UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

LUÍS HENRIQUE SPROVIERI

UTILIZAÇÃO DO MODELO PICTÓRICO DA MATEMÁTICA DE SINGAPURA EM RESOLUÇÕES DE PROBLEMAS PARA OS 5º E 6° ANOS DO ENSINO FUNDAMENTAL, DENTRO DA PROPOSTA CURRICULAR DO ESTADO DE SÃO PAULO

SÃO CARLOS
2021

LUÍS HENRIQUE SPROVIERI

UTILIZAÇÃO DO MODELO PICTÓRICO DA MATEMÁTICA DE SINGAPURA EM RESOLUÇÕES DE PROBLEMAS PARA OS 5º E 6° ANOS DO ENSINO FUNDAMENTAL, DENTRO DA PROPOSTA CURRICULAR DO ESTADO DE SÃO PAULO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Universidade Federal de São Carlos, como exigência para a obtenção do título de graduação em Licenciatura Matemática.

Orientadora: Drª Yuriko Yamamoto Baldin.

SÃO CARLOS

2021

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Rod. Washington Luís km 235 - SP-310, s/n - Bairro Monjolinho, São Carlos/SP,
CEP 13565-905Telefone: (16) 33518221 - http://www.ufscar.br

DP-TCC-FA nº 31/2021/CCM/CCET

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)

LUIS HENRIQUE SPROVIERI

UTILIZAÇÃO DO MODELO PICTÓRICO DA MATEMÁTICA DE SINGAPURA EM RESOLUÇÕES DE PROBLEMAS PARA OS 5º E 6° ANOS DO ENSINO FUNDAMENTAL, DENTRO DA PROPOSTA CURRICULAR DO ESTADO DE SÃOPAULO

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – Campus São Carlos

São Carlos, 25 de novembro de 2021

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

Cargo/Função	Nome Completo
Orientador	Yuriko Yamamoto Baldin
Membro da Banca 1	Olímpio Miyagaki
Membro da Banca 2	José Antônio Salvador

Dedico este Trabalho de Conclusão de Curso aos meus pais, que me deram toda a estrutura necessária para que pudesse concluir minha graduação. In memoriam a Paula Lêda Sprovieri.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus que meu deu força para superar os diversos obstáculos e concluir minha graduação. Ao meu pai, Paulo Francisco Sprovieri, grande educador; à minha mãe, Vanda Lúcia Albuquerque de Lima Sprovieri, pelo incentivo e por estar sempre ao meu lado.

Agradeço minha namorada, Mayara Caroline Rosolem, pessoa admirável que Deus colocou em minha vida; seu carinho, incentivo e apoio me deram forças e foram fundamentais para a conclusão deste trabalho.

Agradeço aos professores do Departamento de Matemática da UFSCar, em especial o professor Pedro Luiz Aparecido Malagutti, que me despertou o interesse pela área da educação, e a professora Drª Yuriko Yamamoto Baldin, pela orientação deste trabalho.

RESUMO

O ensino de matemática é um desafio tanto para educadores como estudantes. É comum percebermos o desinteresse dos alunos pela Matemática, principalmente quando está associada a letras e símbolos, perdendo seu real significado. Mas esse desinteresse costuma surgir exatamente na transição dos ciclos I e II do Ensino Fundamental, em específico entre os 5° e 6° anos. A transição de ciclo é também a transição entre a Matemática "Concreta", com os materiais manipulativos, e a Matemática "Abstrata", com seus símbolos e linguagem própria. O trabalho apresenta a utilização de um modelo pictórico da Matemática de Singapura, chamado Método de Barras, a fim de suavizar e tornar satisfatória a passagem entre os ciclos, desse modo criando uma ponte entre o concreto e abstrato de forma a atenuar as dificuldades dos alunos nessa transição. Para isso foram selecionadas situações problemas dos 5° e 6° anos, do material do Estado de acordo com a proposta curricular. Esses foram desenvolvidos segundo a metodologia do Modelo de Barras.

Palavras-chave: Modelo de Barras, Matemática de Singapura, Transição de ciclos do Ensino Fundamental.

ABSTRACT

Teaching mathematics is a challenge for both educators and students. It is usual to notice the lack of interest of students in Mathematics, especially when it is associated with letters and symbols, missing its real meaning. But this lack of interest usually appears exactly in the transition between cycles I and II of elementary school, specifically between the 5th and 6th grades. The cycle transition is also the transition between “Concrete” Mathematics, with manipulative materials, and “Abstract” Mathematics, with its symbols and its own language. The work presents the use of a pictorial model of Singapore Mathematics, called the Bar Model, in order to ease and make the passage of cycles satisfactory, thus creating a bridge between the concrete and the abstract in order to alleviate the difficulties of students in this transition. For this purpose, problem situations for the 5th and 6th years were selected from the State’s official instructional material in accordance with the curricular proposal. These were developed using the Bar Model methodology.

Keywords: Bar Model, Mathematics of Singapore, Transition of cycles in Elementary School.

LISTA DE FIGURAS

Sumário

INTRODUÇÃO

Durante minhas práticas como licenciando em matemática, em especial nas atividades das quatro disciplinas de Estágio Supervisionado de Matemática na Educação Básica e como professor de curso preparatório para vestibular no colégio CAASO, percebi grande dificuldade por parte da maioria dos alunos com a linguagem matemática, principalmente com a linguagem e o pensamento algébrico. Essa dificuldade vem em parte, pela falta de um pensamento algébrico, que por sua vez está baseado num procedimento ou algoritmo que o aluno simplesmente memorizou.

Como professor de cursinho eu sempre começava o ano letivo dando uma introdução e revendo conceitos sobre equações, pois percebia que muitos tinham dificuldades de compreensão da própria expressão matemática bem como na sua resolução. E essas dúvidas e dificuldades vinham dos anos escolares anteriores.

Por exemplo, o aluno mais experiente poderia até saber resolver uma simples equação do tipo:

$$2x + 3 = 9$$

O algoritmo era feito com sucesso, isto é, eles sabiam que tinham que “isolar” a incógnita x “passando o 3 para o outro lado com sinal trocado”, simbolicamente:

$$2x = 9 - 3$$

Em seguida “passava-se o 2 para o outro lado”, mas trocando a operação de multiplicação por divisão, simbolicamente:

$$x = \frac{6}{2}$$

Ou seja, os alunos eram capazes de resolver a questão utilizando a linguagem matemática e o algoritmo corretamente:

$$2x + 3 = 9 \Rightarrow x = 3$$

Apesar disso eles não sabiam responder perguntas como:

- Por que “passar o 3 para o outro lado com sinal trocado”?
- Porque o 2 não troca de sinal, somente a operação?
- O que é uma incógnita?
- O que significa isolar uma incógnita?

Expressões do tipo “passar para o outro lado com sinal trocado”, “passar para o outro lado”, “isolar incógnita”, eram palavras ditas sem profundidade matemática. O processo de memorização, nesse caso, era apenas de um algoritmo repetido a exaustão, que não dava a eles a dimensão dos conceitos matemáticos. A matemática perdia o seu significado para esses alunos, pois era ofuscada pelos símbolos, sinais de operações e de igualdade.

É claro que a linguagem matemática é de suma importância no ensino e aprendizagem da matemática, mas como ensinar o aluno, de forma favorável, a linguagem matemática? Como desenvolver o pensamento algébrico, o raciocínio lógico e matemático do aluno sem que ele decore procedimentos? Essas questões me serviram como guia para a elaboração desse trabalho.

Minha experiência no colégio me mostrou que apesar do procedimento para resolver equações de primeiro grau fosse conhecido pelos alunos, pois já estavam familiarizados com o algoritmo e sabiam usá-lo e chegar a resposta correta, o domínio da técnica não representava o domínio de conceitos matemáticos tampouco a presença do pensamento matemático pelos alunos.

A linguagem matemática se perde em meio aos processos de memorização de algoritmos, como notado na resolução dos problemas envolvendo equações pelos alunos do curso pré-vestibular CAASO. A linguagem matemática é um importante componente da matemática, mas a representação de generalizações por meio de símbolos não pode ser confundida com a própria ciência, ou seja, a linguagem matemática não é a Matemática, mas faz parte dela, para comunicar corretamente as ideias e os conceitos. O aluno não pode pensar que a matemática se resume a “letras”, símbolos e memorização de procedimentos. A matemática é de fato muito mais que isso.

A matemática está diretamente relacionada com as transformações que o indivíduo pode promover na sociedade por meio da capacidade de resolver problemas. Ela é a ciência capaz de “provocar” a curiosidade do aluno e o interesse por questões relacionadas ao cotidiano. Ela promove o desenvolvimento de habilidades, incluindo habilidades de comunicação. Ela estabelece correlações, identifica, organiza, separa, quantifica, qualifica. Ela está ao nosso redor.

Para isso a matemática demanda a comunicação de ideias que são formalmente traduzidas na linguagem própria da ciência. A matemática proporciona ao aluno a oportunidade de agir e de refletir suas ações.

Com a matemática o aluno pode elaborar imagens mentais de situações, pode dar sentido a objetos, dessa forma estruturando gradativamente seus conhecimentos. De acordo com Brasil (2000), como descrito no PCN:

> A Matemática, por sua universalidade de quantificação e expressão, como linguagem portanto, ocupa uma posição singular. No Ensino Médio, quando nas ciências torna-se essencial uma construção abstrata mais elaborada, os instrumentos matemáticos são especialmente importantes. Mas não é só nesse sentido que a Matemática é fundamental. Possivelmente, não existe nenhuma atividade da vida contemporânea, da música à informática, do comércio à meteorologia, da medicina à cartografia, das engenharias às comunicações, em que a Matemática não compareça de maneira insubstituível para codificar, ordenar, quantificar e interpretar compassos, taxas, dosagens, coordenadas, tensões, frequências e quantas outras variáveis houver. A Matemática ciência, com seus processos de construção e validação de conceitos e argumentações e os procedimentos de generalizar, relacionar e concluir que lhe são característicos, permite estabelecer relações e interpretar fenômenos e informações. As formas de pensar dessa ciência possibilitam ir além da descrição da realidade e da elaboração de modelos. O desenvolvimento dos instrumentos matemáticos de expressão e raciocínio, contudo, não deve ser preocupação exclusiva do professor de Matemática, mas dos das quatro disciplinas científico-tecnológicas, preferencialmente de forma coordenada, permitindo-se que o aluno construa efetivamente as abstrações matemáticas, evitando-se a memorização indiscriminada de algoritmos, de forma prejudicial ao aprendizado. A pertinente presença da Matemática no desenvolvimento de competências essenciais, envolvendo habilidades de caráter gráfico, geométrico, algébrico, estatístico, probabilístico, é claramente expressa nos objetivos educacionais da Resolução CNE/98. (BRASIL, 2000, p. 9)

Durante minhas vivências na graduação conheci, em uma das disciplinas de Instrumentação para o Ensino da Matemática, a chamada Matemática de Singapura. Me chamou a atenção uma característica que por si só não representa a filosofia da

Matemática de Singapura, mas é um reconhecido método utilizado nas escolas do país que é o **Modelo de Barras**. Ou seja, ao representar pictoricamente por meio do modelo de barras, representa-se o “concreto” de modo a suavizar a passagem do concreto para o abstrato (linguagem matemática).

A transição dos ciclos do Ensino Fundamental no Brasil (5º e 6º anos) representa a transição da matemática concreta e manipulável para a formalização da matemática abstrata.

Ao pedagogo fica a tarefa de iniciar os estudos da matemática, do 1º ao 5º ano no Ensino Fundamental, geralmente usando materiais concretos para a manipulação, e ao professor licenciado em matemática fica a responsabilidade de trabalhar conceitos matemáticos com a utilização da linguagem de símbolos, do 6º ano ao 9° ano do Ensino Fundamental.

Essa transição costuma trazer uma série de dificuldades tanto no ensino quanto na aprendizagem da matemática. No começo do ciclo II as dificuldades e o desinteresse crescem por parte dos alunos, principalmente pela dificuldade em abstrair conceitos através da linguagem matemática.

No presente trabalho de conclusão de concurso, usamos o modelo de barras segundo a matemática de Singapura em resoluções de exercícios do 5º e 6º anos do Ensino Fundamental com base nos materiais “Educação Matemática nos Anos iniciais do Ensino Fundamental” o EMAI e o Currículo em Ação do Estado de São Paulo.

A percepção pelo professor da dificuldade da linguagem matemática na aprendizagem dos alunos, nas atividades de sala de aula que utilizam símbolos, letras, sinais de operações e conceitos de igualdade, constitui uma motivação nesse trabalho de conclusão de curso.

O objetivo principal do trabalho é compreender o Modelo de Barras como uma ferramenta de desenvolvimento curricular que propicia o pensamento matemático necessário, ou seja, a habilidade dos processos racionais como análise, generalização, comparação e abstração, para a resolução de problemas e aquisição da linguagem simbólica para expressar ideias matemáticas.

CAPÍTULO 1: A MATEMÁTICA DE SINGAPURA

Singapura localiza-se na Península da Malásia, sudeste da Ásia. É um território relativamente pequeno e de alta densidade populacional (2º mais povoado do mundo), composto por pouco mais de 60 ilhas. Tornou-se independente em 1965 quando o Parlamento da Malásia decidiu por separar o país da Federação da Malásia. Desde então, Singapura teve um expressivo crescimento econômico, com indústrias e serviços altamente desenvolvidos e capacitados (TEIXEIRA, 2016).

É um dos países mais bem colocados no ranking do IDH, está entre os 25 países mais ricos do mundo e um dos que mais exportam e importam produtos. Sua singularidade também se percebe pela sua rica diversidade cultural, tendo feriados de diversas religiões como a chinesa, budista, mulçumana e cristã. Com quatro línguas oficiais, o sistema público de ensino de Singapura utiliza-se como principal idioma o inglês além da língua materna, o malaio.

O desenvolvimento de Singapura deu-se num momento em que o país começou a alterar seu currículo escolar do ensino básico, principalmente no ensino da matemática, com o intuito de elevar a qualidade de ensino do país (TEIXEIRA, 2016).

Atualmente, o alto desempenho dos alunos de Singapura pode ser constatado pelas avaliações internacionais em Matemática como o TIMSS e PISA de acordo com Teixeira (2015, p. 17), e por exames nacionais aplicados em Singapura como o *Primary School Leaving Examination* (SILVA, 2013, p.33), ou PSLE, que mostra a alta performance dos alunos no quesito conhecimento matemático.

Há anos ocupam as posições mais elevadas nessas avaliações. A alta produção tecnológica e industrial do país se beneficia diretamente da política educacional de Singapura com destaque para o currículo de matemática, chamada **Matemática de Singapura**.

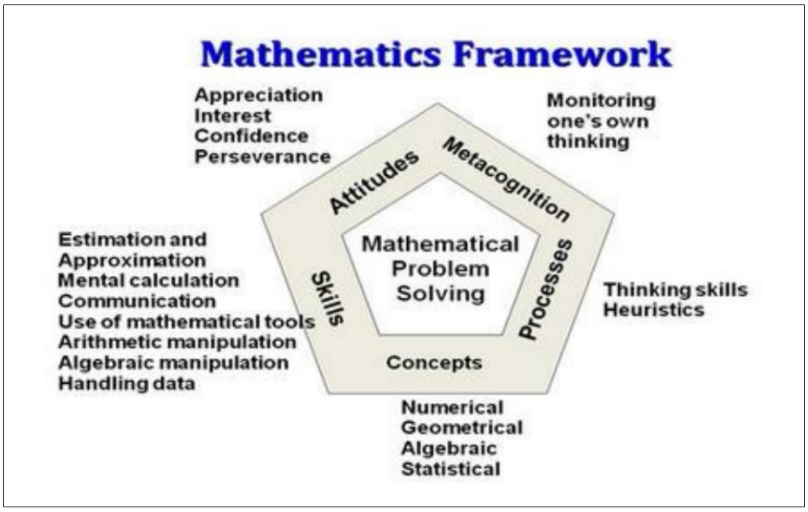
O desempenho dos estudantes tem ligação com diversos aspectos, como culturais, políticos e econômicos; mas fica evidente a influência das políticas e programas educacionais que culminaram no currículo escolar desenvolvido em Singapura desde a década de 90, que pode ser expressa na visão do Ministério da Educação de Singapura pelo princípio “***Thinking Schools, Learning Nation***” (SILVA, 2013, p.34), e trazendo para o indivíduo a responsabilidade por produzir o conhecimento intelectual capaz de colaborar para o desenvolvimento na Nação.

Alguns princípios regem o método de ensino de matemática em Singapura, um dos que se destacam é a **abordagem CPA** (Concreto → Pictórico → Abstrato), que envolve a manipulação do objeto (Concreto), a substituição por esquemas ou desenhos que representam o objeto (Pictórico), e posteriormente, a tradução do objeto na linguagem matemática por meio de símbolos (Abstrato) (BALDIN, 2013).

Outro princípio está na abordagem em espiral, permitindo que o conteúdo seja revisitado nos anos seguintes sob novas óticas. Também se observa a progressão curricular ordenada e sem saltos, de forma que o conteúdo seja devidamente explorado para que o aluno possa progredir para as etapas subsequentes.

Entende-se a Matemática de Singapura como uma filosofia, mais que uma metodologia. Está relacionada na forma de concepção dos livros didáticos das escolas de Singapura (Baldin, 2013). Essa filosofia pode ser representada por um pentágono, segundo as diretrizes do Ministério da Educação de Singapura, como apresentado na Figura 1:

Figura 1 - Matemática de Singapura



Fonte: (DOTTI, 2016, p.10)

É uma filosofia de ensino adotada nos currículos escolares de matemática do ensino básico de Singapura que envolve a produção de livros didáticos que possuem uma abordagem coerente e eficiente. O currículo baseado nesta filosofia tem como foco a resolução de problemas (BALDIN, 2013). Podemos destacar quatro características da Matemática de Singapura (BALDIN, 2013):

- Utilização da abordagem CPA (Concreto → Pictórico → Abstrato).
- Estímulo ao pensamento ativo.
- Fortalecimento de conceitos matemáticos necessários para uma matemática mais avançada.
- Ênfase ao exercício mental de ideias matemáticas através da representação pictórica.

Nessa filosofia, o importante é a proposta coerente que une esses aspectos durante o fluxo curricular (BALDIN, 2013). Também é proposto - além do desenvolvimento progressivo de conceitos matemáticos e do próprio desenvolvimento do aprendizado matemático pelos alunos nos primeiros anos do ensino básico - uma preocupação com a educação inicial e continuada dos professores. Isso se baseia não somente ao conhecimento matemático, mas também por um domínio do real significado da filosofia da Matemática de Singapura.

A representação pictórica é uma ferramenta didática de destaque na Matemática de Singapura, ela permite ao aluno a compreensão de conceitos matemáticos através da representação pictórica mais comum entre os livros didáticos dos primeiros anos do Ensino Fundamental de Singapura, o Modelo de Barras.

> A Matemática de Singapura desenvolve nos alunos a capacidade de manipular as informações, de verificar as situações problema através da modelagem, de reconhecer padrões e fazer generalizações, e de desenvolver habilidades de manipulação numérica através do cálculo mental. Além de focar nas relações parte-todo e comparação, a visualização pictórica favorece a transição do concreto para o abstrato através da Resolução de Problemas, particularmente dos algébricos. (DOTTI, 2016, p. 13)

1.1 O Modelo Pentagonal do currículo da Matemática de Singapura

O Modelo Pentagonal do currículo da Matemática de Singapura foi publicado pelo Ministério da Educação de Singapura no início da década de 90, e evidencia seis pilares que sustentam o processo de ensino e aprendizagem como mostra a Figura 2 a seguir, elaborada por Teixeira (2016, p.17):

Figura 2 - Modelo Pentagonal do currículo da Matemática de Singapura

Fonte: (TEIXEIRA, 2016, p.17)

No centro do pentágono está a **resolução de problemas**, que ocupa esta posição não em vão, mas por representar o **foco** do aprendizado. A resolução de problemas é sustentada por 5 componentes que se relacionam, indicados nos lados do pentágono, são eles:

- Conceitos;
- Procedimentos;
- Processos;
- Metacognição;
- Atitudes.

A base do modelo representa os conceitos matemáticos: conceitos numéricos, algébricos, geométricos, estatísticos, probabilísticos e analíticos. São os conceitos que devem ser aprendidos durante os estudos.

Os procedimentos – cálculo numérico, manipulação algébrica, visualização espacial, análise de dados entre outros, são conjuntos de ações a serem realizadas como habilidades.

Processos diz respeito as capacidades e habilidades de explorar e utilizar os conceitos matemáticos. De acordo com Teixeira (2016, p.17) podemos entender esses processos como:

- Raciocínio matemático: É a análise de situações matemáticas com intuito de organizar pensamentos lógicos.
- Comunicação matemática: Formalização de argumentos através do uso da linguagem matemática.
- Conexões: Associações entre ideias matemáticas, entre Matemática e outras áreas e relações com fenômenos reais do cotidiano.
- Competências de pensamento: Ações mentais que organizam o conhecimento, como, por exemplo, a identificação, classificação, comparação, ordenação, generalização, indução, dedução e verificação.
- Heurística: Processos que auxiliam na resolução de problemas como o uso de representações pictóricas, como o modelo de barras, desenhos e tabelas; palpites acerca de possíveis padrões lógicos; simulações e alterações no problema de modo a simplificar, decompor e reformular.
- Aplicações e modelos: Relações entre conhecimento adquirido na escola com vivencias do cotidiano do aluno e o uso do processo de modelação matemática.

A modelação matemática se dá através da elaboração, formação e aprimoramento de um modelo capaz de representar situações e resolver problemas. Por meio da modelagem os alunos aplicam conceitos matemáticos, fazem conexões entre aprendizados e praticam procedimentos para resolver um problema. Segundo Teixeira (2016, p.17) podemos destacar 4 etapas dentro da modelagem matemática:

- Formulação,
- Resolução,
- Interpretação e
- Reflexão.

A metacognição refere-se à capacidade de “conhecer o próprio ato de conhecer” ou “pensar sobre o pensar”, uma autoconsciência, fiscalização e monitoração dos próprios processos mentais que conduzem o aprendizado. Nessa etapa os alunos são estimulados a comunicar ao professor e colegas suas soluções, de refletir coletivamente de forma a compreenderem o processo de resolução de problemas e achar incoerências durante o desenvolvimento.

As atitudes são ações efetivas que se espera dos alunos, como convicção, interesse, prazer, valorização da matemática, confiança e perseverança, com foco na resolução de problemas. Atitudes positivas é um fator que contribui significativamente na consolidação da aprendizagem da matemática.

O modelo pentagonal do currículo da Matemática de Singapura traz uma proposta coerente que une conceitos, procedimentos, processos, metacognição e atitudes de modo a promover o ensino e aprendizagem dos alunos de Singapura “que se formam, por sua vez, com alto grau de aproveitamento no quesito de saber resolver problemas complexos de matemática” (BALDIN, 2013).

> As cinco componentes do modelo pentagonal são parte integrante da aprendizagem matemática e da Resolução de Problemas. O objetivo desse modelo é ajudar os professores a se concentrar nessas componentes, no contexto das suas práticas diária, de modo a proporcionar um ambiente de aprendizagem mais envolvente e centrado no aluno e a promover maior diversidade e criatividade na aprendizagem. (TEIXEIRA, 2016, p.17)

Contudo, quando pensamos em incorporar essa filosofia no contexto atual de ensino no Brasil, não basta somente adotar modelos, como o caso do Modelo de Barras. Mas é preciso ter em mente a fase intermediária de fluxo curricular, na passagem do concreto ao abstrato, ou seja: (Concreto → Pictórico → Abstrato). Dessa forma podemos amarrar as cinco frentes do pentágono do currículo de Singapura, com foco na resolução de problemas.

O Modelo de Barras é uma ferramenta auxiliar na fase de transição do concreto para abstrato. Usaremos esse método em atividades do 5°e 6 ° anos do Ensino Fundamental como uma ponte, permitindo a compreensão de conceitos e a interpretação da linguagem matemática.

CAPÍTULO 2: O MODELO DE BARRAS

A utilização da metodologia do Modelo de Barras é uma importante ferramenta dentro da Matemática de Singapura, ela estimula a construção de conceitos aritméticos e segundo Queiroz (2014, p. 40) é uma ferramenta importante que auxilia na aprendizagem da álgebra. O modelo de Barras ajuda não somente a compreensão das operações aritméticas, mas principalmente ajuda o aluno a compreender a linguagem simbólica promovendo o desenvolvimento do pensamento matemático e algébrico.

O modelo de barras não é exclusividade de Singapura, as representações pictóricas são muito antigas na matemática e até mesmo na literatura brasileira (QUEIROZ, 2014, p. 40) em que alguns autores se utilizam dela, pois representa uma estratégia natural no processo de resolução de problemas. Um ponto a destacar é que a Matemática de Singapura desenvolve esse processo numa proposta coesa de currículo.

O Modelo de Barras é uma ferramenta que auxilia o aluno no desenvolvimento da resolução de problemas, pois ajuda a elucidação e compreensão de conceitos como de adicionar, subtrair, multiplicar e dividir; conceitos como razão, proporção, e conexões entre a parte e o todo de uma situação contextualizada. Dessa forma a representação pictórica por meio das barras está ligada aos conceitos matemáticos a serem aprendidos pelos alunos.

No capítulo 1 vimos quatro características da Matemática de Singapura, agora vamos listar alguns focos dela segundo Baldin (2013):

- Desenvolver habilidade do aluno em lidar com a informação, com base em problemas literais.
- Desenvolver a habilidade de visualizar uma situação problema, criando modelos a partir da representação por barras.
- Desenvolver a habilidade em reconhecer padrões e desenvolver generalizações.
- Desenvolver o cálculo mental (senso numérico).

Na resolução de problemas, a Matemática de Singapura destaca (BALDIN, 2013):

- Desenvolvimento do raciocínio da relação parte-todo e comparação.
- Visualização da representação pictórica como ponte entre o Concreto e Abstrato.

É nesse contexto que o Modelo de Barras se torna uma ferramenta poderosa no ensino e aprendizagem da matemática. Esse método é comumente utilizado pelos professores em Singapura no ensino primário, e visa o melhoramento da capacidade de resolução de problemas por parte dos alunos. O Modelo de Barras propicia a visualização de conceitos matemáticos abstratos através da representação pictórica, facilita a elaboração de estratégias na resolução de problema e a justificativa das soluções obtidas.

Podemos considerar esse método dentro da fase pré-álgebra de aprendizagem. Segundo Queiroz (2014):

> A metodologia do Modelo de Barras é muito importante e útil para os alunos na resolução de problemas que envolvem comparações, parte-todo, razões e proporções fazendo com que os alunos possam aprimorar seus conhecimentos anteriores da aritmética, e adquirem novos olhares para a abstração da álgebra que virá nos anos seguintes. (QUEIROZ, 2014, p. 41)

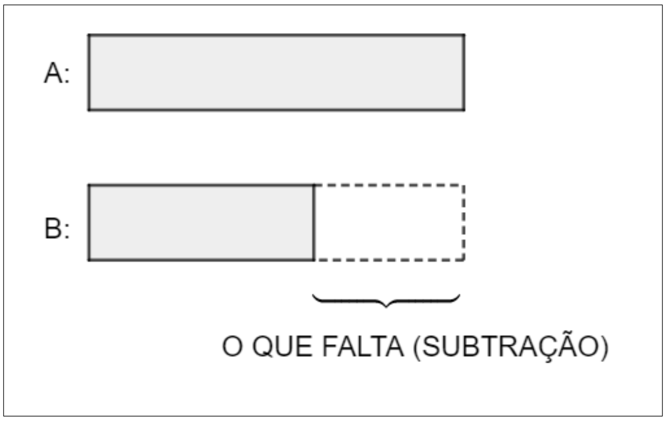
A Figura 3, a seguir, ilustra o uso de modelo de barras para compreender a representação da situação de adição de dois valores numéricos. Dados dois valores numéricos A e B, podemos entender o “todo” através da barra que representa o valor numérico da soma dos valores A e B, representada pela união das barras, cada uma representando os valores de A e B, como “partes” do todo. A adição é representada pela “união” das partes que representam A e B, e a barra resultante representa a soma dos valores A e B, como um “todo”:

Figura 3 - Adição com Modelo de Barras

Fonte: Próprio autor

A Figura 4 nos mostra um exemplo da situação de comparação entre valores numéricos. Quando dois valores A e B são dados, podemos compará-los através das representações com Barras. Se o valor de A é maior do que o valor de B, podemos modelar com barras a situação, representando B como "parte" do "todo" maior que representa o valor de A. Quando comparamos as representações pictóricas neste contexto, podemos trabalhar o conceito de "diferença" (a parte que falta para B alcançar o valor de A) ou ainda de "resto" (a parte que sobra quando subtrai o valor de B a partir de A). Assim, a operação de Subtração pode ser entendida com significados:

Figura 4 - Subtração com Modelo de Barras



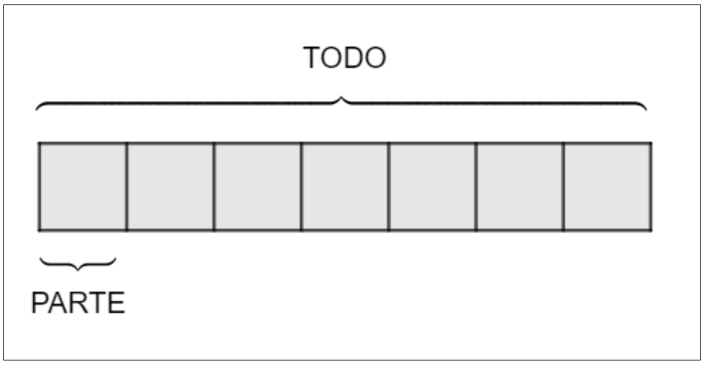
Fonte: Próprio autor

Dessa forma, podemos usar modelos pictóricos na resolução de problemas que envolvem as operações de adição e subtração em que os alunos possam desenvolver ideias matemáticas por meio da visualização e raciocínio organizado.

Outra situação em que o Modelo de Barras se mostra útil é o caso da divisão de um valor em partes iguais, considerando inicialmente como “todo” o valor dado, e as “partes” como o resultado da divisão em partes iguais. Reciprocamente, a representação pictórica deste contexto serve também para o problema de buscar o “todo” constituído de “partes” de igual valor, em quantidades indicados pelo contexto, trabalhando simultaneamente o conceito de multiplicação de um valor por um número dado de vezes. Quando a divisão de um valor em partes iguais é trabalhada dessa maneira, podemos resgatar o valor do “todo” pela multiplicação de uma parte pelo número de partes iguais. Isto é, estamos argumentando que a representação pode ser usada duplamente em problemas do tipo: - dado um valor como “todo” dividi-lo em “partes” iguais” e determinar o valor da parte; - dado um valor, encontrar um “todo” constituído de “partes” iguais ao valor dado, em quantidade determinada de partes, e encontrar o valor do “todo”.

Outro problema que pode ser trabalhado em contexto de divisão (na perspectiva de comparação), é de “determinar o número de partes iguais em que um valor (todo) tenha sido dividido”. Estamos dizendo das situações de divisão e multiplicação de números naturais, como operações aritméticas básicas do conteúdo curricular.

Figura 5 - Relação parte-todo

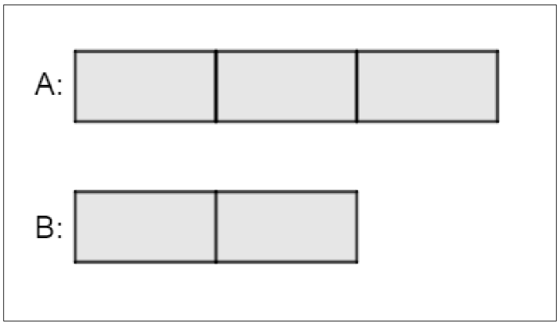


Fonte: Próprio autor

A Figura 5 nos mostra a adição de 7 partes iguais que unidas formam o todo, como uma multiplicação do valor da “parte” pela quantidade de partes, sete (7), o que permite entender o conceito da operação de multiplicação de um valor por um fator determinado (no caso, 7) como uma adição de 7 partes de igual valor. De maneira semelhante, podemos considerar como dado inicial um valor “todo” e a representação da “parte” que constitui o resultado da divisão do “todo” em 7 partes iguais. Esta última interpretação permite trabalhar o conceito de “fração”: Cada parte representa a fração $\frac{1}{7}$ do todo. A notação $\frac{1}{7}$ para número fracionário pode ser introduzida com este entendimento.

Continuando o pensamento matemático do exemplo acima, podemos usar o modelo de barras na situação de comparação, como na Figura 6:

Figura 6 - Comparação usando Barras

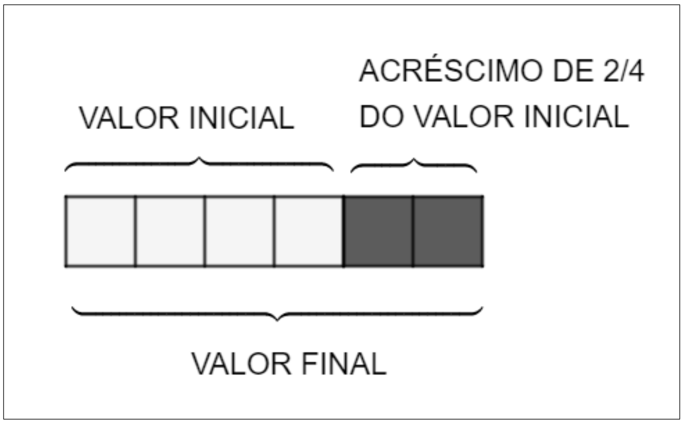


Fonte: Próprio autor

Na Figura 6, temos representação em Barras de um valor A e de um valor B, ambos divididos em partes de igual valor: B em 2 partes e A em 3 partes, sendo iguais as partes. Tomando a “parte” como uma “unidade de contagem” a *comparação entre os valores de A e B* é definida como a “razão entre os valores de A e B” e denotada como 3:2, lida 3 para 2, significando exatamente que A equivale a 3 “unidades (de comparação)” e B equivale a 2 “unidades”. Nesta situação, podemos também escrever que A é $\frac{3}{2}$ de B, e B é $\frac{2}{3}$ de A., e em cada caso o “todo” referência muda de acordo com B ou A considerado como referência de “comparação”.

Na Figura 7 temos um exemplo de representar um acréscimo a um valor inicial usando uma “unidade” de comparação. A situação problema mostra que do valor inicial faz-se um acréscimo de $\frac{2}{4}$ do valor dado. Neste caso, temos um raciocínio intermediário do “todo” (valor inicial) para estabelecer a “unidade” de comparação, que no caso é $\frac{1}{4}$ do valor inicial dado para a contagem da “unidade fracionária” para representar o “todo final” após o acréscimo. Desse modo, o modelo de barras precisou considerar primeiro a divisão do valor inicial em 4 partes iguais, que permite identificar a "unidade" (a fração $\frac{1}{4}$) para considerar o valor total final. Neste caso, o conceito de que o "todo" inicial corresponde a 4 unidades desta nova "unidade de contagem" representada pela barra que representa $\frac{1}{4}$ do valor inicial é a chave para compreender a contagem do que está sendo acrescentado ao valor inicial, isto é, acrescenta-se 2 unidades $\frac{1}{4}$. Assim, o modelo pictórico confirma o resultado como 6 unidades $\frac{1}{4}$ isto é, $\frac{6}{4}$, do valor inicial tomado como referência do "todo". É fácil observar também que esta fração é equivalente a $\frac{3}{2}$ do valor incial.

Figura 7 - Acréscimo do valor inicial usando Barras



Fonte: Próprio autor

Estes raciocínios apoiados no modelo pictórico permitem abordagens em diversos contextos, por exemplo, num contexto de decréscimo em um valor inicial, e interpretações da representação fracionária.

O Modelo de Barras é uma ferramenta auxiliar na aprendizagem como ponte da manipulação do material concreto para a aprendizagem com expressão simbólica do pensamento matemático. Portanto, é importante registrar as sentenças matemáticas que são representadas num modelo de barras.

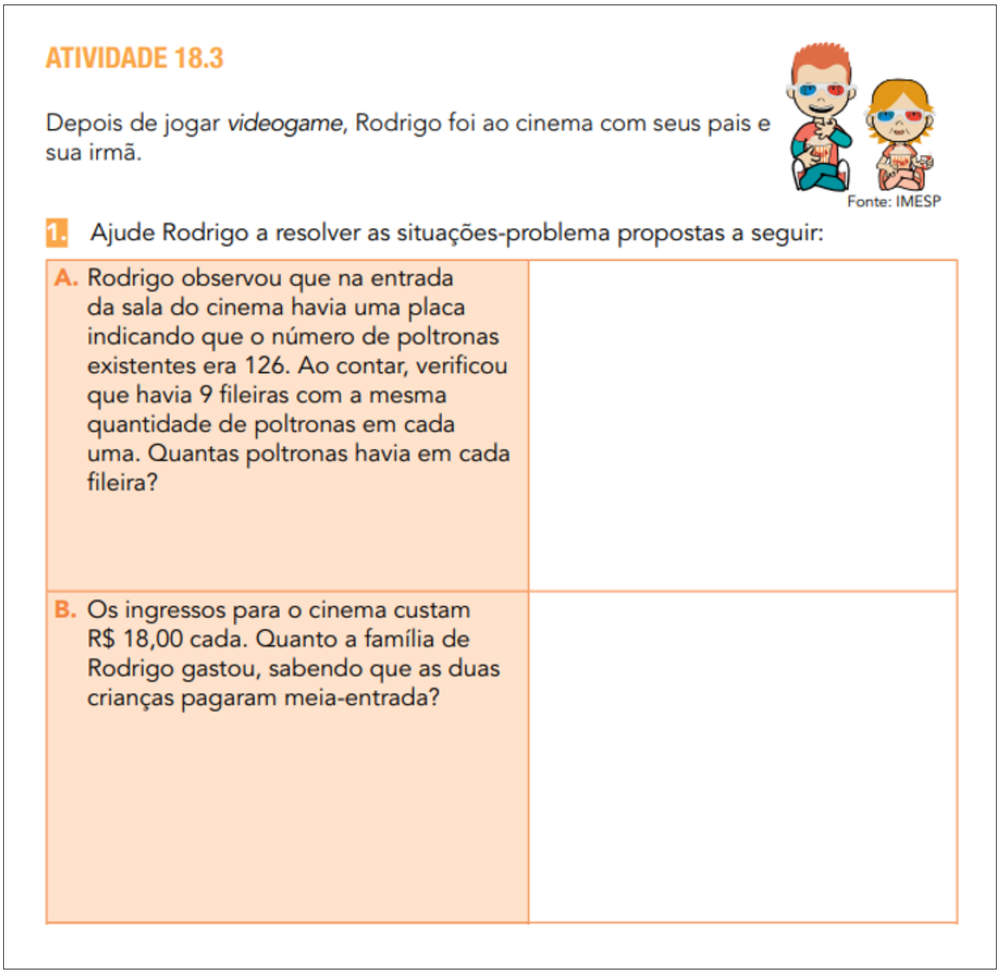
2.1 Tópicos curriculares matemáticos dos problemas selecionados

Para a pesquisa do trabalho de conclusão de curso, foram escolhidas duas atividades dos livros didáticos do currículo das escolas públicas do Estado de São

Paulo, o EMAI (Educação Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental) e o Caderno do aluno do Currículo em Ação do 6º ano. Com esses exercícios desenvolveremos, no Capítulo 3, as resoluções utilizando o Método de Barras.

No EMAI (Educação Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental) volume 2 do 5º ano foi escolhida a atividade 18.3 (exercícios 1A e 1B) da página 10, como mostra a figura abaixo:

Figura 8 - Atividade 18.3 do EMAI



ATIVIDADE 18.3

Depois de jogar *videogame*, Rodrigo foi ao cinema com seus pais e sua irmã.

Fonte: IMESP

1. Ajude Rodrigo a resolver as situações-problema propostas a seguir:

A. Rodrigo observou que na entrada da sala do cinema havia uma placa indicando que o número de poltronas existentes era 126. Ao contar, verificou que havia 9 fileiras com a mesma quantidade de poltronas em cada uma. Quantas poltronas havia em cada fileira?	
B. Os ingressos para o cinema custam R$ 18,00 cada. Quanto a família de Rodrigo gastou, sabendo que as duas crianças pagaram meia-entrada?	

Fonte: EMAI, 2021, p. 10

Na BNCC é proposto cinco unidades temáticas que se relacionam de forma a orientar a formação das habilidades a serem desenvolvidas durante o Ensino Fundamental (BRASIL, 2018):

- Números

- Álgebra
- Geometria
- Grandezas e medidas
- Probabilidade e estatística

A unidade temática “Números” tem por objetivo a capacitação do aluno ao pensamento numérico, ou seja, a percepção dos diferentes modos de quantificar objetos bem como a interpretação de “argumentos baseados em quantidades” (BRASIL, 2018, p. 268).

O conceito de números envolve questões fundamentais como aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem. Por meio de situações-problemas amplia-se gradativamente o conceito numérico bem como a importância dos registros (linguagem), seus significados e suas operações.

Nos anos iniciais do Ensino Fundamental, segundo a BNCC, os alunos desenvolvem resoluções de problemas relacionados aos conjuntos numéricos dos Naturais e Racionais, com representações decimais finitas. É importante que o aluno entenda os significados das operações básicas como a adição, subtração, divisão e multiplicação, com base em argumentos e procedimentos a fim de elaborar uma resolução para um problema.

Com relação aos cálculos, “espera-se que os alunos desenvolvam diferentes estratégias para a obtenção dos resultados, sobretudo por estimativa e cálculo mental, além de algoritmos e usos de calculadoras” (BRASIL, 2018, p. 268).

É fundamental que nesse momento o aluno desenvolva a capacidade de interpretação de texto e de escrita, pois a linguagem matemática por meio de símbolos e generalizações, que constitui papel importante na Matemática, requer a capacidade de compreensão de aspectos ligados a língua materna.

Entendemos que existe um forte vínculo entre as unidades temáticas “Números” e “Álgebra”, principalmente na transição dos ciclos I e II do Ensino Fundamental, no sentido de que o desenvolvimento do pensamento algébrico, com suas próprias representações simbólicas, necessita de habilidades de identificação de padrões numéricos. A esse respeito, temos o texto da BNCC:

> Nessa perspectiva, é imprescindível que algumas dimensões do trabalho com a álgebra estejam presentes nos processos de ensino e aprendizagem desde o Ensino Fundamental – Anos Iniciais, como as ideias de regularidade, generalizações de padrões e propriedades da igualdade. (BRASIL, 2018, p. 270)

No 5º ano do Ensino Fundamental a unidade temática Números está dividida em 8 objetos de conhecimento. Os conteúdos listados a seguir, fazem parte dos objetivos da Atividade 18.3 do EMAI, de acordo com a BNCC (BRASIL, 2018, p. 204):

- Sistema de Numeração Decimal.
- Problemas: Adição e subtração de números naturais.
- Problemas: Multiplicação e divisão de números racionais cuja representação decimal é finita, por números naturais.

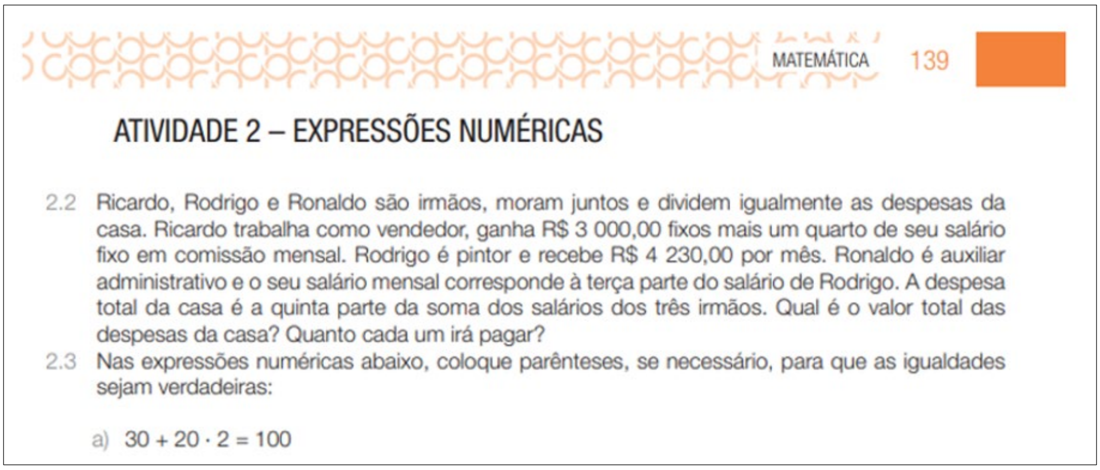
As habilidades que a Atividade 18.3 promove estão contempladas nas habilidades EF05MA08 e EF05MA11 da BNCC:

> (EF05MA08) Resolver e elaborar problemas de multiplicação e divisão com números naturais e com racionais cuja representação decimal é finita (com multiplicador natural e divisor natural diferente de zero), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos. (BRASIL, 2018, p. 295)

> (EF05MA11) Resolver e elaborar problemas cuja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido. (BRASIL, 2018, p. 295)

Do material No Currículo em Ação – Caderno do Aluno volume 1 do 6º ano foi escolhida a atividade 2 – Expressões numéricas (exercícios 2.2 e 2.3), como mostra a Figura 9:

Figura 9 - Currículo em Ação: Expressões Numéricas (6º ano)



MATEMÁTICA 139

ATIVIDADE 2 – EXPRESSÕES NUMÉRICAS

2.2 Ricardo, Rodrigo e Ronaldo são irmãos, moram juntos e dividem igualmente as despesas da casa. Ricardo trabalha como vendedor, ganha R$ 3 000,00 fixos mais um quarto de seu salário fixo em comissão mensal. Rodrigo é pintor e recebe R$ 4 230,00 por mês. Ronaldo é auxiliar administrativo e o seu salário mensal corresponde à terça parte do salário de Rodrigo. A despesa total da casa é a quinta parte da soma dos salários dos três irmãos. Qual é o valor total das despesas da casa? Quanto cada um irá pagar?

2.3 Nas expressões numéricas abaixo, coloque parênteses, se necessário, para que as igualdades sejam verdadeiras:

a) $30 + 20 \cdot 2 = 100$

Fonte: CURRÍCULO EM AÇÃO, 2021, p.139

No Ensino Fundamental – Anos Finais, segundo a BNCC, é importante considerar as vivências matemáticas dos anos anteriores no desenvolvimento de conceitos mais complexos como equivalência e ordem, por exemplo.

E a partir do 6º ano a linguagem matemática se desenvolve ainda mais, “nessa fase, precisa ser destacada a importância da comunicação em linguagem matemática com o uso da linguagem simbólica, da representação e da argumentação.” (BRASIL, 2018, p. 298).

Segundo a BNCC, destacaremos alguns objetos de conhecimento da unidade temática Números, importantes para a Atividade 2- Expressões Numéricas selecionada para a análise no Currículo em Ação:

- Sistema de numeração decimal.
- Operações.
- Divisão Euclidiana.
- Frações: significados parte-todo, equivalência e comparação.

As habilidades que essa Atividade do Currículo em Ação promove estão destacadas na habilidade EF06MA03, da BNCC:

> (EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso da calculadora. (BRASIL, 2018, p. 301)

Na unidade temática Álgebra, destacamos os dois objetos de conhecimento da BNCC (BRASIL, 2018, p. 302):

- Propriedades de igualdade.
- Problemas que tratam da partição de um todo.

A habilidade que a atividade selecionada do Currículo em Ação desenvolve, está contemplada na habilidade EF06MA15:

> (EF06MA15) Resolver e elaborar problemas que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo. (BRASIL, 2018, p. 303)

CAPÍTULO 3: RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E ATIVIDADES MODELADOS COM BARRAS.

Utilizando o Modelo de Barras, desenvolveremos as resoluções dos exercícios propostos com intuito de auxiliar o entendimento numérico e suas operações, bem como a tradução para a linguagem matemática, a partir da representação pictórica.

Vamos trabalhar a Atividade 18.3 do EMAI 5º ano com o enunciado dado, como segue:

Enunciado da Atividade 18.3 do EMAI:

Depois de jogar videogame, Rodrigo foi ao cinema com seus pais e sua irmã. Ajude Rodrigo a resolver as situações-problema propostas a seguir:

1A) Rodrigo observou que na entrada da sala do cinema havia uma placa indicando que o número de poltronas existentes era 126. Ao contar, verificou que havia 9 fileiras com a mesma quantidade de poltronas em cada uma. Quantas poltronas havia em cada fileira?

1B) Os ingressos para o cinema custam R$ 18,00 cada. Quanto a família de Rodrigo gastou, sabendo que as duas crianças pagaram meia-entrada?

Na Atividade 2 – Expressões Numéricas do Currículo em Ação do 6º ano trabalharemos o seguinte enunciado:

Enunciado da Atividade 2 do Currículo em Ação:

2.2) Ricardo, Rodrigo e Ronaldo são irmãos, moram juntos e dividem igualmente as despesas da casa. Ricardo trabalha como vendedor, ganha R$ 3.000,00 fixos mais um quarto do seu salário fixo em comissão mensal. Rodrigo é pintor e recebe R$ 4.230,00 por mês. Ronaldo é auxiliar administrativo e o seu salário mensal corresponde à terça parte do salário de Rodrigo. A despesa total da casa é a quinta parte da soma dos salários dos três irmãos. Qual é o valor total das despesas da casa? Quanto cada um irá pagar?

2.3) Na expressão numérica abaixo, coloque parênteses, se necessário, para que a igualdade seja verdadeira:

a) $30 + 20 \cdot 2 = 100$

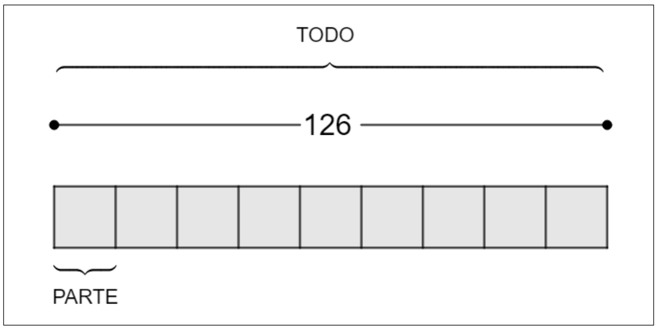
3.1 Atividade do EMAI – Questão 1A.

Na resolução de problemas é importante seguirmos quatro etapas, começando pela compreensão do problema, o desenvolvimento de um plano, a execução do plano e, por último, a verificação da resposta. A partir do Modelo de Barras, podemos criar um modelo que nos auxilia nessas etapas.

Na base do pentágono da Matemática de Singapura (Figura 1 e 2) estão os conceitos, que nesse problema são os conceitos numéricos. Na compreensão do problema, podemos entender o todo como sendo a quantidade de 126 poltronas. Como as poltronas estavam dispostas em 9 fileiras com igual número de poltronas, nosso todo está dividido em 9 partes iguais

Então, representamos o todo (valor numérico 126) com uma barra e as fileiras representadas pelas 9 partes iguais desse todo, cada parte representando o número de poltronas em cada fileira (Figura 10). Então, ao dividirmos a quantidade total de poltronas pela quantidade de fileiras, teremos a quantidade de poltronas por fileira, desse modo queremos saber o resultado da divisão de 126 por 9, matematicamente $126 \div 9$. Pictoricamente, usando barras, temos:

Figura 10 - Representação por Barras do Todo



Fonte: Próprio autor

O todo (126) está representado pela barra na Figura 10. A barra está dividida em nove partes, que representam a quantidade (valor numérico) das fileiras. Quando reunimos as partes para formar o todo, estamos somando a quantidade das poltronas de cada uma das nove fileiras. Isso significa que se somarmos nove vezes o número da quantidade de poltronas por fileira, obteremos o total. Mas o número da quantidade de poltronas por fileira é exatamente o que devemos encontrar.

Realizando a operação, como $126 \div 9 = 14$, então a quantidade de poltronas por fileira é exatamente 14 poltronas.

Vamos a seguir, fazer uma variação desta abordagem para as classes em que o uso de modelo de barras ainda não esteja dominado. Em outras palavras, vamos mostrar uma modelagem de barras do número encontrado de poltronas de cada fileira, para consolidar a ideia de que cada parte de um valor numérico inteiro pode ser representada usando adequadamente o modelo de barras. Para o problema selecionado, esta variação não necessariamente faz parte. Esta observação foi acrescida na versão final do trabalho, como complemento para melhor análise da abordagem.

Nesta variação, vamos representar a quantidade de uma (1) poltrona por barra, assim juntar 14 dessas barras significa obter o número de poltronas por fileira (novo todo referência) por meio da operação de adição ou ainda, de multiplicação 14 × 1 = 14, observe a Figura 11:

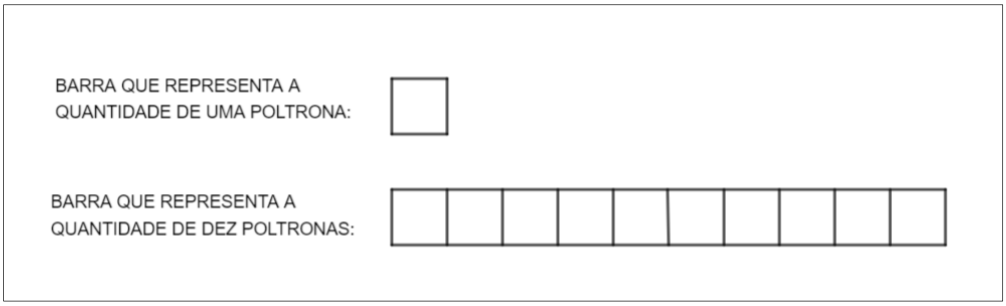
Figura 11 - Representação por Barras do Todo

Fonte: Próprio autor

Em nossa comparação parte-todo, podemos alterar o todo de acordo com a situação a analisar. Assim nesta variação, estamos representando cada fileira como sendo o todo, que está dividido em partes iguais que representam a unidade (1) que é o número de uma poltrona. Cada fileira possui então 14 poltronas.

Outra atividade que pode ser trabalhada na classe com esta abordagem, trabalhando a habilidade de estimativa por visualização mental, podemos supor que existam dez poltronas por fileira, pela facilidade da multiplicação de um número natural por dez. Observe a Figura 12:

Figura 12 - Representação por Barras



Fonte: Próprio autor

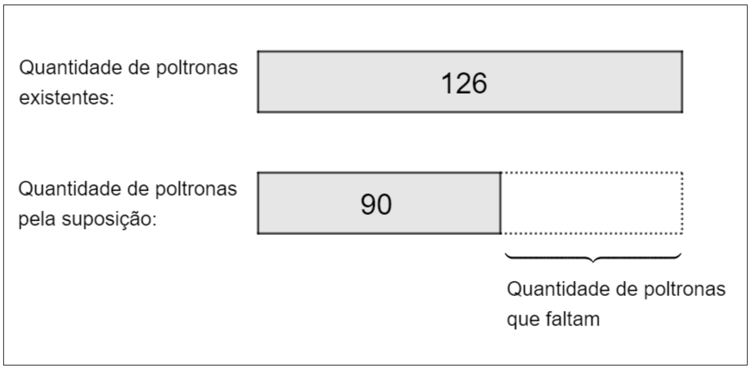
Estamos representando a quantidade de 10 poltronas em uma fileira, pelo método de barras, quando “juntar” barras significa somar valores representados pelas barras. Temos uma barra formada pela união de dez barras que representam cada uma a quantidade de uma poltrona. Foi observada durante a apresentação deste trabalho que o cuidado em não confundir o objeto pictórico “barra” com o próprio objeto ou os objetos é um ponto crucial no pensamento matemático, pois este cuidado está no cerne da abstração da transição entre o objeto concreto e a abstração da “quantidade numérica deste objeto” que é representada pelo modelo pictórico de barra. Não devemos confundir o valor numérico de uma contagem de quantidades de objetos com o próprio objeto. Este cuidado conceitual é importante ao levar esta metodologia para atividades numa sala de aula. No modelo CPA (concreto → pictórico → abstrato) da Matemática de Singapura, a abstração mediada pelo modelo pictórico, constitui a sentença ou expressão matemática que é escrita simbolicamente no final do modelo.

Assim, o objetivo deste processo de abstração, com este cuidado com o significado da modelagem pictórica, chegamos ao objetivo desta atividade de variação do problema, que é a escrita da sentença matemática que representa a situação de 9 fileiras com dez poltronas, que nos dá um total de 90 poltronas, ou seja, 9 (fileiras) vezes 10 (poltronas) expressa simbolicamente como:

$$9 \times 10 = 90$$

Com esta simplificação, chegamos ao total de 90 poltronas, que comparando com o dado inicial de 126 poltronas, concluímos que as fileiras devem conter MAIS poltronas além de 10. Na Figura 13 podemos observar a diferença entre a quantidade real de poltronas no cinema e a quantidade que estimamos a menos, pela comparação entre os valores representadas pelas barras correspondentes aos valores 126 e 90, respectivamente. Notemos que não estamos comparando as poltronas, mas sim, o valor numérico das quantidades:

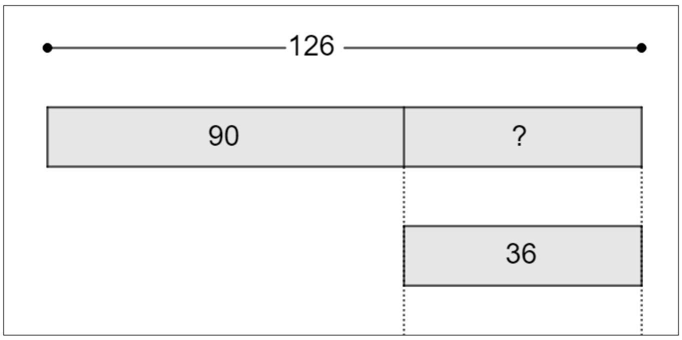
Figura 13 - Representação por Barras Subtração



Fonte Próprio autor

Nesta situação, queremos saber qual é a quantidade de poltronas que faltam para completar as 126 poltronas do cinema, descrita pictoricamente na Figura 14.

Figura 14 - Representação por Barras, Subtração



Fonte próprio autor

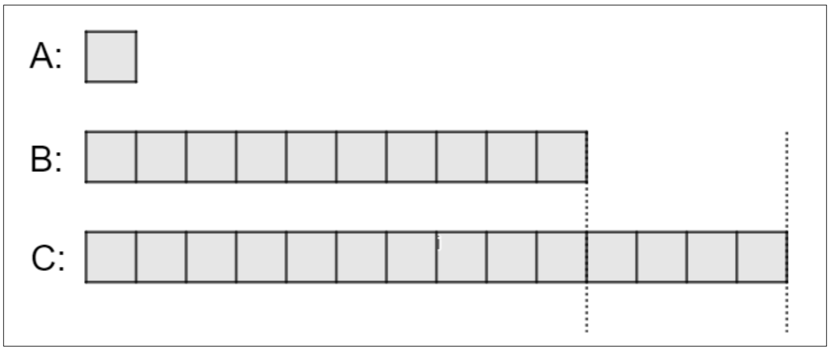
Simbolicamente, na linguagem matemática temos:

$$126 - 90 = 36$$

Temos então uma quantidade de 36 poltronas que ainda faltam ser distribuídas igualmente por 9 fileiras, isto é, precisamos dividir a quantidade de 36 (poltronas) por 9 (fileiras do cinema). Podemos abordar esta situação problema, recordando na classe a operação de divisão, 36 ÷ 9 = 4, neste contexto. Isso significa que, em cada fileira existem ainda 4 poltronas, além das 10 poltronas já contadas.

A situação pode ser representada pictoricamente como na Figura 15, para validar o raciocínio empregado até o momento, em que realizamos a divisão de 126 por 9, em duas etapas usando a aproximação, e mediado pela visualização. *Repetimos aqui o cuidado que devemos ter em não confundir a figura/parte "unidade" que representa o número 1, com o objeto (poltrona*).

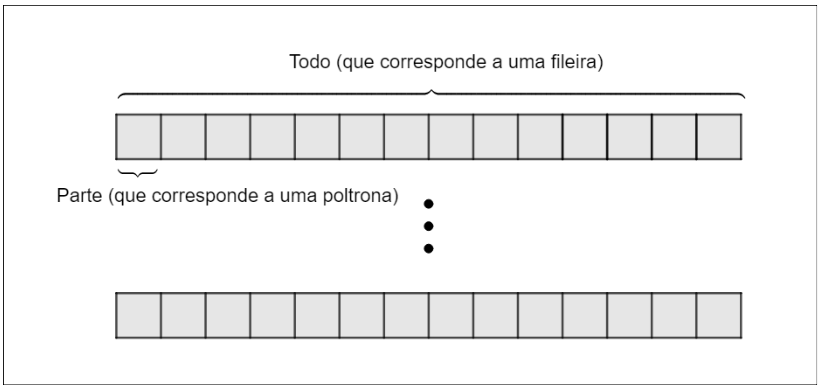
Figura 15 - Total de poltronas por fileira



Fonte: Próprio autor

A situação (A) representa a unidade numérica 1 (poltrona), em (B) temos a representação da quantidade 10 unidades, pela etapa de aproximação que fizemos antes. Em (C) temos a representação da quantidade de poltronas de uma fileira (todo) dividida em 14 partes iguais, onde validamos o acréscimo de mais 4 unidades para completar a resposta ao problema. A representação pictórica facilita a argumentação dos passos do raciocínio realizado para a resolução do problema.

Figura 16 - Representação por Barras



Fonte: Próprio autor

Na Figura 16 temos representado por barras, o todo (quantidade total de uma fileira) dividida em 14 partes (quantidade de poltronas) iguais. A reticência significa que vamos representar até 9 (fileiras) cópias iguais da primeira representação da quantidade de poltronas em 1 fileira, cada uma com 14 unidades. Somando a quantidade de 9 grupos iguais de 14 unidades, temos um total de 126, escrita simbolicamente como uma operação de multiplicação, e que valida a resposta à pergunta original do problema:

$$9 \times 14 = 126$$

Chegamos à resposta de que na sala de cinema, cada uma das 9 fileiras possui 14 poltronas. O processo trabalhado de estimativa e aproximação pode ser reconhecido no algoritmo de divisão, quando observamos que o aluno poderia chegar de maneira mais direta à resposta, realizando mecanicamente a operação $126 \div 9$. Entretanto, a metodologia de Resolução de Problemas permite que o aluno vivencie as etapas de raciocínio organizado com justificativas dos argumentos para as estratégias de usar as operações aritméticas e a validação dos seus métodos de resolução, sem a memorização mecânica de qual operação realizar. Com o uso do Método de Barras o aluno pode criar um modelo que represente pictoricamente as operações matemáticas, traduzindo posteriormente para a linguagem matemática, com sinais de operações e igualdade. Assim, antes de manipularmos expressões matemáticas, podemos representar por meio de figuras a situação-problema.

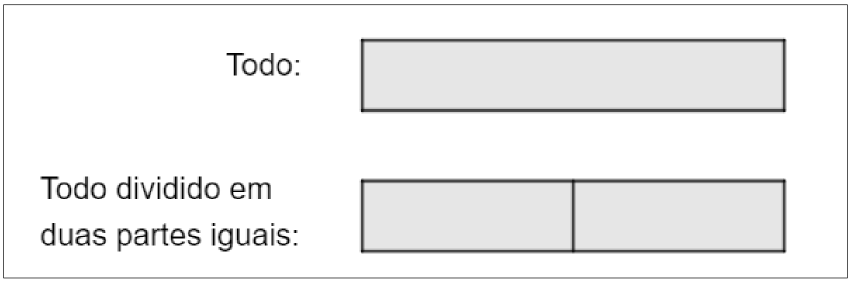
3.2. Atividade do EMAI – Questão 1B

Na questão 1B do EMAI precisamos responder à seguinte pergunta: “Quanto a família de Rodrigo gastou com as entradas do cinema, sabendo que Rodrigo e sua irmã pagaram meia-entrada?”

Para isso precisamos saber quantas pessoas contando com Rodrigo foram ao cinema.

Pelo enunciado da atividade 18.3, sabemos que a família de Rodrigo é formada por ele, sua irmã, seu pai e sua mãe. Ao total são 4 pessoas na família. Os pais pagam o valor de uma entrada, R$18,00, e Rodrigo e sua irmã pagam ambos metade do valor da entrada. Vamos considerar o todo como sendo o valor da entrada R$18,00 como mostra a Figura 17:

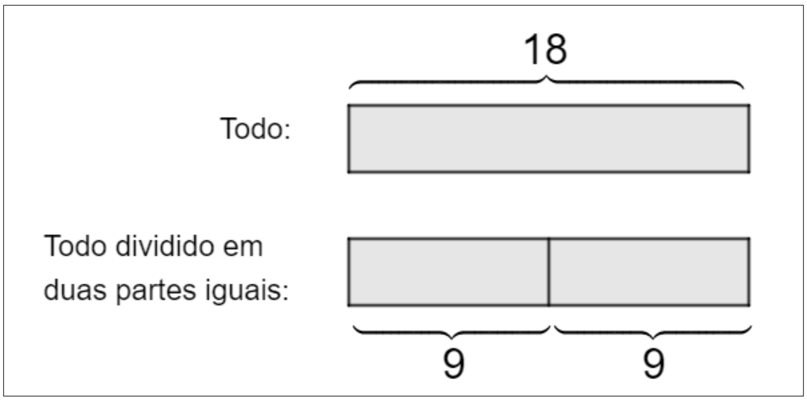
Figura 17 - Representação do Todo



Fonte: Próprio autor

O todo representa o preço em reais da entrada do cinema. Dividimos o todo em duas partes iguais, ou seja, cada parte representando a “metade” do valor do todo.

Figura 18 - Representação do Todo

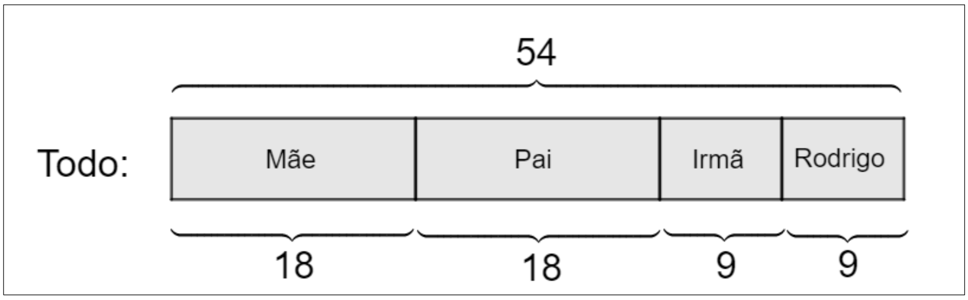


Fonte: Próprio autor

Na Figura 18, podemos indicar o valor numérico 18 ao todo. Ao dividir o todo em duas partes iguais, podemos atribuir o valor 9 a cada parte. Assim confirmamos que o todo corresponde à soma das metades, ou seja, ao dobro de cada metade.

Na Figura 19 representamos o valor total gasto com as entradas, que é obtida pela adição dos valores de cada entrada, e, portanto, representado por meio da união das barras que representam cada valor pago. Representamos os valores das entradas do pai e da mãe de Rodrigo por barras de mesmo tamanho, pois esses valores se equivalem, ambos pagam R$18,00. Representamos os valores de Rodrigo e sua irmã com barras que correspondem à metade de uma entrada. Portanto podemos obter o todo, que representa o total gasto com as entradas do cinema, unindo as barras que correspondem aos valores que cada um irá pagar.

Figura 19 - Representação do Todo



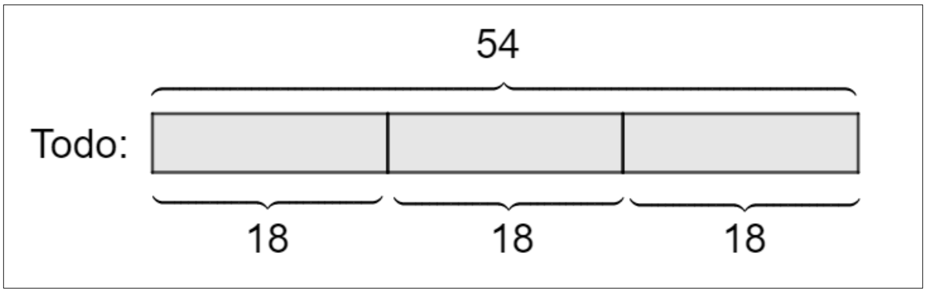
Fonte: Próprio autor

Na Figura 19 o todo é a união desses valores, que equivale a 54. Em linguagem matemática a sentença se escreve como:

$$18 + 18 + 9 + 9 = 54$$

Outra forma de visualizarmos e concluirmos o todo 54 é a seguinte:

Figura 20 - Representação do Todo



Fonte: Próprio autor

Na Figura 20, como os valores das entradas dos irmãos correspondem a uma entrada inteira, podemos entender o todo dividido em três partes iguais. Assim o todo equivale ao triplo da parte correspondente ao valor de uma entrada. Na linguagem matemática:

$$3 \times 18 = 54$$

Que equivale a:

$$18 + 18 + 18 = 54$$

Concluímos então, que a família de Rodrigo gastou ao total R$54,00 com as entradas do cinema. O aluno poderá entender o raciocínio e confirmar o pensamento matemático apoiado por modelo pictórico.

3.3 Atividade do Currículo em Ação – Questão 2.2

Enunciado da questão: Ricardo, Rodrigo e Ronaldo são irmãos, moram juntos e dividem igualmente as despesas da casa. Ricardo trabalha como vendedor, ganha R$ 3.000,00 fixos mais um quarto de seu salário fixo em comissão mensal. Rodrigo é pintor e recebe R$ 4.230,00 por mês. Ronaldo é auxiliar administrativo e o seu salário mensal corresponde à terça parte do salário de Rodrigo. A despesa total da casa é a quinta parte da soma dos salários dos três irmãos. Qual é o valor total das despesas da casa? Quanto cada um irá pagar?

A questão 2.2 do Currículo em Ação nos traz uma situação-problema contextualizada, onde três irmãos dividem de forma igual as despesas da casa. Cada irmão (Ricardo, Rodrigo e Ronaldo) recebe valores mensais diferentes, de acordo com os dados reconhecidos e identificados no texto do problema. Duas questões são solicitadas no problema:

- Qual o valor que cada irmão irá pagar para as despesas mensais da casa?
- Qual o valor total das despesas da casa?

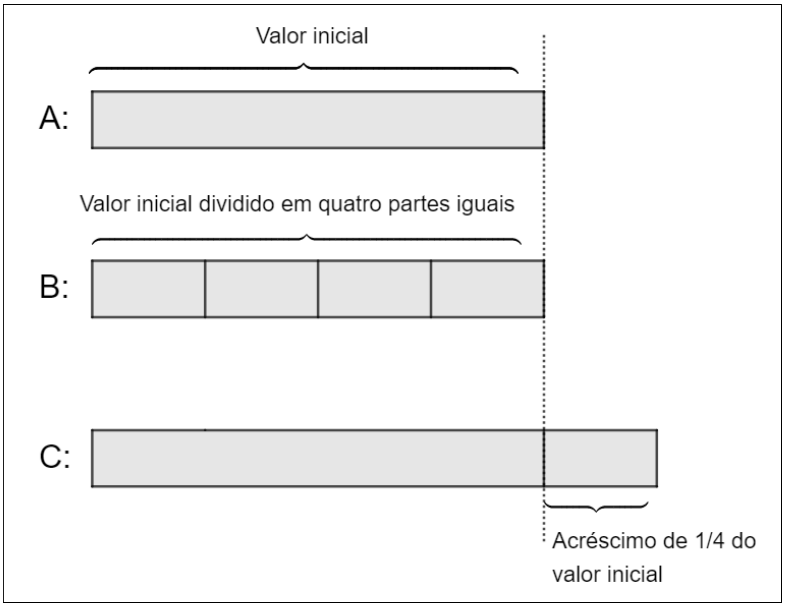
A metodologia de Resolução de Problemas nos indica que, de passo a passo, dividimos a situação-problema em partes, analisando os dados identificados no enunciado do problema, para perceber que devemos começar por analisar individualmente os valores que cada irmão recebe. Em seguida, de posse dessas informações devemos analisar as relações entre os dados numéricos das informações coletadas, para poder selecionar as operações adequadas que irão fornecer resultados para o valor das despesas da casa, assim como o valor da parte que cabe para cada irmão.

Desta forma, dividimos a situação-problema em etapas, analisando individualmente os valores dos salários que cada irmão recebe e então calcular o valor total das despesas da casa.

Analisamos primeiro o caso de Ricardo. A leitura do enunciado permite reconhecer que Ricardo recebe mensalmente um valor fixo mais uma comissão que corresponde a um quarto de seu salário. Isto significa que há um acréscimo de $\frac{1}{4}$ do valor fixo ao valor inicial. Logo o salário total de Ricardo é a adição de duas parcelas, uma fixa e a outra (comissão) que se referencia como parte desta parte fixa.

Modelamos essa situação na Figura 21:

Figura 21 - Representação do Caso de Ricardo



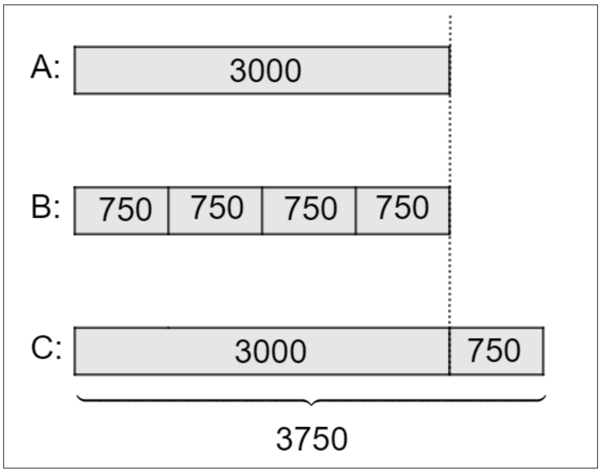
Fonte: Próprio autor

Na Figura 21, na situação (A) temos a representação do valor inicial que Ricardo recebe mensalmente como vendedor. A situação (B) representa esse valor dividido em quatro partes iguais para identificar a parte que corresponde à comissão. Desse modo, a situação (C) representa um acréscimo de $\frac{1}{4}$ do valor inicial.

O valor inicial dado no problema corresponde a três mil reais (R$3.000,00). A representação por barras corresponde ao valor numérico 3000, entendido como unidade de valor o real. Dividimos o valor inicial em quatro partes iguais, então, identificamos a quarta parte como o valor que será adicionado ao valor inicial, levando ao raciocínio de que devemos fazer a operação de divisão de 3000 por 4. Este resultado será acrescentado ao valor representado em (A), como indicado em (C). No caso de Ricardo, o valor de cada uma das 4 partes é calculado pela operação $3000 \div 4 = 750$. Portanto cada uma das partes corresponde ao valor numérico 750.

Na situação (C) da Figura 22, estamos representando o acréscimo conforme o enunciado do exercício. Pictoricamente, representamos a barra correspondente ao valor inicial unida com a barra que representa a parte do todo, desse modo acrescentamos R$ 750,00 a R$3.000,00.

Figura 22 - Representação do valor do salário mensal de Ricardo



Fonte: Próprio autor

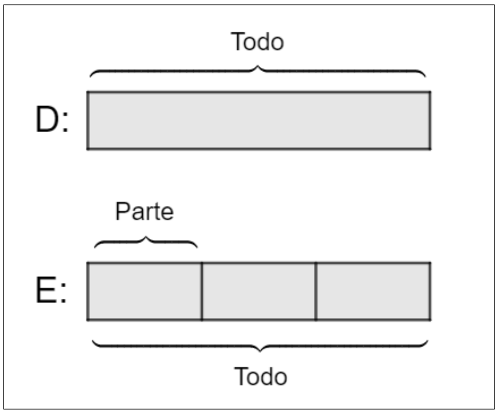
Na Figura 22. Temos a situação de adição de R$ 750,00 a R$3.000,00 obtendo R$3.750,00, representada em sentença matemática:

$$3000 + 750 = 3750$$

Concluímos que Ricardo recebe mensalmente o valor de R$ R$3.750,00.

Rodrigo recebe, conforme o enunciado, R$4.230,00, e Ronaldo recebe o equivalente a um terço do valor que Rodrigo ganha. Vamos representar por Barras essa situação, conforme Figura 23:

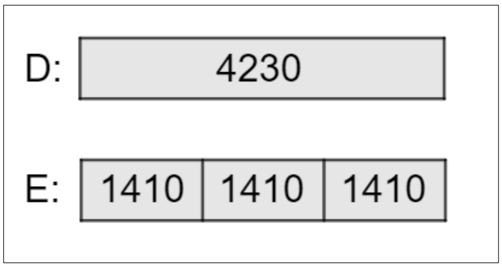
Figura 23 - Representação Parte-Todo



Fonte: Próprio autor

A situação (D) representa um Todo referente ao valor que Rodrigo recebe. Na situação (E) temos o valor que Ronaldo recebe, que equivale a $\frac{1}{3}$ do todo que representa o valor R$4.230,00. A comparação parte-todo nos mostra que o todo está igualmente dividido em três partes iguais, ou seja, estamos dividindo R$4.230,00 em 3 partes iguais ($4230 \div 3 = 1410$):

Figura 24 - Todo Dividido em Três Partes Iguais



Fonte: Próprio autor

Na Figura 24 podemos entender o significado do sinal de igualdade "=" e a ideia de que unir barras significa somar valores. Se somarmos as partes obteremos o todo (dessa situação), como representado nas Figuras 23 e 24. Simbolicamente:

$$1410 + 1410 + 1410 = 4230$$

Como nosso todo está dividido em partes iguais e somar valores iguais três vezes é o que significa multiplicarmos por três, temos uma relação de igualdade ou equivalência:

$$3 \times 1410 = 4230$$

Ou seja:

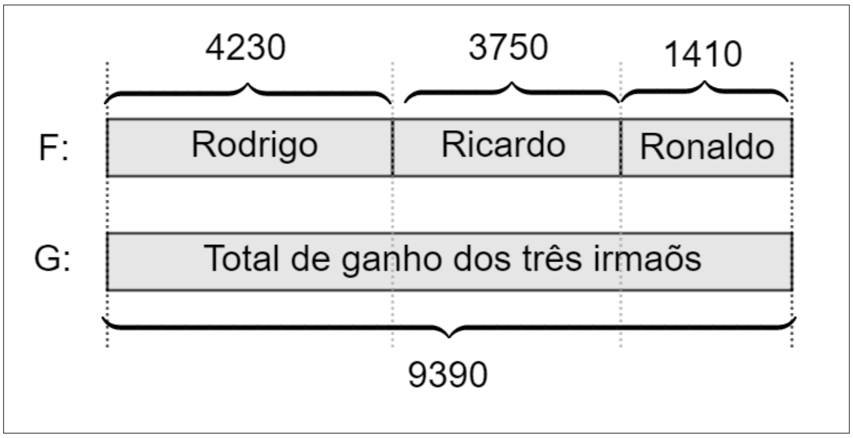
$$1410 + 1410 + 1410 = 3 \times 1410 = 4230$$

Dessa forma podemos concluir que como Ronaldo recebe a terça parte de R$4.230,00, recebe então o valor de R$1.410,00.

Portanto temos os valores em reais que cada irmão recebe por mês. Resumindo, deduzimos que Ricardo recebe R$3.750,00 fixos por mês, Rodrigo recebe R$4.230,00 (como informado na questão) e Ronaldo recebe R$1.410,00.

Agora vamos analisar as despesas da casa. Ela equivale, como é dado pelo enunciado do problema, à quinta parte da soma dos salários dos três irmãos, ou seja, representa uma parte quando dividimos a soma dos salários em cinco partes iguais. Vamos representar pictoricamente o total de salário dos três irmãos:

Figura 25 - Representação do Total do Salário Dos Irmãos



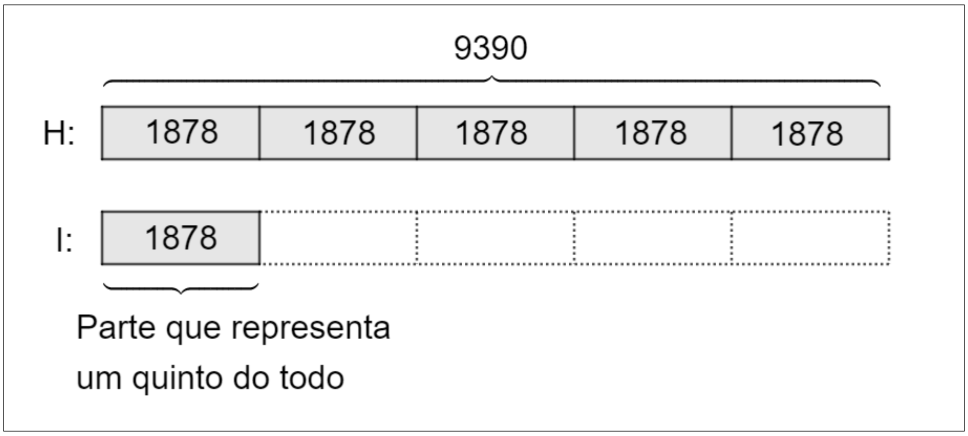
Fonte: Próprio autor

Na Figura 25, a situação (F) representa em Barras os valores dos salários dos três irmãos, unidas lado a lado, o que representa o total dos valores recebidos por cada irmão, como ilustra a situação (G). Em linguagem matemática temos:

$$4230 + 3750 + 1410 = 9390$$

Ou seja, as barras unidas (soma dos valores do salário dos irmãos) equivalem ao total de R$9.390,00, esse é o valor total desses salários. Agora, sabemos que as despesas correspondem a quinta parte da soma dos salários, e assim ilustrada pictoricamente:

Figura 26 - Representação da Parte-Todo



Fonte: Próprio autor

Na Figura 26, na situação (H) temos o todo, que corresponde ao valor total dos salários, dividido em 5 partes iguais. Na situação (I) temos representada a parte que corresponde a $\frac{1}{5}$ do todo, correspondendo ao resultado da operação $9390 \div 5 = 1878$ Desse modo confirmamos que a operação está correta verificando que o todo é a união dessas cinco partes iguais, simbolicamente temos:

$$1878 + 1878 + 1878 + 1878 + 1878 = 9390$$

O que equivale a:

$$1878 + 1878 + 1878 + 1878 + 1878 = 5 \times 1878 = 9390$$

Como as despesas da casa correspondem a quinta parte da soma dos salários dos irmãos, essas despesas custam R$1.878,00 por mês, e como são igualmente repartidas entre os 3 irmãos, cada irmão pagará R$626,00 para as despesas, simbolicamente, $1878 \div 3 = 626$.

As atividades trabalhadas neste exercício com o modelo de Barras são muito úteis para resgatar o significado das operações aritméticas na resolução de problemas, assim como consolidar a relação que existe entre a divisão e a multiplicação num mesmo contexto, permitindo a interpretação e a validação dos resultados e dos argumentos.

3.4. Atividade do Currículo em Ação – Questão 2.3

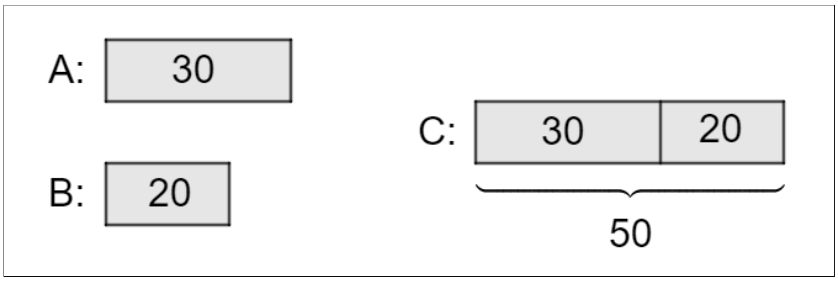
O item 2a) da Questão 2.3, como proposto, solicita que parênteses sejam colocados na expressão dada de modo que a igualdade seja verdadeira. Proposto dessa forma, uma atividade na sala de aula pode se tornar um simples exercício mecânico de procedimento e memorização de regras de onde colocar os parênteses. Uma observação que fazemos aqui é sobre o uso do símbolo • para indicar a operação de multiplicação. Por questão de homogeneidade do texto desta monografia, seguiremos usando o símbolo ×. É importante que numa sala de aula o uso de um ou outro símbolo esteja bem estabelecido. Entendemos que o uso de • tem o objetivo de preparar a notação simbólica em expressões algébricas do tipo 3 • y que depois será escrito 3y.

Em vez de proceder como um simples exercício, com o objetivo de enriquecer a abordagem pedagógica, podemos propor o enunciado de um problema, cuja solução seria modelada pela operação aritmética expressa de modo que a expressão numérica do item 2a) seja verdadeira. Com esta abordagem, estamos trabalhando uma forma de dar significado a uma expressão numérica, utilizando a metodologia de Resolução de Problemas como uma estratégia, seguindo uma direção invertida a partir dos dados, isto é, aprender a enunciar problema contextualizado cuja modelagem matemática seja dada pela expressão numérica dada, com resposta que a valide.

Enunciado modificado: Os irmãos Pedro, Carlos e Lucas estavam na praia e resolveram coletar as conchas na areia. No final da tarde os três se reuniram para contabilizar o total de conchas que eles haviam encontrado. Pedro encontrou 30 conchas, Carlos encontrou 20 conchas a mais que Pedro e Lucas encontrou o dobro de conchas que Carlos coletou. Quantas conchas Lucas encontrou?

Vamos representar os valores referentes a quantidade de conchas usando Barras. Representaremos em (A) a barra que representa a quantidade de conchas que Pedro encontrou (30 conchas), e em (B) a barra que representa a quantidade a mais que Carlos encontrou em relação a Pedro (o número 20). A barra (C) representa a situação de Carlos, o que leva à operação aritmética $30 + 20$, como mostra a Figura 27:

Figura 27 - Representação da Soma



Fonte: Próprio autor

Na Figura 27, a interpretação dos dados numéricos leva à união das barras (A) e (B) onde (B) é o acréscimo da quantidade de conchas do Carlos em relação à quantidade de conchas do Pedro. A união das Barras (A) e (B) nos dão o todo representado por (C), representa o total das conchas que Carlos encontrou e é expressa na linguagem matemática:

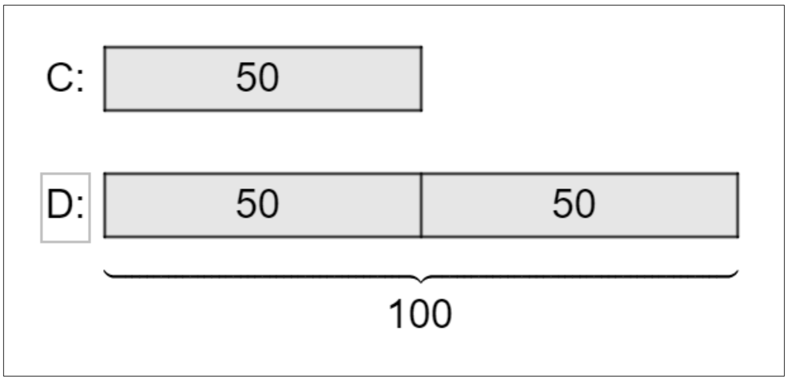
$$30 + 20 = 50$$

Portanto, Carlos coletou 50 conchas. Mas, a leitura do problema, na etapa de resolução de problemas, os alunos já teriam identificado a pergunta da questão, que é encontrar a quantidade de conchas que Lucas coletou. Logo, o problema não está ainda resolvido, e há mais uma operação a ser modelada.

Os dados do problema permitem identificar uma informação crucial neste ponto. “Lucas coletou o dobro da quantidade de conchas do Carlos.”

A tarefa agora se resume em interpretar e representar o que significa “dobrar” uma quantidade. E isso, está nos conhecimentos do Ensino Fundamental I. Portanto podemos representar a situação do Lucas como na situação (D), na figura a seguir:

Figura 28 - Representação da Multiplicação



Fonte: Próprio autor

Na Figura 28 temos a barra (C) que, como vimos, corresponde a quantidade de conchas do Carlos, já calculada como o resultado de $30 + 20$. Em (D) temos a barra que corresponde ao dobro de (C), ou a união de duas barras de valor (C), que é 50. Neste ponto podemos recordar que a soma de dois números iguais representa a multiplicação por 2 desse número. Simbolicamente temos:

$$50 + 50 = 2 \times 50 = 100$$

Como a operação 50×2 também produz o resultado 100, podemos por equivalência, escrever:

$$(30 + 20) \times 2 = 50 \times 2 = 100$$

A resposta ao problema modelado pela expressão numérica do exercício é: Lucas encontrou 100 conchas no total.

A solução à pergunta solicitada do problema, isto é, “Quantas conchas Lucas coletou?” exigiu a interpretação de que inicialmente precisa saber quantas conchas Carlos coletou, que por sua vez, requer a interpretação da informação de que Carlos coletou 20 conchas a mais que Pedro. A leitura e a interpretação dos dados do enunciado mostram o caminho para determinar qual operação é a primeira a ser executada, no caso a operação $30 + 20$, e logo, a operação de multiplicação por 2 do resultado obtido. Para esse modelo matemático, a expressão a que chegamos é $2 \times (30 + 20)$ que tem resultado 100.

Em situação abstrata de expressão matemática, a operação de multiplicação é comutativa, portanto, a resposta ao item da Atividade é $(30 + 20) \times 2 = 100$. Simbolicamente temos:

$$(30 + 20) \times 2 = 50 \times 2$$

Portanto, quando colocamos os parênteses na soma, obtemos o seguinte resultado para a operação do item 2a) dada:

$$(30 + 20) \times 2 = 50 \times 2 = 100$$

tornando a expressão uma sentença matemática verdadeira.

Uma variação interessante para atividade na sala de aula é propor a investigação da situação em que os parênteses fossem colocados como 30 + (20 × 2) e elaborar um enunciado para esta situação, para comparar com a atividade acima.

3.5. Análise entre a matemática elementar e os avanços na transição

Parte das dificuldades no ensino de matemática na educação básica, em específico a transição entre os ciclos I e II, decorrem de uma ruptura na forma de aprendizagem e da abordagem dos conteúdos entre o 5° e 6° anos do Ensino Fundamental. Tais adversidades podem se tornar um problema tanto para professores quanto para alunos em relação ao ensino de matemática, dependendo de como são conduzidas as aulas. Como docentes, é preciso auxiliar os alunos nessa transição com o intuito de que essa passagem ocorra de forma satisfatória e coerente, sem conflitos entre os conhecimentos dos dois níveis.

O ensino da matemática tem como objetivo a capacitação do aluno no desenvolvimento do raciocínio lógico, das generalizações bem como a capacidade de abstração e resolução de problemas. Para isso, a utilização de metodologias inovadoras no ensino pode contribuir para uma aprendizagem mais significativa para os alunos.

O Modelo de Barras como metodologia foca nas habilidades necessárias para o aprendizado, desenvolve o pensamento de expressões aritméticas e o conceito de igualdade entre as expressões matemáticas. O modelo também permite o registro de ideias, como identificação dos dados do problema, interpretação de hipóteses e o desenvolvimento de estratégias para se chegar a uma solução, e permite a investigação do aluno nas etapas de resolução do problema, questionando as justificativas. Desse modo, o aluno pode vivenciar a transição da manipulação de material concreto para a simbologia matemática utilizando como ponte uma representação pictórica que representa as ideias matemáticas visualizadas no concreto, resgatando conhecimentos anteriores e adquirindo novas maneiras de se expressar.

CONCLUSÃO

A Matemática como ciência vai muito mais além das abstrações, dos símbolos e generalizações. Ela é importante pois nos fornece possibilidades de aplicações práticas para soluções de problemas do cotidiano. Ensinar matemática não é tarefa fácil, cabe ao professor a tarefa de mediar, facilitar, incentivar e motivar o aluno na aprendizagem. Ensinar matemática não envolve memorizações de processos ou procedimentos, mas sim dar sentido a ciência e tornar o aluno apto a refletir sobre o próprio aprendizado.

A metodologia do Modelo de Barras incentiva o aluno a relacionar e compreender o conteúdo, evita a memorização de processos e procedimentos feitos de forma repetitiva. A Metodologia de Singapura está baseada na compreensão e não memorização, enfatizando não o “como”, mas sim o “por quê?”, antes de trabalhar o “como”. Para compreender é necessário então abstrair conceitos e esquematizar. O Modelo de Barras trata da visualização pictórica na passagem do concreto para o abstrato. Além de ser uma ferramenta com foco na resolução de problemas, o Modelo de Barras também é um excelente aliado para elucidar conceitos, por exemplo, matemáticos.

Interessante pensarmos também no Modelo de Barras como estratégia para o aprendizado gradual da aritmética para a Álgebra dos anos finais do Ensino Fundamental. E esse modelo de representação pictórica e generalizações é um processo de abstração que o aluno concretiza vivenciando conceitos e ideias, permitindo a contextualização de problemas e a confecção de um esquema visual que permite a compreensão da situação problema.

Com o Modelo de Barras podemos enfatizar a resolução de problemas nas fases do aprendizado, possibilitando o desenvolvimento de conceitos e processos, de forma a trabalhar as habilidades e atitudes necessárias, proporcionando a experiência da metacognição, monitorando e autorregulando os processos cognitivos.

A pesquisa feita para o presente trabalho de conclusão de curso foi fundamental no sentido de agregar conhecimento para o orientado, bem como a compreensão do Método de Barras como uma ferramenta poderosa no ensino da Matemática.

REFERÊNCIAS

BALDIN, Yuriko Yamamoto, (2013). Texto explicativo sobre a chamada Matemática de Singapura (versão revisada em fevereiro de 2014), material de apoio para o projeto PROF-OBMEP.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio. Brasília: MEC/SEMTEC, 2000. V3. Disponível em: Microsoft Word - Bases Legais.doc (mec.gov.br).

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

Currículo em ação – Caderno do aluno 6º ano. Volume 1. Governo do Estado de São Paulo, 2021.

Currículo em ação - EMAI 5º ano. Volume 2. Governo do Estado de São Paulo, 2021.

DOTTI, Tamara G. P. (2016). Um estudo do Modelo de Barras nos livros didáticos da matemática de Singapura: fundamentação da Álgebra no ensino Fundamental 1.º Ciclo. São Carlos: Universidade Federal de São Carlos.

QUEIROZ, Jonas M.S. Resolução de problemas de pré-álgebra e álgebra para fundamental II do ensino fundamental. 144 f. Tese (Mestrado) - PPGECE-Universidade Federal de São Carlos, 2014.

SILVA. O ensino da Matemática em Singapura. Educação e Matemática. Vol. 123, p.33 – p.36, 2013.

TEIXEIRA, Ricardo C. (2016). "Ensino da Matemática: O Modelo Pentagonal do Currículo de Matemática de Singapura", «Atlântico Expresso», 3 de outubro de 2016: p. 17.

TEIXEIRA, Ricardo C. (2015). "Ensino da Matemática: O Método de Singapura", «Atlântico Expresso», 19 de outubro de 2015: p. 17.