UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Identidades polinomiais graduadas para a álgebra das matrizes triangulares superiores sobre um corpo finito

Evandro Riva

São Carlos-SP
Dezembro de 2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Identidades polinomiais graduadas para a álgebra das matrizes triangulares superiores sobre um corpo finito

Evandro Riva

Orientador(a): Prof. Dr. Dimas José Gonçalves

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Doutor em Matemática.

São Carlos-SP

Dezembro de 2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Defesa de Tese de Doutorado do candidato Evandro Riva, realizada em 14/12/2021.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Dimas José Gonçalves (UFSCar)

Prof. Dr. Plamen Emilov Kochloukov (UNICAMP)

Felipe Y. Yasumura
Prof. Dr. Felipe Yukihide Yasumura (USP)

Viviane Ribeiro Tomaz da Silva
Profa. Dra. Viviane Ribeiro Tomaz da Silva (UFMG)

Prof. Dr. Humberto Luiz Talpo (UFSCar)

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Aos meus pais, Lucia e Sadi.

“A tarefa não é tanto ver aquilo que ninguém viu, mas pensar o que ninguém ainda pensou sobre aquilo que todo mundo vê.”

Arthur Schopenhauer

Agradecimentos

Agradeço a Deus por conduzir minha caminhada.

Aos meus pais, Lucia e Sadi. Devo TUDO a vocês.

Quero agradecer algumas pessoas que tem importante participação na minha vida:

Minha irmã Edina, que sempre me incentivou e torceu por mim. Meu parceiro, afilhado e sobrinho Rafael. Também minha sobrinha, a pequena Isadora. Agradeço também aos demais familiares. Sem dúvida, a família é a base de tudo.

Durante minha caminhada em São Carlos conheci uma pessoa incrível e muito especial, minha namorada Paulinha. Obrigado por todo carinho, incentivo e compreensão.

Ao meu irmão da vida Mateus que compartilhou toda essa caminhada e luta comigo. Obrigado por tudo. Também meu amigo Carlos que sempre esteve ao meu lado. Também agradeço aos demais amigos que passaram pela minha vida.

Outra pessoa muito especial a quem quero agradecer é meu orientador, professor Dimas. Sempre serei grato por todos seus ensinamentos, vários deles sequer tem relação com a matemática. Obrigado pela sua dedicação e empenho durante esses anos.

Agradeço todos os professores e funcionários das universidades e escolas que contribuíram para a minha formação. Em especial, aos membros da banca pela colaboração neste trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Seja $\mathbb{K}$ um corpo de característica p, e seja $UT_n = UT_n(\mathbb{K})$ a álgebra das matrizes triangulares superiores $n \times n$ sobre $\mathbb{K}$ com o produto usual $a \cdot b$ dos elementos $a, b \in UT_n$. Nesta tese, descrevemos o conjunto de todas as identidades polinomiais G-graduadas de UT_n, onde G é qualquer grupo e $\mathbb{K}$ é qualquer corpo finito.

O espaço vetorial UT_n com o novo produto $[a,b] = a \cdot b - b \cdot a$ é uma álgebra de Lie, denotada por $UT_n^{(-)}$. Nesta tese, descrevemos o conjunto de todas as identidades polinomiais G-graduadas de $UT_2^{(-)}$, onde G é qualquer grupo abeliano e $\mathbb{K}$ é qualquer corpo com característica $p \neq 2$.

Palavras-chave: PI-álgebra, Identidades polinomiais graduadas, Matrizes triangulares superiores, Álgebras de Lie, Propriedade de Specht.

Abstract

Let $\mathbb{K}$ be a field of characteristic p and let $UT_n = UT_n(\mathbb{K})$ be the algebra of $n \times n$ upper triangular matrices over $\mathbb{K}$ with the usual product $a \cdot b$ of the elements $a, b \in UT_n$. In this thesis we describe the set of all G-graded polynomial identities of UT_n, where G is any group and $\mathbb{K}$ is any finite field.

The vector space UT_n with the new product $[a,b] = a \cdot b - b \cdot a$ is a Lie algebra, denoted by $UT_n^{(-)}$. We describe the set of all G-graded polynomial identities of $UT_2^{(-)}$, where G is any abelian group and $\mathbb{K}$ is any field with characteristic $p \neq 2$.

Keywords: PI-algebra, Graded polynomial identities, Upper triangular matrices, Lie algebras, Specht property.

Sumário

Introdução

A teoria de álgebras que satisfazem identidades polinomiais, também conhecida como *PI-teoria*, é uma parte importante e bem desenvolvida da teoria de anéis. É neste contexto que se insere esta tese. De uma maneira mais específica, os resultados aqui descritos dizem respeito às identidades polinomiais graduadas da álgebra das matrizes triangulares superiores do ponto de vista associativo e também de Lie. No que segue, falaremos um pouco da história, tema e importância do que aparece neste texto, e como ele está dividido.

Fixe um corpo $\mathbb{K}$, e considere a álgebra associativa unitária livre, livremente gerada pelo conjunto infinito $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$, denotada por $\mathbb{K}\langle X\rangle$. Dada uma álgebra associativa unitária A, sobre $\mathbb{K}$, dizemos que um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}\langle X\rangle$ é uma identidade polinomial para A se

$$f(a_1, \ldots, a_n) = 0, \text{ para todos } a_1, \ldots, a_n \in A.$$

Denotamos por $T(A)$ o conjunto das identidades polinomiais de A, e se $T(A) \neq \{0\}$ dizemos que A é uma PI-álgebra. Nem toda álgebra é uma PI-álgebra, mas sabemos, por exemplo, que as álgebras comutativas e as de dimensão finita são PI-álgebras. Além dessas, existem outras PI-álgebras importantes, como por exemplo a álgebra de Grassmann, que tem um papel fundamental dentro da teoria. O conjunto $T(A)$ é um T-ideal de $\mathbb{K}\langle X\rangle$, isto é, um ideal de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ fechado por todos os endomorfismos de $\mathbb{K}\langle X\rangle$, e um dos principais problemas da área é encontrar um conjunto de polinômios que gere $T(A)$ como um T-ideal. Relembramos que o T-ideal de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ gerado por um conjunto é o menor T-ideal de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ que contém tal conjunto.

Falaremos um pouco dos conceitos apresentados acima diante da nossa álgebra, objeto de estudo desta tese. A álgebra associativa das matrizes triangulares superiores $n \times n$ com entradas em $\mathbb{K}$, denotada por $UT_n(\mathbb{K})$, com o seu produto usual $\cdot$ de matrizes, tem dimensão finita e portanto é uma PI-álgebra. As suas identidades polinomiais são bem conhecidas: Em 1971, Maltsev [15] descreveu o T-ideal $T(UT_n(\mathbb{K}))$ quando o corpo $\mathbb{K}$ tem característica 0. Mais especificamente, ele provou que o produto de n comutadores de comprimento 2 gera o T-ideal $T(UT_n(\mathbb{K}))$. Posteriormente, no ano de 1981, Siderov [17] obteve outra descrição para tal conjunto sobre um corpo qualquer $\mathbb{K}$, provando que $T(UT_n(\mathbb{K})) = (T(\mathbb{K}))^n$. A álgebra em questão tem um papel fundamental dentro da teoria, por exemplo, pode ser provado que se A é uma PI-álgebra finitamente gerada que satisfaz uma identidade polinomial não matricial e $\mathbb{K}$ é infinito, então existe um n tal que $T(UT_n(\mathbb{K})) \subseteq T(A)$. Veja [14] e [6, Observação 5.2.2].

Voltando para a importância de temas, em 1950, W. Specht [18] apresentou um problema que moldou boa parte do desenvolvimento da PI-teoria:

Se A é uma PI-álgebra, então $T(A)$ é finitamente gerado como um T-ideal ?

Em 1987, Kemer [10] provou que o problema de Specht tem resposta positiva quando o corpo $\mathbb{K}$ tem característica 0. Por outro lado, em 1999, Belov [3], Grishin [9] e Shchigolev [16] apresentaram contra-exemplos mostrando que o problema de Specht tem resposta negativa quando o corpo $\mathbb{K}$ tem característica $p \neq 0$.

Agora falaremos um pouco sobre graduações. Fixe um grupo multiplicativo G, seja A uma álgebra associativa unitária, e considere uma família $\{A_g \mid g \in G\}$ de subespaços vetoriais de A. Dizemos que A é uma álgebra G-graduada, com respeito a tal família de subespaços, se

$$A = \bigoplus_{g \in G} A_g \ \text{ e } \ A_g A_h \subseteq A_{gh},$$

para quaisquer $g, h \in G$. Nos restringiremos aqui a falar apenas da nossa álgebra de estudo. Pois bem, no que se refere as G-graduações de $A = UT_n(\mathbb{K})$, destacamos o seguinte: dada uma n-upla $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in G^n$, escreva

$$A = \bigoplus_{g \in G} A_g, \ \text{ onde } \ A_g = \operatorname{span}\{e_{(i,j)} \mid \varepsilon_i^{-1}\varepsilon_j = g\}.$$

Aqui, $e_{(i,j)}$ é a matriz com entrada (i,j) igual a 1 e demais entradas iguais a 0. Então, A é uma álgebra G-graduada, e dizemos que tal G-graduação é a G-graduação elementar de A induzida por ε. Em 2007, Valenti e Zaicev [20] provaram que toda G-graduação em $UT_n(\mathbb{K})$ é isomorfa a uma G-graduação elementar.

Com os dois conceitos em mãos, identidade polinomial e G-graduação, temos uma nova teoria que se baseia na mesclagem dos dois. Para cada $g \in G$ considere um conjunto infinito $X_g = \{x_1^g, x_2^g, \ldots\}$ e denote $X = \bigcup_{g \in G} X_g$. Definimos uma G-graduação em $\mathbb{K}\langle X \rangle$ de modo que

$$x_{i_1}^{g_1} x_{i_2}^{g_2} \cdots x_{i_m}^{g_m} \in (\mathbb{K}\langle X \rangle)_g, \ \ g = g_1 g_2 \cdots g_m.$$

Seja $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ uma álgebra associativa unitária G-graduada. Dizemos que um polinômio $f(x_{i_1}^{g_1}, \ldots, x_{i_n}^{g_n}) \in \mathbb{K}\langle X \rangle$ é uma identidade polinomial G-graduada para A, se

$$f(a_1, \ldots, a_n) = 0$$

para quaisquer $a_1 \in A_{g_1}, \ldots, a_n \in A_{g_n}$. Denotamos por $T_G(A)$ o conjunto das identidades polinomiais G-graduadas de A. Na busca da solução do problema de Specht, Kemer [11] trabalhou com identidades polinomiais $\mathbb{Z}_2$-graduadas, e aí está uma das grandes importâncias deste tópico. De maneira similar ao caso ordinário, temos o conceito de T_G-ideal e a versão do problema de Specht para o caso graduado. Em 2010, Aljadeff, Belov [1] e Sviridova [19] deram uma resposta positiva para o problema de Specht no contexto graduado, quando o corpo $\mathbb{K}$ tem característica 0 e G é grupo finito.

Em 2004, Di Vincenzo, Koshlukov e Valenti [4] provaram que duas G-graduações em $UT_n(\mathbb{K})$ são isomorfas se, e somente se, elas satisfazem as mesmas identidades polinomiais G-graduadas. Além disso, eles descreveram o conjunto de todas as identidades polinomiais G-graduadas de $UT_n(\mathbb{K})$, quando $\mathbb{K}$ é um corpo infinito. O caso em que $\mathbb{K}$ é um corpo finito foi feito por mim e Gonçalves [8], e é o resultado principal desta tese. Em particular, provamos que $T_G(UT_n(\mathbb{K}))$ é finitamente gerado, como um T_G-ideal, para todo grupo finito G e toda G-graduação da álgebra em questão.

Considere a álgebra de Lie livre, livremente gerada pelo conjunto infinito $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$, denotada por $L(X)$. Dada uma álgebra de Lie A, sobre $\mathbb{K}$, dizemos que um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n) \in L(X)$ é uma identidade polinomial para A se

$$f(a_1, \ldots, a_n) = 0, \text{ para todos } a_1, \ldots, a_n \in A.$$

De maneira similar ao caso associativo, podemos definir T-ideal em $L(X)$ e considerar o problema de Specht para PI-álgebras de Lie. Em 1970, Vaughan-Lee [21, 22] provou, para o caso em que o corpo $\mathbb{K}$ tem característica 2, que a resposta para o problema de Specht é negativa. Em 1974, Drensky [5] estendeu este resultado para álgebras de Lie sobre um corpo infinito $\mathbb{K}$ de característica $p > 2$. Permanece em aberto a resposta do problema de Specht para álgebras de Lie sobre um corpo de característica 0.

O espaço vetorial $UT_n = UT_n(\mathbb{K})$ com o novo produto $[\ ,\ ]$ definido por

$$[a, b] = a \cdot b - b \cdot a,$$

é uma álgebra de Lie, denotada por $UT_n^{(-)}$. Bahturin [2, Seção 4.5.2] descreveu o T-ideal $T(UT_n^{(-)})$ quando o corpo $\mathbb{K}$ é infinito. Mais especificamente, ele provou que o comutador de n comutadores de comprimento 2 gera o T-ideal $T(UT_n^{(-)})$.

Dado um grupo G, de maneira similar ao caso associativo, podemos definir G-graduação e identidade polinomial G-graduada para uma álgebra de Lie. Em 2017, Koshlukov e Yukihide [13] descreveram as G-graduações de $UT_n^{(-)}$. Ainda em tal ano, eles descreveram em [12] as identidades polinomias $\mathbb{Z}_n$-graduadas de $UT_n^{(-)}$ com a graduação canônica. Nesta tese, descrevemos as identidades polinomias G-graduadas de $UT_2^{(-)}$ para todo corpo de característica diferente de 2. Além disso, verificamos a propriedade de Specht para tais álgebras graduadas em alguns casos, permanecendo em aberto apenas o caso trivial quando o corpo é finito.

No que segue, faremos um pequeno resumo de como a tese está dividida:

No Capítulo 1, faremos uma exposição dos conceitos básicos a respeito da teoria de PI-álgebras e álgebras graduadas. O intuito de tal capítulo é deixar o texto o mais independente possível com relação a referências externas.

No Capítulo 2, motivados pelos resultados obtidos em [4], faremos a descrição das identidades polinomiais G-graduadas da álgebra $UT_n(\mathbb{K})$, para todo grupo G e todo corpo finito $\mathbb{K}$. Os métodos empregados para obter tais resultados são combinatoriais.

No Capítulo 3, faremos a descrição das identidades polinomiais G-graduadas da álgebra $UT_2^{(-)}$, para todo grupo abeliano G e todo corpo $\mathbb{K}$ de característica diferente de 2. Mais ainda, descreveremos uma base para a correspondente álgebra relativamente livre G-graduada.

No Capítulo 4, provaremos que $T_G(UT_2^{(-)})$ tem a propriedade de Specht para "algumas" G-graduações, isto é, todo T_G-ideal que contém $T_G(UT_2^{(-)})$ é finitamente gerado. Para deduzir tal fato, usaremos a técnica de conjuntos parcialmente bem-ordenados. Vale ressaltar que o caso mais complicado, isto é, referente a graduação trivial quando o corpo é infinito, foi feito por Bahturin e pode ser encontrado em [2, Seção 4.7.1].

CAPÍTULO 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos alguns conceitos e resultados básicos necessários para o desenvolvimento desta tese, em especial o conceito de álgebras com identidades polinomiais. Para maiores informações e um aprofundamento do assunto, sugerimos as referências [2], [6] e [7]. Ao longo desta tese, $\mathbb{K}$ denotará um corpo e, a menos de alguma menção em contrário, todas as álgebras e espaços vetoriais serão sobre $\mathbb{K}$.

1.1 Álgebras

Nesta seção, recordaremos alguns conceitos básicos sobre álgebras e introduziremos algumas notações que serão usadas ao longo da tese.

Seja A um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Dizemos que A é uma $\mathbb{K}$-*álgebra* se A é munido com uma operação binária $* : A \times A \longrightarrow A$, chamada produto, tal que, para todos $a, b, c \in A$ e todo $\lambda \in \mathbb{K}$, tem-se:

- $(a+b)*c = a*c + b*c$;
- $a*(b+c) = a*b + a*c$;
- $\lambda(a*b) = (\lambda a)*b = a*(\lambda b)$.

Usualmente denotamos $a*b = ab$. Além disso, ao invés de escrevermos $\mathbb{K}$-álgebra, escrevemos apenas "álgebra", deixando implícito o corpo $\mathbb{K}$.

Dizemos que uma álgebra A é:

- *Associativa*, se $(ab)c = a(bc)$, para quaisquer $a, b, c \in A$.
- *Comutativa*, se $ab = ba$, para quaisquer $a, b \in A$.
- *Unitária (ou com unidade)*, se A possui elemento neutro com relação ao produto, isto é, se existe $1 \in A$ tal que $1a = a1 = a$, para qualquer $a \in A$.

A seguir, damos um exemplo de uma importante álgebra associativa unitária que trataremos nesta tese.

Exemplo 1.1.1. O espaço vetorial das matrizes triangulares superiores $n \times n$ com entradas em $\mathbb{K}$, e com a operação usual de produto, é uma álgebra associativa unitária. A denotaremos por $UT_n(\mathbb{K})$. Como de costume, $e_{(i,j)}$ é a matriz unitária, cuja entrada (i,j) é igual a 1 e demais entradas são iguais a 0. Tais matrizes se relacionam da seguinte forma:

$$e_{(i,j)}e_{(t,l)} = \delta_{jt}e_{(i,l)},$$

onde δ_{jt} é o delta de Kronecker. Além disso, $\{e_{(i,j)} \mid 1 \leq i \leq j \leq n\}$ é uma base para o espaço vetorial $UT_n(\mathbb{K})$.

Uma outra classe importante de álgebras é a seguinte: Uma álgebra L é chamada de *álgebra de Lie* se satisfaz, para todos $a,b,c \in L$, as relações:

- $a^2 = aa = 0$;
- $(ab)c + (bc)a + (ca)b = 0$.

A primeira relação é chamada de *anticomutatividade*, já a segunda é chamada de *identidade de Jacobi*. Note que a relação de anticomutatividade implica que $ab = -ba$, para todos $a,b \in L$.

Podemos a partir de uma álgebra associativa criar uma álgebra de Lie, conforme o próximo exemplo.

Exemplo 1.1.2. Seja A uma álgebra associativa munida de um produto $\cdot$. Denote por $A^{(-)}$ o espaço vetorial A equipado com o novo produto $[\ ,\ ]$, chamado *colchete de Lie*, dado por:

$$[a,b] = a \cdot b - b \cdot a,$$

onde $a,b \in A$. Então, o espaço vetorial $A^{(-)}$ equipado com o produto $[\ ,\ ]$ é uma álgebra de Lie.

Como um caso particular do exemplo acima, temos a álgebra de Lie apresentada a seguir, que será nosso objeto de estudo nos Capítulos 3 e 4 desta tese.

Exemplo 1.1.3. Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Considere a álgebra associativa $UT_n(\mathbb{K})$, do Exemplo 1.1.1, com o produto usual de matrizes $\cdot$. Pelo exemplo acima, a álgebra $UT_n(\mathbb{K})^{(-)}$ com o produto $[\ ,\ ]$ é uma álgebra de Lie.

Podemos nos perguntar se toda álgebra de Lie é obtida a partir de uma álgebra associativa com o colchete de Lie. Para responder a esta pergunta, precisamos dos próximos três parágrafos de definições, antes de enunciar o famoso Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt.

Sejam A e B duas álgebras. Dizemos que uma transformação linear $f : A \longrightarrow B$ é um *homomorfismo de álgebras* se

$$f(ab) = f(a)f(b),$$

para todos $a, b \in A$. Neste caso, um homomorfismo de álgebras bijetivo é chamado de *isomorfismo de álgebras*. Se existe um isomorfismo entre duas álgebras, dizemos que elas são *isomorfas*. De forma análoga, define-se monomorfismo, epimorfismo, endomorfismo e automorfismo de álgebras.

Dizemos que um subespaço vetorial S de uma álgebra A é uma *subálgebra de* A, se $ab \in S$ para todos $a, b \in S$.

Seja A uma álgebra associativa, e seja L uma álgebra de Lie. Se L é uma subálgebra de $A^{(-)}$, dizemos que A é uma *álgebra envolvente de* L. Uma álgebra associativa unitária $U = U(L)$ é chamada de *álgebra envolvente universal da álgebra de Lie* L, se L é uma subálgebra de $U^{(-)}$, e U satisfaz a seguinte propriedade universal: para qualquer álgebra associativa unitária B e qualquer homomorfismo de álgebras de Lie $\varphi : L \longrightarrow B^{(-)}$, existe um único homomorfismo de álgebras associativas $\psi : U \longrightarrow B$ tal que $\psi_{|_L} = \varphi$ e $\psi(1) = 1$.

Pronto, agora sim podemos enunciar o Teorema de PBW.

Teorema 1.1.4 (Poincaré-Birkhoff-Witt)**.** Seja L uma álgebra de Lie. Então:

a) $U(L)$ existe;

b) Se U_1 e U_2 são álgebras envolventes universais de L, então U_1 é isomorfa a U_2;

c) Se L tem uma base (como espaço vetorial) $\{e_i : i \in I\}$, onde I é um conjunto ordenado, então $U(L)$ tem uma base (como espaço vetorial) formada pelos elementos
$$e_{i_1} \cdots e_{i_p},$$
onde $i_1, \ldots, i_p \in I$, $i_1 \leq \ldots \leq i_p$ e $p \geq 0$.

Demonstração. Para a demonstração, veja [6, Theorem 1.3.2]. □

Tal teorema será importante para caracterizarmos a álgebra de Lie livre, que é parte do assunto da próxima seção. Mas antes, falaremos de mais uma definição e um resultado básico de Álgebra Linear.

Um subespaço vetorial I de uma álgebra A é chamado de *ideal de* A, se
$$ab \in I \text{ e } ba \in I,$$
para todos $a \in A$ e $b \in I$.

Seja I um ideal de uma álgebra A. Se $a \in A$, denote
$$\overline{a} = a + I = \{a + i \mid i \in I\}.$$
O espaço vetorial quociente $A/I = \{\overline{a} \mid a \in A\}$ tem as operações de soma e produto por escalar definidas por
$$\begin{cases} \overline{a_1} + \overline{a_2} = \overline{a_1 + a_2}, \\ \alpha\overline{a} = \overline{\alpha a}, \end{cases}$$

onde $a_1, a_2 \in A$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Agora, definindo o produto por

$$\overline{a_1} \cdot \overline{a_2} = \overline{a_1 \cdot a_2},$$

temos que A/I é uma álgebra, chamada *álgebra quociente de A por I*.

Uma das técnicas para provar uma igualdade entre dois ideais $I \subseteq J$ de uma álgebra A, consiste em analisar um conjunto gerador de A/I e provar que tal conjunto é L.I. em A/J. O resultado que fundamenta tal técnica está enunciado abaixo.

Lema 1.1.5. Sejam I e J subespaços de um espaço vetorial V, onde $I \subseteq J$. Se B é um subconjunto de V, tal que $\bar{B} = \{b+I \mid b \in B\}$ gera o espaço vetorial quociente V/I, e $\bar{\bar{B}} = \{b+J \mid b \in B\}$ é linearmente independente em V/J, então $I = J$.

Demonstração. Suponha que $I \subsetneq J$, e seja $u \in J \setminus I$. Pelo fato que $\bar{B}$ gera V/I, segue que

$$u + I = \sum_{b \in B} \alpha_b b + I, \ \alpha_b \in \mathbb{K},$$

onde ao menos um coeficiente $\alpha_b \neq 0$. Em particular, existe $h \in I$ tal que $u = \sum_{b \in B} \alpha_b b + h$. Como $u, h \in J$, segue que $\sum_{b \in B} \alpha_b b \in J$, ou seja,

$$\sum_{b \in B} \alpha_b b + J = J.$$

Como $\bar{\bar{B}}$ é linearmente independente, segue que $\alpha_b = 0$ para todo $b \in B$, o que é uma contradição. Logo, $I = J$. $\square$

1.2 Álgebras Livres

O objetivo desta seção é criar o ambiente adequado para estudarmos as chamadas identidades polinomiais. Este ambiente é a álgebra livre, como definiremos no decorrer do texto.

Dado um subconjunto S de uma álgebra A, dizemos que a interseção de todas as subálgebras de A que contêm S é a *subálgebra de A gerada por S*.

Seja $\mathcal{V}$ uma classe de álgebras e seja $A \in \mathcal{V}$ uma álgebra gerada por um conjunto X. A álgebra A é chamada de *álgebra livre na classe $\mathcal{V}$, livremente gerada por X*, se para qualquer álgebra $R \in \mathcal{V}$, toda função $g : X \longrightarrow R$ pode ser estendida a um homomorfismo de álgebras $G : A \longrightarrow R$.

Agora construiremos uma álgebra livre na classe de todas as álgebras associativas unitárias. Seja $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ um conjunto infinito enumerável. Uma sequência finita de elementos de X,

$$x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n},$$

onde $n \geq 0$ e $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n} \in X$, será chamada de *palavra em X*. Note que duas palavras $x_{i_1} \cdots x_{i_n}$ e $x_{j_1} \cdots x_{j_m}$ são iguais se, e somente se, $n = m$ e $i_1 = j_1, \ldots, i_n = j_n$. O *comprimento* da palavra

$x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$ é n, e se $n = 0$ denotamos tal palavra por 1. Seja $\mathbb{K}(X)$ o espaço vetorial cuja base é o conjunto de todas as palavras em X. Defina a multiplicação entre duas palavras por concatenação, ou seja:

$$(x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n})(x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_m}) = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_m}.$$

Estendendo por linearidade este produto para todos os elementos de $\mathbb{K}(X)$, temos que $\mathbb{K}(X)$ é uma álgebra associativa unitária, com unidade igual a 1. Note que, se *Pal* é o conjunto de todas as palavras em X, então

$$\left(\sum_{u\in Pal}\alpha_u u\right)\left(\sum_{v\in Pal}\beta_v v\right) = \sum_{u\in Pal}\sum_{v\in Pal}(\alpha_u\beta_v)(uv),$$

onde $\alpha_u, \beta_v \in \mathbb{K}$ para todos $u, v \in Pal$. Os elementos de $\mathbb{K}(X)$ são chamados de *polinômios em* X, ou simplesmente, *polinômios*. Se u é uma palavra em X, e $\alpha \in \mathbb{K}$, dizemos que αu é um *monômio*.

Proposição 1.2.1. A álgebra $\mathbb{K}(X)$ é livre na classe de todas as álgebras associativas unitárias, livremente gerada por X.

Demonstração. Para a demonstração, veja [6, Proposição 1.2.3]. □

Dizemos que $\mathbb{K}(X)$ é a *álgebra associativa unitária livre, livremente gerada por* X. A partir dela, podemos construir a álgebra de Lie livre, conforme o teorema abaixo.

Teorema 1.2.2 (Witt)**.** Se $L(X)$ é a subálgebra de Lie de $\mathbb{K}(X)^{(-)}$ gerada por X, então $L(X)$ é uma álgebra livre na classe de todas as álgebras de Lie, livremente gerada por X. Além disso, a álgebra envolvente universal de $L(X)$ é $\mathbb{K}(X)$.

Demonstração. Para a demonstração, veja [6, Proposição 1.3.5]. □

A álgebra $L(X)$ é chamada *álgebra de Lie livre, livremente gerada por* X.

Dizemos que o polinômio $[x_{i_1}, x_{i_2}]$ definido por

$$[x_{i_1}, x_{i_2}] = x_{i_1}x_{i_2} - x_{i_2}x_{i_1},$$

é um *comutador de comprimento* 2. Por indução, definimos o *comutador de comprimento* n por

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}] = [[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n-1}}], x_{i_n}],$$

onde $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n} \in X$.

O conjunto dos comutadores de comprimento ≥ 2 admite um subconjunto $\mathscr{P}$, tal que $X \cup \mathscr{P}$ é uma base para o espaço vetorial $L(X)$. Escreva $\mathscr{P} = \{p_1, p_2, \ldots\}$, de modo que se o (comprimento de p_i) $<$ (comprimento de p_j), então $i < j$. Considere a ordem $<$ em $X \cup \mathscr{P}$ dada por

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots < p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots$$

Proposição 1.2.3. Assuma as notações do parágrafo acima. Então, o espaço vetorial $\mathbb{K}(X)$ tem uma base formada por todos os elementos da forma

$$x_1^{a_1}\cdots x_n^{a_n}p_1^{b_1}\cdots p_n^{b_n},$$

onde $n \geq 0$ e $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n \geq 0$.

Demonstração. A demonstração é consequência direta dos Teoremas 1.1.4 e 1.2.2. Para mais detalhes, veja [6, Proposição 4.3.3]. □

1.3 Identidades Polinomiais

Nesta seção, introduziremos o conceito de identidades polinomiais e exibiremos os resultados de Siderov [17] e Maltsev [15] que dizem respeito a descrição de tais identidades para $UT_n(\mathbb{K})$.

De agora em diante, todas as álgebras consideradas nesta seção serão associativas e com unidade. Assim, não mencionaremos mais a propriedade associativa e com unidade, escreveremos apenas álgebra.

Seja A uma álgebra e $f = f(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{K}(X)$. Dizemos que f é uma *identidade polinomial para* A se

$$f(r_1,\ldots,r_n) = 0,$$

para todos $r_1,\ldots,r_n \in A$. Denotamos por $T(A)$ o conjunto das identidades polinomiais de A. Se $T(A) \neq \{0\}$, dizemos que A é uma *PI-álgebra*.

São exemplos de PI-álgebras as álgebras comutativas e de dimensão finita. Um caso particular desta última é a álgebra $UT_n(\mathbb{K})$, como podemos ver abaixo.

Exemplo 1.3.1. A álgebra $UT_n(\mathbb{K})$ satisfaz a identidade polinomial

$$f(x_1,\ldots,x_{2n}) = [x_1,x_2]\cdots[x_{2n-1},x_{2n}].$$

De fato, se $r_1,r_2 \in UT_n(\mathbb{K})$, então $[r_1,r_2] \in UT_n(\mathbb{K})$ e tem a diagonal nula, isto é, $[r_1,r_2]$ é uma matriz estritamente triangular superior. Como o produto de n matrizes em $UT_n(\mathbb{K})$ com diagonal nula é a matriz nula, temos o resultado desejado.

Outro exemplo de identidade polinomial para $UT_n(\mathbb{K})$, quando $\mathbb{K}$ é um corpo finito com q elementos, é

$$g(x_1,\ldots,x_n) = (x_1^q - x_1)\cdots(x_n^q - x_n).$$

De fato, como $(\mathbb{K}-\{0\},\cdot)$ é um grupo multiplicativo, temos pelo Teorema de Lagrange que $x^{q-1} = 1$, para todo $x \in \mathbb{K}-\{0\}$. Logo,

$$x^q = x, \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{K}.$$

Deste fato, temos que $r^q - r$ é uma matriz estritamente triangular superior se $r \in UT_n(\mathbb{K})$, e em particular, $(r_1^q - r_1)\cdots(r_n^q - r_n) = 0$, para todos $r_1,\ldots,r_n \in UT_n(\mathbb{K})$.

Dizemos que um ideal I de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ é um *T-ideal de* $\mathbb{K}\langle X\rangle$, se $\varphi(I)\subseteq I$ para todo endomorfismo φ de $\mathbb{K}\langle X\rangle$. O conjunto $T(A)$ das identidades polinomiais de uma álgebra A é um T-ideal de $\mathbb{K}\langle X\rangle$. Reciprocamente, se I é um T-ideal de $\mathbb{K}\langle X\rangle$, então existe alguma álgebra A tal que $T(A)=I$, basta tomar $A=\mathbb{K}\langle X\rangle/I$.

Dado um subconjunto S de $\mathbb{K}\langle X\rangle$, dizemos que a interseção dos T-ideais que contêm S é o *T-ideal gerado por* S. Ele é o menor T-ideal que contém S, e será denotado por $\langle S\rangle^T$. Abaixo o descrevemos.

Proposição 1.3.2. Seja S um subconjunto de $\mathbb{K}\langle X\rangle$. O T-ideal gerado por S é o conjunto formado por todas as combinações lineares de elementos do tipo

$$uf(g_1,\ldots,g_n)v,$$

onde $u,g_1,\ldots,g_n,v\in\mathbb{K}\langle X\rangle$ e $f(x_1,\ldots,x_n)\in S$.

Demonstração. Para a demonstração, veja [6, Observação 2.2.6]. □

No que se refere a nossa álgebra de estudo, Siderov [17] e Maltsev [15] provaram o seguinte resultado:

Teorema 1.3.3. Se $\mathbb{K}$ é um corpo infinito, então o conjunto das identidades polinomias de $UT_n(\mathbb{K})$ é gerado, como um T-ideal, pelo polinômio

$$[x_1,x_2]\cdots[x_{2n-1},x_{2n}].$$

De um modo geral, Siderov [17] provou que se $\mathbb{K}$ é um corpo qualquer, então

$$T(UT_n(\mathbb{K}))=(T(UT_1(\mathbb{K})))^n.$$

Assim, como $T(UT_1(\mathbb{K}))=T(\mathbb{K})$, a descrição das identidades polinomiais de $UT_n(\mathbb{K})$ depende apenas da descrição das identidades polinomiais de $\mathbb{K}$. Pode ser provado que:

- Se $\mathbb{K}$ é um corpo infinito, então
$$T(\mathbb{K})=\langle[x_1,x_2]\rangle^T.$$

- Se $\mathbb{K}$ é um corpo finito com q elementos, então
$$T(\mathbb{K})=\langle[x_1,x_2],\ x_1^q-x_1\rangle^T.$$

Para mais detalhes, veja [6, Exercício 2.3.6].

Em geral, dado um T-ideal, queremos encontrar um "bom" conjunto de geradores. Para isso, precisamos de alguns conceitos.

Um polinômio $f(x_1,\ldots,x_m)\in\mathbb{K}\langle X\rangle$ é dito *homogêneo de grau d em x_i*, se é uma combinação linear de monômios, tais que em cada monômio a variável x_i aparece exatamente d vezes. Se $f(x_1,\ldots,x_m)$ é homogêneo de grau d_i em x_i, para todo $i=1,\ldots,m$, dizemos que $f(x_1,\ldots,x_m)$ é *multi-homogêneo de multigrau* $(d_1,\ldots,d_m)$. Um polinômio $f(x_1,\ldots,x_m)$ multi-homogêneo de multigrau $(1,\ldots,1)$ é chamado *multilinear de grau m*.

Proposição 1.3.4. Seja $f \in \mathbb{K}(X)$ e seja $x \in X$. Escreva

$$f = \sum_{i=0}^{n} f_i,$$

onde f_i é a componente homogênea de f de grau i em x. Se o corpo $\mathbb{K}$ tem cardinalidade $|\mathbb{K}| > n$, então

$$\langle f_0, f_1, \dots, f_n \rangle^T = \langle f \rangle^T.$$

Em particular, se $\mathbb{K}$ é infinito, então todo T-ideal é gerado por seus elementos multi-homogêneos. Se $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 0$, então todo T-ideal é gerado por seus elementos multilineares.

Demonstração. Para a demonstração, veja [6, Proposição 4.2.3]. □

Seja $\mathbb{K}[X]$ a *álgebra associativa comutativa unitária de polinômios nas variáveis em* X, e considere a ordem lexicográfica à direita $<$ nos seus monômios. Assim, se $a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_m \geq 0$ então

$$x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_m^{a_m} < x_1^{b_1} x_2^{b_2} \cdots x_m^{b_m}$$

se, e somente se, existe $1 \leq j \leq m$ tal que

$$a_j < b_j,\ a_{j+1} = b_{j+1},\ a_{j+2} = b_{j+2},\ \dots,\ a_m = b_m.$$

Temos o seguinte resultado.

Lema 1.3.5. Seja $\mathbb{K}$ um corpo com cardinalidade $|\mathbb{K}| \geq q$. Considere a ordem lexicográfica à direita $<$ nos monômios de $\mathbb{K}[X]$, e seja

$$f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{a \in A} \alpha_a x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_m^{a_m} \in \mathbb{K}[X],$$

onde $a = (a_1, \dots, a_m)$, $\alpha_a \in \mathbb{K}$ e A é um conjunto finito. Denote por $b = (b_1, \dots, b_m)$ a m-upla tal que

$$x_1^{b_1} x_2^{b_2} \cdots x_m^{b_m} = \max\{x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_m^{a_m} \mid a = (a_1, \dots, a_m) \in A\}.$$

Se $f(x_1, \dots, x_m) \in T(\mathbb{K})$ e $0 \leq b_1, b_2, \dots, b_m < q$, então $\alpha_b = 0$.

Demonstração. Antes de começar a demonstração, chamamos a atenção do leitor para o seguinte fato: o conceito de identidade polinomial foi definido no ambiente $\mathbb{K}(X)$ e aqui estamos dizendo que $f(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{K}[X]$ é uma identidade polinomial para a álgebra $\mathbb{K}$. Queremos dizer com isso que estamos identificando $f(x_1, \dots, x_n)$ com o polinômio

$$\sum_{a \in A} \alpha_a x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_m^{a_m} \in \mathbb{K}(X),$$

e que este se anula sempre que substituímos suas variáveis por quaisquer elementos do corpo $\mathbb{K}$.

Pois bem, escreva

$$f(x_1,\ldots,x_m) = \sum_{j=0}^{q-1} f_j(x_1,\ldots,x_{m-1})x_m^j.$$

Como $|\mathbb{K}| \geq q$, segue da última proposição que $f_j(x_1,\ldots,x_{m-1})x_m^j \in T(\mathbb{K})$ para todo $j = 0,1,\ldots,q-1$. Em particular,

$$f_{b_m}(x_1,\ldots,x_{m-1}) = f_{b_m}(x_1,\ldots,x_{m-1})(1)^{b_m} \in T(\mathbb{K}).$$

Como $x_1^{b_1}x_2^{b_2}\cdots x_{m-1}^{b_{m-1}}$ é o monômio maximal de $f_{b_m}(x_1,\ldots,x_{m-1})$, e seu coeficiente é α_b, por indução nós temos $\alpha_b = 0$. □

Uma consequência direta deste lema é o seguinte:

Lema 1.3.6. Seja $\mathbb{K}$ um corpo com cardinalidade $|\mathbb{K}| \geq n+1$, e seja $f(x_1,\ldots,x_m) \in \mathbb{K}[X]$ um polinômio dado por

$$f(x_1,\ldots,x_m) = \sum_{d_1,\ldots,d_m=0}^{n} \alpha_{(d_1,\ldots,d_m)} x_1^{d_1}\cdots x_m^{d_m},$$

onde $\alpha_{(d_1,\ldots,d_m)} \in \mathbb{K}$. Se $f(x_1,\ldots,x_m)$ é uma identidade polinomial para o corpo $\mathbb{K}$, então $f(x_1,\ldots,x_m) = 0$ (polinômio nulo).

O próximo resultado é importante e pode ser encontrado, em sua versão de Lie, no Teorema 6 de [2, Capítulo 4] ou [5]. Antes de enunciá-lo, dizemos que um polinômio $h(x_1,\ldots,x_m) \in \mathbb{K}\langle X\rangle$ é um *p-polinômio* se $h(x_1,\ldots,x_m)$ é multi-homogêneo com multigrau $(p^{a_1},\ldots,p^{a_m})$, onde $a_1,\ldots,a_m \geq 0$.

Teorema 1.3.7. Seja $\mathbb{K}$ um corpo com característica $p \neq 0$ e $|\mathbb{K}| \geq q$. Se $f(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{K}\langle X\rangle$ satisfaz $\deg_{x_i} f < q$ para todo $i = 1,\ldots,n$, então

$$\langle f\rangle^T = \langle S\rangle^T,$$

onde S é um conjunto finito de p-polinômios. Além disso, $\deg_{x_i} h < q$ para todo $i = 1,\ldots,m$ e todo $h = h(x_1,\ldots,x_m) \in S$.

Demonstração. Denote por H_f o conjunto formado pelas componentes multi-homogêneas de f, e por H o conjunto dos elementos multi-homogêneos $h(x_1,\ldots,x_m)$ de $\langle f\rangle^T$ com multigrau $(p^{a_1},\ldots,p^{a_m})$ onde $a_1,\ldots,a_m \geq 0$, $1 \leq p^{a_1},\ldots,p^{a_m} < q$ e $m \geq 0$. Pela Proposição 1.3.4 segue que

$$\langle f\rangle^T = \langle H_f\rangle^T.$$

Vamos mostrar que $\langle H_f\rangle^T = \langle H\rangle^T$. Claramente $\langle H\rangle^T \subseteq \langle H_f\rangle^T$. Note que

$$\langle H_f\rangle^T \subseteq \langle H\rangle^T \Leftrightarrow H_f \subseteq \langle H\rangle^T.$$

Seja $g(x_1,\ldots,x_n) \in H_f$. Se $g(x_1,\ldots,x_n) \in H$, temos o resultado. Caso contrário, isto é, se $g(x_1,\ldots,x_n) \notin H$, denote por $d = (d_{x_1},\ldots,d_{x_n})$ o multigrau de $g(x_1,\ldots,x_n)$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\deg_{x_1} g$ não é uma potência de p. Seja $\deg_{x_1} g = p^k s$, onde $\mathrm{mdc}(p,s) = 1$. Fixe $x_{n+1} \in X - \{x_1,\ldots,x_n\}$. Denote por $\overline{g}(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})$ a componente multi-homogênea de $g(x_1+x_{n+1},x_2,\ldots,x_n)$ com multigrau

$$\overline{d} = (\overline{d_{x_1}},\overline{d_{x_2}},\ldots,\overline{d_{x_n}},\overline{d_{x_{n+1}}}) = (\overline{d_{x_1}},d_{x_2},\ldots,d_{x_n},\overline{d_{x_{n+1}}}),$$

onde

$$\deg_{x_1}\overline{g} = \overline{d_{x_1}} = p^k \ \text{ e } \ \deg_{x_{n+1}}\overline{g} = \overline{d_{x_{n+1}}} = p^k s - p^k = p^k(s-1).$$

Como $|\mathbb{K}| \geq q$, temos que $\overline{g} \in \langle g \rangle^T$. Note que

$$\binom{p^k s}{p^k} = s \neq 0 \mod p.$$

Assim, como

$$\overline{g}(x_1,\ldots,x_n,x_1) = \binom{p^k s}{p^k} g(x_1,\ldots,x_n),$$

temos que $g \in \langle \overline{g} \rangle^T$. Provamos que $\langle g \rangle^T = \langle \overline{g} \rangle^T$. Agora usamos o mesmo argumento em $\overline{g}$. Após alguns passos, vamos obter $\langle g \rangle^T = \langle h \rangle^T$, para algum $h \in H$. Logo, $g \in \langle H \rangle^T$. Provamos que $\langle H_f \rangle^T \subseteq \langle H \rangle^T$, como era o desejado. □

1.4 Álgebras graduadas

Nesta seção apresentaremos o conceito de álgebra G-graduada, onde G é um grupo qualquer. Além disso, enunciaremos o resultado de Valenti e Zaicev [20] que descreve as G-graduações de $UT_n(\mathbb{K})$. Portanto, ao longo de toda a seção, G denotará um grupo multiplicativo.

Seja A uma álgebra qualquer, e considere uma família $\{A_g \mid g \in G\}$ de subespaços vetoriais de A. Dizemos que A é uma *álgebra G-graduada*, com respeito a tal família de subespaços, se

$$A = \bigoplus_{g\in G} A_g \ \text{ e } \ A_g A_h \subseteq A_{gh},$$

para quaisquer $g,h \in G$. Se $a \in A_g$, dizemos que a é um *elemento homogêneo de grau g*, e denotamos isso por $\deg_G(a) = g$.

Note que qualquer álgebra A pode ser graduada por um grupo G. De fato, se e é o elemento neutro de G, basta definir $A_e = A$ e $A_g = \{0\}$ para todo $g \neq e$. Essa graduação é chamada de *trivial*. O próximo exemplo é muito importante e serve de base para os resultados principais desta tese.

Exemplo 1.4.1. Denote $A = UT_n(\mathbb{K})$. Dada uma n-upla $\varepsilon = (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) \in G^n$, escreva

$$A = \bigoplus_{g\in G} A_g, \ \text{ onde } \ A_g = \mathrm{span}\{e_{(i,j)} \mid \varepsilon_i^{-1}\varepsilon_j = g\}.$$

Então, A é uma álgebra G-graduada, e dizemos que tal G-graduação é a *G-graduação elementar de A induzida por ε*.

É natural nos perguntar: quais são todas as G-graduações de $UT_n(\mathbb{K})$? É claro que existem infinitas, mas ainda assim desejamos classificá-las a menos da "roupa" dos elementos. Para isso, precisamos dos conceitos a seguir.

Considere duas álgebras G-graduadas A e B,

$$A = \bigoplus_{g\in G} A_g \text{ e } B = \bigoplus_{g\in G} B_g.$$

Um homomorfismo de álgebras $\varphi : A \longrightarrow B$ é chamado de *homomorfismo G-graduado* se

$$\varphi(A_g) \subseteq B_g,$$

para todo $g \in G$. Neste caso, se φ também é bijetor, dizemos que φ é um *isomorfismo G-graduado*. De forma análoga, define-se monomorfismo, epimorfismo, endomorfismo e automorfismo G-graduado.

Como resposta à pergunta acima, temos o seguinte resultado provado por Valenti e Zaicev [20].

Teorema 1.4.2. Seja $\mathbb{K}$ um corpo qualquer (finito ou infinito) e seja G um grupo. Se $UT_n(\mathbb{K})$ é uma álgebra G-graduada, então existe um isomorfismo G-graduado entre tal álgebra e $UT_n(\mathbb{K})$ com alguma G-graduação elementar.

Demonstração. Para a demonstração, veja [20, Theorem 7]. □

Este teorema está dizendo que toda G-graduação em $UT_n(\mathbb{K})$ é elementar, a menos de um isomorfismo G-graduado.

1.5 Álgebra associativa G-graduada livre

Nesta seção, apresentaremos o conceito de identidade polinomial G-graduada. Além disso, falaremos um pouco sobre os resultados de Di Vincenzo, Koshlukov e Valenti [4] a respeito das identidades polinomiais G-graduadas de $UT_n(\mathbb{K})$. Assim como antes, G denotará um grupo multiplicativo.

Para isso, primeiro apresentaremos o conceito de álgebra associativa unitária livre G-graduada, que será o nosso ambiente de trabalho. Para cada $g \in G$, considere um conjunto infinito e enumerável $X_g = \{x_1^g, x_2^g, \ldots\}$, de modo que tais conjuntos sejam disjuntos dois a dois. Seja

$$X = \bigcup_{g\in G} X_g,$$

e denote por $\mathbb{K}\langle X\rangle$ a álgebra associativa unitária livre, livremente gerada por X. Definiremos uma G-graduação em $\mathbb{K}\langle X\rangle$ da seguinte forma:

$$\deg_G(1) = e \quad \text{e} \quad \deg_G(x_{i_1}^{g_1} x_{i_2}^{g_2} \cdots x_{i_m}^{g_m}) = g_1 g_2 \cdots g_m,$$

para todos $x_{i_j}^{g_j} \in X_{g_j}$ e $m \geq 1$. Agora definimos

$$\mathbb{K}\langle X\rangle_g = \text{span}\{m \mid m \text{ é monômio de } \mathbb{K}\langle X\rangle,\ \deg_G(m) = g\}.$$

Temos que $\mathbb{K}\langle X\rangle$ é uma álgebra G-graduada por meio da decomposição

$$\mathbb{K}\langle X\rangle = \bigoplus_{g\in G} \mathbb{K}\langle X\rangle_g.$$

Ela será chamada *álgebra associativa unitária G-graduada livre, livremente gerada por X*. Tal álgebra tem a seguinte propriedade universal: dada uma álgebra associativa unitária G-graduada $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ e uma função $h : X \to A$ com $h(x) \in A_g$ para todos $x \in X_g$ e $g \in G$, existe um único homomorfismo G-graduado $H : \mathbb{K}\langle X\rangle \to A$ que estende h. Muito bem, agora estamos prontos para falar de identidades polinomiais no contexto graduado.

Seja $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ uma álgebra associativa unitária G-graduada. Um polinômio $f(x_{i_1}^{g_1},\dots,x_{i_n}^{g_n}) \in \mathbb{K}\langle X\rangle$ é chamado de *identidade polinomial G-graduada para A*, se

$$f(a_1,\dots,a_n) = 0$$

para quaisquer $a_1 \in A_{g_1},\dots,a_n \in A_{g_n}$. Denotamos por $T_G(A)$ o conjunto das identidades polinomiais G-graduadas de A.

Note que podemos construir identidades graduadas a partir de identidades "ordinárias" no seguinte sentido:

$$f(x_1,\dots,x_n) \in T(A) \Rightarrow f(x_{i_1}^{g_1},\dots,x_{i_n}^{g_n}) \in T_G(A)$$

para todos $x_{i_1}^{g_1},\dots,x_{i_n}^{g_n} \in X$.

Um exemplo mais particular, apenas para praticar, do que veremos no Capítulo 2 é o próximo exemplo.

Exemplo 1.5.1. Seja G o grupo $G = \{-1,1\}$. Considere a G-graduação elementar de $UT_2(\mathbb{Z}_7)$ induzida por $\varepsilon = (1,-1)$ (veja Exemplo 1.4.1). Observe que:

$$\deg_G(e_{(1,1)}) = \deg_G(e_{(2,2)}) = 1 \;\text{ e }\; \deg_G(e_{(1,2)}) = -1.$$

Assim, os polinômios

$$[x_1^1,x_2^1],\;\; (x_1^1)^7 - x_1^1 \;\text{ e }\; x_1^{-1}x_2^{-1}$$

são identidades polinomiais G-graduadas para $UT_2(\mathbb{Z}_7)$. Como veremos depois, $T_G(UT_2(\mathbb{Z}_7))$ é gerado, como um T_G-ideal, pelos 3 polinômios citados. O conceito de T_G-ideal vem a seguir.

Seja $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ uma álgebra G-graduada qualquer. Um ideal I de A é chamado de *ideal G-graduado de A*, se

$$I = \bigoplus_{g\in G} (I \cap A_g).$$

De maneira análoga, definimos *subespaço e subálgebra G-graduados de A*.

Um ideal G-graduado I de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ é dito ser um *T_G-ideal de $\mathbb{K}\langle X\rangle$* se $\varphi(I)\subseteq I$, para todo endomorfismo G-graduado φ de $\mathbb{K}\langle X\rangle$. Note que, assim como no caso ordinário, um ideal G-graduado I de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ é um T_G-ideal se, e somente se, $I=T_G(A)$ para alguma álgebra associativa unitária G-graduada A.

Dado um subconjunto S de $\mathbb{K}\langle X\rangle$, definimos o *$T_G$-ideal de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ gerado por S* como sendo a interseção de todos os T_G-ideais de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ que contêm S. Ele é o menor T_G-ideal de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ que contém S, e será denotado por $\langle S\rangle^{T_G}$. Dado

$$f=\sum_{g\in G} f_g,\ f_g\in\mathbb{K}\langle X\rangle_g,$$

note que $\langle f\rangle^{T_G}=\langle f_g\mid g\in G\rangle^{T_G}$, pois todo T_G-ideal de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ é, em particular, um ideal G-graduado de $\mathbb{K}\langle X\rangle$.

Proposição 1.5.2. Seja S um subconjunto de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ formado por elementos homogêneos, isto é,

$$S\subseteq\left(\bigcup_{g\in G}\mathbb{K}\langle X\rangle_g\right).$$

O T_G-ideal de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ gerado por S é o conjunto formado por todas as combinações lineares de elementos do tipo

$$v_1 f(u_1,\ldots,u_n)v_2,$$

onde $v_1,v_2\in\mathbb{K}\langle X\rangle$, $f(x_{i_1}^{g_1},\ldots,x_{i_n}^{g_n})\in S$ e $u_1\in\mathbb{K}\langle X\rangle_{g_1},\ldots,u_n\in\mathbb{K}\langle X\rangle_{g_n}$.

Demonstração. A demonstração consiste em verificar que o conjunto das combinações lineares citadas no enunciado é um T_G-ideal de $\mathbb{K}\langle X\rangle$. Como todo T_G-ideal que contém S também contém tais combinações lineares, segue o resultado. □

De maneira similar à Proposição 1.3.4, temos o seguinte resultado no contexto graduado:

Proposição 1.5.3. Seja $f\in\mathbb{K}\langle X\rangle$ e seja $x\in X$. Escreva

$$f=\sum_{i=0}^{n} f_i,$$

onde f_i é a componente homogênea de f de grau i em x. Se o corpo $\mathbb{K}$ tem cardinalidade $|\mathbb{K}|>n$, então

$$\langle f_0,f_1,\ldots,f_n\rangle^{T_G}=\langle f\rangle^{T_G}.$$

Em particular, se $\mathbb{K}$ é infinito, então todo T_G-ideal é gerado por seus elementos multi-homogêneos. Se $\mathrm{char}(\mathbb{K})=0$, então todo T_G-ideal é gerado por seus elementos multilineares.

Demonstração. A demonstração segue a mesma ideia de [6, Proposição 4.2.3]. □

O próximo lema estabelece uma relação entre as identidades de álgebras G-graduadas isomorfas.

Lema 1.5.4. Se A e B são álgebras associativas unitárias G-graduadas isomorfas, então $T_G(A) = T_G(B)$.

Antes de falar da importância deste simples resultado em nosso contexto, fixaremos uma notação.

Notação 1.5.5. Considere na álgebra $UT_n = UT_n(\mathbb{K})$ a G-graduação elementar induzida por $\varepsilon \in G^n$. Denotaremos por $T_G(UT_n, \varepsilon)$ o T_G-ideal de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ formado por todas as identidades polinomais G-graduadas de UT_n, quando UT_n for munido da G-graduação elementar induzida por ε.

Muito bem, pelo último lema e pelo Teorema 1.4.2, se temos interesse em estudar as identidades polinomiais G-graduadas de UT_n para toda graduação possível nesta álgebra, então basta estudar tais identidades quando UT_n é munido de uma graduação elementar.

Di Vincenzo, Koshlukov e Valenti [4] descreveram $T_G(UT_n, \varepsilon)$ para todo $\varepsilon \in G^n$ e todo corpo infinito $\mathbb{K}$. Já Gonçalves e Riva [8] descreveram tais T_G-ideais quando $\mathbb{K}$ é finito, conteúdo que será apresentado no próximo capítulo.

Para finalizar esta seção, note que

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \text{ e } (1, \varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_1^{-1}\varepsilon_n)$$

dão origem à mesma G-graduação elementar de UT_n. Além disso, em [4] os autores provam o seguinte:

Teorema 1.5.6. Seja $\mathbb{K}$ um corpo qualquer e seja G um grupo. Considere duas n-uplas $\varepsilon = (1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \in G^n$ e $\varepsilon' = (1, \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_n') \in G^n$. Então:

(a) $\varepsilon = \varepsilon'$ se, e somente se, as G-graduações elementares de UT_n induzidas por ε e ε' são isomorfas.

(b) $\varepsilon = \varepsilon'$ se, e somente se, $T_G(UT_n, \varepsilon) = T_G(UT_n, \varepsilon')$.

Demonstração. Para a demonstração, veja [4, Teorema 2.3] e [4, Corolário 2.4]. Embora os argumentos ali apresentados são para $\mathbb{K}$ infinito, eles também valem para $\mathbb{K}$ finito. $\square$

CAPÍTULO 2

Identidades G-graduadas, caso associativo

Sejam $\mathbb{K}$ um corpo e G um grupo. Em [20], Valenti e Zaicev provaram que toda G-graduação de $UT_n(\mathbb{K})$ é isomorfa a alguma G-graduação elementar. Assim, em [4], Di Vincenzo, Koshlukov e Valenti descreveram todas as identidades polinomiais G-graduadas de $UT_n(\mathbb{K})$, quando $\mathbb{K}$ é um corpo infinito. Neste capítulo estudamos o caso restante, isto é, descrevemos todas as identidades polinomiais G-graduadas de $UT_n(\mathbb{K})$, quando $\mathbb{K}$ é um corpo finito. Este trabalho foi desenvolvido juntamente com Gonçalves, e está publicado conforme a referência [8].

2.1 Estrutura de $\mathbb{K}\langle X\rangle$

De agora em diante, faremos uma sequência de definições e resultados que nos auxiliarão na demonstração do teorema principal desta tese. A ideia aqui é criar o conceito de *comutador L-normal* que venha a ter um papel similar ao conceito de *comutador semistandard*, que aparece em [4], e que foi utilizado para estudar as identidades graduadas da álgebra em questão, quando o corpo é infinito.

Ao longo desta seção, $\mathbb{K}$ será um corpo finito com q elementos, e G um grupo multiplicativo com elemento neutro 1.

Relembraremos a seguinte construção: Para cada $g \in G$, considere um conjunto infinito e enumerável $X_g = \{x_1^g, x_2^g, \ldots\}$, de modo que tais conjuntos sejam disjuntos dois a dois. Seja

$$X = \bigcup_{g\in G} X_g,$$

e denote por $\mathbb{K}\langle X\rangle$ a álgebra associativa unitária G-graduada livre, livremente gerada por X. Em geral, escreveremos

$$X_1 = Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots\} \text{ e } \left(\bigcup_{\substack{g\in G,\\ g\neq 1}} X_g\right) = Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots\}.$$

Definição 2.1.1. Dado $m \geq 1$, seja D_m o subespaço vetorial de $\mathbb{K}(X)$ gerado pelo conjunto de todos os polinômios

$$c_1c_2 \cdots c_m,$$

onde $c_i \in \mathbb{K}(X)$ é um comutador de grau ≥ 2 para todo i. Denote

$$D'_m = \sum_{t=m}^{\infty} D_t$$

e $D_0 = \mathbb{K}$.

Pela Proposição 1.2.3, obtemos o seguinte lema:

Lema 2.1.2. O espaço vetorial $\mathbb{K}(X)$ é gerado pelo conjunto de todos os polinômios

$$y_1^{a_1} \cdots y_s^{a_s} z_1^{b_1} \cdots z_s^{b_s} f_m$$

onde $a_1, \ldots, a_s \geq 0$; $b_1, \ldots, b_s \geq 0$; $s \geq 0$; $f_m \in D_m$; $m \geq 0$.

Definição 2.1.3. Um polinômio $f \in \mathbb{K}(X)$ é chamado de *polinômio normal* se

a) $f = [z_i, y_{i_1}, \ldots, y_{i_s}]$ para alguns $z_i \in Z$; $y_{i_1}, \ldots, y_{i_s} \in Y$; $s \geq 0$; ou

b) $f = [y_{i_1}, \ldots, y_{i_s}]$ para alguns $y_{i_1}, \ldots, y_{i_s} \in Y$; $s \geq 2$; ou

c) $f = [y_{i_1}^q - y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_s}]$ para alguns $y_{i_1}, \ldots, y_{i_s} \in Y$; $s \geq 1$.

Note que se $s = 0$, então $[z_i, y_{i_1}, \ldots, y_{i_s}] = z_i$ é um polinômio normal. Além disso, se $s = 1$, então $[y_{i_1}^q - y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_s}] = y_{i_1}^q - y_{i_1}$ é um polinômio normal também.

Definição 2.1.4. Dado $m \geq 1$, seja N_m o subespaço vetorial de $\mathbb{K}(X)$ gerado pelo conjunto de todos os polinômios

$$c_1c_2 \cdots c_m,$$

onde $c_i \in \mathbb{K}(X)$ é um polinômio normal de grau ≥ 1 para todo i. Denote

$$N'_m = \sum_{t=m}^{\infty} N_t$$

e $N_0 = \mathbb{K}$.

Lema 2.1.5. O espaço vetorial $\mathbb{K}(X)$ é gerado pelo conjunto de todos os polinômios

$$y_1^{a_1} \cdots y_s^{a_s} f_m$$

onde $0 \leq a_1, \ldots, a_s < q$; $s \geq 0$; $f_m \in N_m$; $m \geq 0$.

Demonstração. Primeiramente, temos a seguinte afirmação.

Afirmação 1. Se $g \in N_m$, então $[g,x] \in N'_m$ para todo $x \in X$.
Prova da Afirmação 1. Suponha $g = c_1c_2 \cdots c_m$, onde cada c_i é um polinômio normal. Pela igualdade $[uv,w] = u[v,w] + [u,w]v$, válida para qualquer álgebra associativa, temos

$$[g,x] = \sum_{i=1}^{m} c_1 \cdots c_{i-1}[c_i,x]c_{i+1} \cdots c_m.$$

(i) Se $x \in Y$, então $c_1 \cdots c_{i-1}[c_i,x]c_{i+1} \cdots c_m \in N_m$ e portanto $[g,x] \in N'_m$.

(ii) Se $x \in Z$, então

$$\begin{aligned} c_1 \cdots c_{i-1}[c_i,x]c_{i+1} \cdots c_m = \; & +c_1 \cdots c_{i-1}c_ixc_{i+1} \cdots c_m + \\ & -c_1 \cdots c_{i-1}xc_ic_{i+1} \cdots c_m \in N_{m+1} \subseteq N'_m. \end{aligned}$$

Assim, $[g,x] \in N'_m$.

A prova da Afirmação 1 está completa.

Afirmação 2. Sejam $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_s} \in X$. Se $g = [x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_s}]$, onde $s \geq 2$, então $g \in N'_1$.
Prova da Afirmação 2. A demonstração será por indução em s. O caso $s = 2$ é trivial. Agora, por hipótese de indução, obtemos

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{s-1}}] \in N'_1.$$

Logo, pela Afirmação 1, segue que $g \in N'_1$.

Afirmação 3. Sejam $i_1 \leq \ldots \leq i_s$ e $s \geq 0$. O polinômio $(y^q - y)y_{i_1} \cdots y_{i_s}$ é uma combinação linear de polinômios

$$y_{j_1} \cdots y_{j_t}[y^q - y, y_{j_{t+1}}, \ldots, y_{j_s}],$$

onde $0 \leq t \leq s$, $j_1 \leq \ldots \leq j_t$ e $j_{t+1} \leq \ldots \leq j_s$.
Prova da Afirmação 3. A demonstração será por indução em s. O caso $s = 0$ é trivial. Por hipótese de indução, $(y^q - y)y_{i_1} \cdots y_{i_{s-1}}$ é uma combinação linear de polinômios

$$y_{j_1} \cdots y_{j_t}[y^q - y, y_{j_{t+1}}, \ldots, y_{j_{s-1}}],$$

onde $0 \leq t \leq s-1$, $j_1 \leq \ldots \leq j_t$ e $j_{t+1} \leq \ldots \leq j_{s-1}$. Em particular, $(y^q - y)y_{i_1} \cdots y_{i_{s-1}}y_{i_s}$ é uma combinação linear de polinômios

$$y_{j_1} \cdots y_{j_t}[y^q - y, y_{j_{t+1}}, \ldots, y_{j_{s-1}}]y_{i_s}.$$

Como

$$\begin{aligned} y_{j_1} \cdots y_{j_t}[y^q - y, y_{j_{t+1}}, \ldots, y_{j_{s-1}}]y_{i_s} = \; & y_{j_1} \cdots y_{j_t}y_{i_s}[y^q - y, y_{j_{t+1}}, \ldots, y_{j_{s-1}}] + \\ & +y_{j_1} \cdots y_{j_t}[y^q - y, y_{j_{t+1}}, \ldots, y_{j_{s-1}}, y_{i_s}] \end{aligned}$$

a afirmação está provada.

Agora vamos provar o lema por meio das afirmações acima. Pelo Lema 2.1.2, $\mathbb{K}\langle X\rangle$ é gerado, como espaço vetorial, por todos os polinômios

$$y_1^{a_1} \cdots y_s^{a_s} z_1^{b_1} \cdots z_s^{b_s} c_1 \cdots c_m,$$

onde $a_1, \ldots, a_s \geq 0$; $b_1, \ldots, b_s \geq 0$; $s \geq 0$; $c_i \in D_1$ para todo i; $m \geq 0$. Pela Afirmação 2,

$$c_1 \cdots c_m \in N_m'.$$

Todo z_i é um polinômio normal. Assim, $\mathbb{K}\langle X\rangle$ é gerado, como espaço vetorial, pelo conjunto de todos os polinômios

$$y_1^{a_1} \cdots y_s^{a_s} f_m$$

onde $0 \leq a_1, \ldots, a_s$; $s \geq 0$; $f_m \in N_m$; $m \geq 0$.

Se $a_i \geq q$ para algum i, então

$$\begin{aligned} y_1^{a_1} \cdots y_i^{a_i} \cdots y_s^{a_s} f_m &= y_1^{a_1} \cdots y_i^{a_i-q}(y_i^q - y_i + y_i) \cdots y_s^{a_s} f_m \\ &= \underbrace{y_1^{a_1} \cdots y_i^{a_i-q}(y_i^q - y_i) \cdots y_s^{a_s} f_m}_{u} + \underbrace{y_1^{a_1} \cdots y_i^{a_i-q+1} \cdots y_s^{a_s} f_m}_{v}. \end{aligned}$$

Agora, aplicamos a Afirmação 3 no polinômio u e, se necessário, usamos um argumento análogo novamente. Se necessário, usamos um argumento análogo em v também. Depois de alguns passos, teremos o desejado. □

Exemplo 2.1.6. Considere o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$. Neste caso, $|\mathbb{K}| = q = 5$. Escreveremos o elemento $y_1^3 y_2^7 y_3 [z_1, y_1, y_3] z_2$ como uma combinação linear dos geradores de $\mathbb{K}\langle X\rangle$, que aparecem no enunciado do último lema.

$$\begin{aligned} y_1^3 y_2^7 y_3 [z_1, y_1, y_3] z_2 =& y_1^3 y_2^2 y_2^5 y_3 [z_1, y_1, y_3] z_2 \\ =& y_1^3 y_2^2 (y_2^5 - y_2 + y_2) y_3 [z_1, y_1, y_3] z_2 \\ =& y_1^3 y_2^3 y_3 [z_1, y_1, y_3] z_2 + y_1^3 y_2^2 (y_2^5 - y_2) y_3 [z_1, y_1, y_3] z_2 \\ =& y_1^3 y_2^3 y_3 [z_1, y_1, y_3] z_2 + y_1^3 y_2^2 (y_3 (y_2^5 - y_2) + [y_2^5 - y_2, y_3]) [z_1, y_1, y_3] z_2 \\ =& y_1^3 y_2^3 y_3 [z_1, y_1, y_3] z_2 + y_1^3 y_2^2 y_3 (y_2^5 - y_2) [z_1, y_1, y_3] z_2 + \\ & + y_1^3 y_2^2 [y_2^5 - y_2, y_3] [z_1, y_1, y_3] z_2 \end{aligned}$$

Note que os 3 somandos da última igualdade pertencem ao conjunto gerador de $\mathbb{K}\langle X\rangle$, referente ao último lema.

No próximo lema, $\mathrm{Sym}(s)$ denotará o grupo simétrico de $\{1, \ldots, s\}$.

Lema 2.1.7. Seja $z \in Z$ e $y, \overline{y} \in Y$. Se $\sigma \in \mathrm{Sym}(s)$, então:

a) $[z, y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(s)}] = [z, y_1, \ldots, y_s] + g$, para algum $g \in N_2'$.

b) $[y, \bar{y}, y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(s)}] = [y, \bar{y}, y_1, \ldots, y_s] + g$, para algum $g \in N_2'$.

c) $[y^q - y, y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(s)}] = [y^q - y, y_1, \ldots, y_s] + g$, para algum $g \in N_2'$.

Demonstração. É suficiente considerar a transposição $\sigma = (t, t+1)$. Escreva

$$c = [u, y_1, \ldots, y_{t-1}, y_{t+1}, y_t, y_{t+2}, \ldots, y_s],$$

onde $u = z$ ou $u = [y, \bar{y}]$ ou $u = y^q - y$. Denote $c' = [u, y_1, \ldots, y_{t-1}]$. Note que

$$c = [c', y_{t+1}, y_t, y_{t+2}, \ldots, y_s].$$

Pela identidade de Jacobi,

$$c = [c', y_t, y_{t+1}, y_{t+2}, \ldots, y_s] + g,$$

onde $g = [y_t, y_{t+1}, c', y_{t+2}, \ldots, y_s]$. Agora,

$$g = [[y_t, y_{t+1}]c', y_{t+2}, \ldots, y_s] - [c'[y_t, y_{t+1}], y_{t+2}, \ldots, y_s].$$

Usando a igualdade $[ab, d] = a[b, d] + [a, d]b$ várias vezes, concluimos que $g \in N_2'$, como era o desejado. $\square$

Faremos um exemplo para facilitar a compreensão do leitor, referente a demonstração do último lema.

Exemplo 2.1.8. Considere $c = [z, y_1, y_3, y_2, y_4]$. Temos

$$c = [c', y_3, y_2, y_4],$$

onde $c' = [z, y_1]$. Assim, pela identidade de Jacobi,

$$c = [c', y_3, y_2, y_4] = [c', y_2, y_3, y_4] + g = [z, y_1, y_2, y_3, y_4] + g,$$

onde $g = [y_2, y_3, c', y_4]$. Mostraremos que $g \in N_2'$: usando que

$$[ab, d] = a[b, d] + [a, d]b,$$

obtemos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} g =& [y_2, y_3, c', y_4] = [[y_2, y_3], c', y_4] = [[y_2, y_3]c', y_4] - [c'[y_2, y_3], y_4] \\ =& [y_2, y_3][c', y_4] + [[y_2, y_3], y_4]c' - c'[[y_2, y_3], y_4] - [c', y_4][y_2, y_3] \\ =& [y_2, y_3][z, y_1, y_4] + [y_2, y_3, y_4][z, y_1] - [z, y_1][y_2, y_3, y_4] - [z, y_1, y_4][y_2, y_3]. \end{aligned}$$

Portanto, $g \in N_2'$.

Definição 2.1.9. Um polinômio normal f é chamado de *polinômio E-normal* se

a) $f = [z_i, y_{i_1}, \ldots, y_{i_s}]$ com $i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_s$, ou

b) $f = [y_j, y_{i_1}, \ldots, y_{i_s}]$ com $j > i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_s$, ou

c) $f = [y_i^q - y_i, y_{i_1}, \ldots, y_{i_s}]$ com $i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_s$.

Definição 2.1.10. Dado $m \geq 1$, seja E_m o subespaço vetorial de $\mathbb{K}(X)$ gerado pelo conjunto de todos os polinômios

$$c_1 c_2 \cdots c_m,$$

onde $c_i \in \mathbb{K}(X)$ é um polinômio E-normal de grau ≥ 1 para todo i. Denote

$$E'_m = \sum_{t=m}^{\infty} E_t$$

e $E_0 = \mathbb{K}$.

Lema 2.1.11. $N_m \subseteq E_m + N'_{m+1}$.

Demonstração. Seja $f = [y_{i_1}, \ldots, y_{i_s}] \in N_1$. Pelo Lema 2.1.7,

$$f = [y_{j_1}, y_{j_2}, y_{j_3}, \ldots, y_{j_s}] \pmod{N'_2},$$

onde $i_1 = j_1$; $i_2 = j_2$; $j_3 \leq j_4 \leq \ldots \leq j_s$.

(i) Se $j_2 = \min\{j_1,\ j_2,\ \ldots,\ j_s\}$, então $[y_{j_1}, y_{j_2}, y_{j_3}, \ldots, y_{j_s}] \in E_1$.

(ii) Se $j_1 = \min\{j_1,\ j_2,\ \ldots,\ j_s\}$, então

$$[y_{j_1}, y_{j_2}, y_{j_3}, \ldots, y_{j_s}] = -[y_{j_2}, y_{j_1}, y_{j_3}, \ldots, y_{j_s}] \in E_1.$$

(iii) Se $j_3 = \min\{j_1,\ j_2,\ \ldots,\ j_s\}$, pela identidade de Jacobi temos

$$[y_{j_1}, y_{j_2}, y_{j_3}, \ldots, y_{j_s}] = -[y_{j_2}, y_{j_3}, y_{j_1}, \ldots, y_{j_s}] + [y_{j_1}, y_{j_3}, y_{j_2}, \ldots, y_{j_s}].$$

Agora, aplicamos o Lema 2.1.7 em cada somando do lado direito outra vez.

Pelos 3 itens acima, provamos que $f \in E_1 + N'_2$.

Se $f = [z_i, y_{i_1}, \ldots, y_{i_s}]$ ou $f = [y_{i_1}^q - y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_s}]$, então pelo Lema 2.1.7 também temos que $f \in E_1 + N'_2$.

Pelos três casos, provamos que se $f \in N_1$, então $f \in E_1 + N'_2$, ou seja, $N_1 \subseteq E_1 + N'_2$. Portanto,

$$N_m = \underbrace{N_1 \cdots N_1}_{m\ fatores} \subseteq (E_1 + N'_2) \cdots (E_1 + N'_2) \subseteq E_m + N'_{m+1}.$$

A prova está completa. $\square$

Notação 2.1.12. Se $f \in \mathbb{K}(X)$, $y \in Y$ e $d \geq 1$, denotamos

$$[f, y^{(d)}] = [f, \underbrace{y, y, \dots, y}_{d \ fatores}].$$

Além disso, denotamos $[f, y^{(0)}] = f$.

Definição 2.1.13. Um polinômio E-normal f é chamado de *polinômio H-normal* se

a) $f = [z_i, y_1^{(d_1)}, \dots, y_s^{(d_s)}]$ com $0 \leq d_1, \dots, d_s < q$, ou

b) $f = [y_j, y_1^{(d_1)}, \dots, y_s^{(d_s)}]$ com $0 \leq d_1, \dots, d_s < q$, ou

c) $f = [y_i^q - y_i, y_1^{(d_1)}, \dots, y_s^{(d_s)}]$ com $0 \leq d_1, \dots, d_s < q$.

Definição 2.1.14. Dado $m \geq 1$, seja H_m o subespçao vetorial de $\mathbb{K}(X)$ gerado pelo conjunto de todos os polinômios

$$c_1 c_2 \cdots c_m,$$

onde $c_i \in \mathbb{K}(X)$ é um polinômio H-normal de grau ≥ 1 para todo i. Denote

$$H'_m = \sum_{t=m}^{\infty} H_t$$

e $H_0 = \mathbb{K}$.

O seguinte resultado pode ser encontrado em [17, Lemma 2.5]. Por uma questão de completude do texto, também fornecemos a sua demonstração.

Lema 2.1.15. Se $f \in \mathbb{K}(X)$ e $y \in Y$, então

$$[f, y^{(q)}] = [f, y^q].$$

Em particular,

$$[f, y^{(q)}] = [f, y^q - y] + [f, y].$$

Demonstração. Primeiramente, provaremos por indução em m que

$$[f, y^{(m)}] = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} y^i f y^{m-i}. \tag{2.1}$$

O caso $m = 1$ é trivial. Suponha $m \geq 2$. Pela relação de Stifel e pela hipótese de indução, segue que

$$\begin{aligned}
[f, y^{(m)}] = [f, y^{(m-1)}, y] &= [f, y^{(m-1)}]y - y[f, y^{(m-1)}] \\
&= \left(\sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \binom{m-1}{i} y^i f y^{m-1-i} \right) y - y \left(\sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \binom{m-1}{i} y^i f y^{m-1-i} \right) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \binom{m-1}{i} y^i f y^{m-i} \right) - \left(\sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \binom{m-1}{i} y^{i+1} f y^{m-1-i} \right) \\
&= f y^m + \left(\sum_{i=1}^{m-1} (-1)^i \left(\binom{m-1}{i} + \binom{m-1}{i-1} \right) y^i f y^{m-i} \right) + (-1)^m y^m f \\
&= \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} y^i f y^{m-i}.
\end{aligned}$$

Denote por p a característica do corpo $\mathbb{K}$. Como $\mathbb{K}$ é um $\mathbb{Z}_p$-espaço vetorial, segue que $q = |\mathbb{K}| = p^t$, onde $t = \dim_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{K}$. Pelo Lema A.0.1,

$$\binom{q}{i} = 0, \text{ para todo } 1 \leq i \leq q-1.$$

Portanto, por (2.1), obtemos

$$[f, y^{(q)}] = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \binom{q}{i} y^i f y^{q-i} = f y^q + (-1)^q y^q f = [f, y^q],$$

como era o desejado. $\square$

Lema 2.1.16. $E_m \subseteq H_m + N'_{m+1}$.

Demonstração. Primeiro provaremos que $E_1 \subseteq H_1 + N'_2$.

(1) Seja $c = [z, y_1^{(d_1)}, \ldots, y_s^{(d_s)}] \in E_1$, onde $d_i \geq 0$ para todo i. Vamos provar por indução em s que $c \in H_1 + N'_2$.

O caso $s = 0$ é trivial.

Suponha $s \geq 1$. Por hipótese de indução, existem $f \in H_1$ e $g \in N'_2$ tais que

$$[z, y_1^{(d_1)}, \ldots, y_{s-1}^{(d_{s-1})}] = f + g.$$

Portanto,

$$c = [[z, y_1^{(d_1)}, \ldots, y_{s-1}^{(d_{s-1})}], y_s^{(d_s)}] = [f, y_s^{(d_s)}] + [g, y_s^{(d_s)}].$$

Temos três casos para analisar:

(i) Se $d_s < q$, então $[f, y_s^{(d_s)}] \in H_1$ e $[g, y_s^{(d_s)}] \in N'_2$ (veja Lema 2.1.5 - Afirmação 1). Assim, $c \in H_1 + N'_2$.

(ii) Se $d_s = q$, pelo Lema 2.1.15, obtemos

$$\begin{aligned} c &= [f, y_s^{(q)}] + [g, y_s^{(q)}] \\ &= [f, y_s] + [f, y_s^q - y_s] + [g, y_s^{(q)}] \\ &= [f, y_s] + f(y_s^q - y_s) - (y_s^q - y_s)f + [g, y_s^{(q)}]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$c = [f, y_s] + h,$$

onde

$$h = f(y_s^q - y_s) - (y_s^q - y_s)f + [g, y_s^{(q)}].$$

Novamente pelo Lema 2.1.5 - Afirmação 1, temos que $h \in N'_2$, e portanto $c \in H_1 + N'_2$.

(iii) Se $d_s > q$, pelo Lema 2.1.15 temos

$$\begin{aligned}
c &= [f, y_s^{(q)}, y_s^{(d_s-q)}] + [g, y_s^{(d_s)}] \\
&= [[f, y_s] + [f, y_s^q - y_s], y_s^{(d_s-q)}] + [g, y_s^{(d_s)}] \\
&= [f, y_s, y_s^{(d_s-q)}] + [f, y_s^q - y_s, y_s^{(d_s-q)}] + [g, y_s^{(d_s)}] \\
&= [f, y_s^{(d_s-q+1)}] + [f(y_s^q - y_s) - (y_s^q - y_s)f, y_s^{(d_s-q)}] + [g, y_s^{(d_s)}] \\
&= [f, y_s^{(d_s-q+1)}] + [f(y_s^q - y_s), y_s^{(d_s-q)}] - [(y_s^q - y_s)f, y_s^{(d_s-q)}] + [g, y_s^{(d_s)}] \\
&= [f, y_s^{(d_s-q+1)}] + [f, y_s^{(d_s-q)}](y_s^q - y_s) + f[y_s^q - y_s, y_s^{(d_s-q)}] + \\
&\quad - [y_s^q - y_s, y_s^{(d_s-q)}]f - (y_s^q - y_s)[f, y_s^{(d_s-q)}] + [g, y_s^{(d_s)}] \\
&= [f, y_s^{(d_s-q+1)}] + [f, y_s^{(d_s-q)}](y_s^q - y_s) - (y_s^q - y_s)[f, y_s^{(d_s-q)}] + [g, y_s^{(d_s)}].
\end{aligned}$$

Portanto,

$$c = [f, y_s^{(d_s-q+1)}] + h, \tag{2.2}$$

onde

$$h = [f, y_s^{(d_s-q)}](y_s^q - y_s) - (y_s^q - y_s)[f, y_s^{(d_s-q)}] + [g, y_s^{(d_s)}].$$

Pelo Lema 2.1.5 - Afirmação 1, temos que $h \in N_2'$. Se $d_s - q + 1 \geq q$, repetimos o argumento no somando $[f, y_s^{(d_s-q+1)}]$ de (2.2). Após alguns passos, vamos obter $c \in H_1 + N_2'$.

(2) Seja $c = [y_i^q - y_i, y_1^{(d_1)}, \ldots, y_s^{(d_s)}] \in E_1$, onde $d_j \geq 0$ para todo j. Com um argumento análogo ao caso (1), podemos provar que $c \in H_1 + N_2'$.

(3) Seja $c = [y_j, y_1^{(d_1)}, \ldots, y_s^{(d_s)}] \in E_1$, onde $d_i \geq 0$ para todo i. Relembramos que $\deg c \geq 2$. Vamos provar por indução em $s \geq 1$ que $c \in H_1 + N_2'$.

Suponha $s = 1$, isto é, $c = [y_j, y_1^{(d_1)}]$. Temos três casos para analisar:

(i) Se $d_1 < q$, então $[y_j, y_1^{(d_1)}] \in H_1$.

(ii) Se $d_1 = q$, pelo Lema 2.1.15, obtemos

$$c = [y_j, y_1^{(q)}] = [y_j, y_1] + [y_j, y_1^q - y_1] = [y_j, y_1] - [y_1^q - y_1, y_j].$$

Portanto, $c \in H_1$.

(iii) Se $d_1 > q$, pelo Lema 2.1.15 e pelo Lema 2.1.7-item c), temos

$$\begin{aligned}
c =& [y_j, y_1^{(d_1)}] = [y_j, y_1^{(q)}, y_1^{(d_1-q)}] = [[y_j, y_1^{(q)}], y_1^{(d_1-q)}] \\
=& [[y_j, y_1^q - y_1] + [y_j, y_1], y_1^{(d_1-q)}] = [[y_j, y_1^q - y_1], y_1^{(d_1-q)}] + [[y_j, y_1], y_1^{(d_1-q)}] \\
=& [y_j, y_1^{(d_1-q+1)}] - [y_1^q - y_1, y_j, y_1^{(d_1-q)}] = [y_j, y_1^{(d_1-q+1)}] - [y_1^q - y_1, y_1^{(d_1-q)}, y_j] + h \\
=& [y_j, y_1^{(d_1-q+1)}] + h
\end{aligned}$$

para algum $h \in N_2'$. Se $d_1 - q + 1 \geq q$, repetimos o argumento no somando $[y_j, y_1^{(d_1-q+1)}]$. Após alguns passos, vamos obter $c \in H_1 + N_2'$.

Logo, o caso $s = 1$ está provado. Os demais passos da indução são feitos de maneira análoga ao caso (1).

Por (1), (2) e (3), provamos que $E_1 \subseteq H_1 + N_2'$. Agora, como

$$E_m = \underbrace{E_1 \cdots E_1}_{m\ fatores} \subseteq (H_1 + N_2') \cdots (H_1 + N_2') \subseteq H_m + N_{m+1}',$$

finalizamos a demonstração do lema. □

Definição 2.1.17. Um polinômio H-normal f é chamado de *polinômio L-normal* se

a) $f = [z_i, y_1^{(d_1)}, \ldots, y_s^{(d_s)}]$ com $0 \leq d_1, \ldots, d_s < q$, ou

b) $f = [y_j, y_1^{(d_1)}, \ldots, y_j^{(d_j - 1)}, \ldots, y_s^{(d_s)}]$ com $0 \leq d_1, \ldots, d_s < q$, ou

c) $f = [y_i^q - y_i, y_1^{(d_1)}, \ldots, y_{i-1}^{(d_{i-1})}, y_{i+1}^{(d_{i+1})}, \ldots, y_s^{(d_s)}]$ com $0 \leq d_1, \ldots, d_{i-1}, d_{i+1}, \ldots, d_s < q$.

Com respeito a Definição 2.1.17, relembramos que:

- Em a): $s \geq 0$;

- Em b): $d_t \neq 0$ para algum $t \neq j$. Além disso, se $d_1 = d_2 = \ldots = d_{t-1} = 0$, então $j > t$, ou seja, o índice da variável que ocupa a primeira posição no comutador é maior que o índice da variável que ocupa a segunda posição no comutador.

- Em c): $s \geq 0$.

Definição 2.1.18. Dado $m \geq 1$, seja L_m o subespaço vetorial de $\mathbb{K}\langle X \rangle$ gerado pelo conjunto de todos os polinômios

$$c_1 c_2 \ \cdots \ c_m,$$

onde $c_i \in \mathbb{K}\langle X \rangle$ é um polinômio L-normal de grau ≥ 1 para todo i. Denote

$$L_m' = \sum_{t=m}^{\infty} L_t$$

e $L_0 = \mathbb{K}$.

Lema 2.1.19. $H_m \subseteq L_m + N_{m+1}'$.

Demonstração. Antes de começar a demonstração, se $x_{j_1}, \ldots, x_{j_n} \in X$, denotamos

$$[x_{j_1}, \ldots, x_{j_{k-1}}, \widehat{x_{j_k}}, x_{j_{k+1}}, \ldots, x_{j_n}] = [x_{j_1}, \ldots, x_{j_{k-1}}, x_{j_{k+1}}, \ldots, x_{j_n}].$$

Seja $c = [y_j, y_1^{(d_1)}, \ldots, y_j^{(d_j)}, \ldots, y_s^{(d_s)}] \in H_1$, onde $0 \leq d_i < q$ para todo i. Provaremos que $c \in L_1 + N_2'$:

(i) Se $d_j < q - 1$, então $c \in L_1$.

(ii) Suponha $d_j = q-1$. Neste caso, $c = [y_j, y_1^{(d_1)}, \ldots, y_j^{(q-1)}, \ldots, y_s^{(d_s)}]$. Sem perda de generalidade, podemos supor $d_1 \neq 0$. Pelos Lemas 2.1.7 e 2.1.15, existe $g \in N_2'$ tal que:

$$\begin{aligned}
c &= +\,[y_j, y_1, y_j^{(q-1)}, y_1^{(d_1-1)}, y_2^{(d_2)}, \ldots, \widehat{y_j^{(q-1)}}, \ldots, y_s^{(d_s)}] + g \\
&= -\,[y_1, y_j^{(q)}, y_1^{(d_1-1)}, y_2^{(d_2)}, \ldots, \widehat{y_j^{(q-1)}}, \ldots, y_s^{(d_s)}] + g \\
&= -\,[y_1, y_j, y_1^{(d_1-1)}, y_2^{(d_2)}, \ldots, \widehat{y_j^{(q-1)}}, \ldots, y_s^{(d_s)}] + \\
&\quad -\,[y_1, y_j^q - y_j, y_1^{(d_1-1)}, y_2^{(d_2)}, \ldots, \widehat{y_j^{(q-1)}}, \ldots, y_s^{(d_s)}] + g \\
&= +\,[y_j, y_1^{(d_1)}, y_2^{(d_2)}, \ldots, \widehat{y_j^{(q-1)}}, \ldots, y_s^{(d_s)}] + \\
&\quad +\,[y_j^q - y_j, y_1^{(d_1)}, y_2^{(d_2)}, \ldots, \widehat{y_j^{(q-1)}}, \ldots, y_s^{(d_s)}] + g.
\end{aligned}$$

Portanto, $c \in L_1 + N_2'$.

Agora, seja $c = [y_i^q - y_i, y_1^{(d_1)}, \ldots, y_i^{(d_i)}, \ldots, y_s^{(d_s)}]$, onde $0 \leq d_i < q$ para todo i. Provaremos que $c \in L_1 + N_2'$:

(i) Se $d_i = 0$, então $c \in L_1$.

(ii) Suponha $d_i \neq 0$. Sem perda de generalidade, podemos supor $d_1 \neq 0$. Pelo Lema 2.1.7 e pela identidade de Jacobi, existe $g \in N_2'$ tal que:

$$\begin{aligned}
c &= +\,[y_i^q - y_i, y_1, y_i, y_1^{(d_1-1)}, y_2^{(d_2)}, \ldots, y_i^{(d_i-1)}, \ldots, y_s^{(d_s)}] + g \\
&= +\,[y_i, y_1, y_i^q - y_i, y_1^{(d_1-1)}, y_2^{(d_2)}, \ldots, y_i^{(d_i-1)}, \ldots, y_s^{(d_s)}] + g \\
&= +\,[[y_i, y_1](y_i^q - y_i), y_1^{(d_1-1)}, y_2^{(d_2)}, \ldots, y_i^{(d_i-1)}, \ldots, y_s^{(d_s)}] \\
&\quad -\,[(y_i^q - y_i)[y_i, y_1], y_1^{(d_1-1)}, y_2^{(d_2)}, \ldots, y_i^{(d_i-1)}, \ldots, y_s^{(d_s)}] + g.
\end{aligned}$$

Como $[ab, y_l] = a[b, y_l] + [a, y_l]b$ (derivação), obtemos que $[ab, y_{l_1}, y_{l_2}, \ldots, y_{l_r}]$ é igual a uma combinação linear de produtos $[a, \ldots][b, \ldots]$. Assim,

$$\begin{aligned}
&+\,[[y_i, y_1](y_i^q - y_i), y_1^{(d_1-1)}, y_2^{(d_2)}, \ldots, y_i^{(d_i-1)}, \ldots, y_s^{(d_s)}] \\
&-\,[(y_i^q - y_i)[y_i, y_1], y_1^{(d_1-1)}, y_2^{(d_2)}, \ldots, y_i^{(d_i-1)}, \ldots, y_s^{(d_s)}] \in N_2'
\end{aligned}$$

e $c \in N_2'$.

Agora, seja $c = [z_i, y_1^{(d_1)}, \ldots, y_s^{(d_s)}] \in H_1$. Neste caso, $c \in L_1$.

Provamos que $H_1 \subseteq L_1 + N_2'$. Portanto,

$$H_m = \underbrace{H_1 \cdots H_1}_{m\ fatores} \subseteq (L_1 + N_2') \cdots (L_1 + N_2') \subseteq L_m + N_{m+1}'.$$

A prova está completa. $\square$

Lema 2.1.20. Seja

$$\Omega = \{y_{(i,j)}^l : l \geq 1 \text{ e } 1 \leq i \leq j \leq n\} \cup \{z_{(i,j)}^l : l \geq 1 \text{ e } 1 \leq i \leq j \leq n\}$$

um conjunto infinito de variáveis, e denote por $\mathbb{K}[\Omega]$ a álgebra comutativa livre, livremente gerada por Ω sobre $\mathbb{K}$. Se

$$Y_l = \sum_{i=1}^{n} y^l_{(i,i)} e_{(i,i)} + \sum_{i=1}^{n-1} y^l_{(i,i+1)} e_{(i,i+1)} \ \text{ e } \ Z_l = \sum_{i=1}^{n-1} z^l_{(i,i+1)} e_{(i,i+1)}$$

são elementos de $UT_n(\mathbb{K}[\Omega])$, então

a) $[Z_l, Y_1, \ldots, Y_s] = \sum_{i=1}^{n-1} \left(z^l_{(i,i+1)} \prod_{t=1}^{s} (y^t_{(i+1,i+1)} - y^t_{(i,i)}) \right) e_{(i,i+1)} + u$;

b) $[Y_l, Y_1, \ldots, Y_s] = \sum_{i=1}^{n-1} \Big(\Big(y^l_{(i,i+1)} y^1_{(i+1,i+1)} + y^l_{(i,i)} y^1_{(i,i+1)} - y^1_{(i,i+1)} y^l_{(i+1,i+1)} - y^1_{(i,i)} y^l_{(i,i+1)} \Big) \times$
$\times \prod_{t=2}^{s} \Big(y^t_{(i+1,i+1)} - y^t_{(i,i)} \Big) \Big) e_{(i,i+1)} + v$;

c) $Y_l^q - Y_l = \sum_{i=1}^{n-1} y^l_{(i,i+1)} \left(\sum_{t=0}^{q-1} (y^l_{(i,i)})^{q-1-t} (y^l_{(i+1,i+1)})^t - 1 \right) e_{(i,i+1)} + \sum_{i=1}^{n} \Big((y^l_{(i,i)})^q - y^l_{(i,i)} \Big) e_{(i,i)} + +w$;

d) Se $s \geq 1$ e $\Delta_s = [Y_l^q - Y_l, Y_1, \ldots, Y_s]$, então

$$\Delta_s = \sum_{i=1}^{n-1} y^l_{(i,i+1)} \left(\sum_{t=0}^{q-1} (y^l_{(i,i)})^t (y^l_{(i+1,i+1)})^{q-1-t} - 1 \right) \left(\prod_{t=1}^{s} \Big(y^t_{(i+1,i+1)} - y^t_{(i,i)} \Big) \right) e_{(i,i+1)} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n-1} \Big(\Big((y^l_{(i,i)})^q - y^l_{(i,i)} \Big) - \Big((y^l_{(i+1,i+1)})^q - y^l_{(i+1,i+1)} \Big) \Big) y^1_{(i,i+1)} \left(\prod_{t=2}^{s} \Big(y^t_{(i+1,i+1)} - y^t_{(i,i)} \Big) \right) e_{(i,i+1)} + w',$$

onde u, v, w, w' são combinações lineares de matrizes $e_{(i,j)}$, com coeficientes em $\mathbb{K}[\Omega]$, tais que $j - i \geq 2$.

Demonstração. Provaremos o item a) por indução em s. Denote por

$$h^1_i = y^1_{(i,i)} e_{(i,i)} + y^1_{(i+1,i+1)} e_{(i+1,i+1)}.$$

Se $s = 1$, então

$$\begin{aligned}
[Z_l, Y_1] &= \left[\sum_{i=1}^{n-1} z^l_{(i,i+1)} e_{(i,i+1)}, \sum_{i=1}^{n} y^1_{(i,i)} e_{(i,i)} + \sum_{i=1}^{n-1} y^1_{(i,i+1)} e_{(i,i+1)} \right] \\
&= \left[\sum_{i=1}^{n-1} z^l_{(i,i+1)} e_{(i,i+1)}, \sum_{i=1}^{n} y^1_{(i,i)} e_{(i,i)} \right] + \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{n-1} z^l_{(i,i+1)} e_{(i,i+1)}, \sum_{i=1}^{n-1} y^1_{(i,i+1)} e_{(i,i+1)} \right]}_{u'} \\
&= \left[z^l_{(1,2)} e_{(1,2)}, \sum_{i=1}^{n} y^1_{(i,i)} e_{(i,i)} \right] + \ldots + \left[z^l_{(n-1,n)} e_{(n-1,n)}, \sum_{i=1}^{n} y^1_{(i,i)} e_{(i,i)} \right] + u' \\
&= [z^l_{(1,2)} e_{(1,2)}, h^1_1] + \ldots + [z^l_{(n-1,n)} e_{(n-1,n)}, h^1_{n-1}] + u' \\
&= z^l_{(1,2)} (y^1_{(2,2)} - y^1_{(1,1)}) e_{(1,2)} + \ldots + z^l_{(n-1,n)} (y^1_{(n,n)} - y^1_{(n-1,n-1)}) e_{(n-1,n)} + u' \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \Big(z^l_{(i,i+1)} (y^1_{(i+1,i+1)} - y^1_{(i,i)}) \Big) e_{(i,i+1)} + u',
\end{aligned}$$

onde u' é combinação linear de matrizes $e_{(i,j)}$, com coeficientes em $\mathbb{K}[\Omega]$, tais que $j-i \geq 2$.

Suponha, por hipótese de indução, que

$$[Z_l, Y_1, \ldots, Y_{s-1}] = \sum_{i=1}^{n-1} \left(z^l_{(i,i+1)} \prod_{t=1}^{s-1} (y^t_{(i+1,i+1)} - y^t_{(i,i)}) \right) e_{(i,i+1)} + u'',$$

onde u'' é combinação linear de matrizes $e_{(i,j)}$, com coeficientes em $\mathbb{K}[\Omega]$, tais que $j-i \geq 2$. Escreva $g^t_i = (y^t_{(i+1,i+1)} - y^t_{(i,i)})$. Então,

$$\begin{aligned}
[[Z_l, Y_1, \ldots, Y_{s-1}], Y_s] &= \left[\sum_{i=1}^{n-1} \left(z^l_{(i,i+1)} \prod_{t=1}^{s-1} g^t_i \right) e_{(i,i+1)} + u'', \sum_{i=1}^{n} y^s_{(i,i)} e_{(i,i)} + \sum_{i=1}^{n-1} y^s_{(i,i+1)} e_{(i,i+1)} \right] \\
&= \left[\sum_{i=1}^{n-1} \left(z^l_{(i,i+1)} \prod_{t=1}^{s-1} g^t_i \right) e_{(i,i+1)}, \sum_{i=1}^{n} y^s_{(i,i)} e_{(i,i)} \right] + \\
&\quad + \left[\sum_{i=1}^{n-1} \left(z^l_{(i,i+1)} \prod_{t=1}^{s-1} g^t_i \right) e_{(i,i+1)}, \sum_{i=1}^{n-1} y^s_{(i,i+1)} e_{(i,i+1)} \right] + \\
&\quad + \left[u'', \sum_{i=1}^{n} y^s_{(i,i)} e_{(i,i)} + \sum_{i=1}^{n-1} y^s_{(i,i+1)} e_{(i,i+1)} \right] \\
&= \left[\sum_{i=1}^{n-1} \left(z^l_{(i,i+1)} \prod_{t=1}^{s-1} g^t_i \right) e_{(i,i+1)}, \sum_{i=1}^{n} y^s_{(i,i)} e_{(i,i)} \right] + u \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \left[\left(z^l_{(i,i+1)} \prod_{t=1}^{s-1} g^t_i \right) e_{(i,i+1)}, \sum_{i=1}^{n} y^s_{(i,i)} e_{(i,i)} \right] + u \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \left(z^l_{(i,i+1)} \prod_{t=1}^{s} g^t_i \right) e_{(i,i+1)} + u,
\end{aligned}$$

onde u é combinação linear de matrizes $e_{(i,j)}$, com coeficientes em $\mathbb{K}[\Omega]$, tais que $j-i \geq 2$.

Também provaremos o item b) por indução em s. Se $s = 1$, então

$$\begin{aligned}
[Y_l, Y_1] &= \left[\sum_{i=1}^{n} y^l_{(i,i)} e_{(i,i)} + \sum_{i=1}^{n-1} y^l_{(i,i+1)} e_{(i,i+1)}, \sum_{i=1}^{n} y^1_{(i,i)} e_{(i,i)} + \sum_{i=1}^{n-1} y^1_{(i,i+1)} e_{(i,i+1)} \right] \\
&= \left[\sum_{i=1}^{n} y^l_{(i,i)} e_{(i,i)}, \sum_{i=1}^{n-1} y^1_{(i,i+1)} e_{(i,i+1)} \right] + \left[\sum_{i=1}^{n-1} y^l_{(i,i+1)} e_{(i,i+1)}, \sum_{i=1}^{n} y^1_{(i,i)} e_{(i,i)} \right] + \\
&\quad + \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{n-1} y^l_{(i,i+1)} e_{(i,i+1)}, \sum_{i=1}^{n-1} y^1_{(i,i+1)} e_{(i,i+1)} \right]}_{v'} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} (y^l_{(i,i)} y^1_{(i,i+1)} - y^1_{(i,i+1)} y^l_{(i+1,i+1)}) e_{(i,i+1)} + \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n-1} (y^l_{(i,i+1)} y^1_{(i+1,i+1)} - y^1_{(i,i)} y^l_{(i,i+1)}) e_{(i,i+1)} + v' \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} (y^l_{(i,i)} y^1_{(i,i+1)} - y^1_{(i,i+1)} y^l_{(i+1,i+1)} + y^l_{(i,i+1)} y^1_{(i+1,i+1)} - y^1_{(i,i)} y^l_{(i,i+1)}) e_{(i,i+1)} + v',
\end{aligned}$$

onde v' é combinação linear de matrizes $e_{(i,j)}$, com coeficientes em $\mathbb{K}[\Omega]$, tais que $j-i \geq 2$. Provamos que o caso $s=1$ é verdadeiro. Agora, utilizando a hipótese de indução e um argumento análogo ao item a), é possível provar a veracidade do item b). Deixamos a verificação para o leitor.

Agora provaremos o item c). Inicialmente, provaremos por indução em $k \geq 2$ que

$$Y_l^k = \sum_{i=1}^{n-1} y^l_{(i,i+1)} \left(\sum_{t=0}^{k-1} (y^l_{(i,i)})^{k-1-t} (y^l_{(i+1,i+1)})^t \right) e_{(i,i+1)} + \sum_{i=1}^{n} (y^l_{(i,i)})^k e_{(i,i)} + w, \tag{2.3}$$

onde w é combinação linear de matrizes $e_{(i,j)}$, com coeficientes em $\mathbb{K}[\Omega]$, tais que $j-i \geq 2$. Se $k=2$, então

$$\begin{aligned} Y_l^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} y^l_{(i,i)} e_{(i,i)} + \sum_{i=1}^{n-1} y^l_{(i,i+1)} e_{(i,i+1)} \right)^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} (y^l_{(i,i)})^2 e_{(i,i)} \right) + \left(\sum_{i=1}^{n-1} y^l_{(i,i)} y^l_{(i,i+1)} e_{(i,i+1)} \right) + \left(\sum_{i=1}^{n-1} y^l_{(i,i+1)} y^l_{(i+1,i+1)} e_{(i,i+1)} \right) \\ &\quad + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n-1} y^l_{(i,i+1)} y^l_{(i+1,i+2)} e_{(i,i+2)} \right)}_{w'} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} y^l_{(i,i+1)} \left(y^l_{(i,i)} + y^l_{(i+1,i+1)} \right) e_{(i,i+1)} + \sum_{i=1}^{n} (y^l_{(i,i)})^2 e_{(i,i)} + w', \end{aligned}$$

onde w' é uma combinação linear de matrizes $e_{(i,j)}$, com coeficientes em $\mathbb{K}[\Omega]$, tais que $j-i \geq 2$. Suponha, por hipótese de indução, que

$$Y_l^k = \sum_{i=1}^{n-1} y^l_{(i,i+1)} \left(\sum_{t=0}^{k-1} (y^l_{(i,i)})^{k-1-t} (y^l_{(i+1,i+1)})^t \right) e_{(i,i+1)} + \sum_{i=1}^{n} (y^l_{(i,i)})^k e_{(i,i)} + w'',$$

onde w'' é combinação linear de matrizes $e_{(i,j)}$, com coeficientes em $\mathbb{K}[\Omega]$, tais que $j-i\geq 2$. Logo,

$$\begin{aligned}
Y_l^{k+1} &= \left(\sum_{i=1}^{n}(y^l_{(i,i)})^k e_{(i,i)} + \sum_{i=1}^{n-1} y^l_{(i,i+1)}\left(\sum_{t=0}^{k-1}(y^l_{(i,i)})^{k-1-t}(y^l_{(i+1,i+1)})^t\right)e_{(i,i+1)} + w''\right)\times \\
&\times\left(\sum_{i=1}^{n} y^l_{(i,i)}e_{(i,i)} + \sum_{i=1}^{n-1} y^l_{(i,i+1)}e_{(i,i+1)}\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n}(y^l_{(i,i)})^{k+1}e_{(i,i)}\right) + \left(\sum_{i=1}^{n-1}(y^l_{(i,i)})^k y^l_{(i,i+1)}e_{(i,i+1)}\right) + \\
&+\sum_{i=1}^{n-1}\left(y^l_{(i,i+1)}\left(\sum_{t=0}^{k-1}(y^l_{(i,i)})^{k-1-t}(y^l_{(i+1,i+1)})^t\right)\right)y^l_{(i+1,i+1)}e_{(i,i+1)} + \\
&+\sum_{i=1}^{n-1}\left(y^l_{(i,i+1)}\left(\sum_{t=0}^{k-1}(y^l_{(i,i)})^{k-1-t}(y^l_{(i+1,i+1)})^t\right)\right)y^l_{(i+1,i+2)}e_{(i,i+2)} + \\
&+ w''\times\left(\sum_{i=1}^{n} y^l_{(i,i)}e_{(i,i)} + \sum_{i=1}^{n-1} y^l_{(i,i+1)}e_{(i,i+1)}\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n}(y^l_{(i,i)})^{k+1}e_{(i,i)}\right) + \left(\sum_{i=1}^{n-1}(y^l_{(i,i)})^k y^l_{(i,i+1)}e_{(i,i+1)}\right) + \\
&+\sum_{i=1}^{n-1}\left(y^l_{(i,i+1)}\left(\sum_{t=0}^{k-1}(y^l_{(i,i)})^{k-1-t}(y^l_{(i+1,i+1)})^{t+1}\right)\right)e_{(i,i+1)} + w \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} y^l_{(i,i+1)}\left(\sum_{t=0}^{k}(y^l_{(i,i)})^{k-t}(y^l_{(i+1,i+1)})^t\right)e_{(i,i+1)} + \sum_{i=1}^{n}(y^l_{(i,i)})^{k+1}e_{(i,i)} + w,
\end{aligned}$$

onde w é combinação linear de matrizes $e_{(i,j)}$, com coeficientes em $\mathbb{K}[\Omega]$, tais que $j-i\geq 2$. Portanto, de fato, a igualdade (2.3) é válida.

Por (2.3), temos que para todo $k\geq 2$ vale

$$Y_l^k - Y_l = \sum_{i=1}^{n-1} y^l_{(i,i+1)}\left(\sum_{t=0}^{k-1}(y^l_{(i,i)})^{k-1-t}(y^l_{(i+1,i+1)})^t - 1\right)e_{(i,i+1)} + \sum_{i=1}^{n}\left((y^l_{(i,i)})^k - y^l_{(i,i)}\right)e_{(i,i)} + w,$$

onde w é combinação linear de matrizes $e_{(i,j)}$, com coeficientes em $\mathbb{K}[\Omega]$, tais que $j-i\geq 2$. Em particular, quando $k=q$, obtemos

$$Y_l^q - Y_l = \sum_{i=1}^{n-1} y^l_{(i,i+1)}\left(\sum_{t=0}^{q-1}(y^l_{(i,i)})^{q-1-t}(y^l_{(i+1,i+1)})^t - 1\right)e_{(i,i+1)} + \sum_{i=1}^{n}\left((y^l_{(i,i)})^q - y^l_{(i,i)}\right)e_{(i,i)} + w, \quad (2.4)$$

onde w é combinação linear de matrizes $e_{(i,j)}$, com coeficientes em $\mathbb{K}[\Omega]$, tais que $j-i\geq 2$. O item c) está provado.

Denote $\Delta_s = [Y_l^q - Y_l, Y_1, \ldots, Y_s]$. Provaremos, por indução em s, que

$$\begin{aligned}
\Delta_s &= \sum_{i=1}^{n-1} y^l_{(i,i+1)}\left(\sum_{t=0}^{q-1}(y^l_{(i,i)})^t(y^l_{(i+1,i+1)})^{q-1-t} - 1\right)\left(\prod_{t=1}^{s}\left(y^t_{(i+1,i+1)} - y^t_{(i,i)}\right)\right)e_{(i,i+1)} + \\
&+\sum_{i=1}^{n-1}\left(\left((y^l_{(i,i)})^q - y^l_{(i,i)}\right) - \left((y^l_{(i+1,i+1)})^q - y^l_{(i+1,i+1)}\right)\right)y^1_{(i,i+1)}\left(\prod_{t=2}^{s}\left(y^t_{(i+1,i+1)} - y^t_{(i,i)}\right)\right)e_{(i,i+1)} + w',
\end{aligned}$$

onde w' é combinação linear de matrizes $e_{(i,j)}$, com coeficientes em $\mathbb{K}[\Omega]$, tais que $j-i \geq 2$.

Se $s = 1$, então utilizando (2.4) obtemos

$$\begin{aligned}
\Delta_1 = & \left[\sum_{i=1}^{n-1} y^l_{(i,i+1)}\left(\sum_{t=0}^{q-1}(y^l_{(i,i)})^{q-1-t}(y^l_{(i+1,i+1)})^t - 1\right)e_{(i,i+1)}, \sum_{i=1}^{n} y^1_{(i,i)}e_{(i,i)} + \sum_{i=1}^{n-1} y^1_{(i,i+1)}e_{(i,i+1)}\right] + \\
& + \left[\sum_{i=1}^{n}\left((y^l_{(i,i)})^q - y^l_{(i,i)}\right)e_{(i,i)}, \sum_{i=1}^{n} y^1_{(i,i)}e_{(i,i)} + \sum_{i=1}^{n-1} y^1_{(i,i+1)}e_{(i,i+1)}\right] + [w, Y_1] \\
= & \sum_{i=1}^{n-1} y^l_{(i,i+1)}\left(\sum_{t=0}^{q-1}(y^l_{(i,i)})^{q-1-t}(y^l_{(i+1,i+1)})^t - 1\right)(y^1_{(i+1,i+1)} - y^1_{(i,i)})e_{(i,i+1)} + \\
& + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\left((y^l_{(i,i)})^q - y^l_{(i,i)}\right) - \left((y^l_{(i+1,i+1)})^q - y^l_{(i+1,i+1)}\right)\right)y^1_{(i,i+1)}e_{(i,i+1)} + w'
\end{aligned}$$

onde w' é combinação linear de matrizes $e_{(i,j)}$, com coeficientes em $\mathbb{K}[\Omega]$, tais que $j-i \geq 2$. Provamos que o caso $s = 1$ é verdadeiro. Agora, utilizando a hipótese de indução e um argumento análogo ao item a), é possível provar a veracidade do item d). Deixamos a verificação para o leitor. □

2.2 Identidades G-graduadas de $UT_n(\mathbb{K})$

Ao longo desta seção, $\mathbb{K}$ será um corpo finito com q elementos, e G um grupo multiplicativo com elemento neutro 1. Como já mencionado na introdução deste capítulo, ou melhor, pelo Teorema 1.4.2 e Lema 1.5.4, para descrever as identidades polinomiais G-graduadas de $UT_n(\mathbb{K})$, basta estudar o caso em que a graduação é elementar.

Dado $\varepsilon \in G^n$, relembramos que $T_G(UT_n, \varepsilon)$ é o T_G-ideal de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ formado por todas as identidades polinomais G-graduadas de UT_n, quando UT_n é munido da G-graduação elementar induzida por ε.

Vamos reescrever [4, Definição 2.1] abaixo.

Definição 2.2.1. Seja $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in G^n$ e $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m) \in G^m$. Considere a G-graduação elementar em UT_n induzida por ε (veja o Exemplo 1.4.1). Dizemos que η é uma *sequência ε-boa* se existe uma sequência de m matrizes unitárias $(r_1, \ldots, r_m)$ no radical de Jacobson de UT_n tal que

$$r_1 r_2 \cdots r_m \neq 0 \text{ e } \deg_G(r_i) = \eta_i$$

para todo $i = 1, \ldots, m$. Caso contrário, η é chamada de uma *sequência ε-ruim*.

Relembramos que o radical de Jacobson de UT_n é o conjunto das matrizes estritamente triangulares superiores de UT_n.

Exemplo 2.2.2. Seja $G = \{-1, 1\}$. Considere a G-graduação elementar induzida por $\varepsilon = (1, -1, 1)$ em $UT_3(\mathbb{Z}_5)$. Defina as sequências:

$$\mu_1 = (1), \;\; \mu_2 = (-1, -1) \;\text{ e }\; \mu_3 = (1, 1).$$

As sequências μ_1 e μ_2 são ε-boas, pois

$$\deg_G(e_{(1,3)}) = 1, \ \deg_G(e_{(1,2)}) = -1, \ \deg_G(e_{(2,3)}) = -1 \ \text{ e } \ e_{(1,2)}e_{(2,3)} = e_{(1,3)} \neq 0.$$

Já a sequência μ_3 é ε-ruim. Podemos dizer mais, a única sequência de matrizes unitárias de comprimento 2 no radical de Jacobson de $UT_3(\mathbb{Z}_5)$ cujo produto é não nulo é a sequência: $(e_{(1,2)}, e_{(2,3)})$. Portanto, a única sequência ε-boa de comprimento 2 é a sequência $\mu_2 = (-1,-1)$. Além disso, toda sequência em G^m com $m \geq 3$ é ε-ruim.

De um modo geral, temos a seguinte observação:

Observação 2.2.3. Fixado $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in G^n$, a única sequência ε-boa de comprimento $n-1$ é

$$\eta = (\deg_G(e_{(1,2)}), \ \deg_G(e_{(2,3)}), \ \deg_G(e_{(3,4)}), \ \ldots, \deg_G(e_{(n-1,n)}).$$

Além disso, toda sequência em G^m com $m \geq n$ é ε-ruim.

A demonstração da observação é consequência direta do lema abaixo, cuja demonstração omitimos.

Lema 2.2.4. Se $a_1, \ldots, a_{n-1} \in UT_n(\mathbb{K})$ são matrizes estritamente triangulares superiores, dadas por

$$a_l = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a^l_{(i,j)} e_{(i,j)},$$

onde $a^l_{(i,j)} \in \mathbb{K}$ para todos i, j, l, então

$$a_1 a_2 \cdots a_{n-1} = \left(a^1_{(1,2)} a^2_{(2,3)} \cdots a^{n-1}_{(n-1,n)} \right) e_{(1,n)}.$$

Definição 2.2.5. Seja $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m) \in G^m$. Para cada $j = 1, \ldots, m$ defina o conjunto C_j como segue:

$$C_j = \begin{cases} \{ \ x_j^{\eta_j} \ \}, & \text{se } \eta_j \neq 1 \ ; \\ \{ \ [y_{2j}, y_{2j+1}], \ y_{2j}^q - y_{2j} \ \}, & \text{se } \eta_j = 1 \ . \end{cases}$$

Se $c_1 \in C_1, c_2 \in C_2, \ldots, c_m \in C_m$, dizemos que

$$f_\eta = c_1 c_2 \cdots c_m$$

é um η*-polinômio*.

Exemplo 2.2.6. Considerando as mesmas notações do Exemplo 2.2.2, temos:

(a) Referente à sequência μ_1, existem dois μ_1-polinômios:

$$[y_2, y_3] \ \text{ e } \ y_2^5 - y_2.$$

(b) Referente à sequência μ_2 temos o μ_2-polinômio:

$$f_{\mu_2} = x_1^{-1} x_2^{-1}.$$

(c) Referente à sequência μ_3, existem quatro μ_3-polinômios:

$$[y_2, y_3][y_4, y_5],\ [y_2, y_3](y_4^5 - y_4),\ (y_2^5 - y_2)[y_4, y_5] \text{ e } (y_2^5 - y_2)(y_4^5 - y_4).$$

Note que estes quatro polinômios são identidades G-graduadas para $T_G(UT_3(\mathbb{Z}_5), \varepsilon)$. De um modo geral, este é um caso particular do seguinte lema.

Lema 2.2.7. Seja $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in G^n$ e $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m) \in G^m$. Se η é ε-ruim, então cada η-polinômio está em $T_G(UT_n, \varepsilon)$.

Demonstração. Denote por J o radical de Jacobson de UT_n. Note que

$$\sum_{g \in G,\ g \neq 1} (UT_n)^g \subseteq J.$$

Além disso, se $a_1, a_2 \in (UT_n)^g$ com $g = 1$, então

$$[a_1, a_2] \in J \text{ e } a_1^q - a_1 \in J.$$

Assim, como η é ε-ruim segue que $f_\eta \in T_G(UT_n, \varepsilon)$. $\square$

Lema 2.2.8. Dado $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in G^n$, denote por $I(\varepsilon)$ o T_G-ideal de $\mathbb{K}(X)$ gerado pelo conjunto de todos os η-polinômios, onde $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$ é ε-ruim e $m \leq n$. Então $\mathbb{K}(X)/I(\varepsilon)$ é gerado, como espaço vetorial, pelo conjunto de todos os polinômios $u + I(\varepsilon)$, onde

$$u = y_1^{a_1} \cdots y_s^{a_s} c_1 c_2 \cdots c_m,$$

$0 \leq a_1, \ldots, a_s < q$; $s \geq 0$; $c_1, \ldots, c_m$ são polinômios L-normais de grau ≥ 1; $0 \leq m \leq n-1$; e $(\deg_G(c_1), \ldots, \deg_G(c_m))$ é ε-boa.

Demonstração. Primeiro provaremos a seguinte afirmação:

Afirmação 1. Se $c_1, \ldots, c_m$ são polinômios normais e $\eta = (\deg_G(c_1), \ldots, \deg_G(c_m))$ é ε-ruim, então $c = c_1 \cdots c_m \in I(\varepsilon)$.

Prova da Afirmação 1. Para cada $j = 1, \ldots, m$, denote $\eta_j = \deg_G(c_j)$. Defina c'_j como segue:

(a) Se $\eta_j \neq 1$, então $c'_j = x_j^{\eta_j}$.

(b) Seja $\eta_j = 1$. Se $c_j = y_{i_1}^q - y_{i_1}$, então definimos $c'_j = y_{2j}^q - y_{2j}$. Se

$$c_j = [y_{i_1}^q - y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_s}] \text{ ou } c_j = [y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_s}],$$

para algum $s \geq 2$, definimos $c'_j = [y_{2j}, y_{2j+1}]$.

Então, $c = c_1 \cdots c_m$ é consequência de $c' = c'_1 \cdots c'_m$. Se $m \leq n$, então c' é um η-polinômio, e $(\deg_G(c'_1), \ldots, \deg_G(c'_m)) = \eta$ é ε-ruim; assim $c' \in I(\varepsilon)$ e, consequentemente, $c \in I(\varepsilon)$ também. Se $m \geq n+1$, então c' é consequência de $c'' = c'_1 \cdots c'_n$, e $(\deg_G(c'_1), \ldots, \deg_G(c'_n))$ é ε-ruim; assim $c'' \in I(\varepsilon)$ e, consequentemente, $c \in I(\varepsilon)$ também.

Afirmação 2. $N'_n \subseteq I(\varepsilon)$.

Prova da Afirmação 2. Seja $c = c_1 \cdots c_m$, onde $c_1, \ldots, c_m$ são polinômios normais e $m \geq n$. Como $\eta = (\deg_G(c_1), \ldots, \deg_G(c_m))$ é ε-ruim, pela Afirmação 1 obtemos $c \in I(\varepsilon)$. A afirmação está provada.

Pelos Lemas 2.1.11, 2.1.16 e 2.1.19 temos $N_m \subseteq L_m + N'_{m+1}$. Assim, pela Afirmação 2 obtemos

$$N_0 + N_1 + \ldots + N_{n-1} + N'_n \subseteq L_0 + L_1 + \ldots + L_{n-1} + N'_n \subseteq L_0 + L_1 + \ldots + L_{n-1} + I(\varepsilon).$$

Logo, pelo Lema 2.1.5, segue que $\mathbb{K}(X)/I(\varepsilon)$ é gerado, como espaço vetorial, pelo conjunto de todos os polinômios $u + I(\varepsilon)$, onde

$$u = y_1^{a_1} \cdots y_s^{a_s} c_1 c_2 \cdots c_m, \tag{2.5}$$

$0 \leq a_1, \ldots, a_s < q$; $s \geq 0$; $c_1, \ldots, c_m$ são polinômios L-normais de grau ≥ 1; $0 \leq m \leq n-1$; e $(\deg_G(c_1), \ldots, \deg_G(c_m))$ é ε-boa (veja a Afirmação 1). □

O próximo teorema é o resultado principal desta tese:

Teorema 2.2.9. Seja G um grupo e seja $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in G^n$. Se $\mathbb{K}$ é um corpo finito com q elementos, então:

a) $T_G(UT_n(\mathbb{K}), \varepsilon)$ é gerado, como um T_G-ideal, pelo conjunto de todos os η-polinômios, onde $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$ é ε-ruim e $m \leq n$.

b) O espaço vetorial quociente $\mathbb{K}(X)/T_G(UT_n(\mathbb{K}), \varepsilon)$ tem uma base formada pelo conjunto de todos os polinômios $u + T_G(UT_n(\mathbb{K}), \varepsilon)$ onde

$$u = y_1^{a_1} \cdots y_s^{a_s} c_1 c_2 \cdots c_m,$$

$0 \leq a_1, \ldots, a_s < q$; $s \geq 0$; $c_1, \ldots, c_m$ são polinômios L-normais de grau ≥ 1; $0 \leq m \leq n-1$; e $(\deg_G(c_1), \ldots, \deg_G(c_m))$ é ε-boa.

Demonstração. Seja $I(\varepsilon)$ o T_G-ideal de $\mathbb{K}(X)$ gerado pelo conjunto de todos os η-polinômios, onde $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$ é ε-ruim e $m \leq n$. Note que usamos esta definição também no lema anterior. Pelo Lema 2.2.7, temos

$$I(\varepsilon) \subseteq T_G(UT_n, \varepsilon).$$

Vamos provar a outra inclusão.

Como $I(\varepsilon) \subseteq T_G(UT_n,\varepsilon)$, segue do Lema 2.2.8 que $\mathbb{K}(X)/T_G(UT_n,\varepsilon)$ é gerado, como espaço vetorial, pelo conjunto de todos os polinômios $u + T_G(UT_n,\varepsilon)$, onde

$$u = y_1^{a_1} \cdots y_s^{a_s} c_1 c_2 \cdots c_m, \tag{2.6}$$

$0 \leq a_1,\dots,a_s < q$; $s \geq 0$; $c_1,\dots,c_m$ são polinômios L-normais de grau ≥ 1; $0 \leq m \leq n-1$; e $(\deg_G(c_1),\dots,\deg_G(c_m))$ é ε-boa.

Afirmação 1. O conjunto de todos os elementos $u + T_G(UT_n,\varepsilon)$, onde u é dado por (2.6), é um subconjunto linearmente independente de $\mathbb{K}(X)/T_G(UT_n,\varepsilon)$.

Prova da Afirmação 1. Seja

$$f = \sum_a \alpha_a y_1^{a_1} y_2^{a_2} \dots y_s^{a_s} + \sum_{(a,c)} \alpha_{(a,c)}\, y_1^{a_1} y_2^{a_2} \dots y_s^{a_s} c \in T_G(UT_n,\varepsilon),$$

onde $c = c_1 c_2 \cdots c_m$; $a = (a_1,\dots,a_s)$; $0 \leq a_1,\dots,a_s < q$; $s \geq 0$; $c_1,\dots,c_m$ são polinômios L-normais de grau ≥ 1; $1 \leq m \leq n-1$; $\alpha_a \in \mathbb{K}$; $\alpha_{(a,c)} \in \mathbb{K}$; e $(\deg_G(c_1),\dots,\deg_G(c_m))$ é ε-boa. Devemos provar que cada coeficiente é zero. Nossa prova é por indução em n.

Para $n = 1$,

$$f = \sum_a \alpha_a y_1^{a_1} y_2^{a_2} \dots y_s^{a_s} \in T_G(UT_1,\varepsilon).$$

Aplicando o Lema 1.3.5 várias vezes, obteremos $\alpha_a = 0$, para cada a.

Para $n \geq 2$, denotamos por R_l o seguinte subespaço vetorial de UT_n:

$$R_l = \operatorname{span}\{e_{(i,j)} : 1 \leq i \leq j \leq n,\ i \neq l \text{ e } j \neq l\}.$$

Então, R_l é uma subálgebra G-graduada de UT_n isomorfa a álgebra graduada UT_{n-1} com respeito a G-graduação elementar

$$\overline{\varepsilon_l} = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{l-1},\varepsilon_{l+1},\dots,\varepsilon_n).$$

Assim, para cada $l = 1,2,\dots,n$, obtemos

$$T_G(UT_n,\varepsilon) \subseteq T_G(R_l) = T_G(UT_{n-1},\overline{\varepsilon_l})$$

e, em particular,

$$f \in T_G(UT_{n-1},\overline{\varepsilon_l}).$$

Seja $g = \alpha_{(a,c)} y_1^{a_1} y_2^{a_2} \cdots y_s^{a_s} c_1 c_2 \cdots c_m$ um somando de f e assuma $m \leq n-2$. Como a sequência associada $\overline{\eta}_g = (\deg_G(c_1),\dots,\deg_G(c_m))$ é ε-boa, existe uma sequência de m matrizes unitárias

$$(e_{(r_1,r_2)}, e_{(r_2,r_3)}, \dots, e_{(r_{m-1},r_m)}, e_{(r_m,r_{m+1})})$$

no radical de Jacobson de UT_n tal que

$$\deg_G(e_{(r_i,r_{i+1})}) = \deg_G(c_i).$$

Como $m+1 \leq n-1$, existe $1 \leq l \leq n$ tal que todas essas matrizes estão em R_l. Assim, $\overline{\eta}_g$ é uma sequência $\overline{\varepsilon_l}$-boa com respeito a G-graduação de UT_{n-1} induzida por $\overline{\varepsilon_l}$. Para cada $1 \leq l \leq n$, seja

$$f_l = \sum \alpha_{(a,c)}\, y_1^{a_1} y_2^{a_2} \cdots y_s^{a_s} c$$

a componente de f dada pelos somandos $g = \alpha_{(a,c)}\, y_1^{a_1} y_2^{a_2} \cdots y_s^{a_s} c$ tais que a sequência correspondente $\overline{\eta}_g$ é $\overline{\varepsilon_l}$-boa. Assim, podemos decompor f da seguinte maneira

$$f = \left(\sum_a \alpha_a y_1^{a_1} y_2^{a_2} \ldots y_s^{a_s} + f_l \right) + f',$$

onde f' é a soma de todos $g = \alpha_{(a,c)}\, y_1^{a_1} y_2^{a_2} \cdots y_s^{a_s} c$ tais que a sequência correspondente $\overline{\eta}_g$ é $\overline{\varepsilon_l}$-ruim. Como $f' \in T_G(UT_{n-1}, \overline{\varepsilon_l})$, obtemos

$$\left(\sum_a \alpha_a y_1^{a_1} y_2^{a_2} \ldots y_s^{a_s} + f_l \right) \in T_G(UT_{n-1}, \overline{\varepsilon_l}),$$

para todo $1 \leq l \leq n$. Por hipótese de indução, temos $\alpha_a = 0$ para todo a, e $\alpha_{(a,c)} = 0$ para todo (a,c) aparecendo em f_l. Como l é arbitrário, obtemos que $\alpha_{(a,c)} = 0$, para todo (a,c) tal que $c = c_1 c_2 \cdots c_m$ e $m \leq n-2$; $\alpha_a = 0$, para todo a. Assim,

$$f = \sum_{(a,c)} \alpha_{(a,c)} y_1^{a_1} \cdots y_s^{a_s} c_1 c_2 \cdots c_{n-1}, \tag{2.7}$$

onde $f \in T_G(UT_n, \varepsilon)$; $0 \leq a_1, \ldots, a_s < q$; $s \geq 0$; $c_1, \ldots, c_{n-1}$ são polinômios L-normais de grau ≥ 1; e $(\deg_G(c_1), \ldots, \deg_G(c_{n-1}))$ é ε-boa.

Agora, pela Observação 2.2.3 existe uma única sequência ε-boa $\overline{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_{n-1})$ e temos

$$\eta_i = \deg_G(e_{(i,i+1)}) = \deg_G(c_i)$$

para todo i e $c = c_1 c_2 \cdots c_{n-1}$ aparecendo em (2.7).

Seja

$$\Omega = \{ y^l_{(i,j)} : l \geq 1 \text{ e } 1 \leq i \leq j \leq n \} \cup \{ z^l_{(i,j)} : l \geq 1 \text{ e } 1 \leq i \leq j \leq n \}$$

um conjunto infinito de variáveis, e denote por $\mathbb{K}[\Omega]$ a álgebra comutativa livre, livremente gerada por Ω sobre $\mathbb{K}$.

Denote

$$Y_l = \sum_{i=1}^{n} y^l_{(i,i)} e_{(i,i)} + \sum_{i=1}^{n-1} y^l_{(i,i+1)} e_{(i,i+1)} \ \text{ e } \ Z_l = \sum_{i=1}^{n-1} z^l_{(i,i+1)} e_{(i,i+1)}.$$

Temos pelo Lema 2.1.20 que

$$[Z_l, Y_1, \ldots, Y_s] \quad = \quad \sum_{i=1}^{n-1} \left(z^l_{(i,i+1)} \prod_{t=1}^{s} (y^t_{(i+1,i+1)} - y^t_{(i,i)}) \right) e_{(i,i+1)} + u\ ; \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}[Y_l, Y_1, \ldots, Y_s] &= \sum_{i=1}^{n-1} \Big(\Big(y^l_{(i,i+1)} y^1_{(i+1,i+1)} + y^l_{(i,i)} y^1_{(i,i+1)} - y^1_{(i,i+1)} y^l_{(i+1,i+1)} - y^1_{(i,i)} y^l_{(i,i+1)} \Big) \times \\ &\quad \times \prod_{t=2}^{s} \Big(y^t_{(i+1,i+1)} - y^t_{(i,i)} \Big) \Big) e_{(i,i+1)} + v \, ; \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} Y_l^q - Y_l &= \sum_{i=1}^{n-1} y^l_{(i,i+1)} \left(\sum_{t=0}^{q-1} (y^l_{(i,i)})^{q-1-t} (y^l_{(i+1,i+1)})^t - 1 \right) e_{(i,i+1)} + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} \Big((y^l_{(i,i)})^q - y^l_{(i,i)} \Big) e_{(i,i)} + w; \end{aligned} \tag{2.10}$$

e também, se $\Delta_s = [Y_l^q - Y_l, Y_1, \ldots, Y_s]$, então

$$\begin{aligned} \Delta_s &= \sum_{i=1}^{n-1} y^l_{(i,i+1)} \left(\sum_{t=0}^{q-1} (y^l_{(i,i)})^t (y^l_{(i+1,i+1)})^{q-1-t} - 1 \right) \left(\prod_{t=1}^{s} \Big(y^t_{(i+1,i+1)} - y^t_{(i,i)} \Big) \right) e_{(i,i+1)} + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} \Big(\Big((y^l_{(i,i)})^q - y^l_{(i,i)} \Big) - \Big((y^l_{(i+1,i+1)})^q - y^l_{(i+1,i+1)} \Big) \Big) y^1_{(i,i+1)} \times \\ &\quad \times \left(\prod_{t=2}^{s} \Big(y^t_{(i+1,i+1)} - y^t_{(i,i)} \Big) \right) e_{(i,i+1)} + w', \end{aligned} \tag{2.11}$$

onde u, v, w, w' são combinações lineares de matrizes $e_{(i,j)}$, com coeficientes em $\mathbb{K}[\Omega]$, tais que $j - i \geq 2$.

Suponha que exista $\alpha_{(a,c)}$ em (2.7) tal que $\alpha_{(a,c)} \neq 0$. Seja

$$g = \alpha_{(a,c)} y_1^{a_1} y_2^{a_2} \cdots y_s^{a_s} \, c_1 c_2 \cdots c_{n-1}$$

um somando não nulo de f, e considere o monômio $m_g = x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_{n-1}} \in \mathbb{K}\langle X \rangle$, onde x_{j_k} é a variável na primeira posição do comutador c_k. Note que $\deg_G(x_{j_k}) = \deg_G(c_k)$. Considere a ordem lexicográfica à esquerda no conjunto

$$M_f = \{ m_g | \; g \text{ é um somando não nulo de } f \},$$

onde $y_1 < y_2 < \ldots < z_1 < z_2 < \ldots$. Denote por $m = x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_{n-1}}$ o elemento maximal de M_f. Dizemos que $k, r \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ são equivalentes se $x_{i_k} = x_{i_r}$, e vamos denotar por Γ_k a classe de equivalência de k.

Defina $\overline{Y_l}$ e $\overline{Z_l}$ como segue:

a) Se $y_l = x_{i_k}$ para algum $1 \leq k \leq n-1$, então

$$\overline{Y_l} = \sum_{i=1}^{n} y^l_{(i,i)} e_{(i,i)} + \sum_{i \in \Gamma_k} y^l_{(i,i+1)} e_{(i,i+1)}.$$

b) Se $y_l \neq x_{i_k}$ para todo $1 \leq k \leq n-1$, então

$$\overline{Y_l} = \sum_{i=1}^{n} y^l_{(i,i)} e_{(i,i)}.$$

c) Se $z_l = x_{i_k}$ para algum $1 \leq k \leq n-1$, então

$$\overline{Z_l} = \sum_{i \in \Gamma_k} z^l_{(i,i+1)} e_{(i,i+1)}.$$

d) Se $z_l \neq x_{i_k}$ para todo $1 \leq k \leq n-1$, então $\overline{Z_l} = 0$.

Dado um polinômio L-normal $c_k = c_k(y_1, \ldots, y_s, z_1, \ldots, z_s)$, denote por $\mu(c_k)$ o coeficiente de $e_{(k,k+1)}$ em $c_k(\overline{Y_1}, \ldots, \overline{Y_s}, \overline{Z_1}, \ldots, \overline{Z_s})$. Temos:

a) Seja $c_k = [z_l, y_1^{(d_1)}, \ldots, y_s^{(d_s)}]$. Por (2.8), se $z_l = x_{i_k}$, então

$$\mu(c_k) = z^l_{(k,k+1)} \prod_{t=1}^{s} (y^t_{(k+1,k+1)} - y^t_{(k,k)})^{d_t}. \tag{2.12}$$

b) Seja $c_k = [y_l, y_1^{(d_1)}, \ldots, y_l^{(d_l)}, \ldots, y_s^{(d_s)}]$. Por (2.9), se $y_l = x_{i_k}$, então

$$\begin{aligned}\mu(c_k) = &\left(y^l_{(k,k+1)} y^1_{(k+1,k+1)} + y^l_{(k,k)} y^1_{(k,k+1)} - y^1_{(k,k+1)} y^l_{(k+1,k+1)} - y^1_{(k,k)} y^l_{(k,k+1)}\right) \times \\ &\times \left(y^1_{(k+1,k+1)} - y^1_{(k,k)}\right)^{d_1 - 1} \times \prod_{t=2}^{s} \left(y^t_{(k+1,k+1)} - y^t_{(k,k)}\right)^{d_t}.\end{aligned} \tag{2.13}$$

c) Seja $c_k = y_l^q - y_l$. Por (2.10), se $y_l = x_{i_k}$, então

$$\mu(c_k) = y^l_{(k,k+1)} \left(\sum_{t=0}^{q-1} (y^l_{(k,k)})^{q-1-t} (y^l_{(k+1,k+1)})^t - 1 \right). \tag{2.14}$$

d) Seja $c_k = [y_l^q - y_l, y_1^{(d_1)}, \ldots, y_{l-1}^{(d_{l-1})}, y_{l+1}^{(d_{l+1})}, \ldots, y_s^{(d_s)}]$. Por (2.11), se $y_l = x_{i_k}$, então

$$\begin{aligned}\mu(c_k) = &\, y^l_{(k,k+1)} \left(\sum_{t=0}^{q-1} (y^l_{(k,k)})^t (y^l_{(k+1,k+1)})^{q-1-t} - 1 \right) \left(\prod_{t=1,\ d_l=0}^{s} \left(y^t_{(k+1,k+1)} - y^t_{(k,k)} \right)^{d_t} \right) + \\ &+ \left(\left((y^l_{(k,k)})^q - y^l_{(k,k)} \right) - \left((y^l_{(k+1,k+1)})^q - y^l_{(k+1,k+1)} \right) \right) y^1_{(k,k+1)} (y^1_{(k+1,k+1)} - y^1_{(k,k)})^{d_1 - 1} \times \\ &\times \left(\prod_{t=2,\ d_l=0}^{s} \left(y^t_{(k+1,k+1)} - y^t_{(k,k)} \right)^{d_t} \right).\end{aligned} \tag{2.15}$$

Dado um subconjunto de $\mathbb{K}$,

$$\{\zeta^l_{(i,j)} : l \geq 1 \text{ e } 1 \leq i \leq j \leq n\} \cup \{\xi^l_{(i,j)} : l \geq 1 \text{ e } 1 \leq i \leq j \leq n\} \subset \mathbb{K},$$

existe um único homomorfismo de álgebras $\varphi : \mathbb{K}[\Omega] \to \mathbb{K}$ tal que

$$\varphi(y^l_{(i,j)}) = \zeta^l_{(i,j)} \ \text{ e } \ \varphi(z^l_{(i,j)}) = \xi^l_{(i,j)}$$

para todos $l \geq 1$ e $1 \leq i \leq j \leq n$. Para tal homomorfismo, defina os elementos $\overline{\overline{Y_l}}$ e $\overline{\overline{Z_l}}$ de $UT_n(\mathbb{K})$ como segue:

a) Se $y_l = x_{i_k}$ para algum $1 \leq k \leq n-1$, então

$$\overline{\overline{Y_l}} = \sum_{i=1}^{n} \zeta^l_{(i,i)} e_{(i,i)} + \sum_{i \in \Gamma_k} \zeta^l_{(i,i+1)} e_{(i,i+1)}.$$

b) Se $y_l \neq x_{i_k}$ para todo $1 \leq k \leq n-1$, então

$$\overline{\overline{Y_l}} = \sum_{i=1}^{n} \zeta^l_{(i,i)} e_{(i,i)}.$$

c) Se $z_l = x_{i_k}$ para algum $1 \leq k \leq n-1$, então

$$\overline{\overline{Z_l}} = \sum_{i \in \Gamma_k} \xi^l_{(i,i+1)} e_{(i,i+1)}.$$

d) Se $z_l \neq x_{i_k}$ para todo $1 \leq k \leq n-1$, então $\overline{\overline{Z_l}} = 0$.

Note que na definição acima, simplesmente trocamos em $\overline{Y_l}$ e $\overline{Z_l}$ as variáveis das entradas por elementos do corpo para obter $\overline{\overline{Y_l}}$ e $\overline{\overline{Z_l}}$.

Afirmação 2. Seja $g(y_1, \ldots, y_s, z_1, \ldots, z_s) = \alpha_{(a,c)} y_1^{a_1} y_2^{a_2} \cdots y_s^{a_s}\, c_1 c_2 \cdots c_{n-1}$ um somando não nulo de f. Se $g\left(\overline{\overline{Y_1}}, \ldots, \overline{\overline{Y_s}}, \overline{\overline{Z_1}}, \ldots, \overline{\overline{Z_s}}\right) \neq 0$, para algum $\overline{\overline{Y_1}}, \ldots, \overline{\overline{Y_s}}, \overline{\overline{Z_1}}, \ldots, \overline{\overline{Z_s}} \in UT_n(\mathbb{K})$, então $m_g = m$.
Prova da Afirmação 2. Suponha $m_g = x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_{n-1}} \neq x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_{n-1}}$. Então, existe $1 \leq k \leq n-1$ tal que

$$x_{j_1} = x_{i_1},\ x_{j_2} = x_{i_2},\ \ldots, x_{j_{k-1}} = x_{i_{k-1}},\ x_{j_k} \neq x_{i_k}. \tag{2.16}$$

Temos os seguintes casos:

a) Seja $c_k = [z_l, y_1^{(d_1)}, \ldots, y_s^{(d_s)}]$, onde $z_l = x_{j_k}$. Por (2.8), se $x_{j_k} \neq x_{i_k}$, então $\mu(c_k) = 0$. Logo, pelo Lema 2.2.4 obtemos $g\left(\overline{\overline{Y_1}}, \ldots, \overline{\overline{Y_s}}, \overline{\overline{Z_1}}, \ldots, \overline{\overline{Z_s}}\right) = 0$. Absurdo.

b) Seja $c_k = [y_l, y_{p_1}, y_{p_2}, \ldots, y_{p_s}]$, com $l > p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_s$ e $y_l = x_{j_k}$. Por (2.9) e Lema 2.2.4, se $y_l \neq x_{i_k}$, então $y_{p_1} = x_{i_k}$. Assim, $x_{j_k} > x_{i_k}$ e por (2.16) obtemos que m não é maximal em M_f. Absurdo.

c) Seja $c_k = [y_l^q - y_l, y_1^{(d_1)}, \ldots, y_{l-1}^{(d_{l-1})}, y_{l+1}^{(d_{l+1})}, \ldots, y_s^{(d_s)}]$, onde $y_l = x_{j_k}$. Por (2.10), (2.11) e Lema 2.2.4, se $x_{j_k} \neq x_{i_k}$, então $g\left(\overline{\overline{Y_1}}, \ldots, \overline{\overline{Y_s}}, \overline{\overline{Z_1}}, \ldots, \overline{\overline{Z_s}}\right) = 0$. Absurdo. Note que aqui usamos o fato que $\alpha^q - \alpha = 0$ se $\alpha \in \mathbb{K}$.

A prova da Afirmação 2 está finalizada.

Defina uma ordem parcial em Ω tal que

$$y^{r_1}_{(k,k)} < y^{r_1+1}_{(k,k)} < y^{r_2}_{(k-1,k)} < z^{r_3}_{(k-1,k)} < y^{r_4}_{(k+1,k+1)} < y^{r_5}_{(k,k+1)} < z^{r_6}_{(k,k+1)}$$

para todos $k, r_1, r_2, \ldots, r_6 \geq 1$. Agora, considere a ordem lexicográfica à direita nos monômios de $\mathbb{K}[\Omega]$. Denote por $\overline{\mu}(c_k)$ o monômio maximal de $\mu(c_k)$, onde $\mu(c_k)$ está em (2.12) ou (2.13) ou (2.14) ou (2.15). Note que

$$\overline{\mu}(c_k) = z^l_{(k,k+1)} \prod_{t=1}^{s} (y^t_{(k+1,k+1)})^{d_t}$$

em (2.12);

$$\overline{\mu}(c_k) = y^l_{(k,k+1)} \prod_{t=1}^{s} (y^t_{(k+1,k+1)})^{d_t}$$

em (2.13);

$$\overline{\mu}(c_k) = y^l_{(k,k+1)} \prod_{t=1,\ d_l=q-1}^{s} (y^t_{(k+1,k+1)})^{d_t}$$

em (2.14) e (2.15). Lembre-se que c_k é L-normal.

Seja

$$g = g(y_1, \ldots, y_s, z_1, \ldots, z_s) = \alpha_{(a,c)} y_1^{a_1} y_2^{a_2} \cdots y_s^{a_s}\ c_1 c_2 \cdots c_{n-1}$$

um somando não nulo de f tal que $m_g = x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_{n-1}}$. Substituindo as entradas de $\overline{Y_1}, \ldots, \overline{Y_s}, \overline{Z_1}, \ldots, \overline{Z_s}$ por elementos do corpo $\mathbb{K}$, obtemos matrizes $\overline{\overline{Y_1}}, \ldots, \overline{\overline{Y_s}}, \overline{\overline{Z_1}}, \ldots, \overline{\overline{Z_s}}$, como já comentado anteriormente nesta demonstração. Para facilitar o entendimento do texto a seguir, daremos um nome para tal substituição das entradas por elementos do corpo: Substituição Ξ. Então,

$$g\left(\overline{\overline{Y_1}}, \ldots, \overline{\overline{Y_s}}, \overline{\overline{Z_1}}, \ldots, \overline{\overline{Z_s}}\right) = \overline{\overline{\omega_g}} e_{(1,n)},$$

onde $\overline{\overline{\omega_g}} \in \mathbb{K}$ é obtido a partir de um polinômio $\omega_g \in \mathbb{K}[\Omega]$ que teve as suas variáveis substituídas por elementos do corpo $\mathbb{K}$ conforme a substituição Ξ acima. A expressão para ω_g é a seguinte:

$$\omega_g = \alpha_{(a,c)} \prod_{r=1}^{s} (y^r_{(1,1)})^{a_r} \prod_{k=1}^{n-1} \mu(c_k).$$

Note que,

$$\widehat{g} = \alpha_{(a,c)} \prod_{r=1}^{s} (y^r_{(1,1)})^{a_r} \prod_{k=1}^{n-1} \overline{\mu}(c_k)$$

é o monômio maximal dentre os monômios que aparecem em ω_g. Além disso, $g \to \widehat{g}$ é uma função injetora e $\deg_u \widehat{g} < q$ para todo $u \in \Omega$. Escreva,

$$f\left(\overline{\overline{Y_1}}, \ldots, \overline{\overline{Y_s}}, \overline{\overline{Z_1}}, \ldots, \overline{\overline{Z_s}}\right) = \overline{\overline{\omega_f}} e_{(1,n)},$$

onde $\overline{\overline{\omega_f}} \in \mathbb{K}$ é obtido a partir de um polinômio $\omega_f \in \mathbb{K}[\Omega]$ que teve as suas variáveis substituídas por elementos do corpo $\mathbb{K}$ conforme a substituição Ξ acima. Note que

$$f\left(\overline{\overline{Y_1}}, \ldots, \overline{\overline{Y_s}}, \overline{\overline{Z_1}}, \ldots, \overline{\overline{Z_s}}\right) = \sum g\left(\overline{\overline{Y_1}}, \ldots, \overline{\overline{Y_s}}, \overline{\overline{Z_1}}, \ldots, \overline{\overline{Z_s}}\right),$$

onde $m_g = x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_{n-1}}$. Portanto, $\omega_f = \sum \omega_g$ onde $m_g = x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_{n-1}}$. O monômio maximal $\widehat{f}$ aparecendo em ω_f é o elemento maximal do conjunto

$$A = \{\widehat{g}\ :\ m_g = x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_{n-1}}\}.$$

Relembramos que $g \to \widehat{g}$ é uma função injetora e $\deg_u \widehat{g} < q$ para todo $u \in \Omega$. Assim, existe um único g com

$$\widehat{f} = \widehat{g} = \alpha_{(a,c)} \prod_{r=1}^{s} (y^r_{(1,1)})^{a_r} \prod_{k=1}^{n-1} \overline{\mu}(c_k), \tag{2.17}$$

onde $\widehat{g}$ é o elemento maximal de A. Agora, $f \in T_G(UT_n, \varepsilon)$, isto é, $\omega_f \in T(\mathbb{K})$ (identidade para o corpo $\mathbb{K}$). Pelo Lema 1.3.5 obtemos o coeficiente, em (2.17), $\alpha_{(a,c)} = 0$. Usando várias vezes esse argumento, concluímos que $\alpha_{(a,c)} = 0$ para todo (a,c), como era desejado. A Afirmação 1 está finalizada.

O espaço vetorial $\mathbb{K}\langle X\rangle / I(\varepsilon)$ é gerado pelos polinômios em (2.6), e esses polinômios são linearmente independentes em $\mathbb{K}\langle X\rangle / T_G(UT_n, \varepsilon)$. Portanto, como $I(\varepsilon) \subseteq T_G(UT_n, \varepsilon)$ segue do Lema 1.1.5 que $I(\varepsilon) = T_G(UT_n, \varepsilon)$. □

Conclusão 2.2.10. Pelos Teoremas 1.4.2 e 2.2.9, obtemos a descrição de todas as identidades polinomiais G-graduadas de $UT_n(\mathbb{K})$, para qualquer G-graduação em $UT_n(\mathbb{K})$, grupo G e corpo finito $\mathbb{K}$.

O seguinte resultado está provado em [17, Teorema 1], e é um caso particular do Teorema 2.2.9.

Corolário 2.2.11. Se $\mathbb{K}$ é um corpo finito, então

$$T(UT_n(\mathbb{K})) = (T(\mathbb{K}))^n,$$

para todo $n \geq 1$.

Demonstração. Seja $G = \{1\}$ um grupo com apenas um elemento. Denote $\varepsilon = \underbrace{(1, \ldots, 1)}_{n}$. Então, $T_G(UT_n, \varepsilon) = T(UT_n)$. Note que ε é a única sequência ε-ruim de comprimento $\leq n$. Assim, pelo Teorema 2.2.9 temos que $T(UT_1) = T(\mathbb{K})$ é o T-ideal gerado por

$$[y_1, y_2] \text{ e } y_1^q - y_1;$$

e $T(UT_n)$ é o T-ideal gerado pelos polinômios

$$c_1 c_2 \cdots c_n,$$

onde $c_j \in \{[y_{2j}, y_{2j+1}],\ y_{2j}^q - y_{2j}\}$. Portanto,

$$T(UT_n) \subseteq (T(\mathbb{K}))^n.$$

Agora, seja $f_i(y_1, \ldots, y_s) \in T(\mathbb{K})$ com $1 \leq i \leq n$, e sejam $Y_1, \ldots, Y_s \in UT_n$. Como $f_i(Y_1, \ldots, Y_s) \in J(UT_n)$ (Radical de Jacobson de UT_n), temos que $f = f_1 \cdots f_n \in T(UT_n)$, isto é,

$$T(UT_n) \supseteq (T(\mathbb{K}))^n,$$

como era o desejado. □

Corolário 2.2.12. Seja G um grupo finito e seja $\mathbb{K}$ um corpo finito. O conjunto de todas as identidades polinomiais G-graduadas de $UT_n(\mathbb{K})$ é finitamente gerado, como um T_G-ideal, para toda G-graduação de $UT_n(\mathbb{K})$.

Demonstração. Fixada uma n-upla $\varepsilon \in G^n$, seja Λ o conjunto de todos os η-polinômios, onde $\eta \in G^m$ e $1 \leq m \leq n$. O conjunto Λ tem cardinalidade

$$|\Lambda| \leq \sum_{m=1}^{n} 2^m |G|^m.$$

Pelo Teorema 2.2.9, existe um conjunto gerador de $T_G(UT_n, \varepsilon)$, como um T_G-ideal, contido em Λ. Assim, $T_G(UT_n, \varepsilon)$ é finitamente gerado. $\square$

Chamamos a atenção do leitor para o seguinte fato: o Corolário 2.2.12 também é verdadeiro quando $\mathbb{K}$ é um corpo infinito. Para maiores detalhes, sugerimos a leitura de [4, Página 555] e [4, Teorema 2.8].

CAPÍTULO 3

Identidades G-graduadas, caso de Lie

Seja $\mathbb{K}$ um corpo de característica diferente de 2, e seja G um grupo. Em [13], Koshlukov e Yukihide descreveram todas as G-graduações de $UT_n(\mathbb{K})^{(-)}$. Já em [12], os mesmos autores descreveram as identidades polinomiais $\mathbb{Z}_n$-graduadas de $UT_n(\mathbb{K})^{(-)}$, equipada com a $\mathbb{Z}_n$-graduação canônica, quando $\mathbb{K}$ é infinito. Neste capítulo, descrevemos uma base para as identidades polinomiais G-graduadas de $UT_2(\mathbb{K})^{(-)}$ para toda G-graduação na álgebra e todo corpo $\mathbb{K}$ (finito ou infinito).

Ao longo de todo o capítulo, $\mathbb{K}$ denotará um corpo de característica diferente de 2, e G um grupo multiplicativo.

3.1 Graduações da álgebra de Lie $UT_2^{(-)}$

Em [13, Teorema 21] foram descritas todas as G-graduações de $UT_n^{(-)} = UT_n(\mathbb{K})^{(-)}$. Pela completude desta tese e por se tratar de um caso mais simples, nesta seção descreveremos as G-graduações de $UT_2^{(-)}$.

Relembramos do Capítulo 1 que a álgebra de Lie $UT_2^{(-)} = UT_2(\mathbb{K})^{(-)}$ é o espaço vetorial $UT_2(\mathbb{K})$, das matrizes triangulares superiores 2×2, munido com o colchete de Lie $[\ ,\ ]$ definido por:

$$[u,v] = u\cdot v - v\cdot u,$$

onde $\cdot$ denota o produto usual de matrizes e $u,v\in UT_2(\mathbb{K})$. Veja os Exemplos 1.1.2 e 1.1.3.

Sejam $e_{(i,j)}$ as matrizes unitárias em $UT_2^{(-)}$, e denote

$$1 = e_{(1,1)} + e_{(2,2)}, \quad a = e_{(1,1)} - e_{(2,2)}, \quad \text{e} \quad b = e_{(1,2)}.$$

O conjunto $\{1,a,b\}$ forma uma base para o espaço vetorial $UT_2^{(-)}$.

Lema 3.1.1. Em toda G-graduação de $UT_2^{(-)}$, o elemento $b = e_{(1,2)}$ é homogêneo.

Demonstração. Fixe uma base $\{u_1,u_2,u_3\}$ do espaço vetorial $UT_2^{(-)}$, formada por elementos homogêneos. Se

$$[u_1,u_2] = [u_1,u_3] = [u_2,u_3] = 0,$$

então $[v,w]=0$ para todos $v,w \in UT_2^{(-)}$, e temos um absurdo. Portanto, existem i,j tais que $[u_i,u_j]=\alpha e_{(1,2)}$ para algum $0 \neq \alpha \in \mathbb{K}$. Assim, $b=e_{(1,2)}$ é um elemento homogêneo de $UT_2^{(-)}$ com $\deg_G(b)=\deg_G(u_i)\deg_G(u_j)$. □

Lema 3.1.2. Toda G-graduação de $UT_2^{(-)}$ é isomorfa a uma G-graduação de $UT_2^{(-)}$ em que o elemento $a=e_{(1,1)}-e_{(2,2)}$ é homogêneo de grau 1.

Demonstração. Dada uma G-graduação de $UT_2^{(-)}$, fixe uma base $\{u_1,u_2,b\}$ do espaço vetorial $UT_2^{(-)}$, formada por elementos homogêneos. Observe que utilizamos o lema anterior. Para cada $i=1,2$, escreva

$$u_i=\alpha_i 1+\beta_i a+\gamma_i b,$$

onde $\alpha_i,\beta_i \in \mathbb{K}$.

Afirmação 1. Existe $\gamma \in \mathbb{K}$ tal que $a+\gamma b$ é homogêneo, a menos de um isomorfismo G-graduado.

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos supor $\alpha_1 \neq 0$ e $\beta_2 \neq 0$. De fato, como $\{u_1,u_2,b\}$ é base de $UT_2^{(-)}$, segue que $\{\alpha_1 1+\beta_1 a, \alpha_2 1+\beta_2 a, b\}$ também é base de $UT_2^{(-)}$. Logo, $\{\alpha_1 1+\beta_1 a, \alpha_2 1+\beta_2 a\}$ é L.I. e, consequentemente,

$$\det\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Isso acarreta que $\alpha_1\beta_2 \neq 0$ ou $\alpha_2\beta_1 \neq 0$, como queríamos.

A transformação linear $\psi : UT_2^{(-)} \longrightarrow UT_2^{(-)}$, definida por

$$\psi(u_1)=u_1, \quad \psi(u_2)=\beta_2 a+\gamma_2 b \quad \text{e} \quad \psi(b)=b,$$

é um isomorfismo de álgebras de Lie. Tal isomorfismo induz uma nova graduação em $UT_2^{(-)}$, de modo que $\deg_G(\psi(u_i))=\deg_G(u_i)$ para todo i. Em particular, nesta nova graduação, temos que $(1/\beta_2)\psi(u_2)$ é homogêneo, como era o desejado.

Pela Afirmação 1 podemos supor, sem perda de generalidade, que $u_2=a+\gamma b$. Uma vez que u_2 é diagonalizável, existe uma matriz invertível $C \in UT_2$ tal que $Cu_2C^{-1}=a$. A função $\varphi : UT_2^{(-)} \longrightarrow UT_2^{(-)}$ definida por

$$\varphi(A)=CAC^{-1}$$

é um isomorfismo de álgebras de Lie. Tal isomorfismo induz uma nova graduação em $UT_2^{(-)}$, de modo que $\deg_G(\varphi(u_i))=\deg_G(u_i)$ para todo i. Em particular, nesta nova graduação temos que $a=\varphi(u_2)$ é homogêneo, como era o desejado.

Sem perda de generalidade, podemos supor $u_2=a$. Uma vez que $[a,b]=2b$, segue que

$$\deg_G(a)\deg_G(b)=\deg_G([a,b])=\deg_G(2b)=\deg_G(b),$$

isto é, $\deg_G(a)=1$.

A demonstração está finalizada. □

Teorema 3.1.3. Sejam G um grupo e $\mathbb{K}$ um corpo de característica diferente de 2.

a) Se $g,h \in G$, então existe uma G-graduação em $UT_2^{(-)}$ tal que

$$\deg_G(1) = g,\ \deg_G(a) = 1 \ \text{ e } \ \deg_G(b) = h.$$

Neste caso, denotamos por $UT_2^{(-)}(g,h)$ a álgebra $UT_2^{(-)}$ com tal graduação.

b) Toda G-graduação em $UT_2^{(-)}$ é isomorfa a $UT_2^{(-)}(g,h)$ para alguns $g,h \in G$.

Demonstração. A demonstração do item a) deixamos para o leitor.

Provaremos o item b): Fixe uma G-graduação em $UT_2^{(-)}$. Pelos Lemas 3.1.1 e 3.1.2 podemos supor, sem perda de generalidade, que na graduação de $UT_2^{(-)}$ os elementos a,b são homogêneos com $\deg_G(a) = 1$ e $\deg_G(b) = h$ para algum $h \in G$. Considere $\beta,\gamma \in \mathbb{K}$ tais que $u = 1+\beta a+\gamma b$ seja homogêneo. Estudaremos 3 casos:

1. Caso $\beta = \gamma = 0$.

   Neste caso, $u = 1$ e a G-graduação de $UT_2^{(-)}$ coincide com $UT_2^{(-)}(g,h)$, onde $\deg_G(1) = g$.

2. Caso $\beta = 0$ e $\gamma \neq 0$.

   Neste caso, $u = 1+\gamma b$. De $[u,a] = -2\gamma b$, obtemos

   $$\deg_G(u) = \deg_G(u)\deg_G(a) = \deg_G([u,a]) = \deg_G(-2\gamma b) = \deg_G(b),$$

   ou seja, $\deg_G(u) = \deg_G(b)$. Logo, $\deg_G(1) = \deg_G(b)$ e a G-graduação de $UT_2^{(-)}$ coincide com $UT_2^{(-)}(h,h)$.

3. Caso $\beta \neq 0$.

   Neste caso, $u = 1+\beta a+\gamma b$. De $[u,b] = 2\beta b$, obtemos

   $$\deg_G(u)\deg_G(b) = \deg_G([u,b]) = \deg_G(2\beta b) = \deg_G(b),$$

   ou seja, $\deg_G(u) = 1$. Logo, $\deg_G(1+\gamma b) = 1$. Se $\gamma = 0$, então a G-graduação de $UT_2^{(-)}$ coincide com $UT_2^{(-)}(1,h)$. Se $\gamma \neq 0$, podemos usar o Caso 2 para concluir que a G-graduação de $UT_2^{(-)}$ coincide com $UT_2^{(-)}(h,h)$.

Finalizamos a demonstração do teorema. □

3.2 Álgebra de Lie G-graduada livre

Nesta seção, apresentaremos o conceito de identidade polinomial G-graduada de uma álgebra de Lie G-graduada. Para isso, precisamos primeiro falar da álgebra de Lie G-graduada livre, isto é, nosso ambiente de trabalho. Ao longo de toda a seção, G denotará um grupo "abeliano" com operação de multiplicação.

Relembramos da Seção 1.2 que se X é um conjunto infinito e enumerável, então $L(X)$ denota a álgebra de Lie livre, livremente gerada por X. Além disso, $L(X)$ é a subalgebra de $\mathbb{K}(X)^{(-)}$ gerada por X (Teorema de Witt).

Para cada $g \in G$, considere um conjunto infinito e enumerável $X_g = \{x_1^g, x_2^g, \ldots\}$, de modo que tais conjuntos sejam dois a dois disjuntos. Seja

$$X = \bigcup_{g \in G} X_g.$$

A álgebra de Lie livre $L(X)$, livremente gerada por X, possui uma G-graduação natural. Mais especificamente, definimos sobre as variáveis e comutadores o grau homogêneo da seguinte forma:

$$\deg_G(x_i^g) = g \quad \text{e} \quad \deg_G([x_{i_1}^{g_1}, x_{i_2}^{g_2}, \ldots, x_{i_m}^{g_m}]) = g_1 g_2 \cdots g_m,$$

para todos $x_{i_j}^{g_j} \in X_{g_j}$ e $m \geq 2$. Agora definimos $L(X)_g$ como sendo o subespaço vetorial de $L(X)$ gerado pelos elementos u tais que u é variável ou comutador com $\deg_G(u) = g$. Temos que $L(X)$ é uma álgebra G-graduada por meio da decomposição

$$L(X) = \bigoplus_{g \in G} L(X)_g.$$

Ela será chamada *álgebra de Lie G-graduada livre, livremente gerada por X*. Tal álgebra tem a seguinte propriedade universal: dada uma álgebra de Lie G-graduada $L = \bigoplus_{g \in G} L_g$ e uma função $h : X \to L$ com $h(x) \in L_g$ para todos $x \in X_g$ e $g \in G$, existe um único homomorfismo G-graduado de álgebras de Lie $H : L(X) \to L$ que estende h.

Seja $L = \bigoplus_{g \in G} L_g$ uma álgebra de Lie G-graduada. Dizemos que um polinômio $f(x_{i_1}^{g_1}, \ldots, x_{i_n}^{g_n}) \in L(X)$ é uma *identidade polinomial G-graduada para L*, se

$$f(a_1, \ldots, a_n) = 0$$

para quaisquer $a_1 \in L_{g_1}, \ldots, a_n \in L_{g_n}$. Denotamos por $T_G(L)$ o conjunto das identidades polinomiais G-graduadas de L em $L(X)$.

Um ideal G-graduado I de $L(X)$ é dito ser um *T_G-ideal de $L(X)$* se $\varphi(I) \subseteq I$, para todo endomorfismo G-graduado φ de $L(X)$. Note que, um ideal G-graduado I de $L(X)$ é um T_G-ideal se, e somente se, $I = T_G(L)$ para alguma álgebra de Lie G-graduada L.

Dado um subconjunto S de $L(X)$, definimos o *T_G-ideal de $L(X)$ gerado por S* como sendo a interseção de todos os T_G-ideais de $L(X)$ que contêm S. Ele é o menor T_G-ideal de $L(X)$ que contém S, e será denotado por $\langle S \rangle^{T_G}$. Dado

$$f = \sum_{g \in G} f_g, \; f_g \in L(X)_g,$$

note que $\langle f\rangle^{T_G} = \langle f_g \mid g \in G\rangle^{T_G}$, pois todo T_G-ideal de $L(X)$ é, em particular, um ideal G-graduado de $L(X)$.

Os próximos 3 resultados são resultados análogos aos que aparecem na Seção 1.5, mas no contexto de Lie. Como os argumentos que aparecem nas demonstrações são similares, omitimos as provas.

Proposição 3.2.1. Seja S um subconjunto de $L(X)$ formado por elementos homogêneos, isto é,

$$S \subseteq \left(\bigcup_{g\in G} L(X)_g \right).$$

O T_G-ideal de $L(X)$ gerado por S é o conjunto formado por todas as combinações lineares de elementos do tipo

$$[f(u_1,\ldots,u_n),v_1,\ldots,v_m],$$

onde $v_1,\ldots,v_m \in L(X)$, $m \geq 0$, $f(x_{i_1}^{g_1},\ldots,x_{i_n}^{g_n}) \in S$ e $u_1 \in L(X)_{g_1},\ldots,u_n \in L(X)_{g_n}$.

Proposição 3.2.2. Seja $f \in L(X)$ e seja $x \in X$. Escreva

$$f = \sum_{i=0}^{n} f_i,$$

onde f_i é a componente homogênea de f de grau i em x. Se o corpo $\mathbb{K}$ tem cardinalidade $|\mathbb{K}| > n$, então

$$\langle f_0, f_1,\ldots,f_n\rangle^{T_G} = \langle f\rangle^{T_G}.$$

Em particular, se $\mathbb{K}$ é infinito, então todo T_G-ideal de $L(X)$ é gerado por seus elementos multi-homogêneos. Se $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 0$, então todo T_G-ideal de $L(X)$ é gerado por seus elementos multilineares.

Lema 3.2.3. Se A e B são álgebras de Lie G-graduadas isomorfas, então $T_G(A) = T_G(B)$.

O lema abaixo é bem conhecido e será bastante utilizado nas próximas seções.

Lema 3.2.4. Denote por M o T_G-ideal de $L(X)$ gerado pelos polinômios

$$[[x_1,x_2],[x_3,x_4]],$$

onde $x_1,\ldots,x_4 \in X$. Se $f_1,f_2,g_1,\ldots,g_n \in L(X)$ e $\sigma \in Sym(n)$, então

$$[f_1,f_2,g_1,\ldots,g_n] + M = [f_1,f_2,g_{\sigma(1)},\ldots,g_{\sigma(n)}] + M.$$

Demonstração. Pela identidade de Jacobi temos

$$[[x_1,x_2],[x_3,x_4]] = [x_1,x_2,x_3,x_4] - [x_1,x_2,x_4,x_3].$$

A partir deste fato podemos demonstrar o lema. Deixamos os detalhes para o leitor. □

3.3 Identidades G-graduadas de $UT_2^{(-)}$

Nesta seção, descreveremos as identidades polinomiais G-graduadas de $UT_2^{(-)} = UT_2(\mathbb{K})^{(-)}$ para todo corpo $\mathbb{K}$ (finito ou infinito) de característica diferente de 2 e todo grupo abeliano G.

Sejam $1 = e_{(1,1)} + e_{(2,2)}$, $a = e_{(1,1)} - e_{(2,2)}$ e $b = e_{(1,2)}$. Relembramos do Teorema 3.1.3 que se $g,h \in G$, então existe uma G-graduação em $UT_2^{(-)}$ tal que

$$\deg_G(1) = g,\ \deg_G(a) = 1 \ \text{ e } \ \deg_G(b) = h.$$

Neste caso, denotamos por $UT_2^{(-)}(g,h)$ a álgebra $UT_2^{(-)}$ com tal G-graduação.

Pelo Teorema 3.1.3 e Lema 3.2.3, dada uma G-graduação qualquer em $UT_2^{(-)}$, o conjunto das suas identidades polinomiais G-graduadas coincide com o conjunto das identidades polinomiais G-graduadas de $UT_2^{(-)}(g,h)$, para alguns $g,h \in G$. Assim, de agora em diante, estudaremos o T_G-ideal $T_G(UT_2^{(-)}(g,h))$.

Notação 3.3.1. Escreva as variáveis em X com grau homogêneo 1 por meio da letra y, isto é,

$$X_1 = Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots\}.$$

Se $f \in L(X)$, $y \in Y$ e $d \geq 1$, denote

$$[f, y^{(d)}] = [f, \underbrace{y, y, \ldots, y}_{d\ fatores}] \ \text{ e } \ [f, y^{(0)}] = f. \tag{3.1}$$

Teorema 3.3.2. Sejam $\mathbb{K}$ um corpo de $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 2$ e G um grupo abeliano. Sejam $g,h \in G$ tais que $h \neq 1$ e $g \in \{1,h\}$. Denote $I = T_G(UT_2^{(-)}(g,h))$.

a) Se $\mathbb{K}$ é infinito, então I é gerado, como um T_G-ideal, pelos polinômios

$$[y_1, y_2],\ [x_1^h, x_2^h],\ x_1^u, \tag{3.2}$$

onde $u \in G - \{1,h\}$. Além disso, o espaço vetorial quociente $L(X)/I$ tem uma base formada pelos polinômios

$$y_j + I,\ [x_i^h, y_1^{(d_1)}, \ldots, y_n^{(d_n)}] + I, \tag{3.3}$$

onde $j \geq 1$; $i \geq 1$; $d_1, \ldots, d_n \geq 0$; $n \geq 0$.

b) Se $\mathbb{K}$ é um corpo finito com q elementos, então I é gerado, como um T_G-ideal, pelos polinômios

$$[y_1, y_2],\ [x_1^h, x_2^h],\ [x_1^h, y_1^{(q)}] - [x_1^h, y_1],\ x_1^u, \tag{3.4}$$

onde $u \in G - \{1,h\}$. Além disso, o espaço vetorial quociente $L(X)/I$ tem uma base formada pelos polinômios

$$y_j + I,\ [x_i^h, y_1^{(d_1)}, \ldots, y_n^{(d_n)}] + I, \tag{3.5}$$

onde $j \geq 1$; $i \geq 1$; $0 \leq d_1, \ldots, d_n \leq q-1$; $n \geq 0$.

Demonstração. Para todo corpo $\mathbb{K}$ (finito ou infinito), denote por J o T_G-ideal de $L(X)$ gerado pelos polinômios em (3.2). O leitor pode verificar que $J \subseteq I$.

Afirmação 1. $L(X)/J$ é gerado, como espaço vetorial, pelos polinômios

$$y_j + J,\ [x_i^h, y_1^{(d_1)}, \ldots, y_n^{(d_n)}] + J, \tag{3.6}$$

onde $j \geq 1$; $i \geq 1$; $d_1, \ldots, d_n \geq 0$; $n \geq 0$.

Demonstração da Afirmação 1. Note que $L(X)/J$ é gerado, como espaço vetorial, pelos elementos

$$y_j + J,\ [x_i^h, y_{i_1}, \ldots, y_{i_n}] + J,$$

onde $j \geq 1$; $i \geq 1$; $n \geq 0$. Pela identidade de Jacobi, obtemos

$$\begin{aligned}[x_i^h, y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_n}] + J &= -[y_{i_1}, y_{i_2}, x_i^h, \ldots, y_{i_n}] - [y_{i_2}, x_i^h, y_{i_1}, \ldots, y_{i_n}] + J \\ &= +[x_i^h, y_{i_2}, y_{i_1}, \ldots, y_{i_n}] + J.\end{aligned}$$

Como $[[x_1, x_2], [x_3, x_4]] \in J$ para todos $x_1, \ldots, x_4 \in X$, segue da igualdade acima e Lema 3.2.4 que $L(X)/J$ é gerado, como espaço vetorial, pelos elementos em (3.6).

a): Pela Afirmação 1, como $J \subseteq I$, segue que $L(X)/I$ é gerado, como espaço vetorial, pelos elementos em (3.3). Para provar que $J = I$, demonstraremos que os elementos em (3.3) são L.I. Seja

$$f(y_1, \ldots, y_n, x_1^h, \ldots, x_m^h) = \sum_j \alpha_j y_j + \sum_{(i,d)} \alpha_{(i,d)} [x_i^h, y_1^{(d_1)}, \ldots, y_n^{(d_n)}] \in I,$$

onde $\alpha_i, \alpha_{(i,d)} \in \mathbb{K}$ e $d = (d_1, \ldots, d_n)$. Como $\mathbb{K}$ é infinito, segue que cada componente multi-homogênea de f também está em I. Neste caso,

$$h(y_j) = \alpha_j y_j \in I \ \text{ e } \ g(y_1, \ldots, y_n, x_i^h) = \alpha_{(i,d)} [x_i^h, y_1^{(d_1)}, \ldots, y_n^{(d_n)}] \in I,$$

para todos j, i, d. Em particular, se $a = e_{11} - e_{22}$ e $b = e_{12}$, então

$$h(a) = \alpha_j a = 0 \ \text{ e } \ g(a, \ldots, a, b) = \alpha_{(i,d)} (-2)^{d_1 + \cdots + d_n} b = 0.$$

Logo, $\alpha_j = \alpha_{(i,d)} = 0$, finalizando a demonstração do item a).

Agora provaremos o item b): Denote por $\overline{J}$ o T_G-ideal de $L(X)$ gerado pelos polinômios em (3.4). Se $y \in UT_2^{(-)}$ é um elemento homogêneo com $\deg_G(y) = 1$, então y é uma matriz diagonal. Logo, $y^q - y = 0$. Por este fato e pelo Lema 2.1.15 temos que $J \subseteq \overline{J} \subseteq I$.

Pela Afirmação 1 e pelo fato que $[x_1^h, y_1^{(q)}] - [x_1^h, y_1] \in \overline{J}$, segue que $L(X)/\overline{J}$ é gerado, como espaço vetorial, pelos elementos

$$y_j + \overline{J},\ [x_i^h, y_1^{(d_1)}, \ldots, y_n^{(d_n)}] + \overline{J},$$

onde $j \geq 1$; $i \geq 1$; $0 \leq d_1, \ldots, d_n \leq q - 1$; $n \geq 0$. Como $\overline{J} \subseteq I$, segue que $L(X)/I$ é gerado, como espaço vetorial, pelos elementos em (3.5). Para provar que $\overline{J} = I$, demonstraremos que os elementos em (3.5) são L.I. Seja

$$f(y_1, \ldots, y_n, x_1^h, \ldots, x_m^h) = \sum_j \alpha_j y_j + \sum_{(i,d)} \alpha_{(i,d)} [x_i^h, y_1^{(d_1)}, \ldots, y_n^{(d_n)}] \in I,$$

onde $\alpha_j, \alpha_{(i,d)} \in \mathbb{K}$, $d = (d_1, \ldots, d_n)$ e $0 \leq d_1, \ldots, d_n \leq q-1$. Como $|\mathbb{K}| = q$ e $\deg_x f < q$ para todo $x \in X$, segue que cada componente multi-homogênea de f também está em I, veja Proposição 3.2.2. Agora utilizamos o mesmo argumento do caso em que K é infinito para finalizar a demonstração. $\square$

Teorema 3.3.3. Sejam $\mathbb{K}$ um corpo de char$(\mathbb{K}) \neq 2$ e G um grupo abeliano. Sejam $g, h \in G$ tais que $g \neq h$, $g \neq 1$ e $h \neq 1$. Denote $I = T_G(UT_2^{(-)}(g,h))$.

a) Se $\mathbb{K}$ é infinito, então I é gerado, como um T_G-ideal, pelos polinômios

$$[y_1, y_2], [x_1^h, x_2^h], [x_1^g, x_2^g], [x_1^g, x_2^h], [x_1^g, y_2], x_1^u$$

onde $u \in G - \{1, g, h\}$. Além disso, o espaço vetorial quociente $L(X)/I$ tem uma base formada pelos polinômios

$$y_i + I,\ x_i^g + I,\ [x_j^h, y_1^{(d_1)}, \ldots, y_n^{(d_n)}] + I,$$

onde $i \geq 1$; $j \geq 1$; $d_1, \ldots, d_n \geq 0$; $n \geq 0$.

b) Se $\mathbb{K}$ é um corpo finito com q elementos, então I é gerado, como um T_G-ideal, pelos polinômios

$$[y_1, y_2], [x_1^h, x_2^h], [x_1^g, x_2^g], [x_1^g, x_2^h], [x_1^g, y_2], [x_1^h, y_1^{(q)}] - [x_1^h, y_1], x_1^u,$$

onde $u \in G - \{1, g, h\}$. Além disso, o espaço vetorial quociente $L(X)/I$ tem uma base formada pelos polinômios

$$y_i + I,\ x_i^g + I,\ [x_j^h, y_1^{(d_1)}, \ldots, y_n^{(d_n)}] + I,$$

onde $i \geq 1$; $j \geq 1$; $0 \leq d_1, \ldots, d_n \leq q-1$; $n \geq 0$.

Demonstração. Omitimos a demonstração, pois ela é muito parecida com a demonstração do último teorema. Fica a cargo do leitor verificar os detalhes. $\square$

Teorema 3.3.4. Sejam $\mathbb{K}$ um corpo de char$(\mathbb{K}) \neq 2$ e G um grupo abeliano. Sejam $g, h \in G$ tais que $g = h = 1$. Denote $I = T_G(UT_2^{(-)}(g,h))$.

a) Se $\mathbb{K}$ é infinito, então I é gerado, como um T_G-ideal, pelos polinômios

$$[[y_1, y_2], [y_3, y_4]], x_1^u, \tag{3.7}$$

onde $u \in G - \{1\}$. Além disso, o espaço vetorial quociente $L(X)/I$ tem uma base formada pelos polinômios

$$[y_j, y_1^{(d_1)}, \ldots, y_j^{(d_j)}, \ldots, y_n^{(d_n)}] + I, \tag{3.8}$$

onde $d_1, \ldots, d_n \geq 0$; $n \geq 1$; $j > \min\{k \mid d_k \neq 0\}$.

b) Se $\mathbb{K}$ é finito com q elementos, então I é gerado, como um T_G-ideal, pelos polinômios

$$[[y_1,y_2],[y_3,y_4]], \quad [y_1,y_2,y_3^{(q)}]-[y_1,y_2,y_3],$$
$$[y_2,y_1^{(q)},y_2^{(q-1)}]+[y_2,y_1]-[y_2,y_1^{(q)}]-[y_2,y_1,y_2^{(q-1)}] \quad \text{e} \quad x_1^u, \tag{3.9}$$

onde $u \in G-\{1\}$. Além disso, o espaço vetorial quociente $L(X)/I$ tem uma base formada pelos polinômios em (i) e (ii) conforme abaixo:

(i) $y_j+I,\ [y_j,y_m^{(d_m)},y_{m+1}^{(d_{m+1})},\ldots,y_j^{(d_j)},\ldots,y_n^{(d_n)}]+I,$
onde $1 \leq d_m \leq q-1$, $0 \leq d_{m+1},\ldots,d_j,\ldots,d_n \leq q-1$; $n \geq 1$; $j > m \geq 1$.

(ii) $[y_j,y_m^{(q)},y_j^{(d_j)},y_{j+1}^{(d_{j+1})},\ldots,y_n^{(d_n)}]+I,$
onde $0 \leq d_{j+1},\ldots,d_n \leq q-1$; $0 \leq d_j \leq q-2$; $n \geq 1$; $j > m \geq 1$.

Demonstração. Antes de começarmos a demonstração, faremos uma observação: a demonstração do item a) é exatamente a resolução do Exercício 5.2.3 do livro [6], e por completude do texto faremos ela. O resultado novo e de nossa autoria é o item b).

Para todo corpo $\mathbb{K}$ (finito ou infinito), denote por J o T_G-ideal de $L(X)$ gerado pelos polinômios em (3.7). O leitor pode verificar que $J \subseteq I$.

Afirmação 1. $L(X)/J$ é gerado, como espaço vetorial, pelos polinômios

$$[y_j,y_1^{(d_1)},\ldots,y_j^{(d_j)},\ldots,y_n^{(d_n)}]+J, \tag{3.10}$$

onde $d_1,\ldots,d_n \geq 0$; $n \geq 1$; $j > \min\{k \mid d_k \neq 0\}$.

Demonstração da Afirmação 1. Note que $L(X)/J$ é gerado, como espaço vetorial, pelos elementos

$$[y_{i_1},\ldots,y_{i_n}]+J,$$

onde $n \geq 0$. Pelo Lema 3.2.4 e pela identidade de Jacobi, segue que $L(X)/J$ é gerado, como espaço vetorial, pelos elementos em (3.10).

Agora provaremos o item a). Pela Afirmação 1, como $J \subseteq I$, segue que $L(X)/I$ é gerado, como espaço vetorial, pelos elementos em (3.8). Para provar que $J = I$, demonstraremos que os elementos em (3.8) são L.I. Seja

$$f(y_1,\ldots,y_n) = \sum_{(j,d)} \alpha_{(j,d)}[y_j,y_1^{(d_1)},\ldots,y_j^{(d_j)},\ldots,y_n^{(d_n)}] \in I,$$

onde $\alpha_{(j,d)} \in \mathbb{K}$ e $d = (d_1,\ldots,d_n)$. Como $\mathbb{K}$ é infinito, segue que cada componente multi-homogênea de f também está em I. Neste caso, fixado um multigrau $k = (k_1,\ldots,k_n)$ segue que

$$g(y_1,\ldots,y_n) = \sum_{j=2}^{n} \alpha_{(j,k_1,\ldots,k_j-1,\ldots,k_n)}[y_j,y_1^{(k_1)},\ldots,y_j^{(k_j-1)},\ldots,y_n^{(k_n)}] \in I.$$

Fixado $j \neq 1$, se $Y_j = e_{11} - e_{22} + e_{12}$, e $Y_i = e_{11} - e_{22}$ para $i \neq j$, então

$$g(Y_1,\ldots,Y_n) = \left(\alpha_{(j,k_1,\ldots,k_j-1,\ldots,k_n)}(-2)^{k_1+\ldots+k_{j-1}+k_j-1+k_{j+1}+\ldots+k_n}\right)e_{12} = 0,$$

e portanto $\alpha_{(j,k_1,\ldots,k_j-1,\ldots,k_n)} = 0$, finalizando a demonstração do item a).

Agora provaremos o item b): Denote por $\overline{J}$ o T_G-ideal de $L(X)$ gerado pelos polinômios em (3.9). Se $Y_1,Y_2,Y_3 \in UT_2^{(-)}$, então $[Y_1,Y_2]$ e $Y_3^q - Y_3$ são múltiplos de $b = e_{(1,2)}$. Pelo Lema 2.1.15, temos

$$[Y_1,Y_2,Y_3^{(q)}] - [Y_1,Y_2,Y_3] = [[Y_1,Y_2],Y_3^q - Y_3] = 0.$$

Logo, $[y_1,y_2,y_3^{(q)}] - [y_1,y_2,y_3] \in I$. Agora, denotando

$$h(y_1,y_2) = [y_2,y_1^{(q)},y_2^{(q-1)}] + [y_2,y_1] - [y_2,y_1^{(q)}] - [y_2,y_1,y_2^{(q-1)}],$$

obtemos a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned}
h(Y_1,Y_2) &= +[Y_2,Y_1^{(q)},Y_2^{(q-1)}] + [Y_2,Y_1] - [Y_2,Y_1^{(q)}] - [Y_2,Y_1,Y_2^{(q-1)}]\\
&= +[Y_2,Y_1^{q},Y_2^{(q-1)}] + [Y_2,Y_1] - [Y_2,Y_1^{q}] - [Y_2,Y_1,Y_2^{(q-1)}]\\
&= -[Y_1^{q},Y_2^{(q)}] + [Y_2,Y_1] - [Y_2,Y_1^{q}] + [Y_1,Y_2^{(q)}]\\
&= -[Y_1^{q},Y_2^{q}] + [Y_2,Y_1] - [Y_2,Y_1^{q}] + [Y_1,Y_2^{q}]\\
&= -[Y_1^{q} - Y_1,Y_2^{q} - Y_2] = 0.
\end{aligned}$$

Logo, $h(y_1,y_2) \in I$. Acabamos de provar que $J \subseteq \overline{J} \subseteq I$.

Afirmação 2. A seguinte igualdade é válida em $L(X)/\overline{J}$:

$$[y_3,y_1^{(q)},y_2] + \overline{J} = [y_2,y_1^{(q)},y_3] + [y_3,y_1,y_2] - [y_2,y_1,y_3] + \overline{J}.$$

Demonstração da Afirmação 2. Pelo Lema 3.2.4, identidade de Jacobi e $[y_2,y_3,y_1^{(q)}] + \overline{J} = [y_2,y_3,y_1] + \overline{J}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
[y_3,y_1^{(q)},y_2] + \overline{J} &= +[y_3,y_1,y_2,y_1^{(q-1)}] + \overline{J}\\
&= -[y_1,y_2,y_3,y_1^{(q-1)}] - [y_2,y_3,y_1,y_1^{(q-1)}] + \overline{J}\\
&= +[y_2,y_1,y_3,y_1^{(q-1)}] - [y_2,y_3,y_1^{(q)}] + \overline{J}\\
&= +[y_2,y_1,y_3,y_1^{(q-1)}] - [y_2,y_3,y_1] + \overline{J}\\
&= +[y_2,y_1^{(q)},y_3] - [y_2,y_3,y_1] + \overline{J}\\
&= +[y_2,y_1^{(q)},y_3] + [y_3,y_1,y_2] - [y_2,y_1,y_3] + \overline{J}
\end{aligned}$$

Finalizamos assim a demonstração da afirmação.

Afirmação 3. $L(X)/\overline{J}$ é gerado, como espaço vetorial, pelos elementos em (I), (II) e (III) conforme abaixo:

(I) $y_j+\overline{J},\ [y_j,y_m^{(d_m)},y_{m+1}^{(d_{m+1})},\ldots,y_j^{(d_j)},\ldots,y_n^{(d_n)}]+\overline{J},$

onde $1\leq d_m\leq q-1$, $0\leq d_{m+1},\ldots,d_j,\ldots,d_n\leq q-1$; $n\geq 1$; $j>m\geq 1$.

(II) $[y_j,y_m^{(q)},y_{m+1}^{(d_{m+1})},\ldots,y_j^{(d_j)},\ldots,y_n^{(d_n)}]+\overline{J},$

onde $0\leq d_{m+1},\ldots,\widehat{d_j},\ldots,d_n\leq q-1$; $0\leq d_j\leq q-2$; $n\geq 1$; $j>m\geq 1$.

(III) $[y_j,y_m^{(q)},y_j^{(q-1)}]+\overline{J},$

onde $j>m\geq 1$.

Demonstração da Afirmação 3. Pela Afirmação 1 e pelo fato que $J\subseteq\overline{J}$, temos que $L(X)/\overline{J}$ é gerado, como espaço vetorial, pelos elementos $f+\overline{J}$ em (3.10). Escreva

$$f+\overline{J}=[y_j,y_m^{(d_m)},\ldots,y_j^{(d_j)},\ldots,y_n^{(d_n)}]+\overline{J}=[y_j,y_m,y_m^{(d_m-1)},\ldots,y_j^{(d_j)},\ldots,y_n^{(d_n)}]+\overline{J},$$

onde $d_m\geq 1$ e $j>m\geq 1$. Como $[y_1,y_2,y_3^{(q)}]-[y_1,y_2,y_3]\in\overline{J}$, podemos assumir em $f+\overline{J}$ que $0\leq d_m-1,d_{m+1},\ldots,d_n\leq q-1$, ou seja,

$$0\leq d_{m+1},\ldots,d_n\leq q-1 \quad \text{e} \quad 1\leq d_m\leq q.$$

Vamos analisar dois casos: $d_m<q$ e $d_m=q$.

Se $d_m<q$, então $f+\overline{J}$ é um elemento do item (I).

Suponha $d_m=q$. Neste caso,

$$f+\overline{J}=[y_j,y_m^{(q)},y_{m+1}^{(d_{m+1})},\ldots,y_j^{(d_j)},\ldots,y_n^{(d_n)}]+\overline{J},$$

onde $0\leq d_{m+1},\ldots,d_j,\ldots,d_n\leq q-1$, e analisaremos d_j. Se $d_j\leq q-2$, então $f+\overline{J}$ é um elemento do item (II). Se $d_j=q-1$, então $f+\overline{J}$ é um elemento do item (III) ou $1\leq d_k\leq q-1$ para algum $k\neq m,j$. Suponha então

$$f+\overline{J}=[y_j,y_m^{(q)},\ldots,y_j^{(q-1)},\ldots,y_k^{(d_k)},\ldots,y_n^{(d_n)}]+\overline{J},$$

onde $1\leq d_k\leq q-1$ e $k\neq m,j$. Pelo Lema 3.2.4, Afirmação 2, e pelo fato que $[y_2,y_3,y_1^{(q)}]+\overline{J}=[y_2,y_3,y_1]+\overline{J}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
f+\overline{J}&=[y_j,y_m^{(q)},\ldots,y_j^{(q-1)},\ldots,y_k^{(d_k)},\ldots,y_n^{(d_n)}]+\overline{J}\\
&=[y_j,y_m^{(q)},y_k,\ldots,y_j^{(q-1)},\ldots,y_k^{(d_k-1)},\ldots,y_n^{(d_n)}]+\overline{J}\\
&=[y_k,y_m^{(q)},y_j,\ldots,y_j^{(q-1)},\ldots,y_k^{(d_k-1)},\ldots,y_n^{(d_n)}]+[y_j,y_m,y_k,\ldots,y_j^{(q-1)},\ldots,y_k^{(d_k-1)},\ldots,y_n^{(d_n)}]\\
&\quad-[y_k,y_m,y_j,\ldots,y_j^{(q-1)},\ldots,y_k^{(d_k-1)},\ldots,y_n^{(d_n)}]+\overline{J}\\
&=[y_k,y_m^{(q)},\ldots,y_j^{(q)},\ldots,y_k^{(d_k-1)},\ldots,y_n^{(d_n)}]+[y_j,y_m,\ldots,y_j^{(q-1)},\ldots,y_k^{(d_k)},\ldots,y_n^{(d_n)}]\\
&\quad-[y_k,y_m,\ldots,y_j^{(q)},\ldots,y_k^{(d_k-1)},\ldots,y_n^{(d_n)}]+\overline{J}\\
&=[y_k,y_m^{(q)},\ldots,y_j,\ldots,y_k^{(d_k-1)},\ldots,y_n^{(d_n)}]+[y_j,y_m,\ldots,y_j^{(q-1)},\ldots,y_k^{(d_k)},\ldots,y_n^{(d_n)}]\\
&\quad-[y_k,y_m,\ldots,y_j,\ldots,y_k^{(d_k-1)},\ldots,y_n^{(d_n)}]+\overline{J}.
\end{aligned}$$

Dos três últimos somandos, temos que o primeiro está em (II), e os dois últimos estão em (I). Logo, $f+\overline{J}$ é uma combinação linear dos elementos dos itens (I) e (II).

Afirmação 4. $L(X)/\overline{J}$ é gerado, como espaço vetorial, pelos elementos em (1) e (2) conforme abaixo:

(1) $y_j+\overline{J},\ [y_j,y_m^{(d_m)},y_{m+1}^{(d_{m+1})},\ldots,y_j^{(d_j)},\ldots,y_n^{(d_n)}]+\overline{J}$,

onde $1\leq d_m\leq q-1$, $0\leq d_{m+1},\ldots,d_j,\ldots,d_n\leq q-1$; $n\geq 1$; $j>m\geq 1$.

(2) $[y_j,y_m^{(q)},y_j^{(d_j)},y_{j+1}^{(d_{j+1})},\ldots,y_n^{(d_n)}]+\overline{J}$,

onde $0\leq d_{j+1},d_{j+2},\ldots,d_n\leq q-1$; $0\leq d_j\leq q-2$; $n\geq 1$; $j>m\geq 1$.

Demonstração da Afirmação 4. Seja $[y_j,y_m^{(q)},y_j^{(q-1)}]+\overline{J}$ um elemento do item (III) da Afirmação 3, onde $j>m\geq 1$. Pela terceira identidade em (3.9) obtemos

$$[y_j,y_m^{(q)},y_j^{(q-1)}]+\overline{J}=-[y_j,y_m]+[y_j,y_m^{(q)}]+[y_j,y_m,y_j^{(q-1)}]+\overline{J},$$

ou seja, $[y_j,y_m^{(q)},y_j^{(q-1)}]+\overline{J}$ é uma combinação linear de elementos em (1) e (2).

Agora analisaremos os elementos do item (II) da Afirmação 3. Pois bem, seja

$$f=[y_j,y_m^{(q)},y_{m+1}^{(d_{m+1})},\ldots,y_j^{(d_j)},\ldots,y_n^{(d_n)}],$$

onde $0\leq d_{m+1},\ldots,\widehat{d_j},\ldots,d_n\leq q-1$; $0\leq d_j\leq q-2$; $n\geq 1$; $j>m\geq 1$. Suponha que existe k tal que $m<k<j$ e $d_k\geq 1$. Fixe o menor tal k. Neste caso,

$$f=[y_j,y_m^{(q)},y_k^{(d_k)},y_{k+1}^{(d_{k+1})},\ldots,y_j^{(d_j)},\ldots,y_n^{(d_n)}].$$

Pela Afirmação 2 e Lema 3.2.4, obtemos:

$$\begin{aligned}
f+\overline{J}&=[y_j,y_m^{(q)},y_k^{(d_k)},\ldots,y_j^{(d_j)},\ldots,y_n^{(d_n)}]+\overline{J}\\
&=[y_j,y_m^{(q)},y_k,y_k^{(d_k-1)},\ldots,y_j^{(d_j)},\ldots,y_n^{(d_n)}]+\overline{J}\\
&=[y_k,y_m^{(q)},y_j,y_k^{(d_k-1)},\ldots,y_j^{(d_j)},\ldots,y_n^{(d_n)}]+[y_j,y_m,y_k,y_k^{(d_k-1)},\ldots,y_j^{(d_j)},\ldots,y_n^{(d_n)}]\\
&\quad-[y_k,y_m,y_j,y_k^{(d_k-1)},\ldots,y_j^{(d_j)},\ldots,y_n^{(d_n)}]+\overline{J}\\
&=[y_k,y_m^{(q)},y_k^{(d_k-1)},\ldots,y_j^{(d_j+1)},\ldots,y_n^{(d_n)}]+[y_j,y_m,y_k^{(d_k)},\ldots,y_j^{(d_j)},\ldots,y_n^{(d_n)}]\\
&\quad-[y_k,y_m,y_k^{(d_k-1)},\ldots,y_j^{(d_j+1)},\ldots,y_n^{(d_n)}]+\overline{J}
\end{aligned}$$

Dos três últimos somandos, temos que o primeiro está em (2), e os dois últimos estão em (1). Logo, $f+\overline{J}$ é uma combinação linear dos elementos dos itens (1) e (2).

Provamos que $L(X)/\overline{J}$ é gerado, como espaço vetorial, pelos elementos em (1) e (2). Como $\overline{J}\subseteq I$, segue que $L(X)/I$ é gerado, como espaço vetorial, pelos elementos em (i) e (ii) do enunciado do teorema. Para provar que $\overline{J} = I$, demonstraremos que estes elementos são L.I. Para isso, seja $f(y_1,\dots,y_n) \in I$,

$$f(y_1,\dots,y_n) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j + \sum_{j=2}^{n}\sum_{m=1}^{j-1}\sum_{d_m=1}^{q-1}\sum_{(d_{m+1},\dots,d_n=0)}^{q-1} \alpha_{(j,m,d_m,d_j,d)}[y_j, y_m^{(d_m)},\dots,y_j^{(d_j)},\dots,y_n^{(d_n)}]$$
$$+\sum_{j=2}^{n}\sum_{m=1}^{j-1}\sum_{d_j=0}^{q-2}\sum_{(d_{j+1},\dots,d_n=0)}^{q-1} \alpha_{(j,m,q,d_j,d)}[y_j, y_m^{(q)}, y_j^{(d_j)},\dots,y_n^{(d_n)}], \tag{3.11}$$

onde $\alpha_j, \alpha_{(j,m,d_m,d_j,d)}, \alpha_{(j,m,q,d_j,d)} \in \mathbb{K}$ e $d = (d_{m+1}, d_{m+2},\dots,\widehat{d_j},\dots,d_n)$. Como

$$f(y_1,0,\dots,0) = \alpha_1 y_1 \in I,$$

segue que $\alpha_1 = 0$. De maneira similar, temos $\alpha_j = 0$ para todo j.

Agora analisaremos os coeficientes dos monômios de Lie em duas variáveis. Faremos a análise apenas para os monômios em y_1 e y_2, os demais casos são similares. Temos que $f(y_1,y_2,0,\dots,0) \in I$. Note que

$$f(y_1,y_2,0,\dots,0) = \sum_{d_1=1}^{q-1}\sum_{d_2=0}^{q-1} \alpha_{(2,1,d_1,d_2,d)}[y_2, y_1^{(d_1)}, y_2^{(d_2)}] + \sum_{d_2=0}^{q-2} \alpha_{(2,1,q,d_2,d)}[y_2, y_1^{(q)}, y_2^{(d_2)}],$$

onde $d = (0,\dots,0)$. Fazendo $Y_i = a_i(e_{11} - e_{22}) + b_i e_{12}$, onde $a_i, b_i \in \mathbb{K}$, obtemos:

$$0 = f(Y_1,Y_2,0,\dots,0) = \sum_{d_1=1}^{q-1}\sum_{d_2=0}^{q-1} \alpha_{(2,1,d_1,d_2,d)}(-2)^{d_1+d_2}(a_1b_2 - b_1a_2)a_1^{d_1-1}a_2^{d_2}e_{12}$$
$$+\sum_{d_2=0}^{q-2} \alpha_{(2,1,q,d_2,d)}(-2)^{q+d_2}(a_1b_2 - b_1a_2)a_1^{q-1}a_2^{d_2}e_{12}.$$

Olhando para o coeficiente de e_{12} na expressão acima, abrindo os somatórios e usando o fato que $a_j^q = a_j$, obtemos:

$$0 = \sum_{d_1=1}^{q-1}\sum_{d_2=0}^{q-1} \alpha_{(2,1,d_1,d_2,d)}(-2)^{d_1+d_2} b_2 a_1^{d_1} a_2^{d_2} - \sum_{d_1=1}^{q-1}\sum_{d_2=0}^{q-2} \alpha_{(2,1,d_1,d_2,d)}(-2)^{d_1+d_2} b_1 a_1^{d_1-1} a_2^{d_2+1}$$
$$-\sum_{d_1=1}^{q-1} \alpha_{(2,1,d_1,q-1,d)}(-2)^{d_1+q-1} b_1 a_1^{d_1-1} a_2$$
$$+\sum_{d_2=0}^{q-2} \alpha_{(2,1,q,d_2,d)}(-2)^{q+d_2} b_2 a_1 a_2^{d_2} - \sum_{d_2=0}^{q-2} \alpha_{(2,1,q,d_2,d)}(-2)^{q+d_2} b_1 a_1^{q-1} a_2^{d_2+1}. \tag{3.12}$$

Note que as potências de a_i e b_i em (3.12) são $\leq q-1$ para todo i. Como (3.12) vale para todos $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{K}$, e o monômio $b_1 a_1^{q-1} a_2^{d_2+1}$ do último somatório de (3.12) aparece apenas no último somatório, segue que o seu coeficiente $\alpha_{(2,1,q,d_2,d)}(-2)^{q+d_2}$ é igual a zero para todo $0 \leq d_2 \leq q-2$, veja o Lema 1.3.6. Em particular, neste caso, obtemos $\alpha_{(2,1,q,d_2,d)} = 0$ e a seguinte igualdade:

$$0 = \sum_{d_1=1}^{q-1}\sum_{d_2=0}^{q-1} \alpha_{(2,1,d_1,d_2,d)}(-2)^{d_1+d_2} b_2 a_1^{d_1} a_2^{d_2} - \sum_{d_1=1}^{q-1}\sum_{d_2=0}^{q-2} \alpha_{(2,1,d_1,d_2,d)}(-2)^{d_1+d_2} b_1 a_1^{d_1-1} a_2^{d_2+1}$$
$$- \sum_{d_1=1}^{q-1} \alpha_{(2,1,d_1,q-1,d)}(-2)^{d_1+q-1} b_1 a_1^{d_1-1} a_2. \tag{3.13}$$

Como o monômio $b_2 a_1^{d_1} a_2^{d_2}$ do primeiro somatório de (3.13) aparece apenas no primeiro somatório, segue que o seu coeficiente $\alpha_{(2,1,d_1,d_2,d)}(-2)^{d_1+d_2}$ é igual a zero para todos d_1, d_2. Logo, $\alpha_{(2,1,d_1,d_2,d)} = 0$ para todos d_1, d_2, e finalizamos o que queríamos provar.

Suponhamos agora que em (3.11) os coeficientes dos monômios de Lie em até $n-1$ variáveis são nulos, e provaremos que os coeficientes dos monômios de Lie em n variáveis são nulos. Neste caso, temos $f(y_1, \ldots, y_n) \in I$,

$$f(y_1, \ldots, y_n) = + \sum_{j=2}^{n}\sum_{d_j=0}^{q-1}\sum_{d_1=1}^{q-1}\sum_{(d_2,\ldots,\widehat{d_j},\ldots,d_n=1)}^{q-1} \alpha_{(j,1,d_1,d_j,d)}[y_j, y_1^{(d_1)}, \ldots, y_j^{(d_j)}, \ldots, y_n^{(d_n)}] +$$
$$+ \sum_{d_2=0}^{q-2}\sum_{(d_3,\ldots,d_n=1)}^{q-1} \alpha_{(2,1,q,d_2,d)}[y_2, y_1^{(q)}, y_2^{(d_2)}, \ldots, y_n^{(d_n)}], \tag{3.14}$$

onde $\alpha_{(j,1,d_1,d_j,d)}, \alpha_{(2,1,q,d_2,d)} \in \mathbb{K}$. Fazendo $Y_i = a_i(e_{11} - e_{22}) + b_i e_{12}$, onde $a_i, b_i \in \mathbb{K}$, obtemos:

$$f(Y_1, \ldots, Y_n) = + \sum_{j=2}^{n}\sum_{d_j=0}^{q-1}\sum_{d_1=1}^{q-1}\sum_{(d_2,\ldots,\widehat{d_j},\ldots,d_n=1)}^{q-1} \alpha_{(j,1,d_1,d_j,d)}(-2)^{d_1+\cdots+d_n}(a_1 b_j - b_1 a_j) a_1^{d_1-1} a_2^{d_2} \cdots a_n^{d_n} e_{12}$$
$$+ \sum_{d_2=0}^{q-2}\sum_{(d_3,\ldots,d_n=1)}^{q-1} \alpha_{(2,1,q,d_2,d)}(-2)^{q+d_2+\cdots+d_n}(a_1 b_2 - b_1 a_2) a_1^{q-1} a_2^{d_2} \cdots a_n^{d_n} e_{12} = 0$$

Olhando para o coeficiente de e_{12} na expressão acima, abrindo os somatórios e usando o fato que $a_j^q = a_j$, obtemos:

$$0 = + \sum_{j=2}^{n}\sum_{d_j=0}^{q-1}\sum_{d_1=1}^{q-1}\sum_{(d_2,\ldots,\widehat{d_j},\ldots,d_n=1)}^{q-1} \alpha_{(j,1,d_1,d_j,d)}(-2)^{d_1+\cdots+d_n} b_j a_1^{d_1} a_2^{d_2} \cdots a_n^{d_n}$$
$$- \sum_{j=2}^{n}\sum_{d_j=0}^{q-2}\sum_{d_1=1}^{q-1}\sum_{(d_2,\ldots,\widehat{d_j},\ldots,d_n=1)}^{q-1} \alpha_{(j,1,d_1,d_j,d)}(-2)^{d_1+\cdots+d_n} b_1 a_1^{d_1-1} a_2^{d_2} \cdots a_j^{d_j+1} \cdots a_n^{d_n}$$
$$- \sum_{j=2}^{n}\sum_{d_1=1}^{q-1}\sum_{(d_2,\ldots,\widehat{d_j},\ldots,d_n=1)}^{q-1} \alpha_{(j,1,d_1,q-1,d)}(-2)^{d_1+\cdots+q-1+\cdots+d_n} b_1 a_1^{d_1-1} a_2^{d_2} \cdots a_j \cdots a_n^{d_n}$$
$$+ \sum_{d_2=0}^{q-2}\sum_{(d_3,\ldots,d_n=1)}^{q-1} \alpha_{(2,1,q,d_2,d)}(-2)^{q+d_2+\cdots+d_n} b_2 a_1 a_2^{d_2} \cdots a_n^{d_n}$$
$$- \sum_{d_2=0}^{q-2}\sum_{(d_3,\ldots,d_n=1)}^{q-1} \alpha_{(2,1,q,d_2,d)}(-2)^{q+d_2+\cdots+d_n} b_1 a_1^{q-1} a_2^{d_2+1} \cdots a_n^{d_n} \tag{3.15}$$

Note que as potências de a_i e b_i em (3.15) são $\leq q-1$ para todo i. Como (3.15) vale para todos $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n \in \mathbb{K}$, e o monômio $b_1a_1^{q-1}a_2^{d_2+1}\cdots a_n^{d_n}$ do último somatório de (3.15) aparece apenas no último somatório, segue que o seu coeficiente $\alpha_{(2,1,q,d_2,d)}(-2)^{q+d_2+\cdots+d_n}$ é igual a zero para todos d_2,d. Em particular, neste caso, obtemos $\alpha_{(2,1,q,d_2,d)}=0$ e a seguinte igualdade:

$$
\begin{aligned}
0 = &+\sum_{j=2}^{n}\sum_{d_j=0}^{q-1}\sum_{d_1=1}^{q-1}\sum_{(d_2,\ldots,\widehat{d_j},\ldots,d_n=1)}^{q-1}\alpha_{(j,1,d_1,d_j,d)}(-2)^{d_1+\cdots+d_n}b_ja_1^{d_1}a_2^{d_2}\cdots a_n^{d_n} \\
&-\sum_{j=2}^{n}\sum_{d_j=0}^{q-2}\sum_{d_1=1}^{q-1}\sum_{(d_2,\ldots,\widehat{d_j},\ldots,d_n=1)}^{q-1}\alpha_{(j,1,d_1,d_j,d)}(-2)^{d_1+\cdots+d_n}b_1a_1^{d_1-1}a_2^{d_2}\cdots a_j^{d_j+1}\cdots a_n^{d_n} \\
&-\sum_{j=2}^{n}\sum_{d_1=1}^{q-1}\sum_{(d_2,\ldots,\widehat{d_j},\ldots,d_n=1)}^{q-1}\alpha_{(j,1,d_1,q-1,d)}(-2)^{d_1+\cdots+q-1+\cdots+d_n}b_1a_1^{d_1-1}a_2^{d_2}\cdots a_j\cdots a_n^{d_n}
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

Como o monômio $b_ja_1^{d_1}a_2^{d_2}\cdots a_n^{d_n}$ do primeiro somatório de (3.16) aparece apenas no primeiro somatório, segue que o seu coeficiente $\alpha_{(j,1,d_1,d_j,d)}(-2)^{d_1+\cdots+d_n}$ é igual a zero para todos j,d_1,d_j,d. Logo, $\alpha_{(j,1,d_1,d_j,d)}=0$ para todos j,d_1,d_j,d.

A demonstração do teorema está completa. □

Teorema 3.3.5. Sejam $\mathbb{K}$ um corpo de char$(\mathbb{K})\neq 2$ e G um grupo abeliano. Sejam $g,h\in G$ tais que $g\neq 1$ e $h=1$. Denote $I=T_G(UT_2^{(-)}(g,h))$.

a) Se $\mathbb{K}$ é infinito, então I é gerado, como um T_G-ideal, pelos polinômios

$$[x_1^g,x_2^g],\quad [x_1^g,y_1],\quad [[y_1,y_2],[y_3,y_4]] \text{ e } x_1^u, \tag{3.17}$$

onde $u\in G-\{g,1\}$. Além disso, o espaço vetorial quociente $L(X)/I$ tem uma base formada pelos polinômios

$$x_i^g+I,\ [y_j,y_1^{(d_1)},\ldots,y_j^{(d_j)},\ldots,y_n^{(d_n)}]+I, \tag{3.18}$$

onde $i\geq 1$, $d_1,\ldots,d_n\geq 0$; $n\geq 1$; $j>\min\{k \mid d_k\neq 0\}$.

b) Se $\mathbb{K}$ é finito com q elementos, então I é gerado, como um T_G-ideal, pelos polinômios

$$
\begin{gathered}
[x_1^g,x_2^g],\quad [x_1^g,y_1],\quad [[y_1,y_2],[y_3,y_4]],\quad [y_1,y_2,y_3^{(q)}]-[y_1,y_2,y_3],\\
[y_2,y_1^{(q)},y_2^{(q-1)}]+[y_2,y_1]-[y_2,y_1^{(q)}]-[y_2,y_1,y_2^{(q-1)}] \quad\text{e}\quad x_1^u,
\end{gathered}
$$

onde $u\in G-\{g,1\}$. Além disso, o espaço vetorial quociente $L(X)/I$ tem uma base formada pelos polinômios em (i) e (ii) conforme abaixo:

(i) $x_i^g+I,\ y_j+I,\ [y_j,y_m^{(d_m)},\ldots,y_j^{(d_j)},\ldots,y_n^{(d_n)}]+I$,
onde $i\geq 1$; $1\leq d_m\leq q-1$; $0\leq d_{m+1},\ldots,d_j,\ldots,d_n\leq q-1$; $n\geq 1$; $j>m\geq 1$.

(ii) $[y_j,y_m^{(q)},y_j^{(d_j)},y_{j+1}^{(d_{j+1})},\ldots,y_n^{(d_n)}]+I$,
onde $0\leq d_{j+1},\ldots,d_n\leq q-1$; $0\leq d_j\leq q-2$; $n\geq 1$; $j>m\geq 1$.

Demonstração. Omitimos a demonstração, pois ela é muito parecida com a demonstração do último teorema. Fica a cargo do leitor verificar os detalhes. □

Finalizamos o capítulo.

CAPÍTULO 4

Propriedade de Specht

Ao longo deste capítulo, $\mathbb{K}$ denotará um corpo de característica p diferente de 2, e G denotará um grupo abeliano. O objetivo aqui é verificar se o T-ideal I de $L(X)$ formado pelas identidades polinomiais G-graduadas de uma álgebra G-graduada $UT_2^{(-)}$ tem a propriedade de Specht, isto é, verificar se todo T-ideal J de $L(X)$ é finitamente gerado, como um T-ideal, se $I \subseteq J$. Seguindo as notações do capítulo anterior, sabemos que $T_G(UT_2^{(-)}(g,h))$ tem a propriedade de Specht sempre que $\mathbb{K}$ é infinito, G é finito e $h = 1$, veja o Teorema 19 de [2, Capítulo 4]. Neste capítulo, provaremos que $T_G(UT_2^{(-)}(g,h))$ tem a propriedade de Specht para todo G finito e $h \neq 1$.

4.1 Caso $T_G(UT_2^{(-)}(g,h))$, onde $h \neq 1$

Um polinômio $w(x_{i_1}^{g_1}, \ldots, x_{i_m}^{g_m}) \in L(X)$ é um *p-polinômio* se $w = w(x_{i_1}^{g_1}, \ldots, x_{i_m}^{g_m})$ é multi-homogêneo e existem $a_1, \ldots, a_m \geq 0$ com $\deg_{x_{i_1}^{g_1}}(w) = p^{a_1}, \ldots, \deg_{x_{i_m}^{g_m}}(w) = p^{a_m}$.

Teorema 4.1.1. Seja $\mathbb{K}$ um corpo com característica $p > 2$ e $|\mathbb{K}| \geq q$. Se $f = f(x_{i_1}^{g_1}, \ldots, x_{i_n}^{g_n}) \in L(X)$ satisfaz $\deg_{x_{i_j}^{g_j}}(f) < q$ para todo $j = 1, \ldots, n$, então

$$\langle f \rangle^{T_G} = \langle S \rangle^{T_G},$$

onde S é um conjunto finito de p-polinômios. Além disso, $\deg_x(w) < q$ para todos $x \in X$ e $w \in S$.

Demonstração. A demonstração é exatamente a mesma do Teorema 1.3.7, com algumas pequenas modificações. A principal modificação é que na escolha de x_{n+1} precisamos também assumir $\deg_G(x_1) = \deg_G(x_{n+1})$. □

Relembramos que um conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$ é chamado de *conjunto parcialmente bem ordenado* se, para todo subconjunto Q de P, existem $q_1, \ldots, q_n \in Q$ com a seguinte propriedade: se $q \in Q$, então $q_i \leq q$ para algum $1 \leq i \leq n$.

O seguinte resultado é consequência do Teorema 4 de [2, Seção 5.2].

Teorema 4.1.2. Considere em $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$ a ordem usual. Denote por $D(\mathbb{Z}_+)$ o conjunto de todas as sequências finitas $(a_1, \ldots, a_r)$ com entradas em $\mathbb{Z}_+$, e $r \geq 1$. Considere a seguinte relação $\preceq$ em $D(\mathbb{Z}_+)$: $(a_1, \ldots, a_r) \preceq (b_1, \ldots, b_s)$ se, e somente se, existe uma função injetora $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que:

(i) ψ preserva a ordem, isto é, se $u \leq v$ então $\psi(u) \leq \psi(v)$;

(ii) $\psi(r) \leq s$;

(iii) $a_i \leq b_{\psi(i)}$ para todo $i = 1, \ldots, r$.

Então $(D(\mathbb{Z}_+), \preceq)$ é um conjunto parcialmente bem ordenado.

Teorema 4.1.3. Sejam $\mathbb{K}$ um corpo de $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = p \neq 2$ e G um grupo abeliano. Sejam $g, h \in G$ tais que $h \neq 1$ e $g \in \{1, h\}$. Denote $I = T_G(UT_2^{(-)}(g,h))$. Seja J um T_G-ideal de $L(X)$ tal que $I \subsetneq J$.

a) Se $\mathbb{K}$ é infinito e $p = 0$, então

$$J = \langle y_1 \rangle^{T_G} + I \;\text{ ou }\; J = \langle y_1, x_1^h \rangle^{T_G} + I \;\text{ ou }\; J = \langle [x_1^h, y_1, \ldots, y_n] \rangle^{T_G} + I \tag{4.1}$$

para algum $n \geq 0$. Além disso, se G é grupo abeliano finito, então J é finitamente gerado como um T_G-ideal.

b) Se $\mathbb{K}$ é infinito e $p > 2$, então

$$J = \langle y_1 \rangle^{T_G} + I \;\text{ ou }\; J = \langle y_1, x_1^h \rangle^{T_G} + I \;\text{ ou }\; J = \langle S \rangle^{T_G} + I \tag{4.2}$$

onde S é um conjunto finito formado por alguns elementos da forma

$$[x_1^h, y_1^{(p^{d_1})}, \ldots, y_n^{(p^{d_n})}] \tag{4.3}$$

com $1 \leq p^{d_1} \leq p^{d_2} \leq \ldots \leq p^{d_n}$ e $n \geq 0$. Além disso, se G é grupo abeliano finito, então J é finitamente gerado como um T_G-ideal.

c) Se $\mathbb{K}$ é um corpo finito com q elementos, então

$$J = \langle y_1 \rangle^{T_G} + I \;\text{ ou }\; J = \langle y_1, x_1^h \rangle^{T_G} + I \;\text{ ou }\; J = \langle S \rangle^{T_G} + I \tag{4.4}$$

onde S é um conjunto finito formado por alguns elementos da forma

$$[x_1^h, y_1^{(p^{d_1})}, \ldots, y_n^{(p^{d_n})}] \tag{4.5}$$

com $1 \leq p^{d_1} \leq p^{d_2} \leq \ldots \leq p^{d_n} < q$ e $n \geq 0$. Além disso, se G é grupo abeliano finito, então J é finitamente gerado como um T_G-ideal.

Demonstração. Antes de iniciar a demonstração, chamamos a atenção do leitor para o seguinte fato: no enunciado do teorema, se $n = 0$ então os polinômios $[x_1^h, y_1, \ldots, y_n]$ e $[x_1^h, y_1^{(p^{d_1})}, \ldots, y_n^{(p^{d_n})}]$ são identificados com x_1^h.

Demonstração do item a): Como $p = 0$, segue que J é gerado, como um T_G-ideal, por seus elementos multilineares. Seja $f \in J - I$ um elemento multilinear. Pelo Teorema 3.3.2, segue que

$$f + I = \alpha y_j + I \ \text{ ou } \ f + I = \alpha[x_i^h, y_1, \ldots, y_m] + I$$

para algum $0 \neq \alpha \in \mathbb{K}$ e alguns $i,\ j,\ m$. Logo, $\langle f \rangle^{T_G} + I$ é igual a

$$\langle y_1 \rangle^{T_G} + I \ \text{ ou } \ \langle [x_1^h, y_1, \ldots, y_m] \rangle^{T_G} + I.$$

Denote por $\Omega = \{m \in \mathbb{Z} \mid [x_1^h, y_1, \ldots, y_m] \in J\}$. Se $\Omega \neq \emptyset$, denote por n o seu menor elemento. Neste caso, se $m \in \Omega$, então

$$[x_1^h, y_1, \ldots, y_m] \in \langle [x_1^h, y_1, \ldots, y_n] \rangle^{T_G} + I.$$

Combinando os casos $y_1 \in J$ e $y_1 \notin J$ com os casos $\Omega = \emptyset$ e $\Omega \neq \emptyset$ teremos que

$$J = \langle y_1 \rangle^{T_G} + I \ \text{ ou } \ J = \langle y_1, x_1^h \rangle^{T_G} + I \ \text{ ou } \ J = \langle [x_1^h, y_1, \ldots, y_n] \rangle^{T_G} + I,$$

como era o desejado.

Demonstração do item b): Como $\mathbb{K}$ é infinito de característica $p > 2$, pelo Teorema 4.1.1 temos que J é gerado, como um T_G-ideal, por seus elementos que são p-polinômios. Seja $f \in J - I$ um p-polinômio. Pelo Teorema 3.3.2, segue que

$$f + I = \alpha y_j + I \ \text{ ou } \ f + I = \alpha[x_i^h, y_{i_1}^{(p^{d_1})}, \ldots, y_{i_n}^{(p^{d_n})}] + I$$

para alguns $0 \neq \alpha \in \mathbb{K}$; $j \geq 1$; $i \geq 1$; $i_1 < \ldots < i_n$; $d_1, \ldots, d_n \geq 0$; $n \geq 0$. Logo, $\langle f \rangle^{T_G} + I$ é igual a

$$\langle y_1 \rangle^{T_G} + I \ \text{ ou } \ \langle [x_1^h, y_1^{(p^{d_1})}, \ldots, y_n^{(p^{d_n})}] \rangle^{T_G} + I.$$

Como $[y_1, y_2] \in I$, temos pela identidade de Jacobi e pelo Lema 3.2.4 que

$$[x_1^h, y_1^{(p^{d_1})}, \ldots, y_n^{(p^{d_n})}] + I = [x_1^h, y_{\sigma(1)}^{(p^{d_{\sigma(1)}})}, \ldots, y_{\sigma(n)}^{(p^{d_{\sigma(n)}})}] + I$$

para todo $\sigma \in S_n$ (veja a demonstração da Afirmação 1 do Lema 3.2.4). Logo, a menos de uma mudança de variáveis, podemos supor $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$.

Denote

$$f_{(d_1,\ldots,d_n)} = f_{(d_1,\ldots,d_n)}(x_1^h, y_1, \ldots, y_n) = [x_1^h, y_1^{(p^{d_1})}, \ldots, y_n^{(p^{d_n})}] \ \text{ e } \ \varphi(f_{(d_1,\ldots,d_n)}) = (d_1, \ldots, d_n),$$

onde $d_1 \leq \ldots \leq d_n$. Denote ainda,

$$\Gamma = \{\varphi(f_{(d_1,\ldots,d_n)}) \mid f_{(d_1,\ldots,d_n)} \in J\}.$$

Suponha $\Gamma \neq \emptyset$. Pelo Lema 3.2.4 obtemos

$$f_{(d_1,\ldots,d_i+1,\ldots,d_n)} + I = [f_{(d_1,\ldots,d_i,\ldots,d_n)}, y_i^{(p^{d_i+1}-p^{d_i})}] + I,$$

ou seja,

$$f_{(d_1,\ldots,d_i+1,\ldots,d_n)} \in \langle f_{(d_1,\ldots,d_i,\ldots,d_n)} \rangle^{T_G} + I. \tag{4.6}$$

Considere o conjunto parcialmente bem ordenado $(D(\mathbb{Z}_+), \preceq)$ do Teorema 4.1.2. Sejam $(a_1,\ldots,a_r) \preceq (b_1,\ldots,b_s)$ em $D(\mathbb{Z}_+)$. Assim, existe uma função injetora $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que:

(i) ψ preserva a ordem,

(ii) $\psi(r) \leq s$,

(iii) $a_i \leq b_{\psi(i)}$ para todo $i = 1,\ldots,r$.

Temos que

$$f_{(b_1,\ldots,b_s)} + I = f_{(b_{\psi(1)},\ldots,b_{\psi(r)},b_1,\ldots,\widehat{b_{\psi(1)}},\ldots,\widehat{b_{\psi(r)}},\ldots,b_s)}(x_1^h, y_{\psi(1)},\ldots,y_{\psi(r)},y_1,\ldots,\widehat{y_{\psi(1)}},\ldots,\widehat{y_{\psi(r)}},\ldots,y_s) + I,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\langle f_{(b_1,\ldots,b_s)} \rangle^{T_G} + I &= \langle f_{(b_{\psi(1)},\ldots,b_{\psi(r)},b_1,\ldots,\widehat{b_{\psi(1)}},\ldots,\widehat{b_{\psi(r)}},\ldots,b_s)}(x_1^h, y_1,\ldots,y_r,y_{r+1},\ldots,y_s) \rangle^{T_G} + I \\ &\subseteq \langle f_{(a_1,\ldots,a_r,b_{r+1},\ldots,b_s)} \rangle^{T_G} + I \subseteq \langle f_{(a_1,\ldots,a_r)} \rangle^{T_G} + I.\end{aligned}$$

Note que utilizamos (4.6) no primeiro "$\subseteq$ ". Provamos que se $(a_1,\ldots,a_r) \preceq (b_1,\ldots,b_s)$, então

$$f_{(b_1,\ldots,b_s)} \in \langle f_{(a_1,\ldots,a_r)} \rangle^{T_G} + I. \tag{4.7}$$

Pelo Teorema 4.1.2 existem elementos minimais $\gamma_1,\ldots,\gamma_m \in \Gamma$, ou seja, se $\gamma \in \Gamma$ então $\gamma_i \preceq \gamma$ para algum $1 \leq i \leq m$. Logo, por (4.7), temos que

$$\langle f_\gamma \mid \gamma \in \Gamma \rangle^{T_G} + I = \langle f_{\gamma_1},\ldots,f_{\gamma_m} \rangle^{T_G} + I.$$

Combinando os casos $y_1 \in J$ e $y_1 \notin J$ com os casos $\Gamma = \emptyset$ e $\Gamma \neq \emptyset$ teremos que

$$J = \langle y_1 \rangle^{T_G} + I \;\text{ ou }\; J = \langle y_1, x_1^h \rangle^{T_G} + I \;\text{ ou }\; J = \langle S \rangle^{T_G} + I \tag{4.8}$$

onde S é um conjunto finito formado por alguns elementos da forma

$$[x_1^h, y_1^{(p^{d_1})},\ldots,y_n^{(p^{d_n})}] \tag{4.9}$$

com $1 \leq p^{d_1} \leq p^{d_2} \leq \ldots \leq p^{d_n}$ e $n \geq 0$, como era o desejado.

Demonstração do item c): Se $v \in J - I$, então pelo Teorema 3.3.2 - item b) existe um polinômio $w \in L(X)$, com $\deg_x w < q$ para todo $x \in X$, que satisfaz

$$v + I = w + I.$$

Como $I \subset J$, segue que

$$\langle v \rangle^{T_G} + I = \langle w \rangle^{T_G} + I.$$

Aplicando o Teorema 4.1.1 em w, obtemos que J é gerado, como um T_G-ideal, por I e pelos seus elementos f que são p-polinômios e satisfazem $\deg_x f < q$ para todo $x \in X$. Agora a demonstração segue os mesmos passos da demonstração do item b) deste teorema.

Como G é finito, segue do Teorema 3.3.2 que existe um conjunto finito S_1, com $|G|$ ou $|G|+1$ elementos, tal que $I = \langle S_1 \rangle^{T_G}$. Como existe um conjunto finito S_2 tal que $J = \langle S_2 \rangle^{T_G} + I$, segue que

$$J = \langle S_2 \rangle^{T_G} + I = \langle S_2 \rangle^{T_G} + \langle S_1 \rangle^{T_G} = \langle S_1 \cup S_2 \rangle^{T_G}.$$

Logo, J é finitamente gerado, como um T_G-ideal, nos itens a), b) e c) deste teorema. □

Finalizamos aqui os assuntos principais abordados nesta tese.

Referências Bibliográficas

[1] ALJADEFF, Eli; KANEL-BELOV, Alexei. **Representability and Specht problem for G-graded algebras**. Adv. Math. 225 (2010), no. 5, 2391-2428.

[2] BAHTURIN, Yuri A. **Identical Relations in Lie Algebras.** Translated from the Russian by Bahturin. VNU Science Press, b.v., Utrecht, 1987. x+309 pp. ISBN: 90-6764-052-2

[3] BELOV, Aleksei Ya. **On non-Spechtian varieties**, Fundam. Prikl. Mat., 5 (1999), no. 1, 47-66.

[4] DI VINCENZO, Onofrio M.; KOSHLUKOV, Plamen; VALENTI, Angela. **Gradings on the algebra of upper triangular matrices and their graded identities**. J. Algebra 275 (2004), no. 2, 550-566.

[5] DRENSKY, Vesselin. **Identities in Lie algebras** (Russian). Algebra i Logika 13 (1974), 265-290, 363–364. Translation: Algebra and Logic 13 (1974), 150–165.

[6] DRENSKY, Vesselin. **Free algebras and PI-algebras. Graduate course in algebra.** Springer-Verlag Singapore, Singapore, 2000. xii+271 pp. ISBN: 981-4021-48-2.

[7] GIAMBRUNO, Antonio; ZAICEV, Mikhail. **Polynomial Identities and Asymptotic Methods.** Mathematical Surveys and Monographs, vol.122, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005. xiv+352 pp. ISBN: 0-8218-3829-6.

[8] GONÇALVES, Dimas J.; RIVA, Evandro. **Graded polynomial identities for the upper triangular matrix algebra over a finite field**. J. Algebra 559 (2020), 625-645.

[9] GRISHIN, A. V. **Examples of T-spaces and T-ideals over a fiel of characteristic 2 without the finite basis property.** Fundam. Prikl. Mat., 5 (1999), no. 1, 101-118.

[10] KEMER, Aleksandr R. **Finite basability of identities of associative algebras.** (Russian) Algebra i Logika, 26 (1987), no. 5 , 597-641.

[11] KEMER, Aleksandr R. **Ideals of Identities of Associative Algebras.** Translated from the Russian by C. W. Kohls. Translations of Mathematical Monographs, 87. American Mathematical Society, Providence, RI, 1991. vi+81 pp. ISBN: 0-8218-4548-9

[12] KOSHLUKOV, Plamen; YUKIHIDE, Felipe. **Elementary gradings on the Lie algebra $UT_n^{(-)}$**. J. Algebra 473 (2017), 66-79.

[13] KOSHLUKOV, Plamen; YUKIHIDE, Felipe. **Group gradings on the Lie algebra of upper triangular matrices**. J. Algebra 477 (2017), 294-311.

[14] LATYSHEV, Victor N. **Generalization of Hilbert's theorem on the finiteness of bases**. (Russian) Sibirsk. Mat. Zh. 7 (1966), 1422-1424.

[15] MAL'TSEV, Yuri N. **Basis for identities of upper triangular matrices.** Algebra and Logic 10 (1971), 242-247.

[16] SHCHIGOLEV, Vladimir V. **Examples of infinitely based T-ideals.** Fundam. Prikl. Mat., 5 (1999), no. 1, 307-312.

[17] SIDEROV, Plamen N. **A basis for identities of an algebra of triangular matrices over an arbitrary field**. (Russian) Pliska Stud. Math. Bulgar. 2 (1981), 143-152.

[18] SPECHT, Wilhelm. **Gesetze in ringen.** (German) Math. Zeitschrift 52 (1950), 557-589.

[19] SVIRIDOVA, Irina. **Identities of PI-algebras graded by a finite abelian group**. Comm. Algebra 39 (2011), no. 9, 3462-3490.

[20] VALENTI, Angela; ZAICEV, Mikhail V. **Group gradings on upper triangular matrices**. Arch. Math. 89 (2007), no. 1, 33-40.

[21] VAUGHAN-LEE, Michael R. **Varieties of Lie algebras**. Quart. J. Math. Oxford Ser. 21 (1970), no. 2, 297-308.

[22] VAUGHAN-LEE, Michael R. **Abelian-by-nilpotent varieties of Lie algebras**. J. London Math. Soc. 11 (1975), no. 3, 263-266.

APÊNDICE A

Resultado básico

Neste apêndice descrevemos um resultado, bem conhecido da aritmética elementar, que nos fornece uma informação a respeito de uma congruência módulo p.

Lema A.0.1. Se p é um número primo e $t \geq 1$, então

$$\binom{p^t}{i} = 0 \pmod{p},$$

para todo i, tal que $1 \leq i \leq p^t - 1$.

Demonstração. Vamos provar este resultado por indução em t.

Se $t = 1$, então $\binom{p}{i} = pm$, para algum $m \in \mathbb{Z}$ tal que $p \nmid m$ e o resultado é válido. De fato, $m = \dfrac{(p-1)!}{i!(p-i)!}$.

Suponha que $t \geq 2$. Na álgebra comutativa $\mathbb{Z}_p[x]$, sabemos que

$$(1+x)^{p^t} = \sum_{i=0}^{p^t} \binom{p^t}{i} x^i.$$

Por hipótese de indução, valem as seguintes igualdades:

$$(1+x)^{p^t} = ((1+x)^p)^{p^{t-1}} = (1+x^p)^{p^{t-1}} = \ldots = (1+x^{p^t}).$$

Portanto, de

$$\sum_{i=0}^{p^t} \binom{p^t}{i} x^i = (1+x)^{p^t} = 1 + x^{p^t},$$

concluímos que

$$\binom{p^t}{i} = 0,$$

módulo p, para todo $1 \leq i \leq p^t - 1$. $\square$