

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Junio Cesar Ferreira

**Categoria de Lusternik-Schnirelmann e
aplicações**

São Carlos - SP

2022

Junio Cesar Ferreira

Categoria de Lusternik-Schnirelmann e aplicações

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientação Prof. Dr. Dirk Töben

São Carlos - SP

2022



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Junio Cesar Ferreira, realizada em 14/02/2022.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Dirk Toben (UFSCar)

Prof. Dr. Francisco Carlos Caramello Junior (UFSC)

Prof. Dr. Eivaldo Lopes dos Santos (UFSCar)

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Dedico este trabalho a minha família.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais pelo amor, incentivo e apoio incondicional.

Agradeço a minha noiva Amanda, por ser minha grande companheira nesta fase da vida.

Agradeço a todos os colegas do departamento de matemática, por incontáveis conversas e troca de ideias. Em particular agradeço aos colegas de mestrado Victor, Raphael e Felipe pelos momentos de estudo e de descontração.

Agradeço as empresas MRI e Autolab por terem me aceito em seus quadros de funcionários com a flexibilidade de horários que me permitiu seguir com este mestrado. Agradeço também a todos colegas de trabalho pelas diversas conversas agradáveis e momentos de descontração.

Agradeço a todos os professores e funcionários do departamento de matemática da UFSCar. Em particular, agradeço ao prof. Dr. Edivaldo Lopes dos Santos e a Priscila Helen Carvalho por sua paciência e dedicação.

Agradeço ao prof. Dr. Francisco Carlos Caramello Junior pelas valiosas correções e sugestões.

Finalmente, dedico a minha mais profunda gratidão ao meu orientador prof. Dr. Dirk Töben, por ter me aceito como seu orientando, por toda dedicação e paciência despendidas ao longo do desenvolvimento dessa dissertação e por todos seus ensinamentos, sem ele nada disso teria sido possível. Obrigado!

“You, me, or nobody is gonna hit as hard as life. But it ain’t how hard you hit; it’s about how hard you can get hit, and keep moving forward. How much you can take, and keep moving forward. That’s how winning is done.”
(Sylvester Stallone, Rocky Balboa)

Resumo

A categoria de Lusternik-Schnirelmann associa a cada espaço topológico um número inteiro positivo, sendo este número um invariante importante na topologia algébrica, teoria dos pontos críticos e geometria simplética. Nesta dissertação, apresentamos a teoria da categoria de Lusternik-Schnirelmann, computamos a categoria de vários espaços topológicos e fornecemos algumas reformulações da categoria. Além disso, exibimos duas aplicações da categoria de Lusternik-Schnirelmann em outras áreas da matemática. A primeira, é uma aplicação geométrica, que consiste na demonstração que um corpo convexo no espaço euclidiano de dimensão n , admite pelo menos n cordas binormais. A segunda aplicação, relaciona a categoria à complexidade topológica no problema de planejamento de movimentos.

Palavras-chave: Categoria de Lusternik-Schnirelmann, topologia algébrica, pontos críticos, cup length, cordas binormais, corpos convexos, complexidade topológica.

Abstract

The Lusternik-Schnirelmann category associates a positive integer to each topological space. This number is an important invariant in algebraic topology, critical point theory and symplectic geometry. In this dissertation we present the theory of Lusternik-Schnirelmann category, compute the category of several topological spaces and provide some reformulations of the category. In addition, we show two applications of Lusternik-Schnirelmann category to other areas of mathematics. The first one is a geometric application proving that a convex body in Euclidean space of dimension n admits at least n binormal chords. The second application relates the category to topological complexity in the motion planning problem.

Keywords: Lusternik-Schnirelmann category, algebraic topology, critical points, cup length, double normal chords, convex bodies, topological complexity

Lista de ilustrações

Figura 1	– S^1 e sua decomposição em células.	30
Figura 2	– Construção de \mathbb{R} com pontos e segmentos de retas	31
Figura 3	– Estrutura complexo CW para o cilindro $S^1 \times I$ e para o toro $S^1 \times S^1$	32
Figura 4	– Representação do espaço cilindro de f	34
Figura 5	– Simplexos de dimensões 0, 1, 2 e 3.	44
Figura 6	– Ilustração operador bordo singular	45
Figura 7	– Ilustração composição do homomorfismo induzido	46
Figura 8	– Cobertura do toro.	63
Figura 9	– Exemplo de refinamento para cobertura de $[0, 3]$	66
Figura 10	– Ilustração da definição dos conjuntos A_i no caso de S^2	68
Figura 11	– Projção radial de um 2-simplexo em S^1	69
Figura 12	– Diagrama de visualização dos três primeiros Q_r	77
Figura 13	– As sete primeiras iterações da construção do conjunto de Cantor.	82
Figura 14	– Gráfico da função $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$	83
Figura 15	– Pontos críticos e fluxo função altura no toro bidimensional.	86
Figura 16	– $T^3(\mathbb{R})$ com ponto base em $(1, 1, 1)$	95
Figura 17	– Função $\varphi : S^1 \rightarrow S^1 \vee S^1$	96
Figura 18	– Homotopia $\Delta \simeq j \circ \varphi$	97
Figura 19	– Construção de um aberto U_1 contrátil em S^1	97
Figura 20	– Cordas binormais da elipse no plano bidimensional	107
Figura 21	– Elipsoide a esquerda e “capsula” a direita	109
Figura 22	– Cordas binormais em um elipsoide	109
Figura 23	– Cordas binormais em uma cápsula	110
Figura 24	– Cordas binormais em um elipsoide escaleno	110
Figura 25	– Triângulo e triângulo arredondado	111
Figura 26	– Diagrama ilustrativo construção de ∂B_t	112
Figura 27	– Imagem de γ em S^{n-1} e projeção em ∂B_ϵ	113
Figura 28	– Exemplo de simetrização $\varphi : B \times B \rightarrow \mathbb{R}^2$ quando ∂B é uma curva em \mathbb{R}^2	114
Figura 29	– Diagrama ilustrativo das fronteiras de B'' e B'	116
Figura 30	– Projção das cordas binormais do elipsoide no hemisfério superior da esfera	117
Figura 31	– Projção das cordas binormais do elipsoide na representação de \mathbb{RP}^2	117
Figura 32	– Exemplo esquemático de braço robótico planar com 3 articulações.	118
Figura 33	– Exemplo esquemático de corpo rígido em \mathbb{R}^3	118
Figura 34	– Continuidade do planejamento de movimentos: Condições (A, B) e (A', B') próximos gerando seções próximas.	119

Sumário

0	INTRODUÇÃO	19
1	PRELIMINARES	21
1.1	Revisão de topologia e homotopia	21
1.1.1	Topologia Geral	21
1.1.2	Complexos CW	29
1.1.3	Teoria de homotopia	33
1.2	Topologia Algébrica	43
1.2.1	Homologia Singular	43
1.2.2	Cohomologia Singular	50
1.2.3	Anel de Cohomologia	53
2	CATEGORIA DE LUSTERNIK-SCHNIRELMANN	59
2.1	Categoria de Lusternik-Schnirelmann	59
2.1.1	Introdução	59
2.1.2	Estimativa inferior <i>cup length</i>	61
2.1.3	Estimativa superior dimensão de cobertura	65
2.1.4	Teorema de Lusternik-Schnirelmann	68
2.1.5	Propriedades da categoria LS	71
2.1.6	Cones, Produtos e fibrações	74
2.2	Teorema de Lusternik-Schnirelmann para pontos críticos	81
2.2.1	Preliminares	81
2.2.2	Teorema de deformação e princípio do minimax	87
2.2.3	Teorema de Lusternik-Schnirelmann para Pontos Críticos	91
2.3	Reformulações da categoria de Lusternik-Schnirelmann	94
2.3.1	Reformulação de Whitehead	94
2.3.2	Reformulação de Ganea	100
2.3.3	Categoria seccional	105
3	APLICAÇÕES	107
3.1	Cordas binormais em corpos convexos	107
3.2	Complexidade topológica no planejamento de movimentos	118
	REFERÊNCIAS	129

0 Introdução

No início do século XX, consolidaram-se três teorias distintas que estabelecem a profunda relação que existe entre a topologia e a análise das variedades suaves. Na Europa, Georges De Rham (1903-1990) mostrou que a cohomologia de De Rham equivale a cohomologia singular. Nos Estados Unidos, Marston Morse (1892-1977) desenvolveu a teoria que hoje é conhecida como “teoria de Morse”, que relaciona os índices dos pontos críticos de uma função de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ com a cohomologia da variedade M , onde, função de Morse é uma função que possui apenas pontos críticos não degenerados. Na Rússia, Lazar Aronovich Lusternik (1899-1981) e Lev Genrikhovich Schnirelmann (1905-1938), também interessados nos pontos críticos de funções suaves, por considerarem o caso mais geral, além dos pontos não degenerados, estabeleceram uma relação entre a estrutura dos pontos críticos e um novo tipo de invariante homotópico, que agora conhecemos como categoria de Lusternik-Schnirelmann (categoria LS)[31].

A categoria de Lusternik-Schnirelmann associa a cada espaço topológico um número inteiro positivo (podendo este ser infinito caso tal inteiro não exista), sendo este número um invariante importante nas teorias da topologia algébrica, teoria dos pontos críticos e geometria simplética. Atualmente, existem diversas aplicações da categoria LS em várias áreas de pesquisa, algumas dessas áreas são bastante surpreendentes e estão bem distantes das motivações originais de Lusternik e Schnirelmann. Nesta dissertação, apresentamos uma revisão bibliográfica da teoria elementar sobre a categoria LS e algumas de suas aplicações.

Dedicamos o Capítulo 1 a uma revisão dos conceitos básicos de Topologia Geral e Topologia Algébrica que são necessários no estudo da categoria de Lusternik-Schnirelmann. A primeira seção consiste de uma compilação de definições e resultados de Topologia Geral que são regularmente utilizadas no texto, relembramos a definição de complexo CW e o teorema da aproximação celular, e também apresentamos uma revisão sobre fibrações e cofibrações na teoria de homotopia. Na segunda seção, exibimos uma breve revisão da construção dos funtores homologia e cohomologia, com o objetivo de definir o *cup length* que desempenha papel importante na teoria da categoria de Lusternik-Schnirelmann, pois este invariante topológico é uma estimativa inferior para a categoria LS.

O Capítulo 2 é dedicado a categoria de Lusternik-Schnirelmann, sendo este capítulo dividido em três partes. Na primeira, apresentamos a categoria LS e suas principais estimativas. Por utilizar estas estimativas e a definição da categoria LS, calculamos a categoria de vários espaços topológicos. Mostramos que o resultado da categoria do plano projetivo real equivale ao teorema de Lusternik-Schnirelmann 2.1.19 e que este equivale

ao teorema de Borsuk-Ulam 2.1.23. Na segunda parte do Capítulo, exibimos a teoria de Lusternik-Schnirelmann para pontos críticos. Terminamos esta seção com uma discussão sobre o teorema de Lusternik-Schnirelmann para pontos críticos que nos fornece uma estimativa da quantidade mínima de pontos críticos para uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 , onde M é uma variedade \mathcal{C}^2 -Banach paracompacta. A terceira parte do capítulo é destinada às reformulações da categoria LS atribuídas a Whitehead e Ganea. Sendo estas reformulações mais adequadas para diversas aplicações relacionadas a homotopia, além disso, a reformulação de Whitehead revela uma melhoria na estimativa superior da categoria LS. Terminamos esta última parte do capítulo, introduzindo a categoria seccional e algumas de suas propriedades, este invariante homotópico é particularmente útil na aplicação de Complexidade Topológica apresentada no Capítulo 3.

No Capítulo 3, apresentamos duas aplicações distintas da categoria LS. A primeira é a solução de um problema de geometria convexa, a saber, um corpo convexo no espaço euclidiano de dimensão n admite pelo menos n cordas binormais. A segunda parte do Capítulo 3 é designada a um novo tipo de invariante topológico, a Complexidade Topológica (TC), que possui varias aplicações interessantes e uma profunda relação com categoria LS. Mostramos alguns dos principais resultados que relacionam TC com a categoria LS. A teoria de Complexidade Topológica determina o quão complexo é encontrar um algoritmo para o problema de planejamento de movimentos, sendo este um problema fundamental em robótica. Exibimos dois exemplos de complexidades topológicas para o planejamento de movimentos, sendo o primeiro o cômputo de TC do espaço de configurações de um braço robótico arbitrário, e o segundo o cômputo de TC do espaço de configurações de um corpo rígido nos espaços euclidianos \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 , finalizando com uma breve análise do caso geral de \mathbb{R}^n com $n \geq 1$.

1 Preliminares

1.1 Revisão de topologia e homotopia

Esta seção é dividida em três subseções, a primeira tem como objetivo relembrar e fixar algumas definições e resultados de topologia geral. A segunda parte compreende uma breve revisão sobre complexos CW. A terceira parte apresenta algumas definições e resultados de teoria de homotopia que são utilizados nos próximos capítulos.

1.1.1 Topologia Geral

As duas referências principais para esta subseção são [8] e [30]. A seguir apresentamos as definições básicas de topologia.

Notação 1.1.1. Seja X um conjunto qualquer, denotamos $\mathcal{P}(X) := \{A \mid A \subset X\}$ o *conjunto das partes de X* .

Definição 1.1.2 (Axiomas de espaço topológico). Seja X um conjunto qualquer. Uma topologia \mathcal{T} em X é uma família (coleção) de subconjuntos de X , isto é, $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$, que satisfaz as seguintes condições:

- (1) O vazio e o todo devem estar contidos na topologia, isto é,

$$\emptyset \in \mathcal{T} \text{ e } X \in \mathcal{T}.$$

- (2) Qualquer união arbitrária de subconjuntos da topologia deve estar contida na topologia:

$$\forall \{A_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \in \mathcal{T}.$$

- (3) Qualquer interseção finita de subconjuntos da topologia deve estar contida na topologia:

$$\forall \{A_1, \dots, A_n\} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{T}.$$

Definição 1.1.3. Seja X um conjunto, \mathcal{T} uma topologia em X e $Y \subset X$, define-se:

- Os elementos de X são chamados *pontos de X* .
- Os elementos de \mathcal{T} são chamados de conjuntos *abertos*.
- O par ordenado (X, \mathcal{T}) é chamado de *espaço topológico*. Sempre que existir uma topologia definida em X escrevemos o espaço topológico X , deixando subentendido que este é o espaço (X, \mathcal{T}) .

- Uma *vizinhança* de um ponto $x \in X$ é um subconjunto $V \subset X$ tal que $\exists U \in \mathcal{T}$ de modo que $x \in U \subset V$.
- O conjunto Y é dito *fechado* se $X \setminus Y$ for aberto.
- O *fecho* de Y , denotado \overline{Y} , é o menor subconjunto fechado de X que contém Y , no sentido que $\overline{Y} := \cap \{F\}$, onde $\{F\}$ é a coleção de todos subconjuntos fechados de X que contém Y .
- O *interior* de Y , denotado $\text{int}(Y)$, é o maior subconjunto aberto de X contido em Y , no sentido que $\text{int}(Y) := \cup \{A\}$, onde $\{A\}$ é a coleção de todos subconjuntos abertos de X contidos em Y .
- A *fronteira* de Y , denotada ∂Y , é definida por $\partial Y := \overline{Y} \setminus \text{int}(Y)$.
- Um ponto $y \in Y$ é chamado *ponto interno de Y* se $y \in \text{int}(Y)$.
- Um ponto $y \in Y$ é chamado *ponto externo de Y* se $y \in \text{int}(X \setminus Y)$.
- Um ponto $y \in Y$ é chamado *ponto de fronteira de Y* se não for ponto interno nem externo.

Definição 1.1.4. Sejam X e Y espaços topológicos. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é dita:

- *contínua* se a imagem inversa de um subconjunto aberto de Y é um subconjunto aberto de X . Dado um ponto $x \in X$, a função é dita *contínua em x* se a imagem inversa de qualquer vizinhança de $f(x)$ for vizinhança de x .
- *homeomorfismo* se é contínua, bijetora e sua inversa é contínua. Dois espaços são ditos *homeomorfos* se existe um homeomorfismo entre eles, neste caso denotamos $X \cong Y$.
- *aberta (fechada)* se a imagem de um subconjunto aberto (fechado) de X é aberto (fechado) em Y .

Proposição 1.1.5. *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma bijeção. As seguintes propriedades de f são equivalentes:*

1. f é um homeomorfismo.
2. f é contínua e aberta.
3. f é contínua e fechada.
4. $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ para cada $A \subset X$.

Demonstração. Veja [8] p. 89.

□

Definição 1.1.6 ([34]). Sejam X um espaço topológico e $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subset \mathcal{P}(X)$ uma família de subconjuntos de X . A família \mathcal{A} é dita:

- *finita*, se o conjunto \mathcal{A} é finito.
- *finita em relação aos índices* se o conjunto de índices Λ é finito.
- *localmente finita*, se para todo $x \in X$, existe uma vizinhança U de x em X tal que o conjunto $\{A_\alpha \in \mathcal{A} : A_\alpha \cap U \neq \emptyset\}$ é finito.
- *localmente finita em relação aos índices*, se para todo $x \in X$, existe uma vizinhança U de x em X tal que o conjunto $\{\alpha \in \Lambda : A_\alpha \cap U \neq \emptyset\}$ é finito.

Definição 1.1.7. Sejam X um espaço topológico e $Y \subset X$. Uma família $\mathcal{U} = \{U_\alpha \subset X\}_{\alpha \in \Lambda}$ é chamada de cobertura de Y se $Y \subset \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$. Em particular, a família \mathcal{U} é uma cobertura de X se $X = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$.

Definição 1.1.8. Sejam X um espaço topológico, $Y \subset X$ e $\mathcal{U} = \{U_\alpha \subset X : \alpha \in \Lambda\}$ uma cobertura de Y em X . Uma cobertura $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in \Gamma}$ de Y em X é dita:

- *subcobertura de \mathcal{U}* se $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, isto é, se existe uma função $\varphi : \Gamma \rightarrow \Lambda$ tal que $V_\beta = U_{\varphi(\beta)}$, para todo $\beta \in \Gamma$.
- *refinamento de \mathcal{U}* se existe uma função $\varphi : \Gamma \rightarrow \Lambda$ tal que $V_\beta \subset U_{\varphi(\beta)}$ para todo $\beta \in \Gamma$.

Definição 1.1.9. Seja X um espaço topológico e $Y \subset X$ um subconjunto. Definimos a *topologia relativa (ou induzida) em Y* , por $\mathcal{T}_{X|Y} := \{A \subset Y : \exists U \in \mathcal{T}_X \text{ com } A = U \cap Y\}$. Quando consideramos Y munido da topologia relativa, dizemos que Y é um *subespaço topológico* de X .

Definição 1.1.10. Seja X um espaço topológico e \sim uma relação de equivalência em X . A *topologia quociente* no conjunto X/\sim é $\mathcal{T}_{X/\sim} := \{U \subset X/\sim : \pi^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X\}$, onde $\pi : X \rightarrow X/\sim$ é projeção ao quociente.

Definição 1.1.11. Um espaço topológico X é dito ser de Hausdorff se para quaisquer dois pontos distintos $x, y \in X$ existem vizinhanças abertas $x \in U_x$ e $y \in U_y$ tal que $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Definição 1.1.12. Um espaço topológico X é dito *normal* se para qualquer par de subconjuntos fechados disjuntos F e G , existem vizinhanças abertas $U \supset F$ e $V \supset G$ tal que $U \cap V = \emptyset$.

Definição 1.1.13. Um espaço topológico de Hausdorff X é dito *completamente normal* se quaisquer subconjuntos $A, B \subset X$ satisfazendo $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset$ puderem ser separados por vizinhanças abertas.

Proposição 1.1.14. *As seguintes quatro propriedades são equivalentes:*

1. X é normal.
2. Para cada fechado A e aberto $U \supset A$ existe um aberto V com $A \subset V \subset \bar{V} \subset U$.
3. Para cada par de conjuntos fechados A, B , existe um conjunto aberto $U \supset A$ tal que $\bar{U} \cap B = \emptyset$.
4. Se $A \subset X$ e $B \subset X$ são subconjuntos fechados disjuntos, então existem vizinhanças de A e B cujos fechos não se intersectam.

Demonstração. Veja [8] p. 144. □

Definição 1.1.15 ([8] p. 152). Uma cobertura $\{A_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ de um espaço X é chamada de *pontualmente finita* se para cada $x \in X$, existe uma quantidade finita de índices $\alpha \in \Gamma$ tal que $x \in A_\alpha$.

Proposição 1.1.16. *As seguintes duas propriedades são equivalentes:*

1. X é normal.
2. Se $\{U_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ é qualquer cobertura aberta e pontualmente finita de X , então existe uma cobertura aberta $\{V_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ de X , tal que, $\bar{V}_\alpha \subset U_\alpha$ para cada $\alpha \in \Gamma$, e $V_\alpha \neq \emptyset$ quando $U_\alpha \neq \emptyset$.

Demonstração. Veja [8] p. 152. □

Definição 1.1.17. Dizemos que um espaço topológico Y é ANR (*absolute neighborhood retract*) se para todo espaço normal X e todo subconjunto fechado $A \subset X$, cada função contínua $f : A \rightarrow Y$ pode ser estendida sobre uma vizinhança $U \supset A$.

Proposição 1.1.18. *Seja $\{Y_i | i = 1, \dots, n\}$ uma família finita de espaços. Então $\prod_{i=1}^n Y_i$ é ANR (normal), se, somente se, cada Y_i é ANR (normal).*

Demonstração. Veja [8] p. 152. □

Definição 1.1.19. Um espaço topológico de Hausdorff X é dito:

- *compacto* se para toda cobertura aberta de X existe uma subcobertura finita.
- *localmente compacto* se para todo $x \in X$ existe uma vizinhança relativamente compacta (Definição 1.1.20) de x .
- *paracompacto* se toda cobertura aberta de X admite um refinamento aberto localmente finito.

Definição 1.1.20. Um subconjunto A de um espaço topológico X é *relativamente compacto* se \bar{A} for compacto.

Proposição 1.1.21. *Todo espaço paracompacto é normal.*

Demonstração. Veja [8] p. 163. □

Definição 1.1.22. Seja uma função $f : X \rightarrow A \subset \mathbb{R}$, o *suporte de f* denotado $\text{supp}(f)$ é o conjunto $\overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}$.

Definição 1.1.23. Sejam X um espaço topológico e $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ uma cobertura aberta de X . Uma *partição da unidade subordinada a \mathcal{U}* , é uma família de funções contínuas $\{\phi_\alpha : X \rightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R}\}$ tais que:

- $\text{supp}(\phi_\alpha) \subset U_\alpha \forall \alpha \in \Lambda$.
- a família $\{\text{supp}(\phi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ é uma cobertura fechada de X localmente finita em relação aos índices.
- $\forall x \in X$, tem-se $\sum_{\alpha \in \Lambda} \phi_\alpha(x) = 1$.

Proposição 1.1.24. *Se um espaço topológico X é paracompacto, então toda cobertura \mathcal{U} de X admite uma partição da unidade subordinada a \mathcal{U} .*

Demonstração. Veja [8] p. 170. □

Definição 1.1.25. Um espaço topológico X é *conexo* quando não existe um par de subconjuntos abertos $A, B \subset X$ tal que:

- $X = A \cup B$
- $A \cap B = \emptyset$
- $X \neq A$ e $X \neq B$

Proposição 1.1.26. *Um espaço X ser conexo equivale a:*

- Não existe $A \subset X$ aberto e fechado em X tal que $A \neq X$ e $A \neq \emptyset$.
- Não existe função contínua sobrejetora $X \rightarrow \{0, 1\}$, onde $\{0, 1\}$ tem a topologia discreta.

Demonstração. Veja [8] p. 108. □

Proposição 1.1.27. *Se $f : X \rightarrow Y$ é uma função contínua e $A \subset X$, então:*

- Se A for compacto, então $f(A)$ é compacto.

- Se A for conexo, então $f(A)$ é conexo.

Demonstração. Veja capítulo 3 de [30]. □

As recíprocas dos itens da Proposição 1.1.27 são falsas, no entanto, quando valer a recíproca do primeiro item, definimos:

Definição 1.1.28 ([36]). Uma função contínua $f : X \rightarrow Y$ é chamada de *própria* se para todo subconjunto compacto $K \subset Y$, constamos que $f^{-1}(K)$ é compacto.

Definição 1.1.29. Um *caminho* em um espaço topológico X é uma função contínua $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$. Dizemos que um caminho γ é *fechado* se $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Definição 1.1.30. Um espaço topológico X é *conexo por caminhos* se para quaisquer dois pontos $x, y \in X$ existe um caminho $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$.

Definição 1.1.31. Sejam X e Y espaços topológicos. Duas funções contínuas $f, g : X \rightarrow Y$ são ditas *homotópicas* quando existe uma função contínua $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$, tal que,

$$\begin{cases} H(x, 0) = f(x), \quad \forall x \in X, \\ H(x, 1) = g(x), \quad \forall x \in X. \end{cases}$$

A função H chama-se *homotopia* entre f e g , neste caso denotamos $f \simeq g$.

Definição 1.1.32. Um espaço topológico X é dito *simplesmente conexo* se for conexo por caminhos e para qualquer caminho fechado $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ existe homotopia $H : I \times I \rightarrow X$ tal que $H(t, 0) = \gamma(t)$ e $H(t, 1) = x_0$, sendo $x_0 \in X$ um ponto fixado.

Definição 1.1.33. Uma função $f : X \rightarrow Y$ contínua é chamada de *equivalência de homotopia* se existir uma função contínua $g : Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f \simeq \text{id}_X$ e $f \circ g \simeq \text{id}_Y$. Neste caso dizemos que g é *inverso homotópico de f* e que os espaços X e Y tem o mesmo *tipo de homotopia*, e denotamos $X \simeq Y$.

Observação 1.1.34. Todo homeomorfismo é uma equivalência homotópica, a recíproca é falsa. Por exemplo, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow *$, onde $*$ é um espaço que tem apenas um ponto. É evidente que f não é um homeomorfismo, pois não é invertível. No entanto, é uma equivalência homotópica. De fato, defina $g : * \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $g(*) = 0$, assim $f \circ g = \text{id}_*$, e podemos definir a função $H(x, t) = tx$, de modo que $H(x, 0) = 0 = g(f(x))$ e $H(x, 1) = x = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$, isto é, H é uma homotopia. Assim, concluímos que $\mathbb{R}^n \simeq *$.

Definição 1.1.35. Um subespaço topológico $A \subset X$ é dito *contrátil* se ele tem o mesmo tipo de homotopia que um ponto.

Proposição 1.1.36. Um espaço é *contrátil* se, e somente se, a função identidade é homotópica a uma função constante. Ademais, um espaço *contrátil* é *conexo por caminhos*.

Demonstração. Veja [25] p. 11. □

Definição 1.1.37. Seja X um espaço topológico e $A \subset X$ um subespaço de X . Definimos:

- Uma função $f : X \rightarrow X$ chama-se *retração* quando $f|_A = \text{id}_A$, ou seja, $a = f(a)$, $\forall a \in A$. Quando existe uma retração $f : X \rightarrow A$ dizemos que o subespaço A é um *retrato* do espaço X .
- Supondo $f : X \rightarrow A$ uma retração e $i : A \rightarrow X$ a inclusão. Quando $i \circ f \simeq \text{id}_X$, dizemos que A é um *retrato por deformação* do espaço X .

Definição 1.1.38. Sejam X e Y espaços topológicos, e $\mathcal{C}(X, Y)$ o conjunto das funções contínuas de X a Y . Dado um subconjunto compacto $K \subset X$ e um subconjunto aberto $U \subset Y$, defina $V(K, U)$ o conjunto de todas as funções $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ tal que $f(K) \subset U$. Então a coleção de todos os conjuntos da forma $V(K, U)$ é uma sub-base (veja [8] p. 65) para uma topologia em $\mathcal{C}(X, Y)$. Essa topologia é chamada de *topologia compacto-aberta*.

Definição 1.1.39. Sejam X e Y espaços topológicos, A um subconjunto de X e $f : A \rightarrow Y$ uma função contínua, definimos o espaço $Y \cup_f X := (Y \cup X) / \sim$ com a topologia quociente 1.1.10, sendo a relação dada por $x \sim f(x)$.

Definição 1.1.40. Sejam X um conjunto e $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma} \subset \mathcal{P}(X)$ uma família de subconjuntos, tal que cada um tenha uma topologia. A *topologia fraca* em X induzida por \mathcal{A} é a topologia tal que $U \subset X$ é aberto se, e somente se, $U \cap A_\alpha$ é aberto em A_α para todo $\alpha \in \Gamma$.

Observação 1.1.41. Quando X possui uma topologia fraca induzida por uma família $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$, uma função $f : X \rightarrow Y$ é contínua se, e somente se, $f|_{A_\alpha} : A_\alpha \rightarrow Y$ é contínua para todo $\alpha \in \Gamma$.

Não faremos aqui uma revisão sobre variedades, recomendamos [22] e [35] para uma introdução ao assunto. Mas relembramos aqui, pelo menos a definição de variedade topológica, tal como apresentada em [35]:

Definição 1.1.42. Sejam X um espaço topológico e $x \in X$ um ponto fixado. Uma *carta local* de X em x de dimensão k é uma tripla (U, V, φ) , onde:

- $U \subset X$ é uma vizinhança aberta conexa de x .
- $V \subset \mathbb{R}^k$ é um subconjunto aberto.
- $\varphi : V \rightarrow U$ é um homeomorfismo.

Um espaço topológico X é dito *espaço localmente euclidiano de dimensão k* se para todo ponto $x \in X$ existe uma carta local de X em x de dimensão k . Usamos a notação $\dim(X) = k$.

Definição 1.1.43. Seja X um espaço localmente euclidiano. Um *atlas* de X é uma família de cartas locais $\Phi_\Gamma = \{(U_\alpha, V_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in \Gamma\}$ tal que a família $\{U_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ é uma cobertura aberta de X e cada $U_\alpha \neq \emptyset$.

Definição 1.1.44. Um espaço topológico X é dito uma *variedade topológica de dimensão* k se é conexo, de Hausdorff, de base enumerável e localmente euclidiano de dimensão k .

A definição de variedade suave é um pouco mais complicada, pois precisamos definir as funções de transição e o que é um atlas suave. As funções de transição, são funções definidas nas interseções não vazias do domínio das funções φ_α da definição acima. Se as funções de transição de um atlas forem difeomorfismos, então dizemos que o atlas é suave.

Definição 1.1.45. Uma *variedade suave* ou *variedade diferenciável* é um par (X, Φ_Γ) , onde X é uma variedade topológica e Φ_Γ é um atlas suave maximal de X . O atlas maximal Φ_Γ é chamado também de *estrutura suave* em X .

Para mais detalhes sobre a Definição 1.1.45 veja [22] página 13.

As noções de variedades podem ser generalizadas tomando espaços vetoriais de dimensão infinita no lugar do \mathbb{R}^n na definição. No capítulo seguinte são mencionadas variedades de Hilbert e de Banach, pois essas variedades são úteis em algumas aplicação da categoria de Lusternik-Schnirelmann. Além disso, aqui, ao dizermos “suave” estamos supondo infinitamente diferenciável, enquanto que no teorema de Lusternik-Schnirelmann consideraremos, no caso mais geral, uma variedade \mathcal{C}^2 -Banach, ou seja, uma variedade definida sobre um espaço de Banach e com estrutura diferenciável de classe \mathcal{C}^2 .

1.1.2 Complexos CW

Os complexos CW foram introduzidos na década de 1940 por John Henry Constantine Whitehead (1904-1960) na teoria de homotopia. Os complexos CW desempenham um papel importante nas teorias de homotopia e topologia algébrica, pois eles têm muitas propriedades que os tornam fáceis de trabalhar na teoria de homotopia, e essas propriedades ainda são preservadas por objetos que tenham o tipo de homotopia de um complexo CW. Um complexo CW é um espaço constituído de “células” unidas de uma maneira conveniente. O “C” em “CW” significa “closure finite” e o “W” significa “weak topology”[4].

Definição 1.1.46 ([35]). Um *complexo CW* é uma quadrupla $(X, X^0, \{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{C_n\}_{n \in \mathbb{N}})$, em que:

- X^0 é um conjunto de pontos com a topologia discreta.
- Para todo $n \in \mathbb{N}$ definimos indutivamente X^n a partir de X^{n-1} , são dados o conjunto de n -discos $S_n = \{D_\alpha^n\}_{\alpha \in I_n}$ (o qual pode ser vazio) e o conjunto de funções contínuas $C_n = \{\varphi_\alpha : \partial D_\alpha^n \rightarrow X^{n-1}\}_{\alpha \in I_n}$. Definimos:

$$X^n := (X^{n-1} \sqcup_{\alpha \in I_n} D_\alpha^n) / \sim \text{ onde } x \sim \varphi_\alpha(x), \forall x \in \partial D_\alpha^n.$$

- Definimos

$$X := \bigcup_n X^n$$

com a topologia fraca induzida pela família $\{X^n\}_{n \in \mathbb{N}}$, isto é,

$$A \subset X \text{ é aberto} \Leftrightarrow A \cap X^n \text{ é aberto em } X^n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definição 1.1.47. Seja Y um espaço topológico.

- Um *representante de uma estrutura de complexo CW* em Y é um par (X, φ) , formado por um complexo CW $(X, X^0, \{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{C_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ e um homeomorfismo $\varphi : X \rightarrow Y$.
- Para todo disco $D_\alpha^n \in S_n$ com $\alpha \in I_n$, existe uma *função característica* $\Sigma_\alpha^n : D_\alpha^n \rightarrow Y$, dada pela seguinte composição:

$$D_\alpha^n \xrightarrow{i} X^{n-1} \sqcup_{\beta \in I_n} D_\beta^n \xrightarrow{\pi} X^n \hookrightarrow X \xrightarrow{\varphi} Y$$

- Denotamos B_α^n a bola que forma o interior de D_α^n . Para $n = 0$, definimos $B_\alpha^0 := D_\alpha^0$. Uma n -célula e_α^n é definida por $e_\alpha^n := \sigma_\alpha^n(B_\alpha^n)$ onde $\sigma_\alpha^n := \Sigma_\alpha^n|_{B_\alpha^n}$.
- O n -esqueleto de Y é o subespaço $\varphi(X^n)$.
- Se $Y = \varphi(X^n)$ para algum n , então Y é de dimensão finita, e o menor n tal que $\varphi(X^n) = Y$ é a *dimensão* de Y , em outras palavras, n é a dimensão máxima das células de Y . Denotamos $\dim_{CW}(Y) = n$.

Observação 1.1.48. No caso em que M é uma variedade real e admite estrutura de complexo CW, a dimensão de M como variedade é igual a dimensão de M como complexo CW.

Exemplo 1.1.49 (Exemplos de complexos CW).

1. Uma esfera S^n admite uma estrutura de complexo CW com duas células. De fato, podemos obter S^n partindo de um ponto D^0 e um disco D^n , com a única função de colagem $\varphi : \partial D^n \rightarrow D^0$ possível. Intuitivamente, no caso de S^1 tem-se que $D^1 \subset \mathbb{R}$ é um segmento de reta e a função de colagem une suas extremidades em um ponto D^0 , veja Figura 1, enquanto para a esfera S^2 temos a colagem do bordo do disco $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ no ponto D^0 . A dimensão de S^n como complexo CW é n .

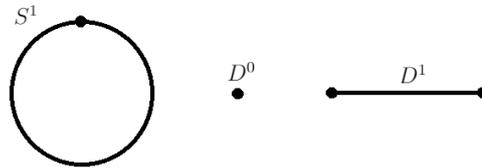


Figura 1 – S^1 e sua decomposição em células.

Fonte: Elaborada pelo autor.

2. Um disco D^n admite uma estrutura de complexo CW composta por três células. Como $\partial D^n \cong S^{n-1}$, podemos considerar a função de colagem $\varphi : \partial D^n \rightarrow S^{n-1}$ igual à identidade. Assim, D^n se decompõe em D^0 , D^{n-1} e D^n , pois S^{n-1} se decompõe em D^0 e D^{n-1} . Note que não podemos considerar somente D^n , pois a função de colagem teria contra-domínio vazio. É claro que $\dim_{CW}(D^n) = n$.
3. O espaço projetivo real $\mathbb{R}P^n$ é o espaço de todas as retas que passam pela origem em \mathbb{R}^{n+1} . Podemos definir $\mathbb{R}P^n$ das duas seguintes maneiras equivalentes:

$$\mathbb{R}P^n := D^n / \sim_1 \quad \text{onde } x \sim_1 y \Leftrightarrow x = -y \quad \forall x, y \in \partial D^n,$$

$$\mathbb{R}P^n := S^n / \sim_2 \quad \text{onde } x \sim_2 y \Leftrightarrow x = -y \quad \forall x, y \in S^n.$$

Podemos construir um homeomorfismo ψ entre estas duas representações, considere o mergulho $i : D^n \hookrightarrow S^n$, cuja imagem é um dos dois hemisférios de S^n , projetando ao quociente, tem-se que a primeira relação \sim_1 restrita ao bordo de D^n , que coincide com a relação \sim_2 no equador de S^n , e o homeomorfismo é dado por $\psi(\pi_1(x)) = \pi_2(i(x))$. Podemos visualizar essas composições no seguinte diagrama,

$$\begin{array}{ccc} D^n & \xrightarrow{i} & S^n \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 \\ D^n / \sim & \xrightarrow{\psi} & S^n / \sim \end{array}$$

Para construir a estrutura complexo CW, observe que ∂D^n projetado ao quociente coincide com $\mathbb{R}P^{n-1} := S^{n-1}/\sim_2$. Assim, podemos construir indutivamente uma estrutura de complexo CW para $\mathbb{R}P^n$. O caso $n = 1$ detemos $\mathbb{R}P^1 \cong D^1/\sim_1 \cong S^1$, e possuímos a estrutura de complexo CW do item (1) com D^0 e D^1 . Assumindo que $\mathbb{R}P^{n-1}$ tem estrutura de complexo CW, com decomposição D^0, D^1, \dots, D^{n-1} . Agora, $\mathbb{R}P^n$ é obtido pela colagem de um disco D^n em $\mathbb{R}P^{n-1}$, considere a função de colagem $\varphi := \pi_2 \circ i|_{\partial D^n} : \partial D^n \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$, logo $\mathbb{R}P^n$ se decompõe em $n + 1$ células, uma para cada dimensão, e $\dim_{CW}(\mathbb{R}P^n) = n$.

4. O espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P^n$ é o espaço de todas as retas complexas que passam pela origem em \mathbb{C}^{n+1} . Podemos definir $\mathbb{C}P^n$ de duas maneiras equivalentes:

$$\mathbb{C}P^n := S^{2n+1}/\sim_1 \text{ onde } S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1} \text{ e } z \sim_1 w \Leftrightarrow z = e^{i\theta}w \forall \theta \in \mathbb{R},$$

$$\mathbb{C}P^n := D^{2n}/\sim_2 \text{ onde } D^{2n} \subset \mathbb{C}^n \text{ e } z \sim_2 w \Leftrightarrow z, w \in \partial D^{2n} \text{ e } z = e^{i\theta}w \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Um homeomorfismo entre as duas representações pode ser obtido projetando ao quociente o mergulho $i : D^{2n} \hookrightarrow S^{2n+1}$ cuja a imagem é formada pelos pontos da forma $(w, \sqrt{1-|w|^2}) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$, logo o disco D^{2n} tem como bordo a esfera $\partial D^{2n} = S^{2n-1} \subset S^{2n+1}$, por definição a relação \sim_2 restrita a ∂D^{2n} coincide com a relação \sim_1 , logo, o bordo de D^{2n} projetado ao quociente, coincide com $\mathbb{C}P^{n-1}$. Assim, podemos construir indutivamente uma estrutura de complexo CW em $\mathbb{C}P^n$. No caso $n = 1$, tem-se $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$, pelo exemplo (1) temos a decomposição em D^0, D^2 . Assumindo que $\mathbb{C}P^{n-1}$ tenha uma decomposição $D^0, D^2, \dots, D^{2(n-1)}$ com $n - 1$ discos. Utilizamos como função de colagem $\varphi : \partial D^{2n} \rightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$ que consiste na projeção ao quociente por \sim_1 . Concluindo que $\mathbb{C}P^n$ tem decomposição em $n + 1$ células tendo cada célula dimensão par e iniciando em 0. Observe que $\dim_{CW}(\mathbb{C}P^n) = 2n$.

5. A reta \mathbb{R} pode ser construída a partir de uma família enumerável de pontos D^0 e segmentos de reta D^1 , veja a Figura 2. Assim como \mathbb{R}^n pode ser reconstruído a partir de uma família enumerável de pontos e de D^k para todo $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

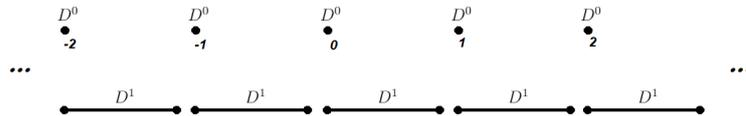


Figura 2 – Construção de \mathbb{R} com pontos e segmentos de retas

Fonte: Elaborada pelo autor.

6. Toda superfície topológica, com ou sem bordo, admite alguma estrutura de complexo CW. No caso das superfícies compactas sem bordo podemos representá-las por polígonos, por exemplo, o toro $T^2 := S^1 \times S^1$ pode ser representado pela colagem de uma 0-célula, duas 1-células e uma 2-célula. Um cilindro $C = S^1 \times I$ onde

$I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ pode ser representado pela colagem de duas 0-células, três 1-células e uma 2-célula. A Figura 3 apresenta uma visualização destas duas construções.

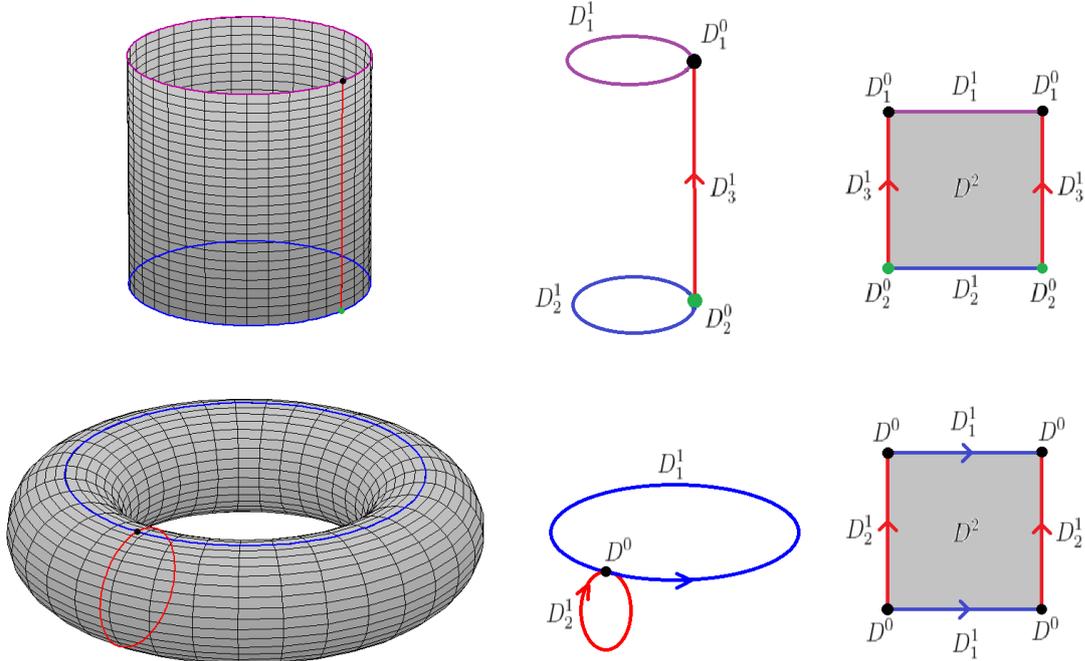


Figura 3 – Estrutura complexo CW para o cilindro $S^1 \times I$ e para o toro $S^1 \times S^1$
Fonte: Elaborada pelo autor.

Definição 1.1.50. Sejam X e Y complexos CW e seja X^n (respectivamente Y^n) o n -esqueleto de X (respectivamente de Y). Então uma função contínua $f : X \rightarrow Y$ é dita ser *celular* se para cada $n = 0, 1, 2, \dots$ temos $f(X^n) \subset Y^n$.

Em geral, as funções mais úteis entre complexos CW são aquelas que preservam a estrutura celular. A seguir apresentamos o teorema da aproximação celular, que nos permite trocar uma função contínua por uma função celular a menos de homotopia.

Teorema 1.1.51 (Teorema da aproximação celular). *Sejam X e Y complexos CW, seja $A \neq \emptyset$ um sub-complexo de X , e seja $f : X \rightarrow Y$ uma função tal que $f|_A$ é celular. Então existe uma função celular $g : X \rightarrow Y$ e uma homotopia H de f em g tal que $H(a, t) = f(a) = g(a)$ para $a \in A$.*

Demonstração. Ver [26] página 72. □

1.1.3 Teoria de homotopia

Nesta subseção apresentamos as definições de fibrações e cofibrações na teoria de homotopia, incluindo alguns resultados e demonstrações relevantes que são utilizados no capítulo seguinte. Em todo texto a partir desta seção, denotaremos $I := [0, 1] \subset \mathbb{R}$, e quando nos referimos a uma função esta subentendido que esta é uma função contínua, exceto quando for expresso o contrário.

Iniciamos fixando as notações dos seguintes objetos que são frequentemente utilizados em construções relacionadas a teoria de homotopia.

Definição 1.1.52. Dado um espaço topológico X definimos:

- O *cilindro de X* por $\text{Cyl}(X) := X \times I$.
- O *cone de X* por $\text{C}X := X \times I / (X \times \{1\})$.
- A *suspensão de X* por $\Sigma X := X \times [-1, 1] / (X \times \{-1\}; X \times \{1\})$.

Observe que em cada um dos espaços definidos acima, existe uma cópia de X em $X \times \{0\}$, na definição a seguir, utilizamos a notação da Definição 1.1.39, considerando porém, $W \cup_f Y = W \cup Y / \sim$, onde $f(x) \sim (x, 0)$ e W é um dos espaços definidos acima.

Definição 1.1.53. Sejam X e Y espaços topológicos e uma função $f : X \rightarrow Y$. Definimos:

- O *cilindro de f* por $M_f := \text{Cyl}(X) \cup_f Y$.
- O *cone de f* por $C_f := \text{C}X \cup_f Y$.
- A *suspensão de f* por $\Sigma_f := \Sigma X \cup_f Y$.

Definição 1.1.54. Seja X um espaço topológico. Definimos:

- O *path space* de X denotado X^I é o conjunto de todos os caminhos $\gamma : I \rightarrow X$ dotado com a topologia compacto-aberta (Definição 1.1.38).
- O *loop space* de X denotado ΩX é o sub-espaço de X^I composto pelos caminhos $\gamma : I \rightarrow X$ tal que $\gamma(0) = \gamma(1)$, estes são os caminhos fechados.

Em muitos problemas de homotopia, desejamos construir uma função relativa a uma dada função $f : X \rightarrow Y$. Frequentemente, é mais fácil trabalhar com inclusões do que com funções arbitrárias. O teorema a seguir mostra que é possível trocar a função f por uma inclusão e uma equivalência homotópica [14].

Proposição 1.1.55. Dada uma função $f : X \rightarrow Y$, existe um espaço M_f , o espaço cilindro de f , inclusões $j : X \rightarrow M_f$ e $i : Y \rightarrow M_f$, e uma projeção $\pi : M_f \rightarrow Y$, como no diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j} & M_f \\ & \searrow f & \downarrow i \\ & & Y, \end{array}$$

$\uparrow \pi$

tais que π e i são inversos homotópicos e $\pi \circ j = f$. Assim, podemos substituir Y por um espaço homotopicamente equivalente onde existe a inclusão de X .

Demonstração. Por definição, o cilindro da f é $M_f := (X \times I) / \sim$ onde $(x, 0) \sim y \Leftrightarrow y = f(x)$.

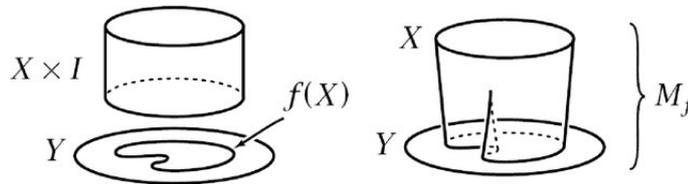


Figura 4 – Representação do espaço cilindro de f .

Fonte: [15] página 2.

Defina $\pi(x, t) = f(x)$ para todo $(x, t) \in X \times I$ e $\pi(y) = y$ para todo $y \in Y$, observe que na região de colagem, π é bem definida, pois $\pi(x, 0) = f(x)$, sendo $y = f(x)$ e $\pi(y) = y = f(x)$. Observe que $\pi \circ j(x) = \pi(x, 0) = f(x)$ para todo $x \in X$ e $\pi \circ i(y) = \pi(y) = y$ para todo $y \in Y$. Além disso, π é uma retração. De modo que Y é um retrato de M_f e $i \circ \pi = \text{id}_Y$. \square

Definição 1.1.56. Sejam E e B espaços topológicos. Uma função $p : E \rightarrow B$ é dita ter *propriedade de levantamento de homotopia* com respeito ao espaço X , se para cada par de função $f : X \rightarrow E$ e homotopia $H : X \times I \rightarrow B$ começando com $H_0 = p \circ f$, existe uma homotopia $\tilde{H} : X \times I \rightarrow E$ tal que:

1. $\tilde{H}_0 = f$.
2. $p \circ \tilde{H} = H$.

A função p é dita ser uma *fibrção* (*Fibrção de Hurewicz*) se tem a propriedade de levantamento de homotopia com respeito a qualquer espaço X e função f .

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & E \\ \text{id}_X \times \{0\} \downarrow & \nearrow \tilde{H} & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{H} & B. \end{array}$$

Se $p : E \rightarrow B$ é uma fibração, então $F = p^{-1}(*) \subset E$ é chamado de *fibra*, o espaço E é chamado de *espaço total* e B é chamado de *espaço base* da fibração. A sequência

$$F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$$

é chamada de *sequência de fibração*.

Definição 1.1.57. Uma função $f : A \rightarrow X$ é chamada de *cofbração* se para todo espaço Z , funções $g : A \rightarrow Z$ e $h : X \rightarrow Z$ e homotopia $G_t : A \rightarrow Z$ tal que $G_0 = g$ e $h \circ f = g$, então existe uma homotopia $H : X \times I \rightarrow Z$, tais que:

1. $H_0 = h$.
2. $H \circ f = G$.

Em diagramas, temos

$$\begin{array}{ccc} A & & A \times I \\ \begin{array}{c} \downarrow f \\ \downarrow \end{array} & \searrow g & \begin{array}{c} \downarrow f \\ \downarrow \end{array} \\ X & \xrightarrow{h} & Z & \dashrightarrow & X \times I & \xrightarrow{H} & Z \end{array}$$

Se f é uma cofbração, então $Q = X/f(A)$ é chamado a *cofibra* de f e a sequência

$$A \xrightarrow{f} X \xrightarrow{q} Q$$

é chamada de *sequência de cofbração*, onde q é a projeção sobre o espaço quociente.

Definição 1.1.58. Dada uma função $f : X \rightarrow Y$, seja $A \subset X$ subespaço topológico e $H_t : A \rightarrow Y$ uma homotopia da restrição $f|_A$. Se existir uma extensão $\tilde{H}_t : X \rightarrow Y$ tal que $\tilde{H}_0 = f$, dizemos que o par (X, A) tem a *propriedade de extensão de homotopia*.

Assim como definimos a fibração utilizando a propriedade de levantamento de homotopia, podemos definir (equivalente a Definição 1.1.57) a cofbração por utilizar a propriedade de extensão de homotopia. Seja um par (X, A) e uma função $f : A \rightarrow X$. Se o par $(X, f(A))$ tem propriedade de extensão de homotopia para qualquer espaço Z e função $g : X \rightarrow Z$, temos

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{H} & Z^I \\ \begin{array}{c} \downarrow f \\ \downarrow \end{array} & \nearrow \tilde{H} & \begin{array}{c} \downarrow p_0 \\ \downarrow \end{array} \\ X & \xrightarrow{g} & Z, \end{array}$$

sendo que por hipótese $p_0 \circ H_0 = g|_{f(A)}$, e pela propriedade de extensão de homotopia, existe uma homotopia $\tilde{H} : X \times I \rightarrow Z$ tal que

- $\widetilde{H} \circ f = H.$
- $p_0 \circ \widetilde{H}_0 = g.$

então f é uma cofibração.

A inclusão dada pela Proposição 1.1.55 é uma cofibração, ou seja, dada uma função $f : X \rightarrow Y$ podemos fatorar f por

$$X \xrightarrow{i} M_f \xrightarrow{\pi} Y,$$

sendo i uma cofibração e π é uma equivalência homotópica. A proposição a seguir é o resultado dual para fibrações.

Proposição 1.1.59. *Dada uma função $f : X \rightarrow Y$, podemos fatorar f por*

$$X \xrightarrow{i} \widetilde{X} \xrightarrow{\pi} Y,$$

em que i é uma equivalência homotópica e π é uma fibração.

Demonstração. Suponha o espaço \widetilde{X} definido por

$$\widetilde{X} = \{(x, \omega) \in X \times Y^I : \omega(0) = f(x)\}.$$

Defina $\pi : \widetilde{X} \rightarrow Y$ por $\pi(x, \omega) = \omega(1)$, e $i : X \hookrightarrow \widetilde{X}$ por $i(x) = (x, f(x))$, onde $f(x)$ é um caminho constante igual a $f(x)$, assim temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} & & \widetilde{X} \\ & \nearrow i & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

pois, para qualquer $x \in X$, temos $\pi(i(x)) = \pi(x, f(x)) = f(x)$. Verifiquemos que $i : X \hookrightarrow \widetilde{X}$ é uma equivalência homotópica, isto é, existe $\rho : \widetilde{X} \rightarrow X$ tal que $i \circ \rho \simeq \text{id}_{\widetilde{X}}$. Definimos $\rho(x, \omega) := x$, e a homotopia $H : \widetilde{X} \times I \rightarrow \widetilde{X}$ dada por $H((x, \omega), s) := (x, \omega^s)$ onde $\omega^s(t) = \omega(st)$. Verificamos que,

$$H((x, \omega), 0) = (x, \omega^0) = (x, \omega(0)) = (x, f(x)) = i(\rho(x, \omega))$$

e

$$H((x, \omega), 1) = (x, \omega^1) = (x, \omega) = \text{id}_{\widetilde{X}}$$

Logo, $X \simeq \widetilde{X}$.

Agora, verifiquemos que $\pi : \widetilde{X} \rightarrow Y$ é uma fibração. Suponha Z um espaço topológico qualquer e sejam $g : Z \rightarrow \widetilde{X}$ uma função e $G : Z \times I \rightarrow Y$ uma homotopia, tal que

$G_0 = \pi \circ g$. Devemos mostrar que existe um levantamento \tilde{G} tal que (conforme a Definição 1.1.56) $\tilde{G}_0 = g$ e $\pi \circ \tilde{G} = G$, isto é,

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{g} & \tilde{X} \\ \text{id}_Z \times \{0\} \downarrow & \nearrow \tilde{G} & \downarrow \pi \\ Z \times I & \xrightarrow{G} & Y \end{array} .$$

Denotemos $g(z) = (x_{gz}, \omega_{gz})$ para todo $z \in Z$, e definimos a função $\psi_s : Z \rightarrow Y^I$ dada por

$$\psi_s(z) = \begin{cases} \omega_{gz}(t(1+s)) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{1+s} \\ G(z, (1+s)t - 1) & \text{se } \frac{1}{1+s} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

tal que $s \in I$. Observe que pela hipótese $G(z, 0) = \pi(g(z)) = \omega_{gz}(1)$, assim para $t = \frac{1}{1+s}$ tem-se que o final da curva ω_{gz} é igual ao início da curva $G(z, 0)$, ou seja, ψ_s é bem definida e funciona como uma composição de curvas em Y . Além disso, observe que $\psi_0(z) = \omega_{gz}$ e

$$\psi_1(z) = \begin{cases} \omega_{gz}(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(z, 2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Definimos $\tilde{G} : Z \times I \rightarrow \tilde{X}$ por $\tilde{G}(z, s) := (x_{gz}, \psi_s(z))$. De modo que,

$$\tilde{G}(z, 0) = (x_{gz}, \psi_0(z)) = (x_{gz}, \omega_{gz}) = g(z)$$

e

$$\pi \circ \tilde{G}(z, s) = \pi(x_{gz}, \psi_s(z)) = \psi_s(z)(1) = G(z, s).$$

Concluindo que π é uma fibração. □

A seguir apresentamos as definições ordinárias de pushout e pullback (segundo [1]) por meio de suas propriedades universais.

Definição 1.1.60. Dados espaços e funções

$$Y \xleftarrow{g} A \xrightarrow{f} X$$

um *pushout* deste diagrama, consiste de um espaço P e funções $u : X \rightarrow P$ e $v : Y \rightarrow P$ tais que $uf = vg$. Além disso, exigimos o seguinte. Se Z é qualquer espaço e se $r : X \rightarrow Z$ e $s : Y \rightarrow Z$ são funções tais que $rf = sg$, então existe uma única função $t : P \rightarrow Z$ tal que $tu = r$ e $tv = s$, isto é, o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow g & & \downarrow u \\ Y & \xrightarrow{v} & P \end{array} \quad \begin{array}{c} \searrow r \\ \dashrightarrow t \\ \swarrow s \end{array} \quad \begin{array}{c} X \\ \searrow r \\ P \\ \swarrow s \\ Z \end{array}$$

é comutativo. Chamamos tanto P quanto a tripla (P, u, v) , o pushout de $Y \xleftarrow{g} A \xrightarrow{f} X$. O diagrama retangular acima, é chamado de *quadrado pushout*.

Relembre que dados X e Y espaços não vazios e disjuntos, e sejam $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$ pontos bases não degenerados. A soma *wedge* $X \vee Y$ é definida por $X \cup Y / (x_0 \sim y_0)$.

Proposição 1.1.61. *Dado*

$$Y \xleftarrow{g} A \xrightarrow{f} X$$

existe um pushout (P, u, v) . Além disso, qualquer outro pushout (P', u', v') é homeomorfo a (P, u, v) .

Demonstração. Considere $X \vee Y \subset X \times Y$ e defina $P := X \vee Y / \sim$ onde $(f(a), *) \sim (*, g(a))$ para todo $a \in A$. Considerando $q : X \vee Y \rightarrow P$ a projeção ao quociente, definimos $u := q \circ i_1$ e $v := q \circ i_2$, onde $i_1 : X \rightarrow X \vee Y$ e $i_2 : Y \rightarrow X \vee Y$ são inclusões. Assim, $u \circ f = v \circ g$. Verifiquemos que (P, u, v) é de fato um pushout. Se $r : X \rightarrow Z$ e $s : Y \rightarrow Z$ são funções tais que $r \circ f = s \circ g$, então existe uma função $\psi : X \vee Y \rightarrow Z$ dado por

$$\psi(f(a), *) = r(f(a)) = s(g(a)) = \psi(*, g(a)).$$

Assim, ψ induz uma $t : P \rightarrow Z$ tal que $tu = r$ e $tv = s$. Podemos verificar a unicidade de t , suponha $m : P \rightarrow Z$ uma função tal que $mu = r$ e $mv = s$. Então

$$m \circ q \circ i_2 = m \circ v = s = t \circ v = t \circ q \circ i_2$$

e de modo análogo, $m \circ q \circ i_1 = t \circ q \circ i_1$. Concluindo que $m \circ q = t \circ q$, logo, $m = t$.

Agora, suponha que (P, u, v) e (P', u', v') são ambos pushouts. Como P é um pushout, existe uma função $t : P \rightarrow P'$ tal que $tu = u'$ e $tv = v'$. Como P' também é pushout, existe $t' : P' \rightarrow P$ tal que $t'u' = u$ e $t'v' = v$. Com efeito, $t'tu = u$ e $t'tv = v$. Pela unicidade do pushout, $t't = \text{id}_P$. Analogamente, $t't = \text{id}_{P'}$. Concluindo que t é um homeomorfismo e t' é seu inverso. \square

Proposição 1.1.62. *Seja*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ g \downarrow & & \downarrow i \\ Y & \xrightarrow{j} & P \end{array}$$

um quadrado pushout. Se g é uma cofibração, então i também é. Neste caso, j induz um homeomorfismo $j' : Y/g(A) \rightarrow P/i(X)$ de fibras.

Demonstração. Ver [1] página 79. \square

Definição 1.1.63. Dados espaços e funções

$$Y \xrightarrow{g} A \xleftarrow{f} X$$

o *pullback* deste diagrama consiste de um espaço Q e funções $u : Q \rightarrow X$ e $v : Q \rightarrow Y$ tais que $fu = gv$. Além disso, exigimos o seguinte. Se $r : W \rightarrow X$ e $s : W \rightarrow Y$ são funções tais que $fr = gs$, então existe uma única função $t : W \rightarrow Q$ tal que $ut = r$ e $vt = s$,

$$\begin{array}{ccccc} W & & & & \\ & \searrow r & & & \\ & & Q & \xrightarrow{u} & X \\ & \searrow s & \downarrow v & & \downarrow f \\ & & Y & \xrightarrow{g} & A \end{array}$$

Chamamos tanto Q quanto a tripla (Q, u, v) , de *pullback* de $Y \xrightarrow{g} A \xleftarrow{f} X$. O diagrama retangular acima, é chamado de *quadrado pullback*.

Proposição 1.1.64. *Dado*

$$Y \xrightarrow{g} A \xleftarrow{f} X$$

existe um pullback (Q, u, v) . Além disso, qualquer outro pullback (Q', u', v') é homeomorfo a (Q, u, v) .

Demonstração. Considere $Q \subset X \times Y$ definido por $Q := \{(x, y) \in X \times Y : f(x) = g(y)\}$. Então defina $u(x, y) = x$ e $v(x, y) = y$. O restante da demonstração é análogo ao caso do pushout Proposição 1.1.61. \square

Proposição 1.1.65. *Seja*

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{u} & X \\ \downarrow v & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{g} & A \end{array}$$

um quadrado pullback. Se f é uma fibração, então v também é. Neste caso, u induz um homeomorfismo das fibras de v sobre as fibras de f .

Definimos a seguir as noções de pushout e pullback de homotopia, e apresentamos algumas de suas propriedades que são utilizadas ao longo dos próximos capítulos.

Definição 1.1.66. Sejam $f : A \rightarrow X$ e $g : A \rightarrow Y$ funções dadas. O *cilindro duplo* de f, g , é o espaço quociente

$$D(f, g) := \frac{X \cup (A \times I) \cup Y}{f(a) \sim (a, 0), (a, 1) \sim g(a)}$$

Denotamos as inclusões por $i_X : X \rightarrow D(f, g)$ e $i_Y : Y \rightarrow D(f, g)$.

Existe uma homotopia canônica $H : A \times I \rightarrow D(f, g)$ entre $i_X \circ f \simeq i_Y \circ g$ dada por $H(a, t) = (a, t)$. Isto é, o seguinte diagrama é homotopicamente comutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & Y \\ f \downarrow & & \downarrow i_Y \\ X & \xrightarrow{i_X} & D(f, g) \end{array}$$

e chamamos este de *quadrado de homotopia pushout canônico* de f, g .

Definição 1.1.67. Um quadrado homotopicamente comutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & Y \\ f \downarrow & & \downarrow k \\ X & \xrightarrow{h} & P \end{array}$$

é dito ser um *quadrado de homotopia pushout* se existe uma homotopia $F : h \circ f \simeq k \circ g$ para a qual a função induzida

$$\varphi_F : D(f, g) \rightarrow P$$

é uma equivalência homotópica. A tripla (P, h, k) é chamada de *homotopia pushout*.

Proposição 1.1.68 (Propriedade da homotopia pushout). *Suponha que as setas não tracejadas do diagrama*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & Y \\ f \downarrow & & \downarrow k \\ X & \xrightarrow{h} & P \end{array} \begin{array}{c} \searrow v \\ \dashrightarrow u \\ \searrow u \end{array} \rightarrow Z$$

sejam homotopicamente comutativas e que o retângulo seja um quadrado de homotopia pushout. Então existe uma função $\varphi : P \rightarrow Z$ tal que $\varphi \circ k \simeq v$ e $\varphi \circ h \simeq u$.

Demonstração. Como o quadrado é um pushout, podemos trocar este por um quadrado de homotopia pushout canônico, e as funções k e h pelas inclusões. Isto é

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & Y \\ f \downarrow & & \downarrow j \\ X & \xrightarrow{i} & D(f, g) \end{array} \begin{array}{c} \searrow v \\ \dashrightarrow u \\ \searrow u \end{array} \rightarrow Z.$$

Por hipótese, $v \circ g \simeq u \circ f$, logo existe homotopia $H : A \times I \rightarrow Z$ tal que $H_0 = vg$ e $H_1 = uf$. Agora definimos $\psi : D(f, g) \rightarrow Z$ por $\psi(x) = u(x)$ para todo $x \in X \subset D(f, g)$, $\psi(y) = v(y)$ para todo $y \in Y \subset D(f, g)$ e $\psi(a, t) = H(a, t)$ para todo $(a, t) \in A \times I \subset D(f, g)$. Para obtermos a $\varphi : P \rightarrow Z$ do enunciado, utilizamos a equivalência homotópica φ_F , definindo $\varphi = \varphi'_F \circ \psi$ onde φ'_F é o inverso homotópico da φ_F . \square

Proposição 1.1.69. *Considere o seguinte quadrado pushout*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ g \downarrow & & \downarrow r \\ Y & \xrightarrow{s} & P \end{array}$$

Se f ou g é uma cofibração, então este é um quadrado de homotopia pushout.

Demonstração. Ver [1] página 199. \square

Definição 1.1.70. Sejam $f : X \rightarrow A$ e $g : Y \rightarrow A$ funções dadas. Definimos

$$P(f, g) := \{(x, \omega, y) \in X \times A^I \times Y : f(x) = \omega(0), g(y) = \omega(1)\}.$$

Denotamos as projeções por $p_X : P(f, g) \rightarrow X$ e $p_Y : P(f, g) \rightarrow Y$.

Existe uma homotopia canônica $H : P(f, g) \times I \rightarrow A$ entre $f \circ p_X \simeq g \circ p_Y$ dada por $H((x, \omega, y), t) = \omega(t)$. Ou seja, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} P(f, g) & \xrightarrow{p_Y} & Y \\ p_X \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

é homotopicamente comutativo e chamamos este de *quadrado de homotopia pullback canônico* de f, g .

Definição 1.1.71. Um quadrado homotopicamente comutativo

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{s} & Y \\ r \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

é dito ser um *quadrado de homotopia pullback* se existe uma homotopia $F : f \circ r \simeq g \circ s$ para a qual a função induzida

$$\psi_F : Q \rightarrow P(f, g)$$

é uma equivalência homotópica. A tripla (Q, r, s) é chamada de *homotopia pullback*

Proposição 1.1.72 (Propriedade da homotopia pullback). *Suponha que as setas não tracejadas do diagrama*

$$\begin{array}{ccccc}
 W & & & & \\
 & \searrow & & & \\
 & & R & \xrightarrow{s} & Y \\
 & \searrow & \downarrow r & & \downarrow g \\
 & & X & \xrightarrow{f} & A
 \end{array}$$

sejam homotopicamente comutativas e que o retângulo é um quadrado de homotopia pullback. Então existe uma função $\varphi : W \rightarrow R$ tal que $r \circ \varphi \simeq a$ e $s \circ \varphi \simeq b$.

Demonstração. A demonstração é análoga à dada no caso do pushout 1.1.68. □

Semelhante a Proposição 1.1.69 temos:

Proposição 1.1.73. *Se*

$$\begin{array}{ccc}
 P & \xrightarrow{r} & X \\
 \downarrow s & & \downarrow f \\
 Y & \xrightarrow{g} & A
 \end{array}$$

é um quadrado pullback e se a função f ou a função g é uma fibração, então este é um quadrado de homotopia pullback.

1.2 Topologia Algébrica

Esta seção tem como objetivo revisar a construção dos funtores homologia singular e cohomologia singular. Nas duas primeiras subseções, apresentamos as definições e alguns resultados de homologia e cohomologia, omitindo suas demonstrações, que podem ser encontradas em livros texto de introdução à topologia algébrica (por exemplo em [15]). A última subseção é dedicada à revisão de alguns resultados sobre o produto cup e o anel de cohomologia, pois este desempenha um papel importante na teoria de Lusternik-Schnirelmann que é apresentada no capítulo seguinte.

Embora não faremos aqui uma revisão destas teorias, as homologias simplicial e celular podem aparecer eventualmente ao longo do texto dos próximos capítulos, pois embora a homologia singular seja mais abrangente, em muitas aplicações concretas as homologias simplicial e celular podem ser mais fáceis de calcular e nos dar noções mais intuitivas sobre seu significado. Vale lembrar que para espaços suficientemente regulares, todas homologias e cohomologias (simplicial, celular e no caso da cohomologia também a de De Rham) são equivalentes a homologia e cohomologia singular. Por isso, consideramos para exposição teórica as homologias e cohomologias singulares, e em muitos exemplos concretos utilizamos as outras para visualizar e calcular.

1.2.1 Homologia Singular

A principal referência utilizada nesta seção é o livro Algebraic Topology do autor Allen Hatcher [15].

Definição 1.2.1.

- Seja $A = \{x_0, x_1, \dots, x_p\} \subset \mathbb{R}^n$ com $p \leq n$. Dizemos que A é *geometricamente independente* (g.i.) se $\{x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_p - x_0\}$ é um conjunto de vetores linearmente independente (l.i.).
- Seja $A = \{x_0, x_1, \dots, x_p\} \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto ordenado de $p + 1$ pontos g.i. em \mathbb{R}^n , o p -simplexo gerado por A é o subconjunto

$$[x_0, \dots, x_p] := \left\{ \sum_{i=0}^p t_i x_i \mid 0 \leq t_i \leq 1 \text{ e } \sum_{i=0}^p t_i = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^n$$

- O inteiro p é chamado de *dimensão do simplexo*. Os pontos x_0, \dots, x_p são chamados de *vértices*. Os simplexos formados por subconjuntos não vazios de A são chamados de *faces do simplexo*.
- Seja $\{e_0, e_1, \dots, e_p\} \subset \mathbb{R}^p$ onde $e_0 = 0$ e e_1, \dots, e_p a base canônica de \mathbb{R}^p , o p -simplexo $\Delta_p = [e_0, e_1, \dots, e_p]$ é chamado de *p -simplexo padrão*.

- Um $\Delta_0 \in \Delta_n$ com $n > 0$ é dito um *vértice* do simplexo Δ_n . Uma *face* de um simplexo é um subconjunto (ou sub simplexo) que é um simplexo de dimensão menor. A *fronteira* ou *bordo* de um simplexo é a união de todas as faces, e o *interior* é o complemento do bordo.

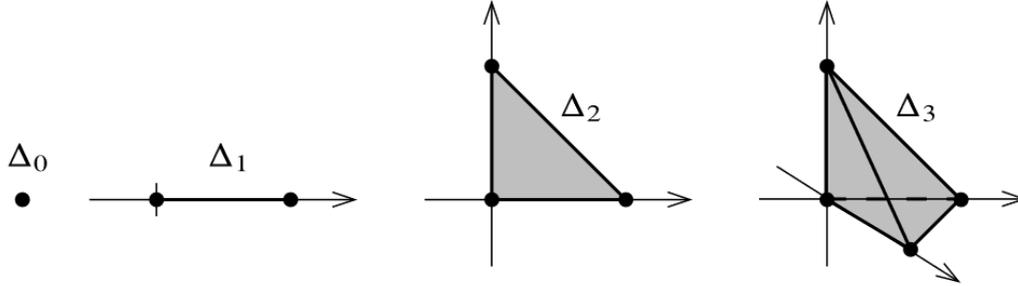


Figura 5 – Simplexos de dimensões 0, 1, 2 e 3.

Fonte: [22] página 468.

Definição 1.2.2. Seja X um espaço topológico. Chamamos de *p-simplexo singular em X* uma função contínua $\sigma : \Delta_p \rightarrow X$. A *cadeia singular de X de grau p* denotada por $C_p(X)$, é o grupo abeliano livre gerado por todos os p -simplexos singulares em X . Um elemento deste grupo é chamado de *p-cadeia singular*. Em geral, se R é um anel comutativo com unidade, então podemos definir a cadeia singular $C_p(X, R)$, que neste caso é um R -módulo. Definimos:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_p(X) &:= \{\sigma : \Delta_p \rightarrow X \mid \sigma \text{ é função contínua}\}, \\ C_p(X, R) &:= \{\varphi : \mathcal{F}_p(X) \rightarrow R \mid \text{supp}(\varphi) \text{ é finito}\}, \\ C_p(X) &:= \{\varphi : \mathcal{F}_p(X) \rightarrow \mathbb{Z} \mid \text{supp}(\varphi) \text{ é finito}\}.\end{aligned}$$

Assim, uma p -cadeia singular $c \in C_p(X, R)$ tem uma representação em *soma formal*

$$c = \sum_{i=0}^m k_i \sigma_i$$

onde $m < \infty$, cada $k_i \in R$ e $\sigma_i \in \mathcal{F}_p(X)$.

Observação 1.2.3. No caso geral temos a injeção

$$\begin{aligned}i : \mathcal{F}_p(X) &\hookrightarrow C_p(X, R) \\ \varphi &\mapsto i_\varphi : \mathcal{F}_p(X) \rightarrow R \\ \psi &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{se } \psi = \varphi, \\ 0 & \text{se } \psi \neq \varphi \end{cases}\end{aligned}$$

tal que $i(\mathcal{F}_p(X))$ é uma base para o R -módulo $C_p(X, R)$.

Definição 1.2.4. Para cada $i = 0, \dots, p$, definimos a i -ésima *função face* $F_{i,p} : \Delta_{p-1} \rightarrow \Delta_p$ por

$$F_{i,p} \left(\sum_{k=0}^{p-1} t_k e_k \right) = \sum_{k=0}^{i-1} t_k e_k + \sum_{k=i+1}^p t_{k-1} e_k.$$

O *bordo* de um p -simplexo singular $\sigma : \Delta_p \rightarrow X$ é a $(p-1)$ -cadeia $\partial\sigma$ definido por

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^p (-1)^i \sigma \circ F_{i,p}. \tag{1.1}$$

Fica definido o *operador bordo singular* $\partial : C_p(X) \rightarrow C_{p-1}(X)$ pela equação (1.1).

Exemplo 1.2.5. Seja $\sigma \in C_2(X)$ um 2-simplexo singular, seu bordo é uma soma formal de três 1-simplexos singulares com coeficientes ± 1 . Veja a Figura 6.

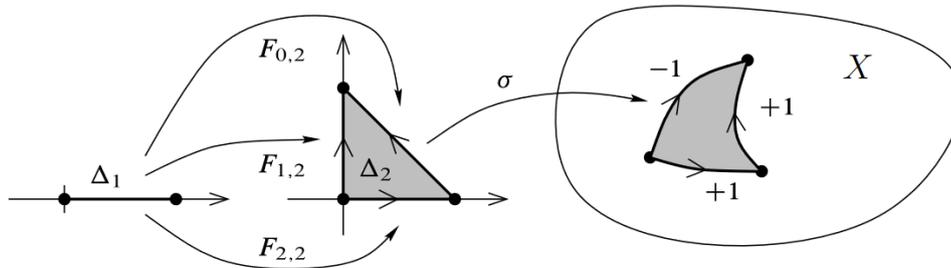


Figura 6 – Ilustração operador bordo singular
 Fonte: [22] página 469.

Lema 1.2.6. Se $i > j$ então $F_{i,p} \circ F_{j,p-1} = F_{j,p} \circ F_{i-1,p-1} : \Delta_{p-1} \rightarrow \Delta_p$.

Lema 1.2.7. Se c é qualquer cadeia singular, então $\partial(\partial c) = 0$.

Definição 1.2.8. Uma p -cadeia singular c é chamada de *ciclo* se $\partial c = 0$, e *bordo* se $c = \partial b$ para alguma $(p+1)$ -cadeia singular b . Denotamos $Z_p(X)$ o conjunto dos p -ciclos singulares e $B_p(X)$ o conjunto dos p -bordos singulares.

Observação 1.2.9. Observe que:

$$C_{p+1}(X) \xrightarrow{\partial} C_p(X) \xrightarrow{\partial} C_{p-1}(X),$$

$$Z_p(X) = \ker(\partial) \subset C_p(X),$$

$$B_p(X) = \text{im}(\partial) \subset C_p(X),$$

e como $\partial \circ \partial = 0$

$$B_p(X) \subset Z_p(X).$$

Definição 1.2.10. O p -ésimo grupo de homologia singular de X é o grupo quociente

$$H_p(X) = Z_p(X)/B_p(X).$$

A sequência de grupos abelianos (\mathbb{Z} -módulos) e homomorfismos

$$\cdots \rightarrow C_{p+1}(X) \xrightarrow{\partial} C_p(X) \xrightarrow{\partial} C_{p-1}(X) \rightarrow \cdots$$

é um complexo de cadeias, chamado *complexo de cadeias singulares*, e $H_p(X)$ é o p -ésimo grupo de homologia deste complexo. Um elemento de $H_p(X)$ é chamado de *classe de homologia*, quando dois p -ciclos pertencem à mesma classe, dizemos que são *homólogos*.

Definição 1.2.11. Uma função contínua $f : X \rightarrow Y$ induz um homomorfismo $f_{\#} : C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$ em cada grupo de cadeias singulares, definido por $f_{\#}(\sigma) = f \circ \sigma$ para qualquer simplexo singular σ e estendido linearmente para as cadeias.

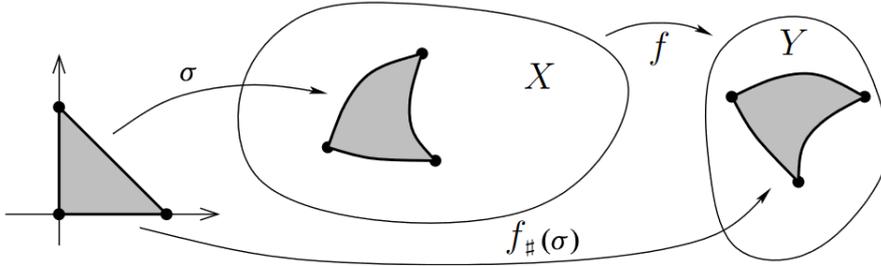


Figura 7 – Ilustração composição do homomorfismo induzido

Fonte: [22] página 470.

Lema 1.2.12. O homomorfismo induzido $f_{\#}$ é um homomorfismo de cadeias, isto é, $f_{\#}$ torna cada retângulo do seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{p+1}(X) & \xrightarrow{\partial} & C_p(X) & \xrightarrow{\partial} & C_{p-1}(X) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow f_{\#} & & \downarrow f_{\#} & & \downarrow f_{\#} & & \\ \cdots & \longrightarrow & C_{p+1}(Y) & \xrightarrow{\partial} & C_p(Y) & \xrightarrow{\partial} & C_{p-1}(Y) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Demonstração. Verifica-se que $f_{\#} \circ \partial = \partial \circ f_{\#}$. Aplicando as definições,

$$\begin{aligned} (f_{\#} \circ \partial)(\sigma) &= f_{\#} \left(\sum_{i=0}^p (-1)^i \sigma \circ f_{i,p} \right) \\ &= \sum_{i=0}^p (-1)^i f_{\#}(\sigma \circ f_{i,p}) \\ &= \sum_{i=0}^p (-1)^i (f \circ \sigma) \circ f_{i,p} \\ &= \partial(f \circ \sigma) = (\partial \circ f_{\#})(\sigma). \end{aligned}$$

□

Definição 1.2.13. Seja $f_{\#}$ uma aplicação de complexos de cadeias, então $f_{\#}$ induz um homomorfismo nos grupos de homologia singular, denotado por $f_* : H_p(X) \rightarrow H_p(Y)$ e definido por

$$f_*[\sigma] = [f \circ \sigma].$$

Observação 1.2.14. Verifica-se que dadas $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ tem-se

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*,$$

$$(\text{id}_X)_* = \text{id}_{H_p(X)}.$$

Assim a p -ésima homologia singular define um functor covariante da categoria dos espaços topológicos na categoria dos grupos abelianos (ou R -módulos).

Teorema 1.2.15 (Propriedades dos grupos de homologia singular).

1. Para qualquer espaço $X = \{p\}$ de um único ponto, $H_0(X)$ é o grupo cíclico infinito gerado pela classe de homologia do único 0-simplexo que leva Δ_0 no ponto p , e $H_k(X) = 0, \forall k > 0$.
2. Seja $\{A_j\}$ uma coleção arbitrária de espaços topológicos, e seja $X = \coprod_j A_j$. A inclusão $\iota_j : A_j \hookrightarrow X$ induz um isomorfismo $\bigoplus_j H_p(A_j) \cong H_p(X)$.
3. Espaços homotopicamente equivalentes tem grupos de homologia singular isomorfos.

Corolário 1.2.16. Se X é um espaço contrátil, então $H_0(X; R) = R$ e $H_k(X; R) = 0, \forall k > 0$.

Teorema 1.2.17 (Teorema de Mayer-Vietoris para homologia singular).

Seja X um espaço topológico e $U, V \subset X$ subconjuntos abertos tal que $X = U \cup V$ e $U \cap V$ é aberto. Para cada p existe um homomorfismo conectante $\partial_* : H_p(X) \rightarrow H_{p-1}(U \cap V)$ tal que a seguinte seqüência é exata:

$$\dots \xrightarrow{\partial_*} H_p(U \cap V) \xrightarrow{\alpha} H_p(U) \oplus H_p(V) \xrightarrow{\beta} H_p(X) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(U \cap V) \xrightarrow{\alpha} \dots$$

onde $\alpha[c] = (i_*[c], -j_*[c])$, $\beta([c], [c']) = k_*[c] + l_*[c']$ e $\partial_*[b] = [c]$, desde que exista $\varphi \in C_p(U)$ e $\varphi' \in C_p(V)$ tal que $k_{\#}\varphi + l_{\#}\varphi'$ é homólogo ao b e $(i_{\#}c, -j_{\#}c) = (\partial\varphi, \partial\varphi')$.

O teorema de Mayer-Vietoris nos permite computar a homologia de vários espaços, pois podemos aplicar o teorema recursivamente de modo a obter U s e V s com homologias conhecidas.

Exemplo 1.2.18. Seja $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| = 1\}$ o círculo unitário. Considere $p, q \in S^1$ tal que $p \neq q$, então defina $U = S^1 \setminus \{p\}$ e $V = S^1 \setminus \{q\}$, assim temos

$$\begin{aligned} S^1 &= U \cup V \\ U &\cong (0, 1) \subset \mathbb{R} \\ V &\cong (0, 1) \subset \mathbb{R} \\ U \cap V &\cong (0, 1) \cup (1, 2) \subset \mathbb{R} \end{aligned}$$

Como intervalos de \mathbb{R} são contráteis, temos as homologias

$$H_k(U, R) = H_k(V, R) = \begin{cases} R, & \text{se } k = 0, \\ 0, & \text{se } k > 0. \end{cases}$$

Como $U \cap V$ tem duas componentes conexas contráteis, segue do item 2 do Teorema 1.2.15 que

$$H_k(U \cap V, R) = \begin{cases} R^2, & \text{se } k = 0, \\ 0, & \text{se } k > 0. \end{cases}$$

Por aplicar o teorema de Mayer-Vietoris para $k > 1$, temos

$$0 \rightarrow H_k(S^1, R) \rightarrow 0$$

logo, $H_k(S^1, R) = 0$ para $k > 1$. Novamente pelo teorema de Mayer-Vietoris temos a seguinte sequência é exata

$$0 \rightarrow H_1(S^1) \xrightarrow{\partial_*} H_0(U \cap V) \xrightarrow{\alpha} H_0(U) \oplus H_0(V) \xrightarrow{\beta} H_0(S^1) \rightarrow 0$$

que é isomorfa a sequência

$$0 \rightarrow H_1(S^1) \xrightarrow{\partial_*} R^2 \xrightarrow{\alpha} R^2 \xrightarrow{\beta} H_0(S^1) \rightarrow 0$$

Pela definição de α temos que $\alpha[c] = (i_*[c], -j_*[c])$ logo $\alpha : R^2 \rightarrow R^2$ é uma projeção em uma diagonal, de modo que $\text{im}(\alpha) \cong R$. Pela exatidão da sequência temos

$$\begin{aligned} H_1(S^1) &= H_0(U) \oplus H_0(V) / \text{im}(\alpha) \cong R^2 / R \cong R \\ \text{im}(\alpha) &= H_0(U \cap V) / H_0(S^1) \Rightarrow H_0(S^1) = R \end{aligned}$$

Concluindo que

$$H_k(S^1, R) = \begin{cases} R, & \text{se } k \in \{0, 1\}, \\ 0, & \text{se } k > 1. \end{cases}$$

A seguir apresentamos algumas homologias que são utilizadas ao longo deste texto.

Proposição 1.2.19. *Os grupos de homologia da esfera S^n são:*

$$H_k(S^n, R) = \begin{cases} R, & \text{se } k \in \{0, n\}, \\ 0, & \text{se } k \notin \{0, n\}. \end{cases}$$

Proposição 1.2.20. *Os grupos de homologia do plano projetivo real $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ dependem do anel comutativo R escolhido. Para $R = \mathbb{Z}$ temos*

$$H_k(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } k = 0 \text{ ou } k = n \text{ ímpar,} \\ \mathbb{Z}_2, & \text{se } k \text{ é ímpar e } 0 < k < n, \\ 0, & \text{nos demais casos.} \end{cases}$$

Para $R = \mathbb{Z}_2$ temos

$$H_k(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & \text{se } 0 \leq k \leq n, \\ 0, & \text{se } k > n. \end{cases}$$

Proposição 1.2.21. *Os grupos de homologia do plano projetivo complexo $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ são:*

$$H_k(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, R) = \begin{cases} R, & \text{se } k \text{ for par e } 0 \leq k \leq 2n, \\ 0, & \text{nos demais casos.} \end{cases}$$

Proposição 1.2.22. *Os grupos de homologia do toro T^n são:*

$$H_k(T^n, R) = \begin{cases} R^{\binom{n!}{k!(n-k)!}}, & \text{se } 0 \leq k \leq n, \\ 0, & \text{se } k > n. \end{cases}$$

Proposição 1.2.23. *Os grupos de homologia de uma superfície $\Sigma_g \subset \mathbb{R}^3$ fechada e orientável de gênero g são:*

$$H_k(\Sigma_g, R) = \begin{cases} R, & \text{se } k \in \{0, 2\}, \\ R^{2g}, & \text{se } k = 1, \\ 0, & \text{se } k > 2. \end{cases}$$

Definição 1.2.24. Definimos o *complexo de cadeias aumentado* por

$$\dots \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p(X) \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}(X) \xrightarrow{\partial_{p-1}} \dots \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} R \rightarrow 0$$

onde $\varepsilon\left(\sum r_i \sigma_i\right) = \sum r_i$.

Assim, definimos os grupos de *homologia reduzida* por $\widetilde{H}_p(X) := \ker(\partial_p)/\text{im}(\partial_{p+1})$ para $p > 0$ e $\widetilde{H}_0 := \ker(\varepsilon)/\text{im}(\partial_1)$.

Observação 1.2.25. A diferença entre a homologia reduzida e a homologia consiste apenas em um fator R a menos no R -módulo de grau 0, assim, os grupos de homologia de um espaço homotópico a um ponto são todos triviais.

A definição e a proposição a seguir, são encontradas em [15] páginas 114 e 124.

Definição 1.2.26. Se X é um espaço e A é um subconjunto fechado de X , tal que A é retrato por deformação de alguma vizinhança de X , então dizemos que (X, A) é um *good pair*.

Proposição 1.2.27. *Se (X, A) é um good pair, então a aplicação quociente $q : (X, A) \rightarrow (X/A, A/A)$ induz um isomorfismo $q_* : H_n(X, A, R) \rightarrow \tilde{H}_n(X/A, R)$ para todo n .*

Corolário 1.2.28. *Para qualquer soma wedge $\bigvee_\alpha X_\alpha$ tal que os pares (X_α, x_α) são good pairs, sendo $x_\alpha \in X_\alpha$ o ponto base. A inclusão $i_\alpha : X_\alpha \hookrightarrow \bigvee_\alpha X_\alpha$ induz um isomorfismo $\bigoplus_\alpha i_\alpha : \bigoplus_\alpha \tilde{H}_n(X_\alpha) \rightarrow \tilde{H}_n(\bigvee_\alpha X_\alpha)$.*

1.2.2 Cohomologia Singular

Definição 1.2.29. Seja R um anel comutativo com unidade e $C_p(X, R)$ o R -módulo das cadeias singulares de dimensão p para o espaço X . Definimos $C^p(X, R) := \text{Hom}(C_p(X, R), R)$ o R -módulo das cocadeias de mesma dimensão, para o espaço X .

O operador cobordo $\delta : C^p(X, R) \rightarrow C^{p+1}(X, R)$ é definido como o adjunto do operador bordo $\partial : C_{p+1}(X, R) \rightarrow C_p(X, R)$, isto é, $\forall h \in C^p(X, R)$, temos $(\delta h)(\sigma) = h(\partial\sigma) \forall \sigma \in C_{p+1}(X, R)$.

Como $\delta = \partial^T$, tem-se, $\delta \circ \delta = \partial^T \circ \partial^T = (\partial \circ \partial)^T = 0$. Assim, obtemos o complexo de cocadeias

$$\dots \xrightarrow{\delta} C^{p-1}(X, R) \xrightarrow{\delta} C^p(X, R) \xrightarrow{\delta} C^{p+1}(X, R) \xrightarrow{\delta} \dots$$

Cujos grupos de cohomologia singular são denotados $H^p(X, R)$.

Uma função $f : X \rightarrow Y$ contínua induz um homomorfismo $f^* : H^p(Y, R) \rightarrow H^p(X, R)$ definido por $(f^*\gamma)[c] = \gamma(f_*[c])$, para cada $\gamma \in H^p(Y, R) \cong \text{Hom}(H_p(Y), R)$ e cada p -cadeia singular c em X . Das propriedades functoriais de f_* segue que $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ e $(\text{id}_X)^* = \text{id}_{H^p(X, R)}$, com $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$.

Teorema 1.2.30 (Propriedades da cohomologia singular).

1. Para qualquer espaço de um único ponto, $H^0(\{p\}, R) \cong R$ e $H^k(\{p\}, R) = 0$, $\forall p > 0$.
2. Seja $\{A_j\}$ uma coleção arbitrária de espaços topológicos, e seja $X = \coprod_j A_j$.
A inclusão $\iota_j : A_j \hookrightarrow X$ induz um isomorfismo $H^p(X) \cong \prod_j H^p(A_j)$.
3. Espaços homotopicamente equivalentes tem grupos de cohomologia singular isomorfos.

Corolário 1.2.31. *Se X é um espaço contrátil, então $H^0(X, R) = R$ e $H^k(X, R) = 0$, $\forall k > 0$.*

Teorema 1.2.32 (Teorema de Mayer-Vietoris para cohomologia singular).

Seja X um espaço topológico e $U, V \subset X$ subconjuntos abertos tal que $U \cap V$ é aberto e $X = U \cup V$. Para cada p existe um homomorfismo conectante $\partial_* : H_p(X) \rightarrow H_{p-1}(U \cap V)$ tal que a seguinte sequência é exata:

$$\dots \xrightarrow{\partial^*} H^p(X, R) \xrightarrow{k^* \oplus l^*} H^p(U, R) \oplus H^p(V, R) \xrightarrow{i^* - j^*} H^p(U \cap V, R) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(X, R) \xrightarrow{k^* \oplus l^*} \dots$$

onde $(k^* \oplus l^*)\omega = (k^*\omega, l^*\omega)$ e $(i^* - j^*)(\omega, \eta) = i^*\omega - j^*\eta$, e ainda ∂^* é definido por $\partial^*(\gamma) = \gamma \circ \partial_*$.

Analogamente ao caso da homologia, o teorema de Mayer-Vietoris nos permite computar vários grupos de cohomologia. No entanto, para muitos casos em que já conhecemos a homologia podemos recuperar a cohomologia graças ao teorema dos coeficientes universais, a seguir apresentamos o enunciado deste teorema dado em [24] página 188.

Observação 1.2.33. Para cada $p \geq 0$ temos o homomorfismo

$$\varphi : H^p(X, R) \rightarrow \text{Hom}(H_p(X), R)$$

definido por $\varphi([\alpha])[x] = \alpha(x)$ sendo α um p -cociclo e x um p -ciclo, na verdade, este é um epimorfismo e o núcleo $\ker(\varphi)$ é um R -módulo que é denotado em álgebra homológica por $\text{Ext}(H_{p-1}(X), R)$. Em [24] encontra-se a verificação que $\text{Ext}(H, R)$ é um functor contravariante em H , e este possui as seguintes propriedades:

1. Se H é livre então $\text{Ext}(H, R) = 0$.
2. $\text{Ext}(H \oplus G, R) = \text{Ext}(H, R) \oplus \text{Ext}(G, R)$.
3. Se $H = \mathbb{Z}_m$ então $\text{Ext}(H, R) = R/mR$.

Teorema 1.2.34 (Teorema dos coeficientes universais). *A sequência exata*

$$0 \rightarrow \text{Ext}(H_{p-1}, R) \xrightarrow{i} H^p(X, R) \xrightarrow{\varphi} \text{Hom}(H_p(X), R) \rightarrow 0$$

é separável, tal que

$$H^p(X, R) = \text{Hom}(H_p(X), R) \oplus \text{Ext}(H_{p-1}(X), R)$$

Demonstração. Veja [24] página 189. □

Observação 1.2.35. Graças ao teorema dos coeficientes universais podemos recuperar os grupos (R -módulos) de cohomologia singular com coeficientes em R pelos grupos (R -módulos) de homologia com coeficientes em R . Logo, os grupos de cohomologia não contém qualquer informação adicional que já não tenhamos nos grupos de homologia. No entanto, veremos na próxima seção que a cohomologia admite uma estrutura de anel que contém informações adicionais.

Exemplo 1.2.36. Partindo da homologia de $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ com coeficientes em \mathbb{Z} , e supondo n par. Na Proposição 1.2.20 temos a homologia de $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ e lembrando que $\text{Hom}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) = 0$,

obtemos:

$$\begin{aligned}
H^0(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}) &= \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \\
H^1(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}) &= \text{Hom}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0 \\
H^2(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}) &= \text{Hom}(0, \mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2 \\
H^3(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}) &= \text{Hom}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}(0, \mathbb{Z}) = 0 \\
H^4(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}) &= \text{Hom}(0, \mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2 \\
H^5(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}) &= \text{Hom}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}(0, \mathbb{Z}) = 0 \\
&\vdots \\
H^n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}) &= \text{Hom}(0, \mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2
\end{aligned}$$

A seguir apresentamos as cohomologias de alguns espaços topológicos que são frequentemente utilizados no resto do texto.

Proposição 1.2.37. *Os grupos de cohomologia da esfera S^n são:*

$$H^k(S^n, R) = \begin{cases} R, & \text{se } k \in \{0, n\}, \\ 0, & \text{se } k \notin \{0, n\}. \end{cases}$$

Proposição 1.2.38. *Os grupos de cohomologia do plano projetivo real $\mathbb{R}P^n$ dependem do anel comutativo R escolhido. Para $R = \mathbb{Z}$ temos*

$$H^k(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } k = 0 \text{ ou } k = n \text{ ímpar}, \\ \mathbb{Z}_2, & \text{se } k \text{ é par e } 0 < k < n \text{ ou } k = n \text{ par}. \\ 0, & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

Para $R = \mathbb{Z}_2$ temos

$$H^k(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & \text{se } 0 \leq k \leq n, \\ 0, & \text{se } k > n. \end{cases}$$

Proposição 1.2.39. *Os grupos de cohomologia do plano projetivo complexo $\mathbb{C}P^n$ são:*

$$H^k(\mathbb{C}P^n, R) = \begin{cases} R, & \text{se } k \text{ for par e } 0 \leq k \leq 2n, \\ 0, & \text{nos demais casos.} \end{cases}$$

Proposição 1.2.40. *Os grupos de cohomologia do toro T^n são:*

$$H^k(T^n, R) = \begin{cases} R^{\binom{n-1}{k-1}}, & \text{se } 0 < k < n, \\ R, & \text{se } k = 0 \text{ ou } k = n, \\ 0, & \text{se } k > n. \end{cases}$$

Proposição 1.2.41. *Os grupos de cohomologia de uma superfície $\Sigma_g \subset \mathbb{R}^3$ fechada e orientável de gênero g são:*

$$H^k(\Sigma_g, R) = \begin{cases} R, & \text{se } k \in \{0, 2\}, \\ R^{2g}, & \text{se } k = 1, \\ 0, & \text{se } k > 2. \end{cases}$$

Definição 1.2.42. Dualizando o complexo de cadeias aumentado, obtemos

$$\dots \xleftarrow{\delta_{p+1}} C_p(X) \xleftarrow{\delta_p} C_{p-1}(X) \xleftarrow{\delta_{p-1}} \dots \xleftarrow{\delta_2} C_1(X) \xleftarrow{\delta_1} C_0(X) \xleftarrow{\varepsilon^*} R \leftarrow 0$$

Como $\varepsilon\delta = 0$, temos o dual $\delta\varepsilon^* = 0$. A homologia deste complexo de cocadeias é a *cohomologia reduzida* de X , denotada por $\widetilde{H}^p(X, R)$.

Observação 1.2.43. Análogo ao caso da homologia reduzida, temos $\widetilde{H}^p(X, R) = H^p(X, R)$ se $p > 0$, e $\widetilde{H}^0(X, R) = \text{Hom}(\widetilde{H}_0(X), R)$.

1.2.3 Anel de Cohomologia

Uma das principais referências utilizadas nesta seção é o capítulo 6 de [4].

Definição 1.2.44. Sejam $\varphi \in C^k(X; R)$ e $\psi \in C^l(X; R)$ cocadeias. O *produto cup* denotado $\varphi \smile \psi \in C^{k+l}(X; R)$ é a cocadeia que toma valores em um simplexo singular $\sigma : \Delta^{k+l} \rightarrow X$ dada por

$$(\varphi \smile \psi)(\sigma) = \varphi(\sigma|_{[v_0, \dots, v_k]})\psi(\sigma|_{[v_k, \dots, v_{k+l}]})$$

sendo o produto do lado direito é o produto de R .

Lema 1.2.45. *Sejam $\varphi \in C^k(X; R)$ e $\psi \in C^l(X; R)$, então*

$$\delta(\varphi \smile \psi) = \delta\varphi \smile \psi + (-1)^k \varphi \smile \delta\psi$$

Demonstração. Suponha $\sigma : \Delta^{k+l+1} \rightarrow X$, por definição tem-se,

$$(\delta\varphi \smile \psi)(\sigma) = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \varphi(\sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+1}]})\psi(\sigma|_{[v_k, \dots, v_{k+l+1}]})$$

$$(-1)^k (\varphi \smile \delta\psi)(\sigma) = \sum_{i=k}^{k+l+1} (-1)^i \varphi(\sigma|_{[v_0, \dots, v_k]})\psi(\sigma|_{[v_k, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+l+1}]})$$

Somando as duas expressões, temos o cancelamento do ultimo termo da primeira com o primeiro termo da segunda. Por definição de bordo tem-se,

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^{k+l+1} (-1)^i \sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+l+1}]}$$

logo,

$$\delta(\varphi \smile \psi)(\sigma) = (\varphi \smile \psi)(\partial\sigma) = (\delta\varphi \smile \psi)(\sigma) + (-1)^k (\varphi \smile \delta\psi)(\sigma).$$

□

Corolário 1.2.46. *O produto cup induzido na cohomologia é bem definido.*

Demonstração. Mostremos que $\smile: H^k(X; R) \times H^l(X; R) \rightarrow H^{k+l}(X; R)$ é bem definido de modo que $[\varphi] \smile [\psi] = [\varphi \smile \psi]$.

Supondo φ e ψ cociclos, é imediato pelo lema precedente que $\varphi \smile \psi$ é um cociclo.

Considere outro representante de $[\varphi]$, digamos $\varphi' = \varphi + \delta(\tau)$, então

$$\varphi' \smile \psi = \varphi \smile \psi + \delta\tau \smile \psi = \varphi \smile \psi + \delta(\tau \smile \psi) + (-1)^k(\tau \smile \delta\psi).$$

Como ψ é um cociclo, obtemos que $\varphi' \smile \psi$ e $\varphi \smile \psi$ se diferem apenas por um bordo, então $[\varphi' \smile \psi] = [\varphi \smile \psi]$. Observe que vale o mesmo se considerar um ψ' . □

Definição 1.2.47. Sejam $\{G_k\}$ grupos aditivos, chamamos de *anel graduado* um anel $A := \bigoplus_k G_k$ com um produto $G_k \times G_l \rightarrow G_{k+l}$. Os elementos de G_k são chamados *elementos homogêneos de grau k* . Se g é um gerador de G_k então denotamos $\deg(g) = k$.

Notação 1.2.48. Denotamos o grupo total por

$$H^*(X; R) := \bigoplus_{n \geq 0} H^n(X; R).$$

Teorema 1.2.49. Se $\alpha \in H^k(X; R)$ e $\beta \in H^l(X; R)$, então $\alpha \smile \beta = (-1)^{kl}\beta \smile \alpha$.

Demonstração. Ver [15] página 216. □

Proposição 1.2.50. Considere [1] dado por $\mathbf{1}: C_0(X) \rightarrow R$ definido por $\mathbf{1}(\sigma) = 1_R$. Então $(H^*(X; R), \smile, [\mathbf{1}])$ é um anel graduado com unidade.

Definição 1.2.51. Chamamos $(H^*(X; R), \smile, [\mathbf{1}])$ de *anel de cohomologia* com coeficientes em R (anel comutativo com unidade) do espaço X .

O anel de cohomologia é um functor contravariante. Se $f: X \rightarrow Y$ é uma função contínua, podemos considerar o homomorfismo induzido $f: H^*(Y, R) \rightarrow H^*(X, R)$ utilizando a mesma definição dada para os grupos de cohomologia, e para $a, b \in H^*(Y, R)$ verifica-se que $f^*(a \smile b) = f^*(a) \smile f^*(b)$.

Definição 1.2.52. Sejam $\pi_X: X \times Y \rightarrow X$ e $\pi_Y: X \times Y \rightarrow Y$ as projeções. Definimos o *cross product* por

$$\begin{aligned} \times: H^k(X, R) \otimes_R H^p(Y, R) &\longrightarrow H^{k+p}(X \times Y, R) \\ \alpha \otimes \beta &\longmapsto \pi_X^*(\alpha) \smile \pi_Y^*(\beta). \end{aligned}$$

Observação 1.2.53. Dada a função diagonal $\Delta: X \rightarrow X \times X$ definida por $\Delta(x) = (x, x)$, então $\Delta^*(a \times b) = a \smile b$, para todo $a, b \in H^*(X; R)$.

Teorema 1.2.54 (Teorema de Künneth). *Seja R um anel comutativo com unidade, e suponha que $H^n(Y, R)$ é um R -módulo livre para cada n . Então a função do cross product*

$$\bigoplus_{k+p=n} H^k(X, R) \otimes_R H^p(Y, R) \xrightarrow{\times} H^n(X \times Y, R)$$

é um isomorfismo para todo n , e para todo X complexo celular finito. Isto é,

$$H^*(X, R) \otimes_R H^*(Y, R) \xrightarrow{\times} H^*(X \times Y, R)$$

é um isomorfismo de anéis graduados.

Notação 1.2.55 (Grau de um elemento em um anel graduado). Seja $A = \bigoplus_{p \geq 0} A_p$ um anel graduado, se $x \in A_j$ denotamos $\deg(x) = j$.

Notação 1.2.56 (anel de polinômios). Seja R um anel comutativo com unidade. Utilizamos a notação $R[x_1, \dots, x_n]$ para o *anel de polinômios* com n variáveis e com coeficientes em R . Denotamos o quociente $R[x_1, \dots, x_n]/I$ onde I é um ideal. Por exemplo, $\mathbb{R}[x]/(x^{k+1})$, $k > 0$, é o anel de polinômios truncados de grau k .

Notação 1.2.57 (Álgebra exterior). Seja R um anel comutativo com unidade. Denotamos $\Lambda_R[x_1, \dots, x_n]$ uma *álgebra exterior sobre R finitamente gerada por x_1, \dots, x_n* , isto é, $\Lambda_R[x_1, \dots, x_n]$ é uma álgebra graduada onde em cada grau temos um R -módulo livre com base finita. O produto é dado pela regra $x_i x_j = (-1)^{\deg(x_i) \deg(x_j)} x_j x_i$, onde $\deg(x_i x_j) = \deg(x_i) + \deg(x_j)$.

Exemplo 1.2.58. Sabemos que a cohomologia de S^n é não trivial apenas para $k \in \{0, n\}$ sendo neste caso $H^k(S^n; R) = R$. O elemento de grau 0 é a unidade do anel de cohomologia. Enquanto no grau n temos um gerador x , no entanto, $x \smile x = 0$, pois $H^{2n}(S^n, R) = 0$. Assim podemos concluir que $H^*(S^n, R) \cong R[x]/(x^2)$ com $\deg(x) = n$. Ainda mais, quando n é ímpar, temos $x \smile x = -x \smile x$ que implica $x^2 = 0$, independente do fato que $H^{2n}(S^n, R) = 0$, ou seja, neste caso temos que $H^*(S^n, R) \cong \Lambda_R[x]$ com $\deg(x) = n$. O toro n -dimensional é definido por $T^n := S^1 \times \dots \times S^1 = \prod_{i=1}^n S^1$. Aplicando o teorema de Künneth, obtemos

$$H^*(T^n; R) \cong \bigotimes_{i=1}^n H^*(S^1; R) \cong \bigotimes_{i=1}^n \Lambda_R[x_i] \cong \Lambda_R[x_1, \dots, x_n]$$

com $\deg(x_i) = 1$.

Exemplo 1.2.59. Existem muitos espaços topológicos que não são homotopicamente equivalentes e ainda assim possuem os grupos de homologia (ou cohomologia) isomorfos. Por exemplo, $T^2 := S^1 \times S^1$ e $X := S^1 \vee S^1 \vee S^2$ (veja 1.2.28) ambos tem os mesmos grupos de homologia e também de cohomologia, sendo:

$$H_k(T^2, R) = H_k(X, R) = \begin{cases} R, & \text{se } k \in \{0, 2\}, \\ R \oplus R, & \text{se } k = 1, \\ 0, & \text{se } k > 2. \end{cases}$$

No exemplo anterior verificamos que $H^*(T^2, R) = \Lambda_R[x, y]$ com $\deg(x) = \deg(y) = 1$. Note que $x \smile y \neq 0$. Podemos utilizar o Teorema 1.2.32 para verificar que $i^* \oplus j^* : \tilde{H}^*(X, R) \rightarrow \tilde{H}^*(S^1 \vee S^1) \oplus \tilde{H}^*(S^2)$ é um isomorfismo onde $i : S^1 \vee S^1 \hookrightarrow X$ e $j : S^2 \hookrightarrow X$ são as inclusões. Suponha que $\varphi : \tilde{H}^*(T^2, R) \rightarrow \tilde{H}^*(X, R)$ é um isomorfismo. Assim $\varphi(x)$ e $\varphi(y)$ são os geradores de grau 1 em $\tilde{H}^*(X, R)$. Aplicando o isomorfismo $i^* \oplus j^*$, temos

$$(i^* \oplus j^*)\varphi(x \smile y) = (i^*\varphi(x) \smile i^*\varphi(y), j^*\varphi(x) \smile j^*\varphi(y)) = (0, 0).$$

Sendo que: o primeiro fator é zero, porque $H^2(S^1 \vee S^1, R) = 0$, e o segundo pois $H^1(S^2, R) = 0$, logo $j^*\varphi(x) = 0$ e $j^*\varphi(y) = 0$. Como $x \smile y \neq 0$, obtemos uma contradição pois $(i^* \oplus j^*)\varphi(x \smile y)$ não deveria ser igual a $(0, 0)$. Concluindo que φ não pode ser um isomorfismo e portanto T^2 e $S^1 \vee S^1 \vee S^2$ não são homotopicamente equivalentes.

Proposição 1.2.60.

1. $H^*(S^n, R) \cong R[x]/(x^2)$ com $\deg(x) = n$.
2. Se n for par, $H^*(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\alpha]/(2\alpha, \alpha^{\frac{n}{2}+1})$ com $\deg(\alpha) = 2$.
3. Se n for ímpar, $H^*(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\alpha, \beta]/(2\alpha, \alpha^{\frac{n+1}{2}}, \alpha\beta, \beta^2)$ com $\deg(\alpha) = 2$ e $\deg(\beta) = n$.
4. $H^*(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\alpha]/(\alpha^{n+1})$ com $\deg(\alpha) = 1$.
5. $H^*(\mathbb{C}P^n, R) \cong R[\alpha]/(\alpha^{n+1})$ com $\deg(\alpha) = 2$.
6. $H^*(T^n, R) \cong \Lambda_R[x_1, \dots, x_n]$ com $\deg(x_i) = 1$.
7. $H^*(\Sigma_g, R) \cong R[x_1, y_1, \dots, x_g, y_g]/(x_i^2, y_i^2, x_i y_i + y_i x_i, x_i x_j, x_i y_j, y_i y_j, x_i y_i - x_j y_j)$ com $\deg(\alpha_i) = 1$ e $\deg(\beta_i) = 1$.

Demonstração. Ver seção 3.2 de [15]. □

Com o intuito apenas de apresentar alguns exemplos adicionais de anéis de cohomologia (que são interessantes para exemplos dados nos próximos capítulos), na proposição a seguir temos os anéis de cohomologia para dois exemplos de grupos de Lie. Seja, $GL(n, \mathbb{C})$ o grupo geral linear de grau n formado pelas matrizes complexas $n \times n$ inversíveis, com a operação de multiplicação de matrizes. O grupo unitário $U(n)$ e o grupo unitário especial $SU(n)$, definidos por

$$U(n) := \{A \in GL(n, \mathbb{C}) : AA^* = I\}$$

e

$$SU(n) := \{A \in U(n) : \det(A) = 1\},$$

são exemplos clássicos de grupos de Lie. A demonstração da proposição dada a seguir pode ser vista de forma resumida em [13] e com maiores detalhes em [29].

Proposição 1.2.61.

1. $H^*(SU(n)) \cong \Lambda[x_3, x_5, \dots, x_{2n-1}]$ onde $\deg(x_i) = i$.
2. $H^*(U(n)) \cong \Lambda[x_1, x_3, x_5, \dots, x_{2n-1}]$ onde $\deg(x_i) = i$.

Terminamos essa seção com a definição do *cup length* que é utilizada no capítulo seguinte como estimativa inferior para a categoria de Lusternik-Schnirelmann.

Definição 1.2.62. Seja A um anel graduado. Se todos elementos de A têm grau zero definimos o *length* de A igual a 0. Senão o *length* de A é o maior inteiro não negativo n tal que existam elementos homogêneos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in A$ com graus diferentes de zero, e que $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_n \neq 0$. Se um tal n não existe, definimos o *length* igual a infinito. Denotamos o *length* de A por $\text{len}(A)$.

Definição 1.2.63. Seja R um anel comutativo com unidade e X um espaço topológico. O *cup length* de X com coeficientes em R é definido por $\text{cup}_R(X) = \text{len}(H^*(X; R))$.

Um espaço contrátil tem cohomologia não trivial apenas no grau zero, logo o seu *cup length* é zero. Quando M é uma variedade real de dimensão n , o $\text{cup}_R(M)$ é no máximo n , pois $H^p(M; R) = 0$ para todo $p > n$. Exibimos a seguir os respectivos *cup lengths* para os anéis de cohomologia apresentados na Proposição 1.2.60.

Proposição 1.2.64.

1. $\text{cup}_R(S^n) = 1$.
2. $\text{cup}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R}P^n) = \frac{n}{2}$ quando n for par.
3. $\text{cup}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R}P^n) = \frac{n-1}{2}$ quando n for ímpar.
4. $\text{cup}_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{R}P^n) = n$.
5. $\text{cup}_R(\mathbb{C}P^n) = n$.
6. $\text{cup}_R(T^n) = n$.
7. $\text{cup}_R(\Sigma_g) = 2$ para qualquer $g \geq 1$.

Demonstração. Para o item (1), temos

$$\text{cup}_R(S^n) = \text{len}(H^*(S^n, R)) = \text{len}(R[x]/(x^2)) = 1$$

pois neste caso o único produto não trivial possível, é o próprio x visto que $x^2 = 0$.

O argumento para os itens (2) a (5) são similares. Considere $H^*(X, R) = R[a]/(a^{n+1})$, temos o produto $a^n \neq 0$, e $a^{n+1} = 0$, de modo que $\text{cup}_R(X) = n$. Observe que,

mesmo no item (2) este argumento é válido, e no caso do item (3) temos $H^*(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\alpha, \beta]/(2\alpha, \alpha^{\frac{n+1}{2}}, \alpha\beta, \beta^2)$, onde o produto $\alpha^{\frac{n-1}{2}} \neq 0$, e como $\alpha^n = 0$, $\beta^2 = 0$ e $\alpha\beta = 0$, concluímos que $\text{cup}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R}P^n) = \frac{n-1}{2}$ quando n é ímpar.

O item (7) é similar ao item (6), onde temos o produto não trivial $x_1 \smile \cdots \smile x_n \neq 0$ e sabemos que não existe produto maior, pois, se existisse, a soma dos graus dos elementos seria maior que n . □

2 Categoria de Lusternik-Schnirelmann

Neste capítulo definimos a categoria LS, verificamos sua invariância homotópica e apresentamos algumas das principais estimativas que nos permitem computar a categoria LS dos espaços topológicos. Na primeira seção apresentamos o teorema de Lusternik-Schnirelmann e suas relações com a função antípoda, teorema do ponto fixo de Brouwer e teorema de Borsuk-Ulam. A segunda seção do capítulo é dedicada ao teorema de Lusternik-Schnirelmann para pontos críticos que relaciona a quantidade mínima de pontos críticos de uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ com a categoria LS da variedade M , onde f e M satisfazem algumas propriedades razoáveis, neste caso a quantidade mínima de pontos críticos que tal função pode ter é a categoria LS da variedade M . Na terceira e última seção do capítulo apresentamos algumas reformulações da categoria dadas por Whitehead e Ganea, finalizando com a apresentação da categoria seccional.

2.1 Categoria de Lusternik-Schnirelmann

2.1.1 Introdução

Definição 2.1.1. A *categoria de Lusternik-Schnirelmann* ou *categoria LS* de um espaço topológico X é o menor inteiro n tal que existe uma cobertura aberta $\{U_1, \dots, U_n\}$ de X onde cada U_i é contrátil a um ponto no espaço X . Denotamos $\text{cat}(X) = n$ e dizemos que a cobertura $\{U_i\}$ é categórica. Se tal inteiro não existir, escrevemos $\text{cat}(X) = \infty$.

Seja $A \subset X$, a categoria do subespaço A relativa a X , denotada por $\text{cat}_X(A)$, é o menor inteiro n tal que existem n subconjuntos abertos de X que cobrem A e que são contráteis em X . Se tal inteiro não existir denotamos $\text{cat}_X(A) = \infty$.

Observação 2.1.2. Note que um membro U_i da cobertura $\{U_i\}$ pode não ser conexo e ter varias componentes, contanto que o espaço X seja conexo por caminhos. Assim, cada componente pode ser contraída separadamente e movida através de um caminho para um dado ponto em X .

Exemplo 2.1.3.

1. $\text{cat}(X) = 0$ se, e somente se, $X = \emptyset$.
2. Um espaço X é contrátil, se, somente se, $\text{cat}(X) = 1$, sendo o próprio X a cobertura categórica.
3. A esfera S^n pode ser coberta por dois abertos contráteis. Considere por exemplo a cobertura $\{U, V\}$, onde $U = S^n \setminus \{a\}$ e $V = S^n \setminus \{b\}$ com $a, b \in S^n$ e $a \neq b$, de

fato, o espaço resultante por remover um ponto de S^n é homeomorfo a um disco aberto de dimensão n que é contrátil em S^n , logo, $\text{cat}(S^n) \leq 2$. Mas como S^n não é contrátil, pois $H_n(S^n; R) = R$, concluímos que $\text{cat}(S^n) = 2$.

Verificamos a seguir que a categoria de Lusternik-Schnirelmann é invariante por homotopia.

Lema 2.1.4. *Se $f : X \rightarrow Y$ tem inverso homotópico à direita, então $\text{cat}(X) \geq \text{cat}(Y)$.*

Demonstração. Seja $g : Y \rightarrow X$ tal que $f \circ g \simeq \text{id}_Y$, isto é, existe uma homotopia $G : Y \times I \rightarrow Y$ tal que

$$\begin{cases} G(y, 0) = y, & \forall y \in Y, \\ G(y, 1) = f(g(y)), & \forall y \in Y. \end{cases}$$

Suponha que $\text{cat}(X) = n$ e seja $\{U_i\}$ uma cobertura categórica de X . Assim, para cada U_i existe uma homotopia $H : U_i \times I \rightarrow X$ tal que

$$\begin{cases} H(u, 0) = u, & \forall u \in U_i, \\ H(u, 1) = x_i, & \forall u \in U_i, \end{cases}$$

sendo que x_i é um ponto fixado para cada U_i .

Definimos $V_i := g^{-1}(U_i)$ para cada $i = 1, \dots, n$, como g é contínua, segue que $\{V_i\}$ é uma cobertura aberta de Y . Considere a seguinte homotopia de contração $K : V_i \times I \rightarrow Y$

$$K(v, t) := \begin{cases} G(v, 2t), & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2, \\ f\left(H(g(v), 2t - 1)\right), & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Observe que K é bem definida pois

$$K(v, 0) = G(v, 0) = v$$

e

$$K(v, 1) = f\left(H(g(v), 1)\right) = f(x_i) := y_i$$

e em $t = 1/2$ temos, por um lado,

$$K(v, 1/2) = G(v, 1) = f(g(y)),$$

e por outro

$$K(v, 1/2) = f\left(H(g(v), 0)\right) = f(g(v)).$$

Consequentemente, cada V_i é contrátil em Y a um ponto y_i e $\{V_i\}$ é uma cobertura categórica de Y com $n = \text{cat}(X)$ elementos, concluindo que $\text{cat}(Y) \leq \text{cat}(X)$. \square

Teorema 2.1.5. *Se $f : X \rightarrow Y$ é uma equivalência homotópica, então $\text{cat}(X) = \text{cat}(Y)$.*

Demonstração. Como $f : X \rightarrow Y$ é uma equivalência homotópica, existe função $g : Y \rightarrow X$ tal que $f \circ g \simeq id_Y$ e $g \circ f \simeq id_X$. Aplicando o Lema 2.1.4 em ambas as funções f e g obtemos que $\text{cat}(X) = \text{cat}(Y)$. \square

Corolário 2.1.6. *Se $f : X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo, então $\text{cat}(X) = \text{cat}(Y)$.*

2.1.2 Estimativa inferior *cup length*

Lema 2.1.7. *Seja X um espaço topológico e $A, B \subset X$ subconjuntos abertos de X . Considere as inclusões $q : X \hookrightarrow (X, A \cup B)$ e $q_1 \times q_2 : X \times X \hookrightarrow (X, A) \times (X, B)$. Então, para $a \in H^*(X, A)$ e $b \in H^*(X, B)$ vale $q^*(a \smile b) = q_1^*(a) \smile q_2^*(b)$.*

Demonstração. Por definição de cup product em anéis de cohomologia relativa, temos:

$$H^*(X, A; R) \otimes H^*(X, B; R) \rightarrow H^*(X, A \cup B; R),$$

$$a \smile b = \Delta^*(a \times b),$$

sendo que

$$\Delta : (X, A \cup B) \rightarrow (X, A) \times (X, B) = (X \times X, A \times X \cup X \times B)$$

é a aplicação diagonal $\Delta(x) = (x, x)$. Observe que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{q} & (X, A \cup B) \\ \downarrow \Delta & & \downarrow \Delta \\ X \times X & \xrightarrow{q_1 \times q_2} & (X, A) \times (X, B). \end{array}$$

De fato,

$$(\Delta \circ q)(x) = \Delta(q(x)) = \Delta(x) = (x, x) = (q_1 \times q_2)(x, x) = (q_1 \times q_2 \circ \Delta)(x),$$

induzindo em cohomologia $q^* \Delta^* = \Delta^*(q_1^* \times q_2^*)$, dados $a \in H^*(X, A)$ e $b \in H^*(X, B)$, tem-se,

$$q^*(a \smile b) = q^*(\Delta^*(a \times b)) = \Delta^*(q_1^* \times q_2^*(a \times b)) = \Delta^*(q_1^*(a) \times q_2^*(b)) = q_1^*(a) \smile q_2^*(b).$$

\square

Teorema 2.1.8. *Seja X um espaço topológico e R um anel comutativo com unidade. Então:*

$$\text{cup}_R(X) + 1 \leq \text{cat}(X).$$

Demonstração. Suponha $\text{cat}(X) = n$ e seja $\{U_1, \dots, U_n\}$ uma cobertura categórica de X . Considere as inclusões respectivamente $j_i : U_i \hookrightarrow X$ e $q_i : X \rightarrow (X, U_i)$. As induzidas dessas funções em cohomologia geram a seguinte sequência longa exata (veja [15] p. 115):

$$\cdots \longrightarrow H^m(X, U_i; R) \xrightarrow{q_i^*} H^m(X; R) \xrightarrow{j_i^*} H^m(U_i; R) \longrightarrow \cdots .$$

Como U_i é contrátil, tem-se $\widetilde{H}^m(U_i) = 0$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ e qualquer $m \geq 0$, logo $j_i^* = 0$, e pela exatidão da sequência segue que $\text{im}(q_i^*) \cong \ker(j_i^*) \cong H^m(X; R)$. Assim $\forall x_i \in H^m(X; R)$ existe um $\bar{x}_i \in H^m(X, U_i; R)$ tal que $q_i^*(\bar{x}_i) = x_i$.

Suponha que existam classes $x_1, \dots, x_n \in H^*(X; R)$ tal que $x_1 \smile \cdots \smile x_n \neq 0$. Como $\text{cat}(X) = n$ podemos encontrar uma cobertura categórica $\{U_1, \dots, U_n\}$ com $x_i \in U_i$.

Considere $q : X \rightarrow (X, \bigcup_{i=1}^n U_i)$ a inclusão, e $q^* : \widetilde{H}^*(X, \bigcup_{i=1}^n U_i) \rightarrow \widetilde{H}^*(X)$ o homomorfismo induzido no anel de cohomologia. Por causa do Lema 2.1.7 e da hipótese $x_1 \smile \cdots \smile x_n \neq 0$, tem-se,

$$q^*(\bar{x}_1 \smile \cdots \smile \bar{x}_n) = q_1^*(\bar{x}_1) \smile \cdots \smile q_n^*(\bar{x}_n) = x_1 \smile \cdots \smile x_n \neq 0.$$

Mas $X = \bigcup_{i=1}^n U_i \Rightarrow \widetilde{H}^*(X, \bigcup_{i=1}^n U_i) = 0$, logo,

$$x_1 \smile \cdots \smile x_n = q^*(0) = 0,$$

concluindo que $\text{cup}_R(X) < \text{cat}(X) \Leftrightarrow \text{cup}_R(X) + 1 \leq \text{cat}(X)$. \square

Exemplo 2.1.9.

- (1) Se X é contrátil tem-se $\text{cup}_R(X) = 0$ para qualquer anel R comutativo com unidade.
- (2) Conforme visto na Proposição 1.2.64, para o toro n -dimensional T^n temos $\text{cup}_{\mathbb{Q}}(T^n) = n$ e sendo assim $\text{cat}(T^n) \geq n + 1$.
- (3) Seja $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ o espaço projetivo complexo de dimensão n , podemos definir

$$\mathbb{C}\mathbb{P}^n := S^{2n+1} / \sim \text{ onde } (z_0, \dots, z_n) \sim (e^{i\theta} z_0, \dots, e^{i\theta} z_n), \forall \theta \in \mathbb{R},$$

isto equivale a $\mathbb{C}\mathbb{P}^n := (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$ onde $w \sim \lambda w$ para todo $w \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ e $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Observe que os dois quocientes são homeomorfos, pois $S^{2n+1} \cong \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$. Denotemos $[z_0 : \dots : z_n]$ a classe de equivalência de (z_0, \dots, z_n) . Definimos para $0 \leq k \leq n$

$$U_k := \{[z_0 : \dots : z_n] \mid z_k \neq 0\},$$

observe que cada $U_k \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ é aberto, e $\mathbb{C}\mathbb{P}^n = \bigcup_{k=0}^n U_k$, de modo que $\{U_0, U_1, \dots, U_n\}$ é uma cobertura aberta de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Agora, podemos definir o seguinte homeomorfismo $\varphi_k : \mathbb{C}^n \rightarrow U_k$, dado por

$$\varphi_k(z_1, \dots, z_n) := [z_1 : \dots : z_{k-1} : 1 : z_k : \dots : z_n],$$

observe que φ_k é contínua e sua inversa

$$\varphi_k^{-1}[z_0 : \dots : z_n] = \left(\frac{z_0}{z_k}, \dots, \frac{z_{k-1}}{z_k}, \frac{z_{k+1}}{z_k}, \dots, \frac{z_n}{z_k} \right)$$

também é contínua. Assim, cada U_k é homeomorfo a $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n} \simeq *$. Logo cada U_k é contrátil, e portanto, $\text{cat}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \leq n + 1$.

Por outro lado, das proposições 1.2.60 e 1.2.64, sabemos que $H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^{n+1})$, isto é, um anel de polinômios truncado com gerador α de grau 2, tal que $\text{cup}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = n$. Pelo Teorema 2.1.8 tem-se $n + 1 \leq \text{cat}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)$, concluindo que $\text{cat}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = n + 1$.

- (4) Suponha uma superfície $\Sigma_g = T_1^2 \# \dots \# T_g^2$ onde $\#$ é a soma conexa de g toros bidimensionais. Considere primeiramente $g = 1$ e neste caso temos o toro $T^2 \subset \mathbb{R}^3$, podemos construir uma cobertura categórica para T^2 com três abertos, a Figura 8 apresenta a representação poligonal de T^2 , e ao lado, os respectivos abertos A , B e C , observe que estes três abertos são contráteis (no caso do B são duas componentes contráteis, lembre que T^2 é conexo por caminhos) e a união destes três abertos cobrem o toro T^2 .

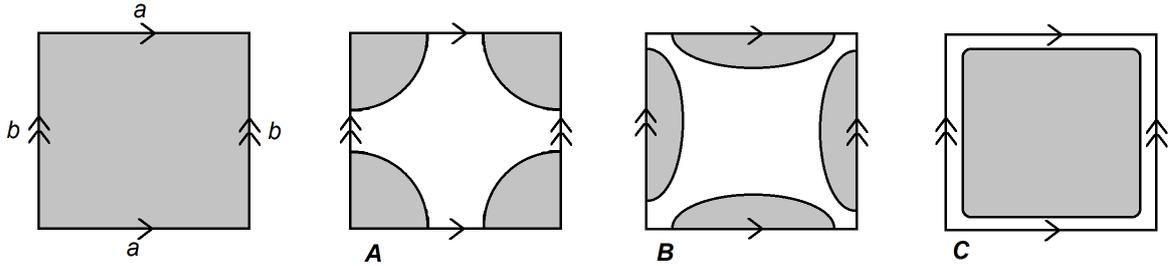


Figura 8 – Cobertura do toro.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim, podemos concluir que $\text{cat}(T^2) \leq 3$, mas $\text{cup}_{\mathbb{Z}}(T^2) = 2$, concluindo que $\text{cat}(T^2) = 3$. No caso geral, $1 < g < \infty$, consideramos em Σ_g a mesma cobertura em cada T_i^2 que aparece na soma conexa, assim $A = \cup_{i=1}^g A_i$, $B = \cup_{i=1}^g B_i$ e $C = \cup_{i=1}^g C_i$ são abertos contráteis em Σ_g , tal que Σ_g é coberto por $A \cup B \cup C$, portanto, $\text{cat}(\Sigma_g) \leq 3$.

Por outro lado, os grupos de cohomologia reduzidas da superfície Σ_g são $\widetilde{H}^1(\Sigma_g; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g}$, $\widetilde{H}^2(\Sigma_g; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ e $\widetilde{H}^k(\Sigma_g; \mathbb{Z}) = 0$ para todo $k \geq 3$, de modo que $\text{cup}_{\mathbb{Z}}(\Sigma_g) = 2$, assim concluímos que $\text{cat}(\Sigma_g) = 3$.

- (5) Considere $SU(n) \subset U(n) \subset M(n, \mathbb{C})$ o grupo unitário especial, sejam $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ números complexos distintos tais que $\|\xi_i\| = 1$ e $\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n \neq 1$. Definimos

$$A_j := \{A \in SU(n) : \xi_j \text{ não é autovalor de } A\}.$$

Assim, A_j é aberto em $SU(n)$, e além disso, $\{A_j : 1 \leq j \leq n\}$ forma uma cobertura de $SU(n)$, pois a propriedade $\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n \neq 1$ implica que os ξ_j não podem aparecer como autovalores de qualquer matriz em $SU(n)$. Para mostrar que A_j é contrátil em $SU(n)$,

fixamos A_j e suponha B uma componente conexa de A_j , como $SU(n)$ é conexo por caminhos, é suficiente mostrarmos que B é contrátil.

Denote por $S(n)$ o conjunto das matrizes complexas auto-adjuntas de dimensão n . Seja $X \in B \subset A_j$. Pelo teorema espectral $X = VD(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})V^*$ onde $D(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})$ é uma matriz diagonal e V é uma matriz unitária, onde $e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}$ são os autovalores de X . Digamos que $\xi_j = e^{i\alpha}$, então podemos especificar o ramo de logaritmo $\alpha < \theta_i < \alpha + 2\pi$ para as entradas $e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}$. Assim fica bem definido $\log : B \rightarrow M(n, \mathbb{C})$ dado por

$$\log(X) = VD(i\theta_1, \dots, i\theta_n)V^*,$$

e é bem definida a função $\Phi : B \rightarrow S(n)$ dada por

$$\Phi(X) = -i \log(X),$$

que é contínua pois o logaritmo é. Assim, temos

$$X = \text{Exp}(i\Phi(X)),$$

sendo que Exp é a exponencial de matrizes. Por definição temos

$$1 = \det(X) = \det(\text{Exp}(i\Phi(X))) = \det(\text{Exp}(\log(X))) = \exp(\text{tr}(\log(X))).$$

Como a função traço $\text{tr} : M(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua, e B é conexo, existe um inteiro k tal que $\text{tr}(\log(X)) = 2\pi ik$ para todo $X \in B$.

Seja

$$X_0 := \exp\left(\frac{2\pi ik}{n}\right)I_n$$

sendo I_n a matriz identidade $n \times n$. Seja $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ e defina $F : B \times I \rightarrow SU(n)$ por

$$F(X, t) := \text{Exp}\left(i\left((1-t)\Phi(X) + tX_0\right)\right).$$

Assim, F é uma função contínua, tal que $F(X, 0) = X$ e $F(X, 1) = X_0$ para todo $X \in B$, ou seja, F é uma contração de B a X_0 em $SU(n)$. Portanto, $\text{cat}(SU(n)) \leq n$.

Por outro lado, sabemos que $H^*(SU(n), \mathbb{Z})$ é uma álgebra exterior com $n-1$ geradores com graus $2j-1$, para $j = 2, 3, \dots, n$, logo $\text{cup}_{\mathbb{Z}}(SU(n)) = n-1$, concluindo que $\text{cat}(SU(n)) = n$.

No item (4) do exemplo precedente, no caso particular das superfícies Σ_g , a cobertura que exibimos, foi construída de modo que cada aberto da cobertura cobre um nível celular e_a^n do representante complexo CW da superfície. Por exemplo, no caso do T^2 , o aberto A cobre sua única 0-célula e^0 , enquanto B cobre as duas 1-células e_a^1 e e_b^1 , e o aberto C cobre a 2-célula e^2 . Com essa observação em mente, podemos considerar a proposição.

Proposição 2.1.10. *Se X é um complexo CW conexo, então $\text{cat}(X) \leq \dim_{CW}(X) + 1$.*

No entanto, veremos a seguir, que esta proposição é um corolário de um resultado mais geral.

2.1.3 Estimativa superior dimensão de cobertura

Definição 2.1.11. Seja $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ uma cobertura aberta, a *ordem da cobertura* \mathcal{U} é o menor inteiro k tal que existam $k + 1$ membros de \mathcal{U} com interseção não trivial, mas não $k + 2$. A *dimensão de cobertura* de um espaço X paracompacto (Hausdorff), é denotada por $\dim(X)$, é o menor inteiro k tal que qualquer cobertura tenha um refinamento de ordem k .

Observação 2.1.12. Em [26] página 72 encontramos um lema que afirma: “Para todo $\epsilon > 0$ existe uma cobertura aberta do n -disco D^n de ordem não maior que n ”. Assim, em um espaço X com estrutura de complexo CW, vale $\dim(X) = \dim_{CW}(X)$.

Exemplo 2.1.13. Este exemplo serve como ilustração para o entendimento da ideia por trás da demonstração do Lema 2.1.14 a seguir. O método consiste em partir de uma cobertura aberta de ordem n e por meio de um refinamento, construir uma cobertura categórica com n elementos.

Suponha $X := [0, 3] \subset \mathbb{R}$ intervalo fechado de \mathbb{R} , e considere a cobertura $\mathcal{U} := \{U_1, U_2, U_3\}$, sendo $U_1 := [0, 1 + \epsilon)$, $U_2 := (1 - \epsilon, 2 + \epsilon)$ e $U_3 := (2 - \epsilon, 3]$ onde $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$. Claramente \mathcal{U} é uma cobertura de X , observe que a ordem de \mathcal{U} é 1, pois $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ e $U_1 \cap U_2 \cap U_3 = \emptyset$. Vamos construir uma cobertura aberta de X que tenha exatamente 2 elementos, e cujas componentes conexas destes elementos são um refinamento da cobertura \mathcal{U} .

Considere $\{\phi_i\}$ uma partição da unidade subordinada a \mathcal{U} , então definimos os seguintes conjuntos, denotando $\Gamma := \{1, 2, 3\}$,

$$G_{1(i)} := \{t \in X \mid \phi_i(t) > 0 \text{ e } \phi_k(t) < \phi_i(t) \forall k \in \Gamma \setminus \{i\}\},$$

$$G_{2(i,j)} := \{t \in X \mid \phi_i(t) > 0 \text{ e } \phi_k(t) < \phi_i(t) \forall l \in \{i, j\}, k \in \Gamma \setminus \{i, j\}\}.$$

A Figura 9 apresenta como exemplo, uma visualização de uma partição da unidade subordinada a cobertura \mathcal{U} , e abaixo do gráfico os conjuntos da construção.

Observe que cada $G_{i\beta}$ está contido em algum U_i , logo $\mathcal{G}' := \{G_{1(1)}, G_{1(2)}, G_{1(3)}, G_{2(1,2)}, G_{2(2,3)}\}$ é um refinamento de \mathcal{U} . Além disso, $G_{1(1)}, G_{1(2)}, G_{1(3)}$ são disjuntos, podemos considerar

$$G_1 := \bigcup_{i=1}^3 G_{1(i)} \text{ e } G_2 := \bigcup_{\alpha \in \{(1,2), (2,3)\}} G_{2\alpha}$$

de modo que $\mathcal{G} := \{G_1, G_2\}$ é uma cobertura aberta de X .

Com este exemplo de construção em mente, podemos enunciar e demonstrar o seguinte lema que é atribuído a J. Milnor em [33]

Lema 2.1.14. *Seja $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ uma cobertura aberta de X de ordem n com uma partição da unidade subordinada. Então existe uma cobertura aberta de X que refina \mathcal{U} , sendo $\mathcal{G} = \{G_{i\beta}\}$, $i = 1, \dots, n + 1$ tal que $G_{i\beta} \cap G_{i\beta'} = \emptyset$ para $\beta \neq \beta'$.*

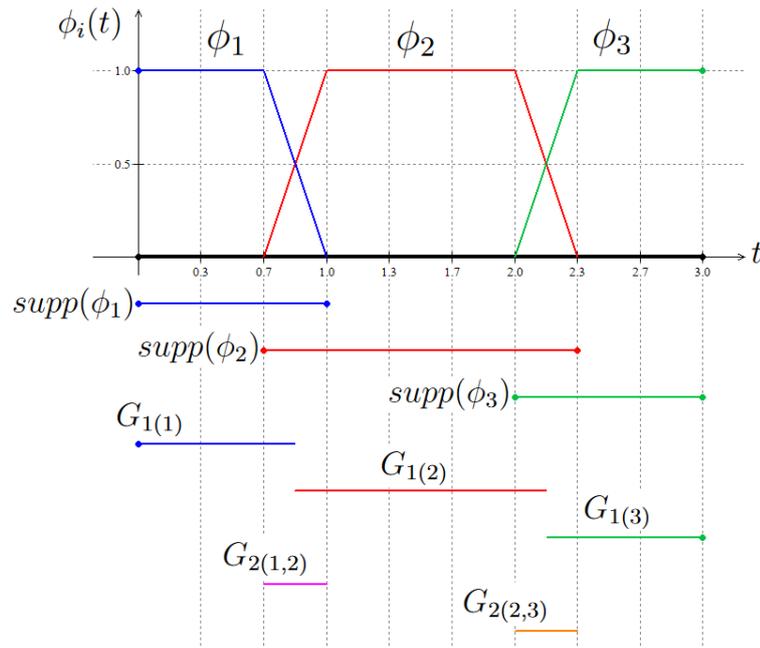


Figura 9 – Exemplo de refinamento para cobertura de $[0, 3]$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Demonstração. Suponha $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ uma cobertura aberta de X de ordem n , e $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ uma partição da unidade subordinada a cobertura \mathcal{U} . Isto é, $\text{supp}(\phi_\alpha) \subset U_\alpha$.

Como a ordem da cobertura é n , nenhum ponto $x \in X$ pertence a mais do que $n + 1$ dos U_α . Considere $\Gamma^i = \Gamma \times \cdots \times \Gamma$ com $i \in \{1, \dots, n + 1\}$. Dado $\beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_i) \in \Gamma^i$, defina, $P_\beta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_i\} \subset \Gamma$, e definimos

$$B_i := \Gamma^i / \sim \text{ sendo } \beta \sim \beta' \Leftrightarrow P_\beta = P_{\beta'},$$

$$G_\beta := \{x \in X \mid \phi_\alpha(x) > 0 \text{ e } \phi_{\alpha'}(x) < \phi_\alpha(x), \forall \alpha \in P_\beta, \forall \alpha' \notin P_\beta\},$$

$$G_{i\beta} := \bigcup_{\beta \in B_i} G_\beta.$$

Como em uma vizinhança qualquer de $x \in X$, somente uma quantidade finita de ϕ_α não são identicamente nulos, tem-se que cada G_β é aberto, conseqüentemente $G_{i\beta}$ é aberto.

Se $[\beta] \neq [\beta']$, então, pela segunda condição da definição de G_β segue que $G_{i\beta} \cap G_{i\beta'} = \emptyset$. Além disso,

$$G_{i\beta} \subset \bigcap_{\alpha \in P_\beta} \text{supp}(\phi_\alpha) \subset \bigcap_{\alpha \in P_\beta} U_\alpha,$$

logo, $\mathcal{G} = \{G_{i\beta}\}$ refina \mathcal{U} .

Dado $x \in X$, seja $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ todos índices tal que $\phi_{\alpha_i}(x) > 0$. Então $x \in \bigcap_{i=1}^m U_{\alpha_i}$ mas a ordem da cobertura \mathcal{U} é n , logo, $m \leq n$. Sem perda de generalidade, podemos considerar,

$$\phi_{\alpha_1}(x) = \phi_{\alpha_2}(x) = \cdots = \phi_{\alpha_j}(x) > \phi_{\alpha_{j+1}}(x) \geq \cdots \geq \phi_{\alpha_m}(x),$$

concluindo que $x \in G_{j(\alpha_1, \dots, \alpha_j)}$ e \mathcal{G} cobre X .

□

Corolário 2.1.15. *Se X é um espaço paracompacto com dimensão de cobertura n e $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ é qualquer cobertura de X , então existe uma cobertura aberta de X que refina \mathcal{U} , sendo $\mathcal{G} = \{G_{i\beta}\}$, $i = 1, \dots, n+1$ tal que $G_{i\beta} \cap G_{i\beta'} = \emptyset$ para $\beta \neq \beta'$.*

Demonstração. Como X é um espaço paracompacto (Definição 1.1.19) com $\dim(X) = n$, se \mathcal{U} é uma cobertura qualquer, podemos refinar \mathcal{U} encontrando uma cobertura \mathcal{V} de ordem n . Pela Proposição 1.1.24 podemos encontrar uma partição da unidade subordinada a \mathcal{V} . Aplicando o Lema 2.1.14 refinamos esta cobertura a \mathcal{G} , assim, \mathcal{G} é um refinamento de \mathcal{U} com as propriedades desejadas. □

Observação 2.1.16. Note que podemos aplicar o lema em uma cobertura finita $\mathcal{U} = U_1, \dots, U_n$ e construir uma cobertura $\mathcal{G} = G_{i\beta}$ que refina \mathcal{U} tal que $G_{i\beta} \cap G_{i\beta'} = \emptyset$ para $\beta \neq \beta'$. Pois neste caso a ordem de \mathcal{U} é menor ou igual a n .

Teorema 2.1.17. *Se X é um espaço paracompacto localmente contrátil e conexo por caminhos, então:*

$$\text{cat}(X) \leq \dim(X) + 1$$

Demonstração. Seja $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ uma cobertura categórica de X e suponha que $\dim(X) = k$. Como X é paracompacto, pelo Corolário 2.1.15, existe uma cobertura $\mathcal{G} = \{G_{i\beta}\}$ de X que refina \mathcal{U} com a propriedade que $G_{i\beta} \cap G_{i\beta'} = \emptyset$ quando $\beta \neq \beta'$, logo, podemos considerar uma cobertura \mathcal{V} de X definida por

$$\mathcal{V} := \left\{ G_i := \bigcup_{\beta \in B_i} G_{i\beta} \right\}_{i \in \{1, 2, \dots, k+1\}}$$

Como cada U_j é contrátil em X e cada componente de G_i está contida em algum U_j , então os G_i também são contráteis em X , pois X é conexo por caminhos. Deste modo, obtemos uma cobertura categórica de X composta por $k+1$ conjuntos, concluindo que

$$\text{cat}(X) \leq k + 1 = \dim(X) + 1. \quad \square$$

Exemplo 2.1.18.

1. No Exemplo 2.1.9 verificamos que $n+1 \leq \text{cat}(T^n)$. Pelo teorema precedente tem-se $\text{cat}(T^n) \leq \dim(T^n) + 1 = n+1$. Logo, a categoria de qualquer n -toro está determinada por $\text{cat}(T^n) = n+1$.
2. O plano projetivo real $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ tem anel de cohomologia $H^*(\mathbb{R}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}[\gamma]/(\gamma^{n+1})$ com $\deg(\gamma) = 1$, então $n+1 = \text{cup}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) + 1 \leq \text{cat}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) \leq \dim(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) + 1 = n+1$. Concluindo que $\text{cat}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) = n+1$.

3. No Exemplo 2.1.9, já vimos que $\text{cat}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = n + 1$, no entanto, utilizando apenas as estimativas que temos até este ponto, tem-se, $n + 1 \leq \text{cat}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \leq 2n + 1$. No entanto, veremos mais a frente a Proposição 2.1.10 que nos dá um refinamento desta estimativa.
4. Seja X um complexo CW tal que $n = \dim_{cw}(X)$, então $\text{cat}(X) \leq n + 1$.

2.1.4 Teorema de Lusternik-Schnirelmann

Segundo Oprea [31], o teorema a seguir foi publicado em 1930 por Lusternik e Schnirelmann. Como consequência obtemos o teorema do ponto fixo de Brouwer, e no final desta subseção mostramos que este Teorema 2.1.19 equivale ao teorema de Borsuk-Ulam.

Teorema 2.1.19 (Teorema de Lusternik-Schnirelmann). *Se S^n é coberto por conjuntos fechados (abertos) U_1, \dots, U_{n+1} , então pelo menos um U_i contém pontos antipodais.*

Demonstração. Suponha que nenhum dos conjuntos U_i tenha pontos antipodais. Considere $S^n \subset D^{n+1}$ e seja $A_i \subset D^{n+1}$ um subconjunto fechado definido por conectar segmentos radiais da origem para cada ponto de U_i , veja Figura 10. Observe que A_i é contrátil em D^{n+1} para a origem (No caso da cobertura aberta podemos considerar $A_i \cup B(0, \varepsilon)$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno).

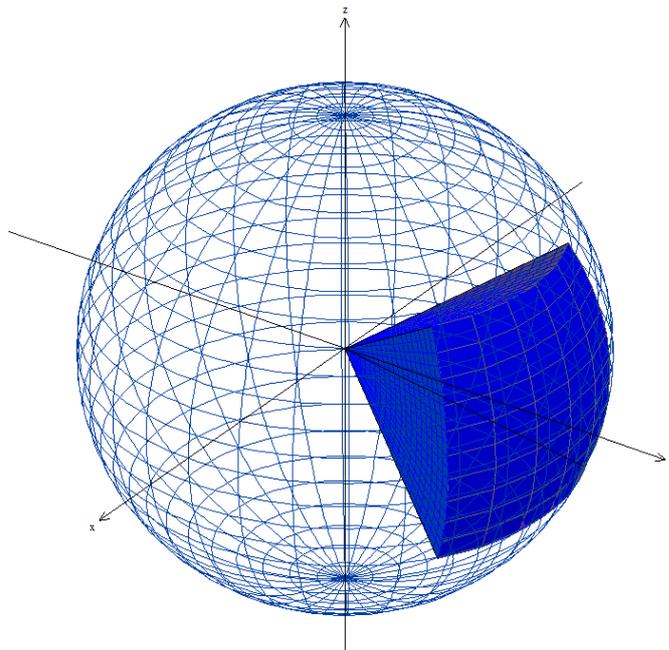


Figura 10 – Ilustração da definição dos conjuntos A_i no caso de S^2

Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma das formas de se representar $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n+1}$ é dada por

$$\mathbb{R}\mathbb{P}^{n+1} := D^{n+1} / \sim \text{ onde } x \sim y \Leftrightarrow x = -y \forall x, y \in \partial D^{n+1}.$$

Por hipótese, $A_i \hookrightarrow \mathbb{R}P^{n+1}$ é injetora, e A_i é contrátil a um ponto em $\mathbb{R}P^{n+1}$, pois não há dois pontos identificados em A_i . Assim, temos uma cobertura categórica de $\mathbb{R}P^{n+1}$ com $n + 1$ conjuntos, isto implica que $\text{cat}(\mathbb{R}P^{n+1}) \leq n + 1$, absurdo, pois sabemos que $\text{cat}(\mathbb{R}P^{n+1}) = n + 2$ (Veremos adiante que em espaços suficientemente regulares a definição de categoria utilizando cobertura fechada é equivalente a utilizar cobertura aberta).

□

Definição 2.1.20. Uma função $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$ é *antipodal* se $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in S^n$.

Teorema 2.1.21. Não existe função $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$ contínua e antipodal.

Demonstração. Suponha que existe $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$ função antipodal. Considere Δ^n um n -simplexo simétrico centrado na origem de \mathbb{R}^n , denote F_1, F_2, \dots, F_{n+1} as faces de Δ^n , defina U_i a projeção radial da face F_i em S^{n-1} . Desta forma, $\{U_i\}$ é uma cobertura de S^{n-1} com $n + 1$ conjuntos fechados. A Figura 11 apresenta uma visualização desta construção no caso de S^1 . Observe que nenhum U_i possui pontos antipodais.

Considere $G_i = f^{-1}(U_i)$, com $i = 1, 2, \dots, n + 1$ então $\{G_i\}$ é uma cobertura de S^n , pelo

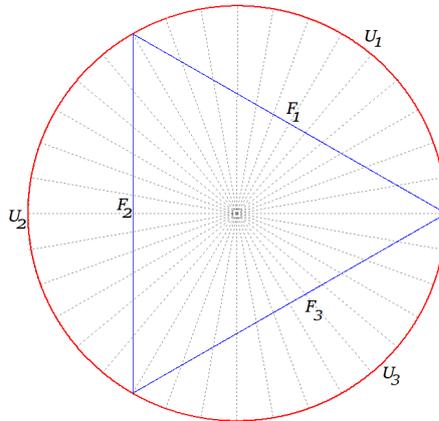


Figura 11 – Projeção radial de um 2-simplexo em S^1

Fonte: Elaborada pelo autor.

Teorema de Lusternik-Schnirelmann 2.1.19 pelo menos um G_i tem pontos antipodais. Digamos $x, -x \in G_i$, como supomos f antipodal temos $y := f(x) = -f(-x)$ e também $f(-x) = -f(x) = -y$, logo $y, -y \in F_i$, uma contradição. □

Teorema 2.1.22 (Teorema do ponto fixo de Brouwer). Toda função contínua $f : D^n \rightarrow D^n$ tem um ponto fixo.

Demonstração. Suponha que f não tenha pontos fixos, então defina

$$r(x) = \frac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|}.$$

Como $f(x) \neq x, \forall x \in D^n$, r é bem definida e contínua, tal que $r(x) = x$ se $x \in S^{n-1} = \partial D^n$, ou seja, r é uma retração. Defina $g : S^n \rightarrow S^{n-1}$ por

$$g(x_1, \dots, x_{n+1}) = \begin{cases} r(x_1, \dots, x_{n+1}) & \text{se } x_{n+1} \geq 0 \\ -r(-x_1, \dots, -x_{n+1}) & \text{se } x_{n+1} \leq 0. \end{cases}$$

Isto é, g realiza a retração de S^n ao equador $S^{n-1} \subset S^n$.

Assim $g(-x) = -g(x)$, contradizendo o Teorema 2.1.21. \square

Teorema 2.1.23 (Borsuk-Ulam). *Se $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função contínua, então existe $x \in S^n$ tal que $f(x) = f(-x)$.*

Demonstração. Suponha $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função contínua e que não existe $x \in S^n$ tal que $f(x) = f(-x)$, defina $g : S^n \rightarrow S^{n-1}$ por

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|},$$

pela hipótese inicial, g é bem definida e é contínua. Mas,

$$g(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{\|f(-x) - f(x)\|} = -\frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|} = -g(x)$$

contradizendo o Teorema 2.1.21. \square

Proposição 2.1.24. *São equivalentes:*

- (1) $\text{cat}(\mathbb{R}P^n) = n + 1$.
- (2) Teorema de Lusternik-Schnirelmann [2.1.19].
- (3) Não existe função contínua antipodal $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$ [2.1.21].
- (4) Teorema de Borsuk-Ulam [2.1.23].

Demonstração. Pelos resultados precedentes 2.1.19, 2.1.21 e 2.1.23 já temos que

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4)$$

mostremos que (4) \Rightarrow (2) e (2) \Rightarrow (1).

(4) \Rightarrow (2) Seja $\{U_1, \dots, U_{n+1}\}$ uma cobertura fechada de S^n e defina $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$f(x) := \left(\text{dist}(x, U_1), \text{dist}(x, U_2), \dots, \text{dist}(x, U_n) \right) \text{ onde } \text{dist}(x, U_i) := \inf_{u \in U_i} \|x - u\|.$$

Então f é contínua pois a função distância definida acima é contínua em espaços métricos. Pelo teorema de Borsuk-Ulam, existe $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $y = f(x) = f(-x)$. Se alguma componente de y for nula, digamos a i -ésima componente, então $-x, x \in U_i$. Se nenhuma componente de y for nula, então $-x, x \in U_{n+1}$, pois $-x, x \notin U_1, \dots, U_n$.

(2) \Rightarrow (1) Suponha $\text{cat}(\mathbb{RP}^n) = k$ com $k \leq n$ e seja U_1, \dots, U_k uma cobertura categórica de \mathbb{RP}^n . Como U_j são contráteis então o recobrimento $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ é trivial sobre os U_j , assim $\pi^{-1}(U_j) = V_j \cup -V_j \subset S^n$ é união disjunta, e os $-V_j$ são os pontos antipodais de V_j . O conjunto $W := S^n \setminus \bigcup_{j=1}^k V_j$ é fechado, pois cada V_j é aberto. Observe que W não contém pontos antipodais. De fato, os conjuntos V_j não tem pontos antipodais. Dado $x \in W$, então x pertence a algum $-V_j$, logo $-x \in V_j$, portanto $-x \notin W$, concluindo que W não contém pontos antipodais.

Dado $\varepsilon > 0$ definimos $W_\varepsilon := \{x \in S^n : \text{dist}(x, W) < \varepsilon\}$, para ε suficientemente pequeno W_ε não contém pontos antipodais. De fato, suponha que não, então podemos considerar $\varepsilon_i \rightarrow 0$ com $x_i, -x_i \in W_{\varepsilon_i}$. Como S^n é compacto, existe subsequência convergente $x_{i_k} \rightarrow y$, logo $\text{dist}(x_{i_k}, W) < \varepsilon_{i_k} \Rightarrow \text{dist}(x_{i_k}, W) \rightarrow 0$, e pela continuidade de $\text{dist}(\cdot, W) : S^n \rightarrow \mathbb{R}$, segue que $\text{dist}(y, W) = 0$. Como W é fechado, $y \in W$. Por outro lado, também vale $-x_{i_k} \rightarrow -y$ com $\text{dist}(y, W) = 0$, pois a função antipodal é contínua. Logo, $-y \in W$, contradizendo o fato de que W não contém pontos antipodais.

Assim, escolhendo ε suficiente pequeno, obtemos que $\{V_1, \dots, V_k, W_\varepsilon\}$ é uma cobertura aberta de S^n com $k+1 \leq n+1$ conjuntos, tal que nenhum desses conjuntos contém pontos antipodais, isto é, uma cobertura com $n+1$ conjuntos (completando com conjuntos vazios se necessário) de S^n , contradizendo o teorema de Lusternik-Schnirelmann. \square

2.1.5 Propriedades da categoria LS

Nesta subseção definimos a categoria utilizando cobertura fechada, segundo [5], a categoria de Lusternik-Schnirelmann definida com cobertura aberta é mais adequada ao estudo de propriedades homotópicas, no entanto, a categoria LS definida utilizando cobertura fechada é preferível para o estudo de propriedades analíticas.

Definição 2.1.25. A categoria de Lusternik-Schnirelmann $\text{cat}(X) = n$ de um espaço topológico X é o menor inteiro n tal que existe uma cobertura fechada $\{U_1, \dots, U_n\}$ de X sendo que cada U_i é contrátil a um ponto no espaço X .

Lema 2.1.26 ([12]). *Se X é ANR (Definição 1.1.17), então um subconjunto fechado $A \subset X$ é contrátil em X se, e somente se, existe uma vizinhança aberta $U \supset A$ que é contrátil em X .*

Demonstração. Defina $Q := (X \times \{0\}) \cup (A \times I) \cup (X \times \{1\})$, fixado $x_0 \in X$ e supondo $\varphi : A \times I \rightarrow X$ uma contração de A em x_0 . Defina $H : Q \rightarrow X$ por

$$\begin{cases} H(x, 0) = x_0, \\ H(a, t) = \varphi(a, t) \quad \forall a \in A, \\ H(x, 1) = x. \end{cases}$$

Note que Q é fechado em $X \times I$, pois é união de fechados. Pela Proposição 1.1.18 $X \times I$ é ANR, então existe uma extensão de H , digamos $K : Z \rightarrow X$, onde Z é uma vizinhança aberta de Q . A vizinhança Z , com a topologia induzida pela topologia do produto $X \times I$ é composta localmente de vizinhanças produto da forma $W \times (r, s) \subset X \times I$, então, para qualquer $a \in A$, $a \times I$ é coberto por uma coleção destes abertos. Mas I é compacto, então existe uma subcobertura finita, $\mathcal{W} = \{W_i \times (r_i, s_i)\}$. Considere $W := \bigcap W_i$ e $V_a := W \times I \subset Z$. Definimos então

$$U = \bigcup_{a \in A} V_a.$$

Logo, $A \subset U$ e $U \times I \subset Z$. Com efeito, se U for uma vizinhança aberta qualquer de A tal que $U \times I \subset Z$, então K é uma contração de U para um ponto em X . \square

Observação 2.1.27. Segundo Palais [33], toda variedade de Banach paracompacta é ANR.

Notação 2.1.28. Na proposição a seguir utilizaremos a notação cat^{op} para indicar categoria LS com cobertura aberta e cat^{cl} para indicar categoria LS com cobertura fechada.

Proposição 2.1.29. *Se X é um espaço normal ANR, então $\text{cat}^{op}(X) = \text{cat}^{cl}(X)$. Além disso, se $A \subset X$ é fechado em X , então $\text{cat}_X^{op}(A) = \text{cat}_X^{cl}(A)$.*

Demonstração. Suponha $A \subset X$ subconjunto fechado, mostremos que

$$\text{cat}_X^{cl}(A) \leq \text{cat}_X^{op}(A).$$

Suponha $\text{cat}_X^{op}(A) = k$ e seja $\{U_1, \dots, U_k\}$ uma cobertura categórica aberta. Note que $\bigcup_{i=1}^k U_i$ é aberto em X , e $X \setminus \bigcup_{i=1}^k U_i$ é fechado, como X é normal, podemos obter uma vizinhança aberta W de $X \setminus \bigcup_{i=1}^k U_i$ tal que $A \cap W = \emptyset$ e assim $\{U_1, \dots, U_k, W\}$ é uma cobertura de X . Pela Proposição 1.1.16, existe um refinamento $\{V_1, \dots, V_k, \widetilde{W}\}$ com $\overline{V_i} \subset U_i$ e $\widetilde{W} \subset W$. Com efeito, $A \subset \bigcup_{i=1}^k \overline{V_i}$ e cada $\overline{V_i}$ é contrátil, pois U_i é. Concluindo que $\text{cat}_X^{cl}(A) \leq \text{cat}_X^{op}(A)$.

Verifiquemos agora que,

$$\text{cat}_X^{op}(A) \leq \text{cat}_X^{cl}(A).$$

Suponha $\text{cat}_X^{cl}(A) = n$ e que $\{K_1, \dots, K_n\}$ é uma cobertura fechada categórica de A em X . Como X é ANR e A é fechado em X , pelo Lema 2.1.26 existe vizinhança contrátil U_i para cada K_i , assim, $\{U_1, \dots, U_n\}$ é uma cobertura aberta categórica de A em X , de modo que $\text{cat}_X^{op}(A) \leq \text{cat}_X^{cl}(A)$.

Assim, obtemos $\text{cat}_X^{op}(A) = \text{cat}_X^{cl}(A)$. Para obter a primeira parte do enunciado suponha $A = X$, logo, $\text{cat}^{op}(X) = \text{cat}^{cl}(X)$. \square

Proposição 2.1.30. *Propriedades elementares da categoria de Lusternik-Schnirelmann.*

1. (Monotonicidade) Se $A \subset B$ com $A, B \subset X$, então $\text{cat}_X(A) \leq \text{cat}_X(B)$.
2. (Subaditividade) Se $A, B \subset X$, então $\text{cat}_X(A \cup B) \leq \text{cat}_X(A) + \text{cat}_X(B)$.

3. (Monotonicidade por deformação) Se A é subconjunto aberto(fechado) em X , B subconjunto de X e $\phi : A \times I \rightarrow X$ uma deformação de A em X tal que $\phi_1(A) \subset B$, então $\text{cat}_X(A) \leq \text{cat}_X(B)$.
4. (Continuidade) Se X é um espaço normal ANR e $A \subset X$, então existe uma vizinhança aberta $V \supset A$ tal que $\text{cat}_X^{cl}(V) = \text{cat}_X^{cl}(\bar{V}) = \text{cat}_X^{cl}(A)$.

Demonstração.

- (1) Como $A \subset B$, uma cobertura categórica de B também é uma cobertura categórica de A , logo $\text{cat}_X(A) \leq \text{cat}_X(B)$.
- (2) Suponha $\{A_1, \dots, A_m\}$ e $\{B_1, \dots, B_n\}$ coberturas categóricas de A e B respectivamente, então $\{A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_n\}$ é uma cobertura categórica de $A \cup B$.
- (3) Suponha que A é aberto(fechado) em X e $\text{cat}_X(\phi_1(A)) = k$. Seja $\{A_1, \dots, A_k\}$ uma cobertura categórica aberta(fechada) de $\phi_1(A)$. Defina $U_i = \phi_1^{-1}(A_i)$, observe que cada U_i é aberto(fechado) em X , pois $\phi_1 : A \rightarrow X$ é contínua. Além disso, cada U_i é contrátil em X pois ϕ é uma deformação em X . Assim, $\text{cat}_X(A) \leq k$. Pela propriedade da monotonicidade (1), $k \leq \text{cat}_X(B)$, logo, $\text{cat}_X(A) \leq \text{cat}_X(B)$.
- (4) Suponha $\text{cat}_X^{cl}(A) = k$ e $\{A_1, \dots, A_k\}$ uma cobertura categórica fechada de A . Pelo Lema 2.1.26 cada A_i tem uma vizinhança aberta U_i que é contrátil em X . Defina,

$$U := \bigcup_{i=1}^k U_i,$$

e observe que $A \subset \bar{A} \subset \bigcup A_i \subset U$. Como, X é normal, podemos separar os subconjuntos fechados \bar{A} e $X \setminus U$ com vizinhanças abertas S e W respectivamente. Defina $\mathcal{U} := \{U_1, \dots, U_k, W\}$, \mathcal{U} é uma cobertura de X . Novamente por X ser normal, pela Proposição 1.1.16, existe um refinamento de \mathcal{U} , digamos, $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_k, \tilde{W}\}$ tal que $\bar{V}_i \subset U_i$ para todo $i = 1, \dots, k$. Seja $V := \bigcup V_i$, logo, $A \subset V \subset \bar{V}$, e como cada $\bar{V}_i \subset U_i$, tem-se que \bar{V}_i é contrátil em X . Consequentemente,

$$\text{cat}_X^{cl}(V) = \text{cat}_X^{cl}(\bar{V}) \leq k = \text{cat}_X^{cl}(A).$$

Mas pela monotonicidade (1), como $A \subset V$, segue que $\text{cat}_X^{cl}(\bar{V}) = \text{cat}_X^{cl}(A)$.

□

Observação 2.1.31. A propriedade (4) (Continuidade) é trivial no caso da categoria aberta. Se $\{U_1, \dots, U_k\}$ é uma cobertura categórica de A em X , isto é, $\text{cat}_X^{op}(A) = k$, então pela monotonicidade $A \subset U$ temos $\text{cat}_X^{op}(A) \leq \text{cat}_X^{op}(U)$ onde $U = \bigcup U_i$ é aberto de X , como cada U_i é contrátil a um ponto em X , segue que $\text{cat}_X^{op}(A) = \text{cat}_X^{op}(U)$.

2.1.6 Cones, Produtos e fibrações

Nesta subseção apresentamos alguns resultados que nos permitem estimar a categoria de espaços cone, produto cartesianos e fibrações.

O teorema a seguir nos fornece mais uma estimativa superior para a categoria, no caso que o espaço topológico é construído como cone da função f (veja Definição 1.1.53).

Teorema 2.1.32. *Se $f : X \rightarrow Y$ é uma função contínua, dado $C_f := Y \cup_f C X$ o espaço cone da função f , então*

$$\text{cat}(C_f) \leq \text{cat}(Y) + 1.$$

Demonstração. Seja $A = Y \cup_f B$, onde $B \subset C X$ é definido por

$$B := \left\{ (x, t) \in C X : t < \frac{2}{3} \right\}.$$

Como a identificação em $X \times I$ que gera $C X$ ocorre em $t = 1$, segue que A tem o mesmo tipo de homotopia que $Y \cup_f (X \times I)$. Como os pontos de X estão identificados em Y , Y é um retrato por deformação de A , logo $A \simeq Y$. Como a categoria é invariante por homotopia, temos $\text{cat}(A) = \text{cat}(Y)$. Considere $C := \{(x, t) \in C X : t > 1/3\} \subset C X$, observe que $C \simeq C X$ é contrátil. Como $C_f = A \cup C$, união de abertos, pela subaditividade (Proposição 2.1.30), obtemos

$$\text{cat}(C_f) \leq \text{cat}(A) + \text{cat}(C) = \text{cat}(Y) + 1.$$

□

Exemplo 2.1.33. O espaço projetivo complexo $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, pode ser construído por colar um disco D^{2n} a $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$, isto é, $\mathbb{C}\mathbb{P}^n = \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1} \cup_f D^{2n}$, onde $f : \partial D^{2n} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ é dada pela projeção ao quociente $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1} = S^{2n-1} / \sim$, sendo $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$, e a relação $(z_1, \dots, z_n) \sim (e^{i\theta} z_1, \dots, e^{i\theta} z_n)$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$. Observe que $D^{2n} \cong C S^{2n-1}$, assim podemos aplicar o teorema precedente e concluir que

$$\text{cat}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \leq \text{cat}(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}) + 1.$$

além disso, lembrando que $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \cong S^2$, obtemos:

$$\begin{aligned} \text{cat}(\mathbb{C}\mathbb{P}^1) &= \text{cat}(S^2) = 2, \\ \text{cat}(\mathbb{C}\mathbb{P}^2) &\leq \text{cat}(\mathbb{C}\mathbb{P}^1) + 1 = 2 + 1 = 3, \\ \text{cat}(\mathbb{C}\mathbb{P}^3) &\leq \text{cat}(\mathbb{C}\mathbb{P}^2) + 1 = 3 + 1 = 4, \\ &\vdots \\ \text{cat}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) &\leq \text{cat}(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}) + 1 = n + 1. \end{aligned}$$

Utilizando a estimativa inferior do *cup length* (Teorema 2.1.8), como no Exemplo 2.1.9, concluímos que $\text{cat}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = n + 1$.

Observação 2.1.34. Em [5] encontramos o exemplo acima no caso geral, onde X é um complexo CW simplesmente conexo com $H_n(X) \neq 0$ e $H_q(X) = 0$ para todo $q > n$. Neste caso, denotando por $\mathcal{H}(X)$ o número de graus positivos onde $H_*(X)$ é não trivial, pelo Teorema 2.1.32 segue que $\text{cat}(X) \leq \mathcal{H}(X)$.

Na verdade, o Teorema 2.1.32 é um caso particular do teorema a seguir. Onde $D(f, g)$ é o cilindro duplo de f, g segundo a Definição 1.1.66.

Teorema 2.1.35. *Se $f : W \rightarrow X$ e $g : W \rightarrow Y$ são funções contínuas, então*

$$\text{cat}(D(f, g)) \leq \text{cat}(X) + \text{cat}(Y) + 1.$$

Demonstração. Sejam $A = X \cup W \times [0, 2/3]$ e $B = Y \cup (1/3, 1]$. Note que A e B são conjuntos abertos em D e $A \simeq X$, $B \simeq Y$. Análogo ao Teorema 2.1.32, temos

$$\text{cat}(D) \leq \text{cat}(A) + \text{cat}(B) + 1 = \text{cat}(X) + \text{cat}(Y) + 1.$$

□

Espaços produtos são construções extremamente comuns em diversas aplicações, a seguir apresentamos estimativas para estes tipos de espaços, a referência principal destas estimativas é [12].

Proposição 2.1.36. *Sejam X e Y espaços topológicos com $\text{cat}(X), \text{cat}(Y) < \infty$, então*

$$\max\{\text{cat}(X), \text{cat}(Y)\} \leq \text{cat}(X \times Y).$$

Demonstração. É imediato por consequência da monotonicidade (item (1) da Proposição 2.1.30) pois fixado um $(x, y) \in X \times Y$ temos que $X \times \{y\} \cong X$ e $\{x\} \times Y \cong Y$. □

Definição 2.1.37. Seja X um espaço topológico, chamamos de *sequência categórica de comprimento k* um sequência de conjuntos abertos $A_0 = \emptyset \subset A_1 \subset \dots \subset A_k = X$, tal que para $i = 1, \dots, k$ cada $A_i \setminus A_{i-1}$ esta contido em um aberto U_i que é contrátil em X .

Lema 2.1.38. *Um espaço X conexo por caminhos tem uma sequência categórica de comprimento k se, e somente se $\text{cat}(X) \leq k$.*

Demonstração. Suponha que X tem uma sequência categórica de comprimento k . Como a sequência começa com \emptyset e termina com X , os U_i formam uma cobertura categórica de X com k conjuntos, tais que $A_i \setminus A_{i-1} \subset U_i$.

Reciprocamente, suponha $\text{cat}(X) \leq k$, seja U_1, \dots, U_k uma cobertura categórica de X .

Defina

$$V_m = \bigcup_{j=1}^m U_j,$$

assim $V_i \setminus V_{i-1} \subset U_i$, onde U_i é um aberto contrátil em X . Logo, V_m forma uma sequência categórica de comprimento k . □

Teorema 2.1.39. *Suponha X e Y espaços conexos por caminhos e tal que $X \times Y$ é completamente normal. Então*

$$\text{cat}(X \times Y) \leq \text{cat}(X) + \text{cat}(Y) - 1.$$

Demonstração. Suponha $\text{cat}(X) = n$ e $\text{cat}(Y) = m$ pelo lema anterior existem sequências categóricas de comprimentos n e m respectivamente, digamos $A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n$ e $B_0 \subset B_1 \subset \cdots \subset B_m$. Denotamos os conjuntos abertos categóricos que contém as diferenças por

$$A_i \setminus A_{i-1} \subset U_i, \quad B_j \setminus B_{j-1} \subset V_j.$$

Definimos os seguintes subconjuntos do produto $X \times Y$

$$Q_r = \bigcup_{j=1}^r A_j \times B_{r+1-j},$$

sendo $r \geq 1$, $A_j = \emptyset$ se $j > n$ e $B_t = \emptyset$ se $t > m$. Observe que

$$Q_{n+m} = A_1 \times B_{n+m} \cup A_2 \times B_{n+m-1} \cup \cdots \cup A_n \times B_{m+1} \cup A_{n+1} \times B_m \cup \cdots \cup A_{n+m} \times B_1.$$

Logo $Q_{n+m} = \emptyset$, por isso, consideraremos r apenas até $n + m - 1$, neste caso temos $Q_{n+m-1} = A_n \times B_m = X \times Y$. Definindo $Q_0 = \emptyset$, obtemos uma sequência crescente

$$Q_0 \subset Q_1 \subset \cdots \subset Q_{n+m-1} = X \times Y.$$

Por observar o padrão desta construção, isto é,

$$\begin{aligned} Q_1 &= A_1 \times B_1 \\ Q_2 &= A_1 \times B_2 \cup A_2 \times B_1 \\ Q_3 &= A_1 \times B_3 \cup A_2 \times B_2 \cup A_3 \times B_1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

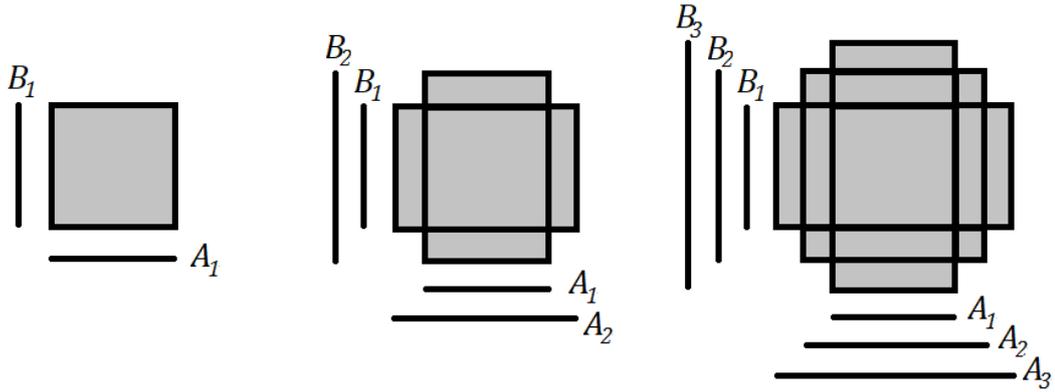
veja a Figura 12 para uma visualização esquemática destes conjuntos.

Notamos que,

$$\begin{aligned} Q_1 &= A_1 \times B_1 \\ Q_2 &= Q_1 \cup (A_1 \setminus A_0) \times (B_2 \setminus B_1) \cup (A_2 \setminus A_1) \times (B_1 \setminus B_0) \\ Q_3 &= Q_2 \cup (A_1 \setminus A_0) \times (B_3 \setminus B_2) \cup (A_2 \setminus A_1) \times (B_2 \setminus B_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \times (B_1 \setminus B_0) \\ &\vdots \end{aligned}$$

No caso geral, podemos escrever,

$$Q_r = Q_{r-1} \cup \bigcup_{j=1}^r (A_j \setminus A_{j-1}) \times (B_{r+1-j} \setminus B_{r-j}).$$

Figura 12 – Diagrama de visualização dos três primeiros Q_r .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Isto é,

$$Q_r \setminus Q_{r-1} = \bigcup_{j=1}^r (A_j \setminus A_{j-1}) \times (B_{r+1-j} \setminus B_{r-j})$$

Além disso, $(A_j \setminus A_{j-1}) \times (B_{r+1-j} \setminus B_{r-j}) \subset U_j \times V_{r+1-j}$ que é um aberto categórico. Entretanto, podem existir interseções ao longo destes conjuntos quando fixamos r e variamos o j . Por hipótese $X \times Y$ é completamente normal (Definição 1.1.13), como $r + 1 - j$ decresce quando j cresce e A e B são conjuntos encaixados, temos

$$\overline{(A_j \setminus A_{j-1}) \times (B_{r+1-j} \setminus B_{r-j})} \cap \overline{(A_k \setminus A_{k-1}) \times (B_{r+1-k} \setminus B_{r-k})} = \emptyset,$$

$$(A_j \setminus A_{j-1}) \times (B_{r+1-j} \setminus B_{r-j}) \cap \overline{(A_k \setminus A_{k-1}) \times (B_{r+1-k} \setminus B_{r-k})} = \emptyset,$$

para $k \neq j$. Assim, podemos obter vizinhanças abertas que separam os conjuntos $(A_j \setminus A_{j-1}) \times (B_{r+1-j} \setminus B_{r-j})$ e $(A_k \setminus A_{k-1}) \times (B_{r+1-k} \setminus B_{r-k})$. Interceptando estas vizinhanças com $U_j \times V_{r+1-j}$ e $U_k \times V_{r+1-k}$, obtemos abertos categóricos que são vizinhanças de $(A_j \setminus A_{j-1}) \times (B_{r+1-j} \setminus B_{r-j})$ e $(A_k \setminus A_{k-1}) \times (B_{r+1-k} \setminus B_{r-k})$ para $j \neq k$. Logo, as uniões

$$(A_j \setminus A_{j-1}) \times (B_{r+1-j} \setminus B_{r-j}) \cup (A_k \setminus A_{k-1}) \times (B_{r+1-k} \setminus B_{r-k})$$

estão contidas em abertos contráteis. Este procedimento pode ser iterado um número finito de vezes para mostrar que $Q_r \setminus Q_{r-1}$ está contido em um aberto contrátil. Concluindo que sequência dos Q_r é categórica de comprimento $m + n - 1$, segue do Lema 2.1.38 que $\text{cat}(X \times Y) \leq n + m - 1 = \text{cat}(X) + \text{cat}(Y) - 1$. \square

Observação 2.1.40. O Teorema 2.1.39 também vale, removendo-se a hipótese de $X \times Y$ ser completamente normal, e em seu lugar, assumindo-se que X e Y sejam espaços normais. A demonstração é realizada utilizando a definição de i -categoria LS (Veja o exercício 1.12 em [5] página 41), esta, é definida da seguinte forma: $\text{cat}^i(X) \leq n$ se existe $\{U_1, \dots, U_n\}$ cobertura categórica de X , tal que, para qualquer $x \in X$ existem pelo menos i elementos desta cobertura que contém o x . Quando X é um espaço normal, vale $\text{cat}^i(X) \leq$

$\text{cat}(X) + i - 1$ e dada uma i -cobertura categórica podemos construir uma $(i + 1)$ -cobertura categórica, veja [23] página 83. Com efeito, podemos escolher $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_{\text{cat}(Y)}\}$ uma $\text{cat}(Y)$ -cobertura categórica de X e $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_{\text{cat}(X)}\}$ uma $\text{cat}(X)$ -cobertura categórica de Y . Os produtos $U_j \times V_j$ com $j \in \{1, 2, \dots, \text{cat}(X) + \text{cat}(Y) - 1\}$ formam uma cobertura categórica de $X \times Y$, pois, o produto de subconjuntos contráteis é contrátil, e para cada $(x, y) \in X \times Y$ existem $\text{cat}(Y)$ elementos de \mathcal{U} que contém x , e existem $\text{cat}(X)$ elementos de \mathcal{V} que contém y , de modo que deve existir um elemento $j \in \{1, 2, \dots, \text{cat}(X) + \text{cat}(Y) - 1\}$ tal que $(x, y) \in U_j \times V_j$.

Exemplo 2.1.41. Sabemos que $\text{cat}(S^n) = 2$ e que $\text{cat}(T^m) = m + 1$. Agora, podemos considerar $S^n \times T^m$, graças a Proposição 2.1.36 e ao Teorema 2.1.39 temos

$$m + 1 = \max\{\text{cat}(S^n), \text{cat}(T^m)\} \leq \text{cat}(S^n \times T^m) \leq \text{cat}(S^n) + \text{cat}(T^m) - 1 = m + 2.$$

Supondo n é ímpar, pelo Teorema de Künneth 1.2.54, obtemos

$$H^*(S^n \times T^m, R) \cong H^*(S^n, R) \otimes_R H^*(T^m, R) = \Lambda_R[x] \otimes_R \Lambda_R[y_1, \dots, y_m] \cong \Lambda_R[x, y_1, \dots, y_m]$$

com $\deg(x) = n$ e $\deg(y_i) = 1$, logo, $\text{cup}_R(S^n \times T^m) = m + 1$, pela a estimativa do cup length 2.1.8, concluímos que $\text{cat}(S^n \times T^m) = m + 2$.

Exemplo 2.1.42. Pelo item (5) do Exemplo 2.1.9 sabemos que $\text{cat}(SU(n)) = n$, como $\text{cup}_{\mathbb{Z}}(U(n)) = n$ pelo Teorema 2.1.8 temos $n + 1 \leq \text{cat}(U(n))$. Mostremos agora que $U(n)$ é homeomorfo a $S^1 \times SU(n)$ (na verdade, é um difeomorfismo).

Denotemos $D(a_1, \dots, a_n)$ a matriz diagonal quadrada de dimensão n , onde a_1, \dots, a_n são os elementos da diagonal. Definimos a função $f : U(n) \rightarrow S^1 \times SU(n)$ dada por

$$f(X) := \left(\det(X), D(\det(X)^{-1}, 1, \dots, 1)X \right).$$

Como $X \in U(n)$, $\det(X) = e^{2\pi i\theta}$ com $\theta \in [0, 2\pi]$, isto é, $\det(X) \in S^1 \subset \mathbb{C}$. Observe também que

$$\det \left(D(\det(X)^{-1}, 1, \dots, 1)X \right) = \det(D(\det(X)^{-1}, 1, \dots, 1)) \det(X) = e^{-2\pi i\theta} e^{2\pi i\theta} = 1$$

logo, f é bem definida, e como a função determinante é contínua (e suave), f é contínua (e suave). Verifiquemos que a inversa da f é a função $g : S^1 \times SU(n) \rightarrow U(n)$ definida por

$$g(z, A) := D(z, 1, \dots, 1)A$$

observe que g é bem definida, pois $D(z, 1, \dots, 1)(D(z, 1, \dots, 1))^* = I_n$ e como $A \in SU(n) \subset U(n)$, segue que $g(z, A) \in U(n)$. Verificamos então que

$$\begin{aligned} g \circ f(A) &= g \left(\det(A), D(\det(A)^{-1}, 1, \dots, 1)A \right) \\ &= D(\det(A), 1, \dots, 1)D(\det(A)^{-1}, 1, \dots, 1)A \\ &= A \end{aligned}$$

isto é $g \circ f = I_n$, e observando que

$$\det(D(z, 1, \dots, 1)A) = z \det(A) = z$$

temos

$$\begin{aligned} f \circ g(z, A) &= f(D(z, 1, \dots, 1)A) \\ &= (z, D(z^{-1}, 1, \dots, 1)D(z, 1, \dots, 1)A) \\ &= (z, A) \end{aligned}$$

concluindo que $f \circ g = I_n$, ou seja, f é um homeomorfismo e $U(n) \cong S^1 \times SU(n)$. Pelo Teorema 2.1.39 temos

$$\text{cat}(U(n)) \leq \text{cat}(S^1) + \text{cat}(SU(n)) - 1 = 2 + n - 1 = n + 1$$

junto com a estimativa do *cup length* 2.1.8 concluímos que $\text{cat}(U(n)) = n + 1$.

Observação 2.1.43. A desigualdade dada pelo Teorema 2.1.39 pode ser estrita, no entanto, a construção de um exemplo não é trivial, ao leitor interessado recomendamos ver o exemplo 1.39 em [5].

Conforme veremos nas seções seguintes, as fibrações possuem relações importantes com a categoria de Lusternik-Schnirelmann. O teorema a seguir, relaciona as categorias do espaço total com a fibra e o espaço base.

Teorema 2.1.44. *Seja $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ uma fibração. Então*

$$\text{cat}(E) \leq \text{cat}(F) \text{cat}(B).$$

Demonstração. Seja $\text{cat}(F) = n$ com cobertura categórica V_1, \dots, V_n e seja $\text{cat}(B) = m$ com cobertura categórica U_1, \dots, U_m . Considere o diagrama obtido pela propriedade de levantamento de homotopia aplicado na homotopia de contração para um fixado U_j :

$$\begin{array}{ccc} & & F \\ & & \downarrow i \\ p^{-1}(U_j) \times 0 & \xrightarrow{\epsilon} & E \\ \downarrow & \nearrow G & \downarrow p \\ p^{-1}(U_j) \times I & \xrightarrow{H} & B \\ p \times \text{id} \downarrow & \nearrow \bar{H} & \\ U_j \times I & & \end{array}$$

onde $H_0 = H(x, 0) = p(x)$, $H_1 = H(x, 1) = *$, pois U_j é contrátil em B via homotopia \overline{H} e $H = \overline{H} \circ (p \times id)$. Como $H_1(x) = *$ e $p \circ G_1 = H_1 = *$, então $G_1(p^{-1}(U_j)) \subset F$. Defina $W_{ij} := G_1^{-1}(V_i) \subset p^{-1}(U_j)$ e observe que W_{1j}, \dots, W_{mj} cobre $p^{-1}(U_j)$ pois a imagem de G_1 está em F . Podemos verificar explicitamente que cada W_{ij} é contrátil em E definindo $K : W_{ij} \times I \rightarrow E$:

$$K(w, t) := \begin{cases} G(w, 2t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ L(G_1(w), 2t - 1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

onde $L : V_i \times I \rightarrow F$ é a homotopia que realiza a contração do aberto categórico V_i em F , isto é, $L(x, 0) = x$ e $L(x, 1) = *$. Como $\{U_j\}$ cobre B , $\{p^{-1}(U_j)\}$ cobre E , então $\{W_{ij} : i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n\}$ é uma cobertura categórica de E tendo nm membros. \square

Exemplo 2.1.45. Considere a fibração de Hopf $S^3 \rightarrow S^7 \rightarrow S^4$. Pela ação de S^1 na fibra e no espaço total, obtemos a fibração $S^2 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^3 \rightarrow S^4$. Sabemos que $\text{cat}(S^2) = 2 = \text{cat}(S^4)$. Pelo Teorema 2.1.44 temos

$$\text{cat}(\mathbb{C}\mathbb{P}^3) \leq \text{cat}(S^2) \text{cat}(S^4) = 2 \cdot 2 = 4$$

e, utilizando a estimativa inferior do *cup length* 2.1.8, concluímos que $\text{cat}(\mathbb{C}\mathbb{P}^3) = 4$.

Existe uma versão do Teorema 2.1.44 para espaços com ponto base, que fornece uma desigualdade interessante e útil para categoria LS. Relembre que um espaço X é dito ter *ponto base não degenerado* x_0 se a inclusão $x_0 \hookrightarrow X$ é uma cofibração. A demonstração da proposição a seguir, é apresentada em detalhes em [5].

Proposição 2.1.46. Se $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ é uma fibração, E for conexo por caminhos e B um espaço normal com ponto base não degenerado b_0 , então

$$\text{cat}(E/F) \leq \text{cat}(B)$$

2.2 Teorema de Lusternik-Schnirelmann para pontos críticos

A motivação inicial de Lusternik e Schnirelmann para a introdução da categoria foi o estudo dos pontos críticos de funções suaves em variedades. Nesta seção, apresentamos a teoria necessária para demonstrar o teorema de Lusternik-Schnirelmann para pontos críticos. No final da seção, discutimos algumas versões deste teorema encontradas na literatura. As principais bibliografias utilizadas nesta seção são [5], seção 19 de [7] e seção 9 de [32].

2.2.1 Preliminares

Nesta seção, exceto quando mencionado o contrário, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave e M é uma variedade suave de Hilbert paracompacta, podendo ser de dimensão finita ou infinita. Assumimos que M e f satisfazem as seguintes propriedades [32]:

- (A) (Completeness) M é uma variedade Riemanniana completa.
- (B) (Limitada inferior) A função f é limitada inferiormente em M . Isto é, se b é a menor cota inferior de f então $b > -\infty$.
- (C) (Condição C) Se (x_n) é qualquer sequência em M para a qual $|f(x_n)|$ é limitada e tal que $\|df_{x_n}\| \rightarrow 0$, segue que (x_n) tem uma subsequência convergente, $x_{n_k} \rightarrow p$. (Por continuidade $\|df_p\| = 0$, logo p é um ponto crítico de f)

Observação 2.2.1. Se M for compacta então com qualquer escolha de métrica Riemanniana para M , temos as três condições satisfeitas.

Notação 2.2.2. Denotamos o conjunto dos pontos críticos de f por

$$K(f) := \{x \in M \mid df_x = 0\}.$$

Seja $c \in \mathbb{R}$ um valor crítico de f , denotamos o nível crítico em c por

$$K_c(f) := K(f) \cap f^{-1}(c).$$

Denotamos $M_c(f)$ o conjunto definido por

$$M_c(f) := f^{-1}((-\infty, c]).$$

Observação 2.2.3. É imediato pelo teorema da função inversa que para um valor regular b , $M_b(f)$ é uma subvariedade co-dimensional de M , sendo $\partial M_b(f) = f^{-1}(b)$.

Lema 2.2.4. *A restrição de f para $K(f)$ é própria (Definição 1.1.28). Em particular, para qualquer $c \in \mathbb{R}$, $K_c(f)$ é compacto.*

Demonstração. Mostremos que $f^{-1}([a, b]) \cap K(f)$ é compacto, ou seja, se (x_n) é uma sequência de pontos críticos com $a \leq f(x_n) \leq b$ então (x_n) tem uma subsequência convergente. Observe que $\|\nabla(f|_{K(f)})_{x_n}\| = 0$, assim, pela condição (C), segue que (x_n) tem subsequência convergente. \square

Corolário 2.2.5. *O conjunto $f(K(f))$ dos valores críticos de f é um subconjunto fechado de \mathbb{R} .*

Lema 2.2.6. *Se U é uma vizinhança de $K_c(f)$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que $\|\nabla f\|$ é limitado a partir de zero em $f^{-1}(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \setminus U$.*

Demonstração. Suponha que não, então para cada inteiro positivo n podemos escolher x_n em $f^{-1}(c - \frac{1}{n}, c + \frac{1}{n}) \setminus U$ tal que $\|\nabla f_{x_n}\| < \frac{1}{n}$. Pela condição (C), uma subsequência de $\{x_n\}$ deve convergir para um ponto crítico p de f com $f(p) = c$, então $p \in K_c(f)$ e eventualmente a subsequência deve entrar na vizinhança U de $K_c(f)$, contradição. \square

Pelo teorema de Sard (ver [22] capítulo 6), sabemos que o conjunto dos valores críticos de uma função $f : M \rightarrow N$, onde M, N são variedades suaves, tem medida nula. No caso de $N = \mathbb{R}$, poderíamos intuir, erradamente, que os valores críticos de $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é em geral um conjunto de pontos discretos, talvez no máximo enumerável. No entanto, o exemplo a seguir, mostra que o conjunto dos valores críticos pode ser não enumerável.

Exemplo 2.2.7. Neste exemplo exibimos uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ injetora tal que $K(f) = \mathcal{C}$, onde \mathcal{C} é o conjunto de Cantor. O conjunto de Cantor pode ser construído por infinitas iterações, iniciando com $I = [0, 1]$ e removendo o subintervalo aberto $(1/3, 2/3)$, no próximo passo repetimos a mesma subdivisão em três e remoção do subintervalo aberto do meio dos intervalos fechados resultantes do passo anterior. A Figura 13 apresenta as sete primeiras iterações desta construção.



Figura 13 – As sete primeiras iterações da construção do conjunto de Cantor.

Fonte: Domínio público.

Observe que os extremos dos intervalos fechados de cada iteração pertencem ao conjunto de Cantor, isto é, $\mathcal{C} \neq \emptyset$. Além disso, é possível provar que \mathcal{C} é um conjunto que tem medida nula e cuja cardinalidade é igual a $\aleph(\mathbb{R})$, isto é, infinita e não-enumerável. Em símbolos, podemos definir o conjunto de Cantor por

$$\mathcal{C} := I \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{3^n-1} \left(\frac{3k+1}{3^{n+1}}, \frac{3k+2}{3^{n+1}} \right).$$

Considere as duas seguintes funções auxiliares

$$m : I \rightarrow I \\ t \mapsto \max\{c \in \mathcal{C} \mid c < t\}$$

e

$$M : I \rightarrow I \\ t \mapsto \min\{c \in \mathcal{C} \mid c > t\},$$

ambas estão bem definidas pois $\mathcal{C} \subset I$ que é compacto.

Considere $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(s) := \begin{cases} 0 & \text{se } s \in \mathcal{C} \\ |(s - m(s))(s - M(s))| & \text{se } s \notin \mathcal{C}. \end{cases}$$

A função φ é uma função contínua, seu gráfico é apresentado na Figura 14.

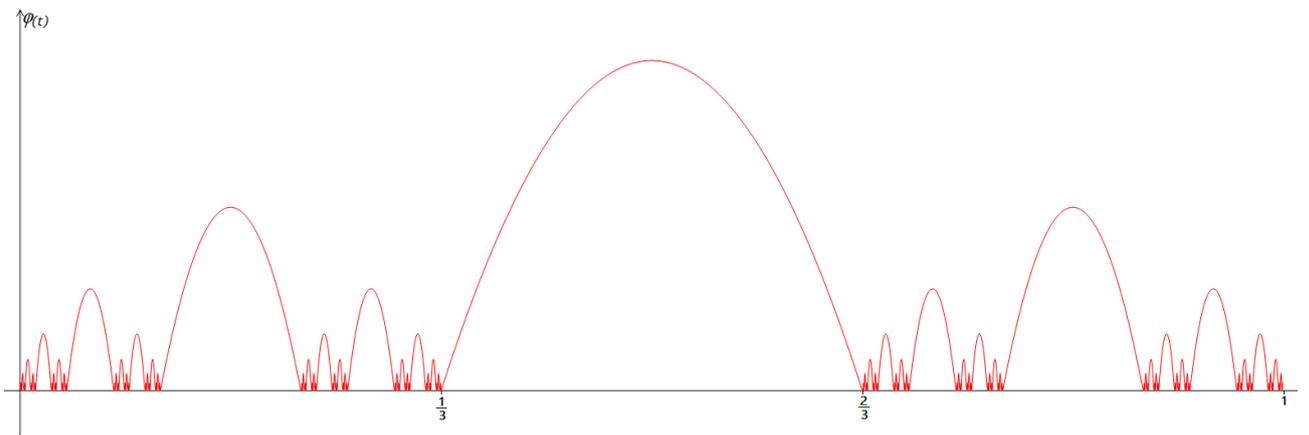


Figura 14 – Gráfico da função $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$
Fonte: Elaborada pelo autor.

Definimos $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(t) = \int_0^t \varphi(s) ds$$

assim $f'(t) = \varphi(t)$ e $K(f) = \mathcal{C}$. Além disso, observe que para $t_1 < t_2$ tem-se

$$f(t_2) - f(t_1) = \int_0^{t_2} \varphi(s) ds - \int_0^{t_1} \varphi(s) ds = \int_{t_1}^{t_2} \varphi(s) ds > 0,$$

logo, $f(t_1) < f(t_2)$, e como f é função de um intervalo em \mathbb{R} , isto implica que f é injetora. Com efeito, a restrição $f|_{K(f)}$ é uma bijeção com sua imagem, assim sendo, o conjunto dos valores críticos é não enumerável.

Relembre que, se $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função contínua, cada problema de valor inicial dado por

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

tem solução única $x(t, x_0)$ definida para todo t em um intervalo maximal de \mathbb{R} . Esta solução define a linha de fluxo

$$\phi_t(x_0) = x(t, x_0),$$

e neste caso a solução é

$$x(t, x_0) = x_0 + \int_0^t F(x(s)) ds.$$

Definição 2.2.8. Definimos $\phi_t : M \rightarrow M$ como sendo o fluxo maximal gerado por $-\nabla f$. Para cada $x \in M$, $\phi_t(x)$ é definido em um intervalo $\alpha(x) < t < \beta(x)$ e $t \mapsto \phi_t(x)$ é a solução maximal de $-\nabla f$ com valor inicial x .

Por definição $\frac{d}{dt}\phi_t(x) = -\nabla f_{\phi_t(x)}$, assim,

$$\frac{d}{dt}f(\phi_t(x)) = -\nabla f(f) = -\|\nabla f\|^2$$

logo, $f(\phi_t(x))$ é monótona decrescente em t . Como f é limitada inferior, segue que $f(\phi_t(x))$ tem um limite quando $t \rightarrow \beta(x)$.

Definição 2.2.9 ([8] p. 298). Um espaço métrico (X, d) é dito *totalmente limitado* se para todo $\varepsilon > 0$, existem $x_1, \dots, x_n \in X$ tal que $X = \bigcup_{i=1}^n B(x_i, r)$. Um subconjunto $Y \subset X$ é dito *totalmente limitado* se o subespaço (Y, d_Y) é totalmente limitado.

Observação 2.2.10. Na demonstração do lema a seguir, utilizamos o fato que em um espaço métrico completo, um subconjunto é relativamente compacto (Definição 1.1.20) se, e somente se, é totalmente limitado (Definição 2.2.9). Uma demonstração detalhada desse fato é encontrada em [39].

Lema 2.2.11. *Se uma curva $\gamma : (a, b) \rightarrow M$ de classe \mathcal{C}^1 tem comprimento finito, então sua imagem é relativamente compacta.*

Demonstração. Como M é completo, pois satisfaz a condição (A), um subconjunto totalmente limitado em M é relativamente compacto, então é suficiente mostrar que a imagem de γ é totalmente limitada. Como γ tem comprimento finito, isto é, $\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt < \infty$, dado $\varepsilon > 0$, existe partição $t_0 = a < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = b$ tal que $\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\gamma'(t)\| dt < \varepsilon$. Seja $x_i = \gamma(t_i)$, e pela definição de distância em M tem-se

$$Im(\gamma) \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon).$$

□

Proposição 2.2.12. *Seja F um campo de vetores suave em M e seja $\gamma : (a, b) \rightarrow M$ uma curva de solução maximal de F . Se $b < \infty$ então $\int_0^b \|F_{\gamma(t)}\| dt = \infty$. Analogamente, se $a > -\infty$ então $\int_a^0 \|F_{\gamma(t)}\| dt = \infty$.*

Demonstração. Como γ é maximal, se $b < \infty$ então $\gamma(t)$ não tem ponto limite em M quando $t \rightarrow b$. Logo, pelo Lema 2.2.11, $\gamma : [0, b) \rightarrow M$ deve ter comprimento infinito, e como $\gamma'(t) = F_{\gamma(t)}$, temos $\int_0^b \|F_{\gamma(t)}\| dt = \infty$. \square

Corolário 2.2.13. *Se M é uma variedade riemanniana completa, então um campo de vetores suave X de comprimento limitado em M , gera um grupo a um parâmetro de difeomorfismos em M .*

Demonstração. Suponha $\|X\| \leq L < \infty$. Se $b < \infty$ então $\int_0^b \|X_{\gamma(t)}\| dt \leq bL < \infty$, contradizendo a proposição anterior. O caso $a > -\infty$ é análogo. \square

Teorema 2.2.14. *O fluxo ϕ_t gerado por $-\nabla f$ é um semi-grupo positivo, isto é, para todo $t > 0$, ϕ_t é definido em todo M . Além disso, para qualquer $x \in M$, $\phi_t(x)$ tem pelo menos um ponto crítico de f como limite quando $t \rightarrow \infty$.*

Demonstração. Seja $g(t) := f(\phi_t(x))$ e denote

$$B \leq g(T) = g(0) + \int_0^T g'(t) dt = g(0) - \int_0^T \|\nabla f_{\phi_t(x)}\|^2 dt$$

esta equação vale para todo $T < \beta(x)$, então pela desigualdade de Schwarz temos

$$\int_0^{\beta(x)} \|\nabla f_{\phi_t(x)}\| dt \leq \sqrt{\beta(x)} \left(\int_0^{\beta(x)} \|\nabla f_{\phi_t(x)}\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

que é menor igual que $\sqrt{\beta(x)}(g(0) - B)^{\frac{1}{2}}$, e deve ser finito se $\beta(x)$ for finito. Pela Proposição 2.2.12 segue que $\beta(x)$ deve ser infinito e conseqüentemente $\|\nabla f_{\phi_t(x)}\|$ não pode ser limitado a partir de zero quando $t \rightarrow \infty$, pois de outra forma $\int_0^\infty \|\nabla f_{\phi_t(x)}\|^2 dt$ seria infinito, mas sabemos que é menor que $g(0) - B$. Como $f(\phi_t(x))$ é limitado, segue pela condição (C) que $\phi_t(x)$ tem um ponto crítico de f sendo o limite quando $t \rightarrow \infty$. \square

O exemplo a seguir nos fornece uma visualização geométrica da ideia que é apresentada nas próximas seções para demonstração do teorema de Lusternik-Schnirelmann para pontos críticos.

Exemplo 2.2.15. Seja $T^2 \subset \mathbb{R}^3$ o toro parametrizado por

$$\begin{aligned} \Psi : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, \rho) &\mapsto (x(\theta, \rho), y(\theta, \rho), z(\theta, \rho)) \end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned} x(\theta, \rho) &= (2 + \sin(\rho)) \cos(\theta), \\ y(\theta, \rho) &= \cos(\rho), \\ z(\theta, \rho) &= (2 + \sin(\rho)) \sin(\theta). \end{aligned}$$

Considere $f : T^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função altura, isto é, $f(\theta, \rho) := z(\theta, \rho)$. Temos

$$\nabla f(\theta, \rho) = \left((2 + \sin(\rho)) \cos(\theta), \cos(\rho) \sin(\theta) \right),$$

tal que os pontos críticos de f são $K(f) = \left\{ \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right), \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right) \right\}$. O fluxo $\phi_t(\theta, \rho)$ gerado por $-\nabla f(\theta, \rho)$ é apresentado na Figura 15.

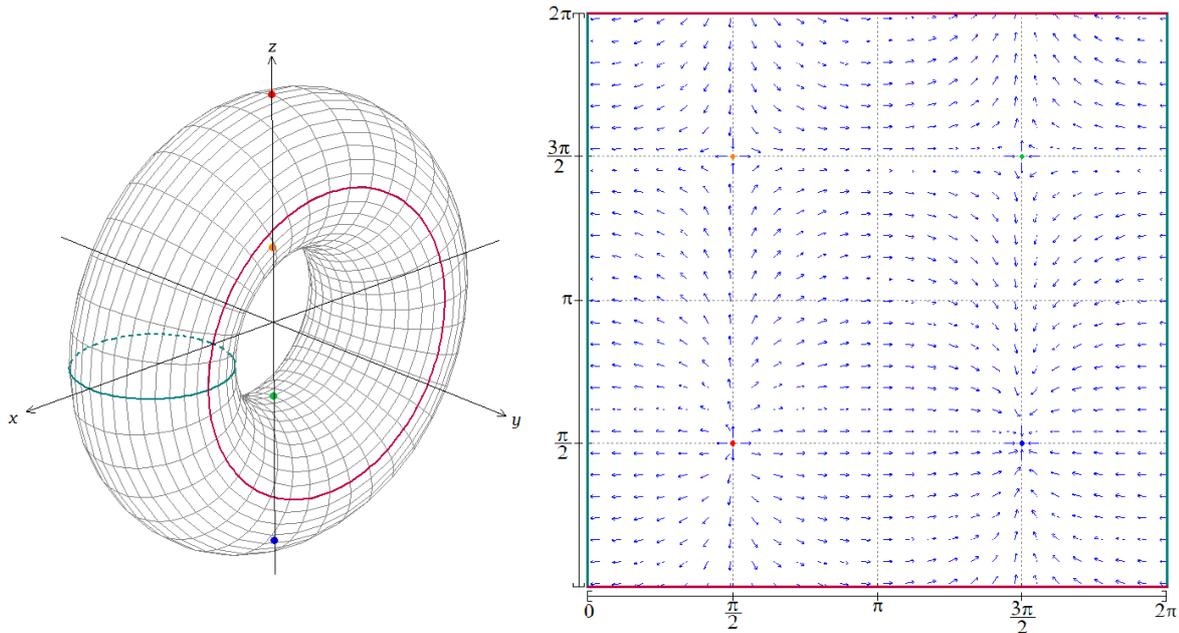


Figura 15 – Pontos críticos e fluxo função altura no toro bidimensional.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 15 temos do lado esquerdo a representação geométrica do toro no espaço tridimensional e no lado direito a representação do fluxo $\phi_t(\theta, \rho)$ no domínio de parametrização, observe que os pontos críticos estão evidenciados nas duas representações com a mesma cor. Veja que o fluxo é definido em todo o toro, e os pontos críticos da função f são também os pontos críticos do fluxo. Observe que o ponto de máximo global é um ponto estável do tipo *fonte* do fluxo, e o mínimo global é um ponto instável do tipo *dreno*, enquanto os máximos e mínimos locais são pontos instáveis do tipo *sela*.

O toro é localmente contrátil, pois é uma variedade real, sendo assim, podemos encontrar vizinhanças contrateis para cada um dos pontos críticos em $K(f)$. É claro que estas vizinhanças não cobrem o toro. Mas podemos construir, intuitivamente, uma cobertura do toro, estendendo as vizinhanças contrateis dos pontos críticos ao longo das linhas do fluxo que entram nessas vizinhanças, e assim obter uma cobertura categórica do toro, pois as linhas de fluxo são contrateis. Concluindo que $\text{cat}(T^2) \leq 4$.

2.2.2 Teorema de deformação e princípio do minimax

A ideia básica na abordagem de Lusternik-Schnirelmann para a teoria de pontos críticos é que os pontos críticos são obstruções ao colapso de uma variedade até um ponto através do fluxo associado a $-\nabla f$. Assim, os pontos críticos são os lugares na variedade onde surge a complexidade topológica e esta complexidade particular é bem medida pela categoria. Na teoria de Morse, se $b \geq a$ e $f^{-1}([a, b])$ contém um único ponto crítico não degenerado de índice k , então $M_b(f) \simeq M_a(f) \cup e^k$. Isto é, a teoria de Morse descreve o tipo de homotopia de M por colar células para os correspondentes índices dos pontos críticos. Por outro lado, a teoria de Lusternik-Schnirelmann compara $M_a(f)$ e $M_b(f)$ em termos de sua categoria, sem a restrição que os pontos críticos sejam não degenerados. De modo que o resultado deste processo estima o número mínimo de pontos de críticos de uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ em termos de $\text{cat}(M)$ [5].

Nesta seção continuamos assumindo que f satisfaz as hipóteses de Completude, Limitada inferior e a Condição C, tal como enunciadas no início da seção precedente. Além disso, seguimos utilizando a notação ϕ para o fluxo maximal gerado por $-\nabla f$.

Lema 2.2.16. *Seja $x_0 \in M$ um ponto regular de f com $f(x_0) = c$. Então existe $\varepsilon > 0$ e uma vizinhança aberta U de x_0 tal que $\phi_1(U) \subset M_{c-\varepsilon}(f)$.*

Demonstração. Como $\phi'_t(x_0)(0) = -\nabla f(x_0)$, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(\phi_t(x_0)) &= \left\langle \nabla f(\phi_t(x_0)), \frac{d}{dt}(\phi_t(x_0)) \right\rangle \\ &= \left\langle \nabla f(\phi_t(x_0)), -\nabla f(x_0) \right\rangle \\ &= -\|\nabla f(\phi_t(x_0))\|^2 \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Em $t = 0$, temos

$$\left. \frac{d}{dt} \left(f(\phi_t(x_0)) \right) \right|_{t=0} = -\|\nabla f(x_0)\|^2 < 0$$

pois x_0 é um ponto regular. Logo, $f(\phi_t(x_0))$ é estritamente decrescente próximo a $t = 0$ e pela desigualdade $\frac{d}{dt}(f(\phi_t(x_0))) \leq 0$, $f(\phi_t(x_0))$ é não crescente para todo t . Em particular, $f(\phi_1(x_0)) < f(x_0) = c$, e por continuidade, para algum $\varepsilon > 0$ e alguma vizinhança U de x_0 , temos $f(\phi_1(x)) < c - \varepsilon$ para todo $x \in U$. Consequentemente $\phi_1(U) \subset M_{c-\varepsilon}(f)$. \square

Teorema 2.2.17 (Teorema de deformação). *Seja U uma vizinhança qualquer de $K_c(f)$ em M . Então para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, vale*

$$\phi_1(M_{c+\varepsilon}(f) \setminus U) \subset M_{c-\varepsilon}(f).$$

Demonstração. Seja $X = f^{-1}(c) \setminus U$ o subconjunto dos pontos regulares no nível c . Pelo Lema 2.2.16, para cada $x \in X$, podemos escolher ε_x e U_x tais que $\phi_1(U_x) \subset M_{c-\varepsilon_x}(f)$.

Para simplificar a demonstração assumiremos que M é compacto, neste caso, X também é compacto pois é fechado. Logo, podemos encontrar uma subcobertura $\{U_1, \dots, U_k\}$ de $\{U_x\}$, com os respectivos épsilons associados $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$. Seja $\bar{\varepsilon} := \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$. Então, pelo Lema 2.2.16, obtemos que $\phi_1(U_1 \cup \dots \cup U_k) \subset M_{c-\bar{\varepsilon}}(f)$.

Seja $V = U \cup U_1 \cup \dots \cup U_k$, como M é compacto, $M \setminus V$ é compacto. Logo, $f(M \setminus V)$ é compacto e não contém c , pois $f^{-1}(c) \subset V$. Consequentemente $f(M \setminus V)$ é união de intervalos fechados delimitados por c , então podemos encontrar um ε tal que $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}$, e temos $L := f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon]) \subset V$. Assim, obtemos

$$\phi_1(L \setminus U) \subset \phi_1(U_1 \cup \dots \cup U_k) \subset M_{c-\bar{\varepsilon}}(f) \subset M_{c-\varepsilon}(f).$$

Como ϕ é associado a $-\nabla f$, segue que $\phi_1(M_{c-\varepsilon}(f)) \subset M_{c-\varepsilon}(f)$. Para concluir, observe que, $M_{c+\varepsilon}(f) \setminus U = M_{c-\varepsilon}(f) \cup (L \setminus U)$, logo,

$$\begin{aligned} \phi_1(M_{c+\varepsilon}(f) \setminus U) &\subset \phi_1(M_{c-\varepsilon}(f)) \cup \phi_1(L \setminus U) \\ &\subset M_{c-\varepsilon}(f) \cup M_{c-\varepsilon}(f) \\ &= M_{c-\varepsilon}(f). \end{aligned}$$

□

Observação 2.2.18. Existem hipóteses técnicas que tornam o Teorema 2.2.17 verdadeiro no caso em que M tem dimensão infinita, estas são conhecidas como *condições de Palais-Smale*, para mais detalhes veja 1.7 em [5]. Neste caso, para c valor regular, devemos exigir que c não seja limite de $\{a \in \mathbb{R} : f \text{ tem valor constante } a \text{ em alguma componente de } M\}$. Para c valor crítico, c não pode ser ponto limite de $f(\text{int}(K(f) \setminus K_c(f)))$, este é o caso quando c é um valor crítico isolado, por exemplo.

Corolário 2.2.19. *Se c é um valor regular de f então, para algum $\varepsilon > 0$, $\phi_1(M_{c+\varepsilon}) \subset M_{c-\varepsilon}$.*

Demonstração. Como $K_c(f) = \emptyset$ podemos considerar $U = \emptyset$. □

Definição 2.2.20. Seja \mathcal{F} uma família não vazia de subconjuntos compactos de M . Definimos o minimax de f sobre \mathcal{F} por

$$\text{minimax}(f, \mathcal{F}) := \inf_{F \in \mathcal{F}} \left(\sup \{f(x) : x \in F\} \right).$$

Teorema 2.2.21 (Princípio do minimax). *Se \mathcal{F} é uma família de subconjuntos compactos de M invariante pelo fluxo ϕ_t com $t > 0$, então $\text{minimax}(f, \mathcal{F})$ é um ponto crítico de M .*

Demonstração. Por definição de minimax podemos encontrar $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \subset M_{c+\varepsilon}$. Suponha por absurdo que $c = \text{minimax}(f, \mathcal{F})$ é um valor regular de f . Pelo Corolário 2.2.19 tem-se $\phi_1(M_{c+\varepsilon}) \subset M_{c-\varepsilon}$ a fortiori $\phi_1(F) \subset M_{c-\varepsilon}$. Mas como \mathcal{F} é invariante pelo fluxo ϕ , temos $\phi_1(F) \in \mathcal{F}$, logo $\text{minimax}(f, \mathcal{F}) \leq c - \varepsilon$, uma contradição. □

Definição 2.2.22. Para $m \leq \text{cat}(M)$ denotamos a coleção de todos subconjuntos compactos $F \subset M$ tais que $\text{cat}_M(F) \geq m$ por \mathcal{F}_m . Definimos

$$c_m(f) := \text{minimax}(f, \mathcal{F}_m).$$

Observação 2.2.23. Se M for compacto então $\mathcal{F}_m \neq \emptyset$ pois $M \in \mathcal{F}$. Como $\text{cat}_M(\cdot)$ é monótona podemos definir $c_m(f)$ equivalentemente por

$$c_m(f) = \inf\{a \in \mathbb{R} \mid \text{cat}_M(M_a(f)) \geq m\}.$$

No caso M não compacto a definição dada acima pode ser mantida com a hipótese adicional que para cada $a \in \mathbb{R}$, a não é ponto limite de $f(\text{int}(K(f) \setminus K_a(f)))$. Observe também que $c_m(f)$ é definido apenas para $0 \leq m \leq \text{cat}(M)$.

Proposição 2.2.24. *Valem as seguintes propriedades para $c_m(f)$*

- (1) $c_0(f) = \inf\{f(x) \mid x \in M\}$.
- (2) $c_m(f)$ é um valor crítico de f para $m = 0, 1, \dots, \text{cat}(M)$.
- (3) $c_m(f) \leq c_{m+1}(f)$.
- (4) $c_m \leq \sup\{f(x) \mid x \in K(f)\}$.
- (5) Se $0 < m < m+k < \text{cat}(M)$ com $-\infty < c = c_m(f) = \dots = c_{m+k}(f) < \infty$, então $\text{cat}_M(K_c(f)) \geq k$.

Demonstração.

- (1) Se $a > \inf\{f(x) \mid x \in M\}$, então $M_a(f) \neq \emptyset$, logo $\text{cat}_M(M_a(f)) > 0$, como f é limitada inferior, tem-se que o ínfimo é na verdade o mínimo de f em M , assim $c_0(f) = \inf\{f(x) \mid x \in M\}$.
- (2) Observe que a família \mathcal{F}_m é invariante pelo fluxo ϕ_t . Por definição $c_m(f) = \text{minimax}(f, \mathcal{F}_m)$, logo pelo princípio do minimax $c_m(f)$ é um ponto crítico.
- (3) Se $b > c_{m+1}$ então $\text{cat}_M(M_b(f)) \geq m+1 \geq m$. Da definição tem-se

$$c_m(f) := \inf\{a \in \mathbb{R} \mid \text{cat}_M(M_b(f)) \geq m\} \leq c_{m+1}.$$

- (4) Suponha por absurdo que $c_m(f) > \sup\{f(x) \mid x \in K(f)\}$. Então $c = c_m(f)$ é um valor regular, pelo teorema da deformação, tem-se $\text{cat}(M) = \text{cat}_M(M) \leq \text{cat}_M(M_{c-\varepsilon}) \leq \text{cat}(M)$ assim $\text{cat}_M(M_{c-\varepsilon}) = \text{cat}(M)$. Logo, se $\text{cat}(M) \geq m-1$, então $\text{cat}_M(M_{c-\varepsilon}) \leq m-1$ e $M_{c-\varepsilon} \in \mathcal{F}_m$. Portanto,

$$c_m(f) \leq c - \varepsilon < c = c_m(f)$$

uma contradição.

- (5) Suponha que $c = c_m(f) = \dots = c_{m+k}(f)$. Graças à propriedade da continuidade 2.1.30, existe uma vizinhança U de $K_c(f)$ tal que $\text{cat}_M(U) = \text{cat}_M(\bar{U}) = \text{cat}_M(K_c)$. Pelo Teorema da deformação 2.2.17, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\phi_1(M_{c+\varepsilon}) \subset M_{c-\varepsilon}$. Pelas propriedades de monotonicidade e monotonicidade por deformação 2.1.30 tem-se

$$\text{cat}_M(M_{c-\varepsilon}) \geq \text{cat}_M(\phi_1(M_{c+\varepsilon} \setminus U)) \geq \text{cat}_M(M_{c+\varepsilon} \setminus U),$$

aplicando a subaditividade 2.1.30 e o Teorema de deformação 2.2.17, tem-se

$$\begin{aligned} \text{cat}_M(M_{c+\varepsilon}) &= \text{cat}_M((M_{c+\varepsilon} \setminus U) \cup U) \\ &\leq \text{cat}_M(M_{c+\varepsilon} \setminus U) + \text{cat}_M(U) \\ &\leq \text{cat}_M(\phi_1(M_{c+\varepsilon} \setminus U)) + \text{cat}_M(K_c(f)) \\ &\leq \text{cat}_M(M_{c-\varepsilon}) + \text{cat}_M(K_c(f)). \end{aligned}$$

Assim

$$\text{cat}_M(K_c(f)) \geq \text{cat}_M(M_{c+\varepsilon}) - \text{cat}_M(M_{c-\varepsilon}).$$

Como $c = c_{m+k}(f)$ tem-se $\text{cat}_M(M_{c+\varepsilon}) \leq m + k$. Por outro lado, como $c = c_m(f)$ temos $\text{cat}_M(M_{c-\varepsilon}) \leq m$, pois $c_m(f) = \inf\{a \in \mathbb{R} \mid \text{cat}_M(M_a) \geq m\}$. Logo,

$$\begin{aligned} \text{cat}_M(K_c(f)) &\geq \text{cat}_M(M_{c+\varepsilon}) - \text{cat}_M(M_{c-\varepsilon}) \\ &\geq m + k - m = k \end{aligned}$$

□

Corolário 2.2.25 (Teorema de Lusternik-Schnirelmann para pontos críticos). *Seja M uma variedade Riemanniana completa e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe \mathcal{C}^2 limitada inferior em M , satisfazendo a Condição (C). Então a quantidade mínima de pontos críticos da função f é $\text{cat}(M)$. Ou seja, $\text{cat}(M) \leq |K(f)|$.*

Demonstração. Pelos itens (2) e (5), se $1 \leq m \leq \text{cat}(M)$, então f tem no máximo m pontos críticos no nível $c_m(f)$, possivelmente somando os níveis inferiores. Ainda pelo item (2) tem-se que o m máximo é $\text{cat}(M)$, logo, uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 tem pelo menos $\text{cat}(M)$ pontos críticos. □

Conforme veremos na seção seguinte, este resultado pode ser considerado em casos mais gerais. Além disso, existem outras formulações deste teorema que podem ser mais adequadas para certas aplicações, veja por exemplo o Teorema 2.2.27.

2.2.3 Teorema de Lusternik-Schnirelmann para Pontos Críticos

Nesta sub-seção vamos apresentar algumas formas do enunciado do teorema de Lusternik-Schnirelmann para pontos críticos encontrados na literatura.

Os itens (2) e (5) da Proposição 2.2.24 são considerados por Palais [32] página 190, o resultado principal desta teoria, enunciado como “Lusternik-Schnirelman Multiplicity Theorem”, considerando M compacto e f uma função limitada inferiormente em M e satisfazendo também a condição (C). Palais [32] enuncia o teorema de Lusternik-Schnirelmann da seguinte forma:

Teorema 2.2.26 (Palais). *Se $c_{n+1}(f) = c_{n+2}(f) = \dots = c_{n+k}(f) = c$, então existe pelo menos k pontos críticos no nível c . Consequentemente, se $1 \leq m \leq \text{cat}(M)$ então f tem pelo menos m pontos críticos no ou abaixo do nível $c_m(f)$. Em particular toda função suave $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ tem pelo menos $\text{cat}(M)$ pontos críticos.*

Em [21] (Teorema 3 página 74) é enunciado o teorema a seguir, que é essencialmente uma reformulação do Teorema 2.2.26, esta versão é particularmente útil na primeira aplicação dada no capítulo seguinte, no artigo [21] Kuiper faz uma demonstração praticamente autocontida, aqui demonstraremos utilizando as propriedades da categoria e a Proposição 2.2.24.

Teorema 2.2.27 (Kuiper). *Se $K(f) = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha$ onde cada A_α é uma componente conexa, então*

$$\text{cat}(M) \leq \sum_{\alpha \in \Gamma} \text{cat}_M(A_\alpha)$$

Demonstração. Suponha a decomposição em componentes conexas

$$K(f) = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha$$

Denote $\Omega \subset \mathbb{R}$ o conjunto dos valores críticos de f . Pelo item (2) da Proposição 2.2.24, existem $c_1, c_2, \dots, c_m \in \Omega$, onde $m = \text{cat}(M)$, e caso exista multiplicidade, digamos $c = c_p = c_{p+1} = \dots = c_{p+k}$, então pelo item (5), temos $\text{cat}_M(K_c(f)) \geq k$. Logo,

$$\text{cat}(M) \leq \sum_{i=1}^m \text{cat}_M(K_{c_i}(f)) \leq \sum_{c \in \Omega} \text{cat}_M(K_c(f))$$

Verifiquemos que

$$\sum_{c \in \Omega} \text{cat}_M(K_c(f)) \leq \sum_{\alpha \in \Gamma} \text{cat}_M(A_\alpha)$$

Para cada $c \in \Omega$ existe $\Lambda_c \subset \Gamma$ tal que

$$K_c(f) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda_c} A_\alpha$$

Aplicando esta observação e a subaditividade (veja Proposição 2.1.30), obtemos

$$\text{cat}_M(K_c(f)) = \text{cat}_M\left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda_c} A_\alpha\right) \leq \sum_{\alpha \in \Lambda_c} \text{cat}_M(A_\alpha)$$

Como $\Gamma = \bigcup_{c \in \Omega} \Lambda_c$ é uma união disjunta, podemos escrever

$$\text{cat}(M) \leq \sum_{c \in \Omega} \text{cat}_M(K_c(f)) \leq \sum_{\alpha \in \Gamma} \text{cat}_M(A_\alpha)$$

□

Finalmente, em [5] encontramos o enunciado do teorema de Lusternik-Schnirelmann para pontos críticos com a hipótese mais geral, em que M é uma variedade \mathcal{C}^2 -Banach, sua demonstração utiliza basicamente os mesmos elementos que utilizamos para demonstrar o Teorema 2.2.27, por isso optamos por omitir a demonstração, ao leitor interessado recomendamos a leitura do capítulo 1 de [5].

Teorema 2.2.28 (Teorema de Lusternik-Schnirelmann para pontos críticos). *Seja M uma variedade \mathcal{C}^2 -Banach paracompacta e suponha que $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe \mathcal{C}^2 limitada inferior e que satisfaça a condição (C). Então $\text{cat}(M) \leq |K(f)|$.*

Antes de terminar esta seção, tendo como referência [31], apresentamos algumas consequências do teorema de Lusternik-Schnirelmann com relação a fluxos em variedades.

Definição 2.2.29. Seja M uma variedade e Ψ um fluxo em M , então dizemos que um ponto $x \in M$ é um *ponto fixo* para o fluxo Ψ se $\Psi(x, t) = x$ para todo t .

Corolário 2.2.30. *Seja M uma variedade compacta e Ψ um fluxo gradiente de classe \mathcal{C}^2 em M então $\text{cat}(M) \leq \text{Rest}(\Psi)$ onde $\text{Rest}(\Psi)$ denota o número de pontos de repouso de Ψ .*

Demonstração. Como Ψ é gradiente, existe $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial \Psi}{\partial t}(x, 0) = \nabla f(x)$. Observe que $\text{Rest}(\Psi) := \{x \in M : \Psi(x, t) = x, \forall t\} = \{x \in M : \nabla f(x) = 0\} = K(f)$, ou seja,

$$\text{cat}(M) \leq |K(f)| = \text{Rest}(\Psi).$$

□

No estudo de Poincaré da mecânica celeste, ficou claro que uma abordagem útil para encontrar órbitas fechadas é identificar uma seção de Poincaré, e em seguida, procurar pontos periódicos (ou fixos) do difeomorfismo associado. Pouco antes de morrer, Poincaré conjecturou o seguinte resultado.

Teorema 2.2.31 (Último teorema geométrico de Poincaré). *Se $\psi : A \rightarrow A$ é um difeomorfismo do anel A que preserva área e que rotaciona os círculos de fronteira interno e externo em sentidos opostos, então ψ tem pelo menos dois pontos fixos.*

O teorema acima foi demonstrado por George Birkhoff em 1913 [2] usando técnicas particulares para dimensão 2. A seguir temos um teorema análogo ao último teorema geométrico de Poincaré, porém considerando o toro T^2 no lugar do anel A .

Teorema 2.2.32. *Suponha $\psi : T^2 \rightarrow T^2$ um difeomorfismo tal que:*

- ψ é homólogo à identidade: Isto é, se escrevemos $\psi(x, y) = (X, Y)$, então $X = x + p(x, y)$ e $Y = y + q(x, y)$ com p, q periódicas e $\int_{T^2} p = 0 = \int_{T^2} q$ (p e q preservam centro de gravidade).
- ψ preserva área: Isto é, $dX \wedge dY = dx \wedge dy$.
- ψ é “próxima” à identidade.

Então ψ tem pelo menos 3 (geometricamente distintos) pontos fixos.

Demonstração. Podemos verificar usando as hipóteses do enunciado que existe uma função geradora periódica $F(x, Y) : T^2 \rightarrow \mathbb{R}$ com $p = \partial F / \partial Y$, $q = -\partial F / \partial x$ e $\det(F_{xY}) \neq 0$ (veja Lema 9.12 em [28]). Como, F é periódica, podemos escrever $\psi : T^2 \rightarrow T^2$ da seguinte forma

$$\psi(x, y) = \left(x + \frac{\partial F}{\partial Y}, y - \frac{\partial F}{\partial x} \right)$$

Assim, observamos que os pontos fixos de ψ são exatamente os pontos críticos de F . Pelo teorema de Lusternik-Schnirelmann, sabemos que F tem pelo menos 3 pontos críticos. Logo, ψ tem pelo menos 3 pontos fixos. \square

2.3 Reformulações da categoria de Lusternik-Schnirelmann

Como acontece com a maioria das teorias em matemática, novas perspectivas são desenvolvidas por meio de uma reformulação das ideias originais. Segundo [5], embora a definição de conjunto aberto contrátil dada na definição da categoria, se encaixe bem na estrutura da teoria do ponto crítico, não é especialmente adequada para muitas construções na teoria da homotopia. Em particular, a categoria deve ser reformulada para fazer sentido em relação a um dos pilares da topologia algébrica moderna, a teoria da localização. Nesta seção, apresentamos duas definições alternativas de categoria que encontraram um lugar importante na topologia. A primeira reformulação foi proposta por a George Whitehead e foi o veículo para sua prova de que $\text{cat}(X)$ é um limite superior para a classe de nilpotência do grupo de classes de homotopia de funções de X em um espaço semelhante a um grupo. A segunda nova definição de categoria é devida a Tudor Ganea e, com o advento dos métodos de homotopia racionais na década de 1980, essa reformulação produziu uma avalanche de novos resultados e invariantes aproximados.

2.3.1 Reformulação de Whitehead

Definição 2.3.1. Seja X um espaço topológico com ponto base $*$. O *fat wedge* é definido por $T^k(X) = \{(x_1, \dots, x_k) \in X^k : \text{pelo menos uma coordenada } x_j \text{ é igual ao ponto base } *\}$.

Exemplo 2.3.2. Considere $X = \mathbb{R}$ e como ponto base o $1 \in \mathbb{R}$, e os planos

$$P_1 := \{(1, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, z \in \mathbb{R}, \}$$

$$P_2 := \{(x, 1, z) \in \mathbb{R}^3 : y, z \in \mathbb{R}, \}$$

$$P_3 := \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}, \}$$

Então $T^3(\mathbb{R}) = P_1 \cup P_2 \cup P_3$, sendo $(1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ a interseção dos três planos. Veja a Figura 16.

Observação 2.3.3. Para $k = 2$, temos $T^2(X) = X \vee X$, sendo \vee a colagem por um ponto.

Notação 2.3.4. Denotaremos nesta seção, $j : T^k(X) \hookrightarrow X^k$ a inclusão e $\Delta : X \rightarrow X^k$ a função diagonal $\Delta(x) := (x, x, \dots, x)$.

Definição 2.3.5 (Reformulação de Whitehead). A *categoria* de um espaço topológico X , denotada $\text{cat}^{Wh}(X)$, é o menor inteiro $n \geq 1$ tal que exista uma função $\varphi : X \rightarrow T^n(X)$ que faz o seguinte diagrama ser homotopicamente comutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & T^n(X) \\ & \searrow \Delta & \downarrow j \\ & & X^n, \end{array}$$

isto é, $j \circ \varphi \simeq \Delta$.

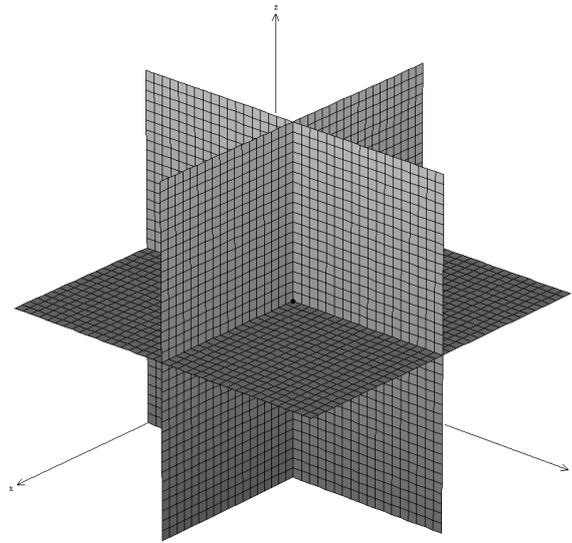


Figura 16 – $T^3(\mathbb{R})$ com ponto base em $(1, 1, 1)$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 2.3.6. Um espaço X é um *co-H-espaço* se X tem um ponto base não degenerado e existem uma função $\phi : X \rightarrow X \vee X$ chamada de *co-multiplicação* tal que o seguinte diagrama é homotopicamente comutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & X \vee X \\ & \searrow \Delta & \downarrow j \\ & & X \times X. \end{array}$$

Assumindo X não contrátil, temos $\text{cat}^{Wh}(X) = 2$. Exemplos de co-H-espaços são as suspensões ΣX , sendo $\phi : \Sigma X \rightarrow \Sigma X \vee \Sigma X$ o colapso de ΣX no nível $1/2$ que transforma ΣX em $\Sigma X \vee \Sigma X$. Portanto, $\text{cat}^{Wh}(\Sigma X) = 2$. Assim, obtemos que $\text{cat}^{Wh}(S^n) = 2$ para $n > 1$ pois $S^n \cong \Sigma S^{n-1}$. Em geral, a reformulação de Whitehead da categoria, ou mais especificamente o levantamento $X \rightarrow T^n(X)$, pode ser pensado como uma estrutura em X que generaliza a noção de co-H-espaço.

Exemplo 2.3.7. Considere $X = S^1$, sendo $S^1 \subset \mathbb{C}$ o círculo unitário, isto é, $x \in S^1$ é dado por $z = e^{i2\pi\theta}$ com $0 \leq \theta \leq 1$. Considere

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{\varphi} & S^1 \vee S^1 \\ & \searrow \Delta & \downarrow j \\ & & S^1 \times S^1. \end{array}$$

Podemos definir $\varphi : S^1 \rightarrow S^1 \vee S^1$ por

$$\varphi(z) := \begin{cases} e^{i\pi} z^{-2} + 1, & \text{se } 0 \leq \theta \leq 1/2 \\ z^2 - 1, & \text{se } 1/2 \leq \theta \leq 1. \end{cases}$$

Isto é, φ leva continuamente cada hemisfério de S^1 em um subespaço homeomorfo a S^1 contido em $S^1 \vee S^1$, veja a Figura 17.

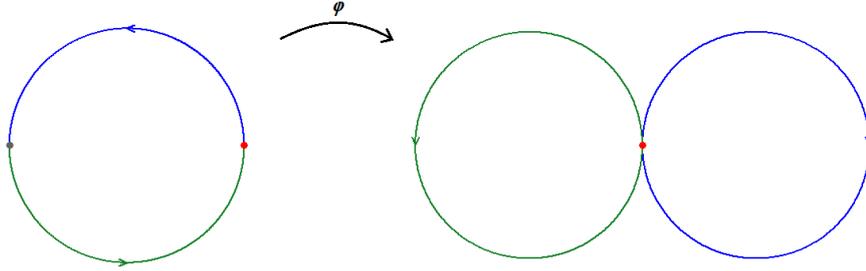


Figura 17 – Função $\varphi : S^1 \rightarrow S^1 \vee S^1$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Considere a função $\psi : A \times A \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde $A = [0, 2\pi]$, definida por

$$\psi(t, u) := ((3 + \cos(t)) \cos(u), (3 + \cos(t)) \sin(u), \sin(t)).$$

A imagem de ψ contida em \mathbb{R}^3 é homeomorfa ao toro $T^2 = S^1 \times S^1$. Sejam $\delta : A \rightarrow A \times A$ sendo $\delta(t) = (t, t)$ e $\alpha : A \rightarrow A \times A$ dada por

$$\alpha(t) = \begin{cases} (2t, 0), & \text{se } t \in [0, \pi] \\ (2\pi, 2t - 2\pi), & \text{se } t \in [\pi, 2\pi], \end{cases}$$

é fácil ver que $\delta \simeq \alpha$, pela homotopia $G : A \times I \rightarrow A \times A$, definida por

$$G(t, s) = (1 - s)\delta(t) + s\alpha(t).$$

Veja a Figura 18, na representação poligonal do toro, onde apresentamos esta homotopia em $A \times A$. Agora podemos definir a função $H : S^1 \times I \rightarrow S^1 \times S^1$ dada por

$$H(z, t) := \psi\left(G(\gamma(z), t)\right),$$

sendo $\gamma : S^1 \rightarrow [0, 2\pi]$ dada por $\gamma(z) = \arg(z)$.

Pela definição, podemos explicitar $H : S^1 \times I \rightarrow S^1 \times S^1$ e ver que H é contínua. Denotando $H(\theta, t) = (x(\theta, t), y(\theta, t), z(\theta, t))$, temos:

- Para $0 \leq \theta \leq \pi$:

$$\begin{aligned} x(\theta, t) &= (3 + \cos((1 - t)\theta + t2\theta)) \cos((1 - t)\theta), \\ y(\theta, t) &= (3 + \cos((1 - t)\theta + t2\theta)) \sin((1 - t)\theta), \\ z(\theta, t) &= \sin((1 - t)\theta + t2\theta). \end{aligned}$$

- Para $\pi \leq \theta \leq 2\pi$:

$$\begin{aligned} x(\theta, t) &= (3 + \cos((1 - t)\theta + t2\pi)) \cos((1 - t)\theta + t(2\theta - 2\pi)), \\ y(\theta, t) &= (3 + \cos((1 - t)\theta + t2\pi)) \sin((1 - t)\theta + t(2\theta - 2\pi)), \\ z(\theta, t) &= \sin((1 - t)\theta + t2\pi). \end{aligned}$$

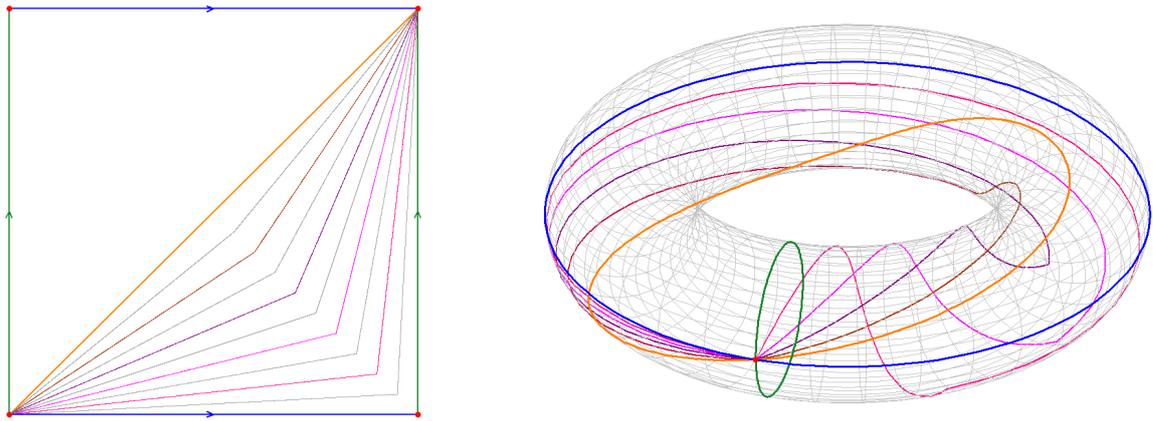


Figura 18 – Homotopia $\Delta \simeq j \circ \varphi$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Além disso, vale $H(z, 0) = \Delta(z)$ e $H(z, 1) = j(\varphi(z))$. Seja $\# = \Delta(*)$ neste caso também temos $\# = j(\varphi(*))$, logo, $H(*, t) = (1 - t)\# + t\# = \#$, ou seja, H é uma homotopia de Δ para $j \circ \varphi$, mantendo a imagem do ponto base fixa. A Figura 18 ilustra esta homotopia no toro $T^2 = S^1 \times S^1$, observe que as cores dos estágios de homotopia apresentados na imagem poligonal(a esquerda) coincidem com as mostradas na versão tridimensional(a direita). Como sabemos que S^1 não é contrátil, podemos concluir que $\text{cat}^{Wh}(S^1) = 2$.

Lembrando que $\text{cat}(S^1) = 2$ (de fato, demonstraremos a seguir que para espaços suficientemente regulares $\text{cat}^{Wh}(X) = \text{cat}(X)$), ainda neste exemplo, podemos visualizar a construção de uma cobertura categórica, partindo da homotopia dada pela reformulação de Whitehead. Considere as projeções $p_i : S^1 \times S^1 \rightarrow S^1$ para $i = 1, 2$. Seja V uma vizinhança do ponto $*$ contrátil ao ponto $*$ em S^1 . Suponha $h_i : S^1 \rightarrow S^1$ definida por $h_i := p_i \circ j \circ \varphi$, então defina $U_i := h_i^{-1}(V)$ veja a Figura 19 para o caso U_1 .

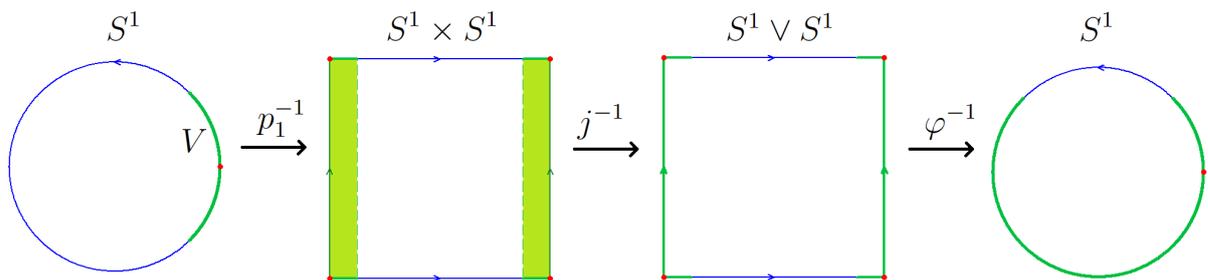


Figura 19 – Construção de um aberto U_1 contrátil em S^1

Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim, U_1 e U_2 cobrem S^1 , além disso, como $p_i \circ \Delta = Id_{S^1}$ e $\Delta \simeq j \circ \varphi$, podemos deformar homotopicamente U_i em V que é contrátil ao ponto $*$.

Definição 2.3.8. Um espaço topológico X é dito k -conexo se seus grupos de homotopia são triviais até o grau k , isto é, $\pi_i(X) = 0$ para $i = 0, \dots, k$

Observação 2.3.9.

- Um espaço é (-1) -conexo se, e somente se for não vazio.
- Um espaço é 0 -conexo se, e somente se é conexo por caminhos.
- Um espaço é 1 -conexo se, e somente se é simplesmente conexo.

O teorema a seguir pode ser visto como um refinamento do Teorema 2.1.17 para complexos CW.

Teorema 2.3.10. *Se X é um complexo CW de dimensão finita e $(n - 1)$ -conexo, para $n \geq 1$, então*

$$\text{cat}^{Wh}(X) \leq \frac{\dim(X)}{n} + 1.$$

Demonstração. Como X é $(n - 1)$ -conexo, com $n \geq 1$, podemos assumir que X tem somente uma 0 -célula, o ponto base $*$, e nenhuma outra célula nas dimensões menores que n . A decomposição celular natural de X^k consiste em células que são produto de k células de X . E a decomposição celular de $T^k(X)$ é dada por produtos de k células de X onde pelo menos uma é uma 0 -célula. Portanto $T^k(X)$ é um sub-complexo de X^k . Uma célula de menor dimensão contida em X^k mas não em $T^k(X)$ é um produto de k células de dimensão n , portanto é de dimensão nk . Ou seja, X^k é diferente de $T^k(X)$ somente a partir da dimensão nk . Assim, podemos considerar k tal que $n(k - 1) \leq \dim(X) < nk$. Podemos agora aplicar o Teorema da Aproximação Celular 1.1.51 em Δ , obtendo uma função $\Delta' : X \rightarrow X^k$ que é função celular, isto é, $\Delta'(m\text{-esqueleto}) \subset m\text{-esqueleto}$ de X^k para $m = 1, \dots, \dim(X)$, mas $T^k(X) \subset X^k$, sendo que $T^k(X)$ tem mesma decomposição CW-complexa até a dimensão nk . Assim podemos fatorar Δ homotopicamente através de $T^k(X)$, e pela reformulação de Whitehead obtemos

$$\text{cat}^{Wh}(X) \leq k \leq \frac{\dim(X)}{n} + 1.$$

□

Exemplo 2.3.11. Assumindo que $\text{cat}(X) = \text{cat}^{Wh}(X)$, temos pelo Teorema 2.1.8 que $n + 1 = \text{cup}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) + 1 \leq \text{cat}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)$. Por outro lado, $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ é uma variedade de dimensão $2n$ real, e é simplesmente conexa, logo, $\text{cat}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \leq \dim(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)/2 + 1 = n + 1$. Concluindo que $\text{cat}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = n + 1$.

Lema 2.3.12. *Suponha X um espaço topológico normal. Então $\text{cat}(X) \leq n$ se, e somente se, existir uma cobertura $\{V_j\}, j = 1, \dots, n$, tal que cada V_j é contrátil para um ponto via uma homotopia $H_j : X \times I \rightarrow X$ com $H_j(x, 0) = x$ para todo $x \in X$ e $H_j(v, 1) = *_j$ para todo $v \in V_j$, onde $*_j$ é um ponto fixado associado a V_j .*

Demonstração. Supondo existir uma cobertura $\{V_j\}, j = 1, \dots, n$, tal que cada V_j é contrátil, por definição, isto implica $\text{cat}(X) \leq n$. Reciprocamente, suponha $\text{cat}(X) \leq n$ com uma cobertura categórica $\{U_j\}, j = 1, \dots, n$ via homotopias $G_j : U_j \times I \rightarrow X$ tendo $G_j(u, 0) = u$ para $u \in U_j$ e $G_j(u, 1) = *_j$. Por hipótese, X é normal, logo, para cada j , tomamos conjuntos abertos V_j e W_j com

$$V_j \subset \overline{V_j} \subset W_j \subset \overline{W_j} \subset U_j$$

tal que $\{V_j\}, j = 1, \dots, n$ cobre X . Como $\overline{V_j}$ e $X \setminus W_j$ são dois fechados disjuntos em um espaço normal, pelo lema Urysohn, existem funções contínuas $\lambda_j : X \rightarrow I$ tal que $\lambda_j(\overline{V_j}) = 1$ e $\lambda_j(X \setminus W_j) = 0$. Defina $H_j : X \times I \rightarrow X$ por

$$H_j(x, t) = \begin{cases} x & \text{se } x \in X \setminus W_j \\ G_j(x, t \cdot \lambda_j(x)) & \text{se } x \in \overline{W_j}. \end{cases}$$

Observe que definimos H_j por partes em dois conjuntos fechados, cuja interseção é $\overline{W_j} \setminus W_j$. E na interseção temos $\lambda_j = 0$ pois $\overline{W_j} \setminus W_j \subset X \setminus W_j$. Como $G_j(x, 0) = x$, H_j é bem definida. Ademais, em todos os casos obtemos $H_j(x, 0) = x$. Para $t = 1$, entretanto, em V_j , $H_j(x, 1) = G_j(x, 1) = *_j$, pois $\lambda_j(x) = 1$ em V_j . Logo H_j é a homotopia desejada que contrai V_j para um ponto. \square

Teorema 2.3.13. *Se X é um espaço normal conexo por caminhos com um ponto base não degenerado, a reformulação de Whitehead da categoria resulta no mesmo valor que a definição de categoria LS aberta: $\text{cat}^{Wh}(X) = \text{cat}^{op}(X)$.*

Demonstração. Suponha a reformulação de Whitehead $\text{cat}^{Wh}(X) = n$. Então existe uma função $\varphi : X \rightarrow T^n(X)$ com $\Delta \simeq j \circ \varphi$ via uma homotopia $H : X \times I \rightarrow X^n$, tal que $H(x, 0) = \Delta(x)$ e $H(x, 1) = j \circ \varphi(x)$. Seja $p_i : X^n \rightarrow X$ a i -ésima projeção. Então definimos $h_i : X \rightarrow X$ por $h_i = p_i \circ j \circ \varphi$. Suponha V uma vizinhança aberta do ponto base $*$ que é contrátil ao ponto base $*$ em X . Definimos

$$U_i := h_i^{-1}(V).$$

Como h_i é contínua, pois é composição de funções contínuas, temos que U_i é aberto em X . Além disso, $T^n(X) = \bigcup_{i=1}^n p_i^{-1}(*)$ e $\varphi^{-1}(T^n(X)) = X$, logo $X = \bigcup_{i=1}^n U_i$. Defina $\Gamma : U_i \times I \rightarrow X$ por

$$\Gamma(u, t) := \begin{cases} p_i \circ H(u, 2t), & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ G(h_i(u), 2t - 1), & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

sendo $G : V \times I \rightarrow X$ a homotopia que contrai V em $*$. Observe que

$$p_i \circ H(u, 1) = p_i \circ j \circ \varphi(u) = h_i(u) = G(h_i(u), 0)$$

Logo, Γ é bem definida, e ainda $\Gamma(u, 0) = p_i \circ \Delta(u) = u$ e $\Gamma(u, 1) = *$. Assim $U_i \simeq *$ e portanto a cobertura $\{U_i : i = 1, \dots, n\}$ é categórica, concluindo que $\text{cat}^{op}(X) \leq n$.

Reciprocamente, suponha $\text{cat}^{op}(X) = n$ e $\{U_i\}$ uma cobertura aberta categórica de X , pelo Lema 2.3.12, e graças a hipótese que X é conexo por caminhos, podemos considerar $H_i : X \times I \rightarrow X$ homotopias para $i = 1, \dots, n$ tais que $H_i(x, 0) = x$ e $H_i(x, 1) = *$ para $x \in U_i$ e $*$ fixado em X . Defina $H : X \times I \rightarrow X^n$ por

$$H(x, t) := (H_1(x, t), \dots, H_n(x, t)).$$

Observe que $H(x, 0) = \Delta(x)$ e $H(x, 1) \in T^n(X)$ para x em algum U_i . Considere $\varphi(x) := H(x, 1)$, como $X = \bigcup_{i=1}^n U_i$, temos $\varphi(x) \in T^n(X)$, assim H é uma homotopia de Δ para $j \circ \varphi$, de modo que $\text{cat}^{Wh}(X) \leq n$. □

2.3.2 Reformulação de Ganea

Agora utilizamos a reformulação de Whitehead da categoria LS para dar o primeiro passo na direção do entendimento da reformulação de Ganea. A reformulação de Ganea é considerada (veja [31] por exemplo) fundamental para diversas aplicações, por ser uma reformulação homotopicamente “mais amigável”, mas também de entendimento mais complicado.

Vamos construir um quadrado de homotopia pullback (Definição 1.1.71). Iniciamos com o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} & T^n(X) & \\ & \downarrow j_n & \\ X & \xrightarrow{\Delta} & X^n \end{array}$$

Pela Proposição 1.1.59, podemos trocar j_n por uma fibração $\tilde{j}_n : \tilde{T}^n(X) \rightarrow X^n$, sendo

$$\tilde{T}^n(X) := \{(y, \gamma) \in T^n(X) \times (X^n)^I : \gamma(0) = j_n(y)\}$$

e

$$\tilde{j}_n(y, \gamma) := \gamma(1).$$

Considere agora, o pullback (1.1.63) de $X \xrightarrow{\Delta} X^n \xleftarrow{\tilde{j}_n} \tilde{T}^n(X)$, e pela Proposição 1.1.73 o quadrado pullback a seguir,

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G}_n(X) & \xrightarrow{\delta} & \tilde{T}^n(X) \\ \downarrow \tilde{p}_n & & \downarrow \tilde{j}_n \\ X & \xrightarrow{\Delta} & X^n \end{array}$$

é um quadrado de homotopia pullback, tal que,

$$\tilde{G}_n(X) = \{(x, y, \gamma) \in X \times T^n(X) \times (X^n)^I : \gamma(0) = j_n(y), \gamma(1) = \Delta(x)\}$$

tal que $\tilde{p}_n(x, y, \gamma) = x$ e $\delta(x, y, \gamma) = (y, \gamma)$. Além disso, pela Proposição 1.1.65 \tilde{p}_n é uma fibração.

O resultado básico que relaciona $\tilde{G}_n(X)$ e a categoria LS é dado pelo Teorema 2.3.16.

Definição 2.3.14. Dada uma fibração $p : E \rightarrow B$, definimos uma *seção*, como sendo uma função $s : B \rightarrow E$ tal que $p \circ s = id_B$.

Lema 2.3.15. Dada uma fibração $p : E \rightarrow B$, existe uma seção $s : B \rightarrow E$ desta fibração, se, e somente se, existe uma função $\tilde{s} : B \rightarrow E$ tal que $p \circ \tilde{s} \simeq id_B$.

Demonstração. Se existe uma seção ela própria pode ser tomada como \tilde{s} no enunciado. Consideremos a recíproca, seja $\tilde{s} : B \rightarrow E$ tal que $p \circ \tilde{s} \simeq id_B$. Podemos aplicar a propriedade de levantamento de homotopia na fibração, da seguinte forma,

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\tilde{s}} & E \\ id_B \times \{0\} \downarrow & \nearrow \tilde{H} & \downarrow p \\ B \times I & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

sendo H a homotopia que realiza $p \circ \tilde{s} \simeq id_B$. Pela propriedade do levantamento temos $\tilde{H}_0 = \tilde{s}$ e $p \circ \tilde{H} = H$. Defina $s = \tilde{H}_1$, assim

$$p \circ \tilde{H} = H \Rightarrow p \circ \tilde{H}_1 = H_1 \Rightarrow p \circ s = id_B.$$

□

Teorema 2.3.16. Existe uma seção, $s : X \rightarrow \tilde{G}_n(X)$, de \tilde{p}_n , se, e somente se, $cat(X) \leq n$.

Demonstração. Pelo Lema 2.3.15, é suficiente mostrar que existe $s : X \rightarrow \tilde{G}_n(X)$ tal que $\tilde{p}_n \circ s \simeq id_X$. Suponha $cat(X) \leq n$ com $\Delta' : X \rightarrow T^n(X)$ tal que $j_n \circ \Delta' \simeq \Delta$. Então obtemos o seguinte diagrama homotópicamente comutativo

$$\begin{array}{ccccc} X & & & & \\ & \searrow \Delta' & & & \\ & & \tilde{G}_n(X) & \xrightarrow{\delta} & T^n(X) \\ & \searrow s & \downarrow \tilde{p}_n & & \downarrow j_n \\ & & X & \xrightarrow{\Delta} & X^n \\ & \searrow id_X & & & \end{array}$$

sendo $s : X \rightarrow \tilde{G}_n(X)$ dada pela propriedade da homotopia pullback 1.1.72. Observe que o lado esquerdo do diagrama nos diz que $\tilde{p}_n \circ s \simeq id_X$, então existe uma seção.

Reciprocamente, suponha que existe uma seção $s : X \rightarrow \tilde{G}_n(X)$. Defina $\Delta' : X \rightarrow T^n(X)$ por $\Delta' = \delta \circ s$. Então obtemos

$$j_n \circ \Delta' \simeq j_n \circ \delta \circ s \simeq \Delta \circ \tilde{p}_n \circ s \simeq \Delta$$

pela reformulação de Whitehead (2.3.5) obtemos $\text{cat}(X) \leq n$. \square

Na literatura (veja [5] por exemplo) a indexação do $\tilde{G}_n(X)$ é relativa a $T^{n+1}(X)$, assim como a categoria LS pode ser definida n , se n for o menor inteiro tal que existe cobertura categórica com $n + 1$ elementos. E neste caso, na reformulação de Whitehead é considerado $n + 1$ também. Neste contexto, a construção de Ganea, que apresentamos a seguir, inicia com índice 0. Como optamos por definir a categoria como sendo o menor n tal que existe cobertura categórica com n elementos, iniciamos a construção de Ganea no índice 1.

Exemplo 2.3.17. Verifiquemos que $\tilde{G}_1(X) \simeq PX$, onde $PX = \{\gamma \in X^I : \gamma(0) = *\}$ é o path space de X com ponto base $*$. Observe que, $T^1(X) = *$, e pela definição de $\tilde{G}_1(X)$, vale

$$\begin{aligned} \tilde{G}_1(X) &= \{(x, y, \gamma) \in X \times T^1(X) \times X^I : \gamma(0) = j_1(y), \gamma(1) = \Delta(x)\} \\ &= \{(x, y, \gamma) \in X \times * \times X^I : \gamma(0) = *, \gamma(1) = x\} \\ &\simeq \{\gamma \in X^I : \gamma(0) = *\} = PX \end{aligned}$$

concluindo que $\tilde{G}_1(X) \simeq PX$.

A seguir, mostramos outra forma de construir conjuntos tais como o $\tilde{G}_n(X)$. Este método é conhecido como *construção de Ganea* ou *construção fibra-cofibra*. De modo que, construímos indutivamente o n -ésimo espaço de Ganea $G_n(X)$. O Teorema 2.3.20 mostra que de fato cada conjunto $G_n(X)$ pode ser identificado com o $\tilde{G}(X)_n$.

Definição 2.3.18 (Construção fibra-cofibra).

1. Seja $F_1(X) \xrightarrow{i_1} G_1(X) \xrightarrow{p_1} X$ a fibração por caminhos em X , $\Omega X \rightarrow PX \rightarrow X$.
2. Suponha termos construída uma fibração $F_n(X) \xrightarrow{i_n} G_n(X) \xrightarrow{p_n} X$. Seja $C(i_n) = G_n(X) \cup_{i_n} C(F_n(X))$ o espaço cone de $i_n : F_n(X) \rightarrow G_n(X)$. Podemos estender p_n para a função $q_n : C(i_n) \rightarrow X$ definindo $q_n(x) = p_n(x)$ para $x \in G_n(X)$ e $q_n([y, t]) = *$ para $[y, t] \in C(F_n(X))$.
3. Converta q_n na fibração $p_{n+1} : G_{n+1}(X) \rightarrow X$ utilizando o seguinte diagrama comutativo (veja Proposição 1.1.59)

$$\begin{array}{ccccc} G_n(X) & \xrightarrow{k_n} & C(i_n) & \xrightarrow{\cong} & G_{n+1}(X) \\ & \searrow p_n & \downarrow q_n & \swarrow p_{n+1} & \\ & & X & & \end{array}$$

4. Continuando este padrão produzimos o seguinte diagrama de *Fibrações de Ganea*

$$\begin{array}{ccccccc}
 \Omega X = F_1(X) & \longrightarrow & F_2(X) & \longrightarrow & F_3(X) & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow F_n(X) \longrightarrow \cdots \\
 \downarrow i_1 & & \downarrow i_2 & & \downarrow i_3 & & \downarrow i_n \\
 PX = G_1(X) & \longrightarrow & G_2(X) & \longrightarrow & G_3(X) & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow G_n(X) \longrightarrow \cdots \\
 \downarrow p_1 & & \downarrow p_2 & & \downarrow p_3 & & \downarrow p_n \\
 X & \xrightarrow{id_X} & X & \xrightarrow{id_X} & X & \xrightarrow{id_X} & \cdots \xrightarrow{id_X} X \xrightarrow{id_X} \cdots
 \end{array}$$

Observe que a construção de Ganea é functorial, a proposição a seguir mostra como uma $f : X \rightarrow Y$ induz um morfismo entre os respectivos espaços de Ganea.

Proposição 2.3.19. *Uma função com ponto marcado $f : X \rightarrow Y$ induz, para cada n , um diagrama comutativo*

$$\begin{array}{ccc}
 G_n(X) & \xrightarrow{G_n(f)} & G_n(Y) \\
 \downarrow p_n & & \downarrow p_n \\
 X & \xrightarrow{f} & Y.
 \end{array}$$

Demonstração. No caso $n = 1$ definimos $G_1(f) : PX \rightarrow PY$ por $G_1(f)(\gamma) = f \circ \gamma$, e verificamos que

$$(f \circ p_1)(\gamma) = f(\gamma(1))$$

$$(p_1 \circ G_1(f))(\gamma) = p_1(f \circ \gamma) = (f \circ \gamma)(1) = f(\gamma(1))$$

Assim, no caso $n = 1$ o digrama dado no enunciado é comutativo. Suponha por hipótese de indução que $G_n(f)$ torna o diagrama comutativo. Verifiquemos que para $n + 1$ também temos a comutatividade do diagrama. Por definição temos

$$G_{n+1}(X) = \{(x, \gamma) \in C(i_n) \times X^I : \gamma(0) = q_n(x)\}$$

onde $C(i_n) = G_n(X) \cup_{i_n} C(F_n(X))$.

Definimos primeiramente uma função $\psi : G_n(X) \cup C(F_n(X)) \rightarrow G_n(Y) \cup C(F_n(Y))$ dada por

$$\psi(\omega) = \begin{cases} G_n(f)(\omega), & \text{se } \omega \in G_n(X), \\ [G_n(f)(i_n(x)), t], & \text{se } \omega = [x, t] \in C(F_n(X)). \end{cases}$$

Pela hipótese de indução ψ é bem definida, pois $G_n(f)$ é um morfismo de fibrações. Agora, definimos $G_{n+1}(f) : G_{n+1}(X) \rightarrow G_{n+1}(Y)$ por $G_{n+1}(f)(\omega, \gamma) = (\psi(\omega), f \circ \gamma)$. Assim,

$$(p_{n+1} \circ G_{n+1}(f))(\omega, \gamma) = p_{n+1}(\psi(\omega), f \circ \gamma) = (f \circ \gamma)(1) = f \circ p_{n+1}(\omega, \gamma).$$

□

Para definirmos a reformulação de Ganea precisamos verificar que $G_n(X) \simeq \tilde{G}_n(X)$. A demonstração do teorema a seguir é encontrada em detalhes em [5] páginas 29-31.

Teorema 2.3.20. Para todo n , os espaços $G_n(X) \simeq \tilde{G}_n(X)$, e o seguinte diagrama é homotópicamente comutativo:

$$\begin{array}{ccc} G_n(X) & \xrightarrow{\simeq} & \tilde{G}_n(X) \\ & \searrow p_n & \swarrow \tilde{p}_n \\ & X & \end{array} .$$

Agora, podemos enunciar a reformulação de Ganea.

Definição 2.3.21 (Reformulação de Ganea). A categoria de um espaço conexo X é n , isto é, $\text{cat}(X) = n$, se, e somente se, n é o menor inteiro tal que existe uma seção $s : X \rightarrow G_n(X)$ para p_n , onde $F_n(X) \longrightarrow G_n(X) \xrightarrow{p_n} X$ é a n -ésima fibração de Ganea na construção fibra-cofibra.

Segundo Cornea et al.[5], as categorias dos espaços de Ganea se aproximam a $\text{cat}(X)$ à medida que n aumenta. Se estamos interessados na categoria de X , então é natural perguntar sobre as categorias dos próprios espaços de Ganea. É um fato bastante notável que essas categorias possam ser calculadas com precisão.

Teorema 2.3.22. As categorias dos espaços de Ganea associados a X são:

- Se $n \leq \text{cat}(X)$, então $\text{cat}(G_n(X)) = n$.
- Se $n \geq \text{cat}(X)$, então $\text{cat}(G_n(X)) = \text{cat}(X)$.

Demonstração. Seja $\text{cat}(X) = k$. Como $G_1(X) \simeq *$ e $G_n(X) \simeq G_{n-1}(X) \cup_{i_n} C(F_{n-1}(X))$, pelo Teorema 2.1.32, obtemos indutivamente que $\text{cat}(G_n(X)) \leq n$. Em particular,

$$\text{cat}(G_k(X)) \leq k = \text{cat}(X).$$

Mas, pela Proposição 2.3.16, existe uma seção $s : X \rightarrow G_k(X)$ com $p_k \circ s \simeq id_X$. Pelo Lema 2.1.4, isto significa que $\text{cat}(G_k(X)) \geq \text{cat}(X) = k$. Com efeito, $\text{cat}(G_k(X)) = k$. Mas, agora note que, existem k cones de funções que constroem $G_{k+1}(X)$ começando em $*$. Se, em qualquer estágio, $\text{cat}(G_j(X)) < j$, então é impossível $\text{cat}(G_k(X))$ atingir k . Assim, concluímos que $\text{cat}(G_n(X)) = n$ para qualquer $n \leq k$.

Considere agora $n \geq k$. Como $\text{cat}(X) = k$, para cada $n \geq k$, existe uma seção $s_n : X \rightarrow G_n(X)$ com $p_n \circ s_n \simeq id_X$. Novamente, pelo Lema 2.1.4, obtemos que $\text{cat}(G_n(X)) \geq \text{cat}(X) = k$. Mas, pela Proposição 2.1.46, como

$$G_n(X) = G_{n-1}(X) \cup C(F_{n-1}(X)) \simeq G_{n-1}(X)/F_{n-1}(X)$$

temos $\text{cat}(G_n(X)) \leq \text{cat}(X)$. Concluindo que, para todo $n \geq k = \text{cat}(X)$, temos $\text{cat}(G_n(X)) = \text{cat}(X)$.

□

2.3.3 Categoria seccional

Segundo Cornea et al. [5], no artigo [38] de 1958, Schwarz¹ introduziu uma variante da categoria LS, atualmente conhecida como *Schwarz Genus* ou *genus de uma fibração*. Outra terminologia com mesmo significado foi dada por James [18]² em 1978 referindo a esta noção como *categoria seccional de uma fibração*. Assim como na bibliografia [5] optamos por utilizar aqui a terminologia categoria seccional, cuja definição é dada a seguir.

Definição 2.3.23. Seja $F \longrightarrow E \xrightarrow{p} B$ uma fibração. Então a *categoria seccional* de p , denotada $\text{secat}(p)$, é o menor inteiro n tal que existe uma cobertura aberta $\{U_1, \dots, U_n\}$ de B e, para cada U_i , uma $s_i : U_i \rightarrow E$ seção local de p , isto é, $p \circ s_i = \text{id}_{U_i}$.

A categoria seccional satisfaz as seguintes propriedades básicas:

Teorema 2.3.24. *Seja $F \longrightarrow E \xrightarrow{p} B$ uma fibração. Então,*

1. $\text{secat}(p) \leq \text{cat}(B)$.
2. Se E é contrátil, então $\text{secat}(p) = \text{cat}(B)$.
3. Se existir $x_1, \dots, x_k \in \widetilde{H}^*(B; R)$ (onde R é um anél comutativo com unidade) tal que

$$p^*(x_1) = \dots = p^*(x_k) = 0 \quad e \quad x_1 \smile \dots \smile x_k \neq 0$$

então $\text{secat}(p) \geq k + 1$. Ou seja, $\text{secat}(p) \geq \text{cup}_R(\ker(p^*)) + 1$.

Demonstração.

- (1) Suponha $\text{cat}(B) = n$ com cobertura categórica U_1, \dots, U_n . Considere o levantamento de homotopia

$$\begin{array}{ccc} U_i \times \{0\} & \xrightarrow{e_0} & E \\ \text{id}_{U_i} \times \{0\} \downarrow & \nearrow G & \downarrow p \\ U_i \times I & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

sendo e_0 a função constante para um ponto escolhido na fibra de um ponto base $b_0 \in B$ e sendo H uma homotopia de contração com $H_0 = b_0$ e $H_1 = j_{U_i} : U_i \hookrightarrow B$. A função G existe pela propriedade de levantamento de homotopia, tal que, $G_0 = e_0$ e $p \circ G_1 = H_1 = j_{U_i}$, então G_1 é uma seção de p sobre U_i . Como este procedimento funciona para cada U_i , obtemos que $\text{secat}(p) \leq \text{cat}(B)$.

¹ Albert Solomonovich Schwarz (nascido em 24 de junho de 1934) é um matemático soviético e americano e um físico teórico formado na União Soviética e atualmente professor na Universidade da Califórnia.

² Ioan Mackenzie James (nascido em 23 de Maio de 1928) é um matemático britânico.

(2) Pelo item (1) temos $\text{secat}(p) \leq \text{cat}(B)$ em geral. Agora, suponha $K : E \times I \rightarrow E$ uma contração de E no ponto $e_0 \in E$. Considere $\text{secat}(p) = n$, com $\{U_1, \dots, U_n\}$ cobertura de B e s_1, \dots, s_n seções locais ($p \circ s_i = id_{U_i}$). Definimos

$$\begin{aligned} H : U_i \times I &\rightarrow B \\ (u, t) &\mapsto p(K(s_i(u), t)) \end{aligned}$$

e verificamos

$$H(u, 0) = p(K(s_i(u), 0)) = p(s_i(u)) = u,$$

$$H(u, 1) = p(K(s_i(u), 1)) = p(e_0) = b_0.$$

Assim, H é uma contração de U_i em $b_0 \in B$. Isto vale para cada U_i , logo $\{U_1, \dots, U_n\}$ é cobertura categórica de B , e $\text{cat}(B) \leq n = \text{secat}(p)$.

(3) A ideia desta demonstração é essencialmente a mesma utilizada no Teorema 2.1.8. Suponha $\text{secat}(p) = m$ e $\{U_1, \dots, U_m\}$ cobertura de B com seções locais s_1, \dots, s_m respectivamente. Considere que as classes de cohomologia $x_1, \dots, x_m \in \widetilde{H}^*(B; R)$ satisfazem $p^*(x_i) = 0$ para cada $i = 1, \dots, m$. Denotamos as inclusões $j_i : U_i \hookrightarrow B$, $q_i : B \hookrightarrow (B, U_i)$ e $q : B \hookrightarrow (B, \bigcup U_i)$ tal como no Teorema 2.1.8. Observe que podemos identificar j_i com id_{U_i} com o propósito de descrever a seção s_i satisfazendo $p \circ s_i = j_i$. Por hipótese $p^*(x_i) = 0$, logo,

$$j_i^*(x_i) = s_1^*(p^*(x_i)) = 0$$

e a sequência longa exata em cohomologia associada ao par (B, U_i) fornece um elemento $\bar{x}_i \in H^*(B, U_i; R)$ com $q_i^*(\bar{x}_i) = x_i$. Isto pode ser feito para cada i e o produto resultante $\bar{x}_1 \smile \dots \smile \bar{x}_m \in H^*(B, \bigcup U_i; R)$ satisfaz

$$q^*(\bar{x}_1 \smile \dots \smile \bar{x}_m) = x_1 \smile \dots \smile x_m.$$

Pela definição de categoria seccional, temos $B = \bigcup U_i$. Logo $H^*(B, \bigcup U_i; R) = 0$ e consequentemente $\bar{x}_1 \smile \dots \smile \bar{x}_m = 0$. Portanto, $x_1 \smile \dots \smile x_m = 0$, e concluímos que, qualquer produto diferente de zero de classes de cohomologia que estejam no núcleo de p^* , deve ter comprimento menor que $\text{secat}(p)$, ou seja, $\text{cup}_R(\ker(p^*)) + 1 \leq \text{secat}(p)$. \square

3 Aplicações

Até aqui apresentamos algumas aplicações diretamente ligadas a categoria de Lusternik-Schnirelmann. Existem aplicações da categoria LS em diversas áreas da matemática. Em [31] encontramos um resumo de algumas destas aplicações, outras referências que recomendamos são [6] e [5]. Neste capítulo, apresentamos duas aplicações distintas da teoria apresentada no capítulo anterior. A primeira é a solução de um problema de geometria, que estabelece a quantidade mínima de cordas binormais que um corpo convexo admite. A segunda aplicação mostra a relação entre a categoria LS e a complexidade topológica do problema de planejamento de movimento.

3.1 Cordas binormais em corpos convexos

Esta primeira aplicação, concerne a solução de um problema de geometria, apresentado por V. Klee em 1960 “*Unsolved Problems in Intuitive Geometry*”[19], e cuja solução dada por N. N. Kuiper em 1964 [21] faz uso da categoria de Lusternik-Schnirelmann.

Um *corpo convexo* $B \subset \mathbb{R}^n$ é um subconjunto compacto, convexo e com interior não vazio em \mathbb{R}^n . Uma *corda* é um segmento de reta $[p, q]$ que une dois pontos da fronteira de B , isto é, $p, q \in \partial B$. Uma corda é dita normal em p , se $[p, q]$ é ortogonal ao hiperplano tangente no ponto p da hiper-superfície ∂B , caso a mesma condição seja satisfeita também no ponto q , então $[p, q]$ é chamada de *corda binormal*. A Figura 20 apresenta as cordas binormais $[p, q]$ e $[r, s]$ em um corpo convexo $B \subset \mathbb{R}^2$ cuja fronteira ∂B é uma elipse.

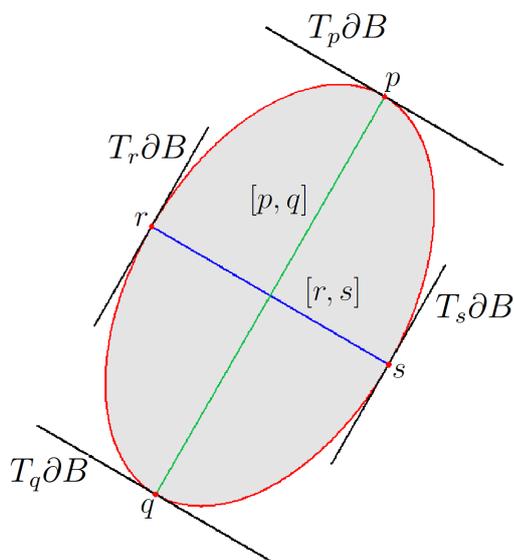


Figura 20 – Cordas binormais da elipse no plano bidimensional

Fonte: Elaborada pelo autor.

O problema apresentado por Klee em [19], consiste da seguinte pergunta: “Qualquer corpo convexo em \mathbb{R}^n admite pelo menos n cordas binormais?”. Neste tópico verificamos com base no artigo de Kuiper[21] que a resposta para esta pergunta é afirmativa, isto é, todo corpo convexo em \mathbb{R}^n admite pelo menos n cordas binormais, e ainda mais, para qualquer função $f : \mathbb{R}P^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^{2-} (veja Definição 3.1.6) existe um corpo convexo simétrico em relação à origem de \mathbb{R}^n , para o qual o conjunto das direções das cordas binormais coincide com o conjunto $\{z \in \mathbb{R}P^{n-1} | df_z = 0\}$ dos pontos críticos de f . Reciprocamente, para qualquer corpo convexo em \mathbb{R}^n existe um corpo convexo centro-simétrico com fronteira de classe \mathcal{C}^{2-} e uma função $f : \mathbb{R}P^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ cujo conjunto dos pontos críticos coincide com o conjunto das direções das cordas binormais.

Definição 3.1.1 ([27]).

- Um conjunto $B \subset \mathbb{R}^n$ é *convexo* se para quaisquer dois pontos $p, q \in B$ o segmento de reta $[p, q]$ está inteiramente contido em B .
- Um conjunto $B \subset \mathbb{R}^n$ é *estritamente convexo* se para quaisquer pontos $p, q \in B$ o interior de $[p, q]$ esta contido no interior de B .
- Um conjunto $B \subset \mathbb{R}^n$ compacto e convexo com pelo menos um ponto interior é chamado de *corpo convexo*.
- Uma *corda* é um segmento de reta $[p, q]$ com $p, q \in \partial B$.
- Uma corda é chamada de *binormal* se as duas seguintes inequações são satisfeitas para todo $x \in B$

$$\langle x - p, q - p \rangle \geq 0$$

$$\langle x - q, p - q \rangle \geq 0$$

Observação 3.1.2. Se o conjunto B tem fronteira suave então a definição de binormal equivale a dizer que a corda $[p, q]$ é ortogonal a $T_p \partial B$ e a $T_q \partial B$. Veja Figura 20. No entanto, a definição dada acima nos permite considerar cordas binormais em corpos convexos que não tenham fronteira suave. Como por exemplo, em triângulos, hexágonos e varias outras formas geométricas interessantes do espaço Euclidiano bidimensional.

Exemplo 3.1.3. Um conjunto compacto em \mathbb{R}^3 com a fronteira sendo um elipsoide é um corpo convexo, ainda mais, este é um corpo convexo com fronteira suave e também é um corpo estritamente convexo, enquanto uma “capsula” formada por um cilindro e duas semi-esferas é um corpo convexo suave, mas não é estritamente convexo, a Figura 21 apresenta uma visualização tridimensional destes dois exemplos.

A capsula da Figura 21 não é estritamente convexa pois podemos encontrar pontos distintos e colineares na parte da superfície cilíndrica, de modo que uma corda que liga estes pontos está toda contida na fronteira.

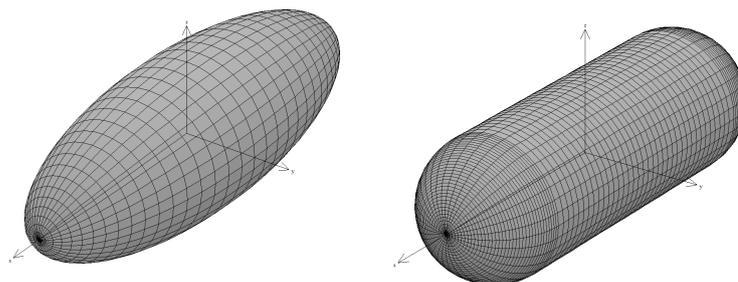


Figura 21 – Elipsoide a esquerda e “capsula” a direita

Fonte: Elaborada pelo autor.

Observe que ambos admitem infinitas cordas binormais, no caso do elipsoide, veja Figura 22, temos uma corda longitudinal, segmento de reta azul, e em qualquer ponto pertencente à circunferência azul podemos considerar uma corda binormal que o conecta ao seu antípoda, logo, este corpo convexo admite infinitas cordas binormais.

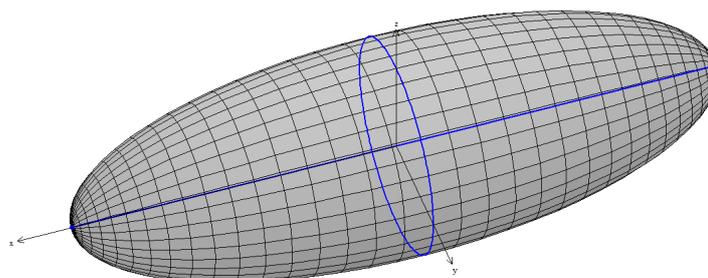


Figura 22 – Cordas binormais em um elipsoide

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 23 apresenta o caso da cápsula, observe que este possui as mesmas cordas que identificamos no elipsoide em azul, mas em cada circunferência ao longo da parte cilíndrica, podemos considerar infinitas cordas binormais que conectam suas antípodas. No entanto, veremos a seguir que o conjunto de direções das cordas binormais da cápsula é igual ao do elipsoide.

Observe também que estes dois corpos convexos possuem diferentes tipos de curvatura, sendo que o elipsoide possui curvatura normal positiva, enquanto a capsula possui curvatura normal nula ao longo da parte cilíndrica.

Agora, podemos considerar um elipsoide escaleno, isto é, um elipsoide parametrizado com coeficientes distintos entre si. Assim, os eixos do elipsoide tem comprimentos diferentes entre si, e neste caso, este corpo convexo possui exatamente três cordas binormais, veja Figura 24.

Exemplo 3.1.4. A Figura 25, apresenta dois exemplos de corpos convexos que podemos considerar no plano \mathbb{R}^2 . O primeiro a esquerda é o conjunto cujo bordo é um triângulo equilátero, com a Definição 3.1.1 (utilizando o produto interno) um triângulo equilátero em

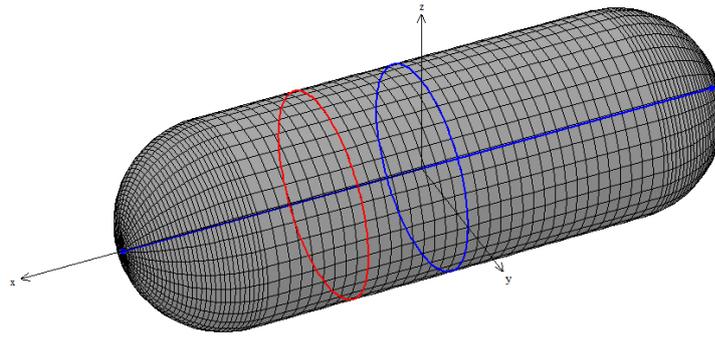


Figura 23 – Cordas binormais em uma cápsula
Fonte: Elaborada pelo autor.

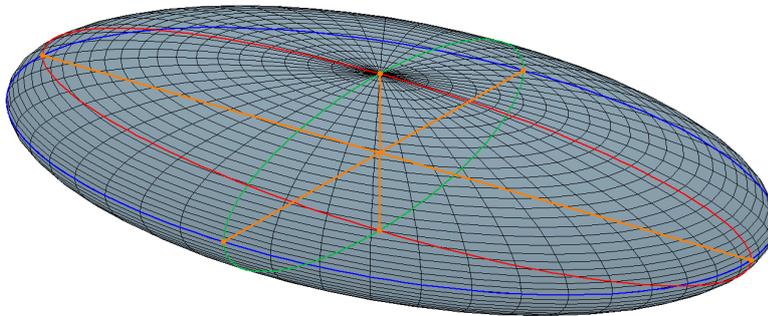


Figura 24 – Cordas binormais em um elipsoide escaleno
Fonte: Elaborada pelo autor.

\mathbb{R}^2 admite seis cordas binormais, sendo os próprios vértices da fronteira três delas, além das arestas este possui as três cordas indicadas na Figura 25 nas cores azul, vermelho e verde, que conectam os vértices aos centros das arestas opostas. Ainda na Figura 25 ao lado do triângulo, apresentamos o conjunto que tem como fronteira um triângulo com “as pontas arredondadas” de modo que este tem bordo suave. Pensando nas cordas como vetores direcionais, observamos que os dois corpos da Figura 25 tem as cordas com mesma direção.

Notação 3.1.5. Dado um vetor $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ podemos escrever em coordenadas polares $v = r\omega$ onde $r = \|v\|$ e $\omega = v/r$. O vetor unitário ω é um ponto de $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Denotamos $\pi : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{RP}^{n-1}$ a projeção ao quociente. A classe de equivalência antipodal $z = \pi(\omega) = \{\omega, -\omega\}$ do vetor ω , é um ponto do plano projetivo real \mathbb{RP}^{n-1} . Se ω é um vetor unitário na direção de uma corda binormal $[p, q]$ de um corpo convexo $B \subset \mathbb{R}^n$, então $\omega = (q - p)/\|q - p\|$ e $-\omega = (p - q)/\|p - q\|$. Isto é, o conjunto destes vetores é invariante pela aplicação antipodal e assim podemos associar cada corda binormal de B a um ponto de \mathbb{RP}^{n-1} , e denotamos por $K(B) \subset \mathbb{RP}^{n-1}$ o subconjunto dos pontos associados as cordas binormais de B , e chamamos este subconjunto de *conjunto das cordas binormais de B* .

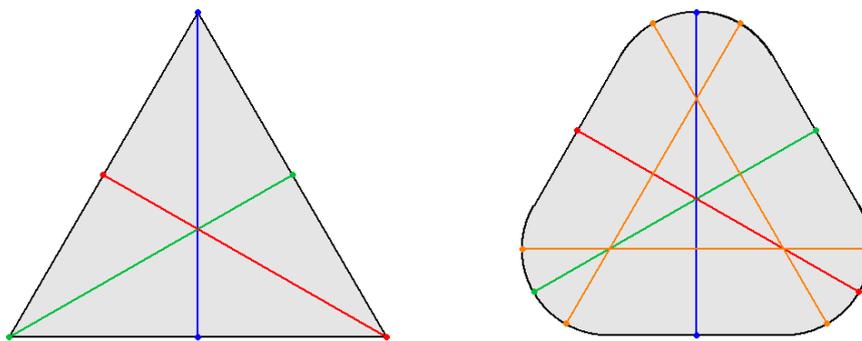


Figura 25 – Triângulo e triângulo arredondado

Fonte: Elaborada pelo autor.

Note que este conjunto é único pela definição de \mathbb{RP}^{n-1} que identifica $-\omega$ e ω .

Definição 3.1.6. Uma função $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe \mathcal{C}^{2-} caso seja de classe \mathcal{C}^1 e para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}^m$ exista $\delta > 0$ e $N > 0$ tal que

$$|f(x+h) - f(x) - df_x(h)| < N|h|^2$$

para todo $x \in \mathbb{R}^m$ com $|x - x_0| < \delta$ e $h < \delta$. Se f for uma função em uma m -variedade de classe \mathcal{C}^∞ tendo para qualquer carta $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma composição $f \circ \varphi^{-1}$ que é de classe \mathcal{C}^{2-} , então f é dita de classe \mathcal{C}^{2-} .

Notação 3.1.7. A partir deste ponto, dada uma função $f : \mathbb{RP}^m \rightarrow \mathbb{R}$ suave, denotaremos $K(f)$ o conjunto dos pontos críticos de f , isto é, $K(f) := \{z \in \mathbb{RP}^m \mid df_z = 0\}$.

Teorema 3.1.8. Se $f : \mathbb{RP}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe \mathcal{C}^{2-} , então existe um corpo convexo simétrico $B \subset \mathbb{R}^n$ centrado na origem, para o qual o conjunto das cordas binormais é $K(B) = K(f) \subset \mathbb{RP}^{n-1}$.

Demonstração. Seja $r : \mathbb{R} \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $r(t, \omega) := 1 + tf(\pi(\omega))$, onde $\pi : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{RP}^{n-1}$ é a projeção natural ao quociente, então fixando $t \geq 0$, suficientemente pequeno, de modo que $r_t(\omega) := r(t, \omega) > 0$, $\forall \omega \in S^{n-1}$, definimos o conjunto

$$\partial B_t := \{v \in \mathbb{R}^n \mid v = r_t(\omega)\omega, \forall \omega \in S^{n-1}\}$$

deste modo, ∂B_t é o fronteira de um corpo B em \mathbb{R}^n , pois r é contínua, e $r_t(\omega) = r_t(-\omega)$, logo, $\|r_t(\omega)\omega\| = \|-r_t(\omega)\omega\|$, isto é, o corpo B é simétrico em relação à origem. Quando $t \rightarrow 0$ esta hiper-superfície converge em S^{n-1} , e esta convergência vale também para as derivadas contínuas de primeira e segunda ordem. Como \mathbb{RP}^{n-1} é compacto, existe $\varepsilon > 0$ tal que a hiper-superfície ∂B_ε tem em cada ponto uma curvatura normal positiva, como S^{n-1} , e portanto é estritamente convexo. Na Figura 26 ilustramos um exemplo desta construção no plano bidimensional, apresentando três curvas com os valores de t diferentes.

Neste exemplo, temos para $t = 0.5$ a curva em vermelho que delimita um conjunto não convexo, para $t = 0.05$ a curva azul que delimita um conjunto convexo, e ainda o caso $t = 0$ para o qual a curva é um círculo.

```
r = (1+0.05*cos(5*w/2)^2); 0.000000 <= w <= 6.283185
r = (1+0.5*cos(5*w/2)^2); 0.000000 <= w <= 6.283185
r = 1; 0.000000 <= w <= 6.283185
```

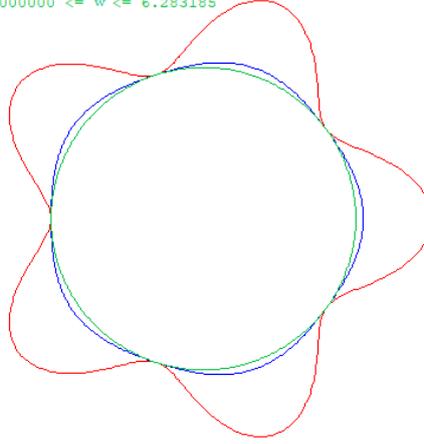


Figura 26 – Diagrama ilustrativo construção de ∂B_t

Fonte: Elaborada pelo autor.

Note que toda corda $[p, q]$ binormal de B_ε passa pela origem, pois B_ε é simétrico com respeito a origem e estritamente convexo. Assim, se ω é uma direção de uma corda binormal, então ω é normal ao hiperplano tangente $T_{r_\varepsilon(\omega)}\partial B_\varepsilon$, mostremos que isto equivale a $\omega \in K(r_\varepsilon)$, ou seja, $dr_\varepsilon(\omega) = 0$. Para isso, consideremos uma curva $\gamma : [-a, a] \rightarrow S^{n-1}$, tal que $\gamma(0) = \omega$ e $\gamma'(0) = v \in T_\omega S^{n-1}$, supondo $\|v\| = 1$, definimos $\gamma(\theta) = \cos(\theta)\omega + \sin(\theta)v$, e observamos que,

$$\begin{aligned} \langle \gamma(\theta), \gamma(\theta) \rangle &= \langle \cos(\theta)\omega + \sin(\theta)v, \cos(\theta)\omega + \sin(\theta)v \rangle \\ &= \cos^2(\theta)\langle \omega, \omega \rangle + 2\cos(\theta)\sin(\theta)\langle \omega, v \rangle + \sin^2(\theta)\langle v, v \rangle \\ &= \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 \end{aligned}$$

pois, $\langle \omega, v \rangle = 0$ e $\langle \omega, \omega \rangle = 1 = \langle v, v \rangle$, logo, $Im(\gamma) \subset S^{n-1}$. A Figura 27 ilustra esta situação. Assim, podemos considerar a curva $r_\varepsilon \circ \gamma : [-a, a] \rightarrow \partial B_\varepsilon$ tal que,

$$\left\langle \omega, \frac{d}{d\theta} \Big|_{\theta=0} r_\varepsilon(\gamma(\theta))\gamma(\theta) \right\rangle = 0$$

Por outro lado, temos,

$$\begin{aligned} \left\langle \omega, \frac{d}{d\theta} \Big|_{\theta=0} r_\varepsilon(\gamma(\theta))\gamma(\theta) \right\rangle &= \left\langle \omega, (dr_\varepsilon)_\omega(v)\omega + r_\varepsilon(\omega)v \right\rangle \\ &= (dr_\varepsilon)_\omega(v)\langle \omega, \omega \rangle + r_\varepsilon(\omega)\langle \omega, v \rangle \\ &= (dr_\varepsilon)_\omega(v) \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\omega \perp T_{r_\varepsilon(\omega)}\partial B_\varepsilon \Leftrightarrow 0 = dr_\varepsilon(\omega) = d(1 + \varepsilon f(\pi(\omega))) \Leftrightarrow df = 0$$

Concluindo que $K(B_\varepsilon) = K(f)$. □

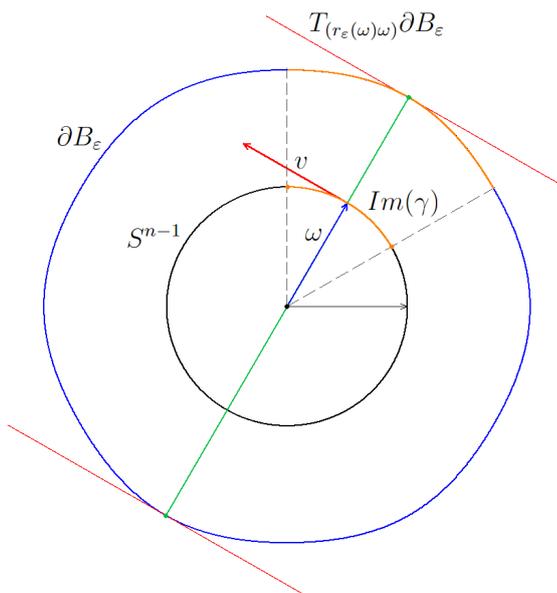


Figura 27 – Imagem de γ em S^{n-1} e projeção em ∂B_ε .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 3.1.9. Considere v_1, \dots, v_n uma base ortonormal de \mathbb{R}^n , e defina a função $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, para todo $v \in \mathbb{R}^n$ e $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, definimos,

$$g(v) = g\left(\sum_{j=1}^n x_j v_j\right) = \sum_{j=1}^n j x_j^2$$

então

$$dg_v(w) = dg_v\left(\sum_{j=1}^n y_j v_j\right) = 2 \sum_{j=1}^n j x_j y_j$$

considere $h := g|_{S^{n-1}}$, então para cada v_i da base ortonormal, tem-se,

$$dh_{v_i}(v) = 2x_i = 0, \quad \forall v \in T_{v_i}(S^{n-1})$$

logo, esta função possui $2n$ pontos críticos em S^{n-1} , e $h : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ é invariante pela aplicação antipodal de modo que é bem definida a função $f = h \circ \pi^{-1} : \mathbb{R}P^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$, de fato, as classes $z_i = \{v_i, -v_i\}$ são os n pontos críticos de f . Para quaisquer n pontos distintos $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{R}P^{n-1}$ existe um \mathcal{C}^∞ -difeomorfismo $\psi : \mathbb{R}P^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$ tal que $\psi(w_i) = z_i$, assim, $f \circ \psi : \mathbb{R}P^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função com n pontos críticos, e pelo teorema anterior existe um corpo convexo com n cordas binormais.

Corolário 3.1.10. Dadas n retas distintas passando pela origem de \mathbb{R}^n ($n \geq 2$), existe um corpo convexo B com exatamente n cordas binormais, e tal que essas são as retas dadas.

Demonstração. Sejam n retas distintas em \mathbb{R}^n que cortam a origem, logo, estas formam um conjunto de $2n$ pontos antípodos em S^{n-1} , projetados em $\mathbb{R}P^{n-1}$ são n pontos distintos. Considere a função g do exemplo anterior, esta tem n pontos críticos, e utilizando um

difeomorfismo $\psi : \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$ tal que este leve cada ponto crítico de g em um ponto das retas projetadas, temos $f := g \circ \psi$ uma função cujos pontos críticos são as projeções das retas, pelo teorema anterior existe um corpo convexo cujas cordas binormais são as n retas da hipótese. \square

Exemplo 3.1.11. Dadas três retas distintas em um plano bidimensional em \mathbb{R}^3 existe um corpo convexo cujas cordas binormais são exatamente essas três retas.

Teorema 3.1.12. Dado um corpo convexo $B \subset \mathbb{R}^n$, existe um corpo convexo centro-simétrico B' com fronteira $\partial B'$ de classe \mathcal{C}^{2-} , e existe uma função $f : \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^{2-} tal que

$$K(B) = K(B') = K(f).$$

Demonstração. Considere a função $\varphi : B \times B \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida por $\varphi(b, d) := b - d$, esta é bem definida pois $b, d \in \mathbb{R}^n$. Defina o conjunto

$$B'' := \text{Im}(\varphi) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = b - d, \forall b, d \in B\}.$$

A Figura 28 apresenta uma visualização no plano de como φ gera B'' a partir de B , os dois gráficos estão na mesma escala, a esquerda apresenta-se um exemplo de uma curva não centro simétrica, enquanto à direita temos a imagem de φ aplicada a esta curva.

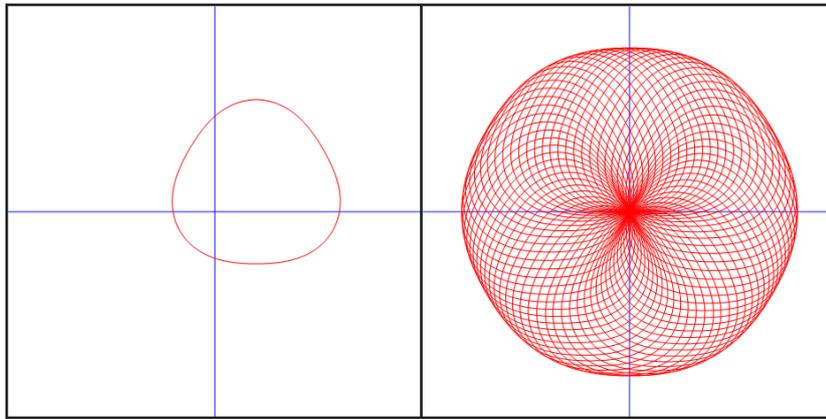


Figura 28 – Exemplo de simetrização $\varphi : B \times B \rightarrow \mathbb{R}^2$ quando ∂B é uma curva em \mathbb{R}^2
Fonte: Elaborada pelo autor.

Mostremos que B'' é um corpo convexo centro-simétrico, considere $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ a reta que liga dois pontos $p, q \in B''$ arbitrários,

$$x(t) = (1 - t)p + tq,$$

por definição $p, q \in B''$ implica que $p = b_p - d_p$ e $q = b_q - d_q$ com $b_p, d_p, b_q, d_q \in B$, logo,

$$\begin{aligned} x(t) &= (1 - t)(b_p - d_p) + t(b_q - d_q) \\ &= [(1 - t)b_p + t(b_q)] - [(1 - t)d_p + td_q]. \end{aligned}$$

Como B é convexo, tem-se que $[(1-t)b_p + t(b_q)] \in B$ e $[(1-t)d_p + td_q] \in B$, logo, $x(t) \in B''$ para todo $t \in [0, 1]$, mostrando que B'' é convexo. Observe que φ é uma função contínua e $B \times B$ é compacto, por conseguinte, B'' é compacto e portanto é um corpo convexo. Além disso, se $u \in \partial B''$ então $u = p - q$ com $p, q \in \partial B$, pois, para qualquer outro vetor na mesma direção de u com comprimento maior, implica que existe um vetor na mesma direção de p com comprimento maior, um absurdo pois $p \in \partial B$, e vale também que $q - p = -u \in \partial B''$, logo B'' é centro-simétrico.

Observando o exemplo da Figura 28 é evidente que as cordas binormais não possuem o mesmo comprimento, no entanto estas possuem a mesma direção. Suponha que $[p, q] \subset B$ é uma corda binormal de B , e considere sua direção unitária $\omega = p - q / \|p - q\|$, note que,

$$\varphi([p, q] \times \{q\}) = [p - q, 0],$$

$$\varphi([p, q] \times \{p\}) = [0, q - p].$$

Assim, para $u = p - q$ obtemos que $[-u, u]$ é uma corda com mesma direção ω , além disso, $T_u \partial B''$ é paralelo a $T_{-u} \partial B''$. Verifiquemos que vale a definição de binormal,

$$\langle x - (-u), u - (-u) \rangle \geq 0, \quad \forall x \in B$$

suponha que $x = b - d$ com $b, d \in B$, então,

$$\begin{aligned} \langle x - (-u), u - (-u) \rangle &= \langle x + u, 2u \rangle \\ &= 2\langle b - d + (p - q), p - q \rangle \\ &= 2\langle b - q, p - q \rangle + 2\langle d - p, q - p \rangle \geq 0. \end{aligned}$$

O resultado segue de modo similar para $\langle x - u, -u - u \rangle \geq 0$, assim, B'' possui as mesmas direções de cordas binormais que B , ou seja, $K(B) = K(B'')$. Observe que, o comprimento de $[-u, u]$ é o dobro do comprimento de $[p, q]$.

Agora, definimos o conjunto $B' := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in B'', \|x - y\| \leq 1\}$. Desta forma, dado um ponto $p' \in \partial B'$ existe um ponto $p'' \in \partial B''$ tal que os hiperplanos tangentes $T_{p'} \partial B'$ e $T_{p''} \partial B''$ são paralelos, pois $\partial B'$ não intersecta a bola aberta de raio 1 centrada em p'' . A Figura 29 ilustra esta construção.

Concluindo que B' é um corpo convexo centro simétrico e $K(B') = K(B'')$. Além do mais, a hiper-superfície $\partial B'$ é diferenciável em todos seus pontos, segue por [3] que $\partial B'$ é uma hiper-superfície de classe \mathcal{C}^1 . Podemos dar os pontos de $\partial B'$ em coordenadas polares, $r = r(\omega) = r(-\omega)$, então a função $f : \mathbb{R}P^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $r(\omega) = f(\pi(\omega))$. Como $r(\omega)$ é de classe \mathcal{C}^1 , f também é, além disso, $dr(\omega) = 0$ sempre que ω é direção de uma corda binormal, concluindo que,

$$K(f) = K(B') = K(B'') = K(B).$$

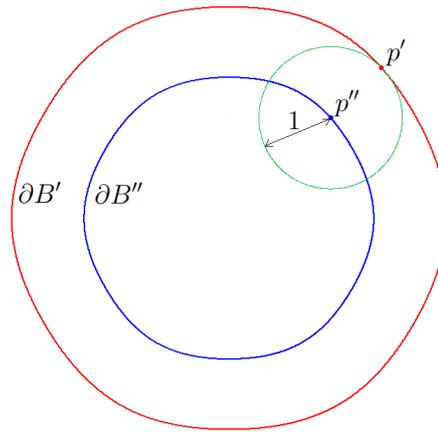


Figura 29 – Diagrama ilustrativo das fronteiras de B'' e B'

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para cada ponto $p \in \partial B'$, segue do fato que qualquer vizinhança de p em $\partial B'$ é comprimida entre um hiperplano e uma esfera tangentes a $\partial B'$ em p , que a condição para \mathcal{C}^{2-} (ver [3]) é satisfeita para f . \square

Teorema 3.1.13. *Um corpo convexo $B \subset \mathbb{R}^n$ tem pelo menos n cordas binormais. Se $K(B) \subset \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$ é composto de um número finito de componentes $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ cada uma contendo um conjunto de cordas binormais de tamanho constante, então*

$$\sum_{\alpha \in \Gamma} (\text{cat}_{\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}}(A_\alpha)) \geq n.$$

Demonstração. Suponha $B \subset \mathbb{R}^n$ um corpo convexo, pelo Teorema 3.1.12 existe uma função $f : \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $K(B) = K(f)$, e pelo Teorema 2.2.28, temos,

$$|K(f)| \geq \text{cat}(\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}) = n,$$

concluindo que $|K(B)| \geq n$. Em virtude do Teorema 2.2.27, constatamos, que,

$$\sum_{\alpha \in \Gamma} (\text{cat}_{\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}}(A_\alpha)) \geq \text{cat}(\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}) = n.$$

\square

Exemplo 3.1.14. Voltemos ao Exemplo 3.1.3 do início desta seção, seja $E \subset \mathbb{R}^3$ um corpo convexo cuja fronteira é um elipsoide, com dois eixos iguais, veja a Figura 22, para visualizar a projeção em $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ podemos identificar cada ponto de $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ com um hemisfério de S^2 , assim os pontos acima do equador são representantes de pontos de $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ enquanto no equador temos relação antípoda que identifica os dois representantes. A Figura 30 apresenta uma visualização do conjunto $K(E)$ em vermelho na representação de $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$, identificado como descrito acima. Enquanto a Figura 31 exibe esta projeção em vermelho na representação poligonal de $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$, pelo Teorema 3.1.12 tem-se que existe $f : \mathbb{R}\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal

que $K(E) = K(f)$, neste caso $K(f)$ tem duas componentes conexas, sendo A_1 um ponto e A_2 uma reta projetiva, uma reta em \mathbb{RP}^2 tem o mesmo tipo de homotopia que S^1 , logo, $\text{cat}_{\mathbb{RP}^2}(A_1) + \text{cat}_{\mathbb{RP}^2}(A_2) = 1 + 2 = 3$.

No caso da capsula, o resultado é análogo, pois o conjunto das binormais associadas em \mathbb{RP}^2 é igual ao conjunto das binormais do elipsoide. Certamente, no caso do elipsoide escaleno, temos um conjunto discreto com três pontos.

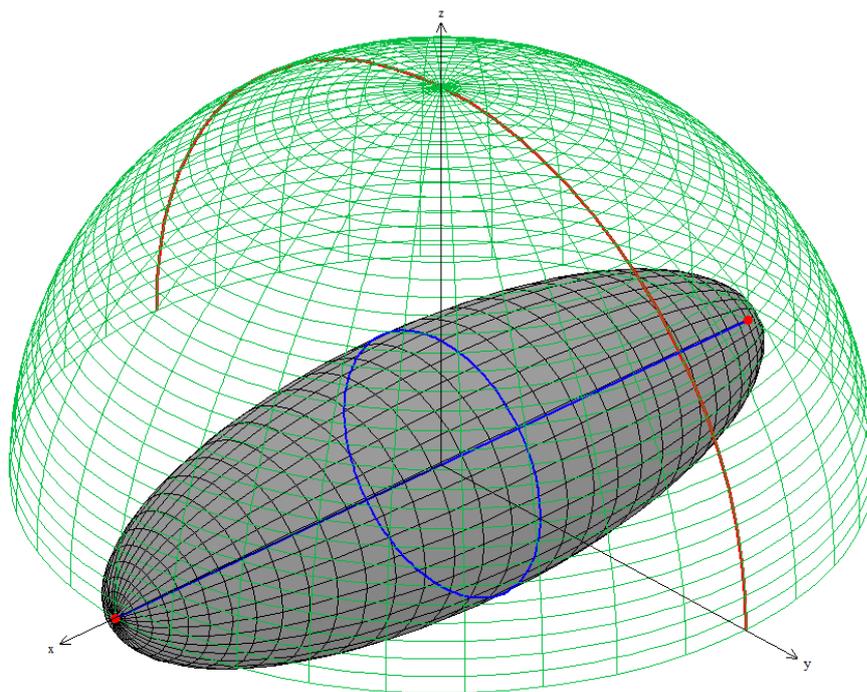


Figura 30 – Projeção das cordas binormais do elipsoide no hemisfério superior da esfera

Fonte: Elaborada pelo autor.

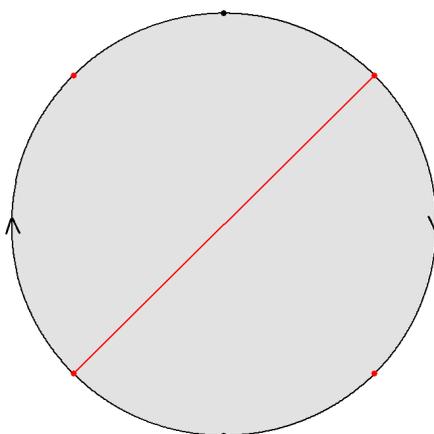


Figura 31 – Projeção das cordas binormais do elipsoide na representação de \mathbb{RP}^2

Fonte: Elaborada pelo autor.

3.2 Complexidade topológica no planejamento de movimentos

A frase “Complexidade Topológica” tem um significado antigo e outro novo, ambos relacionados com a categoria de Lusternik-Schnirelmann [31]. O antigo significado se refere à medida de Smale da complexidade de um algoritmo [37]. O novo se refere à medida de Farber da insolubilidade do problema de planejamento de movimentos [9]. A seguir apresentamos a complexidade topológica introduzida por Farber.

Seja X o espaço de todas possíveis configurações de um sistema mecânico. Na maioria das aplicações X é um espaço topológico. O problema de planejamento de movimentos consiste em construir um algoritmo que tome pares de configurações de entrada $(A, B) \in X \times X$ e produza um caminho contínuo em X como saída, tal que este caminho comece em A e termine em B . O problema do planejamento de movimentos pode ser formalizado da seguinte maneira. Denotemos $PX = X^I$, e definimos

$$\begin{aligned} \pi : PX &\longrightarrow X \times X \\ \gamma &\mapsto (\gamma(0), \gamma(1)). \end{aligned}$$

Assim, o problema do planejamento de movimentos, consiste em encontrar uma função $s : X \times X \rightarrow PX$ tal que $\pi \circ s = id$. Ou seja, encontrar uma seção s da fibração π .

Exemplo 3.2.1. Um braço robótico planar com n articulações, tem como espaço de configurações o n -toro $T^n = S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1$ pois para cada articulação temos um parâmetro ângulo $\theta_i \in S^1$. Veja Figura 32.

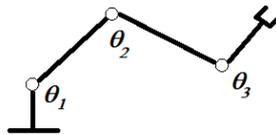


Figura 32 – Exemplo esquemático de braço robótico planar com 3 articulações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 3.2.2. Um corpo rígido em movimento em \mathbb{R}^3 tem como espaço de configurações o grupo de todas transformações isométricas que preservam orientação, que como variedade, é definido por $SE(3) := \mathbb{R}^3 \times SO(3)$. Ou seja, $T \in SE(3)$ é uma transformação $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

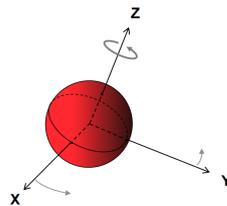


Figura 33 – Exemplo esquemático de corpo rígido em \mathbb{R}^3 .

Fonte: Elaborada pelo autor.

da forma $T(x) = Rx + b$ onde $b \in \mathbb{R}^3$ e $R \in SO(3)$ é uma matriz ortogonal com $\det(R) = 1$.

Exemplo 3.2.3. Se n partículas (ou robôs) se movem em um espaço Y sem colisões, então o espaço de configurações é

$$F(Y, n) = \{(y_1, \dots, y_n) \in Y^n : y_i \neq y_j, i \neq j\}$$

Em particular, se n robôs se movem ao longo de um grafo Γ , então a posição de cada robô é um ponto em $F(\Gamma, n)$. A definição de $F(Y, n)$ dada acima é na verdade a definição geral do espaço de configuração associado ao espaço Y .

Os dois primeiros exemplos acima são estudados no restante desta seção, ao leitor interessado no Exemplo 3.2.3, recomendamos [11].

Segundo Farber [9], a continuidade do planejamento de movimento é um requisito natural e importante, pois a ausência de continuidade resultará em instabilidade do comportamento: existirão pares arbitrariamente próximos (A, B) e (A', B') de configurações iniciais, tais que os caminhos correspondentes $s(A, B)$ e $s(A', B')$ não são próximos.

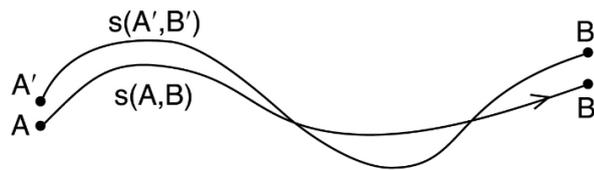


Figura 34 – Continuidade do planejamento de movimentos: Condições (A, B) e (A', B') próximos gerando seções próximas.

Fonte: [9].

Infelizmente, conforme veremos no teorema a seguir, um planejamento de movimento contínuo existe apenas em situações muito simples.

Teorema 3.2.4. *Existe um planejamento de movimento contínuo $s : X \times X \rightarrow PX$ se, e somente se, o espaço de configurações X for contrátil.*

Demonstração. Suponha $X \simeq *$, então existe uma homotopia $H : X \times I \rightarrow X$ com $H(x, 0) = x$ e $H(x, 1) = x_0$, para um $x_0 \in X$ fixado. Dados $A, B \in X$, definimos

$$\gamma(t) = \begin{cases} H(A, 2t), & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2, \\ H(B, 2 - 2t), & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Definido desta forma, γ é um caminho contínuo em X que liga A a B , assim podemos considerar $s(A, B) = \gamma$ seção de $\pi : PX \rightarrow X \times X$. Reciprocamente, suponha que existe uma seção $s : X \times X \rightarrow PX$, fixado um $x_0 \in X$ defina $H : X \times I \rightarrow X$ por $H(x, t) = s(x, x_0)(t)$. Então $H(x, 0) = x$ e $H(x, 1) = x_0$ pois s é uma seção de π . \square

Em [9], Farber define a complexidade topológica da seguinte forma:

Definição 3.2.5. Dado X um espaço topológico conexo por caminhos, definimos a complexidade topológica do planejamento de movimentos em X como sendo o menor número $\text{TC}(X) = k$ tal que o produto cartesiano $X \times X$ pode ser coberto por k subconjuntos abertos $X \times X = U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_k$ tais que, para cada $i = 1, 2, \dots, k$, existe um planejamento de movimento contínuo $s_i : U_i \rightarrow PX$, $\pi \circ s_i = id_{U_i}$. Se tal inteiro não existir, denotamos $\text{TC}(X) = \infty$.

Sendo assim, a complexidade topológica $\text{TC}(X) = \text{secat}(\pi)$ onde $\pi : PX \rightarrow X \times X$. O próximo teorema nos mostra que complexidade topológica é invariante por homotopia.

Teorema 3.2.6. *Se X e Y são espaços topológicos homotopicamente equivalentes, então $\text{TC}(X) = \text{TC}(Y)$.*

Demonstração. Como $X \simeq Y$, existem funções $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ tal que $f \circ g \simeq id_Y$ e $g \circ f \simeq id_X$. Vamos mostrar que $\text{TC}(Y) \leq \text{TC}(X)$. Suponha $U \subset X \times X$ um subconjunto aberto e que existe uma seção $s : U \rightarrow PX$ de $\pi : PX \rightarrow X \times X$ sobre U . Defina $V = (g \times g)^{-1}(U) \subset Y \times Y$. Verifiquemos que existe uma seção $\sigma : V \rightarrow PY$ de $p : PY \rightarrow Y \times Y$ sobre V . Como $f \circ g \simeq id_Y$ seja $H : Y \times I \rightarrow Y$ uma homotopia tal que $H_0 = id_Y$ e $H_1 = f \circ g$. Para $(a, b) \in V$ e $\tau \in I$ defina

$$\sigma(a, b)(\tau) = \begin{cases} H(a, 3\tau) & \text{se } 0 \leq \tau \leq 1/3, \\ f(s(g(a), g(b))(3\tau - 1)) & \text{se } 1/3 \leq \tau \leq 2/3, \\ H(b, 3(1 - \tau)) & \text{se } 2/3 \leq \tau \leq 1. \end{cases}$$

Assim, para $k = \text{TC}(X)$ e qualquer cobertura $\{U_1, \dots, U_k\}$ de $X \times X$ com seções s_1, \dots, s_k de $\pi : PX \rightarrow X \times X$, podemos construir uma cobertura aberta $\{V_1, \dots, V_k\}$ de $Y \times Y$ com seções $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ de $p : PY \rightarrow Y \times Y$. Logo, $\text{TC}(Y) \leq \text{TC}(X)$. De maneira análoga, podemos mostrar que $\text{TC}(X) \leq \text{TC}(Y)$. \square

O resultado a seguir apresenta a relação da categoria de Lusternik-Schnirelmann com a complexidade topológica.

Teorema 3.2.7. *Se X é um espaço conexo por caminhos e paracompacto, então*

$$\text{cat}(X) \leq \text{TC}(X) \leq \text{cat}(X \times X) \leq 2 \text{cat}(X) - 1.$$

Demonstração. Verifiquemos que $\text{cat}(X) \leq \text{TC}(X)$. Suponha $\text{TC}(X) = n$, e seja $\{V_1, \dots, V_n\}$ uma cobertura de $X \times X$ com $s_i : V_i \rightarrow PX$ seções da fibração $\pi : PX \rightarrow X \times X$ em V_i . Fixado um ponto $x_0 \in X$ considere a seguinte inclusão de X em $X \times X$,

$$\begin{aligned} \xi : X &\rightarrow X \times X \\ x &\mapsto (x, x_0), \end{aligned}$$

defina $U_i = \xi^{-1}(V_i)$ para cada $i = 1, \dots, n$, como ξ é função contínua, obtemos que $\mathcal{U} := \{U_1, \dots, U_n\}$ é uma cobertura aberta de X . Agora, para cada U_i podemos construir uma homotopia $H_i : U_i \times I \rightarrow X$ definida por $H_i(x, t) = s_i(x, x_0)(t)$, de modo que $H_i(x, 0) = x$ para todo $x \in U_i$ e $H_i(x, 1) = x_0$ para todo $x \in U_i$. Sendo assim, \mathcal{U} é uma cobertura categórica de X e $\text{cat}(X) \leq n$.

As demais desigualdades seguem: pelo Teorema 2.1.39 temos $\text{cat}(X \times X) \leq 2 \text{cat}(X) - 1$, e do item (1) do Teorema 2.3.24, temos $\text{secat}(\pi) \leq \text{cat}(X \times X)$, logo, $\text{TC}(X) \leq \text{cat}(X \times X)$. \square

Definição 3.2.8. Seja R um corpo e considere o produto tensor $H^*(X; R) \otimes H^*(X; R)$ com o seguinte produto

$$(u_1 \otimes v_1) \cdot (u_2 \otimes v_2) = (-1)^{\deg(v_1) \deg(u_2)} (u_1 \smile u_2) \otimes (v_1 \smile v_2),$$

sendo $\deg(v_1)$ e $\deg(u_2)$ os graus das classes de cohomologias v_1 e u_2 . Assim, $H^*(X; R) \otimes H^*(X; R)$ é uma R -álgebra. Definimos

$$\begin{aligned} \varphi : H^*(X; R) \otimes H^*(X; R) &\rightarrow H^*(X; R) \\ u \otimes v &\mapsto u \smile v, \end{aligned}$$

desta forma, φ é um homomorfismo de R -álgebras, pois o produto cup tem exatamente a propriedade que usamos para definir o produto acima (veja [4]).

O núcleo do homomorfismo φ é chamada de *ideal de divisores do zero de $H^*(X; R)$* . O *zero-divisors-cup-length* de $H^*(X; R)$ é o comprimento do produto não trivial mais longo no ideal dos divisores do zero de $H^*(X; R)$. Denotaremos o *zero-divisors-cup-length* de X com coeficientes em R por $\text{zcup}_R(X)$. Ou seja, $\text{zcup}_R(X) = \text{len}(\ker(\varphi))$.

Exemplo 3.2.9. Consideremos o exemplo $X = S^n$ e $K = \mathbb{Q}$ (escolhemos \mathbb{Q} pois este é um corpo de característica diferente de 2). Sabemos que $H^*(S^n; \mathbb{Q})$ tem apenas dois geradores, sendo a unidade $1 \in H^0(S^n; \mathbb{Q})$ e a classe fundamental $u \in H^n(S^n; \mathbb{Q})$. Um elemento arbitrário de $H^*(S^m; \mathbb{Q}) \otimes H^*(S^m; \mathbb{Q})$ é da forma

$$\omega = q_1(1 \otimes 1) + q_2(1 \otimes u) + q_3(u \otimes 1) + q_4(u \otimes u),$$

com $q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{Q}$. Tomando $\varphi(\omega) = 0$ obtemos

$$q_1 + q_2u + q_3u + q_4(u \smile u) = 0,$$

logo, $q_1 = 0$, $q_2 = -q_3$ e $q_4 \in \mathbb{Q}$, pois $u \smile u \in H^{2m}(S^m; \mathbb{Q}) = 0$. Portanto, o núcleo de φ tem dois geradores que denotaremos por $a = 1 \otimes u - u \otimes 1$ e $b = u \otimes u$. Observe que,

$$b^2 = (u \otimes u) \cdot (u \otimes u) = (u \smile u) \otimes (u \smile u) = 0,$$

e computando a^2 temos

$$(1 \otimes u - u \otimes 1) \cdot (1 \otimes u - u \otimes 1) = (1 \otimes u) \cdot (1 \otimes u) - (1 \otimes u) \cdot (u \otimes 1) - (u \otimes 1) \cdot (1 \otimes u) + (u \otimes 1) \cdot (u \otimes 1)$$

calculando cada parcela, temos:

$$\begin{aligned} (1 \otimes u) \cdot (1 \otimes u) &= (-1)^{\deg(u)\deg(1)} 1 \otimes (u \smile u) = 0, \\ -(1 \otimes u) \cdot (u \otimes 1) &= -(-1)^{\deg(u)\deg(u)} u \otimes u = -(-1)^{n^2} u \otimes u = (-1)^{n+1} u \otimes u, \\ -(u \otimes 1) \cdot (1 \otimes u) &= -(-1)^{\deg(1)\deg(1)} u \otimes u = -(-1)^0 u \otimes u = -u \otimes u, \\ (u \otimes 1) \cdot (u \otimes 1) &= (-1)^{\deg(1)\deg(u)} (u \smile u) \otimes 1 = 0. \end{aligned}$$

Consequentemente, $a^2 = -2b$ se n for par e $a^2 = 0$ se n for ímpar. Além disso,

$$\begin{aligned} ab &= (1 \otimes u) \cdot (u \otimes u) - (u \otimes 1) \cdot (u \otimes u) \\ &= (-1)^{n^2} u \otimes (u \smile u) - (-1)^0 (u \smile u) \otimes u \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por conseguinte, no caso n ímpar não existem dois elementos cujo produto não é nulo, enquanto no caso n par temos $a^2 \neq 0$. Assim, concluímos que,

$$\text{zcup}_{\mathbb{Q}}(S^n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ for ímpar,} \\ 2 & \text{se } n \text{ for par.} \end{cases}$$

O teorema a seguir relaciona a complexidade topológica do planejamento de movimentos com o *zero-divisors-cup-length*.

Teorema 3.2.10. *Seja X um espaço topológico e R um corpo então*

$$\text{zcup}_R(X) + 1 \leq \text{TC}(X).$$

Demonstração. Considere o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha} & PX \\ & \searrow \Delta & \downarrow \pi \\ & & X \times X \end{array}$$

onde α associa cada $x \in X$ ao caminho constante igual a x . $\Delta : X \rightarrow X \times X$ é a função diagonal. Observe que α é uma equivalência homotópica (análogo a Proposição 1.1.59). Além disso, pelo Teorema de Künneth 1.2.54, $H^*(X; R) \otimes H^*(X; R) \cong H^*(X \times X; R)$, denotemos $\psi : H^*(X; R) \otimes H^*(X; R) \rightarrow H^*(X \times X; R)$ o isomorfismo de Künneth. Além disso, pela Definição 1.2.52 do cross product, temos $\varphi = \Delta^* \circ \psi$. Assim, obtemos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} H^*(X \times X; R) & \xleftarrow[\psi]{\cong} & H^*(X; R) \otimes H^*(X; R) \\ \downarrow \pi^* & \searrow \Delta^* & \downarrow \varphi \\ H^*(PX; R) & \xrightarrow[\cong]{\alpha} & H^*(X; R). \end{array}$$

Observe que $\ker(\varphi) \cong \ker(\pi^*)$, isto é, $\text{len}(\ker(\varphi)) = \text{cup}_R(\ker(\pi^*))$. Segue pelo item (3) do Teorema 2.3.24, que

$$\text{zcup}_R(X) + 1 \leq \text{secat}(\pi) = \text{TC}(X).$$

Concluindo que $\text{zcup}_R(X) + 1 \leq \text{TC}(X)$ □

Teorema 3.2.11. *A complexidade topológica do planejamento de movimentos na n -esfera S^n é dada por*

$$\text{TC}(S^n) = \begin{cases} 2, & \text{para } n \text{ ímpar,} \\ 3, & \text{para } n \text{ par.} \end{cases}$$

Demonstração. Pelo Teorema 3.2.7, sabemos que $2 \leq \text{TC}(S^n) \leq 3$. No caso n par temos, pelo Teorema 3.2.10 e pelo Exemplo 3.2.9, que $3 \leq \text{TC}(S^n)$; e nesse caso $\text{TC}(S^n) = 3$. Mostremos que no caso n ímpar vale $\text{TC}(S^n) \leq 2$. Considere os seguintes subconjuntos de $S^n \times S^n$:

$$U_1 = \{(a, b) \in S^n \times S^n : a \neq -b\},$$

$$U_2 = \{(a, b) \in S^n \times S^n : a \neq b\}.$$

Observe que $\{U_1, U_2\}$ é uma cobertura aberta de $S^n \times S^n$. Verifiquemos que existem seções locais $s_i : U_i \rightarrow PS^n$ de π para $i = 1, 2$. No caso $i = 1$, como $a \neq -b$ existe um arco de comprimento mínimo de S^n que conecta a e b , podemos construir a seção $s_1(a, b) \in PS^n$ tomando como caminho a trajetória deste arco com velocidade constante. Como n é ímpar, digamos que $n = 2k - 1$, e podemos considerar $S^{2k-1} \subset \mathbb{C}^k$, assim, podemos definir a seguinte aplicação,

$$\begin{aligned} \Phi : S^{2k-1} \times I &\rightarrow S^{2k-1} \\ (z, t) &\mapsto e^{\pi t} z \end{aligned}$$

observe que,

$$\Phi(z, 0) = e^0 z = z,$$

$$\Phi(z, 1) = e^\pi z = -z.$$

Agora, podemos definir $s_2 : S^n \times S^n \rightarrow PS^n$ por

$$s_2(a, b) = \begin{cases} s_1(a, b)(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2, \\ \Phi(-b, 2t - 1), & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Note que $s_1(a, b)(1) = -b = \Phi(-b, 0)$ e $s_2(a, b)$ é um caminho composto por $s_1(a, b)$ que leva a até $-b$ com $\Phi(-b, \cdot)$ que leva $-b$ até b . Sendo assim, no caso n ímpar, obtemos uma cobertura de $S^n \times S^n$ com dois elementos $\{U_1, U_2\}$ e respectivas seções locais $\{s_1, s_2\}$, concluindo que $\text{TC}(S^n) \leq 2$. Finalizando a demonstração. □

O teorema a seguir, é similar ao Teorema 2.1.39, por isso, omitiremos sua demonstração, ao leitor interessado recomendamos [9].

Teorema 3.2.12. *Se X e Y são espaços métricos conexos por caminhos então*

$$\text{TC}(X \times Y) \leq \text{TC}(X) + \text{TC}(Y) - 1.$$

No Exemplo 3.2.1 mostramos que o espaço de configurações do braço robótico planar é um n -toro $T^n = \prod_1^n S^1$ onde n é a quantidade de articulações do braço. Na prática, a maioria dos braços robóticos não são planares, então deveríamos considerar o espaço de configurações $X = \prod_1^n S^2$ pois cada articulação tem dois parâmetros. A seguir consideraremos o caso geral onde $X = \prod_1^n S^m$ para $m \geq 1$.

Lema 3.2.13. *Seja $X = \prod_1^n S^m$ com $n \geq 1$ e $m \geq 1$. Então $\text{cat}(X) = n + 1$.*

Demonstração. Análogo ao Exemplo 1.2.58, aplicando o Teorema de Künneth 1.2.54, obtemos

$$H^*(X; R) \cong \bigotimes_{i=1}^n H^*(S^m; R) \cong \bigotimes_{i=1}^n \Lambda_R[x_i] \cong \Lambda_R[x_1, \dots, x_n]$$

com $\deg(x_i) = m$, sendo assim $\text{cup}_R(X) = n$. Pelo Teorema 2.1.8 temos $n + 1 \leq \text{cat}(X)$. Aplicando recursivamente o Teorema 2.1.39 obtemos

$$\text{cat}(X) \leq \sum_1^n \text{cat}(S^m) - (n - 1) = 2n - n + 1 = n + 1.$$

Concluindo que $\text{cat}(X) = n + 1$. □

Lema 3.2.14. *Seja $X = \prod_1^n S^m$ com $n \geq 1$ e m inteiro positivo par. Então*

$$\text{zcup}_{\mathbb{Q}}(X) \geq 2n.$$

Demonstração. Seja $p_i : X \rightarrow S^m$ a projeção no i -ésimo fator. Considere u o gerador de $H^m(S^m, \mathbb{Q})$, e suponha $u_i = p_i^*(u)$. Observe que p_i^* tem inversa a esquerda pois p_i tem como inversa a direita a inclusão canônica. Assim, p_i^* é injetora e $u_i \neq 0$. Defina $a_i = 1 \otimes u_i - u_i \otimes 1$, de modo similar ao Exemplo 3.2.9 podemos verificar que cada a_i é um divisor do zero em $H^*(X; \mathbb{Q}) \otimes H^*(X; \mathbb{Q})$, além disso, conforme visto na demonstração do Lema 3.2.13 $H^*(X, \mathbb{Q}) \cong \Lambda[u_1, \dots, u_n]$, logo, $u_1 \smile \dots \smile u_n \neq 0$. Como $u \smile u = 0$ pois $u \smile u \in H^{2m}(S^m; \mathbb{Q}) \cong 0$. Temos

$$u_i \smile u_i = p_i^*(u) \smile p_i^*(u) = p_i^*(u \smile u) = 0.$$

Pela hipótese m é par, tal como no Exemplo 3.2.9 obtemos $a_i \cdot a_i = -2(u_i \otimes u_i)$. Logo,

$$\prod_{i=1}^n (a_i \cdot a_i) \neq 0 \in H^*(X \times X; \mathbb{Q}).$$

Concluindo que para m par $\text{zcup}(X) \geq 2n$. □

Teorema 3.2.15. *Seja $X = \prod_1^n S^m$ com $n \geq 1$ e $m \geq 1$. Então*

$$\text{TC}(X) = \begin{cases} n + 1, & \text{se } m \text{ for ímpar,} \\ 2n + 1, & \text{se } m \text{ for par.} \end{cases}$$

Demonstração. Pelo lema anterior 3.2.13 e pelo Teorema 3.2.7 temos

$$n + 1 \leq \text{TC}(X) \leq 2n + 1,$$

utilizando o Teorema 3.2.11 e aplicando recursivamente o Teorema 3.2.12 temos

$$\text{TC}(X) \leq \sum_1^n \text{TC}(S^m) - (n - 1) = \begin{cases} 2n - n + 1 = n + 1, & \text{se } m \text{ for ímpar,} \\ 3n - n + 1 = 2n + 1, & \text{se } m \text{ for par.} \end{cases}$$

Assim o caso m ímpar está resolvido, e no caso m par o resultado segue pelo Lema 3.2.14 e pelo Teorema 3.2.10. \square

Para tratar a complexidade topológica no caso do movimento de um corpo rígido em \mathbb{R}^3 apresentado no Exemplo 3.2.2, será útil o seguinte resultado encontrado em [10].

Lema 3.2.16. *Se G é um grupo de Lie conexo, então $\text{TC}(G) = \text{cat}(G)$.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.2.7 sabemos que $\text{cat}(G) \leq \text{TC}(G)$. Vamos verificar que $\text{TC}(G) \leq \text{cat}(G)$. Suponha que existe uma cobertura categórica de G com k elementos, digamos, U_1, \dots, U_k , ou seja, $\text{cat}(G) \leq k$. Defina

$$W_i = \{(g, h) \in G \times G : g \cdot h^{-1} \in U_i\}.$$

Observe que $\{W_1, \dots, W_k\}$ é uma cobertura de $G \times G$. Seja $H_i : U_i \times I \rightarrow G$ uma homotopia tal que $H_i(x, 0) = x$ e $H_i(x, 1) = e$ para todo $x \in U_i$ e sendo $e \in G$ a unidade de G . Defina

$$\begin{aligned} s_i : W_i &\longrightarrow PG \\ (a, b) &\longmapsto H_i(a \cdot b^{-1}, t) \cdot b \end{aligned}$$

e verificamos que s_i é seção da fibração $\pi : PG \rightarrow G \times G$ sobre W_i ,

$$\begin{aligned} \pi \circ s_i(a, b) &= \pi(H_i(a \cdot b^{-1}, t) \cdot b) \\ &= (H_i(a \cdot b^{-1}, 0), H_i(a \cdot b^{-1}, 1)) \\ &= (a \cdot b^{-1} \cdot b, e \cdot b) \\ &= (a, b). \end{aligned}$$

Consequentemente $\text{TC}(G) = \text{cat}(G)$. \square

Observação 3.2.17. O espaço $SO(3)$ é homeomorfo a \mathbb{RP}^3 . De fato, considere $\mathbb{RP}^3 = D^3 / \sim$ com $x \sim -x$ para todo $x \in \partial D^3$. Cada rotação em \mathbb{R}^3 é caracterizada por um eixo orientado na direção de um vetor unitário $v \in S^2$, um ângulo $\theta \in [0, \pi] \subset \mathbb{R}$ e as relações $(v, \pi) \sim (-v, \pi)$ e $(v, 0) \sim (w, 0)$ para todo $v, w \in S^2$. Podemos formular isso da seguinte maneira

$$SO(3) = \frac{S^2 \times [0, \pi]}{(v, 0) \sim (w, 0), (v, \pi) \sim (-v, \pi)}.$$

Considere $D_\pi^3 := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \leq \pi\}$, sabemos que $\mathbb{RP}^3 \cong D_\pi^3 / \sim$ com $x \sim -x$ para cada $x \in \partial D_\pi^3 \cong S^2$. Logo podemos definir

$$\begin{aligned} \varphi : SO(3) &\rightarrow \mathbb{RP}^3 \\ [v, t] &\mapsto [tv]. \end{aligned}$$

Observe que para $t < \pi$ a função φ leva a pontos cujos representantes são pontos interiores de D_π^3 , e quando $t = \pi$ um ponto de $SO(3)$ tem dois representantes que são antipodas no fator S^2 que é levado por φ a um elemento de \mathbb{RP}^3 que tem esses mesmos representantes em $\partial D_\pi^3 = S^2$. Sendo assim φ é bem definida, observe também que o ângulo t e o eixo v dependem continuamente da rotação sempre que $t \neq 0$. A inversa da φ é dada por

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : \mathbb{RP}^3 &\rightarrow SO(3) \\ [x] &\mapsto \begin{cases} \left[\frac{x}{\|x\|}, \|x\| \right], & \text{se } x \neq 0, \\ [0, 0], & \text{se } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Logo φ é uma bijeção, além disso, φ é função fechada pois $SO(3) = S^2 \times [0, \pi]$ é compacto, sendo assim, φ é um homeomorfismo.

Teorema 3.2.18. *As complexidades topológicas para o planejamento de movimentos de corpos rígidos em \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 são:*

$$TC(SE(2)) = 2,$$

$$TC(SE(3)) = 4.$$

Demonstração. Observe que $SE(2) = \mathbb{R}^2 \times SO(2)$ tem o mesmo tipo de homotopia que o próprio $SO(2)$, pois \mathbb{R}^2 é contrátil. Além disso, $SO(2) \simeq S^1$, pelo Lema 3.2.16. Da invariância homotópica da categoria LS 2.1.5 obtemos

$$TC(SO(2)) = \text{cat}(SO(2)) = \text{cat}(S^1) = 2$$

Similarmente ao caso anterior temos $SE(3) \simeq SO(3)$. Da observação precedente sabemos que $SO(3) \cong \mathbb{RP}^3$, pelo Lema 3.2.16 e da invariância homotópica da categoria LS, temos

$$TC(SO(3)) = \text{cat}(SO(3)) = \text{cat}(\mathbb{RP}^3) = 4$$

□

No caso geral, para $n \geq 1$, temos $\text{TC}(SO(n)) = \text{cat}(SO(n))$. E surge a questão: qual a categoria LS de $SO(n)$ para $n \geq 1$? O caso $n = 1$ é trivial. Os casos $n = 2$ e $n = 3$ são mostrados no teorema anterior. O caso $n = 4$ pode ser determinado utilizando o homeomorfismo $SO(4) \cong S^3 \times SO(3)$: neste caso temos

$$\text{cup}_{\mathbb{Z}_2}(SO(4)) = 4 \Rightarrow 5 \leq \text{cat}(SO(4))$$

e

$$\text{cat}(S^3 \times SO(3)) \leq \text{cat}(S^3) + \text{cat}(SO(3)) - 1 = 5,$$

concluindo que $\text{cat}(SO(4)) = 5$.

Para $n > 4$ a situação é mais complicada. Em [16] Iwase et al. calculam a categoria LS de $SO(n)$ para $5 \leq n \leq 9$, e em [17] é mostrado o caso $n = 10$, a saber:

$$\begin{aligned} \text{cat}(SO(5)) &= 9, \\ \text{cat}(SO(6)) &= 10, \\ \text{cat}(SO(7)) &= 12, \\ \text{cat}(SO(8)) &= 13, \\ \text{cat}(SO(9)) &= 21, \\ \text{cat}(SO(10)) &= 22. \end{aligned}$$

Para $n > 10$ o problema ainda não é completamente resolvido. No entanto, em [20] encontramos uma fórmula explícita para o cup length dos grupos de rotações, dada pelo teorema a seguir.

Teorema 3.2.19. *Para qualquer inteiro positivo n ,*

$$\text{cup}_{\mathbb{Z}_2}(SO(n)) = n - 1 + (n - 1)',$$

onde $(n - 1)' = \sum_{i=1}^k in_i 2^{i-1}$ se $n - 1$ tem expansão diádica $\sum_{i=0}^k n_i 2^i$.

Por exemplo, para $n = 10$ temos a expansão diádica de 9 dada por

$$9 = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3,$$

aplicando o teorema, temos

$$\text{cup}_{\mathbb{Z}_2}(SO(10)) = 10 - 1 + 1 \cdot 0 \cdot 2^0 + 2 \cdot 0 \cdot 2^1 + 3 \cdot 1 \cdot 2^2 = 21.$$

Utilizando o Teorema 3.2.19, computamos os cup lengths para n de 1 a 10, e obtemos

$$\begin{aligned}\text{cup}_{\mathbb{Z}_2}(SO(1)) &= 0, \\ \text{cup}_{\mathbb{Z}_2}(SO(2)) &= 1, \\ \text{cup}_{\mathbb{Z}_2}(SO(3)) &= 3, \\ \text{cup}_{\mathbb{Z}_2}(SO(4)) &= 4, \\ \text{cup}_{\mathbb{Z}_2}(SO(5)) &= 8, \\ \text{cup}_{\mathbb{Z}_2}(SO(6)) &= 9, \\ \text{cup}_{\mathbb{Z}_2}(SO(7)) &= 11, \\ \text{cup}_{\mathbb{Z}_2}(SO(8)) &= 12, \\ \text{cup}_{\mathbb{Z}_2}(SO(9)) &= 20, \\ \text{cup}_{\mathbb{Z}_2}(SO(10)) &= 21.\end{aligned}$$

Pela estimativa de dimensão de cobertura, Teorema 2.1.17, temos

$$\text{cat}(SO(n)) \leq \dim(SO(n)) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Podemos obter também uma estimativa por considerar a fibração

$$SO(n) \rightarrow SO(n+1) \rightarrow S^n$$

e pelo Teorema 2.1.44 temos

$$\text{cat}(SO(n+1)) \leq \text{cat}(S^n) \text{cat}(SO(n)) = 2 \text{cat}(SO(n)).$$

Mas infelizmente estas estimativas não são suficientes para determinar $\text{cat}(SO(n))$ no caso geral. Por exemplo, para $n = 11$ temos $\text{cup}_{\mathbb{Z}_2}(SO(11)) = 23$, $\dim(SO(11)) = 55$ e $2 \text{cat}(SO(10)) = 42$. Isto é, $23 \leq \text{cat}(SO(11)) \leq 42$.

Como corolário do Teorema 3.2.19, obtemos que $\text{cat}(SO(n)) \geq n + (n-1)'$. Observe que nos resultados mostrados acima para $n \in \{1, 2, 3, \dots, 10\}$, obtemos exatamente que $\text{cat}(SO(n)) = \text{cup}(SO(n)) + 1$. A questão em aberto é: será que $\text{cat}(SO(n)) = n + (n-1)'$ para $n \geq 1$? Korbass [20] mostra que responder negativo a essa pergunta, equivale a responder negativo à pergunta:

“Para um inteiro positivo n , seja q o único inteiro tal que $2^{q-1} < n \leq 2^q$. É verdade que $\text{cat}(SO(n)) < \frac{(n-1)(q+2)}{2}$ para todo n ímpar, $n \geq 11$, e $\text{cat}(SO(n)) < \frac{(n-2)(q+2)}{2}$ para todo n par, $n \geq 12$?”

Referências

- [1] ARKOWITZ, M. *Introduction to Homotopy Theory* Series: Universitext. Publisher: Springer-Verlag New York, Year: 2011. ISBN: 1441973281,9781441973283. Citado 3 vezes nas páginas 37, 38 e 41.
- [2] BIRKHOFF, G. D. *Proof of Poincaré's Geometric Theorem* Transactions of the American Mathematical Society Vol. 14, No. 1 (Jan., 1913), p. 14-22. Citado na página 93.
- [3] BONNESEN, T.; FENCHEL, W. *Theorie der konvexen Körper* Berlin (1933), Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1974, 26. Citado 2 vezes nas páginas 115 e 116.
- [4] BREDON, G. E. *Topology and geometry*. Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics 1993, 2nd edition 1997. Citado 3 vezes nas páginas 29, 53 e 121.
- [5] CORNEA, O.; LUPTON, G.; OPREA, J.; TANRE, D. *Lusternik-Schnirelmann category*. American Mathematical Society, Mathematical Surveys and Monographs, Volume 103, 2003. Citado 15 vezes nas páginas 71, 75, 77, 79, 80, 81, 87, 88, 92, 94, 102, 103, 104, 105 e 107.
- [6] CORNEA, O.; LUPTON, G.; OPREA, J.; TANRE, D. *Lusternik-Schnirelmann Category and Related Topics* 2001 AMS-IMS-SIAM Joint Summer Research Conference on Lusternik-Schnirelmann Category in the New Millennium. Mount Holyoke College, South Hadley, Massachusetts, 2001. Citado na página 107.
- [7] DUBROVIN, B. A.; NOVIKOV S. P.; BURNS R. G. *Modern Geometry - Methods and Applications Part III Introduction to Homology Theory* Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics 1990. Citado na página 81.
- [8] DUGUNDJI, J. *Topology* Michigan University, Allyn and Bacon series in advanced mathematics, 1966. Citado 6 vezes nas páginas 21, 22, 24, 25, 27 e 84.
- [9] FABER, M. *Topological Complexity of Motion Planning* Discrete and Computational Geometry, 29(2), p. 211-221, 2003. Citado 3 vezes nas páginas 118, 119 e 124.
- [10] FABER, M. *Instabilities of Robot Motion* Topology and its Applications, 2004. Citado na página 125.
- [11] FABER, M. *Collision Free Motion Planning On Graphs* Springer Tracts in Advanced Robotics, 2005. Citado na página 119.

- [12] FOX, R. H. *On the Lusternik-Schnirelmann category*. Annals of Mathematics Second Series, Vol. 42, No. 2 (Apr., 1941), pp. 333-370 (38 pages) Published By: Mathematics Department, Princeton University. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/1968905>. Último acesso em: 10/05/2021. Citado 2 vezes nas páginas 71 e 75.
- [13] FUNG, J. H. *The Cohomology of Lie Groups*. University of Chicago REU 2012. Disponível em: <http://math.uchicago.edu/~may/REU2012/REUPapers/Fung.pdf>. Último acesso em: 21/09/2021. Citado na página 56.
- [14] GRIFFITHS, P.; MORGAN, J. *Rational Homotopy Theory and Differential Forms* Second Edition. Publisher: Birkhäuser, Basel, 2013. Citado na página 33.
- [15] HATCHER, A. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002. Citado 6 vezes nas páginas 34, 43, 49, 54, 56 e 62.
- [16] IWASE, N.; MIMURA, M.; NISHIMOTO, T. *Lusternik-Schnirelmann category of non-simply connected compact simple lie groups*. Topology and its Applications, Elsevier BV, v. 150, n. 1-3, 2005, p. 111–123. Citado na página 127.
- [17] IWASE, N.; KIKUCHI, K.; MIYAUCHI, T. *n Lusternik-Schnirelmann category of $SO(10)$* arXiv preprint, 2007. Citado na página 127.
- [18] JAMES, I. M. *On category in the sense of Lusternik-Schnirelmann* Topology 17, 331-348, Pergamon Press Ltd. 1978. Citado na página 105.
- [19] KLEE, V. *Unsolved Problems in Intuitive Geometry* University of Washington, 1960. Citado 2 vezes nas páginas 107 e 108.
- [20] KORBAS, J. *An explicit formula for the cup-length of the rotation group* Bulletin of the Belgian Mathematical Society – Simon Stevin 24, 2017, 335–338. Citado 2 vezes nas páginas 127 e 128.
- [21] KUIPER, N. N. *Double Normals of Convex Bodies* Israel J. Math. 2, 1964, 71–80. Citado 3 vezes nas páginas 91, 107 e 108.
- [22] LEE, J. M. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics 2003, 2nd edition 2013. Citado 6 vezes nas páginas 27, 28, 44, 45, 46 e 82.
- [23] LIER, Matias de Jong van. *Topological Complexity and the Lusternik-Schnirelmann Category* Dissertação de mestrado em matemática. São Carlos : Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo (USP), 2021. Disponível em <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/>

- 55/55135/tde-09092021-104209/en.php. Último acesso em 01/01/2022. Citado na página 78.
- [24] LIMA, E. L. *Homologia Básica*. Projeto Euclides, 2ª Edição, IMPA, Rio de Janeiro, 2012. Citado na página 51.
- [25] LIMA, E. L. *Grupo fundamental e espaços de recobrimento*. Projeto Euclides, 4ª Edição, IMPA, Rio de Janeiro, 2012. Citado na página 27.
- [26] LUNDELL, A.; WEINGRAM, S. *The Topology of CW-Complexes* Von Nostrand, 1969. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 65.
- [27] MARTINI, H.; MONTEJANO, L.; OLIVEROS, D. *Bodies of Constant Width: An Introduction to Convex Geometry with Applications* Springer Nature Switzerland AG 2019. Citado na página 108.
- [28] MCDUFF, D.; SALAMON, D. *Introduction to Symplectic Topology* Series: Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, USA. 1999. Citado na página 93.
- [29] MIMURA, M.; TODA, H. *Topology of Lie Groups, I and II* Amer. Math. Soc., 1991. Citado na página 56.
- [30] MUNKRES, J. *Topology* second edition. [S.l.]: Prentice Hall, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 26.
- [31] OPREA, J. *Applications of Lusternik-Schnirelmann Category and its Generalizations* Journal of Geometry and Symmetry in Physics, Institute of Biophysics and Biomedical Engineering, Bulgarian Academy of Sciences, 2014, 59-97. Citado 6 vezes nas páginas 19, 68, 92, 100, 107 e 118.
- [32] PALAIS, R. S.; TERNG C. *Critical Point Theory and Submanifold Geometry* Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics 1980, 2nd edition 1988. Citado 2 vezes nas páginas 81 e 91.
- [33] PALAIS, R. S. *Homotopy theory of infinite dimensional manifolds* Topology 5, 1966, 1-16. Citado 2 vezes nas páginas 65 e 72.
- [34] RUFFINO, F. F. *Introdução à topologia Diferencial e Algébrica*. Notas de aula vol 0, Preliminares. Disponível em: <https://www.dm.ufscar.br/profs/ferrariruffino>. Último acesso em: 03/10/2021. Citado na página 23.
- [35] RUFFINO, F. F. *Introdução à topologia Diferencial e Algébrica*. Notas de aula vol 2, Topologia Algébrica. Disponível em: <https://www.dm.ufscar.br/profs/ferrariruffino>. Último acesso em: 09/05/2021. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 29.

-
- [36] SHASTRI, A. R. *Elements of Differential Topology* Taylor & Francis, 2011. Citado na página 26.
- [37] SMALE, S. *On the Topology of Algorithms I*. J. Complexity 3 (1987) 81–89. Citado na página 118.
- [38] SWARC, A. S. *The genus of a fiber space* Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) 119 (1958), 219-222, (In Amer. Math. Soc. Transl. Series 2, vol. 48 (1965)). Citado na página 105.
- [39] WHEELER, M. *Advanced Real Analysis* Notas de Aula, Department of Mathematical Sciences, University of Bath, 2021. Disponível em: <https://people.bath.ac.uk/mw2319/ma30252>. Último acesso em: 18/04/2021. Citado na página 84.