



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



THABATA MARIA QUEIROGA DE MELO

UM ESTUDO DOS MODELOS POPULACIONAIS E APLICAÇÕES

SÃO CARLOS
2021

THABATA MARIA QUEIROGA DE MELO

UM ESTUDO DOS MODELOS POPULACIONAIS E APLICAÇÕES

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de São Carlos para aprovação na disciplina 83755 - Trabalho de Conclusão de Curso.

Orientador: Prof. Dr. Wladimir Seixas

SÃO CARLOS
2021



FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - CCM/CCET
Rod. Washington Luís km 235 - SP-310, s/n - Bairro Monjolinho, São Carlos/SP, CEP 13565-905
Telefone: (16) 33518221 - <http://www.ufscar.br>

DP-TCC-FA nº 8/2021/CCM/CCET

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso
Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)
FOLHA DE APROVAÇÃO

THABATA MARIA QUEIROGA DE MELO RA-726252
UM ESTUDO DOS MODELOS POPULACIONAIS E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – Campus São Carlos

São Carlos, 08 de janeiro de 2021

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

Cargo/Função	Nome Completo
Orientador	Wladimir Seixas
Membro da Banca 1	Alessandra Verri
Membro da Banca 2	Thais Maria Dalbelo



Documento assinado eletronicamente por **Wladimir Seixas, Professor do Magistério Superior**, em 17/01/2021, às 21:35, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Alessandra Aparecida Verri, Professor do Magistério Superior**, em 18/01/2021, às 08:47, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Thais Maria Dalbelo, Professor do Magistério Superior**, em 18/01/2021, às 17:20, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufscar.br/autenticacao>, informando o código verificador **0312856** e o código CRC **165FF704**.

Referência: Caso responda a este documento, indicar expressamente o Processo nº 23112.000682/2021-21

SEI nº 0312856

Modelo de Documento: Grad: Defesa TCC: Folha Aprovação, versão de 02/Agosto/2019

AGRADECIMENTOS

Agradeço,

à Deus, por me guiar sempre para o caminho do bem e possibilitar vivenciar experiências enriquecedoras;

à toda minha Família, em especial meus pais: Fátima Francisca de Queiroga Melo e Estevão José de Melo que estiveram e estarão sempre presentes, me apoiando em todas as decisões tomadas até aqui, sendo amparo, assistência e base;

aos meus irmãos, Olavo Queiroga de Melo e Diego de Melo, e à minha irmã de coração, Nicolay de Azevedo Reis pelo apoio a cada dia, que me inspiram, independente do caminho escolhido por cada um. Espero servir-lhes de inspiração também;

à todos os professores que me ensinaram durante o caminho, em especial meu orientador, Wladimir Seixas, por me auxiliar durante toda a trajetória, com um trabalho de muita paciência, parceria e inspiração que me trouxeram até aqui.

à todas as Marias da minha vida, pessoas especiais que me amam e torcem pelo meu sucesso, bem como eu pelo delas;

à todos os meus amigos, da vida, do curso, da república, de viagens, do Polo Aquático e da Natação, que acompanharam e apoiaram não só nessa, mas em todas as fases que já vivi, me ensinando a levar as coisas de maneira mais leve.

RESUMO

O estudo da dinâmica populacional é uma área da ciência que busca entender e descrever de forma determinística as variações temporais do tamanho das populações biológicas, sendo importante também para “dar cunho específico à configuração de uma sociedade e às questões pertinentes aos seus múltiplos aspectos” (SETI et al., 1999, p.1). Partindo do entendimento de como as equações diferenciais ordinárias são utilizadas na modelagem matemática, iremos neste trabalho enunciar e compreender o funcionamento dos modelos da dinâmica populacional de Malthus, Verhulst e Gompertz, complementando com um estudo de como a aplicação dos ajustes de funções pelo método dos mínimos quadrados auxiliam na compreensão, efeitos e ajustes na maneira de como os modelos da dinâmica populacional foram definidos.

Palavras-chave: Dinâmica Populacional. Modelagem Matemática. Equações Diferenciais Ordinárias. Mínimos Quadrados.

ABSTRACT

The study of population dynamics is an area of science attempted to understand and describe, in a deterministic way, the temporal variations size of biological populations, being also important to “give specific character for the configuration of a society and the pertinent issues of its multiple aspects” (SETI et al., 1999, p.1). Starting from the understanding of how ordinary differential equations are used in mathematical modeling, in this work we enunciate and study the functioning of the population dynamics models of Malthus, Verhulst and Gompertz, complementing with a study of how the applications using the least squares method helps to correct hypothesis and effects in the way that population were described.

Keywords: Population Dynamics. Mathematical Modeling. Ordinary Differential Equations. Least Squares.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Fluxograma de Elaboração de um Modelo Matemático	11
Figura 4.1 – Comportamento do modelo de Malthus	23
Figura 4.2 – Índice de Saturação Populacional	25
Figura 4.3 – Índice de Saturação Populacional	25
Figura 4.4 – Pontos de Equilíbrio da População	28
Figura 4.5 – Comportamento do Modelo de Verhulst	29
Figura 4.6 – Comportamento dos Modelos de Verhulst e Gompertz	33
Figura 6.1 – Comportamento da População da Cidade de São Carlos	41
Figura 6.2 – Comportamento do crescimento	44
Figura 6.3 – Gráfico de proliferação do Corona Vírus em Portugal	45
Figura 6.4 – Ajuste logístico aplicado aos dados do Corona Vírus para Portugal	46

LISTA DE TABELAS

Tabela 6.1 – Totais populacionais e taxas geométricas de crescimento médio anual para o município de São Carlos - SP entre 1874 e 2005.	39
Tabela 6.2 – Dados para aplicação do ajuste exponencial	40
Tabela 6.3 – Valores experimentais (y) da matéria seca de uma única planta de aveia durante a vegetação (t)	42
Tabela 6.4 – Dados para aplicação do ajuste logístico	43
Tabela A.1 – Dados para aplicação do ajuste logístico	49

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	O QUE É MODELAGEM MATEMÁTICA?	10
3	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	12
3.1	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM	12
3.2	TEOREMA DA EXISTÊNCIA E UNICIDADE	13
4	MODELOS DE DINÂMICA POPULACIONAL	21
4.1	O MODELO DE MALTHUS	21
4.2	O MODELO DE VERHULST	23
4.3	O MODELO DE GOMPERTZ	29
5	MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS	34
5.1	AJUSTE DE FUNÇÕES LINEARES	34
5.2	AJUSTE DE FUNÇÕES NÃO LINEARES	36
5.2.1	Ajuste Exponencial	36
5.2.2	Ajuste Logístico	37
6	APLICAÇÕES	39
6.1	CRESCIMENTO POPULACIONAL DA CIDADE DE SÃO CARLOS	39
6.2	DESCRIÇÃO E PROGNÓSTICO PARA O CRESCIMENTO DE PLANTAS	41
6.3	EXEMPLO DE AJUSTE LOGÍSTICO PARA A COVID-19	44
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	47
	REFERÊNCIAS	47
	APÊNDICE A – DADOS COVID-19 EM PORTUGAL	49

1 INTRODUÇÃO

Buscando conhecer um pouco melhor as equações diferenciais ordinárias de primeira ordem e compreender como são feitas as aplicações ao estudo de dinâmica populacional, este trabalho busca estudar os modelos de Malthus, Verhulst e Gompertz, além do método de ajuste de funções por mínimos quadrados para, à partir de dados reais, realizar algumas aplicações e ajustes que nos permitam discutir a aplicabilidade de cada modelo.

Partindo de uma discussão sobre os conceitos envolvidos para a realização de uma boa modelagem matemática, verificamos a existência e unicidade de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, geralmente utilizadas nos modelos que descrevem o comportamento de determinadas populações que, com o passar dos séculos vêm se tornando cada vez mais eficazes.

O texto está dimensionado da seguinte maneira:

- No Capítulo 1, realizamos uma breve discussão à respeito do que é modelagem matemática, definindo algumas etapas necessárias para se estabelecer um bom modelo;
- No Capítulo 2, buscamos compreender qual a estrutura de uma equação diferencial de primeira ordem, e verificar se existem soluções para estas;
- No Capítulo 3, direcionamos o estudo de três modelos de dinâmica populacional, sendo eles o de Malthus, Verhulst e Gompertz, enunciando e verificando qual a solução para cada um dos modelos;
- No Capítulo 4, buscamos enunciar e compreender como é realizado o ajuste dos modelos estudados pelo método dos mínimos quadrados;
- No Capítulo 5 realizamos a coleta de dados para aplicação dos modelos de Malthus e Verhulst, complementando com um ajuste para o comportamento do COVID-19 em Portugal.

2 O QUE É MODELAGEM MATEMÁTICA?

O objetivo deste capítulo será fazer uma breve discussão a respeito do que é modelagem matemática, definindo algumas etapas necessárias para se estabelecer um bom modelo, discutindo cada uma delas e suas funções.

Antes de iniciar essa discussão, utilizaremos a definição de [Bassanezi \(2011\)](#):

Modelo matemático é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado. [...] Seu objetivo é explicar ou entender a situação estudada para, eventualmente poder agir sobre ela. ([BASSANEZI, 2011](#), p. 21).

Geralmente, os problemas em modelagem matemática partem de relatos que fornecem informações necessárias para que o matemático formule hipóteses e faça a escolha de qual será o modelo matemático que irá desenvolver, de modo a obter informações relevantes, além do que já é trivial.

[Nachbin e Tabak \(1997\)](#) descreveram a estrutura de desenvolvimento de um projeto de modelagem, que exemplifica bem como estabelece a criação de um bom modelo matemático.

O primeiro passo é compreender os relatos vindos de outras áreas, reunir todas as informações que serão relevantes, traduzir matematicamente qual será o objetivo e expressar, dentro do contexto, o modelo que será utilizado para chegar a esse objetivo, que na maioria das vezes, é determinado por equações diferenciais. O modelo escolhido deverá ser simplificado o suficiente para que seja resolvido com clareza, possibilitando a simulação de possíveis novos fenômenos, ou seja, o responsável pela sua criação deverá formular as leis que serão testadas e fazer uma tradução da linguagem verbal para a linguagem matemática.

Neste sentido, geralmente se usa o computador, fazendo simulações de toda a teoria envolvida, e a solução será trazida em um método numérico. Neste passo, [Bassanezi \(2011\)](#) ressalta que o matemático deverá lidar com experimentos que na verdade são ditados pela sua própria natureza e deve contar com o auxílio de pesquisadores que estão inseridos na área em que está trabalhando.

Assim que o primeiro passo estiver concluído, serão feitos testes com o modelo determinado. Esses testes consistem na verificação de fenômenos que já ocorreram, os quais deverão ser facilmente capturados. O intuito dessa etapa é observar se os resultados teóricos estão sendo observados no modelo atribuído, buscando a devida confiabilidade que deverá transmitir, e possibilitando que continue sendo aprimorado. Caso não sejam observados, o modelo deverá sofrer ajustes para que consiga atingir seu objetivo.

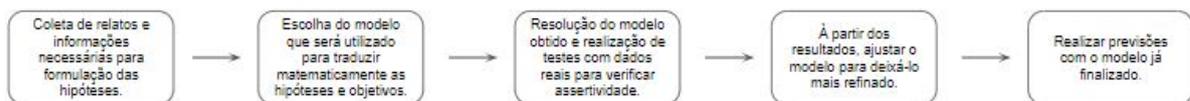
É muito difícil obter uma solução exata de um problema, mas há uma série de erros que podem causar uma grande divergência da solução em relação à realidade, erros que podem ser causados por pequenos arredondamentos ou truncamentos. Como mencionado

acima, geralmente se usa o computador para fazer as simulações, e por se tratar de uma aritmética finita cujos números reais são representados de forma binária, o modelo acaba ficando suscetível a erros de aproximação na solução da matemática do modelo.

Para [Nachbin e Tabak \(1997\)](#), é fundamental que tenhamos um algoritmo simplificado que não sacrifique a qualidade dos resultados. Para isso, os códigos deverão ter **confiabilidade**, que será obtida através de testes que evidenciam que não estamos cometendo erros; **robustez**, para que consigamos detectar facilmente erros e situações as quais o modelo não se aplica; **portabilidade**, para que qualquer computador consiga executar o código; e **manutenção**, para que o código seja legível e possibilite modificações de maneira facilitada.

Assim, teremos uma modelagem capaz de fazer previsões, e que possibilite uma interpretação na linguagem usual, a partir de uma investigação matemática. Podemos visualizar com clareza e da maneira mais resumida possível no fluxograma à seguir, todas as etapas necessárias para se obter um bom modelo matemático:

Figura 2.1 – Fluxograma de Elaboração de um Modelo Matemático



Fonte: Elaborado pela autora.

Tendo em vista que a maioria dos modelos matemáticos partem de uma equação diferencial, o objetivo agora será compreender como estas se comportam e conhecer alguns modelos já existentes.

3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

A palavra diferencial, junto à palavra equação, sugere a resolução de equações que envolvem derivadas. O objetivo desse capítulo será compreender o formato das equações diferenciais, e verificar as condições que garantem a existência e unicidade da solução.

3.1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM

Como mencionamos no capítulo anterior, no processo de escolha de um bom modelo para seu problema, o matemático costuma fazer o uso de equações diferenciais. Para tratar o assunto referente à esse capítulo, primeiramente será retomado o conceito de derivada, conhecido do curso de cálculo diferencial e integral.

Definição 3.1. Dada uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, sabemos que ela é derivável num ponto $c \in (a, b)$, se o limite

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

existir. Caso exista, esse limite será a derivada da função f no ponto c .

Então, dada uma função $y = f(x)$, denotamos a derivada de y em relação à x por $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, sendo y denominada variável dependente e x a variável independente.

Visto o conceito de derivada, faremos agora uma contextualização sobre o que é uma equação diferencial, partindo da explicação dada por [Zill e Cullen \(2008\)](#).

Equações diferenciais são equações que contém derivadas de variáveis dependentes, em relação à variáveis independentes. Elas podem ser classificadas por seu **tipo**, que depende do tipo de derivação à qual se refere; **ordem**, dependendo da derivada de maior ordem que aparece em sua estrutura; e por sua **linearidade**, caso ela seja linear ou não linear.

Abordaremos as Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) de primeira ordem, que, de acordo com as classificações acima, são equações diferenciais, cuja maior derivada ordinária (que depende de apenas uma variável) é de primeira ordem. Sua forma geral é dada por

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

sendo $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida no aberto $A \subset \mathbb{R}^2$ com valores em \mathbb{R} .

A solução de uma EDO de primeira ordem é uma função $y = \phi(x)$ com $x \in (a, b) \subset \mathbb{R}$ satisfazendo

a) $(x, \phi(x)) \in A$, para todo $x \in (a, b)$;

$$b) \phi'(x) = f(x, \phi(x)).$$

Conhecidos estes conceitos, o objetivo será descobrir se existe uma solução geral para a EDO de primeira ordem, e qual o seu comportamento.

3.2 TEOREMA DA EXISTÊNCIA E UNICIDADE

O uso de equações diferenciais parte da dificuldade de se resolver explicitamente a maioria das equações, o que gera o questionamento da existência de soluções para tais, e se estas são únicas. O objetivo desta seção será determinar as condições de existência da solução para um dado problema, a partir de uma dada EDO de primeira ordem e uma condição inicial. Neste sentido, será enunciado e demonstrado o Teorema de Existência e Unicidade de soluções para Equações Diferenciais.

A demonstração deste teorema é extensa, e envolve diversos conceitos que serão abordados durante seu desenvolvimento. Em suma, para o estudo das condições para **existência** da solução, será construído um retângulo na região Ω , onde uma sequência de funções que são soluções do Problema de Valor Inicial será definida, e esta deverá convergir uniformemente para a função f definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Já para mostrar que a solução é **única**, trabalharemos com a contradição, observando o que aconteceria caso essas soluções não fossem únicas. Vale ressaltar aqui, que utilizaremos como base a demonstração realizada por [Zill e Cullen \(2008\)](#).

Teorema 3.1 (Existência e Unicidade). *Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua definida no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, com a derivada parcial em relação à y também contínua. Então, para cada $(x_0, y_0) \in \Omega$, existem um intervalo aberto I com $x_0 \in I$ e uma única função diferenciável $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ com $(x, \phi(x)) \in \Omega$, para todo $x \in I$, que é solução do Problema de Valor Inicial (P.V.I):*

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}.$$

Vamos iniciar a demonstração deste teorema validando e construindo as condições para a **existência** da solução.

Dada a equação diferencial $y' = f(x, y)$ com $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, Ω aberto e f contínua em Ω e um ponto (x_0, y_0) onde $y_0 = y(x_0)$. Queremos determinar um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ com $x_0 \in I$, e uma função $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável tal que:

- a) $(x, \phi(x)) \in \Omega$, para todo $x \in I$;
- b) $\phi'(x) = f(x, \phi(x))$, para todo $x \in I$;
- c) $\phi(x_0) = y_0$.

Lema 3.1. *Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua no aberto Ω . A função contínua $\phi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução do Problema de Valor Inicial se, e somente se, a função $y = \phi(x)$ satisfaz à equação integral $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds$.*

Demonstração. (\Rightarrow) Se ϕ é uma solução do P.V.I. então satisfaz:

$$\phi'(x) = f(x, \phi(x)), \text{ para todo } x \in I.$$

Se integrarmos ambos os lados da equação, teremos:

$$\int_{x_0}^x \phi'(s) ds = \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds.$$

E, utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos:

$$\phi(x) - \phi(x_0) = \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds.$$

Portanto, ϕ satisfaz a equação integral.

(\Leftarrow) ϕ satisfaz a equação $\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \phi(s)) ds$. Se derivarmos ambos os lados da equação em relação à x , utilizando do fato de f ser contínua e aplicando novamente o Teorema Fundamental do Cálculo, teremos:

$$\phi'(x) = f(x, \phi(x)).$$

Portanto, ϕ é uma solução do Problema de Valor Inicial. ■

O próximo passo será construir um retângulo que esteja totalmente contido no aberto Ω (isto sempre será possível, já que Ω é aberto). Dado (x_0, y_0) , sejam $a, b > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ tais que o conjunto $R = \{(x, y) \in \Omega : |x - x_0| \leq a \text{ e } |y - y_0| \leq b\}$ compacto em \mathbb{R}^2 (fechado e limitado) esteja totalmente contido no aberto Ω .

Lema 3.2. *Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, Ω aberto, f contínua em Ω , com a derivada parcial em relação à y também contínua em Ω . Então, existe $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$ tal que:*

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq k|y_1 - y_2|,$$

para todo $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

Demonstração. Como $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ é contínua em Ω , concluímos pelo Teorema de Weiers-

trass¹ que $\frac{\partial f}{\partial y}$ restrita à pontos de \mathbb{R} é limitada. Então, existe $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$ tal que $|\frac{\partial f}{\partial y}| < k$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}$.

Fixado $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$, a função f poderá ser vista como uma função de uma variável real. O Teorema do Valor Médio garante que, dados $y_1, y_2 \in [y_0 - b, y_0 + b]$ distintos, existe $s \in (y_0 - b, y_0 + b)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, s) = \frac{f(x, y_1) - f(x, y_2)}{y_1 - y_2}.$$

Logo,

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, s) \right| |y_1 - y_2| \leq k |y_1 - y_2|$$

para todo $(x, y_1), (x, y_2) \in \mathbb{R}$. ■

Nosso objetivo agora será encontrar uma sequência de funções em um espaço métrico C , que será solução do P.V.I. Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e $R \subset \Omega$ o retângulo construído anteriormente, sendo R compacto e f limitada em R .

Seja $M = \max\{|f(x, y)| ; (x, y) \in \mathbb{R}\}$. É trivial que M existe, e que se $M = 0$ então $f = 0$. Seja:

$$0 < \bar{a} \leq \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, M \neq 0.$$

Definimos $I_a = [x_0 - \bar{a}, x_0 + \bar{a}]$. Consideremos o conjunto $C = \{g : I_0 \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ contínuas tal que } g(x_0) = y_0 \text{ e } |g(x) - y_0| \leq b\}$. Esse conjunto pode receber uma estrutura de espaço métrico. Para isso, precisamos definir uma métrica. Seja $d : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$

$$(g_1, g_2) \mapsto d(g_1, g_2) = \max\{|g_1(x) - g_2(x)|\}, \text{ para todo } x \in I_{\bar{a}}.$$

uma métrica para o conjunto C , que satisfaz às seguintes propriedades:

- a) $d(g_1, g_2) \geq 0$ e $d(g_1, g_2) = 0$ se, e somente se, $\max\{|g_1(x) - g_2(x)|\} = 0 \Leftrightarrow |g_1(x) - g_2(x)| = 0$, para todo $x \in I_{\bar{a}}$. Logo, $g_1(x) = g_2(x)$, para todo $x \in I_{\bar{a}}$;
- b) $d(g_1, g_2) = d(g_2, g_1)$;
- c) $d(g_1, g_2) \leq d(g_1, g_3) + d(g_3, g_2)$.

Concluimos então que (C, d) é um espaço métrico.

¹ Se a função f definida em $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ for contínua, então f assumirá máximo e mínimo em $[a, b]$, ou seja, existirão $x_1, x_2 \in [a, b]$ tais que: $M = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = m$, para todo $x \in [a, b]$. Para demonstração ver Guidorizzi (v.1, p.511, 2001).

Agora, resta definir a sequência em C , e demonstrar que esta convergirá uniformemente à solução do P.V.I. Para isso, serão enunciados alguns conceitos necessários para concluir a primeira parte da demonstração do Teorema.

Definição 3.2. Uma sequência no espaço métrico C é toda aplicação de \mathbb{N} em C tal que $n \mapsto g_n \in C$.

Definição 3.3. A sequência de funções $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $g_n \in C$ será convergente para a função f definida em $I_{\bar{a}}$ se, e somente se, para cada $x \in I_{\bar{a}}$, dado $\varepsilon > 0$, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ ($n_0 = n_0(\varepsilon, x)$) tal que para todo $n > n_0$, $n \in \mathbb{N}$, temos $|g_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Essa última definição é um requisito suficiente para convergência das sequências de funções, porém, vamos fortalecê-la definindo o que é uma convergência uniforme:

Definição 3.4. A sequência de funções $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $g_n \in C$ converge uniformemente em $I_{\bar{a}}$ para a função f definida em $I_{\bar{a}}$ se, e somente se, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ ($n_0 = n_0(\varepsilon)$) tal que, para todo $n > n_0$, $|g_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ é satisfeita para todo $x \in I_{\bar{a}}$.

Teorema 3.2. *Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções contínuas no intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para a função f em I , então f é contínua.*

Demonstração. Considere $x_0 \in I$. Por hipótese, f_n é contínua em $x_0 \in I$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in I$, com $|x - x_0| < \delta$ temos que $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Por outro lado, f_n converge uniformemente a f , ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que para todo $n > n_0$, $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$, para todo $x \in I$.

Resta então mostrar que f será contínua em $x_0 \in I$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in I$, com $|x - x_0| < \delta$, temos:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

■

Definidos os critérios para convergência de sequência de funções, o último conceito a ser visto antes de definir a sequência em C é dado a seguir:

Definição 3.5 (Iteradas de Picard). Seja $y_0(x) = y_0$, então:

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_{n-1}(s)) ds.$$

Vamos então definir uma sequência em $C = \{g : I_{\bar{a}} \rightarrow \mathbb{R}, g \text{ contínua}\}$, utilizando as iteradas de Picard.

Considere a sequência de funções:

$$\begin{cases} y_0(x) = y_0, \\ y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_{n-1}(s)) ds. \end{cases}$$

Para todo $x \in I_{\bar{a}}$ e para todo $y \in \mathbb{R}$, com $|y - y_0| < b$, $\bar{a} = \min\{a, \frac{b}{M}\}$, $M = \max\{|f(x, y)|, \text{ para todo } (x, y) \in \mathbb{R}\}$, temos:

$$|y_n(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(s, y_{n-1}(s)) ds \right| \leq \int_{x_0}^x |f(s, y_{n-1}(s))| ds \leq \int_{x_0}^x M ds = M(x - x_0), \quad (3.1)$$

para todo $x_0 \leq x \leq x_0 + a$.

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned} y_n(x) &= y_0 + [y_1(x) - y_0 + y_2(x) - y_1(x) + \dots + y_n(x) - y_{n-1}(x)] \\ y_n(x) &= y_0 + \sum_{k=1}^n (y_k(x) - y_{k-1}(x)). \end{aligned}$$

O objetivo agora será mostrar a convergência de y_n . Para isso, será necessário mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} (y_n(x) - y_{n-1}(x))$ converge.

De fato, seja:

$$\begin{aligned} |y_n(x) - y_{n-1}(x)| &= \left| \int_{x_0}^x (f(s, y_{n-1}(s)) - f(s, y_{n-2}(s))) ds \right| \\ &\leq \int_{x_0}^x |(f(s, y_{n-1}(s)) - f(s, y_{n-2}(s)))| ds \\ &\leq k \int_{x_0}^x |y_{n-1}(s) - y_{n-2}(s)| ds. \end{aligned}$$

Utilizando (3.1), temos para $n = 2$

$$|y_2(x) - y_1(x)| \leq k \int_{x_0}^x |y_1(s) - y_0| ds \leq Mk \int_{x_0}^x (s - x_0) ds = \frac{Mk}{2} (x - x_0)^2.$$

Para $n = 3$:

$$|y_3(x) - y_2(x)| \leq k \int_{x_0}^x |y_2(s) - y_1(s)| ds \leq Mk^2 \int_{x_0}^x \frac{(s - x_0)^2}{2} ds = \frac{Mk^2(x - x_0)^3}{3 \cdot 2}.$$

E assim por diante. Por recorrência, obtemos:

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq \frac{Mk^{n-1}(x - x_0)^n}{n!} \leq \frac{Mk^{n-1}(\bar{a})^n}{n!}.$$

Somando todos os termos, obtemos:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |y_n(x) - y_{n-1}(x)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Mk^{n-1}(x - x_0)^n}{n!} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Mk^{n-1}\bar{a}^n}{n!} = \frac{M}{k} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(k\bar{a})^n}{n!} \right) = \frac{M}{k} (e^{k\bar{a}-1}) < \infty. \end{aligned}$$

Portanto, (y_n) é convergente.

Para finalizar a demonstração da existência de uma solução para o P.V.I. e partir para a unicidade, utilizaremos o Critério M. de Weierstrass de convergência de séries, que será enunciado, para mostrar que (y_n) converge uniformemente à f .

Teorema 3.3 (Critério M. de Weierstrass). *Se $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ é uma série numérica convergente, e se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C$ satisfaz à condição $\|f_n\| \leq M_n$ para todo n , então $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ convergirá uniformemente e absolutamente, ou seja, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergirá uniformemente para uma função contínua.*

Para demonstração, ver [Guidorizzi \(2001, p. 169\)](#).

Seja $y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$. Pelas iteradas de Picard, temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = y_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(s, y_{n-1}(s)) ds.$$

então,

$$y(x) = y_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(s, y_{n-1}(s)) ds.$$

Como

$$|f(x, y(x)) - f(x, y_{n-1}(x))| \leq k|y(x) - y_{n-1}(x)| < k\varepsilon.$$

converge uniformemente, pois $y_n \rightarrow y$, concluímos pelo critério M. de Weierstrass que $f(x, y_n(x)) \rightarrow f(x, y(x))$ converge uniformemente, provando então que existem soluções para o P.V.I.

Garantida a existência da solução, o questionamento levantado agora é se esta é **única**. Neste sentido, serão estudadas as condições para a unicidade da solução.

Afirmção. Sejam $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, com Ω aberto, $(x_0, y_0) \in \Omega$, f e $\frac{\partial f}{\partial y}$ contínuas em Ω . Considere $y_1 = y_1(x), x \in I$ e $y_2 = y_2(x), x \in J$, $x_0 \in I \cap J$ soluções de $y' = f(x, y)$ tais que $y_1(x_0) = y_2(x_0) = y_0$. Então, existe $\delta > 0$ tal que $y_1(x) = y_2(x)$, para todo $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

Demonstração. Seja R o retângulo definido anteriormente. Sabemos que y_1 e y_2 são contínuas em R , já que $R \subset \Omega$. Assim, temos que existe $d > 0$ com $d \leq a$ tal que $(x, y_1(x)) \in R$, para todo $s \in [x_0 - d, x_0 + d]$ $(x, y_2(x)) \in R$. Pelo Lema 3.2, seja $\delta > 0$ tal que $\delta \leq d$ e $k\delta < 1$. Pelas iteradas de Picard, teremos

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_1(s)) ds.$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_2(s)) ds.$$

para todo $s \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Sabendo que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são contínuas no retângulo R , e utilizando novamente o Lema 3.2 teremos:

$$\begin{aligned} |y_1(x) - y_2(x)| &= \left| \int_{x_0}^x f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s)) ds \right| \\ &\leq \int_{x_0}^x |f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))| ds \\ &\leq k \int_{x_0}^x |y_1(s) - y_2(s)| ds. \end{aligned}$$

Seja $M = \max\{|y_1(x) - y_2(x)|, x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]\}$, então:

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leq kM|x - x_0| \leq kM\delta.$$

$M \leq K\delta M$, pois M é o máximo de $|y_1(x) - y_2(x)|$, ou seja, $|y_1(x) - y_2(x)| \leq K\delta M \leq M$. Portanto, $M \leq K\delta M$ se $M \neq 0$, então $1 \leq K\delta$ o que contradiz a definição de δ , portanto $M = 0$, o que afirma que $y_1(x) = y_2(x)$, para todo $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Comprovando então, a **unicidade** da solução do P.V.I. ■

Passaremos a seguir ao estudo de modelos populacionais, que com o passar dos séculos vêm se tornando cada vez mais refinado. Estudaremos no próximo capítulo três deles, são eles os Modelos de Malthus, Verhulst e Gompertz.

4 MODELOS DE DINÂMICA POPULACIONAL

Já é conhecido que partindo de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem e de uma condição inicial, conseguimos encontrar sua solução única. Agora, nosso foco será direcionado à familiarização de três modelos de dinâmicas populacionais, que têm como intuito entender o comportamento de populações biológicas.

Serão estudados três modelos, sendo o primeiro o de Malthus, conforme descrito por Magalhães e Leite (2012), o primeiro matemático a estimar o crescimento da população mundial, não considerando fatores limitantes de crescimento, e trazendo uma abordagem de que o crescimento da população é proporcional à população em cada instante. Depois trataremos do modelo de Verhulst, que “supõe que uma população deverá crescer até um limite máximo sustentável, devido a inibições naturais em seu crescimento, isto é, ela tende a se estabilizar” (MAGALHÃES; LEITE, 2012, p. 353)., e finalizando com o modelo de Gompertz, um pouco mais refinado, que considera que “a taxa de crescimento é grande no início do processo, mudando rapidamente para um crescimento mais lento” (MAGALHÃES; LEITE, 2012, p. 352).

Esses três modelos populacionais são descritos por equações diferenciais de primeira ordem, tratando da variação de apenas uma população.

4.1 O MODELO DE MALTHUS

Thomas Robert Malthus (1766-1834) era um economista e filósofo inglês, formado pela Universidade de Cambridge, que ficou conhecido por ser o primeiro a estimar como se comportava o crescimento de populações. Foi responsável pelo “primeiro grande avanço na modelagem de populações [...] onde usou um modelo que estabelecia que o crescimento populacional se daria segundo uma progressão geométrica.” (TEIXEIRA, 2012, p. 28). Seu modelo traz a ideia de que as populações crescem de maneira exponencial, em determinados intervalos de tempo.

Como mencionado por Magalhães e Leite (2012), Malthus acreditava que o crescimento populacional era dado por uma progressão geométrica, enquanto os meios de sobrevivência por uma progressão aritmética. O modelo foi uma das primeiras contribuições que serviram de base para os outros modelos que seriam desenvolvidos futuramente.

O trabalho de Malthus abriu portas para os demais modelos que serão tratados neste capítulo. Teixeira (2012) menciona que não haviam dados suficientes para comprovar as ideias de Malthus, porém ele percebeu alguns comportamentos na população dos EUA que possibilitaram os trabalhos que foram realizados posteriormente.

Enunciando matematicamente seu modelo populacional, Malthus considerou que dada uma população $P(t)$ de habitantes no momento t , e $P(0)$ a mesma população no momento $t = 0$, o número de nascimentos e mortes serão proporcionais ao tamanho da

população dentro de um intervalo de tempo, sendo α a taxa de nascimento dentro da população, e β a de mortalidade.

Considerando que seja conhecida a população inicial $P(0)$ definimos um problema de valor inicial, cuja solução será a equação que descreverá o comportamento da população em diversos períodos, como segue

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = \alpha P(t) - \beta P(t) \\ P(0) = P_0. \end{cases}$$

Notamos que, fazendo apenas um ajuste na equação $\alpha P(t) - \beta P(t)$, obtemos $(\alpha - \beta)P(t)$. Fazendo uma substituição de $\alpha - \beta$ por λ , obteremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = \lambda P(t) \\ P(0) = P_0. \end{cases}$$

que é exatamente o modelo de crescimento exponencial encontrado no capítulo 11 de [Fulford, Forrester e Jones \(1997\)](#), cuja solução poderá ser realizada de maneira semelhante à de equações homogêneas, como será descrito a seguir.

Reescreveremos a equação diferencial $\frac{dP}{dt} = \lambda P(t)$ na forma:

$$\frac{1}{P(t)} \frac{dP}{dt} = \lambda.$$

Fazendo a mudança da variável t para x , e integrando ambos os lados da equação em relação à variável x de 0 à t , obtemos:

$$\int_0^t \frac{1}{P(x)} \frac{dP}{dx} dx = \int_0^t \lambda dx.$$

que resultará em:

$$\ln |P(t)| - \ln |P_0| = \lambda t \Rightarrow \ln \frac{P(t)}{P_0} = \lambda t \Rightarrow P(t) = P_0 e^{\lambda t}.$$

Que é a solução do P.V.I..

Retornando então ao parâmetro λ que no início do problema havia sido utilizada como substituição para $\alpha - \beta$, a equação de Malthus que descreverá o comportamento da população será dada por:

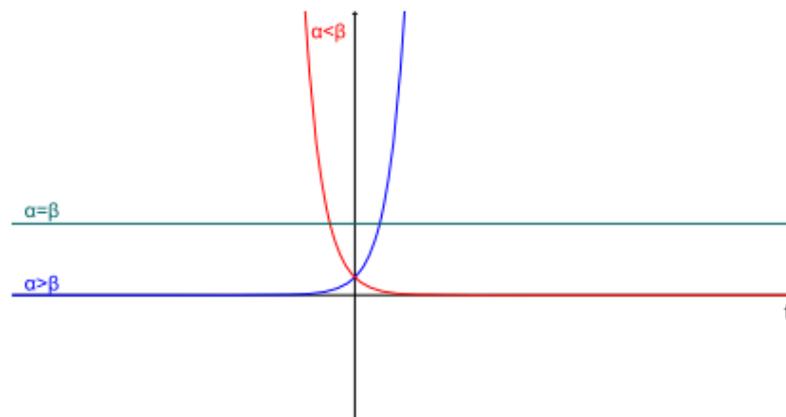
$$P(t) = P_0 e^{(\alpha - \beta)t}.$$

Os parâmetros da equação são as taxas de crescimento α e β , que podem determinar como a população se comportará no momento t estipulado. É sabido que, há três comportamentos possíveis para esse modelo, sendo eles

- Se o resultado da soma $\alpha - \beta$ for igual a zero, então a população não crescerá nem decrescerá;
- Se o resultado da soma $\alpha - \beta$ for positivo, então a população crescerá exponencialmente com o tempo;
- Se o resultado da soma $\alpha - \beta$ for negativo, então a população decrescerá exponencialmente com o tempo.

Graficamente, o modelo de Malthus se comporta da seguinte maneira:

Figura 4.1 – Comportamento do modelo de Malthus



Fonte: (TEIXEIRA, 2012, p. 29).

O modelo é questionável, pois, caso o crescimento da população seja o do caso (ii), haverá um momento em que será insustentável o número de habitantes em um determinado espaço, enquanto caso o crescimento seja o do caso (iii), haverá um momento em que a população será negativa, e conseqüentemente extinta.

Porém, como (TEIXEIRA, 2012) ressalta, o modelo de Malthus é muito simples, e não leva em consideração diversas variáveis, que serão tratadas nos próximos modelos.

4.2 O MODELO DE VERHULST

Pierre-François Verhulst (1804-1849) era um matemático belga, doutor pela Universidade de Gante, responsável por desenvolver um modelo que considerou pela primeira

vez uma variação da taxa de crescimento populacional. Conforme mencionado por [Teixeira \(2012\)](#), em 1835, seu compatriota Adolphe Quetelet sugeriu que, ao contrário do que Malthus afirmou, à partir de um determinado momento as populações parariam de crescer segundo o modelo geométrico, devido à determinados obstáculos que formariam uma “resistência”, com base em uma analogia mecânica.

A afirmação de Quetelet não trazia consigo nenhum embasamento real, porém se tornou uma inspiração para que Verhulst desenvolvesse seu modelo, supondo que uma população cresce até determinado ponto, e estabiliza logo em seguida, se tornando assim sustentável.

Enunciando matematicamente seu modelo populacional, Verhulst considerou que dada uma população $P(t)$ no momento t , estabelecido um nível de saturação populacional K e considerando a taxa r de crescimento ambos constantes, o comportamento de uma população pode ser dado pela equação:

$$\frac{dP}{dt} = rP \left[1 - \frac{P}{K} \right]. \quad (4.1)$$

Quanto menor for a população em relação ao nível de saturação K , teremos que $\frac{dP}{dt}$ se aproximará de rP , assemelhando-se desta forma ao modelo de Malthus, cuja solução exponencial será dada por:

$$P(t) \cong P(0)e^{rt}.$$

Conforme a taxa $P(t)$ vai se aproximando do parâmetro K , a taxa de crescimento populacional vai diminuindo, e a população tende a se estabilizar após o crescimento exponencial.

Vamos encontrar a solução do modelo de Verhulst. Inicialmente, temos que:

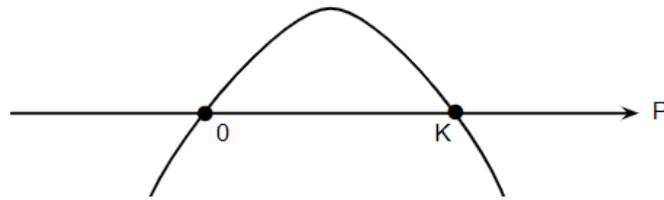
$$\frac{dP}{dt} = rP \left[1 - \frac{P}{K} \right]; K = 0.$$

Segue que:

- a) $\frac{dP}{dt} = 0$ se, e somente se, $P \left[1 - \frac{P}{K} \right] = 0$, ou seja, $P(t) = 0$ ou $P(t) = K$, sendo ambos valores estacionários ou de equilíbrio;
- b) Ainda, $\frac{dP}{dt} > 0$ se, e somente se $rP \left[1 - \frac{P}{K} \right] = \frac{r}{K}P(K - P) > 0$, o que nos diz que, $P(K - P) > 0$, $r > 0$ e $K > 0$.

Sendo assim, teremos o seguinte comportamento:

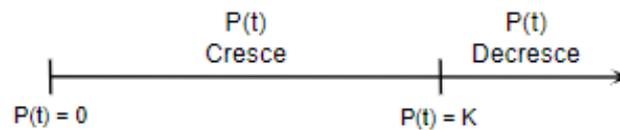
Figura 4.2 – Índice de Saturação Populacional



Fonte: Elaborado pela autora.

Ou seja, $\frac{dP}{dt} > 0$ se, e somente se a população $P(t)$ estiver entre 0 e K , o que indica que no intervalo $0 < P(t) < K$, $P(t)$ será crescente. Analogamente, obtemos que se $\frac{dP}{dt} < 0$, $P(t)$ será maior do que a taxa K , indicando nesse caso que $P(t)$ será decrescente. Resumindo:

Figura 4.3 – Índice de Saturação Populacional



Fonte: Elaborado pela autora.

Agora, vamos resolver o P.V.I.:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right) \\ P(0) = 0. \end{cases}$$

Primeiro, vamos escrever o modelo em função de $\frac{r}{K}$:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{r}{K}P(K - P) \Rightarrow \frac{r}{K} = \frac{1}{P(K - P)} \frac{dP}{dt}.$$

Substituindo a variável t por x e integrando em relação à x de 0 a t , obtemos:

$$\int_0^t \frac{r}{K} = \int_0^t \frac{1}{P(K - P)} \frac{dP}{dx} dx.$$

Utilizando frações parciais, vamos encontrar os parâmetros A e B para escrever $\frac{1}{P(K-P)}$ na forma $\frac{A}{P} + \frac{B}{K-P}$. Temos então:

$$\frac{1}{P(K-P)} = \frac{A}{P} + \frac{B}{K-P} = \frac{A(K-P) + BP}{P(K-P)} = \frac{AK + (B-A)P}{P(K-P)}.$$

ou seja,

$$1 = AK + (B-A)P.$$

Sabemos que $1 = 1 + 0P$. Igualando ambas as equações, encontraremos os valores de A e B que satisfazem às frações parciais, como segue:

$$1 + 0P = AK + (B-A)P \Rightarrow \begin{cases} 1 = AK \\ 0 = B - A \end{cases}.$$

Ou seja,

$$\text{a) } A = \frac{1}{K};$$

$$\text{b) } B = A \Rightarrow B = \frac{1}{K}.$$

Portanto,

$$\frac{1}{P(K-P)} = \frac{1}{KP} + \frac{1}{K(K-P)}.$$

Voltando então à integral

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{r}{K} dx &= \int_0^t \left[\frac{1}{KP} + \frac{1}{K(K-P)} \right] \frac{dP}{dx} dx \\ \int_0^t \frac{r}{K} dx &= \int_0^t \frac{1}{KP} \frac{dP}{dx} dx + \int_0^t \frac{1}{K(K-P)} \frac{dP}{dx} dx \\ \frac{r}{K} t &= \ln |KP| - \ln |KP_0| - \ln |K(K-P)| + \ln |K(K-P_0)| \\ \frac{r}{K} t &= \ln \left| \frac{K^2 P (K - P_0)}{K^2 P_0 (K - P)} \right| \\ e^{\frac{r}{K} t} &= \left| \frac{P(K - P_0)}{P_0(K - P)} \right|. \end{aligned}$$

Aqui, há alguns pontos que devem ser levados em consideração:

- a) $P(t)$ deverá ser maior do que zero para todo $t \in \mathbb{R}$, já que não faz sentido uma população negativa;

- b) Se P_0 for menor do que K , então $\frac{dP}{dt}$ será positiva, então $P(t)$ crescerá. Supondo então que $P(t)$ seja menor do que K , segue que:

$$\left| \frac{P(K - P_0)}{P_0(K - P)} \right| = e^{\frac{r}{K}t} \Rightarrow \frac{P}{K - P} = \frac{P_0}{K - P_0} e^{\frac{r}{K}t}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{P_0 K}{K - P_0} e^{\frac{r}{K}t} - \frac{P_0}{K - P_0} e^{\frac{r}{K}t} P \\ &= \frac{\frac{P_0 K}{K - P_0} e^{\frac{r}{K}t}}{1 + \frac{P_0}{K - P_0} e^{\frac{r}{K}t}} \\ &= \frac{\frac{P_0 K e^{\frac{r}{K}t}}{K - P_0}}{\frac{K - P_0 + P_0 e^{\frac{r}{K}t}}{K - P_0}} \\ &= \frac{K P_0 e^{\frac{r}{K}t}}{K + P_0 (e^{\frac{r}{K}t} - 1)}. \end{aligned}$$

Resta verificar então se $P(t)$ não ultrapassa o seu limite K quando $t \rightarrow \infty$, como segue:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{K P_0 e^{\frac{r}{K}t}}{K + P_0 (e^{\frac{r}{K}t} - 1)}.$$

Dividindo ambos por $e^{\frac{r}{K}t}$, teremos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{K P_0}{\frac{K}{e^{\frac{r}{K}t}} + P_0 - \frac{P_0}{e^{\frac{r}{K}t}}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{K P_0}{P_0} = K.$$

Portanto, $P(t)$ se aproximará de K quando $t \rightarrow \infty$, ou seja, o valor K é uma assíntota horizontal.

- c) Se P_0 for maior do que K , então $\frac{dP}{dt}$ será negativo, então $P(t)$ decrescerá, ou seja:

$$\left| \frac{P(K - P_0)}{P_0(K - P)} \right| = e^{\frac{r}{K}t} \Rightarrow \frac{P(K - P_0)}{P_0(K - P)} = e^{\frac{r}{K}t}.$$

Conforme visto anteriormente: $P(t) = \frac{K P_0 e^{\frac{r}{K}t}}{K + P_0 (e^{\frac{r}{K}t} - 1)}$, ainda, $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = K$, ou seja, $P(t)$ terá o valor K como assíntota horizontal.

d) O ponto de inflexão de $P(t)$ será dado por:

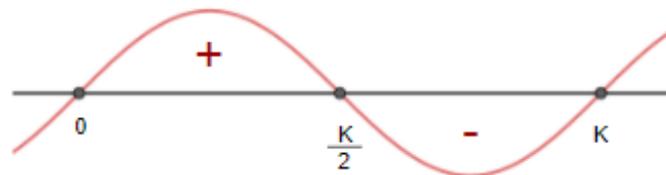
$$\begin{aligned}\frac{d^2P}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dP}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(rP \left(1 - \frac{P}{K} \right) \right) \\ &= \left(1 - \frac{P}{K} \right) r \frac{dP}{dt} + rP \left(-\frac{1}{K} \frac{dP}{dt} \right) \\ &= r \left[1 - \frac{P}{K} - \frac{P}{K} \right] \frac{dP}{dt} = r \left[1 - \frac{2P}{K} \right] \frac{dP}{dt}.\end{aligned}$$

Logo, $\frac{d^2P}{dt^2}$ será igual a 0 se, e somente se $\frac{dP}{dt}$ for igual a zero, ou $1 - \frac{2P}{K}$ será igual a zero se, e somente se $P = \frac{K}{2}$. Portanto, $P = \frac{K}{2}$ será um ponto de inflexão, e, ainda:

$$\begin{aligned}\frac{d^2P}{dt^2} &= r \left(1 - \frac{2P}{K} \right) \frac{dP}{dt} \\ &= r \left(1 - \frac{2P}{K} \right) rP \left(1 - \frac{P}{K} \right) - r^2P \left(1 - \frac{2P}{K} \right) \left(1 - \frac{P}{K} \right).\end{aligned}$$

Que é um polinômio de terceiro grau em P , cujas raízes são $P = 0$, $P = \frac{K}{2}$ e $P = K$, como segue no gráfico:

Figura 4.4 – Pontos de Equilíbrio da População

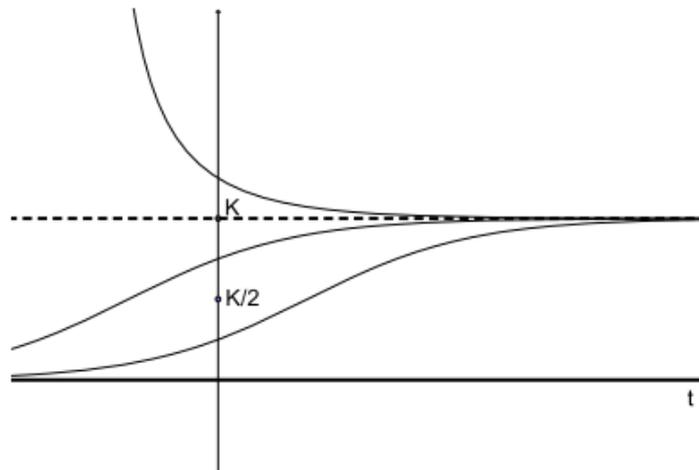


Fonte: Elaborado pela autora.

Portanto, $\frac{d^2P}{dt^2}$ será positivo se, e somente se, $0 < P < \frac{K}{2}$ ou se $P > K$, enquanto $\frac{d^2P}{dt^2}$ será negativa somente se $\frac{K}{2} < P < K$.

Graficamente, o Modelo de Verhulst poderá se comportar da seguinte maneira:

Figura 4.5 – Comportamento do Modelo de Verhulst



Fonte: (TEIXEIRA, 2012, p. 38).

Os ajustes de Verhulst para o modelo populacional foram considerados razoáveis. Ainda, Verhulst notou que seu modelo seria eficiente apenas para a variação da população em décadas. Em um período maior ele começa a apresentar alguns erros, que foram refinados com modelos que foram desenvolvidos posteriormente.

4.3 O MODELO DE GOMPERTZ

Benjamin Gompertz (1779-1865) era um matemático britânico e atuário judeu, vindo de uma família holandesa. Nascido na Inglaterra, “tornou-se autodidata e aprendeu Matemática através da leitura de autores como Newton e Maclaurin” (TEIXEIRA, 2012, p. 42-43).

Sua contribuição para os modelos populacionais foi o desenvolvimento da Lei de Gompertz, que considerava um aumento da taxa de mortalidade em progressão geométrica, conforme o aumento da população em si acontecia.

Dada uma taxa de crescimento relativo λ , uma população P , e P_∞ o limite finito desta, seu modelo era descrito pela seguinte equação:

$$\frac{dP}{dt} = \lambda P \ln \left(\frac{P_\infty}{P} \right).$$

Que, conforme mencionado por Magalhães e Leite (2012), possui os mesmos pontos de equilíbrio do modelo de Verhulst, bem como o comportamento assintótico da curva obtida por ele.

Podemos verificar as propriedades referentes ao modelo de Gompertz, tratadas em

Teixeira (2012) e citadas à seguir.

Considerando λ a taxa de crescimento relativo de uma população e P_∞ o limite finito dela, temos que:

$$\frac{dP}{dt} = \lambda P \ln \left(\frac{P_\infty}{P} \right) = \lambda P [\ln P_\infty - \ln P] = P [\lambda \ln P_\infty - \lambda \ln P].$$

Denotando $\alpha = \lambda \ln P_\infty$, teremos que $\frac{dP}{dt} = P[\alpha - \lambda \ln P]$, com $P(0) = P_0$. Algumas considerações podem ser feitas, sendo elas:

a) $P(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, caso contrário, $\ln P$ não estaria definido. De fato, seja:

$$\frac{dP}{dt} = P[\alpha - \lambda \ln P] \Rightarrow \frac{1}{P} \frac{dP}{dt} + \lambda \ln P = \alpha.$$

Substituindo $y = \ln P$, temos:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{P} \frac{dP}{dt}.$$

Logo,

$$\frac{dy}{dt} + \lambda y = \alpha.$$

Considere o fator integrante $e^{\int \lambda dt} = e^{\lambda t}$. Multiplicando ambos os membros por $e^{\lambda t}$, obtemos:

$$e^{\lambda t} \frac{dy}{dt} + y \lambda e^{\lambda t} = \alpha e^{\lambda t} \Rightarrow \frac{d}{dt} [e^{\lambda t} y] = \alpha e^{\lambda t}.$$

Integrando então ambos os membros em relação à t , temos:

$$\begin{aligned} \int \frac{d}{dt} [e^{\lambda t} y] dt &= \int \alpha e^{\lambda t} dt \\ e^{\lambda t} y + c_1 &= \frac{\alpha}{\lambda} e^{\lambda t} + c_2 \\ y(t) &= e^{-\lambda t} \left(\frac{\alpha}{\lambda} e^{\lambda t} + C \right). \end{aligned}$$

Sendo $C = c_2 - c_1$ constante. Ainda:

$$y = \ln P = \frac{\alpha}{\lambda} + C e^{-\lambda t} \Rightarrow P(t) = e^{\frac{\alpha}{\lambda} + C e^{-\lambda t}}.$$

Como $\alpha = \lambda \ln P_\infty$, segue então que $\frac{\alpha}{\lambda} = \ln P_\infty$, assim:

$$P(t) = e^{\frac{\alpha}{\lambda}} e^{C e^{-\lambda t}} = e^{\ln P_\infty} e^{C e^{-\lambda t}} \Rightarrow P(t) = P_\infty e^{C e^{-\lambda t}}.$$

Impondo então a condição inicial $P(0) = P_0 = P_\infty e^C$,

$$e^C = \frac{P_0}{P_\infty} \Rightarrow C = \ln \left(\frac{P_0}{P_\infty} \right).$$

De onde concluímos que a solução será dada por $P(t) = P_\infty [e^C]^{e^{-\lambda t}}$, ou seja:

$$P(t) = P_\infty \left[\frac{P_0}{P_\infty} \right]^{e^{-\lambda t}}.$$

b) A assíntota horizontal será dada por:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_\infty \left[\frac{P_0}{P_\infty} \right]^{e^{-\lambda t}} = P_\infty.$$

c) Os pontos de equilíbrios serão dados da seguinte forma:

$$\frac{dP}{dt} = \lambda P \ln \left(\frac{P_\infty}{P} \right) = 0.$$

se, e somente se:

$$P = 0 \text{ ou } \ln \left(\frac{P_\infty}{P} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{P_\infty}{P} = 1 \Leftrightarrow P = P_\infty.$$

Portanto, $P = 0$ e $P = P_\infty$ são pontos de equilíbrios.

d) Sendo $P(t) \geq 0$, se $\lambda < 0$, então:

- $\frac{dP}{dt} > 0$ se, e somente se $P > 0$ e $\ln \left(\frac{P_\infty}{P} \right) < 0$, ou seja, se, e somente se $P > P_\infty$, indicando que $P = P(t)$ será crescente;
- $\frac{dP}{dt} < 0$ se, e somente se $P > 0$ e $\ln \left(\frac{P_\infty}{P} \right) > 0$, ou seja, se, e somente se $P < P_\infty$, indicando que $P = P(t)$ será decrescente.

Se $\lambda > 0$, então:

- $\frac{dP}{dt} > 0$ se, e somente se $P > 0$ e $\ln \left(\frac{P_\infty}{P} \right) > 0$, ou seja, se, e somente se $P < P_\infty$, indicando que $P = P(t)$ será crescente;
- $\frac{dP}{dt} < 0$ se, e somente se $P > 0$ e $\ln \left(\frac{P_\infty}{P} \right) < 0$, ou seja, se, e somente se $P > P_\infty$, indicando que $P = P(t)$ será decrescente.

e) Ao derivar:

$$\frac{dP}{dt} = \lambda P \ln \left(\frac{P_\infty}{P} \right) = \lambda P \ln P_\infty - \lambda P \ln P.$$

teremos:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 P}{dt^2} &= \frac{d}{dt} [\lambda P \ln P_\infty - \lambda P \ln P] \\ &= \lambda \ln P_\infty \frac{dP}{dt} - \lambda \ln P \frac{dP}{dt} - \lambda \frac{dP}{dt} \\ &= (\lambda \ln P_\infty - \lambda \ln P - \lambda) \frac{dP}{dt} \\ &= \lambda^2 P \ln \left(\frac{P_\infty}{P} \right) \left[\ln \left(\frac{P_\infty}{P} \right) - 1 \right]. \end{aligned}$$

Temos então que $\frac{d^2 P}{dt^2} = 0$ se, e somente se:

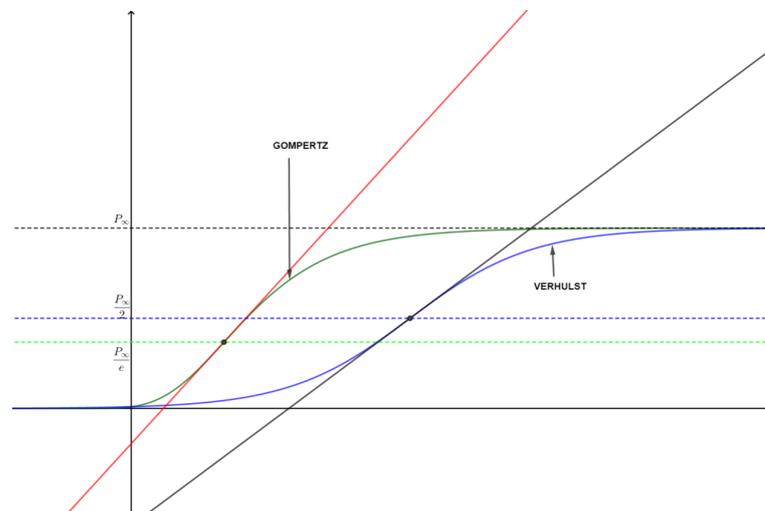
- a) $P = 0$;
- b) $P = P_\infty$;
- c) $\ln \left(\frac{P_\infty}{P} \right) = 1$, ou seja,

$$\ln P_\infty - \ln P = 1 \Rightarrow \ln P = \ln P_\infty - 1 \Rightarrow \ln P = \ln P_\infty - \ln e \Rightarrow \ln P = \ln \left(\frac{P_\infty}{e} \right).$$

Portanto, $P = \frac{P_\infty}{e}$ é um ponto de máximo para a derivada de P , ou seja, será um ponto de inflexão.

Verificando graficamente, podemos visualizar como o modelos de Gompertz se comporta, comparando também com o modelo de Verhulst, temos:

Figura 4.6 – Comportamento dos Modelos de Verhulst e Gompertz



Fonte: Elaborado pela autora.

Conhecidos agora os Modelos de Dinâmica Populacional de Malthus, Verhulst e Gompertz, partiremos para a compreensão dos ajustes de curva que podem ser realizados para que as funções encontradas nestes modelos se aproximem de maneira mais eficaz, apresentando um erro mínimo.

5 MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

O Método dos Mínimos Quadrados é utilizado para ajustar parâmetros e funções a partir de dados experimentais e minimizar os erros. Neste capítulo, vamos estudar a forma como esse ajuste é realizado.

5.1 AJUSTE DE FUNÇÕES LINEARES

Para introduzir o estudo sobre o Método dos Mínimos Quadrados, iniciaremos com o ajuste dos dados de uma função afim, ou seja, no formato $f(x) = ax + b$. Esse método, é utilizado em problemas que descrevem fenômenos ambientais, físicos, econômicos, entre outros cujo comportamento é linear. Para determinar os parâmetros a e b que melhor se ajustem aos dados experimentais, uma vez que se comportam muito próximos de uma reta.

Consideremos um conjunto de dados para um determinado fenômeno que se comporta graficamente próximo a uma reta. Isso pode ser representado por uma função linear do tipo:

$$g(x) = ax + b. \quad (5.1)$$

Sendo a e b os parâmetros que devem ser ajustados de modo a minimizar o erro entre os valores experimentais $f(x_i)$ e os valores ajustados $g(x_i)$.

Para fazer um ajuste linear utilizando o Método dos Mínimos Quadrados, vamos encontrar o erro dado pelo mínimo da soma dos quadrados dos erros cometidos em cada ponto. Assim, fixados a e b , no conjunto de m pontos $((x_1, f(x_1)), \dots, (x_m, f(x_m)))$, o erro será:

$$E(a, b) = \min \sum_{i=1}^m e(x_i)^2 = \sum_{i=1}^m (f(x_i) - g(x_i))^2 = \sum_{i=1}^m (f(x_i) - ax_i - b)^2. \quad (5.2)$$

Sendo a e b os parâmetros que deverão ser ajustados de maneira que $E(a, b)$ seja mínimo. Para isto, verificamos que $E(a, b)$ deve ser interpretada como uma função de duas variáveis. Sabemos do Cálculo Diferencial e Integral para várias variáveis que a primeira condição exigida é que as derivadas parciais em relação às variáveis a e b devem se anular, ou seja:

$$\frac{\partial E}{\partial a} = \frac{\partial E}{\partial b} = 0.$$

Calculando então as derivadas parciais de $E(a, b)$, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial a}(a, b) &= 2 \sum_{i=1}^m [f(x_i) - ax_i - b](-x_i) \\ &= -2 \sum_{i=1}^m x_i f(x_i) + 2a \sum_{i=1}^m x_i^2 + 2b \sum_{i=1}^m x_i.\end{aligned}$$

Impondo que $\frac{\partial E}{\partial a} = 0$, segue que:

$$a \sum_{i=1}^m x_i^2 + b \sum_{i=1}^m x_i = \sum_{i=1}^m x_i f(x_i). \quad (5.3)$$

De maneira análoga, para a variável b obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial b}(a, b) &= 2 \sum_{i=1}^m [f(x_i) - ax_i - b](-1) \\ &= -2 \sum_{i=1}^m f(x_i) + 2a \sum_{i=1}^m x_i + 2b \sum_{i=1}^m 1.\end{aligned}$$

Impondo que $\frac{\partial E}{\partial b} = 0$, segue que:

$$mb + a \sum_{i=1}^m x_i = \sum_{i=1}^m f(x_i). \quad (5.4)$$

As equações (5.3) e (5.4) formam um sistema linear de duas equações à duas incógnitas a e b :

$$\begin{cases} mb + a \sum_{i=1}^m x_i &= \sum_{i=1}^m f(x_i) \\ b \sum_{i=1}^m x_i + a \sum_{i=1}^m x_i^2 &= \sum_{i=1}^m x_i f(x_i). \end{cases} \quad (5.5)$$

Resolvendo pelo método de Cramer:

$$b = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^m f(x_i) & \sum_{i=1}^m x_i \\ \sum_{i=1}^m x_i f(x_i) & \sum_{i=1}^m x_i^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m & \sum_{i=1}^m x_i \\ \sum_{i=1}^m x_i & \sum_{i=1}^m x_i^2 \end{vmatrix}} = \frac{\sum_{i=1}^m f(x_i) \sum_{i=1}^m x_i^2 - \sum_{i=1}^m x_i f(x_i) \sum_{i=1}^m x_i}{m \sum_{i=1}^m x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^m x_i \right)^2}.$$

e

$$a = \frac{\begin{vmatrix} m & \sum_{i=1}^m x_i \\ \sum_{i=1}^m x_i & \sum_{i=1}^m x_i f(x_i) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m & \sum_{i=1}^m x_i \\ \sum_{i=1}^m x_i & \sum_{i=1}^m x_i^2 \end{vmatrix}} = \frac{m \sum_{i=1}^m x_i f(x_i) - \left(\sum_{i=1}^m x_i \right)^2}{m \sum_{i=1}^m x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^m x_i \right)^2}.$$

Fornecendo assim, os parâmetros a e b que melhor ajustam a função $g(x) = ax + b$ aos dados experimentais $(x_i, f(x_i))$.

5.2 AJUSTE DE FUNÇÕES NÃO LINEARES

Para funções não lineares, existem diversas transformações que se adaptam melhor a cada fenômeno. Serão estudados à seguir os ajustes exponencial e logístico.

5.2.1 Ajuste Exponencial

Para muitos modelos matemáticos, em especial os populacionais, são comuns comportamentos que se assemelham à funções exponenciais do tipo $g(x) = be^{ax}$, como vimos no capítulo anterior. Com $b > 0$ e a um número real. ($a > 0$ para crescimento e $a < 0$ para decrescimento).

O ajuste que pode ser realizado para esses modelos envolve uma transformação da $g(x)$ em uma função z , como segue:

$$z = \ln(g(x)) = \ln(be^{ax}) = ax + \ln(b).$$

que corresponde ao ajuste linear $z = ax + B$, onde $B = \ln(b)$. Assim, teremos um sistema linear análogo ao sistema (5.5), como segue:

$$\begin{cases} mb + a \sum_{i=1}^m x_i = \sum_{i=1}^m \ln(f(x_i)) \\ b \sum_{i=1}^m x_i + a \sum_{i=1}^m x_i^2 = \sum_{i=1}^m x_i \ln(f(x_i)). \end{cases}$$

Cuja solução será dada por:

$$B = \frac{\sum_{i=1}^m \ln(f(x_i)) \sum_{i=1}^m x_i^2 - \sum_{i=1}^m x_i \ln(f(x_i)) \sum_{i=1}^m x_i}{m \sum_{i=1}^m x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^m x_i \right)^2}.$$

e

$$a = \frac{m \sum_{i=1}^m x_i \ln(f(x_i)) - \left(\sum_{i=1}^m x_i \right)^2}{m \sum_{i=1}^m x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^m x_i \right)^2}.$$

Lembrando que, como $B = \ln(b)$, então $b = e^B$, teremos que o ajuste será dado por $g(x) = be^{ax}$.

5.2.2 Ajuste Logístico

O ajuste logístico é o mais utilizado nos modelos de Dinâmica Populacional, que foram abordados no capítulo anterior. A curva para esse ajuste é dada por:

$$g(x) = \frac{f_{max}}{1 + be^{-\lambda x}}.$$

Inicialmente, sabemos que para o modelo de Verhulst a função é dada por:

$$P(t) = \frac{kP_0 e^{\frac{r}{k}t}}{k + P_0 (e^{\frac{r}{k}t} - 1)} = \frac{kP_0 e^{\frac{r}{k}t}}{k + P_0 e^{\frac{r}{k}t} - P_0}.$$

Se dividirmos numerador e denominador por $P_0 e^{\frac{r}{k}t}$, teremos:

$$P(t) = \frac{k}{1 + \left(\frac{k-P_0}{P_0} \right) e^{-\frac{r}{k}t}}.$$

Desta forma, a curva para o ajuste por mínimos quadrados será dada por:

$$g(x) = \frac{f_{max}}{1 + be^{-\lambda x}}.$$

Sendo f_{max} o valor máximo a ser atingido (assíntota horizontal) e inflexão ocorrendo no ponto $x = \frac{\ln b}{\lambda}$ com $g\left(\frac{\ln b}{\lambda}\right) = \frac{f_{max}}{2}$.

O ajuste por mínimos quadrados para o caso logístico não é possível. O que faremos

então é uma transformação para obter um ajuste linear. Neste sentido, consideramos $g(x) \approx f(x)$. Assim:

$$\frac{f_{max}}{1 + be^{-\lambda x}} \approx f(x) \Rightarrow \frac{f_{max}}{f(x)} \approx 1 + be^{-\lambda x} \Rightarrow \frac{f_{max}}{f(x)} - 1 \approx be^{-\lambda x}.$$

Aplicando então o logaritmo em ambos os termos, chegaremos à equação linear:

$$\ln \left[\frac{f_{max}}{f(x)} - 1 \right] = \ln b - \lambda x.$$

Se denotarmos por $G(x) = \ln \left[\frac{f_{max}}{f(x)} - 1 \right]$, $B = \ln b$ e $A = -\lambda$, teremos o ajuste linear $G(x) = Ax + B$. Logo, teremos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} mB + A \sum_{i=1}^m x_i = \sum_{i=1}^m \ln \left[\frac{f_{max}}{f(x_i)} - 1 \right] \\ B \sum_{i=1}^m x_i + A \sum_{i=1}^m x_i^2 = \sum_{i=1}^m x_i \ln \left[\frac{f_{max}}{f(x_i)} - 1 \right]. \end{cases}$$

Cuja solução será dada por:

$$B = \frac{\sum_{i=1}^m \ln \left(\frac{f_{max}}{f(x_i)} - 1 \right) \sum_{i=1}^m x_i^2 - \sum_{i=1}^m x_i \ln \left(\frac{f_{max}}{f(x_i)} - 1 \right) \sum_{i=1}^m x_i}{m \sum_{i=1}^m x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^m x_i \right)^2}.$$

e

$$A = \frac{m \sum_{i=1}^m x_i \ln \left(\frac{f_{max}}{f(x_i)} - 1 \right) - \sum_{i=1}^m (x_i)^2}{m \sum_{i=1}^m x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^m x_i \right)^2}.$$

Como $\lambda = -A$ e $b = e^B$ determinamos os parâmetros que determinam o melhor ajuste para a função.

Conhecidos os ajustes de funções pelo método dos mínimos quadrados, restará aplicar os conceitos estudados até então em exemplos.

6 APLICAÇÕES

Neste capítulo, faremos aplicações práticas dos modelos de Malthus, Verhulst e Gompertz à partir de dados reais fazendo os ajustes pelo Método dos Mínimos Quadrados.

6.1 CRESCIMENTO POPULACIONAL DA CIDADE DE SÃO CARLOS

Vamos considerar a população da cidade de São Carlos, cujos dados do IBGE e Fundação SEADE foram retirados de [Devescovi \(1987\)](#). A população da cidade entre os anos de 1874 a 2005 são apresentados na tabela 6.1 à seguir:

Tabela 6.1 – Totais populacionais e taxas geométricas de crescimento médio anual para o município de São Carlos - SP entre 1874 e 2005.

Ano	População Total	Taxa de Crescimento (%)
1874	6.897	
1886	16.104	8,8
1900	55.729	9,3
1920	54.225	-0,1
1940	48.609	-0,5
1950	47.731	-0,2
1960	62.045	2,5
1970	85.424	3,3
1980	119.542	3,4
1991	158.221	2,6
2000	192.998	2,2
2005	213.314	2,0

Fonte: ([DEVESCOVI, 1987](#), p. 261).

Vamos supor o Modelo de Malthus para descrever o comportamento do crescimento populacional da cidade de São Carlos. À partir dos dados, montamos a tabela 6.2 a seguir, para aplicação do ajuste exponencial. Sendo x_i o ano e y_i a população segue:

Tabela 6.2 – Dados para aplicação do ajuste exponencial

	x_i	y_i	x_i^2	$\ln(y_i)$	$x_i \ln(y_i)$
	1900	55729	3610000	10.928256	20763.686
	1920	54225	3686400	10.900897	20929.723
	1940	48609	3763600	10.791564	20935.634
	1950	47731	3802500	10.773336	21008.006
	1960	62045	3841600	11.035615	21629.806
	1970	85424	3880900	11.355382	22370.103
	1980	119542	3920400	11.691423	23149.018
	1991	158221	3964081	11.971748	23835.75
	2000	192998	4000000	12.170435	24340.87
	2005	213314	4020025	12.270521	24602.394
Σ	19616	-	38489506	113.88918	223564.99

Fonte: Elaborado pela autora.

Vamos realizar um ajuste para encontrar os parâmetros a e B afim de determinar a função exponencial que se assemelhará ao comportamento da população da cidade de São Carlos. Com $m = 10$ teremos o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} 10 & 19616 \\ 19616 & 38489506 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 113.88918 \\ 223564.99 \end{bmatrix}.$$

Cuja solução será dada por:

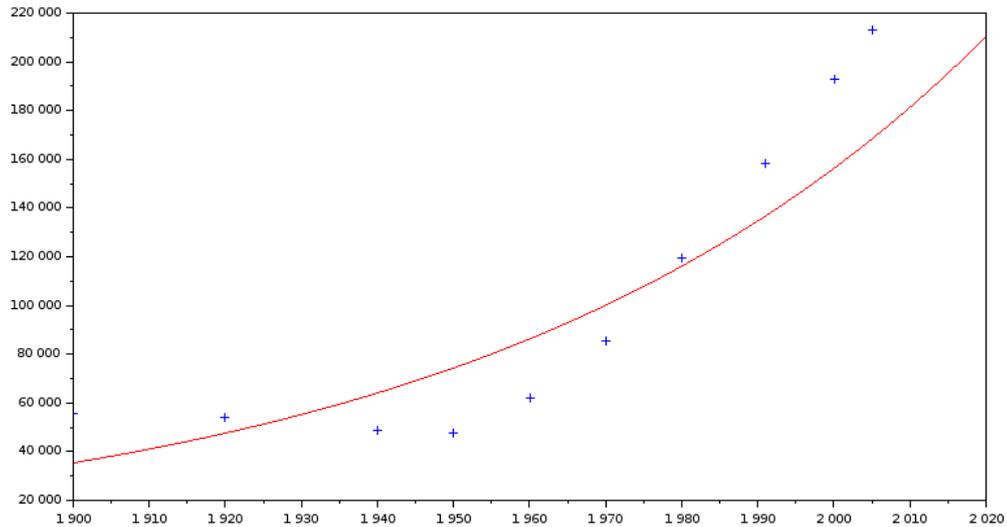
$$\begin{bmatrix} B \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17.774893 \\ 0.0148674 \end{bmatrix}.$$

Aplicando então ao modelo exponencial, a função que se assemelhará ao comportamento da população de São Carlos será:

$$g(t) = e^B e^{at} = e^{(-17.774893+0.0148674t)}.$$

Cuja equação é equivalente ao modelo de Malthus, que se comportará graficamente da seguinte maneira:

Figura 6.1 – Comportamento da População da Cidade de São Carlos



Fonte: Elaborado pela autora.

Indicando que, para $t = 2020$, a população $P(2020) \approx 210435$ habitantes. Segundo consulta no Google, neste momento a população de São Carlos está estimada em aproximadamente 254.000 habitantes.

6.2 DESCRIÇÃO E PROGNÓSTICO PARA O CRESCIMENTO DE PLANTAS

Para este exemplo, vamos considerar os dados extraídos de [Grecorczyk \(1991\)](#) e apresentados à seguir:

Tabela 6.3 – Valores experimentais (y) da matéria seca de uma única planta de aveia durante a vegetação (t)

Medida	Dia (t)	$y(g)$
1	15	0.7
2	20	1.5
3	25	2.96
4	30	5.25
5	35	7.83
6	40	10.42
7	45	14.0
8	50	18.5
9	55	20.3
10	60	22.8
11	65	24.2
12	75	24.8

Fonte: (GRECORCZYK, 1991).

À partir dos dados, montamos a tabela 6.4 a seguir, para aplicação do ajuste logístico, sendo x_i o número de dias e y_i o peso em gramas:

Tabela 6.4 – Dados para aplicação do ajuste logístico

	x_i	y_i	x_i^2	$\ln\left(\frac{f_{max}}{f(x_i)} - 1\right)$	$x_i \ln\left(\frac{f_{max}}{f(x_i)} - 1\right)$
	15	0.7	225	3.5393016	53.089525
	20	1.5	400	2.7434173	54.868347
	25	2.96	625	1.9990117	49.975291
	30	5.25	900	1.3152586	39.457758
	35	7.83	1225	0.7740737	27.092578
	40	10.42	1600	0.3228065	12.912259
	45	14	2025	-0.2585857	-11.636356
	50	18.5	2500	-1.0756351	-53.781753
	55	20.3	3025	-1.5043237	-82.737805
	60	22.8	3600	-2.4286258	-145.71755
	65	24.2	4225	-3.680649	-239.24218
	70	24.8	4900	-7.8160138	-547.12097
\sum	510	-	25250	-6.0699637	-842.84086

Fonte: Elaborado pela autora.

Vamos agora fazer o ajuste e determinar os parâmetros A e B . Considerando $f_{max} = 24.81$ e $m = 12$, teremos o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} 12 & 510 \\ 510 & 25250 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6.0699637 \\ -842.84086 \end{bmatrix}.$$

sendo $B = \ln b$ e $A = \lambda$, para obter o ajuste logístico $g(x) = \frac{f_{max}}{1 + be^{-\lambda x}}$. A solução do sistema será dada por

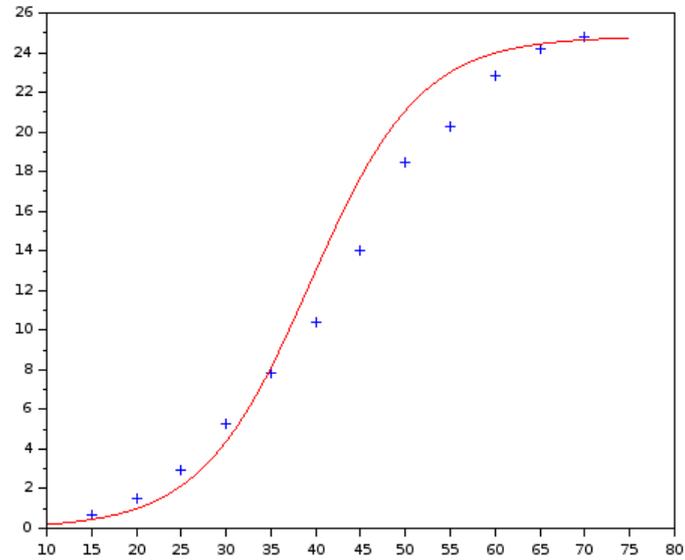
$$\begin{bmatrix} B \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.4471388 \\ -0.1635994 \end{bmatrix}.$$

Aplicado ao modelo teremos a função:

$$g(x) = \frac{24.81}{1 + e^{6.4471388 - 0.1635993x}}.$$

Que se comportará graficamente da seguinte forma:

Figura 6.2 – Comportamento do crescimento

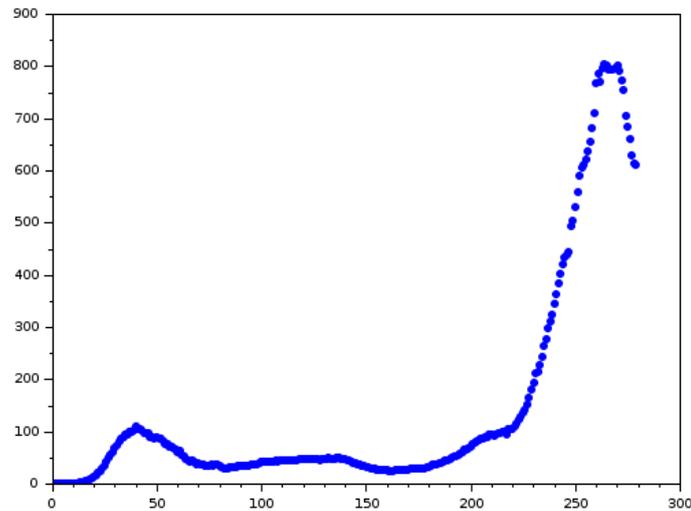


Fonte: Elaborado pela autora.

6.3 EXEMPLO DE AJUSTE LOGÍSTICO PARA A COVID-19

Para este último exemplo, realizamos um ajuste logístico dos dados de proliferação do Covid-19 em função do tempo para Portugal. Observando graficamente o comportamento do vírus:

Figura 6.3 – Gráfico de proliferação do Corona Vírus em Portugal



Fonte: Elaborado pela autora¹.

Adotaremos os dados para os primeiros 40 primeiros dias após o surgimento do primeiro caso. A matriz contendo a coluna de dados e demais colunas de cálculos se encontra no Anexo A.

Para obter os parâmetros A e B , será necessário saber que $\sum_{i=1}^{40} x_i^2 = 22140$ e $\sum_{i=1}^{40} x_i = 820$ e $f_{max} = 109.02$. Assim, para $m = 40$, teremos o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} 40 & 820 \\ 820 & 22140 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 88.223031 \\ 269.84099 \end{bmatrix}.$$

sendo $B = \ln b$ e $A = \lambda$, para obter o ajuste logístico $g(x) = \frac{f_{max}}{1 + be^{-\lambda x}}$, a resolução do sistema será:

$$\begin{bmatrix} B \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.1237725 \\ 0.2886925 \end{bmatrix}.$$

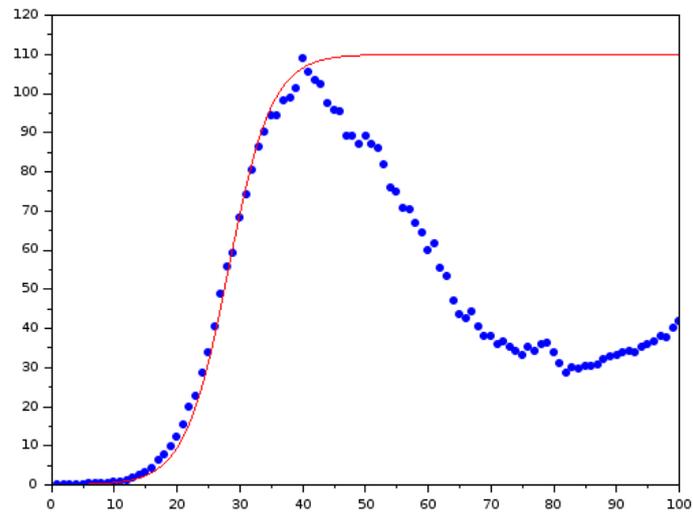
Que, aplicado ao modelo, nos fornecerá a função:

$$g(x) = \frac{109.02}{1 + e^{8.1237725 + 0.2886925x}}.$$

Analisando então o comportamento gráfico da função obtida em comparação com os

dados, observamos o seguinte comportamento:

Figura 6.4 – Ajuste logístico aplicado aos dados do Corona Vírus para Portugal



Fonte: Elaborado pela autora.

Pode-se concluir que o comportamento se aproxima ao modelo de Verlhust cabendo a discussão sobre as razões e efeitos deste comportamento. Esse ajuste se mostrou satisfatório para os primeiros 40 dias.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho partiu da Modelagem Matemática para os diferentes modelos e desta maneira sermos capazes de fazer previsões. A partir da coleta dos dados fizemos o ajuste para alguns modelos descritos por uma equação diferencial.

A demonstração da existência e unicidade de Soluções para Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem permitiu revisar alguns conceitos vistos durante todo o curso, e como estes contribuir para elaboração de um raciocínio lógico que nos permitiu verificar qual o formato da solução existente para tal equação.

Discorrendo um pouco à respeito dos modelos estudados, ficou clara a evolução entre um e o outro. Primeiramente tratando do Modelo de Malthus, cujo comportamento é exponencial, haverá um momento em que o número de habitantes se tornará insustentável para a capacidade do planeta. Tal insustentabilidade passa a ser prevista por Verhulst, que propôs um modelo onde passam a ser consideradas além das taxas de natalidade e mortalidade, uma mensuração do nível de saturação populacional, que gera uma estabilidade para os dados. Porém, mesmo sendo uma abordagem mais inovadora comparada ao modelo de Malthus, o modelo de Verhulst também começa a apresentar alguns erros a longo prazo. Gompertz então traz um modelo onde também é analisado o comportamento assintótico da curva obtida por Verhulst.

Partindo dos modelos, verificamos que o método dos mínimos quadrados pode ser utilizado para ajustar uma função a partir de um conjunto de dados onde o erro que se comete ao equacionar os comportamentos populacionais mínimo. Estes ajustes nos permitem traçar curvas mais assertivas, como nos exemplos trabalhados, onde conseguimos chegar à estimativa de uma população próxima à real para a Cidade de São Carlos, e equacionar os dados do COVID-19 até o 40º dia de proliferação.

Enquanto contribuição para a formação pessoal, o trabalho nos permitiu complementar o curso com os modelos de Malthus, Verhulst, Gompertz e o Método dos Mínimos Quadrados, possibilitando verificar com aplicações reais como os ajustes são realizados.

Para um trabalho futuro, almejamos realizar um estudo ainda mais completo sobre os ajustes de funções e na área de Modelagem Matemática trabalhando com modelos mais complexos.

REFERÊNCIAS

- BASSANEZI, R. C. **Equações diferenciais ordinárias - Um curso introdutório**. Santo André: Coleção BC&T-UFABC Textos Didáticos, 2011. Citado na página 10.
- DEVESCOVI, R. C. B. **Urbanização e acumulação: um estudo sobre a cidade de São Carlos**. São Carlos: UFSCar (Arquivo de História Contemporânea), 1987. Citado na página 39.
- FULFORD, G.; FORRESTER, P.; JONES, A. **Modelling with differential and difference equations**. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. v. 10. Citado na página 22.
- GRECORCZYK, A. The logistic function - its application to the description and prognosis of plant growth. *Acta Societatis Botanicorum Poloniae*, Poland, v. 60, n. 1-2, p. 67–76, 1991. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 42.
- GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de Cálculo**. 5. ed. São Paulo: LTC Editora, 2001. v. 4. Citado na página 18.
- MAGALHÃES, M. L.; LEITE, N. M. G. Equações diferenciais aplicadas à dinâmica populacional. In: **Anais do Congresso de Matemática Aplicada e Computacional - CNMAC Nordeste**. IFNMG-Campus Januária: [s.n.], 2012. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 29.
- NACHBIN, A.; TABAK, E. **Introdução à Modelagem Matemática e Computacional**. [S.l.]: Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 11.
- SETI, B. et al. Estudo da dinâmica populacional usando os modelos de malthus e verhulst: uma aplicação à população de passo fundo. *Revista Teoria e Evidência Econômica*, v. 7, n. 12, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 5.
- TEIXEIRA, F. L. **Modelos Descritos por equações diferenciais ordinárias**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista (UNESP), Rio Claro, 2012. Citado 5 vezes nas páginas 21, 23, 24, 29 e 30.
- ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações Diferenciais**. São Paulo: Pearson Makron Books, 2008. v. 1. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 13.

APÊNDICE A – DADOS COVID-19 EM PORTUGAL

Neste anexo, serão apresentado os dados do exemplo trabalhado na seção 6.3, extraídos do European Centre for Disease Prevention and control (2020)¹:

Tabela A.1 – Dados para aplicação do ajuste logístico

x_i	y_i	x_i^2	$\ln\left(\frac{f_{max}}{f(x_i)} - 1\right)$	$x_i \ln\left(\frac{f_{max}}{f(x_i)} - 1\right)$
1	0.0194617	1	8.6396125	8.6396125
2	0.0389233	4	7.9462883	15.892577
3	0.0486541	9	7.7230563	23.169169
4	0.0875775	16	7.1349155	28.539662
5	0.1265008	25	6.7668366	33.834183
6	0.2043474	36	6.2865547	37.719328
7	0.2919249	49	5.9290818	41.503573
8	0.3795023	64	5.6659189	45.327352
9	0.398964	81	5.615731	50.541579
10	0.5741189	100	5.2501662	52.501662
11	0.7590046	121	4.9693038	54.662342
12	1.0898528	144	4.6044805	55.253767
13	1.6445101	169	4.1879749	54.443674
14	2.384053	196	3.8097668	53.336736
15	3.2014427	225	3.5073429	52.610143
16	4.320488	256	3.1970427	51.152683
17	6.1985379	289	2.8181666	47.908832
18	7.5511231	324	2.6076676	46.938017
19	9.7989445	361	2.324904	44.173177
20	12.251113	400	2.076785	41.5357
21	15.277401	441	1.8245779	38.316136
22	19.666005	484	1.5246224	33.541692
23	22.585253	529	1.3533668	31.127436
24	28.569713	576	1.0474001	25.137602
25	33.727052	625	0.8160181	20.400452
26	40.441324	676	0.5423185	14.100281
27	48.663875	729	0.231432	6.2486649
28	55.631148	784	0.0229518	0.6426515
29	59.134246	841	0.1506203	-4.3679897
30	68.067147	900	0.4844251	-14.532752
31	74.041876	961	0.7222758	-22.390549
32	80.269606	1024	0.9932212	-31.783077
33	86.273528	1089	-1.2909314	-42.600736
34	89.951781	1156	-1.5011334	-51.038537
35	94.17496	1225	-1.7835609	-62.42463
36	94.097114	1296	-1.7778268	-64.001764
37	98.086754	1369	-2.1082014	-78.003452
38	98.728988	1444	-2.1701445	-82.465492
39	101.31739	1521	-2.4569357	-95.820494
40	109.02421	1600	-4.7160728	-188.64291

Fonte: Elaborado pela autora.

¹ European Centre for Disease Prevention and Control.: *Data on 14-day notification rate of new COVID-19 cases and deaths*. 2020. Disponível em: <<https://www.ecdc.europa.eu/en/publications-data/data-national-14-day-notification-rate-covid-19>>. Acessado em 15 de Dezembro de 2020.

Exceto quando indicado o contrário, a licença deste item é descrito como
Attribution-NonCommercial-NoDerivs 3.0 Brazil

