UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS

LAÍS ISABELE PROENÇA

A MOBILIZAÇÃO DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA NA PRÁTICA PEDAGÓGICA DO PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS RACIONAIS

SOROCABA – SP
AGOSTO DE 2021

LAÍS ISABELE PROENÇA

A mobilização dos registros de representação semiótica na prática pedagógica do processo de ensino-aprendizagem dos números racionais

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas (PPGECE), da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática sob orientação do Professor Doutor Paulo César de Oliveira.

Universidade Federal de São Carlos

Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas

Orientador: Professor Doutor Paulo César de Oliveira

Sorocaba – SP

Agosto de 2021

Proença, Laís Isabele

A mobilização dos registros de representação semiótica
na prática pedagógica do processo de ensino-
aprendizagem dos números racionais / Laís Isabele
Proença -- 2021.
204f.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São
Carlos, campus Sorocaba, Sorocaba
Orientador (a): Paulo César Oliveira
Banca Examinadora: Giovana Pereira Sander, Rogério
Fernando Pires
Bibliografia

1. Registros de Representação Semiótica. 2. Números
Racionais. 3. Ensino Fundamental. I. Proença, Laís
Isabele. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática
(SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Maria Aparecida de Lourdes Mariano -
CRB/8 6979

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Laís Isabele Proença, realizada em 20/08/2021.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Paulo Cesar Oliveira (UFSCar)

Profa. Dra. Giovana Pereira Sander (UEMG)

Prof. Dr. Rogerio Fernando Pires (UFU)

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.
O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas.

A Deus e a minha família, que são minha base e minha fortaleza.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, acima de tudo, a Deus. Àquele que sempre me protegeu e me orientou em todas as circunstâncias de minha vida, na qual tenho grande felicidade em poder dedicar minha vida a anunciar a Sua Palavra e o Seu amor as pessoas no serviço a Igreja.

Ao professor Dr. Paulo Oliveira por toda dedicação e principalmente paciência no desenvolvimento deste trabalho, por estar sempre presente, preocupado e disposto a me ajudar e orientar, além de todo conhecimento transmitido por ele, pois foi através dele que tive esse despertar sobre o tema discorrido nesta dissertação.

A professora Dr. Magda Peixoto, que me apoiou e me incentivou na busca de meu sonho.

A todos os professores doutores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas (PPGECE) da Universidade Federal de São Carlos (UFSCAR), campus Sorocaba-SP, por toda oportunidade de conhecimento adquirido por suas belíssimas aulas ministradas.

Aos gestores e alunos da escola estadual Dona Elisa de Campos Lima Novelli, pela oportunidade de desenvolver esta pesquisa.

A todas as escolas que ministrei aulas ao decorrer do mestrado, por me apoiar e ajudar no que precisei para seguir meus estudos.

Aos colegas e amigos da turma de 2019, pelo compartilhamento de ideias, conhecimento e amizade.

E àqueles que são a minha base: minha família. A minha mãe Magali e meu pai João, que sempre estiveram ao meu lado, me apoiando e me incentivando, priorizando sempre os meus estudos. Além da minha irmã Rita, meu cunhado Dirceu e meu sobrinho Rian, por me receberem em sua casa em Votorantim-SP, em todas as quintas-feiras na qual eu vinha de viagem em torno de uns 300 km, para poder estudar nas sextas-feiras. Sem vocês nada disso seria possível.

“Em todas as ocasiões dai graças a Deus. Esta é a vontade de Deus a respeito de vós em Cristo Jesus. ” (1 Tessalonicenses 5,18)

RESUMO

A presente pesquisa teve por objetivo analisar como a prática docente interfere no processo de aquisição e articulação dos diferentes registros semióticos dos números racionais, na qual apresenta-se a questão norteadora *Como a prática pedagógica no processo de letramento matemático, no ensino dos números racionais, contribui na mobilização dos registros de representação semiótica?*. Além disso, apresento a justificativa pela escolha do tema, na qual trabalhando há mais de sete anos somente em escolas públicas da região da minha cidade de Itaporanga-SP, me questiono o porquê muitos alunos não fazem conexões de diferentes representações de um mesmo objeto matemático, principalmente relacionado aos números racionais. Expõe-se também a fundamentação teórica da pesquisa, assim como a metodologia para o seu desenvolvimento, na qual para o desenvolvimento das sequências didáticas buscasse utilizar como aporte teórico a Teoria dos Registros de Semiótica, de Duval. A pesquisa é de natureza qualitativa, na qual realizou-se a aplicação de uma sequência didática com a participação de 14 alunos do 6° ano, em que as aulas aconteceram de maneira síncrona para os que possuíam acesso a internet e assíncrona através de grupo de WhatsApp da sala com os vídeos das aulas. Compreendendo que o ensino dos números racionais é um desafio para o professor de matemática, ao ter como base as premissas que a Teoria dos Registros de Representação Semiótica nos traz, passamos a ter um olhar mais crítico, reflexivo e articulado sobre como devemos ter nossa metodologia em sala de aula e analisar criticamente os materiais didáticos que estão disponíveis para serem utilizamos, pois estes são as bases para nosso trabalho. No entanto, com a presente pesquisa, conclui-se que não é apenas os materiais que devem estar de acordo com o objetivo de mobilizarmos os diferentes registros de representação semiótica dos números racionais, é necessário que tanto os materiais quanto a nossa prática pedagógica sejam favoráveis a fim de atingirmos as habilidades a serem desenvolvidas por nossos alunos.

Palavras-chave: Letramento matemático. Ensino Fundamental. Números racionais. Semiótica.

ABSTRACT

This research aimed to analyze how teaching practice interferes in the process of acquisition and articulation of different semiotic registers of rational numbers, in which the guiding question is presented How the pedagogical practice in the process of mathematical literacy, in the teaching of rational numbers, does it contribute to the mobilization of semiotic representation records?. In addition, I present the justification for the choice of the topic, in which I have been working for more than seven years only in public schools in the region of my city of Itaporanga-SP, I wonder why many students do not make connections of different representations of the same mathematical object. , mainly related to rational numbers. It also exposes the theoretical foundation of the research, as well as the methodology for its development, in which, for the development of the didactic sequences, it sought to use as theoretical support Duval's Theory of Semiotics Records. The research is qualitative in nature, in which a didactic sequence was applied with the participation of 14 6th grade students, in which the classes took place synchronously for those who had access to the internet and asynchronously through a group of WhatsApp in the room with videos of classes. Understanding that the teaching of rational numbers is a challenge for the mathematics teacher, based on the premises that the Theory of Records of Semiotic Representation brings us, we started to have a more critical, reflective and articulated look at how we should have our methodology in the classroom and critically analyze the teaching materials that are available for us to use, as these are the bases for our work. However, with this research, it is concluded that it is not only the materials that must be in accordance with the objective of mobilizing the different registers of semiotic representation of rational numbers, it is necessary that both the materials and our pedagogical practice are favorable in order to achieve the skills to be developed by our students.

Keywords: Mathematical literacy. Elementary School. Rational numbers. Semiotics.

LISTA DE ABREVIATURAS

ADE – Avaliação Diagnóstica de Entrada

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

COPED – Coordenadoria Pedagógica

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais

PCNPs – Professores Coordenadores do Núcleo Pedagógico

PISA – Programa Internacional de Avaliação dos Estudantes

PNLD – Programa Nacional do Livro e do Material Didático

SARESP – Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo

SEDUC – Secretaria da Educação do Estado de São Paulo

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE IMAGENS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Trabalhando há mais de sete anos somente em escolas públicas da região da minha cidade de Itaporanga-SP, me questiono o porquê muitos alunos não fazem conexões de diferentes representações de um mesmo objeto matemático, principalmente relacionado aos números racionais.

Com isso, tenho como propósito, trabalhar o letramento matemático e o conceito de números, em particular dos números racionais, com o 6° ano do Ensino Fundamental II, da escola estadual Dona Elisa de Campos Lima Novelli, da cidade de Itaporanga-SP. Tendo como suporte a BNCC (Base Nacional Comum Curricular) e como análise para esse conteúdo os pressupostos teóricos dos Registros de Representação Semiótica.

O desenvolvimento deste trabalho teve margem a algumas dúvidas em relação de: quais são as dificuldades apresentadas pelos alunos na atribuição de significados aos números racionais, em situações do cotidiano em que esses números estão envolvidos, pensando no que se entende em atribuir tais significados, além disso, verificar a forma como os alunos representam números racionais e o porquê que alguns não relacionam as diferentes formas.

Considerando que o ensino e a aprendizagem dos números racionais constituem uma preocupação no processo de ensino-aprendizagem, percebemos que há modelos teóricos que têm sido propostos para a aprendizagem e compreensão de números racionais, além disso várias pesquisas, como nos mostra o mapeamento apresentado logo a seguir, evidenciaram dificuldades conceituais de alunos e professores no que diz respeito ao campo de números racionais e apontam falhas na formação de professores que ensinam matemática.

Dessa forma, mapeamos os trabalhos acerca dos números racionais tendo como aporte teórico a semiótica. A busca e consulta aos trabalhos foram realizadas nos repositórios digitais do banco de teses e dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoas de Nível Superior (CAPES) e da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD).

Em ambos os endereços digitais citados, fizemos as buscas utilizando dois termos: o termo “Números racionais” e o termo “Semiótica”, usando assim o conectivo “Números racionais AND Semiótica”.

No quadro 1, temos os resultados da pesquisa na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), na qual foram encontrados um total de 12 trabalhos, porem apenas 10 deles foram selecionados com o foco da pesquisa sobre números racionais e semiótica, sendo 8 dissertações e 2 teses.

Quadro 1 - Trabalho encontrado no BDTD com descritor “Números racionais AND Semiótica”

Tipo	Autor	Título	Ano da defesa	Universidade
Dissertação	ANDRADE, Keyla Ribeiro de.	REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS DE NÚMEROS RACIONAIS SOB O OLHAR DE UM GRUPO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA DOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL	2016	Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS
Dissertação	AZEVEDO, Adalberto Tomaz de.	CONEXÃO ENTRE MATEMÁTICA E MÚSICA: UM PERCURSO PARA O ESTUDO DOS NÚMEROS RACIONAIS	2019	Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
Dissertação	MELO, Wellington José de Arruda.	CONVERSÕES ENTRE REPRESENTAÇÕES DE NÚMEROS RACIONAIS: limites e possibilidades no uso de material manipulável	2019	Universidade Federal de Pernambuco - UFPE
Tese	OLIVEIRA, Antonio Sérgio dos Santos.	UMA ENGENHARIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DAS OPERAÇÕES COM NÚMEROS RACIONAIS POR MEIO DE CALCULADORA PARA O QUINTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL	2015	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC
Dissertação	PENTEADO, Cristina Berndt.	CONCEPÇÕES DO PROFESSOR DO ENSINO MÉDIO RELATIVAS À DENSIDADE DO CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS E SUAS REAÇÕES FRENTE A PROCEDIMENTOS PARA A ABORDAGEM DESTA PROPRIEDADE	2004	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC
Dissertação	SANTOS, John Kennedy Jerônimo.	A COMPREENSÃO DO PROFESSOR SOBRE OS ERROS DOS ALUNOS, EM ITENS ENVOLVENDO EXPECTATIVAS DE	2015	Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

		APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS RACIONAIS, NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL		
Dissertação	SANTOS, Rosivaldo Severino dos.	ANALISANDO AS ESTRATÉGIAS UTILIZADAS PELOS ALUNOS DA REDE MUNICIPAL DO RECIFE NA RESOLUÇÃO DE QUESTÕES DO SAEPE SOBRE NÚMEROS RACIONAIS	2011	Universidade Federal de Pernambuco - UFPE
Dissertação	SILVA, Marcelo Cordeiro da.	RETA GRADUADA: um registro de representação dos números racionais	2008	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC
Dissertação	SILVA, Fernanda Andréa Fernandes.	SIGNIFICADOS E REPRESENTAÇÕES DOS NÚMEROS NACIONAIS ABORDADOS NO EXAME NACIONAL DO ENSINO	2013	Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE
Tese	SILVA, Fernanda Andréa Fernandes.	GRAUS DE NÃO CONGRUÊNCIA SEMÂNTICA NAS CONVERSÕES ENTRE OS REGISTROS GEOMÉTRICO BIDIMENSIONAL E SIMBÓLICO FRACIONÁRIO DOS NÚMEROS RACIONAIS	2018	Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE

Fonte: BDTD

No quadro 2, temos a pesquisa na Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), em que obtemos 32 resultados de trabalhos, sendo 27 dissertações e 5 teses. No entanto, apenas 13 destes trabalhos, tem como base os números racionais juntamente com a semiótica, sendo 12 dissertações e uma tese.

Quadro 2 - Trabalho encontrado na CAPES com descritor “Números racionais AND Semiótica”

Tipo	Autor	Título	Ano da defesa	Universidade
Dissertação	ANDRADE, Keyla Ribeiro de.	REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS DE NÚMEROS RACIONAIS SOB O	2016	Universidade Federal de Mato

		OLHAR DE UM GRUPO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA DOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL		Grosso do Sul - UFMS
Dissertação	AZEVEDO, Adalberto Tomaz de.	CONEXÃO ENTRE MATEMÁTICA E MÚSICA: UM PERCURSO PARA O ESTUDO DOS NÚMEROS RACIONAIS	2019	Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
Dissertação	DALVI, Silvana Cocco.	MODELAGEM MATEMÁTICA NA PERSPECTIVA SOCIOCRÍTICA E OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA NA FORMAÇÃO DO CONCEITO DE NÚMERO RACIONAL	2018	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo
Dissertação	FRIEDERICH, Danieli Maria Junges.	A FORMAÇÃO DE PROFESSORAS DOS ANOS INICIAIS: um estudo sobre a concepção do conceito do número racional e suas representações	2010	Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande Do Sul - UNIJUÍ
Dissertação	GIL, Jacqueline da Silva.	UMA ABORDAGEM LÚDICA PARA AS DIFERENTES REPRESENTAÇÕES DO NÚMERO RACIONAL POSITIVO	2012	Universidade Severino Sombra - USS
Tese	OLIVEIRA, Antonio Sérgio dos Santos.	UMA ENGENHARIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DAS OPERAÇÕES COM NÚMEROS RACIONAIS POR MEIO DE CALCULADORA PARA O QUINTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL	2015	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC
Dissertação	SANTOS, John Kennedy Jerônimo.	A COMPREENSÃO DO PROFESSOR SOBRE OS ERROS DOS ALUNOS, EM ITENS ENVOLVENDO EXPECTATIVAS DE APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS RACIONAIS, NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL	2015	Universidade Federal de Pernambuco - UFPE
Dissertação	SANTOS, Rosivaldo Severino dos.	ANALISANDO AS ESTRATÉGIAS UTILIZADAS PELOS ALUNOS DA REDE MUNICIPAL DO RECIFE NA RESOLUÇÃO DE QUESTÕES DO SAEPE SOBRE NÚMEROS RACIONAIS	2011	Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

Dissertação	SCHULZ, Manuela de Aviz.	NÚMEROS RACIONAIS E SUAS REPRESENTAÇÕES COM BASE NO ENSINO HÍBRIDO	2017	Universidade Regional de Blumenau - FURB
Dissertação	SEVERO, Daniela Fouchard.	NÚMEROS RACIONAIS E ENSINO MÉDIO: uma busca de significados	2009	Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul - PUCRS
Dissertação	SILVA, Marcelo Cordeiro da.	RETA GRADUADA: um registro de representação dos números racionais	2008	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC
Dissertação	SOARES, Maria Arlita da Silveira.	OS NÚMEROS RACIONAIS E OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA: análise de planejamento das séries finais do Ensino Fundamental	2007	Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul - UNIJUÍ
Dissertação	VIEL, Maria Jesus Martinez.	A IMPORTÂNCIA DA REPRESENTAÇÃO SIMBÓLICA NO ENSINO APRENDIZAGEM DA NOÇÃO INTUITIVA DE NÚMEROS RACIONAIS	2008	Universidade Cruzeiro do Sul - UNICSUL

Fonte: CAPES

Em análise das referências das dissertações, encontramos mais um trabalho relacionado ao tema dos números racionais e a semiótica, apresentado na tabela abaixo:

Quadro 3 – Trabalho encontrado com base nas referências das dissertações

Dissertação	CATTO, Glória Garrido.	REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO E O NÚMERO RACIONAL: uma abordagem em livros didáticos.	2000	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - USP

Fonte: Referências dos trabalhos encontrados.

Com base nos dados do levantamento, verificamos que foram realizados 18 trabalhos, entre teses e dissertações, que enfatizam o tema dos Números Racionais com a Teoria de Representação dos Registros da Semiótica.

Analisando as dissertações de forma cronológica, apresentamos quanto ao objetivo dessas pesquisas:

Quadro 4 – Objetivos das teses e dissertações

Catto (2000)	Analisar livros didáticos do ensino fundamental, a luz da teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval.
Penteado (2004)	Investigar a concepção e a reação dos professores do Ensino Médio frente aos diferentes registros de representações dos números, quando analisada a propriedade da densidade, tanto a densidade do conjunto dos números racionais no conjunto dos números reais quanto a dos irracionais nos reais.
Soares (2007)	Analisar os planejamentos de 4ª a 8ª série, elaborados por uma professora, em relação ao número racional sob a ótica da teoria dos registros de representação semiótica, desenvolvida por Raymond Duval, considerando a coordenação de registros para a aprendizagem matemática.
Viel (2008)	Estudar o conceito de número racional, centrando-se um olhar sobre os diferentes registros de representação semiótica.
Silva (2008)	Analisar a introdução do conceito de número racional por meio de uma abordagem semiótica de ensino, considerando a reta graduada como um registro de representação semiótica dos números racionais, indicando ganhos para a aprendizado comparativamente ao uso de figuras geométricas de dimensão 2, como as barras de chocolate, num papel figurativo.
Severo (2009)	Analisar registros de representação de números racionais, apresentados por alunos de Ensino Médio, e verificar se esses alunos relacionam o significado dos racionais com situações da vida cotidiana em que esses números são empregados.
Friederich (2010)	Investigar questões referentes à concepção dos Números Racionais na sua Representação Fracionária relacionadas ao ensino e à prática de um

	grupo de professoras de 1 a 4 a séries do Ensino Fundamental e de uma professora da Educação Infantil.
Santos (2011)	Analisar as estratégias utilizadas pelos alunos da Rede Municipal do Recife ao responderem questões de avaliações externas sobre números racionais, particularizando o SAEP/Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco.
Gil (2012)	Construir ideias e conceitos matemáticos em torno do número racional positivo e suas diferentes representações.
Silva (2013)	Investigar quais são os significados e as representações dos números racionais que são contemplados no Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM.
Oliveira (2015)	Levar um grupo de estudantes do quinto ano do Ensino Fundamental a construir significado para as regras operatórias fundamentais com números fracionários a partir de calculadoras científicas com representação fracionária.
Santos (2015)	Investigar de que maneira os professores interpretam os erros dos alunos em relação aos números racionais, nos anos iniciais do ensino fundamental.
Andrade (2016)	Analisar manifestações verbais e escritas de um grupo de professores de Matemática, dos Anos Finais do Ensino Fundamental, sobre possíveis dificuldades de alunos na mobilização de registros de representação semiótica dos números racionais, em atividades matemáticas.
Schulz (2017)	Analisar as contribuições da metodologia do Ensino Híbrido para a aprendizagem dos Números Racionais, com base na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval.
Dalvi (2018)	Analisar a construção do conceito de números racionais, tendo como apoio pedagógico uma atividade de modelagem matemática na perspectiva sociocrítica, abordando o problema do consumo de água de alunos.
Silva (2018)	Categorizar os graus de não congruência semântica na conversão entre os registros, geométrico bidimensional e simbólico fracionário dos números racionais.

Azevedo (2019)	Apresentar um processo de ensino-aprendizagem para uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental envolvida com o ensino de números racionais, em especial, as frações.
Melo (2019)	Analisar limites e possibilidades no uso de material manipulável em conversões entre representações de números racionais realizadas por alunos do 8º e 9º ano do ensino fundamental.

Fonte: Dados coletados nas teses e dissertações.

As pesquisas encontradas, datam do ano de 2000 ao ano de 2019, e pela análise desses trabalhos dividimos a região de concentração na qual foram aplicados:

- Região Sul: 4 pesquisas, sendo elas Soares (2007), Severo (2009), Friederich (2010) e Schulz (2017);
- Região Norte: uma pesquisa, sendo ela Oliveira (2015);
- Região Nordeste: 5 pesquisas, sendo Santos (2011), Silva (2013), Santos (2015), Silva (2018) e Melo (2019);
- Região Sudeste: 7 pesquisas, sendo Catto (2000), Penteado (2004), Silva (2008), Viel (2008), Gil (2012), Dalvi (2018) e Azevedo (2019);
- Região Centro-Oeste: uma pesquisa, de Andrade (2016).

Observando as regiões de concentração podemos destacar o quão existe a preocupação em todas elas, de professores com o ensino dos números racionais, na qual busca-se aprofundar em uma teoria que o auxilie no entendimento maior do processo de ensino-aprendizagem desse conteúdo que muitas vezes se torne um desafio, e que isso não é algo apenas local, mas que de maneira geral enfrentamos esse desafio em nosso dia a dia como docente.

Além disso, 14 dessas pesquisas aplicaram seus estudos no Ensino Fundamental, seja de escola pública ou municipal, 3 pesquisas foram aplicadas no Ensino Médio e, uma pesquisa englobou tanto o Ensino Fundamental quanto o Ensino Médio.

Com o objetivo de aprofundarmos o conhecimento sobre as produções acadêmicas que envolveram a Teoria dos Registros de Representação e os Números Racionais, optamos por fazer uma análise do trabalho e das concepções de cada autor.

Catto (2000), teve por objetivo em sua dissertação *Registros de Representação e o número racional: uma abordagem nos livros didáticos*, analisar e conhecer os registros apresentados pelos autores nos livros didáticos, a fim de reconhecer quais eram as conversões e tratamentos realizados entre os diferentes registros, com base nas ideias de Raymond Duval.

A autora, analisou algumas coleções de livro didático, sendo *A Conquista da Matemática*, dos autores José Ruy Giovanni e José Ruy Giovanni Jr., da editora FTD, que foi nomeada pela autora como CLD-1, e os livros *Novo Caminho – Matemática*, para 1ª a 4ª séries, e *Matemática*, para 5ª a 8ª série, de Luis Márcio Imenes e Marcelo Lellis, da editora Scipione, nomeados como CLD-2.

Na análise da CLD-1, a autora observou as seguintes características comuns:

> - O conteúdo é dividido em Unidades, e estas em capítulos, com a característica de uma unidade compartimentalizada, cujos conteúdos nem mesmo são articulados entre si.
> - As Unidades são introduzidas com algumas referências históricas pertinentes ao conteúdo a ser desenvolvido.
> - Os exemplos são ponto de partida para se chegar ao conceito, regras e propriedades.
> - Há preocupação em demasia com relação à notação utilizada.
> - Aparece um grande número de exercícios de fixação valorizando os mecanismos (algoritmos) de resolução. (CATTO, 2000, p. 46)

Em relação a representação fracionária no livro da 2ª série, a primeira situação envolvendo fração, introduziu-se pelo uso da língua natural “metade”. O tópico “*Metade de uma quantidade*”, da Unidade 2, trata da divisão dos números naturais, na qual os divisores são representados por apenas um algarismo natural, e utiliza-se representações figurais com o objetivo de demonstrar a relação da palavra “metade” com divisão por 2. E da mesma forma é tratada “*A terça parte de uma quantidade*”. Ao desenrolar da unidade o autor trata “*Uma nova noção de metade: um meio*”, por meio de registros geométricos. Há exercícios que envolvem duas frações com dificuldade visual e cognitiva.

Na 3ª série, assim como nos livros da 4ª e 5ª série, encontra-se a Unidade “*Números racionais e sua representação fracionária*”, que utiliza o mesmo tratamento do registro figural e sua conversão na língua natural do livro da 2ª série, no entanto, cita-se que no registro figural, fracionamentos e cada uma das partes divididas, que representa uma fração. Os exercícios de fixação trazem a conversão do registro fracionário para a língua natural, e vice-versa. É feito a comparação de frações por meio dos denominadores, logo após há a introdução de operações de adição e subtração. Na 4ª série encontra-se um obstáculo didático, pois é introduzido o assunto *par ordenado* para explicar fração utilizando um texto extenso, pouco adequado a faixa etária. Na 3ª e 4ª série, denotava-se a ideia de adição e subtração de frações, no entanto, na 5ª série trabalha-se a ideia de adição e subtração a números racionais, assim como em outras operações.

O trabalho com reta numérica inicia-se na 6ª série quando é introduzido conceito de fração.

Em relação ao registro decimal, a autora observou que o estudo dos números racionais no registro decimal acontece na 4ª série, um ano após o estudo do registro na forma fracionária. A primeira denominação de número com vírgula, aparece na 5ª série. Há exercícios que trabalham a articulação do registro figural e a fração decimal e desta do registro numérico na forma decimal, e na língua natural.

Na análise da CLD-2, a autora menciona que:

> - Os conteúdos são abordados em espiral, isto é, o mesmo conteúdo é retomado em contextos distintos (aritmética, medidas de grandeza, geometria e álgebra), assim como nas séries seguintes, com novas abordagens.
> - A abordagem é feita por meio de situações no cotidiano na resolução de problemas.
> - As representações pictóricas e figurativas, assim como recortes de jornais e revistas são explorados mais um contexto mais próximo da realidade.
> - As atividades desafiadoras e/ou jogos, na seção "Ação' são proporcionados para que o trabalho em grupo seja incentivado. Nas series iniciais, essas atividades são trabalhadas com o material concreto que faz parte do Manual Pedagógico.
> - Os cálculos mental e estimativo apresentam estratégias a serem desenvolvidas em sala, assim como momentos de reflexão na seção "Conversando sobre o texto". (CATTO, 2020, p. 47)

Em relação ao registro fracionário, a autora analisou que na 1ª série inicia-se com a ideia de metade, ligada a noção de repartir, dividir ao meio, dividir em duas partes iguais. Encontra-se nos exercícios o registro figural (concreto) representando a situação de se obter metade de um número de objetos. Na 2ª série trabalha-se as operações elementares, mas não volta a questão do número fracionário. Na 3ª série volta-se a noção de metade, mas relacionada ao registro decimal, na qual são apresentadas as representações numéricas: registro decimal, fracionário e a fração decimal, porém os exercícios não aprofundam na articulação desses diferentes registros. Na 4ª série trabalhasse as representações do registro figural, e é feita a comparação de frações no mesmo registro numérico. Também há exercícios sobre ordenação de frações com denominadores diferentes. Na 5ª série a ideia de fração é tratada com um registro numérico que para maior parte dos exemplos e exercícios, essa representação precisa de um complemento figural. No dicionário do livro da 7ª série aparece o conceito de "números fracionários", como "frações como $\frac{2}{7}$ e ainda decimais como $-3{,}5$ ou $1{,}355\ldots$", que de acordo com a autora, percebe-se uma confusão entre o significado de representante/representado. Na 8ª série a representação fracionaria ganha o conceito de número, e são abordados a reta numérica e a localização de números.

Em relação aos registros decimais, percebe-se que na coleção é usado o conceito de "número com vírgula". Na 3ª série trabalhasse a conversão do registro figural ao decimal, e vice-versa, na qual também são apresentados "*décimos e medidas de comprimento*". Na 4ª série também é voltada a ideia de décimos com o uso do material dourado, na qual usasse a conversão do registro figural para o decimal, assim como os tratamentos do registro decimal nas operações. Na 5ª série o número racional no registro decimal é ligado a ideia de medida de grandeza, há a articulação de representação figural e decimal. Na 6ª série são retomadas as operações de adição, subtração e multiplicação de números decimais. Na 7ª série ocorre a coordenação entre as representações de porcentagem, fração com denominador 100 e registro decimal.

Catto, conclui que nas coleções são mobilizados todos os registros na introdução dos números racionais, na qual o sentido mais abordado foi do registro figural para a fração decimal e do figural para o decimal.

Penteado (2004) em sua dissertação *Concepções do professor do ensino médio relativas à densidade do conjunto dos números reais e suas reações por frente a procedimentos para a abordagem desta propriedade*, delimitou dois objetivos para sua pesquisa, O primeiro foi investigar a concepção e a reação dos professores, quando analisada a propriedade da densidade, tanto do conjunto dos números racionais quanto dos irracionais, em relação ao conjunto dos números reais. Conceitualmente, um conjunto é denso, se entre dois dos seus elementos quaisquer, existe uma infinidade de elementos do mesmo conjunto (PENTEADO, 2004).

O segundo objetivo envolveu a reação dos professores para dois procedimentos distintos, sendo um deles, a discussão da densidade do conjunto dos números racionais nos reais, o qual envolve "o registro de representação gráfico, localização de pontos na reta real e o registro numérico", cujo tratamento envolveu a média aritmética entre dois números racionais para obter outro número do mesmo conjunto (PENTEADO, 2004, p.3). Para discutir a densidade do conjunto dos números irracionais nos reais, foi utilizado a representação decimal infinita dos números reais, "permitindo neste registro a realização de vários tratamentos em seu interior. Utilizamos também os registros de representação da língua natural e gráfico (PENTEADO, 2004, p. 3).

Para o cumprimento dos seus objetivos, Penteado (2004) elaborou, aplicou e analisou uma sequência de ensino composta por 10 tarefas, embasada na mobilização e coordenação de diferentes registros de representação semiótica, a saber, o registro de língua natural, decimal, fracionário e gráfico.

Em termos de resultados da pesquisa de Penteado (2004), a autora destacou que a representação frequente para um número racional foi o registro fracionário. No caso do número irracional, foi feita uma associação com as raízes quadradas não exatas e ao número pi.

No que diz respeito ao registro da língua natural, a dificuldade foi manifestada no processo de justificar o porquê de determinada proposição ser verdadeira ou falsa. Como por exemplo, entre dois números irracionais não existe um número racional" (PENTEADO, 2004, p. 52)

Em relação a concepção de densidade dos números racionais em relação aos reais, segundo Penteado (2004), os professores não apresentaram dificuldades em encontrar números racionais com o procedimento da média aritmética. Localizaram números racionais na reta numérica real e, no caso de números formas distintas de registros (decimal e fracionário), a opção frequente foi a representação decimal.

No caso da densidade do conjunto dos números irracionais em relação aos reais, Penteado (2004, p. 171)) destacou que para alguns professores "a representação decimal infinita, ou o sinal de reticências" relaciona-se com número irracional.

Soares (2007), em sua dissertação *Os números racionais e os registros de representação semiótica: análise de planejamento das séries finais do Ensino Fundamental,* tinha por objetivo analisar os planejamentos de 4ª a 8ª série, elaborados por uma professora, em relação ao número racional sob a ótica da teoria dos registros de representação semiótica, desenvolvida por Raymond Duval, considerando a coordenação de registros para a aprendizagem matemática. O método utilizado foi a pesquisa qualitativa na forma de estudo de caso. Os dados da pesquisa foram coletados por meio da análise dos planejamentos de 4ª a 8ª séries, elaborados por uma professora, bem como entrevistas sistemáticas. E de acordo com Soares:

> Considerando que o ato de aprender está ligado ao de ensinar, ou seja, que as dificuldades dos alunos em aprender determinado conceito estão associadas à prática e às escolhas dos meios/didáticos metodológicos do professor quando ensina esse conceito, bem como a especificidade do saber matemático não está nos conceitos, mas nas representações semióticas desencadeadas por estes, buscamos, primeiramente, compreender quais são os meios/didáticos metodológicos escolhidos pelos professores para ensinar o conceito de número racional, bem como a revelação de dados para a organização do trabalho; nos inserimos em um grupo de estudos de matemática organizado pela Secretaria Municipal de Educação de Santiago/RS em parceria com a universidade local, que realizava discussões sobre assuntos referentes à educação matemática, e aplicamos um questionário aberto a um grupo de 18 (dezoito) professores que atuavam nas séries finais do Ensino Fundamental.(SOARES, 2007, p. 40)

A pesquisa envolveu um questionário que foi dividido em duas partes, sendo uma com questões referentes ao perfil dos professores, e a outra com questões sobre as mudanças da prática pedagógica de acordo com a sociedade e as influências do livro didático. Resultando em que a maioria dos professores eram licenciados em Matemática, e que em relação as suas práticas pedagógicas, eles buscam mostrar a aplicabilidade da Matemática no dia a dia do aluno. No uso do livro didático para o planejamento de suas aulas, cerca de 39% dos professores utilizam as sequencias didáticas do livro para o ensino de alguns conteúdos. No entanto, de acordo com as ideias de Duval, torna-se necessário buscar livros que privilegiem os vários registros de representação semiótica para um mesmo objeto matemático, bem como a coordenação entre eles. Uma das obras mais utilizadas pelos professores, "A Conquista da Matemática", de acordo com a análise de Soares, a articulação entre os registros de representação decimal e fracionária de um número decimal, são pouco exploradas. E para desenvolver a capacidade de raciocinar e investigar eles utilizam recursos como jogos, desafios e trabalhos de pesquisa. De acordo com Soares (2007) em relação aos meios/didáticos metodológicos utilizados para ensinar o número racional, eles consideram o ensino do número racional como uma tarefa complexa.

E tendo por base esse estudo exploratório, Soares analisou o planejamento do ensino dos números racionais de uma professora sob a ótica dos registros de representação semiótica, na qual fez entrevistas individuais sistemáticas com a professora e a cada quinze dias buscava os seus planejamentos. Com isso, ele relatou que o ensino dos números racionais se inicia na 4ª série com situações que exigem representação de parte de um inteiro. Já na 5ª serie começa-se a desenvolver todos os conteúdos relacionados aos números decimais, no entanto, a representação decimal dos números racionais é dada como um outro tipo de número. Na 6ª série é apresentado aos alunos o conjunto dos números racionais como sendo aquele formado pelos números que podem ser escritos como quociente de dois números inteiros, com divisor diferente de zero. Na 7ª série, fecha-se o conjunto dos números racionais, dando a necessidade de um outro número, os irracionais. Na 8ª série o conjunto numérico é retomado de forma rápida com uso de notação científica.

De acordo com a análise feita por Soares, as atividades propostas pela professora na 4ª série, não permitiam que os alunos estabelecessem conjecturas, pois os registros já vinham prontos. As atividades da 5ª série, proporcionavam a conversão entre os registros figural e fracionário. No entanto, a noção de fração até então trabalhada é de: uma ou mais partes iguais de uma unidade, sendo essa unidade, carros, cores das bandeiras de países, figuras geométricas, não havendo uma ligação entre a noção de fração e a medição de grandezas. Na 6ª série, os tratamentos são no registro numérico, sendo a maioria das conversões é do registro figural para o registro fracionário, e não há conversões entre as representações fracionárias e decimais dos números racionais, não mostrando a relação entre elas. Pela primeira vez, na 7ª série, trabalha-se as formas numéricas (fracionária e decimal) de representar os números racionais, no entanto, as propriedades relacionadas às representações decimais (finita e infinita) não são abordadas. Na 8ª série é trabalhada uma forma de representar um número racional muito grande ou muito pequeno com o uso da notação científica, por meio de registros da língua natural.

Soares (2007) conclui que o planejamento da professora contribui para a mobilização dos registros de representação semiótica, porém em determinadas séries não são mobilizados todos os registros do número decimal, dando ênfase em apenas alguns registros. Neste sentido, na formação do professor deve haver o conhecimento de outras formas de ensinar e aprender, bem como outras formas de entender o objeto matemático. Assim, a teoria dos registros de representação semiótica surge como um suporte didático/metodológico importante para a compreensão do processo de ensino e aprendizagem da matemática.

A dissertação de Maria Jesus Matinez Viel (2008), intitulada como *A importância da representação simbólica no ensino aprendizagem da noção intuitiva de números racionais*, havia sido selecionada para compor o nosso estudo, porém não encontramos a versão eletrônica disponível para consulta. Entramos em contato com a Universidade Cruzeiro do Sul, no entanto nos encaminharam um documento incompleto, contendo apenas a parte do resumo do trabalho. Sendo assim, descartamos a análise dessa dissertação.

Silva (2008) teve por objetivo em sua dissertação *Reta graduada: um registro de representação dos números racionais,* analisar a introdução do conceito de número racional por meio de uma abordagem semiótica de ensino, considerando a reta graduada como um registro de representação semiótica dos números racionais, indicando ganhos para a aprendizado comparativamente ao uso de figuras geométricas de dimensão 2, como as barras de chocolate, num papel figurativo.

Os dados para a análise foram buscados nos *Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o Ensino Fundamental* (PCN) do ciclo II (3ª e 4ª séries) e do ciclo III (5ª e 6ª séries) e nos volumes de duas coleções de livro didático dessas séries. A problema da pesquisa é em relação as dificuldades no ensino das frações, em relação da existência de diversos significados para esse conceito, os números racionais. Por isso buscou-se a abordagem semiótica e suas potencialidades para o ensino de frações.

Na análise dos PCN constatou-se que as orientações seguem no sentido de aprofundar os estudos já vistos no ano anterior, e esperando que os livros didáticos ofereçam a construção de significados (parte-todo, quociente, razão e operador); e orienta para o uso de figuras com duas dimensões, como por exemplo a pizza e a barra de chocolate.

Os livros didáticos analisados foram o *Projeto Pitanguá, Matemática*, 2005, da editora Moderna, 1ª e 2ª séries do ciclo II (3ª e 4ª séries), da autora Juliane Matsubara Barroso, na qual pela análise, o autor constatou que eles apresentam as representações geométricas dos números racionais como simples ilustrações e não fazem o uso dos registros de representação geométrica de dimensão 1 como instrumento de conceitualização dos números racionais. O outro livro analisado foi *Matemática em movimento*, 2006, editora do Brasil, 1ª e 2ª séries do ciclo III (5ª e 6ª séries), em que observou-se que eles seguem as orientações dos PCN quanto a trabalhar os significados, porém não se abrange a representação geométrica de dimensão 2 em relação a dimensão 1, e além disso a reta graduada é usada como uma simples ilustração para facilitar o entendimento do aluno, e também não há situações problemas que levam o aluno aos registros de representação semiótica dos números racionais na forma decimal ou fracionária.

De acordo com Silva (2008) o registro da reta graduada é mais apto a criar um elo entre um número e grandezas relativas, pois a reta se encontra envolvida em meios aos números que atribui uma ordem crescente dos mesmos e sendo assim as frações equivalentes são criadas em condições mais favoráveis, ela se configura como um registro semiótico com variedades de signos e mais apto para o desenvolvimento das competências.

Severo (2009) teve por objetivo em sua dissertação, *Números racionais e ensino médio: uma busca de significados*, analisar registros de representação de números racionais, apresentados por alunos de Ensino Médio, e verificar se esses alunos relacionam o significado dos racionais com situações da vida cotidiana em que esses números são empregados. E sua pesquisa teve como fundamentação teórica, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval e, também o que o documento dos Parâmetros Curriculares Nacionais menciona sobre o ensino de frações.

A pesquisa contou com a participação de 50 alunos do 1º ano do Ensino Médio, de uma escola estadual de Porto Alegre - RS e professores de Matemática da mesma escola. Aos alunos foi aplicado um questionário para investigar quais eram as dificuldades deles nas representações de frações, usando a matriz de referência do SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica) e o do SAERS (Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Rio Grande do Sul). As seis questões aplicadas, tomavam como objetivos: trabalhar com mais de um registro de representação do racional, a fim de entender que a representação na forma de fração pode ser convertida na representação decimal e na gráfica; converter para o registro numérico, o número racional na forma de fração; operar com racionais e obter a resposta no mesmo registro; operar com decimais e fazer tratamentos dentro do registro numérico; usar os registros em língua natural e numérica e verificar a conversão do registro na língua natural para o percentual; utilizar os registros em língua natural e numérica, e fazer o tratamento da informação em um mesmo registro.

A partir da análise dos resultados obtidos na avaliação dos alunos, o autor concluiu que fica evidente as dificuldades em relação aos registros de representação dos racionais, e que ne sempre as transformações de registros eram realizadas, os alunos têm dificuldade em fazer a conversão do racional em forma de fração para a forma decimal, além disso significado de fração não é compreendido, observa-se também a dificuldade na conversão do registro em língua natural para o registro numérico.

Já na aplicação das pesquisas com os professores, teve por objetivo avaliar sua opinião sobre as soluções apresentadas pelos estudantes e suas dificuldades. E por suas respostas pode verificar que eles analisam a dificuldades dos trabalhos em trabalhar com diferentes registros do número racional, por falta de compreensão do significado do objeto de estudo, e até mesmo por parte da prática pedagógica do professor, que talvez pode ser insuficiente por ter insegurança no conteúdo, ou até mesmo por não compreender os significados dessas representações e suas aplicabilidades; e, pelas respostas dadas pelos professores entrevistados, segundo Severo (2009), parece que eles não têm conhecimento da teoria dos registros de representação semiótica, provavelmente porque não houve, em seus cursos de formação inicial, uma apresentação dos racionais que envolvesse tanto a parte matemática como a pedagógica, em trabalhos com diferentes registros.

Assim, ele conclui que os alunos possuem dificuldades cognitivas em termos de Matemática, e que em relação aos professores é necessário ter conhecimentos sobre cada conceito matemático, conhecendo teorias sobre ensino e aprendizagem, para novas metodologias.

Friederich (2010) em sua dissertação *A formação de professoras dos anos iniciais: um estudo sobre a concepção do conceito do número racional e suas representações*, teve por objetivo, investigar questões referentes à concepção dos Números Racionais na sua Representação Fracionária relacionadas ao ensino e à prática de um grupo de professoras de 1ª a 4ª séries do Ensino Fundamental e de uma professora da Educação Infantil. Na pesquisa houve um estudo de caso através dos dados obtidos em um questionário, para conhecer o perfil acadêmico, de uma entrevista individual em que se buscava compreender a ação docente e o trabalho com número racional e, seis encontros que ocorreram semanalmente com o grupo de professoras da mesma escola, partindo de uma problemática da prática docente relacionada aos números racionais.

O autor pode identificar que há uma grande dificuldade na concepção dos professores sobre o conceito de números racionais na representação fracionaria, e que essas dificuldades de relacionar as representações, conversões e tratamento dos conceitos matemáticas que são trabalhados reflete na aprendizagem significativa dos alunos.

Portanto, é necessário que o professor saiba significar esse conhecimento, buscar alternativas para resolver problemas e saber comunicar-se. Dessa forma, a Teoria dos Registros de Representação vem como didática/metodológica que o professor pode utilizar quando o objetivo é a aquisição dos conceitos.

Santos (2011) teve por objetivo em sua dissertação, *Analisando as estratégias utilizadas pelos alunos da rede municipal do Recife na resolução de questões do SAEPE sobre números racionais*, analisar as estratégias utilizadas pelos alunos da Rede Municipal do Recife ao responderem questões de avaliações externas sobre números racionais, particularizando o SAEP/Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco. Com base no SAEP, o autor elaborou um questionário com oito itens, na qual avalia o nível de aprendizado do aluno mediante ao conteúdo proposto naquele ano, nesse caso sobre números racionais, e também o nível de operação mental para realizar as atividades propostas, e aplicou ele a oito turmas do 9° ano do Ensino Fundamental de três escolas públicas da Rede Municipal de Pernambuco, sendo 276 alunos participantes. Depois realizou-se 26 entrevistas a fim de identificar estratégias que os alunos utilizaram para responder ao questionário.

As questões tinham por objetivo: identificar numa fração o todo e a parte, e utilizar a dupla contagem para representar uma fração; identificar a localização de números racionais numa reta numérica; resolver problemas utilizando frações equivalentes; reconhecer as diferentes representações de um número racional, realizando a conversão de um registro para outro.

De acordo com Santos (2011), na análise dos resultados observou-se que os alunos possuem dificuldades em compreender o conceito de números racionais e suas operações, assim como a relação entre a fração e o numerador e denominador. E em relação as estratégias utilizadas, verificou-se que para um mesmo significado de número racional, os alunos usaram estratégias diferentes, assim como também, uma mesma estratégia para diferentes significados dos números racionais.

O autor demonstrou ser preocupante essas dificuldades, pois nem cerca 50% dos alunos acertaram as atividades, sendo que o ensino dos números racionais na forma fracionaria começa no segundo ciclo do Ensino Fundamental, ou seja, os alunos estão vindo do Ensino Fundamental sem saber construir o conceito de números racionais. Ressaltando assim a importância do educador matemático ter acesso as estratégias utilizadas pelos alunos nessas avaliações de larga escola para que possa avaliar sua prática pedagógica.

Gil (2012) em sua dissertação, *Uma abordagem lúdica para as diferentes representações do número racional positivo* teve por objetivo, construir ideias e conceitos matemáticos em torno do número racional positivo e suas diferentes representações, sendo aplicada em turmas de 6º ano do Ensino Fundamental de um colégio particular, localizado na cidade de Volta Redonda/RJ.

Diante do levantamento teórico feito pelo autor, ele percebeu que muitos pesquisadores em Educação Matemática têm apresentado propostas para melhorias de ensino, nesse conteúdo curricular. A autora destaca que diante dos seus estudos sobre o ensino dos números decimais nas concepções do processo de alfabetização, tem-se que o Indicador de Alfabetismo Funcional (BRASIL, 2009) classifica o "alfabetismo nível rudimentar quando, por exemplo, o indivíduo atinge a habilidade de ler e escrever números racionais presentes no cotidiano, como fazer o pagamento de pequenas quantias, ou, ainda, utilizar medidas de comprimento utilizando objetos de medida padrão".

O estudo fundamenta-se na abordagem do método de pesquisa-ação. Iniciou-se fazendo uma análise diagnóstica sobre os conhecimentos já adquiridos pelos anos na série anterior, com atividades envolvendo várias representações do número racional positivo, mas quando se questionou sobre a ideia do que é um número racional, eles não identificaram, e nem lembraram sobre a palavra 'racional'. No entanto, através da construção e instigação do diálogo da professora com os alunos sobre o assunto, eles foram se desenvolvendo, sendo considerado por ela, um momento foi oportuno e muito valioso.

Nas atividades seguintes tiveram como proposta o uso do Material Dourado e materiais para recorte, na qual tiveram por objetivos: proporcionar ao educando a construção do conceito de número racional, ao utilizar o material dourado, realizando a troca de material, em caso de agrupamento de 10 em 10, bem como suas representações, no quadro valor-de-lugar, no número decimal, na fração irredutível, no número misto, caso a fração seja imprópria, ou na porcentagem, na qual os números iniciais apresentados foram na forma de escrita por extenso; perceber que zeros acrescidos à direta da vírgula não alteram o valor quantitativo, e que podemos representar um mesmo número de diferentes formas; agrupar os números racionais apresentados na forma gráfica, decimal, fracionária e porcentagem, percebendo que, embora apresentem representações diferentes, os números em questão são equivalentes.

Após a utilização do material dourado, a autora propôs uma atividade sem o uso dele, pois acreditava-se que eles já haviam adquirido os conhecimentos necessários durante a realização das atividades anteriores com o material prático. Então essa atividade teve por objetivo registrar as representações indicadas para cada número apresentado, valendo-se de frações próprias ou impróprias, irredutíveis ou não, visando à construção das diferentes representações do número racional positivo.

Nas aulas seguintes, as atividades tiveram como recurso o software *Boatemática Racional,* desenvolvido pela professora/pesquisadora, o qual envolve frações, números decimais e porcentagem, trazendo uma abordagem de construção das diferentes representações do número racional positivo. A autora explica que na tela do software aparece a palavra ‘Tutorial’ que tem por objetivo propor uma sugestão aos professores, num ambiente computacional, para aprendizagem dos conceitos que envolvem números racionais, na qual traz uma construção gradual das diferentes representações do número racional positivo, que é o objetivo de nossa pesquisa, na qual na tela do tutorial é numerada com representações que vão desde a representação da linguagem oral e escrita, até sua representação em forma de porcentagem. E um dos itens desse software traz a representação gráfico dos números decimais através do material dourado, que foi base para o desenvolvimento desse software para a professora. Além disso, o software oferece quatro opções de jogos educativos (‘Jogo da Memória’; ‘Relacionando décimos, centésimos e milésimos’; ‘Somos todos iguais’; ‘Estante racional’) que estão relacionados ao tema da pesquisa.

Usar o software após a aplicação da atividade concreta, fez a autora concluir se houve, ou não, compreensão por parte dos estudantes, além de apresentar diferentes formas para um mesmo número racional positivo. Dessa forma, os resultados das atividades propostas, tanto com material concreto, quanto com a utilização do software, mostraram para a autora, que quando o ensino é proposto de forma planejada e diversificada sobre um mesmo assunto, as dificuldades podem ser amenizadas. As teorias de Formação de Conceitos de Vygotsky e Registros de Representação Semiótica de Duval permitiu analisar o desenvolvimento dos educandos, porém predominou o enfoque da utilização da tecnologia como contribuição de estratégia ao ensino dos conteúdos em Matemática. Gil (2012, p. 37) ainda destaca que os “protagonistas do processo de ensino e de aprendizagem são o professor e o educando, sendo que ao primeiro cabe a tarefa de mediar o conhecimento, de modo que, ao segundo, seja proporcionado aprender, construindo esse saber”.

Silva (2013) teve por objetivo em sua dissertação *Significados e representações dos números nacionais abordados no Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM*, investigar quais são os significados e as representações dos números racionais que são contemplados no Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM, tomando como base os significados aos números racionais como, medida (parte-todo), quociente, razão, operador multiplicativo, probabilidade, um número na reta numérica e porcentagem, e tendo como base para a análise dessas representações, a Teoria dos Registros de Representações Semióticas, de Raymond Duval.

A pesquisa aconteceu em duas etapas, sendo a primeira, a análise das provas de conhecimentos gerais do ENEM de 1998 a 2008, e as provas de matemática e suas tecnologias de 2009 a 2011, a fim de identificar o conceito de números racionais nos seus diferentes significados; na segunda etapa, analisou-se o resultado da primeira etapa referentes as provas de matemática e suas tecnologias, em relação aos diferentes registros de representação dos números decimais, como o tratamento e as conversões que poderiam ser realizadas.

Dos resultados da análise das provas de matemática e suas tecnologias de 2009, foi identificado pelo menos dois registros de representação dos números racionais que podiam ser trabalhados por meio do tratamento, ou ser convertido para outro registro, mas a conversão em ambos os sentidos não havia. Na análise das provas de 2010, percebeu-se que apenas o registro numérico fracionário, numérico percentual e algébrico puderam ser mobilizados, no que se refere as conversões que tenham como registro de partida a língua materna, além disso, os significados de razão, parte-todo, porcentagem e probabilidade foram mobilizados em vários contextos. Nas provas de 2011 constatou-se que as conversões entre os registros de representação dos números racionais ocorrem em apenas um sentido.

O autor concluiu assim, que em relação ao registro das representações dos números decimais, o que pode ser mais mobilizado foi o registro fracionário.

Oliveira (2015) em sua tese *Uma Engenharia Didática para o ensino das operações com números racionais por meio de calculadora para o quinto ano do Ensino Fundamental*, teve por objetivo levar um grupo de estudantes do quinto ano do Ensino Fundamental a construir significado para as regras operatórias fundamentais com números fracionários a partir de calculadoras científicas com representação fracionária, dessa forma foi desenvolvida uma sequência de ensino com quatro alunos de uma escola pública de Belém-PA.

Para o desenvolvimento do trabalho, o autor usou como base teórica, a Teoria das Situações Didáticas, de Brousseau, e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval.

As atividades foram aplicadas em encontros semanais, com duração de duas horas e meias, por três meses, na qual as atividades envolviam a soma de frações com o mesmo denominador, com e sem o uso da calculadora, também a elaboração de regras para soma de frações com denominadores diferentes, e assim aconteceu também para a operação da subtração. O mesmo ocorreu para regras das operações de multiplicação e divisão de números fracionários. A maioria das atividades partiu de uma representação dos números fracionários e pedia um tratamento na resolução dessas questões, algumas pedia a conversão numérica para a figura. No uso da calculadora os alunos logo dominaram as funções para seu uso, integrando como um recurso metodológico, além disso se desenvolveram nos trabalhos sem precisar de muita ajuda do professor.

Dessa forma, Oliveira (2015) conclui que a calculadora pode ser um recurso pedagógico no ensino de frações, no entanto, seria necessário ter formulado atividades que usassem a representação fracionária na forma de figuras, pois a calculadora não possibilita essa forma de representação.

Santos (2015) teve por objetivo em sua dissertação *A compreensão do professor sobre os erros dos alunos, em itens envolvendo expectativas de aprendizagem dos números racionais, nos anos iniciais do ensino fundamental*, investigar de que maneira os professores interpretam os erros dos alunos em relação aos números racionais, nos anos iniciais do ensino fundamental, e para isso, construiu um questionário que contemplasse as expectativas de aprendizagens dos números racionais para alunos do 5° ano, sendo este aplicado a 324 alunos desse ano, da rede municipal de Jaboatão dos Guararapes. E elaborou também um instrumento que ajuda o professor a analisar os diferentes registros de representação semiótica e à relevância dos erros, tanto no aspecto quantitativo como no qualitativo, e para validar esse instrumento, ele foi aplicado a 209 professores do município de Jaboatão dos Guararapes, que ao final foi feito uma discussão sobre os erros descritos no instrumento.

No instrumento de avaliação dos registros de representação semiótica, percebe-se que os professores percebem superficialmente a deficiência da resposta dos alunos, mas tendem a aceitá-la como correta, não buscam uma causa, uma origem, que justifique aquele processo resolutivo. Na discussão sobre os erros, apontaram sobre a insuficiência pedagógica no trabalho com os números racionais nos anos iniciais do ensino, na qual muitas vezes é trabalhado o conteúdo superficialmente.

De acordo com a pesquisa de Santos (2015), cerca de 20% dos professores que possuem apenas o normal médio, não têm nenhuma formação superior, e isso pode influenciar no conhecimento matemático e que utilize o erro como estratégia didática.

Andrade (2016) em sua dissertação *Representações semióticas de números racionais sob o olhar de um grupo de professores de Matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental*, teve por objetivo analisar manifestações verbais e escritas de um grupo de professores de Matemática, dos Anos Finais do Ensino Fundamental, sobre possíveis dificuldades de alunos na mobilização de registros de representação semiótica dos números racionais, em atividades matemáticas.

A pesquisa foi desenvolvida num grupo de estudos de quatro professores de Matemática, onde na primeira a sessão foi questionada a eles sobre suas experiências com o ensino e aprendizagem dos números racionais na sala de aula, tendo como orientação suas representações semióticas, na qual as respostas foram registradas na forma escrita e gravadas também, e as respostas dadas a essa questão, foram norteadoras para o desenvolvimento das atividades matemáticas do estudo de acordo com as dificuldades que os alunos apresentam nesse conteúdo.

Na fala dos professores, eles relataram que os alunos possuem mais dificuldades com representações fracionarias, por possuírem características diferentes de outras representações familiares em seu cotidiano, outros disseram da dificuldade em somar, multiplicar e dividir números racionais na forma decimal, que nesse caso a atividade de tratamento exige uma compreensão de regras do sistema posicional e da base dez.

Em geral, destaca-se pelos professores que a maior dificuldade dos alunos é na apreensão dos números racionais, no reconhecimento das representações de um mesmo número racional, no tratamento e nas conversões. E isso levou eles a refletir que as atividades a serem elaborados no ensino de números racionais, devem mobilizar diferentes registros de representação semiótica de números racionais para aquisição do conhecimento.

Schulz (2017) teve como objetivo em sua dissertação *Números racionais e suas representações com base no ensino híbrido*, analisar as contribuições da metodologia do Ensino Híbrido para a aprendizagem dos Números Racionais, com base na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. A pesquisa foi realizada com 25 alunos do 9° ano do Ensino Fundamental, em uma escola da Rede Pública Municipal de Indaial – SC.

Para iniciar o desenvolvimento da pesquisa, buscou-se um estudo sobre Números Racionais, Ensino Híbrido e Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, sendo que tanto as atividades elaboradas, como as análises, se deram com base nas ideias de Duval. As atividades pelo Ensino Híbrido se deram por meio da Rotação por Estações, onde a sala é dividida em grupos, e cada grupo tem um tempo pré-determinado pelo professor para realizar as atividades. A coleta de dados foi feita por meio da professora/pesquisadora durante a aplicação das atividades, sendo registrado num diário de campo. Os critérios para avaliar a aprendizagem foram de acordo com a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de

Raymond Duval (linguagem materna para a linguagem matemática; relacionem quantidades inteira aos racionais; realizar conversões).

Na análise dos documentos oficiais e dos livros didáticos, o autor observou que há uma contradição na forma e nos conteúdos relacionados a esse assunto entre o que os livros apresentam e o que recomendam os documentos, trazendo assim problemas na aprendizagem dos alunos.

Schulz (2017) conclui que os resultados mostram que a metodologia utilizada proporcionou o desenvolvimento dos alunos em relação as características que ele propunha a analisar: autonomia, interesse pelo estudo, cooperação e participação, atitudes centrais que contribuíram para a construção do conhecimento; e que também está havendo um avanço no estudo sobre números racionais.

Dalvi (2018) em sua dissertação *Modelagem matemática na perspectiva sociocrítica e os registros de representação semiótica na formação do conceito de número racional'*, teve por objetivo analisar a construção do conceito de números racionais, tendo como apoio pedagógico uma atividade de modelagem matemática na perspectiva sociocrítica, abordando o problema do consumo de água de alunos. A pesquisa ocorreu na Escola Municipal de Ensino Fundamental Centro Unificado Constantino José Vieira, localizada em Castelo, Espírito Santo, com alunos do 8.º ano do ensino fundamental.

Para o desenvolvimento da pesquisa, tomou-se a situação do contexto social dos alunos do consumo de água, pois durante as aulas de Matemática, os alunos mencionaram a preocupação com a escassez de água.

Durante o desenvolvimento das atividades, voltou-se ao olhar matemático sobre o consumo diário de água, que na visão da semiótica recorreu a uma situação como uma conversão do registro simbólico numérico fracionário para o registro simbólico decimal exato, trabalhando também com o registro em língua natural, e ao passarem do registro simbólico numérico decimal exato para o registro numérico fracionário, procuraram explicar as propriedades que regem esses sistemas semióticos.

O autor conclui que os tratamentos dos diferentes registros para o número racional, ajudaram os alunos a identificar esse objeto matemático em diferentes registros.

Silva (2018) teve por objetivo em sua dissertação *Graus de não congruência semântica nas conversões entre os registros geométrico bidimensional e simbólico fracionário dos números racionais*, categorizar os graus de não congruência semântica na conversão entre os registros, geométrico bidimensional e simbólico fracionário dos números racionais.

A pesquisa foi composta por duas etapas, sendo a primeira uma análise das características e dos tratamentos específicos a cada registro, e a segunda a validação de um modelo proposto a 381 alunos do 6º e 9º ano do Ensino Fundamental, e 1° e 3° anos do Ensino Médio de cinco escolas da rede estadual de ensino de Alagoas.

De acordo com os resultados da primeira etapa, o autor verificou que o registro geométrico bidimensional, na literatura, não existia uma classificação das representações semióticas que lhe são pertinentes; dessa forma, considerou-se como registro geométrico bidimensional dos racionais as figuras perceptuais cujas partes possuem áreas congruentes e formas homogêneas, com um inteiro ou mais de um inteiro. E na aplicação do modelo, notou-se que os erros se deram pela não congruência semântica.

Constatou-se que em soluções dadas em todos os graus de não congruência semântica é bastante presente o uso da dupla contagem sem que o sujeito tenha consciência das relações entre as unidades figurais e simbólicas dos registros envolvidos na conversão.

Azevedo (2019) em sua dissertação *Conexão entre matemática e música: um percurso para o estudo dos números racionais*, teve como objetivo apresentar um processo de ensino-aprendizagem para uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental envolvida com o ensino de números racionais, em especial, as frações, tendo o uso da música como uma estratégia educacional não convencional.

Uma das maneiras de relacionar os conceitos de números racionais a música se tem pelos intervalos musicais, onde tocamos duas notas simultaneamente, e também trabalhando o conceito de números racionais equivalentes, o autor ainda indaga que a matemática e a música possuem linguagem própria, com símbolos e registros, que de acordo com Duval, podemos considerar a melodia musical ouvida como se fosse, por exemplo, a ‘língua materna’, sendo necessário decodificar o que está sendo ouvido, para a representação na escrita musical, funcionando essa, como o registro figural, já que se assemelha coma linguagem gráfica no que se refere aos registros semióticos. Por isso considerou-se como conteúdo, os números racionais, principalmente em seu registro fracionário, mas trabalhando outros registros também relacionados ao objeto de estudo, e alinhando com o material fornecido pelo governo de São Paulo.

A partir da análise dos resultados, o autor verificou que a música é uma boa alternativa para ensinar números racionais, com a mobilização e coordenação dos registros de representação semiótica, e que naturalmente cria-se os registros pelo tratamento e a conversão.

Melo (2019) teve por objetivo em sua dissertação *Conversões entre representações de números racionais: limites e possibilidades no uso de material manipulável*, analisar limites e possibilidades no uso de material manipulável em conversões entre representações de números racionais realizadas por alunos do 8º e 9º ano do ensino fundamental. O experimento piloto foi realizado no contexto do jogo Corrida dos Racionais para que os alunos promovessem conversões entre representações do número racional a partir de materiais manipuláveis, na qual foram aplicadas 21 atividades de conversão possíveis durante uma partida com o jogo Corrida dos Racionais. E para isso, o autor utilizou um conjunto de concretos chamados de Lab, que são quatro elementos manipuláveis do jogo: o disco de frações, a régua numérica, pastilhas plásticas e o material dourado adaptado. Com o objetivo de otimizar nosso tempo e obter um registro mais detalhado das ações dos alunos, o autor optou por não jogar, mas apenas usar os exercícios que poderiam surgir durante uma partida.

Os resultados do experimento piloto sugeriram que o uso dos materiais manipuláveis auxiliou na resolução das atividades de conversão entre representações dos racionais propostas. Por outro lado, os alunos não souberam como utilizar os materiais dispostos ou acabaram utilizando-os para "validar", através de demonstrações equivocadas, suas respostas incorretas. No entanto, de acordo com as observações do pesquisador, as dificuldades que os alunos apresentaram não estavam relacionados ao uso manipulável do material, mas sim a falta de conhecimento dos conceitos matemáticos, pois não teve acertos sem a utilização do material.

O autor conclui que a utilização de materiais manipuláveis pode favorecer a introdução de exercícios envolvendo as conversões entre representações semióticas do número racional, e também explorar também as representações figurativas concretas, a fim de que os alunos, sejam capazes de criar suas próprias estratégias resolutivas, o que, do ponto de vista cognitivo, é o que se espera.

2 OBJETIVOS

2.1 Objetivo geral

Investigar como a prática pedagógica no processo de letramento matemático, no ensino dos números racionais, pode contribuir na mobilização dos registros de representação semiótica.

2.2 Objetivos específicos

Os objetivos específicos deste trabalho são:

- Analisar historicamente o conceito de letramento matemático, assim como sua perspectiva na Base Nacional Comum Curricular (BNCC);
- Refletir sobre o conceito de número racional, a representação gráfica, oral e escrita dos elementos matemáticos, assim como suas aplicações, que são bases para o desenvolvimento do letramento matemático, relacionando com as dificuldades apresentadas pelos alunos;
- Analisar as sequências didáticas propostas no livro didático sobre Números Racionais, tendo como base os registros semióticos a fim de conscientizar os docentes sobre a importância de se ter uma visão crítica e detalhada sobre como o material didático pode contribuir ou não na coordenação dos registros semióticos;
- Analisar as sequências didáticas como recurso didático envolvendo registros semióticos referentes ao conceito matemático em estudo;
- Relatar sobre uma prática de letramento matemático ocorridas nas aulas de matemática, no âmbito de um projeto desenvolvido com uma turma do 6° ano, da escola estadual Dona Elisa de Campos Lima Novelli, da cidade de Itaporanga-SP.

3 JUSTIFICATIVA

De acordo com a BNCC, o Ensino Fundamental deve ter o compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático, de acordo com o PISA, define-se como:

> as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas (BRASIL, 2016, p. 264).

O conceito de letramento matemático é um grande aporte teórico, pois como o desenvolvimento dessas habilidades está ligado a forma como a aprendizagem matemática foi organizada com base nas situações da vida cotidiana, em outras áreas do conhecimento, assim como a da própria Matemática, devemos repensar sobre o que deve ser ensinado em cada ano/série, assim como quanto às metodologias a serem empregadas para tais objetivos que propunham esse ensino. E um dos grandes desafios para nós professores é tornar a Matemática acessível a todos.

Pensando no processo da constituição das aprendizagens, temos a escolha do conteúdo proposto inicialmente para os alunos do 6° ano sobre “Números”, levando em consideração o conceito de números racionais, a representação gráfica, oral e escrita dos elementos matemáticos, assim como suas aplicações, que são bases para o desenvolvimento do letramento matemático. Essa escolha se deve que os números racionais se apresentam como um grande desafio desde o início da sistematização escolar, e cabe a nós professores a tarefa de encontrar soluções oferecendo novos caminhos que possibilitam um ensino mais atraente e ao mesmo tempo atraente.

Sabemos que a Matemática se faz presente em nossa vida desde os primeiros anos, sendo parte essencial do nosso desenvolvimento e interação na sociedade

Há uma ligação muito forte entre a Matemática e à nossa língua materna, assim como também com as outras áreas do conhecimento, e conforme Machado (2001):

> (...) a Matemática e a Língua Materna representam elementos fundamentais e complementares, que constituem condição de possibilidade do conhecimento, em qualquer setor, mas que não podem ser plenamente compreendidos quando considerados de maneira isolada. (MACHADO, 2001, p. 83)

Além disso, a importância de aprender não está associada somente aos saberes matemáticos, mas a todas as áreas do conhecimento humano, pois

> A Matemática caracteriza-se como uma forma de compreender e atuar no mundo e o conhecimento gerado nessa área do saber como um fruto da

> construção humana na sua interação constante com o contexto natural, social e cultural. (BRASIL, 1998, p. 24)

Portanto, se faz necessário que o aluno se aproprie dos conceitos a serem estudados a fim de possa mudar a sua realidade, e isso só acontece, a partir da construção do conhecimento.

O ensino dos números racionais é de grande importância pois de grande necessidade para resolver determinados problemas enfrentados no contexto diário, em que está implícita a relação de uma parte do todo, ou metade de uma quantidade, entre outros, ou até mesmo em situações diárias em que usamos medidas e sistemas monetários.

O ensinar matemática nos leva a refletir como fazer com que o aluno compreenda o conteúdo e se aproprie deste conceito. Mas antes disso, é necessário que o professor também se aproprie do conteúdo para que possa desenvolver estratégias de ensino a fim de ressaltar a importante deste, para o desenvolvimento cognitivo do aluno.

Segundo Caraça (2005, p. 29), medir e contar são "as operações cuja realização a vida de todos os dias exige com maior frequência". E temos vários exemplos do nosso dia a dia que nos levam a refletir essa afirmação, como a construção de uma casa, medir o quanto de material é necessário, a enfermeira ao administrar a dosagem do remédio, o atendente do caixa de um mercado ao dar o troco, entre outros exemplos. Sendo assim, todos têm a necessidade em algum momento da vida de medir e contar.

Pela história da matemática, sabemos que os números naturais surgiram pela necessidade de contar. No entanto, isso começou a ser insuficiente quando se depararam com situações que exigiam por exemplo saber quantos vezes uma grandeza cabe dentro da outra. Surgindo assim a necessidade de ampliar os números naturais.

Na obra *Conceitos Fundamentais da Matemática*, Caraça (2005) apresenta os números racionais como complemento a esses problemas na qual os números naturais eram insuficientes. Na compreensão do conceito de número racional, é importante para o estudante, trabalhar com quantidades diferentes e perceber as diversas formas de representar um mesmo número. E ainda hoje, temos que o conteúdo sobre fração apresenta dificuldades na aprendizagem, no entanto, "seu estudo se justifica, entre outras razões, por ser fundamental para o desenvolvimento de outros conteúdos matemáticos (proporções, equações, cálculo algébrico)". (BRASIL, 1998, p. 103).

Muitos pesquisadores discutem a aprendizagem dos números racionais, nos diferentes níveis de ensino, a dificuldade que os alunos têm na aprendizagem do conceito de frações tem sido foco de inúmeras pesquisas. A maior parte delas se relaciona à apropriação do conceito, pois os alunos têm dificuldade para perceber a fração como um número. No entanto, "em que pese às relações entre números naturais e racionais, a aprendizagem dos números racionais supõe rupturas com ideias construídas pelos alunos acerca dos números naturais, e, portanto, demanda tempo e uma abordagem adequada”. (BRASIL, 1997, p. 67).

Além disso,

> É importante destacar que as situações de aprendizagem precisam estar centradas na construção de significados, na elaboração de estratégias e na resolução de problemas, em que o aluno desenvolve processos importantes como intuição, analogia, indução e dedução, e não atividades voltadas para a memorização, desprovidas de compreensão ou de um trabalho que privilegie uma formalização precoce dos conceitos. (BRASIL, 1998, p. 63)

Portanto para que o aluno consiga desenvolver competências para que ocorra uma aprendizagem significativa sobre o conteúdo dos números racionais, é preciso que as atividades propostas pelos professores tenham uma função incentivadora, e assim que eles aprendam agindo, refletindo e se comunicando matematicamente.

4 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Desenvolver um trabalho na perspectiva do letramento é um desafio para o professor no ensino da Matemática.

No entanto, talvez a sociedade tenha culturalmente em mente, que as práticas de leitura e escrita competem apenas ao ensino da Língua Portuguesa, porém esses aspectos de linguagem estão intimamente ligados ao processo de construção do indivíduo em todas as áreas do conhecimento, inclusive na Matemática, e sem o desenvolvimento dessas habilidades, o indivíduo pode ver-se impossibilitado de atribuir significados consistentes àquilo que lhe é imposto.

Além disso, identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta; observar aspectos quantitativos e qualitativos; resolver situações-problema; comunicar-se matematicamente; estabelecer conexões entre temas matemáticos; desenvolver sua autoconfiança no seu fazer matemático, são alguns dos objetivos presentes nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1997).

Dessa forma, trabalhar com o letramento no ensino da Matemático é uma alternativa para alcançar esses objetivos.

Segundo o PISA (Programa Internacional de Avaliação dos Estudantes):

> Letramento pode ser definido como a capacidade de um indivíduo se apropriar da escrita, sendo capaz de utilizá-la em diversas situações exigidas no cotidiano. Segundo os PCN, a aptidão para ler e produzir textos – dos mais variados gêneros e temas – com proficiência é o mais significativo indicador de um bom desempenho linguístico e, consequentemente, de letramento. Um escritor competente deve, portanto, saber selecionar o gênero apropriado a seus objetivos e à circunstância em que realizará seu discurso. (PISA, 2000, p. 71)

O Brasil passou a ter um olhar renovado sobre o desenvolvimento do letramento a partir dos anos 80, na qual o eixo principal para este trabalho era o processo de ensino/aprendizagem de língua materna, a diferença entre o estudo da língua e da nomenclatura gramatical e da linguagem e do texto, tendo como benefício a indicação de necessidade de medidas mais eficazes na política do livro didático.

De acordo com o Pisa (2000), o letramento matemático gera de uma combinação entre o conhecimento da terminologia, dos dados e dos procedimentos, para realizar operações e cumprir métodos, a fim de suprir as necessidades da vida cotidiana dos indivíduos. E de acordo com as competências, o aluno deve demonstrar capacidades de raciocínio, argumentação, comunicação, modelagem, colocação e solução de problemas, representação, uso de linguagem simbólica, formal e técnica, uso de ferramentas matemáticas.

Referente a questão de o aluno saber ler e interpretar um problema, temos o estudo das representações semiótica dos objetos matemáticos, que tem seus fundamentos nas pesquisas do francês Raymond Duval, na qual ele transpõe os conceitos gerais da semiótica com vista a estudar o pensamento cognitivo do aluno, de forma a aprimorar o ensino-aprendizagem da matemática. Duval aponta sobre a importância dos registros de representação, na qual menciona Duval (2003, p. 37, apud PAULO, 2019, p. 27) que os registros são "os graus de liberdade de que um sujeito pode dispor para objetivar a si próprio uma ideia ainda confusa, um sentimento latente, para explorar informações ou simplesmente para poder comunicá-las a um interlocutor". Dessa forma, vemos que as representações semióticas são maneiras que o indivíduo tem de evidenciar aquilo que está em seu cognitivo, ou seja, comunicar as suas ideias e objetos matemático do seu aprendizado.

No entanto, há dois tipos de transformações dos registros semióticos: os tratamentos e as conversões. O tratamento é transformar um mesmo tipo de registro em duas transformações diferentes, como por exemplo nos números complexos temos o registro algébrico, e quando fazemos uma operação de adição obtemos como resultado um número complexo na forma algébrica também, ou seja, mantemos o mesmo tipo de registro. Já a conversão é transformar um registro em um outro tipo de registro, como por exemplo nos números complexos é transformar o registro algébrico em registro geométrico.

Porém, segundo Duval, podemos observar problemas na aprendizagem dos alunos quando ocorre entraves nas suas representações semióticas do objeto matemático, que é o momento em que o aluno expõe a sua facilidade ou não com o objeto estudado. E isso pode estar relacionado com o fenômeno da congruência entre os registros de representação que ocorre em toda transformação de conversão das representações semióticas, ou seja, as unidades significativas de cada representação que são correspondidas. Duas representações possuem um grau elevado de congruência quando se nota três critérios segundo Duval (2009, p. 68-69):

> [...] O primeiro é a possibilidade de uma correspondência "semântica" dos elementos significantes: a cada unidade significante simples de uma das representações, pode-se associar uma unidade significante elementar. [...] O segundo critério é a univocidade "semântica" terminal: a cada unidade significante elementar da representação de partida corresponde uma só unidade significante elementar no registro da representação de chegada. [...] O terceiro é o critério de correspondência na ordem dentro da organização das unidades compondo cada uma das duas representações é pertinente apenas quando estas apresentam o mesmo número de dimensões. (apud PAULO, 2019, p. 34).

Segundo Duval (2003), a conversão é muitas vezes considerada como uma associação preestabelecida entre nomes e figuras, e consequentemente considerada como uma forma simples de tratamento, o que não é verdade. De acordo com o autor, as dificuldades na realização das conversões que influenciam no processo do ensino-aprendizagem estão ligas com o fenômeno da congruência. A realização de conversões, segundo Duval, pode ser mais complexa ou menos complexa dependendo desse fenômeno.

Para ilustrar o fenômeno congruência, vamos a um exemplo de um objeto matemático:

Quadro 5 – Exemplo de fenômeno de congruência Língua natural (registro de partida)

Língua natural (registro de partida)	**Registro algébrico (registro de chegada)**
Eleve ao cubo a incógnita x, e adicione três vezes a incógnita e obtenha o resultado igual a zero.	$x^3 + 3x = 0$

Fonte: Arquivo pessoal

O primeiro critério é a correspondência semântica entres as unidades significativas, nesse exemplo, temos as unidades “eleve”, “incógnita”, “adicione”, “vezes” e “igual”, que tem relação direta com a equação representada. No segundo critério de univocidade semântica, temos que cada palavra do registro de partida tem uma única representação algébrica no registro de chegada. No terceiro critério de ordem de apreensão entre as unidades nas duas representações, temos que se o estudante não compreende que a palavra “incógnita” se converte para outra unidade significativa (no caso x), mas poderia ser qualquer outra letra, nesse caso temos um problema de ordem.

Portanto, temos que a congruência está ligada ao desenvolvimento cognitivo do aluno, pois é preciso que o objeto matemático não seja confundido com suas representações e que seja reconhecido em cada uma delas.

De acordo com os aspectos de registro semiótico, podemos analisar se os alunos apresentam dificuldades nas transformações de tratamento e de conversão dos registros, e que esse momento de transformação de seus registros evidenciam o cognitivo do indivíduo, pois revela quais são suas ideias em relação ao objeto matemático em estudo, e também acaba por evidenciar quais são as suas dificuldades e o processo de desenvolvimento do aluno.

Portanto, a observação dos registros semióticos dos alunos contribui na linha de ensino-aprendizagem que o professor deve adotar para sanar as dificuldades destes, pois quando se observa aos problemas em relação ao aprendizado da matemática, vemos um entrave nas diversas representações semióticas dos estudantes.

No desenvolvimento deste projeto teremos como análise o conceito de número racional.

O conceito dos números racionais data de cerca de 3.000 a. C, no Antigo Egito, e surgiu da necessidade de representar partes de um inteiro. Durante os períodos de inundações do Rio Nilo, muitas terras ficavam submersas, recebendo nutrientes e tornando-se férteis para a agricultura. Quando as águas baixavam, era necessário remarcar os limites entre os terrenos de cada proprietário, inclusive para fins econômicos, a fim de permitir a correta arrecadação de impostos. Cercas ou marcos ficavam submersos anualmente durante a época das cheias, exigindo, assim, um método mais abstrato de delimitação.

Os registros históricos a respeito dos números racionais fazem referência ao faraó Sesóstris, que, segundo o historiador Heródoto teria realizado

> [...] a partilha das terras, concedendo a cada egípcio uma porção igual, com a condição de lhe ser pago todos os anos um certo tributo; se o rio carregava alguma parte do lote de alguém, o prejudicado ia procurar o rei e expor-lhe o acontecido. O soberano enviava agrimensores ao local para determinar a redução sofrida pelo lote, passando o dono a pagar um tributo proporcional à porção restante. (COSTA, 2010, p. 06)

No entanto, por mais eficientes que tentassem ser, não encontravam um número inteiro para representar tais medidas, o que os levou à utilização de frações. Assim, o conjunto dos números racionais engloba todos os números fracionários e os números decimais.

Em relação ao público-alvo do estudo, o 6° ano, temos que de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2018), o conteúdo sobre Números Racionais, segue a seguinte organização:

- Unidade temática: Números
- Objeto de conhecimento:

Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações;

Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números racionais.

- Habilidades:

— (EF06MA07) - Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes.

— (EF06MA08) - Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica.

— (EF06MA09) - Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora.

— (EF06MA10) - Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.

— (EF06MA11) - Resolver e elaborar problemas com números racionais positivos na representação decimal, envolvendo as quatro operações fundamentais e a potenciação, por meio de estratégias diversas, utilizando estimativas e arredondamentos para verificar a razoabilidade de respostas, com e sem uso de calculadora.

De acordo com os Parâmetros Nacionais Curriculares (BRASIL, 1997), conhecer diversas possibilidades de trabalho, em sala de aula, é fundamental para que o professor construa sua prática. O ensino de Matemática terá maior desenvolvimento à medida que forem exploradas metodologias que priorizem a criação de estratégias, a comprovação, a justificativa, a argumentação, o espírito crítico e favoreçam a criatividade, o trabalho coletivo, a iniciativa pessoal e a autonomia advinda do desenvolvimento da confiança na própria capacidade de conhecer e enfrentar desafios.

No 6° ano do Ensino Fundamental II, o aluno deverá ser capaz de: comparar e ordenar Números Naturais, Inteiros e Racionais; reconhecer suas diferentes formas de expressão como fracionária, decimal e percentual; representar, na forma decimal, um Número Racional expresso em notação fracionária; efetuar cálculos envolvendo adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação; escolher adequadamente os procedimentos de cálculo (exato ou aproximado, mental ou escrito) em função dos contextos dos problemas, dos números e das operações envolvidas.

Assim, é preciso resolver situações-problema envolvendo Números Racionais, ampliando e consolidando os significados da adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação, além de selecionar e utilizar diferentes procedimentos de cálculo. Desse modo, é desejável que o professor proponha aos alunos a análise, interpretação, formulação e resolução de novas situações-problema, envolvendo Números Naturais, Inteiros e Racionais e os diferentes significados das operações e que valorize as resoluções aritméticas tanto quanto as algébricas (BRASIL, 1997).

Assim, torna-se fundamental que o aluno explore um bom repertório de problemas que lhe permitam avançar no processo de formação de conceitos de número. Como aponta a autora Fonseca (1997), na obra *Metodologia do Ensino da Matemática*:

> O ensino dos números racionais é amplo e complexo. Por isso, devem ser exploradas atividades que favoreçam a construção de conceitos, através das

> relações que estabelecem entre parte e todo, e que permitam novas descobertas. (FONSECA, 1997, p. 53)

No trabalho como professora de matemática em escolas públicas observo que os alunos apresentam dificuldades na compreensão de textos escritos, isso ocorre principalmente no uso do livro didático, onde, em algumas situações, eles não dominam a linguagem ali presente.

O livro didático é utilizado como um dos principais recursos de mediação entre o conteúdo matemático e os alunos, é colocado como um material de estudo importante, que orienta a proposta didática, sendo que muitas vezes o professor elabora todo o seu plano de aula a partir das unidades do livro didático adotado.

Dessa forma, o livro pode auxiliar o aluno a incorporar essa linguagem matemática, ao mesmo tempo em que o aluno reorganiza seu raciocínio no sentido de compreender os novos conceitos apresentados. Assim, as formas de uso do livro didático, a linguagem e o saber matemático estarão indissociáveis na prática pedagógica.

Percebe-se assim, a necessidade de o professor trabalhar com os registros de representação semiótica que aparecem no livro didático de forma coordenada, para que seus alunos se aproximem da efetiva apreensão dos conceitos matemáticos.

Neste trabalho, quando destaco a questão sobre a pesquisa na prática docente e sobre a mesma, temos um olhar de professor reflexivo, ou seja, uma visão de pesquisador, na qual tem por objetivo buscar nas suas pesquisas e teorias o suporte para questionar, problematizar e transformar a prática. E isso contribui para favorecer o desenvolvimento de sua ação pedagógica, tendo consciência das possibilidades e limitações de aplicações.

A teoria dos registros de representação semiótica, do pesquisador francês Raymond Duval, vem sendo utilizada em investigações relacionadas às representações de entes III Mostra de Pesquisa da Pós-Graduação – PUCRS, 2008 matemáticos. Para Duval (2003), um objeto matemático não pode nem deve ser confundido com sua representação, uma vez que não é acessível diretamente à percepção e nem à experiência intuitiva. Por essa razão, as atividades sobre o objeto matemático ocorrem sempre pela sua representação semiótica, sendo essa representação, portanto, essencial à atividade cognitiva.

Com base nas questões de pesquisa e com fundamentação teórica baseada, principalmente, na teoria de Duval, a pesquisa busca atingir alguns eixos como, investigar os diferentes significados dos números racionais; analisar as diferentes representações dos racionais, feitas pelos alunos; pesquisar as relações entre o significado dos racionais e as situações da vida cotidiana em que esses números são empregados.

Além disso, procura-se destacar a sequência didática como recurso didático, voltado ao ensino dos números racionais.

5 METODOLOGIA

Destinamos este capítulo para apresentar a opção metodológica, bem como o planejamento e aplicação de tarefas matemáticas para nossos alunos de uma turma do 6º ano, de uma escola da rede pública estadual do município de Itaporanga (SP), no qual assumimos o papel de professores-pesquisadores dos sujeitos da pesquisa.

Para responder à questão '*Como a prática pedagógica no processo de letramento matemático, no ensino dos números racionais, contribui na mobilização dos registros de representação semiótica?* '; norteadora desta pesquisa, a opção metodológica adequada é a pesquisa qualitativa por estarmos interessados em processos de raciocínio, representação e significação. Mais precisamente, estamos interessados em saber como nossos alunos interpretaram as tarefas propostas e, consequentemente, de que maneira a prática do professor pode contribuir ou não para a mobilização dos registros de representação semiótica dos números racionais, levando em consideração que o docente tenha um olhar crítico sobre os materiais e metodologias aplicadas em sala de aula.

O percurso qualitativo desta pesquisa é com base no estudo de campo, em que a produção de informações foi obtida via registros escritos das atividades desenvolvidas pelos alunos em aulas que aconteceram de forma remota síncrona e assincronamente.

Como docente a professora-pesquisadora ministrou a disciplina de matemática apenas para o 6º ano A, na condição de professora contratada pelo mesmo ano de desenvolvimento dessa pesquisa.

Utilizamos em sala de aula o livro didático *Araribá Mais Matemática 6º ano* e a apostila *Aprender Sempre*, como forma de recuperar e aprofundar os conteúdos, disponibilizados para a educação pública do Estado de São Paulo. O livro didático é inserido como apoio na apresentação dos conteúdos a serem tratados em sala de aula. Já a apostila é utilizada para as tarefas propostas em sala de aula, assim como lição de casa.

Sendo, portanto, o livro didático um apoio ao trabalho docente, optou-se por uma análise do livro utilizado, a fim de mostrarmos como é de fundamental importância que o professor tenha conhecimento do material que está utilizando a fim de verificar se o mesmo condiz com suas práticas em sala de aula e auxilie no desenvolvimento da aprendizagem em sala de aula, mobilizando os registros da representação semiótica dos números racionais.

Busca-se nesse trabalho analisar a linguagem e identificar suas características no livro didático *Araribá Mais Matemática, 6º ano*, na qual encontra-se de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), segue referenciado:

GAY, Mara Regina Garcia; SILVA, Willian Raphael. **Araribá Mais Matemática, 6° ano.** Editora Moderna (org). 1 ed. São Paulo: Moderna, 2018.

Pretende-se nessa análise, ter como aporte teórico os Registros de Representação Semiótica, de Duval, a fim de fazer uma análise curricular do material, analisando e reformulando questões de acordo com os critérios de congruência, com o objetivo de buscar estratégias que auxiliem o professor a utilizar os livros, no sentido de o aluno ter mais facilidade em se apropriar da linguagem ali presente.

Esta análise caracteriza-se como um estudo de abordagem cognitiva que se volta para a análise da importância dos registros de representação semiótica para a aprendizagem em Matemática. A ideia de representação semiótica é entendida como produções constituídas pelo emprego de signos, utilizadas para expressar, objetivar e tratar as representações mentais, isto é, o conjunto de concepções de um indivíduo acerca de um objeto ou situação.

O apoio nessa teoria nos oferece contribuições significativas tanto em aspectos conceituais, para que se entenda como se dá a aquisição do pensamento matemático, como metodológicos, possibilitando a reflexão acerca das maneiras de ensinar, no sentido de encontrar alternativas concretas para o ensino de Matemática. Em outras palavras, encontramos nessa teoria elementos que fundamentam tanto as aprendizagens matemáticas, como para refletir-se sobre o ensino da referida disciplina.

Participaram dessa pesquisa 31 alunos do Ensino Fundamental II da escola estadual Dona Elisa de Campos Lima Novelli, da cidade de Itaporanga-SP.

Como a escola está inserida em um contexto na qual a maioria dos alunos não possuem acesso a internet, e devido a pandemia do COVID-19, as aulas aconteceram de forma síncrona para os alunos que possuíam acesso a internet, e de maneira assíncrona aos que não possuíam, na qual disponibilizava vídeos de aulas gravadas explicando o conteúdo no grupo de WhatsApp da sala.

As observações das aulas foram feitas baseadas em aspectos conceituais, da relação do aluno com os conceitos matemáticos e a Teoria dos Registros de Semiótica; aspectos didático-metodológicos, ou seja, a contribuição do livro em relação ao tratamento do objeto matemático segundo Duval, assim como uma aplicação de uma sequência didática elaborada pela pesquisadora; e aspectos sociais/interacionais, isto é, a participação dos alunos.

Busca-se observar desses elementos dialogados com a Teoria de Representação dos Registros de Semiótica para a análise das práticas docentes, considerando se há diversidade de registros de representação no livro didático e se eles são explorados de forma coordenada.

O fato de poder escolher na aplicação da sequência didática, diferentes tipos de representações dos números racionais para iniciar o conteúdo, poderá possibilitar que os alunos se se aproximem do conceito abordado, pois de acordo com Duval, o trabalho com um objeto matemático deve transitar por pelo menos dois registros diferentes, pois possibilita que o aluno perceba a diferença e não confunda representante e representado.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e o documento preliminar da Base Nacional Curricular Comum (BNCC) apontam para a necessidade de uso integrado de diferentes representações ao abordar esse objeto matemático. Nesse sentido observamos como os estudantes do 6º ano resolvem atividades referentes a conversão entre diferentes representações dos números racionais sob a ótica dos registros de representação semiótica e, investigar quais significados dos números racionais são explorados nas atividades apresentadas no livro de matemática destinados ao 6º anos do ensino fundamental pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD 2020), bem como, quais representações semióticas são privilegiadas e quais transformações são propostas

Ao findar da pesquisa é esperado que as análises realizadas revelem que no livro de matemática, lançado atualmente com a Base Nacional Comum Curricular, são propostas atividades que potencializam os significados e representações dos números racionais que, por sua vez, podem levar os alunos a uma ampla compreensão desse conjunto numérico, e se isso não acontecer, mostrar possíveis alterações que podem ser feitas, assim como sugestões de sequencias didáticas. Além do mais, esperamos contribuir com reflexões sobre a importância de conhecer e compreender todos os contextos em que os racionais se fazem presentes e de refletir sobre seus significados e representações dentro de uma variedade de situações. Ao discutir e divulgar essas ideias visamos uma melhoria nos processos de ensino e aprendizagem dos números racionais.

6 LETRAMENTO MATEMÁTICO

Refletindo sobre o interesse como docente, em formar cidadãos letrados, temos que o letramento está ligado a teoria e a metodologia como prática pedagógica a fim de atingir os objetivos a qual se propõe, assim como os direitos de aprendizagem dos alunos no Ensino Fundamental.

A fim de discutirmos o conceito de letramento matemático, vamos analisar primeiramente o conceito de letramento para associarmos as concepções da Educação Matemática.

O termo letramento quando foi inserido no contexto educacional, causou algumas dúvidas em relação ao seu conceito e processo, pois alguns professores consideravam que o letramento era um tipo de método didático para ajudar na alfabetização, e outros consideravam que letramento e alfabetização significavam a mesma coisa.

Ao pensarmos na inserção do termo letramento no ambiente educacional, podemos dizer que é um termo recente. Conforme Soares (2009):

> esse termo parece ter sido usado pela primeira vez no país no ano de 1986 por Mary Kato, no livro “No mundo da escrita: uma perspectiva psicolinguística”. Como parte de título de livro, o termo apareceu no ano de 1995 nos livros “Os significados do letramento”, organizado por Angela Kleiman e “Alfabetização e Letramento”, de Leda V. Tfouni. (SOARES, 2009, p. 33 apud GRANDO, 2012, p. 2).

O termo surgiu de acordo com as necessidades da época, na busca por respostas em relação as altas taxas de repetência e analfabetismo. E a sua busca veio da palavra inglesa *literacy* que significa *condição de ser letrado*, sendo do mesmo campo semântico que a palavra inglesa *literate*, que significa pessoa que domina a leitura e a escrita. Portanto, a palavra letramento veio para explicar a fase em que o aluno se encontra alfabetizado, que ela saiba ler e escrever. Como as práticas docentes foram se modificando a fim de superar as altas taxas de reprovação e analfabetismo na época, houve a necessidade de incorporar um termo que traduzisse qual era a nova fase dos alunos que superavam esses índices, para um resultado melhor, na qual além de evidenciar o domínio da leitura escrita, passou a considerar também o viver dos alunos.

E isso acabou por mostrar que a medida que uma sociedade vai sendo alfabetizada (leitura e escrita), mostrasse a necessidade de aplicar essas ações a fim de desenvolverem as práticas sociais.

De acordo com Soares citada por Morais e Albuquerque (2007, p. 47):

> Alfabetizar e letrar são duas ações distintas, mas inseparáveis do contrário: o ideal seria alfabetizar letrando, ou seja, ensinar a ler e escrever no contexto das práticas sociais da leitura e da escrita, de modo que o indivíduo se tornasse ao mesmo tempo alfabetizado e letrado.

Com isso surge o alfabetizar letrando, ou seja, ensinar a ler e a escrever com as práticas sociais, a fim de que o aluno seja alfabetizado e letrado.

Portanto, ao indagarmos em relação ao conceito de letramento, não temos apenas uma única definição para o termo, pois segundo Soares (2009) as

> [...] dificuldades e impossibilidades devem-se ao fato de que o letramento cobre uma vasta gama de conhecimentos, habilidades, capacidades, valores, usos e funções sociais; o conceito de letramento envolve, portanto, sutilezas e complexidades difíceis de serem contempladas em uma única definição. (SOARES, 2009, p. 65 apud GRANDO, 2012, p. 4).

Para Goulart (2001), o conhecimento possui diversos valores atribuídos na perspectiva cultural e social, e que "as formas como esses conhecimentos se cruzam, aproximando-se e afastando-se, ao mesmo tempo, geram necessidades cada vez mais urgentes de se continuar repensando, entre muitas outras questões (...) a prática pedagógica discursiva" (GOULART, 2001, p. 5 apud GONÇALVEZ, p. 2)

Ainda a pesquisadora destaca que existem algumas questões como a dificuldade de conceituar o letramento, pois há uma "falta de condição de definir critérios para avaliar ou estabelecer diferentes níveis de letramento" (Goulart, 2001, p. 6 apud GONÇALVEZ, p. 2-3). Destaca-se que o letramento está ligado as práticas orais e escritas, ou seja, a linguagem de uma sociedade.

Há uma conceituação de letramento matemático feita por Goulart (2001) em que:

> Estamos aqui entendendo as orientações de letramento como o espectro de conhecimentos desenvolvidos pelos sujeitos nos seus grupos sociais, em relação com outros grupos e com instituições sociais diversas. Este espectro está relacionado à vida cotidiana e a outras esferas da vida social, atravessadas pelas formas como a linguagem escrita as perpassa, de modo implícito ou explícito, de modo mais complexo ou menos complexo. (Goulart, 2001, p. 10 apud GONÇALVEZ, p. 3).

Como mencionado anteriormente, Soares (2002) reafirma a imprecisão na conceituação do termo letramento, pois é recente sua aplicação na área da educação e existem muitas ênfases na caracterização do conceito. Ela destaca sobre a diferenciação na conceituação de Tfouni e Kleiman. Segundo Soares (2002), "Tfouni toma, para conceituar letramento, o impacto social da escrita, que, para Kleiman, é apenas um dos componentes desse fenômeno; Kleiman acrescenta a esses outros componentes, também as próprias práticas sociais de leitura e escrita e os eventos em que elas ocorrem" compondo assim, o conceito de letramento.

Dessa forma, Soares (2002) caracteriza o conceito de letramento como sendo

> o estado ou condição de indivíduos ou de grupos sociais de sociedades letradas que exercem efetivamente as práticas sociais de leitura e de escrita, participam competentemente de eventos de letramento. O que está concepção acrescenta (...) é o pressuposto que indivíduos ou grupos sociais que dominam o uso da leitura e da escrita e, portanto, têm as habilidades e atitudes necessárias para uma participação ativa e competente em situações em que práticas de leitura e/ou escrita têm uma função essencial, mantêm com os outros e com o mundo que os cerca formas de interação, atitudes, competências discursivas e cognitivas que lhes conferem um determinado e diferenciado *estado* ou *condição* de inserção em uma sociedade letrada" (SOARES, 2002, p. 2).

Dessa forma, Soares afirma que o letramento é contrário ao analfabetismo, pois por mais que ambos caracterizam o estado ou condição de quem não é analfabeto, a análise da fase do sujeito na qual se encontra o conceito de letramento, oferece uma oportunidade extremamente favorável para torná-lo mais claro e preciso.

E ainda segundo Soares (2002) "estamos vivendo hoje, a introdução na sociedade, de novas e incipientes modalidades de práticas sociais de leitura e de escrita, propiciadas pelas recentes tecnologias de comunicação eletrônica [acrescentaríamos também a armazenagem de dados] - o computador, a rede (a *web*), a Internet". Para a autora é um momento ideal estabelecer uma discussão sobre as diferenças entre as práticas de leitura e escrita digitais e o letramento na cultura do papel, reiterando a associação entre letramento e língua escrita.

Pensando novamente na relação da alfabetização e do letramento, temos que os dois conceitos explicam o processo de leitura e escrita de um indivíduo, abrangendo o universo das letras. Porém eles não estão intimamente ligados a área da língua portuguesa, eles também contribuem para a compreensão das outras áreas, como a Matemática.

Soares (2004) explica que:

> é necessário reconhecer que alfabetização – entendida como a aquisição do sistema convencional de escrita – distingue-se de letramento – entendido como o desenvolvimento de comportamentos e habilidades de uso competente da leitura e da escrita em práticas sociais: distinguem-se tanto em relação aos objetos de conhecimento quanto em relação aos processos cognitivos e linguísticos de aprendizagem e, portanto, também de ensino desses diferentes objetos. (SOARES, 2004, p.)

A matemática não é apenas caracterizada por um conjunto de signos e símbolos, e vai além de fórmulas, contar e atribuir formas aos objetos. Assim como qualquer outro elemento, se faz necessário compreendê-la, ou seja, só é possível acompanhar um pensamento se compreender outro.

Os conceitos de alfabetização e letramento são contrários, pois a alfabetização é o processo de aquisição de uma informação por meio de uma técnica, e o letramento corresponde à compreensão dessa técnica. Porém são indispensáveis e indissociáveis.

Podemos pensar que a alfabetização matemática ocorre diariamente, pois sempre estamos aprendendo técnicas ou conceitos relacionados ao seu uso, porém não é porque conhecemos uma técnica que sabemos realmente aplicá-la em um meio social.

Como exemplo temos a multiplicação, na qual muitos apenas decoram a tabuada (uma técnica de alfabetização), porém, isso não traz elementos significativos para quem estuda; faz-se necessário abranger o processo de construção da tabuada, a falta de compreensão pode ocasionar dificuldades em outros elementos.

Assim, faz-se necessário o letramento, visto pela pesquisadora Magda Soares (2004) como um momento de reflexão da técnica (alfabetização) e de como os conceitos apreendidos serão utilizados em meio social e individual, ou seja, é quando se tem consciência que a matemática não se resume a uma sistematização de técnicas,

> no que se refere à alfabetização matemática, percebemos que a ela se atribui o aprender a ler e a escrever códigos, sistemas, noções básicas de lógica, aritmética, geometria, tendo, sempre, como forma de registro a linguagem da matemática formal. Entretanto, diante da demanda exigida ao indivíduo pela sociedade contemporânea, ser alfabetizado significa saber ler, escrever, interpretar textos e possuir habilidades matemáticas que façam agir criticamente na sociedade (GALVÃO, NACARATO, 2013. p. 83-84).

Temos então que,

> desta forma, talvez a alfabetização matemática não seja capaz de suprir tal necessidade; pois possuir tais habilidades significa ser letrado, ou seja, entender, e saber aplicar práticas de leituras, escrita matemática e habilidades matemáticas para resolver problemas não somente escolares, mas de práticas sociais como: saber ler e interpretar gráficos e tabelas, fazer estimativas, interpretar contas de luz, telefone, água, e demais ações relacionadas aos diferentes usos sociais (GALVÃO, NACARATO, 2013, p. 83-84).

Portanto, reafirmamos que a alfabetização e o letramento matemático são elementos indissociáveis e indispensáveis para a compreensão e efetivação de um pensamento lógico-matemático de qualidade, na qual é necessário objetivá-los e fundamentá-los com práticas claras e objetivas.

A proposta sobre a alfabetização e o letramento matemático se desenvolve como contribuição para uma prática educacional de qualidade.

O termo *numeramento*, também é utilizado na literatura nacional e internacional (DAVID, 2004).

David (2004) coloca como similares, a *alfabetização matemática* e o *numeramento*. Este último como

> um à vontade com os números e uma capacidade para usar competências matemáticas que possibilitam ao indivíduo enfrentar as demandas matemáticas práticas do seu cotidiano. A segunda é uma capacidade de apreciação e compreensão das informações apresentadas em termos matemáticos, por exemplo, gráficos diagramas ou tabelas ou por referência a aumentos e reduções percentuais. (op. cit.:68).

No entanto, fazemos o uso da terminologia *letramento matemático* considerando que, tanto no Brasil como em outros países, ele também é utilizado e, principalmente, que o mais importante são as concepções e propostas de reflexão e ação que ele possa suscitar, assim como as diversas interfaces que possui com o conceito de alfabetização e letramento utilizados no estudo da língua.

Machado (2003), em sua tese de doutorado, faz uma busca "pelo significado da escrita da Matemática na prática de ensinar e no processo de aprendizagem, a partir das experiências vividas por professores, nos oferecidas por meio de seus depoimentos sobre o objeto interrogado" (Machado, 2003, p. 2). Em seu trabalho, de base fenomenológica e com abordagem qualitativa, o pesquisador identificou três categorias de significados para o fenômeno interrogado: "Realização da linguagem na Matemática" "Letramento matemático", "Aparecimento da Matemática para o aluno". E a partir de diversos autores, faz uma análise das noções de alfabetização e letramento chegando ao conceito de letramento matemático.

> (...) podemos explicitar nosso entendimento para "l*etramento matemático*" como expressão da categoria que estamos a interpretar, como: um processo do sujeito que chega ao estudo da Matemática, visando aos conhecimentos e habilidades acerca dos sistemas notacionais da sua língua natural e da Matemática, aos conhecimentos conceituais e das operações, a adaptar-se ao raciocínio lógico-abstrativo e dedutivo, com o auxílio e por meio das práticas notacionais, como de perceber a Matemática na escrita convencionada com notabilidade para ser estudada, compreendida e construída com a aptidão desenvolvida para a sua leitura e para a sua escrita. (MACHADO, 2003, p. 135).

Analisando a citação anterior, percebemos que Machado fortalece sua conceituação com elementos "notacionais" e operacionais da Matemática, buscando na leitura e na escrita sua principal estrutura de formação.

Ao analisarmos a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a Matemática vai além dos cálculos, na qual faz-se necessário o raciocínio e a argumentação para o entendimento do conteúdo. O sujeito matematicamente letrado faz uso dos conceitos para a leitura de mundo. E de acordo com a BNCC, o Ensino Fundamental tem o compromisso de desenvolver o letramento matemático, que é definido

> como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. É também o letramento matemático que assegura aos alunos reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (fruição). (BRASIL, 2018, p. 266).

Trabalhar na perspectiva que prevê a BNCC sobre o letramento matemático nos leva a destacar o esforço dos alunos e a refletir sobre o processo de ensino-aprendizagem, na qual o saber matemático está diretamente relacionado à construção do raciocínio e à argumentação.

Na BNCC, o letramento é uma aprendizagem essencial que deve compor currículos e propostas pedagógicas, em que a escola deve proporcionar condições didáticas para que o aluno desenvolva as habilidades de raciocinar, usar conceitos e ferramentas para argumentar matematicamente dentro e fora da sala de aula. E para isso faz-se necessário que as propostas didáticas permitam trabalhar as diversas representações do objeto matemático em estudo, dando oportunidade de investigação, sendo desafiadoras e acessíveis, na qual o aluno consiga argumentar de maneira convincente e construtiva.

Quando pensamos em formar alunos letrados em Matemática, devemos ter em mente que é necessário incentivar a sua participação em sala de aula, que consigam ser autônomos interagindo e elaborando conjecturas e hipóteses, construindo respostas significativas a fim de formular conceitos e até mesmo identificar possíveis erros. Sendo assim, o professor deve estar atento criar situações investigativas com boas perguntas, ouvir as respostas, e provocar o aluno, intervindo quando necessário de maneira construtiva.

Na BNCC temos que o raciocínio, a representação, a comunicação e a argumentação são essenciais para o desenvolvimento do letramento matemático. Portanto, o letramento matemático vai além do saber ler e escrever, sendo um sentido mais amplo, é necessário entender e saber aplicar as práticas de leitura e da escrita matemática a fim de resolver problemas, tanto escolares, quanto do cotidiano.

Ao relacionarmos o letramento matemático com o ensino dos números racionais, primeiramente analisemos o que a BNCC menciona sobre o conceito de números no ensino:

> (...) tem como finalidade desenvolver o pensamento numérico, que implica o conhecimento de maneiras de quantificar atributos de objetos e de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades. No processo da construção

> da noção de número, os alunos precisam desenvolver, entre outras, as ideias de aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem, noções fundamentais da Matemática. Para essa construção, é importante propor, por meio de situações significativas, sucessivas ampliações dos campos numéricos. No estudo desses campos numéricos, devem ser enfatizados registros, usos, significados e operações. (BRASIL, 2018, p. 268).

Dessa forma, pensando na questão de que o letramento leva em consideração o histórico sociocultural, compreendendo a realidade e constituído pelo pensar e a construção dos conhecimentos para as necessidades do sujeito, faz-se necessário que o aluno entenda o conceito de número a partir de tarefas que se aproximem da sua realidade, como destacado pela BNCC, demonstrar ao aluno que os números naturais não são suficientes para resolver todas as medições, indicando a necessidade dos números racionais com diferentes representações.

De acordo com a BNCC, no Ensino Fundamental-Anos Iniciais, espera-se que:

> os alunos resolvam problemas com números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, envolvendo diferentes significados das operações, argumentem e justifiquem os procedimentos utilizados para a resolução e avaliem a plausibilidade dos resultados encontrados. No tocante aos cálculos, espera-se que os alunos desenvolvam diferentes estratégias para a obtenção dos resultados, sobretudo por estimativa e cálculo mental, além de algoritmos e uso de calculadoras. (BRASIL, 2018, p. 268).

E ainda nessa etapa:

> o desenvolvimento de habilidades no que se refere à leitura, escrita e ordenação de números naturais e números racionais por meio da identificação e compreensão de características do sistema de numeração decimal, sobretudo o valor posicional dos algarismos. Na perspectiva de que os alunos aprofundem a noção de número, é importante colocá-los diante de tarefas, como as que envolvem medições, nas quais os números naturais não são suficientes para resolvê-las, indicando a necessidade dos números racionais tanto na representação decimal quanto na fracionária. (BRASIL, 2018, p. 268-269).

Já para o Ensino Fundamental-Anos Finais, espera-se que:

> os alunos resolvam problemas com números naturais, inteiros e racionais, envolvendo as operações fundamentais, com seus diferentes significados, e utilizando estratégias diversas, com compreensão dos processos neles envolvidos. (BRASIL, 2018, p. 269).

Assim, em relação ao conceito de número com o letramento matemático, temos que diante de situações cotidianas os alunos constroem hipóteses sobre o significado dos números e elaboram conhecimentos sobre as escritas numéricas da maneira como fazem em relação a língua escrita, e desenvolvam o pensamento lógico-matemático.

Para desenvolver as competências e habilidades é de grande importância as interações/mediações que possibilitam a consolidação do aprendizado, e desenvolvimento do sujeito aprendiz.

Faz-se necessário ter um bom planejamento e uma boa metodologia a fim de mobilizar e desenvolver o letramento matemático no ensino dos números racionais, a fim do aluno ter a capacidade de usar as habilidades na realização das tarefas, considerando as diversificadas práticas socioculturais de leitura, escrita, interpretação, argumentação, visualização e raciocínio que envolvem os sujeitos no contexto escolar e fora dele.

7 PERSPECTIVA HISTÓRICA DOS NÚMEROS RACIONAIS

Neste capítulo, vamos apresentar uma perspectiva histórica sobre os números racionais, desde os surgimentos dos números, com os diferentes sistemas numéricos que antecederam a história até chegarmos na atual representação dos números racionais.

7.1 Surgimento dos números

Pesquisadores a partir de suas explorações, indagam que não os números, mas sim a necessidade de contar, já existia a cerca de 30.000 anos atrás. Uma época em que os homens sobreviviam se alimentando da caça e de folhas e raízes, e vivam em cavernas para se proteger do frio.

O conceito de número, assim com tudo o que existe na Matemática, surgiu mediante as práticas e vivências sociais do homem, assim como também das experiências cientistas.

No entanto, há cerca de 10.000 anos atrás, o homem começou a aprimorar suas maneiras de obter alimento, e então começou a plantar o seu próprio alimento e também a criar animais, e além disso, começaram a se reunir em grupos, surgindo as aldeias.

Como para cultivar a plantação, era necessário saber a melhor época do ano, quais seriam as estações, ter noção de tempo, assim como também, saber a quantidade de animais que possuía em seu rebanho para que não perdesse nenhum, a contagem continuou sendo importante. Mas como fariam para conseguir contar os animais e as estações do ano?

Um dos instrumentos utilizados foram as pedras, nas quais o pastor correspondia cada pedrinha com uma ovelha de seu rebanho, na qual ele colocava dentro de um saco de acordo com a saída de ovelhas para o pasto, e retirava uma pedrinha a cada ovelha que recolhia. Mas se sobrasse alguma pedra, isso era sinal de alguma ovelha havia se perdido pelo caminho.

Outros instrumentos, além das pedras, também eram utilizados para contar, tais como gravetos, folhas secas, sementes e os dedos das mãos e dos pés. Isso fez que os povos agrupassem quantidades de dez em dez, usando os dedos das mãos ou dos pés, ou então a soma dos dois, agrupando vinte.

Num primeiro momento, não havia o conceito de número, referia-se na verdade a diferentes palavras, como “duas pedras”, ou seja, número era um nome. Mais a frente, notaram que os instrumento utilizadas até então, não eram suficientes para contar, pois as quantidades haviam aumentado, seja os alimentos do plantio, as pessoas, as medições de terra, assim como também surgiram as guerras e os impostos, então, assim, deu-se origem ao número natural, na qual as civilizações criaram uma forma de linguagem escrita com símbolos para o número natural, surgindo assim o sistema numérico.

Os sistemas numéricos correspondiam a um conjunto de símbolos, com algumas regras a fim de contar e representar os números.

Para nós, hoje, a contagem consiste em relacionar os objetos contados com o conjunto {1, 2, 3, 4, 5, ...}. Mas para se chegar nessa forma, foi-se necessário relacionar o conceito abstrato de número e uma representação para ele. E não foi tão fácil, pois, anteriormente, contava-se somente até dois, e a partir daí falava-se “muito” ou “incontáveis”.

7.2 Sistema de numeração antigo

As diferentes linguagens empregadas pelos povos antigos foram de grande importância para a mudança da numeração para o número, ou seja, aquilo que era considerado como meios de se expressar, os símbolos (numeração), passou a representar as quantidades pelo número.

Os primeiros sistemas de numeração formavam os numerais pela repetição de símbolos básicos e pela soma de seus valores, como por exemplo, os sistemas egípcio, grego e romano.

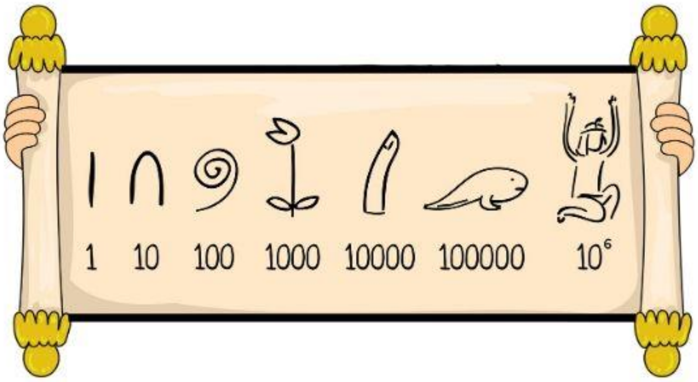
Vamos entender como eram as características dos sistemas de numeração, e sua evolução, até chegarmos no sistema no qual representamos os números.

7.2.1 Numeração Egípcia

A história da Matemática sempre esteve muito presente no Egito, principalmente devido a descoberta do Papiro de Rhing, com 85 problemas, e do Papiro de Moscou com 25 problemas, o qual os povos utilizaram o papiro nas suas escritas e que se conservaram devido ao clima seco.

O sistema de numeração egípcia possibilitou a escrita de grandes números, era um sistema não posicional, na qual os objetos eram agrupados em dez, na qual para cada múltiplo de dez era um símbolo, porém não havia símbolo para o zero. Além disso, cada símbolo era utilizado no máximo nove vezes.

Figura 1 – Numeração egípcia

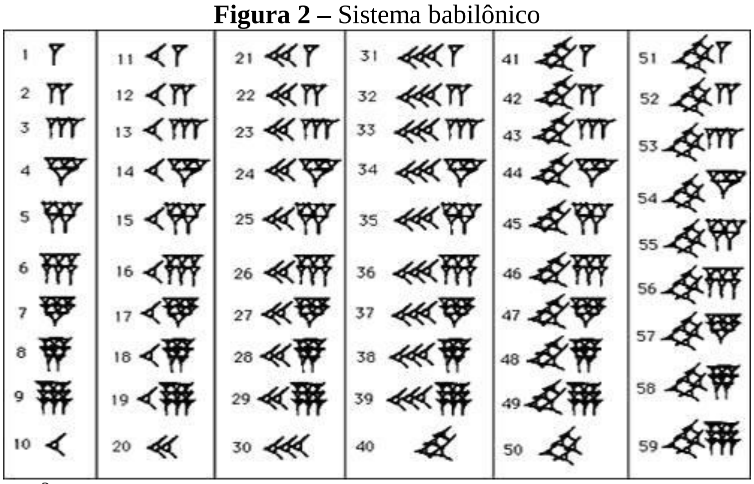


Fonte: Mundo Educação[1]

7.2.2 Numeração Babilônica

Na Mesopotâmia, via-se uma Matemática mais avançada, havia uma grande habilidade para calcular e o uso da base 60 e potencias de 60 para contar, sendo um sistema desenvolvido por volta de 1.800 a.C., na qual os números menores que 60 eram representados por um sistema de base 10, e o números igual ou maior a 60, eram formados pelo princípio da posição na base 60. Os matemáticos e astrônomos babilônios elaboraram um sistema de numeração avançado, que também ficou conhecido como sistema sexagesimal que logo passou para os gregos e árabes.

Figura 2 – Sistema babilônico



Fonte: Mundo Educação.[2]

[1] Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/sistema-numeracao.htm#:~:text=Na%20hist%C3%B3ria%20v%C3%A1rios%20povos%20diferentes,com%20o%20passar%20do%20tempo. Acesso em abr 2020.

[2] Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/sistema-numeracao-babilonico.htm#:~:text=O%20sistema%20sexagesimal%2C%20tamb%C3%A9m%20conhecido,aos%2060%20%E2%80%9Calgarismos%E2%80%9D%20necess%C3%A1rios. Acesso em abr 2020.

O número zero, era representado por um espaço vazio, pois os babilônicos já tinham o conceito de zero representava nenhuma quantidade.

A soma dos números trouxe alguns problemas, pois conforme os números ficavam maiores, era necessário escrever mais símbolos para representá-los, ficando muito extenso. No entanto, enquanto os egípcios indicavam cada unidade mais elevada através de um novo símbolo, os babilônios usavam o mesmo símbolo, mas indicavam o seu valor pela sua posição.

7.2.3 Numeração Romana

Na Antiguidade, Roma foi marcado historicamente por grandes civilizações, porém pouco se sabe sobre a origem da notação romana para números. Eles nunca usaram as letras sucessivas de seu alfabeto, assim como faziam outras civilizações para representar os números.

Os romanos utilizaram as letras de seu alfabeto para representar os números, nas quais utilizavam sete letras, como mostra a figura.

Tabela 1 – Numeração romana básica

1	I
5	V
10	X
50	L
100	C
500	D
1000	M

Fonte: Arquivo da autora.

Para formar os outros números, usava-se as letras da tabela, na qual repetia-se no máximo até três vezes cada uma, no entanto, as letras V, L e D não podiam ser repetidas.

Tabela 2 – Numeração romana com repetição

2	II
3	III
20	XX
30	XXX
200	CC
300	CCC
2000	MM

3000	MMM

Fonte: Arquivo da autora.

Como as letras V, L e D não podiam se repetir, e ainda era necessário formar outros números, então as letras I, X e C, colocavam-se à esquerda de outras de maior valor para representar a diferença deles, com as seguintes regras:

- I coloca-se à esquerda de V ou X;
- X coloca-se à esquerda de L ou C;
- C coloca-se à esquerda de D ou M.

Portanto, se colocamos um símbolo de maior valor primeiro que o de menor valor, somamos os números da seguinte forma:

$$VI\ (5+1)=6$$

Mas, se colocarmos um símbolo de menor valor primeiro que o de maior valor, temos a diferença entre eles:

$$IV\ (5-1)=4$$

Esse sistema de numeração até hoje é utilizado, como na representação de séculos e datas, na indicação de capítulos e volumes de livros, em documentos, na indicação dos números no relógio de ponteiro, entre outros.

7.2.4 Numeração grega

O sistema grego foi o primeiro a utilizar letras para representar os números, criado há cerca de 3.300 anos atrás, onde era utilizado todas as letras do alfabeto grego mais três letras do alfabeto fenício como símbolos numerais.

A representação se dava da seguinte forma: eles memorizavam 27 letras, e dividiam em três grupos de nove letras, nas quais as nove primeiras representavam de 1 a 9, as nove próximas representavam de 10 a 90, e as nove últimas representavam de 100 a 900.

Figura 3 – Numeração grega

Unidades			Dezenas			Centenas		
α	alfa	1	ι	iota	10	ρ	rô	100
β	beta	2	κ	capa	20	σ	sigma	200
γ	gama	3	λ	lambda	30	τ	tau	300
δ	delta	4	μ	mi	40	υ	ípsilon	400
ϵ	épsilon	5	ν	ni	50	φ	fi	500
ϛ	stigma	6	ξ	csi	60	χ	chi	600
ζ	zeta	7	o	ômicron	70	ψ	psi	700
η	eta	8	π	pi	80	ω	omega	800
θ	teta	9	ϙ	qoppa	90	ϡ	sampi	900

Fonte: Site Google – Matemática na Grécia.[3]

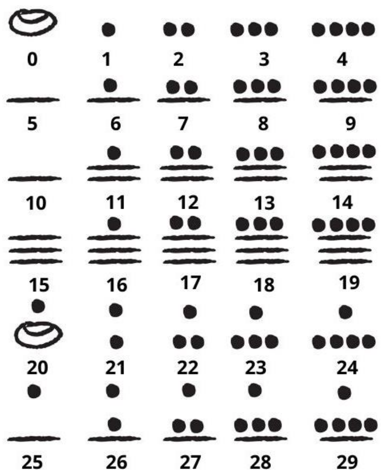
7.2.5 Numeração maia

O sistema de numeração maia, também conhecido por sistema de numeração vigesimal, isto é, de base 20, possui como base a soma dos números de dedos das mãos e dos pés.

Os algarismos são baseados em símbolos que são o ponto e a barra horizontal, e no caso do zero, possui uma forma oval semelhante a uma concha, sendo os primeiros povos a ter um símbolo para o zero. Se somarmos cinco pontos, estes constituem uma barra, e assim se escrevermos o número oito, utilizaremos três pontos sobre uma barra.

Este sistema é composto por três símbolos:

Figura 4 – Numeração maia



Fonte: Mundo Educação.[4]

---

[3] Disponível em: https://sites.google.com/site/conjuntosnumericos2017/matematica-na-grecia-1 Acesso em abr 2020.

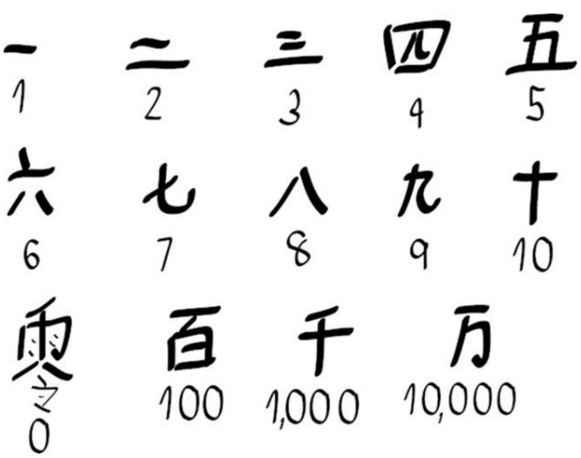
[4] Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/sistema-numeracao.htm Acesso em abr 2020.

7.2.6 Numeração chinês

Há mais de 3.000 anos os chineses criaram o sistema de numeração que ainda é utilizado atualmente, mas para a realização de operações, eles utilizam o sistema indo-arábico.

O sistema de numeração chinês possui símbolos definidos para o 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 100, 1.000 e 10.000.

Figura 5 – Numeração chinês



Fonte: Mundo Educação.[5]

Esse sistema se utiliza da adição e multiplicação de base 10, na qual um símbolo menor seguido de um símbolo maior, significa a multiplicação entre eles, como por exemplo, para representar o número 20, os chineses escrevem lado a lado o número 2 e o 10, ou seja, 2.10 que é igual a 20.

7.2.7 Numeração decimal/ indo-arábico

O sistema indo-arábico possui esse nome devido a dois povos que contribuíram para seu nascimento, na qual os hindus o inventaram e organizaram, e os árabes fizeram algumas adaptações e o transmitiram para a Europa Ocidental. Atualmente é aceito no mundo todo e o sistema mais comum utilizado por nós.

Esse sistema também é conhecido por sistema de numeração decimal ou sistema posicional decimal, pois possui dez símbolos para representar os números de 0 a 9, ou seja, o 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. E aposição dos números é importante, pois os algarismos posicionados

[5] Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/sistema-numeracao.htm Acesso em abr 2020.

a frente valem dez vezes mais que os da posição anterior, ou seja, temos a representação da unidade, dezena, centena, assim sucessivamente.

O termo algarismo, que são os símbolos deste sistema, foi em homenagem ao matemático persa Al-Khowârizmî, que descreveu de maneira completa o sistema hindu num livro datado em 825 d.C.

7.3 Conjuntos numéricos

Ao passar do tempo, várias simbologias foram utilizadas para descrever números, incidindo, atualmente, na notação indo-arábica em quase todo mundo.

Agora que conhecemos como os números e os sistemas numéricos de diversos povos surgiram, vamos entender a natureza dos conjuntos numéricos e suas propriedades, entendo como surgiram e se estabeleceram, e o que os diferencia.

7.3.1 Números naturais

O surgimento dos números dos números naturais deu-se pela necessidade do homem em contar objetos, na qual, como vimos anteriormente, várias civilizações desenvolveram um sistema de contagem introduzindo o conceito de número natural.

Atualmente, o conjunto dos números naturais é representado pelo símbolo $\mathbb{N}$, e dado pelo conjunto {1, 2, 3, 4, 5, ...}.

Tendo em vista o surgimento dos números naturais pela necessidade de contar, de corresponder uma certa quantidade de objetos, implica-se que matematicamente, a “correspondência” é uma das bases da matemática, ou seja, contar significa fazer uma correspondência, de um em um, de cada objeto contado e a sucessão desses objetos, ou seja, a sucessão de números naturais.

E quando falamos de sucessão de números naturais, dessa correspondência, temos que ao passar de um número natural para o seguinte, sempre lhe junta uma unidade, e assim sucessivamente, ou seja, dado um número n qualquer, por maior que ele seja, podemos sempre obter um número $n + 1$, maior que ele. Assim, podemos enunciar que:

> (a) A sucessão dos naturais é ilimitada (não há um número natural maior que todos os outros).
> (b) Dado um número natural, por maior que ele seja, existe sempre outro maior do que ele.
> (c) O conjunto dos números naturais tem infinitos elementos. (SOUZA, p. 25).

No entanto, observou-se um problema no conjunto dos números naturais, pois ele não era suficiente para resolver determinados problemas que envolviam a subtração de um número menor com o número maior, como por exemplo $3 - 7$, pois não existe nenhuma natural que possa representar o resultado dessa operação.

7.3.2 Números inteiros

O surgimento dos números negativos contou com algumas necessidades dentro do dia a dia das pessoas e algumas pessoas não entendem ou não conhecem por completo o uso desses números.

Como os autores Imenes, Jakubo e Lellis (2012, p. 5), apontam, muitas pessoas pensam que o zero é o menor número que existe. Mas existem outros números, menores que zero.

Para explicar o surgimento dos números negativos, complementando a ideia do zero não ser o menor número, o autor Guelli (1995) comenta que o desenvolvimento da Matemática sempre esteve ligado diretamente ao comércio, já que os comerciantes saiam em longas expedições marítimas em busca de mercadorias e quando retornavam para suas terras, as mercadorias eram vendidas, obtendo lucros. Ele ainda explica que no cotidiano destes comerciantes, os cálculos eram feitos de forma rápida e com precisão, utilizando sinais negativos e positivos e que essa solução de cálculo encontrada pelos comerciantes agradou aos matemáticos, que passaram a utilizá-la nas mais diversas soluções. Assim, os números positivos e negativos passaram a indicar as direções de quantidades, como a falta (Negativo) e o excesso (Positivo).

A evolução no uso dos números negativos ocorreu um pouco mais tarde com uma das descobertas do matemático Thomas Harriot, as quais só foram publicadas dez anos após sua morte, em 1621. Essa descoberta foi a notação usada para substituir as palavras maiores e menores, usando os símbolos (>) e (<).

Os números negativos passaram a fazer parte dos conceitos matemáticos a partir do século XVI, sendo o conjunto dos números inteiros compostos por números positivos e negativos e pelo zero, sendo representado pelo símbolo $\mathbb{Z}$, e numericamente o conjunto {..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...}.

7.3.3 Números racionais

Da mesma forma como os números naturais não foram suficientes para representar situações que envolvessem números negativos, os números inteiros também não puderam representar situações que exigiam partes de um inteiro.

No Egito Antigo, quando ocorriam as inundações do Rio Nilo, as terras ficavam submersas, fazendo com que elas recebessem nutrientes que as tornavam férteis para o cultivo. E quando a água abaixava, era necessário que os proprietários remarcassem os limites entre seus terrenos. No entanto, por mais que tentassem, acabavam não encontrando um número inteiro que pudesse representar suas medidas, o que levou então ao surgimento das frações.

Na antiguidade, as frações eram reconhecidas, porém ainda não eram bem estruturadas e adaptadas as situações práticas. Além disso, não foram reconhecidas como números desde sua origem e não tinha a forma $\frac{m}{n}$, onde era m vezes o inverso de n.

As frações representadas pelos egípcios eram apenas as que possuíam numerador igual a 1 (frações unitárias) e no caso as frações ordinárias eram expressas por meio de soma de frações.

> No caso de se escrever o dobro de determinadas frações, não bastava apenas escrever algo do tipo 2/b. Era necessário expressar tal fração como soma de partes, ou de frações unitárias. Os egípcios produziram extensas tabelas mostrando resultados prontos com transformações de dobros de frações unitárias. (COSTA, 2010, p. 09).

A sua indicação gráfica da fração era com o número do denominador sobre o qual se colocava um ponto ou uma espécie de olho estilizado.

Ao passar do tempo, esclareceu-se que as frações eram assimiláveis aos números inteiros, ou seja, um número inteiro era uma fração de denominador igual a 1. E a partir disso ocorre uma revolução no sistema de medidas, e os números tornam-se padrões adaptáveis para diversos usos, podendo comparar grandezas, dividir em parcelas, ou dividir em partes iguais de uma mesma grandeza.

Então criou-se um outro conjunto, o dos números racionais, representado pelo símbolo $\mathbb{Q}$, que representa a razão entre dois números.

Ao decorrer da história, as diversas civilizações foram aprimorando esse conjunto. Os babilônios foram os primeiros a atribuir uma notação racional as frações, segundo o seu sistema numérico sexagesimal, na qual as frações tinham denominadores iguais a uma potência de 60.

A primeira escrita das frações decimais teve origem com os povos hindus e árabes, em torno de 953 d.C. E por meio das frações decimais descobriu-se a numeração decimal de posição no outro sentido, ou seja, depois da vírgula, o que foi muito importante para a representação de todas as frações, além do desenvolvimento do conceito de números inteiros cuja notação não comporta algarismos após a virgula.

A relação da porcentagem com a fração se deu origem nos séculos XV e XVI, pela aritmética comercial, na qual do latim *per centum* significa "por cento", "a cada centena", ou seja, é uma medida de razão com base 100, é uma maneira de expressar uma proporção entre dois valores a partir de uma fração com denominador 100. A porcentagem é importante na constituição das frações decimais:

> De fato, uma primeira vantagem seria em relação à rapidez do cálculo com as operações de adição e subtração utilizando decimais. Outra vantagem evidente é quando se realiza a comparação entre duas frações. Assim, é muito mais vantajoso quando se utiliza a forma decimal e quando esta possui pelo menos a unidade, no caso da comparação. Para as que não possuem, então é preciso prestar atenção à parte decimal ou ao período da fração. Ainda concernente à adição e subtração, no caso de dízimas periódicas que exigem troca de ordens (por exemplo, centésimos para décimos), seria melhor a transformação do decimal em fração na forma a/b. Em relação às desvantagens do uso de decimais, uma primeira seria concernente às operações de multiplicação e divisão, devido à agilidade com que se efetua tais algoritmos utilizando a forma a/b. (COSTA, 2010, p. 16).

Portanto, um número racional é o número que pode ser escrito na forma

$$\frac{m}{n}$$

onde *m* e *n* são números inteiros, com $n \neq 0$. E podemos indicar um número racional pela letra q.

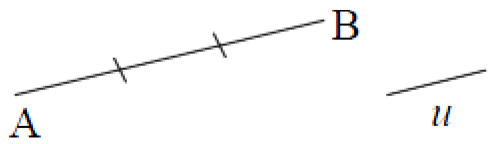
Temos que os números racionais podem ser obtidos através da razão entre dois números inteiros, que razão do latim *ratio* = razão = divisão = quociente, e denotamos o conjunto dos números racionais por $\mathbb{Q}$, assim podemos encontrar a notação:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$$

Portanto, os números racionais surgiram pela necessidade de medir, quando a unidade não cabia um número inteiro de vezes do que estava sendo medido, tendo que redividir a unidade.

Segundo Lima, 2013, apud Curty, 2016, p. 21, ao medirmos um segmento AB, devemos anexar um segmento unitário, denotado por u, em que $u = 1$. Segmentos congruentes que tenham a mesma medida e os $n - 1$ pontos anteriores decompor AB em n segmentos justapostos, então a medida de AB é igual a soma das medidas desses *n* segmentos. Dessa forma, se estes segmentos forem congruentes a u, logo u cabe *n* vezes em AB e $AB = 1$, como mostra a figura abaixo.

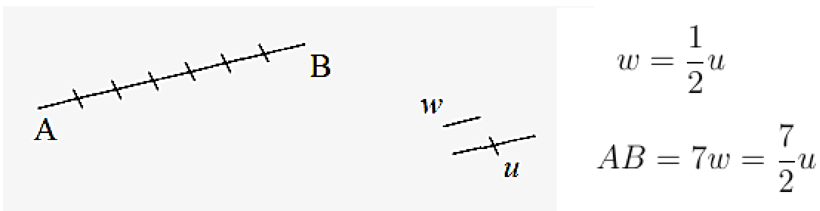
Figura 6 – Segmento AB



Fonte: (ZUFFI, 2015)

Entretanto, a unidade *u* pode não caber *n* vezes em AB, não sendo assim AB um número natural. Dessa forma, recorremos a fração, na qual faz-se necessário subdividir a unidade *u* em partes iguais, obtendo uma nova unidade *w*, que caiba *n* vezes no segmento *u* e *m* vezes em AB. Então o segmento *w* é uma medida comum de *u* e AB. Determinando o segmento w, temos que AB e u são comensuráveis, sendo que $w = \frac{1}{n}$, e AB será m vezes w, ou seja, $AB = \frac{m}{n}$. Porém, não determinando w, temos que u e AB são incomensuráveis. Assim, quando um segmento é comensurável com a unidade indicada, sua medida é um número racional.

Figura 7 – Segmento Comensurável



Fonte: (ZUFFI, 2015)

Generalizando, seja um segmento *r* a ser medido em função de um segmento *s* considerado com unidade, a medida do segmento que se quer medir é expressa por $\frac{r}{s}$. se r é divisível por s, a medida é um número inteiro. Caso contrário, a medida é um número racional. Surgindo assim a necessidade desse conjunto numérico. E surgimento resultado de um desenvolvimento da humanidade diante de suas necessidades e investigações.

8 A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA NO ENSINO DOS NÚMEROS RACIONAIS

A aprendizagem efetiva dos números racionais, segundo Raymond Duval (2009), é válida a partir do momento em que o aluno faz a mobilização do conhecimento de duas ou mais representações semióticas do objeto em estudo, na qual o conhecimento do sujeito é dado por meio de uma representação. E isso nos leva a importância de se trabalhar as diferentes representações dos números racionais no ensino da Matemática.

Dessa maneira, a fim de analisarmos e fundamentarmos sobre a mobilizição dos registros de representação semiótica na prática pedagógica do processo de ensino-aprendizagem dos números racionais, visando o aprimoramento em sala de aula, vamos utilizaar a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval.

8.1 Representação Semiótica

Quando nos referimos ao termo representação, estamos falando da forma como um sujeito representa uma informação, como se fosse uma codificação da informação. Em relaçao ao termo semiótica, refere-se ao estudo dos signos (semioses), ou seja, a construção do significado. Dessa forma, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica está associado ao cognitivo humano, isto é, a forma como o individuo constroi e adquire o conhecimento matemático, através das representações dos objetos em estudo, a fim de entender as dificuldades dos alunos na compreensão dos conceitos matemáticos e suas representaçoes.

Quando falamos de ensino-aprendizagem matemática, devemos associar as formas variadas de representar um objeto, desde seu conceito, estrutura, suas propriedades e suas relaçoes. Assim temos que as representações semióticas são "produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação, os quais tem suas dificuldades próprias de significado e de funcionamento" (DUVAL, 2012a, p.269).

As diferentes representações, além de serem necessárias para a comunicação, elas são essenciais para o desenvolvimento matemático, sendo

> a análise dos problemas de aprendizagem matemática e dos obstáculos contra os quais os alunos chocam-se regularmente conduz a reconhecer [...] uma lei fundamental do funcionamento cognitivo do pensamento: Não há *noésis* sem *semiósis*, quer dizer, não há noésis sem o recurso a uma pluraridade ao menos potencial de sistemas semióticos, recurso que implica sua coordenação para o próprio sujeito. [...] É a semiósis que vai determinar as condições de possibilidades e de exercícios da noésis. (DUVAL, 2009, p. 17-18).

De acordo com Duval (2009), a *semiósis* é a produção de uma representação semiótica,e a *noésis* é o ato cognitivo da compreensão do objeto matemático, sendo assim a necessidades das relaçoes desses dois termos. Sendo então os objetos matemáticos são dependentes do sistema de representação semiótica.

Duval nomea os diferentes tipos de representações semiótica como 'registros' de representações, sendo

> [...] um registro é, evidentemente, um sistema semiótico, mas um sistema semiótico particular que não funciona nem como código, nem como sistema formal. Ele se caracteriza essencialmente, pelas operações cognitivas específicas que ele permite efetuar. (DUVAL, 2011b, p. 70).

Existem três atividades cognitivas fundamentais a representação dos registros de semiótica:

> - Constituir um traço ou ajuntamento de traços perceptíveis que sejam que sejam identificáveis como uma representação de alguma coisa em um sistema determinado;
> - Transformar as representaçoes apenas pelas regras próprias ao sistema, de modo a obter outras representações que possam constituir uma relação de conhecimento em comparação as representações inicias;
> - Converter as representações produzidas em um sistema em representações de um outro sistema , te tal maeira que essas últimas permitam explicar ouras significações relativas ao que é representado. (DUVAL, 2009, p. 36-37).

A análise da construção do conhecimento e das dificuldades encontradas pelo sujeito nas representações relativas ao raciocínio, interpretaçao textual, pensamento lógico, confrontam três fenômenos: o da diversificação dos registros de representação semiótica, a diferenciação do representante e representado, e a coordenaçao entre os diferentes registros.

A diversificaçao dos registros de representação semiótica associa-se as diferentes formas de representar um mesmo objeto matemático, seja na linguagem natural, algébrica, gráfica, fracional, entre outras.

Deve-se ter em mente,a diferença do representante e representado, pois não se pode ter uma compreensao matemática se não distinguimos um objeto de sua representação. Não podemos confundir um objeto matemático, como os números , por exemplo, com suas representações, as escritas decimais ou fracionárias, pois um mesmo objeto pode ser dado de diferentes representações.

Em relação a coordenação entre os diferentes registros, temos que ela não se dá somente pelo domínio da língua natural, por exemplo, mas sim na capacidade de usar esse domínio nas escrita coerente de um texto, na organização, na argumentação, na construção do pensamento.

Para Duval (2009), os registros de representação semiótica são os sistemas de representação que relacionam a *semiósis* e a *neósis*, ou seja, a língua natural, linguagem simbólica, os gráficos, entre outros.

8.2 Registros de Representação Semiótica

Duval (2011) define quatro tipos de registros mobilizáveis no funcionamento matemático:

Quadro 6 – Classificação dos registros mobilizáveis do funcionamento matemático

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	**REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA**
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis	Língua natural Associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar: • argumentação a partir de observações, crenças…; • dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). • apreensão operatória e não somente perceptiva; • construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos	Sistemas de escritas: • numéricas (binária, decimal, fracionária…); • algébricas; • simbólicas (línguas formais). Cálculo	Gráficos cartesianos. • Mudanças de sistema de coordenadas; • interpolação, extrapolação.

Fonte:(Duval, 2011, p.14)

A diversidade dos registros de representação é importante para o desenvolvimento do pensamento, pois devido as diferenças em relação as transformações internas de cada registro, cada um possui a sua limitação, possui suas características próprias, na qual um permite um certo tipo de transformação e o outro não.

Os registros discursivos se relacionam com o produzir, aprender ou organizar expressões como no caso da língua natural, que se torna o primeiro registro de representação semiótica. Já os registros não discursivos, segundo Duval (2011), favorecem uma apreensão simultânea da sua organização dimensional.

Em relação aos registros monofuncionais e multifuncionais, o primeiro é específico da Matemática, enquanto o segundo é utilizado em outras áreas do conhecimento para a comunicação (expressar), a objetivação (definir algo) e tratamento (transformar os dados de um registro). Porém, na Matemática a língua materna é utilizada inicialmente para a função de tratamento.

Os números racionais, no registro multifuncional da língua natural, compreendem como os registros de um terço, vinte décimos ou cinquenta por cento, ou seja, está ligado ao vocabulário de cada cultura que permite ao sujeito se expressar corretamente. No registro multifuncional na representação discursiva, compreende o registro figural.

No registro monofuncional, os números racionais estão ligados ao registro simbólico numérico e algébrico. No numérico temos os casos como a forma de fração como parte-todo, razão, quociente, entre outros; a forma de decimais finitos e infinitos e periódicos; a forma de potência de dez e percentuais. No algébrico, as formas algébricas fracionárias, decimal e potência de dez em situações de generalização.

Os registros monofuncionais não discursivos compreendem os registros gráficos, em que os números racionais correspondem a pontos na reta numérica.

Os múltiplos registros de representações do número racional, leva muitas vezes, os alunos a terem dificuldades em identificar diferentes registros de representações como sendo um mesmo número racional.

Um mesmo objeto matemático possui diversos tipos de registros de representação semiótica, e cada um corresponde a um tipo de 'tratamento', que segundo Duval, define-se como a transformação de representações dentro de um mesmo registro, como por exemplo, a adição de duas frações, na qual o resultado permanece uma fração. Numericamente temos:

$$\frac{3}{5}+\frac{3}{5}=\frac{6}{5} \rightarrow \text{tratamento no registro de representação fracionária.}$$

Ou então,

$$0{,}6+0{,}6=1{,}2 \rightarrow \text{tratamento no registro de representação decimal.}$$

Percebemos então que há diferentes representações de um mesmo número racional, porém os tratamentos matemáticos também são diferentes, ou seja, as significações operatórias são distintas, pois as atividades de tratamento utilizadas para calcular a soma são próprias de cada registro.

Diante disso, faz-se necessário que os professores abordem com os alunos as diferentes representações que um mesmo número racional pode ter, explorando o significado desses números.

Com relação aos conteúdos de Matemática propostos nos PCN:

> [...] os estudos dos números racionais, nas suas representações fracionária e decimal, merecem especial atenção no terceiro ciclo, partindo da exploração

> de seus significados, tais como: a relação parte/todo, quociente, razão e operador. (BRASIL, 1998, p. 66).

Ainda sobre os números racionais:

> Neste ciclo, os alunos têm boas condições para perceber que os números têm múltiplas representações e compreender melhor as relações entre representações fracionárias e decimais, frações equivalentes, escritas percentuais e até a notação científica (BRASIL, 1998, p. 67).

No entanto, é muito importante a compreensão que o professor tem sobre o objeto em estudo:

> [...] se os professores querem desenvolver uma compreensão em seus alunos, eles devem estar preocupados com as representações que os alunos desenvolvem em seus esforços para a compreensão da instrução do conteúdo. Para facilitar o desenvolvimento de representações poderosas e apropriadas, os professores precisam avaliar suas próprias compreensões de conteúdo. [...] eles mesmos devem entender os meios de representar os conceitos para os alunos. Eles devem ter conhecimento sobre as maneiras de transformar o conteúdo com o objetivo de ensinar. (WILSON, SHULMAN, RICHERT, 1986, p. 109-110, apud ANDRADE, 2016, p. 33).

Desse modo, o professor precisa ter em mente que ao utilizar diferentes registros dos números racionais, exige-se diferentes tratamentos, e é necessário deixar claro isso par ao aluno, o que implica de processos cognitivos do aluno para compreender e estabelecer o conhecimento. De acordo com Duval (2009), as diferentes representações de um mesmo objeto matemático

> [...] não tem evidentemente o mesmo conteúdo. Cada conteúdo é comandado por um sistema pelo qual a representação foi produzida. Daí a consequência de que cada representação não apresenta as mesmas propriedades ou as mesmas características do objeto. Nenhum sistema de representação pode produzir uma representação cujo conteúdo seja completo e adequado ao objeto representado. (DUVAL, 1993, p. 18, apud ANDRADE, 2016, p. 14).

A importância das representações semióticas se deve ao fato de as

> ...possibilidades de tratamento matemático dependerem do sistema de representação(...) A seguir há o fato de que os objetos matemáticos, começando pelos números, não são objetos diretamente perceptíveis ou observáveis com a ajuda de instrumentos. O acesso aos números está ligado à utilização de um sistema de representação que os permite designar. (DUVAL, 2003, p. 13, apud SILVA, LINS, SANTOS, p. 4).

O desenvolvimento das representações semióticas é essencial para a evolução do pensamento humano, sendo uma maneira de expressá-lo, visto que os objetos matemáticos não são diretamente perceptíveis ou observáveis sem a utilização de seus registros. Como afirma Duval,

> [...] diferentemente dos outros domínios do conhecimento científico, os objetos matemáticos não são jamais acessíveis perceptivelmente ou microscopicamente (microscópio, telescópio, aparelhos de medida etc.). O acesso aos objetos passa necessariamente por representação semiótica. Além

> do que, isso explica por que a evolução dos conhecimentos matemáticos conduziu ao desenvolvimento e à diversificação de registros de representação. (DUVAL, 2008, p. 21).

Dessa forma, as atividades de matemática desenvolvidas pelo professor devem propiciar o uso de diferentes representações dos números racionais, tais como as representações gráficas, os sistemas de numeração, representações algébricas, figuras geométricas e linguagem formal, a fim de que o aluno associe o significado ao objeto estudado.

8.3 Tipos e funções de representações

A palavra ‘representação’ é empregada sob a forma verbal ‘representar’, ou seja, por meio de uma escrita, um símbolo que representa um objeto matemático (número, função, entre outros), assim como também, os traçados e as figuras representam objetos matemáticos (segmento, ponto, círculo). Dessa forma, os objetos matemáticos não devem ser confundidos com a representação que se faz dele. E essa confusão pode ser acometida por uma perda de compreensão e falta de significação do objeto matemático na aprendizagem.

As diferentes representações semióticas de um objeto matemático são extremamente necessárias. E a possibilidade de efetuar tratamentos sobre os objetos matemáticos depende do sistema de representação utilizado. As representações semióticas desempenham um papel fundamental na atividade matemática.

As representações são caracterizadas por duas oposições: a oposição interna/externa e a oposição consciente/não-consciente. Sendo que estas consideram-se como equivalentes de uma partição dos fenômenos cognitivos.

A oposição externa/interna é a oposição entre aquilo que é visível e aquilo que não é por um indivíduo, sendo que a externa é a produção de uma representação pelo sujeito, e a interna a produção de uma representação externa operacionalizada por um sistema semiótico. Dessa forma, as representações externas são representações semióticas, e as representações internas são representações do próprio indivíduo.

As representações externas são consideradas como uma forma de comunicação, tendo ainda como funções cognitivas, a objetivação e o tratamento.

Na função de objetivação, é uma expressão particular, que é independente daquela de comunicação, de outra pessoa.

Na função de tratamento, as atividades estão diretamente ligadas a um sistema semiótico, como por exemplo, o cálculo, que depende da escrita dos números.

A oposição consciente/não-consciente caracteriza-se pela oposição entre aquilo que o sujeito consegue observar e aquilo que não consegue. Dessa forma a passagem do não consciente para o consciente leva a um processo de objetivação, na qual o próprio sujeito descobre, intencionalmente, o que não suponha antes, havendo uma significação conceitual e representativa do objeto em estudo.

Dessa maneira, uma representação interna pode ser consciente ou não-consciente, assim como uma representação consciente pode ou não ser externa, gerando assim três tipos de representações.

Quadro 7 – Tipos e funções de representações

	INTERNA	**EXTERNA**
CONSCIENTE	Mental Função de objetivação	Semiótica Função de objetivação Função de expressão Função de tratamento intencional
NÃO-CONSCIENTE	Computacional Função de tratamento automático ou quase instantâneo	

Fonte: DUVAL, 2009, p. 43.

Existe um paradoxo cognitivo do pensamento matemático, pois temos de um lado a apreensão dos objetos matemáticos apenas conceitual, e do outro apenas por meio de representações semióticas que se torna possível, sendo assim uma abordagem sistemática de aprendizagem.

No entanto, a falta de acesso aos objetos matemáticos, sem a representação matemática, pode tornar a aprendizagem confusa, assim como, adquirir o domínio do tratamento matemático sem aprender o conceito.

As representações mentais remetem ao conjunto de imagem, ou seja, a conceitualização que o indivíduo possui do objeto diante de uma determinada situação e sua associação.

As representações semióticas são produzidas através de signos pertencentes a um sistema de representações próprios de significação e funcionamento, como por exemplo, uma figura geométrica e um gráfico são representações semióticas com sistemas diferentes. Sendo assim, as representações semióticas são como um meio de exteriorização de representações mentais para fim de comunicação e essenciais a atividade cognitiva do pensamento.

As representações computacionais estão associadas as representações internas, aquelas cujos significantes não requerem visão de objetos que permitam uma transformação de significantes em uma outra, são representações não-conscientes, como por exemplo, a escrita binária 0 e 1.

Portanto, as representações semióticas são indissociáveis das representações mentais, pois esta última depende de uma interiorização da primeira, e somente as representações semióticas permitem desenvolver algumas funções cognitivas como a de tratamento.

A diversidade de registros de representação semiótica está ligada ao funcionamento cognitivo do pensamento humano, pois se 'semiose' é o entendimento ou produção de uma representação semiótica, e 'neosis' a compreensão conceitual de um objeto, logo um está indissociável ao outro. Dessa forma, a atividade matemática necessita mobilizar diferentes registros de representação semiótica (figural, algébrica, gráfica, natural, entre outras). E a busca por trabalhar com diversos registros se torna uma condição necessária para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações, a fim de serem reconhecidos em sus respectivas representações.

A mobilização dos registros de representação semiótica traz a compreensão conceitual do objeto matemático, traz o reconhecimento do objeto e da sua representação, dá acesso ao conhecimento.

Apesar das representações computacionais e semióticas terem o mesmo parentesco, elas não são iguais. As representações computacionais são representações internas que independem da visão que se tem do objeto. No entanto, as representações semióticas são indissociáveis a visão que o indivíduo tem do objeto. As representações semióticas são representações conscientes, indissociáveis a visão que se tem do objeto. E essa diferença se dá pela existência de dois tipos de tratamento: os quase-instantâneos e os intencionais.

No tratamento quase-instantâneo são aqueles efetuados pela visão imediata que o sujeito tem daquele objeto, de acordo com suas práticas e experiências. O tratamento intencional está relacionado a um menor tempo de controle eficiente que o sujeito precisa para efetuar a visão que se tem do objeto, e que são efetuados um após o outro, considerando o número de elementos a integrar.

Portanto, toda atividade cognitiva está relacionada com esses dois tipos de tratamento, na qual primeiramente o indivíduo tem-se a percepção imediata do objeto, tem consciência da informação, para que assim possa ter uma visão mais complexa do mesmo.

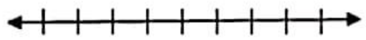
8.4 Fenômenos ligados a representação semiótica

Duval (2009) enfatiza que a análise do desenvolvimento cognitivo e as dificuldades da aprendizagem, estão ligadas aos fenômenos da diversificação dos registros de representação semiótica.

8.4.1 A diversificação dos registros de representação semiótica

No ensino dos números racionais nos deparamos com diferentes representações: fracionário, decimal, algébrico, geométrico e linguagem natural.

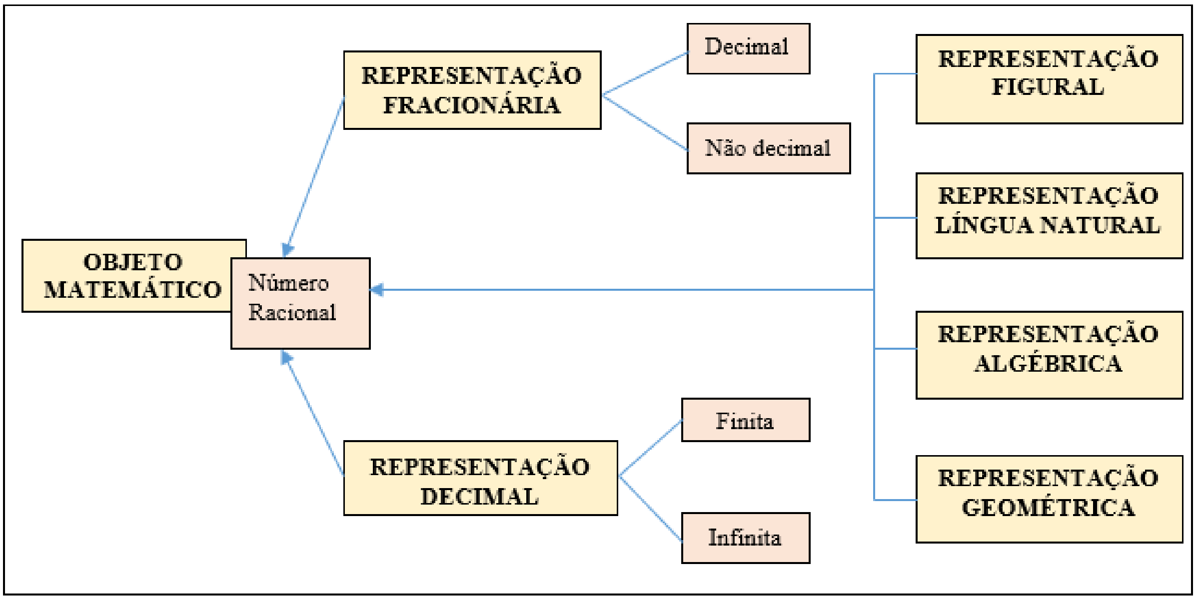
Quadro 8 – Registros de representações dos números racionais

REGISTRO SIMBÓLICO		REGISTRO NA LÍNGUA NATURAL
NUMÉRICO	ALGÉBRICO	
Fracionário Ex: $\frac{1}{8}$	$\frac{a}{b}$, $a, b \in Z$, $b \neq 0$	Um número racional escrito na forma $\frac{a}{b}$ com a e b inteiros e $b \neq 0$, está representado por uma fração.
Decimal Ex: 0,7 ou dízima periódica Ex: 0,333...	$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 x^0$	Um número racional pode ser escrito seguindo as regras e convenções do Sistema Decimal de Numeração.
Potência de 10 ou notacão científica	$a.10^n$ ou $a.10^{-n}$	REGISTRO GEOMÉTRICO
		

Fonte: Maranhão, Igliori (2011, p. 59, adaptado)

Dessa forma, como destaca a Teoria de Duval, a aprendizagem dos números racionais, o acesso ao objeto em estudo, perpassa por representações semióticas, como mostra o quadro abaixo.

Quadro 9 – Representações semióticas de um número racional



Fonte: Autora da pesquisa

8.4.1.1 Representação decimal e fracionária

Um número racional pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, com a e b números inteiros, e $b \neq 0$, sendo esta a forma fracionária de um número racional. E fazendo a divisão de a por b, obtemos a sua representação decimal.

Ao fazermos a divisão podemos obter representações decimais finitas, como por exemplo, $\frac{1}{2} = 0{,}5$, e representações decimais infinitas e periódicas, como $\frac{1}{3}$=0,333... e $\frac{2}{3} = 0{,}2857142857142\ ...$, ou seja, ao passar da forma fracionária para decimal teremos sempre um número finito de casas decimais ou uma dízima infinita e periódica.

Como mencionado anteriormente, um número racional pode ser escrito na forma fracionária, tanto por frações decimais quanto por frações não-decimais.

De acordo com Pérez (2009, p. 67) apud Andrade (2016, p. 38), uma fração decimal pode ser escrita como

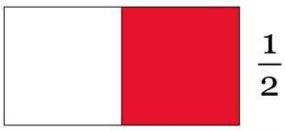
> $f = z + a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2} + \cdots + a_n 10^{-n}$ onde z é inteiro e os números, $a_1, a_2, \dots, a_n$, pertencem ao conjunto {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} e indicam os décimos, centésimos etc. O número f é representado no sistema decimal na forma abreviada $z, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots\ a_n$ e pode também ser escrito na forma de fração $\frac{p}{q}$, sendo q uma potência de 10. Por exemplo, o número $2{,}347 = 2 + \frac{3}{10} + \frac{4}{100} + \frac{7}{1000} = \frac{2347}{1000}$. Se p e q tem divisores comuns, pode obter-se uma fração equivalente cujo denominador não será uma potência de 10, mas será sempre divisor de 10^{-6}.

Qualquer fração irredutível pode ser representada por uma fração decimal, sendo que o denominador não tenha fatores distintos de 2 e 5. E qualquer fração decimal finita pode ser escrita como uma fração ordinária com denominador igual a uma potência de 10.

Um número racional também pode ser representado por uma fração não decimal, como por exemplo a fração $\frac{1}{3}$ que não é decimal, pois 3 não divide nenhuma potência de 10, logo não existe nenhuma fração decimal equivalente a ela.

8.4.1.2 Representação figural

Um número racional pode ser representado por uma figura, como por exemplo a fração $\frac{1}{2}$.



8.4.1.3 Representação na língua natural

Matematicamente, a língua é considerada um código, uma forma de comunicação, e de acordo com Duval, ela é o primeiro registro de representação semiótica para o funcionamento do pensamento humano, na qual o indivíduo utiliza-se dos símbolos para se expressar e comunicar corretamente.

8.4.1.4 Representação algébrica

O conjunto dos números racionais também pode ter representação de forma algébrica.

$$Q = \left\{\frac{a}{b} \setminus a, b \in ; b \neq 0\right\}$$

Essa definição nos mostra que o numerador representado pela letra *a* pode adotar o valor de qualquer número inteiro. Já o denominador representado pela letra b assume o valor de qualquer número inteiro não nulo, ou seja, o denominador nunca pode ser o número zero.

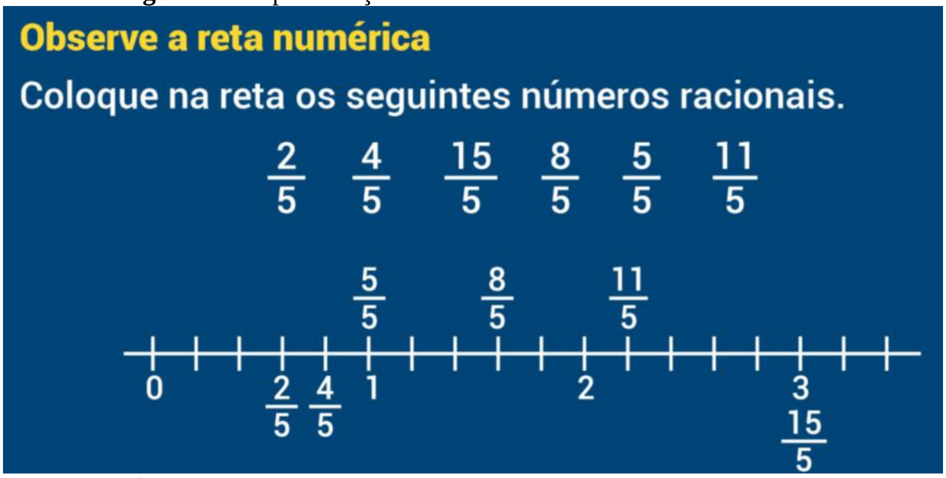
A representação algébrica pode ser vista na relação de frações equivalentes:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{x} \Longrightarrow \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

8.4.1.5 Representação geométrica

A representação geométrica dos números racionais é a representação desses números na reta numérica, na qual relaciona a questão de ordem das frações e medida, além de ampliar a ideia de fração não somente como parte-todo, mas com um número.

Figura 8 – Representação dos números racionais na reta numérica



Fonte: Centro de Mídias.[6]

8.4.2 A diferença entre o objeto representado e seus representantes

A diferença entre o objeto representado e seus representantes, segundo Duval (2009), se dá efetivo entendimento do que uma representação pode representar, e a partir dela associar outras formas de representá-la, por meio do tratamento.

8.4.3 Coordenação entre os diferentes tipos de registros de representação semiótica

De acordo com Duval (2009), a coordenação dos diferentes tipos de registros semióticos está ligada a atividade cognitiva de transformações definidas, como os tratamentos e as conversões de representações semióticas em diferentes registros.

O tratamento de uma representação é a transformação desta transformação no mesmo registro que ela foi formada, como por exemplo, $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, no caso a operação com número racional na forma fracionária, resultou em um número na mesma forma.

---

[6] Disponível em: https://centrodemidias.am.gov.br/aulas/conjunto-dos-numeros-racionais-representacao-geometrica-dos-numeros-racionais-numeros-racionais-parte-1-10945/62166. Acesso em dez 2020.

Para cada tipo de registro há regras de tratamento. A natureza e seu número variam de um registro para outro.

A conversão de uma representação é a transformação do registro em um outro tipo de registro. A conversão é uma transformação externa em relação ao registro da representação de partida. Como exemplos, temos a ilustração, que é a conversão do registro linguístico para o figural; a tradução é a conversão do registro linguístico de uma língua dada em um outro tipo de língua; a descrição é a conversão de um registro não verbal e um registro linguístico.

A conversão é um tipo de atividade cognitiva independente do tratamento. Como no caso do cálculo numérico, que os alunos na adição de dois números com sua expressão decimal e com sua expressão fracionaria, podem não pensar em converter uma das representações para efetuar a soma, ou mesmo não conseguindo efetuar a conversão; esquecendo que a expressão fracionaria, decimal, com expoente, são registros diferentes de representação de números. Na escritura de número, de acordo com Duval (2009), é preciso saber diferenciar a significação operatória ligada ao significante e o número representado, pois não são os mesmos procedimentos de tratamento que permitem efetuar as operações abaixo:

$$0{,}5 + 0{,}5 = 1{,}0$$

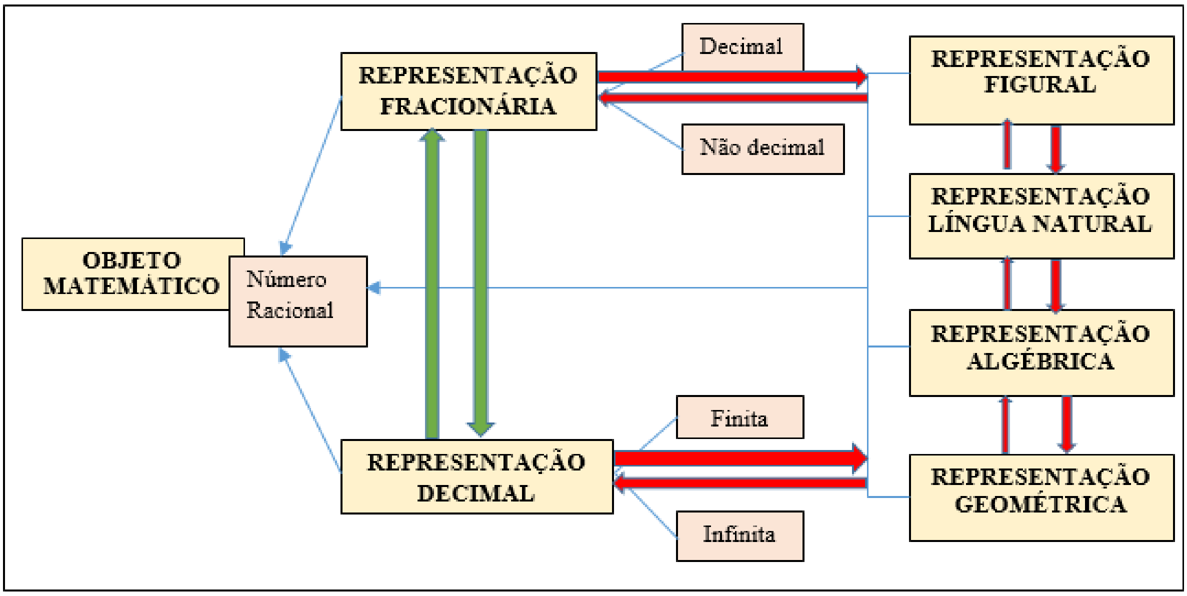
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2}$$

Cada uma das expressões tem um significado operatório, mas representa o mesmo número.

A conversão não deve ser confundida com codificação e interpretação, pois a ‘interpretação’ requer uma mudança do contexto, o que não quer dizer mudança de registro; e a ‘codificação’ é a ‘transcrição’ de uma representação com um outro sistema semiótico diferente, não levando em conta a organização da representação, nem o que representa.

Abaixo segue um quadro com as possibilidades de conversão dos números racionais.

Quadro 10 – Coordenação dos registros de representação semiótica dos números racionais



Fonte: Autora da pesquisa.

O quadro nos apresenta as coordenações que podemos ter em relação as diferentes representações dos números racionais, na qual as setas indicam os sentidos que os tratamentos (seta verde) e as conversões (seta vermelha) podem ocorrer.

8.5 Fenômeno da congruência nas representações

A conversão é uma atividade cognitiva de mudança de registro de representação semiótico de um determinado objeto matemático, na qual a partir do sentido do registro de partida para o registro de chegada é que podemos identificar quais são as dificuldades de aprendizagem dos alunos nas transformações.

Duval (2011) apresenta dois tipos de fenômenos relacionados ao processo de conversão, o fenômeno da congruência e da não congruência, que seria a 'comparação' do registro de chegada com o registro de partida, e o fenômeno da heterogeneidade dos dois sentidos de conversão, em que saber converter em um sentido não implica que se saiba converter no sentido contrário.

Segundo Duval (2009), há a possibilidade de mudança de uma representação para outra quando as duas representações são congruentes, ou seja, quando seguem os três critérios de congruência:

- Possibilidade de uma correspondência 'semântica' dos elementos significantes;
- Univocidade 'semântica' terminal;

- Ordem dentro da organização das unidades compondo cada uma das duas representações.

Em muitas pesquisas encontramos o insucesso dos alunos na mobilização dos registros de representação dos números racionais. E quando as conversões são não-congruentes, a dificuldade aumenta ainda mais.

E como a compreensão matemática gera na capacidade de converter os registros, não se deve jamais confundir o objeto em estudo e sua representação.

Portanto, a passagem de um registro para outro, não ocorre de maneira natural para o aluno. Faz-se necessário levá-lo a compreender que um conceito em dois registros diferentes não são dois conceitos diferentes.

É necessário que o professor desenvolva atividades matemáticas que levem ao aluno transitar sobre as mais variadas formas de representação de um mesmo objeto matemático, em ambos os sentidos de conversão, para que ele compreenda que essas diferentes representações tratam de um mesmo objeto matemático.

Segundo Moretti, Cordeiro e Souza (2004, p. 1) apud Andrade (2016, p. 47) tem-se que

> [...] o aprendizado da matemática e, portanto, a formação dos conceitos ligados a ela, pressupõe que o aluno possa atribuir significado a sua linguagem. Os registros e/ou formas de representação dos conceitos possibilitam que o mesmo possa comparar, diferenciar, relacionar, visualizar, interpretar, substituir, construir e analisar soluções de problemas ligados aos diferentes objetos matemáticos, dentro de um sistema de comunicação comum a este conhecimento.

Dessa forma, a aprendizagem matemática corresponde a apropriar-se dos diferentes tipos de representação semiótica dando significado e entendimento do conceito do objeto em estudo.

9 A RELEVÂNCIA DO LIVRO DIDÁTICO NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS RACIONAIS

Diante da demanda do desenvolvimento social e tecnológico, a área da educação está sofrendo algumas mudanças, principalmente no que diz respeito ao ensino-aprendizagem em Matemática, em relação a abordagem significativa dos conteúdos, visando a apropriação dos mesmos.

Segundo Machado (2011), os conteúdos matemáticos são um caminho para o desenvolvimento de diversas competências, dentre as quais, pode-se destacar:

> capacidade de expressão pessoal, de compreensão de fenômenos, de argumentação consistente, de tomada de decisões conscientes e refletidas, de problematização e enraizamento dos conteúdos estudados em diferentes contextos e de imaginação de situações novas. (MACHADO, 2011, p. 189).

Quando Machado (2011) destaca a questão do enraizamento dos conteúdos estudados em diferentes contextos, ele reflete a questão da necessidade do estudo do conteúdo matemático a partir de diferentes situações para que o aluno possa se apropriar do conteúdo. E isso nos leva a que Duval (2009) enfatiza sobre a necessidade de diversas representações de um mesmo objeto matemático, a fim de entender o funcionamento cognitivo do aluno, sobre seu processo de aprendizagem.

A importância das representações semióticas justifica-se pelo fato de os objetos matemáticos não poderem ser manuseados de modo concreto, levando a necessidades de representá-lo, na qual o tratamento sobre o objeto em estudo se articula por meio de um sistema de representação.

Dessa maneira, a conversão das representações semióticas se constitui uma atividade cognitiva na qual os alunos possuem grandes dificuldades. E em relação aos números racionais essa dificuldade se apresenta ainda maior. Portanto, se faz necessário o uso de ferramentas que auxiliem na superação dessas dificuldades. É importante que essas ferramentas mobilizem os diferentes registros de um mesmo objeto matemático para acessá-lo e converter suas representações, para que se reconheça como representações de um mesmo objeto.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais consideram que o aluno precisa saber

> utilizar os diferentes significados e representações dos números naturais, inteiros, racionais e das operações envolvendo esses números, para resolver problemas, em contextos sociais, matemáticos ou de outras áreas do conhecimento. (BRASIL, 1998, p. 76).

Silva (2008), defende que

> O modo como os números racionais são abordados nas pesquisas e nos livros didáticos, em que as frações são representados por figuras geométricas, em geral de dimensão 2, circular ou retangular, fazendo uma analogia com a pizza ou com a barra de chocolate respectivamente, difere totalmente do modo de representar a fração por meio de reta numérica ou graduada, que, por sua vez, é pouco explorada nas pesquisas, nos livros didáticos e por nós, professores (SILVA, 2008, p. 53).

O ensino dos números racionais não é algo simples e possui muitos obstáculos, pois a aprendizagem dos racionais gera rupturas de ideias construídas com os números naturais, como a ideia de um número racional pode ser representado por diferentes escritas fracionarias, assim como os diferentes significados que ele pode assumir de acordo com o contexto (parte-todo, divisão e razão).

Segundo os PCN, possíveis dificuldades apresentadas pelos alunos no estudo dos números racionais, se origina do conhecimento que eles adquiriram sobre os números naturais, por meio de rupturas como:

> - Cada número racional pode ser representado por diferentes (e infinitas) escritas fracionárias: por exemplo, $\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}$, ...são diferentes representações de um mesmo número;
> - A comparação entre racionais acostumados coma relação $3 > 2$, terão de compreender uma desigualdade que lhes parece contraditória, ou seja, $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$;
> - Se o "tamanho" da escrita numérica, no caso dos naturais, é um bom indicador da ordem de grandeza ($8345 > 83$), a comparação entre 2,3 e 2,125 já não obedece ao mesmo critério;
> - Se, ao multiplicar um número natural por outro natural (sendo este diferente de 0 ou 1) a expectativa é a de encontrar um número maior que ambos, ao multiplicar 10 por $\frac{1}{2}$ se surpreenderão ao ver que o resultado é menor do que 10;
> - Se a sequência dos números naturais permite estabelecer sucessor e antecessor, para os racionais quaisquer é sempre possível encontrar outro racional; assim, o aluno deverá perceber que entre 0,8 e 0,9 estão números como 0,81, 0,815 ou 0,87. (BRASIL, 1998, p. 101).

Portanto, o livro didático deve abordar todas as possibilidades quanto aos tipos de representação dos números racionais, assim como seus respectivos tratamentos e conversões para que o aluno se aproprie desse objeto matemático.

Dessa forma, o livro didático assume um grande papel, pois ele representa grande parte do material utilizado em sala de aula, onde cabe ao professor oferecer essas condições facilitadoras com materiais potencializadores significativamente do conhecimento, na qual o livro didático se inscreve no processo de aprendizagem com o objetivo de melhorar a eficácia do ensino.

O Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) compreende um conjunto de ações voltadas para a distribuição de obras didáticas, pedagógicas e literárias, entre outros materiais de apoio à prática educativa, destinados aos alunos e professores das escolas públicas de educação básica do país, na qual as escolas participantes do PNLD recebem materiais de forma sistemática, regular e gratuita. Além disso, os professores atuam na escolha do livro a ser trabalhado em sala de aula, assim “podemos afirmar que, a partir de então, a qualidade didático-pedagógico dos livros didáticos distribuída pelo Ministério passou a ser relevante” (MANTOVANI, 2009, p. 33).

No Guia de livros de Matemática, faz-se um relato sobre as representações simbólicas presentes nos modelos matemáticos, apontando que a diversidade de representações simbólicas é essencial a Matemática, sendo que a

> língua natural, linguagem simbólica, desenhos, gráficos, tabelas, diagramas, imagens gráficas, entre outros, desempenham papel central, tanto na representação dos conceitos, relações e procedimentos, quanto na própria formação desses conteúdos. (BRASIL, 2017, p. 9).

Conforme proposto pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), nos anos iniciais já apresentado aos alunos o conceito de números racionais, levando ao conhecimento das representações fracionaria e decimal, a fim de que “por meio do estudo de frações equivalentes e da representação decimal, passam a conviver com números que admitem múltiplas representações, as quais devem ser propriamente selecionadas para diferentes finalidades” (BRASIL, 2017, p. 11).

Assim como o professor e o aluno são essenciais para o processo ensino-aprendizagem, sendo estes os protagonistas desse processo, o livro didático se torna uma ferramenta muito importante para auxiliar e compor a aprendizagem. Dessa forma, é imprescindível a escolha de um livro didático coerente e de qualidade, que tenha “o saber a ser estudado (a matemática); os métodos adotados para que os estudantes consigam aprendê-lo mais eficazmente; a organização curricular ao longo dos anos de escolaridade” (BRASIL, 2017, p. 13).

O livro didático possui algumas críticas em relação ao processo de escolha e de sua qualidade, assim como outros consideram a sua importância mesmo com as dificuldades existentes, como destaca Mantovani (2009)

> sem sombra de dúvidas, o livro didático, mesmo interpretado como um objeto cultural que gera polêmicas e recebe críticas de muitos setores da sociedade, ainda é considerado um instrumento de ensino fundamental no processo de escolarização. (MANTOVANI, 2009, p. 20).

Mantovani ainda destaca que as polêmicas e desvalorizações em relação ao livro didático também está associada a forma como o livro didático é usado, na qual segundo ele, “o livro didático é por vezes desvalorizado e, geralmente, essa desvalorização está relacionado ao imediatismo de seu uso” (MANTOVANI, 2009, p. 17).

Dessa forma, o livro didático tem uma importante função na prática pedagógica, pois os conteúdos são sistematizados para serem trabalhados em um processo dia a dia, sendo uma ferramenta de suporte para auxiliar o professor e o aluno.

Entretanto, quando falamos de livro didático como ferramenta suporte para os professos, temos que destacar dois casos: aqueles que o usam somente como um apoio, a fim de complementar suas aulas, e aqueles que o utilizam como o único material para ser trabalhado. E esta última característica acaba por refletir sobre algumas dificuldades enfrentadas pelos professores em sua formação ou também na disponibilidade de recursos variados para usar em sala de aula, e as vezes, infelizmente, “os professores apoiam-se quase exclusivamente nos livros didáticos, que, muitas vezes, são de qualidade insatisfatória” (BRASIL, 1998, p. 22). E sobre a primeira característica, Mantovani (2009) indaga, que “sem dúvida, colocar nas mãos do professor um livro de qualidade é um grande passo para a melhoria do ensino” (MANTOVANI, 2009, p. 80).

Portanto, apesar do livro didático ser um material tradicional, é necessário que os professores tenham um olhar mais atento e crítico em relação a sua importância, pois ele é sempre usado como apoio e tem grande contribuição para o processo de ensino aprendizagem.

Dessa forma, discutindo sobre a importância da aprendizagem dos números racionais para os alunos, e tendo o livro didático como uma ferramenta que ocupa uma posição de destaque no processo de ensino e aprendizagem e a relevância da Teoria dos Registros de Representações Semióticas, a partir da discussão da diversidade das representações, tratamentos e conversões do objeto matemático para as apropriações feitas pelos alunos, um dos objetivos específicos deste trabalho consiste em avaliar como é feita a apresentação do número racional no livro didático do sexto ano do Ensino Fundamental utilizado na escola pública, da cidade de Itaporanga-SP, mostrando como é importante conhecermos a fundo o material que temos de apoio pedagógico, verificando se ele pode contribuir para a mobilização dos registros de representação semiótica dos números racionais e a fundamental importância do professor avaliar e ser crítico no momento da escolha do livro didático.

Nessa análise, buscaremos observar: Quais representações são abordadas na apresentação do conteúdo números racionais? Como são apresentados os tratamentos dentro de uma representação? Existe articulação entre as diversas representações? As conversões propostas contemplam um único sentido ou os dois? Buscando, assim, proporcionar uma reflexão no modo como os conteúdos matemáticos são apresentados.

10 ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO ARARIBÁ MAIS – MATEMÁTICA 6° ANO

O livro didático analisado, Araribá Mais Matemática 6° ano, foi escolhido a partir do Programa Nacional do Livro e Material Didático (PNLD) para ser utilizado do ano de 2020 à 2023.

O desenvolvimento desse trabalho envolveu como base a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, verificando como é dada a abordagem do conceito e tratamentos envolvendo os números racionais e suas diferentes representações.

A escolha da investigação para o livro didático do 6° ano, pois atentamos por compreender que é uma fase de mudança para o aluno, pois ele deixa de ter um professor e passa a ter vários professores mediando o seu conhecimento, sendo a etapa em que eles começam a manifestar suas defasagens de aprendizagens, e o livro didático assume um papel importante pois é considerada uma ferramenta relevante do professor para o processo de ensino-aprendizagem.

O capítulo 5, intitulado “Frações”, engloba as habilidades da BNCC esperadas para o 6° ano:

- (EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes;
- (EF06MA09) Resolver e elaborar situações problema que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora.

Inicia-se o capítulo com o tópico 1 ‘Conceito de fração’, que tem por objetivos:

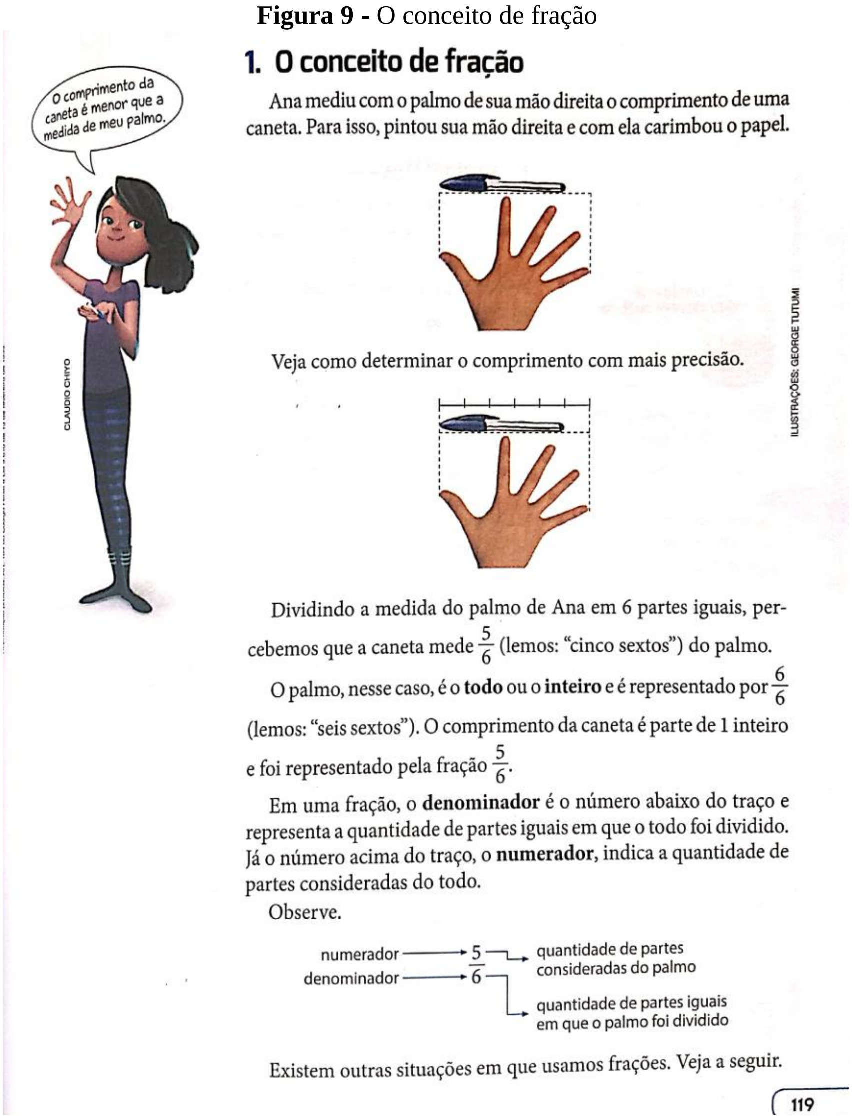
- Apresentar o conceito de fração, sua nomenclatura e seus termos;
- Associar fração à ideia de representação de partes de um todo, considerados os aspectos discretos e contínuos;
- Resolver problemas que envolvam o cálculo de fração de uma quantidade;
- Favorecer o desenvolvimento da habilidade da BNCC: EF06MA09.

Esse tópico favorece o desenvolvimento da habilidade EFO6MA09, pois propõe atividades que envolvem cálculo de frações de uma quantidade.

O livro traz algumas orientações referentes ao estudo deste tópico, em que ele destaca que em anos anteriores, os alunos já lidaram com situações em que os números naturais não foram suficientes para representar a medida de uma grandeza ou o resultado de uma divisão, então, neste momento, optou-se por não apresentar o termo “números racionais” aos alunos, o que não impede o desenvolvimento do conceito.

Na primeira situação, expressa-se com números uma medida não inteira, na qual mostra-se na imagem, que a unidade escolhida, o palmo, é maior que o comprimento da caneta, por isso foi preciso subdividir essa unidade em partes menores e iguais, para realizar a medição. E da mesma maneira, os alunos devem estimar a medida de outros objetos da classe, como uma borracha, um lápis, entre outros.

Figura 9 - O conceito de fração



1. O conceito de fração

Ana mediu com o palmo de sua mão direita o comprimento de uma caneta. Para isso, pintou sua mão direita e com ela carimbou o papel.

Veja como determinar o comprimento com mais precisão.

Dividindo a medida do palmo de Ana em 6 partes iguais, percebemos que a caneta mede $\frac{5}{6}$ (lemos: "cinco sextos") do palmo.

O palmo, nesse caso, é o **todo** ou o **inteiro** e é representado por $\frac{6}{6}$ (lemos: "seis sextos"). O comprimento da caneta é parte de 1 inteiro e foi representado pela fração $\frac{5}{6}$.

Em uma fração, o **denominador** é o número abaixo do traço e representa a quantidade de partes iguais em que o todo foi dividido. Já o número acima do traço, o **numerador**, indica a quantidade de partes consideradas do todo.

Observe.

numerador → 5 → quantidade de partes consideradas do palmo
denominador → 6 → quantidade de partes iguais em que o palmo foi dividido

Existem outras situações em que usamos frações. Veja a seguir.

119

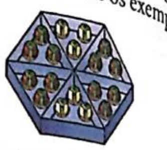
Fonte: GAY, SILVA, 2018, p. 119

A ideia que se tem é explorar a leitura do texto com os alunos, solucionando eventuais dúvidas e mostrando as relações entre a notação fracionaria e a respectiva leitura, conforme mostra a imagem abaixo, de que como o livro apresenta essa situação.

Figura 10 - Leitura de frações

As frações também podem aparecer quando nos referimos à parte de uma figura ou quando comparamos o número de alguns objetos com o total de objetos de um grupo. Observe os exemplos.

$\frac{3}{6}$ da superfície de cima da tampa estão revestidos com papel amarelo.



$\frac{6}{18}$ dos bombons da caixa são de chocolate branco.

Leitura de frações

Para fazer a leitura de uma fração, devemos primeiro ler o numerador e, em seguida, o denominador, que recebe nomes especiais. Veja os exemplos a seguir.

Frações com denominador de 2 a 9

Denominador	Exemplo de fração	Leitura
2	$\frac{1}{2}$	Um meio ou metade
3	$\frac{2}{3}$	Dois terços
4	$\frac{1}{4}$	Um quarto
5	$\frac{13}{5}$	Treze quintos
6	$\frac{5}{6}$	Cinco sextos
7	$\frac{2}{7}$	Dois sétimos
8	$\frac{7}{8}$	Sete oitavos
9	$\frac{10}{9}$	Dez nonos

Frações cujo denominador é uma potência de base 10

Denominador	Exemplo de fração	Leitura
10	$\frac{1}{10}$	Um décimo
100	$\frac{21}{100}$	Vinte e um centésimos
1.000	$\frac{5}{1.000}$	Cinco milésimos
⋮	⋮	⋮

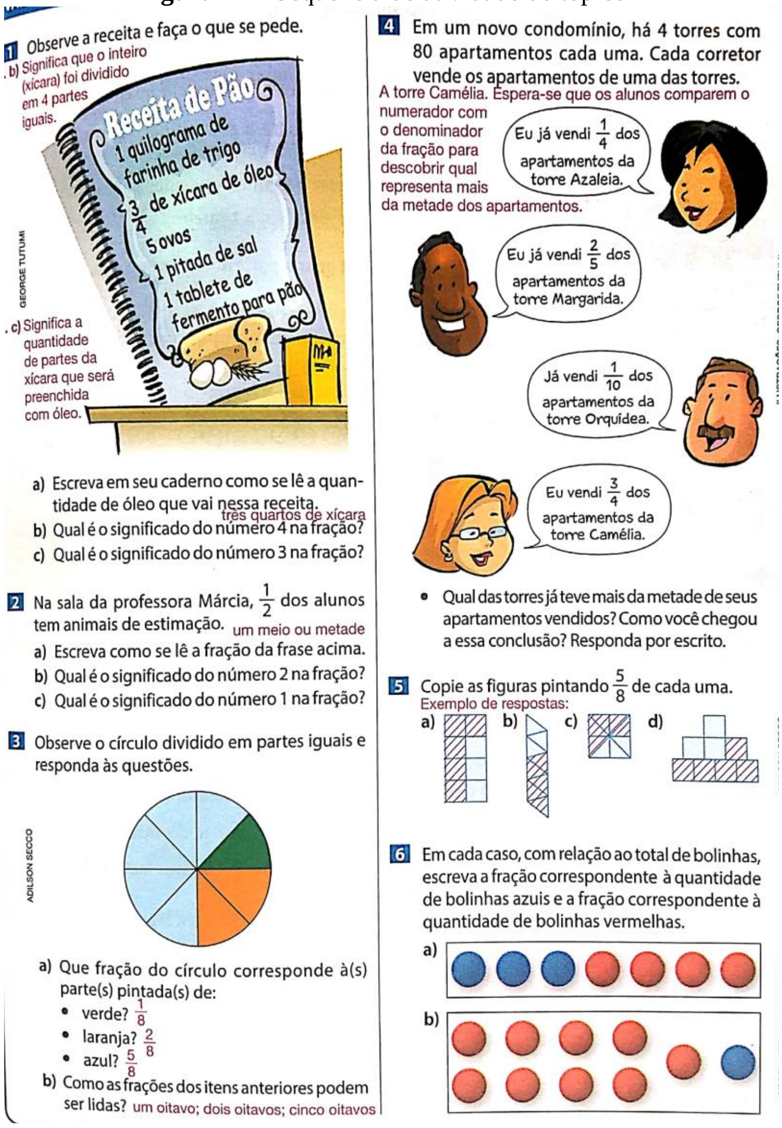
Frações com outros denominadores

Denominador	Exemplo de fração	Leitura
11	$\frac{37}{11}$	Trinta e sete onze avos
12	$\frac{5}{12}$	Cinco doze avos
13	$\frac{7}{13}$	Sete treze avos
⋮	⋮	⋮

Fonte: GAY, SILVA, 2018, p. 120

Nesse estudo o livro propõe as representações do número racional no registro da língua natural, registro figural e registro numérico fracionário, estabelecendo a relação entre eles, e após o estudo do conceito de fração sua representação e leitura, é proposto uma sequência de atividades sobre o tema.

Figura 11 – Sequência de atividade do tópico 1



Fonte: GAY, SILVA, 2018, p. 120

Nas atividades 1 e 2, os alunos fazem a leitura de uma notação fracionária e reconhecem a terminologia usada para essa notação, na qual favorece o trabalho com a representação figural da fração, em que representassem por meio de um desenho a xícara e indicassem (pintar ou hachurar) a quantidade de óleo correspondente a fração apontada na receita. Esse trabalho com a representação figural favorece o desenvolvimento da atividade 3. Analisando essas atividades observamos que elas aplicam três diferentes registros dos números racionais, o registro da língua natural, registro numérico fracionário e registro figural, e promove a conversão entre esses três registros.

Na atividade 4, como há caminhos diferentes para a resolução, é importante incentivar os alunos a analisar os dados apresentados, de modo que possam observar que não há necessidade de calcular a quantidade de apartamentos vendidos em cada torre para chegar à conclusão de qual torre já teve mais da metade dos apartamentos vendidos. E nessa atividade trabalha-se o registro numérico fracionário para que o aluno compreenda a relação entre parte-todo, a fim de conseguir representação a situação em um registro fracionário.

Na atividade 5, é possível apresentarmos aos alunos as diferentes formas para se pintar $\frac{5}{8}$ de cada figura, ou seja, há a conversão do registro numérico racionário para o registro figural.

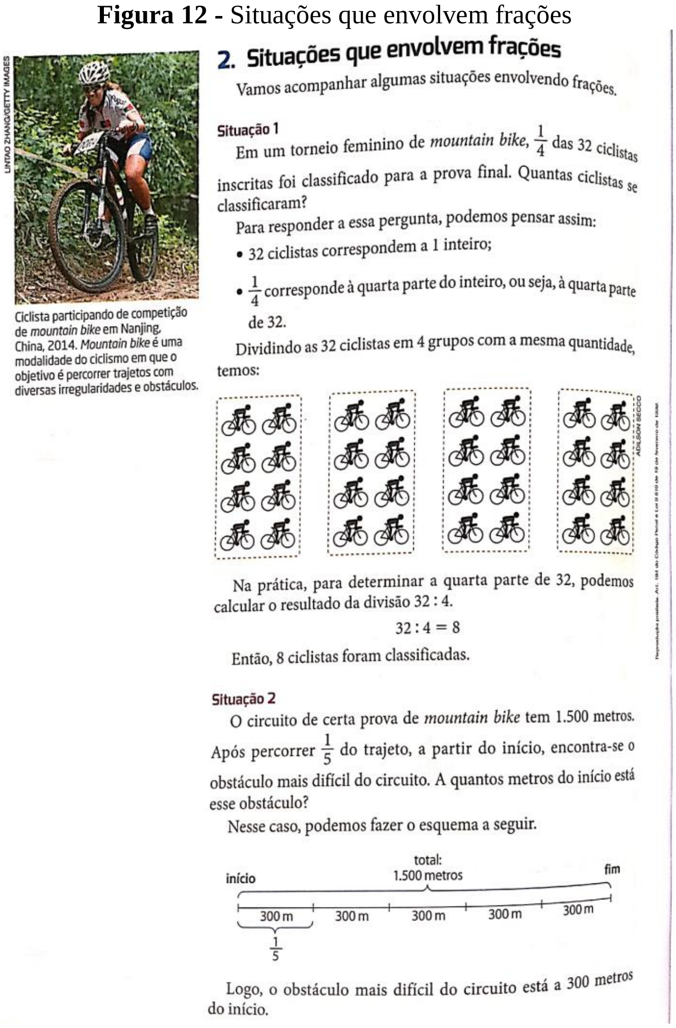
No tópico 2 "Situações que envolvem frações", tem-se por objetivos:

- Associar fração a diferentes ideias e contextos;
- Favorecer o desenvolvimento das habilidades da BNCC: EF06MA07 e EF06MA09.

O desenvolvimento dessas habilidades é possível, pois o tópico propõe situações e atividades que permitem a identificação de frações e as várias ideias relacionadas a essa notação, como parte-todo, medida, razão, quociente e operador.

As situações apresentadas retomam o conhecimento que os alunos trazem sobre frações e ampliam com situações em que se trabalha com parte-todo, medida, razão, quociente e operador.

Figura 12 - Situações que envolvem frações



2. Situações que envolvem frações

Vamos acompanhar algumas situações envolvendo frações.

LINTAO ZHANG/GETTY IMAGES

Ciclista participando de competição de *mountain bike* em Nanjing, China, 2014. *Mountain bike* é uma modalidade do ciclismo em que o objetivo é percorrer trajetos com diversas irregularidades e obstáculos.

Situação 1

Em um torneio feminino de *mountain bike*, $\frac{1}{4}$ das 32 ciclistas inscritas foi classificado para a prova final. Quantas ciclistas se classificaram?

Para responder a essa pergunta, podemos pensar assim:

- 32 ciclistas correspondem a 1 inteiro;
- $\frac{1}{4}$ corresponde à quarta parte do inteiro, ou seja, à quarta parte de 32.

Dividindo as 32 ciclistas em 4 grupos com a mesma quantidade, temos:

ADILSON SECCO

Na prática, para determinar a quarta parte de 32, podemos calcular o resultado da divisão 32 : 4.

32 : 4 = 8

Então, 8 ciclistas foram classificadas.

Situação 2

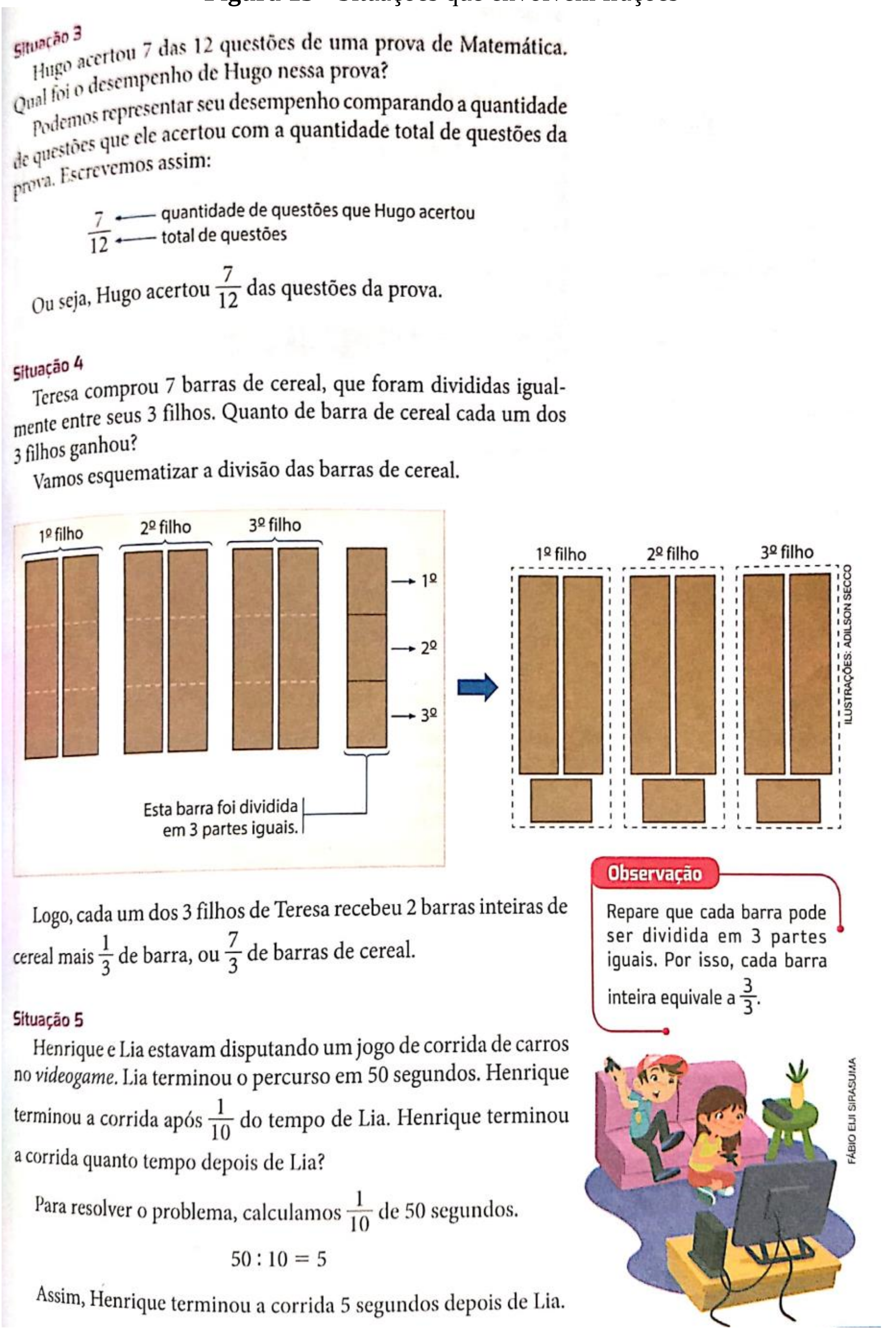
O circuito de certa prova de *mountain bike* tem 1.500 metros. Após percorrer $\frac{1}{5}$ do trajeto, a partir do início, encontra-se o obstáculo mais difícil do circuito. A quantos metros do início está esse obstáculo?

Nesse caso, podemos fazer o esquema a seguir.

Logo, o obstáculo mais difícil do circuito está a 300 metros do início.

Fonte: GAY, SILVA, 2018, p. 122

Figura 13 - Situações que envolvem frações



Situação 3

Hugo acertou 7 das 12 questões de uma prova de Matemática. Qual foi o desempenho de Hugo nessa prova?

Podemos representar seu desempenho comparando a quantidade de questões que ele acertou com a quantidade total de questões da prova. Escrevemos assim:

$\frac{7}{12}$ — 7 ⟵ quantidade de questões que Hugo acertou; 12 ⟵ total de questões

Ou seja, Hugo acertou $\frac{7}{12}$ das questões da prova.

Situação 4

Teresa comprou 7 barras de cereal, que foram divididas igualmente entre seus 3 filhos. Quanto de barra de cereal cada um dos 3 filhos ganhou?

Vamos esquematizar a divisão das barras de cereal.

1º filho 2º filho 3º filho → 1º → 2º → 3º

Esta barra foi dividida em 3 partes iguais.

1º filho 2º filho 3º filho

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Logo, cada um dos 3 filhos de Teresa recebeu 2 barras inteiras de cereal mais $\frac{1}{3}$ de barra, ou $\frac{7}{3}$ de barras de cereal.

Observação

Repare que cada barra pode ser dividida em 3 partes iguais. Por isso, cada barra inteira equivale a $\frac{3}{3}$.

Situação 5

Henrique e Lia estavam disputando um jogo de corrida de carros no *videogame*. Lia terminou o percurso em 50 segundos. Henrique terminou a corrida após $\frac{1}{10}$ do tempo de Lia. Henrique terminou a corrida quanto tempo depois de Lia?

Para resolver o problema, calculamos $\frac{1}{10}$ de 50 segundos.

$$50 : 10 = 5$$

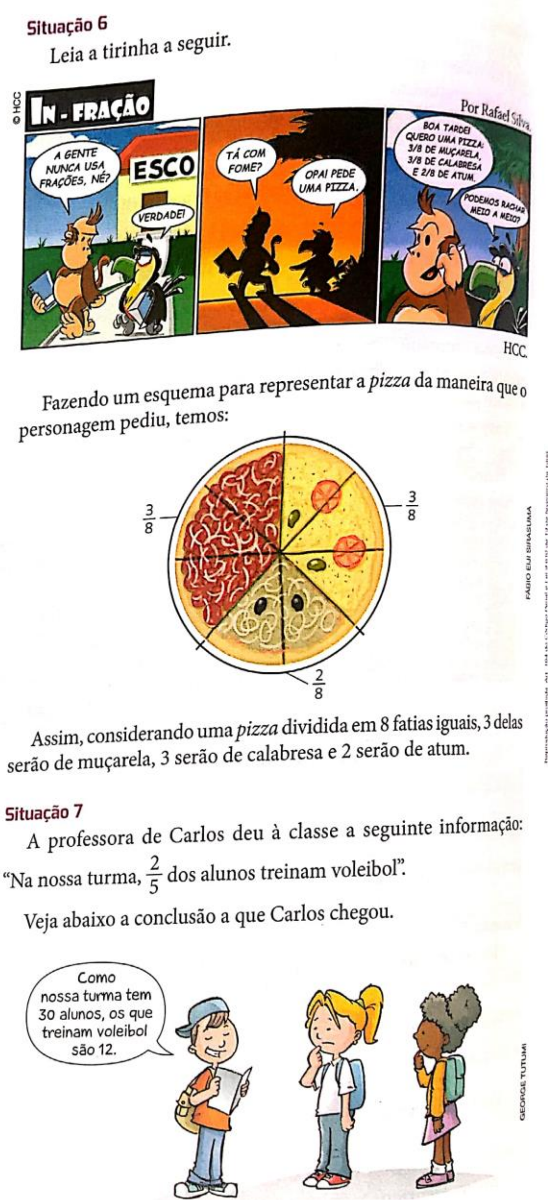
Assim, Henrique terminou a corrida 5 segundos depois de Lia.

FÁBIO EIJI SIRASUMA

Fonte: GAY, SILVA, 2018, p. 123.

As situações apresentadas englobam a representação dos números racionais como registro numérico fracionário, estabelecendo a relação parte-todo, e estabelece também a relação do registro figural, fazendo a conversão entre eles.

Figura 14 - Situações que envolvem frações


Situação 6

Leia a tirinha a seguir.

Fazendo um esquema para representar a *pizza* da maneira que o personagem pediu, temos:

Assim, considerando uma *pizza* dividida em 8 fatias iguais, 3 delas serão de muçarela, 3 serão de calabresa e 2 serão de atum.

Situação 7

A professora de Carlos deu à classe a seguinte informação: "Na nossa turma, $\frac{2}{5}$ dos alunos treinam voleibol".

Veja abaixo a conclusão a que Carlos chegou.

Fonte: GAY, SILVA, 2018, p. 124.

Em seguida, são propostas atividades de situações com frações para serem analisadas e resolvidas pelos alunos, na qual englobam a representação figural, em que por meio do papel quadriculado, reproduzam as figuras, a fim de facilitar as ilustrações e divisões das figuras em partes do mesmo tamanho (frações equivalentes), e a relação que se há entre elas, além de envolver o cálculo de fração de uma quantidade. Nessas atividades envolviam a conversão do registro figural para o registro numérico fracionário, e vice-versa, assim como também o tratamento do registro numérico fracionário para forma irredutível.

A atividade 9 considera a fração envolvendo a ideia de medida o quadrado B é usado como unidade de medida para o quadrado A, e o quadrado C é usado como unidade de medida para os quadrados B e A, usa-se a relação e a conversão do registro figural e registro numérico fracionário.

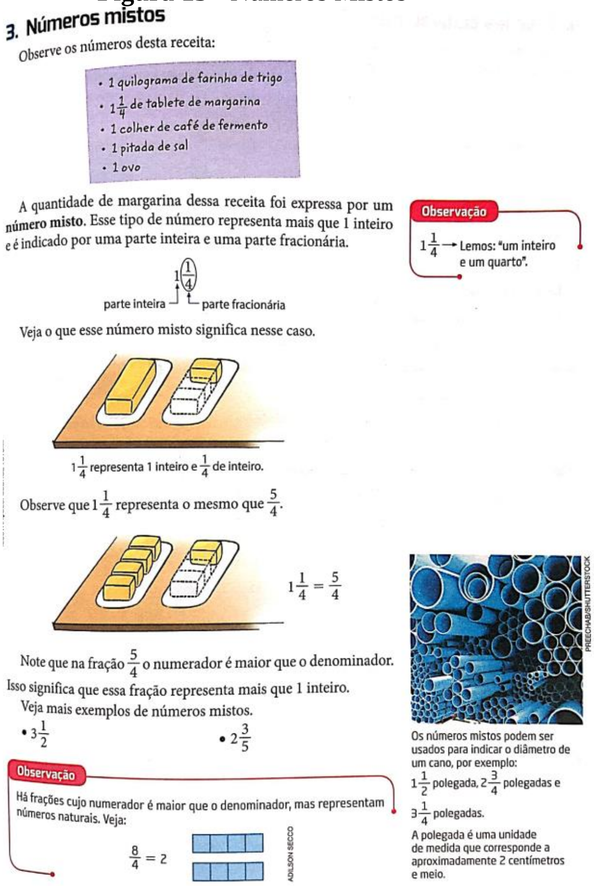
Por fim, a última atividade sugere que os alunos inventem um problema com as situações propostas, na qual é um exercício interessante para verificar a aprendizagem do aluno em relação ao conteúdo, e para eles mesmos avaliarem o que é importante ter em mente ao criar um problema.

O tópico 3 “Números mistos” tem por objetivos:

- Relacionar número misto a uma fração que representa mais que 1 inteiro;
- Favorecer o desenvolvimento da habilidade da BNCC: EF06MA07.

Esse tópico favorece o desenvolvimento dessa habilidade por ampliar a compreensão sobre a representação fracionária, ressaltando a utilidade dos números mistos no cotidiano, principalmente no uso de medidas, e indagando a eles outras receitas culinárias que utilizam números mistos, e, também destacando a percepção de que há outras frações que representam o número 2, mostrando a conversão da língua natural para a numérica fracionária, a conversão do registro figural para o fracionário, e o tratamento do registro numérico fracionário para o numero misto.

Figura 15 - Números Mistos



3. Números mistos

Observe os números desta receita:

- 1 quilograma de farinha de trigo
- $1\frac{1}{4}$ de tablete de margarina
- 1 colher de café de fermento
- 1 pitada de sal
- 1 ovo

A quantidade de margarina dessa receita foi expressa por um **número misto**. Esse tipo de número representa mais que 1 inteiro e é indicado por uma parte inteira e uma parte fracionária.

$1\frac{1}{4}$

parte inteira — parte fracionária

Observação

$1\frac{1}{4}$ → Lemos: “um inteiro e um quarto”.

Veja o que esse número misto significa nesse caso.

$1\frac{1}{4}$ representa 1 inteiro e $\frac{1}{4}$ de inteiro.

Observe que $1\frac{1}{4}$ representa o mesmo que $\frac{5}{4}$.

$1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

Note que na fração $\frac{5}{4}$ o numerador é maior que o denominador. Isso significa que essa fração representa mais que 1 inteiro.

Veja mais exemplos de números mistos.

- $3\frac{1}{2}$
- $2\frac{3}{5}$

PREECHAB/SHUTTERSTOCK

Os números mistos podem ser usados para indicar o diâmetro de um cano, por exemplo: $1\frac{1}{2}$ polegada, $2\frac{3}{4}$ polegadas e $3\frac{1}{4}$ polegadas.

A polegada é uma unidade de medida que corresponde a aproximadamente 2 centímetros e meio.

Observação

Há frações cujo numerador é maior que o denominador, mas representam números naturais. Veja:

$\frac{8}{4} = 2$

ADILSON SECCO

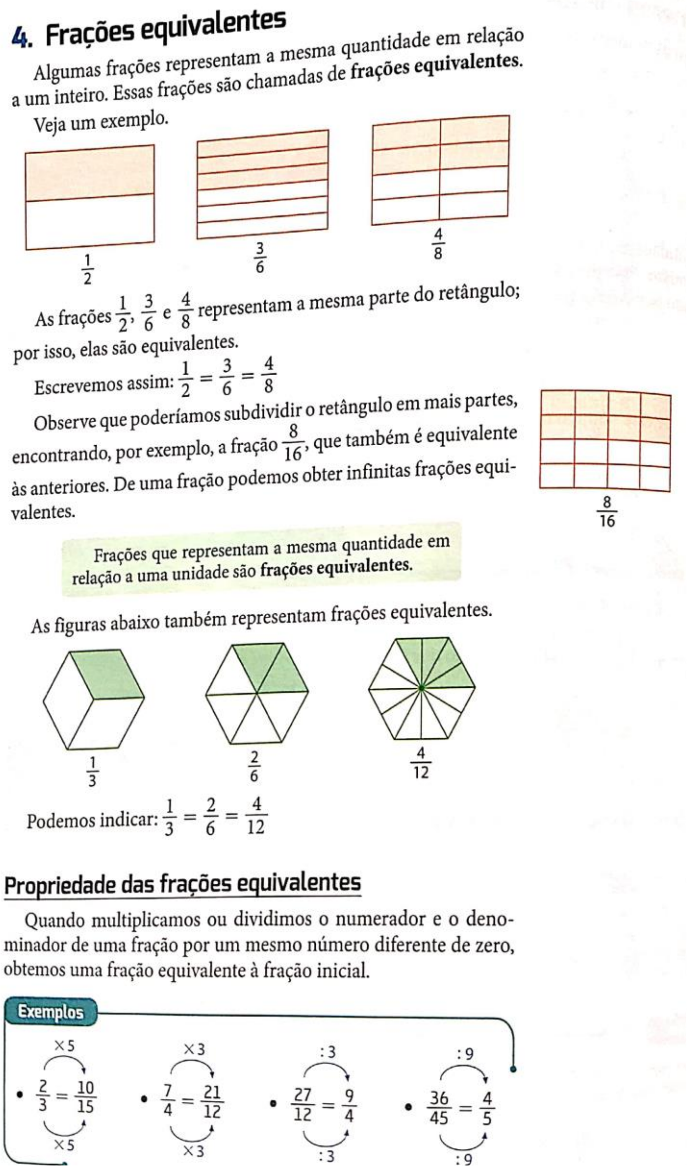
Fonte: GAY, SILVA, 2018, p. 127.

O tópico 4 “Frações equivalentes” tem por objetivos:

- Identificar e obter frações equivalentes;
- Simplificar frações e obter frações irredutíveis;
- Favorecer o desenvolvimento da habilidade da BNCC: EF06MA07.

O desenvolvimento dessa habilidade é favorecido pois são propostas situações que envolvem a compreensão e identificação de frações equivalentes. Ao introduzir o conceito de frações equivalentes, o objetivo é levar os alunos a reconhecer que um mesmo número pode ser representado por infinitas frações equivalentes. E ainda são apresentados alguns exemplos de simplificação de fração irredutível, retomando assim, o trabalho com divisibilidade, e mostrando ao aluno o tratamento feito para um mesmo tipo de registro do número racional.

Figura 16 - Frações equivalentes



4. Frações equivalentes

Algumas frações representam a mesma quantidade em relação a um inteiro. Essas frações são chamadas de **frações equivalentes**.

Veja um exemplo.

$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{4}{8}$

As frações $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{6}$ e $\frac{4}{8}$ representam a mesma parte do retângulo; por isso, elas são equivalentes.

Escrevemos assim: $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$

Observe que poderíamos subdividir o retângulo em mais partes, encontrando, por exemplo, a fração $\frac{8}{16}$, que também é equivalente às anteriores. De uma fração podemos obter infinitas frações equivalentes.

$\frac{8}{16}$

Frações que representam a mesma quantidade em relação a uma unidade são **frações equivalentes.**

As figuras abaixo também representam frações equivalentes.

$\frac{1}{3}$ $\frac{2}{6}$ $\frac{4}{12}$

Podemos indicar: $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{4}{12}$

Propriedade das frações equivalentes

Quando multiplicamos ou dividimos o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número diferente de zero, obtemos uma fração equivalente à fração inicial.

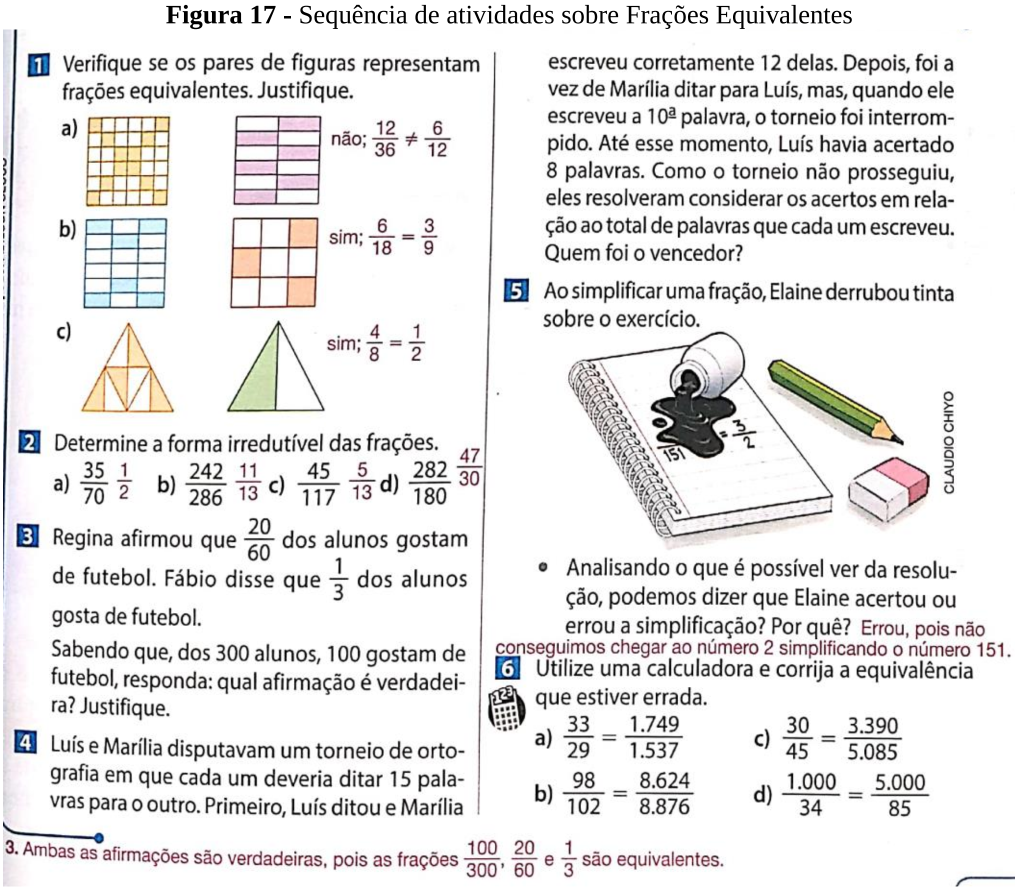
Exemplos

- $\frac{2}{3} \overset{\times 5}{=} \frac{10}{15}$
- $\frac{7}{4} \overset{\times 3}{=} \frac{21}{12}$
- $\frac{27}{12} \overset{:3}{=} \frac{9}{4}$
- $\frac{36}{45} \overset{:9}{=} \frac{4}{5}$

Fonte: GAY, SILVA, p. 128.

Após a explanação, em que se expõe a relação do registro figural para o registro numérico fracionário e tratamento do registro fracionário para frações equivalentes, são propostas atividades que englobam a representação fracionaria e figural.

Figura 17 - Sequência de atividades sobre Frações Equivalentes



1 Verifique se os pares de figuras representam frações equivalentes. Justifique.

a) não; $\frac{12}{36} \neq \frac{6}{12}$

b) sim; $\frac{6}{18} = \frac{3}{9}$

c) sim; $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

2 Determine a forma irredutível das frações.

a) $\frac{35}{70}$ $\frac{1}{2}$ b) $\frac{242}{286}$ $\frac{11}{13}$ c) $\frac{45}{117}$ $\frac{5}{13}$ d) $\frac{282}{180}$ $\frac{47}{30}$

3 Regina afirmou que $\frac{20}{60}$ dos alunos gostam de futebol. Fábio disse que $\frac{1}{3}$ dos alunos gosta de futebol.

Sabendo que, dos 300 alunos, 100 gostam de futebol, responda: qual afirmação é verdadeira? Justifique.

4 Luís e Marília disputavam um torneio de ortografia em que cada um deveria ditar 15 palavras para o outro. Primeiro, Luís ditou e Marília escreveu corretamente 12 delas. Depois, foi a vez de Marília ditar para Luís, mas, quando ele escreveu a 10ª palavra, o torneio foi interrompido. Até esse momento, Luís havia acertado 8 palavras. Como o torneio não prosseguiu, eles resolveram considerar os acertos em relação ao total de palavras que cada um escreveu. Quem foi o vencedor?

5 Ao simplificar uma fração, Elaine derrubou tinta sobre o exercício.

- Analisando o que é possível ver da resolução, podemos dizer que Elaine acertou ou errou a simplificação? Por quê? Errou, pois não conseguimos chegar ao número 2 simplificando o número 151.

6 Utilize uma calculadora e corrija a equivalência que estiver errada.

a) $\frac{33}{29} = \frac{1.749}{1.537}$ c) $\frac{30}{45} = \frac{3.390}{5.085}$

b) $\frac{98}{102} = \frac{8.624}{8.876}$ d) $\frac{1.000}{34} = \frac{5.000}{85}$

3. Ambas as afirmações são verdadeiras, pois as frações $\frac{100}{300}$, $\frac{20}{60}$ e $\frac{1}{3}$ são equivalentes.

Fonte: GAY, SILVA, 2018, p. 129.

A atividade 1 envolve primeiramente o registro figural em que é necessário que o aluno converta para o registro numérico fracionário, além disso faça o tratamento do registro numérico fracionário para sua forma de fração irredutível.

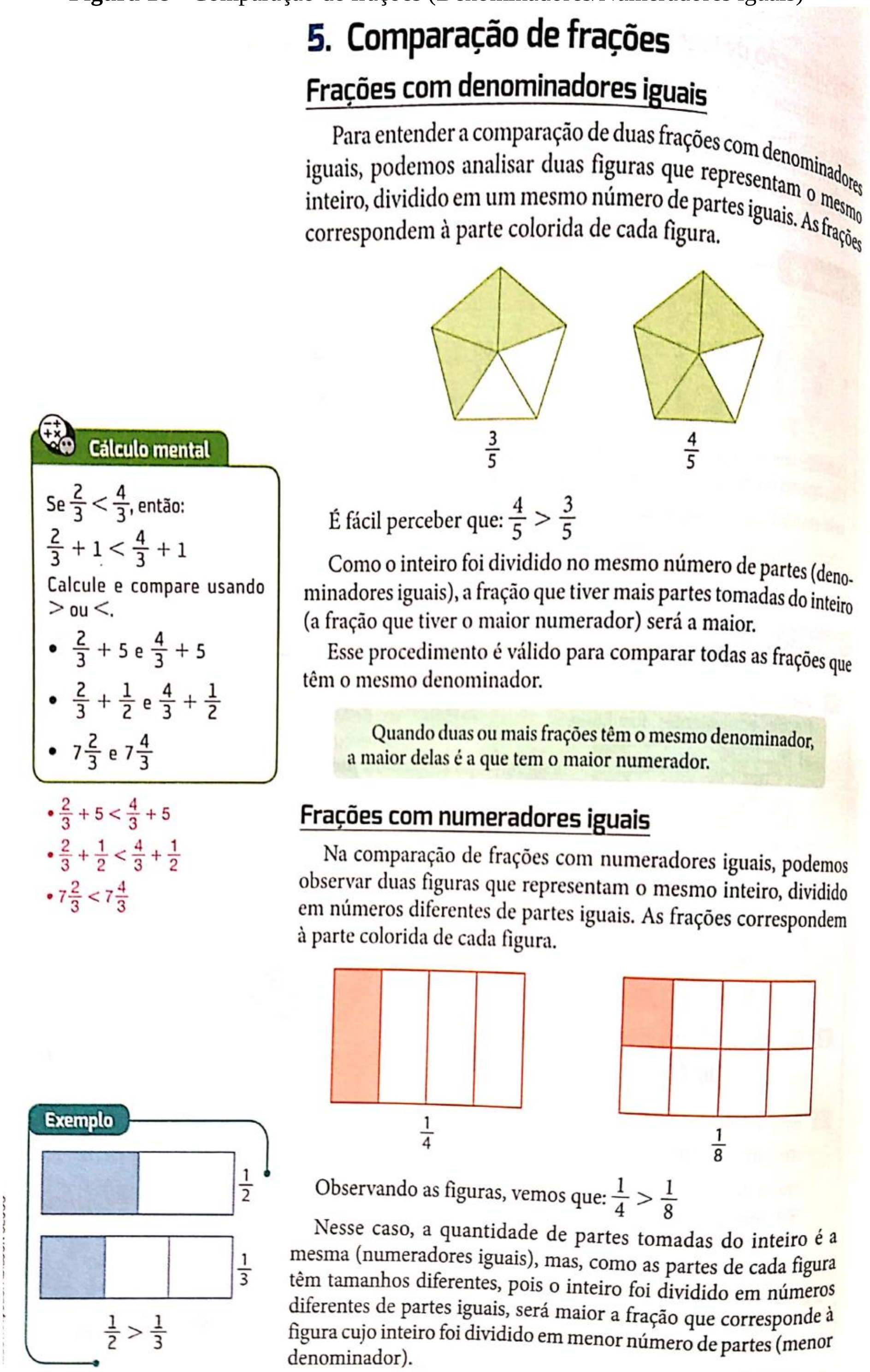
Nas atividades 2 a 6 faz-se o tratamento do registro numérico fracionário para sua forma irredutível.

O tópico 5 “Comparação de frações”, tem por objetivos:

- Comparar frações usando diferentes estratégias;
- Favorecer o desenvolvimento da habilidade da BNCC: EF06MA07.

Esse tópico favorece o desenvolvimento dessa habilidade ao apresentar contextos e atividades de comparação de frações por meio de diferentes estratégias, inclusive usando frações equivalentes, por meio de representação pictórica, identificação das frações equivalentes de mesmo denominador ou mesmo numerador.

Figura 18 - Comparação de frações (Denominadores/Numeradores iguais)



5. Comparação de frações

Frações com denominadores iguais

Para entender a comparação de duas frações com denominadores iguais, podemos analisar duas figuras que representam o mesmo inteiro, dividido em um mesmo número de partes iguais. As frações correspondem à parte colorida de cada figura.

$\frac{3}{5}$ $\frac{4}{5}$

É fácil perceber que: $\frac{4}{5} > \frac{3}{5}$

Como o inteiro foi dividido no mesmo número de partes (denominadores iguais), a fração que tiver mais partes tomadas do inteiro (a fração que tiver o maior numerador) será a maior.

Esse procedimento é válido para comparar todas as frações que têm o mesmo denominador.

Quando duas ou mais frações têm o mesmo denominador, a maior delas é a que tem o maior numerador.

Cálculo mental

Se $\frac{2}{3} < \frac{4}{3}$, então:

$\frac{2}{3} + 1 < \frac{4}{3} + 1$

Calcule e compare usando > ou <.

- $\frac{2}{3} + 5$ e $\frac{4}{3} + 5$
- $\frac{2}{3} + \frac{1}{2}$ e $\frac{4}{3} + \frac{1}{2}$
- $7\frac{2}{3}$ e $7\frac{4}{3}$

- $\frac{2}{3} + 5 < \frac{4}{3} + 5$
- $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} < \frac{4}{3} + \frac{1}{2}$
- $7\frac{2}{3} < 7\frac{4}{3}$

Frações com numeradores iguais

Na comparação de frações com numeradores iguais, podemos observar duas figuras que representam o mesmo inteiro, dividido em números diferentes de partes iguais. As frações correspondem à parte colorida de cada figura.

$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$

Observando as figuras, vemos que: $\frac{1}{4} > \frac{1}{8}$

Nesse caso, a quantidade de partes tomadas do inteiro é a mesma (numeradores iguais), mas, como as partes de cada figura têm tamanhos diferentes, pois o inteiro foi dividido em números diferentes de partes iguais, será maior a fração que corresponde à figura cujo inteiro foi dividido em menor número de partes (menor denominador).

Exemplo

$\frac{1}{2}$

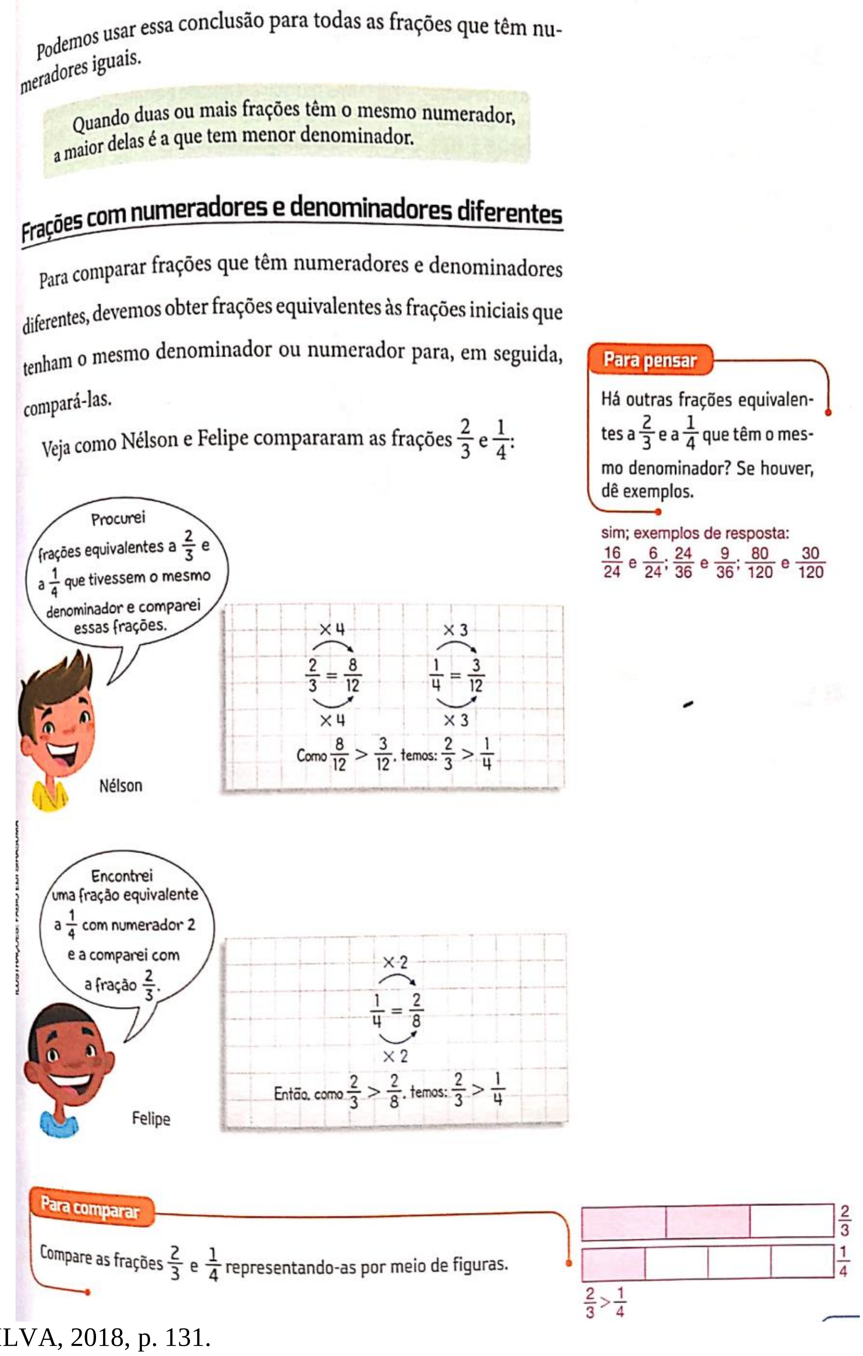
$\frac{1}{3}$

$\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$

Fonte: GAY, SILVA, 2018, p. 130.

Nessa situação são apresentadas a conversão do registro figural para o fracionário e vice-versa, assim como também o tratamento do registro figural e o tratamento do registro fracionário usando as operações.

Figura 19 - Comparação de frações (Denominadores/Numeradores diferentes)



Podemos usar essa conclusão para todas as frações que têm numeradores iguais.

Quando duas ou mais frações têm o mesmo numerador, a maior delas é a que tem menor denominador.

Frações com numeradores e denominadores diferentes

Para comparar frações que têm numeradores e denominadores diferentes, devemos obter frações equivalentes às frações iniciais que tenham o mesmo denominador ou numerador para, em seguida, compará-las.

Veja como Nélson e Felipe compararam as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{4}$:

Para pensar

Há outras frações equivalentes a $\frac{2}{3}$ e a $\frac{1}{4}$ que têm o mesmo denominador? Se houver, dê exemplos.

sim; exemplos de resposta: $\frac{16}{24}$ e $\frac{6}{24}$; $\frac{24}{36}$ e $\frac{9}{36}$; $\frac{80}{120}$ e $\frac{30}{120}$

Para comparar

Compare as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{4}$ representando-as por meio de figuras.

$\frac{2}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{3} > \frac{1}{4}$

Fonte: GAY, SILVA, 2018, p. 131.

Na atividade 1, os alunos deverão usar os sinais de maior, menor ou igual para comparar as representações pictóricas das frações, identificando a fração que corresponde a cada figura e depois fazer a comparação das frações observando as figuras, ou seja, há a mobilização do tratamento do registro numérico fracionário, assim como também a conversão do figural para o fracionário.

Na atividade 2, há a conversão do registro figural para o fracionário, e a comparação entre as frações.

Na atividade 3, os alunos terão que comparar mais de duas frações, por meio de ordenando as frações, da menor para a maior, fazendo comparações duas a duas ou transformando todas as frações para frações equivalentes com mesmo denominador ou numerador.

Na atividade 4, o acerto de 5 questões em uma prova com o total de 15 questões pode ser representado pela fração irredutível $\frac{1}{3}$, e o acerto de 5 questões na prova com 10 questões pode ser representado pela fração irredutível $\frac{1}{2}$, em que o aluno represente numericamente uma fração e saiba fazer o tratamento para sua forma irredutível.

O capítulo 6 “Operações com frações”, busca desenvolver as seguintes habilidades da BNCC:

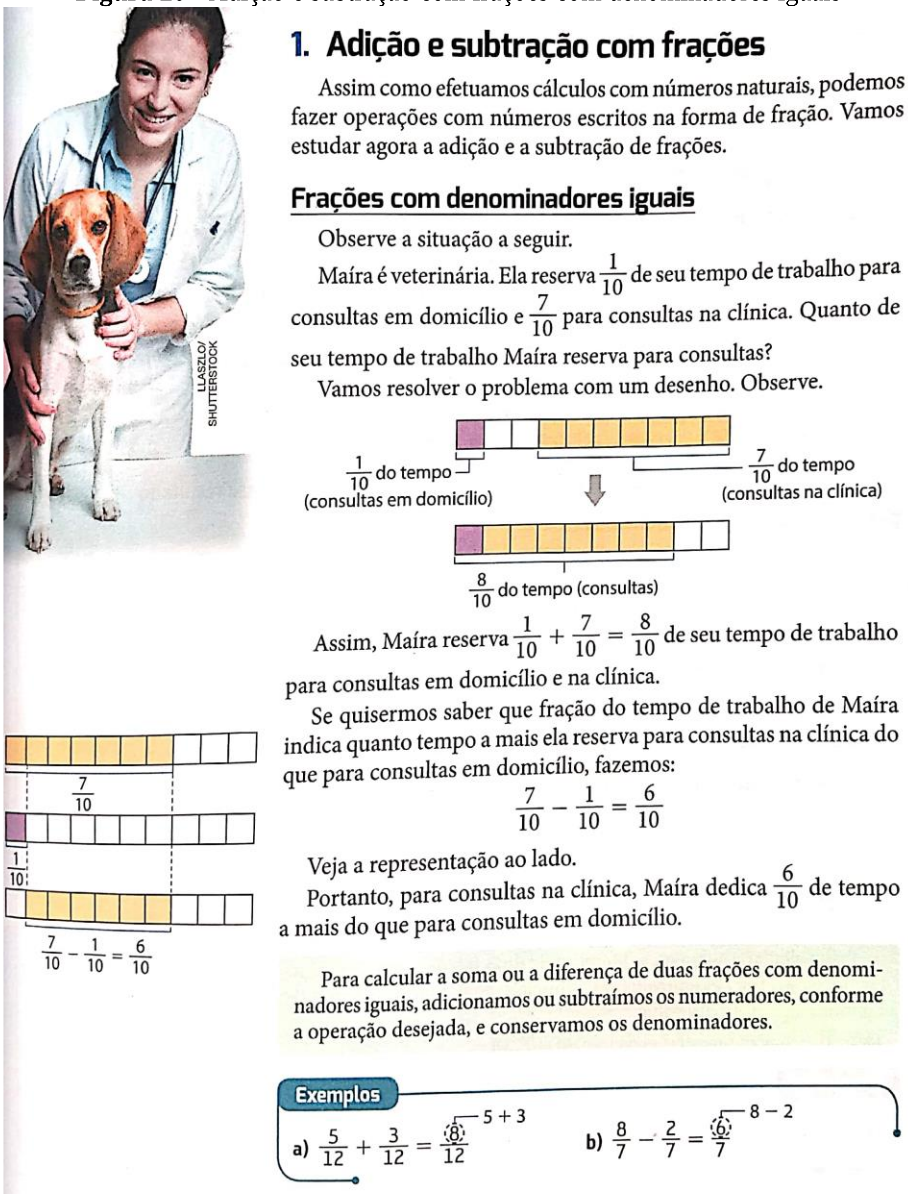
- (EF06MA10) Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.
- (EF06MA13) Resolver e elaborar situações problema que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade sem fazer uso da “regra de três”, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.
- (EF06MA14) Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas.
- (EF06MA15) Resolver e elaborar situações problema que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo.
- (EF06MA32) Interpretar e resolver situações que envolvam dados de pesquisas sobre contextos ambientais, sustentabilidade, trânsito, consumo responsável, entre outros, apresentadas pela mídia em tabelas e em diferentes tipos de gráficos e redigir textos escritos com o objetivo de sintetizar conclusões.

O tópico 1 “Adição e subtração com frações” tem por objetivos:

- Realizar adições e subtrações com frações;
- Favorecer o desenvolvimento da habilidade da BNCC: EF06MA10.

Essa habilidade é desenvolvida por meio da resolução e elaboração de problemas envolvendo adições e subtrações com números na forma de fração. E a representação gráfica é um apoio importante no desenvolvimento desse conteúdo, pois contribui para a visualização das situações.

Figura 20 - Adição e subtração com frações com denominadores iguais



Fonte: GAY, SILVA, 2018, p. 137.

Nesse tópico, envolve a conversão do registro figural para o registro fracionário, assim como também o tratamento do registro fracionário por meio das operações e de frações equivalentes.

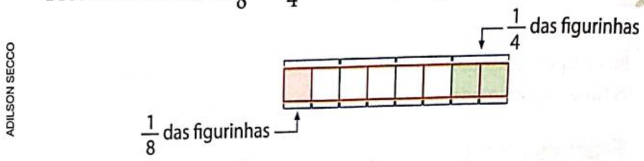
Figura 21 - Adição e subtração com frações com denominadores iguais

Frações com denominadores diferentes

Agora, acompanhe a situação a seguir.

Paulo e Clara decidiram preencher juntos um álbum de figurinhas. Paulo juntou $\frac{1}{8}$ do total de figurinhas e Clara, $\frac{1}{4}$. Que fração do total de figurinhas Paulo e Clara juntaram?

Precisamos calcular $\frac{1}{8} + \frac{1}{4}$. Observe o esquema.

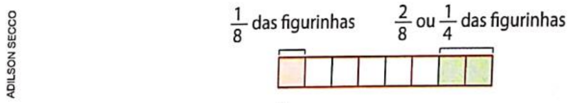


Temos de encontrar frações equivalentes a essas duas frações para que ambas fiquem com o mesmo denominador.

Pelo esquema acima, observamos que $\frac{1}{4}$ é o mesmo que $\frac{2}{8}$. Então:

$$\underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{4}}_{\text{frações com denominadores diferentes}} = \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{2}{8}}_{\text{frações com denominadores iguais}} = \frac{3}{8} \longleftarrow \text{fração de figurinhas que Paulo e Clara juntaram}$$

Assim, Paulo e Clara juntaram $\frac{3}{8}$ do total de figurinhas do álbum. Esse resultado pode ser visualizado no esquema abaixo.



Se Paulo e Clara juntaram $\frac{3}{8}$ das figurinhas, que fração do total de figurinhas falta para completar o álbum?

Para responder a essa pergunta, devemos calcular $1 - \frac{3}{8}$.

Transformando 1 inteiro em uma fração equivalente com denominador 8, temos:

$$\frac{8}{8} - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

Portanto, para completar o álbum faltam $\frac{5}{8}$ do total de figurinhas.

Para calcular a soma ou a diferença de duas frações com denominadores diferentes, encontramos frações equivalentes às iniciais, com o mesmo denominador, e então efetuamos a operação desejada.

Exemplos

a) $\frac{6}{5} + \frac{9}{4} = \frac{24}{20} + \frac{45}{20} = \frac{69}{20}$ b) $\frac{1}{3} - \frac{1}{15} + \frac{1}{5} = \frac{5}{15} - \frac{1}{15} + \frac{3}{15} = \frac{7}{15}$

Se achar conveniente, comente com os alunos que o denominador comum das frações equivalentes pode ser o menor dos múltiplos comuns dos denominadores iniciais.

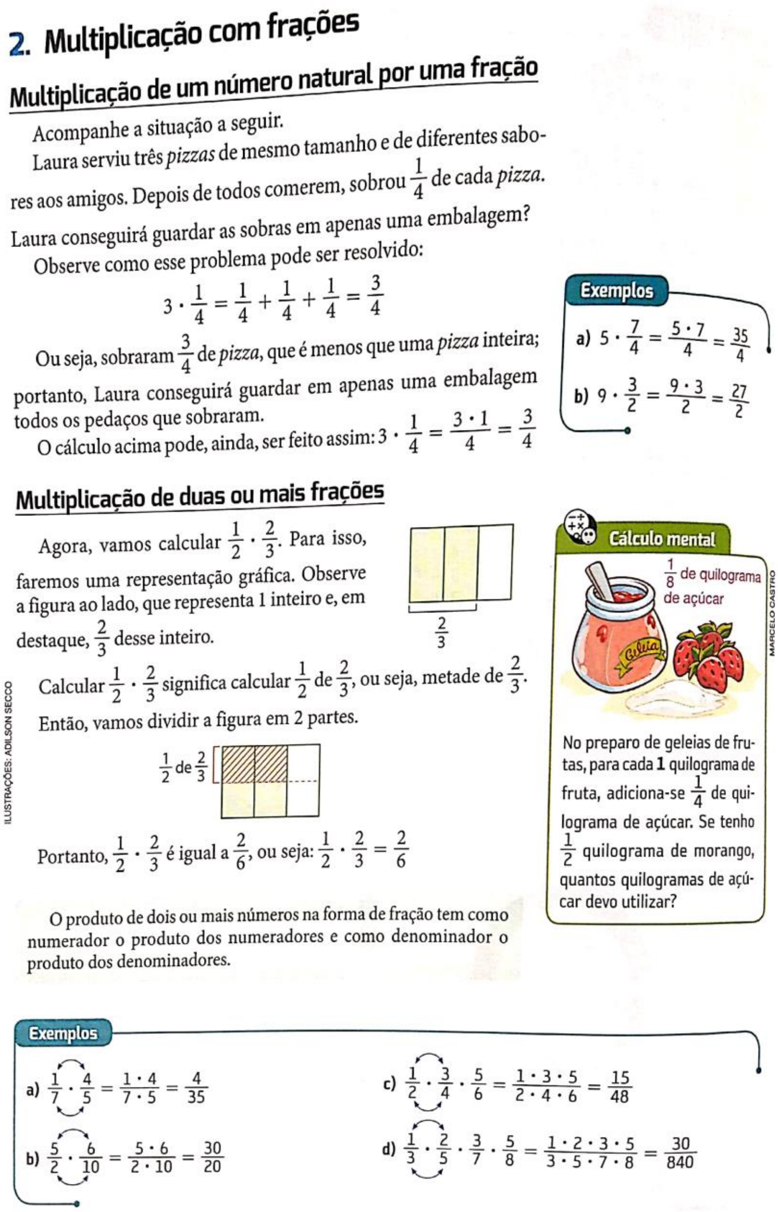
Fonte: GAY, SILVA, 2018, p. 137.

E nas situações apresentadas, de soma de frações por exemplo, é comum os alunos recorrerem ao conhecimento que já construíram sobre adição e subtração de números naturais no cálculo com frações. Como no caso de $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, fazendo a adição de numeradores e denominadores. Então acontece o momento de intervenção do professor, de mostrar ao aluno que análise essa adição $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, que está errada, chegando a conclusão de que não podemos somar duas metades e obter uma metade como resposta. Nessas situações são propostos momentos em que o aluno observe que ele faz um tratamento da informação ao operar com registros numéricos fracionários e obter como resultado um registro também numérico fracionário.

No tópico 2 “Multiplicação com frações”, tem-se por objetivos:

- Realizar multiplicação com frações;
- Perceber que problemas que envolvem fração de fração podem ser resolvidos por multiplicação de frações;
- Favorecer o desenvolvimento da habilidade da BNCC: EF06MA15.

Figura 22 - Multiplicação com frações



2. Multiplicação com frações

Multiplicação de um número natural por uma fração

Acompanhe a situação a seguir.

Laura serviu três *pizzas* de mesmo tamanho e de diferentes sabores aos amigos. Depois de todos comerem, sobrou $\frac{1}{4}$ de cada *pizza*. Laura conseguirá guardar as sobras em apenas uma embalagem?

Observe como esse problema pode ser resolvido:

$$3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Ou seja, sobraram $\frac{3}{4}$ de *pizza*, que é menos que uma *pizza* inteira; portanto, Laura conseguirá guardar em apenas uma embalagem todos os pedaços que sobraram.

O cálculo acima pode, ainda, ser feito assim: $3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3 \cdot 1}{4} = \frac{3}{4}$

Exemplos

a) $5 \cdot \frac{7}{4} = \frac{5 \cdot 7}{4} = \frac{35}{4}$

b) $9 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9 \cdot 3}{2} = \frac{27}{2}$

Multiplicação de duas ou mais frações

Agora, vamos calcular $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$. Para isso, faremos uma representação gráfica. Observe a figura ao lado, que representa 1 inteiro e, em destaque, $\frac{2}{3}$ desse inteiro.

$\frac{2}{3}$

Calcular $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$ significa calcular $\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{3}$, ou seja, metade de $\frac{2}{3}$.

Então, vamos dividir a figura em 2 partes.

$\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{3}$

Portanto, $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$ é igual a $\frac{2}{6}$, ou seja: $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{6}$

O produto de dois ou mais números na forma de fração tem como numerador o produto dos numeradores e como denominador o produto dos denominadores.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Cálculo mental

$\frac{1}{8}$ de quilograma de açúcar

MARCELO CASTRO

No preparo de geleias de frutas, para cada **1** quilograma de fruta, adiciona-se $\frac{1}{4}$ de quilograma de açúcar. Se tenho $\frac{1}{2}$ quilograma de morango, quantos quilogramas de açúcar devo utilizar?

Exemplos

a) $\frac{1}{7} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1 \cdot 4}{7 \cdot 5} = \frac{4}{35}$

b) $\frac{5}{2} \cdot \frac{6}{10} = \frac{5 \cdot 6}{2 \cdot 10} = \frac{30}{20}$

c) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{15}{48}$

d) $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{8} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{30}{840}$

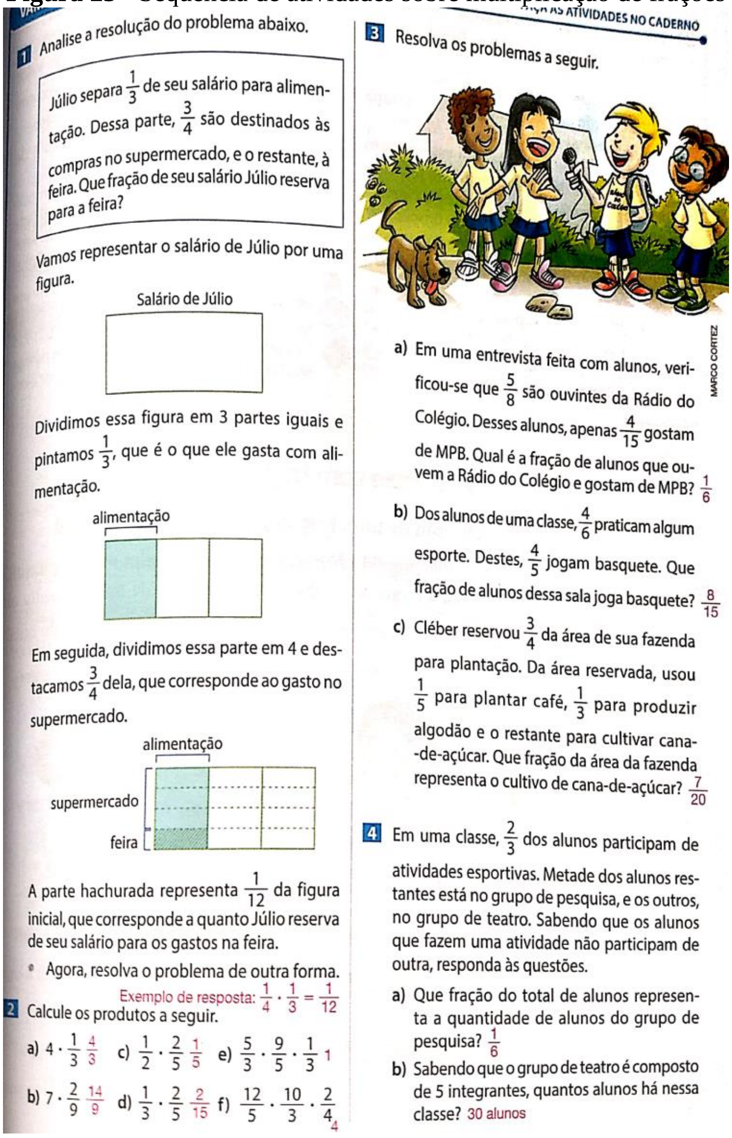
Fonte: GAY, SILVA, 2018, p. 137.

Essa habilidade é favorecida ao propor a resolução e elaboração de problemas envolvendo a divisão de uma quantidade em partes desiguais.

Quando falamos em multiplicação com duas frações, é importante salientar que se trata da ação de encontrar a fração de uma fração. Como por exemplo, considerar a segunda fração como um novo inteiro, ou seja, que ao determinar, por exemplo, $\frac{1}{3}$ de $\frac{2}{3}$, pode-se representar primeiro $\frac{2}{3}$ e, dessa representação, determinar a parte equivalente a $\frac{1}{3}$. E depois verificar qual a relação desta última repartição (parte) com o inteiro.

Nas atividades propostas, trabalha-se com a representação gráfica para ajudar na visualização e compreensão dos enunciados, e entender a conversão dos registros. E também proporciona situações em que o aluno reflete sobre a divisão desigual, considerando as relações entre as partes e a relação parte-todo.

Figura 23 - Sequência de atividades sobre multiplicação de frações



FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Analise a resolução do problema abaixo.

Júlio separa $\frac{1}{3}$ de seu salário para alimentação. Dessa parte, $\frac{3}{4}$ são destinados às compras no supermercado, e o restante, à feira. Que fração de seu salário Júlio reserva para a feira?

Vamos representar o salário de Júlio por uma figura.

Salário de Júlio

Dividimos essa figura em 3 partes iguais e pintamos $\frac{1}{3}$, que é o que ele gasta com alimentação.

alimentação

Em seguida, dividimos essa parte em 4 e destacamos $\frac{3}{4}$ dela, que corresponde ao gasto no supermercado.

alimentação

supermercado

feira

A parte hachurada representa $\frac{1}{12}$ da figura inicial, que corresponde a quanto Júlio reserva de seu salário para os gastos na feira.

- Agora, resolva o problema de outra forma. Exemplo de resposta: $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

2 Calcule os produtos a seguir.

a) $4 \cdot \frac{1}{3}$ $\frac{4}{3}$
b) $7 \cdot \frac{2}{9}$ $\frac{14}{9}$
c) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}$ $\frac{1}{5}$
d) $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}$ $\frac{2}{15}$
e) $\frac{5}{3} \cdot \frac{9}{5} \cdot \frac{1}{3}$ 1
f) $\frac{12}{5} \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{2}{4}$ 4

3 Resolva os problemas a seguir.

MARCO CORTEZ

a) Em uma entrevista feita com alunos, verificou-se que $\frac{5}{8}$ são ouvintes da Rádio do Colégio. Desses alunos, apenas $\frac{4}{15}$ gostam de MPB. Qual é a fração de alunos que ouvem a Rádio do Colégio e gostam de MPB? $\frac{1}{6}$

b) Dos alunos de uma classe, $\frac{4}{6}$ praticam algum esporte. Destes, $\frac{4}{5}$ jogam basquete. Que fração de alunos dessa sala joga basquete? $\frac{8}{15}$

c) Cléber reservou $\frac{3}{4}$ da área de sua fazenda para plantação. Da área reservada, usou $\frac{1}{5}$ para plantar café, $\frac{1}{3}$ para produzir algodão e o restante para cultivar cana-de-açúcar. Que fração da área da fazenda representa o cultivo de cana-de-açúcar? $\frac{7}{20}$

4 Em uma classe, $\frac{2}{3}$ dos alunos participam de atividades esportivas. Metade dos alunos restantes está no grupo de pesquisa, e os outros, no grupo de teatro. Sabendo que os alunos que fazem uma atividade não participam de outra, responda às questões.

a) Que fração do total de alunos representa a quantidade de alunos do grupo de pesquisa? $\frac{1}{6}$

b) Sabendo que o grupo de teatro é composto de 5 integrantes, quantos alunos há nessa classe? 30 alunos

Fonte: GAY, SILVA, 2018, p. 141.

No tópico 3 “Divisão com frações”, tem como objetivos:

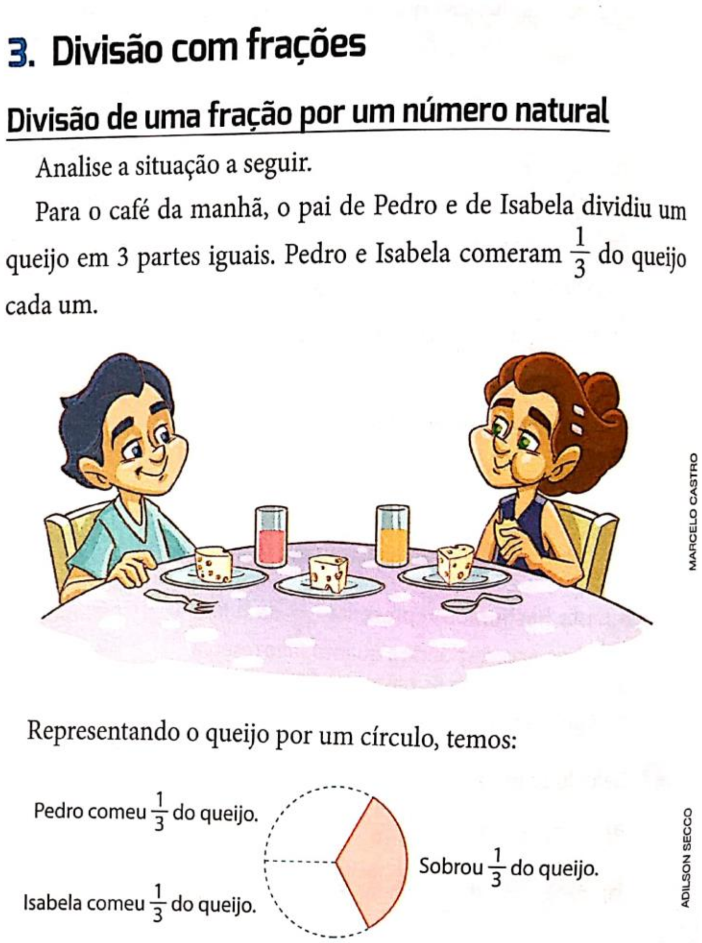
- Resolver problemas que envolvem divisão com frações;
- Aprender um processo prático para realizar a divisão com frações;
- Favorecer o desenvolvimento da habilidade da BNCC: EF06MA14.

Essa habilidade é desenvolvida por propor atividades envolvendo determinação de valores desconhecidos.

As situações levam a discussão de dois significados atribuídos a operação de divisão. O primeiro é a noção de repartir em partes iguais; o segundo é o de verificar quantas vezes uma parte cabe em outra. Na divisão de uma fração por um número natural, a situação envolve o significado de repartir em partes iguais, já nas divisões em que o divisor é uma fração, foi usada a ideia de verificar quantas vezes uma parte cabe na outra.

Na divisão de um número natural por uma fração, a situação apresentada envolve o significado de medida, ou seja, verificar quantas vezes a fração cabe no todo representado pelo número natural.

Figura 24 – Divisão com frações



3. Divisão com frações

Divisão de uma fração por um número natural

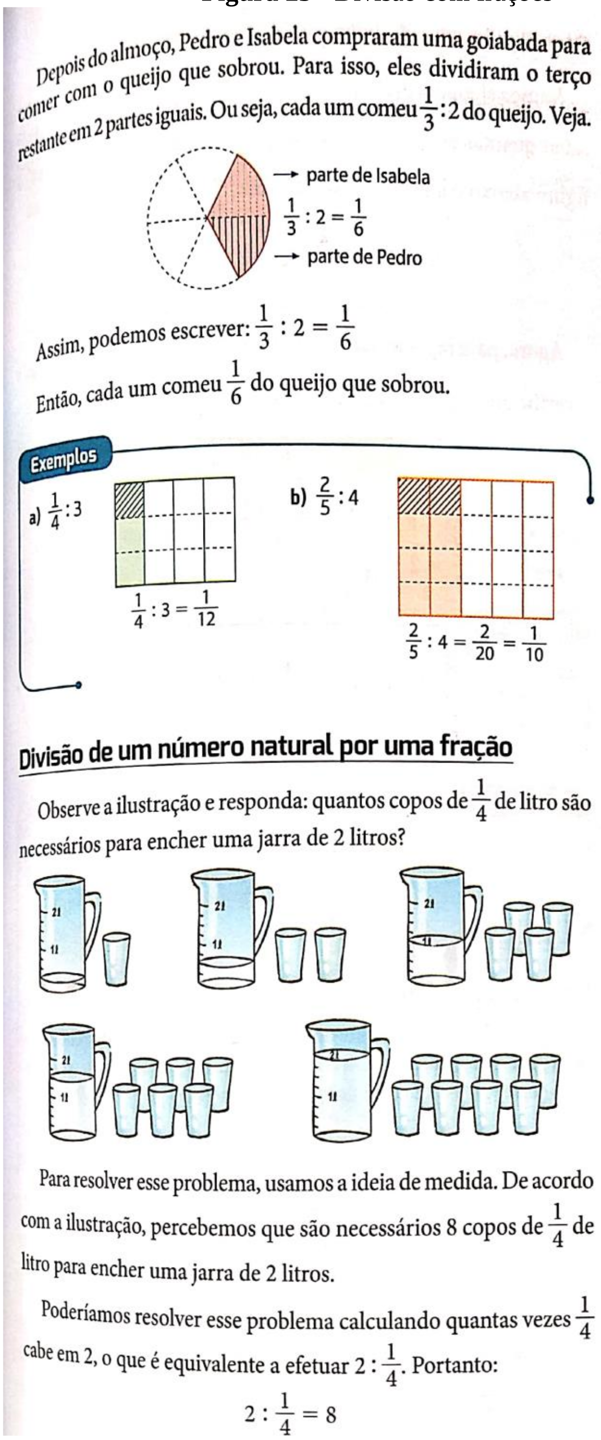
Analise a situação a seguir.

Para o café da manhã, o pai de Pedro e de Isabela dividiu um queijo em 3 partes iguais. Pedro e Isabela comeram $\frac{1}{3}$ do queijo cada um.

Representando o queijo por um círculo, temos:

Fonte: GAY, SILVA, 2018, p. 142

Figura 25 - Divisão com frações



Depois do almoço, Pedro e Isabela compraram uma goiabada para comer com o queijo que sobrou. Para isso, eles dividiram o terço restante em 2 partes iguais. Ou seja, cada um comeu $\frac{1}{3} : 2$ do queijo. Veja.

Assim, podemos escrever: $\frac{1}{3} : 2 = \frac{1}{6}$

Então, cada um comeu $\frac{1}{6}$ do queijo que sobrou.

Divisão de um número natural por uma fração

Observe a ilustração e responda: quantos copos de $\frac{1}{4}$ de litro são necessários para encher uma jarra de 2 litros?

Para resolver esse problema, usamos a ideia de medida. De acordo com a ilustração, percebemos que são necessários 8 copos de $\frac{1}{4}$ de litro para encher uma jarra de 2 litros.

Poderíamos resolver esse problema calculando quantas vezes $\frac{1}{4}$ cabe em 2, o que é equivalente a efetuar $2 : \frac{1}{4}$. Portanto:

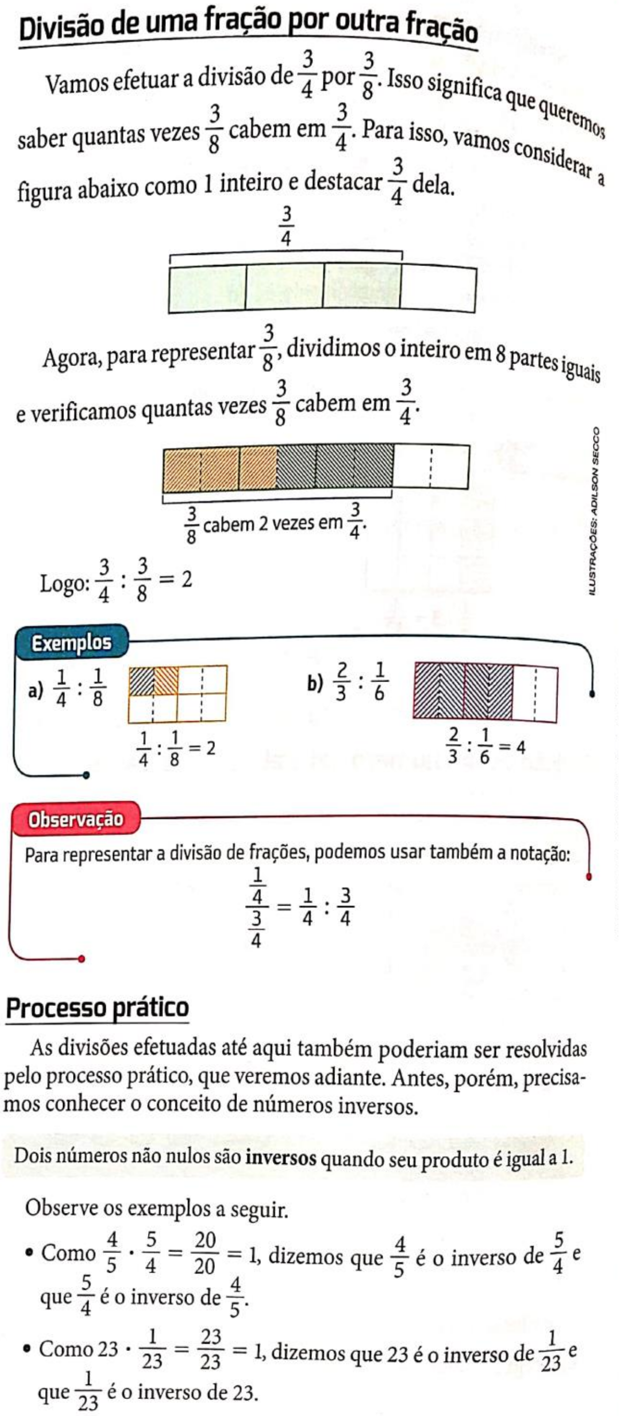
$$2 : \frac{1}{4} = 8$$

Fonte: GAY, SILVA, 2018, p. 143.

Que neste caso, a divisão poderia ser realizada pela subtração sucessiva da fração $\frac{1}{4}$ do todo 2, considerando-se o número de vezes que a fração foi subtraída como resultado da divisão. Sendo assim interessante mostrar ao aluno a situação por meio de copos medidores.

Na divisão de uma fração por outra fração, a situação envolve verificar quantas vezes uma fração cabe na outra, por meio da representação figural.

Figura 26 - Divisão de uma fração por outra fração



Divisão de uma fração por outra fração

Vamos efetuar a divisão de $\frac{3}{4}$ por $\frac{3}{8}$. Isso significa que queremos saber quantas vezes $\frac{3}{8}$ cabem em $\frac{3}{4}$. Para isso, vamos considerar a figura abaixo como 1 inteiro e destacar $\frac{3}{4}$ dela.

Agora, para representar $\frac{3}{8}$, dividimos o inteiro em 8 partes iguais e verificamos quantas vezes $\frac{3}{8}$ cabem em $\frac{3}{4}$.

Logo: $\frac{3}{4} : \frac{3}{8} = 2$

Exemplos

a) $\frac{1}{4} : \frac{1}{8}$

$\frac{1}{4} : \frac{1}{8} = 2$

b) $\frac{2}{3} : \frac{1}{6}$

$\frac{2}{3} : \frac{1}{6} = 4$

Observação

Para representar a divisão de frações, podemos usar também a notação:

$$\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{4} : \frac{3}{4}$$

Processo prático

As divisões efetuadas até aqui também poderiam ser resolvidas pelo processo prático, que veremos adiante. Antes, porém, precisamos conhecer o conceito de números inversos.

Dois números não nulos são **inversos** quando seu produto é igual a 1.

Observe os exemplos a seguir.

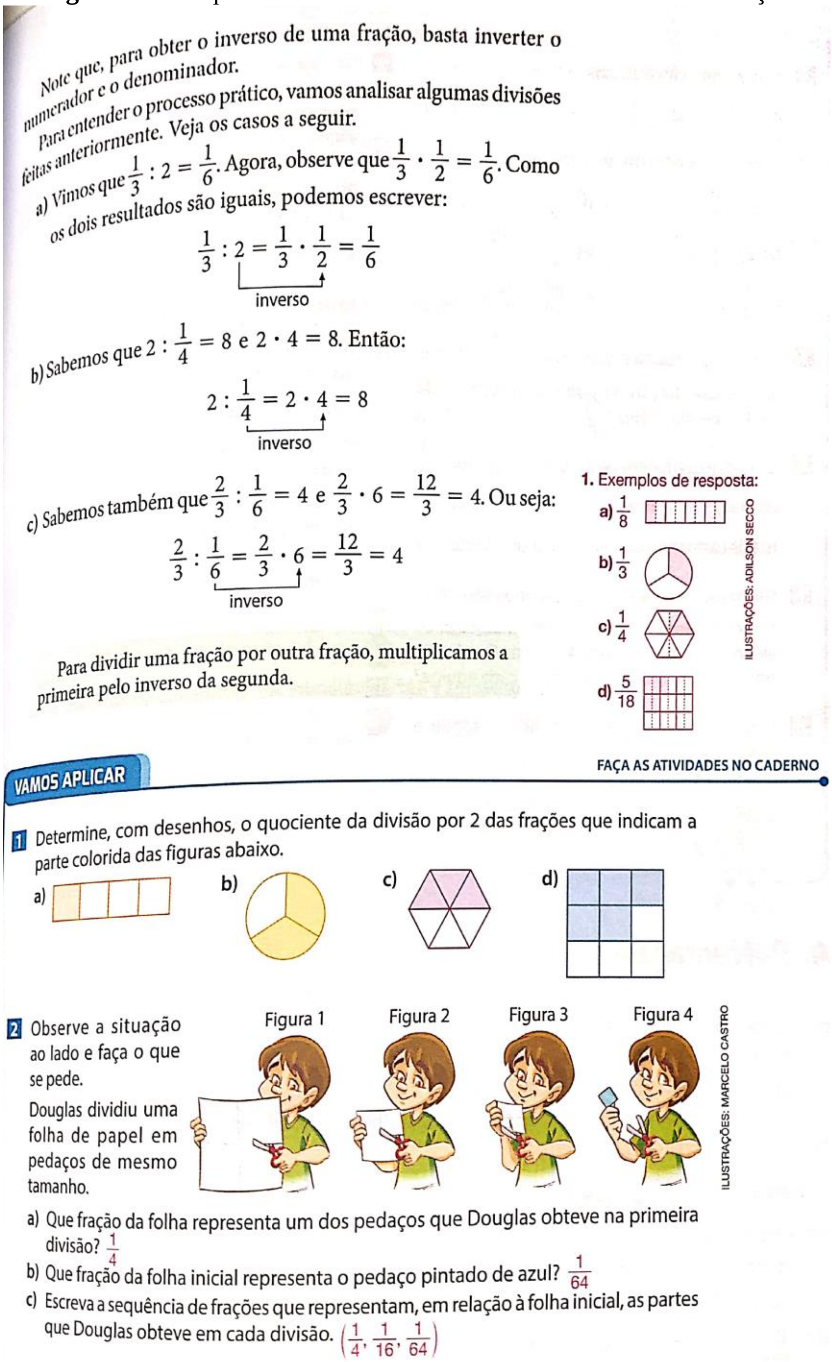
- Como $\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{20}{20} = 1$, dizemos que $\frac{4}{5}$ é o inverso de $\frac{5}{4}$ e que $\frac{5}{4}$ é o inverso de $\frac{4}{5}$.
- Como $23 \cdot \frac{1}{23} = \frac{23}{23} = 1$, dizemos que 23 é o inverso de $\frac{1}{23}$ e que $\frac{1}{23}$ é o inverso de 23.

Fonte: GAY, SILVA, 2018, p. 144.

A regra da divisão de "multiplicar a primeira fração pelo inverso da segunda" só deverá ser aplicada após os alunos terem compreendido a ideia e o fundamento que dá base a regra.

As atividades propostas, envolvem divisões sucessivas (inicialmente do inteiro e depois de frações desse inteiro) por um número natural, além de envolverem a determinação do inverso dos números, o cálculo do valor das expressões numéricas.

Figura 27 – Sequência de atividades sobre divisão e inverso de fração



Note que, para obter o inverso de uma fração, basta inverter o numerador e o denominador.

Para entender o processo prático, vamos analisar algumas divisões feitas anteriormente. Veja os casos a seguir.

a) Vimos que $\frac{1}{3} : 2 = \frac{1}{6}$. Agora, observe que $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$. Como os dois resultados são iguais, podemos escrever:

$$\frac{1}{3} : 2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

inverso

b) Sabemos que $2 : \frac{1}{4} = 8$ e $2 \cdot 4 = 8$. Então:

$$2 : \frac{1}{4} = 2 \cdot 4 = 8$$

inverso

c) Sabemos também que $\frac{2}{3} : \frac{1}{6} = 4$ e $\frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{12}{3} = 4$. Ou seja:

$$\frac{2}{3} : \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{12}{3} = 4$$

inverso

Para dividir uma fração por outra fração, multiplicamos a primeira pelo inverso da segunda.

1. Exemplos de resposta:

a) $\frac{1}{8}$

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{5}{18}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

VAMOS APLICAR

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Determine, com desenhos, o quociente da divisão por 2 das frações que indicam a parte colorida das figuras abaixo.

a) b) c) d)

2 Observe a situação ao lado e faça o que se pede.

Douglas dividiu uma folha de papel em pedaços de mesmo tamanho.

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

ILUSTRAÇÕES: MARCELO CASTRO

a) Que fração da folha representa um dos pedaços que Douglas obteve na primeira divisão? $\frac{1}{4}$

b) Que fração da folha inicial representa o pedaço pintado de azul? $\frac{1}{64}$

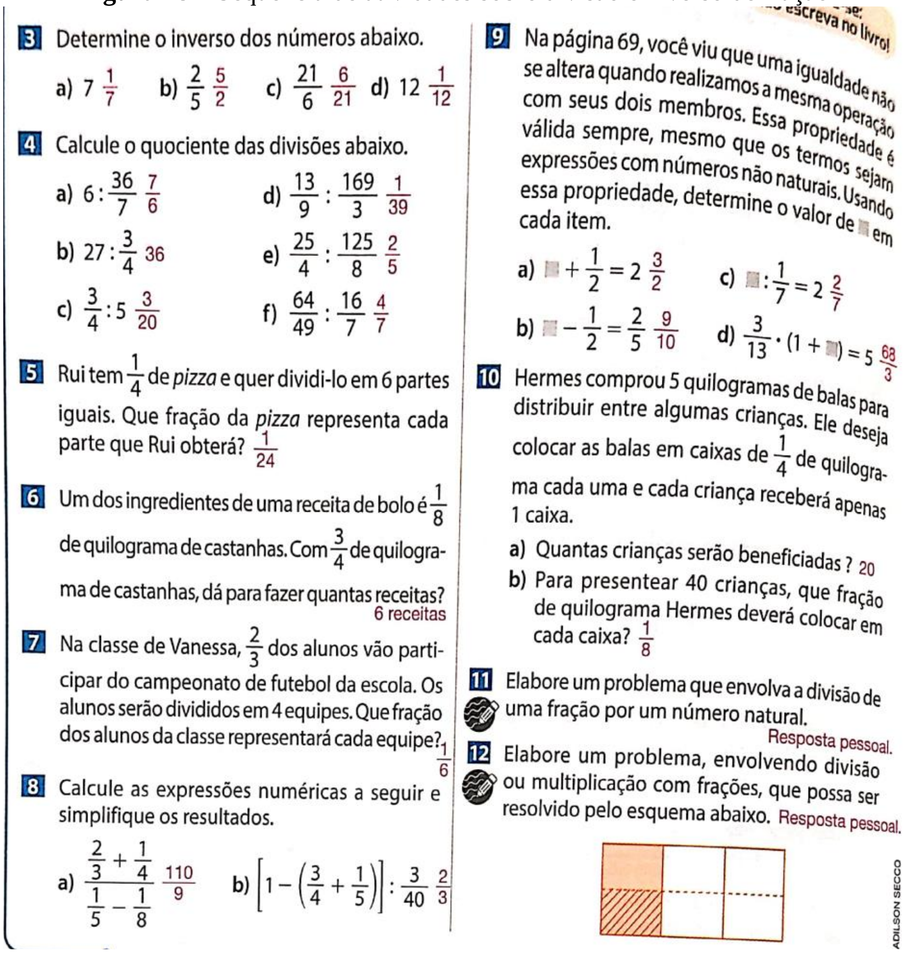
c) Escreva a sequência de frações que representam, em relação à folha inicial, as partes que Douglas obteve em cada divisão. $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}\right)$

Fonte: GAY, SILVA, 2018, p. 145.

Além disso, retomasse uma propriedade das igualdades (a igualdade não se altera quando realizamos a mesma operação com seus dois membros), estende-a para termos não naturais, e para a determinação de valores desconhecidos, favorecendo o desenvolvimento da habilidade EF06MA14.

Observa-se que as atividades 1 e 2 caracterizam os registros numérico fracionário e figural dos números racionais, na qual desenvolve os dois sentidos de conversão entre eles, além de trabalhar o tratamento do registro numérico fracionário pelas frações equivalentes.

Figura 28 – Sequência de atividades sobre divisão e inverso de fração



Fonte: GAY, SILVA, 2018, p. 146.

Com a atividade, os alunos devem perceber que divisão ou multiplicação pode ser associada ao esquema, para depois pensar na elaboração do problema, promovendo uma visão de diferentes registros para uma mesma situação, em que se pontuou o tratamento do registro numérico fracionário envolvendo as operações.

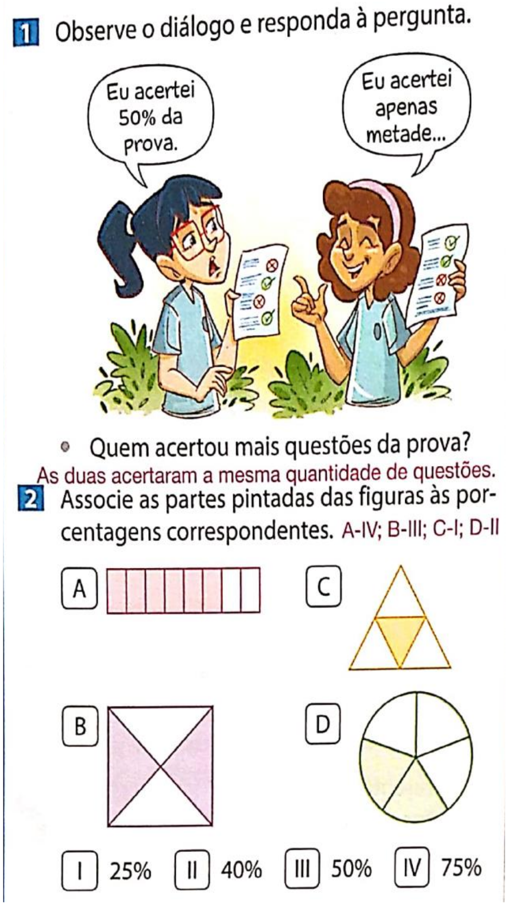
O tópico 4 “Porcentagem” tem como objetivos:

- Reconhecer que a porcentagem é uma notação que está relacionada à notação fracionária e vice-versa;
- Calcular porcentagens usando diferentes estratégias;
- Favorecer o desenvolvimento da habilidade da BNCC: EF06MA13.

A habilidade é favorecida ao propor diversos modos de calcular porcentagens, usando a ideia de proporcionalidade, fazendo a multiplicação pela fração correspondente.

Nas atividades usa-se a ideia das relações existentes entre as representações do número racional: figural, fracionaria e porcentagem.

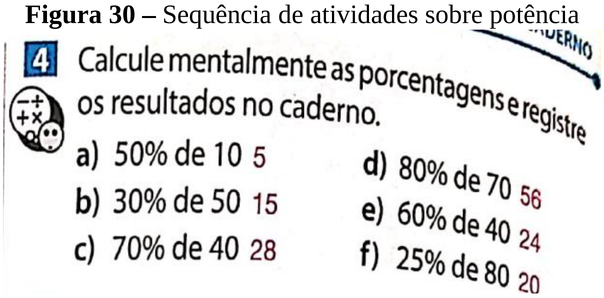
Figura 29 – Sequência de atividades sobre potência



Fonte: GAY, SILVA, 2018, p. 148.

Apresenta-se também o cálculo mental de porcentagem, com a estratégia da ideia de proporcionalidade.

Figura 30 – Sequência de atividades sobre potência



Fonte: GAY, SILVA, 2018, p. 148.

O capítulo 8 "Números decimais" busca desenvolver as seguintes habilidades da BNCC:

- (EF06MA01) Identificar, comparar, ordenar, números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, dizendo quais são, fazendo uso da reta numérica, para localizar os números.
- (EF06MA02) Reconhecer o sistema de numeração decimal como fruto de um processo histórico, percebendo semelhanças e diferenças com outros sistemas de numeração, de modo a

sistematizar suas principais características (base, valor posicional e função do zero), utilizando, inclusive, a composição e decomposição de números naturais e números racionais em sua representação decimal.

- (EF06MA08) Reconhecer que os números racionais positivos podem der expressos nas formas fracionárias e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica.
- (EF06MA31) Identificar e diferenciar as variáveis e suas frequências e os elementos constitutivos (título, eixos, legendas, fontes e datas) em diferentes tipos de gráfico.
- (EF06MA32) Interpretar e resolver situações que envolvam dados de pesquisas sobre contextos ambientais, sustentabilidade, trânsito, consumo responsável, entre outros, apresentadas pela mídia em tabelas e em diferentes tipos de gráficos e redigir textos escritos com o objetivo de sintetizar conclusões.

O tópico 1 “Representação decimal de uma fração” tem por objetivos:

- Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionaria e decimal;
- Ler e escrever números racionais positivos cuja representação decimal é finita;
- Favorecer o desenvolvimento das habilidades da BNCC: EF06MA01, EF06MA02 e EF06MA08.

Essas habilidades são desenvolvidas nesse tópico, pois proporciona reflexões a partir do número decimal que representa os centavos no sistema monetário e a forma fracionaria de sua representação. Também são propostas discussões sobre as frações decimais e a ampliação do quadro de ordens do sistema decimal, com a representação de décimos, centésimos e milésimos, bem como a orientação para a leitura dos números racionais na forma decimal.

E para apresentar os números decimais, optou-se por uma situação que envolve dinheiro para facilitar o entendimento dos alunos, uma vez que isso faz parte do cotidiano deles.

Figura 31 – Representação decimal de uma fração

1. Representação decimal de uma fração

Em muitos locais públicos, como hospitais, rodoviárias e estações de trem e de metrô, há máquinas que vendem alimentos, bijuterias, bebidas, CDs e livros, entre outros produtos. As pessoas que passam por esses locais podem comprar vários produtos sem ter de ir a uma loja.

Veja como funciona uma dessas máquinas.

Os produtos disponíveis estão expostos na própria máquina. O comprador escolhe um produto, coloca o dinheiro, retira o produto e aperta o botão para retirar o troco, se houver.

Imagine que você vá comprar o livro de *sudoku* na máquina acima.

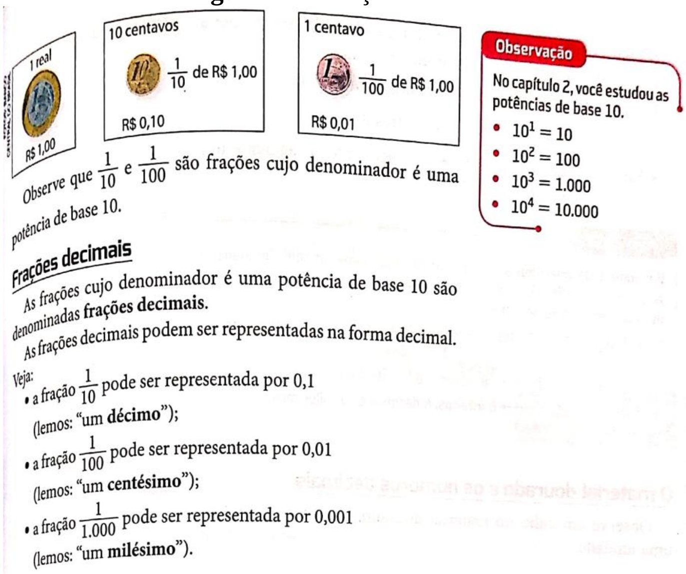
- Qual é o preço desse livro? R$ 2,50
- Que cédulas e moedas essa máquina aceita? moedas: R$ 0,25, R$ 0,50 e R$ 1,00; cédulas: R$ 2,00, R$ 5,00 e R$ 10,00
- Que cédulas e moedas você deverá colocar na máquina para comprar 5 livros de *sudoku*? Exemplo de resposta: uma cédula de R$ 10,00, uma de R$ 2,00 e duas moedas de R$ 0,25

Nesse tipo de situação e em outras do dia a dia, temos de empregar números com vírgula, ou seja, números na **forma decimal**.

Números escritos na forma de fração – como $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{25}$ e $2\frac{2}{5}$ – também podem ser escritos na forma decimal. Neste capítulo, estudaremos esse modo de expressar os números. Para começar, veremos o valor de algumas moedas de nosso dinheiro na forma decimal.

Fonte: GAY, SILVA, 2018, p. 182.

Figura 32 – Frações decimais



Observe que $\frac{1}{10}$ e $\frac{1}{100}$ são frações cujo denominador é uma potência de base 10.

Observação

No capítulo 2, você estudou as potências de base 10.

- $10^1 = 10$
- $10^2 = 100$
- $10^3 = 1.000$
- $10^4 = 10.000$

Frações decimais

As frações cujo denominador é uma potência de base 10 são denominadas **frações decimais**.

As frações decimais podem ser representadas na forma decimal.

Veja:

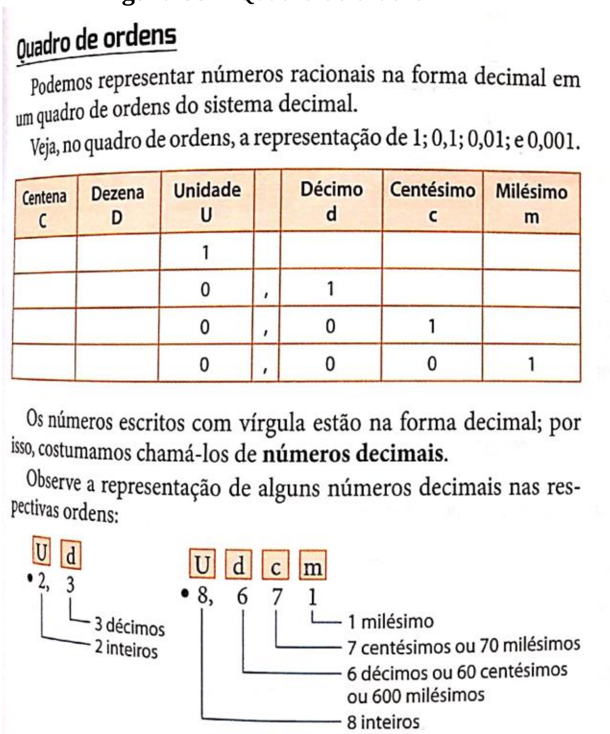
- a fração $\frac{1}{10}$ pode ser representada por 0,1 (lemos: "um **décimo**");
- a fração $\frac{1}{100}$ pode ser representada por 0,01 (lemos: "um **centésimo**");
- a fração $\frac{1}{1.000}$ pode ser representada por 0,001 (lemos: "um **milésimo**").

Fonte: GAY, SILVA, 2018, p. 183.

Observa-se nesse tópico, o uso do tratamento do registro numérico de um número racional para o registro fracionário, decimal e percentual.

Para facilitar a leitura de números racionais na forma decimal, propõe-se a construção a confecção de um quadro de ordens, conforma a imagem abaixo.

Figura 33 – Quadro de ordens



Quadro de ordens

Podemos representar números racionais na forma decimal em um quadro de ordens do sistema decimal.

Veja, no quadro de ordens, a representação de 1; 0,1; 0,01; e 0,001.

Centena C	Dezena D	Unidade U		Décimo d	Centésimo c	Milésimo m
		1				
		0	,	1		
		0	,	0	1	
		0	,	0	0	1

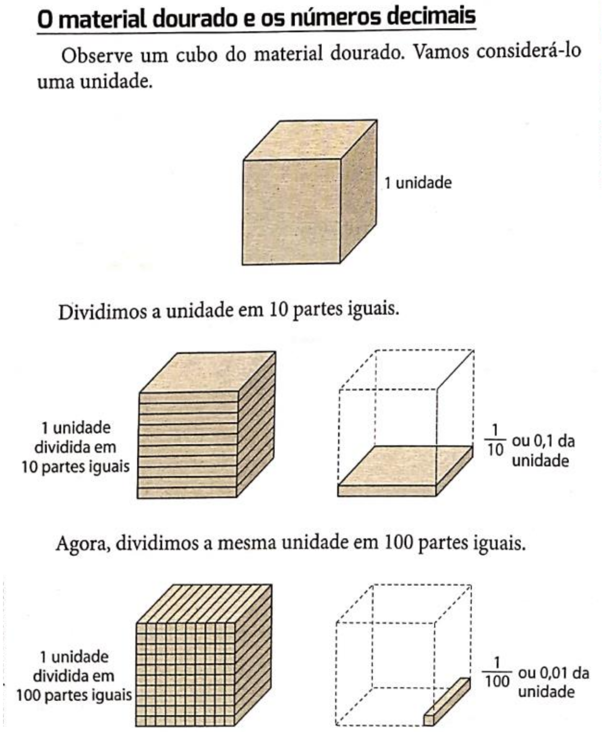
Os números escritos com vírgula estão na forma decimal; por isso, costumamos chamá-los de **números decimais**.

Observe a representação de alguns números decimais nas respectivas ordens:

Fonte: GAY, SILVA, 2018, p. 183.

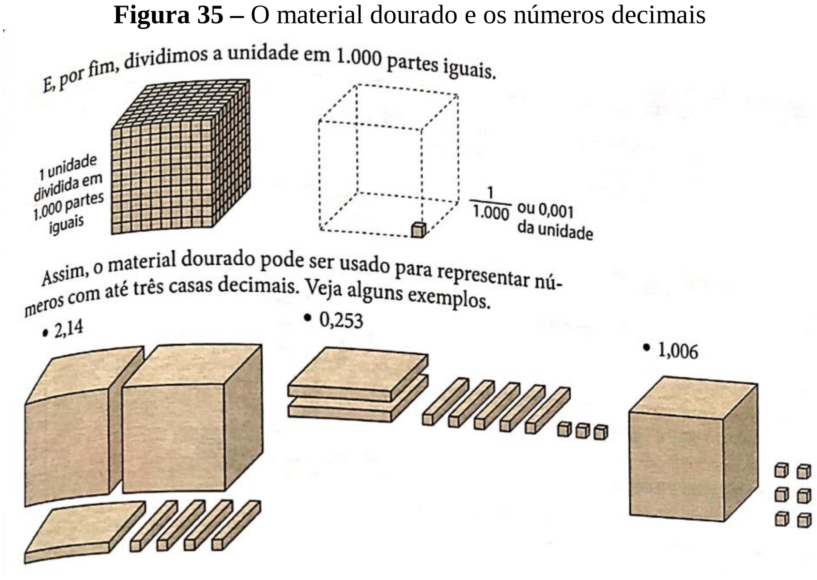
No tópico “O material dourado e os números decimais”, com a ajuda do material dourado, é possível explorar os milésimos, assim como com moedas e outros recursos concretos ajudam no entendimento de números na forma decimal. O objetivo é propor diferentes representações dos números decimais e construir mais significados sobre esses números.

Figura 34 - O material dourado e os números decimais



Fonte: GAY, SILVA, 2018, p. 184.

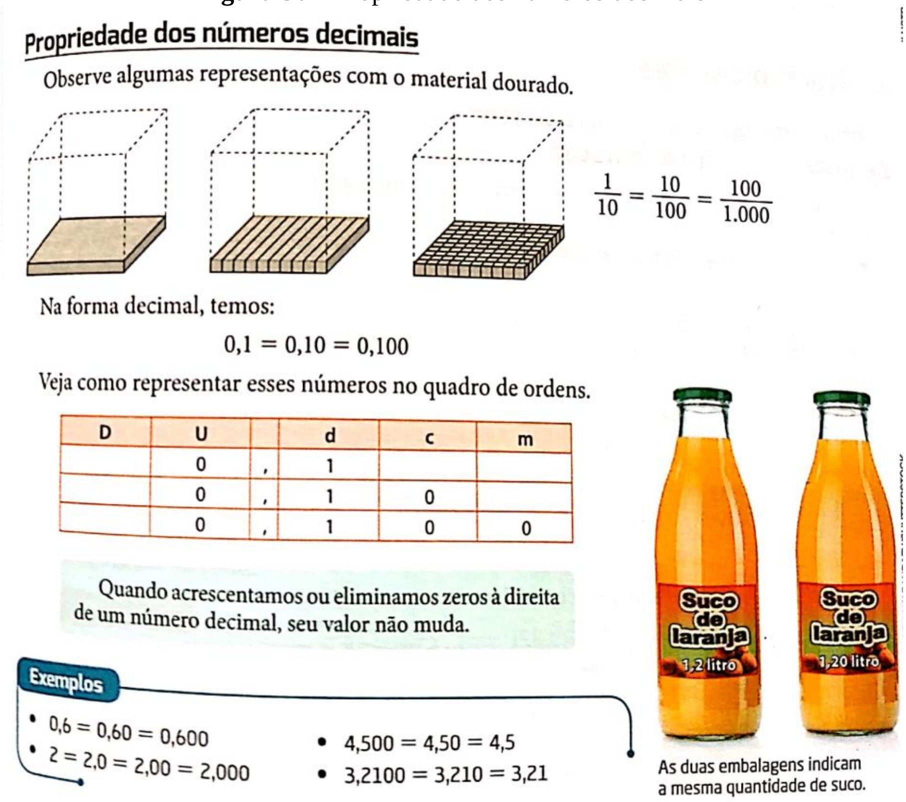
Figura 35 – O material dourado e os números decimais



Fonte: GAY, SILVA, 2018, p. 185.

No tópico “Propriedades dos números decimais” destaca-se a representação decimal de um número e das ordens do sistema de numeração decimal, e a equivalência entre as escritas.

Figura 36 – Propriedade dos números decimais



Propriedade dos números decimais

Observe algumas representações com o material dourado.

$$\frac{1}{10} = \frac{10}{100} = \frac{100}{1.000}$$

Na forma decimal, temos:

$$0{,}1 = 0{,}10 = 0{,}100$$

Veja como representar esses números no quadro de ordens.

D	U		d	c	m
	0	,	1		
	0	,	1	0	
	0	,	1	0	0

Quando acrescentamos ou eliminamos zeros à direita de um número decimal, seu valor não muda.

Exemplos

- $0{,}6 = 0{,}60 = 0{,}600$
- $2 = 2{,}0 = 2{,}00 = 2{,}000$
- $4{,}500 = 4{,}50 = 4{,}5$
- $3{,}2100 = 3{,}210 = 3{,}21$

As duas embalagens indicam a mesma quantidade de suco.

Fonte: GAY, SILVA, 2018, p. 185.

No tópico 2 “Transformações” tem os objetivos:

- Reconhecer que um número racional positivo pode ser escrito nas representações decimal, fracionária e na forma gráfica, sabendo transpor de uma representação para outra e vice-versa;
- Reconhecer a escrita por extenso de um número racional positivo, identificando décimos, centésimos e milésimos;
- Favorecer o desenvolvimento da habilidade da BNCC: EF06MA08.

Esse tópico desenvolve essa habilidade, pois propõe situações de transformação da representação fracionaria para a decimal e vice-versa.

Figura 37 – Transformação de um número da forma decimal para a forma de fração

2. Transformações

Transformação de um número da forma decimal para a forma de fração

Acompanhe alguns exemplos de como transformar um número que está expresso na forma decimal para a forma de fração.

- 2,4 (dois inteiros e quatro décimos)

$$2{,}4 = 2 + \frac{4}{10} = \frac{20}{10} + \frac{4}{10} = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$$ — fração irredutível

- 0,12 (doze centésimos)

$$0{,}12 = 0 + \frac{12}{100} = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}$$ — fração irredutível

- 3,71 (três inteiros e setenta e um centésimos)

$$3{,}71 = 3 + \frac{71}{100} = \frac{300}{100} + \frac{71}{100} = \frac{371}{100}$$ — fração irredutível

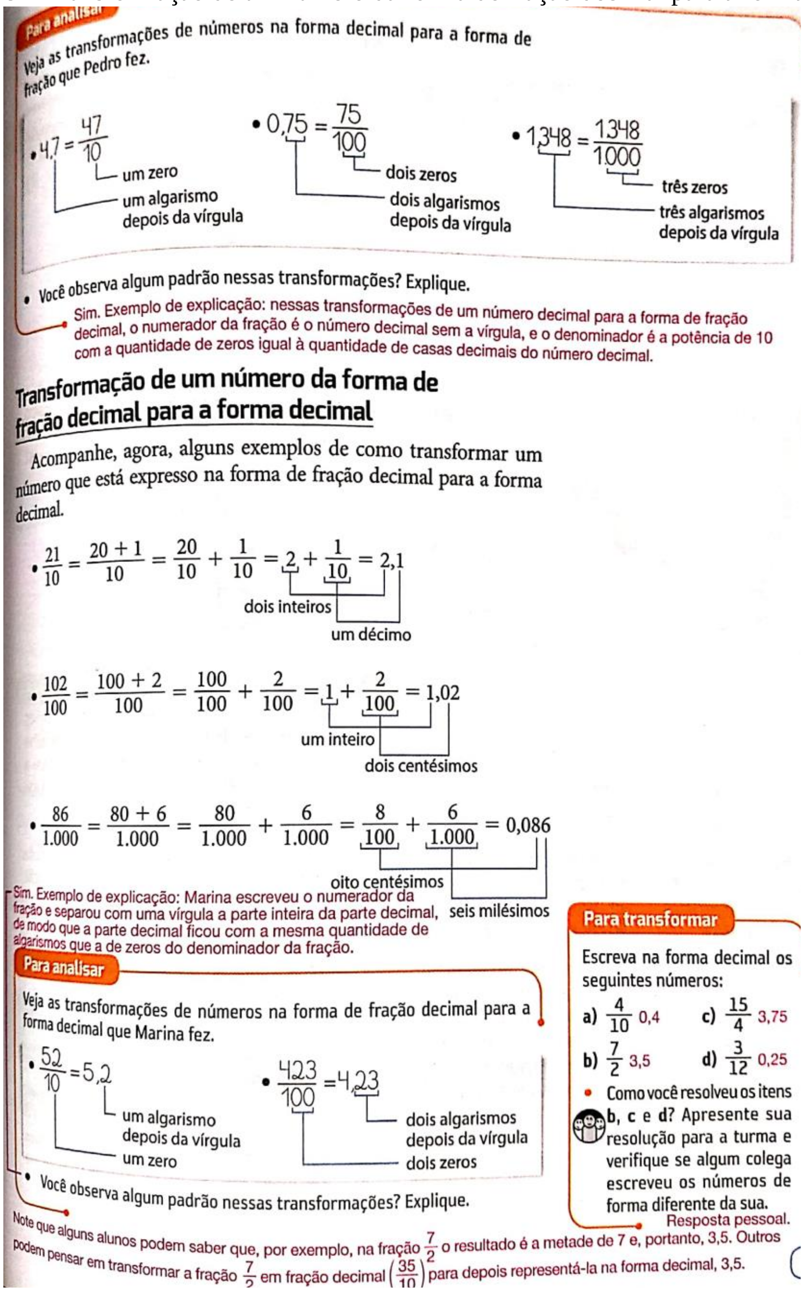
- 9,007 (nove inteiros e sete milésimos)

$$9{,}007 = 9 + \frac{7}{1.000} = \frac{9.000}{1.000} + \frac{7}{1.000} = \frac{9.007}{1.000}$$ — fração irredutível

Fonte: GAY, SILVA, 2018, p. 186.

No tópico de ‘Transformações’, tem o tratamento das representações do número racional, em que se transforma o registro numérico decimal no registro numérico fracionário, além de tratar a forma irredutível de uma fração. Associa-se também a conversão do registro numérico decimal para a língua natural.

Figura 38 – Transformação de um número da forma de fração decimal para a forma decimal



Para analisar

Veja as transformações de números na forma decimal para a forma de fração que Pedro fez.

- $4{,}7 = \frac{47}{10}$ — um zero; um algarismo depois da vírgula
- $0{,}75 = \frac{75}{100}$ — dois zeros; dois algarismos depois da vírgula
- $1{,}348 = \frac{1348}{1000}$ — três zeros; três algarismos depois da vírgula

- Você observa algum padrão nessas transformações? Explique.

Sim. Exemplo de explicação: nessas transformações de um número decimal para a forma de fração decimal, o numerador da fração é o número decimal sem a vírgula, e o denominador é a potência de 10 com a quantidade de zeros igual à quantidade de casas decimais do número decimal.

Transformação de um número da forma de fração decimal para a forma decimal

Acompanhe, agora, alguns exemplos de como transformar um número que está expresso na forma de fração decimal para a forma decimal.

- $\frac{21}{10} = \frac{20+1}{10} = \frac{20}{10} + \frac{1}{10} = \underbrace{2}_{\text{dois inteiros}} + \underbrace{\frac{1}{10}}_{\text{um décimo}} = 2{,}1$
- $\frac{102}{100} = \frac{100+2}{100} = \frac{100}{100} + \frac{2}{100} = \underbrace{1}_{\text{um inteiro}} + \underbrace{\frac{2}{100}}_{\text{dois centésimos}} = 1{,}02$
- $\frac{86}{1.000} = \frac{80+6}{1.000} = \frac{80}{1.000} + \frac{6}{1.000} = \underbrace{\frac{8}{100}}_{\text{oito centésimos}} + \underbrace{\frac{6}{1.000}}_{\text{seis milésimos}} = 0{,}086$

Para analisar

Veja as transformações de números na forma de fração decimal para a forma decimal que Marina fez.

- $\frac{52}{10} = 5{,}2$ — um algarismo depois da vírgula; um zero
- $\frac{423}{100} = 4{,}23$ — dois algarismos depois da vírgula; dois zeros

- Você observa algum padrão nessas transformações? Explique.

Sim. Exemplo de explicação: Marina escreveu o numerador da fração e separou com uma vírgula a parte inteira da parte decimal, de modo que a parte decimal ficou com a mesma quantidade de algarismos que a de zeros do denominador da fração.

Note que alguns alunos podem saber que, por exemplo, na fração $\frac{7}{2}$ o resultado é a metade de 7 e, portanto, 3,5. Outros podem pensar em transformar a fração $\frac{7}{2}$ em fração decimal $\left(\frac{35}{10}\right)$ para depois representá-la na forma decimal, 3,5.

Para transformar

Escreva na forma decimal os seguintes números:

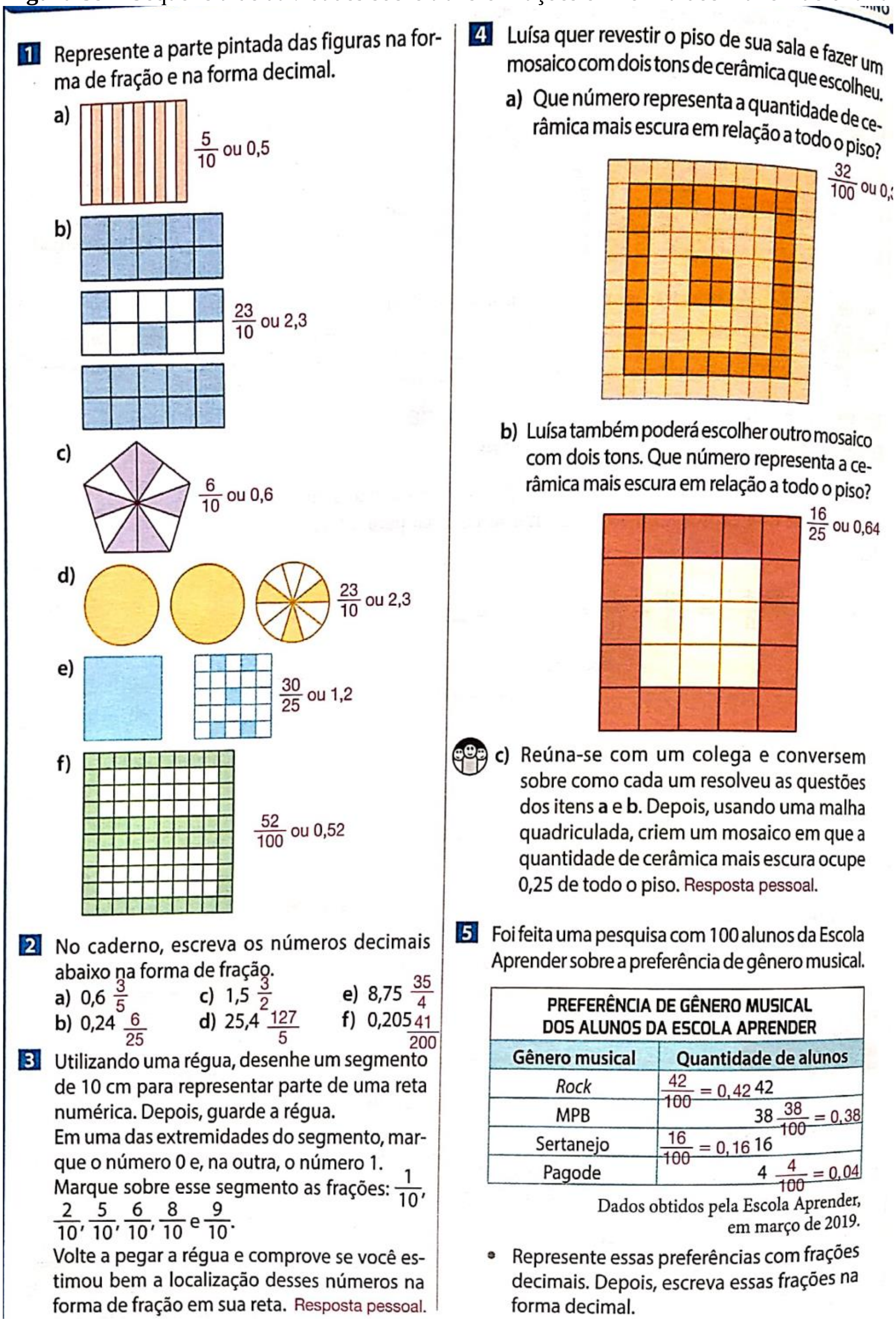
a) $\frac{4}{10}$ 0,4
b) $\frac{7}{2}$ 3,5
c) $\frac{15}{4}$ 3,75
d) $\frac{3}{12}$ 0,25

- Como você resolveu os itens b, c e d? Apresente sua resolução para a turma e verifique se algum colega escreveu os números de forma diferente da sua. Resposta pessoal.

Fonte: Livro Araribá Mais Matemática, 6° ano, p. 187.

Nas atividades propostas, espera-se que os alunos analisem as transformações apresentadas e percebam que há diversas maneiras de encontrar a forma fracionária de um número expresso na forma decimal e que isso vale também quando se busca a forma decimal de números expressos na forma fracionária. A apresentação de mais de um modo de transformação permite que os alunos tenham uma compreensão efetiva dos números na forma decimal.

Figura 39 – Sequência de atividades sobre transformações em forma decimal e fracionária



1 Represente a parte pintada das figuras na forma de fração e na forma decimal.

a) $\frac{5}{10}$ ou 0,5

b) $\frac{23}{10}$ ou 2,3

c) $\frac{6}{10}$ ou 0,6

d) $\frac{23}{10}$ ou 2,3

e) $\frac{30}{25}$ ou 1,2

f) $\frac{52}{100}$ ou 0,52

2 No caderno, escreva os números decimais abaixo na forma de fração.

a) 0,6 $\frac{3}{5}$ c) 1,5 $\frac{3}{2}$ e) 8,75 $\frac{35}{4}$

b) 0,24 $\frac{6}{25}$ d) 25,4 $\frac{127}{5}$ f) 0,205 $\frac{41}{200}$

3 Utilizando uma régua, desenhe um segmento de 10 cm para representar parte de uma reta numérica. Depois, guarde a régua.

Em uma das extremidades do segmento, marque o número 0 e, na outra, o número 1. Marque sobre esse segmento as frações: $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{6}{10}$, $\frac{8}{10}$ e $\frac{9}{10}$.

Volte a pegar a régua e comprove se você estimou bem a localização desses números na forma de fração em sua reta. Resposta pessoal.

4 Luísa quer revestir o piso de sua sala e fazer um mosaico com dois tons de cerâmica que escolheu.

a) Que número representa a quantidade de cerâmica mais escura em relação a todo o piso? $\frac{32}{100}$ ou 0,3

b) Luísa também poderá escolher outro mosaico com dois tons. Que número representa a cerâmica mais escura em relação a todo o piso? $\frac{16}{25}$ ou 0,64

c) Reúna-se com um colega e conversem sobre como cada um resolveu as questões dos itens **a** e **b**. Depois, usando uma malha quadriculada, criem um mosaico em que a quantidade de cerâmica mais escura ocupe 0,25 de todo o piso. Resposta pessoal.

5 Foi feita uma pesquisa com 100 alunos da Escola Aprender sobre a preferência de gênero musical.

PREFERÊNCIA DE GÊNERO MUSICAL DOS ALUNOS DA ESCOLA APRENDER	
Gênero musical	Quantidade de alunos
Rock	$\frac{42}{100} = 0,42$ 42
MPB	38 $\frac{38}{100} = 0,38$
Sertanejo	$\frac{16}{100} = 0,16$ 16
Pagode	4 $\frac{4}{100} = 0,04$

Dados obtidos pela Escola Aprender, em março de 2019.

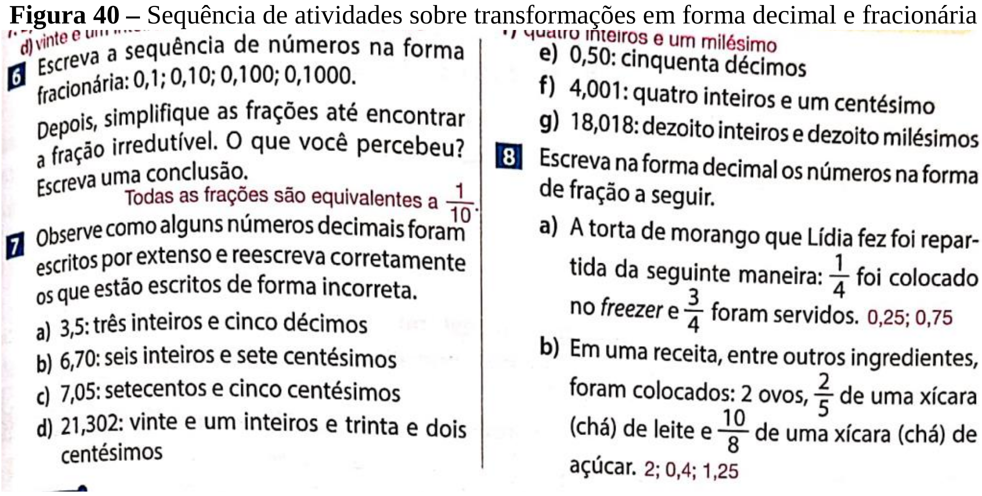
- Represente essas preferências com frações decimais. Depois, escreva essas frações na forma decimal.

Fonte: GAY, SILVA, 2018, p. 188.

Na atividade 1 observamos a conversão do registro figural para o registro numérico fracionário, e por conseguinte o tratamento do registro numérico fracionário para o numérico decimal.

Na atividade 2 envolve a identificação do registro numérico fracionário na reta numérica.

Figura 40 – Sequência de atividades sobre transformações em forma decimal e fracionária



d) vinte e um ...

6 Escreva a sequência de números na forma fracionária: 0,1; 0,10; 0,100; 0,1000.

Depois, simplifique as frações até encontrar a fração irredutível. O que você percebeu? Escreva uma conclusão.

Todas as frações são equivalentes a $\frac{1}{10}$.

7 Observe como alguns números decimais foram escritos por extenso e reescreva corretamente os que estão escritos de forma incorreta.

a) 3,5: três inteiros e cinco décimos

b) 6,70: seis inteiros e sete centésimos

c) 7,05: setecentos e cinco centésimos

d) 21,302: vinte e um inteiros e trinta e dois centésimos

... quatro inteiros e um milésimo

e) 0,50: cinquenta décimos

f) 4,001: quatro inteiros e um centésimo

g) 18,018: dezoito inteiros e dezoito milésimos

8 Escreva na forma decimal os números na forma de fração a seguir.

a) A torta de morango que Lídia fez foi repartida da seguinte maneira: $\frac{1}{4}$ foi colocado no *freezer* e $\frac{3}{4}$ foram servidos. 0,25; 0,75

b) Em uma receita, entre outros ingredientes, foram colocados: 2 ovos, $\frac{2}{5}$ de uma xícara (chá) de leite e $\frac{10}{8}$ de uma xícara (chá) de açúcar. 2; 0,4; 1,25

Fonte: GAY, SILVA, 2018, p. 189.

Nas situações propostas faz-se necessário que os alunos compreendam a representação de um número nas três representações indicadas: na forma decimal, na forma de fração e na forma gráfica, sabendo transpor de uma representação para outra. Sendo importante que eles assimilem essas representações para que adquiram uma noção abrangente da ideia de número racional.

Na atividade 1, os alunos identificarão as representações fracionária e decimal, que equivalem ao expresso nas figuras.

Na atividade 2, há a conversão da representação decimal para a representação fracionária.

Na atividade 3, os alunos identificarão as representações fracionárias em um segmento representativo de uma reta numérica.

Na atividade 4, eles identificarão as representações fracionaria e decimal, que equivalem à representação das figuras que retratam mosaicos em cerâmicas.

Na atividade 5, eles devem identificar as representações fracionarias, com a ideia parte-todo, identificada na tabela que retrata as preferências de alunos por gêneros musicais. Os votos para um dos gêneros musicais representam uma parte da população total de alunos que votaram nesse gênero.

Na atividade 6, os alunos passarão o número racional de uma representação decimal para a representação fracionaria, concluindo que são frações equivalentes.

Na atividade 7, eles identificarão a representação correta do número racional por meio de sua escrita por extenso.

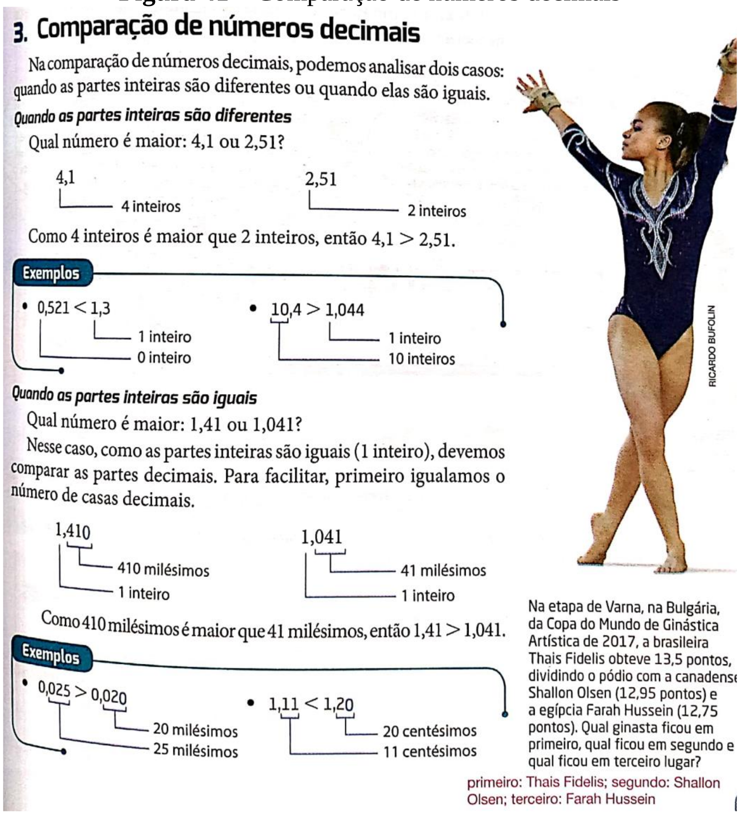
Na atividade 8, eles identificarão as representações fracionarias em textos e as transformarão na forma decimal (conversão da língua natural para forma decimal).

No tópico 3 “Comparação de números decimais” tem por objetivos:

- Comparar e ordenar números racionais positivos na forma decimal;
- Representar números racionais positivos nas formas fracionária e decimal na reta numérica;
- Favorecer o desenvolvimento da habilidade da BNCC: EF06MA01.

O tópico propõe situações que envolvem estratégias para comparar dois números racionais na forma decimal.

Figura 41 – Comparação de números decimais



3. Comparação de números decimais

Na comparação de números decimais, podemos analisar dois casos: quando as partes inteiras são diferentes ou quando elas são iguais.

Quando as partes inteiras são diferentes

Qual número é maior: 4,1 ou 2,51?

4,1 — 4 inteiros

2,51 — 2 inteiros

Como 4 inteiros é maior que 2 inteiros, então 4,1 > 2,51.

Exemplos

- 0,521 < 1,3 — 1 inteiro; 0 inteiro
- 10,4 > 1,044 — 1 inteiro; 10 inteiros

Quando as partes inteiras são iguais

Qual número é maior: 1,41 ou 1,041?

Nesse caso, como as partes inteiras são iguais (1 inteiro), devemos comparar as partes decimais. Para facilitar, primeiro igualamos o número de casas decimais.

1,410 — 410 milésimos; 1 inteiro

1,041 — 41 milésimos; 1 inteiro

Como 410 milésimos é maior que 41 milésimos, então 1,41 > 1,041.

Exemplos

- 0,025 > 0,020 — 20 milésimos; 25 milésimos
- 1,11 < 1,20 — 20 centésimos; 11 centésimos

RICARDO BUFOLIN

Na etapa de Varna, na Bulgária, da Copa do Mundo de Ginástica Artística de 2017, a brasileira Thais Fidelis obteve 13,5 pontos, dividindo o pódio com a canadense Shallon Olsen (12,95 pontos) e a egípcia Farah Hussein (12,75 pontos). Qual ginasta ficou em primeiro, qual ficou em segundo e qual ficou em terceiro lugar?

primeiro: Thais Fidelis; segundo: Shallon Olsen; terceiro: Farah Hussein

Fonte: GAY, SILVA, 2018, p. 189.

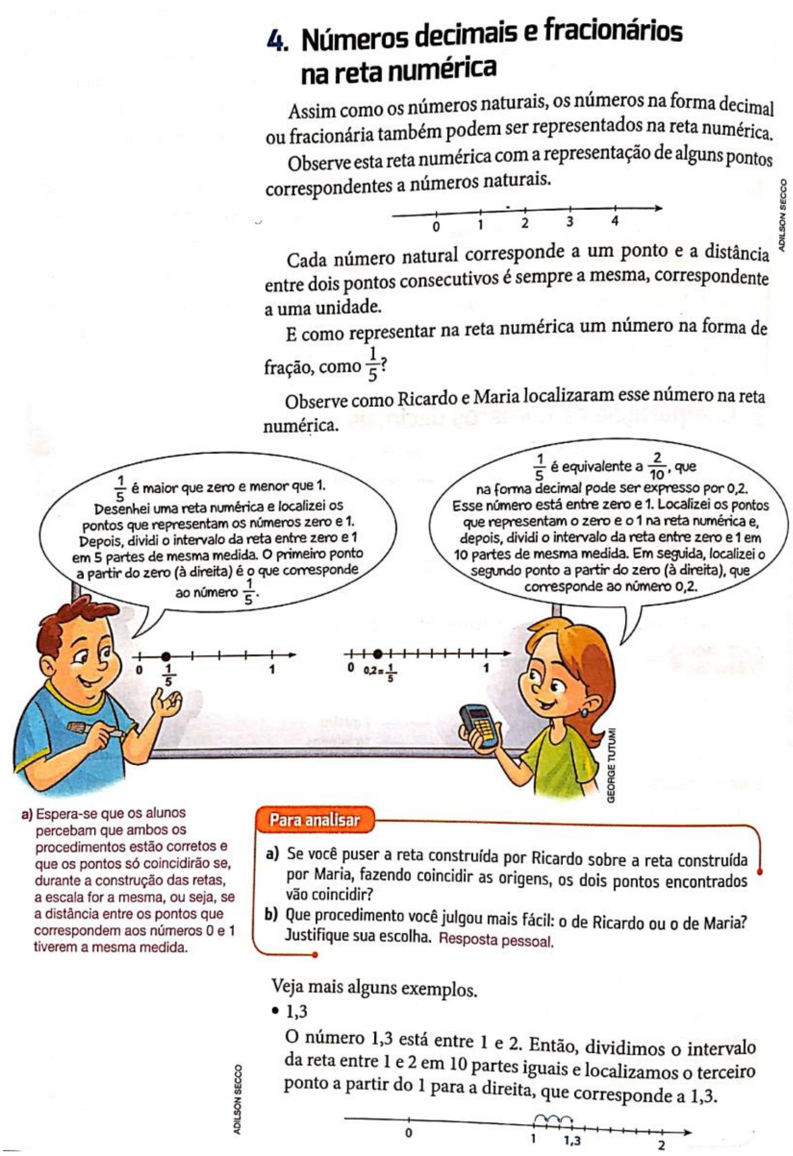
É apresentada uma atividade que mostra a pontuação de três atletas premiados na Copa do Mundo de Ginástica Artística de 2017, na qual possuem a oportunidade de expressar como leem e comparam os números decimais sem a formalização do quadro de ordens. No entanto, se os alunos se confundem ao comparar os números, pode-se recorrer ao material dourado, ao quadro de ordem ou à reta numérica. e para comparar números racionais na forma decimal por meio do quadro de ordens, primeiro comparamos a parte inteira, se forem iguais, partimos para as casas decimais, começando a comparação da maior para a menor. O número que apresenta o maior algarismo na casa decimal comparada será o maior número decimal.

No tópico 4 “Números decimais e fracionários na reta numérica” possui como objetivos:

- Representar na reta numérica números racionais positivos nas formas fracionária e decimal;
- Comparar números racionais positivos nas formas fracionária e decimal por meio de representação na reta numérica;
- Favorecer o desenvolvimento da habilidade da BNCC: EF06MA01.

O tópico propõe situações que envolvem representar frações e números decimais na reta numérica. Destacando que a representação na reta numérica de um número racional positivo, seja na forma decimal ou fracionária, é semelhante à representação de frações em figuras geométricas, exigindo a subdivisão da reta (assim como figuras geométricas) em partes iguais. E para a representação na reta numérica de um número racional positivo na forma decimal: tanto a parte inteira quanto a parte decimal do número são representadas.

Figura 42 – Números decimais e fracionários na reta numérica



4. Números decimais e fracionários na reta numérica

Assim como os números naturais, os números na forma decimal ou fracionária também podem ser representados na reta numérica.

Observe esta reta numérica com a representação de alguns pontos correspondentes a números naturais.

Cada número natural corresponde a um ponto e a distância entre dois pontos consecutivos é sempre a mesma, correspondente a uma unidade.

E como representar na reta numérica um número na forma de fração, como $\frac{1}{5}$?

Observe como Ricardo e Maria localizaram esse número na reta numérica.

a) Espera-se que os alunos percebam que ambos os procedimentos estão corretos e que os pontos só coincidirão se, durante a construção das retas, a escala for a mesma, ou seja, se a distância entre os pontos que correspondem aos números 0 e 1 tiverem a mesma medida.

Para analisar

a) Se você puser a reta construída por Ricardo sobre a reta construída por Maria, fazendo coincidir as origens, os dois pontos encontrados vão coincidir?

b) Que procedimento você julgou mais fácil: o de Ricardo ou o de Maria? Justifique sua escolha. Resposta pessoal.

Veja mais alguns exemplos.

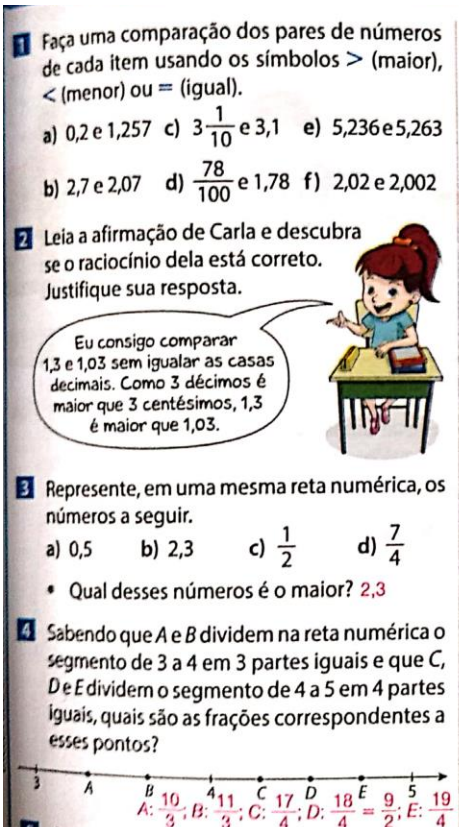
- 1,3

O número 1,3 está entre 1 e 2. Então, dividimos o intervalo da reta entre 1 e 2 em 10 partes iguais e localizamos o terceiro ponto a partir do 1 para a direita, que corresponde a 1,3.

Fonte: GAY, SILVA, 2018, p. 190.

Em sequência, são propostas atividades que visam a comparação de números decimais, a localização das frações na reta numérica e o uso dos números decimais para representar medida.

Figura 43 – Sequência de atividades sobre números decimais e fracionários na reta numérica



1 Faça uma comparação dos pares de números de cada item usando os símbolos > (maior), < (menor) ou = (igual).

a) 0,2 e 1,257 c) $3\frac{1}{10}$ e 3,1 e) 5,236 e 5,263

b) 2,7 e 2,07 d) $\frac{78}{100}$ e 1,78 f) 2,02 e 2,002

2 Leia a afirmação de Carla e descubra se o raciocínio dela está correto. Justifique sua resposta.

3 Represente, em uma mesma reta numérica, os números a seguir.

a) 0,5 b) 2,3 c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{7}{4}$

• Qual desses números é o maior? 2,3

4 Sabendo que *A* e *B* dividem na reta numérica o segmento de 3 a 4 em 3 partes iguais e que *C*, *D* e *E* dividem o segmento de 4 a 5 em 4 partes iguais, quais são as frações correspondentes a esses pontos?

A: $\frac{10}{3}$; *B*: $\frac{11}{3}$; *C*: $\frac{17}{4}$; *D*: $\frac{18}{4} = \frac{9}{2}$; *E*: $\frac{19}{4}$

Fonte: GAY, SILVA, 2018, p. 191.

As atividades propostas acima envolvem o tratamento do registro numérico decimal para o registro numérico fracionário, e vice-versa, na qual é muito importante que o aluno tenha entendido o conceito do número racional e a relação existente entre esses diferentes registros.

No capítulo 9 "Operações com números decimais", as habilidades a serem trabalhadas são:

- (EF06MA11) Resolver e elaborar situações-problema com números racionais positivos na representação decimal, envolvendo as quatro operações fundamentais e a potenciação, por meio de estratégias diversas, utilizando estimativas e arredondamentos para verificar a razoabilidade de respostas, com e sem uso de calculadora.
- (EF06MA13) Resolver e elaborar situações-problema que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade sem fazer uso da "regra de três", utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.

- (EF06MA14) Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas.

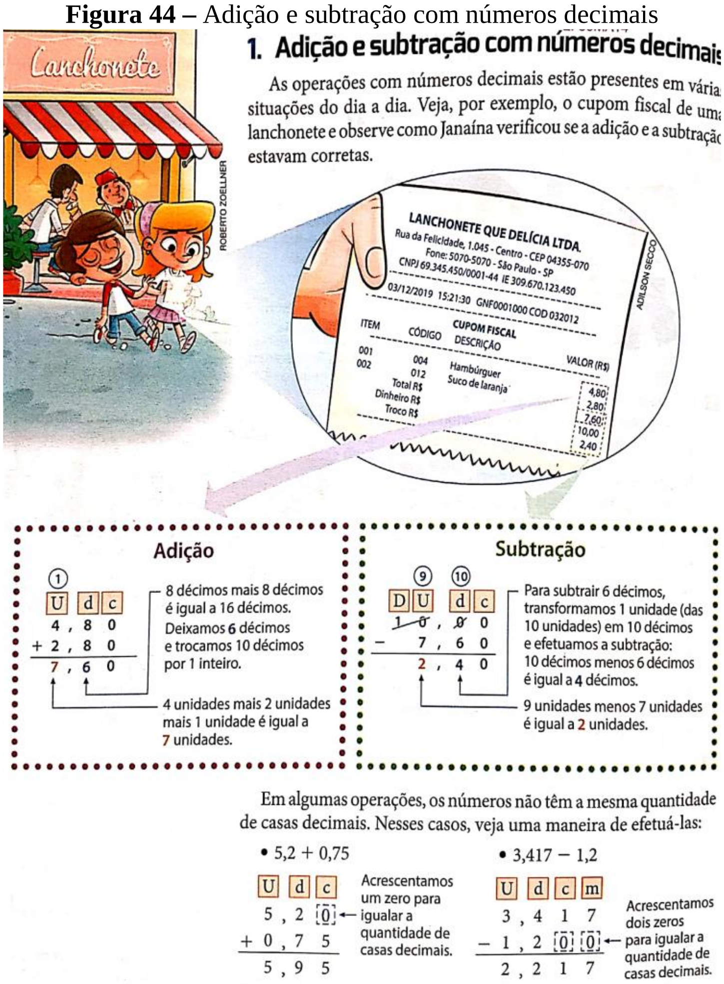
No tópico 1 “Adição e subtração com números decimais”, tem por objetivo?

- Calcular adições e subtrações com números decimais utilizando diferentes estratégias;
- Resolver e elaborar problemas envolvendo adição e subtração com números decimais;
- Favorecer o desenvolvimento das habilidades da BNCC: EF06MA11 e EF06MA14.

A habilidade EF06MA11 é favorecida na medida em que são propostos problemas que envolvem adição e subtração com números decimais e, também, porque propõe que seja elaborado um problema que possa ser resolvido por meio dessas operações. Além disso, a noção de igualdade deve ser utilizada para encontrar valores desconhecidos em um dos problemas propostos, desenvolvendo assim a habilidade EF06MA14.

Em diferentes situações do dia a dia, sobretudo as que envolvem o sistema financeiro, os alunos têm de adicionar ou subtrair números decimais.

Figura 44 – Adição e subtração com números decimais



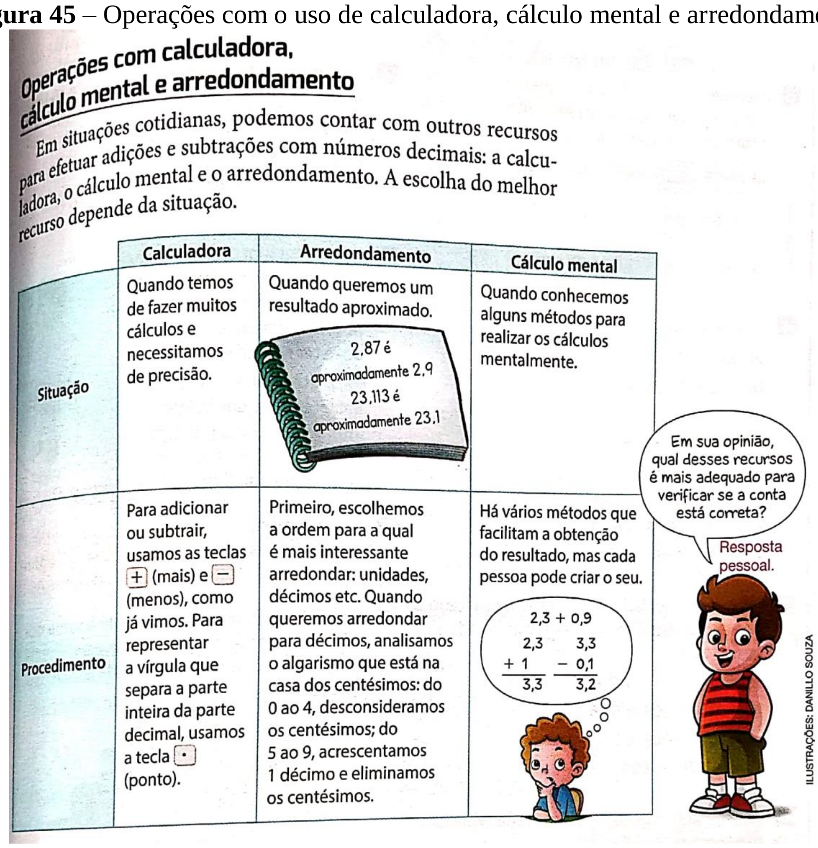
Fonte: GAY, SILVA, 2018, p. 196.

A apresentação de situações-problema que envolvam compra ou venda de mercadorias, propõe estratégias de resolução aos alunos para adicionar ou subtrair números decimais, sendo um momento oportuno para fazer um levantamento dos conhecimentos prévios deles em relação as operações.

Alguns alunos podem ter dificuldades em compreender os algoritmos de adição e subtração com números decimais. Isso pode ocorrer, por exemplo, porque não se apropriaram das características do nosso sistema de numeração ou porque não compreenderam os algoritmos de adição e subtração envolvendo números naturais.

Em "Operações com calculadora. Cálculo mental e arredondamento" são apresentadas diferentes estratégias para adicionar e subtrair números decimais, com o objetivo de contribuir para que os alunos ampliem o seu repertório de estratégias de cálculo.

Figura 45 – Operações com o uso de calculadora, cálculo mental e arredondamento



Operações com calculadora, cálculo mental e arredondamento

Em situações cotidianas, podemos contar com outros recursos para efetuar adições e subtrações com números decimais: a calculadora, o cálculo mental e o arredondamento. A escolha do melhor recurso depende da situação.

	Calculadora	Arredondamento	Cálculo mental
Situação	Quando temos de fazer muitos cálculos e necessitamos de precisão.	Quando queremos um resultado aproximado. 2,87 é aproximadamente 2,9; 23,113 é aproximadamente 23,1	Quando conhecemos alguns métodos para realizar os cálculos mentalmente.
Procedimento	Para adicionar ou subtrair, usamos as teclas + (mais) e − (menos), como já vimos. Para representar a vírgula que separa a parte inteira da parte decimal, usamos a tecla . (ponto).	Primeiro, escolhemos a ordem para a qual é mais interessante arredondar: unidades, décimos etc. Quando queremos arredondar para décimos, analisamos o algarismo que está na casa dos centésimos: do 0 ao 4, desconsideramos os centésimos; do 5 ao 9, acrescentamos 1 décimo e eliminamos os centésimos.	Há vários métodos que facilitam a obtenção do resultado, mas cada pessoa pode criar o seu. 2,3 + 0,9: 2,3 + 1 = 3,3; 3,3 − 0,1 = 3,2

Fonte: GAY, SILVA, 2018, p. 197.

Na atividade 1, por exemplo, os alunos precisam utilizar a noção de relação de igualdade matemática para determinar valores desconhecidos na resolução de um problema, o que favorece o desenvolvimento da habilidade EF06MA14. Para encontrar a altura de Adriano, os alunos devem determinar o número que quando se subtrai 0,03 é igual a 1,92:

$$\blacksquare - 0{,}03 = 1{,}92$$

Adicionando 0,03 a ambos os membros da igualdade acima, determinamos o número desconhecido que é 1,95. Portanto, a altura de Adriano é 1,95 m.

Já para descobrir a altura de Fernando os alunos devem determinar o número que adicionado a 0,12 é igual a 1,95 (altura de Adriano):

$$\blacksquare + 0{,}12 = 1{,}95$$

Subtraindo 0,12 de ambos os membros da igualdade acima, obtemos o número desconhecido que é 1,83. Então, a altura de Fernando é 1,83 m.

Figura 46 – Sequência de atividades sobre operações com números decimais: Atividade 1

1 Num time de vôlei, Fernando é um dos jogadores de menor estatura. Ele tem 0,12 metro de altura a menos que Adriano. Sabendo que a altura de Everton é 1,92 metro e que ele tem 0,03 metro a menos que Adriano, qual é a altura de Fernando? 1,83 metro

Fonte: GAY, SILVA, 2018, p. 197.

Analisando a atividade 1, podemos observar que ela envolve o registro numérico decimal, na qual se faz o tratamento entre esse mesmo tipo de registro.

Na atividade 11, os alunos vão elaborar um problema cuja resolução deve ser encontrada adicionando e subtraindo números decimais, favorecendo a habilidade EF06MA11.

Figura 47 – Sequência de atividades sobre operações com números decimais: Atividade 11

11 Elabore um problema em que seja necessário calcular a soma e a diferença de números decimais. Passe seu problema para um colega resolver e resolva o problema criado por ele.

Fonte: GAY, SILVA, 2018, p. 198.

No tópico 2 “Multiplicação com números decimais”, tem como objetivos:

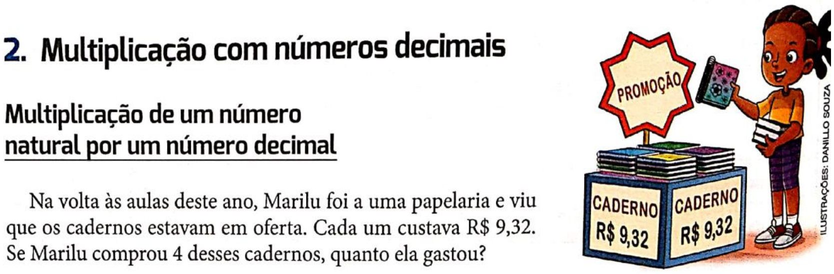
- Calcular multiplicações com números decimais por meio de diferentes estratégias;
- Favorecer o desenvolvimento da habilidade da BNCC: EF06MA11.

Para o desenvolvimento dessa habilidade, esse tópico apresenta problemas que envolvem multiplicação com números decimais e, propõe a elaboração de um problema que possa ser resolvido por meio dessa operação.

A compreensão da multiplicação com números decimais está atrelada ao entendimento das características do nosso sistema de numeração e do modo como multiplicamos números naturais. As diferentes estratégias apresentadas visam ampliar o repertorio de estratégias de cálculo por parte dos alunos.

No contexto da multiplicação, assim como em outros, a calculadora desempenha um papel importante, na qual com o auxílio dela, os alunos podem descobrir algumas regras válidas para a multiplicação de números decimais.

Figura 48 – Multiplicação com números decimais



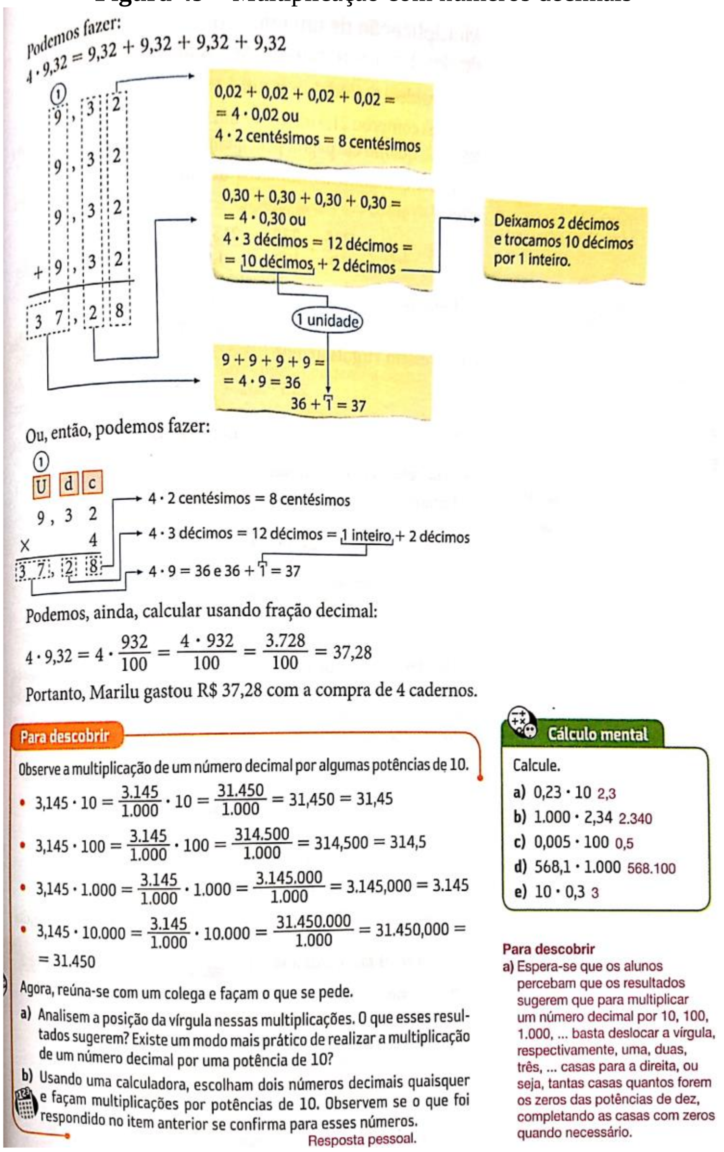
2. Multiplicação com números decimais

Multiplicação de um número natural por um número decimal

Na volta às aulas deste ano, Marilu foi a uma papelaria e viu que os cadernos estavam em oferta. Cada um custava R$ 9,32. Se Marilu comprou 4 desses cadernos, quanto ela gastou?

Fonte: GAY, SILVA, 2018, p. 198.

Figura 49 – Multiplicação com números decimais



Podemos fazer:

$4 \cdot 9{,}32 = 9{,}32 + 9{,}32 + 9{,}32 + 9{,}32$

Ou, então, podemos fazer:

Podemos, ainda, calcular usando fração decimal:

$$4 \cdot 9{,}32 = 4 \cdot \frac{932}{100} = \frac{4 \cdot 932}{100} = \frac{3.728}{100} = 37{,}28$$

Portanto, Marilu gastou R$ 37,28 com a compra de 4 cadernos.

Para descobrir

Observe a multiplicação de um número decimal por algumas potências de 10.

- $3{,}145 \cdot 10 = \frac{3.145}{1.000} \cdot 10 = \frac{31.450}{1.000} = 31{,}450 = 31{,}45$
- $3{,}145 \cdot 100 = \frac{3.145}{1.000} \cdot 100 = \frac{314.500}{1.000} = 314{,}500 = 314{,}5$
- $3{,}145 \cdot 1.000 = \frac{3.145}{1.000} \cdot 1.000 = \frac{3.145.000}{1.000} = 3.145{,}000 = 3.145$
- $3{,}145 \cdot 10.000 = \frac{3.145}{1.000} \cdot 10.000 = \frac{31.450.000}{1.000} = 31.450{,}000 = 31.450$

Agora, reúna-se com um colega e façam o que se pede.

a) Analisem a posição da vírgula nessas multiplicações. O que esses resultados sugerem? Existe um modo mais prático de realizar a multiplicação de um número decimal por uma potência de 10?

b) Usando uma calculadora, escolham dois números decimais quaisquer e façam multiplicações por potências de 10. Observem se o que foi respondido no item anterior se confirma para esses números. Resposta pessoal.

Cálculo mental

Calcule.

a) $0{,}23 \cdot 10$ 2,3
b) $1.000 \cdot 2{,}34$ 2.340
c) $0{,}005 \cdot 100$ 0,5
d) $568{,}1 \cdot 1.000$ 568.100
e) $10 \cdot 0{,}3$ 3

Para descobrir
a) Espera-se que os alunos percebam que os resultados sugerem que para multiplicar um número decimal por 10, 100, 1.000, ... basta deslocar a vírgula, respectivamente, uma, duas, três, ... casas para a direita, ou seja, tantas casas quantos forem os zeros das potências de dez, completando as casas com zeros quando necessário.

Fonte: GAY, SILVA, 2018, p. 199.

O cálculo da multiplicação entre dois números decimais é feito primeiro transformando os números decimais em frações decimais. Tal opção se justifica, pois ao multiplicar frações decimais são mobilizados conhecimento anteriores, como a multiplicação entre números naturais e a divisão de um número natural por 100, 1.000, 10.000 etc.

Figura 50 – Multiplicação de um número decimal por um número decimal

Multiplicação de um número decimal por um número decimal

Considere a situação a seguir.

Jonas comprou 21,5 metros de um fio. Se cada metro do fio custava R$ 2,32, quanto ele pagou pela quantidade de fio que comprou?

Transformando os números decimais em frações decimais, temos:

$$21{,}5 \cdot 2{,}32 = \frac{215}{10} \cdot \frac{232}{100} = \frac{215 \cdot 232}{1.000} = \frac{49.880}{1.000} = 49{,}880$$

Jonas pagou R$ 49,88 por 21,5 metros de fio.

Repare que, ao multiplicar os números decimais como se eles não tivessem vírgula, temos:

$$215 \cdot 232 = 49.880$$

Como $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{1.000}$, o produto será da ordem dos milésimos, ou seja, terá 3 casas decimais.

Então:

$$21{,}5 \cdot 2{,}32 = 49{,}800$$

1 algarismo à direita da vírgula

2 algarismos à direita da vírgula

3 algarismos à direita da vírgula

No algoritmo tradicional da multiplicação com números decimais, multiplicamos os números desconsiderando a vírgula e, depois, contamos quantas casas decimais têm os fatores para colocar a vírgula corretamente no produto.

$$\begin{array}{rrrrrl}
 & & 2, & 3 & 2 & \longrightarrow \text{2 algarismos à direita da vírgula} \\
 & \times & 2 & 1, & 5 & \longrightarrow \text{1 algarismo à direita da vírgula} \\
\hline
 & 1 & 1 & 6 & 0 & \\
 & 2 & 3 & 2 & 0 & \\
+\ 4 & 6 & 4 & 0 & 0 & \\
\hline
4 & 9, & 8 & 8 & 0 & \longrightarrow \text{3 algarismos (2 + 1) à direita da vírgula}
\end{array}$$

Observe os exemplos a seguir.

- 7,3 · 1,8

$$\begin{array}{rrrl}
 & 7, & 3 & \longrightarrow \text{1 algarismo à direita da vírgula} \\
\times & 1, & 8 & \longrightarrow \text{1 algarismo à direita da vírgula} \\
\hline
5 & 8 & 4 & \\
+\ 7 & 3 & 0 & \\
\hline
1\ 3, & 1 & 4 & \longrightarrow \text{2 algarismos (1 + 1) à direita da vírgula}
\end{array}$$

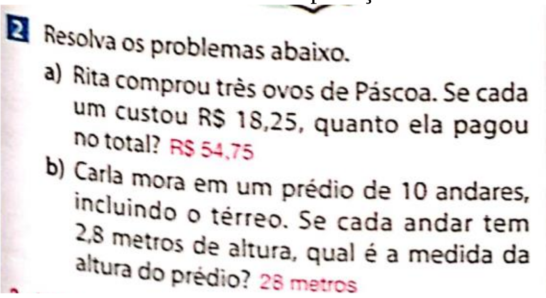
Fonte: GAY, SILVA, 2018, p. 200.

Além disso, o tópico fala sobre o produto aproximado, em que destaca ser uma habilidade importante no dia a dia, pois na maioria das vezes, basta uma aproximação para tomar uma decisão: ‘O dinheiro vai dar para comprar tudo o que preciso na cantina da escola?

’, ‘O troco que recebi está correto? ’ etc. E a realização de cálculos aproximados contribui para que os alunos verifiquem a razoabilidade dos resultados obtidos ao realizar cálculos via algoritmo.

Na atividade 2, por exemplo, são propostos quatro problemas para o aluno resolver por meio de estratégias diferentes, e favorece o desenvolvimento da habilidade EF06MA11.

Figura 51 – Sequência de atividades sobre multiplicação de números decimais: Atividade 2



2 Resolva os problemas abaixo.

a) Rita comprou três ovos de Páscoa. Se cada um custou R$ 18,25, quanto ela pagou no total? R$ 54,75

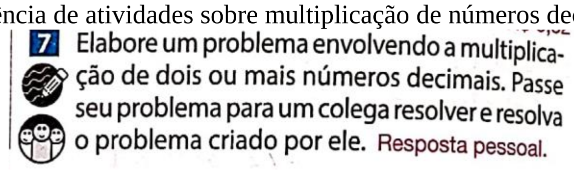
b) Carla mora em um prédio de 10 andares, incluindo o térreo. Se cada andar tem 2,8 metros de altura, qual é a medida da altura do prédio? 28 metros

Fonte: GAY, SILVA, 2018, p. 201.

A atividade 2 trabalha com tratamento do registro numérico decimal do número racional, envolvendo a operação da multiplicação nesse processo.

Na atividade 7, os alunos devem elaborar um problema cuja resolução deve ser encontrada multiplicando dois ou mais números decimais, favorecendo o desenvolvimento da habilidade EF06MA11.

Figura 52 - Sequência de atividades sobre multiplicação de números decimais: Atividade 7



7 Elabore um problema envolvendo a multiplicação de dois ou mais números decimais. Passe seu problema para um colega resolver e resolva o problema criado por ele. Resposta pessoal.

Fonte: GAY, SILVA, 2018, p. 202.

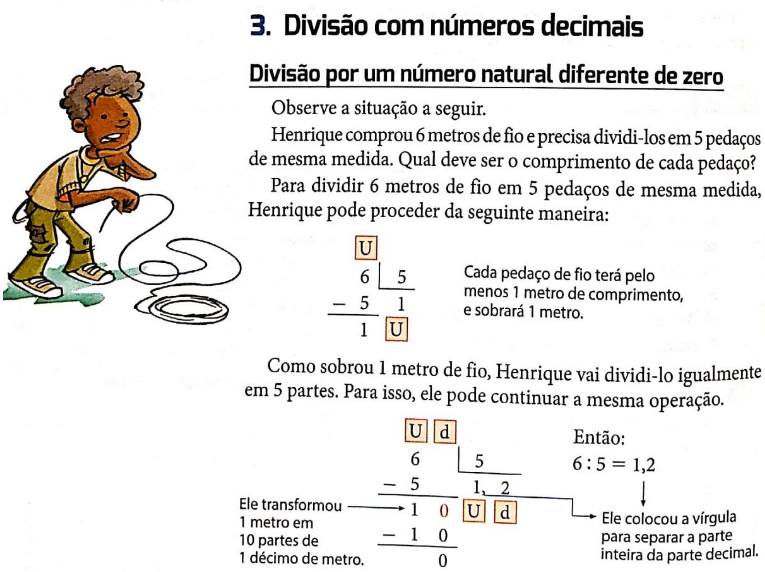
No tópico 3 “Divisão com números decimais”, os objetivos seguem:

- Calcular divisões com números decimais por meio de diferentes estratégias;
- Favorecer o desenvolvimento da habilidade da BNCC: EF06MA11.

De acordo com a habilidade, esse tópico apresenta problemas que envolvem divisão com números decimais e, também, propõe que seja elaborado um problema que possa ser resolvido por meio dessa operação.

Assim como nas outras operações envolvendo números decimais, a compreensão da divisão com esses números está atrelada ao entendimento das características do nosso sistema de numeração e também do modo como dividimos números naturais.

Figura 53 – Divisão com números decimais



3. Divisão com números decimais

Divisão por um número natural diferente de zero

Observe a situação a seguir.

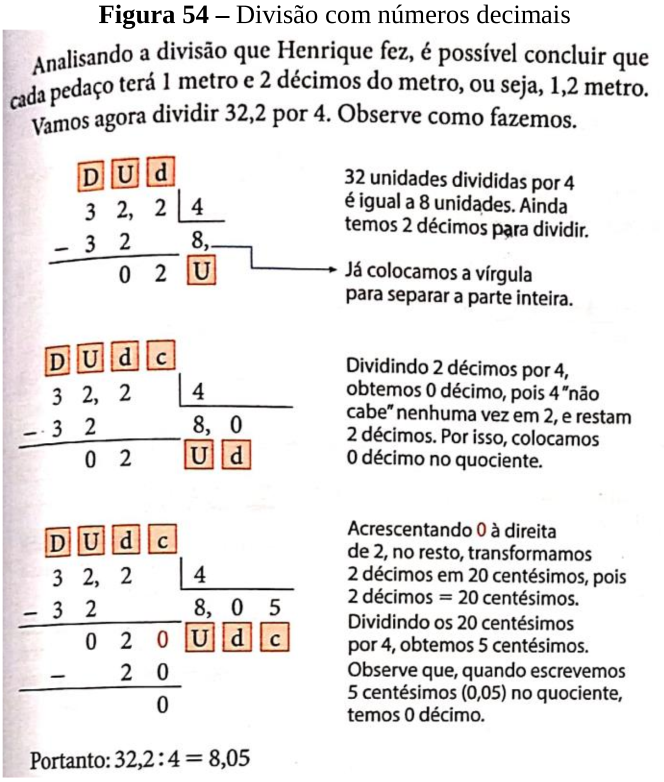
Henrique comprou 6 metros de fio e precisa dividi-los em 5 pedaços de mesma medida. Qual deve ser o comprimento de cada pedaço?

Para dividir 6 metros de fio em 5 pedaços de mesma medida, Henrique pode proceder da seguinte maneira:

Como sobrou 1 metro de fio, Henrique vai dividi-lo igualmente em 5 partes. Para isso, ele pode continuar a mesma operação.

Fonte: GAY, SILVA, p. 202.

Figura 54 – Divisão com números decimais



Analisando a divisão que Henrique fez, é possível concluir que cada pedaço terá 1 metro e 2 décimos do metro, ou seja, 1,2 metro.

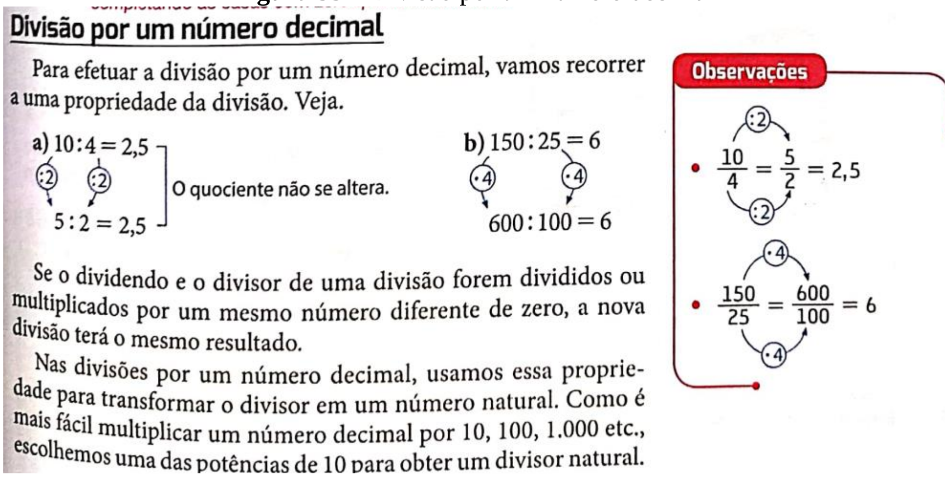
Vamos agora dividir 32,2 por 4. Observe como fazemos.

Portanto: 32,2 : 4 = 8,05

Fonte: GAY, SILVA, 2018, p. 203.

A divisão por um número decimal foi explicada por meio da seguinte propriedade: se o dividendo e o divisor de uma divisão forem multiplicados ou divididos por um mesmo número diferente de zero, a divisão realizada com os valores resultantes terá o mesmo resultado da divisão com os números iniciais. Por essa propriedade, justifica-se a regra prática do algoritmo da divisão “igualar as casas depois da vírgula e cortar a vírgula”.

Figura 55 – Divisão por um número decimal



Divisão por um número decimal

Para efetuar a divisão por um número decimal, vamos recorrer a uma propriedade da divisão. Veja.

a) $10 : 4 = 2,5$ e $5 : 2 = 2,5$ (dividindo os dois por 2): O quociente não se altera.

b) $150 : 25 = 6$ e $600 : 100 = 6$ (multiplicando os dois por 4)

Se o dividendo e o divisor de uma divisão forem divididos ou multiplicados por um mesmo número diferente de zero, a nova divisão terá o mesmo resultado.

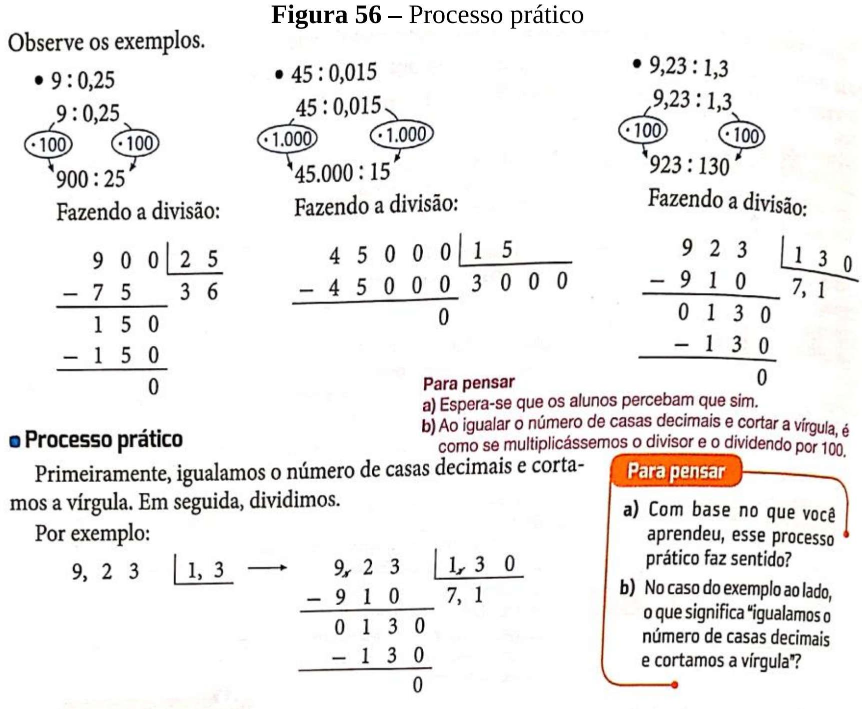
Nas divisões por um número decimal, usamos essa propriedade para transformar o divisor em um número natural. Como é mais fácil multiplicar um número decimal por 10, 100, 1.000 etc., escolhemos uma das potências de 10 para obter um divisor natural.

Observações

- $\frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2,5$ (:2)
- $\frac{150}{25} = \frac{600}{100} = 6$ (·4)

Fonte: GAY, SILVA, 2018, p. 203.

Figura 56 – Processo prático



Observe os exemplos.

- $9 : 0,25$ (·100) → $900 : 25$. Fazendo a divisão: $900 : 25 = 36$
- $45 : 0,015$ (·1.000) → $45.000 : 15$. Fazendo a divisão: $45000 : 15 = 3000$
- $9,23 : 1,3$ (·100) → $923 : 130$. Fazendo a divisão: $923 : 130 = 7,1$

Processo prático

Primeiramente, igualamos o número de casas decimais e cortamos a vírgula. Em seguida, dividimos.

Por exemplo:

$9,23 : 1,3 \longrightarrow 9,23 : 1,30 = 7,1$

Para pensar

a) Com base no que você aprendeu, esse processo prático faz sentido?

b) No caso do exemplo ao lado, o que significa "igualamos o número de casas decimais e cortamos a vírgula"?

Para pensar

a) Espera-se que os alunos percebam que sim.

b) Ao igualar o número de casas decimais e cortar a vírgula, é como se multiplicássemos o divisor e o dividendo por 100.

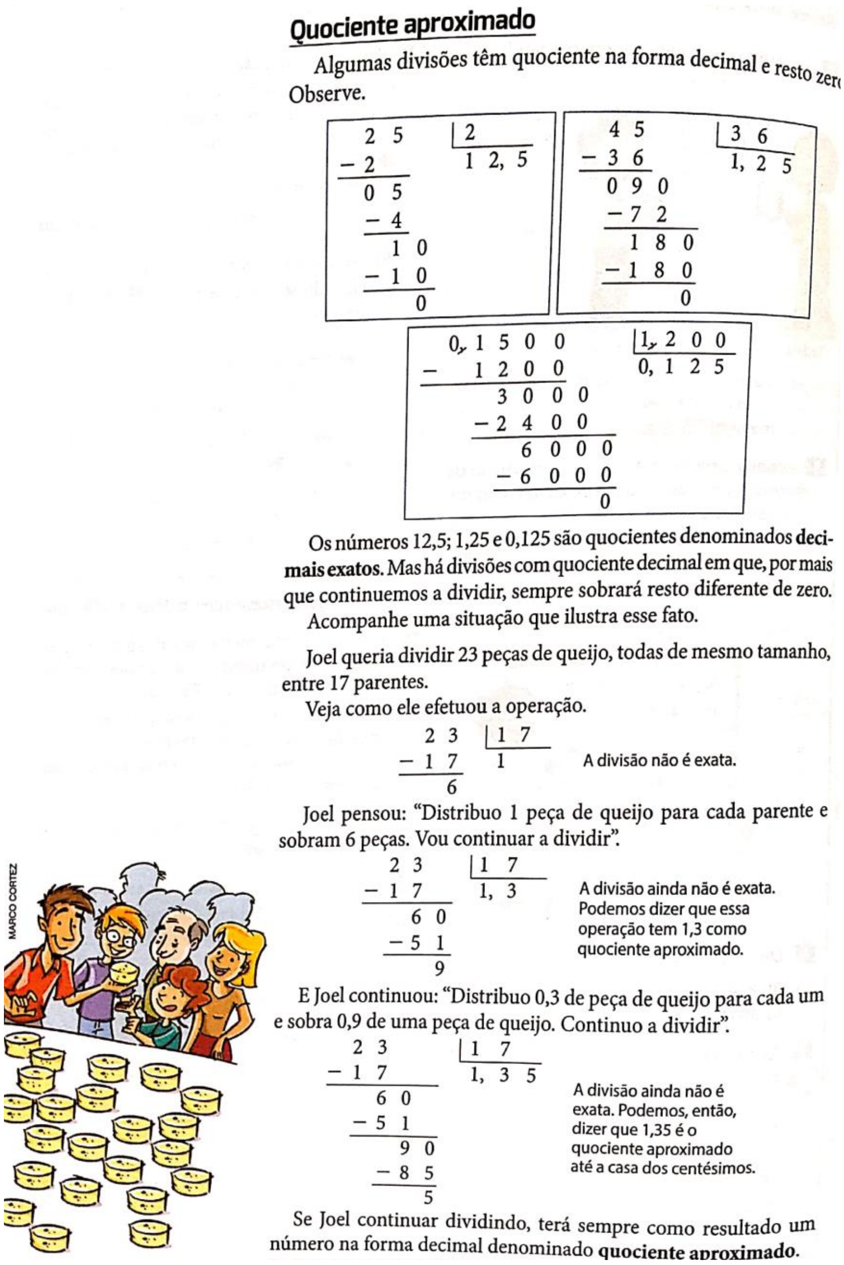
Fonte: GAY, SILVA, 2018, p. 204.

São propostos problemas para o aluno resolver por meio de estratégias diferentes, desenvolvendo assim a habilidade EF06MA11. E muito desses problemas envolvem o nosso sistema monetário.

Na atividade 10, por exemplo, os alunos devem elaborar um problema que envolve a divisão de números racionais, favorecendo a habilidade EF06MA11

No tópico "Quociente aproximado", a divisão de números decimais nos remete para a reflexão sobre o número obtido no quociente, que pode ser um número decimal com número finito de casas decimais (decimal exato) ou número decimal que é uma aproximação de outro que tem infinitas casas decimais (quociente aproximado). Essa reflexão contribui para que os alunos compreendam posteriormente que a representação decimal de um número racional só pode ser finita ou infinita periódica.

Figura 57 – Quociente aproximado


Quociente aproximado

Algumas divisões têm quociente na forma decimal e resto zer[o].
Observe.

25 | 2
−2   12,5
05
−4
10
−10
0

45 | 36
−36   1,25
090
−72
180
−180
0

0,1500 | 1,200
−1200   0,125
3000
−2400
6000
−6000
0

Os números 12,5; 1,25 e 0,125 são quocientes denominados **decimais exatos**. Mas há divisões com quociente decimal em que, por mais que continuemos a dividir, sempre sobrará resto diferente de zero.

Acompanhe uma situação que ilustra esse fato.

Joel queria dividir 23 peças de queijo, todas de mesmo tamanho, entre 17 parentes.

Veja como ele efetuou a operação.

23 | 17
−17   1
6

A divisão não é exata.

Joel pensou: "Distribuo 1 peça de queijo para cada parente e sobram 6 peças. Vou continuar a dividir".

23 | 17
−17   1,3
60
−51
9

A divisão ainda não é exata. Podemos dizer que essa operação tem 1,3 como quociente aproximado.

E Joel continuou: "Distribuo 0,3 de peça de queijo para cada um e sobra 0,9 de uma peça de queijo. Continuo a dividir".

23 | 17
−17   1,35
60
−51
90
−85
5

A divisão ainda não é exata. Podemos, então, dizer que 1,35 é o quociente aproximado até a casa dos centésimos.

Se Joel continuar dividindo, terá sempre como resultado um número na forma decimal denominado **quociente aproximado**.

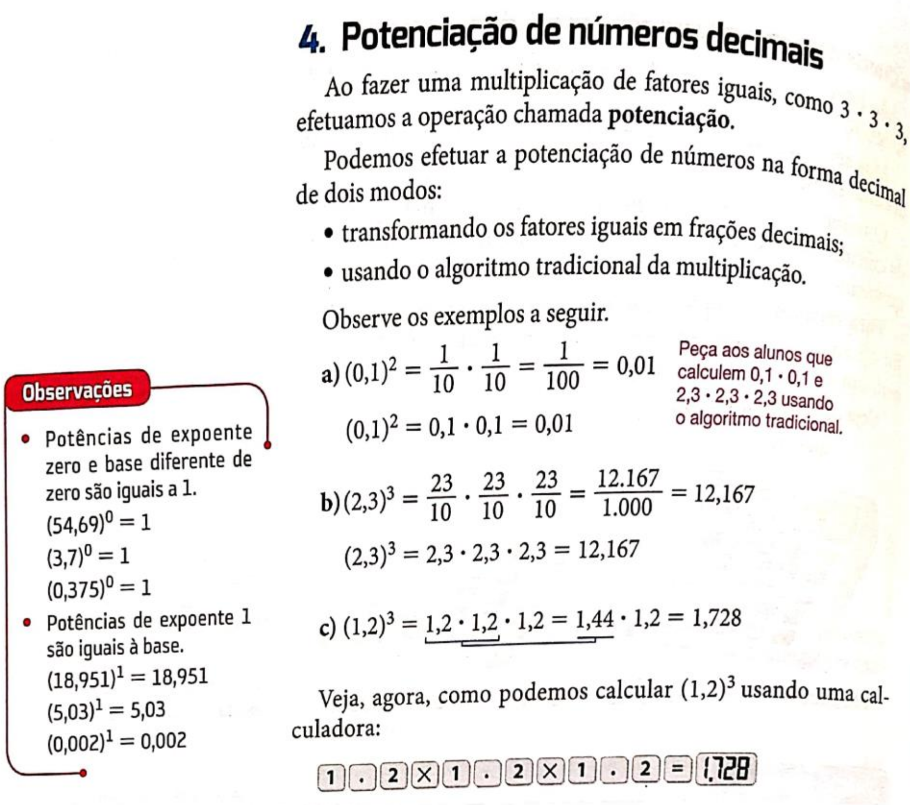
Fonte: GAY, SILVA, 2018, p. 206.

O tópico 4 "Potenciação de números decimais", tem como objetivos:

- Calcular potencias de números decimais;
- Favorecer o desenvolvimento da habilidade da BNCC: EF06MA11.

Esse tópico favorece o desenvolvimento dessa habilidade, pois coloca o aluno diante de situações que envolvem o cálculo de potências.

Figura 58 – Potenciação de números decimais



4. Potenciação de números decimais

Ao fazer uma multiplicação de fatores iguais, como 3 · 3 · 3, efetuamos a operação chamada **potenciação.**

Podemos efetuar a potenciação de números na forma decimal de dois modos:

- transformando os fatores iguais em frações decimais;
- usando o algoritmo tradicional da multiplicação.

Observe os exemplos a seguir.

a) $(0,1)^2 = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100} = 0,01$

$(0,1)^2 = 0,1 \cdot 0,1 = 0,01$

Peça aos alunos que calculem 0,1 · 0,1 e 2,3 · 2,3 · 2,3 usando o algoritmo tradicional.

b) $(2,3)^3 = \frac{23}{10} \cdot \frac{23}{10} \cdot \frac{23}{10} = \frac{12.167}{1.000} = 12,167$

$(2,3)^3 = 2,3 \cdot 2,3 \cdot 2,3 = 12,167$

c) $(1,2)^3 = 1,2 \cdot 1,2 \cdot 1,2 = 1,44 \cdot 1,2 = 1,728$

Veja, agora, como podemos calcular $(1,2)^3$ usando uma calculadora:

1 . 2 × 1 . 2 × 1 . 2 = 1.728

Observações

- Potências de expoente zero e base diferente de zero são iguais a 1.
  $(54,69)^0 = 1$
  $(3,7)^0 = 1$
  $(0,375)^0 = 1$
- Potências de expoente 1 são iguais à base.
  $(18,951)^1 = 18,951$
  $(5,03)^1 = 5,03$
  $(0,002)^1 = 0,002$

Fonte: GAY, SILVA, 2018, p. 208.

Os alunos estudaram que toda potência de um número natural é equivalente a multiplicação com fatores iguais. Essa ideia também se estende ao cálculo de potencias de números decimais.

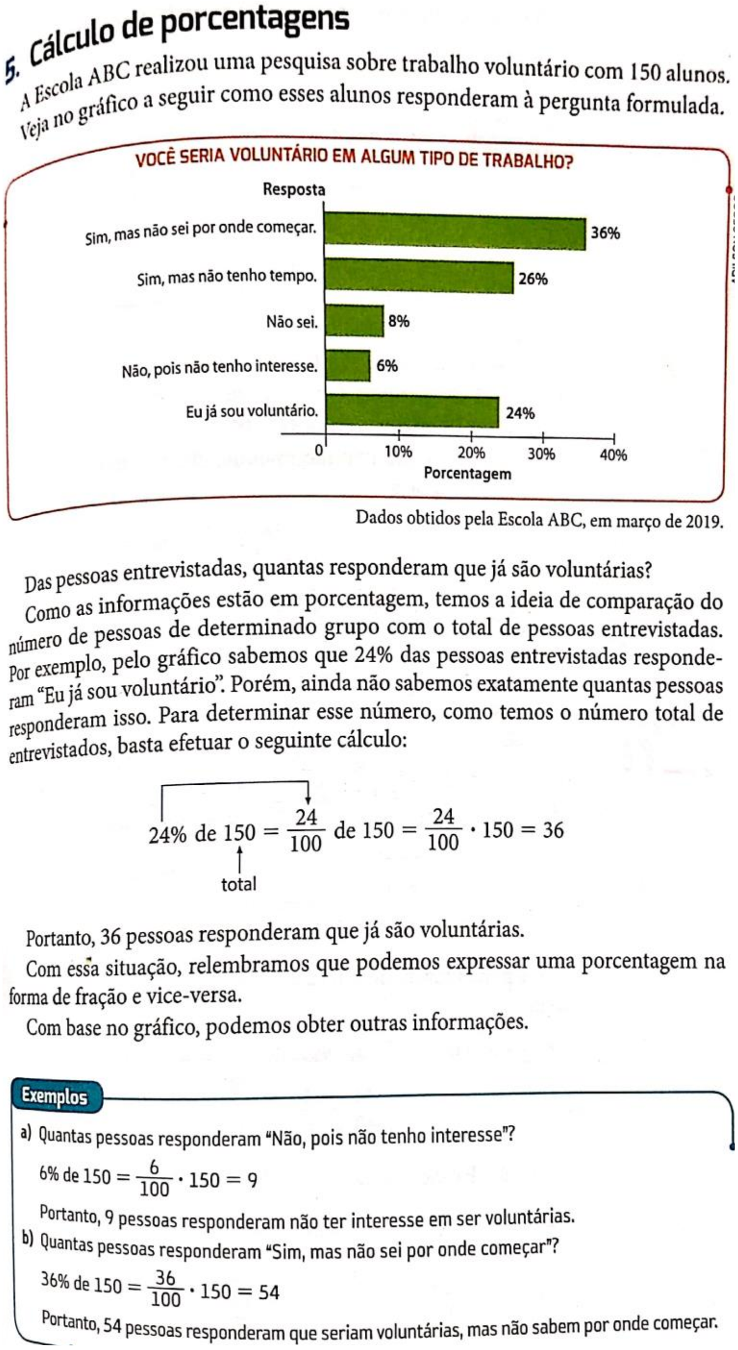
A atividade 5, por exemplo, contribui para que os alunos desenvolvam o espírito investigativo. Além disso, sua capacidade de argumentar deve se revelar no texto solicitado no item d. A autonomia de pensamento, a experimentação, a discussão de resultados e a comunicação são outras habilidades que podem ser desenvolvidas com essa atividade.

No tópico 5 “Cálculo de porcentagens”, os objetivos constam como:

- Calcular porcentagens por meio de diferentes estratégias;
- Favorecer o desenvolvimento da habilidade da BNCC: EF06MA13.

Para o desenvolvimento dessa habilidade, são apresentados problemas que envolvem porcentagens e, também, propõe que seja elaborado um problema que possa ser resolvido por meio do cálculo de porcentagens.

Figura 59 – Cálculo de porcentagem



5. Cálculo de porcentagens

A Escola ABC realizou uma pesquisa sobre trabalho voluntário com 150 alunos. Veja no gráfico a seguir como esses alunos responderam à pergunta formulada.

Dados obtidos pela Escola ABC, em março de 2019.

Das pessoas entrevistadas, quantas responderam que já são voluntárias?

Como as informações estão em porcentagem, temos a ideia de comparação do número de pessoas de determinado grupo com o total de pessoas entrevistadas. Por exemplo, pelo gráfico sabemos que 24% das pessoas entrevistadas responderam "Eu já sou voluntário". Porém, ainda não sabemos exatamente quantas pessoas responderam isso. Para determinar esse número, como temos o número total de entrevistados, basta efetuar o seguinte cálculo:

$$24\% \text{ de } \underbrace{150}_{\text{total}} = \frac{24}{100} \text{ de } 150 = \frac{24}{100} \cdot 150 = 36$$

Portanto, 36 pessoas responderam que já são voluntárias.

Com essa situação, relembramos que podemos expressar uma porcentagem na forma de fração e vice-versa.

Com base no gráfico, podemos obter outras informações.

Exemplos

a) Quantas pessoas responderam "Não, pois não tenho interesse"?

$6\% \text{ de } 150 = \frac{6}{100} \cdot 150 = 9$

Portanto, 9 pessoas responderam não ter interesse em ser voluntárias.

b) Quantas pessoas responderam "Sim, mas não sei por onde começar"?

$36\% \text{ de } 150 = \frac{36}{100} \cdot 150 = 54$

Portanto, 54 pessoas responderam que seriam voluntárias, mas não sabem por onde começar.

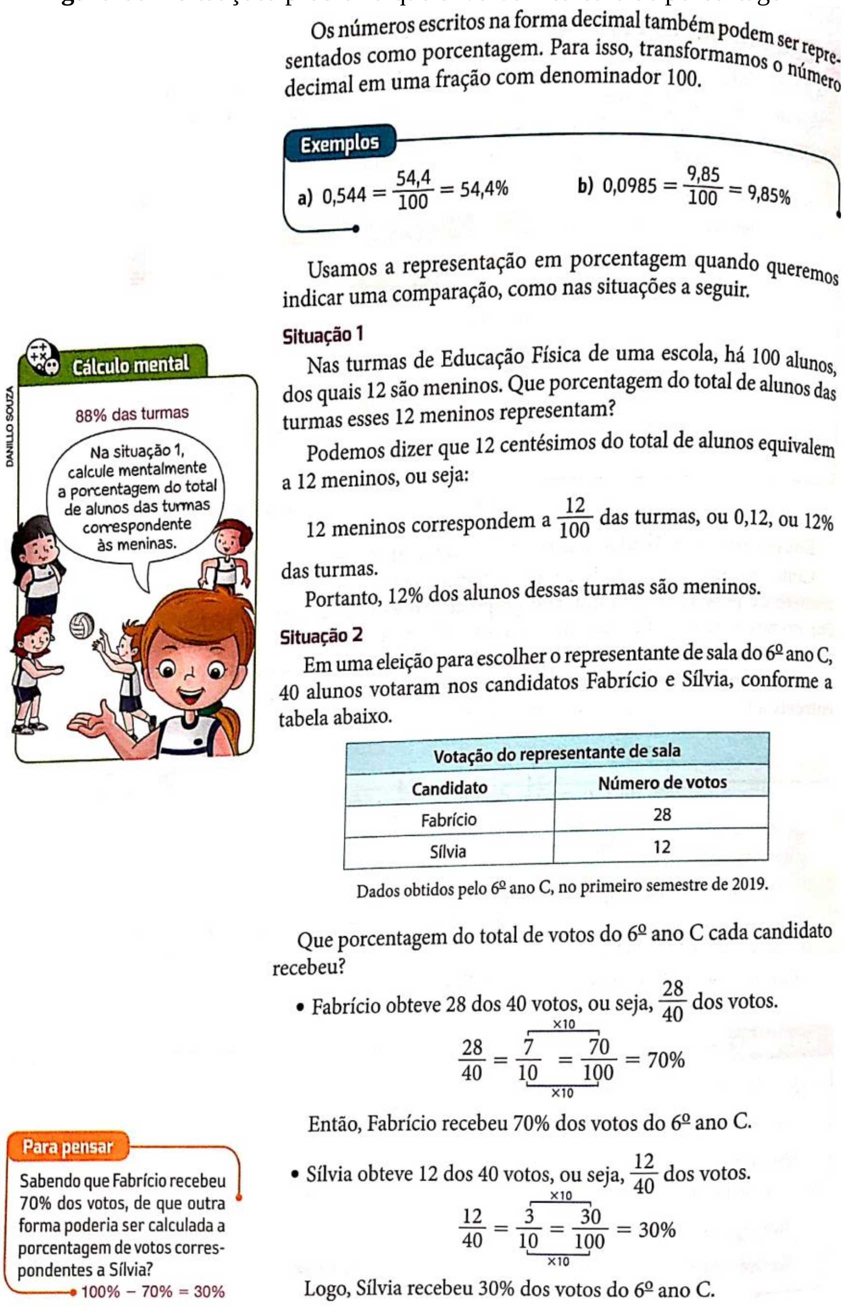
Fonte: GAY, SILVA, 2018, p. 209.

A ideia de proporcionalidade pode auxiliar os alunos nos cálculos de porcentagens, evitando assim o uso da "regra de três". Dessa maneira convém propor a eles perguntas como: "Se 50% de 20 é igual a 10, quanto é 25% de 20? E 75% de 20?".

Verifique que no exemplo, ao determinar 24% de 150, podemos obter a quantidade de pessoas representada por outras porcentagens com base na ideia de proporcionalidade e usando cálculo mental. Mostrando que se 24% de 150 é igual a 36,6%, que é a quarta parte de 24%, equivale a 9, que é a quarta parte de 36.

As situações 1 e 2 tem por objetivo fazer os alunos refletirem a respeito do uso e do significado de porcentagem, tendo como ponto de partida seus conhecimentos de números na forma de fração e na forma decimal em diversos contextos, tendo assim a mobilização do tratamento dos diferentes registros numéricos do número decimal.

Figura 60 – Situações-problema que envolvem cálculo de porcentagem



Os números escritos na forma decimal também podem ser representados como porcentagem. Para isso, transformamos o número decimal em uma fração com denominador 100.

Exemplos

a) $0{,}544 = \frac{54{,}4}{100} = 54{,}4\%$ b) $0{,}0985 = \frac{9{,}85}{100} = 9{,}85\%$

Usamos a representação em porcentagem quando queremos indicar uma comparação, como nas situações a seguir.

Situação 1

Nas turmas de Educação Física de uma escola, há 100 alunos, dos quais 12 são meninos. Que porcentagem do total de alunos das turmas esses 12 meninos representam?

Podemos dizer que 12 centésimos do total de alunos equivalem a 12 meninos, ou seja:

12 meninos correspondem a $\frac{12}{100}$ das turmas, ou 0,12, ou 12% das turmas.

Portanto, 12% dos alunos dessas turmas são meninos.

Cálculo mental

88% das turmas

Situação 2

Em uma eleição para escolher o representante de sala do 6º ano C, 40 alunos votaram nos candidatos Fabrício e Sílvia, conforme a tabela abaixo.

Votação do representante de sala	
Candidato	**Número de votos**
Fabrício	28
Sílvia	12

Dados obtidos pelo 6º ano C, no primeiro semestre de 2019.

Que porcentagem do total de votos do 6º ano C cada candidato recebeu?

- Fabrício obteve 28 dos 40 votos, ou seja, $\frac{28}{40}$ dos votos.

$$\frac{28}{40} = \frac{7}{10} \overset{\times 10}{\underset{\times 10}{=}} \frac{70}{100} = 70\%$$

Então, Fabrício recebeu 70% dos votos do 6º ano C.

- Sílvia obteve 12 dos 40 votos, ou seja, $\frac{12}{40}$ dos votos.

$$\frac{12}{40} = \frac{3}{10} \overset{\times 10}{\underset{\times 10}{=}} \frac{30}{100} = 30\%$$

Logo, Sílvia recebeu 30% dos votos do 6º ano C.

Para pensar

Sabendo que Fabrício recebeu 70% dos votos, de que outra forma poderia ser calculada a porcentagem de votos correspondentes a Sílvia?

100% − 70% = 30%

Fonte: GAY, SILVA, 2018, p. 210.

Nessa situação se faz necessário todo entendimento do significado de números racionais e suas diferentes representações, a fim de tratar e converter os diferentes registros.

De acordo com a análise do livro didático vemos que há o tratamento e as conversões das diferentes representações dos números racionais. No entanto, é necessário que o professor tenha esse olhar atento, reflexivo e crítico em relação ao que está no livro didático, pois não necessariamente o que está descrito ali, irá favorecer o trabalho do docente, e principalmente, a aprendizagem dos alunos, pois isso também está ligado a metodologia que o professor utiliza ao passar esse conteúdo. Além disso, por mais que o livro didático em suas atividades proporcione base para que o professor identifique se o aluno mobiliza as diferentes representações, primeiramente é necessário que o aluno tenha processado cognitivamente o conceito do número racional e entendido as relações existentes entre os seus diferentes registros.

Dessa forma, o docente pode procurar outros tipos de recursos para auxiliá-lo nas aulas e, também, analisar o livro de tal forma que reconheça quais são suas limitações e falhas que não devem ser passadas aos alunos.

E este estudo do livro didático, das representações semióticas de números racionais, deu um suporte para o planejamento e de que como aplicar uma sequência didática/de atividades aos alunos que são propostas aos professores.

11 APLICAÇÃO DE SEQUÊNCIAS DE ATIVIDADES VISANDO A MOBILIZAÇÃO DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO DOS NÚMEROS RACIONAIS AOS ALUNOS DO 6° ANO

Quando falamos de mobilizar os diferentes registros de representação semiótica dos números racionais, é de suma importância que tanto quem ensina quanto quem aprende, conheça, produza e coordene esses registros, pois como nos diz Duval (2003), dar ênfase a um único tipo de representação, pode levar o aluno a confundir o objeto matemático com a sua representação, ou seja, confundir significante com significado.

Para o aluno, muitas vezes não é fácil fazer a separação entre o objeto e representação, pois a representação pode ser por ele como sendo o próprio objeto. Como por exemplo, temos a expressão "um meio", que ao mencionarmos ao aluno eles conseguem associar à representação 1/2, até porque se torna mais comum nos livros didáticos esse exemplo, mas quando associamos a expressão "meio" a representação 0,5, é que se as duas expressões relacionassem a objetos distintos.

Dessa forma, na prática docente e nos materiais didáticas, é muito importante utilizarmos variadas representações e a coordenação entre elas, para que assim haja a compreensão significativa do objeto em estudo, como nas atividades bem articuladas, que são do ponto de vista cognitivo, a conceitualização ou a resolução de problemas.

Como um dos objetivos desta pesquisa era analisar as sequências didáticas como recurso didático envolvendo registros semióticos referentes ao conceito matemático em estudo, optou-se por aplicar uma sequência didática/de atividades, proposta como material de apoio no projeto de Recuperação e Aprofundamento, do caderno Aprender Sempre, volume 03, visando as habilidades referentes aos números racionais.

As sequências didáticas/de atividades aplicadas aos alunos do 6° ano, foram desenvolvidas pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo (SEDUC-SP), no Programa de Recuperação e Aprofundamento, com o intuito de oferecer um suporte adicional aos estudantes para recuperar aprendizagens essenciais ao seu percurso educacional e também, de oferecer formações aos profissionais da rede com foco no uso do resultado das avaliações e no desenvolvimento das atividades presentes no material, a fim de fortalecer o desenvolvimento das habilidades essenciais para o percurso educacional dos estudantes.

Abaixo seguem o quadro da matriz de habilidades essenciais 2020 do Programa de Recuperação e Aprofundamento, referente ao 6° ano do Ensino Fundamental:

Quadro 11 – Matriz de habilidades essenciais 2020, do Programa de Recuperação e Aprofundamento referente ao 6° ano

6° ANO - ENSINO FUNDAMENTAL

Habilidades de Matemática

Objetos de Conhecimento	Habilidades Essenciais
• **Sistema de numeração decimal:** características, leitura, escrita e comparação de números naturais e de números racionais representados na forma decimal.	**(EF06MA02)** Reconhecer o sistema de numeração decimal como fruto de um processo histórico, percebendo semelhanças e diferenças com outros sistemas de numeração, de modo a sistematizar suas principais características (base, valor posicional e função do zero), utilizando, inclusive, a composição e decomposição de números naturais e números racionais em sua representação decimal.
• Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais; Divisão euclidiana. • **Frações:** significados (parte/ todo, quociente), equivalência, comparação; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações.	**(EF06MA03)** Solucionar e propor problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias pessoais, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora. **(EF06MA07)** Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes.
• Situações-problema sobre medidas envolvendo grandezas como comprimento, massa, tempo, temperatura, área, capacidade e volume.	**(EF06MA24)** Resolver e elaborar situações problema que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.

Fonte: SÃO PAULO, Secretaria de Educação. Matriz de habilidades, 2020, p. 30.

Essas habilidades essenciais foram selecionadas a partir de análises do Currículo Paulista do Ensino Fundamental, do Currículo Oficial vigente no Ensino Médio, dos resultados do Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP 2019) e da Avaliação Diagnóstica de Entrada (ADE), em um trabalho conjunto entre as equipes curriculares de Matemática da Coordenadoria Pedagógica (COPED), os Professores Coordenadores do Núcleo Pedagógico (PCNPs) e os professores da rede. Por conta da importância da continuidade do trabalho de recuperação iniciado em 2020 nos anos seguintes, a matriz de habilidades do programa de recuperação foi elaborada considerando um ciclo de progressão das aprendizagens entre 2020 e 2021.

A Sequência de Atividades 2, do caderno Aprender Sempre volume 03, foi a sequência aplicada aos alunos do 6° ano, com o objetivo que ao final da sequência de atividades, os alunos sejam capazes reconhecer e aplicar conceitos, propriedades e procedimentos em contextos que envolvam frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência e comparação; cálculo da fração de um número natural e adição e subtração de frações, e principalmente, relacionando as diferentes representações que um mesmo objeto de estudo pode ter.

E as escolhas das habilidades desta sequência, foram feitas por meio de análise dos resultados de avaliações internas e externas (AAD/Avaliação Diagnóstica de Entrada e SARESP/ Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo), que revelaram fragilidades dos estudantes com relação à habilidade de “compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de parte de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes” (EF06MA07), presente no Currículo Paulista, e que muitas vezes pode estrar relacionado ao déficit de tratamento e conversão do objeto em estudo.

No instrumento de pesquisa, buscamos ter em mente que ao tratar de sequências de atividades que tenham por objetivo articular dois registros em relação a representação de um objeto matemático, de acordo com Duval (2013), se faz necessário que essas atividades contemplem os dois sentidos da conversão, e que para cada sentido, elas devem incluir casos de congruência e não-congruência, além de que devem envolver conversões entre registros monofuncionais, bem como conversões de registros multifuncionais para registros monofuncionais. Os registros multifuncionais são referentes a representação discursiva, como a linguagem natural, e a representação não-discursiva, como as figuras planas ou espaciais. E os registros monofuncionais são referentes a representação discursiva como os sistemas de escritas numéricas e algébricas e cálculos, e a representação não-discursiva, como os gráficos cartesianos.

Portanto, na aplicação destas sequências, tomou-se o cuidado de que forma essas questões seriam aplicadas, a fim de explorar conversões em ambos os sentidos e, envolvendo representações numéricas fracionária e decimal, figurativas e em linguagem natural, na qual houvesse adaptação da questão quando necessário a fim de cumprir o objetivo.

A Sequência de Atividades 3 é dividida em oito aulas, na qual seguimos a mesma programação de aplicação de cada sequência de aula sugerida pelo material, conforme o quadro abaixo:

Quadro 12 – Cronograma de aplicação das aulas e sequências de atividades

AULA/TEMPO	TEMA DA AULA
1/45 min	As razões da matemática
2/45 min	Campanha de vacinação
3/45 min	De quantos modos?
4/45 min	Competição
5,6,7/135 min	Colorindo Barras
8/45 min	Mais e menos faz toda diferença.

Fonte: SÃO PAULO, Secretaria de Educação. Caderno do professor: Aprender Sempre 6° ano, 2020, p. 36.

Na execução das atividades, tivemos a participação de 14 alunos, pois como estávamos no ensino remoto, e o público-alvo é de alunos em que a maioria não tem acesso à internet, então poucos alunos conseguiam ter acesso as aulas online. As aulas aconteceram de maneira síncrona e assíncrona, na qual alguns alunos conseguiam assistir as aulas em tempo real, na qual gravava as aulas para posteriormente postar no grupo de WhatsApp da sala para os alunos que não conseguiam ter acesso a internet para acompanhar as aulas. Ao todo foram 420 resoluções analisadas a partir das 30 situações de conversão propostas para cada aluno.

A aula 1 “As razões da matemática”, tem por objetivos:

- Identificar frações associadas à ideia de parte do inteiro, como representação que pode estar associada a diferentes significados;
- Ler frações e identificar seus elementos.

Inicialmente, na aula, apresentamos os objetivos de “identificar frações associadas à ideia de parte do inteiro, como representação que pode estar associada a diferentes significados” e “ler frações e identificar seus elementos” aos estudantes. É sempre muito importante deixar claro o que se espera deles, ou seja, o que devem saber ao final desta aula. Escrever o objetivo é importante para os estudantes porque eles devem saber o que estão fazendo e, desta forma, focar em alcançar esse objetivo.

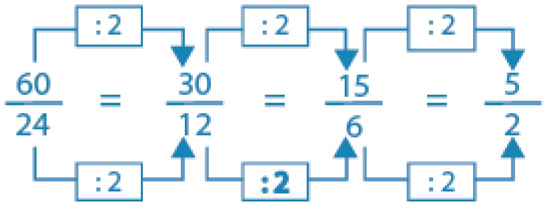
Em seguinte, exploramos a ideia de fração como razão entre duas grandezas, tendo como ponto de partida uma situação problema, explorando assim o objeto de conhecimento: frações e diferentes aplicações e contextos, como por exemplo frações que representam parte de um inteiro, e que representam relações entre conjuntos; frações como operadores, e como razões etc. Tendo como proposta principal explorar a ideia de fração como razão entre duas grandezas.

É importante que os estudantes vivenciem diferentes situações-problema. E durante o processo, mostramos a eles como podem surgir diversos modos de resolver, e isso nos possibilita a comparação entre escritas fracionárias.

A fim de explicar como deveriam desenvolver as atividades, expusemos a situação-problema associada a diferentes significados. Lemos com a turma o problema: “Em uma avaliação com 100 testes, a razão entre o número de questões que o estudante acertou e o total de questões da prova foi de 16 para 20. Logo em seguida solicitamos aos estudantes: “Escrevam na forma de fração irredutível a razão entre o número de questões que o estudante acertou e o total de questões da prova e determinem quantas questões o estudante acertou”. Ao fim, o estudante foi conduzido a associar a quantidade de acertos à quantidade de questões da prova. Dessa forma, foram feitos questionamentos sobre a situação problema, para que pudessem refletir sobre as diferentes formas de soluções encontradas neste problema.

Ao decorrer da aula, foi necessário retomar o conteúdo sobre fração irredutível, em que quando simplificamos uma fração e obtemos termos primos entre si, dizemos que a fração é irredutível, ou seja, que ela não pode ser mais simplificada.

Figura 61 – Fração irredutível



Fonte: Arquivado da autora.

A fração $\frac{5}{2}$ é uma fração irredutível.

É importante esclarecermos e analisarmos com os estudantes o fato de aparecer uma ou mais soluções, dessa forma pontuamos que algumas são escritas na forma fracionária, estabelecendo relação entre as diferentes soluções, e assim exemplificamos os dois casos a seguir a fim de aprofundar o aprendizado.

Veja a seguir:

1º Caso - Para determinar a quantidade de questões que o estudante acertou nesta prova, podemos encontrar uma fração com o denominador 100 que seja equivalente a fração irredutível determinada no item e. A quantidade de questões acertadas será igual ao numerador da fração com denominador 100. Determine essa fração.

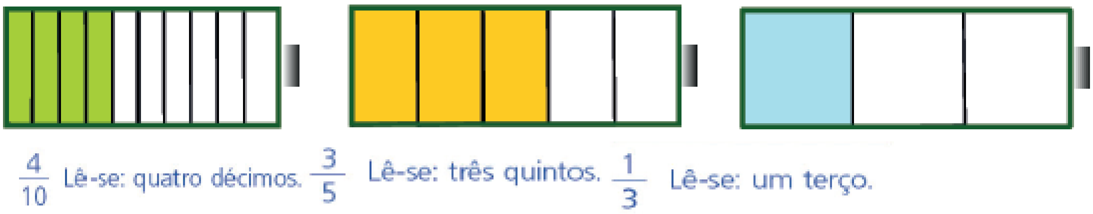
Resposta: $\frac{4}{5} = \frac{80}{100}$

2º Caso - Outro modo de determinar a quantidade de questões é calcular o valor correspondente a $x.100$, em que x representa a fração correspondente à razão entre o número de questões que o estudante acertou e o total de questões da prova. Quantas questões desta prova o estudante acertou?

Solução: $\frac{4}{5}.100 = \frac{400}{5} = 80$. Logo, o estudante acertou 80 questões desta prova.

Ainda, recordamos que, muitas vezes, comparamos duas quantidades ou duas medidas por meio de uma divisão. O quociente, então, é chamado de razão. Sendo assim, todo número racional pode ser escrito na forma a/b, com a e b inteiros e b ≠ 0.

Figura 62 – Representação figural, fracionária e decimal de uma fração e sua leitura



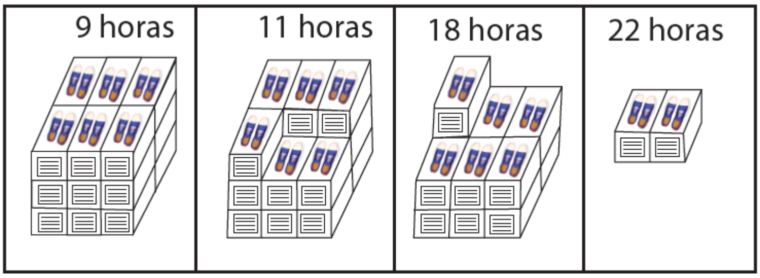
Fonte: Arquivo da autora.

Ao finalizar das atividades, questionei a eles "O que acontece quando dividimos 4 por 10 (4/10)? E 2 por 5 (2/5)? E 8 por 20 (8/20)? ". Retomamos a ideia de que essas são chamadas de frações equivalentes, ou seja, representam o mesmo Número Racional. Em relação à escrita por extenso da representação fracionária e da decimal, solicitei que fizessem a leitura da escrita. Exemplo: representação fracionária, quatro décimos ⇒ representação decimal, vinte e cinco centésimos; representação fracionária, um oitavo ⇒ representação decimal, cento e vinte e cinco milésimos. Ao final, sintetizamos um esquema, de quais foram os conceitos matemáticos estudados na aula.

No quadro abaixo, apresentamos as atividades aplicadas na aula 1, bem como as conversões propostas e os sentidos dessas conversões:

Quadro 13 – Sentido das conversões das atividades na aula 1 aplicadas

AULA	**N°**	**ATIVIDADE**	**TRATAMENTO, CONVERSÃO E SENTIDO**
AULA 1 - AS RAZÕES DA	1	Exposição da situação-problema associada a diferentes significados. Em uma avaliação com 100 testes, a razão entre o número de questões que o estudante acertou e o total de questões da prova foi de 16 para 20. Escreva na forma de fração irredutível a razão entre o número de questões que o estudante acertou e o total de questões da prova e determine quantas questões o estudante acertou. **a.** O que é solicitado no problema? **b.** A avaliação é composta de quantos testes? **c.** Qual é a relação entre o número de questões que o estudante acertou e o total de questões da prova?	Língua natural ↓ Numérica fracionária Figural ↓ Numérica fracionária

		d. Represente a razão entre o número de questões que o estudante acertou e o total de questões da prova, na forma de fração, usando os números 16 e 20. **e.** Escreva, na forma de fração irredutível, a razão entre o número de questões que o estudante acertou e o total de questões da prova. **DESAFIO -** Em uma sala de aula há 20 meninas e 15 meninos. Qual a fração irredutível que representa o número de meninas em relação ao número de meninos?	
	2	Em uma empresa há 600 funcionários. Desses, 250 são mulheres e 150 possuem ensino superior completo. Represente na forma de razão: **a.** O número de mulheres e o total de funcionários. **b.** O número de funcionários que possui ensino superior completo e o total de funcionários.	
	3	Uma atleta dedica 2 horas de seu dia a atividades aeróbicas e 1 hora para musculação. Qual a razão que representa um dia que essa atleta dedica para suas atividades físicas?	
	4	(PROJETO CON(SEGUIR)) - Uma loja de artigos de couro fez um dia de promoção de sapatos. As vendas foram um sucesso. A loja abriu às 9 horas e fechou às 22 horas. Observe nas figuras a seguir a evolução do estoque durante o dia da promoção.  Qual é a razão entre os volumes dos estoques de sapatos às 18 horas e às 9 horas? (A) $\frac{13}{18}$ (B) $\frac{9}{18}$ (C) $\frac{6}{18}$ (D) $\frac{2}{18}$	

	5	Joana participou de uma partida de tênis e acertou 15 dos 20 saques que fez. Pode-se afirmar que a fração do total de saques que Joana acertou é: (A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{3}{5}$	

Fonte: arquivo da autora.

A tabela abaixo nos mostra os resultados obtidos com os alunos na aplicação das atividades:

Tabela 3 – Resultados das atividades da Aula 1 "As razões da Matemática"

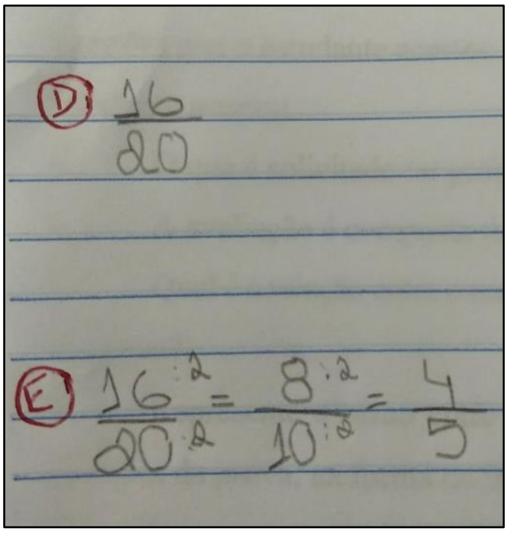
ATIVIDADE	**RESULTADO**	**OCORRÊNCIA**	**PERCENTUAL**
1	Aluno acertou totalmente a questão.	6	42,86%
	Aluno acertou parcialmente a questão, pois não conseguiu expressar a situação em uma fração.	3	21,43%
	Aluno acertou parcialmente a questão, pois não conseguir escrever a forma irredutível da fração.	3	21,43%
	Aluno não acertou a questão.	2	14,28%
2	Aluno acertou totalmente a questão, e escreveu as frações na forma irredutível (tratamento).	8	57,14%
	Aluno acertou totalmente a questão, mas não escreveu na forma irredutível (tratamento).	4	28,57%
	Aluno acertou parcialmente a questão, pois não conseguir escrever a forma irredutível da fração.	1	7,14%
	Aluno não acertou a questão.	1	7,14%
3	Aluno acertou totalmente a questão, e escreveu as frações na forma irredutível (tratamento).	9	64,28%

	Aluno acertou totalmente a questão, mas não escreveu na forma irredutível (tratamento).	4	28,57%
	Aluno não acertou a questão.	1	7,14%
4	Aluno acertou totalmente a questão.	12	85,71%
	Aluno não acertou a questão.	2	14,28%
5	Aluno acertou totalmente a questão.	12	85,71%
	Aluno acertou parcialmente a questão, pois não conseguir escrever a forma irredutível da fração.	1	7,14%
	Aluno não acertou a questão.	1	7,14%

Fonte: Arquivo da autora.

Como nos mostrou a tabela acima, houve casos em que os alunos conseguiram acertar totalmente atividade, na qual expressaram numericamente a forma de uma fração, e fizeram o tratamento da fração para sua forma irredutível, como mostra o protocolo do aluno A:

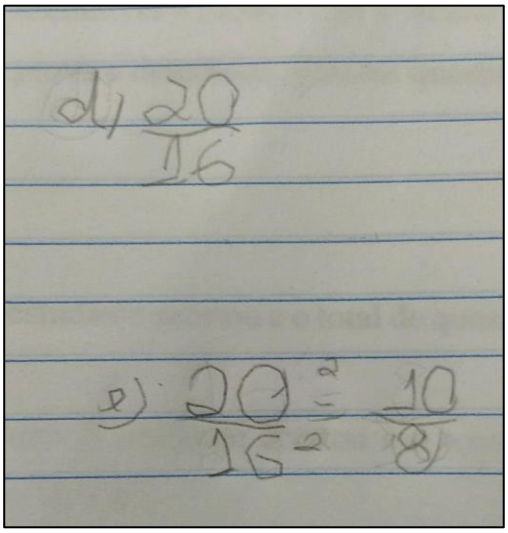
Imagem 1 - Protocolo do aluno A nas atividades *d* e *e* do exercício 1.



Fonte: arquivo da autora.

No entanto, houve aluno que não conseguiu entender a relação da fração parte-todo, expressando de maneira incorreta a forma numérica, além de não concluir o processo de tratamento da forma irredutível, como nos mostra o protocolo do aluno B:

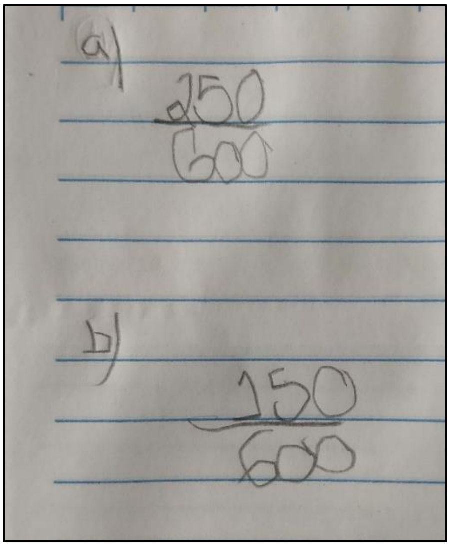
Imagem 2 - Protocolo do aluno B nas atividades *d* e *e* do exercício 1.



Fonte: arquivo da autora.

Verificando essa dificuldade em expressar numericamente uma fração, intervi com uma mediação na aplicação do exercício, e consequentemente o aluno B conseguiu escrever a forma numérica de uma fração, mas não fazendo ainda o tratamento para a forma irredutível, por uma dificuldade nos critérios de divisibilidade, como mostra a imagem abaixo:

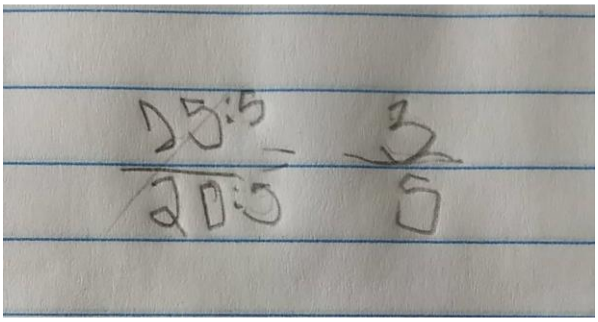
Imagem 3 - Protocolo do aluno B nas atividades *a* e *b* do exercício 2.



Fonte: arquivo da autora.

Depois de mostrar ao aluno o significado da relação parte-todo, e ele assim compreender, introduzimos a ideia da fração irredutível, e sua relação com a forma numérica de uma fração. Depois do aluno B, entender essa relação, ele conseguiu fazer de maneira correta o tratamento da fração, como mostra a imagem abaixo referente a atividade 5:

Imagem 4 - Protocolo do aluno B nas atividades *a* e *b* do exercício 2.



Fonte: arquivo da autora.

A partir desses resultados, pudemos observar que de início alguns alunos tinham dificuldade em representar numericamente uma fração e, consequentemente realizar o tratamento do objeto em estudo, colocando na forma irredutível. Mas com a mediação pedagógica os resultados começaram a melhorar. E temos que ressaltar que há alguns alunos que não possuem dificuldades na divisão, e isso acaba criando um impacto quando se fala de fração, e estando com aula de modo online talvez a dificuldade de aprender se torne maior, pois muitos precisam do contato real com o professor.

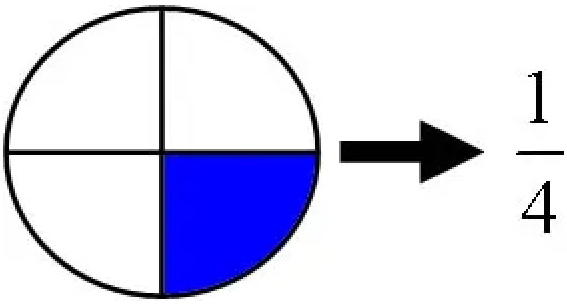
Na Aula 2 “Campanha de vacinação”, os objetivos são:

- Identificar diferentes representações de um mesmo número fracionário;
- Utilizar diferentes representações de frações;
- Relacionar frações e as porcentagens;
- Relacionar as frações a números decimais.

No início da aula, apresentamos os objetivos de “identificar diferentes representações de um mesmo número fracionário”, “utilizar diferentes representações de frações”, “relacionar frações e as porcentagens” e “relacionar as frações a números decimais” aos estudantes. Discutiu-se sobre os números e suas diferentes formas de representação (por extenso, decimal, inteiros, dízimas, fração...), seguindo, a princípio, os números racionais, tanto sob a representação decimal, quanto sob a representação fracionária, e introduzindo o conceito de porcentagem, como fração de denominador 100. Uma das formas foi de iniciar com o estudo da equivalência de frações, ou seja, um problema que envolve a ideia de fração de um todo e consiste em, dada uma fração, encontrar outra equivalente a ela, de denominador 100, ou vice-versa.

Em seguida, explicamos com alguns exemplos que esses números podem ser representados de algumas formas: figural, fracionária, decimal e percentual. Como por exemplo, considere a figura a seguir, que foi dividida em 4 partes iguais.

Figura 63 – Representação figural e fracionária



Fonte: Escola Kids.[7]

Cada uma dessas partes pode ser indicada pela fração $\frac{1}{4}$.

Também podemos representar cada uma dessas partes por um número na forma de decimal ou na forma de porcentagem: $\frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$.

Todas essas representações correspondem a uma das 4 partes desse inteiro.

Por exemplo:

1 – Compreender que 75% de uma população significa $\frac{75}{100}$, ou 0,75 desta população, ou ainda, utilizando a fração equivalente: $\frac{75}{100} = \frac{3}{4}$.

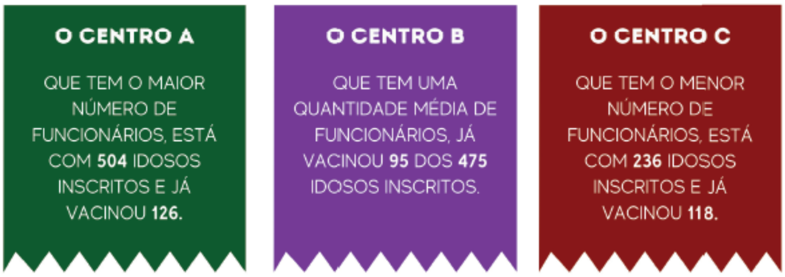
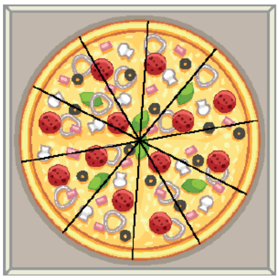
2 – Para calcularmos qual é o total de pessoas representado por 35% de 27.500 pessoas, basta calcular $\frac{35}{100}$ de 27.500 ou $\frac{35}{100} \times 27.500$, ou ainda, $0{,}35 \times 27.500$, que corresponderá a 8.625 pessoas.

Ainda, retomou-se com a turma que na indicação de um número na forma de fração, o número abaixo do traço chama-se denominador e representa a quantidade de partes iguais em que o inteiro foi dividido. Numerador é o nome dado ao número localizado acima do traço, ou seja, representa a quantidade de partes tomadas do inteiro.

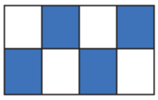
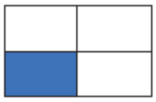
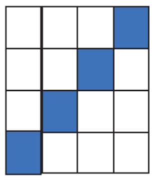
Segue no quadro abaixo as atividades aplicadas na aula 2:

[7] https://escolakids.uol.com.br/matematica/representando-fracoes.htm. Acesso em: 12 de março de 2021.

Quadro 14 – Sentido das conversões das atividades na aula 2 aplicadas

AULA	N°	ATIVIDADE	TRATAMENTO, CONVERSÃO E SENTIDO
AULA 2 – CAMPANHA DE VACINAÇÃO	1	Três centros de Saúde estão na campanha de vacina contra H1N1.  **a.** Qual dos centros está atendendo seus clientes com maior eficiência?	Língua natural ↓ Numérica fracionária Figural ↓ Numérica fracionária
	2	A mãe de Carlos fez uma pizza de calabresa e a dividiu em 10 pedaços iguais. Carlos comeu dois pedaços dessa pizza.  Represente, na forma fracionária e decimal, a quantidade de pizza que Carlos comeu. **RESPONDA**: **a.** O que é solicitado no problema? **b.** A pizza foi dividida em quantos pedaços? Todos os pedaços são do mesmo tamanho? **c.** Quantos pedaços da pizza Carlos comeu? **d.** Com base na informação acima, represente na forma de fração a parte da pizza que Carlos comeu: **e.** Cada um dos pedaços da pizza corresponde a 0,10? Isso corresponde a que fração da pizza? Justifique.	Figural ↓ Numérica decimal Numérica fracionária ↓ Numérica decimal Numérica decimal ↓ Numérica fracionária

3 Represente em forma de fração as partes pintadas de azul nas figuras.

	Representação figural	Represetação fracionária
A)		
B)		
C)		
D)		
E)		
F)		

4 Represente os números a seguir na forma decimal.

(A) $\frac{4}{5}$	(D) $\frac{12}{30}$
(B) $\frac{7}{20}$	(E) $\frac{11}{10}$
(C) $\frac{3}{4}$	(F) $\frac{9}{6}$

5 Represente os números a seguir na forma de fração.

(A) 0,25	(D) 3,2
(B) 0,52	(E) 0,012
(C) 2,5	(F) 0,144

Fonte: Arquivo da autora.

A tabela abaixo nos mostra os resultados obtidos com os alunos na aplicação das atividades:

Tabela 4 – Resultados das atividades da Aula 2 “Campanha de vacinação”

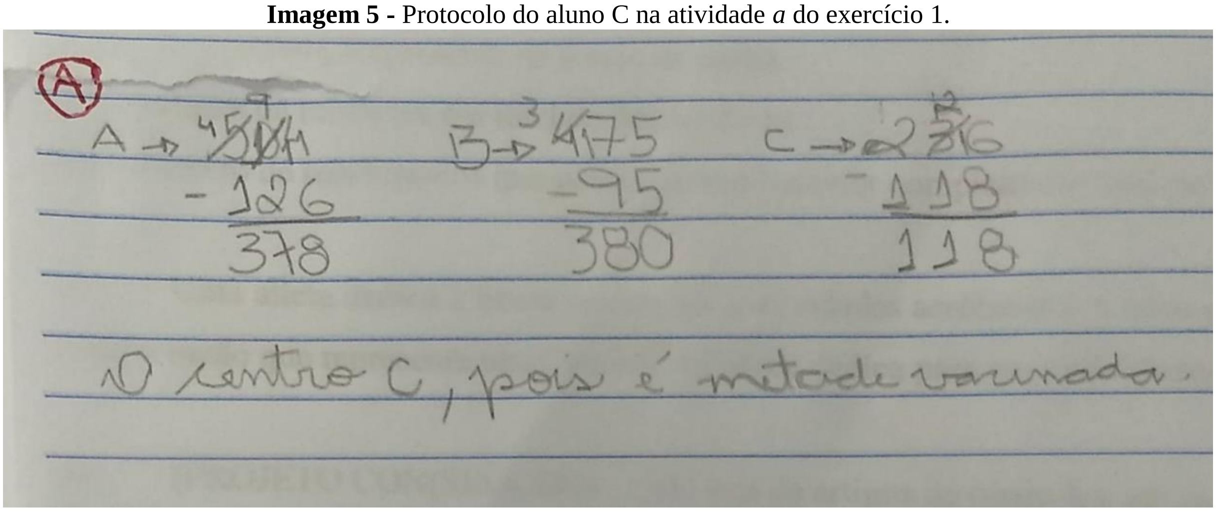
ATIVIDADE	RESULTADO	OCORRÊNCIA	PERCENTUAL
1	Aluno acertou totalmente a questão usando apenas as operações básicas de adição e subtração.	14	100%
	Aluno acertou totalmente a questão usando a ideia de fração.	0	0
	Aluno não acertou a questão.	0	0
2	Aluno acertou totalmente a questão.	8	57,14%
	Aluno acertou parcialmente a questão, pois não conseguiu converter corretamente a fração em decimal, e vice-versa.	6	42,86%
	Aluno não acertou a questão.	0	0
3	Aluno acertou totalmente a questão, conseguiu fazer converter a representação figural em representação fracionária.	14	100%
	Aluno não acertou a questão.	0	0
4	Aluno acertou totalmente a questão, fez a conversão da representação fracionária em representação decimal.	9	64,28%
	Aluno acertou parcialmente a questão, por dificuldades na divisão para converter fração em decimal.	3	21,43%
	Aluno não acertou a questão.	1	7,14%

5	Aluno acertou totalmente a questão, fez a conversão da representação decimal em representação fração.	9	64,28%
	Aluno acertou parcialmente a questão.	3	21,43%
	Aluno não acertou a questão.	1	7,14%

Fonte: Arquivo da autora.

A questão 1 abrangia mais de uma forma de resolver, utilizando a ideia de fração ou então usando as operações básicas de adição e subtração. Todos os alunos resolveram a situação-problema utilizando as operações básicas, como mostra o protocolo abaixo do aluno C:

Imagem 5 - Protocolo do aluno C na atividade *a* do exercício 1.

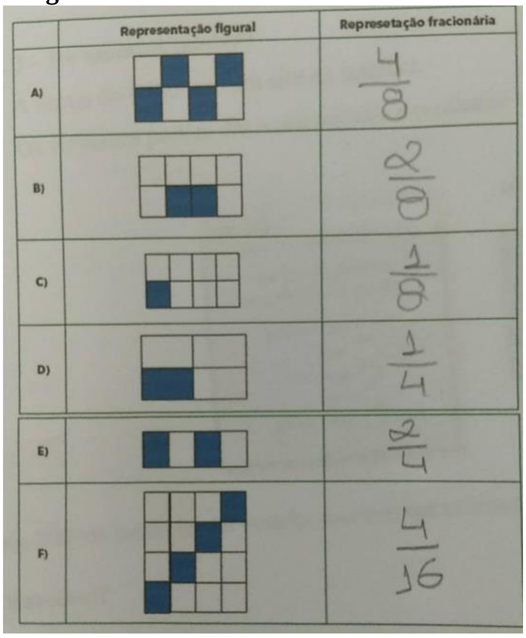


Fonte: arquivo da autora.

Mesmo os alunos optando em resolver a atividade sem o uso das frações, mostramos a eles a relação da fração com as quantidades presentes na situação-problema, para que observassem que 126 era a quarta parte do total de idosos, que 95 era a quinta parte do total de inscritos de 475, e que 118 era a metade do total de 236 idosos inscritos, sendo assim o centro C foi mais eficiente, enquanto o centro B foi o menos eficiente.

O exercício 3 promovia a conversão do registro figural para o numérico fracionário, na qual o aluno C fez com êxito a questão, como mostra a imagem abaixo:

Imagem 6 - Protocolo do aluno C no exercício 3.

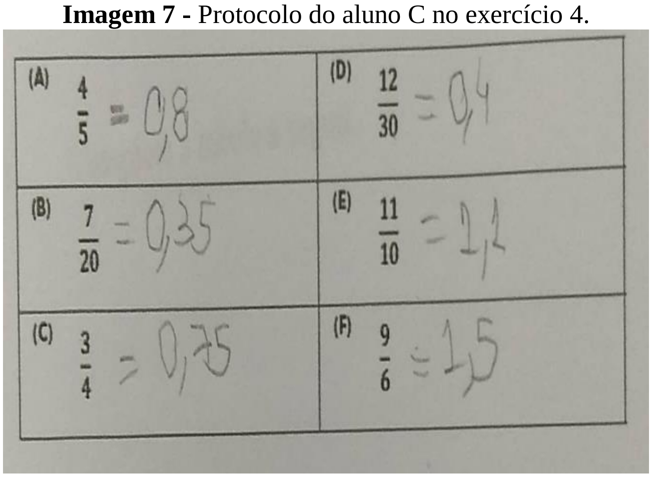


	Representação figural	Represetação fracionária
A)		$\frac{4}{8}$
B)		$\frac{2}{8}$
C)		$\frac{1}{8}$
D)		$\frac{1}{4}$
E)		$\frac{2}{4}$
F)		$\frac{4}{16}$

Fonte: arquivo da autora.

O exercício 4 promovia o tratamento do registro figural para o registro numérico fracionário, na qual o aluno C fez com êxito a questão, como mostra a imagem abaixo:

Imagem 7 - Protocolo do aluno C no exercício 4.

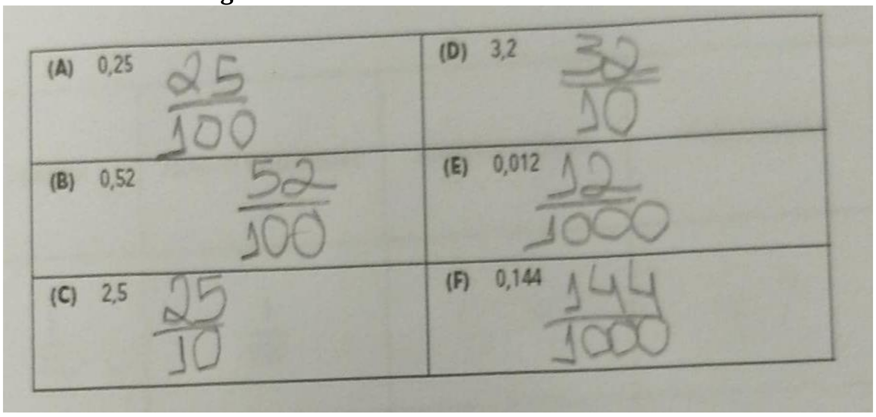


(A) $\frac{4}{5} = 0,8$	(D) $\frac{12}{30} = 0,4$
(B) $\frac{7}{20} = 0,35$	(E) $\frac{11}{10} = 1,1$
(C) $\frac{3}{4} = 0,75$	(F) $\frac{9}{6} = 1,5$

Fonte: arquivo da autora.

O exercício 5 trazia o tratamento da forma numérica decimal para a forma numérica fracionária, como mostra a imagem abaixo o protocolo do aluno C que conseguiu realizar o tratamento correto:

Imagem 8 - Protocolo do aluno C no exercício 5.



(A) 0,25 $\frac{25}{100}$	(D) 3,2 $\frac{32}{10}$
(B) 0,52 $\frac{52}{100}$	(E) 0,012 $\frac{12}{1000}$
(C) 2,5 $\frac{25}{10}$	(F) 0,144 $\frac{144}{1000}$

Fonte: arquivo da autora.

Nessa segunda aula, observamos que boa parte dos alunos conseguiram fazer de maneira exitosa a conversão de representação fracionária em representação decimal, e vice-versa, além da conversão de representação figural em representação fracionária.

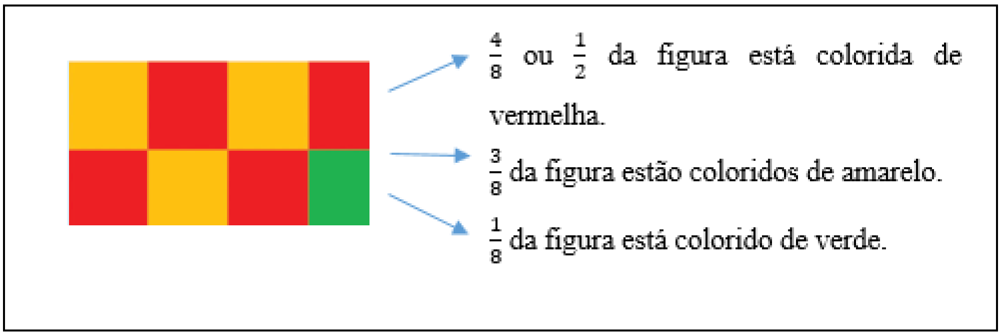
A Aula 3 “De quantos modos?”, tem como objetivo:

- Comparar frações associadas a diferentes contextos.

Iniciamos a aula apresentando o objetivo “comparar frações associadas a diferentes contextos” aos estudantes. Solicitou-se aos estudantes que interpretassem os problemas propostos sobre as diferentes formas de representação de fração. E mostramos, através de desenhos, as conexões entre as expressões matemáticas e a representação visual das frações.

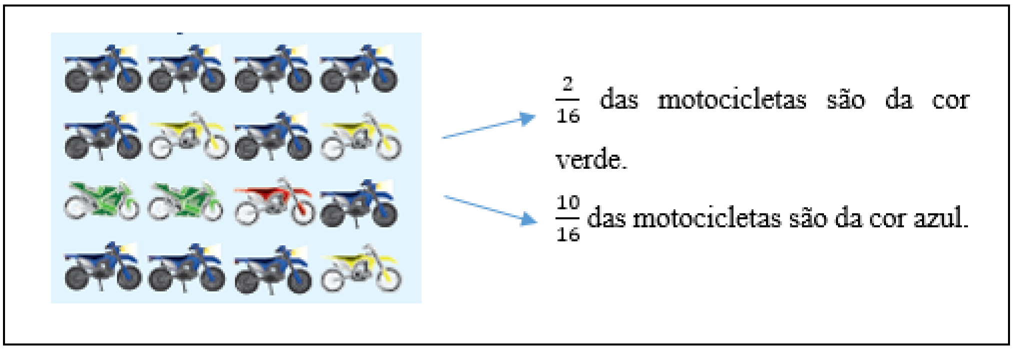
Apresentamos a eles alguns problemas que tratam das diferentes formas de representação de fração. As frações estão associadas a diferentes situações.

Figura 64 - Frações que representam partes de um inteiro.



Fonte: Arquivo da autora.

Figura 65 – Frações que representam parte de um conjunto



Fonte: Arquivo da autora.

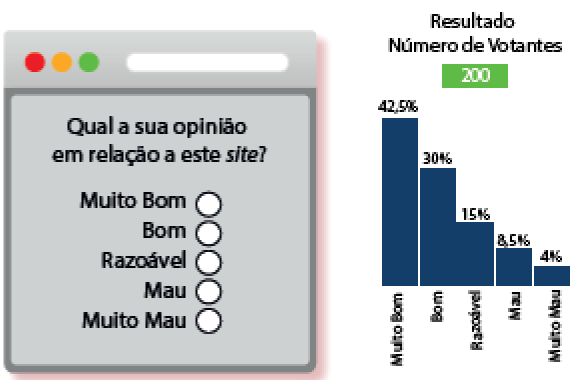
Figura 66 – Fração como operador

> Em uma turma de 24 estudantes, $\frac{2}{3}$ são meninos. Quantas são as meninas dessa turma?
>
> $\frac{2}{3}\ de\ 24 \Rightarrow \frac{2}{3} \times 24 = 16$ meninos; portanto, 8 são meninas.

Fonte: Arquivo da autora.

Abaixo, apresentamos no quadro, as atividades aplicadas na aula 3:

Quadro 15– Sentido das conversões das atividades na aula 3 aplicadas

AULA	N°	ATIVIDADE	TRATAMENTO, CONVERSÃO E SENTIDO
AULA 3 – DE QUANTOS MODOS?	1	A turma do Dino tem um site na internet. Os visitantes podem dar a sua opinião em relação ao site, como mostra a figura a seguir.  Após 200 visitantes terem votado, quantos consideram o site: **a.** Razoável?	Numérica fracionária Numérica decimal Numérica decimal Numérica fracionária

<table>
<tr><td rowspan="4"></td><td></td><td>b. Muito Bom?</td><td rowspan="4">Numérica percentual
↓
Numérica decimal

Numérica decimal
↓
Numérica percentual

Numérica percentual
↓
Numérica fracionária

Numérica fracionária
↓
Numérica percentual</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Complete a tabela a seguir.
<table>
<tr><th>FRAÇÃO</th><th>FRAÇÃO CENTESIMAL</th><th>NÚMERO DECIMAL</th><th>PORCENTAGEM</th></tr>
<tr><td>$\frac{1}{25}$</td><td>$\frac{4}{100}$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{20}$</td><td></td><td>0,05</td><td></td></tr>
<tr><td>$\frac{5}{10}$</td><td></td><td></td><td>50 %</td></tr>
<tr><td>$\frac{4}{25}$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>3</td><td>Escreva as porcentagens em forma de fração reduzida.
<table>
<tr><td>(A) 20%</td><td>(D) 100%</td></tr>
<tr><td>(B) 25%</td><td>(E) 10%</td></tr>
<tr><td>(C) 50%</td><td></td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>4</td><td>(MEARIM - MA) Qual o número que corresponde a $\frac{4}{5}$?
(A)0,8 (B)4,5 (C)0,1 (D)0,5</td></tr>
</table>

Fonte: arquivo da autora.

A tabela abaixo nos mostra os resultados obtidos com os alunos na aplicação das atividades:

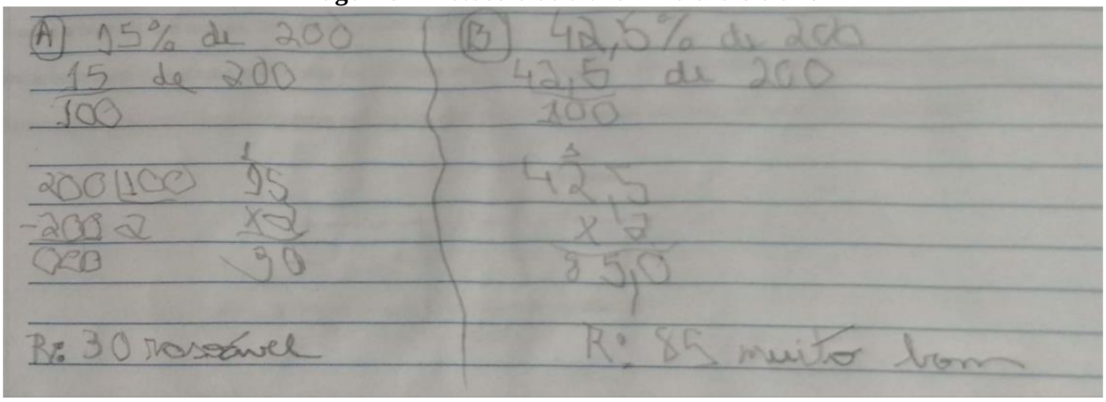
Tabela 5 – Resultados das atividades da Aula 3 "De quantos modos?"

ATIVIDADE	RESULTADO	OCORRÊNCIA	PERCENTUAL
1	Aluno acertou totalmente a questão, conseguiu usar a ideia de porcentagem associada a representação fracionária ou decimal para fazer o cálculo.	10	71,42%
	Aluno não acertou a questão.	4	28,57%
2	Aluno acertou totalmente a questão, fez o tratamento da fração para fração centesimal, e depois o tratamento em representação decimal e em representação percentual, e vice-versa dos registros.	10	71,42%
	Aluno não acertou a questão.	4	28,57%
3	Aluno acertou totalmente a questão, conseguiu fazer o tratamento de percentual em representação fracionária, e depois o tratamento para fração reduzida.	10	71,43%
	Aluno acertou parcialmente a questão, conseguiu transformar percentual em fração, porém não conseguiu concluir a simplificação (tratamento).	4	28,57%
	Aluno não acertou a questão.	0	0
4	Aluno acertou totalmente a questão, fez a conversão da representação fracionária em representação decimal.	13	92,86%
	Aluno não acertou a questão.	1	7,14%

Fonte: Arquivo da autora.

Observamos abaixo o protocolo do aluno D, no exercício 1, em que realizou corretamente, em que ao calcular a porcentagem do valor, transformou primeiramente o registro percentual em registro numérico fracionário, para depois calcular a fração do valor, fazendo assim de maneira correta o tratamento dos registros.

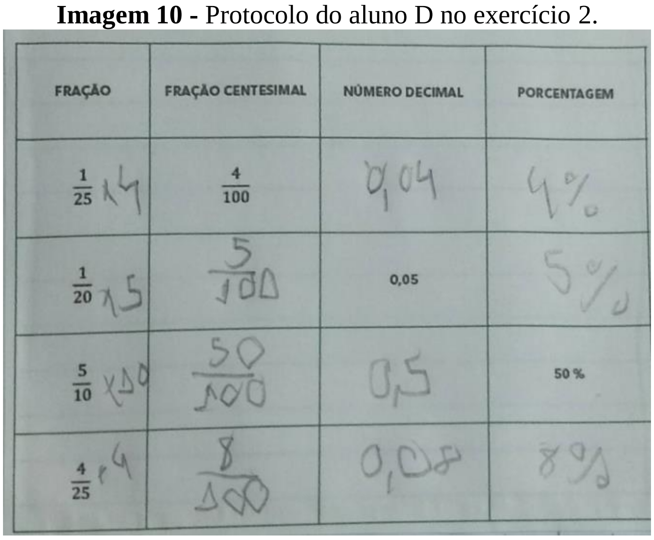
Imagem 9 - Protocolo do aluno D no exercício 1.



Fonte: arquivo da autora.

O mesmo aluno, conseguiu realizar a atividade 2, na qual fez corretamente o tratamento dos registros numéricos do número decimal, em que envolvia a mobilização entre os registros numérico fracionário, registro numérico fracionário centesimal, registro numérico decimal e registro numérico percentual.

Imagem 10 - Protocolo do aluno D no exercício 2.

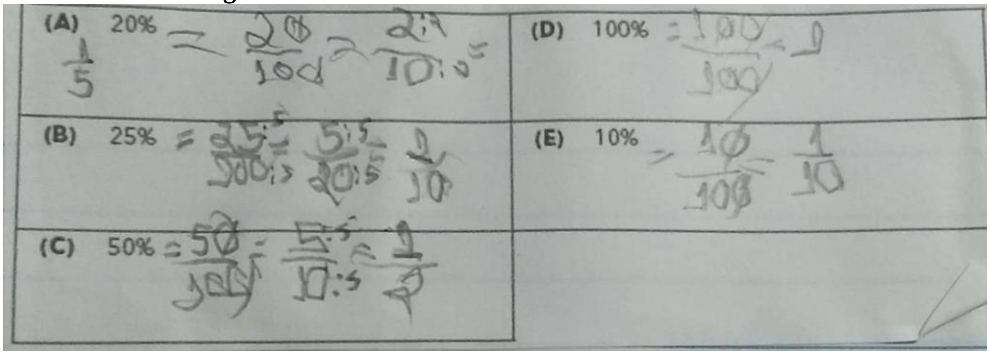


FRAÇÃO	FRAÇÃO CENTESIMAL	NÚMERO DECIMAL	PORCENTAGEM
$\frac{1}{25}$ x4	$\frac{4}{100}$	0,04	4%
$\frac{1}{20}$ x5	$\frac{5}{100}$	0,05	5%
$\frac{5}{10}$ x10	$\frac{50}{100}$	0,5	50 %
$\frac{4}{25}$ x4	$\frac{8}{100}$	0,08	8%

Fonte: arquivo da autora.

Assim também conseguiu fazer o tratamento do registro percentual para o registro fracionário e para o registro fracionário irredutível, como mostra a imagem abaixo:

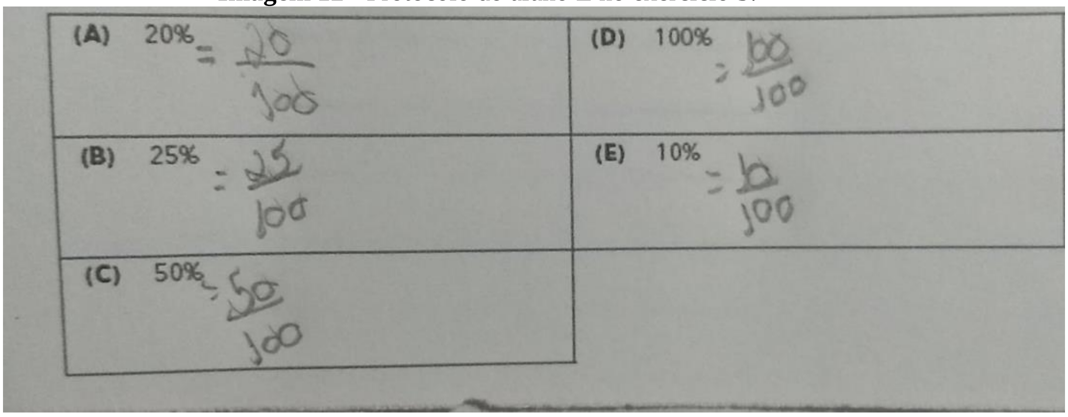
Imagem 11 - Protocolo do aluno D no exercício 3.



Fonte: arquivo da autora.

No entanto, houve o caso do aluno E, em que ele conseguiu fazer o tratamento do registro numérico percentual para o registro numérico fracionário, mas não conseguiu expressar a fração na sua forma irredutível, acertando de maneira parcial a questão.

Imagem 12 - Protocolo do aluno E no exercício 3.



Fonte: arquivo da autora.

Ao decorrer da terceira aula, vemos que os alunos melhoraram seus resultados do que diz respeito as conversões. Obtiveram um bom resultado quando envolvia conversões de percentual, fracionária e decimal e vice-versa. Claro que muitas vezes é necessário intervirmos para que consigam atingir o caminho da resolução.

Na Aula 4 "Competição", tem-se o objetivo de:

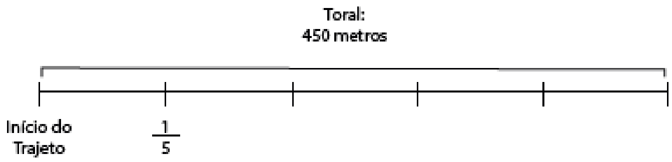
- Identificar a localização de números representados na forma fracionária na reta numérica.

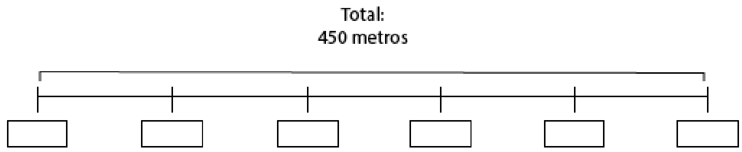
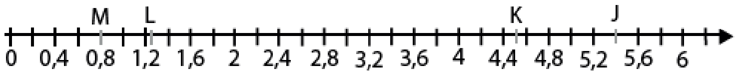
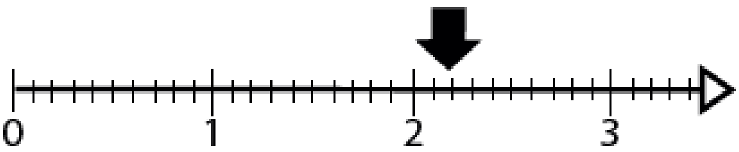
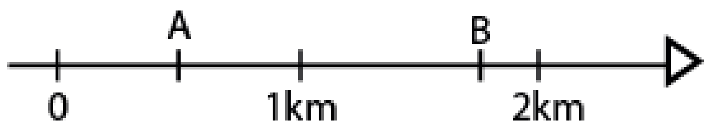
Iniciamos essa aula apresentando o objetivo de "identificar a localização de números representados na forma fracionária na reta numérica" aos estudantes.

No decorrer do desenvolvimento da aula, conduzimos os alunos ao raciocínio lógico, a investigação matemática e a habilidade de argumentar e discutir criticamente, recorrendo aos conhecimentos matemáticos aplicados ao cotidiano, realizando questionamentos em relação aos exemplos que serão estudados, questionando-os como solucionariam o problema.

Na Atividade 1, por exemplo, mostrou-se que pode ser usada a fração como resultado da divisão do numerador pelo denominador, efetuando- se a divisão de 450 por 5, resultado corresponde a 1/5=90 metros, primeira localização de número fracionário após o início do circuito. A representação de fração fazendo uso da reta numerada para expressar a localização de números fracionários é muito utilizada, supõe-se também a compreensão necessária sobre noção de grandezas e medidas. As atividades relacionadas à aula têm como objetivo identificar a localização de números representados na forma fracionária na reta numérica.

Quadro 16 – Sentido das conversões das atividades na aula 4 aplicadas

AULA	**N°**	**ATIVIDADE**	**TRATAMENTO, CONVERSÃO E SENTIDO**
AULA 4 – COMPETIÇÃO	1	Leia o problema a seguir. O circuito de uma prova de ciclismo tem 450 metros. Na marca de 2/5 desse trajeto, a partir do início, está o obstáculo mais difícil do circuito.  A quantos metros do início do percurso está esse obstáculo? **Agora, responda:** **a.** Qual é a pergunta do problema? **b.** Quais são os dados do problema? **c.** O esquema apresentado está dividido em quantas partes iguais? Isso corresponde a que fração do circuito? **d.** Qual é a medida, em metros, de todo o circuito da prova? **e.** De acordo com o esquema, o percurso foi dividido em 5 partes iguais. Cada uma dessas partes corresponde a quantos metros?	Numérica fracionária ↓ Numérica decimal Numérica decimal ↓ Numérica fracionária

		f. No esquema a seguir, marque quantos metros um ciclista terá percorrido em cada um dos pontos assinalados.  À quantos metros do início do percurso está esse obstáculo?	
	2	(PAEBES). Observe a reta numérica a seguir, que está dividida em segmentos de mesma medida.  Qual é o ponto que melhor representa a localização do número $\frac{5}{4}$ nessa reta? **(A)** M **(B)** L **(C)** K **(D)** J	
	3	(PROEB-adaptada) Observe a reta numérica a seguir.  O número indicado pela seta é: **(A)** 0,22 **(B)** 2,2 **(C)** 1,2 **(D)** 1,22	
	4	(SARESP) Joana e seu irmão estão representando uma corrida em uma estrada assinalada em quilômetros, como na figura a seguir:  	

		Joana marcou as posições de 2 corredores com os pontos A e B. Esses pontos A e B representam que os corredores já percorreram, respectivamente, em km: (A) $0{,}5\ e\ 1\frac{3}{4}$ (B) $0{,}25\ e\ \frac{10}{4}$ (C) $\frac{1}{4}\ e\ 2{,}75$ (D) $\frac{1}{2}\ e\ 2{,}38$	

Fonte: arquivo da autora.

Apresentamos na tabela abaixo, os resultados obtidos com a aplicação das atividades:

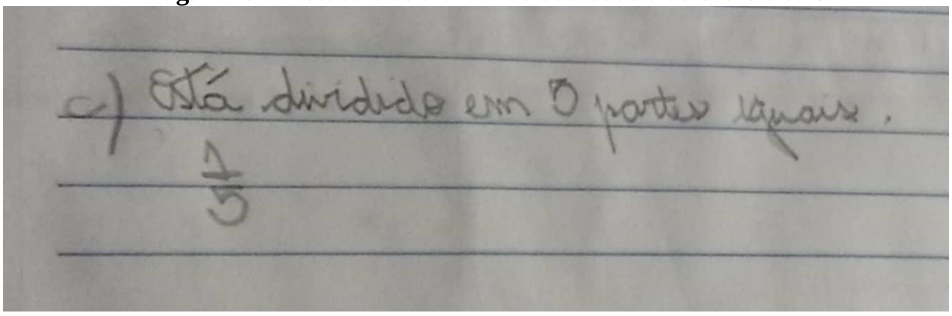
Tabela 6 – Resultados das atividades da Aula 4 "Competição"

ATIVIDADE	RESULTADO	OCORRÊNCIA	PERCENTUAL
1	Aluno acertou totalmente a questão, conseguiu relacionar a representação fracionária na figural, e fazer o tratamento de fração em decimal.	11	78,57%
	Aluno não acertou a questão.	3	21,43%
2	Aluno acertou totalmente a questão, conseguiu fazer o tratamento de fração em representação decimal, e localizar na reta numérica.	13	92,86%
	Aluno não acertou a questão.	1	7,14%
3	Aluno acertou totalmente a questão, conseguiu associar a representação decimal em figural.	14	100%
	Aluno não acertou a questão.	0	0
4	Aluno acertou totalmente a questão, fez o tratamento da representação fracionária em representação decimal, e vice-versa, e localizar os números na reta numérica.	10	71,43%
	Aluno não acertou a questão.	4	28,57%

Fonte: Arquivo da autora.

O exercicio c, da atividade 1, o aluno teria que relacionar a representação figural com a representaçao fracionária, ou seja, converter o registro figural em registro numérico fracionário, como mostra a imagem abaixo realizada pelo aluno F:

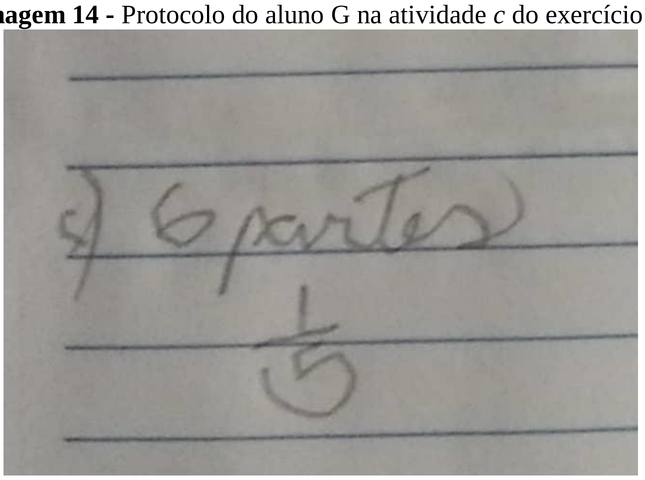
Imagem 13 - Protocolo do aluno F na atividade *c* do exercício 1.



Fonte: Arquivo da autora.

Porém, o aluno G não conseguiu acertar a questão, como mostra imagem abaixo:

Imagem 14 - Protocolo do aluno G na atividade *c* do exercício 1.



Fonte: Arquivo da autora.

Nesse caso, observamos que o aluno confundiu ao contar a quantidade de partes em que o desenho estava dividido, ou seja, ao invés de contar os espaços divididos, o aluno contou os risquinhos que o dividia, sendo respondido 6 ao invés de 5. E no caso da fração o aluno a colocou corretamente, porém acredito que ele tenha copiado apenas a fração por ela constar no desenho, e não tenha relacionado com a questão de partes do desenho.

Na quarta aula, vimos que os alunos conseguiram relacionar a representação fracionária na figural, e converter fração em decimal, e vice-versa, converter a representação decimal em figural além de localizar na reta numérica.

As Aulas 5, 6 e 7 “Colorindo barras”, possuem os seguintes objetivos:

- Ordenar frações utilizando os sinais > (maior que) e < (menor que);
- Identificar frações equivalentes;
- Comparar frações com o mesmo denominador ou com denominadores diferentes por meio da equivalência de frações.

Iniciamos essa aula apresentando os objetivos de “ordenar frações utilizando os sinais > (maior que) e < (menor que)”; “identificar frações equivalentes” e “comparar frações com o mesmo denominador ou com denominadores diferentes por meio da equivalência de frações” aos estudantes.

Explicamos para os estudantes que vamos estudar a ordenação, identificação e comparação de frações, sendo essa aula conduzida em 4 etapas, dando continuidade à construção do objeto de estudo. Pedimos a eles para pintarem as barras com as cores indicadas uma a uma e, em seguida, para recortá-las, conforme as etapas abaixo:

1ª etapa**:** Pintem as barras com as cores indicadas de cada uma e, em seguida, podem recortá-las. Vamos explorar algumas características observadas, por exemplo: o fato de todas terem a mesma medida, portanto, podem ser tomadas como uma unidade; o fato de estarem divididas em até 10 partes iguais. A partir daí, fizemos perguntas no sentido de identificar as partes de algumas barras, por exemplo, como chamamos e como podemos representar: Uma parte de barra amarela? Uma parte da barra azul escuro? Duas partes da barra azul claro?

2ª etapa: Realizada a comparação, solicitamos que registrassem os resultados, utilizando os números fracionários correspondentes às partes de cada cor das tiras.

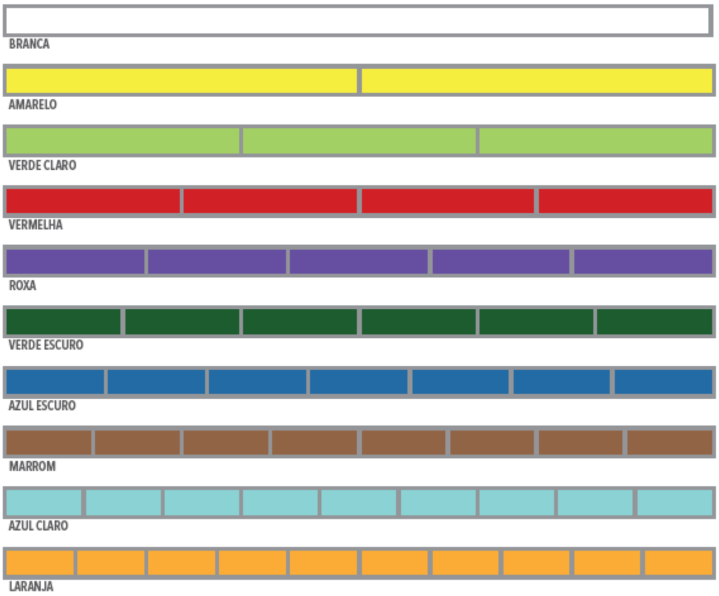
3ª etapa: Correspondia a realização da letra c.

4ª etapa: Correspondia a realização da letra d.

Após a conclusão dessas etapas foi o momento de tratar sobre as representações de fração e comparação. Ao realizar essa atividade, esperava-se que o estudante compreendesse o conceito de número racional, de modo que o visualizasse em figuras diversas e estabelecesse ordenação, identificação e comparação de frações e de operações baseadas na observação das barras. Para a comparação, em alguns casos, o estudante podia recorrer às equivalências que são visíveis, sem recurso de regras como do Mínimo Múltiplo Comum (MMC) entre denominadores. Cabia então diversificarmos as situações e discutir cada etapa em que as frações têm os mesmos denominadores, mesmos numeradores ou numeradores e denominadores diferentes. No caso da adição e subtração, num primeiro momento, nos atentamos àquelas que têm mesmo denominador. O desenvolvimento e o aprofundamento dessas operações foram observados com a discussão e a solução dos desafios propostos nas atividades.

No quadro abaixo, temos as atividades aplicadas nas aulas 5, 6 e 7:

Quadro 17 – Sentido das conversões das atividades nas aulas 5, 6 e 7 aplicadas

AULA	N°	ATIVIDADE	TRATAMENTO , CONVERSÃO E SENTIDO
AULAS 5, 6 E 7 – COLORINDO BARRAS	1	Siga as orientações do professor. Pinte e recorte as barras conforme as indicações. (ANEXO 1)  **a.** De acordo com as orientações do professor, compare as barras a seguir. • Três partes azul claro e três partes da verde escuro. • Uma parte da roxa e duas partes da marrom. • Três partes do azul claro e uma parte da verde claro. • Cinco partes da laranja e uma da vermelha. Registre os resultados, utilizando os números fracionários correspondentes às partes de cada cor das tiras. **b.** Identifique preenchendo com os símbolos de > (maior que), = (igual) ou < (menor que), os espaços com “ ? “ e faça comparações entre esses números fracionários.	Figural ↓ Numérica fracionária Numérica fracionária ↓ Figural Numérica fracionária ↓ Numérica decimal Numérica decimal ↓ Numérica fracionária

(A) $\frac{2}{5}$? $\frac{3}{5}$	(B) $\frac{4}{9}$? $\frac{9}{9}$	(C) $\frac{9}{9}$? $\frac{8}{8}$
(D) $\frac{8}{8}$? $\frac{6}{8}$	(E) $\frac{1}{2}$? $\frac{2}{4}$	(F) $\frac{1}{3}$? $\frac{2}{6}$
(G) $\frac{2}{5}$? $\frac{1}{5}$	(H) $\frac{4}{6}$? $\frac{4}{4}$	(I) $\frac{3}{4}$? $\frac{3}{5}$
(J) $\frac{2}{4}$? $\frac{3}{6}$	(K) $\frac{6}{8}$? $\frac{3}{4}$	(L) $\frac{6}{10}$? $\frac{6}{8}$

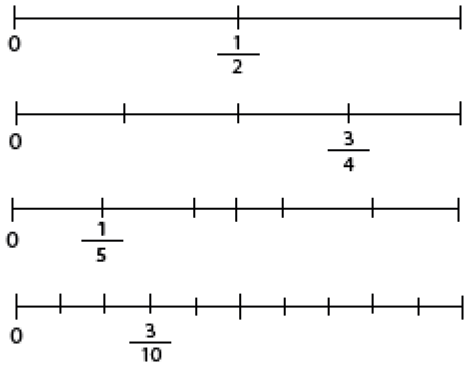
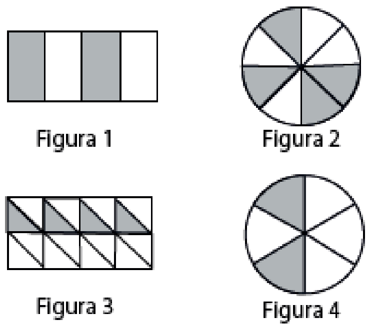
c. Observe as barras e preencha com os símbolos de > (maior que), = (igual) ou <(menor que) os espaços com “ ? “, comparando esses números fracionários com os que surgem das operações.

$\frac{1}{5}+\frac{4}{5}$?	$\frac{5}{5}+\frac{4}{5}$?	$\frac{5}{7}-\frac{3}{7}$?
$\frac{3}{7}+\frac{2}{7}$?	$\frac{5}{5}-\frac{1}{5}$?	$\frac{9}{10}-\frac{5}{10}$?
$\frac{5}{10}+\frac{4}{10}$?	$\frac{4}{6}-\frac{3}{6}$?	$\frac{6}{7}-\frac{3}{7}$?
$\frac{6}{8}+\frac{2}{8}$?	$\frac{4}{6}-\frac{1}{6}$?	$\frac{2}{5}-\frac{1}{5}$?

d. Responda às questões a seguir, sem auxílio das barras:

$\frac{3}{10}+\frac{11}{10}$?	$\frac{7}{100}+\frac{8}{100}$?	$\frac{25}{138}+\frac{6}{138}$?	
$\frac{5}{20}+\frac{15}{20}$?	$\frac{25}{36}-\frac{13}{36}$?	$\frac{3}{100}-\frac{2}{100}$?	$\frac{6}{19}-\frac{5}{19}$?

2 (SARESP) Considere as retas numéricas abaixo.

		 A única sentença verdadeira é: (A) $\frac{7}{10} > \frac{3}{4}$ (B) $\frac{4}{5} > \frac{8}{10}$ (C) $\frac{5}{10} > \frac{2}{5}$ (D) $\frac{2}{10} > \frac{1}{4}$	
	3	(SEAPE) Abaixo, cada uma das figuras está dividida em partes iguais.  Em quais dessas figuras a parte colorida representa a mesma parte do inteiro? **(A)**1 e 2.**(B)**1 e 3.**(C)**2 e 3.**(D)**2 e 4	
	4	Um casal tem o seguinte diálogo: - Só vou lhe dar $\frac{4}{10}$ do meu décimo terceiro salário para as compras de Natal. - Nada disso, eu quero $\frac{6}{15}$ desse dinheiro. Assinale a opção que conclui corretamente a discussão do casal. **(A)** Essa discussão não é necessária, pois as quantias são iguais. **(B)** Ele está com a razão, pois ela quer muito mais dinheiro do que ele ofereceu.	

		(C) Ela está com a razão, pois ele está oferecendo muito pouco dinheiro. **(D)** Essa discussão é inútil, pois ela está pedindo uma quantia inferior à que ele está oferecendo.	
	5	(SAEGO) José pediu aos seus estudantes que resolvessem um problema cujo resultado, após simplificado, era $\frac{2}{5}$. Caio: $\frac{4}{20}$; Paula: $\frac{8}{25}$; Sara: $\frac{6}{15}$; Túlio: $\frac{5}{2}$ Veja, no quadro a seguir, os resultados encontrados por quatro estudantes antes da simplificação. O estudante que acertou o problema foi: **(A)**Caio **(B)**Paula **(C)**Sara **(D)**Túlio	
	6	Na gasolina comum, são adicionados 2 litros de etanol (álcool – combustível de automóveis) para cada 10 litros de gasolina. Então, quantos litros de etanol são necessários para adicionar em 40 litros de gasolina e manter a proporção? (A) 10 litros de gasolina. (B) 8 litros de gasolina. (C) 9 litros de gasolina. (D) 11 litros de gasolina.	

Fonte: arquivo da autora.

Obtemos os seguintes resultados destacados na tabela abaixo:

Tabela 7 – Resultados das atividades da Aula 5,6 e 7 “Colorindo barras”

ATIVIDADE	RESULTADO	OCORRÊNCIA	PERCENTUAL
1	Aluno acertou totalmente a questão, conseguiu relacionar e fazer as conversões da representação figural para fracionária e vice-versa, e a partir daí comparar as frações com e sem o uso das barras.	12	85,71%
	Aluno não acertou a questão.	2	14,28%

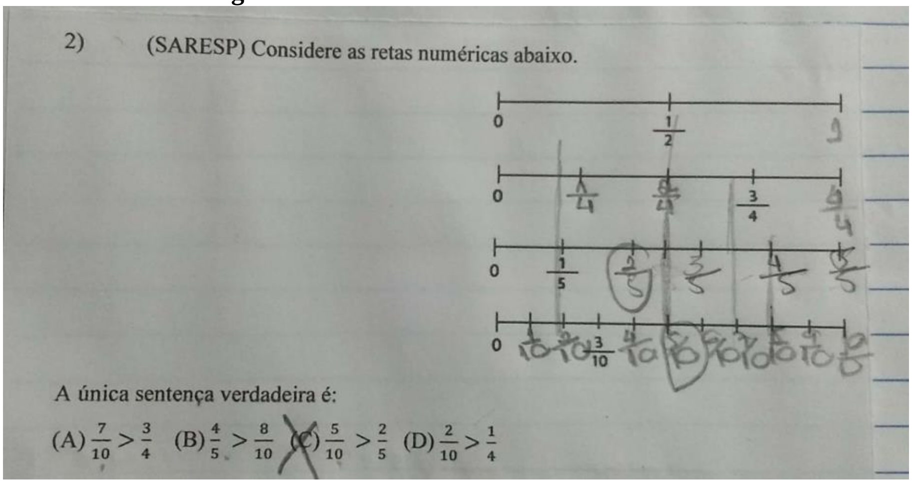
2	Aluno acertou totalmente a questão, conseguiu relacionar a representação figural coma representação fracionária, e vice-versa.	13	92,86%
	Aluno não acertou a questão.	1	7,14%
3	Aluno acertou totalmente a questão, conseguiu converter a representação figural em fracionária, e fez a comparação de frações por meio da conversão de fração para decimal.	6	42,86%
	Aluno acertou totalmente a questão, conseguiu converter a representação figural em fracionária, e fez a comparação de frações por meio do tratamento da fração irredutível.	7	50%
	Aluno não acertou a questão.	1	7,14%
4	Aluno acertou totalmente a questão, fez a comparação das frações por meio da conversão em decimal.	6	42,86%
	Aluno acertou totalmente a questão, fez a comparação das frações por meio do tratamento na forma irredutível.	7	50%
	Aluno não acertou a questão.	1	7,14%
5	Aluno acertou totalmente a questão, fez o tratamento das frações, simplificando-as.	7	50%
	Aluno acertou totalmente a questão, converteu as frações em decimais para comparar qual era igual.	6	42,86%
	Aluno não acertou a questão.	1	7,14%

6	Aluno acertou totalmente a questão, usando a ideia intuitiva de multiplicação.	12	85,71%
	Aluno acertou totalmente a questão, usando a ideia de fração equivalente.	2	14,28%
	Aluno não acertou a questão.	0	0

Fonte: Arquivo da autora

Observamos abaixo as imagens relacionadas ao aluno H em suas resoluções:

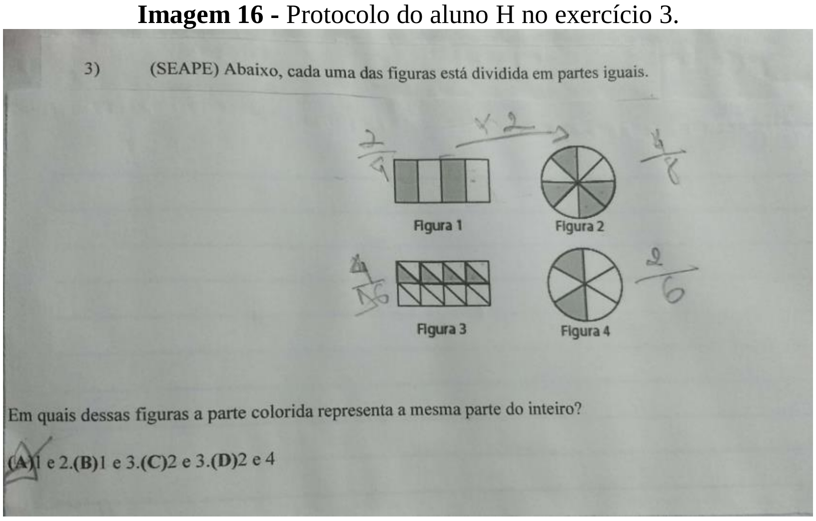
Imagem 15 - Protocolo do aluno H no exercício 2.



Fonte: Arquivo da autora

Na atividade 2, o aluno conseguiu compreender a ideia da reta numérica associada a representação fracionária, fazendo a conversão do registro figural para o fracionário, conseguindo então fazer o tratamento ao comparar as frações.

Imagem 16 - Protocolo do aluno H no exercício 3.



Fonte: Arquivo da autora

O mesmo ocorreu na atividade 3, em que ele fez a conversão do registro figural para o fracionário, e depois fez o tratamento do registro numérico fracionário a fim de comparar as frações verificando que são equivalentes.

Ao decorrer das aulas 5,6 e 7, observamos um grande avanço nas relações que os alunos estabelecem entre as diferentes representações dos números racionais, que reflete das aulas anteriores, o processo de tratamento e conversão se torna mais prático a eles.

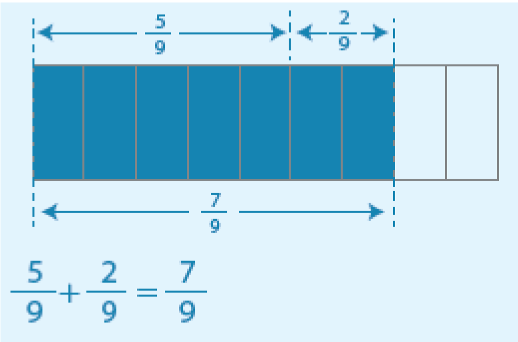
Na Aula 8 "Mais e menos faz toda diferença", temos os objetivos de:

- Calcular o resultado de adições e subtrações de frações;
- Determinar o resultado da fração de um número.

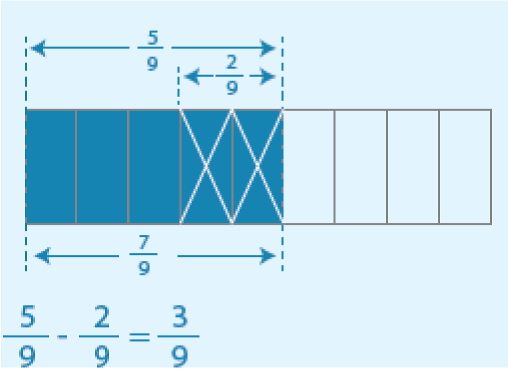
Iniciamos essa aula apresentando os objetivos de "calcular o resultado de adições e subtrações de frações" e "determinar o resultado da fração de um número" aos estudantes. Durante toda essa trajetória, o desenvolvimento das aulas anteriores, construindo o conceito de números decimais e de frações equivalentes, foi explorado através de situações bem diversificadas. Porém, chegamos ao processo de operacionalização, trabalhando com a adição e a subtração. De início, falamos sobre adição e subtração de frações com denominadores iguais, demonstradas através de figuras e sua representação fracionária, e em seguida, apresentamos uma situação-problema contextualizando o tema em estudo. Logo após, a abordagem sobre adição e subtração de frações com denominadores diferentes demonstramos através de figuras de representação fracionária e uma situação-problema com o tema em estudo. Na sequência, o estudante pôde fazer uso do material confeccionado na aula anterior, "barras coloridas", a fim de realizar um estudo dirigido para fundamentar os conceitos e aplicações de frações equivalentes, bem como sua representação.

Durante a aula, conversamos sobre como somar ou subtrair frações com denominadores iguais. Em uma adição (ou subtração) de frações com denominadores iguais, adiciona-se (ou subtrai-se) os numeradores e mantêm-se os denominadores.

Exemplo 1.

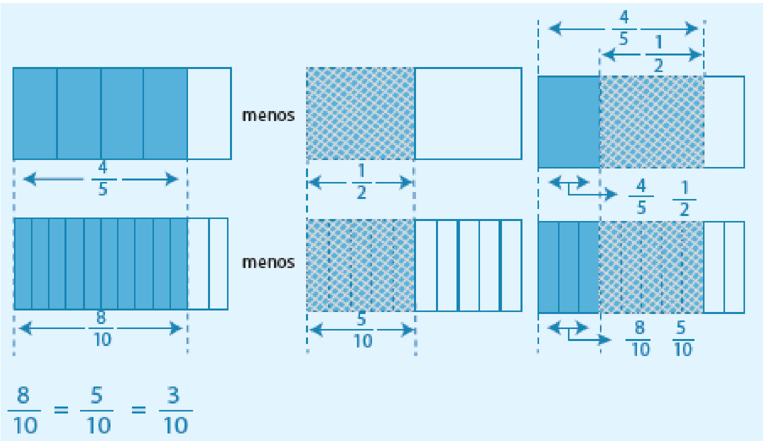


Exemplo 2.



Para tratar da adição e subtração de frações com denominadores diferentes, destacamos que se deve obter as frações equivalentes a elas com denominadores iguais e realizar a adição (ou subtração) com as frações obtidas. Na maioria das vezes, utiliza-se o MMC para encontrá-las.

Exemplo 3.



Retomamos que frações equivalentes são frações que representam a mesma parte do todo. E ainda os questionamos: será que você consegue criar uma fração e mais três frações equivalentes? Uma dica importante para encontrar frações equivalentes de uma fração dada é multiplicar ou dividir o seu numerador e o seu denominador por um mesmo número natural, diferente de zero.

E ainda destacamos, que para somar ou subtrair frações de uma mesma unidade, mas que possuem diferentes denominadores, determinamos frações equivalentes às frações dadas e que tenham o mesmo denominador. Em seguida, adicionamos ou subtraímos os denominadores das frações, questionando então a eles: Você conhece alguma outra técnica para somar frações com denominadores diferentes? Você consegue estabelecer uma relação entre a técnica que você conhece e a adição de frações que utiliza frações equivalentes?

Na tabela abaixo temos as atividades aplicadas na aula 8:

Quadro 18 – Sentido das conversões das atividades na aula 8 aplicadas

AULA	N°	ATIVIDADE	TRATAMENTO, CONVERSÃO E SENTIDO
AULA 8 – MAIS E MENOS FAZ TODA DIFERENÇA	1	(SAEGO) Resolva a operação a seguir. $\boxed{\frac{5}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}$ (A) $\frac{29}{12}$ (B) $\frac{21}{12}$ (C) $\frac{3}{10}$ (D) $\frac{12}{10}$	Numérica fracionária $\Downarrow$ Numérica decimal
	2	(SARESP-2007) Qual é o resultado de $\frac{1}{8}+\frac{5}{6}$? (A)$\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{3}{7}$ (D) $\frac{23}{24}$	Numérica decimal $\Downarrow$ Numérica fracionária
	3	(GAVE) O valor da seguinte expressão numérica $\frac{2}{5}-\frac{1}{10}-$ 0,2 (A) $\frac{7}{10}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{10}$ (D) $\frac{23}{10}$	
	4	(SARESP-2010) O valor simplificado da expressão $\frac{12}{100}+\frac{3}{50}-2{,}25$ é? (A) $\frac{2}{100}$ (B) $\frac{1}{50}$ (C) $\frac{1}{10}$ (D) $\frac{13}{100}$	
	5	Marcos exercita-se todos os dias no parque de seu bairro. Ele caminha $\frac{2}{6}$ de hora e corre mais $\frac{2}{3}$ de hora. Qual o tempo total de atividades físicas que Marcos faz diariamente? (A) $\frac{2}{9}$ de hora. (B) $\frac{4}{9}$ de hora. (C) 1 hora. (D) 2 horas.	
	6	(PROVA BRASIL) A estrada que liga Recife a Caruaru será recuperada em três etapas. Na primeira etapa, será recuperada $\frac{1}{6}$ da estrada e, na segunda etapa, $\frac{1}{4}$ da estrada. Uma fração que corresponde à terceira etapa é:	

		(A) $\frac{5}{12}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{7}{12}$ (D) $\frac{12}{7}$	

Fonte: arquivo da autora.

Na tabela abaixo apresentamos os resultados obtidos na aplicação das atividades:

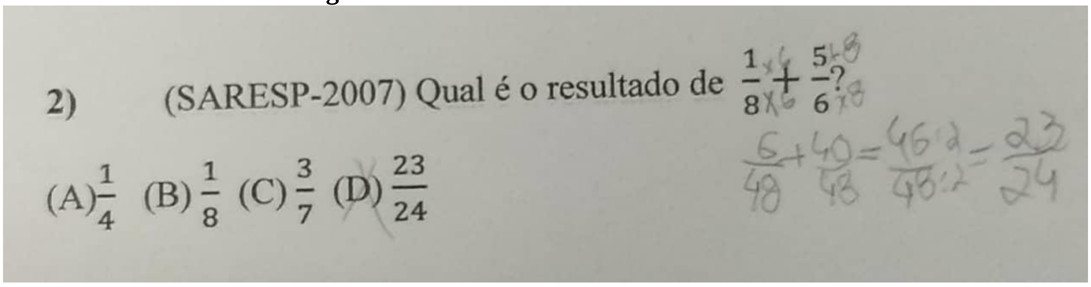
Tabela 8 – Resultados das atividades da Aula 8 “Mais e menos faz toda diferença”

ATIVIDADE	RESULTADO	OCORRÊNCIA	PERCENTUAL
1	Aluno acertou totalmente a questão, usando a equivalência de frações.	14	100%
	Aluno não acertou a questão.	0	0
2	Aluno acertou totalmente a questão, usando a equivalência de frações.	14	100%
	Aluno não acertou a questão.	0	0
3	Aluno acertou totalmente a questão, usando a conversão de fração para decimal ou vice-versa.	12	85,71%
	Aluno não acertou a questão.	2	14,28%
4	Aluno acertou totalmente a questão, usando a conversão de fração para decimal ou vice-versa.	12	85,71%
	Aluno não acertou a questão.	2	14,28%
5	Aluno acertou totalmente a questão, fez o tratamento das frações.	13	92,86%
	Aluno não acertou a questão.	1	7,14%
6	Aluno acertou totalmente a questão, fez o tratamento das frações.	13	92,86%
	Aluno não acertou a questão.	1	7,14%

Fonte: Arquivo da autora.

A imagem abaixo relata o protocolo do aluno I, referente o exercício 2, onde há a operação da adição entre registros numéricos fracionários, e o aluno faz o tratamento de maneira correta, onde de um registro numérico fracionário resulta em registro numérico fracionário.

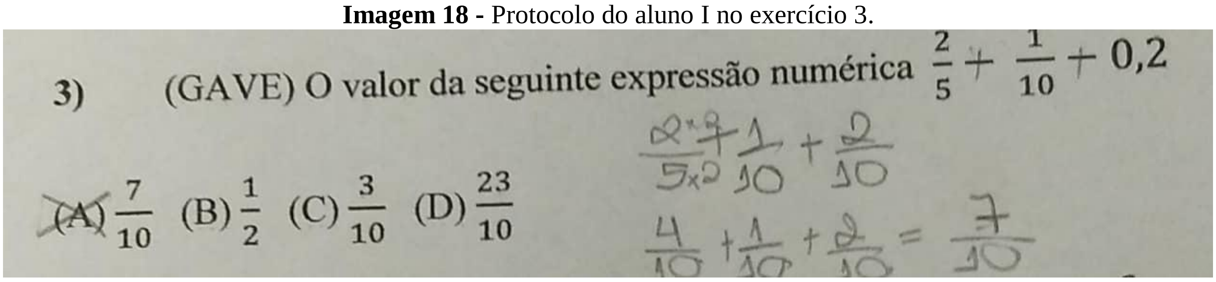
Imagem 17 - Protocolo do aluno I no exercício 2.



Fonte: Arquivo da autora.

O mesmo ele fez na resolução do exercício 3, em que havia uma expressão numérica envolvendo a subtração de frações e um número decimal. O aluno fez o tratamento correto, onde optou por transformar o registro do número decimal em registro numérico fracionário, resultando em um registro numérico fracionário.

Imagem 18 - Protocolo do aluno I no exercício 3.



Fonte: Arquivo da autora.

Por fim, na última aula de aplicação das atividades os resultados permanecem bons. Observamos que a aplicação dessa Sequência Didática proporcionou uma construção de significado do número racional aos alunos. Porém não podemos esquecer que é somente termos em mãos uma sequência de atividades que englobem todos os requisitos de um excelente exercício que faça tratamento e conversões da semiótica, mas também temos de repensar a nossa prática pedagógica, de que forma estamos inserindo, estabelecendo relações e dando significado efetivo do objeto em estudo aos nossos alunos.

12 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa, buscamos responder à questão: como a prática pedagógica no processo de letramento matemático, no ensino dos números racionais, contribui na mobilização dos registros de representação semiótica?

E para isso, utilizamos a Teoria de Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval, a qual aborda a importância da diversidade de registros de representação, sua utilização e articulação entre eles nas atividades matemáticas para a aquisição de conhecimentos, e como o professor deve aplicar isso em sala de aula.

Analisar o livro didático do 6° ano, nos possibilitou observar que há evidências da inicialização da preocupação com que o estudante associe as diferentes representações de um número racional. E isso também se observa na questão de que a ideia de que se tem da Teoria de Registros de Representação Semiótica, já consta nas habilidades esperadas a serem desenvolvidas pelos alunos do 6° ano, na Base Nacional Comum Curricular (BNCC): "(EF06MA08) Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica". (BNCC, 2018, p. 301). Ou seja, espera-se que o aluno tenha consciência e estabeleça o tratamento e as conversões do objeto em estudo, dando significado a sua aprendizagem.

Uma outra questão que veio como auxílio nessa pesquisa, foi o desenvolvimento do letramento matemático na mobilização desses registros. E letramento e a alfabetização Matemática são colocados hoje com uma nova postura: argumentar, ler, descrever, simbolizar, calcular eventos associados simples, como usar a representação matemática para descrever elementos distintos. E de acordo com essa contextualização, via experiências vividas, faz-se necessário que o estudante tenha uma base mediadora pedagógica que proporcione que o estudante se articule e seja crítico no processo de seu aprendizado, elaborando questões e descrevendo situações nas quais o uso da matemática faz-se necessária, e não uma disciplina obsoleta, fazendo assim relações com os conhecimentos adquiridos.

Dessa forma, Goulart (2001), nos situa no letramento matemático:

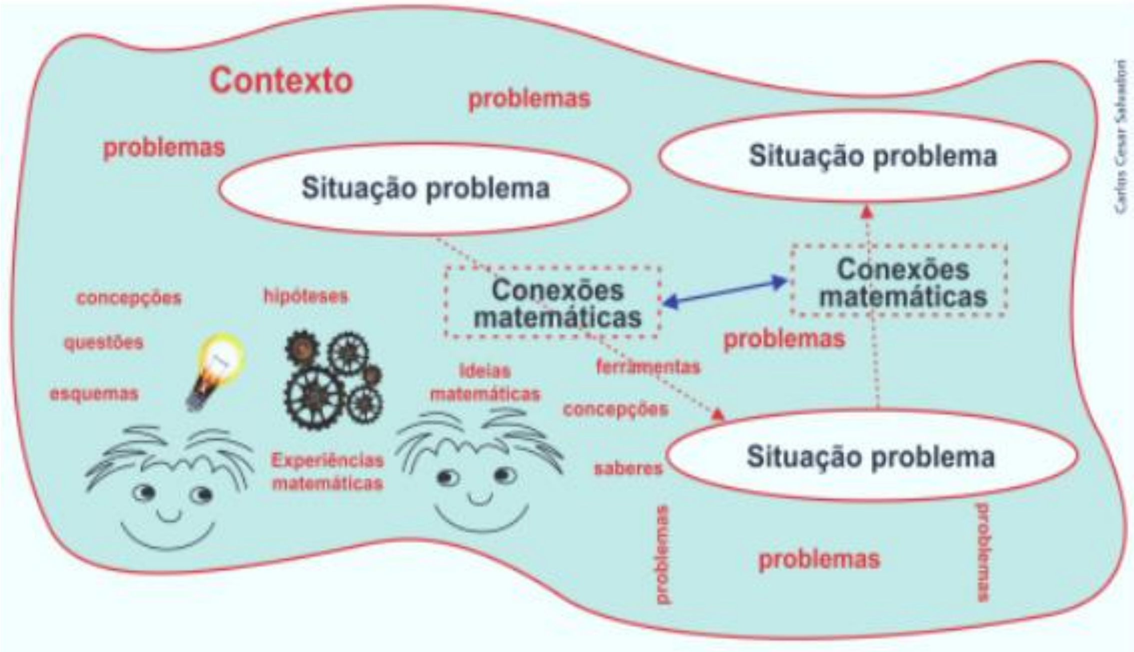
> Estamos aqui entendendo as orientações de letramento como o espectro de conhecimentos desenvolvidos pelos sujeitos nos seus grupos sociais, em relação com outros grupos e com instituições sociais diversas. Este espectro está relacionado à vida cotidiana e a outras esferas da vida social, atravessadas pelas formas como a linguagem escrita as perpassa, de modo implícito ou explícito, de

modo mais complexo ou menos complexo (Goulart, 2001, p. 10).

No caderno do PNAIC (Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa) de Matemática, fala-se que no currículo como um todo, é necessário valorizar às conexões. E currículos de vários países têm dedicado atenção às conexões para que os alunos sejam capazes de (PNAIC 2014):

- Relacionar seus conhecimentos conceituais com processos de pensamento;
- Relacionar diversas representações de conceitos ou procedimentos entre si;
- Reconhecer relações entre distintos temas de natureza matemática;
- Utilizar a Matemática em outras áreas do currículo escolar;
- Usar a Matemática na vida diária.

Figura 67 – Conexão do pensamento



Fonte: Fonte:ehttp://pacto.mec.gov.br/images/pdf/cadernosmat/PNAIC_MAT_Caderno%208_pg001 -080.pdf ideologias matemáticas

Segundo o PNAIC, a contextualização matemática deve ser a partir da valorização do "conceito bruto" (prévio do estudante) ou da sua vivencia (Matemática e a vida real), associando assim um estudo direcionado (fração, adição), além de realizar as conexões entre conteúdos da Matemática, e assim integrar e interagir toda base estrutural em uma nova modelagem de ensino para que se tenha um sistema mais consistente na ampliação do tema.

E quando pensamos na frase de Duval (2011), de que "não existe (nenhuma) noésis sem sémiosis, não existe ato matemático de pensamento sem transformação de representações semióticas quaisquer que sejam" (DUVAL, 2011, p. 42), isso nos remete sobre o quão é fundamental que a prática pedagógica explore as representações semióticas no ensino da Matemática.

Sendo assim, a aprendizagem do objeto matemático não se dá a partir dele para que possamos conhecer suas representações, mas sim a partir de suas representações é que podemos estabelecer relações para conhece-lo. É o que nos aponta Duval (2003), que a compreensão conceitual de qualquer objeto matemático se dá a partir da coordenação de diferentes registros de representação semiótica, figurativos, numéricos, linguísticos, entre outros.

A partir disso, quando optamos por aplicar uma sequência didática aos alunos, priorizamos que essas atividades buscassem a mobilização dos registros de representação semiótica dos números racionais.

A pesquisa indicou que, embora os exercícios apresentassem conversão entre representações semióticas do número racional, tais como a ênfase no significado parte-todo, em detrimento de outros sentidos da fração, e o uso de regras de correspondência, entre outros, há evidências de que a maneira como o professor exerce seu papel de mediador nestas atividades, além de pôr os alunos em movimento no sentido das resoluções, oportunizou a fomentação de habilidades indispensáveis à atividade matemática, tais como o reconhecimento das unidades de sentido no interior das representações e o tratamento dos registros a partir de operações que lhe são próprias.

Portanto, isso nos faz repensar sobre a nossa prática docente, de que maneira nós estamos mobilizando os diferentes registros de um objeto de conhecimento no ensino da Matemática, na qual o professor tem um papel fundamental de se ter um olhar crítico sobre os materiais a serem utilizados em suas aulas, assim como a maneira que ele insere o conteúdo a seu aluno.

Então nos vem sobre a necessidade de se trabalhar a pluralidade das representações, pois nenhuma representação isolada dá conta de todo objeto, existe uma conexão entre elas que faz sentido ao conceito do objeto em estudo, pois "é enganosa a ideia de que todos os registros de representações de um mesmo objeto tenham igual conteúdo ou que se deixem perceber uns nos outros" (DUVAL, 2003, p. 31). Seja qual for a representação semiótica escolhida, esta imporá sempre "uma seleção de elementos significativos ou informacionais do conteúdo que representa" (DUVAL, 2012, p. 280).

A utilização de uma Sequência Didática que construísse ao longo de seu desenvolvimento as relações das diferentes representações dos números racionais, possibilitou um bom desempenho dos alunos. E os resultados nos mostraram que ao aplicarmos um material, é necessário que viabilizemos essa mobilização dos diferentes registros e que nossa prática docente esteja atenta a isso, de que forma colocamos o conteúdo e fazemos essas relações, como por exemplo, quando se utilizou o material manipulável de recorte das frações, no âmbito das representações figurativas, identificar como não pertinentes alguns dados tais como o número de partes destacadas e a forma destas partes na figura, bem como reconhecer a área destacada em relação ao todo , houve assim uma diminuição das dificuldades impostas pela mudança de sentido e variações de congruência e não-congruência nas conversões. E tudo isso, nos leva a pensar sobre a relevância de recursos dessa natureza na apreensão conceitual dos objetos matemáticos.

Como vimos, não é apenas um papel meramente comunicativo que as representações semióticas cumprem, e sim são de grande importância no próprio desenvolvimento das representações mentais, pois dependem "de uma interiorização de representações semióticas" (DUVAL, 2012, p. 269).

Dessa forma, temos que considerar a possibilidade de interagir as representações que são proporcionadas pelas atividades, a fim de que os alunos possam interiorizar representações mentais que lhes serão fundamentais para a atividade cognitiva do pensamento e, de modo particular, no exercício das conversões entre representações semióticas do número racional. Nesse sentido, os alunos devem, na sequência, ser capazes de criar suas próprias estratégias resolutivas, o que, do ponto de vista cognitivo, é o que se espera.

O desenvolvimento dessa pesquisa nos proporcionou um grande enriquecimento do conhecimento tanto pessoal quanto profissional, e que foi motivada pela percepção desses anos de trabalho docente, sobre o grande desafio que é o ensino dos números racionais e a mobilização dos diferentes registros desse objeto matemático. E isso reflete o quão é importante que o professor esteja atento a suas práticas docentes e, principalmente, que esteja em formação contínua a fim de adquirir olhares críticos quanto a sua prática e os materiais a quais são utilizáveis em seu dia a dia se cumprem o objetivo e a habilidade a qual quer que o seu aluno desenvolva e que estabeleça relações entre as diferentes representações e se aproprie do conteúdo. E esperamos que possam ter sua contribuição no campo da Educação Matemática, sobretudo, na questão da exploração dos recursos didáticos disponíveis durante as aulas.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, Keyla Ribeiro de. **Representações semióticas de números racionais sob o olhar de um grupo de professores de Matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental**. 2016. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande-MS, 2016.

AZEVEDO, Adalberto Tomaz de. **Conexão entre matemática e música: um percurso para o estudo dos números racionais**. 2019. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba-SP, 2019.

BRASIL. **Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa**: Construção do Sistema de Numeração Decimal / Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica, Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. – Brasília: MEC, SEB, 2014.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**: Educação é a base. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf Acesso em: 21 mai. 2020.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: introdução aos parâmetros curriculares nacionais / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf. Acesso em: 15 mai. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental. Matemática. Brasília, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/introducao.pdf . Acesso em: 01 jul. 2020.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Gradiva, 2005. Disponível em: http://literamati.dominiotemporario.com/doc/Conceitos.pdf . Acesso em: 02 jul. 2020.

CATTO, Glória Garrido. **Registros de representação e o número racional**: uma abordagem em livros didáticos. 2000. 168 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

COSTA, A. C. **Referenciais Históricos e Metodológicos para o Ensino de Frações**. 2010. Monografia (Departamento de Matemática) – Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia, Universidade Federal de São Carlos. São Carlos: 2010. Disponível em: https://www.dm.ufscar.br/graduacao/attachments/article/156/282529.pdf. Acesso em: 28 mai. 2020.

DALVI, Silvana Cocco. **Modelagem matemática na perspectiva sociocrítica e os registros de representação semiótica na formação do conceito de número racional**' 22/02/2018 117 f. Dissertação (Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo, Vitória, 2018.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. **Aprendizagem em matemática**: Registros de representação semiótica. São Paulo: Papirus Editora, 2003, p. 11-33.

DUVAL. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revista Eletrônica de Educação Matemática** – Revemat, Florianóplis, v.7, n.2, p. 266-297, 2012. Disponível em: http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266.

DUVAL Entrevista: Raymound Duval e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. **Revista Paranaense de Educação Matemática** - RPEM, Campo Mourão, v.2, n.3, jul-dez. 2013. Entrevista concedida a FREITAS, J. L. M. de; REZENDE, V.

FONSECA, Solange. **Metodologia de Ensino** – Matemática. Minas Gerais: Editor Lê, 1997.

FRIEDERICH, Danieli Maria Junges. **A formação de professoras dos anos iniciais:** um estudo sobre a concepção do conceito do número racional e suas representações' 01/08/2010 132 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação nas Ciências) - Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande Do Sul, Ijuí-RS, 2010.

GAY, Mara Regina Garcia. SILVA, Willian Raphael. **Araribá Mais Matemática, 6° ano**. 1 ed. São Paulo: Moderna, 2018.

GIL, Jacqueline da Silva. **Uma abordagem lúdica para as diferentes representações do número racional positivo**' 01/07/2012 164 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) - Universidade Severino Sombra, Vassouras-RJ, 2012.

GOULART, C. **Letramento e polifonia**: um estudo de aspectos discursivos do processo de alfabetização. In: Revista Brasileira de Educação, Rio de Janeiro, n. 18, set-dez 2001.

MANTOVANI, K. P. **O Programa Nacional do Livro Didático – PNLD:** Impactos na Qualidade do Ensino Público. 2009. 126 f. Dissertação (Mestrado em Geografia Humana) – Departamento de geografia, Universidade de São Paulo, Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas, São Paulo, 2009.

MELO, Wellington José de Arruda. **Conversões entre representações de números racionais:** limites e possibilidades no uso de material manipulável. 2019. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica) – Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2019.

OLIVEIRA, Antonio Sérgio dos Santos. **Uma Engenharia Didática para o ensino das operações com números racionais por meio de calculadora para o quinto ano do Ensino Fundamental**. 2015. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2015.

PAULO, Rafael dos Reis. **Ambiente de geometria dinâmica e seu potencial semiótico**: uma abordagem no ensino dos números complexos. 2019. Dissertação (Programa de Pós-graduação Acadêmico em Educação Matemática) - Instituo de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, 2019.

PENTEADO, Cristina Berndt. **Concepções do professor do Ensino Médio relativas à densidade do conjunto dos números reais e suas reações frente a procedimentos para a abordagem desta propriedade**. 2004. Dissertação (Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

PISA 2000 Relatório Nacional.2001. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/documents/186968/484421/PISA+2000+-+Relat%C3%B3rio+Nacional/e050a3a8-cf8a-4672-bd3b-43897c71518f?version=1.2. Acesso em: 20 mai. 2020.

SANTOS, John Kennedy Jerônimo. **A compreensão do professor sobre os erros dos alunos, em itens envolvendo expectativas de aprendizagem dos números racionais, nos anos iniciais do ensino fundamental**. 2015. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica) – Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2015.

SANTOS, Rosivaldo Severino dos. **Analisando as estratégias utilizadas pelos alunos da rede municipal do Recife na resolução de questões do SAEPE sobre números racionais**. 2011. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica) – Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2011.

SCHULZ, Manuela de Aviz. **Números racionais e suas representações com base no ensino híbrido**. 2017. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Regional de Blumenau, Blumenau, 2017.

SEVERO, Daniela Fouchard. **Números racionais e ensino médio: uma busca de significados**' 01/01/2009 65 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009.

SILVA, Marcelo Cordeiro da. **Reta graduada:** um registro de representação dos números racionais. 2008. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

SILVA, Fernanda Andréa Fernandes. **Graus de não congruência semântica nas conversões entre os registros geométrico bidimensional e simbólico fracionário dos números racionais**. 2018. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências e da Matemática) – Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2018.

SILVA, Fernanda Andréia Fernandes. **Significados e representações dos números nacionais abordados no Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM**. 2013. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências) - Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2013.

SOARES, Maria Arlita da Silveira. **Os números racionais e os registros de representação semiótica:** análise de planejamento das séries finais do Ensino Fundamental' 01/12/2007 132 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação nas Ciências) - Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí-RS, 2007.

VIEL, Maria Jesus Martinez. **A importância da representação simbólica no ensino aprendizagem da noção intuitiva de números racionais**.' 01/01/2008 245 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2008.

APÊNDICE A – INSTRUMENTO AVALIATIVO

EE. DONA ELISA DE CAMPOS LIMA NOVELLI

NOME:

SÉRIE: 6°A

PROFª: Laís Isabele Proença

AULA 1 – As razões da Matemática

1) Exposição da situação-problema associada a diferentes significados. Em uma avaliação com 100 testes, a razão entre o número de questões que o estudante acertou e o total de questões da prova foi de 16 para 20. Escreva na forma de fração irredutível a razão entre o número de questões que o estudante acertou e o total de questões da prova e determine quantas questões o estudante acertou.

a. O que é solicitado no problema?

b. A avaliação é composta de quantos testes?

c. Qual é a relação entre o número de questões que o estudante acertou e o total de questões da prova?

d. Represente a razão entre o número de questões que o estudante acertou e o total de questões da prova, na forma de fração, usando os números 16 e 20.

e. Escreva, na forma de fração irredutível, a razão entre o número de questões que o estudante acertou e o total de questões da prova.

DESAFIO - Em uma sala de aula há 20 meninas e 15 meninos. Qual a fração irredutível que representa o número de meninas em relação ao número de meninos?

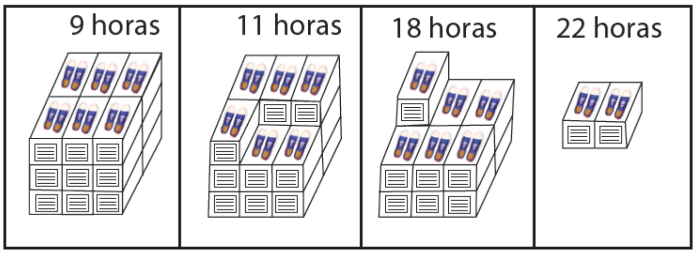
2) Em uma empresa há 600 funcionários. Desses, 250 são mulheres e 150 possuem ensino superior completo. Represente na forma de razão:

a. O número de mulheres e o total de funcionários.

b. O número de funcionários que possui ensino superior completo e o total de funcionários.

3) Uma atleta dedica 2 horas de seu dia a atividades aeróbicas e 1 hora para musculação. Qual a razão que representa um dia que essa atleta dedica para suas atividades físicas?

4) (PROJETO CON(SEGUIR)) - Uma loja de artigos de couro fez um dia de promoção de sapatos. As vendas foram um sucesso. A loja abriu às 9 horas e fechou às 22 horas. Observe nas figuras a seguir a evolução do estoque durante o dia da promoção.



Qual é a razão entre os volumes dos estoques de sapatos às 18 horas e às 9 horas?

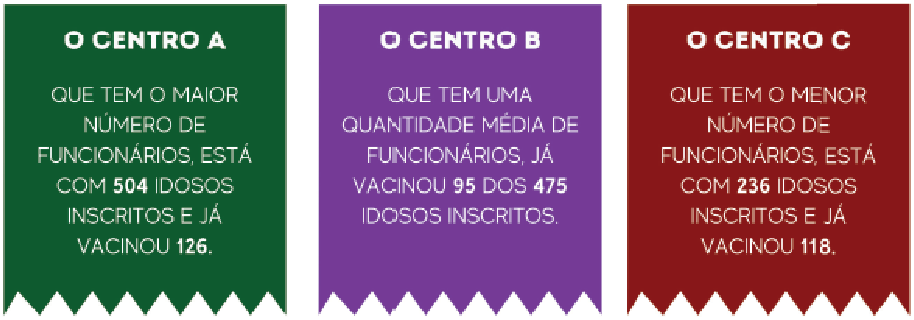
$(A)\,\frac{13}{18}$ (B) $\frac{9}{18}$ (C)$\frac{6}{18}$ (D) $\frac{2}{18}$

5) Joana participou de uma partida de tênis e acertou 15 dos 20 saques que fez. Pode-se afirmar que a fração do total de saques que Joana acertou é:

(A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{3}{5}$

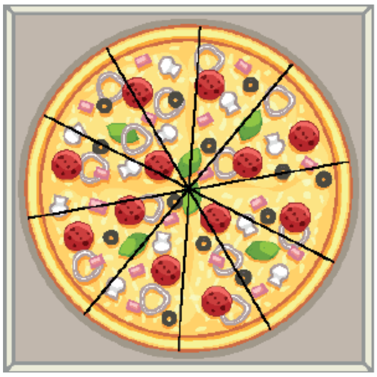
AULA 2 – Campanha de vacinação

1) Três centros de Saúde estão na campanha de vacina contra H1N1.



a. Qual dos centros está atendendo seus clientes com maior eficiência?

2) A mãe de Carlos fez uma pizza de calabresa e a dividiu em 10 pedaços iguais. Carlos comeu dois pedaços dessa pizza.



Represente, na forma fracionária e decimal, a quantidade de pizza que Carlos comeu. **RESPONDA**:

a. O que é solicitado no problema?

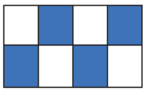
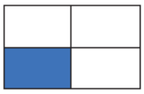
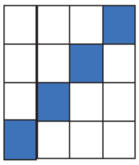
b. A pizza foi dividida em quantos pedaços? Todos os pedaços são do mesmo tamanho?

c. Quantos pedaços da pizza Carlos comeu?

d. Com base na informação acima, represente na forma de fração a parte da pizza que Carlos comeu:

e. Cada um dos pedaços da pizza corresponde a 0,10? Isso corresponde a que fração da pizza? Justifique.

3) Represente em forma de fração as partes pintadas de azul nas figuras.

	Representação figural	Represetação fracionária
A)		
B)		
C)		
D)		
E)		
F)		

4) Represente os números a seguir na forma decimal.

(A) $\frac{4}{5}$	(D) $\frac{12}{30}$
(B) $\frac{7}{20}$	(E) $\frac{11}{10}$
(C) $\frac{3}{4}$	(F) $\frac{9}{6}$

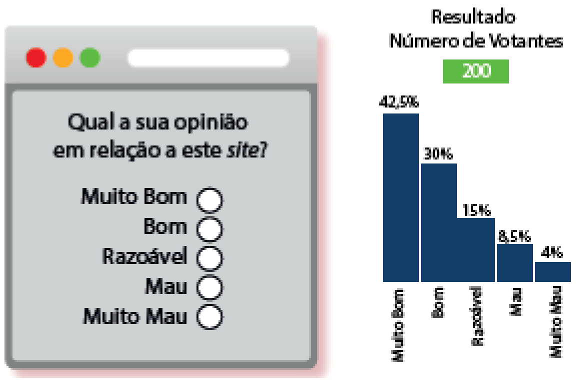
5) Represente os números a seguir na forma de fração.

(A) 0,25	(D) 3,2
(B) 0,52	(E) 0,012
(C) 2,5	(F) 0,144

AULA 3 – De quantos modos?

1) A turma do Dino tem um site na internet.

Os visitantes podem dar a sua opinião em relação ao site, como mostra a figura a seguir.



Após 200 visitantes terem votado, quantos consideram o site:

a. Razoável?

b. Muito Bom?

2) Complete a tabela a seguir.

FRAÇÃO	FRAÇÃO CENTESIMAL	NÚMERO DECIMAL	PORCENTAGEM
$\frac{1}{25}$	$\frac{4}{100}$		
$\frac{1}{20}$		0,05	
$\frac{5}{10}$			50 %
$\frac{4}{25}$			

3) Escreva as porcentagens em forma de fração reduzida.

(A) 20%	**(D)** 100%
(B) 25%	**(E)** 10%
(C) 50%	

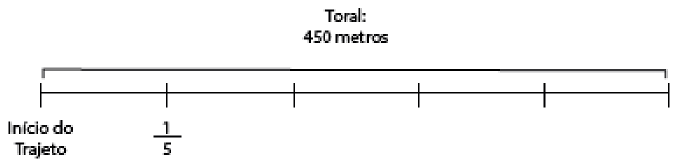
4) (MEARIM - MA) Qual o número que corresponde a $\frac{4}{5}$?

(A)0,8 **(B)**4,5 **(C)**0,1 **(D)**0,5

AULA 4 – Competição

1) Leia o problema a seguir.

O circuito de uma prova de ciclismo tem 450 metros. Na marca de 2/5 desse trajeto, a partir do início, está o obstáculo mais difícil do circuito.



A quantos metros do início do percurso está esse obstáculo?

Agora, responda:

a. Qual é a pergunta do problema?

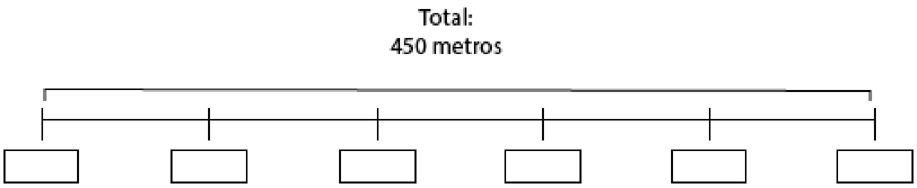
b. Quais são os dados do problema?

c. O esquema apresentado está dividido em quantas partes iguais? Isso corresponde a que fração do circuito?

d. Qual é a medida, em metros, de todo o circuito da prova?

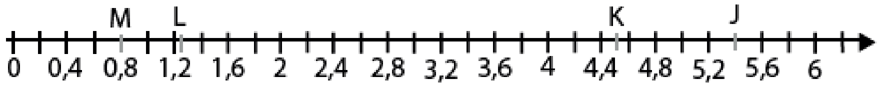
e. De acordo com o esquema, o percurso foi dividido em 5 partes iguais. Cada uma dessas partes corresponde a quantos metros?

f. No esquema a seguir, marque quantos metros um ciclista terá percorrido em cada um dos pontos assinalados.



À quantos metros do início do percurso está esse obstáculo?

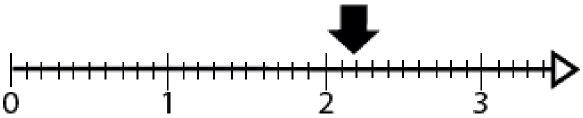
2) (PAEBES). Observe a reta numérica a seguir, que está dividida em segmentos de mesma medida.



Qual é o ponto que melhor representa a localização do número $\frac{5}{4}$ nessa reta?

(A) M (B) L (C) K (D) J

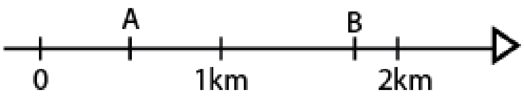
3) (PROEB-adaptada) Observe a reta numérica a seguir.



O número indicado pela seta é:

(A)0,22 (B) 2,2 (C) 1,2 (D) 1,22

4) (SARESP) Joana e seu irmão estão representando uma corrida em uma estrada assinalada em quilômetros, como na figura a seguir:

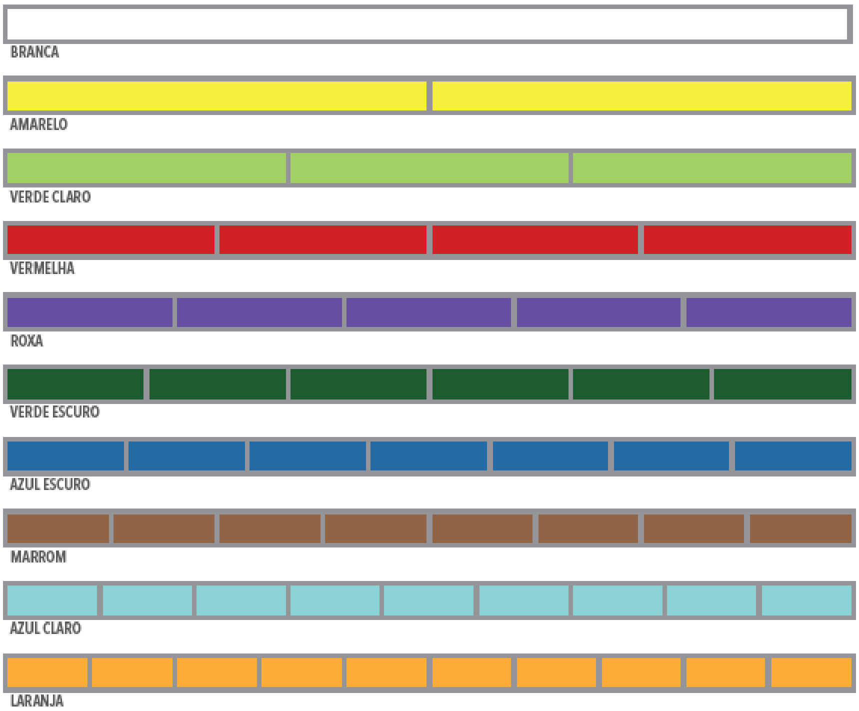


Joana marcou as posições de 2 corredores com os pontos A e B. Esses pontos A e B representam que os corredores já percorreram, respectivamente, em km:

(A) $0{,}5\ e\ 1\frac{3}{4}$ (B) $0{,}25\ e\ \frac{10}{4}$ (C) $\frac{1}{4}\ e\ 2{,}75$ (D) $\frac{1}{2}\ e\ 2{,}38$

AULAS 5, 6 E 7 – Colorindo barras

1) Siga as orientações do professor. Pinte e recorte as barras conforme as indicações. (ANEXO 1)



e. De acordo com as orientações do professor, compare as barras a seguir.

- Três partes azul claro e três partes da verde escuro.
- Uma parte da roxa e duas partes da marrom.
- Três partes do azul claro e uma parte da verde claro.
- Cinco partes da laranja e uma da vermelha.

Registre os resultados, utilizando os números fracionários correspondentes às partes de cada cor das tiras.

f. Identifique preenchendo com os símbolos de > (maior que), = (igual) ou < (menor que), os espaços com " ? " e faça comparações entre esses números fracionários.

(A) $\frac{2}{5}$? $\frac{3}{5}$	(B) $\frac{4}{9}$? $\frac{9}{9}$	(C) $\frac{9}{9}$? $\frac{8}{8}$
(D) $\frac{8}{8}$? $\frac{6}{8}$	(E) $\frac{1}{2}$? $\frac{2}{4}$	(F) $\frac{1}{3}$? $\frac{2}{6}$
(G) $\frac{2}{5}$? $\frac{1}{5}$	(H) $\frac{4}{6}$? $\frac{4}{4}$	(I) $\frac{3}{4}$? $\frac{3}{5}$
(J) $\frac{2}{4}$? $\frac{3}{6}$	(K) $\frac{6}{8}$? $\frac{3}{4}$	(L) $\frac{6}{10}$? $\frac{6}{8}$

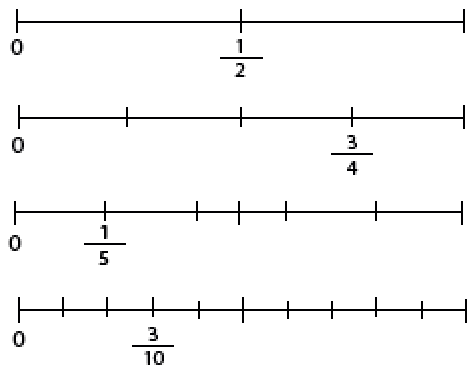
g. Observe as barras e preencha com os símbolos de > (maior que), = (igual) ou <(menor que) os espaços com " ? ", comparando esses números fracionários com os que surgem das operações.

$\frac{1}{5}+\frac{4}{5}$?	$\frac{5}{5}+\frac{4}{5}$?	$\frac{5}{7}-\frac{3}{7}$?
$\frac{3}{7}+\frac{2}{7}$?	$\frac{5}{5}-\frac{1}{5}$?	$\frac{9}{10}-\frac{5}{10}$?
$\frac{5}{10}+\frac{4}{10}$?	$\frac{4}{6}-\frac{3}{6}$?	$\frac{6}{7}-\frac{3}{7}$?
$\frac{6}{8}+\frac{2}{8}$?	$\frac{4}{6}-\frac{1}{6}$?	$\frac{2}{5}-\frac{1}{5}$?

h. Responda às questões a seguir, sem auxílio das barras:

$\frac{3}{10}+\frac{11}{10}$?	$\frac{7}{100}+\frac{8}{100}$?	$\frac{25}{138}+\frac{6}{138}$?	
$\frac{5}{20}+\frac{15}{20}$?	$\frac{25}{36}-\frac{13}{36}$?	$\frac{3}{100}-\frac{2}{100}$?	$\frac{6}{19}-\frac{5}{19}$?

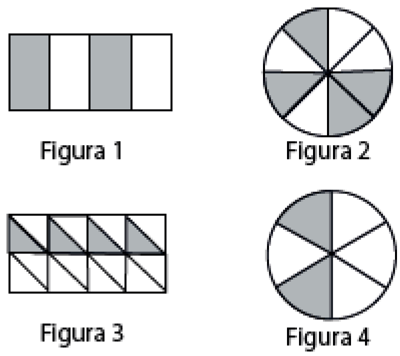
2) (SARESP) Considere as retas numéricas abaixo.



A única sentença verdadeira é:

(A) $\frac{7}{10} > \frac{3}{4}$ (B) $\frac{4}{5} > \frac{8}{10}$ (C) $\frac{5}{10} > \frac{2}{5}$ (D) $\frac{2}{10} > \frac{1}{4}$

3) (SEAPE) Abaixo, cada uma das figuras está dividida em partes iguais.



Em quais dessas figuras a parte colorida representa a mesma parte do inteiro?

(A)1 e 2. **(B)**1 e 3. **(C)**2 e 3. **(D)**2 e 4

4) Um casal tem o seguinte diálogo:

- Só vou lhe dar $\frac{4}{10}$ do meu décimo terceiro salário para as compras de Natal.

- Nada disso, eu quero $\frac{6}{15}$ desse dinheiro.

Assinale a opção que conclui corretamente a discussão do casal.

(A) Essa discussão não é necessária, pois as quantias são iguais.

(B) Ele está com a razão, pois ela quer muito mais dinheiro do que ele ofereceu.

(C) Ela está com a razão, pois ele está oferecendo muito pouco dinheiro.

(D) Essa discussão é inútil, pois ela está pedindo uma quantia inferior à que ele está oferecendo.

5) (SAEGO) José pediu aos seus estudantes que resolvessem um problema cujo resultado, após simplificado, era $\frac{2}{5}$.

Caio	Paula	Sara	Túlio
$\frac{4}{20}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{5}{2}$

Veja, no quadro a seguir, os resultados encontrados por quatro estudantes antes da simplificação. O estudante que acertou o problema foi:

(A) Caio **(B)** Paula **(C)** Sara **(D)** Túlio

6) Na gasolina comum, são adicionados 2 litros de etanol (álcool – combustível de automóveis) para cada 10 litros de gasolina. Então, quantos litros de etanol são necessários para adicionar em 40 litros de gasolina e manter a proporção?

(A) 10 litros de gasolina.

(B) 8 litros de gasolina.

(C) 9 litros de gasolina.

(D) 11 litros de gasolina.

AULA 8 – Mais e menos faz toda diferença

1) (SAEGO) Resolva a operação a seguir.

$$\boxed{\frac{5}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}$$

(B) $\frac{29}{12}$ (B) $\frac{21}{12}$ (C) $\frac{3}{10}$ (D) $\frac{12}{10}$

2) (SARESP-2007) Qual é o resultado de $\frac{1}{8}+\frac{5}{6}$?

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{3}{7}$ (D) $\frac{23}{24}$

3) (GAVE) O valor da seguinte expressão numérica $\frac{2}{5} - \frac{1}{10} - 0,2$

(A) $\frac{7}{10}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{10}$ (D) $\frac{23}{10}$

4) (SARESP-2010) O valor simplificado da expressão $\frac{12}{100} + \frac{3}{50} - 2,25$ é?

(A) $\frac{2}{100}$ (B) $\frac{1}{50}$ (C) $\frac{1}{10}$ (D) $\frac{13}{100}$

5) Marcos exercita-se todos os dias no parque de seu bairro. Ele caminha $\frac{2}{6}$ de hora e corre mais $\frac{2}{3}$ de hora. Qual o tempo total de atividades físicas que Marcos faz diariamente?

$(A)\,\frac{2}{9}$ de hora. (B) $\frac{4}{9}$ de hora. (C) 1 hora. (D) 2 horas.

6) (PROVA BRASIL) A estrada que liga Recife a Caruaru será recuperada em três etapas. Na primeira etapa, será recuperada $\frac{1}{6}$ da estrada e, na segunda etapa, $\frac{1}{4}$ da estrada. Uma fração que corresponde à terceira etapa é:

(A) $\frac{5}{12}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{7}{12}$ (D) $\frac{12}{7}$

ANEXO 1

COLORINDO BARRAS