Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

OS REFLEXOS DO DESENVOLVIMENTO DA ÁLGEBRA PARA O ENSINO DE EQUAÇÕES NO ENSINO BÁSICO

Autora: Ayana Cristina Anselmo Pereira

Orientador: José Antonio Salvador

Disciplina: Trabalho de Conclusão de Curso A
Profs Responsáveis: Prof. Dr. Daniel Vendrusculo
Profa. Dra. Natalia Andrea Viana Bedoya
Prof. Dr. Wladimir Seixas

São Carlos, 2 de julho de 2021.

OS REFLEXOS DO DESENVOLVIMENTO DA ÁLGEBRA PARA O ENSINO DE EQUAÇÕES NO ENSINO BÁSICO

Autora: Ayana Cristina Anselmo Pereira

Orientador: José Antonio Salvador

Disciplina: Trabalho de Conclusão de Curso A

Profs Responsáveis: Prof. Dr. Daniel Vendrusculo
Profa. Dra. Natalia Andrea Viana Bedoya
Prof. Dr. Wladimir Seixas

Este trabalho foi desenvolvido no segundo semestre de 2020 para o desenvolvimento da disciplina Trabalho de Conclusão de Curso A

São Carlos, 2 de julho de 2021.

Ayana Pereira

Ayana Cristina Anselmo Pereira

José Antonio Salvador

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - CCM/CCET

Rod. Washington Luís km 235 - SP-310, s/n - Bairro Monjolinho, São Carlos/SP, CEP 13565-905
Telefone: (16) 33518221 - http://www.ufscar.br

DP-TCC-FA nº 11/2021/CCM/CCET

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)

FOLHA DE APROVAÇÃO

AYANA CRISTINA ANSELMO PEREIRA

OS REFLEXOS DO DESENVOLVIMENTO DA ÁLGEBRA PARA O ENSINO DE EQUAÇÕES NO ENSINO BÁSICO

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – Campus São Carlos

São Carlos, 24 de junho de 2021

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

Cargo/Função	Nome Completo
Orientador	José Antonio Salvador
Membro da Banca 1	Yuriko Yamamoto Baldin
Membro da Banca 2	Selma Helena de Jesus Nicola

Documento assinado eletronicamente por **Jose Antonio Salvador**, **Professor do Magistério Superior**, em 11/08/2021, às 12:30, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Yuriko Yamamoto Baldin**, **Professor do Magistério Superior**, em 11/08/2021, às 16:26, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Selma Helena de Jesus Nicola**, **Professor do Magistério Superior**, em 13/08/2021, às 10:00, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Agradecimentos

Dedico a finalização deste ciclo aos meus pais Ana Paula dos Santos Pereira e Alesandro Anselmo Pereira, que foram meus pilares da jornada e estiveram ao meu lado apoiando em meio a todos os imprevistos e dificuldades.

Ao meu irmão, aos meus amigos e familiares pela compreenssão aos finais de semanas e comemorações que precisaram ser adiadas pelo compromisso e dedicação ao estudo.

E agradeço também ao meu orientador Professor Dr^{o}. José Antonio Salvador que tornou possível a realização deste trabalho, agradeço aos conselhos, as orientações que levaram a finalização da pesquisa e sobretudo as conversas que despertaram outros interesses e curiosidades da matemática.

A todos os professores e professoras, que inspiram seus alunos e tornam possível a formação para a vida. Meus agradecimentos se estendem a professora Dr^{a}. Maria do Carmo Sousa com quem tive o prazer de aprender, e vem sendo referência de força e conhecimento, assumindo papel de representatividade a todas as mulheres negras, internas e externas a comunidade acadêmica.

Agradeço a todos que contribuíram diretamente ou indiretamente durante esta caminhada. Em particular a este momento, em meio a pandemia e novas adaptações, que mostrou a importância da união e a força que uma rede de apoio tem, ao proporcionar o suporte necessário para que as metas continuem sendo construídas e alcançadas.

Resumo

Esta pesquisa tem como objetivo oferecer contribuições para a Educação Matemática focadas no ensino e aprendizagem das equações algébricas, numa tentativa de apresentar a trajetória da álgebra pelas contribuições de alguns povos ao longo da história da Matemática e compreender como as diferentes concepções podem auxiliar na abordagem de ensino e o desenvolvimento do conteúdo na Educação Básica atual. Nesta linha, propõe-se uma análise documental definida como metodologia qualitativa e caracterizada como pesquisa bibliográfica, através de uma abordagem tipicamente histórica pelas culturas e povos que influenciaram a construção dos primeiros desenvolvimentos em álgebra. Para tanto, o objeto de estudo desta pesquisa é baseado em dados coletados nas obras de Eves (2011), Roque (2012), Boyer (1974) e Garbi (2010) e os documentos normativos da educação no Estado de São Paulo na etapa do ensino fundamental. A questão principal que conduzirá a pesquisa foi assim definida: Como as diferentes concepções atribuídas a álgebra podem contribuir a abordagem do ensino de equações algébricas na educação básica?

Palavras-chaves: ensino de equações, um breve histórico, educação matemática.

Sumário

Lista de Figuras

Prefácio

Minhas primeiras reflexões e discussões sobre o ensino ocorreram durante a graduação, no curso de licenciatura de Matemática, a partir de disciplinas que foram ministradas pelos departamentos de Matemática e pelo departamento de Metodologia de Ensino, da UFSCar, tais como Educação e Sociedade; Didática Geral; Psicologia da Educação; Metodologia do Ensino de Matemática na Educação Básica, entre outras. Essas disciplinas tinham como propósito analisar e compreender aspectos educacionais que ocorrem no interior das escolas.

Posteriormente, essas análises e discussões continuaram durante as disciplinas de Estágio Supervisionado na Educação Básica e prevaleceram durante o período de participação do Programa Residência Pedagógica em Matemática (PRP). Este programa, o PRP tinha como objetivo principal proporcionar aos estudantes de licenciatura experiência e vivência na profissão como professor o desenvolvimento e promover de competências, olhares críticos e reflexivos, que são essenciais para a formação docente, edital CAPES 06/2018.

Entre essas atividades e discussões os focos estavam em pensar o ensino: pensar no porquê, para quem e como. E assim, trazer análises dos objetivos em sala de aula e objetivo de aula alinhado as habilidade e competências previstas; pensar para quem, determinando o público alvo; e, pensar em como, organizando metodologicamente os planos de aula, formulando planos de ensino e estimulando imaginações com situações pedagógicas.

Essas experiencias mostraram que o conjunto de saberes de um profissional da educação deve ir além do domínio do conteúdo e a tomada de decisões em situações que são colocadas em seu dia a dia, se fazendo necessário que o profissional esteja em constante pesquisa, a fim de aprimorar suas ideias e conhecer os diversos trabalhos em relação ao ensino que podem nos auxiliar, trabalhando de forma conjunta aos desenvolvimentos promovidos pela área, para que juntos possamos alcançar o objetivo principal, o aprendizado dos alunos.

Desta forma é necessário que o professor assuma uma postura de professor pesquisador, afim de estar em constante transformação e apto a alinhar seu campo profissional a demanda, com o objetivo de permitir a construção do aprendizado dos alunos e promover esse processo de ensino e aprendizagem.

Assim, a fim de contribuir para o desenvolvimento das práticas de professor pesquisador e colaborar para minha formação como futuro profissional da educação. Propomos então, estudar a trajetória de desenvolvimento da álgebra ao longo dos anos e suas contribuições ao ensino de equações, buscando evidenciar os reflexos e subsídios para no ensino básico.

Capítulo 1

Introdução

É muito comum identificar dificuldades dos alunos no Ensino Básico durante o aprendizado do conteúdo de álgebra, podendo gerar apreensão dos estudantes aoconteúdo. Durante o acompanhamento de aulas no estágio supervisionado foi possível observar que essa dificuldade é destacada pelos próprios alunos que se referem uma matemátiva difícil quando entra o uso de letras (simbologia da incógnita) nas resoluções. Esta dificuldade também é demonstrada em avaliações internas e externas.

Diante deste problema, se faz necessário um estudo acerca de como vem sendo o ensino da álgebra, em particular durante a abordagem de equações algébricas no ensino básico.

O presente trabalho buscou através de uma abordagem histórica compreender por um lado, como a álgebra se desenvolveu ao longo dos anos evidenciando a construção das diferentes concepções e por outro, destacar os objetivos em torno do estudo de conceito de equações algébricas na educação básica, através dos documentos normativos que condicionam o ensino no estado de São Paulo.

Desta forma, trata-se de uma pesquisa qualitativa caracterizada como documental, bibliográfica que analisaremos através de uma abordagem histórica, no intuito de estabelecer uma análise comparativa do desenvolvimento da álgebra ao longo dos anos e o ensino de equações.

A escolha de abordagem se faz em uma tentativa de evidenciar a realidade de desenvolvimento da álgebra, desvinculando o ensino baseado no caráter de reprodutivo de técnicas ao lidar com equações algébricas.

Neste sentido a pesquisa foi elaborada da seguinte forma:

Para o capitulo 2 são apresentadas as referências dessa pesquisa destacando as contribuições das pesquisas e estudos que tratam de equação em seu contexto histórico e no contexto de ensino.

No capítulo 3 tratamos de alguns aspectos dos desenvolvimentos da álgebra historicamente, através das antigas civilizações evidenciando as contribuições para os usos atuais das equações algébricas. Percorremos pelos povos da Mesopotâmia, Egito, Grécia, China, Hindus e Árabes.

No capítulo 4 apresentamos um breve histórico aos objetivos atribuídos ao ensino de álgebra, e as características atuais determinadas pelos documentos normativos da educação do estado de São Paulo: PCNs, BNCC e Currículo do Estado de São Paulo, evidenciando as habilidades e competências que os alunos devem desenvolver com o ensino de equações no ensino básico.

Após apresentar estas análises apresentamos o capítulo 5, que oferece as discussões acerca das diferentes concepções atribuídas ao uso de equações ao longo dos desenvolvimentos e, evidenciando as potencialidades dessas noções ao ensino.

Capítulo 2

Referenciais teóricos

As referências teóricas formam a base desta pesquisa, desta forma os caminhos metodológicos foram incorporando o trabalho de acordo com focos de análise ao entender a álgebra por diversos olhares: (i)desenvolvimento, (ii)aspectos históricos, (iii)dificuldades de ensino, (iv)objetivos de ensino, (v)aspectos estruturais, entre outros.

Neste processo de categorizar os diferentes focos, motivou o processo de investigação dos aspectos que fundamentam e definem a álgebra construindo seus objetivos ao ensinar equações algébricas no ensino básico, tendo como referências publicações do pesquisador Alessandro Jacques Ribeiro, entre elas: (i) "O ensino de álgebra na perspectiva dos Multisignificados de Equação: algumas possibilidades para a sala de aula"; (ii) "A noção de equação e suas diferentes concepções: uma investigação baseada em aspectos históricos e epistemológicos", (iii) "Equação e conhecimento matemático para o ensino: relações e potencialidades para a Educação Matemática" e (iv) "Equação e seus multisignificados: potencialidades para a construção do conhecimento matemático".

O artigo "A noção de equação e suas diferentes concepções: uma investigação baseada em aspectos históricos e epistemológicos" de Ribeiro (2009), analisa o desenvolvimento das equações algébricas a luz dos reflexos do desenvolvimento matemático.

Em "Equação e conhecimento matemático para o ensino: relações e potencialidades para a Educação Matemática" de Ribeiro (2012), aborda as possibilidades de ensino ao entender as equações algébricas a partir dos multisignificados.

E o artigo "Equação e seus multisignificados: potencialidades para a construção do conhecimento matemático" de Ribeiro e Machado (2009), apresenta e discute a construção do conhecimento matemático nas perspectivas e formas de conceber a álgebra.

Nesta perspectiva de discutir as abordagens da equação no ensino básico, e compreender suas potencialidades o autor também apresenta seus estudos, em "O ensino de álgebra na perspectiva dos Multisignificados de Equação: algumas possibilidades para a sala de aula" de Ribeiro (2011).

Desta forma tal movimento para compreender o ensino da álgebra levou a reunir outras produções acerca de pesquisas disponíveis em revistas, livros e congressos, entre elas destaco, "Ensino de álgebra no ensino fundamental: uma revisão histórica dos PCN a BNCC" de Scremin e Righi (2020), onde é analisado o ensino da álgebra a partir das normativas estruturadas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) evidenciando mudanças no compromisso e objetivo de desenvolvimentos que tange o conteúdo para o aprendizado no ensino básico.

Outros estudos na área ensino de álgebra são contribuintes para as análises, estes foram encontrados em publicação pela coleção da Revista de História da Educação Matemática,

Em "Resolução De Problemas Pelas Equações Algébricas: a proposta de Tito Cardoso de Oliveira para o ensino das operações", de Bertini (2018) realiza uma análise da obra "Arithmetica complementar" de Oliveira (2017) que propõe introduzir a álgebra no ensino primário de forma gradual, sem abordagem conceitual, mas fazendo uso das estratégias de resoluções com os alunos.

Na mesma linha o artigo, Álgebra No Ensino Primário Brasileiro: sua relação com os problemas de aritmética no início do século XX", de Rocha e Bertini (2019) apresenta possibilidades e resultados da estratégia ao inserir o uso da álgebra em resoluções no ensino primário.

A partir dessas duas vertentes de diferentes significados e o ensino da álgebra, fez-se necessário entender os aspectos históricos que influenciam atualmente a perspectiva atribuída a álgebra. Desta forma para entendimento do momento atual foram fundamentais olhar os desenvolvimentos em processo, assim destaco quatro livros que abordam a história da matemática e contribuíram para as análises acerca dos contextos nos quais os desenvolvimentos estavam inseridos,

Em "História da matemática" de Boyer e Merzbach (2012), é uma obra citada como referência nesta área de estudos pois realiza um contraponto dos números e os desenvolvimentos históricos.

Com uma proposta diferente tem-se a "Introdução a História da

Matemática, de Eves (1995), que possui uma abordagem pedagógica abordando a teoria com aspectos históricos e culturais da matemática e, a pratica ao propor resoluções de exercícios ao leitor no decorrer dos capítulos.

E para completar, mas não limitar a coleção de referenciais foi escolhido o livro “O Romance das Equações Algébricas” de Garbi (2010) que tem como objetivo despertar curiosidades e apresentar possibilidades de desenvolvimentos na abordagem investigativa das equações algébricas.

Capítulo 3

Aspectos de Desenvolvimentos da Álgebra

Para contar a história da Matemática é plausível tomar escolhas para as formas de abordagem, as mais comuns são: o olhar de forma cronológica, olhar a partir do grau de desenvolvimento e, partindo das contribuições culturais. Neste trabalho, optou-se por destacar principais contribuições das culturas antigas pelas civilizações da: Mesopotâmia; Egípcia; Grega; da China; dos Hindus; e, dos Árabes. Baseado no desenvolvimento da álgebra e os sentidos atribuídos.

Os mais antigos registros que se conhece, apresentados e estudados pelas fontes, exibem os desenvolvimentos das civilizações Mesopotâmicas e Egípcias.

3.1 Mesopotâmia

A Mesopotâmia, região que corresponde hoje ao Iraque situado no Continente Asiático, desenvolvida entre os rios Tigre e Eufrates, habitada pelos sumérios, acadianos, hegemônicos e posteriormente pelos semitas conhecidos como antigos babilônicos (ROQUE, 2012, p.36).

Durante o período babilônico a matemática mesopotâmia era concebida através do sistema posicional sexagesimal, conforme exibido na figura 3.1

FIGURA 3.1: Representação do sistema sexagesimal babilônico

Fonte: Roque (2012, p. 49)

Um número pode ser representado de acordo a base do sistema de numeração utilizado.

Definição 3.1. Seja $b \geq 2$ a base de um sistema de numeração e x um número qualquer finito, podemos representá-lo escrevendo:

$$x = a_n b^n + a_{\mathrm{n}-1} b^{\mathrm{n}-1} + a_{\mathrm{n}-2} b^{\mathrm{n}-2} + \cdots + a_0 b^0 + a_{-1} b^{-1} + a_{-2} b^{-2} + \cdots + a_{-\mathrm{m}} b^{-\mathrm{m}}$$

em que se

$$a_{-1} b^{-1} + a_{-2} b^{-2} + \cdots + a_{-\mathrm{m}} b^{-\mathrm{m}} = 0$$

temos x sendo número inteiro

Desta forma x será escrito por

$$x = (a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_2 a_1 a_0 a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-(m-1)} a_{-m})_b$$

Um caso interessante para olharmos e entender o sistema sexagesimal utilizado pelos mesopotâmicos, e que utilizamos até hoje são as horas, minutos e segundos.

Exemplo 3.2. Para representar 9 horas e 4 minutos $(09 : 04 : 00)$ em segundos temos:

$$9h \;\; 4min \;\; 0s = 9 * 60^2 + 4 * 60^1 + 0 * 60^0 = 32.640 \;\; segundos$$

Do ponto de vista que nos interessa, além das operações os tabletes continham problemas onde é possível analisar do ponto de vista de equações. Mas segundo Roque (2012) adotar que os babilônios tinham o conhecimento de equações seria anacronismo,

> Em trabalhos renomados, como os de O. Neugebauer, nos anos 1930 e 40, e de B.L. van der Waerden, nas décadas de 1950 a 1980, chegou-se a postular que as receitas aritméticas usadas pelos mesopotâmicos eram uma álgebra e podiam ser facilmente traduzidas por equações. Tal interpretação se baseia em uma tradução anacrônica de seus procedimentos, anacronismo que também se verifica em relação aos egípcios. (ROQUE, 2012, p.34).

Para a autora, apesar das interpretações exibirem procedimentos de resoluções expressas nos tabletes que podem ser assimilados com o conhecimento algébrico atual, a prática não poderia ser descrita como álgebra pois baseado nos estudos de J. Hoyrup de 1990, a álgebra dos babilônicos estava relacionado com cálculo de grandezas, procedimento geométrico de cortar e colar, bem como as resoluções egípcias (ROQUE, 2012, p.39). Vejamos alguns problemas apresentados pela autora.

Problema 3.1.

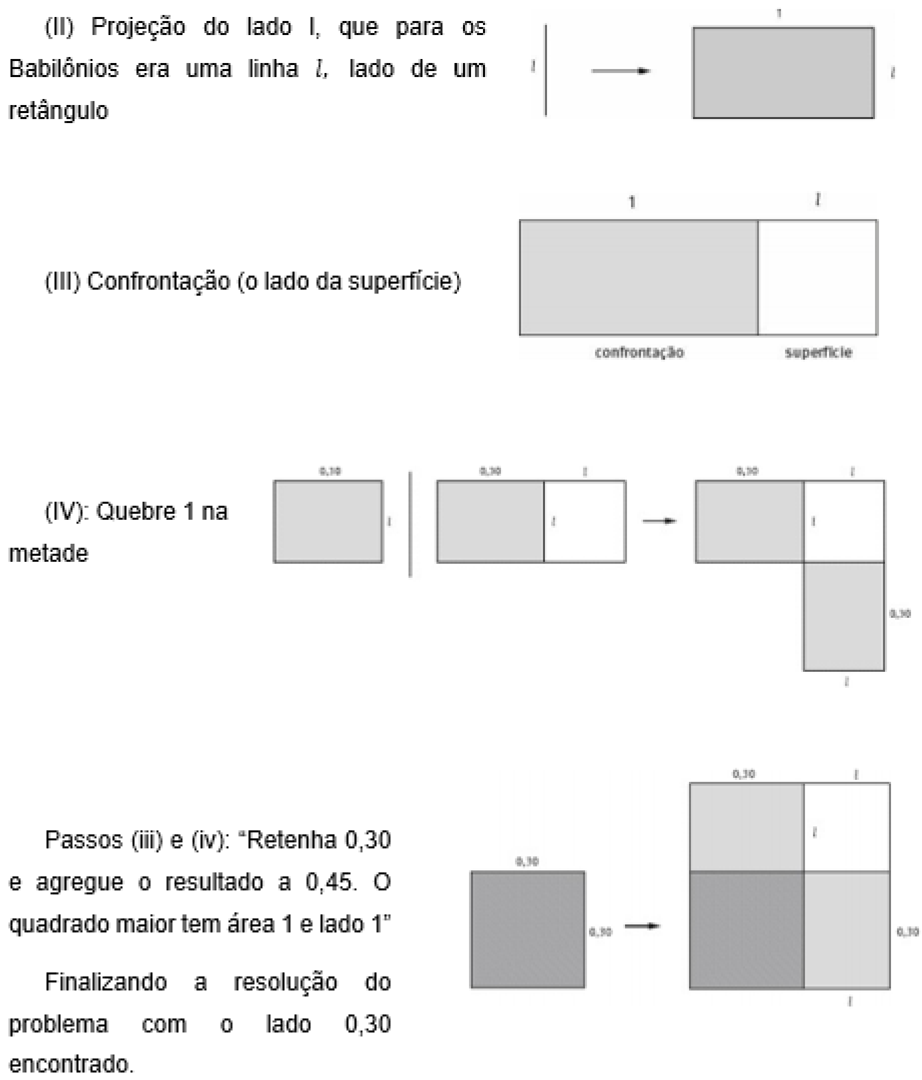
Adicionei a área e o lado de um quadrado: obtive 0,45. Qual o lado? (ROQUE 2012, p.63)

Como vimos anteriormente, a matemática babilônica não utilizava a álgebra para as resoluções, ao invés disto o procedimento de resolução era baseado em cortar e colar, mencionado por Roque (2012, p.39) como prática de "**cálculo com grandezas**", veja tal procedimento:

> Procedimento: "Adicionei a área e o lado de um quadrado: obtive 0,45. Qual o lado?"
> Solução:
>
> (i) tome 1
>
> (ii) fracione 1 tomando a metade (:0,30)
>
> (iii) multiplique 0,30 por 0,30 (:0,15)
>
> (iv) some 0,15 a 0,45 (:1)
>
> (v) 1 é raiz quadrada de 1
>
> (vi) subtraia os 0,30 de 1
>
> (vii) 0,30 é o lado do quadrado
>
> Cada passo desse procedimento era executado com a ajuda de um tablete. Por exemplo, a etapa (iii) exigia a consulta a um tablete de multiplicação ou de quadrado, e a etapa (v), evidente nesse caso particular, era resolvida pela consulta a um tablete de raízes quadradas. (ROQUE, 2012, p.63)

Outro procedimento de resolução explorado por Roque (2012) é de **forma geométrica**, utilizando um método de copiar e colar.

FIGURA 3.2: Resolução geométrica dos babilônios



Fonte: adaptado de Roque (2012, p. 49)

Importante observar que o procedimento babilônio resolvia os problemas práticos relacionados com as equações do 2º grau, porém essa interpretação de somar área com um segmento não era permitida ao se tratar de grandezas geométricas diferentes.

Por outro lado, resolução moderna para este problema seria interpreta-lo de forma algébrica, ou seja, área de um quadrado $l \times l$, sendo l o lado do quadrado e assim temos

$$l^2 + l = 0,75$$

Pois 0,45 é tratado na base 60, desta forma precisamos realizar a conversão para o sistema atual de base 10,

Lembre-se de que

$$0,45_{60} = 0 * 60^0 + 45 * 60^{-1} = 0,75_{10}$$

logo,

$0,45_{60}$= $0,75_{10}$

Resultando em uma equação de grau 2 atualmente podendo ser resolvido através da formula de Bháskara onde $ax^2 + bx - c = 0$ e substituindo os coeficientes pelos valores conhecidos na equação, teríamos:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

conforme é ensinado na escola básica, interpretando a equação como

$$l^2 + l - 0,75 = 0$$

ou, multiplicando ambos os membros por 4

$$4l^2 + 4l - 3 = 0 \tag{3.1}$$

desta forma resolvendo utilizando a equaãão acima temos:

$$x_1 = \frac{-4 + \sqrt{4^2 - 4 \times 4 \times (-3)}}{2 \times 4} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-4 - \sqrt{4^2 - 4 \times 4 \times (-3)}}{2 \times 4} = \frac{-3}{2}$$

No contexto dos problemas pragmáticos que eram resolvidos por abordagens geométricas só tinham sentido falar em soluções positivas. E, portanto a solução deste problema seria dada por $\frac{1}{2}$

Problema 3.2.

Subtraí o terço da área e depois somei o terço do lado do quadrado a área restante: 0,20.(ROQUE, 2012, p.64)

O método de resolução antigo para este problema usou o procedimento de "cálculo de grandezas" método corta e cola.

> Procedimento: "Subtraí o terço da área e depois somei o terço do lado do quadrado a área restante: 0,20".
>
> (i) tome 1;0
>
> (ii) subtraia o terço de 1;0 ou seja 0,20 obtendo 0,40
>
> (iii) multiplique 0,40 por 0,20 obtendo 0,13;20
>
> (iv) encontre a metade de 0,20 (:0,10)
>
> (v) multiplique 0,40 por 0,20, obtendo 0,13;20
>
> (vi) encontre a metade de 0,20 (:0,10)
>
> (vii) multiplique 0,10 por 0,10 (:0,1;40)
>
> (viii) adicione 0,1;40 a 0,13;20 (:0,15)
>
> (ix) 0,30 é a raiz quadrada
>
> (x) subtraia 0,10 de 0,30 (:0,20)
>
> (xi) tome o recíproco de 0,40 (1,30)
>
> (xii) multiplique 1,30 por 0,20 (:0,30)
>
> (xiii) 0,30 é o lado do quadrado
>
> (ROQUE, 2012, p.64)

Traduzindo os passos deste método, ficaríamos com:

(i) Tome 1

(ii) Subtraia o terço de $1 : 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

(iii) Multiplique $\frac{2}{3}$ por $\frac{1}{3} : \frac{2}{3} * \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

(iv) Encontre a metade de $\frac{1}{3} : \frac{1}{3}/\frac{1}{2} = \frac{1}{3} * \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

(v) Multiplique $\frac{1}{6}$ por $\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

(vi) Adicione $\frac{1}{36}$ a $\frac{1}{6} = \frac{1}{36} + \frac{2}{9} = \frac{1}{4}$

(vii) A raiz quadrada é: $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

(viii) Subtraia $\frac{1}{6}$ de $\frac{1}{2} : \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

(ix) Tome o recíproco de $\frac{2}{3} = \frac{3}{2}$

(x) Multiplique $\frac{3}{2}$ por $\frac{1}{3} = \frac{3}{2} * \frac{1}{3} = \frac{3}{6} ou \frac{1}{2}$

(xi) $\frac{1}{2}$ é o lado do quadrado.

Por outro lado, solucionando o problema pelos métodos atuais teríamos a equação algébrica de 2º grau, interpretada nos seguintes passos de acordo com o enunciado do problema:

(i) Subtraí o terço da área: Assim fazendo que a área é l, temos

$$\frac{1}{3}l^2 - l^2 = (\frac{1}{3} - 1)l^2 = \frac{2}{3}l^2$$

(ii) Somei o terço do lado do quadrado a área restante: Logo,

$$\frac{2}{3}l^2 + \frac{1}{3}l$$

(iii) a área restante deu $0,20$: Lembre-se que o sistema de numeração utilizado pelos babilônicos era de base 60, logo precisamos realizar essa transformação para a base 10, conforme utilizamos hoje o sistema de numeração decimal. Desta forma

E assim a equação algébrica que representa a solução do problema é dada por:

$$\frac{2}{3}l^2 + \frac{1}{3}l = \frac{1}{3}$$

Que poderia ser solucionada utilizando a formula de Bháskara conforme mencionado no problema acima, obtendo as soluções

$$x_1 = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = -1$$

Apesar do desenvolvimento algébrico não estar presente, para Garbi (2010, p.10) o **raciocínio dedutivo** não formalizado estava presente nas resoluções registradas. Por outro lado, Roque (2012) chama atenção para tal generalidade dos algoritmos expressa pelas resoluções do problema 1 e 2, que pode levar para o caso geral a equação de 2º grau do tipo

$$ax^2 + bx + c = 0$$

motivo para o qual historiadores teriam considerado uma natureza algébrica nos procedimentos babilônicos.

Contudo a matemática babilônica ainda que sem a álgebra possuía conhecimentos de desenvolvimentos importantes para a matemática moderna.

> Os matemáticos e astrônomos babilônicos do II milênio a.C. realizaram feitos surpreendentes: eles conheciam a propriedade geral dos triângulos retângulos (o hoje chamado teorema de Pitágoras, também já conhecido pelos chineses no século XII a.C.), resolviam equações do primeiro e do segundo graus, calculavam áreas e volumes de certas figuras geométricas, determinaram a raiz de 2 com grande precisão, etc. (GARBI, 2010, p.11)

3.2 Egito

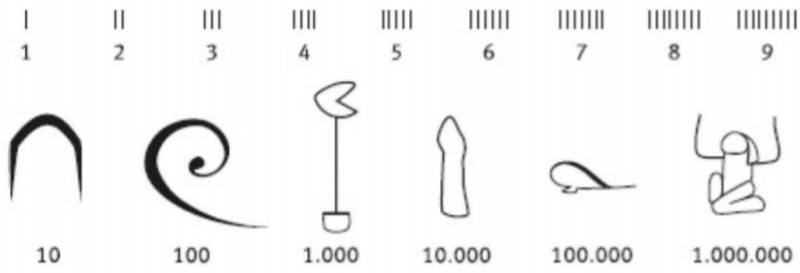
O Egito é uma região localizada ao norte do continente Africano, conhecida como uma das civilizações mais antigas a população egípcia se desenvolveu as margens do rio Nilo, condição que contribuiu significativamente para a agricultura. Por outro lado, os problemas de causas naturais, como as inundações são as hipóteses dos historiadores para explicar a consequência de terem encontrado até hoje poucos registros da civilização. Esse estilo de vida com a economia baseada majoritariamente na agricultura também colaborou para a concepção de uma cultura matemática desenvolvida de forma prática, aplicada ao cotidiano das atividades econômicas.

A matemática no antigo Egito era utilizada pelos escribas, esses eram os responsáveis pela parte administrativa e desta forma desempenhavam um papel muito importante na organização e desenvolvimento da civilização.

> Como vimos, a ênfase inicial da matemática ocorreu na aritmética e na mensuração práticas. Uma arte especial começou a tomar corpo para o cultivo, aplicação e ensino dessa ciência prática. Nesse contexto, todavia, desenvolvem-se tendências no sentido da abstração e, até certo ponto, passou-se então a estudar a ciência por si mesma. Foi dessa maneira que a álgebra envolveu ao fim da aritmética e a geometria teórica originou-se da mensuração. (EVES, 2011, p.57)

No Egito já era utilizado o sistema de numeração decimal a partir de símbolos, como mostra a figura 3.3

FIGURA 3.3: Representação dos números na simbologia egípcia



Fonte: Roque (2012, p. 56)

Desta forma para escrever o número 1212, era necessário dispor os símbolos do maior para o menor e sua soma resultará no valor correspondido, ou seja, a interpretação da escrita neste sistema aditivo, seria $1000 + 100 + 100 + 10 + 2 = 1212$ conforme a figura 3.4:

FIGURA 3.4: 1212

Fonte: Autora

Entre os documentos conhecidos da civilização egípcia, temos alguns papiros muito conhecidos, Papiro de Moscou com 25 problemas de Aritmética e Geometria, Papiro ou Pergaminhos Egípcios e, Papiro de Ahmes também conhecido como Papiro de Rhind apresentando 85 soluções de Aritmética e Geometria. Para essa análise nos basearemos em alguns dos problemas apresentados no Papiro de Rhind, explorando resoluções.

> é oportuno ressaltar, neste ponto, que os documentos matemáticos daquela época não empregavam a alta dose de simbologia à qual estamos atualmente acostumados. De um modo geral, somente os números eram representados por símbolos: os desenvolvimentos eram, em sua quase totalidade, expressos por palavras, uma forma de expressão que hoje é conhecida por "**álgebra retórica**". (GARBI, 2010, p.12)

Para Roque (2012, p.82), a generalidade na matemática egípcia estava presente na organização dos registros do Papiro de Rhind no grupo de problemas de aha: "o escriba parece ter desejado indicar, por meio de uma lista de problemas similares, um procedimento geral de resolução."

> A palavra "aha" é traduzida por "números" ou "quantidade", e esses problemas eram procedimentos para encontrar uma quantidade desconhecida quando é dada uma relação com um resultado conhecido. (ROQUE, 2012, p.80)

As operações realizadas pelos egípcios eram efetuadas a partir da estratégia de **duplicações sucessivas**, que consiste em realizar as operações de multiplicações a partir de duplicações, neste método para calcularmos o produto de 7 por 5 construímos a coluna da esquerda com os números multiplicando por 2, até que a soma da coluna ultrapasse o 7 e assim escolhemos as linhas de tal forma a conseguir uma que a soma resulte em 7.

'1	**5**
'2	**10**
'4	**20**
8	40

E assim a coluna da direita vai se construindo com os valores correspondentes as duplicações e escolhendo as três primeiras linhas conseguimos a soma 7:

$$7 = 1 + 2 + 4$$

Para finalizar, basta realizar a soma da coluna da direita nas linhas escolhidas,

$$5 + 10 + 20 = 35$$

Observe que o procedimento de encontrar o resultado da operação é entendido como:

$$7 * 5 = (1 + 2 + 4) * 5 = 1 * 5 + 2 * 5 + 4 * 5 = 5 + 10 + 20 = 35.$$

Por outro lado, lembre-se de que podemos fazer construção da coluna esquerda, escolhendo o número 5 (fazendo a operação $5 * 7$) e assim para iniciarmos a coluna da esquerda temos:

’1	**7**
2	14
’4	**28**

Assim nossa escolha deve ser a primeira e última linha, pois 1+4 = 5 . Logo basta somarmos a coluna da direita nas linhas escolhidas,

$$7 + 28 = 35$$

E portanto, realizar o procedimento para $x * y$ é igual a realizar $y * x$. E temos a coluna esquerda sendo construída por duplicações sucessivas de forma que a escolha das linhas para seguir o procedimento tenha sua soma resultando em x. E assim a soma dos múltiplos de y nas linhas escolhidas será o resultado procurado.

Vejamos como o método poderia ser aplicado as resoluções do problema do Papiro:

Problema 3.3.

Cada senhora tem sete mulos cada mulo transporta sete sacos; cada saco contém sete pães; com cada pão há sete facas; para cada faca há sete bainhas. Entre mulheres, mulos, sacos, pães, faca s e bainhas, quantos estão na estrada de Roma? (EVES, 2011, p.76)

Uma possibilidade para resolução atual deste problema seria abordá-lo por partes com a propriedades da aritmética,a partir do princípio multiplicativo:

(i) Cada senhora tem 7 mulos

(ii) 7 mulos × 7 sacos cada = 49 sacos

(iii) 49 sacos × 7 pães = 343 pães

(iv) 343 pães × 7 facas = 2401 facas

(v) 2401 facas × 7 bainhas = 16807 bainhas

Ou seja, temos que somando mulos + sacos + pães + faca + bainha temos

$$7 + 49 + 343 + 2401 + 16807 = 19607$$

coisas na estrada de Roma para cada senhora.

Outra forma de abordagem para este problema seria tratarmos do ponto de vista da Progressão Geométrica, onde a razão (r) é 7, o primeiro termo (a1) é 7 e 5 é o número de termos da progressão geométrica finita. Desta forma, a soma dos n primeiros termos da P.G. é dada por:

$$soma = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$$

Em que $0 \neq r > 1$. Substituindo os valores temos,

$$soma = 7 \times \frac{1-7^5}{1-7} = 7 \times \frac{-16806}{-6} = 19607.$$

O primeiro método utilizado para resolução deste problema é o que mais se aproximaria da resolução esperada pelos egípcios uma vez que a estratégia utilizada se baseou em resolução aritmética resolvendo as multiplicações.

Este problema foi interpretado mais tarde por Cantor, se tornando bastante conhecido:

> De acordo com a interpretação de Cantor, o problema original do papiro Rhind podia então receber uma formulação algo assim: “Uma relação de bens consistia em sete casas; cada casa tinha sete gatos; cada gato comeu sete ratos; cada rato comeu sete espigas de trigo; e cada espiga de trigo produzia sete hecates de grãos. Casas, gatos, ratos, espigas de trigo e hecates de grãos, quanto havia disso tudo?”. (EVES, 2011, p.76)

Observe também que a versão interpretada deixa o problema mais realista, trazendo o pragmatismo ao retirar a mensão de quantidade de bens considerando "cada senhora", pois não temos o número de senhoras informado pelo enunciado.

Problema 3.4.

Divida cem pães entre cinco homens de modo que as partes estejam em progressão *aritmética e que a sétima parte da soma das três partes maiores seja igual à soma das duas menores. (Eves, 2011,p.84)*

Tomando a mesma estratégia que a exercício anterior, é possível resolvermos esse problema olhando como uma progressão aritmética uma vez que a sequência tratada pode ser interpretada como

$$(x,\ x{+}r,\ x{+}2r, x{+}3r, x{+}4r)$$

ou podemos escrever essa senteça em termos de y. E como o número de homens é ímpar podemos reescrever como uma simetria em relação ao homem do meio. Desta forma fazendo $y = x + 2r$ teremos os dois homens mais novos antes de y e os dois mais velhos depois:

$$(y{-}2r,\ y{-}r, y, y{+}r, y{+}2r)$$

em particular temos que

$$(y{-}2r{+}\,(y{-}r) + (\ y) + (y{+}r) + (y{+}2r)) = 100 \quad \rightarrow \quad 5y{=}\ 10 \rightarrow \ y{=}\ 20$$

E como precisamos que $\frac{1}{7}\,(x5 + x4 + x3) \ = \ x2 + x1$ temos pela relação anterior que $\frac{1}{7}\,(y{+}2r{+}y{+}r{+}y) = y{-}r{+}y{-}2r$

$$\frac{1}{7}\,(3y{+}3r) = 2y{-}3r {\rightarrow} \ \ \frac{1}{7}\,(60 + 3r) = 40 - 3r {\rightarrow}\ 24r{=}\ 220 \ {\rightarrow} r{=}\frac{220}{24} \ {=}\frac{55}{6}$$

Portanto, as divisões ficariam:

$$(\frac{5}{3}, \frac{65}{6}, 20, \frac{175}{6}, \frac{115}{3})$$

Desta forma, a resolução poderiam ser finalizadas do ponto de vista algébrico. Uma abordagem interessante para levar em sala de aula, seria a exploração dos significados para os resultados encontrados, com as seguintes questões:

(i) Pensando nessas divisões que deveriam ser feitas entre os cincos homens, quantos pães inteiros cada irmão recebeu?

(ii) Como poderíamos fazer a divisão do restante dos pães?

Solução: Para trabalhar a resposta dos itens acima poderíamos estudar os resultados obtidos pelo problema olhando como frações mistas.

Definição 3.3. Frações mistas são aquelas que contém uma parte inteira e também uma parte representada por fração própria onde o numerador é menor do que o denominador.

Para transformar uma fração imprópria (o numerador é maior do que o denominador) em uma fração mista, basta dividirmos o numerador pelo denominador e desta forma, o quociente será a parte inteira e o resto será o numerador da fração própria que irá compor o número.

Desta forma poderíamos reescrever os valores como,

$$(1\frac{2}{3},\ 10\frac{5}{6},\ 20,\ 29\frac{1}{6},\ 38\frac{1}{3})$$

Ou seja,

- O 1º homem receberia 1 pão inteiro e $\frac{2}{3}$;
- 2º homem receberia 10 pães inteiros e $\frac{5}{6}$;
- 3º homem receberia 20 pães inteiros;
- 4º homem receberia 29 pães inteiros e $\frac{1}{6}$;
- 5º homem receberia 38 pães inteiros e $\frac{1}{3}$.

Ou seja 98 pães poderíam ser distribuídos inteiros restando apenas 2 pães que deveriam ser cortados para a distribuição correta. E assim, para trabalhar o segundo item poderíamos estudar as frações restantes do problema:

$$(\frac{2}{3},\ \frac{5}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{3})$$

Observe que o denominadores das frações podem ser escritos todos em relação a 3 ou em relação a 6. Ou seja, os dois pães restantes poderíam ser divididos em 3 partes ou em 6 partes. E assim colocando no denominador 6, devemos reescrever as frações buscando as frações equivalentes no denominador desejado :

$$(\frac{4}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6})$$

Isso quer dizer que caso nossa escolha seja dividir os pães em 6 partes, as repartições seriam:

- O 1º homem receberia 1 pão inteiro e 4 partes da divisão dos pães restantes por 6;
- 2º homem receberia 10 pães inteiros e 5 partes;
- 3º homem receberia 20 pães inteiros;
- 4º homem receberia 29 pães inteiros e 1 parte;
- 5º homem receberia 38 pães inteiros e 2 partes.

Outro procedimento semelhante ao método utilizado pela civilização, seria interpretar o problema por partes realizando os cálculos por somas sucessivas.

Apesar de não utilizarem procedimentos algébricos nas resoluções, os egípcios também realizavam os cálculos através do **método da falsa posição**. Este método é baseado em testes a partir de hipóteses a respeito do número desconhecido.

Problema 3.5.

Uma quantidade e seu 1/5 somados fazem 21. Qual é essa quantidade? (ROQUE, 2012, p. 82).

Atualmente o problema poderia ser abordado como equação algébrica

$$x+\frac{1}{5}x=21$$

Mas pelo **método da falsa posição**, admitimos 10 como "chute" inicial, desta forma para nos aproximarmos da resolução dos Egípicios utilizaremos divisões sucessivas construindo a coluna da esquerda a partir dos coeficientes 1 e $\frac{1}{5}$ que contemplam o problema.

$$\begin{array}{ll} \backslash 1 & 10 \\ \backslash \frac{1}{5} & 2 \\ \backslash 1\frac{1}{5} & 12 \end{array}$$

Neste caso 10 somado ao seu $\frac{1}{5}$ resulta em 12, mas como queremos que ao efetuar o cálculo resulte 21, podemos procurar pelo número que 12 deva ser multiplicado para obtermos 21 e assim a quantidade procurada será 10 multiplicado por esse número. Portanto:

$$\begin{array}{ll} \backslash 1 & 12 \\ \backslash \frac{1}{2} & 6 \\ \backslash \frac{1}{4} & 3 \end{array}$$

Ou seja, fazendo $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$ assim a quantidade procurada será 10 produto com $\frac{7}{4}$. Importante lembrarmos que os egípcios utilizavam soma de frações unitárias (numerador igual a 1) em suas representações, desta forma, $\frac{7}{4}$ seria representado por $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.

$$\begin{array}{ll} \backslash 1 & 10 \\ \backslash \frac{1}{2} & 5 \\ \backslash \frac{1}{4} & \frac{5}{2} \end{array}$$

Portanto

$$10 + 5 + \frac{5}{2} = \frac{35}{2}$$

ou representado por frações unitárias teríamos $17\frac{1}{2}$

> O **método da falsa posição** pode fornecer uma maneira de resolver equações aritmeticamente, ou seja, sem procedimentos algébricos, e foi usado em diversos momentos da história. Daremos a solução, por falsa-posição, para uma equação dada em simbolismo atual por $ax = b$. Escolhemos um valor arbitrário x_0 para x e calculamos o valor de ax_0, que chamaremos de b_0. Na prática, procuraremos escolher esse valor inicial de um modo que facilite as contas. Em seguida, investigamos por que número devemos multiplicar b_0 para obter b e chegamos a b/b_0. Para manter inalterada a igualdade $ax_0 = b$, devemos multiplicar esse mesmo número por x_0. Obtemos, assim, que $a \times \left(x_0 \times \frac{b}{b_0}\right) = b_0 \times \frac{b}{b_0} = b$. Logo, a solução de $ax = b$ deve ser $\left(x_0 \times \frac{b}{b_0}\right)$. (ROQUE, 2012, p.81)

3.3 Grécia

A Grécia é uma região situada ao sul da península balcânica. Sua matemática foi desenvolvida com influencias da matemática egípcia, a partir da instalação de um entreposto comercial próximo ao Nilo, permitindo o contato com os povos egípcios, "encantaram-se com seus templos, monumentos e pirâmides e começaram a aprender sua Matemática" (GARBI, 2010, p.14)

Segundo Roque (2012) apesar de não conter evidências de influências da matemática mesopotâmica e grega, ela destaca um período conhecido como selêucida onde ocorreu interações entre as civilizações com as conquistas de Alexandre, o Grande.

Um dos grandes matemáticos gregos da época foi Tales de Mileto com os primeiros passos as demonstrações matemáticas. Ele também é conhecido pelas contribuições no campo da geometria, ao introduzir o raciocínio dedutivo.

> Os gregos antigos faziam distinção entre o estudo das relações abstratas envolvendo os números e a arte prática de calcular com números. Esta era conhecida como logística e aquele como aritmética. (EVES, 2011, p. 98)

Apesar do pensamento geométrico já ser conhecidos pelos matemáticos antes de Pitágoras, este é conhecido por apresentar a prova e demonstração do teorema dos triângulos retângulos. Chamamos seus seguidores de Pitagóricos, entre as contribuições do grupo temos números perfeitos.

> Quando Pitágoras demonstrou que em um triângulo retângulo vale a relação $a^2 = b^2 + c^2$ produziu-se, pela primeira vez na Europa, uma equação do $2^o grau$ com um atraso de pelo menos 1200 anos em relação ao que já havia acontecido na Babilônia. (GARBI, 2010, p.17)

Outro importante marco de contribuições para a história da matemática foi atribuída a Euclides, que com a descoberta dos números perfeitos pelos pitagóricos, provou que *se* 2^{n-1} *é um número primo, então* $2^{n-1}2^{n-1}$ *é um número perfeito*, influenciando as descobertas de múltiplo perfeito, quase-perfeitos entre outros.

Com um conjunto de treze livros sua obra Elementos de Euclides, foi muito importante aos avanços matemáticos, que apesar de possuir um estilo geométrico seus postulados exibem propriedade algébricas enunciadas sob uma roupagem geométrica (ROQUE, 2012) conhecida como **álgebra geométrica**. Mas por outro lado as demonstrações possuem um caráter apenas geométrico.

> Ainda que as proposições do livro II dos Elementos possam ser interpretadas algebricamente, suas demonstrações são essencialmente geométricas e utilizam as propriedades geométricas particulares das figuras em questão. Nada sinaliza que Euclides estivesse usando relações abstratas entre quantidades, além disso suas demonstrações não utilizavam nenhuma das propriedades das operações algébricas. (ROQUE, 2012, p.188)

Contudo essas noções possibilitaram mais tarde as soluções de equações.

> Logo no início dos elementos ele explicitou algumas verdades evidentes por si mesmas, agrupando-as em postulados de natureza geométrica(cinco) e em noções comuns (também cinco), válidas genericamente. AS noções comuns de Euclides foram:
>
> (a) Coisas iguais a uma terceira são iguais entre si.
>
> (b) Se iguais foram somados a iguais, os resultados serão iguais.
>
> (c) Se iguais foram subtraídos de iguais, os resultados serão iguais.
>
> (d) Coisas coincidentes são iguais entre si.
>
> (e) O todo é maior do que a parte. Embora não tenha sido diretamente enunciada por Euclides, é fácil aceitar outra verdade.
>
> (f) Iguais multiplicados e divididos por iguais continuam iguais.
>
> (GARBI, 2010, p.19)

Conforme exemplificado acima, através destas noções já era possível resolver equações do 1º grau, vejamos um exemplo abaixo que resolveremos de forma análoga ao apresentado por Garbi (2010).

Para resolvermos a equação algébrica do 1º grau.

$$2x + 3 = 5$$

TABELA 3.1: Possível resolução da equação

Etapas de resolução	**Equação $\boldsymbol{2x+3=5}$**	**Justificativa**
Subtraindo 3 dos dois lados, preservando a igualdade	$2x+3-3=5-3$ ou $2x=2$	c) Se iguais foram subtraídos a iguais, os resultados serão iguais.
Dividimos 2 em ambos os lados, preservando a igualdade	$\frac{2}{2}x=\frac{2}{2}$ ou $x=1$	f) Iguais multiplicados e divididos por iguais continuam iguais.

Fonte: Elaborado pela autora.

No entanto este uso da simbologia é dado a história pelas contribuições de Diofanto, em seu trabalho denominado Aritmética.

> A parte remanescente do trabalho se dedica à resolução de 130 problemas, numa variedade considerável, que levam a equaÂções do primeiro e do segundo graus. Só uma cúbica muito particular é resolvida. O primeiro livro se ocupa de equações determinadas em uma incógnita e os demais de equações indeterminadas de segundo grau, e às vezes de grau maior, em duas ou três incógnitas. (Eves,2011, p.61)

Segundo Boyer (1974) na Grécia existiu pelo menos dois sistemas de numeração:

FIGURA 3.5: Sistema de Notação Ática, que utilizava letras alfabéticas organizado na base dez.

A	B	Γ	Δ	E	F	Z	H	Θ	I	K	Λ	M	N
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50
Ξ	O	Π	Ϙ	P	Σ	T	Υ	Φ	X	Ψ	Ω	Ϡ	
60	70	80	90	100	200	300	400	500	600	700	800	900	

Fonte: Boyer (1974, p.)

Sistema Jônio, que os gregos parecem ter adotado posteriormente. Com organização também na base dez e associação de símbolos para os números múltiplos de dez como apresentado nas figuras abaixo, diferenciados por um acento a frente do símbolo.

FIGURA 3.6: Sistema de numeração Jônio

α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	θ	ι	κ	λ	μ	ν
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50
ξ	ο	π	ϙ	ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ	
60	70	80	90	100	200	300	400	500	600	700	800	900	

Fonte: Boyer (19744, p.)

FIGURA 3.7: Sistema de numeração Jônio para múltiplos de dez

,α	,β	,γ	,δ	,ε	,ς	,ζ	,η	,θ
1 000	2 000	3 000	4 000	5 000	6 000	7 000	8 000	9 000

Fonte: Boyer (19744, p.)

Problema 3.6. *De quantas maçãs se necessitam se 4 de 6 pessoas recebem* $1/3, 1/8, 1/4$ *e* $1/5$*, respectivamente, do número total, enquanto que a quinta recebe 10 maçãs e ainda resta uma maçã para a sexta pessoa? (Eves,2011, p.224)*

Uma resolução possível deste problema para a época, seria resolver pelo método da falsa posição, ou a forma que se assemelha com a atual interpretando o problema por meio de equações, uma vez que a noção de incógnita do problema ja era de conhecimento da cultura,

$$1/3x + 1/8x + 1/4x + 1/5x + 10 + 1 = x$$

multiplique os membros por 120

$$40x + 15x + 24x + 30x + 1320 = 120x$$

$$190x + 1320 = 120x$$

$$-11x = 1320$$

multiplique os membros pro -1 e depois divida por 11

$$x = \frac{1320}{11}$$

logo,

$$x = 120$$

E portanto, são necessárias 120 maçãs para realizar essa divisão.

3.4 China

Os chineses também estão entre as civilizações mais antigas, e destacam grandes desenvolvimentos na área da matemática, apesar dos poucos registros que chegaram até nós.

> Embora as civilizações da China antiga ao longo dos rios Yang-Tze e Howang Ho provavelmente sejam posteriores à civilização egípcia ao longo do Nilo e à babilônica, entre o Tigre e o Eufrates, muito pouco material de natureza primária oriundo delas chegou até nós. Isso em virtude de os povos da época com certeza fazerem muitos de seus registros em bambu, um material perecível. E, para agravar, o egotista imperador Shï Huang-ti ordenou em 213 a.C. uma lamentável queima de livros. A despeito de ameaças e represálias severas, o edito do imperador certamente não foi levado a efeito completamente; mas como muitos dos livros queimados foram reconstituídos de memória, hoje há dúvidas sobre a autenticidade de grande parte do material bibliográfico que se alega ser anterior àquela data infeliz. (EVES, 2011, p.241)

Sua relação com os números era dada a partir do sistema denominado “numerais em barras”

FIGURA 3.8: Sistema numerais em barras

Fonte: Boyer (1974, p.145)

E, assim como a notação do sistema Jônio da Grécia, os múltiplos de 10 recebiam representações

FIGURA 3.9: Sistema numerais em barras múltiplos de dez

Fonte: Boyer (1974, p.145)

Segundo Eves (2011) uma das obras mais antiga dos chineses é o K’ui-ch’ang Suanshu, ou Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática onde aparecem os problemas práticos com cálculos orientados, porém sem demonstrações, entre os problemas também temos equações e as contribuições para a aproximação do número pi (π) e as proporções.

Problema 3.7.

60 moedas compram 18 tijolos. Quanto custa cada tijolo? (PAQUES & ROVERAN, 2016)

A resolução apresentada por Paques e Roveran (2016) apresenta o método Jinglu utilizado pelos Chineses em seus cálculos de problemas que envolviam divisão de números inteiros.

> Regra Jinglu B. Tome a taxa procurada e multiplique pelo número de moedas como dividendo, tome o número de itens comprados como divisor. (PAQUES & ROVERAN, 2016, p.3)

Por outro lado a possível resolução atual seria interpretar como regra de três conforme apresentada nas escolas básicas,

160 moedas compram 18 tijolos

x moedas compram 1 tijolo

$$160 * 1 = 18 * x$$

$$160 = 18x$$

$$\frac{160}{18} = x$$

$$8\frac{8}{9} = x$$

A abordagem interessante para a sala de aula seria compreender o significado que esse número de moedas pode representar no contexto atual. Para tanto, um dos questionamentos que levariam a esta reflexão com os alunos seria:

(i) Como na prática poderíamos contornar o problema de cobrar $\frac{8}{9}$ de moedas do comprador?

A solução esperada seria compreender que $\frac{8}{9}$ de moedas é um valor próximo do 9 mas, menor que 9 moedas. Desta forma, uma das possibilidades seria interpretar como um desconto do ponto de vista pragmático ao aproximarmos da realidade pois, comprando 160 tijolos é possivel ter recebido um desconto. Ou seja, poderíamos ter que 1 tijolo é comprado com 9 moedas mas, é possível receber um desconto de 2 moedas ao comprar 18 tijolos.

Desta forma, através da metodologia de resolução de problemas podemos levar o pensamento algébrico com o procedimento e significado das operações possibilitando a interpretação da divisão e seu resto.

Outra obra importante foi o livro de Permutações, *I-King,* onde estão os princípios de *yang* -masculino e *ying* – feminino. Segundo Eves (2011), essa noção de oposto contribuiu para o desenvolvimento dos números negativos pelos chineses, que pareciam não apresentar dificuldades para operar no campo dos números inteiros.

Outra contribuição que mostra grande desenvolvimento matemático desses povos é o quadrado mágico, que propõe a interessante propriedade de ter a soma dos números da linhas = soma dos números das colunas = soma dos números nas diagonais, sem que haja repetição dos números. Além disso na China também era utilizado o **método da falsa posição** para resolução de problemas, além de outra técnica que ficou conhecida por **método da falsa posição dupla** ,usado para aproximação das raízes de uma equação de forma geométrica, possibilitando assim que resolvessem problemas envolvendo equações de grau 3.

3.5 Hindus

A civilização dos Hindus se desenvolveu no Oriente Médio, hoje o hinduísmo é conhecido como uma religião que abrange grande parte da Índia.

> O grau de influência da matemática grega, da babilônica e da chinesa sobre a matemática hindu e vice-versa, ainda é uma questão não esclarecida, mas há evidências de que em ambos os sentidos ela foi apreciável. Um dos benefícios claros da Pax Romana foi o intercâmbio de conhecimento entre Oriente e Ocidente, e desde muito cedo a Índia enviou diplomatas para o Ocidente e o Extremo Oriente. (EVES, 2011, p.250)

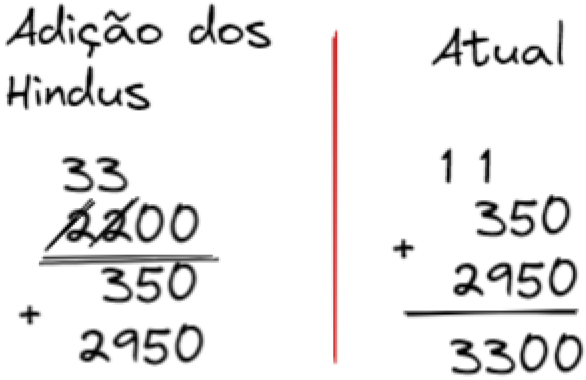
Ao decorrer da história antiga, a Índia sofreu várias invasões e passagem de diversos povos pelas suas terras, entre eles os Árabes. Motivo pelo qual muitas vezes os desenvolvimentos dos Hindus e dos Árabes sejam apresentados de forma conjunta. Procuramos por olhar as civilizações de forma separada, selecionando os registros que foram atribuídos aos Árabes, mas que sugerem herança dos Hindus.

Um destaque importante para a matemática dos Hindus foi em relação a forma de resolver operações.

> O desenvolvimento de algoritmos para nossas operações aritméticas elementares começou na Índia, talvez por volta do século X ou XI; esses algoritmos foram adotados pelos árabes e mais tarde transportados para a Europa Ocidental, onde se modificaram até chegar à sua forma atual. Esse trabalho recebeu atenção considerável dos autores de aritméticas do século XV. (Eves, 2004, p.254)

As operações se diferenciam da atual apenas pela direção na qual iniciamos o cálculo.

FIGURA 3.10: Operação dos hindus x atual



Fonte: Produzido pela Autora

A operação de adição realizada pelos hindus começava da esquerda para a direita desta forma os algoritmos cujo a soma é maior que 10, permanece a casa das unidades e a casa das dezenas altera o valor a esquerda. Desta forma o raciocínio se assemelha aos atuais onde os valores vão se corrigindo no decorrer da operação. A operação de multiplicação era realizada da mesma forma.

Sua relação com a álgebra era através de problemas de **ordem pratica**, com resoluções através do **método da Falsa posição** (conhecido pelos Babilônicos) e o **método da inversão**, onde a resolução era realizada de trás para frente.

Problema 3.8.

O quadrado da oitava parte de um bando de macacos saltitava num bosque, divertindo-se com a brincadeira, enquanto os 12 restantes tagarelavam no alto de um outeiro. Quantos macacos constituíam o bando?

A possível resolução pelo **método da inversão,** era olhar o problema começando do final, desta forma escrevendo em linguagem algébrica ficaríamos com:

$$x-12 = (\frac{\mathrm{x}}{8})^2$$

Uma das estratégias de resolução para essa equação seria resolvê-la por fatorização:

$$x{-}12 = \frac{\mathrm{x}^2}{64}$$

multiplicando ambos os membros por -64 e igualando a 0 temos:

$$-64x{+}768 + x^2 = 0$$

desta forma, podemos reorganizar os termos e reescrever o termo $-64x$ como uma diferença

$$x^2 - 16x - 48x + 768 = 0$$

e fatorizando a expressão, colocando o x em evidência

$$x(x-16) - 48(x-16) = 0 \quad logo \quad (x-16)(x-48) = 0$$

como o produto dos fatores é igual a 0, temos

$$x - 16 = 0$$

$$x - 48 = 0$$

portanto, resolvendo as equações temos duas soluções possíveis para o número de macacos que constituem o bando:

$$x = 16 \quad ou \quad x = 48$$

Importante mencionar que a linguagem utilizada pela matemática dos hindus era através de palavras.

> A subtração era indicada colocando-se um ponto sobre o subtraendo, a multiplicação escrevendo *bha* (primeira sílaba ada palavra *bhavita*, "produto") depois dos fatores, a divisão escrevendo-se o divisor debaixo do dividendo e a raiz quadrada escrevendo-se *ka* (da palavra *karana*, "irracional") antes da quantidade. *Brahmagupta* denota incógnita por *y?* (de *y?vatt?va*t, "tanto quanto"). Os inteiros conhecidos eram antecedidos de *rū* (de *rūpa,* "número puro"). As incógnitas adicionais eram indicadas pelas sílabas iniciais de palavras que expressam diferentes cores. (EVES, 2011, p.256)

FIGURA 3.11: Exemplo de escrita dos Hindus

: $8xy + \sqrt{10} - 7$ poderia ser escrita como *yā kā* 8 *bha ka* 10 *rū* 7.

Fonte: Adaptado de Eves (2011, p.256)

Vejamos agora um problema em destaque, no qual podemos abordar do ponto de vista de equações. Este problema é interessante pois além da resolução é a frase destacada no epitáfio do túmulo do matemático Diofanto de Alexandria.

Problema 3.9.

Aqui jaz o matemático que passou um sexto da sua vida como menino e 1/12 da sua vida passou como rapaz. Viveu um sétimo da sua vida antes de se casar. Um quinquênio após, nasceu seu filho com quem conviveu metade da sua vida. Depois da morte do filho, sofreu mais quatro anos antes de morrer. Quanto tempo ele viveu?

Observe que podemos começar a exploração pelo método da inversão, e depois a resolução segue de forma similar a atual.

$$x = 4 + 5 + \frac{1}{2} \times x + \frac{1}{7} \times x + \frac{1}{12} \times x + \frac{1}{6} \times x$$

Multiplique os membros por 84,

$$84x = 756 + 12x + 7x + 42x + 14x$$

Operamos os termos similares,

$$84x = 756 + 75x$$

$$84x - 75x = 756$$

$$9x = 756$$

$$x = 84$$

Portanto o matemático Diofanto viveu 84 anos.

3.6 Árabes

O sistema de numeração árabe parece ter assumido três características, segundo Eves (2011) primeiro os números eram escritos em palavras, mas com a conquista de extensos territórios o número passou a receber abreviação e mais tarde por influência da matemática grega, os números assumiram os símbolos.

Grandes desenvolvimentos matemáticos foram atribuídos a Al-Khwarizmi, entre eles o **método dos noves fora**,que foi importante ao campo da aritmética e tinha como objetivo verificar um resultado.

Exemplo 3.4. Se quisermos verificar que o resultado da operação

$$250 + 788 = 1038$$

fazemos a soma dos algarismos de 250, e seguimos o mesmo procedimento até ficarmos com apenas 1 algarismo.

$$2 + 5 + 0 = 7$$

depois fazemos o mesmo procedimento com o número 788,

$7 + 8 + 8 = 23$, e assim $2 + 3 = 5$

Assim os números 7 e obtidos são os restos da divisão de 250 por 9 e 788 por 9 respetivamente. Desta forma para verificarmos que o resultado da operação de adição $250 + 788$ está correto. Precisaremos que a soma dos noves fora, ou seja $7 + 5 = 12$ que seguindo o procedimento de somar até reduzirmos os algarismos a 1, então os noves fora é $2 + 1 = 3$ que deve ser igual a quando utilizarmos o mesmo procedimento com o número 1038 que é o resultado da operação. Assim,

$$1 + 0 + 3 + 8 = 12,$$

seguindo o procedimento $1 + 2 = 3$ que confirma com os noves fora obtido anteriormente, desta forma a operação realizada está correta.

O procedimento atual de verificação nada se assemelha ao método dos noves fora, ao invés disso é frequentemente utilizado a operação inversa para verificação do resultado, desta forma para verificarmos que $250 + 788 = 1038$ fazendo a operação inversa, $1038 - 788$ que resulta em 250.

Para Garbi (2010) existia uma motivação de Al-Knwarizmi em simplificar simbologias aos leitores da escola científica (Bagdad), popularizando o sistema decimal advindo dos hindus.

Outros métodos utilizados pelos árabes era o **método da falsa posição** que já era conhecimento dos povos babilônicos e, o **método da regra de três** originado das contribuições na China.

> A álgebra de Al-Khwarizmi mostra pouca originalidade. Explicam-se as quatro operações elementares e resolvem-se equações lineares e quadráticas, estas últimas aritmética e geometricamente. O trabalho contém algumas questões envolvendo mensuração geométrica e alguns problemas de herança. (EVES, 2011, p.263)

Apesar disto, outro grande destaque foram as contribuições para a álgebra geométrica, pois os árabes conseguiam calcular equação quadráticas através de um **método intuitivo completar quadrados** originado dos hindus.

neste método, dado

Segundo Garbi (2010), o método foi construído a partir da tentativa de reduzir o problema a outro já conhecido, ou seja, reduzir a resolução de uma equação de 1º grau. O método já era conhecido pelos babilônios, porém somente com os Hindus foi assegurado o cuidado de "números positivos ou negativos elevados ao quadrado são sempre positivos" (GARBI, 2010, p.26).

Aos árabes também atribuímos a origem da palavra Álgebra,

> A palavra Al-jabr era empregada por Al-Khwarizmi para designar operações em que por exemplo a equação $x - 3 = 6$ passa a $x = 9$, significando uma "restauração de $x - 3$ de modo a tornar-se incógnita completa de x. Foi assim que nasceu a palavra Algebra, presente em todos os idiomas do planeta, tão empregada na matemática e que está claramente relacionada às noções comuns de Euclides. (GARBI, 2010, p.24)

Capítulo 4

O Ensino de Equações no Ensino Básico

Para a introdução deste capítulo foi necessário estudarmos a construção da educação algébrica evidenciando algumas concepções atribuídas historicamente acerca do ensino de equações algébricas. Desta forma essa abordagem será realizada pautando em primeiro momento em identificar aspectos importantes desse ensino e, posteriormente abordaremos as habilidades e competências apresentadas pelos documentos normativos da educação atual no Estado de São Paulo.

4.1 A Educação Algébrica

Historicamente a educação algébrica assumiu diversas concepções, em Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005) três delas são destacadas:

- no século XIX e início do XX a educação algébrica assumiu a concepção linguístico-pragmática, que entende a álgebra como ferramenta para abordagem de problemas;
- posteriormente com o movimento da matemática moderna a concepção fundamentalista-estrutural, nessa visão se destacou a importância no ensino de propriedades estruturais dos cálculos algébricos;
- A terceira concepção é denominada pelos autores como fundamentalista-analógica, compondo as outras duas ideias de concepções com abordagem algébrica de situações problemas e entendendo a geometria como forma de justificativa algébrica dos procedimentos.

No Brasil, segundo Scremin e Righi (2020) os primeiros momentos da álgebra como ensino estava caracterizado pelo objetivo de resolver problemas, com caráter reprodutivo, posteriormente no Movimento de Matemática Moderna assumiu-se um caráter pragmático com foco no rigor matemático.

Em 1997, o ensino passou a ser norteado pelas diretrizes dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), orientando as elaborações dos projetos pedagógicos das escolas e assim as práticas de ensino.

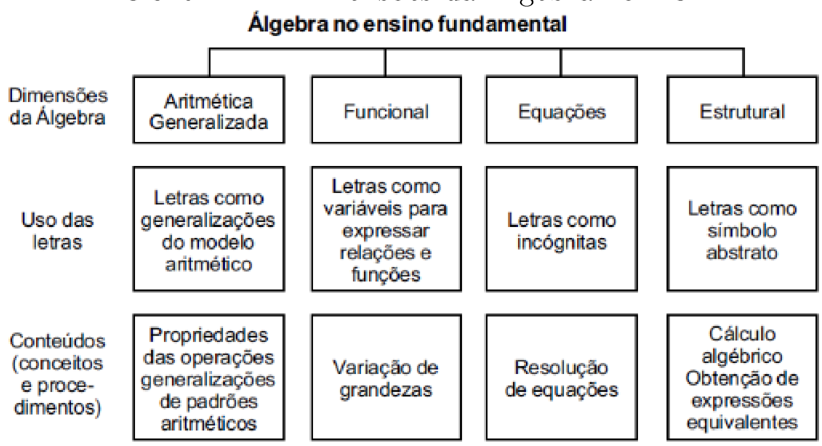
Neste documento o papel da matemática ganhava destaque para o desenvolvimento do aluno, "seu papel na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento, na agilização do raciocínio dedutivo do aluno, na sua aplicação a problemas, situações da vida cotidiana" (BRASIL, 1997, p. 28)

Os conteúdos eram definidos a partir de quatro blocos temáticos:

1. Número;
2. Geometria;
3. Medidas;
4. Tratamento da informação.

Com relação a Álgebra, este conteúdo era abordado dentro do bloco temático de números e operações, atribuindo quatro dimensões a seu ensino conforme apresenta o quadro a seguir do documento:

FIGURA 4.1: Dimensões da Álgebra no PCN



Fonte: PCN Matemática (BRASIL, 1997, p.116)

Para esta abordagem os PCNs orientavam a articulação do ensino ao utilizar metodologias de jogos, história da matemática e situações problemas que levasse o aluno a explorações e generalizações matemáticas,

> O ensino de Álgebra deveria permitir ao aluno dar significado à linguagem e às ideias matemáticas. Diante disso, era fundamental a compreensão de conceitos, como o de variável e o de função; a representação de fenômenos algébrica e graficamente; a formulação e resolução de problemas por equações e o conhecimento da sintaxe de uma equação. (SCREMIN & RIGHI, 2020, p.419)

Atualmente o documento normativo que condiciona o ensino no Brasil é a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), servindo de guia para os currículos escolares de escolas públicas e particulares. Com relação a matemática, este documento a reconhece como ciência humana, estabelecendo diretrizes de ensino relacionadas ao desenvolvimento de conhecimentos que possibilitem solucionar problemas práticos. Desta forma, a matemática representa um conhecimento importante na vida do estudante, permitindo a interlocução com o mundo.

Desta forma na BNCC a Álgebra ganha foco como área de conhecimento, assumindo o quarto espaço como unidade temática junto aos campos de:

1. Aritmética;
2. Geometria;
3. Estatística e Probabilidade.

4.2 O ensino de Equações Algébricas atual

Mundialmente vivesse um cenário de readaptações em todos os setores diante das medidas preventivas da pandemia da COVID -19, e com o campo da educação não é diferente.

O cenário atual implicou inicialmente em suspensão das aulas, impactando a dinâmica de ensino e aprendizagem dos estudantes, desta forma a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo (SEDUC-SP) criou o Centro de Mídias SP (CMSP), promovendo um ensino através da tecnologia e assegurando as metas de qualidade de ensino previstas pelo Planejamento Estratégico 2019-2022.

> Com essa visão, a SEDUC-SP lançou o Centro de Mídias SP, uma plataforma composta por dois canais digitais abertos e por um aplicativo que permite acesso a diversos conteúdo para professores e estudantes da rede estadual de ensino, com dados patrocinados pelo Governo do Estado de São Paulo. O Centro de Mídias SP tem como objetivo contribuir com a formação dos profissionais da rede e ampliar a oferta aos alunos de uma educação mediada por tecnologia, de forma inovadora, com qualidade e possibilitando ampliar os horizontes do ensino tradicional. (SÃO PAULO, 2021c)

Em segundo momento com a flexibilização das medidas preventivas relacionados ao COVID-19, iniciou no segundo semestre de 2020 um plano de retomada gradual em muitas instituições de ensino. No estado de São Paulo, a SEDUC-SP elaborou estratégias pedagógicas para um modelo de Ensino Híbrido, que oferece atividades presenciais respeitando os protocolos da Secretária da Saúde e com turmas reduzidas juntamente com as aulas remotas, permitindo que as famílias realizem a escolha por um desses modelos de ensino de acordo com as necessidades de cada situação familiar.

Desta forma para atender as necessidades e o novo cenário da educação, a SEDUC -SP elaborou uma nova matriz de referência para as habilidades essenciais condizentes a BNCC, para que as aulas do CMSP e as aulas presenciais realizadas pelos professores seguissem uma mesma articulação.

> Essas habilidades essenciais foram selecionadas a partir de análises do Currículo Paulista no Ensino Fundamental e na 1ª série do Ensino Médio, e do Currículo Oficial vigente na 2ª e 3ª séries do Ensino Médio, dos resultados do SARESP 2019 e da Avaliação Diagnóstica de Entrada (ADE), de 2020. (SÃO PAULO, 2021a, p.3)

A seguir mostraremos a tabela de habilidades descritas pela matriz de referência relacionada anos finais do ensino fundamental, para a disciplina de Matemática na unidade temática de Álgebra:

TABELA 4.1: Matriz de referência das habilidades (unidade temática de Álgebra)

SÉRIE	HABILIDADES	OBJETOS DE CONHECIMENTO
1º Bimestre	($EF06MA14$) Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas.	Propriedades da igualdade.
3º Bimestre	($EF06MA15$) Resolver e elaborar situações problemas que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo	Problemas que tratam da partição de um todo em duas partes desiguais, envolvendo razões entre as partes e entre uma das partes e o todo.
7º ano		
SÉRIE	HABILIDADES	OBJETOS DE CONHECIMENTO
1º Bimestre	(EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita.	Linguagem algébrica: variável e incógnita.
2º Bimestre	($EF07MA14$) Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura.	algébrica: variável e incógnita.
	($EF07MA15$) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.	Linguagem algébrica: variável e incógnita
3º Bimestre	($EF07MA16$) Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes.	Equivalência de expressões algébricas: identificação da regularidade de uma sequência numérica.
	($EF07MA17$) Resolver e elaborar situações- -problema que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.	Problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais
4º Bimestre	($EF07MA18$) Resolver e elaborar situações problema que possam ser representados por **equações** polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma ax + b = c, fazendo uso das propriedades da igualdade.	**Equações** polinomiais de 1º grau.

8ºano		
SÉRIE	HABILIDADES	OBJETOS DE CONHECIMENTO
2º Bimestre	($EF08MA10$) Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes.	Sequências recursivas e não recursivas.
	($EF08MA11$) Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.	Sequências recursivas e não recursivas
	($EF08MA12$) Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano	Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais.
	($EF08MA13$) Resolver e elaborar situações- -problema que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas	Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais.
3º Bimestre	($EF08MA06$) Resolver e elaborar situações problema que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.	Valor numérico de expressões algébricas.
	($EF08MA07$) Associar uma **equação** linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano	Associação de uma **equação** linear de 1º grau a uma reta no plano cartesiano.
	($EF08MA08$) Resolver e elaborar situações problema que possam ser representados por sistemas de **equações** de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.	Sistema de **equações** de 1º grau: resolução algébrica e representação no plano cartesiano.
4º Bimestre	($EF08MA09$) Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, situações-problema que possam ser representados por **equações** de 2º grau do tipo $ax^2 = b$.	**Equação** de 2º grau do tipo ax$^2 = b$

9º ano		
SÉRIE	HABILIDADES	OBJETOS DE CONHECIMENTO
1º Bimestre	($EF09MA07$) Resolver situações-problema que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica	Razão entre grandezas de espécies diferentes.
	($EF09MA08$) Resolver e elaborar situações problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.	Grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais.
2º Bimestre	($EF09MA09$) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por **equações** polinomiais do 2º grau.	Expressões algébricas: fatoração e produtos notáveis; Resolução de **equações** polinomiais do 2º grau por meio de fatorações.
	($EF09MA06$) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.	Funções: representações numérica, algébrica e gráfica.

Fonte: Adaptado de Curriculo Paulista.

De acordo com a Matriz de Habilidades Essenciais[1] (SÃO PAULO, 2020) que compõem o currículo do Estado de São Paulo, as equações algébricas começam a ser abordadas no 7º ano do ensino fundamental com o estudo de expressões algébricas, porém o olhar para a álgebra começa a ser abordado já no 6º ano do ensino fundamental a partir dos objetos de estudo:

(i) Propriedades da igualdade;

[1] As duas primeiras letras do código (EF) indicam a etapa da série escolar, sendo este Ensino Fundamental, o par de números (06) seguintes mostram a habilidades de referência, posteriormente é apresentado a abreviação do componente curricular que em nosso caso (MA) é matemática, finalizando com a posição na sequência de atividades.

(ii) Problemas que tratam da partição de um todo em duas partes desiguais, envolvendo razões entre as partes e entre uma das partes e o todo.

Desta forma, a fim de compreender como é caracterizado as equações algébricas em sala de aula atribuindo objetivos de ensino e aprendizagem acerca do uso do conteúdo, analisamos os materiais Aprender Sempre, com relação ao ensino de equações, partindo do momento no qual o uso da simbologia é apresentado ao estudante. Nosso foco foi identificar os objetivos e formas de abordagem deste ensino sugeridas através do material de apoio ao professor, oferecendo um comparativo as diferentes concepções de equações presentes.

O Aprender Sempre faz parte do Programa de Recuperação de Aprofundamento, e contempla cadernos para os alunos e cadernos com orientações aos professores, construído a partir das habilidades escolhidas como essenciais conforme apresentamos no capítulo anterior. Desta forma esse material pode ser caraterizado como resumo, sendo apresentado junto ao conceito de reforço do aprendizado, com sugestão de trabalho junto ao material proposto pelo Currículo Paulista, denominado por Currículo em ação.

O currículo paulista é o documento criado para orientar as práticas pedagógicos nas escolas da rede pública do estado de São Paulo, formulado em consonância com as propostas e diretrizes da BNCC. Este material conta com elaboração de cadernos de conteúdo com orientação aos professores e os cadernos do aluno.

Em relação a álgebra, o documento separa um tópico para esclarecer suas definições, "Álgebra é um dos temas da Matemática que desenvolve a capacidade de abstração e generalização que auxilia na resolução de problemas e tem como finalidade o desenvolvimento do pensamento algébrico" (SÃO PAULO, 2020a, p.319).

Apesar desse material também estar em consonância com a BNCC e, portanto, com os materiais do CMSP, nossa análise pautou nos materiais disponíveis Aprender Sempre, criado para apoiar as atividades do centro de mídias para os alunos, neste momento de ensino Hibrido. Pois na prática o material Aprender Sempre assumiu papel de material principal dos alunos que contam apenas com o ensino remoto realizado pelo CMSP para seu desenvolvimento de ensino e aprendizagem.

No Material, apesar de não trazer a denominação de equações, a linguagem algébrica começa a ser abordada no 7º ano do ensino fundamental[2]

[2] Neste material é apresentado por uma sequência de atividades em divididas em quatro apostila do volume 1, que corresponde ao primeiro semestre e outras quatro por série distribuídas no

com o volume 1, na sequência de atividades 3, com os conceitos apresentados pela seguinte abordagem:

1 – Variável x incógnita,

Partindo da compreensão entre os conceitos de variável e incógnita é sugerido uma abordagem histórica, com a leitura do texto disponível e posteriormente a proposta de resolução de problemas relacionados a geometria, entendendo a área como dependente da variável e a incógnita como quantidade desconhecida determinada que válida a igualdade.

Importante notar que o uso de letras para expressar quantidades desconhecidas já estava presente nas atividades dos estudantes. Além disso as abordagens parecem ter um caráter intuitivo relacionado a escrita algébrica.

2- Interpretar as expressões algébricas,

É sugerido uma discussão prévia, com o objetivo de ir sistematizando a noção de função da expressão algébrica junto com os alunos e utilizando o seguinte problema:

Problema 4.1.

Como eu posso representar o dobro de um número, sabendo, por exemplo, que o dobro de 3 é seis e o dobro de 4 é oito? E se o número fosse desconhecido? Como poderíamos expressar? (SÃO PAULO, 2021a, p.119)

Sem a necessidade de responder à questão, os estudantes são levados a exercícios de correspondência, entre a sentença e a expressão algébrica que descreve.

Uma sugestão alternativa seria discutir esse problema com o aluno, utilizando o método indutivo,

$$\text{O dobro de } \underline{3} \text{ é } 2\times\underline{3}=6$$
$$\text{O dobro de } \underline{4} \text{ é } 2\times\underline{4}=8$$
$$\text{O dobro de } \underline{5} \text{ é } 2\times\underline{5}=10$$
$$.$$
$$..$$
$$\text{O dobro de } \underline{100} \text{ é } 2*\times\underline{100\ } = 200$$
$$\text{O o dobro de } \underline{x} \text{ é } 2\times\_ \ = \ \_$$

Com exemplos que proporcione ao aluno a construção indutiva levando da propriedade particular ao caso geral.

3- Valor numérico da expressão

volume 2, segundo semestre de 2021.

Neste momento a dinâmica de atividades sugeridas aos estudantes contam com uma dinâmica de exploração, descrita como brincadeira de “adivinhação” pelo caderno. sobretudo

> pensem em um número de 1 a 10;
> multiplique por 5;
> subtraia o triplo do número pensado;
> Depois, questione: “Qual o resultado?”. Professor, organize os estudantes de forma que possa ouvir um por vez e “adivinhar” o número que cada um pensou inicialmente. Peça que eles registrem no “Caderno do Estudante” o que eles acham que você faz para “adivinhar” o número pensado por eles.(SÃO PAULO, 2021a, p.121)

Note que uma das estratégias que pode ser trabalhada com os alunos é a resolução pelo método da inversão desenvolvida pelos povos Hindus.

Para finalizar e formalizar os conceitos trabalhado é indicado ao professor que trabalhe com situação de problemas. Porém essa abordagem não pode se assemelhar a metodologia de resolução de problemas uma vez que o desenvolvimento sugere a abordagem por roteiro de resolução.

> Sugerimos que utilize a situação-problema 1 do “Caderno do Estudante” para criar um roteiro de resolução de problemas. Professor, esse roteiro é um documento seu e da turma. Então é interessante que haja um registro do roteiro para que os estudantes possam consultar sempre que quiserem, principalmente quando forem resolver situações-problemas. (SÃO PAULO, 2021a, p.122)

Essa estratégia de resolução através de etapas relembra a abordagem que era realizada pelos povos da Mesopotâmia ao resolver os problemas práticos que advinham de equações. Desta forma o recurso de retomar a história da matemática pode servir como auxílio para o professor em sua abordagem.

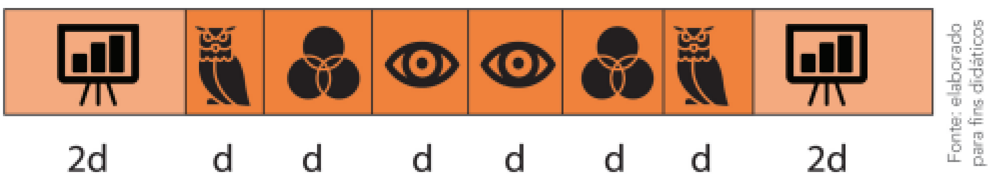
Após essa abordagem realizada nas séries de 7º ano do ensino fundamental, o caráter algébrico de situações problemas, volta a ser trabalhado no 8º ano do ensino fundamental, na sequência de atividades 1 do volume1. Trabalhando o desenvolvimento no ensino de razão e proporção ao compreenderem a relação entre duas grandezas expressa por uma sentença algébrica, contribuindo com as abordagens posteriores na sequência de atividades 2 do volume 2, onde a discussão de variável e incógnita volta em estudo.

Este caminho leva ao desencadeamento do conceito de equações do 1º grau, que aparece denominado desta forma pela primeira vez nesta sequência de materiais: **"Relembre a ideia de equação associada à igualdade e que estas se constituem como expressões algébricas muito úteis para o cálculo de valores desconhecidos"** (SÃO PAULO, 2021b, p.166). Com as seguintes abordagens:

1- Valores desconhecidos

Propondo ao professor que mostre ao aluno os diferentes símbolos e letras que podemos atribuir ao valor desconhecido, sendo mais utilizados a letra "x". Essas atividades propostas contam com situações problemas, para que o aluno crie estratégias em saber quem é o número procurado a partir de reconhecimento de padrões. Abaixo apresentamos outro problema 4.2 abordado na atividade, que instiga o desenvolvimento do conceito de equações.

FIGURA 4.2: Atividade apostila Aprender Sempre



3. Stephanie é uma arquiteta e, como parte de um projeto, precisará fixar um papel de parede com 3 m de comprimento horizontal. O cliente solicita que haja espaçamentos simétricos no papel de parede conforme a imagem a seguir:

O valor de d é:

a. 30 cm.

b. 37,5 cm.

c. 40 cm.

d. 45 cm.

e. 50 cm.

Escreva, neste espaço, como você pensou para solucionar a questão:

Resposta: aqui a resposta será subjetiva, pois há diversas estratégias para calcular o valor de d. Uma delas é somar todos os pequenos comprimentos e igualar ao comprimento total do papel de parede: $2d + d + d + d + d + d + d + 2d = 3 \longrightarrow 10d = 3$

$d = 0{,}3m = 30$ cm.

Letra A.

Fonte: Caderno do Professor Aprender Sempre (vol.1) 2021.

Apesar da resposta esperada apresentar uma abordagem de resolução baseada em apresentar a expressão algébrica correspondente, usarndo a letra "d" como incógnita e resolvendo a equação do 1º grau. É importante destacar que essa atividade sem auxílio do professor pode se resumir em substituição de valores e testes para encontrar o número desejado.

Desta forma o professor pode abordar as duas formas de resolução, que seria em primeiro momento através da equação porém, mostrando ao aluno a resolução pelo método da falsa posição destacando que essa resolução se torna possível pois temos disponíveis os possível resultados que satisfazem a equação.

Ainda nesta etapa de trabalhar o com incógnitas, é apresentado ao professor a sugestão de trabalhar a geometria com álgebra, associando conceitos de figuras geométricas planas como lado, área e perímetro com as expressões algébricas.

Outra sugestão é que o professor conduza a situações problemas relacionais ao dia a dia do estudante.

> Além disso, você pode, professor, realizar um debate sobre como a matemática pode ser útil no combate ao desperdício de água e ao desenvolvimento sustentável – situação trabalhada na Atividade 3. Propomos que os estudantes apresentem suas ideias e argumentos sobre o assunto, de modo que eles enxerguem esse componente curricular como parte presente de esferas importantes na sociedade e no desenvolvimento da cidadania. (SÃO PAULO, 2021b, p.171)

Neste momento também entra como sugestão, a realização de uma conversa informal introduzindo a noção de monômios e as operações relacionadas a geometria.

2- Relação entre números, letras e figuras

Com o objetivo de construir expressões algébricas a partir de padrão, esta etapa conta com exercícios apresentando sequencias numéricas, com questão elaboradas em sequência afim de ir motivando a generalização pelo aluno. Posteriormente é utilizada a mesma abordagem apresentando figuras.

Além dessas atividades mencionadas, também é proposto ao estudante a criação de uma sequência com regularidades e socializar com a turma a construção pensada.

3- Equações do 1º grau

Para tratar e formalizar os conceitos envolventes pelas equações de 1º grau são apresentadas situações problemas com questões para os alunos.

FIGURA 4.3: Situação problema de equações do 1º grau

1. Uma gráfica produz 600 impressões de páginas A4 a cada hora. Uma escola solicita os serviços dessa gráfica para realizar a impressão de 1.200 atividades avaliativas bimestrais, com 4 páginas A4 cada.

a. Em quantas horas as impressões ficarão prontas?

Resposta: espera-se que os estudantes identifiquem que a quantidade de horas total (q) é obtida pelo produto da quantidade de horas (t) por 600, ou seja, $q = 600t$. Então, tem-se que 4800 = 600 · t ⇒ t = 8 horas.

b. A escola pagou R$ 384,00 pelo serviço. Desse modo, quanto custou cada página A4?

Resposta: espera-se que os estudantes identifiquem que essa situação pode ser solucionada por meio de uma equação do 1º grau, por exemplo. A equação que modela esse problema é a seguinte: 4800x = 384, sendo x o valor de cada página A4. Desse modo, 4800x = 384 ⇒ x = $\frac{384}{4800}$ ⇒ x = 0,08.

Fonte: Caderno do Professor Aprender Sempre (Vol.2) 2021 .

No documento é destacado ao professor a importância de deixar claro ao estudante os problemas que envolvem a noção de incógnita e aqueles que envolve a noção de variável.

Seguindo na mesma série do 8º ano do ensino fundamental, o conteúdo segue sua abordagem na sequência de atividades 3. Porém o nome equação não volta a aparecer, sendo proposto o trabalho de desenvolvimento diante do conteúdo de sequencias numéricas, leis de formação, equivalência de expressões numéricas, e como fatorar expressões numéricas.

Com relação as equações, esse estudo volta aparecer aos alunos no 9º ano do ensino fundamental, com a sequência de atividades 2 do volume 1 do material Aprender Sempre, na seguinte ordem:

1- Incógnita e variável na equação linear de 1º grau

Para essa abordagem é sugerida discussões com a turma e resolução dos problemas propostos. A primeira situação problema é apresentado com intuito de exemplificar e chamar a atenção dos alunos para todos os conceitos envolvidos.

FIGURA 4.4: Situação problema conceito de equações do 1º grau

Situação-problema 1

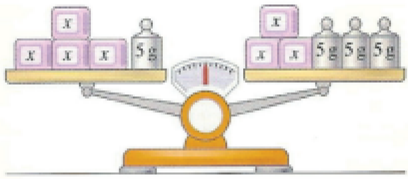


Imagem: OBMEP 2015.

Temos quatro cubinhos e um peso de 5 g do lado esquerdo, três cubinhos e três pesos de 5 g do lado direito da balança.

Os pratos estão equilibrados, quer dizer que os cubinhos de um lado têm a mesma massa dos do outro.

Não sabemos quanto pesam os cubinhos, por isso eles foram identificados com a letra "x".

Neste caso, é possível descobrirmos quanto pesa o cubinho x? Para que os pratos da balança se mantenham equilibrados são necessários quantos gramas de cada lado da balança?

Fonte: Caderno do Professor Aprender Sempre (Vol.1) 2021.

Nesta etapa é apresentado ao estudante o conceito de equação: **"Chamamos de equação toda sentença matemática aberta, expressa por uma igualdade, e que apresenta, pelo menos, uma letra representando um valor desconhecido, que chamamos de incógnita"** (SÃO PAULO, 2021a, p.249)

O problema acima é tratado por passos, apresentando sequência de questionamentos, levando o aluno a resolução do problema e no caminho apresentando alguns conceitos e relembrando outros como o de equação polinomial, incógnita, expressão algébrica. Posteriormente é apresentado ao estudando um problema a ser resolvido por ele:

Problema 4.2.

O painel do carro do Armando não mostra quantos litros de combustível ainda possui no tanque mostra apenas o nível, mas ele sabe que o tanque tem uma capacidade de armazenamento de 45 litros de combustível. Ao parar num posto de combustível, Armando, ao perceber que o litro do etanol estava na promoção, no valor R$ 2,69, pediu para completar o tanque com etanol e pagou R$80,70. a) quantos litros de etanol foram abastecidos? b) haviam quantos litros de etanol no tanque do carro? ((SÃO PAULO, 2021a, p.250)

A resolução esperada se baseada na interpretação do problema com estratégia de resolução através das equações de 1º grau. Desta forma o aluno deve chegar na equação representada abaixo, que deve ser resolvida com manipulação algébrica, já conhecida pelo estudante e relembrando a ideia de balança relacionada ao conceito de equações: $2,69x = 80,70$

$$x = \frac{80,70}{2,69}$$

$$x = 36$$

Para essas atividades são ressaltado o auxílio da calculadora, uma vez que os alunos estudam operações com números racionais somente no semestre seguinte, desta forma o objetivo da aula está no desenvolvimento do pensamento algébrico e o uso de equações como ferramenta de resolução.

Porém uma possível abordagem seria relembrar o conceito de balança envolvido para justificar ao aluno que podemos utilizar a propriedade de multiplicar ambos os termos por 100,

$$(\times 100)\ \ 2,69x = 80,70\,(\times 100)$$

$$269x = 8070$$

e desta forma tornando possível o termino do exercício pelo aluno.

2- Sistemas de equações lineares de 1º grau

Essa etapa é dividia em três partes: contexto, representação geométrica no plano cartesiano e resolução.

A primeira parte sobre contextualização, é utilizada para relembrar os conceitos de equação polinomial e suas operações através de exercícios e discussões com a turma. Posteriormente são apresentados problemas (entre eles, problemas de vestibulares) e abordado o conceito de sistemas lineares de 1º grau, propondo que o aluno construa as equações que correspondem ao problema.

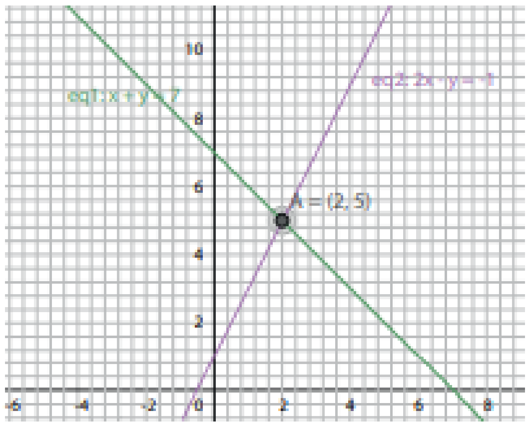
Para o estudo da parte geométrica é proposto que o professor elabore uma aula do *software geogebra* ou a dinâmica de atividades no papel quadriculado, quanto as apostila este estudo é realizado com exercícios levando o aluno a compreender que "para cada equação de um sistema linear pode existir uma representação geométrica para ela e que as coordenadas do ponto de intersecção das duas retas é a solução do sistema linear" (SÃO PAULO, 2021a, p.254).

FIGURA 4.5: Situação problema equações do 1º grau no plano cartesiano

2. Construa as retas no plano cartesiano que contém as soluções dos sistemas de equações:

a. $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$ **(2, 5)**

Representação geométrica do sistema linear



Fonte: Arquivo do autor

Fonte: Caderno do Professor Aprender Sempre (Vol.1) 2021.

De forma contínua, é apresentado ao estudante situações problemas com intuito de apresentar as estratégias para resolver equações lineares de 1º grau, pelo método da adição e o método da substituição. Desta forma na presente etapa é realizado apenas uma apresentação de cada método e proposto uma atividade para cada método, possibilitando ao a reprodução do método.

Ainda nesta série a temos a continuação dos conceitos relacionados a álgebra expostos na sequência de atividades 2 e 3 do volume 2 deste material, com estudos e atividades de monômios e polinômios e suas operações, chegando as equações do primeiro grau com duas incógnitas, para posteriormente trabalhar as estratégias de resoluções:

1- Equações do 1º grau com duas incógnitas

Essa abordagem é realizada apresentado por problemas e atividades de duas incógnitas, trabalhando com o aluno a construção da equação que represente o problema.

Neste sentido o estudo de equações com duas incógnitas é vinculado representação gráfica com sua construção no plano cartesiano, relembrando as noções de eixos (eixo das abscissas(x) e eixo das ordenadas (y)) e de par ordenado apresentado a solução da equação.

As atividades contam com relembrar os conceitos envolvidas as equações de 1º grau, verificação do par ordenado que soluciona a equação, e para finalizar é proposto um desafio que contempla a criação de uma situação problema envolvendo equações do 1º grau com duas incógnitas

2- Sistema de equações do 1º grau

Com a introdução das estratégias já apresentada ao aluno no volume1 do material, esta etapa retoma as abordagens de sistemas de equações do 1º grau, sua representação gráfica e os dois métodos de resolução dos sistemas.

Desta forma o primeiro momento é sugerido que o aluno inicie a atividade sozinho resolvendo problemas propostos, de forma que na resolução o professor apresente e relembre os conceitos anteriores. Para a retomada da representação gráfica de equações, o material propõe que para cada exemplo as retas sejam construídas no plano cartesiano, de forma que seja apresentado em seguida a resolução do problema escolhendo um dos métodos de resolução

E para finalizar as abordagens que se referem ao ensino de equações algébricas nos anos finais do ensino fundamental, foram apresentados no material diversas situações problemas que deveriam inicialmente ser resolvidas pela técnica de substituição e posteriormente pelo método da adição.

Finalizando toda a abordagem proposta aos anos finais do ensino fundamental, para o desenvolvimento acerca das concepções de equações.

Capítulo 5

Discussão

A partir das análises realizadas buscamos evidenciar caracterizações no uso de equações em seu desenvolvimento histórico e as características previstas ao seu ensino.

Ao analisar os aspectos históricos do desenvolvimento da álgebra, foi possível perceber as diferentes noções de equações que concebida ao longo da história. Assim como apresentado por Ribeiro (2009) a partir de um estudo epistemológico histórico,

> A conclusão que emana das reflexões propiciadas por este estudo epistemológico-histórico, permite-me apresentar ao menos três formas diferentes de se conceber equação: uma relacionada a um caráter pragmático, outra relacionada a um caráter geométrico e uma terceira relacionada a um caráter estrutural. (RIBEIRO ,2009, p.83)

O caráter pragmático está relacionado ao uso das equações para busca de soluções de problemas práticos, enquanto o caráter geométrico o ainda que relacionado aos problemas práticos, é configurado pelas manipulações geométricas apresentadas nas soluções. Por outro lado, o caráter estrutural tem o foco na generalização se aproximando das concepções de equação ao usar procedimentos algébricos em resoluções (RIBEIRO, 2009)

Essas diferentes concepções, foram evidenciadas de acordo com a civilização estudada:

1. Mesopotâmia: A relação da álgebra na era dada com objetivo de resolver problemas práticos e específicos assumindo desta forma concepções de estilo pragmático, com resoluções de características geométricas através de instruções e passos de procedimentos, estando presente o caráter geométrico

a partir de uma escrita algébrica retórica.

2. Egito: O objetivo de uso da álgebra no Egito se assemelhava ao da Mesopotâmia ao conceber o estilo pragmático resolvendo problemas práticos, mas as com características de resoluções baseadas na forma intuitiva de igual quantidades com auxílio do método da falsa-posição resolvendo situações específicas, com escrita também pautada na retórica.

3. Gregos: diferente das anteriores a álgebra grega trouxe resoluções baseadas na forma dedutiva, ainda que pautada na álgebra geométrica e em resoluções de problemas específicos.

4. China: A matemática na China foi desenvolvida em vários aspectos, entre eles as resoluções que propunham métodos dedutivos, com caráter algébrico identificados pela generalização dos algoritmos especificados pelos métodos da falsa posição, regra de três, proporção, etc. Essa matemática apresentou aspectos do estilo pragmático nos desenvolvimentos algébricos.

5. Hindus: Na índia a forma de conceber a matemática era diferente pois propunham uma generalização ao apresentar simbologias as sistema de numeração sendo o uso da álgebra sincopada, e com resoluções intuitivas que aproximavam o caráter algébrico e a concepção inicial de uma álgebra estrutural, relacionadas a problemas práticos.

6. Árabes: Com as contribuições dos hindus, os árabes conceberam a generalização do sistema de numeração e também atribuída as resoluções, concebendo a álgebra estrutural ao utilizarem e desenvolverem algoritmos de resolução aos problemas diversos.

O segundo momento de análise procurou apresentar a concepção dos documentos normativos ao ensino de álgebra, e entender as características que determinam este ensino atualmente. A partir deste objetivo evidenciou-se diversas modificações ao ensino de Álgebra e diferentes atribuições à sua finalidade no desenvolvimento do aluno.

As últimas mudanças são apresentadas pelas diretrizes nos PCNs e na BNCC, como mostra o quadro:

FIGURA 5.1: Matriz de referência das habilidades (unidade temática de Álgebra).

	PCN	BNCC
Quanto ao bloco temático	Números e Operações	Álgebra
Quanto à finalidade	Desenvolver e exercitar a capacidade de abstração e generalização para resolução de problemas	Desenvolver o pensamento algébrico
Quanto às noções fundamentais	Generalização; Linguagem algébrica; Relação entre duas grandezas.	Equivalência; variação; interdependência; proporcionalidade.
Quanto ao início dos estudos	A partir do 7° ano do Ensino Fundamental	Desde os anos iniciais

Fonte: Scremin & Righi (2020).

O ensino da álgebra nos PCNs era interpretado junto aos conceitos de números e operações, pautado na finalidade de resolver problemas com generalização e abstração, iniciando os estudos apenas no 7º ano do Ensino fundamental,

> percebeu-se que a Álgebra conforme era proposta nos PCN estava muito enraizada na Aritmética e, portanto, trabalhada na perspectiva da aritmética generalizada, não transpassando para suas outras dimensões: funcional, equações e estrutural. (SCREMIN & RIGHT,2020, p.430)

Esta abordagem sugerida pelo PCN, trabalhava os conhecimentos acerca de equações ao concebe-lás como uma generalização da aritmética. Essa noção do uso de equações ligadas a aritmética está presente na matemática antiga da Mesopotâmia, e do Egito que recaiam, por vezes ao uso de métodos por tentativa, ou regras de manipulações e aplicação de algoritmos, para resolver problemas pragmáticos sem aproximações com as noções de abstração.

Essa abordagem é importante para proporcionar uma transição suave da aritmética para a álgebra nos anos finais no ensino primário e iniciais do fundamental. Porém não podemos limitar a álgebra e o ensino de equações abordando somente por este significado.

Nesta linha, a BNCC trouxe o enfoque para o desenvolvimento do pensamento algébrico com introdução ao conteúdo desde os anos iniciais do ensino fundamental seguindo de forma linear as séries adjacentes, conforme visto na matriz de referência com abordagens primitivas de propriedades de igualdade e identificação de padrões.

Esse enfoque para o desenvolvimento do pensamento algébrico se alinhou aos objetivos do ensino previstos no currículo paulista, quanto aos reflexos das necessidades de habilidades atuais dos alunos, ao contribuir para o desenvolvimento do pensamento computacional.

Quanto as concepções acerca de equações que o ensino atual vem trabalhando, procuramos classifica-las do ponto de vista de Ribeiro (2009) que apresenta seis categorias em relação aos multisignificados de equação, entre elas estão a conceção pragmática, a geométrica e estrutural evidenciadas historicamente, englobando também a concepção Estrutural-Conjuntista relacionando a noção de equações com a noção de conjuntos, a concepção Processual-tecnicista que entende o conceito de equações através da resolução e, a Axiomático-postulacional onde não é preciso definir o conceito de equações.

As primeiras noções acerca dos conceitos que envolvem e contribuem para o ensino de equações algébricas foram identificadas um estudo que concebeu as equações sem a necessidade de definição, que do ponto de vista apresentado pode ser classificado como Axiomático-postulacional. Por outro lado, a concepção geométrica esteve muito presente nas primeiras atividades, ao relacionar propriedades de áreas e de perímetros de figuras geométricas com a linguagem algébrica, e pela noção dedutiva ao propor primeiras abordagens através de conhecimento já conhecidos pelos alunos.

Outra identificação importante foi na definição do conceito de equação relacionado a balança, trazendo situações problemas e sugerindo construção de atividades que trouxessem problemas práticos, se aproximando da concepção pragmática de equações onde identificamos diversas contribuições históricas deste desenvolvimento, pelos povos da Mesopotâmia e Egito .

A partir dessas discussões, foi possível elaborar um quadro de considerações dos aspectos da álgebra, a partir de alguns povos e as características na abordagem do ensino de equações pelo material didático atual.

TABELA 5.1: Categorias de multisignificados de equações (Ribeiro, 2009)

Pragmático	Geométrico	Estrutural	Estrutural-conjuntista	Processual-tecnicista	Axiomático-postulacional
Características a partir dos povos					
Mesopôtamia Egito China	Mesopôtamia Grécia	Hindus Árabes			
Características no material de Ensino					
Conceito de equações	Atividades de linguagem algébrica e a geometria			Técnicas para resolver equações	Primeira atividades de equações

Neste quadro, foi possível perceber que a escolha dos povos para identificação das contribuições da álgebra mostrou apenas três das categorias dos significados de equações. Desta forma, ampliar os estudos possibilitariam as outras identificações na tabela como exemplo, as contribuições que ocorreram no campo das equações entre o período da idade média, do iluminismo e pós seculo XX, que mostrariam as características, principalmente para completar a coluna processual-tecnicista e axiomático-postulacional.

Quanto ao ensino, não conseguimos identificar o aspecto estrutural sendo tratado no decorrer das abordagens. Este fato, pode ser explicado pela mudança na concepção de álgebra proporcionada pela BNCC. As novas definições apontaram a importância de iniciar as primeiras abordagens ainda nas séries iniciais. Desta forma, o ensino a partir da aritmética generalizada passou a ser tratado no ensino primário para ampliar as concepções e fortalecer o desenvolvimento do pensamento algébrico.

O material também mostrou que diversas atividades se baseavam em reprodução de técnicas, característica que provem das abordagens baseadas em exercícios com foco no resultado, e estão relacionadas a concepção Processual-tecnicista ao entender as equações pela resolução e técnica utilizada. Porém diversas vezes foi proposto ao professor que complementasse este material com problemas do cotidiano do estudante a fim de estabelecer um ponto do conhecimento justificando a importância daqueles aprendizado.

Desta forma, entendemos que essa mudança proposta pela BNCC foi fundamental ao ensino de equações, pois propõe ao aluno diferentes abordagens ampliando o desenvolvimento no ensino dos conceitos relacionados.

> Isso reforça a importância de a formação de professores reconhecer essa nova diretriz, que está pautada na nova sociedade, e buscar novas metodologias e abordagens que venham a contribuir com o processo de ensino. (SCREMIN & RIGHT, 2020, p.432)

Ao olhar para as habilidades norteadores escolhidas como essenciais para o ensino de álgebra, identificamos diversas concepções de equações que esses objetivos poderiam trabalhar com o estudante. Porém quando analisamos o material que tem assumido abordagem principal no ensino atual, não encontramos algumas das habilidades selecionadas na tabela como essenciais. Apesar disto, nos deparamos com várias sugestões de complementação de abordagem através dos materiais propostos pelo Currículo em Ação. Desta forma, destacamos a necessidade do professor em complementar o material buscando outras atividades e formas de ensino.

Vale ressaltar, que não analisamos nesta pesquisa as apostilas do currículo em ação ou os livros didáticos que chegam nas escolas, por meio do Programa do Livro didático que podem apoiar o professor ao buscar complementações ao material. O que colabora para a importância de o professor conhecer os diferentes materiais disponíveis para implementar com a sua prática pedagógica.

De forma geral, procuramos apresentar como vem sendo realizado o estudo de equações atual, com as mudanças e ampliação de habilidades no conhecimento de álgebra propostas pela BNCC. Neste trabalho, olhamos para as abordagens do ensino fundamental, mas salientamos a importância de continuar o trabalho considerando o ensino médio, etapa esta, onde o estudo de equações do 2º grau é apresentado ao estudante. Analisar as equações no ensino médio se torna possível, uma vez compreendida as concepções apresentadas ao aluno no ensino fundamental relacionadas as equações algébricas.

Capítulo 6

Considerações Finais

De modo geral, este trabalho apresentou um estudo sobre as concepções do uso de equações algébricas no ensino fundamental. Através das pesquisas bibliográficas, reunimos diferentes percepções históricas atribuídas a noção de equações e as compreensões acerca dos aprendizados importantes ao seu ensino. Inicialmente, o estudo apresentou alguns desenvolvimentos no campo da matemática partindo das civilizações mais antigas e aos conhecimentos de álgebra, que reconhecem as equações como tratamos hoje. Após os resultados apresentados partimos do estudo histórico para o ensino de álgebra, evidenciando as habilidades elegidas pelos documentos normativos da educação, para o ensino de equações.

Para isso, focamos em analisar as primeiras concepções apresentadas, olhando para as propostas nos anos finais do ensino fundamental, onde é apresentado ao aluno as equações do primeiro grau. Porém, ressaltamos a importância de continuar o estudo para as séries do ensino médio a fim de compreender toda a noção acerca de equações algébricas que é apresentado ao aluno em sua fase escolar.

Seguindo as concepções de Ribeiro, o trabalho de forma articulada entre as noções de equação contribui para uma formação ampla dos conceitos de equações. Desta forma, conceber a álgebra como uma generalização da aritmética leva ao equívoco de apresentar as equações de modo tradicional, com sequência de técnicas ,atribuindo a noção de incógnita como um número, limitando as outras dimensões que contemplam os conceitos de equações. O que sustenta a importância das mudanças e o enfoque que a BNCC sugeriu ao ensino de Álgebra, ampliando o estudo realizado referente as equações algébricas

Entendemos que esse estudo histórico do desenvolvimento da álgebra foi fundamental para identificarmos as diversas concepções relacionadas as equações, contribuindo para o pensar no ensino em diferentes perspectivas tornando possível as diferentes abordagens em aula.

Por fim, no sentido que propõe o presente trabalho ao entender os diferentes contextos e concepções acerca de um conteúdo, contribui para a formação de professores da educação básica, ao compreendermos a necessidade de articulação entre materiais que apoiem seu objetivo em sala de aula. Diante das consultas, percebemos a necessidade de aprofundamentos de estudo e contato com os outros materiais que chegam em sala de aula como apoio ao professor (Livros didáticos e Material Currículo em Ação), de forma a propor referenciais articulados em livros e materiais didáticos que colaborem aos desenvolvimentos das diversas concepções ao uso e ensino de equações algébricas.

Referências Bibliográficas

[1] BRASIL, Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Versão Final. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=79601-anexo-texto-bncc-reexportado-pdf-2&category_slug=dezembro-2017-pdf&itemid=30192 Acesso em: 24 fev. 2021.

[2] BRASIL, Ministério da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais 5ª a 8ª Séries / Volume 03 - Matemática. –Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf Acesso em: 24 fev. 2021.

[3] BOYER, C. B. Historia da Matemática, Revista por Uta C. Merbach, prefácio de Issac Asimov, Sâo Paulo, Editora Edgard Blucher LTDA. 1974..

[4] EVES, H. Introdução a Historia da Matemática, Ed. Campinas, Sâo Paulo, Editora da UNICAMP. 2011.

[5] FIORENTINI, D.; FERNANDES, F. L. P.; CRISTOVÃO, E. M. um estudo, Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. Seminário luso-brasileiro de investigações matemáticas. Universidade de Lisboa, 2005.

[6] GARBI, G. G. O Romance das Equações algébricas, 2.ed. Sâo Paulo, Livraria da física, 2007.

[7] PAQUES, O. T. W, ROVERAN, A. P. Os noves capítulos da arte matemática, de Liu Hui, do século 2 d.C.. Unicamp.2016. Disponível em: https://www.ime.unicamp.br/lem/material-de-apoio/nove-capitulos-arte-matematica-liu-hui-seculo-ii-dc Acesso em 01 jul.2021.

[8] RIBEIRO, A. J. A noção de equação e suas diferentes concepções: uma investigação baseada em aspectos históricos e epistemológicos. Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia. 2009. Disponível em: http://dx.doi.org/10.3895/S1982-873X2009000100005. Acesso em: 24 mai 2021

[9] RIBEIRO, A. J. Equação e conhecimento matemático para o ensino: relações e potencialidades para a Educação Matemática. Bolema, Rio Claro , v. 26, n. 42b, p. 535-558, Apr. 2012 . Disponivel em: https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000200007. Acesso em: 28 mai. 2021.

[10] RIBEIRO, A. J.; MACHADO, S. D. A. Equação e seus multisignificados: potencialidades para a construção do conhecimento matemático. Zetetiké, Campinas, v. 17, n. 31, p. 109 - 128, jan./jun. 2009.

[11] ROCHA, I. L. D., BERTINI, L. D. F. 2019. ÁLGEBRA NO ENSINO PRIMÁRIO BRASILEIRO: sua relação com os problemas de aritmética no início do século XX.

[12] ROQUE, T. Historia da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas, 5.ed. Editora Zahar LTDA, 2012

[13] SÃO PAULO., Secretaria da educacão. Currículo Paulista. EFAPE. 2020. Disponível em: `http://www.escoladeformacao.sp.gov.br/portais/Portals/84/docs/pdf/curriculo_paulista_26_07_2019.pdf`. Acesso em: 10 jun. 2021.

[14] SÃO PAULO., Secretaria da educacão. Material Aprender Sempre - Ensino Fundamental. Volume2. EFAPE. 2021a. Disponível em: `https://efape.educacao.sp.gov.br/curriculopaulista/educacao-infantil-e-ensino-fundamental/aprender-sempre-ef/`. Acesso em: 12 jun. 2021.

[15] SÃO PAULO., Secretaria da educacão. Material Aprender Sempre - Ensino Fundamental. Volume2. EFAPE. 2021b. Disponível em: `https://efape.educacao.sp.gov.br/curriculopaulista/educacao-infantil-e-ensino-fundamental/aprender-sempre-ef/`. Acesso em: 12 jun. 2021.

[16] SÃO PAULO., Secretaria da educacão. Centro de Mídias. EFAPE. 2021b. Disponível em: `https://centrodemidiasp.educacao.sp.gov.br/`. Acesso em: 10 jun. 2021.

[17] SCREMIN, G.; RIGHI, F. P. Ensino de álgebra no ensino fundamental: uma revisão histórica dos PCN a BNCC. Ensino em Re-Vista, v. 27, n. 2, p. 409-433, 28 abr. 2020. Disponível em: `http://www.seer.ufu.br/index.php/emrevista/article/view/54019`. Acesso em: 06 jun.2021