UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS

Cristiano Santini Rodrigues

APLICAÇÕES DAS FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

SÃO CARLOS
NOVEMBRO DE 2021

Cristiano Santini Rodrigues

APLICAÇÕES DAS FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas (PPGECE), da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, sob orientação do Professor Doutor Pedro Luiz Aparecido Malagutti.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS

Orientador: Dr. Pedro Luiz Aparecido Malagutti

SÃO CARLOS
NOVEMBRO DE 2021

Cristiano Santini Rodrigues

APLICAÇÕES DAS FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas (PPGECE), da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, sob orientação do Professor Doutor Pedro Luiz Aparecido Malagutti.

Trabalho aprovado. São Carlos, 10 de novembro de 2021

Prof. Dr**.** Pedro Luiz Aparecido Malagutti
Orientador

Prof. Dra. Marta Cilene Gadotti
Departamento de Matemática – IGCE/Rio Claro(SP)

Prof. Dr. Ivo Machado da Costa
Departamento de Matemática - PPGECE São Carlos(SP)

Rodrigues, Cristiano Santini

Aplicações das funções exponenciais e logarítmicas / Cristiano Santini Rodrigues -- 2021.
140f.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São Carlos, campus São Carlos, São Carlos
Orientador (a): Pedro Luiz Aparecido Malagutti
Banca Examinadora: Marta Cilene Gadotti, Ivo Machado da Costa
Bibliografia

1. Exponenciais. 2. Logaritmos. 3. Aplicações. I. Rodrigues, Cristiano Santini. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática (SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Ronildo Santos Prado - CRB/8 7325

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Cristiano Santini Rodrigues, realizada em 10/11/2021.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Pedro Luiz Aparecido Malagutti (UFSCar)

Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti (UNESP)

Prof. Dr. Ivo Machado da Costa (UFSCar)

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.
O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por minha vida e também por estar comigo em todos os momentos, inclusive neste, muito especial para mim.

Aos meus pais, pelo incentivo e esforço no direcionamento dos meus estudos, especialmente ao meu pai Darcy Rodrigues (*in memorium*), que sempre esteve presente nas minhas caminhadas educacionais.

À minha filha Eduarda e à minha esposa Eidileni, pelo carinho, amor, compreensão e muita paciência nos momentos mais difíceis desta etapa importante da minha vida.

Ao meu ex-aluno, colega e amigo de mestrado Leandro Rodrigues da Costa, que juntos durante dois anos, passamos por momentos de angústia, descontração e sofrimento, que fazem parte na vida de uma pessoa.

Ao meu amigo e colega Jefferson David Alves, que foi uma pessoa que me deu todo o suporte para chegar até aqui.

A todos os professores integrantes desse programa, pela dedicação, conhecimento e empenho, e que mostraram a verdadeira essência de uma educação de qualidade.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Pedro Luiz Aparecido Malagutti, por não medir esforços em me ajudar e atender, a acima de tudo acreditar em mim.

Aos membros da banca examinadora Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti e Prof. Doutor Ivo Machado da Costa por terem aceitado o convite de participar da banca e pelas contribuições para a dissertação.

A todos que direta ou indiretamente me incentivaram e me ajudaram na concretização de um sonho.

Obrigado a todos.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo proporcionar, dentro do Ensino de Matemática, um interesse maior, por parte dos alunos, no estudo dos logaritmos e sua inversa, os exponenciais, para os alunos do Ensino Médio, no âmbito de cálculos aritméticos como multiplicação, divisão, potenciação com expoente fracionário, extração de raízes, entre outros.

As funções logarítmicas e exponenciais são instrumentos que relatam matematicamente a evolução de grandezas, nas quais o crescimento ou decrescimento são proporcionais à quantidade dessa grandeza em um determinado tempo.

Para isso, foi desenvolvido a história das funções logarítmicas e exponenciais, a biografia dos seus inventores, suas aplicações que modelam fenômenos cotidianos em diversas áreas como física, química, biologia, música, geografia e em matemática financeira através de explanação teórica e exemplos práticos.

Por fim, o trabalho foi baseado na elaboração de atividades pautadas nas situações didáticas, envolvendo problemas e exercícios objetivando o entendimento das propriedades dessas funções e analisando a interdisciplinaridade entre as disciplinas, proporcionando um aprendizado significativo e de qualidade.

Palavras-chave: Ensino de Matemática, Função logarítmica, Função exponencial, interdisciplinaridade

Abstract

This work aims to provide, within the Teaching of Mathematics, a greater interest, on the part of students, in the study of logarithms and its inverse, exponentials, for high school students, in the context of arithmetic calculations such as multiplication, division, potentiation with fractional exponent, square roots extractions.

The logarithmic and exponential functions are instruments that mathematically report the evolution of quantities, in which the growth or decay is proportional to the amount of this greatness.

Therefore, the history of logarithmic and exponential functions was developed, the biography of its inventors, its applications that model everyday phenomena in various areas such as physics, chemistry, biology, music, geography and financial mathematics through theoretical explanation and practical examples.

In conclusion, the work was based on the development of activities based on didactic situations, involving problems and exercises aimed at understanding the properties of these functions and analyzing the interdisciplinarity between the disciplines, providing meaningful and quality learning.

Keywords: Mathematics Teaching, Logarithmic Function, Exponential Function, Interdisciplinarity.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

CAPÍTULO 1

Introdução

Primeiramente, venho mostrar nessa introdução da dissertação uma descrição da minha trajetória pessoal. Sou mineiro, nascido na cidade de Jacutinga, onde vivi até meus dezoito anos, quando ingressei na Faculdade de Engenharia Industrial, em São Bernardo do Campo (SP), e depois de 5 anos, formando em Engenharia Elétrica, ênfase Telecomunicações. Trabalhei durante 3 anos na área de projetos e por questões particulares, entrei na área educacional com complementações pedagógicas em Matemática e pós-graduação em Química.

Na educação, iniciei em 1999, e efetivado em 2002, na Escola onde fiz meus 8 anos de ensino fundamental, Escola Estadual Júlio Brandão, em Jacutinga (MG) e já faz 22 anos que exerço o magistério no Estado de Minas Gerais e 17 anos lecionando em escola particular, nas disciplinas Física e Matemática, ensinando, aprendendo, compartilhando saberes, na luta por uma melhoria na qualidade de ensino. Em 2010, fui também efetivado na Escola Estadual Fenízio Marchini, localizado em Itapira (SP), lecionando Matemática no Ensino Fundamental e Médio, sempre construindo conhecimento no ensino aprendizagem.

O motivo pelo qual escrevi essa dissertação leva em consideração que o estudo dos logaritmos e funções exponenciais não deve ser considerado complexo e assustador por parte dos alunos e sim tópicos que exibem muitas aplicações na vida cotidiana, em diversas áreas de conhecimento e que podem ser construídos de maneira simples, mas com aprendizagem participativa e efetiva. Assim, na busca de uma resposta para este trabalho, indago a seguinte pergunta de pesquisa:

A utilização de problemas advindos de aplicações efetivamente contribui para a melhoria de aprendizagem de exponenciais e logaritmos no Ensino Médio?

As escolas que participaram desse projeto de dissertação foram ambas públicas, uma no Estado de Minas e outra em São Paulo, que me deram todo apoio necessário para desenvolver as atividades propostas, seja remotamente ou presencialmente. Não posso deixar de relatar que devido à pandemia, as atividades propostas remotamente ocasionaram muito desgaste, principalmente na busca ativa dos alunos na realização das aplicações, o que acarretou uma participação em todos os anos do Ensino Médio, para que alcançasse um número significativo e qualificado para a análise dos resultados. Parabenizo a todos os alunos que estiveram nessa etapa da construção e resolução de todos os exercícios de aplicação e que no final do processo se sentiram orgulhosos e motivados por terem participado dessa etapa da minha vida educacional e também para a própria melhoria de seus aprendizados.

O trabalho dessa dissertação está organizado do seguinte modo: incia-se com essa introdução, e no segundo capítulo trata das Diretrizes Curriculares para o Ensino Médio, a escolha dos conteúdos, a forma como trabalhar os conteúdos e a metodologia utilizada para o ensino dos logaritmos e exponenciais, o uso de tecnologia na busca da exploração e conclusão de diferentes conceitos matemáticos.

O capítulo 3 retrata o estudo histórico sobre os logaritmos e funções exponenciais, abordando a evolução e destacando os trabalhos de John Napier e Joost Bürgi na construção de tabelas, que auxiliaram na realização da atividade 5 do Capítulo 6.

O capítulo 4 refere-se ao desenvolvimento de potência de expoente racional, logaritmos e suas propriedades operatórias e, em particular, logaritmo natural e suas características. Além disso, destaca-se a função exponencial, suas propriedades e demonstrações.

O capítulo 5 destacam-se as aplicações das funções exponencial e logarítmica, nas disciplinas Física (áreas elétrica e ondulatória), Química (pH), Geografia (Sismologia e Altitude) e essencialmente na Matemática Financeira (Juros Compostos), buscando a interdisciplinaridade de projetos.

O capítulo 6 retrata a descrição e análise das atividades aplicadas em sala de aula, através de exercícios de revisão das exponenciais, das equações logarítmicas e aplicabilidades nas áreas do conhecimento, seja no cálculo de pH à modelagem do fenômeno de avalanches. E por fim uma atividade de aplicação voltada para uma análise de tabelas de PG e PA, com o âmbito de efetuar operações, utilizando uma tábua de logaritmos, na conclusão de suas propriedades.

CAPÍTULO 2
Diretrizes Curriculares para o Ensino Médio

2.1 PCNM e as funções logarítmicas e exponenciais

Percebe-se que a escola de hoje não pode mais ficar restrita ao ensino disciplinar de natureza enciclopédica. De acordo com as Diretrizes Curriculares para o Ensino Médio, deve-se considerar um amplo espectro de competências e habilidades a serem desenvolvidas no conjunto das disciplinas. O trabalho disciplinar pode e deve contribuir para esse desenvolvimento. Conforme destacam os PCNEM (2002) e os PCN+ (2002), o ensino de Matemática deve contribuir para que os alunos desenvolvam habilidades relacionadas à representação, compreensão, comunicação, investigação e, também, para a contextualização sociocultural.

Visando à contribuição ao debate sobre as orientações curriculares, esta dissertação trata de três aspectos: a escolha de conteúdos; a forma de trabalhar os conteúdos; o projeto pedagógico e a organização curricular.

2.1.1 Escolha de conteúdos:

Para a escolha de conteúdos, é importante que se levem em consideração os diferentes propósitos da formação matemática na educação básica. Ao final do ensino médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico.

2.1.2 Forma de trabalhar os conteúdos

Os conteúdos trabalhados na escola devem sempre agregar um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático. Isso significa colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático nos aspectos de formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contraexemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva. Também significa um processo de ensino que valorize tanto a apresentação de propriedades matemáticas acompanhadas de explicação quanto a de fórmulas acompanhadas de dedução, e que valorize o uso da Matemática para a resolução de problemas interessantes, quer sejam de aplicação ou de natureza simplesmente teórica.

Partimos do princípio de que toda situação de aprendizagem deve agregar o desenvolvimento de habilidades que caracterizam o "pensar matematicamente". Nesse sentido, é preciso dar prioridade à qualidade do processo e não à quantidade de conteúdos a serem trabalhados. A escolha de conteúdos deve ser cuidadosa e criteriosa, propiciando ao aluno um "fazer matemático" por meio de um processo investigativo que o auxilie na apropriação de conhecimento.

Por exemplo, o estudo de *Funções* pode ser iniciado com uma explicação qualitativa sobre as relações entre duas grandezas em diferentes situações: área do círculo e raio; tempo e crescimento populacional, entre outras. Também é interessante provocar os alunos para que apresentem outras tantas relações funcionais e que, de início, esbocem qualitativamente os gráficos que representam essas relações, registrando os tipos de crescimento e decrescimento.

É importante destacar o significado da representação gráfica das funções, quando alteramos seus parâmetros, ou seja, identificar os movimentos realizados pelo gráfico de uma função quando alteramos seus coeficientes. Sempre que possível, os gráficos das funções devem ser traçados a partir de um entendimento global da relação de crescimento/decrescimento entre as variáveis. A elaboração de um gráfico por meio da simples transcrição de dados tomados em uma tabela numérica não permite avançar na compreensão do comportamento das funções.

É importante neste trabalho a discussão em relação ao alcance do modelo linear na descrição de fenômenos de crescimento, para então introduzir o modelo crescimento/decrescimento exponencial do tipo $f(x) = a^x$. É interessante discutir as características desses dois modelos, pois enquanto o primeiro garante um crescimento à taxa constante, o segundo apresenta uma taxa de variação que depende do valor da função em cada instante. Situações reais de crescimento populacional podem bem ilustrar o modelo exponencial. Dentre as aplicações da Matemática, tem-se o interesse pelo tópico de Matemática Financeira como um assunto a ser tratado quando do estudo da função exponencial; juros e correção monetária fazem uso desse modelo.

Nos problemas de aplicação em geral, é preciso resolver uma equação exponencial, e isso pede o uso da função inversa – a função logarítmica. O trabalho de resolver equações exponenciais é pertinente quando associado a algum problema de aplicação em outras áreas de conhecimento, como Química, Biologia, Matemática Financeira, etc.

2.1.3 Metodologia

Falar de ensino e aprendizagem implica na compreensão de certas relações entre alguém que facilita, alguém que aprende e algo que é objeto de estudo, no caso, o saber matemático. Nessa tríade, professor-aluno-saber, tem-se presente a subjetividade do professor e dos alunos, que em parte é condicionadora do processo de ensino e aprendizagem.

As ideias sócio construtivistas da aprendizagem partem do princípio de que a aprendizagem se realiza pela construção dos conceitos pelo próprio aluno, quando ele é colocado em situação de resolução de problemas. Essa ideia tem como premissa que a aprendizagem se realiza quando o aluno, ao confrontar suas concepções, constrói os conceitos pretendidos pelo professor. Dessa forma, caberia a este o papel de mediador, ou seja, de elemento gerador de situações que propiciem esse confronto de concepções, cabendo ao aluno o papel de construtor de seu próprio conhecimento matemático.

Em anos recentes, os estudos em educação matemática também tem posto em evidência, como um caminho para se trabalhar a Matemática na escola, a ideia de modelagem matemática, que pode ser entendida como a habilidade de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real.

Ante uma situação-problema ligada ao “mundo real”, com sua inerente complexidade, o aluno precisa mobilizar um leque variado de competências: selecionar variáveis que serão relevantes para o modelo a construir; problematizar, ou seja, formular o problema teórico na linguagem do campo matemático envolvido; formular hipóteses explicativas do fenômeno em causa; recorrer ao conhecimento matemático acumulado para a resolução do problema formulado, o que, muitas vezes, requer um trabalho de simplificação quando o modelo originalmente pensado é matematicamente muito complexo; validar, isto é, confrontar as conclusões teóricas com os dados empíricos existentes; e eventualmente ainda, quando surge a necessidade, modificar o modelo para que esse melhor corresponda à situação real, aqui se revelando o aspecto dinâmico da construção do conhecimento.

Articulada com a ideia de modelagem matemática, tem-se a alternativa de trabalho com projetos. Um projeto pode favorecer a criação de estratégias de organização dos conhecimentos escolares, ao integrar os diferentes saberes disciplinares. Ele pode iniciar a partir de um problema bem particular ou de algo mais geral, de uma temática ou de um conjunto de questões inter-relacionadas. Mas, antes de tudo, deve ter como prioridade o estudo de um tema que seja de interesse dos alunos, de forma que se promova a interação social e a reflexão sobre problemas que fazem parte da sua realidade. São situações a serem trabalhadas sob uma visão interdisciplinar, procurando-se relacionar conteúdos escolares com assuntos do cotidiano dos estudantes e enfatizar aspectos da comunidade, da escola, do meio ambiente, da família, da etnia, pluriculturais, etc.

Para desenvolver o trabalho com projetos, o professor deve estabelecer os objetivos educativos e de aprendizagem, selecionar os conteúdos conceituais e procedimentais a serem trabalhados, preestabelecer atividades, provocar reflexões, facilitar recursos, materiais e informações, e analisar o desenvolvimento individual de cada aluno. Essa modalidade de trabalho pode ser muito educativa ao dar espaço para os alunos construírem e socializarem conhecimentos relacionados a situações problemáticas significativas, considerando suas vivências, observações, experiências, inferências e interpretações.

Adotar a metodologia do trabalho com projetos podem possibilitar aos professores colocar em ação aulas investigativas, as quais permitem aos alunos o rompimento do estudo baseado em um currículo linear. Eles terão uma maior chance de ampliar seu raciocínio, rever suas concepções e superar suas dificuldades. Passarão a perceber a Matemática como uma construção sócio-histórica, impregnada de valores que influenciam a vida humana, aprenderão a valorizar o processo de criação do saber.

A utilização da História da Matemática em sala de aula também pode ser vista como um elemento importante no processo de atribuição de significados aos conceitos matemáticos. É importante, porém, que esse recurso não fique limitado à descrição de fatos ocorridos no passado ou à apresentação de biografias de matemáticos famosos. A recuperação do processo histórico de construção do conhecimento matemático pode se tornar um importante elemento de contextualização dos objetos de conhecimento que vão entrar na relação didática. A História da Matemática pode contribuir também para que o próprio professor compreenda algumas dificuldades dos alunos, que, de certa maneira, podem refletir históricas dificuldades presentes também na construção do conhecimento matemático.

Outra questão importante refere-se à discussão sobre o papel do livro didático nas salas de aula de Matemática, particularmente em função da atual conjuntura, em que diferentes programas de avaliação e distribuição de livros didáticos tem se efetivado. O texto didático traz para a sala de aula mais um personagem, seu autor, que passa a estabelecer um diálogo com o professor e seus alunos, refletindo seus pontos de vista sobre o que é importante ser estudado e sobre a forma mais eficaz de se trabalharem os conceitos matemáticos.

Na ausência de orientações curriculares mais consolidadas, sistematizadas e acessíveis a todos os professores, o livro didático vem assumindo, há algum tempo, o papel de única referência sobre o saber a ser ensinado, gerando, muitas vezes, a concepção de que "o mais importante no ensino da matemática na escola é trabalhar o livro de capa a capa". Nesse processo, o professor termina perdendo sua autonomia como responsável pelo processo de transposição didática interna. É importante, pois, que o livro didático de Matemática seja visto não como um substituto de orientações curriculares, mas como um recurso a mais.

2.1.4 O Uso de Tecnologia

Não se pode negar o impacto provocado pela tecnologia de informação e comunicação na configuração da sociedade atual. Por um lado, tem-se a inserção dessa tecnologia no dia-a-dia da sociedade, a exigir indivíduos com capacitação para bem usá-la; por outro lado, tem-se nessa mesma tecnologia um recurso que pode subsidiar o processo de aprendizagem da Matemática. É importante contemplar uma formação escolar nesses dois sentidos, ou seja, a Matemática como ferramenta para entender a tecnologia, e a tecnologia como ferramenta para entender a Matemática.

Considerando a Matemática para a Tecnologia, deve-se pensar na formação que capacita para o uso de calculadoras e planilhas eletrônicas, dois instrumentos de trabalho bastante corriqueiros nos dias de hoje.

Já se pensando na Tecnologia para a Matemática, há programas de computador (*softwares*) nos quais os alunos podem explorar e construir diferentes conceitos matemáticos, referidos a seguir como programas de expressão. Os programas de expressão apresentam recursos que provocam, de forma muito natural, o processo que caracteriza o "pensar matematicamente", ou seja, os alunos fazem experimentos, testam hipóteses, esboçam conjecturas, criam estratégias para resolver problemas. São características desses programas:

a) conter um certo domínio de saber matemático – a sua base de conhecimento;

b) oferecer diferentes representações para um mesmo objeto matemático – numérica, algébrica, geométrica;

c) possibilitar a expansão de sua base de conhecimento por meio de macroconstruções e

d) permitir a manipulação dos objetos que estão na tela.

Para o estudo das funções, das equações e das desigualdades da geometria analítica (retas, círculos, cônicas, superfícies), tem-se um grande variedade de programas próprios para se trabalhar esses conteúdos. Os recursos neles disponibilizados facilitam a exploração algébrica e gráfica, de forma simultânea, e isso ajuda o aluno a entender o conceito de função, e o significado geométrico do conjunto-solução de uma equação ou inequação.

As planilhas eletrônicas, mesmo sendo ferramentas que não foram pensadas para propósitos educativos, também podem ser utilizadas como recursos tecnológicos úteis à aprendizagem matemática. Planilhas oferecem um ambiente adequado para experimentar sequências numéricas e explorar algumas de suas propriedades, por exemplo, comparar o comportamento de uma sequência de crescimento linear com uma de crescimento exponencial. Também oferecem um ambiente apropriado para trabalhar com análise de dados extraídos de situações reais. É possível organizar atividades em que os alunos têm a oportunidade de lidar com as diversas etapas do trabalho de análise de dados reais: tabular, manipular, classificar, obter medidas como média e desvio padrão e obter representações gráficas variadas.

No uso de tecnologias para o aprendizado da Matemática, a escolha de um programa torna-se um fator que determina a qualidade do aprendizado. É com a utilização de programas que oferecem recursos para a exploração de conceitos e ideias matemáticas que está se fazendo um interessante uso de tecnologia para o ensino da Matemática. Nessa situação, o professor deve estar preparado para interessantes surpresas: é a variedade de soluções que podem ser dadas para um mesmo problema, indicando que as formas de pensar dos alunos podem ser bem distintas: a detecção da capacidade criativa de seus alunos, ao ser o professor surpreendido com soluções que nem imaginava, quando pensou no problema proposto; o entusiástico engajamento dos alunos nos trabalhos, produzindo discussões e trocas de ideias que revelam uma intensa atividade intelectual.

2.1.5 Organização Curricular e Projeto Político-Pedagógico

O projeto político-pedagógico refere-se tanto ao trabalho mais amplo de organização da escola como ao trabalho mais específico de organização da sala de aula, levadas em conta as relações com o contexto social imediato e a visão de totalidade.

Nesse sentido, tem-se no currículo um elemento essencial na definição do projeto político-pedagógico quando a ele se incorpora o processo social de produção de conhecimento, considerando-se os conhecimentos historicamente produzidos e as formas de viabilizar sua construção por parte dos alunos.

O currículo do ensino médio deve buscar a integração dos conhecimentos, especialmente pelo trabalho interdisciplinar. Neste, fazem-se necessários a cooperação e o compartilhamento de tarefas, atitudes ainda pouco presentes nos trabalhos escolares. O desenvolvimento dessas atitudes pode ser um desafio para os educadores, mas, como resultado, vai propiciar aos alunos o desenvolvimento da aptidão para contextualizar e integrar os saberes.

Para isso, a escola deve buscar novas formas de se organizar, considerando que os conteúdos disciplinares não se esgotam em si mesmos, mas significam o acesso ao saber cultural e à aquisição de ferramentas para o entendimento da sociedade em que vivemos, destacando-se as que capacitam os indivíduos para viverem em um mundo tecnológico e informatizado. Nesse sentido, pode ser interessante propiciar momentos de trabalho em duplas e em pequenos grupos, que possibilitam a participação ativa dos alunos, o confronto de ideias e a adoção de consensos.

As orientações curriculares em relação à disciplina Matemática, tem o intuito de suscitar discussões e fornecer subsídios para opções de ênfase no conhecimento matemático, essencial à formação do aluno no ensino médio. Mas as opções também devem adequar-se ao projeto político-pedagógico de cada escola.

Sabe-se que na organização curricular deverá haver equilíbrio na distribuição da carga horária das diferentes disciplinas. É importante que se destaque a necessidade de um trabalho contínuo com a Matemática durante os três anos do ensino médio, sendo difícil propiciar uma aprendizagem significativa dos conceitos matemáticos sem uma carga horária adequada de aulas semanais, em cada ano desse nível de ensino.

Ao se definir a ênfase curricular a ser dada à Matemática em cada unidade escolar, recomenda-se um estudo cuidadoso das orientações curriculares expressas nos vários documentos produzidos que visam a subsidiar a definição do projeto político-pedagógico. É interessante ter conhecimento das propostas curriculares que estão sendo produzidas nos diferentes estados brasileiros, o que ajuda a perceber a necessidade de adaptar os currículos às particularidades de cada região.

A ampliação e o aprofundamento da explicação da estruturação lógica da Matemática são necessários ao aluno do ensino médio, devendo-se valorizar os vários recursos do pensamento matemático, como a imaginação, a intuição, o raciocínio indutivo e o raciocínio-dedutivo, a distinção entre validação matemática e validação empírica, e favorecer a construção progressiva do método dedutivo em Matemática.

Cabe ainda uma recomendação especial no que se refere à implementação de políticas públicas que priorizem a formação contínua de professores de Matemática que atuam no ensino médio visando à construção de uma autonomia docente.

2.2 A Função exponencial segundo a proposta curricular do Estado de São Paulo

No ano de 2008, a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo propôs a implantação de um currículo básico para todas as escolas públicas da rede estadual paulista, voltado para os dois últimos níveis da escolaridade básica, ou seja, Ensino Fundamental (Ciclo II) e Ensino Médio. Um dos objetivos principais da implementação do currículo é proporcionar uma base comum de conhecimentos e de competências para que todas as escolas funcionem; de fato, como uma rede, visto que antes da elaboração do currículo isso não acontecia, pois cada escola tinha autonomia para escolher o livro didático que julgasse mais apropriado. Anteriormente, o ensino na rede estadual não seguia um padrão no que diz respeito à ordem e seleção dos currículos ministrados, já que cada livro didático abordava os conteúdos que achava mais interessante e em ordens, muitas vezes, divergentes entre si.

Com a implementação do currículo, os conteúdos ministrados nas escolas do Estado de SP foram padronizadas, o que fez com que as editoras investissem na reescrita de livros que contemplassem os conteúdos da proposta curricular. Como vimos, os PCNEM fornecem diretrizes para a escolha dos temas a serem trabalhados no Ensino Médio, entretanto, não propõem uma seleção de conteúdos a ser seguida. Com a elaboração da proposta, esse padrão foi criado e todas as escolas caminham juntas no desenvolvimento dos conteúdos ali selecionados. Segundo as Diretrizes Curriculares [SÃO PAULO, 2010, p. 7]:

> Este documento apresenta os princípios orientadores do currículo para uma escola capaz de promover as competências indispensáveis ao enfrentamento dos desafios sociais, culturais e profissionais do mundo contemporâneo.

Os conteúdos disciplinares de Matemática eleitos na proposta curricular, também são divididos em três eixos temáticos que, entretanto, diferem em alguns aspectos dos eixos temáticos propostos nos PCNEM. Os blocos temáticos são: Números, Geometria e Relações. Nesta seleção, o estudo de funções fica implícito no bloco das relações, que segundo as Diretrizes Curriculares [SÃO PAULO,2010, p. 39]:

> As Relações, consideradas como um bloco temático, incluem a noção de medida, com a fecundidade e a riqueza da ideia de aproximação: as relações métricas em geral; e as relações de interdependência, como as de proporcionalidade ou as associadas à ideia de função.

Em particular, o estudo de função exponencial pertence tanto ao eixo temático dos Números como ao eixo das Relações, visto que para um bom entendimento desse assunto se fazem necessários os conhecimentos sobre a álgebra das operações fundamentais, bem como as representações simbólicas que fazem parte do eixo temático dos Números, segundo [SÃO PAULO, 2010, p. 39].

Percebemos que há na proposta uma atenção especial quando se trata do estudo das funções exponenciais, como podemos observar em [SÃO PAULO, 2010, p.45]:

> Sendo imprescindíveis o estudo das grandezas que variam exponencialmente: decomposição radiativa, crescimento exponencial, potencial hidrogeniônico, escala Richter para terremotos.

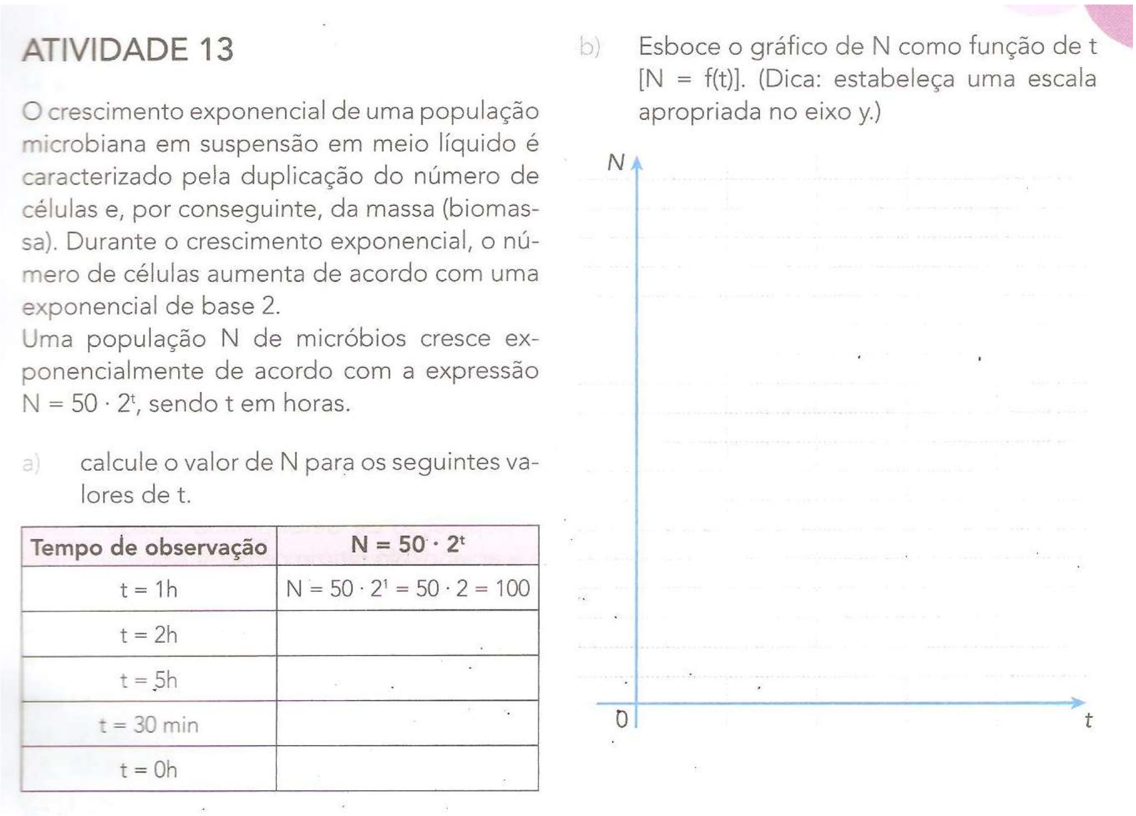
Todavia, a definição e os conceitos relativos à função exponencial serão tratados no caderno do 3º bimestre do 1º ano do Ensino Médio, como podemos ver na figura 2.1

Matemática Currículo do Estado de São Paulo

1ª série do Ensino Médio		
	Conteúdos	**Habilidades**
3º Bimestre	**Relações** Funções exponencial e logarítmica • Crescimento exponencial • Função exponencial: equações e inequações • Logaritmos: definição e propriedades • Função logarítmica: equações e inequações	• Conhecer a função exponencial e suas propriedades relativas ao crescimento ou decrescimento • Compreender o significado dos logaritmos como expoentes convenientes para a representação de números muito grandes ou muito pequenos, em diferentes contextos • Conhecer as principais propriedades dos logaritmos, bem como a representação da função logarítmica, como inversa da função exponencial • Saber resolver equações e inequações simples, usando propriedades de potências e logaritmos
4º Bimestre	**Geometria/Relações** Geometria-Trigonometria • Razões trigonométricas nos triângulos retângulos • Polígonos regulares: inscrição, circunscrição e pavimentação de superfícies • Resolução de triângulos não retângulos: Lei dos Senos e Lei dos Cossenos	• Saber usar de modo sistemático relações métricas fundamentais entre os elementos de triângulos retângulos, em diferentes contextos • Conhecer algumas relações métricas fundamentais em triângulos não retângulos, especialmente a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos • Saber construir polígonos regulares e reconhecer suas propriedades fundamentais • Saber aplicar as propriedades dos polígonos regulares no problema da pavimentação de superfícies • Saber inscrever e circunscrever polígonos regulares em circunferências dadas

Figura 2.1: Quadro de conteúdos e habilidades de Matemática

Percebe-se uma preocupação com o estudo do comportamento das funções exponenciais, isto é, seu crescimento, decrescimento e análise de seu gráfico. Entretanto, nossa preocupação está em torno de algo mais fino e delicado, que é a definição de função exponencial para um número real qualquer, bem como fornecer meios para que o aluno possa compreender e encontrar uma aproximação razoável para uma potência de expoente racional e real, pois observa-se que muitos alunos, e até mesmo alguns professores, sentem dificuldades quando se trata desse assunto. Porém, vemos que, infelizmente, as abordagens que encontramos na proposta curricular, relativas à definição de função exponencial, sua propriedade fundamental e sua relação com os conteúdos de potenciação e radiciação, é muito aquém ao que estamos propondo nessa dissertação de mestrado, como podemos observar na atividade 13 sobre função exponencial que se encontra em [SÃO PAULO,2010, p.13]:



ATIVIDADE 13

O crescimento exponencial de uma população microbiana em suspensão em meio líquido é caracterizado pela duplicação do número de células e, por conseguinte, da massa (biomassa). Durante o crescimento exponencial, o número de células aumenta de acordo com uma exponencial de base 2.

Uma população N de micróbios cresce exponencialmente de acordo com a expressão $N = 50 \cdot 2^t$, sendo t em horas.

a) calcule o valor de N para os seguintes valores de t.

Tempo de observação	$N = 50 \cdot 2^t$
t = 1h	$N = 50 \cdot 2^1 = 50 \cdot 2 = 100$
t = 2h	
t = 5h	
t = 30 min	
t = 0h	

b) Esboce o gráfico de N como função de t [N = f(t)]. (Dica: estabeleça uma escala apropriada no eixo y.)

Figura 2.2: Situação de aprendizagem – Atividade 13

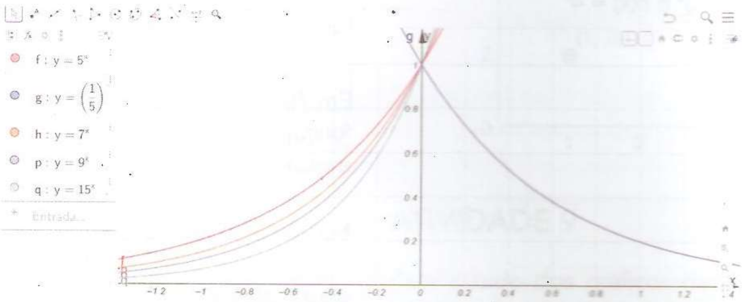
Notamos que, nos exercícios presentes no caderno do aluno, não há um cuidado especial quando se define uma função exponencial $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, para $x \in \mathbb{R}$, ou seja, não é óbvio para o aluno entender quanto vale $2^{\sqrt{3}}$, por exemplo.

Mas nos últimos anos, observa-se um aprimoramento nas atividades no caderno do aluno, com diversificação no desenvolvimento dos conteúdos, seja por meio de exercícios básicos envolvendo potências a análises de gráficos com funções exponenciais com auxílio de *softwares*, como o Geogebra, o Graphmatica ou o Winplot, o que muito contribui para a melhoria da qualidade de ensino, como mostrado na figura 2.3, abaixo.

MOMENTO DIGITAL

Construção de gráfico com auxílio de um software

Alguns softwares livres, como o Geogebra, o Graphmatica ou o Winplot, podem ser utilizados para construir gráficos de funções de vários tipos. Veja a seguir, como exemplo, o gráfico das funções exponenciais desenhados com o auxílio do Geogebra:



Para aprofundar o estudo das funções exponenciais utilizando o software gratuito de geometria dinâmica "Geogebra", escolha uma das opções abaixo:

Geogebra para computador com sistema operacional Windows. Fonte: Geogebra. Disponível em: <**https://download.geogebra.org/package/win-autoupdate**>. Acesso em: 01 abr. 2019.

Geogebra para celular com sistema operacional Android. Fonte: Google Play. Disponível em: <**https://play.google.com/store/apps/details?id=org.geogebra.android**>. Acesso em: 01 abr. 2019.

Figura 2.3- Funções exponenciais utilizando o *software* "Geogebra".

CAPÍTULO 3

A História das funções exponencial e logarítmica

3.1 A Evolução da Notação de Potência

O foco principal desse trabalho, está intimamente relacionado com a notação de potência, pois o trabalho explora significativamente a propriedade fundamental das funções exponenciais, isto é, dada uma função $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a propriedade citada é expressa pela igualdade $f(x + y) = f(x).f(y)$ para quaisquer $x,y \in D$. No caso em que $D = \mathbb{N}$ (o conjunto dos números naturais), estamos falando da potência de expoente natural, cuja base é $f(1) = a$, e a propriedade fundamental será expressa, neste caso, pela igualdade $a^{m+n} = a^m.a^n$ para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$. Contudo, usamos com muita naturalidade a notação de potência, porém, em alguns casos sem saber que esta notação demorou muitos séculos até tomar a forma que tem hoje.

É muito comum no Brasil encontrarmos livros voltados ao ensino de Matemática, que abordam o conteúdo de função exponencial antes de logaritmo, por considerarem a função logarítmica a inversa da função exponencial. Todavia, não ocorreu assim na evolução histórica desses conceitos, em outras palavras, o conceito de logaritmo surgiu antes que a notação de potência tivesse tomado a forma de notação moderna que tem hoje.

A notação moderna de potência pode ser chamada de uma notação "operatória", no sentido de que favorece uma boa interação entre as operações matemáticas já existentes e a operação que está sendo representada pela notação em questão. Por exemplo: ao utilizarmos Q para representar x^2 e S para representar x^5, não fica explícito que Q.S representa x^7, ao passo que a notação $x^2.x^5 = x^7$ nos induz automaticamente a escrever que $x^2.x^5 = x^7 = x^{2+5}$, relacionando diretamente com a operação de adição o grau de cada uma das potências em questão. Muito tempo se passou até que essa notação tomasse a forma operatória que conhecemos hoje.

Desde muito tempo já fora notado que existe uma relação simples entre os termos de uma progressão geométrica e os expoentes da razão. Segundo [PAIVA - 2, p. 18], o matemático alemão Michael Stifel (1487-1567), em seu livro *Arithmetica integra* (1544), formulou esta relação como segue (em notação moderna): "se multiplicarmos quaisquer dois termos de uma progressão 1, q, q^2, . . . o resultado será o mesmo se somarmos os expoentes correspondentes". Certamente a propriedade fundamental das potências já era conhecida há muito tempo, porém, uma notação operatória demorou a surgir. Podemos encontrar em vários períodos da História da Matemática, vários símbolos diferentes para representar as potências. Segundo [DANTE - 3, p. 309] o simbolismo algébrico matemático deve muito a obra *In artem* de François Viète (1540-1603). Dentre as várias notações sugeridas por Viète, estavam as notações para potências de uma mesma quantidade, isto é, o que se indica hoje por x, x^2, x^3 ele expressava por A, A *quadratum, a cubum,* que mais tarde foram abreviadas por A, Aq, Ac.

Segundo [BOYER - 4, p. 338], em 1685, John Willis escreveu *"ll – 2laa + a: ÷ bb",* em que o símbolo ":" corresponde a um sinal de agregação, que significa que todos os termos são divididos por b^2. Ainda em [BOYER - 4], J. Billy´s (1678) em sua publicação *Abridgement of the Precepts of Algebra,* traz um conjunto de símbolos para as potências indicadas por letras maiúsculas: N, R, Q, QQ, S, QS, entre outras combinações destes. Em sua notação, $x^2 = 20 – x$ era escrito como 1Q = 20 – 1R. Entretanto, segundo [PAIVA - 2, p. 23], expoentes negativos e fracionários tem sido sugeridos por alguns matemáticos desde o século XIV, mas o seu uso generalizado é devido ao matemático inglês John Wallis (1616 – 1703) e ainda mais a Newton, que sugeriu a notação moderna a^{-n} e $a^{m/n}$ em 1676.

Sem dúvida o simbolismo matemático deve muito a Viète, mas segundo [PAIVA - 2] os créditos referentes à sugestão da notação moderna de potência são de Isaac Newton, que juntamente com Leibniz, contribuíram significativamente para a evolução das ideias matemáticas, bem como para a evolução de sua notação.

3.2 Logaritmos: sua história e evolução

3.2.1 Introdução

Pode ser uma surpresa para muitos que, muitas vezes, os conceitos matemáticos não terminam como começaram. Para os que pensam que a matemática é atemporal, fixa e cheia de verdades imutáveis, tal proposição pode parecer inacreditável. Mas há casos na história da matemática do desenvolvimento de um conceito matemático muito além dos propósitos e potencialidades que seus inventores originais pretendiam. Um exemplo, familiar a todos, é o logaritmo.

A definição atual de logaritmo é muito diferente da conhecida antigamente em seus primórdios. Na verdade, mesmo os primeiros matemáticos que trabalharam com a relação logarítmica teriam dado uma explicação que pareceria bastante estranha para nós hoje em dia. Veremos como surgiu a relação logarítmica e como o conceito sofreu mudanças; abordaremos essas questões examinando a emergência desse conceito e examinando algumas das questões que cercam suas origens.

Na verdade, a questão das origens da relação logarítmica não tem uma resposta simples. Pelo menos dois estudiosos, o barão escocês John Napier (1550-1617) e o artesão suíço Joost Bürgi (1552-1632), produziram sistemas independentes que incorporavam a relação logarítmica e, com anos de diferença, produziram tabelas para seu uso. Essa visão paralela do mesmo conceito é fascinante e rica em detalhes históricos, e revela alguns desafios metodológicos para historiadores da matemática.

Pretendemos reintroduzir os professores a um conceito que muitas vezes é ensinado sem qualquer referência à sua aparência original no cenário matemático. Esperamos que um exame atento das concepções de Napier e Bürgi permita que os professores considerem um posicionamento alternativo para a introdução da ideia de logaritmos – como parte de ou após uma unidade de sequências numéricas. Em suma, forneceremos a seguir conteúdos matemáticos e históricos, para promover o ensino da relação logarítmica a partir de suas raízes históricas, as quais estão firmemente baseadas na considerada correlação simultânea entre sequências aritméticas e geométricas.

3.2.2 Logaritmos: um 'grande conto' para uso na sala de aula

A relação logarítmica, capturada na notação simbólica moderna como

$$\text{registro}(a \,.\, b) = \log(a) + \log(b),$$

é útil principalmente por causa de seu poder de reduzir a multiplicação e divisão às operações de adição e subtração que são mais fáceis de realizar. Quando essa relação entrou em cena no início do século XVII, seu impacto foi substancial e imediato. Historiadores modernos da matemática, tais como John Fauvel e Jan van Maanen (Mathematical Association of America, 2000), ilustram isso vividamente:

> "Quando o matemático inglês Henry Briggs soube, em 1616, da invenção dos logaritmos por John Napier, ele decidiu viajar seiscentos quilômetros ao norte até Edimburgo para encontrar o descobridor e conversar com ele pessoalmente. (História da Matemática, p. xi)"

De fato, Fauvel e van Maanen afirmam que "o encontro de Briggs e Napier é um dos grandes contos da história da matemática". Muitos professores (e seus alunos) não estão cientes dessa "grande história" em particular – ou, no máximo, associam superficialmente os nomes Briggs e Napier com invenção do logaritmo. Normalmente, esses grupos sabem pouco sobre as concepções originais da relação logarítmica.

Uma conversa entre Fauvel (1995) e um colega reforça isso. Fauvel contou que quando perguntou a seu colega como ensinar logaritmos, o colega respondeu: “Para quê? Certamente ninguém precisa mais aprender sobre eles, agora que temos calculadoras e computadores” (p. 39). Muitos professores, quando questionados sobre a possibilidade de ensinar logaritmos a partir de um contexto histórico, podem expressar a mesma opinião. O contra-argumento de Fauvel a seu colega era que “os logaritmos são um exemplo bom e acessível de algo mudando fundamentalmente seu papel conceitual dentro da matemática” (p. 45). Na verdade, examinar o desenvolvimento histórico do logaritmo com os alunos, explorando progressões aritméticas e geométricas, permite aos alunos “uma compreensão mais enraizada do que está acontecendo” (p. 42).

Victor Katz (1995;1997) forneceu um argumento sucinto para examinar o desenvolvimento de logaritmos de uma perspectiva histórica. Ele observou que Napier desenvolveu logaritmos “para uso no plano extenso e cálculos trigonométricos esféricos necessários para a astronomia” (Katz, 1995, p. 49). Embora a motivação para desenvolver logaritmos seja significativa, Katz observou que, em geral, os alunos de hoje muitas vezes sabem muito pouco sobre astronomia e sobre a magnitude dos números e dos cálculos envolvendo tais números que eram necessários para o avanço da ciência na época de Napier. Os avanços astronômicos permaneceram críticos ao longo da civilização, no entanto, e Katz (1997) indicaram “que é bom que a introduzamos [a astronomia] sempre que possível” (p. 63).

Embora haja uma forte tentação de simplesmente apresentar a definição e várias propriedades do logaritmo e exercícios para praticar cada um, propomos que incorporar percepções originais e paralelas do logaritmo pode enriquecer a instrução e aprendizagem desse tópico, tanto para a aquisição do conceito como, de forma mais ampla, para a compreensão do aluno de matemática, suas relações e seu desenvolvimento.

3.2.3 Antes dos logaritmos: as demandas computacionais do final do século XVI

O final do século dezesseis viu um desenvolvimento sem precedentes em muitos campos científicos; notavelmente, astronomia observacional, navegação de longa distância e ciência geodésica, ou esforços para medir e representar a Terra. Esses esforços exigiram muito da matemática. Para a maior parte, sua base era a trigonometria; as tabelas trigonométricas, as identidades e os cálculos relacionados eram objeto de intensa atividade de pesquisa. Normalmente, as funções trigonométricas eram baseadas em raios não unitários, como por exemplo R = 10.000.000 para garantir uma saída precisa de inteiro. Reduzir a carga de cálculo que resultou de lidar com números tão grandes para os praticantes dessas disciplinas aplicadas e, com isso, os erros que inevitavelmente surgiriam nos resultados, tornou-se um objetivo primordial para os matemáticos. Como resultado, muita energia e esforço acadêmico foram direcionados para a arte da computação.

Consequentemente, técnicas que poderiam contornar processos longos, como longas multiplicações ou divisões, foram exploradas. De particular interesse foram aqueles que substituíram esses processos por adições e subtrações equivalentes. Um método originado no final do século XVI que foi amplamente utilizado para acelerar cálculos foi a técnica chamada *prosthaphaeresis*, palavra que é um composto construído a partir dos termos gregos prótese (adição) e aférese (subtração). Essa relação transformou longas multiplicações e divisões em adições e subtrações por meio de identidades trigonométricas, como:

$$2\cos(A)\cos(B) = \cos(A + B) + \cos(A - B).$$

Quando alguém precisava do produto de dois números x e y, por exemplo, tabelas trigonométricas eram consultadas para encontrar um A e um B de tal modo que:

$$x = \cos(A) \text{ e } y = \cos(B).$$

Com um A e B determinados, cos (A + B) e cos (A – B) pode ser lida na tabela e metade da soma levada para encontrar o produto original em questão. Assim, a longa multiplicação de dois números poderia ser substituída pela consulta, adição e divisão pela metade de informações vindas da tabela. Essas regras foram reconhecidas já no início do século XVI por Johannes Werner em 1510, mas sua aplicação específica para multiplicação foi realizada pela primeira vez em 1558 em uma obra de Nicolai Reymers Ursus (Thoren, 1988). Christhoper Clavius estendeu os métodos de *prosthaphaeresis*, exibindo novos exemplos que podem ser encontrados em seu *Astrolabium* 1593 (Smith, 1959, p. 455).

Finalmente, com a comunidade científica focada no desenvolvimento de métodos computacionais mais poderosos, o desejo de capturar ideias matemáticas simbolicamente essenciais por trás desses desenvolvimentos também estava crescendo. Nos séculos XV e XVI, matemáticos como Nicolas Chuquet (1430-1487) e Michael Stifel (1487-1567) voltaram sua atenção para a relação entre sequências aritméticas e geométricas enquanto trabalhavam para construir notação para expressar uma relação exponencial. O foco no simbolismo matemático nos séculos anteriores e a crescente atenção à notação – particularmente a experimentação com diferentes versões de notação de expoente – desempenhou um papel crítico no reconhecimento e esclarecimento de tal relação. Agora, a conexão matemática entre uma sequência geométrica e aritmética poderia ser tomada ainda mais aparente ao capturar simbolicamente essas sequências como exponenciais sucessivas de um determinado número e dos próprios expoentes, respectivamente. O trabalho sobre as relações entre as sequências foi matematicamente importante *per se*, mas foi igualmente significativo por fornecer a inspiração para o desenvolvimento da relação logarítmica.

**Nota:* a trigonometria moderna é essencialmente baseada em triângulos inscritos em um círculo unitário; isto é, um círculo com raio R = 1. Os primeiros praticantes usavam círculos com vários valores para o raio.

3.2.4 John Napier apresenta os logaritmos

Em tais condições, não é de surpreender que muitos matemáticos estivessem perfeitamente cientes das questões de computação e se dedicassem a aliviar os profissionais da carga de cálculo. Em particular, o matemático escocês John Napier (Figura 3.1) era famoso por seus dispositivos para auxiliar na computação. Ele inventou um artefato matemático bem conhecido, as engenhosas barras de numeração mais curiosamente conhecidas como "ossos de Napier", que ofereciam meios mecânicos para facilitar a computação. Além disso, Napier reconheceu o potencial dos desenvolvimentos recentes em matemática, particularmente aqueles de *prosthaphaeresis*, frações decimais e aritmética de índice simbólico, para lidar com a questão da redução da computação. Ele reconheceu que, em sua maioria, os praticantes que tinham cálculos trabalhosos geralmente os faziam no contexto da trigonometria. Portanto, além de desenvolver a relação logarítmica, Napier a inseriu em um contexto trigonométrico para que fosse ainda mais relevante nos estudos de sua época.

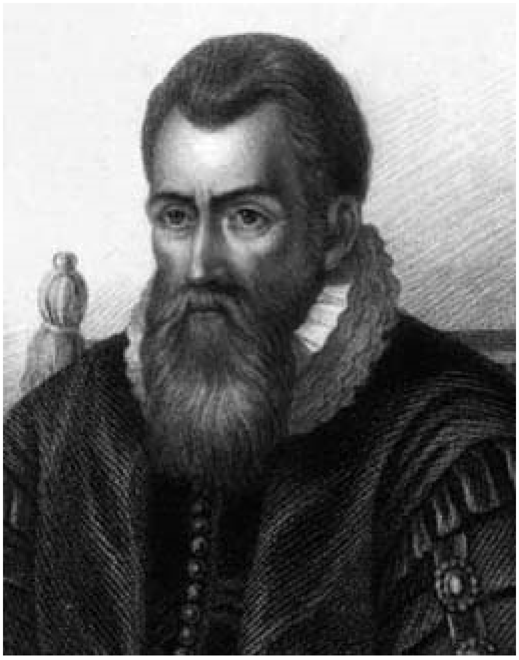


Figura 3.1. John Napier (1515 – 1617)
(do Arquivo MacTutor History of Mathematics)

Napier publicou pela primeira vez seu trabalho sobre logaritmos em 1614 sob o título *Mirifici logarithmorum canonis descriptio,* que se traduz literalmente como uma descrição da maravilhosa tabela dos logaritmos. Na verdade, o próprio título que Napier selecionou revela suas grandes ambições para esta técnica --- a provisão de tabelas baseadas em uma relação que seria nada menos do que uma "maravilha" para os praticantes.

Além de fornecer uma breve visão geral dos detalhes matemáticos, Napier deu expressão técnica ao seu conceito. Ele cunhou um termo dos dois termos gregos antigos *logos,* que significa, neste contexto, proporção e *aritmos,* significando número; combinando-os para produzir a palavra "logaritmo". Napier usou essa palavra, bem como as designações "natural" e "artificial" para números e seus logaritmos, respectivamente, em seu texto.

Apesar da conexão óbvia com as técnicas existentes de *prosthaphaeresis* e sequências, Napier fundamentou sua concepção do logaritmo em uma estrutura cinemática. A motivação por trás dessa abordagem ainda não é bem compreendida pelos historiadores da matemática. Napier imaginou duas partículas viajando ao longo de duas linhas paralelas. A primeira linha era de comprimento infinito e a segunda de comprimento fixo (figuras 3.2 e 3.3). Napier imaginou que as duas partículas partiam na mesma posição (horizontal) ao mesmo tempo, com a mesma velocidade. A primeira partícula ele colocou em movimento uniforme na linha de comprimento infinito, de modo que cobrisse distâncias iguais em tempos iguais. A segunda partícula ele colocou em movimento no segmento de linha finito de modo que sua velocidade fosse proporcional à distância restante da partícula ao ponto terminal fixo do segmento de linha.

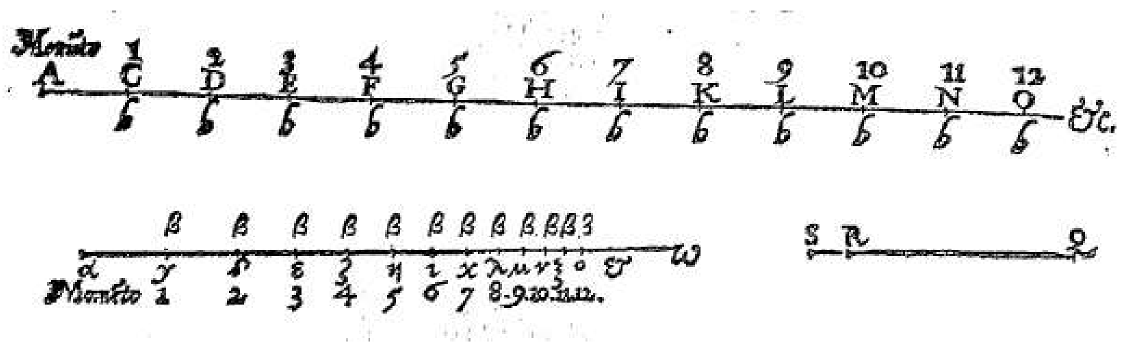


Figura 3.2. Duas linhas paralelas de Napier com partículas em movimento (imagem usada cortesia de Marcos da Série Ciência, NewsBank-Readex)

Mais especificamente, em qualquer momento a distância ainda não percorrida na segunda linha (finita) foi o seno e a distância percorrida na primeira linha (infinita) foi o logaritmo do seno. Como resultado, conforme os senos diminuíam, os logaritmos de Napier aumentavam. Além disso, os senos diminuíram em proporção geométrica e os logaritmos aumentaram em proporção aritmética. Podemos resumir a explicação de Napier da seguinte forma (*Descriptio I*, 1 (p.4); ver Figura 3.3):

$UMAC = registro_{numap}(\gamma\omega)$ Chere $\gamma\omega = Seun\ \Theta_1$

$UMAD = registro_{numap}(\delta\omega)$ Chere $\delta\omega = Seun\ \Theta_2$

$UMAE = registro_{numap}(\epsilon\omega)$ Chere $\epsilon\omega = Seun\ \Theta_3$

e assim por diante, de modo que, de forma mais geral:

$$x = Seun(\Theta)$$

$$y = registro_{numap}(x)$$

Onde $registro_{numap}$ foi usado para distinguir a compreensão particular de Napier do conceito de logaritmo da compreensão moderna.

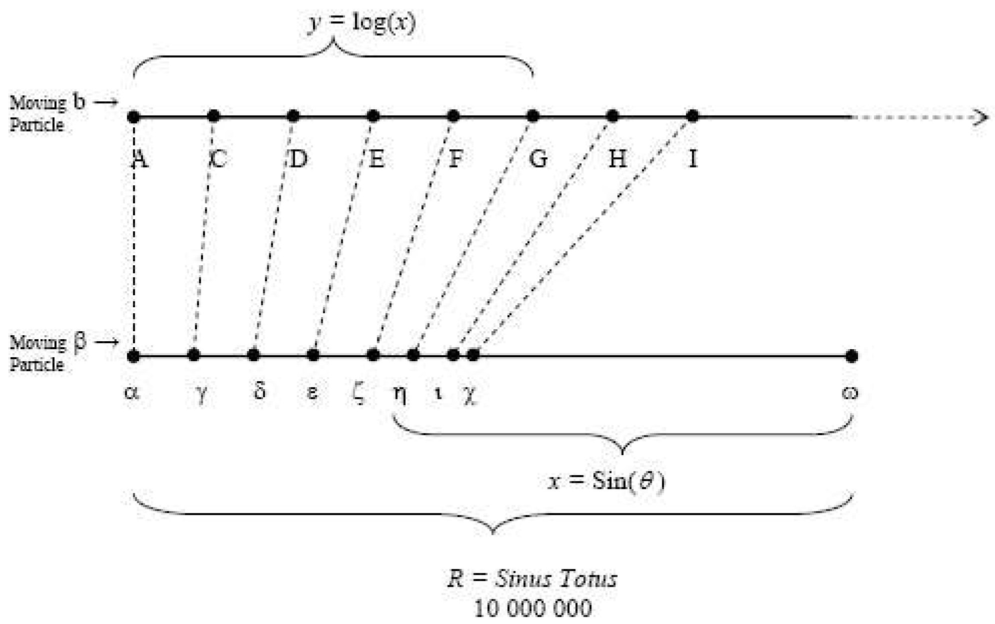


Figura 3.3. A relação entre as duas linhas

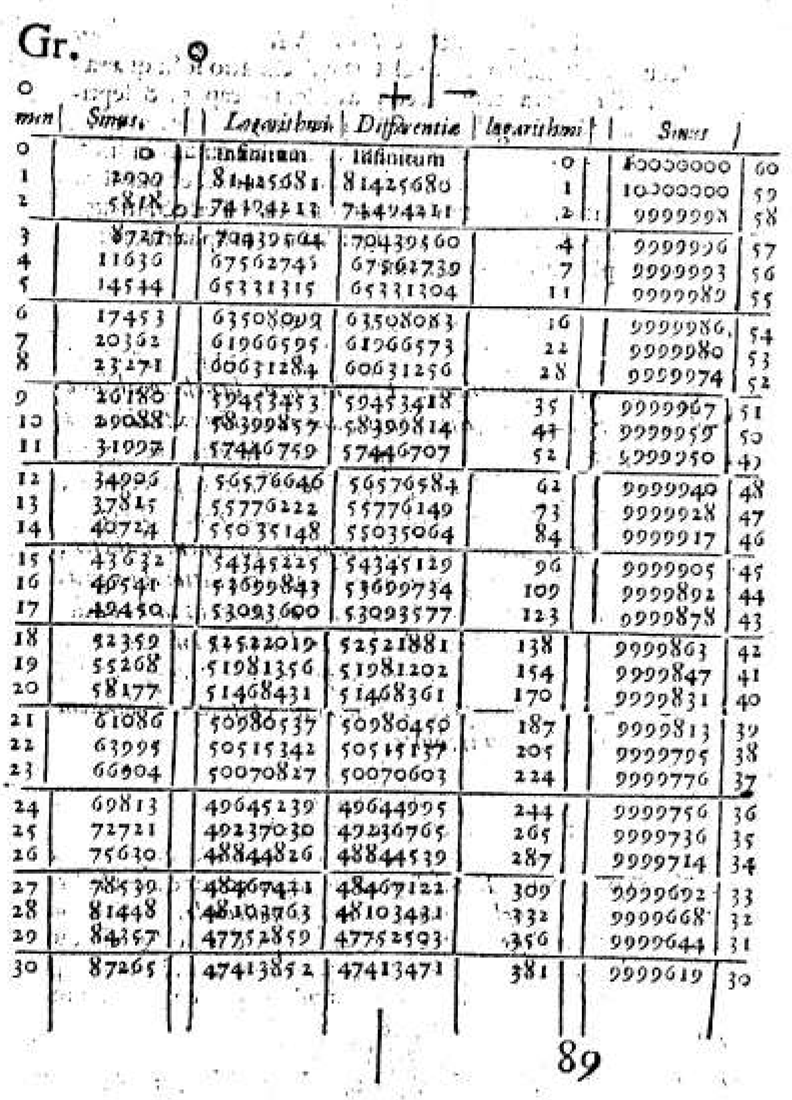
Napier gerou entradas numéricas para uma tabela que incorpora essa relação. Ele explicou, tomando incrementos de arco (θ) minuto a minuto, listando o seno de cada minuto do arco e, a seguir, seu logaritmo correspondente. No entanto, em termos da maneira como ele realmente calculou essas entradas, ele teria de fato trabalhado da maneira oposta, gerando os logaritmos primeiro e, em seguida, escolhendo aqueles que correspondiam a um seno de um arco, o que, portanto, formou o argumento. Por exemplo, ele teria calculado os valores que aparecem na primeira coluna da Tabela 1 por meio da relação:

$$p_{n+1} = p_n \left(1 - \frac{1}{10^7}\right) \text{ sendo } p_0 = 10^7$$

P_n	n =registro$_{numap}$(p_n)	Ângulo correspondente (θ)
10000000,0000000	00	90°00′
9999999,0000000	1	89°59′
9999998,0000001	2	89°58′
9999997,0000003	3	
9999996,0000006	4	89°57′
9999995,0000010	5	
9999994,0000015	6	
9999993,0000021	7	89°56′
9999992,0000028	8	
9999991,0000036	9	
9999990,0000045	10	
9999989,0000055	11	89°55′

Tabela 3.1. Logaritmos de Napier

Para completar as tabelas, Napier calculou quase dez milhões de entradas das quais selecionou os valores apropriados. O próprio Napier calculou que computar essas muitas entradas havia levado vinte anos, o que colocaria o início de seus esforços no final do século XVI.



Gr. 0

min	Sinus	Logarithmi	Differentiae	logarithmi	Sinus	
0	0	Infinitum	Infinitum	0	10000000	60
1	2909	81425681	81425680	1	10000000	59
2	5818	74494213	74494211	2	9999998	58
3	8727	70439564	70439560	4	9999996	57
4	11636	67562745	67562739	7	9999993	56
5	14544	65331315	65331304	11	9999989	55
6	17453	63508099	63508083	16	9999986	54
7	20362	61966595	61966573	22	9999980	53
8	23271	60631284	60631256	28	9999974	52
9	26180	59453453	59453418	35	9999967	51
10	29088	58399857	58399814	47	9999959	50
11	31997	57446759	57446707	52	9999950	49
12	34905	56576646	56576584	62	9999940	48
13	37815	55776222	55776149	73	9999928	47
14	40724	55035148	55035064	84	9999917	46
15	43632	54345225	54345129	96	9999905	45
16	46541	53699843	53699734	109	9999892	44
17	49450	53093600	53093577	123	9999878	43
18	52359	52522019	52521881	138	9999863	42
19	55268	51981356	51981202	154	9999847	41
20	58177	51468431	51468361	170	9999831	40
21	61086	50980537	50980450	187	9999813	39
22	63995	50515342	50515137	205	9999795	38
23	66904	50070827	50070603	224	9999776	37
24	69813	49645239	49644995	244	9999756	36
25	72721	49237030	49236765	265	9999736	35
26	75630	48844826	48844539	287	9999714	34
27	78539	48467431	48467122	309	9999692	33
28	81448	48103763	48103431	332	9999668	32
29	84357	47752859	47752503	356	9999644	31
30	87265	47413852	47413471	381	9999619	30

89

Figura 3.4. A primeira página das tabelas de Napier
(imagem usada cortesia de Marcos da Série Ciência, NewsBank-Readex)

Napier frequentemente demonstrava os benefícios de seu método. Por exemplo, ele trabalhou em um problema envolvendo o cálculo de médias proporcionais, às vezes conhecido como média geométrica. Ele revisou a maneira usual em que isso teria sido calculado e apontou que sua técnica usando logaritmos não apenas encontrava a resposta “ mais cedo” (ou seja, mais rápida!), mas também usa apenas uma adição e uma divisão por dois.

3.2.5 Joost Bürgi apresenta os logaritmos

Na Suíça, Joost Bürgi (Figura 3.5), um relojoeiro profissional, lutou contra os mesmos problemas de computação. A principal motivação de Bürgi era não apenas facilitar a computação, mas também produzir uma única tabela que pudesse ser aplicada a todas as operações aritméticas, em vez de várias tabelas. Em seu trabalho, *Arithmetische und Geometrische Progress Tabulen* (tabelas de progressão aritmética e geométrica), publicado em 1620, Bürgi observou que ter tabelas separadas para multiplicação, divisão, raízes quadradas e raízes cúbicas "não é apenas enfadonho, mas também trabalhoso e incômodo" (Prefácio, 1, xi-xii).

Figura 3.5. Joost Bürgi (1552-1632)

(do Arquivo MacTutor History of Mathematics)

Além disso, Bürgi fundamentou sua concepção diretamente na relação entre duas progressões. Ele afirmou que foi capaz de criar uma tabela para uma multiplicação de cálculos, considerando duas "progressões autoprodutoras e correspondentes" (Prefácio, 1, xv-xvi): uma aritmética e outra geométrica. Para ilustrar o princípio subjacente por meio de números "bons", ele deu progressões correspondentes com base nas potências de dois, conforme mostrado na Figura 3.6.

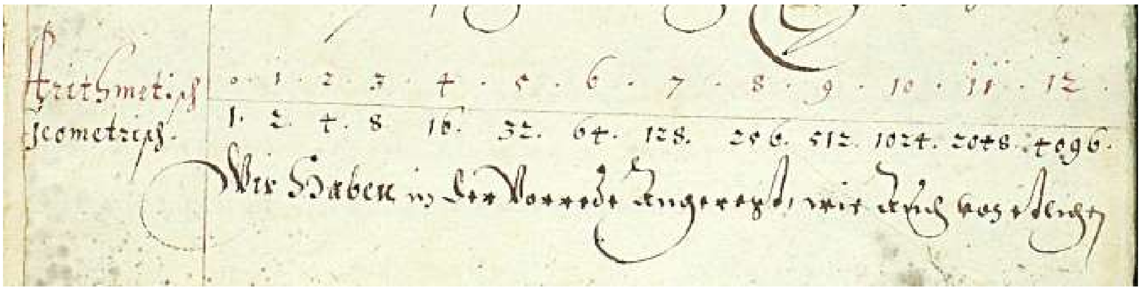


Figura 3.6. Bürgi apresenta uma progressão aritmética (números superiores) 0,1,2, 3, ... e abaixo dela uma sequência geométrica correspondente, 1,2,4,8, ... isso é $2^0,2^1,2^2,2^3$, ...

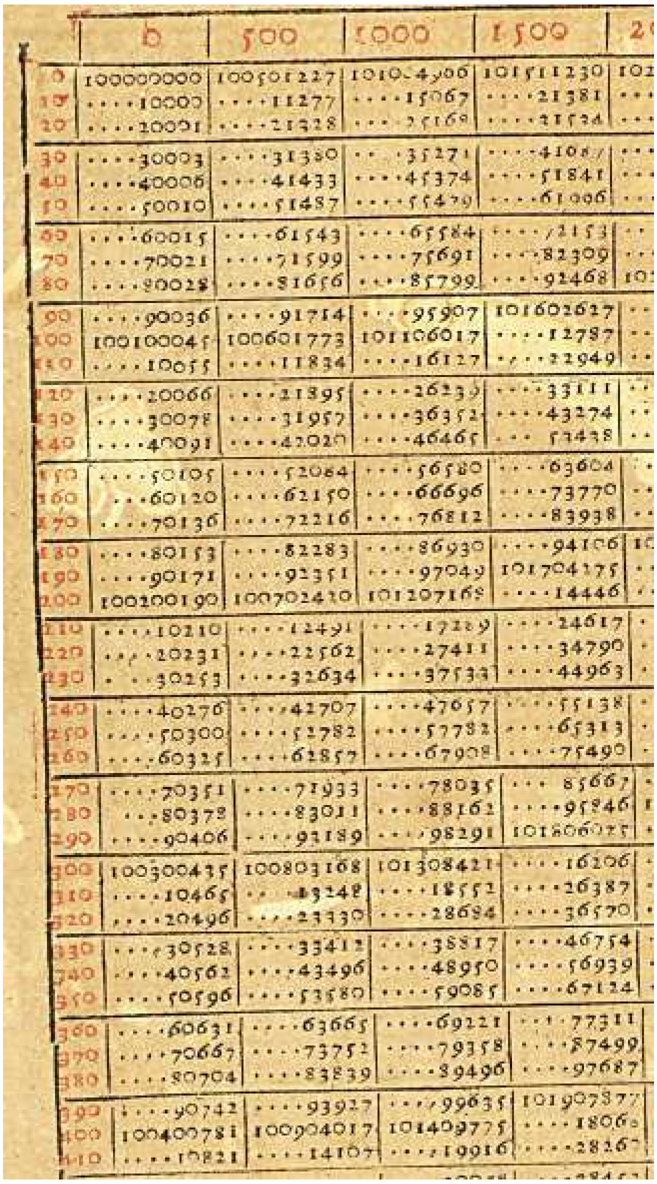
(Imagem usada com permissão da University Library - Graz)

Bürgi deu a relação de potências de dois como exemplo, mas na verdade diferentes parâmetros sustestaram sua relação logarítmica. Como ele observou, as potências sucessivas de dois aumentam muito rapidamente para serem úteis para interpolar entre os valores, então, em vez disso, ele usou uma razão comum de 1,0001, e os valores sucessivos foram tabulados da seguinte forma:

$$b_{n+1} = b_n(1{,}0001) \text{ com } b_0 = 10^8$$

Assim, cada valor sucessivo na tabela (Figura 3.7) pode ser gerado multiplicando o anterior por 1,0001. Bürgi usou o fator de 10^8 para permitir maior precisão de inteiro.

Por exemplo, o logaritmo de 101907877 (um número preto) pode ser encontrado usando as tabelas a seguir (devemos notar que seus valores de logaritmo aumentados em 10 e também foram multiplicados por um fator de 10).



	0	500	1000	1500
0	100000000	100501227	101004966	101511230
10	····10000	····11277	····15067	····21381
20	····20001	····21328	····25169	····21534
30	····30003	····31380	····35271	····41087
40	····40006	····41433	····45374	····51841
50	····50010	····51487	····55479	····61906
60	····60015	····61543	····65584	····72153
70	····70021	····71599	····75691	····82309
80	····80028	····81656	····85799	····92468
90	····90036	····91714	····95907	101602627
100	100100045	100601773	101106017	····12787
110	····10055	····11834	····16127	····22949
120	····20066	····21895	····26239	····33111
130	····30078	····31957	····36352	····43274
140	····40091	····42020	····46465	····53438
150	····50105	····52084	····56580	····63604
160	····60120	····62150	····66696	····73770
170	····70136	····72216	····76812	····83938
180	····80153	····82283	····86930	····94106
190	····90171	····92351	····97049	101704275
200	100200190	100702420	101207169	····14446
210	····10210	····12491	····17289	····24617
220	····20231	····22562	····27411	····34790
230	····30253	····32634	····37533	····44963
240	····40276	····42707	····47657	····55138
250	····50300	····52782	····57782	····65313
260	····60325	····62857	····67908	····75490
270	····70351	····72933	····78035	····85667
280	····80378	····83011	····88162	····95846
290	····90406	····93189	····98291	101806025
300	100300435	100803168	101308421	····16206
310	····10465	····13248	····18552	····26387
320	····20496	····23330	····28684	····36570
330	····30528	····33412	····38817	····46754
340	····40562	····43496	····48950	····56939
350	····50596	····53580	····59085	····67124
360	····60631	····63665	····69221	····77311
370	····70667	····73752	····79358	····87499
380	····80704	····83839	····89496	····97687
390	····90742	····93927	····99635	101907877
400	100400781	100904017	101409775	····18066
410	····10821	····14107	····19916	····28267

Figura 3.7. Localizando um valor de logaritmo

(imagem usada com permissão da University Library – Graz)

Analisando o número preto 101907877 na tabela (consulte a Figura 3.7), encontra-se o número ou logaritmo vermelho correspondente; neste caso é 189. Para verificar o valor 101907877, nós vemos:

$$101907877 = (10^8)\,(1{,}0001)^{189}$$

Um dos aspectos interessantes do sistema de Bürgi foi o uso da cor para enfatizar a relação entre as progressões aritméticas e geométricas. Ao contrário de Napier, Bürgi não desenvolveu terminologia técnica para capturar a relação, mas simplesmente se referiu aos números e suas contrapartes logarítmicas como números pretos e vermelhos, respectivamente, e usou tinta preta e vermelha para manter essa distinção. Isso foi feito de forma consistente ao longo de sua obra: os argumentos de tabulação, os logaritmos, são impressos em vermelho, e as entradas tabulares, os números comuns ou antilogaritmos, são impressos em preto.

Bürgi afirmou que suas tabelas podem ser usadas para todos os tipos de cálculos, incluindo multiplicação, divisão, extração de raízes e cálculo de proporções médias. Ele forneceu cerca de 26 exemplos dos vários cálculos e do uso correspondente das tabelas, Bürgi simplesmente listou os números pretos (antilogaritmos), identificou seus números vermelhos correspondentes (logaritmos) e os somou, e finalmente determinou o número preto correspondente à soma. (Bürgi descreveu métodos de interpolação linear sempre que os números pretos ou vermelhos correspondentes não foram encontrados nas tabelas.) Por exemplo, para fazer a multiplicação 154030185 x 205518112 (parcelas dadas como números pretos), ele encontrou seus logaritmos correspondentes (números vermelhos) nas tabelas, em seguida, somou-os e converteu o número vermelho resultante de volta ao seu número preto original (antilogaritmos), como segue:

154030185 X 205518112 $\leftrightarrow$ registro (154030185) + registro (205518112)
= 43200 + 72040
= 115240

Esta soma, 115240, é então localizado nas tabelas e o número preto correspondente (o produto) é 316559928.

A raiz cúbica de um número muito grande também é facilmente calculada usando as tabelas de Bürgi. Por exemplo, para extrair a raiz cúbica de 561203700 (um determinado número preto), Bürgi localizou o logaritmo correspondente (número vermelho) e simplesmente pegou um terço dele, como segue:

$\sqrt[3]{561203700}$ $\rightarrow$ registro (561.203.700) = 172500
172500 ÷ 3 = 57500

57500 = registro (X) $\rightarrow$ X = 177,707944 como exigido para que a raiz cúbica desejada seja 177,707944. Esse processo não faz uso direto de um algoritmo de extração de raiz cúbica.

Bürgi computou logaritmos de potências de dez, preenchendo cinquenta e oito páginas de tabelas para um total de 23.030 entradas (23027, mais 3 entradas adicionais) a serem computadas para oito dígitos significativos. Além das tabelas, Bürgi escreveu um texto acompanhante, que deu suas motivações gerais, bem como muitos exemplos trabalhados para mostrar exatamente como as tabelas poderiam ser usadas para diminuir o trabalho de computação. Estas foram publicadas em 1620, embora haja razões para supor que as tabelas já existiam antes dessa época.

3.2.6 Logaritmos: Conclusão

Os logaritmos representavam na época de sua criação, de muitas maneiras tanto o que era antigo quanto o que era novo. Esta relação entre sequências permitiu preocupações de computação, mas, também lançou um olhar futuro para noções nascentes sobre funções matemáticas. Embora os logaritmos fossem principalmente uma ferramenta para facilitar a computação, eles foram mais uma das percepções cruciais que direcionaram a atenção dos estudiosos da matemática para noções de organização mais abstratas. Mas uma coisa é muito clara: o conceito de logaritmo como o entendemos hoje como uma função é bastante diferente em muitos aspectos de como foi originalmente concebido. Mas, eventualmente, por meio do trabalho, consideração e desenvolvimento de muitos matemáticos, o logaritmo se tornou muito mais do que uma forma útil de calcular com números grandes e difíceis de controlar. Tornou-se uma relação e função matemática por direito próprio.

Com o tempo, o logaritmo evoluiu de um dispositivo de economia de trabalho para se tornar uma das funções básicas da matemática. Hoje, ele foi estendido para números negativos e complexos e é vital em muitos ramos modernos da matemática. Ele tem um papel importante na teoria dos grupos e é chave para o cálculo, com suas derivadas e seu aparecimento nas soluções para várias integrais. Os logaritmos formam a base da escala Richter e da medida do pH, e caracterizam os intervalos musicais na oitava, para citar apenas algumas aplicações. Ironicamente, o logaritmo ainda serve como uma espécie de dispositivo de economia de trabalho, mas não para o benefício do esforço humano. Muitas vezes, é usado por computadores para aproximar certas operações que seriam muito dispendiosas em termos de complexidade computacional, particularmente os algoritmos que envolvem um tempo ou um espaço de armazenamento da forma x^n.

3.3. A exponencial e^x na História da Matemática

Pelos registros que temos sobre a História da Matemática, pouco se sabe sobre a evolução do estudo da função exponencial propriamente dita. Como já vimos, o estudo de logaritmo surgiu antes mesmo que a notação funcional de potência tivesse sido criada. Podemos encontrar problemas que envolvem juros compostos, uma aplicação das funções do tipo exponencial, em documentos antigos, como os papiros. Isso mostra que problemas que envolvem a função exponencial eram comuns desde a antiguidade.

Podemos citar o problema mencionado por [MAOR, E., 2 , p.41], encontrado em um tablete de argila da Mesopotâmia, datado de 1700 a.C., o qual propõe: "Qual é o tempo necessário para que uma soma em dinheiro dobre de valor, quando aplicada a uma taxa de 20% de juros compostos anualmente?" Podemos observar claramente que a solução do problema, apesar de ser logarítmica, é proveniente da equação exponencial $(1,2)^x = 2$, que é uma equação exponencial.

Problemas que envolviam empréstimo de dinheiro e cobrança de juros eram comuns. Entretanto, a cobrança de juros, dependendo da maneira que é computada, nos leva a uma questão interessante. Uma taxa anual de 5% por exemplo, pode ser computada semestralmente, utilizando metade da taxa anual, ou seja, duas composições de 2,5%. O interessante nesse tipo de cobrança é que, para um capital de R$ 100,00 por exemplo, se computado a 5% ao ano gera um montante de R$ 105,06, cerca de seis centavos a mais.

Aparentemente a diferença é insignificante, entretanto se tomarmos um capital de R$ 1.000.000,00, essa diferença é igual a R$ 625,00. Para um caso geral, em que um capital C é aplicado a uma taxa anual i, que é composta n vezes em um ano, teremos, ao final de n composições, o montante $M = C\left(1 + \frac{i}{n}\right)^n$. Se considerarmos C = 1 e i = 100%, teremos a seguinte expressão:

$$M = C\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Quando atribuímos valores cada vez maiores para n, percebemos que os valores numéricos da expressão, à medida que n cresce, vão se aproximando cada vez mais de 2,71828. De acordo com [MAOR, E., 2, p.45], não se sabe ao certo quem primeiro estudou o comportamento de tal expressão, entretanto, o valor limite dessa expressão, quando n tende ao infinito, é a base para a definição de um número irracional, que mais tarde seria denotado por e, a base da função que hoje é chamada de exponencial natural. Não se sabe ao certo quem primeiro notou o comportamento da expressão M = C$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ quando *n* tende para infinito, por isso, a data exata do nascimento do número *e* permanece obscura. Mas, podemos notar que sua origem data do século XVII, por volta da época em que Napier criou suas tábuas, pois podemos encontrar uma referência indireta ao número *e* em seus logaritmos. Vimos que, se $N=10^7(1 - 10^{-7})^L$, então L é o logaritmo neperiano de N. Então podemos escrever $\frac{N}{10^7} = (1 - 10^{-7})^L$, e dividindo N e L por 10^7, (o que seria o mesmo que mudar a escala de nossas variáveis) teremos $\frac{N}{10^7} = (1 - \frac{1}{10^7}) \exp(\frac{10^7 L}{10^7}) \rightarrow N^* = \left[\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)\exp(10^7)\right]^{L^*}$, sendo $N^* = \frac{N}{10^7}$ e $L^* = \frac{L}{10^7}$.

Daí, notamos que $\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)\exp(10^7)$ é um número muito próximo de $\frac{1}{e}$, em outras palavras, os logaritmos de Napier são, virtualmente, logaritmos de base $\frac{1}{e}$. Porém, a afirmação de que Napier descobriu esta base ou propriamente o número *e* é falsa, pois como vimos Napier não pensava em termos de base, esse conceito surgiu após as ideias de Briggs.

Sabemos que o número *e* foi estudado por Euler e muito do que se sabe a respeito desse número se deve a ele. Desde convergência de sequências até somas infinitas. Sem dizer da famosa equação que relaciona as constantes mais importantes da matemática, a equação $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Isaac Newton demonstrava um interesse especial à equação $y = \frac{1}{x+1}$. Newton observou que a área delimitada sob o gráfico dessa hipérbole de x= 0 até x = t é log(t + 1). Assim, ao aplicar a fórmula da série geométrica infinita a cada termo da equação, Newton encontrou uma importante série:

$$\ln(1 + t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \ldots$$

Com ela, é possível calcular o valor aproximado de inúmeros logaritmos, porém, esta mesma série já teria sido publicada por Nicolaus Mercador (1620-1687) no ano de 1668, em um trabalho intitulado Logarithmotechnia, no qual a série redescoberta por Newton aparecia pela primeira vez. Esta dentre outras descobertas, impulsionaram Newton à criação da Teoria das Fluxões ou Método das Fluxões, a teoria precursora do Cálculo Diferencial e Integral.

Por meio dessa série, seria possível encontrar o valor aproximado da base do logaritmo que fornece o valor da área sob o gráfico da hipérbole $y = \frac{1}{x}$. Todavia, não foi esse o caminho escolhido para a sua determinação.

Quando Newton e Leibniz desenvolveram o Cálculo, surgiu então o conceito de derivação e de derivada de uma função. Vejamos o que ocorre para as funções exponenciais, do tipo y = b^x, em que x é um número real, e b > 0 e b ≠ 1. Na definição de derivada de uma função y = f(x) temos $\frac{dy}{dx} = \lim_{x \to xo} \frac{f(x)-f(xo)}{x-xo}$. Dessa forma, é possível demonstrar que as funções exponenciais têm uma característica marcante, que as difere de qualquer outra função, a de possuir taxa de variação proporcional à própria função, daí a grande aplicabilidade em vários ramos do conhecimento. No caso da função exponencial f(x) = e^x, a derivada e a própria função são iguais o que faz dela uma das principais funções estudadas no cálculo.

Vemos que a história da função exponencial está repleta de acontecimentos que marcaram época na comunidade matemática. Foram grandes fatos que desencadearam novas descobertas e novos estudos sobre uma das principais funções presentes na matemática e em muitos outros ramos das ciências da natureza.

CAPÍTULO 4

Desenvolvimento Teórico

4.1. Potências de Expoente Racional

Seja a um número real positivo. Para todo $n \in \mathbb{N}$, a potência a^n, de base a e expoente n, é definida como o produto de n fatores iguais a a. Para n=1, como não há produto de um só fator, põe-se $a^1 = a$, por definição.

A definição indutiva de a^n é: $a^1 = a$ e $a^{n+1} = a.a^n$.

Para quaisquer m, $n \in \mathbb{N}$, tem-se:

$$a^m.a^n = a^{m+n}$$

pois em ambos os membros desta igualdade temos o produto de m + n fatores iguais a a. Segue-se que, para $m_1, m_2, \ldots, m_k$ quaisquer, vale:

$$a^{m1}.a^{m2}. \ldots . a^{mk} = a^{m1+m2+\ldots+mk}$$

Em particular, se $m_1 = \ldots = m_k = m$, vem $(a^m)^k = a^{mk}$.

Se $a > 1$ então, multiplicando ambos os membros desta desigualdade por a^n, obtemos $a^{n+1} > a^n$. Portanto,

$$a > 1 \rightarrow 1 < a < a^2 < \ldots < a^n < a^{n+1} < \ldots \ .$$

Além disso,

$$0 < a < 1 \rightarrow 1 > a > a^2 > \ldots > a^n > a^{n+1} > \ldots \ .$$

Como se vê multiplicando ambos os membros da desigualdade $a < 1$ pelo número positivo a^n.

Portanto a sequência cujo n-ésimo termo é a^n é crescente quando $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$. Para $a = 1$, esta sequência é constante, com todos os seus termos iguais a 1.

Existem sequências crescentes que são limitadas superiormente. Um exemplo disso é

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$$

onde se tem

$$\frac{n}{n+1} < 1, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Entretanto, se $a > 1$, a sequência formada pelas potências a^n, $n \in \mathbb{N}$, é ilimitada superiormente: nenhum número real c, por maior que seja, pode ser superior a todas as potências a^n. Noutras palavras, dado arbitrariamente $c \in \mathbb{R}$, pode-se sempre achar $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n > c$.

Para provar isto, escrevemos $a = 1 + d$, $d > 0$. Pela desigualdade de Bernoulli, temos $a^n > 1 + nd$, para qualquer $n > 1$, conforme Matemática Discreta (da Sociedade Brasileira da

Matemática), capítulo 2 da página 17. Logo, se tomarmos $n > (c - 1)/d$, teremos $1 + nd > c$ e, com maior razão, $a^n > c$.

O fato de que a sequência $a, a^2, a^3, ..., a^n, ...$ é ilimitada superiormente quando $a > 1$ é um caso particular da noção de limite infinito, que definiremos agora.

Diz-se que uma sequência (x_n) de números reais tem limite "mais infinito" (ou simplesmente "infinito"), e escreve-se $\lim x_n = +\infty$, quando para qualquer $A > 0$, fixado arbitrariarmente, for possível obter um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos x_n com $n > n_0$ são maiores do que A. Ou seja, $n > n_0 \Rightarrow x_n > A$.

Toda sequência crescente ilimitada (x_n) tem limite infinito pois uma vez obtido $x_{no} > A$, daí em diante todo x_n com $n > n_0$ cumpre $x_n > x_{no} > A$. Portanto, tem-se $\lim a^n = +\infty$, quando $a > 1$. Observe-se, porém, que pode ocorrer termos $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ sem que (x_n) seja crescente. Isto se dá, por exemplo, com a sequência 1,4,3,16,5,36, . . , na qual $x_n = n$ se n é ímpar e $x_n = n^2$ se n é par.

Pode também acontecer que uma sequência de números positivos seja ilimitada sem ter limite infinito. Por exemplo, a sequência 1,2,1,4,1,6,1,8, . . ., onde se tem $x_n = n$ se n é par e $x_n = 1$ se n é ímpar. Aqui, tem-se (x_n) ilimitada mas não é verdade que $\lim x_n = +\infty$.

De modo análogo, se $0 < a < 1$, então as potências sucessivas $a, a^2, a^3, . . .$ decrescem abaixo de qualquer cota positiva: fixado arbitrariarmente um número $c > 0$, por menor que seja, pode-se sempre achar um expoente $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n < c$.

Com efeito, sendo $0 < a < 1$, se escrevermos $b = 1/a$, teremos $b > 1$. Logo, pelo que acabamos de ver, podemos achar $n \in \mathbb{N}$ tal que $b^n > 1/c$, ou seja, $1/a^n > 1/c$, donde $a^n < c$. Com maior razão, para todo $p > n$ tem-se $a^p < c$.

Este resultado significa que $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ quando $0 < a < 1$. (A expressão $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ lê-se "o limite de a^n, quando n tende ao infinito, é igual a zero").

Procuramos agora atribuir um significado à potência a^n, quando $n \in \mathbb{Z}$, que pode ser negativo ou zero. Isto deve ser feito de modo que seja mantida a regra fundamental $a^m \,.\, a^n = a^{m+n}$.

Em primeiro lugar, observa-se que $a^0 =1$. De fato, como a igualdade $a^0 \,.\, a^1 = a^{0+1}$ deve ser válida, teremos $a^0 \,.\, a = a$, logo a única definição possível é $a^0 = 1$.

Em seguida, dado qualquer $n \in \mathbb{N}$, devemos ter:

$$a^{-n} \,.\, a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1, \quad \text{logo } a^{-n} = 1/a^n .$$

Assim, se quisermos estender o conceito de potência do número real $a > 0$, para admitir expoentes inteiros quaisquer e preservar a igualdade $a^m \,.\, a^n = a^{m+n}$, a única definição possível consiste em pôr $a^0 = 1$ e $a^{-n} = 1/a^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

A função $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(n) = a^n$, $n \in \mathbb{Z}$, além de cumprir a igualdade fundamental: $f(m + n) = f(m) \,.\, f(n)$, é ainda crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$. Segue-se, em particular que, para $a > 1$ e $n \in \mathbb{N}$, tem-se $a^{-n} < 1 < a^n$ e, para $0 < a < 1$, tem-se $a^n < 1 < a^{-n}$ pois $-n < 0 < n$ e $a^0 = 1$.

De $a^m \,.\, a^n = a^{m+n}$ segue-se que $(a^m)^n = a^{mn}$ ainda quando $m, n \in \mathbb{Z}$.

Prosseguindo, vejamos que sentido pode ser dado à potência a^r quando $r = m/n$ é um número racional (onde $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ e $a \neq 0$), de modo que continue válida a regra $a^r.\, a^s = a^{r+s}$. Desta igualdade resulta, que se deve ter, para $r = m/n$:

$$(a^r)^n = a^r.\, a^r \,.\; \ldots \;.\, a^r = a^{r+r+\cdots+r} = a^{rn} = a^m.$$

Portanto a^r é o número real positivo cuja n-ésima potência é igual a a^m. Por definição de raiz, este número é $\sqrt[n]{a^m}$, a raiz n-ésima de a^m. Assim, a única maneira de definir a potência a^r, com $r = m/n$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ não nulo, consiste em pôr

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Depois de dar esta definição, há alguns detalhes que devem ser examinados. Em primeiro lugar, como se tem $m/n = mp/np$ para todo $p \in \mathbb{N}$, é preciso mostrar que $\sqrt[n]{m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$ a fim de que a definição não seja ambígua. Em segundo lugar, deve-se mostrar que a definição dada assegura a validez da regra $a^r \,.\, a^s = a^{r+s}$ para $r, s \in \mathbb{Q}$. E finalmente, cumpre provar que a função $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}^+$, definida por $f(r) = a^r$, é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$.

A função $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}^+$, definida por $f(r) = a^r$, não é sobrejetora. Noutras palavras, fixado $a > 0$, nem todo número real positivo é da forma a^r com r racional. Isto fica evidente se observarmos que, como $\mathbb{Q}$ é um conjunto enumerável, o mesmo deve ocorrer com sua imagem $f(\mathbb{Q})$, porém $\mathbb{R}^+$ não é enumerável. De um modo mais elementar, este fato pode ser ilustrado mediante um exemplo. Tomemos $a = 10$ e indaguemos se existe algum número racional $r = m/n$ tal que $10^{m/n} = 11$ ou seja, tal que $10^m = 11^n$, onde $m, n \in \mathbb{N}$. É claro que, para qualquer $m \in \mathbb{N}$, 10^m se escreve como 1 seguido de m zeros enquanto 11^n não pode ter esta forma. Logo o número real positivo 11 não pertence à imagem da função $r \rightarrow 10^r$, de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}^+$.

As potências a^r, com expoente racional, embora não contenham todos os números reais positivos, estão espalhados por toda parte em $\mathbb{R}^+$, desde que seja $a \neq 1$. Este é o conteúdo do lema abaixo.

LEMA

Fixado o número real positivo $a \neq 1$, em todo intervalo de $\mathbb{R}^+$ existe alguma potência a^r, com $r \in \mathbb{Q}$.

DEMONSTRAÇÃO

Dados $0 < \alpha < \beta$, devemos achar $r \in \mathbb{Q}$ tal que a potência a^r pertença ao intervalo $[\alpha,\beta]$, isto é, $\alpha \leq a^r \leq \beta$. Por simplicidade, suporemos a e α maiores do que 1. Os demais casos podem ser tratados de modo análogo. Como as potências de expoente natural de números maiores do que 1 crescem acima de qualquer cota prefixada, podemos obter números naturais m e n tais que:

$$\alpha \leq \beta \leq a^m \quad \text{e} \quad 1 < a < \left(1 + \frac{\beta - \alpha}{a^m}\right)^n .$$

Da última relação decorrem sucessivamente

$$1 < a^{1/n} < 1 + \frac{\beta - \alpha}{a^m} \quad \text{e} \quad 0 < a^m \left(a^{1/n} - 1\right) < \beta - \alpha .$$

Logo

$$\frac{m}{n} \leq m \Rightarrow 0 < a^{\frac{m}{n}} \left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) < \beta - \alpha \Leftrightarrow 0 < a^{\frac{m+1}{n}} - a^{\frac{m}{n}} < \beta - \alpha.$$

Assim, as potências $a^0 = 1$, $a^{1/n}, a^{2/n}, \ldots, a^m$ são extremos de intervalos consecutivos, todos de comprimento menor do que o comprimento $\beta - \alpha$ do intervalo $[\alpha,\beta]$. Como $[\alpha,\beta] \subset [1, a^m]$, pelo menos um desses extremos, digamos $a^{\frac{m}{n}}$, está contido no intervalo $[\alpha,\beta]$.

Para estudar o caso de expoentes reais, necessitamos da teoria dos limites. Podemos fazer isso usando a densidade dos racionais na reta real ou adotando uma nova postura: definimos primeiramente a função logarítmica utilizando Cálculo Diferencial e Integral (área sob o gráfico de um ramo da hipérbole 1/x) e, posteriormente, mostrando que a função exponencial é a inversa da função logarítmica. Passamos, então a estudar os logaritmos.

4.2 Logaritmo e suas Propriedades Operatórias

Define-se logaritmo de um número x > 0 na base a > 0 e a ≠ 1 como sendo um número y, tal que $a^y = x$. Pode-se escrever:

$$\log_a x = y \iff a^y = x \qquad \text{(a)}$$

Considerando os números reais 0 < a ≠ 1, 0 < c ≠ 1, m ≠ 0, u > 0 e v > 0 dessa definição decorrem as propriedades operatórias dos logaritmos.

I) $\log_a(u.v) = \log_a u + \log_a v$

Demonstração. Considerando u, v, números reais positivos e 0 < a ≠ 1, para mostrar que $\log_a(u.v) = \log_a u + \log_a v$, tomemos $\log_a u = x$ e $\log_a v = y$, sendo x e y números reais.

Temos, usando (a),

$$\log_a u = x \iff a^x = u$$
$$\log_a v = y \iff a^y = v$$

E assim,

$$a^x . a^y = u . v \iff$$
$$a^{x+y} = u . v \iff$$
$$x + y = \log_a(u.v)$$
$$\log_a u + \log_a v = \log_a(u.v)$$

II) $\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v$

Demonstração. Para mostrar que $\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$, com 0 < a ≠ 1, u e v números reais positivos, considere $\log_a u = x$ e $\log_a v = y$.

Utilizando (a), temos:

$$\log_a u = x \iff a^x = u \quad \text{e}$$
$$\log_a v = y \iff a^y = v$$

Assim,

$$\frac{a^x}{a^y} = \frac{u}{v} \iff$$

$$a^{x-y} = \frac{u}{v} \iff \text{(a)}$$

$$x - y = \log_a\left(\frac{u}{v}\right) \Leftrightarrow$$

$$\log_a u - \log_a v = \log_a\left(\frac{u}{v}\right)$$

III) $\log_a u^v = v.\log_a u$

Demonstração. Para mostrar que $\log_a u^v = v.\log_a u$ com $0 < a \neq 1$, u real e positivo e v real, considere $\log_a u = x$.

Usando (a), temos:

$$\log_a u = x \Leftrightarrow a^x = u$$

Assim,

$$(a^x)^v = u^v \Leftrightarrow$$

$$a^{xv} = u^v \Leftrightarrow \text{(a)}$$

$$\log_a u^v = x \,.\, v \Leftrightarrow$$

$$\log_a u^v = v.\log_a u$$

IV) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

Demonstração. Fazendo $\log_a b = x \leftrightarrow a^x = b \leftrightarrow$

$$\log_c a^x = \log_c b \overset{(III)}{\Longleftrightarrow} x.\log_c a = \log_c b \leftrightarrow$$

$$x = \frac{\log_c b}{\log_c a} \Leftrightarrow \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

V) $\log_{a^m} x = \frac{1}{m} . \log_a x$

Demonstração. Usando a propriedade (IV), temos:

$$\log_{a^m} x = \frac{\log_a x}{\log_a a^m} \overset{(III)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\log_{a^m} x = \frac{\log_a x}{m.\log_a a}$$

$$\log_{a^m} x = \frac{1}{m} . \log_a x$$

4.3 Função Logarítmica

Uma função real f : $\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se função logarítmica quando é caracterizada pelas seguintes propriedades:

A) f é uma função contínua.

B) f(xy) = f(x) + f(y) para quaisquer x,y $\in \mathbb{R}_+^*$.

Denotamos tal função por f(x) = $\log_b x$ em que o número b é chamado base. Tradicionalmente, as bases dos logaritmos mais comuns são: base 10, chamado **logaritmo decimal** (representado por log x), pois, nossos números são escritos usualmente no sistema de numeração decimal e base e sendo o número $e \approx 2{,}718281$ (Número de Euler), chamado **logaritmo natural** ou **logaritmo neperiano** em homenagem a John Napier. Entretanto, tal denominação não é inteiramente apropriada, pois, como já foi visto, o logaritmo original definido por Napier não coincide com o logaritmo natural. O logaritmo natural será caracterizado mais adiante nesse trabalho.

As propriedades a seguir são consequências de A e B enunciadas acima.

Propriedade 1

Uma função logarítmica f: $\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ é sempre estritamente monótona, isto é, números positivos diferentes tem logaritmos diferentes.

Demonstração. Se x, y $\in \mathbb{R}_+^*$são diferentes, então ou x < y ou x > y. No primeiro caso resulta de A que f(x) < f(y). No segundo caso, tem-se f(x) > f(y). Em qualquer hipótese, de x ≠ y conclui-se que f(x) ≠ f(y).

Propriedade 2

O logaritmo de 1 é zero, ou seja, $\log_b 1 = 0$.

Demonstração. Por B tem-se f(1) = f(1.1) = f(1) + f(1), logo, f(1) = 0.

Propriedade 3

Os números maiores do que 1 tem logaritmos positivos e os números menores do que 1 tem logaritmos negativos.

Demonstração. Como f(x) é uma função crescente, toma-se 0 < x < 1 < y. De A resulta f(x) < f(1) < f(y), logo f(x) < 0 < f(y).

Propriedade 4

Para todo x > 0, tem-se que f(1/x) = - f(x).

Demonstração. Como x .$\frac{1}{x}$ = 1, da propriedade B tem-se que f (x. $\frac{1}{x}$) = f(1), assim f(x) + f($\frac{1}{x}$) = f(1) = 0. Então, f($\frac{1}{x}$) = - f(x).

Propriedade 5

Uma função logarítmica f: $\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ é ilimitada superior e inferiormente.

Demonstração. Dados arbitrariarmente dois números reais α e β, é sempre possível achar dois números positivos x e y tais que f(x) < α e f(y) > β.

Toma-se um número natural n tão grande que n > $\frac{\beta}{f(2)}$. Como f(2) > 0 (propriedade 3), tem-se n.f(2) > β pela propriedade operatória III, n.f(2) = f(2^n). Portanto, f(2^n) > β.

Agora, escolhendo y = 2^n, f(y) > β, o que mostra que a função é ilimitada superiormente.

Para provar que f é ilimitada inferiormente, basta lembrar que f($\frac{1}{x}$) = - f(x). Dado qualquer número real x, como foi provado acima, f(y) > -α.

Fazendo x = $\frac{1}{y}$, isto é, y = $\frac{1}{x}$, tem-se que:

$$f(\tfrac{1}{x}) > -\alpha \iff -f(x) > -\alpha \leftrightarrow f(x) < \alpha.$$

Propriedade 6

Dadas as funções logarítmicas f,g : $\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, existe uma constante k > 0, tal que g(x) = k.f(x), para todo x > 0.

Demonstração. Sejam f(x) = $\log_a x$ e g(x) = $\log_b x$ dois logaritmos. De acordo com a propriedade da mudança de base (IV), vale a fórmula $\log_a x = \frac{1}{\log_b a} \cdot \log_b x$ ou, equivalentemente, $\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x$. Tomamos a constante k = $\log_b a$ e vemos que os dois logaritmos diferem pela constante multiplicativa k.

Propriedade 7

Toda função logarítmica f é sobrejetiva, isto é, dado qualquer número real k, existe sempre um único número real positivo x tal que f(x) = k.

Demonstração. Seja f(x) = $\log_a x$ uma função sobrejetora. Dado k real, tomamos x = a^k. Assim, $\log_a x = \log_a a^k =$ k e, portanto, todo elemento do contradomínio (reais positivos) é imagem de um elemento do domínio (reais).

Corolário

Toda função logarítmica f: $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, é uma correspondência biunívoca (bijeção) entre $\mathbb{R}_+^*$ e $\mathbb{R}$.

4.4 Logaritmo Natural

Historicamente, primeiro o padre jesuíta belga Gregory Saint Vicent, em 1647, e depois Isaac Newton, em 1660, reconheceram a relação que existe entre a área de uma faixa do gráfico de uma hipérbole com a definição geométrica dos logaritmos. Embora nenhum dos dois tenha identificado realmente essa área com o logaritmo natural, nem tenham reconhecido o número "e", suas observações pioneiras mostram a concepção geométrica de uma função logarítmica.

Seja H o ramo positivo do gráfico de uma hipérbole representada pela função y = $\frac{1}{x}$ (veja a figura 4.1). H é um subconjunto do plano constituído pelos pontos da forma $\left(x, \frac{1}{x}\right)$ e pode ser escrito por:

$$H = \left\{(x, y) : x > 0, y = \frac{1}{x}\right\}$$

Geometricamente o ramo H da hipérbole tem o seguinte aspecto:

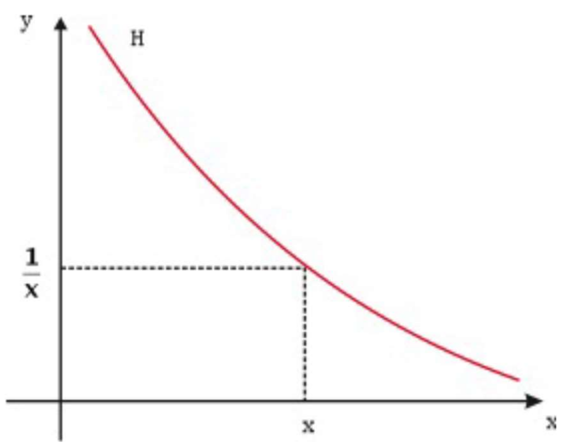


Figura 4.1: Ramo H da hipérbole

Uma faixa de hipérbole é determinada fixando-se dois números reais positivos a; b com a < b e tomando a região do plano limitada pelas retas verticais x = a e x = b pelo eixo das abcissas e pela hipérbole H.

Essa região é indicada pela notação H_a^b.

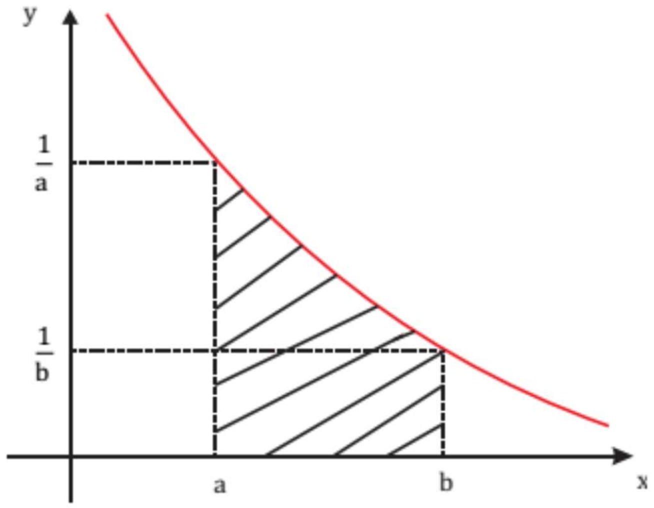


Figura 4.2: Faixa do Ramo H positivo da hipérbole

Do cálculo integral, ver [9], tem-se que a área de uma figura delimitada por uma função f, pelo eixo 0x e pela retas x = a e x = b é a integral definida de f no intervalo [a; b].

A partir da definição de integral [9], define-se o logaritmo natural de um número real positivo x como sendo a área da faixa H, ou seja, ln x = área de H_1^X.

Então, para x > 1

$$\text{Área } H_1^x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt,$$

ou seja,

$$\ln x = \log_e x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt. \text{ (Figura 4.3).}$$

Na notação para indicar o logaritmo natural de x, e é um número irracional, denominado número de Euler, em homenagem ao grande matemático suíço Leonhard Euler (1707 – 1783).

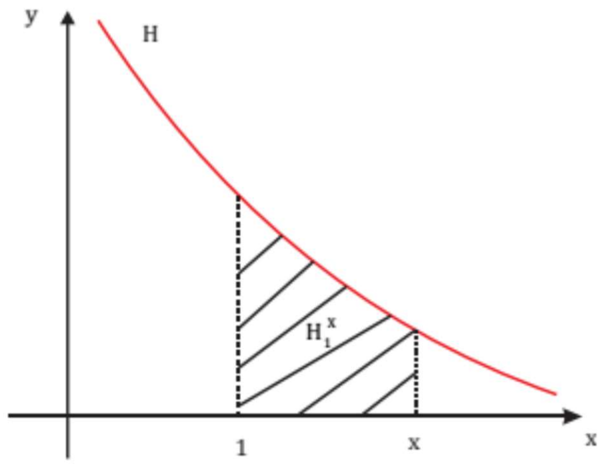


Figura 4.3: Área da faixa do ramo H positivo da hipérbole.

Não é de interesse desse trabalho, mas o número "e" pode ser definido e calculado por:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots.$$

e ≈ 2,71828182845 (ver [10] e [13])

Para 0 < x < 1, a área da faixa $H_X^1 = \int_x^1 \frac{1}{t}\,dt$ = - $\log_e(x)$ = - ln(x) (Figura 4.4).

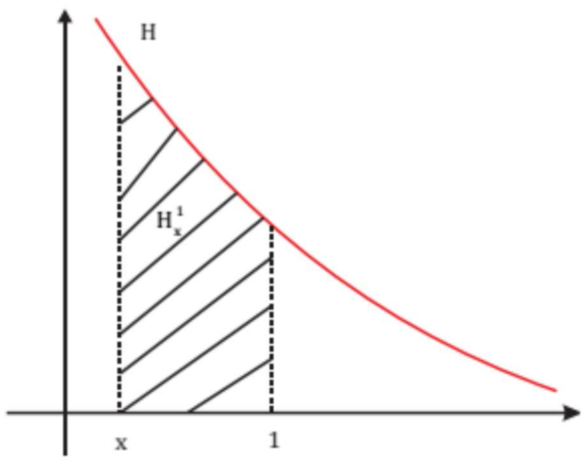


Figura 4.4: Área do segmento da reta da faixa do ramo H positivo da hipérbole.

Em particular; quando x = 1, H_1^1 se reduz a um segmento de reta, portanto tem área igual a zero. Pode-se escrever:

$$\ln(1) = 0$$

$$\ln(x) > 0, \text{ se } x > 1;$$

$$\ln(x) < 0, \text{ se } 0 < x < 1.$$

Não está definido ln(x) se $x \leq 0$.

O número "e", base dos logaritmos naturais, pode ser caracterizado pelo fato de seu logaritmo natural ser igual a 1, ou seja, a área H_1^e = 1. Escreve-se:

$$\text{Área } H_1^e = \int_1^e \frac{1}{x}\, dx = \ln(x)|_1^e = \ln(e) - \ln(1) = 1.$$

OBS: Pela definição do logaritmo, ln(e) = 1 (Figura 4.5).

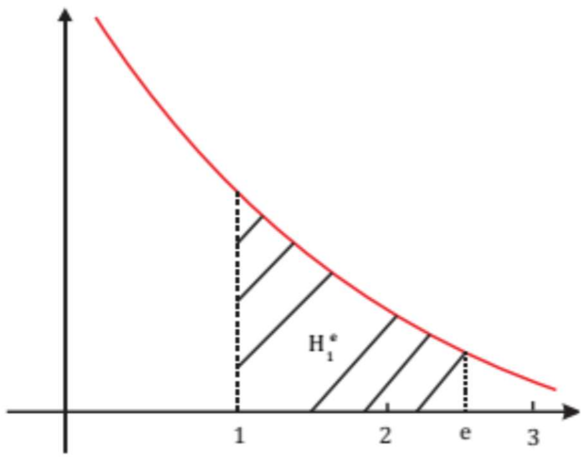


Figura 4.5: Área do logaritmo natural

4.5 Função Exponencial

A partir da definição de função logarítmica é possível se definir uma função que é inversa da função logarítmica, ou seja,

$$f(x) = y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x.$$

Seja **a** número real positivo diferente de 1. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, com $f(x) = a^x$, é dita função exponencial de base **a**.

Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, a função exponencial possui as seguintes propriedades:

I) f(x + y) = f(x) . f(y)

Demonstração. $f(x + y) = a^{x+y} = a^x . a^y = f(x) . f(y)$

Pela propriedade I percebe-se que f não pode assumir o valor zero (0), a menos que seja identicamente nula.

Por absurdo, se existisse algum $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$, então, para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x_0 + (x - x_0)) = f(x_0).f(x - x_0) = 0. f(x - x_0) = 0$, logo f seria identicamente nula. Então, se f não é uma função nula, não existe algum $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$.

Mas ainda, a função f é sempre positiva, $f(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, pois,

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) . f\left(\frac{x}{2}\right) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 > 0.$$

II) f(1) = a

Demonstração. Como $a^1 = a$, $f(1) = a$.

III) $\quad$ **$x < y$, $a^x < a^y$, quando $a > 1$ e**

$x < y$, $a^x > a^y$, quando $0 < a < 1$.

Demonstração. A propriedade diz que a função exponencial é crescente para $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$.

Daí resultará que existe uma única maneira de definir o valor de $f(x) = a^x$ quando x é irracional. Supondo que $a > 1$, então a^x tem a seguinte propriedade,

$$r < x < s \quad \text{com } r, s \in \mathbb{Q} \rightarrow a^r < a^x < a^s.$$

Não podem existir dois números reais diferentes, digamos A < B, para assumir o valor de a^x com a propriedade acima. Se existissem A e B, teríamos $r < x < s$, $r,s \in \mathbb{Q}$, então, $a^r < A < B < a^s$ e então o intervalo [A,B] não conteria nenhuma potência de a com expoente racional, o que é um absurdo, veja [9].

Portanto, quando x é irracional, a^x é o único número real cujas aproximações por falta são as potências a^r; $r < x$ e cujas aproximações por excesso são as potências a^s, $x < s$.

Em [13], a função a^x é definida por $a^x = e^{x\log a}$, para $1 \neq a > 0$.

IV) A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, definida por $f(x) = a^x$ é ilimitada superiormente.

Demonstração. Se $a > 1$, então a^x cresce, indefinidamente quando $x > 0$, ou seja, $\lim\limits_{n\to\infty} a^x = +\infty$. E, se $0 < a < 1$, a^x torna-se arbitrariamente grande quando $x < 0$, ou seja, $\lim\limits_{n\to\infty} a^x = +\infty$.

V) A função exponencial é contínua.

Demonstração. Isto significa que, dado $x_0 \in \mathbb{R}$, é possível tornar a diferença $|a^x - a^{x_0}|$ tão pequena quanto se deseja, desde que x seja tomado suficientemente próximo de x_0, ou seja $\lim\limits_{x \to x0} a^x = a^{x_0}$.

Mostremos primeiro que é possível tornar a^h tão próximo de 1 quanto desejamos, desde que |h| seja escolhido suficientemente pequeno.

Suponhamos $a > 1$ e $h > 0$. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, queremos mostrar que, tomando h pequeno, teremos $a^h < 1 + \varepsilon$. Se tomamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{a-1}{\varepsilon}$, teremos $n\varepsilon > a - 1$ logo, $a < 1 + n\varepsilon$.

Pela desigualdade de Bernoulli, $(1 + \varepsilon)^n > 1 + n\varepsilon$, então $a < (1 + \varepsilon)^n$ e $a^{\frac{1}{n}} < 1+\varepsilon$.

Em resumo: dado $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1 < a^{\frac{1}{n}} < 1+\varepsilon$. Se tomarmos h tal que $0 < h < \frac{1}{n}$, teremos $1 < a^h < a^{\frac{1}{n}} < 1+\varepsilon$. Assim, podemos fazer a^h tão próximo de 1 quanto desejamos.

Agora, fixado $x_0 \in \mathbb{R}$ e $h = x - x_0$, teremos $a^x - a^{x_0} = a^{x_0+h} - a^{x_0} = a^{x_0}(a^h - 1)$. Se x se aproximar de x_0, h tende a zero, a^h tende a 1 e $a^h - 1$ tende a zero. Então $\lim\limits_{x\to x_0} (a^x - a^{x_0}) = 0$, ou seja, $\lim\limits_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$, o que caracteriza a continuidade da função exponencial.

Conclui-se que para todo número real positivo a, diferente de 1, a função exponencial f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{+}^{*}$, dada por $f(x) = a^x$ é uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{+}^{*}$, crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$, com a propriedade de transformar somas em produtos, $f(x + y) = f(x) . f(y)$. Sua representação gráfica se encontra na figura (4.6).

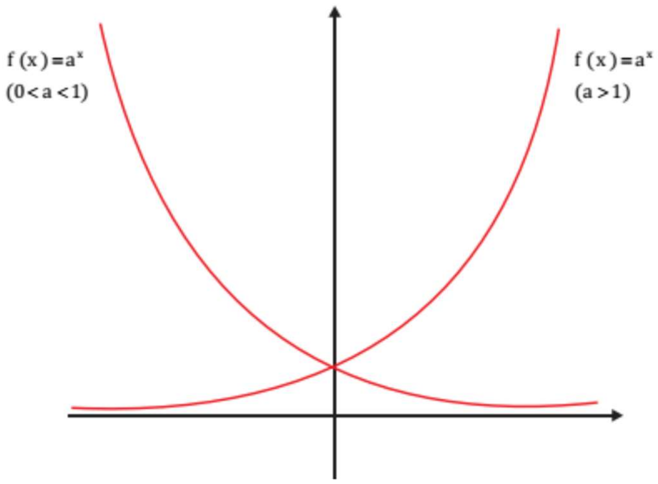


Figura 4.6: Gráfico da função exponencial

A sua injetividade decorre da sua monotonicidade. Se a > 1, por exemplo, então $x > y \rightarrow a^x > a^y$ e $x < y \rightarrow a^x < a^y$, portanto $x \neq y \rightarrow a^x \neq a^y$.

Observa-se, da definição das funções logarítmicas $f(x) = \log_a x$ e exponencial $f(x) = a^x$ e devido a bijetividade de ambas, que uma delas é a função inversa da outra (o domínio $\mathbb{R}_{+}^{*}$, da função logarítmica é o conjunto imagem da exponencial e o domínio $\mathbb{R}$ da exponencial é o conjunto imagem da logarítmica).

Graficamente, pode-se observar que os gráficos são simétricos em relação à reta bissetriz dos quadrantes ímpares. Ver figuras (4.7) e (4.8).

Os gráficos estão representados abaixo, nos dois casos:

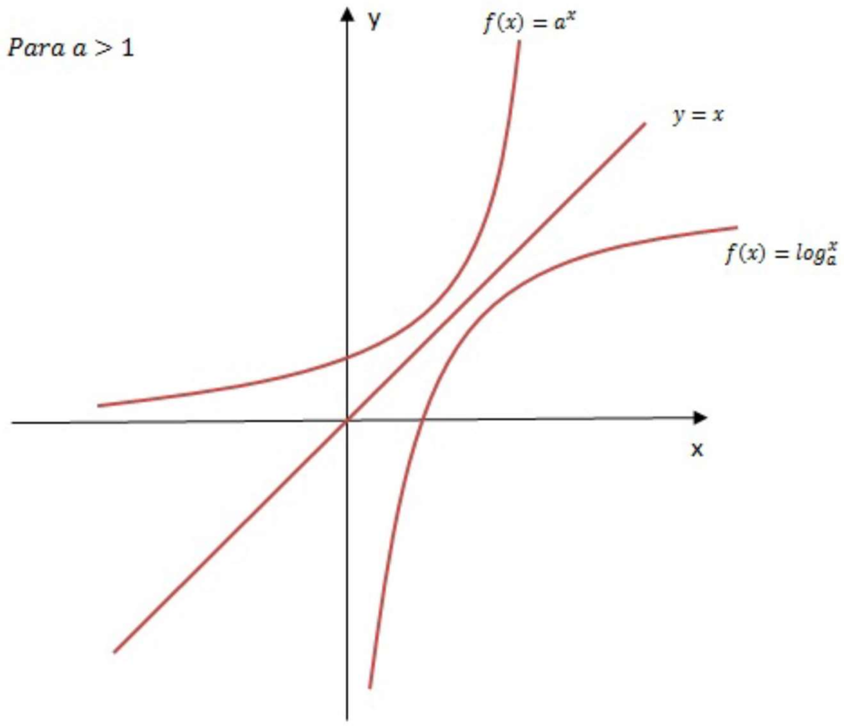


Figura 4.7: Gráficos das funções exponencial e logarítmica para base > 1.

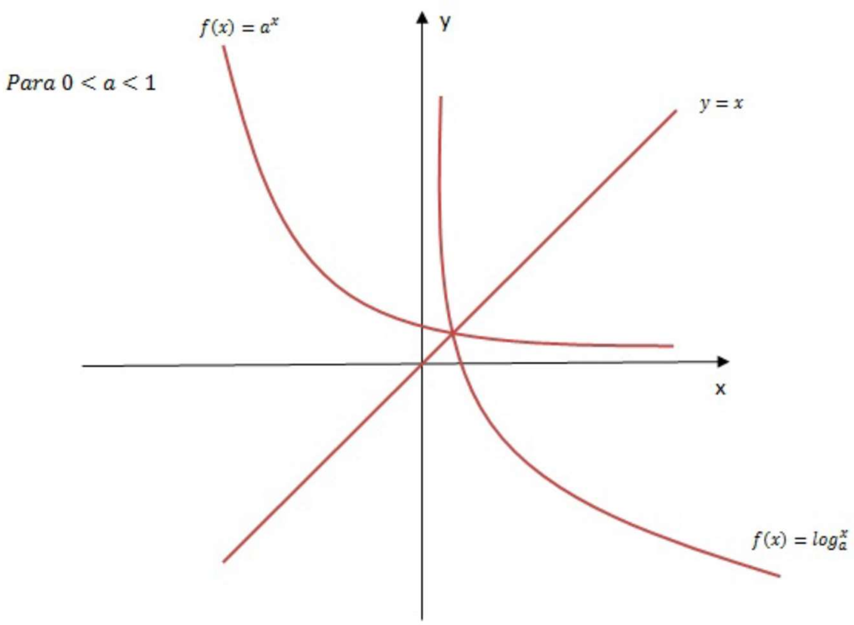


Figura 4.8: Gráficos das funções exponencial e logarítmica para base $0 < base < 1$.

CAPÍTULO 5

Aplicações das funções exponencial e logarítmica

Nesse capítulo será apresentada uma série de situações em que as exponenciais e logaritmos são usadas na modelagem dos fenômenos envolvidos; essas aplicações podem ser adequadas ao escopo do Ensino Médio, sendo de grande relevância na motivação dos alunos ao estudo desses conteúdos.

5.1 Decaimento Radioativo

Existem alguns átomos na natureza que são instáveis, isto é, possuem uma tendência natural de se desintegrarem com o tempo; é o caso do rádio, do urânio, entre outros. Estes átomos são classificados como radioativos, por emitirem partículas transformando-se em outra substância não radioativa. Com o passar do tempo, devido a emissão de partículas, a massa da substância original diminui, ao passo que a massa da sustância transformada aumenta. Isto se dá de tal forma que, num determinado instante, a quantidade de matéria que se desintegra é proporcional `a massa da substância original presente no corpo naquele dado instante. Digamos que uma determinada substância radioativa se desintegre a uma taxa constante por unidade de tempo, que chamaremos de α. Sendo M_0 a massa inicial da substância radioativa, então para cada instante t, teremos:

$$M = M_0\,(1-\alpha)^t \qquad (5.1.1)$$

Procurando uma melhor aproximação para a situação descrita, podemos imaginar que a desintegração ocorre em intervalos de $\frac{1}{n}$ unidades de tempo. Assim, a taxa de desintegração em cada intervalo seria de $\frac{\alpha}{n}$. Fazendo n tender ao infinito, e as modificações na equação 5.1.1, teremos:

$$M = \lim_{n\to\infty} Mo\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{tn} \qquad (5.1.2)$$

Fazendo novamente uma substituição de variável, chamando de u a fração $\frac{-\alpha}{n}$, então $\frac{1}{n} = \frac{-u}{\alpha}$, e quando $n \to \infty, u \to 0$. Substituindo na equação 5.1.2:

$$M = \lim_{u \to 0} Mo\,(1+u)^{\frac{-\alpha}{u}} = Mo \lim_{u \to 0} \left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{-\alpha t} = M = M_0.e^{-\alpha t} \qquad (5.1.3)$$

Assim, a função que fornece a massa da substância decorridos t unidades de tempo depois do início da desintegração é:

$$M(t) = M_o.e^{-\alpha t} \qquad (5.1.4)$$

Na prática, a constante α fica determinada a partir de um número básico, chamado de meia-vida da substância, que seria o tempo necessário para que sua massa se reduzisse à metade.

O carbono-14, indicado por C^{14}, é um isótopo radioativo do carbono, formado na terra devido ao bombardeio de raios cósmicos. Através dos tempos, a quantidade de C^{14} na atmosfera tem-se mantido constante, porque sua produção compensa sua desintegração. Os seres vivos absorvem e perdem C^{14} de modo que, em cada espécie, a taxa de C^{14} também se mantém constante. Quando um ser vivo morre, a absorção cessa, porém, a desintegração não. Este fato pode ser usado para determinar a idade de um fóssil ou de um objeto muito antigo feito de madeira, por exemplo. Sabendo que o tempo de meia-vida do C^{14} é de 5570 anos, aplicando a função M = M(t) da equação 5.1.4, teremos:

$$M_0.e^{-\alpha.to} = \frac{1}{2} M_0, \text{ ou seja, } e^{-\alpha.to} = \frac{1}{2}.$$

Segue que, calculando o logaritmo natural em ambos os membros, $-\alpha.t_o = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$, de onde temos que:

$$\alpha = \frac{-\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{t_o} = \frac{\ln(2)}{t_o} = \frac{0,6931}{5570} = 0,00012444$$

Assim, vejamos como esse conhecimento pode ser utilizado: Num castelo inglês existe uma velha mesa redonda que muitos afirmavam ser a famosa Távola Redonda do rei Artur, que viveu no século VI. Por meio de um instrumento que mede a radioatividade, constatou-se que a massa de C^{14} hoje existente na mesa é de 0,894 vezes a massa de C^{14} que existe em pedaço de madeira viva de mesma massa da mesa. Podemos usar nosso conhecimento sobre exponenciais e logaritmos para decidir se a mesa é ou não a mesa do Rei Artur.

Aplicando a equação 5.1.4, teremos:

$$0,894Mo = M_0.e^{-\alpha.t}, \text{ ou seja, } 0,894 = e^{-\alpha.t}$$

Calculando o logaritmo natural em ambos os membros da igualdade, teremos:

$$t = -\frac{\ln(0,894)}{0,00012444} = \frac{0,1121}{0,00012444} = 900,83 \cong 901 \text{ anos.}$$

Neste caso, conclui-se que a mesa não é do rei Arthur, pois se fosse, esta deveria ter mais de 1500 anos, pelo fato da história ter ocorrido no século VI.

5.2 Capitalização Contínua (Juros Compostos)

Um capital c_o, empregado a uma taxa anual de i%, renderá, ao final de um ano, juros no valor de $\frac{c_o.i}{100}$. Fazendo α = $\frac{i}{100}$, decorrido um ano, o novo capital c será:

$$c = c_o + \alpha c_o = c_o(\,1 + \,\alpha),$$

Ou seja, no final de um ano, o capital será valor do ano anterior multiplicado pela constante 1 + α. O montante acumulado ao final de cada ano será:

Primeiro ano: M = $c_o(\,1 + \,\alpha)$

Segundo ano: M = $c_o(\,1 + \,\alpha)(\,1 + \,\alpha) = c_o(\,1 + \,\alpha)^2$

Terceiro ano: M = $c_o(1 + \,\alpha)^2(\,1 + \,\alpha) = c_o(\,1 + \,\alpha)^3$

. . .

. . .

. . .

t-ésimo ano: M(t) = $c_o(1 + \,\alpha)^t$

em que α = $\frac{i}{100}$ e t devem se referir ao mesmo período. Por exemplo, se t é o número de anos, i deve ser a taxa anual; se t for o número de meses de uma aplicação financeira, i deve ser a taxa de juros mensal.

Se tomamos uma fração $\frac{1}{n}$ do ano, o capital c_o, empregado à mesma taxa de juros, renderá $\frac{\alpha c_0}{100}$ de juros, de modo que, decorrida a fração $\frac{1}{n}$ do ano, o capital " c" se transforma em

$$c_1 = c_o + \frac{\alpha c_0}{n} = c_o\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)$$

Prosseguindo assim, se dividirmos o ano em n partes iguais e, depois de decorrido cada um desses períodos de $\frac{1}{n}$ do ano, capitalizarmos os juros rendidos, reinvestindo sucessivamente à mesma taxa, ao final de um ano, obteremos um capital maior, ou seja, $c_o(1+\frac{\alpha}{n})^n$.

Logo, parece que se dividirmos um ano em um número cada vez maior de intervalos de tempo, poderá se aumentar ilimitadamente o capital. Então, fazendo n tender a infinito,

$$c = c_o \lim_{n\to\infty}(1+\frac{\alpha}{n})^n \qquad (5.2.1)$$

Usando $\frac{\alpha}{n} = \frac{1}{x}$, se $n \to \infty$, $x \to \infty$ e substituindo em (5.2.1), tem-se:

$$c = c_o \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\alpha x} = c_o \lim_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{x})^x]^{\alpha}$$

Como $e = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$, o capital em um ano de aplicação será, $c = c_o.e^{\alpha}$.

O mesmo raciocínio é válido se considerarmos o capital c_o aplicado durante t anos, à mesma taxa de i%. Dividindo t anos em n partes iguais, resgatando e reinvestindo n vezes, ao final de t anos obteríamos $c_o(1+\frac{\alpha t}{n})^n$. Fazendo n crescer indefinidamente,

$$M(t) = c_o \lim_{n\to\infty}(1+\frac{\alpha t}{n})^n,$$

$$M(t) = c_o.e^{\alpha t},$$

o qual é o montante da aplicação do capital c_o, durante t anos, a uma taxa de i% ao ano, $\alpha = \frac{i}{100}$, de juros compostos acumulados continuamente.

Comparando-se os dois modelos de juros compostos apresentados, $M(t) = c_o(1+\alpha)^t$ e $M(t) = c_o.e^{\alpha t}$, o segundo modelo é aquele que mais se aproxima do que realmente aconteceria.

Por exemplo, tomando-se $c_o = 1000$ e $i = 1\%$ ao mês, calcula-se o montante em um ano de aplicação.

Pelo primeiro modelo, o montante real será:

$$M(12) = 1000(1+0{,}01)^{12} \approx 1126{,}82$$

Pelo segundo modelo:

$$M(12) = 1000.e^{0{,}01.12} = 1000.\ e^{0{,}12}$$

Usando e ≈ 2,71828, temos M(12) ≈ 1127,49.

Caso a capitalização seja feita diariamente, teremos:

$$M = 1000\left(1 + \frac{0{,}01}{30}\right)^{12.30} \approx 1127{,}47$$

Caso a capitalização seja feita por hora, teremos:

$$M = 1000\left(1 + \frac{0{,}01}{30.24}\right)^{12.30.24} \approx 1127{,}49$$

Quanto menor o intervalo de tempo da capitalização, mais o modelo neperiano se aproxima do real.

5.3 Resfriamento de um corpo

A lei de resfriamento de Newton afirma que, a diferença de temperatura, $T_0 - t_0$, entre um objeto e o meio ambiente que o contém, decresce com uma taxa de variação proporcional a essa própria diferença. Logo, é uma lei de decaimento exponencial, análoga a lei da desintegração radioativa, que pode se expressar por:

$$T(t) = t_0 + (T_0 - t_0)e^{-kt}$$

em que t_0 é a temperatura ambiente, T_0 é a temperatura do objeto no momento em que foi colocado no ambiente, k é uma constante, que depende do material que constitui o objeto e T(t) é a temperatura do objeto no instante t.

Observa-se que depois de muito tempo que o objeto foi colocado nesse ambiente, sua temperatura tende a se igualar com a temperatura do ambiente, t_0. Ou seja,

$$\lim_{t\to\infty} T(t) = \lim_{t\to\infty}[to + (To - to)e^{-kt}]$$

$$\lim_{t\to\infty} T(t) = \lim_{t\to\infty}\left[to + \frac{To-t}{e^{kt}}\right]$$

Como $e^{kt} \to \infty$, $\frac{To-to}{e^{kt}} \to 0$, logo, $\lim_{t\to\infty} T(t) = t_o$.

O gráfico da figura (5.1) representa a função T(t).

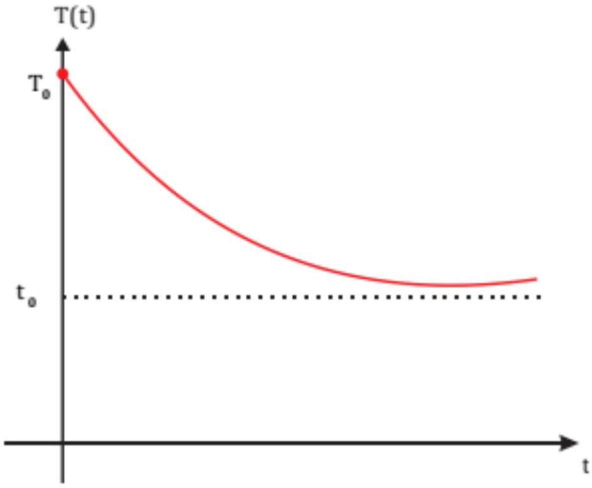


Figura 5.1: Gráfico do resfriamento de um corpo

Exemplificando o modelo matemático de resfriamento de um corpo, suponha que uma xícara de café, inicialmente a 60ºC, seja colocada num ambiente de temperatura 20ºC. Vinte minutos depois, a temperatura do café passa a ser de 30ºC. Deseja-se calcular a temperatura do café a 50 minutos depois após o café ser servido.

Utilizando-se a função $T(t) = t_0 + (T_0 - t_0)e^{-kt}$ e substituindo-se as informações:

$$T(t) = 20 + 40.e^{-kt}$$
$$T(20) = 20 + 40.e^{-20k} = 30$$

Logo,

$$e^{-20k} = \frac{1}{4}, \text{ portanto } e^{-10k} = \frac{1}{2}.$$

Calculando T(50), temos:

$$T(50) = 20 + 40.\ e^{-50k}$$
$$T(50) = 20 + 40.(e^{-10k})^5$$
$$T(50) = 20 + 40.\left(\frac{1}{2}\right)^5$$
$$T(50) = 21{,}25ºC.$$

A tendência é que para tempos maiores que 50 minutos a temperatura do café se aproxime da temperatura ambiente de 20ºC.

$$T(60) \approx 20{,}62ºC$$
$$T(70) \approx 20{,}31ºC$$
$$T(80) \approx 20{,}15ºC$$
$$T(90) \approx 20{,}07ºC$$
$$T(100) \approx 20{,}03ºC$$

5.4 Cálculo do pH

Os químicos usam um número denotado por pH (potencial hidrogêniônico) para descrever quantitativamente a acidez, neutralidade ou basicidade de uma solução aquosa.

O termo pH foi introduzido em 1909, pelo bioquímico Peter Lauritz Sorensen (1868 - 1939) com o objetivo de facilitar seus trabalhos no controle da qualidade de cervejas.

Por definição, pH = -log[H^+], em que [H^+] é a concentração dos íons hidrogênio, em mols por litro, na solução.

Se o pH é menor que 7 indica que a solução é ácida. Quanto mais próximo de zero, mais ácida é a solução.

Se o pH = 7, a solução é neutra.

Se o pH é maior que 7, indica a alcalinidade da solução. Quanto mais distante de 7, mais básica é a solução.

A tabela abaixo informa o pH de algumas substâncias.

Substância	**pH**
Vinagre	2,0
Refrigerante tipo cola	2,5
Sumo da laranja	3,5
Cerveja	4,5
Café	5,0
Leite	6,5
Água pura	7,0
Sangue	7,4
Água do mar	8,0
Sabonete	9 a 10
Soda Cáustica cola	13,5

Tabela 5.1- pH das substâncias

A função pH possui domínio (0,1), conjunto imagem (0,+∞) e o gráfico está representado abaixo.

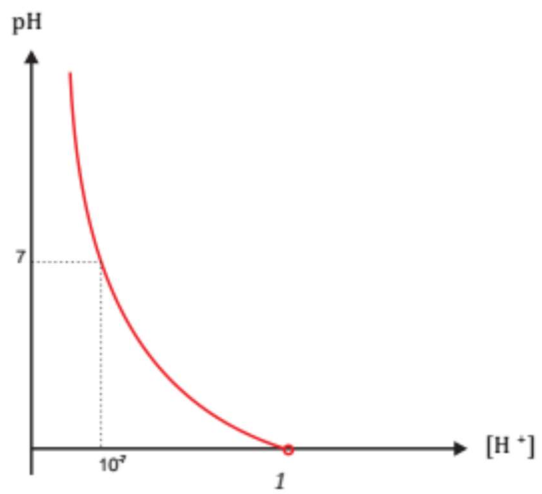


Figura 5.2: Função pH

5.5 Nível de Intensidade Sonora

A altura de um som, experimentada pelo ouvido humano, baseia-se no nível de intensidade.

O nível de intensidade sonora, N, medido em decibéis (dB), em homenagem a Alexander Graham Bell, é definido em escala logarítmica pelo fato de que o ser humano possui a peculiaridade de que sua sensibilidade varia linearmente enquanto que o estímulo respectivo varia exponencialmente. O nível de intensidade sonora N é dado por:

$$N = 10 \log \left(\frac{I}{I_0}\right)$$

em que I e I_0 são intensidades sonoras, em W/m^2, (onde W representa a unidade de potência sonora de um dispositivo) que queremos comparar. Normalmente escolhe-se $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2 que é a intensidade sonora mais baixa da faixa audível para um ser humano.

O gráfico da função N(I) é dado abaixo

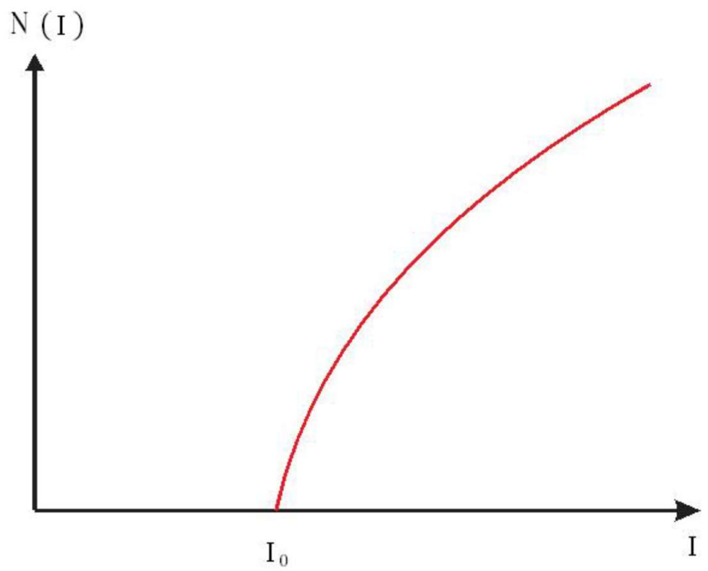


Figura 5.3: Função da intensidade sonora

5.6 Sismologia

A primeira escala utilizada para quantificar o nível de energia liberada por um sismo, foi desenvolvida em 1935 pelos sismólogos Charles Richter e Beno Gutemberg. Tal escala ficou conhecida como Escala de Magnitude Local ou Escala Richter.

Como a energia liberada (E) por um terremoto é um número muito grande, utilizou-se uma escala logarítmica de base 10 e o terremoto é quantificado por um único número, chamado magnitude.

A magnitude na Escala Richter é dada por

$$M = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

em que E_0 é uma energia liberada por um pequeno terremoto e é usado o valor $E_0 = 10^{4,4}$ J (Joule) como referência.

O gráfico dessa função é apresentado abaixo.

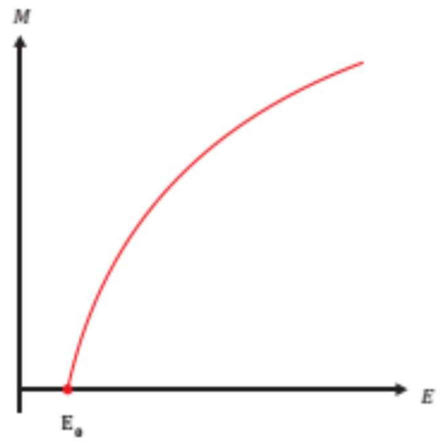


Figura 5.4: Magnitude na escala Richter

Hoje em dia se utiliza uma outra escala, também logarítmica de base 10, porém mais precisa que a escala de Richter. É a Escala de Magnitude de Momento (MMS) que leva em conta a área de ruptura da falha geológica onde ocorrem o terremoto e o deslocamento médio dessa área.

O símbolo da escala de magnitude do momento é M_w, em que w significa o trabalho mecânico realizado. M_w é um número adimensional definido por :

$$\text{Mw} = \frac{2}{3}\log(M_0) - 10{,}7$$

em que M_0 é o momento sísmico.

O gráfico de M_w é apresentado abaixo

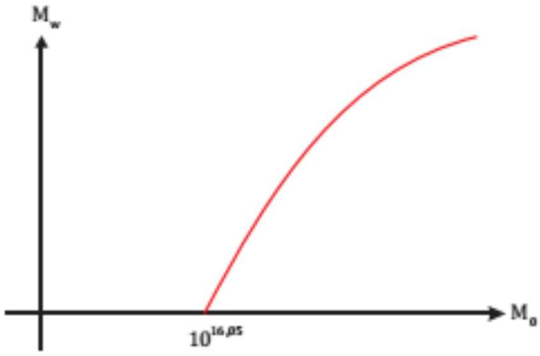


Figura 5.5: Escala de Magnitude de Momento

CAPÍTULO 6
Descrição e análise das atividades aplicadas em sala de aula

Passaremos agora a relatar atividades realizadas com alunos do Ensino Médio. Antes de iniciarmos o estudo das atividades, vale lembrar que todas estas foram aplicadas de maneira remota, através de google meet/claassroom e presencial (com 30% ou 50%, na medida do possível), por causa da pandemia COVID-19. O autor dessa dissertação agradece aos professores que colaboraram ativamente para uma participação efetiva dos alunos na realização dos exercícios, sendo que para alcançar números significativos, foram aplicadas as atividades nos primeiros, segundos e terceiros anos do ensino médio das escolas estaduais E.E.Prof. Fenízio Marchini, localizado em Itapira – SP e E. E. Júlio Brandão, localizado em Jacutinga – MG.

Iniciamos nossa sequência didática com a Folha de Atividades 1, com o objetivo de recordar e fazer verificações e aplicações de alguns conceitos importantes já estudados pelos alunos. Essa atividade foi realizada em uma semana na sua totalidade, de modo que sua análise será feita em duas partes, como mostrado abaixo.

6.1 ATIVIDADE 1

Trabalho realizado em sala para conclusão de mestrado no curso de PPGECE

Revisão: Potenciação

Aluno:____ Ano:______

1. Utilizando as propriedades da potenciação, calcule:
   a) 6^3
   b) 10^4
   c) $(-3)^4$
   d) $(-2)^7$
   e) 3^{-2}
   f) $(-5)^{-4}$
   g) $(2/7)^{-3}$
   h) $(2/5)^{-4}$

2. Resolva as raízes:
   a) $\sqrt[4]{2^8}$

b) $^{3}\sqrt{9^3}$
c) $^{4}\sqrt{7^{12}}$
d) $^{4}\sqrt{4^8}$
e) $^{5}\sqrt{(5^2)^{10}}$

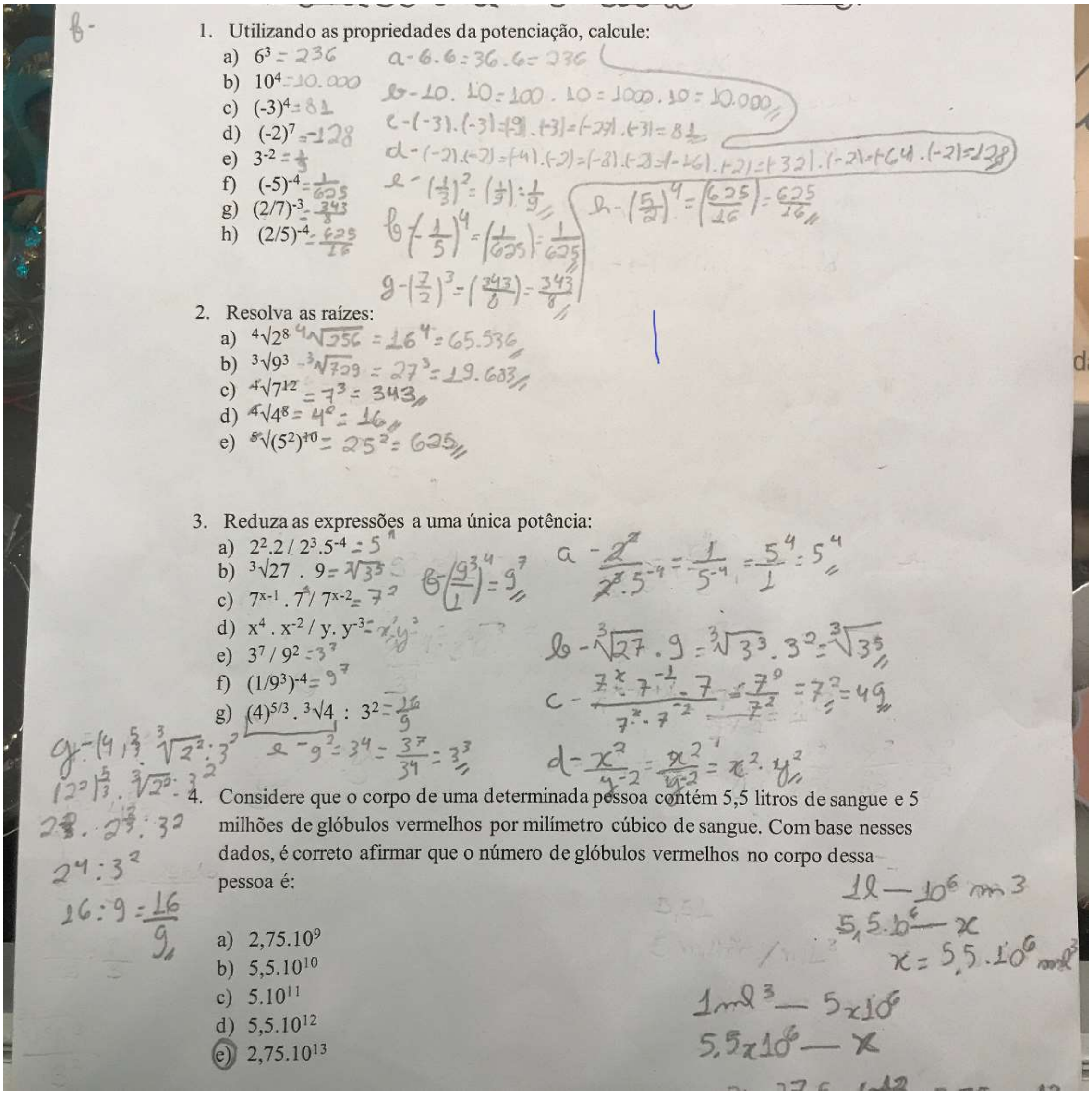
3. Reduza as expressões a uma única potência:
a) $2^2.2 / 2^3.2^{-4}$
b) $^{3}\sqrt{27}\ .\ 9$
c) $7^{x-1}\ .\ 7 / 7^{x-2}$
d) $x^4\ .\ x^{-2} / y.\ y^{-3}$
e) $3^7 / 9^2$
f) $(1/9^3)^{-4}$
g) $(4)^{5/3}\ .\ ^{3}\sqrt{4}\ :\ 3^2$

6.1.1 Resumo da Aplicação – Atividade 1

Essas três questões buscaram uma retomada de conteúdos referente às potências com bases e expoentes positivos, negativos e fracionários, além de recordar a propriedade da multiplicação de potências de mesma base, pois o bom entendimento é de extrema importância para que seja feita toda a construção da função exponencial segundo a propriedade que a caracteriza. Vale lembrar que essa propriedade é uma condição necessária mas não suficiente para a caracterização da função exponencial. É necessário que a função seja contínua, porém, a questão de continuidade não será tratada neste trabalho, apenas uma pequena noção de convergência de sequências será destacada nas atividades.

Em relação à participação e resolução dos alunos, vale ressaltar ainda que, devido à pandemia, as turmas que realizaram as atividades foram alunos de primeiros, segundos e terceiros, de maneira remota e as aulas de reforço, *online*, através do *Google Meet*, e as pequenas dúvidas via *Whatsapp*.

Alguns itens desenvolvidos merecem atenção, como por exemplo, expoentes negativos de números inteiros e algumas propriedades: produto e divisão de expoentes fracionários e radicais. Alguns alunos resolveram questões com expoentes negativos, indicando como resposta negativa, em vez de inversão e não conseguiram interpretar os expoentes fracionários, deixando em branco os itens relacionados a esse assunto, o que proporcionou um trabalho mais exaustivo do professor, pois teve que revisar toda a parte de potenciação e radiciação, e que, depois de resolvido conjuntamente, resultou numa melhora no rendimento.



1. Utilizando as propriedades da potenciação, calcule:

a) $6^3 = 236$
b) $10^4 = 10.000$
c) $(-3)^4 = 81$
d) $(-2)^7 = -128$
e) $3^{-2} = \frac{1}{9}$
f) $(-5)^{-4} = \frac{1}{625}$
g) $(2/7)^{-3} = \frac{343}{8}$
h) $(2/5)^{-4} = \frac{625}{16}$

2. Resolva as raízes:

a) $\sqrt[4]{2^8}$
b) $\sqrt[3]{9^3}$
c) $\sqrt[4]{7^{12}} = 7^3 = 343$
d) $\sqrt[4]{4^8} = 4^2 = 16$
e) $\sqrt[8]{(5^2)^{10}}$

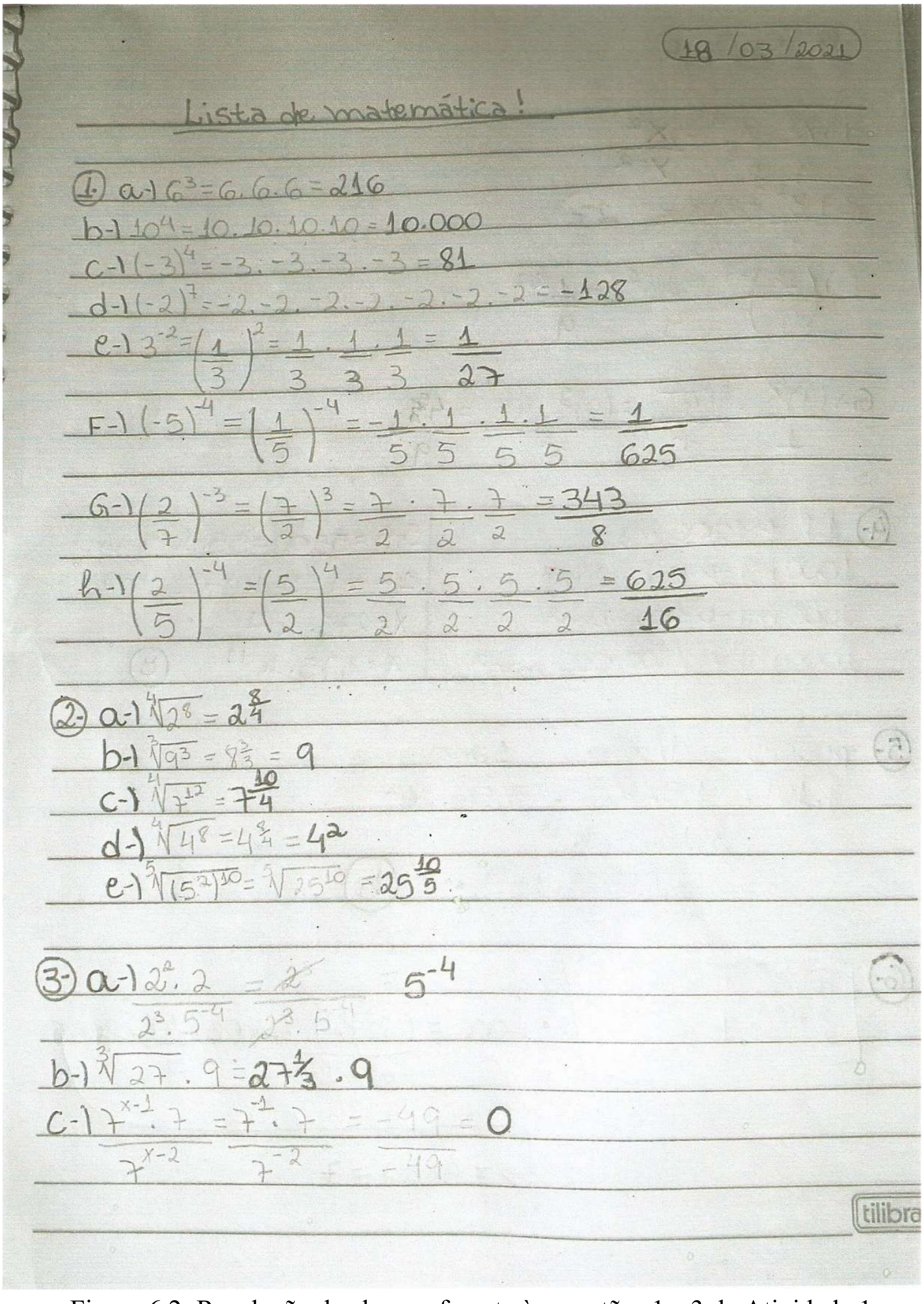
3. Reduza as expressões a uma única potência:

a) $2^2.2 / 2^3.5^{-4} = 5^4$
b) $\sqrt[3]{27}\ .\ 9$
c) $7^{x-1}\ .\ 7^{3} / 7^{x-2}$
d) $x^4\ .\ x^{-2} / y.\ y^{-3}$
e) $3^7 / 9^2 = 3^3$
f) $(1/9^3)^{-4} = 9^7$
g) $(4)^{5/3}\ .\ \sqrt[3]{4}\ :\ 3^2 = \frac{16}{9}$

4. Considere que o corpo de uma determinada pessoa contém 5,5 litros de sangue e 5 milhões de glóbulos vermelhos por milímetro cúbico de sangue. Com base nesses dados, é correto afirmar que o número de glóbulos vermelhos no corpo dessa pessoa é:

a) $2{,}75.10^9$
b) $5{,}5.10^{10}$
c) 5.10^{11}
d) $5{,}5.10^{12}$
e) $2{,}75.10^{13}$

Figura 6.1: Resolução de aluno referente às questões 1 a 4 da Atividade 1



18/03/2021

Lista de matemática!

1. a-) $6^3 = 6.6.6 = 216$

b-) $10^4 = 10.10.10.10 = 10.000$

c-) $(-3)^4 = -3.-3.-3.-3 = 81$

d-) $(-2)^7 = -2.-2.-2.-2.-2.-2.-2 = -128$

e-) $3^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3} = \frac{1}{27}$

F-) $(-5)^{-4} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-4} = -\frac{1}{5}.\frac{1}{5}.\frac{1}{5}.\frac{1}{5} = \frac{1}{625}$

G-) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-3} = \left(\frac{7}{2}\right)^3 = \frac{7}{2}.\frac{7}{2}.\frac{7}{2} = \frac{343}{8}$

h-) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-4} = \left(\frac{5}{2}\right)^4 = \frac{5}{2}.\frac{5}{2}.\frac{5}{2}.\frac{5}{2} = \frac{625}{16}$

2. a-) $\sqrt[4]{2^8} = 2^{\frac{8}{4}}$

b-) $\sqrt[3]{9^3} = 9^{\frac{3}{3}} = 9$

c-) $\sqrt[4]{7^{12}} = 7^{\frac{10}{4}}$

d-) $\sqrt[4]{4^8} = 4^{\frac{8}{4}} = 4^2$

e-) $\sqrt[5]{(5^2)^{10}} = \sqrt[5]{25^{10}} = 25^{\frac{10}{5}}$

3. a-) $\frac{2^2 . 2}{2^3 . 5^{-4}} = \frac{\cancel{2^3}}{\cancel{2^3} . 5^{-4}}$ 5^{-4}

b-) $\sqrt[3]{27} . 9 = 27^{\frac{1}{3}} . 9$

c-) $\frac{7^{x-1} . 7}{7^{x-2}} = \frac{7^{-1} . 7}{7^{-2}} = \frac{-49}{-49} = 0$

Figura 6.2: Resolução de aluno referente às questões 1 a 3 da Atividade 1

4. Considere que o corpo de uma determinada pessoa contém 5,5 litros de sangue e 5 milhões de glóbulos vermelhos por milímetro cúbico de sangue. Com base nesses dados, é correto afirmar que o número de glóbulos vermelhos no corpo dessa pessoa é:

a) $2{,}75.10^{9}$
b) $5{,}5.10^{10}$
c) 5.10^{11}
d) $5{,}5.10^{12}$
e) $2{,}75.10^{13}$

5. Recentemente, os jornais noticiaram que, durante o mês de outubro de 2011, a população mundial deveria atingir a marca de 7 bilhões de habitantes, o que nos faz refletir sobre a capacidade do planeta de satisfazer nossas necessidades mais básicas, como acesso à água e aos alimentos. Estima-se que uma pessoa consuma, em média, 150 litros de água por dia. Assim, considerando a marca populacional citada acima, o volume de água, em litros, necessário para abastecer toda a população humana durante um ano está entre:

a) 10^{13} e 10^{14}
b) 10^{14} e 10^{15}
c) 10^{15} e 10^{16}
d) 10^{16} e 10^{17}
e) 10^{17} e 10^{18}

6. Efetuando as operações indicadas na expressão:

$$\left[\frac{2^{2007} + 2^{2005}}{2^{2006} + 2^{2004}}\right] .\ 2006$$

obtemos um número de quatro algarismos. Qual é a soma dos algarismos desse número?

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

As atividades 4,5 e 6 referem a situações-problema que exploram as operações com potências, utilizando suas propriedades e interpretação dos dados fornecidos e pedidos. Neste caso, percebe uma porcentagem significativa de alunos que não conseguiram desenvolver e que mesmo iniciando, não deram continuidade na resolução, o que é muito preocupante, já que esta habilidade sempre explorada, é de muita importância em todas as áreas do conhecimento. Por isso, o professor utilizou sua didática nos conteúdos e ainda estimulando as participações, o que melhorou um pouco o entendimento na sua realização.

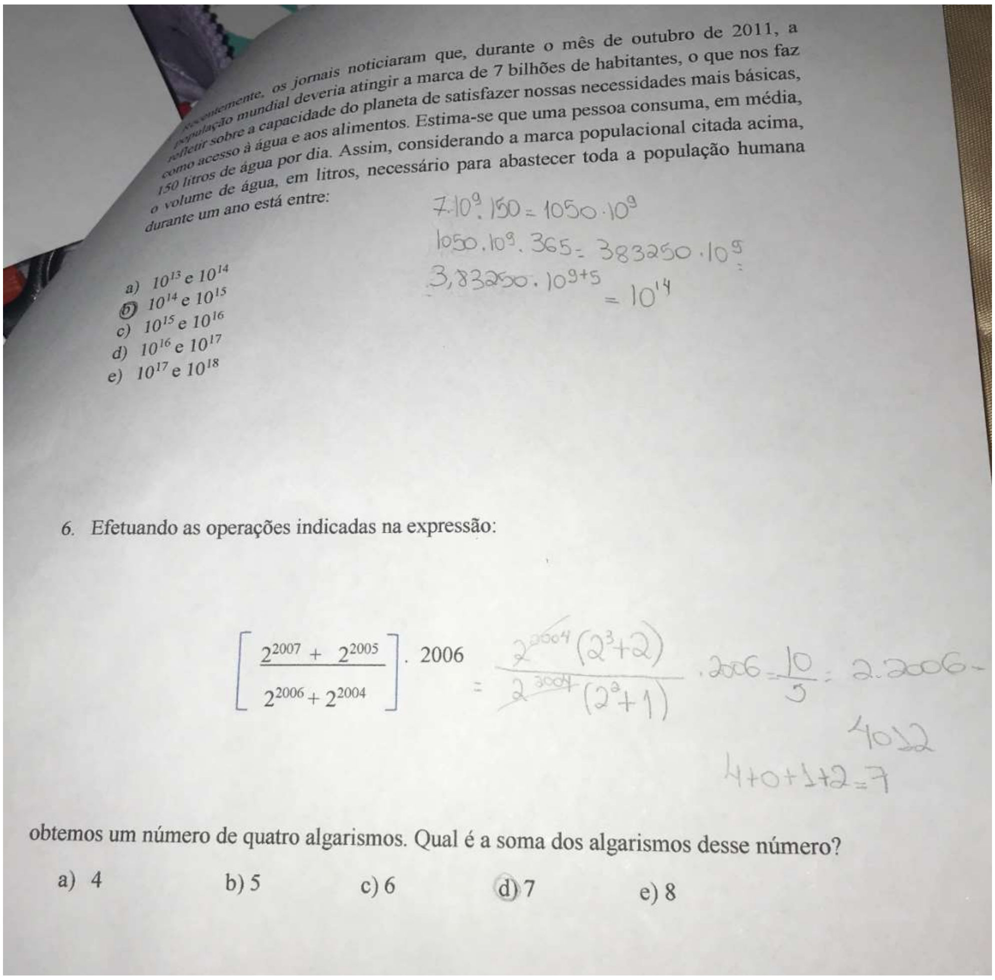
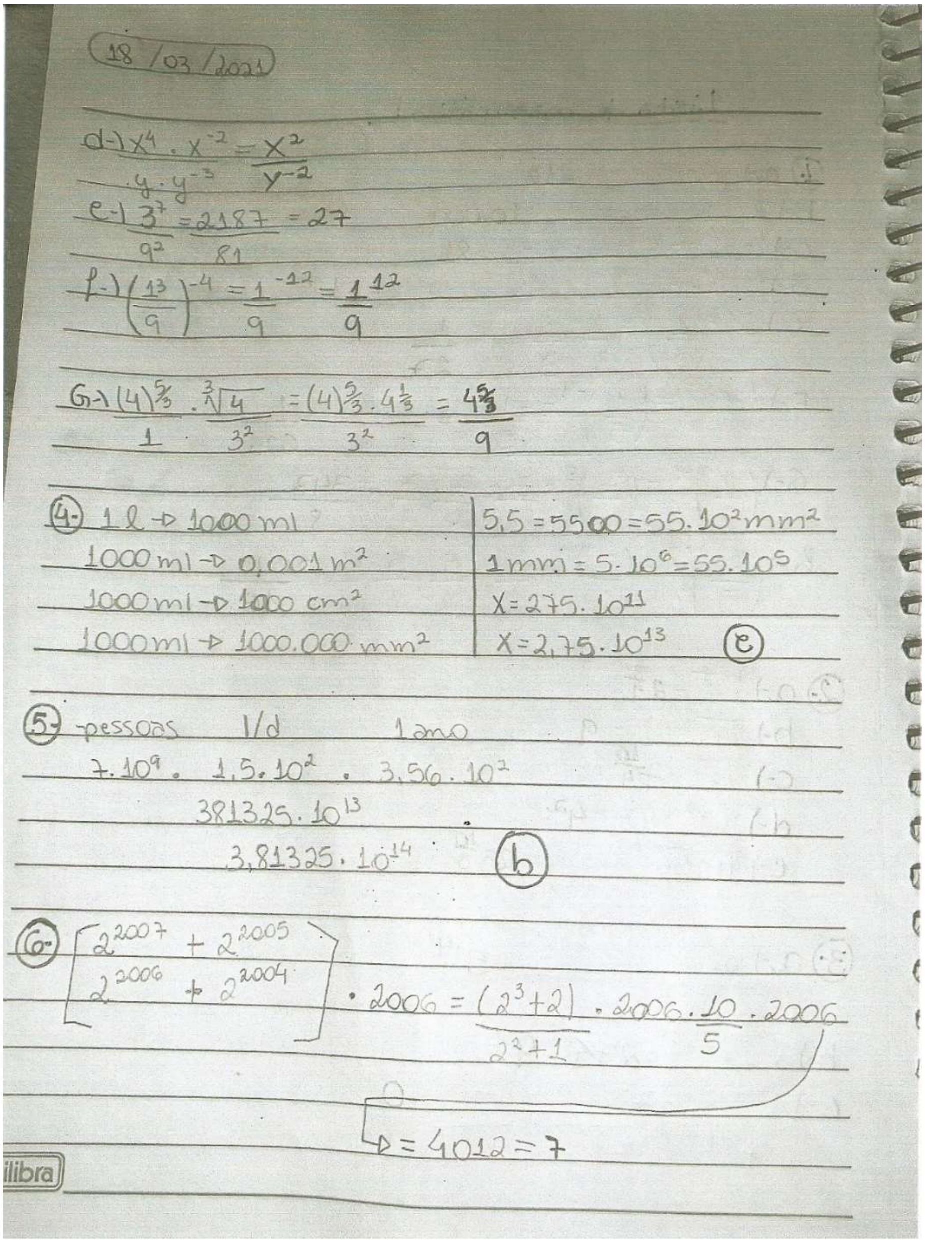


Figura 6.3: Resolução de aluno referente às questões 5 e 6 da Atividade 1



18/03/2021

d-) $\dfrac{x^4 \cdot x^{-2}}{y \cdot y^{-3}} = \dfrac{x^2}{y^{-2}}$

e-) $\dfrac{3^7}{9^2} = \dfrac{2187}{81} = 27$

f-) $\left(\dfrac{13}{9}\right)^{-4} = \dfrac{1^{-12}}{9} = \dfrac{1^{12}}{9}$

G-) $\dfrac{(4)^{5/3}}{1} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{4}}{3^2} = \dfrac{(4)^{5/3} \cdot 4^{1/3}}{3^2} = \dfrac{4^{5/3}}{9}$

4-) 1 l -> 1000 ml

1000 ml -> $0{,}001\ m^2$

1000 ml -> $1000\ cm^2$

1000 ml -> $1000.000\ mm^2$

$5{,}5 = 5500 = 55 \cdot 10^2\ mm^2$

$1\ mm = 5 \cdot 10^6 = 55 \cdot 10^5$

$X = 275 \cdot 10^{11}$

$X = 2{,}75 \cdot 10^{13}$ e

5-) pessoas 1/d 1 ano

$7 \cdot 10^9 \cdot 1{,}5 \cdot 10^2 \cdot 3{,}56 \cdot 10^2$

$381325 \cdot 10^{13}$

$3{,}81325 \cdot 10^{14}$ b

6-) $\left[\dfrac{2^{2007} + 2^{2005}}{2^{2006} + 2^{2004}}\right] \cdot 2006 = \dfrac{(2^3+2)}{2^2+1} \cdot 2006 \cdot \dfrac{10}{5} \cdot 2006$

$= 4012 = 7$

Figura 6.4: Resolução de aluno referente às questões 4 a 6 da Atividade 1

6.2 ATIVIDADE 2

Trabalho realizado em sala para conclusão de mestrado no curso de PPGECE

Lista de Exercícios – Logaritmos

Aluno(a):____ANO:_____

1) Calcule:

a) $\log_3 27$ b) $\log_{\frac{1}{5}} 125$ c) $\log_4 \sqrt{32}$ d) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{8}{27}$

2) Calcule o valor de x:

a) $\log_x 8 = 3$ b) $\log_x \frac{1}{16} = 2$ c) $\log_2 x = 5$ d) $\log_9 27 = x$ e) $\log_{\frac{1}{2}} 32 = x$

3) Calcule:

a) $\log_2 2^{-3}$ b) $\log_7 \sqrt{7}$ c) $5^{\log_5 7}$ d) $2^{\log_2 7 + \log_2 3}$

e) $2^{2+2\log_2 5}$

4) Dados log a = 5, log b = 3 e log c = 2, calcule $\log\left(\frac{a.b^2}{c}\right)$.

5) Sendo $\log_x 2 = a$, $\log_x 3 = b$ calcule $\log_x \sqrt[3]{12}$.

6) Sendo $\log_a 2 = 20$, $\log_a 5 = 30$ calcule $\log_a 100$.

7) Resolva as seguintes equações:

a) $\log_{x-3} 9 = 2$

b) $\log_4(2x+10) = 2$

c) $\log_2(\log_3(x-1)) = 2$

d) $\log_{x+1}(x^2+7) = 2$

e) $\log_2 3 + \log_2(x-1) = \log_2 6$

f) $\log_3 2 + \log_3(x+1) = 1$

g) $2\log \quad x = \log \quad 2 + \log \quad x$

h) $\log_2(x^2 + 2x - 7) - \log_2(x-1) = 2$

8) Determine a solução da equação: $\log_2(x-2) + \log_2(x-3) = 1 + \log_2(2x-7)$

9. Os valores de x que satisfazem log x + log (x - 5) = log 36 são:

a) 9 e -4
b) 9 e 4
c) -4
d) 9
e) 5 e -4

10. A intensidade **I** de um terremoto, medida na escala Richter, é um número que varia de I = 0 até I = 8,9 para o maior terremoto conhecido. **I** é dado pela fórmula matemática

$$\mathbf{I = 2/3 \cdot \log_{10} (E/E_o)}$$

na qual **E** é a energia liberada no terremoto em quilowatt-hora e $\mathbf{E_o = 7 \cdot 10^{-3}}$ **kWh**. Sendo assim, calcule a energia liberada num terremoto de intensidade 8 na escala Richter.

a) $17 \cdot 10^9$ kWh b) $34 \cdot 10^9$ kWh c) $7 \cdot 10^9$ kWh d) $0{,}7 \cdot 10^9$ kWh

e) $7{,}2 \cdot 10^9$ kWh

11. Suponha que o nível sonoro β e a intensidade I de um som estejam relacionados pela equação logarítmica $\beta = 120 + 10 \log_{10} I$, em que β é medido em decibéis e I, em watts por metro quadrado. Sejam I_1 a intensidade correspondente ao nível sonoro de 80 decibéis de um

cruzamento de duas avenidas movimentadas e I_2 a intensidade correspondente ao nível sonoro de 60 decibéis do interior de um automóvel com ar-condicionado. A razão I_1/I_2 é igual a:

a) 1/10 b) 1 c) 10 d) 100 e) 1000

6.2.1 Resumo da Aplicação – Atividade 2

Esta atividade traz os conceitos básicos necessários para o entendimento de logaritmo, suas principais propriedades, as equações logarítmicas envolvidas em diversas soluções, suas funções e características. Por fim, as próprias aplicações envolvendo os logaritmos, por exemplo, a intensidade sonora (Física) e sísmica (Geografia).

A aplicação dessa atividade iniciou-se remotamente, de maneira que os alunos tiveram muita dificuldade na aprendizagem desse tema, desde os conceitos básicos até na utilizando das propriedades, o que ocasionou a intervenção do professor (*online*) no desenvolvimento das questões, ocasionando várias aulas de revisão. Nessas aulas, utilizou-se com muita frequência as propriedades:

- $\log (a.b) = \log a + \log b$
- $\log (a/b) = \log a - \log b$
- $\log a^n = n. \log a$

As questões interdisciplinares, que são voltadas às aplicações dos logaritmos reforçam a necessidade de explorar a interpretação de textos e saber desenvolver os dados fornecidos, o que gerou um desconforto por parte dos alunos, pois a grande maioria não conseguia iniciar a questão e, quando iniciava, não desenvolvia corretamente as propriedades necessárias para a concretização da questão. Foi indispensável a ajuda de um professor de Física (na questão 11) para a explicação e construção dos assuntos envolvidos nesta etapa, e depois a intervenção do professor de matemática para a finalização dos cálculos.

Em relação à questão 10, o professor exemplificou, para os alunos, a aplicação do maior terremoto do mundo, com magnitude I = 9,5, ocorrido no Chile, designado oficialmente Grande Terremoto de Valdívia de 1960. Depois de chegar numa energia liberada pelo terremoto no valor de $12{,}56.10^{11}$ KWh, os alunos entenderam a dimensão proporcional existente na escala logarítmica e concluíram sua utilidade em situações reais.

Já a questão 11 que estuda a aplicação do fenômeno físico Nível Sonoro, teve uma participação maior dos alunos, pois verificaram a real aplicação do logaritmo na vida deles, seja em conversação em voz baixa, normal ou alta, em carros de som, em fones de ouvido. A princípio, o professor de matemática pediu uma ajuda ao professor de Física, que desenvolveu toda a teoria, e mostrando a tabela, que impressionou os alunos pelos níveis altos sonoros.

SOM	Nível sonoro	SOM	Nível sonoro
Silêncio absoluto	0 dB	Aspirador de pó	80 dB
interior de uma igreja	10 dB	Interior de fábrica têxtil	90 dB
Conversação em voz baixa	20 dB	Buzina de caminhão	100 dB
Respiração ofegante	30 dB	Britadeira	110 dB
Bairro residencial à noite	40 dB	Conjunto de rock	120 dB
Automóvel bem regulado	50 dB	Trovão	130 dB
Conversação em voz normal	60 dB	Decolagem de avião	140 dB
Interior de um restaurante	70 dB	Aterrisagem de avião a jato	150 dB

Figura 6.5: Tabela de Nível Sonoro

Após a concretização da atividade, o professor pediu para os alunos que instalassem o aparelho decibelímetro no celular e verificassem os níveis sonoros em conversas baixas e médias ou em qualquer outro barulho e foi relevante para todos analisarem a teoria e a prática.

Analisando o lado matemático, houve um pouco mais de entusiasmo por parte dos alunos, já que conseguiram entender a aplicação, o que acarretou uma porcentagem maior de acerto na questão, ainda que outros precisassem do auxílio do professor para desenvolver os cálculos e as propriedades dos logaritmos.

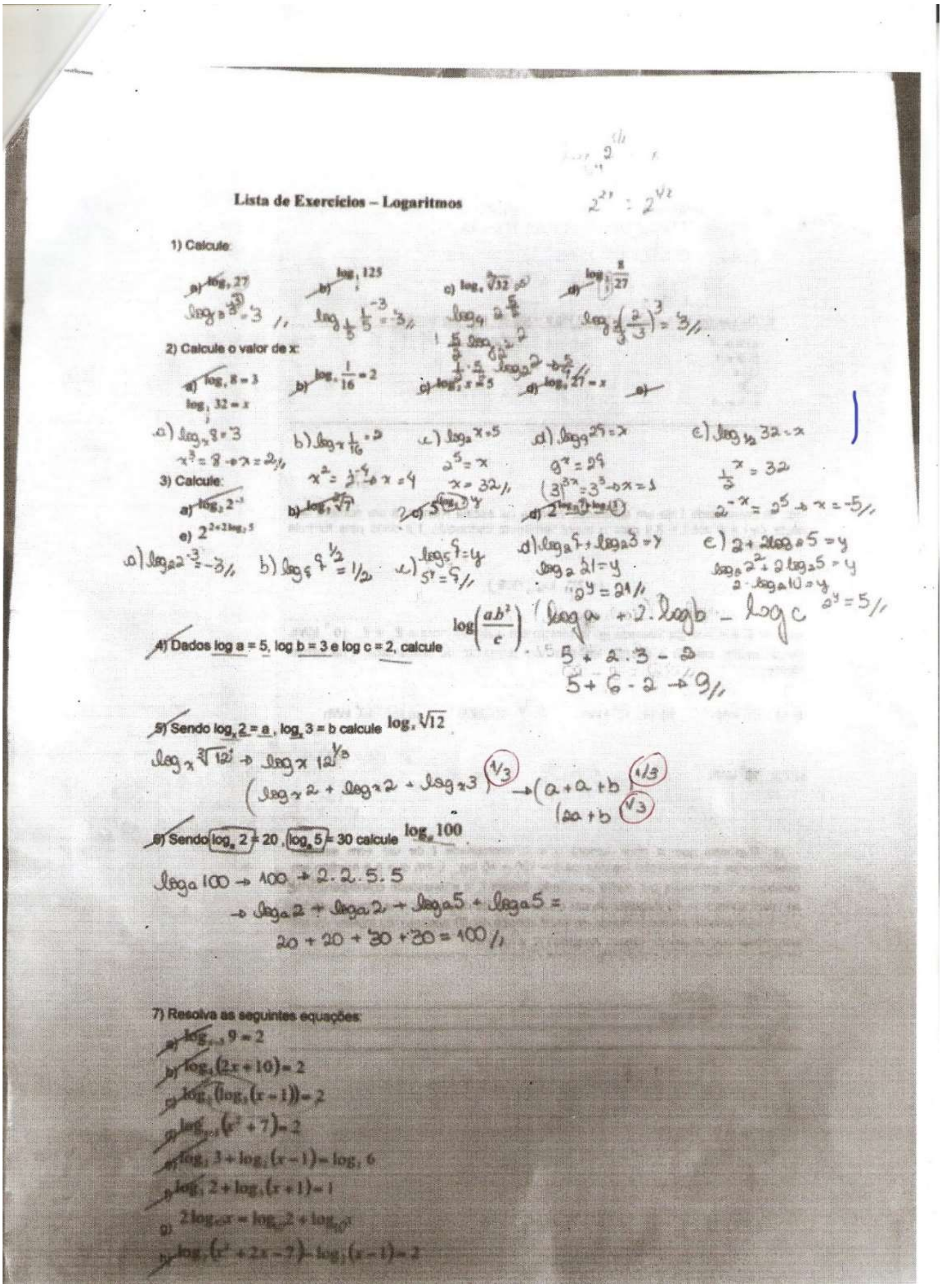
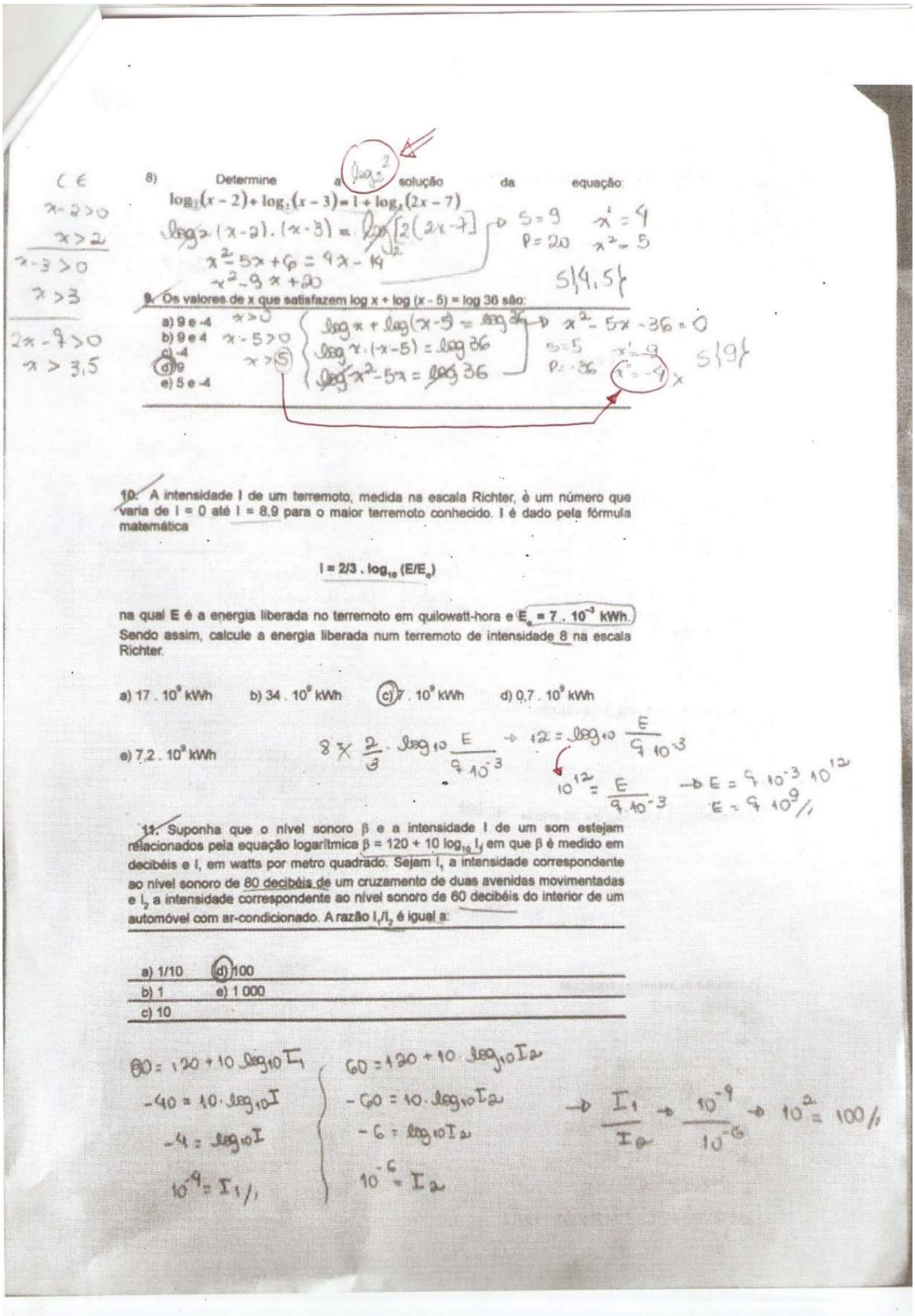


Figura 6.6: Resolução de aluno referente às questões 1 a 6 da Atividade 2



$C \cdot E$: $x-2>0$, $x>2$; $x-3>0$, $x>3$; $2x-7>0$, $x>3{,}5$

8) Determine a ($\log_2 2$) solução da equação:

$\log_2(x-2)+\log_2(x-3)=1+\log_2(2x-7)$

$\log_2 (x-2).(x-3) = \log_2[2(2x-7)]$ → $S=9$, $P=20$; $x'=4$, $x''=5$

$x^2-5x+6=4x-14$

$x^2-9x+20$

$S\{4,5\}$

9. Os valores de x que satisfazem log x + log (x - 5) = log 36 são:

a) 9 e -4
b) 9 e 4
c) -4
d) 9
e) 5 e -4

$x>0$; $x-5>0$; $x>5$

$\log x+\log(x-5)=\log 36$ → $x^2-5x-36=0$

$\log x.(x-5)=\log 36$; $S=5$, $P=-36$; $x'=9$, $x''=-4$

$\log x^2-5x=\log 36$

$S\{9\}$

10. A intensidade I de um terremoto, medida na escala Richter, é um número que varia de I = 0 até I = 8,9 para o maior terremoto conhecido. I é dado pela fórmula matemática

$$I = 2/3 \,.\, \log_{10} (E/E_0)$$

na qual E é a energia liberada no terremoto em quilowatt-hora e $E_0 = 7 \,.\, 10^{-3}$ kWh. Sendo assim, calcule a energia liberada num terremoto de intensidade 8 na escala Richter.

a) $17 \,.\, 10^9$ kWh
b) $34 \,.\, 10^9$ kWh
c) $7 \,.\, 10^9$ kWh
d) $0{,}7 \,.\, 10^9$ kWh
e) $7{,}2 \,.\, 10^9$ kWh

$8 = \frac{2}{3} \cdot \log_{10} \frac{E}{9 \cdot 10^{-3}}$ → $12 = \log_{10} \frac{E}{9\,10^{-3}}$

$10^{12} = \frac{E}{9 \cdot 10^{-3}}$ → $E = 9 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{12}$

$E = 9 \cdot 10^{9}$

11. Suponha que o nível sonoro β e a intensidade I de um som estejam relacionados pela equação logarítmica $\beta = 120 + 10 \log_{10} I$, em que β é medido em decibéis e I, em watts por metro quadrado. Sejam I_1 a intensidade correspondente ao nível sonoro de 80 decibéis de um cruzamento de duas avenidas movimentadas e I_2 a intensidade correspondente ao nível sonoro de 60 decibéis do interior de um automóvel com ar-condicionado. A razão I_1/I_2 é igual a:

a) 1/10
b) 1
c) 10
d) 100
e) 1 000

$80 = 120 + 10 \log_{10} I_1$ | $60 = 120 + 10 \cdot \log_{10} I_2$

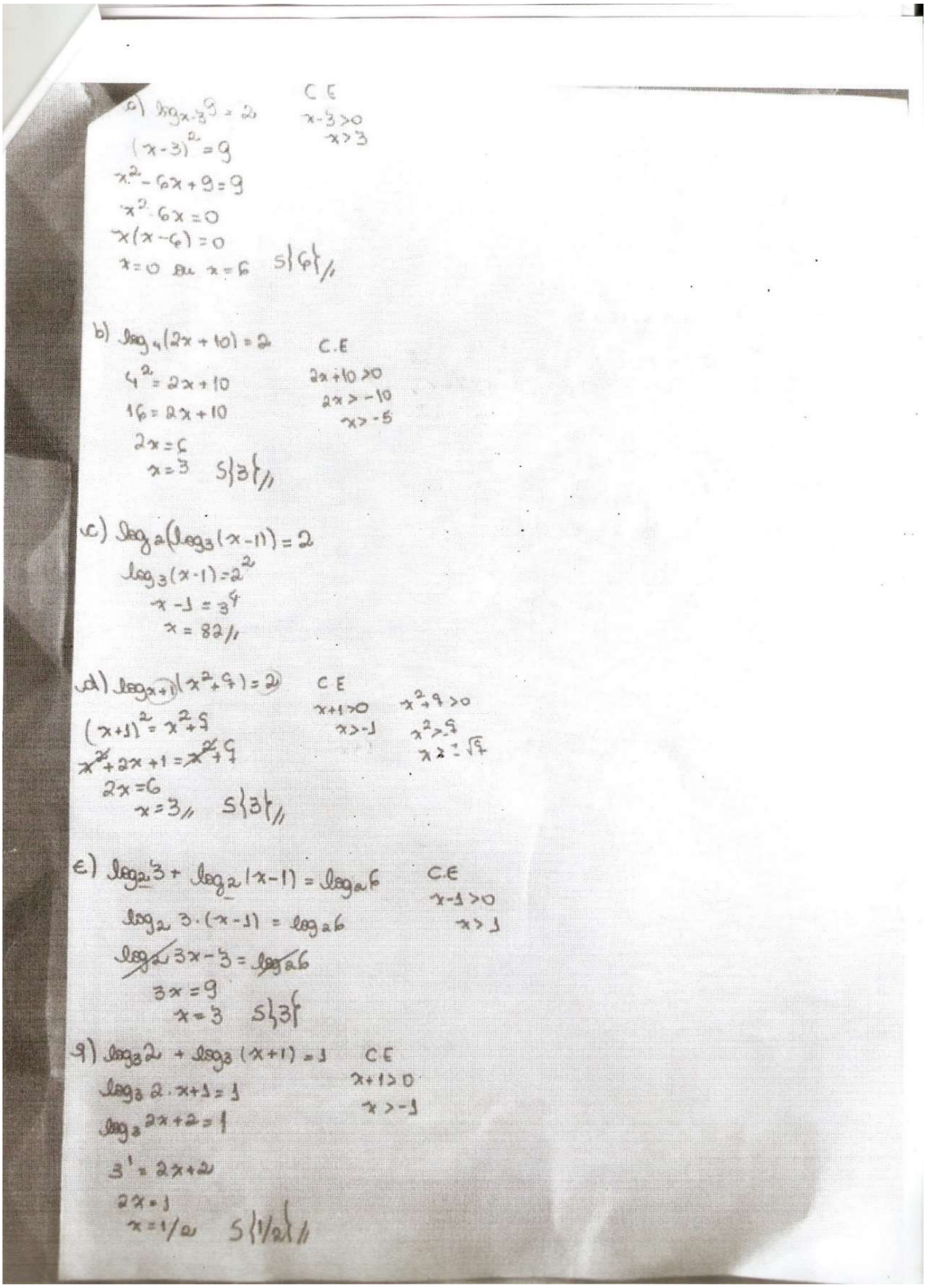
$-40 = 10 \cdot \log_{10} I$ | $-60 = 10 \cdot \log_{10} I_2$

$-4 = \log_{10} I$ | $-6 = \log_{10} I_2$

$10^{-4} = I_1$ | $10^{-6} = I_2$

→ $\frac{I_1}{I_2}$ → $\frac{10^{-4}}{10^{-6}}$ → $10^2 = 100$

Figura 6.7: Resolução de aluno referente às questões 8 a 11 da Atividade 2



a) $\log_{x-3} 9 = 2$ C.E $x-3>0$ $x>3$

$(x-3)^2 = 9$

$x^2 - 6x + 9 = 9$

$x^2 - 6x = 0$

$x(x-6) = 0$

$x = 0$ ou $x = 6$ $S\{6\}$

b) $\log_4(2x+10) = 2$ C.E $2x+10>0$ $2x>-10$ $x>-5$

$4^2 = 2x+10$

$16 = 2x+10$

$2x = 6$

$x = 3$ $S\{3\}$

c) $\log_2(\log_3(x-1)) = 2$

$\log_3(x-1) = 2^2$

$x - 1 = 3^4$

$x = 82$

d) $\log_{x+1}(x^2+9) = 2$ C.E $x+1>0$ $x>-1$ $x^2+9>0$ $x^2>9$ $x \geq \pm\sqrt{9}$

$(x+1)^2 = x^2+9$

$\cancel{x^2} + 2x + 1 = \cancel{x^2} + 9$

$2x = 6$

$x = 3$ $S\{3\}$

e) $\log_2 3 + \log_2(x-1) = \log_2 6$ C.E $x-1>0$ $x>1$

$\log_2 3\cdot(x-1) = \log_2 6$

$\cancel{\log_2} 3x - 3 = \cancel{\log_2} 6$

$3x = 9$

$x = 3$ $S\{3\}$

g) $\log_3 2 + \log_3(x+1) = 1$ C.E $x+1>0$ $x>-1$

$\log_3 2\cdot x+1 = 1$

$\log_3 2x+2 = 1$

$3^1 = 2x+2$

$2x = 1$

$x = 1/2$ $S\{1/2\}$

Figura 6.8: Resolução de aluno referente à questão 7 da Atividade 2

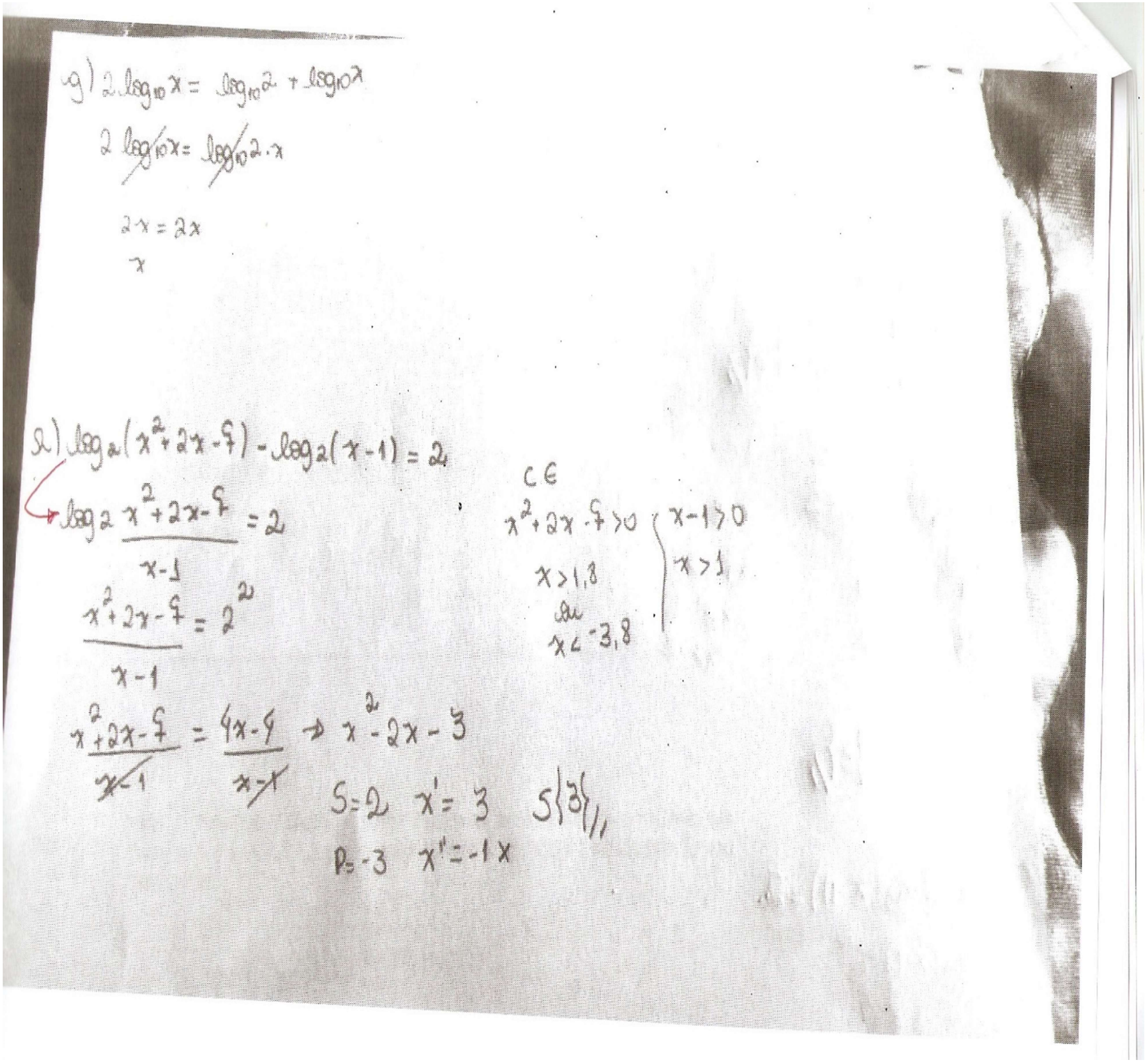


Figura 6.9: Resolução de aluno referente à questão 7 da Atividade 2

6.3 ATIVIDADE 3

Trabalho realizado em sala para conclusão de mestrado no curso de PPGECE

TÍTULO: acidez dos produtos do dia-dia.

Aluno(a):____ANO:_____

OBJETIVO: avaliar a acidez de produtos do dia-dia através do pH e da concentração do íon H^+ através do pH.

MATERIAIS E REAGENTES:

- Sabão em pó
- Refrigerante Coca-Cola
- Suco de limão
- Sabonete
- Vitamina – C (efervescente)
- Béqueres
- Pipetas
- Fita de medir pH
- shampoo
- condicionador

PROCEDIMENTO:

Prepare uma amostra de cada item relacionado abaixo:

a) Sabão em pó dissolvido na água
b) Sabonete dissolvido na água
c) Suco de limão
d) Vitamina-C dissolvida na água
e) Coca-Cola
f) Shampoo
g) Condicionador

-Introduza um pedaço da fita de medir pH em cada uma das amostras e verifique o pH de cada uma delas.

-Coloque os produtos em ordem crescente de acidez mediante os pHs e as concentrações do íon H^+.

Resultados:

pH do sabão em pó=13

pH do sabonete=9

pH do suco de limão=2

pH da vitamina-C=3

pH da Coca-Cola=3

pH do shampoo=6

pH do condicionador=4

- Cálculos utilizados na determinação das concentrações do íon H^+ das amostras.

$$pH = -\log(H^+)$$

- Ordem de acidez via pH:

- Ordem de acidez via concentração do íon H^+:

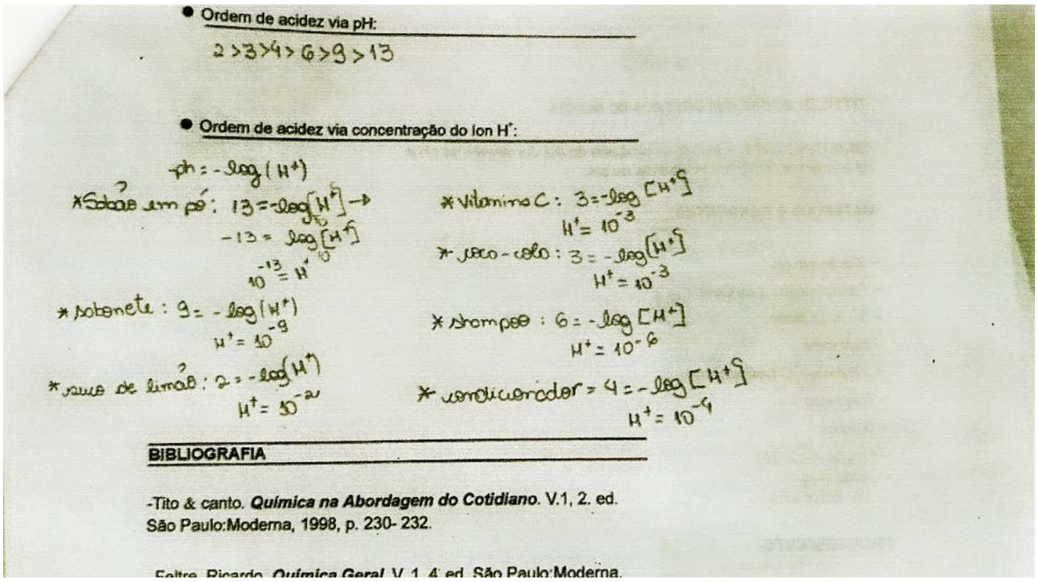
6.3.1 Resumo da Aplicação – Atividade 3

Nesta atividade 3, o professor propôs uma atividade interdisciplinar entre Matemática e Química, objetivando calcular a acidez e a concentração das substâncias. Primeiramente, o professor de Química desenvolveu a teoria sobre ácidos, suas propriedades e características peculiares. Depois, ele (professor) realizou um experimento com as substâncias: sabão em pó, sabonete, suco de limão, vitamina-C, Coca-Cola, shampoo e condicionador, determinando os respectivos pH´s.

De acordo com esses dados coletados, o professor de Matemática explicou aos alunos a relação pH= - log (H^+), exemplificando com outros valores arbitrários. Depois pediu para eles determinarem as concentrações hidrogeniônicas (H^+) a partir dos pHs das substâncias adquiridas experimentalmente. Como o logaritmo utiliza base 10, todos os alunos conseguiram resolver, mas alguns erraram a ordem crescente das concentrações (ou seja, inverteram, pensando que 10^{-2} é menor que 10^{-3}), ao utilizar potência com expoentes negativos, que seria: $10^{-13} < 10^{-9} < 10^{-6} < 10^{-4} < 10^{-3} < 10^{-2}$.

Vale ressaltar que o experimento realizado pelo professor não ocorreu em grupos, como deveria ser, devido à pandemia, para evitar aglomeração, de acordo com os protocolos exigidos na escola.

Concluindo, percebe-se a importância de conhecer e saber identificar a aplicação dos logaritmos em aplicações, para depois executá-las nos cálculos.


● Ordem de acidez via pH:

$2 > 3 > 4 > 6 > 9 > 13$

● Ordem de acidez via concentração do íon H^+:

$ph = -\log(H^+)$

*Sabão em pó: $13 = -\log[H^+] \rightarrow -13 = \log[H^+]$; $10^{-13} = H^+$

*sabonete: $9 = -\log(H^+)$; $H^+ = 10^{-9}$

*suco de limão: $2 = -\log(H^+)$; $H^+ = 10^{-2}$

*vitamina C: $3 = -\log[H^+]$; $H^+ = 10^{-3}$

*coca-cola: $3 = -\log[H^+]$; $H^+ = 10^{-3}$

*shampoo: $6 = -\log[H^+]$; $H^+ = 10^{-6}$

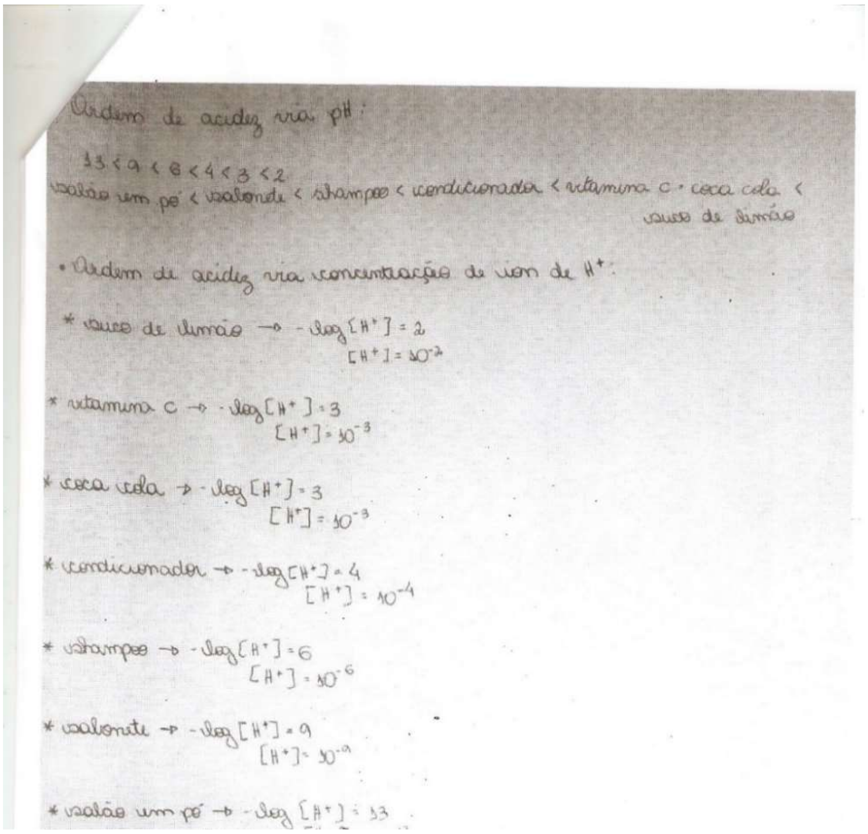
*condicionador = $4 = -\log[H^+]$; $H^+ = 10^{-4}$

BIBLIOGRAFIA

-Tito & canto. ***Química na Abordagem do Cotidiano***. V.1, 2. ed. São Paulo:Moderna, 1998, p. 230- 232.

Feltre, Ricardo. ***Química Geral***. V. 1. 4. ed. São Paulo:Moderna.

Figura 6.10: Resolução de aluno referente às questões da Atividade 3


Ordem de acidez via pH:

$13 < 9 < 6 < 4 < 3 < 2$

sabão em pó < sabonete < shampoo < condicionador < vitamina c = coca cola < suco de limão

• Ordem de acidez via concentração de íon de H^+:

* suco de limão → $-\log[H^+] = 2$; $[H^+] = 10^{-2}$
* vitamina C → $-\log[H^+] = 3$; $[H^+] = 10^{-3}$
* coca cola → $-\log[H^+] = 3$; $[H^+] = 10^{-3}$
* condicionador → $-\log[H^+] = 4$; $[H^+] = 10^{-4}$
* shampoo → $-\log[H^+] = 6$; $[H^+] = 10^{-6}$
* sabonete → $-\log[H^+] = 9$; $[H^+] = 10^{-9}$
* sabão em pó → $-\log[H^+] = 13$

Figura 6.11: Resolução de aluno referente às questões da Atividade 3

Ordem de acidez via pH:

$13 < 9 < 6 < 4 < 3 < 2$

sabão em pó < sabonete < shampoo < condicionador < vitamina C = coca cola < suco de limão

• Ordem de acidez via concentração de íon de H^+:

* suco de limão → $-\log[H^+] = 2$
  $[H^+] = 10^{-2}$

* vitamina C → $-\log[H^+] = 3$
  $[H^+] = 10^{-3}$

* coca cola → $-\log[H^+] = 3$
  $[H^+] = 10^{-3}$

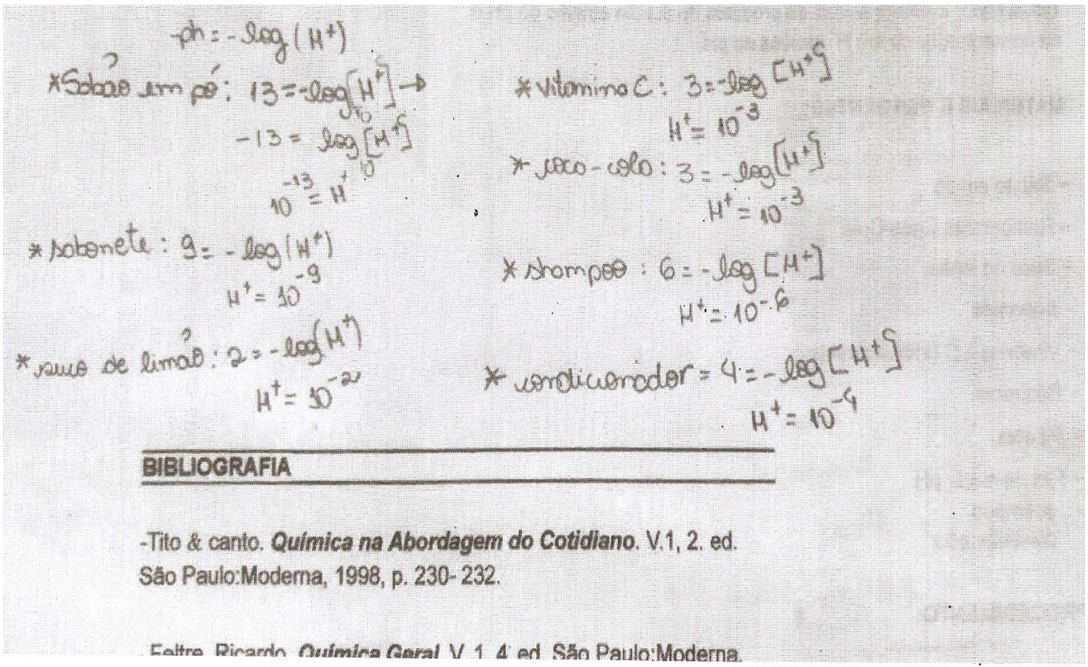
* condicionador → $-\log[H^+] = 4$
  $[H^+] = 10^{-4}$

* shampoo → $-\log[H^+] = 6$
  $[H^+] = 10^{-6}$

* sabonete → $-\log[H^+] = 9$
  $[H^+] = 10^{-9}$

* sabão em pó → $-\log[H^+] = 13$
  $[H^+] = 10^{-13}$

Figura 6.12: Resolução de aluno referente às questões da Atividade 3



$ph = -\log(H^+)$

*Sabão em pó: $13 = -\log[H^+] \rightarrow$

$-13 = \log[H^+]$

$10^{-13} = H^+$

*sabonete: $9 = -\log(H^+)$

$H^+ = 10^{-9}$

*suco de limão: $2 = -\log(H^+)$

$H^+ = 10^{-2}$

*vitamina C: $3 = -\log[H^+]$

$H^+ = 10^{-3}$

*coca-cola: $3 = -\log[H^+]$

$H^+ = 10^{-3}$

*shampoo: $6 = -\log[H^+]$

$H^+ = 10^{-6}$

*condicionador = $4 = -\log[H^+]$

$H^+ = 10^{-4}$

BIBLIOGRAFIA

-Tito & canto. ***Química na Abordagem do Cotidiano***. V.1, 2. ed. São Paulo:Moderna, 1998, p. 230- 232.

- Feltre, Ricardo. ***Química Geral***. V. 1, 4 ed. São Paulo:Moderna.

Figura 6.13: Resolução de aluno referente às questões da Atividade 3

6.4 ATIVIDADE 4

Trabalho realizado em sala para conclusão de mestrado no curso de PPGECE

TÍTULO: Experimento - Avalanches

Aluno(a):____ANO:_____

Objetivos:

- Modelar o fenômeno de avalanches;
- Construir gráficos;
- Linearizar gráficos através de logaritmos.

Este experimento propõe modelar matematicamente avalanches provocadas por materiais simples, como milho de pipoca, feijão e um recipiente qualquer. Inicialmente, os alunos produzirão avalanches, verificando suas intensidades pela quantidade de grãos que desmoronaram. A partir daí, construirão gráficos com os dados coletados, obtendo uma curva. Aplicando logaritmo torna-se possível analisar a função que modela o fenômeno e até fazer algumas previsões.

Introdução

Este experimento dará noções aos alunos de como ver fenômenos e eventos de maneira sistemática, anotando algumas informações, em ambiente controlável, para fazer uma modelagem matemática. Modelos matemáticos podem ser úteis para descrever, entender ou prever alguns fenômenos da natureza ou da tecnologia.

Observe também que o experimento vai mostrar a possibilidade de reproduzir os resultados, dentro de uma margem de erro razoável, que é um dos princípios básicos da ciência experimental, e também a vivenciar um pouco de como os cientistas desenvolvem seus modelos.

Motivação

O experimento com grãos de feijão ou milho vai simular a essência de uma avalanche. O material é de fácil acesso e pode ser feito sem qualquer instrumento: basta fazer contagem dos grãos que caem ao colocá-los, um a um, no amontoado de grãos que se organiza no estado crítico de escorregar ou não. Usualmente um grão empurra o outro, o qual pode absorver o novo grão se acomodando localmente ou pode empurrar seu vizinho. Na maioria das vezes, um grão de algum lugar acaba rolando montanha abaixo. Outras vezes, dois grãos. E algumas vezes, vários grãos.

Temos vários exemplos de que este comportamento coletivo acontece em amplitudes e frequências diferentes. É interessante observar que avalanches, desmoronamentos, terremotos, incêndios naturais em florestas, tempestades solares, microfraturas em estruturas metálicas e cerâmicas, extinção de espécies biológicas, ganhos e perdas em economia, congestionamento em trânsito etc, seguem equações matemáticas, dentro de algumas simplificações. Isto é, mesmo sendo fenômenos tão complicados e distintos, uma análise matemática mostra e até prevê seu comportamento.

Físicos e engenheiros dizem que esses sistemas no limiar de avalanche, desmoronamento etc, estão em limites críticos entre estabilidade e instabilidade, e que os elementos dos sistemas tendem a se auto-organizar. Podemos dizer então que o experimento não se trata apenas de modelar queda de grãos em uma pilha ou um amontoado, e sim estudar o método de caracterizar e depois analisar, usando a função logaritmo, os dados coletados.

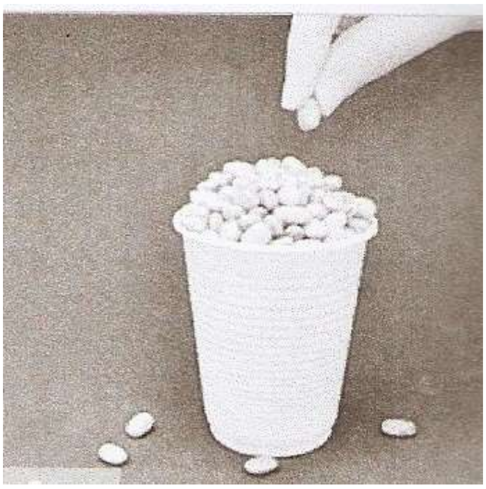


Figura 6.14: Copo de grãos de feijão

O experimento

Este tipo de experimento ficou um pouco comprometido, devido à situação remota por um período, mas alguns alunos se disponibilizaram para a realização dessa atividade, primeiro com uma porcentagem pequena, de modo *online*, mas, depois o número de participantes aumentou, devido à modalidade presencial. Ele foi dividido em 3 etapas.

Etapa 1: Coleta de dados

Quanto mais dados, melhor, mas os alunos não deveriam ter pressa. Consideramos razoável se o aluno chegasse a 30 eventos. No entanto, a maior limitação é o tempo da aula e o interesse dos alunos em se comprometer à realização completa do experimento.

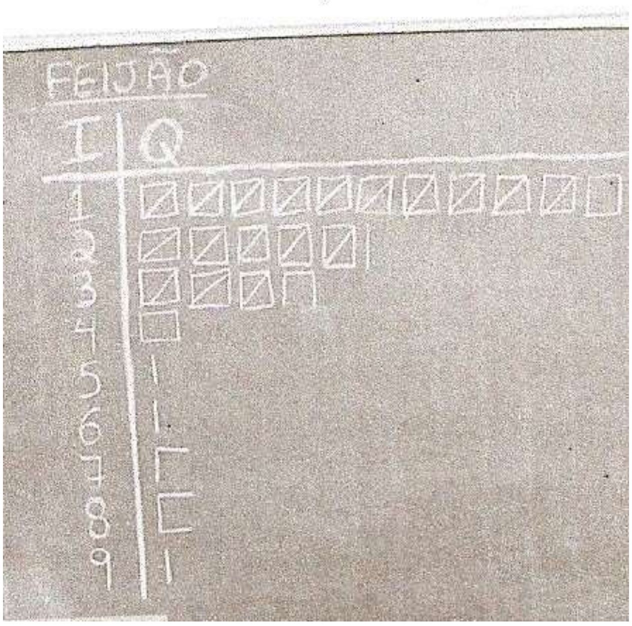


Figura 6.15: Anotação dos alunos

Etapa 2: Representação gráfica

A primeira constatação a que os alunos deveriam chegar é que a quantidade de eventos Q decresce com a intensidade I. Quanto mais eventos, menor a intensidade e vice-versa, quanto maior a intensidade menos eventos, isto é, eventos de grande avalanche são muito raros.

Convém lembrar o gráfico da função $f(x) = k/x$. Para melhor tentar ajustar os dados iniciais, vejamos o gráfico da função $f(x) = 85/x$ para $x > 0$. Entretanto, para valores maiores de x, o gráfico já não é fiel aos dados obtidos.

Q = quantidade

I = Intensidade

I	Q
1	54
2	26
3	18
4	4
5	1
6	1
7	2
8	3
9	1

Tabela 6.1: Q = f(I)

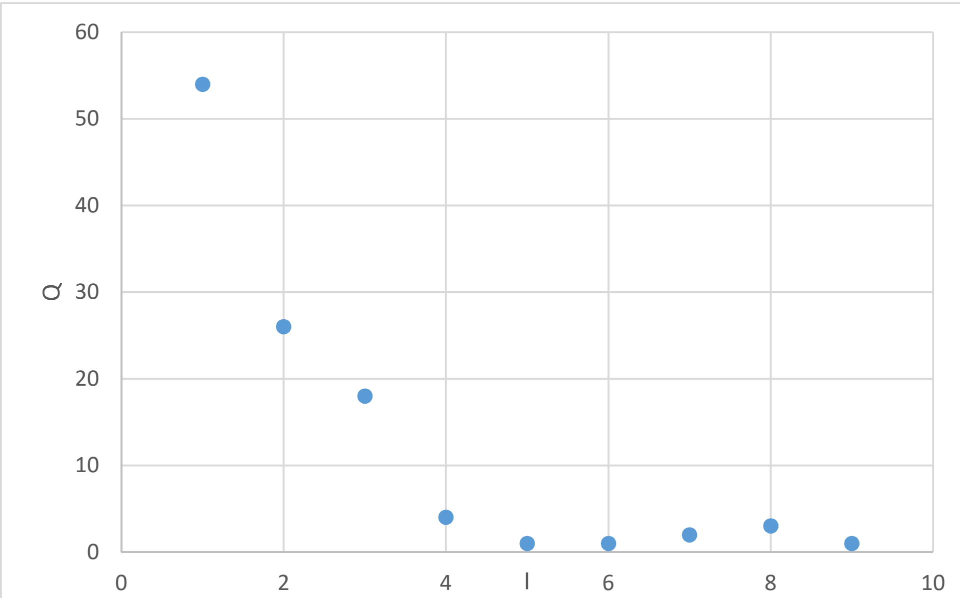


Figura 6.16: Função Q = f(I) (realizado pelo autor)

Para melhor ajuste aos dados obtidos, passamos à Etapa 3.

Etapa 3: Uma nova representação

A modelagem matemática consiste em ajustar um gráfico aos dados coletados. A função proposta é a seguinte:

$$Q = \frac{a}{I^b}$$

que tem as principais características dos dados, isto é, para constantes positivas *a* e *b*, quanto maior a intensidade I, menor a quantidade Q.

Para encontrar as constantes, aplicamos a função logaritmo e usamos suas propriedades:

$$\log(Q) = \log(a) - b.\log(I)$$

Podemos usar qualquer base. No entanto, para não precisarmos de calculadora científica ou computador, usamos a base 2 e listamos alguns valores de logaritmo na base 2 no anexo do experimento.

No exemplo dado no texto do experimento, obtemos, com alguma margem de erro, b = 2 e a = $2^{6,4}$ = 84,4. Assim, temos uma relação explícita:

$$Q = \frac{84,4}{I^2}$$

Q = quantidade

I = Intensidade

I	Q
1	84,4
2	21,1
3	9,38
4	5,28
5	3,38
6	2,34
7	1,72
8	1,32
9	1,04
10	0,84

Tabela 6.2: Q = f(I)

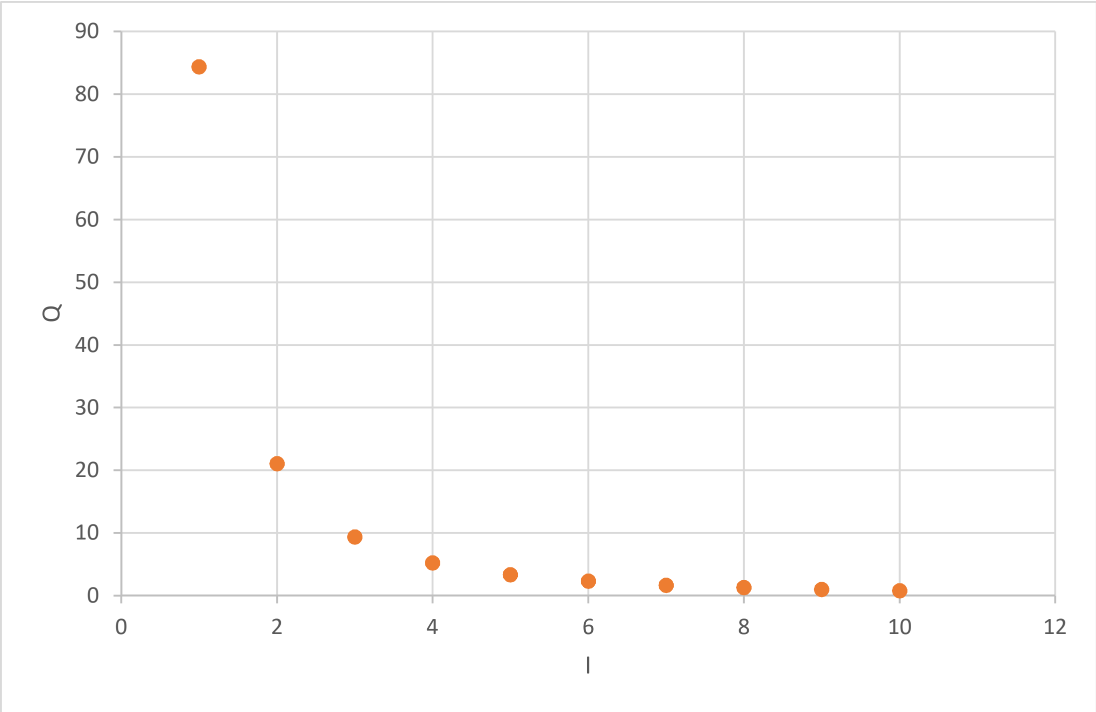


Figura 6.17: Função Q = f(I) (realizado pelo autor)

Veja o gráfico superposto ao anterior para enfatizar as diferenças:

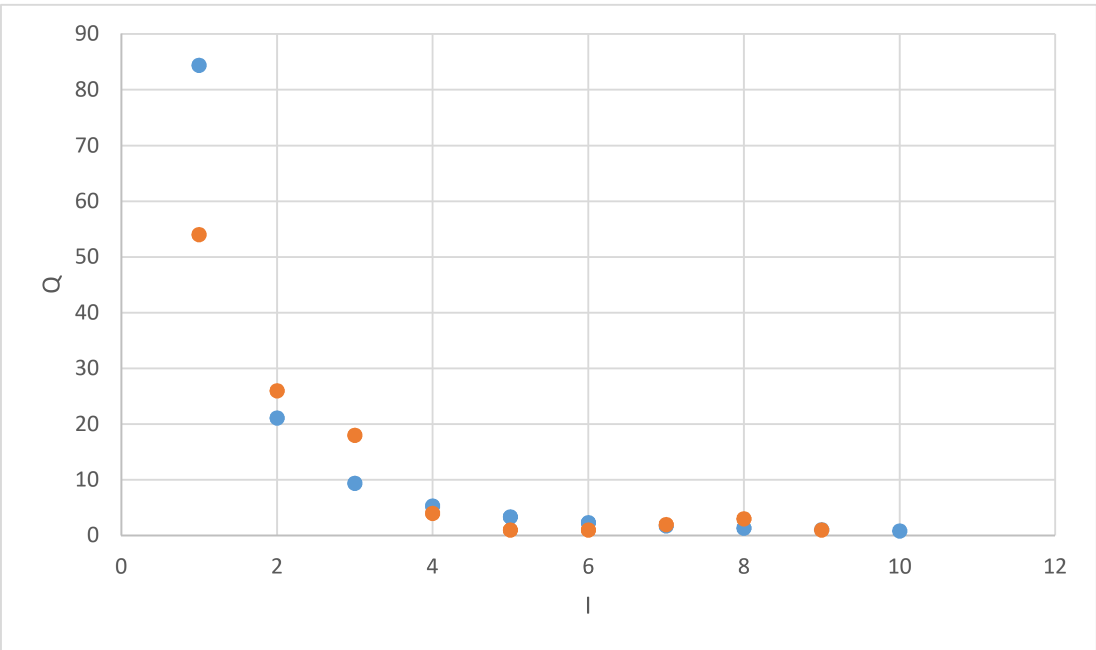


Figura 6.18: Gráfico superposto das Funções (realizado pelo autor)

A partir dos valores de Q, podemos obter os valores relativos ao total e eventos de desmoronamentos durante o experimento. Por exemplo, se no experimento temos o total de 110, então definimos Qr = Q/110 e teremos a seguinte expressão:

$$Qr = \frac{0{,}767}{I^2},$$

Suponha que em um experimento aconteceu um desmoronamento de 9 grãos em um total de 110 tentativas, então com a expressão acima podemos fazer a seguinte previsão probabilística:

Avalanches com intensidade de 10 grãos poderão ocorrer com probabilidade maior que 0,7%, ou melhor dizendo, pode haver mais de 7 eventos em mil nos quais a intensidade da avalanche seja de 10 grãos.

Isto porque para I = 10, Qr = 0,00767 > $\frac{7}{1000}$.

6.4.1 Resumo da Aplicação – Atividade 4

Antes de iniciar o experimento, o professor fez toda a introdução, objetivando o porquê da atividade, na simulação de uma avalanche. Também mostrou a importância de vivenciar um pouco de como os cientistas desenvolvem seus modelos. Depois, apresentou a divisão do experimento em etapas, Coleta de dados, Representação gráfica e uma nova representação, exemplificando a tabela, gráficos e modelos matemáticos.

Mesmo com toda a explicação detalhada, nesta atividade de aplicação, o professor teve alguns percalços na realização, seja pela pequena participação *online*, no qual a grande maioria dos alunos se recusaram a fazer (contar grãos de feijão), e mesmo estando presencial, a experiência não pode ser realizada em grupos (devido à pandemia), o que levou um tempo muito maior para a concretização individualmente, além da paciência exigida dos alunos e professor, para anotar uma vez de cada, os grãos de feijão que desmoronavam do copo. A participação foi em torno de 15 alunos, juntado os três anos do Ensino Médio.

A primeira etapa foi a que mais demorou, pois, uma pequena parcela dos alunos realizou a experimentação *online* e outra parte, realizou presencialmente, de modo individual; enfim, foram preenchidas 15 tabelas. Depois dessa etapa, os alunos inseriram os dados no plano cartesiano, a fim de formarem a curva exponencial decrescente. Alguns alunos tiveram dificuldade na escolha da escala a ser adotada na inserção dos pontos (dados), o que foi resolvido com a ajuda do professor. Assim, perceberam que quanto maiores as intensidades, menores os eventos, mostrando que eventos de grande avalanche são muito raros de acontecer.

Após a conclusão do gráfico, os alunos conseguiram entender a proposta da atividade, e a conscientização dos modelos matemáticos utilizados nas áreas que trabalham com desmoronamentos, avalanches, terremotos e também os limites críticos de estabilidade e instabilidades dos sistemas estudados.

A terceira etapa da Atividade ficou na teoria, quando o professor exemplificou no início da apresentação, no entanto os poucos alunos que participaram se mostraram satisfeitos e até motivados por estarem envolvidos nesse projeto de mestrado.

Atividades realizadas pelos alunos


FEIJÃO

I	Q	
1		42
2		20
3		6
4		2
5		2
6		1
7		0
8		1

1

Figura 6.19: Coleta de dados (1)

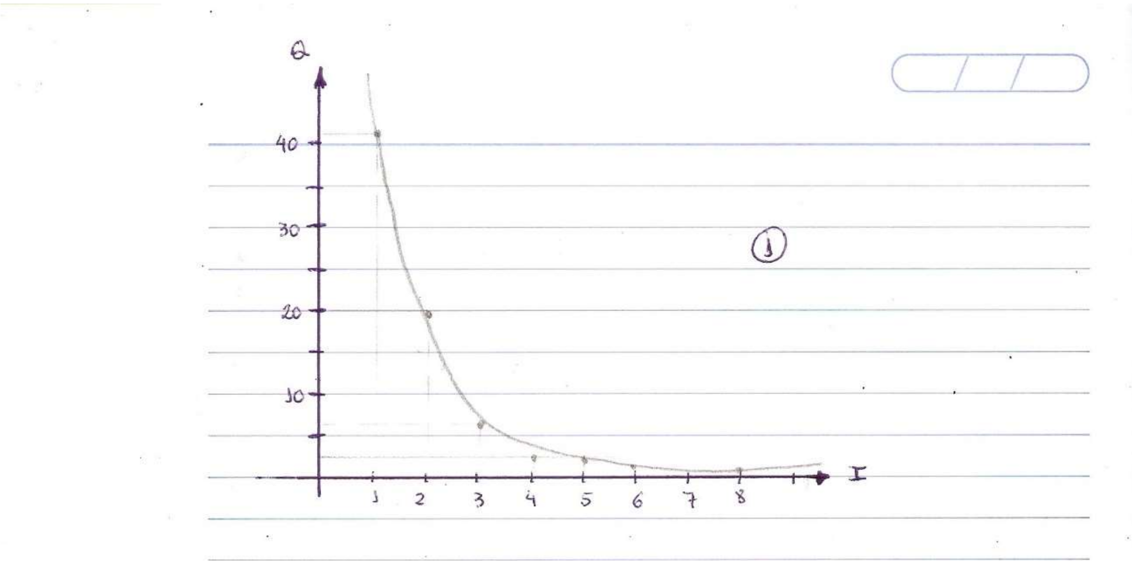


Figura 6.20: Gráfico referente à coleta de dados (1)

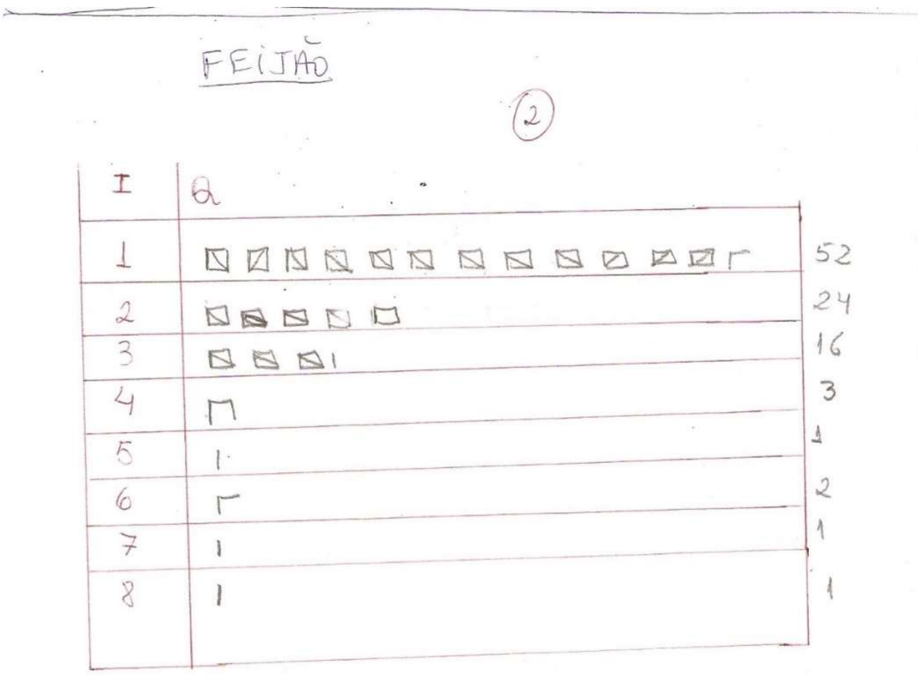


Figura 6.21: Coleta de dados (2)

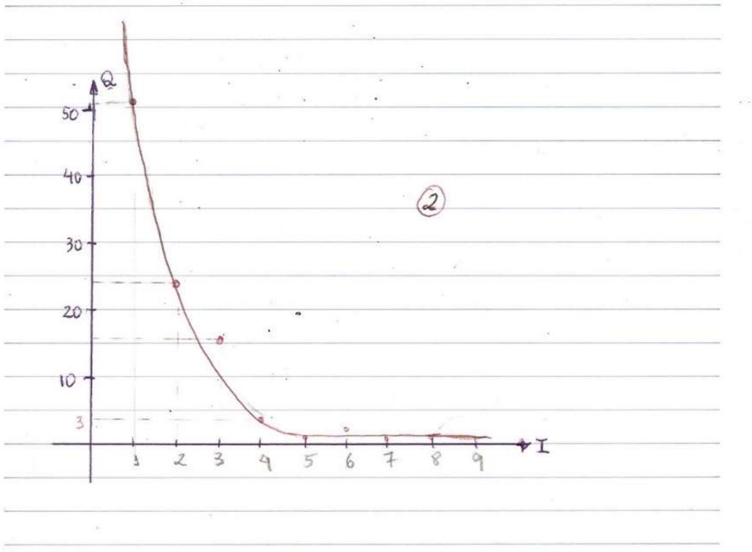


Figura 6.22: Gráfico referente à coleta de dados (2)

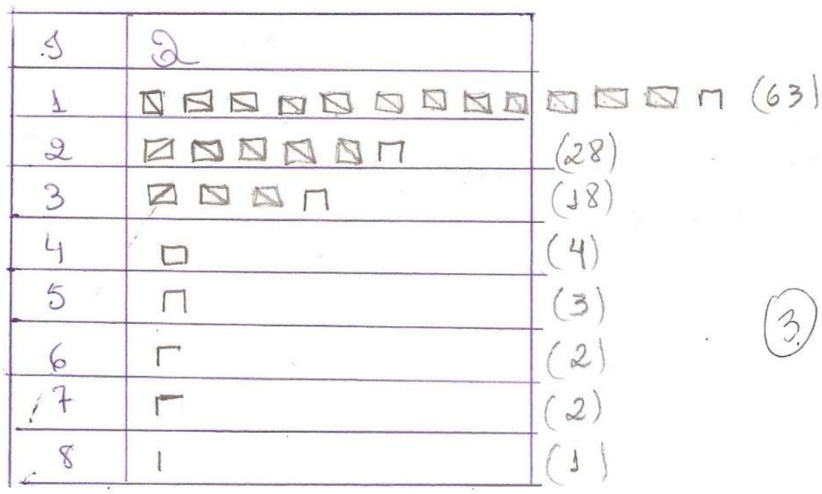


Figura 6.23: Coleta de dados (3)

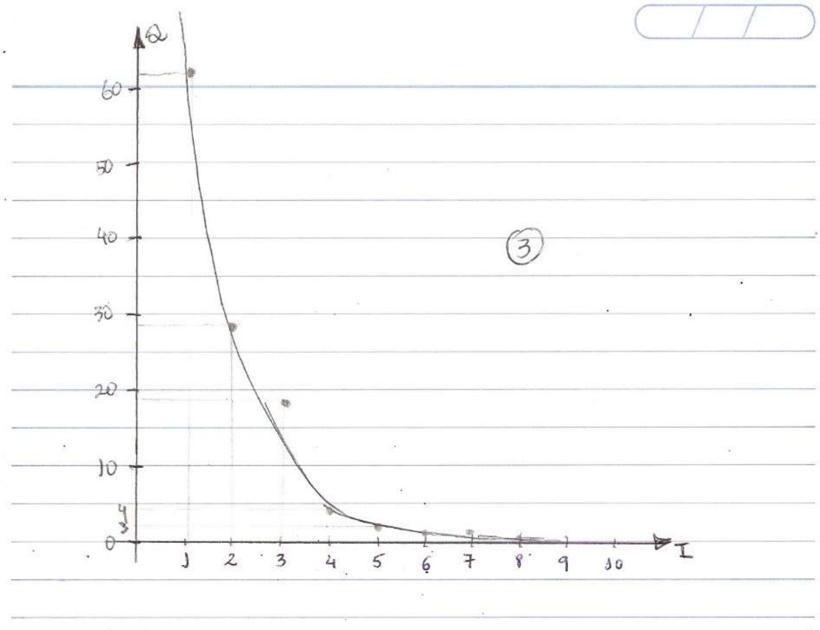


Figura 6.24: Gráfico referente à coleta de dados (3)

6.5 ATIVIDADE 5

Trabalho realizado em sala para conclusão de mestrado no curso de PPGECE

TEMA: PG X PA(LOG)

Aluno(a):____ANO:_____

Esta atividade foi realizada apenas por 10 alunos, que individualmente se comprometeram a realizá-las, para o bom andamento da pesquisa na busca de uma construção do conhecimento, e para uma futura aplicação do logaritmo.

6.5.1 ATIVIDADE 5.1 - PG x PA

Observe a tabela abaixo. Na primeira coluna, ela apresenta uma progressão geométrica de razão 2 e primeiro termo 1 e, na segunda coluna, uma progressão aritmética de razão 5 e primeiro termo igual a 0.

PG	PA
1	0
2	5
4	10
8	15
16	20
32	25
64	30
128	35
256	40
512	45
1024	50
2048	55
4096	60

Tabela 6.3: PG x PA

Agora, responda:

1. a) Na coluna da PG, multiplique o termo da linha 3 pelo termo da linha 7.
   b) Na coluna da PA, some o termo da linha 3 com o termo da linha 7.
   c) Os resultados encontrados estão na tabela? Em que linhas?

2. a) Na coluna da PG, multiplique o termo da linha 6 pelo termo da linha 4.
   b) Na coluna da PA, some o termo da linha 6 com o termo da linha 4.
   c) Os resultados encontrados estão na tabela? Em que linhas?

3. a) Calcule 16 x 64 e confira se o resultado está na tabela.
   b) Qual número da segunda coluna está na mesma linha que 16?
   c) Qual número da segunda coluna está na mesma linha que 64?
   d) Se você somar esses números encontrados na coluna da PA, quanto dá? O resultado da conta está na tabela?

4. Você sabe obter o resultado de 32 x 128 sem fazer a conta diretamente, mas utilizando apenas a tabela?

5. a) Na coluna da PG, divida o termo da última linha pelo termo que está na sexta linha e veja se o resultado está na tabela. Se estiver, anote em qual linha.
   b) Na coluna da PA, subtraia o termo da última linha pelo termo que está na sexta linha e confira se o resultado está na tabela. Se estiver, anote em qual linha.
   c) Os resultados das operações efetuadas estão na mesma linha ou em linhas diferentes?

6. a) Calcule 512 ÷ 32 e confira se o resultado está na tabela.
   b) Qual número da segunda coluna está na mesma linha que 512?
   c) Qual número da segunda coluna está na mesma linha que 32?
   d) Se você subtrair esses números encontrados na coluna da PA, qual é o resultado? O resultado está na tabela?

7. Você sabe obter o resultado de 2048 ÷ 16 sem fazer a conta diretamente, mas utilizando apenas a tabela?

8. Calcule 4 x 16 e 10 + 20. Confira em que linhas estão os resultados.

9. Efetue 512 ÷ 8 e 45 - 15. Confira em que linhas estão os resultados.

10. É possível efetuar as operações de multiplicação e divisão sem muito trabalho, usando a tabela acima? Como?

11. É possível determinar 32^2, apenas utilizando a tabela 1?

6.5.1.1 Resumo da Aplicação – Atividade 5.1

Inicialmente, o professor precisou explicitar o que eram progressões aritméticas a geométricas, exemplificando as características e propriedades de cada, até que o entendimento por parte dos alunos fosse boa para, assim, começar as atividades.

Na resolução dos itens, os alunos não apresentaram dificuldades, pois além de analisarem a tabela 6.3, utilizando setas, relacionando os números da PA e da PG, também recorreram aos cálculos manualmente para verificação dos resultados. Ainda nesta atividade, é interessante observar o processo de investigação matemática no aluno, na exposição de suas ideias e formulação de suas conjecturas.

Ressalta-se que alguns alunos não conseguiram resolver o item 11 e, nesse caso, o professor precisou explicar que $32^2 = 32 \text{ x } 32$. Olhando na tabela, o aluno calcularia 2 x 25 = 25 + 25, e, finalmente tomaria o número correspondente ao 50, que, neste caso, seria o 1024, o que depois foi entendido com clareza por todos.

ATIVIDADE 1 - PG x PA

Observe a tabela abaixo. Na primeira coluna, ela apresenta uma progresão geométrica de razão 2 e primeiro termo 1 e, na segunda coluna, uma progressão aritmétca de razão 5 e primeiro termo igual a 0.

	PG	PA
1	1	0
2	2	5
3	4	10
4	8	15
5	16	20
6	32	25
7	64	30
8	128	35
9	256	40
10	512	45
11	1024	50
12	2048	55
13	4096	60

Tabela 1

q = 2
r = 5

10 - 1 = 9
3 e 7 = 256
10 - 1 = 9
6 e 4 = 256
12 - 1
5 e 7 = 1024

Agora, responda:

1. a) Na coluna da PG, multiplique o termo da linha 3 pelo termo da linha 7.
   b) Na coluna da PA, some o termo da linha 3 com o termo da linha 7.
   c) Os resultados encontrados estão na tabela? Em que linhas?

a) 4 . 64 = 256 b) 10 + 30 = 40 c) Sim, na linha 9.

2. a) Na coluna da PG, multiplique o termo da linha 6 pelo termo da linha 4.
   b) Na coluna da PA, some o termo da linha 6 com o termo da linha 4.
   c) Os resultados encontrados estão na tabela? Em que linhas?

a) 32 . 8 = 256 b) 25 + 15 = 40 c) Sim, na linha 9

Figura 6.25: Resolução de aluno dos itens 1 e 2 da Atividade 5.1

3. a) Calcule 16 x 64 e confira se o resultado está na tabela.
b) Qual número da segunda coluna está na mesma linha que 16?
c) Qual número da segunda coluna está na mesma linha que 64?
d) Se você somar esses números encontrados na coluna da PA, quanto dá? O resultado da conta está na tabela?

a) 1024. Está.
b) O número 20
c) O número 30
d) 20 + 30 = 50. Sim, na linha 11

4. Você sabe obter o resultado de 32 x 128 sem fazer a conta diretamente, mas utilizando apenas a tabela? Sim, só pegar a 1ª coluna da linha 6 e 8, somar os 2 (6+8) e tirar 1. O número que resultar (13) é o número da linha que está o resultado.

5. a) Na coluna da PG, divida o termo da última linha pelo termo que está na sexta linha e veja se o resultado está na tabela. Se estiver, anote em qual linha.

b) Na coluna da PA, subtraia o termo da última linha pelo termo que está na sexta linha e confira se o resultado está na tabela. Se estiver, anote em qual linha.

c) Os resultados das operações efetuadas estão na mesma linha ou em linhas diferentes?

a) $\frac{4096}{32} = 128$. Linha 8
b) 60 - 25 = 35. Linha 8.
c) Na mesma linha

6. a) Calcule 512 ÷ 32 e confira se o resultado está na tabela. 16. Está
b) Qual número da segunda coluna está na mesma linha que 512? 45
c) Qual número da segunda coluna está na mesma linha que 32? 25
d) Se você subtrair esses números encontrados na coluna da PA, qual é o resultado? O resultado está na tabela?

45 - 25 = 20. Está na linha 5.

7. Você sabe obter o resultado de 2048 ÷ 16 sem fazer a conta diretamente, mas utilizando apenas a tabela?

Linha de 2048 → 55. Linha 16 → 20
55 - 20 = 35
Resultado = 128

8. Calcule 4 x 16 e 10 + 20. Confira em que linhas estão os resultados.

64 e 30. Estão na linha 7.

9. Efetue 512 ÷ 8 e 45 - 15. Confira em que linhas estão os resultados.

64 e 30. Linha 7.

10. É possível efetuar as operações de multiplicação e divisão sem muito trabalho, usando a tabela acima? Como? Sim. Na multiplicação basta pegar as linhas em que se encontram os números a serem multiplicados e somar a PA dessas linhas. Com isso, o número da PA que der, o resultado será o PG da mesma linha. E para divisão é o mesmo coisa, mas ao invés de somar os números da PA você subtrai.

11. É possível determinar 32^2, apenas utilizando a tabela 1?

32^2 → 2.25 = 50 → linha do 50, 1024. Resposta 1024. Então sim dá para calcular.

Figura 6.26: Resolução de aluno dos itens 3 a 11 da Atividade 5.1

6.5.2 ATIVIDADE 5.2 - PG x PA

1. a) Calcule $(32)^2$ e verifique se o resultado está na tabela.

   b) Calcule 25 x 2 e localize o resultado na tabela.

   c) O que você reparou até agora?

2. a) Calcule $(64)^2$ e verifique se o resultado está na tabela.

   b) Calcule 30 x 2 e localize o resultado na tabela.

   c) O que você reparou até agora?

3. a) Calcule $(4)^3$ e verifique se o resultado está na tabela.

   b) Calcule 10 x 3 e localize o resultado na tabela.

   c) O que você reparou até agora?

4. Como você pode obter o resultado de $(8)^3$ só usando a tabela?

5. a) Qual é a raiz quadrada de 256? O resultado está na tabela? Em qual linha?

   b) Qual número corresponde a esse resultado na coluna da PA? Ele é a metade de que número? Esse número está na tabela? Em qual linha?

6. a) Como você pode obter $\sqrt{256}$ apenas olhando para a tabela?

b) Determine a raiz quadrada de 1024.

6.5.2.1 Resumo da Aplicação – Atividade 5.2

Nesta atividade pode-se dizer que 50% dos alunos deixaram em branco os itens 4 e 6, já que mencionam o cubo de um número e a raiz quadrada, utilizando apenas a tabela. Neste caso, o professor realizou o desenvolvimento com os alunos tirando as dúvidas, e mostrou que $8^3 = 8.8.8$, e olhando na tabela o aluno calcularia 15 x 3 = 15 + 15 + 15, e tomaria o número na tabela correspondente a 45, que seria o 512. O da raiz quadrada de 256, simplesmente tomaria o número referente na coluna da PA, que é o 40, e dividiria por 2, obtendo 20, no qual seu correspondente na coluna da PG é o 16, conseguindo assim o resultado esperado. Este desenvolvimento foi muito importante no andamento das outras atividades, pois os alunos compreenderam as propriedades que as tabelas de PA e PG informam, independente do expoente na potência e do índice no radical.

Agora, faz-se um adentro a respeito da história dessas propriedades observadas. Estas foram descobertas por *Michael Stifel* (1486 – 1567), matemático alemão do século XVI. Na primeira parte de seu livro *Arithmetica Integra*, publicado em 1543, Stifel destaca a vantagem de se associar uma progressão aritmética a uma geométrica e mostra uma tabela com potências sucessivas de 2 em uma linha e uma sequência de números naturais consecutivos em outra:

2	**4**	**8**	**16**	**32**	**64**	**128**	**256**
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**

Ele verificou as seguintes relações:

1. produto na coluna da PG corresponde à soma na coluna da PA;
2. quociente na coluna da PG corresponde à diferença na coluna da PA;
3. n-ésima potência na coluna da PG corresponde ao produto por ‘n’ coluna da PA;
4. raiz n-ésima na coluna da PG correspondente ao quociente por ‘n’ na coluna da PA.

Acredita-se que essa publicação tenha influenciado tanto *John Napier* quanto *Joost Bürgi*, que tiveram a ideia de produzir tabelas de PA e PG.

1. a) Calcule $(32)^2$ e verifique se o resultado está na tabela. 1024. Linha 11.
   b) Calcule 25 x 2 e localize o resultado na tabela. 50 . Linha 11
   c) O que você reparou até agora? Que se você pegar o mesmo linha da tabela, o número da PG ao quadrado vai estar no mesma linha que duas vezes o número da PA.

2. a) Calcule $(64)^2$ e verifique se o resultado está na tabela. 4096 . Linha 13
   b) Calcule 30 x 2 e localize o resultado na tabela. 60 . Linha 13
   c) O que você reparou até agora?

3. a) Calcule $(4)^3$ e verifique se o resultado está na tabela. 64. Linha 7
   b) Calcule 10 x 3 e localize o resultado na tabela. 30 . Linha 7.
   c) O que você reparou até agora? Que o mesmo linha da PG elevado ao cubo, e PA vezes 3 darão 2 números que pertencem o mesmo linha.

4. Como você pode obter o resultado de $(8)^3$ só usando a tabela?
   $15 \cdot 3 = 45$. Linha 10 → $8^3 = 512$ //

5. a) Qual é a raiz quadrada de 256? O resultado está na tabela? Em qual linha?
   16. Sim na linha 5.
   b) Qual número corresponde a esse resultado na coluna da PA? Ele é a metade de que número? Esse número está na tabela? Em qual linha?
   20. É a metade de 40. Está, na linha 9.

6. a) Como você pode obter $\sqrt{256}$ apenas olhando para a tabela?
   b) Determine a raiz quadrada de 1024.

a) A raiz do número da PG é da mesma linha que o número da PA dividido por 2.

b) $\sqrt{1024}$ → $\frac{50}{2} = 25$, está na linha 6. $\sqrt{1024} = 32$ //

Figura 6.27: Resolução de aluno referente à Atividade 5.2

6.5.3 ATIVIDADE 5.3 - PG x PA

a) Preencha as tabelas abaixo, cada uma com os termos consecutivos de uma PG na primeira coluna. Para a tabela 6.4, complete a PG de razão 10, e, na tabela 6.5, considere a razão q = ½. Na segunda coluna, coloque os termos consecutivos da PA de razão r =1.

PG	**PA**
1	0
10	1

Tabela 6.4: PG x PA

PG	PA
1	0
$\frac{1}{2}$	1

Tabela 6.5: PG x PA

b) Com base nas tabelas construídas, responda ás questões abaixo:

1. Na coluna da PG, multiplique o termo da linha 2 pelo termo da linha 5.

2. Na coluna da PA, some o termo da linha 2 com o termo da linha 5.

3. Os resultados encontrados nos itens anteriores estão na tabela? Em que linhas?

4. Na coluna da PG, divida o termo da última linha pelo termo que está na quarta linha. Veja se o resultado está na tabela. Se estiver, anote em qual linha.

5. Na coluna da PA, subtraia o termo da última linha pelo termo que está na quarta linha. Veja se o resultado está na tabela. Se estiver, anote em qual linha.

6. Calcule o quadrado do termo que está na sexta linha da PG.

7. Calcule o dobro do termo que está na sexta linha da PA.

8. Calcule a raiz cúbica do termo da PG que está na linha 8 e a terça parte do termo da PA que está nessa mesma linha.

9. O que você reparou até agora?

6.5.3.1 Resumo da Aplicação – Atividade 5.3

Nesta atividade, os alunos são convidados a preencher as tabelas, de PG com razões 10 e ½ e PA de razão 1 em ambas e o desenvolvimento ocorreu sem maiores problemas. No entanto alguns alunos não utilizaram a notação de potência, o que ocasionou os erros de cálculo no andamento da atividade, evidenciando a pouca familiaridade com as propriedades de potências. Observa-se ainda que um dos alunos interpretou a linha errada, o que comprometeu algumas conclusões, mas, no geral, houve um rendimento produtivo e aceitável.

PG	PA
1	0
10	1
100	2
1000	3
10000	4
100000	5
1000000	6
10000000	7
100000000	8
1000000000	9
10000000000	10
100000000000	11
1000000000000	12

Tabela. 2

PG	PA
1	0
$\frac{1}{2}$	1
1/4	2
1/8	3
1/16	4
1/32	5
1/64	6
1/128	7
1/256	8
1/512	9
1/1024	10
1/2048	11
1/4096	12

Tabela 3

Figura 6.28: Resolução de aluno referente à Atividade 5.3

b) Com base nas tabelas construídas, responda ás questões abaixo:

1. Na coluna da PG, multiplique o termo da linha 2 pelo termo da linha 5.
$10 \cdot 100000 = 1000000$
$1/2 \cdot \frac{1}{32} \Rightarrow 1/64$
2. Na coluna da PA, some o termo da linha 2 com o termo da linha 5.
$1 + 5 = 6$

3. Os resultados encontrados nos itens anteriores estão na tabela? Em que linhas?
sim, PG e PA encontram na linha 6

4. Na coluna da PG, divida o termo da última linha pelo termo que está na quarta linha. Veja se o resultado está na tabela. Se estiver, anote em qual linha.
$\frac{1000000000000}{10000} \Rightarrow 100000000$ linha 8

5. Na coluna da PA, subtraia o termo da última linha pelo termo que está na quarta linha. Veja se o resultado está na tabela. Se estiver, anote em qual linha.
$12 - 4 = 8$ linha 8
6. Calcule o quadrado do termo que está na sexta linha da PG.
$1000000^2 = 1000000000000$
7. Calcule o dobro do termo que está na sexta linha da PA.
$2 \cdot 6 = 12$
8. Calcule a raiz cúbica do termo da PG que está na linha 8 e a terça parte do termo da PA que está nessa mesma linha.
$\sqrt[3]{100000000}$ $\frac{8}{3} = 2,6$
9. O que você reparou até agora?
O valor da PA, é a quantidade de zeros na PG (visto na tabela 2)
na tabela 3, é o valor de quantas vezes multiplica o 2.

Figura 6.29: Resolução de aluno referente à Atividade 5.3

PG	PA
1	0
10	1
10^2	2
10^3	3
10^4	4
10^5	5
10^6	6
10^7	7
10^8	8
10^9	9
10^{10}	10
10^{11}	11
10^{12}	12

$q = 10$ $r = 1$

Tabela 2

PG	PA
1	0
$\frac{1}{2}$	1
2^{-2}	2
2^{-3}	3
2^{-4}	4
2^{-5}	5
2^{-6}	6
2^{-7}	7
2^{-8}	8
2^{-9}	9
2^{-10}	10
2^{-11}	11
2^{-12}	12

$q = 1/2$ $r = 1$

Tabela 3

Figura 6.30: Resolução de aluno referente à Atividade 5.3

b) Com base nas tabelas construídas, responda ás questões abaixo:

1. Na coluna da PG, multiplique o termo da linha 2 pelo termo da linha 5.

Tobela $2 = 10^2 \cdot 10^5 = 10^7$

Tobela $3 = 2^{-2} \cdot 2^{-5} = 10^{-7}$

2. Na coluna da PA, some o termo da linha 2 com o termo da linha 5.

$2+5=7$

3. Os resultados encontrados nos itens anteriores estão na tabela? Em que linhas?

Sim. Na linha 7

4. Na coluna da PG, divida o termo da última linha pelo termo que está na quarta linha. Veja se o resultado está na tabela. Se estiver, anote em qual linha.

Tobela $2 = \frac{10^{12}}{10^4} \rightarrow 10^8$ Linha 8 / Tabela 3 $\rightarrow \frac{10^{-12}}{10^{-4}} = 10^{-8}$ Linha 8

5. Na coluna da PA, subtraia o termo da última linha pelo termo que está na quarta linha. Veja se o resultado está na tabela. Se estiver, anote em qual linha.

$12-4=8$. Está na linha 8

6. Calcule o quadrado do termo que está na sexta linha da PG.

$(10^6)^2 = 10^{12}$

7. Calcule o dobro do termo que está na sexta linha da PA.

$2 \cdot 6 = 12$

8. Calcule a raiz cúbica do termo da PG que está na linha 8 e a terça parte do termo da PA que está nessa mesma linha.

$\sqrt[3]{10^8} = 10^{8/3}$ / $\frac{1}{3} \cdot 8 = \frac{8}{3}$

9. O que você reparou até agora?

Multiplicação e divisão da PG resulto na mesma linha que soma e subtração de PA.

Figura 6.31: Resolução de aluno referente à Atividade 5.3

6.5.4 ATIVIDADE 5.4 - PG x PA

1. Construa uma tabela cuja primeira coluna é a PG de razão $q > 0$ com primeiro termo igual a 1 e os termos seguintes serão $q, q^2, q, \ldots, q^m, \ldots, q^n$; já na segunda coluna, considere a PA de razão $r \neq 0$ com primeiro termo igual a 0 e os termos seguintes serão $r, 2r, 3r, \ldots mr, \ldots nr$.

   Agora, responda:

   a) Calcule o produto de dois termos quaisquer da PG e escreva o resultado em forma de uma só potência. Que termo é esse?

   b) Calcule a soma dos termos da PA correspondentes aos do item anterior e escreva o resultado em função de r.

   c) Os resultados são correspondentes, isto é, estão na mesma linha da tabela?

   d) Verifique que, se dividirmos dois termos quaisquer da PG e se subtrairmos os correspondentes termos da PA, os resultados são correspondentes.

   e) Verifique que, se calcularmos o quadrado de um termo qualquer da PG e o dobro do termo correspondente na PA, os resultados são correspondentes.

   f) Verifique que, se extrairmos a raiz quadrado de um termo quaisquer da PG e se dividirmos por 2 o termo correspondente na PA, os resultados são correspondentes.

6.5.4.1 Resumo de Aplicação – Atividade 5.4

Nesta atividade, ressalta-se que, dos 10 alunos que participaram, somente uma aluna conseguiu realizar completamente e acertadamente, alguns tentaram e desistiram e o restante deixou em branco. Por isso o professor necessitou ir à lousa para explicar o roteiro pedido, desde na montagem da tabela até nas respostas das questões. Aqui fica a nota relatando a grande dificuldade dos alunos no desenvolvimento algébrico e como dito nas atividades anteriores, o fato de não dominarem as propriedades de potências, o desenvolvimento fica comprometido.

Com exceção da aluna que obteve êxito, os demais foram ajudados durante toda a atividade pelo professor, reforçando a ideia de que a generalização em qualquer processo é muito importante na investigação matemática, pois formaliza e valida as conjecturas feitas em casos específicos.

1. Construa uma tabela cuja primeira coluna é a PG de razão $q > 0$ com primeiro termo igual a 1 e os termos seguintes serão $q, q^2, q, \ldots, q^m, \ldots, q^n$; já na segunda coluna, considere a PA de razão $r \neq 0$ com primeiro termo igual a 0 e os termos seguintes serão $r, 2r, 3r, \ldots mr, \ldots nr$.

Agora, responda:

a) Calcule o produto de dois termos quaisquer da PG e escreva o resultado em forma de uma só potência. Que termo é esse? $1 \cdot q = q$ · A razão ·

b) Calcule a soma dos termos da PA correspondentes aos do item anterior e escreva o resultado em função de r.

$0 + r = r$ ·

c) Os resultados são correspondentes, isto é, estão na mesma linha da tabela?

Sim

d) Verifique que, se dividirmos dois termos quaisquer da PG e se subtrairmos os correspondentes termos da PA, os resultados são correspondentes.

$\frac{q^2}{q} = q \quad \{ \; 2r - r = r$

e) Verifique que, se calcularmos o quadrado de um termo qualquer da PG e o dobro do termo correspondente na PA, os resultados são correspondentes.

$q^2 = 2r$

f) Verifique que, se extrairmos a raiz quadrado de um termo quaisquer da PG e se dividirmos por 2 o termo correspondente na PA, os resultados são correspondentes.

$\sqrt{q^2} = \frac{\cancel{2}r}{\cancel{2}}$

$q = r$

PG	PA
1	0
q	r
q^2	$2r$
q^3	$3r$
.	.
.	.
.	.
.	.
q^n	nr

Figura 6.32: Resolução de aluno referente à Atividade 5.4

6.5.5 ATIVIDADE 5.5 - PG x PA

Utilize a tabela 1 para responder às seguintes questões:

a) Na coluna da PA, localize a média aritmética dos números 10 e 40.

b) Na coluna da PG, localize a média geométrica dos números 4 e 256.

c) Os resultados obtidos nos dois itens anteriores estão em que linhas?

d) Na coluna da PA, localize a média aritmética dos números 40 e 30.

e) Na coluna da PG, localize a média geométrica dos números 256 e 64.

f) Os resultados obtidos nos dois itens anteriores estão em que linhas?

g) Explique, com suas palavras, o que você reparou. Você acredita que a propriedade observada vale para outros termos da tabela? Por quê?

6.5.5.1 Resumo de Aplicação – Atividade 5.5

Para esta atividade, o professor novamente fez uma intervenção nos conteúdos médias aritmética e geométrica, pois os alunos esqueceram como calculá-las e precisou de uma retomada. Depois de realizada, os alunos entenderam e iniciaram a atividade, com um aproveitamento ótimo, já que conseguiram responder corretamente todos os itens.

a) Na coluna da PA, localize a média aritmética dos números 10 e 40.

$Am = \frac{10+40}{2} = 25$. Linha 6

b) Na coluna da PG, localize a média geométrica dos números 4 e 256.

$(4 . 256)^{1/2} \rightarrow \sqrt{1024} = 32$. Linha 6

c) Os resultados obtidos nos dois itens anteriores estão em que linhas?

Linha 6

d) Na coluna da PA, localize a média aritmética dos números 40 e 30.

$\frac{40+30}{2} = 35$

e) Na coluna da PG, localize a média geométrica dos números 256 e 64.

$(256 . 64)^{1/2} \rightarrow 128$

f) Os resultados obtidos nos dois itens anteriores estão em que linhas?

Linha 8.

g) Explique, com suas palavras, o que você reparou. Você acredita que a propriedade observada vale para outros termos da tabela? Por quê?

Se voce quer saber o média do PA ou PG, basta fazer o médio aritmético da PA, e o resultado estará no mesmo linha do media geográfico do PG. Sim, pois se pegar número aleatórios Ex: Achar o médio geográfico de 16 e 64, o número é o da linha que tem o médio aritimedico de 20 e 30.

$\frac{20+30}{2} = 25 \rightarrow$ Médio geométrico de 16 e 64 é 32//

Figura 6.33: Resolução de aluno referente à Atividade 5.5

6.5.6 ATIVIDADE 5.6 - CÁLCULO DE LOGARITMOS

Antes de iniciarmos a descrever a aplicação desta atividade, observa-se a grande utilidade das tabelas montadas, fazendo com que os cálculos envolvendo multiplicação, divisão, potências ou raízes, podemos, de posse das tabelas, realizar contas mais simples, respectivamente de adição, multiplicação ou divisão por um número natural.

Tabelas como as utilizadas na atividades anteriores são exemplos de tábuas de logaritmos. *John Napier* publicou, em 1614, um livro intitulado *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (Descrição da maravilhosa regra de logaritmos), depois de ter trabalhado por quase 20 anos produzindo uma tábua de logaritmo. Já o suíço Joost Bürgi, fabricante de relógios e instrumentos de astronomia e matemático, também criou, independentemente, tábuas de logaritmos, mas as publicou seis anos depois de *Napier.*

Uma tabela de logaritmo é uma tabela que tem PG na primeira coluna e PA na segunda. Assim, todas as tabelas que vimos são tabelas de logaritmos. Nessas tabelas, a cada número à esquerda corresponde um número à direita, chamado seu logaritmo.

O número da PG que corresponde ao número 1 na PA é chamado base do logaritmo. Por exemplo, na tabela 4 abaixo, dizemos que o logaritmo de 243 na base 3 é 5 e escrevemos $\log_3 243 = 5$.

X	$\boldsymbol{\log_3 x}$
1	0
3	1
9	2
27	3
81	4
243	5
729	6

Tabela 6.6: Logaritmo – base 3

Do mesmo modo, dizemos que o logaritmo de 1 na base 3 é igual a 0, e escrevemos $\log_3 1 = 0$.

Aplicações:

a) Passe para a notação matemática as sentenças a seguir:
   a.1) o logaritmo de 27 na base 3 é 3.
   a.2) o logaritmo de 729 na base 3 é 6.

b) Agora, passe para a linguagem textual:
   b.1) $\log_3 3 = 1$
   b.2) $\log_3 81 = 4$
   b.3) $\log_3 243 = 5$

Sugestão de Atividade:

Para obtermos o produto de dois números que estão na coluna da esquerda sem efetuarmos a conta diretamente, podemos fazer da seguinte maneira:

Passo 1:

Somamos os logaritmos dos dois fatores. O resultado dessa soma é o logaritmo do produto.

Passo 2:

Lemos na tabela, da direita pra a esquerda, qual é o número correspondente àquele logaritmo.

Por exemplo, observando a tabela 4, calculemos 243 x 3.

- 243 corresponde a 5;
- "vezes" corresponde a "mais";
- 3 corresponde a 1.

Como 5 + 1 = 6, precisamos apenas verificar, na tabela, qual o número da coluna da esquerda corresponde a 6:

- 729 corresponde a 6.

Com isso, podemos concluir, sem fazer a conta, que 243 x 3 = 729.

Note que deixamos de fazer diretamente a multiplicação e, em vez disso, efetuamos uma adição, como havíamos percebido anteriormente.

A mesma ideia, escrita com a notação usual de logaritmos, fica assim:

$$\mathbf{\log_3(243\ x\ 3) = \log_3 243 + \log_3 3 = 5 + 1 = 6 = \log_3 729}$$

Portanto, 243 x 3 = 729.

1. Utilizando a tabela 6.7 a seguir, responda:

X	$\log_5 x$
1	0
5	1
25	2
125	3
625	4
3125	5
15625	6

Tabela 6.7: Logaritmo – base 5

a) $\log_5 25 =$
b) $\log_5 625 =$
c) $\log_5 5 =$
d) $\log_5 1 =$

e) $\log_5 15625 =$

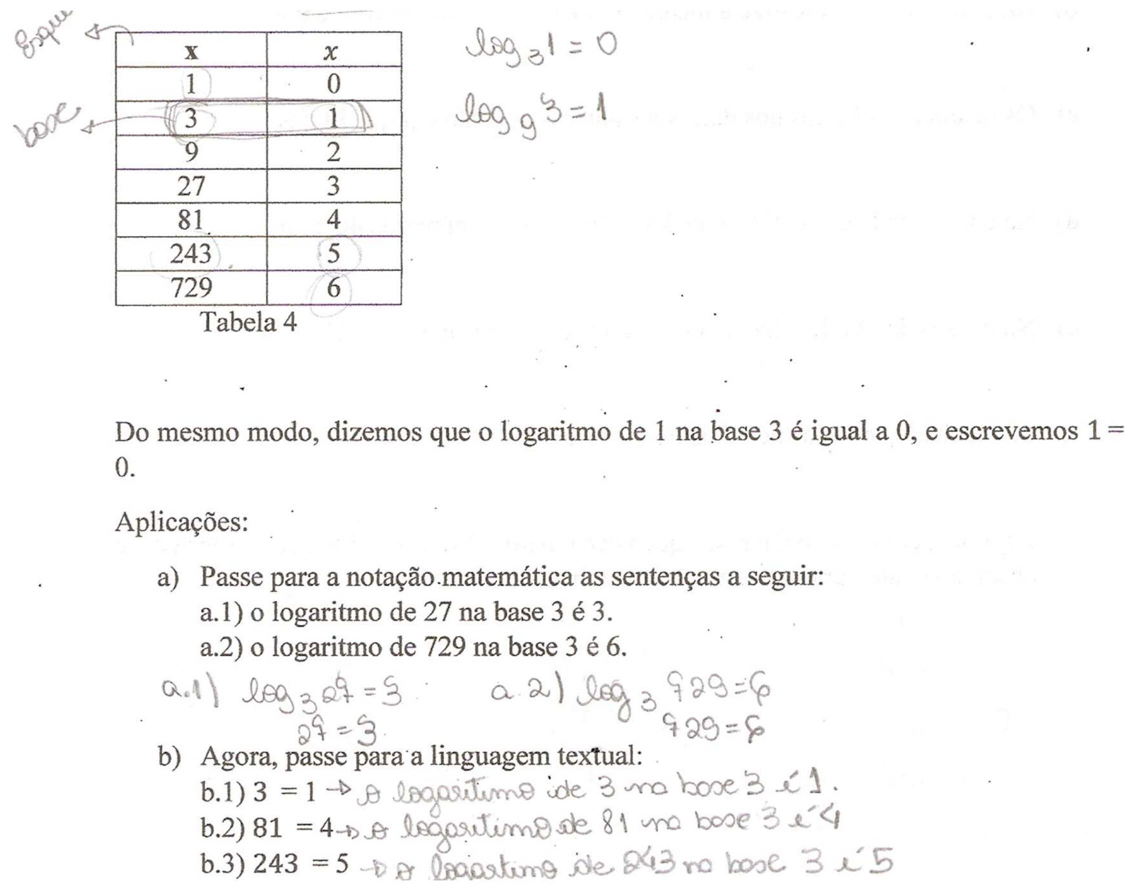
f) $\log_5 125 =$

g) $\log_5 3125 =$

2. Utilizando a tabela 6.7, calcule o valor de 25 x 625

6.5.6.1 Resumo da aplicação – Atividade 5.6

Pode-se dizer que nesta atividade, 90% dos alunos conseguiram responder corretamente os itens propostos, apenas um aluno resolveu apenas a questão 1, deixando em branco a 2, o que foi logo resolvido com a intervenção do professor, sendo que o aluno entendeu o procedimento utilizado e chegou à conclusão de ser o mesmo procedimento efetuado nas atividades anteriores.



Expoe

base

x	x
1	0
3	1
9	2
27	3
81	4
243	5
729	6

Tabela 4

$\log_3 1 = 0$

$\log_9 3 = 1$

Do mesmo modo, dizemos que o logaritmo de 1 na base 3 é igual a 0, e escrevemos 1 = 0.

Aplicações:

a) Passe para a notação matemática as sentenças a seguir:
a.1) o logaritmo de 27 na base 3 é 3.
a.2) o logaritmo de 729 na base 3 é 6.

a.1) $\log_3 27 = 3$
$27 = 3$

a.2) $\log_3 729 = 6$
$729 = 6$

b) Agora, passe para a linguagem textual:
b.1) 3 = 1 → o logaritimo de 3 na base 3 é 1.
b.2) 81 = 4 → o logaritimo de 81 na base 3 é 4
b.3) 243 = 5 → o logaritimo de 243 na base 3 é 5

Figura 6.34: Resolução de aluno referente à Atividade 5.6

x	x
1	0
5	1
25	2
125	3
625	4
3125	5
15625	6

Tabela 5

a) 25 = 2
b) 625 = 4
c) 5 = 1
d) 1 = 0
e) 15625 = 6
f) 125 = 3
g) 3125 = 5

2. Utilizando a tabela 5, calcule o valor de 25 x 625

25.625 =
4 + 2 = 6 → 15.625

Figura 6.35: Resolução de aluno referente à Atividade 5.6

6.5.7 ATIVIDADE 5.7 - CÁLCULO DE LOGARITMOS

Calcule as operações indicadas sem efetuá-las diretamente, mas usando uma tábua de logaritmos que você construirá.

a) 256 x 4

b) 8^3

c) 1024 ÷ 256

d) 512 ÷ 16

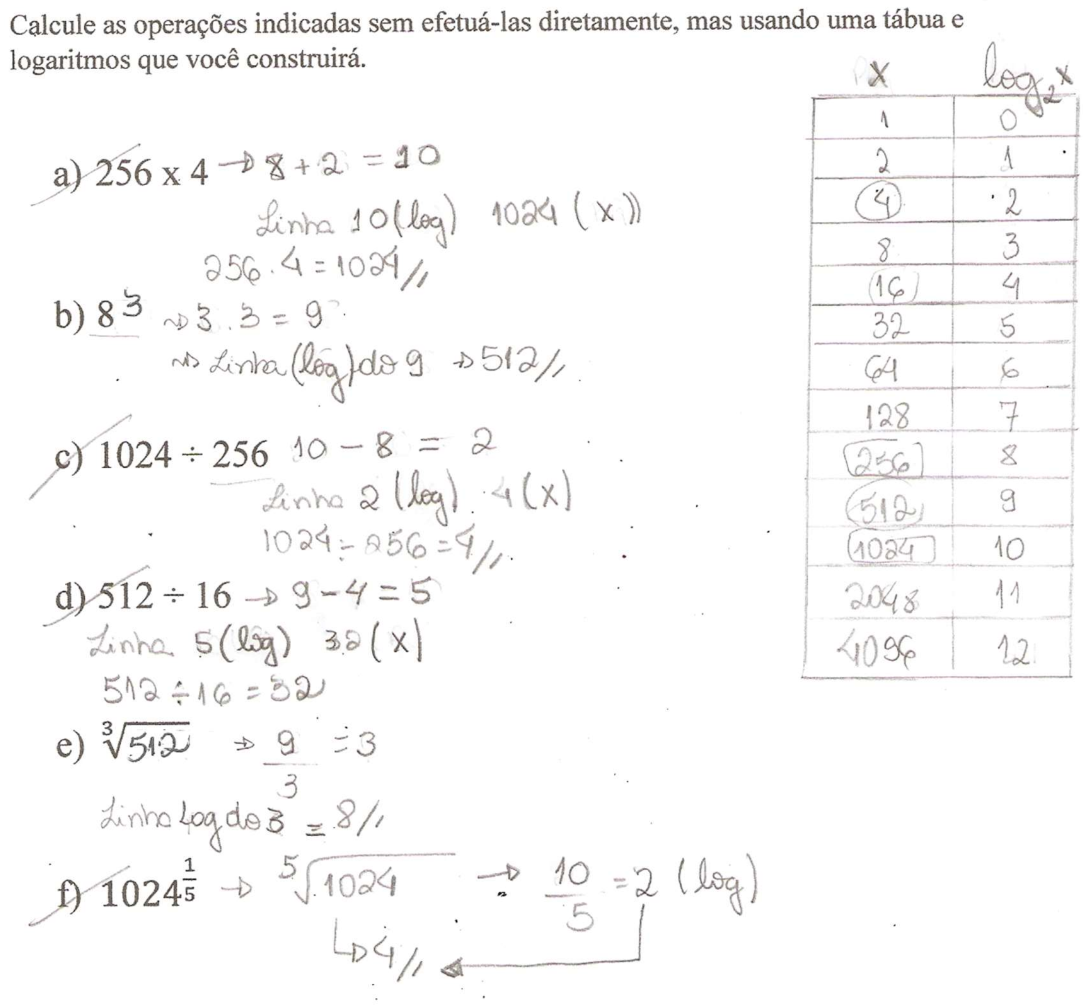
e) $\sqrt[3]{512}$

f) $1024^{\frac{1}{5}}$

6.5.7.1 Resumo da aplicação – Atividade 5.7

Nesta última atividade proposta em sala de aula, pode-se dizer que 20% dos alunos conseguiram completar todos os itens corretamente, já 50% desenvolveram parcialmente, pois erraram na construção da tabela e consequentemente os resultados foram incorretos. Por fim, 30% dos alunos nem sequer iniciaram a atividade, pois a dificuldade encontrada era na montagem da tabela, que nem tentaram. Fica a preocupação na habilidade desses alunos em realizar atividades voltadas à potenciação, radiciação e também a falta de iniciativa em tentar resolver o problema.

Depois de verificado o retorno dos alunos nas questões nesta atividade, o professor foi à lousa e montou a tabela juntamente com todos, e assim, diante dela, responderam os itens propostos, mostrando que não era difícil e nem impossível. Assim eles entenderam e se conscientizaram da importância do esforço, persistência e paciência quando se estuda temas matemáticos e suas situações-problema.



Calcule as operações indicadas sem efetuá-las diretamente, mas usando uma tábua e logaritmos que você construirá.

a) $256 \times 4 \to 8 + 2 = 10$

Linha 10 (log) 1024 (x)

$256 \cdot 4 = 1024$//

b) $8^3 \to 3 \cdot 3 = 9$

→ Linha (log) do 9 → 512//

c) $1024 \div 256$ $10 - 8 = 2$

Linha 2 (log) 4 (x)

$1024 \div 256 = 4$//

d) $512 \div 16 \to 9 - 4 = 5$

Linha 5 (log) 32 (x)

$512 \div 16 = 32$

e) $\sqrt[3]{512} \to \frac{9}{3} = 3$

Linha log do 3 = 8//

f) $1024^{\frac{1}{5}} \to \sqrt[5]{1024} \to \frac{10}{5} = 2$ (log)

→ 4//

x	$\log_2 x$
1	0
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6
128	7
256	8
512	9
1024	10
2048	11
4096	12

Figura 6.36: Resolução de aluno referente à Atividade 5.7

6.6 Comentários Finais sobre a Atividade 5

Pode-se dizer que o balanço geral na aplicação desta atividade foi bom, com rendimento acima de 50%, no entanto, algumas considerações pontuais foram registradas: alguns problemas de notações equivocadas, falta de organização ao redigir uma resposta, dificuldades em potenciação, radiciação, linguagem algébrica, falta de iniciativa, etc. A simbologia matemática tem um papel fundamental na compreensão dos conteúdos estudados para uma aprendizagem efetiva. Finalizando, foi muito gratificante participar dessa atividade, vivenciando as alegrias e tristezas dos alunos nos acertos ou erros e tendo como alicerce do ensino: a construção do conhecimento pelo aprendiz de maneira qualificada e eficaz.

Considerações Finais

Pode-se dizer que a proposta de realizar todas as atividades apresentadas neste trabalho foi contemplada, proporcionando um aprendizado mais concreto dos conceitos de exponenciais e logaritmos, desde o domínio mais simples até o mais complexo.

As atividades 1 e 2 se fundamentam em questões envolvendo a base de exponenciais e logaritmos, desde uma revisão de potenciação e radiciação até uma abordagem das características e propriedades na resolução de situações-problema. Já na atividade 3 predomina a interdisciplinaridade entre Química e Matemática na aplicação de cálculo do pH dos compostos químicos, utilizando os logaritmos como ferramenta para o desenvolvimento.

A atividade 4 mostra o auxílio das funções exponenciais e logarítmicas na construção de gráficos e na modelagem de vários fenômenos, como o experimento das avalanches, permitindo aos alunos vivenciar um pouco de como os cientistas desenvolvem seus modelos.

A atividade 5 utiliza uma sequência didática, usando tabelas de PA e PG, que evidenciam a principal propriedade dos logaritmos, a saber, satisfeitos as condições de existência,

$$\log_b(x.y) = \log_b x + \log_b y\ ,$$

e que esta propriedade foi clara para a maioria dos participantes da atividade proposta.

Com isso, podemos responder à pergunta realizada na introdução desse trabalho que é: **A utilização de problemas advindos de aplicações efetivamente contribui para a melhoria de aprendizagem de exponenciais e logaritmos no Ensino Médio?**

A resposta, diante de todas as vivências aplicadas é sim, já que se observou um rendimento significativo na resolução de problemas, perante aplicações que se tornam um importante instrumento de cálculo em vários tópicos e facilitador de situações cotidianas.

Assim, espera-se que este trabalho também auxilie outros professores na busca de uma melhor aprimoramento didático, promovendo atividades de aplicação que motivem os alunos numa participação efetiva para a compreensão das propriedades da função logarítmica e sua inversa, a exponencial, que modelam fenômenos cotidianos em diversas áreas como física, química, biologia, música e geografia.

Por isso, a necessidade de se aplicar problemas de acordo com os conteúdos ministrados, para almejar uma melhora na aprendizagem efetiva, participativa e qualificada.

Referências Bibliográficas

[1] BRASIL, Ministério da Educação (MEC). Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *PCN+: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais.* Brasília, 2012, 144 p.

[2] PAIVA, M. *Matemática Paiva* [S.L]: Editora Moderna,2014

[3] DANTE, L. R. *Matemática: Contextos e Aplicações.* [S.L]: Editora Ática,2010.

[4] BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 2.ed. São Paulo: Edgard Blücher,2002

[5] SÃO PAULO (ESTADO). Secretaria da Educação (SEE). Currículo do Estado de São Paulo: *Matemática e suas Tecnologias* – São Paulo, 2010.

[6] SÃO PAULO (ESTADO). Secretaria da Educação (SEE). *Caderno do aluno: Matemática, Ensino Médio- 1ª série, vol. 3* – São Paulo, 2020.

[7] GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto; JUNIOR, José Ruy Giovanni. *Matemática Fundamental: uma nova abordagem.* Ensino Médio. Vol. Único. São Paulo: FTD,2002.

[8] EVES, Houward. *Introdução à história da matemática.* Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

[9] LIMA, Elon Lages. *Números e Funções reais,* coleção do PROFMAT. SBM, Rio de Janeiro, 2013. 1ª edição.

[10] LIMA, Elon Lages. *Logaritmos.* [S.L], Rio de Janeiro, 2010.

[11] KATHLEEN M. Clark (The Florida State University) e CLEMENCY Montelle (University of Canterbury), *Logarithms: The Early History of a Familiar Function – Introduction,* Convergence,2011.

[12] CERGOLI, Daniel, *Ensino de logaritmos por meio de investigações matemáticas em sala de aula*. Dissertação (Mestrado) – USP, SP, 2017.

[13] ÁVILA, Geraldo Severo de S. *Cálculo I: Diferencial e Integral*. Brasília, Editora Universidade de Brasília, 1978.

[14] ÁVILA, Geraldo Severo de S. *Como se constrói uma tabela de logaritmos.* RPM 26, Campinas, SBM, 1994.

[15] TITO & CANTO. *Química na Abordagem do Cotidiano*. V.1,2. Ed. São Paulo: Moderna, 1998, p.230-232.

[16] FELTRE, Ricardo, *Química Geral.* V.1,4. Ed. São Paulo: Moderna, 1999, p.207-209.

[17] SKOOG, Douglas A. et al. *Fundamentos de Química Analítica.* 9. Ed. São Paulo: Cengage Learning, 2017, p.320-341.

[18] ANGELUCCI, Michel, *Uma abordagem diferente para o ensino da função exponencial no Ensino Médio.* Dissertação (Mestrado) – UFSCAR, SP, 2013.

[19] BAK, P. *How Nature Works: The Science of Self- Organized Criticality.* New York: Copernicus. ISBN 0-387-94791-4, 1996.

[20] LAURSON, L; MIKKO,A.; ZAPPERI,S. *Power spectra of self-organized critical sandpiles.* J. Stat.Mech. 051192005) L001 [arXiv:cond-mat/0509401v1].2005.

[21] ANDRADE, R. *Exact Solution for the Self-Organized Critical Rainfall Model.* Brazilian Journal of Physics, vol.33, no. 3, September, 2003.

[22] ROBALLO, Murilo S. *Aplicações de funções exponenciais e logarítmicas.* Dissertação (Mestrado) – Universidade de Brasília, 2014

[23] MAOR, E. *A História de um número.* [S.1.]: Editora Record, RJ, 2008.

ANEXOS

Estudo de dois modelos de aplicação que utilizam conhecimentos de Cálculo Diferencial e Integral.

ANEXO A: Circuito Elétrico

Ao aplicar certa tensão elétrica E num elemento condutor de eletricidade (ver figura 5.3), produz-se uma corrente elétrica de intensidade I. Essa intensidade I não atinge um valor fixo imediatamente. Todo circuito tem um certo coeficiente de auto indutância L, assim, se aplicarmos ao circuito uma força eletromotriz E, ele reagirá com uma força contra eletromotriz de intensidade $L\frac{dI}{dt}$, de modo que a força eletromotriz resultante será:

$$F(t) = E - L\frac{dI}{dt}.$$

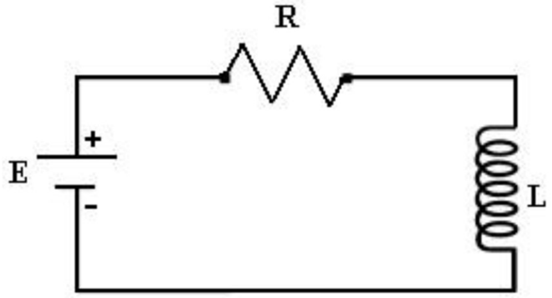


Figura 5.3: Circuito elétrico.

Pela Lei de Ohm, tem-se:

$$F = RI \leftrightarrow RI = E - L\frac{dI}{dt}t$$

em que R é a resistência do circuito.

$$RI = E - L\frac{dI}{dt}$$

$$L\frac{dI}{dt} = E - RI$$

$$LdI + (RI - E)dt = 0$$

Fazendo $dI = dx \leftrightarrow x = I$ e $dt = dy \leftrightarrow y = t$, temos:

$$Ldx + (R_x - E)dy = 0$$

Sendo:

$$L = M = P_x \quad e \quad R_x - E = N = P_y$$

Se $M_y = 0$ e $N_x = R$, temos:

$$\frac{N_{x-M_y}}{M} = \frac{R}{L} = P_y = 0, \quad \lambda = e^{\int \frac{R}{L} dy} = e^{\frac{R}{L} y}$$

$$Le^{\frac{R}{L} y}dx + e^{\frac{R}{L} y}(R_x - E)dy = 0$$

$$M_y = L.e^{\frac{R}{L} y}.\frac{R}{L}$$

$$Nx = R.e^{\frac{R}{L} y}$$

$$\emptyset = \int Le^{\frac{R}{L} y}dx = Lxe^{\frac{R}{L}y}dx + g(y)$$

$$\emptyset_y = Lxe^{\frac{R}{L}y}.\frac{R}{L} + g'(y) = Rxe^{\frac{R}{L}y} - Ee^{\frac{R}{L}y} \rightarrow$$

$$g'(y) = -Ee^{\frac{R}{L}y}$$

$$g(y) = \int -E.e^{\frac{R}{L}} dy = -Ee^{\frac{R}{L}y}.\frac{L}{R}$$

$$f = Lxe^{\frac{R}{L}y} - \frac{EL}{R}e^{\frac{R}{L}y} = k$$

$$Lxe^{\frac{R}{L}y} = k + \frac{EL}{R}e^{\frac{R}{L}y}$$

$$-\frac{EL}{R}e^{0} = k \leftrightarrow k = -\frac{EL}{R}$$

$$LIe^{\frac{R}{L} t} = \frac{EL}{R}e^{\frac{R}{L} t} - \frac{EL}{R} = \frac{E}{R}\left(e^{\frac{R\,t}{L}} - 1\right)$$

$$I = \frac{E}{R}\left(1 - e^{\frac{-R\,t}{L}}\right)$$

Resolvendo a equação diferencial acima e sabendo-se que I(0) = 0, obtém-se

$$I(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{\frac{-R\,t}{L}}\right)$$

que é a função que descreve a intensidade da corrente ao longo do tempo enquanto o circuito está ligado.

A função I(t) está representada graficamente na figura abaixo.

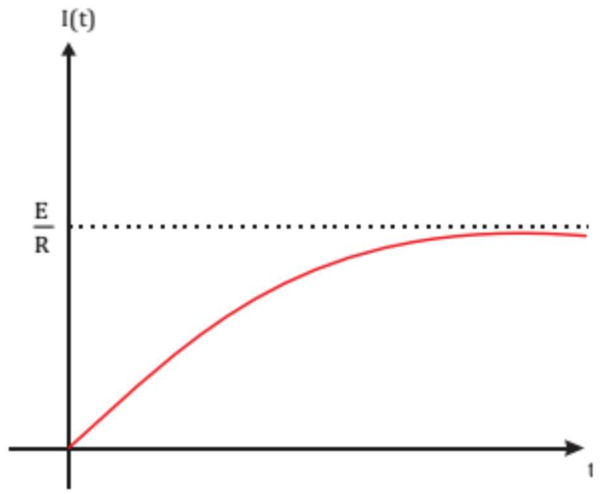


Figura 5.4: Gráfico da intensidade da corrente elétrica

Em particular, num circuito em que E = 10, L = 10 e R = 2, após 10 segundos de ligado, a intensidade da corrente será:

$$I = \frac{10}{2}(1 - e^{-0,2.10})$$

$$I = 5.\left(1 - \frac{1}{e^2}\right)$$

Usando e ≈ 2,7, temos I = 4,31 A.

ANEXO B: Intensidade Luminosa

As plantas aquáticas são encontradas a até alguns metros de profundidade da superfície de lagos e oceanos. Isso é explicado pelo fato da intensidade de luz I diminuir exponencialmente com a profundidade x.

Segundo a lei de Bouger - Lambert, constatou-se que a taxa de variação da intensidade luminosa à determinada profundidade x, isto é $\frac{dI}{dt}$, é proporcional a própria intensidade luminosa.

Logo, obtém-se a função $I(x) = I_0e^{-kx}$, em que k é o coeficiente de absorção da água, que depende do comprimento de onda da luz e da densidade da água.

O gráfico de I(x) está representado abaixo:

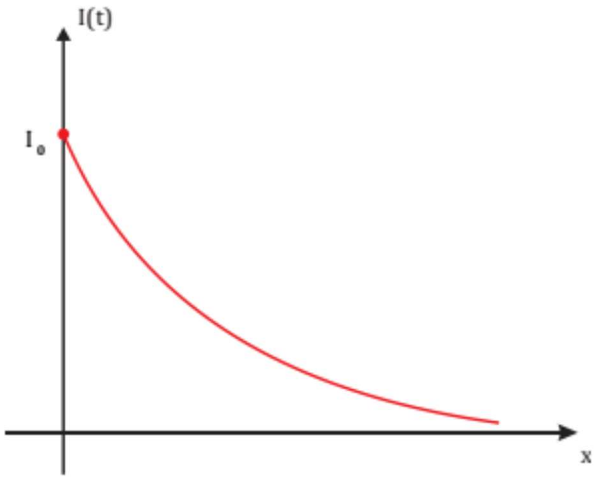


Figura 5.5: Gráfico da intensidade luminosa I(x)