UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

LIA OLIVEIRA DE ABREU

A REPRESENTAÇÃO DECIMAL FRACIONÁRIA DE NÚMEROS REAIS
ASPECTOS TEÓRICOS E HISTÓRICOS

SÃO CARLOS
2021

LIA OLIVEIRA DE ABREU

A REPRESENTAÇÃO DECIMAL FRACIONÁRIA DE NÚMEROS REAIS
ASPECTOS TEÓRICOS E HISTÓRICOS

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de São Carlos.

Orientador: Prof. Dr. João Carlos Vieira Sampaio

SÃO CARLOS
2021

Oliveira de Abreu, Lia

A representação decimal fracionária de números reais: aspectos teóricos e históricos / Lia Oliveira de Abreu -- 2021.
42f.

TCC (Graduação) - Universidade Federal de São Carlos, campus São Carlos, São Carlos
Orientador (a): João Carlos Vieira Sampaio
Banca Examinadora: João Carlos Vieira Sampaio, Yuriko Yamamoto Baldin, José Antonio Salvador
Bibliografia

1. História da matemática. 2. Representação decimal de números reais fracionários. 3. Dízimas periódicas na representação de números racionais. I. Oliveira de Abreu, Lia. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática (SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Ronildo Santos Prado - CRB/8 7325

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - CCM/CCET
Rod. Washington Luís km 235 - SP-310, s/n - Bairro Monjolinho, São Carlos/SP, CEP 13565-905
Telefone: (16) 33518221 - http://www.ufscar.br

DP-TCC-FA nº 15/2021/CCM/CCET

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)

FOLHA DE APROVAÇÃO

LIA OLIVEIRA DE ABREU

A REPRESENTAÇÃO DECIMAL FRACIONÁRIA DE NÚMEROS REAIS. ASPECTOS TEÓRICOS E HISTÓRICOS

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – Campus São Carlos

São Carlos, 21 de junho de 2021

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

Cargo/Função	Nome Completo
Orientador	João Carlos Vieira Sampaio
Membro da Banca 1	Yuriko Yamamoto Baldin
Membro da Banca 2	José Antonio Salvador

Documento assinado eletronicamente por **Jose Antonio Salvador**, **Professor do Magistério Superior**, em 11/08/2021, às 12:33, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Yuriko Yamamoto Baldin**, **Professor do Magistério Superior**, em 11/08/2021, às 16:27, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Joao Carlos Vieira Sampaio**, **Professor do Magistério Superior**, em 15/08/2021, às 17:54, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pela força e coragem durante toda minha caminhada.

Agradeço Lucas por ser companheiro e por me ajudar de todas as maneiras que consegue, deixo aqui minha gratidão e meu sentimento de felicidade por poder ter você ao meu lado.

Agradeço a João Carlos Salmerão pelo apoio, por acreditar que eu conseguiria e me fazer acreditar também.

Agradeço meus amigos que me acompanharam e me apoiaram durante todo o processo, em especial a Franciele Santos, Mariana Palombo e Elionai Golveia por me acompanharem durante toda a graduação e por sempre estarem ali quando precisei. Agradeço a Nilto e Alino por serem luz em minha vida, meus irmãos e amigos. Amo vocês.

Sou grata por todos os professores que contribuíram para minha trajetória acadêmica, em especial meu orientador professor João Carlos Sampaio, pela compreensão e por acreditar em mim, por me ajudar sempre, por ser singular.

Agradeço pelas bolsas que recebi, primeiramente do grupo PET, a quem devo agradecimentos também pelo acolhimento e aprendizado que me proporcionaram e a bolsa da CAPES pelo programa Residência Pedagógica.

Agradeço e dedico esse trabalho e todas as minhas conquistas a uma mulher, Auricélia Oliveira, que esteve ao meu lado mesmo quando não sabia, nos momentos dificeis, nos momentos de fraqueza, nos momentos em que pensei em desistência era sempre ela que me dava forças para seguir, ela é minha inspiração. A ela dedico esse pouco espaço e queria que ela soubesse que para ela todo espaço do mundo seria pouco.
Obrigada mãe.

Sou muito grata a todos, realizar este trabalho nas atuais circunstâncias não seria possível sem estes antes citados, agradeço pela paciência, apoio e incentivo e principalmente pelo carinho.

O sucesso nasce do querer, da determinação e persistência em se chegar a um objetivo. Mesmo não atingindo o alvo, quem busca e vence obstáculos, no mínimo fará coisas admiráveis.

José de Alencar *(PENSADOR, 2021).*

RESUMO

Neste trabalho realizamos um estudo sobre a história e os conceitos do desenvolvimento da representação decimal dos números reais, que provavelmente teve seu início com trabalhos de Simon Stevin em La Theinde (O décimo) em 1585 (STEVIN, 1997), tendo sido aperfeiçoado por John Napier em seu tratado de logaritmos, Mirifici logarithmorum canonis descriptio (1614). Descrevemos brevemente o progresso histórico do desenvolvimento do objeto de estudo, abordando também aspectos matemáticos sobre a representação de números reais, racionais e irracionais.

Palavras-chave: Frações decimais. História da matemática. Dízimas periódicas.

ABSTRACT

In this work we carry out a study on the history and concepts of development of the decimal representation of real numbers, which probably started with works by Simon Stevin in La Theinde (The tenth) in 1585 (STEVIN, 1997), having been perfected by John Napier in his treatise on logarithms, Mirifici logarithmorum canonis description (1614). We describe briefly the historical progress of the development of the object of study, also approaching mathematical aspects about the representation of real, rational and irrational numbers.

Keywords: Decimal fractions. History of mathematics. Repeating decimals.

SUMÁRIO

RESUMO

Neste trabalho realizaremos um estudo sobre a história do desenvolvimento da representação decimal dos números reais, que provavelmente teve seu início com trabalhos de Simon Stevin em La Theinde (O décimo) em 1585, tendo sido aperfeiçoado por John Napier em seu tratado de logaritmos, Mirifici logarithmorum canonis descriptio (1614). Descreveremos o progresso histórico do desenvolvimento do objeto de estudo, abordando também aspectos matemáticos sobre a representação de números reais, racionais e irracionais.

1 INTRODUÇÃO

Considere a fração

$$\frac{a}{b}$$

com, $a \in \mathbb{N}$ e $b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$; qualquer aluno de ensino médio saberá o que significa esta representação.

Este trabalho tem como objetivo estudar a origem da representação dos números decimais com partes fracionárias, na forma como se apresentam nos dias atuais e demonstrar teoremas sobre suas representações em bases quaisquer.

No capítulo 1 falamos sobre a história dos números decimais destacando duas figuras principais, Simon Stevin e John Napier, responsáveis pela criação da notação que temos hoje e uso da vírgula ou ponto para separar a parte inteira da parte decimal.

No capítulo 2 estudamos as representações decimais de números racionais positivos em uma base qualquer.

Ainda no capítulo 2 falamos sobre a função φ de Euler e como esta função pode auxiliar na estimativa do comprimento de dízimas periódicas.

No capítulo 3 estudamos as representações decimais de números reais positivos em uma base qualquer.

2 GÊNESE DA REPRESENTAÇÃO DECIMAL DE NÚMEROS REAIS.

2.1 O PAPEL HISTÓRICO DE SIMON STEVIN E JOHN NAPIER.

Para a redação deste capítulo, as referências consultadas foram (KATZ, 2009) e (STEVIN, 1997).

Não se sabe ao certo a data do nascimento de Simon Stevin mas sabemos que nasceu no ano de 1549 onde hoje é a Bélgica e viveu grande parte do seu tempo na Holanda.

Mecânico, matemático e engenheiro é o responsável por construir um método, sem utilizar frações, para resolver operações com números decimais não negativos, com partes fracionárias, análogas às operações com números inteiros, o que o faz ser considerado por muitos o pai dos números decimais.

O método consiste em ordenar os algarismos das partes decimais e dispor números um sobre o outro, indicando o lugar da vírgula. Stevin queria ensinar como resolver as operações com frações decimais de forma mais fácil por meio de inteiros e sem frações.

Essa criação de notação bem pensada para frações decimais foi introduzida em 1585 em seu livro La Theinde e neste encontramos operações realizadas com esse tipo de notação. Na introdução do livro há a ideia de que a notação facilitaria o desempenho de todos os cálculos e contas já que não utilizava frações e sim números inteiros.

No livro de Stevin continham explicações sobre frações decimais e notações para suas representações, contendo também regras para as operações aritméticas e suas respectivas justificativas. O livro mostra a possibilidade de realizar todas as operações elementares através de uma aritmética que utiliza somente números inteiros.

Por exemplo, o número 21,538, até então, era representado na forma $\frac{21538}{1000}$, Stevin propôs representá-lo da seguinte forma:

$$\begin{array}{cccc} ⓪ & ① & ② & ③ \\ 21 & 5 & 3 & 8 \end{array} \qquad\qquad 21⓪\,5①\,3②\,8③$$

No restante do trabalho, usaremos (0), (1), (2), (3), etc. em substituição a ⓪, ①, ②, ③, respectivamente. Também substituiremos representações como 21⓪ 5① 3② 8③ por representações mais leves para leitura, na forma $21_{(0)}\,5_{(1)}\,3_{(2)}\,8_{(3)}$.

Stevin utilizava os termos inícios, primeiras, segundas, terceiras, etc. em vez das palavras inteiros, décimos, centésimos, milésimos, etc. O número 7,435 era escrito como $7_{(0)}4_{(1)}3_{(2)}5_{(3)}$ e sua leitura era 7 inícios, 4 primeiras, 3 segundas, 5 terceiras, e analogamente este número poderia ser escrito na forma de justaposição das frações decimais $7\frac{4}{10}\frac{3}{100}\frac{5}{1000}$.

No seu livro, La Disme (1585), Stevin mostra uma forma natural de se aplicar as quatro operações fundamentais a esse novo conjunto de números, demonstrando as diferentes regras aritméticas, mostrando também que esta forma pode simplificar substancialmente os cálculos com números decimais.

Dada a soma $19,731 + 20,322 + 391,864$ (em nossa notação atual) a seguir mostraremos os cálculos como relatado no livro La Disme (STEVIN, 1997).

Na forma de frações decimais:

$$19_{(0)}\ 7_{(1)}\ 3_{(2)}\ 1_{(3)} = 19\frac{7}{10} + \frac{3}{100} + \frac{1}{1000}$$

$$20_{(0)}\ 3_{(1)}\ 2_{(2)}\ 2_{(3)} = 20\frac{3}{10} + \frac{2}{100} + \frac{2}{1000}$$

$$391_{(0)}\ 8_{(1)}\ 6_{(2)}\ 4_{(3)} = 391\frac{8}{10} + \frac{6}{100} + \frac{4}{1000}$$

Utilizando o algoritmo de Stevin:

$$\begin{array}{rrrrr}
 & {\scriptstyle (0)} & {\scriptstyle (1)} & {\scriptstyle (2)} & {\scriptstyle (3)} \\
 & 19 & 7 & 3 & 1 \\
+ & 20 & 3 & 2 & 2 \\
 & 391 & 8 & 6 & 4 \\
\hline
 & 431 & 9 & 1 & 7
\end{array}$$

Resultando em $431_{(0)}\ 9_{(1)}\ 1_{(2)}\ 7_{(3)}$

Para multiplicar $1,3 \times 2,2$:

Na notação da época:

$$1_{(0)}\ 3_{(1)} = 1\frac{3}{10}$$

$$2_{(0)}\ 2_{(1)} = 2\frac{2}{10}$$

Multiplicando $1\frac{3}{10}$ por $2\frac{2}{10}$ teríamos $2\frac{8}{10}\frac{6}{100}$

Utilizando o algoritmo de Stevin:

$$\begin{array}{rrr} & {\scriptstyle (0)} & {\scriptstyle (1)} \\ & 1 & 3 \\ \times & 2 & 2 \\ \hline & 2 & 6 \\ 2 & 6 & \\ \hline 2 & 8 & 6 \end{array}$$

Resultando em $2_{(0)}\ 8_{(1)}\ 6_{(2)}$

Essa notação foi adaptada, em 1607, pelo matemático e teólogo escocês John Napier que propôs que se usasse uma vírgula ou ponto que separaria a parte inteira da parte decimal.

Em seus cálculos, Stevin realizava os cálculos de números decimais como se fossem naturais e logo mais o assumia o resultado como decimal, estabelecendo casas decimais, o que é feito até os dias de hoje e Napier contribuiu com a notação, implementando o ponto ou vírgula para separar a parte decimal da inteira.

3 A REPRESENTAÇÃO DECIMAL DE NÚMEROS RACIONAIS POSITIVOS

Para a redação deste capítulo as referências consultadas foram (SAMPAIO, 2016) e (CHILDS, 1979).

3.1 REPRESENTAÇÕES DECIMAIS FINITAS E DÍZIMAS PERIÓDICAS

Os números racionais positivos surgiram para suprir necessidades práticas e sua representação mais conhecida é da forma

$$\frac{a}{b}$$

sendo a e b naturais, com $b \neq 0$.

É sabido que todo número racional tem uma única representação na forma de fração irredutível com denominador positivo, isto é, na forma $\frac{a}{b}$, sendo a e b naturais relativamente primos e $b > 0$.

O próximo teorema estabelece a existência de uma representação decimal para cada número racional positivo. Sua demonstração é baseada no procedimento de sucessivas divisões euclidianas, usadas habitualmente para produzir representações decimais de frações.

Teorema 3.1. *Seja $q \in \mathbb{Q}$, $q > 0$. Então $\exists (a_n)_{n \geq 1}$, com $a_n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ e $k \in \mathbb{N}$ tal que $q = k + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$. Em outras palavras, q é a soma de um inteiro k com um número de representação decimal fracionária com uma infinidade de dígitos, na forma habitualmente empregada, ou seja,* $0, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots$.

Demonstração. Temos $q = \frac{m}{b}$ para certos naturais m e b, $b \neq 0$. Vamos assumir $b \geq 2$, pois se $b = 1$, q é um inteiro positivo e tomamos $a_n = 0$ para cada $n \geq 1$. Pelo algoritmo da divisão euclidiana em $\mathbb{N}$, $m = bk + a$, para certos naturais k e a, com $0 \leq a < b$.

Definiremos duas sequências de inteiros $(r_n)_{n \geq 1}$ e $(a_n)_{n \geq 1}$, recursivamente, da seguinte forma:

- $r_1 = a$
- para cada índice k, $k \geq 1$, r_{k+1} é o resto da divisão de $10 r_k$ por b.
- para cada índice k, $k \geq 1$, a_k é o quociente da divisão de $10 r_k$ por b.

Assim, as sequências $(r_n)_{n \geq 1}$ e $(a_n)_{n \geq 1}$ são definidas como restos e quocientes de uma sequência infinita de divisões euclidianas (com exceção para r_1), como indicado a seguir.

$$r_1 = a \qquad \begin{array}{r|l} 10r_1 & b \\ \hline r_2 & a_1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 10r_2 & b \\ \hline r_3 & a_2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 10r_3 & b \\ \hline r_4 & a_3 \end{array} \quad \ldots \quad \begin{array}{r|l} 10r_k & b \\ \hline r_{k+1} & a_k \end{array} \quad \ldots$$

Suponhamos $a > 0$; se $a = 0$, teremos $r_k = 0$ e $a_k = 0$ para cada k, neste caso os resultados são triviais.

Sendo $r_1 = a$, fazemos a divisão euclidiana de $10r_1$ por b,

$$\begin{array}{r|l} 10r_1 & b \\ \hline r_2 & a_1 \end{array}$$

obtendo inteiros a_1 como quociente e r_2 como resto.

Dividindo $10r_2$ por b,

$$\begin{array}{r|l} 10r_2 & b \\ \hline r_3 & a_2 \end{array}$$

obtemos quociente a_2 e resto r_3. Dividindo $10r_3$ por b,

$$\begin{array}{r|l} 10r_3 & b \\ \hline r_4 & a_3 \end{array}$$

obtemos quociente a_3 e resto r_4.

Este algoritmo segue indefinidamente, definindo então duas sequências de inteiros, uma *sequência de restos*,

$$r_1, r_2, r_3, \ldots$$

e uma *sequência de dígitos*,

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

Assim sendo, tal como no enunciado do problema, $r_1 = a$ e, para cada índice $k \geq 1$, a divisão euclidiana de r_k por b define a_k como quociente e r_{k+1} como resto.

Para cada índice k, as sucessivas divisões euclidianas definem uma sequência de igualdades:

$$10r_1 = b \cdot a_1 + r_2 \qquad (1)$$

$$10r_2 = b \cdot a_2 + r_3 \qquad (2)$$

$$10r_3 = b \cdot a_3 + r_4 \qquad (3)$$

$$\vdots$$

$$10r_k = b \cdot a_k + r_{k+1} \qquad (k)$$

Dividindo membro a membro cada igualdade dessa sequência por $10b$, obtemos a sequência de igualdades equivalentes

$$\frac{r_1}{b} = \frac{a_1}{10} + \frac{r_2}{10b} \qquad (1')$$
$$\frac{r_2}{b} = \frac{a_2}{10} + \frac{r_3}{10b} \qquad (2')$$
$$\frac{r_3}{b} = \frac{a_3}{10} + \frac{r_4}{10b} \qquad (3')$$
$$\vdots$$
$$\frac{r_k}{b} = \frac{a_k}{10} + \frac{r_{k+1}}{10b} \qquad (k')$$

Como $r_1 = a$, a igualdade (1') tem a forma equivalente

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{10} + \frac{r_2}{10b} \qquad (1'')$$

Substituindo a fração $\frac{r_2}{b}$ de (2') em (1"), obtemos

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{r_3}{10^2 b} \qquad (2'')$$

Substituindo a fração $\frac{r_3}{b}$ de (3') em (2"), obtemos

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \frac{r_4}{10^3 b} \qquad (3'')$$

Prosseguindo com a sequência de substituições definiremos, por recorrência, igualdades (1"), (2"), (3"), etc., chegando então à igualdade (k"):

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_k}{10^k} + \frac{r_{k+1}}{10^k b} \qquad (k'')$$

Sabemos que em uma divisão euclidiana em $\mathbb{N}$ o resto é menor que o divisor. Assim temos $0 \leq r_{k+1} < b$ para cada k. Portanto $0 \leq \frac{r_{k+1}}{10^k b} < \frac{1}{10^k}$.

Como $\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{10^k} = 0$, temos pelo teorema do confronto para limites de sequências, $\lim_{k\to\infty} \frac{r_{k+1}}{10^k b} = 0$.

O último limite nos leva à representação de $\frac{a}{b}$ como uma série infinita

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= \lim_{k\to\infty}\left(\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots\frac{a_k}{10^k}\right)+\lim_{k\to\infty}\frac{r_{k+1}}{10^k b}\\
&= \lim_{k\to\infty}\left(\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots\frac{a_k}{10^k}\right)+0\\
&= \frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_3}{10^3}+\cdots+\frac{a_k}{10^k}+\cdots\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{10^n}
\end{aligned}$$

Isto define uma *representação decimal* da fração $\frac{a}{b}$, como sendo

$$\frac{a}{b} = 0, a_1a_2a_3 \ldots$$

Para cada índice k, a_k é um dígito do sistema decimal, ou seja, $a_k \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Pois bem, da igualdade

$$10r_k = b \cdot a_k + r_{k+1}$$

temos

$$\frac{10r_k}{b} = a_k + \frac{r_{k+1}}{b}$$

Como $0 \leq r_k < b$, temos $0 \leq \frac{r_k}{b} < 1$, logo $0 \leq \frac{10r_k}{b} < 10$, ou seja,

$$0 \leq a_k + \frac{r_{k+1}}{b} < 10$$

Portanto

$$0 \leq a_k < 10 - \frac{r_{k+1}}{b}$$

e como $0 \leq \frac{r_{k+1}}{b} < 1$, e a_k é um número natural, temos $0 \leq a_k \leq 9$ para cada índice k.

□

Provamos então que todo número racional positivo possui uma forma de representação decimal. Ainda é possível mostrar que esta representação pode ser finita (com $a_n = 0$ para todo n a partir de um índice n_0) ou cíclica.

Dizemos que a representação decimal de um número racional r, $r \geq 0$, é finita quando sua representação decimal possui apenas um número finito de dígitos a_i diferentes de zero. Neste caso r tem a forma $r = b_m \ldots b_1b_0, a_1a_2a_3 \ldots a_n$, com $m \geq 0$, $n \geq 1$.

Teorema 3.2.

a) *Sendo r um número racional positivo, r tem uma representação decimal finita se e somente se $r = \frac{p}{10^n}$ para algum inteiro p.*

b) *Sendo $\frac{a}{b}$ uma fração irredutível de inteiros positivos, sua expansão decimal é finita se e somente se $b = 2^s5^t$, para certos números naturais s e t.*

Demonstração. a) Se r tem uma reprentação decimal finita, então r tem representação decimal na forma $k, a_1a_2 \ldots a_n = k + 0, a_1a_2 \ldots a_n$, sendo k um inteiro positivo. Neste caso, $0, a_1a_2 \ldots a_n = \frac{(a_1a_2 \ldots a_n)_{10}}{10^n}$

Aqui e em outras partes do texto, $(a_1a_2 \ldots a_n)_{10}$ denota o inteiro $a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_n$.

Portanto, $r = \frac{10^nk + (a_1a_n \ldots a_n)_{10}}{10^n} = \frac{p}{10^n}$, sendo p um inteiro positivo.

Reciprocamente, se $r = \frac{p}{10^n}$, podemos supor que $p = 10^n \cdot q + t$, sendo q e t naturais, $0 \leq t < 10^n$. Assim t pode ser representado como $t = (c_{n-1}c_n \ldots c_0)_{10}$, com $c_{n-1}, c_n, \ldots, c_0 \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Nesta representação, talvez tenhamos que tomar alguns dos dígitos iniciais de t como sendo zeros. Por exemplo, $873 < 10^5$ e podemos escrever $873 = 00873$.

Então $r = q + \frac{t}{10^n}$

b) Se $\frac{a}{b}$, fração irredutível de inteiros positivos, tem expansão decimal finita, temos $\frac{a}{b} = \frac{p}{10^n}$, com p inteiro positivo e $n \in \mathbb{N}$.

Então $bp = a \cdot 10^n$, logo $b \mid a10^n$. Como $\text{mdc}(b, a) = 1$, temos que $b \mid 10^n = 2^n5^n$, logo $b = 2^s5^t$ para certos naturais s e t.

Reciprocamente, se $b = 2^s5^t$, suponhamos $s \leq t$ (o caso $s > t$ será análogo). Então $\frac{a}{b} = \frac{a}{2^s5^t} = \frac{a2^{t-s}}{2^t5^t} = \frac{a2^{t-s}}{10^t}$, e portanto a expansão decimal de $\frac{a}{b}$ será finita.

□

Exemplo 3.1.

- $\frac{3287}{10^2} = 32,87$
- $\frac{7}{5} = \frac{14}{10} = 1,4$
- $\frac{31}{40} = \frac{31}{2^3 \cdot 5} = \frac{31 \cdot 5^2}{2^35^3} = \frac{775}{10^3} = 0,775$
- $\frac{53}{98}$ não terá representação decimal finita pois $98 = 2 \cdot 7^2$ contem fatores primos diferentes de 2 e de 5.

Teorema 3.3. *A representação decimal de q ou é finita ($a_n = 0$ a partir de um índice n) ou é cíclica (existe uma sequência finita de a_n's que se repetem indefinidamente).*

Demonstração. Em relação ao algoritmo para determinação dos dígitos da parte fracionária de q (Teorema 2.1), q terá representação decimal finita quando a sequência de restos r_1, r_2, r_3, ... apresentar algum resto nulo. Pois sendo $r_k = 0$ para algum k então teremos $a_k = 0$. Além disso teremos $r_j = 0$ para todo $j > k$, e consequentemente $a_j = 0$ para todo $j > k$. Sendo y_a parte fracionária de q, teremos $y = 0, a_1 a_2 \ldots a_{k-1} 000 \ldots = 0, a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$.

Suponhamos que a expressão da parte fracionária de q não seja finita, isto é, $r_j \neq 0$ para todo índice j. Como $r_1 = a$ e, para cada $k \geq 2$, r_k é o resto da divisão de $10 r_{k-1}$ por b, teremos necessariamente um resto que se repete, pois os restos não nulos de divisão por b estão no conjunto finito de inteiros $\{1, 2, \ldots, b-1\}$. Assim, se a expansão da parte fracionária y não for finita, ela será necessariamente periódica. Pois teremos um (primeiro) resto não nulo r_{k+1} que se repete novamente (mais adiante) após l divisões sucessivas (e somente após essas ℓ divisões) isto é, $r_{k+1} = r_{k+1+\ell}$. Isto quer dizer que, na sequência $(r_n)_{n \geq 1}$, os restos $r_{k+1}, r_{k+2}, \ldots, r_{k+\ell}$, distintos entre si, serão repetidos, nesta ordem sequencial, a partir de $r_{k+1+l} = r_{k+1}$. Aos restos $r_{k+1}, r_{k+2}, \ldots, r_{k+\ell}$ corresponderão dígitos $c_1, c_2, \ldots, c_\ell$ que se repetirão indefinidamente nesta ordem. Teremos então

$$y = 0, a_1 \ldots a_k c_1 \ldots c_\ell c_1 \ldots c_\ell c_1 \ldots c_\ell \ldots$$

ou

$$y = 0, c_1 \ldots c_\ell c_1 \ldots c_\ell c_1 \ldots c_\ell \ldots$$

□

Proposição 3.1. *Sendo $a_1, a_2, \ldots, a_n$ algarismos do sistema decimal, o número racional $\frac{(a_1 a_2 \ldots a_n)_{10}}{99 \ldots 9}$, com n algarismos iguais a 9 no denominador, é o número com representação decimal periódica $0, a_1 a_2 \ldots a_n a_1 a_2 \ldots a_n \ldots = 0, \overline{a_1 a_2 \ldots a_n}$.*

Demonstração. De fato, sendo $m = (a_1 a_2 \ldots a_n)_{10} = a_1 10^{n-1} + a_2 10^{n-2} + \cdots a_1$, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{m}{\underbrace{99 \ldots 9}_{n \text{ algarismos}}} &= \frac{m}{10^n - 1} = \frac{\frac{m}{10^n}}{1 - \frac{1}{10^n}} \\
&= \frac{m}{10^n} + \frac{m}{10^{2n}} + \frac{m}{10^{3n}} + \cdots \\
&= \frac{10^{n-1} a_1 + 10^{n-2} a_2 + \cdots + a_n}{10^n} + \frac{10^{n-1} a_1 + 10^{n-2} c_2 + \cdots + a_n}{10^{2n}} + \cdots \\
&= \frac{10^{n-1} a_1}{10^n} + \frac{10^{n-2} a_2}{10^n} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{10^{n-1} a_1}{10^{2n}} + \frac{10^{n-2} a_2}{10^{2n}} + \cdots + \frac{a_n}{10^{2n}} + \cdots \\
&= \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{a_1}{10^{n+1}} + \frac{a_2}{10^{n+2}} + \cdots + \frac{a_n}{10^{2n}} + \cdots \\
&= 0, a_1 a_2 \ldots a_n a_1 a_2 \ldots a_n = 0, \overline{a_1 a_2 \ldots a_n}
\end{aligned}
$$

□

Exemplo 3.2.

- $\frac{235}{999} = 0,235235235... = 0,\overline{235}$

- $\frac{36}{9999} = \frac{0036}{9999} = 0,00360036... = 0,\overline{0036}$

- $35,02363636... = 35,02\overline{36} = 35,02 + 0,00\overline{36} = 35,02 + \frac{1}{10^2} \cdot 0,\overline{36}$

$$= 35,02 + \frac{1}{10^2} \cdot \frac{36}{99} = \frac{3502}{100} + \frac{36}{9900} = \frac{99 \cdot 3502 + 36}{9900} = \frac{346734}{9900}$$

3.2 REPRESENTAÇÕES FINITAS E “DÍZIMAS” PERIÓDICAS EM UM SISTEMA DE NUMERAÇÃO DE BASE $\beta \geq 2$.

Mostrado que todo número racional com denominador positivo tem uma representação decimal, é possível mostrar que podemos representar este número de forma análoga em qualquer base $\beta \geq 2$, com os a_n's no conjunto de “algarismos” do sistema posicional de base β, $\{0, 1, ..., \beta - 1\}$.

Teorema 3.4. *Seja $q \in \mathbb{Q}$, $q > 0$. Então $\exists (a_n)_{n\geq 1}$, com $a_n \in \{0, 1, ..., \beta - 1\}$ e $k \in \mathbb{N}$ tal que $q = k + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\beta^n}$. Em outras palavras, q é a soma de um inteiro k com um número de representação fracionária na base β, com uma infinidade de dígitos na base β, na forma $0, a_1 a_2 a_3 a_4 ....$*

Demonstração. Veremos que a demonstração segue a mesma linha da demonstração do teorema no caso decimal.

Temos que q é um inteiro ou é soma de um número natural k e uma fração própria $\frac{a}{b}$, isto é com $0 \leq a < b$. Vamos supor que esta é a forma de q. Definiremos duas sequências de inteiros $(r_n)_{n\geq 1}$ e $(a_n)_{n\geq 1}$, recursivamente, da seguinte forma:

- $r_1 = a$

- para cada índice k, $k \geq 1$, r_{k+1} é o resto da divisão de βr_k por b.

- para cada índice k, $k \geq 1$, a_k é o quociente da divisão de βr_k por b.

Assim, as sequências $(r_n)_{n\geq 1}$ e $(a_n)_{n\geq 1}$ são definidas como restos e quocientes de uma sequência infinita de divisões euclidianas (com exceção para r_1), como indicado a seguir.

$$r_1 = a \qquad \begin{array}{r|l} \beta r_1 & b \\ \hline r_2 & a_1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \beta r_2 & b \\ \hline r_3 & a_2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \beta r_3 & b \\ \hline r_4 & a_3 \end{array} \quad \cdots \quad \begin{array}{r|l} \beta r_k & b \\ \hline r_{k+1} & a_k \end{array} \cdots$$

Suponhamos $a > 0$. Se $a = 0$, teremos $r_k = 0$ e $a_k = 0$ para cada k, neste caso os resultados são triviais.

Sendo $r_1 = a$, fazemos a divisão euclidiana de βr_1 por b,

$$\begin{array}{r|l} \beta r_1 & b \\ \hline r_2 & a_1 \end{array}$$

obtendo inteiros a_1 como quociente e r_2 como resto.

Dividindo βr_2 por b,

$$\begin{array}{r|l} \beta r_2 & b \\ \hline r_3 & a_2 \end{array}$$

obtemos quociente a_2 e resto r_3. Dividindo βr_3 por b,

$$\begin{array}{r|l} \beta r_3 & b \\ \hline r_4 & a_3 \end{array}$$

obtemos quociente a_3 e resto r_4.

Este algoritmo segue indefinidamente, definindo então duas sequências de inteiros, uma *sequência de restos*,

$$r_1, r_2, r_3, \ldots$$

e uma *sequência de dígitos na base* β,

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

Assim sendo, $r_1 = a$ e, para cada índice $k \geq 1$, a divisão euclidiana de βr_k por b define a_k como quociente e r_{k+1} como resto.

Para cada índice k, as sucessivas divisões euclidianas definem uma sequência de igualdades:

$$\beta r_1 = b \cdot a_1 + r_2 \qquad (1)$$

$$\beta r_2 = b \cdot a_2 + r_3 \qquad (2)$$

$$\beta r_3 = b \cdot a_3 + r_4 \qquad (3)$$

$$\vdots$$

$$\beta r_k = b \cdot a_k + r_{k+1} \qquad (k)$$

Dividindo membro a membro cada igualdade dessa sequência por βb, obtemos a sequência de igualdades equivalentes

$$\frac{r_1}{b} = \frac{a_1}{\beta} + \frac{r_2}{\beta b} \qquad (1')$$

$$\frac{r_2}{b} = \frac{a_2}{\beta} + \frac{r_3}{\beta b} \qquad (2')$$

$$\frac{r_3}{b} = \frac{a_3}{\beta} + \frac{r_4}{\beta b} \qquad (3')$$

$$\vdots$$

$$\frac{r_k}{b} = \frac{a_k}{\beta} + \frac{r_{k+1}}{\beta b} \qquad (k')$$

Como $r_1 = a$, a igualdade (1') tem a forma equivalente

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{\beta} + \frac{r_2}{\beta b} \tag{1''}$$

Substituindo a fração $\frac{r_2}{b}$ de (2') em (1"), obtemos

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{\beta} + \frac{a_2}{\beta^2} + \frac{r_3}{\beta^2 b} \tag{2''}$$

Substituindo a fração $\frac{r_3}{b}$ de (3') em (2"), obtemos

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{\beta} + \frac{a_2}{\beta^2} + \frac{a_3}{\beta^3} + \frac{r_4}{\beta^3 b} \tag{3''}$$

Prosseguindo com a sequência de substituições definiremos, por recorrência, igualdades (1"), (2"), (3"), etc., chegando então à igualdade (k"):

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{\beta} + \frac{a_2}{\beta^2} + \cdots + \frac{a_k}{\beta^k} + \frac{r_{k+1}}{\beta^k b} \tag{k''}$$

Sabemos que em uma divisão euclidiana em $\mathbb{N}$ o resto é menor que o divisor. Assim temos $0 \leq r_{k+1} < b$ para cada k. Portanto $0 \leq \frac{r_{k+1}}{\beta^k b} < \frac{1}{\beta^k}$.

Como $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{1}{\beta^k} = 0$, pois $\beta \geq 2$, temos pelo teorema do confronto para limites de sequências, $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{r_{k+1}}{\beta^k b} = 0$.

O último limite nos leva à representação de $\frac{a}{b}$ como uma série infinita

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{a_1}{\beta} + \frac{a_2}{\beta^2} + \cdots \frac{a_k}{\beta^k} \right) + \lim_{k\to\infty} \frac{r_{k+1}}{\beta^k b} \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{a_1}{\beta} + \frac{a_2}{\beta^2} + \cdots \frac{a_k}{\beta^k} \right) + 0 \\
&= \frac{a_1}{\beta} + \frac{a_2}{\beta^2} + \frac{a_3}{\beta^3} + \cdots + \frac{a_k}{\beta^k} + \cdots \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{\beta^n}
\end{aligned}$$

Isto define uma *representação na base* β da fração $\frac{a}{b}$, como sendo

$$\frac{a}{b} = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$$

Nos falta demonstrar que para cada índice k, a_k é um dígito da base do sistema posicional de representação em questão, ou seja, $a_k \in \{0, 1, ..., \beta - 1\}$. Pois bem, da igualdade

$$\beta r_k = b \cdot a_k + r_{k+1}$$

temos

$$\frac{\beta r_k}{b} = a_k + \frac{r_{k+1}}{b}$$

Como $0 \leq r_k < b$, temos $0 \leq \frac{r_k}{b} < 1$, logo $0 \leq \frac{\beta r_k}{b} < \beta$, ou seja,

$$0 \leq a_k + \frac{r_{k+1}}{b} < \beta$$

Portanto

$$0 \leq a_k < \beta - \frac{r_{k+1}}{b}$$

e como $0 \leq \frac{r_{k+1}}{b} < 1$, e a_k é um número natural, temos $0 \leq a_k < \beta$, ou seja, $a_k \in \{0, 1, ..., \beta - 1\}$, para cada índice k.

$\square$

Provamos então que todo número racional, em qualquer base que seja, possui uma forma de representação similar à representação decimal.

3.3 O COMPRIMENTO DA PARTE PERIÓDICA DA REPRESENTAÇÃO DECIMAL DA FRAÇÃO IRREDUTÍVEL $\frac{a}{b}$ QUANDO O DENOMINADOR b É PRIMO COM A BASE 10

Considere um número racional qualquer com sua parte inteira e decimal, foi demonstrado que este número pode ser finito ou cíclico. Sendo o número cíclico mostraremos que é possível calcular previamente o tamanho da parte periódica da representação decimal da fração irredutível.

Proposição 3.2. *Sendo b um inteiro positivo:*

a) Se b e 10 *são primos entre si então existe um inteiro positivo* ℓ *tal que* $10^\ell \equiv 1 \pmod{b}$. *Pela definição de congruência módulo b, isto quer dizer que b* $\mid (10^\ell - 1)$

b) Se $10^\ell \equiv 1 \pmod{b}$, *sendo* ℓ *um inteiro positivo, então b e* 10 *são necessariamente primos entre si.*

Demonstração. a) Considere a sequência infinita $10^1, 10^2, 10^3, \ldots$. Como há um número finito de restos de divisões por b, no caso $0, 1, ..., b - 1$, há duas potências de 10, digamos 10^m e 10^n, com $0 < m < n$, que deixam o mesmo r quando divididas por b. Sendo $10^m = q_1 b + r$ e $10^n = q_2 b + r$, temos que $b|(10^n - 10^m)$ e $10^n - 10^m =$

$10^m(10^{n-m} - 1)$. Como b é primo com 10, temos que $b|(10^{n-m} - 1)$, e portanto $10^{n-m} \equiv 1 \pmod{b}$.

b) Se $10^\ell \equiv 1 \pmod{b}$, $\ell > 0$, então $b|(10^\ell - 1)$, daí $10^\ell - 1 = bq$, para algum inteiro q, logo $10^\ell - bq = 1$. Assim sendo, se $d > 0$ é um inteiro tal que $d|10$ e $d|b$ então $d|1$ e portanto $\mathrm{mdc}(10, b) = 1$.

$\square$

Seja $\frac{a}{b}$ uma fração própria e irredutível de inteiros positivos isto é, tal que $0 < \frac{a}{b} < 1$ e $\mathrm{mdc}(a, b) = 1$. Vamos supor que $b \geq 3$ tem somente fatores primos diferentes de 2 e 5, isto é, $\mathrm{mdc}(b, 10) = 1$ Mostraremos que a representação decimal de $\frac{a}{b}$ será infinita, apresentando uma dízima periódica.

Proposição 3.3. *Seja $\frac{a}{b}$ uma fração própria e irredutível de inteiros positivos isto é, com $0 < \frac{a}{b} < 1$ e $\mathrm{mdc}(a, b) = 1$ e seja ℓ um inteiro positivo tal que $10^\ell \equiv 1 \pmod{b}$ então $\frac{a}{b} = \frac{m}{10^\ell - 1} = \frac{m}{\underbrace{99\ldots9}_{\ell \text{ noves}}}$ para algum inteiro positivo m, $m < 10^\ell - 1$, logo $\frac{a}{b}$ pode ser representada por uma dízima periódica de comprimento ℓ.*

Demonstração. Temos $10^\ell - 1 = bq$ para algum inteiro positivo q. Daí $\frac{a}{b} = \frac{aq}{bq} = \frac{m}{10^\ell - 1}$. Sendo $0 < \frac{a}{b} < 1$, temos $0 < \frac{m}{10^\ell - 1} < 1$, ou seja, $0 < m < 10^\ell - 1$, e portanto m terá no máximo ℓ dígitos em sua representação decimal. Podemos escrever $m = (a_1 \ldots a_\ell)_{10}$, usando alguns dígitos nulos no início se necessário, pois m está no conjunto de inteiros

$$1 = \underbrace{00\ldots01}_{\ell \text{ dígitos}},\ 2 = \underbrace{00\ldots02}_{\ell \text{ dígitos}}, \ldots,\ 10^\ell - 2 = \underbrace{99\ldots98}_{\ell \text{ dígitos}}$$

Portanto teremos $\frac{a}{b} = \frac{(a_1 \ldots a_\ell)_{10}}{10^\ell - 1} = \frac{(a_1 \ldots a_\ell)_{10}}{\underbrace{99\ldots9}_{\ell \text{ dígitos}}} = 0,\overline{a_1 \ldots a_\ell}$

$\square$

Proposição 3.4. *Seja $\frac{a}{b}$ uma fração própria e irredutível de inteiros positivos isto é, $0 < \frac{a}{b} < \ell$ e $\mathrm{mdc}(a, b) = 1$, suponhamos que $\frac{a}{b} = 0,\overline{c_1 \ldots c_\ell}$, isto é, $\frac{a}{b}$ representa-se por uma dízima periódica de comprimento ℓ então $10^\ell \equiv 1 \pmod{b}$.*

Demonstração. Temos que

$$\frac{a}{b} = 0,\overline{c_1 \ldots c_\ell} = \frac{(c_1 \ldots c_\ell)_{10}}{10^\ell - 1}$$

logo $a \cdot (10^\ell - 1) = b \cdot (c_1 \ldots c_\ell)_{10}$

Daí $b \mid a(10^\ell - 1)$ e como a e b são relativamente primos, $b \mid 10^\ell - 1$, e portanto $10^l - 1 \equiv 0 \pmod{b}$ ou seja, $10^\ell \equiv 1 \pmod{b}$.

□

Teorema 3.5. *Seja $\frac{a}{b}$ uma fração própria e irredutível de inteiros positivos isto é, $0 < \frac{a}{b} < \ell$ e $mdc(a, b) = 1$. Suponhamos $b \leq 3$ com fatores primos diferentes de 2 e 5, isto é, $mdc(b, 10) = 1$. O comprimento ℓ da dízima periódica definida pela fração $\frac{a}{b}$, é o menor inteiro positivo n tal que $10^n \equiv 1 \pmod{b}$, ou seja, $\ell = \mathrm{ord}_b(10)$.*

Demonstração. Se existisse ℓ' tal que $10^{\ell'} \equiv 1 \pmod{b}$ e $\ell' < \ell$, então pela proposição 3.3, teriamos que $\frac{a}{b}$ é representado por uma dízima de comprimento $\ell' < \ell$, portanto o (menor) comprimento da dízima é o menor inteiro positivo n tal que $10^n \equiv 1 \pmod{b}$.

□

Observação 3.1. Elucidando o sentido de "menor comprimento da dízima", mencionado no Teorema 3.5, note-se que, por exemplo,

$\frac{53}{99} = 0,\overline{53}$, mas também

$0,\overline{53} = 0,53535353\ldots = 0,\overline{5353} = \frac{5353}{9999}$.

Analogamente, podemos produzir dízimas com comprimentos maiores, gerando igualdades interessantes como $\frac{53}{99} = \frac{5353}{9999} = \frac{535353}{999999}$, etc.

A função φ de Euler

Da teoria dos números é conhecida a função φ de Euler, definida como sendo a função

$$\varphi\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$$

em que $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, definida por $\varphi(1) = 1$ e, se $n \geq 2$,

$$\varphi(n) = \#\{a \in \mathbb{N}^* \mid 1 \leq a \leq n - 1, \text{ e } \mathrm{mdc}(a, n) = 1\}$$

ou seja, para $n \geq 2$, $\varphi(n)$ é o número de naturais a, menores que n e primos com n.

Como exemplo, os números de 1 a 9 que são primos com 10 são 1, 3, 7 e 9, portanto $\varphi(10) = 4$.

Se p é um número primo, todos os números naturais de 1 a $p - 1$ são primos com p, logo $\varphi(p) = p - 1$.

Admitiremos sem demonstração os seguintes teoremas a respeito da função φ, cujas demonstrações podem ser encontradas em K. Rosen, Elementary Number Theory and Its Applications, 3rd. edition, 1993, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.

Teorema 3.6. *A função φ satisfaz as seguintes propriedades.*

a) Se p é primo, $\varphi(p) = p - 1$.

b) Se p é primo e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\varphi(p^n) = p^n - p^{n-1}$.

c) Se a e b são naturais relativamente primos, então $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

d) Se n se decompõe como produto de potências de fatores primos distintos na forma $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$ então $\varphi(n) = \varphi(p_1^{n_1}) \cdots \varphi(p_k^{n_k}) = n(1 - \dfrac{1}{p_1}) \cdots (1 - \dfrac{1}{p_k})$.

Teorema 3.7 (Euler)**.** *Se a e m são naturais relativamente primos, e $m \geq 2$, então $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{m}$.*

Como caso particular do teorema 3.7, temos o seguinte corolário, devido a Pierre de Fermat.

Corolário 3.1 (Fermat)**.** *Se a e p são números naturais, com $p \geq 2$ primo, e $p \nmid a$ então $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.*

A função φ nas estimativas de comprimentos de dízimas

Vimos que se $b \geq 3$ é um número primo com 10, isto é, tal que $\mathrm{mdc}(b, 10) = 1$, então sendo a/b uma fração própria e irredutível de inteiros positivos, a representação decimal de a/b apresentará uma dízima periódica de comprimento ℓ, sendo ℓ a ordem de 10 módulo b, denotada por $\ell = \mathrm{ord}_b(10)$, ou seja, $10^\ell \equiv 1 \pmod{b}$ e ℓ é o menor inteiro positivo n tal que $10^n \equiv 1 \pmod{b}$.

Proposição 3.5. *Seja $b \geq 3$ um inteiro primo com 10. Então*

a) $10^{\varphi(b)} \equiv 1 \pmod{b}$.

b) Se $\ell = \mathrm{ord}_b(10)$ então $\ell \mid \varphi(b)$, ou seja, o comprimento ℓ da dízima periódica de uma fração própria irredutível de denominador b é um divisor de $\varphi(b)$.

Demonstração.

a) Como $\mathrm{mdc}(b, 10) = 1$, a afirmação é um caso particular do teorema 3.7 de Euler.

b) Seja $\ell = \mathrm{ord}_b(10)$. Pelo algoritmo da divisão euclidiana em $\mathbb{N}$, existem q e r naturais tais que

$$\varphi(b) = q\ell + r, \quad 0 \leq r < \ell$$

Daí, como $10^\ell \equiv 1 \pmod{b}$, temos

$$10^{\varphi(b)} = 10^{q\ell + r} = (10^\ell)^q \cdot 10^r \equiv 1^q \cdot 10^r = 10^r \pmod{b}$$

e portanto, como $10^{\varphi(b)} \equiv 1 \pmod{b}$, temos $10^r \equiv 1 \pmod{b}$. Como $0 \leq r < \ell$ e ℓ é o menor inteiro positivo n tal que $10^n \equiv 1 \pmod{b}$, temos necessariamente $r = 0$.

Logo, $\varphi(b) = q\ell$ e portanto $\ell \mid \varphi(b)$. □

Exemplos de aplicação

Exemplo 3.3. Qual é o comprimento da dízima periódica na representação decimal de $\dfrac{9}{49}$?

Solução. Buscamos $\ell = \text{ord}_{49}(10)$. Pela proposição 3.5, ℓ é um divisor de $\varphi(49)$.

Pelo teorema 3.6, $\varphi(49) = \varphi(7^2) = 7^2 - 7 = 42$

Os divisores de $42 = 2{\cdot}3{\cdot}7$ são os elementos do conjunto $D(42) = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$. Um desses elementos será ℓ.

Agora calculamos

$$\begin{aligned}
10 &\equiv 10 \pmod{49}\\
10^2 &= 100 \equiv 2 \pmod{49}\\
10^3 &= 10 \cdot 10^2 \equiv 10 \cdot 2 = 20 \pmod{49}
\end{aligned}$$

Não precisamos nos preocupar com as potências 10^4 e 10^5, pois 4 e 5 não são elementos de $D(42)$. Prosseguindo

$$\begin{aligned}
10^6 &= (10^2)^3 \equiv 2^3 = 8 \pmod{49}\\
10^7 &= 10^6 \cdot 10 \equiv 8 \cdot 10 = 80 \equiv 31 \equiv -8 \pmod{49}\\
10^{14} &= (10^7)^2 \equiv (-8)^2 = 64 \equiv 15 \pmod{49}\\
10^{21} &= 10^7 \cdot 10^{14} \equiv (-8) \cdot 15 = -120 \equiv -22 \equiv 27 \pmod{49}
\end{aligned}$$

Assim a igualdade $10^n \equiv 1 \pmod{49}$ não se verifica para os valores de n que são divisores próprios de 42. Logo, $\ell = 42$ é o comprimento da dízima periódica na representação decimal de $9/49$.

Observamos que não poderíamos inferir isto usando uma calculadora eletrônica comum, por limitações de memória da calculadora. Usando o programa Maple 12, obtemos

$9/49 = 0,\overline{183673469387755102040816326530612244897959}$

Exemplo 3.4. Qual é o comprimento da dízima periódica na representação decimal de $\dfrac{50}{101}$?

Solução. Temos que 101 é um número primo, logo $\varphi(101) = 101 - 1 = 100$. Os divisores de $100 = 2^2 \cdot 5^2$ são os elementos do conjunto $D(100) = \{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$.

O cálculo de ℓ =ord10 (mod 1)01 agora é bem simples, como veremos.

$$\begin{aligned} 10 &\equiv 10 \pmod{101} \\ 10^2 &= 100 \equiv -1 \pmod{101} \\ 10^4 &= (10^2)^2 \equiv (-1)^2 = 1 \pmod{101} \end{aligned}$$

Portanto, $\ell = 4$. Uma calculadora comum nos dá

$50/101 = 0,495049504950... = 0,\overline{4950}$

Exemplo 3.5. Qual é o comprimento da dízima periódica na representação decimal de $\dfrac{4}{47}$?

Solução. Temos que 47 é um número primo, logo $\varphi(47) = 47 - 1 = 46$. Os divisores de $46 = 2 \cdot 23$ são os elementos do conjunto $D(46) = \{1, 2, 23, 46\}$.

Para o cálculo de ℓ = ord10 (mod 4)7 podemos fazer

$$\begin{aligned} 10 &\equiv 10 \pmod{47} \\ 10^2 &= 100 \equiv 6 \pmod{47} \\ 10^4 &= (10^2)^2 \equiv 6^2 = 36 \equiv -11 \pmod{47} \\ 10^8 &= (10^4)^2 \equiv (-11)^2 = 121 \equiv 27 \equiv -20 \pmod{47} \\ 10^{16} &= (10^8)^2 \equiv (-20)^2 = 400 \equiv 24 \equiv -23 \pmod{47} \\ 10^{23} &= 10^{16} \cdot 10^4 \cdot 10^2 \cdot 10 \equiv (-23)(-11) \cdot 6 \cdot 10 \equiv 12 \pmod{47} \\ &= 253 \cdot 6 \cdot 10 \equiv 18 \cdot 6 \cdot 10 = 108 \cdot 10 \equiv 14 \cdot 10 = 140 \equiv 46 \equiv -1 \pmod{47} \end{aligned}$$

Portanto $\ell = 46$. Para apreciar, calculamos $4/47$ usando o Maple 12.

$4/47 = 0,\overline{0851063829787234042553191489361702127659574468}$.

Exemplo 3.6. Qual é o comprimento da dízima periódica na representação decimal de $\dfrac{1}{2017}$?

O número 2017 é primo, logo $\varphi(2017) = 2017 - 1 = 2016$.

Os divisores de $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ são os elementos do conjunto

$D(2016) = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 16, 18, 21, 24, 28, 32, 36, 42, 48, 56, 63, 72, 84, 96, 112, 126, 144, 168, 224, 252, 288, 336, 504, 672, 1008, 2016\}$

Com ajuda do programa Maple 12 fizemos os cálculos de potências módulo 2017. Começamos com o penúltimo divisor, 1008.

$10^{1008} \equiv 2016 \equiv -1 \pmod{2017}$

Como $1008 = 2016/2$, podemos então eliminar os divisores comuns de 1008 e 2016, pois sendo $m \geq 2$, d_1 e d_2 inteiros positivos, se d_1 é divisor de d_2 e $10^{d_2} \not\equiv 1 \pmod{m}$ então $10^{d_1} \not\equiv 1 \pmod{m}$. Pois se tivermos $10^{d_1} \equiv 1 \pmod{m}$ então $10^{d_2} = (10^{d_1})^{d_2/d_1} \equiv 1^{d_2/d_1} = 1 \pmod{m}$.

Como $10^{1008} \equiv 2016 \equiv -1 \pmod{2017}$, teremos $10^d \not\equiv 1 \pmod{2017}$ para cada divisor de 1008.

Os divisores de 1008 são os elementos do conjunto

$D(1008) = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 16, 18, 21, 24, 28, 36, 42, 48, 56, 63, 72, 84, 112, 126, 144, 168, 252, 336, 504, 1008\}$.

Então $\ell = \text{ord}_{2017}(10)$ está no conjunto
$D(2016, 1008) = D(2016) - D(1008) = \{32, 96, 224, 288, 672, 2016\}$.

Como o Maple 12, obtemos $10^{672} \equiv 294 \not\equiv 1 \pmod{2017}$. Podemos então eliminar também, do conjunto $D(2016, 1008)$ os números que sejam também divisores de 672, que são os elementos do conjunto $\{224, 96, 32\}$.

Temos então que $\ell \in \{288, 2016\}$. Com o Maple 12 obtemos $10^{288} \equiv 79 \not\equiv 1 \pmod{2017}$.

Logo $\ell = 2016$ e estabelecemos que a dízima periódica de $\dfrac{1}{2017}$ terá 2016 dígitos.

3.4 O COMPRIMENTO DA PARTE PERIÓDICA DA REPRESENTAÇÃO DA FRAÇÃO IRREDUTÍVEL $\dfrac{p}{q}$, NO SISTEMA DE BASE β, QUANDO O DENOMINADOR q É PRIMO COM β.

Considere um número racional qualquer com sua parte inteira e decimal, foi demonstrado que este número pode ser finito ou cíclico. Sendo o número cíclico mostramos que é possível calcular o tamanho da parte periódica da representação decimal da fração irredutível na base 10. Mostraremos que é possível encontrar essa representação em uma base qualquer β

Proposição 3.6. *Seja d o maior dígito na base β. Sendo $a_1, \ldots, a_n$ algarismos do sistema de base β, o número racional $\dfrac{(a_1 a_2 \ldots a_n)_\beta}{dd \ldots d}$, com n algarismos iguais a d no denominador, é o número com representação periódica na base β dada por* $0, a_1 a_2 \ldots a_n a_1 a_2 \ldots a_n \ldots = 0, \overline{a_1 a_2 \ldots a_n}$.

Demonstração. De fato, sendo $m = (a_1 a_2 \ldots a_n)_\beta = a_1\beta^{n-1} + a_2\beta^{n-2} + \cdots a_1$, temos

$$\frac{m}{\underbrace{dd\ldots d}_{n \text{ algarismos}}} = \frac{m}{\beta^n - 1} = \frac{\frac{m}{\beta^n}}{1 - \frac{1}{\beta^n}}$$
$$= \frac{m}{\beta^n} + \frac{m}{\beta^{2n}} + \frac{m}{\beta^{3n}} + \cdots$$
$$= \frac{\beta^{n-1}a_1 + \beta^{n-2}a_2 + \cdots + a_n}{\beta^n} + \frac{\beta^{n-1}a_1 + \beta^{n-2}c_2 + \cdots + a_n}{\beta^{2n}} + \cdots$$
$$= \frac{\beta^{n-1}a_1}{\beta^n} + \frac{\beta^{n-2}a_2}{\beta^n} + \cdots + \frac{a_n}{\beta^n} + \frac{\beta^{n-1}a_1}{\beta^{2n}} + \frac{\beta^{n-2}a_2}{\beta^{2n}} + \cdots + \frac{a_n}{\beta^{2n}} + \cdots$$
$$= \frac{a_1}{\beta} + \frac{a_2}{\beta^2} + \cdots + \frac{a_n}{\beta^n} + \frac{a_1}{\beta^{n+1}} + \frac{a_2}{\beta^{n+2}} + \cdots + \frac{a_n}{\beta^{2n}} + \cdots$$
$$= 0, a_1a_2 \ldots a_na_1a_2 \ldots a_n = 0, \overline{a_1a_2 \ldots a_n}$$

□

Proposição 3.7. *Sendo b um inteiro positivo:*

a) *Se b e β são primos entre si então existe um inteiro positivo ℓ tal que* $\beta^\ell \equiv 1 \pmod{b}$. *Pela definição de congruência de b, isto quer dizer que b* $\mid (\beta^\ell - 1)$

b) *Se* $\beta^\ell \equiv 1 \pmod{b}$, *e ℓ é um inteiro positivo, então b e β são necessariamente primos entre si.*

Demonstração. a) Considere a sequência infinita $\beta^1, \beta^2, \beta^3, \ldots$. Como há um número finito de restos de divisões por b, no caso $0, 1, \ldots, b-1$, há duas potências de β, digamos β^m e β^n, com $0 < m < n$, que deixam o mesmo r quando divididas por b. Sendo $\beta^m = q_1b + r$ e $\beta^n = q_2b + r$, temos que $b|(\beta^n - \beta^m) = \beta^m(\beta^{n-m} - 1)$. Como b é primo com β, temos que $b|(\beta^{n-m} - 1)$, e portanto $\beta^{n-m} \equiv 1 \pmod{b}$.

b) Se $\beta^\ell \equiv 1 \pmod{b}$, $\ell > 0$, então $b|(\beta^\ell - 1)$, daí $\beta^\ell - 1 = bq$, para algum inteiro q, logo $\beta^\ell - bq = 1$. Assim sendo, se $d > 0$ é um inteiro tal que $d|\beta$ e $d|1$ e portanto $mdc(\beta, b) = 1$.

Seja $\dfrac{a}{b}$ uma fração própria e irredutível de inteiros positivos isto é, $0 < \dfrac{a}{b} < \ell$ e $mdc(a, b) = 1$. Suponhamos $b \geq 3$ com fatores primos diferentes de qualquer divisor de β, isto é, $mdc(b, \beta) = 1$. Sabemos que então, a representação decimal de $\dfrac{a}{b}$ será infinita, apresentando uma dízima (que mais apropriadamente chamaríamos β-ízima) periódica.

Proposição 3.8. *Seja $\dfrac{a}{b}$ uma fração própria e irredutível de inteiros positivos isto é,* $0 < \dfrac{a}{b} < \ell$ *e* $mdc(a, b) = 1$ *e ℓ um inteiro positivo tal que* $\beta^\ell \equiv 1 \pmod{b}$ *então* $\dfrac{a}{b} = \dfrac{m}{\beta^\ell - 1} = \dfrac{m}{\underbrace{dd\ldots d}_{\ell\ d\text{'s}}}$ *para algum inteiro positivo m, $m < \beta^\ell - 1$, sendo d o maior algarismo do sistema de base β, e que então $\dfrac{a}{b}$ pode ser representada por uma dízima periódica de comprimento ℓ.*

Proposição 3.9. *Seja* $\frac{a}{b}$ *uma fração própria e irredutível de inteiros positivos isto é,* $0 < \frac{a}{b} < \ell$ *e* $mdc(a, b) = 1$*. Suponhamos que, no sistema de base* β*,* $\frac{a}{b} = 0, \overline{c_1 \ldots c_\ell}$*, isto é,* $\frac{a}{b}$ *representa-se por uma dízima periódica de comprimento* ℓ *então* $\beta^\ell \equiv 1 \pmod{b}$*.*

Demonstração. Temos que

$$\frac{a}{b} = 0, \overline{c_1 \ldots c_\ell} = \frac{(c_1 \ldots c_\ell)_\beta}{\beta^\ell - 1}$$

Logo

$$\begin{aligned} & a \cdot (\beta^\ell - 1) = b \cdot (c_1 \ldots c_\ell)_\beta \\ & \Rightarrow b \mid a(\beta^\ell - 1) \Rightarrow b \mid (\beta^\ell - 1) \qquad (mdc(a, b) = 1) \\ & \Rightarrow \beta^l - 1 \equiv 0 \pmod{b} \\ & \Rightarrow \beta^\ell \equiv 1 \pmod{b}. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.8. *Seja* $\frac{a}{b}$ *uma fração própria e irredutível de inteiros positivos isto é,* $0 < \frac{a}{b} < 1$ *e* $mdc(a, b) = 1$*. O comprimento* ℓ *da dízima periódica definida por* $\frac{a}{b}$ *é o menor inteiro positivo* n *tal que* $\alpha^n \equiv 1 \pmod{b}$*, ou seja,* $\ell = \text{ord}_b(\alpha)$*.*

Sabemos pelo resultado do colorário 2.3.0.3 que $\alpha^\ell \equiv 1 \pmod{b}$.

Se existisse ℓ' tal que $\alpha^{\ell'} \equiv 1 \pmod{b}$ e $\ell' < \ell$, então pelo colorário 2.3.0.2., teriamos que $\frac{a}{b}$ é representado por uma dízima de comprimento $\ell' < \ell$ mas ℓ é o comprimento de $\frac{a}{b}$, absurdo.

□

3.5 A REPRESENTAÇÃO DA FRAÇÃO IRREDUTÍVEL $\frac{a}{2^r 5^s b}$ COM $b \geq 3$, PRIMO COM 10

Teorema 3.9. *O comprimento* ℓ *da dízima periódica definida pela fração* $\frac{a}{b}$ *irredutível e imprópria, também é o menor inteiro positivo* ℓ *tal que* $10^\ell \equiv 1 \pmod{b}$*, ou seja,* $\ell = \text{ord}_b(10)$*.*

Demonstração. Como a fração $\frac{a}{b}$ é imprópria então podemos escrever $a = m.b + n$ tal que $n > 0$ e $n \nmid b$ então podemos dividir tudo por b e teremos:

$$\frac{a}{b} = m + \frac{n}{b}$$

Assim, o desenvolvimento decimal de $\frac{a}{b}$ tem uma parte inteira seguida de uma parte fracionária que é uma dizima periódica de comprimento $\ell = \text{ord}_b(10)$ como demonstramos no teorema 3.5. □

Para estudarmos frações irredutíveis cujo denominador possui 2 e/ou 5 como fatores primos, precisaremos primeiro resolver algumas proposições que nos mostrarão que $\dfrac{a}{2^r5^sb}$ têm representação decimal com uma dízima periódica de comprimento ℓ, sendo ℓ a ordem de 10 módulo b.

Proposição 3.10. *Suponhamos que* $\dfrac{a}{2^r5^sb}$ *é fração irredutível, sendo r e s naturais, e* $b \geq 3$ *um inteiro que não contém nem* 2 *e nem* 5 *como fatores primos, isto é,* $\mathrm{mdc}(b, 10) = 1$*. A fração* $\dfrac{2^s5^ra}{b}$ *é também irredutível e sua representação decimal tem uma dízima periódica de comprimento* ℓ*, sendo* $\ell = \mathrm{ord}_b(10)$*.*

Demonstração. Temos que $\dfrac{a}{2^r5^sb}$ é irredutível, logo $2 \nmid a$, $5 \nmid a$ e $\mathrm{mdc}(a, b) = 1$. Por hipótese $\mathrm{mdc}(b, 10) = 1$, daí $2 \nmid b$, $5 \nmid b$, logo $\mathrm{mdc}(2^r5^sa, b) = 1$ e a fração $\dfrac{2^s5^ra}{b}$ será também irredutível.

Sendo $\dfrac{2^s5^ra}{b}$ irredutível, se ela for própria, então pelo teorema 3.5 o comprimento da dízima periódica será ℓ, se ela for imprópria, então pelo teorema 3.9 o comprimento da dízima periódica será ℓ,

□

Proposição 3.11. *Sendo x um número racional positivo cuja representação decimal infinita apresenta uma dízima periódica de comprimento* ℓ*, e n um número natural,* $10^{-n}x$ *terá representação decimal com uma dízima periódica de mesmo comprimento.*

Demonstração. A representação decimal de $10^{-n}x$ é obtida através da representação decimal de x movendo-se a posição da vírgula separadora (da parte inteira da parte fracionária) n dígitos para a esquerda (completando com dígitos iguais a zero à esquerda se necessário). Assim, os comprimentos dos períodos não serão alterados.

□

Teorema 3.10. *Suponhamos que* $\dfrac{a}{2^r5^sb}$ *é fração irredutível, sendo r e s naturais, e* $b \geq 3$ *um inteiro que não contém nem* 2 *e nem* 5 *como fatores primos, isto é,* $\mathrm{mdc}(b, 10) = 1$*. A fração* $\dfrac{a}{2^r5^sb}$ *é irredutível e tem representação decimal como uma dízima periódica de comprimento* ℓ*, sendo* ℓ *a ordem de* 10 *módulo b.*

Demonstração. Considerando a fração $y = \dfrac{2^s5^ra}{b}$ como na Proposição 2.21, usaremos os resultados obtidos na Proposição 3.10 e Proposição 3.11 para concluir a propriedade principal enunciada no teorema.

Sabemos que por hipótese que a fração $y = \dfrac{2^s5^ra}{b}$ é irredutível então sendo ela própria ou imprópria, mostramos que terá dízima periódica de comprimento ℓ, entretanto sendo ela imprópria, pela Proposição 3.11, $10^{-n}x$ terá representação decimal com uma dízima periódica de mesmo comprimento, então consideraremos $n = s + r$ e $x = y = \dfrac{2^s5^ra}{b}$, e teremos $z = 10^{-s-r}y$

uma representação decimal como uma dízima periódica de comprimento ℓ, sendo ℓ a ordem de 10 módulo b.

$\square$

Exemplo 3.7. Determinar a representação decimal de $\dfrac{77}{180}$

Solução. Notamos que $\dfrac{77}{180} = \dfrac{77}{3^2 2^2 5} = \dfrac{5 \cdot 77}{3^2 2^2 5^2} = \dfrac{1}{10^2} \cdot \dfrac{77}{3^2}$

Agora $\dfrac{77}{3^2} = 8 + \dfrac{5}{9} = 8 + 0,\overline{5} = 8,\overline{5}$

Concluindo, $\dfrac{77}{180} = \dfrac{1}{10^2} \cdot 8,\overline{5} = 0,08\overline{5} = 0,085555$

4 REPRESENTAÇÃO DECIMAL DE NÚMEROS REAIS.

Para a redação deste capítulo a referência consultada foi (SAMPAIO, 2016).

4.1 TEOREMA DE EXISTÊNCIA DA REPRESENTAÇÃO DECIMAL DE NÚMEROS REAIS POSITIVOS.

Já estudamos e sabemos que existe uma representação decimal de números racionais entretanto vamos, neste capítulo, demonstrar um teorema que prova isso para todo os reais positivos.

Para cada número real a, define-se a parte inteira de a como sendo o inteiro $[a]$ satisfazendo $[a] \leq a < [a] + 1$. O número real $\alpha = a - [a]$, $0 \leq \alpha < 1$, é a parte fracionária de a, e temos $a = [a] + \alpha$.

Teorema 4.1. *Seja $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Então $\exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, com $a_n \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ para cada n, e $k \in \mathbb{N}$ tal que $x = k + \sum \frac{a_n}{\alpha^n}$.*

Se x é real e positivo, temos que $x = k + \alpha$ para algum $k \in \mathbb{N}$ e α real, $0 \leq \alpha < 1$. Logo, teorema 4.1 é uma consequência do seguinte teorema.

Teorema 4.2. *Seja α um número real, $0 \leq \alpha < 1$.*

Definamos simultaneamente uma sequência $(a_n)_{n \geq 1}$, de números naturais e uma sequência e $(\alpha_n)_{n \geq 0}$, de números reais, da seguinte forma:

- $\alpha_0 = \alpha$ *e*
- *Para cada $n \geq 1$, $a_n = [10\alpha_{n-1}]$, $\alpha_n = 10\alpha_{n-1} - [10\alpha_{n-1}]$.*

Então valem os seguintes resultados.

a) para cada $n \geq 1$, a_n é um dígito do sistema de numeração de base 10.

b) para cada $n \geq 1$, $0 \leq \frac{\alpha_n}{10^n} < \frac{1}{10^n}$

c) $\alpha = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots + \frac{a_k}{10^k} + \frac{\alpha_k}{10^k}$, para cada $k \geq 1$

d) $\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} = \lim_{k \to +\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{10^n}$

Neste caso, dizemos que $0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ *é a* representação decimal *(ou a* expansão decimal*) do número real α e escrevemos $\alpha = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$.*

Se $x \in \mathbb{R}$ e $x \geq 0$, então $x = m + \alpha$, sendo $m = [x] \in \mathbb{N}$ e $0 \leq \alpha < 1$. Neste caso a representação decimal de x é da forma $b_m b_{m-1} \ldots b_0, a_1 a_2 a_n \ldots$, sendo $m = (b_m b_{m-1} \ldots b_0)_{10}$ a representação do número natural m no sistema posicional decimal e $\alpha = 0, a_1 a_2 a_n \ldots$ a representação do número real "fracionário" α tal como definida anteriormente.

Demonstração. a) Para $n \geq 1$, temos $0 \leq 10\alpha_{n-1} < 10$, logo $a_n = [10\alpha_{n-1}] \in \{0, 1, ..., 9\}$.

b) Para $n \geq 1$, temos $0 \leq \alpha_n < 1$, daí, $0 \leq \dfrac{\alpha_n}{10^n} < \dfrac{1}{10^n}$.

c) Para cada $n \geq 1$, $\alpha_n = 10\alpha_{n-1} - [10\alpha_{n-1}] = 10\alpha_{n-1} - a_n$.

Assim, $10\alpha_{n-1} = a_n + \alpha_n$, logo $\alpha_{n-1} = \dfrac{a_n}{10} + \dfrac{\alpha_n}{10}$.

Sendo $\alpha_0 = \alpha$, temos então

$$
\begin{aligned}
\alpha = \alpha_0 &= \frac{a_1}{10} + \frac{\alpha_1}{10} && (1)\\
\alpha_1 &= \frac{a_2}{10} + \frac{\alpha_2}{10} && (2)\\
\alpha_2 &= \frac{a_3}{10} + \frac{\alpha_3}{10} && (3)\\
\alpha_3 &= \frac{a_4}{10} + \frac{\alpha_4}{10} && (4)\\
&\vdots\\
\alpha_{k-2} &= \frac{a_{k-1}}{10} + \frac{\alpha_{k-1}}{10} && (k-1)\\
\alpha_{k-1} &= \frac{a_k}{10} + \frac{\alpha_k}{10} && (k)
\end{aligned}
$$

Substituindo a expressão para α_1 de (2) em (1), obtemos

$$\alpha = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{\alpha_2}{10^2} \qquad (2'')$$

Substituindo a expressão para α_2 de (3) em (2”), obtemos

$$\alpha = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \frac{\alpha_3}{10^3} \qquad (3'')$$

Substituindo a expressão para α_3 de (4) em (3”), obtemos

$$\alpha = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \frac{a_4}{10^4} + \frac{\alpha_4}{10^4} \qquad (4'')$$

Prosseguindo com a sequência de substituições definiremos, por recorrência, igualdades (2”), (3”), etc., chegando então à igualdade (k”):

$$\alpha = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots + \frac{a_k}{10^k} + \frac{\alpha_k}{10^k} \qquad (k'')$$

d) Temos $0 \leq \alpha_k < 1$ para cada k, logo $0 < \dfrac{\alpha_k}{10^k} < \dfrac{1}{10^k}$, portanto

$\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\alpha_k}{10^k} = 0$, logo

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\frac{a_n}{10^n} = \lim_{k\to\infty}(\alpha - \frac{\alpha_k}{10^k}) = \alpha - 0 = \alpha.$$

e temos então a representação

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n} = 0, a_1a_2a_3a_4 \ldots$$

□

4.2 REPRESENTAÇÃO DE NÚMEROS REAIS POSITIVOS EM BASES QUAISQUER.

Teorema 4.3. *Seja $\beta \geq 2$, $\beta \in \mathbb{N}$, e seja $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Então $\exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com a_n tomado no conjunto de dígitos do sistema posicional de base β para cada n, e $k \in \mathbb{N}$ tal que $q = k + \sum \frac{a_n}{\beta^n}$*

Se x é real e positivo, temos que $x = k + \delta$ para algum $k \in \mathbb{N}$ e δ real, $0 \leq \delta < 1$. Logo, teorema 4.3 é uma consequência do seguinte teorema, cujos enunciado e demonstração são adaptações do caso decimal.

Teorema 4.4. *Seja δ um número real, $0 \leq \delta < 1$.*

Definamos uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$, de números naturais e uma sequência e $(\delta_n)_{n\geq 0}$, de números reais, da seguinte forma:

- $\delta_0 = \delta$ *e*
- *Para cada* $n \geq 1$, $a_n = [\beta\delta_{n-1}]$, $\delta_n = \beta\delta_{n-1} - [\beta\delta_{n-1}]$.

Então valem os seguintes resultados.

a) para cada $n \geq 1$, a_n é um dígito do sistema de numeração de base β.

b) para cada $n \geq 1$, $0 \leq \dfrac{\delta_n}{\beta^n} < \dfrac{1}{\beta^n}$

c) $\delta = \dfrac{a_1}{\beta} + \dfrac{a_2}{\beta^2} + \dfrac{a_3}{\beta^3} + \cdots + \dfrac{a_k}{\beta^k} + \dfrac{\delta_k}{\beta^k}$, *para cada* $k \geq 1$

d) $\delta = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{\beta^n} = \lim_{k\to+\infty}\sum_{n=1}^{k}\frac{a_n}{\beta^n}$

Neste caso, dizemos que $0, a_1a_2a_3 \ldots$ *é a* representação na base β *(ou a* expansão na base β*) do número real δ e escrevemos $\delta = 0, a_1a_2a_3 \ldots$.*

Se $x \in \mathbb{R}$ e $x \geq 0$, então $x = m + \delta$, sendo $m = [x] \in \mathbb{N}$ e $0 \leq \delta < 1$. Neste caso a representação de x na base β é da forma $b_mb_{m-1} \ldots b_0, a_1a_2a_n \ldots$, sendo $m = (b_mb_{m-1} \ldots b_0)_\beta$ a representação do número natural m no sistema posicional de base β e $\delta = 0, a_1a_2a_n \ldots$ a representação do número real “fracionário” δ tal como definida anteriormente.

Demonstração. a) Para $n \geq 1$, como $0 \leq \beta_{n-1} < 1$, temos $0 \leq \beta\delta_{n-1} < \beta$, logo $a_n = [\beta\delta_{n-1}] \in \{0, 1, \ldots, \beta - 1\}$.

b) Para $n \geq 1$, temos $0 \leq \delta_n < 1$, daí, $0 \leq \dfrac{\delta_n}{\beta^n} < \dfrac{1}{\beta^n}$.

c) Para cada $n \geq 1$, $\delta_n = \beta\delta_{n-1} - [\beta\delta_{n-1}] = \beta\delta_{n-1} - a_n$.

Assim, $\beta\delta_{n-1} = a_n + \delta_n$, logo $\delta_{n-1} = \dfrac{a_n}{\beta} + \dfrac{\delta_n}{\beta}$.

Sendo $\delta_0 = \delta$, temos então

$$
\begin{aligned}
\delta = \delta_0 &= \frac{a_1}{\beta} + \frac{\delta_1}{\beta} && (1)\\
\delta_1 &= \frac{a_2}{\beta} + \frac{\delta_2}{\beta} && (2)\\
\delta_2 &= \frac{a_3}{\beta} + \frac{\delta_3}{\beta} && (3)\\
\delta_3 &= \frac{a_4}{\beta} + \frac{\delta_4}{\beta} && (4)\\
&\vdots && \vdots\\
\delta_{k-2} &= \frac{a_{k-1}}{\beta} + \frac{\delta_{k-1}}{\beta} && (k-1)\\
\delta_{k-1} &= \frac{a_k}{\beta} + \frac{\delta_k}{\beta} && (k)
\end{aligned}
$$

Substituindo a expressão para δ_1 de (2) em (1), obtemos

$$\delta = \frac{a_1}{\beta} + \frac{a_2}{\beta^2} + \frac{\delta_2}{\beta^2} \qquad (2'')$$

Substituindo a expressão para δ_2 de (3) em (2”), obtemos

$$\delta = \frac{a_1}{\beta} + \frac{a_2}{\beta^2} + \frac{a_3}{\beta^3} + \frac{\delta_3}{\beta^3} \qquad (3'')$$

Substituindo a expressão para δ_3 de (4) em (3”), obtemos

$$\delta = \frac{a_1}{\beta} + \frac{a_2}{\beta^2} + \frac{a_3}{\beta^3} + \frac{a_4}{\beta^4} + \frac{\delta_4}{\beta^4} \qquad (4'')$$

Prosseguindo com a sequência de substituições definiremos, por recorrência, igualdades (2”), (3”), etc., chegando então à igualdade (k”):

$$\delta = \frac{a_1}{\beta} + \frac{a_2}{\beta^2} + \frac{a_3}{\beta^3} + \cdots + \frac{a_k}{\beta^k} + \frac{\delta_k}{\beta^k} \qquad (k'')$$

d) Temos $0 \leq \delta_k < 1$ para cada k, logo $0 < \dfrac{\delta_k}{\beta^k} < \dfrac{1}{\beta^k}$, portanto

$\lim_{k\to\infty} \frac{\delta_k}{\beta^k} = 0$, logo

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{\beta^n} = \lim_{k\to\infty} (\delta - \frac{\delta_k}{\beta^k}) = \delta - 0 = \delta.$$

e temos então a representação

$$\delta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\beta^n} = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots$$

□

Exemplo 4.1. Neste exemplo simples ilustraremos um método para representar um número racional em uma base $\beta \geq 2$, sendo conhecida a representação desse racional no sistema decimal.

Consideremos a fração $\frac{13}{15}$, representada como $0,8\overline{6}$ no sistema decimal.

Procuramos a representação desta fração no sistema binário.

Como 2 e 15 são primos entre si, primeiramente calculamos $\ell = \text{ord}_{15}(2)$, a ordem de 2 módulo 15.

É possível demonstrar, num caso análogo ao enunciado na proposição 3.5, que $\ell \mid \varphi(15)$ Temos $\varphi(15) = \varphi(3 \cdot 5) = \varphi(3)\varphi(5) = 2 \cdot 4 = 8$, assim $\ell \in \{1, 2, 4, 8\}$.

Temos 2^1, 2^2, 2^3 menores que 15 e $2^4 = 16 \equiv 1 \pmod{15}$.

Assim $\ell = 4$ será o comprimento da parte periódica de $\frac{4}{15}$ quando representada no sistema binário.

Baseando-nos no algoritmo apresentado para representação de números reais em qualquer base, notamos que $\delta = \frac{13}{15}$ é tal que $0 < \delta < 1$. No nosso caso, a base tomada será $\beta = 2$.

Então temos

$\delta_0 = delta$

$2\delta = \frac{26}{15} = 1 + \frac{11}{15}$. Tomamos $a_1 = 1$.

$2 \cdot \frac{11}{15} = \frac{22}{15} = 1 + \frac{7}{15}$. Tomamos $a_2 = 1$.

$2 \cdot \frac{7}{15} = \frac{14}{15} = 0 + \frac{14}{15}$. Tomamos $a_3 = 0$.

$2 \cdot \frac{14}{15} = \frac{28}{15} = 1 + \frac{13}{15}$. Tomamos $a_4 = 1$ (notemos que retornamos à fração originalmente dada).

Logo a expansão de $\frac{13}{15}$ no sistema binário será

$$0,110111011101\ldots = 0,\overline{1101}$$

Dito isto notamos que poderiamos ter notado também que, se representarmos numerador e denominador no binário, teremos a fração $\frac{1101}{1111}$. Como 1 é o maior dígito do sistema, isto confirma a representação $\frac{1101}{1111} = 0,\overline{1101}$.

5 CONCLUSÃO

Este trabalho permitiu que eu aprendesse um pouco mais sobre a história da representação dos números decimais fracionários, partindo de uma ideia inicial de representação de Stevin e seguindo com a ideia de Napier. Lidamos com estes números diariamente, entretanto, só por meio deste trabalho consegui entender um pouco mais de suas origens e acredito que o capítulo inicial traz uma boa introdução para aqueles que queiram entender um pouco sobre a história da representação desses números.

Também foram desenvolvidas demonstrações das representações decimais de números racionais e reais, demonstrações das quais eu não conhecia mas me serão úteis visto que lecionarei sobre os números decimais em minha profissão.

Foram adicionados exemplos aos capítulos para facilitar o entendimento, espero que outros professores possam utilizar este material, consultar e aprender com este trabalho. Espero ter contribuído com os temas que aqui foram abordados.

REFERÊNCIAS

CHILDS, L. **A concrete introduction to higher algebra**. 1. ed. New York: Springer-Verlag, 1979. Citado na página 14.

KATZ, V. J. **A History of Mathematics**. 3. ed. Boston: Addison-Wesley, 2009. Citado na página 11.

PENSADOR. **Frases de José de Alencar**. 2021. <https://www.pensador.com/frases_de_jose_de_alencar/>. [Online; acesso em 01 de junho de 2021]. Citado na página 5.

SAMPAIO, J. C. V. **Listas de problemas de Introdução à Análise para Licenciandos**. São Carlos: DM-UFSCar, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 34.

STEVIN, S. **La Disme**. Paris: ACL-Editions, 1997. Citado 4 vezes nas páginas 6, 7, 11 e 12.