Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

O Número de Bruce-Roberts sobre uma ICIS

Bárbara Karolline de Lima Pereira

Orientador: *Prof. Dr. João Nivaldo Tomazella*
Co-orientadores: *Profa. Dra. Bruna Oréfice Okamoto*
Prof. Dr. Juan José Nuño-Ballesteros

São Carlos
Janeiro de 2022

O Número de Bruce-Roberts sobre uma ICIS

Bárbara Karolline de Lima Pereira

Orientador:	*Prof. Dr. João Nivaldo Tomazella*
Co-orientadores:	*Profa. Dra. Bruna Oréfice Okamoto*
	Prof. Dr. Juan José Nuño-Ballesteros

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Doutora em Matemática.

São Carlos
Janeiro de 2022

Bárbara K. L. Pereira

Autor

Orientador

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Defesa de Tese de Doutorado da candidata Bárbara Karolline de Lima Pereira, realizada em 19/01/2022.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. João Nivaldo Tomazella
UFSCar

Prof. Dr. Juan José Nuño Ballesteros
Universitat de València

Profa. Dra. Maria Aparecida Soares Ruas
ICMC-USP

Prof. Dr. Victor Hugo Jorge Pérez
ICMC-USP

Prof. Dr. Carles Bivià-Ausina
Universitat Politècnica de València

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.
O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Ao meu marido, Rodnei Leite de Barros e
aos meus pais, Maria Lúcia de Lima Pereira
Milton Augusto Pereira Filho.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pelo dom da vida e por guiar os meus passos.

Ao meu marido Rodnei por sempre acreditar em mim, pelo apoio, incentivo e por não me deixar desanimar diante das adversidades.

Aos meus pais, Maria Lúcia e Milton, por sempre acreditarem em mim, pelo apoio, compreensão e por não medirem esforços para dar uma educação de qualidade para mim e meus irmãos.

Aos meus irmãos Eduardo e Bruna, pelo apoio e por acreditarem em mim.

A Tayná, Cauê e Arthur por me lembrarem que a vida pode ser mais leve.

Ao meu orientador, Tomazella, pela amizade, dedicação, disponibilidade e paciência ao longo da realização desse trabalho.

A minha co-orientadora, Bruna, pela amizade, por me apresentar a teoria de singularidades durante o mestrado, por toda paciência e disponibilidade durante a realização desse trabalho.

Ao meu co-orientador, Juanjo, pela disponibilidade em sanar minhas dúvidas e por todo auxílio durante a realização desse trabalho.

A família 109, em particular a Karina, Wagner, Dalton e Renato, pelo incentivo, por acreditarem em mim, pelas noites (e madrugadas) de estudo e principalmente por terem sido uma família para mim.

A todos os meus colegas do PPGM, pelas conversas e momentos de distração entre um café e outro, em especial a Rafaela e a Maria Carolina por todo suporte.

A Muriel e a Thaysa, pela amizade, apoio, compreensão e companheirismo durante o tempo em que moramos juntas.

A toda comunidade do departamento de matemática da UFSCar, em particular a Priscila por ser muito prestativa em nos ajudar.

Aos meus amigos e professores de graduação Ana Cláudia e Ricardo, por acreditarem em mim quando tudo ainda não passava de um sonho.

Por fim, agradeço a Capes pelo auxílio financeiro, sem o qual não seria possível a realização desse sonho.

A todos vocês o meu mais sincero agradecimento.

Abstract

In this work we study the relations between the Bruce-Roberts number, $\mu_{BR}(f,X)$, the relative Bruce-Roberts, $\mu^{-}_{BR}(f,X)$, of a function germ $f \in \mathcal{O}_n$ over an ICIS, $(X,0) \subset (\mathbb{C}^n,0)$, and the Milnor numbers, $\mu(f)$ and $\mu(f^{-1}(0) \cap X, 0)$. When $(X,0)$ is an isolated hypersurface singularity we show that

$$\mu_{BR}(f,X) = \mu(f) + \mu(f^{-1}(0) \cap X, 0) + \mu(X,0) - \tau(X,0),$$

in which $\tau(X,0)$ is the Tjurina number, and that the logarithmic characteristic variety is Cohen-Macaulay, generalizing results of Oréfice-Okamoto's Thesis. When $(X,0)$ is an ICIS we show that

$$\mu^{-}_{BR}(f,X) = \mu(f^{-1}(0) \cap X, 0) + \mu(X,0) - \tau(X,0),$$

and that the relative logarithmic characteristic variety is Cohen-Macaulay, generalizing results of Bruce and Roberts (1988).

Resumo

Nesse trabalho nós estudamos as relações entre os números de Bruce-Roberts, $\mu_{BR}(f,X)$, Bruce-Roberts relativo, $\mu_{BR}^{-}(f,X)$, de um germe de função $f \in \mathcal{O}_n$ sobre uma ICIS, $(X,0) \subset (\mathbb{C}^n,0)$, e os números de Milnor, $\mu(f)$ e $\mu(f^{-1}(0) \cap X, 0)$. Quando $(X,0)$ é uma hipersuperfície com singularidade isolada nós mostramos que

$$\mu_{BR}(f,X) = \mu(f) + \mu(f^{-1}(0) \cap X, 0) + \mu(X,0) - \tau(X,0),$$

sendo $\tau(X,0)$ o número de Tjurina, e que a variedade logarítmica característica, $LC(X,0)$, é Cohen-Macaulay, generalizando resultados da tese de Oréfice-Okamoto. Quando $(X,0)$ é uma ICIS nós mostramos que

$$\mu_{BR}^{-}(f,X) = \mu(f^{-1}(0) \cap X, 0) + \mu(X,0) - \tau(X,0),$$

e que a variedade logarítmica característica relativa é Cohen-Macaulay, generalizando resultados de Bruce e Roberts (1988).

Sumário

Introdução

O número de Milnor, $\mu(f)$, é provavelmente o invariante mais importante de um germe de função holomorfa $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to \mathbb{C}$. Esse número é definido algebricamente como o comprimento do ideal Jacobiano, Jf, gerado pelas derivadas parciais de f em $\mathcal{O}_n$, o anel local dos germes de funções holomorfas $(\mathbb{C}^n, 0) \to \mathbb{C}$. A finitude de $\mu(f)$ é equivalente a f ter singularidade isolada, o qual é equivalente também, pelo teorema de Mather, a f ser finitamente determinando com respeito a $\mathcal{R}$, o grupo das mudanças de coordenadas na fonte. Do ponto de vista topológico Milnor mostrou em [31] que o número de Milnor da fibra de f tem o mesmo tipo de homotopia que um buquet de esferas e $\mu(f)$ é o número de esferas nesse buquet. Outra propriedade importante é a conservação do número de Milnor, que implica que $\mu(f)$ é igual ao número de pontos críticos de uma Morsificação de f. Uma extensão natural e interessante aparece quando nós consideramos germes de funções definidos sobre variedades singulares. Bruce e Roberts em [7] estudaram germes de funções $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ considerando um germe de variedade analítica $(X, 0)$ em $(\mathbb{C}^n, 0)$. Eles definiram um invariante que nós chamamos de número de Bruce-Roberts de f sobre $(X, 0)$, o qual denotaremos por $\mu_{BR}(f, X)$. Esse número é uma generalização do número de Milnor, pois $\mu_{BR}(f, X) = \mu(f)$ quando $X = \mathbb{C}^n$. Como o número de Milnor de f, esse número também mostra algumas propriedades de f e X, por exemplo $\mu_{BR}(f, X)$ é finito se, e somente se, f tem singularidade isolada sobre $(X, 0)$ (no sentido estratificado) se, e somente se, f é $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado ($\mathcal{R}_X$ é o subgrupo de $\mathcal{R}$ das mudanças de coordenadas que preservam X). O número de Bruce-Roberts tem sido estudado por muitos autores, ver [1, 5, 18, 23, 34, 40]. Em particular, em [34], os autores consideraram $(X, 0)$ uma hipersuperfície quase homogênea com singularidade isolada e obtêm

$$\mu_{BR}(f, X) = \mu(f) + \mu(f^{-1}(0) \cap X, 0),$$

sendo $\mu(f^{-1}(0) \cap X, 0)$ o número de Milnor da interseção completa com singularidade isolada (ICIS), determinada por $(f^{-1}(0) \cap X, 0)$ e que $LC(X, 0)$ é Cohen-Macaulay. Observamos que esses resultados foram obtidos durante o doutorado de Oréfice-Okamoto (2010), e também foi conjecturado que se $(X, 0)$ é uma hipersuperfície com singularidade isolada, então

$$\mu_{BR}(f, X) = \mu(f) + \mu(X \cap f^{-1}(0), 0) + \mu(X, 0) - \tau(X, 0), \tag{0.1}$$

e que $LC(X,0)$ é Cohen-Macaulay. Nesse trabalho nos provamos essas conjecturas e obtivemos outras relações considerando $(X,0)$ uma ICIS de codimensão maior que 1.

O trabalho é organizado em 5 capítulos:

No primeiro capítulo apresentamos alguns conceitos e resultados de álgebra comutativa e teoria de singularidades que são necessários ao longo do texto.

No segundo capítulo nós introduzimos os principais conceitos e propriedades do número de Bruce-Roberts, número de Bruce-Roberts relativo e as variedades logarítmicas características.

No terceiro capítulo nós provamos (0.1) e que a variedade logarítmica característica de $(X,0)$ é Cohen-Macaulay. A nossa maior dificuldade, nesse caso, é a ausência de uma caracterização para os geradores do módulo dos campos de vetores que são tangentes a $(X,0)$, Θ_X. Contornamos esse problema usando o módulo dos campos de vetores triviais, Θ_X^T, e obtemos que o número de Tjurina é a dimensão como $\mathbb{C}$-espaço vetorial dos quocientes Θ_X/Θ_X^T e $df(\Theta_X)/df(\Theta_X^T)$, sendo f um germe de função $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado. Todos os resultados desse capítulo estão no artigo [33] o qual generaliza [34].

No quarto capítulo considerando ainda, $(X,0)$ uma hipersuperfície com singularidade isolada mostramos

$$\mu_{BR}^{-}(f,X) = \mu(f^{-1}(0)\cap X,0) + \mu(X,0) - \tau(X,0), \tag{0.2}$$

e que a variedade logarítmica característica relativa de X, $LC(X)^-$, é Cohen-Macaulay. Também obtemos uma nova caracterização para o número de Milnor do germe de função $f \in \mathcal{O}_n$ em termos do módulo dos campos de vetores que são tangentes a $(X,0)$. Essa caracterização nos permite relacionar o número de Bruce-Roberts e o número de Bruce Roberts relativo, assim como apresentar uma condição que torna equivalente $LC(X)$ e $LC(X)^-$ serem Cohen-Macaulay. Também apresentamos exemplos de variedades analíticas com singularidade não isolada e provamos uma igualdade similar a que foi provada por Sebastiani e Thom (1971) para o número de Milnor de um germe de função. Os resultados desse capítulo estão no artigo [27].

No último capítulo nós consideramos $(X,0)\subset(\mathbb{C}^n,0)$ uma ICIS e estendemos alguns resultados do capítulo 3 e 4. Na primeira parte generalizamos [7, Proposição 7.7], provando que (0.2) continua válido e que $LC(X)^-$ é Cohen-Macaulay. Na segunda parte generalizamos (0.1) e a caracterização do número de Tjurina apresentada do capítulo 3. Todos os resultados desse capítulo estão no artigo [28].

Capítulo 1

Preliminares

Nesse capítulo vamos introduzir conceitos e resultados de álgebra comutativa e teoria de singularidades que são necessários ao longo do texto.

1.1 Álgebra comutativa

Para mais detalhes sobre os temas dessa seção ver [10, 17, 30].

Anéis e Módulos Cohen-Macaulay

Seja R um anel comutativo com unidade.

Definição 1.1. Dizemos que o anel R é Noetheriano quando todos os seus ideais são finitamente gerados.

Proposição 1.2. *Seja R um anel comutativo com unidade, são equivalentes:*

a) R é Noetheriano;

b) Para toda cadeia

$$I_1 \subset I_2 \subset ... \subset I_k \subset I_{k+1} \subset ...$$

existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ k \geq n_0$, $I_k = I_{k+1}$;

c) Todo conjunto não vazio de ideais de R tem um elemento maximal com respeito a inclusão.

Proposição 1.3. *Seja R um anel noetheriano, então todo R-módulo finitamente gerado é noetheriano.*

Sejam

$$P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq ... \subsetneq P_n \tag{1.1}$$

uma cadeia finita de ideais primos de R. Dizemos que n é o tamanho ou comprimento da cadeia e a dimensão de Krull do anel R, $\dim R$, é o supremo dos tamanhos de todas as cadeias (1.1) de ideais primos de R. Consideramos agora $I \subset R$ um ideal, a altura de I, $\mathrm{ht}(I)$ é o supremo dos tamanhos de todas as cadeias de ideais primos de R que estão contidos em I

$$P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq ... \subsetneq P_n \subset I$$

Definição 1.4. Seja M um R-módulo finitamente gerado. Definimos a dimensão de M como a dimensão de krull do anel $R/\operatorname{Ann}(M)$, sendo

$$\operatorname{Ann}(M) = \{a \in R; am = 0 \ \forall m \in M\}.$$

Em outras palavras

$$\dim(M) = \dim \frac{R}{\operatorname{Ann}(M)}.$$

Definição 1.5. Sejam $(R, \mathcal{M})$ um anel local e M um R-módulo.

a) Uma sequência de elementos $a_1, ..., a_n \in \mathcal{M}$, é uma sequência regular em M quando a_1 não for divisor de zero em M e a_i não for divisor de zero em

$$\frac{M}{\langle a_1, ..., a_{i-1} \rangle M}$$

para todo $i = 2, ..., n$;

b) Sejam $I \subset R$ um ideal tal que $IM \neq M$. A I profundidade de M, $\operatorname{depth}(I, M)$, é o comprimento máximo de uma sequência regular em I. Se $IM = M$ definimos $\operatorname{depth}(I, M) = \infty$;

c) A profundidade de M, é a profundidade de $\mathcal{M}$ em M, ou seja,

$$\operatorname{depth}(M) = \operatorname{depth}(\mathcal{M}, M);$$

d) Um módulo M é Cohen-Macaulay, CM, quando $\operatorname{depth}(M) = \dim(M)$;

e) Um anel R é Cohen-Macaulay, quando é Cohen-Macaulay como R-módulo;

Agora, vamos apresentar resultados que nos dizem quando um módulo ou um anel são Cohen-Macaulay.

Teorema 1.6. *[Eagon-Hochster]*

Sejam R um anel noetheriano de dimensão d, M uma matriz $p \times q$ com entradas em R e I_r o ideal gerado pelos menores de ordem r da matriz M. Então

i) $\dim R/I_r \geq d - (p - r + 1)(q - r + 1)$;

ii) Se R é Cohen-Macaulay e $\dim R/I_r = d - (p - r + 1)(q - r + 1)$, *então o anel R/I_r é Cohen-Macaulay.*

Proposição 1.7. *Sejam $(R, \mathcal{M})$ um anel noetheriano local, $r_1, ..., r_k \in \mathcal{M}$ e M um R-módulo finitamente gerado. Suponhamos que M é Cohen-Macaulay, então $r_1, ..., r_k$ é uma M-sequência regular se, e somente se,*

$$\dim \frac{M}{\langle r_1, ..., r_k \rangle M} = \dim(M) - k.$$

Teorema 1.8. *[8],[32, Teorema C.7] Sejam R um anel Cohen-Macaulay de dimensão d, $A \in M_{p\times q}(R)$, tal que $q \geq p$, podemos considerar também $A : R^q \to R^p$ homomorfismo de R-módulos. Seja*

$$M = \operatorname{coker}(A) = \frac{R^p}{\operatorname{Im}(A)}.$$

Nessas condições se $\dim(M) = d - (p - p + 1)(q - p + 1)$, então M é Cohen-Macaulay.

Proposição 1.9. *Sejam $(R, \mathcal{M})$ anel local Cohen-Macaulay e $I \subset R$ ideal próprio, então*

$$\operatorname{ht}(I) = \operatorname{depth}(I, R) \text{ e } \operatorname{ht}(I) + \dim \frac{R}{I} = \dim R.$$

Agora nós vamos introduzir a fórmula de Auslander-Buchsbaum, a qual é uma importante ferramenta para dizermos quando um R-módulo é Cohen-Macaulay, mas primeiramente precisamos introduzir alguns conceitos.

Seja M um R-módulo livre, ou seja, $M \approx \oplus_{i\in\Gamma} R$. Quando Γ é um conjunto finito de cardinalidade t, dizemos que M é um R-módulo livre de posto t.

Definição 1.10. Sejam R um anel e M um R-módulo finitamente gerado. Uma resolução livre de M é uma sequência exata

$$... \longrightarrow F_{k+1} \xrightarrow{\alpha_{k+1}} F_k \xrightarrow{\alpha_k} ... \xrightarrow{\alpha_2} F_1 \xrightarrow{\alpha_1} F_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0,$$

sendo F_i R-módulos livres, finitamente gerados para $i \geq 0$.

1. A resolução livre tem comprimento finito n quando $F_k = 0$ para todo $k > n$, o menor número n com essa propriedade é o comprimento da resolução.

2. Quando R é um anel local com ideal maximal $\mathcal{M}$, dizemos que a resolução livre é minimal quando $\alpha_k(F_k) \subset \mathcal{M}F_{k-1}$, para todo $k \geq 1$. Nesse caso como os módulos F_k são livres de posto finito b_k nós chamaremos esse número b_k de k-ésimo número de betti de M, com a notação $b_k(M) = b_k$.

Proposição 1.11. *Sejam $(R, \mathcal{M})$ um anel noetheriano local e M um R-módulo finitamente gerado, então M tem uma resolução livre minimal. O posto de F_k em uma resolução livre minimal independe da resolução, além disso se M possui uma resolução livre minimal de comprimento n*

$$0 \longrightarrow F_n \xrightarrow{\alpha_n} ... \xrightarrow{\alpha_2} F_1 \xrightarrow{\alpha_1} F_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0, \text{ e se}$$

$$...0 \longrightarrow G_m \xrightarrow{\beta_m} ... \xrightarrow{\beta_2} G_1 \xrightarrow{\beta_1} F_0 \xrightarrow{\beta_0} M \longrightarrow 0,$$

é qualquer oura resolução, então $m \geqslant n$.

Definição 1.12. Sejam R um anel noetheriano local com ideal maximal $\mathcal{M}$ e M um R-módulo finitamente gerado. A dimensão projetiva de M, $\operatorname{pd}_R M$ é o comprimento de uma resolução livre minimal de M.

Proposição 1.13. *[Fórmula de Auslander–Buchsbaum]*

Sejam R um anel noetheriano local com ideal maximal $\mathcal{M}$, e M um R-módulo finitamente gerado de dimensão projetiva finita, então

$$\operatorname{depth}(M) + \operatorname{pd}_R(M) = \operatorname{depth}(R).$$

Com o objetivo de definirmos ideal Fitting nós introduzimos o conceito de presentação finita de um R -módulo M.

Definição 1.14. Seja M um R-módulo. Quando existe uma matriz $H \in M_{n,m}(R)$, tal que

$$M \approx coker(H) = \frac{R^n}{\operatorname{Im}(H)}$$

$H : R^m \to R^n$, dizemos que M é um R-módulo de presentação finita. Além disso H é chamada presentação matricial de M. Denotamos uma presentação de M pela sequência

$$R^m \xrightarrow{H} R^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Proposição 1.15. *Seja R um anel noetheriano. Todo R-módulo finitamente gerado possui uma presentação finita.*

Consideramos agora um anel R e um R-módulo M com presentação

$$R^m \xrightarrow{H} R^n \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

Para todo k, seja $F_k(M) = F_k^R(M) \subset R$ o ideal gerado pelos menores de ordem $(n-k)$ da matriz H. Se $n-k > min\{n,m\}$ convencionamos $F_k(M) = 0$ e quando $k \geq n$, $F_k(R) = R$.

Lema 1.16. *Com as notações definidas anteriormente temos:*

1) $F_k(M)$ independe da escolha das bases de R^m e R^n;

2) $F_k(M)$ independe da presentação de M.

Definição 1.17. Para todo k os ideais $F_k^R(M)$ são chamados k-ésimo ideal Fitting de M.

Observamos que para $k < 0$, $F_k(M) = 0$ e $F_0(M)$ é o ideal gerado pelos menores de ordem n da matriz H.

Proposição 1.18. *Seja M um R-módulo finitamente gerado, então*

i) $F_0(M) \subset \mathrm{Ann}(M)$;

ii) Para todo $j > 0$, temos $\mathrm{Ann}(M)F_j(M) \subset F_{j-1}(M)$.

Se M pode ser gerado por n elementos, então $(\mathrm{Ann}(M))^n \subset F_0(M)$.

Para finalizarmos essa seção vamos definir a multiplicidade de Samuel.

Definição 1.19. Seja M um R-módulo.

a) M é um módulo simples quando $M \neq \emptyset$ e seus únicos submódulos são $\{0\}$ e M.

b) Uma série de composição de M de comprimento n é uma sequência de submódulos

$$M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq M_2 \supsetneq ... \supsetneq M_n \neq 0,$$

com M_{i-1}/M_i simples para todo $i = 1, ..., n$.

c) O comprimento de M, $l(M)$, é o mínimo entre todos os comprimentos das séries de composição de M. Se M não admite série de composição finita dizemos que seu comprimento é infinito.

Definição 1.20. Seja $(R, \mathcal{M})$ anel local comutativo com unidade e I um ideal $\mathcal{M}$-primário. A multiplicidade de Samuel do ideal I é definida como

$$e(I, R) = \lim_{n\to\infty} \frac{d!}{n^d} l\left(\frac{R}{I^n}\right),$$

sendo $d = \dim(R)$.

O módulo syzygy

Sejam R um anel e M um R-módulo. O syz entre k elementos $m_1, ..., m_k \in M$ é uma k-upla $(r_1, ..., r_k) \in R^k$ tal que

$$a_1m_1 + ... + a_km_k = 0.$$

O conjunto de todos os syz entre $m_1, ..., m_k$ é um submódulo de R^k, pois ele é o kernel da aplicação $\Phi : R^k \to M$ dada por $\Phi(a_1, ..., a_k) = a_1m_1 + ... + a_km_k$.

Definição 1.21. O módulo syz de $m_1, ..., m_k$ é o kernel de Φ, assim

$$\mathrm{syz}(\langle m_1, ..., m_k\rangle) := \ker(\Phi).$$

Observação 1.22. Sejam R um anel local e $\{m_1, ..., m_k\}$, $\{n_1, ..., n_k\}$ conjuntos de geradores minimais, então como foi observado em [17]

$$\mathrm{syz}(m_1, ..., m_k) \approx \mathrm{syz}(n_1, ..., n_k).$$

Proposição 1.23. *Sejam R um anel comutativo com unidade e $r_1, ..., r_k \in R$ uma sequência regular em R, então*

$$\mathrm{syz}(r_1, ..., r_k) = \langle r_i e_j - r_j e_i,\ 1 \leq j < i \leq k \rangle.$$

Esse resultado é bastante usado, como não encontramos uma referência vamos demonstrá-lo aqui:

Demonstração: Sabemos que $\langle r_l e_j - r_j e_l,\ 1 \leq j < l \leq k \rangle \subset \mathrm{syz}(r_1, ..., r_k)$, pois

$$r_l r_j - r_j r_l = 0;\ \forall\ 1 \leq j < l \leq k.$$

Vamos mostrar agora a inclusão $\mathrm{syz}(r_1, ..., r_k) \subset \langle r_l e_j - r_j e_l,\ 1 \leq j < l \leq k \rangle$.

Seja $\sum_{j=1}^{k} a_j e_j \in \mathrm{syz}(r_1, ..., r_k)$, então

$$\sum_{j=1}^{k} a_j r_j = 0, \tag{1.2}$$

logo $\overline{a_k r_k} = \overline{0} \in R/\langle r_1, ..., r_{k-1} \rangle$, mas como $r_1, ..., r_k$ é uma sequência regular temos que $\overline{r_k}$ é regular em $R/\langle r_1, ..., r_{k-1} \rangle$ e portanto $a_k \in \langle r_1, ..., r_{k-1} \rangle$. Assim existem $b_{k1}, ..., b_{k(k-1)} \in R$ tais que

$$a_k = \sum_{j=1}^{k-1} b_{kj} r_j \tag{1.3}$$

Utilizando agora as igualdades (1.2) e (1.3) obtemos

$$0 = \sum_{j=1}^{k} a_j r_j = \sum_{j=1}^{k-1} a_j r_j + \sum_{j=1}^{k-1} b_{kj} r_j r_k = \sum_{j=1}^{k-1} (a_j + b_{kj} r_k) r_j. \tag{1.4}$$

Logo $\overline{(a_{k-1} + b_{k(k-1)} r_k) r_{k-1}} = \overline{0}$ em $R/\langle r_1, ..., r_{k-2} \rangle$ resultando que $a_{k-1} + b_{k(k-1)} r_k \in \langle r_1, ..., r_{k-2} \rangle$, ou seja existem $b_{(k-1)1}, ..., b_{(k-1)(k-2)}$, tais que

$$a_{k-1} + b_{k(k-1)} r_k = \sum_{j=1}^{k-2} b_{(k-1)j} r_j. \tag{1.5}$$

Utilizando agora as igualdades (1.4) e (1.5) obtemos

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{j=1}^{k-1}(a_j + b_{kj}r_k)r_j &= \sum_{j=1}^{k-2}(a_j + b_{kj}r_k)r_j + (a_{k-1} + b_{k(k-1)}r_k)r_{k-1} \\ &= \sum_{j=1}^{k-2}(a_j + b_{kj}r_k)r_j + \sum_{j=1}^{k-2} b_{(k-1)j}r_jr_{k-1} \\ &= \sum_{j=1}^{k-2}(a_j + b_{kj}r_k + b_{(k-1)j}r_{k-1})r_j. \end{aligned}$$

Prosseguindo com as contas existem $b_{ij} \in R$, tais que

$$\begin{aligned} a_k &= \sum_{j=1}^{k} b_{kj}r_j \\ a_{k-1} &= \sum_{j=1}^{k-2} b_{(k-1)j}r_j - b_{k(k-1)}r_k \\ a_{k-2} &= \sum_{j=1}^{k-3} b_{(k-2)j}r_j - b_{(k-1)(k-2)}r_{k-1} - b_{k(k-2)}r_k \\ &\vdots \\ a_3 &= \sum_{j=1}^{2} b_{3j}r_j - \sum_{j=4}^{k} b_{j3}r_j \\ a_2 &= b_{21}r_1 - \sum_{j=3}^{k} b_{j2}r_j \\ a_1 &= -\sum_{j=2}^{k} b_{j1}r_j. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} a_ie_i &= \sum_{l=2}^{k} b_{l1}(r_1e_l - r_le_1) + \sum_{l=3}^{k} b_{l2}(r_2e_l - r_le_2) + ... + b_{k(k-1)}(r_{k-1}e_k - r_ke_{k-1}) \\ &= \sum_{j=1}^{k}\sum_{l=j+1}^{k} b_{lj}(r_je_l - r_le_j) \\ &= \sum_{1\leq j<l\leq k} b_{lj}(r_je_l - r_le_j). \end{aligned}$$

Assim concluímos que $\mathrm{syz}(r_1, ..., r_k) \subset \langle r_ie_j - r_je_i,\ 1 \leq i < j \leq k\rangle$.

■

Produto tensorial

Essa subseção é baseada em [3].

Seja R um anel comutativo com unidade, $M_1, ..., M_k, P$ R-módulos e $f : M_1 \times ... \times M_k \to P$ uma aplicação bilinear. Dessa maneira existe um par (T, g), sendo T um R-módulo e $g : M_1 \times ... \times M_k \to T$ com as seguintes propriedades:

a) Dado qualquer R-módulo P e qualquer função A-bilinear $f : M_1 \times ... \times M_k \to P$ existe uma única função $f' : T \to P$ R-linear tal que $f = f' \circ g$, em outras palavras tal que o diagrama abaixo é comutativo.

$$\begin{tikzcd} M_1 \times ... \times M_k \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f"'] & T \arrow[d, "f'"] \\ & P \end{tikzcd}$$

b) Se $(\overline{T}, \overline{g})$ é outro par satisfazendo as propriedades acima, então existe um único R-isomorfismo tal que $\phi : T \to \overline{T}$ tal que $\overline{g} = \phi \circ g$.

Denotamos $g(m_1, ..., m_k) = m_1 \otimes ... \otimes m_k$.

Definição 1.24. O R-módulo T com as propriedades acima é chamado n-ésimo produto tensorial de $M_1, ..., M_k$, o qual denotamos por $M_1 \otimes_R ... \otimes_R M_k$. Quando $M_i = M$ para todo $i = 1, ..., k$ vamos escrever $\otimes_R^k M$, na maioria das vezes omitimos o anel R.

Proposição 1.25. *Sejam M e N dois R-módulos tais que $\{m_i\}$ é base de M e $\{n_j\}$ é base de N, então $\{m_i \otimes n_j\}$ é base de $M \otimes_R N$.*

Além disso temos o seguinte resultado, o qual é um exercício em [3].

Proposição 1.26. *Sejam M um R- módulo e $I \subset R$ um ideal, então*

$$M \otimes_R \frac{R}{I} \approx \frac{M}{IM}.$$

Produto exterior

Essa subseção é baseada em [14].

Sejam R um anel comutativo com unidade, M e X R-módulos e $B : M \times ... \times M \to X$ uma aplicação multilinear alternada, ou seja $B(m_1, ..., m_k) = 0$ quando $m_i = m_j$ com $i \neq j$.

Dessa maneira existe um par (H, h), sendo H um R-módulo e $h : M \times ... \times M \to H$ uma aplicação multilinear alternada com as seguintes propriedades:

a) Dado qualquer R-módulo X e qualquer aplicação R-multilinear alternada $B : M \times ... \times M \to X$ existe uma única aplicação $h' : H \to X$ R-linear tal que $B = h' \circ h$, em outras palavras tal que o diagrama abaixo é comutativo.

$$
\begin{tikzcd}
H \arrow[drr, "h'"] & & \\
M \times ... \times M \arrow[u, "h"] \arrow[rr, "B"'] & & X
\end{tikzcd}
$$

b) Se existe outro par $(\overline{H}, \overline{h})$ com a propriedade acima então existe um único isomorfismo $i : H \to \overline{H}$ tal que $\overline{h} = i \circ h$.

Denotamos $h(m_1, ..., m_k) = m_1 \wedge ... \wedge m_k$.

Definição 1.27. O R-módulo H com as propriedades acima é chamado n-ésimo produto exterior de M e denotado por $\wedge_R^n N$.

Na maioria das vezes omitiremos o anel R da notação.

Considerando um homomorfismo de R-módulos $T : M \to N$ nós temos uma aplicação de $\wedge^n T : \wedge^n M \to \wedge^n N$ dada por $\wedge^n T(m_1 \wedge ... \wedge m_n) = T(m_1) \wedge ... \wedge T(m_k)$. Além disso se considerarmos $M = N$ então T é um endomorfismo e

$$\wedge^n T(m_1 \wedge ... \wedge m_n) = T(m_1) \wedge ... \wedge T(m_k) = \det(T) m_1 \wedge ... \wedge m_n.$$

Além disso se A é uma matriz $n \times k$, $n < k$, com entradas em um anel comutativo R. Se $A_1, ..., A_n \subset R^n$ são as linhas da matriz A e $e_1, ..., e_n$ a base canônica de R^n então

$$A_1 \wedge ... \wedge A_n = \sum_{i_1 < ... < i_m} \det(A^{i_1 ... i_m}) e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_m},$$

sendo $A^{i_1 ... i_m}$ a submatriz de A consistindo das colunas $i_1, ..., i_m$ da matriz A.

1.2 Teoria de singularidades

Nessa seção vamos introduzir conceitos sobre a teoria de singularidades que serão utilizados. Para mais detalhes ver [16, 29, 31, 32].

Germes

Ao longo do texto nós trabalhamos em um contexto local, portanto vamos introduzir o conceito de germes. Seja $x \in \mathbb{C}^n$, dizemos que dois subconjuntos de $\mathbb{C}^n$, S_1 e S_2 são equivalentes no ponto x, $S_1 \sim_x S_2$, quando existe um aberto $U \subset \mathbb{C}^n$, com $x \in U$ tal que

$$S_1 \cap U = S_2 \cap U.$$

Essa relação, $\sim_x$, define uma relação de equivalência no conjunto das partes de $\mathbb{C}^n$, $\mathcal{P}(\mathbb{C}^n) = \{S;\ S \subset \mathbb{C}^n\}$. Chamamos a classe de equivalência de S_1 no ponto x de germe de S_1 no ponto x e denotamos por (S_1, x).

Consideramos agora o conjunto $\mathcal{H}$ das aplicações definidas em um subconjunto aberto de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^m$ que são analíticas, mais especificamente

$$\mathcal{H} = \{f : U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m,\ \text{analíticas.}\}.$$

Dizemos que duas aplicações $f : U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, $g : V \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m \in \mathcal{H}$ são equivalentes no ponto x, $f \sim_x g$, quando existe um aberto $W \subset \mathbb{C}^n$, com $x \in W$, tal que

$$f(z) = g(z),\ \forall z \in W.$$

A relação, $\sim_x$ acima define uma relação de equivalência no conjunto $\mathcal{H}$, denotamos a classe de equivalência de f em x por

$$f : (\mathbb{C}^n, x) \to (\mathbb{C}^m, f(x)),$$

a qual chamamos de germe da aplicação f no ponto x. O conjunto de todas as classe de equivalência é denotado por $\mathcal{O}^m_{n,x}$, quando o ponto x é a origem, o mesmo será omitido da notação, ou seja, $\mathcal{O}^m_{n,0} = \mathcal{O}^m_n$. Além disso, se $m = 1$ escrevemos $\mathcal{O}_{n,x}$ em vez de $\mathcal{O}^1_{n,x}$ o qual será o conjunto dos germes de funções no ponto x. A partir de agora fixamos o ponto $x = 0$. Com as operações usuais temos que $\mathcal{O}_n$ é um anel local com ideal maximal

$$\mathcal{M}_n = \langle x_1, ..., x_n \rangle.$$

sendo

$$x_i : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0),$$
$$(x_1, ..., x_n) \mapsto x_i$$

para todo $i = 1, ..., n$.

Com as operações usuais, $\mathcal{O}^m_n$ é um $\mathcal{O}_n$-módulo. Seja $f \in \mathcal{O}^m_n$ um germe de função e $J[f] = (\partial f_i / \partial x_j)_{m \times n}$ sua matriz jacobiana. Se a matriz possui posto máximo em um ponto $x \in \mathbb{C}^n$ dizemos que x é suave, caso contrário x é uma singularidade de f, além disso quando existir um aberto $U \subset \mathbb{C}^n$, com $x \in U$ e a matriz $J[f]$ assumir posto máximo em todo $z \in U \setminus \{x\}$ dizemos que x é uma singularidade isolada de f.

Seja $J \subset \mathcal{O}_n$ um ideal, definimos a variedade analítica do ideal J da seguinte maneira

$$V(J) = \{x \in \mathbb{C}^n;\ f(x) = 0\ \forall f \in J\}.$$

Por outro lado dado um conjunto de pontos $X \subset \mathbb{C}^n$ podemos considerar o conjunto

$$I_X = \{f \in \mathcal{O}_n;\ f(x) = 0\ \forall\ x \in X\}$$

é uma verificação imediata que $I_X \subset \mathcal{O}_n$ é um ideal. Para sermos mais específicos I_X é ideal radical.

Definição 1.28. Sejam $(X, 0)$ um germe de variedade analítica com ideal I_X.

a) O anel $\mathcal{O}_X := \mathcal{O}_n/I_X$ é chamado anel local de $(X, 0)$;

b) Quando o anel local da variedade $(X, 0)$ não possuir elementos nilpotentes dizemos que a variedade $(X, 0)$ é reduzida.

c) Dizemos que o germe $(X, 0)$ é Cohen-Macaulay quando o seu anel local é Cohen-Macaulay.

Definição 1.29. Um germe analítico $(X, 0)$ é irredutível quando não existem subconjuntos analíticos próprios X_1, X_2 de X tais que $X = X_1 \cup X_2$. Quando $X = X_1 \cup X_2$, então chamamos X_1 e X_2 de componentes de X.

Proposição 1.30. *Todo germe de variedade analítica possui uma decomposição em componentes irredutíveis.*

Definição 1.31. Quando todas as componentes irredutíveis de uma variedade analítica tiverem a mesma dimensão dizemos que o germe é equidimensional.

Proposição 1.32. *Sejam $(X, 0)$ um germe de variedade analítica. Se $(X, 0)$ é reduzida então sua decomposição em componentes irredutíveis é equidimensional.*

Definição 1.33. Sejam $(X, 0)$ um germe de variedade analítica. A multiplicidade de um germe é a multiplicidade de Hilbert Samuel de seu anel local $\mathcal{O}_X$.

$$m_0(X, 0) := e(\mathcal{O}_X) := e(\mathcal{M}_X, O_X),$$

sendo $\mathcal{M}_X$ o ideal maximal de $\mathcal{O}_X$.

Sejam $X_1, ..., X_k$ as componentes irredutíveis de $(X, 0)$ então cada uma delas tem a sua própria multiplicidade $m_0(X_i)$. Mas a multiplicidade é aditiva, então

$$m_0(X) = m_0(X_1) + \ldots + m_0(X_k).$$

Equivalência de germes

Também estamos interessados em estabelecer uma relação entre dois germes, com essa finalidade consideramos os seguintes conjuntos:

$$\mathcal{R} = \{h \in \mathcal{O}_n^n;\ h \text{ é um germe de difeomorfismo } \}$$
$$C^0_{\mathcal{R}} = \{h \in \mathcal{O}_n^n;\ h \text{ é um germe de homomorfismo}\}$$

Esses conjuntos munidos da operação de composição formam grupos. Consideramos agora dois germes $f, g \in \mathcal{O}_n$, dizemos que esses germes são $\mathcal{R}$-equivalentes, $f \sim_{\mathcal{R}} g$, quando existe $h \in \mathcal{R}$ tal que $g = f \circ h$. Analogamente dizemos que esses germes são $C^0_{\mathcal{R}}$-equivalentes, $f \sim_{C^0_{\mathcal{R}}} g$, quando existe $h \in C^0_{\mathcal{R}}$ tal que $g = f \circ h$.

As relações $\sim_{\mathcal{R}}$ e $\sim_{\mathbb{C}^0_{\mathcal{R}}}$ são relações de equivalência e propriedades que são mantidas via $C^0_{\mathcal{R}}$-equivalência são chamadas de invariantes topológicos.

Princípio da conservação do número

Essa subseção é baseada em [10] e [32]. Nosso principal objetivo não é trazer uma abordagem profunda sobre o princípio da conservação do número e sim exemplificar como o aplicamos com a condição adicional $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ variedade analítica Cohen-Macaulay, ou seja, cujo anel local $\mathcal{O}_n/I_X$ é Cohen-Macaulay.

Primeiramente vamos enunciar o Princípio da conservação do número, assim seja $(X, 0)$ um germe de variedade analítica em $(\mathbb{C}^n, 0)$ e $\mathcal{O}_X$ seu anel local, ao deformamos $\mathcal{O}_X$ obtemos o anel local $\mathcal{O}_{X_S}$, sendo S o espaço de parâmetro da deformação. Consideramos agora U uma vizinhança aberta da origem e X um representante do germe $(X, 0)$ em U, escolhemos um vizinhança suficientemente pequena da origem V no espaço de parâmetro $S = \mathbb{C}$ e $\pi : U \times V \to V$ a projeção canônica, $X_S \subset U \times V$ é uma variedade analítica tal que $X_S \cap \pi^{-1}(0) = X$. Para $s \in V$ nós consideramos $X_s := X_S \cap \pi^{-1}(s)$.

Teorema 1.34. *[Princípio da conservação do número]*
Seja $\mathfrak{M}$ um feixe em X_S tal que

i) $\mathfrak{M}$ é um $\mathcal{O}_S-$módulo coerente;

ii) $\mathfrak{M}_0$, o "stalk"de $\mathfrak{M}$ na origem é um $\mathcal{O}_S$-modulo de posto finito.

Então para toda vizinhança suficientemente pequena $U' \subset U$ da origem em $\mathbb{C}^n$ existe uma vizinhança aberta $V' \subset V$ da origem em $\mathbb{C}$ tal que para todo $s \in V'$

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{M}|_{X_0})_0 = \sum_{p \in X'_S} \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{M}|_{X_S})_p.$$

sendo $X'_S = X_S \cap (U' \times \{s\})$.

Para aplicarmos o resultado anterior para o número de Milnor de um germe de função $f \in \mathcal{O}_n$, com singularidade isolada. Seja $F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C} \times \mathbb{C}, 0)$ uma deformação um parâmetro de f, ou seja $F(x,t) = f_t(x)$ e $f_0(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{C}^n$. Vamos mostrar que para toda vizinhança aberta U da origem existe uma vizinhança V da origem em $\mathbb{C}$ tal que para todo $t \in V$

$$\mu(f) = \sum_{p \in U} \mu(f_t)_p,$$

sendo $\mu(f_t)_p$ o número de Milnor da função $f_t : (\mathbb{C}^n, p) \to (\mathbb{C}, f_t(p))$. Para verificarmos os itens i) e ii) vamos precisar dos seguintes resultados

Proposição 1.35. *Seja $(X,0)$ uma variedade analítica então o feixe $\mathcal{O}_X$ é coerente.*

Proposição 1.36. *[Teorema de preparação]*

Seja $\pi : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ germe de aplicação entre variedades analíticas. Se M é um $\mathcal{O}_{(X,x_0)}$-módulo finitamente gerado, então as afirmações são equivalentes:

a) M é um $\mathcal{O}_{Y,y_0}$-módulo finitamente gerado via f;

b) $\dim_{\mathbb{C}} M/f^*(\mathcal{M}_{(Y,y_0)})M < \infty$.

Sendo $\mathcal{M}_{(Y,y_0)}$ o ideal maximal do anel local $\mathcal{O}_{(Y,y_0)}$ e $f^* : \mathcal{O}_{(Y,y_0)} \to \mathcal{O}_{(X,x_0)}$ dada por $f^*(h) = h \circ f$.

Nesse caso temos que $X_t = V(\partial F/\partial x_i, i = 1, ..., n)$ e o nosso feixe é $\mathfrak{M} = \mathcal{O}_{X_t}$, o qual é um $\mathcal{O}_{X_t}$-modulo coerente. Agora nós vamos provar o item ii) e para isso consideramos a aplicação $\pi : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ dada por $\pi(x,t) = t$, nessas condições

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X_t}}{\pi^*(\mathcal{M}_{\mathbb{C}})\mathcal{O}_{X_t}} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1}}/Jf_t}{(\langle t \rangle + Jf_t)/Jf_t} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n+1}}{\langle t \rangle + Jf_t} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{Jf} = \mu(f) < \infty,$$

e pelo Teorema de preparação nós concluímos o item ii). Assim segue do Princípio da Conservação do Número que para toda vizinhança aberta U da origem existe uma vizinhança V da origem em $\mathbb{C}$ tal que para todo $t \in V$

$$\mu(f) = \sum_{p \in U} \mu(f_t)_p,$$

sendo $\mu(f_t)_p$ o número de Milnor da função $f_t : (\mathbb{C}^n, p) \to (\mathbb{C}, f_t(p))$.

Ainda com a finalidade de deixar claro como os hipóteses do Teorema do Princípio da Conservação do Número são satisfeitas para módulos Cohen-Macaulay, também registramos o seguinte:

Seja $\mathfrak{M}$ um feixe de $\mathcal{O}_X$-modulo coerente e $\pi : (X, 0) \to (S, 0)$, sendo S suave. Vamos supor que $\mathfrak{M}_0 = M$ é um $\mathcal{O}_X$-modulo finitamente gerado, então M também é um $\mathcal{O}_S$-modulo via $\pi^* : \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_n$. Se M nessas condições é um $\mathcal{O}_X$-módulo Cohen-Macaulay e $\dim M = \dim \mathcal{O}_S$, então podemos aplicar o princípio da conservação do número.

Como estamos supondo que $\mathfrak{M}$ é coerente precisamos mostrar somente o item ii) e precisaremos da seguinte proposição:

Proposição 1.37. *Seja $\phi : R \to S$ um homomorfismo de anéis locais noetherianos e M um S-módulo finitamente gerado que também é um R-módulo finitamente gerado via ϕ. Então*

$$\operatorname{depth}_R M = \operatorname{depth}_S M \quad \dim_R M = \dim_S M$$

De fato como M é um $\mathcal{O}_X$-módulo Cohen-Macaulay e $\dim M = \dim \mathcal{O}_S$, então pela fórmula de Auslander Buchsbaum, Proposição 1.13, temos

$$\operatorname{pd}_{\mathcal{O}_s} M + \operatorname{depth}_{\mathcal{O}_S} M = \operatorname{depth}_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S = \dim_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S,$$

mas pelo lema anterior

$$\operatorname{depth}_{\mathcal{O}_S} M = \operatorname{depth}_{\mathcal{O}_X} M = \dim_{\mathcal{O}_X} M = \dim_{\mathcal{O}_S} M,$$

logo $\operatorname{pd}_{\mathcal{O}_S} M = 0$ resultando que M é um $\mathcal{O}_S$-module livre e por ser finitamente gerado tem posto finito, assim provamos o item ii) e podemos aplicar o princípio da conservação do número para $\mathfrak{M}$, ou seja para toda vizinhança suficientemente pequena $U' \subset U$ da origem em $\mathbb{C}^n$ existe uma vizinhança aberta $V' \subset V$ da origem em $\mathbb{C}$ tal que para todo $s \in V'$

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{M}|_{X_0})_0 = \sum_{p \in X'_S} \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{M}|_{X_S})_p.$$

sendo $X'_S = X_S \cap (U' \times \{s\})$.

Morsificação

Nessa subseção vamos introduzir o conceito de Morsificação. Com essa finalidade seja $f \in \mathcal{O}_n$, como definimos anteriormente um ponto $x \in \mathbb{C}^n$ é um ponto crítico de f, quando $x \in V(Jf)$, além disso quando a matriz Hessiana de f no ponto x,

$$Hess(f)(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{pmatrix}$$

é não degenerada (invertível), diremos que o ponto x é um ponto critico de Morse de f.

Definição 1.38. Um germe de função $f \in \mathcal{O}_n$ é de Morse quando todos os seus pontos críticos são de Morse.

Proposição 1.39. *Seja $f \in \mathcal{M}_n^2 = \langle x_i x_j;\ i,j = 1,...,n \rangle$, são equivalentes:*

a) 0 é um ponto crítico de Morse;

b) $Jf = \mathcal{M}$;

c) $\mu(f) = 1$;

Uma deformação a 1-parâmetro de $f \in \mathcal{O}_n$ é uma aplicação

$$\begin{aligned} F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) &\to \mathbb{C} \\ (x,t) &\mapsto F(x,t) = f_t(x) \end{aligned}$$

tal que $F(x, 0) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{C}^n$.

Definição 1.40. Uma Morsificação de $f \in \mathcal{O}_n$ é uma deformação a 1-parâmetro de f tal que f_t é uma função de Morse para todo $t \neq 0$.

Proposição 1.41. *Todo germe de função $f \in \mathcal{O}_n$ admite uma Morsificação.*

Também precisamos do conceito de função de Morse levando em consideração um conjunto, com essa finalidade vamos definir a estratificação de Whitney.

Definição 1.42. Sejam M uma variedade diferenciável, $X, Y \subset M$ subvariedades diferenciáveis, e $x \in X$. Dizemos que Y é Whitney regular sobre X em x quando, dadas duas sequências (x_i), e (y_i), em X e Y, respectivamente, ambas convergindo para x com $x_i \neq y_i$ para todo i. Se

i) $T_{y_i}Y$ converge para T;

ii) As retas L_i convergem para L, sendo L_i a reta cuja direção é $\overrightarrow{x_i y_i}$,

então $L \subset T$.

Além disso se Y é regular sobre X em todo ponto $x \in X$ dizemos que Y é Whitney regular sobre X.

As convergências na definição anterior são nos grassmannianos adequados.

Definição 1.43. Sejam M uma variedade diferenciável e $V \subset M$.

Uma estratificação de V é uma partição, $\mathfrak{X}$, de V em subvariedades de M satisfazendo:

i) A condição de finitude local:
Para todo ponto $x \in V$ existe uma vizinhança em M que intersecta finitos elementos de $\mathfrak{X}$.

ii) A condição de fronteira:
Seja $X, Y \in \mathfrak{X}$ tais que $\overline{X} \cap Y \neq \emptyset$, então $Y \subset X$.

Os elementos de $\mathfrak{X}$ são chamados estratos.

Definição 1.44. Sejam M uma variedade diferenciável com estratificação $\mathfrak{X}$. Dizemos que $\mathfrak{X}$ é de Whitney quando

A) Se $X, Y \in \mathfrak{X}$ e (y_i) uma sequência de pontos em Y convergindo para $x \in X$ tal que $T_{y_i}Y$ converge para T, então
$$T_xX \subset T.$$

B) Para quaisquer estratos $X, Y \in \mathfrak{X}$ tivermos que Y é Whitney regular sobre X;

A primeira condição também é conhecida como condição A de Whitney enquanto que a segunda é conhecida como condição B de Whitney a próxima proposição nos diz que a condição B implica a condição A.

Proposição 1.45. *Sejam M uma variedade diferenciável, $X, Y \subset M$ subvariedades diferenciáveis. Seja (y_i) uma sequência de pontos em Y convergindo para x tal que $T_{y_i}Y$ converge para T. Se Y é Whitney regular sobre X no ponto $x \in X$ então*

$$T_xX \subset T.$$

Proposição 1.46. *Todo germe $(X, 0)$ tem uma estratificação de Whitney.*

Para mais detalhes sobre estratificação de Whitney indicamos [12].

Definição 1.47. Sejam $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ um germe de variedade analítica complexa com estratificação de Whitney $\mathfrak{X}$ e $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ um germe de função. Dizemos que f é de Morse para $\mathfrak{X}$ quando:

i) Se X_0 é o estrato contendo a origem, $X_0 \neq \{0\}$, então $h\mid_{X_0}: X_0 \to \mathbb{C}$ deve ter um ponto crítico não degenerado na origem.

ii) Seja $X_\alpha \in \mathfrak{X}$ e (x_i) uma sequência de elementos em X_α convergindo para origem, tais que $T_{x_i}X_\alpha$ converge para T. Então se $0 \notin X_\alpha$, $df(0)$ deve ter posto máximo em T.

Observamos que uma função de Morse $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ é também uma função de Morse com relação a estratificação $\mathfrak{X} = \{\mathbb{C}^n\}$, pois $i)$ é satisfeita pela definição de função de Morse e a segunda é satisfeita por vacuidade, pois não existe estrato $X_\alpha \in \mathfrak{X}$, tal que $0 \notin X_\alpha$.

Proposição 1.48. *[7]Sejam $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ uma variedade analítica com estratificação de Whitney $\mathfrak{X}$ e $h : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, função holomorfa tal que dentro de uma bola contendo a origem, B, a restrição de h ao estrato é singular somente na origem. Então existe uma família de funções analíticas reais de funções holomorfas $h_t : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ com t pertencente em algum intervalo $[0, \varepsilon)$, tal que $h_0 = h$ e para $t \neq 0$ a função h_t tem somente singularidades de Morse em X dentro de B.*

Hipersuperfície com singularidade isolada

Essa subseção é baseada em [29, 31].

Seja $(X,0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ um germe de variedade analítica. O ideal I_X é gerado por um único elemento não nulo se, e somente se, $(X,0)$ tem dimensão $n-1$. Nessas condições dizemos que $(X,0)$ é um germe de hipersuperfície. Assim dada uma hipersuperfície $(X,0)$ nós temos um germe de função associado a $(X,0)$, a saber o gerador do ideal $I_X = \langle \phi \rangle$. $(X,0)$ é suave quando a matriz jacobiana, $J[\phi]$, assume posto máximo em todos os pontos $x \in X$, em outras palavras quando $\phi\mid_X \colon (X,0) \to \mathbb{C}$ é uma submersão. Na maior parte dos casos consideraremos hipersuperfícies com singularidade isolada na origem, ou seja, existe um aberto $U \subset \mathbb{C}^n$ tal que $0 \in U$ e $J[\phi]$ assume rank máximo em todos os pontos de $X \cap U \setminus \{0\}$, quando tal aberto U não existir dizemos que a hipersuperfície possui singularidade não isolada.

Além disso, consideramos o ideal gerado pelas derivadas parciais de ϕ

$$J\phi = \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial \phi}{\partial x_n} \right\rangle,$$

o qual chamamos de ideal jacobiano e é utilizado para calcularmos o número de Milnor da hipersuperfície, $\mu(X,0) = \mu(\phi)$, esse número é a dimensão como $\mathbb{C}$-espaço vetorial do quociente $\mathcal{O}_n/J\phi$, logo

$$\mu(X,0) = \mu(\phi) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{J\phi}.$$

Teorema 1.49. *O número de Milnor é um invariante topológico, ou seja,*

$$f \sim_{C^0\mathcal{R}} g \Rightarrow \mu(f) = \mu(g).$$

Temos ainda outro número associado a hipersuperfície $(X,0)$, chamado número de Tjurina, $\tau(X,0) = \tau(\phi)$, o qual é a dimensão, como $\mathbb{C}$-espaço vetorial, do quociente $\mathcal{O}_n/(J\phi + \langle \phi \rangle)$, ou seja,

$$\tau(X,0) = \tau(\phi) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{J\phi + \langle \phi \rangle}.$$

Segue imediatamente da definição que $\tau(X,0) \leq \mu(X,0)$. A seguinte proposição caracteriza hipersuperfícies com singularidade isolada.

Proposição 1.50. *Seja $(X,0) \subset (\mathbb{C}^n,0)$ um germe de hipersuperfície tal que $I_X = \langle \phi \rangle$. São equivalentes:*

a) $(X,0)$ tem singularidade isolada;

b) O ideal $J\phi + \langle \phi \rangle$ contém uma potência do ideal maximal $\mathcal{M}_n$;

c) O ideal $J\phi$ contém uma potência do ideal maximal $\mathcal{M}_n$;

d) $\mu(X,0) < \infty$;

e) $\tau(X,0) < \infty$.

Quando existir números inteiros positivos $a_1,...,a_n,a$ tais que

$$\phi(t^{a_1}x_1,...,t^{a_n}x_n) = t^a\phi(x_1,...,x_n),$$

dizemos que $(X,0)$ é um germe de hipersuperfície quase homogêneo do tipo $(a_1,...,a_n : a)$, os números a_i são os pesos das variáveis x_i e a é a filtração de ϕ. Nessas condições existe um campo $\varepsilon = (a_1x_1,...,a_nx_n)$ tal que $d\phi(\varepsilon) = a\phi$, esse campo é chamado campo de Euler. Dessa maneira temos que se um germe de hipersuperfície $(X,0)$ é quase homogêneo, então $\phi \in J\phi$.

Teorema 1.51. *[36] Seja $(X,0)$ um germe de hipersuperfície com singularidade isolada. $(X,0)$ é quase homogêneo com respeito a algum sistema de coordenadas se, e somente se, $\tau(X,0) = \mu(X,0)$.*

Interseções completas com singularidade isolada

Essa subseção é baseada em [16, 29].

Sejam $(X,0) \subset (\mathbb{C}^n,0)$ um germe de variedade analítica de dimensão k e I_X o ideal correspondente. Quando I_X tiver o número mínimo de geradores igual a $n-k$ dizemos que a variedade $(X,0)$ é uma Interseção Completa. Segue da Proposição 1.7 o seguinte resultado

Proposição 1.52. *O ideal $I = \langle \phi_1,...,\phi_{n-k} \rangle$ define uma interseção completa $(X,0) = (V(I),0)$ se, e somente se, $\phi_1,...,\phi_{n-k}$ é uma sequência regular em $\mathcal{O}_n$.*

Dessa maneira suponhamos

$$I_X = \langle \phi_1,...,\phi_{n-k}. \rangle$$

$x \in X$ é um ponto singular de $(X,0)$ quando a matriz jacobiana

$$J[\phi_1,...,\phi_{n-k}](x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial\phi_1}{x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\phi_{n-k}}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial\phi_{n-k}}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix},$$

não possui posto máximo, $n-k$, caso contrário x é um ponto regular. A partir de agora consideraremos $x = 0$ uma singularidade da interseção completa $(X,0)$, dizemos que $(X,0)$ é uma interseção completa com singularidade isolada (ICIS), quando existir uma vizinhança U da origem em $\mathbb{C}^n$, tal que para todo $x \in U \cap X \setminus \{0\}$ é regular.

Observamos que o conceito de ICIS generaliza o de hipersuperfície com singularidade isolada, para o qual nós temos definido o número de Milnor. Hamm [20, 21] definiu o número de Milnor de interseções completas, o qual denotamos por $\mu(X,0) = \mu(\phi_1, ..., \phi_{n-k})$ e fazemos o cálculo utilizando o seguinte resultado, também conhecido como fórmula de Lê-Greuel:

Proposição 1.53. *Seja $(X,0)$ interseção completa com singularidade isolada tal que $I_X = \langle \phi_1, ..., \phi_{n-k} \rangle \subset \mathcal{O}_n$, então*

$$\mu(\phi_1, ..., \phi_{n-k-1}) + \mu(\phi_1, ..., \phi_{n-k-1}, \phi_{n-k}) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle \phi_1, ..., \phi_{n-k-1} \rangle + J(\phi_1, ..., \phi_{n-k})},$$

Sendo $J(\phi_1, ..., \phi_{n-k})$ o ideal gerado pelos menores de ordem máxima da matriz jacobiana $J[\phi_1, ..., \phi_{n-k}]$.

Proposição 1.54. *Seja $(X,0)$ uma ICIS tal que $I_X = \langle \phi_1, ..., \phi_k \rangle$, então*

$$\dim(J(\phi_1, ..., \phi_k)) = k - 1$$

Assim como hipersuperfícies também temos definido o número de Tjurina de uma interseção completa $(X,0)$. Para sermos mais precisos o número de Tjurina de uma ICIS $(X,0)$ é a dimensão do espaço base da deformação semi universal minimal de $(X,0)$, e temos a seguinte caracterização algébrica para o número de Tjurina de uma ICIS.

Teorema 1.55. *[16, Teorema 1.16] Seja $(X,0) \subset (\mathbb{C}^n,0)$ uma ICIS, tal que $I_X = \langle \phi_1, ..., \phi_k \rangle$. Então*

$$\tau(X,0) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n^k}{\langle d\phi(e_i),\ i = 1, ..., n \rangle + I_X \mathcal{O}_n^k}, \tag{1.6}$$

sendo $d\phi$ o diferencial da aplicação $\phi = (\phi_1, ..., \phi_k) : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C}^k,0)$.

A partir de agora utilizamos a caracterização anterior para calcularmos o número de Tjurina de uma ICIS.

Uma interseção completa $(X,0)$ determinada por $\phi_1, ..., \phi_k$ é quase homogênea do tipo $(a_1, ..., a_n, d_1, ..., d_k)$ quando existem números inteiros positivos $a_1, ..., a_n, d_1, ..., d_k$ tais que para todo $i = 1, ..., k$

$$\phi_i(t^{a_1}x_1, ..., t^{a_n}x_n) = t^{d_i}\phi_i.$$

Temos uma generalização do Teorema 1.51.

Teorema 1.56. *[41] Seja $(X,0)$ uma ICIS de dimensão positiva. $(X,0)$ é quase homogêneo com respeito a algum sistema de coordenadas se, e somente se, $\tau(X,0) = \mu(X,0)$.*

Singularidade determinantal isolada

Sejam m, n, t números naturais tais que $t \leq \min\{m, n\}$. Denotamos por $M_{m,n}(\mathbb{C})$ o conjunto das matrizes m por n com entradas $\mathbb{C}$.

Uma singularidade determinantal genérica do tipo (m, n, t), é o conjunto de todas as matrizes $A \in M_{m,n}$ tais que $\text{rank}(A) < t$, em outras palavras

$$M^t_{m,n} = \{A \in M_{m,n};\ \text{rank}(A) < t\}.$$

Em [2], Arbarello mostra que $M^t_{m,n}$ é uma variedade algébrica cuja dimensão

$$\dim(M^t_{m,n}) = mn - (m - t + 1)(n - t + 1).$$

Para definirmos singularidades determinantais consideramos o germe de aplicação

$$\begin{aligned} F : (\mathbb{C}^N, 0) &\to M_{m,n}(\mathbb{C}) \\ x &\mapsto \begin{pmatrix} f_{11}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1}(x) & \dots & f_{mn}(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

tal que f_{ij} é holomorfa para todo $i = 1, ..., m$ e $j = 1, ..., n$.

Definição 1.57. Seja $(X, 0) = (F^{-1}(M^t_{m,n}), 0)$. Quando

$$\dim(X, 0) = N - (m - t + 1)(n - t + 1),$$

dizemos que $(X, 0)$ é uma Singularidade Determinantal do tipo (m, n, t). Além disso quando para todo $x \in X \setminus \{0\}$,

$$\text{rank}(F(x)) = t - 1$$

dizemos que $(X, 0)$ é uma Singularidade Determinantal Isolada, o qual abreviamos por IDS.

Teorema 1.58. *[35, Teorema 4.10] Se $(X, 0)$ é uma IDS de dimensão positiva, então $(X, 0)$ é reduzida.*

Capítulo 2

O número de Bruce-Roberts

Nesse capítulo vamos introduzir o número de Bruce-Roberts e o número de Bruce-Roberts relativo de uma germe de função $f \in \mathcal{O}_n$ com respeito a uma variedade analítica reduzida $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$. Também definimos a variedade logarítmica característica e a variedade logarítmica característica relativa do germe $(X, 0)$. Para mais detalhes veja *Critical Points of Functions on Analytic Varieties*, de J. W. Bruce e R. M. Roberts, [7].

2.1 Campos de vetores tangentes a variedade analítica

Consideramos $(X, 0)$ um germe de variedade analítica reduzida e Θ_n o $\mathcal{O}_n$-módulo dos germes de campos de vetores de $(\mathbb{C}^n, 0)$.

Definição 2.1. O conjunto dos germes de campos de vetores em $\mathbb{C}^n$ que são tangente ao germe da variedade $(X, 0)$ é definido por

$$\Theta_X = \{\xi \in \Theta_n;\, dh(\xi) \in I_X \,\forall\, h \in I_X\}.$$

Proposição 2.2. *[7] Seja $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ um germe de variedade analítica tal que $X = \cup_{i=1}^{s} X_i$, X_i componentes irredutíveis de X para todo $i = 1, .., s$.*

i) O germe de um campo na origem $\xi \in \Theta_n$ pertence a Θ_X se, e somente se, em cada ponto $x \in X_i$, suficientemente próximo da origem, ξ é tangente a X_i em x;

ii) $\Theta_X = \cap_{i=1}^{s} \Theta_{X_i}$;

iii) $\xi \in \Theta_X$ e $\xi(0) = 0$, então o fluxo Φ_t de ξ preserva $(X, 0)$, para todo t;

iv) Existem campos $\xi_1, ..., \xi_k \in \Theta_X$ cujos representantes zeram em X e geram o espaço tangente a $\mathbb{C}^n$ em todos os pontos $x \in \mathbb{C}^n \setminus X$ suficientemente próximos da origem;

v) Se X é equidimensional existe um subconjunto finito de Θ_X de campos cujos representantes zeram em X_{sing} e geram o espaço tangente a X em todos os pontos x suficientemente próximos da origem.

Em geral é muito complicado trabalhar com o submódulo Θ_X, pois não existe um resultado que exiba seus geradores. Para contornar esse problema vamos introduzir os campos de vetores triviais.

Definição 2.3. Seja $(X, 0)$ uma variedade analítica reduzida tal que $I_X = \langle h_1, ..., h_k \rangle$. Definimos o submódulo $\Theta_X^T \subset \Theta_X$, como segue

$$\Theta_X^T = \langle \xi \in \Theta_X;\ dh_l(\xi) = 0\ \forall l = 1, ..., k \rangle + \langle h_i e_j, i = 1, ..., k; j = 1, ..., n \rangle.$$

Os elementos de Θ_X^T são chamados campos de vetores triviais.

Não há uma forma explícita para os geradores de Θ_X quando $(X, 0)$ é uma variedade analítica qualquer, mas nós podemos utilizar o Singular, [9], para calcular seus geradores, o que é feito da seguinte maneira:

Suponhamos que o ideal I_X seja gerado por $h_1, ..., h_k$ germes de função em $(\mathbb{C}^n, 0)$, queremos encontrar campos $\xi \in \Theta_n$ tais que

$$dh_l(\xi) = \lambda_{1l} h_1 + ... + \lambda_{kl} h_k$$

para todo $l = 1, ..., k$, ou seja,

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial h_l}{\partial x_i} - \lambda_{1l} h_1 - ... - \lambda_{kl} h_k = 0,$$

para todo $l = 1, ..., k$. Para cada $l = 1, ..., k$ seja

$$T_l = \mathrm{syz}\left(\left\langle \frac{\partial h_l}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial h_l}{\partial x_n}, h_1, ..., h_k \right\rangle\right),$$

o qual é calculado utilizando o Singular.

Observamos que T_l é um submódulo de $\mathcal{O}_n^{n+k}$, assim nós projetamos as n primeiras coordenadas de T_l, obtendo um submódulo de Θ_n, o qual denotamos por T_{ln}. Finalmente para obtermos os geradores de Θ_X basta tomarmos a interseção $\cap_{i=1}^{k} T_{in}$.

2.2 O número de Bruce-Roberts

Definição 2.4. Sejam $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ uma variedade analítica reduzida e $f \in \mathcal{O}_n$. O número de Bruce-Roberts de f com relação a variedade $(X, 0)$, $\mu_{BR}(f, X)$, é a dimensão do quociente $\mathcal{O}_n/df(\Theta_X)$ como $\mathbb{C}$-espaço vetorial, ou seja,

$$\mu_{BR}(f,X) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{df(\Theta_X)}.$$

Quando a dimensão é infinita, dizemos que o número de Bruce-Roberts de f com respeito a $(X,0)$ é infinito.

O número de Bruce e Roberts é considerado por muitos autores como uma generalização do número de Milnor de um germe de função $f \in \mathcal{O}_n$, pois quando consideramos a variedade analítica $(X,0) = (\mathbb{C}^n,0)$ temos $\Theta_X = \Theta_n$ e consequentemente $\mu(f) = \mu_{BR}(f,X)$. Em geral temos que $\mu(f) \leq \mu_{BR}(f,X)$, pois $df(\Theta_X) \subset Jf$.

Definição 2.5. Seja $(X,0) \subset (\mathbb{C}^n,0)$, um germe de variedade analítica, denotaremos por $\mathcal{R}_X$ o conjunto dos germes de difeomorfismos em $(\mathbb{C}^n,0)$ que preservam X, e por $C^0\mathcal{R}_X$ o conjunto dos homeomorfismos em $(\mathbb{C}^n,0)$ que também preservam X.

Notamos que $\mathcal{R}_X$ é um subgrupo de $\mathcal{R}$ e $C^0\mathcal{R}_X$ é um subgrupo de $C^0\mathcal{R}$.

Observação 2.6. O item iii) da Proposição 2.2 nos diz que se $\xi \in \Theta_X$ e $\xi(0) = 0$, então o fluxo de ξ, Φ_t, pertence ao grupo $\mathcal{R}_X$ para todo t.

Definição 2.7. Sejam $(X,0)$ germe de variedade analítica e $f,g \in \mathcal{O}_n$. Dizemos que f e g são:

1. $\mathcal{R}_X$-equivalentes, $f \sim_{\mathcal{R}_X} g$, quando existe $h \in \mathcal{R}_X$, tal que $f = g \circ h$.

2. $C^0\mathcal{R}_X$-equivalentes, $f \sim_{C^0\mathcal{R}_X} g$, quando existe $h \in C^0\mathcal{R}_X$, tal que $f = g \circ h$.

Definição 2.8. Sejam $(X,0) \subset (\mathbb{C}^n,0)$ um germe de variedade analítica, e $f \in \mathcal{O}_n$. Dizemos que f é $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado quando existe um inteiro l tal que para todo germe $g \in \mathcal{O}_n$ tal que o $l-$jato de g, j^lg, é igual ao l-jato de f, j^lf, tivermos $f \sim_{\mathcal{R}_X} g$. Em outras palavras

$$j^lg = j^lf \Rightarrow f \sim_{\mathcal{R}_X} g.$$

Lembramos que o $l-$jato de um germe de função é o polinômio de Taylor de ordem l de um representante do germe em torno da origem.

Proposição 2.9. *[7] Sejam $(X,0)$ germe de variedade analítica reduzida e $f \in \mathcal{O}_n$, então são equivalentes:*

i) $\mu_{BR}(f,X) < \infty$;

ii) $(V(df(\Theta_X)),0) \subset (\{0\},0)$;

iii) f *é* $\mathcal{R}_X$*-finitamente determinada.*

2.3 A variedade logarítmica característica

Sejam $(X,0) \subset (\mathbb{C}^n,0)$ um germe de variedade analítica reduzida e U uma vizinhança aberta da origem em $\mathbb{C}^n$. Para cada $x \in U$ denotamos por

$$\Theta_X(x) = \langle \delta(x);\, \delta \in \Theta_X \rangle \subset T_xU.$$

Existe uma estratificação natural de X introduzida por Saito em [37].

Lema 2.10. *[7, 37] Sejam $(X,0) \subset (\mathbb{C}^n,0)$ um germe de variedade analítica reduzida e U uma vizinhança aberta da origem em $\mathbb{C}^n$. Existe uma única estratificação $\{X_\alpha;\, \alpha \in I\}$ de U tal que:*

1. *Cada estrato X_α é uma subvariedade conexa imersa de U e U é igual a união disjunta $\cup_{\alpha\in I} X_\alpha$;*

2. *Se $x \in U$ e está no estrato X_α então o espaço tangente $T_xX_\alpha = \Theta_X(x)$;*

3. *Se X_α e X_β são estratos distintos tais que $\overline{X_\alpha} \cap X_\beta \neq \emptyset$, então $X_\beta \subset \partial X_\alpha$, sendo ∂X_α a fronteira de X_α.*

Definição 2.11. A estratificação $\{X_\alpha;\, \alpha \in I\}$ do lema anterior é chamada estratificação logarítmica de X, seus estratos X_α são chamados estratos logarítmicos. A estratificação é holonômica quando para alguma vizinhança U da origem em $\mathbb{C}^n$, a estratificação logarítmica tem finitos estratos.

Ao longo deste trabalho vamos nos concentrar em variedades analíticas holonômicas.

Proposição 2.12. *[7] Sejam $(X,0) \subset (\mathbb{C}^n,0)$ um germe de variedade holonômica. Então a estratificação logarítmica de qualquer vizinhança suficientemente pequena da origem é Whitney regular.*

Exemplo 2.13. [7] Se $(X,0) \subset (\mathbb{C}^n,0)$ é uma hipersuperfície com singularidade isolada então X possui uma decomposição em componentes irredutíveis $C_1,...,C_s$, nesse caso a estratificação logarítmica de $(X,0)$ é dada por $X_0 = \mathbb{C}^n \setminus X$, $X_i = C_i \setminus \{0\}$, $i = 1,...,s$ e $X_{s+1} = \{0\}$.

Proposição 2.14. *[7] Seja $(X,0)$ um germe de variedade analítica com estratificação $\mathfrak{X} = \{X_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$.*

i) Seja X_{α_0} o estrato logarítmico que contém a origem e Y a interseção de X com um espaço linear V, passando pela origem complementar ao espaço tangente $T_0X_{\alpha_0}$. Então a estratificação logarítmica de V é $\{X_\alpha \cap V\}$ e X é holonômica se e somente se Y também é.

ii) Suponhamos que $(X,0)$ é holonômica e sejam Y e V como anteriormente. Então $f : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C},0)$ é Morse para X na origem se e somente se $f\mid_{X_{\alpha_0}}$ tem um ponto crítico de Morse ordinário na origem e $f\mid_V$ é uma função de Morse em Y na origem.

Proposição 2.15. *[7] Sejam $(X,0) \subset (\mathbb{C}^n,0)$ uma variedade analítica com estratificação logarítmica holonômica $\mathfrak{X}$. Se $f : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C},0)$ é uma função de Morse para X, então f é $\mathcal{R}_X$ equivalente a um germe de função da forma $x_1^2 + ... + x_r^2 + h_1(y)$, sendo $x_1,...,x_r$ coordenadas locais no estrato X_0 que contem a origem e $y_1,...,y_s$ são coordenadas no espaço transversal Y e $h_1 : (Y,0) \to (\mathbb{C},0)$ é Morse para $(Y \cap X, 0)$*

Proposição 2.16. *[7] Seja $(X,0) \subset (\mathbb{C}^n,0)$ germe de variedade analítica holonômica. O germe de qualquer função de Morse em $(X,0)$ é $\mathcal{R}_X$-finitamente determinada.*

Em outras palavras, se $f \in \mathcal{O}_n$ é um germe de função de Morse em $(X,0)$ então $\mu_{BR}(f,X) < \infty$. O próximo resultado é uma caracterização para germes de funções $\mathcal{R}_X$-finitamente determinados.

Proposição 2.17. *[7] Sejam $(X,0) \in (\mathbb{C}^n,0)$ germe de variedade analítica reduzida e $f \in \mathcal{O}_n$. Então f é $\mathcal{R}_X-$finitamente determinada se, e somente se, a restrição de f a cada estrato logarítmico de $(X,0)$ é uma submersão, exceto possivelmente na origem.*

Definição 2.18. Sejam $(X,0) \subset (\mathbb{C}^n,0)$ um germe de variedade analítica com estratificação logarítmica $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$, $x \in \mathbb{C}^n$ é um ponto crítico de f quando a restrição de f ao estrato logarítmico que contém x não é uma submersão, em outras palavras $x \in X_\alpha$ é ponto crítico quando

$$df(x) : T_xX_\alpha \to \mathbb{C}$$

não é sobrejetor.

A partir de agora vamos definir a variedade logarítmica característica de $(X,0)$, $LC(X,0)$, o qual possui papel importante nas propriedades de μ_{BR}, veja [18] [19]. Sejam $\delta_1,...,\delta_m$ os geradores de Θ_X em alguma vizinhança U da origem em $\mathbb{C}^n$ e $T_U^*\mathbb{C}^n$ a restrição do fibrado contangente de $\mathbb{C}^n$ a U.

Consideramos $x_1,...,x_n,p_1,...,p_n$ um sistema de coordenadas em $T^*\mathbb{C}^n$.

Definição 2.19. Seja

$$LC_U(X) = \{(x,\xi) \in T_U^*\mathbb{C}^n;\ \xi(\delta_i(x)) = 0 \quad \forall\, i = 1,...,m\}.$$

Definimos a variedade logarítmica característica de X, $LC(X,0)$, como o germe de $LC_U(X)$ em $T_0^*\mathbb{C}^n$.

Observamos que a variedade logarítmica característica de $(X,0)$ independe da escolha dos campos de vetores $\delta_1,...,\delta_m$ que geram Θ_X, e por definição $(x,\xi) \in LC(X)$ se, e somente se, $\xi(x)$ é perpendicular a $\delta_i(x)$, $\forall\, i = 1,...,m$.

Quando a variedade $(X,0)$ é holonômica, sua estratificação logarítmica nos dá uma informação importante a respeito da variedade $LC(X)$.

Lema 2.20. *[7] Se $(X,0)$ é holonômica com estratificação logarítmica $\{X_0, ..., X_s\}$, então o fecho dos fibrados conormais, $\overline{N^*X_i} = Y_i$ são as componentes irredutíveis de $LC(X)$. Assim*

$$LC(X) = \bigcup_{i=0}^{s} Y_i = \bigcup_{i=0}^{s} \overline{N^*X_i}$$

Definição 2.21. Nas condições do lema anterior denotamos a multiplicidade de Y_i em $LC(X)$ por m_i.

Agora vamos considerar $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ germe de função $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado e $F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ uma Morsificação de f. Denotamos o número de pontos críticos de F no estrato logarítmico X_i por n_i.

Proposição 2.22. *[7] Nas condições do parágrafo anterior:*

1. *O número n_i independe da Morsificação F;*
2. *$n_0 = \mu(f)$;*
3. *f tem um ponto crítico de Morse em $x \in X_i$ se, e somente se, $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{n,x}/df(\Theta_{X,x}) = m_i$.*

Proposição 2.23. *[7] Sejam $f \in \mathcal{O}_n$ germe de função $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado. $LC(X)$ é Cohen-Macaulay em $(0, df(0))$ se, e somente se,*

$$\sum_{\alpha} m_\alpha n_\alpha = \mu_{BR}(f, X).$$

Lembrando que n_α é o número de pontos críticos de uma Morsificação de f em X_α e m_α a multiplicidade da componente irredutível Y_α.

Bruce e Roberts, provam que se a variedade $(X,0)$ tem codimensão estritamente maior que 1 então $LC(X)$ não é Cohen-Macaulay, mais precisamente eles mostram a seguinte proposição.

Proposição 2.24. *[7] Sejam $(X,0)$ um germe de variedade analítica de codimensão maior que 1, então $LC(X)$ não é Cohen Macaulay nos pontos em $X \times \{0\} \subset LC(X)$.*

2.4 O número de Bruce-Roberts relativo e a variedade logarítmica característica relativa

Finalizamos a seção anterior com a conclusão de que se $(X,0)$ tem codimensão maior que 1 então $LC(X)$ não é Cohen-Macaulay. Consideramos agora o fecho do subconjunto obtido de $LC(X) = \cup_{i=0}^{s} Y_s$, após retirarmos a componente Y_0 que corresponde ao estrato $X_0 = U \setminus X$. Representamos esse novo conjunto por $LC(X)^-$, assim

$$LC(X)^- = \overline{\bigcup_{i=1}^{s} Y_i}.$$

Ao longo desse trabalho chamamos a variedade, $LC(X)^-$, de variedade logarítmica característica relativa de $(X, 0)$.

Um fato interessante é que $LC(X)^-$ pode ser Cohen-Macaulay mesmo quando $LC(X)$ não é Cohen-Macaulay. Esse é o caso quando $(X, 0)$ é uma ICIS quase homogênea [7]. Além disso, temos um resultado similar a Proposição 2.23.

Proposição 2.25. *[7] Seja $f \in \mathcal{O}_n$ germe de função $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado. $LC(X)^-$ é Cohen-Macaulay em $(0, df(0))$ se, e somente se,*

$$\mu_{BR}^-(f, X) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{df(\Theta_X) + I_X} = \sum_{i=1}^{k+1} m_\alpha n_\alpha.$$

Lembrando que n_i é o número de pontos críticos de uma Morsificação de f em X_i e m_i a multiplicidade da componente irredutível Y_i.

Definição 2.26. Sejam $(X, 0)$ um germe de variedade analítica reduzida e $f \in \mathcal{O}_n$, definimos o número de Bruce-Roberts relativo de f com respeito a $(X, 0)$ como sendo a dimensão

$$\mu_{BR}^-(f, X) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{df(\Theta_X) + I_X}.$$

O ideal $df(\Theta_X) + I_X$ é muitas vezes representado por $df(\Theta_X^-)$.

Assim, como $\mu_{BR}(f, X)$ é a codimensão da órbita do grupo $\mathcal{R}_X$ através de f, $\mu_{BR}^-(f, X)$ é a codimensão da órbita de $\mathcal{R}_X$ através de f no anel local $\mathcal{O}_X$ (ver [7]). Observamos que se $\mu_{BR}(f, X) < \infty$ então $\mu(f) < \infty$, pois $df(\Theta_X) \subset Jf$. Mas $\mu_{BR}^-(f, X)$ pode ser finito mesmo quando f não tem singularidade isolada.

Exemplo 2.27. Sejam $(X, 0)$ germe de hipersuperfície com singularidade isolada determinado por $\phi(x, y, z) = x^3 + x^2y^2 + y^7 + z^3$ e $f : (\mathbb{C}^3, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ dada por $f(x, y, z) = xyz$, então f não tem singularidade isolada e $\mu_{BR}^-(f, X) = 53$.

No exemplo anterior o Bruce-Roberts relativo é finito porque o conjunto singular de f não está contido em $(X, 0)$. No próximo resultado nós provamos que se $\mu(f) < \infty$ então a condição $\mu_{BR}(f, X)$ finito é equivalente a $\mu_{BR}^-(f, X)$ finito.

Proposição 2.28. *Sejam $(X, 0)$ variedade analítica reduzida e $f \in \mathcal{O}_n$ germe de função com singularidade isolada. Então*

$$\mu_{BR}(f, X) < \infty \Leftrightarrow \mu_{BR}^-(f, X) < \infty.$$

Demonstração: Por hipótese temos $\mu_{BR}^{-}(f,X)<\infty$, logo $(V(df(\Theta_X)+I_X),0)\subset(\{0\},0)$. Se existe um elemento não nulo $x\in(V(df(\Theta_X)),0)$, então x não pertence a $(V(I_X),0)$, pois nesse caso x pertenceria a $V(df(\Theta_X)+I_X,0)$, mas $JfI_X\subset df(\Theta_X)$, resultando

$$h(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)=0,\ i=1,...,n \text{ e } \forall h\in I_X,$$

logo $(\partial f/\partial x_i)(x)=0,\ i=1,...,n$ e $x\in(\Sigma f,0)=(\{0\},0)$, o que é um absurdo, pois $x\neq 0$. Portanto $(V(df(\Theta_X)),0)\subset(\{0\},0)$ e $\mu_{BR}(f,X)<\infty$.

Reciprocamente suponhamos $\mu_{BR}(f,X)<\infty$ como $df(\Theta_X)\subset df(\Theta_X)+I_X$, temos $\mu_{BR}^{-}(f,X)\leq\mu_{BR}(f,X)$. logo se $\mu_{BR}(f,X)<\infty$ temos imediatamente $\mu_{BR}(f,X)^{-}<\infty$.

∎

Observamos que a implicação $\mu_{BR}(f,X)<\infty\Rightarrow\mu_{BR}^{-}(f,X)<\infty$ é sempre verdadeira, independente do conjunto singular do germe de função f.

A seguir damos uma caracterização geométrica para a finitude de $\mu_{BR}^{-}(f,X)$, cuja demonstração segue as mesmas ideias de [5, Proposição 2.8].

Proposição 2.29. *Sejam $(X,0)$ uma variedade analítica reduzida e $f\in\mathcal{O}_n$. Então $\mu_{BR}^{-}(f,X)<\infty$ se, e somente se, f restrita a todos os extratos logarítmicos exceto $\mathbb{C}^n\setminus X$ é uma submersão exceto possivelmente na origem.*

Demonstração: Se $\mu_{BR}^{-}(f,X)<\infty$ então $(V(df(\Theta_X)+I_X,0)\subset(\{0\},0)$. Seja X_α um estrato logarítmico tal que $X_\alpha\neq\mathbb{C}^n\setminus X$, então para todo $x\in X_\alpha\setminus\{0\}$, temos $T_xX_\alpha=\Theta_{X,x}$, logo $df(x)(T_xX_\alpha)=df(\Theta_{X,x})=\mathbb{C}$. Portanto se $\mu_{BR}^{-}(f,X)<\infty$ então $f\mid_{X_\alpha}$ é uma submersão. Para a recíproca suponhamos que $(\{0\},0)\subsetneq(V(df(\Theta_X)+I_X,0)$, então existe $x\neq 0$ tal que $x\in X_\alpha\subset X$ e $df(x):T_xX_\alpha\to\mathbb{C}$ é identicamente nulo, pois $df(x)(\delta(x))=0$ para todo $\delta\in\Theta_X$, e assim $f\mid_{X_\alpha}$ não é uma submersão.

∎

Capítulo 3

O número de Bruce-Roberts sobre uma hipersuperfície com singularidade isolada

Sabemos que $\mu_{BR}(f, X) \geq \mu(f)$ e que se $(X, 0)$ é uma variedade analítica reduzida de codimensão maior que 1 então $LC(X, 0)$ não é Cohen-Macaulay, ver [7]. Se $(X, 0)$ é uma hipersuperfície qualquer é um problema em aberto se $LC(X, 0)$ é Cohen-Macaulay. Quando $(X, 0)$ é uma hipersuperfície quase-homogênea com singularidade isolada e f um germe de função $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado, em [34] é provado

$$\mu_{BR}(f, X) = \mu(f) + \mu(X \cap f^{-1}(0), 0). \tag{3.1}$$

e que $LC(X, 0)$ é Cohen-Macaulay. Nesse capítulo nós generalizamos esses resultados de [34] para uma hipersuperfície com singularidade isolada mostrando

$$\mu_{BR}(f, X) = \mu(f) + \mu(f^{-1}(0) \cap X, 0) + \mu(X, 0) - \tau(X, 0), \tag{3.2}$$

e que $LC(X, 0)$ é Cohen-Macaulay. Os resultados deste capítulo estão no artigo [33].

3.1 Hipersuperfície com singularidade isolada quase homogênea

Se $(X, 0)$ é um germe de hipersuperfície com singularidade isolada com estrutura reduzida, $I_X = \langle \phi \rangle$ então

$$\Theta_X = \{\xi \in \Theta_n;\ d\phi(\xi) = \lambda\phi,\ \text{com } \lambda \in \mathcal{O}_n\}.$$

Como já observamos no capítulo anterior calcular o modulo Θ_X não é uma tarefa simples, mas quando $(X, 0)$ é uma ICIS quase homogênea Wahl exibiu em [42] os geradores de Θ_X:

Proposição 3.1. *[7, 42] Seja $(X,0)$ uma ICIS quase homogêneas com pesos $\alpha_1,...,\alpha_n$, definida por $h:(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C}^k,0)$. Então Θ_X, é gerado por*

$$\sum_{l=1}^{n}\alpha_l x_l e_l,\ I_{k+1}(J),\ h_i e_j, i=1,...,k; j=1,...,n.$$

Sendo $I_{k+1}(J)$ os menores de ordem $k+1$ da matriz

$$J=\begin{pmatrix} e_1 & \cdots & e_n\\ \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial h_l}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_l}{\partial x_n}\end{pmatrix},$$

ou seja, os menores de ordem máxima.

O campo $\varepsilon=\sum_{l=1}^{n}\alpha_l x_l e_l$ é chamado campo de Euler, os demais campos pertencem a Θ_X mesmo quando $(X,0)$ é uma variedade analítica qualquer.

Corolário 3.2. *Se $(X,0)$ é uma hipersuperfície com singularidade isolada quase homogênea então*

$$\Theta_X=\langle\varepsilon\rangle+I_2(J),$$

sendo

$$J=\begin{pmatrix} e_1 & \cdots & e_n\\ \frac{\partial \phi}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \phi}{\partial x_n}\end{pmatrix}.$$

Neste caso dado $f\in\mathcal{O}_n$ temos que

$$df(\Theta_X)=J(f,\phi)+\langle df(\varepsilon)\rangle.$$

Em [34] para provar a igualdade (3.1) é utilizado o seguinte lema algébrico:

Lema 3.3. *[7] Sejam R um anel local, A uma matriz de ordem $q\times p$, com $p\geqslant q$, v uma sequência de p elementos em R e $\hat{A}$ a matriz de ordem $(q-1)\times p$ obtida de A retirando a última linha. Consideramos*

$$u=(u_1,...,u_q)^T=A\cdot v^T,\quad \hat{u}=(u_1,...,u_{q-1})^T=\hat{A}\cdot v^T,$$

Denotamos o ideal em R gerado pelos menores de ordem q de A por $I_q(A)$ e definimos de forma similar $I_{q-1}(\hat{A})$. Finalmente sejam

$$\begin{aligned} I'&=I_{q-1}(\hat{A})+\langle u_1,...,u_{q-1}\rangle,\\ I''&=I_q(A)+\langle u_1,...,u_q\rangle,\\ I&=I_q(A)+\langle u_1,...,u_{q-1}\rangle.\end{aligned}$$

Se R é Cohen-Macaulay de dimensão p e $l(R/I) < \infty$, então

$$l(R/I) = l(R/I') + l(R/I'').$$

Em [34] considerando a matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \phi}{\partial x_n} \end{pmatrix} \text{ e o vetor } v = \varepsilon$$

no lema 3.3, temos que

$$\begin{aligned} I' &= I_1(\hat{A}) + \langle df(\varepsilon) \rangle = Jf \\ I'' &= I_2(A) + \langle df(\varepsilon), d\phi(\varepsilon) \rangle = J(f,\phi) + \langle df(\varepsilon), \phi \rangle = df(\Theta_X) + \langle \phi \rangle \\ I &= I_2(A) + \langle df(\varepsilon) \rangle = J(f,\phi) + \langle df(\varepsilon) \rangle = df(\Theta_X). \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \mu_{BR}(f, X) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{df(\Theta_X)} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{I} &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{I'} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{I''} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{Jf} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{df(\Theta_X) + \langle \phi \rangle} \\ &= \mu(f) + \mu(f^{-1}(0) \cap X, 0), \end{aligned}$$

sendo a última igualdade é consequência da seguinte proposição:

Proposição 3.4. *[7] Sejam $(X, 0)$ uma ICIS quase homogênea e $f \in \mathcal{O}_n$, tal que $f : (X, 0) \to \mathbb{C}$ tem singularidade isolada, então*

$$\mu_{BR}^{-}(f, X) := \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{df(\Theta_X) + I_X} = \mu(f^{-1}(0) \cap X, 0).$$

A seguir daremos uma caracterização para o número de Milnor de f, $\mu(f)$, em função de Θ_X quando $(X, 0)$ é hipersuperfície quase homogênea com singularidade isolada. Como $df(\Theta_X) \subset df(\Theta_X^{-})$ podemos considerar a sequência exata canônica

$$0 \to \frac{df(\Theta_X^{-})}{df(\Theta_X)} \to \frac{\mathcal{O}_n}{df(\Theta_X)} \to \frac{\mathcal{O}_n}{df(\Theta_X^{-})} \to 0,$$

então

$$\begin{aligned} \mu_{BR}(f, X) &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{df(\Theta_X^{-})}{df(\Theta_X)} + \mu_{BR}^{-}(f, X) \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{df(\Theta_X^{-})}{df(\Theta_X)} + \mu(f^{-1}(0) \cap X, 0). \end{aligned}$$

e por (3.1) temos que

$$\mu(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{df(\Theta_X^-)}{df(\Theta_X)}.$$

Observamos que a relação (3.1) é válida somente para hipersuperfície com singularidade isolada quase homogênea.

Exemplo 3.5. Sejam $(X,0)$ hipersuperfície com singularidade isolada determinada por $\phi(x,y,z) = x^3 + x^2y^2 + y^7 + z^3$, e f um germe de função dado por $f(x,y,z) = x^2 + yz$. Calculamos o número de Milnor e de Tjurina de $(X,0)$,

$$\mu(X,0) = 22, \tau(X,0) = 20.$$

Como esses números são distintos $(X,0)$ não é quase homogênea e

$$\mu_{BR}(f,X) = 23 \neq \mu(f) + \mu(X \cap f^{-1}(0),0) = 1 + 20,$$

mas continua valendo

$$\mu(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{df(\Theta_X^-)}{df(\Theta_X)}.$$

3.2 Hipersuperfície com singularidade isolada

Nessa seção vamos considerar $(X,0)$ uma hipersuperfície com singularidade isolada e $f \in \mathcal{O}_n$ germe de função $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado, nós vimos no Exemplo 3.5 que não vale a igualdade (3.1), mas vale

$$\mu_{BR}(f,X) = \mu(f) + \mu(X \cap f^{-1}(0),0) + \mu(X,0) - \tau(X,0).$$

Essa igualdade foi conjecturada em 2010 durante o doutorado de Oréfice-Okamoto. Nesta seção vamos demonstrar essa conjectura e como consequência respondemos a uma pergunta que foi proposta em 1988 por Bruce e Roberts, [7], mais precisamente mostramos que a variedade logarítmica característica de qualquer hipersuperfície com singularidade isolada, $LC(X)$, é Cohen-Macaulay.

Como já comentamos anteriormente, não é uma tarefa simples exibir os geradores do módulo Θ_X. Quando $(X,0)$ é uma hipersuperfície com singularidade isolada, não necessariamente quase homogênea, nós não temos uma caracterização para os geradores do Θ_X, para contornar esse problema nós vamos utilizar o submódulo dos campos triviais, Θ_X^T, e neste caso temos por definição

$$\Theta_X^T = \operatorname{syz}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial\phi}{\partial x_n}\right) + \langle \phi e_j,\ j = 1, ..., n\rangle,$$

como estamos supondo que $(X,0)$ tem singularidade isolada então $\partial\phi/\partial x_1, ..., \partial\phi/\partial x_n$ é uma sequência regular em $\mathcal{O}_n$ e consequentemente pela Proposição 1.23

$$\operatorname{syz}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1},...,\frac{\partial\phi}{\partial x_n}\right)=I_2\begin{pmatrix} e_1 & ... & e_n\\ \frac{\partial\phi}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial\phi}{\partial x_n}\end{pmatrix}.$$

Proposição 3.6. *[5] Sejam $(X,0)$ uma ICIS determinada por $\phi:(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C}^k,0)$ e $f\in\mathcal{O}_n$. Se f é $\mathcal{R}_X$-finitamente determinada, então $(f,\phi):(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C}^{k+1},0)$ define uma ICIS.*

Proposição 3.7. *Sejam $(X,0)$ uma hipersuperfície com singularidade isolada e $f\in\mathcal{O}_n$. Então*

$$\mu_{BR}(f,X)<\infty \text{ se, e somente se, } \dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_n}{df(\Theta_X^T)}<\infty.$$

Demonstração: Suponhamos por absurdo que $\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{O}_n/df(\Theta_X^T)=\infty$, então $(\{0\},0)\subsetneq(V(df(\Theta_X^T)),0)$, ou seja existe $x\neq 0$ tal que

$$\phi(x)\tfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)=0,\forall i=1,...,n.$$

Por hipótese f é $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado, logo $\mu(f)<\infty$ e $(V(Jf),0)=(\{0\},0)$. Assim $\phi(x)=0$ e $x\in(V(J(\phi,f)+\langle\phi\rangle),0)$, o que contradiz a Proposição 3.6.

A recíproca segue da inclusão $df(\Theta_X^T)\subset df(\Theta_X)$, a qual implica

$$\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_n}{df(\Theta_X)}\leq\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_n}{df(\Theta_X^T)}$$

∎

Com o resultado anterior obtemos a recíproca da Proposição 3.6.

Proposição 3.8. *Sejam $(X,0)$ uma hipersuperfície com singularidade isolada determinada por $\phi:(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C},0)$ e $f\in\mathcal{O}_n$. Se $(f,\phi):(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C}^2,0)$ define uma ICIS, e $\mu(f)<\infty$, então f é $\mathcal{R}_X$-finitamente determinada.*

Demonstração: Vamos provar que $(V(df(\Theta_X^T),0)=(\{0\},0)$, pois como $df(\Theta_X^T)\subset df(\Theta_X)$, então $V(df(\Theta_X))\subset V(df(\Theta_X^T))$. Por hipótese $(f,\phi):(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C}^2,0)$ define uma ICIS, então por Lê-Greuel temos que

$$\mu(X,0)+\mu(f^{-1}(0)\cap X,0)=\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_n}{J(f,\phi)+\langle\phi\rangle},$$

e portanto,

$$V(J(f,\phi)+\langle\phi\rangle,0)\subset(\{0\},0).$$

Temos que

$$df(\Theta_X^T)=J(f,\phi)+\langle\phi\tfrac{\partial f}{\partial x_j},\ j=1,...,n\rangle.$$

$$\text{Seja } x \in V(df(\Theta_X^T),0) = V(J(f,\phi) + \langle \phi \tfrac{\partial f}{\partial x_j},\ j=1,...,n\rangle, 0)$$
$$= V(J(f,\phi),0) \cap V(\langle \phi \tfrac{\partial f}{\partial x_j},\ j=1,...,n\rangle, 0),$$

então

$$\phi(x)\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = 0 \ \forall\ j=1,...,n,$$

mas por hipótese, $\mu(f) < \infty$, ou seja, existe $j_0 \in \{1,...,n\}$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x_{j_0}}(x) \neq 0,$$

logo $\phi(x) = 0$, ou seja,

$$x \in V(J(f,\phi),0) \cap V(\langle\phi\rangle,0) = V(J(f,\phi) + \langle\phi\rangle, 0) \subset (\{0\},0).$$

Portanto

$$V(df(\Theta_X^T),0) \subset (\{0\},0).$$

■

Observamos que a hipótese $\mu(f) < \infty$ não é muito restritiva, pois caso contrário temos imediatamente que f não é $\mathcal{R}_X$-finitamente determinada, pois $\mu_{BR}(f,X) \geq \mu(f)$.

Inspirados pelo caso quase homogêneo nós obtivemos o seguinte resultado também utilizando o Lema 3.3.

Proposição 3.9. *Sejam $(X,0)$ um germe de hipersuperfície com singularidade isolada determinado por $\phi : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C},0)$ e $f : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C},0)$ um germe $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado. Então*

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{df(\Theta_X^T)} = \mu(f) + \mu(f^{-1}(0) \cap X, 0) + \mu(X,0).$$

Demonstração: Consideramos os seguintes germes de aplicação

$$\begin{aligned} H : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C},0) &\to (\mathbb{C},0), \\ (x,t) &\mapsto e^t\phi(x) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} g : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C},0) &\to (\mathbb{C},0) \\ (x,t) &\mapsto f(x)+t^2 \end{aligned}$$

Aplicando o Lema 3.3 em

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n} & \frac{\partial g}{\partial t} \\ \frac{\partial H}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial H}{\partial x_n} & \frac{\partial H}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} & 2t \\ e^t\frac{\partial \phi}{\partial x_1} & \cdots & e^t\frac{\partial \phi}{\partial x_n} & e^t\phi \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$v = (0,...,0,1) \in \mathbb{C}^{n+1},$$

obtemos,

$$\begin{aligned}
I' &= I_1(\hat{A}) + \langle u_1 \rangle = Jf + \langle t \rangle, \\
I'' &= I_2(A) + \langle u_1, u_2 \rangle = \langle e^t(\tfrac{\partial f}{\partial x_i}\tfrac{\partial \phi}{\partial x_j} - \tfrac{\partial f}{\partial x_j}\tfrac{\partial \phi}{\partial x_i}), e^t(\tfrac{\partial f}{\partial x_i}\phi - 2t\tfrac{\partial \phi}{\partial x_i}), 2t, e^t\phi \rangle, \\
I &= I_2(A) + \langle u_1 \rangle = \langle e^t(\tfrac{\partial f}{\partial x_i}\tfrac{\partial \phi}{\partial x_j} - \tfrac{\partial f}{\partial x_j}\tfrac{\partial \phi}{\partial x_i}), e^t(\tfrac{\partial f}{\partial x_i}\phi - 2t\tfrac{\partial \phi}{\partial x_i}), 2t \rangle.
\end{aligned}$$

Pela Proposição 5.19,

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n+1}}{I} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{df(\Theta_X^T)} < \infty$$

assim, pelo Lema 3.3,

$$\dim_{\mathbb{C}} \left(\frac{\mathcal{O}_{n+1}}{I} \right) = \dim_{\mathbb{C}} \left(\frac{\mathcal{O}_{n+1}}{I'} \right) + \dim_{\mathbb{C}} \left(\frac{\mathcal{O}_{n+1}}{I''} \right),$$

mas

$$\begin{aligned}
&\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n+1}}{I'} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{Jf} = \mu(f), \\
&\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n+1}}{I''} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle \phi \rangle + J(f,\phi)} = \mu(X,0) + \mu(f^{-1}(0) \cap X) \text{ pela fórmula de Lê-Greuel }.
\end{aligned}$$

Assim obtemos a igualdade

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{df(\Theta_X^T)} = \mu(f) + \mu(f^{-1}(0) \cap X, 0) + \mu(X,0).$$

■

Corolário 3.10. *Nas mesmas condições da proposição anterior*

$$\mu_{BR}(f,X) = \mu(f) + \mu(f^{-1}(0) \cap X, 0) + \mu(X,0) - \dim_{\mathbb{C}} \frac{df(\Theta_X)}{df(\Theta_X^T)}.$$

Demonstração: Consideramos a sequência exata

$$0 \to \frac{df(\Theta_X)}{df(\Theta_X^T)} \to \frac{\mathcal{O}_n}{df(\Theta_X^T)} \to \frac{\mathcal{O}_n}{df(\Theta_X)} \to 0,$$

logo

$$\begin{aligned}
\mu_{BR}(f,X) &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{df(\Theta_X^T)} - \dim_{\mathbb{C}} \frac{df(\Theta_X)}{df(\Theta_X^T)} \\
&= \mu(f) + \mu(f^{-1}(0) \cap X, 0) + \mu(X,0) - \dim_{\mathbb{C}} \frac{df(\Theta_X)}{df(\Theta_X^T)}.
\end{aligned}$$

a última igualdade segue da Proposição 3.9.

■

Nosso objetivo agora é mostrar que

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{df(\Theta_X)}{df(\Theta_X^T)} = \tau(X,0).$$

O que será feito em duas etapas, primeiro vamos mostrar que a dimensão do quociente acima não depende do germe de função $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado f, depois consideramos um germe de função específico, para o qual teremos a igualdade desejada.

O próximo lema dá uma caracterização para os elementos de Θ_X^T.

Lema 3.11. *Sejam $(X,0)$ germe de hipersuperfície com singularidade isolada determinado por $\phi : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C},0)$. Suponhamos que $\eta \in \Theta_X$ e $d\phi(\eta) = \lambda\phi$, para algum $\lambda \in \mathcal{O}_n$. Nessas condições*

$$\eta \in \Theta_X^T \text{ se, somente se, } \lambda \in J\phi.$$

Demonstração: Se $\eta \in \Theta_X^T$, então $\lambda \in J\phi$, pela forma como definimos Θ_X^T. Reciprocamente, se $\lambda \in J\phi$, então existe $\theta \in \Theta_n$ tal que $d\phi(\theta) = \lambda$. Logo $d\phi(\eta - \phi\theta) = 0$ e $\eta - \phi\theta$ pertence ao syzygy de $J\phi$. Como ϕ tem singularidade isolada, $\partial\phi/\partial x_1, ..., \partial\phi/\partial x_n$ é uma sequência regular em $\mathcal{O}_n$, portanto $\mathrm{syz}(\partial\phi/\partial x_1, ..., \partial\phi/\partial x_n)$ é gerado pelas relações triviais, mais especificamente

$$\mathrm{syz}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial\phi}{\partial x_n}\right) = \left\langle \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial\phi}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}, i,j = 1...n \right\rangle.$$

Assim $\eta - \phi\theta \in \Theta_X^T$, resultando $\eta \in \Theta_X^T$, pois $\phi\theta \in \Theta_X^T$.

■

O lema a seguir caracteriza os campos de vetores em Θ_X que zeram o diferencial de um germe de função $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado.

Lema 3.12. *Sejam $(X,0)$ uma hipersuperfície com singularidade isolada determinada por $\phi : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C},0)$ e $f \in \mathcal{O}_n$ germe de função $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado. Se existe $\eta \in \Theta_X$ tal que $df(\eta) = 0$, então $\eta \in \Theta_X^T$.*

Demonstração: Sabemos que $(f,\phi) : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C}^2,0)$ define uma ICIS pela Proposição 3.6, consequentemente a variedade do ideal $J(f,\phi)$, $V(J(f,\phi))$, tem dimensão 1 (Proposição 1.7). Além disso como ϕ e f possuem singularidade isolada, então para todo $x \neq 0$, $x \in V(J(f,\phi))$, o posto da matriz jacobiana de (f,ϕ) em x é igual a 1. Dessa maneira $V(J(f,\phi))$ é uma IDS do tipo $(2,n,2)$, portanto é Cohen-Macaulay e a variedade $V(J(f,\phi))$ é reduzida pelo Teorema 1.58.

Suponhamos agora que $\eta \notin \Theta_X^T$. Pelo Lema 3.11, $d\phi(\eta) = \lambda\phi$, para algum $\lambda \in \mathcal{O}_n \setminus J\phi$, mas $df(\eta) = 0$ ou seja $\eta \in \mathrm{syz}(\partial f/\partial x_1, ..., \partial f/\partial x_n) = \langle \partial f/\partial x_i \partial/\partial x_j - \partial f/\partial x_j \partial/\partial x_i \rangle$, pois f tem singularidade isolada e portanto $\partial f/\partial x_1, ..., \partial f/\partial x_n$ é sequência regular.

Assim $\lambda\phi = d\phi(\eta) \in J(f,\phi)$, consequentemente $V(J(f,\phi)) \subset (V(\lambda\phi)) = V(\lambda) \cup V(\phi)$. Consideramos agora $C_1, ..., C_k$ as componentes irredutíveis de $V(J(\phi, f))$. Como $V(J(\phi, f))$ é reduzida de dimensão 1, cada componente C_i é uma curva irredutível em $(\mathbb{C}^n, 0)$. Em particular $C_i \subset V(\lambda)$ ou $C_i \subset V(\phi)$, para cada $i = 1, ..., k$.

Se $C_i \not\subset V(\phi)$ para todo $i = 1, ..., k$, então $C_i \subset V(\lambda)$ para todo $i = 1, ..., k$, logo $V(J(f,\phi)) \subset V(\lambda)$. Portanto $\lambda \in \sqrt{\lambda} \subset \sqrt{J(f,\phi)} = J(f,\phi) \subset J(\phi)$, o que é uma contradição pela forma como tomamos λ. Por outro lado se $C_i \subset V(\phi)$ para algum i, então $C_i \subset V(\langle\phi\rangle + J(f,\phi))$, o que é um absurdo, pois (f,ϕ) define uma ICIS e ϕ tem singularidade isolada.

∎

Proposição 3.13. *Sejam $(X,0)$ uma hipersuperfície com singularidade isolada e $f \in \mathcal{O}_n$ germe de função $\mathcal{R}_X$-finitamente determinando. Definamos*

$$\begin{aligned} E : \Theta_X &\to df(\Theta_X). \\ \xi &\mapsto df(\xi) \end{aligned}$$

Então E induz um isomorfismo

$$\overline{E} : \frac{\Theta_X}{\Theta_X^T} \to \frac{df(\Theta_X)}{df(\Theta_X^T)}$$

Demonstração: A aplicação E é sobrejetora e $E(\Theta_X^T) = df(\Theta_X^T)$ pela forma como definimos E, desta maneira basta mostrarmos que

$$\ker(E) \subset \Theta_X^T,$$

ou seja, se $\eta \in \Theta_X$ é tal que $df(\eta) = 0$, então $\eta \in \Theta_X^T$. Portanto segue do lema anterior que $\ker(E) \subset \Theta_X^T$.

∎

Pela proposição anterior existe uma curiosidade surpreendente, o quociente $df(\Theta_X)/df(\Theta_X^T)$ independe do germe de função $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado f que estamos considerando.

A seguir damos uma caracterização para o número de Tjurina de uma hipersuperfície com singularidade isolada $(X,0)$ utilizando os campos de vetores tangentes a hipersuperfície, Θ_X.

Proposição 3.14. *Sejam $(X,0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ hipersuperfície com singularidade isolada determinada por $\phi : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ e $p : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ uma função linear não nula. Então*

$$\tau(X,0) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{dp(\Theta_X)}{dp(\Theta_X^T)}.$$

Demonstração: Como p é uma função linear não nula, podemos supor que $p(x_1,...,x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$, com $a_1 \neq 0$. Consideramos a seguinte sequência exata

$$0 \longrightarrow \ker(\alpha) \xrightarrow{i} \frac{\mathcal{O}_n}{dp(\Theta_X^T)} \xrightarrow{\alpha} \frac{\mathcal{O}_n}{dp(\Theta_X^T)} \xrightarrow{\pi} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle\phi\rangle + J\phi} \longrightarrow 0$$

onde α é dada pela multiplicação por $\overline{\partial\phi/\partial x_1}$, i é a inclusão e π projeção. Essa sequência é exata, pois

$$dp(\Theta_X^T) = \langle\phi\rangle + J(p,\phi) \subset \langle\phi\rangle + J\phi.$$

Além disso,

$$\ker(\pi) = \frac{\langle\phi\rangle + J\phi}{\langle\phi\rangle + J(p,\phi)},$$

e

$$\mathrm{Im}(\alpha) = \frac{\langle\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\rangle + \langle\phi\rangle + J(p,\phi)}{\langle\phi\rangle + J(p,\phi)},$$

então $\ker(\pi) \subset \mathrm{Im}(\alpha)$. A inclusão contrária segue porque $\pi \circ \alpha = 0$. Assim,

$$\dim_{\mathbb{C}} \ker(\alpha) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle\phi\rangle + J\phi} = \tau(X,0).$$

Para concluirmos basta provarmos a igualdade

$$\ker(\alpha) = \frac{dp(\Theta_X)}{dp(\Theta_X^T)} = \frac{dp(\Theta_X)}{\langle\phi\rangle + J(p,\phi)}.$$

De fato, dado $g \in dp(\Theta_X)$ existe $\xi \in \Theta_X$ tal que $g = dp(\xi)$.

Nós temos $d\phi(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \partial\phi/\partial x_i = \lambda\phi$, para algum $\lambda \in \mathcal{O}_n$, e $dp(\xi) = \sum_{i=1}^{n} a_i\xi_i$. Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial x_1} g = \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\sum_{i=1}^{n} a_i\xi_i &= a_1\left(\lambda\phi - \sum_{i=2}^{n}\xi_i\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right) + \sum_{j=2}^{n} a_j\xi_j\frac{\partial\phi}{\partial x_1} \\ &= a_1\lambda\phi + \sum_{j=2}^{n}\xi_j\left(a_j\frac{\partial\phi}{\partial x_1} - a_1\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right) \in \langle\phi\rangle + J(p,\phi).\end{aligned}$$

O que mostra a inclusão

$$\frac{dp(\Theta_X)}{\langle\phi\rangle + J(p,\phi)} \subset \ker(\alpha).$$

Reciprocamente, seja $g \in \mathcal{O}_n$ tal que $g\partial\phi/\partial x_1 \in \langle\phi\rangle + J(p,\phi)$, então existem $b, b_{ij} \in \mathcal{O}_n$

tais que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\phi}{\partial x_1}g &= b\phi + \sum_{1\le i<j\le n} b_{ij}\left(a_i\frac{\partial\phi}{\partial x_j} - a_j\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)\\
&= b\phi + \frac{\partial\phi}{\partial x_1}(-b_{12}a_2 - \cdots - b_{1n}a_n) + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}(b_{12}a_1 - b_{23}a_3 - \cdots - b_{2n}a_n)\\
&\quad + \cdots + \frac{\partial\phi}{\partial x_n}(b_{1n}a_1 + b_{2n}a_2 + \cdots + b_{(n-2)n}a_{n-2} + b_{(n-1)n}a_{n-1})\\
&= b\phi + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\left(\sum_{\substack{k=1,\\ k\neq j}}^{n} b'_{jk}a_k\right),
\end{aligned}$$

onde $b'_{jk} = -b_{jk}$, se $j < k$ e $b'_{jk} = b_{kj}$, se $k < j$. Dessa maneira,

$$b\phi = (g - \sum_{k=2}^{n} b'_{1k}a_k)\frac{\partial\phi}{\partial x_1} - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\left(\sum_{\substack{k=1,\\ k\neq j}}^{n} b'_{jk}a_k\right).$$

e consequentemente

$$\xi = (g - \sum_{k=2}^{n} b'_{1k}a_k)\frac{\partial}{\partial x_1} - \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{\substack{k=1,\\ k\neq j}}^{n} b'_{jk}a_k\right)\frac{\partial}{\partial x_j} \in \Theta_X,$$

finalmente com um simples cálculo obtemos $dp\left(\frac{1}{a_1}\xi\right) = g$ e

$$\ker(\alpha) \subset \frac{dp(\Theta_X)}{\langle\phi\rangle + J(p,\phi)}.$$

■

Como consequência imediata das Proposições 3.13 e 3.14, nós temos

Teorema 3.15. *Sejam $(X,0)\subset(\mathbb{C}^n,0)$ hipersuperfície com singularidade isolada e $f\in\mathcal{O}_n$ germe $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado. Então*

$$\tau(X,0) = \dim_{\mathbb{C}}\frac{\Theta_X}{\Theta_X^T} = \dim_{\mathbb{C}}\frac{df(\Theta_X)}{df(\Theta_X^T)}.$$

Observamos que a primeira igualdade também foi obtida por Tajima em [40] usando técnicas diferentes. Usando o Corolário 3.10 e o Teorema 3.15 obtemos nosso principal resultado desse capítulo.

Teorema 3.16. *Sejam $(X,0) \subset (\mathbb{C}^n,0)$ hipersuperfície com singularidade isolada definida por $\phi : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C},0)$ e $f \in \mathcal{O}_n$ germe de função $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado. Então,*

$$\mu_{BR}(f,X) = \mu(f) + \mu(f^{-1}(0) \cap X, 0) + \mu(X,0) - \tau(X,0).$$

Notamos que Kourliouros em [23] também obteve esse resultado utilizando outras técnicas.

O próximo corolário estende o Corolário 2.16 em [5].

Corolário 3.17. *Sejam $\phi, f : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C},0)$ germes de função com singularidade isolada, $(X,0)$ e $(Y,0)$ hipersuperfícies determinadas por ϕ e f, respectivamente. Se $\mu_{BR}(f,X) < \infty$ (ou $\mu_{BR}(\phi,Y) < \infty$), então*

$$\mu_{BR}(f,X) - \mu_{BR}(\phi,Y) = \tau(Y,0) - \tau(X,0).$$

Demonstração: Por hipótese nós temos que (f,ϕ) define uma ICIS, como ambos os germes de funções f e ϕ possuem singularidade isolada temos pela Proposição 3.8 que

$$\mu_{BR}(\phi,Y) < \infty.$$

Pelo Teorema 3.16, segue

$$\mu_{BR}(f,X) - \mu_{BR}(\phi,Y) = \tau(Y,0) - \tau(X,0).$$

■

O próximo corolário nos diz que o número de Bruce-Roberts é um invariante topológico, quando $(X,0)$ é uma hipersuperfície com singularidade isolada, ver também [23].

Corolário 3.18. *Sejam $(X,0) \subset (\mathbb{C}^n,0)$ germe de hipersuperfície com singularidade isolada, $f,g \in \mathcal{O}_n$, $\mathcal{R}_X$-finitamente determinados tais que f é $C^0\mathcal{R}_X$- equivalente a g. Então $\mu_{BR}(f,X) = \mu_{BR}(g,X)$.*

Demonstração: Seja $h : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C}^n,0)$ germe de homomorfismo tal que $h(X) = X$ e $g = f \circ h$. Assim $h^{-}(X \cap f^{-1}(0)) = X \cap h^{-1}(f^{-1}(0)) = X \cap g^{-1}(0)$ e $\mu(f^{-1}(0) \cap X) = \mu(g^{-1}(0) \cap X)$, pois o número de Milnor de uma ICIS é um invariante topológico. Além disso, f e g também são $C^0\mathcal{R}_X$-equivalentes, então $\mu(f) = \mu(g)$ pela Proposição 1.49. Portanto segue do Teorema 3.16 a igualdade

$$\mu_{BR}(f,X) = \mu_{BR}(g,X).$$

■

Do Teorema 3.16 e da fórmula de Lê-Greuel, Proposição 1.53, obtemos:

Corolário 3.19. *Sejam $(X,0)$ uma hipersuperfície com singularidade isolada determinanda por $\phi : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C},0)$, e $f \in \mathcal{O}_n$ germe de função $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado. Então*
$$\mu_{BR}(f,X) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle f \rangle + J(f,\phi)} + \mu(X,0) - \tau(X,0).$$

A partir dos resultados anteriores podemos relacionar o número de Bruce-Roberts de uma projeção linear genérica com a multiplicidade polar de $(X,0)$ de ordem máxima $m_{n-1}(X)$.

Definição 3.20. [26] Seja $(X,0) \subset (\mathbb{C}^n,0)$ um germe de variedade analítica de dimensão d. A k-ésima variedade polar de $(X,0)$, $0 \leq k \leq d-1$, é o fecho do conjunto dos pontos críticos da restrição de uma projeção linear genérica $p : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{d-k+1}$ a parte regular de X, a qual será denotada por $P_k(X,0,p)$. Além disso a k-ésima multiplicidade polar de X $m_k(X)$, é definida como sendo a multiplicidade de $P_k(X,0,p)$ em 0.

Proposição 3.21. *[25] Sejam $(X,0)$ uma ICIS definida por $(\phi_1,...,\phi_k) : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C}^k,0)$, então para $i = 1,...,n-k-1$ a i-ésima multiplicidade polar de $(X,0)$ é igual a*

$$m_i(X,0) = \mu^{i+1}(X,0) + \mu^i(X,0),$$

sendo $\mu^l(X,0)$ o número de Milnor de $X \cap H^l$ com H^l um hiperplano genérico de dimensão $n-k-l$, lembrando que um hiperplano genérico de dimensão $n-k-l$ é dado pela imagem inversa de uma aplicação linear genérica de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^{k+l}$.

Definição 3.22. [13] Seja $(X,0) \subset (\mathbb{C}^n,0)$ uma ICIS de dimensão d, a d-ésima multiplicidade polar de X, $m_d(X)$, é definida pela igualdade

$$m_d(X) = \mu(X,0) + \mu(X \cap l^{-1}(0),0),$$

sendo $l : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ projeção linear genérica.

Seja $(X,0) \subset (\mathbb{C}^n,0)$ hipersuperfície com singularidade isolada definida por $\phi : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C},0)$. Pela demonstração das Proposições 3.9 e 3.14 temos

$$\mu_{BR}(p,X) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle \phi \frac{\partial p}{\partial x_i} \rangle + J(p,\phi)} - \tau(X,0)$$

sendo $p : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C},0)$ uma projeção linear genérica, portanto

$$m_{n-1}(X,0) = \mu_{BR}(p,X) + \tau(X,0)$$

Assim, podemos relacionar o número de Bruce-Roberts de uma projeção linear genérica com a obstrução de Euler da hipersuperfície com singularidade isolada, $(X,0)$.

De fato, Jorge Perez e Saia mostraram em [22] que se $(X,0)$ é uma ICIS de dimensão d, então:

$$1+(-1)^d\mu(X,0)=\sum_{i=0}^{d}(-1)^i m_i(X,0), \tag{3.3}$$

sendo $m_i(X,0)$ as i-ésimas multiplicidades polares de uma ICIS $(X,0)$. Tomamos como definição para obstrução de Euler de uma ICIS, $(X,0)$, de dimensão d a relação provada por Lê e Tessier em [26]

$$Eu(X,0)=\sum_{i=0}^{d-1}(-1)^{d-i-1}m_i(X,0). \tag{3.4}$$

Seja $(X,0)$ uma hipersuperfície com singularidade isolada, obtemos de (3.3):

$$\begin{aligned}(-1^{n-2})(1+(-1)^{n-1}\mu(X,0)) &= (-1)^{n-2}\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{-i}m_i(X,0)\\ &= \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n-i-2}m_i(X,0)\\ &= \sum_{i=0}^{n-2}(-1)^{n-i-2}m_i(X,0)-m_{n-1}(X,0)\end{aligned}$$

e por (3.4)

$$m_{n-1}(X,0)-\mu(X,0)=Eu(X,0)+(-1)^{n-1}.$$

Com isto demonstramos o seguinte:

Corolário 3.23. *Sejam $p:(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C},0)$ projeção linear genérica e $(X,0)\subset(\mathbb{C}^n,0)$ hipersuperfície com singularidade isolada. Então:*

1. $m_{n-1}(X,0)=\mu_{BR}(p,X)+\tau(X,0)$;
2. $Eu(X,0)=\mu_{BR}(p,X)+\tau(X,0)-\mu(X,0)+(-1)^n$.

Pelo corolário anterior concluímos também que o número de Bruce Roberts de uma projeção linear generia com relação a uma hipersuperfície com singularidade isolada independe da projeção.

3.3 A variedade logarítmica característica de uma hipersuperfície com singularidade isolada

Nessa seção nosso principal objetivo é mostrar que a variedade logarítmica característica de uma hipersuperfície com singularidade isolada $(X,0)$, $LC(X)$, é Cohen-Macaulay.

Sejam U uma vizinhança aberta da origem em $\mathbb{C}^n$, $\Theta_X = \langle \delta_1, ..., \delta_m \rangle$,

$$LC_U(X) = \{(x,p) \in T^*_U\mathbb{C}^n, (p(\delta_i(x))) = 0, \forall i = 1, ..., m\}.$$

Então $LC(X)$ é o germe de $LC_U(X)$ no fibrado cotangente de $\mathbb{C}^n$ na origem, $T^*_0\mathbb{C}^n$.

Teorema 3.24. *Seja $(X,0)$ uma hipersuperfície com singularidade isolada. Então a variedade logarítmica característica de $(X,0)$, $LC(X)$, é Cohen-Macaulay.*

Demonstração: Seja $\phi : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ germe de variedade analítica tal que $(\phi^{-1}(0), 0) = (X, 0)$. Para concluir o teorema precisamos provar que $LC(X)$ é Cohen-Macaulay em cada ponto. Assim seja $(0,p) \in LC(X)$ então existe um germe $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado, tal que $df(0) = p$.

Consideramos a estratificação logarítmica de $(X,0)$, cujos estratos são $X_0 = \mathbb{C}^n \setminus X, X_i = C_i \setminus \{0\}$ $\forall i = 1, ..., s$ e $X_{s+1} = \{0\}$ sendo C_i as componentes irredutíveis de $(X,0)$. Seja

$$\begin{aligned} F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) &\to (\mathbb{C}, 0) \\ F(x,t) &\mapsto f_t(x) \end{aligned}$$

uma Morsificação de f.

Pela Proposição 2.23, precisamos mostrar

$$\mu_{BR}(f,X) = \sum_{i=1}^{s} m_i n_i,$$

sendo n_i o número de pontos críiticos de f_t em X_i e m_i a multiplicidade da componente irredutível Y_i em $LC(X)$.

Pelo Corolário 3.19:

$$\mu_{BR}(f,X) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle f \rangle + J(f,\phi)} + \mu(X,0) - \tau(X,0).$$

Assim sejam

$$R := \frac{\mathcal{O}_{n+1}}{\langle F \rangle}, \quad I := \frac{\langle F \rangle + J(\phi, f_t)}{\langle F \rangle}, \text{ e } \frac{R}{I} = \frac{\mathcal{O}_{n+1}}{\langle F \rangle + J(f_t, \phi)},$$

Temos que R é um anel Cohen-Macaulay de dimensão n, pois F define uma hipersuperfície em $\mathcal{O}_{n+1}$. Já o ideal I é gerado pelos menores de ordem 2 da matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} & \frac{\partial f_t}{\partial x_1} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_n} & \frac{\partial f_t}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Como f_t tem pontos críticos isolados e t está variando temos

$$\dim \frac{R}{I} = 1 = n - (n-2+1)(2-2+1),$$

então R/I é determinantal e pelo Teorema 1.6 é um anel Cohen-Macaulay. Então, pelo Princípio da Conservação do Número, temos para todo $t \neq 0$

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle f \rangle + J(f,\phi)} = \sum_{i=0}^{s+1} \sum_{x \in X_i} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n,x}}{\langle f_t \rangle + J(f_t,\phi)}.$$

Agora vamos analisar o somatório em cada estrato logarítmico:

1. $X_0 = \mathbb{C}^n \setminus X$:

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in X_0} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n,x}}{\langle f_t \rangle + J(f_t,\phi)} &= \sum_{x \in X_0} \mu_{BR}(f,X)_x - \mu(X)_x + \tau(X)_x \\
&= \sum_{x \in X_0} \mu_{BR}(f,X)_x \\
&= \sum_{x \in X_0 \cap S f_t} m_0 \\
&= n_0 m_0 = \mu(f),
\end{aligned}$$

pois $X_0 = \mathbb{C}^n \setminus X$, $n_0 = \mu(f)$ e $m_0 = 1$.

2. $X_i = C_i \setminus \{0\},\ i = 1, ..., s$:

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in X_i} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n,x}}{\langle f_t \rangle + J(f_t,\phi)} &= \sum_{x \in X_i} \mu_{BR}(f_t,X)_x - \mu(X)_x + \tau(X)_x \\
&= \sum_{x \in X_i} \mu_{BR}(f,X)_x \\
&= \sum_{x \in X_i \cap \Sigma f_t} m_i \\
&= n_i m_i,
\end{aligned}$$

pois, $\mu(X,0)_x = \tau(X,0)_x = 0$ para todo $x \in X_i$, $i = 1, ..., s$ e $\mu_{BR}(f,X)_x \neq 0$ somente nos pontos críticos de f_t.

3. $X_{s+1} = \{0\}$, então

$$\begin{aligned}
\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n,0}}{\langle f_t \rangle + J(f_t,\phi)} &= \mu_{BR}(f,X) - \mu(X,0) + \tau(X,0) \\
&= m_{s+1} - \mu(X,0) + \tau(X,0) \\
&= n_{s+1} m_{s+1} - \mu(X,0) + \tau(X,0),
\end{aligned}$$

pois nesse caso $n_{s+1} = 1$.

Assim obtemos que em cada estrato os somatórios são finitos e além disso

$$\begin{aligned}\mu_{BR}(f, X) &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle f \rangle + J(f, \phi)} + \mu(X, 0) - \tau(X, 0) \\ &= \sum_{i=0}^{k+1} \sum_{x \in X_i} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n,x}}{\langle f_t \rangle + J(f_t, \phi)} + \mu(X, 0) - \tau(X, 0) \\ &= n_0 m_0 + \sum_{i=1}^{s+1} n_i m_i + n_{k+1} m_{k+1} \\ &= \sum_{i=0}^{s+1} n_i m_i.\end{aligned}$$

■

Corolário 3.25. *Sejam $(X, 0)$ uma hipersuperfície com singularidade isolada e $f \in \mathcal{O}_n$ germe de função $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado. Então,*

$$\mu_{BR}(f, X) = \mu(f) + N + m_{n-1}(X, 0) - \tau(X, 0),$$

sendo N o número de pontos críticos de uma Morsificação f em $X \setminus \{0\}$.

Demonstração: Pelo Teorema 3.24 e Proposição 2.22, temos

$$\begin{aligned}\mu_{BR}(f, X) &= \sum_{i=0}^{s+1} n_i m_i \\ &= \mu(f) + N + n_{s+1} m_{s+1} \\ &= \mu(f) + N + \mu_{BR}(p, X)_0 \\ &\overset{(*)}{=} \mu(f) + N + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle p \rangle + J(p, \phi)} + \mu(X, 0) - \tau(X, 0) \\ &\overset{(**)}{=} \mu(f) + N + \mu(p) + \mu(X \cap p^{-1}(0), 0) + \mu(X, 0) - \tau(X, 0) \\ &= \mu(f) + N + m_{n-1}(X, 0) - \tau(X, 0),\end{aligned}$$

onde $p : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ é uma projeção linear genérica, $(*)$ segue do Corolário 3.19, $(**)$ segue da fórmula de Lê-Greuel e a última igualdade segue de novo da fórmula de Lê-Greuel e da definição de multiplicidade polar de ordem máxima.

■

A constância do número de Milnor em uma família de funções holomorfas é controlada por meio do fecho integral do ideal jacobiano, veja [15]. Resultados similares tem sido obtidos para o número de Bruce-Roberts em [1], mas os autores precisaram da hipótese adicional de $LC(X,0)$ ser Cohen-Macaulay. Segue do nosso Teorema 3.24 que os resultados em [1] são verdadeiros para qualquer hipersuperfície com singularidade isolada.

Mais específicamente, sejam $(X,0) \subset (\mathbb{C}^n,0)$ hipersuperfície com singularidade isolada, $f : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C},0)$ germe de função $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado e $F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C},0) \to (\mathbb{C},0)$ uma deformação de f, tal que $f_t(x) = F(x,t)$. Dizemos que F é uma deformação μ_{BR}-constante de f quando $\mu_{BR}(f_t,X) = \mu_{BR}(f,X)$ para t suficientemente pequeno.

Nós também recordamos que a curva polar de F é definida como $C := \{(x,t) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C};\ dF(\delta_i)(x,t) = 0\, \forall i = 1,\ldots,p\}$, sendo $\delta_1,\ldots,\delta_p$ os geradores de Θ_X. O seguinte corolário é uma consequência imediata dos resultados de [1] e do Teorema 3.24.

Corolário 3.26. *Sejam $(X,0) \subset (\mathbb{C}^n,0)$ uma hipersuperfície com singularidade isolada e $F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C},0) \to (\mathbb{C},0)$ uma deformação de um germe $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado, f, tal que $f_t(x) = F(x,t)$. Então são equivalentes:*

(i) F é uma deformação μ_{BR} constante de f;

(ii) A curva polar de F com respeito a $\{t=0\}$ é igual a $C = \{0\} \times \mathbb{C}$.

Outro resultado interessante para famílias de funções μ_{BR}-constantes são obtidos por Grulha em [18]. Novamente esse resultado precisa da hipótese adicional $LC(X,0)$ Cohen-Macaulay. Seade-Tibar-Verjovsky em [38], provaram que se $X_1 \cup ... \cup X_{k+1} = X \setminus \{0\}$ é a parte regular de $(X,0)$, então a obstrução de Euler de f com respeito a $(X,0)$ é dada por

$$Eu(f,X) = (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{k} n_i,$$

sendo n_i o número de pontos críticos de uma morsificação de f em X_i. Tomaremos a igualdade anterior como a definição para obstrução de Euler de f com repeito a $(X,0)$.

Corolário 3.27. *Com as mesmas notações do Corolário 3.26:*

(i) Se $\mu_{BR}(f_t,X)$ é constante, então $\mu(f_t)$, $\mu(X \cap f_t^{-1}(0),0)$ e $Eu(f_t,X)$ são constantes para a família;

(ii) Se $\mu(f_t)$ é constante, então $Eu(f_t,X)$ ou $\mu(X \cap f_t^{-1}(0),0)$ ser constante implica $\mu_{BR}(f_t,X)$ ser constante para a familia.

Capítulo 4

O Número de Bruce-Roberts relativo sobre uma hipersuperfície com singularidade isolada

Quando $(X, 0)$ é uma ICIS quase homogênea e $f \in \mathcal{O}_n$ é um germe de função tal que $f : (X, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ tem ponto critico isolado então pela Proposição 3.4

$$\mu_{BR}^{-}(f, X) = \mu(f^{-1}(0) \cap X, 0). \tag{4.1}$$

Neste capítulo nós consideramos hipersuperfícies com singularidade isolada e provamos uma caracterização para o número de Bruce-Roberts relativo, a qual estende a igualdade anterior. Mostramos também que a variedade logarítmica característica relativa, $LC(X)^{-}$, é Cohen-Macaulay. Na última seção apresentamos exemplos considerando variedades analíticas com singularidade não isoladas. Todos os resultados desse capítulo estão no artigo [27].

4.1 O número de Bruce-Roberts relativo

Nosso primeiro resultado exibe uma condição equivalente ao número de Bruce-Roberts Relativo ser finito.

Proposição 4.1. *Sejam $(X, 0)$ uma hipersuperfície com singularidade isolada determinada por $\phi : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ e $f \in \mathcal{O}_n$. A aplicação $(\phi, f) : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ define uma ICIS se, e somente se, $\mu_{BR}^{-}(f, X) < \infty$.*

Demonstração: Suponhamos inicialmente que ϕ, f define uma ICIS então

$$V(J(\phi, f) + \langle \phi \rangle, 0) \subset \{0\},$$

mas $J(\phi, f) + \langle \phi \rangle \subset df(\Theta_X^-)$, logo

$$V(df(\Theta_X^-), 0) \subset V(J(\phi, f) + \langle \phi \rangle, 0) \subset \{0\},$$

então $\mu_{BR}^-(f, X) < \infty$. Para provarmos a recíproca seguimos a mesma ideia de [5, Proposição 2.8].

Suponhamos por absurdo que (ϕ, f) não defina uma ICIS, então

$$(\{0\}, 0) \subsetneq V(J(f, \phi) + \langle \phi \rangle, 0),$$

logo existe x, não nulo, tal que $x \in V(J(f, \phi) + \langle \phi \rangle, 0)$. Dessa maneira $x \in X$ e existe um estrato logarítmico $X_\alpha \neq \mathbb{C}^n \setminus X$, tal que $x \in X_\alpha$. Observamos agora que $x \in V(J(f, \phi) + \langle \phi \rangle, 0) \subset V(J(f, \phi), 0)$, logo x anula todos os menores de ordem 2 da matriz jacobiana $J[f, \phi]$, mas ϕ define uma hipersuperfície com singularidade isolada $(X, 0)$, logo x é um ponto regular e consequentemente $\nabla f(x)$ é combinação linear de $\nabla \phi(x)$. Por hipótese $\mu_{BR}^-(f, X)$ é finito, então pela Proposição 2.29 $f \mid_{X_\alpha}$ é uma submersão, ou seja, existe um campo $\xi \in \Theta_X$, tal que $df(x)(\xi(x)) \neq 0$, mas

$$df(x)(\xi(x)) = \langle \nabla f(x), \xi(x) \rangle = \langle \beta(x) \nabla \phi(x), \xi(x) \rangle = \beta(x) d\phi(x)(\xi(x)) = 0,$$

pois $x \in (X, 0)$ e $\xi \in \Theta_X$. O que é um absurdo, logo se $\mu_{BR}^-(f, X) < \infty$, então (ϕ, f) define uma ICIS.

■

Observamos que na proposição anterior não supomos f com singularidade isolada, mas a prova deixa evidente que $\Sigma f \subset \mathbb{C}^n \setminus X$ e não acrescentamos essa condição porque ela é equivalente a $\mu_{BR}^-(f, X) < \infty$.

O próximo lemma é bastante técnico e fundamental para provarmos a igualdade

$$\mu_{BR}^-(f, X) = \mu(X \cap f^{-1}(0), 0) + \mu(X, 0) - \tau(X, 0),$$

sendo $(X, 0)$ uma hipersuperfície com singularidade isolada e $f \in \mathcal{O}_n$ tal que $\mu_{BR}^-(f, X) < \infty$, mas antes de demonstrá-lo vamos comentar alguns fatos específicos de álgebra comutativa que são utilizados na demonstração.

Sejam R um anel comutativo com unidade e M um R-módulo, dizemos que um ideal primo, $P \subset R$, é um ideal associado de M, quando existe $m \in M$ tal que $P = \mathrm{Ann}(m)$. O conjunto de todos os primos associados de M é usualmente denotado por $\mathrm{Ass}(M)$. Quando o anel R é noetheriano e o R-módulo M é não nulo e finitamente gerado, então o conjunto, $\mathrm{Ass}(M)$, é não vazio e tem cardinalidade finita, além disso temos $\dim M = \sup_{P \in \mathrm{Ass}(M)} \dim R/P$. Ainda considerando o R-módulo M dizemos que ele é "unmixed"quando para todo $P \in \mathrm{Ass}(M)$ tivermos $\dim R/P = \dim M$, todo módulo

Cohen-Macaulay é "unmixedness". O suporte de um R-módulo M, $\operatorname{Supp}(M)$ é o conjunto de todos os ideais primos, $P \subset R$, tais que a localização $M_P = 0$, consequentemente $\operatorname{Supp}(M) = V(\operatorname{Ann}(M))$, sendo a variedade de um ideal I igual o conjunto dos ideais primos que contem I. Para mais detalhes sobre os resultados acima ver [24, 32].

Lema 4.2. *Sejam $f, g \in \mathcal{O}_n$, tais que $\dim J(f,g) = 1$ e $V(Jf) = \{0\}$, consideramos as matrizes*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} \mu & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \lambda & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

As quais definem homomorfismos de módulos sobre $R := \mathcal{O}_n$.

$$A \colon R^n \longrightarrow R^2, \quad A' \colon R^{n+1} \longrightarrow R^2.$$

Desta maneira sejam $M = \operatorname{Im} A$ e $M' = \operatorname{Im} A'$, ou seja, M, M' são os submódulos de R^2 gerados pelas colunas de A, A' respectivamente.

Se $I_2(A) = I_2(A')$, então $M = M'$

Demonstração: Consideramos o R-módulo, $R^2/M = \operatorname{coker}(A)$, o qual possui a seguinte presentação:

$$R^n \xrightarrow{A} R^2 \longrightarrow \frac{R^2}{M} \longrightarrow 0$$

portanto o 0-ésimo ideal Fitting de R^2/M é

$$F_0\left(\frac{R^2}{M}\right) = I_2(A).$$

Observamos que R é um anel noetheriano e portanto finitamente gerado. Assim R^2 também é finitamente gerado como R-módulo e pela Proposição 1.3, R^2 é um R-módulo noetheriano implicando que R^2/M também é noetheriano, em particular, finitamente gerado. Pela Proposição 1.18 temos

$$F_0\left(\frac{R^2}{M}\right) \subset \operatorname{Ann}\left(\frac{R^2}{M}\right),$$

além disso se R^2/M for gerado por k elementos então

$$\operatorname{Ann}\left(\frac{R^2}{M}\right)^k \subset F_0\left(\frac{R^2}{M}\right).$$

Da primeira inclusão obtemos

$$\sqrt{F_0\left(\frac{R^2}{M}\right)} \subset \sqrt{\operatorname{Ann}\left(\frac{R^2}{M}\right)},$$

e da segunda segue

$$\sqrt{\mathrm{Ann}\left(\frac{R^2}{M}\right)} \subset \sqrt{\mathrm{Ann}\left(\frac{R^2}{M}\right)^k} \subset \sqrt{F_0\left(\frac{R^2}{M}\right)},$$

pois para todo ideal I, $\sqrt{I} \subset \sqrt{I^k}$. Assim concluímos a igualdade

$$\sqrt{\mathrm{Ann}\left(\frac{R^2}{M}\right)} = \sqrt{F_0\left(\frac{R^2}{M}\right)},$$

a qual implica

$$V\left(\mathrm{Ann}\,\frac{R^2}{M}\right) = V\left(F_0\left(\frac{R^2}{M}\right)\right) = V(I_2(A))$$

e consequentemente

$$\dim\frac{R^2}{M} = \dim V\left(\mathrm{Ann}\,\frac{R^2}{M}\right) = \dim V\left(F_0\left(\frac{R^2}{M}\right)\right) = \dim(V(I_2(A))) = \dim\frac{R}{I_2(A)},$$

mas

$$\dim(V(I_2(A))) = \dim(V(J(f,\phi))) = 1.$$

Como

$$1 = n - (2-2+1)(n-2+1) = \dim R - (2-2+1)(n-2+1)$$

temos pelo Teorema 1.8 que o módulo R^2/M é CM.

Além disso, o módulo R^2/M é finitamente gerado e R é um anel noetheriano, então o conjunto $Ass(R^2/M)$ é finito. Assim seja

$$Ass\left(\frac{R^2}{M}\right) = \{P_1, ..., P_r\},$$

então temos que

$$\dim\frac{R}{P_i} = \dim V(P_i) = \dim\frac{R^2}{M} = 1,$$

para todo $i = 1, ..., r$.

Consideramos agora a sequência exata

$$0 \longrightarrow \frac{M'}{M} \longrightarrow \frac{R^2}{M} \longrightarrow \frac{R^2}{M'} \longrightarrow 0.$$

Nosso objetivo é mostrar a igualdade $M' = M$, a qual é equivalente a $M'/M = 0$.

Suponhamos por absurdo que $M'/M \neq 0$. Como M'/M é um submódulo de R^2/M temos

$$\mathrm{Ass}\,\frac{M'}{M} \subset \mathrm{Ass}\,\frac{R^2}{M},$$

e

$$\dim \frac{M'}{M} = \sup_{P \in \mathrm{Ass}(\frac{M'}{M})} \left\{ \dim \frac{R}{P} \right\},$$

pois M'/M é um R-módulo finitamente gerado.

Consideramos agora o suporte analítico de M'/M,

$$\mathrm{Supp}^{an}\left(\frac{M'}{M}\right) = \left\{ x \in (\mathbb{C}^n, 0);\ \left(\frac{M'}{M}\right)_x \neq 0 \right\}.$$

Como $\mathrm{Supp}^{an}(M'/M) = V(\mathrm{Ann}(M'/M))$, temos

$$\dim \mathrm{Supp}^{an}\left(\frac{M'}{M}\right) = \dim \frac{M'}{M} = 1.$$

Consideramos agora $x \in (\mathbb{C}^n, 0)$, $x \neq 0$. Como f tem singularidade isolada na origem, então existe algum $i_0 \in \{1, ..., n\}$, tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x_{i_0}}(x) \neq 0,$$

sem perda de generalidade vamos supor $i_0 = 1$.

Fazendo operações elementares nas matrizes

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} \mu & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \lambda & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

obtemos

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} \mu & 1 & 0 & \dots & a_n \\ \lambda & c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{pmatrix}.$$

tais que

$$I_2(A) = I_2(B),\ I_2(A') = I_2(B'),\ \mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(B) \text{ e } \mathrm{Im}(A') = \mathrm{Im}(B').$$

Por hipótese $I_2(A) = I_2(A')$, e consequentemente

$$\langle c_2, ..., c_n \rangle = I_2(B) = I_2(A) = I_2(A') = I_2(B') = \langle \mu c_1 - \lambda, c_2, ..., c_n \rangle,$$

implicando

$$\mu c_1 - \lambda \in \langle c_2, ..., c_n \rangle,$$

em outras palavras existem $\alpha_2, ..., \alpha_n \in R$, tais que

$$\lambda = \mu c_1 + \alpha_2 c_2 + ... + \alpha_n c_n.$$

Dessa maneira temos

$$\begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_n \begin{pmatrix} 0 \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Logo

$$\left(\frac{M'}{M}\right)_x = 0,$$

ou seja,

$$\mathrm{Supp}^{an}\, \frac{M'}{M} \subset \{0\},$$

contradizendo

$$\dim \mathrm{Supp}^{an}\, \frac{M'}{M} = 1.$$

■

Observamos que o lema anterior também é válido considerando $f, g_1, ..., g_p \in \mathcal{O}_n$, tais que $\dim J(f, g_1, ..., g_p) = p$ e $V(Jf) = \{0\}$, a demonstração nesse caso mais geral segue os mesmos passos do lema anterior, porém no final obtemos uma matriz de ordem $p+1$.

O próximo resultado nos dá uma caracterização para a álgebra de Milnor de um germe de função f utilizando o módulo dos campos de vetores que são tangentes a uma hipersuperfície com singularidade isolada.

Proposição 4.3. *Seja $(X,0)$ uma hipersuperfície com singularidade isolada e $f \in \mathcal{O}_n$, tal que $\mu_{BR}^{-}(f, X) < \infty$, então*

i) $\frac{\Theta_X}{\Theta_X^T} \approx \frac{df(\Theta_X)+\langle\phi\rangle}{df(\Theta_X^T)+\langle\phi\rangle}$;

ii) $\frac{\Theta_X}{\Theta_X^T} \approx \frac{df(\Theta_X)}{df(\Theta_X^T)}$;

iii) $df(\Theta_X) \cap \langle\phi\rangle = Jf\langle\phi\rangle$;

iv) $\frac{\mathcal{O}_n}{Jf} \approx \frac{df(\Theta_X^-)}{df(\Theta_X)} = \frac{df(\Theta_X)+\langle\phi\rangle}{df(\Theta_X)}$;

v) $df(\Theta_X) : \phi = Jf$;

vi) $df(\Theta_X^T) : \phi = Jf$;

Demonstração:

i) Consideramos o homomorfismo de $\mathcal{O}_n$-módulos

$$\Psi : \Theta_X \to df(\Theta_X) + \langle\phi\rangle,$$
$$\xi \mapsto df(\xi)$$

como $\Psi(\Theta_X^T) = df(\Theta_X^T) \subset df(\Theta_X^T) + \langle\phi\rangle$, temos que Ψ induz o seguinte homomorfismo

$$\overline{\Psi} : \frac{\Theta_X}{\Theta_X^T} \to \frac{df(\Theta_X)+\langle\phi\rangle}{df(\Theta_X^T)+\langle\phi\rangle},$$

o qual é um isomorfismo se e somente se $\mathrm{Im}(\Psi) + df(\Theta_X^T) + \langle\phi\rangle = df(\Theta_X) + \langle\phi\rangle$ e $\Psi^{-1}(df(\Theta_X^T) + \langle\phi\rangle) \subset \Theta_X^T$. A primeira igualdade é imediata pois

$$\mathrm{Im}(\Psi) + df(\Theta_X^T) + \langle\phi\rangle = df(\Theta_X) + df(\Theta_X^T) + \langle\phi\rangle = df(\Theta_X) + \langle\phi\rangle.$$

Para a segunda, seja $\xi \in \Psi^{-1}(df(\Theta_X^T) + \langle\phi\rangle)$, vamos mostrar que $\xi \in \Theta_X^T$. Por hipótese existe $\eta \in \Theta_X^T$ e $\mu \in \mathcal{O}_n$, tais que $df(\xi) = df(\eta) + \mu\phi$, ou seja

$$df(\xi - \eta) = \mu\phi,$$

mas $\xi - \eta \in \Theta_X$ então existe $\lambda \in \mathcal{O}_n$ tal que

$$\begin{cases} df(\xi - \eta) = \mu\phi \\ d\phi(\xi - \eta) = \lambda\phi \end{cases},$$

consequentemente

$$\begin{pmatrix} \mu\phi \\ \lambda\phi \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_i} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \end{pmatrix} \; i = 1, ..., n \right\rangle.$$

e

$$I_2 \begin{pmatrix} \mu\phi & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \lambda\phi & \frac{\partial \phi}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \phi}{\partial x_n} \end{pmatrix} = I_2 \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \phi}{\partial x_n} \end{pmatrix} = J(f, \phi).$$

Logo

$$\begin{vmatrix} \mu & \frac{\partial f}{\partial x_i} \\ \lambda & \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \end{vmatrix} \phi \in J(f, \phi).$$

Mas ϕ é regular em $\mathcal{O}_n/J(f, \phi)$, porque (ϕ, f) define uma ICIS, então

$$\begin{vmatrix} \mu & \frac{\partial f}{\partial x_i} \\ \lambda & \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \end{vmatrix} \in J(f, \phi), \; i = 1, ..., n.$$

Assim pelo Lemma 4.2, $\lambda \in J\phi$ e usando o Lema 3.11

$$\xi \in \Theta_X^T.$$

Desta maneira concluímos que $\overline{\Psi}$ é um isomorfismo e

$$\frac{\Theta_X}{\Theta_X^T} \approx \frac{df(\Theta_X) + \langle\phi\rangle}{df(\Theta_X^T) + \langle\phi\rangle}.$$

ii) Essa igualdade também foi provada no capítulo anterior com a hipótese adicional f $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado, entretanto precisamos supor somente que o número de Bruce Roberts relativo é finito.

Como anteriormente consideramos

$$\begin{aligned} \psi : \Theta_X &\to df(\Theta_X) \\ \xi &\mapsto df(\xi) \end{aligned}$$

como ψ é sobrejetora e $\psi(\Theta_X^T) = df(\Theta_X^T)$, temos que a aplicação induzida

$$\overline{\psi} : \frac{\Theta_X}{\Theta_X^T} \to \frac{df(\Theta_X)}{df(\Theta_X^T)}$$

é um isomorfismo se $\ker(\psi) \subset \Theta_X^T$.

Seja $\xi \in \ker(\psi)$, então $\psi(\xi) = df(\xi) = 0$, mas $\xi \in \Theta_X$, ou seja, existe $\lambda \in \mathcal{O}_n$, tal que

$$\begin{cases} df(\xi) = 0 \\ d\phi(\xi) = \lambda\phi \end{cases}.$$

consequentemente

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda\phi \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_i} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \end{pmatrix} \ i = 1, ..., n \right\rangle.$$

e

$$I_2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \lambda\phi & \frac{\partial \phi}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \phi}{\partial x_n} \end{pmatrix} = I_2 \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \phi}{\partial x_n} \end{pmatrix} = J(f, \phi).$$

Logo

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x_i} \\ \lambda & \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \end{vmatrix} \phi \in J(f, \phi).$$

Mas ϕ é regular em $\mathcal{O}_n/J(f, \phi)$, porque (ϕ, f) define uma ICIS, então

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x_i} \\ \lambda & \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \end{vmatrix} \in J(f, \phi), \ i = 1, ..., n.$$

Assim pelo Lema 4.2, $\lambda \in J\phi$ e usando o Lema 3.11 $\xi \in \Theta_X^T$.

Desta maneira concluímos que $\overline{\psi}$ é um isomorfismo e

$$\frac{\Theta_X}{\Theta_X^T} \approx \frac{df(\Theta_X)}{df(\Theta_X^T)}.$$

iii) Vamos provar inicialmente a inclusão $df(\Theta_X) \cap \langle \phi \rangle \subset Jf\langle \phi \rangle$. Sejam $\xi \in \Theta_X$, tal que $df(\xi) \in df(\Theta_X) \cap \langle \phi \rangle$, então existem $\mu, \lambda \in \mathcal{O}_n$, tais que

$$\begin{cases} df(\xi) = \mu\phi \\ d\phi(\xi) = \lambda\phi \end{cases}.$$

então

$$\begin{pmatrix} \mu\phi \\ \lambda\phi \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_i} \\ \frac{\partial f}{\partial x_i} \end{pmatrix}, \ i = 1, ..., n \right\rangle,$$

e
$$I_2\begin{pmatrix}\mu\phi & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}\\ \lambda\phi & \frac{\partial \phi}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \phi}{\partial x_n}\end{pmatrix} = I_2\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}\\ \frac{\partial \phi}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \phi}{\partial x_n}\end{pmatrix} = J(f,\phi),$$

ou seja,
$$\begin{vmatrix}\mu & \frac{\partial f}{\partial x_i}\\ \lambda & \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\end{vmatrix}\phi \in J(f,\phi),$$

mas por hipótese $\mu_{BR}^{-}(f,X) < \infty$, logo (ϕ,f) define uma ICIS e ϕ é regular em $\mathcal{O}_n/J(f,\phi)$ implicando

$$\begin{vmatrix}\mu & \frac{\partial f}{\partial x_i}\\ \lambda & \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\end{vmatrix} \in J(f,\phi),\ i=1,...,n.$$

Então pelos Lema 4.2, $\mu \in Jf$. A outra inclusão é imediata pois $\phi\partial/\partial x_i \in \Theta_X$ para todo $i=1,...,n$.

iv) Segue dos isomorfismos:

$$\frac{df(\Theta_X^-)}{df(\Theta_X)} = \frac{df(\Theta_X)+\langle\phi\rangle}{df(\Theta_X)} \approx \frac{\langle\phi\rangle}{df(\Theta_X)\cap\langle\phi\rangle} \overset{(iii)}{=} \frac{\langle\phi\rangle}{\langle\phi\rangle Jf} \approx \frac{\mathcal{O}_n}{Jf}.$$

v) Essa igualdade segue imediatamente do item *iii*).

Provamos primeiramente a inclusão $Jf \subset df(\Theta_X):\langle\phi\rangle$.

Seja $\mu \in Jf$, então existem $\alpha_1,...,\alpha_n \in \mathcal{O}_n$, tais que $\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i\partial f/\partial x_i$, consideramos agora o campo

$$\xi = \sum_{i=1}^n \phi\alpha_i\frac{\partial}{\partial x_i} \in \Theta_X,$$

então
$$df(\xi) = df\left(\sum_{i=1}^n \phi\alpha_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \phi\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \mu\phi,$$

portanto $\mu \in df(\Theta_X):\langle\phi\rangle$.

Para a inclusão contraria seja $\beta \in df(\Theta_X):\langle\phi\rangle$, então existe um campo $\xi \in \Theta_X$, tal que $df(\xi)=\beta\phi$, logo $df(\xi) \in df(\Theta_X)\cap\langle\phi\rangle = Jf\langle\phi\rangle$, então existe $\alpha \in Jf$ tal que $\beta\phi = \alpha\phi$, ou seja $(\beta-\alpha)\phi = 0$, como ϕ é regular em $\mathcal{O}_n$, temos $\beta-\alpha=0$.

vi) Sabemos que $df(\Theta_X^T):\langle\phi\rangle \subset df(\Theta_X):\langle\phi\rangle$, então pelo item anterior obtemos $df(\Theta_X^T):\langle\phi\rangle \subset Jf$. Para a inclusão contrária seja $\mu \in Jf$, então existem $\alpha_1,...,\alpha_n \in \mathcal{O}_n$, tais que $\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i\partial f/\partial x_i$, assim o campo

$$\xi = \sum_{i=1}^n \phi\alpha_i\frac{\partial}{\partial x_i} \in \Theta_X^T,$$

e

$$df(\xi) = df\left(\sum_{i=1}^{n} \phi\alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \phi\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \mu\phi,$$

portanto $\mu \in df(\Theta_X^T) : \langle\phi\rangle$.

■

Na proposição anterior supomos apenas $(X, 0)$ hipersuperfície com singularidade isolada, $f \in \mathcal{O}_n$ tal que $\mu_{BR}^-(f, X) < \infty$, essa última condição não implica f com singularidade isolada, por isso falamos de isomorfismos e não somente de dimensões como $\mathbb{C}$-espaços vetoriais. Além disso, temos que os quocientes $df(\Theta_X)/df(\Theta_X^T)$, $(df(\Theta_X) + \langle\phi\rangle)/(df(\Theta_X^T + \langle\phi\rangle)$ independem do germe de função f, enquanto $df(\Theta_X^-)/df(\Theta_X)$ depende somente do germe de função f.

O próximo teorema é o principal resultado dessa seção e exibe uma relação para o número de Bruce-Roberts relativo de um germe de função com respeito a uma hipersuperfície com singularidade isolada.

Teorema 4.4. *Sejam $(X, 0)$ um germe de hipersuperfície com singularidade isolada determinada por $\phi : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, $f \in \mathcal{O}_n$, tal que $\mu_{BR}^-(f, X) < \infty$, então*

$$\mu_{BR}^-(f, X) = \mu(X \cap f^{-1}(0), 0) + \mu(X, 0) - \tau(X, 0).$$

Demonstração: Consideramos a seguinte sequência exata

$$0 \longrightarrow \frac{df(\Theta_X^-)}{df(\Theta_X^T) + \langle\phi\rangle} \xrightarrow{i} \frac{\mathcal{O}_n}{df(\Theta_X^T) + \langle\phi\rangle} \xrightarrow{\pi} \frac{\mathcal{O}_n}{df(\Theta_X^-)} \longrightarrow 0.$$

então

$$\begin{aligned}\mu_{BR}^-(f, X) &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{J(f, \phi) + \langle\phi\rangle} - \dim_{\mathbb{C}} \frac{df(\Theta_X) + \langle\phi\rangle}{df(\Theta_X^T) + \langle\phi\rangle} \\ &= \mu(X \cap f^{-1}(0), 0) + \mu(X, 0) - \tau(X, 0),\end{aligned}$$

pois $df(\Theta_X^T) = J(f, \phi) + Jf\langle\phi\rangle$ e a última igualdade é consequência da fórmula de Lê-Greuel [6] e da Proposição 4.3 i).

■

Corolário 4.5. *Sejam $(X, 0)$ uma hipersuperfície com singularidade isolada, f e $g \in \mathcal{O}_n$, $C^0\mathcal{R}_X$ equivalentes, então*

$$\mu_{BR}^-(f, X) = \mu_{BR}^-(g, X).$$

em outras palavras o número de Bruce-Roberts relativo é um invariante topológico.

Demonstração: De fato, por hipótese existe $h \in C^0\mathcal{R}_X$ tal que $f = g \circ h$, então

$$X \cap f^{-1}(0) = X \cap (g \circ h)^{-1}(0) = X \cap (h^{-1}(g^{-1}(0))) = h^{-1}(X \cap g^{-1}(0)),$$

como o número de Milnor de uma ICIS é um invariante topológico temos

$$\mu(X \cap f^{-1}(0), 0) = \mu(X \cap g^{-1}(0), 0),$$

e consequentemente

$$\begin{aligned}\mu_{BR}^-(f, X) &= \mu(X \cap f^{-1}(0), 0) + \mu(X, 0) - \tau(X, 0)\\ &= \mu(X \cap g^{-1}(0), 0) + \mu(X, 0) - \tau(X, 0) = \mu_{BR}^-(g, X).\end{aligned}$$

■

A partir de agora vamos supor $f \in \mathcal{O}_n$ é um germe de função $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado, sendo $(X, 0)$ uma hipersuperfície com singularidade isolada. Como $\mu_{BR}^-(f, X) \leq \mu_{BR}(f, X) < \infty$ segue da Proposição 4.3 iv) que

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{df(\Theta_X^-)}{df(\Theta_X)} = \mu(f).$$

Assim obtemos uma caracterização para o número de Milnor de f levando em consideração o conjunto dos campos de vetores em $(\mathbb{C}^n, 0)$ que são tangentes a uma hipersuperfície com singularidade isolada. O próximo exemplo nos mostra que essa caracterização não é válida para uma ICIS qualquer.

Exemplo 4.6. Sejam $(X, 0)$ a ICIS determinada por $\phi(x, y, z) = (x^3 + x^2y^2 + y^7 + z^3, xyz)$ e $f(x, y, z) = xy - z^4$, então $\mu_{BR}(f, X) = 59$, e f é $\mathcal{R}_X$-finitamente determinada, mas

$$3 = \mu(f) \neq \dim_{\mathbb{C}} \frac{df(\Theta_X^-)}{df(\Theta_X)} = 6.$$

Agora nós vamos provar que para toda hipersuperfície com singularidade isolada $(X, 0)$, $LC(X)^-$ é Cohen-Macaulay.

Proposição 4.7. *Seja $(X, 0)$ uma hipersuperficie com singularidade isolada determinada por $\phi : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ então $LC(X)^-$ é Cohen-Macaulay.*

Demonstração: Seja $(0, p) \in LC(X)^-$ então $(0, p) \in LC(X)$ e existe $f \in \mathcal{O}_n$ tal que $df(0) = p$. Pelo Teorema 3.24 temos que $LC(X)$ é Cohen-Macaulay então, pela Proposição 2.23,

$$\mu_{BR}(f, X) = \sum_{i=0}^{k+1} m_i n_i = m_0 n_0 + \sum_{i=1}^{k+1} m_i n_i = \mu(f) + \sum_{i=1}^{k+1} m_i n_i.$$

sendo n_i o número de pontos críticos de uma Morsificação de f em X_i e m_i a multiplicidade das componentes irredutíveis Y_i. Por outro lado

$$\mu_{BR}^{-}(f,X) = \mu_{BR}(f,X) - \dim_{\mathbb{C}} \frac{df(\Theta_X^{-})}{df(\Theta_X)} = \mu_{BR}(f,X) - \mu(f) = \sum_{i=1}^{k+1} m_i n_i.$$

e pela Proposição 2.25 obtemos que $LC(X)^{-}$ é Cohen-Macaulay quando $(X,0)$ é uma hipersuperfície com singularidade isolada.

■

Observamos que na verdade nós obtemos o seguinte resultado, o qual afirma, sobre certas condições, que $LC(X)$ é Cohen-Macaulay se, e somente se, $LC(X)^{-}$ é Cohen-Macaulay. Esse resultado pode ser útil para responder se a variedade logarítmica característica de uma hipersuperfície holonômica com singularidade não isolada é Cohen-Macaulay.

Proposição 4.8. *Seja $(X,0) \subset (\mathbb{C}^n,0)$ um germe de variedade analítica holonômica, tal que*

$$\mu(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{df(\Theta_X^{-})}{df(\Theta_X)},$$

para todo germe de função f $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado. Nessas condições

$$LC(X) \text{ é Cohen-Macaulay} \Leftrightarrow LC(X)^{-} \text{ é Cohen-Macaulay.}$$

Demonstração: De fato, suponhamos inicialmente que $LC(X)$ é Cohen-Macaulay, queremos mostrar que $LC(X)^{-}$ é Cohen-Macaulay em todo ponto $(0,p) \in LC(X)^{-}$. Seja $(0,p) \in LC(X)^{-}$, então $(0,p) \in LC(X)$ e existe $f \in \mathcal{O}_n$, tal que $df(0) = 0$. Por hipótese temos

$$\mu_{BR}(f,X) = \sum_{i=0}^{k+1} m_i n_i = m_0 n_0 + \sum_{i=1}^{k+1} m_i n_i = \mu(f) + \sum_{i=1}^{k+1} m_i n_i,$$

sendo n_i o número de pontos críticos de uma Morsificação de f em X_i e m_i a multiplicidade da componente irredutível Y_i, logo

$$\mu_{BR}^{-}(f,X) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{df(\Theta_X^{-})} = \mu_{BR}(f,X) - \mu(f) = \sum_{i=1}^{k+1} m_i n_i.$$

assim pela Proposição 2.25 temos $LC(X)^{-}$ é Cohen-Macaulay.

Recíprocamente suponhamos $LC(X)^{-}$ Cohen-Macaulay, vamos mostrar $LC(X)$ é Cohen-Macaulay em todo ponto $(0,p) \in LC(X)$.

Como anteriormente sabemos que existe um germe de função f $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado tal que $df(0) = p$.

Dessa maneira temos

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{df(\Theta_X^-)} \leq \mu_{BR}(f, X) < \infty,$$

e pela Proposição 2.25 temos

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{df(\Theta_X^-)} = \sum_{i=1}^{k+1} m_i n_i,$$

logo

$$\mu_{BR}(f, X) = \mu(f) + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{df(\Theta_X^-)} = n_0 + \sum_{i=1}^{k+1} m_i n_i = \sum_{i=0}^{k+1} m_i n_i$$

Portanto segue da Proposição 2.23 que $LC(X)$ é Cohen-Macaulay.

■

4.2 Curvas polares e variedades analíticas holômicas

Nessa seção consideramos $(X, 0)$ um germe de variedade analítica holonômica e vamos exibir uma condição equivalente a $LC(X)$ ser Cohen-Macaulay. Nosso objetivo inicial era mostrar que a variedade logarítmica característica de qualquer hipersuperfície com singularidade não isolada é Cohen-Macaulay e o próximo exemplo nos mostra que essa pergunta só faz sentido se considerarmos hipersuperfícies holonômicas.

Exemplo 4.9. Seja $(X, 0)$ hipersuperfície com singularidade não isolada determinada por

$$\begin{aligned} \phi : (\mathbb{C}^3, 0) &\to (\mathbb{C}, 0) \\ (x, y, z) &\mapsto xy(x-y)(x+y(z+1)) \end{aligned}$$

Em [7], Bruce e Roberts provaram que a hipersuperfície $(X, 0)$ não é holonômica.

Utilizando o Singular calculamos a dimensão projetiva $pd_{\mathcal{O}_6}(LC(X)) = 3$. Logo pela fórmula de Auslander-Buchsbaum, Proposição 1.13,

$$\operatorname{depth}(LC(X)) = \operatorname{depth}(\mathcal{O}_6) - pd_{\mathcal{O}_6}(LC(X)) = 6 - 3 = 3 \neq 4 = \dim LC(X).$$

Portanto $LC(X)$ não é Cohen-Macaulay.

A partir de agora consideramos apenas variedades holonômicas, $(X, 0)$.

Definição 4.10. Sejam $f \in \mathcal{O}_n$ um germe de função $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado e

$$\begin{aligned} F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) &\to (\mathbb{C}, 0) \\ (x, t) &\mapsto F(x, t) = f_t(x) \end{aligned}$$

uma deformação a 1-parâmetro de f.

A curva polar de F em $(X,0)$ é definida da seguinte maneira:

$$C = \{(x,t) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C};\ df_t(\delta_i(X)) = 0,\ \forall i = 1, ..., m\},$$

sendo $\Theta_X = \langle \delta_1, ..., \delta_m \rangle$.

Proposição 4.11. *Seja $(X,0)$ uma variedade analítica holonômica. Se qualquer germe de função $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado tem uma Morsificação cuja curva polar é Cohen-Macaulay então $LC(X)$ é Cohen-Macaulay.*

Demonstração: Com a finalidade de mostrarmos que $LC(X)$ é Cohen-Macaulay, seja $(0,p) \in LC(X)$, então existe um germe de função $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado $f \in \mathcal{O}_n$, tal que $df(0) = p$. Tomemos agora uma Morsificação de f

$$\begin{aligned} F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}) &\to (\mathbb{C}, 0). \\ (x,t) &\mapsto F(x,t) = f_t(x) \end{aligned}$$

Por hipótese temos

$$\frac{\mathcal{O}_{n+1}}{df_t(\Theta_X)}$$

é Cohen-Macaulay e $\dim \mathcal{O}_{n+1}/df_t(\Theta_X) = 1$, assim pelo princípio da conservação do número

$$\begin{aligned} \mu_{BR}(f,X) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{df(\Theta_X)} = \sum_{i=0}^{k+1} \sum_{x \in X_i} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n+1}}{df_t(\Theta_X)} &= \sum_{i=0}^{k+1} \sum_{x \in \Sigma f \cap X_i} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n+1}}{df_t(\Theta_X)} \\ &= \sum_{i=0}^{k+1} \sum_{x \in \Sigma f \cap X_i} m_i \\ &= \sum_{i=0}^{k+1} n_i m_i, \end{aligned}$$

pois se $x \in X_i$ é ponto crítico de Morse de f_t, então $\mu_{BR}(f_t, X)_x = m_i$, assim segue da Proposição 2.23 que $LC(X)$ é Cohen-Macaulay.

■

Observação 4.12. Em [1], os autores provaram a recíproca do resultado anterior, ou seja, se $LC(X)$ é Cohen-Macaulay então a sua curva polar de qualquer germe de função $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado é Cohen-Macaulay.

Corolário 4.13. *$LC(X)$ é Cohen-Macaulay se, e somente se,*

$$\frac{\mathcal{O}_{n+1}}{df_t(\Theta_X)}$$

é Cohen-Macaulay. Sendo f_t uma deformação 1*-parâmetro de um germe $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado.*

Como consequência desses resultados obtemos que se $LC(X)$ é Cohen-Macaulay, então vale o princípio da conservação do número, ou seja, para t suficientemente pequeno

$$\mu_{BR}(f,X) = \sum_{x\in\mathbb{C}^n} \mu_{BR}(f_t,X)_x.$$

Sendo f_t uma deformação 1-parâmetro de f.

Com o objetivo de obtermos resultamos similares para $LC(X)^-$, vamos definir a curva polar relativa de F em $(X,0)$:

Definição 4.14. Sejam $f \in \mathcal{O}_n$ um germe de função $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado e

$$\begin{aligned} F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) &\to (\mathbb{C}, 0) \\ (x,t) &\mapsto F(x,t) = f_t(x) \end{aligned}$$

uma deformação a 1-parâmetro de f. A curva polar relativa de F em $(X,0)$ é dada por

$$C^- = \{(x,t) \in C;\ x \in X\},$$

sendo C a curva polar de F em $(X,0)$.

A Próxima proposição é a versão para o $LC(X)^-$ do resultado que foi provada em [1] para o $LC(X)$, e nós também vamos usar o seguinte lema:

Lema 4.15. *[4] Sejam $\psi : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C}^p,0)$ um germe de aplicação analítica, $J \subset \mathcal{O}_p$ um ideal, e*

$$\begin{aligned} \psi^* : \mathcal{O}_p &\to \mathcal{O}_n \\ h &\mapsto h \circ \psi \end{aligned}$$

o homomorfismo induzido por ψ, tal que $I = \psi^*(J)$. Nessas condições se $\mathcal{O}_p/J$ é Cohen-Macaulay e $\operatorname{codim} V(I) = \operatorname{codim} V(J)$*, então $\mathcal{O}_n/I$ é Cohen-Macaulay.*

Proposição 4.16. *Seja $(X,0)$ uma variedade analítica holonômica. Se $LC(X)^-$ é Cohen-Macaulay então C^- de qualquer deformação 1-parâmetro de qualquer germe de função $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado é Cohen-Macaulay.*

Demonstração: Suponhamos que $LC(X)^-$ é Cohen-Macaulay e

$$\Theta_X = \langle \delta_1, ..., \delta_m \rangle,\ \delta_i = (\delta_{i1}, ..., \delta_{in})\ \forall i = 1, ..., m.$$

Consideramos $(x_1,...,x_n,p_1,...,p_n) = (x,p)$ um sistema de coordenadas em $T^*\mathbb{C}^n$, então $LC(X)^- = V(J)$ sendo

$$J = \langle \sum_{i=1}^{n} p_i \delta_{li};\ \forall l = 1,...,m\rangle + I_X.$$

Seja $I = df_t(\Theta_X) + I_X$ e definamos:

$$\begin{aligned}\Psi_F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}) &\to (T^*\mathbb{C}^n) \approx \mathbb{C}^{2n},\\ (x,t) &\mapsto (x, df_t(x))\end{aligned}$$

assim temos o homomorfismo induzido

$$\begin{aligned}\Psi_F^* : \mathcal{O}_{2n} &\to \mathcal{O}_{n+1}.\\ h &\mapsto \Psi_F^*(h) = h \circ \Psi_F\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}\Psi_F^*(\sum_{j=1}^{n} p_j\delta_{lj})(x,t) &= \sum_{j=1}^{n} p_j\delta_{lj}(x, df_t(x))\\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_t}{\partial x_j}(x)\delta_{lj}(x)\\ &= df_t(\delta_l)(x) \in \langle df_t(\delta_i),\ i = 1,...,m\rangle.\end{aligned}$$

e

$$\Psi_F^*(\phi)(x,t) = \phi \circ \Psi_F(x,t) = \phi(x).$$

Portanto,

$$\Psi_F^*(J) = I$$

além disso,

$$\dim \frac{\mathcal{O}_{2n}}{J} = n \text{ e } V(I) = C \cap (X \times \mathbb{C})$$

sendo C a curva polar F. Assim nós concluímos que

$$\operatorname{codim} V(I) = n = \operatorname{codim} LC(X)^-.$$

Pelo Lema 4.15, $\mathcal{O}_{n+1}/df_t(\Theta_X)$ é Cohen-Macaulay.

■

Para provarmos a recíproca do resultado anterior precisamos de alguns lemas. Primeiramente lembramos que se $(X,0)$ é um germe de variedade analítica holonômica, com estratificação logarítmica $X_0 = \mathbb{C}^n \setminus X, X_1, ..., X_{k+1}$ então $Y_i = \overline{N^*X_i}$ são as componentes irredutíveis de $LC(X)$.

Lema 4.17. *[7, Proposição 5.12] Sejam $(X,0) \subset (\mathbb{C}^n,0)$ uma variedade analítica holonômica e $f \in \mathcal{O}_n$, tal que f restrita a X é uma função de Morse, então $LC(X)$ é Cohen-Macaulay nos pontos que pertencem a $Z_\alpha = Y_\alpha \setminus \bigcup_{j\neq\alpha} Y_j$ para todo α. Além disso f tem ponto crítico de Morse em $x \in X_\alpha$ se, e somente se, $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{n,x}/df(\Theta_{X,x}) = m_\alpha$.*

Lema 4.18. *Sejam $(X,0)$ uma variedade analítica holonômica e $f \in \mathcal{O}_n$, tal que f restrita a X é uma função de Morse. Se $x \in X$ é um ponto crítico de f, então $\mu^-_{BR}(f,X) = m_\alpha$, sendo m_α a multiplicidade da componente irredutível Y_α correspondente ao estrato logarítmico X_α que contém x.*

Demonstração: Seja $(x,p) \in Z_\alpha = Y_\alpha \setminus \bigcup_{j\neq\alpha} Y_j$ com $\alpha \neq 0$, então $(x,p) \notin Y_0$ pela forma como Z_α foi definido. Consideramos também $V := T^*\mathbb{C}^n \setminus Y_0$ vizinhança aberto de (x,p). Como

$$LC(X) = Y_0 \cup Y_1 \cup ... \cup Y_{k+1},\ LC(X)^- = Y_1 \cup ... \cup Y_{k+1}$$

temos a seguinte igualdade de conjuntos

$$LC(X) \cap V = LC(X)^- \cap V.$$

Afirmamos que $LC(X) \cap V = LC(X)^- \cap V$ como espaços complexos. De fato sejam I o ideal que define $LC(X)$, I^- o ideal que define $LC(X)^-$ e I_j o ideal que define Y_j, $j = 0, ..., k+1$, então

$$I = I_0 \cap I_1 \cap ... \cap I_{k+1},\ I^- = I_1 \cap ... \cap I_{k+1},$$

mas $I_0 = \langle p_1, ..., p_n\rangle$, pois $X_0 = \mathbb{C}^n \setminus X$ e se $x \in X_0$ temos $\Theta_{X,x} = \mathbb{C}^n$. Como $(x,p) \notin Y_0$, temos que $p \neq 0$ e assim I_0 é o anel total no aberto V. Assim nós provamos a afirmação.

Por hipótese $LC(X)$ é Cohen-Macaulay em (x,p), então como estamos trabalhando com germes os anéis locais $\mathcal{O}_{LC(X)}$, $\mathcal{O}_{V\cap LC(X)}$ iguais, segue que $LC(X)^-$ é Cohen-Macaulay em (x,p). Finalmente nós temos

$$\mu^-_{BR}(f,X)_x \overset{(*)}{=} \sum_{j=1}^{k+1} m_i n_i \overset{(**)}{=} m_\alpha,$$

sendo $(*)$ e $(**)$ consequências da Proposição 2.25 e [7, Proposição 5.2], respectivamente.

■

Proposição 4.19. *Seja $(X,0)$ uma variedade analítica holonômica. Se C^- de qualquer deformação 1-parâmetro de qualquer germe de função $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado é Cohen-Macaulay então $LC(X)^-$ é Cohen-Macaulay.*

Demonstração: Por hipótese C^- de qualquer deformação 1-parâmetro de um germe de função $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado é Cohen-Macaulay. Seja $(0,p) \in LC(X)^-$, então existe um germe de função $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado $f \in \mathcal{O}_n$, tal que $df(0) = p$. Seja

$$\begin{aligned} F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}) &\to (\mathbb{C}, 0). \\ (x,t) &\mapsto F(x,t) = f_t(x) \end{aligned}$$

uma Morsificação de f. Por hipótese

$$\frac{\mathcal{O}_{n+1}}{df_t(\Theta_X^-)}$$

é Cohen-Macaulay, e $\dim V(df_t(\Theta_X^-)) = 1$ então pelo princípio da conservação do número

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{df(\Theta_X^-)} &= \sum_{i=0}^{k+1} \sum_{x \in X_i} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n,x}}{df_t(\Theta_{X,x}^-)} \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} \sum_{x \in \Sigma f \cap X_i} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n,x}}{df_t(\Theta_{X,x}^-)} \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} \sum_{x \in \Sigma f \cap X_i} m_i \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} n_i m_i, \end{aligned}$$

pois se $x \in X_i$ é um ponto crítico de Morse de f_t, então $\mu_{BR}^-(f,X)_x = m_i$ e pela Proposição 2.25 $LC(X)^-$ é Cohen-Macaulay.

■

Como consequência do resultado anterior temos que se $LC(X)^-$ é Cohen-Macaulay então para todo t suficientemente pequeno

$$\mu_{BR}^-(f,X) = \sum_{x \in \mathbb{C}^n} \mu_{BR}^-(f_t, X)_x,$$

sendo f_t uma deformação 1-parâmetro do germe de função f $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado.

4.3 Exemplo de variedades com singularidade não isolada

Nessa seção consideramos um germe de variedade analítica $(X,0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ e a sua inclusão $(\tilde{X}, 0)$ em $(\mathbb{C}^{n+t}, 0)$ e vamos mostrar que se $LC(X)$ é Cohen-Macaulay então $LC(\tilde{X})$ é Cohen-Macaulay. Como consequência desse resultado obtemos que a variedade logarítmica característica de uma classe específica de hipersuperfícies com singularidade não isolada é Cohen-Macaulay. Para finalizar provamos também uma relação entre $\mu_{BR}(f, X)$, sendo $f \in \mathcal{O}_n$ $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado e $\mu_{BR}(F, \tilde{X})$, sendo $F = f + g$, com $g \in \mathcal{O}_t$ um germe de função com singularidade isolada.

Sejam $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ e $(\tilde{X}, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+t}, 0)$ germes de variedades analíticas como no parágrafo anterior. Observamos que $(\tilde{X}, 0)$ tem singularidade não isolada, pois

$$\Sigma\tilde{X} = \Sigma X \times \mathbb{C}^t,$$

ou seja, $\tilde{X}$ tem singularidade não isolada mesmo quando $(X, 0)$ tem singularidade isolada.

A próxima proposição relaciona os campos de vetores que são tangentes a $\tilde{X}$, $\Theta_{\tilde{X}} \subset \Theta_{n+t}$, com os campos de vetores de que são tangentes a X, $\Theta_X \subset \Theta_n$. Com essa finalidade consideramos a aplicação

$$\begin{aligned} i : \Theta_n &\to \Theta_{n+t} \\ (x_i, ..., x_n) &\mapsto (x_1, ..., x_n, 0, ..., 0) \end{aligned}$$

a qual é um mergulho diferenciável de Θ_n em Θ_{n+t}, portanto via essa aplicação Θ_n é um $\mathcal{O}_{n+t}$-submódulo de Θ_{n+t}, além disso $i(\Theta_X) \subset \Theta_{\tilde{X}}$, a partir de agora vamos simplificar a notação e omitir a aplicação i.

Proposição 4.20. *Nas condições citadas acima*

$$\Theta_{\tilde{X}} = \mathcal{O}_{n+t}\Theta_X + \left\langle \frac{\partial}{\partial x_{n+1}}, ..., \frac{\partial}{\partial x_{n+t}} \right\rangle$$

Demonstração: Para provarmos esse resultado observamos que $I_{\tilde{X}} = I_X + \langle x_{n+1}, ..., x_{n+t} \rangle$, assim se $\Phi \in I_{\tilde{X}}$ então Φ não depende das t últimas coordenadas, ou seja,

$$\Phi(x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+t}) = \Phi(x_1, ..., x_n, 0, ..., 0) = \phi(x_1, .., x_n)$$

e $\phi \in I_X$. Assim

$$d\Phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial \phi}{\partial x_n}, 0, ..., 0 \right),$$

Provamos primeiro a inclusão

$$\mathcal{O}_{n+t}\Theta_X + \left\langle \frac{\partial}{\partial x_{n+1}}, ..., \frac{\partial}{\partial x_{n+t}} \right\rangle \subset \Theta_{\tilde{X}}.$$

Seja

$$\xi + \sum_{i=1}^{t} b_i \frac{\partial}{\partial x_{n+i}} \in \Theta_X + \left\langle \frac{\partial}{\partial x_{n+1}}, ..., \frac{\partial}{\partial x_{n+t}} \right\rangle,$$

então

$$
\begin{aligned}
d\Phi\left(\xi + \sum_{j=1}^{t} b_j \frac{\partial}{\partial x_{n+j}}\right) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\xi_i + \sum_{j=1}^{t} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n+j}} b_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\xi_i + 0 \\
&= d\phi(\xi) \\
&= \lambda\phi.
\end{aligned}
$$

Mas $\lambda\phi(x_1, ..., x_n) = \lambda\Phi(x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+t})$, o que conclui a inclusão.

Para inclusão contrária

$$
\Theta_{\tilde{X}} \subset \mathcal{O}_{n+t}\Theta_X + \left\langle \frac{\partial}{\partial x_{k+1}}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n} \right\rangle,
$$

consideramos

$$
\sum_{i=1}^{n+t} \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \Theta_{\tilde{X}},
$$

Então

$$
\lambda\Phi = d\Phi\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{k} \xi_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + 0
$$

Assim obtemos

$$
\lambda\phi = \lambda\Phi = d\phi\left(\sum_{i=1}^{k} \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right),
$$

e portanto,

$$
\sum_{i=1}^{k} \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \Theta_X.
$$

■

Agora vamos utilizar a caracterização anterior para $\Theta_{\tilde{X}}$ e mostraremos que se $LC(X)$ é Cohen-Macaulay, então $LC(\tilde{X})$ é Cohen-Macaulay. Com essa finalidade seja

$$
(x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+t}, p_1, ..., p_n, p_{n+1}, ..., p_{n+t})
$$

um sistema de coordenadas em $T^*\mathbb{C}^{n+t} \approx \mathbb{C}^{2(n+t)}$. Vamos recordar a definição de $LC(\tilde{X})$.

Sejam $\Theta_{\tilde{X}} = \langle \delta_1, ..., \delta_m \rangle$, $U \subset \mathbb{C}^{n+t}$ aberto, tal que $0 \in U$, por definição:

$$
LC_U(\tilde{X}) = \{(x, \xi) \in T_U^*\mathbb{C}^{n+t};\ \xi(\delta_i(x)) = 0 \quad \forall\, i = 1, ..., m\},
$$

e $LC(\tilde{X})$ é o germe de $LC_U(\tilde{X})$ em $T_0^*\mathbb{C}^{n+t}$.

Teorema 4.21. *Se $LC(X)$ é Cohen-Macaulay então $LC(\tilde{X})$ é Cohen-Macaulay.*

Demonstração: Para facilitar a escrita utilizamos a identificação

$$(x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+t}, p_1, ..., p_n, p_{n+1}, ..., p_{n+t}) = (x^1, x^2, p^1, p^2),$$

ou seja x^1 e p^1 são vetores com n coordenadas enquanto x^2 e p^2 são vetores com t coordenadas. Pela Proposição 4.20 temos

$$\Theta_{\tilde{X}} = \mathcal{O}_{n+t}\Theta_X + \left\langle \frac{\partial}{\partial x_{n+1}}, ..., \frac{\partial}{\partial x_{n+t}} \right\rangle.$$

Suponhamos que $\delta_1, ..., \delta_m$ geram Θ_X.

Se $(x^1, x^2, p^1, p^2) \in LC(\tilde{X})$, então para todo $i = 1, ..., m$ temos

$$p^1(\delta_i)(x^1) = 0 \text{ e } p^2 = 0,$$

ou seja $(x^1, p^1) \in LC(X)$ e $p^2 = 0$, dessa maneira temos

$$(x^1, x^2, p^1, p^2) \in LC(X) \times \mathbb{C}^t \times \{0\} \approx LC(X) \times \mathbb{C}^t.$$

Dessa maneira provamos a inclusão

$$LC(\tilde{X}) \subset LC(X) \times \mathbb{C}^t \times \{0\} \approx LC(X) \times \mathbb{C}^t.$$

A inclusão contrária é imediata portanto

$$LC(\tilde{X}) \approx LC(X) \times \mathbb{C}^t.$$

Se $LC(X)$ é Cohen-Macaulay então seu anel local $\mathcal{O}_{2n}/I_{LC(X)}$ é Cohen-Macaulay em todo ponto, além disso

$$\frac{\mathcal{O}_{2(n+t)}}{I_{LC(\tilde{X})}} \approx \frac{\mathcal{O}_{2n+t}}{I_{LC(X)} + \langle p_{n+1}, ..., p_{n+t}\rangle} \approx \frac{\mathcal{O}_{2n+t}/\langle p_{n+1}, ..., p_{n+t}\rangle}{(I_{LC(X)} + \langle p_{n+1}, ..., p_{n+t}\rangle)/\langle p_{n+1}, ..., p_{n+t}\rangle} \approx \frac{\mathcal{O}_{2n}}{I_{LC(X)}},$$

consequentemente $LC(\tilde{X})$ é Cohen-Macaulay.

■

Como uma consequência do resultado anterior temos

Corolário 4.22. *Se $(X, 0)$ é uma hipersuperfície com singularidade isolada então $LC(\tilde{X})$ é Cohen-Macaulay.*

Agora vamos considerar $F \in \mathcal{O}_{n+t}$ tal que

$$F : (\mathbb{C}^{n+t}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$$
$$(x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+t}) \mapsto f(x_1, ..., x_n) + g(x_{n+1}, ..., x_{n+t})$$

em [39], Sebastiani e Thom provaram que F tem singularidade isolada se, e somente se, $f \in \mathcal{O}_n$ e $g \in \mathcal{O}_{n+t}$ também possuem singularidade isolada e

$$\mu(F) = \mu(f)\mu(g). \tag{4.2}$$

Nosso objetivo é provar uma relação similar para o número de Bruce-Roberts, para isso precisamos de alguns resultados.

Lema 4.23. *[17] Sejam $B = \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]/I$ e $C = \mathbb{C}[x_{n+1}, ..., x_{n+t}]/J$, então*

$$B \otimes_{\mathbb{C}} C = \frac{\mathbb{C}[x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+t}]}{\langle I + J \rangle}.$$

Sendo $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$, $\mathbb{C}[x_{n+1}, ..., x_{n+t}]$, e $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+t}]$ os anéis de polinômios em n, t e $n+t$ variáveis, respectivamente.

Teorema 4.24. *Sejam $I, J \subset \mathcal{O}_n$ os seguintes ideais*

$$I = \langle f_i,\ i = 1, ..., k \rangle,$$
$$J = \langle g_i,\ i = 1, ..., s \rangle,$$

tais que f_i depende somente das variáveis $x_1, ..., x_n$ para todo $i = 1, ..., k$ e g_i depende somente das variáveis $x_{n+1}, ..., x_{n+t}$ para todo $i = 1, ..., s$. Desta maneira podemos identificar os ideais I e J com

$$I' = \langle f_i,\ i = 1, ..., k \rangle \subset \mathcal{O}_n$$
$$J' = \langle g_i,\ i = 1, ..., s \rangle \subset \mathcal{O}_t,$$

respectivamente. Nessas condições temos

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{I + J} < \infty \ \Leftrightarrow\ \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_t}{I'} < \infty \text{ e } \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n-t}}{J'} < \infty,$$

e

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{I + J} = \left(\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_t}{I'}\right) \left(\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n-t}}{J'}\right).$$

Demonstração: Com a finalidade de facilitar a escrita consideramos

$$(x, y) = (x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+t})$$

um sistema de coordenadas em $\mathbb{C}^n$. Como os geradores de I dependem somente das variáveis $x_1, ..., x_n$, podemos identificá-lo com um ideal

$$I' \subset \mathcal{O}_n \approx \frac{\mathcal{O}_n}{\langle x_{n+1}, ..., x_{n+t} \rangle}.$$

De forma inteiramente análoga podemos identificar J com um ideal

$$J' \subset \mathcal{O}_t \approx \frac{\mathcal{O}_{n+t}}{\langle x_1, ..., x_n \rangle}.$$

Observamos agora a seguinte igualdade:

$$V(I+J) = V(I) \cap V(J),$$

mas

$$\begin{aligned} V(I) &= \{(x,y) \in \mathbb{C}^{n+t};\ f_i(x,y) = 0\ \forall i = 1, ..., k\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{C}^{n+t};\ f_i(x) = 0\ \forall i = 1, ..., k\} \\ &= V(I') \times \mathbb{C}^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(J) &= \{(x,y) \in \mathbb{C}^{n+t};\ g_j(x,y) = 0\ \forall j = 1, ..., s\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{C}^{n+t};\ g_j(y) = 0\ \forall j = 1, ..., s\} \\ &= \mathbb{C}^n \times V(J') \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} V(I+J) = V(I) \cap V(J) &= (V(I') \times \mathbb{C}^t) \cap (\mathbb{C}^n \times V(J')) \\ &= (V(I') \cap \mathbb{C}^n) \times (\mathbb{C}^t \cap V(J)) \\ &= V(I') \times V(J') \\ &= V(\langle f_i;\ i = 1, ..., k \rangle) \times V(\langle g_j;\ j = 1, ..., s \rangle) \end{aligned}$$

Dessa maneira temos

$$V(I+J) \subset \{(0,0)\} \subset \mathbb{C}^{n+t}$$

se, e somente se

$$V(I') \subset \{0\} \subset \mathbb{C}^n, \text{ e } V(J') \subset \{0\} \subset \mathbb{C}^t,$$

resultando

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n+t}}{I+J} < \infty \Leftrightarrow \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{I'} < \infty \text{ e } \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_t}{J'} < \infty.$$

Para concluir a demonstração vamos supor $V(I+J) \subset \{0\} \subset \mathbb{C}^n$ e vamos provar a igualdade

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n+t}}{I+J} = \left(\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{I'}\right) \left(\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_t}{J'}\right).$$

Como $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{n+t}/(I+J) < \infty$, temos $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_n/I' < \infty$ e $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_t/J' < \infty$, assim existem inteiros positivos k', k_i e k_j tais que

$$\mathcal{M}_{n+t}^{k'} \subset I+J,\ \mathcal{M}_n^{k_i} \subset I',\ \mathcal{M}_t^{k_j} \subset J',$$

seja $k = \max\{k',\ k_i,\ k_j\}$, então

$$\mathcal{M}_{n+t}^k \subset I + J,\ \mathcal{M}_n^k \subset I',\ \mathcal{M}_t^k \subset J',$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{O}_{n+t}}{I+J} &\approx \frac{\frac{\mathcal{O}_{n+t}}{\mathcal{M}_{n+t}^k}}{\frac{I+J}{\mathcal{M}_{n+t}^k}} = \frac{\frac{\mathbb{C}[x,y]}{\mathcal{M}_{n+t}^k}}{\frac{I+J}{\mathcal{M}_{n+t}^k}} = \frac{\mathbb{C}[x,y]}{I''+J''},\\
\frac{\mathcal{O}_n}{I'} &\approx \frac{\frac{\mathcal{O}_n}{\mathcal{M}_n^k}}{\frac{I'}{\mathcal{M}_n^k}} = \frac{\frac{\mathbb{C}[x]}{\mathcal{M}_n^k}}{\frac{I'''}{\mathcal{M}_n^k}} = \frac{\mathbb{C}[x]}{I'''},\\
\frac{\mathcal{O}_t}{J'} &\approx \frac{\frac{\mathcal{O}_t}{\mathcal{M}_t^k}}{\frac{J'}{\mathcal{M}_t^k}} = \frac{\frac{\mathbb{C}[y]}{\mathcal{M}_t^k}}{\frac{J'''}{\mathcal{M}_t^k}} = \frac{\mathbb{C}[y]}{J'''},
\end{aligned}$$

sendo $I'',\ J''$ os ideais em $\mathbb{C}[x,y]$ gerado pelos $k-1$-jatos dos geradores de I e J, e $I''',\ J'''$ os ideais em $\mathbb{C}[x]$ e $\mathbb{C}[y]$ gerados pelos $k-1$-jatos dos geradores de I e J, respectivamente. Finalmente com a igualdade

$$\frac{\mathbb{C}[x]}{I''} \otimes_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[y]}{J''} = \frac{\mathbb{C}[x,y]}{(I+J)''},$$

obtemos,

$$\begin{aligned}
\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n+t}}{I+J} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x,y]}{I''+J''} &= \left(\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x]}{I'''}\right)\left(\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[y]}{J'''}\right)\\
&= \left(\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{I'}\right)\left(\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_t}{J'}\right).
\end{aligned}$$

■

Corolário 4.25. *Sejam $(X,0) \subset (\mathbb{C}^n,0)$ e $(\tilde{X},0)$ a sua inclusão em $(\mathbb{C}^{n+t},0)$. Se*

$$F : (\mathbb{C}^{n+t},0) \to (\mathbb{C},0),$$
$$(x_1,...,x_n,x_{n+1},...,x_{n+t}) \mapsto f(x_1,...,x_n) + g(x_{n+1},...,x_{n+t})$$

então:

a) F é $\mathcal{R}_{\tilde{X}}$-finitamente determinado se, e somente se, f é $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado e $\mu(g) < \infty$.

b) Se F é $\mathcal{R}_{\tilde{X}}$-finitamente determinado, então $\mu_{BR}(F,\tilde{X}) = \mu(g)\mu_{BR}(f,X)$

Demonstração: De fato, pela Proposição 4.20 temos

$$\Theta_{\tilde{X}} = \mathcal{O}_{n+t}\Theta_X + \left\langle \frac{\partial}{\partial x_{n+1}}, ..., \frac{\partial}{\partial x_{n+t}} \right\rangle,$$

portanto

$$dF(\Theta_{\tilde{X}}) = df(\Theta_X) + Jg,$$

e o resultado segue da proposição anterior, pois $df(\Theta_X)$ depende das n primeiras variáveis e Jg depende das t últimas variáveis.

■

Observamos que a igualdade (4.2) de [39] também é uma consequência do Teorema 4.24.

Capítulo 5

Os Números de Bruce-Roberts sobre uma ICIS

Nesse capítulo nós consideramos $(X, 0)$ uma ICIS e vamos estender alguns resultados provados nos capítulos anteriores. Esses resultados estão em [28].

5.1 O número de Bruce-Roberts relativo

Sejam $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ uma ICIS quase homogênea e $f \in \mathcal{O}_n$ um germe de função, em [7, Proposição 7.7] Bruce e Roberts provam que se f tem ponto crítico isolado então $(f^{-1}(0) \cap X, 0)$ define uma ICIS cujo o número de Milnor é igual ao número de Bruce-Roberts relativo de f com respeito a $(X, 0)$. Nessa seção vamos generalizar essa relação considerando $(X, 0)$ uma ICIS qualquer.

5.1.1 Campos de Vetores Triviais Θ_X^T

Sejam $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ uma ICIS de codimensão k tal que $I_X = \langle \phi_1, ..., \phi_k \rangle \subset \mathcal{O}_n$. Como

$$\begin{aligned}\Theta_X &= \{\xi \in \Theta_n;\ dh(\xi) \in I_X\ \forall h \in I_X\}\\ &= \{\xi \in \Theta_n;\ d\phi_i(\xi) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_{ij}\phi_j,\ i = 1, ..., k\},\end{aligned}$$

temos que $\xi \in \Theta_X$ se, e somente se, existe uma matriz $[\lambda_{ij}] \in M_k(\mathcal{O}_n)$ tal que

$$d\phi(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \phi_1}{x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_k}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \phi_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{k1} & \dots & \lambda_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_k \end{pmatrix} = [\lambda_{ij}]\, [\phi]^T, \tag{5.1}$$

sendo $[\phi]^T = [\phi_1, ..., \phi_k]^T = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_k \end{pmatrix}$ a transposta da matriz $[\phi]$.

Lembramos que o conjunto dos campos de vetores triviais é

$$\Theta_X^T = \langle \xi \in \Theta_X;\ d\phi_i(\xi) = 0; \forall i = 1, ..., k \rangle + \langle \phi_i e_j,\ i = 1, ..., k,\ j = 1, ..., n \rangle.$$

A seguir vamos caracterizar os campos $\xi \in \Theta_X$ tal que $d\phi_i(\xi) = 0\ \forall i = 1, ..., k$ mais precisamente, vamos mostrar que

$$\langle \xi \in \Theta_X;\ d\phi_i(\xi) = 0; \forall i = 1, ..., k \rangle = I_{p+1} \begin{pmatrix} e_1 & ... & e_n \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_k}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial \phi_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Para essa finalidade precisamos utilizar o complexo de Koszul generalizado que foi introduzido por Buchsbaum e Rim em [8].

Sejam R um anel comutativo noetheriano, $\varphi : R^m \to R^n$ um R-homomorfismo e

$$\begin{aligned} \gamma(\varphi) : R^m \times R^{n*} &\to R \\ (b, a) &\mapsto a(\varphi(b)) \end{aligned}$$

sendo $R^{n*} = \mathrm{Hom}(R^n, R)$.

O Complexo de Koszul generalizado, $K(\bigwedge^p \varphi)$, para cada p é definido como

$$\ldots \longrightarrow \sum_{s_0 \geqslant n+1-p} \bigwedge^{s_0} R^{n*} \otimes \bigwedge^{s_1} R^{n*} \otimes \bigwedge^{p+\sum s_i} R^m \longrightarrow \sum_{s_0 \geqslant n+1-p} \bigwedge^{s_0} R^{n*} \otimes \bigwedge^{p+s_0} R^m \xrightarrow{d} \bigwedge^{p} R^m \xrightarrow{\bigwedge^p \varphi} \bigwedge^{p} R^n \tag{5.2}$$

sendo $s_i \geq 1$ para todo $i \geq 1$ e

$$d : \sum_{s_0 \geqslant n+1-p} \bigwedge^{s_0} R^{n*} \otimes \bigwedge^{p+s_0} R^m \to \bigwedge^{p} R^m$$

é definido do seguinte modo:

Sejam $\alpha = a_1 \wedge ... \wedge a_{s_0} \in \bigwedge^{s_0} R^{n*}$ e $\beta = b_1 \wedge ... \wedge b_{p+s_0} \in \bigwedge^{p+s_0} R^m$ então

$$d(\alpha \otimes \beta) = \omega_\alpha(\beta) = \sum_{1 \leq j_1 < ... < j_p \leq p+1} (-1)^{\sum j_k} det(\gamma(a_i, b_{j_k})) b_1 \wedge ... \wedge \hat{b}_{j_1} \wedge ... \wedge \hat{b}_{j_p} \wedge ... \wedge b_{p+s_0},$$

onde $\hat{b}_{j_l}$ significa que vamos excluir b_{j_l}, assim obtemos a aplicação

$$\omega_\alpha : \bigwedge^{s_0} R^{n*} \otimes \bigwedge^{p+s_0} R^m \to \bigwedge^{p} R^m$$

Proposição 5.1. *[8] Sejam $\varphi : R^m \to R^n$ com $m \geq n$, E um R-module tal que $E/I(\varphi)E \neq 0$, sendo $I(\varphi)$ o anulador de Coker $\bigwedge^n \varphi$. Então as afirmações são equivalentes:*

1) Para algum p, $1 \leq p \leq n$, $H_q(\bigwedge^p \varphi, E) = 0$, para todo $q \neq 0$.

2) Para algum p, $1 \leq p \leq n$, $H^q(\bigwedge^p \varphi, E) = 0$, para todo $q \neq m-n+1$.

3) Para todo p, $1 \leq p \leq n$, $H_q(\bigwedge^p \varphi, E) = 0$, para todo $q \neq 0$ e $H^q(\bigwedge^p \varphi, E) = 0$, para todo $q \neq m-n+1$.

4) $\operatorname{depth}(I(\varphi); E) = m-n+1$.

Em particular, se $\operatorname{coker}(\varphi) \neq 0$, $K(\bigwedge^p \varphi)$ é uma resolução livre do $\operatorname{coker}(\bigwedge^p \varphi)$ para algum p, $1 \leq p \leq n$ (ou para todo p, $1 \leq p \leq n$) se, e somente se, $\operatorname{depth}(I(\varphi), R) = m-n+1$.

Agora nós vamos aplicar os resultados anteriores considerando $\phi = (\phi_1, ..., \phi_k) : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^k, 0)$ então nós temos o homomorfismo de $\mathcal{O}_n$-módulos

$$d\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} : \mathcal{O}_n^n \to \mathcal{O}_n^k$$

e $I(d\phi)$ é o anulador do $\operatorname{coker}(\bigwedge^k d\phi) = \mathcal{O}_n/J(\phi_1, ..., \phi_k)$, então $I(d\phi)$ é o ideal gerado pelos menores de ordem máxima da matriz jacobiana de ϕ. Dessa maneira temos

$$\dim \frac{\mathcal{O}_n}{I(d\phi)} = k-1 = n-(n-k+1)(k-k+1).$$

Pela proposição 1.9 temos que

$$\operatorname{depth}(I(d\phi), \mathcal{O}_n) = ht(I(d\phi)) = \dim(\mathcal{O}_n) - \dim \frac{\mathcal{O}_n}{I(d\phi)} = n-(k-1),$$

portanto, pela Proposição 5.1, $K(\bigwedge^p d\phi)$ é uma resolução livre do $\operatorname{coker}(\bigwedge^p d\phi)$, para todo p, $1 \leq p \leq k$.

Considerando $p = 1$, temos que $K(\bigwedge^1 d\phi) = K(d\phi)$ é uma sequência exata, agora vamos analisar os três últimos termos de (5.2)

$$\sum_{s_0 \geqslant k} \bigwedge^{s_0} {\mathcal{O}_n}^{k*} \otimes \bigwedge^{1+s_0} \mathcal{O}_n^n \xrightarrow{d} \bigwedge^{1} \mathcal{O}_n^n \xrightarrow{\wedge^1 d\phi} \bigwedge^{1} \mathcal{O}_n^k, \tag{5.3}$$

mas

$$\left(\sum_{s_0\geqslant k+1}\bigwedge^{s_0}\mathcal{O}_n{}^{k^*}\otimes\bigwedge^{1+s_0}\mathcal{O}_n^n\right)\oplus\left(\bigwedge^{k}\mathcal{O}_n^{k^*}\otimes\bigwedge^{1+k}\mathcal{O}_n^n\right)=\bigwedge^{k}\mathcal{O}_n^{k^*}\otimes\bigwedge^{1+k}\mathcal{O}_n^n$$

$$\bigwedge^{1}\mathcal{O}_n^n=\mathcal{O}_n^n,\ \bigwedge^{1}\mathcal{O}_n^k=\mathcal{O}_n^k \text{ e } \wedge^1 d\phi=d\phi,$$

portanto a sequência exata (5.3) se resume a

$$\bigwedge^{k}\mathcal{O}_n{}^{k^*}\otimes\bigwedge^{1+k}\mathcal{O}_n^n\xrightarrow{d}\mathcal{O}_n^n\xrightarrow{d\phi}\mathcal{O}_n^k,$$

e consequentemente $\ker(d\phi)=\mathrm{Im}(d)$.

Consideramos agora $\{e_1,...,e_n\}$ base canônica de $\mathcal{O}_n^n$, $\{u_1,...,u_k\}$ base canônica de $\mathcal{O}_n^k$ e $\{u_1^*,...,u_k^*\}$ base dual de $(\mathcal{O}_n^k)^*$, então

$$\gamma(d\phi)(e_i,u_j^*)=u_j^*(d\phi(e_i))=u_j^*\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)=\frac{\partial\phi_j}{\partial x_i}.$$

Portanto se

$$\alpha=u_1^*\wedge...\wedge u_k^*\in\bigwedge^{k}\mathcal{O}_n^{k^*} \text{ e}$$
$$\beta=e_{l_1}\wedge...\wedge e_{l_{k+1}}\in\bigwedge^{k+1}\mathcal{O}_n^n \text{ com } 1\leq l_1<...<l_{k+1}\leq n$$

então

$$\begin{aligned} d(\alpha\otimes\beta)=\omega_\alpha\beta &= \sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{\sum_{k\neq j}j_k}det\gamma(e_{i_k},u_i)e_{l_j}\\ &= \sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{\sum_{k\neq j}j_k}det\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial x_{i_k}}\right)_{k\neq j}e_{l_j}\\ &= \det\begin{pmatrix} e_{l_1} & \dots & e_{l_{k+1}}\\ \frac{\partial\phi_1}{\partial x_{l_1}} & \dots & \frac{\partial\phi_1}{\partial x_{l_{k+1}}}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial\phi_k}{\partial x_{l_1}} & \dots & \frac{\partial\phi_k}{\partial x_{l_{k+1}}}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Dessa maneira obtemos

$$\mathrm{Im}(d)=I_{k+1}\begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n\\ \frac{\partial\phi_1}{\partial x_l} & \dots & \frac{\partial\phi_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial\phi_k}{\partial x_l} & \dots & \frac{\partial\phi_k}{\partial x_n}\end{pmatrix}=\ker(d\phi).$$

Assim nós obtemos a seguinte caracterização para os geradores de Θ_X^T.

Proposição 5.2. *Seja* $(X,0)$ *uma ICIS determinada por* $\phi = (\phi_1,...,\phi_k) : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C}^k,0)$*, então*

$$\Theta_X^T = I_{k+1}\begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial x_l} & \dots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_k}{\partial x_l} & \dots & \frac{\partial \phi_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} + \langle \phi_i e_j,\ i=1,...,k,\ j=1,...,n\rangle\,.$$

e consequentemente temos que para todo $f \in \mathcal{O}_n$

$$df(\Theta_X^T) = J(f,\phi_1,...,\phi_k) + Jf\langle\phi_1,...,\phi_k\rangle. \tag{5.4}$$

5.1.2 O número de Bruce-Roberts relativo sobre uma ICIS

Como já comentamos anteriormente Bruce e Roberts em [7] provaram que se $(X,0) \subset (\mathbb{C}^n,0)$ é uma ICIS quase homogênea e $f \in \mathcal{O}_n$ tem ponto crítico isolado então $(f^{-1}(0) \cap X,0)$ define uma ICIS e

$$\mu_{BR}^-(f,X) = \mu(f^{-1}(0)\cap X,0). \tag{5.5}$$

Nesta seção nós vamos estender esse resultado para $(X,0)$ uma ICIS (qualquer), nosso primeiro resultado é uma extensão da Proposição 4.1 no capítulo 4.

Proposição 5.3. *Sejam* $(X,0)$ *uma ICIS determinada por* $(\phi_1,...,\phi_k) : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C}^k,0)$ *e* $f \in \mathcal{O}_n$*. A aplicação* $(\phi_1,...,\phi_k,f) : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C}^{k+1},0)$ *define uma ICIS se, e somente se,* $\mu_{BR}^-(f,X) < \infty$*.*

Demonstração: Suponhamos inicialmente que $\phi_1,...,\phi_k,f$ definem uma ICIS então

$$V(J(\phi_1,...,\phi_k,f) + \langle\phi_1,...,\phi_k\rangle,0) \subset (\{0\},0)$$

como $J(\phi_1,...,\phi_k,f) + \langle\phi_1,...,\phi_k\rangle \subset df(\Theta_X^-)$, então

$$V(df(\Theta_X^-),0) \subset V(J(\phi_1,...,\phi_k,f) + \langle\phi_1,...,\phi_k\rangle,0) \subset (\{0\},0).$$

Assim provamos que se $\phi_1,...,\phi_k,f$ define uma ICIS então $\mu_{BR}^-(f,X) < \infty$. Para provarmos a recíproca seguimos a mesma ideia da Proposição 2.8 em [5].

Suponhamos, por absurdo, que $(\phi_1,...,\phi_k,f)$ não defina uma ICIS, então

$$(\{0\},0) \subsetneq V(J(f,\phi_1,...,\phi_k) + \langle\phi_1,...,\phi_k\rangle,0),$$

logo existe x não nulo em $V(J(f,\phi_1,...,\phi_k)+\langle\phi_1,...,\phi_k\rangle,0)$, como $x \in X$, existe um estrato logarítmico $X_\alpha \neq \mathbb{C}^n \setminus X$, tal que $x \in X_\alpha$. Observamos agora que $x \in V(df(\Theta_X^-),0) \subset$

$V(J(f,\phi_1,...,\phi_k),0)$, logo x anula todos os menores de ordem $k+1$ da matriz jacobiana $J[f,\phi_1,...,\phi_k]$, mas $\phi_1,...,\phi_k$, definem a ICIS $(X,0)$, então como $x\in X$ temos que x não anula pelo menos um menor de ordem k da matriz jacobiana de $(\phi_1,...,\phi_k)$, assim nós temos que $\nabla f(x)$ é combinação linear de $\nabla\phi_1(x),...,\nabla\phi_k(x)$. Por hipótese $\mu^-_{BR}(f,X)$ é finito, então pela Proposição 2.29 $f\mid_{X_\alpha}$ é uma submersão, ou seja, existe um campo $\xi\in\Theta_X$, tal que $df(x)(\xi(x))\neq 0$, mas

$$df(x)(\xi(x))=\langle\nabla f(x),\xi(x)\rangle=\langle\sum_{j=1}^{k}\nabla\beta_j(x)\nabla\phi_j(x),\xi(x)\rangle=\sum_{j=1}^{k}\beta_j d\phi_j(x)(\xi(x))=0,$$

pois $x\in(X,0)$ e $\xi\in\Theta_X$. O que é um absurdo, logo se $\mu^-_{BR}(f,X)<\infty$, então $(\phi_1,...,\phi_k,f)$ define uma ICIS.

■

Agora nós vamos provar uma primeira relação para o número de Bruce-Roberts relativo de um germe de função $f\subset\mathcal{O}_n$ com respeito a uma ICIS.

Proposição 5.4. *Sejam $(X,0)$ uma ICIS determinada por $(\phi_1,...,\phi_k):(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C}^k,0)$ e $f\in\mathcal{O}_n$ um germe de função $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado, então*

$$\mu^-_{BR}(f,X)=\mu(X\cap f^{-1}(0),0)+\mu(X,0)-\dim_{\mathbb{C}}\frac{df(\Theta_X)+I_X}{df(\Theta_X^T)+I_X}.$$

Demonstração: Basta considerarmos a seguinte sequência exata

$$0\longrightarrow\frac{df(\Theta_X)+I_X}{df(\Theta_X^T)+I_X}\longrightarrow\frac{\mathcal{O}_n}{df(\Theta_X^T)+I_X}\longrightarrow\frac{\mathcal{O}_n}{df(\Theta_X^-)}\longrightarrow 0.$$

Então

$$\begin{aligned}\mu^-_{BR}(f,X)&=\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_n}{df(\Theta_X^T)+I_X}-\dim_{\mathbb{C}}\frac{df(\Theta_X)+I_X}{df(\Theta_X^T)+I_X}\\&\overset{(*)}{=}\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_n}{J(f,\phi)+I_X}-\dim_{\mathbb{C}}\frac{df(\Theta_X)+I_X}{df(\Theta_X^T)+I_X}\\&\overset{(**)}{=}\mu(f^{-1}(0)\cap X,0)+\mu(X,0)-\dim_{\mathbb{C}}\frac{df(\Theta_X)+I_X}{df(\Theta_X^T)+I_X}.\end{aligned}$$

Sendo (*) consequência da igualdade (5.4) e (**) da fórmula de Lê-Greuel.

■

Definição 5.5. [8] Sejam R um anel local, $h:R^m\to R^n$ uma aplicação com $m\geqslant n$ e E um R-submódulo. Dizemos que h é uma matriz de parâmetro para E quando $l(\mathrm{coker}(h)\otimes E)<\infty$ e $m-n+1=\dim E$.

Proposição 5.6. *[8] Sejam R um anel local, $h : R^m \to R^n$ uma matriz de parâmetro para R. Se R é Cohen-Macaulay, então $l(\operatorname{coker}(h)) = l(I(h))$, sendo $I(h)$ o anulador de* $\operatorname{coker}(\wedge^n h)$.

Proposição 5.7. *Seja $(\phi_1, ..., \phi_{k-1}) : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^{k-1}, 0)$ definindo uma ICIS e $\phi_k \in \mathcal{O}_n$ tal que $\phi = (\phi_1, ..., \phi_{k-1}, \phi_k) : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^k, 0)$ também define ICIS. Então $d\phi : R^n \to R^k$ define uma matriz de parâmetro para o anel $R := \mathcal{O}_n/\langle \phi_1, ..., \phi_{k-1}\rangle$.*

Demonstração: De fato $\operatorname{coker}(d\phi) = R^k/\operatorname{Im}(d\phi) \approx \mathcal{O}_n^k/(\langle \phi_1, ..., \phi_k\rangle \mathcal{O}_n^k + \operatorname{Im}(d\phi))$. Assim nós temos a igualdade

$$\operatorname{coker}(d\phi) \otimes R \approx \frac{\operatorname{coker}(d\phi)}{\langle \phi_1, ..., \phi_{k-1}\rangle \operatorname{coker}(d\phi)} \approx \frac{\mathcal{O}_n^k}{\langle \phi_1, ..., \phi_k\rangle \mathcal{O}_n^k + \operatorname{Im}(d\phi)},$$

e $l(\operatorname{coker}(d\phi)\otimes R) < \infty$, pois $\phi_1, ..., \phi_{k-1}$ é um sistema de parâmetro de $\mathcal{O}_n^k/\operatorname{Im}(d\phi)$. Como $\dim R = n - k + 1$ temos que $d\phi$ é uma matriz de parâmetro para R e pela Proposição 5.6

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{R^k}{\operatorname{Im}(d\phi)} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{R}{J(\phi_1, ..., \phi_k)}.$$

■

Agora estamos prontos para provar o nosso principal resultado desse capítulo, o qual generaliza a Proposição 7.7 em [7].

Teorema 5.8. *Sejam $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ uma ICIS determinada por $\phi = (\phi_1, ..., \phi_k)$ e $f \in \mathcal{O}_n$ germe de função tal que $\mu_{BR}^-(f, X) < \infty$, então $(f^{-1}(0) \cap X, 0)$ define uma ICIS e*

$$\mu_{BR}^-(f, X) = \mu(f^{-1}(0) \cap X, 0) + \mu(X, 0) - \tau(X, 0).$$

Demonstração: Pela Proposição 5.4 precisamos mostrar que

$$\tau(X, 0) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{df(\Theta_X) + I_X}{df(\Theta_X^T) + I_X}.$$

Mas sabemos pelo Teorema 1.55 que

$$\tau(X, 0) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n^k}{\operatorname{Im} d\phi + I_X \mathcal{O}_n^k}.$$

Assim, consideramos a sequência

$$0 \longrightarrow \ker(\overline{\alpha}) \xrightarrow{i} \frac{\mathcal{O}_n}{df(\Theta_X^T) + I_X} \xrightarrow{\overline{\alpha}} \frac{\mathcal{O}_n^{k+1}}{\operatorname{Im} d(f, \phi) + I_X \mathcal{O}_n^k} \xrightarrow{\overline{\pi}} \frac{\mathcal{O}_n^k}{\operatorname{Im} d(\phi) + I_X \mathcal{O}_n^k} \longrightarrow 0.$$

sendo i a inclusão, $\overline{\pi}$ e $\overline{\alpha}$ são, respectivamente, as aplicações induzidas pelas aplicações

$$\pi : \mathcal{O}_n^{k+1} \to \mathcal{O}_n^k \text{ and } \alpha : \mathcal{O}_n \to \mathcal{O}_n^{k+1}$$

dadas por $\pi(a_0, a_1, ..., a_k) = (a_1, ..., a_k)$ e $\alpha(a) = (a, 0, ..., 0)$. Temos que $\overline{\alpha}$ está bem definida, pois se $a \in df(\Theta_X^T) + I_X = J(f, \phi) + I_X$ então existe um vetor $\xi \in \Theta_X^T$ e $\gamma \in I_X$ tais que

$$\alpha(a) = (a, 0, ..., 0) = (df(\xi) + \gamma, 0, ..., 0) \text{ e}$$

$$(df(\xi) + \gamma, 0, ..., 0) \equiv (df(\xi) + \gamma, d\phi_1(\xi), ..., d\phi_k(\xi)) \bmod (\operatorname{Im} d(f, \phi) + I_X\mathcal{O}_\backslash^{\|}).$$

A sequência acima é exata. De fato $\operatorname{Im} i = \ker \overline{\alpha}$, $\overline{\pi}$ é sobrejetora, e

$$\operatorname{Im} \overline{\alpha} = \frac{\langle(1, ..., 0)\rangle + \operatorname{Im} d(f, \phi) + I_X\mathcal{O}_n^k}{\operatorname{Im} d(f, \phi) + I_X\mathcal{O}_n^k} = \ker \overline{\pi}.$$

Além disso, pela Proposição 5.7, $d(f, \phi) : (\mathcal{O}_n/I_X)^n \to (\mathcal{O}_n/I_X)^{k+1}$ é uma matriz de parâmetro para o anel $\mathcal{O}_n/I_X$, como esse anel é Cohen-Macaulay então pela Proposição 5.6

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{df(\Theta_X^T) + I_X} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n^{k+1}}{\operatorname{Im}(d(f, \phi)) + I_X\mathcal{O}_n^{k+1}}.$$

Pela exatidão da sequência obtemos $\dim_{\mathbb{C}} \ker \overline{\alpha} = \tau(X, 0)$, e agora nós precisamos mostrar que

$$\ker(\overline{\alpha}) = \frac{df(\Theta_X) + I_X}{df(\Theta_X^T) + I_X}.$$

Seja $\overline{a} \in \ker(\overline{\alpha})$, ou seja, existe $\xi \in \Theta_n$ tal que

$$(a, 0, ..., 0) = (df(\xi), d\phi_1(\xi), ..., d\phi_k(\xi)) + (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_k),$$

com $\alpha_i \in I_X \ \forall\, i = 0, ..., k$, então

$$(a - \alpha_0, -\alpha_1, ..., -\alpha_{k+1}) = (df(\xi), d\phi_1(\xi), ..., d\phi_k(\xi)),$$

logo $\xi \in \Theta_X$ e $a \in df(\Theta_X) + I_X$. Assim provamos a inclusão

$$\ker \overline{\alpha} \subset \frac{df(\Theta_X) + I_X}{df(\Theta_X^T) + I_X}.$$

Para a inclusão contrária seja $\xi \in \Theta_X$, então $\overline{df(\xi)} \in (df(\Theta_X) + I_X)/(df(\Theta_X^T) + I_X)$ e

$$\overline{\alpha}(\overline{df(\xi)}) = \overline{(df(\xi), 0, ...0)} = \overline{(df(\xi), d\phi_1(\xi), ..., d\phi_k(\xi))} \in \operatorname{Im}(d(f, \phi)).$$

E segue o resultado.

∎

Corolário 5.9. *Sejam $(X, 0)$ uma ICIS e f um germe de função tal que $\mu_{BR}^-(f, X) < \infty$, então*

$$\tau(X, 0) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{df(\Theta_X) + I_X}{df(\Theta_X^T) + I_X}.$$

Corolário 5.10. *Sejam $(X,0)$ uma ICIS, f, $g \in \mathcal{O}_n$ germes $C^0\mathcal{R}_X$ equivalentes, então*

$$\mu_{BR}^-(f,X) = \mu_{BR}^-(g,X).$$

em outras palavras o número de Bruce-Roberts relativo é um invariante topológico.

A demonstração desse corolário é a mesma do Corolário 4.5.

Corolário 5.11. *Se $(X,0)$ é uma ICIS quase homogênea, então $\mu(X,0) = \tau(X,0)$.*

Demonstração: Pelo Teorema 5.8

$$\mu_{BR}^-(f,X) = \mu(X \cap f^{-1}(0)) + \mu(X,0) - \tau(X,0),$$

mas como $(X,0)$ é uma ICIS quase homogênea temos por [7, Proposição 7.7] que $\mu_{BR}^-(f,X) = \mu(X \cap f^{-1}(0))$, e segue o resultado.

■

O próximo corolário é uma consequência imediata do Corolário 5.4 e da fórmula de Lê-Greuel.

Corolário 5.12. *Sejam $(X,0)$ uma ICIS definida por $\phi = (\phi_1, ..., \phi_k) : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C}^k,0)$ e $f \in \mathcal{O}_n$ tal que $\mu_{BR}^-(f,X) < \infty$, então*

$$\mu_{BR}^-(f,X) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{J(f,\phi) + I_X} - \tau(X,0)$$

Sejam $(X,0)$ uma ICIS definida por $\phi = (\phi_1, ..., \phi_k) : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C}^k,0)$. Sabemos que a multiplicidade polar de ordem máxima de $(X,0)$ é dada por $m_{n-k}(X,0) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_n/(J(p,\phi) + I_X)$ (Definição 3.22). Assim segue do Teorema 5.8 que

$$\mu_{BR}^-(p,X) = m_{n-k}(X,0) - \tau(X,0),$$

ou seja, o número de Bruce-Roberts relativo independe da projeção linear genérica. Além disso, como já comentamos anteriormente Jorge Perez e Saia mostraram em [22] que se $(X,0)$ é uma ICIS de dimensão $n-k$, então:

$$1 + (-1)^{n-k}\mu(X,0) = \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i m_i(X,0), \tag{5.6}$$

sendo $m_i(X,0)$ a i-ésima multiplicidade polar de $(X,0)$. Tomando como definição para obstrução de Euler de uma ICIS, $(X,0)$, de dimensão $n-k$ a relação provada por Lê e Tessier em [26]

$$Eu(X,0) = \sum_{i=0}^{n-k-1} (-1)^{n-k-i-1} m_i(X,0). \tag{5.7}$$

Das igualdades (5.6) e (5.7) temos que

$$\begin{aligned}(-1)^{n-k-1}(1+(-1)^{n-k}\mu(X,0)) &= (-1)^{n-k-1}(\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i m_i(X,0))\\ &= \sum_{i=0}^{n-k-1}(-1)^{n-k-i-1}m_i(X,0)) - m_{n-k}(X,0)\\ &= Eu(X,0) - m_{n-k}(X,0)\end{aligned}$$

logo

$$(-1)^{n-k-1} - \mu(X,0) = Eu(X,0) - m_{n-k}(X,0),$$

e assim obtemos o corolário:

Corolário 5.13. *Sejam $(X,0)$ uma ICIS de codimensão k e $p : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ projeção linear genérica, então*

a) $m_{n-k} = \mu^-_{BR}(p,X) + \tau(X)$;

b) $Eu(X,0) = \mu^-_{BR}(p,X) + \tau(X,0) - \mu(X,0)) + (-1)^{n-k-1}$

O corolário anterior generaliza o Corolário 3.23, pois para toda projeção linear genérica p, $\mu_{BR}(p,X) = \mu^-_{BR}(p,X)$.

5.2 A variedade logarítmica característica relativa de uma ICIS

Sabemos que se a variedade $(X,0)$ tem codimensão maior que 1, então sua variedade logarítmica característica, $LC(X)$, não é Cohen-Macaulay, mas como foi observado em [7], ainda temos a variedade logarítmica característica relativa de X, $LC(X)^-$, a qual pode ser Cohen-Macaulay mesmo quando $LC(X)$ não é. Esse é exatamente o caso quando $(X,0)$ é uma ICIS quase homogênea de codimensão maior que 1. Vamos provar nesta seção que $LC(X)^-$ de qualquer ICIS, $(X,0)$, é Cohen-Macaulay.

Teorema 5.14. *Seja $(X,0)$ uma ICIS, então $LC(X)^-$ é Cohen-Macaulay.*

Demonstração: Seja $(0,p) \in LC(X)^- \subset LC(X)$, então existe $f \in \mathcal{O}_n$ germe de função $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado tal que $df(0) = p$, logo

$$\begin{aligned}\mu^-_{BR}(f,X) &= \mu(X\cap f^{-1}(0),0) + \mu(X,0) - \tau(X,0)\\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n+1}}{J(f_t,\phi_1,...,\phi_k) + \langle \phi_1,...,\phi_k\rangle} - \tau(X,0).\end{aligned}$$

Consideramos agora uma morsificação de f, $F : (\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C},0)$, tal que $F(t,x) = f_t(x)$. Então $\dim \mathcal{O}_{n+1}/(J(f_t,\phi_1,...,\phi_k) + \langle\phi_1,...,\phi_k\rangle) = 1$, pois para cada t, f_t é uma função de Morse em $(X,0)$, e consequentemente a variedade $V(J(f_t,\phi_1,...,\phi_k)+\langle\phi_1,...,\phi_k,0) \subset (\mathbb{C}^n,0)$ possui pontos isolados e quando t, varia temos $V(J(f_t,\phi_1,...,\phi_k)+\langle\phi_1,...,\phi_k\rangle$ é uma curva em $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$. Sejam

$$R = \frac{\mathcal{O}_{n+1}}{\langle\phi_1,...,\phi_k\rangle} \text{ e } I = \frac{J(f_t,\phi_1,...,\phi_k)+\langle\phi_1,...,\phi_k\rangle}{\langle\phi_1,...,\phi_k\rangle.}$$

então $\dim R = n+1-k$, pois $\phi_1,...,\phi_k$ é uma sequência regular em $\mathcal{O}_n$ e não dependem de t, portando $\phi_1,...,\phi_k$ é uma sequência regular em $\mathcal{O}_{n+1}$. Além disso temos

$$\dim\frac{R}{I} = \dim\frac{\mathcal{O}_{n+1}}{J(f_t,\phi_1,...,\phi_k)+\langle\phi_1,...,\phi_k\rangle} = 1 = \dim R-(n-(k+1)+1)(k+1-(k+1)+1).$$

Assim pelo Teorema 1.6, $\mathcal{O}_{n+1}/(J(f_t,\phi_1,...,\phi_k)+\langle\phi_1,...,\phi_k\rangle)$ é um anel Cohen-Macaulay e sua dimensão é a mesma do espaço de parâmetro, então pelo princípio da conservação do número para todo t suficientemente próximo da origem temos

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_n}{J(f,\phi_1,...,\phi_k)+\langle\phi_1,...,\phi_k\rangle} &= \sum_{x\in U}\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_{n,x}}{J(f_t,\phi_1,...,\phi_k)+\langle\phi_1,...,\phi_k\rangle}\\ &= \sum_{i=1}^{s+1}\sum_{x\in X_i}\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_{n,x}}{J(f_t,\phi_1,...,\phi_k)+\langle\phi_1,...,\phi_k\rangle}\end{aligned}$$

Sendo $U \subset \mathbb{C}^n$ uma vizinhança aberta da origem suficientemente pequena temos que $X_0 = U\backslash X,\ X_1,\ ...,\ X_s, X_{s+1} = \{0\}$ é a estratificação logarítmica de $(X,0)$. Agora vamos analisar o somatório em cada estrato logarítmico, lembrando que m_i é a multiplicidade do estrato $Y_i = \overline{N^*X_i}$, e n_i é o números de pontos críticos de f_t no estrato X_i.

- $i=0$

  Se $x\in X_0$, então $x\notin X$ e assim

$$\sum_{x\in X_0}\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_{n,x}}{J(f_t,\phi_1,...,\phi_k)+\langle\phi_1,...,\phi_k\rangle} = 0.$$

- $i=1,...,s$

$$\begin{aligned}\sum_{x\in X_i}\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_{n,x}}{J(f_t,\phi_1,...,\phi_k)+\langle\phi_1,...,\phi_k\rangle} &= \sum_{x\in X_i\cap\Sigma f_t}\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_{n,x}}{J(f_t,\phi_1,...,\phi_k)+\langle\phi_1,...,\phi_k\rangle}\\ &= \sum_{x\in X_i\cap\Sigma f_t}\mu_{BR}(f_t,X)_x-\tau(X,x)\\ &= \sum_{x\in X_i\cap\Sigma f_t} m_i - 0 = n_i m_i\end{aligned}$$

  pois se $x\in X_i\cap\Sigma f_t$ sendo f_t uma função de Morse então o número $\mu^-_{BR}(f,X)_x$ é igual a multiplicidade do estrato logarítmico que contém o ponto e $\tau(X,x)=0$.

- $i = s+1$

$$
\begin{aligned}
\sum_{x\in X_{s+1}} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n,x}}{J(f_t,\phi_1,...,\phi_k)+\langle\phi_1,...,\phi_k\rangle} &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n}}{J(f_t,\phi_1,...,\phi_k)+\langle\phi_1,...,\phi_k\rangle}\\
&= \mu_{BR}(f_t,X)+\tau(X,0)\\
&= m_{s+1}+\tau(X,0)\\
&= n_{s+1}m_{s+1}+\tau(X,0),
\end{aligned}
$$

pois $X_{s+1}=\{0\}$, portanto $n_{s+1}=1$.

Dessa maneira obtemos

$$
\begin{aligned}
\mu^-_{BR}(f,X) &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n}}{J(f,\phi_1,...,\phi_k)+\langle\phi_1,...,\phi_k\rangle} - \tau(X,0)\\
&= \sum_{i=0}^{s+1}\sum_{x\in X_i} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n}}{J(f_t,\phi_1,...,\phi_k)+\langle\phi_1,...,\phi_k\rangle} - \tau(X,0)\\
&= \sum_{i=1}^{s+1} n_i m_i + \tau(X,0) - \tau(X,0)\\
&= \sum_{i=1}^{s+1} n_i m_i.
\end{aligned}
$$

Portanto segue da Proposição 2.25 que $LC(X)^-$ é Cohen-Macaulay.

∎

Com o fato de $LC(X)^-$ ser Cohen-Macaulay nós generalizamos alguns resultados obtidos na seção 7 de [7], no qual eles consideram ICIS quase-homogêneas.

Corolário 5.15. *Seja $(X,0)$ uma ICIS, $LC(X)$ é Cohen-Macaulay em todos os pontos que não estão em $X\times\{0\}$.*

Demonstração: Seja $(x,p)\in LC(X)$ tal que $(x,p)\notin X\times\{0\}$.

Se $x\in X$ então $p\neq 0$ e existe uma vizinhança V de (x,p), tal que

$$LC(X)\cap V = LC(X)^-\cap V$$

como um espaço complexo, veja a demonstração do Lema 4.18.

Se $x\notin X$ então $x\in X_0=\mathbb{C}^n\setminus X$, ou seja, $(x,p)\in Y_0$ e $I_{Y_{0,(x,p)}}$ é uma interseção completa. Sejam $V=\mathbb{C}^{2n}\setminus\cup_{i=1}^{k+1}Y_i$, então V é uma vizinhança aberta de (x,p) e como conjunto

$$LC(X)\cap V = Y_0\cap V.$$

Para concluirmos a igualdade como espaços complexos consideramos I_j o ideal que determina a variedade Y_j e I o ideal que define $LC(X)$, então

$$I = I_0 \cap ... \cap I_{k+1}$$

e como $x \in \mathbb{C}^n \backslash X$ temos que o ideal I_j é o ideal total no aberto V para todo $j = 1, ..., k+1$, portanto nós obtemos a igualdade como espaços complexos e $LC(X)$ é Cohen-Macaulay nesse ponto pois Y_0 também o é.

■

Corolário 5.16. *Seja $(X, 0)$ uma ICIS. Se f tem um ponto crítico isolado em x. Então*

$$\mu_{BR}(f, X)_x \geq \mu_{BR}^-(f, X)_x + \mu(f)_x,$$

com igualdade se $x \in \mathbb{C}^n \setminus X$ ou $df(x) \neq 0$.

Além disso, se $x \in \mathbb{C}^n \setminus X$ então $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{n,x}/df(\Theta_{X,x}^-) = 0$ enquanto se $df(x) \neq 0$, $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{n,x}/Jf_x = 0$.

Se $(X, 0)$ não é uma hipersuperfície então a condição suficiente para a igualdade, no corolário anterior, é também necessária.

Demonstração: Pelas Proposições 2.23 e 2.25 nós temos

$$\mu_{BR}(f, X)_x \geq \sum_{i=0}^{k+1} m_i n_i = \mu_{BR}^-(f, X)_x + m_0 n_0 = \mu_{BR}^-(f, X)_x + \mu(f)_x,$$

a última igualdade é consequência da Proposição 2.22.

O restante segue da Proposição 2.23, [7, Proposition 5.8].

■

Como uma consequência imediata do resultado anterior temos

Corolário 5.17. *Seja $f \in \mathcal{O}_n$ um germe de função $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado, se x é um ponto crítico de f então*

$$\sum_{i=1}^{k} n_i + m_{k+1} = \mu_{BR}^-(f, X)_x$$

$$\sum_{i=0}^{k} n_i + m_{k+1} \leq \mu_{BR}(f, X)_x$$

Seja $(X, 0)$ uma ICIS determinada por $\phi : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^k, 0)$ e $x_1, ..., x_n, p_1, ..., p_n$ um sistema de coordenadas em $T^*\mathbb{C}^n$, Bruce and Roberts também definem em [7], $LC(X)^T$, como a subvariedade de $T^*\mathbb{C}^n$ dada por $\phi_i,\ i=1,...,k$ and

$$I_{k+1}\begin{pmatrix} p_1 & \cdots & p_n \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Como é observado em [7] a estratificação logarítmica considerando os campos de vetores dados pelos menores

$$I_{k+1}\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

é ainda holonômica. Mais precisamente essa é a mesma que a dada por Θ_X então $LC(X)^T$ é n-dimensional com as mesmas componentes irredutíveis de $LC(X)^-$. Sejam $Y_i,\ i=1,...,k$ as componentes irredutíveis de $LC(X)^T$, então Y_i tem multiplicidade $m_i=1,\ i=1,...,k$ e Y_{k+1} tem multiplicidade $m(X,0)^T$. Em geral $m(X,0)^T$ é maior que a multiplicidade de Y_{k+1} em $LC(X)^-$, m_{k+1}. A principal vantagem de considerarmos $LC(X)^T$ é que ele é Cohen-Macaulay para qualquer ICIS, veja [7, Proposition 7.10].

Proposição 5.18. *Seja $f\in\mathcal{O}_n$ um germe de função $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado então*

$$m(X,0)^T - m_{k+1} = \tau(X).$$

Demonstração: Segue do Corolário 5.17 e [7, Corolário 7.11].

■

Seja $f\in\mathcal{O}_n$ um germe de função $\mathcal{R}_X$- finitamente determinadoe $F:(\mathbb{C}^n\times\mathbb{C},0)\to(\mathbb{C},0)$, $F(x,t)=f_t(x)$, uma deformação 1-parametro de f. Sabemos que a curva de F em $(X,0)$ é

$$C=\{(x,t)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{C};\ df_t(\delta_i)=0\ \forall\ i=1,...,m\},$$

sendo $\Theta_X=\langle\delta_1,...,\delta_m\rangle$, e a curva polar relativa é o conjunto dos pontos em C tais que $x\in X$.

Como consequência do Teorema 5.14 e Proposição 4.16, temos que para toda *ICIS* $(X,0)$ a sua curva polar relativa C^- is Cohen-Macaulay e

$$\mu^-_{BR}(f,X)=\sum_{x\in\mathbb{C}^n}\mu^-_{BR}(f_t,X)_x.$$

5.3 O Número de Bruce-Roberts sobre uma ICIS

Seja $(X,0) \subset (\mathbb{C}^n,0)$ uma ICIS determinada por $\phi = (\phi_1,...,\phi_k) : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C}^k,0)$ e $f \in \mathcal{O}_n$ germe de função $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado. Nessa seção nosso principal objetivo é generalizar a relação obtida entre $\mu_{BR}(f,X)$ e $\mu(f)$ no capítulo 3.

Inicialmente lembramos que nessas condições $(f,\phi) : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C}^{k+1},0)$ define uma ICIS (ver Proposição 3.6).

Proposição 5.19. *Sejam $(X,0)$ uma ICIS determinada por $\phi = (\phi_1,...,\phi_k) : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C}^k,0)$, e $f \in \mathcal{O}_n$. Então*

$$\mu_{BR}(f,X) < \infty \text{ se, e somente se, } \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{df(\Theta_X^T)} < \infty.$$

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_n/df(\Theta_X^T) = \infty$, então $(\{0\},0) \subsetneq (V(df(\Theta_X^T)),0)$, portanto existe $x \neq 0$ tal que

$$\phi_j(x)\tfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0, \forall i = 1,...,n \text{ e } j = 1,...,k.$$

Por hipótese, f é $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado, logo $\mu(f) < \infty$ e $(V(Jf),0) = 0$. Assim $\phi_j(x) = 0$ para todo $j = 1,...,k$ e $x \in (V(J(\phi,f) + \langle \phi_1,...,\phi_k \rangle),0)$, o que contradiz a Proposição 3.6.

A recíproca segue da inclusão $df(\Theta_X^T) \subset df(\Theta_X)$, a qual implica

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{df(\Theta_X)} \leq \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{df(\Theta_X^T)}$$

■

Com o resultado anterior obtemos a recíproca da Proposição 3.6.

Proposição 5.20. *Sejam $(X,0)$ uma ICIS determinada por $\phi : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C}^k,0)$ e $f \in \mathcal{O}_n$. Se $(f,\phi) : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C}^{k+1},0)$ define uma ICIS, e $\mu(f) < \infty$, então f é $\mathcal{R}_X$-finitamente determinada.*

Demonstração: Como $(f,\phi) : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C}^{k+1},0)$ define uma ICIS, temos por Lê-Greuel que

$$\mu(X,0) + \mu(X \cap f^{-1}(0),0) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{J(f,\phi) + \langle \phi_1,...,\phi_k \rangle},$$

em outras palavras

$$V(J(f,\phi) + \langle \phi_1,...,\phi_k \rangle,0) \subset (\{0\},0).$$

Vamos provar a seguinte inclusão:

$$V(df(\Theta_X^T),0) \subset (\{0\},0),$$

a qual implicará o resultado pela Proposição 5.19. Primeiramente notamos que

$$df(\Theta_X^T) = J(f,\phi) + \langle \phi_l \tfrac{\partial f}{\partial x_j}, l = 1, ..., k;\ j = 1, ..., n\rangle.$$

Assim se $x \in V(df(\Theta_X^T), 0) = V(J(f,\phi) + \langle \phi_l \tfrac{\partial f}{\partial x_j}, l = 1, ..., k;\ j = 1, ..., n\rangle, 0)$
$= V(J(f,\phi), 0) \cap V(\langle \phi_l \tfrac{\partial f}{\partial x_j}, l = 1, ..., k;\ j = 1, ..., n\rangle, 0)$,

então

$$\phi_l(x)\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = 0\ \forall\ l = 1, ..., k;\ j = 1, ..., n,$$

mas por hipótese temos $\mu(f) < \infty$, ou seja, existe $j_0 \in \{1, ..., n\}$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x_{j_0}}(x) \neq 0,$$

logo

$$\phi_l(x) = 0\ \forall\ l = 1, ..., k,$$

ou seja,

$$x \in V(J(f,\phi), 0) \cap V(\phi_1, ..., \phi_k, 0) = V(J(f,\phi) + \langle \phi_1, ..., \phi_k\rangle, 0) \subset (\{0\}, 0).$$

Dessa maneira concluímos

$$V(df(\Theta_X^T), 0) \subset (\{0\}, 0).$$

■

Novamente observamos que a hipótese $\mu(f) < \infty$ não é muito restritiva pois caso contrário também teríamos que f não é $\mathcal{R}_X$-finitamente determinada.

Assim como fizemos para hipersuperfícies com singularidade isolada vamos estabelecer primeiramente uma relação para $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_n/df(\Theta_X^T)$, com esse objetivo lembramos que dado $\xi \in \Theta_X$ existe uma matriz quadrada de ordem k, $[\lambda_{ij}]$, tal que

$$d\phi(\xi) = [\lambda_{ij}][\phi]^T.$$

Agora nós vamos obter uma caracterização para os campos triviais em função dessa matriz $[\lambda_{ij}]$. Antes de começarmos observamos que existe mais de uma matriz $[\lambda_{ij}]$ que satisfaz a igualdade anterior. Dessa maneira vamos considerar as matrizes $[\lambda_{ij}]$ módulo H, sendo H o $\mathcal{O}_n$-submódulo de $M_k(\mathcal{O}_n)$ gerado pelas matrizes cujas linhas são combinações lineares de

$$\text{syz}(\phi_1, ..., \phi_k) = \langle \phi^i e_j - \phi^j e_i,\ 1 \leq j < i \leq k\rangle.$$

Proposição 5.21. *Seja $(X, 0)$ ICIS determinada por $(\phi_1, ..., \phi_k) : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^k, 0)$, então $\xi \in \Theta_X^T$ se e somente se existe uma matriz $[\lambda_{ij}] \in (T + H)/H$, sendo T o subespaço* *gerado pelas matrizes T_{lm}, $l = 1, ..., k$; $m = 1, ..., n$, tais que a l-ésima coluna é igual a m-ésima coluna da matriz jacobiana de ϕ.*

Demonstração: Seja $\xi \in \Theta_X^T$, então $\xi = \xi_1 + \xi_2$, com

$$\xi_1 \in I_{k+1} \begin{pmatrix} e_1 & ... & e_n \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_k}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial \phi_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} \text{ e } \xi_2 \in \langle \phi_i e_j,\ i = 1, ..., k;\ j = 1, ..., n \rangle,$$

logo existe $\alpha_{ij} \in \mathcal{O}_n$, tal que $\xi_2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \phi_i e_j$ e

$$\begin{aligned}
[\lambda_{ij}][\phi]^T = d\phi(\xi) = d\phi(\xi_1 + \xi_2) &= d\phi(\xi_2) \\
&= d\phi(\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \phi_i e_j) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_k}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial \phi_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^k \alpha_{i1} \phi_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^k \alpha_{in} \phi_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k \alpha_{ij} \phi_i \frac{\partial \phi_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k \alpha_{ij} \phi_i \frac{\partial \phi_k}{\partial x_j} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

logo

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & ... & \lambda_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{k1} & \dots & \lambda_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \alpha_{1j} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_j} & ... & \sum_{j=1}^n \alpha_{kj} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^n \alpha_{1j} \frac{\partial \phi_k}{\partial x_j} & ... & \sum_{j=1}^n \alpha_{kj} \frac{\partial \phi_k}{\partial x_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_k \end{pmatrix}$$

e consequentemente

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} - \sum_{j=1}^n \alpha_{1j} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_j} & ... & \lambda_{1k} - \sum_{j=1}^n \alpha_{kj} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{k1} - \sum_{j=1}^n \alpha_{1j} \frac{\partial \phi_k}{\partial x_j} & ... & \lambda_{kk} - \sum_{j=1}^n \alpha_{kj} \frac{\partial \phi_k}{\partial x_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_k \end{pmatrix} = 0,$$

ou seja, para todo $l = 1, ..., k$ temos

$$\left(\lambda_{l1} - \sum_{j=1}^n \alpha_{1j} \frac{\partial \phi_l}{\partial x_j}, ..., \lambda_{lk} - \sum_{j=1}^n \alpha_{kj} \frac{\partial \phi_l}{\partial x_j} \right) \in \operatorname{syz}(\phi_1, ..., \phi_k), \text{ e}$$

$$[\lambda_{ij}] - \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{1j} T_{1j} + ... + \sum_{j=1}^n \alpha_{kj} T_{kj} \right) \in H.$$

Reciprocamente sejam $\xi \in \Theta_n$ e $[\lambda_{ij}] + H \in (T + H)/H$, satisfazendo a igualdade

$$d\phi(\xi) = [\lambda_{ij}][\phi]^T,$$

então exitem $\alpha_{ij} \in \mathcal{O}_n$ tais que

$$[\lambda_{ij}] + H = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} \alpha_{ij} T_{ij} + H,$$

ou seja,

$$[\lambda_{ij}] = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} \alpha_{ij} T_{ij} + [h_{lm}],$$

para alguma matriz $[h_{lm}] \in H$. Nessas condições

$$d\phi(\xi) = [\lambda_{ij}][\phi]^T = \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} \alpha_{ij} T_{ij} + [h_{lm}]\right)[\phi]^T = \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} \alpha_{ij} T_{ij}\right)[\phi]^T,$$

ou seja

$$d\phi(\xi) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j}\frac{\partial \phi_1}{\partial x_j} & \dots & \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj}\frac{\partial \phi_1}{\partial x_j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j}\frac{\partial \phi_k}{\partial x_j} & \dots & \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj}\frac{\partial \phi_k}{\partial x_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\frac{\partial \phi_1}{\partial x_j}\phi_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\frac{\partial \phi_k}{\partial x_j}\phi_i \end{pmatrix},$$

assim temos

$$d\phi(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \phi_p}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{k} \alpha_{i1}\phi_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_{in}\phi_i \end{pmatrix} = d\phi(\eta)$$

com $\eta = (\sum_{i=1}^{k} \alpha_{i1}\phi_l, ..., \sum_{i=1}^{k} \alpha_{in}\phi_l) \in \Theta_X^T$. Então $d\phi(\xi - \eta) = 0$, ou seja,

$$\xi - \eta \in I_{k+1} \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_k}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \phi_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} \subset \Theta_X^T,$$

Como $\eta \in \Theta_X^T$, $\xi \in \Theta_X^T$.

■

Lema 5.22. *Sejam $\phi = (\phi_1, ..., \phi_k) : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^k, 0)$ definindo uma ICIS e $f \in \mathcal{O}_n$ tal que $(f, \phi) = (f, \phi_1, ..., \phi_k) : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^{k+1}, 0)$ também define uma ICIS, então $\phi_1 + J(f, \phi), ..., \phi_k + J(f, \phi)$ é uma sequência regular em $\mathcal{O}_n / J(f, \phi_1, ..., \phi_k)$.*

Demonstração: Como $(f, \phi_1, ..., \phi_k)$ define uma ICIS então $\mathcal{O}_n / J(f, \phi_1, ..., \phi_k)$ é Cohen-Macaulay e

$$0 = \dim \frac{\mathcal{O}_n}{J(f, \phi_1, ..., \phi_k) + \langle \phi_1, ..., \phi_k \rangle} = \dim \frac{\mathcal{O}_n / J(f, \phi_1, ..., \phi_k)}{(J(f, \phi_1, ..., \phi_k) + \langle \phi_1, ..., \phi_k \rangle)/J(f, \phi_1, ..., \phi_k)}$$

portanto pela Proposição 1.7, temos que $\phi_1 + J(f,\phi), ..., \phi_k + J(f,\phi)$ é uma sequência regular em $\mathcal{O}_n/J(f,\phi_1,...,\phi_k)$.

■

Proposição 5.23. *Sejam $(X,0)$ ICIS determinada por $(\phi_1,...,\phi_k) : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C}^k,0)$ e $f \in \mathcal{O}_n$ germe de função $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado, então*

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{df(\Theta_X^T)} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n^k}{\langle \phi_i e_j - \phi_j e_i,\ 1 \le i < j \le k\rangle + Jf\mathcal{O}_n^k} + \mu(f^{-1}(0)\cap X,0) + \mu(X,0).$$

Demonstração: Consideramos a seguinte sequência

$$0 \longrightarrow \frac{\mathcal{O}_n^k}{Jf\mathcal{O}_n^k + \langle \phi_i e_j - \phi_j e_i,\ 1 \le i < j \le k\rangle} \xrightarrow{\alpha} \frac{\mathcal{O}_n}{df(\Theta_X^T)} \xrightarrow{\pi} \frac{\mathcal{O}_n}{df(\Theta_X^T) + \langle \phi_1,...,\phi_k\rangle} \longrightarrow 0$$

sendo, π a aplicação de projeção e α definida por

$$\alpha((a_1,...,a_k) + Jf\mathcal{O}_n^k + \langle \phi_i e_j - \phi_j e_i,\ 1 \le i < j \le k\rangle) = \sum_{i=1}^{k} a_i\phi_i + df(\Theta_X^T)$$

A sequência acima é exata pois π é sobrejetora,

$$\mathrm{Im}(\alpha) = \frac{\langle \phi_1,...,\phi_k\rangle + df(\Theta_X^T)}{df(\Theta_X^T)} = \ker(\pi),$$

assim resta mostrarmos que α é injetora. Sejam

$$(a_1,...,a_k) + Jf\mathcal{O}_n^k + \langle \phi_i e_j - \phi_j e_i,\ 1 \le i < j \le k\rangle \in \frac{\mathcal{O}_n^k}{Jf\mathcal{O}_n^k + \langle \phi_i e_j - \phi_j e_i,\ 1 \le i < j \le k\rangle}$$

tal que

$$\alpha((a_1,...,a_k) + Jf\mathcal{O}_n^k + \langle \phi_i e_j - \phi_j e_i,\ 1 \le i < j \le k\rangle) = 0 + df(\Theta_X^T)$$
$$\sum_{i=1}^{p} a_i\phi_i + df(\Theta_X^T) = 0 + df(\Theta_X^T)$$

Como $df(\Theta_X^T) = Jf\langle \phi_1,...,\phi_k\rangle + J(f,\phi)$, temos que existem $\alpha_i \in Jf,\ i = 1,...,k$ e $h \in J(f,\phi)$ tais que

$$\sum_{i=1}^{k} a_i\phi_i - \sum_{j=1}^{k} \alpha_i\phi_i = h \in J(f,\phi)$$
$$\sum_{i=1}^{k} (a_i - \alpha_i)\phi_i = h \in J(f,\phi).$$

Mas f é $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado, logo (f,ϕ) define uma ICIS e consequentemente $\phi_1 + J(f,\phi), ..., \phi_k + J(f,\phi)$ é uma sequência regular em $\mathcal{O}_n/J(f,\phi)$. Assim obtemos que

$$\begin{aligned}
&(a_1-\alpha_1,...,a_k-\alpha_k) \in \operatorname{syz}(\phi_1+J(f,\phi),...,\phi_k+J(f,\phi)), \text{ ou seja}\\
&(a_1-\alpha_1,...,a_k-\alpha_k) \in \langle(\phi_i+J(f,\phi))e_j-(\phi_j+J(f,\phi))e_i,\ 1\leq j<i\leq k\rangle,
\end{aligned}$$

e portanto,

$$(a_1,...,a_k)\in Jf\mathcal{O}_n^k+\langle\phi_ie_j-\phi_je_i,\ 1\leq j<i\leq n\rangle.$$

Assim α é injetiva e a sequência é exata. Como f é $\mathcal{R}_X$-finitamente determinada temos que $\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{O}_n/df(\Theta_X^T)<\infty$ e

$$\begin{aligned}
\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_n}{df(\Theta_X^T)} &= \dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_n}{df(\Theta_X^T)+\langle\phi_1,...,\phi_k\rangle}+\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_n^k}{Jf\mathcal{O}_n^k+\langle\phi_ie_j-\phi_je_i\rangle}\\
&= \dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_n}{J(f,\phi)+\langle\phi_1,...,\phi_k\rangle}+\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_n^k}{Jf\mathcal{O}_n^k+\langle\phi_ie_j-\phi_je_i\rangle}\\
&= \mu(X\cap f^{-1}(0),0)+\mu(X,0)+\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_n^k}{Jf\mathcal{O}_n^k+\langle\phi_ie_j-\phi_je_i\rangle}
\end{aligned}$$

■

Corolário 5.24. *Sejam $(X,0)$ ICIS determinada por $(\phi_1,...,\phi_k):(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C}^k,0)$ e $f\in\mathcal{O}_n$ germe de função $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado, então*

$$\begin{aligned}
\mu_{BR}(f,X)=\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_n^k}{\langle\phi_ie_j-\phi_je_i,\ 1\leq i<j\leq k\rangle+Jf\mathcal{O}_n^k}&+\mu(f^{-1}(0)\cap X,0)+\mu(X,0)\\
&-\dim_{\mathbb{C}}\frac{df(\Theta_X)}{df(\Theta_X^T)}.
\end{aligned}$$

Demonstração: Esse corolário é uma consequência imediata da proposição anterior e da sequência exata

$$0\to\frac{df(\Theta_X)}{df(\Theta_X^T)}\to\frac{\mathcal{O}_n}{df(\Theta_X^T)}\to\frac{\mathcal{O}_n}{df(\Theta_X)}\to 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\mu_{BR}(f,X)&=\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_n}{df(\Theta_X^T)}-\dim_{\mathbb{C}}\frac{df(\Theta_X)}{df(\Theta_X^T)}\\
&=\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_n^k}{\langle\phi_ie_j-\phi_je_i,\ 1\leq i<j\leq n\rangle+Jf\mathcal{O}_n^k}+\mu(f^{-1}(0)\cap X,0)+\mu(X,0)\\
&\quad-\dim_{\mathbb{C}}\frac{df(\Theta_X)}{df(\Theta_X^T)}.
\end{aligned}$$

■

Quando $(X,0) \subset (\mathbb{C}^n,0)$ é uma hipersuperfície com singularidade isolada nós temos pela Proposição 3.13 que

$$\frac{\Theta_X}{\Theta_X^T} \approx \frac{df(\Theta_X)}{df(\Theta_X^T)},$$

sendo $f \in \mathcal{O}_n$ um germe de função $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado. Vamos ver a seguir que esse isomorfismo continua válido quando $(X,0)$ é uma ICIS. Em outas palavras o quociente $df(\Theta_X)/df(\Theta_X^T)$ também não depende do germe de função $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado que estamos considerando. Para demonstrá-lo vamos precisar dos seguintes resultados.

Lema 5.25. *Sejam l um número natural e $\phi_j \in \mathcal{O}_n$ com $j = 1, ..., l$, então*

$$\left(\frac{\mathcal{O}_n}{\langle \phi_1, ..., \phi_k\rangle}\right)^l \approx \frac{\mathcal{O}_n^l}{\langle \phi_1, ..., \phi_k\rangle \mathcal{O}_n^l}$$

Demonstração: Consideramos

$$\Psi : \left(\tfrac{\mathcal{O}_n}{\langle \phi_1, ..., \phi_k\rangle}\right)^l \to \tfrac{\mathcal{O}_n^l}{\langle \phi_1, ..., \phi_k\rangle \mathcal{O}_n^l},$$

dado por $\Psi(\overline{a_1}, ..., \overline{a_l}) = \overline{(a_1, ..., a_l)}$. Ψ está bem definida pois, se $(\overline{a_1}, ..., \overline{a_l}) = (\overline{b_1}, ..., \overline{b_l})$, então $a_i - b_i \in \langle \phi_1, ..., \phi_k\rangle$, ou seja $a_i - b_i = h_i$, com $h_i \in \langle \phi_1, ..., \phi_k\rangle$ para todo $i = 1, ..., l$. Assim $\Psi(a_1 - b_1, ..., a_k - b_k) = 0$, resultando $\Psi(\overline{a_1}, ..., \overline{a_l}) = \Psi(\overline{b_1}, ..., \overline{b_l})$, e Ψ independe das classes.

Ψ é um isomorfismo, de fato, suponhamos que $\Psi(\overline{a_1}, ..., \overline{a_l}) = \overline{(0, ..., 0)}$, ou seja

$$(a_1, ..., a_l) = \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_{i1}\phi_i, ..., \sum_{i=1}^{k} \alpha_{il}\phi_i\right) \in \langle \phi_i e_j, i = 1, ..., k;\ j = 1, ..., l\rangle,$$

logo $a_j = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ij}\phi_i$ para todo $j = 1, ..., l$ e assim $a_j \in \langle \phi_1, ..., \phi_k\rangle$, para todo $j = 1, ..., l$, ou seja, $\overline{a_j} = \overline{0}$ em $\mathcal{O}_n/\langle \phi_1, ..., \phi_k\rangle$, para todo $j = 1, ..., l$ e assim $\ker(\Psi) = \{\overline{0}\}$ e Ψ é injetiva. Para concluir que Ψ é um isomorfismo resta mostrar que Ψ é sobrejetora. Seja $\overline{(b_1, ..., b_l)} \in \mathcal{O}_n^l/\langle \phi_i e_j, i = 1, ..., k;\ j = 1, ..., l\rangle$, logo $\overline{b_i} \in (\mathcal{O}_n/\langle \phi_i, i = 1, ..., k\rangle)^l$ com $i = 1, ..., k$ e

$$\Psi(\overline{b_1}, ..., \overline{b_k}) = \overline{(b_1, ..., b_l)},$$

portanto, Ψ é sobrejetora e

$$\left(\frac{\mathcal{O}_n}{\langle \phi_1, ..., \phi_k\rangle}\right)^l \approx \frac{\mathcal{O}_n^l}{\langle \phi_1, ..., \phi_k\rangle \mathcal{O}_n^l}.$$

■

Lema 5.26. *Seja $(X,0)$ uma ICIS determinada por $(\phi_1, ..., \phi_{k-1}) : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C}^{k-1},0)$. e $\phi_k \in \mathcal{O}_n$, tal que $\phi = (\phi_1, ..., \phi_k) : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C}^k,0)$ também define uma ICIS. Então $\phi_1, ..., \phi_{k-1}$ é uma sequência regular em $\mathcal{O}_n^k/\operatorname{Im}(d\phi)$.*

Demonstração: Vamos utilizar a Proposição 1.7, seja $M = \mathcal{O}_n^k/\operatorname{Im}(d\phi)$ um $\mathcal{O}_n$-módulo, vamos provar inicialmente que M é Cohen-Macaulay. Consideramos a seguinte presentação de M

$$\mathcal{O}_n^n \xrightarrow{d\phi} \mathcal{O}_n^k \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

então seu 0-ésimo ideal fitting $F_0(M) = J(\phi_1, ..., \phi_k)$, além disso temos que M é um $\mathcal{O}_n$-módulo finitamente gerado, então pela Proposição 1.18 temos que se M é gerado por s elementos então

$$\operatorname{Ann}(M)^s \subset F_0(M) \subset \operatorname{Ann}(M), \text{ logo}$$

$$\sqrt{\operatorname{Ann}(M)^s} \subset \sqrt{F_0(M)} \subset \sqrt{\operatorname{Ann}(M)}, \text{ resultando}$$

$$\sqrt{F_0(M)} = \sqrt{\operatorname{Ann}(M)},$$

portanto $V(\operatorname{Ann}(M)) = V(F_0(M)) = V(J(\phi_1, ..., \phi_k))$ e consequentemente

$$\dim(M) = \dim \frac{\mathcal{O}_n}{\operatorname{Ann}(M)} = \dim \frac{\mathcal{O}_n}{J(\phi_1, ..., \phi_k)} = k - 1,$$

pois $(\phi_1, ..., \phi_k)$ define ICIS. Como $k - 1 = \dim \mathcal{O}_n - (n - k + 1)(k - k + 1)$, temos pelo Teorema 1.8 que M é um $\mathcal{O}_n$-módulo Cohen-Macaulay. Agora precisamos mostrar que $\dim M/\langle \phi_1, ..., \phi_{k-1} \rangle M = 0$

Seja $M_X = \mathcal{O}_X^k/\operatorname{Im} d\phi \approx \mathcal{O}_n^k/(\operatorname{Im}(d\phi) + \langle \phi_1, ..., \phi_{k-1} \rangle \mathcal{O}_n^k)$ e tem a seguinte presentação:

$$\mathcal{O}_X^n \xrightarrow{d\phi} \mathcal{O}_X^k \longrightarrow M_X \longrightarrow 0,$$

logo seu 0-ésimo ideal fitting $F_0(M_X) = J(\phi_1, ..., \phi_k)$. Assim como anteriormente temos que M_X é um $\mathcal{O}_X$-módulo finitamente gerado, então pela Proposição 1.18 temos que se M_X é gerado por t elementos então

$$\operatorname{Ann}(M_X)^t \subset F_0(M_X) \subset \operatorname{Ann}(M_X), \text{ logo}$$

$$\sqrt{\operatorname{Ann}(M_X)^t} \subset \sqrt{F_0(M_X)} \subset \sqrt{\operatorname{Ann}(M_X)}, \text{ portanto}$$

$$\sqrt{F_0(M_X)} = \sqrt{\operatorname{Ann}(M_X)},$$

e $V(\operatorname{Ann}(M_X)) = V(F_0(M_X)) = V(J(\phi_1, ..., \phi_k))$ em $\mathcal{O}_X$ e consequentemente

$$\dim(M_X) = \dim \frac{\mathcal{O}_X}{\operatorname{Ann}(M_X)} = \dim \frac{\mathcal{O}_n}{\langle \phi_1, ..., \phi_{k-1} \rangle + J(\phi_1, ..., \phi_k)} = 0,$$

pois $\phi_1, ..., \phi_k$ define uma ICIS.

Assim provamos que $\phi_1, ..., \phi_{k-1}$ é uma sequência regular em $\mathcal{O}_n^k/\operatorname{Im}(d\phi)$.

$\blacksquare$

Proposição 5.27. *Sejam $(X,0)$ uma ICIS determinada por $\phi_1,...,\phi_k \in \mathcal{O}_n$ e $f \in \mathcal{O}_n$ um germe de função $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado. Se existe um campo $\xi \in \Theta_X$, tal que $df(\xi) = \sum_{i=1}^k \mu_i\phi_i$, então $\xi \in \Theta_X^T$.*

Demonstração: Por hipótese $\xi \in \Theta_X$, então existem $\lambda_{ij} \in \mathcal{O}_n$ com $i,j = 1,...,k$ tais que $d\phi_i(\xi) = \sum_{j=1}^k \lambda_{ij}\phi_j$, logo

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} df(\xi) \\ d\phi_1(\xi) \\ \vdots \\ d\phi_k(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^k \mu_i\phi_i \\ \sum_{j=1}^k \lambda_{1j}\phi_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^k \lambda_{kj}\phi_j \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^k \phi_i \begin{pmatrix} \mu_i \\ \lambda_{1i} \\ \vdots \\ \lambda_{ki} \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} d(f,\phi_1,...,\phi_k).$$

Como f é $\mathcal{R}_X$-finitamente determinada temos que $(f,\phi_1,...,\phi_k)$ define ICIS, pela Proposição 5.26, $\phi_1,...,\phi_k$ é uma sequência regular em $\mathcal{O}_n^{k+1}/\operatorname{Im} d(f,\phi_1,...,\phi_k)$. Para facilitar consideramos $v_i = \begin{pmatrix} \mu_i \\ \lambda_{1i} \\ \vdots \\ \lambda_{ki} \end{pmatrix}$, para todo $i = 1,...,k$.

Assim obtemos $\phi_1v_1 + ... + \phi_kv_k = 0$ em $\mathcal{O}_n^{k+1}/\operatorname{Im} d(f,\phi_1,...,\phi_k)$, e $\phi_kv_k = 0$ em $\mathcal{O}_n^{k+1}/(\operatorname{Im} d(f,\phi_1,...,\phi_k) + \langle\phi_1,...,\phi_{k-1}\rangle\mathcal{O}_n^{k+1})$, então $v_k \in \operatorname{Im} d(f,\phi_1,...,\phi_k) + \langle\phi_1,...,\phi_{k-1}\rangle\mathcal{O}_n^{k+1}$, ou seja, existem $a_{ij}^k \in \mathcal{O}_n$ e $w_k \in \operatorname{Im} d(f,\phi_1,...,\phi_k)$ tais que

$$v_k = w_w + \sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{k+1} a_{ij}^k\phi_ie_j.$$

Logo

$$\phi_1v_1 + ... + \phi_kv_k = \phi_1v_1 + ... + \phi_k\left(w_w + \sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{k+1} a_{ij}^k\phi_ie_j\right)$$
$$= \phi_1\left(v_1 + \sum_{j=1}^{k+1} a_{1j}^k\phi_ke_j\right) + ... + \phi_{k-1}\left(v_{k-1} + \sum_{j=1}^{k+1} a_{(k-1)j}^k\phi_ke_j\right) \in \operatorname{Im} d(f,\phi_1,...,\phi_k).$$

Assim $\phi_{k-1}\left(v_{k-1} + \sum_{j=1}^{k+1} a_{(k-1)j}^k\phi_ke_j\right) = 0$ em $\mathcal{O}_n^{k+1}/(\operatorname{Im} d(f,\phi_1,...,\phi_{k-2}) + \langle\phi_1,...,\phi_{k-2}\rangle\mathcal{O}_n^{k+1})$ e consequentemente $v_{k-1} + \sum_{j=1}^{k+1} a_{(k-1)j}^k\phi_ke_j \in \operatorname{Im} d(f,\phi_1,...,\phi_{k-2}) + \langle\phi_1,...,\phi_{k-2}\rangle\mathcal{O}_n^{k+1}$, ou seja, existem $w_{k-1} \in \operatorname{Im} d(f,\phi_1,...,\phi_k)$ e $a_{ij}^{k-1} \in \mathcal{O}_n$ tais que

$$v_{k-1} + \sum_{j=1}^{k+1} a_{(k-1)j}^k\phi_ke_j = w_{k-1} + \sum_{i=1}^{k-2}\sum_{j=1}^{k+1} a_{ij}^{k-1}\phi_ie_j.$$

Então

$$\begin{aligned}
&\phi_1\left(v_1+\sum_{j=1}^{k+1}a_{1j}^k\phi_k e_j\right)+...+\phi_{k-1}\left(v_{k-1}+\sum_{j=1}^{k+1}a_{(k-1)j}^k\phi_k e_j\right)=\\
&\phi_1\left(v_1+\sum_{j=1}^{k+1}a_{1j}^k\phi_k e_j\right)+...+\phi_{k-1}\left(w_{k-1}+\sum_{i=1}^{k-2}\sum_{j=1}^{k+1}a_{ij}^{k-1}\phi_i e_j\right)=\\
&\phi_1\left(v_1+\sum_{j=1}^{k+1}a_{1j}^k\phi_k e_j+\sum_{j=1}^{k+1}a_{1j}^{k-1}\phi_{k-1}e_j+\right)+...+\\
&\phi_{k-2}\left(v_{k-2}+\sum_{j=1}^{k+1}a_{(k-2)j}^k\phi_k e_j+\sum_{j=1}^{k+1}a_{(k-2)j}^{k-1}\phi_{k-1}e_j\right)
\end{aligned}$$

o qual pertence a $\operatorname{Im} d(f,\phi_1,...,\phi_k)$. Prosseguindo obtemos que a soma

$$\phi_1\left(v_1+\sum_{j=1}^{k+1}a_{1j}^k\phi_k e_j+...+\sum_{j=1}^{k+1}a_{1j}^3\phi_3 e_j\right)+\phi_2\left(v_2+\sum_{j=1}^{k+1}a_{2j}^k\phi_k e_j+...+\sum_{j=1}^{k+1}a_{2j}^3\phi_3 e_j\right)$$

pertence a $\operatorname{Im} d(f,\phi_1,...,\phi_k)$, então $\phi_2\left(v_2+\sum_{j=1}^{k+1}a_{2j}^k\phi_k e_j+...+\sum_{j=1}^{k+1}a_{2j}^3\phi_3 e_j\right)\in \operatorname{Im} d(f,\phi_1,...,\phi_k)+\langle\phi_1\rangle\mathcal{O}_n^{k+1}$, ou seja, existem $w_2\in \operatorname{Im} d(f,\phi_1,...,\phi_k)$ e $a_{1j}^2\in\mathcal{O}_n$ tais que

$$v_2+\sum_{j=1}^{k+1}a_{2j}^k\phi_k e_j+...+\sum_{j=1}^{k+1}a_{2j}^3\phi_3 e_j=w_2+\sum_{j=1}^{k+1}a_{1j}^2\phi_1 e_j,$$

e

$$\begin{aligned}
&\phi_1\left(v_1+\sum_{j=1}^{k+1}a_{1j}^k\phi_k e_j+...+\sum_{j=1}^{k+1}a_{1j}^3\phi_3 e_j\right)+\phi_2\left(v_2+\sum_{j=1}^{k+1}a_{2j}^k\phi_k e_j+...+\sum_{j=1}^{k+1}a_{2j}^3\phi_3 e_j\right)=\\
&\phi_1\left(v_1+\sum_{j=1}^{k+1}a_{1j}^k\phi_k e_j+...+\sum_{j=1}^{k+1}a_{1j}^3\phi_3 e_j\right)+\phi_2\left(w_2+\sum_{j=1}^{k+1}a_{1j}^2\phi_1 e_j\right)\in \operatorname{Im} d(f,\phi_1,...,\phi_k).
\end{aligned}$$

Logo $\phi_1\left(v_1+\sum_{j=1}^{k+1}a_{1j}^k\phi_k e_j+...+\sum_{j=1}^{k+1}a_{1j}^3\phi_3 e_j+\sum_{j=1}^{k+1}a_{1j}^2\phi_2 e_j\right)\in \operatorname{Im} d(f,\phi_1,...,\phi_k)$ e existe $w_1\in \operatorname{Im} d(f,\phi_1,...,\phi_k)$, tal que

$$v_1+\sum_{j=1}^{k+1}a_{1j}^k\phi_k e_j+...+\sum_{j=1}^{k+1}a_{1j}^3\phi_3 e_j+\sum_{j=1}^{k+1}a_{ij}^2\phi_2 e_j=w_1.$$

Dessa maneira obtemos $w_1, ..., w_k \in \operatorname{Im} d(f, \phi_1, ..., \phi_k)$ tais que

$$\begin{aligned}
v_1 &= w_1 - \sum_{j=1}^{k+1} a_{1j}^k \phi_k e_j - ... - \sum_{j=1}^{k+1} a_{1j}^3 \phi_3 e_j - \sum_{j=1}^{k+1} a_{ij}^2 \phi_2 e_j \\
v_2 &= w_2 + \sum_{j=1}^{k+1} a_{1j}^2 \phi_1 e_j - \sum_{j=1}^{k+1} a_{2j}^k \phi_k e_j - ... - \sum_{j=1}^{k+1} a_{2j}^3 \phi_3 e_j \\
&\vdots \\
v_{k-1} &= w_{k-1} + \sum_{j=1}^{k+1} a_{(k-2)j}^{k-1} \phi_{k-2} + ... + \sum_{j=1}^{k+1} a_{1j}^{k-1} \phi_1 e_j - \sum_{j=1}^{k+1} a_{(k-1)j}^k \phi_k e_j \\
v_k &= w_k + \sum_{j=1}^{k+1} a_{(k-1)j}^k \phi_{k-1} e_j + ... + \sum_{j=1}^{k+1} a_{1j}^k \phi_1 e_j
\end{aligned}$$

logo $\phi_1 v_1 + ... + \phi_k v_k = \phi_1 w_1 + ... + \phi_k w_w$, implicando

$$\phi_1(v_1 - w_1) + ... + \phi_k(v_k - w_k) = 0,$$

sendo

$$v_i = \begin{pmatrix} \mu_i \\ \lambda_{1i} \\ \vdots \\ \lambda_{ki} \end{pmatrix} \forall i = 1, ..., k \text{ e } w_l = \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \alpha_{1i} \\ \vdots \\ \alpha_{ki} \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} d(f, \phi_1, ..., \phi_k)$$

logo

$$0 = \begin{pmatrix} \phi_1(\mu_1 - \alpha_1) + ... + \phi_k(\mu_k - \alpha_k) \\ \phi_1(\lambda_{11} - \alpha_{11}) + ... + \phi_k(\lambda_{1k} - \alpha_{1k}) \\ \vdots \\ \phi_1(\lambda_{k1} - \alpha_{k1}) + ... + \phi_k(\lambda_{kk} - \alpha_{kk}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 - \alpha_1 & ... & \mu_k - \alpha_k \\ \lambda_{11} - \alpha_{11} & ... & \lambda_{1k} - \alpha_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{k1} - \alpha_{k1} & ... & \lambda_{kk} - \alpha_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_k \end{pmatrix}.$$

Portanto $[\lambda_{ij}] - [\alpha_{ij}] \in H$, como $[\alpha_{ij}] \in T$, temos $[\lambda_{ij}] \in (T + H)/H$ e pela Proposição 5.21 que $\xi \in \Theta_X^T$.

■

Corolário 5.28. *Sejam $(X, 0)$ uma ICIS determinada por $(\phi_1, ..., \phi_k) : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^k, 0)$ e $f \in \mathcal{O}_n$ germe de função $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado.*

i) Se existe $\xi \in \Theta_X$, tal que $df(\xi) = \sum_{i=1}^k \mu_i \phi_i$, então $(\mu_1, ..., \mu_k) \in Jf\mathcal{O}_n^k + \operatorname{syz}(\phi_1, ..., \phi_k)$.

ii) $\frac{df(\Theta_X^-)}{df(\Theta_X)} \approx \frac{\mathcal{O}_n^k}{Jf\mathcal{O}_n^k + \operatorname{syz}(\phi_1, ..., \phi_k)}$;

iii) $\frac{df(\Theta_X^-)}{df(\Theta_X)} \approx \frac{\langle \phi_1, ..., \phi_k \rangle}{Jf\langle \phi_1, ..., \phi_k \rangle}$.

Demonstração:

i) Pela demonstração da Proposição 5.27 temos que existem $\alpha_1, ..., \alpha_k \in Jf$ tais que

$$(\mu_1 - \alpha_1)\phi_1 + ... + (\mu_k - \alpha_k)\phi_k = 0,$$

logo $(\mu_1, ..., \mu_k) \in Jf\mathcal{O}_n^k + \mathrm{syz}(\phi_1, ..., \phi_k)$.

ii) Seja

$$\Psi : \mathcal{O}_n^k \to \frac{df(\Theta_X^-)}{df(\Theta_X)} = \frac{df(\Theta_X) + \langle \phi_1, ..., \phi_k \rangle}{df(\Theta_X)},$$

dada por $\Psi(a_1, ..., a_k) = \overline{\sum_{i=1}^k a_i\phi_i}$. Ψ está bem definida e é sobrejetora. Então resta mostrar a igualdade $\ker(\Psi) = Jf\mathcal{O}_n^k + \mathrm{syz}(\phi_1, ..., \phi_k)$.

De fato, a inclusão $\ker(\Psi) \supset Jf\mathcal{O}_n^k + \mathrm{syz}(\phi_1, ..., \phi_k)$, é imediata pois sejam $(a_1, ..., a_k) \in Jf\mathcal{O}_n^k$ e $(b_1, ..., b_k) \in \mathrm{syz}(\phi_1, ..., \phi_k)$. Como $a_i \in Jf$ para todo $i = 1, ..., k$ existem $\xi_i \in \Theta_n$, tais que $df(\xi_i) = a_i$, então

$$\Psi(a_1 + b_1, ..., a_k + b_k) = \sum_{i=1}^k (a_i + b_i)\phi_i = \sum_{i=1}^k \phi_i df(\xi_i) = df(\sum_{i=1}^k \phi_i\xi_i),$$

o qual pertence a $df(\Theta_X^T) \subset df(\Theta_X)$.

Por outro lado seja $(a_1, ..., a_k) \in \ker(\Psi)$, então $\Psi(a_1, ..., a_k) = \overline{\sum_{i=1}^k a_i\phi_i} = \overline{0}$, ou seja $\sum_{i=1}^k a_i\phi_i \in df(\Theta_X)$. Pelo item anterior temos

$$(a_1, ..., a_k) \in Jf\mathcal{O}_n^k + \mathrm{syz}(\phi_1, ..., \phi_k).$$

iii) O terceiro item é uma consequência imediata da proposição anterior, pois

$$\frac{df(\Theta_X^-)}{df(\Theta_X)} = \frac{df(\Theta_X) + I_X}{df(\Theta_X)} \approx \frac{I_X}{I_X \cap df(\Theta_X)} = \frac{I_X}{JfI_X},$$

e a última igualdade segue da Proposição 5.27.

■

Corolário 5.29. *Sejam $(X, 0)$ uma ICIS determinada por $(\phi_1, ..., \phi_k) : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^k, 0)$ e $f \in \mathcal{O}_n$ um germe de função $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado. Se existe um campo $\xi \in \Theta_X$, tal que $df(\xi) = 0$, então $\xi \in \Theta_X^T$.*

Demonstração: É um caso particular da Proposição 5.27, sendo $\mu_i = 0$ para todo $i = 1, ..., k$.

■

Teorema 5.30. *Sejam* $(X,0)$ *uma ICIS determinada por* $\phi_1, ..., \phi_k \in \mathcal{O}_n$ *e* $f \in \mathcal{O}_n$ *um germe de função* $\mathcal{R}_X$*-finitamente determinado. Definamos*

$$\begin{aligned} \Psi : \Theta_X &\to df(\Theta_X). \\ \xi &\mapsto df(\xi) \end{aligned}$$

Então Ψ *induz um isomorfismo*

$$\overline{\Psi} : \frac{\Theta_X}{\Theta_X^T} \to \frac{df(\Theta_X)}{df(\Theta_X^T)}.$$

Demonstração: A aplicação Ψ é sobrejetora e $\Psi(\Theta_X^T) = df(\Theta_X^T)$ pela forma como definimos Ψ. Para concluirmos basta mostrarmos que

$$\ker(\Psi) \subset \Theta_X^T,$$

ou seja, se $\eta \in \Theta_X$ é tal que $df(\eta) = 0$, então $\eta \in \Theta_X^T$. Portanto segue do lema anterior que $\ker(\Psi) \subset \Theta_X^T$.

■

Como feito para hipersuperfícies com singularidade isolada vamos considerar $p \in \mathcal{O}_n$ uma projeção linear genérica e mostrarmos a igualdade $\dim_{\mathbb{C}} dp(\Theta_X)/dp(\Theta_X^T) = \tau(X,0)$.

Proposição 5.31. *Sejam* $(X,0)$ *uma ICIS determinada por* $\phi = (\phi_1, ..., \phi_k) : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^k, 0)$ *e* $p : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ *uma projeção linear genérica, então*

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{dp(\Theta_X)}{dp(\Theta_X^T)} = \tau(X,0).$$

Demonstração: Primeiramente observamos que a demonstração dessa Proposição segue exatamente os mesmos passos da demonstração do Teorema 5.8, pois $dp(\Theta_X) = dp(\Theta_X) + I_X$ e $dp(\Theta_X^T) = dp(\Theta_X^T) + I_X$. Portanto consideramos a sequência

$$0 \longrightarrow \ker(\overline{\alpha}) \xrightarrow{i} \frac{\mathcal{O}_n}{dp(\Theta_X^T)} \xrightarrow{\overline{\alpha}} \frac{\mathcal{O}_n^{k+1}}{\operatorname{Im} d(p,\phi) + I_X \mathcal{O}_n^{k+1}} \xrightarrow{\overline{\pi}} \frac{\mathcal{O}_n^k}{\operatorname{Im} d(\phi) + I_X \mathcal{O}_n^k} \longrightarrow 0.$$

sendo i a inclusão, $\overline{\pi}$ e $\overline{\alpha}$ são, respectivamente, as aplicações induzidas pelas aplicações

$$\pi : \mathcal{O}_n^{k+1} \to \mathcal{O}_n^k \text{ and } \alpha : \mathcal{O}_n \to \mathcal{O}_n^{k+1}$$

dadas por $\pi(a_0, a_1, ..., a_k) = (a_1, ..., a_k)$ e $\alpha(a) = (a, 0, ..., 0)$. $\overline{\alpha}$ está bem definida, pois se $a \in dp(\Theta_X^T) + I_X = J(p,\phi) + I_X$ então existe um vetor $\xi \in \Theta_X^T$ e $\gamma \in I_X$ tais que

$$\alpha(a) = (a, 0, ..., 0) = (dp(\xi) + \gamma, 0, ..., 0) \text{ e}$$

$$(dp(\xi)+\gamma,0,...,0)\equiv(dp(\xi)+\gamma,d\phi_1(\xi),...,d\phi_k(\xi)) \text{ mod } (\operatorname{Im} d(p,\phi)+I_X).$$

A sequência acima é exata. De fato $\operatorname{Im} i=\ker\overline{\alpha}$, $\overline{\pi}$ é sobrejetora, e

$$\operatorname{Im}\overline{\alpha}=\frac{\langle(1,...,0)\rangle+\operatorname{Im} d(p,\phi)+I_X\mathcal{O}_n^k}{\operatorname{Im} d(p,\phi)+I_X\mathcal{O}_n^k}=\ker\overline{\pi}.$$

Pelo Corolário 5.7 a matriz jacobiana de (p,ϕ) é uma matriz de parâmetro para o anel $\mathcal{O}_n/I_X$, como esse anel é Cohen-Macaulay então pela Proposição 5.6

$$\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_n}{dp(\Theta_X^T)+I_X}=\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_n^{k+1}}{\operatorname{Im}(d(p,\phi))+I_X\mathcal{O}_n^{k+1}}.$$

Pela exatidão da sequência obtemos $\dim_{\mathbb{C}}\ker\overline{\alpha}=\tau(X,0)$, e agora nós precisamos mostrar que

$$\ker(\overline{\alpha})=\frac{dp(\Theta_X)+I_X}{dp(\Theta_X^T)+I_X}.$$

Seja $\overline{a}\in\ker(\overline{\alpha})$, ou seja $(a,0,...,0)\in\operatorname{Im} d(p,\phi)+I_X\mathcal{O}_n^{k+1}$, logo existe $\xi\in\Theta_n$ tal que

$$(a,0,...,0)=(dp(\xi),d\phi_1(\xi),...,d\phi_k(\xi))+(\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_k),$$

com $\alpha_i\in I_X\ \forall\ i=0,...,k+1$, então

$$(a-\alpha_0,-\alpha_1,...,-\alpha_k)=(df(\xi),d\phi_1(\xi),...,d\phi_k(\xi)),$$

$\xi\in\Theta_X$ e $a\in dp(\Theta_X)+I_X$. Assim provamos a inclusão

$$\ker\overline{\alpha}\subset\frac{dp(\Theta_X)+I_X}{dp(\Theta_X^T)+I_X}.$$

Para a inclusão contrária seja $\xi\in\Theta_X$, então $\overline{dp(\xi)}\in(dp(\Theta_X)+I_X)/(dp(\Theta_X^T)+I_X)$ e

$$\overline{\alpha}(\overline{dp(\xi)})=\overline{(dp(\xi),0,...0)}=\overline{(dp(\xi),d\phi_1(\xi),...,d\phi_k(\xi))}\in\operatorname{Im}(d(p,\phi)).$$

■

Corolário 5.32. *Sejam $(X,0)$ uma ICIS e $f\in\mathcal{O}_n$ um germe de função $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado então*

$$\tau(X,0)=\dim_{\mathbb{C}}\frac{\Theta_X}{\Theta_X^T}=\dim_{\mathbb{C}}\frac{df(\Theta_X)}{df(\Theta_X^T)}.$$

Corolário 5.33. *Sejam $(X,0)$ uma ICIS e $f\in\mathcal{O}_n$ germe de função $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado, então*

$$\mu_{BR}(f,X)=\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_n^k}{\langle\phi_ie_j-\phi_je_i\rangle+Jf\mathcal{O}_n^k}+\mu(f^{-1}(0)\cap X,0)+\mu(X,0)-\tau(X,0).$$

Demonstração: Esse resultado segue do corolário anterior.

■

Observamos que nos últimos resultados a hipótese necessária é $(X,0)$ uma ICIS determinada por $(\phi_1,...,\phi_k) : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C}^k,0)$ e $f \in \mathcal{O}_n$ germe de função tal que $(\phi_1,...,\phi_k,f)$ define ICIS, em outras palavras a hipótese necessária é $\mu_{BR}^-(f,X) < \infty$. Desta maneira obtemos o seguinte corolário com uma hipótese menos restritiva.

Proposição 5.34. *Seja $(X,0) \subset (\mathbb{C}^n,0)$ uma ICIS com $I_X = \langle\phi_1,...,\phi_k\rangle$ e f um germe de função tal que $\mu_{BR}^-(f,X) < \infty$, então*

a) $\frac{\Theta_X}{\Theta_X^T} \approx \frac{df(\Theta_X)+I_X}{df(\Theta_X^T)+I_X}$;

b) $\frac{\Theta_X}{\Theta_X^T} \approx \frac{df(\Theta_X)}{df(\Theta_X^T)}$;

c) $df(\Theta_X) \cap I_X = JfI_X$;

d) $\frac{I_X}{JfI_X} \approx \frac{df(\Theta_X)+I_X}{df(\Theta_X)}$;

Demonstração: Precisamos mostrar somente o item a), pois os itens b), c) foram provados no Corolário 5.28 e o item d) foi provado no Teorema 5.30. Seja $E : \Theta_X \to df(\Theta_X) + I_X$, dada por $E(\xi) = df(\xi)$, então $E(\Theta_X^T) \subset df(\Theta_X^T) + I_X$, logo E induz a seguinte aplicação

$$\begin{aligned}\overline{E} : \frac{\Theta_X}{\Theta_X^T} &\to \frac{df(\Theta_X)+I_X}{df(\Theta_X^T)+I_X}.\\ \overline{\xi} &\mapsto df(\xi)\end{aligned}$$

Além disso $\overline{E}$ é um isomorfismo se e semente se $\operatorname{Im} E + df(\Theta_X^T) + I_X = df(\Theta_X) + I_X$ e $E^{-1}(df(\Theta_X^T) + I_X) \subset \Theta_X^T$. A primeira igualdade é imediata, pois $\operatorname{Im}(E) = df(\Theta_X)$, logo $\operatorname{Im}(E)+df(\Theta_X^T)+I_X = df(\Theta_X)+I_X$, para a segunda consideramos $\xi \in E^{-1}(df(\Theta_X^T)+I_X)$, ou seja $E(\xi) \in df(\Theta_X^T) + I_X$, logo existem $\eta \in \Theta_X^T$ e $\lambda_1,...,\lambda_k \in \mathcal{O}n$, tais que

$$E(\xi) = df(\xi) = df(\eta) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\phi_i,$$

e consequentemente $df(\xi - \eta) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\phi_i$, pela Proposição 5.27 $\xi - \eta \in \Theta_X^T$, e consequentemente $\xi \in \Theta_X^T$.

■

Assim dos Corolários 5.33 e 5.28 obtemos a seguinte igualdade

$$\mu_{BR}(f,X) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{I_X}{I_XJf} + \mu(f^{-1}(0) \cap X, 0) + \mu(X,0) - \tau(X,0). \tag{5.8}$$

Lembramos que nosso objetivo é relacionar os números $\mu_{BR}(f,X)$ e $\mu(f)$, com esse intuito vamos introduzir o módulo Tor, para mais detalhes ver [3, 17].

Sejam R um anel comutativo com unidade e

$$... \longrightarrow F_{i+1} \xrightarrow{g_{i+1}} F_i \xrightarrow{g_i} ... \xrightarrow{g_0} F_0 \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

uma resolução livre do R-módulo N, veja Definição 1.10. Considerando M um R-módulo obtemos o seguinte complexo $M \otimes_R F$

$$... \longrightarrow M \otimes_R F_{i+1} \overset{id_M \otimes g_{i+1}}{\longrightarrow} M \otimes_R F_i \overset{id_M \otimes g_i}{\longrightarrow} ... \overset{id_M \otimes g_0}{\longrightarrow} M \otimes_R F_0 \longrightarrow M \otimes_R N.$$

Definição 5.35. O R-módulo $\mathrm{Tor}_i^R(M, N)$ é definido como segue:

i) $\mathrm{Tor}_0^R(M, N) = M \otimes_R N$;

ii) $\mathrm{Tor}_i^R = \ker(id_M \otimes g_i)/\operatorname{Im}(id_M \otimes g_{i+1})$, para todo $i \geq 1$.

A definição acima não depende da resolução livre de N e para todo i temos o isomorfismo $\mathrm{Tor}_i^R(M, N) \approx \mathrm{Tor}_i^R(N, M)$. O próximo resultado é uma propriedade interessante que utilizaremos adiante.

Proposição 5.36. *Seja* $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$ *uma sequência exata de* $\mathcal{O}_n$*-módulos e* L *um* R*-módulo. Então existe a sequência exata*

$$\begin{aligned} ... \longrightarrow \mathrm{Tor}_2^R(P, L) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(M, L) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(N, L) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(P, L) \longrightarrow \\ \longrightarrow M \otimes_R L \longrightarrow N \otimes_R L \longrightarrow P \otimes_R L \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

A qual é chamada sequência exata longa dos Tor*.*

Definição 5.37. Sejam M um R-módulo, dizemos que M é plano quando para qualquer sequência exata

$$... \longrightarrow M_{i+1} \overset{g_{i+1}}{\longrightarrow} M_i \overset{g_i}{\longrightarrow} M_{i-1} \longrightarrow ...$$

tivermos

$$... \longrightarrow M \otimes_R M_{i+1} \overset{id_M \otimes g_{i+1}}{\longrightarrow} M \otimes_R M_i \overset{id_M \otimes g_i}{\longrightarrow} M \otimes_R M_{i-1} \longrightarrow ...$$

é exata.

Proposição 5.38. *[3] Sejam* M *um* R*-módulo, então*

i) $R \otimes_R M \approx M$*;*

ii) R *é um* R*-módulo plano.*

iii) $\mathrm{Tor}_i^R(R, M) = \{0\}$ *para todo* $i \geqslant 1$.

Proposição 5.39. *Sejam* $I, J \subset R$ *ideais, então*

$$\mathrm{Tor}_1^R\left(\frac{R}{I}, \frac{R}{J}\right) \approx \frac{I \cap J}{IJ}.$$

Demonstração: Inicialmente consideramos a sequência exata

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{i} R \xrightarrow{\pi} \frac{R}{I} \longrightarrow 0.$$

Pela Proposição 5.36 temos o seguinte sequência exata

$$\mathrm{Tor}_1^R\left(R, \frac{R}{J}\right) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R\left(\frac{R}{I}, \frac{R}{J}\right) \xrightarrow{\Psi} I \otimes_R \frac{R}{J} \xrightarrow{i \otimes id_{\mathcal{O}_n/J}} R \otimes_R \frac{R}{J} \xrightarrow{\pi \otimes id_{\mathcal{O}_n/J}} \frac{R}{I} \otimes_R \frac{R}{J} \longrightarrow 0.$$

Sabemos que $R \otimes_R R/J \approx R/J$ e como R é plano, $\mathrm{Tor}_1\left(R, R/J\right) = 0$. Como $I \otimes_R R/J \approx I/IJ$ (ver Proposição 1.26), obtemos a seguinte sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R\left(\frac{R}{I}, \frac{R}{J}\right) \xrightarrow{\overline{\Psi}} \frac{I}{IJ} \xrightarrow{\bar{i}} \frac{R}{J} \xrightarrow{\bar{\pi}} \frac{R}{I} \otimes_R \frac{R}{J} \longrightarrow 0.$$

Dessa maneira $\mathrm{Tor}_1^R(R/I, R/J) \approx \mathrm{Im}(\overline{\Psi}) = \ker(\bar{i}) = (I \cap J)/IJ$

■

Teorema 5.40. *Seja $(X, 0)$ uma ICIS com $I_X = \langle \phi_1, ..., \phi_k \rangle$ e $f \in \mathcal{O}_n$ um germe de função $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado, então*

$$\mu_{BR}(f, X) = \mu(f) + \mu(X \cap f^{-1}(0), 0) + \mu(X, 0) - \tau(X, 0) - \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{Jf + I_X} + \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}_n}\left(\frac{\mathcal{O}_n}{I_X}, \frac{\mathcal{O}_n}{Jf}\right)$$

Demonstração: Consideramos a sequência exata

$$0 \longrightarrow \frac{I_X \cap Jf}{I_X Jf} \xrightarrow{i} \frac{I_X}{I_X Jf} \xrightarrow{\pi} \frac{I_X}{I_X \cap Jf} \longrightarrow 0,$$

Então

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} \frac{I_X}{I_X Jf} &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{I_X \cap Jf}{I_X Jf} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{I_X}{I_X \cap Jf} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}_n}\left(\frac{\mathcal{O}_n}{I_X}, \frac{\mathcal{O}_n}{Jf}\right) + \dim_{\mathbb{C}} \frac{I_X + Jf}{Jf} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}_n}\left(\frac{\mathcal{O}_n}{I_X}, \frac{\mathcal{O}_n}{Jf}\right) + \mu(f) - \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{I_X + Jf}. \end{aligned}$$

sendo a segunda igualdade consequência da Proposição 5.39 e do isomorfismo $(I_X + Jf)/Jf \approx I_X/I_X \cap Jf$.

Para concluirmos o teorema basta substituirmos a relação obtida acima na igualdade (5.8).

■

5.3.1 ICIS de codimensão 2

A partir de agora vamos supor que $(X,0)$ é uma ICIS de codimensão 2, determinada por $\phi = (\phi_1, \phi_2) : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ e $f \in \mathcal{O}_n$ $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado e vamos mostrar que

$$\mu_{BR}(f,X) = \mu(f) + \mu(f^{-1}(0) \cap X, 0) + \mu(X,0) - \tau(X,0) + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{Jf + \langle \phi_1, \phi_2 \rangle}. \tag{5.9}$$

Assim, para concluir nosso objetivo precisamos provar a igualdade

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\langle \phi_1, \phi_2 \rangle}{\langle \phi_1, \phi_2 \rangle Jf} = \mu(f) + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{Jf + \langle \phi_1, \phi_2 \rangle}.$$

Consideramos a seguinte sequência exata

$$0 \to \frac{\langle \phi_1, \phi_2 \rangle \cap Jf}{\langle \phi_1, \phi_2 \rangle Jf} \to \frac{\langle \phi_1, \phi_2 \rangle}{\langle \phi_1, \phi_2 \rangle Jf} \to \frac{\langle \phi_1, \phi_2 \rangle}{\langle \phi_1, \phi_2 \rangle \cap Jf} \to 0,$$

temos

$$\begin{aligned}
\dim_{\mathbb{C}} \frac{\langle \phi_1, \phi_2 \rangle}{\langle \phi_1, \phi_2 \rangle Jf} &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\langle \phi_1, \phi_2 \rangle \cap Jf}{\langle \phi_1, \phi_2 \rangle Jf} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\langle \phi_1, \phi_2 \rangle}{\langle \phi_1, \phi_2 \rangle \cap Jf} \\
&= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\langle \phi_1, \phi_2 \rangle \cap Jf}{\langle \phi_1, \phi_2 \rangle Jf} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\langle \phi_1, \phi_2 \rangle + Jf}{Jf} \\
&= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\langle \phi_1, \phi_2 \rangle \cap Jf}{\langle \phi_1, \phi_2 \rangle Jf} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{Jf} - \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{Jf + \langle \phi_1, \phi_2 \rangle},
\end{aligned}$$

Então para concluirmos precisamos mostrar que

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\langle \phi_1, \phi_2 \rangle \cap Jf}{\langle \phi_1, \phi_2 \rangle Jf} = 2 \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{Jf + \langle \phi_1, \phi_2 \rangle}.$$

Pela Proposição 5.34 sabemos que

$$\frac{df(\Theta_X^-)}{df(\Theta_X)} \approx \frac{\langle \phi_1, \phi_2 \rangle}{Jf \langle \phi_1, \phi_2 \rangle},$$

sendo f um germe de função $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado. Além disso se $\langle \phi_1, \phi_2 \rangle \subset \mathcal{O}_n$ é um ideal gerado por um sequência regular e J também é um ideal gerado por uma sequência regular de n elementos então

$$\frac{\langle \phi_1, \phi_2 \rangle}{Jf \langle \phi_1, \phi_2 \rangle} \approx \frac{\mathcal{O}_n^2}{\operatorname{syz}(\phi_1, \phi_2) + Jf \mathcal{O}_n^2}.$$

De fato, basta considerarmos a aplicação $\Psi : \mathcal{O}_n^2 \to \langle \phi_1, \phi_2 \rangle / J \langle \phi_1, \phi_2 \rangle$ dada por $\Psi(a_1, a_2) = a_1 \phi^1 + a_2 \phi_2 + J \langle \phi_1, \phi_2 \rangle$. Assim Ψ é sobrejetora e $(a_1, a_2) \in \ker(\Psi)$ se

$\Psi(a_1,a_2)=a_1\phi^1+a_2\phi_2+JI_X=0+JI_X$, ou seja existem $h_1,h_2\in J$ tais que

$$a_1\phi^1+a_2\phi_2=h_1\phi_1+h_2\phi_2,$$

o que implica $(a_1,a_2)\in \mathrm{syz}(\phi_1,\phi_2)+J\mathcal{O}_n^2$. Desta maneira provamos a inclusão

$$\ker(\Psi)\subset \mathrm{syz}(\phi_1,\phi_2)+J\mathcal{O}_n^2,$$

como a inclusão contrário é imediata temos o isomorfismo

$$\frac{\mathcal{O}_n^2}{\mathrm{syz}(\phi_1,\phi_2)+J\mathcal{O}_n^2}\approx\frac{\langle\phi_1,\phi_2\rangle}{J\langle\phi_1,\phi_2\rangle}.$$

Observamos agora a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{C}}\frac{\langle\phi_1,\phi_2\rangle}{J\langle\phi_1,\phi_2\rangle}&=\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_n^2}{\mathrm{syz}(\phi_1,\phi_2)+J\mathcal{O}_n^2}\\&=\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_n^2}{J\mathcal{O}_n^2}-\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathrm{syz}(\phi_1,\phi_2)+J\mathcal{O}_n^2}{J\mathcal{O}_n^2}.\end{aligned}$$

Assim para concluirmos a igualdade (5.9) basta mostrarmos

$$\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathrm{syz}(\phi_1,\phi_2)+J\mathcal{O}_n^2}{J\mathcal{O}_n^2}=\dim_{\mathbb{C}}\frac{\langle\phi_1,\phi_2\rangle+J}{J},$$

pois assim temos

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{C}}\frac{\langle\phi_1,\phi_2\rangle}{J\langle\phi_1,\phi_2\rangle}&=\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_n^2}{J\mathcal{O}_n^k}-\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathrm{syz}(\phi_1,\phi_2)+J\mathcal{O}_n^2}{J\mathcal{O}_n^2}\\&=2\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_n}{J}-\dim_{\mathbb{C}}\frac{\langle\phi_1,\phi_2\rangle+J}{J}\\&=\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_n}{J}+\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_n}{\langle\phi_1,\phi_2\rangle+J}.\end{aligned}$$

Proposição 5.41. *Sejam $I,J\subset\mathcal{O}_n$ ideais tais que $I=\langle\phi_1,\ \phi_2\rangle$ define uma interseção completa de codimensão 2 e J uma interseção completa de dimensão zero, então*

$$\frac{\mathrm{syz}(\phi_1,\phi_2)+J\mathcal{O}_n^2}{J\mathcal{O}_n^k}\approx\frac{\mathcal{O}_n}{J:I},$$

sendo $J:I=\{\alpha\in\mathcal{O}_n;\ \alpha I\subset J\}$, o ideal quociente entre dois ideais.

Demonstração: Sabemos que $\mathrm{syz}(\phi_1,\phi_2)=\langle(\phi_2,-\phi_1)\rangle$ assim vamos considerar a aplicação

$$\Psi:\mathcal{O}_n\to\frac{\mathrm{syz}(\phi_1,\phi_2)+J\mathcal{O}_n^2}{J\mathcal{O}_n^2}$$

tal que $\Psi(\alpha)=\alpha(\phi_2,-\phi_1)+J\mathcal{O}_n^2$. Logo Ψ é sobrejetora pela forma como foi definida e além disso

$$\begin{aligned}\ker(\Psi) &= \{\alpha \in \mathcal{O}_n; \alpha(\phi_2, -\phi_1) = 0 + J\mathcal{O}_n^k\}\\ &= \{\alpha \in \mathcal{O}_n; \alpha(\phi_2, -\phi_1) \in J\mathcal{O}_n^k\}\\ &= \{\alpha \in \mathcal{O}_n; \alpha\phi_1 \in J, \alpha\phi_2 \in J\}\\ &= \{\alpha \in \mathcal{O}_n; \alpha I \subset J\} = J : I.\end{aligned}$$

Assim provamos que

$$\frac{\mathrm{syz}(\phi_1, \phi_2) + J\mathcal{O}_n^2}{J\mathcal{O}_n^k} = \mathrm{Im}(\Psi) \approx \frac{\mathcal{O}_n}{\ker(\Psi)} = \frac{\mathcal{O}_n}{J : I},$$

o que conclui a demonstração.

■

Para completarmos o caso $k = 2$, precisamos mostrar a igualdade $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_n/(J : I) = \dim_{\mathbb{C}}(I + J)/J$. Com esse objetivo vamos introduzir alguns conceitos.

Definição 5.42. [32] Um "perfect paring"$B \times B \to A$ é uma A-forma bilinear com a propriedade que a aplicação $B \to \mathrm{Hom}_A(B, A)$ dada por

$$b \mapsto \langle b|\cdot\rangle$$

é um isomorfismo de A-módulos.

Teorema 5.43. *[32, Theorem 11.4] Se B é uma interseção completa sobre A, então existe um isomorfismo de B-módulo $\Theta : \mathrm{Hom}_A(B, A) \to B$. O qual induz um "perfect paring"$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ dado por $\langle b|c\rangle = \Theta^{-1}(b)(c)$.*

Lembramos que $\mathrm{Hom}_A(B, A)$ é um B-módulo com o produto dado por,

$$\begin{aligned} B \times \mathrm{Hom}_A(B, A) &\to \mathrm{Hom}_A(B, A)\\ (b, \Psi) &\mapsto b\Psi\end{aligned}$$

sendo $b\Psi : B \to A$ dada por $b\Psi(x) = \Psi(bx)$ para todo $x \in B$.

Proposição 5.44. *[11, Proposition 3.2] Sejam $\mathbb{K}$ um corpo de característica diferente de 2, Q uma F-álgebra local comutativa que é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita. Seja I um ideal em Q, então $\mathrm{Ann}_Q(I) = I^{\perp}$.*

Proposição 5.45. *Sejam I, $J \subset \mathcal{O}_n$ ideais com J definindo uma interseção completa de dimensão zero, então*

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{J : I} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{I + J}{J}.$$

Demonstração: Sejam $R = \mathcal{O}_n/J$ e $\overline{I} = (I + J)/J$; sabemos que $J \subset J : I$, portanto

$$\frac{\mathcal{O}_n}{J : I} \approx \frac{\mathcal{O}_n/J}{(J : I)/J} = \frac{R}{\mathrm{Ann}(\overline{I})},$$

pois

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ann}_R(\overline{I}) &= \{\alpha + J \in R;\ (\alpha + J)\overline{I} = 0 + J\} \\
&= \{\alpha + J \in R;\ \alpha I \subset J\} \\
&= \{\alpha + J \in R;\ \alpha \in J : I\} \\
&= \frac{J : I}{J}
\end{aligned}$$

Agora vamos utilizar o Teorema 5.43, considerando $B = R$ e $A = \mathbb{C}$, então existe um isomorfismo de R-módulos,

$$\Theta : \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(R, \mathbb{C}) \to R,$$

o qual induz um "perfect paring"

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : R \times R \to \mathbb{C},$$

ou seja $\langle \cdot | \cdot \rangle$ é uma forma bilinear simétrica, não degenerada e além disso a aplicação $\sigma : R \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(R, \mathbb{C}) = R^*$ dada por $\sigma(b+J) = \langle \cdot | b+J \rangle$ é um isomorfismo de $\mathbb{C}$-módulos.

Sejam agora

$$g_1 + J, ..., g_\mu + J$$

uma base de R sobre $\mathbb{C}$ tal que

$$g_1 + J, ..., g_r + J$$

é base de $\overline{I}$ sobre $\mathbb{C}$.

Vamos considerar $l_1, ..., l_\mu$ a base dual de $g_1 + J, ..., g_\mu + J$, ou seja,

$$l_i(g_j + J) = \delta_{ij},$$

além disso sejam também $h_1 + J, ..., h_\mu + J \in R$ tais que

$$h_i + J = \sigma^{-1}(l_i).$$

Assim temos que $\sigma(h_i + J) = \sigma(\sigma^{-1}(l_i)) = l_i$, ou seja, $\sigma(h_i + J) = \langle \cdot | h_i + J \rangle = l_i$, logo

$$\langle g_i + J | h_j + J \rangle = \sigma(h_j + J)(g_i + J) = l_j(g_i + J) = \delta_{ij}.$$

Como $\overline{I}^{\perp} = \{a + J \in R;\ \langle a + J | b + J \rangle = 0\ \forall b + J \in \overline{I}\}$, temos que $\overline{I}^{\perp}$ é gerado por $h_{r+1} + J, ..., h_\mu + J$, pois $\overline{I}$ é gerado por $g_1 + J, ..., g_r + J$. Agora segue da Proposição 5.44

que

$$\operatorname{Ann}_R(\overline{I}) = \overline{I}^{\perp},$$

e portanto

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{C}} \frac{J:I}{J} &= \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Ann}_R(\overline{I}) = \dim_{\mathbb{C}} \overline{I}^{\perp} = \mu - r \\ &= \dim_{\mathbb{C}} R - \dim_{\mathbb{C}} \overline{I}.\end{aligned}$$

Resultando $\dim_{\mathbb{C}} R/(J:I) = \dim_{\mathbb{C}} \overline{I} = \dim_{\mathbb{C}}(I+J)/J$.

■

Teorema 5.46. *Sejam $(X,0) \subset (\mathbb{C}^n,0)$ uma ICIS determinada por $(\phi_1,\phi_2) : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C}^2,0)$, e $f \in \mathcal{O}_n$ germe de função $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado, então*

$$\mu_{BR}(f,X) = \mu(f) + \mu(f^{-1}(0)\cap X,0) + \mu(X,0) - \tau(X,0) + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{Jf + \langle \phi_1,\phi_2\rangle}.$$

Demonstração: Pelo Corolário 5.33 sabemos que

$$\mu_{BR}(f,X) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n^2}{\langle \phi_2 e_1 - \phi_1 e_2\rangle + Jf\mathcal{O}_n^2} + \mu(f^{-1}(0)\cap X,0) + \mu(X,0) - \tau(X,0),$$

logo

$$\begin{aligned}\mu_{BR}(f,X) &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n^2}{Jf\mathcal{O}_n^2} - \dim_{\mathbb{C}} \frac{\langle \phi_2 e_1 - \phi_1 e_2\rangle + Jf\mathcal{O}_n^2}{Jf\mathcal{O}_n^2} + \mu(f^{-1}(0)\cap X,0) + \mu(X,0) \\ &\qquad - \tau(X,0) \\ &\overset{(*)}{=} 2\mu(f) - \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{Jf : \langle \phi_1,\phi_2\rangle} + \mu(f^{-1}(0)\cap X,0) + \mu(X,0) - \tau(X,0) \\ &\overset{(**)}{=} 2\mu(f) - \dim_{\mathbb{C}} \frac{\langle \phi_1,\phi_2\rangle + Jf}{Jf} + \mu(f^{-1}(0)\cap X,0) + \mu(X,0) - \tau(X,0) \\ &= \mu(f) + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{Jf + \langle \phi_1,\phi_2\rangle} + \mu(f^{-1}(0)\cap X,0) + \mu(X,0) - \tau(X,0).\end{aligned}$$

Sendo $(*)$ e $(**)$ consequências das Proposições 5.41 e 5.45, respectivamente.

■

Corolário 5.47. *Sejam $(X,0) \subset (\mathbb{C}^n,0)$ ICIS com $I_X = \langle \phi_1,\phi_2\rangle$ e f um germe de função $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado, então*

$$\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Tor}_1^{\mathcal{O}_n}\left(\frac{\mathcal{O}_n}{I_X}, \frac{\mathcal{O}_n}{Jf}\right) = 2\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{I_X + Jf}.$$

Demonstração: Segue do Teorema 5.40 e Teorema 5.46.

■

Para finalizar observamos que o corolário anterior é verdadeiro em um contexto mais geral.

Proposição 5.48. *Sejam $I, J \subset \mathcal{O}_n$ ideais tais que $I = \langle \phi_1, \phi_2 \rangle$ define uma interseção completa de codimensão 2 e J uma interseção completa de dimensão zero, então*

$$\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Tor}_1^{\mathcal{O}_n}\left(\frac{\mathcal{O}_n}{I}, \frac{\mathcal{O}_n}{J}\right) = 2\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{I+J}.$$

Demonstração: Consideramos a sequência exata

$$0 \longrightarrow \frac{I \cap J}{IJ} \longrightarrow \frac{I}{IJ} \longrightarrow \frac{I}{I \cap J} \longrightarrow 0,$$

então

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{I \cap J}{IJ} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{I}{IJ} - \dim_{\mathbb{C}} \frac{I}{I \cap J},$$

e pela Proposição 5.39 anterior

$$\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Tor}_1^{\mathcal{O}_n}\left(\frac{\mathcal{O}_n}{I}, \frac{\mathcal{O}_n}{J}\right) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{I \cap J}{IJ}.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Tor}_1^{\mathcal{O}_n}\left(\frac{\mathcal{O}_n}{I}, \frac{\mathcal{O}_n}{J}\right) &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{I}{IJ} - \dim_{\mathbb{C}} \frac{I}{I \cap J} \\
&= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n^2}{\langle \phi_2 e_1 - \phi_1 e_2 \rangle + J\mathcal{O}_n^2} - \dim_{\mathbb{C}} \frac{I}{I \cap J} \\
&= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n^2}{J\mathcal{O}_n^2} - \dim_{\mathbb{C}} \frac{\langle \phi_2 e_1 - \phi_1 e_2 \rangle + J\mathcal{O}_n^2}{J\mathcal{O}_n^2} - \dim_{\mathbb{C}} \frac{I}{I \cap J} \\
&\overset{(*)}{=} 2\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{J} - \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{J : I} - \dim_{\mathbb{C}} \frac{I}{I \cap J} \\
&\overset{(**)}{=} 2\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{J} - \dim_{\mathbb{C}} \frac{I+J}{J} - \dim_{\mathbb{C}} \frac{I+J}{J} \\
&= 2\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{I+J}.
\end{aligned}$$

Sendo $(*)$ consequência da Proposição 5.41 e $(**)$ da Proposição 5.45 juntamente com o isomorfismo $(I+J)/J \approx I/I \cap J$.

■

Corolário 5.49. *Sejam $I, J \subset \mathcal{O}_n$ ideais tais que $I = \langle \phi \rangle$ e J define uma interseção completa de dimensão zero, então*

$$\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Tor}_1^{\mathcal{O}_n}\left(\frac{\mathcal{O}_n}{I}, \frac{\mathcal{O}_n}{J}\right) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{I+J}.$$

Demonstração: Sabemos que $\mathrm{Tor}_1(\mathcal{O}_n/I, \mathcal{O}_n/J) \approx (I \cap J)/IJ$, e que

$$\begin{aligned}
\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Tor}^{\mathcal{O}_n}\left(\frac{\mathcal{O}_n}{I}, \frac{\mathcal{O}_n}{J}\right) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{I \cap J}{IJ} &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{I}{IJ} - \dim_{\mathbb{C}} \frac{I}{I \cap J} \\
&\overset{(*)}{=} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{J} - \dim_{\mathbb{C}} \frac{I+J}{J} \\
&= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{I+J}.
\end{aligned}$$

Sendo (*) consequência do isomorfismo $\psi : \mathcal{O}_n/J \to I/IJ$, dado por $\psi(f) = \phi f$ e de $(I \cap J)/IJ \approx (I+J)/J$.

■

Referências Bibliográficas

[1] I. Ahmed, M. A. S. Ruas, J. N. Tomazella, *Invariants of topological relative right equivalences*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 155, 2013, no. 2, 307–315.

[2] E. Arbarello, M. Cornalba, P.A. Griffiths, J. Harris, *Geometry of Algebraic Curves* Vol. I. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 267. Springer-Verlag, New York, 1985. xvi+386 pp.

[3] M. F. Atiyah, I.G. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Series in Mathematics. Westview Press, Boulder, CO, 2016. ix+128 pp.

[4] C. Bivià-Ausina, J. J. Nuño Ballesteros, *The deformation multiplicity of a map germ with respect to Boardman symbol.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 131A, 2001, 1003–1022.

[5] C. Biviá-Ausina, M. A. S. Ruas, *Mixed Bruce-Roberts numbers.* Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, v. 63, 2020 p. 456–474.

[6] E. Brieskorn, G. M. Greuel, *Singularities of complete intersections*, Manifolds-Tokyo 1973 (Proc. Internat. Conf., Tokyo, 1973), Univ. Tokyo Press, 1975, 123–129.

[7] J. W. Bruce, R. M. Roberts, *Critical points of functions on analytic varieties*, Topology 27, 1988, No. 1, 57–90.

[8] D. A. Buchsbaum, D. S. Rim, *A generalized Koszul complex. II. Depth and multiplicity.*Trans. Amer. Math. Soc.111, 1964, 197–224.

[9] W. Decker, G. M. Greuel, G. Pfister; Schönemann, H.: SINGULAR 4-1-1 - A computer algebra system for polynomial computations. http://www.singular.uni-kl.de 2018.

[10] T. de Jong, G. Pfister *Local analytic geometry*, Basic theory and applications. Advanced Lectures in Mathematics. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 2000. xii+382 pp.

[11] D. Eisenbud, H. I. Levine, *An algebraic formula for the degree of a* $\mathbb{C}^\infty$ *map germ*, Ann. of Math. (2) 106, 1977, no. 1, 19–44.

[12] C. G. Gibson, K. Wirthmüller, A. A. du Plessis, E. J. N. Looijenga, *Topological stability of smooth mappings.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 552. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.

[13] T. Gaffney, *Multiplicities an Equisingularity of ICIS germs*, Invent. Math. 123, 1996, No. 2,209–220.

[14] P. Garret, *Abstract Algebra*, Minneapolis, 2007. http://www-users.math.umn.edu/ garrett/m/algebra/notes/Whole.pdf.

[15] G. M. Greuel, *Constant Milnor number implies constant multiplicity for quasihomogeneous singularities*, Manuscripta Math. 56 1986, No. 2, 159–166.

[16] G. M. Greuel, C. Lossen, E. Shustin, *Introduction to Singularities and Deformations.* Springer Monographs in Mathematics. Springer, Berlin, 2007.

[17] G. M. Greuel; G. Pfister, *A Singular introduction to commutative algebra.* Second, extended edition. With contributions by Olaf Bachmann, Christoph Lossen and Hans Schönemann. Springer, Berlin, 2008.

[18] N. G. Grulha Júnior, *The Euler Obstruction and Bruce–Roberts' Milnor Number*, Quarterly Journal of Mathematics, v. 60, 2009, 291–302.

[19] N. G. Grulha Júnior, *Erratum: The Euler obstruction and Bruce-Roberts' Milnor number* Quarterly Journal of Mathematics, v. 63, 2012, 257–258.

[20] H. Hamm, *Lokale topologische Eigenschaften komplexer Räume*, (German) Math. Ann. 191, 1971, 235–252.

[21] H. Hamm, *Topology of isolated singularities of complex spaces*, Proceedings of Liverpool Singularities Symposium, II (1969/1970), Lectures Noted in Math., Vol.209, Springer, Berlin 1971, 213–217.

[22] V. H. Jorge Pérez, M. J. Saia, *Euler Obstruction, Polar multiplicities and Equisingularity of Map Germs in* $\mathcal{O}_{(n,p)}$, $n < p$, Internat. J. Math. 17, No. 8, 2006, 887–903.

[23] K. Kourliouros, *The Milnor-Palamodov Theorem for Functions on Isolated Hypersurface Singularities* Bull Braz Math Soc, New Series 2020.

[24] E. Kunz, *Introduction to commutative algebra and algebraic geometry*, Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser/Springer, New York, 2013.

[25] D. T. Lê, *Le concept de singularite isolee de fontion analytique,* Adv. Stu. Pure Math. 8, 1986.

[26] D. T. Lê, B. Tessier, *Varietes polaires locales et classes de Chern des varietes singulieres,* Ann. of Math. 114, 1981, 457–491.

[27] B. K. Lima-Pereira, J. J. Nuño-Ballesteros, B. Oréfice-Okamoto, J. N. Tomazella, *The relative Bruce-Roberts number of a function on a hypersurface*, Proc. Edinb. Math. Soc. (2) 64, 2021, no. 3, 662-–674.

[28] B. K. Lima-Pereira, J. J. Nuño-Ballesteros, B. Oréfice-Okamoto, J. N. Tomazella, *The relative Bruce–Roberts number of a function on ICIS.* artigo em preparação.

[29] E. J. N. Looijenga, *Isolated singular points on complete intersections*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 77. Cambridge University Press, 1984.

[30] H. Matsumura, *Commutative ring theory*, Translated from the Japanese by M. Reid. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 8. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[31] J. Milnor, *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, Annals of Mathematical Studies 61, Princeton University Press, Princeton, 1968.

[32] D. Mond, J. J. Nuño Ballesteros, *Singularities of mappings*, volume 357 of Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, Cham, 2020.

[33] J. J. Nuño-Ballesteros, B. Oréfice-Okamoto, B. K. Lima-Pereira, J. N. Tomazella, *The Bruce–Roberts Number of A Function on A Hypersurface with Isolated Singularity.* Q. J. Math. 71, 2020, no. 3, 1049–1063.

[34] J. J. Nuño Ballesteros, B. Oréfice-Okamoto, J. N. Tomazella, *The Bruce-Roberts number of a function on a weighted homogeneous hypersurface,* Q. J. Math.64, 2013, no. 1, 269–280.

[35] B. Oréfice-Okamoto, *O Número de Milnor de uma Singularidade Isolada*, Tese, São Carlos, 2010.

[36] K.Saito, *Quasihomogene isolierte Singularitäten von Hyperflächen*, (German) Invent. Math. 14, 1971, 123—142.

[37] K. Saito, *Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. 1A Math. 27, 1980, 265–291.

[38] J. Seade, M. Tibar and A. Verjovsky, *Milnor numbers and Euler obstruction*, Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) 36, 2005, 275–283.

[39] M. Sebastiani, R. Thom, *Un résultat sur la monodromie*, (French) Invent. Math. 13, 1971, 90–96.

[40] S. Tajima, *On Polar Varieties, Logarithmic Vector Fields and Holonomic D-modules*, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, 2013.

[41] H. Vosegaard, *A characterization of quasi-homogeneous complete intersection singularities*, J. Algebraic Geom. 11 (2002), no. 3, 581—597.

[42] J. M. Wahl, *Derivations, Automorphisms and Deformations on Quasi-Homogeneous Singularity,* in Proc. Symp. Pure Math. 40 A.M.S. Providence, 1983.