-\epsilon_{r+1}})(i), \bar{\pi}(\sigma_{r+1}^{-\epsilon_{r+1}})(j)}) \alpha^{-1} \\ &= A_{\bar{\pi}(\alpha^{-1})(\bar{\pi}(\sigma_{r+1}^{-\epsilon_{r+1}})(i)), \bar{\pi}(\alpha^{-1})(\bar{\pi}(\sigma_{r+1}^{-\epsilon_{r+1}})(j))} \\ &= A_{\bar{\pi}(\sigma_{r+1}^{-\epsilon_{r+1}} \alpha^{-1})(i), \bar{\pi}(\sigma_{r+1}^{-\epsilon_{r+1}} \alpha^{-1})(j)} \\ &= A_{\sigma(i), \sigma(j)}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\beta A_{i,j} \beta^{-1} = A_{\sigma(i), \sigma(j)}$$

em $P_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$, com $\sigma = \bar{\pi}(\beta^{-1}) \in S_n$.

Desse modo, pelo Princípio de Indução Finita, segue que, dado

$$\alpha = \sigma_{i_1}^{\epsilon_1} \sigma_{i_2}^{\epsilon_2} \cdots \sigma_{i_r}^{\epsilon_r} P'_n(M_{0,p+1}) \in B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$$

de comprimento $r \in \mathbb{N}$, então

$$\alpha A_{i,j} \alpha^{-1} = A_{\bar{\pi}(\alpha^{-1}(i), \bar{\pi}(\alpha^{-1}(j))},$$

onde $\bar{\pi}$ é o homomorfismo de $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ em S_n , induzido por π em (2.2). \square

O próximo resultado, o Teorema 2.6, nos apresenta a conexão dos grupos de tranças da esfera finitamente perfurada e grupos cristalográficos. O Teorema 2.6 é um resultado inédito e nos surpreende quando nos diz que o quociente $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ é um grupo cristalográfico, contrapondo ao fato de que $B_n(\mathbb{S}^2)/P'_n(\mathbb{S}^2)$ não é um grupo cristalográfico, como nos mostra [42, Proposição 17].

Teorema 2.6. *Sejam $n, p \in \mathbb{Z}$, com $n, p \geq 1$. Existe uma sequência exata curta*

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^{n(n+2p-1)/2} \longrightarrow B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1}) \xrightarrow{\bar{\pi}} S_n \longrightarrow 1$$

e o grupo

$$B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$$

é um grupo cristalográfico.

Demonstração. Sejam $n, p \in \mathbb{Z}$, com $n, p \geq 1$. Suponhamos $n = 1$ e $p \geq 1$. Consideremos $\hat{x}_0 \in M_{0,p+1}$. Sabe-se que o grupo fundamental da superfície $M_{0,p+1}$ é isomorfo ao grupo de tranças $B_1(M_{0,p+1})$. Além disso, $B_1(M_{0,p+1}) = P_1(M_{0,p+1})$. Logo,

$$B_1(M_{0,p+1})/P'_1(M_{0,p+1}) \cong \pi_1(M_{0,p+1}, \hat{x}_0)/\pi'_1(M_{0,p+1}, \hat{x}_0).$$

Pelo Teorema de Seifert–van Kampen sabemos que $\pi_1(M_{0,p+1}, \hat{x}_0)$ é isomorfo ao grupo livre $F[a_1, \dots, a_p]$, logo

$$\pi_1(M_{0,p+1}, \hat{x}_0)/\pi'_1(M_{0,p+1}, x_0) \cong \mathbb{Z}^p$$

e, portanto,

$$B_1(M_{0,p+1})/P'_1(M_{0,p+1}) \cong \mathbb{Z}^p. \tag{2.6}$$

Agora, suponhamos $n \geq 2$ e $p \geq 1$. Consideremos a sequência exata curta (2.4)

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^{n(n+2p-1)/2} \longrightarrow B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1}) \xrightarrow{\bar{\pi}} S_n \longrightarrow 1$$

e a ação induzida por conjugação

$$\varphi: S_n \longrightarrow \text{Aut}(P_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})),$$

com

$$\varphi(\tau)(A_{i,j}) = \alpha A_{i,j} \alpha^{-1}$$

e $\bar{\pi}(\alpha^{-1}) = \tau \in S_n$. Da Proposição 2.5 vê-se que

$$\varphi(\tau)(A_{i,j}) = \alpha A_{i,j} \alpha^{-1} = A_{\tau(i),\tau(j)}.$$

De onde,

$$\varphi(\tau)(A_{i,j}) = A_{\tau(i),\tau(j)} = A_{i,j}$$

se, e somente se,

$$\tau = id \in S_n.$$

Logo, φ é uma representação fiel.

Portanto, pelo Lema 1.15 concluímos que

$$B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$$

é um grupo cristalográfico. □

Sabemos pelo Teorema 2.6 que $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ é um grupo cristalográfico de dimensão $n(n+2p-1)/2$ e que, diante de algumas perguntas motivadas por [39], conforme comentamos anteriormente, somos levados ao seguinte questionamento: existe(m) subgrupo(s) cristalográfico(s) cuja dimensão é a mesma de $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$? Se sim, podemos realizá-los? O próximo corolário responde esses questionamentos e, esse próximo resultado é um caso particular do Corolário 1.19, vejamos.

Corolário 2.7. *Sejam $n, p \in \mathbb{Z}$, com $n \geq 2$, $p \geq 1$ e H um subgrupo de S_n . Então o grupo*

$$\tilde{H}_n = \pi^{-1}(H)/P'_n(M_{0,p+1})$$

é grupo cristalográfico e sua dimensão é

$$n(n+2p-1)/2,$$

com grupo de holonomia H .

Demonstração. Sejam $n, p \in \mathbb{Z}$, com $n \geq 2$, $p \geq 1$ e H um subgrupo de S_n . Consideremos a seqüência exata curta do Teorema 2.6

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^{n(n+2p-1)/2} \longrightarrow B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1}) \xrightarrow{\bar{\pi}} S_n \longrightarrow 1.$$

Por hipótese H é subgrupo de S_n e, como $\varphi: S_n \longrightarrow \text{Aut}(P_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1}))$ é a representação de holonomia de $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$, então

$$\varphi \upharpoonright_{\tilde{H}_n}$$

é uma representação fiel de \tilde{H} . Portanto, aplicando o Lema [1.15](#) à sequência exata curta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^{n(n+2p-1)/2} \longrightarrow \tilde{H} \xrightarrow{\bar{\pi}|_{\tilde{H}}} H \longrightarrow 1,$$

temos \tilde{H}_n é grupo cristalográfico de dimensão $n(n+2p-1)/2$ com grupo de holonomia H . \square

Sejam $n, p \in \mathbb{Z}$, com $n, p \geq 1$. Então, por [\[34, Proposição 2.5\(iii\)\]](#) e [\[51, p.274\]](#), $B_n(M_{0,p+1})$ e $P_n(M_{0,p+1})$ são subgrupos do grupo de Artin B_{p+n} e, portanto, seguem a seguinte definição e as observações.

Definição 2.8. Seja $\beta \in B_n(M_{0,p+1})$ uma n -trança e consideremos duas de suas cordas, a i -ésima corda d_i e a j -ésima corda d_j , com $i \neq j$. Denotamos por $p(i, j)$ (respectivamente $n(i, j)$) ao **número de cruzamentos, da esquerda para direita** (respectivamente **da direita para esquerda**), **da corda d_i por trás da corda d_j** . O número $p(i, j) - n(i, j)$ é chamado de **número de cruzamentos da n -trança β** , denotado por $cr(\beta | i, j)$.

Observação 2.9. Sejam n e p inteiros positivos, com $1 \leq i < j \leq p+n$ e $p+1 \leq j$.

(a) Seja $1 \leq k \leq n-1$ e $\sigma_k \in B_n(M_{0,p+1})$. Então,

$$cr(\sigma_k | i, j) = \begin{cases} 1, & \text{se } (i, j) = (k, k+1), \\ 0, & \text{se } (i, j) \neq (k, k+1). \end{cases}$$

(b) Sejam $1 \leq s < t \leq n$ e $A_{i,j} \in B_n(M_{0,p+1})$. Então

$$cr(A_{i,j} | s, t) = \begin{cases} 1, & \text{se } (s, t) = (i, j), \\ 0, & \text{se } (s, t) \neq (i, j) \end{cases}$$

(c) Sejam $\alpha, \beta \in B_n(M_{0,p+1})$ e $\tau = \pi(\alpha)$. Então

$$cr(\alpha\beta | i, j) = cr(\alpha | i, j) + cr(\beta | \tau(i), \tau(j)).$$

Em particular, se $\alpha, \beta \in P_n(M_{0,p+1})$ então

$$cr(\alpha\beta | i, j) = cr(\alpha | i, j) + cr(\beta | i, j).$$

(d) Seja $\alpha \in P'_n(M_{0,p+1})$. Então, $cr(\alpha | i, j) = 0$. De fato, como

$$P'_n(M_{0,p+1}) = \langle \{xyx^{-1}y^{-1} | x, y \in P_n(M_{0,p+1})\} \rangle,$$

então do item (c), temos

$$cr(x^{-1}|\tau(i), \tau(j)) = -cr(x|i, j).$$

Suponhamos sem perda de generalidade $\alpha = xyx^{-1}y^{-1}$. Então

$$cr(\alpha \mid i, j) = cr(x \mid i, j) + cr(y \mid i, j) - cr(x^{-1} \mid i, j) - cr(y^{-1} \mid i, j) = 0.$$

Proposição 2.10. *Sejam $n, p \in \mathbb{Z}$, com $n, p \geq 1$. Suponhamos*

$$\alpha \in P_n(M_{0,p+1})$$

e

$$\bar{\alpha} = \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{m_{i,j}} \in P_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1}),$$

onde $m_{i,j} \in \mathbb{Z}$, para todo $(i, j) \in I = \{(r, s) \mid r < s, 1 \leq r \leq p+n-1, p+1 \leq s \leq p+n\}$. Então $m_{i,j}$ é o número de cruzamentos da corda d_i com a corda d_j da trança α .

Demonstração. Sejam $n, p \in \mathbb{Z}$, com $n, p \geq 1$. Consideremos $(k, t) \in I = \{(r, s) \mid r < s, 1 \leq r \leq p+n-1, p+1 \leq s \leq p+n\}$. Então, pelos itens (b) e (c) da Observação 2.9, temos

$$cr\left(\prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{m_{i,j}} \mid k, t\right) = \sum_{(i,j) \in I} cr\left(A_{i,j}^{m_{i,j}} \mid k, t\right) = m_{k,t}$$

□

Observação 2.11. Sejam n e p inteiros positivos.

Seja $I = \{(r, s) \mid r < s, 1 \leq r \leq p+n-1, p+1 \leq s \leq p+n\}$. Consideremos $\alpha \in B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ tal que $\bar{\pi}(\alpha^{-1}) = \sigma \in S_n$ e $\prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{m_{i,j}} \in P_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$.

Então, pela Proposição 2.5 temos

$$\begin{aligned} \alpha \left(\prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{m_{i,j}} \right) \alpha^{-1} &= \alpha \left(A_{i_1, j_1}^{m_{i_1, j_1}} \cdots A_{i_r, j_r}^{m_{i_r, j_r}} \right) \alpha^{-1} \\ &\stackrel{(\alpha^{-1}\alpha)}{=} \left(\alpha A_{i_1, j_1}^{m_{i_1, j_1}} \alpha^{-1} \right) \cdots \left(\alpha A_{i_r, j_r}^{m_{i_r, j_r}} \alpha^{-1} \right) \\ &= \left(\alpha A_{i_1, j_1} A_{i_1, j_1} \cdots A_{i_1, j_1} \alpha^{-1} \right) \cdots \left(\alpha A_{i_r, j_r} A_{i_r, j_r} \cdots A_{i_r, j_r} \alpha^{-1} \right) \\ &\stackrel{(\alpha^{-1}\alpha)}{=} \left(\alpha A_{i_1, j_1} \alpha^{-1} \alpha A_{i_1, j_1} \cdots \alpha A_{i_1, j_1} \alpha^{-1} \right) \cdots \left(\alpha A_{i_r, j_r} \alpha^{-1} \alpha A_{i_r, j_r} \cdots \right. \\ &\quad \left. \alpha A_{i_r, j_r} \alpha^{-1} \right) \\ &\stackrel{Prop\ 2.5}{=} \left(A_{\sigma(i_1), \sigma(j_1)} \cdots A_{\sigma(i_1), \sigma(j_1)} \right) \cdots \left(A_{\sigma(i_r), \sigma(j_r)} \cdots A_{\sigma(i_r), \sigma(j_r)} \right) \\ &= \left(A_{\sigma(i_1), \sigma(j_1)}^{m_{i_1, j_1}} \cdots A_{\sigma(i_r), \sigma(j_r)}^{m_{i_r, j_r}} \right) \\ &= \prod_{(i,j) \in I} A_{\sigma(i), \sigma(j)}^{m_{i,j}} \\ &\stackrel{(*)}{=} \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{m_{\sigma^{-1}(i), \sigma^{-1}(j)}}. \end{aligned}$$

(*) Da expressão $\prod_{(i,j) \in I} A_{\sigma(i), \sigma(j)}^{m_{i,j}}$, notamos que, cada índice $\sigma(i), \sigma(j)$ de $A_{\sigma(i), \sigma(j)}$ estão em

relação biunívoca com os índices i, j de $m_{i,j}$, para todo $(i, j) \in I$. Pela bijetividade da permutação σ , segue que os índices i, j de $m_{\sigma^{-1}(i), \sigma^{-1}(j)}$ está em relação com i, j de $A_{i,j}$.

As Definições [2.12](#) e [2.13](#) nos auxiliarão em mostrar que dado $x \in B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ podemos escrevê-lo de forma única. E, para melhor compreensão das duas definições a seguir, consideremos a apresentação do grupos de tranças $B_n(M_{g,p})$ exibidas no Teorema [2.1](#) e a Observação [2.9\(b\)](#).

Definição 2.12. Uma trança $\beta \in B_n(M_{0,p+1})$ é dita **trança positiva**, quando β é escrita somente por geradores σ_{p+i} e $A_{r,p+1}$, com $1 \leq i \leq n-1$ e $1 \leq r \leq p$, e suas potências positivas. Denotamos o conjunto das tranças positivas por $B_n(M_{0,p+1})^+$.

Definição 2.13. Uma trança positiva $\alpha \in B_n(M_{0,p+1})$ é dita **trança de permutação positiva**, ou simplesmente, **trança de permutação**, se:

- (a) ao representar α geometricamente (representação gráfica) e ao observarmos apenas os cruzamentos de suas cordas duas a duas, elas se cruzam no máximo uma vez, considerando-se a partir da corda $p+1$ até a corda $p+n$.
- (b) o somatório do número de cruzamentos $cr(\alpha \mid i, p+1)$, para $1 \leq i \leq p$ for igual a cardinalidade dos $\{A_{i,j}\}$ presentes na palavra de α , isto é,

$$\sum_{i=1}^p cr(\alpha \mid i, p+1) = \text{card}(A_{i,p+1}),$$

para $1 \leq i \leq p$. Denotaremos por $\bar{S}_{p,n}^+$ ao conjunto das tranças de permutação de $B_n(M_{0,p+1})$.

Observação 2.14. Decorre da Definição [2.13](#) que a cardinalidade de $\bar{S}_{p,n}^+$ é finita e, mais ainda, que o conjunto dos representantes de classe de $\bar{S}_{p,n}^+$ em $B_n(M_{0,p+1})/P_n(M_{0,p+1})$, denotado por $S_{p,n}^+$, tem cardinalidade $n!$ Com efeito, basta considerar a restrição do homomorfismo π definido em [\(2.2\)](#) ao conjunto $\bar{S}_{p,n}^+$. Agora considere os representantes de classe de $S_{p,n}^+$ em $B_n(M_{0,p+1})/P_n(M_{0,p+1})$, logo obtemos uma aplicação bijetiva, ver [\[20\]](#), Lema 2.3] e [\[50\]](#), p.260].

Exemplo 2.15. Por exemplo, $\beta = \sigma_3\sigma_5\sigma_6^3\sigma_5 \in B_5(M_{0,2+1})$ é uma trança positiva, já a trança $\tilde{\beta} = \sigma_5\sigma_4^2\sigma_5^{-1} \in B_6(M_{0,2+1})$ não é uma trança positiva, isto é, $\beta \in B_6(M_{0,2+1})^+$ e $\tilde{\beta} \notin B_6(M_{0,2})^+$, ver Figuras [4.5](#) e [4.6](#).

Exemplo 2.16. As tranças $\alpha = \sigma_4\sigma_5\sigma_6$, $\tilde{\alpha} = \sigma_4\sigma_6$, $\alpha_1 = \sigma_5A_{1,4}$ e $\tilde{\alpha}_1 = \sigma_4A_{1,4}\sigma_6A_{2,4}A_{3,4}$ em $B_4(M_{0,3+1})$ são tranças de permutação, ou seja, $\alpha, \tilde{\alpha}, \alpha_1, \tilde{\alpha}_1 \in \bar{S}_{3,4}^+$; no caso das tranças $\gamma = \sigma_4^2$, $\tilde{\gamma} = \sigma_4\sigma_5^2$, $\gamma_1 = A_{1,4}^2\sigma_4$, $\gamma_2 = A_{3,4}^3$ e $\gamma_3 = \sigma_5^2A_{2,4}$ elas não pertencem ao $\bar{S}_{3,4}^+$, como podemos ver nas Figura [4.7](#), [4.8](#), [4.9](#), [4.10](#), [4.11](#), [4.12](#), [4.13](#), [4.14](#) e [4.15](#). Observemos que a escrita de uma trança em $\bar{S}_{p,n}^+$ não é única. De fato, as tranças $\sigma_{p+1}\sigma_{p+2}\sigma_{p+3}\sigma_{p+1}\sigma_{p+2}$ e $\sigma_{p+2}\sigma_{p+1}\sigma_{p+3}\sigma_{p+2}\sigma_{p+3}$ são equivalentes em $B_n(M_{0,p+1})^+$, ver

Figuras 4.16 e 4.17, mais ainda, $\pi(\sigma_{p+1}\sigma_{p+2}\sigma_{p+3}\sigma_{p+1}\sigma_{p+2}) = \pi(\sigma_{p+2}\sigma_{p+1}\sigma_{p+3}\sigma_{p+2}\sigma_{p+3}) = (p+1, p+4, p+2, p+3) \in S_n$, onde π é o homomorfismo definido em (2.2). Em consequência dessa observação, alguns autores escolhem escrever a trança de permutação simplesmente correspondendo a permutação em S_n , ver [20, Lema 2.3].

Observação 2.17. Segundo [50, p.263], para $n \geq 2$, qualquer $\beta \in B_n$ pode ser escrita na forma única

$$\beta = \Delta_n^s b,$$

onde $s \in \mathbb{Z}$ e $b \in B_n^+ \subset B_n$ não é múltiplo à direita de Δ_n , isto é, dado $a \in B_n^+$, temos $b \neq a\Delta_n$. Nota: Δ_n é o *half-twist* e dado por

$$\Delta_n = (\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1})(\sigma_1 \cdots \sigma_{n-2}) \cdots (\sigma_1 \sigma_2) \sigma_1$$

no grupo de tranças de Artin B_n e B_n^+ denota o conjunto das tranças de B_n que são escritas unicamente com os geradores positivos $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$.

Proposição 2.18. *Sejam $n, p \in \mathbb{Z}$, com $n \geq 2$ e $p \geq 1$. Seja $\pi: B_n(M_{0,p+1}) \rightarrow S_n$ o homomorfismo definido em (2.2). Se*

$$x \in B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1}),$$

então existem

$$A \in P_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$$

e

$$\delta_\theta \in S_{p,n}^+$$

com $\pi(\delta_\theta) = \theta$, tal que

$$x = A\bar{\delta}_\theta.$$

Mais ainda, a escrita do elemento x é único.

Demonstração. Inicialmente provaremos a existência de $A \in P_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ e $\delta_\theta \in S_{p,n}^+$ com $\pi(\delta_\theta) = \theta$, tal que $x = A\delta_\theta$. De fato, sejam $n, p \in \mathbb{Z}$, com $n \geq 2$ e $p \geq 1$. Consideremos o homomorfismo $\pi: B_n(M_{0,p+1}) \rightarrow S_n$ definido em (2.2). Pelo Primeiro Teorema do isomorfismo, temos

$$B_n(M_{0,p+1})/P_n(M_{0,p+1}) \cong \text{Im}(\pi) = S_n. \quad (2.7)$$

Sabemos da Observação 2.14 que existe uma bijeção entre $S_{p,n}^+$ e S_n , agora, juntamente com a equação (2.7), segue que existe uma bijeção entre $S_{p,n}^+$ e $B_n(M_{0,p+1})/P_n(M_{0,p+1})$. Notemos que $S_{p,n}^+$ é um conjunto de representantes de classes laterais de $B_n(M_{0,p+1})/P_n(M_{0,p+1})$. Assim, para todo $\theta \in S_n$, chamamos de $\delta_\theta \in S_{p,n}^+$ a trança de permutação em $B_n(M_{0,p+1})$, tal que $\pi(\delta_\theta) = \theta \in S_n$. Por abuso de notação,

a classe lateral do elemento δ_θ no grupo quociente $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ será denotada simplesmente por δ_θ .

Agora, como $P'_n(M_{0,p+1}) \trianglelefteq P_n(M_{0,p+1}) \trianglelefteq B_n(M_{0,p+1})$ e $P'_n(M_{0,p+1}) \trianglelefteq B_n(M_{0,p+1})$ (ver Observação 1.12), então pelo Terceiro Teorema do Isomorfismo temos

$$P_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1}) \trianglelefteq B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$$

e

$$B_n(M_{0,p+1})/P_n(M_{0,p+1}) \cong \frac{B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})}{P_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})}. \quad (2.8)$$

Suponhamos $x \in B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$, com $\bar{\pi}(x) = \theta \in S_n$ (onde $\bar{\pi}$ é o homomorfismo da sequência exata curta (2.4) induzido pelo homomorfismo (2.2)), e seja $\bar{x} \in \frac{B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})}{P_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})}$. Pelo isomorfismo (2.8) segue que

$$\bar{x} = \bar{\delta}_\theta \in \frac{B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})}{P_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})}.$$

Logo

$$x\delta_\theta^{-1} \in P_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$$

se, e somente se, existe

$$A \in P_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$$

tal que $x = A\delta_\theta$, com isso provamos a existência.

Além do mais, pelo Corolário 2.4 sabemos que $A = \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{m_{i,j}}$, onde $I = \{(r,s) \mid 1 \leq r \leq p+n-1, p+1 \leq s \leq p+n, r < s\}$ e $m_{i,j} \in \mathbb{Z}$, para todo $(i,j) \in I$. Portanto, para todo elemento $x \in B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ temos

$$x = \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{m_{i,j}} \cdot \delta_{\bar{\pi}(x)}, \quad (2.9)$$

com $\delta_{\bar{\pi}(x)} \in \frac{B_n(M_{0,p+1})}{P_n(M_{0,p+1})}$, $\prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{m_{i,j}} \in \frac{B_n(M_{0,p+1})}{P'_n(M_{0,p+1})}$, $\bar{\pi}(x) \in S_n$ e $m_{i,j} \in \mathbb{Z}$, para todo $(i,j) \in I = \{(r,s) \mid 1 \leq r \leq p+n-1, p+1 \leq s \leq p+n, r < s\}$.

Agora, provaremos a unicidade na escrita do elemento x . Com efeito, suponhamos que $x \in B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ não é escrito de forma única. Isto é, existem

$$A_1, A_2 \in P_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1}),$$

tais que

$$x = A_1\delta_\theta$$

e

$$x = A_2 \delta_\theta.$$

Como $x \delta_\theta^{-1} = A_1$ e $x \delta_\theta^{-1} = A_2$, segue $A_1 = A_2$. Logo a escrita de x é única, como queríamos demonstrar. \square

Definição 2.19. Seja $x \in B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$, nos referimos à escrita do elemento x apresentada na equação (2.9) como sendo a **forma normal de x** .

A forma normal de um elemento $x \in B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ será de grande importância na execução de alguns cálculos que nos permitirão conhecer melhor a estrutura do grupo quociente $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$.

Observação 2.20. Sejam $n, p \in \mathbb{Z}$, com $n \geq 2$ e $p \geq 1$. Consideremos $I = \{(r, s) \mid 1 \leq r \leq p+n-1, p+1 \leq s \leq p+n, r < s\}$ e, para todo $(i, j) \in I$, $m_{i,j}, n_{i,j} \in \mathbb{Z}$. Se $x, y \in B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$, com $x = \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{m_{i,j}} \cdot \delta_{\bar{\pi}(x)}$ e $y = \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{n_{i,j}} \cdot \delta_{\bar{\pi}(y)}$, então

$$xy = \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{m_{i,j}} \cdot \prod_{(i,j) \in I} A_{\bar{\pi}(x)^{-1}(i), \bar{\pi}(x)^{-1}(j)}^{n_{i,j}} \cdot \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{t_{i,j}} \cdot \delta_{\bar{\pi}(x)\bar{\pi}(y)}$$

em $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$, onde $t_{i,j} \in \mathbb{Z}$, para todo $(i, j) \in I$. Com efeito, pela Proposição 2.5, temos

$$\begin{aligned} x \cdot y &= \left(\prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{m_{i,j}} \cdot \delta_{\bar{\pi}(x)} \right) \cdot \left(\prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{n_{i,j}} \cdot \delta_{\bar{\pi}(y)} \right) \\ &= \left(\prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{m_{i,j}} \cdot \delta_{\bar{\pi}(x)} \right) \cdot \left(\prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{n_{i,j}} \cdot \delta_{\bar{\pi}(x)}^{-1} \delta_{\bar{\pi}(x)} \cdot \delta_{\bar{\pi}(y)} \right) \\ &= \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{m_{i,j}} \left(\delta_{\bar{\pi}(x)} \cdot \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{n_{i,j}} \cdot \delta_{\bar{\pi}(x)}^{-1} \right) \delta_{\bar{\pi}(x)} \cdot \delta_{\bar{\pi}(y)} \\ &= \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{m_{i,j}} \cdot \prod_{(i,j) \in I} A_{\bar{\pi}(x)^{-1}(i), \bar{\pi}(x)^{-1}(j)}^{n_{i,j}} \cdot \delta_{\bar{\pi}(x)} \delta_{\bar{\pi}(y)}. \end{aligned}$$

Pela Definição 2.19, o elemento $\delta_{\bar{\pi}(x)} \delta_{\bar{\pi}(y)} \in B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ possui a seguinte forma normal $\delta_{\bar{\pi}(x)} \delta_{\bar{\pi}(y)} = \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{t_{i,j}} \cdot \delta_{\bar{\pi}(x)\bar{\pi}(y)}$, onde $t_{i,j} \in \mathbb{Z}$, para todo $(i, j) \in I$. E, portanto,

$$x \cdot y = \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{m_{i,j}} \cdot \prod_{(i,j) \in I} A_{\bar{\pi}(x)^{-1}(i), \bar{\pi}(x)^{-1}(j)}^{n_{i,j}} \cdot \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{t_{i,j}} \cdot \delta_{\bar{\pi}(x)\bar{\pi}(y)}.$$

Agora, provaremos que o grupo cristalográfico $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ não possui elementos de ordem finita par.

Teorema 2.21. *Sejam $n, p \in \mathbb{Z}$, com $n, p \geq 1$. Então o grupo quociente $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ não possui elementos de ordem finita par, com exceção do elemento trivial.*

Demonstração. Sejam $n, p \in \mathbb{Z}$, com $n, p \geq 1$. Vamos dividir a demonstração em duas partes: a primeira parte trata dos casos $n = 1$ e $p \geq 1$, já a segunda parte diz respeito quando $n \geq 2$ e $p \geq 1$.

Primeira parte: suponhamos $n = 1$ e $p \geq 1$. consideremos $\hat{x}_0 \in M_{0,p+1}$. Sabemos que o grupo fundamental da superfície $M_{0,p+1}$ é isomorfo ao grupo de tranças $B_1(M_{0,p+1})$. Além disso, $B_1(M_{0,p+1}) = P_1(M_{0,p+1})$. Logo,

$$B_1(M_{0,p+1})/P'_1(M_{0,p+1}) \cong \pi_1(M_{0,p+1}, \hat{x}_0)/\pi'_1(M_{0,p+1}, \hat{x}_0).$$

Pelo Teorema de Seifert–van Kampen sabemos que $\pi_1(M_{0,p+1}, \hat{x}_0)$ é isomorfo ao grupo livre $F[a_1, \dots, a_p]$, logo

$$\pi_1(M_{0,p+1}, \hat{x}_0)/\pi'_1(M_{0,p+1}, \hat{x}_0) \cong \mathbb{Z}^p$$

e, portanto,

$$B_1(M_{0,p+1})/P'_1(M_{0,p+1}) \cong \mathbb{Z}^p.$$

Como \mathbb{Z}^p é livre de torção, então $B_1(M_{0,p+1})/P'_1(M_{0,p+1})$ não possui elementos de ordem finita par, com exceção do elemento trivial.

Segunda parte: Consideremos $n \geq 2$ e $p \geq 1$. Suponhamos por contradição que exista $\bar{\alpha} \in B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$, tal que $\bar{\alpha}^{2\omega} = 1$, com $\omega \in \mathbb{Z}$. Façamos

$$\bar{\beta} = \bar{\alpha}^\omega$$

e suponhamos que

$$\bar{\beta} = \beta P'_n(M_{0,p+1}) \in B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1}),$$

logo

$$\bar{\beta}^2 = (\bar{\alpha}^\omega)^2 = 1 \in B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1}).$$

Como $P_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ é livre de torção (ver Corolário 2.4), então $\beta \in B_n(M_{0,p+1})$ e $\beta \notin P_n(M_{0,p+1})$. Ademais,

$$\bar{\pi}(\bar{\beta}) = (i_1, i_2)(i_3, i_4) \cdots (i_r, i_{r+1}) \in S_n,$$

com $p+1 \leq r \leq p+n-1$ e r ímpar. Sem perda de generalidade, suponhamos

$$\bar{\pi}(\bar{\beta}) = (p+1, p+2)(p+3, p+4) \cdots (p+k, p+k+1),$$

onde $1 \leq k \leq n-1$ e k ímpar. Se $\theta = \bar{\pi}(\bar{\beta})$, então $\delta_\theta = \sigma_{p+1}\sigma_{p+3}\sigma_{p+5} \cdots \sigma_{p+k}$. Pela Definição 2.19, temos $\bar{\beta} = \prod_{(i,j) \in I} A_{ij}^{n_{i,j}} \delta_\theta$ em $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$. Observemos que

$$\begin{aligned} \delta_\theta \delta_\theta &= (\sigma_{p+1} \sigma_{p+3} \sigma_{p+5} \cdots \sigma_{p+k}) (\sigma_{p+1} \sigma_{p+3} \sigma_{p+5} \cdots \sigma_{p+k}) \\ &= (\sigma_{p+1}^2 \sigma_{p+3}^2 \sigma_{p+5}^2 \cdots \sigma_{p+k}^2) \\ &= A_{p+1,p+2} A_{p+3,p+4} A_{p+5,p+6} \cdots A_{p+k,p+k+1}. \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} \beta^2 &= \left(\prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{n_{i,j}} \cdot \delta_\theta \right)^2 \\ &= \left(\prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{n_{i,j}} \cdot \delta_\theta \right) \left(\prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{n_{i,j}} \cdot \delta_\theta \right) \\ &= \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{n_{i,j}} \prod_{(i,j) \in I} A_{\theta^{-1}(i), \theta^{-1}(j)}^{n_{i,j}} \cdot \delta_\theta \delta_\theta \\ &= \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{n_{i,j}} \prod_{(i,j) \in I} A_{\theta^{-1}(i), \theta^{-1}(j)}^{n_{i,j}} \cdot (A_{p+1,p+2} A_{p+3,p+4} A_{p+5,p+6} \cdots A_{p+k,p+k+1}) \\ &= \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{n_{i,j}} \prod_{i,j} A_{i,j}^{n_{\theta(i), \theta(j)}} \cdot (A_{p+1,p+2} A_{p+3,p+4} A_{p+5,p+6} \cdots A_{p+k,p+k+1}). \end{aligned}$$

Da Proposição 2.10, temos

$$\begin{aligned} cr(\beta^2 \mid p+1, p+2) &= cr \left(\prod_{i,j \in I} A_{i,j}^{n_{i,j}} \mid p+1, p+2 \right) + cr \left(\prod_{i,j \in I} A_{i,j}^{n_{\theta(i), \theta(j)}} \mid p+1, p+2 \right) + \\ &= cr \left(\prod_{r=1}^{k+1} A_{p+1,p+2} \mid p+1, p+2 \right) \\ &= n_{p+1,p+2} + n_{p+2,p+1} + 1. \end{aligned}$$

Lembremos que $A_{i,j}^{n_{i,j}} = A_{j,i}^{n_{j,i}}$, no caso dos geradores $A_{i,j}$ de Artin, por escolha nossa, consideramos $A_{i,j}^{n_{i,j}}$, com $i < j$. Logo,

$$\begin{aligned} cr(\beta^2 \mid p+1, p+2) &= n_{p+1,p+2} + n_{p+1,p+2} + 1 \\ &= 2 \cdot n_{p+1,p+2} + 1. \end{aligned}$$

Entretanto, $\bar{\beta}^2 \in P'_n(M_{0,p+1})$ e $cr(\beta^2 \mid p+1, p+2) = 0$, o que é uma contradição, pois a equação

$$2 \cdot n_{p+1,p+2} + 1 = 0$$

não possui solução nos inteiros.

Portanto, não existe $\bar{\beta} \in B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ tal que

$$\bar{\beta}^2 = 1,$$

mais ainda, não existem $k \in \mathbb{Z}$ e $\bar{\alpha} \in B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ tal que

$$\bar{\alpha}^{2k} = 1$$

em $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$. □

Observação 2.22.

- (a) O Teorema 2.21 implica que qualquer subgrupo de ordem finita de $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$, se existir, é de ordem ímpar.
- (b) Seja K um subgrupo de ordem finita de $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$. Aplicando o Lema 1.18, o Teorema 2.6 e o Teorema 2.21 à sequência exata curta

$$1 \longrightarrow P_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1}) \longrightarrow B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1}) \xrightarrow{\bar{\pi}} S_n \longrightarrow 1,$$

temos a restrição $\bar{\pi}|_K: K \longrightarrow \bar{\pi}(K)$ é um isomorfismo, pois o núcleo é livre de torção.

O próximo resultado mostra-nos que por uma escolha apropriada de H , usando o Corolário 2.7, obtemos grupos de Bieberbach de dimensão $n(n+2p-1)/2$ em $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$.

Corolário 2.23. *Sejam $n, p \in \mathbb{Z}$, com $n \geq 2$ e $p \geq 1$. Se H um 2-subgrupo de S_n , então o grupo $\tilde{H}_n = \pi^{-1}(H)/P'_n(M_{0,p+1})$ é um grupo de Bieberbach de dimensão $n(n+2p-1)/2$.*

Demonstração. Sejam $n, p \in \mathbb{Z}$, com $n \geq 2$ e $p \geq 1$. Suponhamos H subgrupo de S_n um 2-subgrupo. Pelo Corolário 2.7, temos $\tilde{H}_n = \pi^{-1}(H)/P'_n(M_{0,p+1})$ é um grupo cristalográfico. Para que \tilde{H}_n seja um grupo de Bieberbach é suficiente mostrarmos que \tilde{H}_n é livre de torção, isto é, o grupo de torção de \tilde{H}_n é trivial. Com efeito, tomamos $1 \neq \tilde{h} \in \tilde{H}_n$ tal que $\tilde{h}^k = 1$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Assim $\bar{\pi}(\tilde{h}^k) = 1$ e, conseqüentemente, $(\bar{\pi}(\tilde{h}))^k = 1$ em $H \subset S_n$. Como H é 2-subgrupo de S_n , então existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $k = 2^r$. Logo \tilde{h} é um elemento de ordem par em $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$, o que contradiz o Teorema 2.21. Assim, o elemento trivial é o único que possui ordem finita em \tilde{H}_n e, portanto é livre de torção. □

2.2 Torção do grupo $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$

Nesta seção vamos estudar o subgrupo de torção do grupo quociente $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$.

Definição 2.24. Sejam $n, p \in \mathbb{Z}$, com $n \geq 2$, $p \geq 1$ e S_n o grupo de permutações definido em (2.1). Consideremos $\theta \in S_n$ e $G = \langle \theta \rangle$ o grupo cíclico gerado por θ . Seja $\tilde{S} = \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq p+n, p+1 \leq j\}$. Se $\lambda \in G$, por convenção $\lambda(i) = i$, para todo $1 \leq i \leq p$. Definimos a ação $*$ do grupo G no conjunto \tilde{S} de pares ordenados de

elementos distintos de $\{1, \dots, p, p+1, \dots, p+n\}$ como sendo:

$$*: G \times \tilde{S} \longrightarrow \tilde{S}$$

$$(\lambda, (i, j)) \longmapsto *(\lambda, (i, j)) = \begin{cases} (\lambda(i), \lambda(j)), & \text{se } \lambda(i) < \lambda(j), \\ (\lambda(j), \lambda(i)), & \text{se } \lambda(i) > \lambda(j). \end{cases}$$

Denotamos por $\mathcal{O}_\theta(i, j)$ a *órbita do elemento* (i, j) . O *comprimento da órbita* $|\mathcal{O}_\theta(i, j)|$ é a cardinalidade da órbita. Chamaremos de *transversal associada à permutação* θ uma transversal da $*$ e a denotaremos por \mathcal{T}_θ , ou seja, \mathcal{T}_θ é o conjunto formado pelos elementos (i_r, j_r) , onde cada (i_r, j_r) é um representante da órbita $\mathcal{O}_\theta(i_r, j_r)$. Observemos que \mathcal{T}_θ contém exatamente um representante de cada órbita.

Observação 2.25. Sejam $n, p \in \mathbb{Z}$, com $n \geq 2$, $p \geq 1$ e S_n o grupo de permutações definido em (2.1). Consideremos $\theta \in S_n$, com $\theta = (p+n, \dots, p+2, p+1)$, e a ação da Definição 2.24. Observemos que uma transversal \mathcal{T}_θ associada à θ é o conjunto $\{(1, p+1), (2, p+1), \dots, (p, p+1), (p+1, p+2), (p+1, p+3), \dots, (p+1, \theta^l(p+1))\}$, onde $l = \frac{n}{2}$ se n é par, ou $l = \frac{n-1}{2}$ se n é ímpar. (Notamos: $\theta^l(p+1)$ é a permutação θ composta l vezes aplicada em $(p+1)$.)

Exemplo 2.26. Sejam S_4 o grupo de permutações do conjunto $S = \{3, 4, 5, 6\}$ e $\theta = (3, 4, 5, 6) \in S_4$. Sejam $G = \langle \theta \rangle$ e $\tilde{S} = \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq 6, 3 \leq j\}$. Consideremos a ação

$$*: G \times \tilde{S} \longrightarrow \tilde{S}$$

$$(\theta, (i, j)) \longmapsto *(\theta, (i, j)) = \begin{cases} (\theta(i), \theta(j)), & \text{se } \theta(i) < \theta(j), \\ (\theta(j), \theta(i)), & \text{se } \theta(i) > \theta(j). \end{cases}$$

Dados $(3, 4), (4, 6) \in \tilde{S}$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_\theta(3, 4) &= \{(3, 4), (\theta(3), \theta(4)), (\theta^2(3), \theta^2(4)), (\theta^3(3), \theta^3(4))\} \\ &= \{(3, 4), (4, 5), (5, 6), (3, 6)\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_\theta(4, 6) &= \{(4, 6), (\theta(4), \theta(6)), (\theta^2(4), \theta^2(6)), (\theta^3(4), \theta^3(6))\} \\ &= \{(4, 6), (5, 3), (6, 4), (3, 5)\} = \{(4, 6), (3, 5)\}. \end{aligned}$$

Logo $(3, 4)$ e $(4, 6) \in \mathcal{T}_\theta$, mais ainda, uma transversal associada à θ é o conjunto $\{(1, 3), (2, 3), (3, 4), (3, 5)\}$.

O próximo resultado nos diz que o grupo $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ possui uma infinidade de elementos de ordem finita, além disso, os caracteriza. Antes de enunciarmos o próximo resultado, considere a sequência exata curta

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^{n(n+2p-1)/2} \longrightarrow B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1}) \xrightarrow{\bar{\pi}} S_n \longrightarrow 1$$

e faça $n = 2$. Após substituição temos

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^{2p+1} \longrightarrow B_2(M_{0,p+1})/P'_2(M_{0,p+1}) \xrightarrow{\bar{\pi}} S_2 \longrightarrow 1.$$

Assim, o fato de considerarmos no teorema a seguir $n \geq 3$ é devido o $\text{Ker}(\bar{\pi})$ ser livre de torção e ao Teorema 2.21, visto que o grupo quociente $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ não possui elemento de ordem par.

Teorema 2.27. *Sejam $n, p \in \mathbb{Z}$, onde $n \geq 3$ e $p \geq 1$, com n ímpar, então $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ possui uma infinidade de elementos de ordem n .*

Demonstração. Sejam $n, p \in \mathbb{Z}$, onde $n \geq 3$ e $p \geq 1$, com n ímpar. Consideremos $I = \{(r, s) \mid r < s, 1 \leq r \leq p+n-1, p+1 \leq s \leq p+n\}$, $\alpha = \sigma_{p+1}\sigma_{p+2} \cdots \sigma_{p+n-1}$ e $\theta = (p+1, p+2, \dots, p+n) = \pi(\alpha^{-1})$ em S_n . Notamos que a trança α^n pode ser escrita como produto de $A_{i,j}$, ou seja,

$$\alpha^n = A_{p+1,p+2} \cdot A_{p+1,p+3} \cdot A_{p+2,p+3} \cdot A_{p+1,p+4} \cdot A_{p+2,p+4} \cdot A_{p+3,p+4} \cdots A_{p+1,p+n} \cdot A_{p+2,p+n} \cdots A_{p+n-1,p+n}.$$

Dito de outra forma,

$$\alpha^n = \prod_{j=p+2}^{p+n} \left(\prod_{i=p+1}^{j-1} A_{i,j} \right) \in B_n(M_{0,p+1}). \quad (2.10)$$

E, portanto,

$$\bar{\alpha}^n = \prod_{(i,j) \in \hat{I}} A_{i,j} \in B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1}),$$

onde $\hat{I} = \{(i, j) \mid p+1 \leq i < j \leq p+n\}$.

Seja $A = \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{a_{i,j}}$ em $P_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$, onde $a_{i,j} \in \mathbb{Z}$, para todo $(i, j) \in I$.

Aplicando a Proposição 2.5 obtemos

$$\begin{aligned} (A\bar{\alpha})^n &= \left(\prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{a_{i,j}} \bar{\alpha} \right) \cdots \left(\prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{a_{i,j}} \bar{\alpha} \right) \\ &= \left(\prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{a_{i,j}} \cdot \prod_{(i,j) \in I} A_{\theta(i),\theta(j)}^{a_{i,j}} \cdots \prod_{(i,j) \in I} A_{\theta^{n-1}(i),\theta^{n-1}(j)}^{a_{i,j}} \right) \cdot (\bar{\alpha} \cdots \bar{\alpha}) \\ &= \left(\prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{a_{i,j}} \cdot \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{\alpha_{\theta^{-1}(i),\theta^{-1}(j)}} \cdots \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{\alpha_{\theta^{1-n}(i),\theta^{1-n}(j)}} \right) \cdot \bar{\alpha}^n \\ &= \left(\prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{a_{i,j}} \cdot \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{\alpha_{\theta^{-1}(i),\theta^{-1}(j)}} \cdots \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{\alpha_{\theta^{1-n}(i),\theta^{1-n}(j)}} \right) \cdot \prod_{(i,j) \in \hat{I}} A_{i,j}. \end{aligned}$$

Seja

$$\mathcal{T}_\theta = \mathcal{T}_1 \dot{\cup} \mathcal{T}_2$$

uma transversal associada à θ , onde

$$\mathcal{T}_1 = \{(1, p+1), (2, p+1), \dots, (p, p+1)\}$$

e

$$\mathcal{T}_2 = \{(p+1, p+2), (p+1, p+3), \dots, (p+1, \theta^{\frac{n-1}{2}}(p+1))\}.$$

(Note que: $\theta^{\frac{n-1}{2}}(p+1) = \underbrace{(\theta \circ \dots \circ \theta)}_{\frac{n-1}{2} \text{ vezes}}(p+1)$.) Logo, para cada elemento $(i, j) \in \mathcal{T}_\theta$,

obtemos o seguinte

$$\begin{aligned} & A_{i,j}^{a_{i,j}+a_{\theta^{-1}(i),\theta^{-1}(j)}+\dots+a_{\theta^{1-n}(i),\theta^{1-n}(j)}}, & \text{se } (i, j) \in \mathcal{T}_1, \text{ ou} \\ & A_{i,j}^{a_{i,j}+a_{\theta^{-1}(i),\theta^{-1}(j)}+\dots+a_{\theta^{1-n}(i),\theta^{1-n}(j)}+1}, & \text{se } (i, j) \in \mathcal{T}_2. \end{aligned}$$

Agora, suponhamos que $(A\bar{\alpha})^n = 1$ em $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$, então $(A\alpha)^n \in P'_n(M_{0,p+1})$. Logo,

$$\begin{aligned} & \text{para cada } (i, j) \in \mathcal{T}_1, \text{ temos que } \sum_{(t,q) \in \mathcal{O}_{\theta^{-1}}(i,j)} a_{t,q} = 0, \text{ e} \\ & \text{para cada } (i, j) \in \mathcal{T}_2, \text{ temos que } \sum_{(t,q) \in \mathcal{O}_{\theta^{-1}}(i,j)} a_{t,q} + 1 = 0. \end{aligned}$$

Reciprocamente, se

$$\begin{aligned} & \sum_{(t,q) \in \mathcal{O}_{\theta^{-1}}(i,j)} a_{t,q} = 0, & \text{para todo } (i, j) \in \mathcal{T}_1, \text{ e} \\ & \sum_{(t,q) \in \mathcal{O}_{\theta^{-1}}(i,j)} a_{t,q} + 1 = 0, & \text{para todo } (i, j) \in \mathcal{T}_2, \end{aligned}$$

então $(A\bar{\alpha})^n = 1 \in B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$.

Portanto, $(A\bar{\alpha})^n$ é o elemento trivial em $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} & \sum_{(t,q) \in \mathcal{O}_{\theta^{-1}}(i,j)} a_{t,q} = 0, & \text{para todo } (i, j) \in \mathcal{T}_1, \text{ e} \\ & \sum_{(t,q) \in \mathcal{O}_{\theta^{-1}}(i,j)} a_{t,q} + 1 = 0, & \text{para todo } (i, j) \in \mathcal{T}_2, \end{aligned} \tag{2.11}$$

onde $\mathcal{T}_\theta = \mathcal{T}_1 \dot{\cup} \mathcal{T}_2$.

Afirmção: O elemento $A\bar{\alpha}$ possui ordem finita exatamente igual a n . De fato, denotemos por $|A\bar{\alpha}|$ a ordem do elemento $A\bar{\alpha}$. Observemos que o sistema (2.11) tem infinitas soluções em \mathbb{Z} . Para cada solução inteira, temos $A\bar{\alpha}$ possui ordem finita e, com isto, provamos que a ordem de $A\bar{\alpha}$ divide n . Logo $|A\bar{\alpha}| \leq n$. Sabemos também que n divide a ordem de $A\bar{\alpha}$, pois $\bar{\pi}(A\bar{\alpha}) = (p+n, \dots, p+2, p+1) \in S_n$ possui ordem n . Logo $n \leq |A\bar{\alpha}|$. Dessa forma, o elemento $A\bar{\alpha}$ possui ordem exatamente igual a n , desde que o sistema (2.11) seja satisfeito. \square

Exemplo 2.28. Sejam $n = 5$ e $p = 3$. Consideremos o grupo quociente

$B_5(M_{0,4})/P'_5(M_{0,4})$. Sejam $I = \{(i, j) \mid i < j, 1 \leq i \leq 7, 4 \leq j \leq 8\}$ o subconjunto do conjunto de pares ordenados de $\{1, \dots, 8\}$, $\alpha = \sigma_4\sigma_5\sigma_6\sigma_7 \in B_5(M_{0,4})$ e $\theta = \pi(\alpha^{-1}) = (4, 5, 6, 7, 8) \in S_5$. Se $\bar{\alpha} \in B_5(M_{0,4})/P'_5(M_{0,4})$ e $A = \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{m_{i,j}} \in P_5(M_{0,4})/P'_5(M_{0,4})$, onde $m_{i,j} \in \mathbb{Z}$, para todo $(i, j) \in I$, então

$$(A\bar{\alpha})^5 = 1 \in B_5(M_{0,4})/P'_5(M_{0,4})$$

se, e somente se,

$$\begin{aligned} m_{1,4} + m_{1,5} + m_{1,6} + m_{1,7} + m_{1,8} &= 0 \\ m_{2,4} + m_{2,5} + m_{2,6} + m_{2,7} + m_{2,8} &= 0 \\ m_{3,4} + m_{3,5} + m_{3,6} + m_{3,7} + m_{3,8} &= 0 \\ m_{4,5} + m_{5,6} + m_{4,8} + m_{7,8} + m_{6,7} + 1 &= 0 \\ m_{4,6} + m_{5,8} + m_{4,7} + m_{6,8} + m_{5,7} + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Inicialmente provaremos que

$$\alpha^5 = A_{4,5} \cdot A_{4,6}A_{5,6} \cdot A_{4,7}A_{5,7}A_{6,7} \cdot A_{4,8}A_{5,8}A_{6,8}A_{7,8} \in B_5(M_{0,4}).$$

$$\begin{aligned}
&= A_{4,5} \cdot A_{4,6} A_{5,6} \cdot A_{4,7} \cdot \sigma_6 \sigma_5 \sigma_5 \sigma_7 \sigma_6 \sigma_5 \sigma_4 \sigma_7 \cdot (\sigma_4 \sigma_5 \sigma_6 \sigma_7) \\
&= A_{4,5} \cdot A_{4,6} A_{5,6} \cdot A_{4,7} \cdot \sigma_6 \sigma_5^2 \sigma_7 \sigma_6 \sigma_5 \sigma_4 \sigma_7 \cdot (\sigma_4 \sigma_5 \sigma_6 \sigma_7) \\
&= A_{4,5} \cdot A_{4,6} A_{5,6} \cdot A_{4,7} \cdot \sigma_6 \sigma_5^2 \sigma_6^{-1} \sigma_6 \sigma_7 \sigma_6 \sigma_5 \sigma_4 \sigma_7 \cdot (\sigma_4 \sigma_5 \sigma_6 \sigma_7) \\
&= A_{4,5} \cdot A_{4,6} A_{5,6} \cdot A_{4,7} A_{5,7} \cdot \sigma_6 \sigma_7 \sigma_6 \sigma_5 \sigma_4 \sigma_7 \cdot (\sigma_4 \sigma_5 \sigma_6 \sigma_7) \\
&= A_{4,5} \cdot A_{4,6} A_{5,6} \cdot A_{4,7} A_{5,7} \cdot \sigma_6 \sigma_7 \sigma_6 \sigma_5 \sigma_4 \sigma_7 \cdot (\sigma_4 \sigma_5 \sigma_6 \sigma_7) \\
&= A_{4,5} \cdot A_{4,6} A_{5,6} \cdot A_{4,7} A_{5,7} \cdot \sigma_6 \underline{\sigma_7 \sigma_6 \sigma_7} \sigma_5 \sigma_4 \cdot (\sigma_4 \sigma_5 \sigma_6 \sigma_7) \\
&= A_{4,5} \cdot A_{4,6} A_{5,6} \cdot A_{4,7} A_{5,7} \cdot \underline{\sigma_6 \sigma_6} \sigma_7 \sigma_6 \sigma_5 \sigma_4 \cdot (\sigma_4 \sigma_5 \sigma_6 \sigma_7) \\
&= A_{4,5} \cdot A_{4,6} A_{5,6} \cdot A_{4,7} A_{5,7} A_{6,7} \cdot \sigma_7 \sigma_6 \sigma_5 \sigma_4 \cdot (\sigma_4 \sigma_5 \sigma_6 \sigma_7) \\
&= A_{4,5} \cdot A_{4,6} A_{5,6} \cdot A_{4,7} A_{5,7} A_{6,7} \cdot \sigma_7 \sigma_6 \sigma_5 \sigma_4^2 \sigma_5^{-1} \sigma_5 \sigma_5 \sigma_6 \sigma_7 \\
&= A_{4,5} \cdot A_{4,6} A_{5,6} \cdot A_{4,7} A_{5,7} A_{6,7} \cdot \sigma_7 \sigma_6 \sigma_5 \sigma_4^2 \sigma_5^{-1} \underline{\sigma_6^{-1} \sigma_6} \sigma_5 \sigma_5 \sigma_6 \sigma_7 \\
&= A_{4,5} \cdot A_{4,6} A_{5,6} \cdot A_{4,7} A_{5,7} A_{6,7} \cdot \sigma_7 \sigma_6 \sigma_5 \sigma_4^2 \sigma_5^{-1} \underline{\sigma_6^{-1} \sigma_7^{-1}} \sigma_7 \sigma_6 \sigma_5 \sigma_5 \sigma_6 \sigma_7 \\
&= A_{4,5} \cdot A_{4,6} A_{5,6} \cdot A_{4,7} A_{5,7} A_{6,7} \cdot A_{4,8} \cdot \sigma_7 \sigma_6 \sigma_5 \sigma_5 \sigma_6 \sigma_7 \\
&= A_{4,5} \cdot A_{4,6} A_{5,6} \cdot A_{4,7} A_{5,7} A_{6,7} \cdot A_{4,8} \cdot \sigma_7 \sigma_6 \sigma_5^2 \sigma_6^{-1} \underline{\sigma_7^{-1} \sigma_7} \sigma_6 \sigma_6 \sigma_7 \\
&= A_{4,5} \cdot A_{4,6} A_{5,6} \cdot A_{4,7} A_{5,7} A_{6,7} \cdot A_{4,8} A_{5,8} \cdot \sigma_7 \sigma_6^2 \sigma_7 \\
&= A_{4,5} \cdot A_{4,6} A_{5,6} \cdot A_{4,7} A_{5,7} A_{6,7} \cdot A_{4,8} A_{5,8} \cdot \sigma_7 \sigma_6^2 \underline{\sigma_7^{-1} \sigma_7} \sigma_7 \\
&= A_{4,5} \cdot A_{4,6} A_{5,6} \cdot A_{4,7} A_{5,7} A_{6,7} \cdot A_{4,8} A_{5,8} A_{6,8} \sigma_7 \sigma_7 \\
&= A_{4,5} \cdot A_{4,6} A_{5,6} \cdot A_{4,7} A_{5,7} A_{6,7} \cdot A_{4,8} A_{5,8} \cdot A_{6,8} A_{7,8}.
\end{aligned}$$

Isto é,

$$\overline{\alpha^5} = \bar{\alpha}^5 = \prod_{(i,j) \in \hat{I}} A_{i,j} \in B_5(M_{0,4})/P'_5(M_{0,4}),$$

com $\hat{I} = \{(i, j) \mid 4 \leq i < j \leq 8\}$.

Seja $A = \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{m_{i,j}}$, com $m_{i,j} \in \mathbb{Z}$, para todo $(i, j) \in I = \{(i, j) \mid i < j, 1 \leq i \leq 7, 4 \leq j \leq 8\}$. Então, pela Proposição 2.5 temos

$$\begin{aligned}
(A\bar{\alpha})^5 &= \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{m_{i,j}} \bar{\alpha} \cdot \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{m_{i,j}} \bar{\alpha} \cdot \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{m_{i,j}} \bar{\alpha} \cdot \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{m_{i,j}} \bar{\alpha} \cdot \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{m_{i,j}} \bar{\alpha} \\
&= \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{m_{i,j}} \cdot \bar{\alpha} \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{m_{i,j}} \bar{\alpha}^{-1} \cdot \bar{\alpha}^2 \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{m_{i,j}} \bar{\alpha}^{-2} \cdot \bar{\alpha}^3 \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{m_{i,j}} \bar{\alpha}^{-3} \\
&\quad \cdot \bar{\alpha}^4 \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{m_{i,j}} \bar{\alpha}^{-4} \cdot \bar{\alpha}^4 \\
&= \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{m_{i,j}} \prod_{(i,j) \in I} A_{\theta(i), \theta(j)}^{m_{i,j}} \cdot \prod_{(i,j) \in I} A_{\theta^2(i), \theta^2(j)}^{m_{i,j}} \cdot \prod_{(i,j) \in I} A_{\theta^3(i), \theta^3(j)}^{m_{i,j}} \\
&\quad \cdot \prod_{(i,j) \in I} A_{\theta^4(i), \theta^4(j)}^{m_{i,j}} \cdot \prod_{(i,j) \in \hat{I}} A_{i,j}.
\end{aligned}$$

Agora, pela Observação [2.11](#),

$$(A\bar{\alpha})^5 = \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{m_{i,j}} \cdot \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{m_{\theta^{-1}(i), \theta^{-1}(j)}} \cdot \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{m_{\theta^{-2}(i), \theta^{-2}(j)}} \cdot \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{m_{\theta^{-3}(i), \theta^{-3}(j)}} \cdot \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{m_{\theta^{-4}(i), \theta^{-4}(j)}} \cdot \prod_{(i,j) \in \hat{I}} A_{i,j}.$$

Notamos que uma transversal associada à permutação θ é o conjunto $\{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 5), (4, 6)\}$. Segue que $(A\bar{\alpha})^5 = 1 \in B_5(M_{0,4})/P'_5(M_{0,4})$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} m_{1,4} + m_{1,5} + m_{1,6} + m_{1,7} + m_{1,8} &= 0 \\ m_{2,4} + m_{2,5} + m_{2,6} + m_{2,7} + m_{2,8} &= 0 \\ m_{3,4} + m_{3,5} + m_{3,6} + m_{3,7} + m_{3,8} &= 0 \\ m_{4,5} + m_{5,6} + m_{4,8} + m_{7,8} + m_{6,7} + 1 &= 0 \\ m_{4,6} + m_{5,8} + m_{4,7} + m_{6,8} + m_{5,7} + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Nesse exemplo anterior usamos uma técnica algébrica para prová-lo, especificamente as relações entre seus geradores, mas uma outra forma de mostrá-lo é aplicando a técnica crossing number apresentado na Proposição [2.10](#).

O Lema [2.29](#) será usado para provar o Teorema [2.30](#), o qual nos apresenta elementos de qualquer ordem finita, mais ainda, nos diz que o quociente $B_n(M_{0,p})/P'_n(M_{0,p})$ não é um grupo de Bieberbach, para $p \geq 1$ e $n \geq 3$.

Lema 2.29. *Seja $t \in \mathbb{N}$ e sejam $n_1, n_2, \dots, n_t, p_1, p_2, \dots, p_t$ inteiros positivos, com $n_k \geq 3$ ímpar, para todo $k \in \{1, 2, \dots, t\}$ e $p_k \geq 1$. Existem n e p inteiros positivos, tais que a inclusão $i: B_{n_1}(M_{0,p_1}) \times B_{n_2}(M_{0,p_2}) \times \dots \times B_{n_t}(M_{0,p_t}) \longrightarrow B_n(M_{0,p+1})$ induz um homomorfismo*

$$\bar{i}: \frac{B_{n_1}(M_{0,p_1})}{P'_{n_1}(M_{0,p_1})} \times \frac{B_{n_2}(M_{0,p_2})}{P'_{n_2}(M_{0,p_2})} \times \dots \times \frac{B_{n_t}(M_{0,p_t})}{P'_{n_t}(M_{0,p_t})} \longrightarrow \frac{B_n(M_{0,p+1})}{P'_n(M_{0,p+1})}.$$

Demonstração. Seja $t \in \mathbb{N}$ e sejam $n_1, n_2, \dots, n_t, p_1, p_2, \dots, p_t$ inteiros positivos, com $n_k \geq 3$ ímpar, para todo $k \in \{1, 2, \dots, t\}$ e $p_k \geq 1$. Façamos $p = p_1 + p_2 + \dots + p_t$ e $n = \sum_{k=1}^t n_k$. consideremos a inclusão

$$i: B_{n_1}(M_{0,p_1}) \times B_{n_2}(M_{0,p_2}) \times \dots \times B_{n_t}(M_{0,p_t}) \longrightarrow B_n(M_{0,p+1})$$

definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 i(\sigma_{p_1+1}, 1, \dots, 1) &= \sigma_{p+1} \\
 \vdots &\vdots \\
 i(\sigma_{p_1+n_1-1}, 1, \dots, 1) &= \sigma_{p+n_1-1} \\
 i(1, \sigma_{p_2+1}, 1, \dots, 1) &= \sigma_{p+n_1+1} \\
 \vdots &\vdots \\
 i(1, \sigma_{p_2+n_2-1}, 1, \dots, 1) &= \sigma_{p+n_1+n_2-1} \\
 \vdots &\vdots \\
 i(1, \dots, 1, \sigma_{p_t+1}) &= \sigma_{p+n_1+\dots+n_{t-1}+1} \\
 \vdots &\vdots \\
 i(1, \dots, 1, \sigma_{p_t+n_t-1}) &= \sigma_{p+n_1+\dots+n_{t-1}+n_t-1},
 \end{aligned}$$

ou seja, para cada $i \in \{1, 2, \dots, t\}$ e $1 \leq k \leq n_i - 1$, então

$$i(1, \dots, 1, \sigma_{p_i+k}, \dots, 1) = \sigma_{p+k+\sum_{j=1}^{i-1} n_j}.$$

E

$$\begin{aligned}
 i(A_{1,p_1+1}, 1, \dots, 1) &= A_{1,p+1} \\
 \vdots &\vdots \\
 i(A_{p_1,p_1+1}, 1, \dots, 1) &= A_{p_1,p+1} \\
 i(1, A_{1,p_2+1}, 1, \dots, 1) &= A_{p_1+1,p+1} \\
 \vdots &\vdots \\
 i(1, A_{p_2,p_2+1}, 1, \dots, 1) &= A_{p_1+p_2,p+1} \\
 \vdots &\vdots \\
 i(1, \dots, 1, A_{1,p_t+1}) &= A_{p_1+\dots+p_{t-1}+1,p+1} \\
 \vdots &\vdots \\
 i(1, \dots, 1, A_{p_t,p_t+1}) &= A_{p_1+\dots+p_t,p+1}.
 \end{aligned}$$

Façamos

$$\mathcal{G} = \frac{B_{n_1}(M_{0,p_1})}{P'_{n_1}(M_{0,p_1})} \times \frac{B_{n_2}(M_{0,p_2})}{P'_{n_2}(M_{0,p_2})} \times \dots \times \frac{B_{n_t}(M_{0,p_t})}{P'_{n_t}(M_{0,p_t})}$$

e seja $x \in \mathcal{G}$, onde

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_t),$$

onde $x_1 \in \frac{B_{n_1}(M_{0,p_1})}{P'_{n_1}(M_{0,p_1})}$, $x_2 \in \frac{B_{n_2}(M_{0,p_2})}{P'_{n_2}(M_{0,p_2})}$, \dots , $x_t \in \frac{B_{n_t}(M_{0,p_t})}{P'_{n_t}(M_{0,p_t})}$. Da Definição 2.19, temos

$$\begin{aligned} x_1 &= \prod_{(i,j) \in I_1} A_{ij}^{a_{ij}^{(1)}} \delta_{\bar{\pi}(x_1)}, \text{ com } I_1 = \{(r,s) \mid 1 \leq r \leq p_1 + n_1 - 1, p_1 + 1 \leq s \leq p_1 + n_1, r < s\}, \\ &\quad \bar{\pi}(x_1) \in S_{n_1} \text{ e } a_{ij}^{(1)} \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } (i,j) \in I_1 \\ x_2 &= \prod_{(i,j) \in I_2} A_{ij}^{a_{ij}^{(2)}} \delta_{\bar{\pi}(x_2)}, \text{ com } I_2 = \{(r,s) \mid 1 \leq r \leq p_2 + n_2 - 1, p_2 + 1 \leq s \leq p_2 + n_2, r < s\}, \\ &\quad \bar{\pi}(x_2) \in S_{n_2} \text{ e } a_{ij}^{(2)} \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } (i,j) \in I_2 \\ &\quad \vdots \\ x_t &= \prod_{(i,j) \in I_t} A_{ij}^{a_{ij}^{(t)}} \delta_{\bar{\pi}(x_t)}, \text{ com } I_t = \{(r,s) \mid 1 \leq r \leq p_t + n_t - 1, p_t + 1 \leq s \leq p_t + n_t, r < s\}, \\ &\quad \bar{\pi}(x_t) \in S_{n_t} \text{ e } a_{ij}^{(t)} \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } (i,j) \in I_t. \end{aligned}$$

Definimos a aplicação \bar{i} de \mathcal{G} em $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$, por $\bar{i} = i(x_1) \cdot i(x_2) \cdot \dots \cdot i(x_t)$, dito de outra forma,

$$\bar{i}(x) = \prod_{(i,j) \in \hat{I}_1} A_{ij}^{a_{ij}^{(1)}} \delta_{\bar{\pi}(i(x_1))} \cdot \prod_{(i,j) \in \hat{I}_2} A_{ij}^{a_{ij}^{(2)}} \delta_{\bar{\pi}(i(x_2))} \cdots \prod_{(i,j) \in \hat{I}_t} A_{ij}^{a_{ij}^{(t)}} \delta_{\bar{\pi}(i(x_t))},$$

com $\hat{I}_1 = \{(r,s) \mid p+1 \leq r < s \leq p+n_1\}$, $\hat{I}_2 = \{(r,s) \mid p+n_1+1 \leq r < s \leq p+n_1+n_2\}$, \dots , $\hat{I}_t = \{(r,s) \mid p + \sum_{k=1}^{t-1} n_k + 1 \leq r < s \leq p + \sum_{k=1}^t n_k\}$, $i(\delta_{\bar{\pi}(x_k)}) = \delta_{\bar{\pi}(i(x_k))}$ em $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ e $\bar{\pi}(i(x_k)) \in S_{n_1} \times \dots \times S_{n_k} \times \dots \times S_{n_t} \subset S_n$.

Afirmação: A aplicação \bar{i} está bem definida. De fato, a boa definição da aplicação \bar{i} se dá a partir da sua construção, levando em consideração a unicidade da forma normal de cada elemento $x_i \in B_{n_i}(M_{0,p_i})/P'_{n_i}(M_{0,p_i})$ que compõe as entradas de $x = (x_1, x_2, \dots, x_t) \in B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$. Notemos que o elemento $\bar{i}(x)$ em $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ é reescrito como

$$\prod_{(i,j) \in \hat{I}_1} A_{ij}^{a_{ij}^{(1)}} \prod_{(i,j) \in \hat{I}_2} A_{ij}^{a_{ij}^{(2)}} \cdots \prod_{(i,j) \in \hat{I}_t} A_{ij}^{a_{ij}^{(t)}} \cdot \delta_{\bar{\pi}(i(x_1))} \delta_{\bar{\pi}(i(x_2))} \cdots \delta_{\bar{\pi}(i(x_t))},$$

pois $\delta_{\bar{\pi}(i(x_k))}$ comuta com $\prod_{(i,j) \in \hat{I}_r} A_{ij}^{a_{ij}^{(r)}}$, para todo $k, r \in \{1, 2, \dots, t\}$ distintos.

Afirmação: A aplicação \bar{i} é um homomorfismo entre grupos. De fato, pela Observação 2.20 dados $x, y \in \mathcal{G}$, para cada $k \in \{1, 2, \dots, t\}$, temos

$$\begin{aligned} x_k y_k &= \prod_{(i,j) \in I_k} A_{ij}^{a_{ij}^{(k)}} \delta_{\bar{\pi}(x_k)} \cdot \prod_{(i,j) \in I_k} A_{ij}^{b_{ij}^{(k)}} \delta_{\bar{\pi}(y_k)} \\ &= \prod_{(i,j) \in I_k} A_{ij}^{a_{ij}^{(k)}} \prod_{(i,j) \in I_k} A_{\bar{\pi}(x_k)^{-1}(i), \bar{\pi}(x_k)^{-1}(j)}^{b_{ij}^{(k)}} \prod_{(i,j) \in I_k} A_{ij}^{c_{ij}^{(k)}} \cdot \delta_{\bar{\pi}(x_k) \bar{\pi}(y_k)}, \end{aligned}$$

onde $(i, j) \in I_k = \{(r, s) \mid 1 \leq r \leq p_k + n_k - 1, p_k + 1 \leq s \leq p_k + n_k, r < s\}$, $a_{ij}^{(k)}$, $b_{ij}^{(k)}$, $c_{ij}^{(k)} \in \mathbb{Z}$, para todo $(i, j) \in I_k$ e $\bar{\pi}(i(x_k))$, $\bar{\pi}(i(y_k)) \in S_{n_k}$. Logo,

$$\begin{aligned} \bar{l}(xy) &= (x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_t y_t) \\ &= \left(\prod_{(i,j) \in \hat{I}_1} A_{ij}^{a_{ij}^{(1)}} \prod_{(i,j) \in \hat{I}_1} A_{\bar{\pi}(x_1)^{-1}(i), \bar{\pi}(x_1)^{-1}(j)}^{b_{ij}^{(1)}} \prod_{(i,j) \in \hat{I}_1} A_{ij}^{c_{ij}^{(1)}} \cdot \delta_{\bar{\pi}(x_1) \bar{\pi}(y_1)} \right) \cdots \\ &\quad \left(\prod_{(i,j) \in \hat{I}_t} A_{ij}^{a_{ij}^{(t)}} \prod_{(i,j) \in \hat{I}_t} A_{\bar{\pi}(x_t)^{-1}(i), \bar{\pi}(x_t)^{-1}(j)}^{b_{ij}^{(t)}} \prod_{(i,j) \in \hat{I}_t} A_{ij}^{c_{ij}^{(t)}} \cdot \delta_{\bar{\pi}(x_t) \bar{\pi}(y_t)} \right) \\ &\stackrel{\text{Obs 2.20}}{=} \left(\prod_{(i,j) \in \hat{I}_1} A_{ij}^{a_{ij}^{(1)}} \delta_{\bar{\pi}(x_1)} \cdot \prod_{(i,j) \in \hat{I}_1} A_{ij}^{b_{ij}^{(1)}} \delta_{\bar{\pi}(y_1)} \right) \cdots \left(\prod_{(i,j) \in \hat{I}_t} A_{ij}^{a_{ij}^{(t)}} \delta_{\bar{\pi}(x_t)} \cdot \prod_{(i,j) \in \hat{I}_t} A_{ij}^{b_{ij}^{(t)}} \delta_{\bar{\pi}(y_t)} \right). \end{aligned}$$

Como $\prod_{(i,j) \in \hat{I}_{k_1}} A_{ij}^{a_{ij}^{(k_1)}} \delta_{\bar{\pi}(x_{k_1})}$ comuta com $\prod_{(i,j) \in \hat{I}_{k_2}} A_{ij}^{b_{ij}^{(k_2)}} \delta_{\bar{\pi}(y_{k_2})}$, para todo $k_1, k_2 \in \{1, 2, \dots, t\}$ distintos, então

$$\begin{aligned} \bar{l}(xy) &= \left(\prod_{(i,j) \in \hat{I}_1} A_{ij}^{a_{ij}^{(1)}} \delta_{\bar{\pi}(x_1)} \cdots \prod_{(i,j) \in \hat{I}_t} A_{ij}^{a_{ij}^{(t)}} \delta_{\bar{\pi}(x_t)} \right) \cdot \left(\prod_{(i,j) \in \hat{I}_1} A_{ij}^{b_{ij}^{(1)}} \delta_{\bar{\pi}(y_1)} \cdots \prod_{(i,j) \in \hat{I}_t} A_{ij}^{b_{ij}^{(t)}} \delta_{\bar{\pi}(y_t)} \right) \\ &= \left(\prod_{(i,j) \in \hat{I}_1} A_{ij}^{a_{ij}^{(1)}} \cdots \prod_{(i,j) \in \hat{I}_t} A_{ij}^{a_{ij}^{(t)}} \delta_{\bar{\pi}(x_1)} \cdots \delta_{\bar{\pi}(x_t)} \right) \cdot \left(\prod_{(i,j) \in \hat{I}_1} A_{ij}^{b_{ij}^{(1)}} \cdots \prod_{(i,j) \in \hat{I}_t} A_{ij}^{b_{ij}^{(t)}} \delta_{\bar{\pi}(y_1)} \cdots \delta_{\bar{\pi}(y_t)} \right) \\ &= \bar{l}(x) \bar{l}(y). \end{aligned}$$

Logo, a aplicação \bar{l} é um homomorfismo e, portanto, concluímos a demonstração. \square

Seja $\theta \in S_n$ escrito como um produto de ciclos disjuntos de comprimentos n_1, n_2, \dots, n_r com $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_r$ (não incluindo os 1-ciclos). Então a lista de inteiros (n_1, n_2, \dots, n_r) é chamado de *estrutura cíclica de θ* . Agora, consideremos $x \in B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ e $\bar{\pi}(x) = \theta$. Dizemos que x possui *estrutura cíclica* (n_1, n_2, \dots, n_r) , se θ possuir uma estrutura cíclica (n_1, n_2, \dots, n_r) .

Teorema 2.30. *Seja $t \in \mathbb{N}$ e sejam $n_1, n_2, \dots, n_t, p_1, p_2, \dots, p_t$ inteiros positivos, com $n_k \geq 3$ ímpar, para todo $k \in \{1, 2, \dots, t\}$, e $p_k \geq 1$.*

(a) *O homomorfismo \bar{l} definido no Lema 2.29 é um monomorfismo.*

(b) *O grupo $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ possui elementos de ordem $\text{mmc}(n_1, n_2, \dots, n_t)$. Mais ainda, existem elementos com estrutura cíclica (n_1, n_2, \dots, n_t) .*

Demonstração.

(a) Suponhamos

$$x, y \in \mathcal{G} = \frac{B_{n_1}(M_{0,p_1})}{P'_{n_1}(M_{0,p_1})} \times \frac{B_{n_2}(M_{0,p_2})}{P'_{n_2}(M_{0,p_2})} \times \cdots \times \frac{B_{n_t}(M_{0,p_t})}{P'_{n_t}(M_{0,p_t})},$$

com $x = (x_1, x_2, \dots, x_t)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_t)$ e $x \neq y$. Então, existe pelo menos um $k_1 \in \{1, 2, \dots, t\}$, tal que $x_{k_1} \neq y_{k_1}$ em $B_{n_{k_1}}(M_{0,p+1})/P'_{n_{k_1}}(M_{0,p+1})$.

Vamos provar que $\bar{i}(x) \neq \bar{i}(y)$. Suponhamos por contradição $\bar{i}(x) = \bar{i}(y)$. Pela definição de \bar{i} e pela unicidade da forma normal dos elementos $\bar{i}(x)$ e $\bar{i}(y)$ sabemos que $i(x_k) = i(y_k)$, para todo $k \in \{1, 2, \dots, t\}$. Como a aplicação i é injetora, segue que a forma normal de x_k e y_k são iguais, para todo $k \in \{1, 2, \dots, t\}$, o que é uma contradição, pois a forma normal de um elemento é única e, portanto, x_{k_1} deverá ser igual a y_{k_1} .

(b) Sabemos pelo Teorema [2.27](#) que existe $x_i \in B_{n_i}(M_{0,p+1})/P'_{n_i}(M_{0,p+1})$ de ordem n_i . Façamos $M = \text{mmc}(n_1, n_2, \dots, n_t)$. Seja $x = (x_1, x_2, \dots, x_t) \in \mathcal{G}$ então a ordem de x é igual a M . De fato,

$$\begin{aligned} x^M &= (x_1, x_2, \dots, x_t)^M \\ &= (x_1^M, x_2^M, \dots, x_t^M) \\ &= (x_1^{n_1 M_1}, x_2^{n_2 M_2}, \dots, x_t^{n_t M_t}) \\ &= (1, 1, \dots, 1). \end{aligned}$$

Agora, como

$$(\bar{i}(x))^M = \bar{i}(x^M) = 1,$$

temos que a ordem do elemento $\bar{i}(x)$ divide M . Afirmamos que

$$|\bar{i}(x)| = M.$$

Suponha que $|\bar{i}(x)| = M' \leq M$. Como \bar{i} é um monomorfismo (item (a) deste teorema), segue que $(\bar{i}(x))^{M'} = \bar{i}(x^{M'}) = 1$ e, portanto, $x^{M'} = 1$, contrariando a minimalidade de M . Além disso, a estrutura cíclica de $\bar{i}(x)$ é (n_1, n_2, \dots, n_t) , pois

$$\bar{i}(x) = \left(\prod_{(i,j) \in \dot{I}_1} A_{ij}^{a_{ij}^{(1)}} \cdots \prod_{(i,j) \in \dot{I}_t} A_{ij}^{a_{ij}^{(t)}} \delta_{\bar{\pi}(x_1)} \cdots \delta_{\bar{\pi}(x_t)} \right),$$

com $\bar{\pi}(x_1) \cdots \bar{\pi}(x_t) \in S_{n_1} \times \cdots \times S_{n_k} \times \cdots \times S_{n_t} \subset S_n$ e, para cada $k_1, k_2 \in \{1, 2, \dots, t\}$, temos $\bar{\pi}(x_{k_1})$ é disjunto de $\bar{\pi}(x_{k_2})$ em S_n . \square

O corolário a seguir nos diz que, dado $n \in \mathbb{Z}$ e uma partição (n_1, n_2, \dots, n_t) de n , tal que $\sum_{i=1}^t n_i \leq n$, é possível obtermos um elemento $x \in B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ de ordem $\text{mmc}(n_1, n_2, \dots, n_t)$.

Corolário 2.31. *Seja $t \in \mathbb{N}$ e sejam $n_1, n_2, \dots, n_t, p_1, p_2, \dots, p_t$ inteiros positivos, com $n_k \geq 3$ ímpar, para todo $k \in \{1, 2, \dots, t\}$, e $p_k \geq 1$. Se $\sum_{i=1}^t n_i \leq n$ e $p = p_1 + p_2 + \dots + p_t$, então \bar{t} é injetor.*

Demonstração. Este resultado é um escólio do Lema 2.29, visto que sua demonstração segue analogamente com a mesma argumentação que foi feita na prova do Lema 2.29, onde foi suposto $n = \sum_{i=1}^t n_i$, e do Teorema 2.30. \square

Observação 2.32. Sejam $n, p \in \mathbb{Z}$. Se $n \geq 1$ e $p = 0$, então $B_n(\mathbb{S}^2 \setminus \{x_0\}) \cong B_n$ (ver [34, Proposição 2.5(ii)]). Suponhamos $n \geq 1$ e $p = 0$ no Lema 2.29 e no Teorema 2.30, então recairemos no [39, Teorema 3].

Teorema 2.33. *Sejam $n, p \in \mathbb{Z}$, com $n \geq 2$ e $p \geq 1$. Então $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ é um subgrupo cristalográfico do grupo $B_{p+n}(\mathbb{D}^2)/P'_{p+n}(\mathbb{D}^2)$.*

Demonstração. Sejam $n, p \in \mathbb{Z}$, com $n \geq 2$ e $p \geq 1$. Sejam os grupos simétricos S_n e S_{p+n} dos conjuntos $\{p+1, p+2, \dots, p+n\}$ e $\{1, 2, \dots, p, \dots, p+n\}$, respectivamente. Consideremos as sequências exatas curtas,

$$1 \longrightarrow P_n(M_{0,p+1}) \xrightarrow{j_1} B_n(M_{0,p+1}) \xrightarrow{\pi_1} S_n \longrightarrow 1$$

e

$$1 \longrightarrow P_{p+n}(\mathbb{D}^2) \xrightarrow{j_2} B_{p+n}(\mathbb{D}^2) \xrightarrow{\pi_2} S_{p+n} \longrightarrow 1.$$

Agora, usando a sequência exata curta de Fadell-Neuwirth para a superfície $M_{0,p+1} = \mathbb{S}^2 \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_p\} = \mathbb{D}^2 \setminus \{x_1, \dots, x_p\}$, assim obtemos o seguinte diagrama comutativo de sequências curtas exatas:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & 1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 1 & \longrightarrow & P_n(M_{0,p+1}) & \xrightarrow{j_1} & B_n(M_{0,p+1}) & \xrightarrow{\pi_1} & S_n \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow i_1 & & \downarrow i_2 & & \downarrow i_3 \\
 1 & \longrightarrow & P_{p+n}(\mathbb{D}^2) & \xrightarrow{j_2} & B_{p+n}(\mathbb{D}^2) & \xrightarrow{\pi_2} & S_{p+n} \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow q_{1*} & & \downarrow q_{2*} & & \\
 & & P_p(\mathbb{D}^2) & \longrightarrow & B_p(\mathbb{D}^2) & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 1 & & 1 & &
 \end{array} \tag{2.12}$$

onde as inclusões, i_1 e i_2 , e os homomorfismos, q_{1*} e q_{2*} , são obtidos das sequências exatas curtas de Fadell-Neuwirth (1.3) e (1.6), respectivamente; as aplicações j_1 e j_2 são inclusões e, π_1 e π_2 são os homomorfismos projeção, tais que $\pi_1(\sigma_t) = (p+t, p+t+1) \in S_n$ e $\pi_2(\sigma_u) = (u, u+1) \in S_{p+n}$, onde $1 \leq t \leq n-1$ e $1 \leq u \leq p+n-1$. E, i_3 é a inclusão de S_n em S_{p+n} , dada por $i_3((p+t, p+t+1)) = (p+t, p+t+1)$, onde $1 \leq t \leq n-1$.

Sabemos pelo Corolário 2.4 e da apresentação dada em 59, Capítulo 3, Teorema 3.8] que $P_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ e $P_{p+n}(\mathbb{D}^2)/P'_{p+n}(\mathbb{D}^2)$ são grupos abelianos livres de posto $n(n+2p-1)/2$ e $(p+n)(p+n-1)/2$, respectivamente. Mais ainda, $P_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ é gerado pelos A_{ij} , com $(i, j) \in \{(r, s) \mid r < s, 1 \leq r \leq p+n-1, p+1 \leq s \leq p+n\}$ e $P_{p+n}(\mathbb{D}^2)/P'_{p+n}(\mathbb{D}^2)$ é gerado pelos A_{ij} , com $1 \leq i < j \leq p+n$. Isto é,

$$P_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1}) \cong \mathbb{Z}^{n(n+2p-1)/2} \text{ e } P_{p+n}(\mathbb{D}^2)/P'_{p+n}(\mathbb{D}^2) \cong \mathbb{Z}^{(p+n)(p+n-1)/2}.$$

Logo, $\bar{i}_1: P_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1}) \longrightarrow P_{p+n}(\mathbb{D}^2)/P'_{p+n}(\mathbb{D}^2)$, definida por

$$\bar{i}_1(1, \dots, A_{i,p+1}, 1, \dots, 1) = \left(1, \dots, 1, \underbrace{1, \dots, A_{i,p+1}, 1, \dots, 1}_{\frac{n(n+2p-1)}{2}} \right)$$

é injetiva.

Agora, definimos a aplicação $\bar{i}_2: B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1}) \longrightarrow B_{p,n}(\mathbb{D}^2)/P'_{p+n}(\mathbb{D}^2)$, dada por

$$\bar{i}_2(xP'_n(M_{0,p+1})) = i_2(x)P'_{p+n}(\mathbb{D}^2),$$

onde $xP'_n(M_{0,p+1}) \in B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$. Mostraremos a boa definição da aplicação \bar{i}_2 . De fato, sejam $xP'_n(M_{0,p+1})$ e $yP'_n(M_{0,p+1}) \in B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$. Suponhamos que $xP'_n(M_{0,p+1}) = yP'_n(M_{0,p+1})$, então $xy^{-1} \in P'_n(M_{0,p+1})$. Logo, pela comutatividade do Diagrama 2.12,

$$i_2(xy^{-1}) = j_2 \circ i_1 \circ j_1^{-1}(xy^{-1}) \in P'_{p+n}(\mathbb{D}^2) \leq B_{p+n}(\mathbb{D}^2).$$

Segue, $i_2(x)i_2(y)^{-1} = i_2(x)i_2(y^{-1}) = i_2(xy^{-1}) \in P'_{p+n}(\mathbb{D}^2)$. Assim, $i_2(x)P'_{p+n}(\mathbb{D}^2) = i_2(y)P'_{p+n}(\mathbb{D}^2) \in B_{p,n}(\mathbb{D}^2)/P'_{p+n}(\mathbb{D}^2)$, ou seja,

$$\bar{i}_2(xP'_n(M_{0,p+1})) = \bar{i}_2(yP'_n(M_{0,p+1})).$$

Mais ainda, suponhamos que $\bar{\pi}(xP'_n(M_{0,p+1})) = \theta \in S_n$. Então, pela comutatividade do Diagrama 2.12,

$$\begin{aligned} \bar{\pi}_1(\bar{i}_2(xP'_n(M_{0,p+1}))) &= \bar{\pi}_1(i_2(x)P'_{p+n}(\mathbb{D}^2)) \\ &= \pi_1(i_2(x)P'_{p+n}(\mathbb{D}^2)) \\ &= \pi_1 \circ i_2(x) \\ &= i_3 \circ \pi(x) \\ &= i_3(\theta) \\ &= \theta \in S_{p+n}. \end{aligned}$$

Além disso, \bar{i}_2 é um homomorfismo, pois

$$\begin{aligned} \bar{i}_2(xyP'_n(M_{0,p+1})) &= i_2(xy)P'_{p+n}(\mathbb{D}^2) \\ &= i_2(x)i_2(y)P'_{p+n}(\mathbb{D}^2) \\ &= i_2(x)P'_{p+n}(\mathbb{D}^2) \cdot i_2(y)P'_{p+n}(\mathbb{D}^2) \\ &= \bar{i}_2(xP'_n(M_{0,p+1})) \cdot \bar{i}_2(yP'_n(M_{0,p+1})). \end{aligned}$$

Sabemos que $B_{p,n}(\mathbb{D}^2)/P'_{p+n}(\mathbb{D}^2) \leq B_{p+n}(\mathbb{D}^2)/P'_{p+n}(\mathbb{D}^2)$ e, portanto, pelo Diagrama (2.12) obtemos

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & P_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1}) & \longrightarrow & B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1}) & \longrightarrow & S_n \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow \bar{i}_1 & & \downarrow \bar{i}_2 & & \downarrow \bar{i}_3 \\ 1 & \longrightarrow & P_{p+n}(\mathbb{D}^2)/P'_{p+n}(\mathbb{D}^2) & \longrightarrow & B_{p+n}(\mathbb{D}^2)/P'_{p+n}(\mathbb{D}^2) & \longrightarrow & S_{p+n} \longrightarrow 1. \end{array}$$

Como as aplicações \bar{i}_1 e \bar{i}_3 são injetivas, segue do Lema dos Cinco que

$$\bar{i}_2: B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1}) \longrightarrow B_{p+n}(\mathbb{D}^2)/P'_{p+n}(\mathbb{D}^2)$$

é injetiva e, portanto, o grupo $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ é subgrupo de $B_{p+n}(\mathbb{D}^2)/P'_{p+n}(\mathbb{D}^2)$. □

Como aplicação do Teorema (2.33) apresentamos uma demonstração alternativa do Teorema (2.21).

Prova alternativa do Teorema (2.21). Sejam $n, p \in \mathbb{Z}$, com $n \geq 2$ e $p \geq 1$. Suponhamos que exista $\alpha \in B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ tal que $\alpha^{2k} = 1$. Pelo Teorema (2.33), temos $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ é subgrupo do grupo $B_{p+n}(\mathbb{D}^2)/P'_{p+n}(\mathbb{D}^2)$, então $B_{p+n}(\mathbb{D}^2)$ possui elemento de ordem finita par, o que é uma contradição com [39], Teorema 2]. □

2.3 Classes de conjugação de elementos de ordem finita de $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$

Nesta seção estudaremos as classes de conjugação de elementos de ordem finita de $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$.

Notemos que consideramos no lema a seguir $n \geq 3$, se deve ao fato do grupo quociente $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ não possuir elemento de ordem par (ver Teorema (2.21)) e ao $\text{Ker}(\bar{\pi})$ do homomorfismo $\bar{\pi}$ (ver a sequência exata curta (2.4)) ser livre de torção.

Lema 2.34. *Sejam $n, p \in \mathbb{Z}$, com $n \geq 3$ e $p \geq 1$. Sejam $\alpha, \beta \in B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ elementos conjugados de ordem finita. Então $\bar{\pi}(\alpha)$ e $\bar{\pi}(\beta)$ são permutações de ordem ímpar e possuem a mesma estrutura cíclica.*

Demonstração. Sejam $n, p \in \mathbb{Z}$, com $n \geq 3$ e $p \geq 1$. Sejam $\alpha, \beta \in B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ elementos de ordem finita tais que $\alpha = \gamma\beta\gamma^{-1}$, para algum $\gamma \in B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$. Pelo Teorema 2.27 temos $\bar{\pi}(\alpha)$ e $\bar{\pi}(\beta)$ são permutações de ordem ímpar. Como $\bar{\pi}(\alpha) = \bar{\pi}(\gamma)\bar{\pi}(\beta)\bar{\pi}(\gamma)^{-1}$ em S_n , então $\bar{\pi}(\alpha)$ e $\bar{\pi}(\beta)$ possuem a mesma estrutura cíclica, como queríamos. \square

Definição 2.35. Sejam $k, n \geq 2, p \geq 1$ e $r \geq 0$ inteiros tais que k é ímpar e $r + k \leq n$. Definimos $\check{\alpha}_{p,r,k}, \check{\delta}_{p,r,k} \in B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ como

$$\begin{aligned}\check{\alpha}_{p,r,k} &= \sigma_{p+r+1} \cdots \sigma_{p+r+k-1} \\ \check{\delta}_{p,r,k} &= \sigma_{p+r+k-1} \cdots \sigma_{p+r+\frac{k+1}{2}} \sigma_{p+r+\frac{k-1}{2}}^{-1} \cdots \sigma_{p+r+1}^{-1}\end{aligned}$$

Observação 2.36. Sejam $k, n \geq 2, p \geq 1$ e $r \geq 0$ inteiros tais que k é ímpar e $r + k \leq n$. consideremos $\check{\alpha}_{p,r,k}, \check{\delta}_{p,r,k} \in B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ da Definição 2.35. Então,

(a) Com algumas manipulações algébricas podemos simplificar o produto $\check{\delta}_{p,r,k} \cdot \check{\alpha}_{p,r,k}$, ou seja,

$$\begin{aligned}\check{\delta}_{p,r,k} \cdot \check{\alpha}_{p,r,k} &= \left(\sigma_{p+r+k-1} \cdots \sigma_{p+r+\frac{k+1}{2}} \sigma_{p+r+\frac{k-1}{2}}^{-1} \cdots \sigma_{p+r+1}^{-1} \right) \cdot \left(\sigma_{p+r+1} \cdots \sigma_{p+r+\frac{k-1}{2}} \cdots \sigma_{p+r+k-1} \right) \\ &= \sigma_{p+r+k-1} \cdots \sigma_{p+r+\frac{k+1}{2}} \cdot \sigma_{p+r+\frac{k+1}{2}} \cdots \sigma_{p+r+k-1} \\ &= \sigma_{p+r+k-1} \cdots \sigma_{p+r+\frac{k+1}{2}}^2 \cdots \sigma_{p+r+k-1}.\end{aligned}$$

Acrescentando adequadamente, $\sigma_i \sigma_i^{-1}$, com $p+r+\frac{k+1}{2} \leq i \leq p+r+k-1$, obtemos

$$\begin{aligned}
\check{\delta}_{p,r,k} \cdot \check{\alpha}_{p,r,k} &= \sigma_{p+r+k-1} \cdots \sigma_{p+r+\frac{k+1}{2}+1} \sigma_{p+r+\frac{k+1}{2}}^2 \sigma_{p+r+\frac{k+1}{2}+1} \cdots \sigma_{p+r+k-1} \\
&= \sigma_{p+r+k-1} \cdots \sigma_{p+r+\frac{k+1}{2}+1} \sigma_{p+r+\frac{k+1}{2}}^2 \sigma_{p+r+\frac{k+1}{2}}^{-1} \sigma_{p+r+\frac{k+1}{2}+1} \sigma_{p+r+\frac{k+1}{2}+1} \sigma_{p+r+\frac{k+1}{2}+1} \cdots \sigma_{p+r+k-1} \\
&= \sigma_{p+r+k-1} \cdots \sigma_{p+r+\frac{k+1}{2}}^2 \sigma_{p+r+\frac{k+1}{2}}^{-1} \sigma_{p+r+\frac{k+1}{2}+1} \sigma_{p+r+\frac{k+1}{2}+2}^{-1} \sigma_{p+r+\frac{k+1}{2}+2} \sigma_{p+r+\frac{k+1}{2}+1}^2 \cdots \sigma_{p+r+k-1} \\
&= \sigma_{p+r+k-1} \cdots \sigma_{p+r+\frac{k+1}{2}}^2 \sigma_{p+r+\frac{k+1}{2}}^{-1} \sigma_{p+r+\frac{k+1}{2}+1} \sigma_{p+r+\frac{k+1}{2}+2}^{-1} \cdots \sigma_{p+r+k-1} \\
&\quad \sigma_{p+r+k-1} \cdots \sigma_{p+r+\frac{k+1}{2}+2} \sigma_{p+r+\frac{k+1}{2}+1}^2 \cdots \sigma_{p+r+k-1} \\
&= A_{p+r+\frac{k+1}{2}, p+r+k} \cdot \sigma_{p+r+k-1} \cdots \sigma_{p+r+\frac{k+1}{2}+2} \sigma_{p+r+\frac{k+1}{2}+1}^2 \sigma_{p+r+\frac{k+1}{2}+2} \cdots \sigma_{p+r+k-1} \\
&= A_{p+r+\frac{k+1}{2}, p+r+k} \cdot \sigma_{p+r+k-1} \cdots \sigma_{p+r+\frac{k+1}{2}+2} \sigma_{p+r+\frac{k+1}{2}+1}^2 \sigma_{p+r+\frac{k+1}{2}+1}^{-1} \sigma_{p+r+\frac{k+1}{2}+2} \sigma_{p+r+\frac{k+1}{2}+2}^{-1} \cdots \\
&\quad \sigma_{p+r+\frac{k+1}{2}+2} \cdots \sigma_{p+r+k-1} \\
&= A_{p+r+\frac{k+1}{2}, p+r+k} \cdot \sigma_{p+r+k-1} \cdots \sigma_{p+r+\frac{k+1}{2}+2} \sigma_{p+r+\frac{k+1}{2}+1}^2 \sigma_{p+r+\frac{k+1}{2}+1}^{-1} \sigma_{p+r+\frac{k+1}{2}+2}^{-1} \sigma_{p+r+\frac{k+1}{2}+3}^{-1} \cdots \\
&\quad \sigma_{p+r+\frac{k+1}{2}+3} \sigma_{p+r+\frac{k+1}{2}+2}^2 \cdots \sigma_{p+r+k-1} \\
&= A_{p+r+\frac{k+1}{2}, p+r+k} \cdot \sigma_{p+r+k-1} \cdots \sigma_{p+r+\frac{k+1}{2}+2} \sigma_{p+r+\frac{k+1}{2}+1}^2 \sigma_{p+r+\frac{k+1}{2}+1}^{-1} \sigma_{p+r+\frac{k+1}{2}+2}^{-1} \sigma_{p+r+\frac{k+1}{2}+3}^{-1} \cdots \\
&\quad \sigma_{p+r+k-1}^{-1} \cdot \sigma_{p+r+k-1} \cdots \sigma_{p+r+\frac{k+1}{2}+3} \cdot \sigma_{p+r+\frac{k+1}{2}+2}^2 \cdots \sigma_{p+r+k-1} \\
&= A_{p+r+\frac{k+1}{2}, p+r+k} \cdot A_{p+r+\frac{k+1}{2}+1, p+r+k} \cdot \sigma_{p+r+k-1} \cdots \sigma_{p+r+\frac{k+1}{2}+3} \cdot \sigma_{p+r+\frac{k+1}{2}+2}^2 \cdots \\
&\quad \sigma_{p+r+k-1} \\
&\quad \vdots \\
&= A_{p+r+\frac{k+1}{2}, p+r+k} \cdot A_{p+r+\frac{k+1}{2}+1, p+r+k} \cdots A_{p+r+k-1, p+r+k}.
\end{aligned}$$

Para visualizarmos melhor o processo descrito na última igualdade, consideremos o caso $k=5$, $p \geq 1$ e $r=4$. Sejam $\check{\delta}_{p,4,5} \cdot \check{\alpha}_{p,4,5} \in B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$, então

$$\begin{aligned}
\check{\delta}_{p,4,5} \cdot \check{\alpha}_{p,4,5} &= \sigma_{p+8} \sigma_{p+7} \sigma_{p+6}^{-1} \sigma_{p+5}^{-1} \cdot \sigma_{p+5} \sigma_{p+6} \sigma_{p+7} \sigma_{p+8} \\
&= \sigma_{p+8} \sigma_{p+7} \cdot \sigma_7 \sigma_8 \\
&= \sigma_{p+8} \sigma_{p+7}^2 \cdot \sigma_{p+8}^{-1} \sigma_{p+8} \cdot \sigma_{p+8} \\
&= \sigma_{p+8} \sigma_{p+7}^2 \sigma_{p+8}^{-1} \cdot \sigma_{p+8} \sigma_{p+8} \\
&= A_{7,9} \cdot A_{8,9}.
\end{aligned}$$

(b) Seja $\check{\alpha}_{p,0,k} \in B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$. A partir das relações de Artin para $B_n(M_{0,p+1})$ (ver Teorema [2.1\(a\)](#)), temos

$$\check{\alpha}_{p,0,k}^j \sigma_{p+i} \check{\alpha}_{p,0,k}^{-j} = \sigma_{i+j},$$

com $1 \leq i \leq n-2$ e $1 \leq j \leq n-1-i$. De fato, sejam $k, n \geq 2, p \geq 1$ e $r \geq 0$ inteiros tais que k é ímpar e $r+k \leq n$. Suponhamos $1 \leq i \leq n-2$ e $1 \leq j \leq n-1-i$. Observemos que se $j=1$ então

$$\check{\alpha}_{p,0,k} \sigma_{p+i} \check{\alpha}_{p,0,k}^{-1} = \sigma_{p+i+1}. \quad (2.13)$$

De fato,

$$\begin{aligned}
 \check{\alpha}_{p,0,k} \sigma_{p+i} \check{\alpha}_{p,0,k}^{-1} &= (\sigma_{p+r+1} \cdots \sigma_{p+r+k-1}) \sigma_{p+i} (\sigma_{p+r+1} \cdots \sigma_{p+r+k-1})^{-1} \\
 &= (\sigma_{p+r+1} \cdots \sigma_{p+i-1} \sigma_{p+i} \sigma_{p+i+1} \sigma_{p+i+2} \cdots \sigma_{p+r+k-1}) \sigma_{p+i} (\sigma_{p+r+1} \cdots \\
 &\quad \sigma_{p+r+k-1})^{-1} \\
 &\stackrel{\text{Teo 2.1 (a.2)}}{=} \sigma_{p+r+1} \cdots \sigma_{p+i-1} \sigma_{p+i} \sigma_{p+i+1} \sigma_{p+i} \sigma_{p+i+1} \sigma_{p+i+2} \cdots \sigma_{p+r+k-1} \cdot (\sigma_{p+r+1} \cdots \\
 &\quad \cdots \sigma_{p+r+k-1})^{-1} \\
 &= \sigma_{p+r+1} \cdots \sigma_{p+i-1} \sigma_{p+i} \sigma_{p+i+1} \sigma_{p+i} \sigma_{p+i+1} \sigma_{p+i+2} \cdots \sigma_{p+r+k-1} \cdot (\sigma_{p+r+1} \cdots \\
 &\quad \cdots \sigma_{p+r+k-1})^{-1} \\
 &\stackrel{\text{Teo 2.1 (a.1)}}{=} \sigma_{p+r+1} \cdots \sigma_{p+i-1} \sigma_{p+i+1} \sigma_{p+i} \sigma_{p+i+1} \sigma_{p+i+2} \cdots \sigma_{p+r+k-1} \cdot (\sigma_{p+r+1} \cdots \\
 &\quad \cdots \sigma_{p+r+k-1})^{-1} \\
 &= \sigma_{p+r+1} \cdots \sigma_{p+i-1} \sigma_{p+i+1} \sigma_{p+i} \sigma_{p+i+1} \sigma_{p+i+2} \cdots \sigma_{p+r+k-1} \cdot \sigma_{p+r+k-1}^{-1} \sigma_{p+r+k-2}^{-1} \cdots \\
 &\quad \sigma_{p+r+1}^{-1} \\
 &= \sigma_{p+r+1} \cdots \sigma_{p+i-1} \sigma_{p+i+1} \sigma_{p+i} \sigma_{p+i+1} \sigma_{p+i+2} \cdots \sigma_{p+r+k-2} \cdot \sigma_{p+r+k-2}^{-1} \cdots \sigma_{p+r+1}^{-1} \\
 &= \sigma_{p+r+1} \cdots \sigma_{p+i-1} \sigma_{p+i+1} \sigma_{p+i} \sigma_{p+i+1} \sigma_{p+i+2} \cdots \sigma_{p+r+k-2} \cdot \sigma_{p+r+k-2}^{-1} \cdots \sigma_{p+i}^{-1} \cdots \\
 &\quad \sigma_{p+r+1}^{-1} \\
 &= \sigma_{p+r+1} \cdots \sigma_{p+i-1} \sigma_{p+i+1} \sigma_{p+i} \cdot \sigma_{p+i}^{-1} \sigma_{p+i-1}^{-1} \cdots \sigma_{p+r+1}^{-1} \\
 &= \sigma_{p+r+1} \cdots \sigma_{p+i-1} \sigma_{p+i+1} \sigma_{p+i-1}^{-1} \cdots \sigma_{p+r+1}^{-1} \\
 &\stackrel{\text{Teo 2.1 (a.2)}}{=} \sigma_{p+i+1} \cdot \sigma_{p+r+1} \cdots \sigma_{p+i-1} \cdot \sigma_{p+i-1}^{-1} \cdots \sigma_{p+r+1}^{-1} \\
 &= \sigma_{p+i+1}.
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

De forma análoga, com a técnica e os passos usados na prova (2.14) mostra-se que

$$\alpha_{p,0,k} \sigma_{p+i+j-1} \alpha_{p,0,k}^{-1} = \sigma_{p+i+j}. \tag{2.15}$$

Agora, por hipótese de indução em j , suponha que a sentença

$$\check{\alpha}_{p,0,k}^{j-1} \sigma_{p+i} \check{\alpha}_{p,0,k}^{-(j-1)} = \sigma_{p+i+j-1}$$

é verdadeira. Logo,

$$\begin{aligned}
 \check{\alpha}_{p,0,k}^j \sigma_{p+i} \check{\alpha}_{p,0,k}^{-j} &= \alpha_{p,0,k} \left(\check{\alpha}_{p,0,k}^{j-1} \sigma_{p+i} \check{\alpha}_{p,0,k}^{-(j-1)} \right) \check{\alpha}_{p,0,k}^{-1} \\
 &\stackrel{\text{hip.}}{=} \alpha_{p,0,k} \cdot \sigma_{p+i+j-1} \cdot \check{\alpha}_{p,0,k}^{-1} \\
 &\stackrel{(2.15)}{=} \sigma_{p+i+j},
 \end{aligned}$$

quando $1 \leq i \leq n-2$ e $1 \leq j \leq n-1-i$.

Portanto, dados $k, n \geq 2, p \geq 1$ e $r \geq 0$ inteiros tais que k é ímpar e $r+k \leq n$, a equação

$$\alpha_{p,0,k}^j \sigma_{p+i} \alpha_{p,0,k}^{-j} = \sigma_{p+i+j}$$

é válida, para todo $1 \leq i \leq n-2$ e $1 \leq j \leq n-1-i$.

(c) Sejam $j, k, n, p \in \mathbb{Z}$, com $j \geq 0$, $n, k \geq 2$ e $p \geq 1$ tais que k é ímpar e $j + k \leq n$. Então

$$\check{\alpha}_{p,0,n}^j \check{\delta}_{p,0,k} \check{\alpha}_{p,0,n}^{-j} = \check{\delta}_{p,j,k}.$$

De fato, consideremos $\check{\alpha}_{p,0,n}$ e $\check{\delta}_{p,0,k}$ descritos na Definição 2.35. Pelo item (b) $\alpha_{p,0,k}^j \sigma_{p+i} \alpha_{p,0,k}^{-j} = \sigma_{p+i+j}$, segue que $\alpha_{p,0,k}^j \sigma_{p+i}^{-1} \alpha_{p,0,k}^{-j} = \sigma_{p+i+j}^{-1}$, quando $1 \leq i \leq n-2$ e $1 \leq j \leq n-1-i$. Assim,

$$\begin{aligned} \check{\alpha}_{p,0,n}^j \check{\delta}_{p,0,k} \check{\alpha}_{p,0,n}^{-j} &= \check{\alpha}_{p,0,n}^j \left(\sigma_{p+k-1} \cdots \sigma_{p+\frac{k+1}{2}} \sigma_{p+\frac{k-1}{2}}^{-1} \cdots \sigma_{p+1}^{-1} \right) \check{\alpha}_{p,0,n}^{-j} \\ &= \check{\alpha}_{p,0,n}^j \sigma_{p+k-1} \check{\alpha}_{p,0,n}^{-j} \cdot \check{\alpha}_{p,0,n}^j \cdots \sigma_{p+\frac{k+1}{2}} \check{\alpha}_{p,0,n}^{-j} \cdot \check{\alpha}_{p,0,n}^j \sigma_{p+\frac{k-1}{2}}^{-1} \check{\alpha}_{p,0,n}^{-j} \cdots \\ &\quad \check{\alpha}_{p,0,n}^j \sigma_{p+1}^{-1} \check{\alpha}_{p,0,n}^{-j} \\ &= \left(\check{\alpha}_{p,0,n}^j \sigma_{p+k-1} \check{\alpha}_{p,0,n}^{-j} \right) \cdots \left(\check{\alpha}_{p,0,n}^j \sigma_{p+\frac{k+1}{2}} \check{\alpha}_{p,0,n}^{-j} \right) \cdot \left(\check{\alpha}_{p,0,n}^j \sigma_{p+\frac{k-1}{2}}^{-1} \check{\alpha}_{p,0,n}^{-j} \right) \cdots \\ &\quad \left(\check{\alpha}_{p,0,n}^j \sigma_{p+1}^{-1} \check{\alpha}_{p,0,n}^{-j} \right) \\ &= \sigma_{p+j+k-1} \cdots \sigma_{p+j+\frac{k+1}{2}} \sigma_{p+j+\frac{k-1}{2}}^{-1} \cdots \sigma_{p+j+1}^{-1} \\ &= \check{\delta}_{p,j,k}. \end{aligned}$$

Lema 2.37. Sejam $k, n \geq 2$, $p \geq 1$ e $r \geq 0$ inteiros, tais que k é ímpar e $r + k \leq n$. Então a ordem do elemento $\check{\delta}_{p,r,k} \in B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ é k .

Demonstração. Sejam $k, n \geq 2$, $p \geq 1$ e $r \geq 0$ inteiros tais que k é ímpar e $r + k \leq n$. Seja $\check{\delta}_{p,0,k} \in B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ o elemento descrito na Definição 2.35.

Podemos supor que $n = k$, uma vez que $k \leq n$ sabemos pelo Teorema 2.30 que o homomorfismo

$$\bar{\iota}: B_k(M_{0,p+1})/P'_k(M_{0,p+1}) \longrightarrow B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$$

é injetor e $\bar{\iota}(\check{\delta}_{p,0,k}) = \check{\delta}_{p,0,k}$.

Pela Observação 2.36(c) temos

$$\check{\alpha}_{p,0,n}^j \check{\delta}_{p,0,k} \check{\alpha}_{p,0,n}^{-j} = \check{\delta}_{p,j,k},$$

ou equivalentemente,

$$\check{\delta}_{p,0,k} = \check{\alpha}_{p,0,n}^{-j} \check{\delta}_{p,j,k} \check{\alpha}_{p,0,n}^j.$$

Notemos também que

$$\begin{aligned} (\check{\delta}_{p,0,k})^k &= (\check{\alpha}_{p,0,n}^{-j} \check{\delta}_{p,j,k} \check{\alpha}_{p,0,n}^j)^k \\ &= \check{\alpha}_{p,0,n}^{-j} \check{\delta}_{p,j,k} \check{\alpha}_{p,0,n}^j \cdot \check{\alpha}_{p,0,n}^{-j} \check{\delta}_{p,j,k} \check{\alpha}_{p,0,n}^j \cdots \check{\alpha}_{p,0,n}^{-j} \check{\delta}_{p,j,k} \check{\alpha}_{p,0,n}^j \\ &= \check{\alpha}_{p,0,n}^{-j} \check{\delta}_{p,j,k}^k \check{\alpha}_{p,0,n}^j. \end{aligned}$$

Agora, da Observação 2.36(a), temos

$$\check{\alpha}_{p,0,k}^{-1} \cdot \check{\delta}_{p,0,k}^{-1} \cdot \check{\alpha}_{p,0,k} = A\check{\alpha}_{p,0,k},$$

onde $A = \left(A_{p+\frac{k+1}{2},p+k} \cdot A_{p+\frac{k+3}{2},p+k} \cdots A_{p+k-1,p+k} \right)^{-1}$.

Logo, se provarmos que $(A\check{\alpha}_{p,0,k})^k = 1 \in B_k(M_{0,p+1})/P'_k(M_{0,p+1})$, então $\check{\delta}_{p,0,k}$ também tem ordem finita k e, conseqüentemente, demonstramos que $\check{\alpha}_{p,0,n}^{-j} \check{\delta}_{p,j,k} \check{\alpha}_{p,0,n}^j$ possui ordem k .

Afirmação:

$$(A\check{\alpha}_{p,0,k})^k = 1 \in B_k(M_{0,p+1})/P'_k(M_{0,p+1}).$$

De fato, sejam $\bar{\pi}(\check{\alpha}_{p,0,k}^{-1}) = \theta = (p+1, p+2, \dots, p+k) \in S_n$ e $A = \left(A_{p+\frac{k+1}{2},p+k} \cdot A_{p+\frac{k+3}{2},p+k} \cdots A_{p+k-1,p+k} \right)^{-1} \in P_k(M_{0,p+1})/P'_k(M_{0,p+1})$. Seja o conjunto $\mathcal{T}_\theta = \{(1, p+1), \dots, (p, p+1), (p+\frac{k+1}{2}, p+k), (p+\frac{k+3}{2}, p+k), \dots, (p+k-1, p+k)\}$ uma transversal associada à θ . Aplicando a Proposição 2.5 temos

$$\begin{aligned} (A\check{\alpha}_{p,0,k})^k &= A\check{\alpha}_{p,0,k} \cdot A\check{\alpha}_{p,0,k} \cdots A\check{\alpha}_{p,0,k} \\ &= \left(A_{p+\frac{k+1}{2},p+k} \cdots A_{p+k-1,p+k} \right)^{-1} \check{\alpha}_{p,0,k} \left(A_{p+\frac{k+1}{2},p+k} \cdots A_{p+k-1,p+k} \right)^{-1} \check{\alpha}_{p,0,k} \cdots \\ &\cdots \left(A_{p+\frac{k+1}{2},p+k} \cdots A_{p+k-1,p+k} \right)^{-1} \check{\alpha}_{p,0,k} \\ &= \left(A_{p+\frac{k+1}{2},p+k} \cdots A_{p+k-1,p+k} \right)^{-1} \check{\alpha}_{p,0,k} \left(A_{p+\frac{k+1}{2},p+k} \cdots A_{p+k-1,p+k} \right)^{-1} \check{\alpha}_{p,0,k}^{-1} \check{\alpha}_{p,0,k}^2 \cdots \\ &\cdots \check{\alpha}_{p,0,k}^{k-1} \left(A_{p+\frac{k+1}{2},p+k} \cdots A_{p+k-1,p+k} \right)^{-1} \check{\alpha}_{p,0,k}^{-(k-1)} \check{\alpha}_{p,0,k}^k \\ &= \left(A_{p+\frac{k+1}{2},p+k} \cdots A_{p+k-1,p+k} \right)^{-1} \cdot \left(A_{p+1,p+\frac{k+1}{2}+1} \cdots A_{p+1,p+k} \right)^{-1} \cdots \\ &\cdots \left(A_{p+\frac{k-1}{2},p+k-1} \cdots A_{p+k-2,p+k-1} \right)^{-1} \check{\alpha}_{p,0,k}^k \\ &= \left(A_{p+1,p+2}^{-1} \cdot A_{p+1,p+3}^{-1} A_{p+2,p+3}^{-1} \cdots A_{p+1,p+k}^{-1} A_{p+2,p+k}^{-1} \cdots A_{p+k-1,p+k}^{-1} \right) \check{\alpha}_{p,0,k}^k. \end{aligned}$$

Seja $\alpha_{p,0,k} = \sigma_{p+1} \cdots \sigma_{p+k-1} \in B_n(M_{0,p+1})$. Sabemos da equação (2.10) que

$$\alpha_{p,0,k}^k = \prod_{j=p+2}^{p+n} \left(\prod_{i=p+1}^{j-1} A_{i,j} \right) \in B_n(M_{0,p+1}).$$

Logo $\check{\alpha}_{p,0,k}^k = \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}$ em $B_k(M_{0,p+1})/P'_k(M_{0,p+1})$, onde $I = \{(r, s) \mid p+1 \leq r < s \leq p+k\}$ e, portanto,

$$(A\check{\alpha}_{p,0,k})^k = 1 \in B_k(M_{0,p+1})/P'_k(M_{0,p+1}).$$

Dessa forma, o elemento $\check{\delta}_{p,0,k}$ possui ordem finita, implicando que $\check{\delta}_{p,j,k}$ também possui ordem finita k , como queríamos demonstrar. \square

Teorema 2.38. *Sejam $n, p \in \mathbb{Z}$, com $n \geq 3$ e $p \geq 1$. Então existe uma relação biunívoca entre as classes de isomorfismo de subgrupos finitos abelianos de $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ e as classes de isomorfismo de subgrupos abelianos de S_n de ordem ímpar.*

Demonstração. Seja K um subgrupo de ordem finita de $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$. Aplicando o Lema [1.18], o Teorema [2.6] e o Teorema [2.21] à sequência exata curta

$$1 \longrightarrow P_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1}) \longrightarrow B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1}) \xrightarrow{\bar{\pi}} S_n \longrightarrow 1,$$

temos a restrição $\bar{\pi}|_K: K \longrightarrow \bar{\pi}(K)$ é um isomorfismo, pois o núcleo é livre de torção. Portanto, a classe de isomorfismos de um subgrupo finito abeliano de $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ é realizado por um subgrupo de ordem ímpar de S_n .

Reciprocamente, seja H um subgrupo abeliano de S_n de ordem ímpar. Pelo Teorema de estrutura para Grupos Abelianos, temos que todo grupo abeliano finito é soma direta de grupos cíclicos de ordem potência de um primo, digamos

$$H \cong \mathbb{Z}_{k_1} \times \mathbb{Z}_{k_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{k_r},$$

onde k_i é potência de primo ímpar, para todo $i = 1, 2, \dots, r$. Por [46, Proposição 2], temos $\sum_{i=1}^r k_i \leq n$.

Consideremos $k_0 = 0$ e, para $i = 1, 2, \dots, r$, o elemento $\check{\delta}_{p, \sum_{j=1}^{i-1} k_j, k_i} \in B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$, apresentado na Definição [2.35]. Pelo Lema [2.37] o elemento $\check{\delta}_{p, \sum_{j=1}^{i-1} k_j, k_i} \in B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ possui ordem k_i . Agora, quando $i_1 \neq i_2$, segue por construção que $\check{\delta}_{p, \sum_{j=1}^{i_1-1} k_j, k_{i_1}}$ comuta com $\check{\delta}_{p, \sum_{j=1}^{i_2-1} k_j, k_{i_2}}$.

Logo, o subgrupo

$$\langle \check{\delta}_{p,0,k_1}, \check{\delta}_{p,k_1,k_2}, \dots, \check{\delta}_{p, \sum_{j=1}^{r-1} k_j, k_r} \rangle$$

gerado por $\check{\delta}_{p,0,k_1}, \check{\delta}_{p,k_1,k_2}, \dots, \check{\delta}_{p, \sum_{j=1}^{r-1} k_j, k_r}$ é isomorfo ao subgrupo $H \subset S_n$, onde $\bar{\pi} \left(\check{\delta}_{p, \sum_{j=1}^{i-1} k_j, k_i} \right)$ é um k_i -cíclico em S_n e os cíclos são disjuntos dois a dois.

Sendo assim, existe uma relação biunívoca entre as classes de isomorfismo de subgrupos finitos abelianos de $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ e as classes de isomorfismo de subgrupos abelianos de S_n de ordem ímpar, como queríamos demonstrar. \square

Definição 2.39. Sejam $k_0 \leq k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_s, n, p \in \mathbb{Z}$, com $n \geq 3, p \geq, k_0 = 0$ e $3 \leq k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_s$ ímpares e $\sum_{j=1}^s k_j \leq n$. Definimos

$$\check{\delta} = \check{\delta}_{p,k_0,k_1} \cdot \check{\delta}_{p,k_1,k_2} \cdot \check{\delta}_{p,k_1+k_2,k_3} \cdots \check{\delta}_{p, \sum_{j=1}^{s-1} k_j, k_s},$$

onde o elemento $\check{\delta}_{p, \sum_{j=0}^l k_j, k_{l+1}}$ é descrito na Definição [2.35], com $0 \leq l \leq s-1$.

Os elementos $\check{\delta}_{p, \sum_{j=0}^l k_j, k_{l+1}}$ presentes na Definição [2.39] comutam dois a dois e, pelo Lema [2.37], tem ordem k_{l+1} , portanto $\check{\delta}$ possui ordem $\text{mmc}(k_1, k_2, \dots, k_s)$ em $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$. Notemos que

$$\theta = \bar{\pi}(\check{\delta}) = \theta_1 \cdots \theta_s, \tag{2.16}$$

onde θ_i é um k_i -ciclo, para $i = 1, \dots, s$, além do que

$$\theta_i = \left(p + 1 + \sum_{j=1}^{i-1} k_j, p + 2 + \sum_{j=1}^{i-1} k_j, \dots, p + k_i + \sum_{j=1}^{i-1} k_j \right) \quad (2.17)$$

em S_n e, portanto, a ordem de θ é o mmc(k_1, k_2, \dots, k_s).

No Teorema 2.40 caracterizamos os elementos de ordem finita, permitindo assim o estudo detalhado do subgrupo de torção do grupo quociente $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$.

Teorema 2.40. *Sejam $n, p, s \in \mathbb{Z}$, $n \geq 3$, $p \geq 2$, $s \geq 1$. Sejam $k_0 = 0$ e $3 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_s$ ímpares, com $\sum_{j=1}^s k_j \leq n$, o elemento $\check{\delta} \in B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ descrito na Definição 2.39 e $\theta = \bar{\pi}(\check{\delta}) \in S_n$. Seja \mathcal{T}_θ uma transversal associada à permutação θ .*

Consideremos o conjunto $I = I_{k_1} \dot{\cup} \dots \dot{\cup} I_{k_i} \dot{\cup} \dots \dot{\cup} I_{k_s}$, onde $I_{k_i} = \{(t, r) \mid p + 1 + \sum_{j=1}^{i-1} k_j \leq t < r \leq p + k_i + \sum_{j=1}^{i-1} k_j\}$. Se $A = \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{m_{i,j}} \in P_n(M_{0,p})/P'_n(M_{0,p})$, onde $m_{i,j} \in \mathbb{Z}$, para todo $(i, j) \in I$, então o elemento $A\check{\delta}$ é de ordem mmc(k_1, k_2, \dots, k_s) se, e somente se, o seguinte sistema de equações

$$\sum_{(q_1, q_2) \in \mathcal{O}_\theta(i, j)} m_{q_1, q_2} = 0,$$

é satisfeito, para todo $(i, j) \in \mathcal{T}_\theta$.

Demonstração. Sejam $n, p, s \in \mathbb{Z}$, $n \geq 3$, $p \geq 2$, $s \geq 1$. Sejam $k_0 = 0$ e $3 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_s$ ímpares, com $\sum_{j=1}^s k_j \leq n$. Consideremos o conjunto $I = I_{k_1} \dot{\cup} \dots \dot{\cup} I_{k_i} \dot{\cup} \dots \dot{\cup} I_{k_s}$,

onde $I_{k_i} = \{(t, r) \mid p + 1 + \sum_{j=1}^{i-1} k_j \leq t < r \leq p + k_i + \sum_{j=1}^{i-1} k_j\}$. Seja $\check{\delta} \in B_n(M_{0,p})/P'_n(M_{0,p})$ descrito na Definição 2.39. Façamos $k = \text{mmc}(k_1, \dots, k_s)$.

Se $A = \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{m_{i,j}} \in P_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$, pelo Lema 2.37 a ordem de $\check{\delta}$ é k , então

$$\begin{aligned} (A\check{\delta})^k &= A\check{\delta} \cdot A\check{\delta} \cdots A\check{\delta} \\ &= \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{m_{i,j}} \check{\delta} \cdot \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{m_{i,j}} \check{\delta} \cdots \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{m_{i,j}} \check{\delta} \\ &= \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{m_{i,j}} \cdot \prod_{(i,j) \in I} A_{\theta^{-1}(i), \theta^{-1}(j)}^{m_{i,j}} \check{\delta} \cdots \prod_{(i,j) \in I} A_{\theta^{(1-k)}(i), \theta^{(1-k)}(j)}^{m_{i,j}} \check{\delta}^k \\ &= \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{m_{i,j}} \cdot \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{m_{\theta(i), \theta(j)}} \check{\delta} \cdots \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{m_{\theta^{(k-1)}(i), \theta^{(k-1)}(j)}} \check{\delta}^k \\ &= \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{m_{i,j} + m_{\theta(i), \theta(j)} + \cdots + m_{\theta^{(k-1)}(i), \theta^{(k-1)}(j)}}. \end{aligned}$$

Logo, pela Observação 2.9(d) e pela Proposição 2.10,

$$cr \left((A\check{\delta})^k \mid i, j \right) = \sum_{t=0}^{k-1} m_{\theta^t(i), \theta^t(j)}. \quad (2.18)$$

Agora, observemos que o comprimento da órbita $|\mathcal{O}_\theta(i, j)|$ do par (i, j) é um divisor k' de k . Então

$$\sum_{t=0}^{k-1} m_{\theta^t(i), \theta^t(j)} = \frac{k}{k'} \left(\sum_{(q_1, q_2) \in \mathcal{O}_\theta(i, j)} m_{q_1, q_2} \right). \quad (2.19)$$

Chamamos atenção ao seguinte: como θ possui ordem k , o elemento $A\check{\delta}$ não pode ter ordem menor do que k , pois $\bar{\pi}(A\check{\delta}) = \theta$ e o núcleo de $\bar{\pi}$ é livre de torção.

Portanto, $(A\check{\delta})^k$ é trivial em $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ se, e somente se,

$$cr \left((A\check{\delta})^k \mid i, j \right) = \sum_{t=0}^{k-1} m_{\theta^t(i), \theta^t(j)} = 0,$$

para todo $(i, j) \in I$.

Consideremos $\mathcal{T}_\theta = \{(p+1, p+2), (p+1, p+3), \dots, (p+1, \theta^{\frac{k_1-1}{2}}(p+1)), \dots, (p+1 + \sum_{j=1}^{i-1} k_j, p+2 + \sum_{j=1}^{i-1} k_j), (p+1 + \sum_{j=1}^{i-1} k_j, p+3 + \sum_{j=1}^{i-1} k_j), \dots, (p+1 + \sum_{j=1}^{i-1} k_j, \theta^{\frac{k_i-1}{2}}(p+1 + \sum_{j=1}^{i-1} k_j)), \dots, (p+1 + \sum_{j=1}^{s-1} k_j, p+2 + \sum_{j=1}^{s-1} k_j), (p+1 + \sum_{j=1}^{s-1} k_j, p+3 + \sum_{j=1}^{s-1} k_j), \dots, (p+1 + \sum_{j=1}^{s-1} k_j, \theta^{\frac{k_s-1}{2}}(p+1 + \sum_{j=1}^{s-1} k_j))\}$ uma transversal associada à θ . Segue das equações (2.18) e (2.19) que $(A\check{\delta})^k$ é trivial em $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ se, e somente se,

$$\sum_{(p,q) \in \mathcal{O}_\theta(i,j)} m_{p,q} = 0,$$

para todo $(i, j) \in \mathcal{T}_\theta$. □

Como consequência do Teorema 2.40, concluímos que o grupo cristalográfico $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ possui uma infinidade de elementos de ordem $\text{mmc}(k_1, \dots, k_s)$.

O teorema a seguir determina a classe de conjugação de um elemento de ordem finita do grupo quociente $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$, apresentando condição necessária e suficiente para que dois elementos de ordem finita sejam conjugados.

Teorema 2.41. *Sejam $k, n, p \in \mathbb{Z}$, com $k \geq 3$ ímpar, $n \geq 3$ e $p \geq 1$. Dois elementos de $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ de ordem k são conjugados se, e somente se, suas permutações possuem a mesma estrutura cíclica.*

Demonstração. Sejam $k, n, p \in \mathbb{Z}$, com $k \geq 3$ ímpar, $n \geq 3$ e $p \geq 1$. Consideremos $\alpha, \beta \in B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ elementos de ordem finita, tais que $\alpha = \gamma\beta\gamma^{-1}$, para algum

$\gamma \in B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$. Pelo Teorema 2.21, temos $\bar{\pi}(\alpha)$ e $\bar{\pi}(\beta)$ são permutações de ordem ímpar. Pelo Lema 2.34 temos $\bar{\pi}(\alpha) = \bar{\pi}(\gamma)\bar{\pi}(\beta)\bar{\pi}(\gamma)^{-1}$ em S_n e, portanto, $\bar{\pi}(\alpha)$ e $\bar{\pi}(\beta)$ possuem a mesma estrutura cíclica.

Reciprocamente, consideremos $\theta \in S_n$ de ordem k . Sabemos que θ pode ser decomposto de forma única em produto de ciclos disjuntos. Logo, como θ tem ordem ímpar, cada ciclo dessa decomposição tem ordem ímpar, além disso, θ é descrito como na equação (2.16). Agora, conjugando θ se necessário, podemos supor que existem ímpares $3 \leq k_1 \leq \dots \leq k_s$ tais que $\sum_{i=1}^s k_i \leq n$ e $l = \text{mmc}(k_1, \dots, k_s)$, para os quais θ é escrito na forma (2.16).

Seja $\check{\delta} \in B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ descrito na Definição 2.39. Então, pelo Lema 2.37, a ordem de $\check{\delta}$ é l . Consideremos $\beta \in B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ um elemento de ordem finita tal que $\bar{\pi}(\beta) = \theta$. E, portanto, β também possui ordem l . Uma vez que $\bar{\pi}(\alpha) = \bar{\pi}(\beta) = \theta$, existe

$$A = \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{m_{i,j}} \in P_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$$

tal que $\beta = \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{m_{i,j}} \check{\delta}$, em que $I = \{(r, s) \mid r < s, 1 \leq r \leq p+n-1, p+1 \leq s \leq p+n\}$ e, pelo Teorema 2.40, temos $\sum_{(p,q) \in \mathcal{O}_\theta(i,j)} m_{p,q} = 0$. Para demonstrarmos este teorema é suficiente mostrarmos que $A\check{\delta}$ e $\check{\delta}$ são conjugados. Para provarmos isso, exibiremos $X \in P_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$, tal que $X \cdot A\check{\delta} \cdot X^{-1} = \check{\delta}$. Isto equivale a dizer que

$$X \cdot A\check{\delta} \cdot X^{-1}\check{\delta}^{-1} = 1 \tag{2.20}$$

em $P_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$. consideremos $X = \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{x_{i,j}}$. Aplicando a Proposição 2.5 e Observação 2.11, segue que

$$\check{\delta}X^{-1}\check{\delta}^{-1} = \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{-x_{\theta(i),\theta(j)}}.$$

Logo

$$X \cdot A\check{\delta} \cdot X^{-1}\check{\delta}^{-1} = \prod_{(i,j) \in I} A_{i,j}^{x_{i,j} + m_{i,j} - x_{\theta(i),\theta(j)}}.$$

Consequentemente a igualdade dada em (2.20) acontece se, e somente se,

$$x_{i,j} + m_{i,j} - x_{\theta(i),\theta(j)} = 0, \tag{2.21}$$

para todo $(i, j) \in I = \{(r, s) \mid r < s, 1 \leq r \leq p+n-1, p+1 \leq s \leq p+n\}$.

Seja $\mathcal{T}_\theta = \Gamma_1 \dot{\cup} \Gamma_2 \dot{\cup} \Gamma_3$ uma transversal associada à permutação θ , onde $\Gamma_1 = \{(1, p+1 + \sum_{j=1}^{i-1} k_j), (2, p+1 + \sum_{j=1}^{i-1} k_j), \dots, (p, p+1 + \sum_{j=1}^{i-1} k_j)\}$, com $1 \leq i \leq s$,

$$\Gamma_2 = \left\{ \left(p+1 + \sum_{j=1}^{i-1} k_j, p+2 + \sum_{j=1}^{i-1} k_j \right), \left(p+1 + \sum_{j=1}^{i-1} k_j, p+3 + \sum_{j=1}^{i-1} k_j \right), \dots, \left(p+1 + \sum_{j=1}^{i-1} k_j, \theta^{\frac{k_{i-1}}{2}} \left(p+1 + \sum_{j=1}^{i-1} k_j \right) \right) \right\} \text{ com } 1 \leq i \leq s, \text{ e}$$

$$\Gamma_3 = \left\{ \left(p+1, p+1 + k_1 \right), \dots, \left(p+1, p+1 + \sum_{j=1}^{i-1} k_j \right), \dots, \left(p+1, p+1 + \sum_{j=1}^{s-1} k_j \right), \left(p+1 + k_1, p+1 + k_1 + k_2 \right), \dots, \left(p+1 + k_1, p+1 + \sum_{j=1}^{i-1} k_j \right), \dots, \left(p+1 + k_1, p+1 + \sum_{j=1}^{s-1} k_j \right), \dots, \left(p+1 + \sum_{j=1}^{s-2} k_j, p+1 + \sum_{j=1}^{s-1} k_j \right) \right\}.$$

Se $(i, j) \in \mathcal{T}_\theta$, então o sistema (2.21) é reescrito como união disjunta dos seguintes subsistemas

$$m_{\theta^k(i), \theta^k(j)} = x_{\theta^{k+1}(i), \theta^{k+1}(j)} - x_{\theta^k(i), \theta^k(j)}, \quad (2.22)$$

onde $1 \leq k \leq |\mathcal{O}_\theta(i, j)| - 1$. Façamos de $|\mathcal{O}_\theta(i, j)| = r_{i,j}$. Agora, escolhamos $x_{i,j} \in \mathbb{Z}$ arbitrário. A solução do Subsistema (2.22)

$$\begin{aligned} x_{\theta(i), \theta(j)} - x_{i,j} &= m_{i,j}, \\ x_{\theta^2(i), \theta^2(j)} - x_{\theta(i), \theta(j)} &= m_{\theta(i), \theta(j)}, \\ x_{\theta^3(i), \theta^3(j)} - x_{\theta^2(i), \theta^2(j)} &= m_{\theta^2(i), \theta^2(j)}, \\ \vdots & \\ x_{\theta^{r_{i,j}-2}(i), \theta^{r_{i,j}-2}(j)} - x_{\theta^{r_{i,j}-3}(i), \theta^{r_{i,j}-3}(j)} &= m_{\theta^{r_{i,j}-3}(i), \theta^{r_{i,j}-3}(j)}, \\ x_{\theta^{r_{i,j}-1}(i), \theta^{r_{i,j}-1}(j)} - x_{\theta^{r_{i,j}-2}(i), \theta^{r_{i,j}-2}(j)} &= m_{\theta^{r_{i,j}-2}(i), \theta^{r_{i,j}-2}(j)}, \end{aligned}$$

é dada por

$$x_{\theta^t(i), \theta^t(j)} = x_{i,j} + \left(m_{i,j} + m_{\theta(i), \theta(j)} + m_{\theta^2(i), \theta^2(j)} + \dots + m_{\theta^{t-1}(i), \theta^{t-1}(j)} \right),$$

onde $1 \leq t \leq r_{i,j} - 1$. Consequentemente o sistema (2.21) possui solução, para todo $(i, j) \in \mathcal{T}_\theta$. Dessa forma, a equação (2.20) admite solução e, portanto, $A\check{\delta}$ é conjugado de $\check{\delta}$ por um elemento de $P_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$, como queríamos demonstrar. \square

Corolário 2.42. *Dois subgrupos cíclicos de $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ de ordem k são conjugados se, e somente se, suas imagens por $\bar{\pi}$ são conjugadas em S_n .*

Demonstração. Sejam H_1 e H_2 subgrupos cíclicos de $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ de ordem k . Suponhamos que H_1 e H_2 são conjugados no quociente $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$. Então, existe $\gamma \in B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ tal que $H_1 = \gamma H_2 \gamma^{-1}$. Logo,

$$\bar{\pi}(H_1) = \bar{\pi}(\gamma H_2 \gamma^{-1}) = \bar{\pi}(\gamma) \bar{\pi}(H_2) \bar{\pi}(\gamma^{-1}) = \bar{\pi}(\gamma) \bar{\pi}(H_2) \bar{\pi}(\gamma)^{-1}.$$

Reciprocamente, suponhamos que $G_1 = \langle g_1 \rangle$ e $G_2 = \langle g_2 \rangle$ subgrupos cíclicos de $B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ tais que $\bar{\pi}(G_1)$ e $\bar{\pi}(G_2)$ são conjugados em S_n . Então, existe $\sigma \in S_n$ tal que $\bar{\pi}(G_1) = \sigma \bar{\pi}(G_2) \sigma^{-1}$. Portanto, $\bar{\pi}(g_1) = \sigma \bar{\pi}(g_2) \sigma^{-1}$, onde g_1 e g_2 são

os geradores de G_1 e G_2 , respectivamente. Seja $\tilde{\sigma} \in B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$, tal que $\bar{\pi}(\tilde{\sigma}) = \sigma$. Então, pelo Teorema 2.41, temos $g_1 = \tilde{\sigma}g_2\tilde{\sigma}^{-1}$. Observemos que dado $w \in \mathbb{Z}$ então

$$g_1^w = g_1 \cdot g_1 \cdots g_1 = \tilde{\sigma}g_2\tilde{\sigma}^{-1} \cdot \tilde{\sigma}g_2\tilde{\sigma}^{-1} \cdots \tilde{\sigma}g_2\tilde{\sigma}^{-1} = \tilde{\sigma}g_2^w\tilde{\sigma}^{-1}.$$

Logo $g_1^w = \tilde{\sigma}g_2^w\tilde{\sigma}^{-1}$. Portanto, dados quaisquer $x \in G_1$ e $y \in G_2$, então existe $\tilde{\sigma} \in B_n(M_{0,p+1})/P'_n(M_{0,p+1})$ tal que $x = \tilde{\sigma}y\tilde{\sigma}^{-1}$ e, dessa forma, os subgrupos cíclicos G_1 e G_2 são conjugados. \square

Capítulo 3

Grupo de tranças de superfícies orientáveis de genus $g \geq 1$ finitamente perfuradas e grupos cristalográficos

Neste capítulo trazemos resultados envolvendo o grupo de n -tranças de uma superfície orientável de genus $g \geq 1$ finitamente perfurada e os grupos cristalográficos. A técnica utilizada neste capítulo é baseada no artigo [42]. Os autores de [42] provam na Proposição 1 que o quociente $B_n(X)/P'_n(X)$ é um grupo cristalográfico, quando X é uma superfície orientável, compacta e sem bordo. Dentre outros resultados importantes, os autores de [42] estudaram o subgrupo de torção e as classes de conjugação dos elementos de ordem finita.

Sejam g, n e p números inteiros positivos. Designamos por Σ_g a soma conexa $T \# \cdots \# T$ de g toros e, por $Q_p = \{x_1, \dots, x_p\}$ um subconjunto finito de pontos de Σ_g . Denotamos por $M_{g,p}$ a superfície Σ_g finitamente perfurada, isto é, $M_{g,p} = \Sigma_g \setminus Q_p$.

3.1 O grupo quociente $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$ é um grupo cristalográfico

No próximo teorema usaremos a seguinte convenção: para $n = p = 1$ temos σ_0 e z_0 são triviais no conjunto de geradores da apresentação do grupo de tranças da superfície $M_{g,p}$, ou seja, eles não aparecem na apresentação do grupo.

Denotamos por $B_n(M_{g,p})$ o grupo de n -tranças da superfície $M_{g,p}$. As Figuras 4.18, 4.19, 4.20 e 4.21 representam geometricamente os geradores σ_i , a_r , b_r e z_t , respectivamente, para todo $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, $r \in \{1, 2, \dots, g\}$ e $t \in \{1, \dots, p-1\}$.

Teorema 3.1 ([5, Teorema 1.1]). *Sejam $g, n, p \in \mathbb{Z}$, com $g, n, p \geq 1$. Então o grupo de n -tranças da superfície $M_{g,p}$, $B_n(M_{g,p})$, admite a apresentação dada por:*

Geradores: $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}, a_1, a_2, \dots, a_g, b_1, b_2, \dots, b_g, z_1, z_2, \dots, z_{p-1}$.

Relações:

(A) Relações de Artin

$$\begin{aligned} \sigma_k \sigma_i &= \sigma_i \sigma_k, & \text{se } |k - i| > 1 \\ \sigma_k \sigma_{k+1} \sigma_k &= \sigma_{k+1} \sigma_k \sigma_{k+1}, & \text{se } 1 \leq k \leq n - 2. \end{aligned}$$

- (R1) $a_r \sigma_i = \sigma_i a_r$, se $1 \leq r \leq g$; $i \neq 1$;
 $b_r \sigma_i = \sigma_i b_r$, se $1 \leq r \leq g$; $i \neq 1$;
- (R2) $\sigma_1^{-1} a_r \sigma_1^{-1} a_r = a_r \sigma_1^{-1} a_r \sigma_1^{-1}$, se $1 \leq r \leq g$;
 $\sigma_1^{-1} b_r \sigma_1^{-1} b_r = b_r \sigma_1^{-1} b_r \sigma_1^{-1}$, se $1 \leq r \leq g$;
- (R3) $\sigma_1^{-1} a_s \sigma_1 a_r = a_r \sigma_1^{-1} a_s \sigma_1$, se $1 \leq s < r \leq g$;
 $\sigma_1^{-1} b_s \sigma_1 b_r = b_r \sigma_1^{-1} b_s \sigma_1$, se $1 \leq s < r \leq g$;
 $\sigma_1^{-1} a_s \sigma_1 b_r = b_r \sigma_1^{-1} a_s \sigma_1$, se $1 \leq s < r \leq g$;
 $\sigma_1^{-1} b_s \sigma_1 a_r = a_r \sigma_1^{-1} b_s \sigma_1$, se $1 \leq s < r \leq g$;
- (R4) $\sigma_1^{-1} a_r \sigma_1^{-1} b_r = b_r \sigma_1^{-1} a_r \sigma_1^{-1}$, se $1 \leq r \leq g$;
- (R5) $z_j \sigma_i = \sigma_i z_j$, se $i \neq j$ e $j = 1, \dots, p - 1$;
- (R6) $\sigma_1^{-1} z_i \sigma_1 a_r = a_r \sigma_1^{-1} z_i \sigma_1$, se $1 \leq r \leq g$, $i = 1, \dots, p - 1$ e $n > 1$;
 $\sigma_1^{-1} z_i \sigma_1 b_r = b_r \sigma_1^{-1} z_i \sigma_1$, se $1 \leq r \leq g$, $i = 1, \dots, p - 1$ e $n > 1$;
- (R7) $\sigma_1^{-1} z_t \sigma_1 z_l = z_l \sigma_1^{-1} z_t \sigma_1$, se $1 \leq t < l \leq p - 1$;
- (R8) $\sigma_1^{-1} z_t \sigma_1^{-1} z_t = z_t \sigma_1^{-1} z_t \sigma_1^{-1}$, se $t = 1, \dots, p - 1$.

Demonstração. Ver [5, Teorema 1.1]. □

A partir da apresentação do grupo $B_n(M_{g,p})$ vale a seguinte observação.

Observação 3.2. Sejam $g, n, p \in \mathbb{Z}$, com $g, n, p \geq 1$. Podemos visualizar o grupo de tranças de Artin B_n como subgrupo do grupo $B_n(M_{g,p})$, ver [63, Proposição 2.2]. Portanto, o full-twist

$$\Delta_n^2 = (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1})^n$$

em $B_n(M_{g,p})$ pode ser escrito como

$$\prod_{j=2g+p+1}^{2g+p+n-1} \left(\prod_{i=2g+p}^{j-1} A_{i,j} \right),$$

onde $A_{i,j} = \sigma_{j-1} \cdots \sigma_{i+1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1}^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1}$ são os geradores do grupo de tranças puras de Artin.

Neste capítulo o **grupo simétrico** S_n é o grupo de todas as permutações do conjunto $S = \{1 + 2g + p - 1, 2 + 2g + p - 1, \dots, n + 2g + p - 1\}$, com a seguinte apresentação

$$S_n = \left\langle \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \dots, \bar{\sigma}_{n-1} \mid \begin{array}{ll} \bar{\sigma}_k \bar{\sigma}_{k+1} \bar{\sigma}_k = \bar{\sigma}_{k+1} \bar{\sigma}_k \bar{\sigma}_{k+1}, & \text{se } 1 \leq k \leq n - 2 \\ \bar{\sigma}_k \bar{\sigma}_i = \bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_k, & \text{se } |k - i| > 1 \\ \bar{\sigma}_i^2 = 1, & \text{se } 1 \leq i \leq n - 1. \end{array} \right\rangle$$

Seja

$$\pi: B_n(M_{g,p}) \longrightarrow S_n \quad (3.1)$$

o homomorfismo definido nos geradores de $B_n(M_{g,p})$ no grupo das permutações S_n , dado por

$$\begin{aligned} \pi(\sigma_i) &= (2g + p - 1 + i, 2g + p - 1 + i + 1) = \bar{\sigma}_i \\ \pi(a_r) &= \pi(b_r) = 1 \\ \pi(z_t) &= 1, \end{aligned}$$

para todos $1 \leq i \leq n - 1$, $1 \leq r \leq g$ e $1 \leq t \leq p - 1$. Denotaremos por $P_n(M_{g,p})$ o núcleo do homomorfismo π , ao mesmo chamaremos de **grupo das tranças puras da superfície** $M_{g,p}$. De (3.1) obtemos a sequência exata curta

$$1 \longrightarrow P_n(M_{g,p}) \longrightarrow B_n(M_{g,p}) \xrightarrow{\pi} S_n \longrightarrow 1. \quad (3.2)$$

Em [5, Teorema 5.1] foi obtida a seguinte apresentação de $P_n(M_{g,p})$ dada no próximo teorema.

Teorema 3.3 ([5, Teorema 5.1]). *Sejam $g, n, p \in \mathbb{Z}$, com $g, n, p \geq 1$. Então o grupo das tranças puras $P_n(M_{g,p})$ da superfície $M_{g,p}$, admite a apresentação dada por:*

Geradores: $\mathcal{A}_{i,j}$, onde $1 \leq i \leq 2g + p + n - 2$, $2g + p \leq j \leq 2g + p + n - 1$ e $i < j$.

Relações:

$$\begin{aligned} (PR1) \quad & \mathcal{A}_{i,j}^{-1} \mathcal{A}_{r,s} \mathcal{A}_{i,j} = \mathcal{A}_{r,s}, \text{ se } i < j < r < s, \text{ ou } r + 1 < i < j < s, \\ & \text{ou } i = r + 1 < j < s, \text{ para } r \text{ par } < 2g \text{ ou } r \geq 2g; \\ (PR2) \quad & \mathcal{A}_{i,j}^{-1} \mathcal{A}_{j,s} \mathcal{A}_{i,j} = \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{j,s} \mathcal{A}_{i,s}^{-1}, \text{ se } i < j < s; \\ (PR3) \quad & \mathcal{A}_{i,j}^{-1} \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{i,j} = \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{j,s} \mathcal{A}_{i,s}^{-1} \mathcal{A}_{j,s}^{-1}, \text{ se } i < j < s; \\ (PR4) \quad & \mathcal{A}_{i,j}^{-1} \mathcal{A}_{r,s} \mathcal{A}_{i,j} = \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{j,s} \mathcal{A}_{i,s}^{-1} \mathcal{A}_{j,s}^{-1} \mathcal{A}_{r,s} \mathcal{A}_{j,s} \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{j,s}^{-1} \mathcal{A}_{i,s}^{-1}, \text{ se } i + 1 < r < j < s \\ & \text{ou } i + 1 = r < j < s \text{ para } r \text{ ímpar } < 2g \text{ ou } r > 2g; \\ (ER1) \quad & \mathcal{A}_{r+1,j}^{-1} \mathcal{A}_{r,s} \mathcal{A}_{r+1,j} = \mathcal{A}_{r,s} \mathcal{A}_{r+1,s} \mathcal{A}_{j,s} \mathcal{A}_{r+1,s}^{-1}, \text{ se } r \text{ par e } r < 2g; \\ (ER2) \quad & \mathcal{A}_{r-1,j}^{-1} \mathcal{A}_{r,s} \mathcal{A}_{r-1,j} = \mathcal{A}_{r-1,s} \mathcal{A}_{j,s} \mathcal{A}_{r-1,s}^{-1} \mathcal{A}_{r,s} \mathcal{A}_{j,s} \mathcal{A}_{r-1,s} \mathcal{A}_{j,s}^{-1} \mathcal{A}_{r-1,s}^{-1}, \text{ se } r \text{ ímpar} \\ & \text{e } r < 2g. \end{aligned}$$

Demonstração. Ver [5, Teorema 5.1]. □

A Figura 4.22 representa geometricamente os geradores $\mathcal{A}_{i,j}$ do grupo de tranças puras $P_n(M_{g,p})$.

Observação 3.4.

(a) Da apresentação de $B_n(M_{g,p})$ (ver Teorema 3.1) os elementos $\mathcal{A}_{i,j}$ são escritos a partir dos geradores $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n, a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g, z_1, \dots, z_{p-1}\}$. Isto é, seja $c = 2g + p$ e

$2g + p \leq j \leq 2g + p + n - 1$, então

$$(a.1) \mathcal{A}_{i,j} = \sigma_{j-c} \cdots \sigma_{i+2-c} \sigma_{i+1-c}^2 \sigma_{i+2-c}^{-1} \cdots \sigma_{j-c}^{-1}, \text{ para } i \geq 2g + p.$$

$$(a.2) \mathcal{A}_{i,j} = \sigma_{j-c} \cdots \sigma_1 z_{i-2g}^{-1} \sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{j-c}^{-1}, \text{ para } 2g < i < 2g + p.$$

$$(a.3) \mathcal{A}_{i,j} = \sigma_{j-c} \cdots \sigma_1 a_{g-r+1}^{-1} \sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{j-c}^{-1}, \text{ se } i \text{ é par, com } i = 2r \text{ e } 1 \leq r \leq g.$$

$$(a.4) \mathcal{A}_{i,j} = \sigma_{j-c} \cdots \sigma_1 b_{g-r+1}^{-1} \sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{j-c}^{-1}, \text{ se } i \text{ é ímpar, com } i = 2r - 1 \text{ e } 1 \leq r \leq g.$$

NOTA: Quando $j = 2g + p$, tem-se $j - c = 0$. Nesse caso, segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{i,2g+p} &= z_{i-2g}^{-1}, \text{ para } 2g < i < 2g + p. \\ \mathcal{A}_{i,2g+p} &= a_{g-r+1}^{-1}, \text{ se } i \text{ é par, com } i = 2r \text{ e } 1 \leq r \leq g. \\ \mathcal{A}_{i,2g+p} &= b_{g-r+1}^{-1}, \text{ se } i \text{ é ímpar, com } i = 2r - 1 \text{ e } 1 \leq r \leq g. \end{aligned}$$

(b) A partir do item(a) vale salientar que os $\mathcal{A}_{i,j}$ são diferentes dos $A_{i,j}$ de Artin. Apenas para $i \geq 2g + p$ (item (a.1)) temos os únicos casos para os quais $\mathcal{A}_{i,j} = A_{i,j}$.

(c) Da apresentação dada ao grupo $P_n(M_{g,p})$ pelo Teorema 3.3 temos o grupo abelianizado $P_n(M_{g,p})^{Ab}$ de $P_n(M_{g,p})$ possui $(2g + p - 1)n + \frac{n(n-1)}{2}$ geradores. Pelo Teorema 3.3(ER1) e de [5, Observação 5.5], obtemos que os geradores

$$\mathcal{A}_{j,s} = \mathcal{A}_{r+1,s}^{-1} \mathcal{A}_{r,s}^{-1} \mathcal{A}_{r+1,j}^{-1} \mathcal{A}_{r,s} \mathcal{A}_{r+1,j} \mathcal{A}_{r+1,s},$$

para todo $2g + p \leq j < s \leq 2g + p + n - 1$. Isso implica que os geradores $\mathcal{A}_{j,s}$ são redundantes na apresentação de $P_n(M_{g,p})$, para $2g + p \leq j < s \leq 2g + p + n - 1$ e, portanto, o grupo

$$P_n(M_{g,p})^{Ab}$$

é isomorfo ao grupo abeliano livre

$$\mathbb{Z}^{(2g+p-1)n}.$$

Sejam $g, n, p \in \mathbb{Z}$, com $g, n, p \geq 1$. Denotamos por $P'_n(M_{g,p})$ o subgrupo dos comutadores do grupo $P_n(M_{g,p})$. Pela Observação 1.12, temos $P'_n(M_{g,p}) \leq B_n(M_{g,p})$, pois $P_n(M_{g,p}) \leq B_n(M_{g,p})$. Agora, passando ao quociente em (3.2) e tendo em conta que $P_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p}) \cong \mathbb{Z}^{(2g+p-1)n}$, obtemos a sequência exata curta

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^{(2g+p-1)n} \longrightarrow B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p}) \xrightarrow{\bar{\pi}} S_n \longrightarrow 1. \quad (3.3)$$

Há um abuso de linguagem quando denotamos a classe de $\mathcal{A}_{i,j}$ em $P_n(M_{g,p})^{Ab}$ por simplesmente $\mathcal{A}_{i,j}$.

O próximo teorema descreverá a ação por conjugação do grupo de tranças $B_n(M_{g,p})$

no subgrupo de tranças puras $P_n(M_{g,p})$.

Teorema 3.5. *Sejam $g, n, p \in \mathbb{Z}$, com $g, n, p \geq 1$. Sejam $c = 2g + p$, $1 \leq i \leq 2g + p + n - 2$ e $2g + p \leq j \leq 2g + p + n - 1$. Então a ação por conjugação do grupo de tranças $B_n(M_{g,p})$ da superfície $M_{g,p}$ no subgrupo de tranças puras $P_n(M_{g,p})$ é dada por:*

(a) Quando $2g + p \leq i < j \leq 2g + p + n - 1$, tem-se

$$\sigma_k \mathcal{A}_{i,j} \sigma_k^{-1} = \begin{cases} \mathcal{A}_{i,j}, & \text{se } k \neq i-1, i, j-1, j \\ \mathcal{A}_{i,j+1}, & \text{se } j = k \\ \mathcal{A}_{i,j}^{-1} \mathcal{A}_{i,j-1} \mathcal{A}_{i,j}, & \text{se } j = k+1 \\ \mathcal{A}_{i+1,j}, & \text{se } i = k < j-1 \\ \mathcal{A}_{i,j}^{-1} \mathcal{A}_{i-1,j} \mathcal{A}_{i,j}, & \text{se } i = p+1. \end{cases}$$

Se $1 \leq i \leq 2g + p - 1$ e $2g + p \leq j \leq 2g + p + n - 1$, então

(b) $\sigma_k \mathcal{A}_{i,j} \sigma_k^{-1} = \mathcal{A}_{2g+p+k-1, 2g+p+k} \mathcal{A}_{i,j-1} \mathcal{A}_{2g+p+k-1, 2g+p+k}^{-1}$, quando $k = j - c$.

(c) $\sigma_k \mathcal{A}_{i,j} \sigma_k^{-1} = \begin{cases} \mathcal{A}_{i,j}^{-1} \mathcal{A}_{i,j+1} \mathcal{A}_{2g+p, 2g+p+1} \mathcal{A}_{i,j} \mathcal{A}_{2g+p, 2g+p+1}^{-1}, & \text{se } j - c = 0, \\ \mathcal{A}_{i,j+1}, & \text{se } j - c \neq 0, \end{cases}$

quando $k = j - c + 1$.

(d) $\sigma_k \mathcal{A}_{i,j} \sigma_k^{-1} = \mathcal{A}_{i,j}$, quando $k \leq j - c - 1$ ou $k \geq j - c + 2$.

(e) $a_{g-\frac{i}{2}+1} \mathcal{A}_{r,s} a_{g-\frac{i}{2}+1}^{-1} = \begin{cases} \mathcal{A}_{r,s}, & \text{se } i < c < r < s, \text{ ou } r+1 < i < c < s, \\ & \text{ou } i = r+1 < c < s, \text{ para } r \text{ par } < 2g \text{ ou } r \geq 2g. \\ \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{c,s} \mathcal{A}_{i,s}^{-1}, & \text{se } i < c < s \text{ e } r = c. \\ \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{c,s} \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{c,s}^{-1} \mathcal{A}_{i,s}^{-1}, & \text{se } i < c < s \text{ e } r = i. \\ \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{c,s} \mathcal{A}_{i,s}^{-1} \mathcal{A}_{c,s}^{-1} \mathcal{A}_{r,s} \mathcal{A}_{c,s} \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{c,s}^{-1} \mathcal{A}_{i,s}^{-1}, & \text{se } i+1 < r < c < s, \\ & \text{ou } i+1 = r < c < s \text{ para } r \text{ ímpar } < 2g \text{ ou } r > 2g, \end{cases}$
quando i é par e $1 \leq i \leq 2g$.

(f) $b_{g-\frac{i+1}{2}+1} \mathcal{A}_{r,s} b_{g-\frac{i+1}{2}+1}^{-1} = \begin{cases} \mathcal{A}_{r,s}, & \text{se } i < c < r < s, \text{ ou } r+1 < i < c < s, \\ & \text{ou } i = r+1 < c < s, \text{ para } r \text{ par}, < 2g \text{ ou } r \geq 2g. \\ \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{c,s} \mathcal{A}_{i,s}^{-1}, & \text{se } i < c < s \text{ e } r = c. \\ \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{c,s} \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{c,s}^{-1} \mathcal{A}_{i,s}^{-1}, & \text{se } i < c < s \text{ e } r = i. \\ \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{c,s} \mathcal{A}_{i,s}^{-1} \mathcal{A}_{c,s}^{-1} \mathcal{A}_{r,s} \mathcal{A}_{c,s} \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{c,s}^{-1} \mathcal{A}_{i,s}^{-1}, & \text{se } i+1 < r < c < s, \\ & \text{ou } i+1 = r < c < s \text{ para } r \text{ ímpar } < 2g \text{ ou } r > 2g, \end{cases}$
quando i é ímpar e $1 \leq i \leq 2g$.

$$(g) z_i \mathcal{A}_{r,s} z_i^{-1} = \begin{cases} \mathcal{A}_{r,s}, & \text{se } i < c < r < s, \text{ ou } r+1 < i < c < s, \text{ ou } i = r+1 < c < s, \\ & \text{para } r \text{ par } < 2g \text{ ou } r \geq 2g. \\ \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{c,s} \mathcal{A}_{i,s}^{-1}, & \text{se } i < c < s \text{ e } r = c. \\ \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{c,s} \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{c,s}^{-1} \mathcal{A}_{i,s}^{-1}, & \text{se } i < c < s \text{ e } r = i. \\ \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{c,s} \mathcal{A}_{i,s}^{-1} \mathcal{A}_{c,s}^{-1} \mathcal{A}_{r,s} \mathcal{A}_{c,s} \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{c,s}^{-1} \mathcal{A}_{i,s}^{-1}, & \text{se } i+1 < r < c < s, \\ & \text{ou } i+1 = r < j < s \text{ para } r \text{ ímpar } < 2g \text{ ou } r > 2g, \\ & \text{quando } 2g+1 \leq i \leq 2g+p-1. \end{cases}$$

Demonstração. Sejam $g, n, p \in \mathbb{Z}$, com $g, n, p \geq 1$. Sejam $c = 2g+p$, $1 \leq i \leq 2g+p+n-2$ e $2g+p \leq j \leq 2g+p+n-1$.

(a) Se $2g+p \leq i < j \leq 2g+p+n-1$, então os geradores $\mathcal{A}_{i,j} = A_{i,j}$, isto é, os geradores $\mathcal{A}_{i,j}$ correspondem aos geradores de Artin $A_{i,j}$ do grupo de tranças puras. Logo,

$$\sigma_k \mathcal{A}_{i,j} \sigma_k^{-1} = \begin{cases} \mathcal{A}_{i,j}, & \text{se } k \neq i-1, i, j-1, j \\ \mathcal{A}_{i,j+1}, & \text{se } j = k \\ \mathcal{A}_{i,j}^{-1} \mathcal{A}_{i,j-1} \mathcal{A}_{i,j}, & \text{se } j = k+1 \\ \mathcal{A}_{i+1,j}, & \text{se } i = k < j-1 \\ \mathcal{A}_{i,j}^{-1} \mathcal{A}_{i-1,j} \mathcal{A}_{i,j}, & \text{se } i = p+1. \end{cases}$$

Seja $c = 2g+p$. Suponhamos $2g+p \leq j \leq 2g+p+n-1$ e $1 \leq i \leq 2g+p-1$. Os itens (a.2), (a.3) e (a.4) da Observação [3.4](#) nos diz que

$$\mathcal{A}_{i,j} = \sigma_{j-c} \cdots \sigma_1 z_{i-2g}^{-1} \sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{j-c}^{-1}, \text{ para } 2g < i < 2g+p;$$

$$\mathcal{A}_{i,j} = \sigma_{j-c} \cdots \sigma_1 a_{g-r+1}^{-1} \sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{j-c}^{-1}, \text{ para } i \text{ par, com } i = 2r \text{ e } 1 \leq r \leq g;$$

$$\mathcal{A}_{i,j} = \sigma_{j-c} \cdots \sigma_1 b_{g-r+1}^{-1} \sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{j-c}^{-1}, \text{ para } i \text{ ímpar, com } i = 2r-1 \text{ e } 1 \leq r \leq g.$$

(b) Quando $k = j - c$ temos

$$\begin{aligned} \sigma_k \mathcal{A}_{i,j} \sigma_k^{-1} &= \sigma_{j-c} \cdot \sigma_{j-c} \sigma_{j-c-1} \cdots \sigma_1 z_{i-2g}^{-1} \sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{j-c-1}^{-1} \sigma_{j-c}^{-1} \cdot \sigma_{j-c}^{-1} \\ &= \sigma_k^2 \mathcal{A}_{i,j-1} \sigma_k^{-2}, \text{ para } 2g < i < 2g+p; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_k \mathcal{A}_{2r,j} \sigma_k^{-1} &= \sigma_{j-c} \cdot \sigma_{j-c} \sigma_{j-c-1} \cdots \sigma_1 a_{g-r+1}^{-1} \sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{j-c-1}^{-1} \sigma_{j-c}^{-1} \cdot \sigma_{j-c}^{-1} \\ &= \sigma_k^2 \mathcal{A}_{2r,j-1} \sigma_k^{-2}, \text{ para } 1 \leq r \leq g; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_k \mathcal{A}_{2r-1,j} \sigma_k^{-1} &= \sigma_{j-c} \cdot \sigma_{j-c} \sigma_{j-c-1} \cdots \sigma_1 b_{g-r+1}^{-1} \sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{j-c-1}^{-1} \sigma_{j-c}^{-1} \cdot \sigma_{j-c}^{-1} \\ &= \sigma_k^2 \mathcal{A}_{2r-1,j-1} \sigma_k^{-2}, \text{ para } 1 \leq r \leq g. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sigma_k \mathcal{A}_{i,j} \sigma_k^{-1} = \sigma_k^2 \mathcal{A}_{i,j-1} \sigma_k^{-2} = \mathcal{A}_{2g+p+k-1, 2g+p+k} \mathcal{A}_{i,j-1} \mathcal{A}_{2g+p+k-1, 2g+p+k}^{-1}, \quad (3.4)$$

quando $1 \leq i \leq 2g + p - 1$ e $k = j - c$.

(c) Quando $k = j - c + 1$. Aqui vamos considerar os subcasos, onde $j - c \neq 0$ e $j - c = 0$.

(c.1) Quando $j - c \neq 0$. Da Observação 3.4, itens (a.1), (a.2) e (a.3) segue que

$$\begin{aligned} \sigma_k \mathcal{A}_{i,j} \sigma_k^{-1} &= \sigma_{j-c+1} \cdot \sigma_{j-c} \sigma_{j-c-1} \cdots \sigma_1 z_{i-2g}^{-1} \sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{j-c-1}^{-1} \sigma_{j-c}^{-1} \cdot \sigma_{j-c+1}^{-1} \\ &= \mathcal{A}_{i,j+1}, \text{ para } 2g < i < 2g + p; \\ \sigma_k \mathcal{A}_{2r,j} \sigma_k^{-1} &= \sigma_{j-c+1} \cdot \sigma_{j-c} \sigma_{j-c-1} \cdots \sigma_1 a_{g-r+1}^{-1} \sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{j-c-1}^{-1} \sigma_{j-c}^{-1} \cdot \sigma_{j-c+1}^{-1} \\ &= \mathcal{A}_{2r,j+1}, \text{ para } 1 \leq r \leq g; \\ \sigma_k \mathcal{A}_{2r-1,j} \sigma_k^{-1} &= \sigma_{j-c+1} \cdot \sigma_{j-c} \sigma_{j-c-1} \cdots \sigma_1 b_{g-r+1}^{-1} \sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{j-c-1}^{-1} \sigma_{j-c}^{-1} \cdot \sigma_{j-c+1}^{-1} \\ &= \mathcal{A}_{2r-1,j+1}, \text{ para } 1 \leq r \leq g. \end{aligned}$$

Logo,

$$\sigma_k \mathcal{A}_{i,j} \sigma_k^{-1} = \mathcal{A}_{i,j+1}, \tag{3.5}$$

para $1 \leq i \leq 2g + p - 1$, $k = j - c + 1$ e $j - c \neq 0$.

(c.2) Quando $j - c = 0$, ou seja, $k = 1$. Pelo Teorema 3.1, itens (R2) e (R8), sabemos que

$$\begin{aligned} \sigma_1^{-1} a_r \sigma_1^{-1} a_r &= a_r \sigma_1^{-1} a_r \sigma_1^{-1}, \text{ para } 1 \leq r \leq g \\ \sigma_1^{-1} b_r \sigma_1^{-1} b_r &= b_r \sigma_1^{-1} b_r \sigma_1^{-1}, \text{ para } 1 \leq r \leq g \\ \sigma_1^{-1} z_t \sigma_1^{-1} z_t &= z_t \sigma_1^{-1} z_t \sigma_1^{-1}, \text{ se } 1 \leq t \leq p - 1. \end{aligned}$$

Consideremos a primeira igualdade, isto é,

$$\underline{\sigma_1^{-1} a_r \sigma_1^{-1} a_r} = a_r \sigma_1^{-1} a_r \sigma_1^{-1},$$

com $1 \leq r \leq g$. Logo,

$$a_r \sigma_1^{-1} = \sigma_1 a_r \sigma_1^{-1} a_r \sigma_1^{-1} a_r^{-1},$$

donde

$$\sigma_1 a_r \sigma_1^{-1} = \sigma_1^2 a_r \sigma_1^{-1} a_r \sigma_1^{-1} a_r^{-1}.$$

Implicando

$$\begin{aligned} (\sigma_1 a_r \sigma_1^{-1})^{-1} &= (\sigma_1^2 a_r \sigma_1^{-1} a_r \sigma_1^{-1} a_r^{-1})^{-1} \\ &= a_r \sigma_1 a_r^{-1} \underline{\sigma_1} a_r^{-1} \sigma_1^{-2} \\ &= a_r \sigma_1 a_r^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_1^2 a_r^{-1} \sigma_1^{-2}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Notemos que multiplicando as desigualdades $1 \leq r \leq g$ por (-1) implica em $-1 \geq -r \geq -g$. Donde, adicionando g tem-se $g - 1 \geq g - r \geq g - g$ e, em seguida adicionando $(+1)$, vem que $g - 1 + 1 \geq g - r + 1 \geq g - g + 1$. Assim, as desigualdades

$1 \leq r \leq g$ e $1 \leq g - r + 1 \leq g$ são equivalentes. A Observação 3.4(a.3) nos diz que

$$\begin{aligned} a_{g-r+1}^{-1} &= \mathcal{A}_{2r,2g+p}, \\ \sigma_1 a_{g-r+1}^{-1} \sigma_1^{-1} &= \mathcal{A}_{2r,2g+p+1}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

com $1 \leq r \leq g$. Substituindo (3.7) em (3.6), temos

$$\sigma_1 \mathcal{A}_{2r,2g+p} \sigma_1^{-1} = \mathcal{A}_{2r,2g+p}^{-1} \mathcal{A}_{2r,2g+p+1} \sigma_1^2 \mathcal{A}_{2r,2g+p} \sigma_1^{-2}.$$

De maneira análoga aos cálculos desenvolvidos na equação (3.6), usamos a Observação 3.4(a.2)(a.4) e mostramos para as igualdades

$$\sigma_1^{-1} b_r \sigma_1^{-1} b_r = b_r \sigma_1^{-1} b_r \sigma_1^{-1}$$

e

$$\sigma_1^{-1} z_t \sigma_1^{-1} z_t = z_t \sigma_1^{-1} z_t \sigma_1^{-1},$$

com $1 \leq r \leq g$ e $1 \leq t \leq p - 1$, que

$$\begin{aligned} \sigma_1 \mathcal{A}_{2r-1,2g+p} \sigma_1^{-1} &= \mathcal{A}_{2r-1,2g+p}^{-1} \mathcal{A}_{2r-1,2g+p+1} \sigma_1^2 \mathcal{A}_{2r-1,2g+p} \sigma_1^{-2}, \quad \text{para } 1 \leq r \leq g \\ \sigma_1 \mathcal{A}_{2g+t,2g+p} \sigma_1^{-1} &= \mathcal{A}_{2g+t,2g+p}^{-1} \mathcal{A}_{2g+t,2g+p+1} \sigma_1^2 \mathcal{A}_{2g+t,2g+p} \sigma_1^{-2}, \quad \text{para } 1 \leq t \leq p - 1. \end{aligned}$$

Pela Observação 3.4(a.1) sabemos que $\sigma_1^2 = \mathcal{A}_{2g+p,2g+p+1}$. Logo

$$\sigma_k \mathcal{A}_{i,j} \sigma_k^{-1} = \begin{cases} \mathcal{A}_{i,j}^{-1} \mathcal{A}_{i,j+1} \mathcal{A}_{2g+p,2g+p+1} \mathcal{A}_{i,j} \mathcal{A}_{2g+p,2g+p+1}^{-1}, & \text{se } j - c = 0, \\ \mathcal{A}_{i,j+1}, & \text{se } j - c \neq 0, \end{cases} \quad (3.8)$$

quando $1 \leq i \leq 2g + p - 1$ e $k = j - c + 1$.

(d) Quando $k \leq j - c - 1$ ou $k \geq j - c + 2$. Consideremos inicialmente o caso particular

$$\mathcal{A}_{2r-1,j},$$

quando $1 \leq r \leq g$ e $2g + p \leq j \leq 2g + p + n - 1$.

(d.1) Se $k = j - c - 1$, então

$$\sigma_k \mathcal{A}_{2r-1,j} \sigma_k^{-1} = \underline{\sigma_{j-c-1} \sigma_{j-c} \sigma_{j-c-1} \sigma_{j-c-2} \cdots \sigma_1 b_{g-r+1}^{-1} \sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{j-c-2} \sigma_{j-c-1}^{-1} \sigma_{j-c}^{-1} \sigma_{j-c-1}^{-1}}.$$

Pelo Teorema 3.1(A), temos $\sigma_{j-c-1} \sigma_{j-c} \sigma_{j-c-1} = \sigma_{j-c} \sigma_{j-c-1} \sigma_{j-c}$. Assim,

$$\sigma_k \mathcal{A}_{2r-1,j} \sigma_k^{-1} = \sigma_{j-c} \sigma_{j-c-1} \underline{\sigma_{j-c} \sigma_{j-c-2} \cdots \sigma_1 b_{g-r+1}^{-1} \sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{j-c-2} \sigma_{j-c}^{-1} \sigma_{j-c-1}^{-1} \sigma_{j-c}^{-1}}.$$

Os itens (A) e (R1) do Teorema 3.1 nos dizem que σ_{j-c} comuta com

$\sigma_{j-c-2}, \sigma_{j-c-3}, \dots, \sigma_2, \sigma_1$ e b_{g-r+1}^{-1} . Logo,

$$\sigma_k \mathcal{A}_{2r-1,j} \sigma_k^{-1} = \sigma_{j-c} \sigma_{j-c-1} \sigma_{j-c-2} \cdots \sigma_1 b_{g-r+1}^{-1} \sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{j-c-2}^{-1} \sigma_{j-c-1}^{-1} \sigma_{j-c}^{-1} = \mathcal{A}_{2r-1,j}.$$

(d.2) Se $k < j - c - 1$ ou $k \geq j - c + 2$, então

$$\begin{aligned} \sigma_k \mathcal{A}_{2r-1,j} \sigma_k^{-1} &= \underline{\sigma_k} \sigma_{j-c} \cdots \sigma_{k+1} \sigma_k \sigma_{k-1} \cdots \sigma_1 b_{g-r+1}^{-1} \sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{k-1}^{-1} \sigma_k^{-1} \sigma_{k+1}^{-1} \cdots \sigma_{j-c}^{-1} \underline{\sigma_k^{-1}} \\ &= \sigma_{j-c} \cdots \underline{\sigma_k \sigma_{k+1} \sigma_k} \sigma_{k-1} \cdots \sigma_1 b_{g-r+1}^{-1} \sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{k-1}^{-1} \underline{\sigma_k^{-1} \sigma_{k+1}^{-1} \sigma_k^{-1}} \cdots \sigma_{j-c}^{-1}, \end{aligned}$$

pois os itens (A) e (R1) do Teorema 3.1 nos garante que o σ_k comuta com cada $\sigma_{j-c}, \sigma_{j-c-1}, \dots, \sigma_{k+2}$. Ainda do Teorema 3.1(A), temos $\sigma_k \sigma_{k+1} \sigma_k = \sigma_{k+1} \sigma_k \sigma_{k+1}$. Assim,

$$\sigma_k \mathcal{A}_{2r-1,j} \sigma_k^{-1} = \sigma_{j-c} \cdots \sigma_{k+1} \sigma_k \underline{\sigma_{k+1}} \sigma_{k-1} \cdots \sigma_1 b_{g-r+1}^{-1} \sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{k-1}^{-1} \sigma_{k+1}^{-1} \sigma_k^{-1} \underline{\sigma_{k+1}^{-1}} \cdots \sigma_{j-c}^{-1}.$$

Como σ_{k+1} comuta com $\sigma_{k-1}, \sigma_{k-2}, \dots, \sigma_2, \sigma_1$ e b_{g-r+1}^{-1} . Então,

$$\sigma_k \mathcal{A}_{2r-1,j} \sigma_k^{-1} = \sigma_{j-c} \cdots \sigma_{k+1} \sigma_k \cdots \sigma_1 b_{g-r+1}^{-1} \sigma_1^{-1} \cdots \sigma_k^{-1} \sigma_{k+1}^{-1} \cdots \sigma_{j-c}^{-1} = \mathcal{A}_{2r-1,j}.$$

Analogamente, ao itens (d.1) e (d.2), mostramos que

$$\sigma_k \mathcal{A}_{2r,j} \sigma_k^{-1} = \mathcal{A}_{2r,j},$$

$$\sigma_k \mathcal{A}_{i,j} \sigma_k^{-1} = \mathcal{A}_{i,j},$$

quando $1 \leq r \leq g$, $2g + 1 \leq i \leq 2g + p - 1$ e $2g + p \leq j \leq 2g + p + n - 1$.

Portanto, para cada $1 \leq i \leq 2g + p - 1$ e $2g + p \leq j \leq 2g + p + n - 1$, tem-se

$$\sigma_k \mathcal{A}_{i,j} \sigma_k^{-1} = \mathcal{A}_{i,j}, \tag{3.9}$$

quando $k \leq j - c - 1$ ou $k \geq j - c + 2$.

(e) Sejam $\{a_1, a_2, \dots, a_g, b_1, b_2, \dots, b_g, z_1, z_2, \dots, z_{p-1}\}$ os geradores do grupo $B_n(M_{g,p})$ apresentados no Teorema 3.1. Façamos $j = 2g + p$ e pela Observação 3.4, itens (a.2), (a.3) e (a.4), temos

$$\mathcal{A}_{i,j} = \mathcal{A}_{2r,2g+p} = a_{g-r+1}^{-1},$$

quando $i = 2r$ par e $1 \leq r \leq g$;

$$\mathcal{A}_{i,j} = \mathcal{A}_{2r-1,2g+p} = b_{g-r+1}^{-1},$$

quando $i = 2r - 1$ ímpar e $1 \leq r \leq g$;

$$\mathcal{A}_{i,j} = \mathcal{A}_{i,2g+p} = z_i^{-1},$$

quando $2g + 1 \leq i \leq 2g + p - 1$. Pelo Teorema 3.3 tem-se, para cada $1 \leq i \leq 2g + p - 1$,

$$a_{g-\frac{i}{2}+1} \mathcal{A}_{r,s} a_{g-\frac{i}{2}+1}^{-1} = \begin{cases} \mathcal{A}_{r,s}, \text{ se } i < c < r < s, \text{ ou } r + 1 < i < c < s, \\ \text{ou } i = r + 1 < c < s \text{ para } r \text{ par } < 2g \text{ ou } r \geq 2g. \\ \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{c,s} \mathcal{A}_{i,s}^{-1}, \text{ se } i < c < s \text{ e } r = c. \\ \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{c,s} \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{c,s}^{-1} \mathcal{A}_{i,s}^{-1}, \text{ se } i < c < s \text{ e } r = i. \\ \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{c,s} \mathcal{A}_{i,s}^{-1} \mathcal{A}_{c,s}^{-1} \mathcal{A}_{r,s} \mathcal{A}_{c,s} \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{c,s}^{-1} \mathcal{A}_{i,s}^{-1}, \text{ se } i + 1 < r < c < s, \\ \text{ou } i + 1 = r < c < s \text{ para } r \text{ ímpar } < 2g \text{ ou } r > 2g, \end{cases} \quad (3.10)$$

quando i é par e $1 \leq i \leq 2g$.

$$b_{g-\frac{i+1}{2}+1} \mathcal{A}_{r,s} b_{g-\frac{i+1}{2}+1}^{-1} = \begin{cases} \mathcal{A}_{r,s}, \text{ se } i < c < r < s, \text{ ou } r + 1 < i < c < s, \\ \text{ou } i = r + 1 < c < s \text{ para } r \text{ par } < 2g \text{ ou } r \geq 2g. \\ \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{c,s} \mathcal{A}_{i,s}^{-1}, \text{ se } i < c < s \text{ e } r = c. \\ \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{c,s} \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{c,s}^{-1} \mathcal{A}_{i,s}^{-1}, \text{ se } i < c < s \text{ e } r = i. \\ \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{c,s} \mathcal{A}_{i,s}^{-1} \mathcal{A}_{c,s}^{-1} \mathcal{A}_{r,s} \mathcal{A}_{c,s} \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{c,s}^{-1} \mathcal{A}_{i,s}^{-1}, \text{ se } i + 1 < r < c < s, \\ \text{ou } i + 1 = r < c < s \text{ para } r \text{ ímpar } < 2g \text{ ou } r > 2g, \end{cases} \quad (3.11)$$

quando i é ímpar e $1 \leq i \leq 2g$.

$$z_i \mathcal{A}_{r,s} z_i^{-1} = \begin{cases} \mathcal{A}_{r,s}, \text{ se } i < c < r < s, \text{ ou } r + 1 < i < c < s, \text{ ou } i = r + 1 < c < s, \\ \text{para } r \text{ par } < 2g \text{ ou } r \geq 2g. \\ \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{c,s} \mathcal{A}_{i,s}^{-1}, \text{ se } i < c < s \text{ e } r = c. \\ \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{c,s} \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{c,s}^{-1} \mathcal{A}_{i,s}^{-1}, \text{ se } i < c < s \text{ e } r = i. \\ \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{c,s} \mathcal{A}_{i,s}^{-1} \mathcal{A}_{c,s}^{-1} \mathcal{A}_{r,s} \mathcal{A}_{c,s} \mathcal{A}_{i,s} \mathcal{A}_{c,s}^{-1} \mathcal{A}_{i,s}^{-1}, \text{ se } i + 1 < r < c < s, \\ \text{ou } i + 1 = r < c < s \text{ } r \text{ ímpar } < 2g \text{ ou } r > 2g; \end{cases} \quad (3.12)$$

quando $2g + 1 \leq i \leq 2g + p - 1$. □

Das equações (3.4), (3.8), (3.9), (3.10), (3.11) e (3.12) e da Observação 3.4(d) induzimos a ação Φ de $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$ em $P(M_{g,p})/P'(M_{g,p})$ dada pelo seguinte teorema.

Teorema 3.6. *Sejam $g, n, p \in \mathbb{Z}$, com $g, n, p \geq 1$. Consideremos o homomorfismo π de $B_n(M_{g,p})$ em S_n , definido por*

$$\pi(\sigma_i) = (2g + p - 1 + i, 2g + p - 1 + i + 1),$$

$$\pi(a_r) = \pi(b_r) = \pi(z_k) = 1,$$

para todos $1 \leq i \leq n - 1$, $1 \leq r \leq g$ e $1 \leq k \leq p - 1$ e o homomorfismo

$\bar{\pi}: B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p}) \longrightarrow S_n$ induzido por π (ver (3.1) e (3.3)). Se

$$\bar{\alpha} \in B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$$

e

$$\bar{\pi}(\bar{\alpha}^{-1}) = \tau \in S_n,$$

então

$$\bar{\alpha}\mathcal{A}_{i,j}\bar{\alpha}^{-1} = \mathcal{A}_{i,\tau(j)} \in P_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p}),$$

onde $1 \leq i \leq 2g+p-1$, $2g+p \leq j \leq 2g+p+n-1$ e $i < j$.

Demonstração. Sejam $g, n, p \in \mathbb{Z}$, com $g, n, p \geq 1$. Seja $2g+p \leq j \leq 2g+p+n-1$. Consideremos o homomorfismo $\bar{\pi}: B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p}) \longrightarrow S_n$ induzido por π (ver (3.1) e (3.3)).

Seja $\bar{\alpha} \in P_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$. Como $P_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$ é abeliano, então

$$\bar{\alpha}\mathcal{A}_{i,j}\bar{\alpha}^{-1} = \mathcal{A}_{i,j} \cdot \bar{\alpha}\bar{\alpha}^{-1} = \mathcal{A}_{i,j} = \mathcal{A}_{i,\tau(j)},$$

onde $\bar{\pi}(\bar{\alpha}) = \tau = id_{S_n} \in S_n$.

Agora, suponhamos o caso $\bar{\alpha} = \sigma_{k_1}^{\epsilon_1} \sigma_{k_2}^{\epsilon_2} \cdots \sigma_{k_r}^{\epsilon_r} \in B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$. Provaremos este teorema usando o Princípio de Indução Finita em r . Se $r = 1$, $\bar{\alpha} = \sigma_{k_1}^{\epsilon_1} P'_n(M_{g,p})$ em $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$, com $\epsilon_1 \in \{-1, +1\}$ e $\tau = \bar{\pi}(\bar{\alpha}^{-1})$ em S_n . Seja $c = 2g+p$, do Teorema 3.5, itens (a), (b) e (c), temos

Caso 1: Quando $k_1 = j - c$,

$$\sigma_{k_1}^{\epsilon_1} \mathcal{A}_{i,j} \sigma_{k_1}^{-\epsilon_1} = \mathcal{A}_{i,j-1} = \mathcal{A}_{i,\tau(j)},$$

onde $\tau = (j-1, j) = (c-1+j-c, c-1+j-c+1) = (c-1+k_1, c-1+k_1+1) = \bar{\pi}(\sigma_{k_1}^{\epsilon_1}) \in S_n$.

Caso 2: Quando $k_1 = j - c + 1$,

$$\sigma_{k_1}^{\epsilon_1} \mathcal{A}_{i,j} \sigma_{k_1}^{-\epsilon_1} = \mathcal{A}_{i,j+1} = \mathcal{A}_{i,\tau(j)},$$

onde $\tau = (j, j+1) = (c-1+j-c+1, c-1+j-c+1+1) = (c-1+k_1, c-1+k_1+1) = \bar{\pi}(\sigma_{k_1}^{\epsilon_1}) \in S_n$.

Caso 3: Quando $k_1 \leq j - c - 1$ ou $k_1 \geq j - c + 2$,

$$\sigma_{k_1}^{\epsilon_1} \mathcal{A}_{i,j} \sigma_{k_1}^{-\epsilon_1} = \mathcal{A}_{i,j},$$

onde $1 \leq i \leq 2g+p-1$.

Agora, suponhamos por hipótese de indução que a igualdade

$$\bar{\alpha}\mathcal{A}_{i,j}\bar{\alpha}^{-1} = \mathcal{A}_{i,\tau(j)}$$

é válida, para $\bar{\alpha} = \sigma_{k_1}^{\epsilon_1} \sigma_{k_2}^{\epsilon_2} \cdots \sigma_{k_r}^{\epsilon_r} P'_n(M_{g,p})$, onde $r > 1$, $\epsilon_1, \dots, \epsilon_k \in \{-1, +1\}$ e $k_l \in \{1, \dots, n-1\}$.

Sejam $\beta = (\sigma_{k_1}^{\epsilon_1} \sigma_{k_2}^{\epsilon_2} \cdots \sigma_{k_r}^{\epsilon_r}) \sigma_{k_{r+1}}^{\epsilon_{r+1}} P'(M_{g,p})$ em $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$ e $\sigma = \bar{\pi}(\beta^{-1}) \in S_n$, então para todo $1 \leq i \leq 2g+p-1$,

$$\begin{aligned}
 \beta \mathcal{A}_{i,j} \beta^{-1} &= (\sigma_{k_1}^{\epsilon_1} \sigma_{k_2}^{\epsilon_2} \cdots \sigma_{k_r}^{\epsilon_r} \sigma_{k_{r+1}}^{\epsilon_{r+1}}) \mathcal{A}_{i,j} (\sigma_{k_1}^{\epsilon_1} \sigma_{k_2}^{\epsilon_2} \cdots \sigma_{k_r}^{\epsilon_r} \sigma_{k_{r+1}}^{\epsilon_{r+1}})^{-1} \\
 &= (\sigma_{k_1}^{\epsilon_1} \sigma_{k_2}^{\epsilon_2} \cdots \sigma_{k_r}^{\epsilon_r}) \sigma_{k_{r+1}}^{\epsilon_{r+1}} \mathcal{A}_{i,j} \sigma_{k_{r+1}}^{-\epsilon_{r+1}} (\sigma_{k_1}^{\epsilon_1} \sigma_{k_2}^{\epsilon_2} \cdots \sigma_{k_r}^{\epsilon_r})^{-1} \\
 &= \bar{\alpha} \mathcal{A}_{i, \bar{\pi}(\sigma_{k_{r+1}}^{-\epsilon_{r+1}})(j)} \bar{\alpha}^{-1} \\
 &\stackrel{H.I.}{=} \mathcal{A}_{i, \bar{\pi}(\bar{\alpha}^{-1}) \bar{\pi}(\sigma_{k_{r+1}}^{-\epsilon_{r+1}})(j)} \\
 &= \mathcal{A}_{i, \bar{\pi}((\sigma_{k_1}^{\epsilon_1} \sigma_{k_2}^{\epsilon_2} \cdots \sigma_{k_r}^{\epsilon_r})^{-1}) \bar{\pi}(\sigma_{k_{r+1}}^{-\epsilon_{r+1}})(j)} \\
 &= \mathcal{A}_{i, \bar{\pi}(\sigma_{k_{r+1}}^{-\epsilon_{r+1}} (\sigma_{k_1}^{\epsilon_1} \sigma_{k_2}^{\epsilon_2} \cdots \sigma_{k_r}^{\epsilon_r})^{-1})(j)} \\
 &= \mathcal{A}_{i, \bar{\pi}((\sigma_{k_1}^{\epsilon_1} \sigma_{k_2}^{\epsilon_2} \cdots \sigma_{k_r}^{\epsilon_r} \sigma_{k_{r+1}}^{\epsilon_{r+1}})^{-1})(j)} \\
 &= \mathcal{A}_{i, \bar{\pi}(\beta^{-1})(j)} \\
 &= \mathcal{A}_{i, \sigma(j)}.
 \end{aligned}$$

Logo, $\beta \mathcal{A}_{i,j} \beta^{-1} = \mathcal{A}_{i, \sigma(j)}$ em $P_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$.

Portanto, pelo Princípio de Indução Finita, segue que $\alpha \mathcal{A}_{i,j} \alpha^{-1} = \mathcal{A}_{i, \tau(j)}$, com $\bar{\alpha} = \sigma_{k_1}^{\epsilon_1} \sigma_{k_2}^{\epsilon_2} \cdots \sigma_{k_r}^{\epsilon_r} P'_n(M_{g,p})$ em $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$, $\bar{\pi}(\bar{\alpha}^{-1}) = \tau$ e $1 \leq i \leq 2g+p-1$. \square

A seguir mostramos a conexão entre os grupos cristalográficos e os grupos de tranças de superfícies orientáveis finitamente perfuradas.

Teorema 3.7. *Sejam $g, n, p \in \mathbb{Z}$, com $g, n, p \geq 1$. Existe uma sequência exata curta*

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^{(2g+p-1)n} \longrightarrow B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p}) \xrightarrow{\bar{\pi}} S_n \longrightarrow 1$$

e o grupo

$$B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$$

é um grupo cristalográfico.

Demonstração. consideremos $g, n, p \in \mathbb{Z}$, com $g, n, p \geq 1$. Vamos dividir a prova nos casos em que $n = 1$ e $n \geq 2$. Suponhamos $n = 1$. Sabemos que o grupo fundamental $\pi_1(M_{g,p})$ da superfície $M_{g,p}$ é isomorfo ao grupo de tranças $B_1(M_{g,p})$. Além disso, $B_1(M_{g,p}) = P_1(M_{g,p})$. Logo, $B_1(M_{g,p})/P'_1(M_{g,p}) \cong \pi_1(M_{g,p})/[\pi_1(M_{g,p}), \pi_1(M_{g,p})]$. Sabe-se que $\pi_1(M_{g,p})$ é isomorfo ao grupo livre $F[x_1, \dots, x_{2g+p-1}]$, logo $\pi_1(M_{g,p})/[\pi_1(M_{g,p}), \pi_1(M_{g,p})] \cong \mathbb{Z}^{2g+p-1}$ e, portanto, $B_1(M_{g,p})/P'_1(M_{g,p}) \cong \mathbb{Z}^{2g+p-1}$.

Agora, para $n \geq 2$, tomemos a sequência exata curta em 3.3

$$1 \longrightarrow P_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p}) \longrightarrow B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p}) \xrightarrow{\bar{\pi}} S_n \longrightarrow 1$$

e o homomorfismo $\varphi: S_n \rightarrow \text{Aut}(P_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p}))$ induzido por conjugação, definido por $\varphi(\tau)(\mathcal{A}_{i,j}) = \alpha \mathcal{A}_{i,j} \alpha^{-1}$, onde $\bar{\pi}(\alpha^{-1}) = \tau$ em S_n . Do Teorema [3.6](#)

$$\varphi(\tau)(\mathcal{A}_{i,j}) = \alpha \mathcal{A}_{i,j} \alpha^{-1} = \mathcal{A}_{i,\tau(j)}.$$

Então $\varphi(\tau)(\mathcal{A}_{i,j}) = \mathcal{A}_{i,\tau(j)} = \mathcal{A}_{i,j}$ se, e somente se, τ é a permutação identidade em S_n . Logo, φ é uma representação fiel. Sendo assim, pelo Lema [1.15](#), o grupo $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$ é cristalográfico. \square

O Teorema [3.8](#) nos traz uma apresentação do grupo $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$. O método usado para obtermos tal apresentação é baseado no Teorema [1.7](#).

Teorema 3.8. *Sejam $g, n, p \in \mathbb{Z}$, com $g, n, p \geq 1$. O grupo $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$ admite a seguinte apresentação:*

Geradores: $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}\} \cup \{\mathcal{A}_{i,j} \mid 1 \leq i \leq 2g+p-1, 2g+p \leq j \leq 2g+p+n-1, i < j\}$

Relações:

(a) *Relações de Artin:*

$$\begin{aligned} \sigma_k \sigma_i &= \sigma_i \sigma_k, & \text{se } |k - i| > 1; \\ \sigma_k \sigma_{k+1} \sigma_k &= \sigma_{k+1} \sigma_k \sigma_{k+1}, & \text{se } 1 \leq k \leq n - 2. \end{aligned}$$

(b) $\sigma_i^2 = 1$, para todo $i = 1, \dots, n - 1$.

(c) $\mathcal{A}_{i,j}$ comuta com $\mathcal{A}_{r,s}$, para todo $1 \leq i, r \leq 2g + p - 1, 2g + p \leq j, s \leq 2g + p + n - 1$.

$$(d) \sigma_k \mathcal{A}_{i,j} \sigma_k^{-1} = \begin{cases} \mathcal{A}_{i,j-1}, & \text{se } k = j - 2g - p + 1, \\ \mathcal{A}_{i,j}, & \text{se } k \neq j - 2g - p + 1, j - 2g - p + 2, \\ \mathcal{A}_{i,j+1}, & \text{se } k = j - 2g - p + 2. \end{cases}$$

Demonstração. consideremos a sequência exata curta

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^{(2g+p-1)n} \xrightarrow{\bar{\iota}} B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p}) \xrightarrow{\bar{\pi}} S_n \longrightarrow 1$$

e as apresentações para os grupos $P_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$ e S_n , respectivamente,

$$\langle Y \mid S \rangle \text{ e } \langle X \mid R \rangle,$$

onde $Y = \{\mathcal{A}_{i,j} \mid 1 \leq i \leq 2g+p-1, 2g+p \leq j \leq 2g+p+n-1\}$ e $X = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}\}$ são conjuntos de geradores submetidos as relações $S = \{[\mathcal{A}_{i,j}, \mathcal{A}_{r,s}] = 1 \mid 1 \leq i, r \leq 2g+p-1, 2g+p \leq j, s \leq 2g+p+n-1\}$ e $R = \{\sigma_k \sigma_i = \sigma_i \sigma_k, \text{ se } |k - i| > 1; \sigma_k \sigma_{k+1} \sigma_k = \sigma_{k+1} \sigma_k \sigma_{k+1}, \text{ se } 1 \leq k \leq n - 2; \sigma_i^2 = 1, \text{ se } 1 \leq i \leq n - 1\}$.

Inicialmente, vamos obter o conjunto de geradores \tilde{Y} e \tilde{X} para o grupo $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$. Considerando o Teorema [1.7](#), temos o conjunto

$$\tilde{Y} = \{\bar{\iota}(\mathcal{A}_{i,j}) = \mathcal{A}_{i,j} \mid i < j, 1 \leq i \leq 2g+p-1, 2g+p \leq j \leq 2g+p+n-1\}$$

e

$$\tilde{X} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}\}$$

é o conjunto formado pelos elementos \tilde{x} de uma transversal de $\frac{B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})}{P_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})}$, tais que $\bar{\pi}(\tilde{x}) = x \in X$, (aqui houve um abuso de notação quando usamos simplesmente σ_i para denotar a classe de σ_i).

Agora, encontraremos o conjunto de relações \tilde{S} , \tilde{R} e \tilde{T} . O conjunto de relações $\tilde{S} = \{\tilde{s} \mid s \in S\}$ é o conjunto das palavras em \tilde{Y} obtidas por S substituindo cada y por \tilde{y} , ou seja,

$$\tilde{S} = \{[\mathcal{A}_{i,j}, \mathcal{A}_{r,s}] = 1 \mid 1 \leq i, r \leq 2g + p - 1, 2g + p \leq j, s \leq 2g + p + n - 1\}.$$

Para cada $r \in R$, seja \tilde{r} a palavra em \tilde{X} obtida por r substituindo cada x por \tilde{x} . Como $\bar{\pi}(\tilde{r}) = 1$, então $\tilde{r} \in \text{Ker}(\bar{\pi}) = \text{Im}(\bar{\iota})$. Então, cada \tilde{r} é escrito como produto de elementos de \tilde{Y} . De fato, da relação $\sigma_k \sigma_{k+1} \sigma_k = \sigma_{k+1} \sigma_k \sigma_{k+1}$, temos

$$(\sigma_k \sigma_{k+1})^3 = \mathcal{A}_{2g+p, 2g+p+k} \mathcal{A}_{2g+p, 2g+p+k+1} \mathcal{A}_{2g+p+k, 2g+p+k+1}.$$

Da relação $\sigma_i \sigma_k = \sigma_k \sigma_i$, temos

$$(\sigma_i \sigma_k)^2 = \mathcal{A}_{2g+p+(i-1), 2g+p+i} \mathcal{A}_{2g+p+(k-1), 2g+p+k}.$$

Do Teorema 3.3 (ER1), sabemos que $\mathcal{A}_{i,j} = \mathcal{A}_{r+1,j}^{-1} \mathcal{A}_{r,j}^{-1} \mathcal{A}_{r+1,i}^{-1} \mathcal{A}_{r,j} \mathcal{A}_{r+1,i} \mathcal{A}_{r+1,j}$, donde decorre que todos os $\mathcal{A}_{i,j}$ envolvidos, com $2g + p \leq i < j \leq 2g + p + n - 1$, pertencem à classe do elemento trivial do grupo $P_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$. Assim,

$$\tilde{R} = \{\sigma_k \sigma_i = \sigma_i \sigma_k; \sigma_k \sigma_{k+1} \sigma_k = \sigma_{k+1} \sigma_k \sigma_{k+1}; \sigma_i^2 = 1\}.$$

Por fim, $\tilde{T} = \{\sigma_k \mathcal{A}_{i,j} \sigma_k^{-1}, \text{ com } 1 \leq i \leq 2g + p - 1, 2g + p \leq k, j \leq 2g + p + n\}$. Seja $\bar{\pi}(\sigma_k) \in S_n$. Pelo Teorema 3.6 temos $\sigma_k \mathcal{A}_{i,j} \sigma_k^{-1} = \mathcal{A}_{i, \bar{\pi}(\sigma_k)(j)}$. E, portanto,

$$\tilde{T} = \{\sigma_k \mathcal{A}_{i,j} \sigma_k^{-1} = \mathcal{A}_{i, \bar{\pi}(\sigma_k^{-1})(j)}, \text{ com } 1 \leq i \leq 2g + p - 1, 2g + p \leq k, j \leq 2g + p + n\}.$$

Dessa forma, $\langle \tilde{X}, \tilde{Y} \mid \tilde{R}, \tilde{S}, \tilde{T} \rangle$ é uma apresentação do grupo $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$. \square

O próximo corolário nos mostrará que a sequência exata curta $1 \longrightarrow \mathbb{Z}^{(2g+p-1)n} \xrightarrow{\bar{\iota}} B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p}) \xrightarrow{\bar{\pi}} S_n \longrightarrow 1$ cinde e, portanto, o quociente $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$ é isomorfo a um produto semidireto. Vejamos a seguir.

Corolário 3.9. *Sejam $g, n, p \in \mathbb{Z}$, com $g, n, p \geq 1$. Existe um homomorfismo injetor p de S_n em $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$. Mais ainda, a sequência exata curta do Teorema 3.2 cinde, isto é, o grupo cristalográfico $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$ é isomorfo a $S_n \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}^{(2g+p-1)n}$, onde φ é a ação definida no Teorema 3.7.*

Demonstração. Sejam $g, n, p \in \mathbb{Z}$, com $g, n, p \geq 1$. Consideremos a apresentação

$$S_n = \left\langle \begin{array}{l} \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \dots, \bar{\sigma}_{n-1} \mid \begin{array}{l} \bar{\sigma}_k \bar{\sigma}_{k+1} \bar{\sigma}_k = \bar{\sigma}_{k+1} \bar{\sigma}_k \bar{\sigma}_{k+1}, \quad \text{se } 1 \leq k \leq n-2 \\ \bar{\sigma}_k \bar{\sigma}_i = \bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_k, \quad \text{se } |k-i| > 1 \\ \bar{\sigma}_i^2 = 1, \quad \text{se } 1 \leq i \leq n-1 \end{array} \end{array} \right\rangle$$

e a apresentação do grupo $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$ dada pelo Teorema 3.8.

Definimos a aplicação $p: S_n \rightarrow B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$ nos geradores de S_n , dada por $p(\bar{\sigma}_i) = \sigma_i$, isto é, dado $x = \bar{\sigma}_{i_1} \cdots \bar{\sigma}_{i_r} \in S_n$, tem-se $p(x) = p(\bar{\sigma}_{i_1}) \cdots p(\bar{\sigma}_{i_r})$. A aplicação p está bem definida, pois foi definida nos geradores de S_n . Para mostrarmos que p é um homomorfismo basta provarmos que

$$\begin{aligned} p(\bar{\sigma}_i^2) &= 1 \\ p(\bar{\sigma}_k \bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_i^{-1} \bar{\sigma}_k^{-1}) &= 1, \quad . \\ p(\bar{\sigma}_k \bar{\sigma}_{k+1} \bar{\sigma}_k \bar{\sigma}_{k+1}^{-1} \bar{\sigma}_k^{-1} \bar{\sigma}_{k+1}^{-1}) &= 1 \end{aligned}$$

Vamos provar apenas a igualdade $p(\bar{\sigma}_k \bar{\sigma}_{k+1} \bar{\sigma}_k \bar{\sigma}_{k+1}^{-1} \bar{\sigma}_k^{-1} \bar{\sigma}_{k+1}^{-1}) = 1$, visto que as provas das outras duas igualdades se dão de forma análoga. Com efeito,

$$\begin{aligned} p(\bar{\sigma}_k \bar{\sigma}_{k+1} \bar{\sigma}_k \bar{\sigma}_{k+1}^{-1} \bar{\sigma}_k^{-1} \bar{\sigma}_{k+1}^{-1}) &= p(\bar{\sigma}_k) p(\bar{\sigma}_{k+1}) p(\bar{\sigma}_k) p(\bar{\sigma}_{k+1}^{-1}) p(\bar{\sigma}_k^{-1}) p(\bar{\sigma}_{k+1}^{-1}) \\ &= \sigma_k \sigma_{k+1} \sigma_k \sigma_{k+1}^{-1} \sigma_k^{-1} \sigma_{k+1}^{-1}. \end{aligned}$$

Como $\sigma_k = \sigma_k^{-1}$ (ver Teorema 3.8(b)), para todo $1 \leq k \leq n-1$. Segue que

$$\begin{aligned} p(\bar{\sigma}_k \bar{\sigma}_{k+1} \bar{\sigma}_k \bar{\sigma}_{k+1}^{-1} \bar{\sigma}_k^{-1} \bar{\sigma}_{k+1}^{-1}) &= \sigma_k \sigma_{k+1} \sigma_k \sigma_{k+1} \sigma_k \sigma_{k+1} \\ &= (\sigma_k \sigma_{k+1})^3 \in B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p}). \end{aligned}$$

Notemos que

$$(\sigma_k \sigma_{k+1})^3 = \mathcal{A}_{2g+p, 2g+p+k} \mathcal{A}_{2g+p, 2g+p+k+1} \mathcal{A}_{2g+p+k, 2g+p+k+1},$$

onde $1 \leq k \leq n-1$. Sabe-se do Teorema 3.3(ER1) que

$$\mathcal{A}_{2g+p, 2g+p+k} \mathcal{A}_{2g+p, 2g+p+k+1} \mathcal{A}_{2g+p+k, 2g+p+k+1} = 1 \in B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p}).$$

Além disso, como $(\bar{\pi} \circ p)(\bar{\sigma}_i) = id_{S_n}(\bar{\sigma}_i)$ temos p é injetiva. □

O resultado a seguir nos permitirá obter subgrupos cristalográficos do grupo $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$, cuja dimensão é a mesma do grupo.

Corolário 3.10. *Sejam $g, n, p \in \mathbb{Z}$, com $g \geq 1$, $n \geq 2$ e $p \geq 1$. Seja H subgrupo de S_n . Então, o grupo $\frac{\pi^{-1}(H)}{P'_n(M_{g,p})}$ é um grupo cristalográfico de dimensão $(2g+p-1)n$, com grupo de holonomia H .*

Demonstração. Consideremos a sequência exata curta do Teorema 3.2. Seja H um subgrupo de S_n . Agora, do Corolário 1.19, $\Lambda = \pi^{-1}(H)/P'_n(M_{g,p})$ é um subgrupo cristalográfico de $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$, com grupo de holonomia H e dimensão igual à $(2g + p - 1)n$. \square

3.2 Elementos de ordem finita e suas classes de conjugação no grupo quociente $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$

Nesta seção estudaremos os elementos de torção do grupo cristalográfico $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$ e suas classes de conjugação. A menos de menção contrária, chamaremos de f a constante dada pela expressão $f = 2g + p - 1$, em que g e p estão associados à superfície $M_{g,p}$. Lembremos que neste capítulo S_n é o grupo das permutações do conjunto $S = \{1 + f, 2 + f, \dots, n + f\}$ (ver 3.1).

Sabemos que qualquer permutação $\theta \in S_n$, com $\theta \neq id$, pode ser escrita de modo único como um produto de ciclos disjuntos, a menos da ordem dos fatores. Compreendemos também que duas permutações possuem a mesma estrutura cíclica se, e somente se, elas são conjugadas. Dessa forma, podemos considerar θ escrito como produto de k_i -ciclos disjuntos de comprimentos k_1, k_2, \dots, k_t , com $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_t$ (sem incluir o 1-ciclo) e $\sum_{i=1}^t k_i \leq n$. Assim, a menos de conjugação, θ pode ser escrito como sendo

$$\theta = \theta_{k_1} \theta_{k_2} \cdots \theta_{k_t} \tag{3.13}$$

e a ordem de θ_i é igual a k_i , para todo $i \in \{1, 2, \dots, t\}$, em que

$$\begin{aligned} \theta_{k_1} &= (f + k_1, f + k_1 - 1, \dots, f + 2, f + 1) \\ \theta_{k_2} &= (f + k_1 + k_2, f + k_1 + k_2 - 1, \dots, f + k_1 + 2, f + k_1 + 1) \\ &\vdots \\ \theta_{k_i} &= \left(f + \sum_{j=1}^{i-1} k_j + k_i, f + \sum_{j=1}^{i-1} k_j + k_i - 1, \dots, f + \sum_{j=1}^{i-1} k_j + 2, f + \sum_{j=1}^{i-1} k_j + 1 \right) \\ &\vdots \\ \theta_{k_t} &= \left(f + \sum_{j=1}^{t-1} k_j + k_t, f + \sum_{j=1}^{t-1} k_j + k_t - 1, \dots, f + \sum_{j=1}^{t-1} k_j + 2, f + \sum_{j=1}^{t-1} k_j + 1 \right) \end{aligned} \tag{3.14}$$

consideremos o conjunto $S = \{1 + f, 2 + f, \dots, n + f\}$, $\tau \in S_n$ e $G = \langle \tau \rangle$ o grupo cíclico gerado por τ . Então a aplicação $*$: $G \times S \rightarrow S$, definida por $\tau * j = \tau(j)$, para todo $j \in S$, é uma ação de G sobre S . Seja o conjunto $\{j_1, j_2, \dots, j_v\}$, denotado por \mathcal{T}_τ , uma *transversal da ação * do grupo G no conjunto S associada à permutação τ* , ou

simplesmente, *transversal associada a τ* . Assim,

$$S = \bigcup_{s \in \{1, 2, \dots, v\}} \mathcal{O}_\tau(j_s), \text{ onde } \mathcal{O}_\tau(j_s) = \{\tau^m(j_s) \mid 1 \leq m \leq |\tau|\},$$

com v o número total de órbitas de S .

Dado $\theta = \theta_{k_1}\theta_{k_2} \cdots \theta_{k_t}$ (como definido em (3.13)) e $x \in S$, existe $s \in \{1, 2, \dots, v\}$, tal que

$$\mathcal{O}_\theta(x) = \left\{ f + 1 + \sum_{j=1}^{s-1} k_j, f + 2 + \sum_{j=1}^{s-1} k_j, \dots, f + k_s + \sum_{j=1}^{s-1} k_j \right\}.$$

Assim, o conjunto

$$\mathcal{T}_\theta = \left\{ f + 1, f + k_1 + 1, \dots, f + \sum_{j=1}^{i-1} k_j + 1, f + \sum_{j=1}^{t-1} k_j + 1 \right\} \quad (3.15)$$

é uma transversal associada a θ . Notamos que $\mathcal{O}_\theta(x) = \mathcal{O}_{\theta^{-1}}(x)$.

Exemplo 3.11. Considerando $S = \{1 + 3, 2 + 3, 3 + 3, 4 + 3\} = \{4, 5, 6, 7\}$, $\theta = (7, 6, 5)$, $\tilde{\theta} = (6, 5, 4) \in S_4$ e os grupos cíclicos $G = \langle \theta \rangle$ e $\tilde{G} = \langle \tilde{\theta} \rangle$. Definimos as ações $*$ e $\tilde{*}$, de G e \tilde{G} em S , por $*(i) = \theta(i)$ e $\tilde{*}(i) = \tilde{\theta}(i)$, respectivamente. Segue que $\mathcal{O}_\theta(5) = \{5, \theta(5), \theta^2(5)\} = \{5, 7, 6\}$, $\mathcal{O}_\theta(4) = \emptyset$, $\mathcal{O}_{\tilde{\theta}}(6) = \{4, 5, 6\}$ e $\mathcal{O}_{\tilde{\theta}}(7) = \emptyset$.

Definição 3.12. Sejam $j, k, n \in \mathbb{Z}$, com $1 \leq j \leq n - 1$ e $2 \leq k \leq n$. Definamos o elemento $\eta_{j,k} = \sigma_{j+(k-2)}\sigma_{j+(k-2)-1} \cdots \sigma_j$ em $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$.

Exemplo 3.13. Consideremos o grupo $B_6(M_{1,2})/P'_6(M_{1,2})$ e $1 \leq k \leq 6$. Segue alguns exemplos $\eta_{j,k}$, vejamos $\eta_{1,2} = \sigma_1$, $\eta_{2,2} = \sigma_2$, $\eta_{3,2} = \sigma_3$, $\eta_{1,3} = \sigma_2\sigma_1$, $\eta_{4,3} = \sigma_5\sigma_4$ e $\eta_{1,6} = \sigma_5\sigma_4\sigma_3\sigma_2\sigma_1$.

Observação 3.14.

- (a) Sejam $g, n, p \in \mathbb{Z}$, com $g \geq 1$, $n \geq 2$ e $p \geq 1$. Particularmente, quando $k = 2$, tem-se $\eta_{j,2} = \sigma_j$ e, quando $j = 1$ e $1 \leq k \leq n$, então $\eta_{1,k} = \sigma_{1+(k-2)} \cdots \sigma_2\sigma_1 \in B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$, para $2 \leq k \leq n$.
- (b) Sabemos pelo Corolário 3.9 que os elementos $\eta_{j,k}$, descritos na Definição 3.12, possuem ordem finita no quociente $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$, particularmente, todos os $\eta_{j,k}$ apresentados no Exemplo 3.13 do grupo quociente $B_6(M_{1,2})/P'_6(M_{1,2})$. Todavia, provaremos que $\eta_{j,k}$ possui ordem finita de uma outra maneira, cujo método da prova consiste em aplicar o Teorema 3.8. De fato, do item (b) do Teorema 3.8, temos $\sigma_i^2 = 1$, para todo $i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$, portanto $\eta_{1,2}^2 = \sigma_1^2 = 1$, $\eta_{2,2}^2 = \sigma_2^2 = 1$ e $\eta_{3,2}^2 = \sigma_3^2 = 1$. Já no caso de $\eta_{1,3}$, $\eta_{4,3}$ e $\eta_{1,6}$, do Teorema 3.8(a)(relações de Artin), temos $\eta_{1,3}^3 = (\sigma_2\sigma_1)^3$, $\eta_{4,3}^3 = (\sigma_5\sigma_4)^3$ e $\eta_{1,6}^6 = (\sigma_5\sigma_4\sigma_3\sigma_2\sigma_1)^6$ são reescritos como, $\sigma_2^2\sigma_1\sigma_2^2\sigma_1$, $\sigma_5^2\sigma_4\sigma_5^2\sigma_4$ e $\sigma_1^2\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2^{-1}\sigma_2^2\sigma_3\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_3\sigma_2^2\sigma_3^{-1}\sigma_3^2 \cdots \sigma_5\sigma_4\sigma_3\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_4^{-1}\sigma_5^{-1} \cdots \sigma_5\sigma_4\sigma_5^{-1}\sigma_5^2$, respectivamente. Agora, do Teorema 3.8(b), $\eta_{1,3}^3 = 1$, $\eta_{4,3}^3 = 1$ e $\eta_{1,6}^6 = 1$.

(c) Consideremos $\bar{\pi}$ o homomorfismo induzido por $\pi: B_n(M_{g,p}) \rightarrow S_n$, definido em (3.1). Sejam g, p inteiros positivos, $2 \leq n$, $2 \leq k \leq n$ e $1 \leq j \leq n-1$. Então, para $\eta_{j,k} \in B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$, temos

$$\bar{\pi}(\eta_{j,k}) = (f+j, f+j+1, \dots, f+j+k-3, f+j+k-2, f+j+k-1) \in S_n,$$

onde $f = 2g + p - 1$. No Exemplo 3.13 temos $\bar{\pi}(\eta_{1,2}) = (4, 5)$, $\bar{\pi}(\eta_{3,2}) = (6, 7)$, $\bar{\pi}(\eta_{4,3}) = (7, 8, 9)$ e $\bar{\pi}(\eta_{1,6}) = (4, 5, 6, 7, 8, 9)$ em S_6 .

Sabemos do Corolário 3.9 que os elementos $\eta_{j,k}$ descritos na Definição 3.12 possuem ordem finita. No entanto, vamos apresentar uma demonstração alternativa para provar que esses elementos $\eta_{j,k}$ possuem ordem finita usando a apresentação do Teorema 3.8.

Proposição 3.15. *Sejam $g, n, p \in \mathbb{Z}$, com $g \geq 1$, $n \geq 2$, $p \geq 1$ e $f = 2g + p - 1$. Consideremos $2 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_t$, com $\sum_{i=1}^t k_i \leq n$. Então, em $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$, as seguintes afirmações são válidas.*

(a) *Seja $2 \leq k \leq n$. O elemento $\eta_{j,k} = \sigma_{j+(k-2)}\sigma_{j+(k-2)-1} \cdots \sigma_j$, dado na Definição 3.12, possui ordem k .*

(b) *Os elementos $\eta_{1,k_1}, \eta_{1+k_1,k_2}, \dots$, e $\eta_{1+\sum_{i=1}^{t-1} k_i, k_t}$ em $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$ comutam dois a dois.*

(c) *Sejam $j_1 = 1 + \sum_{i=1}^{t_1-1} k_i$, $j_2 = 1 + \sum_{i=1}^{t_2-1} k_i, \dots$, $j_\lambda = 1 + \sum_{i=1}^{t_\lambda-1} k_i$, com $\{t_1, t_2, \dots, t_\lambda\} \subset \{1, 2, \dots, t\}$. Então, o elemento*

$$\eta = \eta_{j_1, k_{t_1}} \cdot \eta_{j_2, k_{t_2}} \cdots \eta_{j_\lambda, k_{t_\lambda}}$$

em $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$, possui ordem $l = \text{mmc}(k_{t_1}, k_{t_2}, \dots, k_{t_\lambda})$.

Demonstração.

(a) Seja $\eta_{j,k} \in B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$, $\eta_{j,k} = \sigma_{j+(k-2)}\sigma_{j+(k-2)-1} \cdots \sigma_j$. A Observação 3.2 nos diz que $(\sigma_{j+(k-2)}\sigma_{j+(k-2)-1} \cdots \sigma_j)^k$ em $B_n(M_{g,p})$ é escrito como $\prod_{\mathfrak{J}=f+j+2}^{f+j+k-1} \left(\prod_{i=f+j+1}^{\mathfrak{J}-1} A_{i,\mathfrak{J}} \right)$, onde $A_{i,\mathfrak{J}} = \sigma_{\mathfrak{J}-(f+1+j)-1} \cdots \sigma_{i+1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1}^{-1} \cdots \sigma_{\mathfrak{J}-(f+1+j)-1}^{-1}$ são os geradores do grupo de tranças puras de Artin. Logo

$$\begin{aligned} \eta_{j,k}^k &= \left(\sigma_{j+(k-2)}\sigma_{j+(k-2)-1} \cdots \sigma_j \right)^k \\ &= \prod_{\mathfrak{J}=f+j+2}^{f+j+k-1} \left(\prod_{i=f+j+1}^{\mathfrak{J}-1} A_{i,\mathfrak{J}} \right) \\ &= 1, \end{aligned}$$

pois $\sigma_i^2 = 1$, para todo $i \in \{j, j+1, \dots, j+k-2\}$, pelo Teorema 3.8(b). Logo, $\eta_{j,k}^k$ é o elemento trivial em $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$ e, com isso, provamos que a ordem de $\eta_{j,k}$ divide k . Agora, como $\bar{\pi}(\eta_{j,k}) \in S_n$ possui ordem k , concluímos que a ordem de $\eta_{j,k}$ é exatamente k .

(b) Consideremos $2 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_t$, com $\sum_{i=1}^t k_i \leq n$. Sejam $\eta_{s,k}$ e $\eta_{s',k'}$ elementos distintos em $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$, com $s, s' \in \{1, 1 + k_1, 1 + k_1 + k_2, \dots, 1 + \sum_{i=1}^{t-1} k_i\}$ e $k, k' \in \{k_1, k_2, \dots, k_t\}$. Notemos que cada σ_i , da palavra do elemento $\eta_{s,k}$, e σ_j , da palavra do elemento $\eta_{s',k'}$, comutam entre si, pois $|i - j| \geq 2$. Logo, $\eta_{s,k}$ e $\eta_{s',k'}$ comutam.

(c) Consideremos $2 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_t$, com $\sum_{i=1}^t k_i \leq n$. Sejam $j_1 = 1 + \sum_{i=1}^{t_1-1} k_i$, $j_2 = 1 + \sum_{i=1}^{t_2-1} k_i, \dots, j_\lambda = 1 + \sum_{i=1}^{t_\lambda-1} k_i$, com $\{t_1, t_2, \dots, t_\lambda\} \subset \{1, 2, \dots, t\}$. Façamos $l = \text{mmc}(k_{t_1}, k_{t_2}, \dots, k_{t_\lambda})$. Para provarmos este item, vamos usar os itens (a) e (b) desta proposição. Pelo item (b), temos

$$\eta^l = \left(\eta_{j_1, k_{t_1}} \cdot \eta_{j_2, k_{t_2}} \cdots \eta_{j_\lambda, k_{t_\lambda}} \right)^l = \eta_{j_1, k_{t_1}}^l \cdot \eta_{j_2, k_{t_2}}^l \cdots \eta_{j_\lambda, k_{t_\lambda}}^l.$$

Como $l = k_{t_1} \cdot l_1, l = k_{t_2} \cdot l_2, \dots, l = k_{t_\lambda} \cdot l_\lambda$, com $l_1, \dots, l_\lambda \in \mathbb{Z}$, pelo item (a) segue que

$$\left(\eta_{j_1, k_{t_1}} \right)^{l_1} = \left(\eta_{j_2, k_{t_2}} \right)^{l_2} = \cdots = \left(\eta_{j_\lambda, k_{t_\lambda}} \right)^{l_\lambda} = 1.$$

Assim,

$$\eta^l = \left(\eta_{j_1, k_{t_1}} \cdot \eta_{j_2, k_{t_2}} \cdots \eta_{j_\lambda, k_{t_\lambda}} \right)^l = 1.$$

Logo, a ordem de η é finita e divide l . Sabe-se que $\bar{\pi}(\eta)$ é de ordem l , donde segue que η possui ordem exatamente igual a l . \square

Observação 3.16. Sejam $g, n, p \in \mathbb{Z}$, com $g \geq 1, n \geq 2$ e $p \geq 1$. Sejam $\alpha \in B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$, $\prod_{i=1}^f \mathcal{A}_{i, f+1}^{m_{i, f+1}} \mathcal{A}_{i, f+2}^{m_{i, f+2}} \cdots \mathcal{A}_{i, f+n}^{m_{i, f+n}} \in P_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$ e $\bar{\pi}(\alpha^{-1}) = \theta \in S_n$. Pelo Teorema [3.6](#), temos

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \prod_{i=1}^f \mathcal{A}_{i, f+1}^{m_{i, f+1}} \mathcal{A}_{i, f+2}^{m_{i, f+2}} \cdots \mathcal{A}_{i, f+n}^{m_{i, f+n}} \cdot \alpha^{-1} &= \prod_{i=1}^f \mathcal{A}_{i, \theta(f+1)}^{m_{i, f+1}} \mathcal{A}_{i, \theta(f+2)}^{m_{i, f+2}} \cdots \mathcal{A}_{i, \theta(f+n)}^{m_{i, f+n}} \\ &\stackrel{(*)}{=} \prod_{i=1}^f \mathcal{A}_{m_{i, f+1}, \theta^{-1}(f+1)}^{m_{i, f+1}} \mathcal{A}_{m_{i, f+2}, \theta^{-1}(f+2)}^{m_{i, f+2}} \cdots \mathcal{A}_{m_{i, f+n}, \theta^{-1}(f+n)}^{m_{i, f+n}}. \end{aligned}$$

(*) Consideremos a expressão $\prod_{i=1}^f \mathcal{A}_{i, \theta(f+1)}^{m_{i, f+1}} \mathcal{A}_{i, \theta(f+2)}^{m_{i, f+2}} \cdots \mathcal{A}_{i, \theta(f+n)}^{m_{i, f+n}}$. Notemos que, cada índice $i, \theta(f+j)$ de $\mathcal{A}_{i, \theta(f+j)}$ estão em relação biunívoca com os índices $i, f+j$ de $m_{i, f+j}$, para todo $1 \leq j \leq f$. Pela bijetividade da permutação θ , segue que os índices $i, f+j$ de $m_{i, f+j}$ está em relação com $i, p+j$ de $\mathcal{A}_{i, f+j}$.

O próximo teorema é de fundamental importância no estudo de elementos de ordem finita, uma vez que o mesmo caracteriza os elementos de ordem finita do grupo cristalográfico $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$. Além disso, o próximo resultado nos permite calcular uma infinidade de elementos de ordem finita.

Teorema 3.17. *Sejam $g, n, p \in \mathbb{Z}$, com $g \geq 1$, $n \geq 2$, $p \geq 1$ e $f = 2g + p - 1$. consideremos $2 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_t$, com $\sum_{j=1}^t k_j \leq n$ e $\eta = \eta_{1,k_1} \eta_{1+k_1,k_2} \dots \eta_{1+\sum_{i=1}^{t-1} k_i, k_t}$ em $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$. Seja $\mathcal{T}_\theta = \{f+1, f+k_1+1, \dots, f+\sum_{j=1}^{i-1} k_j+1, \dots, f+\sum_{j=1}^{t-1} k_j+1\}$ uma transversal associada à permutação θ . Se $\theta = \bar{\pi}(\eta^{-1}) \in S_n$ e $\mathcal{A} = \prod_{i=1}^f \mathcal{A}_{i,f+1}^{m_{i,f+1}} \mathcal{A}_{i,f+2}^{m_{i,f+2}} \dots \mathcal{A}_{i,f+n}^{m_{i,f+n}} \in P_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$, com $m_{i,f+1}, m_{i,f+2}, \dots, m_{i,f+n} \in \mathbb{Z}$ para todo $1 \leq i \leq f$, então o elemento $\eta\mathcal{A}$ é de ordem $\text{mmc}(k_1, \dots, k_t)$ se, e somente se, para cada $j \in \mathcal{T}_\theta$, o sistema de equações*

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{q \in \mathcal{O}_\theta(j)} m_{1,q} = 0, \\ \sum_{q \in \mathcal{O}_\theta(j)} m_{2,q} = 0, \\ \vdots \\ \sum_{q \in \mathcal{O}_\theta(j)} m_{i,q} = 0, \\ \vdots \\ \sum_{q \in \mathcal{O}_\theta(j)} m_{f,q} = 0, \end{array} \right.$$

possui solução no conjunto dos números inteiros.

Demonstração. Sejam $g, n, p \in \mathbb{Z}$, com $g \geq 1$, $n \geq 2$, $p \geq 1$ e $f = 2g + p - 1$. Consideremos $2 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_t$, com $\sum_{j=1}^t k_j \leq n$. Seja

$$\alpha = \eta_{1,k_1} \eta_{1+k_1,k_2} \dots \eta_{1+\sum_{i=1}^{t-1} k_i, k_t} \cdot \prod_{i=1}^f \mathcal{A}_{i,f+1}^{m_{i,f+1}} \mathcal{A}_{i,f+2}^{m_{i,f+2}} \dots \mathcal{A}_{i,f+n}^{m_{i,f+n}} \in B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p}),$$

em que $m_{i,f+1}, m_{i,f+2}, \dots, m_{i,f+n} \in \mathbb{Z}$. Chamamos de η ao produto $\eta_{1,k_1} \eta_{1+k_1,k_2} \dots \eta_{1+\sum_{i=1}^{t-1} k_i, k_t}$ e seja $\theta = \bar{\pi}(\eta^{-1})$ a imagem de η^{-1} pelo homomorfismo $\bar{\pi}: B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p}) \longrightarrow S_n$ induzido por π (definido em (3.1)). Chamaremos o mínimo múltiplo comum de k_1, k_2, \dots, k_t de l , ou seja, $\text{mmc}(k_1, k_2, \dots, k_t) = l$. Observemos que $\theta = \theta_{k_1} \theta_{k_2} \dots \theta_{k_t}$,

com

$$\begin{aligned}\theta_{k_1} &= (f + k_1, f + k_1 - 1, \dots, f + 2, f + 1) \\ \theta_{k_2} &= (f + k_1 + k_2, f + k_1 + k_2 - 1, \dots, f + k_1 + 2, f + k_1 + 1) \\ &\vdots \\ \theta_{k_i} &= \left(f + \sum_{j=1}^{i-1} k_j + k_i, f + \sum_{j=1}^{i-1} k_j + k_i - 1, \dots, f + \sum_{j=1}^{i-1} k_j + 2, f + \sum_{j=1}^{i-1} k_j + 1 \right) \\ &\vdots \\ \theta_{k_t} &= \left(f + \sum_{j=1}^{t-1} k_j + k_t, f + \sum_{j=1}^{t-1} k_j + k_t - 1, \dots, f + \sum_{j=1}^{t-1} k_j + 2, f + \sum_{j=1}^{t-1} k_j + 1 \right)\end{aligned}$$

e, portanto, uma transversal associada à θ é dada por $\mathcal{T}_\theta = \{f + 1, f + k_1 + 1, \dots, f + \sum_{j=1}^{i-1} k_j + 1, \dots, f + \sum_{j=1}^{t-1} k_j + 1\}$.

Agora, aplicando o Teorema 3.6 e a Observação 3.16, temos

$$\begin{aligned}\alpha^l &= \left(\eta \cdot \prod_{i=1}^f \mathcal{A}_{i,f+1}^{m_{i,f+1}} \mathcal{A}_{i,f+2}^{m_{i,f+2}} \dots \mathcal{A}_{i,f+n}^{m_{i,f+n}} \right)^l \\ &= \left(\eta \cdot \prod_{i=1}^f \mathcal{A}_{i,f+1}^{m_{i,f+1}} \mathcal{A}_{i,f+2}^{m_{i,f+2}} \dots \mathcal{A}_{i,f+n}^{m_{i,f+n}} \right) \dots \left(\eta \cdot \prod_{i=1}^f \mathcal{A}_{i,f+1}^{m_{i,f+1}} \mathcal{A}_{i,f+2}^{m_{i,f+2}} \dots \mathcal{A}_{i,f+n}^{m_{i,f+n}} \right) \\ &= \eta \cdot \prod_{i=1}^f \mathcal{A}_{i,f+1}^{m_{i,f+1}} \mathcal{A}_{i,f+2}^{m_{i,f+2}} \dots \mathcal{A}_{i,f+n}^{m_{i,f+n}} \cdot \eta^{-1} \cdot \eta^2 \cdot \prod_{i=1}^f \mathcal{A}_{i,f+1}^{m_{i,f+1}} \mathcal{A}_{i,f+2}^{m_{i,f+2}} \dots \mathcal{A}_{i,f+n}^{m_{i,f+n}} \cdot \eta^{-2} \dots \\ &\quad \eta^{l-1} \cdot \prod_{i=1}^f \mathcal{A}_{i,f+1}^{m_{i,f+1}} \mathcal{A}_{i,f+2}^{m_{i,f+2}} \dots \mathcal{A}_{i,f+n}^{m_{i,f+n}} \cdot \eta^{-(l-1)} \cdot \eta^l \cdot \prod_{i=1}^f \mathcal{A}_{i,f+1}^{m_{i,f+1}} \mathcal{A}_{i,f+2}^{m_{i,f+2}} \dots \mathcal{A}_{i,f+n}^{m_{i,f+n}} \\ &= \left(\prod_{i=1}^f \mathcal{A}_{i,\theta(f+1)}^{m_{i,\theta(f+1)}} \mathcal{A}_{i,\theta(f+2)}^{m_{i,\theta(f+2)}} \dots \mathcal{A}_{i,\theta(f+n)}^{m_{i,\theta(f+n)}} \right) \cdot \left(\prod_{i=1}^f \mathcal{A}_{i,\theta^2(f+1)}^{m_{i,\theta^2(f+1)}} \mathcal{A}_{i,\theta^2(f+2)}^{m_{i,\theta^2(f+2)}} \dots \mathcal{A}_{i,\theta^2(f+n)}^{m_{i,\theta^2(f+n)}} \right) \dots \\ &\quad \left(\prod_{i=1}^f \mathcal{A}_{i,\theta^{k-1}(f+1)}^{m_{i,\theta^{k-1}(f+1)}} \mathcal{A}_{i,\theta^{k-1}(f+2)}^{m_{i,\theta^{k-1}(f+2)}} \dots \mathcal{A}_{i,\theta^{k-1}(f+n)}^{m_{i,\theta^{k-1}(f+n)}} \right) \dots \eta^l \cdot \left(\prod_{i=1}^f \mathcal{A}_{i,f+1}^{m_{i,f+1}} \mathcal{A}_{i,f+2}^{m_{i,f+2}} \dots \mathcal{A}_{i,f+n}^{m_{i,f+n}} \right) \\ &= \left(\prod_{i=1}^f \mathcal{A}_{i,\theta^{-1}(f+1)}^{m_{i,\theta^{-1}(f+1)}} \mathcal{A}_{i,\theta^{-1}(f+2)}^{m_{i,\theta^{-1}(f+2)}} \dots \mathcal{A}_{i,\theta^{-1}(f+n)}^{m_{i,\theta^{-1}(f+n)}} \right) \cdot \left(\prod_{i=1}^f \mathcal{A}_{i,\theta^{-2}(f+1)}^{m_{i,\theta^{-2}(f+1)}} \mathcal{A}_{i,\theta^{-2}(f+2)}^{m_{i,\theta^{-2}(f+2)}} \dots \mathcal{A}_{i,\theta^{-2}(f+n)}^{m_{i,\theta^{-2}(f+n)}} \right) \dots \\ &\quad \left(\prod_{i=1}^f \mathcal{A}_{i,\theta^{1-k}(f+1)}^{m_{i,\theta^{1-k}(f+1)}} \mathcal{A}_{i,\theta^{1-k}(f+2)}^{m_{i,\theta^{1-k}(f+2)}} \dots \mathcal{A}_{i,\theta^{1-k}(f+n)}^{m_{i,\theta^{1-k}(f+n)}} \right) \dots \eta^l \cdot \left(\prod_{i=1}^f \mathcal{A}_{i,f+1}^{m_{i,f+1}} \mathcal{A}_{i,f+2}^{m_{i,f+2}} \dots \mathcal{A}_{i,f+n}^{m_{i,f+n}} \right).\end{aligned}$$

Sabemos que $\eta^l = 1$ pela Proposição 3.15(c). E pelo Teorema 3.8(c), temos $\mathcal{A}_{i,j}$ comuta com $\mathcal{A}_{r,s}$, para todo $1 \leq i, r \leq 2g + p - 1$ e $2g + p \leq j, s \leq 2g + p + n - 1$. Logo, α^l é o elemento trivial em $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$ se, e somente se, para cada $j \in \mathcal{T}_\theta$, o sistema de

números inteiros

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{q \in \mathcal{O}_\theta(j)} m_{1,q} = 0, \\ \sum_{q \in \mathcal{O}_\theta(j)} m_{2,q} = 0, \\ \vdots \\ \sum_{q \in \mathcal{O}_\theta(j)} m_{i,q} = 0, \\ \vdots \\ \sum_{q \in \mathcal{O}_\theta(j)} m_{f,q} = 0, \end{array} \right. \quad (3.16)$$

possui solução.

Afirmção (1): O sistema (3.16) possui infinitas soluções. De fato, como as equações do sistema (3.16) são independentes entre si, então consideremos a i -ésima equação

$$\sum_{q \in \mathcal{O}_\theta(j)} m_{i,q} = 0. \text{ Assim,}$$

$$\sum_{q \in \mathcal{O}_\theta(j)} m_{i,q} = 0$$

se, e somente se,

$$- \left(\sum_{q \in \mathcal{O}_\theta(j), q \neq j} m_{i,q} \right) = m_{i,j}$$

e, portanto, basta escolhermos $m_{i,q} \in \mathbb{Z}$, para todo $q \in \mathcal{O}_\theta(j)$ e $q \neq j$, sendo que $m_{i,j}$ depende dessa escolha para que o sistema tenha solução. Portanto, $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$ possui uma infinidade de elementos de ordem finita.

Afirmção (2): O elemento α possui ordem finita exatamente igual a l . De fato, denotemos por $|\alpha|$ a ordem do elemento α . Observemos que o sistema (3.16) tem infinitas soluções em \mathbb{Z} , como foi provado na Afirmção (1). Para cada solução inteira, temos α possui ordem finita e, com isto, provamos que a ordem de α divide l . Logo $|\alpha| \leq l$. Como $\bar{\pi}(\alpha) \in S_n$ possui ordem l , temos que l divide a ordem de α . Logo $l \leq |\alpha|$. Dessa forma, o elemento α possui ordem exatamente igual a l , desde que o sistema (3.16) seja satisfeito. \square

Os próximos dois exemplos nos apresentam mais elementos de ordem finita diferentes da Definição 3.12 e, é uma aplicação direta do Teorema 3.17.

Exemplo 3.18. Seja $x \in B_4(M_{1,2})/P'_4(M_{1,2})$, com $x = \sigma_2 \sigma_1 \mathcal{A}_{1,4}^{-2} \mathcal{A}_{1,5} \mathcal{A}_{1,6} \cdot \mathcal{A}_{2,4}^{-1} \mathcal{A}_{2,5}^{-1} \mathcal{A}_{2,6}^2 \cdot \mathcal{A}_{3,4} \mathcal{A}_{3,6}^{-1}$ e $\bar{\pi}(x^{-1}) = \theta = (6, 5, 4) \in S_4$. Então, pelo Teorema 3.6, $x^3 = \mathcal{A}_{1,\theta(4)}^{-2} \mathcal{A}_{1,\theta(5)} \mathcal{A}_{1,\theta(6)} \cdot \mathcal{A}_{2,\theta(4)}^{-1} \mathcal{A}_{2,\theta(5)}^{-1} \mathcal{A}_{2,\theta(6)}^2 \cdot \mathcal{A}_{3,\theta(4)} \mathcal{A}_{3,\theta(6)}^{-1} \cdot \mathcal{A}_{1,\theta^2(4)}^{-2} \mathcal{A}_{1,\theta^2(5)} \mathcal{A}_{1,\theta^2(6)} \cdot \mathcal{A}_{2,\theta^2(4)}^{-1} \mathcal{A}_{2,\theta^2(5)}^{-1} \mathcal{A}_{2,\theta^2(6)}^2 \cdot \mathcal{A}_{3,\theta^2(4)} \mathcal{A}_{3,\theta^2(6)}^{-1} \cdot (\sigma_2 \sigma_1)^3 \mathcal{A}_{1,4}^{-2} \mathcal{A}_{1,5} \mathcal{A}_{1,6} \cdot \mathcal{A}_{2,4}^{-1} \mathcal{A}_{2,5}^{-1} \mathcal{A}_{2,6}^2 \cdot \mathcal{A}_{3,4} \mathcal{A}_{3,6}^{-1}$.

Sabemos pela Proposição 3.15(a) que $(\sigma_2 \sigma_1)^3 = 1$. Como $\mathcal{O}_\theta(4) = \{4, 5, 6\}$, então $x^3 = \mathcal{A}_{1,6}^{-2} \mathcal{A}_{1,4} \mathcal{A}_{1,5} \cdot \mathcal{A}_{2,6}^{-1} \mathcal{A}_{2,4}^{-1} \mathcal{A}_{2,5}^2 \cdot \mathcal{A}_{3,6} \mathcal{A}_{3,5}^{-1} \cdot \mathcal{A}_{1,5}^{-2} \mathcal{A}_{1,6} \mathcal{A}_{1,4} \cdot \mathcal{A}_{2,5}^{-1} \mathcal{A}_{2,6}^{-1} \mathcal{A}_{2,4}^2 \cdot \mathcal{A}_{3,5} \mathcal{A}_{3,4}^{-1} \cdot \mathcal{A}_{1,4}^{-2} \mathcal{A}_{1,5} \mathcal{A}_{1,6} \cdot \mathcal{A}_{2,4}^{-1} \mathcal{A}_{2,5}^{-1} \mathcal{A}_{2,6}^2 \cdot \mathcal{A}_{3,4} \mathcal{A}_{3,6}^{-1}$. Agora, pelo Teorema 3.8(c), cada $\mathcal{A}_{i,j}$ e $\mathcal{A}_{r,s}$ presentes na palavra de x^3 , comutam. Logo o elemento x possui ordem três.

Exemplo 3.19. Os elementos $\eta_{1,2}\eta_{3,3}\eta_{6,4}$ e $\eta_{1,2}\eta_{3,3}\eta_{6,4}\mathcal{A}_{1,4}\mathcal{A}_{1,5}^{-1}\mathcal{A}_{1,9}\mathcal{A}_{1,10}\mathcal{A}_{1,11}\mathcal{A}_{1,12}^{-3} \cdot \mathcal{A}_{2,6}^2\mathcal{A}_{2,7}^{-1}\mathcal{A}_{2,8}^{-1} \cdot \mathcal{A}_{3,4}^{-2}\mathcal{A}_{3,5}^2$ em $B_9(M_{1,2})/P'_9(M_{1,2})$ possuem ordem igual a $12 = \text{mmc}(2, 3, 4)$.

Algumas questões motivadas por [42] surgem para $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$, como a existência de torção, a realização de elementos de ordem finita e de subgrupos finitos e suas classes de conjugação. No Teorema 3.17 nós caracterizamos os elementos de ordem finita de $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$ e, no próximo resultado (Teorema 3.20), suas classes de conjugação, a partir das quais vemos que as classes de conjugação de elementos de ordem finita de $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$ estão em correspondência biunívoca com as classes de conjugação de elementos do grupo simétrico S_n .

Teorema 3.20. *Sejam $g, n, p \in \mathbb{Z}$, com $g \geq 1$, $n \geq 1$, $p \geq 1$ e $f = 2g + p - 1$. consideremos o homomorfismo $\bar{\pi}$ (ver (3.3)). Dois elementos de $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$ de ordem l são conjugados se, e somente se, suas imagens por $\bar{\pi}$ em S_n são permutações que possuem a mesma estrutura cíclica.*

Demonstração. Sejam $\alpha, \beta \in B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$ elementos de ordem finita l . Suponhamos que $\alpha = \gamma\beta\gamma^{-1}$, para algum $\gamma \in B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$. Logo $\bar{\pi}(\alpha) = \bar{\pi}(\gamma\beta\gamma^{-1}) = \bar{\pi}(\gamma)\bar{\pi}(\beta)\bar{\pi}(\gamma)^{-1}$ em S_n , ou seja, $\bar{\pi}(\alpha)$ e $\bar{\pi}(\beta)$ são conjugados em S_n . E portanto, $\bar{\pi}(\alpha)$ e $\bar{\pi}(\beta)$ possuem a mesma estrutura cíclica, por [66, Proposição 2.33].

Reciprocamente, suponhamos que $\eta, \beta \in B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$ são elementos de ordem finita l , com $\bar{\pi}(\eta)$ e $\bar{\pi}(\beta)$ de mesma estrutura cíclica em S_n . Então existe $\bar{\gamma} \in S_n$ tal que $\bar{\pi}(\eta) = \bar{\gamma}\bar{\pi}(\beta)\bar{\gamma}^{-1}$. Sem perda de generalidade, suponhamos que $\bar{\pi}(\beta) = \bar{\pi}(\eta) = \theta$.

Seja $\theta \in S_n$ de ordem $|\theta| = l$. Sabemos que θ pode ser decomposto de forma única em produto de ciclos disjuntos. Logo, a menos de conjugação, existem $2 \leq k_1 \leq \dots \leq k_t$ tais que $\sum_{i=1}^t k_i \leq n$ e $l = \text{mmc}(k_1, \dots, k_t)$, para os quais θ é escrito como em (3.13).

$$\eta = \eta_{1,k_1}\eta_{1+k_1,k_2} \cdots \eta_{1+\sum_{i=1}^{t-1} k_i, k_t} \in B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p}),$$

onde cada $\eta_{i,j}$ é descrito como na Definição 3.12. Notamos que $\bar{\pi}(\eta^{-1}) = \theta$ e, pela Proposição 3.17 temos $\eta^l = 1$.

Uma vez que $\bar{\pi}(\beta) = \bar{\pi}(\eta)$, existe

$$\mathcal{A} = \prod_{i=1}^f \mathcal{A}_{i,f+1}^{m_{i,f+1}} \mathcal{A}_{i,f+2}^{m_{i,f+2}} \cdots \mathcal{A}_{i,f+n}^{m_{i,f+n}} \in P_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p}),$$

em que $m_{i,f+1}, \dots, m_{i,f+n} \in \mathbb{Z}$ tal que $\beta = \mathcal{A}\eta$. Seja \mathcal{T}_θ uma transversal associada à θ dada por

$$\mathcal{T}_\theta = \{f + 1, f + k_1 + 1, \dots, f + \sum_{j=1}^{i-1} k_j + 1, \dots, f + \sum_{j=1}^{t-1} k_j + 1\}.$$

Logo, pelo Teorema 3.17 temos $\sum_{q \in \mathcal{O}_\theta(j)} m_{i,q} = 0$, onde $j \in \mathcal{T}_\theta$.

Para provar este teorema é suficiente mostrarmos que $\mathcal{A}\eta$ e η são conjugados. Assim, exibiremos $X \in P_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$, tal que $X \cdot \mathcal{A}\eta \cdot X^{-1} = \eta$. Isto equivale dizer que

$$X \cdot \mathcal{A}\eta \cdot X^{-1}\eta^{-1} = 1 \tag{3.17}$$

em $P_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$. Seja $X = \prod_{i=1}^f \mathcal{A}_{i,f+1}^{x_{i,f+1}} \mathcal{A}_{i,f+2}^{x_{i,f+2}} \cdots \mathcal{A}_{i,f+n}^{x_{i,f+n}}$, onde $x_{i,f+1}, \dots, x_{i,f+n} \in \mathbb{Z}$ para todo $1 \leq i \leq f$. Aplicando o Teorema 3.6 e a Observação 3.16, segue que

$$\eta X^{-1}\eta^{-1} = \prod_{i=1}^f \mathcal{A}_{i,f+1}^{-x_{i,\theta^{-1}(f+1)}} \mathcal{A}_{i,f+2}^{-x_{i,\theta^{-1}(f+2)}} \cdots \mathcal{A}_{i,f+n}^{-x_{i,\theta^{-1}(f+n)}}.$$

Logo

$$X \cdot \mathcal{A}\eta \cdot X^{-1}\eta^{-1} = \prod_{i=1}^f \mathcal{A}_{i,f+1}^{x_{i,f+1} + m_{i,f+1} - x_{i,\theta^{-1}(f+1)}} \cdots \mathcal{A}_{i,f+n}^{x_{i,f+n} + m_{i,f+n} - x_{i,\theta^{-1}(f+n)}}.$$

Consequentemente (3.17) acontece se, e somente se,

$$x_{i,j} + m_{i,j} - x_{i,\theta^{-1}(j)} = 0, \tag{3.18}$$

para todo $1 \leq i \leq 2g + p - 1$ e $f + 1 \leq j \leq f + n$. Se j pertence à transversal \mathcal{T}_θ associada à θ , o sistema (3.18) é reescrito como união disjunta dos seguintes subsistemas

$$m_{i,\theta^{-k}(j)} = x_{i,\theta^{-k-1}(j)} - x_{i,\theta^{-k}(j)}, \tag{3.19}$$

onde $1 \leq k \leq |\mathcal{O}_\theta(j)| - 1$. Façamos $|\mathcal{O}_\theta(j)| = r_j$. Agora, sejam $x_{i,j} \in \mathbb{Z}$ arbitrários, para todo $1 \leq i \leq 2g + p - 1$ e $f + 1 \leq j \leq f + n$. A solução do subsistema (3.19)

$$\begin{aligned} x_{i,\theta^{-1}(j)} - x_{i,j} &= m_{i,j}, \\ x_{i,\theta^{-2}(j)} - x_{i,\theta^{-1}(j)} &= m_{i,\theta^{-1}(j)}, \\ x_{i,\theta^{-3}(j)} - x_{i,\theta^{-2}(j)} &= m_{i,\theta^{-2}(j)}, \\ \vdots & \\ x_{i,\theta^{-r_i,j+2}(j)} - x_{i,\theta^{-r_i,j+3}(j)} &= m_{i,\theta^{-r_i,j+3}(j)}, \\ x_{i,\theta^{-r_i,j+1}(j)} - x_{i,\theta^{-r_i,j+2}(j)} &= m_{i,\theta^{-r_i,j+2}(j)}, \end{aligned}$$

é dada por

$$x_{i,\theta^{-k}(j)} = x_{i,j} + (m_{i,j} + m_{i,\theta^{-1}(j)} + m_{i,\theta^{-2}(j)} + \cdots + m_{i,\theta^{-k+1}(j)}),$$

onde $1 \leq k \leq r_j - 1$. Logo, o sistema (3.18) possui solução, para todo $j \in \mathcal{T}_\theta$.

Dessa forma, (3.17) admite solução e, portanto, $\mathcal{A}\eta$ é conjugado de η por um elemento de $P_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$, como queríamos demonstrar. \square

Exemplo 3.21. Os elementos $\alpha = \sigma_1$ e $\beta = \sigma_1 \mathcal{A}_{1,4}^{-1} \mathcal{A}_{1,5}^{-1} \mathcal{A}_{3,4}^3 \mathcal{A}_{3,5}^{-3}$ são conjugados em $B_3(M_{1,2})/P'_3(M_{1,2})$. Basta tomar $X = \mathcal{A}_{1,4}^2 \mathcal{A}_{1,5} \mathcal{A}_{3,4}^{-1} \mathcal{A}_{3,5}^2$ na igualdade $X\beta X^{-1}\alpha^{-1} = 1$.

Corolário 3.22. *Dois subgrupos cíclicos de $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$ de ordem k são conjugados se, e somente se, suas imagens por $\bar{\pi}$ são conjugadas em S_n .*

Demonstração. Sejam $H_1 = \langle \alpha \rangle$ e $H_2 = \langle \beta \rangle$ subgrupos cíclicos de $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$ de ordem k . Suponhamos que exista γ em $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$, tal que $\langle \alpha \rangle = \gamma \langle \beta \rangle \gamma^{-1}$. Assim, aplicando o homomorfismo $\bar{\pi}$, obtemos

$$\bar{\pi}(\langle \alpha \rangle) = \bar{\pi}(\gamma \langle \beta \rangle \gamma^{-1}) = \bar{\pi}(\gamma) \bar{\pi}(\langle \beta \rangle) \bar{\pi}(\gamma^{-1}).$$

Portanto, $\bar{\pi}(\alpha)$ e $\bar{\pi}(\beta)$ são conjugados em S_n .

Reciprocamente, suponhamos que $\bar{\pi}(\langle \alpha \rangle)$ e $\bar{\pi}(\langle \beta \rangle)$ são conjugados em S_n , com α e β elementos de ordem k . Então, existe $\sigma \in S_n$ tal que $\bar{\pi}(\alpha) = \sigma \bar{\pi}(\beta) \sigma^{-1}$. Seja $\tilde{\sigma} \in B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$, tal que $\bar{\pi}(\tilde{\sigma}) = \sigma$. Pelo Teorema [3.20](#), temos

$$\alpha = \tilde{\sigma} \beta \tilde{\sigma}^{-1} \in B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p}).$$

Observemos que dado $w \in \mathbb{Z}$ então

$$\alpha_1^w = \alpha_1 \cdot \alpha_1 \cdots \alpha_1 = \tilde{\sigma} \beta_2 \tilde{\sigma}^{-1} \cdot \tilde{\sigma} \beta \tilde{\sigma}^{-1} \cdots \tilde{\sigma} \beta \tilde{\sigma}^{-1} = \tilde{\sigma} \beta^w \tilde{\sigma}^{-1}.$$

Logo $\alpha^w = \tilde{\sigma} \beta^w \tilde{\sigma}^{-1}$. Portanto, dados quaisquer $x \in \langle \alpha \rangle$ e $y \in \langle \beta \rangle$, então existe $\tilde{\sigma} \in B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$ tal que

$$x = \tilde{\sigma} y \tilde{\sigma}^{-1}$$

e, dessa forma, os subgrupos cíclicos $\langle \alpha \rangle$ e $\langle \beta \rangle$ são conjugados. □

Capítulo 4

Grupos de tranças de superfícies não orientáveis finitamente perfuradas e grupos cristalográficos

Motivados por [39] e [42] e pelos resultados anteriores, neste capítulo abordaremos o caso das superfícies não orientáveis finitamente perfuradas, de genus maior do que ou igual a um. Novamente as técnicas utilizadas aqui são baseadas no artigo [42], adaptadas ao novo ambiente. Veremos neste capítulo que ao perfurarmos finitamente uma superfície X não orientável compacta e sem bordo, o quociente $B_n(X \setminus \{x_1, \dots, x_p\})/P'_n(X \setminus \{x_1, \dots, x_p\})$ será um grupo cristalográfico, resultado este que se diferencia do caso da superfície X não orientável compacta sem bordo, uma vez que o grupo quociente $B_n(X)/P'_n(X)$ não é cristalográfico, como podemos ver [42, Proposição 17].

Diferente dos Capítulos 2 e 3, aqui no Capítulo 4 foi preciso calcularmos apresentações de dois grupos em específico, o grupo de tranças e o grupo de tranças puras de superfícies não orientáveis finitamente perfuradas de genus $g \geq 2$, para que assim pudéssemos responder algumas questões norteadoras de nosso trabalho (questões estas, como anteriormente citamos, motivadas por [39, 42]). No caso da apresentação do grupo de tranças puras de superfícies não orientáveis finitamente perfuradas de genus $g \geq 2$, observamos que não existia até então uma apresentação para tal grupo, o que existe na literatura a respeito é que em [6, Proposição 2.3] é exibido um conjunto de geradores do grupo de tranças puras de superfícies não orientáveis finitamente perfuradas de genus $g \geq 2$. Este capítulo está dividido em três seções, a saber, Seção 4.1, Seção 4.2 e Seção 4.3.

Na Seção 4.1 calculamos apresentações para grupo de tranças puras e o grupo de tranças de superfícies não orientáveis finitamente perfuradas de genus $g \geq 2$. Seção 4.2 relacionamos os grupos de tranças de superfícies não orientáveis finitamente perfuradas de genus $g \geq 1$ e os grupos cristalográficos. Por fim, na Seção 4.3 estudamos os elementos de ordem finita e suas classes de conjugação no grupo quociente $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$.

4.1 Uma apresentação do grupo de tranças puras de superfícies não orientáveis finitamente perfuradas

Seja $g \in \mathbb{N}$, $g \geq 1$. Seja N_g uma superfície não orientável, compacta, conexa e sem bordo de genus g . Se $n \in \mathbb{N}$ e $\mathbb{D}^2 \subseteq N$ é o disco, a inclusão induz um homomorfismo $\iota: B_n(\mathbb{D}^2) \rightarrow B_n(N_g)$. Se $\beta \in B_n(\mathbb{D}^2)$ então vamos denotar a imagem $\iota(\beta)$ por simplesmente β . Para todo $1 \leq i < j \leq n$, consideremos o seguinte elemento de $P_n(N_g)$:

$$B_{i,j} = \sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-2} \sigma_{i+1} \cdots \sigma_{j-1}, \quad (4.1)$$

onde $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ são os geradores padrão do grupo de tranças de Artin $B_n(\mathbb{D}^2)$, como mostra a Figura 4.2. A trança geométrica correspondente a $B_{i,j}$ é a trança que tem a j -ésima corda enroscando a i -ésima corda e as demais cordas verticais, como mostra a Figura 4.23. Para cada $1 \leq r \leq n$ e $1 \leq k \leq g$, definimos um gerador $\rho_{r,k}$, o qual é representado geometricamente por um laço baseado no r -ésimo ponto e que passa pelo k -ésimo lado do polígono de $2g$ lados, como mostra a Figura 4.24.

Observação 4.1. Os autores em [36, p.669] denotam por σ_i o que nós denotamos aqui por σ_i^{-1} , apenas uma questão de convenção em sua representação gráfica. Dessa forma, sendo coerente com a notação e representação gráfica de σ_i apresentada nesta tese, mantivemos a representação gráfica de [36, p.669, Figura 1] e adaptamos ao nosso texto a escrita do $B_{i,j}$. Ainda mais, em [36, p.669], $B_{i,j}$ são definidos, segundo sua notação, como: $\sigma_i^{-1} \cdots \sigma_{j-2}^{-1} \sigma_{j-1}^2 \sigma_{j-2} \cdots \sigma_i$. Trazendo para nossa notação, torna-se $B_{i,j} = \sigma_i \cdots \sigma_{j-2} \sigma_{j-1}^{-2} \sigma_{j-2}^{-1} \cdots \sigma_i^{-1}$. Usando a relação $\sigma_i \sigma_{i+1}^k \sigma_i^{-1} = \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^k \sigma_{i+1}$, com $k \in \mathbb{Z}$ (ver [59, capítulo 2, exercício 2.2]), reescrevemos $B_{i,j}$ como $\sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-2} \sigma_{i+1} \cdots \sigma_{j-1}$. Portanto, como definimos os $B_{i,j}$ em (4.1) é equivalente ao definido em [36, p.669].

Uma apresentação do grupo de tranças de superfícies fechadas (compactas e sem bordo) não orientáveis foi originalmente dada por Scott em [67]. Outras apresentações mais tarde foram obtidas em [5, 43]. Em [32, Teorema 4] é dada uma apresentação para o grupo de tranças puras $P_n(N_1)$. Veja a seguir.

Teorema 4.2 ([32, Teorema 4]). *Seja $n \in \mathbb{N}$. Uma apresentação para o grupo de tranças puras $P_n(N_1)$ do plano projetivo é dada por:*

Geradores: $B_{i,j}$, $1 \leq i < j \leq n$ e $\rho_{r,1}$, onde $1 \leq r \leq n$.

Relações:

(a) *As relações de Artin entre os $B_{i,j}$ que decorrem do $P_n(\mathbb{D}^2)$:*

$$B_{r,s} B_{i,j} B_{r,s}^{-1} = \begin{cases} B_{i,j}, & \text{se } i < r < s < j, \text{ ou } r < s < i < j. \\ B_{s,j}^{-1} B_{i,j} B_{s,j}, & \text{se } i = r < s < j \\ B_{i,j}^{-1} B_{r,j}^{-1} B_{i,j} B_{r,j} B_{i,j}, & \text{se } r < i = s < j. \\ B_{s,j}^{-1} B_{r,j}^{-1} B_{s,j} B_{r,j} B_{i,j} B_{r,j}^{-1} B_{s,j}^{-1} B_{r,j} B_{s,j}, & \text{se } r < i < s < j. \end{cases}$$

(b) Para todo $1 \leq i < j \leq n$,

$$\rho_{i,1}\rho_{j,1}\rho_{i,1}^{-1} = \rho_{j,k}^{-1}B_{i,j}^{-1}\rho_{j,k}^2$$

(c) Para todo $1 \leq i \leq n$, a “relação de superfície”

$$\rho_{i,1}^2 = B_{1,i} \cdots B_{i-1,i} B_{i,1+i} \cdots B_{i,n}.$$

(d) Para todo $1 \leq i < j \leq n$, $1 \leq k \leq n$ e $k \neq j$,

$$\rho_{k,1}B_{i,j}\rho_{k,1}^{-1} = \begin{cases} B_{i,j}, & \text{se } k < i \text{ ou } j < k \\ \rho_{j,1}^{-1}B_{i,1}^{-1}\rho_{j,1}, & \text{se } k = i \\ \rho_{j,1}^{-1}B_{k,1}^{-1}\rho_{j,1}B_{k,j}^{-1}B_{i,j}B_{k,j}\rho_{j,1}^{-1}B_{k,j}\rho_{j,1}, & \text{se } i < k < j. \end{cases}$$

Demonstração. Ver [32, Teorema 4]. □

Por [36, Teorema 3], sabemos que o grupo de tranças puras $P_n(N_g)$ da superfície fechada não orientável N_g de genus $g \geq 2$, possui a seguinte apresentação.

Teorema 4.3 ([36, Teorema 3]). *Sejam N_g uma superfície não orientável, compacta, conexa e sem bordo de genus $g \geq 2$ e $n \in \mathbb{N}$. O grupo de tranças puras $P_n(N_g)$ da superfície N_g possui a seguinte apresentação:*

Geradores: $B_{i,j}$, $1 \leq i < j \leq n$ e $\rho_{r,k}$, onde $1 \leq r \leq n$ e $1 \leq k \leq g$.

Relações:

(a) *As relações de Artin entre os $B_{i,j}$ que decorrem do $P_n(\mathbb{D}^2)$:*

$$B_{r,s}B_{i,j}B_{r,s}^{-1} = \begin{cases} B_{i,j}, & \text{se } i < r < s < j, \text{ ou } r < s < i < j. \\ B_{s,j}^{-1}B_{i,j}B_{s,j}, & \text{se } i = r < s < j. \\ B_{i,j}^{-1}B_{r,j}^{-1}B_{i,j}B_{r,j}B_{i,j}, & \text{se } r < i = s < j. \\ B_{s,j}^{-1}B_{r,j}^{-1}B_{s,j}B_{r,j}B_{i,j}B_{r,j}^{-1}B_{s,j}^{-1}B_{r,j}B_{s,j}, & \text{se } r < i < s < j. \end{cases}$$

(b) Para todo $1 \leq i < j \leq n$ e $1 \leq k, l \leq g$,

$$\rho_{i,k}\rho_{j,l}\rho_{i,k}^{-1} = \begin{cases} \rho_{j,l}, & \text{se } k < l \\ \rho_{j,k}^{-1}B_{i,j}^{-1}\rho_{j,k}^2, & \text{se } k = l \\ \rho_{j,k}^{-1}B_{i,j}^{-1}\rho_{j,k}B_{i,j}^{-1}\rho_{j,l}B_{i,j}\rho_{j,k}^{-1}B_{i,j}\rho_{j,k}, & \text{se } k > l. \end{cases}$$

(c) Para todo $1 \leq i \leq n$, a “relação de superfície”

$$\prod_{l=1}^g \rho_{i,l}^2 = B_{1,i} \cdots B_{i-1,i} B_{i,1+i} \cdots B_{i,n}.$$

(d) Para todo $1 \leq i < j \leq n$, $1 \leq k \leq n$, $k \neq j$ e $1 \leq l \leq g$,

$$\rho_{k,l} B_{i,j} \rho_{k,l}^{-1} = \begin{cases} B_{i,j}, & \text{se } k < i \text{ ou } j < k \\ \rho_{j,l}^{-1} B_{i,j}^{-1} \rho_{j,l}, & \text{se } k = i \\ \rho_{j,l}^{-1} B_{k,j}^{-1} \rho_{j,l} B_{k,j}^{-1} B_{i,j} B_{k,j} \rho_{j,l}^{-1} B_{k,j} \rho_{j,l}, & \text{se } i < k < j. \end{cases}$$

Demonstração. Ver [36, Teorema 3] □

A apresentação dada em [43, Teorema 2.2] para o grupo de tranças (total) $B_n(N_g)$ da superfície N_g , onde N_g é uma superfície não orientável, compacta, conexa e sem bordo de genus $g \geq 2$, posteriormente foi simplificada em [5, Teorema A.3] diminuindo-se o número de relações da apresentação de $B_n(N_g)$. Para nosso objetivo será suficiente a apresentação dada em [5, Teorema A.3], a qual reescreveremos em termos dos geradores $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, \rho_{1,1}, \rho_{1,2}, \dots, \rho_{1,g}$. Vejamos.

Teorema 4.4 ([5, Teorema A.3]). *Sejam N_g uma superfície não orientável, compacta, conexa e sem bordo de genus $g \geq 2$ e $n \in \mathbb{N}$. O grupo de tranças (total) $B_n(N_g)$ da superfície N_g admite a seguinte apresentação:*

Geradores: σ_i , $1 \leq i \leq n-1$ e $\rho_{1,k}$, onde $1 \leq k \leq g$.

Relações:

(a) *As relações de Artin para σ_i :*

$$\begin{aligned} \sigma_k \sigma_{k+1} \sigma_k &= \sigma_{k+1} \sigma_k \sigma_{k+1}, & \text{se } 1 \leq k \leq n-2 \\ \sigma_k \sigma_i &= \sigma_i \sigma_k, & \text{se } |k-i| > 1 \end{aligned}$$

(b) $\rho_{1,r}^{-1} \sigma_i = \sigma_i \rho_{1,r}^{-1}$, para todo $1 \leq r \leq g$ e $i \neq 1$.

(c) $\sigma_1^{-1} \rho_{1,r}^{-1} \sigma_1^{-1} \rho_{1,r}^{-1} = \rho_{1,r}^{-1} \sigma_1^{-1} \rho_{1,r}^{-1} \sigma_1$, para todo $1 \leq r \leq g$.

(d) $\sigma_1^{-1} \rho_{1,s}^{-1} \sigma_1 \rho_{1,r}^{-1} = \rho_{1,r}^{-1} \sigma_1^{-1} \rho_{1,s}^{-1} \sigma_1$, para todo $1 \leq s < r \leq g$.

(e) *A relação de superfície:* $\prod_{l=1}^g \rho_{1,l}^2 = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}^2 \cdots \sigma_2 \sigma_1$.

Demonstração. Ver [5, Teorema A.3] □

Sejam $p, n \in \mathbb{Z}$, com $p, n \geq 1$. Seja N_g uma superfície não orientável, compacta, conexa e sem bordo de genus $g \geq 1$. Consideremos o subconjunto finito $Q_p = \{x_1, \dots, x_p\}$ de N_g . Denotaremos por $N_{g,p}$ ao complementar de Q_p em relação a N_g , isto é,

$$N_{g,p} = N_g \setminus Q_p.$$

Denotaremos por $P_n(N_{g,p})$ e $B_n(N_{g,p})$, respectivamente, o grupo de tranças puras e o grupo de tranças (total) da superfície $N_{g,p}$.

Observação 4.5. Não há na literatura uma apresentação para o grupo de tranças puras $P_n(N_{g,p})$ de uma superfície não orientável de genus $g \geq 2$ finitamente perfurada. No caso do grupo de tranças puras $P_n(N_{1,p})$ uma apresentação é dada em [38, Proposição 11]. Agora, se $g \geq 2$, uma apresentação para o grupo de tranças $B_n(N_{g,p})$ é encontrada em [5, Teorema A. 2].

A seguir trazemos uma apresentação para o grupo de tranças puras $P_n(N_{1,p})$ (ver [38, Proposição 11]) em termo dos geradores de $P_{p+n}(N_1)$ descrito no Teorema 4.2.

Proposição 4.6 ([38, Proposição 11]). *Sejam $n, p \in \mathbb{Z}$, com $n, p \geq 1$. O grupo de tranças puras $P_n(N_{1,p})$ do plano projetivo finitamente perfurado $N_{1,p}$ possui a seguinte apresentação:*

Geradores: $B_{i,j}$, $1 \leq i < j$ e $p+1 \leq j \leq p+n$ e $\rho_{r,1}$, onde $p+1 \leq r \leq p+n$.

Relações:

(a) *As relações de Artin entre os $B_{i,j}$ que decorrem do $P_n(\mathbb{D}^2)$:*

$$B_{r,s}B_{i,j}B_{r,s}^{-1} = \begin{cases} B_{i,j}, & \text{se } i < r < s < j, \text{ ou } r < s < i < j. \\ B_{s,j}^{-1}B_{i,j}B_{s,j}, & \text{se } i = r < s < j. \\ B_{i,j}^{-1}B_{r,j}^{-1}B_{i,j}B_{r,j}B_{i,j}, & \text{se } r < i = s < j. \\ B_{s,j}^{-1}B_{r,j}^{-1}B_{s,j}B_{r,j}B_{i,j}B_{r,j}^{-1}B_{s,j}^{-1}B_{r,j}B_{s,j}, & \text{se } r < i < s < j. \end{cases}$$

(b) *Para todo $p+1 \leq i < j \leq p+n$,*

$$\rho_{i,1}\rho_{j,1}\rho_{i,1}^{-1} = \rho_{j,1}^{-1}B_{i,j}^{-1}\rho_{j,1}^2.$$

(c) *Para todo $p+1 \leq i \leq p+n$, a “relação de superfície”*

$$\rho_{i,1}^2 = B_{1,i} \cdots B_{i-1,i}B_{i,1+i} \cdots B_{i,n}.$$

(d) *Para todo $1 \leq i < j$, $p+1 \leq k \leq p+n$ e $k \neq j$,*

$$\rho_{k,1}B_{i,j}\rho_{k,1}^{-1} = \begin{cases} B_{i,j}, & \text{se } k < i \text{ ou } j < k \\ \rho_{j,1}^{-1}B_{i,j}^{-1}\rho_{j,1}, & \text{se } k = i \\ \rho_{j,1}^{-1}B_{k,1}^{-1}\rho_{j,1}B_{k,j}^{-1}B_{i,j}B_{k,j}\rho_{j,1}^{-1}B_{k,j}\rho_{j,1}, & \text{se } i < k < j. \end{cases}$$

Demonstração. Ver [38, Proposição 11]. □

No próximo resultado mostraremos uma apresentação para o grupo de tranças puras $P_n(N_{g,p})$, com $g \geq 2$. Exibiremos uma apresentação de $P_n(N_{g,p})$ em termos dos geradores de $P_{p+n}(N_g)$ presentes no Teorema 4.4. A técnica usada na demonstração é, em essência, a mesma que foi utilizada em [38, Proposição 11]. Ressaltamos que os autores de [6, Proposição 2.3] dão um conjunto de geradores para o grupo $P_n(N_{g,p})$.

Teorema 4.7. *Sejam $p, n, g \in \mathbb{Z}$, com $p, n \geq 1$ e $g \geq 2$. Seja $N_{g,p}$ uma superfície de genus g , não orientável e p -perfurada. O grupo de tranças puras $P_n(N_{g,p})$ admite a seguinte apresentação:*

Geradores: $B_{i,j}$ e $\rho_{r,k}$, onde $1 \leq i < j$, $p+1 \leq j$, $r \leq p+n$ e $1 \leq k \leq g$.

Relações:

(a) *As relações de Artin entre os $B_{i,j}$ que decorrem do $P_n(\mathbb{D}^2)$:*

$$B_{r,s}B_{i,j}B_{r,s}^{-1} = \begin{cases} B_{i,j}, & \text{se } i < r < s < j, \text{ ou } r < s < i < j. \\ B_{s,j}^{-1}B_{i,j}B_{s,j}, & \text{se } i = r < s < j. \\ B_{i,j}^{-1}B_{r,j}^{-1}B_{i,j}B_{r,j}B_{i,j}, & \text{se } r < i = s < j. \\ B_{s,j}^{-1}B_{r,j}^{-1}B_{s,j}B_{r,j}B_{i,j}B_{r,j}^{-1}B_{s,j}^{-1}B_{r,j}B_{s,j}, & \text{se } r < i < s < j. \end{cases}$$

(b) *Para todo $p+1 \leq i < j \leq p+n$ e $1 \leq k, l \leq g$,*

$$\rho_{i,k}\rho_{j,l}\rho_{i,k}^{-1} = \begin{cases} \rho_{j,l}, & \text{se } k < l \\ \rho_{j,k}^{-1}B_{i,j}^{-1}\rho_{j,k}^2, & \text{se } k = l \\ \rho_{j,k}^{-1}B_{i,j}^{-1}\rho_{j,k}B_{i,j}^{-1}\rho_{j,l}B_{i,j}\rho_{j,k}^{-1}B_{i,j}\rho_{j,k}, & \text{se } k > l. \end{cases}$$

(c) *Para todo $p+1 \leq i \leq p+n$, a “relação de superfície”*

$$\prod_{l=1}^g \rho_{i,l}^2 = B_{1,i} \cdots B_{i-1,i} B_{i,1+i} \cdots B_{i,p+n}.$$

Observemos que, no caso $i = p+n$, temos $\prod_{l=1}^g \rho_{p+n,l}^2 = B_{1,p+n} B_{2,p+n} \cdots B_{p+n-1,p+n}$.

(d) *Para todo $1 \leq i < j$, $p+1 \leq j, k \leq p+n$, $k \neq j$ e $1 \leq l \leq g$,*

$$\rho_{k,l}B_{i,j}\rho_{k,l}^{-1} = \begin{cases} B_{i,j}, & \text{se } k < i \text{ ou } j < k \\ \rho_{j,l}^{-1}B_{i,j}^{-1}\rho_{j,l}, & \text{se } k = i \\ \rho_{j,l}^{-1}B_{k,j}^{-1}\rho_{j,l}B_{k,j}^{-1}B_{i,j}B_{k,j}\rho_{j,l}^{-1}B_{k,j}\rho_{j,l}, & \text{se } i < k < j. \end{cases}$$

Demonstração. Sejam $p, n, g \in \mathbb{Z}$, com $p, n \geq 1$ e $g \geq 2$. Então temos a seguinte sequência exata curta de Fadell-Neuwirth do grupo de tranças puras de $N_{g,p}$:

$$1 \longrightarrow P_1(N_{g,p} \setminus \{x_{p+1}, \dots, x_{p+n}\}) \longrightarrow P_{n+1}(N_{g,p}) \xrightarrow{q} P_n(N_{g,p}) \longrightarrow 1, \quad (4.2)$$

onde q é o homomorfismo que é dado, geometricamente, esquecendo a última corda. Os geradores $B_{i,j}$ e $\rho_{j,k}$ de $P_n(N_{g,p})$, exibidos neste teorema, são representados geometricamente nas Figuras 4.25, 4.26, 4.27 e 4.28. Os pontos base das n cordas de $P_n(N_{g,p})$ são os pontos x_{p+1}, \dots, x_{p+n} . Usando indução em n , aplicaremos o método padrão dado no Teorema 1.7 para obter uma apresentação de um grupo a partir de uma extensão. Usaremos as representações geométricas das Figuras 4.25, 4.27 (planas) e das

Figuras 4.26, 4.28 (espaciais) para derivar algumas relações. Seja $p \geq 1$. Se $n = 1$, então

$$P_1(N_{g,p}) = \pi_1(N_{g,p}, x_{p+1})$$

é gerado por $\{B_{1,p+1}, \dots, B_{p,p+1}, \rho_{p+1,1}, \dots, \rho_{p+1,g}\}$, sujeitos à relação de superfície

$$\prod_{r=1}^p B_{r,p+1} = \rho_{p+1,1}^2 \rho_{p+1,2}^2 \cdots \rho_{p+1,g}^2,$$

que é equivalente à única relação dada por (c), para $i = p + 1$. Como as relações restantes (a), (b) e (d) são vazias, a apresentação de $P_1(N_{g,p})$ é válida.

Agora, suponhamos que a apresentação de $P_n(N_{g,p})$ é verdadeira para $n \geq 1$. Queremos mostrar que obtemos a apresentação de $P_{n+1}(N_{g,p})$ aplicando o Teorema 1.7 à sequência exata curta (4.2). Apesar do $\text{Ker}(q)$ ser um grupo livre, será conveniente considerá-lo como o grupo gerado pelo conjunto

$$\tilde{Y} = \{B_{i,p+n+1}, \rho_{p+n+1,k} \mid 1 \leq i \leq p+n, 1 \leq k \leq g\} \quad (4.3)$$

sujeito à relação

$$\rho_{p+n+1,1}^2 \rho_{p+n+1,2}^2 \cdots \rho_{p+n+1,g}^2 = \prod_{i=1}^{p+n} B_{i,p+n+1}, \quad (4.4)$$

como pode ser vista na Figura 4.29. De acordo com o método apresentado no Teorema 1.7, $P_{n+1}(N_{g,p})$ é gerado pela união de \tilde{Y} com o conjunto dos representantes de classes

$$\tilde{X} = \{B_{i,j}, \rho_{s,k} \mid 1 \leq i < j, p+1 \leq j, s \leq p+n \text{ e } 1 \leq k \leq g\} \quad (4.5)$$

em $P_{n+1}(N_{g,p})$ do conjunto de geradores de $P_n(N_{g,p})$. Assim, $\tilde{Y} \cup \tilde{X}$ nos dá um conjunto necessário de geradores para

$$P_{n+1}(N_{g,p}).$$

Ainda pelo Teorema 1.7, existem três tipos de relações em $P_{n+1}(N_{g,p})$. São elas:

Tipo (1): A relação proveniente do $\text{Ker}(q)$, que produz a relação de superfície, como em (4.4).

Tipo (2): As relações de $P_n(N_{g,p})$, reescritas em termos dos elementos de \tilde{Y} .

Tipo (3): Os conjugados dos elementos de \tilde{Y} pelos elementos de \tilde{X} , também reescritos em termos de \tilde{Y} , isto é, dado $W_{xy} \in \{xyx^{-1} \mid x \in \tilde{X} \text{ e } y \in \tilde{Y}\}$ reescrever W_{xy} em termos dos elementos do conjunto \tilde{Y} , dado em (4.3).

Vamos estudar as relações do Tipo (2) usando as representações geométricas dadas nas Figuras 4.25, 4.26, 4.27 e 4.28. Veremos a seguir que as relações de $P_n(N_{g,p})$ são levadas diretamente como relações em $P_{n+1}(N_{g,p})$, com exceção da relação item (c) (“relação de superfície”). De fato,

Tipo (2.1): Para cada $p + 1 \leq j \leq p + n$, reescrevemos as relações do tipo item (a) em termos dos elementos de \tilde{Y} , dado em (4.3). Segue,

(2.1.1) se $i < r < s < j$ ou $r < s < i < j$, então $B_{r,s}B_{i,j}B_{r,s}^{-1}B_{i,j}^{-1} = 1$ em $P_n(N_{g,p})$. Logo, reescrevendo $B_{r,s}B_{i,j}B_{r,s}^{-1}B_{i,j}^{-1}$ em termos dos elementos de \tilde{Y} , temos $B_{r,s}B_{i,j}B_{r,s}^{-1}B_{i,j}^{-1} = 1 \in P_{n+1}(N_{g,p})$;

(2.1.2) se $i = r < s < j$, então $B_{r,s}B_{i,j}B_{r,s}^{-1}B_{s,j}^{-1}B_{i,j}^{-1}B_{s,j} = 1$ em $P_n(N_{g,p})$. Logo, reescrevendo $B_{r,s}B_{i,j}B_{r,s}^{-1}B_{s,j}^{-1}B_{i,j}^{-1}B_{s,j}$ em termos dos elementos de \tilde{Y} , temos $B_{r,s}B_{i,j}B_{r,s}^{-1}B_{s,j}^{-1}B_{i,j}^{-1}B_{s,j} = 1 \in P_{n+1}(N_{g,p})$;

(2.1.3) se $r < i = s < j$, então $B_{r,s}B_{i,j}B_{r,s}^{-1}B_{i,j}^{-1}B_{r,j}^{-1}B_{i,j}^{-1}B_{r,j}B_{i,j} = 1$ em $P_n(N_{g,p})$. Logo, reescrevendo $B_{r,s}B_{i,j}B_{r,s}^{-1}B_{i,j}^{-1}B_{r,j}^{-1}B_{i,j}^{-1}B_{r,j}B_{i,j}$ em termos dos elementos de \tilde{Y} , temos

$$B_{r,s}B_{i,j}B_{r,s}^{-1}B_{i,j}^{-1}B_{r,j}^{-1}B_{i,j}^{-1}B_{r,j}B_{i,j} = 1 \in P_{n+1}(N_{g,p});$$

(2.1.4) se $r < i < s < j$, então $B_{r,s}B_{i,j}B_{r,s}^{-1}B_{s,j}^{-1}B_{r,j}^{-1}B_{s,j}^{-1}B_{r,j}^{-1}B_{i,j}^{-1}B_{r,j}^{-1}B_{s,j}^{-1}B_{r,j}B_{s,j} = 1$ em $P_n(N_{g,p})$. Logo, reescrevendo $B_{r,s}B_{i,j}B_{r,s}^{-1}B_{s,j}^{-1}B_{r,j}^{-1}B_{s,j}^{-1}B_{r,j}^{-1}B_{i,j}^{-1}B_{r,j}^{-1}B_{s,j}^{-1}B_{r,j}B_{s,j}$ em termos dos elementos de \tilde{Y} , temos

$$B_{r,s}B_{i,j}B_{r,s}^{-1}B_{s,j}^{-1}B_{r,j}^{-1}B_{s,j}^{-1}B_{r,j}^{-1}B_{i,j}^{-1}B_{r,j}^{-1}B_{s,j}^{-1}B_{r,j}B_{s,j} = 1 \in P_{n+1}(N_{g,p}).$$

Portanto, por hipótese de indução, para todo $p + 1 \leq j \leq p + n$ as relações

$$B_{r,s}B_{i,j}B_{r,s}^{-1} = \begin{cases} B_{i,j}, & \text{se } i < r < s < j \quad \text{ou } r < s < i < j \\ B_{s,j}^{-1}B_{i,j}B_{s,j}, & \text{se } i = r < s < j \\ B_{i,j}^{-1}B_{r,j}^{-1}B_{i,j}B_{r,j}B_{i,j}, & \text{se } r < i = s < j \\ B_{s,j}^{-1}B_{r,j}^{-1}B_{s,j}B_{r,j}B_{i,j}B_{r,j}^{-1}B_{s,j}^{-1}B_{r,j}B_{s,j}, & \text{se } r < i < s < j, \end{cases}$$

onde $1 \leq r < s$, $p + 1 \leq r \leq p + n$ e $r \neq j$, são válidas em $P_{n+1}(N_{g,p})$, como representadas nas Figuras 4.31 e 4.32.

Tipo (2.2): Para cada $p + 1 \leq j \leq p + n$, reescrevemos as relações do tipo item (b) em termos dos elementos de \tilde{Y} , dado em (4.3). Logo,

(2.2.1) se $k < l$, então $\rho_{i,k}\rho_{j,l}\rho_{i,k}^{-1}\rho_{j,l}^{-1} = 1$ em $P_n(N_{g,p})$. Logo, reescrevendo $\rho_{i,k}\rho_{j,l}\rho_{i,k}^{-1}\rho_{j,l}^{-1}$ em termos dos elementos de \tilde{Y} , temos $\rho_{i,k}\rho_{j,l}\rho_{i,k}^{-1}\rho_{j,l}^{-1} = 1 \in P_{n+1}(N_{g,p})$;

(2.2.2) se $k = l$, então $\rho_{i,k}\rho_{j,l}\rho_{i,k}^{-1}\rho_{j,k}^{-2}B_{i,j}\rho_{j,k} = 1$ em $P_n(N_{g,p})$. Logo, reescrevendo $\rho_{i,k}\rho_{j,l}\rho_{i,k}^{-1}\rho_{j,k}^{-2}B_{i,j}\rho_{j,k}$ em termos dos elementos de \tilde{Y} , temos $\rho_{i,k}\rho_{j,l}\rho_{i,k}^{-1}\rho_{j,k}^{-2}B_{i,j}\rho_{j,k} = 1 \in P_{n+1}(N_{g,p})$;

(2.2.3) se $k > l$, então $\rho_{i,k}\rho_{j,l}\rho_{i,k}^{-1}\rho_{j,k}^{-1}B_{i,j}^{-1}\rho_{j,k}B_{i,j}^{-1}\rho_{j,l}^{-1}B_{i,j}\rho_{j,k}^{-1}B_{i,j}\rho_{j,k} = 1$ em $P_n(N_{g,p})$. Logo, reescrevendo $\rho_{i,k}\rho_{j,l}\rho_{i,k}^{-1}\rho_{j,k}^{-1}B_{i,j}^{-1}\rho_{j,k}B_{i,j}^{-1}\rho_{j,l}^{-1}B_{i,j}\rho_{j,k}^{-1}B_{i,j}\rho_{j,k}$ em termos dos elementos de \tilde{Y} , temos $\rho_{i,k}\rho_{j,l}\rho_{i,k}^{-1}\rho_{j,k}^{-1}B_{i,j}^{-1}\rho_{j,k}B_{i,j}^{-1}\rho_{j,l}^{-1}B_{i,j}\rho_{j,k}^{-1}B_{i,j}\rho_{j,k} = 1 \in P_{n+1}(N_{g,p})$.

Portanto, por hipótese de indução, para todo $p + 1 \leq j \leq p + n$ as relações

$$\rho_{i,k}\rho_{j,l}\rho_{i,k}^{-1} = \begin{cases} \rho_{j,l}, & \text{se } k < l \\ \rho_{j,k}^{-1}B_{i,j}^{-1}\rho_{j,k}^2, & \text{se } k = l \\ \rho_{j,k}^{-1}B_{i,j}^{-1}\rho_{j,k}B_{i,j}^{-1}\rho_{j,l}B_{i,j}\rho_{j,k}^{-1}B_{i,j}\rho_{j,k}, & \text{se } k > l, \end{cases}$$

onde $p + 1 \leq i \leq p + n$ e $1 \leq k, l \leq g$, são válidas em $P_{n+1}(N_{g,p})$, como representadas nas Figuras [4.34](#) e [4.35](#).

Tipo (2.3): As relações do item (c) (“relação de superfície”)

$$\prod_{l=1}^g \rho_{i,l}^2 = B_{1,i} \cdots B_{i-1,i} B_{i,1+i} \cdots B_{i,p+n},$$

onde $p + 1 \leq i \leq p + n$, constituem as únicas relações de $P_n(N_{g,p})$ que não são obtidas diretamente como relações em $P_{n+1}(N_{g,p})$, ou seja, para todo $p + 1 \leq i \leq p + n$, temos

$$\left(\prod_{l=1}^g \rho_{i,l}^2 \right) \cdot \left(\prod_{s=1+i}^{p+n} B_{i,s} \right)^{-1} \cdot \left(\prod_{r=1}^{i-1} B_{r,i} \right)^{-1} = B_{j,p+n+1},$$

como mostra a Figura [4.30](#). Observe que, as relações descritas aqui neste item, juntamente com a relação Tipo (1), produzem todas as relações do tipo item (c), para o $P_{n+1}(N_{g,p})$.

Tipo (2.4): Para cada $p + 1 \leq j \leq p + n$, reescrevemos as relações do tipo item (d) em termos dos elementos de \tilde{Y} , dado em [\(4.3\)](#). Logo,

(2.4.1) se $k < i$ ou $j < k$, então $\rho_{k,l}B_{i,j}\rho_{k,l}^{-1}B_{i,j}^{-1} = 1$ em $P_n(N_{g,p})$. Logo, reescrevendo $\rho_{k,l}B_{i,j}\rho_{k,l}^{-1}B_{i,j}^{-1}$ em termos dos elementos de \tilde{Y} , temos $\rho_{k,l}B_{i,j}\rho_{k,l}^{-1}B_{i,j}^{-1} = 1 \in P_{n+1}(N_{g,p})$;

(2.4.2) se $k = i$, então $\rho_{k,l}B_{i,j}\rho_{k,l}^{-1}\rho_{j,l}^{-1}B_{i,j}\rho_{j,l} = 1$ em $P_n(N_{g,p})$. Logo, reescrevendo $\rho_{k,l}B_{i,j}\rho_{k,l}^{-1}\rho_{j,l}^{-1}B_{i,j}\rho_{j,l}$ em termos dos elementos de \tilde{Y} , temos $\rho_{k,l}B_{i,j}\rho_{k,l}^{-1}\rho_{j,l}^{-1}B_{i,j}\rho_{j,l} = 1 \in P_{n+1}(N_{g,p})$;

(2.4.3) se $i < k < j$, então $\rho_{k,l}B_{i,j}\rho_{k,l}^{-1}\rho_{j,l}^{-1}B_{k,j}^{-1}\rho_{j,l}B_{k,j}^{-1}B_{i,j}^{-1}B_{k,j}\rho_{j,l}^{-1}B_{k,j}\rho_{j,l} = 1$ em $P_n(N_{g,p})$. Logo, reescrevendo $\rho_{k,l}B_{i,j}\rho_{k,l}^{-1}\rho_{j,l}^{-1}B_{k,j}^{-1}\rho_{j,l}B_{k,j}^{-1}B_{i,j}^{-1}B_{k,j}\rho_{j,l}^{-1}B_{k,j}\rho_{j,l}$ em termos dos elementos de \tilde{Y} , temos $\rho_{k,l}B_{i,j}\rho_{k,l}^{-1}\rho_{j,l}^{-1}B_{k,j}^{-1}\rho_{j,l}B_{k,j}^{-1}B_{i,j}^{-1}B_{k,j}\rho_{j,l}^{-1}B_{k,j}\rho_{j,l} = 1 \in P_{n+1}(N_{g,p})$;

Portanto, por hipótese de indução, para todo $p + 1 \leq j \leq p + n$ as relações

$$\rho_{k,l}B_{i,j}\rho_{k,l}^{-1} = \begin{cases} B_{i,j}, & \text{se } k < i \text{ ou } j < k \\ \rho_{j,l}^{-1}B_{i,j}^{-1}\rho_{j,l}, & \text{se } k = i \\ \rho_{j,l}^{-1}B_{k,j}^{-1}\rho_{j,l}B_{k,j}^{-1}B_{i,j}B_{k,j}\rho_{j,l}^{-1}B_{k,j}\rho_{j,l}, & \text{se } i < k < j, \end{cases}$$

onde $1 \leq i < k$, $p+1 \leq k \leq p+n$, $k \neq j$ e $1 \leq l \leq g$, são válidas em $P_{n+1}(N_{g,p})$, como representadas nas Figuras 4.36 e 4.37.

Falta-nos as relações do Tipo (3), que serão obtidas reescrevendo os conjugados dos geradores de $\text{Ker}(q)$ dados na equação (4.3) pelos representantes de classes (4.5) em termos do conjunto \tilde{Y} e, dessa forma, vamos cuidar do caso $j = p+n+1$. Vejamos a seguir.

Tipo (3.1): Para todo $1 \leq i, r < s$, $p+1 \leq s \leq p+n$,

$$B_{r,s}B_{i,p+n+1}B_{r,s}^{-1} = \begin{cases} B_{i,p+n+1}, & \text{se } i < r < s \text{ ou } r < s < i \\ B_{s,p+n+1}^{-1} B_{i,p+n+1} B_{s,p+n+1}, & \text{se } i = r < s \\ B_{i,p+n+1}^{-1} B_{r,p+n+1}^{-1} B_{i,p+n+1} B_{r,p+n+1} B_{i,p+n+1}, & \text{se } r < i = s \\ B_{s,p+n+1}^{-1} B_{r,p+n+1}^{-1} B_{s,p+n+1} B_{r,p+n+1} B_{i,p+n+1} B_{r,p+n+1}^{-1} B_{s,p+n+1}^{-1} B_{r,p+n+1} B_{s,p+n+1}, & \\ \text{se } r < i < s. \end{cases}$$

Ver Figura 4.33.

Tipo (3.2): $B_{r,s}\rho_{p+n+1,l}B_{r,s}^{-1} = \rho_{p+n+1,l}$, para todo $1 \leq r < s$ e $p+1 \leq s \leq p+n+1$. Ver Figura 4.36, para $j = p+n+1$.

Tipo (3.3): Para todo $p+1 \leq i \leq p+n$ e $1 \leq k, l \leq g$,

$$\rho_{i,k}\rho_{p+n+1,l}\rho_{i,k}^{-1} = \begin{cases} \rho_{p+n+1,l}, & \text{se } k < l \\ \rho_{p+n+1,k}^{-1} B_{i,p+n+1}^{-1} \rho_{p+n+1,k}^2, & \text{se } k = l \\ \rho_{p+n+1,k}^{-1} B_{i,p+n+1}^{-1} \rho_{p+n+1,k} B_{i,p+n+1}^{-1} \rho_{p+n+1,l} B_{i,p+n+1} \rho_{p+n+1,k}^{-1} B_{i,p+n+1} \rho_{p+n+1,k}, & \text{se } k > l. \end{cases}$$

Ver Figuras 4.38 e 4.39.

Tipo (3.4): Para todo $1 \leq i$, $p+1 \leq k \leq p+n$ e $1 \leq l \leq g$,

$$\rho_{k,l}B_{i,p+n+1}\rho_{k,l}^{-1} = \begin{cases} B_{i,p+n+1}, & \text{se } k < i \\ \rho_{p+n+1,l}^{-1} B_{i,p+n+1}^{-1} \rho_{p+n+1,l}, & \text{se } k = i \\ \rho_{p+n+1,l}^{-1} B_{k,p+n+1}^{-1} \rho_{p+n+1,l} B_{k,p+n+1}^{-1} B_{i,p+n+1} B_{k,p+n+1} \rho_{p+n+1,l}^{-1} B_{k,p+n+1} \rho_{p+n+1,l}, & \text{se } i < k. \end{cases}$$

Ver Figuras 4.36 e 4.37, para $j = p+n+1$.

Portanto, as relações tipo (a) para $P_{n+1}(N_{g,p})$ são obtidas das relações Tipo (2.1) e (3.1); as relações tipo (b) para $P_{n+1}(N_{g,p})$ são obtidas das relações Tipo (2.2) e (3.3); as relações tipo (c) para $P_{n+1}(N_{g,p})$ são obtidas das relações do Tipo (1) e (2.3); por fim, as relações do tipo (d) para $P_{n+1}(N_{g,p})$, são obtidas das relações Tipo (2.4), (3.2) e (3.4), concluindo a apresentação para $P_{n+1}(N_{g,p})$. \square

Corolário 4.8. *Sejam $p, n, g \in \mathbb{Z}$, com $p, n, g \geq 1$. O grupo $P_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$ é isomorfo ao grupo livre abeliano $\mathbb{Z}^{n(g+p-1)}$, onde $P'_n(N_{g,p})$ é o subgrupo comutador de $P_n(N_{g,p})$.*

Demonstração. Sejam $n, p \in \mathbb{Z}$, com $n, p \geq 1$. Pela Proposição 4.6(b) e pelo

Teorema 4.7(b), para todo $p + 1 \leq i < j \leq p + n$ e $1 \leq k, l \leq g$,

$$\rho_{i,k} \rho_{j,l} \rho_{i,k}^{-1} = \begin{cases} \rho_{j,l}, & \text{se } k < l \\ \rho_{j,k}^{-1} B_{i,j}^{-1} \rho_{j,k}^2, & \text{se } k = l \\ \rho_{j,k}^{-1} B_{i,j}^{-1} \rho_{j,k} B_{i,j}^{-1} \rho_{j,l} B_{i,j} \rho_{j,k}^{-1} B_{i,j} \rho_{j,k}, & \text{se } k > l. \end{cases}$$

Consideremos o caso $k = l$, isto nos diz que, $B_{i,j} = 1$ em $P_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$, para todo $p + 1 \leq i < j \leq p + n$ (afim de não carregarmos a notação, usamos de abuso de notação, quando denotamos simplesmente por $B_{i,j}$ o representante de classe $\bar{B}_{i,j}$ em $P_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$). Notemos que a cardinalidade do conjunto dos $B_{r,s}$ restantes é $p \cdot n$, ou seja, $\text{Card}(\{B_{r,s} \mid 1 \leq r \leq p, p + 1 \leq s \leq p + n, r < s\})$ é $p \cdot n$. Sabemos pela Proposição 4.6(c) e pelo Teorema 4.7(c), (“relação de superfície”),

$$\prod_{l=1}^g \rho_{i,l}^2 = B_{1,i} \cdots B_{i-1,i} B_{i,1+i} \cdots B_{i,p+n},$$

para todo $p + 1 \leq i \leq p + n$. Donde

$$B_{1,i} = \prod_{l=1}^g \rho_{i,l}^2 \cdot (B_{2,i} \cdots B_{p,i} B_{i,p+2} \cdots B_{i,p+n})^{-1},$$

para todo $p + 1 \leq i \leq p + n$. Logo, os $B_{1,i}$, para cada $p + 1 \leq i \leq p + n$ são elementos supérfluos no conjunto de geradores, isto é, os $B_{1,i}$'s podem ser retirados do conjunto de geradores de $P_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$. Portanto, os elementos

$$B_{2,p+1}, B_{2,p+2}, \dots, B_{2,p+n}, B_{3,p+1}, B_{3,p+2}, \dots, B_{3,p+n}, \dots, B_{p,p+1}, B_{p,p+2} \cdots, B_{p,p+n}$$

são os únicos geradores do tipo $B_{r,s}$ em $P_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$. Observemos que o conjunto

$$\{B_{2,p+1}, B_{2,p+2}, \dots, B_{2,p+n}, B_{3,p+1}, B_{3,p+2}, \dots, B_{3,p+n}, \dots, B_{p,p+1}, B_{p,p+2} \cdots, B_{p,p+n}\}$$

possui cardinalidade igual a $n(p - 1)$.

As relações do item (d) e (b), da Proposição 4.6 e do Teorema 4.7, respectivamente, nos dizem que

$$\{\rho_{i,k} \mid p + 1 \leq i \leq p + n, 1 \leq k \leq g\}$$

formam um conjunto de $n \cdot g$ geradores livres que comutam e, portanto, concluímos a prova. \square

Observação 4.9. Os geradores $B_{i,j}$, para $p + 1 \leq i < j \leq p + n$, correspondem aos geradores de Artin obtidos pela inclusão geométrica $\mathbb{D}^2 \subseteq N_{g,p}$. Tais geradores são triviais em $P_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$.

4.2 O grupo quociente $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$ é um grupo cristalográfico

Nesta seção vamos mostrar que o quociente $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$ é um grupo cristalográfico. Chamamos atenção para o Teorema [4.15](#), visto que o resultado obtido nesta seção se diferencia do artigo [\[42\]](#), onde os autores provam que o quociente $B_n(X)/P'_n(X)$ não é cristalográfico, quando X é uma superfície não orientável compacta e sem bordo.

Sejam $n, p \in \mathbb{Z}$, com $n, p \geq 1$. O grupo das permutações do conjunto $\{p+1, p+2, \dots, p+n\}$ será denotado por S_n , com a seguinte apresentação:

$$S_n = \left\langle \begin{array}{l} \sigma_{p+1}, \dots, \sigma_{p+n-1} \quad \left| \quad \begin{array}{l} (\sigma_{i+1}\sigma_i)^3 = 1, \quad p+1 \leq i \leq p+n-2 \\ (\sigma_s\sigma_r)^2 = 1, \quad |r-s| \geq 2 \\ \sigma_i^2 = 1, \quad 1 \leq i \leq p+n-1 \end{array} \right. \end{array} \right\rangle. \quad (4.6)$$

Sejam $g, n, p \in \mathbb{Z}$, $g, n, p \geq 1$. Consideremos o homomorfismo sobrejetor

$$\pi: B_n(N_{g,p}) \longrightarrow S_n,$$

que a cada $\beta \in B_n(N_{g,p})$, associa uma permutação $\pi(\beta)$ em S_n . Sabemos que o núcleo do homomorfismo π é $\text{Ker}(\pi) = P_n(N_{g,p})$, donde obtemos a seguinte sequência exata curta:

$$1 \longrightarrow P_n(N_{g,p}) \longrightarrow B_n(N_{g,p}) \xrightarrow{\pi} S_n \longrightarrow 1. \quad (4.7)$$

A partir da apresentação do grupo de tranças puras $P_n(N_{g,p})$ da superfície $N_{g,p}$ dada no Teorema [4.7](#), da apresentação do grupo simétrico S_n dada na equação [\(4.6\)](#), e da sequência exata curta da equação [\(4.7\)](#), exibiremos no Teorema [4.10](#) uma apresentação para o grupo de tranças (total) $B_n(N_{g,p})$ da superfície $N_{g,p}$. Embora uma apresentação desse grupo já apareça na literatura, como podemos ver em [\[5, Teorema A.2\]](#), vamos dar uma apresentação aqui que seja “compatível” com a dada para o grupo de tranças puras no Teorema [4.7](#), por motivos técnicos a serem desenvolvidos na conexão entre grupos de tranças sobre essas superfícies e grupos cristalográficos. A técnica usada para demonstrar o Teorema [4.10](#) será a aplicação do Teorema [1.7](#).

Teorema 4.10. *Sejam $g, n, p \in \mathbb{Z}$, $g, n, p \geq 1$. O grupo de tranças $B_n(N_{g,p})$ admite a seguinte apresentação:*

Geradores: $\sigma_{p+1}, \dots, \sigma_{p+n-1}$, $B_{i,j}$ e $\rho_{r,k}$, onde $1 \leq i < j$, $p+1 \leq j$, $r \leq p+n$ e $1 \leq k \leq g$.

Relações:

(a) *As relações de Artin entre os $B_{i,j}$ que decorrem do $P_n(\mathbb{D}^2)$:*

$$B_{r,s}B_{i,j}B_{r,s}^{-1} = \begin{cases} B_{i,j}, & \text{se } i < r < s < j \\ & \text{ou } r < s < i < j \\ B_{s,j}^{-1}B_{i,j}B_{s,j}, & \text{se } i = r < s < j \\ B_{i,j}^{-1}B_{r,j}^{-1}B_{i,j}B_{r,j}B_{i,j}, & \text{se } r < i = s < j \\ B_{s,j}^{-1}B_{r,j}^{-1}B_{s,j}B_{r,j}B_{i,j}B_{r,j}^{-1}B_{s,j}^{-1}B_{r,j}B_{s,j}, & \text{se } r < i < s < j. \end{cases}$$

(b) Para todo $p+1 \leq i < j \leq p+n$ e $1 \leq k, l \leq g$,

$$\rho_{i,k}\rho_{j,l}\rho_{i,k}^{-1} = \begin{cases} \rho_{j,l}, & \text{se } k < l \\ \rho_{j,k}^{-1}B_{i,j}^{-1}\rho_{j,k}^2, & \text{se } k = l \\ \rho_{j,k}^{-1}B_{i,j}^{-1}\rho_{j,k}B_{i,j}^{-1}\rho_{j,l}B_{i,j}\rho_{j,k}^{-1}B_{i,j}\rho_{j,k}, & \text{se } k > l. \end{cases}$$

(c) Para todo $p+1 \leq i \leq p+n$, a “relação de superfície”

$$\prod_{l=1}^g \rho_{i,l}^2 = B_{1,i} \cdots B_{i-1,i} B_{i,1+i} \cdots B_{i,p+n}.$$

(d) Para todo $1 \leq i < j$, $p+1 \leq j, k \leq p+n$, $k \neq j$ e $1 \leq l \leq g$,

$$\rho_{k,l}B_{i,j}\rho_{k,l}^{-1} = \begin{cases} B_{i,j}, & \text{se } k < i \text{ ou } j < k \\ \rho_{j,l}^{-1}B_{i,j}^{-1}\rho_{j,l}, & \text{se } k = i \\ \rho_{j,l}^{-1}B_{k,j}^{-1}\rho_{j,l}B_{k,j}^{-1}B_{i,j}B_{k,j}\rho_{j,l}^{-1}B_{k,j}\rho_{j,l}, & \text{se } i < k < j. \end{cases}$$

(e)

$$\begin{aligned} (\sigma_{i+1}\sigma_i)^{-3} &= B_{i,i+1}B_{i,i+2}B_{i+1,i+2}, & p+1 \leq i \leq p+n-2 \\ (\sigma_r\sigma_s)^2 &= B_{r,r+1}^{-1}B_{s,s+1}^{-1}, & |r-s| \geq 2 \text{ e } p+1 \leq r \neq s \leq p+n-1 \\ \sigma_i^2 &= B_{i,i+1}^{-1}, & p+1 \leq i \leq p+n-1 \end{aligned}$$

(f) Para todo $p+1 \leq i, k \leq p+n$ e $1 \leq l \leq g$,

$$\sigma_k\rho_{i,l}\sigma_k^{-1} = \begin{cases} \rho_{i,l}, & \text{se } k \neq i, i-1 \\ \rho_{i-1,l}, & \text{se } k = i-1 \\ \rho_{i,l}^{-1}\sigma_i^2\rho_{i,l}\sigma_i^2\rho_{i+1,l}, & \text{se } k = i. \end{cases}$$

(g) Para todo $1 \leq i < j$, $1 \leq p$ e $p+1 \leq j, k \leq p+n+1$,

$$\sigma_kB_{i,j}\sigma_k^{-1} = \begin{cases} B_{i,j}, & \text{se } k \neq i-1, i, j-1, j \\ B_{i,j-1}, & \text{se } j-1 = k \\ B_{i,j}B_{i,j+1}B_{i,j}^{-1}, & \text{se } j = k \\ B_{i-1,j}, & \text{se } i-1 = k < j-1 \\ B_{i-1,j}B_{i,j}B_{i-1,j}^{-1}, & \text{se } i = k. \end{cases}$$

Demonstração. Sejam $n, p \in \mathbb{Z}$, com $n, p \geq 1$. Consideremos as apresentações de

$P_n(N_{g,p})$ e S_n , exibidas no Teorema 4.7 e na equação (4.6), respectivamente. Aplicando o Teorema 1.7 à seqüência exata curta (4.7)

$$1 \longrightarrow P_n(N_{g,p}) \xrightarrow{\iota} B_n(N_{g,p}) \xrightarrow{\pi} S_n \longrightarrow 1,$$

obtemos o conjunto $\tilde{Y} \cup \tilde{X}$ de geradores de $B_n(N_{g,p})$, onde

$$\tilde{Y} = \{B_{i,j}, \rho_{r,k} \mid 1 \leq i < j, p+1 \leq r \leq p+n \text{ e } 1 \leq k \leq g\}$$

é um conjunto obtido simplesmente pela imagem direta dos geradores de $P_n(N_{g,p})$ pela inclusão ι ; e

$$\tilde{X} = \{\sigma_{p+1}, \dots, \sigma_{p+n-1}\}$$

é um conjunto dos representantes de classes de $\frac{B_n(N_{g,p})}{P_n(N_{g,p})}$.

Ainda pelo Teorema 1.7, temos três tipos de relações em $B_n(N_{g,p})$. Vejamos:

Tipo (1): As imagens $\iota(R_t)$, das relações R_t da apresentação de $P_n(N_{g,p})$, pela inclusão ι , ou seja, as relações de $P_n(N_{g,p})$ serão levadas em $B_n(N_{g,p})$;

Tipo (2): Considerando a apresentação (4.6) de S_n , reescrevendo as relações em termos dos geradores $B_{i,j}$ de $P_n(N_{g,p})$, obtemos

$$\begin{aligned} (\sigma_{i+1}\sigma_i)^{-3} &= B_{i,i+1}B_{i,i+2}B_{i+1,i+2}, & p+1 \leq i \leq p+n-2 \\ (\sigma_r\sigma_s)^2 &= B_{r,r+1}^{-1}B_{s,s+1}^{-1}, & |r-s| \geq 2 \text{ e } p+1 \leq r \neq s \leq p+n-1 \\ \sigma_i^2 &= B_{i,i+i}^{-1}, & p+1 \leq i \leq p+n-1 \end{aligned}$$

Tipo (3): Finalmente, como $P_n(N_{g,p})$ é um subgrupo normal em $B_n(N_{g,p})$, cada conjugação xyx^{-1} , com $x \in \tilde{X}$ e $y \in \tilde{Y}$, será reescrita em termos dos elementos de \tilde{Y} . Vamos dividir as conjugações em dois casos, são eles:

Caso (3.1) Sejam $i, s, l \in \mathbb{Z}, i, j \geq p+1$ e $1 \leq l \leq g$, consideremos como primeiro caso as conjugações da forma

$$\sigma_i \rho_{s,l} \sigma_i^{-1}.$$

Na igualdade $\rho_{k,l} B_{i,j} \rho_{k,l}^{-1} = \rho_{j,1}^{-1} B_{i,1} \rho_{j,1}$ do Teorema 4.7 (d), quando $k = i$, suponha que $j = i+1$ e $1 \leq l \leq g$, logo

$$\rho_{i,l} B_{i,i+1} \rho_{i,l}^{-1} = \rho_{i+1,l}^{-1} B_{i,i+1} \rho_{i+1,l}.$$

Como $B_{i,i+1} = \sigma_i^{-2}$ pela equação (4.1), então

$$\rho_{i,l} \sigma_i^{-2} \rho_{i,l}^{-1} = \rho_{i+1,l}^{-1} \sigma_i^2 \rho_{i+1,l}.$$

Donde,

$$\rho_{i,l} \sigma_i^{-1} = \rho_{i+1,l}^{-1} \sigma_i^2 \rho_{i+1,l} \cdot \rho_{i,l} \sigma_i,$$

implicando que

$$\sigma_i \cdot \rho_{i,l} \sigma_i^{-1} = \sigma_i \cdot \rho_{i+1,l}^{-1} \sigma_i^2 \rho_{i+1,l} \rho_{i,l} \sigma_i,$$

para todo $p+1 \leq i$ e $1 \leq l \leq g$. Podemos verificar por meio da Figura 4.40 que $\sigma_i^{-1} \rho_{i,l} \sigma_i = \rho_{i+1,l}$. Logo,

$$\begin{aligned} \sigma_i \rho_{i,l} \sigma_i^{-1} &= \sigma_i \rho_{i+1,l}^{-1} \sigma_i^2 \rho_{i+1,l} \rho_{i,l} \sigma_i \\ &= \sigma_i \cdot \sigma_i^{-1} \rho_{i,l}^{-1} \sigma_i \cdot \sigma_i^2 \sigma_i^{-1} \rho_{i,l} \sigma_i \rho_{i,l} \sigma_i \\ &= \rho_{i,l}^{-1} \sigma_i^2 \rho_{i,l} \sigma_i \rho_{i,l} \sigma_i \\ &= \rho_{i,l}^{-1} \sigma_i^2 \rho_{i,l} \sigma_i \sigma_i \cdot \sigma_i^{-1} \rho_{i,l} \sigma_i \\ &= \rho_{i,l}^{-1} \sigma_i^2 \rho_{i,l} \sigma_i^2 \rho_{i+1,l}, \end{aligned}$$

para todo $p+1 \leq i$ e $1 \leq l \leq g$. Agora, se $k \neq i, i+1$ então $\sigma_k \rho_{i,l} \sigma_k^{-1} = \rho_{i,l}$.

Caso (3.2) Sejam $i, j, k, p \in \mathbb{Z}$, tais que $1 \leq i < j$, $1 \leq p$ e $p+1 \leq j, k \leq p+n+1$. Então

$$\sigma_k^{-1} B_{i,j} \sigma_k = \begin{cases} B_{i,j}, & \text{se } k \neq i-1, i, j-1, j \\ B_{i,j+1}, & \text{se } j = k \\ B_{i,j}^{-1} B_{i,j-1} B_{i,j}, & \text{se } j = k+1 \\ B_{i+1,j}, & \text{se } i = k < j-1 \\ B_{i,j}^{-1} B_{i-1,j} B_{i,j}, & \text{se } i = k+1. \end{cases} \quad (4.8)$$

Como estamos conjugando à esquerda, reescrevemos (4.8):

$$\sigma_k B_{i,j} \sigma_k^{-1} = \begin{cases} B_{i,j}, & \text{se } k \neq i-1, i, j-1, j \\ B_{i,j-1}, & \text{se } j-1 = k \\ B_{i,j} B_{i,j+1} B_{i,j}^{-1}, & \text{se } j = k \\ B_{i-1,j}, & \text{se } i-1 = k < j-1 \\ B_{i-1,j} B_{i,j} B_{i-1,j}^{-1}, & \text{se } i = k. \end{cases}$$

□

Observação 4.11.

(a) Em [5, Teorema A.2], encontra-se uma outra apresentação de $B_n(N_{g,p})$, em termos dos geradores do Teorema 4.4, quando $g, p, n \in \mathbb{N}$, $g \geq 2$ e $p, n \geq 1$.

(b) Como $(\sigma_{p+1}^{-1} \sigma_{p+2}^{-1} \cdots \sigma_{p+n-1}^{-1})^n \in P_n(N_{g,p})$ é o full-twist do grupo de Artin, ver equação (1.1), temos

$$(\sigma_{p+1}^{-1} \sigma_{p+2}^{-1} \cdots \sigma_{p+n-1}^{-1})^n = \prod_{j=p+2}^{p+n-1} \left(\prod_{i=p+1}^{j-1} B_{i,j} \right),$$

onde $B_{i,j} = \sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-2} \sigma_{i+1} \cdots \sigma_{j-1}$ são geradores do grupo de tranças puras de $P_n(N_{g,p})$. Da Proposição 4.6(b) e do Teorema 4.7(b), para todo $p+1 \leq i < j \leq p+n$ e

$1 \leq k, l \leq g,$

$$\rho_{i,k}\rho_{j,l}\rho_{i,k}^{-1} = \begin{cases} \rho_{j,l}, & \text{se } k < l \\ \rho_{j,k}^{-1}B_{i,j}^{-1}\rho_{j,k}^2, & \text{se } k = l \\ \rho_{j,k}^{-1}B_{i,j}^{-1}\rho_{j,k}B_{i,j}^{-1}\rho_{j,l}B_{i,j}\rho_{j,k}^{-1}B_{i,j}\rho_{j,k}, & \text{se } k > l. \end{cases}$$

Considerando o caso $k = l$, temos $B_{i,j} = 1$ em $P_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$, para todo $p + 1 \leq i < j \leq p + n$. Como consequência de [59], Capítulo 2, Exercício 4.1], temos

$$(\sigma_{p+1}\sigma_{p+2}\cdots\sigma_{p+n-1})^n = (\sigma_{p+n-1}\sigma_{p+n-2}\cdots\sigma_{p+1})^n.$$

Portanto,

$$(\sigma_{p+1}\sigma_{p+2}\cdots\sigma_{p+n-1})^n = 1$$

em $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$.

Como consequência do Teorema 4.10, podemos descrever a ação por conjugação de $B_n(N_{g,p})$ em $P_n(N_{g,p})$, usando os conjuntos de geradores dados na apresentação de $B_n(N_{g,p})$ e $P_n(N_{g,p})$, descritos no Teorema 4.10 e Teorema 4.7, respectivamente.

Corolário 4.12. *A ação do grupo de tranças $B_n(N_{g,p})$ no grupo de tranças puras $P_n(N_{g,p})$ descritas em seus geradores presentes nos Teoremas 4.10 e 4.7, respectivamente, é dada por:*

(a) Para todo $1 \leq i < j$ e $p + 1 \leq j, r \leq p + n$,

$$B_{r,s}B_{i,j}B_{r,s}^{-1} = \begin{cases} B_{i,j}, & \text{se } i < r < s < j. \text{ ou } r < s < i < j. \\ B_{s,j}^{-1}B_{i,j}B_{s,j}, & \text{se } i = r < s < j. \\ B_{i,j}^{-1}B_{r,j}^{-1}B_{i,j}B_{r,j}B_{i,j}, & \text{se } r < i = s < j. \\ B_{s,j}^{-1}B_{r,j}^{-1}B_{s,j}B_{r,j}B_{i,j}B_{r,j}^{-1}B_{s,j}^{-1}B_{r,j}B_{s,j}, & \text{se } r < i < s < j. \end{cases}$$

(b) Para todo $p + 1 \leq i < j \leq p + n$ e $1 \leq k, l \leq g$,

$$\rho_{i,k}\rho_{j,l}\rho_{i,k}^{-1} = \begin{cases} \rho_{j,l}, & \text{se } k < l \\ \rho_{j,k}^{-1}B_{i,j}^{-1}\rho_{j,k}^2, & \text{se } k = l \\ \rho_{j,k}^{-1}B_{i,j}^{-1}\rho_{j,k}B_{i,j}^{-1}\rho_{j,l}B_{i,j}\rho_{j,k}^{-1}B_{i,j}\rho_{j,k}, & \text{se } k > l. \end{cases}$$

(c) Para todo $1 \leq i < j$, $p + 1 \leq j, k \leq p + n$, $k \neq j$ e $1 \leq l \leq g$,

$$\rho_{k,l}B_{i,j}\rho_{k,l}^{-1} = \begin{cases} B_{i,j}, & \text{se } k < i \text{ ou } j < k \\ \rho_{j,l}^{-1}B_{i,j}^{-1}\rho_{j,l}, & \text{se } k = i \\ \rho_{j,l}^{-1}B_{k,j}^{-1}\rho_{j,l}B_{k,j}^{-1}B_{i,j}B_{k,j}\rho_{j,l}^{-1}B_{k,j}\rho_{j,l}, & \text{se } i < k < j. \end{cases}$$

(d) Para todo $p + 1 \leq i, k \leq p + n - 1$ e $1 \leq l \leq g$,

$$\sigma_k \rho_{i,l} \sigma_k^{-1} = \begin{cases} \rho_{i,l}, & \text{se } k \neq i, i-1 \\ \rho_{i-1,l}, & \text{se } k = i-1 \\ \rho_{i,l}^{-1} \sigma_i^2 \rho_{i,l} \sigma_i^2 \rho_{i+1,l}, & \text{se } k = i. \end{cases}$$

(e) Para todo $1 \leq i < j$, $1 \leq p$ e $p+1 \leq j$, $k \leq p+n-1$,

$$\sigma_k B_{i,j} \sigma_k^{-1} = \begin{cases} B_{i,j}, & \text{se } k \neq i-1, i, j-1, j \\ B_{i,j-1}, & \text{se } j-1 = k \\ B_{i,j} B_{i,j+1} B_{i,j}^{-1}, & \text{se } j = k \\ B_{i-1,j}, & \text{se } i-1 = k < j-1 \\ B_{i-1,j} B_{i,j} B_{i-1,j}^{-1}, & \text{se } i = k. \end{cases}$$

Demonstração. Os itens (a), (b), (c), (d) e (e) deste corolário são obtidos diretamente das relações Tipo (1) e (3) presentes na demonstração do Teorema 4.10. \square

Observação 4.13.

(a) Seja $\pi: B_n(N_{g,p}) \rightarrow S_n$ o homomorfismo, definido por $\pi(B_{i,p+1}) = \pi(\rho_{p+1,k}) = 1$ e $\pi(\sigma_j) = (j, j+1)$, para todo $1 \leq i \leq p$, $1 \leq k \leq g$ e $p+1 \leq j \leq p+n-1$. Pela Observação 1.12(b), temos $P'_n(N_{g,p}) \trianglelefteq B_n(N_{g,p})$, pois $P_n(N_{g,p})$ é subgrupo característico de $B_n(N_{g,p})$. Agora, passando ao quociente da sequência exata curta (4.7)

$$1 \rightarrow P_n(N_{g,p}) \rightarrow B_n(N_{g,p}) \xrightarrow{\pi} S_n \rightarrow 1$$

e pelo Corolário 4.8, como $P_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p}) \cong \mathbb{Z}^{(g+p-1)n}$, obtemos a sequência exata curta

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}^{(g+p-1)n} \rightarrow B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p}) \xrightarrow{\bar{\pi}} S_n \rightarrow 1. \quad (4.9)$$

(b) Quando denotamos a classe de $\bar{B}_{i,j}$ (ou $\bar{\rho}_{j,k}$) em $P_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p}) \cong \mathbb{Z}^{(g+p-1)n}$, por simplesmente $B_{i,j}$ (ou $\rho_{j,k}$) há um abuso de linguagem. A partir de agora cometeremos esse abuso de notação, o intuito é de não carregarmos a notação.

A representação inteira tem um papel fundamental no Lema 1.15, ou seja, quando buscamos usar a caracterização algébrica de grupos cristalográficos tal homomorfismo é crucial na determinação de um grupo ser, ou não, cristalográfico. O próximo resultado vem nessa direção, nos apresentando uma descrição da representação inteira φ de S_n em $\text{Aut}\left(\frac{P_n(N_{g,p})}{P'_n(N_{g,p})}\right)$, induzida por conjugação de $\frac{B_n(N_{g,p})}{P'_n(N_{g,p})}$ em $\frac{P_n(N_{g,p})}{P'_n(N_{g,p})}$, descrita em seus geradores.

Lema 4.14. *Sejam g, n, p inteiros positivos. Consideremos a representação inteira*

$$\varphi: S_n \rightarrow \text{Aut}\left(\frac{P_n(N_{g,p})}{P'_n(N_{g,p})}\right),$$

induzida por conjugação de $\frac{B_n(N_{g,p})}{P'_n(N_{g,p})}$ em $\frac{P_n(N_{g,p})}{P'_n(N_{g,p})}$. A representação φ é dada por

$$\begin{aligned}\varphi(\tau)(B_{i,j}) &= \alpha B_{i,j} \alpha^{-1} = B_{i,\tau(j)} \\ &\text{e} \\ \varphi(\tau)(\rho_{s,k}) &= \alpha \rho_{s,k} \alpha^{-1} = \rho_{\tau(s),k},\end{aligned}$$

onde $B_{i,j}, \rho_{s,k} \in P_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$, para todo $1 \leq i \leq p, p+1 \leq j, s \leq p+n$ e $1 \leq k \leq g$, com $\alpha \in B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$ tal que $\bar{\pi}(\alpha^{-1}) = \tau \in S_n$.

Demonstração. Sejam $g, n, p \in \mathbb{Z}, g, n, p \geq 1$. Consideremos o epimorfismo $\bar{\pi}: B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p}) \rightarrow S_n$ dado na equação (4.9).

Se $\alpha \in P_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$, o resultado segue trivialmente dos itens (a), (b) e (c) do Corolário 4.12. Agora, suponhamos

$$\alpha = \sigma_{k_1}^{\epsilon_1} \sigma_{k_2}^{\epsilon_2} \cdots \sigma_{k_r}^{\epsilon_r} \in B_n(N_{g,p}) \setminus P_n(N_{g,p}),$$

onde $\epsilon_1, \dots, \epsilon_r \in \{-1, +1\}$ e $p+1 \leq k_1, k_2, \dots, k_r \leq p+n-1$. Provaremos este resultado usando o Princípio de Indução Finita em r .

Se $r = 1$, $\alpha = \sigma_{k_1}^{\epsilon_1}$ em $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$, com $\epsilon_1 \in \{-1, +1\}$ e $\tau = \bar{\pi}(\alpha^{-1})$ em S_n . Do Corolário 4.12, itens (d) e (e), temos

Caso 1: Quando $k_1 = j - 1$,

$$\begin{aligned}\sigma_{k_1}^{\epsilon_1} \rho_{j,k} \sigma_{k_1}^{-\epsilon_1} &= \rho_{j-1,k} = \rho_{\tau(j),k}, \\ &\text{e} \\ \sigma_{k_1}^{\epsilon_1} B_{i,j} \sigma_{k_1}^{-\epsilon_1} &= B_{i,j-1} = B_{i,\tau(j)},\end{aligned}$$

em $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$, onde $\tau = (j - 1, j) = \bar{\pi}(\sigma_{k_1}^{\epsilon_1}) \in S_n$.

Caso 2: Quando $k_1 = j$,

$$\begin{aligned}\sigma_{k_1}^{\epsilon_1} \rho_{j,k} \sigma_{k_1}^{-\epsilon_1} &= \rho_{j,k}^{-1} \sigma_j^2 \rho_{j,k} \sigma_j^2 \rho_{j+1,k} = \rho_{j,k}^{-1} \sigma_j^2 \rho_{j,k} \sigma_j^2 \rho_{\tau(j),k}, \\ &\text{e} \\ \sigma_{k_1}^{\epsilon_1} B_{i,j} \sigma_{k_1}^{-\epsilon_1} &= B_{i,j} B_{i,j+1} B_{i,j}^{-1} = B_{i,j} B_{i,\tau(j)} B_{i,j}^{-1},\end{aligned}$$

em $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$, onde $\tau = (j, j + 1) = \bar{\pi}(\sigma_{k_1}^{\epsilon_1}) \in S_n$. Pelo Teorema 4.10 (e) temos $\sigma_j^2 = B_{j,j+1}^{-1}$, para todo $p+1 \leq j \leq p+n$. Da Proposição 4.6(b) e do Teorema 4.7(b), para todo $p+1 \leq i < j \leq p+n$ e $1 \leq k, l \leq g$,

$$\rho_{i,k} \rho_{j,l} \rho_{i,k}^{-1} = \begin{cases} \rho_{j,l}, & \text{se } k < l \\ \rho_{j,k}^{-1} B_{i,j}^{-1} \rho_{j,k}^2, & \text{se } k = l \\ \rho_{j,k}^{-1} B_{i,j}^{-1} \rho_{j,k} B_{i,j}^{-1} \rho_{j,l} B_{i,j} \rho_{j,k}^{-1} B_{i,j} \rho_{j,k}, & \text{se } k > l. \end{cases}$$

Consideremos o caso $k = l$, logo $B_{i,j} = 1$ em $P_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$, para todo $p+1 \leq i < j \leq p+n$. Logo $\sigma_j^2 = 1$, $[\rho_{j,k}, \rho_{s,k}] = 1$ e $[B_{i,j}, B_{r,s}] = 1$ em $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$, para todo $p+1 \leq j, s \leq p+n$ e $1 \leq k \leq g$. Donde,

$$\begin{aligned} \sigma_{k_1}^{\epsilon_1} \rho_{j,k} \sigma_{k_1}^{-\epsilon_1} &= \rho_{j,k}^{-1} \sigma_j^2 \rho_{j,k} \sigma_j^2 \rho_{\tau(j),k} = \rho_{j,k}^{-1} \cdot 1 \cdot \rho_{j,k} \cdot 1 \cdot \rho_{\tau(j),k} = \rho_{\tau(j),k}, \\ &\text{e} \\ \sigma_{k_1}^{\epsilon_1} B_{i,j} \sigma_{k_1}^{-\epsilon_1} &= B_{i,j} B_{i,\tau(j)} B_{i,j}^{-1} = B_{i,j} \cdot B_{i,j}^{-1} B_{i,\tau(j)} = B_{i,\tau(j)}, \end{aligned}$$

em $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$, onde $\tau = (j, j+1) = \bar{\pi}(\sigma_{k_1}^{\epsilon_1}) \in S_n$.

Caso 3: Quando $k_1 \neq j, j-1$,

$$\begin{aligned} \sigma_{k_1}^{\epsilon_1} \rho_{j,k} \sigma_{k_1}^{-\epsilon_1} &= \rho_{j,k} = \rho_{\tau(j),k}, \\ &\text{e} \\ \sigma_{k_1}^{\epsilon_1} B_{i,j} \sigma_{k_1}^{-\epsilon_1} &= B_{i,j} = B_{i,\tau(j)}, \end{aligned}$$

em $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$, onde $\tau = (k_1, k_1+1) = \bar{\pi}(\sigma_{k_1}^{\epsilon_1}) \in S_n$.

Agora, suponhamos por hipótese de indução que, se $\alpha = \sigma_{k_1}^{\epsilon_1} \sigma_{k_2}^{\epsilon_2} \cdots \sigma_{k_r}^{\epsilon_r}$ em $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$, onde $r > 1$, $\epsilon_1, \dots, \epsilon_r \in \{-1, +1\}$, $p+1 \leq k_1, \dots, k_r \leq p+n-1$ e $\bar{\pi}(\alpha^{-1}) = \tau \in S_n$, então as igualdades

$$\begin{aligned} \alpha B_{i,j} \alpha^{-1} &= B_{i,\tau(j)} \\ &\text{e} \\ \alpha \rho_{s,k} \alpha^{-1} &= \rho_{\tau(s),k}, \end{aligned}$$

são válidas.

Sejam $\beta = \sigma_{k_1}^{\epsilon_1} \sigma_{k_2}^{\epsilon_2} \cdots \sigma_{k_r}^{\epsilon_r} \sigma_{k_{r+1}}^{\epsilon_{r+1}}$ em $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$ e $\sigma = \bar{\pi}(\beta^{-1}) \in S_n$, então, para todo $1 \leq i \leq p$ e $p+1 \leq j \leq p+n$,

$$\begin{aligned} \beta B_{i,j} \beta^{-1} &= (\sigma_{k_1}^{\epsilon_1} \sigma_{k_2}^{\epsilon_2} \cdots \sigma_{k_r}^{\epsilon_r} \sigma_{k_{r+1}}^{\epsilon_{r+1}}) B_{i,j} (\sigma_{k_1}^{\epsilon_1} \sigma_{k_2}^{\epsilon_2} \cdots \sigma_{k_r}^{\epsilon_r} \sigma_{k_{r+1}}^{\epsilon_{r+1}})^{-1} \\ &= (\sigma_{k_1}^{\epsilon_1} \sigma_{k_2}^{\epsilon_2} \cdots \sigma_{k_r}^{\epsilon_r}) \sigma_{k_{r+1}}^{\epsilon_{r+1}} B_{i,j} \sigma_{k_{r+1}}^{-\epsilon_{r+1}} (\sigma_{k_1}^{\epsilon_1} \sigma_{k_2}^{\epsilon_2} \cdots \sigma_{k_r}^{\epsilon_r})^{-1} \\ &= \alpha B_{i,\bar{\pi}(\sigma_{k_{r+1}}^{-\epsilon_{r+1}})}(j) \alpha^{-1} \\ &= B_{i,\bar{\pi}(\alpha^{-1})\bar{\pi}(\sigma_{k_{r+1}}^{-\epsilon_{r+1}})}(j) \\ &= B_{i,\bar{\pi}((\sigma_{k_1}^{\epsilon_1} \sigma_{k_2}^{\epsilon_2} \cdots \sigma_{k_r}^{\epsilon_r})^{-1})\bar{\pi}(\sigma_{k_{r+1}}^{-\epsilon_{r+1}})}(j) \\ &= B_{i,\bar{\pi}(\sigma_{k_{r+1}}^{-\epsilon_{r+1}}(\sigma_{k_1}^{\epsilon_1} \sigma_{k_2}^{\epsilon_2} \cdots \sigma_{k_r}^{\epsilon_r})^{-1})}(j) \\ &= B_{i,\bar{\pi}((\sigma_{k_1}^{\epsilon_1} \sigma_{k_2}^{\epsilon_2} \cdots \sigma_{k_r}^{\epsilon_r} \sigma_{k_{r+1}}^{\epsilon_{r+1}})^{-1})}(j) \\ &= B_{i,\bar{\pi}(\beta^{-1})}(j) \\ &= B_{i,\sigma}(j) \end{aligned}$$

Logo, $\beta B_{i,j} \beta^{-1} = B_{i,\sigma(j)}$ em $P_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$. Analogamente, para $1 \leq k \leq g$ e $p+1 \leq s \leq p+n$, provamos que $\alpha \rho_{s,k} \alpha^{-1} = \rho_{\tau(s),k}$ em $P_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$.

Portanto, pelo Princípio de Indução Finita, para todo $p+1 \leq j, s \leq p+n$ e $1 \leq k \leq g$ segue que

$$\begin{aligned}\alpha B_{i,j} \alpha^{-1} &= B_{i,\tau(j)} \\ \alpha \rho_{s,k} \alpha^{-1} &= \rho_{\tau(s),k},\end{aligned}$$

onde $\alpha \in B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$ e $\bar{\pi}(\alpha^{-1}) = \tau$. □

O próximo resultado apresenta a conexão do grupo de tranças de superfícies não orientáveis finitamente perfuradas e grupos cristalográficos.

Teorema 4.15. *Sejam $g, n, p \in \mathbb{Z}$, $g, n, p \geq 1$. Existe uma sequência exata curta*

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^{(g+p-1)n} \longrightarrow B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p}) \xrightarrow{\bar{\pi}} S_n \longrightarrow 1$$

e o grupo

$$B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$$

é um grupo cristalográfico.

Demonstração. Sejam $g, n, p \in \mathbb{Z}$ e $g, n, p \geq 1$. Suponhamos $n = 1$. Sabemos que o grupo fundamental da superfície $N_{g,p}$ é isomorfo ao grupo de tranças $B_1(N_{g,p})$. Além disso, $B_1(N_{g,p}) = P_1(N_{g,p})$. Logo,

$$B_1(N_{g,p})/P'_1(N_{g,p}) \cong \pi_1(N_{g,p})/[\pi_1(N_{g,p}), \pi_1(N_{g,p})].$$

Pelo Teorema de Seifert–van Kampen sabemos que $\pi_1(N_{g,p})$ é isomorfo ao grupo livre $F[x_1, x_2, \dots, x_{g+p-1}]$, logo

$$\pi_1(N_{g,p})/[\pi_1(N_{g,p}), \pi_1(N_{g,p})] \cong \mathbb{Z}^{g+p-1}$$

e, portanto,

$$B_1(N_{g,p})/P'_1(N_{g,p}) \cong \mathbb{Z}^{g+p-1}.$$

Agora, para $n \geq 2$, tomemos a sequência exata curta (4.9)

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^{(g+p-1)n} \longrightarrow B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p}) \xrightarrow{\bar{\pi}} S_n \longrightarrow 1$$

e o homomorfismo $\varphi: S_n \longrightarrow \text{Aut}(P_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p}))$, dado pelo Lema 4.14. Então, para todo $1 \leq i \leq p$, $p+1 \leq j, s \leq p+n$ e $1 \leq k \leq g$,

$$\varphi(\tau)(B_{i,j}) = \alpha B_{i,j} \alpha^{-1} = B_{i,\tau(j)} = B_{i,j}$$

e

$$\varphi(\tau)(\rho_{s,k}) = \alpha \rho_{s,k} \alpha^{-1} = \rho_{\tau(s),k} = \rho_{s,k},$$

se, e somente se, τ é a permutação identidade em S_n . Logo, φ é uma representação fiel. Sendo assim, pelo Lema 1.15, o grupo $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$ é cristalográfico. \square

Buscando conhecer melhor o grupo quociente $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$ o próximo teorema nos dá uma apresentação para este quociente. Como consequência direta do Teorema 4.16 temos o Corolário 4.17, nos mostrando que o grupo cristalográfico $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$ é produto semidireto de dois grupos já bem conhecidos na literatura e, portanto, nos permitindo obter mais informações sobre a estrutura do grupo quociente aqui estudado.

Teorema 4.16. *Sejam $g, n, p \in \mathbb{Z}$, $g, n, p \geq 1$. O grupo $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$ admite a seguinte apresentação:*

Geradores: $\sigma_{p+1}, \dots, \sigma_{p+n}, B_{2,p+1}, \dots, B_{p,p+1}, \rho_{p+1,1}, \rho_{p+1,2}, \dots, \rho_{p+1,g}$.

Relações:

(a) *Relações de Artin*

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, & p+1 \leq i \leq p+n-2 \\ \sigma_r \sigma_s &= \sigma_r \sigma_s, & |r-s| \geq 2 \text{ e } p+1 \leq r \neq s \leq p+n-1. \end{aligned}$$

(b) $\sigma_i^2 = 1$, para todo $p+1 \leq i \leq p+n-1$.

(c) Para todo $2 \leq i, r \leq p, p+1 \leq j_1, j_2, s, t \leq p+n$ e $1 \leq k, l \leq g$,

$$[B_{i,j_1}, B_{r,j_2}] = 1, [B_{i,p+1}, \rho_{s,k}] = 1 \text{ e } [\rho_{s,k}, \rho_{t,l}] = 1.$$

(d) Para todo $2 \leq i \leq p$ e $p+1 \leq j \leq p+n-1$,

$$\sigma_k B_{i,j} \sigma_k^{-1} = \begin{cases} B_{i,j-1}, & \text{se } k = j-1, \\ B_{i,j}, & \text{se } k \neq j-1, j, \\ B_{i,j+1}, & \text{se } k = j. \end{cases}$$

(e) Para todo $p+1 \leq j \leq p+n-1$,

$$\sigma_k \rho_{j,l} \sigma_k^{-1} = \begin{cases} \rho_{j-1,l}, & \text{se } k = j-1, \\ \rho_{j,l}, & \text{se } k \neq j-1, j, \\ \rho_{j+1,l}, & \text{se } k = j. \end{cases}$$

Demonstração. Sejam $g, n, p \in \mathbb{Z}$, tais que $g, n, p \geq 1$. Consideremos a sequência exata curta do Teorema 4.15

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^{(g+p-1)n} \longrightarrow B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p}) \xrightarrow{\bar{\pi}} S_n \longrightarrow 1.$$

Nosso objetivo é encontrar uma apresentação para o grupo quociente $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$, para isto aplicaremos o Teorema 1.7. Pelo método dado no Teorema 1.7, obtemos um

conjunto de geradores $\tilde{Y} \cup \tilde{X}$ do grupo $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$, onde

$$\tilde{Y} = \{B_{i,j}, \rho_{j,k} \mid 2 \leq i \leq p, p+1 \leq j \leq p+n, 1 \leq k \leq g\}$$

é o conjunto obtido pela imagem direta da inclusão dos geradores de $P_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$ em $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$; e

$$\tilde{X} = \{\sigma_{p+1}, \dots, \sigma_{p+n-1}\}$$

é um conjunto dos representantes de classes de $\frac{B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})}{P_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})}$.

Pelo Teorema 1.7, temos três tipos de relações em $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$, são elas:

Tipo(1): A partir das inclusões dos geradores $B_{i,j}$ e $\rho_{j,k}$ de $P_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$ em $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$, para todo $2 \leq i \leq p, p+1 \leq j \leq p+n$ e $1 \leq k \leq g$, obtemos as relações do item (c), para todo $2 \leq i, r \leq p, p+1 \leq j_1, j_2, s, t \leq p+n$ e $1 \leq k, l \leq g$.

$$[B_{i,j_1}, B_{r,j_2}] = 1, [B_{i,p+1}, \rho_{s,k}] = 1 \text{ e } [\rho_{s,k}, \rho_{t,l}] = 1.$$

Tipo(2): Consideremos a apresentação de S_n dada na equação (4.6), reescrevemos suas relações em termos dos geradores $B_{i,j}$ e $\rho_{j,k}$ de $P_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$. Sabe-se que as igualdades

$$\begin{aligned} (\sigma_{i+1}\sigma_i)^{-3} &= B_{i,i+1}B_{i,i+2}B_{i+1,i+2}, & p+1 \leq i \leq p+n-2 \\ (\sigma_r\sigma_s)^2 &= B_{r,r+1}^{-1}B_{s,s+1}^{-1}, & |r-s| \geq 2 \text{ e } p+1 \leq r \neq s \leq p+n-1 \\ \sigma_i^2 &= B_{i,i+1}^{-1}, & p+1 \leq i \leq p+n-1. \end{aligned}$$

são válidas em $P_n(N_{g,p})$. No entanto, como foi demonstrado no Corolário 4.8 que os $B_{i,j}$, com $p+1 \leq i < j \leq p+n$, foram retirados do conjunto de geradores de $P_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$ e, mais ainda, $B_{i,j} = 1$ nesse grupo quociente, para todo $p+1 \leq i < j \leq p+n$, o que implica que

$$\begin{aligned} (\sigma_{i+1}\sigma_i)^3 &= 1, & p+1 \leq i \leq p+n-2 \\ (\sigma_r\sigma_s)^2 &= 1, & |r-s| \geq 2 \text{ e } p+1 \leq r \neq s \leq p+n-1 \\ \sigma_i^2 &= 1, & p+1 \leq i \leq p+n-1, \end{aligned}$$

são válidas em $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$. E assim, obtemos as relações de Artin, item (a)

$$\begin{aligned} \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i &= \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}, & p+1 \leq i \leq p+n-2 \\ \sigma_r\sigma_s &= \sigma_r\sigma_s, & |r-s| \geq 2 \text{ e } p+1 \leq r \neq s \leq p+n-1, \end{aligned}$$

e as relações do item (b)

$$\sigma_i^2 = 1,$$

para todo $p+1 \leq i \leq p+n-1$.

Tipo(3): Por fim, como $P_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$ é um subgrupo normal do grupo $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$, então cada conjugação

$$xyx^{-1},$$

com $x \in \tilde{X}$ e $y \in \tilde{Y}$, é reescrita em termos dos elementos de \tilde{Y} . Observemos que as conjugações xyx^{-1} são obtidas diretamente do Corolário 4.12 e do Lema 4.14. Sendo assim, obtemos as relações dos itens (d) e (e): para todo $2 \leq i \leq p$ e $p+1 \leq j \leq p+n-1$,

$$\sigma_k B_{i,j} \sigma_k^{-1} = \begin{cases} B_{i,j-1}, & \text{se } k = j - 1, \\ B_{i,j}, & \text{se } k \neq j - 1, j, \\ B_{i,j+1}, & \text{se } k = j. \end{cases}$$

E, para todo $p+1 \leq j \leq p+n-1$,

$$\sigma_k \rho_{j,l} \sigma_k^{-1} = \begin{cases} \rho_{j-1,l}, & \text{se } k = j - 1, \\ \rho_{j,l}, & \text{se } k \neq j - 1, j, \\ \rho_{j+1,l}, & \text{se } k = j. \end{cases}$$

□

Corolário 4.17. *Existe um homomorfismo injetor ν de S_n em $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$. Mais ainda, a sequência exata curta do Teorema 4.15 cinde, isto é, o grupo cristalográfico*

$$B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$$

é isomorfo a

$$S_n \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}^{(g+p-1)n},$$

onde φ é a ação definida no Lema 4.14.

Demonstração. Sejam $g, n, p \in \mathbb{Z}$, tais que $g, n, p \geq 1$. consideremos a sequência exata curta do Teorema 4.15

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^{(g+p-1)n} \longrightarrow B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p}) \xrightarrow{\tilde{\pi}} S_n \longrightarrow 1.$$

Condiremos a apresentação de S_n dada em (4.6).

Definimos a aplicação ν de S_n em $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$, que leva a transposição $\tau_i = (i, i+1) \in S_n$ no representante de classe $\sigma_i \in B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$, isto é,

$$\nu(\tau_i) = \nu((i, i+1)) = \sigma_i$$

(aqui há um abuso de notação na escrita do representante de classe $\sigma_i \in B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$), para todo $p+1 \leq i \leq p+n-1$. A aplicação ν é um

homomorfismo e $(\bar{\pi} \circ \nu)(\tau_i) = \sigma_i$, para todo $p+1 \leq i \leq p+n-1$. De fato,

$$\begin{aligned}
 \nu((\tau_i \tau_{i+1})^3) &= \nu(\tau_i \tau_{i+1} \cdot \tau_i \tau_{i+1} \cdot \tau_i \tau_{i+1}) \\
 &= \nu(\tau_i) \nu(\tau_{i+1}) \cdot \nu(\tau_i) \nu(\tau_{i+1}) \cdot \nu(\tau_i) \nu(\tau_{i+1}) \\
 &= \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \cdot \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \\
 &= \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1} \sigma_i \\
 &= \sigma_i \sigma_{i+1} \cdot 1 \cdot \sigma_{i+1} \sigma_i \\
 &= \sigma_i \sigma_{i+1}^2 \sigma_i \\
 &= \sigma_i \cdot 1 \cdot \sigma_i \\
 &= \sigma_i^2 \\
 &= 1. \\
 \nu((\tau_r \tau_s)^2) &= \nu(\tau_r \tau_s \cdot \sigma_r \sigma_s) \\
 &= \nu(\tau_r) \nu(\tau_s) \cdot \nu(\sigma_r) \nu(\sigma_s) \\
 &= \sigma_r^2 \sigma_s^2 \\
 &= 1. \\
 \nu(\tau_i^2) &= \nu(\tau_i \cdot \tau_i) \\
 &= \nu(\tau_i) \cdot \nu(\tau_i) \\
 &= \sigma_i^2 \\
 &= 1,
 \end{aligned}$$

para todo $p+1 \leq i, r, s \leq p+n-1$ e $r \neq s$. Por fim,

$$(\bar{\pi} \circ \nu)(\sigma_i) = \bar{\pi}(\nu(\sigma_i)) = \bar{\pi}(\sigma_i) = \sigma_i.$$

Logo ν é um monomorfismo e a sequência exata curta

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^{(g+p-1)n} \longrightarrow B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p}) \xrightarrow{\bar{\pi}} S_n \longrightarrow 1$$

cinde. □

Corolário 4.18. *Sejam $g \geq 1$, $n \geq 2$ e $p \geq 1$ e H subgrupo de S_n . Então, o grupo $\frac{\bar{\pi}^{-1}(H)}{P'_n(N_{g,p})}$ é um grupo cristalográfico de dimensão $(g+p-1)n$, com grupo de holonomia H .*

Demonstração. Consideremos a sequência exata curta do Teorema 4.15. Seja H um subgrupo de S_n . Agora, do Corolário 1.19, $\Lambda = \bar{\pi}^{-1}(H)/P'_n(N_{g,p})$ é um subgrupo cristalográfico de $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$, com grupo de holonomia H e dimensão igual a $(g+p-1)n$. □

4.3 Elementos de ordem finita e suas classes de conjugação no grupo quociente $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$

Nesta seção estudaremos os elementos de torção do grupo cristalográfico $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$ e suas classes de conjugação. A menos de menção contrária, g e p estão associados à superfície não orientável $N_{g,p}$ de genus g e p perfurada. Lembremos que S_n é o grupo das permutações do conjunto $S = \{p+1, p+2, \dots, p+n\}$ (ver (4.6)).

Sabemos que qualquer permutação $\theta \in S_n$, com $\theta \neq Id_{S_n}$, pode ser escrita de modo único como um produto de ciclos disjuntos, a menos da ordem dos fatores. Então, seja θ escrito como produto de k_i -ciclos disjuntos de comprimentos k_1, k_2, \dots, k_t , com $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_t$ (sem incluir os 1-ciclos) e $\sum_{i=1}^t k_i \leq n$. Dito de outra maneira, a menos de conjugação, sem perda de generalidade, consideremos

$$\theta = \theta_{k_1} \theta_{k_2} \dots \theta_{k_t} \quad (4.10)$$

e a ordem de θ_i é igual a k_i , para todo $i \in \{1, 2, \dots, t\}$, em que

$$\begin{aligned} \theta_{k_1} &= (p+k_1, p+k_1-1, \dots, p+2, p+1) \\ \theta_{k_2} &= (p+k_1+k_2, p+k_1+k_2-1, \dots, p+k_1+2, p+k_1+1) \\ &\vdots \\ \theta_{k_i} &= \left(p + \sum_{j=1}^{i-1} k_j + k_i, p + \sum_{j=1}^{i-1} k_j + k_i - 1, \dots, p + \sum_{j=1}^{i-1} k_j + 2, p + \sum_{j=1}^{i-1} k_j + 1 \right) \\ &\vdots \\ \theta_{k_t} &= \left(p + \sum_{j=1}^{t-1} k_j + k_t, p + \sum_{j=1}^{t-1} k_j + k_t - 1, \dots, p + \sum_{j=1}^{t-1} k_j + 2, p + \sum_{j=1}^{t-1} k_j + 1 \right) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Consideremos o conjunto $S = \{p+1, p+2, \dots, p+n\}$, $\tau \in S_n$ e $G = \langle \tau \rangle$ o grupo cíclico gerado por τ . Então a aplicação $*$: $G \times S \rightarrow S$, definida por $\tau * j = \tau(j)$, para todo $j \in S$, é uma ação de G sobre S . Seja $\mathcal{T}_\tau = \{j_1, j_2, \dots, j_v\}$ uma **transversal do conjunto S associada à permutação τ** , então

$$S = \bigcup_{k \in \{1, 2, \dots, v\}} \mathcal{O}_\tau(j_k), \text{ onde } \mathcal{O}_\tau(j_k) = \{\tau^m(j_k) \mid 1 \leq m \leq |\tau|\},$$

com v o número total de órbitas de S .

Dado $\theta = \theta_{k_1} \theta_{k_2} \dots \theta_{k_t}$ (definido em (4.10)) e $x \in S$, existe $s \in \{1, 2, \dots, v\}$, tal que

$$\mathcal{O}_\theta(x) = \left\{ p+1 + \sum_{j=1}^{s-1} k_j, p+2 + \sum_{j=1}^{s-1} k_j, \dots, p+k_s + \sum_{j=1}^{s-1} k_j \right\}.$$

Observemos que, se $s = 1$ então

$$\mathcal{O}_\theta(x) = \{p + 1, p + 2, \dots, p + k_1\}.$$

Dito isto, notemos também que, o conjunto

$$\left\{p + 1, p + k_1 + 1, \dots, p + \sum_{j=1}^{i-1} k_j + 1, p + \sum_{j=1}^{t-1} k_j + 1\right\}$$

é uma transversal de S associada à permutação θ . Ressaltamos que $\mathcal{O}_\theta(x) = \mathcal{O}_{\theta^{-1}}(x)$.

Definição 4.19. Sejam $k \geq 2$ e $p + 1 \leq j \leq p + n - 1$. Denotamos por $\xi_{j,k}$ o elemento $\sigma_{j+(k-2)}\sigma_{j+(k-2)-1} \cdots \sigma_j$ em $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$.

Observação 4.20.

- (a) Sejam $g \geq 1$, $n \geq 2$ e $p \geq 1$. Em $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$ para $k = 2$ e $j = 1$, temos, respectivamente, $\xi_{j,2} = \sigma_j$ e $\xi_{1,k} = \sigma_{1+(k-2)} \cdots \sigma_2 \sigma_1$.
- (c) Consideremos o homomorfismo $\bar{\pi}: B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p}) \rightarrow S_n$ induzido por π , definido na Observação 4.13(a). Sejam $g, j, k, n, p \in \mathbb{Z}$, com $g, p \geq 1$, $k, n \geq 2$ e $p+1 \leq j \leq p+n-1$. Então, para $\xi_{j,k}$ em $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$, temos

$$\bar{\pi}(\xi_{j,k}) = (p + j, p + j + 1, \dots, p + j + k - 3, p + j + k - 2, p + j + k - 1)$$

em S_n .

Sabemos pelo Corolário 4.17 que os elementos $\xi_{j,k}$ descritos na Definição 4.19 possuem ordem finita, todavia o que faremos na Proposição 4.21 é provar, alternativamente, que os elementos $\xi_{j,k}$ possuem ordem finita, cuja demonstração se dá a partir da apresentação do grupo $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$, dada no Teorema 4.16.

Proposição 4.21. Sejam $g, j, k, n, p \in \mathbb{Z}$, com $g, p \geq 1$, $k, n \geq 2$ e $p + 1 \leq j \leq p + n - 1$. consideremos $2 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_t$, com $\sum_{i=1}^t k_i \leq n$. Então as seguintes afirmações são válidas em $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$.

- (a) O elemento $\xi_{j,k} = \sigma_{j+(k-2)}\sigma_{j+(k-2)-1} \cdots \sigma_j$, dado na Definição 4.19, possui ordem k .
- (b) Os elementos $\xi_{1,k_1}, \xi_{1+k_1,k_2}, \dots$, e $\xi_{1+\sum_{i=1}^{t-1} k_i, k_t}$ em $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$ comutam dois a dois.
- (c) Sejam $j_1 = 1 + \sum_{i=1}^{t_1-1} k_i$, $j_2 = 1 + \sum_{i=1}^{t_2-1} k_i, \dots, j_\lambda = 1 + \sum_{i=1}^{t_\lambda-1} k_i$, com $\{t_1, t_2, \dots, t_\lambda\} \subset \{1, 2, \dots, t\}$. Então, o elemento

$$\xi = \xi_{j_1, k_{t_1}} \cdot \xi_{j_2, k_{t_2}} \cdots \xi_{j_\lambda, k_{t_\lambda}}$$

em $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$, possui ordem $u = \text{mmc}(k_{t_1}, k_{t_2}, \dots, k_{t_\lambda})$.

Demonstração.

(a) Sejam $g, j, k, n, p \in \mathbb{Z}$, com $g, p \geq 1$, $k, n \geq 2$ e $p + 1 \leq j \leq p + n - 1$. Seja $\xi_{j,k} \in B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$, $\eta_{j,k} = \sigma_{j+(k-2)}\sigma_{j+(k-2)-1} \cdots \sigma_j$.

Da Observação [4.11](#) temos

$$(\sigma_{j+(k-2)}\sigma_{j+(k-2)-1} \cdots \sigma_j)^k = \left(\prod_{\mathfrak{J}=p+j+2}^{p+j+k-1} \left(\prod_{i=p+j+1}^{\mathfrak{J}-1} B_{i,\mathfrak{J}} \right) \right)^{-1} \in B_n(N_{g,p}),$$

onde $B_{i,\mathfrak{J}} = \sigma_{\mathfrak{J}-(p+1+j)-1}^{-1} \cdots \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-2} \sigma_{i+1} \cdots \sigma_{\mathfrak{J}-(p+1+j)-1}$ são os geradores do grupo de tranças puras de $P_n(N_{g,p})$. Logo

$$\begin{aligned} \xi_{j,k}^k &= (\sigma_{j+(k-2)}\sigma_{j+(k-2)-1} \cdots \sigma_j)^k \\ &= \left(\prod_{\mathfrak{J}=p+j+2}^{p+j+k-1} \left(\prod_{i=p+j+1}^{\mathfrak{J}-1} B_{i,\mathfrak{J}} \right) \right)^{-1} \\ &= 1, \end{aligned}$$

em $B_n(M_{g,p})/P'_n(M_{g,p})$. Logo, a ordem de $\xi_{j,k}$ divide k . Do fato $\bar{\pi}(\xi_{j,k}) \in S_n$ ter ordem k e o núcleo ser livre de torção, concluímos que a ordem de $\xi_{j,k}$ é exatamente k .

(b) Sejam $2 \leq k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_t$, com $\sum_{i=1}^t k_i \leq n$. Sejam $\xi_{s,k}$ e $\xi_{s',k'}$ elementos distintos em $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$, com $s, s' \in \{1, 1 + k_1, 1 + k_1 + k_2, \dots, 1 + \sum_{i=1}^{t-1} k_i\}$ e $k, k' \in \{k_1, k_2, \dots, k_t\}$.

Notemos que cada σ_i , da palavra do elemento $\xi_{s,k}$, e σ_j , da palavra do elemento $\xi_{s',k'}$, comutam entre si, pois $|i - j| \geq 2$. Logo, $\xi_{s,k}$ e $\xi_{s',k'}$ comutam.

(c) Consideremos $2 \leq k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_t$, com $\sum_{i=1}^t k_i \leq n$. Sejam

$$j_1 = 1 + \sum_{i=1}^{t_1-1} k_i, j_2 = 1 + \sum_{i=1}^{t_2-1} k_i, \dots, j_\lambda = 1 + \sum_{i=1}^{t_\lambda-1} k_i,$$

com $\{t_1, t_2, \dots, t_\lambda\} \subset \{1, 2, \dots, t\}$. Façamos $u = \text{mmc}(k_{t_1}, k_{t_2}, \dots, k_{t_\lambda})$.

Para provarmos este item, vamos usar os itens (a) e (b) desta proposição. Pelo item (b), temos

$$\xi^u = \left(\xi_{j_1, k_{t_1}} \cdot \xi_{j_2, k_{t_2}} \cdots \xi_{j_\lambda, k_{t_\lambda}} \right)^u = \xi_{j_1, k_{t_1}}^u \cdot \xi_{j_2, k_{t_2}}^u \cdots \xi_{j_\lambda, k_{t_\lambda}}^u.$$

Como $u = k_{t_1} \cdot l_1$, $u = k_{t_2} \cdot l_2, \dots$, $u = k_{t_\lambda} \cdot l_\lambda$, com $l_1, \dots, l_\lambda \in \mathbb{Z}$, temos pelo item (a) que

$$\left(\xi_{j_1, k_{t_1}}^{k_{t_1}} \right)^{l_1} = \left(\xi_{j_2, k_{t_2}}^{k_{t_2}} \right)^{l_2} = \cdots = \left(\xi_{j_\lambda, k_{t_\lambda}}^{k_{t_\lambda}} \right)^{l_\lambda} = 1.$$

Assim,

$$\xi^u = \left(\xi_{j_1, k_{t_1}} \cdot \xi_{j_2, k_{t_2}} \cdots \xi_{j_\lambda, k_{t_\lambda}} \right)^u = 1.$$

Com isso provou-se que $|\xi|$ divide u . Como $\bar{\pi}(\xi) \in S_n$ é de ordem u , então $|\xi| = u$, como queríamos demonstrar. \square

Observação 4.22. Sejam $g, n, p \in \mathbb{Z}$, com $g \geq 1$, $n \geq 2$ e $p \geq 1$. Sejam $\alpha \in B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$, $\prod_{l=1}^g \rho_{p+1,l}^{m_{p+1,l}} \cdots \rho_{p+n,l}^{m_{p+n,l}} \cdot \prod_{i=2}^p B_{i,p+1}^{n_{i,p+1}} \cdots B_{i,p+n}^{n_{i,p+n}} \in P_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$ e $\bar{\pi}(\alpha^{-1}) = \theta \in S_n$. Pelo Lema 4.14 temos

$$\begin{aligned} & \alpha \left(\prod_{l=1}^g \rho_{p+1,l}^{m_{p+1,l}} \cdots \rho_{p+n,l}^{m_{p+n,l}} \cdot \prod_{i=2}^p B_{i,p+1}^{n_{i,p+1}} \cdots B_{i,p+n}^{n_{i,p+n}} \right) \alpha^{-1} \\ &= \prod_{l=1}^g \rho_{\theta(p+1),l}^{m_{p+1,l}} \cdots \rho_{\theta(p+n),l}^{m_{p+n,l}} \cdot \prod_{i=2}^p B_{i,\theta(p+1)}^{n_{i,p+1}} \cdots B_{i,\theta(p+n)}^{n_{i,p+n}} \\ &\stackrel{(*)}{=} \prod_{l=1}^g \rho_{p+1,l}^{m_{\theta^{-1}(p+1),l}} \cdots \rho_{p+n,l}^{m_{\theta^{-1}(p+n),l}} \cdot \prod_{i=2}^p B_{i,p+1}^{n_{i,\theta^{-1}(p+1)}} \cdots B_{i,p+n}^{n_{i,\theta^{-1}(p+n)}}. \end{aligned}$$

(*) Consideremos a expressão $\prod_{l=1}^g \rho_{\theta(p+1),l}^{m_{p+1,l}} \cdots \rho_{\theta(p+n),l}^{m_{p+n,l}}$. Notemos que, cada subíndice $\theta(p+i), l$ de $\rho_{\theta(p+i),l}$ está em relação biunívoca com os subíndices $p+j, l$ de $m_{p+j,l}$, para todo $1 \leq j \leq g$. Pela bijetividade da permutação θ , segue que os subíndices $p+i, l$ de $m_{\theta^{-1}(p+i),l}$ estão em relação com $p+i, l$ de $\rho_{p+i,l}$. Com argumento análogo para $\prod_{i=2}^p B_{i,\theta(p+1)}^{n_{i,p+1}} \cdots B_{i,\theta(p+n)}^{n_{i,p+n}}$, temos que o mesmo acontece com os subíndices $i, \theta(p+j)$ de $B_{i,\theta(p+j)}$ e $i, p+j$ de $n_{i,p+j}$, para $1 \leq j \leq n$.

O Teorema 4.23 caracteriza os elementos de ordem finita de $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$. Para demonstrá-lo usaremos o Lema 4.14 e a Observação 4.22.

Teorema 4.23. *Sejam $g, n, p \in \mathbb{Z}$, com $g, p \geq 1$ e $n \geq 2$. Consideremos $2 \leq k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_t$, com $\sum_{j=1}^t k_j \leq n$ e $\xi = \xi_{1,k_1} \xi_{1+k_1,k_2} \cdots \xi_{1+\sum_{i=1}^{t-1} k_i, k_t}$ em $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$.*

Suponhamos

$$\theta = \bar{\pi}(\xi^{-1}) \in S_n$$

e

$$B = \prod_{l=1}^g \rho_{p+1,l}^{m_{p+1,l}} \cdots \rho_{p+n,l}^{m_{p+n,l}} \cdot \prod_{i=2}^p B_{i,p+1}^{n_{i,p+1}} \cdots B_{i,p+n}^{n_{i,p+n}} \in P_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p}),$$

onde $m_{p+1,l}, \dots, m_{p+n,l}, n_{i,p+1}, \dots, n_{i,p+n} \in \mathbb{Z}$, com $1 \leq l \leq g$, $2 \leq i \leq p$. Seja

$$\mathcal{T}_\theta = \left\{ p+1, p+k_1+1, \dots, p+\sum_{j=1}^{i-1} k_j+1, p+\sum_{j=1}^{t-1} k_j+1 \right\}$$

uma transversal associada a θ . Então, o elemento ξB possui ordem igual ao

$\text{mmc}(k_1, \dots, k_t)$ se, e somente se, para cada $j \in \mathcal{T}_\theta$, o sistema de equações

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{q \in \mathcal{O}_\theta(j)} m_{q,1} = 0, \\ \vdots \\ \sum_{q \in \mathcal{O}_\theta(j)} m_{q,g} = 0, \\ \sum_{q \in \mathcal{O}_\theta(j)} n_{2,q} = 0, \\ \vdots \\ \sum_{q \in \mathcal{O}_\theta(j)} n_{p,q} = 0, \end{array} \right.$$

possui solução no conjunto dos números inteiros.

Demonstração. Sejam $g, n, p \in \mathbb{Z}$, com $g, p \geq 1$ e $n \geq 2$. Sejam $2 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_t$, com $\sum_{j=1}^t k_j \leq n$. Seja

$$\xi B = \xi_{1,k_1} \xi_{1+k_1,k_2} \cdots \xi_{1+\sum_{i=1}^{t-1} k_i, k_t} \cdot \prod_{l=1}^g \rho_{p+1,i}^{m_{p+1,l}} \cdots \rho_{p+n,l}^{m_{p+n,l}} \cdot \prod_{i=2}^p B_{i,p+1}^{n_{i,p+1}} \cdots B_{i,p+n}^{n_{i,p+n}}$$

em $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$, onde $m_{p+1,l}, \dots, m_{p+n,l}, n_{i,p+1}, \dots, n_{i,p+n} \in \mathbb{Z}$, com $1 \leq l \leq g$, $2 \leq i \leq p$; e façamos $\theta = \bar{\pi}(\xi^{-1}) \in S_n$, com $\bar{\pi}$ o homorfismo definido em (4.9). Chamamos o mínimo múltiplo comum de k_1, k_2, \dots, k_t de u ($\text{mmc}(k_1, k_2, \dots, k_t) = u$).

Observemos que $\theta = \theta_{k_1} \theta_{k_2} \cdots \theta_{k_t}$, com

$$\begin{aligned} \theta_{k_1} &= (p + k_1, p + k_1 - 1, \dots, p + 2, p + 1) \\ \theta_{k_2} &= (p + k_1 + k_2, p + k_1 + k_2 - 1, \dots, p + k_1 + 2, p + k_1 + 1) \\ &\vdots \\ \theta_{k_i} &= \left(p + \sum_{j=1}^{i-1} k_j + k_i, p + \sum_{j=1}^{i-1} k_j + k_i - 1, \dots, p + \sum_{j=1}^{i-1} k_j + 2, p + \sum_{j=1}^{i-1} k_j + 1 \right) \\ &\vdots \\ \theta_{k_t} &= \left(p + \sum_{j=1}^{t-1} k_j + k_t, p + \sum_{j=1}^{t-1} k_j + k_t - 1, \dots, p + \sum_{j=1}^{t-1} k_j + 2, p + \sum_{j=1}^{t-1} k_j + 1 \right) \end{aligned}$$

e, portanto, uma transversal da ação do grupo cíclico $\langle \theta \rangle$ em $S = \{p + 1, p + 2, \dots, p + n\}$ é dada por

$$\mathcal{T}_\theta = \left\{ p + 1, p + k_1 + 1, \dots, p + \sum_{j=1}^{i-1} k_j + 1, \dots, p + \sum_{j=1}^{t-1} k_j + 1 \right\}.$$

Agora, aplicando o Lema 4.14 e a Observação 4.22, temos

$$\begin{aligned}
 (\xi B)^u &= \left(\xi_{1,k_1} \xi_{1+k_1,k_2} \cdots \xi_{1+\sum_{i=1}^{t-1} k_i, k_t} \cdot \prod_{l=1}^g \rho_{p+1,i}^{m_{p+1,l}} \cdots \rho_{p+n,l}^{m_{p+n,l}} \cdot \prod_{i=2}^p B_{i,p+1}^{n_{i,p+1}} \cdots B_{i,p+n}^{n_{i,p+n}} \right)^u \\
 &= \left(\xi_{1,k_1} \xi_{1+k_1,k_2} \cdots \xi_{1+\sum_{i=1}^{t-1} k_i, k_t} \cdot \prod_{l=1}^g \rho_{p+1,i}^{m_{p+1,l}} \cdots \rho_{p+n,l}^{m_{p+n,l}} \cdot \prod_{i=2}^p B_{i,p+1}^{n_{i,p+1}} \cdots B_{i,p+n}^{n_{i,p+n}} \right) \cdots \\
 &\cdots \left(\xi_{1,k_1} \xi_{1+k_1,k_2} \cdots \xi_{1+\sum_{i=1}^{t-1} k_i, k_t} \cdot \prod_{l=1}^g \rho_{p+1,i}^{m_{p+1,l}} \cdots \rho_{p+n,l}^{m_{p+n,l}} \cdot \prod_{i=2}^p B_{i,p+1}^{n_{i,p+1}} \cdots B_{i,p+n}^{n_{i,p+n}} \right) \\
 &= \left(\prod_{l=1}^g \rho_{\theta(p+1),i}^{m_{p+1,l}} \cdots \rho_{\theta(p+n),l}^{m_{p+n,l}} \cdot \prod_{i=2}^p B_{i,\theta(p+1)}^{n_{i,p+1}} \cdots B_{i,\theta(p+n)}^{n_{i,p+n}} \right) \cdot \\
 &\cdot \left(\prod_{l=1}^g \rho_{\theta^2(p+1),i}^{m_{p+1,l}} \cdots \rho_{\theta^2(p+n),l}^{m_{p+n,l}} \cdot \prod_{i=2}^p B_{i,\theta^2(p+1)}^{n_{i,p+1}} \cdots B_{i,\theta^2(p+n)}^{n_{i,p+n}} \right) \cdots \\
 &\cdots \left(\prod_{l=1}^g \rho_{\theta^{u-1}(p+1),i}^{m_{p+1,l}} \cdots \rho_{\theta^{u-1}(p+n),l}^{m_{p+n,l}} \cdot \prod_{i=2}^p B_{i,\theta^{u-1}(p+1)}^{n_{i,p+1}} \cdots B_{i,\theta^{u-1}(p+n)}^{n_{i,p+n}} \right) \cdots \\
 &\cdots \xi^u \cdot \left(\prod_{l=1}^g \rho_{p+1,i}^{m_{p+1,l}} \cdots \rho_{p+n,l}^{m_{p+n,l}} \cdot \prod_{i=2}^p B_{i,p+1}^{n_{i,p+1}} \cdots B_{i,p+n}^{n_{i,p+n}} \right) \\
 &= \left(\prod_{l=1}^g \rho_{p+1,i}^{m_{\theta^{-1}(p+1),l}} \cdots \rho_{p+n,l}^{m_{\theta^{-1}(p+n),l}} \cdot \prod_{i=2}^p B_{i,p+1}^{n_{i,\theta^{-1}(p+1)}} \cdots B_{i,p+n}^{n_{i,\theta^{-1}(p+n)}} \right) \cdot \\
 &\cdot \left(\prod_{l=1}^g \rho_{p+1,i}^{m_{\theta^{-2}(p+1),l}} \cdots \rho_{p+n,l}^{m_{\theta^{-2}(p+n),l}} \cdot \prod_{i=2}^p B_{i,p+1}^{n_{i,\theta^{-2}(p+1)}} \cdots B_{i,p+n}^{n_{i,\theta^{-2}(p+n)}} \right) \cdots \\
 &\cdots \left(\prod_{l=1}^g \rho_{p+1,i}^{m_{\theta^{1-u}(p+1),l}} \cdots \rho_{p+n,l}^{m_{\theta^{1-u}(p+n),l}} \cdot \prod_{i=2}^p B_{i,p+1}^{n_{i,\theta^{1-u}(p+1)}} \cdots B_{i,p+n}^{n_{i,\theta^{1-u}(p+n)}} \right) \cdots \\
 &\cdots \xi^u \cdot \left(\prod_{l=1}^g \rho_{p+1,i}^{m_{p+1,l}} \cdots \rho_{p+n,l}^{m_{p+n,l}} \cdot \prod_{i=2}^p B_{i,p+1}^{n_{i,p+1}} \cdots B_{i,p+n}^{n_{i,p+n}} \right) \cdot
 \end{aligned}$$

Sabemos pela Proposição 4.21(c) que

$$\xi^u = 1.$$

E, pelo Teorema 4.16(c), temos

$$[B_{i,j_1}, B_{r,j_2}] = 1, [B_{i,p+1}, \rho_{s,k}] = 1 \text{ e } [\rho_{s,k}, \rho_{t,l}] = 1,$$

para todo $2 \leq i, r \leq p, p+1 \leq j_1, j_2, s, t \leq p+n$ e $1 \leq k, l \leq g$. Logo

$$(\xi B)^u = 1 \in B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$$

se, e somente se, para cada $j \in \mathcal{T}_\theta$, o sistema de números inteiros

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{q \in \mathcal{O}_\theta(j)} m_{q,1} = 0, \\ \vdots \\ \sum_{q \in \mathcal{O}_\theta(j)} m_{q,g} = 0, \\ \sum_{q \in \mathcal{O}_\theta(j)} n_{2,q} = 0, \\ \vdots \\ \sum_{q \in \mathcal{O}_\theta(j)} n_{p,q} = 0, \end{array} \right. \quad (4.12)$$

possui solução.

Afirmção (1): O sistema (4.12) possui infinitas soluções.

De fato, como as equações do sistema (4.12) são independentes entre si, então consideremos a i -ésima e l -ésima equações $\sum_{q \in \mathcal{O}_\theta(j)} m_{q,l} = 0$ e $\sum_{q \in \mathcal{O}_\theta(j)} n_{i,q} = 0$. Logo,

$$\sum_{q \in \mathcal{O}_\theta(j)} m_{q,l} = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{q \in \mathcal{O}_\theta(j)} n_{i,q} = 0$$

se, e somente se,

$$-\left(\sum_{q \in \mathcal{O}_\theta(j), q \neq j} m_{q,l} \right) = m_{j,l} \quad \text{e} \quad -\left(\sum_{q \in \mathcal{O}_\theta(j), q \neq j} n_{i,q} \right) = n_{i,j},$$

portanto, basta escolher $m_{q,l}, n_{i,q} \in \mathbb{Z}$, para todo $q \in \mathcal{O}_\theta(j)$ e $q \neq j$, sendo que $m_{q,l}$ e $n_{i,q}$ depende dessa escolha para que o sistema tenha solução.

Afirmção (2): O elemento ξB possui ordem finita exatamente igual a u . De fato, observemos que o sistema (4.12) tem infinitas soluções em \mathbb{Z} , como foi provado na Afirmção (1). Para cada solução inteira, temos ξB possui ordem finita e, com isto, provamos que a ordem de ξB divide u . Logo $|\xi B| \leq u$. Como $\bar{\pi}(\xi B) \in S_n$ possui ordem u , então u divide a ordem de ξB . Logo $u \leq |\xi B|$. Dessa forma, o elemento ξB possui ordem exatamente igual a u , desde que o sistema (4.12) seja satisfeito. \square

O Teorema 4.23, nos garante a existência de uma infinidade de elementos, não triviais, de ordem finita em $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$. A prova do seguinte corolário é imediata.

Corolário 4.24. *Sejam $g, n, p \in \mathbb{Z}$, com $g, p \geq 1$ e $n \geq 2$. Então o grupo quociente $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$ possui infinitos elementos, não triviais, de ordem finita.*

Concluindo esta seção trazemos nos próximos resultados informações a respeito das classes de conjugação de um elemento de ordem finita, assim como, dando condições suficientes e necessárias para que dois subgrupos cíclicos finitos de $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$ sejam conjugados. Vejamos.

Teorema 4.25. *Sejam $g, n, p \in \mathbb{Z}$, com $g, p \geq 1$ e $n \geq 2$. Dois elementos de $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$ de ordem u são conjugados se, e somente se, suas permutações possuem o mesmo tipo cíclico.*

Demonstração. Sejam $\alpha, \beta \in B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$ elementos de ordem finita u .

Suponhamos que $\alpha = \gamma\beta\gamma^{-1}$, para algum $\gamma \in B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$. Logo $\bar{\pi}(\alpha) = \bar{\pi}(\gamma\beta\gamma^{-1}) = \bar{\pi}(\gamma)\bar{\pi}(\beta)\bar{\pi}(\gamma)^{-1}$ em S_n , ou seja, $\bar{\pi}(\alpha)$ e $\bar{\pi}(\beta)$ são conjugados em S_n . E, portanto, $\bar{\pi}(\alpha)$ e $\bar{\pi}(\beta)$ possuem o mesmo tipo cíclico.

Reciprocamente, podemos considerar $\bar{\pi}(\alpha) = \theta$. Como α tem ordem u , então θ tem ordem u , pois $\text{Ker}(\bar{\pi})$ é livre de torção, além disso θ^{-1} também tem ordem u . Sabemos que θ^{-1} pode ser descrito de forma única como produto de ciclos disjuntos. Isto é, existem $2 \leq k_1 \leq \dots \leq k_t$ com $\sum_{i=1}^t k_i \leq n$ e $u = \text{mmc}(k_1, \dots, k_t)$, tais que a menos de conjugação, consideremos θ^{-1} como definido em (4.10). Agora, pelo Teorema 4.23, tomamos

$$\xi = \xi_{1,k_1} \xi_{1+k_1,k_2} \cdots \xi_{1+\sum_{i=1}^{t-1} k_i, k_t} \in B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p}).$$

Por hipótese, suponhamos

$$\alpha, \beta \in B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$$

elementos de ordem finita u , com $\bar{\pi}(\alpha)$ e $\bar{\pi}(\beta)$ de mesmo tipo cíclico em S_n . Então existe $\bar{\gamma} \in S_n$ tal que $\bar{\pi}(\alpha) = \bar{\gamma}\bar{\pi}(\beta)\bar{\gamma}^{-1}$. Sem perda de generalidade, suponha $\bar{\pi}(\beta) = \bar{\pi}(\alpha)$.

Uma vez que

$$\bar{\pi}(\beta^{-1}) = \bar{\pi}(\alpha)^{-1} = \bar{\pi}(\xi^{-1}) = \theta^{-1},$$

existe

$$B = \prod_{l=1}^g \rho_{p+1,i}^{m_{p+1,l}} \cdots \rho_{p+n,l}^{m_{p+n,l}} \cdot \prod_{i=2}^p B_{i,p+1}^{n_{i,p+1}} \cdots B_{i,p+n}^{n_{i,p+n}} \in P_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p}),$$

onde $m_{p+1,l}, \dots, m_{p+n,l}, n_{i,p+1}, \dots, n_{i,p+n} \in \mathbb{Z}$, com $1 \leq l \leq g$, $2 \leq i \leq p$ e, pelo Teorema 4.23, sabemos que

$$\sum_{q \in \mathcal{O}_\theta(j)} m_{q,l} = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{q \in \mathcal{O}_\theta(j)} n_{i,q} = 0,$$

onde $j \in \mathcal{T}_\theta$. Para provar este teorema, é suficiente mostrarmos que $B\xi$ e ξ são conjugados, pois conjugação de elementos possui a propriedade transitiva. Ou seja, como $\bar{\pi}(\alpha^{-1})$ é conjugado de $\bar{\pi}(\xi^{-1})$ e $\bar{\pi}(\beta^{-1})$ é conjugado de $\bar{\pi}(\xi^{-1})$, então $\bar{\pi}(\alpha)$ e $\bar{\pi}(\beta)$ são conjugados. Assim, exibiremos

$$X \in P_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p}),$$

tal que $X \cdot B\xi \cdot X^{-1} = \xi$. Isto equivale dizer que

$$X \cdot B\xi \cdot X^{-1}\xi^{-1} = 1 \quad (4.13)$$

em $P_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$.

Considerando $X = \prod_{l=1}^g \rho_{p+1,i}^{x_{p+1,l}} \cdots \rho_{p+n,l}^{x_{p+n,l}} \cdot \prod_{i=2}^p B_{i,p+1}^{y_{i,p+1}} \cdots B_{i,p+n}^{y_{i,p+n}}$. Aplicando o Teorema 4.14 e a Observação 4.22, segue que

$$\xi X^{-1}\xi^{-1} = \prod_{l=1}^g \rho_{p+1,i}^{-x_{\theta(p+1),l}} \cdots \rho_{p+n,l}^{-x_{\theta(p+n),l}} \cdot \prod_{i=2}^p B_{i,p+1}^{-y_{i,\theta(p+1)}} \cdots B_{i,p+n}^{-y_{i,\theta(p+n)}}.$$

Logo

$$X \cdot B\xi \cdot X^{-1}\xi^{-1} = \prod_{l=1}^g \rho_{p+1,i}^{x_{p+1,l} + m_{p+1,l} - x_{\theta(p+1),l}} \cdots \rho_{p+n,l}^{x_{p+n,l} + m_{p+n,l} - x_{\theta(p+n),l}} \cdot \prod_{i=2}^p B_{i,p+1}^{y_{i,p+1} - n_{i,p+1} - y_{i,\theta(p+1)}} \cdots B_{i,p+n}^{y_{i,p+n} + n_{i,p+n} - y_{i,\theta(p+n)}}.$$

Consequentemente (4.13) acontece se, e somente se,

$$x_{j,l} + m_{j,l} - x_{\theta(j),l} = 0 \quad \text{e} \quad y_{i,j} + n_{i,j} - y_{i,\theta(j)} = 0 \quad (4.14)$$

para todo $1 \leq i \leq p$, $p+1 \leq j \leq p+n$ e $1 \leq l \leq g$. Se j pertence a transversal \mathcal{T}_θ associada a θ , o sistema (4.14) é reescrito como união disjunta dos seguintes subsistemas

$$m_{\theta^k(j),l} = x_{\theta^{k+1}(j),l} - x_{\theta^k(j),l} \quad \text{e} \quad n_{i,\theta^k(j)} = y_{i,\theta^{k+1}(j)} - y_{i,\theta^k(j)} \quad (4.15)$$

onde $1 \leq k \leq |\mathcal{O}_\theta(j)| - 1$. Façamos $|\mathcal{O}_\theta(j)| = r_j$. Agora, sejam $x_{j,l}$ e $y_{i,j} \in \mathbb{Z}$ arbitrários. A solução do subsistema (4.15)

$$\begin{aligned} x_{\theta(j),l} - x_{j,l} &= m_{j,l}, \\ x_{\theta^2(j),l} - x_{\theta(j),l} &= m_{\theta(j),l}, \\ x_{\theta^3(j),l} - x_{\theta^2(j),l} &= m_{\theta^2(j),l}, \\ \vdots &\vdots \\ x_{\theta^{r_i,j-2}(j),l} - x_{\theta^{r_i,j-3}(j),l} &= m_{\theta^{r_i,j-3}(j),l}, \\ x_{\theta^{r_i,j-1}(j),l} - x_{\theta^{r_i,j-2}(j),l} &= m_{i,\theta^{r_i,j-2}(j)}, \\ \\ y_{i,\theta(j)} - y_{i,j} &= n_{i,j}, \\ y_{i,\theta^2(j)} - y_{i,\theta(j)} &= n_{i,\theta(j)}, \\ y_{i,\theta^3(j)} - y_{i,\theta^2(j)} &= n_{i,\theta^2(j)}, \\ \vdots &\vdots \\ y_{i,\theta^{r_i,j-2}(j)} - y_{i,\theta^{r_i,j-3}(j)} &= n_{i,\theta^{r_i,j-3}(j)}, \\ y_{i,\theta^{r_i,j-1}(j)} - y_{i,\theta^{r_i,j-2}(j)} &= n_{i,\theta^{r_i,j-2}(j)}, \end{aligned}$$

é dada por

$$x_{\theta^k(j),l} = x_{j,l} + (m_{j,l} + m_{\theta(j),l} + m_{\theta^2(j),l} + \cdots + m_{\theta^{k-1}(j),l})$$

e

$$y_{i,\theta^k(j)} = y_{i,j} + (n_{i,j} + n_{i,\theta(j)} + n_{i,\theta^2(j)} + \cdots + n_{i,\theta^{k-1}(j)}),$$

onde $1 \leq k \leq r_j - 1$. Consequentemente o sistema (4.14) possui solução, para todo $j \in \mathcal{T}_\theta$.

Dessa forma, o sistema (4.13) admite solução e, portanto, $B\xi$ é conjugado de ξ por um elemento de $P_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$, como queríamos demonstrar. \square

Corolário 4.26. *Dois subgrupos cíclicos de $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$ de ordem k são conjugados se, e somente se, suas imagens por $\bar{\pi}$ são conjugadas em S_n .*

Demonstração. Sejam $H_1 = \langle \alpha \rangle$ e $H_2 = \langle \beta \rangle$ subgrupos cíclicos de $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$ de ordem k . Suponhamos que exista γ em $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$, tal que $\langle \alpha \rangle = \gamma \langle \beta \rangle \gamma^{-1}$. Em particular, $\alpha = \gamma \beta \gamma^{-1}$. Logo, aplicando o homomorfismo $\bar{\pi}$, obtemos

$$\bar{\pi}(\alpha) = \bar{\pi}(\gamma \beta \gamma^{-1}) = \bar{\pi}(\gamma) \bar{\pi}(\beta) \bar{\pi}(\gamma^{-1}).$$

Assim, $\bar{\pi}(\alpha)$ e $\bar{\pi}(\beta)$ são conjugados em S_n . E, portanto, $\bar{\pi}(H_1)$ e $\bar{\pi}(H_2)$ são conjugados em S_n .

Reciprocamente, suponhamos que $\bar{\pi}(\langle \alpha \rangle)$ e $\bar{\pi}(\langle \beta \rangle)$ são conjugados em S_n . Isto é, existe $\sigma \in S_n$ tal que $\bar{\pi}(\langle \alpha \rangle) = \sigma \bar{\pi}(\langle \beta \rangle) \sigma^{-1}$. Sem perda de generalidade, suponhamos que $\bar{\pi}(\alpha) = \sigma \bar{\pi}(\beta) \sigma^{-1}$. Pelo Teorema 4.25, α e β são conjugados em $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$. Ou seja, existe $z \in B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$ tal que $\alpha = z \beta z^{-1}$. Logo, dado $h_1 \in \langle \alpha \rangle$, com $h_1 = \alpha^w$, tem-se

$$h_1 = \alpha^w = (z \beta z^{-1})^w = z \beta^w z^{-1}.$$

Portanto, $\langle \alpha \rangle$ e $\langle \beta \rangle$ são conjugados em $B_n(N_{g,p})/P'_n(N_{g,p})$. \square

Apêndice A

O motivo de enunciarmos e demonstrarmos a proposição a seguir é devido sua aplicação na demonstração do Teorema 3.17 e do Teorema 4.23, nos mostrando uma forma alternativa de prová-los. Cronologicamente, as demonstrações do Teorema 3.17 e do Teorema 4.23, como estão apresentadas nos Capítulos 3 e 4, foram as primeiras provas apresentadas para tais teoremas. Como foi dito anteriormente, este trabalho está ligado fortemente aos artigos [39, 42], com isso queremos dizer que, assim como seus autores, nós utilizamos ferramentas um pouco mais técnicas, envolvendo a estrutura do grupo e a caracterização de seus elementos para demonstração dos Teoremas 3.17 e 4.23. Mais tarde, nos demos conta que é possível demonstrar esses mesmos teoremas nos valendo do isomorfismo obtido no Corolário 4.17.

Proposição 4.27. *Seja Ω um inteiro positivo. Consideremos um grupo H e $\mathbb{Z}^\Omega = \langle z_1, \dots, z_\Omega \rangle$ um grupo abeliano livre finitamente gerado. Suponha que $G = \mathbb{Z}^\Omega \rtimes_\varphi H$ o produto semidireto de \mathbb{Z}^Ω por H via φ , onde φ é a ação induzida por conjugação de G em \mathbb{Z}^Ω . Dado $g \in G$, $g = zh$, em que $z = \prod_{i=1}^\Omega z_i^{m_i} \in \mathbb{Z}^\Omega$ e $h \in H$, com $m_i \in \mathbb{Z}$ para todo $1 \leq i \leq \Omega$. Seja h é um elemento de ordem finita k e a ação por conjugação $*$ do grupo cíclico $\langle h \rangle$ no conjunto $\{z_1, \dots, z_\Omega\}$, dada por $*(x, z_i) = xz_i x^{-1} = z_j$ com $i \neq j$. Sejam $\mathcal{T}_h = \{y_1, \dots, y_N\}$ uma transversal da ação $*$ e N um múltiplo de k . Então, $g \in G$ possui ordem finita k se, e somente se, para cada $y_i \in \mathcal{T}_h$, tem-se*

$$\sum_{j \in \text{conj}_{\mathcal{O}_h(y_i)}} m_j = 0,$$

onde $\text{conj}_{\mathcal{O}_h(y_i)} = \{j \mid z_j \in \mathcal{O}_h(y_i)\} \subseteq \{1, 2, \dots, \Omega\}$.

Demonstração. Seja $g \in G$, em que $g = zh$, com $z = \prod_{i=1}^\Omega z_i^{m_i} \in \mathbb{Z}^\Omega$, $h \in H$ e $m_i \in \mathbb{Z}$, para todo i . Note que

$$\begin{aligned} g^k &= g \cdot g \cdots g \\ &= zh \cdot zh \cdots zh \\ &= zhzh^{-1} \cdot h^2zh^{-2} \cdots h^{k-1}zh^{1-k} \cdot h^k \end{aligned}$$

Por hipótese $h^k = 1$, logo

$$g^k = z \cdot hzh^{-1} \cdot h^2zh^{-2} \cdots h^{k-1}zh^{1-k} \quad (4.16)$$

Agora, observemos que, após algumas manipulações algébricas, temos

$$\begin{aligned}
hzh^{-1} &= h \left(\prod_{i=1}^{\Omega} z_i^{m_i} \right) h^{-1} \\
&= h(z_1^{m_1} z_2^{m_2} \cdots z_{\Omega}^{m_{\Omega}}) h^{-1} \\
&= h z_1^{m_1} h^{-1} \cdot h z_2^{m_2} h^{-1} \cdot h \cdots h^{-1} \cdot h z_{\Omega}^{m_{\Omega}} h^{-1} \\
&= h z_1 \cdots z_1 h^{-1} \cdot h z_2 \cdots z_2 h^{-1} \cdots h z_{\Omega} \cdots z_{\Omega} h^{-1} \\
&= h z_1 h^{-1} \cdots h z_1 h^{-1} \cdot h z_2 h^{-1} \cdots h z_2 h^{-1} \cdots h z_{\Omega} h^{-1} \cdots h z_{\Omega} h^{-1} \\
&= (h z_1 h^{-1})^{m_1} (h z_2 h^{-1})^{m_2} \cdots (h z_{\Omega} h^{-1})^{m_{\Omega}} \\
&= \prod_{i=1}^{\Omega} (h z_i h^{-1})^{m_i}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
h^2 z h^{-2} &= \prod_{i=1}^{\Omega} (h^2 z_i h^{-2})^{m_i} \\
h^3 z h^{-3} &= \prod_{i=1}^{\Omega} (h^3 z_i h^{-3})^{m_i} \\
&\vdots \\
h^{k-1} z h^{1-k} &= \prod_{i=1}^{\Omega} (h^{k-1} z_i h^{1-k})^{m_i}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Consideremos a ação $*$ do grupo cíclico $\langle h \rangle$ gerado por h no conjunto de geradores $\{z_1, z_2, \dots, z_{\Omega}\}$ injetiva. Seja N um inteiro positivo múltiplo de k . Sejam $\mathcal{T}_h = \{y_1, \dots, y_N\}$ uma transversal da ação $*$ e $\text{conj}_{\mathcal{O}_h(y_i)} = \{j \mid z_j \in \mathcal{O}_h(y_i)\} \subseteq \{1, 2, \dots, \Omega\}$. Suponha que g possui ordem finita k . Então, para cada $y_i \in \mathcal{T}_h$, das expressões (4.16), (4.17) e (4.18), para cada $y_i \in \mathcal{T}_h$ tem-se

$$\sum_{j \in \text{conj}_{\mathcal{O}_h(y_i)}} m_j = 0.$$

Reciprocamente, suponhamos que, para cada $y_i \in \mathcal{T}_h$,

$$\sum_{j \in \text{conj}_{\mathcal{O}_h(y_i)}} m_j = 0.$$

Da expressão (4.16) sabe-se

$$g^k = y_1^{\sum_{j \in \text{conj}_{\mathcal{O}_h(y_1)}} m_j} y_2^{\sum_{j \in \text{conj}_{\mathcal{O}_h(y_2)}} m_j} \cdots y_N^{\sum_{j \in \text{conj}_{\mathcal{O}_h(y_N)}} m_j}.$$

Logo $g^k = y_1^0 y_2^0 \cdots y_N^0 = 1$. □

Apêndice B

Todas as imagens usadas nos Capítulos 2, 3 e 4 deste trabalho foram produzidas pelo autor.

Figura 4.1: Representação geométrica do gerador $A_{i,j}$ (planar).

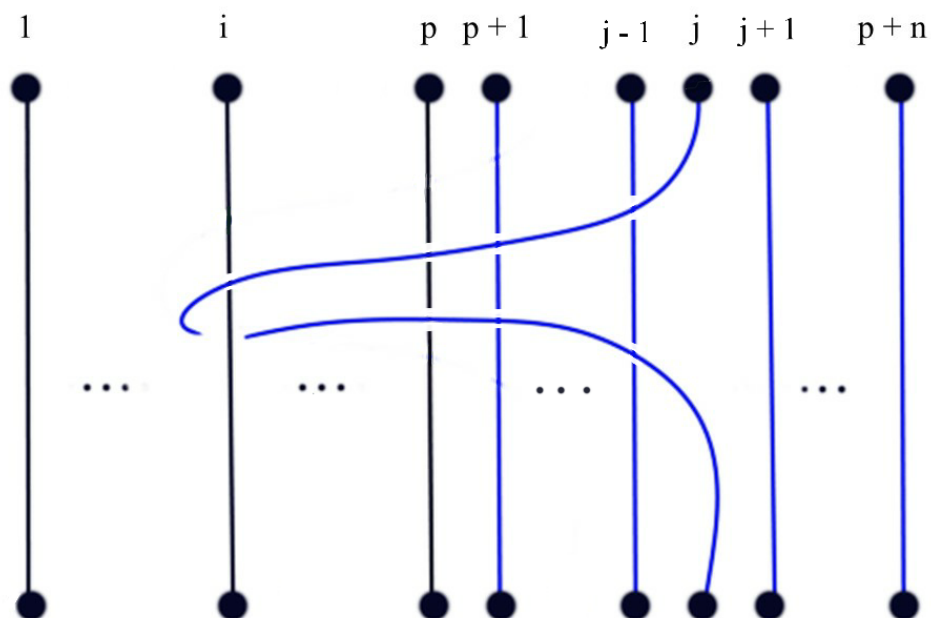


Figura 4.2: Representação geométrica do gerador σ_j (planar).

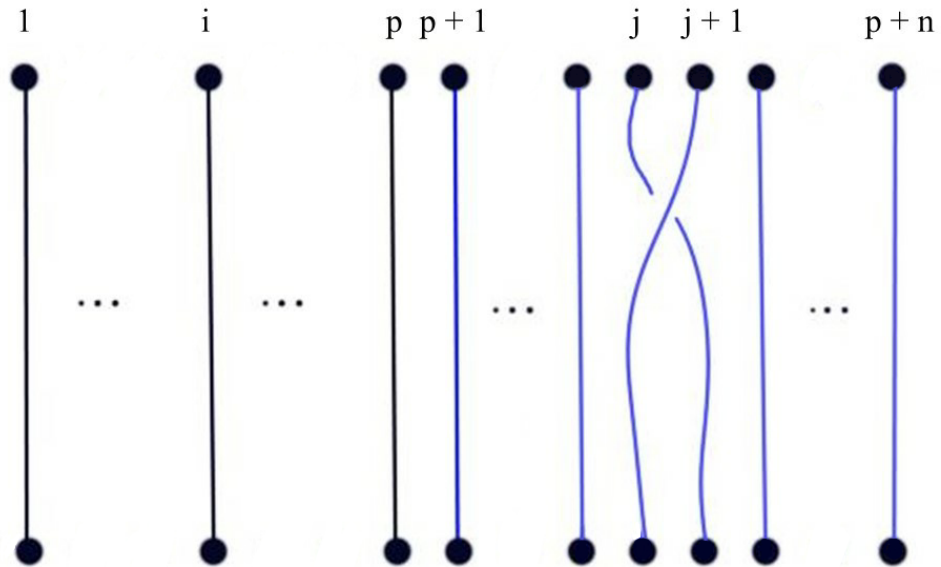


Figura 4.3: Representação geométrica do gerador $A_{i,j}$ (espacial).

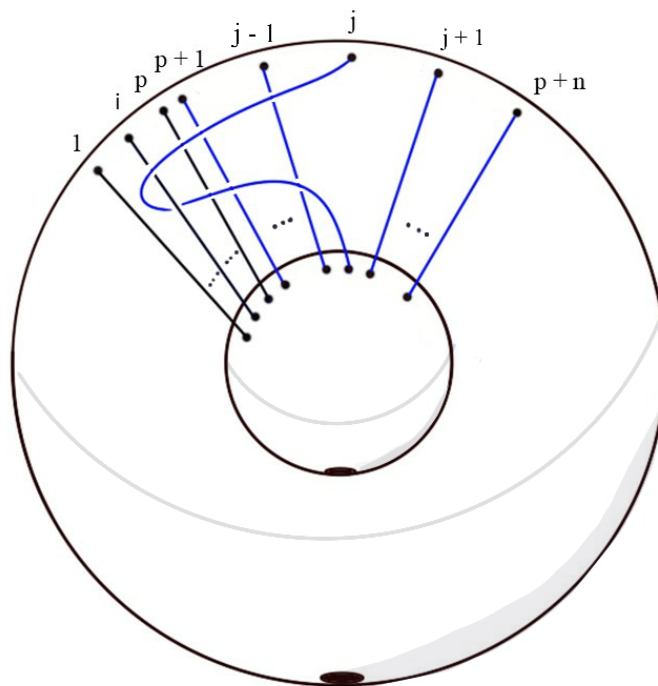


Figura 4.4: Representação geométrica do gerador σ_j (espacial).

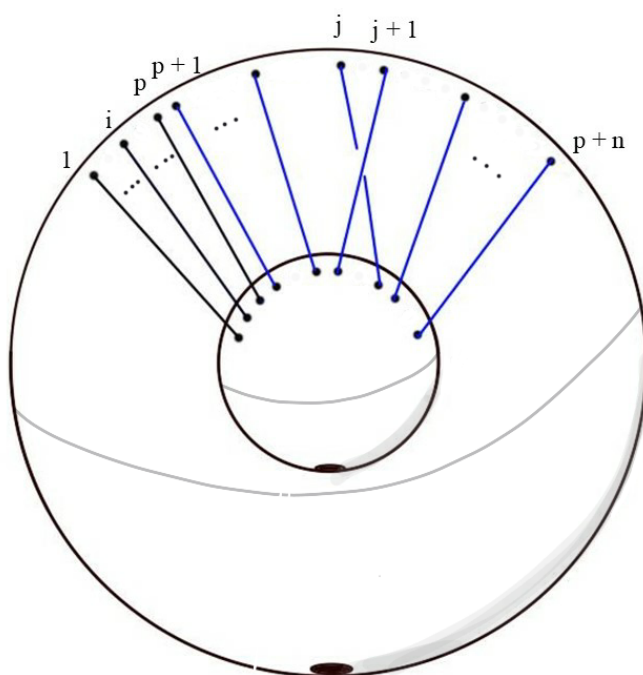


Figura 4.5: Representação geométrica de $\beta \in B_5(M_{0,2+1})$.

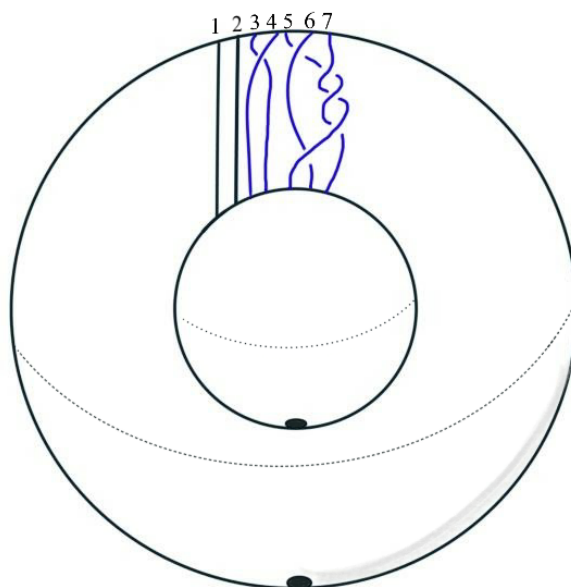


Figura 4.6: Representação geométrica de $\tilde{\beta} \in B_5(M_{0,2+1})$.

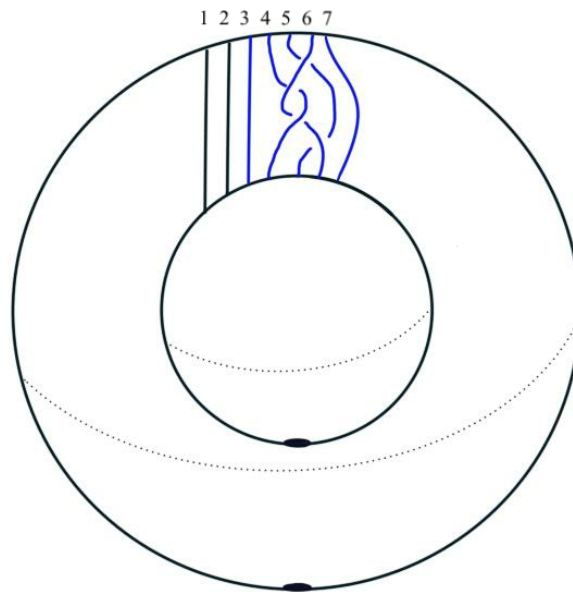


Figura 4.7: Representação geométrica de $\alpha \in B_4(M_{0,3+1})$.

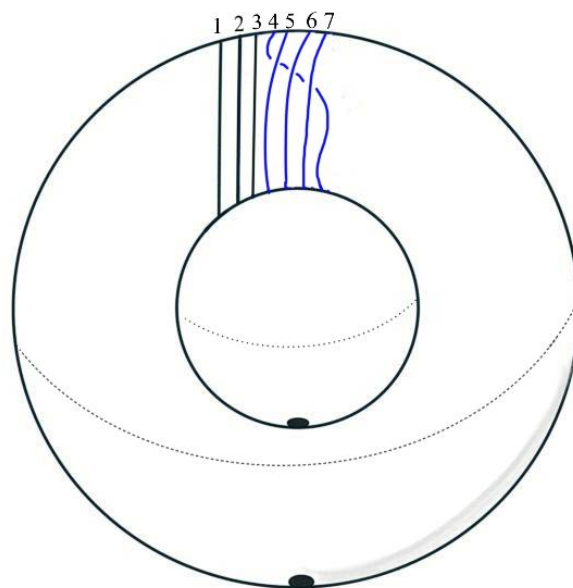


Figura 4.8: Representação geométrica de $\tilde{\alpha} \in B_4(M_{0,3+1})$.

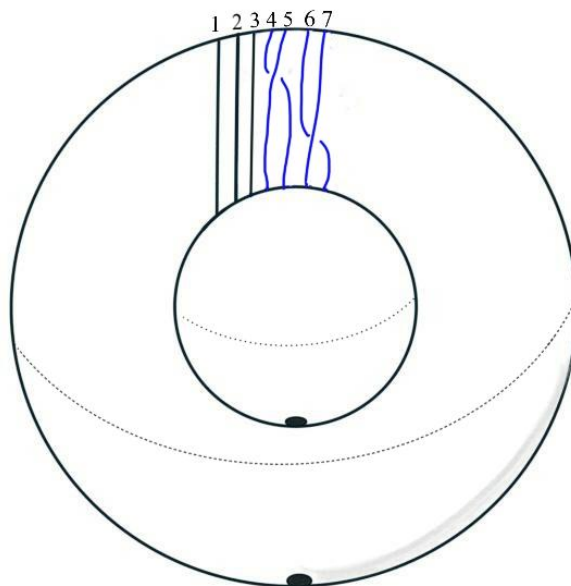


Figura 4.9: Representação geométrica de $\alpha_1 \in B_4(M_{0,3+1})$.

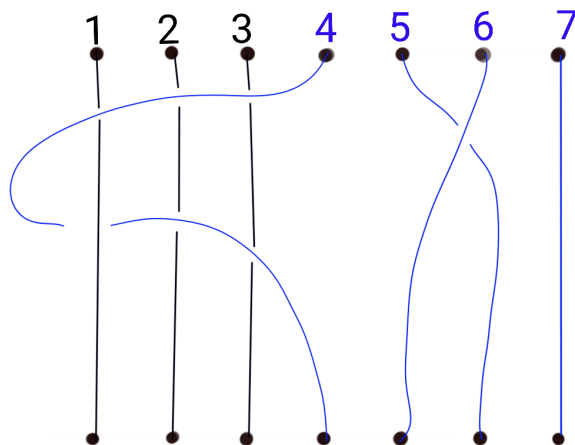


Figura 4.10: Representação geométrica de $\tilde{\alpha} \in B_4(M_{0,3+1})$.

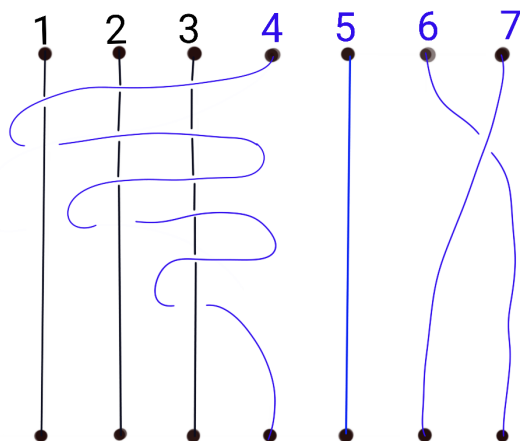


Figura 4.11: Representação geométrica de $\gamma \in B_4(M_{0,3+1})$.

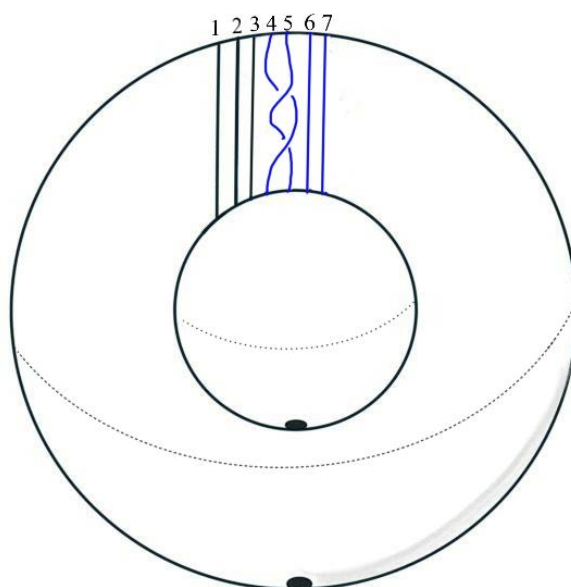


Figura 4.12: Representação geométrica de $\bar{\gamma} \in B_4(M_{0,3+1})$.

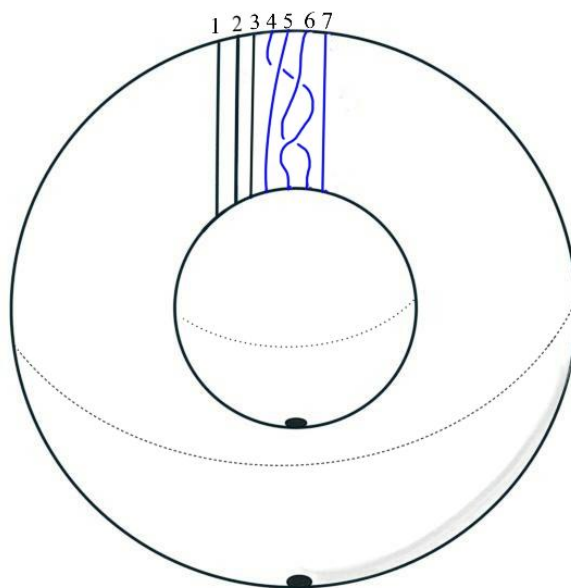


Figura 4.13: Representação geométrica de $\gamma_1 \in B_4(M_{0,3+1})$.

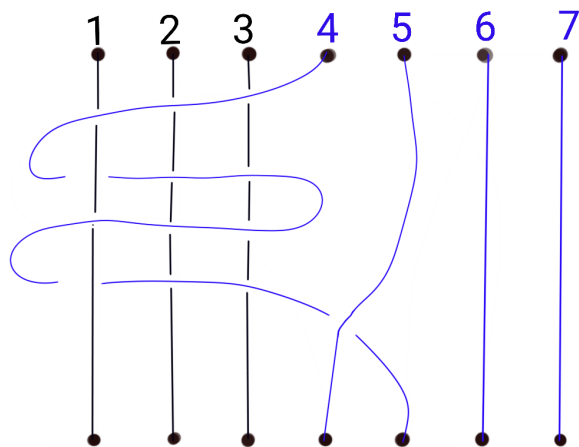


Figura 4.14: Representação geométrica de $\gamma_2 \in B_4(M_{0,3+1})$.

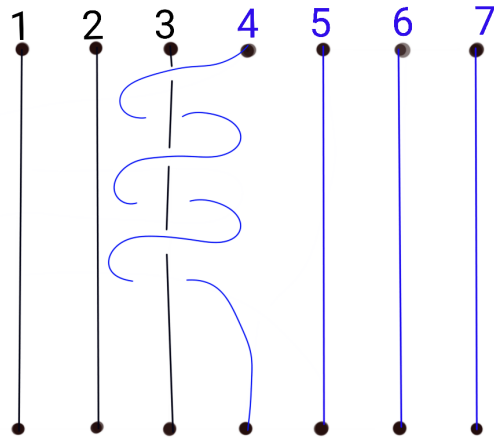


Figura 4.15: Representação geométrica de $\gamma \in B_4(M_{0,3+1})$.

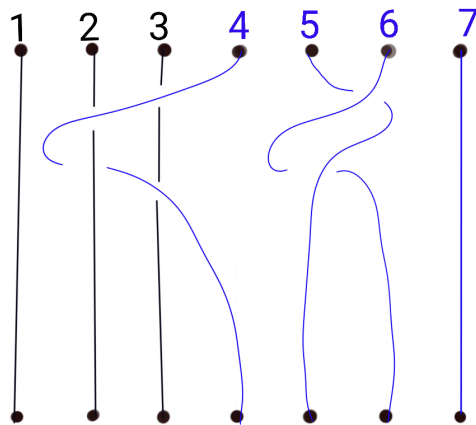


Figura 4.16: Representação geométrica da trança $\sigma_{p+1}\sigma_{p+2}\sigma_{p+3}\sigma_{p+1}\sigma_{p+2}$ em $B_n(M_{0,p+1})^+$.

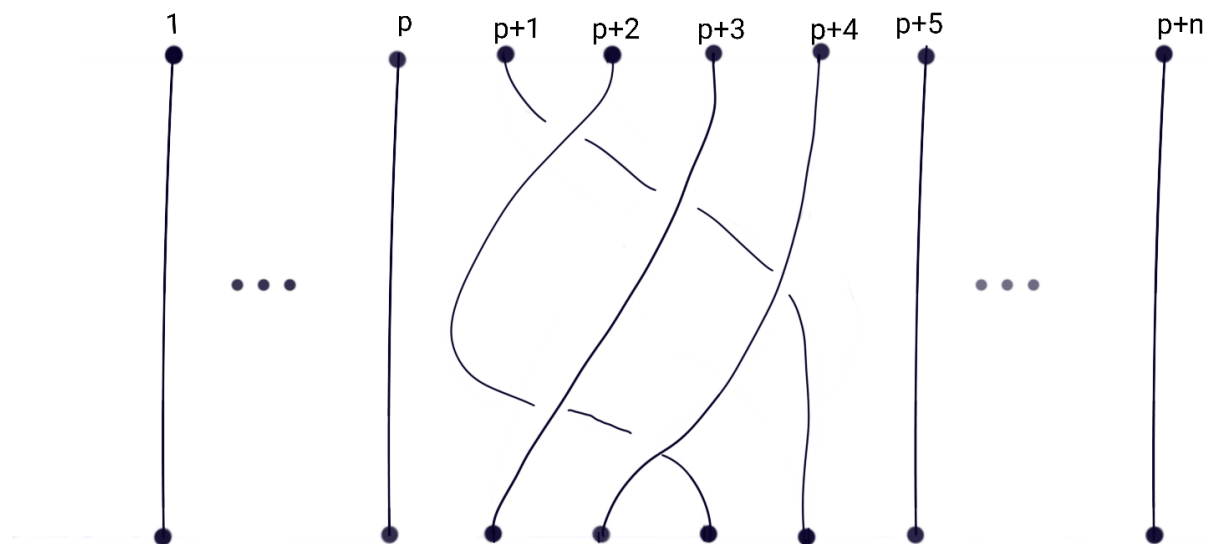


Figura 4.17: Representação geométrica da trança $\sigma_{p+2}\sigma_{p+1}\sigma_{p+3}\sigma_{p+2}\sigma_{p+3}$ em $B_n(M_{0,p+1})^+$.

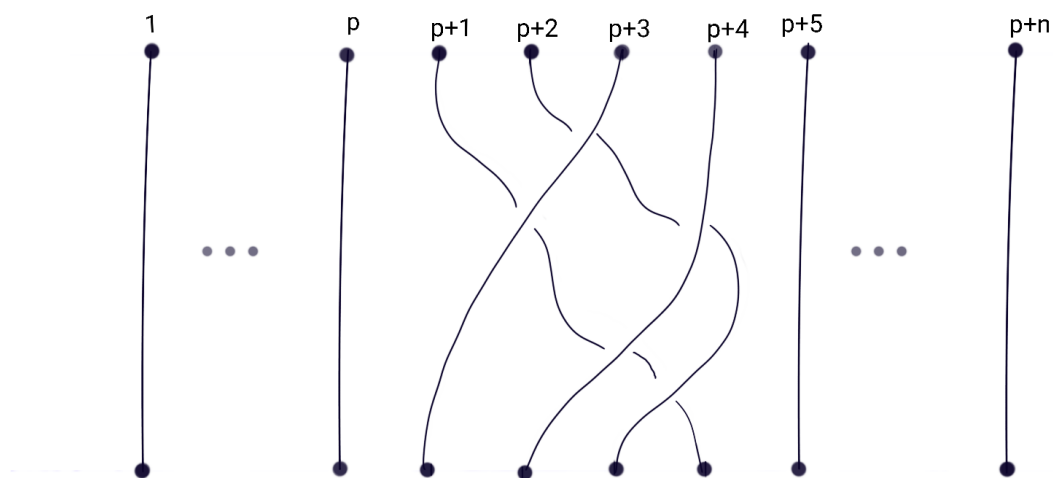


Figura 4.18: Representação geométrica do gerador a_r de $B_n(M_{g,p})$.

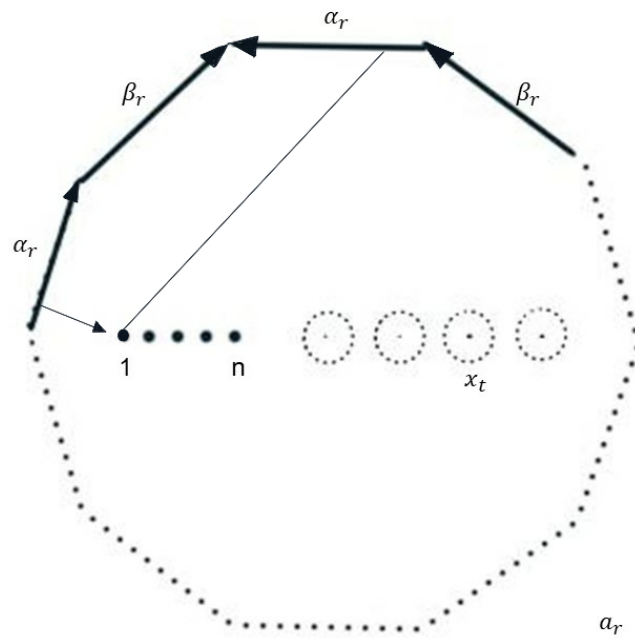


Figura 4.19: Representação geométrica do geradore b_r de $B_n(M_{g,p})$.

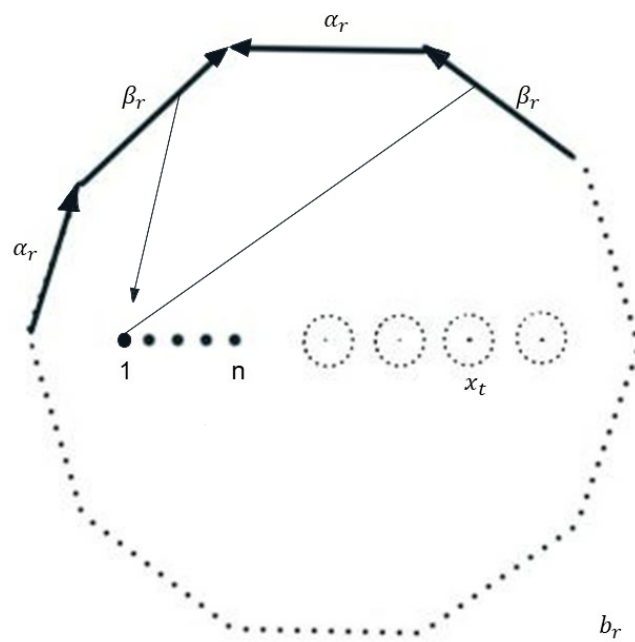


Figura 4.20: Representação geométrica do gerador z_t de $B_n(M_{g,p})$.

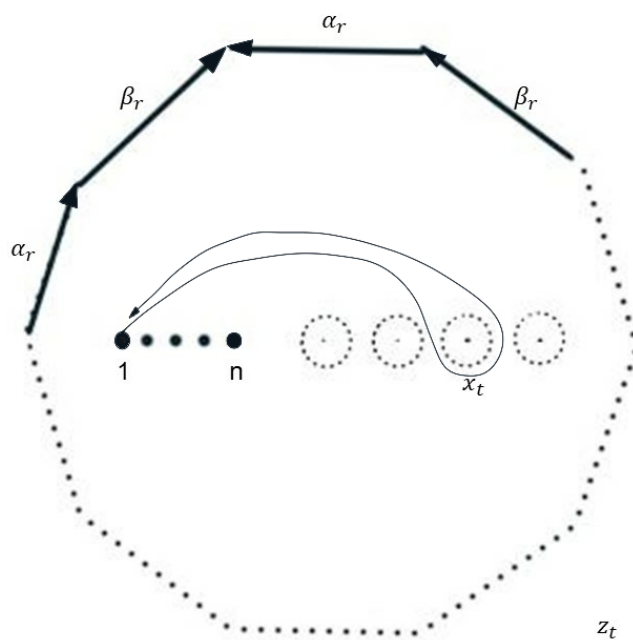


Figura 4.21: Representação geométrica do gerador σ_i de $B_n(M_{g,p})$.

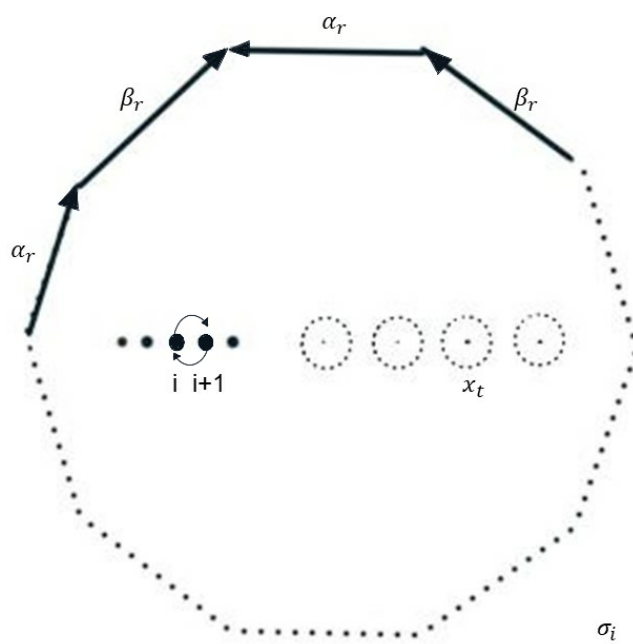


Figura 4.22: Representação dos geradores de $P_n(M_{g,p})$ (espacial).

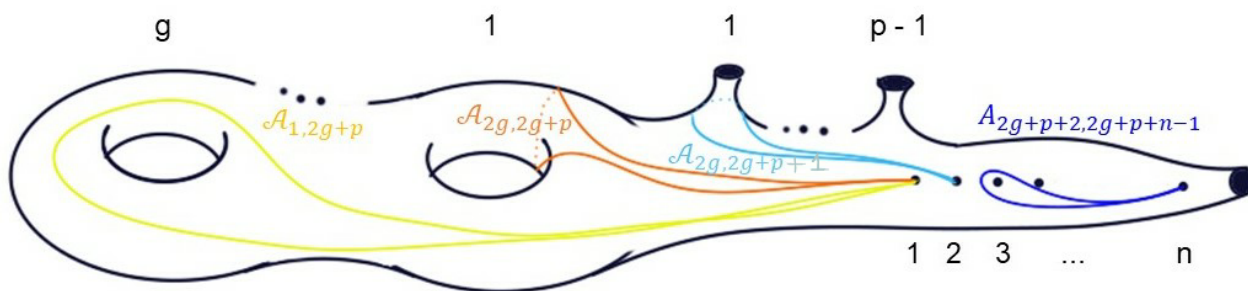


Figura 4.23: Duas representações geométricas do gerador $B_{i,j}$.

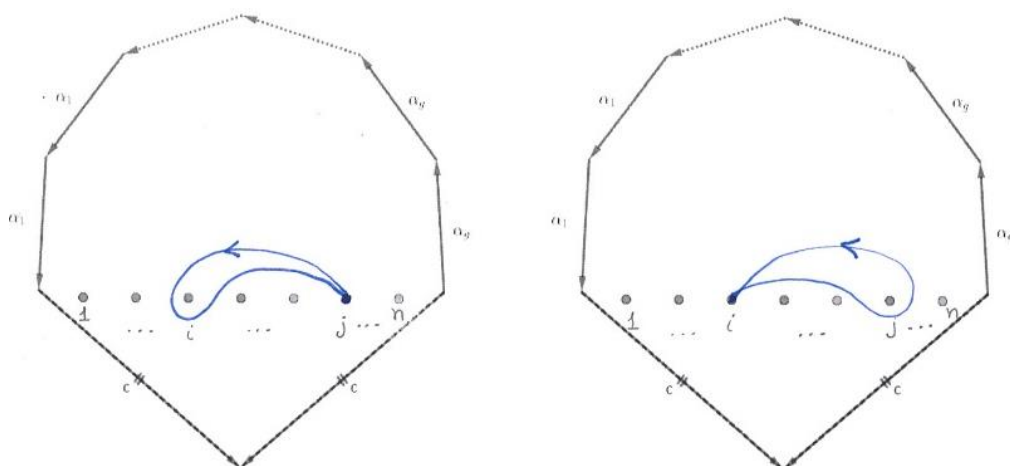


Figura 4.24: Geradores $\rho_{i,1}$ (em azul) e $\rho_{j,g}^{-1}$ (em vermelho).

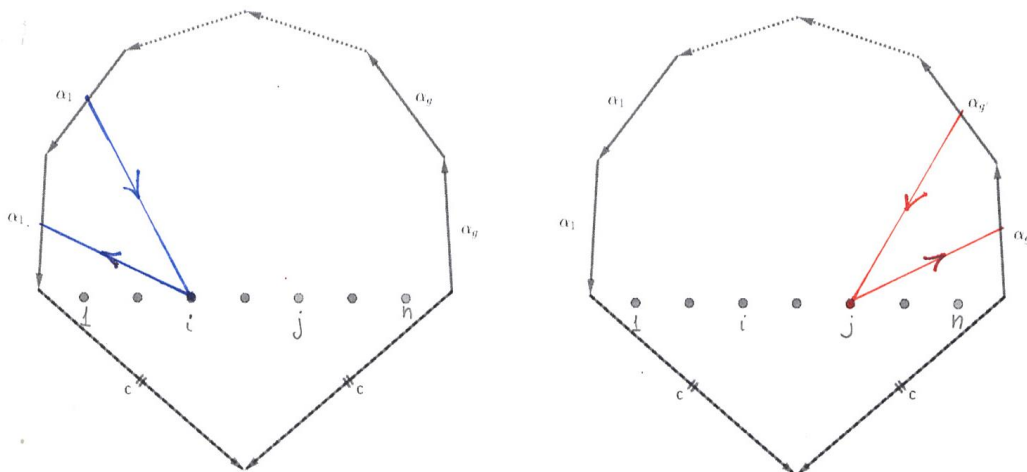


Figura 4.25: Representação geométrica plana do gerador $B_{i,j}$ (em azul) e $B_{i,j}^{-1}$ (em vermelho) do grupo de tranças puras $P_n(N_{g,p})$.

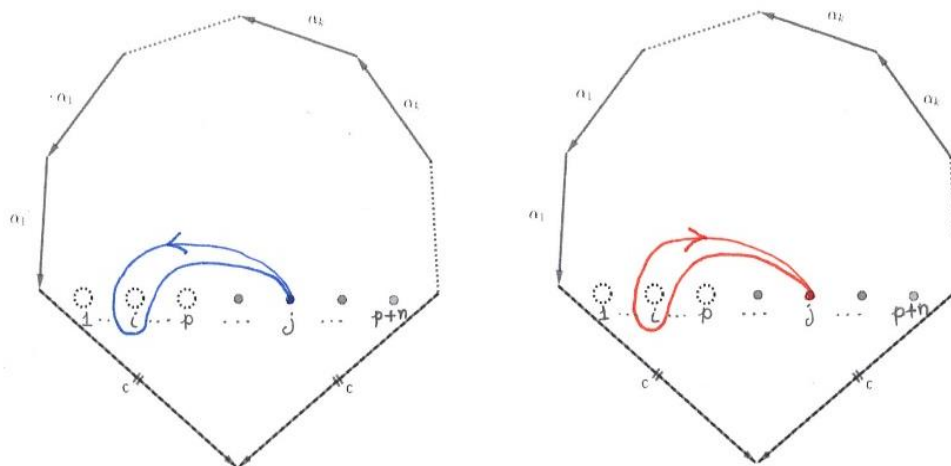


Figura 4.26: Representação geométrica espacial do gerador $B_{i,j}$ (em azul) e $B_{i,j}^{-1}$ (em vermelho) do grupo de tranças puras $P_n(N_{g,p})$.

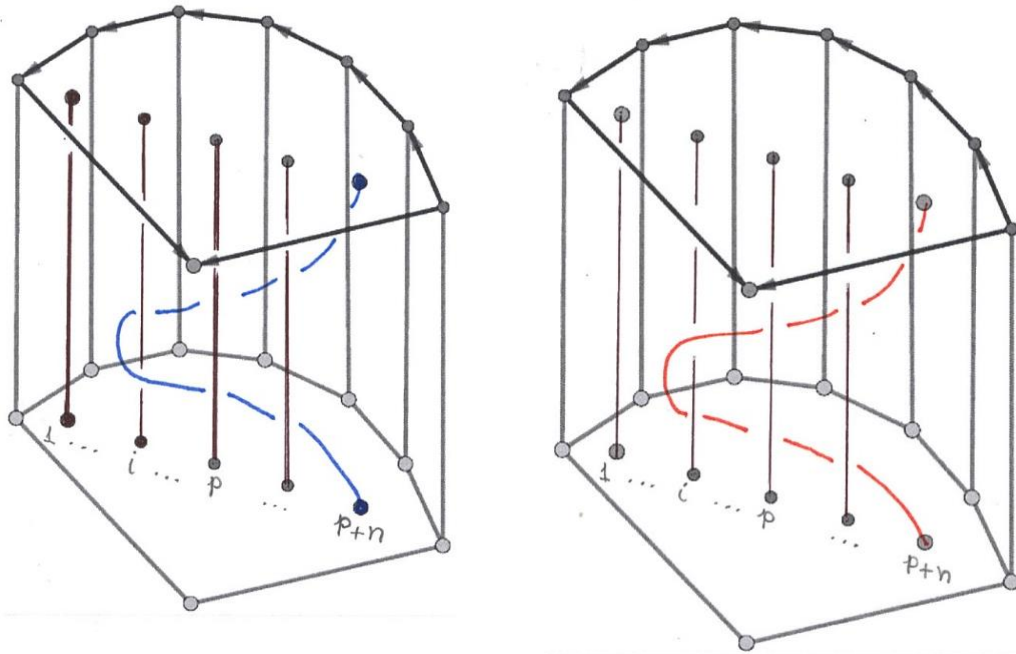


Figura 4.27: Representação geométrica plana do gerador $\rho_{j,k}$ (em azul) e $\rho_{j,k}^{-1}$ (em vermelho) do grupo de tranças puras $P_n(N_{g,p})$.

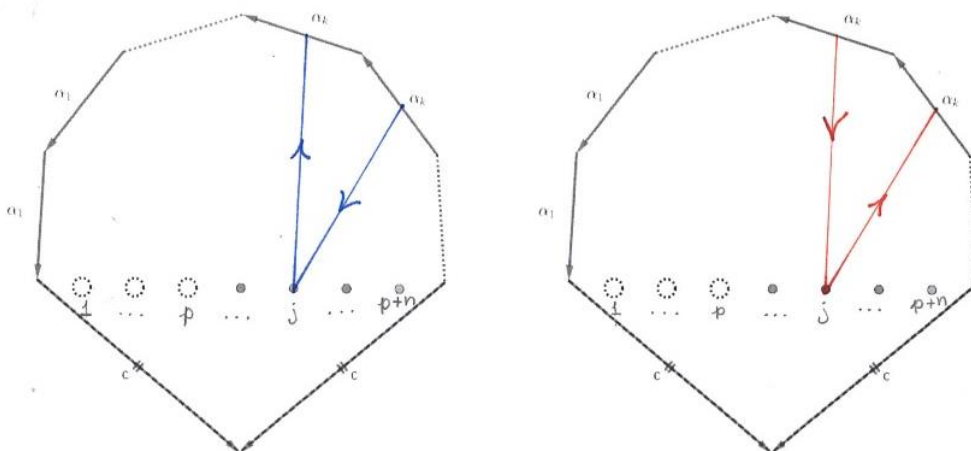


Figura 4.28: Representação geométrica espacial do gerador $\rho_{j,k}$ (em azul) e $\rho_{j,k}^{-1}$ (em vermelho) do grupo de tranças puras $P_n(N_{g,p})$.

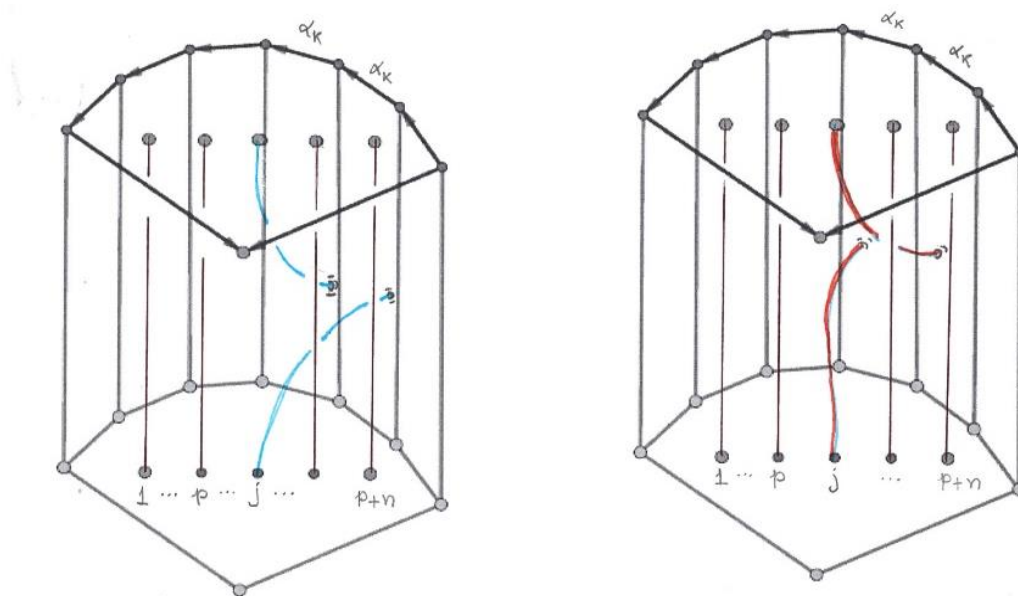


Figura 4.29: Representação geométrica da relação $\prod_{i=1}^{p+n} B_{i,p+n+1} = \rho_{p+n+1,1}^2 \rho_{p+n+1,2}^2 \cdots \rho_{p+n+1,g}^2$ em $P_n(N_{g,p})$.

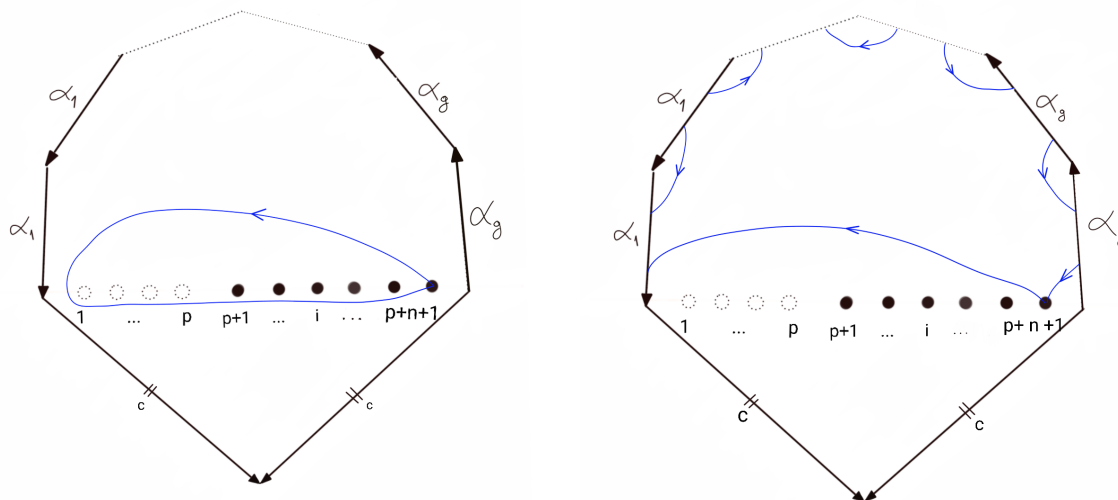


Figura 4.30: Representação geométrica da relação $B_{j,p+n+1} = \left(\prod_{l=1}^g \rho_{j,l}^2 \right) \left(\prod_{s=1+j}^{p+n} B_{j,s} \right)^{-1} \left(\prod_{r=1}^{j-1} B_{r,j} \right)^{-1}$ em $P_n(N_{g,p})$.

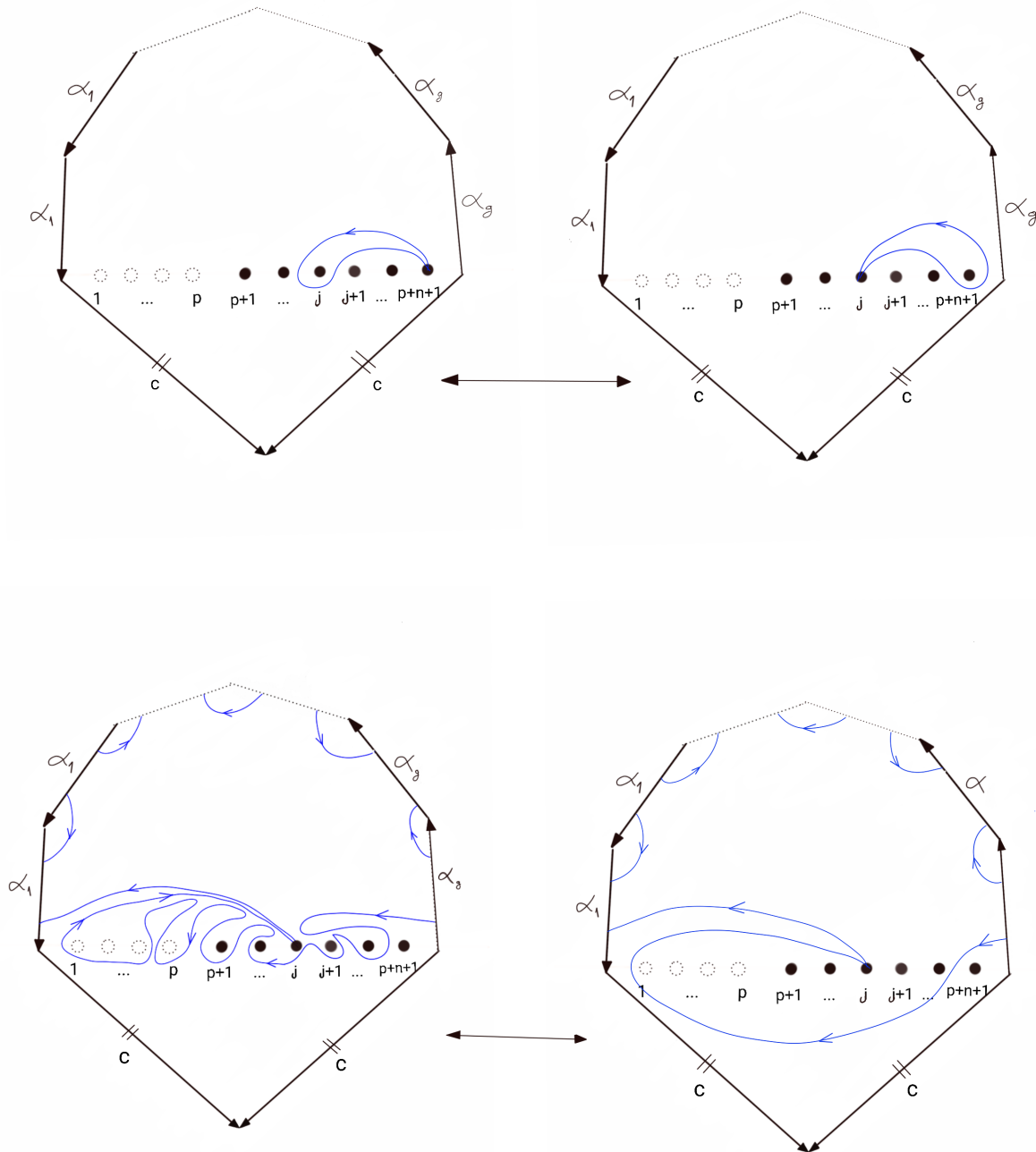


Figura 4.31: Representação geométrica da relação $B_{r,s}B_{i,j}B_{r,s}^{-1} = B_{i,j}$ em $P_n(N_{g,p})$, quando $r < i < j < s$ ou $r < s < i < j$.

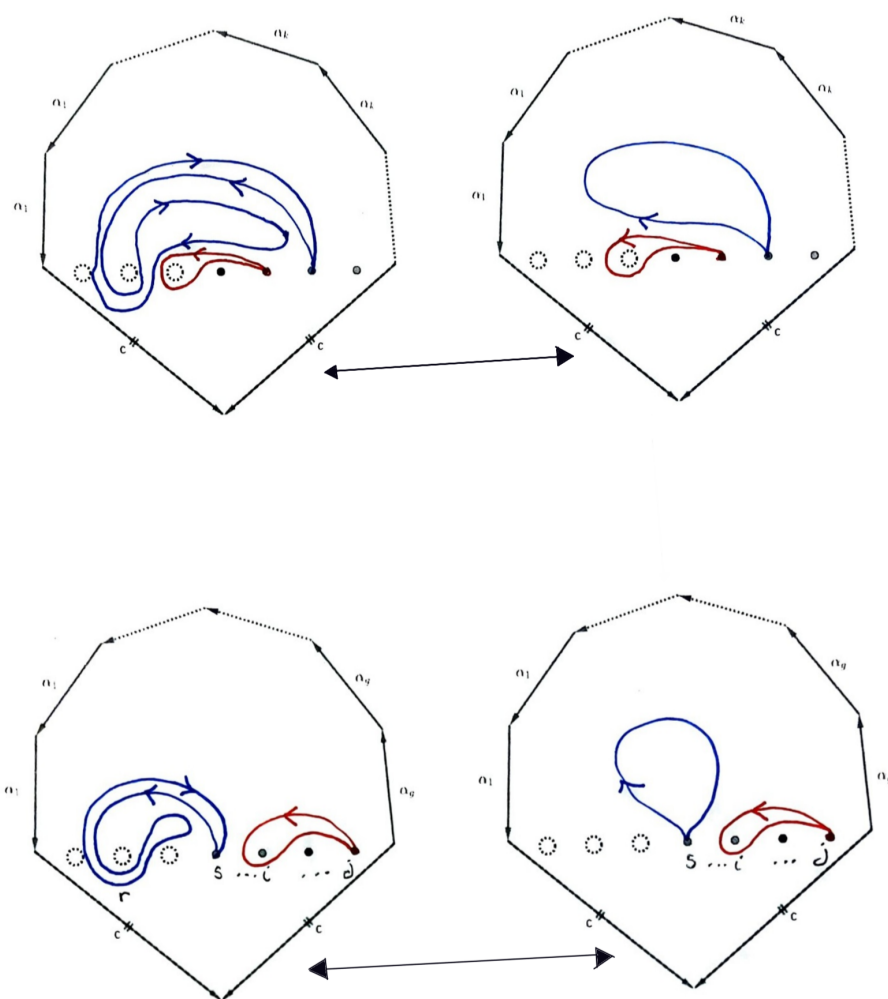


Figura 4.32: Representação geométrica da relação $B_{r,s}B_{i,j}B_{r,s}^{-1} = B_{s,j}^{-1}B_{i,j}B_{s,j}$ em $P_n(N_{g,p})$, quando $i = r < s < j$.

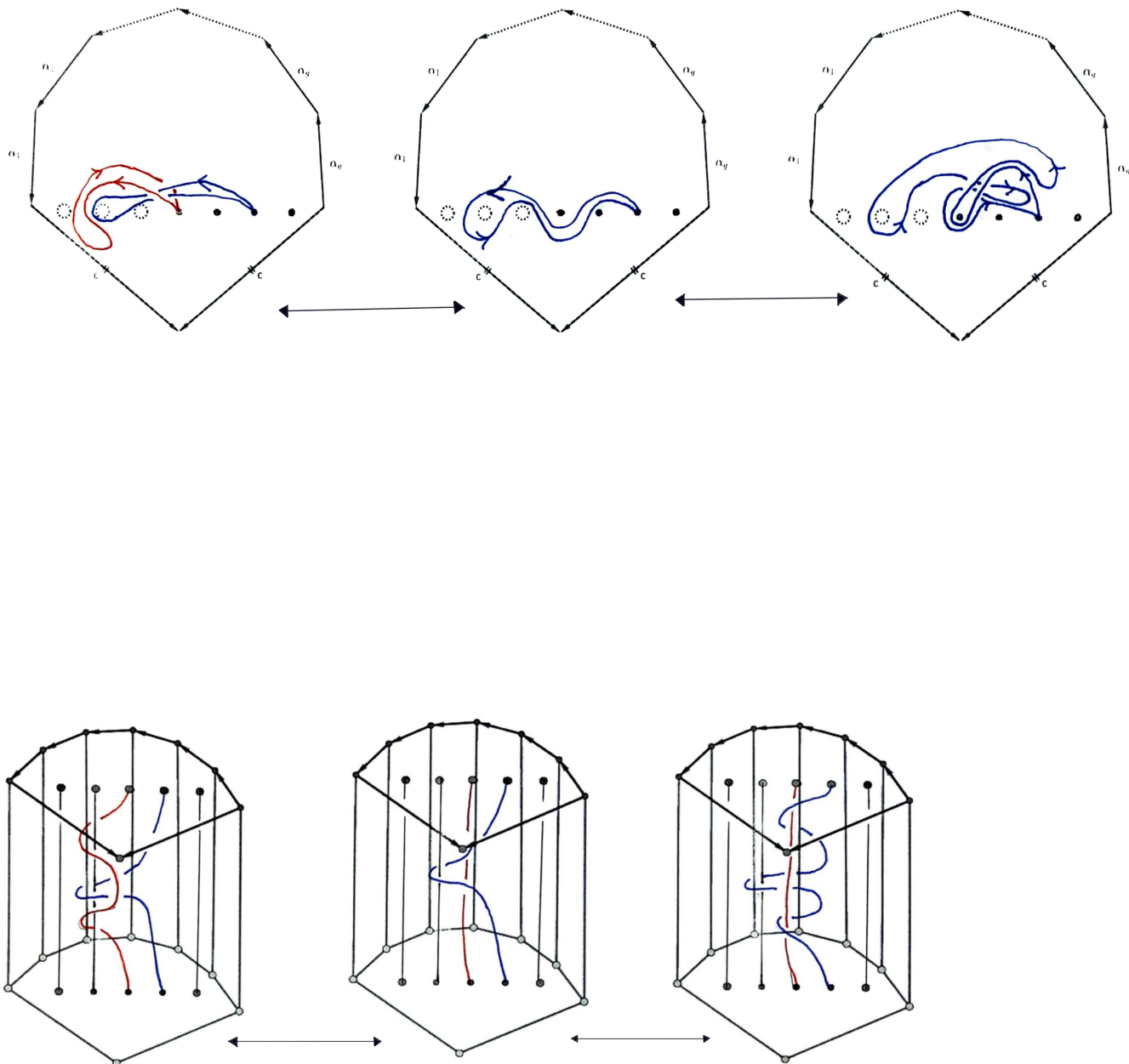


Figura 4.33: Representação geométrica da relação $B_{r,s}B_{i,j}B_{r,s}^{-1} = B_{i,j}^{-1}B_{r,j}^{-1}B_{i,j}B_{r,j}B_{i,j}$ em $P_n(N_{g,p})$, quando $r < i = s < j = p + n + 1$.

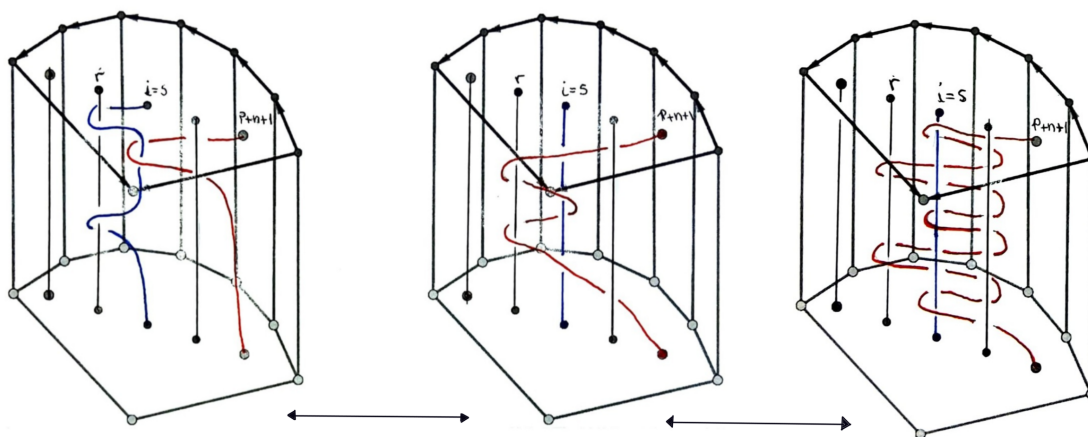


Figura 4.34: Representação geométrica da relação $\rho_{i,k}\rho_{j,l}\rho_{i,k}^{-1} = \rho_{j,l}$ em $P_n(N_{g,p})$, quando $k < l$.

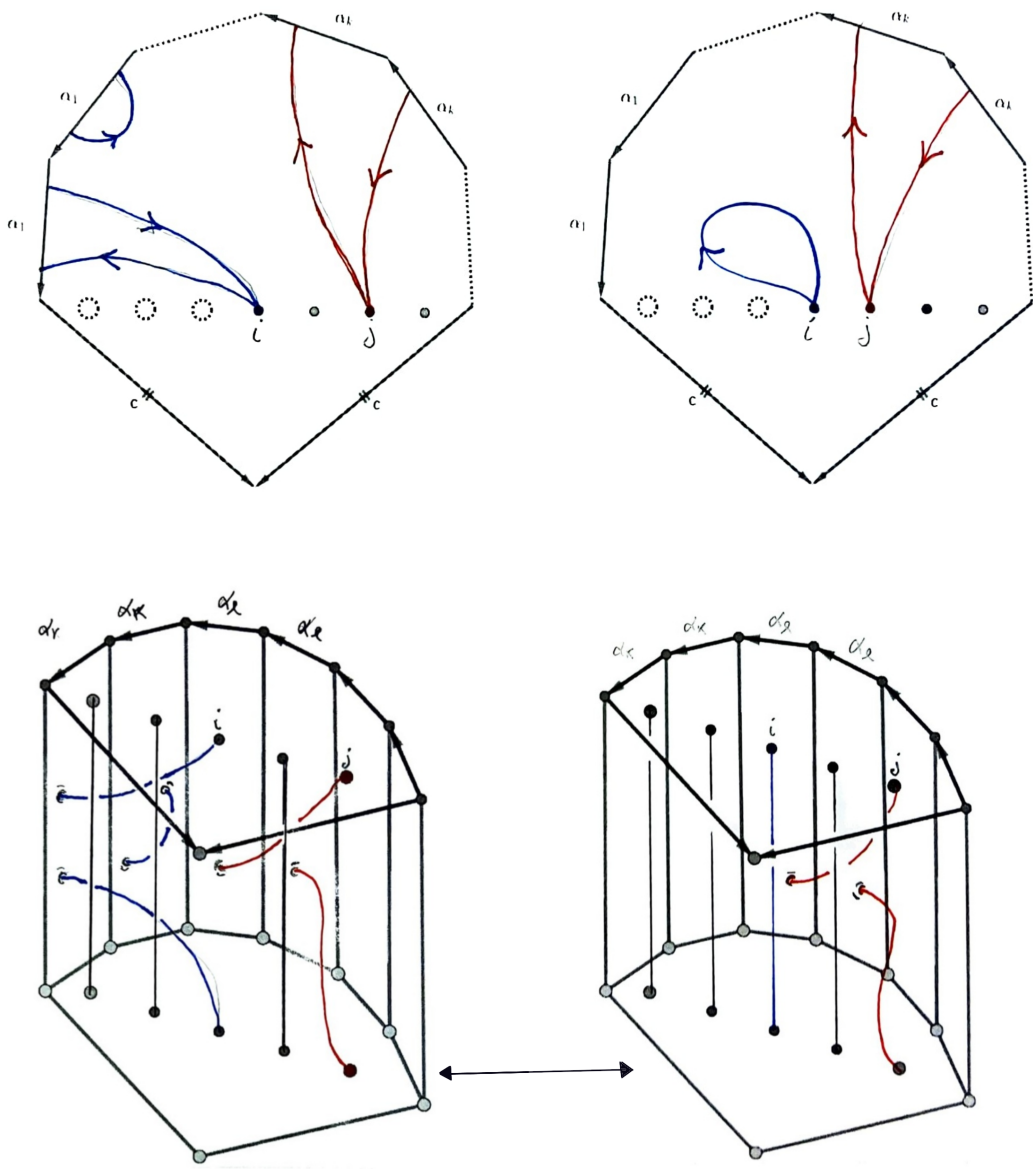


Figura 4.35: Representação geométrica da relação $\rho_{i,k}\rho_{j,l}\rho_{i,k}^{-1} = \rho_{j,k}^{-1}B_{i,j}^{-1}\rho_{j,k}^2$ em $P_n(N_{g,p})$, quando $p+1 \leq i < j \leq p+n$ e $k=l$.

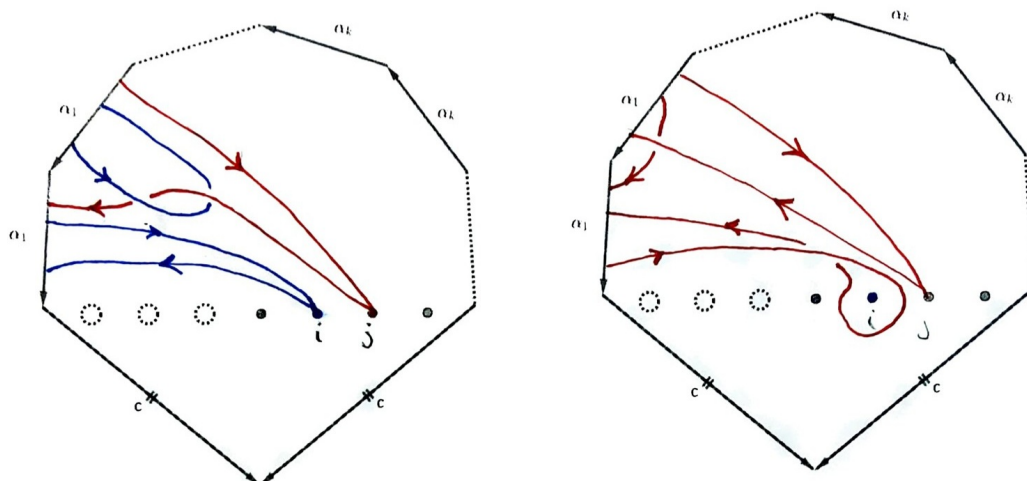


Figura 4.36: Representações geométricas (plana e espacial) da relação $\rho_{k,l} B_{i,j} \rho_{k,l}^{-1} = B_{i,j}$ em $P_n(N_{g,p})$, quando $k < i$ ou $j < k$.

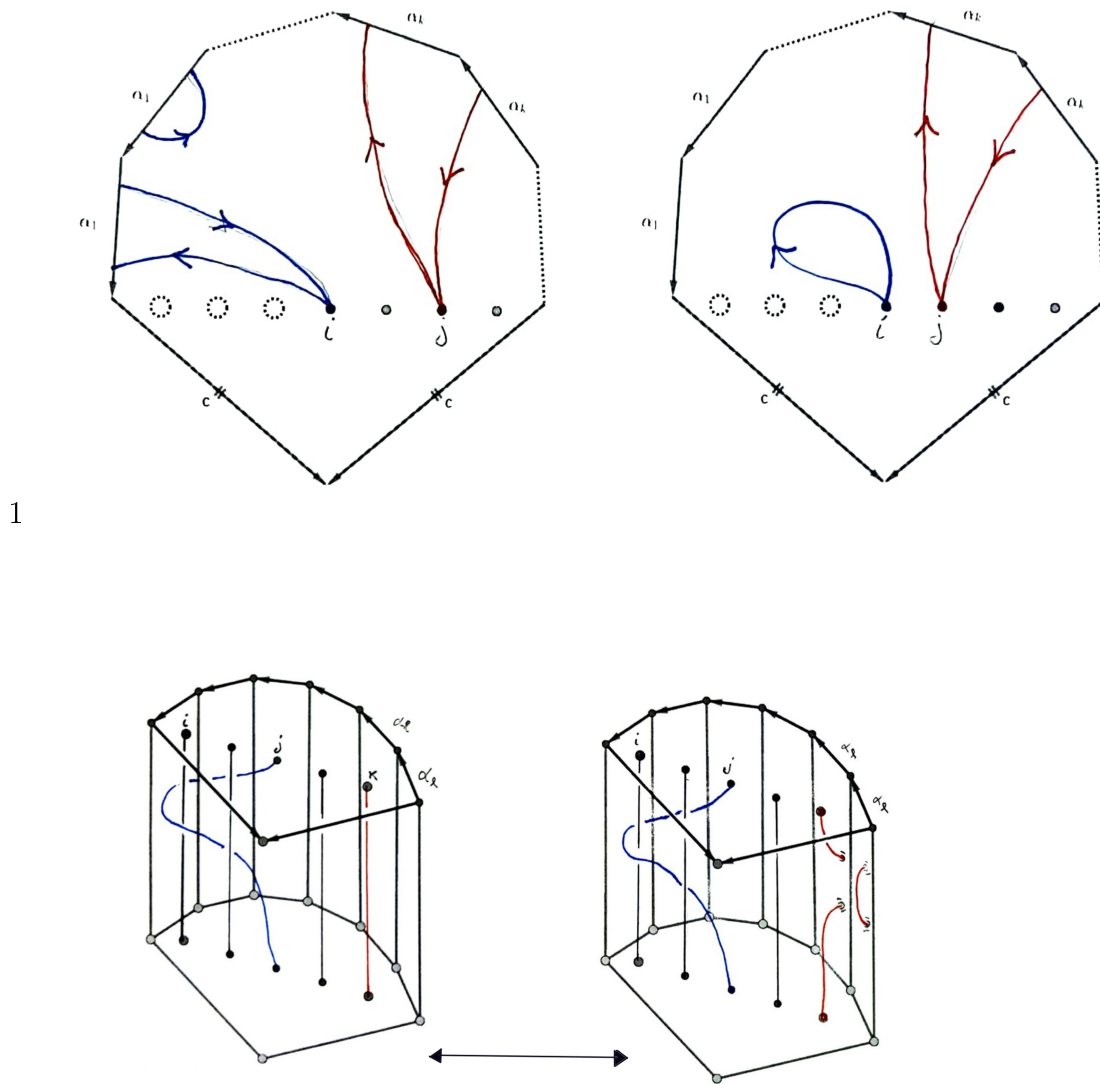


Figura 4.37: Representações geométricas (plana e espacial) da relação $\rho_{k,l} B_{i,j} \rho_{k,l}^{-1} = \rho_{j,l}^{-1} B_{i,j}^{-1} \rho_{j,l}$ em $P_n(N_{g,p})$, quando $k = i$.

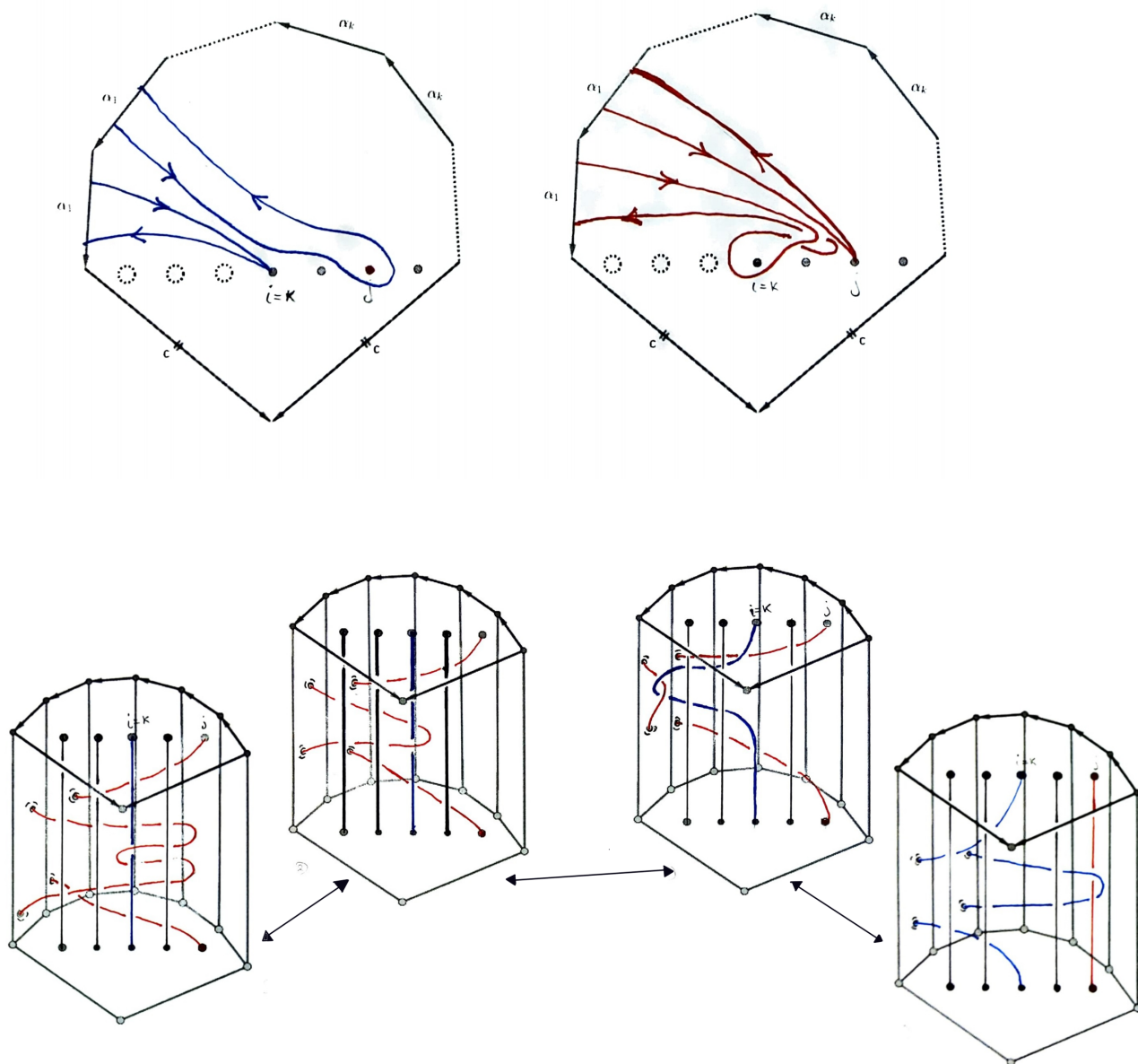


Figura 4.38: A relação $\rho_{i,k}\rho_{j,l}\rho_{i,k}^{-1} = \rho_{j,k}^{-1}B_{i,j}^{-1}\rho_{j,k}B_{i,j}^{-1}\rho_{j,l}B_{i,j}\rho_{j,k}^{-1}B_{i,j}\rho_{j,k}$ em $P_n(N_{g,p})$, quando $j = p + n + 1$ e $k > l$.

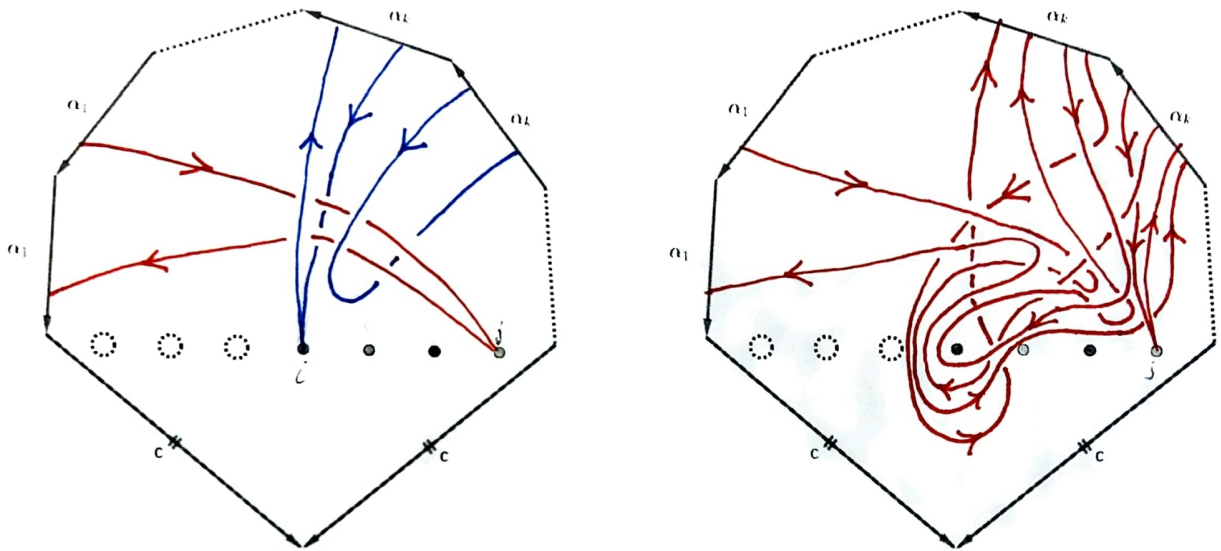


Figura 4.39: A relação $\rho_{i,k}\rho_{j,l}\rho_{i,k}^{-1} = \rho_{j,k}^{-1}B_{i,j}^{-1}\rho_{j,k}B_{i,j}^{-1}\rho_{j,l}B_{i,j}\rho_{j,k}^{-1}B_{i,j}\rho_{j,k}$ em $P_n(N_{g,p})$, quando $j = p + n + 1$ e $k > l$. (Representação geométrica Espacial)

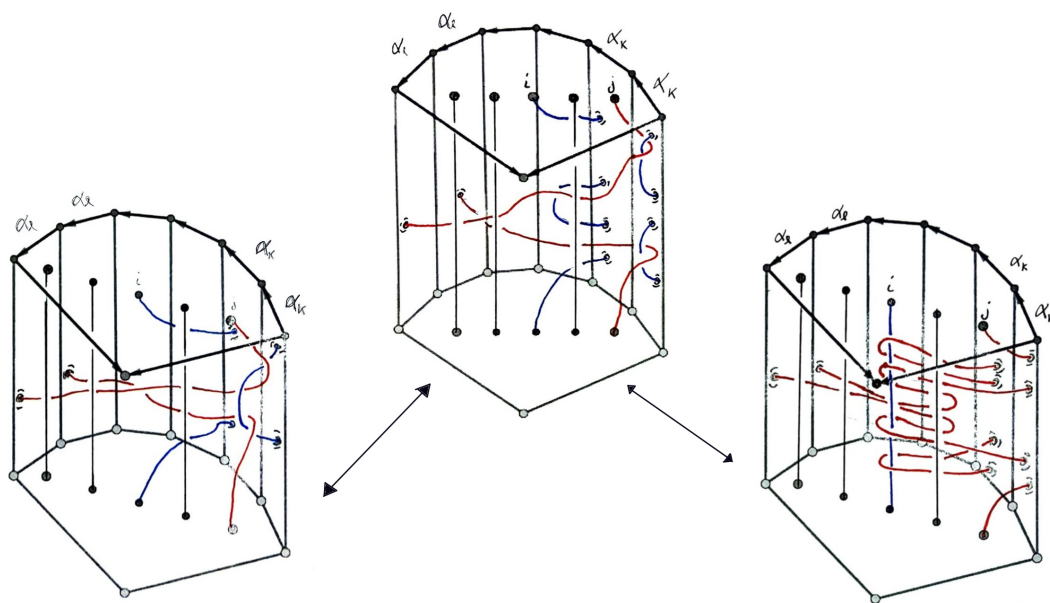
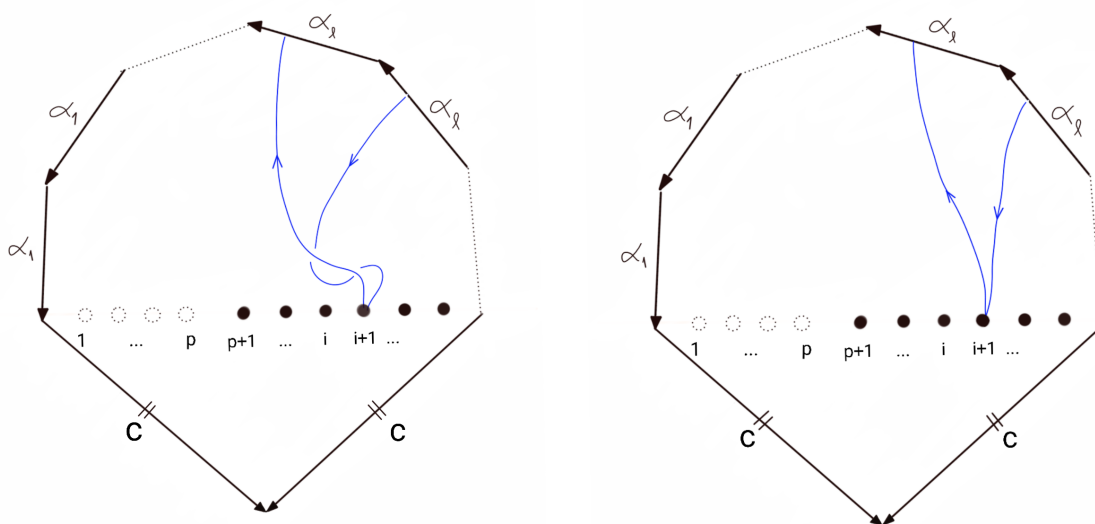


Figura 4.40: A relação $\sigma_i^{-1} \rho_{i,l} \sigma_i = \rho_{i+i,l}$ em $B_n(N_{g,p})$.



Referências Bibliográficas

- [1] ARTIN, E. Theorie der Zöpfe. Abn. Math. Sem. Univ. Hamburg 4, p. 47-72, 1925.
- [2] ARTIN, E. Theory of braids. Annals of Mathematics 48, p. 101-126, 1947.
- [3] ARTIN, E. Braids and permutations. Annals of Mathematics 48, p. 643-649, 1947.
- [4] BECK, V.; MARIN, I. Torsion subgroups of quasi-abelianized braid groups. Journal of Algebra 558, p. 3-23, 2020.
- [5] BELLINGERI, P. On presentations of surface braid groups. Journal of Algebra 274, p. 543-563, 2004.
- [6] BELLINGERI, P.; GERVAIS, S. On p -almost direct products and residual properties of pure braid groups of nonorientable surfaces. Algebraic e Geometric Topology 16, p. 547-568, 2016.
- [7] BELLINGERI, P.; GODELLE, E.; GUASCHI, J. Abelian and metabelian quotient groups of surface braid groups. Glasgow Mathematical Journal 59, p. 119-142, 2017.
- [8] BERRICK, A. J.; COHEN, F.; HANBURY, E.; WONG, Y.L.; WU, J. (EE.) **Braids: Introductory lectures on braids, configurations and their applications.** Singapore: World Scientific, v. 19, 2010.
- [9] BIRMAN, J.S. On braid groups. Communications on Pure and Applied Mathematics 22, p. 41-72, 1969.
- [10] BIRMAN, J. S. Braids, links, and mapping class groups. Annals of Mathematical Studies 82, 1975.
- [11] BIRMAN, J.; BRENDLE, T. Braids: a survey. In: **Handbook of knot theory.** Eds. MENASCO, W.; THISTLETHWAITE, M. Elsevier Science, Amsterdam, p. 19-104, 2005.
- [12] CARTER, D. W. Lower K-theory of finite groups. Communications in Algebra 8, 1980.
- [13] CHOW, W.L. On the algebraical braid group. Annals of Mathematical Studies 49, p. 654-658, 1948.

- [14] COHEN, F. R. Artin's braid groups and classical homotopy theory. In: **Contemporary Mathematics, Combinatorial methods in topology and algebraic geometry**. American Mathematical Society, v. 44, Providence, RI, p. 207-220, 1985.
- [15] COHEN, F. R. Introduction to configuration spaces and their applications. In: [8]. **Braids: Introductory lectures on braids, configurations and their applications**. Singapore: World Scientific, v. 19 p.183-261, 2010.
- [16] COXETER, H. S. M. Factor groups of the braid groups. In: Proc. Fourth Canad. Math. Congress, p. 95-122, 1957.
- [17] CHARLAP, L. **Bieberbach Groups and Flat Manifolds**. New York: Springer-Verlag, 1986.
- [18] DEHORNOY, P. Braid groups and left distributive operations. Transactions of the American Mathematical Society 345, p. 115-150, 1994.
- [19] DEKIMPE, K. **Almost-Bieberbach groups: affine and polynomial structures**. Berlin: Springer, 1996.
- [20] ELRIFAI, E. A.; MORTON, H.R. Algorithms for positive braids. The Quarterly Journal of Mathematics 45, p. 479-497, 1994.
- [21] FADELL, E.; HUSSEINI, S. Y. **Geometry and topology of configuration spaces**. Berlin: Springer-Verlag, 2001.
- [22] FADELL, E.; NEUWIRTH, L. Configuration spaces. Mathematica Scandinavica 10, p. 111-118, 1962.
- [23] FADELL, E.; VAN BUSKIRK, J. The braid groups of \mathbb{E}^2 and \mathbb{S}^2 . Duke Mathematical Journal 29, p. 243-257, 1962.
- [24] FADELL, E. Homotopy groups of configuration spaces and the string problem of Dirac. Duke Mathematical Journal 29, p. 231-242, 1962.
- [25] FARB, B.; MARGALIT, D. A primer on mapping class groups. Princeton University Press, Princeton, 2011.
- [26] FARLEY, D. Constructions of *EVC* and *EFBC* for groups acting on *CAT*(0) spaces. Algebraic & Geometric Topology 10, p. 2229-2250, 2010.
- [27] FOX, R. H.; NEUWIRTH, L. The braid groups. Mathematica Scandinavica 10, p. 119-126, 1962.

-
- [28] GILLETTE, R.; VAN BUSKIRK, J. The word problem and consequences for the braid groups and mapping class groups of the 2-sphere. *Transactions of the American Mathematical Society* 131, p. 277-296, 1968.
- [29] GONÇALVES, D. L.; GUASCHI, J. On the structure of surface pure braid groups. *Journal of pure and applied algebra* 186, p. 187-218, 2004.
- [30] GONÇALVES, D. L.; GUASCHI, J. The roots of the full twist for surface braid groups. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 137, p. 307-320, 2004.
- [31] GONÇALVES, D. L.; GUASCHI, J. The braid group $B_{n,m}(\mathbb{S}^2)$ and the generalised Fadell-Neuwirth short exact sequence. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* 14, p. 375-403, 2005.
- [32] GONÇALVES, D. L.; GUASCHI, J. The braid groups of the projective plane and the Fadell-Neuwirth short exact sequence. *Geometriae Dedicata* 130, p. 93-107, 2007.
- [33] GONÇALVES, D. L.; GUASCHI, J. The lower central and derived series of the braid groups of the sphere. *Trans. Amer. Math. Soc.* 361, p. 3375-3399, 2009.
- [34] GONÇALVES, D. L.; GUASCHI, J. The lower central and derived series of the braid groups of the finitely-punctured sphere. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* 18, n. 5, p. 651-704, 2009.
- [35] GONÇALVES, D. L.; GUASCHI, J. The Borsuk-Ulam theorem for maps into a surface. *Topology and its Applications* 157, p. 1742-1759, 2010.
- [36] GONÇALVES, D. L.; GUASCHI, J. Braid group of non-orientable surfaces and the generalised Fadell-Neuwirth short exact sequence. *Journal of Pure and Applied Algebra* 214, p. 667-677, 2010.
- [37] GONÇALVES, D. L.; GUASCHI, J. The lower central and derived series of the braid groups of the projective plane. *Journal of Algebra* 331, p. 96-129, 2011.
- [38] GONÇALVES, D. L.; GUASCHI, J. Inclusion of configuration spaces in cartesian products, and the virtual cohomological dimension of the braid groups \mathbb{S}^2 and $\mathbb{R}P^2$. *Pacific Journal of Mathematics* 287, p. 71-99, 2017.
- [39] GONÇALVES, D. L.; GUASCHI, J.; OCAMPO, O. A quotient of the Artin braids groups related to crystallographic groups. *Journal of Algebra* 474, p. 393-423, 2017.
- [40] GONÇALVES, D. L.; GUASCHI, J.; OCAMPO, O. Almost-crystallographic groups as quotients of Artin braid groups. *Journal of Algebra* 524, p. 160-186, 2019.

- [41] GONÇALVES, D. L.; GUASCHI, J.; OCAMPO, O. Embeddings of finite groups in $B_n/\Gamma_k(P_n)$ for $k = 2, 3$. *Annales de l'institut Fourier* 70(5), p. 2005-2025, 2020.
- [42] GONÇALVES, D. L.; GUASCHI, J.; OCAMPO, O.; PEREIRO, C. M. Crystallographic groups and flat manifolds from surface braid groups. *Topology and its Applications* 293, p. 1-16, 2021.
- [43] GONZALEZ-MENEZES, J. New presentations of surface braid groups. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* 10, p. 431-451, 2001.
- [44] GUASCHI, J.; JUAN-PINEDA, D. A survey of surface braid groups and the lower algebraic K -theory of their group rings. *Handbook of Group Actions* 2, p. 23-75, 2015.
- [45] HANSEN, V. L. **Braids and Coverings: selected topics**. London Mathematical Society Student Texts 18, 1989.
- [46] HOFFMAN, M. An invariant of finite Abelian groups. *The American Mathematical Monthly* 94, p. 664-666, 1987.
- [47] JOHNSON, D. L. **Presentations of groups**. 2^a. ed. Londres: Cambridge University Press, 1997.
- [48] JONES, V. F. R. Hecke algebra representation of braid groups and link polynomials. *Annals of Mathematics* 126, p. 335-388, 1987.
- [49] JUAN-PINEDA, D.; MILLÁN-LÓPEZ, S. The Whitehead group and the lower algebraic K -theory of braid groups on S^2 and RP^2 . *Algebraic & Geometric Topology* 10, p. 1887-1903, 2010.
- [50] KASSEL, C.; TURAEV, V. **Braids Groups**. New York: Springer-Graduate texts in Mathematics 247, 2008.
- [51] LAMBROPOULOU, S. Braid structures in knot complements, handlebodies and 3-manifolds. In: *Knots in Hellas '98 (Delphi)*, Series on Knots and Everything. Singapura: World Scientific, 2000, v. 24, p. 274-289.
- [52] LOPES, I. C. da S. **Grupos Cristalográficos e orbifolds euclidianos bidimensionais**. 2004. 99 f. Dissertação (Mestrado em Matemática - Fundamentos e Aplicações) - Faculdades de Ciências, Universidade do Porto, Porto, 2004.
- [53] MAGNUS, W. Braid groups: a survey. In: *Proceedings of the Second International Conference on the Theory of Groups*. Berlin: Springer, 1974. v. 372, p. 463-487.
- [54] MANFREDINI, S. Some subgroups of Artin's braid group. *Topology and its Applications* 78, p. 123-142, 1997.

- [55] MANTUROV, V. **Knot theory**. Chapman & Hall, 2004.
- [56] MARIN, I. The cubic Hecke algebra on at most 5 strands. *Journal of Pure and Applied Algebra* 216, p. 2754-2782, 2012.
- [57] MARIN, I. Crystallographic groups and flat manifolds from complex reflection groups. *Geometriae Dedicata* 182, p. 233-247, 2016.
- [58] MURASUGI, K. Seifert fibre spaces and braid groups. *Proceedings of the London Mathematical Society* 44, p. 71-84, 1982.
- [59] MURASUGI, K.; KURPITA, B. **A study of braids**. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, 1999.
- [60] OCAMPO, O. **Grupos de tranças Brunnianas e grupos de homotopia da esfera S^2** . 2013. 254 f. Tese (Doutorado em Matemática) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.
- [61] OCAMPO, O.; RODRÍGUEZ-NIETO, J. G. On Bieberbach subgroups of $B_n/[P_n, P_n]$ and at manifolds with cyclic holonomy \mathbb{Z}_{2d} . *Topology and its Applications* 265, p. 1-12, 2019.
- [62] OCAMPO, O.; SANTOS JUNIOR, P. C. dos. The Conjugacy problem and virtually cyclic subgroups in the Artin braid group quotient $B_n/[P_n, P_n]$. *Topology and its Applications* 293, p. 1-15, 2021.
- [63] PARIS, L.; ROLFSEN, D. Geometric subgroups of surface braids groups. *Annales de l'institut Fourier* 49, p. 417-472, 1999.
- [64] PEREIRO, C. de M. e. **Os grupos de tranças do toro e da garrafa de Klein**. 2015. 198 f. Tese (Doutorado em Matemática) - Centro de Ciências exatas e de Tecnologia, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2015.
- [65] ROBINSON, D.J.S. **A course in the Theory of Groups**. 2^a.ed. New York: Springer-Verlag, 1995.
- [66] ROTMAN, J.J. **A first course in abstract algebra with applications**. 3^a. ed. Prentice Hall, 2015.
- [67] SCOTT, G.P. Braid groups and the group of homeomorphisms of a surface, *Proc. Camb. Phil. Soc.* 68, p. 605-617, 1970.
- [68] SZCZEPANSKI, A. **Geometry of crystallographic groups**. World Scientific, Singapore, 2012.
- [69] VAN BUSKIRK, J. Braid groups of compact 2-manifolds with elements of finite order. *Trans. Amer. Math. Soc.* 122. p 81-97, 1966.

- [70] WEYL, H. **Symmetry**. Princeton University Press, Princeton, 1952.
- [71] WHITTLESEY, K. Normal all pseudo-Anosov subgroups of mapping class groups. *Geometry & Topology* 4, p. 293-307, 2000.
- [72] WOLF, J. A. **Spaces of constant curvature**. 6^a ed. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2011.
- [73] ZARISKI, O. On the poincaré group of rational plane curves. *American Journal of Mathematics* 58, p. 607-619, 1936.
- [74] ZARISKI, O. The topological discriminant group of a riemann surface of genus p . *American Journal of Mathematics* 59, p. 335-358, 1937.
- [75] ZASSENHAUS, H. Uber einen Algorithmus zur Bestimmung der Raumgruppen. *Commentarii Mathematici Helvetici* 21, p. 117-141, 1948.