Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

Geometria Diferencial via Referenciais Móveis

Autor: *Rafael da Silva Belli*

Orientador: *Alexandre Paiva Barreto*

Disciplina: Trabalho de Conclusão do Curso B

Curso: Bacharelado em Matemática

Professores Responsáveis: Daniel Vendrúscolo
Wladimir Seixas
Natália Andrea Viana Bedoya

São Carlos, 28 de julho de 2021.

Geometria Diferencial via Referenciais Móveis

Autor: *Rafael da Silva Belli*

Orientador: *Alexandre Paiva Barreto*

Disciplina: Trabalho de Conclusão do Curso B

Curso: Bacharelado em Matemática

Professores Responsáveis: Daniel Vendrúscolo
Wladimir Seixas
Natália Andrea Viana Bedoya

Instituição: Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

São Carlos, 28 de julho de 2021.

Nome do Autor (aluno) Nome do Orientador (orientador)

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter misericórdia de mim, preparando um pai (Reginaldo Lopes Belli) e uma mãe (Elivaine Gisele da Silva Belli) maravilhosos, que sempre fizeram o possível e o impossível para me blindar dos problemas e contratempos do cotidiano permitindo que me concentrasse ao máximo nos estudos. Além disso, agradeço a Deus por ter me preparado amigos incríveis (Luis, Leonardo, Alan e Rodrigo), que contribuíram e muito para tornar o curso muito mais feliz do que estressante. Por fim, agradeço a Deus por ter preparado um excelente orientador (Alexandre Paiva Barreto), que soube extrair o máximo de mim, fazendo com que eu aprendesse muita coisa em pouquíssimo espaço de tempo, procurando sempre trabalhar em temas avançados que agregassem em minha cultura matemática e me preparasse para o futuro no mundo acadêmico.

Resumo

Apresentamos neste trabalho um estudo sobre a teoria da geometria diferencial de superfícies com a linguagem dos referenciais móveis. Em um primeiro momento, introduziremos alguns grupos de matrizes e ações dos mesmos no espaço euclidiano. Feito isto, falaremos sobre os referenciais móveis euclidianos e mostraremos o procedimento para obter "o melhor referencial possível". Utilizaremos isso para demonstrar os teoremas de existência e congruência de Bonnet, e para encontrar curvaturas de algumas famílias de superfícies. Por fim, introduziremos a noção geral de grupos de Lie, álgebras de Lie e ações de grupos de Lie em variedades diferenciáveis, concluindo que, através de uma generalização do referencial móvel, a teoria euclidiana se estende para qualquer variedade diferenciável, em particular, para os espaços esférico e hiperbólico.

Sumário

Prefácio ix

1 Grupos de Lie e Geometria Euclidiana **1**

1.1 O Grupo Euclidiano 1

1.2 Forma de Maurer-Cartan Euclidiana 15

1.3 Representação Adjunta Euclidiana 18

2 Geometria Diferencial Euclidiana **21**

2.1 Resumo do curso clássico de Geometria Diferencial 21

2.2 Teoria das Superfícies de Darboux, Cartan e Chern 23

2.3 Procedimento de Redução de referencial 42

2.3.1 Resumo da Redução de referencial e Equações Estruturais 64

2.4 A Forma de Critério 66

2.5 Teoremas de Existência e Congruência de Bonnet 67

2.6 Esfera Tangente e Esfera de Curvatura 76

2.7 A Aplicação de Gauss 82

3 Famílias de superfícies regulares em $\mathbb{R}^3$ **89**

3.1 Superfícies Isoparamétricas, de Dupin e Canal 89

3.2 Superfícies de Revolução 95

3.3 Novas Imersões 100

3.4 Transformações paralelas 105

3.5 Tubos 108

3.6 Esferas de Curvatura ao longo de Imersões Canal 111

3.7 Elástica 116

4 Conjectura de Willmore **119**

Prefácio

A teoria da geometria diferencial veio das relações entre o cálculo diferencial e a geometria. Iniciou-se como uma ciência aplicada à questões de cartografia, passando posteriormente a ser de grande utilidade na engenharia e na astronomia. Os precursores no estudo dessa teoria foram Fermat, e Newton, no século XVII. Fermat descobriu um método para encontrar tangentes de curvas algébricas e Newton foi o primeiro à estudar as curvaturas usando o cálculo infinitesimal. Após dois séculos, o matemático Carl Friedrich Gauss provou o famoso Teorema Egregium, mostrando que a curvatura Gaussiana é intrínseca à superfície.

Gauss e Bernhard Riemann foram os principais responsáveis pela descolagem da geometria diferencial como uma disciplina distinta. Riemann generalizou a teoria com a ideia de variedades diferenciáveis. Ele fez isso por um processo intuitivo de associar, localmente, certos espaços topológicos ao espaço euclidiano, onde já se tinha toda a geometria diferencial. Ou seja, concluiu que alguns espaços podem ser estudados localmente como o próprio R, obtendo assim toda teoria de geometria diferencial englobada em alguma vizinhança de um dado ponto desse espaço.

Os trabalhos dos matemáticos Tullio Levi-Civita, Gregorio Ricci-Curbastro e de físicos como James Clerk Maxwell possibilitaram o desenvolvimento da análise tensorial e da ideia de covariância, que aponta uma propriedade geométrica intrínseca como aquela que não muda após a aplicação de transformações coordenadas. Essas noções encontram uma aplicação central na relatividade geral de Albert Einstein. Em seu livro de 1913 sobre superfícies de Riemann, Hermann Weyl deu uma definição mais modernizada de variedade diferenciável bidimensional. Nos dias atuais, a definição mais aceita de variedade, via atlas, foi feita por Hassler Whitney.

Uma classe particular de variedade diferenciável é formada pelos grupos de Lie, que admitem ums estrutura de grupo onde as operações de inversão e de multiplicação são diferenciáveis. Este conceito foi apresentado em 1870 pelo matemático Sophus Lie ao estudar algumas propriedades de equações diferenciais. Nesse conjunto de propriedades, figuram diversas funções de grau maior que 1, como as senoides, as hiperbólicas e outras funções diferenciáveis em diversos graus. Inclusive com a teoria das funções com grau inferior a unidade, que foram desenvolvidas nos seus trabalhos, chamado na época de "Princípios e Processos para as Diferenciações".

O objetivo deste texto é apresentar um novo método para a obtenção das curvaturas de

uma variedade diferenciável via ações de grupos de Lie: O método dos referenciais móveis. Para tal, descreveremos este método com maiores detalhes no espaço euclidiano e generalizaremos esta noção para variedades quaisquer, mostrando novos resultados e conclusões que estavam, a princípio, obscuros na teoria euclidiana.
No primeiro capítulo, introduziremos a noção de grupos de Lie de matrizes e suas álgebras de Lie associadas, exemplificando com maiores detalhes dos grupos O(n), SO(n), SL(n), GL(n) e o grupo das isometrias euclidianas E(n).. Além disso, falaremos à respeito da forma de Maurer-Cartan e as equações que suas componentes verificam: As chamadas equações estruturais. Em seguida, apresentaremos um breve resumo da teoria convencional da geometria diferencial euclidiana, mostrando a obtenção das curvaturas via primeira e segunda formas fundamentais. Após isso, definiremos o conceito de referencial móvel e o utilizaremos para encontrar as curvaturas de uma dada superfície. Mostraremos também um procedimento que nos garante um referencial móvel com pripriedades que facilitam e muito a obtenção de conclusões à respeito da superfície associada. E com isso, demonstraremos alguns resultados importantes, como os teoremas e existência e congruência de Bonnet.
No terceiro e no quarto capítulo, mostraremos com maiores detalhes alguns exemplos clássicos de superfícies euclidianas, entre elas as isoparamétricas, as dupins e as canais. Finalizaremos introduzindo a conjectura de Willmore que questionava se o número 2^2 é o mínimo absoluto da "energia de Willmore"sobre todas as imersões de um toro. Conjectura essa, que foi provada em 2012 pelo matemático brasileiro Fernando Codá.Marques.
O quinto e o sexto capítulo abordaram a generalização de toda a teoria construída para ações de Grupos de Lie em Variedades diferenciáveis. Definiremos o conceito de fatia de uma ação e mostraremos a sua relação com a obtenção de um referencial móvel ideal. Além disso, generalizaremos a noção de álgebra de Lie e sua relação com o conjunto dos campos invariantes à esquerda. Por fim, introduziremos uma classe especial de variedades que sofrem ação de grupos de Lie: As variedades homogêneas. Utilizando a teoria de distribuições e o teorema de Frobenius, obteremos algumas conclusões sobre esta classe.
Finalizaremos com um apanhado de resultados obtidos nas geometrias hiperbólica e esférica. Faremos as definições dos espaços, seus respectivos grupos de isometrias e suas formas de Maurer Cartan associadas. Mostraremos enfim, alguns resultados obtidos após o procedimento de redução de referencial móvel e alguns teoremas de caracterização.

Capítulo 1

Grupos de Lie e Geometria Euclidiana

Neste capítulo, introduziremos a teoria de geometria diferencial sob duas abordagens distintas, mostrando que há mais de uma forma de se obter as curvaturas que caracterizam uma superfície. Em seguida mostraremos alguns teoremas de existência e caracterização de certas classes de superfícies. Em seguida, faremos alguns exemplos para uma melhor compreensão dos conceitos abordados. Finalizaremos com as conjecturas de Willmore, que são conjecturas (já demonstradas) que questionam as imersões que respeitam determinada propriedade sobre sua curvatura média.

1.1 O Grupo Euclidiano

Durante todo esse trabalho suporemos $\mathbb{R}^n$ munido de suas operações, produto interno e norma canônicos. Lembramos que a métrica ou distância Euclidiana canônica é dada por

$$d : (p, q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \|p - q\| = \sqrt{\langle p - q, p - q \rangle} \in \mathbb{R}$$

e é um fato conhecido que

$$d\left(p, q\right) = \inf \left\{C\left(\gamma\right)\ ;\ \gamma \in C^{\infty}\left(\left[a, b\right], \mathbb{R}^n\right) \text{ verificando } \gamma\left(a\right) = p \text{ e } \gamma\left(b\right) = q\right\} \tag{1.1}$$

para quaisquer $p, q \in \mathbb{R}^n$, onde $C\left(\gamma\right)$ denota o comprimento da curva γ, isto é,

$$C\left(\gamma\right) := \int_a^b ||\gamma'\left(t\right)||dt.$$

O conjunto das matrizes com m linhas e n colunas e coeficientes reais será denotado por $M_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$,ou simplesmente por $M_{m\times n}$. O subconjunto das matrizes invertíveis de $M_{n\times n}$ será denotado por $GL\left(n, \mathbb{R}\right)$, ou simplesmente por $GL\left(n\right)$. Lembramos que $GL\left(n\right)$

munido da operação usual de multiplicação de matrizes é um grupo e que

$$GL\,(n) = \{A \in M_{n\times n}\ ;\ \det A \neq 0\}\,.$$

O conjunto das matrizes cujo determinante é estritamente positivo é um subgrupo de $GL\,(n)$ e será denotado por $SL\,(n)$. A transposta de uma matriz $A \in M_{m\times n}$ será denotada por $A^t \in M_{n\times m}\,(\mathbb{R})$.

Dada uma matriz $A \in M_{m\times n}$, definimos a norma de A por

$$\|A\| = \sup\{\|Av\|\ ;\ v \in \mathbb{R}^n \text{ e } \|v\| = 1\}\,.$$

Sabemos do curso de Análise Funcional que a norma acima é de fato uma norma de espaços vetoriais. Como a $\dim M_{m\times n} = mn < \infty$, a identificação natural

$$(a_{i,j}) \in M_{m\times n} \leftrightarrow (a_{1,1}, ..., a_{1,n}, ..., a_{m,1}, ..., a_{m,n}) \in \mathbb{R}^{mn},$$

nos diz que norma do operador de $M_{m\times n}$ é equivalente a norma induzida pela norma canônica de $\mathbb{R}^{mn}$. Utilizando essa última norma, não é difícil demonstrar que as aplicações

$$\begin{aligned}(A,B) \in M_{n\times n} \times M_{n\times n} &\longmapsto AB \in M_{n\times n}\\ A \in M_{n\times n} &\longmapsto A^{-1} \in M_{n\times n}\\ A \in M_{n\times n} &\longmapsto \det(A) \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

são de classe C^∞. Em particular, por exemplo, a continuidade da aplicação det nos diz que $GL\,(n)$ é um aberto (na verdade um aberto denso) de $M_{n\times n}$.

Lembramos que, para toda matriz $A \in M_{n\times n}$, a aplicação

$$\exp : A \in M_{n\times n} \longmapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} \in M_{n\times n}$$

é denominada aplicação exponencial. Além disso, as seguintes propriedades são verdadeiras:

1. $e^0 = Id$;
2. $e^{aA}e^{bA} = e^{(a+b)A}$;
3. $e^A e^{-A} = Id$;
4. Se $AB = BA$, então $e^A e^B = e^{A+B}$;
5. Se $AB = BA$, então $e^A B = Be^A$. Em particular $Ae^A = e^A A$;
6. Se B é uma matriz inversível, então $e^{BAB^{-1}} = Be^A B^{-1}$;

7. $\det\left(e^{A}\right) = e^{Tr(A)}$;

8. $e^{\left(A^{T}\right)} = \left(e^{A}\right)^{T}$;

9. $\frac{d}{dt}\{\exp(tB)\} = B\exp(tB)$. Em particular, para toda matriz $A_0 \in M_{n\times n}$, a aplicação
$$A : t \in \mathbb{R} \longmapsto \exp(tB)\,A_0 \in M_{n\times n}$$
verifica
$$A(0) = A_0$$
$$A'(t) = \frac{d}{dt}\{\exp(tB)\,A_0\} = \frac{d}{dt}\{\exp(tB)\}\,A_0 = B\exp(tB)\,A_0 = BA(t)$$
portanto A é a única solução do PVI
$$\begin{cases} A'(t) = B.A(t) \\ A(0) = A_0 \end{cases} \tag{1.2}$$

Definição 1. *Uma isometria de $\mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que preserva produto interno, isto é,*
$$\langle v, w\rangle = \langle dT_p.v, dT_p.w\rangle\,,$$
*para todo $p, v, w \in \mathbb{R}^n$. O conjunto das isometrias de $\mathbb{R}^n$ será denominado por **grupo Euclidiano** n-dimensional e será denotado por $E(n)$.*

Notemos que a identidade $Id : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é claramente uma isometria. Além disso, a inversa de uma isometria $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é também uma isometria. De fato, usando que T é bijeção e que dT_p é um isomorfismo, para todo $p \in \mathbb{R}^n$, temos
$$\left\langle dT^{-1}_{T(p)}.\left(dT_p.v\right), dT^{-1}_{T(p)}.\left(dT_p.w\right)\right\rangle = \left\langle d\left(T^{-1}\circ T\right)_p.v, d\left(T^{-1}\circ T\right)_p.w\right\rangle = \langle v, w\rangle = \langle dT_p.v, dT_p.w\rangle\,.$$
Como a operação de composição de funções é associativa, concluímos que $(E(n), \circ)$ é um grupo (o que justifica a nomenclatura adotada acima). Segue da caracterização (1.1) que toda isometria preserva distância. Mais precisamente
$$d\left(T(p), T(q)\right) = d(p, q) \tag{1.3}$$
para quaisquer $p, q \in \mathbb{R}^n$.

Denotaremos por $\mathcal{L}(X, Y)$ o conjuntos das transformações lineares entre espaços vetorias X e Y. Quando $X = Y$, escreveremos simplesmente $\mathcal{L}(X)$. Usaremos nesse trabalho, sem maiores comentários, a identificação natural existente entre $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ e $M_{m\times n}$.

Uma transformação afim entre espaços vetorias X e Y é uma aplicação da forma
$$T_{A,w} : v \in X \to Av + w \in Y$$

onde $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ e $w \in Y$. O conjunto das aplicações afins de X em Y será denotado por $\mathcal{A}(X, Y)$, ou simplesmente por $\mathcal{A}(X)$ quando $X = Y$.

Definimos o conjunto das transformações ortogonais de $\mathbb{R}^n$ por $O(n) = M_{n\times n} \cap E(n)$. São fatos conhecidos da Álgebra Linear que $O(n)$ é subgrupo de $GL(n)$, que $O(n)$ é o subconjunto das matrizes cuja inversa e a transposta coincidem e que $\det A = \pm 1$, para toda $A \in O(n)$. Outro fato importante proveniente da Álgebra Linear é que os vetores linha (ou coluna) de uma matriz em $O(n)$ formam uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. O subgrupo de $O(n)$ composto pelas matrizes com determinante 1 será denotado por $SO(n)$. Dito de outra forma, $SO(n) = O(n) \cap SL(n)$.

Os subgrupos relatados acima motivam a seguinte definição:

Definição 2. *Um **grupo de Lie clássico ou grupo de Lie de matrizes** é um subgrupo fechado de $GL(n)$.*

Obviamente $GL(n)$ é um grupo de Lie de matrizes. Como as colunas (ou linhas) de uma matriz em $O(n)$ formam uma base ortonormal é uma propriedades fechada, segue que $O(n)$ é um grupo de Lie de matrizes. A continuidade do det garante que $SO(3)$ e $SL(3)$ são também grupos de Lie de matrizes (pois $\det A \neq 1$ e $\det A < 0$ são propriedades abertas).

Como o objetivo deste trabalho é o estudo de superfícies no espaço Euclidiano tridimensional, vamos particularizar nossa discussão para o caso $n = 3$. Ressaltamos, no entanto, que boa parte dos resultados aqui apresentados se generalizam naturalmente qualquer dimensão.

Com as definições e notações acima, estamos aptos a caracterizar o grupo Euclidiano:

Proposição 3. *O grupo das isometrias de $\mathbb{R}^3$ é dado pelo conjunto*

$$E(3) = \left\{ T_{A,w} \in \mathcal{A}\left(\mathbb{R}^3\right) \ ; \ A \in O(3) \ \right\},$$

Demonstração. Primeiramente, notemos que $T_{A,w}$ é um difeomorfismo, para todo $w \in \mathbb{R}^3$ e todo $A \in O(3)$. De fato, notemos que:

$$\lim_{h\to 0} \frac{T_{A,w}(p+h) - T_{A,w}(p) - Ah}{||h||} = \lim_{h\to 0} \frac{Ap + Ah + w - Ap - w - Ah}{||h||} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{||h||} = 0, \tag{1.4}$$

para todo $p \in \mathbb{R}^3$. Logo $T_{A,w}$ é diferenciável e $d\left(T_{A,w}\right)_p = A$, para todo $p \in \mathbb{R}^3$. Seja a seguinte aplicação:

$$T^{-1}_{A,w} : v \in \mathbb{R}^3 \to A^T v - A^T w \in \mathbb{R}^3,$$

segue disto que

$$\begin{aligned}
T^{-1}_{A,w}\left(T_{A,w}(v)\right) &= T^{-1}_{A,w}\left(Av+w\right) = A^T\left((Av+w)-w\right) = A^TAv = v,\\
T_{A,w}(T^{-1}_{A,w}\left(v\right)) &= T_{A,w}(A^T\left(v-w\right)) = A\left(A^T\left(v-w\right)\right)+w = (v-w)+w = v.
\end{aligned}$$

Ou seja, vemos que $T^{-1}_{A,w} = \left(T_{A,w}\right)^{-1}$, e portanto, $T_{A,w}$ é uma bijeção, para todo $w \in \mathbb{R}^3$.

De modo análogo ao feito em (1.4), concluímos que $T^{-1}_{A,w}$ é diferenciável, para todo $w \in \mathbb{R}^3$, e $d\left(T^{-1}_{A,w}\right)_p = A^T$, para todo $p \in \mathbb{R}^3$. Isso demonstra que $T_{A,w}$ é de fato um difeomorfismo, para todo $w \in \mathbb{R}^3$.

Notemos que $T_{A,w}$ preserva produto interno, para todo $w \in \mathbb{R}^3$. De fato, dados $p, v, u \in \mathbb{R}^3$, segue que

$$\left\langle d\left(T_{A,w}\right)_p.v, d\left(T_{A,w}\right)_p.u\right\rangle = \langle Av, Au\rangle = \left\langle A^TAv, u\right\rangle = \langle v, u\rangle\,.$$

Por fim, se T é uma isometria de $\mathbb{R}^3$, já vimos em (1.3) que T preserva distância. Note que a função

$$S : v \in \mathbb{R}^3 \to T(v) - T(0) \in \mathbb{R}^3$$

também é uma isometria, já que

$$dS_p.w = dT_p.w,$$

para todo $p, w \in \mathbb{R}^3$, além disso, a bijeção de S sai do fato de T ser inversível (T é uma isometria) e S ser a composição de T com uma translação (que também é inversível). Vamos provar que S preserva produto interno: De fato, como S é uma isometria, segue que

$$d(S(p), S(q)) = d(p, q),$$

para todo $p, q \in \mathbb{R}^3$. Em termos da norma temos que:

$$\|S(p) - S(q)\| = \|p - q\|\,.$$

Tomando $q = 0$, segue que:

$$\|S(p)\| = \|p\|\,.$$

Portanto, concluímos o seguinte:

$$\langle S(p), S(q)\rangle = -\frac{1}{2}\left\{||S(p)-S(q)||^2 - ||S(p)||^2 - ||S(q)||^2\right\} = -\frac{1}{2}\left\{||p-q||^2 - ||p||^2 - ||q||^2\right\} = \langle p, q\rangle\,,$$

para todo $p, q \in \mathbb{R}^3$. Por fim, vamos provar a linearidade de S: Dados $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ e

$\lambda \in \mathbb{R}$, segue que

$$\langle S(\lambda v) - \lambda S(v), S(u)\rangle = \langle S(\lambda v), S(u)\rangle - \lambda \langle S(v), S(u)\rangle = \langle \lambda v, u)\rangle - \langle \lambda v, u\rangle = 0,$$

$$\begin{aligned}\langle S(v+w) - S(v) - S(w), S(u)\rangle &= \langle S(v+w), S(u)\rangle + \langle -S(v) - S(w), S(u)\rangle \\ &= \langle v+w, u\rangle - \langle v, u\rangle - \langle w, u\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Como S é bijetora, $S(u)$ pode ser qualquer vetor de $\mathbb{R}^3$, isso nos dá que

$$\begin{aligned}0 &= S(\lambda v) - \lambda S(v), \\ 0 &= S(v+w) - S(v) - S(w).\end{aligned}$$

Logo S é uma transformação linear que preserva produto interno, ou seja, S é ortogonal. Portanto, temos que

$$T(v) = S(v) + T(0),$$

para todo $v \in \mathbb{R}^3$, onde S é uma transformação ortogonal. ■

O grupo euclidiano é naturalmente isomorfo ao produto semi-direto $O(3) \rtimes \mathbb{R}^3$ dado pela operação

$$((A, w), (B, v)) \in \left(O(3) \times \mathbb{R}^3\right)^2 \longmapsto (A, w) . (B, v) = (AB, Av + w) \in O(3) \times \mathbb{R}^3.$$

Mais precisamente, a aplicação

$$\varphi : T_{A,w} \in E(3) \longmapsto (A, w) \in O(3) \rtimes \mathbb{R}^3,$$

é um isomorfismo de grupos. Com isso, podemos tratar os elementos de $E(3)$ como transformações afins ou como pares ordenados, dependendo do contexto envolvido.

Definição 4. *O conjunto*

$$E_+(3) = \left\{T_{A,w} \in \mathcal{A}\left(\mathbb{R}^3\right) \; ; \; A \in SO(3) \;\right\} \subset E(3)$$

é denominado de ***grupo euclidiano dos movimentos rígidos.***

Proposição 5. *O grupo euclidiano dos movimentos rígidos $E_+(3)$ é um subgrupo de $E(3)$ conexo por caminhos.*

Demonstração. O fato de que $E_+(3)$é um subgrupo de $E(3)$ decorre imediatamente das propriedades do det.

Denotemos por $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^3$. Dada uma matriz $A \in SO(3)$, segue da Álgerba Linear que $\{A\epsilon_1, A\epsilon_2, A\epsilon_3\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Considere uma família contínua à um parâmetro de rotações $r_t^1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $t \in [0,1]$, de mesmo eixo tal que $r_0^1 = Id$ e $r_1^1(A\epsilon_1) = \epsilon_1$. Como rotações levam bases ortonormais em bases ortonormais e ϵ_1 está no eixo X, segue que $r_1^1(A\epsilon_2), r_1^1(A\epsilon_3) \in YZ$.

Considere outra família contínua à um parâmetro de rotações $r_t^2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $t \in [0,1]$, de rotações em torno do eixo X tal que $r_0^2 = Id$ e $r_1^2(A\epsilon_2) = \epsilon_2$ (e consequentemente $r_1^2(A\epsilon_1) = \epsilon_1$ e $r_1^2(A\epsilon_3) = \pm\epsilon_3$). Note que $r_t^1, r_t^2 \in SO(3)$ por serem rotações. Com isso, definimos as seguintes curvas:

$$\begin{aligned} \alpha : [0,1] &\longrightarrow O(3), \qquad & \alpha(t) &= r_t^1 A, \\ \beta : [0,1] &\longrightarrow O(3), \qquad & \beta(t) &= r_t^2 r_1^1 A, \end{aligned}$$

e observemos que $\alpha(1) = \beta(0)$. Portanto podemos realizar a colagem dessas curvas, que é dada por:

$$\alpha * \beta : t \in [0,1] \longrightarrow \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \beta(2t-1) & \text{se } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \in SO(3),$$

Como $r_0^1 = r_0^2 = Id$, segue que:

i $(\beta * \alpha)(0) = \alpha(0) = r_0^1 A = A$,

ii $(\beta * \alpha)(1)\,\epsilon_1 = \beta(1)\epsilon_1 = r_1^2 r_1^1 A\epsilon_1 = r_1^2\epsilon_1 = \epsilon_1$,

iii $(\beta * \alpha)(1)\,\epsilon_2 = \beta(1)\epsilon_2 = r_1^2 r_1^1 A\epsilon_2 = \epsilon_2$,

iv $(\beta * \alpha)(1)\,\epsilon_3 = \beta(1)\epsilon_3 = r_1^2 r_1^1 A\epsilon_3 = \pm\epsilon_3$,

Note que $(\beta * \alpha)(1)\,\epsilon_3 = -\epsilon_3$ implicaria que $\det \alpha * \beta(1) = -1$. Isso não é possível pois a curva $\alpha * \beta$ (que é composta de rotações) começa com determinante positivo e, sendo uma curva em $GL(3)$, o determinante das matrizes $\alpha * \beta(t)$ jamais se anula. Logo toda matriz de $SO(3)$ pode ser ligada por uma caminho em $SO(3)$ até Id e, portanto, $SO(3)$ é conexo por caminhos. Uma vez que $\mathbb{R}^3$ é conexo por caminhos, concluímos que $E_+(3)$ também o é. ■

Outra identificação natural é a inclusão de $E(3)$ em $GL(4,\mathbb{R})$ (munido da multiplicação de matrizes) dada pelo homomorfismo injetor

$$(A, w) \in E(3) \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w & A \end{pmatrix} \in GL(4).$$

Com essa associação, podemos ver $E(3)$ como um subgrupo de $GL(4)$. Notemos que se

$$H = \begin{pmatrix} x & y \\ v & A \end{pmatrix} \in GL(4) - E(3),$$

então $x \neq 1$ ou $y \neq 0$ ou as colunas (ou linhas) de A não formam uma base ortonormal. Essas três propriedades são propriedades abertas, logo $E(3)$ é um subconjunto fechado de $GL(4)$ e assim, um grupo de Lie de matrizes.

Uma **ação** de um grupo de Lie de matrizes G em um subconjunto $N \subset \mathbb{R}^n$ é uma aplicação suave $\mu : G \times N \to N$ verificando as seguintes propriedades:

i $\mu(Id, x) = x$, para todo $x \in N$;

ii $\mu(AB, x) = \mu(A, \mu(B, x))$, para todo $A, B \in G$ e $x \in N$.

Por simplicidade, adotaremos a notação $\mu(A, x) = Ax$ e faremos uso das bijeções

$$\mu_A : x \in N \to \mu(A, x) \in N$$

Neste caso, os ítens (i) e (ii) acima se reescrevem como:

i' $\mu_{Id} = Id_N$;

ii' $\mu_{AB} = \mu_A \circ \mu_B$, para todo $A, B \in G$.

Dizemos que uma ação μ de G sobre N é uma **ação transitiva** se, dados $x, y \in N$ existe $A \in G$ tal que $Ax = y$. Dizemos que μ é uma **ação isométrica** se μ_A é uma isometria de N, para todo $A \in G$. Para todo $x \in N$, definimos os conjuntos

$$G_x = \{A \in G \ ; \ Ax = x\}$$

$$Gx = \{Ax \in N \ ; \ A \in G\}$$

denominados **subgrupo de isotropia** e **órbita** de x (com relação à μ).

É fácil ver que, para todo grupo de Lie de matrizes G contido em $GL(n)$, a aplicação

$$\mu : (A, x) \in G \times \mathbb{R}^n \longmapsto Ax \in \mathbb{R}^n \tag{1.5}$$

é uma ação. Visto como subgrupo do $GL(4)$, temos que $E(3)$ age naturalmente sobre $\mathbb{R}^4$. A proposição abaixo mostra que $E(3)$ age também sobre $\mathbb{R}^3$ de maneira natural:

Proposição 6. *A aplicação*

$$\mu : ((A, v), w) \in E(3) \times \mathbb{R}^3 \longmapsto Aw + v \in \mathbb{R}^3,$$

é uma ação transitiva e isométrica de $E(3)$ sobre $\mathbb{R}^3$. Além disso, o subgrupo de isotropia de $E(3)$ em $0 = (0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ é isomorfo à $O(3)$.

Demonstração. Dado $(Id, 0) \in E(3)$ o elemento identidade de $E(3)$, segue que

$$\mu((Id, 0), w) = Id(w) + 0 = w,$$

para todo $w \in \mathbb{R}^3$. Além disso, temos que

$$\begin{aligned} \mu((A, v), \mu((B, u) w)) &= \mu((A, v), Bw + u) = A(Bw + u) + v = ABw + (Au + v) \\ &= \mu((AB, Au + v), w) = \mu((A, v)(B, u), w), \end{aligned}$$

para todo $(A, v), (B, u) \in E(3)$ e todo $w \in \mathbb{R}^3$. Identificando $E(3) \times \mathbb{R}^3$ como um subconjunto de $\mathbb{R}^{15}$, segue que μ é justamente um produto de funções polinomiais, o que nos dá a diferenciabilidade dela. Vamos checar a expressão dos elementos de $E(3)$ que fixam $0 \in \mathbb{R}^3$ pela ação μ :

$$0 = \mu((A, v), 0) = A0 + v = v,$$

segue que $(A, v) \in E(3)_0$ se e somente se $v = 0$, ou seja,

$$E(3)_0 = \{(A, 0) : A \in O(3)\} \approx O(3).$$

Dado $w \in \mathbb{R}^3$, segue que

$$\mu((A, w), 0) = A0 + w = w,$$

ou seja, a $E(3)$-órbita de $0 \in \mathbb{R}^3$ é o próprio $\mathbb{R}^3$. Isso nos dá a transitividade de μ. Por fim, segue diretamente da Proposição (3) que a aplicação $\mu_{(A,v)}$ é uma isometria em $\mathbb{R}^3$.

∎

Observação 7. *Como $O(3) \approx O(3) \times \{0\}$, note que a restrição à $O(3)$ da ação μ apresentada na proposição acima nos dá a ação canônica de $O(3)$ sobre $\mathbb{R}^3$definida em (1.5).*

O espaço tangente de um grupo de Lie de matrizes G em uma matriz $A \in G$ é o conjunto

$$T_A G = \{\gamma'(0) \in M_{n\times n} \; ; \; \gamma \in C^\infty((-\varepsilon, \varepsilon), G) \text{ e } \gamma(0) = A\}.$$

Proposição 8. *Os espaços tangentes de um grupo de Lie de matrizes $G < GL(n)$ são subespaços vetoriais de $M_{n\times n}$.*

Demonstração. Ver prop 3.16 Baker pg 71. ■

Isso motiva a seguinte definição, que será de grande importância em nosso estudo:

Definição 9. *A* ***álgebra de Lie*** *de um grupo de Lie $G < GL(n)$ é o conjunto*

$$\mathfrak{g} := T_{Id}G = \{\gamma'(0) \in M_{n\times n} \; ; \; \gamma \in C^{\infty}((-\varepsilon,\varepsilon), G) \;\; e \; \gamma(0) = Id\}$$

Definimos a dimensão de G por $\dim G = \dim \mathfrak{g}$.

Observação 10. *Na verdade, a definição de álgebra de Lie é mais geral: Uma* ***álgebra de Lie*** *(real) é uma quadra $(E, +, \cdot, [.,.])$, onde $(E, +, \cdot)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $[.,.] : E \times E \to E$ é uma operação que respeita as seguintes propriedades:*

1. $[.,.]$ é bilinear;

2. $[.,.]$ é anticomutativa;

3. $[.,.]$ respeita a identidade de Jacobi, isto é,

$$[X,[Y,Z]] + [Z,[X,Y]] + [Y,[Z,X]] = 0$$

para quaisquer $X, Y, Z \in E$. Pode-se verificar que $\mathfrak{g}$ munido do colchete

$$[A,B] := AB - BA \qquad A, B \in \mathfrak{g}$$

é uma álgebra de Lie e isso justifica a sua definição. Não convém usar essa definição geral em nosso contexto, portanto admitiremos que uma álgebra de Lie é um conjunto que se enquadra na (9).

Agora vamos enunciar um resultado que é de importância fundamental para a continuidade da teoria. Como sua demonstração é muito técnica, extensa e não acrescenta aos nossos objetivos, vamos omiti-la:

Teorema 11. *Todo grupo de Lie de matrizes $G < GL(n)$ é uma subvariedade diferenciável de $M_{n\times n}$.*

Notemos que é fácil verificar que o teorema acima é válido para os grupos de Lie de matrizes que são abertos em $M_{n\times n}$, ou que são imagem inversa de um valor regular para alguma função suave. Em geral, o resultado acima não é óbvio.

Lembramos que um **campo de vetores** em um grupo de Lie de matrizes G é uma aplicação suave $X : G \to M_{n\times n}$ tal que $X(A) \in T_AG$, para todo $A \in G$. O conjunto dos campos vetoriais em G será denotado pelo símbolo $\mathfrak{X}(G)$. Dizemos que um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(G)$ é invariante à esquerda (resp. à direita), se

$$X(AB) = AX(B) \qquad (\text{resp. } X(AB) = X(A)B)$$

para quaisquer $A, B \in G$. Denotaremos os conjuntos dos campos invariantes a esquerda e a direita por $\mathfrak{X}_L(G)$ e $\mathfrak{X}_R(G)$, respectivamente.

A proposição abaixo relaciona a álgebra de Lie de um grupo de Lie G com o conjunto dos seus campos invariantes à esquerda:

Proposição 12. *A aplicação* $\Psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}_L(G)$ *definida por*

$$\Psi(A)(B) = BA \qquad , A \in \mathfrak{g} \text{ e } B \in G$$

é um isomorfismo de espaços vetoriais.$\mathfrak{X}_L(G)$ *e* $\mathfrak{g}$ *são isomorfos.*

Demonstração. Dado $A \in \mathfrak{g}$, defina $V = \Psi(A) \in \mathfrak{X}_L(G)$. Primeiramente, vamos mostrar que V está bem definida, isto é, mostrar que $BA \in T_BG$, para todo $B \in G$. Com efeito, seja $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow G$ uma curva suave tal que $\alpha(0) = Id$ e $\alpha'(0) = A$. A partir de α, defina a curva $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow G$, onde $\beta(t) = B\alpha(t)$. Note que

$$\beta(0) = B\alpha(0) = B(Id) = B \qquad \text{e} \qquad \beta'(0) = B\alpha'(0) = BA,$$

portanto $BA \in T_BG$. Temos que o campo V é diferenciável, pois cada coordenada é uma função polinomial (já que V se resume a multiplicar duas matrizes).

Agora vamos verificar que V é um campo invariante à esquerda. De fato:

$$V(CB) = (CB)A = C(BA) = CV(B),$$

para quaisquer $B, C \in G$. Nos resta verificar a linearidade, injetividade e sobrejetividade de Ψ. Com relação à linearidade, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $J, K \in \mathfrak{g}$ e $B \in G$, segue que

$$\Psi(\alpha J + \beta K)(B) = (\alpha J + \beta K)B = \alpha JB + \beta KB = \alpha\Psi(J)(B) + \beta\Psi(K)(B).$$

Vamos provar a injetividade. Dados $J, K \in \mathfrak{g}$ tais que $\Psi(J) = \Psi(K)$, segue que

$$J = J(Id) = \Psi(J)(Id) = \Psi(K)(Id) = K(Id) = K,$$

portanto Ψ é injetora. Por fim, dado $V \in \mathfrak{X}_L(G)$, vamos provar que $V = \Psi(V(Id))$. De fato, dado que V é invariante à esquerda, segue que

$$\Psi(V(Id))(B) = BV(Id) = V(B),$$

para todo $B \in G$ isso prova a sobrejetividade de Ψ e conclui a demonstração. ■

Nosso próximo objetivo é obter uma caracterização da álgebra de Lie de um Grupo de Lie que facilite seu entendimento e os caminhos para encontrá-la. Comecemos com o seguinte lema:

Lema 13. *Considere um grupo de Lie de matrizes G. Se $X \in \mathfrak{X}_L(G)$ é um campo invariante à esquerda, então seu fluxo maximal é*

$$\theta_X : (t, A) \in \mathbb{R} \times G \to A \exp(tX_0) \in G$$

onde $X_0 = X(Id) \in \mathfrak{g}$.

Demonstração. Considere um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}_L(G)$ e observe que

$$X(A) = X(AId) = AX(Id) = AX_0$$

para toda matriz $A \in G$. Podemos então considerar a extensão natural $\widetilde{X} \in \mathfrak{X}_L(GL(n))$ de X definida por

$$\widetilde{X}(A) = AX_0$$

para toda $A \in GL(n)$. Em particular, $\widetilde{X}(Id) = X_0$.

Decorre da igualdade acima e das propriedades (9), (5) e (7) que, para toda matriz $A_0 \in G$, a aplicação

$$A : t \in \mathbb{R} \longmapsto A_0 \exp(tX_0) \in GL(n)$$

verifica

$$A'(t) = A_0 X_0 \exp(tX_0) = A_0 \exp(tX_0) X_0 = A(t) X_0 = \widetilde{X}(A(t)).$$

Portanto $A(t)$ é a única solução do PVI

$$\begin{cases} A'(t) = \widetilde{X}(A(t)), \\ A(0) = A_0. \end{cases}$$

Com isso, temos o fluxo global

$$\widetilde{\theta_X} : (t, A_0) \in \mathbb{R} \times GL(n) \longrightarrow A_0 \exp(tX_0) \in GL(n).$$

do campo $\widetilde{X}$ em $GL(n)$.

Como G é uma subvariedade fechada de $GL(n)$ concluímos que o fluxo maximal θ_X de X sobre G está definido em $\mathbb{R} \times G$ e vale que $\theta_X = \widetilde{\theta_X}_{|\mathbb{R}\times G}$. Mais precisamente,

$$\theta_X : (t, A_0) \in \mathbb{R} \times G \longrightarrow \widetilde{\theta_X}(t, A_0) = A_0 \exp(tX_0) \in G.$$

■

Com esse resultado em mãos, estamos aptos a demonstrar o seguinte resultado que caracteriza a álgebra de Lie:

Teorema 14. *Dado um grupo de Lie de matrizes $G < GL(n)$ com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, segue que*

$$\mathfrak{g} = \{A \in M_{n\times n} \; ; \; \exp(tA) \in G\}$$

Demonstração. Dado $A \in \mathfrak{g}$, segue da Proposição (12) que existe um único campo invariante à esquerda $X_A \in \mathfrak{g}$ tal que

$$X_A(Id) = A.$$

Além disso, segue do lema anterior que $\exp(tA) \in G$ para todo t. Por fim, dado $B \in M_{n\times n}$ tal que $\exp(tB) \in G$, temos que

$$\exp(0.B) = \exp(0) = Id,$$

e além disso,

$$\frac{d}{dt}_{|t=0}(\exp(tB)) = B\exp(tB)_{|t=0} = B\exp(0) = B.Id = B.$$

Portanto $B \in T_{Id}G$ e isso conclui a demonstração.

■

Exemplo 15. *Vamos encontrar a álgebra de Lie do grupo de Lie*

$$GL(n) = \{A \in M_{n\times n} \; ; \; \det A \neq 0\}.$$

Segue de (7) que

$$\det\exp(tA) = \exp(Tr(A)) \neq 0,$$

para todo $A \in M_{n\times n}$. Portanto a álgebra de Lie de $GL(n)$ é dada por $\mathfrak{gl}(n) = M_{n\times n}$.

Exemplo 16. *Vamos encontrar a álgebra de Lie do grupo de Lie*

$$SO(n) = \left\{A \in M_{n\times n} \; ; \; \det A = 1 \qquad e \qquad AA^t = Id\right\}$$

Segue da proposição anterior que

$$\mathfrak{so}(n) \approx \{A \in M_{n\times n} \; ; \; \exp(tA) \in SO(n)\}$$

Tome $A \in \mathfrak{so}(n)$*. Como* $\exp(tA) \in SO(n)$*, pela propriedade (7) obtemos que*

$$e^{Tr(A)} = \det[\exp(tA)] = 1 \Longrightarrow tr(A) = 0.$$

Além disso, pelas propriedades (8) e (3) e pelo fato de que $\exp(tA) \in SO(n)$ *concluímos o seguinte:*

$$\exp\left(-tA^t\right) = \exp\left((-tA)^t\right) = \exp((-tA))^t = \exp((-tA))^{-1} = \exp(tA)$$

Derivando ambos os extremos, segue que

$$-A^t \exp\left(-tA^t\right) = A\exp(tA)$$

Fazendo $t = 0$*, concluímos que*

$$A = -A^t.$$

Logo A *é antisimetrica.*

Tome B *antisimétrica. Vamos provar que* $\exp(tB) \in SO(n)$*. De fato, como* B *é antissimétrica, segue que os elementos da diagonal de* B *tem que ser todos nulos, assim* $Tr(B) = 0$*. Usando esse fato e a propriedade (7), obtemos que*

$$\det(\exp(tB)) = \exp(Tr(tB)) = \exp(0) = 1.$$

Além disso, segue da propriedades (8),(3) e da definição de B *que*

$$\exp(tB)^{-1} = \exp(-tB) = \exp\left(tB^t\right) = \exp\left((tB)^t\right) = \exp(tB)^t.$$

Portanto concluímos que

$$\mathfrak{so}(n) \approx \left\{A \in M_{n\times n}\ ;\ A = -A^t\right\}$$

Exemplo 17. *Vamos encontrar a álgebra de Lie do grupo de Lie*

$$O(n) = \left\{A\ ;\ AA^t = Id\right\}$$

Segue da proposição anterior que

$$\mathfrak{o}(n) \approx \{A \in M_{n\times n}\ ;\ \exp(tA) \in O(n)\}$$

Tome $A \in \mathfrak{o}(n)$*. Como* $\exp(tA) \in O(n)$ *e pelas propriedades (8) e (3), concluímos o seguinte:*

$$\exp\left(-tA^t\right) = \exp\left((-tA)^t\right) = \exp((-tA))^t = \exp((-tA))^{-1} = \exp(tA)$$

Derivando ambos os extremos, segue que

$$-A^t \exp\left(-tA^t\right) = A \exp(tA)$$

Fazendo $t = 0$, concluímos que

$$A = -A^t.$$

Logo A é antisimetrica.

Tome B antisimétrica. Vamos provar que $\exp(tB) \in O(n)$. De fato, segue da propriedades (8),(3) e da definição de B que

$$\exp(tB)^{-1} = \exp(-tB) = \exp\left(tB^t\right) = \exp\left((tB)^t\right) = \exp(tB)^t.$$

Portanto concluímos que

$$\mathfrak{o}(n) \approx \left\{A \in M_{n\times n}\ ;\ A = -A^t\right\}.$$

Exemplo 18. *Vamos encontrar a álgebra de Lie do grupo de Lie*

$$SL(n) = \{A\ ;\ \det A = 1\}$$

Segue da proposição anterior que

$$SL(n) \approx \{A \in M_{n\times n}\ ;\ \exp(tA) \in SL(n)\}.$$

Tome $A \in SL(n)$. Como $\exp(tA) \in SL(n)$, segue que :

$$e^{Tr(A)} = \det[\exp(tA)] = 1 \Longrightarrow tr(A) = 0$$

Tome $A \in M_{n\times n}$ tal que $tr(A) = 0$. Então obtemos que

$$\det[\exp(tA)] = e^{Tr(A)} = e^0 = 1.$$

Logo $\exp(tA) \in SL(n)$ para todo t. Concluímos disso que

$$\mathfrak{sl}(n) \approx \{A \in M_{n\times n}\ ;\ Tr(A) = 0\}.$$

1.2 Forma de Maurer-Cartan Euclidiana

Como $E(3) \approx O(3) \rtimes \mathbb{R}^3$, segue que as respectivas álgebras de Lie são identificadas da seguinte maneira:

$$\mathcal{E}(3) \approx \mathfrak{o}(3) \oplus \mathbb{R}^3,$$

onde $\mathfrak{o}\,(3)$ é a álgebra de Lie de $O\,(3)$. Também podemos olhar $\mathcal{E}\,(3)$ dentro de $\mathfrak{gl}\,(4) = M_{4\times 4}$ através da aplicação injetora

$$(X, x) \in \mathfrak{o}\,(3) \oplus \mathbb{R}^3 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & X \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}\,(4) \ . \tag{1.6}$$

Definição 19. *A* ***forma de Maurer-Cartan*** *de $E(3)$ é dada pela seguinte aplicação*

$$\omega : (A, v) \in E(3) \mapsto \omega\,(A, v) \in \mathcal{L}\left(T_{(A,v)}E(3); \mathcal{E}\,(3)\right),$$

onde $\omega\,(A, v)\,B = (A, v)^{-1}\,B$, para todo $B \in T_{(A,v)}E(3)$.

Vamos mostrar que essa aplicação está bem definida, ou seja, $(A, v)^{-1}\,B \in \mathcal{E}\,(3)$, para todo $P = (A, v) \in E(3)$ e $B \in T_{(A,v)}E(3)$. Com efeito, comecemos caracterizando o espaço tangente $T_{(A,v)}E(3)$ da seguinte maneira: Tomemos uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow E\,(3)$ tal que:

$$\alpha\,(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \alpha'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & C \end{pmatrix} \in \mathcal{E}(3).$$

A partir de α, podemos definir a seguinte curva: $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow E\,(3)$, onde $\beta\,(t) = P\alpha\,(t)$. Segue disso que:

$$\beta\,(0) = P\alpha\,(0) = P\,(Id) = P,$$

e portanto:

$$\beta'\,(0) = P\alpha'\,(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Ay & AC \end{pmatrix},$$

onde $v \in \mathbb{R}^3$e $A \in O(3)$. Portanto, podemos definir o espaço tangente de $E(3)$ em $P = (A, v)$ como segue:

$$T_P E(3) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & AD \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}\,(\mathbb{R}) : x \in \mathbb{R}^3; D \in \mathfrak{o}\,(3) \right\}.$$

Segue disso que existe $x \in \mathbb{R}^3$ e $D \in \mathfrak{o}\,(3)$ tal que

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & AD \end{pmatrix}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \omega\,(A, v)\,B = (A, v)^{-1}\,B &\approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & A \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & AD \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A^{-1}x & A^{-1}AD \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A^{-1}x & D \end{pmatrix} \in \mathcal{E}(3). \end{aligned}$$

Como $\mathcal{E}(3) \approx \mathfrak{o}(3) \oplus \mathbb{R}^3$, podemos separar ω da seguinte maneira:

$$\omega(A,v) = \omega_{\mathfrak{o}}(A,v) + \omega_{\mathbb{R}^3}(A,v),$$

para todo $(A,v) \in E(3)$.
Vamos checar como é a expressão da forma de Maurer-Cartan:

$$\begin{aligned}\omega(A,v)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & B \end{pmatrix} &= (A,v)^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & B \end{pmatrix} = \left(A^{-1}, -A^{-1}v\right)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & B \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -A^{-1}v & A^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A^{-1}x & A^{-1}B \end{pmatrix},\end{aligned}$$

para todo $(A,v) \in E(3)$, $x \in \mathbb{R}^3$ e $B \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Segue da expressão acima que as componentes da forma de Maurer-Cartan têm as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}\omega_{\mathfrak{o}}(A,v)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & B \end{pmatrix} &= A^{-1}B \\ \omega_{\mathbb{R}^3}(A,v)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & B \end{pmatrix} &= A^{-1}x\end{aligned}$$

Podemos escrever essas componentes em termos de outras formas diferenciais da seguinte maneira: Sejam as formas diferenciais que projetam um vetor em uma determinada coordenada:

$$\begin{cases} dx : P \in E(3) \mapsto dx(P) \in \mathcal{L}\left(T_{(A,v)}E(3); \mathbb{R}^3\right) \\ \qquad dx(P).\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & B \end{pmatrix} = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} dA : P \in E(3) \mapsto dx(P) \in \mathcal{L}\left(T_{(A,v)}E(3); M_{3\times 3}(\mathbb{R})\right) \\ \qquad dA(P).\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & B \end{pmatrix} = B \end{cases}$$

Com isso, temos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}\omega_{\mathbb{R}^3} &= A^{-1}dx = \left(\omega^i\right) \\ \omega_{\mathfrak{o}} &= A^{-1}dA = \left(\omega_i^j\right)\end{aligned}$$

Derivando essas formas obteremos as chamadas **equações estruturais de Maurer-Cartan** em $E(3)$:

$$\begin{aligned}d\omega_{\mathbb{R}^3} &= d\left(A^{-1}\right)dx = -A^{-1}(dA)A^{-1} \wedge dx = -A^{-1}dA \wedge A^{-1}dx = -\omega_{\mathfrak{o}} \wedge \omega_{\mathbb{R}^3} \\ d\omega_{\mathfrak{o}} &= d\left(A^{-1}\right)dA = -A^{-1}(dA)A^{-1} \wedge dA = -A^{-1}(dA) \wedge A^{-1}dA = -\omega_{\mathfrak{o}} \wedge \omega_{\mathfrak{o}}\end{aligned}$$

Em termos matriciais, temos que:

$$\begin{pmatrix} d\omega^1 \\ d\omega^2 \\ d\omega^3 \end{pmatrix} = d\omega_{\mathbb{R}^3} = -\omega_{\mathfrak{o}} \wedge \omega_{\mathbb{R}^3} = -\begin{pmatrix} 0 & \omega_1^2 & \omega_1^3 \\ \omega_2^1 & 0 & \omega_2^3 \\ \omega_3^1 & \omega_3^2 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \omega_1^2 \wedge \omega^2 + \omega_1^3 \wedge \omega^3 \\ \omega_2^1 \wedge \omega^1 + \omega_2^3 \wedge \omega^3 \\ \omega_3^1 \wedge \omega^1 + \omega_3^2 \wedge \omega^2 \end{pmatrix}.$$

Além disso,

$$\begin{pmatrix} d\omega_1^1 & d\omega_1^2 & d\omega_1^3 \\ d\omega_2^1 & d\omega_2^2 & d\omega_2^3 \\ d\omega_3^1 & d\omega_3^2 & d\omega_3^3 \end{pmatrix} = d\omega_{\mathfrak{o}} = -\omega_{\mathfrak{o}} \wedge \omega_{\mathfrak{o}} = -\begin{pmatrix} 0 & \omega_1^2 & \omega_1^3 \\ \omega_2^1 & 0 & \omega_2^3 \\ \omega_3^1 & \omega_3^2 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 & \omega_1^2 & \omega_1^3 \\ \omega_2^1 & 0 & \omega_2^3 \\ \omega_3^1 & \omega_3^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} \omega_1^2 \wedge \omega_2^1 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^1 & \omega_1^3 \wedge \omega_3^2 & \omega_1^2 \wedge \omega_2^3 \\ \omega_2^3 \wedge \omega_3^1 & \omega_2^1 \wedge \omega_1^2 + \omega_2^3 \wedge \omega_3^2 & \omega_2^1 \wedge \omega_1^3 \\ \omega_3^2 \wedge \omega_2^1 & \omega_3^1 \wedge \omega_1^2 & \omega_3^1 \wedge \omega_1^3 + \omega_3^2 \wedge \omega_2^3 \end{pmatrix}$$

Ou seja, em cada coordenada vale o seguinte:

$$d\omega^i = -\sum_{j=1}^{3} \omega_i^j \wedge \omega^j \qquad \text{e} \qquad d\omega_i^j = -\sum_{k=1}^{3} \omega_i^k \wedge \omega_k^j.$$

1.3 Representação Adjunta Euclidiana

Considere a ação isométrica de $E\,(3)$ em $\mathbb{R}^3$

$$\mu : ((A, v)\,, w) \in E\,(3) \times \mathbb{R}^3 \longmapsto \mu_{(A,v)}\,(w) = Aw + v \in \mathbb{R}^3$$

definida na Proposição (6) e denote por $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^3$.

Segue da Proposição (6) que, para todo elemento $(A, v) \in E\,(3)$,

$$\left\{A_i = d\left(\mu_{(A,v)}\right)_0 .\epsilon_i \;;\; i = 1, 2, 3\right\}$$

é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

Para expressar melhor os elementos A_i acima, considere as curvas suaves

$$\alpha_i : t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \to t\epsilon_i \in \mathbb{R}^3 \qquad i = 1, 2, 3.$$

e observe que

$$\left(\mu_{(A,v)} \circ \alpha_i\right)(t) = \mu_{(A,v)}\,(t\epsilon_i) = \mu\,((A, v)\,, t\epsilon_i) = tA\epsilon_i + v,$$

para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ e $i = 1, 2, 3$. Portanto

$$A_i = d\left(\mu_{(A,v)}\right)_0 .\epsilon_i = \frac{d}{dt}_{|t=0} \left(\mu_{(A,v)} \circ \alpha_i\right)(t) = A\epsilon_i,$$

para todo $i = 1, 2, 3$. Ou seja, A_i é a i-ésima coluna da matriz A.

Note que toda base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ pode ser obtida dessa maneira pois as base ortonormais de $\mathbb{R}^3$ estão em correspondência biunívoca com $O(3)$. Isto é, variando a matriz A obteremos todas as bases ortogonais de $\mathbb{R}^3$.

Lembramos que $E(3)_0$, o subgrupo de isotropia de $E(3)$ com relação à origem $0 = (0, 0, 0)$ de $\mathbb{R}^3$, é isomorfo à $O(3)$. Consequentemente, sua álgebra de Lie $\mathcal{E}(3)_0$ é isomorfa à $\mathfrak{o}(3) \approx \mathfrak{o}(3) \oplus \{0\}$.

Defina $m_0 = \mathcal{E}(3) / \mathcal{E}(3)_0$. Como $\mathcal{E}(3) \approx \mathfrak{o}(3) \oplus \mathbb{R}^3$, concluímos que

$$m_0 \approx \left(\mathfrak{o}(3) \oplus \mathbb{R}^3\right) / \mathfrak{o}(3) \approx \mathbb{R}^3.$$

Mais precisamente, considere a aplicação

$$\pi_0 : (A, v) \in E(3) \longrightarrow v \in \mathbb{R}^3 \tag{1.7}$$

cuja diferencial é a aplicação linear

$$d(\pi_0)_{(Id,0)} : (B, w) \in \mathcal{E}(3) \to w \in \mathbb{R}^3.$$

Note que $Ker d(\pi_0)_{(Id,0)} = \mathcal{E}(3)_0$ e consequentemente a aplicação quociente

$$\overline{d(\pi_0)_{(Id,0)}} : m_0 = \mathcal{E}(3) / \mathcal{E}(3)_0 \to \mathbb{R}^3$$

é um isomorfismo. Observe ainda que $\beta = \left\{E_i = \overline{(0, \epsilon_i)}\right\}_{i=1,2,3}$ é uma base de m_0 pois

$$d(\pi_0)_{(Id,0)}(0, \epsilon_i) = \epsilon_i, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Definimos a ação adjunta de $O(3)$ sobre $\mathbb{R}^3$ por

$$Ad : (A, w) \in O(3) \times \mathbb{R}^3 \to Aw \in \mathbb{R}^3.$$

Pela expressão da aplicação e pela Observação (7), segue que a aplicação adjunta é de fato uma ação de $O(3)$ em $\mathbb{R}^3$.

Para toda matriz $A \in O(3)$, podemos utilizar o isomorfismo existente entre m_0 e $\mathbb{R}^3$ para pensar na aplicação Ad_A como um operador linear de m_0. Com isso, podemos definir a aplicação $\overline{Ad} : O(3) \longrightarrow M_{3\times 3}$, denominada **representação adjunta de $O(3)$ relativa à base** β, que associa, a cada elemento $A \in O(3)$, a matriz de Ad_A na base β.

Notemos que se $A = (A_{ij}) \in O(3)$, então:

$$Ad_A E_i \approx Ad_A\,(0, \epsilon_i) = A\epsilon_i \approx \overline{(0, A\epsilon_i)} = A_{1i}E_1 + A_{2i}E_2 + A_{3i}E_3,$$

para $i = 1, 2, 3$. Logo $\overline{Ad}\,(A, 0) = A$ e, portanto, o conjunto de todas as representações adjuntas de $O(3)$ relativas à β está em bijeção com $O(3)$.

Capítulo 2

Geometria Diferencial Euclidiana

Neste capítulo, vamos realizar o procedimento de redução de um referencial móvel para uma imersão no espaço euclidiano, e com isso, estaremos aptos à cálcular as curvaturas das mesmas. Além disso, utilizaremos os referenciais móveis para demonstrar teoremas de caracterização, de existência e congruência.

2.1 Resumo do curso clássico de Geometria Diferencial

Seja M^2 uma superfície de dimensão 2 e $x : M \to \mathbb{R}^3$ uma imersão. Em coordenadas locais, isto significativa que

$$x_u\left(u, v\right) := \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \qquad \text{e} \qquad x_v\left(u, v\right) := \frac{\partial x}{\partial v}(u, v)$$

são L.I's, para todo $(u, v) \in M$. O campo vetorial normal unitário local ao longo de x é definido por

$$e_3\left(u, v\right) := \pm \frac{x_u\left(u, v\right) \times x_v\left(u, v\right)}{\left\| x_u\left(u, v\right) \times x_v\left(u, v\right) \right\|}.$$

Gauss baseou sua teoria de superfícies na 1^a e 2^a formas fundamentais:

$$I = \langle dx, dx \rangle = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$
$$II = -\langle dx, de_3 \rangle = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2,$$

onde, para todo $p \in x\left(M\right)$

$$du_p : \alpha x_u + \beta x_v \in T_pM \to \alpha \in \mathbb{R},$$
$$dv_p : \alpha x_u + \beta x_v \in T_pM \to \beta \in \mathbb{R},$$

ou seja, usando a compatibilidade da conexão Riemanniana com a métrica e a ortogonalidade da base coordenada com o campo normal, temos que:

$$I_p(v) = \langle v(p), v(p)\rangle = \langle x_u(p), x_u(p)\rangle \alpha^2 + 2\langle x_u(p), x_v(p)\rangle \alpha\beta + \langle x_v(p), x_v(p)\rangle \beta^2$$

$$\begin{aligned}
II_p(v) &= -\left\langle v(p), d(e_3)_p.(p)\right\rangle = -\left\langle \alpha x_u + \beta x_v, d(e_3)_p.(\alpha x_u + \beta x_v)\right\rangle \\
&= -\langle \alpha x_u(p) + \beta x_v(p), \alpha\partial_u e_3(p) + \beta\partial_v e_3(p)\rangle \\
&= -\alpha^2\langle x_u(p), \partial_u e_3(p)\rangle - \alpha\beta\langle x_u(p), \partial_v e_3(p)\rangle - \alpha\beta\langle x_v(p), \partial_u e_3(p)\rangle - \beta^2\langle x_v(p), \partial_v e_3(p)\rangle \\
&= \alpha^2\langle x_{uu}(p), e_3(p)\rangle + \alpha\beta\langle x_{uv}(p), e_3(p)\rangle + \alpha\beta\langle x_{vu}(p), e_3(p)\rangle + \beta^2\langle x_{vv}(p), e_3(p)\rangle \\
&= \alpha^2\langle x_{uu}(p), e_3(p)\rangle + 2\alpha\beta\langle x_{uv}(p), e_3(p)\rangle + \beta^2\langle x_{vv}(p), e_3(p)\rangle
\end{aligned}$$

Note que $I_p(v) > 0$, para todo $v \neq 0$. Logo está bem definida a seguinte aplicação:

Definição 20. *Dada uma imersão $x : (u,v) \in M \to x(u,v) \in \mathbb{R}^3$ e um ponto $p \in x(M)$, definimos a seguinte aplicação:*

$$(k_N)_p(v) = \frac{II_p(v)}{I_p(v)} = \frac{\alpha^2\langle x_{uu}(p), e_3(p)\rangle + 2\alpha\beta\langle x_{uv}(p), e_3(p)\rangle + \beta^2\langle x_{vv}(p), e_3(p)\rangle}{\langle x_u(p), x_u(p)\rangle \alpha^2 + 2\langle x_u(p), x_v(p)\rangle \alpha\beta + \langle x_v(p), x_v(p)\rangle \beta^2}, \qquad v \neq 0.$$

e a chamamos de ***curvatura normal de*** $\mathbf{p}$ ***em*** $\mathbf{v}$.

Geometricamente, a curvatura normal de x em v é justamente a curvatura da curva $x \cap Span\{e_3, v\}$. Note que ao multiplicar v por um escalar t não nulo, o subespaço $Span\{e_3, tv\}$ é o mesmo que $Span\{e_3, v\}$, logo a curva $x \cap Span\{e_3, tv\}$ é a mesma, ou seja:

$$\begin{aligned}
(k_N)_p(tv) &= \frac{II_p(tv)}{I_p(tv)} = \frac{\alpha^2 t^2\langle x_{uu}(p), e_3(p)\rangle + 2\alpha\beta t^2\langle x_{uv}(p), e_3(p)\rangle + \beta^2 t^2\langle x_{vv}(p), e_3(p)\rangle}{\langle x_u(p), x_u(p)\rangle \alpha^2 t^2 + 2\langle x_u(p), x_v(p)\rangle t^2\alpha\beta + \langle x_v(p), x_v(p)\rangle t^2\beta^2} \\
&= \frac{t^2\left(\alpha^2\langle x_{uu}(p), e_3(p)\rangle + 2\alpha\beta\langle x_{uv}(p), e_3(p)\rangle + \beta^2\langle x_{vv}(p), e_3(p)\rangle\right)}{t^2\left(\langle x_u(p), x_u(p)\rangle \alpha^2 + 2\langle x_u(p), x_v(p)\rangle \alpha\beta + \langle x_v(p), x_v(p)\rangle \beta^2\right)} \\
&= \frac{\alpha^2\langle x_{uu}(p), e_3(p)\rangle + 2\alpha\beta\langle x_{uv}(p), e_3(p)\rangle + \beta^2\langle x_{vv}(p), e_3(p)\rangle}{\langle x_u(p), x_u(p)\rangle \alpha^2 + 2\langle x_u(p), x_v(p)\rangle \alpha\beta + \langle x_v(p), x_v(p)\rangle \beta^2} = (k_N)_p(v).
\end{aligned}$$

Note que, para todo $p \in \Omega$, a aplicação $(k_N)_p : T_p x \to \mathbb{R}$ é contínua. Pela observação acima, podemos restringir a aplicação na bola unitária. Logo $(k_N)_p$ admite pontos de máximo e mínimo.

Definição 21. *Dada uma imersão $x : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e um ponto $p \in x(M)$, definimos as* ***curvaturas principais de*** $\mathbf{x}$ ***em*** $\mathbf{p}$ *como os valores de mínimo e de máximo da aplicação $(k_N)_p$. Denotamos essas curvaturas por k_1 e k_2. Definimos também as* ***curva-***

turas média e Gaussiana de $\mathbf{x}$ ***em*** $\mathbf{p}$, *respectivamente por*

$$H(p) = \frac{k_1 + k_2}{2} \qquad e \qquad K(p) = k_1 k_2.$$

Definição 22. *Uma imersão $x : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é dita* ***superfície de Weingarten*** *se existe uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que*

$$f(a, c) = 0,$$

onde a e c são as curvaturas principais de x em $p \in x(M)$.

Temos alguns exemplos importantes de superfícies de Weingarten:

1. No caso em que
$$0 = H = \frac{k_1 + k_2}{2},$$
as superfícies são chamadas de **superfícies mínimas.**

2. No caso em que
$$H = c \in \mathbb{R}^*,$$
as superfícies são chamadas de **superfícies de curvatura média constante.**

3. No caso em que
$$K = c \in \mathbb{R},$$
as superfícies são chamadas de **superfícies de curvatura constante.**

Dado um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ uma função suave $g : U \to \mathbb{R}$, a imersão

$$x : (u, v) \in U \to (u, v, g(u, v)) \in \mathbb{R}^3,$$

tem curvaturas média e gaussiana dadas, respectivamente, por:

$$H = \frac{(1 + g_v^2)\, g_{uu} - 2 g_u g_v g_{uv} + (1 + g_u^2)\, g_{vv}}{2\,(1 + g_u^2 + g_v^2)^{3/2}} \qquad \text{e} \qquad K = \frac{g_{uu} g_{vv} - g_{uv}^2}{(1 + g_u^2 + g_v^2)^2}.$$

2.2 Teoria das Superfícies de Darboux, Cartan e Chern

Definição 23. *Um* ***referencial móvel*** *Euclidiano em um aberto $U \subset \mathbb{R}^3$ é uma aplicação*

$$(e, x) : p \in U \to (e(p), x(p)) \in O(3) \rtimes \mathbb{R}^3 = E(3).$$

Escreva $x=(x^1,x^2,x^3)$ e $e=(e_1,e_2,e_3)$, onde e_i são os vetores coluna da matriz e. Note que $\{e_1(p), e_2(p), e_3(p)\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, para todo $p\in U$. Segue disso que

$$dx_p.v=\sum_{i=1}^{3}\omega_p^i(v)\,e_i \overset{\text{base ort.}}{\Rightarrow} \omega_p^i(v)=\langle dx_p.v, e_i\rangle$$
$$d(e_i)_p.v=\sum_{j=1}^{3}\left(\omega_j^i\right)_p(v)\,e_j \overset{\text{base ort.}}{\Rightarrow} \left(\omega_j^i\right)_p(v)=\left\langle d(e_i)_p.v, e_j\right\rangle$$

Ou seja, temos que

$$dx_p.v=\sum_{i=1}^{3}\langle dx_p.v, e_i\rangle\, e_i \qquad \text{e} \qquad d(e_i)_p.v=\sum_{j=1}^{3}\left\langle d(e_i)_p.v, e_j\right\rangle e_j$$

Como $\{e_1,e_2,e_3\}$ é base ortonormal, segue que

$$\langle e_i, e_j\rangle=\delta_{ij}.$$

Derivando ambos os lados obtemos que:

$$\begin{aligned} 0&=d\left(\langle e_i,e_j\rangle\right)_p.v=\left(\langle e_i,e_j\rangle\circ\alpha\right)'(0)=\left(\langle e_i\circ\alpha, e_j\circ\alpha\rangle\right)'(0) \\ &=\left\langle (e_i\circ\alpha)'(0), e_j\circ\alpha\right\rangle+\left\langle e_i\circ\alpha, (e_j\circ\alpha)'(0)\right\rangle \\ &=\left\langle d(e_i)_p.v, e_j\right\rangle+\left\langle e_i, d(e_j)_p.v\right\rangle=\left(\omega_j^i\right)_p(v)+\left(\omega_i^j\right)_p(v), \end{aligned} \tag{2.1}$$

para todo $i,j=1,2,3$, $p\in U$ e $v\in T_pU$. Como a diferencial de uma forma exata é nula, segue que:

$$\begin{aligned} 0=d^2x=d\left(\sum_{i=1}^{3}\omega^i\wedge e_i\right)&=\sum_{i=1}^{3}d\left(\omega^i\wedge e_i^1,\omega^i e_i^2,\omega^i e_i^3\right)=\sum_{i=1}^{3}\left(d\left(\omega^i\wedge e_i^1\right), d\left(\omega^i\wedge e_i^2\right), d\left(\omega^i\wedge e_i^3\right)\right) \\ &=\sum_{i=1}^{3}\left(d\omega^i\wedge e_i^1+(-1)^1\omega^i\wedge de_i^1, d\omega^i\wedge e_i^2+(-1)^1\omega^i\wedge de_i^2, d\omega^i\wedge e_i^3+(-1)^1\omega^i\wedge de_i^3,\right) \\ &=\sum_{i=1}^{3}\left(d\omega^i\wedge e_i^1, d\omega^i\wedge e_i^2, d\omega^i\wedge e_i^3\right)-\sum_{i=1}^{3}\left(\omega^i\wedge de_i^1,\omega^i\wedge de_i^2,\omega^i\wedge de_i^3\right) \\ &=\sum_{i=1}^{3}d\omega^i\wedge e_i-\sum_{i=1}^{3}\omega^i\wedge de_i \end{aligned}$$

Usando que $de_i = \sum_{j=1}^{3} \omega_j^i \wedge e_j$, segue que

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{3} d\omega^i \wedge e_i - \sum_{i=1}^{3} \omega^i \wedge \left(\sum_{j=1}^{3} \omega_j^i \wedge e_j \right) = \sum_{i=1}^{3} d\omega^i \wedge e_i - \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \omega^i \wedge \left(\omega_j^i \wedge e_j \right) \\
&= \sum_{i=1}^{3} d\omega^i \wedge e_i - \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \left(\omega^i \wedge \omega_j^i \right) \wedge e_j = \sum_{i=1}^{3} d\omega^i \wedge e_i - \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} \left(\omega^i \wedge \omega_j^i \right) \wedge e_j \\
&= \sum_{i=1}^{3} d\omega^i \wedge e_i - \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \left(\omega^j \wedge \omega_i^j \right) \wedge e_i \\
&= \sum_{i=1}^{3} \left(d\omega^i - \sum_{j=1}^{3} \left(\omega^j \wedge \omega_i^j \right) \right) \wedge e_i,
\end{aligned}$$

Ou seja, concluímos o seguinte:

$$0 = d\omega^i - \sum_{j=1}^{3} \left(\omega^j \wedge \omega_i^j \right) \Longrightarrow d\omega^i = \sum_{j=1}^{3} \left(\omega^j \wedge \omega_i^j \right) \Longrightarrow d\omega^i = - \sum_{j=1}^{3} \left(\omega_i^j \wedge \omega^j \right).$$

Além disso, $d^2 e_i = 0$, para $i = 1, 2, 3$, logo concluímos que:

$$\begin{aligned}
0 = d^2 e_i &= d \left(\sum_{j=1}^{3} \omega_j^i \wedge e_j \right) = \sum_{j=1}^{3} \left(d\omega_j^i \wedge e_j - \omega_j^i \wedge de_j \right) = \sum_{j=1}^{3} \left(d\omega_j^i \wedge e_j - \omega_j^i \wedge \left(\sum_{k=1}^{3} \omega_k^j \wedge e_k \right) \right) \\
&= \sum_{j=1}^{3} \left(d\omega_j^i \wedge e_j - \sum_{k=1}^{3} \omega_j^i \wedge \omega_k^j \wedge e_k \right) = \sum_{j=1}^{3} d\omega_j^i \wedge e_j - \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \omega_j^i \wedge \omega_k^j \wedge e_k \\
&= \sum_{k=1}^{3} d\omega_k^i \wedge e_k - \sum_{k=1}^{3} \left(\sum_{j=1}^{3} \omega_j^i \wedge \omega_k^j \right) \wedge e_k = \sum_{k=1}^{3} d\omega_k^i \wedge e_k - \sum_{k=1}^{3} \left(\sum_{j=1}^{3} \omega_j^i \wedge \omega_k^j \right) \wedge e_k \\
&= \sum_{k=1}^{3} \left(d\omega_k^i \wedge e_k - \left(\sum_{j=1}^{3} \omega_j^i \wedge \omega_k^j \right) \wedge e_k \right) = \sum_{k=1}^{3} \left(d\omega_k^i - \left(\sum_{j=1}^{3} \omega_j^i \wedge \omega_k^j \right) \right) \wedge e_k,
\end{aligned}$$

ou seja, temos que:

$$0 = d\omega_k^i - \left(\sum_{j=1}^{3} \omega_j^i \wedge \omega_k^j \right) \Rightarrow d\omega_k^i = \sum_{j=1}^{3} \omega_j^i \wedge \omega_k^j.$$

E isso nos dá as **equações estruturais**:

$$d\omega^i = - \sum_{k=1}^{3} \omega_i^k \wedge \omega^k \qquad \text{e} \qquad d\omega_j^i = \sum_{k=1}^{3} \omega_k^i \wedge \omega_j^k. \tag{2.2}$$

As últimas equações mostram que as **formas de curvatura** do espaço euclidiano são zero, ou seja:

$$\Omega_j^i := d\omega_i^j + \sum_{k=1}^{3} \omega_k^i \wedge \omega_j^k = 0, \text{ para todo } i, j = 1, ..., 3.$$

Sejam M uma superfície, isto é, uma variedade diferenciável de dimensão 2, $U \subset M$ um subconjunto aberto e $x = (x^1, x^2, x^3) : U \subset M \to \mathbb{R}^3$ uma imersão suave. Lembramos que a condição de x ser uma imersão significa que a dimensão da imagem de dx_p é igual à dimensão de M, que é 2, para todo $p \in M$.

Dado um ponto $p \in U$, segue que a diferencial da imersão x no ponto p é dada pela seguinte aplicação:

$$dx_p = \left(dx_p^1, dx_p^2, dx_p^3\right) : T_pM \to \mathbb{R}^3,$$

onde as diferenciais coordenadas são da forma

$$dx_p^i : T_pM \to \mathbb{R}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Definição 24. *Dada uma imersão $x : U \subset M \to \mathbb{R}^3$, um $x-$**referencial móvel Euclidiano** é uma aplicação da forma*

$$(e, x) : p \in U \to (e(p), x(p)) \in O(3) \rtimes \mathbb{R}^3 = E(3),$$

Escreva $x = (x^1, x^2, x^3)$ e $e = (e_1, e_2, e_3)$, onde e_i são os vetores coluna da matriz e. Note que $\{e_1(p), e_2(p), e_3(p)\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, para todo $p \in U$. Segue que

$$dx_p.v = \sum_{i=1}^{3} \omega_p^i(v)\, e_i(p),$$

para todo $p \in U$ e todo $v \in T_pM$, onde $\omega_p^i : T_pM \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$. Usando que $\{e_1(p), e_2(p), e_3(p)\}$ é base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, obtemos que

$$\omega_p^i(v) = \langle dx_p.v, e_i(p)\rangle, \; i = 1, 2, 3.$$

Ou seja, temos que

$$dx_p.v = \sum_{i=1}^{3} \langle dx_p.v, e_i(p)\rangle\, e_i(p).$$

Suponha que possamos escolher um campo normal unitário e_3 para a superfície. Tal campo existirá em M desde que M seja orientável. Nesse caso, o campo e_3 é completamente determinado à menos de sinal (assumindo que M é conexo). Com a escolha de e_3 segue que o plano tangente, que é a imagem de dx_p, para todo $p \in M$, é justamente $Span\{e_1, e_2\}$. Ou seja, escolhendo e_3 como um campo normal à superfície, obtemos que

$$\omega_p^3(v) = \langle dx_p.v, e_3(p)\rangle = 0, \tag{2.3}$$

para todo $p \in U$ e todo $v \in T_pM$, ou seja, $\omega_p^3 \equiv 0$. Segue da condição de imersão que $\left\{\omega_p^1, \omega_p^2\right\}$ é um conjunto L.I, para todo $p \in U$, e nesse caso, dizemos que $\{\omega^1, \omega^2\}$ é um **co-referencial móvel** em U. Os $x-$referenciais- móveis (e, x) que satisfazem essas condições são chamados $x-$**referenciais móveis de 1^a ordem.** Segue das equações (2.2) e (2.3) que

$$\begin{aligned} 0 = d\omega^3 &= -\omega^1 \wedge \omega_3^1 - \omega^2 \wedge \omega_3^2 - \omega^3 \wedge \omega_3^3 \\ &= -\omega^1 \wedge \omega_3^1 - \omega^2 \wedge \omega_3^2 = \omega_3^1 \wedge \omega^1 + \omega_3^2 \wedge \omega^2 \end{aligned}$$

Ou seja, temos a seguinte relação:

$$\omega_3^1 \wedge \omega^1 + \omega_3^2 \wedge \omega^2 = 0 \tag{2.4}$$

Lema 25 (Lema de Cartan)**.** *Seja $\{\alpha^1, ..., \alpha^p\}$ um conjunto L.I em um espaço vetorial V de dimensão n. Se p elementos $\varphi_1, ..., \varphi_p \in V$ satisfazem a seguinte equação :*

$$\sum_{j=1}^{p} \alpha^j \times \varphi_j = 0,$$

então $\varphi_i = \sum_{j=1}^{p} h_{ij}\alpha^j$, onde $h_{ij} \in \mathbb{R}$ e $h_{ij} = h_{ji}$, para todo $i, j = 1, ..., p$.

Demonstração. Completando a base temos $\{\alpha^1, ..., \alpha^p, \alpha^{p+1}, ..., \alpha^n\}$ base de V. Portanto temos que

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{n} h_{ij}\alpha^j.$$

Além disso, por hipótese

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{i=1}^{p} \alpha^i \times \varphi_i &= \sum_{i=1}^{p} \alpha^i \times \left(\sum_{j=1}^{n} h_{ij}\alpha^j\right) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} h_{ij}\alpha^i \times \alpha^j \\ &= \sum_{i \leq i < j \leq p} (h_{ij} - h_{ji})\, \alpha^i \times \alpha^j + \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=p+1}^{n} h_{ik}\alpha^i \times \alpha^k, \end{aligned}$$

Como $\{\alpha^i \times \alpha^j\}_{i \neq j}^{i,j=1,...,n}$ é um conjunto L.I de $\Lambda_2(V)$, segue que os escalares acima são todos nulos, ou seja

$$h_{ij} = h_{ji} \text{ e } h_{ik} = 0,$$

para todo $i, j = 1, ..., p$ e $k = p + 1, ..., n$.

■

Com uma demonstração totalmente análoga, obtemos o seguinte resultado:

Proposição 26. *Seja $\{\omega^1, ..., \omega^n\}$ um conjunto de L.I de 1-formas suaves em uma vari-*

edade N. Seja $\theta_1, ..., \theta_n$ 1-formas suaves em N tais que:

$$\sum_{i=1}^{n} \omega^i \wedge \theta_i = 0,$$

para todo ponto de N. Então $\theta_i = \sum_{j=1}^{n} h_{ij}\omega^j$, para todo $i = 1, ..., n$ onde $h_{ij} \in \Lambda_1(N, \mathbb{R})$ são tais que $h_{ij} = h_{ji}$, para todo $i, j = 1, ..., n$.

Segue da equação (2.4) e da proposição acima que:

$$\omega_3^1 = h_{11}\omega^1 + h_{12}\omega^2 \qquad \text{e} \qquad \omega_3^2 = h_{21}\omega^1 + h_{22}\omega^2, \tag{2.5}$$

sendo que $h_{12} = h_{21}$.

Comparando com o formalismo de Gauss, vemos que, em termos de um $x-$referencial móvel de 1^a ordem:

$$I = \langle dx, dx \rangle \overset{\omega^3 \equiv 0}{=} \left\langle \sum_{i=1}^{2} \omega^i e_i, \sum_{j=1}^{2} \omega^j e_j \right\rangle \overset{\text{referencial orton.}}{=} \omega^1\omega^1 + \omega^2\omega^2,$$

$$\begin{aligned} II = -\langle dx, de_3 \rangle &= -\left\langle \sum_{i=1}^{2} \omega^i e_i, \sum_{j=1}^{3} \omega_j^3 e_j \right\rangle = -\omega^1\omega_1^3 - \omega^2\omega_2^3 \overset{\text{eq. (2.1)}}{=} \omega^1\omega_3^1 + \omega^2\omega_3^2 \\ &= \omega^1\left(h_{11}\omega^1 + h_{12}\omega^2\right) + \omega^2\left(h_{21}\omega^1 + h_{22}\omega^2\right) = h_{11}\omega^1\omega^1 + \left(h_{12} + h_{21}\right)\omega^1\omega^2 + h_{22}\omega^2\omega^2 \\ &= h_{11}\omega^1\omega^1 + 2h_{12}\omega^1\omega^2 + h_{22}\omega^2\omega^2. \end{aligned}$$

Segue de (2.1), de, (2.2) e de (2.3) que:

$$\begin{aligned} d\omega^1 &= -\sum_{k=1}^{3} \omega^k \wedge \omega_1^k = -\omega^1 \wedge \omega_1^1 - \omega^2 \wedge \omega_1^2 - \omega^3 \wedge \omega_1^3 = -\omega^2 \wedge \omega_1^2, \\ d\omega^2 &= -\sum_{k=1}^{3} \omega^k \wedge \omega_2^k = -\omega^1 \wedge \omega_2^1 - \omega^2 \wedge \omega_2^2 - \omega^3 \wedge \omega_2^3 = -\omega^1 \wedge \omega_2^1, \\ d\omega^3 &= 0. \end{aligned}$$

Tomando a derivada exterior de ω_2^1, e usando as equações estruturais (2.2) nós chegamos no seguinte:

$$\begin{aligned} d\omega_1^2 = \omega_3^2 \wedge \omega_1^3 = \omega_3^1 \wedge \omega_3^2 = \left(h_{11}\omega^1 + h_{12}\omega^2\right) \wedge \left(h_{21}\omega^1 + h_{22}\omega^2\right) &= \left(h_{11}h_{22} - h_{12}^2\right)\omega^1 \wedge \omega^2 \qquad (2.6) \\ = (\det S)\left(\omega^1 \wedge \omega^2\right), \end{aligned}$$

onde $S \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ é a matriz simétrica dada por

$$S := \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}.$$

A matriz S definida acima é de suma importância na teoria de superfícies euclidianas. A partir dela, é possível encontrar as curvaturas principais, média e Gaussiana. Curvaturas essas que caracterizam por completo as superfícies.

Proposição 27. *A matriz S é a matriz do operador $-de_3 : T_xM \to T_xM$ relativa à base e_1, e_2.*

Demonstração. Note que $-d(e_3)_x . v \in T_xM$, para todo $x \in X$ e $v \in T_xM$. De fato, como $\langle e_3, e_3 \rangle \equiv 1$, derivando ambos os lados obtemos que

$$2\langle d(e_3)_x . v, e_3(x)\rangle = 0,$$

para todo $x \in X$ e $v \in T_xM$. Logo temos que

$$\begin{aligned} -d(e_3)_x . e_1 &= -\omega_1^3(e_1)\, e_1(x) - \omega_2^3(e_1)\, e_2(x), \\ -d(e_3)_x . e_2 &= -\omega_1^3(e_2)\, e_1(x) - \omega_2^3(e_2)\, e_2(x). \end{aligned}$$

Usando que a base $\{e_1(x); e_2(x)\}$ e a expressão da 2^a forma fundamental, obtemos que:

$$\begin{aligned} \langle -d(e_3)_x . e_1, e_1\rangle &= -\omega_1^3(e_1) = \omega_3^1(e_1) = h_{11}\omega^1 + h_{12}\omega^2 = h_{11}, \\ \langle -d(e_3)_x . e_1, e_2\rangle &= -\omega_2^3(e_1) = \omega_3^2(e_1) = h_{21}\omega^1 + h_{22}\omega^2 = h_{21}, \\ \langle -d(e_3)_x . e_2, e_1\rangle &= -\omega_1^3(e_2) = \omega_3^1(e_2) = h_{11}\omega^1 + h_{12}\omega^2 = h_{12}, \\ \langle -d(e_3)_x . e_2, e_2\rangle &= -\omega_2^3(e_2) = \omega_3^2(e_2) = h_{21}\omega^1 + h_{22}\omega^2 = h_{22}. \end{aligned}$$

Isso conclui a demonstração. ■

Chamamos a aplicação $-de_3 : T_xM \to T_xM$ de **operador de forma**, ou **aplicação de Weingarten.** Fazendo a identificação $d(e_3)_m (T_mM) \approx T_{e_3(m)}\mathbb{S}^2$, vemos que o operador de forma é justamente a diferencial da **aplicação de Gauss** $-e_3 : M \to T_x\mathbb{S}^2$. Gauss definiu sua curvatura (**curvatura Gaussiana**) como o determinante da matriz jacobiana (S) da aplicação de Gauss. A **curvatura média** é a metade do traço dessa matriz, ou seja,

$$H := \frac{1}{2} Tr(S) = \frac{1}{2}(h_{11} + h_{22}).$$

Além disso, segue de (2.6) que

$$d\omega_1^2 = \omega_3^1 \wedge \omega_3^2 = K\omega^1 \wedge \omega^2, \tag{2.7}$$

As curvaturas principais são os autovalores de S, ou seja, são as raízes do seguinte polinômio:

$$p(t) = \det (S - tId) .$$

Definição 28. *O **Hopf-invariante** h relativo à um x-referencial móvel de 1^a ordem (e, x) em $U \subset M$ é a aplicação*

$$h : p \in U \mapsto \frac{(h_{11}(p) - h_{22}(p))}{2} - ih_{12}(p) \in \mathbb{C}$$

Segue das expressões de h e H e da expressão (2.5) que:

$$\begin{aligned} h\left(\omega^1 + i\omega^2\right) + H\left(\omega^1 - i\omega^2\right) &= \left(\frac{(h_{11} - h_{22})}{2} - ih_{12}\right)\left(\omega^1 + i\omega^2\right) + \frac{(h_{11} + h_{22})(\omega^1 - i\omega^2)}{2} \\ &= \omega^1 h_{11} - i\omega^1 h_{12} + h_{12}\omega^2 - ih_{22}\omega^2 \\ &= \left(h_{11}\omega^1 + h_{12}\omega^2\right) - i\left(h_{12}\omega^1 + h_{22}\omega^2\right) \\ &= \omega_3^1 - i\omega_3^2. \end{aligned}$$

Proposição 29. *Seja F o $\mathbb{R}$-espaço vetorial de todas as matrizes simétricas 2×2 e seja L a seguinte transformação linear:*

$$L : S \in F \mapsto \frac{(S_{11} - S_{22})}{2} - iS_{12} \in \mathbb{C}$$

O Hopf-invariante é então $h = L(S)$, onde S é dado por (2.2). Segue que

1. *O Kernel de L é o conjunto de todas as matrizes escalares, ou seja, matrizes múltiplas da identidade;*

2. *$L(S)$ é real se e somente se S é uma matriz simétrica;*

3. *Se*
$$A = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix},$$
então $L\left(A^T S A\right) = e^{i2t} L(S)$;

4. *Se*
$$B = A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix},$$
então $L\left(B^T S B\right) = e^{-i2t}\overline{L(S)}$.

Demonstração. **(1)** Seja uma matriz da forma

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in Ker(L),$$

logo temos que

$$0 + 0i = L(C) = \frac{(a-d)}{2} + i(-b)$$

Segue da igualdade de números complexos que $b = 0$ e $a = d$, ou seja, C é da forma

$$C = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

(2) Suponha que $L(S)$ é um número real, logo

$$L(S) = \frac{(S_{11} - S_{22})}{2} - iS_{12} = \frac{(S_{11} - S_{22})}{2} + i0,$$

Ou seja, $S_{12} = S_{21} = 0$, isso demonstra que a matriz é diagonal. **(3)** Temos que

$$A^T S A = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} = (a_{ij}),$$

onde os coeficientes são dados por

$$\begin{aligned}
a_{11} &= S_{11}\cos^2 t + S_{22}\sin^2 t + 2S_{12}\cos t \sin t, \\
a_{12} &= S_{12}\cos^2 t - S_{12}\sin^2 t - S_{11}\cos t \sin t + S_{22}\cos t \sin t, \\
a_{21} &= S_{12}\cos^2 t - S_{12}\sin^2 t - S_{11}\cos t \sin t + S_{22}\cos t \sin t, \\
a_{22} &= S_{22}\cos^2 t + S_{11}\sin^2 t - 2S_{12}\cos t \sin t.
\end{aligned}$$

Segue disso que

$$\begin{aligned}
L\left(A^T S A\right) &= \frac{(a_{11} - a_{22})}{2} - ia_{12} = \frac{1}{2}(\sin t - i\cos t)^2 (2iS_{12} - S_{11} + S_{22}) \\
&= -\left(\frac{S_{22} - S_{11}}{2} - iS_{12}\right)\left(-2i\cos t \sin t + \sin^2 t - \cos^2 t\right) \\
&= -\left(\frac{S_{22} - S_{11}}{2} - iS_{12}\right)(-\cos 2t - i\sin 2t) \\
&= L(S)e^{i2t}.
\end{aligned}$$

(4) Temos que

$$B^T S B = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix} = (b_{ij}),$$

onde os coeficientes são dados por

$$\begin{aligned}
b_{11} &= S_{11}\cos^2 t + S_{22}\sin^2 t + 2S_{12}\cos t\sin t;\\
b_{12} &= -S_{12}\cos^2 t + S_{12}\sin^2 t + S_{11}\cos t\sin t - S_{22}\cos t\sin t;\\
b_{21} &= -S_{12}\cos^2 t + S_{12}\sin^2 t + S_{11}\cos t\sin t - S_{22}\cos t\sin t;\\
b_{22} &= S_{22}\cos^2 t + S_{11}\sin^2 t - 2S_{12}\cos t\sin t.
\end{aligned}$$

Segue disso que

$$\begin{aligned}
L\left(B^T S B\right) &= \frac{(b_{11}-b_{22})}{2} - ib_{12} = -\frac{1}{2}\left(S_{11}+2iS_{12}-S_{22}\right)\left(i\cos t+\sin t\right)^2\\
&= -\overline{L(S)}\left(-\cos^2 t + 2i\cos t\sin t + \sin^2 t\right) = -\overline{L(S)}\left(-\cos 2t + i\sin 2t\right)\\
&= \overline{L(S)}\left(\cos 2t - i\sin 2t\right) = \overline{L(S)}\left(\cos(-2t) + i\sin(-2t)\right)\\
&= \overline{L(S)}e^{-2ti}.
\end{aligned}$$

Isso conclui a demonstração. ∎

Como a matriz S de (2.2) é simétrica, seus autovalores são reais. Elas são as chamadas **curvaturas principais** da imersão x. Os autovetores são chamados **direções principais** de x. Eles são ortogonais sempre que os autovalores são distintos. Um ponto de M é dito ser **ponto umbílico** de x se as curvaturas principais são iguais nesse ponto. Num ponto umbílico toda direção é principal.

Definição 30. *Uma curva $\gamma : J \to M$, onde $J \subset \mathbb{R}$, é dita ser uma **linha de curvatura** da imersão $x : M \to \mathbb{R}^3$, se $\gamma'(t)$ é uma direção principal, para todo $t \in J$.*

Lema 31 (Linhas de Curvatura)**.** *Se (e, x) é um $x-$referencial móvel de 1ª ordem em um aberto $U \subset M$, então uma curva suave $\gamma : J \to M$ é uma linha de curvatura de x se e somente se, para todo ponto de J valer a seguinte igualdade:*

$$\gamma^*\left(\omega^1\omega_3^2 - \omega^2\omega_3^1\right) = 0.$$

Demonstração. Para um $x-$referencial móvel de 1^a ordem em U, segue das expressões em (2.5) que

$$\omega_3^i = \sum_{j=1}^{2} h_{ij}\omega^j$$

Além disso, como $\{e_1, e_2\}$ é base de $\mathbb{R}^2$, segue que:

$$\gamma'(t) = \omega^1_{\gamma(t)}\left(\gamma'(t)\right)e_1 + \omega^2_{\gamma(t)}\left(\gamma'(t)\right)e_2$$

Acrescentando, temos ainda que

$$Se_i = \sum_{j=1}^{2} h_{ji} e_j$$

O vetor $\gamma'(t)$é uma direção principal se e somente se

$$S\gamma'(t) = \lambda\gamma'(t)$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, isto é:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{2} \left(\omega_3^j\right)_{\gamma(t)} \left(\gamma'(t)\right) e_j &= \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2} h_{ji}\omega^i_{\gamma(t)} \left(\gamma'(t)\right) e_j = \sum_{i,j=1}^{2} h_{ji}\omega^i_{\gamma(t)} \left(\gamma'(t)\right) e_j \\
&= \sum_{i=1}^{2} \omega^i_{\gamma(t)} \left(\gamma'(t)\right) Se_i = S\left(\sum_{i=1}^{2} \omega^i_{\gamma(t)} \left(\gamma'(t)\right) e_i\right) = S\gamma'(t) = \lambda\gamma'(t) \\
&= \sum_{j=1}^{2} \left(\lambda\omega^j_{\gamma(t)} \left(\gamma'(t)\right)\right) e_j.
\end{aligned}$$

Por igualdade de coordenadas obtemos que

$$\left(\omega_3^j\right)_{\gamma(t)} \left(\gamma'(t)\right) = \lambda\omega^j_{\gamma(t)} \left(\gamma'(t)\right),$$

ou seja, em termos de vetores:

$$\left(\left(\omega_3^1\right)_{\gamma(t)} \left(\gamma'(t)\right), \left(\omega_3^2\right)_{\gamma(t)} \left(\gamma'(t)\right)\right) = \lambda\left(\omega^1_{\gamma(t)} \left(\gamma'(t)\right), \omega^2_{\gamma(t)} \left(\gamma'(t)\right)\right),$$

Mas isso ocorre se e somente se

$$\det\begin{pmatrix} \omega^1_{\gamma(t)} \left(\gamma'(t)\right) & \omega^2_{\gamma(t)} \left(\gamma'(t)\right) \\ \left(\omega_3^1\right)_{\gamma(t)} \left(\gamma'(t)\right) & \left(\omega_3^2\right)_{\gamma(t)} \left(\gamma'(t)\right) \end{pmatrix} = 0.$$

Usando a expressão do determinante, segue que

$$\begin{aligned}
0 &= \omega^1_{\gamma(t)} \left(\gamma'(t)\right) \left(\omega_3^2\right)_{\gamma(t)} \left(\gamma'(t)\right) - \omega^2_{\gamma(t)} \left(\gamma'(t)\right) \left(\omega_3^1\right)_{\gamma(t)} \left(\gamma'(t)\right) \\
&= \gamma^*\left(\omega^1\omega_3^2 - \omega^2\omega_3^1\right)(t).
\end{aligned}$$

Isso conclui a demonstração. ■

Temos das equações estruturais que:

$$\begin{aligned}
d\omega_3^1 &= \omega_1^1 \wedge \omega_3^1 + \omega_2^1 \wedge \omega_3^2 + \omega_3^1 \wedge \omega_3^3 = \omega_2^1 \wedge \omega_3^2; \\
d\omega_3^2 &= \omega_1^2 \wedge \omega_3^1 + \omega_2^2 \wedge \omega_3^2 + \omega_3^2 \wedge \omega_3^3 = \omega_1^2 \wedge \omega_3^1.
\end{aligned}$$

Se aplicarmos a derivada exterior na equação

$$\omega_3^i = \sum_{j=1}^{2} h_{ij}\omega^j,$$

e usar o lema de Cartan (25), segue que

$$\begin{aligned}\omega_2^1 \wedge \omega_3^2 = d\omega_3^1 &= dh_{11} \wedge \omega^1 + h_{11}d\omega^1 + dh_{12} \wedge \omega^2 + h_{12}d\omega^2 \\ &= dh_{11} \wedge \omega^1 - h_{11}\omega_1^2 \wedge \omega^2 + dh_{12} \wedge \omega^2 - h_{12}\omega_2^1 \wedge \omega^1 \\ &= \left(dh_{11} - h_{12}\omega_2^1\right) \wedge \omega^1 + \left(dh_{12} - h_{11}\omega_1^2\right) \wedge \omega^2.\end{aligned}$$

Ou seja, temos que

$$\begin{aligned}0 &= \left(dh_{11} - h_{12}\omega_2^1\right) \wedge \omega^1 + \left(dh_{12} - h_{11}\omega_1^2\right) \wedge \omega^2 - \omega_2^1 \wedge \omega_3^2 \\ &= \left(dh_{11} - h_{12}\omega_2^1\right) \wedge \omega^1 + \left(dh_{12} - h_{11}\omega_1^2\right) \wedge \omega^2 - \omega_2^1 \wedge \left(h_{21}\omega^1 + h_{22}\omega^2\right) \\ &= \left(dh_{11} - 2h_{12}\omega_2^1\right) \wedge \omega^1 + \left(dh_{12} + (h_{22} - h_{11})\,\omega_1^2\right) \wedge \omega^2.\end{aligned}$$

Pelo lema de Cartan, concluímos que

$$\begin{aligned}dh_{11} - 2h_{12}\omega_2^1 &= \sum_{j=1}^{2} h_{11j}\omega^j, \\ \left(dh_{12} + (h_{22} - h_{11})\,\omega_1^2\right) &= \sum_{j=1}^{2} h_{12j}\omega^j,\end{aligned}$$

onde $h_{11j}, h_{12j} : U \to \mathbb{R}$ são funções suaves, para $j = 1, 2$. Analogamente, temos que

$$\begin{aligned}\omega_1^2 \wedge \omega_3^1 = d\omega_3^2 &= dh_{21} \wedge \omega^1 + h_{21}d\omega^1 + dh_{22} \wedge \omega^2 + h_{22}d\omega^2 \\ &= dh_{21} \wedge \omega^1 - h_{21}\omega_1^2 \wedge \omega^2 + dh_{22} \wedge \omega^2 - h_{22}\omega_2^1 \wedge \omega^1 \\ &= \left(dh_{21} - h_{22}\omega_2^1\right) \wedge \omega^1 + \left(dh_{22} - h_{21}\omega_1^2\right) \wedge \omega^2.\end{aligned}$$

Segue disso que

$$\begin{aligned}0 &= \left(dh_{21} - h_{22}\omega_2^1\right) \wedge \omega^1 + \left(dh_{22} - h_{21}\omega_1^2\right) \wedge \omega^2 - \omega_1^2 \wedge \omega_3^1 \\ &= \left(dh_{21} - h_{22}\omega_2^1\right) \wedge \omega^1 + \left(dh_{22} - h_{21}\omega_1^2\right) \wedge \omega^2 - \omega_1^2 \wedge \left(h_{11}\omega^1 + h_{12}\omega^2\right) \\ &= \left(dh_{21} + (h_{11} - h_{22})\,\omega_2^1\right) \wedge \omega^1 + \left(dh_{22} - 2h_{21}\omega_1^2\right) \wedge \omega^2.\end{aligned}$$

Pelo lema de Cartan, obtemos as equações

$$dh_{21} + (h_{11} - h_{22})\,\omega_2^1 = \sum_{j=1}^{2} h_{21j}\omega^j,$$
$$dh_{22} - 2h_{21}\omega_1^2 = \sum_{j=1}^{2} h_{22j}\omega^j,$$

onde $h_{22j}, h_{21j} : U \to \mathbb{R}$ são funções suaves, para $j = 1, 2$.

Essas equações em quem chegamos são casos particulares das chamadas **equações de Codazzi:**

$$dh_{ij} - \sum_{k=1}^{2} h_{ik}\omega_k^j - \sum_{k=1}^{2} h_{jk}\omega_k^i = \sum_{k=1}^{2} h_{ijk}\omega^k,$$

onde $h_{ijk} : U \to \mathbb{R}$ são funções suaves, para todo $i, j, k = 1, 2$, sendo que h_{ijk} é totalmente simétrica nos três índices.

Estamos interessados em saber a relação entre dois $x-$referenciais móveis de 1^a ordem distintos: Dado um $x-$referencial móvel de 1^a ordem (e, x) em um aberto conexo $U \subset M$, qualquer outro $x-$referencial móvel de 1^a ordem é dado pela inversão (ou não) de e_3 e por uma rotação de e_1, e_2. Ou seja, dada uma matriz

$$A : p \in U \mapsto \begin{pmatrix} A_{11}(p) & A_{12}(p) \\ A_{21}(p) & A_{22}(p) \end{pmatrix} \in O(2).$$

Segue que

$$\begin{aligned} \widetilde{e}_1 &= Ae_1 = A_{11}e_1 + A_{12}e_2, \\ \widetilde{e}_2 &= Ae_2 = A_{21}e_1 + A_{22}e_2, \\ \widetilde{e}_3 &= \epsilon e_3, \end{aligned} \tag{2.8}$$

onde $\epsilon = \pm 1$, é um possível $x-$referencial móvel de 1^a ordem distinto do primeiro. Em notação de matriz segue que

$$\begin{pmatrix} \widetilde{e}_1 \\ \widetilde{e}_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}.$$

Nesse novo $x-$referencial móvel de 1^a ordem, temos que

$$dx = \widetilde{\omega}^1\widetilde{e}_1 + \widetilde{\omega}^2\widetilde{e}_2 = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2.$$

Decorre disso a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 &= \widetilde{\omega}^1\widetilde{e}_1 + \widetilde{\omega}^2\widetilde{e}_2 = \widetilde{\omega}^1\left(A_{11}e_1 + A_{12}e_2\right) + \widetilde{\omega}^2\left(A_{21}e_1 + A_{22}e_2\right) \\ &= \left(A_{11}\widetilde{\omega}^1 + A_{21}\widetilde{\omega}^2\right)e_1 + \left(\widetilde{\omega}^1 A_{12} + \widetilde{\omega}^2 A_{22}\right)e_2, \end{aligned}$$

Portanto temos as seguintes expressões:

$$\omega^1 = A_{11}\widetilde{\omega}^1 + \widetilde{\omega}^2 A_{21},$$
$$\omega^2 = \widetilde{\omega}^1 A_{12} + \widetilde{\omega}^2 A_{22}.$$

Em notação matricial, segue que

$$\begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} \widetilde{\omega}^1 \\ \widetilde{\omega}^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \widetilde{\omega}^1 \\ \widetilde{\omega}^2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{pmatrix}.$$

Com essa mudança de referencial, temos a seguinte conclusão com relação à **forma de área:**

$$\widetilde{\omega}^1 \wedge \widetilde{\omega}^2 = \big(A_{11}\omega^1 + A_{12}\omega^2\big) \wedge \big(A_{21}\omega^1 + A_{22}\omega^2\big) = (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})\, \omega^1 \wedge \omega^2 = (\det A)\, \omega^1 \wedge \omega^2$$

Como $A \in O(2)$, segue que $\det A = \pm 1$, a orientação de M é preservada pela mudança de referencial se e somente se $\det A = 1 > 0$, ou seja, se e somente se $A \in SO(2)$.
Nesse novo referencial, temos que:

$$\widetilde{\omega}_3^i = \sum_{j=1}^{2} \widetilde{h_{ij}} \widetilde{\omega}^j, \tag{2.9}$$

para $i = 1, 2$. Onde $\widetilde{\omega}_3^i$ é definido de modo análogo à ω_3^i:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\omega}_3^i &:= \langle d\widetilde{e}_i, \widetilde{e}_3 \rangle = -\langle \widetilde{e}_i, d\widetilde{e}_3 \rangle = -\langle A_{i1}e_1 + A_{i2}e_2, d(\epsilon e_3) \rangle \\
&= \epsilon \left\langle \sum_{j=1}^{2} A_{ij} e_j, de_3 \right\rangle = \epsilon \sum_{j=1}^{2} A_{ij} \langle e_j, de_3 \rangle = \epsilon \sum_{j=1}^{2} A_{ij} \omega_3^j.
\end{aligned}$$

Usando as expressões em (2.5) obtemos que:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\omega}_3^i &= \epsilon \sum_{j=1}^{2} A_{ij} \omega_3^j = \epsilon \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} A_{ij} h_{jk} \omega^k = \epsilon \sum_{j,k=1}^{2} (A_{ij} h_{jk})\, \omega^k \qquad (2.10) \\
&= \epsilon \left(\sum_{j,k=1}^{2} A_{ij} h_{jk} \right) \sum_{l=1}^{2} A_{lk} \widetilde{\omega}^l = \epsilon \sum_{l=1}^{2} \left(\sum_{j,k=1}^{2} A_{ij} h_{jk} \right) A_{lk} \widetilde{\omega}^l \\
&= \epsilon \sum_{j,k,l=1}^{2} A_{ij} h_{jk} A_{lk} \widetilde{\omega}^l
\end{aligned}$$

Segue das expressões (2.9) e (2.10) que:

$$\begin{aligned}
\widetilde{h_{11}} &= \epsilon\left(A_{1,1}^2 h_{1,1} + A_{1,2}^2 h_{2,2} + A_{1,1}A_{1,2}h_{1,2} + A_{1,1}A_{1,2}h_{2,1}\right),\\
\widetilde{h_{12}} &= \epsilon\left(A_{1,1}A_{2,1}h_{1,1} + A_{1,1}A_{2,2}h_{1,2} + A_{1,2}A_{2,1}h_{2,1} + A_{1,2}A_{2,2}h_{2,2}\right),\\
\widetilde{h_{21}} &= \epsilon\left(A_{1,1}A_{2,1}h_{1,1} + A_{1,1}A_{2,2}h_{2,1} + A_{1,2}A_{2,1}h_{1,2} + A_{1,2}A_{2,2}h_{2,2}\right),\\
\widetilde{h_{22}} &= \epsilon\left(A_{2,1}^2 h_{1,1} + A_{2,2}^2 h_{2,2} + A_{2,1}A_{2,2}h_{1,2} + A_{2,1}A_{2,2}h_{2,1}\right),
\end{aligned}$$

ou seja, em linguagem matricial, temos que:

$$\begin{pmatrix} \widetilde{h_{11}} & \widetilde{h_{12}} \\ \widetilde{h_{21}} & \widetilde{h_{22}} \end{pmatrix} = \epsilon \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \epsilon A^T S A \tag{2.11}$$

Sabemos de álgebra linear que em um ponto de U, podemos encontrar uma matriz A de modo que $\widetilde{S}$ seja uma matriz diagonal. As entradas da matriz $\widetilde{S}$ serão justamente as curvaturas principais da imersão x no ponto em questão. Se as curvaturas principais forem iguais então S e $\widetilde{S}$ serão matrizes escalares e o ponto em questão é umbílico. Os autovalores de $\widetilde{S}$ são ϵ vezes os autovalores de S. Portanto, invertendo o sinal da normal e_3 reajustamos os sinais das curvaturas principais e, consequentemente da curvatura média. Como a curvatura gaussiana é a multiplicação das duas curvaturas principais, se ambas forem invertidas o seu valor não se alterará.

Segue diretamente do item (3) da Proposição (29) que se $\widetilde{h}$ é o Hopf-invariante relativo à $\{\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2, \widetilde{e}_3\}$, e

$$A = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

então vale a seguinte igualdade:

$$\widetilde{h} = \epsilon e^{i2t} h.$$

E segue diretamente do item (4) que se

$$A = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix},$$

então também vale a seguinte igualdade:

$$\widetilde{h} = \epsilon e^{-i2t}\overline{h}$$

Definição 32. *Dada uma imersão $x : M \to \mathbb{R}^3$, um $x-$ referencial móvel de 2^a ordem em um ponto $p \in U$ é um $x-$ referencial móvel de 1^a ordem (e, x) em p tal que $e_1(p), e_2(p)$ são direções principais. Um $x-$ referencial móvel de 2^a ordem é um $x-$ referencial móvel de 2^a ordem em $p \in U$, onde p é qualquer.*

Como as direções principais são justamente os autovetores da matriz S, temos que se

(x, e) é de 2^a ordem em $p \in U$, então S é uma matriz diagonal em p, ou seja:

$$S = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix},$$

onde $a, c \in \mathbb{R}$ são os autovalores associados à $e_1(p)$ e $e_2(p)$, ou seja, são as curvaturas principais de x em p.

Pela definição de S em (2.2) e pela definição dos $h'_{ij}s$ em (2.5) chegamos às seguintes conclusões com relação à um $x-$referencial móvel de 2^a ordem:

$$\omega^3 = 0 \qquad , \qquad \omega_3^1 = a\omega^1 \qquad , \qquad \omega_3^2 = c\omega^2.$$

Note que se o ponto p é umbílico, ou seja, se $a = c$, então

$$\begin{aligned} Se_1(p) &= ae_1(p), \\ Se_2(p) &= ae_2(p). \end{aligned}$$

Logo, dado $v = \alpha e_1(p) + \beta e_2(p) \in T_{x(p)}M$, segue que

$$\begin{aligned} Sv &= S(\alpha e_1(p) + \beta e_2(p)) = \alpha Se_1(p) + \beta S(e_2(p)) \\ &= \alpha ae_1(p) + \beta ae_2(p) = a(\alpha e_1(p) + \beta e_2(p)) = av, \end{aligned}$$

ou seja, v é também direção principal em p. Logo em um ponto umbílico todo $x-$referencial móvel de 1^a ordem é de 2^a ordem também.

Dado um $x-$referencial móvel de 2^a ordem (e, x) representada pela base ortonormal $e = (e_1, e_2, e_3)$, seja a mudança de referencial que preserva a propriedade de 1^a ordem:

$$\begin{aligned} \widetilde{e}_1 &:= Ae_1 = A_{11}e_1 + A_{21}e_2, \\ \widetilde{e}_2 &:= Ae_2 = A_{12}e_1 + A_{22}e_2, \\ \widetilde{e}_3 &:= \epsilon e_3. \end{aligned} \tag{2.12}$$

onde $\epsilon = \pm 1$ e $A \in O(2)$. Segue por definição que a mudança de referencial respeita a propriedade de 2^a ordem (ou seja $\widetilde{e} = (\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2, \widetilde{e}_3)$ é de 2^a ordem) se e somente se a matriz $\widetilde{S}$ de $\widetilde{e}$ é diagonal.

Em um ponto não-umbílico, há apenas um número finito de $x-$referenciais móveis de 2^a ordem. De fato, suponha que em determinado ponto as curvaturas principais são dadas por $a \neq c$, segue disso que se

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in O(2)$$

é tal que

$$\widetilde{S} = \epsilon A^T S A,$$

então em coordenadas temos que:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \widetilde{a} & 0 \\ 0 & \widetilde{c} \end{pmatrix} &= \epsilon A^T S A = \epsilon \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\
&= \epsilon \begin{pmatrix} a a_{11}^2 + c a_{21}^2 & a a_{11} a_{12} + c a_{21} a_{22} \\ a a_{11} a_{12} + c a_{21} a_{22} & a a_{12}^2 + c a_{22}^2 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

o que implica nas seguintes equações:

$$\begin{aligned}
\widetilde{a} &= \epsilon \left(a a_{11}^2 + c a_{21}^2 \right), \\
\widetilde{c} &= \epsilon \left(a a_{12}^2 + c a_{22}^2 \right), \\
0 &= a a_{11} a_{12} + c a_{21} a_{22}.
\end{aligned}$$

Como $A \in O(2)$, segue que suas linhas e suas colunas formam uma base ortonormal para $\mathbb{R}^2$. Somando a 1^a e a 2^a equação e usando esse fato, obtemos que:

$$\begin{aligned}
\widetilde{a} + c &= \epsilon \left(a a_{11}^2 + c a_{21}^2 \right) + \epsilon \left(a a_{12}^2 + c a_{22}^2 \right) = \epsilon (a + c), \\
0 &= a a_{11} a_{12} + c a_{21} a_{22} = (a - c) \, a_{11} a_{12}.
\end{aligned}$$

Vamos usar, portanto apenas a 2^a equação. Como $a \neq c$, segue que $a_{11} = 0$ ou $a_{12} = 0$. Usando novamente que $A \in O(2)$, obtém-se as seguintes matrizes:

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{se } a_{11} = 0; \\
&\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{se } a_{12} = 0.
\end{aligned}$$

Segue de (2.8) que o novo referencial móvel se enquadra em uma destas quatro possibilidades:

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{e}_1 = \delta e_1, \\ \widetilde{e}_2 = \delta e_2, \\ \widetilde{e}_3 = \epsilon e_3. \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} \widetilde{e}_1 = \delta e_1, \\ \widetilde{e}_2 = -\delta e_2, \\ \widetilde{e}_3 = \epsilon e_3. \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} \widetilde{e}_1 = \delta e_2, \\ \widetilde{e}_2 = \delta e_1, \\ \widetilde{e}_3 = \epsilon e_3. \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} \widetilde{e}_1 = \delta e_2, \\ \widetilde{e}_2 = -\delta e_1, \\ \widetilde{e}_3 = \epsilon e_3. \end{array} \right. \tag{2.13}$$

onde $\delta = \epsilon = \pm 1$.

Lema 33 (Existência do referencial móvel de 2^a ordem)**.** *Para uma imersão $x : M \to \mathbb{R}^3$ suponha que o ponto $p \in M$ é não-umbílico. Então existe uma vizinhança $U \subset M$ de p para o qual extá definido um $x-$referencial móvel de 2^a ordem.*

Demonstração. Seja (e, x) um $x-$referencial móvel de 1^a ordem definido em uma vizinhança $V \subset M$ de p e seja S a matriz da aplicação de Gauss com respeito à esse referencial móvel. Já sabemos que entradas de $S = (h_{ij})$ são funções suaves em V, portanto as curvaturas média e gaussiana dadas, respectivamente, por

$$H = \frac{1}{2}(h_{11} + h_{22}) \qquad \text{e} \qquad K = h_{11}h_{22} - (h_{12})^2,$$

são também funções suaves em V. As curvaturas principais são, por definição de autovalor, soluções da seguinte equação:

$$\begin{aligned} \det(S - tI) &= \det \begin{pmatrix} h_{11} - t & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} - t \end{pmatrix} = -th_{11} - th_{22} - h_{12}^2 + h_{11}h_{22} + t^2 \\ &= t^2 - t(h_{11} + h_{22}) + \left(h_{11}h_{22} - h_{12}^2\right) = t^2 - 2Ht + K \end{aligned}$$

Aplicando a fórmula de Bhaskara, obtemos que as curvaturas principais são dadas por:

$$\begin{aligned} a &= \frac{2H + \sqrt{4H^2 - 4K}}{2} = H + \sqrt{H^2 - K} \\ c &= \frac{2H - \sqrt{4H^2 - 4K}}{2} = H - \sqrt{H^2 - K} \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} H^2 - K &= \left(\frac{1}{2}(h_{11} + h_{22})\right)^2 - \left(h_{11}h_{22} - (h_{12})^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(h_{11}^2 + 4h_{12}^2 + h_{22}^2 - 2h_{11}h_{22}\right) \\ &= \frac{1}{4}(h_{11} - h_{22})^2 + h_{12}^2 \geq 0, \end{aligned}$$

logo as curvaturas principais estão bem definidas, e sua suavidade segue da suavidade de H e K. Notemos também que

$$\begin{aligned} a = c &\Leftrightarrow H + \sqrt{H^2 - K} = H - \sqrt{H^2 - K} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{H^2 - K} = 0 \end{aligned}$$

Ou seja, o conjunto dos pontos umbílicos é justamente $f^{-1}(\{0\})$, onde $f : V \to \mathbb{R}$ é dada por

$$f(x) = \left(\sqrt{H^2 - K}\right)(p).$$

Isso nos diz que o conjunto dos pontos umbílicos é fechado. Logo, o conjunto dos pontos não-umbílicos é aberto. Temos então que as funções a e c são contínuas em V e são suaves no conjunto aberto dos pontos não-umbílicos. Seja $U \subset V$ o conjunto dos pontos não-umbílicos. Segue que U é aberto e $p \in U$ por hipótese.

Com os autovalores em mãos, estamos aptos à encontrar as direções principais. Temos que

$$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \left(H + \sqrt{H^2 - K}\right) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

é equivalente ao seguinte sistema:

$$\begin{aligned} h_{11}u + h_{12}v &= \left(H + \sqrt{H^2 - K}\right) u \\ h_{12}u + h_{22}v &= \left(H + \sqrt{H^2 - K}\right) v \end{aligned}$$

Cuja solução é dada por

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{L}\left(\frac{1}{2}\left(h_{22} - h_{11}\right) - \sqrt{H^2 - K}\right) \\ -\frac{1}{L}h_{12} \end{pmatrix},$$

onde L é dada pela seguinte expressão:

$$L = \left(h_{12}^2 + \left(\frac{h_{11} - h_{22}}{2} + \sqrt{H^2 - K}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Analogamente, para o outro autovalor devemos resolver o seguinte:

$$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \left(H - \sqrt{H^2 - K}\right) \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix},$$

que é equivalente ao seguinte sistema:

$$\begin{aligned} h_{11}w + h_{12}z &= \left(H - \sqrt{H^2 - K}\right) w \\ h_{12}w + h_{22}z &= \left(H - \sqrt{H^2 - K}\right) z \end{aligned}$$

Cuja solução é dada por

$$\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{L}h_{12} \\ \frac{1}{L}\left(\frac{1}{2}\left(h_{11} - h_{22}\right) + \sqrt{H^2 - K}\right) \end{pmatrix},$$

Ou seja, as direções principais são dadas por:

$$\begin{aligned} \widetilde{e_1} &= \frac{1}{L}\left(\frac{1}{2}\left(h_{22} - h_{11}\right) - \sqrt{H^2 - K}\right) e_1 - \frac{1}{L}h_{12}e_2, \\ \widetilde{e_2} &= -\frac{1}{L}h_{12}e_1 + \frac{1}{L}\left(\frac{1}{2}\left(h_{11} - h_{22}\right) + \sqrt{H^2 - K}\right) e_2. \end{aligned}$$

Ou seja, em termos matriciais temos o seguinte:

$$\begin{pmatrix} \widetilde{e_1} \\ \widetilde{e_2} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix},$$

onde $A : U \to SO\,(2)$ (de fato, com um cálculo simples vemos que $\det A = 1$) é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{L}\left(\frac{1}{2}\left(h_{22} - h_{11}\right) - \sqrt{H^2 - K}\right) & -\frac{1}{L}h_{12} \\ -\frac{1}{L}h_{12} & \frac{1}{L}\left(\frac{1}{2}\left(h_{11} - h_{22}\right) + \sqrt{H^2 - K}\right) \end{pmatrix},$$

Ou seja, $\widetilde{e} = (\widetilde{e_1}, \widetilde{e_2}, \widetilde{e_3})$, onde $(\widetilde{e_1}, \widetilde{e_2}) = A\,(e_1, e_2)$ e $\widetilde{e_3} = e_3$ define um outro $x-$referencial móvel de 1^a ordem em U que, por construção, é de 2^a ordem também.

■

2.3 Procedimento de Redução de referencial

Nessa seção vamos aplicar o procedimento de redução de referencial. Acreditamos que isso seja instrutivo para ver como este método chega nos mesmos resultados obtidos na seção anterior. Comecamos com o seguinte exemplo que nos ajudará na redução de referencial:

Exemplo 34 (Grassmannians)**.** *Para $m, n \in \mathbb{N}$ tal que $m < n$, seja $\mathbb{R}^{n \times m*}$ o conjunto das matrizes $n \times m$ com exatamente m linhas não nulas. Considere a seguinte relação: Dados $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times m*}$, dizemos que $X \sim Y$ se e somente se $Y = XA$, para alguma matriz $A \in GL(m, \mathbb{R})$, se e somente se o subespaço gerado pelos vetores coluna de Y é o mesmo subespaço gerado pelos vetores coluna de X. Notemos que essa relação é de equivalência, pois dados $X, Y, Z \in \mathbb{R}^{n \times m*}$, segue que*

$$X = X\,(Id_m) \Rightarrow X \sim X.$$

Se $X \sim Y$, então existe $A \in GL(m, \mathbb{R})$ tal que $Y = XA$, como $\det A \neq 0$, segue que existe a inversa $A^{-1} \in GL(m, \mathbb{R})$, portanto temos que

$$Y = XA \Rightarrow YA^{-1} = XAA^{-1} = X \Rightarrow Y \sim X.$$

Por fim, se $X \sim Y$ e $Y \sim Z$, então existem $A, B \in GL(m, \mathbb{R})$ tais que:

$$Y = XA \qquad e \qquad Z = YB.$$

Segue disso que

$$Z = YB = XAB.$$

Note que $AB \in GL(m, \mathbb{R})$*, pois*

$$\det(AB) = \det A \det B \neq 0.$$

Portanto concluímos que $X \sim Z$*, ou seja,* $\sim$ *é uma relação de equivalência. Seja* $[X]$ *a notação para a classe de equivalência da matriz* $X \in \mathbb{R}^{n\times m*}$ *segundo a relação* $\sim$ *. Definimos a* ***Grassmannian de um*** m***-subespaço de*** $\mathbb{R}^n$ *como* $G(m, n) := \mathbb{R}^{n\times m*}/\sim$ *. Temos que a ação de multiplicação à esquerda de* $GL(n, \mathbb{R})$ *em* $\mathbb{R}^{n\times m*}$ *preserva a relação* $\sim$*. De fato, dados* $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times m*}$ *tal que* $X \sim Y$ *(ou seja, existe* $A \in GL(m, \mathbb{R})$ *tal que* $Y = XA$*) e* $B \in GL(n, \mathbb{R})$*, segue que*

$$BY = B(XA) = (BX)A.$$

Ou seja, concluímos que $BX \sim BY$*. Portanto não há ambiguidade na seguinte ação:*

$$\mu : (B, [X]) \in GL(n, \mathbb{R}) \times G(m, n) \to [BX] \in G(m, n).$$

Temos que a ação é transitiva, pois se $[P_0] = \left[\begin{pmatrix} Id_m \\ 0 \end{pmatrix}\right] \in G(m, n)$ *e* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \in GL(n, \mathbb{R})$*, segue que*

$$AP_0 = \left[\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{nm} \end{pmatrix}\right],$$

Ou seja, basta tomar todos conjuntos de m *vetores LI's (que serão as* m *primeiras colunas de* A*) possíveis e realizar uma extensão para ser base de* $\mathbb{R}^n$ *(determinando totalmente uma matriz* $A \in GL(n, \mathbb{R})$*) que a ação em* P_0 *será sobrejetiva* $G(m, n)$*. Isso demonstra a transitividade da ação. Vamos encontrar o subgrupo de isotropia de* $G(m, n)$ *em* P_0 *(*$(G(m, n))_0$*) Como o subspaço gerado pelas colunas de* P_0 *é o* $\mathbb{R}^m$*, segue que as matrizes que se relacionam com* P_0 *são as matrizes com as colunas formandas por* m *vetores LI's tal que cada um deles tem apenas as* m *primeiras coordenadas não nulas (para gerar o* $\mathbb{R}^m$ *também). Portanto teremos que tomar matrizes de* $GL(n, \mathbb{R})$ *tais que, quando multiplicarmos por* P_0 *a matriz resultado preencha todos os pré-requisitos que acabamos de especificar. Seja* $B = \begin{pmatrix} b_{11} & ... & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & ... & b_{nn} \end{pmatrix} \in GL(n, \mathbb{R})$*, gostaríamos que* *acontecesse o seguinte:*

$$BP_0 = \begin{pmatrix} b_{11} & ... & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & ... & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Id_m \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & ... & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & ... & b_{mm} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & ... & b_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & ... & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & ... & b_{mm} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ou seja, temos que $b_{ij} = 0$ para todo $i = m+1, ..., n$ e $j = 1, ..., m$. Além disso os vetores coluna são LI's (representamos a parte não nula pela matriz $a \in GL(m, \mathbb{R})$. Por fim, notemos que o determinante de uma matriz pode ser olhado nos blocos, ou seja, temos que

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

Ou seja, temos que $c \in GL\left(n-m, \mathbb{R}\right)$. Concluímos que:

$$\left(G(m,n)\right)_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in GL(n, \mathbb{R}) \ : \ a \in GL(m, \mathbb{R});\ c \in GL\left(n-m, \mathbb{R}\right) \right\}$$

Seguimos enunciando um lema que será essencial para o procedimento de redução do referencial móvel. Ele será demonstrado à posteriori:

Lema 35 (Propriedade do Levantamento)**.** *Considere M e N duas variedades diferenciáveis, uma aplicação suave $f : M \to N$, G um grupo de Lie agindo sobre N e fixe $o \in N$. Para quaisquer $x_0 \in M$ e $g \in (\pi_o)^{-1}\left(f\left(x_0\right)\right)$, existe uma vizinhança aberta $U \subset M$ de x_0 e uma aplicação suave $F : U \to G$ tal que $F\left(x_0\right) = g$ e*

$$f_{|U} = \pi_o \circ F$$

Seja $x : M \to \mathbb{R}^3$ uma imersão de uma superfície M. Temos que um $x-$referencial móvel em um aberto $U \subset M$ é uma aplicação

$$\phi : p \in U \to (e(p), v(p)) \in E\left(3\right),$$

tal que $\pi_0 \circ \phi = x$, onde $\pi_0 : E\left(3\right) \to \mathbb{R}^3$ é a aplicação definida em (1.7), logo:

$$x(p) = \left(\pi_0 \circ \phi\right)(p) = \pi_0\left(e(p), v(p)\right) = v(p),$$

para todo $p \in U$. Segue que os $x-$referenciais móveis têm a seguinte expressão:

$$\phi(p) = \left(e(p), x(p)\right),$$

para todo $p \in U$, onde $e : U \to O(3)$ é uma função suave.
Dado um ponto $m \in M$, e um ponto (A, v) na fibra $\pi_0^{-1}(x(m))$ a propriedade do levantamento (35) nos garante a existência de uma vizinhança $U \subset M$ de m, e um $x-$referencial móvel definido em U que passa por (A, v). Seja

$$\phi = (e, x) : U \subset M \to E(3)$$

um $x-$referencial móvel. O pull back da forma de Maurer-Cartan por essa função é dado por:

$$\left((e, x)^* \omega\right)_p .v := \omega_{(e,x)(p)}.d\,(e, x)_p .v = \omega_{(e,x)(p)}.\left(de_p.v, dx_p.v\right).$$

Tomando a equivalência com as matrizes 4×4 segue que

$$\left((e, x)(p)\right)^{-1} = \left(e^{-1}, -e^{-1}x\right)(p) \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\left(e^{-1}x\right)(p) & e^{-1}(p) \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

Além disso, se as curvas $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^3$ e $B : (-\delta, \delta) \to O(3)$ são tais que

$$\beta(0) = x(p) \quad , \quad \beta'(0) = dx_p.v \quad , \quad B(0) = e(p) \quad , \quad B'(0) = de_p.v.$$

Então a curva $(B, \beta) : (-\kappa, \kappa) \to E(3)$ é tal que

$$\begin{aligned} (B, \beta)(0) &= (x, e)(p), \\ (B, \beta)'(0) &= \left(dx_p.v, de_p.v\right). \end{aligned}$$

Portanto, como essa curva cai em $E(3)$ podemos tomar a sua curva correspondente em $M_{4\times 4}(\mathbb{R})$:

$$(B, \beta)(t) \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta(t) & B(t) \end{pmatrix},$$

derivando-a e aplicando no zero, segue que

$$\begin{aligned} \left(de_p.v, dx_p.v\right) = (B, \beta)'(0) &\approx \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta(t) & B(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta'(0) & B'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ dx_p.v & de_p.v \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ao passar o problema para as matrizes é bem mais simples aplicar a forma de Maurer-

Cartan. Temos que

$$\begin{aligned}
\left((e,x)^{*}\omega\right)_{p}.v &:= \omega_{(e,x)(p)}.\left(de_{p}.v, dx_{p}.v\right) \qquad (2.14)\\
&\approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\left(e^{-1}x\right)(p) & e^{-1}(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ dx_{p}.v & de_{p}.v \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{-1}(p)\, dx_{p}.v & e^{-1}(p)\, de_{p}.v \end{pmatrix}\\
&\approx \left(e^{-1}(p)\, de_{p}.v, e^{-1}(p)\, dx_{p}.v\right),
\end{aligned}$$

ou seja, concluímos que a expressão do pull-back da forma de Maurer-Cartan pelo $x-$referencial móvel (x, e) é dada por:

$$(e,x)^{*}\omega = \left(e^{-1}de, e^{-1}dx\right).$$

De agora em diante, vamos nos referir à forma de Maurer-Cartan e seu pull back por um $x-$referencial móvel pelo mesmo símbolo (ou seja, vamos omitir $(e,x)^{*}$), o contexto vai indicar a interpretação correta.

Vamos iniciar agora o procedimento de redução de referenciais. Como foi visto no início do capítulo, temos que $\mathfrak{g} = \mathcal{E}(3)$, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{o}(3)$ sendo que o subespaço vetorial complementar à $\mathfrak{g}_0$ em $\mathfrak{g}$ foi escolhido como $m_0 = \mathbb{R}^3$, ou seja, temos que

$$\mathcal{E}(3) \approx \mathfrak{g} \approx \mathfrak{g}_0 \oplus m_0 \approx \mathfrak{o}(3) \oplus \mathbb{R}^3.$$

Portanto temos a decomposição natural da forma de Maurer-Cartan em $\vartheta + \theta$ onde

$$\theta_p.v = \sum_{i=1}^{3}\left(\omega_p^i.v\right)\epsilon_i \in \mathbb{R}^3 \qquad \text{e} \qquad \vartheta_p.v = \left(\left(\omega_i^j\right)_p.v\right) \in \mathfrak{o}(3), \tag{2.15}$$

para todo $p \in E(3)$ e $v \in T_pE(3)$, onde $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^3$. Foi visto também que há uma bijeção entre $O(3)$ e o conjunto de todas as representações adjuntas de $(E(3))_0 \approx O(3)$ em $m_0 = \mathbb{R}^3$ relativa à base $\{E_i := (0, \epsilon_i)\}_{i=1}^{3}$ de m_0.

Além disso, pelas expressões (2.14) temos que

$$e^{-1}(p)\, dx_p.v = \theta_p.v = \sum_{i=1}^{3}\left(\omega_p^i.v\right)\epsilon_i.$$

Multiplicando ambos os extremos por $e(p)$, obtemos que:

$$dx_p.v = e(p)\left(\sum_{i=1}^{3}\left(\omega_p^i.v\right)\epsilon_i\right) = \sum_{i=1}^{3}\left(\omega_p^i.v\right)e(p)\epsilon_i = \sum_{i=1}^{3}\left(\omega_p^i.v\right)e_i(p). \tag{2.16}$$

onde $e_1(p), e_2(p), e_3(p)$ são as colunas da matriz $e \in O(3)$. Agora vamos demonstrar por meio do procedimento de redução de referencial, que o referencial pode ser escolhido de modo que $\langle\{e_1(p), e_2(p)\}\rangle = dx_p\,(T_pM)$, para todo $p \in U$.
Dado um co-referencial móvel $\{\varphi^1, \varphi^2\}$ (base do espaço dual ao espaço tangente) em U, segue que

$$\omega_p^i.v = \sum_{a=1}^{2}\left(\left(X_a^i\right)_p.v\right)\varphi_p^a\,(v)\,,$$

para todo $i = 1, 2, 3$. Onde a matriz $X = (X_a^i) \in \mathbb{R}^{3\times 2*}$, pois a aplicação linear

$$\begin{aligned}(\omega_{m_0})_p = \theta_p &= \sum_{i=1}^{3}\left(\omega^i\right)_p\epsilon_i = \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{a=1}^{2}\varphi_p^a\left(X_a^i\right)_p\right)\epsilon_i \\ &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{a=1}^{2}\varphi_p^a\left(X_a^i\right)_p\epsilon_i : T_pM \to m_0\end{aligned}$$

tem como domínio um espaço de dimensão 2, usando a expressão do pull-back por (x, e) e que x é uma imersão, ou seja, dx_p é injetora, para todo $p \in M$, segue a injetividade de θ_p e portanto $\dim Im\theta_p = 2$ também. Portanto temos que $Im\theta_p$ é um subespaço de dimensão 2 em $m_0 \approx \mathbb{R}^3$, mas temos que

$$\theta_p = \sum_{i=1}^{3}\omega_p^i\epsilon_i,$$

segue disso que $X = (X_a^i) \in \mathbb{R}^{3\times 2*}$. Temos que $Im\theta_p$ é a imagem da aplicação

$$[X] : U \to G\,(2, 3)\,. \tag{2.17}$$

Qualquer outro $x-$referencial móvel é dado por

$$(\widetilde{e}, x) = (x, e)\,(A, 0) = (eA, e0 + x) = (eA, x)\,,$$

onde $A : U \to O(3)$ é uma aplicação suave qualquer. O pull-back da forma de Maurer-Cartan por esse novo $x-$referencial móvel é dado pelo seguinte:

$$\begin{aligned}\left((\widetilde{e}, x)^*\,\omega\right)_p.v &= \omega_{(\widetilde{e},x)(p)}.d\,(\widetilde{e}, x)_p\,.v = \omega_{(\widetilde{e},x)(p)}.\,(d\widetilde{e}_p.v, dx_p.v) \\ &= \omega_{(\widetilde{e},x)(p)}.\left(d\,(eA)_p\,.v, dx_p.v\right) \\ &= \omega_{(\widetilde{e},x)(p)}.\,((de_p.v)\,A(p) + e(p)dA_p.v, dx_p.v)\end{aligned}$$

Vamos encontrar as matrizes correspondentes. Temos que:

$$\begin{aligned}
\left(\left(\widetilde{e},x\right)(p)\right)^{-1} &= \left(\left(\widetilde{e}\right)^{-1}, -\left(\widetilde{e}\right)^{-1}x\right)(p) = \left(\left(eA\right)^{-1}, -\left(eA\right)^{-1}x\right)(p) \\
&= \left(A^{-1}e^{-1}, -A^{-1}e^{-1}x\right)(p) \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\left(A^{-1}e^{-1}x\right)(p) & \left(A^{-1}e^{-1}\right)(p) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Além disso, segue dos raciocínios realizados para encontrar a expressão (2.14), que:

$$\left(\left(de_p.v\right)A(p) + e(p)dA_p.v, dx_p.v\right) \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ dx_p.v & \left(de_p.v\right)A(p) + e(p)dA_p.v \end{pmatrix}.$$

Portanto, conluímos que:

$$\begin{aligned}
\left(\left(\widetilde{e},x\right)^{*}\omega\right)_p.v &\approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\left(A^{-1}e^{-1}x\right)(p) & \left(A^{-1}e^{-1}\right)(p) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ dx_p.v & \left(de_p.v\right)A(p) + e(p)dA_p.v \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \left(A^{-1}e^{-1}\right)(p)\,dx_p.v & \left(A^{-1}e^{-1}\right)(p)\left(\left(de_p.v\right)A(p) + e(p)dA_p.v\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \left(A^{-1}e^{-1}\right)(p)\,dx_p.v & \left(\left(A^{-1}e^{-1}\right)(p)\left(de_p.v\right)A(p) + A^{-1}(p)\,dA_p.v\right) \end{pmatrix} \\
&\approx \left(\left(\left(A^{-1}e^{-1}\right)(p)\left(de_p.v\right)A(p) + A^{-1}(p)\,dA_p.v\right), \left(A^{-1}e^{-1}\right)(p)\,dx_p.v\right).
\end{aligned}$$

Portanto, ao fazer uma mudança de referencial, o novo pull-back da forma de Maurer-Cartan é dado pela seguinte expressão:

$$\left(\widetilde{e},x\right)^{*}\omega = \left(A^{-1}\left(e^{-1}de\right)A + A^{-1}dA, A^{-1}e^{-1}dx\right) = \left(A^{-1}\vartheta A + A^{-1}dA, A^{-1}\theta\right) = \left(\widetilde{\vartheta},\widetilde{\theta}\right).$$

Ou seja, se a aplicação $\widetilde{\theta}$ é dada por

$$\widetilde{\theta}_p.v = \sum_{j=1}^{3}\left(\widetilde{\omega}_p^j.v\right)\epsilon_j,$$

segue da igualdade anterior que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{a=1}^{2}\varphi_p^a(v)\left(X_a^i\right)_p(v)\right)\epsilon_i &= \theta_p.v = A(p)\widetilde{\theta}_p.v = A(p)\sum_{j=1}^{3}\left(\widetilde{\omega}_p^j.v\right)\epsilon_j \\
&= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}A_j^i\left(\widetilde{\omega}_p^j.v\right)\epsilon_i = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}A_j^i\left(\sum_{a=1}^{2}\left(\left(\widetilde{X}_a^j\right)_p.v\right)\varphi_p^a(v)\right)\epsilon_i \\
&= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{a=1}^{2}A_j^i\left(\left(\widetilde{X}_a^j\right)_p.v\right)\varphi_p^a(v)\,\epsilon_i \\
&= \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{a=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}A_j^i\left(\left(\widetilde{X}_a^j\right)_p.v\right)\varphi_p^a(v)\right)\epsilon_i,
\end{aligned}$$

ou seja, temos a seguinte igualdade

$$\sum_{a=1}^{2} \varphi_p^a(v) \left(X_a^i\right)_p (v) = \sum_{a=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} A_j^i \left(\left(\widetilde{X}_a^j \right)_p .v \right) \varphi_p^a (v) , \qquad i = 1, 2, 3.$$

Em notação matricial, a igualdade acima se resume ao seguinte:

$$A\widetilde{X} = X. \tag{2.18}$$

Temos que a ação

$$(A, [Y]) \in O(3) \times G(2,3) \longmapsto [AY] \in G(2,3)$$

de $O(3)$ sobre a Grassmannian $G(2,3)$ é transitiva. De fato, dados dois planos passando pela origem, sempre conseguimos uma rotação que leva um plano no outro. Escolha $[P_0] = \left[\begin{pmatrix} Id_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$ como a origem de $G(2,3)$. O subgrupo de isotropia de $O(3)$ em $[P_0]$ é dado pelas matrizes $A \in O(3)$ tais que $A[P_0] = [AP_0] = [P_0]$, ou seja, o subespaço gerado pelos vetores coluna de AP_0 é o mesmo de P_0 (que é o plano XY), ou seja, devemos exigir que a última linha de AP_0 seja nula (para que os vetores coluna gerem o plano XY). Ou seja, se

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

gostaríamos que

$$AP_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ou seja, já concluímos que a matriz A é dada por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Ainda temos que $A \in O(3)$, logo

$$\begin{pmatrix} \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} & -\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} & \frac{a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}}{a_{33}(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})} \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} & \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} & -\frac{a_{11}a_{23}-a_{21}a_{13}}{a_{33}(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{33}} \end{pmatrix} = A^{-1} = A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Retiramos dessa igualdade que $a_{13} = a_{23} = 0$ e $\frac{1}{a_{33}} = a_{33}$ ($\Rightarrow a_{33} = \pm 1$), logo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix},$$

Como $A \in O(3)$ ainda temos que $\det A = \pm 1$. Calculando o determinante da matriz acima, obtemos que

$$\pm 1 = \det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix} = \pm \left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \right).$$

Ou seja, concluímos que o primeiro bloco 2×2 é uma matriz de $O(2)$. Com isso, conseguimos caracterizar completamente o subgrupo de isotropia de $O(3)$ em $[P_0]$, que é dado pelo conjunto

$$G_1 := O(2) \times O(1) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \text{ onde } a \in O(2) \text{ e } \varepsilon = \pm 1 \right\}.$$

Agora vamos caracterizar a álgebra de Lie de G_1. Dada a curva

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & 0 \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_1,$$

tal que $A(0) = Id_3$, segue que $t \longmapsto \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}$ é uma curva suave em $O(2)$ tal que

$$\begin{pmatrix} a_{11}(0) & a_{12}(0) \\ a_{21}(0) & a_{22}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como a derivada da curva $A\,(t)$ em $t = 0$ é dada por

$$A'(0) = \begin{pmatrix} a'_{11}(0) & a'_{12}(0) & 0 \\ a'_{21}(0) & a'_{22}(0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue que a álgebra de Lie de G_1 está totalmente caracterizada. E é dada pelo seguinte conjunto:

$$\mathfrak{g}_1 := \mathfrak{o}\,(2) = \left\{ \begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : Z \in \mathfrak{o}\,(2) \right\}.$$

Então $O(3)$ é um G_1-fibrado principal sobre $G(2,3)$ com a projeção

$$\pi_1 : A \in O(3) \to [AP_0] \in G(2,3),$$

na qual admite seções locais.

Definição 36. *Dada uma imersão $x : M \to \mathbb{R}^3$ definimos um $x-$* ***referencial móvel de 1ª ordem*** *como um referencial $(x,e) : U \to E(3)$ em um aberto $U \subset M$ tal que para o qual a aplicação definida em (2.17) é tal que $[X] = [(X_a^i)] = [P_0]$. O que equivale ao seguinte:*

$$\omega^3 = 0 \qquad e \qquad \omega^1 \wedge \omega^2 \neq 0.$$

Note que a equivalência acima de fato acontece, pois $[(X_a^i)] = [P_0]$ se e somente se $X_1^3 = X_2^3 = 0$ e o conjunto $\{(X_1^1, X_1^2, 0)\,;(X_1^2, X_2^2, 0)\}$, segue disso que

$$\omega^3 = \sum_{a=1}^{2} X_a^3 \varphi^a = \sum_{a=1}^{2} 0\varphi^a = 0.$$

Além disso, temos que

$$\left(\omega^1 \wedge \omega^2\right)_p . (u,v) = \det \begin{pmatrix} \omega_p^1(u) & \omega_p^1(v) \\ \omega_p^2(u) & \omega_p^2(v) \end{pmatrix} = \omega_p^1(u)\omega_p^2(v) - \omega_p^2(u)\,\omega_p^1(v)$$
$$= \left(\textstyle\sum_{a=1}^2 \left(X_a^1\right)(p)\,\varphi_p^a(u)\right)\left(\sum_{b=1}^2 X_b^2(p)\,\varphi_p^b(v)\right) - \left(\sum_{a=1}^2 \left(X_a^2\right)(p)\,\varphi_p^a(u)\right)\left(\sum_{b=1}^2 X_b^1(p)\,\varphi_p^b(v)\right)$$
$$= \textstyle\sum_{a,b=1}^2 \left(X_a^1\right)(p)\,\varphi_p^a(u)\,X_b^2(p)\,\varphi_p^b(v) - \sum_{a,b=1}^2 \left(X_a^2\right)(p)\,\varphi_p^a(u)\,X_b^1(p)\,\varphi_p^b(v)$$
$$= \textstyle\sum_{a,b=1}^2 \left(X_a^1\right)(p)\,X_b^2(p)\,\varphi_p^a(u)\,\varphi_p^b(v) - \sum_{a,b=1}^2 \left(X_a^2\right)(p)\,X_b^1(p)\,\varphi_p^a(u)\,\varphi_p^b(v)$$
$$= \textstyle\sum_{a,b=1}^2 \left(\left(X_a^1\right)(p)\,X_b^2(p) - \left(X_a^2\right)(p)\,X_b^1(p)\right)\varphi_p^a(u)\,\varphi_p^b(v).$$

Colocando em termos matriciais, temos que:

$$\begin{aligned}\left(\omega^1 \wedge \omega^2\right)_p . (u,v) &= \sum_{a,b=1}^{2} \det \begin{pmatrix} \left(X_a^1\right)(p) & X_b^1(p) \\ \left(X_a^2\right)(p) & X_b^2(p) \end{pmatrix} \varphi_p^a(u)\,\varphi_p^b(v) \\ &= \det \begin{pmatrix} \left(X_a^1\right)(p) & X_b^1(p) \\ \left(X_a^2\right)(p) & X_b^2(p) \end{pmatrix} \left(\varphi_p^1(u)\,\varphi_p^2(v) - \varphi_p^2(u)\,\varphi_p^1(v)\right) \\ &= \det \begin{pmatrix} \left(X_a^1\right)(p) & X_b^1(p) \\ \left(X_a^2\right)(p) & X_b^2(p) \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} \varphi_p^1(u) & \varphi_p^1(v) \\ \varphi_p^2(u) & \varphi_p^2(v) \end{pmatrix} \neq 0.\end{aligned}$$

Proposição 37 (Existência do referencial móvel de 1ª ordem)**.** *Dado $m \in M$, existe uma vizinhança $V \subset M$ de m tal que V é domínio de um $x-$referencial móvel de 1ª ordem.*

Demonstração. Já sabemos da existência de um $x-$referencial móvel em uma vizinhança $U \subset M$ de m. Aplicando a propriedade do levantamento (35) para a aplicação suave $[X] = [(X_a^i)] : U \to G(2,3)$ em (2.17), segue que existe uma vizinhança $V \subset U \subset M$ de

m e uma aplicação suave $A : V \to O(3)$ tal que

$$\begin{aligned} A\,[P_0] &= [AP_0] = \pi_1 \circ A = [X] \\ &\Rightarrow [P_0] = A^{-1}\,[X] = \left[A^{-1}X\right] \end{aligned}$$

em V. Se $(\widetilde{e}, x) = (eA, x)$, então segue de (2.18) que $\left[\widetilde{X}\right] = [A^{-1}X] = [P_0]$. Ou seja, o $x-$referencial móvel $(\widetilde{e}, x) = (eA, x) : V \to E(3)$ é, portanto, de 1^a ordem. ■

Um $x-$referencial móvel de 1^a ordem $(e, x) : U \to E(3)$ tem $\omega^3 = 0$ e $\{\omega^1, \omega^2\}$ um co-referencial móvel em U. Segue da expressão (2.16) e de que as colunas de uma matriz de $O(3)$ são vetores ortonormais, que o co-referencial móvel $\{\omega^1, \omega^2\}$ é ortonormal na métrica $I = \langle dx, dx \rangle$ em M induzida por x.

Agora vamos encontrar um subespaço vetorial complemetar à $\mathfrak{g}_1$ em $\mathfrak{g}_0$. Segue de (17) que se $Z \in \mathfrak{o}(2)$, então

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & x_2^1 \\ -x_2^1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad x_2^1 \in \mathbb{R}.$$

Precisamos encontrar matrizes tais que ao somar com $\begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ resulte em uma matriz antissimétrica (que pertença à $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{o}(3)$), ou seja, queremos matrizes da forma

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_3^1 \\ 0 & 0 & x_3^2 \\ -x_3^1 & -x_3^2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad x_3^1, x_3^2 \in \mathbb{R}.$$

De fato, temos que

$$\begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + Y = \begin{pmatrix} 0 & x_2^1 & x_3^1 \\ -x_2^1 & 0 & x_3^2 \\ -x_3^1 & -x_3^2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{o}(3).$$

Segue da própria expressão de Y que $Y \in \mathfrak{o}(3)$, ou seja, conseguimos caracterizar totalmente um complementar à $\mathfrak{g}_1$ em $\mathfrak{g}_0$, que é dado pelo seguinte conjunto:

$$m_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_3^1 \\ 0 & 0 & x_3^2 \\ -x_3^1 & -x_3^2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{o}(3) \right\}.$$

Por construção, temos que $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_1 \oplus m_1$. Para uma base de m_1 escolhamos as seguintes matrizes:

$$E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A soma direta de espaços vetoriais

$$\mathcal{E}(3) = \mathfrak{g} = m_0 \oplus \mathfrak{g}_0 = m_0 \oplus m_1 \oplus \mathfrak{g}_1,$$

decompõe a forma de Maurer-Cartan de $E(3)$ em $\theta + \omega_{m_1} + \omega_{\mathfrak{g}_1}$, onde

$$\omega_{m_1} = \omega_3^1 E_4 + \omega_3^2 E_5.$$

Relativo à um $x-$referencial móvel de 1^a ordem $(e, x) : U \to E(3)$, o pull-back da forma de Maurer-Cartan satisfaz $\omega^3 = 0$, $\{\omega^1, \omega^2\}$ é um co-referencial móvel em U e portanto:

$$\omega_3^i = \sum_{j=1}^{2} h_{ij}\omega^j, \qquad i = 1, 2.$$

Agora vamos considerar a dimensão da imagem da seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \theta + \omega_{m_1} &= \sum_{i=1}^{2} \omega^i \epsilon_i + \omega_3^1 E_4 + \omega_3^2 E_5 = \sum_{i=1}^{2} \omega^i \epsilon_i + \sum_{j=1}^{2} h_{1j}\omega^j E_4 + \sum_{j=1}^{2} h_{2j}\omega^j E_5 \qquad (2.19) \\ &= (\epsilon_1 + h_{11}E_4 + h_{21}E_5)\,\omega^1 + (\epsilon_2 + h_{12}E_4 + h_{22}E_5)\,\omega^2 \\ &= \left(\epsilon_1 + \sum_{i=1}^{2} h_{i1}E_{3+i}\right)\omega^1 + \left(\epsilon_2 + \sum_{i=1}^{2} h_{i2}E_{3+i}\right)\omega^2 : T_pM \longrightarrow m_o \oplus m_1. \end{aligned}$$

Novamente, como $x : M \to \mathbb{R}^3$ é uma imersão, segue que $\dim Im\,(\theta + \omega_{m_1}) = \dim T_pM = 2$. Logo $Im\,(\theta + \omega_{m_1})$ é um subespaço de bi-dimensional de $m_0 \oplus m_1 \approx \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^2 \approx \mathbb{R}^5$. Segue da expressão acima, que a $Im\,(\theta + \omega_{m_1})$ é representada pela classe

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}\right] \in G(2, 5).$$

Usando que $\omega^3 = 0$, aplicando a derivada exterior e usando as equações estruturais em (2.2), segue que

$$\begin{aligned} 0 = d\omega^3 &= -\sum_{j=1}^{3} \omega_3^j \wedge \omega^j = -\sum_{j=1}^{2} \omega_3^j \wedge \omega^j \\ &\Rightarrow \omega_3^1 \wedge \omega^1 + \omega_3^2 \wedge \omega^2 = 0. \end{aligned}$$

Vimos que, pelo lema de Cartan (25):

$$\omega_3^i = \sum_{j=1}^{2} h_{ij}\omega^j,$$

onde $h_{ij} : U \to \mathbb{R}$ são funções suaves tais que $h_{ij} = h_{ji}$. Seja a aplicação suave

$$S = (h_{ij}) : U \to \xi,$$

onde ξ é o conjunto das matrizes simétricas 2×2. Segue que a aplicação definida em (2.19) tem seus valores apenas no subespaço

$$\left[\begin{pmatrix} Id_2 \\ 0 \\ \xi \end{pmatrix}\right] \subset G(2,5).$$

Qualquer outro $x-$referencial móvel em U é dado por $(\widetilde{e}, x) = (e, x)\,(A, 0) = (eA, x)$, onde $A : U \to G_1$ é uma aplicação suave da forma

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix},$$

onde $B = (b_{ij}) : U \to O(2)$ é uma aplicação suave e $\epsilon = \pm 1$ é localmente constante. Com as mesmas contas já realizadas, concluímos que o pull-back da forma de Maurer-Cartan por $(\widetilde{e}, x)$ é dado por $\left(\widetilde{\omega}, \widetilde{\theta}\right) = (A^{-1}\vartheta A + A^{-1}dA, A^{-1}\theta)$, ou seja:

$$\widetilde{\theta} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}\begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{pmatrix} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{\omega}^1 \\ \widetilde{\omega}^2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

Além disso, $\widetilde{\omega}$ é dado por:

$$\widetilde{\omega}_p.v = \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \omega_1^2 & \omega_1^3 \\ \omega_2^1 & 0 & \omega_2^3 \\ \omega_3^1 & \omega_3^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B^{-1}dB & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

$$= \begin{pmatrix} B^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \omega_1^2 \\ \omega_2^1 & 0 \end{pmatrix} B & \epsilon B^{-1} \begin{pmatrix} \omega_1^3 \\ \omega_2^3 \end{pmatrix} \\ \epsilon \left(B \begin{pmatrix} \omega_3^1 \\ \omega_3^2 \end{pmatrix} \right)^T & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B^{-1}dB & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} B^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \omega_1^2 \\ \omega_2^1 & 0 \end{pmatrix} B + B^{-1}dB & \epsilon B^{-1} \begin{pmatrix} \omega_1^3 \\ \omega_2^3 \end{pmatrix} \\ \epsilon \left(B \begin{pmatrix} \omega_3^1 \\ \omega_3^2 \end{pmatrix} \right)^T & 0 \end{pmatrix} = \left(\widetilde{\omega}_i^j\right)$$

Comparando coordenada por coordenada, concluímos que:

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\omega}^1 \\ \widetilde{\omega}^2 \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{pmatrix} \quad , \quad \left(\widetilde{\omega}_3^1, \widetilde{\omega}_3^2\right) = \epsilon \left(B \begin{pmatrix} \omega_3^1 \\ \omega_3^2 \end{pmatrix} \right)^T , \widetilde{\omega}_2^1 = (\det B)\, \omega_2^1 + \tau_2^1,$$

Além disso, se

$$B^{-1}dB = \begin{pmatrix} 0 & -\tau_2^1 \\ \tau_2^1 & 0 \end{pmatrix},$$

onde τ_2^1 é uma 1-forma suave e fechada em U, segue que

$$B^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \omega_1^2 \\ \omega_2^1 & 0 \end{pmatrix} B + B^{-1}dB = \begin{pmatrix} \frac{-\omega_2^1 b_{11} b_{12} + \omega_1^2 b_{21} b_{22}}{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}} & \frac{-\omega_2^1 b_{12}^2 + \omega_1^2 b_{22}^2}{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}} \\ \frac{\omega_2^1 b_{11}^2 - \omega_1^2 b_{21}^2}{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}} & \frac{\omega_2^1 b_{11} b_{12} - \omega_1^2 b_{21} b_{22}}{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\tau_2^1 \\ \tau_2^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto obtemos outro resultado:

$$\widetilde{\omega}_2^1 = \frac{\omega_2^1 b_{11}^2 - \omega_1^2 b_{21}^2}{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}} + \tau_2^1 = \omega_2^1 \frac{b_{11}^2 + b_{21}^2}{\det B} + \tau_2^1 = \frac{1}{\det B}\omega_2^1 + \tau_2^1. \tag{2.22}$$

Agora vamos encontrar a matriz da representação adjunta de G_1 em $\mathcal{E}(3)/\mathfrak{g}_1$ relativa à base $\{E_1, ..., E_5\}$. Se a matriz

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in O(2),$$

então segue que:

$$Ad\,(A)\,E_1 \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{11} & b_{12} & 0 \\ 0 & b_{21} & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b_{22}}{b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}} & -\frac{b_{12}}{b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}} & 0 \\ 0 & -\frac{b_{21}}{b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}} & \frac{b_{11}}{b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx b_{11}E_1 + b_{21}E_2$$

$$Ad\,(A)\,E_2 \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{11} & b_{12} & 0 \\ 0 & b_{21} & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b_{22}}{b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}} & -\frac{b_{12}}{b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}} & 0 \\ 0 & -\frac{b_{21}}{b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}} & \frac{b_{11}}{b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{12} & 0 & 0 & 0 \\ b_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx b_{12}E_1 + b_{22}E_2$$

$$Ad\,(A)\,E_3 \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{11} & b_{12} & 0 \\ 0 & b_{21} & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b_{22}}{b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}} & -\frac{b_{12}}{b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}} & 0 \\ 0 & -\frac{b_{21}}{b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}} & \frac{b_{11}}{b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \epsilon & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \epsilon E_3$$

$$Ad\,(A)\,E_4 \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{11} & b_{12} & 0 \\ 0 & b_{21} & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b_{22}}{b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}} & -\frac{b_{12}}{b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}} & 0 \\ 0 & -\frac{b_{21}}{b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}} & \frac{b_{11}}{b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\epsilon b_{11} \\ 0 & 0 & 0 & -\epsilon b_{21} \\ 0 & \epsilon\frac{b_{22}}{b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}} & -\epsilon\frac{b_{12}}{b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\epsilon b_{11} \\ 0 & 0 & 0 & -\epsilon b_{21} \\ 0 & \epsilon b_{11} & \epsilon b_{21} & 0 \end{pmatrix} \approx \epsilon b_{11} E_4 + \epsilon b_{21} E_5$$

$$Ad\,(A)\,E_5 \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{11} & b_{12} & 0 \\ 0 & b_{21} & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b_{22}}{b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}} & -\frac{b_{12}}{b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}} & 0 \\ 0 & -\frac{b_{21}}{b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}} & \frac{b_{11}}{b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\epsilon b_{12} \\ 0 & 0 & 0 & -\epsilon b_{22} \\ 0 & -\epsilon\frac{b_{21}}{b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}} & \epsilon\frac{b_{11}}{b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\epsilon b_{12} \\ 0 & 0 & 0 & -\epsilon b_{22} \\ 0 & \epsilon b_{12} & \epsilon b_{22} & 0 \end{pmatrix} \approx \epsilon b_{12} E_4 + \epsilon b_{22} E_5.$$

Segue dessas informações que a matriz $Ad\,(A)$ na base $\{E_1, ..., E_5\}$ é dada por:

$$Ad\,(A) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon b_{11} & \epsilon b_{12} \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon b_{21} & \epsilon b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon B \end{pmatrix}.$$

Segue da matriz $\left(\widetilde{\omega}_i^j\right)$ na expressão (2.21) e da expressão de $\widetilde{\theta}$ em (2.20) que:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\omega}_3^1 &= \epsilon\frac{-\omega_3^1 b_{22} + \omega_3^2 b_{12}}{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}} = \epsilon\frac{-b_{22}}{\det B}\omega_3^1 + \epsilon\frac{b_{12}}{\det B}\omega_3^2 \\
&= \epsilon\frac{-b_{22}}{\det B}\left(h_{11}\omega^1 + h_{12}\omega^2\right) + \epsilon\frac{b_{12}}{\det B}\left(h_{21}\omega^1 + h_{22}\omega^2\right) \\
&= \epsilon\left(\frac{-b_{22}}{\det B}h_{11} + \frac{b_{12}}{\det B}h_{21}\right)\omega^1 + \epsilon\left(\frac{-b_{22}}{\det B}h_{12} + \frac{b_{12}}{\det B}h_{22}\right)\omega^2 \\
&= \epsilon\left(\frac{-b_{22}}{\det B}h_{11} + \frac{b_{12}}{\det B}h_{21}\right)\left(b_{11}\widetilde{\omega}^1 + b_{12}\widetilde{\omega}^2\right) + \epsilon\left(\frac{-b_{22}}{\det B}h_{12} + \frac{b_{12}}{\det B}h_{22}\right)\left(b_{21}\widetilde{\omega}^1 + b_{22}\widetilde{\omega}^2\right) \\
&= \widetilde{h_{11}}\widetilde{\omega}^1 + \widetilde{h_{12}}\widetilde{\omega}^2,
\end{aligned}$$

onde os coeficientes são dados pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
\widetilde{h_{11}} &= \epsilon\left(\frac{-b_{22}b_{11}h_{11} + b_{12}b_{11}h_{21} - b_{22}b_{21}h_{12} + b_{12}b_{21}h_{22}}{\det B}\right) \\
\widetilde{h_{12}} &= \epsilon\left(\frac{-b_{22}b_{12}h_{11} + b_{12}b_{12}h_{21} - b_{22}b_{22}h_{12} + b_{12}b_{22}h_{22}}{\det B}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\omega}_3^2 &= \epsilon\frac{\omega_3^1 b_{21} - \omega_3^2 b_{11}}{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}} = \epsilon\frac{b_{21}}{\det B}\omega_3^1 + \epsilon\frac{-b_{11}}{\det B}\omega_3^2 \\
&= \epsilon\frac{b_{21}}{\det B}\left(h_{11}\omega^1 + h_{12}\omega^2\right) + \epsilon\frac{-b_{11}}{\det B}\left(h_{21}\omega^1 + h_{22}\omega^2\right) \\
&= \epsilon\left(\frac{b_{21}}{\det B}h_{11} + \frac{-b_{11}}{\det B}h_{21}\right)\omega^1 + \epsilon\left(\frac{b_{21}}{\det B}h_{12} + \frac{-b_{11}}{\det B}h_{22}\right)\omega^2 \\
&= \epsilon\left(\frac{b_{21}}{\det B}h_{11} + \frac{-b_{11}}{\det B}h_{21}\right)\left(b_{11}\widetilde{\omega}^1 + b_{12}\widetilde{\omega}^2\right) + \epsilon\left(\frac{b_{21}}{\det B}h_{12} + \frac{-b_{11}}{\det B}h_{22}\right)\left(b_{21}\widetilde{\omega}^1 + b_{22}\widetilde{\omega}^2\right) \\
&= \widetilde{h_{21}}\widetilde{\omega}^1 + \widetilde{h_{22}}\widetilde{\omega}^2,
\end{aligned}$$

onde os coeficientes são dados pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
\widetilde{h_{21}} &= \epsilon\left(\frac{b_{21}b_{11}h_{11} - b_{11}b_{11}h_{21} + b_{21}b_{21}h_{12} - b_{11}b_{21}h_{22}}{\det B}\right) \\
\widetilde{h_{22}} &= \epsilon\left(\frac{b_{21}b_{12}h_{11} - b_{11}b_{12}h_{21} + b_{21}b_{22}h_{12} - b_{11}b_{22}h_{22}}{\det B}\right)
\end{aligned}$$

Sendo $\widetilde{S} = \left(\widetilde{h_{ij}}\right)$, colocando as duas expressões acima em termos de matrizes, obtemos que

$$\widetilde{S} = \epsilon B^{-1}SB = \epsilon B^T SB.$$

Em seguida, vamos enunciar uma definição e dois resultados que serão utilizados para obter conclusões à respeito de pontos não umbílicos. Os resultados a seguir serão demonstrados à posteriori:

Definição 38. *Uma fatia de uma ação suave de um grupo de Lie G em uma variedade N é um par $(\mathcal{Y}, H)$ onde $\mathcal{Y}$ é uma subvariedade regular de N com dimensão estritamente menor, e H é um subgrupo fechado de G tal que:*

1. $H\mathcal{Y} = \mathcal{Y}$;

2. $G\mathcal{Y}$ *é uma subvariedade de* N;

3. $\mathcal{Y}$ *é fechado em* $G\mathcal{Y}$;

4. $F : [(g, y)] \in [G \times \mathcal{Y}] / H \longmapsto gy \in G\mathcal{Y}$ *é um difeomorfismo.*

Teorema 39 (Propriedade da Fatia). *Se valerem os itens (1) , (2) e (3) da Definição (38) e além disso,*

1. $g \in G$ *e* $g\mathcal{Y} \cap \mathcal{Y} \neq \varnothing$ *implica que* $g \in H$;

2. *A álgebra de Lie de* G_y *é* $\mathfrak{h}$, *para todo* $y \in \mathcal{Y}$;

3. $T_yN = T_y(G_y) \oplus T_y\mathcal{Y}$, *para todo* $y \in \mathcal{Y}$,

então $(\mathcal{Y}, H)$ é uma fatia da ação de G em N.

Teorema 40 (Propriedade do Fator). *Seja G um grupo de Lie agindo suavemente sobre uma variedade N. Suponha que $(\mathcal{Y}, H)$ seja uma fatia dessa ação. Dado um ponto m_0 em uma variedade suave M, se $f : M \to N$ é uma função suave tal que $f(m_0) \in G\mathcal{Y}$, então para todo $g_0 \in G$ e $y_0 \in \mathcal{Y}$ tal que $f(m_0) = g_0y_0$ existe uma vizinhança U de m_0 em M e uma função suave*

$$(g, y) : U \to G \times \mathcal{Y},$$

tal que

$$f(m) = g(m)\, y(m),$$

para todo $m \in U$ e $g(m_0) = g_0, y(m_0) = y_0$.

Exemplo 41. *Seja $G = O(2) \times O(1)$ e considere a seguinte ação:*

$$((A, \epsilon), X) \in G \times \xi \longmapsto \epsilon AXA^T \in \xi,$$

onde $\epsilon = \pm 1$. Primeiramente, vamos provar que essa aplicação é de fato uma ação. Notemos que se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in O(2)$ e $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{12} & x_{22} \end{pmatrix} \in \xi$, então

$$\epsilon AXA^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{12} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{12} & \varphi_{22} \end{pmatrix} \in \xi,$$

onde os coeficientes são dados pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
\varphi_{11} &= \epsilon\left(a_{11}^2 x_{11} + a_{12}^2 x_{22} + 2a_{11}a_{12}x_{12}\right),\\
\varphi_{12} &= \epsilon\left(a_{11}a_{21}x_{11} + a_{11}a_{22}x_{12} + a_{12}a_{21}x_{12} + a_{12}a_{22}x_{22}\right),\\
\varphi_{22} &= \epsilon\left(a_{21}^2 x_{11} + a_{22}^2 x_{22} + 2a_{21}a_{22}x_{12}\right),
\end{aligned}$$

logo a aplicação está bem definida. Além disso, temos que

$$Id_2 X\left(Id_2\right)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{12} & x_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{12} & x_{22} \end{pmatrix}.$$

Seja $B = (b_{ij}) \in O(2)$. Segue disso que:

$$\begin{aligned}
\left[(B,\epsilon_1)(A,\epsilon_2)\right]X = \left[(BA,\epsilon_1\epsilon_2)\right]X &= \epsilon_1\epsilon_2 (BA) X (BA)^T\\
&= \epsilon_1\epsilon_2 BAXA^T B^T = \epsilon_1 B\left(\epsilon_2 AXA^T\right)B^T\\
&= \epsilon_1 B (A,\epsilon_2) X B^T = (B,\epsilon_1)\left((A,\epsilon_2)X\right).
\end{aligned}$$

Por fim, a suavidade da função decorre da suavidade em cada coordenada da matriz resultante que é, a final de contas, uma função polinomial. Portanto a aplicação acima define uma ação de $O(2)\times O(1)$ sobre ξ. Usando que $A \in O(2)$, vamos calcular o traço de $(A,\epsilon)X$:

$$\begin{aligned}
Tr\left((A,\epsilon)X\right) = Tr\left(\epsilon AXA^T\right) &= \epsilon\left(a_{11}^2x_{11} + a_{12}^2x_{22} + 2a_{11}a_{12}x_{12} + a_{21}^2x_{11} + a_{22}^2x_{22} + 2a_{21}a_{22}x_{12}\right)\\
&= \frac{\epsilon\left(a_{22}^2x_{11} + a_{21}^2x_{22} - 2a_{22}a_{21}x_{12} + a_{12}^2x_{11} + a_{11}^2x_{22} - 2a_{12}a_{11}x_{12}\right)}{(\det A)^2}\\
&= \frac{\epsilon\left(\left(a_{22}^2 + a_{12}^2\right)x_{11} + \left(a_{21}^2 + a_{11}^2\right)x_{22} - 2\left(a_{22}a_{21} + a_{12}a_{11}\right)x_{12}\right)}{(\det A)^2}\\
&= \frac{\epsilon\left(\left(a_{22}^2 + a_{12}^2\right)x_{11} + \left(a_{21}^2 + a_{11}^2\right)x_{22}\right)}{(\det A)^2} = \epsilon\left(\left(a_{22}^2 + a_{12}^2\right)x_{11} + \left(a_{21}^2 + a_{11}^2\right)x_{22}\right)\\
&= \epsilon\left((\pm\det A)x_{11} + (\pm\det A)x_{22}\right) = \epsilon\left(\widetilde{\epsilon}x_{11} + \widetilde{\epsilon}x_{22}\right)\\
&= \epsilon\widetilde{\epsilon}\left(x_{11} + x_{22}\right) = \widehat{\epsilon}\,Tr(X).
\end{aligned}$$

Se $S \in \xi$, segue da álgebra linear que existe $A \in O(2)$ tal que $\widetilde{S} = \epsilon ASA^T$ é uma matriz diagonal. Ou seja, na linguagem de ação de grupos, a órbita de todo elemento $A \in O(2)$ contém um ponto do hiperplano $\mathcal{D} \subset \xi$ das matrizes diagonais, no qual é o hiperplano $z = 0$ se fizermos a seguinte identificação:

$$\xi \approx \mathbb{R}^3 \qquad , \qquad \begin{pmatrix} x & z \\ z & y \end{pmatrix} \approx (x,y,z).$$

Considere o conjunto das matrizes escalares $\Gamma_2 := \{t\,(Id_2) : t \in \mathbb{R}\}$ e considere a subva-

riedade

$$\mathcal{Y} := \mathcal{D}\backslash\Gamma_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \ e \ x \neq y \right\}.$$

Por fim, seja

$$K = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

um subgrupo finito de $O(2)$. Logo

$$G_2 = K \times O(1) \subset O(2) \times O(1) = G \tag{2.23}$$

é um subgrupo de G. Vamos provar que G_2 estabiliza $\mathcal{Y}$. De fato, dado $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \in \mathcal{Y}$, *segue que:*

$$\epsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \epsilon x & 0 \\ 0 & \epsilon y \end{pmatrix} \in \mathcal{Y},$$
$$\epsilon \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \epsilon x & 0 \\ 0 & \epsilon y \end{pmatrix} \in \mathcal{Y},$$

$$\epsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \epsilon x & 0 \\ 0 & \epsilon y \end{pmatrix} \in \mathcal{Y},$$
$$\epsilon \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \epsilon x & 0 \\ 0 & \epsilon y \end{pmatrix} \in \mathcal{Y},$$

$$\epsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} y\epsilon & 0 \\ 0 & x\epsilon \end{pmatrix} \in \mathcal{Y},$$
$$\epsilon \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \epsilon y & 0 \\ 0 & \epsilon x \end{pmatrix} \in \mathcal{Y},$$

$$\epsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} y\epsilon & 0 \\ 0 & x\epsilon \end{pmatrix} \in \mathcal{Y},$$
$$\epsilon \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} y\epsilon & 0 \\ 0 & x\epsilon \end{pmatrix} \in \mathcal{Y}.$$

Dado $p = \begin{pmatrix} x_0 & 0 \\ 0 & y_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{Y}$, *vamos provar que* $T_p\xi = \xi$. *De fato, sejam* $x, y, z : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *curvas suaves tais que* $z(0) = 0$, $x(0) = x_0$ *e* $y(0) = y_0$, *segue que a curva*

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} x(t) & z(t) \\ z(t) & y(t) \end{pmatrix} \in \xi \qquad e \qquad \begin{pmatrix} x(0) & z(0) \\ z(0) & y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & 0 \\ 0 & y_0 \end{pmatrix} = p,$$

além disso, temos que $\begin{pmatrix} x'(0) & z'(0) \\ z'(0) & y'(0) \end{pmatrix} \in \xi$, *portanto* $T_p\xi \subset \xi$. *Além disso, dado* $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \xi$, *sejam* $x, y, z : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *onde*

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + at \\ y(t) = y_0 + ct \\ z(t) = bt \end{cases}$$

segue que a curva $t \longmapsto \begin{pmatrix} x(t) & z(t) \\ z(t) & y(t) \end{pmatrix}$ *está contida em* ξ, *além disso,*

$$\begin{pmatrix} x(0) & z(0) \\ z(0) & y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & 0 \\ 0 & y_0 \end{pmatrix} = p \qquad e \qquad \begin{pmatrix} x'(0) & z'(0) \\ z'(0) & y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

ou seja, $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in T_p\xi$ *e portanto temos que* $T_p\xi = \xi$.

Agora vamos caracterizar o espaço tangente $T_p(Gp)$. *Sabemos que os elementos de* Gp *são da forma* ϵApA^T, *onde* $(A, \epsilon) \in G$. *Pela caracterização de* $\mathfrak{o}(2)$, *segue que seus elementos são da forma* $X = \begin{pmatrix} 0 & -z \\ z & 0 \end{pmatrix}$, *ou seja, a curva* $t \longmapsto \left(e^{tX}, \epsilon\right)$ *está contida em* G. *Portanto, as curvas de* Gp *são da forma*

$$\begin{aligned} t \longmapsto \left(e^{tX}, \epsilon\right) p = \epsilon e^{tX} p \left(e^{tX}\right)^T \overset{e^{tX} \in O(2)}{=} \epsilon e^{tX} p \left(e^{tX}\right)^{-1} \\ = \epsilon e^{tX} p e^{-tX} \end{aligned}$$

Derivando e aplicando em $t = 0$, *obtemos a expressão para os vetores de* $T_p(Gp)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}_{|t=0} \left(\epsilon e^{tX} p e^{-tX}\right) &= \left(\epsilon X e^{tX} p e^{-tX} + \epsilon e^{tX} p \left(-X e^{-tX}\right)\right)_{|t=0} = (\epsilon Xp - \epsilon pX) \\ &= \epsilon \left(\begin{pmatrix} 0 & -z \\ z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 & 0 \\ 0 & y_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 & 0 \\ 0 & y_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -z \\ z & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \epsilon z (x_0 - y_0) \\ \epsilon z (x_0 - y_0) & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

onde $z \in \mathbb{R}$ é um número qualquer. Portanto temos que

$$T_p\left(Gp\right) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & z \\ z & 0 \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Por fim, vamos caracterizar o espaço tangente $T_p\mathcal{Y}$. Segue da definição de $\mathcal{Y}$ que se $x, y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ são duas curvas tais que $x(0) = x_0$ e $y(0) = y_0$ e $x(t) \neq y(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, então as curvas da forma $t \longmapsto \begin{pmatrix} x(t) & 0 \\ 0 & y(t) \end{pmatrix}$ formam todas as curvas possíveis contidas em $\mathcal{Y}$ tal que no ponto $t = 0$ vale p. Como $x'(0)$ e $y'(0)$ são números reais quaisquer, segue que

$$T_p\mathcal{Y} = \left\{ \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} : u, v \in \mathbb{R} \right\}.$$

Segue do Teorema (39) que $\mathcal{Y}$ é uma fatia de $(\mathcal{Y}, G_2)$ é uma fatia da ação de G em ξ.

Definição 42 (Referencial Móvel de 2^a Ordem)**.** *Um $x-$**referencial móvel de 2^a ordem** é um $x-$referencial móvel de 1^a ordem $(e, x) : U \to E(3)$ tal que a aplicação $S : U \to \xi$ tem todos os seus valores em $\mathcal{Y}$. Os **invariantes de 2^a ordem de** x **em** U, são as entradas não nulas dessa aplicação.*

Em termos mais simples, um $x-$referencial móvel de 2^a ordem $(e, x) : U \to E(3)$ é caracterizado pelas seguintes equações:

$$\begin{array}{lcll} \omega^3 = 0 & , & \omega^1 \wedge \omega^2 \neq 0 & (1^a \text{ ordem}) \\ \omega_3^1 = a\omega^1 & , & \omega_3^2 = c\omega^1 & (2^a \text{ ordem}) \end{array}$$

para funções suaves $a, c : U \to \mathbb{R}$ tal que $a \neq c$ para todo ponto de U. Estas funções são os invariantes de 2^a ordem e são chamados de **curvaturas principais de** x em cada ponto de U. É tradicional chamarmos o $x-$referencial móvel de 2^a ordem mesmo quando $a = c$ em alguns pontos de U. Esses pontos são chamados de **pontos umbílicos de** x em U. Se todos os pontos são umbílicos, então x é de um tipo diferente. Esse caso é discutido abaixo.

Lema 43. *Seja m_0 um ponto de M. Se m_0 é não umbílico, ou se existe um aberto de pontos umbílicos que contém m_0, então existe um $x-$referencial móvel de 2^a ordem em alguma vizinhança de m_0.*

Demonstração. Sabemos que existe um $x-$referencial móvel de 1^a ordem $(e, x) : U \to E(3)$ em alguma vizinhança U de m_0. Se existir uma vizinhança V de m_0 contendo apenas pontos umbílicos, segue que (e, x) é um $x-$referencial móvel de 2^a ordem. A aplicação suave $H^2 - K : M \to \mathbb{R}$ se anula precisamente no conjunto dos pontos umbílicos de x.

Segue disso que o conjunto dos pontos umbílicos é fechado em M. Se m_0 é não umbílico, podemos diminuir suficientemente U de modo que ele só contenha pontos não umbílicos. De fato, o conjunto dos pontos não umbílicos é aberto já que é o complementar dos umbílicos. Condidere a aplicação $S = (h_{ij}) : U \to \xi$ associada à (e, x). Seja $a_0 \neq c_0$ as curvaturas principais em m_0. Usando a notação do exemplo anterior para a fatia $\mathcal{Y}$ da ação de G_1 em ξ, sabemos que $S(U) \subset G_1\mathcal{Y}$. Aplicando o teorema (40) obtemos uma vizinhança V de m_0 em U e aplicações suaves

$$A = (B, \epsilon) : V \to G_1 \qquad , \qquad D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} : V \to \mathcal{Y}$$

com $a(m_0) = a_0$ e $c(m_0) = c_0$ tal que

$$S = (B, \epsilon)D = \epsilon BDB^T$$

em V. Se $(\widetilde{e}, x) = (eA, x) : V \to E(3)$, então

$$\widetilde{S} = \epsilon B^T SB = \epsilon B^T \epsilon BDB^T B = B^T BDB^T B = D$$

em V, com $\widetilde{S}(m_0) = D(m_0)$. Assim, $(\widetilde{e}, x)$ é, por construção, um $x-$referencial móvel de 2^a ordem.

■

Observação 44. *Se $(e, x) : U \to E(3)$ é um $x-$referencial móvel de 2^a ordem em um domínio que contém apenas pontos umbílicos, então qualquer outro $x-$referencial móvel de 2^a ordem deve ser dado por $(eA, x) : U \to E(3)$, onde $A : U \to G_2$ é uma aplicação suave qualquer, onde G_2 é um subgrupo finito de G_1 definido em (2.23). Como a aplicação $t \mapsto \exp(tP)$ tem infinitos elementos, não é possível existir $P \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ tal que $\exp(tP) \in G_2$ para todo t, ou seja $\mathfrak{g}_2 = \{0\}$, segue disso que os $x-$**referenciais móveis de Frenet** são os de 2^a ordem. A forma de Maurer Cartan que resta em um referencial móvel de Frenet é*

$$\omega_2^1 = p\omega^1 + q\omega^2,$$

*onde $p, q : U \to \mathbb{R}$ são os **invariantes de 3^a ordem.***

2.3.1 Resumo da Redução de referencial e Equações Estruturais

Seja $x : M \to \mathbb{R}^3$ uma imersão. Em um ponto não umbílico existe um $x-$referencial móvel de 2^a ordem $(e, x) : U \to E(3)$ em uma vizinhança desse ponto. O pull back da forma de

Maurer-Cartan de $E(3)$ por (e,x) satisfaz:

$$\begin{cases} \omega^3 = 0 \quad , \quad \omega^1\wedge\omega^2 \neq 0 \\ d\omega^1 = p\omega^1\wedge\omega^2 \quad , \quad d\omega^2 = q\omega^1\wedge\omega^2 \end{cases} \quad (1^a \text{ ordem})$$

$$\left\{\omega_3^1 = a\omega^1 \quad , \quad \omega_3^2 = c\omega^2 \right. \qquad (2^a \text{ ordem})$$

$$\left\{\omega_2^1 = p\omega^1 + q\omega^2 \right. \qquad (3^a \text{ ordem})$$

As equações de estrutura da imersão as **equações de Codazzi** e as **equações de Gauss**, nas quais, como $\omega^1\wedge\omega^2\neq 0$ podem ser escritas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} &a_2 = (a-c)\,p \quad , \quad c_1 = (a-c)\,q \qquad \text{(equações de Codazzi)}, \\ &ac = K = p_2 - q_1 - \left(p^2+q^2\right) \qquad \text{(equações de Gauss)}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

onde

$$da = \sum_{i=1}^{2} a_i\omega^i \qquad dc = \sum_{i=1}^{2} c_i\omega^i \qquad dp = \sum_{i=1}^{2} p_i\omega^i \qquad dq = \sum_{i=1}^{2} q_i\omega^i$$

e K é a curvatura gaussiana. As funções a e c são as curvaturas principais de x. Elas são funções contínuas em M e suaves no aberto dos pontos não umbílicos de M.

Se x é totalmente não umbílico em U, então qualquer $x-$referencial móvel de 1^a ordem é automaticamente de 2^a ordem e fazendo $a=c$ nas equações estruturais obtemos o seguinte resultado em pontos umbílicos:

$$\begin{aligned} a_2 = 0 \quad &, \quad c_1 = 0 \qquad \text{(equações de Codazzi)} \\ p_2 - q_1 - \left(p^2+q^2\right) = K = a^2 & \qquad \text{(equações de Gauss)} \\ da = a_1\omega^1 \quad &, \quad dc = c_2\omega^2 \end{aligned}$$

Proposição 45. *Dado um $x-$referencial móvel de 1ª ordem $(e,x) : U \longrightarrow M$, as equações de estrutura de $E(3)$ implicam que*

$$d\omega^1 = p\omega^1\wedge\omega^2 \qquad e \qquad d\omega^2 = q\omega^1\wedge\omega^2, \tag{2.25}$$

onde $p,q : U \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções suaves que satisfazem:

$$\omega_2^1 = p\omega^1 + q\omega^2.$$

Demonstração. Sabemos que $dx = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2$. Aplicando a derivação exterior em ambos os lados, obtemos o seguinte:

$$
\begin{aligned}
0 = d^2x = d\left(\omega^1 e_1 + \omega^2 e_2\right) &= \left(d\omega^1\right) e_1 - \omega^1 \wedge de_1 + \left(d\omega^2\right) e_2 - \omega^2 \wedge de_2 \\
&= e_1 \alpha \omega^1 \wedge \omega^2 - \omega^1 \wedge \left(\omega_1^1 e_1 + \omega_2^1 e_2\right) + e_2 \beta \omega^1 \wedge \omega^2 - \omega^2 \wedge \left(\omega_1^2 e_1 + \omega_2^2 e_2\right) \\
&= e_1 \alpha \omega^1 \wedge \omega^2 - e_2 \omega^1 \wedge \omega_2^1 + e_2 \beta \omega^1 \wedge \omega^2 - e_1 \omega^2 \wedge \omega_1^2 \\
&= e_1 \alpha \omega^1 \wedge \omega^2 - e_2 \omega^1 \wedge \omega_2^1 + e_2 \beta \omega^1 \wedge \omega^2 + e_1 \omega^2 \wedge \omega_2^1,
\end{aligned}
$$

usando a igualdade $\omega_2^1 = p\omega^1 + q\omega^2$, segue que

$$
\begin{aligned}
0 &= e_1 \alpha \omega^1 \wedge \omega^2 - e_2 \omega^1 \wedge \left(p\omega^1 + q\omega^2\right) + e_2 \beta \omega^1 \wedge \omega^2 + e_1 \omega^2 \wedge \left(p\omega^1 + q\omega^2\right) \\
&= e_1 \alpha \omega^1 \wedge \omega^2 - e_2 \omega^1 \wedge q\omega^2 + e_2 \beta \omega^1 \wedge \omega^2 + e_1 \omega^2 \wedge p\omega^1 \\
&= \left(e_1 \alpha - e_2 q + e_2 \beta - e_1 p\right) \omega^1 \wedge \omega^2 \\
&= \left((\alpha - p) e_1 + (\beta - q) e_2\right) \omega^1 \wedge \omega^2,
\end{aligned}
$$

ou seja, temos que $(\alpha - p) e_1 + (\beta - q) e_2 = 0$, logo $\alpha = p$ e $\beta = q$. ■

2.4 A Forma de Critério

Definição 46. *O* ***operador Hodge star*** $* : \Lambda^1(M) \to \Lambda^1(M)$ *é uma transformação linear sobre o espaço das 1-formas suaves com domínio em M definida da seguinte maneira num co-referencial móvel positivamente orientado:*

$$
*\left(\omega^1\right) = \omega^2 \qquad e \qquad *\left(\omega^2\right) = -\omega^1
$$

Note que o operador Hodge star não depende da escolha do co-referencial móvel ortonormal e positivamente orientado. Com efeito, se $\{\omega^1, \omega^2\}$ e $\{\widetilde{\omega}^1, \widetilde{\omega}^2\}$ são dois co-referenciais móveis ortonormais tais que

$$
\begin{pmatrix} \widetilde{\omega}^1 \\ \widetilde{\omega}^2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{pmatrix},
$$

onde $A \in SO(2)$, segue que se

$$
\begin{aligned}
*\left(\omega^1\right) &= \omega^2 \qquad \text{e} \qquad *\left(\omega^2\right) = -\omega^1, \\
\widetilde{*}\left(\widetilde{\omega}^1\right) &= \widetilde{\omega}^2 \qquad \text{e} \qquad *\left(\widetilde{\omega}^2\right) = -\widetilde{\omega}^1,
\end{aligned}
$$

então temos o seguinte:

$$
\begin{aligned}
*\left(\widetilde{\omega}^1\right) &= *\left(A_{11}\omega^1 + A_{12}\omega^2\right) = A_{11} *\left(\omega^1\right) + A_{12} *\left(\omega^2\right) = A_{11}\omega^2 - A_{12}\omega^1 = A_{22}\omega^2 + A_{21}\omega^1 = \widetilde{\omega}^2, \\
*\left(\widetilde{\omega}^2\right) &= *\left(A_{21}\omega^1 + A_{22}\omega^2\right) = A_{21} *\left(\omega^1\right) + A_{22} *\left(\omega^2\right) = A_{21}\omega^2 - A_{22}\omega^1 = -A_{12}\omega^2 - A_{11}\omega^1 = -\widetilde{\omega}^1,
\end{aligned}
$$

ou seja, $* = \widetilde{*}$.

Definição 47. *A **forma de critério** de um $x-$referencial móvel de 1^a ordem $(e, x) : U \to E(3)$ é a 1-forma suave*

$$\alpha = - * \left(\omega_2^1\right),$$

onde U é orientado por um co-referencial móvel ortonormal $\{\omega^1, \omega^2\}$.

Segue da definição que

$$\alpha = - * \left(\omega_2^1\right) = - * \left(p\omega^1 + q\omega^2\right) = -p * \left(\omega^1\right) - q * \left(\omega^2\right) = q\omega^1 - p\omega^2.$$

Segue de (2.25) e das equações de estrutura que um $x-$referencial móvel de 1^a ordem é caracterizado pelas seguintes equações

$$d\omega^1 = \alpha \wedge \omega^1 \qquad \text{e} \qquad d\omega^2 = \alpha \wedge \omega^2.$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \omega^1 &= \left(q\omega^1 - p\omega^2\right) \wedge \omega^1 = q\omega^1 \wedge \omega^1 - p\omega^2 \wedge \omega^1 = p\omega^1 \wedge \omega^2 = d\omega^1, \\ \alpha \wedge \omega^2 &= \left(q\omega^1 - p\omega^2\right) \wedge \omega^2 = q\omega^1 \wedge \omega^2 - p\omega^2 \wedge \omega^2 = q\omega^1 \wedge \omega^2 = d\omega^2. \end{aligned}$$

Além disso, dados os $x-$referenciais móveis de 1^a ordem $(e, x), (\widetilde{e}, x) : U \to E(3)$ tais que $(\widetilde{e}, x) = (eA, x)$, onde $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix}$, $B : U \to O(2)$ e $\epsilon = \pm 1$, se $\alpha = - * \left(\omega_2^1\right)$ e $\widetilde{\alpha} = -\widetilde{*}\left(\widetilde{\omega_2^1}\right)$, segue de (2.22) que

$$\widetilde{\alpha} = -\widetilde{*}\left(\widetilde{\omega_2^1}\right) = -\widetilde{*}\left(\frac{1}{\det B}\omega_2^1 + \tau_2^1\right) = -\widetilde{*}\left(\frac{1}{\det B}\omega_2^1 + \tau_2^1\right) = -\frac{1}{\det B}\widetilde{*}\left(\omega_2^1\right) - \widetilde{*}\left(\tau_2^1\right)$$

2.5 Teoremas de Existência e Congruência de Bonnet

Comecemos com um resultado que relaciona duas funções suaves de acordo com o pull back da forma de Maurer Cartan por ambas:

Teorema 48 (Congruência de Cartan-Darboux)**.** *Seja M uma variedade diferenciável conexa, G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e forma de Maurer-Cartan ω. Se $f, h : M \to G$ são funções suaves tais que $f^*\omega = h^*\omega$, então existe um elemento $a \in G$ tal que $h = af$.*

Demonstração. Seja $g : M \to G$ uma aplicação suave definida por

$$g(p) = h(p)(f(p))^{-1},$$

para todo $p \in M$. Temos que

$$d\left((f(p))^{-1}\right) = -(f(p))^{-1} df_p (f(p))^{-1},$$

e além disso

$$(f^*\omega)(p) = (f(p))^{-1} df_p,$$

para todo $p \in M$. Portanto segue que

$$\begin{aligned} dg_p &= dh_p (f(p))^{-1} + h(p)\, d\left((f(p))^{-1}\right) = dh_p (f(p))^{-1} - h(p)(f(p))^{-1} df_p (f(p))^{-1} \\ &= dh_p (f(p))^{-1} - h(p)(f^*\omega)(p)(f(p))^{-1} = dh_p (f(p))^{-1} - h(p)(h^*\omega)(p)(f(p))^{-1} \\ &= dh_p (f(p))^{-1} - h(p)(h(p))^{-1} dh_p (f(p))^{-1} = (dh_p - dh_p)(f(p))^{-1} \\ &= 0, \end{aligned}$$

para todo $p \in M$. Assim g é constante, digamos $g \equiv a$. Dado $p \in M$, segue da definição de g que

$$a = g(p) = h(p)(f(p))^{-1},$$

e portanto

$$h(p) = af(p).$$

Isso conclui a demonstração. ■

Temos a seguinte aplicação do teorema acima:

Teorema 49 (Existência de Cartan-Darboux)**.** *Seja G um grupo de Lie conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e 1-forma de Maurer-Cartan ω com valores em $\mathfrak{g}$. Se X é uma variedade diferenciável munido de uma 1-forma α com valores em $\mathfrak{g}$ satisfazendo*

$$d\alpha = -\alpha \wedge \alpha,$$

então para todo $p_0 \in X$ e todo $g_0 \in G$ existe uma vizinhança aberta e conexa U de p_0 e uma única aplicação $A : U \to G$ tal que

$$A^*\omega = \alpha \qquad e \qquad A(p_0) = g_0.$$

Além disso, se X for simplemente conexo, então para todo $p_0 \in X$ e todo $g_0 \in G$ existe uma única aplicação $A : X \to G$ tal que

$$A^*\omega = \alpha \qquad e \qquad A(p_0) = g_0.$$

Devido ao fato de sua demonstração ser muito extensa e não acrescentar muito à compreensão do tema, vamos omiti-la.

Proposição 50 (Congruência). *Se $(e,x),(\widehat{e},\widehat{x}) : M \longrightarrow E(3)$ são dois referenciais móveis de 2ª ordem ao longo das imersões $x,\widehat{x} : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$, respectivamente, em um conexo M, tal que em todo ponto de M valem as seguintes igualdades:*

$$\begin{cases} \widehat{\omega}^1 = \omega^1 \\ \widehat{\omega}^2 = \omega^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \widehat{a} = a \\ \widehat{c} = c \end{cases}, \quad \begin{cases} \widehat{p} = p \\ \widehat{q} = q \end{cases}, \tag{2.26}$$

então existe uma isometria $(A,v) \in E(3)$ tal que $(\widehat{e},\widehat{x}) = (A,v)(e,x) = (Ae, Ax+v)$, ou seja:

$$\widehat{x} = Ax + v = (A,v) \circ x.$$

Demonstração. Basta aplicar diretamente o Teorema da Congruência de Cartan Darboux para o caso em que $G = E(3)$, $f = (e,x)$, $h = (\widehat{e},\widehat{x})$ e usar as equações em (2.26) que nos dá a igualdade $(e,x)^* \omega = (\widehat{e},\widehat{x})^* \omega$. ■

Também temos o seguinte teorema:

Proposição 51 (Existência). *Considere um aberto contrátil U de $\mathbb{R}^2$, um co-referencial móvel $\{\omega^1,\omega^2\}$ e funções suaves $a,c : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Defina funções suaves $p,q,a_i,c_i,p_i,q_i, : U \longrightarrow \mathbb{R}$ por*

$$d\omega^1 = p\omega^1 \wedge \omega^2 \quad e \quad d\omega^2 = q\omega^1 \wedge \omega^2$$

$$da = a_1\omega^1 + a_2\omega^2 \quad e \quad dc = c_1\omega^1 + c_2\omega^2$$

$$dp = p_1\omega^1 + p_2\omega^2 \quad e \quad dq = q_1\omega^1 + q_2\omega^2$$

Se as funções definidas acima verificam

$$a_2 = (a-c) \;, \qquad c_1 = (a-c)\,q \qquad e \qquad p_2 - q_1 = ac + p^2 + q^2$$

em U, então existe uma imersão $x : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ com curvaturas principais a e c e métrica induzida $I = \omega^1\omega^1 + \omega^2\omega^2$.

Demonstração. Vamos definir as seguintes formas diferenciais:

$$\begin{cases} \omega_2^1 := p\omega^1 + q\omega^2 =: -\omega_1^2 \\ \omega_3^1 := a\omega^1 =: -\omega_1^3 \\ \omega_3^2 := c\omega^2 =: -\omega_2^3 \end{cases}$$

com elas podemos definir a seguinte 1−forma diferencial que cai em $\mathcal{E}(3)$:

$$\eta := \left(\begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \omega_1^2 & \omega_1^3 \\ \omega_2^1 & 0 & \omega_2^3 \\ \omega_3^1 & \omega_3^2 & 0 \end{pmatrix} \right) \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega^1 & 0 & \omega_1^2 & \omega_1^3 \\ \omega^2 & \omega_2^1 & 0 & \omega_2^3 \\ 0 & \omega_3^1 & \omega_3^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vamos demonstrar que $d\eta = -\eta \wedge \eta$. De fato, temos que

$$d\eta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ d\omega^1 & 0 & -d\omega_2^1 & -d\omega_3^1 \\ d\omega^2 & d\omega_2^1 & 0 & -d\omega_3^2 \\ 0 & d\omega_3^1 & d\omega_3^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ p\omega^1 \wedge \omega^2 & 0 & -d\left(p\omega^1 + q\omega^2\right) & -d\left(a\omega^1\right) \\ q\omega^1 \wedge \omega^2 & d\left(p\omega^1 + q\omega^2\right) & 0 & -d\left(c\omega^2\right) \\ 0 & d\left(a\omega^1\right) & d\left(c\omega^2\right) & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ p\omega^1 \wedge \omega^2 & 0 & ac\omega^1 \wedge \omega^2 & -cp\omega^1 \wedge \omega^2 \\ q\omega^1 \wedge \omega^2 & -ac\omega^1 \wedge \omega^2 & 0 & -aq\omega^1 \wedge \omega^2 \\ 0 & cp\omega^1 \wedge \omega^2 & aq\omega^1 \wedge \omega^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & ac & -cp \\ q & -ac & 0 & -aq \\ 0 & cp & aq & 0 \end{pmatrix} \omega^1 \wedge \omega^2.$$

Por outro lado, temos que:

$$-\eta \wedge \eta = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega^1 & 0 & \omega_1^2 & \omega_1^3 \\ \omega^2 & \omega_2^1 & 0 & \omega_2^3 \\ 0 & \omega_3^1 & \omega_3^2 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega^1 & 0 & \omega_1^2 & \omega_1^3 \\ \omega^2 & \omega_2^1 & 0 & \omega_2^3 \\ 0 & \omega_3^1 & \omega_3^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_1^2 \wedge \omega^2 & \omega_1^2 \wedge \omega_2^1 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^1 & \omega_1^3 \wedge \omega_3^2 & \omega_1^2 \wedge \omega_2^3 \\ \omega_2^1 \wedge \omega^1 & \omega_2^3 \wedge \omega_3^1 & \omega_2^1 \wedge \omega_1^2 + \omega_2^3 \wedge \omega_3^2 & \omega_2^1 \wedge \omega_1^3 \\ \omega_3^1 \wedge \omega^1 + \omega_3^2 \wedge \omega^2 & \omega_3^2 \wedge \omega_2^1 & \omega_3^1 \wedge \omega_1^2 + & \omega_3^1 \wedge \omega_1^3 + \omega_3^2 \wedge \omega_2^3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & ac & -pc \\ q & -ac & 0 & -aq \\ 0 & cp & aq & 0 \end{pmatrix} \omega^1 \wedge \omega^2.$$

Isso demonstra a igualdade. Segue do Teorema de Existência de Cartan-Darboux (49) que existe uma aplicação suave $(e, x) : U \to E(3)$ tal que $(e, x)^* \omega = \eta$ em U (onde ω é a formma de Maurer-Cartan de $E(3)$) e $x : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é a imersão que procurávamos, por construção. ■

Teorema 52 (Teorema da Congruência de Bonnet)**.** *Sejam $x, \widetilde{x} : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ duas imersões suaves de uma superfície conexa M. Sejam $I, \widetilde{I}$ as primeiras formas fundamentais de x e $\widetilde{x}$, respectivamente. Sejam e_3 e $\widetilde{e_3}$ campos normais unitários ao longo de x e $\widetilde{x}$, respectivamente. E sejam*

$$II = -\left\langle de_3, dx \right\rangle \qquad , \qquad \widetilde{II} = -\left\langle d\widetilde{e_3}, d\widetilde{x} \right\rangle$$

as segundas formas fundamentais de x e $\widetilde{x}$ relativas à e_3 e $\widetilde{e_3}$, respectivamente. Se existe um elemento $(A, v) \in E(3)$ tal que $\widetilde{x} = (A, v) \circ x$ em M, então $\widetilde{e_3} = \epsilon A e_3$, onde $\epsilon = \pm 1$, $I = \widetilde{I}$ e $II = \epsilon \widetilde{II}$ em M. Por outro lado, se $I = \widetilde{I}$ e $II = \epsilon \widetilde{II}$ em M, onde $\epsilon = \pm 1$, então *existe um elemento* $(A, v) \in E(3)$ *tal que* $\widetilde{x} = Ax + v$ *e* $\widetilde{e_3} = \epsilon A e_3$.

Demonstração. Se existe um $(A, v) \in E(3)$ tal que $\widetilde{x} = (A, v) \circ x = Ax + v$, aplicando a derivada exterior em ambos os lados, obtemos que $d\widetilde{x} = Adx$ e isso implica que

$$\widetilde{I} = \langle d\widetilde{x}, d\widetilde{x} \rangle = \langle Adx, Adx \rangle = \left\langle A^T Adx, dx \right\rangle \overset{A \in O(3)}{=} \left\langle A^{-1} Adx, dx \right\rangle = \langle dx, dx \rangle = I$$

em M. Além de $\widetilde{e_3}$, o campo Ae_3 é normal unitário ao longo de $\widetilde{x}$. De fato,

$$\langle Ae_3, d\widetilde{x} \rangle = \langle Ae_3, Adx \rangle = \left\langle A^T Ae_3, dx \right\rangle = \langle e_3, dx \rangle = 0$$

em M, além disso, como $A \in O(2)$, segue que Ae_3 é unitário. Como M é conexo, segue que $\widetilde{e_3} = \epsilon A e_3$, onde $\epsilon = \pm 1$ em M. E portanto:

$$\widetilde{II} = -\langle d\widetilde{e_3}, d\widetilde{x} \rangle = -\langle d(\epsilon A e_3), Adx \rangle = -\langle \epsilon A de_3, Adx \rangle = -\epsilon \left\langle A^T A de_3, dx \right\rangle = -\epsilon \langle de_3, dx \rangle = \epsilon II$$

em M.

Por outro lado, suponha que $I = \widetilde{I}$ e $II = \epsilon \widetilde{II}$ em M, onde $\epsilon = \pm 1$. Se $\epsilon = -1$, troque $\widetilde{e_3}$ por $-\widetilde{e_3}$ para que o sinal de $\widetilde{II}$ se inverta, assim podemos supor, sem perda de generalidade, que $I = \widetilde{I}$ e $II = \widetilde{II}$ em M. Seja $p \in M$ e seja $U \subset M$ uma vizinhança conexa de p tal que existe um $x-$referencial móvel de 1^a ordem $(e, x) : U \longrightarrow E_+(3)$, tal que a 3^a coluna de e seja e_3. De fato, temos que o e_3 pode estar (ou não) invertido, daí aplicando (ou não) uma inversão, consertamos o e_3. Para o referencial móvel pertencer à $E_+(3)$, basta invertermos um dos dois vetores da base do espaço tangente (e_1 ou e_2) podemos fazer isso pois as inversões são matrizes ortogonais e além disso, se os vetores estiverem invertidos, por continuidade eles sempre estarão invertidos, por exemplo $\langle e_3, e_3 \rangle = \pm 1$, logo é sempre 1 ou sempre -1 .Então segue que $dx = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2$, onde $\{\omega^1, \omega^2\}$ é um co-referencial móvel ortonormal para I em U, pois $I = \omega^1\omega^1 + \omega^2\omega^2$. Como $I = \widetilde{I}$, segue que $\{\omega^1, \omega^2\}$ também é um co-referencial móvel ortonormal para $\widetilde{I}$ em M. Também temos que existe um $\widetilde{x}-$referencial móvel de 1^a ordem $(\widetilde{e}, \widetilde{x}) : U \longrightarrow E(3)$, chamemos o 3^o vetor coluna da matriz $\widetilde{e}$ por $\widetilde{e_3}$, logo $d\widetilde{x} = \omega^1 \widetilde{e_1} + \omega^2 \widetilde{e_2}$, ou seja, $\omega^1 = \widetilde{\omega^1}$ e $\omega^2 = \widetilde{\omega^2}$ em U. Segue diretamente de (45) que $\omega_1^2 = \widetilde{\omega_1^2}$ em U. Além disso, temos que

$$\begin{aligned}
\widetilde{\omega_3^1}\omega^1 + \widetilde{\omega_3^2}\omega^2 &= -\widetilde{\omega_1^3}\omega^1 - \widetilde{\omega_2^3}\omega^2 = -\langle d\widetilde{e_3}, \widetilde{e_1} \rangle \omega^1 - \langle d\widetilde{e_3}, \widetilde{e_2} \rangle \omega^2 \\
&= -\left\langle d\widetilde{e_3}, \widetilde{e_1}\omega^1 + \widetilde{e_2}\omega^2 \right\rangle = -\langle d\widetilde{e_3}, d\widetilde{x} \rangle = \widetilde{II} = II = \omega_3^1\omega^1 + \omega_3^2\omega^2,
\end{aligned}$$

segue da unicidade das coordenadas na base $\{\omega^1, \omega^2\}$ que $\widetilde{\omega_3^1} = \omega_3^1$ e $\widetilde{\omega_3^2} = \omega_3^2$ em U. Segue dessas igualdades que

$$(e, x)^* \omega = \left(\begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \left(\omega_i^j\right) \right) = (\widetilde{e}, \widetilde{x})^* \omega$$

em U. Pelo teorema de congruência de Cartan-Darboux (48) existe um elemento $(A,v) \in E(3)$ tal que $(e,x) = (A,v) \circ (\widetilde{e},\widetilde{x})$ em U. Em particular, $x = A\widetilde{x} + v$ e $e_3 = A\widetilde{e_3}$ em U. Não há perda de generalidade em supor que $\widetilde{x} = A\widetilde{x} + v$, nesse caso ainda as hipóteses serão satisfeitas, mas além disso teremos $(\widetilde{e},\widetilde{x}) = (e,x)$. Até agora demonstramos a volta localmente. Dado $q \in M$ um ponto qualquer, vamos provar que $(\widetilde{e}(q),\widetilde{x}(q)) = (e(q),x(q))$. Seja $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ uma curva suave tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$. Para cada $t \in [0,1]$ apliquemos o mesmo argumento da demonstração do resultado local no ponto $\gamma(t) \in M$ para concluir que existemm vizinhanças $U_t \subset M$ de $\gamma(t)$ e referenciais móveis de 1^a ordem $(e_t,x), (\widetilde{e_t},\widetilde{x}) : U_t \longrightarrow E(3)$ com terceiros vetores coluna dados por e_3 e $\widetilde{e_3}$, respectivamente e elementos $(A_t,v_t) \in E(3)$ tais que

$$(e_t,x) = (A_t,v_t) \circ (\widetilde{e_t},\widetilde{x})$$

em U_t. Por um argumento padrão de número de Lebesgue da cobertura aberta $\{\gamma^{-1}U_t\}_{t\in[0,1]}$ de $[0,1]$, existe uma partição $0 < t_1 < ... < t_{k+1} = 1$ e subconjuntos conexos $U_0 = U, U_1, ..., U_k$ de M tais que

$$\gamma[t_i,t_{i+1}] \subset U_i, \qquad i = 0,...,k;$$

Existe um elemento $(v_i,A_i) \in E(3)$ tal que

$$x = v_i + A_i\widetilde{x} \qquad \text{e} \qquad e_3 = A_i\widetilde{e_3}$$

em U_i, $i = 0,...,k$. Por hipótese, em $U_0 = U$ temos que $v_0 = 0$ e $A_0 = Id_3$. Seja $p_i = \gamma(t_i)$, $i = 0,...,k+1$, logo $p_0 = p$ e $p_{k+1} = q$. Em U_0 nós temos que $x = \widetilde{x}$ e $e_3 = \widetilde{e_3}$, em U_1 temos que $x = A_1\widetilde{x} + v_1$ e $e_3 = A_1\widetilde{e_3}$. Logo, em $U_0 \cap U_1$ devemos ter o seguinte:

$$\begin{cases} x = A_1\widetilde{x} + v_1 = x = A_1x + v_1 \\ e_3 = A_1\widetilde{e_3} = e_3 = A_1e_3 \end{cases}.$$

portanto temos que:

$$\begin{cases} (Id_3 - A_1)\,x = v_1 \Longrightarrow (Id_3 - A_1)\,dx = 0 \\ (Id_3 - A_1)\,e_3 = 0 \end{cases}$$

em todo ponto de U, logo $A_1 = Id_3$, e por consequência:

$$x = A_1x + v_1 = x + v_1 \Longrightarrow v_1 = x - x = 0.$$

Segue disso que $x = \widetilde{x}$ e $e_3 = \widetilde{e_3}$ em $U_0 \cup U_1$. Repetindo exatamente o mesmo argumento em $U_2,...,U_k$ vamos concluir que $x = \widetilde{x}$ e $e_3 = \widetilde{e_3}$ em U_k, logo, como $q \in U_k$, segue que $(\widetilde{e}(q),\widetilde{x}(q)) = (e(q),x(q))$ e portanto a volta do teorema se estende globalmente em M. ■

Teorema 53 (Teorema de Existência de Bonnet). *Seja (M, I) uma superfície Riemanniana simplesmente conexa com curvatura gaussiana K. Seja II uma forma bilinear simétrica definida em M. Suponha que II satisfaz as equações de Gauss e Codazzi no sentido de que para qualquer co-referencial móvel ortonormal $\{\theta^1, \theta^2\}$ em $U \subset M$, com a forma da Conexão Levi-Civita $\omega_2^1 = -\omega_1^2$, as funções-coeficientes suaves $h_{ij} = h_{ji}$, $i = 1, 2$ de II definidas por*

$$II = h_{11}\theta^1\theta^1 + 2h_{12}\theta^1\theta^2 + h_{22}\theta^2\theta^2,$$

satisfazem a equação de Gauss

$$K = h_{11}h_{22} - h_{12}^2$$

e as equações de Codazzi

$$\sum_{k=1}^{2}\left(d\left(h_{ik}\right) - \sum_{j=1}^{2}\left(h_{ij}\omega_j^k + h_{jk}\omega_j^i\right)\right) \wedge \theta^k = 0,$$

para $i = 1, 2$. Então existe uma imersão suave $x : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ com campo vetorial unitário e_3 tal que $I = \langle dx, dx\rangle$ e $II = \langle -d\left(e_3\right), dx\rangle$.

Demonstração. É sabido que uma superfície simplesmente conexa M é homeomorfa ao plano $\mathbb{R}^2$ ou à esfera unitária $\mathbb{S}^2$. Se M é homeomorfa ao $\mathbb{R}^2$ então M possui um co-referencial móvel ortonormal $\{\theta^1, \theta^2\}$ globalmente definido para I, com a correspondente forma da Conexão Levi-Civita $\omega_2^1 = -\omega_1^2$. Sejam $h_{ij} = h_{ji}$ os coeficientes suaves de II relativo ao co-referencial móvel $\{\theta^1, \theta^2\}$ em U e defina as seguintes $1-$formas em U :

$$\omega_3^i := \sum_{j=1}^{2} h_{ij}\theta^j =: -\omega_i^3,$$

para $i = 1, 2$. Considere também as seguintes $1-$formas em M:

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vartheta = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1^2 & \omega_1^3 \\ \omega_2^1 & 0 & \omega_2^3 \\ \omega_3^1 & \omega_3^2 & 0 \end{pmatrix}$$

segue da definição de $\mathcal{E}(3)$ que (θ, ϑ) é uma $1-$forma em M cujos valores caem em $\mathcal{E}(3)$.

As equações de Gauss e Codazzi implicam que

$$(d\vartheta, d\theta) = (-\vartheta \wedge \vartheta, -\vartheta \wedge \theta).$$

De fato, temos que

$$-\vartheta\wedge\vartheta=-\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&\omega_1^2&\omega_1^3\\0&\omega_2^1&0&\omega_2^3\\0&\omega_3^1&\omega_3^2&0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&\omega_1^2&\omega_1^3\\0&\omega_2^1&0&\omega_2^3\\0&\omega_3^1&\omega_3^2&0\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&\omega_1^2&\omega_1^3\\0&\omega_2^1&0&\omega_2^3\\0&\omega_3^1&\omega_3^2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&\omega_1^2&\omega_1^3\\0&\omega_2^1&0&\omega_2^3\\0&\omega_3^1&\omega_3^2&0\end{pmatrix}$$
$$=-\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&\omega_1^2\wedge\omega_2^1+\omega_1^3\wedge\omega_3^1&\omega_1^3\wedge\omega_3^2&\omega_1^2\wedge\omega_2^3\\0&\omega_2^3\wedge\omega_3^1&\omega_2^1\wedge\omega_1^2+\omega_2^3\wedge\omega_3^2&\omega_2^1\wedge\omega_1^3\\0&\omega_3^2\wedge\omega_2^1&\omega_3^1\wedge\omega_1^2&\omega_3^1\wedge\omega_1^3+\omega_3^2\wedge\omega_2^3\end{pmatrix}$$
$$=-\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&\omega_1^3\wedge\omega_3^2&\omega_1^2\wedge\omega_2^3\\0&\omega_2^3\wedge\omega_3^1&0&\omega_2^1\wedge\omega_1^3\\0&\omega_3^2\wedge\omega_2^1&\omega_3^1\wedge\omega_1^2&0\end{pmatrix}\approx-\begin{pmatrix}0&\omega_1^3\wedge\omega_3^2&\omega_1^2\wedge\omega_2^3\\\omega_2^3\wedge\omega_3^1&0&\omega_2^1\wedge\omega_1^3\\\omega_3^2\wedge\omega_2^1&\omega_3^1\wedge\omega_1^2&0\end{pmatrix}$$

Além disso,

$$-\vartheta\wedge\theta=-\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&\omega_1^2&\omega_1^3\\0&\omega_2^1&0&\omega_2^3\\0&\omega_3^1&\omega_3^2&0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0&0&0&0\\\theta^1&0&0&0\\\theta^2&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&\omega_1^2&\omega_1^3\\0&\omega_2^1&0&\omega_2^3\\0&\omega_3^1&\omega_3^2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\\theta^1&0&0&0\\\theta^2&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$
$$=-\begin{pmatrix}0&0&0&0\\\omega_1^2\wedge\theta^2&0&0&0\\\omega_2^1\wedge\theta^1&0&0&0\\(h_{21}-h_{12})\,\theta^1\wedge\theta^2&0&0&0\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0&0&0&0\\\omega_1^2\wedge\theta^2&0&0&0\\\omega_2^1\wedge\theta^1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\approx-\begin{pmatrix}\omega_1^2\wedge\theta^2\\\omega_2^1\wedge\theta^1\\0\end{pmatrix}$$
$$=-\begin{pmatrix}-\left(p\theta^1+q\theta^2\right)\wedge\theta^2\\\left(p\theta^1+q\theta^2\right)\wedge\theta^1\\0\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}-p\theta^1\wedge\theta^2\\-q\theta^1\wedge\theta^2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\theta^1\wedge\theta^2\\q\theta^1\wedge\theta^2\\0\end{pmatrix}$$

Segue de (45) que $-\omega\wedge\theta=d\theta$, pois:

$$d\theta=\begin{pmatrix}d\theta^1\\d\theta^2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\theta^1\wedge\theta^2\\q\theta^1\wedge\theta^2\\0\end{pmatrix}.$$

Além disso, temos que

$$d\vartheta=\begin{pmatrix}0&d\omega_1^2&d\omega_1^3\\d\omega_2^1&0&d\omega_2^3\\d\omega_3^1&d\omega_3^2&0\end{pmatrix}\overset{(2.2)}{=}-\begin{pmatrix}0&\omega_1^3\wedge\omega_3^2&\omega_1^2\wedge\omega_2^3\\\omega_2^3\wedge\omega_3^1&0&\omega_2^1\wedge\omega_1^3\\\omega_3^2\wedge\omega_2^1&\omega_3^1\wedge\omega_1^2&0\end{pmatrix}=-\vartheta\wedge\vartheta.$$

Segue do teorema de Existência de Cartan-Darboux (49) que existe uma aplicação contínua

$$(e, x) : M \longrightarrow E_+(3) = \mathbb{R}^3 \rtimes SO(3)$$

tal que se ω é a forma de Maurer-Cartan de $E(3)$, então $(e, x)^* \omega = (\theta, \vartheta)$. Em particular, usando que $(e, x)^* \omega = \omega(de, dx)$ e que dx cai em $\mathbb{R}^3$ (se associará à θ) e de cai em $\mathfrak{o}(3)$ (se associará à ϑ), segue que

$$dx = \theta^1 e_1 + \theta^2 e_2 \qquad \text{e} \qquad d(e_3) = \omega_1^3 e_1 + \omega_2^3 e_2.$$

E isso mostra que $x : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é uma imersão com campo vetorial unitário e_3 tal que, em M :

$$\langle dx, dx \rangle = \sum_{i=1}^{2} \theta^i \theta^i = I,$$

e além disso:

$$\begin{aligned} -\langle de_3, dx \rangle &= -\left\langle \omega_1^3 e_1 + \omega_2^3 e_2, \theta^1 e_1 + \theta^2 e_2 \right\rangle \\ &= -\sum_{i=1}^{2} \omega_i^3 \theta^i = \sum_{i=1}^{2} \omega_3^i \theta^i = \sum_{i,j=1}^{2} h_{ij} \theta^j \theta^i = II. \end{aligned}$$

No caso em que M é homeomorfa à $\mathbb{S}^2$, sabemos que para todo $m \in M$, o complementar $U = M \backslash \{m\}$ é homeomorfo à $\mathbb{R}^2$, portanto a parte anterior da demonstração nos garante a existência de uma aplicação suave $(e, x) : U \longrightarrow E_+(3)$ satisfazendo as condições do teorema. Seja $\widetilde{U} = M \backslash \{\widetilde{m}\}$, onde $\widetilde{m} \in M$ é tal que $\widetilde{m} \neq m$, para esse conjunto também obtemos uma aplicação suave $(\widetilde{e}, \widetilde{x}) : \widetilde{U} \longrightarrow E_+(3)$ satisfazendo

$$\langle d\widetilde{x}, d\widetilde{x} \rangle = I \qquad \text{e} \qquad -\langle d\widetilde{e}_3, d\widetilde{x} \rangle = II.$$

Aplicando o teorema de congruência de Bonnet (52) para (e, x) e $(\widetilde{e}, \widetilde{x})$ restritos à $U \cap \widetilde{U}$, obtemos um elemento $(A, v) \in E(3)$ tal que em $U \cap \widetilde{U}$

$$\widetilde{x} = Ax + v \qquad \text{e} \qquad \widetilde{e}_3 = Ae_3.$$

Se trocarmos (e, x) por $(A, v) \circ (e, x)$ a tese do teorema continuará valendo em U. De fato,

$$\begin{cases} \langle d\widetilde{x}, d\widetilde{x} \rangle = \langle Adx, Adx \rangle = \left\langle A^T Adx, dx \right\rangle = \langle dx, dx \rangle = I \\ -\langle d\widetilde{e}_3, d\widetilde{x} \rangle = -\langle Ade_3, Adx \rangle = -\left\langle A^T Ade_3, dx \right\rangle = -\langle de_3, dx \rangle = II \end{cases}.$$

Em $U \cap \widetilde{U}$ temos que $\widetilde{x} = x$ e $\widetilde{e}_3 = e_3$, logo x e e_3 se estendem suavemente à todo $U \cup \widetilde{U} = M$ e cumpre a tese do teorema em todo M por construção. ∎

2.6 Esfera Tangente e Esfera de Curvatura

Exemplo 54 (Esferas)**.** *Uma esfera orientada com centro $p \in \mathbb{R}^3$ e raio (com sinal) $r \neq 0 \in \mathbb{R}$ é o conjunto*

$$S_r(p) := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x - p|^2 = r^2\}$$

com campo normal unitário $n := \frac{p-x}{r}$. Assim, o campo normal aponta para dentro da esfera se $r > 0$ e aponta para fora, se $r < 0$. A ***esfera unitária*** *é o conjunto $S_1(0)$, em que denotamos por $\mathbb{S}^2$. Sua orientação padrão é o campo normal que aponta para dentro da esfera: $n(x) = -x$. As esferas $S_r(p)$ são superfícies imersas. Em uma vizinhança de qualquer ponto de $S_r(p)$ existe um referencial móvel de 1ª ordem (x, e), onde $e_3 = n = \frac{p-x}{r}$, segue disso que $de_3 = dn = -\frac{1}{r}dx$, olhando nas coordenadas, concluímos disso que $\omega_i^3 = -\frac{1}{r}\omega^i = -\omega_3^i$, $i = 1, 2$, portanto a matriz $S = (h_{ij})$ é dada por*

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix}$$

Concluímos disso que as curvaturas principais são dadas por $a = c = \frac{1}{r}$ a curvatura gaussiana é dada por $K = ac = \frac{1}{r^2}$, além disso a curvatura média é dada por $H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r}$. Por fim, a segunda forma fundamental é dada por

$$II = h_{11}\omega^1\omega^1 + 2h_{12}\omega^1\omega^2 + h_{22}\omega^2\omega^2 = \frac{1}{r}\left(\omega^1\omega^1 + \omega^2\omega^2\right) = \frac{1}{r}I.$$

Exemplo 55 (Planos)**.** *Fixe $n \in \mathbb{S}^2$ e $h \in \mathbb{R}$. O* ***plano orientado*** *em $\mathbb{R}^3$ com vetor normal unitário n e altura (com sinal) h é o conjunto*

$$\Pi_h(n) := \left\{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x, n \rangle = h\right\}.$$

Os planos orientados são superfícies imersas. Existe um referencial móvel de 1ª ordem (e, x) em todo $\Pi_h(n)$ com $e_3 = n$, no qual é constante, logo temos que

$$0 = de_3 = \omega_1^3 e_1 + \omega_2^3 e_2,$$

e portanto concluímos que $\omega_1^3 = \omega_2^3 = 0$, ou seja, a matriz $S = (h_{ij})$ é a mattriz nula. Ou seja, as curvaturas principais e (consequentemente) as curvaturas média e gaussiana são nulas. Além disso, a segunda forma fundamental também é nula.

Teorema 56 (Caso totalmente umbílico)**.** *Suponha que todo ponto de uma superfície conexa imersa $x : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é umbílico. Então $x(M)$ é um aberto de uma esfera ou um aberto de um plano.*

Demonstração. Vamos assumir que x possui um campo suave normal unitário $n : M \to \mathbb{S}^2$, se isso não ocorrer, existirá uma cobertura dupla $\varphi : \widetilde{M} \to M$ para a qual $x \circ \varphi : \widetilde{M} \to$

$\mathbb{R}^3$ possui um campo suave normal unitário, e as imagens $x(M) = x \circ \varphi\left(\widetilde{M}\right)$. Vamos considerar agora apenas $x-$referenciais móveis de 1^a ordem $(e,x) : U \subset M \to E_+(3)$ tais que $e_3 = n$ em U. Se x é totalmente umbílica, então $\omega_3^1 = a\omega^1$ e $\omega_3^2 = a\omega^2$, onde $a : U \to \mathbb{R}$ é a curvatura principal. Tomando a derivada exterior dessas equações, segue que:

$$\begin{aligned} ap\omega^1 \wedge \omega^2 &= \left(p\omega^1 + q\omega^2\right) \wedge a\omega^2 = \omega_2^1 \wedge \omega_3^2 = d\omega_3^1 = d\left(a\omega^1\right) = a\left(d\omega^1\right) - da \wedge \omega^1 \\ &= ap\omega^1 \wedge \omega^2 - \left(a_1\omega^1 + a_2\omega^2\right) \wedge \omega^1 = \left(ap + a_2\right)\omega^1 \wedge \omega^2, \end{aligned}$$

ou seja, $a_2 = 0$. Além disso:

$$\begin{aligned} aq\omega^1 \wedge \omega^2 &= -\left(p\omega^1 + q\omega^2\right) \wedge a\omega^1 = \omega_1^2 \wedge \omega_3^1 = d\omega_3^2 = d\left(a\omega^2\right) = a\left(d\omega^2\right) - da \wedge \omega^2 \\ &= aq\omega^1 \wedge \omega^2 - \left(a_1\omega^1 + a_2\omega^2\right) \wedge \omega^2 = \left(aq - a_1\right)\omega^1 \wedge \omega^2, \end{aligned}$$

ou seja, $a_1 = 0$. Portanto $da = 0$ e a é constante em M. Se $a \neq 0$ então:

$$\begin{aligned} d\left(x + \frac{n}{a}\right) &= dx + \frac{dn}{a} = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 + \frac{\omega_1^3 e_1 + \omega_2^3 e_2}{a} = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 + \frac{-a\omega^1 e_1 - a\omega^2 e_2}{a} \\ &= \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 - \omega^1 e_1 - \omega^2 e_2 = 0, \end{aligned}$$

logo $x + \frac{n}{a}$ é constante em U, ou seja, $x(M)$ é um subconjunto de uma esfera orientada de raio $\frac{1}{a}$ e centro $x + \frac{n}{a}$.
Se $a = 0$, temos as seguintes equações:

$$\omega^3 = 0 \quad , \quad \omega_3^1 = 0 \quad , \quad \omega_3^2 = 0.$$

Elas definem uma 3-distribuição em $E_+(3)$, tal que o seu dual é descrito por:

$$\mathfrak{h} = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 0 & -r & 0 \\ r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \right) : r,s,t \in \mathbb{R} \right\} \approx \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & 0 & -r & 0 \\ t & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : r,s,t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{E}(3),$$

que é uma subálgebra de Lie, já que ω^i e ω_j^i são 1-formas invariantes à esquerda para todo $i,j = 1,2,3$. Aplicando a exponencial nos elementos desse conjunto, encontraremos o subgrupo de Lie H de $E(3)$ relativo à $\mathfrak{h}$:

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & 0 & -r & 0 \\ t & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\frac{-2t+ise^{-ir}-ise^{ir}+te^{-ir}+te^{ir}}{r} & \frac{1}{2}\left(e^{-ir}+e^{ir}\right) & \frac{1}{2}\left(-ie^{-ir}+ie^{ir}\right) & 0 \\ -\frac{1}{2}\frac{-2s+se^{-ir}+se^{ir}-ite^{-ir}+ite^{ir}}{r} & \frac{1}{2}\left(ie^{-ir}-ie^{ir}\right) & \frac{1}{2}\left(e^{-ir}+e^{ir}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\approx \left(\begin{pmatrix} \frac{e^{-ir}+e^{ir}}{2} & \frac{\left(-ie^{-ir}+ie^{ir}\right)}{2} & 0 \\ \frac{\left(ie^{-ir}-ie^{ir}\right)}{2} & \frac{\left(e^{-ir}+e^{ir}\right)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\frac{-2t+ise^{-ir}-ise^{ir}+te^{-ir}+te^{ir}}{r} \\ -\frac{1}{2}\frac{-2s+se^{-ir}+se^{ir}-ite^{-ir}+ite^{ir}}{r} \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

onde $r, s, t \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$. Portanto, segue que:

$$H = \left\{ \left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \right) : s, t \in \mathbb{R},\ A \in SO(2) \right\}.$$

O conjunto de todos os $x-$referenciais móveis de 1^a ordem é, portanto um "coset" $(e(m), x(m))\, H$, cujos elementos são da forma

$$\begin{pmatrix} e_{11}(m) & e_{21}(m) & e_{31}(m) \\ e_{12}(m) & e_{22}(m) & e_{32}(m) \\ e_{13}(m) & e_{23}(m) & e_{33}(m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{11}(m) & e_{21}(m) & e_{31}(m) \\ e_{12}(m) & e_{22}(m) & e_{32}(m) \\ e_{13}(m) & e_{23}(m) & e_{33}(m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1(m) \\ x_2(m) \\ x_3(m) \end{pmatrix},$$

onde $x = (x_1, x_2, x_3)$, $e = (e_{ij})$, $A = (a_{ij}) \in SO(2)$ e $s, t \in \mathbb{R}$. Aplicando a projeção π_0 nesses elementos, encontraremos a imagem de x (pela definição de $x-$referencial móvel), que é dada por:

$$x(M) = \{x(m) + se_1(m) + te_2(m) : s, t \in \mathbb{R},\ m \in M\}.$$

■

Definição 57. *Uma* ***esfera tangente orientada*** *para uma imersão $x : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ em um ponto $m \in M$, com vetor normal unitário n em m, é uma esfera orientada ou um plano que passa por $x\,(m)$ cujo vetor normal em $x(m)$ é o vetor n. O conjunto de todas as esferas tangentes orientadas para x em m com vetor normal n é dado por*

$$\{S_r\,(x(m) + rn) : 0 \neq r \in \mathbb{R}\} \cup \left\{\Pi_{\langle n, x(m)\rangle}(n)\right\}.$$

Cada uma das esferas orientadas tem o seu centro na reta que passa por $x(m)$ e é normal à superfície, $\{x\,(m) + rn : r \in \mathbb{R}\}$. É conveniente pensar no plano tangente como uma esfera tangente de raio infinito.

Definição 58. *Uma* ***esfera de curvatura orientada*** *em $m \in M$ para uma imersão $x : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ com relação ao vetor normal unitário n em m é uma esfera tangente orientada em m cuja curvatura principal (ambas são iguais, por isso nos referimos como uma só) é igual à curvatura principal de x em m para o normal n.*

Se $m \in M$ é um ponto não umbílico para x, então há exatamente duas esferas de curvatura orientada em m para um dado vetor normal unitário n (em m). Se m é umbílico, então há apenas uma, e dizemos que m tem **multiplicidade dois**. Como as curvaturas de uma esfera de raio r são dadas por $\frac{1}{r}$, segue que se $a \neq 0$ é uma curvatura principal de x em m, então uma esfera de curvatura orientada em m para x relativo à n é dada por

$$S_{\frac{1}{a}}\left(x(m) + \frac{1}{a}n\right).$$

Se 0 é uma das curvaturas principais de x em m então o plano orientado

$$\Pi_{\langle x(m),n\rangle}(n)$$

é uma esfera de curvatura orientada em m para x com relação à n. Se trocarmos n por $-n$, as esferas tangentes orientadas permanecerão da mesma forma, mas sua orientação se inverterá. Para $r \neq 0$ e para um $x-$referencial móvel de 1^a ordem definido em um aberto $U \subset M$, a aplicação suave

$$S = x + re_3 : U \longrightarrow \mathbb{R}^3 \tag{2.27}$$

determina a família $S_r\left(x + re_3\right)$ das esferas tangentes orientadas nos pontos de U. A aplicação

$$S = e_3 : U \longrightarrow \mathbb{R}^3 \tag{2.28}$$

determina os planos tangentes orientados $\Pi_{\langle x,e_3\rangle}\left(e_3\right)$ com estes vetores normais.

Proposição 59. *Se uma família de esferas tangentes orientadas é determinada pela aplicação suave (2.27) ou (2.28), então uma esfera é de curvatura orientada em um ponto $m \in M$ se e somente se a imagem de dS tem dimensão menor que 2.*

Demonstração. Se S é dada por (2.27), então segue que

$$\begin{aligned} dS = d\left(x + re_3\right) = dx + rde_3 &= \sum_{i=1}^{2}\omega^i e_i + r\sum_{i=1}^{2}\omega_i^3 e_i \\ &= \sum_{i=1}^{2}\left(\omega^i + r\omega_i^3\right)e_i, \end{aligned}$$

cuja imagem tem dimensão menor que 2 se e somente se $\omega^1 + r\omega_1^3 = 0$ ou $\omega^2 + r\omega_2^3$, isso acontece se e somente se $-\omega_3^1 = \omega_1^3 = -\frac{1}{r}\omega^1$ ou $-\omega_3^2 = \omega_2^3 = -\frac{1}{r}\omega^2$ ou seja, em qualquer das duas hipóteses teremos $\frac{1}{r}$ como curvatura principal de x em m. Além disso, se S é dada por (2.28), então segue que

$$dS = de_3 = \sum_{i=1}^{2} \omega_i^3 e_i,$$

cuja imagem tem dimensão menor que 2 se e somente se $\omega_1^3 = 0$ ou $\omega_2^3 = 0$, logo uma pelo menos uma das colunas da matriz S é nula, portanto pelo menos uma das curvatura principais é nula, ou seja isso ocorre se e somente se $\Pi_{\langle x(m),e_3\rangle}(e_3)$ é esfera tangente de curvatura orientada em m. ■

Exemplo 60 (Curvas em $\mathbb{S}^2$)**.** *Considere a ação transitiva de $SO(3)$ sobre a esfera unitária $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ obtida da simples multiplicação à esquerda de $SO(3)$ sobre $\mathbb{R}^3$. Seja $\epsilon_1 = (1,0,0)$ a origem fixada de $\mathbb{S}^2$ e seja $\pi_0 : SO(3) \longrightarrow \mathbb{S}^2$ definida pela projeção $\pi_0(A) = A\epsilon_1$. Seja $\sigma : J \longrightarrow \mathbb{S}^2$ uma cura parametrizada pelo comprimento de arco, onde $J \subset \mathbb{R}$ é um intervalo. Logo seu campo tangente unitário é dado por $T := \sigma'$. O campo normal unitário é dado por $N = \sigma \times T$. De fato, como $\sigma \in \mathbb{S}^2$, segue que σ é unitário e $\sigma \perp T$, logo temos que*

$$\begin{cases} \langle N,T\rangle = \langle \sigma \times T, T\rangle = 0 \\ \|N\| = \|\sigma \times T\| = \|\sigma\|\,\|T\| = 1 \end{cases}$$

Seja a matriz $e = (\sigma, T, N)$, se $\sigma = (x,y,z)$, segue que

$$\begin{cases} T = (x',y',z') \\ N = (yz' - zy', zx' - xz', xy' - yx') \end{cases}$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned}
\det(\sigma,T,N) &= \det\begin{pmatrix} x & x' & yz'-zy' \\ y & y' & zx'-xz' \\ z & z' & xy'-yx' \end{pmatrix} \\
&= x^2\left((y')^2+(z')^2\right) + y^2\left((x')^2+(z')^2\right) + z^2\left((x')^2+(y')^2\right) - 2xyx'y' - 2xzx'z' - 2yzy'z' \\
&= x^2\left(1-(x')^2\right) + y^2\left(1-(y')^2\right) + z^2\left(1-(z')^2\right) - 2xyx'y' - 2xzx'z' - 2yzy'z' \\
&= 1 - (xx')^2 - (yy')^2 - (zz')^2 - 2xyx'y' - 2xzx'z' - 2yzy'z' = 1 - (xx'+yy'+zz')^2 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Portanto $e \in SO(3)$, além disso, temos que

$$\pi_0(e) = (\sigma,T,N)\,\epsilon_1 = \sigma.$$

Portanto $e = (\sigma,T,N) : J \longrightarrow SO(3)$ é um $\sigma-$referencial móvel. Além disso, segue de

(2.14) que

$$e^*\omega_p = \omega\left(de\right) = e^{-1}de = \begin{pmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ yz'-zy' & zx'-xz' & xy'-yx' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' & x'' & (yz'-zy')' \\ y' & y'' & (zx'-xz')' \\ z' & z'' & (xy'-yx')' \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \langle\sigma,T\rangle & \langle\sigma,T'\rangle & \langle\sigma,N'\rangle \\ \langle T,T\rangle & \langle T,T'\rangle & \langle T,N'\rangle \\ \langle N,T\rangle & \langle N,T'\rangle & \langle N,N'\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (\langle\sigma,T\rangle)' - \langle T,T\rangle & (\langle\sigma,N\rangle)' - \langle T,N\rangle \\ 1 & 0 & -\langle T',N\rangle \\ 0 & \langle N,T'\rangle & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -\kappa \\ 0 & \kappa & 0 \end{pmatrix}.$$

Para alguma função suave $\kappa = \langle N,T'\rangle : J \longrightarrow \mathbb{R}$*, chamada curvatura de* σ *em* $\mathbb{S}^2$*.* (σ,T,N) *é o* $\sigma-$*referencial móvel de Frenet. As* ***equações de Serret-Frenet*** *são dadas por:*

$$\sigma' = T \quad , \quad T' = -\sigma + \kappa N \quad , \quad N' = -\kappa T. \tag{2.29}$$

Como $\kappa = \langle N,T'\rangle$*, segue que revertendo a orientação da curva, invertemos o sinal de* κ *também.*

Exemplo 61 (Cones)**.** *Em geral, um cone em* $\mathbb{R}^3$ *é definido da seguinte maneira. Podemos assumir que o vértice do cone está localizado na origem* $(0,0,0)\in\mathbb{R}^3$*. Dada uma curva suave* $\sigma : J \longrightarrow \mathbb{S}^2$ *parametrizada pelo comprimento de arco, se* $M = J\times\mathbb{R}$*, definimos o cone pela seguinte imersão:*

$$\mathbf{x} : M \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad , \quad \mathbf{x}\left(x,y\right) = e^{-y}\sigma\left(x\right),$$

a curva σ *é chamada* ***curva de perfil*** *do cone* x*. Aplicando a diferencial exterior, segue que*

$$d\mathbf{x} = e^{-y}\sigma'\left(x\right)dx - e^{-y}\sigma\left(x\right)dy = \left(e^{-y}dx\right)\sigma'\left(x\right) - \left(e^{-y}dy\right)\sigma\left(x\right).$$

Já podemos calcular a 1ª forma fundamenteal, que é dada por:

$$\begin{aligned} I = \langle d\mathbf{x}, d\mathbf{x}\rangle &= \left\langle \left(e^{-y}dx\right)\sigma'\left(x\right) - \left(e^{-y}dy\right)\sigma\left(x\right), \left(e^{-y}dx\right)\sigma'\left(x\right) - \left(e^{-y}dy\right)\sigma\left(x\right)\right\rangle \\ &= \left(e^{-y}dx\right)^2\langle\sigma'(x),\sigma'(x)\rangle - 2\left(e^{-y}dx\right)\left(e^{-y}dy\right)\langle\sigma'(x),\sigma(x)\rangle + \left(e^{-y}dy\right)^2\langle\sigma(x),\sigma(x)\rangle \\ &= \left(e^{-y}dx\right)^2 + \left(e^{-y}dy\right)^2 \\ &= e^{-2y}\left(dx^2+dy^2\right). \end{aligned}$$

Segue da expressão de $d\mathbf{x}$ *que um* $\mathbf{x}-$*referencial móvel de 1ª ordem é dado por* $(e,\mathbf{x})$*, onde a matriz* $e = (e_1,e_2,e_3)$ *é dada por:*

$$e_1 = \sigma' \quad , \quad e_2 = -\sigma \quad , \quad e_3 = \sigma\times\sigma'.$$

Novamente, pela expressão de d$\mathbf{x}$, *temos que*

$$\omega^1 = e^{-y}dx \qquad e \qquad \omega^2 = e^{-y}dy$$

Além disso, segue de (2.29) que

$$\sigma'' = -\sigma + \kappa N = e_2 + \kappa e_3.$$

Segue disso que a 2ª forma fundamental é dada por:

$$\begin{aligned} II &= -\langle d\mathbf{x}, de_3\rangle = -\langle d\mathbf{x}, d(\sigma\times\sigma')\rangle = -\langle d\mathbf{x}, \sigma'\times\sigma' + \sigma\times\sigma''\rangle = -\langle d\mathbf{x}, \sigma\times\sigma''\rangle = \langle d\mathbf{x}, e_2\times(e_2+\kappa e_3)\rangle \\ &= \kappa\left\langle \left(e^{-y}dx\right)\sigma'(x) - \left(e^{-y}dy\right)\sigma(x), e_2\times e_3\right\rangle = \kappa\left\langle \left(e^{-y}dx\right)e_1 + \left(e^{-y}dy\right)e_2, e_2\times e_3\right\rangle \\ &= \kappa\left(e^{-y}dx\right)\langle e_1, e_2\times e_3\rangle = \kappa(x)e^{-y}dxdx = \kappa(x)e^{y}\left(e^{-y}dx\right)\left(e^{-y}dx\right) \\ &= \kappa(x)e^{y}\omega^1\omega^1. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que as curvaturas principais são dadas por:

$$a = \kappa(x)e^{y} \qquad e \qquad c = 0.$$

Temos que o Hopf invariante h *relativo à* (e, x) *é igual à curvatura média, sendo dadas por:*

$$h = \frac{(h_{11}-h_{22})}{2} - ih_{12} = \frac{\kappa(x)e^{y}}{2} = H.$$

As esferas de curvatura orientada em $(x, y)\in M$ *relativo à* e_3 *são dadas por:*

$$S_{\frac{1}{\kappa(x)e^{y}}}\left(x + \frac{1}{\kappa(x)e^{y}}e_3\right) \qquad e \qquad \Pi_{\langle x, e_3\rangle}(e_3).$$

Note que o plano orientado passa pela origem, uma vez que $\langle x, e_3\rangle = 0$.

2.7 A Aplicação de Gauss

Seja n um campo normal unitário suave ao longo da superfície imersa $x : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$. A aplicação suave

$$n : M \longrightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$$

é chamada **aplicação de Gauss** para x. Ela está completamente definida à menos de sinal em uma superfície conexa orientada. Para uma superfície não orientada, a aplicação de Gauss está bem definida apenas localmente ou deve ser vista como uma aplicação que cai no plano projetivo real $\mathbb{RP}^2$. Se (x, e_1, e_2, e_3) é um $x-$referencial móvel de 1^a ordem em um aberto $U \subset M$ com $e_3 = n$, como $\omega^3 = 0$, segue que:

$$de_3 = \omega_1^3 e_1 + \omega_2^3 e_2 + \omega_3^3 e_3 = \omega_1^3 e_1 + \omega_2^3 e_2,$$

pois $\omega_3^3 = 0$. Isso nos diz que (n, e_1, e_2, e_3) é um $n-$referencial móvel de 1^a ordem . A aplicação de Gauss não precisa ser uma imersão. De fato, dn tem dimensão 2 se e somente se

$$0 \neq \omega_1^3 \wedge \omega_2^3 = K\omega^1 \wedge \omega^2,$$

ou seja, se e somente se $K \neq 0$. A 1^a forma fundamental de n (nos pontos onde K não se anula) é dada por

$$III = \langle de_3, de_3 \rangle \,.$$

Chamamos essa aplicação de 3^a forma fundamental de x.

Teorema 62. *Seja $x : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão de uma superfície conexa M e suponha que x possua um campo normal suave unitário globalmente definido $n : M \longrightarrow \mathbb{S}^2$. Sua aplicação de Gauss é conforme se e somente se a curvatura média de x é identicamente nula em todo M ou x é totalmente umbílica.*

Demonstração. A aplicação de Gauss ser conforme significa que o pull-back da métrica na esfera pela aplicação n é um multiplo de I em M, ou seja, III é múltiplo de I. Em geral, temos que:

$$KI - 2HII + III = 0.$$

De fato, abrindo a expressão acima, obtemos que:

$$\begin{aligned}
KI - 2HII + III &= ac\,\langle dx, dx\rangle - (a+c)\,(-\langle dx, de_3\rangle) + \langle de_3, de_3\rangle \\
&= -(a+c)\left(\omega_3^1\omega^1 + \omega_3^2\omega^2\right) + ac\left(\omega^1\omega^1 + \omega^2\omega^2\right) + \omega_3^1\omega_3^1 + \omega_3^2\omega_3^2 \\
&= -(a+c)\left(a\omega^1\omega^1 + c\omega^2\omega^2\right) + ac\left(\omega^1\omega^1 + \omega^2\omega^2\right) + a^2\omega^1\omega^1 + c^2\omega^2\omega^2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Segue disso que III é múltiplo de I se e somente se $2HII$ é múltiplo de I. Porém temos que isso ocorre se e somente se $2HII = 0 \Leftrightarrow H = 0$ ou, observando as expressões,

$$\begin{aligned}
I &= \omega^1\omega^1 + \omega^2\omega^2 \\
2HII &= (h_{11} + h_{22})\left(h_{11}\omega^1\omega^1 + 2h_{12}\omega^1\omega^2 + h_{22}\omega^2\omega^2\right)
\end{aligned}$$

segue que outra possibilidade é que o seguinte sistema seja satisfeito:

$$2h_{12} = 0 \qquad , \qquad (h_{11} + h_{22})\,h_{11} = \lambda \qquad , \qquad (h_{11} + h_{22})\,h_{22} = \lambda.$$

Ou seja, temos que

$$0 = (h_{11} + h_{22})\, h_{11} - (h_{11} + h_{22})\, h_{22} = h_{11}^2 - h_{22}^2,$$

supondo agora que a curvatura média é não nula, a igualdade acima implica que o ponto é umbílico. Portanto III é múltiplo de I em M se e somente se em cada ponto de M $H \equiv 0$ ou x é umbílica. Em particular, se $H \equiv 0$ em M ou se x é totalmente umbílca, então III é múltiplo de I. Por outro lado, se a aplicação de Gauss é conforme, suponha que H não é identicamente nula em M. Segue que o conjunto

$$W := \{m \in M : H(m) \neq 0\}$$

é um subconjunto não vazio de M. Segue da equivalência que mostramos pontualmente que em qualquer componente conexa $W_0 \subset W$ de W a imersão x é totalmente umbílica. Segue de (56) que a imersão é um subconjunto de uma esfera ou um subconjunto de um plano. De qualquer forma suas curvaturas principais são constantes em W_0. Mas a constante H não pode ser nula e deve ser o mesmo valor para pontos em no fecho de W_0 em M (pois a função H é contínua), portanto $\overline{W_0} \subset W$. Note que $W_0 = \overline{W_0}$. De fato, dado $p \in \overline{W_0} \subset W$, como W é aberto em M, uma variedade diferenciável, segue que existe uma vizinhança conexa $U \subset W$ de p. Como U é conexo, segue da definição de componente conexa que U está contido em apenas uma componente conexa de W e não toca em nenhuma das outras componentes. Como $p \in \overline{W_0}$, segue que existe $q \in W_0 \cap U$, ou seja, $U \subset W_0$, logo $p \in W_0$ e assim $W_0 = \overline{W_0}$. Além disso, temos que W_0 é aberto. De fato, dado $p \in W_0 \subset W \subset M$, como W é aberto e M é uma variedade, segue que existe vizinhança conexa $U \subset W$ de p. Logo, por definição de conexo, obtemos que $U \subset W_0$, e assim W_0 é um aberto de M. Como W_0 é aberto, fechado e conexo, segue que $W_0 = M$ e portanto x é totalmente umbílica.

■

Vamos comparar a 3^a com a 1^a forma fundamental. Temos que

$$\langle de_3, de_3 \rangle = \left\langle \omega_1^3 e_1 + \omega_2^3 e_2, \omega_1^3 e_1 + \omega_2^3 e_2 \right\rangle = \omega_1^3 \omega_1^3 + \omega_2^3 \omega_2^3,$$

ou seja, $\{\omega_1^3, \omega_2^3\}$ é um co-referencial móvel ortonormal para III. Além disso, pelas equações estruturais:

$$\begin{aligned} d\omega_1^3 &= -\omega_1^2 \wedge \omega_2^3, \\ d\omega_2^3 &= -\omega_2^1 \wedge \omega_1^3. \end{aligned}$$

Portanto, por definição, concluímos que ω_1^2 é a forma de conexão Levi-Civita de III com respeito a esse referencial móvel ao longo de $n = e_3$. Podemos alterar um pouco o ponto de vista da equação de Gauss (2.7) e concluir que

$$d\omega_1^2 = \omega_3^1 \wedge \omega_3^2 = \widetilde{K}\omega_3^1 \wedge \omega_3^2$$

significa que a curvatura Gaussiana $\widetilde{K}$ de III é 1. Olhando novamente a equação de Gauss, obtemos que:

$$\omega_3^1 \wedge \omega_3^2 = K\omega^1 \wedge \omega^2. \tag{2.30}$$

O que nos mostra que K é a distorção de área de III para I. Essa é uma definição moderna de K.

Definição 63. *A **curvatura total** de uma imersão $x : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de uma superfície conexa, compacta e orientada M, é definida por:*

$$\int_M KdA = \int_M K\omega^1 \wedge \omega^2,$$

onde $dA = \omega^1 \wedge \omega^2$ é a forma de área induzida pela métrica em M.

Se $n : M \to \mathbb{S}^2$ é a aplicação de Gauss para x, então um $x-$referencial móvel de 1^a ordem $((e_1, e_2, e_3), x)$ em um aberto $U \subset M$ é dito **positivamente orientado** se $e_3 = n$ e $dA = \omega^1 \wedge \omega^2$ em U. A equação (2.30) implica que a curvatura total de x pode ser vista como a área da imagem da aplicação de Gauss. De fato, lembremos de uma característica básica da integração em variedades: Se $g : M \longrightarrow N$ é um difeomorfismo entre duas variedades conexas orientadas e se υ é uma $2-$forma suave em N com suporte compacto, então:

$$\int_M g^*\upsilon = \pm \int_N \upsilon,$$

onde o sinal é positivo, se g preserva orientação, e negativo, se g inverte orientação. Para usar esse resultado na aplicação de Gauss que, geralmente, não é um difeomorfismo, precisamos do conceito de **grau de uma aplicação** entre superfícies:

Sejam M^2 e N^2 superfícies conexas, compactas e orientadas e seja $g : M \longrightarrow N$ uma aplicação suave. Um ponto $y \in N$ é um **valor regular** de g se $g^{-1}(\{y\})$ não contém pontos críticos, onde $x \in M$ é um **ponto crítico** de g se a imagem de dg_x tem dimensão menor que 2. Note que se $y \in N$ não está na imagem de g, então y é um valor regular, pois $\emptyset = g^{-1}(\{y\})$ não contém pontos críticos de g. A existência de valor regular segue do **Teorema de Sard.** Pelo teorema da função inversa, se $y \in N$ for um valor regular de g, então para $x \in g^{-1}(\{y\})$, existe uma vizinhança $x \in U \subset M$ de x tal que $g_{|U} : U \to N$ é um difeomorfismo sobre sua imagem. Em particular, g é injetora em U, logo $U \cap g^{-1}(\{y\}) = \{x\}$. Assim, $g^{-1}(\{y\})$ é um conjunto de pontos isolados em M, que é compacto, logo $g^{-1}(\{y\})$ é finito. De fato, seja $\delta_x \in \mathbb{R}^+$ tal que $B(x, \delta_x) \cap B(z, \delta_z) = \emptyset$,

$x, z \in g^{-1}(\{y\})$, além disso fixe $\varepsilon > 0$ e seja

$$V = \left[{}_{x \in g^{-1}(\{y\})} B(x, \delta_x)\right] \cup \left[{}_{x \in M - (g^{-1}(\{y\}))} B(x, \varepsilon)\right].$$

Note que V é aberto, pois é uma união de conjuntos abertos. Além disso, $M \subset V$. Como M é compacto podemos extrair de V uma subcobertura finita de M. Mas a subcobertura nunca será finita se houverem infinitos pontos isolados em M. Para um valor regular $y \in N$, suponha que $g^{-1}(\{y\}) = \{x_1, ..., x_k\}$, $k \in \mathbb{N}^*$. Seja

$$\epsilon_j := \left\{ \begin{array}{ccc} +1 & , & \text{se } dg_{x_j} \text{ preserva orientação,} \\ -1 & , & \text{se } dg_{x_j} \text{ inverte orientação,} \end{array} \right\}$$

para $j = 1, ..., k$.

Definição 64 (Grau Local)**.** *O* ***grau local*** *de g em um valor regular $y \in N$ é*

$$\deg_y(g) := \sum_{j=1}^{k} \epsilon_j,$$

se $g^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$. Caso contrário, definimos $\deg_y(g) := 0$.

Vamos assumir o seguinte resultado: Para toda superfície conexa, compacta e orientada M, o funcional linear definido na cohomologia de De Rham, $H^2(M)$:

$$\int_M : [\mu] \in H^2(M) \longmapsto \int_M [\mu] := \int_M \mu \in \mathbb{R},$$

é um isomorfismo de $H^2(M)$ em $\mathbb{R}$. Aqui μ é uma $2-$forma em M representando a classe de cohomologia $[\mu]$. Uma consequência desse resultado é que se μ e ν são $2-$formas suaves em M tais que

$$\int_M \mu = \int_M \upsilon,$$

então μ e ν estão na mesma classe de equivalência, ou seja, existe uma $1-$forma suave α em M tal que $\mu - \upsilon = d\alpha$.

Proposição 65. *Sejam M e N superfícies conexas, compactas e orientadas, e seja $g : M \longrightarrow N$ uma aplicação suave. Se υ é uma $2-$forma suave em N, e se $y \in N$ é um valor regular de g, então:*

$$\int_M g^* \upsilon = \deg_y(g) \int_N \upsilon.$$

Demonstração. Considere um valor regular $y \in N$ de g . Vamos fazer a demonstração apenas do caso em que $y \in Img$. Supondo isso, escreva $g^{-1}(\{y\}) = \{x_1, ..., x_k\}$, onde $k \in \mathbb{N}^*$. Pelos raciocínios já discutidos acima, existe uma vizinhança aberta e conexa

$V \subset N$ de y tal que

$$g^{-1}(V) = U_1 \cup ... \cup U_k,$$

uma união disjunta de abertos tais que $x_j \in U_j$ e a restrição $g_j = g_{|U_j}$ leva U_j difeomorficamente em V, $j = 1, ..., k$. Considere uma forma volume ν sobre N (existe porque N é orientável) e uma função "bump"$\xi : N \to \mathbb{R}$ com suporte em V. Defina constantes

$$c_1 = \int_N \xi\nu > 0 \qquad e \qquad c_2 = \int_N \upsilon$$

e considere a 2−forma suave $\widetilde{\upsilon} = \frac{c_2}{c_1}\xi\nu$ cujo suporte está ainda contido em V e observe que

$$\int_N \widetilde{\upsilon} = \int_N \frac{c_2}{c_1}\xi\nu = \frac{c_2}{c_1}c_1 = \int_N \upsilon$$

Assim, $\upsilon - \widetilde{\upsilon} = d\alpha$, para alguma 1−forma suave α em N. Agora, temos que

$$g^*\widetilde{\upsilon} = \sum_{j=1}^{k} \omega_j,$$

onde o suporte da 2−forma suave ω_j em M é um subconjunto de U_j, e $\omega_j := g_j^*\widetilde{\upsilon}$, $j = 1, ..., k$. Como $d(g_j)_{x_j} = dg_{x_j}$, segue que

$$\int_{U_j} \omega_j = \int_{U_j} g_j^*\widetilde{\upsilon} = \epsilon_j \int_V \widetilde{\upsilon} = \epsilon_j \int_N \widetilde{\upsilon} = \epsilon_j \int_N \upsilon,$$

$j = 1, ..., k$. Usando o teorema de Stokes, concluímos que:

$$\begin{aligned}
\int_M g^*\upsilon &= \int_M g^*(\widetilde{\upsilon} + d\alpha) = \int_M g^*\widetilde{\upsilon} + \int_M g^* d\alpha = \int_M \sum_{j=1}^{k} \omega_j + \int_M d(g^*\alpha) = \sum_{j=1}^{k} \int_M \omega_j + \int_M d(g^*\alpha) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \int_{U_j} \omega_j + \int_M d(g^*\alpha) = \sum_{j=1}^{k} \epsilon_j \int_N \upsilon + \int_M d(g^*\alpha) \overset{\text{Stokes}}{=} \left(\sum_{j=1}^{k} \epsilon_j\right) \int_N \upsilon + \int_{\partial M} g^*\alpha \\
&= \deg_y(g) \int_N \upsilon + \int_{\emptyset} g^*\alpha \\
&= \deg_y(g) \int_N \upsilon
\end{aligned}$$

■

Como ambas as integrais da proposição acima independem do valor regular $y \in N$ de g que foi escolhido na demonstração, concluímos que $\deg_y(g)$ independe de y, ou seja, podemos escrever $\deg(g) = \deg_y(g)$, para todo valor regular de g.

Corolário 66. *Se $n : M \longrightarrow \mathbb{S}^2$ é a aplicação de Gauss de uma imersão $x : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de uma superfície conexa, compacta e orientada, então a curvatura total de x é o grau da* *aplicação n multiplicado pela área de $\mathbb{S}^2$, isto é,*

$$\int_M K dA = 4\pi \deg(n) .$$

Demonstração. De fato, temos que:

$$\int_M K dA = \int_M n^* dA = \deg(n) \int_{\mathbb{S}^2} dA = 4\pi \deg(n) .$$

■

Capítulo 3

Famílias de superfícies regulares em $\mathbb{R}^3$

Neste capítulo, vamos introduzir alguns exemplos de imersões com características próprias, procurando verificar os subconjuntos delas que verificam certas propriedades. Além disso, em alguns casos, calcularemos suas curvaturas principais, média e Gaussiana.

3.1 Superfícies Isoparamétricas, de Dupin e Canal

Definição 67. *Uma imersão é dita* ***isoparamétrica*** *se suas curvaturas principais são constantes. Uma curvatura satisfaz a* ***condição de Dupin*** *se é constante ao longo das linhas de curvatura. Uma imersão é* ***canal*** *se uma de suas curvaturas principais satisfaz a condição de Dupin. Uma imersão é de* ***Dupin*** *se ambas as curvaturas principais satisfazem a condição de Dupin. Uma* ***cíclida de Dupin*** *é a imagem de uma imersão de Dupin.*

Uma pequena variação da Proposição (59) nos dá a seguinte caracterização da condição de Dupin em termos das esferas de curvatura orientada.

Proposição 68. *Seja $x : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão livre de pontos umbílicos com campo suave normal unitário e_3. Uma curvatura principal, a digamos, satisfaz a condição de Dupin se e somente se a esfera de curvatura orientada $S = x + \frac{1}{a}e_3$ tem dimensão 1 em todo ponto de M.*

Demonstração. Seja $(e, x) : U \subset M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ um x-referencial móvel de 2^a ordem em U

cujo campo suave normal unitário é e_3. Então

$$\begin{aligned}
dS &= dx + d\left(\frac{1}{a}e_3\right) = \left(\omega^1 e_1 + \omega^2 e_2\right) - \frac{da}{a^2}e_3 + \frac{1}{a}de_3 \\
&= \left(\omega^1 e_1 + \omega^2 e_2\right) - \frac{a_1\omega^1 + a_2\omega^2}{a^2}e_3 + \frac{1}{a}\left(\omega_1^3 e_1 + \omega_2^3 e_2\right) \\
&= \left(\omega^1 e_1 + \omega^2 e_2\right) - \frac{a_1\omega^1 + a_2\omega^2}{a^2}e_3 + \frac{1}{a}\left(\left(-h_{11}\omega^1 - h_{12}\omega^2\right)e_1 + \left(-h_{21}\omega^1 - h_{22}\omega^2\right)e_2\right) \\
&\overset{\text{umbílica}}{=} \left(\omega^1 e_1 + \omega^2 e_2\right) - \frac{a_1\omega^1 + a_2\omega^2}{a^2}e_3 - \frac{1}{a}\left(a\omega^1 e_1 + c\omega^2 e_2\right) \\
&= \left(e_1 - \frac{a_1}{a^2}e_3 - e_1\right)\omega^1 + \left(e_2 - \frac{a_2}{a^2}e_3 - \frac{c}{a}e_2\right)\omega^2 \\
&= -\left(\frac{a_1}{a^2}e_3\right)\omega^1 - \left(\frac{a-c}{a}e_2 + \frac{a_2}{a^2}e_3\right)\omega^2,
\end{aligned}$$

onde $da = \sum_{i=1}^{2} a_i\omega^i$ e $\{\omega^1, \omega^2\}$ é o co-referencial móvel dual de (x, e). Segue disso que a imagem de dS tem dimensão 1 se e somente se a_1 é nulo em U. Note que:

$$\frac{d}{ds}(a \circ \gamma) = da_{\gamma(s)}\gamma'(s) = a_1(\gamma(s))\,\omega^1(\gamma'(s)) + a_2(\gamma(s))\,\omega^2(\gamma'(s)) = a_1(\gamma(s)),$$

para uma linha de curvatura qualquer γ, logo $a_1 = 0$ em U se e somente se a satisfaz a condição de Dupin em U. Logo, como em todo ponto de M existe tal vizinhança U, a demonstração está completa. ■

Agora vamos introduzir alguns conceitos e resultados que nos ajudarão a obter Grupos de Lie a partir de subálgebras de Lie de $\mathfrak{gl}(n)$. Comecemos com algumas definições preliminares:

Definição 69. *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n. Seja k um natural em $\{1, ..., n\}$. Uma **distribuição** $\mathcal{D}$ de dimensão k em M é uma função que associa a cada ponto $p \in M$ um subespaço de dimensão k em T_pM. A distribuição é dita suave se cada ponto de M possui uma vizinhança U na qual existem campos vetoriais suaves $X_1, ..., X_k$ que geram $\mathcal{D}(p)$, para todo $p \in U$. O conjunto desses campos é chamado de **referencial local suave de $\mathcal{D}$. Um campo suave definido em um aberto de M pertence à** $\mathcal{D}$ se $X(p) \in \mathcal{D}(p)$, para todo ponto no domínio de X.*

Definição 70. *Dizemos que uma distribuição $\mathcal{D}$ satisfaz a **condição de Frobenius** se $[X, Y] \in \mathcal{D}$ para todo $X, Y \in \mathcal{D}$.*

Definição 71. *Uma **variedade integral** de uma distribuição $\mathcal{D}$ de dimensão k é uma imersão injetiva $f : N^k \to M$ tal que*

$$df_pT_pN = \mathcal{D}(f(p)),$$

*para todo $p \in N$. Uma variedade integral é dita **maximal** se for conexa e não for um subconjunto próprio de nenhuma outra variedade integral conexa.*

Observação 72. *Existe uma maneira dual de definir distribuições em termos de equações. Se $\mathcal{D}$ é uma distribuição de dimensão k em M^n, então o subespaço $\mathcal{D}(p) \subset T_pM$ possui um **aniquilador** $\mathcal{D}^{\perp}(p) \subset T_p^*M$, o qual é um subespaço de dimensão $n-k$ do espaço cotangente de M em p, formado pelos funcionais que se anulam em $\mathcal{D}(p)$. Dizemos que uma $1-$forma suave θ definida em um aberto U de M pertence à $\mathcal{D}^{\perp}$ se $\theta(p) \in \mathcal{D}^{\perp}(p)$ para todo $p \in U$.*

Definição 73. *Um **co-referencial móvel local suave** para $\mathcal{D}^{\perp}$ é o conjunto $\left\{\theta^{k+1}, ..., \theta^n\right\}$ de $1-$formas suaves em um aberto $U \subset M$ que geram $\mathcal{D}^{\perp}(p)$, para todo $p \in U$.*

Podemos relacionar $\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}^{\perp}$ da seguinte maneira:

Proposição 74. *Uma distribuição $\mathcal{D}$ possui um referencial local se e somente se $\mathcal{D}^{\perp}$ possui um co-referencial móvel local.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se $\mathcal{D}$ possui um referencial local $\{X_1, ..., X_k\}$ em um aberto U, seja o conjunto dos campos $A := \{X_{k+1}, ..., X_n\}$ tal que $\{X_{k+1}(p), ..., X_n(p)\}$ é o complemento ortogonal de $\{X_1(p), ..., X_k(p)\}$ para todo $p \in U$. Logo podemos construir a base dual de $\langle A \rangle$, $A^* := \{f_{k+1}, ..., f_n\}$ onde

$$f_i(p)\left(X_j(p)\right) = \delta_{i,j}, \qquad i, j = k+1, ..., n$$

que é justamente o co-referencial móvel local de $\mathcal{D}^{\perp}$ por construção.

($\Leftarrow$) Para todo $p \in M$, T_pM é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, que tem dimensão 1. Logo todo subespaço A de T_pM é isomorfo ao seu dual A^*. Portanto se $\mathcal{D}^{\perp}$ possui um co-referencial móvel local. segue que há um conjunto $\left\{\theta^{k+1}, ..., \theta^n\right\}$ de $1-$formas suaves em um aberto $U \subset M$ que geram $\mathcal{D}^{\perp}(p)$, para todo $p \in U$, e estão associadas à essas $1-$formas, portanto, campos suaves $\{X_{k+1}, ..., X_n\}$ em U. Basta tomar o complemento ortogonal de $\{X_{k+1}(p), ..., X_n(p)\}$ em T_pM para todo $p \in U$ que obteremos um conjunto de campos suaves $\{X_1, ..., X_k\}$ em U sendo ele o referencial local de $\mathcal{D}$ por construção.

■

Além disso, o seguinte resultado nos dá as condições necessárias e suficientes para uma imersão $f : N^k \to M$ ser uma variedade integral:

Proposição 75. *Uma imersão injetora $f : N^k \to M$ é uma variedade integral se e somente se $f^*\theta \equiv 0$ para toda $1-$forma suave $\theta \in \mathcal{D}^{\perp}$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Por hipótese $df_p T_p N = \mathcal{D}(f(p))$ para todo $p \in N$. Segue disso que

$$f^*\theta(p) : v \in T_p N \mapsto \theta(f(p))(df_p.v) \in \mathbb{R},$$

para todo $p \in N$. Porém $\theta \in \mathcal{D}^\perp$, logo $\theta(f(p))$ só é diferente de zero para vetores em $\mathcal{D}^\perp(p)$, mas $df_p.v \in \mathcal{D}(f(p))$, logo $\theta(f(p))(df_p.v) = 0$, como p e v são quaisquer, segue que $f^*\theta \equiv 0$.

($\Leftarrow$) Suponha que exista $p \in N$ e $v \in T_p N$ tal que $df_p.v \notin \mathcal{D}(f(p))$. Logo $df_p.v \in \mathcal{D}^\perp(f(p)) = \langle X_{k+1}(p), ..., X_n(p) \rangle$, segue disso que

$$df_p.v = a_{k+1}X_{k+1}(p) + ... + a_n X_n(p)$$

com $a_j \in \mathbb{R}, j = k+1, ..., n$ não todos nulos. Logo existe um g_i na base dual canônica de $\mathcal{D}^\perp(f(p))$ tal que $g_i(f(p))(df_p.v) \neq 0$ o que é um absurdo por hipótese. ■

Podemos caracterizar, também, as condições necessárias e suficientes para que uma $k-$distribuição $\mathcal{D}$ satisfaça a condição de Frobenius baseado em certas propriedades que todo co-referencial móvel local de $\mathcal{D}^\perp$ deve satisfazer:

Lema 76. *Uma $k-$distribuição suave $\mathcal{D}$ em M^m satisfaz a condição de Frobenius se, e somente se, para todo co-referencial móvel local $\left\{\theta^{k+1}, ..., \theta^n\right\}$ de $\mathcal{D}^\perp$ em $U \subset M$ existem $1-$formas suaves ω^α_β em U tais que*

$$d\theta^\alpha = \sum_{\beta=k+1}^{m} \theta^\beta \wedge \omega^\alpha_\beta,$$

para todo $\alpha = k+1, ..., m$.

Vide pg. 74 - Frank Warner. . ■

Por fim, vamos enunciar o **Teorema de Frobenius**: Um teorema de existência e unicidade de subvariedades integrais maximais sob certas condições na variedade de dimensão maior:

Teorema 77 (Teorema de Frobenius)**.** *Seja M^m uma variedade diferenciável munida de uma $k-$distribuição suave $\mathcal{D}$ que satisfaz a condição de Frobenius. Então, para cada ponto $p \in M$ existe uma única subvariedade integral maximal $Y \subset M$ tal que $p \in Y$.*

Vide pg. 94,95 - Frank Warner. . ■

Corolário 78. *Há uma bijeção entre o conjunto dos grupos de Lie de matrizes e as subalgebras de Lie de $\mathfrak{gl}(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

O corolário acima vale, pois se $GL(n)$ é o grupo das matrizes $n \times n$ invertíveis cuja álgebra de Lie é $\mathfrak{gl}(n)$, segue da proposição (12) que uma subálgebra de Lie $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{gl}(n)$

define uma $k-$distribuição suave $\mathcal{D}$ em $GL(n)$. Além disso, segue diretamente da definição e do fato de que $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n)$ que $\mathfrak{h}$ satisfaz a condição de Frobenius. Pelo Teorema de Frobenius existe uma única única subvariedade integral maximal $H \subset GL(n)$ tal que $Id \in H$. Pode-se provar que H é um subgrupo de Lie de $GL(n)$, e como consequência sua álgebra de Lie é dada por $\mathfrak{h}$. Além disso, a subvariedade integral maximal através de $g \in G$ é o deslocamento de H por g, que é dado pelo conjunto $gH = \{gh\ ;\ h \in H\}$.

Com os resultados acima, podemos demonstrar o seguinte:

Proposição 79 (Superfícies isoparamétricas, não umbílicas)**.** *Se $x : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é uma superfície isoparamétrica conexa com campo normal unitário $n : M \longrightarrow \mathbb{S}^2$, cujas curvaturas principais a e c são distintas, com $|a| > |c|$ digamos. Então $c = 0$ e $x(M)$ é um subconjunto aberto de um cilindro circular de raio $\frac{1}{|a|}$.*

Demonstração. Fazendo a mudança $n = -n$, se necessário, podemos assumir que $a > 0$. Não havendo pontos umbílicos, x possui um referencial móvel de 2^a ordem em uma vizinhança de qualquer ponto de M. Seja $(e, x) : U \longrightarrow E_+(3)$ um $x-$ referencial móvel de 2^a ordem cujo $e_3 = n$ e

$$\omega_3^1 = a\omega^1 \qquad \text{e} \qquad \omega_3^2 = c\omega^2.$$

Segue das equações estruturais em (2.24) que

$$\begin{aligned} 0 &= da = a_1\omega^1 + a_2\omega^2, \\ 0 &= dc = c_1\omega^1 + c_2\omega^2, \end{aligned}$$

pois a e c são constantes. Logo $a_1 = a_2 = c_1 = c_2 = 0$. Usando novamente (2.24) obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &= a_2 = (a - c)\, p, \\ 0 &= c_1 = (a - c)\, q, \end{aligned}$$

como $a \neq c$, concluímos que $p = q = 0$ e assim:

$$\begin{aligned} 0 &= dp = p_1\omega^1 + p_2\omega^2, \\ 0 &= dq = q_1\omega^1 + q_2\omega^2, \end{aligned}$$

ou seja, $p_1 = p_2 = q_1 = q_2 = 0$. Por fim, usando novamente (2.24), concluímos que

$$0 = p_2 - q_1 - p^2 - q^2 = ac.$$

Como $a \neq 0$, concluímos que $c = 0$. Segue que os componentes do pull-back da forma de

Maurer Cartan de $E(3)$ são caracterizados pelas seguintes equações:

$$\omega^3 = 0 \qquad , \qquad \omega_1^2 \overset{\text{p=q=0}}{=} 0 \qquad , \qquad \omega_3^1 = a\omega^1 \qquad , \qquad \omega_3^2 = 0,$$

onde a é uma constante positiva e $\{\omega^1, \omega^2\}$ é um co-referencial móvel ortonormal em U. As equações acima definem uma distribuição $\mathfrak{h}$ de dimensão 2 em $E_+(3)$, pois as únicas $1-$formas que não são nulas, são

$$\omega^1 \qquad , \qquad \omega^2 \qquad \text{e} \qquad \omega_3^1 = a\omega^1.$$

As equações estruturais implicam que $\mathfrak{h}$ satisfaz a condição de Frobenius. De fato, por (45) segue que:

$$\begin{aligned} d\omega^1 &= p\omega^1 \wedge \omega^2 = 0, \\ d\omega^2 &= q\omega^1 \wedge \omega^2 = 0, \end{aligned}$$

e pelo lema (76) vemos que a condição de Frobenius é satisfeita. Já que as equações que definem $\mathfrak{h}$ são dadas em termos de $1-$formas invariantes à esquerda com coeficientes constantes, segue que $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra de Lie de $\mathcal{E}(3)$,

$$\mathfrak{h} = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & -as \\ 0 & 0 & 0 \\ as & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \right) : s, t \in \mathbb{R} \right\} \approx \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & 0 & 0 & -as \\ t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & as & 0 & 0 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Se H é a superfície integral maximal relativa à $\mathfrak{h}$, através do elemento identidade de $E_+(3)$, então H é um subgrupo de Lie de $E(3)$ dado pela exponenciação de $\mathfrak{h}$:

$$\begin{aligned} H &= \left\{ \exp \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & 0 & 0 & -as \\ t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & as & 0 & 0 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\frac{ie^{-ias} - ie^{ias}}{a} & \frac{1}{2}\left(e^{-ias} + e^{ias}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(-ie^{-ias} + ie^{ias}\right) \\ t & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}\frac{e^{-ias} + e^{ias} - 2}{a} & \frac{1}{2}\left(ie^{-ias} - ie^{ias}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(e^{-ias} + e^{ias}\right) \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\} \\ &\approx \left\{ \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\frac{ie^{-ias} - ie^{ias}}{a} \\ t \\ -\frac{1}{2}\frac{e^{-ias} + e^{ias} - 2}{a} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(e^{-ias} + e^{ias}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(-ie^{-ias} + ie^{ias}\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\left(ie^{-ias} - ie^{ias}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(e^{-ias} + e^{ias}\right) \end{pmatrix} \right) : s, t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{a}\sin as \\ t \\ \frac{1}{a}\left(1 - \cos as\right) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos as & 0 & -\sin as \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin as & 0 & \cos as \end{pmatrix} \right) : s, t \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

As outras superfícies integrais de $\mathfrak{h}$ são da forma gH tal que $g \in E(3)$. Há um $x-$referencial móvel de 2^a ordem $(e,x) : M \longrightarrow E_+(3)$ para o qual e_1 é a direção principal relativa à uma curvatura principal positiva e $e_3 = n$, pois a 3^a coluna da matriz de $O(3)$ em H nos dá a unicidade de e_3 em todo M. Como M é conexa, segue que $(e,x)(M)$ está contido em um dos conjuntos da forma gH, no qual é da forma $(e(m_0), x(m_0))H$, para algum $m_0 \in M$. Assim:

$$\begin{aligned}
x(M) &= \pi_0\left(\left(e\left(m_0\right), x\left(m_0\right)\right) H\right) = \left(e\left(m_0\right), x\left(m_0\right)\right) H0 \\
&= \left(e\left(m_0\right), x\left(m_0\right)\right)\left(\left(\begin{array}{ccc} \cos as & 0 & -\sin as \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin as & 0 & \cos as \end{array}\right), \left(\begin{array}{c} \frac{1}{a}\sin as \\ t \\ \frac{1}{a}(1-\cos as) \end{array}\right)\right) 0 \\
&= \left(e\left(m_0\right)\left(\begin{array}{ccc} \cos as & 0 & -\sin as \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin as & 0 & \cos as \end{array}\right), e\left(m_0\right)\left(\begin{array}{c} \frac{1}{a}\sin as \\ t \\ \frac{1}{a}(1-\cos as) \end{array}\right) + x\left(m_0\right)\right) 0 \\
&\approx e\left(m_0\right)\left(\begin{array}{c} \frac{1}{a}\sin as \\ t \\ \frac{1}{a}(1-\cos as) \end{array}\right) + x\left(m_0\right) = e\left(m_0\right) C\left(a\right) + x\left(m_0\right) \\
&\approx \left(e\left(m_0\right), x\left(m_0\right)\right) C\left(a\right),
\end{aligned}$$

onde $C(a)$ é o cilindro circular $x^2 + \left(z - \frac{1}{a}\right)^2 = \frac{1}{a^2} \subset \mathbb{R}^3$, já que

$$C(a) = \left\{\left(\frac{1}{a}\sin as, t, \frac{1}{a}(1-\cos as)\right) : s, t \in \mathbb{R}\right\}.$$

■

3.2 Superfícies de Revolução

Exemplo 80 (Superfícies de Revolução)**.** *No semi-plano x^1x^3 de $\mathbb{R}^3$ tal que $x^1 > 0$ orientado por $dx^1 \wedge dx^3 > 0$, considere uma **curva de perfil** regular e suave, dada por $\gamma(u) = (f(u), 0, g(u))$, para u em um intervalo aberto e conexo $J \subset \mathbb{R}$, onde $f > 0$ em J. A **superfície de revolução** obtida pela rotação da curva γ em torno do eixo x^3 é a seguinte imersão:*

$$x : (u, \cos v, \sin v) \in J \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)) \in \mathbb{R}^3.$$

Segue que

$$\begin{aligned}
dx &= x_u du + x_v dv = \left(f'(u)\cos v, f'(u)\sin v, g'(u)\right) du + \left(-f(u)\sin v, f(u)\cos v, 0\right) dv \\
&= \left(\left(f'(u)\cos v\right) du - \left(f(u)\sin v\right) dv, \left(f'(u)\sin v\right) du + \left(f(u)\cos v\right) dv, g'(u)du\right),
\end{aligned}$$

Um x−referencial móvel de 1ª ordem é dado por:

$$\begin{cases} e_1(u,v) = \frac{x_u}{w} = \frac{1}{w}\left(f'(u)\cos v, f'(u)\sin v, g'(u)\right), \\ e_2(u,v) = \frac{x_v}{f} = \left(-\sin v, \cos v, 0\right), \end{cases}$$

onde $w = \sqrt[2]{(f')^2 + (g')^2}$. *E o vetor normal unitário é dado por:*

$$e_3(u,v) = e_1(u,v) \times e_2(u,v) = \frac{1}{w}\left(-g'(u)\cos v, -g'(u)\sin v, f'(u)\right).$$

Ou seja, ω^1 *é dada pela seguinte expressão:*

$$\begin{aligned} \omega^1 &= \langle dx, e_1 \rangle = \left\langle x_u du + x_v dv, \frac{1}{w}\left(f'\cos v, f'\sin v, g'\right)\right\rangle \\ &= \left(\frac{1}{w}(f')^2\cos^2 v\right) du + \left(\frac{1}{w}(f')^2\sin^2 v\right) du + \frac{1}{w}(g')^2 du \\ &= \frac{(f')^2 + (g')^2}{w} du = w du. \end{aligned}$$

Além disso, ω^2 *é dada pela seguinte expressão:*

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \langle dx, e_2 \rangle = \langle x_u du + x_v dv, (-\sin v, \cos v, 0)\rangle \\ &= -\left(f'\sin v\cos v\right) du + \left(f\sin^2 v\right) dv + \left(f'\cos v\sin v\right) du + \left(f\cos^2 v\right) dv \\ &= f dv. \end{aligned}$$

Além disso, temos que

$$de_1 = \left(\frac{f'f'' + g'g''}{w}\left(f'\cos v, f'\sin v, g'\right) + \frac{1}{w}\left(f''\cos v, f''\sin v, g''\right)\right) du + \frac{1}{w}\left(-f'\sin v, f'\cos v, 0\right) dv,$$

$$de_2 = -\left(\cos v, \sin v, 0\right) dv,$$

e portanto:

$$\omega_3^1 = \langle de_1, e_3 \rangle = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = \frac{f'g'' - f''g'}{w^2} du = \frac{f'g'' - f''g'}{w^3} w du = \kappa\omega^1,$$

onde os coeficientes são dados pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \left(\frac{\left(\left(f'f'' + g'g''\right) f'\cos v + f''\cos v\right) du - \left(f'\sin v\right) dv}{w}\right)\left(\frac{-g'\cos v}{w}\right) \\ \Delta_2 &= \left(\frac{\left(\left(f'f'' + g'g''\right) f'\sin v + f''\sin v\right) du + \left(f'\cos v\right) dv}{w}\right)\left(\frac{-g'\sin v}{w}\right) \\ \Delta_3 &= \left(\frac{\left(\left(f'f'' + g'g''\right) g' + g''\right) du}{w}\right)\left(\frac{f'}{w}\right) \end{aligned}$$

Além disso, temos que

$$\omega_3^2 = \langle de_2, e_3\rangle = \frac{g' \cos^2 v + g' \sin^2 v}{w} dv = \frac{g'}{w} dv = \frac{g'}{fw} f dv = \frac{g'}{fw}\omega^2,$$

onde $\kappa(u)$ é a curvatura da curva de perfil γ. Concluímos que esse $x-$referencial móvel é de 2ª ordem e as curvaturas principais são dadas por:

$$a = \kappa \qquad e \qquad c = \frac{g'}{fw}.$$

A métrica induzida e a 2ª forma fundamental em $J \times \mathbb{S}^1$ são dadas por:

$$I = \omega^1\omega^1 + \omega^2\omega^2 = w^2 (du)^2 + f^2 (dv)^2,$$
$$II = \omega_3^1\omega^1 + \omega_3^2\omega^2 = \kappa\omega^1\omega^1 + \frac{g'}{fw}\omega^2\omega^2.$$

As curvas de nível de u são chamadas de ***círculos de latitude*** *ou* ***paralelos de latitude.*** *As curvas de nível de v são chamadas de* ***meridianos (****todas congruentes à curva de perfil****).*** *Tangentes à essas curvas de nível estão as direções principais. Essas curvas de nível são, portanto, linhas de curvatura de x. As curvaturas Gaussiana e média são dadas, respectivamente, por:*

$$K = \frac{\kappa g'}{fw} \qquad e \qquad H = \frac{2\kappa + g'}{2fw}.$$

Como os campos $\{e_1, e_2, e_3\}$ estão globalmente definidos nesse caso, segue que essa imersão possui um $x-$referencial móvel de 2ª ordem globalmente definido.

Exemplo 81 (Curvas de umbílicos)**.** *Fixe $L > 0$ e rotacione a curva $x^1 = \frac{L}{1+(x^3)^2}$ em torno do eixo x^3. Essa superfície é um caso particular de superfície de revolução, e é parametrizada da seguinte maneira:*

$$x : (u, \cos v, \sin v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \left(\frac{L}{1+u^2}\cos v, \frac{L}{1+u^2}\sin v, u\right) \in \mathbb{R}^3,$$

onde a curva de perfil é dada por $\gamma(u) = \left(\frac{L}{1+u^2}, 0, u\right)$, $u \in \mathbb{R}$. Usando as fórmulas do exemplo anterior, concluímos que as curvaturas principais são dadas por:

$$a = \frac{2L\left(\left(1+u^2\right)^{-2} - 4u^2\left(1+u^2\right)^{-3}\right)}{\left(\sqrt[2]{\left(2uL\left(1+u^2\right)^{-2}\right)^2 + 1}\right)^3} \qquad e \qquad c = \frac{1+u^2}{L\sqrt[2]{\left(2uL\left(1+u^2\right)^{-2}\right)^2 + 1}}.$$

Na curva de nível $u = 0$, concluímos que

$$a = 2L \qquad e \qquad c = \frac{1}{L}.$$

Se $L = \frac{1}{\sqrt{2}}$, então o círculo de latitude $u = 0$ é consistido inteiramente de pontos umbílicos. De fato, nessa curva temos $a = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = c$. Pelo exemplo anterior, essa superfície possui um $x-$referencial móvel de 2ª ordem suave globalmente definido.

Notemos que se a curva de perfil da superfície de revolução estiver no comprimento de arco, então $w = 1$ e portanto:

$$\begin{aligned} d\omega^1 &= d\left(wdu\right) = d^2u = 0, \\ d\omega^2 &= d\left(fdv\right) = f'du \wedge dv, \end{aligned}$$

ou seja, concluímos que:

$$\omega_2^1 = 0\omega^1 + f'\omega^2 = f'\omega^2.$$

Além disso, a curvatura Gaussiana tem a seguinte expressão:

$$K = \frac{\kappa g'}{fw} = \frac{\frac{f'g''-f''g'}{w^3}g'}{f} = \frac{f'g''g' - f''\left(g'\right)^2}{f}.$$

Como a curva está parametrizada pelo comprimento de arco, existe uma função suave $\theta : J \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{aligned} f' &= \cos\theta\left(u\right) \Rightarrow f'' = -\sin\theta\left(u\right), \\ g' &= \sin\theta\left(u\right) \Rightarrow g'' = \cos\theta\left(u\right), \end{aligned}$$

e usando isso na expressão da curvatura gaussiana, concluímos que:

$$K = \frac{\left(\cos\theta\right)\left(\cos\theta\right)\left(\sin\theta\right) - \left(-\sin\theta\right)\left(\left(\sin\theta\right)\right)^2}{f} = \frac{\sin\theta}{f} = -\frac{f''}{f}. \tag{3.1}$$

Exemplo 82 (Pseudoesfera)**.** *Pela equação (3.1), a superfície de revolução, com curva de perfil parametrizada pelo comprimento de arco, possui curvatura Gaussiana constante igual à -1 se e somente se $f\left(u\right)$ satisfaz a seguinte equação diferencial:*

$$f'' - f = 0,$$

cuja solução geral é dada por:

$$f(u) = A\cosh u + B\sinh u,$$

onde $A, B \in \mathbb{R}$ são constantes arbitrárias sujeitas apenas aos requerimentos de que $f > 0$ e $\left(f'\right)^2 \leq 1$ em J. Sem perda de generalidade, vamos assumir que $0 \in J$, logo:

$$\begin{aligned} f(0) &= A\cosh 0 + B\sinh 0 = A, \\ f'(0) &= A\sinh 0 + B\cosh 0 = B, \end{aligned}$$

são as condições iniciais de f*. A* ***pseudoesfera*** *é a solução obtida no caso em que* $A = B = 1$*, e nesse caso, temos que:*

$$f(u) = \cosh u + \sinh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2} + \frac{e^u - e^{-u}}{2} = e^u,$$

com isso, concluímos também que:

$$(g')^2 = 1 - (f')^2 = 1 - e^{2u},$$

e isso nos diz que $J = (-\infty, 0]$*, assim* $0 \leq f \leq 1$*. Não há perda de generalidade ao assumir que* $g(0) = 0$*. Por conveniência, vamos assumir que* $g \geq 0$ *em J. Portanto, podemos passar a raiz na equação acima, mas tomar o sinal de menos*

$$g' = -\sqrt{1 - (f')^2} = -\sqrt{1 - e^{2u}},$$

pois a função g estará decrescendo em $J = (-\infty, 0]$ *até que* $g(0) = 0$*, logo* $g \geq 0$ *em J. Essa curva de perfil é chamada de* ***tractrix****. Notemos que*

$$\begin{aligned} df &= f' du = f du, \\ dg &= g' du = -\sqrt{1 - (f')^2} du = -\sqrt{1 - (f)^2} du, \end{aligned}$$

logo a tractix satisfaz a seguinte equação diferencial:

$$dg = -\sqrt{1 - (f)^2} du = -\frac{\sqrt{1 - (f)^2}}{f} df. \tag{3.2}$$

Agora vamos verificar que o segmento que liga $\gamma(u)$ *ao ponto de encontro da reta tangente à curva de perfil e passando por* $\gamma(u)$*, com o eixo* x^3*,tem comprimento igual à 1, para todo* $u \in J$*. De fato, a reta tangente à tractix passando por* $\gamma(u)$ *é dada por:*

$$\begin{aligned} r_u(t) &= \gamma(u) + t\gamma'(u) = (f(u), 0, g(u)) + t(f'(u), 0, g'(u)) \\ &= \left(e^u + te^u, 0, g(u) - t\sqrt{1 - e^{2u}}\right). \end{aligned}$$

Essa reta interceptará o eixo x^3 *se e somente se*

$$e^u + te^u = 0 \Leftrightarrow t = -1.$$

Logo, temos que calcular o seguinte comprimento:

$$\|\gamma(u) - r_u(-1)\| = \|\gamma(u) - (\gamma(u) - \gamma'(u))\| = \|\gamma'(u)\| = 1.$$

Para resolver a equação (3.2) vamos fazer a seguinte mudança de variável:

$$f = \sin t \Rightarrow df = (\cos t)\, dt,$$

logo, segue disso que:

$$\begin{aligned} g &= \int dg = -\int \frac{\sqrt{1-(f)^2}}{f} df = -\int \frac{\sqrt{1-(\sin t)^2}}{\sin t} (\cos t)\, dt \\ &= -\int \frac{\cos^2 t}{\sin t} dt = -\cos t + \ln|\csc t + \cot t| + C. \end{aligned}$$

Como $\|\gamma(u) - r_u(-1)\| = 1$, *concluímos que* $g = 0$, *se e somente se* $f = 1$. *Tomando* $t = \pi/2$, *segue que* $f = \sin \pi/2 = 1$, *logo:*

$$\begin{aligned} 0 &= g(\pi/2) = -\cos(\pi/2) + \ln|\csc(\pi/2) + \cot(\pi/2)| + C \\ &= \ln 1 + C = C, \end{aligned}$$

ou seja, temos a expressão para a função g, *que é dada por:*

$$g(u) = -\cos u + \ln|\csc u + \cot u|.$$

Ou seja, a pseudoesfera é parametrizada pela aplicação $x : (-\infty, 0] \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^3$, *onde*

$$x(u,v) = (e^u \cos v, e^u \sin v, -\cos u + \ln|\csc u + \cot u|).$$

Uma imersão $x : M^2 \to \mathbb{R}^3$ que, na métrica induzida, possui curvatura Gaussiana constante igual à -1 é chamada de **imersão pseudoesférica.**

Pode-se demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 83 (Delaunay)**.** *As superfícies de revolução completas imersas em* $\mathbb{R}^3$ *com curvatura média constante são todas obtidas pela rotação da "roleta"de uma cônica, que é o traço de um foco de uma seção cônica enquanto ela rola sem deslizar ao longo de uma de suas linhas tangentes.*

3.3 Novas Imersões

Dada uma imersão $x : M^2 \to \mathbb{R}^3$ cuja imagem está contida em um aberto $V \subset \mathbb{R}^3$, e dado um difeomorfismo $F : V \to F(V) \subset \mathbb{R}^3$, obtemos uma nova imersão $\widetilde{x} = F \circ x : M^2 \to \mathbb{R}^3$. De fato,

$$d\widetilde{x}_p = d(F \circ x)_p = dF_{x(p)} \circ dx_p,$$

que é uma composição de aplicações injetivas. Portanto $d\widetilde{x}_p$ é injetiva, para todo $p \in M^2$. Com algumas exceções, a geometria de $\widetilde{x}$ não será bem relacionada com a de x. Uma exceção é quando F é uma isometria de $\mathbb{R}^3$, nesse caso a geometria de $\widetilde{x}$ é a mesma de x à menos de orientação, pois F pode ser uma isometria que inverte orientação. Outra exceção importante é quando F é a inversão em uma esfera:

Exemplo 84 (Inversão)**.** *A **inversão** na esfera unitária $\mathbb{S}^2$ é a seguinte aplicação:*

$$\mathcal{F} : x \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\} \longrightarrow \frac{x}{|x|^2} \in \mathbb{R}^3.$$

Primeiramente observemos que:

$$(\mathcal{F} \circ \mathcal{F})(x) = \mathcal{F}\left(\frac{x}{|x|^2}\right) = \frac{\frac{x}{|x|^2}}{\left|\frac{x}{|x|^2}\right|^2} = \frac{x}{|x|^2}.\frac{|x|^4}{|x|^2} = x = Id(x).$$

Ou seja, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1}$. Já que $\mathcal{F}$ é suave, concluímos que $\mathcal{F}$ é um difeomorfismo. Sua diferencial em um ponto $x \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ é dada por:

$$d\mathcal{F}_x = \frac{dx}{|x|^2} - 2\frac{\langle x, dx\rangle}{|x|^4}x.$$

Em termos matriciais, se $p = (x, y, z)$, então:

$$d\mathcal{F}_p = \begin{pmatrix} \frac{x^2+y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{-2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{-2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2} \\ \frac{-2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{x^2+y^2+z^2-2y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{-2yz}{(x^2+y^2+z^2)^2} \\ \frac{-2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{-2yz}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{x^2+y^2+z^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{-2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{-2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2} \\ \frac{-2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{x^2-y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{-2yz}{(x^2+y^2+z^2)^2} \\ \frac{-2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{-2yz}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} \end{pmatrix}$$

Então

$$\begin{aligned} \langle d\mathcal{F}_p, d\mathcal{F}_p\rangle &= \left\langle \frac{dx_p}{|x|^2} - 2\frac{\langle dx_p, x\rangle}{|x|^4}x, \frac{dx_p}{|x|^2} - 2\frac{\langle dx_p, x\rangle}{|x|^4}x \right\rangle \\ &= \frac{\langle dx_p, dx_p\rangle}{|x|^4} - \frac{4\langle dx_p, x\rangle \langle x, dx_p\rangle}{|x|^6} + 4\frac{\langle dx_p, x\rangle^2}{|x|^8}|x|^2 \\ &= \frac{\langle dx_p, dx_p\rangle}{|x|^4} - \frac{4\langle dx_p, x\rangle^2}{|x|^6} + 4\frac{\langle dx_p, x\rangle^2}{|x|^6} \\ &= \frac{1}{|x|^4}\langle dx_p, dx_p\rangle, \end{aligned}$$

*logo $\mathcal{F}$ é um **difeomorfismo conforme.** Assim, $\mathcal{F}$ preserva ângulos e multiplica os comprimentos por $\frac{1}{|x|^2}$.*

Exemplo 85 (Inversão de uma superfície)**.** *Suponha que uma imersão $x : M^2 \to \mathbb{R}^3$ não* *toque a origem em nenhum ponto. Portanto temos a nova imersão*

$$\widetilde{x} = \mathcal{F} \circ x = \frac{x}{|x|^2} : M^2 \to \mathbb{R}^3.$$

Se $((e_1, e_2, e_3), x)$ *é um* $x-$*referencial móvel em um aberto* $U \subset M$*, defina*

$$\begin{aligned}
\widetilde{e_i} &:= |x(p)|^2 d\mathcal{F}_{x(p)} e_i = \begin{pmatrix} \frac{-x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2} & \frac{-2xy}{x^2+y^2+z^2} & \frac{-2xz}{x^2+y^2+z^2} \\ \frac{-2xy}{x^2+y^2+z^2} & \frac{x^2-y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2} & \frac{-2yz}{x^2+y^2+z^2} \\ \frac{-2xz}{x^2+y^2+z^2} & \frac{-2yz}{x^2+y^2+z^2} & \frac{x^2+y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{i,1} \\ e_{i,2} \\ e_{i,3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{x^2 e_{i,1} - y^2 e_{i,1} - z^2 e_{i,1} + 2xye_{i,2} + 2xze_{i,3}}{x^2+y^2+z^2} \\ \frac{x^2 e_{i,2} - y^2 e_{i,2} + z^2 e_{i,2} - 2xye_{i,1} - 2yze_{i,3}}{x^2+y^2+z^2} \\ \frac{x^2 e_{i,3} + y^2 e_{i,3} - z^2 e_{i,3} - 2xze_{i,1} - 2yze_{i,2}}{x^2+y^2+z^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e_{i,1} \\ e_{i,2} \\ e_{i,3} \end{pmatrix} - 2\frac{\langle (x,y,z), (e_{i,1}, e_{i,2}, e_{i,3}) \rangle}{x^2+y^2+z^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&= e_i - 2\frac{\langle x(p), e_i \rangle}{|x(p)|^2} x(p),
\end{aligned}$$

para $i = 1, 2, 3$ *e* $p \in M$*. Então* $(\widetilde{x}, (\widetilde{e_1}, \widetilde{e_2}, \widetilde{e_3}))$ *é um* $\widetilde{x}-$*referencial móvel de 1ª ordem em* U*. De fato, temos que:*

$$\begin{aligned}
d\widetilde{x} &= \frac{dx}{|x|^2} - 2\frac{\langle dx, x \rangle}{|x|^4} x = \frac{\sum_{i=1}^2 \omega^i e_i +}{|x|^2} - 2\frac{\left\langle \sum_{i=1}^2 \omega^i e_i, x \right\rangle}{|x|^4} x = \frac{1}{|x|^2} \sum_{i=1}^2 \omega^i e_i - 2\sum_{i=1}^2 \omega^i \frac{\langle e_i, x \rangle}{|x|^2} x \\
&= \frac{1}{|x|^2} \sum_{i=1}^2 \omega^i \left(e_i - 2\frac{\langle e_i, x \rangle}{|x|^2} x \right) = \frac{1}{|x|^2} \sum_{i=1}^2 \omega^i \widetilde{e_i} \\
&=: \sum_{i=1}^2 \widetilde{\omega}^i \widetilde{e_i},
\end{aligned}$$

dondo vemos que $\widetilde{\omega}^3 = 0$ *e* $\widetilde{\omega}^i = \frac{\omega^i}{|x|^2}$*,* $i = 1, 2$*. Portanto*

$$\widetilde{\omega}^1 \wedge \widetilde{\omega}^2 = \frac{\omega^1}{|x|^2} \wedge \frac{\omega^2}{|x|^2} = \frac{1}{|x|^4} \omega^1 \wedge \omega^2 \neq 0.$$

Além disso, temos que:

$$\begin{aligned}
d\widetilde{e_3} &= d\left(e_3 - 2\frac{\langle e_3, x \rangle}{|x|^2} x \right) = de_3 - 2d\left(\frac{\langle e_3, x \rangle}{|x|^2} x \right) \\
&= \sum_{i=1}^2 \omega_i^3 e_i - 2d\left(\frac{\langle e_3, x \rangle}{|x|^2} \right) x - 2\frac{\langle e_3, x \rangle}{|x|^2} \sum_{i=1}^2 \omega^i e_i.
\end{aligned}$$

Usando que :

$$d\left(\frac{\langle e_3, x\rangle}{|x|^2}\right) = \frac{\langle de_3, x\rangle}{|x|^2} - \frac{2\langle dx, x\rangle\langle e_3, x\rangle}{|x|^4}.$$

E portanto, concluímos que:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\omega}_3^i &= -\langle d\widetilde{e}_3, \widetilde{e}_i\rangle = -\left\langle \sum_{i=1}^{2}\omega_i^3 e_i - 2d\left(\frac{\langle e_3, x\rangle}{|x|^2}\right)x - 2\frac{\langle e_3, x\rangle}{|x|^2}\sum_{i=1}^{2}\omega^i e_i, e_i - 2\frac{\langle e_i, x\rangle}{|x|^2}x\right\rangle \\
&= -\left\langle \sum_{i=1}^{2}\omega_i^3 e_i, e_i\right\rangle + 2\left\langle d\left(\frac{\langle e_3, x\rangle}{|x|^2}\right)x, e_i\right\rangle - \left\langle -2\frac{\langle e_3, x\rangle}{|x|^2}\sum_{i=1}^{2}\omega^i e_i, e_i\right\rangle - \left\langle \sum_{i=1}^{2}\omega_i^3 e_i, -2\frac{\langle e_i, x\rangle}{|x|^2}x\right\rangle \\
&= -\left\langle -2d\left(\frac{\langle e_3, x\rangle}{|x|^2}\right)x, -2\frac{\langle e_i, x\rangle}{|x|^2}x\right\rangle - \left\langle -2\frac{\langle e_3, x\rangle}{|x|^2}\sum_{i=1}^{2}\omega^i e_i, -2\frac{\langle e_i, x\rangle}{|x|^2}x\right\rangle \\
&= \omega_3^i - 2d\left(\frac{\langle e_3, x\rangle}{|x|^2}\right)\langle x, e_i\rangle + 2\frac{\langle e_3, x\rangle}{|x|^2}\omega^i + 2\frac{\langle e_i, x\rangle}{|x|^2}\sum_{i=1}^{2}\omega_i^3\langle e_i, x\rangle - 4\frac{\langle e_3, x\rangle\langle e_i, x\rangle}{|x|^4}\sum_{i=1}^{2}\omega^i\langle e_i, x\rangle \\
&= \omega_3^i + 2\frac{\langle e_3, x\rangle}{|x|^2}\omega^i,
\end{aligned}$$

para $i = 1, 2$. *Se as funções* a *e* c *são as curvaturas principais de* x *e se* (x, e) *é um* $x-$*referencial móvel de 2ª ordem com* $\omega_3^1 = a\omega^1$ *e* $\omega_3^2 = c\omega^2$, *então segue que:*

$$\begin{cases}
\widetilde{\omega}_3^1 = \omega_3^1 + 2\frac{\langle e_3, x\rangle}{|x|^2}\omega^1 = \left(a + 2\frac{\langle e_3, x\rangle}{|x|^2}\right)\omega^1 = \left(a|x|^2 + 2\langle e_3, x\rangle\right)\widetilde{\omega}^1, \\
\widetilde{\omega}_3^2 = \omega_3^2 + 2\frac{\langle e_3, x\rangle}{|x|^2}\omega^2 = \left(c + 2\frac{\langle e_3, x\rangle}{|x|^2}\right)\omega^2 = \left(c|x|^2 + 2\langle e_3, x\rangle\right)\widetilde{\omega}^2.
\end{cases}$$

Portanto $(\widetilde{e}, \widetilde{x})$ *é um* $\widetilde{x}-$*referencial móvel de 2ª ordem e as curvaturas principais da imersão* $\widetilde{x}$ *são dadas por:*

$$\widetilde{a} = \left(a|x|^2 + 2\langle e_3, x\rangle\right) \qquad e \qquad \widetilde{c} = \left(c|x|^2 + 2\langle e_3, x\rangle\right).$$

E $\widetilde{x}$ *possui as mesmas linhas de curvatura de* x. *De fato, se* $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ *(tal que* $x \circ \gamma$ *esteja parametrizada pelo comprimento de arco) é uma linha de curvatura de* x *(de* a, *digamos), então segue que:*

$$e_1(\gamma) = dx.\gamma' = \omega^1(\gamma')\, e_1(\gamma) + \omega^2(\gamma')\, e_2(\gamma),$$

ou seja, temos que $\omega^1(\gamma') = 1$ *e* $\omega^2(\gamma') = 0$, *logo*

$$\begin{aligned}
a\widetilde{\omega}^1(\gamma') &= \left(a|x\circ\gamma|^2 + 2\langle e_3, x\circ\gamma\rangle\right)\widetilde{\omega}^1(\gamma') = \left(a + 2\frac{\langle e_3, x\circ\gamma\rangle}{|x\circ\gamma|^2}\right)\omega^1(\gamma') = a, \\
c\widetilde{\omega}^2(\gamma') &= \left(c|x\circ\gamma|^2 + 2\langle e_3, x\circ\gamma\rangle\right)\widetilde{\omega}^2(\gamma') = \left(c + 2\frac{\langle e_3, x\circ\gamma\rangle}{|x\circ\gamma|^2}\right)\omega^2(\gamma') = 0,
\end{aligned}$$

e portanto $\widetilde{\omega}^1(\gamma') = 1$ *e* $\widetilde{\omega}^2(\gamma') = 0$. *Logo* $d\widetilde{x}.\gamma' = \widetilde{\omega}^1(\gamma')\,\widetilde{e_1}(\gamma) + \widetilde{\omega}^2(\gamma')\,\widetilde{e_2}(\gamma) = \widetilde{e_1}(\gamma)$.

De forma análoga demonstramos o caso em que γ é linha de curvatura de c e também os casos que o conjunto das linhas de curvatura de $\widetilde{x}$ estão contidas no conjunto das linhas de curvatura de x. Também segue dessas fórmulas que $m \in M$ é ponto umbílico de x se e somente se é ponto umbílico de $\widetilde{x}$, desde que m esteja no fecho do conjunto dos pontos não umbílicos de x. Todo ponto do complementar desse fecho está contido em um aberto de pontos umbílicos de x, no qual existe um $x-$referencial móvel de 2ª ordem e a afirmação permanece verdadeira para este caso.

*Se x é uma **imersão canal** com a constante ao longo das linhas de curvatura da forma $\omega^2 = 0$. Segue que $0 = da = a_1\omega^1 + a_2\omega^2 = a_1\omega^1$, ou seja, $a_1 = 0$ no domínio de um $x-$referencial móvel de 2ª ordem (x, e), e assim:*

$$\begin{aligned}
d\widetilde{a} &= d\left(a|x|^2\right) + 2d\langle e_3, x\rangle = |x|^2 da + 2a\langle dx, x\rangle + 2\langle de_3, x\rangle + 2\langle e_3, dx\rangle \\
&= a_2|x|^2\omega^2 + 2a\langle dx, x\rangle + 2\langle de_3, x\rangle + 2\langle e_3, dx\rangle = a_2|x|^2\omega^2 + 2a\langle dx, x\rangle + 2\langle de_3, x\rangle \\
&= a_2|x|^2\omega^2 + 2a\langle dx, x\rangle + 2\left\langle -\omega_3^1 e_1 - \omega_3^2 e_2, x\right\rangle = a_2|x|^2\omega^2 + 2a\langle dx, x\rangle + 2\left\langle -a\omega^1 e_1 - c\omega^2 e_2, x\right\rangle \\
&= a_2|x|^2\omega^2 + 2a\left\langle \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2, x\right\rangle - 2a\omega^1\langle e_1, x\rangle - 2c\langle e_2, x\rangle\omega^2 \\
&= \left(a_2|x|^2 + 2(a-c)\langle e_2, x\rangle\right)\omega^2,
\end{aligned}$$

ou seja, concluímos que $\widetilde{a}_1 = 0$. Logo $\widetilde{x}$ é também uma imersão canal. Pela mesma razão, se x é de Dupin então $\widetilde{x}$ também é. Além disso, temos que inversões de superfícies isoparamétricas não umbílicas podem não ser isoparamétricas: Se $a \neq c$ são constantes então $\widetilde{a}$ e $\widetilde{c}$ são constantes apenas se $|x|^2$ for constante, o que não é possível se x é não umbílica.

Exemplo 86. *O cilindro circular de raio $R > 0$*

$$x : (\cos s, \sin s, t) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \longrightarrow (R\cos s, R\sin s, t)\,\mathbb{R}^3,$$

é isoparamétrico e suas curvaturas principais relativas ao campo normal unitário $x_s \times x_t$ são dadas por $a = 1/R$ e $c = 0$. O eixo do cilindro passa pela origem. Sua inversão é dada por:

$$\frac{x}{|x|^2}(s,t) = \left(\frac{R\cos s}{R^2+t^2}, \frac{R\sin s}{R^2+t^2}, \frac{t}{R^2+t^2}\right),$$

que é uma superfície de revolução, cuja curva de perfil é dada por

$$\gamma(t) = \left(\frac{R}{R^2+t^2}, 0, \frac{t}{R^2+t^2}\right),$$

que é justamente uma circunferência de raio $1/R$ cujo centro é o ponto $(1,0,0)$.

3.4 Transformações paralelas

Seja $x : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão com um campo suave normal unitário n. Para toda constante $r \in \mathbb{R}$, a **transformação paralela** por r dessa imersão orientada, é dada pela seguinte aplicação:

$$\widetilde{x} = x + rn : M \longrightarrow \mathbb{R}^3.$$

Em geral, transformações paralelas não provém de composições de difeomorfismos de $\mathbb{R}^3$ com x.
Vamos começar verificando as condições para que $\widetilde{x}$ seja uma imersão. Se (e, x) é um $x-$referencial móvel de 1^a ordem em $U \subset M$, com $e_3 = n$ em U, então:

$$\begin{aligned} d\widetilde{x} &= d\left(x + re_3\right) = dx + rde_3 = \sum_{i=1}^{2} \omega^i e_i + r\sum_{i=1}^{2} \omega_i^3 e_i \\ &= \left(\omega^1 + r\omega_1^3\right) e_1 + \left(\omega^2 + r\omega_2^3\right) e_2 = \widetilde{\omega}^1 e_1 + \widetilde{\omega}^2 e_2, \end{aligned}$$

ou seja, $\widetilde{\omega}^1 = \omega^1 + r\omega_1^3$ e $\widetilde{\omega}^2 = \omega^2 + r\omega_2^3$.. Além disso, $\widetilde{x}$ é uma imersão se e somente se

$$\begin{aligned} 0 \neq \widetilde{\omega}^1 \wedge \widetilde{\omega}^2 &= \left(\omega^1 + r\omega_1^3\right) \wedge \left(\omega^2 + r\omega_2^3\right) = \omega^1 \wedge \omega^2 + r\omega^1 \wedge \omega_2^3 + r\omega_1^3 \wedge \omega^2 + r^2\omega_1^3 \wedge \omega_2^3 \\ &= \omega^1 \wedge \omega^2 - r\left(\omega^1 \wedge \omega_3^2 + \omega_3^1 \wedge \omega^2\right) + r^2\omega_3^1 \wedge \omega_3^2 \\ &= \omega^1 \wedge \omega^2 - r\left(\omega^1 \wedge \left(\sum_{i=1}^{2} h_{2i}\omega^i\right) + \left(\sum_{i=1}^{2} h_{1i}\omega^i\right) \wedge \omega^2\right) + r^2\left(\sum_{i=1}^{2} h_{1i}\omega^i\right) \wedge \left(\sum_{i=1}^{2} h_{2i}\omega^i\right) \\ &= \omega^1 \wedge \omega^2 - r\left(h_{22}\omega^1 \wedge \omega^2 + h_{11}\omega^1 \wedge \omega^2\right) + r^2\left(h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}\right)\omega^1 \wedge \omega^2 \\ &= \left(1 - r\left(h_{11} + h_{22}\right) + r^2\left(h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}\right)\right)\omega^1 \wedge \omega^2 \\ &= \left(1 - 2Hr + r^2K\right)\omega^1 \wedge \omega^2. \end{aligned}$$

Logo r não pode ser raiz da equação $r^2K - 2Hr + 1 = 0$. As raízes são dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{H \pm \sqrt{H^2 - K}}{K} &= \frac{\frac{a+c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 - ac}}{ac} = \frac{\frac{a+c}{2} \pm \frac{a-c}{2}}{ac} \\ &= \frac{1}{c} \text{ ou } \frac{1}{a}, \end{aligned}$$

para $+$ ou $-$, respectivamente. Esses são os **raios de curvatura de** x. Assuma que r não é um raio de curvatura de x, logo a transformação paralela $\widetilde{x}$ é de fato uma imersão. Então $(e, \widetilde{x})$ é um $\widetilde{x}-$referencial móvel com co-referencial móvel ortonormal dado por:

$$\widetilde{\omega}^1 = \omega^1 + r\omega_1^3 \quad , \quad \widetilde{\omega}^2 = \omega^2 + r\omega_2^3. \tag{3.3}$$

Sua métrica induzida

$$
\begin{aligned}
\widetilde{I} = \langle d\widetilde{x}, d\widetilde{x}\rangle &= \widetilde{\omega}^1\widetilde{\omega}^1 + \widetilde{\omega}^2\widetilde{\omega}^2 = \left(\omega^1 + r\omega_1^3\right)\left(\omega^1 + r\omega_1^3\right) + \left(\omega^2 + r\omega_2^3\right)\left(\omega^2 + r\omega_2^3\right) \\
&= \omega^1\omega^1 + 2r\omega_1^3\omega^1 + r^2\omega_1^3\omega_1^3 + \omega^2\omega^2 + 2r\omega_2^3\omega^2 + r^2\omega_2^3\omega_2^3 \\
&= \left(\omega^1\omega^1 + \omega^2\omega^2\right) - 2r\left(\omega_3^1\omega^1 + \omega_3^2\omega^2\right) + r^2\left(\omega_1^3\omega_1^3 + \omega_2^3\omega_2^3\right) \\
&= I - 2rII + r^2 III,
\end{aligned}
$$

onde $III = \langle de_3, de_3\rangle = \omega_1^3\omega_1^3 + \omega_2^3\omega_2^3$ é a **3ª forma fundamental** de x. Como $de_3 = \omega_1^3 e_1 + \omega_2^3 e_2$ é o mesmo para ambos os referenciais, então concluímos que

$$
\widetilde{\omega}_3^1 = \omega_3^1 \qquad , \qquad \widetilde{\omega}_3^1 = \omega_3^1
$$

Segue de (3.3) que:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2} h_{ik}\omega^k = \omega_3^i = \widetilde{\omega}_3^i &= \sum_{k=1}^{2} \widetilde{h_{ik}}\widetilde{\omega}^k = \sum_{k=1}^{2} \widetilde{h_{ik}}\left(\omega^k + r\omega_k^3\right) = \sum_{k=1}^{2} \widetilde{h_{ik}}\left(\omega^k - r\omega_3^k\right) \\
&= \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} \widetilde{h_{ik}}\left(\delta_{kj} - rh_{kj}\right)\omega^j = \sum_{k=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{2} \widetilde{h_{ij}}\left(\delta_{jk} - rh_{jk}\right)\right)\omega^k,
\end{aligned}
$$

ou seja, temos que

$$
h_{ik} = \sum_{j=1}^{2} \widetilde{h_{ij}}\left(\delta_{jk} - rh_{jk}\right).
$$

Em termos matriciais, se $S = (h_{ij})$ e $\widetilde{S} = \left(\widetilde{h_{ij}}\right)$ então a seguinte equação é satisfeita:

$$
S = \widetilde{S}\left(I - rS\right).
$$

Portanto, podemos encontrar a expressão da matriz $\widetilde{S}$ desde que $\det\left(I - rS\right) \neq 0$, o que equivale à r^{-1} não ser uma curvatura principal de x. Nesse caso, $\widetilde{S} = S\left(I - rS\right)^{-1}$, logo as curvaturas principais de $\widetilde{x}$, $\widetilde{a}$ e $\widetilde{c}$, são soluções da seguinte equação:

$$
\begin{aligned}
0 = \det\left(\widetilde{S} - tI\right) &= \det\left(S\left(I - rS\right)^{-1} - tI\right) = \det\left(\left(S - t\left(I - rS\right)\right)\left(I - rS\right)^{-1}\right) \\
&= \det\left(\left(S + rtS - tI\right)\left(I - rS\right)^{-1}\right) = \det\left(\left(S - \frac{t}{(1 + rt)}I\right)\left(1 + rt\right)\left(I - rS\right)^{-1}\right) \\
&= \det\left(\left(I - rS\right)^{-1}\left(1 + rt\right)\left(S - \frac{t}{1 + rt}I\right)\right).
\end{aligned}
$$

Se a e c são as curvaturas principais de x, fazendo $t_1 = \frac{a}{1-ra}$ e $t_2 = \frac{c}{1-rc}$, o termo do lado direito se anula, ou seja, concluímos que as curvaturas principais de $\widetilde{x}$ são dadas por:

$$
\widetilde{a} = \frac{a}{1 - ra} \qquad \text{e} \qquad \widetilde{c} = \frac{c}{1 - rc}. \tag{3.4}
$$

Em particular, um ponto $m \in M$ é umbílico para a superfície paralela $\widetilde{x} = x + re_3$ se e somente se é umbílico para x. Um $x-$referencial móvel (e, x) é de 2^a ordem se e somente se $(e, \widetilde{x})$ é um $\widetilde{x}-$referencial móvel de 2^a ordem. De fato, suponha que $\omega_3^1 = a\omega^1$, logo:

$$\widetilde{\omega}^1 = \omega^1 - ra\omega^1 = (1 - ra)\,\omega^1,$$

ou seja,

$$\widetilde{\omega}_3^1 = \omega_3^1 = a\omega^1 = \frac{a}{1 - ra}\widetilde{\omega}^1.$$

Além disso, suponha que $\widetilde{\omega}_3^1 = \widetilde{a}\widetilde{\omega}^1 = \widetilde{a}\,(\omega^1 - r\omega_3^1)$, logo:

$$\omega_3^1 = \widetilde{\omega}_3^1 = \widetilde{a}\left(\omega^1 - r\omega_3^1\right),$$

ou seja,

$$(1 + r\widetilde{a})\,\omega_3^1 = \widetilde{a}\omega^1 \Rightarrow \omega_3^1 = \frac{\widetilde{a}}{(1 + r\widetilde{a})}\omega^1.$$

De forma análoga, provamos a equivalência $\omega_3^2 = c\omega^2 \Leftrightarrow \widetilde{\omega}_3^2 = \widetilde{c}\widetilde{\omega}^2$. As curvaturas média e Gaussiana de x e $\widetilde{x}$ são relacionadas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\widetilde{H} &= \frac{1}{2}\,(\widetilde{a} + \widetilde{c}) = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{1 - ra} + \frac{c}{1 - rc}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{a\,(1 - rc) + c\,(1 - ra)}{(1 - ra)\,(1 - rc)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{a + c - 2rca}{acr^2 - cr - ar + 1} = \frac{H - rK}{Kr^2 - 2Hr + 1}, \\
\widetilde{K} &= \widetilde{a}\widetilde{c} = \frac{ac}{(1 - ra)\,(1 - rc)} = \frac{K}{Kr^2 - 2Hr + 1}.
\end{aligned}$$

As expressões em (3.4) nos mostram que as imersões paralelas de imersões isoparamétricas (respectivamente, Dupin ou canal) ainda são imersões isoparamétricas (respectivamente, Dupin ou canal).

Definição 87 (Ponto focal)**.** *Um ponto $y \in \mathbb{R}^3$ é um **ponto focal** de x se $y = \widetilde{x}(m) = x(m) + re_3\,(m)$, para algum $m \in M$ e algum $r \in \mathbb{R}$ para o qual $d\widetilde{x}_m$ é singular. A **multiplicidade** do ponto focal é a dimensão do kernel de $d\widetilde{x}_m$. O conjunto de todos os pontos focais de x é chamado de **locus focal** de x.*

Teorema 88 (Bonnet)**.** *Seja $x : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão com curvatura média constante $H = \frac{a+c}{2} \neq 0$ relativa ao campo normal unitário e_3. Considere a superfície paralela $\widetilde{x} = x + re_3$:*

1. *Se $r = \frac{1}{2H}$, então $\widetilde{x}$ tem curvatura Gaussiana constante $\widetilde{K} = 4H^2$;*

2. *Se $r = \frac{1}{H}$, então $\widetilde{x}$ tem curvatura média constante $\widetilde{H} = -H$;*

3. *Se $\widetilde{x}$ é uma superfície paralela de x, então x é uma superfície paralela de $\widetilde{x}$. Consequentemente, podemos reformular os resultados acima da seguinte maneira: Se*

x possui curvatura Gaussiana constante positiva K, então $\widetilde{x} = x \pm \frac{1}{\sqrt{K}} e_3$ possui curvatura média constante $\widetilde{H} = -\left(\pm \frac{\sqrt{K}}{2}\right)$.

Demonstração. Se $r = \frac{1}{2H}$, segue que:

$$\widetilde{K} = \frac{K}{Kr^2 - 2Hr + 1} = \frac{K}{K\left(\frac{1}{2H}\right)^2 - 2H\frac{1}{2H} + 1} = \frac{K}{K\left(\frac{1}{2H}\right)^2} = 4H^2.$$

Se $r = \frac{1}{H}$, segue que:

$$\widetilde{H} = \frac{H - rK}{Kr^2 - 2Hr + 1} = \frac{H - \left(\frac{1}{H}\right)K}{K\left(\frac{1}{H}\right)^2 - 2H\frac{1}{H} + 1} = \frac{\frac{H^2-K}{H}}{\frac{K-H^2}{H^2}} = \frac{\frac{H^2-K}{H}}{\frac{K-H^2}{H^2}} = -H.$$

Além disso, se x possui curvatura Gaussiana constante positiva K e se $r = \frac{1}{\sqrt{K}}$, segue que:

$$\widetilde{H} = \frac{H - rK}{Kr^2 - 2Hr + 1} = \frac{H - \left(\frac{1}{\sqrt{K}}\right)K}{K\left(\frac{1}{\sqrt{K}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{K}}\right)2H + 1} = \frac{H - \sqrt{K}}{-2\left(\frac{1}{\sqrt{K}}\right)H + 2}$$
$$= \frac{H - \sqrt{K}}{\frac{2\left(\sqrt{K} - H\right)}{\sqrt{K}}} = -\frac{\sqrt{K}}{2}.$$

Por fim, se $r = -\frac{1}{\sqrt{K}}$, então concluímos que:

$$\widetilde{H} = \frac{H - rK}{Kr^2 - 2Hr + 1} = \frac{H - \left(-\frac{1}{\sqrt{K}}\right)K}{K\left(-\frac{1}{\sqrt{K}}\right)^2 - \left(-\frac{1}{\sqrt{K}}\right)2H + 1} = \frac{H + \sqrt{K}}{\frac{2H}{\sqrt{K}} + 2}$$
$$= \frac{H + \sqrt{K}}{\frac{2\left(H + \sqrt{K}\right)}{\sqrt{K}}} = \frac{\sqrt{K}}{2}.$$

■

No caso em que x possui uma curvatura média constante, a curvatura média H será uma curvatura principal de x se e somente se o ponto em questão for umbílico, enquanto que $2H$ será uma curvatura principal se e somente se o ponto é **parabólico**, ou seja, $0 = a < c$. No caso em que x possui curvatura Gaussiana constante positiva K, segue que $\sqrt{K}$ é uma curvatura principal em algum ponto se e somente se esse ponto for umbílico, enquanto que $-\sqrt{K}$ nunca é uma curvatura principal.

3.5 Tubos

Seja $f : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva suave parametrizada pelo comprimento de arco imersa em $\mathbb{R}^3$, onde $J \subset \mathbb{R}$ é um intervalo conexo. Seja $\{T = f', N, B\}$ seu referencial móvel de Frenet. Vamos assumir que a curvatura $\kappa(s)$ é positiva em todo J, logo o referencial móvel de Frenet está bem definido e é suave em todo J. As **equações de Ferret-Frenet** são dadas por:

$$\{f' = T \quad , \quad T' = \kappa N \quad , \quad N' = -\kappa T + \tau B \quad , \quad B' = -\tau N,$$

onde a função suave $\tau : J \longrightarrow \mathbb{R}$ é a **torção** da curva. Seja r uma constante positiva e defina o **tubo sobre** f pela seguinte parametrização:

$$x : (s,t) \in J \times \mathbb{R} \longrightarrow f(s) + r\left(N(s)\cos t + B(s)\sin t\right) \in \mathbb{R}^3.$$

Segue disso que:

$$\begin{aligned} x_s &= f' + N' r\cos t + rB'\sin t = (1 - r\kappa\cos t)\,T + r\tau\left((-\sin t)\,N + (\cos t)\,B\right), \\ x_t &= r\left(-N\sin t + B\cos t\right). \end{aligned}$$

Logo, concluímos que:

$$\begin{aligned} x_s \times x_t &= -(1 - r\kappa\cos t)(r\sin t)\,B - (1 - r\kappa\cos t)(r\cos t)\,N - \left(r^2\tau\sin t\cos t\right)T + \left(r^2\tau\cos t\sin t\right)T \\ &= -r\,(1 - r\kappa\cos t)\left((\sin t)\,B + (\cos t)\,N\right). \end{aligned}$$

Vamos assumir que $r < \frac{1}{\kappa}$, logo $1 - r\kappa\cos t > 0$ e x será, de fato uma imersão. Um $x-$referencial móvel de 1^a ordem (x, e) é definido como

$$\begin{aligned} e_3 &:= -(\sin t)\,B - (\cos t)\,N, \\ e_1 &:= T = \frac{x_s - \tau x_t}{1 - r\kappa\cos t}, \\ e_2 &:= e_3 \times e_1 = -(\sin t)\,B \times T - (\cos t)\,N \times T = -(\sin t)\,N + (\cos t)\,B = \frac{1}{r}x_t. \end{aligned}$$

Então, temos a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} x_s &= (1 - r\kappa\cos t)\left(\frac{x_s - \tau x_t}{1 - r\kappa\cos t}\right) + \tau x_t = (1 - r\kappa\cos t)\,e_1 + r\tau e_2, \\ x_t &= re_2. \end{aligned}$$

Logo as curvas coordenadas são ortogonais se e somente se

$$0 = \langle x_s, x_t\rangle = r^2\tau$$

se e somente se $\tau = 0$, se e somente se a curva é plana. Notemos que:

$$dx = x_s ds + x_t dt,$$

logo o co-referencial móvel ortonormal associado à essa imersão é dado por:

$$\begin{aligned}
\omega^1 &= \langle dx, e_1 \rangle = \langle x_s ds + x_t dt, e_1 \rangle = \langle ((1 - r\kappa \cos t)\, e_1 + r\tau e_2)\, ds + re_2 dt, e_1 \rangle \\
&= (1 - r\kappa \cos t)\, ds, \\
\omega^2 &= \langle dx, e_2 \rangle = \langle x_s ds + x_t dt, e_2 \rangle = \langle ((1 - r\kappa \cos t)\, e_1 + r\tau e_2)\, ds + re_2 dt, e_2 \rangle \\
&= r\tau ds + r dt,
\end{aligned}$$

portanto, a forma de área é dada por:

$$\omega^1 \wedge \omega^2 = (1 - r\kappa \cos t)\, ds \wedge (r\tau ds + r dt) = r\,(1 - r\kappa \cos t)\, ds \wedge dt,$$

e a orientação induzida em $M = J \times \mathbb{R}$ é a mesma de $ds \wedge dt$. Se f possui comprimento finito igual à L, então a área de $x(M)$ é dada por:

$$\int_{x(M)} \omega^1 \wedge \omega^2 = \int_{J\times[0,2\pi]} r\,(1 - r\kappa \cos t)\, ds \wedge dt \overset{\text{comp. arco}}{=}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^L r\,(1 - r\kappa \cos t)\, ds \wedge dt = 2\pi r L,$$

uma versão do **teorema de Pappus.** Mais ainda, usando que $e_1(s,t) = T(s)$, para todo $(s,t) \in J \times \mathbb{R}$, segue que:

$$\begin{aligned}
\omega_3^1 &= \langle de_1, e_3 \rangle = \langle T' ds, -(\sin t)\, B - (\cos t)\, N \rangle \\
&= -\langle \kappa N ds, (\sin t)\, B + (\cos t)\, N \rangle = -\kappa\,(\cos t)\, ds = \frac{-\kappa\,(\cos t)}{(1 - r\kappa \cos t)} \omega^1, \\
\omega_3^2 &= \langle de_2, e_3 \rangle = \langle (-N' \sin t + B' \cos t)\, ds + (-N(s) \cos t - B(s) \sin t)\, dt, -(\sin t)\, B - (\cos t)\, N \rangle \\
&= \langle (ds\kappa \sin t)\, T + (-dt \cos t - ds\tau \cos t)\, N + (-dt \sin t - ds\tau \sin t)\, B, -(\sin t)\, B - (\cos t)\, N \rangle \\
&= -(\sin t)\,(-(dt) \sin t - (ds)\,\tau \sin t) - (\cos t)\,(-(dt) \cos t - (ds)\,\tau \cos t) \\
&= dt + \tau ds = \frac{1}{r} \omega^2.
\end{aligned}$$

Ou seja, concluímos que as curvaturas principais da imersão são dadas por:

$$a = \frac{-\kappa\,(\cos t)}{(1 - r\kappa \cos t)} \qquad \text{e} \qquad c = \frac{1}{r}. \tag{3.5}$$

Vemos que essa imersão não possui pontos umbílicos. A curvatura principal c é constante ao longo de M, portanto x é uma imersão canal. Se f é uma curva simples, fechada e analítica, então o tubo é uma imersão compacta, analítica e canal. Segue diretamente das expressões de ω^1 e ω^2 que as linhas de curvatura de c são as curvas coordenadas $s = s_0$, onde $s_0 \in J$ é uma constante. Além disso, pelas expressões de ω_3^1 e de ω_3^2, as linhas de curvatura de a são as curvas integrais de

$$0 = \omega^2 = r\left(\tau ds + dt\right) = \tau ds + dt.$$

Em geral, o locus focal associado à curvatura principal c do tubo sobre a curva f é justamente $x + \frac{1}{c}e_3$, que é justamente a curva f.

3.6 Esferas de Curvatura ao longo de Imersões Canal

Seja $x : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão canal para a qual a curvatura principal a é constante ao longo de suas linhas de curvatura conexas. Nesta seção queremos provar que as esferas de curvatura relativas à a são constantes ao longo das linhas de curvatura de a, e essas linhas de curvatura são justamente a interseção da esfera de curvatura com $x\left(M\right)$. Mais ainda, x aplicado à essas linhas de curvatura são segmentos de reta ou arcos de circunferência. Em particular, elas são curvas planas. Esses casos são facilmente percebidos no caso do toro circular de revolução, do cilindro circular e do cone circular.

Lema 89. *Se uma aplicação suave $f : M^2 \longrightarrow N^n$ é tal que a dimensão da imagem de df_p é 1, para todo $p \in M$, então todo conjunto de nível conexo de f é uma curva mergulhada $\gamma : J \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ para a qual existe um vetor não nulo $v \in T_qN$, onde $q = f(\gamma\left(s\right))$, para todo $s \in J$, tal que*

$$df_{\gamma(s)}.T_{\gamma(s)}M = \langle v\rangle \subset T_qN.$$

Demonstração. Segue diretamente do teorema do "rank"que existem cartas (φ, U) em uma vizinhança de p e (ψ, V) em uma vizinhança de $f(p)$ tais que:

$$\Phi = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n, \qquad \Phi(x, y) = (x, 0, ..., 0).$$

Segue disso que se $(j, 0, ..., 0) = \psi(f(p))$, então $\Phi^{-1}\left(\{(j, 0, ..., 0)\}\right) = \{(j, k)$, onde k é tal que $(j, k) \in V\}$, ou seja, esse conjunto é um segmento de reta (vertical, digamos), como φ é difeomorfismo, então φ^{-1} leva curva suave em curva suave, logo $\varphi^{-1} \circ \Phi^{-1}\left(\{(j, 0, ..., 0)\}\right)$ é uma curva suave em M. ■

Proposição 90. *Seja $x : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão com campo normal unitário suave $n : M \longrightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ e com curvaturas principais distintas em cada ponto de M. Seja $\gamma : J \longrightarrow M$ uma linha de curvatura conexa para a curvatura principal a, onde $J \subset \mathbb{R}$ é conexo e contém o 0. Então a é constante ao longo de J se e somente se sua esfera de curvatura é constante ao longo de $x \circ \gamma\left(J\right)$. Se a curvatura principal a for constante ao longo de cada uma de suas linhas de curvatura conexas, então x leva essas linhas de curvatura em circunferências ou retas em $\mathbb{R}^3$.*

Demonstração. Seja $(e,x) : U \longrightarrow E(3)$ um $x-$referencial móvel de 2^a ordem em uma vizinhança U contendo $\gamma(J)$, tal que

$$e_1(\gamma(s)) = (x \circ \gamma)'(s),$$

para todo $s \in J$ e $e_3 = n$ em U. Temos que:

$$\begin{aligned} e_1(\gamma(s)) &= (x \circ \gamma)'(s) = dx.(\gamma'(s)) = \omega^1(\gamma'(s))\, e_1(\gamma(s)) + \omega^2(\gamma'(s))\, e_2(\gamma(s)) \quad (3.6)\\ &\Rightarrow \omega^1(\gamma'(s)) \equiv 1 \text{ e } \omega^2(\gamma'(s)) \equiv 0. \end{aligned}$$

e portanto:

$$\begin{aligned} (x \circ \gamma)''(s) = de_1.\gamma'(s) &= \omega_2^1(\gamma'(s))\, e_2(\gamma(s)) + \omega_3^1(\gamma'(s))\, e_3(\gamma(s))\\ &= \left(p\omega^1(\gamma'(s)) + q\omega^2(\gamma'(s))\right) e_2(\gamma(s)) + a\omega^1(\gamma'(s))\, e_3(\gamma(s))\\ &= pe_2(\gamma(s)) + ae_3(\gamma(s)). \end{aligned}$$

Suponhamos que a nunca se anula em U e consideremos o **mapa focal**

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad f = x + \frac{1}{a}n = x + \frac{1}{a}e_3,$$

cuja derivada é, pelas equações estruturais, dada por:

$$\begin{aligned} df &= dx - \frac{da}{a^2}e_3 + \frac{1}{a}de_3 = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 - \frac{a_1\omega^1 + a_2\omega^2}{a^2}e_3 + \frac{1}{a}\left(\omega_1^3 e_1 + \omega_2^3 e_2\right) \quad (3.7)\\ &= \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 - \frac{a_1\omega^1 + a_2\omega^2}{a^2}e_3 + \frac{-a\omega^1 e_1 - c\omega^2 e_2}{a}\\ &= -\frac{a_1}{a^2}e_3\omega^1 - \left(\frac{ce_2}{a} - e_2 + \frac{a_2}{a^2}e_3\right)\omega^2, \end{aligned}$$

onde $da = a_1\omega^1 + a_2\omega^2$ em U. Então $f(\gamma(s)) = x(\gamma(s)) + \frac{1}{a}e_3(\gamma(s))$ é o centro da esfera de curvatura de $x(\gamma(s))$. Pela expressão anterior e pelo fato de que $\omega^2(\gamma'(s)) \equiv 0$, segue que

$$\begin{aligned} (f \circ \gamma)' = df(\gamma') &= -\frac{a_1(\gamma)}{a^2(\gamma)}e_3(\gamma)\,\omega^1(\gamma') - \left(\frac{c(\gamma)\,e_2(\gamma)}{a(\gamma)} - e_2(\gamma) + \frac{a_2(\gamma)}{a^2(\gamma)}e_3(\gamma)\right)\omega^2(\gamma')\\ &= -\frac{a_1(\gamma)}{a^2(\gamma)}e_3(\gamma) = \left(\frac{1}{a \circ \gamma}\right)' e_3 \circ \gamma, \end{aligned}$$

pois, em todo J temos que:

$$(a \circ \gamma)' = da(\gamma') = a_1(\gamma)\,\omega^1(\gamma') + a_2(\gamma)\,\omega^2(\gamma') = a_1(\gamma).$$

Assim, os centros $f(\gamma(s))$, das esferas de curvatura ao longo de γ são constantes se e somente se seus raios $\frac{1}{a(\gamma(s))}$ são constantes (se e somente se a é constante ao longo de γ)

. Mas as esferas de curvatura ao longo de γ são constantes se e somente se os centros e os raios são constantes.

Em um ponto $m \in M$ onde $a(m) = 0$, a esfera de curvatura em $x(m)$ é o plano tangente

$$\left\{y \in \mathbb{R}^3 : \langle y, n(m)\rangle = \langle x(m), n(m)\rangle\right\}.$$

Se $a(\gamma(s)) = 0$, para todo $s \in J$, então

$$\begin{aligned}(e_3 \circ \gamma)'(s) &= de_3(\gamma'(s)) = \omega_1^3(\gamma'(s))\, e_1(\gamma(s)) + \omega_2^3(\gamma'(s))\, e_2(\gamma(s)) \\ &= -a(\gamma(s))\, \omega^1(\gamma'(s))\, e_1(\gamma(s)) - c(\gamma(s))\, \omega^2(\gamma'(s))\, e_2(\gamma(s)) \\ &= -a(\gamma(s))\, e_1(\gamma(s)) = 0,\end{aligned}$$

para todo $s \in J$, então $e_3 \circ \gamma$ é constante em J, logo os planos tangentes ao longo de $x \circ \gamma$ são todos paralelos. Como γ é conexa, segue que os planos devem ser os mesmos (aqui estamos usando a continuidade da aplicação $p \in M \longmapsto T_{x(p)}\mathbb{R}^3 \subset T\mathbb{R}^3$).

Agora provemos que se $\gamma : J \longrightarrow M$ é uma linha de curvatura conexa de a e se $a \circ \gamma$ é constante em J, então $x \circ \gamma(J) = x(M) \cap S$, onde S é necessariamente esfera (ou plano) de curvatura constante ao longo de $x \circ \gamma$. Se $a \circ \gamma$ é uma constante não nula, então a curva $x \circ \gamma$ mora dentro de uma esfera. De fato, vamos descrever a função que descreve a o centro da esfera osculadora de $x \circ \gamma(s)$ com relação a curvatura principal $a(\gamma(s))$ e vamos provar que essa função é constante. Seja:

$$P(s) = x \circ \gamma(s) + \frac{1}{a \circ \gamma(s)} e_3 \circ \gamma(s).$$

Segue que:

$$\begin{aligned}P'(s) &= dx.\gamma'(s) + \frac{1}{a \circ \gamma(s)} de_3.\gamma'(s) = e_1 \circ \gamma(s) + \frac{1}{a \circ \gamma(s)} \left(\omega_1^3(\gamma'(s))\, e_1 \circ \gamma(s) + \omega_2^3(\gamma'(s))\, e_2 \circ \gamma(s)\right) \\ &= e_1 \circ \gamma(s) + \frac{1}{a \circ \gamma(s)} \left(-\omega_3^1(\gamma'(s))\, e_1 \circ \gamma(s) - \omega_3^2(\gamma'(s))\, e_2 \circ \gamma(s)\right) \\ &= e_1 \circ \gamma(s) + \frac{1}{a \circ \gamma(s)} \left(-a \circ \gamma(s)\omega^1(\gamma'(s))\, e_1 \circ \gamma(s) - c \circ \gamma(s)\omega^2(\gamma'(s))\, e_2 \circ \gamma(s)\right) \\ &= e_1 \circ \gamma(s) + \frac{1}{a \circ \gamma(s)} \left(-a \circ \gamma(s) e_1 \circ \gamma(s)\right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Uma curva esférica é uma circunferência se e somente se é uma curva planar. Segue de

(3.7) que

$$
\begin{aligned}
df_{\gamma(s)}\left(T_{\gamma(s)}M\right) \subset span &\left\{\left(\left(1-\frac{c}{a}\right)e_2-\left(\frac{a_2}{a^2}+\frac{a_1}{a^2}\right)e_3\right)(\gamma(s))\right\}\\
= span &\left\{\left(\left(1-\frac{c}{a}\right)e_2-\frac{a_2}{a^2}e_3\right)(\gamma(s))\right\}\\
= span &\left\{\left(\left(1-\frac{c}{a}\right)e_2-\frac{(a-c)\,p}{a^2}e_3\right)(\gamma(s))\right\}\\
= span &\left\{\left(\left(1-\frac{c}{a}\right)e_2-\left(1-\frac{c}{a}\right)\frac{p}{a}e_3\right)(\gamma(s))\right\}\\
= span &\left\{\left(e_2-\frac{p}{a}e_3\right)(\gamma(s))\right\} = span\left\{(ae_2-pe_3)(\gamma(s))\right\},
\end{aligned}
$$

onde usamos que $0=(a\circ\gamma)'=a_1\circ\gamma$ em J e, pelas equações estruturais, $a_2=(a-c)\,p$. Temos que $(x\circ\gamma)'$ e $(x\circ\gamma)''$ são ambos ortogonais à $(ae_2-pe_3)(\gamma)$. De fato,

$$
\begin{aligned}
\left\langle (x\circ\gamma)',(ae_2-pe_3)(\gamma)\right\rangle &= \langle e_1\circ\gamma,(ae_2-pe_3)(\gamma)\rangle = 0,\\
\left\langle (x\circ\gamma)'',(ae_2-pe_3)(\gamma)\right\rangle &= \langle (pe_2+ae_3)(\gamma),(ae_2-pe_3)(\gamma)\rangle = pa-ap=0.
\end{aligned}
$$

Logo $x\circ\gamma$ é uma curva planar se e somente se os vetores $(ae_2-pe_3)(\gamma(s))$ forem todos paralelos, para todo $s\in J$. Sem outras suposições sobre a curvatura principal a, esses vetores não são paralelos, em geral. Assuma agora que a nunca se anula e que é constante ao longo de suas linhas de curvatura conexas. Então

$$
0=d(a\circ\gamma)=da(\gamma')=(a_1\circ\gamma)\,\omega^1(\gamma')+(a_2\circ\gamma)\,\omega^2(\gamma')=a_1\circ\gamma,
$$

como podemos preencher todo U com as linhas de curvaturas, segue que $a_1\equiv 0$ em U, segue disso que:

$$
df_p=-\left(\left(\left(\frac{c}{a}-1\right)e_2+\frac{a_2}{a^2}e_3\right)(p)\right)\omega^2=-\left(\left(\left(\frac{c}{a}-1\right)e_2+\frac{(a-c)\,p}{a^2}e_3\right)(p)\right)\omega^2
$$

é tal que a dimensão de sua imagem é 1 em M. Usando a notação acima para uma linha de curvatura conexa $\gamma: J\longrightarrow M$, para a curvatura principal a e para um $x-$referencial móvel de 2^a ordem $(e,x):U\longrightarrow E(3)$, onde $\gamma(J)\subset U$. Então segue de (3.6) que

$$
d(f\circ\gamma)=df\circ\gamma'=-\left(\left(\left(\frac{c}{a}-1\right)e_2+\frac{(a-c)\,p}{a^2}e_3\right)(p)\right)\omega^2(\gamma')=0,
$$

ou seja, $f(\gamma(J))=y_0\in\mathbb{R}^3$ é um único ponto. E, pelo lema anterior, existe um vetor unitário $v\in\mathbb{R}^3$ tal que:

$$
df_{\gamma(s)}\left(T_{\gamma(s)}M\right)=\mathbb{R}v,
$$

para todo $s\in J$. Então os vetores $(ae_2-pe_3)(\gamma(s))$ não todos multiplos não nulos de v, e portanto a curva $x\circ\gamma(J)$ está em um plano ortogonal à v. Sendo também uma curva na esfera de curvatura ao longo de $\gamma(J)$, essa curva é, obrigatoriamente, um arco de circunferência.

Temos ainda que considerar o caso em que a é constante em suas linhas de curvatura conexas e se anula em alguns pontos de M. Esse caso requer uma demonstração diferente. Vamos completar a demonstração sob uma suposição adicionada que a não se anula em um aberto M' denso em M. Toda linha de curvatura conexa de a em M' é, obrigatoriamente, levada por x em um arco de circunferência pelo argumento anterior. Note que $x \circ \gamma$ é parametrizada pelo comprimento de arco. De fato,

$$\left\| (x \circ \gamma)' \right\| = \| e_1 \circ \gamma \| = 1.$$

Portanto, $\kappa = \left\| (x \circ \gamma)'' \right\|$ e a seguinte relação é satisfeita:

$$\kappa^2 = \left\| (x \circ \gamma)'' \right\|^2 = \| p \left(e_2 \circ \gamma \right) + a \left(e_3 \circ \gamma \right) \|^2 = p^2 + a^2,$$

ou seja, $p^2 + a^2$ é constante em J, como a já era constante, concluímos que $p \circ \gamma$ é constante ao longo de J. Ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &= d \left(p \circ \gamma \right) = dp \left(\gamma' \right) = p_1 \left(\gamma \right) \omega^1 \left(\gamma' \right) + p_2 \left(\gamma \right) \omega^2 \left(\gamma' \right) \\ &= p_1 \left(\gamma \right). \end{aligned}$$

Como γ é uma linha de curvatura arbitrária em M', segue que $p_1 = 0$ em M', como M' é denso em M e p_1 é contínua, segue que $p_1 = 0$ em todo M. Logo $d \left(p \circ \gamma \right) = 0$ em todo M e isso implica que $p \circ \gamma$ é constante, para toda linha de curvatura conexa de a em M. Se $a = 0$ em todo $\gamma \left(J \right)$, então $x \circ \gamma$ está em um plano ortogonal ao campo constante $e_3 \circ \gamma$ e sua curvatura é dada por:

$$\left\| (x \circ \gamma)'' \right\| = \| p \left(\gamma \right) e_2 \left(\gamma \right) + a \left(\gamma \right) e_3 \left(\gamma \right) \| = \| p \left(\gamma \right) e_2 \left(\gamma \right) \| = \| p \left(\gamma \right) \|,$$

que é constante. Logo a curva é um arco de circunferência, se $p \neq 0$, ou um segmento de reta, se $p = 0$. ■

Como consequência disso, se a é uma curvatura principal constante ao longo de suas linhas de curvatura conexas e se $p^2 + a^2 \neq 0$, então concluímos que $\kappa^2 = p^2 + a^2 \neq 0$, ou seja, as linhas de curvatura conexas $\gamma : J \longrightarrow M$ são tais que $x \circ \gamma$ são arcos de circunferência que estão justamente na esfera de curvatura. Além disso, vimos que $(x \circ \gamma)'$ é unitário, logo $(x \circ \gamma)' \perp (x \circ \gamma)''$. Assim, o centro do arco $\left(x \circ \gamma \right) \left(s \right)$ é dado por:

$$\begin{aligned} C(s) &= \left(x \circ \gamma \right) \left(s \right) + \frac{1}{\kappa} \frac{(x \circ \gamma)'' \left(s \right)}{\left\| (x \circ \gamma)'' \left(s \right) \right\|} = \left(x \circ \gamma \right) \left(s \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{p^2 + a^2}} \frac{pe_2 + ae_3}{\sqrt{p^2 + a^2}} \right) \left(\gamma \left(s \right) \right) \\ &= \left(x \circ \gamma \right) \left(s \right) + \left(\frac{pe_2 + ae_3}{p^2 + a^2} \right) \left(\gamma \left(s \right) \right) \end{aligned}$$

onde o raio da esfera de curvatura (e portanto o raio do arco $x \circ \gamma$) é

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{\sqrt{p^2 + a^2}}.$$

3.7 Elástica

Definição 91. *Uma **curva elástica ivre** em uma superfície Riemanniana (M^2, I) é uma imersão suave que minimiza o seguinte funcional:*

$$\mathcal{F}(\gamma) := \int_\gamma \kappa^2 ds,$$

sobre todas as imersões $\gamma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow M$ em uma classe de homotopia livre. Aqui, κ é a curvatura de γ e s é o parâmetro de comprimento de arco de γ.

Notemos que, no espaço euclidiano, uma circunferência σ de raio $R > 0$ tem curvatura $\kappa = \pm 1/R$, e sua parametrização é dada por:

$$t \overset{\sigma}{\longmapsto} (R \cos t, R \sin t),$$

logo:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\sigma) &:= \int_\sigma \kappa^2 ds = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^2} \|\sigma'(t)\| \, dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^2} R dt = \frac{1}{R} \int_0^{2\pi} dt \\ &= \frac{2\pi}{R}.\end{aligned}$$

Vemos que não há uma circunferência σ que minimize $\mathcal{F}$. Surpreendentemente, essa conclusão não se repete no plano hiperbólico:

Exemplo 92 (Circunferências no disco de Poincaré)**.** *O disco unitário $\mathbb{D}^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ com a métrica Riemanniana*

$$I = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2},$$

*é o **disco de Poincaré**, um modelo do plano hiperbólico. Orientado por $dx \wedge dy > 0$. Para todo Ângulo $\theta \in \mathbb{R}$, a curva radial*

$$\gamma^\theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{D}^2, \qquad \gamma^\theta(s) = \left(\tanh \frac{s}{2}\right)(\cos\theta, \sin\theta),$$

é a geodésica que parte do ponto $\gamma^\theta(0) = 0$ com vetor velocidade dado por

$$\left(\gamma^\theta\right)'(0) = \left(\frac{\frac{1}{2}\cosh^2 \frac{s}{2} - \frac{1}{2}\sinh^2 \frac{s}{2}}{\cosh^2 \frac{s}{2}}\right)_{|s=0} (\cos\theta, \sin\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cosh^2 \frac{s}{2}}\right)_{|s=0} (\cos\theta, \sin\theta) = \frac{1}{2}(\cos\theta, \sin\theta).$$

De fato, temos que:

$$\nabla_{(\gamma^\theta)'}\left(\gamma^\theta\right)' = \begin{pmatrix} \left(\gamma_1^\theta\right)'' + \Gamma_{1,1}^1\left(\left(\gamma_1^\theta\right)'\right)^2 + 2\Gamma_{1,2}^1\left(\gamma_1^\theta\right)'\left(\gamma_2^\theta\right)' + \Gamma_{2,2}^1\left(\left(\gamma_2^\theta\right)'\right)^2 \\ \left(\gamma_2^\theta\right)'' + \Gamma_{1,1}^2\left(\left(\gamma_1^\theta\right)'\right)^2 + 2\Gamma_{1,2}^2\left(\gamma_1^\theta\right)'\left(\gamma_2^\theta\right)' + \Gamma_{2,2}^2\left(\left(\gamma_2^\theta\right)'\right)^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\left(\cos\theta\right)\frac{\tanh\frac{1}{2}s - \cosh\frac{1}{2}s\sinh\frac{1}{2}s\frac{1}{\cosh^2\frac{s}{2}}}{\left(\cosh^4\frac{1}{2}s\right)\left(\tanh\frac{1}{2}s-1\right)\left(\tanh\frac{1}{2}s+1\right)} \\ -\frac{1}{2}\left(\sin\theta\right)\frac{\tanh\frac{1}{2}s - \cosh\frac{1}{2}s\sinh\frac{1}{2}s\frac{1}{\cosh^2\frac{s}{2}}}{\left(\cosh^4\frac{1}{2}s\right)\left(\tanh\frac{1}{2}s-1\right)\left(\tanh\frac{1}{2}s+1\right)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se fixarmos $r > 0$, então a circunferência hiperbólica de raio hiperbólico r e centro 0 é dada por:

$$C = \left\{\gamma^\theta\left(r\right) : \theta \in \mathbb{R}\right\} \subset \mathbb{D}^2,$$

que é a circunferência euclidiana centrada em 0 e com raio $\tanh\frac{r}{2}$. A circunferência C é parametrizada pelo mergulho

$$\sigma : \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi \longrightarrow \mathbb{D}^2, \qquad \sigma\left(t\right) = \left(\left(\tanh\frac{r}{2}\right)\cos t, \left(\tanh\frac{r}{2}\right)\sin t\right),$$

cujo comprimento de arco é dado por:

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \left\|\left(\sigma\right)'\left(\tau\right)\right\| d\tau = \int_0^t \left\|\left(\tanh\frac{r}{2}\right)\left(-\sin\tau, \cos\tau\right)\right\| d\tau \\ &= \int_0^t \frac{2\sqrt{\left(\tanh\frac{r}{2}\right)^2\left(-\sin\tau\right)^2 + \left(\tanh\frac{r}{2}\right)^2\left(\cos\tau\right)^2}}{1 - \left(\tanh\frac{r}{2}\right)^2\cos^2\tau - \left(\tanh\frac{r}{2}\right)^2\sin^2\tau} d\tau \\ &= \int_0^t \frac{2\tanh\frac{r}{2}}{1-\tanh^2\frac{r}{2}} d\tau = \frac{2\tanh\frac{r}{2}}{1-\tanh^2\frac{r}{2}} t = \left(\sinh r\right)t, \end{aligned}$$

e cuja curvatura geodésica é dada por

$$\kappa = I\left(N, \nabla_{\sigma'}\sigma'\right) = \frac{\cosh r}{\sinh r} = \coth r.$$

A integral

$$\int_\sigma \kappa^2 ds = \int_0^{2\pi}\left(\frac{\cosh r}{\sinh r}\right)^2 \sinh r dt = \int_0^{2\pi}\frac{\cosh^2 r}{\sinh r}dt = 2\pi\frac{\cosh^2 r}{\sinh r} = 2\pi\frac{1+\sinh^2 r}{\sinh r},$$

que é minimizada quando r satisfaz $\sinh r = 1$.

Capítulo 4

Conjectura de Willmore

Em 1965, T.Willmore intriduziu o funcional não-negativo $\widetilde{\mathcal{W}}$ no conjunto de todas as imersões $x : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$, de uma dada superfície compacta orientada M,

$$\widetilde{\mathcal{W}}(x) = \int_M H^2 dA,$$

onde H é a curvatura média e dA é o elemento de área da imersão x. Este funcional é chamado de **energia de Willmore**. Ele questionou qual seria o ínfimo desse funcional para uma dada superfície M. Se a e c são as curvaturas principais de x, então

$$\begin{aligned} K + \frac{1}{4}(a-c)^2 = ac + \frac{1}{4}(a-c)^2 &= \frac{4ac + a^2 - 2ac + c^2}{4} = \frac{a^2 + 2ac + c^2}{4} \\ &= \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 = H^2. \end{aligned}$$

Como M não tem bordo, segue do teorema de Gauss-Bonnet que

$$\widetilde{\mathcal{W}}(x) = \int_M H^2 dA = \int_M K dA + \int_M \frac{1}{4}(a-c)^2 dA = 2\pi\mathcal{X}(M) + \frac{1}{4}\int_M (a-c)^2 dA, \quad (4.1)$$

onde $\mathcal{X}(M)$ é a característica de Euler de M. Uma superfície compacta orientada M é determinada à menos de homeomorfismo por um inteiro não negativo g, chamado de **gênero**, que é relacionado com a característica de Euler por

$$\mathcal{X}(M) = 2 - 2g.$$

Pela expressão acima, a característica de Euler é não-negativa se e somente se $g = 0$, quando M é homeomorfo à esfera, ou $g = 1$, quando M é homeomorfo ao toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Se $g = 0$, então $\mathcal{X}(M) = 2$, logo

$$\widetilde{\mathcal{W}}(x) = 4\pi + \frac{1}{4}\int_M (a-c)^2 dA \geq 4\pi, \quad (4.2)$$

onde a igualdade ocorre se e somente se x é totalmente umbílica. Nesse caso, segue do teorema (56) que $x\left(M\right)$ é um aberto contido em uma esfera. A independência do raio da esfera sugere que o funcional de Willmore é invariante por **homotetia**, isto é, por transformações de $\mathbb{R}^3$ dadas pela multiplicação de uma constante positiva.

No caso em que $g = 1$, Willmore calculou seu funcional em um toro circular de revolução e chegou no seguinte resultado:

Exemplo 93. *Para constantes $R > r > 0$, considere o toro circular de revolução $x : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,*

$$x(u,v) = \left(\left(R + r\cos\left(\frac{u}{r}\right)\right)\cos v, \left(R + r\cos\left(\frac{u}{r}\right)\right)\sin v, r\sin\left(\frac{u}{r}\right)\right),$$

obtido pela rotação da curva de perfil $u \overset{\varphi}{\longmapsto} \left(R + r\cos\left(\frac{u}{r}\right), 0, r\sin\left(\frac{u}{r}\right)\right)$ em torno do eixo z. Pelos cálculos realizados no exemplo (80), segue que as curvaturas principais de x são dadas por:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\varphi_1'\varphi_3'' - \varphi_1''\varphi_3'}{||\varphi'||^3} = \frac{\frac{1}{r}\sin^2\left(\frac{u}{r}\right) + \frac{1}{r}\cos^2\left(\frac{u}{r}\right)}{\left(\sqrt{\left(\sin^2\left(\frac{u}{r}\right) + \cos^2\left(\frac{u}{r}\right)\right)}\right)^3} = \frac{1}{r}, \\ c &= \frac{\left(r\sin\left(\frac{u}{r}\right)\right)'}{R + r\cos\left(\frac{u}{r}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{u}{r}\right)}{R + r\cos\left(\frac{u}{r}\right)}. \end{aligned}$$

E seu elemento de área é dado por

$$dA = \omega^1 \wedge \omega^2 = \sqrt{\left(\sin^2\left(\frac{u}{r}\right) + \cos^2\left(\frac{u}{r}\right)\right)} du \wedge \left(R + r\cos\left(\frac{u}{r}\right)\right) dv = \left(R + r\cos\left(\frac{u}{r}\right)\right) du \wedge dv,$$

e assim,

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{W}}\left(x\right) &= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi r}\int_0^{2\pi}\left(\left(\frac{1}{r}\right) - \left(\frac{\cos\left(\frac{u}{r}\right)}{R + r\cos\left(\frac{u}{r}\right)}\right)\right)^2 \left(R + r\cos\left(\frac{u}{r}\right)\right) du \wedge dv \\ &= \frac{1}{4}\frac{R^2}{r^2}\int_0^{2\pi r}\int_0^{2\pi}\frac{1}{R + r\cos\frac{1}{r}u} du \wedge dv \\ &= \frac{\pi^2\left(\frac{R}{r}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 1}}, \end{aligned}$$

cujo mínimo $2\pi^2$ ocorre se e somente se $\frac{R}{r} = \sqrt{2}$. Willmore então se perguntou se $2\pi^2$ é o mínimo absoluto de seu funcional sobre todas as imersões de um toro.

Essa questão é conhecida como a **1ª Conjectura de Willmore:** Se T^2 é uma superfície compacta de gênero 1, então para toda imersão $x : T^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\widetilde{\mathcal{W}}\left(x\right) \geq 2\pi,$$

cuja igualdade ocorre se e somente se $x : T^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é um toro circular de revolução com $\frac{R}{r} = \sqrt{2}$.

É claro, Willmore questionou também sobre qual seria o mínimo de $\widetilde{\mathcal{W}}$ em uma superfície de gênero $g \geq 2$, porém ele não conjecturou nenhum valor para esse mínimo. Em virtude de (4.1) é natural trocar $\widetilde{\mathcal{W}}$ com o funcional

$$\mathcal{W} = \int_M \left(H^2 - K\right) dA = \frac{1}{4} \int_M (a-c)^2 \, dA,$$

o qual é positivo para toda imersão x, exceto para imersões totalmente umbílicas da esfera. J.White provou que o integrando $(H^2 - K)\, dA$ é invariante pela transformação

$$\mathcal{F} : x \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\} \longrightarrow \frac{x}{|x|^2} \in \mathbb{R}^3,$$

que é a inversão na esfera unitária com centro na origem.

Vamos fazer uma pequena observação: Se $x : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é uma imersão e se $\widetilde{x} = rx$ é uma homotetia de x, onde $r > 0$ é uma constante real, segue que:

$$\widetilde{\omega^1} e_1 + \widetilde{\omega^2} e_2 + \widetilde{\omega^3} e_3 = d\widetilde{x} = r dx = r\omega^1 e_1 + r\omega^2 e_2,$$

logo, concluímos que

$$\widetilde{\omega^1} = r\omega^1 \quad , \quad \widetilde{\omega^2} = r\omega^2 \quad , \quad \widetilde{\omega^3} = 0,$$

ou seja, $(\widetilde{x}, (e_1, e_2, e_3))$ é um $\widetilde{x}-$referencial móvel de 1^a ordem. Segue disso que:

$$\begin{aligned} \widetilde{\omega_3^1} &= \langle de_1, e_3 \rangle = \omega_3^1 = a\omega^1 = \frac{a}{r}\widetilde{\omega^1}, \\ \widetilde{\omega_3^2} &= \langle de_2, e_3 \rangle = \omega_3^2 = c\omega^2 = \frac{c}{r}\widetilde{\omega^2}. \end{aligned}$$

Portanto, segue que:

$$\begin{aligned} \widetilde{K} &= \widetilde{a}\widetilde{c} = \frac{ac}{r^2} = \frac{K}{r^2}, \\ \widetilde{H} &= \frac{\widetilde{a} + \widetilde{c}}{2} = \frac{a+c}{2r} = \frac{H}{r}. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que:

$$\left(\widetilde{H}^2 - \widetilde{K}\right) d\widetilde{A} = \frac{H^2 - K}{r^2} \widetilde{\omega^1} \wedge \widetilde{\omega^2} = \frac{H^2 - K}{r^2} r\omega^1 \wedge r\omega^2 = \left(H^2 - K\right) \omega^1 \wedge \omega^2 = \left(H^2 - K\right) dA,$$

em particular $\widetilde{\mathcal{W}}(\widetilde{x}) = \widetilde{\mathcal{W}}(x)$.

Pelo **teorema de Liouville** e pela observação anterior, segue que $(H^2 - K)\, dA$ é invariante por qualquer difeomorfismo localmente conforme de $\mathbb{R}^3$. O estudo do funcional

$\mathcal{W}(x)$ pertence, naturalmente à **geometria de Möbius**. Em sua revisão de matemática, Willmore relatou que, em 1923, G.Thomsen provou que o integrando de $\mathcal{W}$ é invariante por transformações conformes. Na verdade, o conceito de **energia de Willmore** já aparece nos trabalhos de S. Germain, em 1821. Thomsen provou resultados muito importantes desse funcional, o qual o chamada de **área conforme**. Ele trabalhou no contexto da geometria de Möbius.

No cálculo das variações, o primeiro passo para encontrar o mínimo de $\mathcal{W}(x)$, onde $x : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de uma superfície compacta orientada M, é calcular os seus pontos críticos. Uma imersão $x : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é um **ponto crítico** de $\mathcal{W}$ se para qualquer família à 1 parâmetro $x_t : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$, para $|t| < \varepsilon$, para algum $\varepsilon > 0$,

$$\frac{d}{dt}\left(\mathcal{W}(x_t)\right) = 0.$$

Como $\widetilde{\mathcal{W}}(x) - \mathcal{W}(x)$ é uma constante que depende apenas de M, segue que os pontos críticos de $\widetilde{\mathcal{W}}$ são os mesmos de $\mathcal{W}$. Thomsen afirma que $x : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é um ponto crítico de $\mathcal{W}$ se e somente se a curvatura média H, a curvatura Gaussiana K e o **operador de Laplace-Beltrami** $\triangle$ de x satisfazem o seguinte:

$$\triangle H + 2H\left(H^2 - K\right) = 0, \tag{4.3}$$

em M. Esta é a chamada equação de **Euler-Lagrange** do funcional de Wilmore $\mathcal{W}$.

Definição 94. *Uma **imersão de Willmore** $x : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de uma superfície compacta orientada M é um ponto crítico de $\mathcal{W}$.*

Pelo resultado de Schadow, uma imersão $x : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de uma superfície compacta orientada M é Willmore se e somente se valer (4.3) para x. A condição (4.3) não requer que M seja compacta e orientada. A seguir, está a terminologia de Thompsen para esse caso mais geral:

Definição 95. *Uma **imersão conformalmente mínima** $x : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de uma superfície M (não necessariamente compacta ou orientada) é uma imersão que satisfaz (4.3) em M.*

Seguindo o uso atual, usaremos o termo "imersão de Willmore"em vez de "imersão conformemente minimal".

Uma imersão $x : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $H = 0$ em todo M é chamada de **imersão mínima.** Pode-se mostrar que $H = 0$ em M se e somente se x é um ponto crítico do funcional de área

$$A(x) = \int_M dA.$$

Note que uma imersão mínima claramente satisfaz (4.3), logo ela é uma imersão de Willmore. Partes dos resultados de Thomsen caracterizam quando uma imersão de Willmore é apenas a composição de uma imersão mínima com uma aplicação conforme.

O problema de Willmore evoluiu para dois problemas separados:

1. **Provar a conjectura de Willmore;**

2. **Encontrar todas as imersões de Willmore.**

F. Marques e A. Neves confirmaram recentemente a conjectura usando métodos que moram fora do escopo dessa monografia. Hertrich-Jeromin e Pinkall provaram a conjectura para toda imersão canal do toro. Sua demonstração usa a classificação até transformações conformes de imersões canal isotérmicas. Estes são cilindros, cones, e imersões de revolução para as quais a curva de perfil é fechada. A chave para entender o funcional de Willmore em imersões de revolução é ver a curva de perfil como uma curva no modelo do semiplano superior da geometria hiperbólica.

Seja $\mathbb{H}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ com a métrica

$$I = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2},$$

o modelo do semiplano superior da geometria hiperbólica. Usemos a orientação $dx \wedge dy > 0$. Seja $\gamma : J \longrightarrow \mathbb{H}^2$ $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco hiperbólico, ou seja:

$$1 = |\gamma'|^2 = \frac{(x')^2 + (y')^2}{y^2}.$$

Notemos que $N(s) = (-y'(s), x'(s))$ é um campo normal à γ. De fato,

$$\langle \gamma', N \rangle = \frac{-x'y' + y'x'}{y^2} = 0,$$

em todo ponto de J. Além disso, usando a expressão da conexão hiperbólica, que é dada por:

$$\nabla_X Y = \left(-\frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{y} + X(y_1) \right) \epsilon_1 + \left(\frac{x_1 y_1 - x_2 y_2}{y} + X(y_2) \right) \epsilon_2,$$

onde $X = \sum_{i=1}^{2} x_i \epsilon_i$ e $Y = \sum_{i=1}^{2} y_i \epsilon_i$, segue que a aceleração de γ é dada por

$$\begin{aligned} \nabla_{\gamma'} \gamma' &= \left(-\frac{x'y' + x'y'}{y} + \gamma'(x') \right) \epsilon_1 + \left(\frac{x'x' - y'y'}{y} + \gamma'(y') \right) \epsilon_2 \\ &= \left(x'' - \frac{x'y' + x'y'}{y} \right) \epsilon_1 + \left(y'' + \frac{(x')^2 - (y')^2}{y} \right) \epsilon_2, \end{aligned}$$

e sua curvatura geodésica é dada por:

$$
\begin{aligned}
\kappa = I\left(N, \nabla_{\gamma'}\gamma'\right) &= \frac{-y'\left(x'' - \frac{x'y' + x'y'}{y}\right) + x'\left(y'' + \frac{(x')^2 - (y')^2}{y}\right)}{y^2} \\
&= \frac{(x')^3 + x'(y')^2 + yx'y'' - yx''y'}{y^3} = \frac{x'\left((x')^2 + (y')^2\right)}{y^2 y} + \frac{y\left(x'y'' - x''y'\right)}{y^3} \\
&= \frac{x'}{y} + \frac{x'y'' - x''y'}{y^2}.
\end{aligned}
$$

Exemplo 96 (Toro de revolução)**.** *Lembremos das superfícies de revolução discutidas no exemplo (80). Agora, em vez de pensar na curva de perfil como uma curva no plano euclidiano x^1x^3, podemos pensar nela morando no semiplano superior $x^1 > 0$ com a métrica hiperbólica*

$$I = \frac{dx^3dx^3 + dx^1dx^1}{x^1x^1}$$

e com orientação $dx^3 \wedge dx^1 > 0$. Portanto curva de perfil $\gamma(s) = (f(s), 0, g(s))$ mora em $\mathbb{H}^2$. Ela é parametrizada pelo comprimento de arco se a seguinte igualdade é satisfeita:

$$1 = |\gamma'|^2 = \frac{(f')^2 + (g')^2}{f^2}.$$

Em $\mathbb{H}^2$ o campo tangente à γ é dado por $T = f'\epsilon_1 + g'\epsilon_3$, o normal principal é dado por $N = -g'\epsilon_1 + f'\epsilon_3$ e a curvatura geodésica hiperbólica é dada por:

$$\kappa = \frac{g'}{f} + \frac{g'f'' - g''f'}{f^2}.$$

Assuma agora que essa curva é periódica de período $L > 0$, logo a imersão de revolução é dada por:

$$x : \mathbb{R}/L \times \mathbb{R}/2\pi \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad x(s,t) = \left(f(s)\cos t, f(s)\sin t, g(s)\right).$$

Os campos tangentes unitários em $\mathbb{R}^3$ são dados por:

$$
\begin{aligned}
e_1 &:= \frac{x_s}{f} = \left(\frac{f'}{f}\cos t, \frac{f'}{f}\sin t, \frac{g'}{f}\right); \\
e_2 &:= \frac{x_t}{f} = \left(-\sin t, \cos t, 0\right).
\end{aligned}
$$

De fato,

$$
\begin{aligned}
||e_1||^2_{\mathbb{R}} &= \frac{(f')^2 + (g')^2}{f^2} = 1; \\
||e_2||^2_{\mathbb{R}} &= \sin^2 t + \cos^2 t = 1.
\end{aligned}
$$

E o campo normal unitário euclidiano é dado por:

$$e_3 := e_1 \times e_2 = \left(-\frac{g'}{f}\cos t, -\frac{g'}{f}\sin t, \frac{f'}{f}\right),$$

logo temos um $x-$referencial móvel de 1ª ordem tal que

$$\begin{aligned}
\omega^1 &= \langle dx, \epsilon_1\rangle = \langle x_s ds + x_t dt, e_1\rangle = \langle (f'\cos t, f'\sin t, g')\, ds + (-f\sin t, f\cos t, 0)\, dt, e_1\rangle \\
&= \left\langle (f'\cos t ds - f\sin t dt, f'\sin t ds + f\cos t dt, g'ds), \left(\frac{f'}{f}\cos t, \frac{f'}{f}\sin t, \frac{g'}{f}\right)\right\rangle \\
&= (f'\cos t ds - f\sin t dt)\left(\frac{f'}{f}\cos t\right) + (f'\sin t ds + f\cos t dt)\left(\frac{f'}{f}\sin t\right) + (g'ds)\,\frac{g'}{f} \\
&= f ds; \\
\omega^2 &= \langle dx, e_2\rangle = \langle (f'\cos t, f'\sin t, g')\, ds + (-f\sin t, f\cos t, 0)\, dt, e_2\rangle \\
&= \langle (f'\cos t ds - f\sin t dt, f'\sin t ds + f\cos t dt, g'ds), (-\sin t, \cos t, 0)\rangle \\
&= f dt.
\end{aligned}$$

Além disso, temos que

$$de_3 = \left(-\frac{g''f - f'g'}{f^2}\cos t, -\frac{g''f - f'g'}{f^2}\sin t, \frac{f''f - f'f'}{f^2}\right) ds + \left(\frac{g'}{f}\sin t, -\frac{g'}{f}\cos t, 0\right) dt.$$

Logo, segue que

$$\begin{aligned}
\omega_1^3 &= \langle de_3, e_1\rangle = \frac{f''g' - g''f'}{f^3} f ds = \frac{f''g' - g''f'}{f^3}\omega^1 = \frac{1}{f}\frac{g'f'' - g''f' + g'f - g'f}{f^2}\omega^1 = \frac{1}{f}\left(\kappa - \frac{g'}{f}\right)\omega^1; \\
\omega_2^3 &= \langle de_3, e_2\rangle = -\frac{g'}{f}dt = -\frac{g'}{f^2} f dt = -\frac{g'}{f^2}\omega^2.
\end{aligned}$$

Vemos que esse $x-$referencial móvel é de 2ª ordem com curvaturas principais iguais a:

$$a = \frac{1}{f}\left(\kappa - \frac{g'}{f}\right) \qquad e \qquad c = -\frac{g'}{f^2}$$

Assim, o funcional de Willmore aplicado em x é dado por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}(x) &= \frac{1}{4}\int_M (a-c)^2\, dA = \frac{1}{4}\int_M (a-c)^2\,\omega^1\wedge\omega^2 = \frac{1}{4}\int_0^L\int_0^{2\pi}(a-c)^2 f ds \wedge f dt \\
&= \frac{1}{4}\int_0^L\int_0^{2\pi} f^2\left(\frac{1}{f}\left(\kappa - \frac{g'}{f}\right) - -\frac{g'}{f^2}\right)^2 ds\wedge dt = \frac{1}{4}\int_0^L\int_0^{2\pi}\kappa^2 ds\wedge dt \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^L \kappa^2 ds.
\end{aligned}$$

Pela definição (91), uma curva elástica livre no plano hiperbólico é uma curva fechada que minimiza $\int_0^L \kappa^2 ds$, onde κ é a sua curvatura hiperbólica. Langer e Singer provaram *que, para imersões periódicas, essa integral é $\geq 4\pi$, com a igualdade precisamente para circunferências hiperbólicas de raio hiperbólico igual à*

$$s_0 = \sinh^{-1} 1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

Exemplo 97 (Tubos)**.** *Relembremos a discussão realizada na seção (3.5). Usando as mesmas notações daquela seção, suponhamos que a curva f seja fechada e parametrizada pelo comprimento de arco. Logo f é periódica de período L, onde L é seu comprimento. Então a superfície $M = \mathbb{R}/L \times \mathbb{R}/2\pi$ é difeomorfa à um toro. As curvaturas principais de x são dadas em (3.5) por*

$$a = \frac{-\kappa(\cos t)}{(1 - r\kappa \cos t)} \qquad e \qquad c = \frac{1}{r}.$$

Portanto, segue que:

$$\begin{aligned}\mathcal{W}(x) &= \frac{1}{4}\int_M (a-c)^2\, dA = \frac{1}{4}\int_M (a-c)^2\, \omega^1 \wedge \omega^2 = \frac{1}{4}\int_0^L \int_0^{2\pi} (a-c)^2\, r(1 - r\kappa\cos t)\, ds \wedge dt \\ &= \frac{1}{4}\int_0^L \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\kappa(\cos t)}{(1-r\kappa\cos t)} - \frac{1}{r}\right)^2 r(1-r\kappa\cos t)\, ds\wedge dt = \frac{1}{4r}\int_0^L\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-r\kappa\cos t} ds\wedge dt \\ &= \frac{\pi}{2r}\int_0^L \frac{ds}{\sqrt{1-(r\kappa)^2}}.\end{aligned}$$

Em 1970, Shiohama e Takagi provaram que para um dado $r > 0$, essa integral é minimizada sobre todas as curvas periódicas f de comprimento L pela circunferência de raio $R = \frac{L}{2\pi}$, para o qual $\mathcal{W}(x)$ se torna

$$\mathcal{W}(x) = \frac{\pi}{2r}\int_0^L \frac{ds}{\sqrt{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2}} = \frac{\pi L}{2r\sqrt{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2}} = \frac{\pi^2 L}{2r\pi\sqrt{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2}} = \frac{\pi^2 \frac{R}{r}}{\sqrt{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2}}.$$

Willmore mostrou que o melhor valor que essa função pode atingir é $2\pi^2$ e isso ocorre quando $\frac{R}{r} = \sqrt{2}$.

A procura de imersões de Willmore é um campo de pesquisa muito ativo atualmente. O objetivo é encontrar imersões de Willmore $x : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de superfícies compactas M. Como uma transformação conforme composta com uma imersão de Willmore ainda é de Willmore, gostaríamos de saber se duas imersões de Willmore são conformemente distintas.

Referências Bibliográficas

[1] G.R.Jensen, E. Musso, L.Nicolodi : Surfaces in Classical Geometries - A Treatment by Moving Frames, Universitext, Springer, 2016.

[2] A.Baker: Matrix Groups - An Introduction to Lie Group Theory, Undergraduate Mathmatics Series, Springer, 2006.

[3] F.W. Warner: Foundations of Differential Manifolds and Lie Groups, Graduate Texts in Mathmatics, Springer, 1983.