UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS - UFSCar
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA PARA A SUSTENTABILIDADE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS
PPGECE

MARIA LAURA DE BIAGGI DE MARCO

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO: UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM A PARTIR DA MODELAGEM MATEMÁTICA COM AUXÍLIO DO GEOGEBRA

SOROCABA
2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS - UFSCar
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA PARA A SUSTENTABILIDADE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS
PPGECE

MARIA LAURA DE BIAGGI DE MARCO

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO: UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM A PARTIR DA MODELAGEM MATEMÁTICA COM AUXÍLIO DO GEOGEBRA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Extas da Universidade Federal de São Carlos, campus Sorocaba, como exigência parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Exatas.
Orientador: Prof. Dr. Rogério Fernando Pires

Sorocaba
2021

Marco, Maria Laura De Biaggi de

Teorema Fundamental do Cálculo: uma proposta de abordagem a partir da Modelagem Matemática com auxílio do Geogebra / Maria Laura De Biaggi de Marco -- 2021.
67f.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São Carlos, campus Sorocaba, Sorocaba
Orientador (a): Rogério Fernando Pires
Banca Examinadora: Evaneide Alves Carneiro, Graciele Paraguaia Silveira
Bibliografia

1. Teorema Fundamental do Cálculo. 2. Modelagem Matemática. 3. Modelação Matemática. I. Marco, Maria Laura De Biaggi de. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática (SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Maria Aparecida de Lourdes Mariano - CRB/8 6979

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Maria Laura de Biaggi de Marco, realizada em 25/11/2021.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Rogerio Fernando Pires (UFU)

Profa. Dra. Evaneide Alves Carneiro (UFU)

Profa. Dra. Graciele Paraguaia Silveira (UFSCar)

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.
O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas.

AGRADECIMENTO

Agradeço a Deus pelo plano de vida que traçou para mim e por todas as pessoas que encontrei no caminho e que contribuíram para que eu pudesse chegar até aqui: minha imensa Gratidão!

RESUMO

As disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral para alunos de Ciências Exatas no Ensino Superior requerem um entendimento preciso dos temas para evitar que seja um caminho árduo de aprendizagem e construir uma base sólida e é de responsabilidade dos professores no seu processo de ensino buscar opções eficazes. O presente trabalho tem por objetivo apresentar uma abordagem do Teorema Fundamental do Cálculo, mais especificamente, sobre aplicações de integrais a partir dos pressupostos da modelagem matemática, usando recursos tecnológicos. Para tanto, inicialmente foi realizado um estudo de cunho histórico-epistemológico na tentativa de compreender como esse conceito foi se desenvolvendo ao longo da história, desde a Idade Antiga até Newton e Leibniz que chegaram ao Teorema Fundamental do Cálculo o qual relaciona a integração e a derivação como operações inversas. Na sequência, foi realizado um estudo sobre a utilização da modelagem matemática como metodologia de ensino seguindo os pressupostos Biembengut e Hein (2019), Bassanezi (2015) e Bassanezi (2018). E por fim, foram elaboradas duas sequências de atividades pautadas nos pressupostos da modelagem matemática. A sequência 1, versa sobre o cálculo de área a partir de uma imagem de um lago e a sequência 2, trata do volume a partir de uma imagem de um copo. Em ambas, o desenvolvimento da solução foi realizado conforme as etapas do processo de modelagem matemática e modelação e teve como ferramenta auxiliar o software GeoGebra.

Palavras-chave: Teorema Fundamental do Cálculo. Modelagem Matemática. Modelação Matemática. Ensino Superior. Aplicação. GeoGebra.

ABSTRACT

The disciplines Differential and Integral Calculus for STEM students require a precise understanding of the themes to avoid it being an arduous path of learning and building a solid foundation, and it is the teacher's responsibility in their teaching process for the best options. This paper aims to present an approach to the Fundamental Theorem of Calculus, but specifically, applications of integrals and assumptions of mathematical modeling, using technological resources. For this purpose, a study of a historical-epistemological nature was carried out in an attempt to understand how this concept has developed throughout history, from the Ancient Age to Newton and Leibniz, who arrived at the Fundamental Theorem or derivation as inverse operations. Next, carried out a study on the use of mathematical modeling as a teaching methodology following the assumptions of Biembengut and Hein (2019), Bassanezi (2015), and Bassanezi (2018). And finally, two sequences of activities based on assumptions of mathematical modeling were elaborated. Sequence 1 was developed to achieve the calculation of the area of an image of a lake and sequence 2 was elaborated to provide a road map for the calculation of the volume of an image of glass. In both, the development of the solution was carried out according to the steps of the mathematical shaping and modeling process and had the GeoGebra software as a calculation tool.

Keywords: Fundamental Theorem of Calculus. Mathematical Modeling. Mathematical Shaping. University Education. Application. GeoGebra.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Matemática é uma ciência cujas ferramentas e objetos de estudos apresentam aplicações em diversas outras áreas do conhecimento, como na Biologia, nas Engenharias, na Física entre outras. Apesar de tantas aplicações, no processo de ensino aprendizagem ainda existe dificuldade em se mostrar tais aplicações das ferramentas matemáticas em problemas envolvendo diferentes contextos, e muitas vezes essa falta de vinculação com o cotidiano e o excesso de abstração podem levar o estudante ao desinteresse ao longo de seu processo de escolaridade, podendo isso refletir também no Ensino Superior, especialmente nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral na área das Ciências Exatas como Matemática, Física, Química, Engenharias, Tecnologia e outras graduações. Sobre esse fato, em sua tese de doutorado, Grande (2013, p.23) afirma que:

> Muitas pesquisas endossam e relatam as dificuldades, a incompreensão e os obstáculos apresentados pelos alunos ao entrarem em contato com alguns conceitos abordados em um curso de Cálculo. Alguns estudantes, em muitas situações, podem se sentir como se estivessem entrando em um novo mundo que fora até então totalmente inexplorado, mesmo pressupondo-se conhecer alguns assuntos abordados no ensino fundamental e médio, como funções e números reais dentre outros.

Igualmente difícil é o processo de ensino pois os professores buscam sempre meios de tornar o processo de ensino aprendizagem mais eficaz através de recursos complementares ao tradicional, uma vez que aprender é relacionar experiências para criar os conceitos e, assim, levar ao entendimento.

É nessa linha de pensamento que apresento algumas sugestões de aplicações do tema específico dentro da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral como o Teorema Fundamental do Cálculo, para professores do Ensino Superior, como uma forma de contribuir com o entendimento e consequente desempenho dos acadêmicos na disciplina de Cálculo dos períodos iniciais nos cursos de graduação de Ciências Exatas. Fazer uso de algumas aplicações, é ir além das definições, apresentação de teoremas e demonstrações desses e de listas de exercícios, não que isso não seja importante e não possa fazer parte do processo, mas é interessante que as aplicações façam parte do jogo, podendo disparar o processo de construção do conhecimento.

Desta forma, o presente trabalho tem por objetivo apresentar uma abordagem para o Teorema Fundamental do Cálculo, especialmente para o estudo das integrais seguindo os pressupostos da modelagem matemática com o auxílio do software Geogebra. A inspiração veio do trabalho de Nascimento e Pires (2019) apresentado na XV CIAEM (Conferência Interamericana de Educação Matemática) em Medellin, Colômbia em 5-10 maio de 2019.

Um entendimento preciso de temas das disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral é o que leva a uma base sólida e se transforma no alicerce do aprendizado futuro. Uma maneira de adquirir esse entendimento é entrar em contato com a História do Cálculo que nos auxilia a melhorar as aulas, pois é possível aprender com os antigos para transformar o futuro. Os primórdios da epistemologia do Cálculo nos ensinam modos diferentes de apresentar complexos conteúdos de Cálculo de várias áreas para os alunos.

Assim, no capítulo 2 intitulado Cálculo Diferencial e Integral: um estudo de sua história e epistemologia, é apresentada a trajetória do Cálculo na História da Matemática fundamentada em Howard Eves, Ubiratan D'Ambrósio, Carlos Valente e Wanderley Moura Rezende, desde a Idade Antiga até Newton e Leibniz que chegaram ao Teorema Fundamental do Cálculo, o qual relaciona como processos inversos entre si, a derivação e a integração, que são os dois conceitos básicos do Cálculo Diferencial e Integral.

No capítulo 3 intitulado Modelagem Matemática: metodologia de pesquisa de ensino, traz além as definições de modelo e modelagem matemática, toda sua relevância no processo de ensino aprendizagem como sendo um método de ensino da Matemática, baseado em Biembengut e Hein (2019), Bassanezi (2015) e Bassanezi (2018). Aqui são exploradas as principais etapas no processo da Modelagem: Interação com o problema, Matematização e o Modelo Matemático.

Na sequência, no capítulo 4 designado Aplicações, são apresentadas as sugestões de passos para auxiliar os professores de Cálculo do Ensino Superior de Ciências Exatas dentro das etapas do processo de modelagem proposto por Bassanezi (2018) e Biembengut e Hein (2019). As aplicações do Teorema Fundamental do Cálculo apresentadas são o cálculo da área e volume com o auxílio do software Geogebra como recurso tecnológico.

Finalizando o trabalho, no capítulo 5 denominado Considerações Finais que constitui um breve resumo desse trabalho como um todo, ressaltamos a importância do entendimento da História da Matemática sob o olhar de todo desenvolvimento, evolução e superação das dificuldades que os grandes matemáticos passaram para concluírem seus teoremas, ideias e conceitos do Cálculo Diferencial e Integral, em particular. Aqui, também, é destacado como a Modelagem e Modelos Matemáticos se desenvolveram em conjunto com a própria Matemática. E finalizando como as sugestões apresentadas podem acrescentar e contribuir com o professor do Ensino Superior sobretudo nos cursos de Ciências Exatas como Engenharias, Arquitetura, para construção de uma sequência de ensino para aplicações do Teorema Fundamental do Cálculo com o auxílio de recursos tecnológicos hoje disponíveis.

2 CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: UM ESTUDO DE SUA HISTÓRIA E EPISTEMOLOGIA

Neste capítulo, apresentamos reflexões sobre a história do cálculo sob o viés da epistemologia fundamentando-se em Howard Eves, Ubiratan D'Ambrósio, Carlos Valente e Wanderley Moura Rezende, com o propósito de destacar a dificuldade dos matemáticos e a importância dos trabalhos de Isaac Newton, John Wallis, Isaac Barrow e Gottfried Wilhelm Leibniz, e também a descoberta da diferenciação e integração como operações inversas uma da outra, que é conhecida como Teorema Fundamental do Cálculo. Este feito foi realizado através de seus predecessores com toda complexidade e dificuldade de cada época. O cálculo do limite da soma de quantidades infinitamente pequenas é o fundamento do Cálculo Integral, como as taxas de variação para valores também infinitamente pequenos é a base do Cálculo Diferencial que surgiu depois do Cálculo Integral. Stewart (2016) destaca através de uma síntese a importância do Teorema Fundamental do Cálculo na História do Cálculo:

> O Teorema Fundamental do Cálculo é inquestionavelmente o mais importante do Cálculo e realmente um dos grandes feitos da mente humana. Antes da sua descoberta, desde os tempos de Eudóxio e Arquimedes até os de Galileu e Fermat, os problemas de encontrar áreas e volumes e comprimentos de curvas eram tão difíceis que somente um gênio poderia fazer frente ao desafio. Agora, porém, armado com o método sistemático que Leibniz e Newton configuraram para o Teorema Fundamental, veremos nos capítulos a seguir que esses problemas desafiantes são acessíveis a todos nós.(STEWART, 2016,p.353).

Foi no século XVII que, os então considerados os inventores do Cálculo Diferencial e Integral, Newton e Leibniz, relacionaram a integração e a derivação como operações inversas, e tal relação é dada pelo Teorema Fundamental do Cálculo.

2.1 O CÁLCULO E OS REGISTROS MATEMÁTICOS DA IDADE ANTIGA

Em relação à Matemática, segundo D'Ambrósio e Valente (2016), na região da Bacia do Mediterrâneo que incluía a Mesopotâmia e as civilizações do Antigo Iraque (vale do Nilo), particularmente a civilização Egípcia e as civilizações Grega e Romana, o cenário dessa região era o desenvolvimento da medição geográfica de terras devido ao hábito egípcio histórico da mensuração dos campos depois das cheias do rio Nilo para o cálculo de impostos e controle das propriedades. Tal hábito propiciou a necessidade do cálculo preciso das áreas planas que gerou o termo grego geometria: geo(terra) + metria(medição).

É possível perceber que as ideias iniciais do Cálculo, apesar de ainda não fazer uso dessa denominação, eram fundamentadas em questões práticas envolvendo geometria para atender os interesses administrativos e econômicos sobre o território no que se refere respectivamente a delimitação das áreas e cobrança das taxas.

Ainda no Egito, D'Ambrósio e Valente (2016) afirmam que uma das linhas de desenvolvimento dessas ideias matemáticas foi a de soluções de problemas do cotidiano que foi bem delineada com a construção das pirâmides e refinamento da sociedade egípcia, onde houve a inevitabilidade de sair do plano e introduzir-se na matemática dos objetos tridimensionais. O Papiro de Moscou e o Papiro de Rhind, ambos com data do segundo milênio antes de Cristo, sustentam este conteúdo matemático.

2.1.1 Antiga Mesopotâmia

Hoje a área equivalente ao Iraque, Síria, Turquia e Irã, foi a Mesopotâmia, o berço da civilização ocidental que era composta pelos povos que habitavam a região delimitada pelos rios Tigre e Eufrates, integrava a Suméria e os Impérios Acadiano, Assírio e Babilônico teve sua evolução no século VI a.C.

Para D'Ambrósio e Valente (2016), a princípio registrado pelos gregos, o raciocínio lógico-matemático babilônico ficou grafado em mais de 400 pequenas tábuas de argila de 1700 a.C. em escrita cuneiforme, ou seja, símbolos em forma de cunha. Esse sistema de escrita cuja criação foi atribuída aos sumerianos, o qual a inspiração divina é manifestada claramente por meio das marcas cuneiformes, objetivava principalmente às práticas de escrituração contábeis ou mercantis e à solução de problemas. A matemática na Mesopotâmia abordava as técnicas elaboradas por sacerdotes eruditos que incluíam práticas educacionais com foco em resolução de problemas de aritmética e em escriturações contábeis ou mercantis. No fim do século V e início do século IV a.C., existiu uma classe sacerdotal cuja responsabilidade era referente a assuntos pertinentes à burocracia, os quais realizavam registros e administravam quantitativamente dados relativos a terras, à criação de animais e outros, e além do armazenamento de dados, realizavam previsões de safras e produção.

Ainda com base nos mesmos autores, foi no século V a.C. que as culturas gregas e persas se manifestaram como os grandes poderes na região e a matemática da Mesopotâmia se encontrou com essas culturas, não apresentando nenhuma relação com a matemática grega que se fundamentava sobre teoremas e provas. O pensar matemático dos babilônicos deu origem ao atual sistema sexagesimal para contabilizar horas, minutos e segundos, e a partir da quantidade aproximada de dias que a terra circula ao redor do sol teve-se a divisão da circunferência em 360 partes, pois a base 60 possui 12 divisores inteiros que facilitariam os diversos cálculos. Os babilônicos se transformaram em notáveis calculistas com destaque no cálculo de juros compostos, raízes quadradas e cubos.

Todo o conhecimento matemático da Mesopotâmia ficou centralizado na classe sacerdotal, que além de criar técnicas de aritmética, era responsável pela parte burocrática quanto aos registros econômicos de maneira quantitativa. Era uma matemática com foco administrativo.

2.1.2 A Antiga Grécia

Na História da Matemática, D’Ambrósio e Valente (2016) enfatizam que o tema mais popular é o desenvolvimento da matemática na Grécia, considerada a base da civilização ocidental. O que se reconhece como a Matemática acadêmica ocidental, tem sua origem atribuída aos gregos. Os destaques na Matemática grega são Tales de Mileto (625 a.C.- 547 a.C.) e Pitágoras de Samos (570 a.C.-500 a.C.). Tales foi capaz de prever um eclipse pois aprendeu astronomia quanto visitou a Babilônia e após visitar o Egito, trouxe a Geometria para a Grécia. Pitágoras estudou com os magos Zoroastristas e com os Indús quando viajou ao Oriente. Apesar do questionamento pelos eruditos modernos sobre a real contribuição dos gregos para a Matemática, Tales e Pitágoras foram indispensáveis na repulsa dos cristãos à Matemática, no momento que o Cristianismo se instala como a religião oficial no mundo romano. É atribuída aos matemáticos e filósofos gregos a partir das discussões originadas na geometria e álgebra, importante contribuição nas bases iniciais da matemática da variação, que é o Cálculo Diferencial e Integral.

Contudo, de acordo com Eves (2011), há indícios que na Grécia antiga foram criadas escolas de raciocínio matemático para defender os princípios de que uma grandeza era gerada a partir de uma quantidade muito grande de partes atômicas impartíveis ou podia ser dividida indefinitivamente. O filósofo grego Zenão de Eleia (450 a.C.) dedicou-se de forma ignescente às dificuldades lógicas escondidas em cada uma dessas hipóteses a ponto de inventar paradoxos. Tais paradoxos influenciaram de modo muito significativo a matemática a ponto de desafiar crenças da intuição comum como: o resultado da soma de um número finito ou infinito de elementos de dimensão zero é zero, ou seja : $n * 0 = 0$ e $\infty * 0 = 0$; e o resultado da soma de uma quantidade infinita de elementos positivos, mesmo que cada um seja infinitamente pequeno, é infinitamente grande ($\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i = \infty$). Apesar de toda argumentação dos paradoxos, os infinitesimais foram descartados da geometria demonstrativa grega.

Também conforme D'Ambrósio e Valente (2016), apesar das dificuldades dos matemáticos gregos em entender as grandezas incomensuráveis, a origem do Cálculo Diferencial e Integral teve suas raízes na Grécia antiga com os instigantes quatro paradoxos de Zenão de Eleia, designados por Aristóteles como Aquiles, Seta, Dicotomia e Estádio e os infinitesimais de Demócrito. A complexidade desses paradoxos levou os gregos ao temor do infinito diante das indagações sobre a divisibilidade do tempo e do espaço. A Dicotomia e o Aquiles relacionam o espaço ao considerarem os infinitos pontos de uma distância; a Seta relaciona o tempo ao considerar que em um instante ela está parada e o Estádio faz relação do espaço e tempo.

O postulado de Arquimedes, enfatizado pelos mesmos autores, anteriormente intitulado como método da exaustão de Eudoxo, tinha como grande diferença em relação ao conceito atual do Cálculo Diferencial e Integral, o denominado "horror do infinito". Os gregos foram levados a temer o infinito diante da discussão da complexidade desses paradoxos em relação às questões que surgiram sobre a divisibilidade do tempo e espaço. Eles ficaram apavorados com os incomensuráveis pois estavam cada vez mais limitados às grandezas mensuráveis ou a dimensões geométricas supostamente contínuas, devido ao fato de não terem explorado adequadamente o *continuum* aritmético, mas destacaram-se enormemente na álgebra geométrica. A teoria das proporções de Eudoxo, a teoria dos irracionais de Teeteto e a teoria dos cinco sólidos regulares que ocupava um lugar de destaque na cosmologia de Platão, são apresentadas de forma notável nos Elementos de Euclides por meio de seus 13 livros.

O cálculo de áreas, volumes e comprimentos de arcos são considerados as questões iniciais da história do cálculo, conforme Eves (2011). Antífon, o Sofista (c. 430 a.C.) realizou uma importante contribuição que foi considerada o embrião do método de exaustão grego: a diferença entre um círculo e um polígono regular inscrito ao fim exaurir-se-ia com as duplicações contínuas do número de lados do polígono. E seria possível montar um quadrado cuja área fosse igual à área do círculo, pois é possível montar um quadrado de área igual à área de qualquer polígono. Esta argumentação considerava que uma grandeza poderia sofrer subdivisões indefinidamente, mas foi desaprovada pois tal procedimento nunca esgotaria a área do círculo. Eudoxo também fez a demonstração utilizando o método de exaustão para o fato de que duas pirâmides de mesma altura e bases equivalentes possuem o mesmo volume. Assim o método de exaustão de Eudoxo (c. 370 a.C.) que seguia a escola de Platão, foi avaliado como resposta aos paradoxos de Zenão e destaca:

> O método todo admite que uma grandeza pode ser subdividida indefinidamente e sua base é a proposição: Se de uma grandeza qualquer se subtrai uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por adiante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie.(EVES,2011,p. 419).

Os autores D'Ambrósio e Valente (2016) afirmam que Arquimedes (272 a.C.-212 a.C.) que se destacou entre os filósofos mais importantes do apogeu grego, por apresentar os princípios básicos do Cálculo no século II a.C., foi considerado o maior matemático e mais importante cientista da antiguidade pois foi um marco na transição de uma matemática pura, matemática no estilo euclidiano abstrato sem preocupação com aplicações, e uma matemática aplicada, ou seja, embora ainda no estilo euclidiano mas voltada para problemas ligados a questões práticas do mundo real. Arquimedes demonstrou que entendia o conceito de limites ao estudar a soma de uma série geométrica. Também calculou o valor de π com uma precisão muito grande utilizando-se de aproximações graduais de poliedros à circunferência; e utilizou a soma de retângulos para encontrar a área sob uma curva e a área de superfície e volume de uma esfera.

Assim, tanto Arquimedes como Eudoxo demonstraram que compreenderam o conceito de limites que é a base dos conceitos de derivada e integral.

Conforme Eves (2011) comenta em seu livro, o método de exaustão e o Princípio de Indução Matemática, , são semelhantes, pois a partir de uma fórmula conhecida pode ser um meio de prová-la, mas não resulta na descoberta inicial do resultado. A questão de como Arquimedes descobria as fórmulas que ele perfeitamente demonstrava pelo método de exaustão, foi esclarecida por meio da descoberta de uma cópia de *O método*, um tratado de Arquimedes em formato de carta enviado para Eratóstenes. A essência do método de Arquimedes considera que para definir um volume ou área, a região correspondente deve ser cortada num número imenso de fatias planas ou paralelas finas e (mentalmente) colocá-las sobre uma alavanca dada, de modo a determinar o equilíbrio com a área de uma figura ou volume e centroide conhecidos.

Ainda de acordo com o mesmo autor, no método de equilíbrio de Arquimedes é nítido o germe da ideia de supor que toda grandeza é composta de um número grande de partes atômicas, apesar dessa linha de pensamento não ter uma comprovação precisa. Com os atuais métodos de limites, pode-se atingir um rigor com o método de Arquimedes a ponto de se confundir com a moderna integração.

Os autores D'Ambrósio e Valente (2016) partem da perspectiva que a matemática grega se mantinha longe de aplicações práticas e cotidianas, típicas de uma sociedade em desenvolvimento e era discutida nas academias que se caracterizavam por ambientes que reuniam poucos das elites intelectuais no estilo euclidiano. Nas academias, fora da visibilidade pública, o foco eram as questões abstratas, sem preocupação prática com base em teoremas e provas, cujo objetivo era o desenvolvimento intelectual; nitidamente presente nas argumentações de Platão sobre a educação.

Os mesmos autores enfatizam que a matemática grega executada pelo povo, foi responsável por importantes e notáveis realizações materiais da civilização grega que estão identificadas na arte, na arquitetura, no comércio e em estratégias militares. A importância de Arquimedes é reconhecida nas suas máquinas de guerra e coordenação de resistência grega às tentativas romanas de dominar Siracusa.

A Grécia Antiga trouxe contribuições de extrema importância para o desenvolvimento da Matemática Aplicada e Pura, que foi todo o fundamento para a definição do conceito de limite, para atingir o conceito de derivada e de integral, por meio dos filósofos e matemáticos Tales, Pitágoras, Arquimedes, Antífon e Eudoxo.

2.1.3 Império Romano

Os gregos foram derrotados pelos romanos em uma grande batalha em Siracusa em 212 a.C., fato este que marcou a ascensão do Império Romano e o declínio do Império Grego. Mesmo sob o domínio romano, foi possível às academias se manterem ativas, com destaque para a de Alexandria, pois a intelectualidade e a cultura grega eram respeitadas e admiradas. Diofante (250 a.C. – 330 a.C.) era da academia de Alexandria e sua obra contém as primeiras ideias da resolução de equações com números inteiros.

Cientificamente, D'Ambrósio e Valente (2016) reiteram que com o Império Romano aderindo à matemática grega aplicada, houve um retrocesso na aproximação das duas linhas, a matemática pura e a matemática aplicada. A matemática aplicada prevalecia em detrimento da matemática teórica no Império Romano. A matemática teórica ressurgiu restrita à elite intelectual do clero após as Cruzadas e no Renascimento que se aproximou da matemática prática.

É claro como a Idade Antiga traz a influência e domínio dos gregos com a matemática prática, que mesmo com a derrota frente aos romanos, se mantiveram com ênfase à sua aplicabilidade. Já a matemática pura se restringiu à elite do clero devido a pouca aceitação.

2.2 O CÁLCULO E OS REGISTROS MATEMÁTICOS DA IDADE MÉDIA

Sob a perspectiva de Rezende (2016a), pouco se evoluiu no período da época da queda do Império Romano até o surgimento do primeiro dos renascimentos intelectuais durante o século I d.C. O longo período de subordinação do conhecimento científico à fé cristã, ocorreu devido ao fato do Cristianismo se tornar a religião oficial de Roma e os sacerdotes e bispos passarem a ter muito poder e autoridade devido à conversão de Constantino, o Grande em 321 d.C.

Durante gerações, segundo o mesmo autor, Santo Agostinho controlou o pensamento ocidental com a teoria da natureza divina do conhecimento, até que nos séculos XII e XIII iniciaram-se as traduções das teorias gregas para o latim. Parte dos filósofos escolásticos se interessaram pelos argumentos do filósofo Aristóteles no que se referia ao infinito, o infinitesimal, a continuidade, dentre outros itens referentes à análise matemática, mas vários desses estavam em conflito com as Escrituras Cristãs, gerando assim reações quanto à influência pagã da filosofia grega nos domínios da ciência. Santo Tomás de Aquino (1225-1274) teve importante influência na construção da convivência harmoniosa da ciência grega e doutrina cristã. Houve importantes mudanças na produção do conhecimento matemático diante da descoberta e a ressignificação da física de Aristóteles, que diante de novos modelos e interpretações dos fenômenos físicos, a matemática abandona as características herdadas dos antigos: estática, finita e rigorosa. Nesta época, os processos infinitos passam a ser uma ferramenta normal da matemática.

Ainda de acordo com o mesmo autor, o desenvolvimento do Cálculo teve uma contribuição dos escolásticos medievais de suma importância no cruzamento do infinito e do contínuo no pensamento matemático. O arcebispo de Canterbury, Thomas Bradwardine (1290 – 1349), tratou as grandezas infinitas como sendo formadas a partir de um número infinito de indivisíveis, ou seja, considerou o infinitesimal como existência potencial do mesmo modo que defendia Aristóteles. O Papa João XXI, Petrus Hispanus (1215 – 1277), priorizou seus estudos a respeito do contínuo e infinito quanto à divisibilidade infinita e agregados infinitos.

Segundo Rezende (2016a), é neste período da história da matemática que o conceito de variação é reconhecido de forma explícita pela primeira vez, em decorrência de uma análise mais quantitativa dos fenômenos físicos com ênfase nos fenômenos cinemáticos. Jean Buridan (1300 – 1358) com seus trabalhos no século XIV, traz a noção de mecânica de impulsão, doutrina esta que influenciou o trabalho em dinâmica de Galileu Galilei (1564 – 1642). A noção de velocidade instantânea, mas não com uma definição precisa, tem início também com os escolásticos.

Neste sentido para o mesmo autor, os filósofos Willian de Occam (1285 – 1347), Alberto de Saxônia (1320 – 1390) e Richard Suiseth (1340 – 1350) também seguiram essa linha de pensamento. Suiseth teve influência nos trabalhos de Nicolau de Oresme (1323 – 1382) cuja intuição geométrica e uso fundamentado de diagramas e sua representação por sistemas de coordenadas é considerada um marco no estudo da variação e por Isaac Newton (1643 – 1727) em seu cálculo fluxional.

Ainda Rezende (2016a) afirma que o antecedente do Cálculo atual foi gerado do pensamento de Oresme por meio de uma demonstração particularmente geométrica, quando ele definiu relações instintivas no sistema de coordenadas entre o movimento, a ordenada, a abscissa, a reta (gradiente da curva) e o espaço que os contém. Assim ficou estabelecida uma nova relação entre a Matemática e a Física, quando a área sob a curva é descrita como uma grandeza física. A construção do conhecimento científico e o papel da matemática nele, se deve a uma respeitável doutrina que os escolásticos viabilizaram de uma só vez da mescla do contínuo da matemática, do movendo da física e do sendo da filosofia.

Nessa direção, a quantidade infinitamente pequena e a infinitamente grande foi introduzida nos cálculos matemáticos do Cardeal Nicolau de Cusa (1401 – 1464), que representou o círculo como um polígono de infinitos lados para demonstrar a quadratura do círculo de Arquimedes. Nessa demonstração, também foi utilizado o método da exaustão para complementar.

Com base em Rezende (2016a), a filosofia escolástica transformou a ciência e a matemática, e despertou o interesse de Galileu pelo movimento que causou um aperfeiçoamento intensificado das propriedades das curvas geradas pelo movimento.

Com isso outras questões aparecem, a saber: soma de séries, problemas de otimização, dentre outros que contribuíram para o desenvolvimento dos conceitos de limite, que até o momento estava sendo representado pelo método de exaustão.

Ainda conforme o mesmo autor, com a tradução dos Elementos de Euclides e das Cônicas de Apolônio, foi possível um estudo mais detalhado das obras de Arquimedes, os matemáticos da Idade Média voltaram a ter interesse e respeito pelos trabalhos de Arquimedes no desenvolvimento da ciência com o declínio da influência da filosofia escolástica e do aristotelismo.

Assim, a Idade Média teve como destaque o domínio e a centralização do conhecimento científico pelo alto clero cristão e da teoria da natureza divina do conhecimento, mas se rendeu aos argumentos do filósofo Aristóteles sobre o infinito, cujos processos se tornaram uma ferramenta normal da Matemática. Santo Tomás de Aquino (1225-1274) teve uma importante ação na harmonização da doutrina cristã e a ciência grega, cujo cruzamento do infinito e do contínuo no pensamento matemático foi uma relevante contribuição para o desenvolvimento do Cálculo.

2.3 O CÁLCULO E OS REGISTROS MATEMÁTICOS DA IDADE MODERNA

De acordo com Rezende (2016b), o século XVII foi considerado a referência para o surgimento do Cálculo, pois até então o Cálculo foi geometria, aritmética e filosofia natural e depois no século XVIII houve uma atenção menos focada nos métodos analíticos e nos problemas, o foco estava com a fundamentação dos conceitos básicos e com as questões de variabilidade de grandezas e da multiplicidade. Esses conceitos básicos tiveram significativas contribuições dos filósofos escolásticos e foi atribuída a eles a apresentação do conceito de infinito, que foi considerado o princípio elementar do Cálculo Infinitesimal, e a procura do elemento unificador das consecutivas e múltiplas aproximações que são os cernes da ideia de integração. Também é nesse período que os fenômenos físicos, sobretudo os cinemáticos, puderam ter uma análise mais quantitativa através do desenvolvimento de ferramentas que permitiram o conceito de variação de forma precisa.

Rezende (2016a) reitera que o conhecido Cálculo grego passou a ter contribuições inéditas para seu desenvolvimento a partir das leituras e estudos da matemática grega e da junção do pensamento algébrico. O simbolismo algébrico foi introduzido por Luca Paccioli (1445 – 1509), Nicolo Tartaglia (1499 – 1557) entre outros, mas foram os matemáticos Simon Stevin (1548 – 1620) e Luca Valério (1552

– 1618) os principiais implementadores do método das descobertas que foi uma adaptação do antigo método de exaustão. Stevin foi o responsável pela substituição para a prova direta, baseada na passagem direta do limite da prova de redução ao absurdo do método de Arquimedes.

Destaque para o ministro luterano, Johannes Kepler (1571 – 1630), conforme enfatiza o mesmo autor, que realizou importantes alterações no método de Arquimedes introduzindo os procedimentos infinitesimais, sendo a principal aplicação de seu método infinitesimal o cálculo de áreas de superfícies e volumes de sólidos que nunca foram realizados pelos matemáticos gregos. O que atualmente consideramos como cálculo integral teve como prenúncio as somas infinitas de Kepler.

No início do século XVII, o que ocupava o centro das discussões eram as questões relativas aos conceitos de continuidade e de infinito, o que instigou as mentes mais ecléticas da época. Para Galileu, as grandezas contínuas eram compostas por elementos indivisíveis. Bonaventura Cavalieri (1578 – 1647), estudou os indivisíveis num contexto essencialmente geométrico: um número infinito de retas paralelas e equidistantes compõe um plano e um número infinito de planos paralelos compõe um sólido. Já o jesuíta Paul Guldin (1577 – 1642) foi um dos principais a criticar a teoria de Cavalieri, afirmando que sendo o número de indivisíveis infinito não teriam como ser comparados entre si. Foi Evangelista Torricelli (1608 – 1647) que utilizou representações cinemáticas na matemática e fez uso dos métodos dos indivisíveis de Cavalieri para novas descobertas; o seu cálculo era fundamentalmente geométrico.

Ainda no século XVII com Grégoire de Saint Vicent (1584 – 1667), na atual Holanda, foi feita de modo pioneiro e claro a afirmação de que uma série define em si uma grandeza que pode ser chamada de “o limite da série”. Apesar dos importantes subsídios de Stevin e Valério, foi Grégoire que estabeleceu um eixo independente e de suma importância quanto ao desenvolvimento dos indivisíveis, quando atribuiu um novo significado ao “método de exaustão”, como processo de subdivisão contínua e infinita e não mais como a complexa lógica dos gregos consagrados Euclides e Arquimedes. Assim, com esta nova significação do método de exaustão, o conceito de infinito foi inserido como reagente básico à noção de limite.

Ainda Rezende(2016a) enfatiza que André Tacquet (1612 – 1660) foi influenciado por Grégoire e desenvolveu seus cálculos infinitesimais com base na consideração de que uma grandeza geométrica era composta somente de partes homogêneas, ou seja, o todo envolvido e os elementos infinitesimais eram de naturezas iguais. Para Tacquet, pequenos sólidos compõem um sólido, pequenas áreas compõem uma área e pequenas linhas compõem uma linha; aqui a ideia de limite e o método de exaustão foram utilizadas conforme a sugestão de Grégoire para se chegar à grandeza procurada.

Para o mesmo autor, o matemático francês, Gilles Personne de Roberval (1602 – 1675) desenvolveu seu método infinitesimal numericamente e sua teoria de indivisíveis. Apesar de sua inspiração arquimediana, ele aplicou a variante gregoriana do método de exaustão, mas não formalizou a operação de limite.

Neste sentido é atribuído ao matemático também francês Blaise Pascal (1623 – 1662), o ponto mais alto da construção dos métodos infinitesimais executado com base nas práticas da geometria clássica. Em seu trabalho *Potestatum numericarum summa* de 1654, Pascal utilizou premissas da geometria clássica e verificou os números do triângulo aritmético, para realizar a demonstração do teorema sobre a integral de x^n. Pascal comparou os indivisíveis da geometria com o zero da aritmética. Um princípio básico do Cálculo Diferencial tem sua origem nos trabalhos de Pascal, quando as quantidades infinitesimais são desprezadas.

Toda a obra de Pascal exerceu influência muito significativa no cálculo de Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 – 1716), que aplicou que as diferenças de ordem superiores podem ser desconsideradas, conforme o mesmo autor enfatiza. Tal princípio também foi utilizado para a elaboração do cálculo fluxional de Isaac Newton (1643 – 1727). O fato de Pascal não valorizar o peso das representações algébricas e analíticas, o impediu de atingir resultados mais genéricos, como a relação inversa entre as questões de tangente e quadraturas; mas adiantou outros resultados do Cálculo: a utilização do triângulo diferencial no cálculo de tangentes e as técnicas de integração por partes. Pascal também admitiu que as quantidades infinitamente pequenas eram elementos inversos das quantidades infinitamente grandes e defendeu a teoria homogênea dos indivisíveis, ou seja, o todo é composto por indivisíveis da mesma natureza dele, como fez Tacquet.

O motivado empenho dos matemáticos do início do século XVII no desenvolvimento de métodos genéricos para a resolução de problemas do Cálculo, segundo Rezende (21016a), estava construindo as premissas necessárias para o êxito de uma das mais significativas invenções da matemática: o Cálculo Infinitesimal, hoje o Cálculo Diferencial e Integral. Toda esta realização teve como componentes importantes: muita intuição e liberdade para pensar, onde as quantidades infinitesimais se destacaram, pois o desejo de desenvolver novos algoritmos predominava sobre o rigor da matemática, principalmente na segunda metade do século XVII.

2.3.1 Métodos Infinitesimais

Para Rezende (2016b), o Cálculo Diferencial teve sua origem no século XIV na Europa Medieval, através de numerosos trabalhos que tratavam de definições intuitivas de conceitos de cinemática, nos quais iniciaram a apresentação em termos de “latitude das formas” onde latitude se referia a taxa de variação: intensão(crescimento) ou remissão(decrescimento); e forma se referia a qualidade como sendo adquirida ou perdida.

Ainda de acordo o mesmo autor, foram destaques dessa época Nicolau de Oresme (1323 -1382) cujos trabalhos exerceram forte influência nos trabalhos do italiano Galileu Galilei (1564-1642), o francês René Descartes (1596-1650) quanto a Geometria e ainda o inglês Richard Suiseth (1340 – 1350). Os escolásticos fizeram uso dos indivisíveis, ferramenta grega, para demonstrar seus resultados. Bonaventura Cavalieri (1578 – 1647) fez uso desse instrumento no contexto fundamentalmente geométrico, Blaise Pascal (1623 – 1662) utilizou na distribuição uniforme dos indivisíveis e outros matemáticos também como John Wallis (1616 – 1703) e Gilles Personne de Roberval (1602 – 1675).

Diante da vulnerabilidade dos indivisíveis para solução dos problemas do Cálculo, Pierre Fermat (1601 – 1665) desenvolveu seus métodos de tangentes e quadraturas e René Descartes (1596 – 1650) elaborou seu método algébrico. Com os estudos de infinitesimais das obras de Arquimedes, Kepler e Cavalieri, Fermat ampliou sua geometria analítica com as equações e definições analíticas das curvas, e desenvolveu uma ferramenta infinitesimal analítica geral e importante para a solução de problemas de Cálculo. Fermat também utilizou em problemas e em métodos de quadratura as quantidades infinitesimais, mas não tratou as operações de integração e diferenciação como inversas.

Descartes com a publicação de *Géometrie* em 1637, conforme destaca ainda Rezende(2016b), justificou que “somente através da álgebra é que podemos alcançar a precisão” o que colocou a geometria analítica como uma poderosa ferramenta da matemática. Sua fidelidade ao seu método algébrico levou-o a diminuir a relevância dos métodos infinitesimais, apesar de toda sua proximidade com as considerações dos infinitesimais dos antigos, dos escolásticos e dos outros matemáticos de sua época. Essa dedicação à precisão algébrica teve como consequência a restrição de solução com base nos métodos cartesianos para os problemas mais complexos do Cálculo, como os das tangentes.

2.3.2 Os Princípios do Cálculo na Europa

Conforme Eves (2011), a teoria da integração só foi ativada no início do século XVII quando as notáveis realizações de Arquimedes chegaram à Europa Ocidental, por meio de traduções de seus manuscritos encontrados em Constantinopla. O engenheiro flamengo Simon Stevin (1548 – 1620) e o italiano Luca Valério (1552 – 1618) foram os matemáticos pioneiros a utilizarem os métodos comparáveis aos de Arquimedes, fazendo uma passagem direta ao limite de modo a evitar a redução ao absurdo do método da exaustão. Stevin fez uso desse método em seu trabalho na área da hidrostática.

Johannes Kepler para determinar o valor das áreas relacionadas à sua segunda lei do movimento planetário e volumes envolvidos no seu tratado sobre a capacidade dos barris de vinho, teve que aplicar os procedimentos de integração. Como seus contemporâneos, Kepler utilizou os métodos que Arquimedes julgaria tão somente heurísticos, uma vez que era impulsionado a ganhar tempo pois não tinha paciência com a rigidez do método de exaustão.

Historicamente, a teoria da integração está baseada nos métodos de Arquimedes e teve como aplicações o cálculo de áreas e volume com foco em aplicações e de modo intencionado sem refinamento e rigor matemático.

Contudo, para Rezende (20216b), os conceitos de derivada e integral e o fato de se constituir essas operações como inversas, a partir da formalização inicial de procedimentos algorítmicos, fez Isaac Newton (1642 – 1727) e G. W. Leibniz (1646 – 1716) serem considerados os maiores contribuidores da construção do Cálculo Diferencial e Integral, pois Newton ampliou e agrupou os muitos processos de cálculo e Leibniz relacionou-os por meio de notação eficiente e de um novo cálculo operacional.

2.3.3 O Início da Diferenciação

De acordo com Eves (2011), os problemas que tinham como objetivo a definição dos máximos e mínimos de uma função e as questões relacionadas a definição de tangentes a curvas, foi onde a diferenciação teve seu início. É atribuído às ideias de Fermat em 1629, a primeira apresentação de modo muito claro do método diferencial, apesar dessas considerações remeterem aos gregos antigos.

Kepler já tinha considerado que os incrementos de uma função nas proximidades de um ponto de máximo ou de mínimo comum passam a ser infinitesimais, mas foi Fermat quem converteu essa consideração em processo para definir esses pontos de máximo ou de mínimo.

O mesmo autor destaca que Fermat também desenvolveu um processo para definir a tangente por um ponto de uma curva, a partir de uma equação cartesiana conhecida. O conceito de tangente utilizado nesse procedimento é a de posição limite de uma secante, quando os dois pontos de intersecção da curva tendem a ser os mesmos.

2.3.4 Cavalieri

O italiano Bonaventura Cavalieri (1598 – 1647) foi considerado um matemático muito influente e com grande contribuição à matemática pelo seu método dos indivisíveis, cujos cernes remetem a Demócrito (460 a.C.- 370 a.C.) e Arquimedes (287 a.C. – 212 a.C.) no tratado *Geometria indivisibilibus.* Nesse trabalho Cavalieri considerou como indivisível uma corda de uma porção plana, e uma seção de um sólido é o indivisível desse sólido.

Eves afirma que:

> *As importantes técnicas para resolução de problemas que envolvem o cálculo de áreas e volumes são os princípios de Cavalieri:*
> 1.Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma reta dada determina nas porções segmentos de reta cuja razão é constante, então a razão entre as áreas dessas porções é a mesma constante.
> 2.Se dois sólidos são tais que todo plano secante a eles e paralelo a um plano dado determina nos sólidos secções cuja razão é constante, então a razão entre os volumes desses sólidos é a mesma constante (2011, p. 426).

O conceito de indivisível de Cavalieri como parte atômica de uma figura, seu método dos indivisíveis, foi utilizado de modo efetivo por Torricelli, Fermat, Saint-Vicent, Barrow entre outros.

O método dos indivisíveis de Cavalieri associado às figuras e sólidos geométricos foi a inspiração para as gerações seguintes, que buscaram a solução das questões de retificação de arcos e a relação da quadratura com a tangente, obtendo como resultado o Teorema Fundamental do Cálculo.

2.3.5 Wallis e Barrow

Eves (2011) afirma que John Wallis (1616 – 1703) foi um dos antecessores de Isaac Newton na Inglaterra, pois o favoreceu muito com seu uso rigoroso das séries em análise e foi um dos primeiros a formular um método de ensino para portadores de perda profunda de audição. Wallis foi um dos pioneiros a argumentar as cônicas não como secções de um cone, mas como curvas de segundo grau. Em seus trabalhos, os métodos de Descartes e Cavalieri foram organizados e expandidos. Além de inserir o símbolo de infinito (∞), Wallis foi o primeiro a esclarecer de modo aceitável o conceito dos expoentes zero, negativos e fracionários e elaborar uma interpretação gráfica às raízes complexas de uma equação quadrática real, além de editar partes dos trabalhos de muitos matemáticos gregos importantes.

O mesmo autor enfatiza que Isaac Barrow (1630 – 1677) foi outro antecessor de Isaac Newton e cuja principal contribuição foi relacionada à teoria da diferenciação. Em Cambridge, Barrow se destacou em Matemática, Física, Astronomia e Teologia. *Lectiones opticas et geometricae* foi seu mais importante trabalho de Matemática e através da utilização do chamado triângulo diferencial, existiu um enfoque aproximado do processo moderno de diferenciação. Ele foi o primeiro a compreender como operações inversas a diferenciação e a integração e tal conquista está enunciada e provada na *Lectiones* de Barrow e denominada como *o* Teorema Fundamental do Cálculo.

O teorema fundamental aceito, o conceito de limite elaborado, várias integrações realizadas: cubaturas, quadraturas e correções efetuadas; e o surgimento de um processo de diferenciação, várias tangentes a curvas definidas, ainda faltava a elaboração de um simbolismo genérico com uma formalização de regras analíticas de um conjunto sistemático para o prosseguimento dos fundamentos do Cálculo com rigor e consistência. Newton e Leibniz, mesmo não trabalhando juntos, contribuíram muito com a elaboração de um cálculo manipulável e produtivo de forma que esta criação do cálculo geral é concedida a eles. Já o analista francês Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) foi responsável pelo avanço dos conceitos fundamentais do Cálculo em termos aceitáveis, após um período de aplicação rigorosa.

2.3.6 Newton

Segundo Eves (2011), Newton foi um estudioso das obras: *Elementos* de Euclides, *La géometrie* de Descartes, a *Clavis* de Oughtred, dos trabalhos de Kepler e Viète e da *Arithmetica infinitorum* de Wallis. Ele desenvolveu sua própria matemática, começando com a descoberta do teorema do binômio de forma geral e depois a criação do método dos fluxos, hoje o atual Cálculo Diferencial; além de se interessar por questões da física: óptica e sua teoria da gravitação. Newton possuía um entendimento dos problemas da física e uma capacidade de analisá-los matematicamente que foram insuperáveis, além de sua notável capacidade de concentração.

Neste sentido, o mesmo autor destaca, que no seu trabalho *Method of Fluxions, Newton* escreve que o movimento contínuo de um ponto gera uma curva, onde a abscissa e a ordenada desse ponto gerador, são quantidades variáveis. *Fluente*, uma quantidade que flui, foi o nome dado por ele a uma quantidade variável e *fluxo* do fluente era a denominação da sua taxa de variação. A ordenada do ponto gerador indicada por *y* é considerada um fluente, logo o fluxo desse fluente era indicado por $\dot{y}$. Esse *fluxo* seria a inscrição moderna da expressão *dy/dt,* com *t* indicando tempo. Desprezando a grandeza tempo, a abscissa desse ponto móvel quanto a quantidade, tem um incremento constante. O *fluxo principal* é a taxa de crescimento constante de algum *fluente* e o esse *fluxo principal* é passível de comparação com o fluxo de qualquer outro *fluente.* Outra importante definição adotada por Newton foi o denominado *momento de um fluente*, que seria o aumento infinitamente pequeno recebido por um fluente como x, por exemplo, num intervalo de tempo também infinitamente pequeno. Newton reforçou que é possível em qualquer problema, desconsiderar os termos que estão multiplicados por potências de 0 (zero), iguais a ou maiores que 2 e resultar numa equação contendo as coordenadas x e y do ponto gerador da curva e seus $\dot{x}$ e $\dot{y}$. Esta ideia foi explicada por meio das noções primitivas sobre limites.

Newton conceituou dois tipos de problemas: a diferenciação, a partir de uma relação entre fluentes, com o objetivo de criar a relação envolvendo esses fluentes e seus fluxos, ou seja, diferenciação; e o problema inverso, que seria a solução de uma equação diferencial partindo de uma relação entre vários fluentes e seus fluxos, determinando uma relação considerando somente os fluentes. A partir de seu método dos fluxos, Newton realizou várias e notáveis aplicações: determinação de máximos e mínimos, pontos de inflexão e concavidade de curvas, tangentes a curvas, curvaturas de curvas; além das aplicações a diversas quadraturas e correções de curvas.

Na obra *Arithmetica universalis,* Eves (2011) destaca que existem resultados de suma importância quanto a teoria das equações, destacando-se dentre outras: pares conjugados de raízes complexas de uma equação real, especificações para definição dos limites superiores das raízes de uma equação real. A obra-prima de Newton é indiscutivelmente os *Principia*, na qual consta a sistematização da dinâmica e todas as fórmulas dos mais importantes fenômenos de movimento, terrestres e celestes. Apesar dos teoremas terem sido definidos pelo seu método dos fluxos, são provados a partir de métodos da geometria grega clássica, com princípios simples de limites.

Para Rezende (2016b), com Newton terminou a linha de desenvolvimento do Cálculo, considerado pelos historiadores como percurso cinemático que se iniciou com Platão e Arquimedes, passando por Galileu, Cavalieri e Barrow. Também foram base para as pesquisas iniciais do seu Cálculo Fluxional os trabalhos e métodos analíticos de Fermat, Descartes e John Wallis.

A decepção pessoal de Newton com as bases lógicas de suas descobertas, nos seus trabalhos sobre o cálculo fluxional que foram documentados entre 1665 e 1676, foi a causa de não se fazer público. O seu *Methodus fluxionum et serierum infinitorum* é considerado o ponto inicial da nova etapa de seu trabalho sobre o Cálculo, pois foi onde houve a considerada mudança fundamental de seu conceito de infinitesimal. É neste momento que houve a transição da compreensão da forma estática de Cavalieri para a forma dinâmica de Galileu e Hobbes, e Newton considerou essa transição em seu procedimento infinitesimal como uma forma de superar a rigidez da doutrina dos indivisíveis. No seu segundo trabalho sobre Cálculo Fluxional com forte presença dos trabalhos dos escolásticos, Galileu e Hobbes, Newton considerou a ideia de velocidade como elemento base: o movimento contínuo de pontos, linhas e planos formam uma quantidade variável e não mais um conjunto de elementos infinitesimais. Para Newton, *"fluxão"* foi considerada como a taxa de geração e *"fluente*" foi a quantidade gerada. Nas anotações de Newton neste trabalho, foram elaborados seus conceitos de diferenciação e integração, e última razão que realmente está relacionada ao conceito de limite como um movimento contínuo.

Nesta direção, Rezende (2016) salienta que no método infinitesimal de Newton existem duas características que garantem a sua engenhosidade em relação aos métodos de Fermat e Gregory: a utilização de modo excessivo do Teorema Fundamental do Cálculo como ferramenta no processo de integração (cálculo de quadraturas) e a utilização das séries infinitas como uma operação universal para ser ampliada ao grupo de funções que se aplicassem ao seu método. Para Newton, integrar uma expressão dada é equivalente a obter a sua antiderivada.

Newton fez uso em seus estudos de uma das mais importantes obras de geometria desde a Antiga Grécia, os Elementos de Euclides, que somados aos trabalhos de Descartes, Kepler e Wallis e sua análise matemática das questões de física pela sua facilidade de entendimento, permitiram o desenvolvimento de sua própria matemática, que teve como resultado o método dos fluxos que hoje é o Cálculo Diferencial.

2.3.7 Leibniz

Segundo Eves (2011), na invenção do Cálculo Diferencial e Integral, o alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) foi rival de Newton e foi considerado o grande gênio universal do século XVII. Foi autodidata para aprender latim e grego e com 12 anos, para sua época, seus conhecimentos eram plenos em filosofia, teologia e matemática quando iniciou a criação das primeiras ideias da sua *characteristica generalis,* conceito que compreendia uma teoria da lógica matemática, sistematizada em regras formais que evidenciaria as necessidades do raciocínio. Ele foi capaz de formular as principais propriedades da adição, multiplicação e negação lógicas e essa matemática mais tarde iria influenciar na lógica simbólica de George Boole (1815 – 1864). Na maior parte de sua vida esteve envolvido com o serviço diplomático. Em Londres durante uma missão política, teve oportunidade de apresentar na Royal Society sua invenção de uma máquina de calcular em 1673.

Ainda de acordo com Eves (2011), foi entre 1673 e 1676, que Leibniz inventou seu Cálculo independentemente da invenção do Cálculo de Newton: descobriu o Teorema Fundamental do Cálculo, e desenvolveu várias das fórmulas elementares da diferenciação. Em 29 de outubro de 1675, por recomendação dos irmãos Bernoulli, Leibniz fez uso de modo pioneiro do símbolo de integral: um S alongado, da primeira letra da palavra soma do latim *summa*, pois a ideia era representar uma soma de indivisíveis e logo depois, ele já utilizava a escrita para indicar diferenciais e derivadas, como se faz atualmente: $\int x\, dy$ e $\int y\, dx$ para integrais. Em 1684 foi publicado o primeiro artigo de Leibniz com o tema de Cálculo Diferencial. As regras de diferenciação que são apresentadas na fase inicial de um curso de cálculo, foram deduzidas na maior parte delas por Leibniz. Apesar de Newton ter feito sua descoberta do Cálculo Diferencial antes, foi Leibniz quem publicou primeiro seus resultados. Para Eves

(2011), Leibniz era mais eclético e possuía uma imaginação mais aguçada, além de possuir uma habilidade superior quanto à formalização matemática. Toda esta rivalidade levou os britânicos a se desinteressarem pelos avanços da matemática no Continente Europeu, o que prejudicou muito a matemática britânica.

Neste sentido, Rezende(2016b) enfatiza que com Leibniz houve o auge da outra linha de desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral, considerado pelos historiadores como percurso atomístico que teve seu início com Demócrito, passando por Kepler, Fermat, Pascal e Huygens. Foi Huygens que teve forte influência para dedicação de Leibniz ao estudo mais intenso da matemática, apesar de ter o direito como formação original, e foi por meio de Collins que conheceu *De Anaysi* de Newton sobre séries infinitas. As leituras iniciais de Leibniz sobre geometria foram por meio dos estudos de Cavalieri, Torricelli, Gregoire de Saint-Vicent (1584-1667), Roberval, Pascal, Descartes, Wren (1632-1723), James Gregory (1638-1703), Sluze (1622-1685) e Hudde (1628-1704). Mas a marca registrada de Leibniz, foi sua grande habilidade para a aritmética tanto que seu trabalho pioneiro publicado foi sobre análise combinatória.

Leibniz deduziu que a questão da quadratura do círculo é igual à soma de retângulos infinitamente estreitos, para intervalos infinitesimais nas abscissas e a inclinação da tangente segue a razão das "diferenças consecutivas" das ordenadas e abscissas, quando estas se tornam infinitamente pequenas. Assim com outras variantes, ele declara na sua definição de "*diferencial*" as "*quantidades infinitamente pequenas".* Com a definição de diferencial como sendo a razão entre quantidades infinitamente pequenas e essa razão é finita, e *para* determiná-la deve-se diferenciar a equação da curva e aplicar as regras do cálculo, Leibniz elabora seu Cálculo Diferencial e Integral. A descoberta que o cálculo das áreas e das tangentes são operações inversas, foi realizada por Leibniz.

Eves (2011) destaca que os primeiros pesquisadores depois de Newton e Leibniz, foram mais motivados pela grande quantidade de aplicações do Cálculo, ficando assim seus fundamentos obscuros e negligenciados.

Leibniz assim como Newton, de forma paralela e independente, por entenderem que a integração e diferenciação têm uma relação inversa dada pelo Teorema Fundamental do Cálculo, são apontados como os inventores do Cálculo Diferencial e Integral.

Newton se destacou na História do Cálculo Diferencial e Integral pela aplicação de processos infinitos, inventou o método dos fluxos, que é o Cálculo Diferencial, enquanto Leibniz desenvolveu suas ideias com base em somas e diferenças de sequências finitas de retângulos infinitamente pequenos.

2.3.8 O Teorema Fundamental do Cálculo

Conforme Stewart (2016), ao relacionar o Cálculo Diferencial, que surgiu a partir do problema da tangente, e o Cálculo Integral, que surgiu a partir do problema da área, o nome Teorema Fundamental do Cálculo é conveniente. Assim:

> O Teorema Fundamental do Cálculo dá a relação inversa precisa entre a derivada e a integral. Foram Newton e Leibniz que exploraram essa relação e usaram-na para desenvolver o cálculo como um método matemático sistemático. Em particular, eles viram que o Teorema Fundamental os capacitava a calcular áreas e integrais muito mais facilmente, sem que fosse necessário calculá-las como limites de somas (STEWART, 2016, p.347).

Então, seja o Teorema Fundamental do Cálculo: Se *f* for contínua em [a,b]:

1. A função *g* definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt \text{ com } a \leq x \leq b$$

é contínua em [a,b] e derivável em (a,b) e $g'(x) = f(x)$.

Demonstração:

Se $x \in (a,b)$ e $x+h \in (a,b)$, então:

$$\begin{aligned} g(x+h) - g(x) &= \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\ &= \left(\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt \right) - \int_a^x f(t)dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t)dt \end{aligned}$$

Para $h \neq 0$, temos:

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \qquad (1)$$

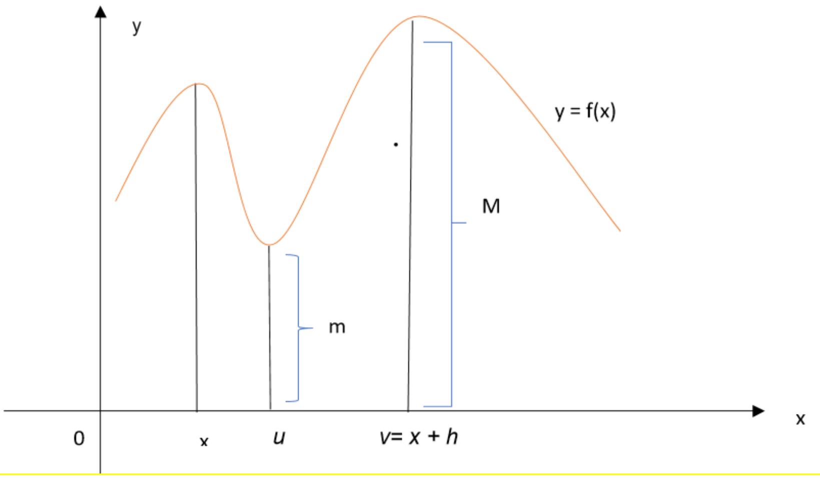
Assumindo que $h > 0$ e sendo que *f* é contínua em $[x, x+h]$.

Seja o Teorema dos Valores Extremos que afirma que há números *u* e *v* em $[x, x+h]$ tais que $f(u) = m$ e $f(v) = M$, m e *M* são valores mínimos e máximos absolutos de *f* em $[x, x+h]$, de acordo com a Figura 1; e a propriedade Comparativa da Integral onde se $m \leq f(x) \leq M$ para $a \leq x \leq b$, então $m(a - b) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$, temos:

$mh \leq \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leq Mh$

$f(u)h \leq \int_x^{x+h} f(t)dt \leq f(v)h$ (2)

Figura 1-Teorema dos Valores Extremos



Fonte: elaborado pela autora

Sendo h ≠ 0, podemos dividir a desigualdade (2) por h, logo:

$f(u) \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt \leq f(v)$ (3)

Assim substituindo (1) em (3), temos:

$f(u) \leq \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \leq f(v)$ *(4)*

Fazendo h⟶ 0, então u⟶x *e* v⟶x , uma vez que *u* e *v* estão entre *x* e *x+h*. Portanto, por f ser contínua em x, temos:

$\lim_{h\to 0} f(u) = \lim_{u\to x} f(u) = f(x)$ *e* $\lim_{h\to 0} f(v) = \lim_{v\to x} f(v) = f(x)$

Seja o Teorema do Confronto:

Se *f(x)* ≤ *g(x)* ≤ *h(x)* quando x está próximo a *a* (exceto possivelmente em *a*) e $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$ então $\lim_{x\to a} g(x) = L$ (5)

Assim de (4) e (5), concluímos que*:*

g'(x) = $\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ = *f(x)* *(6)*

Se x = a ou b, então a Equação 6 pode ser interpretada como um limite lateral. Então o Teorema: "Se *f* for diferenciável em a, então f é contínua em *a" (*modificado para limites laterais) mostra que g é contínua em *[a,b].*

Utilizando a notação de Leibniz para as derivadas, pode-se escrever o Teorema Fundamental do Cálculo parte 1 como:

$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt$ = *f(x)* *(7)*

quando *f* for contínua. Logo a equação (7) diz que se integramos f e então derivamos o resultado, retornamos à função original de *f*.

2. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$ onde *F é qualquer primitiva de f, isto é, uma função tal que F' = f.*

   Demonstração:

   Seja g(x) = $\int_a^x f(t)dt$.

   Seja o Corolário : Se f'(x) = g'(x) para todo x em um intervalo (a,b), então f – g é constante em (a, b): isto é: f(x) = g (x) + c, onde c é uma constante.

Temos do Teorema Fundamental do Cálculo Parte 1 que *g'(x) = f(x)*: *g* é a uma primitiva de f. Se F for qualquer outra primitiva de f em [a,b], então sabemos do Corolário anterior, que F e g diferem por uma constante:

F(x) = g(x) + C (8)

para a < x < b. No entanto, tanto F quanto g são contínuas em [a, b] e, portanto, tomando limites em ambos os lados em (8) (quando x⟶ a^+e x⟶ b^-), vemos que isso também é valido quando x = a e x = b. Assim, F(x) = g(x) + C para todo x em [a, b].

Se fizermos x = a na fórmula de g(x), obteremos:

g(a) = $\int_a^x f(t)dt$ = 0

Portanto, com x = b e x = a em (8), temos:

F(b) – F(a) = [g(b) +C] – [g(a) +C] = g(b) – g(a) = $\int_a^b f(t)dt$

O Teorema Fundamental do Cálculo Parte 2 afirma que se conhecermos uma primitiva de F de f, então poderemos calcular $\int_a^b f(x)dx$ simplesmente subtraindo os valores de F nas extremidades do intervalo [a, b]. É notável que $\int_a^b f(x)dx$, definida por um procedimento complexo envolvendo todos os valores de f(x) para $a \leq x \leq b$, possa ser encontrada sabendo-se os valores de F(x) em somente dois pontos, *a* e *b*.

O capítulo seguinte traz os conceitos de modelo e modelagem matemática e sua importância dentro do processo de aprendizagem e ensino.

3 MODELAGEM MATEMÁTICA: METODOLOGIA DE PESQUISA E ENSINO

Neste capítulo é apresentada a fundamentação teórica, a evolução da modelagem e modelos matemáticos, suas características e técnicas específicas aplicáveis para uma disciplina. Este capítulo terá como principais referências Bassanezi (2015), Bassanezi (2018), e Biembengut e Hein (2019). Pois conforme Fiorentini e Lorenzato (2012, p. 34) de “como ensinar?” passamos para “por que, para que e para quem?”.

Segundo Biembengut e Hein (2019,p.12), “ Modelagem matemática é o processo que envolve a obtenção de um modelo”. E ainda os mesmos autores destacam que um meio de fazer a interação entre a Matemática e a realidade, é através da modelagem:

> A Matemática, alicerce de quase todas as áreas de conhecimento e dotada de uma arquitetura que permite desenvolver os níveis cognitivo e criativo, tem sua utilização defendida, nos mais diversos graus de escolaridade, como meio para fazer emergir essa habilidade em criar, resolver problemas, modelar. Devemos encontrar meios para desenvolver, nos alunos, a capacidade de ler e interpretar o domínio da Matemática (BIEMBENGUT e HEIN,2019,p.9).

Com a ferramenta de Modelagem Matemática é possível levar aos educandos a compreensão da Matemática no seu cotidiano, de modo a potencializar essa ciência tão importante.

3.1 O QUE É MODELAGEM

Fazendo uma retrospectiva histórica, é possível constatar que, Bassanezi (2018) destaca que a Matemática e a atividade de aplicá-la em situações extremas à própria Matemática são muito antigas e que muitas ideias em matemática apareceram devido a problemas práticos. Ainda uma definição clara de modelagem para :

> A habilidade de empregar matemática em situações concretas e em outras áreas do conhecimento humano consiste em tomar um problema prático relativamente complexo, transformá-lo em um modelo matemático, ou seja, traduzir a questão na linguagem de números, gráficos, tabelas, equações etc., e procurar uma solução que possa ser reinterpretada em termos da situação concreta original (BASSANEZI, 2015, p. 10).

A matemática aplicada é um modo de estimular o interesse e a utilidade dos conceitos matemáticos, através de situações do cotidiano de forma a valorizar o conhecimento matemático. Para Bassanezi: “A modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”, (2018, p. 16).

Ainda de acordo com o autor, a modelagem como um método científico de pesquisa, implica multidisciplinaridade de ciências que são ao mesmo tempo teóricas e empíricas como a Física, a Química, a Biologia, a Astrofísica e muitas outras. No processo de ensino e aprendizagem de Matemática, a modelagem é um artifício de entendimento e aplicação que reúne a teoria e a prática com o objetivo de relacionar a realidade própria com os conceitos.

Para o mesmo autor, o resultado do aperfeiçoamento mental-emocional-social da humanidade é a ciência e é um feito acumulativo natural, pois, ela é uma prática principalmente elaborada pelo ser humano com o objetivo de compreender a natureza através de teorias apropriadas. As ciências físicas foram reconhecidas e desenvolvidas baseadas em teorias formuladas com os recursos da Matemática, que racionaliza e facilita o pensamento ao extrair a parte fundamental da situação-problema e sintetiza ideias geradas de situações empíricas de forma que o pensamento seja compreendido com uma perfeita economia de linguagem. Assim, na busca da teorização das pesquisas nas ciências não físicas, surgiu no início do século XX como procedimento construtivo a Matemática Aplicada, devido ao seu poder de síntese e de generalização.

Dessa forma, devido ao fato de o reconhecimento de uma teoria científica ter como condição necessária o poder de ser apresentada em uma linguagem matemática, ocorreu uma significativa evolução dela por novas teorias matemáticas para atender às diversas áreas de pesquisas. O desenvolvimento e a aplicação matemática foram favorecidos pela implantação de aplicativos computacionais em diversos campos de conhecimento como na Arte, Música, Linguística além da Economia, das Ciências Biológicas e das Ciências Naturais como Física, Astrofísica e Química.

3.1.1 Modelagem e Modelos Matemáticos

Para Biembengut e Hein (2019), a modelagem matemática é muito antiga, porém nova na educação matemática. Praticamente todas as áreas de conhecimento têm como base a Matemática. Entende-se por modelo como sendo um padrão a ser seguido, que no processo de ensino da Matemática tem um foco pedagógico na construção do conhecimento.

De acordo com os autores, o conhecimento matemático e a capacidade de compreender e traduzir a situação do mundo real, são os principais requisitos no processo de modelagem matemática para se definir um modelo. O processo de modelagem matemática é composto por 3 estágios, a saber:

I) Interação: conhecimento claro e interpretação da situação-problema, de modo a se ter o referencial teórico através da escolha do tema, estudo e pesquisa das questões;

II) Matematização: identificação de símbolos para as variáveis envolvidas e definição das expressões algébricas da relação dessas em termos matemáticos, de modo que seja possível a resolução e obtenção dos resultados.

III) Modelo Matemático: validação através da verificação se o modelo criado está adequado à situação-problema proposta e se a solução corresponde ao resultado esperado.

A modelagem matemática fez parte da elaboração das teorias científicas e particularmente das teorias matemáticas. Um exemplo disso é a obra relacionada a música de Pitágoras (570 a.C. – 496 a.C.), quando através de uma corda esticada por meio de vibração, produzia um som e verificou-se que as frações dessas cordas correspondiam a sons que deram origem a escala musical. Outro exemplo é o cientista Willian Harvey (1578 – 1657) que para demonstrar a circulação sanguínea, fez uso da Matemática.

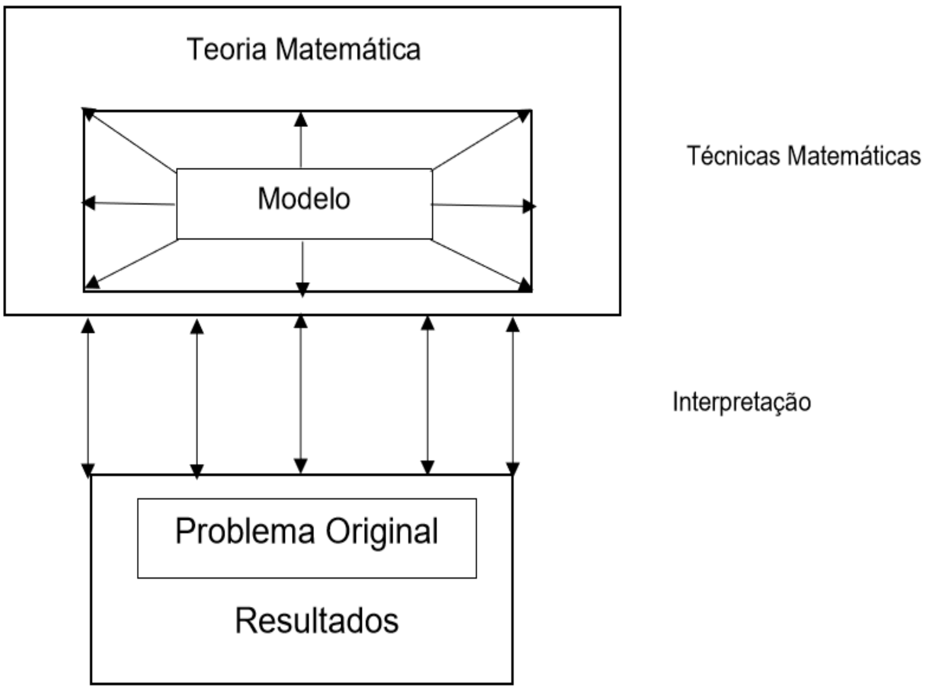
Considerando que alguns problemas do mundo real envolvem fatos matemáticos, assim Biembengut e Hein (2019, p. 12) consideram:

> Seja qual for o caso, a resolução de um problema, em geral quando quantificado, requer uma formulação matemática detalhada. Nessa perspectiva, um conjunto de símbolos e relações matemáticas que procura traduzir, de alguma forma, um fenômeno em questão ou problema de situação real, denomina-se “modelo matemático”.
> Na ciência, a noção de modelo é fundamental. Em especial a Matemática, com sua arquitetura, permite a elaboração de modelos matemáticos, possibilitando uma melhor compreensão, simulação e previsão do fenômeno estudado.

Também para Bassanezi (2018), um conjunto de símbolos e relações matemáticas que caracterizam de alguma forma o objeto estudado é chamado de Modelo Matemático. É importante que o Modelo Matemático tenha uma linguagem precisa que traduz de maneira clara e sem dúvidas o objeto de estudo, de modo que permita transformar o problema de uma realidade específica para a Matemática onde será tratado por meio de teorias e técnicas da ciência em questão. Assim, o procedimento dinâmico de transformar o problema de uma realidade específica em questões da Matemática, de modo que as soluções sejam interpretadas na linguagem usual e que permita a validação dos modelos matemáticos é Modelagem Matemática. A eficiência da modelagem resulta do entendimento que estão sendo elaboradas representações de aproximações da realidade do objeto de estudo.

Esse processo é ilustrado na Figura 2, a qual apresenta a estruturação de um modelo dentro da teoria matemática corrente e extensamente estudada, para o referido problema, de modo a se obter uma resolução do mesmo sem complicá-lo, ou seja, uma resolução simples. No diagrama da figura em referência, as setas da interpretação fazem a interface entre a teoria matemática e o ramo do problema original, indicando que os métodos e as técnicas matemáticas possam ser constantemente entendidos no vocabulário do problema original. A validação do modelo ocorre quando o argumento matemático é adequado para o desenvolvimento da questão.

Figura 2 - Processo de Modelagem



Fonte: elaborada pela autora inspirada em Bassanezi (2018,p.25)

Uma sucessão de etapas de uma Modelagem Matemática de um ramo de um problema original mostrada na Figura 3, para o mesmo autor, tem como elementos intelectuais:

I. Experimentação: é um elemento laboratorial com o objetivo de captação dos dados referente ao ramo do problema original, de forma a selecionar e identificar as variáveis fundamentais do fenômeno que irão compor os parâmetros no cálculo dos modelos matemáticos.

II. **Abstração**: é o mecanismo que resultará na formulação dos Modelos Matemáticos e que estabelece:

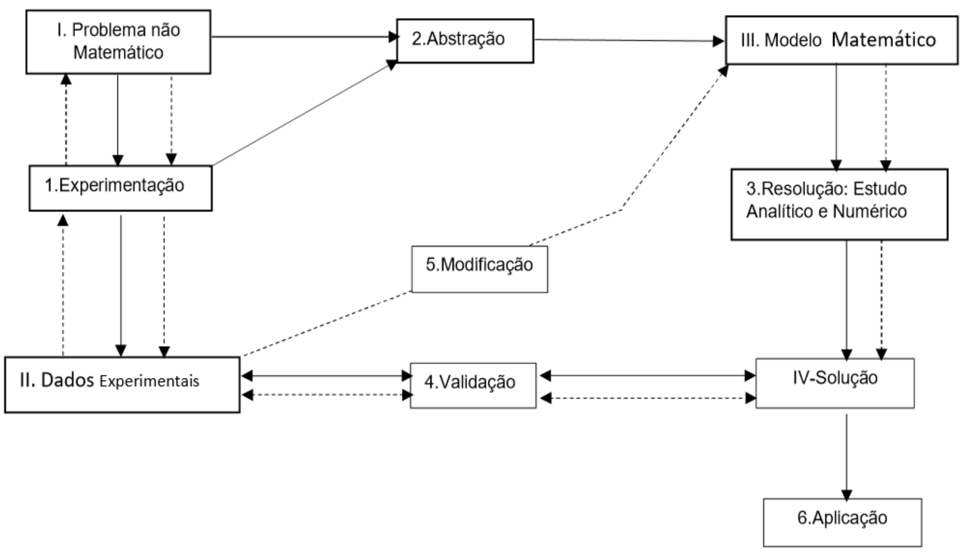
a. Seleção das Variáveis: definição de modo claro e distinto de variáveis que atuam no sistema, ou seja, variáveis de estado e as variáveis de controle.

b. Formulação dos problemas teóricos: definir no vocabulário do problema original de maneira a sinalizar claramente o que se propõe a solucionar.

c. Formulação de hipóteses: as hipóteses devem englobar a parte da teoria e conduzem as formulações gerais que proporcionam concluir manifestações empíricas específicas. A quantidade das variáveis interrelacionadas e o grau de complexidade das hipóteses definem a construção do modelo matemático que ocorre nesta fase.

d. Simplificação: quando ocorre a possibilidade do modelo definido ser complexo de tal forma que impossibilite o estudo, deve-se retornar ao problema original de maneira a retrabalhar e limitar as informações incluídas no modelo, para que resulte em um problema matemático tratável sem perder a essência do problema original.

Figura 3 - Sequência de uma Modelagem



Fonte: elaborada pela autora inspirada em Bassanezi (2018,p.27)

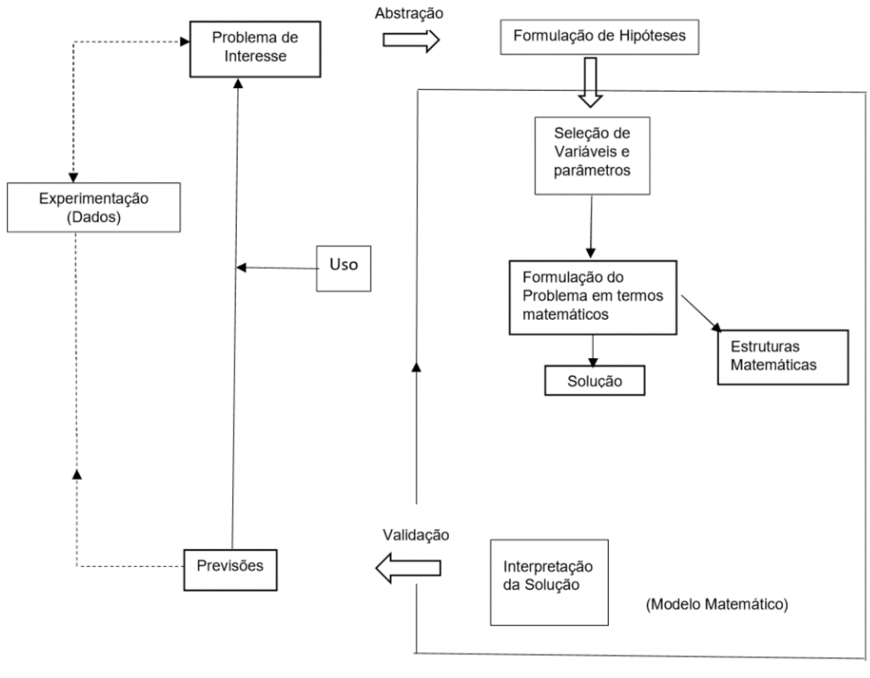
III. Resolução: o modelo matemático é uma linguagem matemática congruente resultante da substituição da linguagem natural da hipótese, cuja resolução está relacionada com o grau de complexidade utilizado e que pode às vezes resultar em uma solução numérica aproximada, somente com a utilização de métodos computacionais. As soluções analíticas podem ser posteriores e utilizarem as sugestões oferecidas pelos recursos dos métodos computacionais.

IV. Validação: é o confronto dos dados empíricos com as soluções obtidas, a partir dos modelos matemáticos atribuídos ao problema original, que podem ser positivos ou negativos. Esta etapa está diretamente relacionada com o modelador, integrando seus objetivos e recursos disponíveis e pode contribuir para o aperfeiçoamento dos modelos.

V. Modificação: a aceitação ou não dos modelos está relacionada com o problema original, de forma a acarretar um aprofundamento da teoria e consequente reformulação dos modelos. Considera-se que nenhum modelo deve ser definitivo e é passível de melhoras. Dentro do processo de modelagem, a reformulação dos modelos é essencial e indispensável, principalmente devido ao aperfeiçoamento da Matemática que leva ao desenvolvimento de ferramentas novas como recursos para explicar a realidade.

Assim, a Figura 4 mostra como o intercâmbio de ideias entre os pesquisadores matemáticos contribui para o conseguimento de modelos coerentes e úteis através das atividades do modelo.

Figura 4 - Interrelações entre pesquisadores matemáticos



Fonte: elaborada pela autora inspirada Bassanezi (2018,p.32)

Diante de um problema/situação de interesse, a formulação de hipóteses por meio de questões relevantes leva à identificação e definição das variáveis e parâmetros que definirão a estruturação matemática, para realizar a modelagem e assim obter a solução. É importante a interpretação da solução passar por uma ou várias validações, para a partir dos dados iniciais obter a homologação dela, que após realizadas comparações com previsões de outros dados, a solução apresente a mesma eficiência.

3.1.2 Usos da Modelagem Matemática

Sobre o termo de aplicação da matemática que expressa a relação entre os conceitos matemáticos e os fenômenos da realidade, Bassanezi (2018, p.32) destaca:

> A Matemática Aplicada moderna pode ser considerada como a arte de aplicar matemática a situações problemáticas, usando como processo comum a modelagem matemática. É esse elo com as ciências que distingue o matemático aplicado do matemático puro. A diferença consiste, essencialmente, na atitude de se pensar e fazer matemática.

A importância da modelagem matemática é evidenciada quando aplicada nos métodos científicos, e sendo uma ferramenta para busca de respostas tanto das questões industriais e engenharia, quanto nos sistemas de automação e controle, além de aplicações na:

a) Física Teórica: em decorrência de muitas e novas descobertas de teorias com alto grau de sofisticação e exigência da matemática aplicada, os modelos tradicionais não atendem mais aos conceitos desenvolvidos com a Teoria da Relatividade e Teoria Quântica;

b) Química Teórica: na busca do entendimento das particularidades das moléculas quando se refere a elétrons e outras partículas. Aqui os modelos matemáticos podem ser utilizados de maneira análoga aos fenômenos físicos.

c) Biomatemática: o alto grau de complexidade dos fenômenos biológicos tem estimulado o aperfeiçoamento da Matemática;

d) Ciências Sociais: a utilização e o avanço da matemática ainda são morosos e pouco relevantes nas aplicações de Análise Estatística de Dados, Teoria dos Grafos, Teoria da Informação nas pesquisas de Geografia, História, Sociologia, Política, Psicologia, Antropologia. Na estruturação e sistematização de dados da Economia, a busca de otimizações tem utilizado a teoria de controle como ferramenta. Essa teoria é utilizada na análise da dinâmica de sistemas e faz uso de sistemas de equações diferenciais e de diferenças nos modelos de dívida externa, renda familiar, mercado, ciclos de maturação e outros,

e) Indústria e Engenharia: a utilização da álgebra fuzzy, teoria de controle, técnicas novas para solucionar equações diferenciais nos desenvolvimentos da automação de máquinas de alta tecnologia;

f) Ciência da Computação: os processos computacionais e a matemática apresentam uma influência recíproca nos seus desenvolvimentos em diversas aplicações da teoria das máquinas de Turing (lógica matemática), lógica fuzzy e funções recursivas.

Assim, fica claro que a modelagem matemática é uma ferramenta que traz respostas para questões em diversos segmentos de Física, Biologia, Química e Engenharia, tanto em pesquisas como em aplicações industriais que indiretamente são modelagem matemática na matemática pura e na matemática aplicada.

3.2 MODELAGEM NO ENSINO

Uma opção defendida por Biembengut e Hein (2019) para estimular no aluno a relevância de conteúdos matemáticos ainda não conhecidos por ele, é a modelagem matemática, que pode proporcionar o desenvolvimento da capacidade de modelar matematicamente. Nesse processo ocorre um desenvolvimento do conhecimento matemático e da capacidade de utilizá-lo, pois a solução das questões matemáticas com significado conduz a um melhor entendimento, tanto da natureza quanto da teoria matemática da questão a ser modelada.

Os mesmos autores consideram como Modelação Matemática, o método que faz uso da estrutura básica da modelagem nos cursos regulares, que tem como objetivos: na formação do aluno evidenciar o valor da Matemática, sua proximidade com outras áreas de conhecimento, sua aplicabilidade visando um melhor entendimento dos conceitos matemáticos e expansão da competência de resolver problemas e aguçar a criatividade. Na implementação do método é importante a realização de um diagnóstico para desenvolver o planejamento e a forma de avaliar o processo.

No diagnóstico é importante ter o conhecimento do universo dos alunos que compreenda a situação socioeconômica, seus interesses e seu grau de conhecimento matemático. Diante de tal diagnóstico, a escolha do tema a ser convertido em modelo matemático, deve promover a motivação e interesse no conteúdo programático, de forma a favorecer a execução do processo de modelagem com a realização das etapas de Interação, Matematização e Modelo Matemático. Ao final da aplicação do processo de modelagem, almeja-se dos alunos: motivação para a pesquisa, desenvolvimento da aptidão de formular e solucionar problemas, despertar interesse por temas específicos, praticar o conteúdo matemático e potencializar a criatividade. Esta estratégia promove ao aluno aquisição do conhecimento matemático e sua consequente aplicação.

No desenvolvimento do processo, Biembengut e Hein (2019) orientam as etapas da modelagem matemática:

a) Escolha do tema: o assunto deve ser amplo, animador e tal que a coleta de dados e informações sejam simples;
b) Interação com o tema: pesquisa e produção de um resumo com base em algumas questões pertinentes, diretamente relacionadas com o tema;
c) Planejamento: identificar os princípios envolvidos, levantar as hipóteses, relacionar as possíveis soluções e elencar a mais adequada;
d) Conteúdo Matemático: identificação da relação tema e conteúdo programático, ou seja, a partir do tema realizar a construção do modelo matemático que viabiliza a solução;
e) Validação e extensão dos trabalhos desenvolvidos: verificação da solução e adaptação do modelo, se necessário, aperfeiçoar os modelos. Aqui é possível analisar o grau de aprendizagem.

Os mesmos autores enfatizam que a avaliação desse processo tem como principal objetivo, quanto ao propósito do conhecimento, a análise e a capacidade de identificar os conceitos matemáticos teóricos aplicados nos modelos desenvolvidos e sua relação com os temas da realidade do aluno.

Tanto a modelagem como a modelação matemática, de acordo com Biembengut e Hein (2019), são objetos importantes de pesquisa em vários países. Como método de ensino-aprendizagem, a modelagem matemática tem como sequência de ações: escolha de tema, criação das questões pertinentes que buscarão respostas por meio de ferramentas e pesquisas matemáticas que levarão à definição de modelos. A modelação matemática é uma adaptação da modelagem matemática quanto a se limitar a utilização de ferramentas matemáticas compatíveis com o currículo incialmente proposto.

Para Bassanezi (2018), a Educação Matemática dentro de seu processo de aperfeiçoamento, com a aplicação dos conhecimentos matemáticos em outras áreas, através da inclusão da resolução de problemas e modelagem, significa que a Matemática deve ser ensinada levando em conta as próprias realidades do sistema educacional. Essa ideia tem sido defendida por várias pessoas comprometidas com o ensino de Matemática. Dessa forma, o ensino da Matemática nas escolas estaria vinculado à realidade e o binômio ensino-aprendizagem estaria exatamente associado por meio do processo da modelagem.

Sabendo-se da importância de considerar sempre a realidade do aluno, nota-se que a Modelagem Matemática é uma metodologia que permite desenvolver todas as etapas com uma interação do aluno a partir de conteúdo escolhido, de maneira que ele possa observar as possíveis aplicações no seu cotidiano: é levar a Matemática para vida e universo dos alunos e assim construir o conhecimento.

Assim no próximo capítulo traz orientações para professores de Ensino Superior de aplicações do Teorema Fundamental do Cálculo para o cálculo de área e volume a partir se situações reais.

4 APLICAÇÕES

Neste capítulo são apresentadas aplicações do Teorema Fundamental do Cálculo para determinar a área de um lago e o volume de um copo que são situações acessíveis e compreensíveis do cotidiano dos alunos, conforme os elementos que compõem as etapas do processo de modelagem proposto em Bassanezi (2018) e Biembengut e Hein (2019). O objetivo é apresentar orientações para professores do Ensino Superior na tentativa de contribuir para uma aprendizagem significativa por parte dos estudantes dos conceitos que estão envolvidos no teorema.

4.1 CÁLCULO DA ÁREA

Dentro do desenvolvimento do processo, seguem as etapas da modelagem matemática conforme perspectiva de Biembengut e Hein (2019):

a) Escolha do tema: Medida da área de um lago

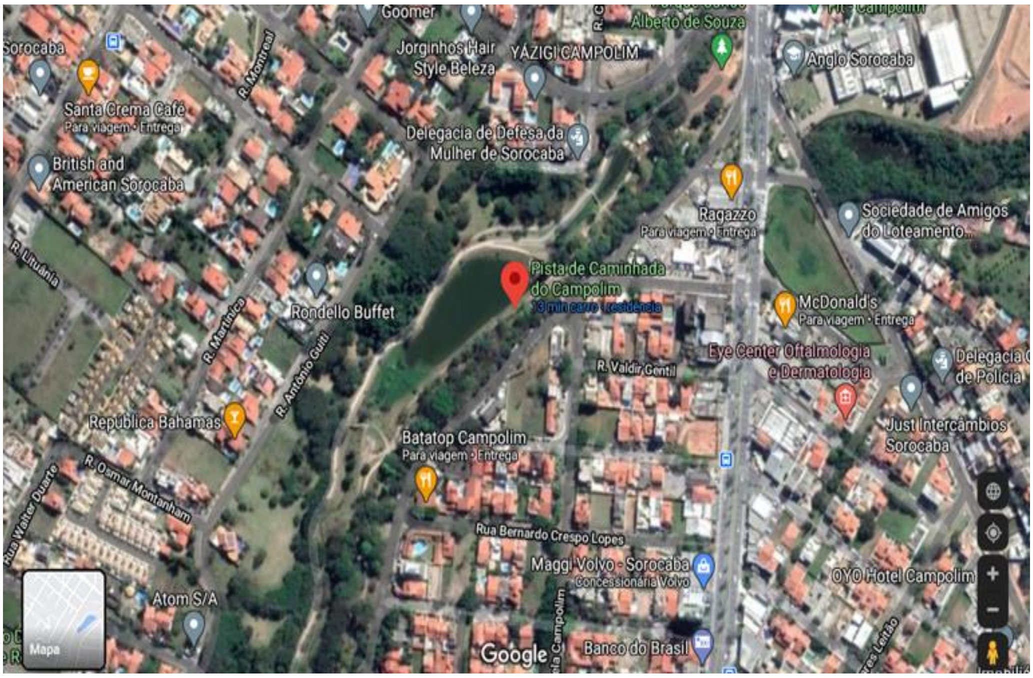
Definido o tema, o professor pode questionar as possibilidades viáveis e disponíveis para se obter os requisitos para efetivação do cálculo da área. Aqui pode-se solicitar aos estudantes sugestões de recursos para obtenção de dados, de modo a direcionar o foco deles a pensar em como fazer para se ter os elementos que permitam realizar esse cálculo, de modo não presencial no local, pois é importante despertar o espírito investigativo, com as questões:

- Quais informações são necessárias para determinar a medida de uma área?
- Como determinar as dimensões necessárias para o cálculo da área de maneira não presencial?
- Que recursos podem contribuir a se ter essas dimensões com precisão aceitável?
- Como utilizar estes recursos e extrair os dados necessários para o cálculo da área?
- Quais os passos para se realizar esse cálculo?

Assim, se conduz a uma pesquisa virtual que possibilite a busca via internet por meio de sites que permitem via satélite, a localização e visualização do local e captura da imagem dele.

Como exemplo, aqui foi selecionado e explorado para ser determinada a medida da área o lago da Pista de Caminhada do Parque "Carlos Alberto de Souza" – o Parque do Campolim, situado à Avenida Antonio Carlos Comitre 650, Sorocaba, Estado de São Paulo, CEP 18047-970 Brasil (Figura 5).

Figura 5 - Foto via Satélite do entorno do parque



Fonte: Google Maps[1]

O objeto do estudo, o lago, pertence ao parque que está localizado em um bairro nobre na zona sul da cidade de Sorocaba (SP), no local onde era uma fazenda de criação de gado leiteiro e cultivo de gêneros agrícolas para o sustento da família de Achilles Campolim. Na década de 1950, com a morte do patriarca, o filho João Campolim assumiu os negócios da família, e na década de 1970, a região foi loteada em parceria com a Construtora e Empreendedora Júlio & Júlio. Hoje é considerado o centro financeiro de Sorocaba e conhecido como um dos bairros mais valorizados do interior do Brasil. A pista de caminhada do Campolim, oficialmente Parque Municipal Carlos Alberto de Souza, foi projetada numa área de bacia de contenção e é um dos belos cartões-postais da cidade de Sorocaba (Figura 6).

[1] https://www.google.com/maps/place/Pista+de+Caminhada+do+Campolim/@-23.5244685,-47.4694823,656m/data=!3m2!1e3!4b1!4m5!3m4!1s0x94c58bd9ff558939:0xde766179f228f3f3!8m2!3d-23.5244685!4d-47.4672936?hl=pt-BR .Acesso 25 de novembro de 2021

Figura 6 - Foto do Lago do Parque "Carlos Alberto de Souza"

Fonte: Agência Sorocaba[2]

b) Interação com o tema: Teorema Fundamental do Cálculo e Desenvolvimento da Modelagem.

Nas etapas da modelagem como destaca Bassanezi (2018), o aluno do Ensino Superior, pode atingir o desenvolvimento do interesse no processo de ensino e aprendizagem, por meio da matemática aplicada que levará à valorização do conhecimento matemático.

Com esse foco, o professor para melhor aproveitamento pode retomar o conteúdo envolvido na aplicação, assim conforme apresenta Stewart (2016), temos o Teorema Fundamental do Cálculo:

Se *f* for contínua em [a,b]:

1. A função *g* definida por *g(x)* = $\int_a^x f(t)dt$ com a ≤ x ≤ b , é contínua em [a,b] e derivável em (a,b) e *g'(x) = f(x).*

2. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$ onde *F* é qualquer primitiva de *f,* isto é, uma função tal que *F' = f.*

O cálculo de áreas é a aplicação direta da integração pela diferenciação, que levará a uma compreensão do Teorema Fundamental do Cálculo.

---

[2]http://agencia.sorocaba.sp.gov.br/vegetacao-mais-alta-proxima-ao-rio-sorocaba-e-lagos-sao-estrategias/#&gid=1&pid=1. Acesso 25 de novembro 2021

c) Planejamento: visando a modelação utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo, usou-se para agregar um dinamismo à construção do modelo e confiabilidade ao resultado:

- análise de informações e visualização do processo;
- ferramentas tecnológicas, tais como: imagens via satélite encontradas no Google;
- os cálculos a partir do software GeoGebra, que é um software gratuito de Matemática Dinâmica, de interface homem-máquina de fácil operação, e que trabalha conteúdos da Geometria, Álgebra, Tabelas, gráficos, Estatística e Cálculo mesclados na mesma aplicação.

A partir das imagens da Figura 7 e Figura 8, mapa da planta baixa do lago em escala, identifica-se os princípios envolvidos, relaciona-se a possível solução, com auxílio o software GeoGebra Classic, o qual permite a inserção de imagens.

Figura 7- Mapa

Fonte: Google Maps[3]

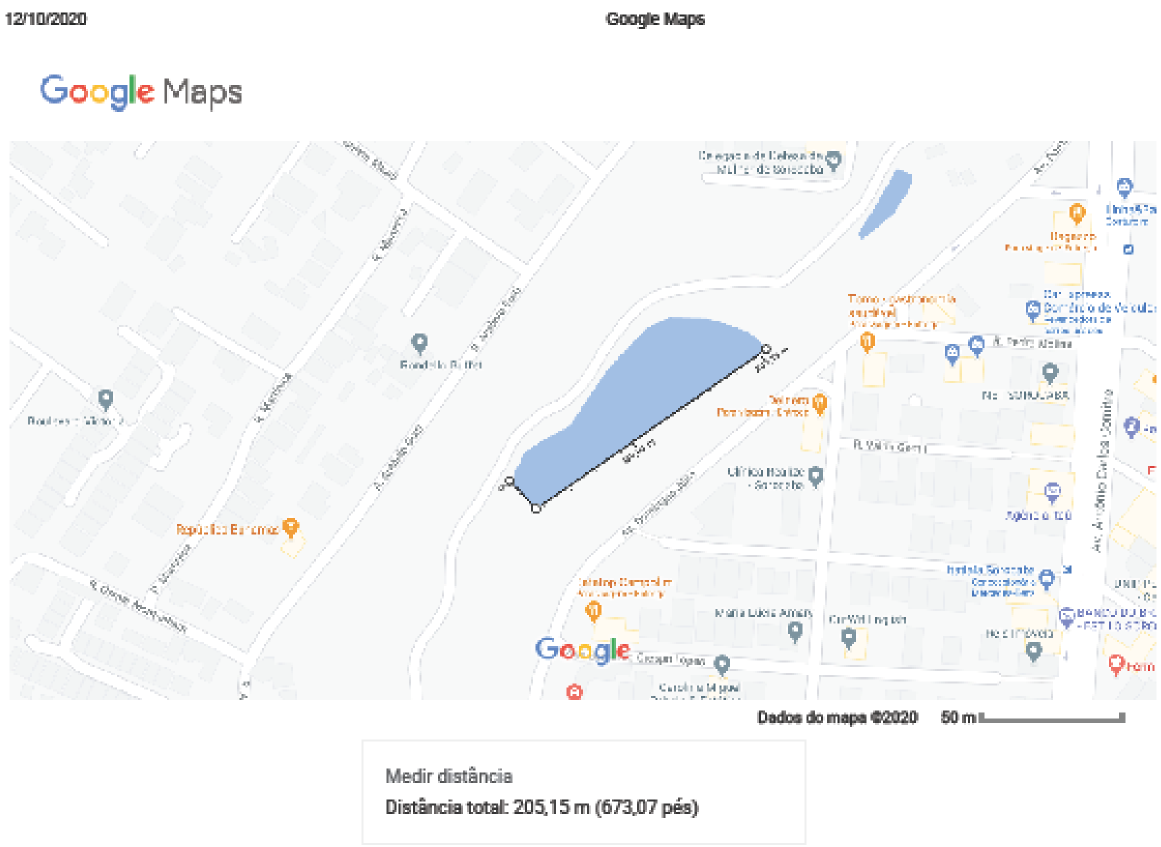
---

[3]https://www.google.com/maps/place/Pista+de+Caminhada+do+Campolim/@-23.5244685,-47.4690027,17z/data=!3m1!4b1!4m5!3m4!1s0x94c58bd9ff558939:0xde766179f228f3f3!8m2!3d-23.5244685!4d-47.4672936?hl=pt-BR. Acesso 25 de novembro de 2021

Na Figura 8 foi realizado ajuste de escala, para alusão na solução que se deseja atingir: na escala 1:10, mede-se a distância de interesse de 205 m, utilizando-se o recurso fornecido pelo site em referência.

Aqui o professor pode destacar e valorizar a importância da escala, pois no resultado a escala deve ser considerada, sendo que o objetivo é se conhecer o valor real da área.

Figura 8 - Mapa com Medida em escala



Fonte: Google Maps[4]

Na Figura 9, o passo inicial é a inserção do mapa da Figura 8 no software GeoGebra Classic, que por meio de seus recursos permite a adequação da imagem

---

[4] https://www.google.com/maps/place/Pista+de+Caminhada+do+Campolim/@-23.5244685,-47.4690027,17z/data=!3m1!4b1!4m5!3m4!1s0x94c58bd9ff558939:0xde766179f228f3f3!8m2!3d-23.5244685!4d-47.4672936?hl=pt-BR. Acesso 25 de novembro de 2021

quanto a dimensão, deslocamento e transparência de forma que a visualização dos eixos do software seja possível, conforme passos a seguir:

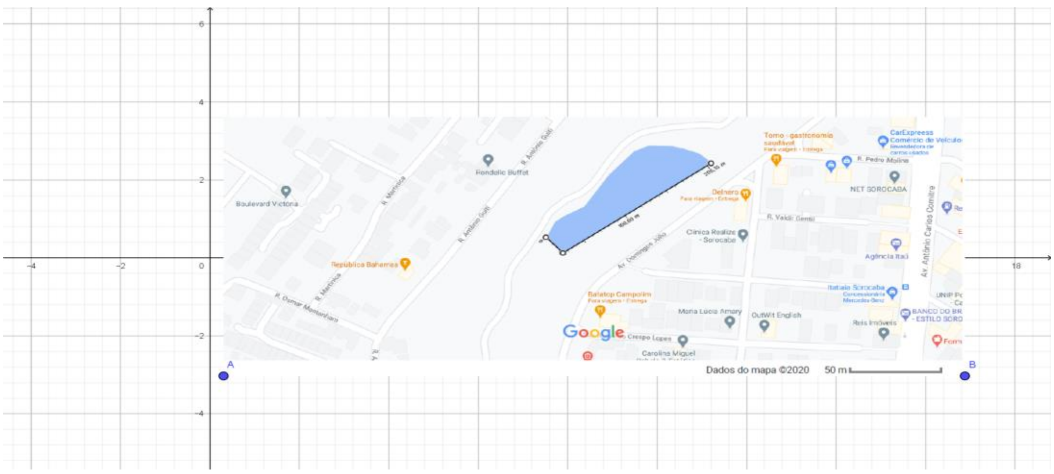
i. Inserir imagem: a partir da imagem do mapa (arquivo no formato *.PNG) salva do GoogleMaps, inserir imagem no software Geogebra: menu **TEXTO** ⟶ opção **INSERIR IMAGEM** (submenu a partir do seleção no canto inferior direito). Ao CLICAR em qualquer ponto na área de trabalho, a janela de escolha dos arquivos de imagem é aberta para selecionar a imagem desejada: neste caso a Figura 8.

ii. Ajuste da imagem quanto a dimensão e posição: menu **MOVER** ⟶ opção **REDUZIR** (submenu a partir do seleção no canto inferior direito). CLICAR na origem do sistema de coordenadas cartesianas até a imagem ficar compatível com a área de trabalho do GeoGebra.

    Para posicionar a imagem sobre os eixos do sistema de coordenadas cartesianas, a imagem deve estar transparente: menu **MOVER** ⟶ CLICAR na imagem e acionar botão direito do mouse ⟶**PROPRIEDADES ⟶ COR :** arrasta de 100% para 50% para se ver os eixos do sistema Cartesiano atrás da imagem.

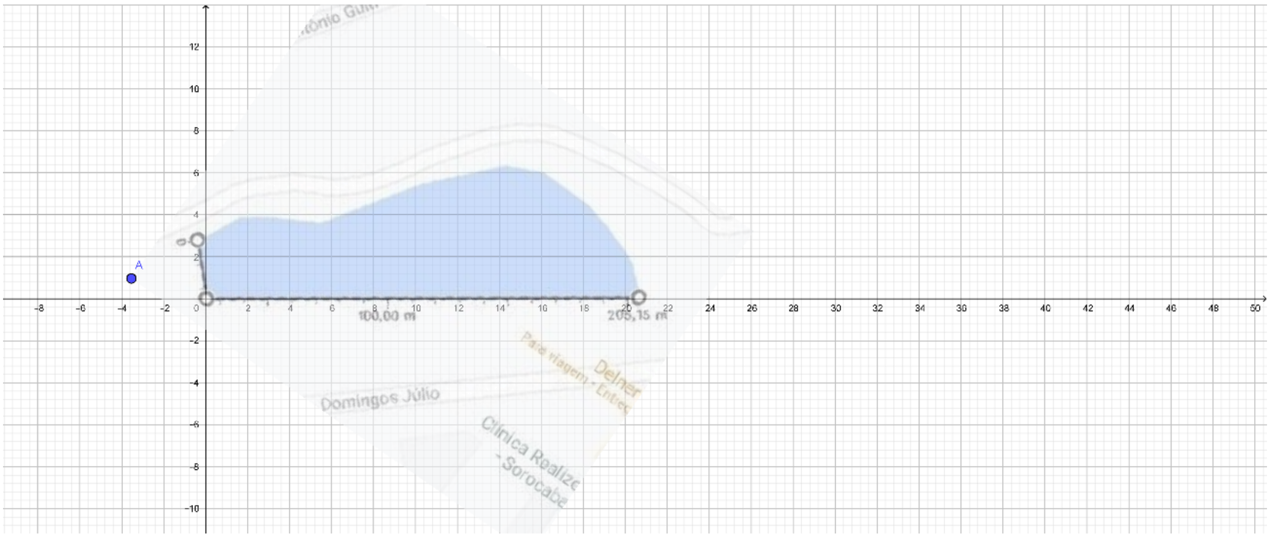
    Para posicionar a figura em escala na área de trabalho, arrastar pontos: menu MOVER ⟶ CLICAR nos pontos A e B e posicionar a figura de modo que a medida já conhecida 20.5 (na escala 1X10) fique sobre o eixo x, ou seja : Figura 10.

Figura 9 - Tela de Trabalho com imagem inserida



Fonte: elaborado pela autora

Figura 10 - Tela de Trabalho com imagem ajustada



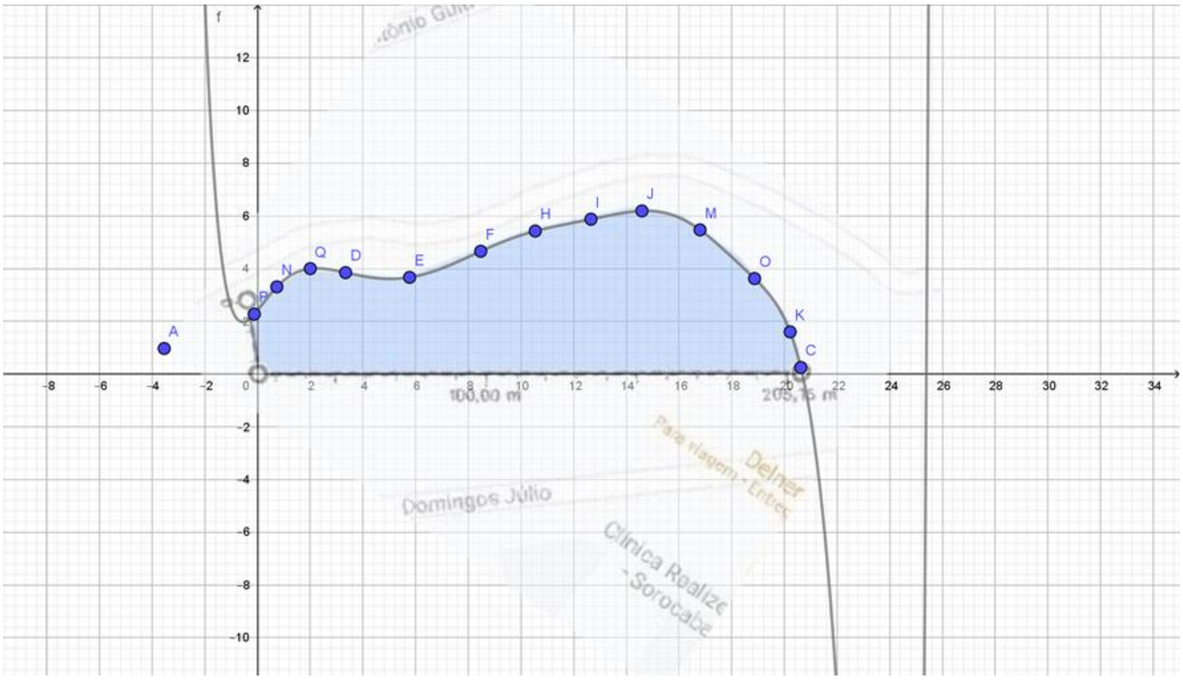
Fonte: elaborado pela autora

d) Conteúdo Matemático: a partir da imagem inserida e devidamente ajustada quanto a posição e referência nos eixos das coordenadas cartesianas no software GeoGebra Classic : Definir pontos no contorno da curva que representa o lago: opção **PONTO**⟶ para cada clique um ponto é criado com identificação de valores das coordenadas (x, y).

Com o objetivo de construir o modelo matemático para viabilizar a solução, foram definidos os pontos sob o contorno da curva na figura de modo a contemplar os pontos extremos, os pontos de máximo e mínimo e os pontos de inflexão (pontos que mudam a concavidade da curva) que resultaram a Figura 11. Lembrando que os conceitos de pontos de máximo, mínimo e inflexão poderão neste momento ser explorados pelo professor por meio de uma plenária com a turma, com o intuito de aferir os conhecimentos que os estudantes trazem consigo.

Aqui foram identificados 13 pontos.

Figura 11 - Tela de trabalho com os pontos marcados na imagem inserida



Fonte: elaborado pela autora

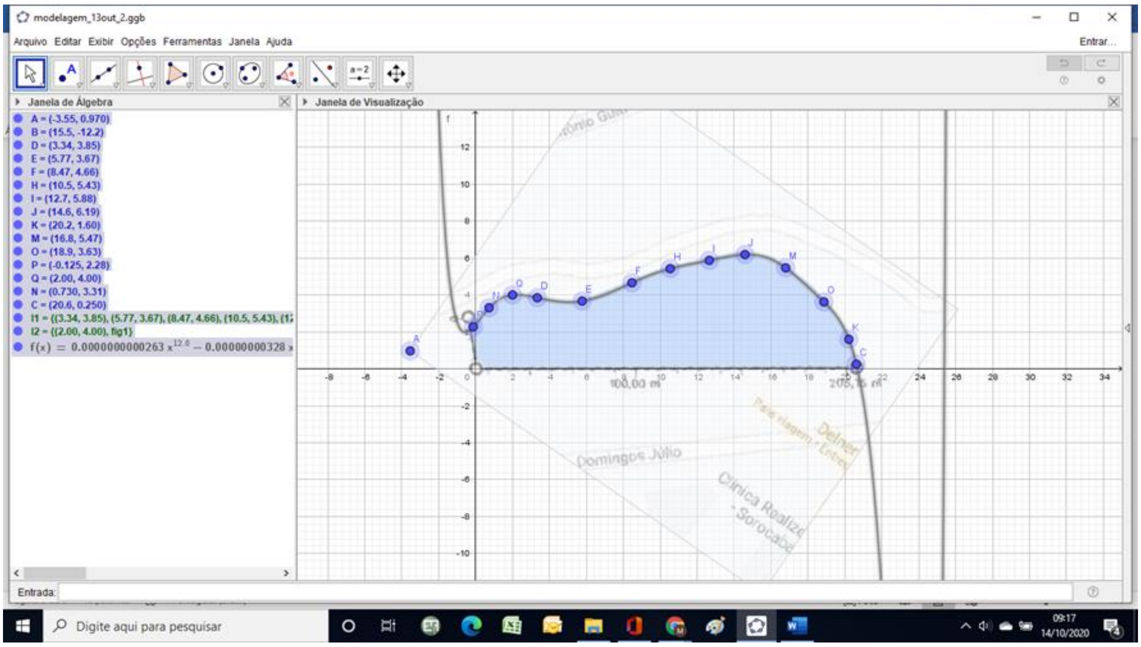
A partir dos pontos definidos na curva, gera-se uma lista : opção **ANGULOS** -> opção **LISTA** (submenu a partir do seleção no canto inferior direito): clica e arrasta para criar um retângulo que contenha todos os pontos que fazem parte da LISTA L1

Com a lista criada, criar uma função polinomial (equação) que contenha os pontos dessa lista polinômio em ENTRADA ->POLINOMIO<l1> -> <ENTER> : é criado o polinômio que se ajusta a lista L1 (após OPÇÂO → ARREDONDAMENTO → 3 algarismos significativos)

Assim a partir dos pontos marcados, o software forneceu a função que descreve algebricamente a curva que contém tais pontos. A Figura 12 mostra que os 13 pontos marcados na curva da imagem, têm como a função que representa algebricamente o polinômio de grau 12 por meio de:

f(x) = 0.0000000000263x^{12} - 0.00000000328x^{11} + 0.000000178x^{10} - 0.00000550x^{9} + 0.000108x^{8} - 0.00140x^{7} + 0.0123x^{6} - 0.0736x^{5} + 0.287x^{4} - 0.628x^{3} + 0.320x^{2} + 1.22x + 2.42.

Figura 12 - Definição da Função que descreve a curva da imagem



Fonte: elaborado pela autora

O modelo matemático é a equação polinomial que possibilita a resolução do problema proposto quanto ao cálculo da medida da área do lago da Pista de Caminhada do Parque Campolim, Sorocaba (SP).

O valor procurado foi obtido a partir da barra de entrada do software GeoGebra Classic, com a seleção da opção IntegralNumérica(<Função>, <Valor x inicial>, <Valor x Final>) com:

Função = f(x)

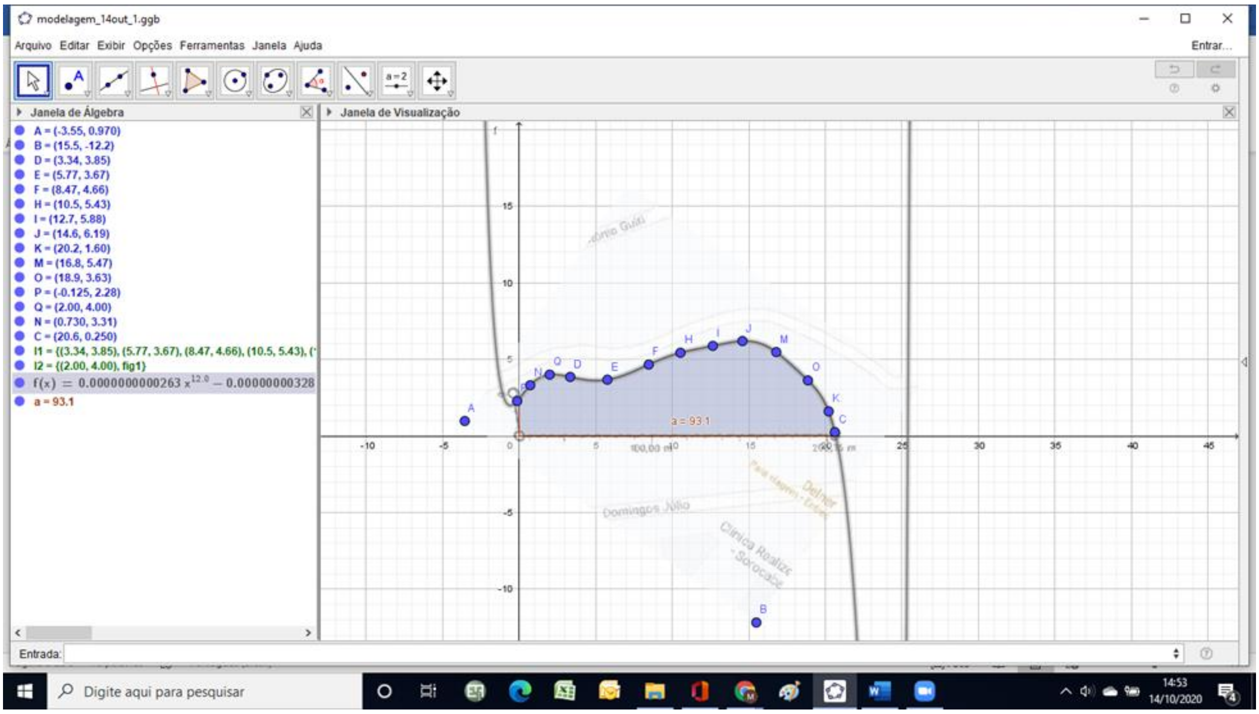
Valor x Inicial = 0

Valor x Final = 20.5

O valor gerado foi a=93,1 (Figura 13 e Figura 14), que equivale a:

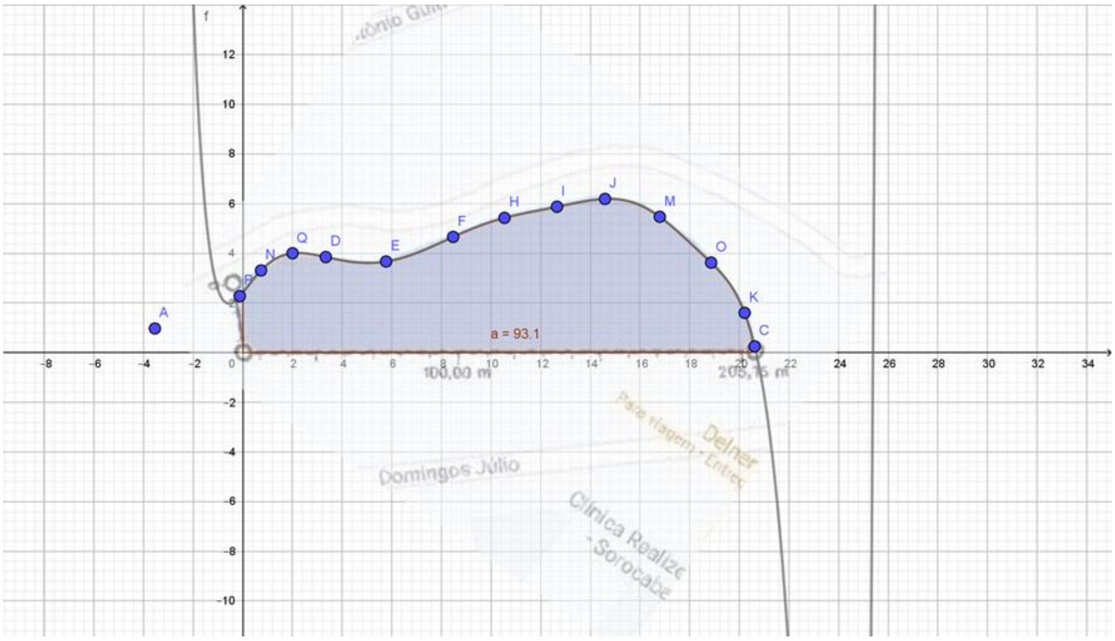
a = $\int_0^{20,5} f(x)dx$ = 93,1 u^2 onde *u*= 10 m.

Figura 13 - Valor gerado a = 93.1



Fonte: elaborado pela autora

Figura 14 - Valor gerado pela Integral Numérica



Fonte: elaborado pela autora

Mas o valor final é obtido após conversão da escala em que cada unidade do software GeoGebra Classic, equivale a 10 m, logo o resultado é:

A= a*10^2= 93.1*100= 9310 m^2 (1)

Seja o Teorema Fundamental do Cálculo: Se *f* for contínua em [a,b]:

1. A função *g* definida por

   g(x) = $\int_a^x f(t)dt$ com a ≤ x ≤ b

   é contínua em [a,b] e derivável em (a,b) e *g'(x) = f(x).*

2. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$ onde *F é qualquer primitiva de f, isto é, uma função tal que F' = f.*

Assim aplicando o mesmo, temos:

f(x) = 0.0000000000263x^{12} - 0.00000000328x^{11} + 0.000000178x^{10} - 0.00000550x^9 + 0.000108x^8 - 0.00140x^7 + 0.0123x^6 - 0.0736x^5 + 0.287x^4 - 0.628x^3 + 0.320x^2 + 1.22x + 2.42

Se F'(x) = f(x) então:

F(x) = ∫f(x)dx = $\frac{1}{13}$ *0.0000000000263x^{13} - $\frac{1}{12}$ *0.00000000328x^{12} + + $\frac{1}{11}$ * 0.000000178x^{11} - $\frac{1}{10}$0.00000550x^{10} + $\frac{1}{9}$ * 0.000108x^9 - $\frac{1}{8}$ * 0.00140x^8 + + $\frac{1}{7}$ * 0.0123x^7 - $\frac{1}{6}$ * 0.0736x^6 + $\frac{1}{5}$ * 0.287x^5 - $\frac{1}{4}$ * 0.628x^4 + $\frac{1}{3}$ * 0.320x^3 + $\frac{1}{2}$ *1.22x^2+ 2.42*x* + *C*

F(x) = 0.00000000000202x^{13} - 0.000000000274x^{12} + 0.0000000162x^{11} - 0.000000550x^{10} + 0.0000120x^9 - 0.000175x^8 + 0.00176x^7 - 0.0123x^6 + 0.0574x^5 - 0.157x^4 + 0.107x^3 + 0.612x^2 + 2.42x + C

Sendo b= 20,5 e a = 0, temos:

F(b) = F(20,5) = 93,1 + C

F(a) = F(0) = C

Logo : F(20,5) – F(0) = 93,1 + C - C = 93,1 u^2 com u = 10 m (2)

De (1) e (2), temos:

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ = 93,1 * 10^2 = 9310 m^2

e) Validação e extensão dos trabalhos desenvolvidos: com o desenvolvimento da atividade foi possível encontrar o valor aproximado da área proposta, pois é passível de consideração a resolução e segurança dos valores obtidos pela imagem via satélite que somado ao grau de confiabilidade do cálculo realizado pelo software GeoGebra Classic, a partir dos pontos escolhidos que levaram para definição da função polinomial , pode haver uma variação para mais ou para menos, devido principalmente ao fato de uma certa imprecisão da figura utilizada que foi obtida a partir do recurso do Google Maps. Pois o valor real da área lago é 8140 m^2de acordo com Secretaria de Planejamento da Prefeitura de Sorocaba- SP, situada na Av. Eng. Carlos Reinaldo Mendes, 3041 Alto da Boa Vista-Sorocaba-SP, CEP 18013-280, fone:(15)3238-2312/(15)3238-2317(seplan@sorocaba.sp.gov.br). Fato esse que deve ser discutido pela turma, com mediação do professor pois houve um erro de valores que vem da imagem quanto a qualidade de resolução e também dos métodos utilizados.

Mas a relação entre o cálculo da integral de uma função e a área, aqui de um objeto real, está bem evidenciada o que conduz a uma forma de analisar o grau de aprendizagem e esta mesma sequência de passos e ferramentas pode ser aplicada para outros objetos para determinar áreas como: peças mecânicas, áreas de vegetação, áreas envolvidas em eventuais catástrofes naturais como enchentes, vendavais, áreas de preservação de fauna e flora, áreas afetadas por incêndios entre outros.

4.2 CÁLCULO DE VOLUME

a) Escolha do tema: Medida do volume de um copo

De maneira análoga à anterior, o professor pode enfatizar para os alunos que o objeto alvo escolhido está presente no cotidiano de todos e dentro do espírito investigativo realizar alguns questionamentos:

- Qual a característica principal do objeto?
- Como o objeto é obtido?
- Quais informações são necessárias para o volume deste objeto?
- Como determinar as dimensões necessárias para o cálculo do volume do objeto de maneira presencial?
- Que recursos podem contribuir a se ter essas dimensões com precisão aceitável?
- Como utilizar estes recursos e extrair os dados necessários para o cálculo do volume?

- Quais os passos para se realizar esse cálculo?

Aqui se conduz com o copo sendo tratado como um sólido de revolução gerado a partir de uma área plana em torno de um eixo do seu plano, que é o seu eixo de revolução e tendo sua imagem a partir de uma foto com destaque para sua altura real (Figura 15).

Figura 15 - Objeto para cálculo do volume

Fonte: elaborado pela autora

b) Interação com o tema: Definição do volume de um sólido de revolução e Desenvolvimento da Modelagem.

Conforme as etapas da modelagem destacadas por Bassanezi (2018), com esse foco na valorização do conhecimento matemático, o professor do aluno do Ensino Superior, para melhor aproveitamento pode retomar o conteúdo envolvido na aplicação, quanto ao cálculo do volume que de acordo com MUNIZ NETO (2015) é definido como:

Se f: [a,b] $\longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em [a,b] e positiva em (a,b), então:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

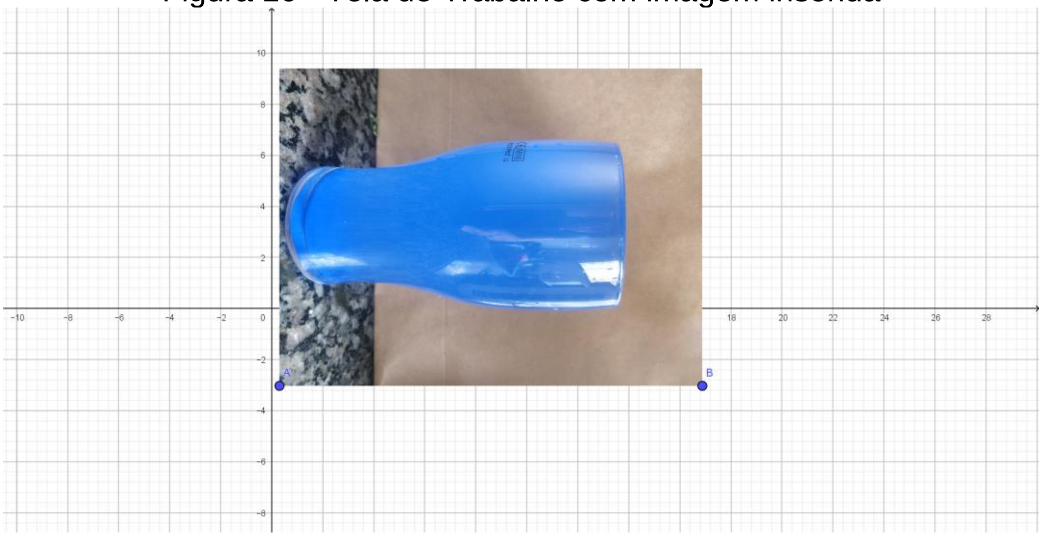
é o Volume do sólido de revolução gerado pela rotação de f em torno do eixo das abscissas.

Nesse momento, é importante que em uma plenária com a turma, sejam discutidos alguns aspectos como: eixo de revolução, obtenção de sólidos de revolução, entre outros que sejam pertinentes para o prosseguimento do trabalho.

c) Planejamento: a construção do modelo é a partir da foto do objeto com os cálculos realizados a partir do software GeoGebra.

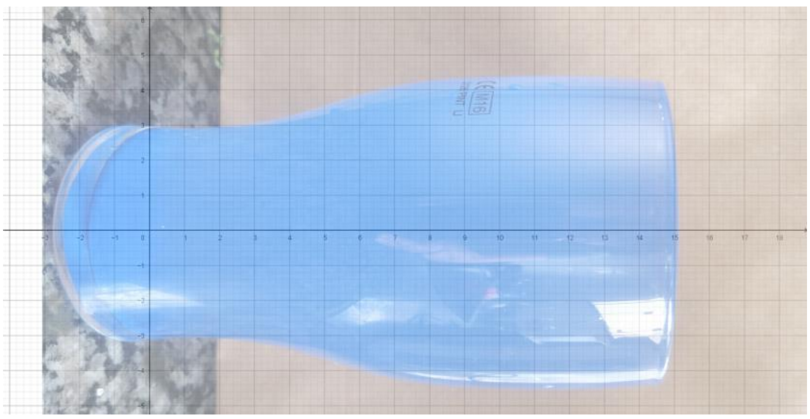
A partir da imagem da Figura 16, o passo inicial é a inserção da foto da Figura 15 no software GeoGebra Classic que por meio de seus recursos permite a adequação da imagem quanto a dimensão, deslocamento e transparência de forma que possibilite a visualização dos eixos do software seja através da imagem inserida e que o eixo de rotação do copo coincida com eixo das abscissas gerando a Figura 17.

Figura 16 - Tela de Trabalho com imagem inserida



Fonte: elaborado pela autora

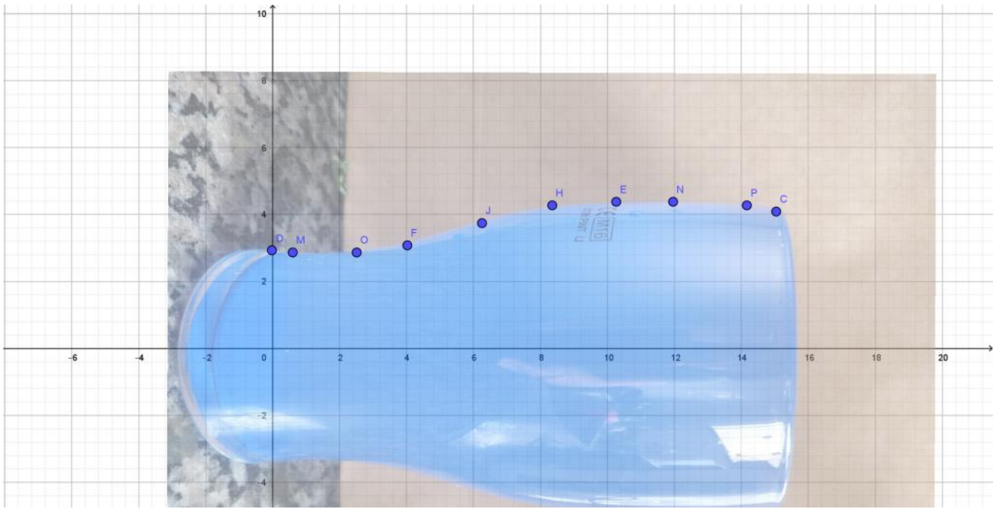
Figura 17 - Tela de Trabalho com imagem ajustada



Fonte: elaborado pela autora

d) Conteúdo Matemático: a partir da imagem inserida no software GeoGebra Classic, com o objetivo de construir o modelo matemático para viabilizar a solução, foram marcados pontos na mesma (Figura 18).

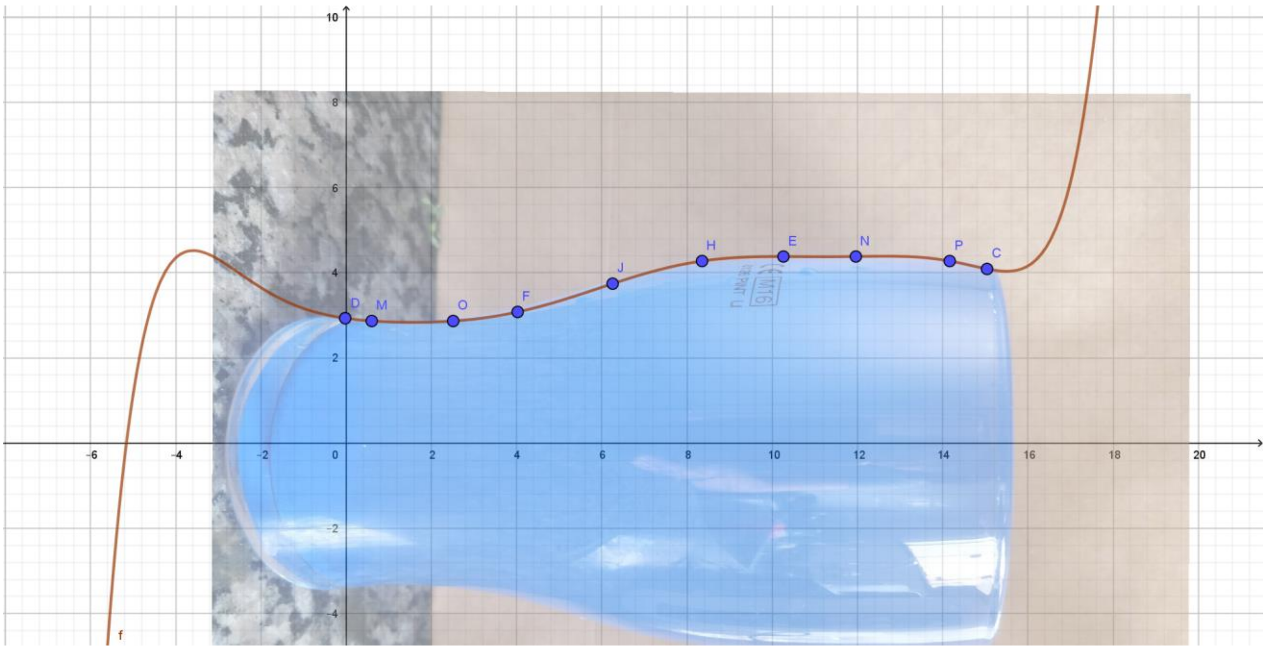
Figura 18 - Tela de Trabalho com pontos marcados



Fonte: elaborado pela autora

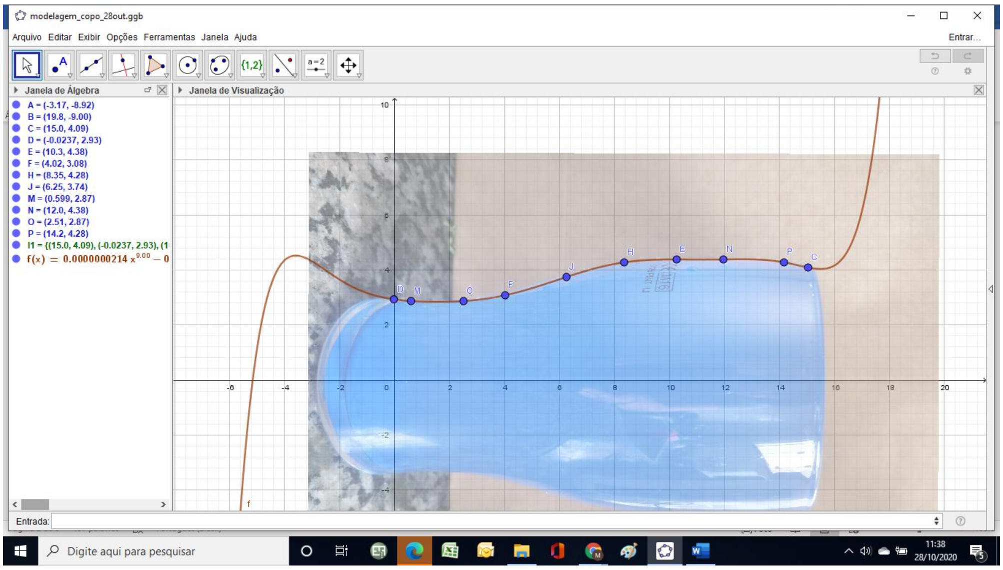
A partir dos pontos marcados, foi desenvolvida a equação que descreve algebricamente a curva que contém os mesmos pontos e que coincide com o contorno do objeto referência para a aplicação (Figura 19).

Figura 19 - Tela de Trabalho com função definida



Fonte: elaborado pela autora

Figura 20 - Tela de Trabalho com dados que geraram a função



Fonte: elaborado pela autora

O modelo matemático é a equação polinomial a seguir e que possibilita a resolução do problema proposto.

A partir dos pontos marcados, o software fornece a função que descreve algebricamente a curva que contém tais pontos. A Figura 20 mostra que os 10 pontos marcados na curva da imagem, têm a função que representa algebricamente o polinômio de grau 9 por meio de:

$$f(x) = 0.0000000214x^9 - 0.00000119x^8 + 0.0000250x^7 - 0.000231x^6 + 0.000681x^5 + 0.00249x^4 - 0.0186x^3 + 0.0732x^2 - 0.139x + 2.93.$$

A modelagem que resultou um polinômio cuja curva gera o solido de revolução, no caso o copo que é o objeto de estudo. O valor procurado foi obtido a partir da barra de entrada do software GeoGebra Classic, com a seleção da opção IntegralNumérica(<Função>, <Valor x inicial>, <Valor x Final>) com:

Função = $(f(x))^2$

Valor x Inicial = 0

Valor x Final = 15

Assim, temos:

V = π* 219 = 689 cm^3 = 689 ml

e) Validação e extensão dos trabalhos desenvolvidos: com o desenvolvimento da atividade, que é passível de consideração a resolução da foto e que os pontos marcados se referem ao contorno externo do objeto, e somado ao grau de confiabilidade do cálculo realizado com o auxílio software GeoGebra Classic levaram para definição da equação. Assim com a função definida, foi possível encontrar o valor do volume do objeto que apresenta como volume nominal o valor de 600ml, mas o valor obtido como resultado da aplicação pode haver uma variação para mais ou para menos, devido principalmente ao fato de que a equação polinomial obtida é do contorno externo do objeto e, seu volume no real, é considerando sua capacidade de armazenamento, não considerando suas paredes. Fato esse que deve ser discutido pela turma, com mediação do professor.

É importante destacar a relação entre o cálculo da integral de uma função e o volume de um sólido de revolução, aqui de um objeto real, que está bem evidenciada e conduz a mais uma forma de analisar o grau de aprendizagem. Essa mesma sequência, pode ser realizada a partir dos mesmos passos e ferramentas, tendo outros objetos para cálculo de volume como: um monte de areia, de pedras, de sucata, de tanques entre outros que se possam ser obtidos a partir de uma imagem.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Meu interesse em apresentar algumas sugestões de aplicações do Teorema Fundamental do Cálculo para professores dentro das disciplinas Cálculo Diferencial e Integral, baseou-se na importante colocação de D´Ambrósio e Valente (2016) sobre os métodos tradicionais de ensino de Cálculo frente às novas tecnologias disponíveis, e quanto elas podem contribuir para superar as dificuldades clássicas dos alunos dos ciclos iniciais dos cursos graduação de ciências exatas, em especial, de engenharias e áreas afins; e que possa colaborar para diminuir a desistência e o baixo aproveitamento desses alunos. Um outro complemento é a apresentação da contribuição histórica da matemática de várias culturas e civilizações desde a Idade Antiga, que sempre tiveram como objetivo a solução de problemas dos povos e até uma evolução da maneira de pensar da matemática e de suas aplicações com os trabalhos dos grandes gênios da matemática, como Tales de Mileto e Pitágoras de Samos, até Isaac Newton, John Wallis, Isaac Barrow e Gottfried Wilhelm Leibniz. Esses gênios da matemática tinham em comum os recursos limitados e surpreendentes conclusões.

Julgo de extrema importância os alunos terem contato com a origem e todo desenvolvimento das teorias, definições dos teoremas, a sua ordem cronológica, além de todo momento histórico político, econômico e social e com toda essa influência na história da Matemática, de modo particular, como foram as condições reais do “nascimento” do Cálculo na linha do tempo. A História traz registros importantes das reações do homem desde a antiguidade diante de determinadas circunstâncias e problemas, além dos relatos históricos mostrarem que os conceitos foram sendo construídos ao longo ao tempo, muitas vezes, a partir da solução de problemas, cuja modelagem resultou no avanço e desenvolvimento das ferramentas matemáticas. Assim, se faz necessário, compreender de que maneira se atingiu soluções inovadoras e conclusões lógico-matemáticas surpreendentes para resolução de problemas clássicos e a partir de quais estratégias e métodos.

Considerando que os relatos históricos mostram que os conceitos foram construídos ao longo do tempo, na maioria das vezes, a partir da solução de problemas, cuja modelagem resultou no avanço e desenvolvimento das ferramentas matemáticas: assim pode-se seguir no ensino a mesma lógica.

Nesta mesma direção, Bassanezi (2006) demonstra que dentro do ensino da Matemática quando o conhecimento é desenvolvido a partir de um fundamento concreto, seja ele direta ou indiretamente relacionado com a própria Matemática, se torna mais interessante e motivador. Sob esta argumentação, a modelagem matemática é a aplicação de casos reais aqui apresentada como base para orientação do professor de Ensino Superior desenvolver sua própria sequência de ensino.

O processo de modelação de acordo com os importantes conceitos de Bassanezi (2006) e Biembengut e Hein (2007) que podem instigar o espírito investigativo nos alunos no desenvolvimento de todos os passos de execução e melhorar a compreensão dos conceitos através de um modo complementar. Aqui com a apresentação do Teorema Fundamental do Cálculo para calcular a área e o volume por meio das aplicações apresentadas e com a possibilidade de desdobrar para outros objetos do cotidiano dos alunos que são passíveis de realização, é possível o aluno comprovar e validar as soluções encontradas.

Ainda de acordo com Bassanezi (2006), foi aplicada a habilidade de empregar a Matemática em situações concretas: medida da área de um lago real e medida do volume de um copo. Aqui executando todas as etapas: Escolha do Tema, Interação com o Tema, Planejamento, Conteúdo Matemático, e Validação. Logo foram transformados problemas da realidade em problemas matemáticos e apresentada a solução para melhor compreensão do Cálculo Diferencial e Integral no cotidiano dos alunos.

Outro importante proveito para o professor do Ensino Superior que utiliza as sugestões apresentadas para a montagem da sua sequência de ensino é apresentar para o aluno a importante ferramenta dentre outras que é software GeoGebra, que contém inúmeros recursos para auxiliar no aprendizado e conduzirá o aluno à autonomia e possibilidades de desenvolvimento de suas próprias aplicações de problemas reais de seu cotidiano. A utilização das tecnologias no ensino estão se tornando indispensáveis atualmente, por apresentarem uma considerável quantidade de recursos, sobretudo quanto à visualização gráfica de funções de maneira rápida e precisa. Assim é possível consolidar o aprendizado a partir do entendimento do que o software está executando.

REFERÊNCIAS

ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. Tradução: Claus Ivo Doering. **Cálculo** – Volume 1, 10 Ed. Porto Alegre, RS: Bookman, 2014.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Modelagem Matemática: teoria e prática**, SP: Contexto, 2015.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática**, 4.Ed., 1ª reimpressão. São Paulo, SP: Contexto, 2018.

BIEMBENGUT, Maria Salete; HEIN, Nelson. **Modelagem Matemática no Ensino**. 5. Ed. 5ª reimpressão São Paulo, SP: Contexto,2019.

D´AMBRÓSIO, Ubiratan; VALENTE, Carlos. **Os Primórdios da Epistemologia Do Cálculo: dos Babilônios a Arquimedes**. Didática do Cálculo – Epistemologia, Ensino e Aprendizagem. 1. Ed. – São Paulo, SP: Livraria da Física, p. 10-25, 2016.

EVES, Howard, tradução Hygino H. Domingues. **Introdução à História da Matemática**. 5 Ed- Campinas, SP: Editora Unicamp, 2011.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sérgio. **Investigação em Educação Matemática**. 3.Ed. – Campinas, SP: Editora Autores Associados Ltda.,2012.

GARCIA, Manuel. #TBT – Campolim e sua avenida principal transformados. Jornal Cruzeiro do Sul. Sorocaba, SP, 8 de maio 2019. Disponível em <https://www.jornalcruzeiro.com.br/presenca/tbt-campolim-e-sua-avenida-principal-transformados/ > Acesso em 25 de novembro de 2021.

GRANDE, André Lúcio. **Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino.** 2013**.** Tese(Doutorado em Educação Matemática)- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013.

MOL, Rogério Santos. **Introdução à história da matemática.** 1 Ed – Belo Horizonte, MG: CAED-UFMG, 2013.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Fundamentos do Cálculo**. 1. Ed – Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2015.

NASCIMENTO, Natália Oliveira; PIRES, Rogério Fernando. **Teorema Fundamental do Cálculo: aplicações para o cálculo de área utilizando o Geogebra**. XV CIAEM-IACME, Colombia,2019.

REZENDE, Wanderley Moura. **Os desenvolvimentos transitórios do Cálculo entre a Idade Média e o Renascimento**. Didática do Cálculo – Epistemologia, Ensino e Aprendizagem. 1. Ed. – São Paulo, SP: Livraria da Física, p. 26-38, 2016a.

REZENDE, Wanderley Moura. **As formulações do cálculo operacionalizadas por Descartes, Fermat, Newton e Leibniz**. Didática do Cálculo – Epistemologia, Ensino e Aprendizagem. 1. Ed. – São Paulo, SP: Livraria da Física, p. 39-51, 2016b.

SOUZA, Maria Helena. **21 Teoremas Matemáticos que revolucionaram o mundo**. 1.Ed. – São Paulo, SP: Planeta do Brasil,2018.

STEWART, James. **Cálculo Volume 1 – Tradução da 8 ª edição Norte Americana.** 4 Ed.- São Paulo, SP: Cengage Learning Edições Ltda., 2016.

APENDICE - GEOGEBRA

O GeoGebra é um software de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único pacote fácil de se usar. O GeoGebra possui uma comunidade de milhões de usuários em praticamente todos os países. O GeoGebra se tornou um líder na área de softwares de matemática dinâmica, apoiando o ensino e a aprendizagem em Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática.

Fatos Rápidos

- Geometria, Álgebra e Planilha de Cálculo estão interconectadas e são totalmente dinâmicas
- Interface fácil de se usar e, ainda assim, com muitos recursos poderosos
- Ferramentas de desenvolvimento para a criação de materiais didáticos como páginas web interativas
- Disponível em vários idiomas para nossos milhões de usuários ao redor do mundo
- Software de Código Aberto disponível gratuitamente para usuários não comerciais

Manuais e Aplicativos para download estão disponíveis em:

https://www.geogebra.org/ Acesso em 25 de novembro de 2021

https://wiki.geogebra.org/pt/Manual Acesso em 25 de novembro de 2021

https://www.geogebra.org/download Acesso em 25 de novembro de 2021