

Uma análise de elementos matemáticos presentes na gravura Melancolia I de Albrecht Dürer: Poliedro, Esfera e Quadrado Mágico

Autor: *Luís Guilherme Oliveira Paulo*

Orientador: *Prof. Dr. José Antonio Salvador*

Disciplina: Trabalho de Conclusão do Curso

Curso: Licenciatura em Matemática

Professores Responsáveis: Prof. Dr. Wladimir Seixas
Prof. Dr. Adriana Ramos Pereira
Prof. Dr. Luis Antonio Carvalho dos Santos

Uma análise de elementos matemáticos presentes na
gravura Melancolia I de Albrecht Dürer: Poliedro,
Esfera e Quadrado Mágico

Autor: *Luís Guilherme Oliveira Paulo*

Orientador: *Prof. Dr. José Antonio Salvador*

Disciplina: Trabalho de Conclusão do Curso

Curso: Licenciatura em Matemática

Professores Responsáveis: Prof. Dr. Wladimir Seixas
Profa. Dra. Adriana Ramos Pereira
Prof. Dr. Luis Antonio Carvalho dos Santos.

Instituição: Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

São Carlos, 9 de dezembro de 2021

Luís Guilherme Oliveira Paulo

Prof. Dr. José Antonio Salvador
Orientador



FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
 COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - CCM/CCET
 Rod. Washington Luís km 235 - SP-310, s/n - Bairro Monjolinho, São Carlos/SP, CEP 13565-905
 Telefone: (16) 33518221 - <http://www.ufscar.br>

DP-TCC-FA nº 25/2021/CCM/CCET

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso
Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)

FOLHA DE APROVAÇÃO

LUIS GUILHERME OLIVEIRA PAULO

**UMA ANÁLISE DE ELEMENTOS MATEMÁTICOS PRESENTES NA GRAVURA MELANCOLIA I
 DE ALBRECHT DÜRER: POLIEDRO, ESFERA E QUADRADO MÁGICO**

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – Campus São Carlos

São Carlos, 23 de novembro de 2021

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

Cargo/Função	Nome Completo
Orientador	José Antonio Salvador
Membro da Banca 1	Yuriko Yamamoto Baldin
Membro da Banca 2	Renato José de Moura



Documento assinado eletronicamente por **Renato Jose de Moura, Professor(a) do Magistério Superior**, em 01/12/2021, às 13:16, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Yuriko Yamamoto Baldin, Professor(a) do Magistério Superior**, em 01/12/2021, às 14:47, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Jose Antonio Salvador, Professor(a) do Magistério Superior**, em 02/12/2021, às 12:13, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufscar.br/autenticacao>, informando o código verificador **0539763** e o código CRC **3816E23F**.

Referência: Caso responda a este documento, indicar expressamente o Processo nº 23112.022535/2021-11

SEI nº 0539763

Agradecimentos

Aqui expresso meus mais puros sentimentos de gratidão. Sou grato pela universidade que me proporcionou momentos únicos durante a minha trajetória, ao departamento que me acolheu e me ensinou muito, aos professores com quem tive o prazer de ter contato durante a graduação, e serviram de inspiração, aos amigos que fiz nesse período, que me ajudaram em todos os momentos difíceis e comemoraram todas as minhas conquistas comigo, ao meu orientador que me ajudou durante o processo de confecção do trabalho e me serviu de exemplo, principalmente agradeço a minha família que me encorajou e incentivou para que eu me tornasse a pessoa que sou hoje, em especial a minha mãe, que sempre me ajudou, guiou, orientou e fez de tudo para que eu pudesse alcançar os meus sonhos e me torna uma pessoa melhor dia após dia.

Resumo

O trabalho tem como tema principal a obra Melancolia I de Albrecht Dürer, uma gravura que está cheia de significados filosóficos e matemáticos. Com uma abordagem didática e matemática, temos como objetivo contextualizar sobre a vida e a obra do autor, além de discorrer sobre alguns elementos matemáticos presentes na obra, tratando sobre a história, definições, teoremas e alguns dos principais resultados sobre os elementos citados. Por fim, concluimos que a matemática é importante na arte e a sua história é rica mesmo em tempos onde a humanidade não tinha tanto acesso a tecnologia.

Palavras chave: Albrecht Dürer, Melancolia I, poliedro, esfera, quadrado mágico.

Abstract

This monograph addresses as its main theme Albrecht Dürer's *Melancholia I*, an engraving that is full of philosophical and mathematical meanings. With a didactic and mathematical approach, we aim to contextualize the author's life and the work, in addition to discussing some mathematical elements present in the work, dealing with the history, definitions, theorems and some of the main results about the mentioned elements. Finally, we conclude with the work mentioning the importance of mathematics in art and how its history is rich even in times when humanity did not have so much access to technology.

Keywords: Albrecht Dürer, *Melancholia I*, polyhedron, sphere, magic square.

Sumário

1	Dürer e Melancolia I	2
2	Poliedros	4
2.1	Um pouco de história	4
2.2	Poliedros de Platão	11
3	Esfera	15
3.1	Definições	15
3.2	Teoremas	20
3.3	O volume da esfera sem o uso de integrais	21
3.4	Astronomia e a esfera terrestre	25
4	Quadrado Mágico	28
4.1	História	28
4.2	Construção de Quadrados Mágicos	36
4.2.1	Quadrados Mágicos de ordem 3	36
4.2.2	Construção de um Quadrado Mágico de ordem ímpar	39
4.2.3	Construção de um Quadrado Mágico de ordem 4	41
4.2.4	Construção de um Quadrado Mágico de ordem par	41
4.2.5	Operações com Quadrados Mágicos	44
	Referências Bibliográficas	47

Introdução

A matemática e a arte sempre se encontraram ao longo da história da humanidade, desde a antiguidade. Neste contexto podemos ver o conhecimento de padrões geométricos e noções matemáticas através das artes, como por exemplo no Egito antigo, até a renascença onde matemática e arte estavam muito ligadas, tido como exemplo o Homem Vitruviano de Leonardo da Vinci (1452-1519), ou a proporção áurea que está presente em várias obras da época, como na Monalisa, também de da Vinci, e é justamente neste período que data a vida do grande artista, Albrecht Dürer.

Uma das principais obras de Melancolia I tem vários elementos matemáticos presentes e com este trabalho pretendo trazer além do significado na obra, contextualizar, definir, e trazer os principais teoremas e fatos históricos sobre cada elemento matemático abordado (poliedro, esfera e quadrado mágico).

No primeiro capítulo falaremos brevemente sobre a vida de Dürer e sobre a gravura Melancolia I, que é o objeto de estudo do trabalho. Já nos capítulos seguintes discorreremos especificamente sobre cada um dos elementos matemáticos abordados: poliedro, esfera e quadrado mágico.

Capítulo 1

Dürer e Melancolia I

Albrecht Dürer nasceu no dia 21 de maio de 1471, na cidade de Nuremberg, no norte da Alemanha, foi um pintor, gravador, ilustrador, matemático e teórico de grande importância para o renascimento, principalmente pelas suas gravuras. Dürer morreu no dia 6 de abril de 1528, aos 57 anos, também na cidade de Nuremberg.



Figura 1.1: Autorretrato de Albrecht Dürer, 1500.
Fonte: Wikipedia

Uma das suas principais gravuras é Melancolia I, que data do ano de 1514, e é considerada uma das três principais gravuras de Dürer, juntamente com as obras O Cavaleiro, a Morte e o Diabo e São Jerónimo no seu Gabinete. A obra tem várias interpretações sobre seu significado e o que ela representa na vida e trajetória do autor, porém notamos muito mais do que uma interpretação histórica ou psicológica, podemos fazer uma análise matemática da obra.



Figura 1.2: Melancolia I
Fonte: Wikipedia

Notamos diversos elementos matemáticos na obra, como a balança, o compasso, a esfera, o poliedro e o quadrado mágico, e algumas tem o seu próprio significado dentro da gravura. A seguir vamos discorrer sobre a história, definições e principais teoremas do poliedro, da esfera e do quadrado mágico.

Capítulo 2

Poliedros

O poliedro irregular presente na gravura é um dos elementos mais misteriosos e enigmáticos, permanecendo sem muitos registros sobre o seu significado para a obra e para o autor.

2.1 Um pouco de história

A história da geometria tem muitos registros ao longo do tempo e segundo Hart (1998), os primeiros registros de poliedros datam da pré-história, e pertencem aos povos neolíticos na Escócia, por volta de 2000 a.C, que construíram em forma de esferas modelos formando poliedros regulares em pedra.



Figura 2.1: Poliedros neolíticos.

Fonte: Hart (1998)

Já se tratando de problemas envolvendo geometria, segundo Eves (1992), 26 dos 110

problemas existentes no papiro de Moscou e no papiro de Rhind, que datam de 1850 a.C e 1650 a.C, respectivamente eram problemas geométricos.



Figura 2.2: Uma parte do papiro de Rhind.
Fonte: Eves (1992), p. 74.

Avançando na história nos deparamos com o estudo dos poliedros no renascimento. Como exemplo citamos Albrecht Dürer, em um dos quatro volumes do seu tratado “Underveissung der messung”, possivelmente pela primeira vez, trouxe a ideia de construção de um sólido a partir da planificação.

Vamos agora para a definição de um poliedro, porém para isso, definiremos primeiramente o que é um polígono.

Definição 2.1. Considere uma sequência de n pontos de um plano, em que $n \geq 3$, $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$, diferentes dois a dois, posto que quaisquer três pontos consecutivos não são colineares. Considere como consecutivos os pontos A_{n-1}, A_n, A_1 bem como os pontos A_n, A_1, A_2 . Um polígono $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$ é à reunião dos segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$ se as condições abaixo estiverem satisfeitas:

- i) Os segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$, quando se interceptam, o fazem exclusivamente em suas extremidades;
- ii) Os segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$ são denominados de lados do polígono.

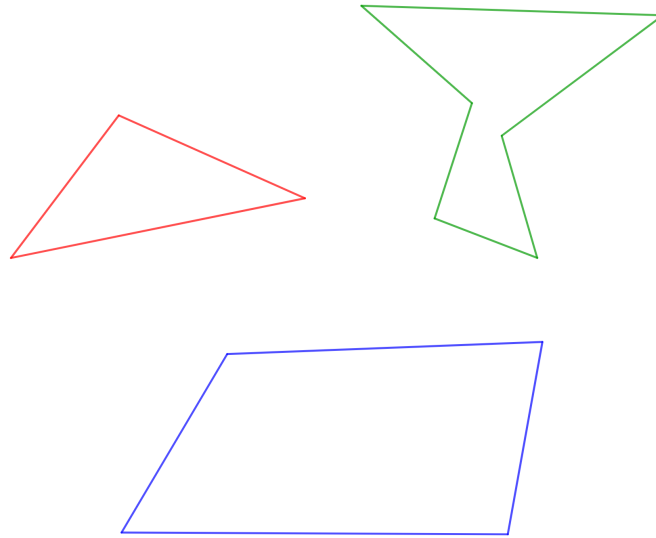


Figura 2.3: Exemplos de polígonos.
Fonte: Figura do autor elaborada com o Geogebra..

Dada a definição de polígono, vamos agora expor sobre o poliedro.

Definição 2.2. Um poliedro é a reunião de um número finito de polígonos chamados faces, que delimita uma região no espaço, em que:

- Cada lado de um desses polígonos também é lado de um unico polígono.;
- A interseção de duas faces quaisquer, ou é um lado em comum dos polígonos, ou é um vértice, ou é vazia;
- É sempre possível ir a partir de um ponto qualquer de uma face (que não seja um vértice) a um ponto qualquer de outra face, sem passar por nenhum vértice.

Cada lado de um polígono, comum a exatamente duas faces, é chamado de aresta do poliedro e cada vértice de uma face é chamado de vértice do poliedro.

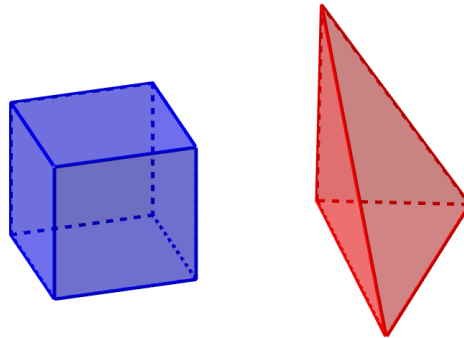


Figura 2.4: Exemplos de poliedros.

Fonte: Figura do autor elaborada com o Geogebra.

Seguindo a definição citada acima, temos que todo poliedro limita uma região do espaço, a qual damos o nome de interior do poliedro. Sendo assim, dizemos que um poliedro é convexo se o seu interior for convexo, já se o seu interior não for convexo denominamos o poliedro de não convexo. Para facilitar nosso entendimento podemos associar da seguinte forma: Um poliedro é convexo se qualquer reta, não paralela a nenhuma de suas faces, o corta em, no máximo, dois pontos. Um poliedro convexo é formado apenas por polígonos convexos.

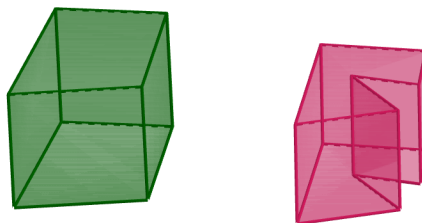


Figura 2.5: Exemplos de poliedro convexo e não convexo respectivamente.

Fonte: Figura do autor elaborada com Geogebra.

Principais elementos geométricos de um Poliedro

- Face: toda região poligonal de um poliedro;
- Aresta: lado comum entre duas face;
- Vértice: pontos onde as arestas se encontram.

Classificação dos Poliedros

Poliedros regulares: São poliedros cujas faces são polígonos regulares iguais entre si e todos os seus vértices concorrem a mesma quantidade de arestas.

Poliedros semi-regulares: São poliedros que seguem as mesmas premissas de um poliedro regular, com exceção que os polígonos que formam tais poliedros não são todos iguais entre si.

Poliedros irregulares: São poliedros que não admitem lei de geração que o caracterize com perfeição.

Vamos agora falar sobre um dos principais teoremas quando o assunto é poliedros, o teorema de Euler.

Teorema 2.3 (Teorema de Euler). *Em todo poliedro P convexo de A arestas, V vértices e F faces, a relação: $V - A + F = 2$ é satisfeita.*

A desmontração segue da publicação feita por Filho (1983) na Revista do Professor de Matemática número 3.

Demonstração: Primeiro calcule a soma dos ângulos internos de todas as faces do poliedro P . Enumere as faces de 1 até F e seja n_k o gênero, que é o número de lados do polígono, da k -ésima face, com $1 \leq k \leq F$. Como a soma dos ângulos internos de um polígono de gênero n é $\pi(n - 2)$, então a soma dos ângulos internos de todas as faces de P é

$$S = \pi(n_1 - 2) + \pi(n_2 - 2) + \dots + \pi(n_F - 2)$$

$$S = \pi(n_1 + n_2 + \dots + n_F) - (2 + 2 + \dots + 2)$$

Podemos notar que no primeiro parêntese temos a soma do número p de lados de todas as faces do poliedro, e esta soma vale o dobro do número de arestas, então $(n_1 + n_2 + \dots + n_F) = 2A$. Já no segundo parêntese temos a soma das F parcelas é o dobro do número de faces, então $(2 + 2 + \dots + 2) = 2F$. Portanto

$$S = \pi(2A - 2F) = 2\pi(A - F). \quad (2.1)$$

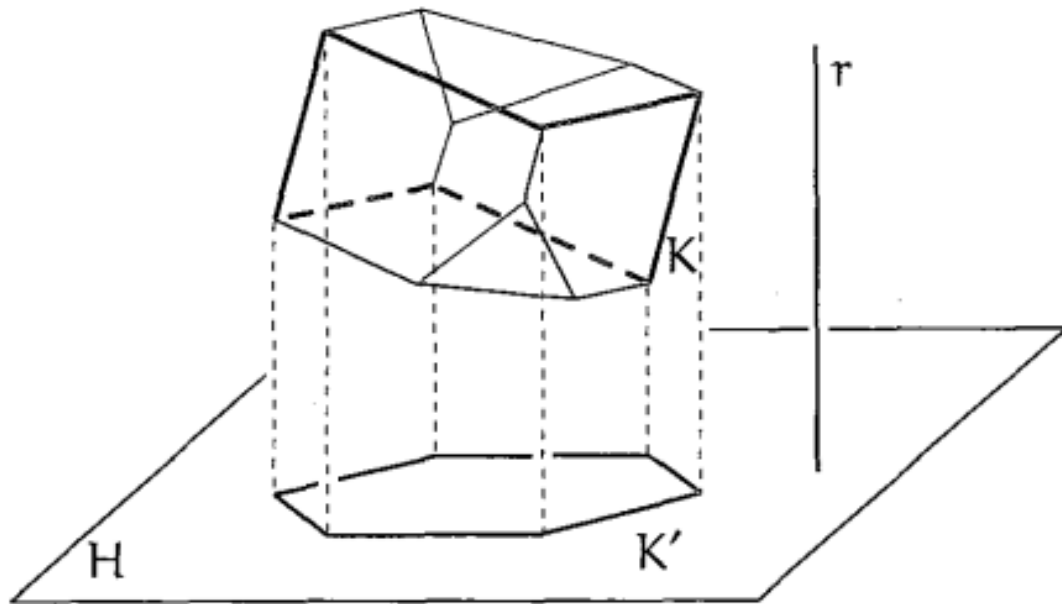


Figura 2.6: Região iluminada e região sombria.
 Fonte: Lima et al. (1998), p. 237.

Vamos agora calcular de outra forma a soma dos ângulos internos de todas as faces do poliedro P . Comece tomando uma reta r que não seja paralela a nenhuma das faces do poliedro, tome também um plano H , que não intersecta P e que seja perpendicular à reta r . O plano H será denominado de plano horizontal e todas as retas paralelas a r , e assim também perpendiculares a H , serão chamadas de retas verticais. O plano H divide o espaço em dois semi-espacos, um dos quais contém o poliedro P . Este semi-espaço será chamado de semi-espaço superior e diremos que os seus pontos estão acima de H . Para ilustrar nosso raciocínio, imagine o sol brilhando a pino sobre o semi-espaço superior de modo que seus raios sejam retas verticais. Para cada ponto X do semi-espaço superior, temos um correspondente X' em H , o qual chamamos de sombra de X . Temos que por notação a sombra de qualquer conjunto C , contido no semi-espaço superior é o conjunto C' contido em H . Consideremos então a sombra P' de poliedro P . Como P é convexo, cada ponto de P' é a sombra de um ou dois pontos de P . A sombra P' do poliedro P tem como contorno um polígono convexo, o qual chamaremos de K' , que é a sombra de uma poligonal fechada K , formada por arestas de P . Cada ponto K' é a projeção de um único ponto de P . A poligonal K é chamada de contorno aparente de P . Cada ponto interior de P' , portanto não pertencente a K' é a sombra de exatamente dois pontos de P . Dado dois pontos de P que têm a mesma sombra, ao mais alto (mais distante de H) chamaremos ponto iluminado; o mais baixo será chamado sombrio. Dito isto, vamos calcular novamente a soma dos ângulos internos de todas as faces do poliedro P . Observe

que a soma dos ângulos internos de uma face é a mesma soma dos ângulos internos de sua projeção, pois ambos são polígonos de mesmo gênero. Sejam V_1 o número de vértices iluminados, V_2 o número de vértices sombrios e V_0 o número de vértices do contorno aparente. Então

$$V = V_0 + V_1 + V_2.$$

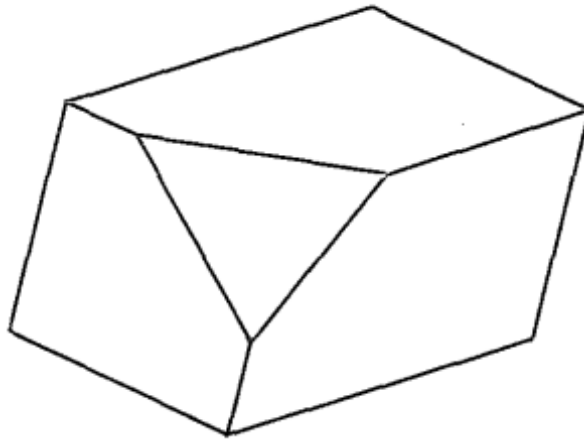


Figura 2.7: Sombra das faces iluminadas
Fonte: Lima et al. (1998), p. 238.

A sombra das faces iluminadas é um polígono convexo com V_0 vértices em seu contorno e V_1 pontos interiores, sombra dos vértices iluminados de P . Somando os ângulos da parte da Figura 2.7 temos

$$S_1 = 2\pi V_1 + \pi(V_0 - 2).$$

Analogamente a soma dos ângulos da sombra das faces sombrias é

$$S_2 = 2\pi V_2 + \pi(V_0 - 2).$$

Somando as duas igualdades temos

$$\begin{aligned} S &= 2\pi V_1 + 2\pi V_2 + 2\pi(V_0 - 2) \\ S &= 2\pi(V - 2). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Igualando 2.1 e 2.2 e dividindo por 2π temos

$$V - A + F = 2.$$

Como queríamos demonstrar.

2.2 Poliedros de Platão

Platão (427-347 a.C.) foi um filósofo grego discípulo de Sócrates (470–399 a.C.) que tem importantes contribuições para a história da matemática, dentre elas o diálogo *Timeu*, texto no qual Platão discorre sobre o mundo e a sua origem através de cinco sólidos geométricos regulares, representando cada um o universo, são eles:

- Tetraedro associado ao elemento do fogo;
- Cubo associado ao elemento terra;
- Octaedro associado ao elemento ar;
- Icosaedro associado ao elemento água;
- Dodecaedro associado ao universo/zodíaco.

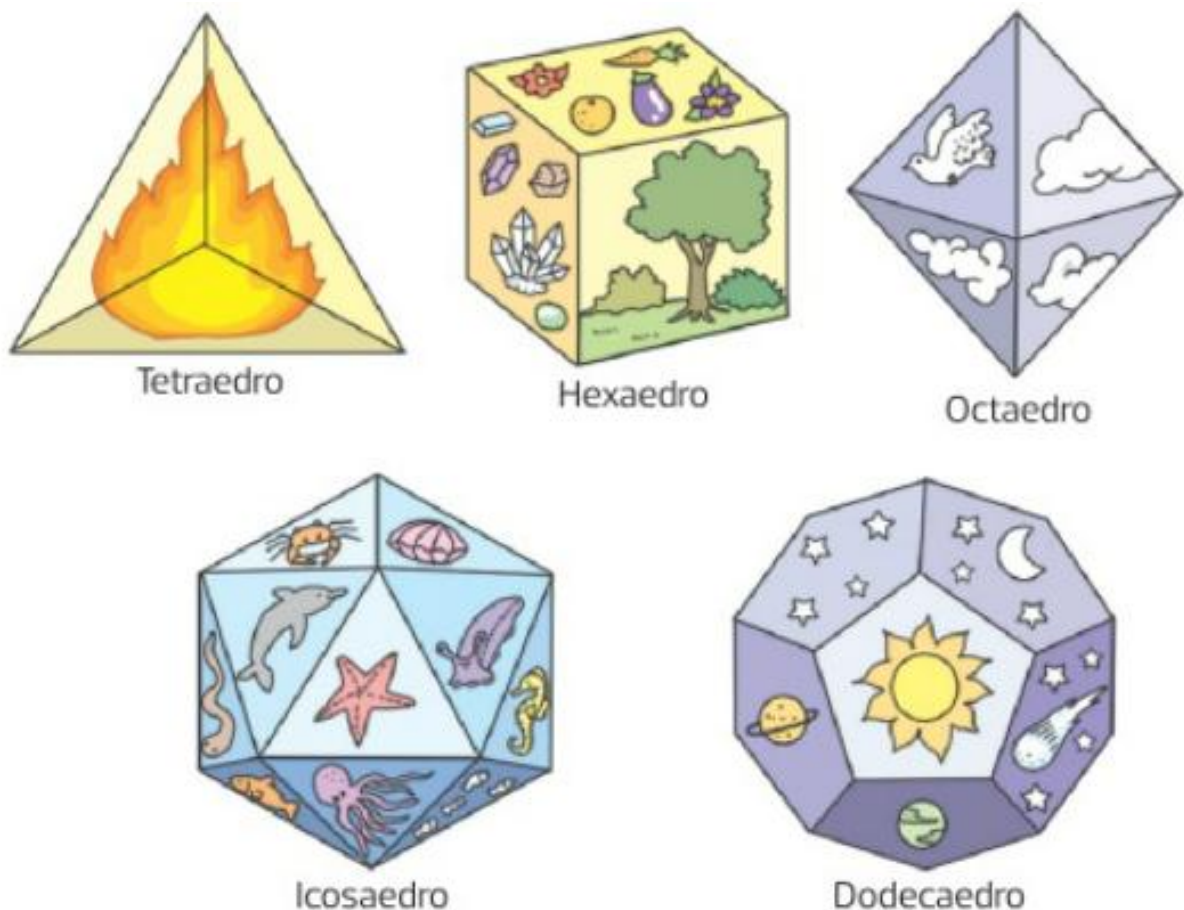


Figura 2.8: Poliedros de Platão associados aos respectivos elementos.

Fonte: Dante (2005), p. 88.

Eves (1992) escreveu uma explicação mais detalhada sobre a relação dos poliedros com os elementos que foi feita por Kepler:

Johann Kepler (1571-1630), mestre da astronomia, matemático e numerologista, deu uma explicação engenhosa para as associações de Timeu. Intuitivamente ele assumiu que, desses sólidos, o tetraedro abarca o menor volume para sua superfície, ao passo que o icosaedro o maior. Agora, essas relações volume-superfície são qualidades de secura e umidade, respectivamente, e como o fogo é o mais seco dos quatro “elementos” e a água o mais úmido, o tetraedro deve representar o fogo e o icosaedro a água. Associa-se o cubo com a terra porque o cubo, assentando quadradamente sobre uma de suas faces, tem a maior estabilidade. O octaedro, seguro frouxamente por dois de seus vértices opostos, entre o indicador e o polegar, facilmente rodopia, tendo a instabilidade do ar. Finalmente, associa-se o dodecaedro com o Universo porque o dodecaedro tem 12 faces e o zodíaco tem 12 seções. (EVES, 2004, p.114)

Esses poliedros posteriormente ficaram conhecidos como poliedros de Platão. Dito sobre a história desses sólidos, vamos agora definir o que é um poliedro de Platão.

Definição 2.4. Um poliedro é considerado um poliedro de Platão se, e somente se, as condições abaixo forem satisfeitas:

- i) O poliedro é regular;
- ii) O poliedro é convexo;
- iii) Tem todas as suas faces com o mesmo número de arestas;
- iv) Em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas

Vamos observar agora um importante teorema que diz sobre a quantidade de sólidos de Platão existentes.

Teorema 2.5. *Existem apenas cinco poliedros de Platão.*

Demonstração: Seja n o número de arestas de cada face do poliedro, m o número de arestas que concorrem a cada vértice, F o número de faces, V o número de vértices e A o número de arestas do poliedro.

Vamos primeiro estabelecer alguma relações:

a) Como cada face tem n arestas ($n \geq 3$) e, por definição, cada aresta está em duas faces temos

$$n \cdot F = 2A \Rightarrow F = \frac{2A}{n}. \quad (2.3)$$

b) Como cada vértice tem m arestas concorrentes ($m \geq 3$), e por definição, cada aresta contém dois vértices temos

$$m \cdot V = 2A \Rightarrow V = \frac{2A}{m}. \quad (2.4)$$

Pela definição dos poliedros de Platão, temos que ele é um poliedro convexo, ou seja, vale o Teorema de Euler. Substituindo 2.3 e 2.4 na relação de Euler, temos

$$\frac{2A}{m} - A + \frac{2A}{n} = 2.$$

Dividindo toda a equação por $2A$, temos

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A}. \quad (2.5)$$

Pelas relações anteriores, temos conhecimento que $n \geq 3$ e $m \geq 3$, porém temos que se n e m fossem simultaneamente maiores que 3, teríamos

$$\begin{cases} m > 3 \Rightarrow m \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{m} \leq \frac{1}{4}, \\ n > 3 \Rightarrow n \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{4} \end{cases}$$

Do sistema acima obtemos que $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq 0$, o que diverge do resultado obtido da equação (1.5), pois como A é positivo, isto implica que $\frac{1}{A} > 0$.

Sabemos então que ou $n = 3$ ou $m = 3$, vamos então olhar caso a caso.

1º Caso) Substituindo $n = 3$ em 2.5 teremos

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A} \Rightarrow m < 6.$$

Então, ou $m = 3$ ou $m = 4$ ou $m = 5$.

2º Caso) Agora substituindo $m = 3$ em 2.5 teremos

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A} \Rightarrow n < 6.$$

Então, ou $n = 3$ ou $n = 4$ ou $n = 5$.

Podemos concluir então que os poliedros de Platão são formados pelos seguintes pares (n, m) , listados na tabela abaixo.

n	m
3	3
3	4
3	5
4	3
5	3

Substituindo os pares na equação 2.5 vamos obter o número de arestas, e com o número de arestas podemos descobrir o número de faces e vértices através das equações 2.3 e 2.4. Assim vamos obter os cinco poliedros de Platão.

n	m	A	V	F	Nome
3	3	6	4	4	Tetraedro
3	4	12	6	8	Octaedro
3	5	30	12	20	Icosaedro
4	3	12	8	6	Hexaedro
5	3	30	20	12	Dodecaedro

Como queríamos demonstrar.

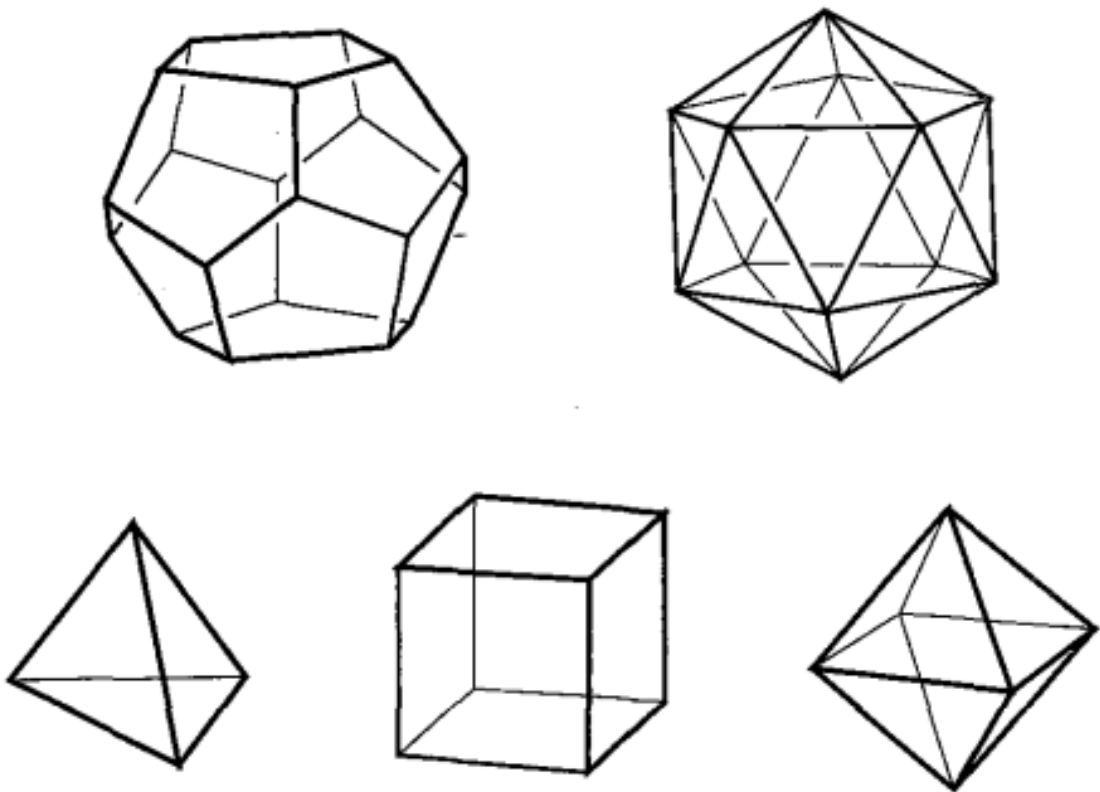


Figura 2.9: Os cinco poliedros de Platão.

Fonte: Lima et al. (1998), p. 242.

Capítulo 3

Esfera

Um dos elementos matemáticos presentes na gravura de Dürer é a esfera, que na obra representa a perfeição, o divino Paula (2014), este será o elemento matemático abordado neste capítulo.

3.1 Definições

Definição 3.1. Seja um ponto O no espaço e r um número real positivo, chamamos de esfera, o conjunto de ponto P do espaço, cuja distância a O seja menor ou igual a r .

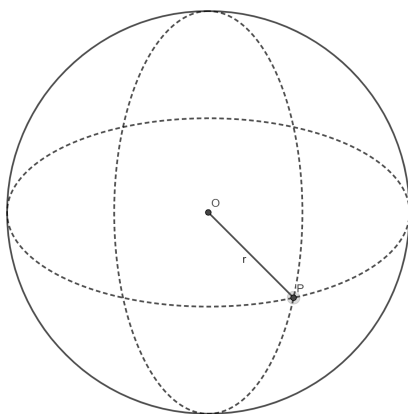


Figura 3.1: Esfera de centro O e raio r .

Fonte: Figura do autor elaborada com o Geogebra.

Definição 3.2. Denominamos de superfície da esfera ou superfície esférica o conjunto de pontos P cuja distância do centro O a P é exatamente igual a raio r .

Definição 3.3. Corda da superfície esférica é um segmento de reta definido por dois pontos distintos da superfície esférica.

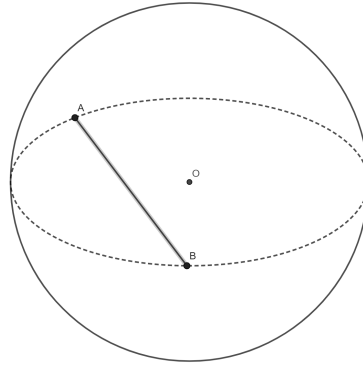


Figura 3.2: Corda da superfície esférica.
Fonte: Figura do autor elaborada com o Geogebra..

Definição 3.4. Diâmetro da esfera é uma corda que contém o ponto O , centro da esfera.

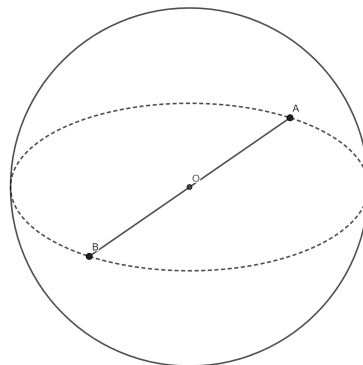


Figura 3.3: Diâmetro da esfera.
Fonte: Figura do autor elaborada com o Geogebra.

Definição 3.5. Circunferência máxima da esfera é uma circunferência cujo tamanho do raio é igual ao raio da superfície esférica.

Definição 3.6. Principais elementos da superfície esférica:

- Eixo o : qualquer reta que contém o centro da esfera;
- Pólos: pontos de intersecção do eixo o com a superfície esférica, assim temos dois pontos que são denominados de Pólo Norte e Pólo Sul;
- Equador: uma circunferência máxima, cujo plano é perpendicular ao eixo o ;
- Paralelo: circunferência cujo plano é perpendicular ao eixo o e é paralela ao equador;
- Meridiano: semicircunferência máxima cujo plano passa pelo eixo o e liga os polos.

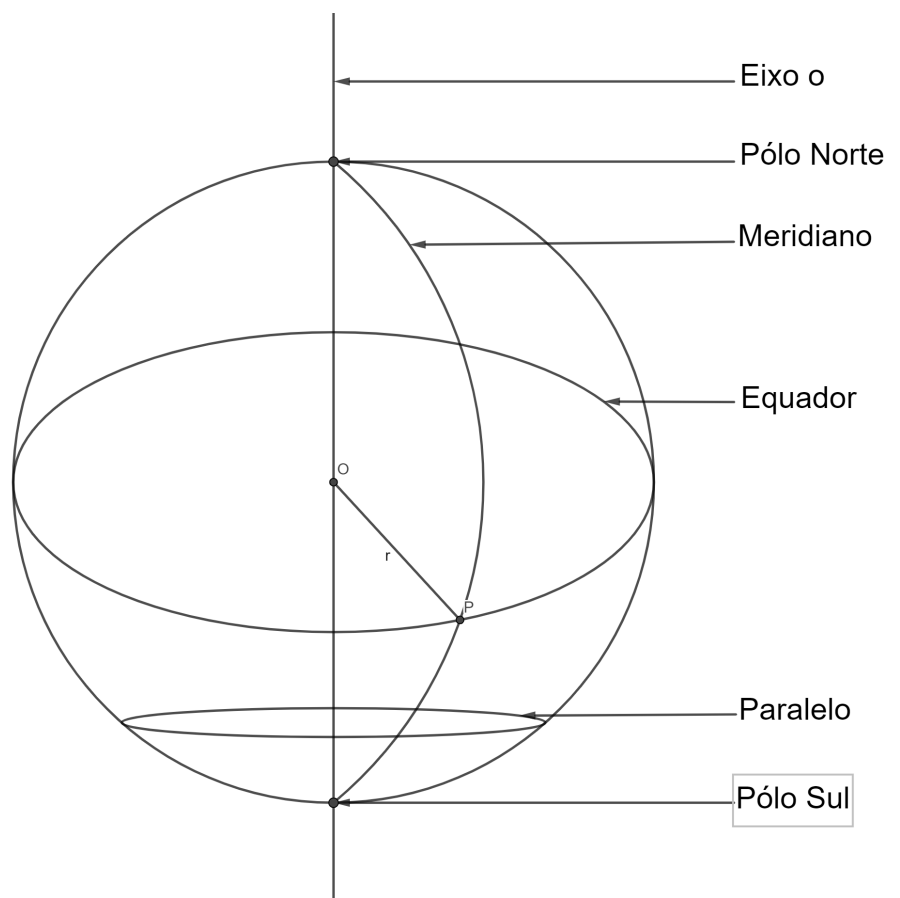


Figura 3.4: Elementos da superfície esférica.
Fonte: Figura do autor elaborada com o Geogebra.

Definição 3.7. Calota esférica é formada quando uma intersecção de um plano com uma superfície esférica é uma circunferência, cada parte gerada através dessa divisão é denominada calota esférica.

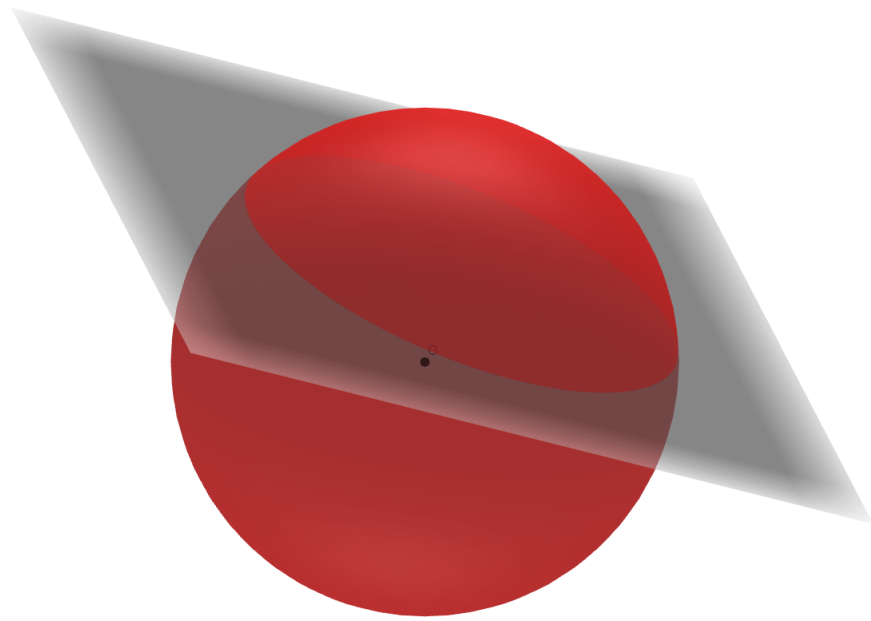


Figura 3.5: Calota esférica.

Fonte: Figura do autor elaborada com o Geogebra.

Definição 3.8. Zona esférica é a parte da superfície esférica que é delimitada por dois planos distintos e paralelos, ambos não tangentes à superfície esférica, mas que a intersectam.

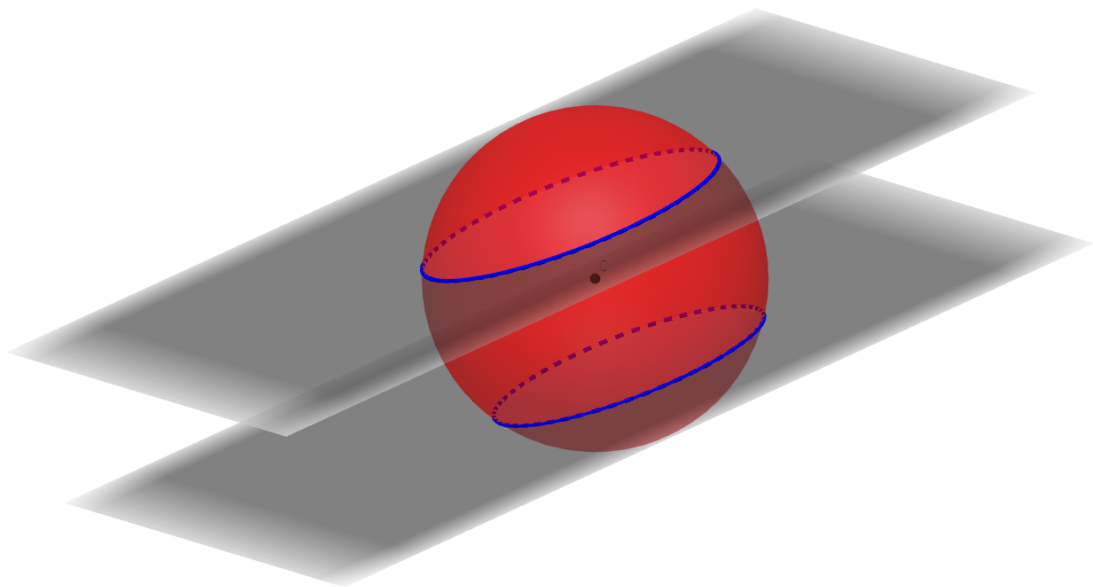


Figura 3.6: Zona esférica.

Fonte: Figura do autor elaborada com o Geogebra.

Definição 3.9. Fuso esférico é a região que fica entre dois meridianos distintos.

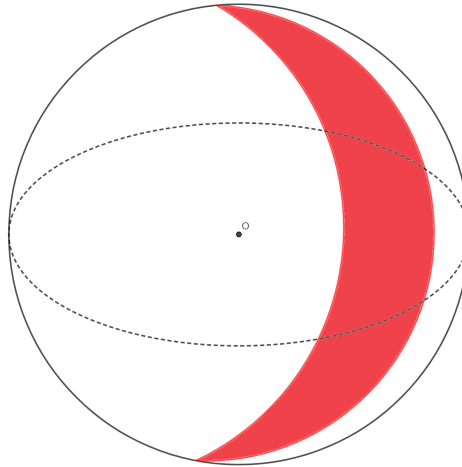


Figura 3.7: Fuso esférico.

Fonte: Figura do autor elaborada com o Geogebra.

Definição 3.10. Cunha esférica é obtida ao girar um semicírculo em torno do eixo da esfera em um ângulo que varia de 0 a 2π .

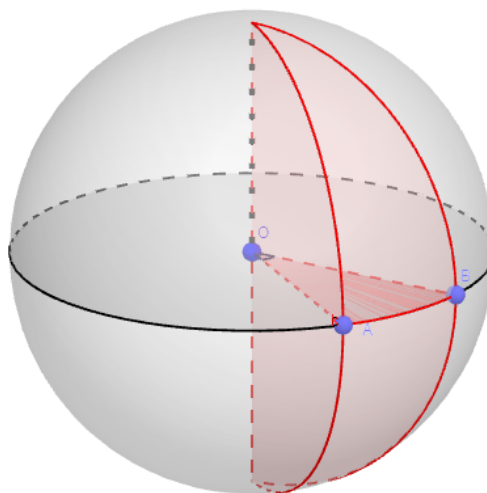


Figura 3.8: Cunha esférica.

Fonte: Figura do autor elaborada com o Geogebra.

3.2 Teoremas

Teorema 3.11. *O volume de uma esfera de raio r é $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.*

Demonstração: Consideremos a função $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \geq 0$, que é a equação da circunferência de centro na origem e raio r , definida do intervalo $[-r, r]$, além disso temos que o volume V obtido pela revolução da região sob o gráfico da função contínua positiva $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ em torno do eixo Ox do sistema cartesiano xOy é dado por

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$$

Então o volume da esfera será

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^r \pi [\sqrt{r^2 - x^2}]^2 dx = \pi \int_{-r}^r [\sqrt{r^2 - x^2}]^2 dx \\ &= \pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-r}^r \\ &= \pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} + r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = \frac{4\pi r^3}{3} \end{aligned}$$

Teorema 3.12. *A área da superfície esférica de uma esfera de raio r é igual a $A = 4\pi r^2$.*

Demonstração: Temos que a área de uma superfície obtida pela rotação do gráfico $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, que é contínua e positiva, diferenciável e com derivada f' contínua no intervalo (a, b) , em torno do eixo Ox é definida por

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Então a área da superfície esférica, será gerada pela revolução do gráfico da função $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ em torno do eixo Ox . Primeiramente temos que $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$.

Então

$$\sqrt{1 + (f'(x))^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Assim temos que

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_{-r}^r f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx \\ &= 2\pi r \int_{-r}^r dx = \\ &= 2\pi r(x) \Big|_{-r}^r \\ &= 2\pi r^2 + 2\pi r^2 = 4\pi r^2 \end{aligned}$$

Teorema 3.13. *A área de uma calota esférica de uma esfera de raio r e a altura h é $A = 2\pi rh$.*

Demonstração: Seja h a altura da calota esférica e d a diferença entre o raio e altura, ou seja, $r = d + h$.

Analogamente ao que fizemos para demonstrar a área da esfera, temos que:

$$A = 2\pi \int_d^r f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = 2\pi \int_d^r \sqrt{r^2 - x^2} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx$$

$$A = 2\pi r \int_d^r dx$$

$$= 2\pi r(x) \Big|_d^r$$

$$= 2\pi r^2 - 2\pi rd = 2\pi r(r - d) = 2\pi rh$$

Teorema 3.14. *A área de uma zona esférica de uma esfera de raio r , tomando h como a distância entre os planos paralelos é $A = 2\pi rh$.*

Demonstração: A zona esférica está localizada entre duas calotas esféricas, sendo assim, a área da zona esférica será a área da superfícies esférica, menos a área das duas calotas.

Sejam h_1 e h_2 as alturas das calotas esféricas, então a área dessas calotas será $2\pi rh_1$ e $2\pi rh_2$, logo a área da zona esférica será

$$4\pi r^2 - (2\pi rh_1 + 2\pi rh_2) = 2\pi r(2\pi - h_1 - h_2) = 2\pi rh$$

Teorema 3.15. *A área de um fuso esférico de uma esfera de raio r é $A = 2\alpha r^2$, em que α é o ângulo do fuso esférico.*

Demonstração: Seja A_f a área do fuso esférico, temos que a partir de uma regra de três simples que

$$\frac{A_f}{4\pi r^2} = \frac{\alpha}{2\pi}$$

Então:

$$A_f = \frac{4\pi r^2 \alpha}{2\pi} = 2\alpha r^2$$

3.3 O volume da esfera sem o uso de integrais

Princípio de Cavalieri

Bonaventura Cavalieri (1598-1647) foi um matemático italiano, influente e importante, que deixou várias contribuições para matemática como o Princípio de Cavalieri para cálculo de áreas e volumes.

O princípio de Cavalieri para o cálculo de volumes diz que: Sejam A e B dois sólidos limitados, e α um plano dado. Para todo β paralelo a α , as intersecções dos sólidos A e

B com β são regiões em que a razão entre suas áreas é a constante k , então a razão dos volumes de A e B é a mesma constante k .

Vamos então calcular o volume da esfera através do Princípio de Cavalieri.

Teorema 3.16. *O volume de uma esfera de raio r é $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.*

Demonstração: Primeiro tomemos um cilindro equilátero, que é um cilindro onde a altura é igual ao diâmetro da base, cujo raio da base é igual a r . Seja V o centro do cilindro, ou seja, o ponto médio do seu eixo. Podemos assim considerar dois cones com o vértice no ponto V e com bases que coincidem com as bases do cilindro. Se tirarmos esses dois cones do cilindro temos a anticlépsidra. Tomemos agora uma esfera que tangencia os planos que contém as bases do cilindro.

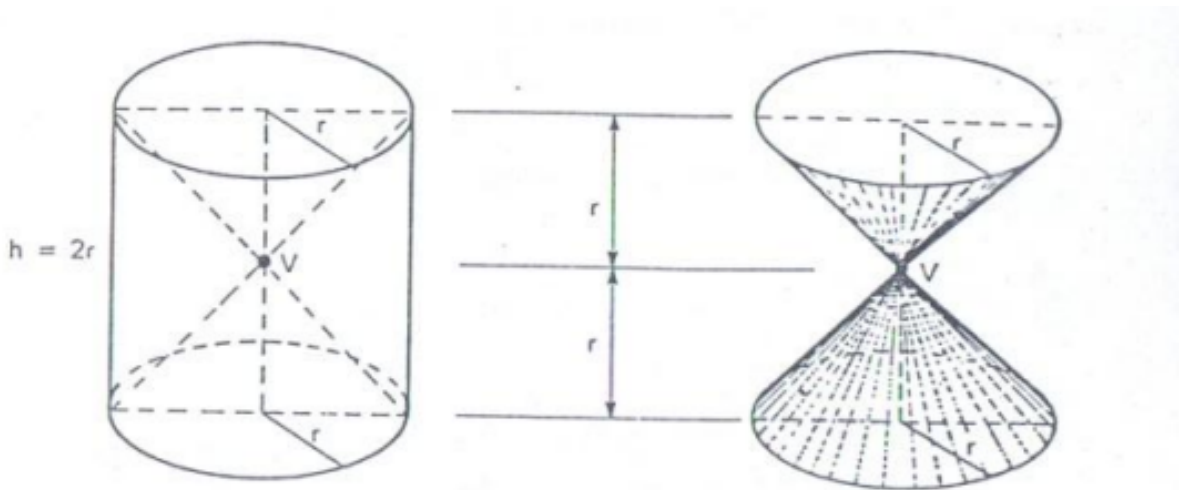


Figura 3.9: Cilindro e Clepsidra.
Fonte: Neto (1992), p. 339.

Seja α um plano paralelo a estes planos, cuja distância até o centro da esfera é d , em que $d < r$. Tal plano intercepta a anticlépsidra formando uma coroa circular, e o mesmo intercepta a esfera formando um círculo. As circunferências que limitam a coroa circular têm raios d e r , portanto a área da coroa circular é

$$A_{coroa} = \pi r^2 - \pi d^2$$

Já a área do círculo é

$$A_{circ} = \pi \rho^2$$

Porém pelo teorema de pitágoras temos que $x^2 = r^2 - d^2$, então

$$A_{circ} = \pi(r^2 - d^2) = \pi r^2 - \pi d^2$$

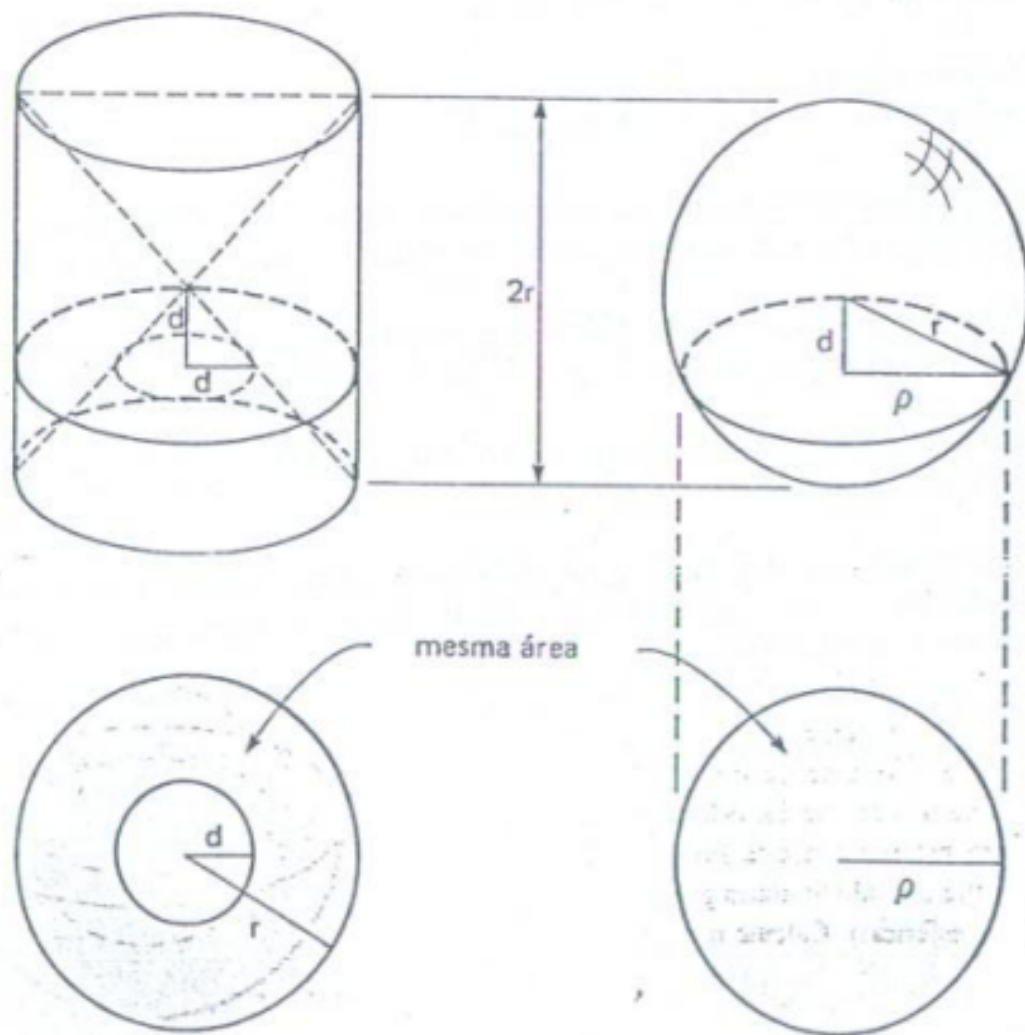


Figura 3.10: Interserção do plano α com a anticilindro e com a esfera.

Fonte: Neto (1992), p. 339.

Sendo assim temos que $A_{coroa} = A_{circ}$. Então pelo Princípio de Cavalieri o volume da esfera é igual ao volume da anticilindro. Vamos então calcular o volume da anticilindro, para isso basta considerarmos o volume do cilindro menos duas vezes o volume da clepsidra (sólido formado pela junção dos dois cones de vértice P). Logo

$$V_{cilindro} = A_{base}h = (\pi r^2)h = (\pi r^2)2r = 2\pi r^3$$

$$V_{clepsidra} = 2\left[\frac{1}{3}(\pi r^2)r\right] = \frac{2\pi r^3}{3}$$

Portanto o volume da esfera é

$$V_{cilindro} - V_{clepsidra} = 2\pi r^3 - \frac{2\pi r^3}{3} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

O método de equilíbrio de Arquimedes

Além do Princípio de Cavalieri, outro método bastante difundido para o cálculo do volume da esfera sem o uso de integrais é o método de equilíbrio de Arquimedes.

Arquimedes (287–212 a.C.) foi um matemático, filósofo, físico e astrônomo Grego, que teve importantes contribuições para a história da ciência. Uma dessas contribuições foi o método de equilíbrio, o qual abordaremos para calcular o volume da esfera.

O método consiste em determinar uma área ou volume através de cortes de uma região em um número muito grande de fatias paralelas e finas e pendurar mentalmente esses pedaços em uma extremidade de uma alavanca dada, estabelecendo assim o equilíbrio com um objeto de área ou volume conhecidos.

Vamos agora para a demonstração do teorema que está presente no livro de Eves (1992).

Teorema 3.17. *O volume de uma esfera de raio r é $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.*

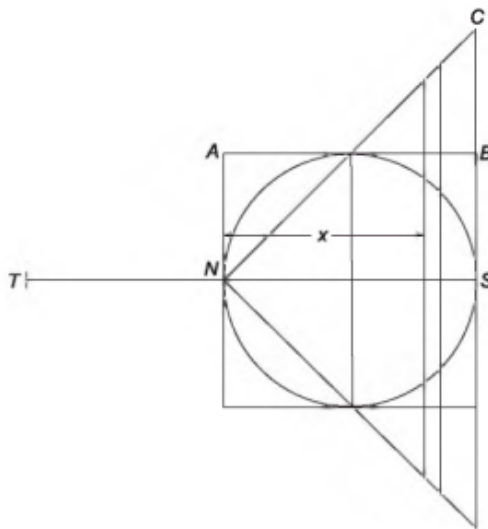


Figura 3.11: Esquema para a demonstração do volume da esfera segundo o método de equilíbrio de Arquimedes

Fonte: Eves (1992), p. 423.

Demonstração: Seja r o raio da esfera e o eixo x que contém o centro da esfera, assim como os polos, que denominaremos como N para o pólo norte e S para o pólo sul. Construa agora o cilindro e o cone de revolução obtidos pela rotação do retângulo $NABS$ e do triângulo NCS em torno do eixo X , como mostra a Figura 3.11. Tomemos agora nos três sólidos as fatias verticais, que serão vistas como cilindros achatados, correspondentes as secções de abscissas x e $x + \Delta x$. Sendo assim, os volumes das fatias serão, aproximadamente:

$$\text{esfera: } \pi x(2r - x)\Delta x$$

cilindro: $\pi r^2 \Delta x$

cone: $\pi x^2 \Delta x$.

Agora penduremos no ponto T , tal que $TN = 2r$, as fatias da esfera e do cone. Seu momento combinado, que é o produto do volume pela distância do ponto ao centroide do volume, em relação a N é

$$[\pi x(2r - x)\Delta x + \pi x^2 \Delta x]2r = 4\pi r^2 \Delta x$$

Ou seja, o resultado obtido é o quádruplo do momento da fatia cilíndrica quando ela é mantida em sua posição original. Efetuando então uma soma de um número grande dessas fatias temos

$$2r [\textit{volume da esfera} + \textit{volume do cone}] = 4r [\textit{volume do cilindro}]$$

ou

$$2r [\textit{volume da esfera} + \frac{8\pi r^3}{3}] = 8\pi r^4$$

portanto

$$\textit{volume da esfera} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

3.4 Astronomia e a esfera terrestre

No renascimento, movimento artístico, cultural e científico, a qual Dürer fazia parte, a concepção da terra redonda era bastante discutida bem como o heliocentrismo (Sol como centro do universo) contra o geocentrismo (Terra como centro do universo) que foi o modelo mais aceito durante muitos séculos, proposto por Aristóteles (384-322 a.C.) e Ptolemeu (90-168 d.C.). A ideia de Aristarco de Samos (310-230 a.C.) foi resgatada por Copérnico (1473-1543), que defendeu a teoria que a Terra se movia em torno do Sol.

Além das contribuições sobre os modelos cosmológicos, outro feito importante que aconteceu na Grécia Antiga foi a medida que Eratóstenes (276-194 a.C.) adotou a esfericidade da Terra e propôs um método para calcular a circunferência da Terra, o qual iremos discorrer a seguir.

Eratóstenes e a circunferência da Terra

Para começarmos nosso raciocínio, temos que ter conhecimentos de alguns fatos que ajudaram Eratóstenes em seu cálculo. O primeiro deles é que o matemático foi diretor da Biblioteca de Alexandria, local onde teve acesso aos materiais e descobriu as datas dos solstícios e equinócios. Além disso, descobriu que no solstício de verão, na cidade de Siena, o sol ficava exatamente a pino na cidade, ou seja, formava um ângulo reto com o sol, de modo que ao meio dia ele podia ser observado no fundo de um poço, mas o equivalente não

acontecia em Alexandria no mesmo momento. Neste caso, embora os meridianos delas diferissem, Eratóstenes imaginou que as duas cidades estavam no mesmo meridiano.

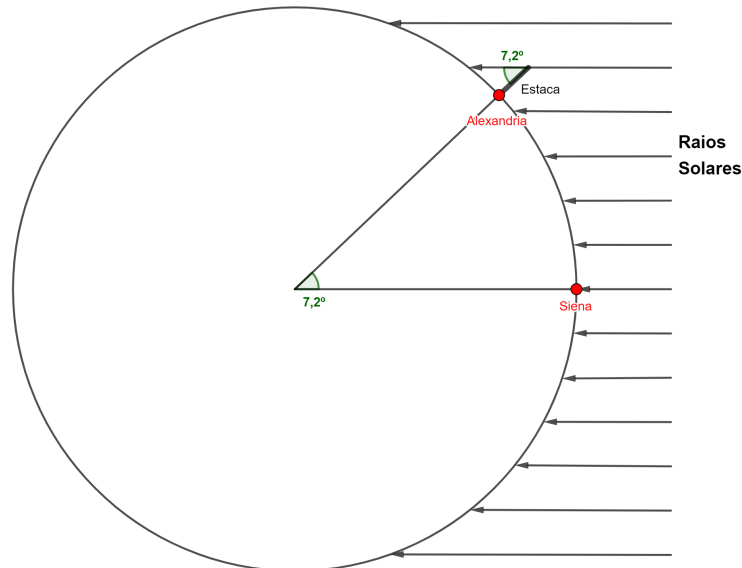


Figura 3.12: Esquema de Eratóstenes.

Fonte: Figura do autor elaborada com o Geogebra.

Sendo assim, ele notou que se determinasse o ângulo formado das cidades de Siena e Alexandria, como mostra a Figura 3.12, e descobrisse a distância entre as cidades, poderia calcular o tamanho da Terra. Então, inseriu uma estaca em Alexandria, de modo que ela ficasse perpendicular ao solo e mediu o comprimento da sombra. Não se sabe até hoje as medidas exatas do comprimento da estaca e do comprimento da sombra, sabemos que a relação para calcular o ângulo que as cidades formavam entre si, o qual ele admitiu que fosse o mesmo que o ângulo que a estaca fazia com os raios do Sol, é pela correspondência dos ângulos, como mostra a Figura 3.12.

$$\tan\theta = \frac{\text{comprimento estaca}}{\text{comprimento sombra}} \Rightarrow \theta = \arctan\frac{\text{comprimento estaca}}{\text{comprimento sombra}} \Rightarrow \theta \approx 7,2^\circ$$

Logo após, Eratóstenes usou a regra de três simples dada pela seguinte relação

$$\frac{\text{distância cidades}}{\text{circunferência Terra}} = \frac{\theta}{2\pi}$$

Ou seja

$$\text{circunferência Terra} = \frac{2\pi \cdot \text{distância cidades}}{\theta} = \frac{360^\circ}{7,2^\circ} \cdot \text{distância cidades}$$

Sendo assim, ele chegou na seguinte conclusão

$$\text{circunferência Terra} = 50 \cdot \text{distância cidades}$$

Feito isso, Eratóstenes calculou a distância entre as duas cidades, 5.000 estádios, que era a unidade de medida utilizada na época, que uma unidade é aproximadamente 157 metros. Desse modo

$$\text{circunferência Terra} = 50 \cdot 5000\text{estádios} = 250000\text{estádios}$$

Convertendo para metros temos

$$\text{circunferência Terra} = 250000 \cdot \frac{0,157km}{1\text{estadio}} = 39250km$$

Atualmente sabemos que a circunferência da Terra mede aproximadamente 40.075 km, um valor muito próximo ao calculado por Eratóstenes. Com isso Eratóstenes também conseguiu calcular o raio da Terra através da relação

$$C = 2\pi R \Rightarrow R = \frac{C}{2\pi} = \frac{39250}{2\pi} \approx 6247km$$

Um valor muito próximo do real valor 6.370km, que sabemos hoje devido ao avanço da tecnologia.

Capítulo 4

Quadrado Mágico

4.1 História

Um quadrado mágico de ordem n , consiste em uma tabela quadrada de ordem n , que contém n^2 valores inteiros distintos, sendo n um número natural maior do que ou igual a 3, e sua principal característica é que todas as linhas, colunas e diagonais exibem a mesma soma, denominada constante mágica. Em caso de quadrados de ordem ímpares, o número situado no meio do quadrado é denominado mediano.

A história sobre a sua origem tem várias versões, porém a mais difundida diz que o quadrado mágico teve sua origem na China. O quadrado mágico de Lo-shu foi visto pela primeira vez pelo imperador Yu no terceiro milênio antes de Cristo. De acordo com a lenda, o imperador viu o quadrado na carapaça de uma tartaruga às margens do rio Luo, um afluente do rio Amarelo, e então esse quadrado ficou conhecido como Lo-shu, que significa escrita do rio Luo. O imperador percebeu que na carapaça da tartaruga apareciam figuras com nós, que ele transformou em números de 1 a 9 Eves (1992).

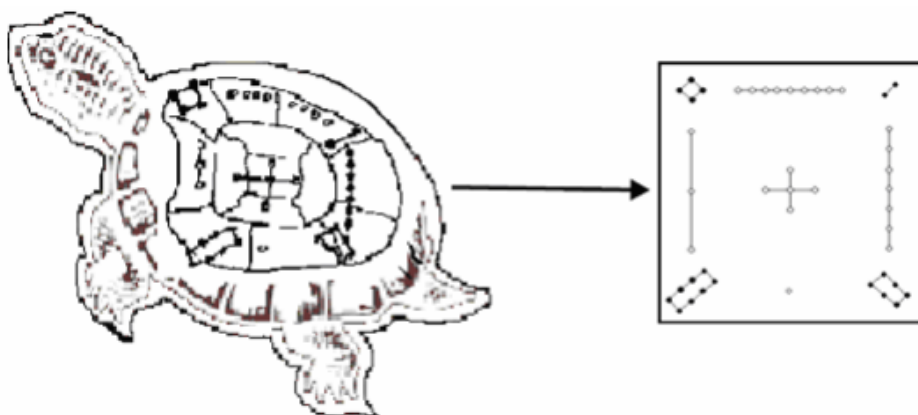


Figura 4.1: Tartaruga e Lo Shu
Fonte: Lopes (s.d)

Dada a característica peculiar onde todas as linhas, colunas e diagonais exibiam a mesma soma, por anos os chineses acreditaram que quem detivesse um quadrado mágico possuiria sorte e felicidade para toda a vida, por isso eles gravavam o quadrado em metal ou pedra para que usassem como amuletos ou talismãs.

O Lo-Shu tinha ar místico, e acreditava que o quadrado possuía os princípios básicos que formavam o universo onde:

- Os números pares simbolizavam o feminino, Yin;
- Os números ímpares simbolizavam o princípio masculino, Yang;
- Os números 1 e 6 representavam a água;
- Os números 2 e 7 representavam o fogo;
- Os números 3 e 8 representavam a madeira;
- Os números 4 e 9 representavam os metais.

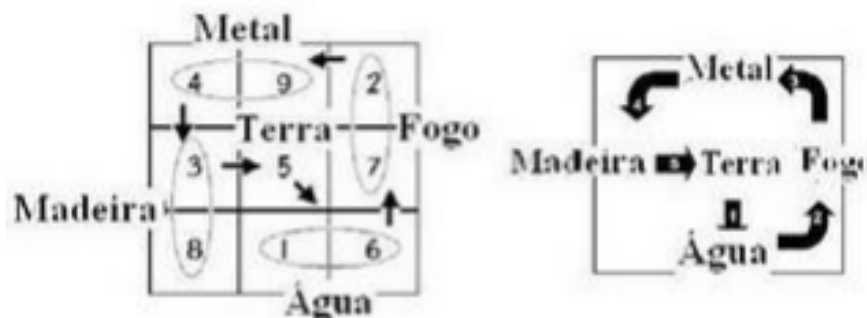


Figura 4.2: Elementos no Quadrado Lo Shu.

Fonte: Lopes (s.d)

No Século XI, na Índia, foi encontrado gravado no assoalho de um dos templos de Khajuraho, um quadrado mágico de ordem 3, semelhante ao quadrado de Lo-Shu, porém adicionado 19 a cada elemento do quadrado.

No ocidente, os quadrados mágicos têm seu primeiro registro na obra “Tratado de Quadrados Mágicos” de Manuel Moschopoulos Lopes (s.d), que foi um escritor e filósofo bizantino, que viveu entre o final do século XIII e o começo do século XIV. O filósofo apresentou um método de construção para quadrados mágicos de ordem ímpar Brown (jul. 2012). Uma curiosidade é que Moschopoulos significa bezerrinho e provavelmente era um apelido.

Aproximadamente em 1510, Heinrich Cornelius Agrippa (1486 - 1535), astrólogo, físico, escritor, teólogo e filósofo alemão escreveu “De Occulta Philosophia”, onde construiu sete

quadrados mágicos Lopes (s.d) e cada um deles possuía um significado astronômico, sendo que cada um deles representava um planeta conhecido por eles na época, que incluíam o Sol e Lua. Sendo eles:

- Ordem 3: Saturno

Tabela 4.1: Quadrado Mágico Saturno.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

- Ordem 4: Júpiter

Tabela 4.2: Quadrado Mágico Júpiter.

4	14	15	1
9	7	6	12
5	11	10	8
16	2	3	13

- Ordem 5: Marte

Tabela 4.3: Quadrado Mágico Marte.

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

- Ordem 6: Sol

Tabela 4.4: Quadrado Mágico Sol.

6	32	3	34	35	1
7	11	27	28	8	30
19	14	16	15	23	24
18	20	22	21	17	13
25	29	10	9	26	12
36	5	33	4	2	31

- Ordem 7: Vênus

Tabela 4.5: Quadrado Mágico Vênus.

22	47	16	41	10	35	4
5	23	48	17	42	11	29
30	6	24	49	18	36	12
13	31	7	25	43	19	37
38	14	32	1	26	44	20
21	39	8	33	2	27	45
46	15	40	9	34	3	28

- Ordem 8: Mercúrio

Tabela 4.6: Quadrado Mágico Mercúrio.

8	58	59	5	4	62	63	1
49	15	14	52	53	11	10	56
41	23	22	44	45	19	18	48
32	34	35	29	28	38	39	25
40	26	27	37	36	30	31	33
17	47	46	20	21	43	42	24
9	55	54	12	13	51	50	16
64	2	3	61	60	6	7	57

- Ordem 9: Lua

Tabela 4.7: Quadrado Mágico Lua.

37	78	29	70	21	62	13	54	5
6	38	79	30	71	22	63	14	46
47	7	39	80	31	72	23	55	15
16	48	8	40	81	32	64	24	56
57	17	49	9	41	73	33	65	25
26	58	18	50	1	42	74	34	66
67	27	59	10	51	2	43	75	35
36	68	19	60	11	52	3	44	76
77	28	69	20	61	12	53	4	45

Uma curiosidade era que na idade média quadrados mágicos eram gravados em metais para a criação de amuletos para espantar a peste.

Em 1514 temos a primeira impressão de um quadrado mágico, na gravura *Melancolia I* do renascentista alemão Albrecht Dürer. Nela vemos um quadrado mágico de ordem 4, cuja constante mágica é 34.

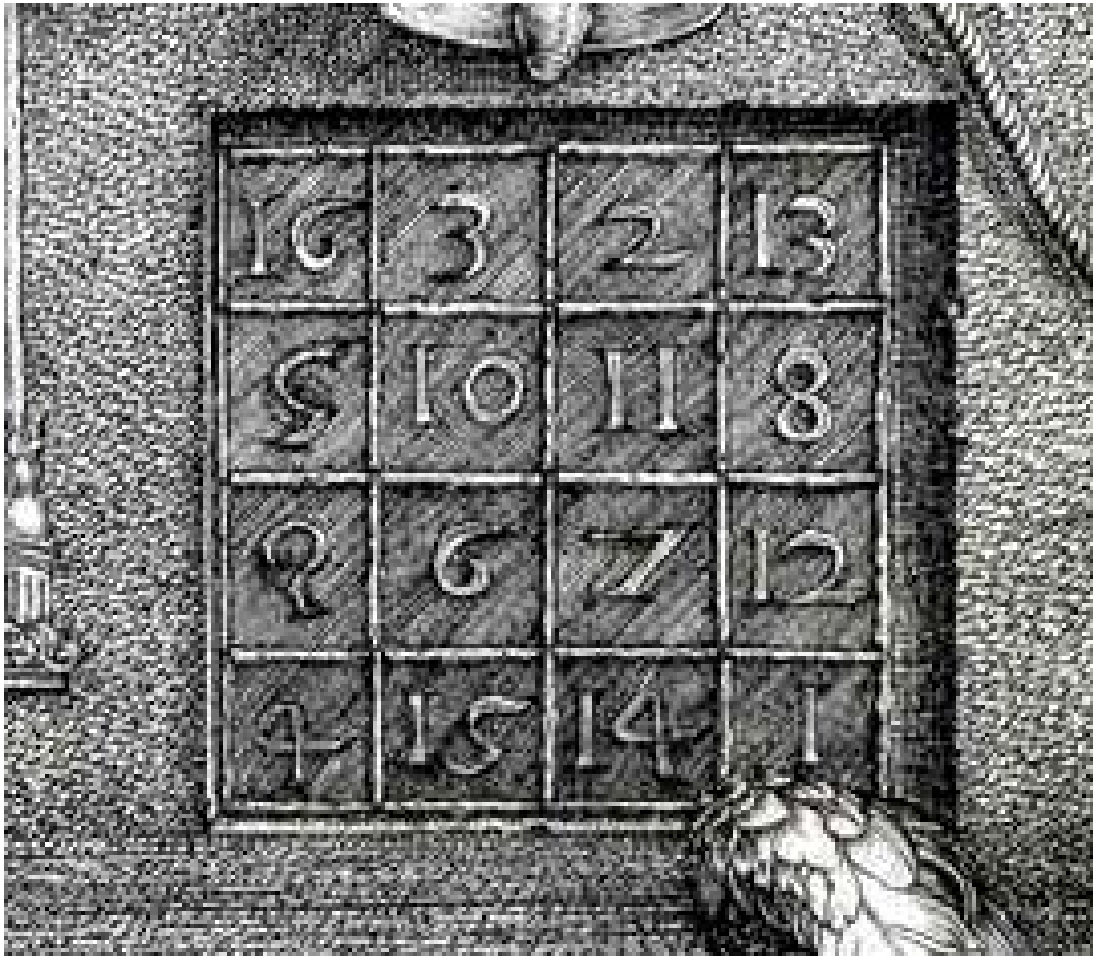


Figura 4.3: Quadrado Mágico presente na Obra Melancholia I de Albrecht Dürer.
Fonte: Wikipedia.

Este quadrado possui muitas outras propriedades além da soma das linhas, colunas e diagonais:

1. A constante mágica pode ser encontrada na soma dos cantos do quadrado mágico, nos quatro quadrantes, e no quadrado central;
2. Se somarmos os quadrados dos números das duas linhas superiores, teremos a mesma soma dos quadrados das duas linhas inferiores, assim como a soma dos quadrados linhas pares é igual a soma dos quadrados das linhas ímpares, bem como também a soma dos quadrados dos números das diagonais é igual a soma dos quadrados dos números fora das diagonais;
3. A soma dos números das diagonais é igual a soma dos números fora das diagonais;
4. A soma dos cubos dos números das diagonais é igual a soma dos cubos dos números fora das diagonais;
5. Se unirmos com segmentos de reta os números pares da segunda, terceira e quarta

colunas formamos um hexágono, o mesmo vale se unirmos os números ímpares da primeira, segunda e terceira colunas;

6. Se subtrairmos uma unidade de cada número do quadrado, formamos um novo quadrado mágico cuja constante mágica é 30;
7. Se escrevermos os números na base 2 e rodarmos o quadrado em 45° no sentido horário em torno do ponto de encontro das diagonais, consegue-se uma figura que apresenta simetria vertical perfeita dos zeros e uns.

Vamos agora confirmar as propriedades acima:

Demonstração:

1. $16 + 13 + 4 + 1 = 34 = 10 + 11 + 6 + 7$
2. $16^2 + 3^2 + 2^2 + 13^2 + 5^2 + 10^2 + 11^2 + 8^2 = 748 = 9^2 + 6^2 + 7^2 + 12^2 + 4^2 + 15^2 + 14^2 + 1^2$ e
 $16^2 + 3^2 + 2^2 + 13^2 + 9^2 + 6^2 + 7^2 + 12^2 = 748 = 5^2 + 10^2 + 11^2 + 8^2 + 4^2 + 15^2 + 14^2 + 1^2$
3. $16 + 10 + 7 + 1 + 13 + 11 + 6 + 4 = 68 = 3 + 2 + 5 + 8 + 9 + 12 + 15 + 14$
4. $16^3 + 10^3 + 7^3 + 1^3 + 13^3 + 11^3 + 6^3 + 4^3 = 9248 = 3^3 + 2^3 + 5^3 + 8^3 + 9^3 + 12^3 + 15^3 + 14^3$
- 5.

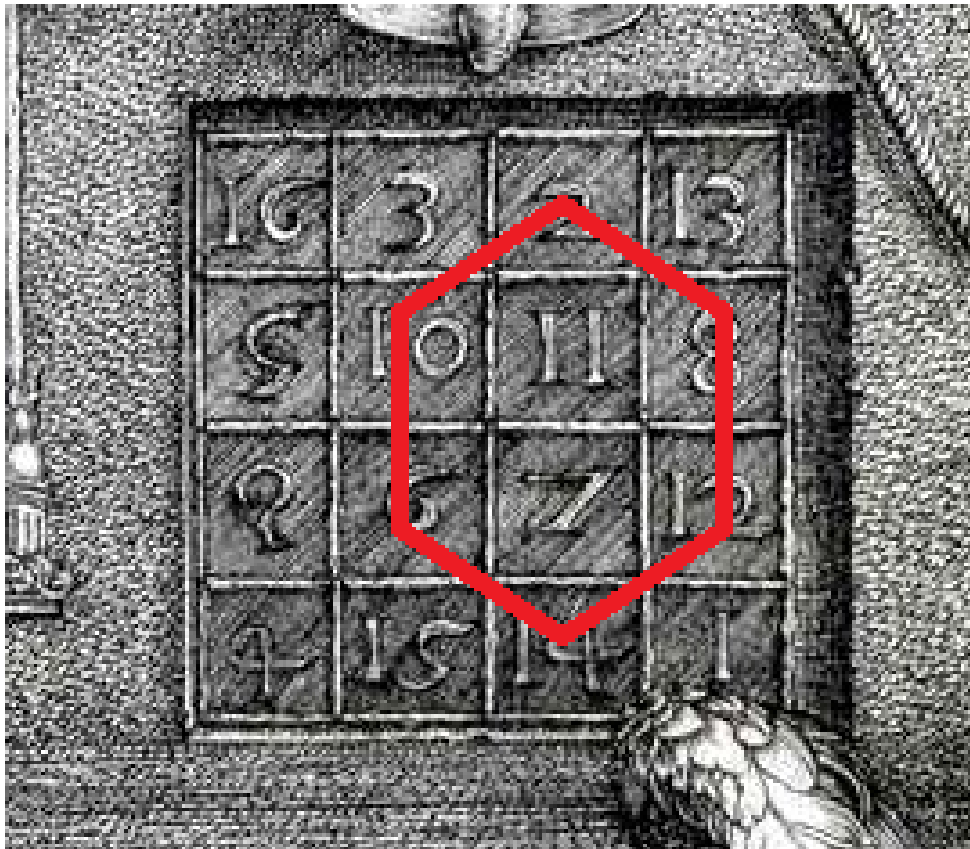


Figura 4.4: Demonstração da primeira parte do item 6.
 Fonte: Figura do autor elaborada com o Paint.

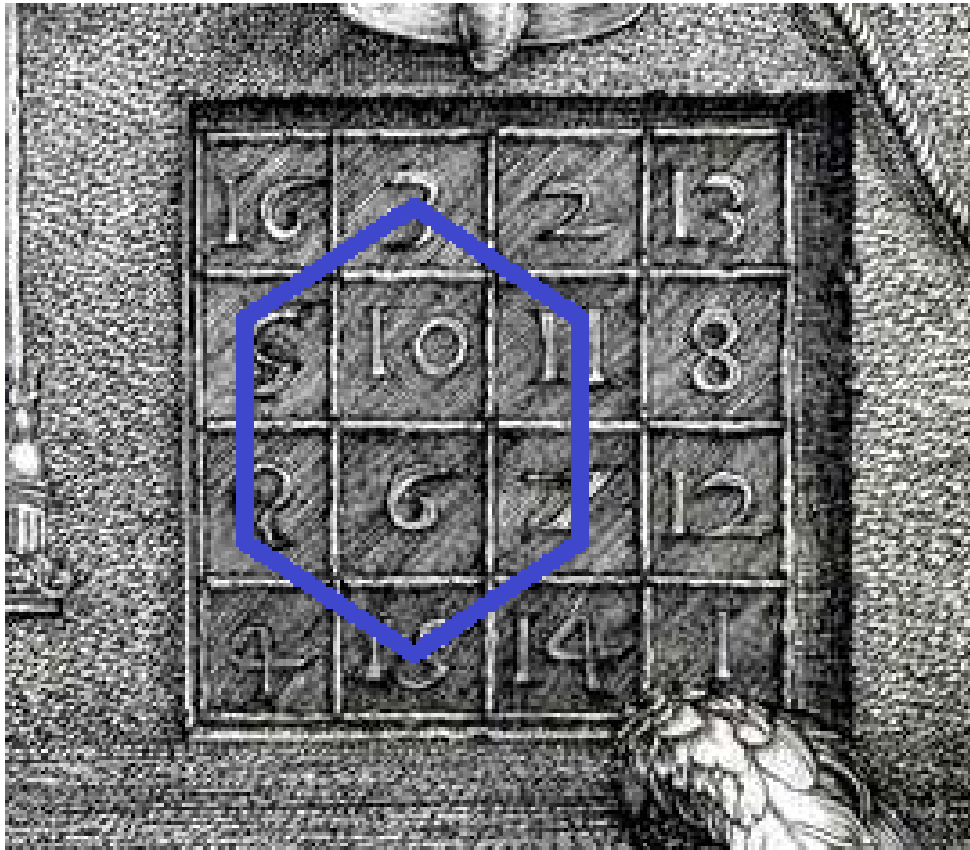


Figura 4.5: Demonstração da segunda parte do item 6.
 Fonte: Figura do autor elaborada com o Paint.

6.

Tabela 4.8: Quadrado Mágico cuja constante mágica é 30.

15	2	1	12
4	9	10	7
8	5	6	11
3	14	13	0

7. Primeiro vamos reescrever o quadrado mágico na base 2, com quatro algarismos, temos então

Tabela 4.9: Quadrado Mágico de Dürer na base 2.

1111	0010	0001	1100
0100	1001	1010	0111
1000	0101	0110	1011
0011	1110	1101	0000

Tabela 4.10: Quadrado Mágico de Dürer na base 2 após a rotação de 45° no sentido horário, mostrando simetria entre zeros e uns.

	11		11	
	0100		0010	
1000	10		01	0001
0011	0101		1010	1100
1110	01		10	0111
	1101		1011	
	00		00	

Outra constatação interessante é que no quadrado mágico de Dürer vemos os números 15-14 seguidos, que é o ano em que a gravura foi feita. Além disso, na mesma linha temos o número 4 (que representa a letra D) e o número 1 (que representa a letra A) de “Dürer, Albrecht”.

Tabela 4.11: Quadrado Mágico de Dürer com destaques para os pares 4-1 e 15-14.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

E com isso, muitos matemáticos se interessaram por estudar quadrados e cubos mágicos ao longo da história como: Bernard Frénicle de Bessy (1602-1675), Claude-Gaspar Bachet (1581-1638), Pierre de Fermat (1601-1665) e Leonhard Euler (1707-1783).

Os quadrado mágicos especiais, aqueles que possuem algumas singularidades, podem ser classificados em:

- Imperfeitos: aqueles que não obedecem todas as regras de um quadrado mágico, por exemplo, um quadrado mágico onde a soma das linhas e colunas são iguais porém a das diagonais não.
- Hipermágicos: aqueles que têm propriedades adicionais além das regras básicas, por exemplo, um quadrado onde trocando duas colunas de lugar obtemos outro quadrado mágico.
- Diabólicos: aqueles que são hipermágicos, porém com muitas propriedades ou com propriedades muito complexas. O nome tem origem na dificuldade em construir um quadrado assim.

4.2 Construção de Quadrados Mágicos

4.2.1 Quadrados Mágicos de ordem 3

Primeiramente para a construção do quadrado mágico de ordem 3, temos que saber as condições que ele deve obedecer:

- Os nove números são dispostos em uma sequência aritmética, por exemplo, se tomarmos a sequência (4,8,12,16,20,24,28,32,36) cuja razão é 4.
- Os nove números são dispostos em 3 sequências aritméticas de três números que têm a mesma razão, além disso as três sequências estão entre elas em progressão aritmética de mesma razão, por exemplo se tomarmos as três sequências (4,8,12) (10,14,18) (16,20,24), onde a razão de cada sequência é 4, e os elementos da mesma ordem de uma sequência, a outra constitui uma nova sequência aritmética de razão 6.

Propriedades dos quadrados mágicos de ordem 3

1. A constante mágica é igual ao triplo do mediano;
2. A soma dos elementos é igual ao triplo da constante mágica;
3. A soma dos elementos é igual a nove vezes o mediano;
4. A soma dos elementos dos quatro cantos é quatro vezes o mediano;
5. A soma dos elementos dos quatro cantos é igual a quatro terços da constante mágica;
6. A soma dos elementos dos quatro elementos do centro é igual a soma dos elementos dos quatro cantos;
7. A soma dos dois elementos extremos de uma linha ou coluna que passa pelo centro é igual ao dobro do mediano.

Agora vamos verificar as propriedades para o Lo-Shu:

1. A constante mágica do quadrado Lo-Shu é 15, e também $3 \times 5 = 15$;
2. Primeiramente temos que $15 \times 3 = 45$, agora vamos somar todos os termos $4 + 9 + 2 + 3 + 5 + 7 + 8 + 1 + 5 = 45$;
3. Primeiramente temos que $9 \times 5 = 45$, e a soma dos termos como vimos na propriedade acima também é igual a 45;
4. Primeiro temos que $4 + 2 + 8 + 6 = 20$, e também $4 \times 5 = 20$;

5. Como vimos a soma dos elementos dos quatro cantos é igual a 20, temos também que $\frac{4}{3} \times 15 = 20$;
6. A soma dos elementos do centro é $9 + 3 + 7 + 1 = 20$ e como já vimos a soma dos elementos dos quatro cantos também é igual a 20;
7. Vamos primeiro verificar para a linha que passa pelo centro $3 + 7 = 10$, e também o dobro do mediano é $5 \times 2 = 10$, o mesmo vale para a coluna que é $9 + 1 = 10$.

O quadrado Lo-Shu também é denominado de quadrado de ordem ímpar associativo, ou seja, um quadrado onde os números opostos ao centro somam $n^2 + 1$.

Construção de um Quadrado Mágico de ordem 3 a partir de um número

1º Passo: Tome um número e coloque no centro do quadrado.

Tabela 4.12: 1º Passo da construção do Quadrado Mágico de ordem 3 a partir de um número.

	6	

2º Passo: Sobre cada uma das diagonais do quadrado, escreva dois números cuja soma é o dobro do número escolhido, de modo que os elementos de uma diagonal sejam $(x + a, x, x - a)$ e na outra $(x + b, x, x - b)$, onde x é o número escolhido e a e b são inteiros quaisquer. Sendo assim você terá sua constante mágica.

Tabela 4.13: 2º Passo da construção do Quadrado Mágico de ordem 3 a partir de um número.

9		8
	6	
4		3

3º Passo: Complete as casas vazias de modo que a soma das linhas e colunas seja igual a constante mágica obtida.

Tabela 4.14: 3º Passo da construção do Quadrado Mágico de ordem 3 a partir de um número.

9	1	8
5	6	7
4	11	3

Construção de um Quadrado Mágico de ordem 3 a partir de dois números

- 1^o Modo:

1^a Passo: Coloque os números nas extremidades de uma linha ou coluna que passa pelo centro.

Tabela 4.15: 1^o Passo da construção do Quadrado Mágico de ordem 3 a partir de dois números.

	8	
	10	

2^o Passo: Divida a soma dos números por 2, assim você terá seu mediano.

3^o Passo: Coloque-o no centro, assim você terá a constante mágica.

Tabela 4.16: 3^o Passo da construção do Quadrado Mágico de ordem 3 a partir de dois números.

	8	
	9	
	10	

4^o Passo: Complete a linha se você colocou os números em uma coluna, e uma coluna se você colocou os números em uma linha, com exceção da linha e da coluna que passam pelo centro.

Tabela 4.17: 4^o Passo da construção do Quadrado Mágico de ordem 3 a partir de dois números.

7	8	12
	9	
	10	

5^o Passo: Complete as diagonais e depois os demais espaços.

Tabela 4.18: 5^o Passo da construção do Quadrado Mágico de ordem 3 a partir de dois números.

7	8	12
14	9	4
6	10	11

- 2^o Modo:

1^o Passo: Coloque os números nas extremidades de uma linha ou coluna que não passa pelo centro.

Tabela 4.19: 1º Passo da construção do Quadrado Mágico de ordem 3 a partir de dois números.

		5
		10

2º Passo: Depois escolha um mediano, que esteja entre os dois números escolhidos.

Tabela 4.20: 2º Passo da construção do Quadrado Mágico de ordem 3 a partir de dois números.

		5
	8	
		10

3º Passo: Agora como a constante mágica é igual a 3 vezes o mediano, complete o restante do quadrado.

Tabela 4.21: 3º Passo da construção do Quadrado Mágico de ordem 3 a partir de dois números.

6	13	5
7	8	9
11	3	10

Generalizando a construção de um Quadrado Mágico de ordem 3 temos:

- Coloque x como valor mediano, logo a constante mágica é $3x$;
- Complete uma diagonal com $(x + a)$ e $(x - a)$;
- Complete outra diagonal com $(x + b)$ e $(x - b)$;
- Complete os espaços faltantes para que cada linha ou coluna forme a constante mágica $3x$;

Tabela 4.22: Quadrado Mágico genérico de ordem 3.

$x + a$	$x - a - c$	$x + b$
$x - a + b$	x	$x + a + b$
$x - b$	$x + a + b$	$x - a$

4.2.2 Construção de um Quadrado Mágico de ordem ímpar

Método do Cavalo

Esse método foi descrito por Simon de La Loubère, um diplomata francês, em 1687 e consiste em completar o quadrado através de 2 movimentos: $\uparrow \rightarrow$ (para cima e para a direita).

Vamos usar um quadrado de ordem 3 para exemplificar o processo.

1º Passo: Fixe o número 1 na célula que está localizada na primeira linha e na coluna do centro;

Tabela 4.23: 1º Passo da construção do Quadrado Mágico de ordem ímpar.

	1	

2º Passo: Utilize os movimentos $\uparrow \rightarrow$ para preencher a próxima célula com o número 2. Repare que como o número 1 se encontra na primeira linha, nós passamos para a última linha quando fazemos o primeiro movimento, em seguida seguimos para a coluna direita quando fazemos o segundo movimento;

Tabela 4.24: 2º Passo da construção do Quadrado Mágico de ordem ímpar.

	1	
		2

3º Passo: Analogamente ao segundo passo, prosseguimos para preencher a próxima célula com o número 3. Primeiro vamos para linha de cima quando fazemos o primeiro movimento, em seguida vamos para a direita com o segundo movimento, porém como o número 2 se encontra na última coluna do quadrado, (neste caso) nós vamos para a primeira coluna;

Tabela 4.25: 3º Passo da construção do Quadrado Mágico de ordem ímpar.

	1	
3		
		2

4º Passo: Analogamente ao segundo e ao terceiro passo, prosseguimos preenchendo nosso quadrado com os número 4, 5, 6, 7, 8 e 9 seguindo a seguintes regra: se um número for ocupar uma casa que já esteja ocupada, coloque o número logo abaixo ao seu antecessor (isso acontece com o número 4), o mesmo vale para quando um número não se encaixa em nenhuma linha e nenhuma coluna, ou seja, esteja na diagonal fora do quadrado (isso acontece com o número 7).

Tabela 4.26: 4º Passo da construção do Quadrado Mágico de ordem ímpar.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Tabela 4.27: Quadrado Mágico de ordem 5 construído através do método do cavalo.

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

4.2.3 Construção de um Quadrado Mágico de ordem 4

Método da Diagonal

1^o Passo: Escrever em ordem os números de 1 a 16.

Tabela 4.28: 1^o Passo da construção do Quadrado Mágico de ordem 4.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

2^o Passo: Inverter a ordem dos itens de ambas as diagonais, ou seja trocar: 1 com o 16; 4 com o 13; 6 com o 11; 7 com o 10.

Tabela 4.29: 2^o Passo da construção do Quadrado Mágico de ordem 4.

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

4.2.4 Construção de um Quadrado Mágico de ordem par

Construção de Quadrados Mágicos de ordem par múltiplos de 4

Para quadrados cuja ordem é um número múltiplo de 4 repetimos o mesmo processo para o quadrado de ordem 4, porém subdividimos o quadrado em outros quadrados de subdivisão de ordem 4 e realizamos o processo de inversão de diagonais.

Vamos tomar como exemplo um quadrado de ordem 8.

1^o Passo: Escrever em ordem os números de 64.

Tabela 4.30: 1º Passo da construção do Quadrado Mágico de ordem par e múltiplo de 4.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

2º Passo: Destacar suas diagonais da seguinte forma:

Tabela 4.31: 2º Passo da construção do Quadrado Mágico de ordem par e múltiplo de 4.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

3º Passo: Para as diagonais que são contínuas (neste exemplo as diagonais verde e vermelha) fazemos a inversão dos termos normalmente, ou seja, trocamos de posição:

- 1 com o 64
- 10 com o 55
- 19 com o 46
- 28 com o 37
- 8 com o 57
- 15 com o 50
- 22 com o 43
- 29 com o 36

Tabela 4.32: 3^o Passo da construção do Quadrado Mágico de ordem par e múltiplo de 4.

64	2	3	4	5	6	7	57
9	55	11	12	13	14	50	16
17	18	46	20	21	43	23	24
25	26	27	37	36	30	31	32
33	34	35	29	28	38	39	40
41	42	22	44	45	19	47	48
49	15	51	52	53	54	10	56
8	58	59	60	61	62	63	1

4^a Passo: Se ligarmos as diagonais menores (neste exemplo as diagonais azul e amarela) teremos, da diagonal azul: 4, 11, 18, 25, 40, 47, 54, 61 e da diagonal amarela: 5, 14, 23, 32, 33, 43, 51, 60. Assim, faremos a inversão dos termos como no passo anterior, ou seja, trocamos de posição:

- 4 com o 61
- 11 com o 54
- 18 com o 47
- 25 com o 40
- 5 com o 60
- 14 com o 51
- 23 com o 42
- 32 com o 33

Tabela 4.33: 4^o Passo da construção do Quadrado Mágico de ordem par e múltiplo de 4

64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1

Construção de um Quadrado Mágico de ordem par não múltiplo de 4

Vamos considerar o quadrado mágico de ordem 6.

1^o Passo: Divida o quadrado ao meio, tanto na vertical como na horizontal, assim você terá 3 quadrados, neste caso de ordem 3.

Tabela 4.34: 1º Passo da construção do Quadrado Mágico de ordem par e não múltiplo de 4.

2ª Passo: Utilizando o método do cavalo, preencha o primeiro quadrado com números de 1 a 9. Repita o processo no segundo quadrado, porém agora preenchendo com números de 10 a 18. No terceiro e no quarto faça o mesmo, porém com números de 19 a 27 e 28 a 36, respectivamente. Atente-se a ordem dos quadrados, o primeiro quadrado a ser preenchido é o do canto superior esquerdo (azul), o segundo a ser preenchido é o do canto inferior direito (vermelho), o terceiro quadrado a ser preenchido é o do canto superior esquerdo (verde) e o quarto quadrado é o do canto inferior esquerdo (amarelo).

Tabela 4.35: 2º Passo da construção do Quadrado Mágico de ordem par e não múltiplo de 4.

8	1	6	26	19	24
3	5	7	21	23	25
4	9	2	22	27	20
35	28	33	17	10	15
30	32	34	12	14	16
31	36	29	13	18	11

4.2.5 Operações com Quadrados Mágicos

Operações com constantes

Podemos fazer uma das operações básicas com uma constante k , onde k é um número inteiro, mantendo as mesmas propriedades vejamos alguns exemplos:

Tabela 4.36: Soma da constante 5 ao quadrado Loshu.

4	9	2				9	14	7
3	5	7	+	5	=	8	10	12
8	1	6				13	6	11

Podemos além da adição fazer a subtração:

Tabela 4.37: Subtração da constante 8 ao quadrado de Dürer.

16	3	2	13				8	-5	-6	5
5	10	11	8				-3	2	3	0
9	6	7	12	-	8	=	1	-2	-1	4
4	15	14	1				-4	7	6	-7

Além de multiplicação:

Tabela 4.38: Multiplicação da constante 2 ao quadrado de ordem 5.

17	24	1	8	15				34	48	2	16	30
23	5	7	14	16				46	10	14	28	32
4	6	13	20	22	×	2	=	8	12	26	40	44
10	12	19	21	3				20	24	38	42	6
11	18	25	2	9				22	36	50	4	18

E também a divisão:

Tabela 4.39: Divisão da constante 4 ao quadrado Lo Shu.

32	72	16				16	36	8
24	40	56	÷	2	=	12	20	28
64	8	48				32	4	24

Conclusão

Com este trabalho, podemos concluir que a matemática e a arte sempre andaram juntas e tiveram contribuições importantes uma para a outra. A obra de Dürer é apenas uma das várias obras de arte em que a matemática está presente.

Ao aprofundarmos no estudo de cada objeto matemático, podemos entender melhor seus significados para a obra e para o autor, bem como entendemos a história da matemática por trás de cada elemento e os importantes marcos para a ciência e para a história da humanidade.

Através da confecção desta monografia notamos o poder que a leitura e a pesquisa têm para a produção de um bom trabalho, pois assim visualizamos as nuances e as diferenças de como cada autor retrata um período histórico, e também como algumas demonstrações têm princípios diferentes para alcançar o mesmo resultado.

Esperamos que este trabalho sirva de motivação para que professores de matemática possam usar a interdisciplinaridade dentro da sala de aula, unindo matemática e arte.

Referências Bibliográficas

ABREU, S. M. *Geometria esférica e trigonometria esférica aplicadas à astronomia de posição*. Campus Alto Paraopeba, 2015. Disponível em: <<https://ufsj.edu.br/portal2-repositorio/File/profmat/TCC%20Shyrlene%20Martins%20de%20Abreu%20Versao%20Final.pdf>>. Acesso em: 12 nov. 2021.

BROWN, P. G. *The Magic Squares of Manuel Moschopoulos*. jul. 2012. Disponível em: <<https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/the-magic-squares-of-manuel-moschopoulos-introduction>>. Acesso em: 12 nov. 2021.

DANTE, L. R. *Tudo é Matemática – 6^o ano*. São Paulo: Ática, 2005.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*: Tradução de Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas: Editora Unicamp, 1992. ISBN 85-268-0657-2. Disponível em: <https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/6081521/mod_resource/content/1/%28Saunders%20Series%29%20Domingues%2C%20Hygino%20Hugueros_%20Eves%2C%20Howard%20-%20Introdu%C3%A7%C3%A3o%20%C3%A0%20hist%C3%B3ria%20da%20matem%C3%A1tica-Editora%20da%20Unicamp%20%282004_2008%29.pdf>. Acesso em: 12 nov. 2021.

FILHO, Z. A. Demonstração do Teorema de Euler para poliedros convexos. *Revista do Professor de Matemática*, Sociedade Brasileira de Matemática, n. 3, p. 15–17, 1983. Disponível em: <<https://www.ime.usp.br/~pleite/pub/artigos/elon/rpm3.pdf>>. Acesso em: 12 nov. 2021.

HART, G. W. *Neolithic Carved Stone Polyhedra*. 1998. Disponível em: <<http://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/neolithic.html>>. Acesso em: 12 nov. 2021.

ISLEY, P. *A primeira medição do raio da Terra*. s.d. Derivando Matemática. Disponível em: <<http://www.ime.unicamp.br/~apmat/a-primeira-medicao-do-raio-da-terra/>>. Acesso em: 12 nov. 2021.

LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio*. [S.l.]: sociedade brasileira de matemática, 1998. v. 2.

LOPES, T. I. D. A História dos Quadrados Mágicos. Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade de Coimbra - Departamento de Matemática, p. 1–5, s.d. Disponível em: <http://www.mat.uc.pt/~mat0717/public_html/Cadeiras/1Semestre/O%20que%20C3%A9%20um%20quadrado%20m%C3%A1gico.pdf>. Acesso em: 12 nov. 2021.

MELO, M. F.; MACHADO, J. S. Quadrados Mágicos: Um passeio pela História e pela Álgebra Linear. *Ciência e Natura*, Revista do Centro de Ciências Naturais e Exatas - UFSM, v. 40, n. e54, 2018. Disponível em: <<https://periodicos.ufsm.br/cienciaenatura/article/download/30830/pdf>>. Acesso em: 12 nov. 2021.

NETO, A. A. *Geometria: Noções de Matemática*. São Paulo: moderna, 1992. v. 5.

PAULA, M. F. de. Pode o conhecimento dar alguma alegria? Uma interpretação da “Melancolia I”, de Albrecht Dürer, a partir da “ética” de Spinoza. *SciELO Brasil*, Kriterion: Revista de filosofia, v. 55, n. 130, 2014. Disponível em: <[scielo.br/j/kr/a/PLhvy5n65GQFntmKPB4nnTx/?lang=pt#:~:text=Nossa%20quest~ao%20e%20saber%20por,prop~oe%20em%20sua%20"Ética"](http://scielo.br/j/kr/a/PLhvy5n65GQFntmKPB4nnTx/?lang=pt#:~:text=Nossa%20quest~ao%20e%20saber%20por,prop~oe%20em%20sua%20)>. Acesso em: 12 nov. 2021.

PORTO, D. A. *Historia da astronomia: a evolução da idéia do universo da antiguidade à idade moderna*. s.i, s.d. Disponível em: <<http://www.univasf.edu.br/~militao.figueredo/MNPEF/fisicacomtemporanea/Monografias/Historia%20da%20Astronomia%20-%20Deivd%20Porto.pdf>>. Acesso em: 12 nov. 2021.

POSSAMAI, A. *Quadrados Mágicos*. 78 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Florianópolis, 2020. Disponível em: <<https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/216507?show=full>>. Acesso em: 12 nov. 2021.

RODRIGUES, M. H. *Arte, símbolo e religião: as influências do esoterismo na gravura “Melencolia I” de Albrecht Dürer*. Juiz de Fora, 2017. Disponível em: <<https://repositorio.ufjf.br/jspui/handle/ufjf/5788>>. Acesso em: 12 nov. 2021.

SANTINHO, M. S.; MACHADO, R. M. Os Fascinantes Quadrados Mágicos. p. 1–16, s.d.

SECO, V. L. V. *Estudos sobre “O Método” de Arquimedes através da Construção de Balanças e Alavancas*. Instituto de Física ‘Gleb Wataghin’, 2010. Disponível em: <[https://www.ifi.unicamp.br/~assis/Vicente-Lima-Ventura-Seco\(2010\).pdf](https://www.ifi.unicamp.br/~assis/Vicente-Lima-Ventura-Seco(2010).pdf)>. Acesso em: 12 nov. 2021.

SILVA, J. A. P. *Arte e ciência no renascimento : discussões e possibilidades de reaproximação a partir do Codex entre Cigoli e Galileo no século XVII*. Maringá, 2013. Disponível em: <<http://repositorio.uem.br:8080/jspui/handle/1/4521>>. Acesso em: 12 nov. 2021.

SILVA, R. *Quadrados Mágicos 3x3*. mai. 2018. Disponível em: <<http://www.osfantasticosnumerosprimos.com.br/011-estudos-170-quadrados-magicos-3x3.html>>. Acesso em: 12 nov. 2021.

SOUZA, P. R. *O livro “Astronomia passo a passo” como ferramenta no ensino de astronomia*. Santo Antônio de Pádua, 2017. Disponível em: <<https://app.uff.br/riuff/bitstream/1/9656/1/TCC%20-%20Pedro%20da%20Rocha%20Souza.pdf>>. Acesso em: 12 nov. 2021.

TATACCIOLI, C. M. *Como resolver um quadrado magico de ordem N*. [S.l.], 2020. Disponível em: <<https://rmiranda99.github.io/cursos/2020-1-am091-4/catarina-quadrado.pdf>>. Acesso em: 12 nov. 2021.

VINAGRE, A. L. M. *Eratóstenes e a Medida do Diâmetro da Terra*. s.i, s.d. Disponível em: <https://www.ifi.unicamp.br/~lunazzi/F530_F590_F690_F809_F895/F809/F809_sem2_2002/940298_AndreVinagre_Eratostenes.pdf>. Acesso em: 12 nov. 2021.