UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Existência global para a equação periódica e dispersiva de Hunter-Saxton

Andrés Gerardo Pérez Yépez

São Carlos, Brasil

4 de maio de 2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Existência global para a equação periódica e dispersiva de Hunter-Saxton

Andrés Gerardo Pérez Yépez

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Lynnyngs Kelly Arruda Saraiva de Paiva

São Carlos, Brasil
4 de maio de 2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Andres Gerardo Perez Yepez, realizada em 15/03/2021.

Comissão Julgadora:

Profa. Dra. Lynnyngs Kelly Arruda Saraiva de Paiva (UFSCar)

Prof. Dr. Nikolai Vasilievich Chemetov (USP)

Prof. Dr. Rafael Fernando Barostichi (UFSCar)

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.
O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Este trabalho é dedicado a meus amados pais e irmãos.

Agradecimentos

Agradeço a minha família pelo grande apoio em todas as circunstâncias que me trouxeram aqui, especialmente meus pais Sol Mireya Yépez e Jhonny Pérez que estão sempre sob meus cuidados e depositam sua fé em mim.

Agradeço a minha querida Keisha Sanchez por seu carinho e sempre me apoiar e me incentivar a continuar meus estudos.

Agradeço a minha orientadora, Lynnyngs Kelly Arruda Saraiva de Paiva pelo apoio durante o desenvolvimento da dissertação.

De maneira geral, agradeço a cada pessoa que me deu ajuda e apoio no transcurso destes dois anos.

Agradeço a Capes pelo apoio financeiro. Fundamental para o desenvolvimento do projeto.

Resumo

Neste trabalho, estudamos os resultados recentes sobre a existência global de solução para a equação dispersiva integrável de Hunter–Saxton em domínio periódico, obtidos em [52]: Primeiramente, a boa colocação local do problema de Cauchy da equação em $H^s(\mathbb{S})$, $s \geq 2$, aplicando o método de Kato [31]. Então, com base em uma propriedade de preservação de sinal, obtêm-se um resultado de existência global para a equação em $H^s(\mathbb{S})$, $s \geq 3$. Além disso, o resultado obtido é estendido a algumas equações diferenciais parciais não lineares periódicas de segunda ordem da forma geral.

Palavras-chave: A equação dispersiva periódica de Hunter-Saxton. Boa colocação local. O método de Kato. Existência global.

Abstract

In this master's thesis, we study the recent results about global existence for the integrable dispersive Hunter–Saxton equation in a periodic domain obtained in [52]: Firstly, the local well-posedness of the Cauchy problem of the equation is established in $H^s(\mathbb{S})$, $s \geq 2$, by applying the Kato method [31]. Then, based on a sign-preserve property, a global existence result is obtained for the equation in $H^s(\mathbb{S})$, $s \geq 3$. Moreover, the obtained result is extended to some periodic nonlinear partial differential equations of second order of the general form.

Keywords: The periodic dispersive Hunter–Saxton equation, Local well-posedness, The Kato method, Global existence.

Sumário

1 INTRODUÇÃO **11**

2 PRELIMINARES MATEMÁTICAS **15**

2.1 Espaços de Banach **15**

2.2 Teoremas de Hahn-Banach **20**

2.3 Teorema do gráfico fechado **22**

2.4 Reflexividade: O espaço bidual **23**

2.5 O operador adjunto **27**

2.6 Espaços de Hilbert **28**

2.7 Séries de Fourier, funções teste periódicas e distribuições periódicas **29**

2.8 Transformada de Fourier e Espaços de Sobolev **32**

2.9 Álgebra de Banach **34**

2.10 Teoria de Kato **35**

3 O PROBLEMA DE CAUCHY PERIÓDICO ASSOCIADO À EQUAÇÃO DE HUNTER-SAXTON **45**

3.1 Boa colocação local **45**

3.2 Existência global **53**

3.2.1 Blow-up (Explosão) 53

3.2.2 Uma propriedade de preservação de sinal e suas implicações 55

Referências **59**

1 Introdução

Baseados em nossa experiência com equações diferenciais e pensando nos resultados que vamos descrever neste trabalho, formulamos as questões fundamentais que surgem no estudo do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u(t) = F(t, u(t)) \in X \\ u(0) = \phi \in Y, \end{cases} \tag{1.1}$$

em que X e Y são espaços de Banach, $T_0 \in (0, \infty)$ e $F : [0, T_0] \times Y \to X$ é uma função contínua.

Q-1 Existem $T \in (0, T_0]$ e uma função $u \in C([0, T]; Y)$ de tal maneira que $u(0) = \phi$ e a equação diferencial é válida no sentido de que

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - F(t, u(t)) \right\|_X = 0, \tag{1.2}$$

em que as derivadas em $t = 0$ e $t = T$ são calculadas pela direita e pela esquerda, respectivamente;

Q-2 O problema (1.1) tem no maximo uma solução em $C([0, T]; Y)$, para algum T;

Q-3 A função $\phi \to u$ é contínua. Mais precisamente, se $u \in C([0; T^*], Y)$ é a solução do problema com valor inicial $\phi \in Y$, seja $\phi_n \in Y$, $n \in \mathbb{N}$ tal que $\phi_n \xrightarrow{Y} \phi$ e $u_n \in C([0; T_n], Y)$ são as soluções correspondentes. Seja $T \in (0, T^*)$, então as soluções podem ser estendidas ao intervalo $[0, T]$ para todo n suficientemente grande e

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{[0,T]} \|u_n(t) - u(t)\|_Y = 0. \tag{1.3}$$

O estudo das questões anteriores será chamado de problema básico para (1.1). Caso as respostas às questões anteriores sejam afirmativas, será denominado que o problema de Cauchy (1.1) tem uma boa colocação local. Se alguma dessas condições não for atendida, dizemos que o problema tem uma má colocação local.

Se $F(t, \cdot)$ está definida em $[0, +\infty)$ e (Q-1), (Q-2) e (Q-3) são válidas em $[0, T]$ para todo $T > 0$ diremos que (1.1) é globalmente bem colocado ou globalmente bem posto.

Neste trabalho, consideramos o problema periódico de Cauchy da seguinte equação dispersiva integrável de Hunter – Saxton [27],

$$\begin{cases} u_{xt} = u + 4uu_{xx} + u_x^2, \\ u(t,x)|_{t=0} = u_0(x), \\ u(t,x+1) = u(t,x). \end{cases} \tag{1.4}$$

Recentemente, Hone, Novikov e Wang em [27] apresentaram uma classificação de equações diferenciais parciais não lineares de segunda ordem da forma geral

$$u_{xt} = u + c_0u^2 + c_1uu_x + c_2uu_{xx} + c_3u_x^2 + d_0u^3 + d_1u^2u_x + d_2u^2u_{xx} + d_3uu_x^2. \tag{1.5}$$

Sabe-se que a forma acima (1.5) contém muitas equações interessantes, especialmente algumas valiosas que são integráveis.

O primeiro membro integrável célebre da forma (1.5) é a conhecida equação de pulso curto (ver [47]), no caso em que $c_j = 0$ para $j = 0, 1, 2, 3$ e $d_0 = d_1 = 0, d_3 = 2d_2$ ou mais simplificado

$$u_{xt} = u + (u^3)_{xx}. \tag{1.6}$$

A equação de pulso curto é deduzida por Schäfer e Wayne em [47] como soluções aproximadas das equações de Maxwell que descrevem a propagação de pulsos ópticos ultra curtos em meios não lineares.

A boa colocação local de (1.6) em $H^2(\mathbb{R})$ foi comprovada por Schäfer e Wayne (ver [47]). Mais tarde, usando algumas quantidades conservadas, Pelinovsky e Sakovich em [42] estenderam a solução local para uma solução global. Os fenômenos de explosão tanto na reta quanto em um domínio periódico foram investigados por Liu, Pelinovsky e Sakovich em [39], pelo método de características e quantidades conservadas.

O segundo membro integrável importante de (1.5) é a equação de Ostrovsky Hunter (ver [2]):

$$u_{xt} = u + (u^2)_{xx}. \tag{1.7}$$

Essa equação é conhecida sob nomes diferentes, como a equação de Vakhnenko (ver [40]), equação de ondas curtas (ver [28]), equações reduzidas de Ostrovsky (ver [43]), que modela pequenas ondas de amplitude longa em fluidos rotativos de profundidade finita, sob a hipótese de não-alta dispersão de frequência.

A existência local de soluções da equação de Ostrovsky Hunter em $H^s(\mathbb{R})$, $s > \frac{3}{2}$ foi comprovada em [48]. Porém, para dados iniciais suficientemente íngremes $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$, as soluções locais quebram (ver [3, 38]) em um tempo finito, no sentido padrão de quebra de ondas em tempo finito que ocorre na equação invíscida de Burgers $u_t + uu_x = 0$. Usando uma nova transformação da equação reduzida de Ostrovsky na equação integrável Tzitzéica, Grimshaw e Pelinovsky em [26] provaram a existência global de soluções de pequenas normas em $H^3(\mathbb{R})$.

O terceiro membro integrável famoso para (1.5) é a seguinte equação de Hunter – Saxton (HS):

$$(u_t + uu_x)_x = \frac{1}{2}u_x^2, \tag{1.8}$$

que foi deduzida por Hunter e Saxton em [29] como um modelo assintótico de cristais líquidos. A equação do HS é completamente integrável (ver [1, 30]) e possui uma estrutura bi-hamiltoniana como se explica em [29, 41]. O fenômeno da explosão e a existência global da equação de Hunter – Saxton foram estudados em [4, 51]. Soluções dissipativas globais foram investigadas em [37].

A equação de Hunter-Saxton (1.8) também surge em um contexto físico diferente, como o limite de alta frequência (ver [21, 30]) da equação de Camassa-Holm (CH). A equação CH tem uma estrutura bi-hamiltoniana (ver [12, 24]) e é completamente integrável (ver [8, 17]) e possui soluções de pico da forma $ce^{-|x-ct|}$ com $c > 0$, que são orbitalmente estáveis (ver [20]). Vale ressaltar que os picos são sugeridos pela forma de onda de Stokes de maior altura (ver [10, 11, 15, 16, 49]). A boa colocação local e a má colocação local, a existência global e os fenômenos de explosão da equação CH foram estudados em [9, 13, 14, 18, 22, 25, 36, 45]. Soluções fracas globais, soluções conservadoras e dissipativas globais foram estudadas em [5, 6, 19, 50].

No entanto, até recentemente, o problema de Cauchy da equação (1.4) não havia sido estudado. No trabalho, estudamos os resultados obtidos em [52], a saber, a boa colocação local de (1.4) em $H^s(\mathbb{S})$, $s \geq 2$, via método de Kato, e um critério preciso de explosão. Obtém-se, também, uma propriedade de preservação de sinal pela transformação recíproca e deduz-se um limite superior para $|u_x|$. Finalmente, obtém-se a existência global de solução para a equação original (1.4) e estende-se o resultado obtido a algumas equações diferenciais parciais não lineares periódicas de segunda ordem da forma geral.

2 Preliminares matemáticas

Neste capítulo vamos introduzir alguns termos e teoremas necessários para poder entrar no contexto que é de nosso interesse, e desenvolver algumas ferramentas úteis para nosso objetivo. Faremos as provas apenas dos resultados que achamos necessários e que não escapam dos objetivos deste trabalho, mas deixaremos referências para o leitor interessado.

2.1 Espaços de Banach

Vamos começar dando uma pequena introdução aos conceitos básicos de análise funcional que vamos precisar. Particularmente seguiremos como referência [34] onde se podem visualizar as demonstrações dos teoremas nesta seção.

Definição 2.1. *Um espaço de Banach é um espaço normado completo (completo com a métrica definida pela norma).*

Exemplo 2.2 (Espaços L^p)**.** *Seja $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço mensurável, isto é, Ω é um conjunto e*

i). $\mathcal{M}$ é uma σ-álgebra em Ω, isto é, $\mathcal{M}$ é uma coleção de subconjuntos de Ω tal que:

a) $\emptyset \in \mathcal{M}$,

b) $A \in \mathcal{M} \Rightarrow A^c \in \mathcal{M}$,

c) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$ sempre que $A_n \in \mathcal{M} \quad \forall n$,

ii). μ é mensurável, isto é, $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ satisfaz

a) $\mu(\emptyset) = 0$,

b) $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ sempre que (A_n) é uma família enumerável disjunta de elementos de $\mathcal{M}$. Os elementos de $\mathcal{M}$ são chamados conjuntos mensuráveis.

iii). Ω é σ-finito, isto é, existe uma familia enumerável (Ω_n) em $\mathcal{M}$ tal que $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ e $\mu(\Omega_n) < \infty$ $\forall n$.

Denote por $L^1(\Omega)$ o espaço das classes de funções integráveis de Ω com valores em $\mathbb{R}$ com a norma

$$||f||_{L^1} = \int_{\Omega} |f(x)| dx.$$

Como de costume, duas funções em L^1 se identificam se são idênticas q.t.p. (quase em todo ponto x).

Agora para $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p < \infty$; se define o espaço

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ é mensurável e } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

Com a norma definida por

$$||f||_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Por outro lado, definimos o espaço

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ é mensurável e } \exists C \text{ constante tal que } |f(x)| \leq C \text{ q.t.p. em } \Omega\}$$

Com a norma definida por

$$\|f\|_{L^\infty} = inf\{C; |f(x)| \leq C \text{ q.t.p. em } \Omega\}$$

Os espaços L^p com $1 \leq p \leq \infty$ são espaços de Banach.

No caso de espaços vetoriais e, em particular, espaços normados, uma aplicação é chamada de operador.

Definição 2.3. *Um operador linear T é um operador tal que*

(i) O domínio $D(T)$ de T é um espaço vetorial e a imagem $R(T)$ reside em um espaço vetorial sobre o mesmo campo.

(ii) Para todo $x, y \in D(T)$ e escalares α,

$$T(x + y) = Tx + Ty$$
$$T(\alpha x) = \alpha Tx.$$

Observe a notação; escrevemos Tx em vez de $T(x)$; esta simplificação é padrão na análise funcional.

Exemplo 2.4 (Diferenciação)**.** *Seja X o espaço vetorial de todos os polinômios em [a, b]. Podemos definir um operador linear T em X definindo por*

$$Tx(t) = x'(t)$$

para qualquer $x \in X$, onde a prima denota diferenciação em relação a t. Este operador T mapeia X sobre si mesmo.

Exemplo 2.5 (Integração)**.** *Um operador linear T de $C[a,b]$ em si mesmo pode ser definido por*

$$Tx(t) = \int_a^t x(\tau)d\tau \quad t \in [a,b].$$

Definição 2.6. *Seja X e Y espaços normados e $T : D(T) \to Y$ um operador linear, onde $D(T) \subset X$. O operador T é dito ser limitado se existe um numero real c tal que para todo $x \in D(T)$,*

$$\|Tx\| \leq c\|x\|.$$

Na desigualdade acima a norma à esquerda é em Y, e a norma à direita é em X. Para simplificar, denotamos ambas as normas pelo mesmo símbolo $\|\cdot\|$, sem perigo de confusão.

Definição 2.7. *Seja T um operador linear limitado. A norma de o operador T é definida por*

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

Sua fórmula alternativa é

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ \|x\|=1}} \|Tx\|.$$

Teorema 2.8. *Se um espaço normado X tiver dimensão finita, todos os operadores lineares em X serão limitados.*

Teorema 2.9. *Seja $T : D(T) \to Y$ um operador linear, onde $D(T) \subset X$ e X, Y são espaços normados. Então:*

(a) *T é continuo se, somente se T é limitado.*

(b) *Se T é contínuo em um único ponto, ele é contínuo.*

Demonstração. **(a)** Para $T = 0$ a afirmação é trivial. Seja $T \neq 0$, então $\|T\| \neq 0$. Assumimos que T é limitado e consideramos qualquer $x_0 \in D(T)$. Seja qualquer $\epsilon > 0$ dado. Então como T é linear, para qualquer $x \in D(T)$ tal que

$$\|x - x_0\| < \delta,$$

onde

$$\delta = \frac{\epsilon}{\|T\|},$$

obtemos

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| \leq \|T\|\|x - x_0\| < \|T\|\delta = \epsilon$$

.

Como $x_0 \in D(T)$ é arbitrário, T é continuo.

Por outro lado, suponha que T é contínuo em um arbitrário $x_0 \in D(T)$. Então, dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$\|Tx - Tx_0\| \leq \epsilon \text{ para todo } x \in D(T) \text{ satisfazendo } \|x - x_0\| \leq \delta. \tag{2.1}$$

Agora tomamos qualquer $y \neq 0$ em $D(T)$ e definimos

$$x = x_0 + \frac{\delta}{\|y\|} y.$$

Assim, $\|x - x_0\| = \delta$, para que possamos usar (2.1). Como T é linear, temos

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| = \left\| T\left(\frac{\delta}{\|y\|} y\right) \right\| = \frac{\delta}{\|y\|}\|Ty\|$$

e (2.1) implica que

$$\frac{\delta}{\|y\|}\|Ty\| \leq \epsilon.$$

Por tanto,

$$\|Ty\| \leq \frac{\epsilon}{\delta}\|y\|.$$

Isso pode ser escrito $\|Ty\| \leq c\|y\|$, onde $c = \frac{\epsilon}{\delta}$.

(b) A continuidade de T num ponto implica que T é limitado pela segunda parte da prova de (a), que por sua vez implica continuidade de T por (a).

■

Corolário 2.10. *Seja T um operador linear limitado. Então:*

(a) *$x_n \to x$ (onde $x_n, x \in D(T)$) implica que $Tx_n \to Tx$.*

(b) *O espaço nulo de T é fechado.*

A seguinte formula é muito usada ao longo de este trabalho:

$$\|T_1 T_2\| \leq \|T_1\|\|T_2\|, \quad \|T^n\| \leq \|T\|^n,$$

válido para operadores lineares limitados $T_2 : X \to Y$, $T_1 : Y \to Z$ e $T : X \to X$, onde X, Y e Z são espaços normados.

Teorema 2.11. *Seja $T : D(T) \to Y$ um operador linear limitado, onde $D(T)$ reside em um espaço normado X e Y é um espaço de Banach. Então T tem uma extensão*

$$\widetilde{T} : \overline{D(T)} \to Y$$

onde $\widetilde{T}$ é um operador linear limitado com a norma

$$\|\widetilde{T}\| = \|T\|.$$

Definição 2.12. *Um funcional linear f é um operador linear com domínio em um espaço vetorial X e a imagem em um campo escalar $\mathbb{K}$ de X;*

$$f : D(T) \to \mathbb{K},$$

onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ se X é real e $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ se X é complexo.

Observação 2.13. *Se X é um espaço normado, um funcional linear limitado f é um operador linear limitado. então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que*

$$|f(x)| \leq c\|x\|.$$

além disso, a norma de f é

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in D(f) \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in D(f) \\ \|x\|=1}} |f(x)|.$$

e cumpre que

$$|f(x)| \leq \|f\|\|x\|.$$

Denotemos por $L(X, Y)$ o espaço vetorial de todos os operadores lineares contínuos ou limitados de um espaço normado X num espaço normado Y, isto é, cada operador em $L(X, Y)$ é definido em todo X e sua imagem está contida em Y. Denotemos também o espaço $L(X, X)$ por $L(X)$.

Teorema 2.14 (Espaço L(X,Y))**.** *O espaço vetorial $L(X, Y)$ de todos os operadores lineares limitados de um espaço normado X para um espaço normado Y é um espaço normado com norma definida por*

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \|Tx\|,$$

Teorema 2.15. *Se Y é um espaço de Banach, estão $L(X, Y)$ é um espaço de Banach.*

Definição 2.16. *Seja X um espaço normado. Então, o conjunto de todos os funcionais lineares limitados em X constitui um espaço normado com a norma definida por*

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |f(x)|,$$

que é chamado espaço dual de X e é denotado por X'.

Observação 2.17. *Como um funcional linear em X mapeia X em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (ou campo escalar de X), e como $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, tomando a métrica usual, é completo, vemos que X' é $L(X, Y)$ com o espaço $Y = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Portanto, pelo* Teorema 2.15 *X' é um espaço de Banach.*

2.2 Teoremas de Hahn-Banach

Nesta seção enunciaremos os teoremas de Hahn-Banach, tanto sua forma analítica como as formas geométricas, e demonstraremos um corolário importante o qual nos proporciona um critério de densidade.

As demonstrações dos teoremas apresentados nesta seção podem ser encontradas em [7].

Teorema 2.18 (Hahn-Banach, Forma analítica)**.** *Sejam E um espaço vetorial real e $p : E \to \mathbb{R}$ uma aplicação que verifica*

1) $p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \forall x \in E \quad e \quad \forall \lambda > 0,$

2) $p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in E.$

Sejam também $G \subset E$ um subespaço vetorial e $g : G \to \mathbb{R}$ uma aplicação linear tal que

3) $g(x) \leq p(x) \quad \forall x \in G.$

Então existe um funcional linear f definido sob E que estende a g, isto é

$$g(x) = f(x) \quad \forall x \in G$$

e tal que

$$f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in E.$$

Quando $f \in E'$ e $x \in E$ se denotará geralmente (f, x) em lugar de $f(x)$; é dito que $(\cdot, \cdot)$ é o produto escalar na dualidade E', E.

Corolário 2.19. *Seja E espaço vetorial normado real. Seja G um subespaço vetorial de E, e seja $g : G \to \mathbb{R}$ uma aplicação linear e continua de norma*

$$\|g\|_{G'} = \sup_{\substack{x \in G \\ \|x\|=1}} |g(x)|.$$

Então existe $f \in E$ que estende a g e tal que

$$\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}.$$

Corolário 2.20. *Seja E espaço vetorial normado real. Para todo $x_0 \in E$ existe $f_0 \in E'$ tal que*

$$\|f_0\| = \|x_0\| \quad e \quad (f_0, x_0) = \|x_0\|^2$$

Corolário 2.21. *Seja E espaço vetorial normado real. Para todo $x \in E$ se tem que*

$$\|x\| = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\|=1}} |(f, x)| = \max_{\substack{f \in E' \\ \|f\|=1}} |(f, x)|.$$

Definição 2.22. *Um hiperplano é um conjunto da forma*

$$H = \{x \in E; f(x) = \alpha\},$$

onde f é um funcional linear sobre o espaço vetorial normado real E, não identicamente nulo e $\alpha \in \mathbb{R}$. Se diz que H é o hiperplano da equação $[f = \alpha]$.

Proposição 2.23. *O hiperplano da equação $[f = \alpha]$ é fechado se e somente se f é continuo.*

Definição 2.24. *Sejam $A \subset E$ e $B \subset E$ com E espaço vetorial normado real. É dito que o hiperplano H da equação $[f = \alpha]$ separa A e B no sentido amplo se*

$$f(x) \leq \alpha \quad \forall x \in A \quad e \quad f(x) \geq \alpha \quad \forall x \in B.$$

É dito que H separa A e B no sentido estrito se existe $\epsilon > 0$ tal que

$$f(x) \leq \alpha - \epsilon \quad \forall x \in A \quad e \quad f(x) \geq \alpha + \epsilon \quad \forall x \in B.$$

Teorema 2.25 (Hahn-Banach, primeira forma geométrica)**.** *Seja E espaço vetorial normado real e sejam $A \subset E$ e $B \subset E$ conjuntos convexos, não vazios e disjuntos. Suponha A aberto. Então existe um hiperplano fechado que separa A e B no sentido amplo.*

Teorema 2.26 (Hahn-Banach, segunda forma geométrica)**.** *Seja E espaço vetorial normado real e sejam $A \subset E$ e $B \subset E$ conjuntos convexos, não vazios e disjuntos. Suponha que A é aberto e B é compacto. Então existe um hiperplano fechado que separa A e B no sentido estrito.*

Corolário 2.27. *Sejam E um espaço vetorial normado real e $F \subset E$ um subespaço vetorial tal que $\bar{F} \neq E$. Então existe $f \in E'$, $f \neq 0$ tal que*

$$(f, x) = 0 \quad \forall x \in F.$$

Demonstração. Seja $x_0 \in E$ tal que $x_0 \notin \bar{F}$. Se aplica o Teorema 2.26 com $A = \bar{F}$ e $B = \{x_0\}$. Então existe $f \in E'$, $f \neq 0$ tal que o hiperplano da equação $[f = \alpha]$ separa em sentido estrito $\bar{F}$ e $\{x_0\}$. Assim, temos que

$$(f, x) < \alpha < (f, x_0) \quad \forall x \in F.$$

Portanto, $(f, x) = 0 \quad \forall x \in F$, pois $\lambda(f, x) < \alpha$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

■

Observação 2.28. *Frequentemente o* Corolário 2.27 *é aplicado para demonstrar que um subespaço $F \subset E$ é denso. Se considera um funcional linear e continuo f sob E tal que $f = 0$ sob F e se prova que $f = 0$ sob E.*

2.3 Teorema do gráfico fechado

Devemos os resultados enunciados nesta seção a Banach, as demonstrações podem ser encontradas em [7].

Teorema 2.29 (Teorema da aplicação aberta)**.** *Sejam E e F dois espaços de Banach e seja T um operador linear continuo e sobrejetor de E sobre F. Então existe uma constante $c > 0$ tal que*

$$T\left(B_E(0, 1)\right) \supset B_F(0, c).$$

Corolário 2.30. *Sejam E e F dois espaços de Banach e seja T um operador linear continuo e sobrejetor de E sobre F. Então T^{-1} é continuo de F em E.*

Lema 2.31. *Seja E um espaço vetorial dotado de duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$. Suponha que E dotado de cada uma destas normas é um espaço de Banach. Suponha também que existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|x\|_2 \leq C\|x\|_1 \quad \forall x \in E.$$

Então existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\|x\|_1 \leq c\|x\|_2 \quad \forall x \in E.$$

Isto é, as duas normas são equivalentes.

Demonstração. Basta aplicar o Corolário 2.30 com $E = (E, \|\cdot\|_1)$, $F = (E, \|\cdot\|_2)$ e $T = Id$ (operador identidade).

∎

Teorema 2.32 (Teorema do gráfico fechado)**.** *Sejam E e F dois espaços de Banach. Seja T um operador linear de E em F. Suponha que o gráfico de T, $G(T)$, é fechado em $E \times F$. Então T é continuo.*

Demonstração. Vamos a aplicar o Lema 2.31. Considere em E as normas

$$\|x\|_1 = \|x\|_E + \|Tx\|_F \quad e \quad \|x\|_2 = \|x\|_E.$$

Como $G(T)$ é fechado, E dotado da norma $\|\cdot\|_1$ é um espaço de Banach. Por outro lado, $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$ para todo $x \in E$. Pelo Lema 2.31 estas duas normas são equivalentes, assim existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\|x\|_1 \leq c\|x\|_2,$$

isto é,

$$\|Tx\|_F \leq c\|x\|_E.$$

Portanto T é continuo.

∎

2.4 Reflexividade: O espaço bidual

Nesta seção vamos definir o que é um espaço reflexivo e apresentar alguns resultados sobre eles. Particularmente seguiremos como referencia [7].

Seja E um espaço vetorial normado, seja E' seu dual dotado da norma dual

$$||f|| = \sup_{\substack{x \in E \\ ||x||=1}} |(f, x)|$$

e seja E'' seu bidual, isto é, o dual de E' dotado da norma

$$\|\xi\| = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\|=1}} |(\xi, f)|.$$

Temos uma injeção canônica $J : E \to E''$ definida da seguinte forma: seja $x \in E$ fixo, a aplicação $f \mapsto (f, x)$ de E' em $\mathbb{K}$ é um funcional linear continuo sobre E' isto é, um elemento de E'' e assim Jx é definido por

$$(Jx, f)_{E'',E} = (f, x)_{E',E} \quad \forall x \in E, \quad \forall f \in E'.$$

Claramente J é linear e J é uma isometria, isto é, $\|Jx\|_{E''} = \|x\|_E$ para todo $x \in E$; de fato, pelo Corolário 2.21 temos que

$$\|Jx\| = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\|=1}} |(Jx, f)| = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\|=1}} |(f, x)| = \|x\|.$$

Como consequência imediata temos que J é injetor e portanto um isomorfismo isométrico sobre sua imagem.

Definição 2.33. *Seja E um espaço de Banach e $J : E \to E''$ a injeção canônica de E em E''. Diremos que E é reflexivo se $J(E) = E''$.*

Proposição 2.34. *Seja E um espaço de Banach reflexivo e seja $M \subset E$ um subespaço vetorial fechado. Então M dotado da norma induzida por E é reflexivo.*

Corolário 2.35. *Seja E um espaço de Banach. Então E é reflexivo se, e somente se E' é reflexivo.*

Definição 2.36. *Um espaço vetorial normado E é dito uniformemente convexo se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$x, y \in E, \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1 \quad e \quad \|x - y\| > \epsilon \Rightarrow \left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1 - \delta.$$

Teorema 2.37. *Todo espaço de Banach uniformemente convexo é reflexivo.*

Definição 2.38. *Seja $1 \leq p \leq \infty$. O expoente conjugado de p que denotamos por p' é um numero real que cumpre que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

Teorema 2.39 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam $f \in L^p$ e $g \in L^{p'}$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então $f \cdot g \in L^1$ e*

$$\int |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}.$$

Exemplo 2.40 (Espaço L^p)**.** *O espaço L^p, com $1 < p < \infty$ é reflexivo. A demonstração é realizada em três etapas.*

Etapa 1 *(Desigualdade de Clarkson) Seja $2 \leq p < \infty$; então*

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p}^p + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{L^p}^p \leq \frac{1}{2} \left(\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p \right) \quad \forall f, g \in L^p.$$

Demonstração. É suficiente demonstrar que

$$\left| \frac{a+b}{2} \right|^p + \left| \frac{a-b}{2} \right|^p \leq \frac{1}{2} \left(|a|^p + |b|^p \right) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Temos que

$$\alpha^p + \beta^p \leq \left(\alpha^2 + \beta^2 \right)^{\frac{p}{2}} \quad \forall \alpha, \beta \geq 0.$$

(reduza ao caso $\beta = 1$ e observar que a função $(x^2+1)^{\frac{p}{2}} - x^p - 1$ é crescente sobre $[0, \infty[$). Tome $\alpha = \left|\frac{a+b}{2}\right|$ e $\beta = \left|\frac{a-b}{2}\right|$ e obtemos que

$$\left| \frac{a+b}{2} \right|^p + \left| \frac{a-b}{2} \right|^p \leq \left(\left| \frac{a+b}{2} \right|^2 + \left| \frac{a-b}{2} \right|^2 \right)^{\frac{p}{2}} = \left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \right)^{\frac{p}{2}} \leq \frac{1}{2} a^p + \frac{1}{2} b^p.$$

(esta ultima desigualdade é resultado da convexidade da função $x \to |x|^{\frac{p}{2}}$ por ser $p \geq 2$).

∎

Etapa 2 *L^p é reflexivo para $2 \leq p < \infty$.*

Demonstração. Seja $2 \leq p < \infty$ e seja $\epsilon > 0$ fixo. Suponha

$$\|f\|_{L^p} \leq 1, \|g\|_{L^p} \leq 1 \quad e \quad \|f - g\|_{L^p} > \epsilon.$$

Da desigualdade de Clarkson se deduz que

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p}^p < 1 - \left(\frac{\epsilon}{2} \right)^p$$

o que implica que

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{L^p} < 1-\delta,$$

com $\delta = 1 - \left(1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$. L^p é uniformemente convexo e pelo Teorema 2.37, L^p é reflexivo.

■

Etapa 3 *L^p é reflexivo para $1 < p \leq 2$.*

Demonstração. Seja $1 < p \leq 2$. Considere o operador $T : L^p \to (L^{p'})'$ definido da seguinte forma:

Seja $u \in L^p$ fixo; a aplicação $f \in L^{p'} \mapsto \int uf$ é um funcional linear e continuo sobre $L^{p'}$, denotada por Tu, de forma que

$$(Tu, f) = \int uf \quad \forall f \in L^{p'}.$$

Se tem pela desigualdade de Hölder

$$|(Tu, f)| \leq \|u\|_{L^p}\|f\|_{L^{p'}}$$

e então

$$\|Tu\|_{(L^{p'})'} \leq \|u\|_{L^p}.$$

Por outro lado, vamos colocar

$$f_0(x) = |u(x)|^{p-2}u(x) \quad (f_0(x) = 0 \ \ se \ \ u(x) = 0).$$

Se tem $f_0 \in L^{p'}$, $\|f_0\|_{L^{p'}} = \|u\|_{L^p}^{p-1}$ e $(Tu, f_0) = \|u\|_{L^p}^p$. E então

$$\|Tu\|_{(L^{p'})'} \geq \frac{(Tu, f_0)}{\|f_0\|} = \|u\|_{L^p}.$$

Assim, obtemos que $\|Tu\|_{(L^{p'})'} = \|u\|_{L^p}$. Como resultado temos que T é uma isometria de L^p sobre um subespaço fechado (por ser L^p completo) de $(L^{p'})'$. Mas $L^{p'}$ é reflexivo pela Etapa 2, e assim pelo Corolário 2.35 $(L^{p'})'$ é reflexivo. segue-se da Proposição 2.34 que $T(L^p)$ é reflexivo, e portanto também L^p.

■

2.5 O operador adjunto

Um operador linear em um espaço de Banach pode possuir um operador adjunto. Essa relação é a generalização, para qualquer dimensão, do conceito da matriz transposta conjugada. A referência usada será [7].

Definição 2.41. *Sejam E e F dois espaços de Banach. É chamado de operador linear ilimitado de E em F a toda aplicação linear $A : D(A) \subset E \to F$ definida sobre um subespaço vetorial $D(A) \subset E$ com valores em F.*

Observação 2.42. *Pode acontecer que um operador ilimitado seja limitado.*

Definição 2.43. *Sejam E e F espaços de Banach. É dito que um operador $A : D(A) \subset E \to F$ é fechado se $G(A)$ (o gráfico de A) é fechado em $E \times F$.*

Observação 2.44. *Se A é fechado, então $N(A)$ (o núcleo de A) é fechado.*

Na prática, a maioria dos operadores ilimitados são fechados e com domínio $D(A)$ denso em E.

Definição 2.45 (Adjunto)**.** *Sejam E e F espaços de Banach e seja $A : D(A) \subset E \to F$ um operador ilimitado com domínio denso. Vamos definir um operador ilimitado $A^* : D(A^*) \subset F' \to E'$ como segue. Colocamos*

$$D(A^*) = \{v \in F'; \exists c \geq 0 \text{ tal que } |(v, Au)| \leq c\|u\| \quad \forall u \in D(A)\}.$$

Claramente $D(A^*)$ é um subespaço vetorial de F'. Agora se define A^*v para cada $v \in D(A^*)$. Dado $v \in D(A^*)$ se considera a aplicação $g : D(A) \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(u) = (v, Au), \quad u \in D(A).$$

Se tem que

$$|g(u)| \leq c\|u\| \quad \forall u \in A.$$

Pelo Teorema 2.18 *g pode ser estendido a uma aplicação linear $f : E \to \mathbb{R}$ tal que*

$$|f(u)| \leq c\|u\| \quad \forall u \in E.$$

Portanto $f \in E'$. Observe que a extensão de g é única pois f é continua sobre E e $D(A)$ é denso.

Se define

$$A^*v = f.$$

Claramente A^* é linear. O operador $A^* : D(A^*) \subset F' \to E'$ é chamado adjunto de A. Assim, obtemos a seguinte relação entre A e A^*:

$$(v, Au)_{F',F} = (A^*v, u)_{E',E} \quad \forall u \in D(A), \quad v \in D(A^*).$$

Proposição 2.46. *Seja $A : D(A) \subset E \to F$ um operador ilimitado com domínio denso. Então A^* é fechado.*

Corolário 2.47. *Seja $A : D(A) \subset E \to F$ um operador ilimitado, fechado e com $\overline{D(A)} = E$. Então as seguintes afirmações são válidas*

1) $N(A) = R(A^*)^{\perp}$

2) $N(A^*) = R(A)^{\perp}$

3) $N(A)^{\perp} \supset \overline{R(A^*)}$

4) $N(A^*)^{\perp} = \overline{R(A)}$.

Onde $X^{\perp}$ denota o conjunto ortogonal de X.

2.6 Espaços de Hilbert

Uma definição essencial para este trabalho é a de espaço de Hilbert. A referência a seguir é [7].

Seja H um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Um produto interno (ou produto escalar) é uma função $(\cdot, \cdot) : H \times H \to \mathbb{K}$ tal que

- $(u, v) = \overline{(v, u)}$ para todo $u, v \in H$.
- $(au + bu', v) = a(u, v) + b(u', v)$ para todo $u, u', v \in H$, $a, b \in \mathbb{K}$.
- $(u, u) \geq 0$ e $(u, u) = 0$ se e somente se $u = 0$.

Segue facilmente dessas propriedades que $(u, av + bv') = \overline{a}(u, v) + \overline{b}(u, v')$ para todo $u, v, v' \in H$, $a, b \in \mathbb{K}$. Vale a desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$|(u, v)| \leq (u, u)^{\frac{1}{2}} (v, v)^{\frac{1}{2}}.$$

A função $|\cdot| : H \to \mathbb{R}$ definida por $|u| = (u,u)^{\frac{1}{2}}$ é uma norma.

Se H é um espaço vetorial com produto interno vale a identidade do paralelogramo:

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^2 + \left|\frac{a-b}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2) \quad \forall a, b \in H.$$

Definição 2.48. *Um espaço de Hilbert é um espaço vetorial H dotado de um produto interno tal que é completo com a norma $|\cdot|$.*

No que segue, H sempre denotará um espaço de Hilbert.

Exemplo 2.49. *$L^2(\Omega)$ dotado com o produto interno*

$$(u,v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

é um espaço de Hilbert. Em particular l^2 é um espaço de Hilbert.

Proposição 2.50. *Todo espaço de Hilbert é uniformemente convexo e portanto reflexivo.*

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$ e $u, v \in H$ tal que $|u| \leq 1$, $|v| \leq 1$, e $|u - v| > \epsilon$. Pela identidade do paralelogramo temos que

$$\left|\frac{u+v}{2}\right|^2 \leq 1 - \frac{\epsilon^2}{4}$$

e então

$$\left|\frac{u+v}{2}\right| < 1 - \delta \text{ com } \delta = 1 - \left(1 - \frac{\epsilon^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} > 0.$$

∎

2.7 Séries de Fourier, funções teste periódicas e distribuições periódicas

A série de Fourier surgiu pela primeira vez em conexão com problemas físicos considerados por D. Bernoulli (corda vibrando, 1753) e J. Fourier (condução de calor, 1822). Essas séries ajudam a representar fenômenos periódicos complicados em termos de funções periódicas simples (cosseno e seno). Eles têm várias aplicações físicas em conexão com equações diferenciais (vibrações, condução de calor, problemas potenciais, etc.).

Referência para a seção [46].

Uma série trigonométrica é uma série da forma

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \text{ sen } kt). \tag{2.2}$$

Uma função de valor real x em $\mathbb{R}$ é considerada periódica se houver um número positivo p (chamado de período de x) tal que $x(t+p) = x(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Seja x de período 2π e contínua. Por definição, a série de Fourier de x é a série trigonométrica (2.2) com coeficientes a_k e b_k dados pelas fórmulas de Euler:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t)dt \\ a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\cos kt\ dt \quad k = 1, 3, \cdots, \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t) \text{ sen } kt\ dt \quad k = 1, 3, \cdots. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Esses coeficientes são chamados de coeficientes de Fourier de x.

Se a série de Fourier de x converge para cada t e tem a soma $x(t)$, então escrevemos

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \text{ sen } kt). \tag{2.4}$$

Como x é periódica de período 2π, em (2.3) podemos substituir o intervalo de integração $[0, 2\pi]$ por qualquer outro intervalo de comprimento 2π, por exemplo $[-\pi, \pi]$.

Também, como $e^{ikt} = \cos(kt) + isen(kt)$, podemos considerar alternativamente a série

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}, \tag{2.5}$$

em que

$$c_k = \hat{x}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)e^{-ikt}dt,$$

ou ainda,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}(k)e^{2\pi ikt}, \tag{2.6}$$

para funções 1-periódicas, com

$$\hat{x}(k) = \int_0^1 x(t)e^{-2\pi ikt}dt.$$

O toro 1-dimensional ou círculo de comprimento unitário $\mathbb{S}$ é definido por

$$\mathbb{S} = \mathbb{R}/\mathbb{Z},$$

onde a relação de equivalência sobre $\mathbb{R}$ é definida por: dois números reais x e y são equivalentes se eles diferem por um número inteiro, isto é

$$x \sim y \text{ se e somente se } x - y \in \mathbb{Z}.$$

Um domínio fundamental para $\mathbb{S} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ é o intervalo $[0, 1]$.

Funções definidas no toro $\mathbb{S}$ são funções definidas em $\mathbb{R}$ e que satisfazem $f(x+m) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{Z}$. Tais funções são ditas periódicas de período 1.

A periodicidade das funções definidas em $\mathbb{S}$ implicam que para toda função mensurável x definida em $\mathbb{S}$ tem-se:

$$\int_{\mathbb{S}} x(t)dt = \int_0^1 x(t)dt.$$

Definição 2.51. *Seja $\mathcal{D}$ o conjunto de todas as funções C^∞, $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 1-periódicas. Um elemento $u \in \mathcal{D}$ é chamado uma função teste periódica.*

Definição 2.52. *Definimos o conjunto $\mathcal{D}'$ de todos os funcionais lineares contínuos em $\mathcal{D}$ por*

$$\mathcal{D}' = \{T : \mathcal{D} \to \mathbb{R};\ \ T \ \textit{é linear e}\ (T, x_j) \to 0 \ \textit{sempre que}\ x_j \to 0 \ \textit{em}\ \mathcal{D}\}.$$

Um elemento de $\mathcal{D}'$ é chamado uma distribuição periódica.

Exemplo 2.53. *Função como distribuição: Se $u \in L^1(\Omega)$, defina*

$$T_u : \mathcal{D} \to \mathbb{R}, \quad T_u(\varphi) := \int_\Omega u\varphi \, dx.$$

Então T_u é uma distribuição periódica.

É um fato notável que existe uma noção natural de derivada em $\mathcal{D}'$. Para $u \in \mathcal{D}$ o requisito usual de que $\partial^\alpha T_u$ deve ser igual a $T_{\partial^\alpha u}$ leva a

$$\begin{aligned}(\partial^\alpha T_u)(\varphi) =& T_{\partial^\alpha u}(\varphi) = \int_\Omega (\partial^\alpha u)(x)\varphi(x)\, dx \\ =& (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u(x)\partial^\alpha \varphi(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} T_u(\partial^\alpha \varphi),\end{aligned}$$

onde integramos repetidamente por partes.

Definição 2.54. *Para qualquer $T \in \mathcal{D}'$ a distribuição $\partial^\alpha T$ é definida por*

$$(\partial^\alpha T)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(\partial^\alpha \varphi).$$

A distribuição $\partial^\alpha T$ é chamada de α-ésima derivada distribucional ou derivada fraca de T.

Observe que $\partial^\alpha T$ é um funcional linear contínuo em $\mathcal{D}$ visto que a diferenciação é contínua em $\mathcal{D}$. Segue-se que qualquer distribuição tem derivadas bem definidas de qualquer ordem.

Exemplo 2.55. *Como um exemplo de derivadas fracas, considere a função*

$$u(x) = |x|, \quad -\pi < x < \pi,$$

estendida como uma função 2π-periódica a $\mathbb{R}$. Agora, u não é diferenciável no sentido clássico mas determina uma distribuição T_u (abaixo nós escrevemos $u = T_u$) por

$$u : \mathcal{D} \to \mathbb{R}, \quad u(\varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} |x| \varphi(x) \, dx,$$

e a distribuição u tem uma derivada fraca dada por

$$\begin{aligned} u'(\varphi) = -u(\varphi') &= -\int_{-\pi}^{0} (-x)\varphi'(x) \, dx - \int_{0}^{\pi} x\varphi'(x) \, dx \\ &= -\int_{-\pi}^{0} \varphi(x) \, dx + \int_{0}^{\pi} \varphi(x) \, dx \end{aligned}$$

onde usamos integração por partes. Portanto, u' pode ser identificado com a função

$$u'(x) = \begin{cases} -1, & se \quad -\pi < x < 0, \\ 1, & se \quad 0 < x < \pi, \end{cases}$$

estendido 2π-periodicamente.

2.8 Transformada de Fourier e Espaços de Sobolev

Os espaços de Sobolev fornecem um ambiente muito natural para problemas de valor na fronteira. Em primeiro lugar, existe uma categoria de espaços de Sobolev que são espaços de Hilbert; em segundo lugar, é possível obter resultados bastante gerais sobre a existência e singularidade de soluções, usando esses espaços. Finalmente, uma terceira vantagem é que, assim como os espaços $C^m(\Omega)$, os espaços Sobolev fornecem um meio de caracterizar o grau de suavidade das funções.

Referência para a seção [46].

Definição 2.56. *Para $u \in L^1(\mathbb{S})$, definimos a transformada de Fourier de u por*

$$\hat{u}(k) = \int_{\mathbb{S}} u(x)e^{-2\pi ikx}dx,$$

para cada $k \in \mathbb{Z}$.

Observação 2.57.

$$\mathcal{D}(\mathbb{S}) \subset L^1(\mathbb{S}).$$

Denotamos por $\mathcal{F}$ a aplicação que leva a função teste $u \in \mathcal{D}$ na sequência de seus coeficientes de Fourier $(\hat{u}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$.

Teorema 2.58. *Sejam $u \in \mathcal{D}(\mathbb{S})$ e α um inteiro positivo. Então $\hat{u} \in \mathcal{D}(\mathbb{S})$ e vale a fórmula*

$$(-i)^\alpha(\partial^\alpha u)^\wedge(k) = k^\alpha \hat{u}(k),$$

para cada $k \in \mathbb{Z}$.

Definição 2.59. *Para $u \in \mathcal{D}(\mathbb{S})$, definimos a transformada inversa de Fourier de u por*

$$\check{u}(k) = \int_{\mathbb{S}} u(x)e^{2\pi ikx}dx,$$

para cada $k \in \mathbb{Z}$.

Teorema 2.60. *Sejam $u, v \in \mathcal{D}(\mathbb{S})$. Então valem as fórmulas*

$$\check{u}(k) = \hat{u}(-k), \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$(\hat{u})^\vee = u = (\check{u})^\wedge.$$

Definição 2.61. *(Transformada de Fourier e transformada inversa de Fourier em $\mathcal{D}'$) Para $T \in \mathcal{D}'$, definimos a transformada de Fourier de T por*

$$\hat{T}(u) = T(\hat{u}), \quad u \in \mathcal{D},$$

e a transformada inversa por

$$\check{T}(u) = T(\check{u}), \quad u \in \mathcal{D}.$$

Denotamos por $\mathcal{F}$ a aplicação que leva $T \in \mathcal{D}'$ na sequência de seus coeficientes de Fourier $(\hat{T}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$.

Teorema 2.62. *Seja $T \in \mathcal{D}'$. Então $\hat{T}$ e $\check{T}$ são distribuições periódicas. Além disso, $(\hat{T})^{\vee} = T = (\check{T})^{\wedge}$ e a aplicação $T \to \hat{T}$ é contínua com inversa contínua.*

Definição 2.63. *(Espaço de Sobolev $H^s(\mathbb{S})$) Para $s \in \mathbb{R}$, definimos o espaço de Sobolev $H^s(\mathbb{S})$ como o conjunto de todas as distribuições $u \in \mathcal{D}'$ para as quais $((1+k^2)^{s/2}\hat{u}_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$.*

Lema 2.64. *O espaço de Sobolev $H^s(\mathbb{S})$, munido do produto interno*

$$(u,v)_{H^s(\mathbb{S})} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+k^2)^s\hat{u}_k\hat{v}_k$$

é um espaço de Hilbert.

Definição 2.65. *O espaço $C^l(\mathbb{S})$ das funções $u : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$, l-vezes continuamente diferenciáveis em $\mathbb{S}$ é um espaço normado com a norma definida por*

$$\|u\|_{C^l(\mathbb{S})} = \sum_{\alpha\leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\mathbb{S})},$$

onde, $D^\alpha u$ é a derivada α-ésima de u e pela Definição (2.16) temos que

$$||u||_{C(\mathbb{S})} = ||u|| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{|u(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} |u(x)|.$$

Proposição 2.66. *(Imersão de Sobolev) Se $s > \frac{1}{2} + l$, com $l \in \mathbb{N}$, então*

$$H^s(\mathbb{S}) \subset C^l(\mathbb{S}). \tag{2.7}$$

Além disso, existe uma constante $K > 0$ tal que

$$||u||_{C^l(\mathbb{S})} \leq K||u||_{H^s(\mathbb{S})}, \quad \forall u \in H^s(\mathbb{S}).$$

2.9 Álgebra de Banach

A definição de álgebra normada nos proporciona uma desigualdade muito importante que usaremos com regularidade em nossas demonstrações principais. Como referência para a seção usamos o livro [34].

Uma álgebra A sobre um campo $\mathbb{K}$ é um espaço vetorial A sobre $\mathbb{K}$ tal que para cada par ordenado de elementos $x, y \in A$ um único produto $xy \in A$ é definido com as propriedades:

i) $(xy)z = x(yz)$

ii) $x(y+z) = xy + xz$

iii) $(x+y)z = xz + yz$

iv) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$

para todo $x, y, z \in A$ e α escalar.

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, então A é dito ser real ou complexo respectivamente.

A é dito ser comutativo (ou abeliano) se a multiplicação é comutativa, isto é, se para todo $x, y \in A$,

$$xy = yx.$$

A é chamado de álgebra com identidade se A contém um elemento e tal que para todo $x \in A$,

$$ex = xe = x.$$

O elemento e é chamado elemento identidade de A

Definição 2.67. *Uma Álgebra normada é um espaço normado que é um álgebra tal que para todo $x, y \in A$,*

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|,$$

e se A tem um elemento identidade e,

$$\|e\| = 1$$

Definição 2.68 (Álgebra de Banach)**.** *Uma álgebra de Banach é uma álgebra normada que é um espaço completo, com respeito à sua norma.*

Exemplo 2.69. *O espaço $H^s(\mathbb{S})$ é uma álgebra de Banach se $s > \frac{1}{2}$.*

2.10 Teoria de Kato

Nesta seção, serão apresentados conceitos e resultados importantes da teoria de semigrupos de operadores que precisaremos neste trabalho. As demonstrações dos teoremas sobre esta teoria podem ser encontrados na referência [43]. Também, vamos enunciar os teoremas fundamentais para achar uma solução para o nosso problema principal. As demonstrações destes teoremas podem se encontrar em [31].

Definição 2.70. *Seja X um espaço de Banach. Um semigrupo de operadores lineares em X é uma família*

$$\{T(t) : t \geq 0\} \subset L(X)$$

tal que

i) $T(0) = I$, *(I é o operador identidade em X);*

ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ *para todo* $t, s \geq 0$.

Para simplificar, denotemos por $T(t)$ a família $\{T(t) : t \geq 0\}$.

Definição 2.71. *Um semigrupo de operadores lineares limitados $T(t)$ é dito uniformemente continuo se*

$$\lim_{t \to 0^+} \|T(t) - I\| = 0.$$

Definição 2.72. *O operador A definido por*

$$Ax = \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{d^+}{dt} T(t)x \bigg|_{t=0} \qquad \text{para } x \in D(A),$$

onde o domínio $D(A)$ é

$$D(A) = \left\{ x \in X; \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\},$$

é o gerador infinitesimal do semigrupo $T(t)$.

Teorema 2.73. *Um operador linear A é um gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo se, e somente se A é um operador linear limitado.*

Teorema 2.74. *Seja $T(t)$ e $S(t)$ semigrupos uniformemente contínuos de operadores lineares limitados. Se*

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{T(t) - I}{t} = A = \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t) - I}{t}$$

então $T(t) = S(t)$ para $t \geq 0$.

Corolário 2.75. *Seja $T(t)$ um semigrupo uniformemente continuo de operadores lineares limitados. Então*

a) Existe uma constante $\omega \geq 0$ tal que $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$.

b) Existe um único operador linear limitado A tal que $T(t) = e^{tA}$.

c) O operador A em (b) é o gerador infinitesimal de $T(t)$.

d) $t \to T(t)$ é diferenciável em norma e

$$\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A.$$

Onde

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}.$$

Definição 2.76. *Um semigrupo $T(t)$, $0 \leq t < \infty$, de operadores lineares limitados num espaço de Banach X é um semigrupo fortemente continuo de operadores lineares limitados se*

$$\lim_{t \to 0^+} T(t)x = x \quad \forall x \in X.$$

Observação 2.77. *Um semigrupo fortemente continuo de operadores lineares limitados num espaço de Banach X é chamado de um semigrupo de classe C_0 ou um C_0-semigrupo.*

Teorema 2.78. *Seja $T(t)$ um C_0-semigrupo. Existem constantes $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \qquad \text{para } 0 \leq t < \infty.$$

Observação 2.79. *No* Teorema 2.78 *se $\omega = 0$ então $T(t)$ é chamado de uniformemente limitado, e se, além disso, $M = 1$ ele é chamado de semigrupo de contrações.*

Corolário 2.80. *Se $T(t)$ é um C_0-semigrupo então para todo $x \in X$, $t \to T(t)x$ é uma função continua de $\mathbb{R}_0^+$ em X.*

Denote por $G(X)$ o conjunto de todos os geradores negativos de um C_0-semigrupo em X. Mais precisamente, denotamos por $G(X, M, \beta)$ o conjunto de todos os operadores lineares limitados A num espaço de Banach X tal que $-A$ gera um C_0-semigrupo $\{e^{-tA}\}$ com $\|e^{-tA}\| \leq Me^{\beta t}$, $0 \leq t < \infty$. Em particular A é dito m-acretivo se $A \in G(X, 1, 0)$, neste caso $\{e^{-tA}\}$ é um semigrupo de contração. A é dito quase-m-acretivo se $A \in G(X, 1, \beta)$.

Seja $A(t), 0 \leq t \leq T$ uma família de operadores pertencentes a $G(X)$. $A(t)$ é dito ser estável se existem M, β de tal forma que

$$\left\| \prod_{j=1}^{k} (A(t_j) + \lambda)^{-1} \right\| \leq M(\lambda - \beta)^k, \quad \lambda > \beta, \tag{2.8}$$

para cada família finita $0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_k \leq T$, $k = 1, 2 \ldots$. O par M, β será chamado de índice de estabilidade para $A(t)$. Em (2.8), o produto do operador à esquerda é ordenado pelo tempo: $A(t_j)$ está à esquerda de $A(t_i)$ se $t_j > t_i$. Pode-se mostrar que (2.8) é equivalente a

$$\left\| \prod_{j=1}^{k} e^{-s_j A(t_j)} \right\| \leq M e^{\beta(s_1, \cdots + s_k)}, \tag{2.9}$$

para todos os t_j do tipo descrito acima e para todos os $s_j \geq 0$, com o produto à esquerda novamente ordenado pelo tempo. Notamos que $A(t)$ é trivialmente estável (com índice de estabilidade 1, β) se $A(t) \in G(X, 1, \beta)$.

Agora procedemos a enunciar os teoremas principais a serem utilizados neste trabalho, mas para isso precisamos estabelecer algumas condições. Por simplicidade vamos denotar a norma em $L(X, Y)$ por $\|\cdot\|_{X,Y}$ e $L(X)$ com a norma $\|\cdot\|_X$. Denote também a norma $\|\cdot\|_{1,X} = \int_0^T \|f(t)\|_X \, dt$.

Considere o problema de Cauchy para a equação quase-linear de evolução:

$$\frac{du}{dt} + A(t, u)u = f(t, u), \quad 0 \leq t \leq T, \quad u(0) = \phi, \tag{2.10}$$

em um espaço de Banach X.

Grosso modo, queremos resolver (2.10) da seguinte maneira. Para certas funções $t \to v(t) \in X$, consideramos a equação linear

$$\frac{du}{dt} + A(t, v(t))u = f(t, v(t)), \qquad u(0) = \phi. \tag{2.11}$$

Se (2.11) tem uma solução $u = u(t)$, definimos uma função $v \to u = \Phi_v$. Então buscamos um ponto fixo de Φ, que será uma solução de (2.10). Para mostrar que Φ tem um ponto fixo, usaremos o teorema de contração.

Para este fim, apresentamos as seguintes suposições:

i) X é um espaço de Banach reflexivo. Existe outro espaço de Banach reflexivo $Y \subset X$, continuamente imerso e denso em X. Exite um isomorfismo S de Y a X. A norma em Y é escolhida de tal forma que S torna se uma isometria.

ii) A é uma função de $[0, T] \times W$ a $G(X, 1, \beta)$, onde W é uma bola aberta em Y e β é um numero real. Em outras palavras,

$$\|e^{-sA(t,y)}\|_X \leq e^{\beta s}, \quad s \in [0, \infty), \quad y \in W.$$

iii) Para cada $t, y \in [0, T] \times W$, temos que

$$SA(t, y)S^{-1} = A(t, y) + B(t, y),$$

onde

$$B(t,y) \in L(X) \quad \|B(t,y)\|_X \leq \lambda_1,$$

com $\lambda_1 > 0$ uma constante.

iv) Para cada $t, y \in [0,T] \times W$, temos que $A(t,y) \in L(Y,X)$ (no sentido que $Y \subset D(A(t,y))$ é a restrição de $A(t,y)$ a Y é um elemento de $L(Y,X)$). Para cada $y \in W$, $t \to A(t,y)$ é continua com respeito a norma de $L(Y,X)$. Para cada $t \in [0,T]$, $y \to A(t,y)$ é Lipschitz-contínua no sentido de que

$$\|A(t,y) - A(t,z)\|_{Y,X} \leq \mu_1 \|y - z\|_X,$$

onde μ_1 é constante.

v) Seja y_0 o centro de W. Então $A(t,y)y_0 \in Y$ para todo $t, y \in [0,T] \times W$, com

$$\|A(t,y)y_0\|_Y \leq \lambda_2, \quad t \in [0,T], \quad y \in W.$$

vi) f é uma função limitada de $[0,T] \times W$ a Y:

$$\|f(t,y)\|_Y \leq \lambda_3, \quad t \in [0,T], \quad y \in W.$$

Para cada $y \in W$, $t \to f(t,y)$ é continua de $[0,T]$ a X.

Para cada $t \in [0,T]$, $y \to f(t,y)$ é X-Lipschitz contínua:

$$\|f(t,y) - f(t,z)\|_X \leq \mu_2 \|y - z\|_X.$$

Observação 2.81. *A condição* (v) *é trivialmente satisfeita se* $y_0 = 0$.

Em muitos casos $A(t,y)$ *é definido para todo* $y \in Y$*, de modo que* W *pode ser escolhido como uma bola arbitrária com centro* 0*, as constantes* $\beta, \lambda_1, \mu_1, \ldots$ *dependem do raio da bola.*

Uma condição suficiente para que (iii) *seja satisfeita é que*

$$\|(SA(t,y) - A(t,y)S)S^{-1}w\|_X \leq \lambda_1 \|w\|_X$$

é verdadeiro para todo w *no núcleo de* $A(t,y)$ *(que pode depender de* t, y*).*

Teorema 2.82. *Assuma que as condições* (i), (ii), (iii), (iv), (v) *e* (vi) *são satisfeitas. Se* $\phi \in W$*, então* (2.10) *tem uma única solução*

$$u \in C[0,T';W] \cap C^1[0,T';X], \quad u(0) = \phi,$$

para algum $T' > 0$, $T' \leq T$.

Para formular a dependência contínua da solução u dos dados, consideramos, além de (2.10), uma sequência de equações

$$\frac{du_n}{dt} + A_n(t, u_n)u_n = f_n(t, u_n), \quad 0 \leq t \leq T, \quad u_n(0) = \phi_n, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{2.12}$$

Para funções A_n e f_n, assuma que as condições do Teorema 2.82 são satisfeitas com os mesmos X, Y, S e W, além disso vamos acrescentar a seguintes condições:

vii)
$$\|B(t, y) - B(t, z)\|_X \leq \mu_3 \|y - z\|_Y,$$

viii)
$$\|f(t, y) - f(t, z)\|_Y \leq \mu_4 \|y - z\|_Y.$$

Teorema 2.83. *Além das premissas do* Teorema 2.82, *assuma que as condições de* (ii) *até* (viii) *são satisfeitas para* (2.12) *uniformemente em* n *(no sentido de que todas as constantes* $\beta, \lambda_1, \ldots, \mu_4$ *são independentes de* n*). Além disso assuma que para cada* $t, y \in [0, T] \times W$*:*

$$\begin{aligned} A_n(t, y) &\to A(t, y) \quad \textit{fortemente em } L(Y, X), \\ B_n(t, y) &\to B(t, y) \quad \textit{fortemente em } L(X), \\ f_n(t, y) &\to f(t, y) \quad \textit{em } Y, \quad \textit{quando } n \to \infty. \end{aligned}$$

Se $\phi, \phi_n \in W$ *e* $\phi_n \to \phi$ *na norma de* Y *quando* $n \to \infty$*, então existe* $T_N > 0$*,* $T_N \leq T$*, de forma que haja soluções únicas:*

$$u_n \in C[0, T_N; W] \cap C^1[0, T_N; X] \quad \textit{com } u_n(0) = \phi_n$$

para (2.12)*,* $n = 1, 2, \ldots$*, e uma única solução* u *para* (2.10) *na mesma classe.*

Além disso, se tem que

$$u_n(t) \to u(t) \qquad \textit{em } Y, \; \textit{uniformemente em } t \in [0, T_N].$$

Observação 2.84. *Em particular, o* Teorema 2.83 *mostra que* $u(t)$ *depende continuamente de* $\phi = u(0)$ *na norma* Y.

Aqui listamos dois lemas simples que seguem imediatamente de (i).

Lema 2.85. *Se um subconjunto de* Y *for convexo, fechado e limitado, ele também será fechado em* X.

Lema 2.86. *Se uma função g de $[0,T]$ a Y é limitada na norma Y e contínua na norma X, então g é fracamente contínua (portanto, fortemente mensurável) como uma função com valor em Y.*

Definição 2.87. *Seja (X,d) um espaço métrico completo. Então, uma função $T: X \to X$ é uma contração em X se existe $q \in [0,1)$ tal que*

$$d(Tx,Ty) \leq qd(x,y),$$

para todos os $x, y \in X$.

Teorema 2.88 (Teorema da contração)**.** *Seja (X,d) um espaço métrico completo não vazio com uma contração $T : X \to X$. Então, T admite um único ponto fixo $x' \in X$ (Isto é, $Tx' = x'$).*

Para demonstrar o Teorema 2.82, Precisamos dos teoremas seguintes

Teorema 2.89. *Considere o problema de Cauchy para a equação linear*

$$\frac{du}{dt} + A(t)u = f(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad u(0) = \phi, \tag{2.13}$$

em um espaço de Banach X.

Suponha que são validas as seguintes condições

i) *$A(t)$, $0 \leq t \leq T$ é uma família estável de operadores em $G(X)$, com índice de estabilidade M, β.*

ii) *Existe um espaço de Banach Y, continuamente e densamente contido em X, e um isomorfismo S de Y sobre X, tal que*

$$SA(t)S^{-1} = A(t) + B(t), \quad B(t) \in L(X), \quad 0 \leq t \leq T,$$

onde $t \to B(t)$ é fortemente mensurável como uma função com valor de operador (isto é, $t \to B(t)x$ é fortemente mensurável como uma função com valores em X para cada $x \in X$) e onde $t \to \|B(t)\|_X$ é integrável superiormente em $[0,T]$.

iii) *$Y \in D(A(t))$, $0 \leq t \leq T$, Asim $A(t) \in L(Y,X)$ (mais precisamente, a restrição de $A(T)$ a Y pertente a $L(Y,X)$). $t \to A(t) \in L(X,Y)$ é continuo em norma.*

Então, existe um único operador de evolução $U(t,s)$ definido no triangulo $\triangle : 0 \leq s \leq t \leq T$ com as seguintes propriedades

a) *U é fortemente continua de $\triangle$ em $L(X)$, com $U(s,s) = 1$.*

b) *$U(t,s)U(s,r) = U(t,r)$.*

c) $U(t,s)Y \subset Y$*, e* U *é fortemente continuo de* $\triangle$ *em* $L(Y)$*.*

d) $dU(t,s)/dt = -A(t)U(t,s)$*,* $dU(t,s)/ds = U(t,s)A(s)$*, que existem no sentido forte em* $L(Y,X)$ *e são fortemente contínuos de* $\triangle$ *em* $L(Y,X)$*.*

Teorema 2.90. *Seja u definido por*

$$u(t) = U(t,s)\phi + \int_0^t U(t,s)f(s)\ ds. \tag{2.14}$$

a) Se $\phi \in X$ *e* $f \in L^1([0,T);X)$*, então* $u \in C([0,T);X)$*.*

b) Se $\phi \in Y$ *e* $f \in L^1([0,T);Y)$*, então* $u \in C([0,T);Y)$*.*

c) Se $\phi \in Y$ *e* $f \in C([0,T);X) \cap L^1([0,T);Y)$*, então* $u \in C([0,T);Y) \cap C^1([0,T);X)$ *e u satisfaz* (2.13)*.*

Resumo da demonstração do Teorema 2.82. Como W é uma bola aberta em Y contendo ϕ, podemos escolher $R > 0$ tal que $\|\phi - y_0\|_Y < R$ e que $\|y - y_0\|_Y \leq R$ implique que $y \in W$. Seja E o conjunto de todas as funções v de $[0,T']$ a Y tal que

- $\|v(t) - y_0\|_Y \leq R$ (tal que $v(t) \in W$),
- v é contínua de $[0,T']$ a X.

Aqui T' é um numero positivo menor ou igual a T.

Para $v \in E$ seja

$$A^v(t) = A(t, v(t)), \quad t \in [0,T'].$$

De acordo com (ii), $A^v(t)$ pertence a $G(X,1,\beta)$. Daí a família $A^v(t)$ é estável, com índice de estabilidade 1, β.

Lema 2.91. $t \to A^v(t) \in L(Y,X)$ *é contínuo em norma.*

Pela condição (iii) temos

- $SA^v(t)S^{-1} = A^v(t) + B^v(t)$,
- $B^v(t) = B(t, v(t) \in L(X)$, $\|B^v(t)\|_X \leq \lambda_1$.

Lema 2.92. $t \to B^v(t) \in L(X)$ *é fracamente contínuo (portanto, fortemente mensurável).*

Os Lemas 2.91 e 2.92 mostram que as condições do Teorema 2.89 são satisfeitas pela família $A^v(t)$. Asim existe um único operador $U^v = U^v(t,s)$ definido em $\triangle' : 0 \leq s \leq t \leq T'$ com as propriedades descritas no Teorema 2.89.

Para $v \in E$ seja

$$f^v(t) = f(t, v(t)) \in Y, \quad t \in [0, T'].$$

Lema 2.93. *$\|f^v(t)\|_Y \leq \lambda_3$, $t \to f^v(t)$ é contínuo na norma X e fracamente continuo (portanto, fortemente mensurável) na norma Y.*

Em vista do Lema 2.93, podemos aplicar o Teorema 2 à equação linear da evolução

$$\frac{du}{dt} + A^v(t)u = f^v(t), \quad 0 \leq t \leq t', \quad u(0) = \phi \in W \subset Y.$$

A solução é dada por

$$u(t) = U^v(t,0)\phi + \int_0^t U^v(t,s)f^v(s)\, ds. \tag{2.15}$$

Como $\phi \in Y$ e $f^v \in L^\infty([0,T');Y) \cap C([0,t');X)$, temos que

$$u \in C([0,T');Y) \cap C^1([0,T');X) \tag{2.16}$$

pelo Teorema 2.90, (c).

Por outro lado, temos as estimativas

$$\|U^v\|_X \leq e^{\beta T'}, \quad \|U^v\|_Y \leq e^{(\beta+\lambda_1)T'}, \tag{2.17}$$

como $\|S\|_{Y,X} = \|S^{-1}\|_{X,Y} = 1$; note que $\|B^v\|_{1,X} \leq \lambda_1 T'$ pois $\|B^v(t)\|_X \leq \lambda_1$.

Para estimar u, é conveniente definir $u' = u - y_0$ e note que u' satisfaz a equação

$$\frac{du'}{dt} + A^v(t)u' = f^v(t) - A^v(t)y_0, \quad u'(0) = \phi - y_0. \tag{2.18}$$

A aplicação de (2.15) a (2.18) dá

$$u(t) - y_0 = U^v(t,0)(\phi - y_0) + \int_0^t U^v(t,s)(f^v(s) - A^v(s)y_0)\, ds.$$

Como $\|A^v(s)y_0\|_Y \leq \lambda_2$ por (v) e $\|f^v(s)\|_Y \leq \lambda_3$ pelo Lema 2.93, obtemos de (2.18) usando (2.17)

$$\|u(t) - y_0\|_Y \leq e^{(\beta+\lambda_1)T'}(\|\phi - y_0\|_Y + (\lambda_2 + \lambda_3)T'). \tag{2.19}$$

Queremos que u esteja em E. Este será o caso se o membro direito de (2.19) não for maior que R. Temos $\|\phi - y_0\|_Y < R$ se $T' > 0$ é escolhido suficientemente pequeno.

Com essa escolha de T', a função $v \to u \equiv \Phi_v$ envia E para E.

Agora fazemos E um espaço métrico definindo a distância

$$d(v,w) = \sup_{0 \leq t \leq T'} \|v(t) - w(t)\|_X.$$

Então E é um espaço métrico completo, já que uma bola fechada em Y é um subconjunto fechado de X. Observe que não exigimos que o $v \in E$ seja contínuo na norma Y.

Devemos agora mostrar que $\Phi : E \to E$ é uma contração se T' é suficientemente pequeno.

Fazendo alguns cálculos obtemos que

$$d(\Phi_w, \Phi_v) \leq T' e^{\beta T'} (\mu_2 + \mu_1 \|y_0\| + \mu_1 R) d(w, v),$$

que mostra que Φ é uma contração se T' é suficientemente pequeno.

Segue-se do Teorema 2.88 que Φ tem um ponto fixo em E, que é automaticamente uma solução única de (2.10) com as propriedades declaradas no Teorema 2.82.

■

3 O problema de Cauchy periódico associado à Equação de Hunter-Saxton

3.1 Boa colocação local

Nesta seção, estabeleceremos a boa colocação local do problema de Cauchy de (1.4) in $H^s(\mathbb{S})$, $s \geq 2$ com $\mathbb{S}$ denotando o circulo de comprimento unitário [52].

Primeiramente, consideramos o seguinte problema de Cauchy:

$$\begin{cases} u_t - 4u\partial_x u = \partial_x^{-1}(u - 3u_x^2) - \int_0^1 (6u_x^3 + \partial_x^{-1}(u - 3u_x^2))(y)dy, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(t,x)|_{t=0} = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u(t, x+1) = u(t,x), & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $\partial_x^{-1} f(x) = \int_0^x f(y)dy$ e o último termo $\int_0^1 (6u_x^3 + \partial_x^{-1}(u - 3u_x^2))(y)dy$, é uma função de t independente de x.

Diferenciando (3.1), temos

$$\begin{cases} (u_t - 4u\partial_x u)_x = u - 3u_x^2, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(t,x)|_{t=0} = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u(t, x+1) = u(t,x), & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.2}$$

que é equivalente a (1.4).

Provaremos a boa colocação local no sentido de Hadamard em espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{S})$, $s \geq 2$, ou seja, que dada uma condição inicial $u_0 \in H^s(\mathbb{S})$, $s \geq 2$, existe uma única solução $u \in C([0,T); H^s(\mathbb{S}))$ de (1.4) e que a solução depende continuamente dos dados iniciais, isto é, a função $u_0 \mapsto u(\cdot, u_0)$ é continua.

A usual norma de Sobolev de uma função $f(x)$ em $\mathbb{S}$ é definido com base em sua série de Fourier $\hat{f}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, mais precisamente, nós temos:

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{S})}^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 + n^2)^s |\hat{f}(n)|^2.$$

O resultado da boa colocação local para o problema de Cauchy (3.1) com dados iniciais $u_0 \in H^s(\mathbb{S})$, $s \geq 2$ pode ser apresentado da seguinte forma.

Teorema 3.1. *Dado $u_0 \in H^s(\mathbb{S})$, $s \geq 2$, existe um $T = T(u_0) > 0$ máximo e uma solução única u para (3.1), tal que*

$$u = u(\cdot, u_0) \in C([0,T); H^s(\mathbb{S})) \cap C^1([0,T); H^{s-1}(\mathbb{S})).$$

Além disso, a solução depende continuamente dos dados iniciais, ou seja, a função

$$u_0 \mapsto u(\cdot, u_0) : H^s(\mathbb{S}) \mapsto C([0,T); H^s(\mathbb{S})) \cap C^1([0,T); H^{s-1}(\mathbb{S})),$$

é continua. Além disso, para $t \in (0,T)$, temos a seguinte quantidade conservada

$$\int_{\mathbb{S}} u - 3u_x^2 dx \equiv \int_{\mathbb{S}} u_0 - 3u_{0,x}^2 dx.$$

Para obter uma demonstração para esse teorema, primeiro recordamos o método de Kato para o problema de Cauchy para equações abstratas quase-lineares de evolução. Por simplicidade, declaramos o teorema relevante na forma adequada, suficiente para o presente objetivo. Considere o problema de Cauchy para a equação quase linear de evolução

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}v + A(v)v = f(t,v), \quad t \geq 0, \\ v(0) = \phi. \end{cases} \tag{3.3}$$

Sejam X, Y dois espaços reflexivos de Banach tais que Y está continuamente imerso e denso em X. Seja Q um isomorfismo de Y sobre X. Suponha que a função A, definida em Y e $f(t,\cdot)$ satisfaça as seguintes condições:

(i) $A(y) \in L(Y,X)$ para $y \in X$ com

$$\|(A(y) - A(z))w\|_X \leq \mu_1 \|y - z\|_X \|w\|_Y, \quad y, z, w \in Y,$$

e $A(y) \in G(X, 1, \beta)$ (isto é, $A(y)$ é quase-m-acretiva), uniformemente em conjuntos limitados em Y.

(ii) $QA(y)Q^{-1} = A(y) + B(y)$, onde $B(y) \in L(X)$ é limitado, uniformemente em conjuntos limitados em Y. Além disso,

$$\|(B(y) - B(z))w\|_X \leq \mu_2 \|y - z\|_Y \|w\|_X, \quad y, z \in Y, w \in X.$$

(iii) Para cada $y \in Y$, $t \mapsto f(t,y)$ é continua em $[0,\infty)$ a X. Para cada $t \in [0,\infty)$, $f(t,y) : Y \mapsto Y$ e se estende também para uma função de X para X. Para todo $t \in [0,\infty)$, f é uniformemente limitado em conjuntos limitados em Y, e cumpre que

$$\|f(t,y) - f(t,z)\|_Y \leq \mu_3 \|y - z\|_Y, \quad t \in [0,\infty),\ y, z \in Y \tag{3.4}$$

$$\|f(t,y)-f(t,z)\|_X \le \mu_4\|y-z\|_X, \quad t\in[0,\infty),\ y,z\in X. \tag{3.5}$$

Aqui μ_1, μ_2, μ_3 e μ_4 dependem apenas do $max\{\|y\|_Y, \|z\|_Y\}$.

Teorema 3.2. *Assuma que (i), (ii) e (iii) são satisfeitas. Dado $\phi \in Y$, existe um maximal $T>0$ dependendo apenas de $\|\phi\|_Y$ e uma única solução v de (3.3) tal que*

$$v = v(\cdot,\phi) \in C([0,T);Y)\cap C^1([0,T);X).$$

Alem disso, a função $\phi \mapsto v(\cdot,\phi)$ é continua de Y para $C([0,T);Y)\cap C^1([0,T);X)$.

Pode se encontrar uma prova do teorema acima em [31].

Seja $A(u) = -4u\partial_x$, $f(t,u) = \partial_x^{-1}(u-3u_x^2) - \int_0^1 6u_x^3 + \partial_x^{-1}(u-u_x^2)(y)dy$, $Y = H^s(\mathbb{S})$, $X = H^{s-1}(\mathbb{S})$, e $Q = \Lambda = (1-\partial_x^2)^{\frac{1}{2}} : H^s(\mathbb{S}) \to H^{s-1}(\mathbb{S})$ definido por

$$Qu = ((1+k^2)^{\frac{1}{2}}\hat{u})^{\vee},$$

$Qu \in H^{s-1}(\mathbb{S})$ pois,

$$(1+k^2)^{\frac{s-1}{2}}(1+k^2)^{\frac{1}{2}}\hat{u} = (1+k^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u} \in l^2(\mathbb{Z}),$$

Q é um isomorfismo de $H^s(\mathbb{S})$ em $H^{s-1}(\mathbb{S})$ e de fato uma isometria, pois

$$\|u\|_s = \|Qu\|_{s-1}.$$

Para provar o Teorema 3.1, aplicando o teorema acima, precisamos apenas verificar que $A(u)$ e $f(t,u)$ satisfazem as condições (i), (ii) e (iii).

Lema 3.3. *Sejam s,t números reais tais que $-s<t\le s$, e $f\in H^s(\mathbb{S})$, $g\in H^t(\mathbb{S})$ então*

$$\|fg\|_t \le c\|f\|_s\|g\|_t, \quad se \quad s>\frac{1}{2},$$
$$\|fg\|_{s+t-\frac{1}{2}} \le c\|f\|_s\|g\|_t, \quad se \quad s<\frac{1}{2},$$

onde c é uma constante positiva que depende de s,t.

A demonstração do lema acima pode se encontrar em [31].

Lema 3.4. (Ver [32]) *Seja $f\in H^s$, $s>\frac{3}{2}$. Então,*

$$\|\Lambda^{-r}[\Lambda^{r+t+1}, M_f]\Lambda^{-t}\|_{L(L(\mathbb{S}))} \le c\|f\|_s, \quad |r|,|t|\le s-1,$$

onde M_f é o operador de multiplicação por f, c é uma constante que depende somente de s,t, $[\cdot,\cdot]$ é o comutador ($[A,B]=AB-BA$) e $\Lambda = (1-\partial_x^2)^{\frac{1}{2}}$.

Lema 3.5. *Sejam X e Y dois espaços de Banach, de forma que Y está continuamente imerso e denso em X. Seja $-A$ o gerador infinitesimal do $C_0 -$ semigrupo $T(t)$ em X e seja S um isomorfismo de Y em X. Então Y é $-A$-admissível (ou seja, $T(t)Y \subset Y$ para todo $t \geq 0$, e a restrição de $T(t)$ para Y é um C_0-semigrupo em Y) se e somente se $-A_1 = -SAS^{-1}$ é o gerador infinitesimal do C_o-semigrupo $T_1(t) = ST(t)S^{-1}$ em X. Além disso, se Y é $-A$-admissível, então $-A$ em Y é o gerador infinitesimal da restrição de $T(t)$ para Y.*

A prova do Lema acima é apresentada na seção 4.5 (Teoremas 5.5 e 5.8) em [44]. Em seguida, provamos o seguinte lema.

Lema 3.6. *Suponha $u \in H^s(\mathbb{S})$, $s > \frac{3}{2}$. Então o operador $A(u) = u\partial_x$ é quase-m-acretivo em L^2, isto é,*

$$A(u) \in G(L^2(\mathbb{S}), 1, \beta_1)$$

Demonstração. Como $L^2(\mathbb{S})$ é um espaço de Hilbert, $A(u) \in G(L^2(\mathbb{S}), 1, \beta_1)$ (ver [33]) se e somente se existe um número real β_1 tal que

1) $(A(u)y, y)_0 \geq -\beta_1 \|y\|_0^2$,

2) A imagem de $A + \lambda$ é todo $L^2(\mathbb{S})$ para algum (ou todo) $\lambda > \beta_1$.

Primeiro, vamos provar (1). Como $u \in H^s(\mathbb{S})$, $s > \frac{3}{2}$, segue-se que u e u_x pertencem a $L^\infty(\mathbb{S})$. Observe que $\|u_x\|_{L^\infty(\mathbb{S})} \leq c\|u\|_s$. Então nós temos

$$\begin{aligned}(A(u)y, y)_0 = (u\partial_x y, y)_0 &= -\frac{1}{2}(u_x y, y)_0 \\ &\leq \frac{1}{2}\|u_x\|_{L^\infty(\mathbb{S})}\|y\|_0^2 \leq c\|u\|_r\|y\|_0^2.\end{aligned}$$

Definindo $\beta = c\|u\|_s$, temos $(A(u)y, y)_0 \geq -\beta\|y\|_0^2$.

A seguir, provamos (2). Como $A(u)$ é um operador fechado e satisfaz (1), segue-se que a imagem de $(\lambda I + A)$ é fechado em $L^2(\mathbb{S})$ para todos os $\lambda > \beta$. Assim, basta provar que a imagem de $(\lambda I + A)$ é denso em $L^2(\mathbb{S})$ para todos os $\lambda > \beta$.

Dado $u \in H^s(\mathbb{S})$, $s > \frac{3}{2}$, $y \in L^2(\mathbb{S})$. Então nós temos a fórmula de Leibniz,

$$\partial_x(uy) = u_x y + u\partial_x y \quad em\ H^{s-1}(\mathbb{S}).$$

Como $u_x \in L^\infty(\mathbb{S})$, obtemos

$$\begin{aligned}D(A) = D(u\partial_x) &= \{y \in L^2(\mathbb{S}),\ u\partial_x y \in L^2(\mathbb{S})\} \\ &= \{z \in L^2(\mathbb{S}),\ -\partial_x(uz) \in L^2(\mathbb{S})\} = D((u\partial_x)^*) = D(A^*).\end{aligned}$$

Suponha que a imagem de $(A + \lambda)$ não seja todo $L^2(\mathbb{S})$. Então existe $z \in L^2(\mathbb{S})$, $z \neq 0$, de modo que $((\lambda I + A)y, z)_0 = 0$ para todo $y \in D(A)$. Como $H^1(\mathbb{S}) \subset D(A)$, temos que

$D(A)$ é denso em $L^2(\mathbb{S})$. Portanto, segue que $z \in D(A^*)$ e $\lambda z + A^* = 0$ em $L^2(\mathbb{S})$. Observe que $D(A) = D(A^*)$. Multiplicando por z e depois integrando por partes, obtemos

$$0 = ((\lambda I + A^*)z, z)_0 = (\lambda z, z) + (z, Az) \geq (\lambda - \beta)\|z\|_0^2 \quad \forall \lambda > \beta.$$

Assim, obtemos $z = 0$. Isso contradiz a suposição anterior $z \neq 0$ e completa a prova do Lema 3.6.

■

Lema 3.7. *Suponha $u \in H^s(\mathbb{S})$, $s > \frac{3}{2}$. Então, o operador $A(u) = u\partial_x$ é quase-m-acumulativo em H^{s-1}, isto é,*

$$A(u) \in G(H^{s-1}(\mathbb{S}), 1, \beta_2).$$

Demonstração. Como $H^{s-1}(\mathbb{S})$ é um espaço de Hilbert, $A(u) \in G(H^{s-1}(\mathbb{S}), 1, \beta_2)$ (ver [33]) se e somente se existe um número real β_2 tal que

1) $(A(u)y, y)_{s-1} \geq -\beta_1 \|y\|_{s-1}^2$,

2) $-A(u)$ é o gerardor infinitesimal de um C_0-semigrupo em $H^{s-1}(\mathbb{S})$ para algum (ou todo) $\lambda > \beta_1$.

Primeiro, vamos provar (1). Como $u \in H^s(\mathbb{S})$, $s > \frac{3}{2}$, segue-se que u e u_x pertencem a $L^\infty(\mathbb{S})$. Observe que $\|u_x\|_{L^\infty(\mathbb{S})} \leq c\|u\|_s$. Note que

$$\Lambda^{s-1}(u\partial_x y) = [\Lambda^{s-1}, u]\partial_x y + u\Lambda^{s-1}(\partial_x y) = [\Lambda^{s-1}, u]\partial_x y + u\partial_x \Lambda^{s-1} y.$$

Então temos que

$$\begin{aligned}
(A(u)y, y)_{s-1} &= (\Lambda^{s-1}(u\partial_x y), \Lambda^{s-1} y)_0 \\
&= ([\Lambda^{s-1}, u]\partial_x y, \Lambda^{s-1} y)_0 - \frac{1}{2}(u_x \Lambda^{s-1} y, \Lambda^{s-1} y)_0 \\
&\leq \|[\Lambda^{s-1}, u]\Lambda^{2-s}\|_{L(L^2(\mathbb{S}))} \|\Lambda^{s-1} y\|_0^2 + \|u_x\|_{L^\infty(\mathbb{S})} \|\Lambda^{s-1} y\|_0^2 \\
&\leq c\|u\|_s \|y\|_{s-1}^2,
\end{aligned}$$

onde aplicamos o Lema 3.4 com $r = 0$ e $t = s - 2$. Definindo $\beta = c\|u\|_s$, temos $(A(u)y, y)_{s-1} \geq -\beta_1 \|y\|_{s-1}^2$.

A seguir, provamos (2). Seja $S = \Lambda^{s-1}$. Observe que S é um isomorfismo de $H^{s-1}(\mathbb{S})$ em $L^2(\mathbb{S})$ e que $H^{s-1}(\mathbb{S})$ é contínua e densamente contido em $L^2(\mathbb{S})$, $s > \frac{3}{2}$. Defina

$$A_1(u) := SA(u)S^{-1} = \Lambda^{s-1} A(u) \Lambda^{1-s}, \quad B_1(u) = A_1(u) - A(u).$$

Seja $y \in L^2(\mathbb{S})$ e $u \in H^s(\mathbb{S})$, $s > \frac{3}{2}$. Então temos que

$$\begin{aligned}\|B_1(u)y\|_0 &= \|[\Lambda^{s-1}, u\partial_x]\Lambda^{1-s}y\|_0\\ &\leq \|[\Lambda^{s-1}, u]\Lambda^{2-s}\|_{L(L^2(\mathbb{S}))}\|\Lambda^{-1}\partial_x y\|_0\\ &\leq c\|u\|_s\|y\|_0,\end{aligned}$$

onde aplicamos o Lema 3.4 com $r = 0$ e $t = s-2$. Alem disso, obtemos que $B_1(u) \in L(L^2(\mathbb{S}))$.

Observe que $A_1(u) = A(u) + B_1(u)$ e $A(u) \in G(L^2(\mathbb{S}), 1, \beta_1)$ no Lema 3.6. Por um teorema de perturbação para semigrupos (Seção 5.2, Teorema 2.3 em [44]), obtemos $A_1(u) \in G(L^2(\mathbb{S}), 1, \beta_2)$. Aplicando o Lema 3.5 com $Y = H^{s-1}(\mathbb{S})$, $X = L^2(\mathbb{S})$ e $S = \Lambda^{s-1}$, concluímos que $H^{s-1}(\mathbb{S})$ é A-admissível. Portanto, $-A(u)$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo em $H^{s-1}(\mathbb{S})$. Isso completa a prova do Lema 3.7.

■

Lema 3.8. *Suponha $u \in H^s(\mathbb{S})$, $s > \frac{3}{2}$. Então, o operador $A(u) = u\partial_x \in L(H^s(\mathbb{S}), H^{s-1}(\mathbb{S}))$. Além disso,*

$$\|(A(u) - A(v))w\|_{s-1} \leq \mu_1\|u - v\|_{s-1}\|w\|_s, \quad \forall u, v, w \in H^s(\mathbb{S}).$$

Demonstração. Seja $u, v, w \in H^s(\mathbb{S})$, $s > \frac{3}{2}$. Note que $H^{s-1}(\mathbb{S})$ é um álgebra de Banach. então temos que

$$\begin{aligned}\|(A(u) - A(v))w\|_{s-1} &\leq c\|u - v\|_{s-1}\|\partial_x w\|_{s-1}\\ &\leq \mu_1\|u - v\|_{s-1}\|w\|_s.\end{aligned}$$

Tomando $v = 0$ na desigualdade acima, obtemos $A(u) \in L(H^s(\mathbb{S}), H^{s-1}(\mathbb{S}))$. Isso completa a prova do Lema 3.8.

■

Lema 3.9. $B(u) = [\Lambda, u\partial_x]\Lambda^{-1} \in L(H^{s-1}(\mathbb{S}))$ *para* $u \in H^s(\mathbb{S})$. *Além disso,*

$$\|(B(u) - B(v))w\|_{s-1} \leq \mu_2\|u - v\|_s\|w\|_{s-1},$$

para todo $u, v \in H^s(\mathbb{S})$ e $w \in H^{s-1}(\mathbb{S})$.

Demonstração. Sejam $u, v \in H^s(\mathbb{S})$ e $w \in H^{s-1}(\mathbb{S})$, $s > \frac{3}{2}$. Então

$$\begin{aligned}\|(B(u) - B(v))w\|_{s-1} &= \|\Lambda^{s-1}[\Lambda, (u-v)\partial_x]\Lambda^{-1}w\|_0\\ &\leq \|\Lambda^{s-1}[\Lambda, (u-v)]\Lambda^{1-s}\|_{L(L^2(\mathbb{S}))}\|\Lambda^{s-2}\partial_x w\|_0\\ &\leq \mu_2\|u - v\|_s\|w\|_{s-1},\end{aligned}$$

onde aplicamos o Lema 3.4 com $r = 1 - s$, $t = s - 1$. Tomando $v = 0$ na desigualdade acima, obtemos $B(u) \in L(H^{s-1}(\mathbb{S}))$. Isso completa a prova do Lema 3.9. ■

Os Lemas 3.6, 3.7, 3.8 e 3.9 podem se provar de maneira similar substituindo $A(u) = u\partial_x$ por $A(u) = -4u\partial_x$, assim provamos que $A(u) = -4u\partial_x$ satisfaz as hipóteses do método de Kato. Por fim, temos a seguinte desigualdade para o termo do lado direito $f(t,u)$ de (3.1).

Para demonstrar o seguinte lema precisamos de o seguinte resultado.

Teorema 3.10. *Seja $u \in H^s(\mathbb{S})$. Então*

$$\|\partial_x^{-1}u\|_s \leq \|u\|_{s-1}.$$

Demonstração. Seja $u \in H^s(\mathbb{S})$, por definição temos que

$$\|\partial_x^{-1}u\|_s^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+k^2)^s|(\partial_x^{-1}u)^\wedge(k)|^2,$$

Agora, usando a definição de transformada de Fourier, integração por partes e a 1-periodicidade de u obtemos

$$\begin{aligned}
(\partial_x^{-1}u)^\wedge(k) &= \int_{\mathbb{S}} \partial_x^{-1}u(x)e^{-2\pi ikx}\,dx \\
&= \int_{\mathbb{S}} \left(\int_0^x u(y)dy\right) e^{-2\pi ikx}\,dx \\
&= \left(\int_0^x u(y)dy\right)\left(-\frac{e^{-2\pi ikx}}{2\pi ik}\right)\Bigg|_0^1 - \int_{\mathbb{S}} u(x)\left(-\frac{e^{-2\pi ikx}}{2\pi ik}\right)\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi ik}\int_{\mathbb{S}} u(x)e^{-2\pi ikx}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi ik}\hat{u}(k),
\end{aligned}$$

então temos que

$$\begin{aligned}
\left|(\partial_x^{-1}u)^\wedge(k)\right|^2 &= \left|\frac{1}{2\pi ik}\hat{u}(k)\right|^2 \\
&= \frac{1}{4\pi^2k^2}\left|\hat{u}(k)\right|^2 \\
&\leq \frac{1}{(1+k^2)}\left|\hat{u}(k)\right|^2,
\end{aligned}$$

por tanto,

$$\begin{aligned}
\|\partial_x^{-1}u\|_s^2 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+k^2)^s|(\partial_x^{-1}u)^\wedge(k)|^2 \\
&\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+k^2)^{s-1}|(\hat{u}(k)|^2 \\
&= \|u\|_{s-1}^2.
\end{aligned}$$

■

Lema 3.11. *Seja* $s \geq 2$, $f(t,u) = \partial_x^{-1}(u - 3u_x^2) - \int_0^1 6u_x^3 + \partial_x^{-1}(u - 3u_x^2)(y)dy$. *Então* $f(t,u)$ *é uniformemente limitado em conjuntos limitados de* $H^s(\mathbb{S})$ *e satisfaz*

$$\begin{aligned} &(1) \quad \|f(t,v) - f(t,w)\|_s \leq \mu_3 \|v - w\|_s, \quad v, w \in H^s(\mathbb{S}), \\ &(2) \quad \|f(t,v) - f(t,w)\|_{s-1} \leq \mu_4 \|v - w\|_{s-1}, \quad v, w \in H^{s-1}(\mathbb{S}). \end{aligned}$$

Demonstração. Seja $v, w \in H^s(\mathbb{S})$, $s \geq 2$ e denote

$$M(v,w) := \int_{\mathbb{S}} \partial_x^{-1}(v - w)(y)dy - 3\int_{\mathbb{S}} \partial_x^{-1}(v_x^2 - w_x^2)(y)dy + 6\int_{\mathbb{S}} (v_x^3 - w_x^3)(y)dy.$$

Como $M(v,w)$ é uma função constante de x, pela imersão $H^{s-1} \subset\subset L^\infty$, o Lema 3.3 e o Teorema 3.10 para qualquer $p \in \mathbb{R}$ temos que

$$\begin{aligned} \|M(v,w)\|_p &= |M(v,w)| \\ &\leq \|\partial_x^{-1}(v-w)\|_{L^\infty(\mathbb{S})} + 3\|\partial_x^{-1}(v_x^2 - w_x^2)\|_{L^\infty(\mathbb{S})} + 6\|(v_x^3 - w_x^3)\|_{L^\infty(\mathbb{S})} \\ &\leq c\|\partial_x^{-1}(v-w)\|_{s-1} + c\|\partial_x^{-1}(v_x^2 - w_x^2)\|_{s-1} + c\|(v_x - w_x)(v_x^2 + w_x^2 + v_x w_x)\|_{s-1} \\ &\leq c\|v - w\|_{s-2} + c\|v + w\|_s \|v - w\|_{s-1} + c\|v^2 + w^2 + vw\|_s \|v - w\|_{s-1} \\ &\leq c(1 + \|v\|_s + \|v\|_s^2 + \|w\|_s + \|w\|_s^2)\|v - w\|_{s-1}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Note que $H^{s-1}(\mathbb{S})$ é um álgebra de Banach. Usando (3.6) e o Teorema 3.10 obtemos

$$\begin{aligned} \|f(t,v) - f(t,w)\|_s &= \|\partial_x^{-1}(v-w) - 3\partial_x^{-1}(v_x^2 - w_x^2) - M(v,w)\|_s \\ &\leq c\|v - w\|_{s-1} + c\|v_x^2 - w_x^2\|_{s-1} + \|M(v,w)\|_s \\ &\leq c\|v - w\|_s + c\|v_x - w_x\|_{s-1}\|v_x + w_x\|_{s-1} + |M(v,w)| \\ &\leq c(1 + \|v\|_s + \|v\|_s^2 + \|w\|_s + \|w\|_s^2)\|v - w\|_s \\ &= \mu_3 \|v - w\|_s. \end{aligned}$$

Isso prova (1). Deixando $w = 0$ na desigualdade acima, obtemos que f é uniformemente limitado em um conjunto limitado em $H^s(\mathbb{S})$. Para provar (2), temos

$$\begin{aligned} \|f(t,v) - f(t,w)\|_{s-1} &= \|\partial_x^{-1}(v-w) - 3\partial_x^{-1}(v_x^2 - w_x^2) - M(v,w)\|_{s-1} \\ &\leq c\|v - w\|_{s-2} + c\|v_x^2 - w_x^2\|_{s-2} + \|M(v,w)\|_{s-1} \\ &\leq c\|v - w\|_{s-1} + c\|\partial_x(v+w)\|_{s-1}\|v_x - w_x\|_{s-2} + |M(v,w)| \\ &\leq c(1 + \|v\|_s + \|v\|_s^2 + \|w\|_s + \|w\|_s^2)\|v - w\|_{s-1} \\ &= \mu_4 \|v - w\|_{s-1}, \end{aligned}$$

onde aplicamos o Teorema 3.10, e o Lema 3.3 com $s - 1$, $t = s - 2$.

■

Demonstração do Teorema 3.1: Combinando o Teorema 3.2 e os Lemas 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, e 3.11, podemos obter o resultado de boa colocação local do Teorema 3.1. Para a propriedade conservada, temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{S}}(u-3u_x^2)dx &= \int_{\mathbb{S}}(u_t-6u_xu_{xt})dx\\ &= \int_{\mathbb{S}}\partial_x^{-1}(u-3u_x^2)dx\\ &\quad -\int_{\mathbb{S}}\left(6u_x^3+\partial_x^{-1}(u-3u_x^2)+24uu_xu_{xx}+6u_x^3\right)dx=0,\end{aligned}$$

pois,

$$24\int_{\mathbb{S}}uu_xu_{xx}dx = 24\int_{\mathbb{S}}u\left(\frac{u_x^2}{2}\right)_x dx = -12\int_{\mathbb{S}}u_x^3dx$$

devido à 1-periodicidade.

Isso completa a prova do Teorema 3.1.

■

3.2 Existência global

Nesta seção, estudamos a solução global de (1.4). Acontece que existem alguns dados iniciais suaves para os quais as soluções correspondentes existirão globalmente no tempo.

A fim de manter a boa colocação local do problema de Cauchy (1.4), assumimos que $\int_{\mathbb{S}} u_0(t,y)-3u_{0,x}^2(t,y)dy=0$ nesta seção.

3.2.1 Blow-up (Explosão)

Vamos apresentar um critério de ampliação preciso para (1.4).

Teorema 3.12 (Desigualdade de Gronwall versão diferencial)**.** *Seja η uma função não negativa em $[0,T]$, satisfazendo a desigualdade diferencial:*

$$\eta'(t)\leq\phi(t)\eta(t)+\psi(t),$$

onde ϕ e ψ são funções não negativas e integráveis em $[0,T]$. Então

$$\eta(t)\leq e^{\int_0^t\phi(s)\ ds}\left[\eta(0)+\int_0^t\psi(s)\ ds\right], \tag{3.7}$$

para todo $0\leq t\leq T$.

Demonstração. Temos que,

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\left(\eta(s)e^{-\int_0^s \phi(r)\ dr}\right) &= e^{-\int_0^s \phi(r)\ dr}(\eta'(s) - \phi(s)\eta(s))\\ &\leq e^{-\int_0^s \phi(r)\ dr}\psi(s),\end{aligned}$$

para $0 \leq s \leq T$. Consequentemente para cada $0 \leq t \leq T$ obtemos

$$\begin{aligned}\eta(t)e^{-\int_0^t \phi(r)\ dr} &\leq \eta(0) + \int_0^t e^{-\int_0^s \phi(r)\ dr}\psi(s)\ ds\\ &\leq \eta(0) + \int_0^t \psi(s)\ ds,\end{aligned}$$

o que implica (3.7). ∎

Lema 3.13. *Seja $u_0(x) \in H^s, s \geq 2$, e seja T o tempo máximo de existência da solução $u(t,x)$ de (1.4) com o dado inicial $u_0(x)$, se a solução correspondente explode em tempo finito então*

$$\mathop{lim\ sup}_{t\to T^-}\ \sup_{x\in\mathbb{S}} u_x(t,x) = +\infty.$$

Demonstração. Aplicando o Teorema 3.1 e um argumento simples de densidade, é suficiente considerar o caso em que $u \in C_0^\infty$. Em primeiro lugar, supomos que u_x é limitado superiormente em $[0,T)$ e $T < \infty$, de modo que $lim\ sup_{t\to T^-}\ sup_{x\in\mathbb{S}}\ u_x(t,x) = M < +\infty$ e

$$\begin{aligned}\left|u(t,x) - \int_{\mathbb{S}} u(t,y) - 3u_x^2(t,y)dy\right| &= \left|u(t,x) - \int_{\mathbb{S}} u(t,y)dy - 3\int_{\mathbb{S}} u_x^2(t,y)dy\right|\\ &= \left|\int_{\mathbb{S}} u(t,x) - u(t,y)dy - 3\int_{\mathbb{S}} u_x^2(t,y)dy\right|\\ &= \left|\int_{\mathbb{S}}\int_y^x u_x(t,z)dzdy - 3\int_{\mathbb{S}} u_x^2(t,y)dy\right|\\ &\leq \left|\int_{\mathbb{S}}\int_y^x u_x(t,z)dy\right| + 3\int_{\mathbb{S}} u_x^2(t,y)dy\\ &\leq \|u_x\|_{L^\infty(\mathbb{S})} + 3\|u_x\|^2_{L^\infty(\mathbb{S})} \leq M + 3M^2.\end{aligned}$$

Como $\int_{\mathbb{S}} u(t,y) - 3u_x^2(t,y)dy = \int_{\mathbb{S}} u_0(t,y) - 3u_{0,x}^2(t,y)dy = 0$ pelo Teorema 3.1, nós deduzimos que $|u(t,x)| \leq M + 3M^2$ e

$$\|u(t,\cdot)\|^2_{H^1(\mathbb{S})} = \int_{\mathbb{S}}(u^2 + u_x^2)dx \leq \|u\|^2_{L^\infty} + \|u_x\|^2_{L^\infty} \leq (M + 3M^2)^2 + M^2. \tag{3.8}$$

Em seguida, diferenciando ambos os lados de (1.4) em relação a x, tomando o produto interno de L^2 a u_{xx}, e integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{S}} u_{xx}^2 dx &= \int_{\mathbb{S}} u_{xx}\partial_t u_{xx} dx \\ &= \int_{\mathbb{S}} u_{xx}(u_x + 6u_x u_{xx} + 4uu_{xxx}) dx \\ &= \int_{\mathbb{S}} (u_x u_{xx} + 6u_x u_{xx}^2 + 4uu_{xx}u_{xxx}) dx \\ &= \int_{\mathbb{S}} (6u_x u_{xx}^2 - 2u_x u_{xx}^2) dx \\ &= 4\int_{\mathbb{S}} u_x u_{xx}^2 dx.\end{aligned}$$

Assim, temos

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{S}} u_{xx}^2 dx \leq 8M\int_{\mathbb{S}} u_{xx}^2 dx.$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall (3.7) obtemos

$$\int_{\mathbb{S}} u_{xx}^2(t,x) dx \leq e^{8Mt}\int_{\mathbb{S}} (\partial_{xx}u_0(x))^2 dx.$$

Por (3.8) e a desigualdade acima, obtemos

$$\|u(t,\cdot)\|_{H^2(\mathbb{S})}^2 \leq (M+3M^2)^2 + M^2 + e^{8Mt}\|u_0\|_{H^2(\mathbb{S})}^2, \quad t \in [0,T). \tag{3.9}$$

Agora, colocando como valor inicial $t = T$ temos que a desigualdade (3.9) é valida para $t \in [T, T')$, para algum T' tal que $T < T'$, isso contradiz a suposição de que $T < \infty$ é o tempo máximo de existência.

■

3.2.2 Uma propriedade de preservação de sinal e suas implicações

Em seguida, diferenciando (1.4) em relação a x e tomando a transformação recíproca, obtemos as seguintes equações,

$$m_t = 4um_x + 6u_x m, \quad m = 1 + 6u_{xx}. \tag{3.10}$$

Lema 3.14. *Dado $u_0(x) \in H^3(\mathbb{S})$. Vendo $u_0(x)$ como uma função periódica sobre $\mathbb{R}$. Suponha que $m_0(x) = 1 + 6\partial_{xx}u_0(x)$ não muda de sinal para nenhum $x \in \mathbb{R}$, e seja T o tempo de existência máximo da solução $u(t,x)$ de (1.4) com o dado inicial $u_0(x)$. Então $m(t,x) = 1 + 6u_{xx}(t,x)$ também não muda o sinal para qualquer $(t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}$.*

Demonstração. A seguir, provamos o lema em coordenadas Lagrangianas. Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}q(t,x) = -4u(t,q(x,t)), & t \in [0,T),\ x \in \mathbb{R}, \\ q(0,x) = x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.11}$$

De acordo com a teoria EDO padrão, inferimos que (3.11) tem uma solução única $q \in C^1([0,T) \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$. Além disso, a função $q(t,\cdot)$ é um difeomorfismo crescente de $\mathbb{R}$ com

$$q_x(t,x) = exp\left(-4\int_0^t u_x(s,q(x,s))ds\right) > 0, \forall (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}.$$

Por (3.11) e (3.10), deduzimos que para qualquer $x \in \mathbb{R}$ fixo,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}m(t,q(t,x)) &= m_t(t,q(x,t)) + m_x(t,q(x,t))q_t(t,x) \\ &= 6u_x(t,q(t,x))m(t,q(t,x)). \end{aligned}$$

Isto implica que

$$m(t,q(t,x)) = m_0(x)exp\left(\int_0^t 6u_x(\tau,q(\tau,x))d\tau\right).$$

Como m_0 não muda de sinal e a função $q(t,\cdot)$ é um difeomorfismo crescente, obtemos que $m(t,x)$ também não muda de sinal para qualquer $(t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}$.

■

Lema 3.15. *Se a suposição do* Lema 3.14 *for verdadeira, então temos*

$$\|u_x\|_{L^\infty(\mathbb{S})} \leq \frac{1}{3}.$$

Demonstração. Como $m_0(x) = 1+6\partial_{xx}u_0(x)$ não muda de sinal, sem perda de generalidade, podemos assumir $m_0(x) \geq 0$, o que significa $m(t) \geq 0$ pelo Lema 3.14. Aplicando o Teorema 3.1 e um argumento simples de densidade, é suficiente considerar o caso em que $u \in C_0^\infty$. É fácil deduzir que existe pelo menos um ponto x_0 tal que $u_x(x_0) = 0$. Então, temos

$$\begin{aligned} |u_x| &\leq \int_x^{x_0} |u_{xx}|dx \\ &\leq \frac{1}{6}\int_0^1 |m-1|dx \\ &\leq \frac{1}{6}\int_0^1 (|m|+1)dx \leq \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

A última desigualdade vale pois

$$\int_0^1 |m(t,x)|dx = \int_0^1 m(t,x)dx \leq \int_0^1 (1+6u_{xx})dx \leq 1.$$

■

Agora podemos enunciar nosso teorema principal, que mostra que existem alguns dados iniciais de forma que a solução correspondente a (1.4) existirá globalmente no tempo.

Teorema 3.16. *Dado $u_0 \in H^s$, $s \geq 3$. Assumindo que*

$$\int_{\mathbb{S}} u_0 - 3u_{0x}^2 dx = 0, \tag{3.12}$$

e $m_0 = 1 + 6u_{0xx}$ não muda de sinal, então a solução correspondente $u(t,x)$ de (1.4) *existe globalmente no tempo.*

Demonstração. Seja $T > 0$ o tempo máximo de existência da solução $u(t,\cdot)$ de (1.4) com o dado inicial $u_0 \in H^3$. Pelos Lemas 3.13 e 3.15, temos

$$\begin{aligned}\|u(t,\cdot)\|_{H^2(\mathbb{S})}^2 &\leq \left(\frac{1}{3} + 3\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + e^{\frac{8}{3}t}\|u_0\|_{H^2(\mathbb{S})}^2 \\ &= \frac{5}{9} + e^{\frac{8}{3}t}\|u_0\|_{H^2(\mathbb{S})}^2.\end{aligned}$$

De acordo com o critério de explosão anterior no Lema 3.13, isso prova que a solução correspondente $u(t,x)$ existe globalmente no tempo.

■

Observação 3.17. *Usando o método acima, podemos estender nosso resultado de existência global obtido para algumas equações diferenciais parciais não lineares periódicas de segunda ordem* (veja [27]), *que têm uma propriedade de preservação de sinal por meio de uma transformação:*

$$\begin{cases} u_{xt} = u + c_1 u u_x + c_2 u u_{xx}, \\ u(t,x)|_{t=0} = u_0(x), \\ u(t,x+1) = u(t,x), \end{cases} \tag{3.13}$$

e

$$\begin{cases} u_{xt} = u + c_2 u u_{xx} + c_3 u_x^2, \\ u(t,x)|_{t=0} = u_0(x), \\ u(t,x+1) = u(t,x), \end{cases} \tag{3.14}$$

Tomando $m = k_1 u_{xx} + k_3 u_x + k_2$ *onde* $k_3 = k_2 c_1$, $k_1 = k_2 c_2$, $k_3 < k_1$ *para* (3.13) *e* $m = k_1 u_{xx} + k_2$ *onde* $k_1 = k_3(c_2 + 2c_3)$ *para* (3.14) *respectivamente, podemos transformá-los em duas novas equações com uma propriedade de preservação de sinal. Seguindo a mesma prova do* Teorema 3.16, *podemos obter a existência global das equações acima.*

Em particular, podemos aplicar esta observação à equação de [35]*:*

$$\begin{cases} u_{xt} = u + 2u u_{xx} + u_x^2, \\ u(t,x)|_{t=0} = u_0(x), \\ u(t,x+1) = u(t,x), \end{cases} \tag{3.15}$$

onde $c_2 = 2$, $c_3 = 1$ *para* (3.14)*. Assumindo que* $m_0 = 1 + 4u_{0xx}$ *não muda de sinal, então a solução correspondente de* (3.15) *existe globalmente no tempo.*

Referências

[1] Beals, R., Sattinger, D., Szmigielski, J. *Inverse scattering solutions of the Hunter–Saxton equations.* Appl. Anal. 78, 255–269 (2001).

[2] Boyd, J. *Ostrovsky and Hunter's generic wave equation for weakly dispersive waves: matched asymptotic and pseudospectral study of the paraboloidal travelling waves (corner and near-corner waves).* Eur. J. Appl. Math. 16, 65–81 (2005).

[3] Boyd, J.P. *Microbreaking and polycnoidal waves in the Ostrovsky–Hunter equation.* Phys. Lett. A 338, 36–43 (2005).

[4] Bressan, A., Constantin, A. *Global solutions of the Hunter–Saxton equation.* SIAM J. Math. Anal. 37, 996–1026 (2005).

[5] Bressan, A., Constantin, A. *Global conservative solutions of the Camassa–Holm equation.* Arch. Ration. Mech. Anal. 183, 215–239 (2007).

[6] Bressan, A., Constantin, A. *Global dissipative solutions of the Camassa–Holm equation.* Anal. Appl. 5, 1–27 (2007).

[7] Brezis, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer, New York, 2011.

[8] Constantin, A. *Proc. R. Soc. Lond. A 457, 953–970 (2001).* Appl. Anal. 78, 255–269 (2001).

[9] Constantin, A. *Existence of permanent and breaking waves for a shallow water equation: a geometric approach.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 50, 321–362 (2000).

[10] Constantin, A. *The trajectories of particles in Stokes waves.* Invent. Math. 166, 523–535 (2006).

[11] Constantin, A. *Particle trajectories in extreme Stokes waves.* IMA J. Appl. Math. 77, 293–307 (2012).

[12] Constantin, A. *The Hamiltonian structure of the Camassa–Holm equation.* Expo. Math. 15(1), 53–85 (1997).

[13] Constantin, A., Escher, J. *Well-posedness, global existence, and blowup phenomena for a periodic quasi-linear hyperbolic equation.* Commun. Pure Appl. Math. 51, 475–504 (1998).

[14] Constantin, A., Escher, J. *Wave breaking for nonlinear nonlocal shallow water equations.* Acta Math. 181, 229–243 (1998).

[15] Constantin, A., Escher, J. *Particle trajectories in solitary water waves.* Bull. Am. Math. Soc. 44, 423–431 (2007).

[16] Constantin, A., Escher, J. *Analyticity of periodic traveling free surface water waves with vorticity.* Ann. Math. 173, 559–568 (2011).

[17] Constantin, A., Gerdjikov, V.S., Ivanov, R.I. *Inverse scattering transform for the Camassa–Holm equation.* Inverse Probl. 22, 2197–2207 (2006).

[18] Constantin, A., McKean, H.P. *A shallow water equation on the circle.* Commun. Pure Appl.Math. 52, 949–982 (1999).

[19] Constantin, A., Molinet, L. *Globalweak solutions for a shallowwater equation.* Commun. Math. Phys. 211, 45–61 (2000).

[20] Constantin, A., Strauss, W.A. *Stability of peakons.* Commun. Pure Appl. Math. 53, 603–610 (2000).

[21] Dai, H .H., Pavlov,M. *Transformations for the Camassa–Holm equation, its high-frequency limit and the Sinh–Gordon equation.* J. P. Soc. Jpn. 67, 3655–3657 (1998).

[22] Danchin, R. *A note on well-posedness for Camassa–Holm equation.* J. Differ. Equ. 192, 429–444 (2003).

[23] B. Daya Reddy, *Introductory Functional Analysis with applications to Boundary Value Problems and Finite Elements.* Springer-Verlag, New York, 1998.

[24] Fokas, A., Fuchssteiner, B. *Symplectic structures, their Bäcklund transformation and hereditary symmetries.* Phys. D 4, 47–66 (1981/82).

[25] Guo, Z., Liu, X., Molinet, L., Yin, Z. *Ill-posedness of the Camassa Holm and related equations in the critical space.* J. Differ. Equ. 266, 1698–1707 (2019).

[26] Grimshaw, R., Pelinovsky, D. *Global existence of small-norm solutions in the reduced Ostrovsky equation.* Discret. Contin. Dyn. Syst. Ser. 34, 557–566 (2014).

[27] Hone, A., Novikov, V., Wang, J. *Generalizations of the short pulse equation.* Lett. Math. Phys. 108, 927–947 (2018).

[28] Hunter, J. *Numerical solutions of some nonlinear dispersive wave equations. In: Computational Solution of Nonlinear Systems of Equations.* Lectures in Applied Mathematics, vol. 26, pp. 301–316. AMS, Providence (1990).

[29] Hunter, J.K., Saxton, R. *Dynamics of director fields.* SIAM J. Appl. Math. 51, 1498–1521 (1991).

[30] Hunter, J.K., Zheng, Y. *On a completely integrable nonlinear hyperbolic variational equation.* Phys. D 79, 361–386 (1994)

[31] Kato, T. *Quasi-linear equations of evolution, with applications to partial differential equations. In: Spectral Theory and Differential Equations.* Lecture Notes in Mathematics, vol. 448, pp. 25–70. Springer, Berlin (1975).

[32] Kato, T. *On the Korteweg-de Vries equation.* Manuscripta Math., 28 (1979), pp. 89–99.

[33] Kato, T. *On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg-de Vries equation.* In Studies in Applied Mathematics, V. Guillemin, ed., Adv. Math. Suppl. Stud. 8, Academic Press, New York, 1983, pp. 93–128.

[34] Kreyszig E. *Introductory functional analysis with applications.* Copyright © 1978, by John Wiley e Sons. Inc.

[35] Li,M., Yin, Z. *Blow-up phenomena and travelling wave solutions to the periodic integrable dispersive Hunter–Saxton equation.* Discret. Contin. Dyn. Syst. Ser. 37, 6471–6485 (2017).

[36] Li, J., Yin, Z. *Remarks on the well-posedness of Camassa–Holm type equations in Besov spaces.* J. Differ. Equ. 261(11), 6125–6143 (2016).

[37] Li, J.Y., Zhang, K.J. *Global existence of dissipative solutions to the Hunter–Saxton equation via vanishing viscosity.* J. Differ. Equ. 250, 1427–1447 (2011).

[38] Liu, Y., Pelinovsky, D., Sakovich, A. *Wave breaking in the Ostrovsky Hunter equation.* SIAM J. Math. Anal. 42, 1967–1985 (2010).

[39] Liu, Y., Pelinovsky, D., Sakovich, A. *Wave breaking in the short-pulse equation.* Dyn. Partial Differ. Equ. 6, 291–310 (2009).

[40] Morrison, A.J., Parkes, E.J.,Vakhnenko,V.O. *TheNloop soliton solutions of theVakhnenko equation.* Nonlinearity 12, 1427–1437 (1999).

[41] Olver, P., Rosenau, P. *Tri-Hamiltonian duality between solitions and solitary wave solutions having compact support.* Phys. Rev. E 53, 1900–1906 (1996).

[42] Pelinovsky, D., Sakovich, A. *Global well-posedness of the short-pulse and sine-Gordon equations in energy space.* Commun. Partial Differ. Equ. 35, 613–629 (2010).

[43] Parkes, E.J. *Explicit solutions of the reduced Ostrovsky equation*. Chaos Solitons Fractals 31, 181–191 (2007).

[44] Pazy, A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 1983.

[45] Rodríguez-Blanco, G. *On the Cauchy problem for the Camassa–Holm equation*. Nonlinear Anal. 46(3), 309–327 (2001).

[46] Salo, M. *Fourier analysis and distribution theory.* Lecture notes, Fall 2013, Department of Mathematics and Statistics, University of Jyväskylä, Finland.

[47] Schäfter, T., Wayne, C.E. *Propagation of ultra-short optical pulses in cubic nonlinear media*. Phys. D 196, 90–105 (2004).

[48] Stefanov, A., Shen, Y., Kevrekidis, P.G. *Well-posedness and small data scattering for the generalized Ostrovsky equation.*J. Differ. Equ. 249, 2600–2617 (2010).

[49] Toland, J.F. *Stokes waves*. Topol. Methods Nonlinear Anal. 7, 1–48 (1996).

[50] Xin, Z., Zhang, P. *On the weak solutions to a shallow water equation*. Commun. Pure Appl.Math. 53, 1411–1433 (2000).

[51] Yin, Z. *On the structure of solutions to the periodic Hunter–Saxton equation*. SIAM J. Math. Anal. 36, 272–283 (2004).

[52] W. Ye and Z. Yin, *Global existence for the periodic dispersive Hunter-Saxton equation*, Monatshefte für Mathematik (2020) 191: 267-278.