



Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Laplaciano de Dirichlet em faixas com cantos

Kauane de Araujo Silva

São Carlos
2022



Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Laplaciano de Dirichlet em faixas com cantos

Kauane de Araujo Silva

Orientadora: Profa. Dra. Alessandra Aparecida Verri

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

São Carlos
2022



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Kauane de Araujo Silva, realizada em 24/02/2022.

Comissão Julgadora:

Profa. Dra. Alessandra Aparecida Verri (UFSCar)

Profa. Dra. Vera Lucia Carbone (UFSCar)

Profa. Dra. Elisa Regina dos Santos (UFU)

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática.

*Dedico este trabalho à Sarah Gabrielle,
minha eterna saudade.*

Agradecimentos

É Deus quem nos capacita para vencermos e por isso agradeço primeiramente a Ele! Obrigada Pai por sonhar sonhos maiores que os meus e me sustentar em todos os momentos de desânimo.

Minha família é a minha base! Agradeço aos meus pais, Adriana e Valcimar, por lutarem tanto por mim, por abdicarem de tantas coisas para me ajudar e nunca me deixar desistir. Vocês são a minha alegria e meu maior amor. E também ao meu irmão Gustavo, que me alegra tanto e me anima com um simples sorriso. Você é um presente de Deus pra mim!

Meu noivo, como eu agradeço por ter você! Christopher, você é a melhor pessoa que eu já conheci e poder dividir esta jornada contigo foi muito gratificante. Eu não imaginava que iria me divertir tanto com você. Obrigada meu amor por ser sempre tão paciente e por me incentivar todos os dias. Sem dúvidas este trabalho não existiria sem seu apoio.

Agradeço à Universidade Federal de São Carlos e ao Departamento de Matemática por toda estrutura, pelos professores e amigos que tive o prazer de conhecer. Em especial, Raquel e Alex, amigos que me deram muito suporte durante momentos tão complicados e me motivaram a seguir em frente. Vocês são luz!

Agradeço a minha orientadora Alessandra que é uma inspiração para mim! Como eu me espelho em você e na sua dedicação. Obrigada por todos os conselhos e toda compreensão. Não foi fácil, mas você me deu muitos motivos para continuar.

Agradeço a professora Elisa Regina por ser uma pessoa incrível que eu conheci durante minha graduação e que aceitou novamente participar da minha banca.

Agradeço aos professores César Rogério e Vera Lúcia por todos os conselhos e por aceitarem fazer parte deste trabalho.

Finalmente agradeço a todos que me incentivaram durante o mestrado. Em especial minha prima Sarah Gabrielle! Como este ano foi difícil sem você... Sei que você estaria muito feliz com essa conquista e eu agradeço por ter tido a oportunidade sermos tão confidentes e amigas. Você sempre será minha irmã e eu vou te amar eternamente!

E por fim, agradeço a CAPES pelo imprescindível apoio financeiro.

Resumo

Seja Ω_θ um conjunto ilimitado do plano \mathbb{R}^2 em forma de V, isto é, uma faixa infinita com um canto, e considere $-\Delta_{\Omega_\theta}^D$ o operador Laplaciano de Dirichlet em Ω_θ . Neste trabalho, vamos estudar o problema espectral de $-\Delta_{\Omega_\theta}^D$ e mostrar que suas propriedades espectrais dependem essencialmente de um único parâmetro, o ângulo de abertura da região. Caracterizaremos o espectro essencial do operador e, além de garantir a existência do seu espectro discreto, também encontraremos algumas propriedades para tal conjunto. Em particular, sua finitude e como a abertura da faixa influencia essa quantidade.

Palavras-chave: Laplaciano de Dirichlet; faixas com cantos; espectro; formas quadráticas; espectro essencial; espectro discreto.

Abstract

Let Ω_θ be an unbounded V-shaped set of the plane \mathbb{R}^2 , that is, a strip with a corner, and consider $-\Delta_{\Omega_\theta}^D$ the Dirichlet Laplacian in Ω_θ . In this work, we will study the spectral problem of $-\Delta_{\Omega_\theta}^D$ and show how its spectral properties essentially depend on a single parameter, the opening angle of the region. We will characterize the essential spectrum of the operator and, in addition, to ensure the existence of its discrete spectrum, we will also find some properties for such a set. In particular, about its finiteness and how the opening of the strip influences this quantity.

Keywords: Dirichlet Laplacian; strips with corners; spectrum; quadratic forms; essential spectrum; discrete spectrum.

Notação

\mathcal{B}	Espaço de Banach complexo.
\mathcal{H}	Espaço de Hilbert complexo.
Id	Operador identidade.
$Y \subseteq X$	Y subconjunto denso de X .
T	Operador linear.
$\text{dom } T$	Domínio de T .
$R_\lambda(T)$	Operador resolvente de T em λ .
$\rho(T)$	Resolvente de T .
$\sigma(T)$	Espectro de T .
$\sigma_{ess}(T)$	Espectro essencial de T .
$\sigma_{dis}(T)$	Espectro discreto de T .
$T \geq \beta \text{Id}$	Operador limitado inferiormente por β .
T^*	Adjunto de T .
$\xi_n \rightarrow \xi$	Sequência fracamente convergente.
b	Forma sesquilinear.
$b \geq \beta \text{Id}$	Forma sesquilinear limitada inferiormente por β .
$B(\mathcal{B})$	Conjunto de operadores lineares limitados de \mathcal{B} em \mathcal{B} .
$\nabla\psi$	Gradiente de ψ nas coordenadas usuais em \mathbb{R}^n .
$-\Delta\psi$	Laplaciano de ψ nas coordenadas usuais em \mathbb{R}^n .
$[x]$	Parte inteira de um número real.
$\mathbb{1}_A$	Função característica do conjunto A .
Ω	Região aberta de \mathbb{R}^n .
$\partial\Omega$	Fronteira da região Ω .

- μ Medida Borel positiva.
- $\mathcal{L}^2(\Omega)$ $\{\psi: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ Borel mensurável $: \int_{\Omega} |\psi|^2 d\mu < \infty\}$.
- $H^1(\Omega)$ $\{\psi \in \mathcal{L}^2(\Omega) : \nabla\psi \in \mathcal{L}^2(\Omega)\}$.
- $H_0^1(\Omega)$ $\{\psi \in H^1(\Omega) : \psi = 0$ em $\partial\Omega\}$.
- $D^\alpha\psi$ Derivada parcial de ψ em relação ao conjunto de índices $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$.
- $H^2(\Omega)$ $\{\psi \in \mathcal{L}^2(\Omega) : D^\alpha\psi \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ para todo $0 \leq |\alpha| \leq 2\}$.
- \mathcal{M}_φ Operador multiplicação por φ .

Sumário

Introdução	12
1 Preliminares	15
1.1 O espectro de um operador	15
1.2 Operadores autoadjuntos	16
1.3 Operadores compactos	18
1.3.1 Perturbação compacta	18
1.3.2 Operadores com resolvente compacto	19
1.4 Operadores multiplicação	19
1.5 Formas sesquilineares	20
1.6 Operadores associados às formas quadráticas	23
1.7 O princípio Min-Max	24
1.8 Os quocientes de Rayleigh	26
1.9 Partições da unidade e a fórmula de localização IMS	27
1.10 Exemplo de espectro essencial	28
2 O problema do Laplaciano de Dirichlet em uma faixa com canto	38
2.1 Geometria da faixa	38
2.2 Operador Laplaciano de Dirichlet	38
2.3 A meia-faixa	39
3 Coincidência dos espectros	41
3.1 Espectro essencial	41
3.2 Espectro discreto	41
4 Espectro Discreto	46
4.1 Mudança de coordenadas	46
4.2 Existência do espectro discreto	47
4.3 Número finito de autovalores no espectro discreto	53

4.4	Relação dos autopares para ângulos pequenos	63
5	Número de autovalores discretos	65
5.1	Monotonicidade dos quocientes de Rayleigh em relação ao ângulo de abertura .	65
5.2	Número de autovalores discretos para ângulos próximos de $\pi/2$	66
5.3	Número de autovalores discretos para ângulos pequenos	68
	Apêndice	72
A	Mudança de variáveis na forma quadrática	72
B	Os autovalores do Laplaciano de Dirichlet	76
	Referências Bibliográficas	79

Introdução

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ um subconjunto aberto de \mathbb{R}^2 em forma de “faixa”. Denote por $-\Delta_\Omega^D$ o operador Laplaciano de Dirichlet em Ω . Formalmente, $-\Delta_\Omega^D$ pode ser definido como o operador autoadjunto associado com a forma quadrática

$$\psi \mapsto \int_\Omega |\nabla \psi|^2 dx, \quad \psi \in H_0^1(\Omega).$$

Se Ω é uma faixa limitada, é conhecido que o espectro de $-\Delta_\Omega^D$ é puramente discreto, ou seja, formado apenas por autovalores de multiplicidade finita. No entanto, a situação muda se considerarmos Ω uma faixa ilimitada; a existência de autovalores discretos se torna um problema não trivial e depende da estrutura geométrica de Ω .

No caso particular em que $\Omega = \mathbb{R} \times (0, a)$, $a > 0$, ou seja, Ω é uma faixa reta infinita, tem-se que o espectro de $-\Delta_\Omega^D$ é puramente essencial e é o intervalo

$$\left[\left(\frac{\pi}{2a} \right)^2, \infty \right).$$

Agora, seja $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva de classe C^2 , parametrizada pelo seu comprimento de arco s , e denote por $k(s)$ sua curvatura na posição s . Defina Ω_γ como sendo a faixa obtida pela translação de um segmento de comprimento constante, $a > 0$, ao longo de γ tal que, em cada ponto, esse segmento é paralelo ao vetor normal da curva (veja Figura 1). Suponha também $a \|k\|_\infty < 1$. Sob a condição de que Ω_γ é assintoticamente reta no infinito, ou seja, $\lim_{|s| \rightarrow \infty} k(s) = 0$, tem-se a estabilidade do espectro essencial (quando comparado com o caso da faixa reta infinita do parágrafo anterior):

$$\sigma_{ess} \left(-\Delta_{\Omega_\gamma}^D \right) = \left[\left(\frac{\pi}{2a} \right)^2, \infty \right).$$

Em adição, se $k \neq 0$, então $-\Delta_{\Omega_\gamma}^D$ admite pelo menos um autovalor discreto; esse, está abaixo do valor $(\pi/2a)^2$. A região Ω_γ pode ser vista como uma “deformação” da faixa reta $\mathbb{R} \times (0, a)$, deformação esta governada pela curvatura $k(s)$. Durante anos, entender como $k(s)$ afetava a estrutura do espectro foi alvo de muitos trabalhos. Para uma consulta e mais detalhes sobre esses resultados indicamos [9], [12] e [13].



Figura 1: A região Ω_γ .

Nesse trabalho, vamos considerar faixas ilimitadas de \mathbb{R}^2 de largura constante (mais precisamente de largura π) cuja fronteira não seja suave, que possua um “canto”. Mais precisamente, vamos considerar regiões exatamente como as da Figura 2. Tais regiões são denotadas por Ω_θ . Observe que o parâmetro θ representa o ângulo denotado em vermelho e vamos considerá-lo pertencente ao intervalo $(0, \pi/2)$. Assim como na situação anterior, em que o interesse era entender o papel da curvatura na estrutura do espectro, aqui estamos interessados em entender o papel do “canto”.

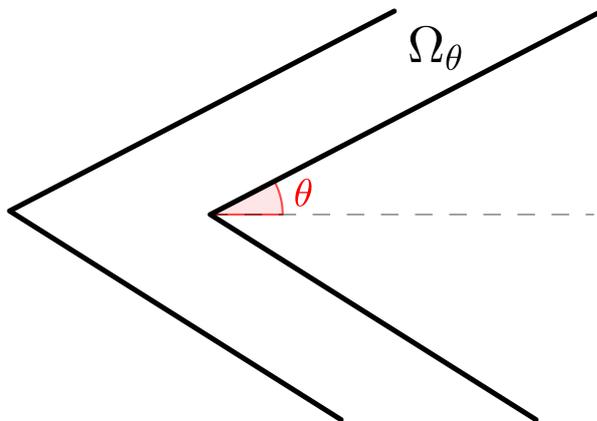


Figura 2: A região Ω_θ .

O caso particular em que $\theta = \pi/4$ foi estudado em [12]. Neste trabalho, os autores provaram que o operador $-\Delta_{\Omega_{\pi/4}}^D$ possui exatamente um autovalor discreto e mostraram que ele assume o valor $(0.93)\pi^2$. Por outro lado, em [3], para todo θ suficientemente pequeno, os autores provaram a existência de pelo menos um autovalor para $-\Delta_{\Omega_\theta}^D$.

Em [7], os autores revisitaram os resultados de [3] e provaram uma série de propriedades adicionais para o problema. Mais tarde, em [14], outras propriedades foram alcançadas. Sendo assim, neste trabalho, apresentamos resultados dessas duas últimas referências, os quais são descritos abaixo com mais detalhes.

Seguindo [7], vamos:

- (i) Caracterizar o espectro essencial de $-\Delta_{\Omega_\theta}^D$. Será mostrado que é dado pelo intervalo $[1, \infty)$.
- (ii) Para cada $\theta \in (0, \pi/2)$, assegurar a existência de espectro discreto para $-\Delta_{\Omega_\theta}^D$.
- (iii) Para cada $\theta \in (0, \pi/2)$, mostrar que o número de autovalores discretos de $-\Delta_{\Omega_\theta}^D$ é finito.
- (iv) Mostrar que o número de autovalores discretos de $-\Delta_{\Omega_\theta}^D$ cresce à medida que θ se aproxima de zero.

Seguindo [14], vamos:

- (v) Mostrar que existe $\alpha^* < \pi/4$ tal que o número de autovalores discretos de $-\Delta_{\Omega_\theta}^D$ é exatamente 1, para todo $\alpha^* < \theta < \pi/2$.
- (vi) Apresentar um comportamento assintótico para o número de autovalores discretos de $-\Delta_{\Omega_\theta}^D$, para θ suficientemente pequeno.

Este trabalho está dividido da seguinte forma. No Capítulo 1, apresentamos algumas definições e resultados sobre a teoria de operadores que serão úteis ao longo do texto. No Capítulo 2, definimos detalhadamente a região Ω_θ , o operador Laplaciano com condições de contorno de Dirichlet em $\partial\Omega_\theta$ e também apresentamos um problema auxiliar, que facilitará o estudo nos capítulos seguintes. No Capítulo 3, apresentamos resultados correspondentes ao item (i) e algumas características a respeito do espectro discreto de $-\Delta_{\Omega_\theta}^D$. O Capítulo 4 é dedicado aos itens (ii), (iii) e (iv). Finalmente, no Capítulo 5, apresentamos os resultados correspondentes à (v) e (vi).

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados básicos e notações que utilizaremos ao longo do trabalho. Iniciaremos com definições e resultados da teoria de operadores autoadjuntos, operadores compactos e operadores multiplicação. Em seguida, veremos alguns tópicos relacionados aos operadores que são definidos por formas quadráticas. Apresentaremos o Princípio Min-Máx e os Quocientes de Rayleigh, que apesar de estarem em seções diferentes possuem praticamente a mesma finalidade neste trabalho e que nos fornecerão um algoritmo para encontrar autovalores de um operador. Por último, falaremos um pouco sobre as partições da unidade, da fórmula de localização IMS e finalizaremos com alguns exemplos importantes para o desenvolvimento do trabalho. Em particular, comentaremos sobre o espectro essencial do operador Laplaciano de Dirichlet. As principais referências usadas neste capítulo são [6], [7], [8], [13] e [15].

1.1 O espectro de um operador

Nesta seção, \mathcal{B} é um espaço de Banach complexo não nulo e $\text{dom } T \subseteq \mathcal{B}$ um subespaço vetorial.

Definição 1.1. Seja $T: \text{dom } T \rightarrow \mathcal{B}$ um operador linear. Definimos o *conjunto resolvente* de T como o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ para os quais o *operador resolvente* de T em λ ,

$$R_\lambda(T): \mathcal{B} \rightarrow \text{dom } T, \quad R_\lambda(T) := (T - \lambda \text{Id})^{-1},$$

existe e é limitado, isto é, $R_\lambda(T) \in B(\mathcal{B})$.

Notação: $\rho(T)$.

Definição 1.2. O *espectro* de T é definido como o complementar do conjunto resolvente em \mathbb{C} .

Notação: $\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T)$.

Observação 1.3. Todos os autovalores λ do operador T pertencem ao espectro, pois nesse caso $(T - \lambda \text{Id})$ não é invertível.

Teorema 1.4. *Sejam $T: \text{dom } T \rightarrow \mathcal{B}$ e $\lambda_0 \in \rho(T)$. Então, para todo λ do plano complexo tal que $|\lambda - \lambda_0| < 1/\|R_{\lambda_0}(T)\|$, temos*

$$R_\lambda(T) \in B(\mathcal{B}) \quad e \quad R_\lambda(T) = \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j R_{\lambda_0}(T)^{j+1},$$

em que a série é absolutamente convergente.

Corolário 1.5. $\rho(T)$ é um conjunto aberto e $\sigma(T)$ é um conjunto fechado de \mathbb{C} .

As provas dos resultados enunciados nesta seção podem ser encontrados em [8].

1.2 Operadores autoadjuntos

Nesta seção, \mathcal{H} é um espaço de Hilbert complexo e $\text{dom } T \subseteq \mathcal{H}$ um subespaço vetorial.

Definição 1.6. Um operador linear $T: \text{dom } T \rightarrow \mathcal{H}$ é dito *simétrico* se

$$\langle T\xi, \eta \rangle = \langle \xi, T\eta \rangle, \quad \forall \xi, \eta \in \text{dom } T.$$

Dizemos que T é *hermitiano* se é simétrico e $\text{dom } T \subseteq \mathcal{H}$.

Queremos introduzir a definição de operador adjunto, mas para isso precisamos definir o conjunto $\text{dom } T^*$.

Definição 1.7. Considere \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 espaços de Hilbert e seja $T: \text{dom } T \subseteq \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ um operador linear. Definimos $\text{dom } T^*$ como o espaço vetorial dos elementos $\eta \in \mathcal{H}_2$ tais que o funcional linear

$$\xi \mapsto \langle \eta, T\xi \rangle, \quad \xi \in \text{dom } T,$$

pode ser representado por $\zeta \in \mathcal{H}_1$, ou seja,

$$\langle \eta, T\xi \rangle = \langle \zeta, \xi \rangle, \quad \forall \xi \in \text{dom } T.$$

Definição 1.8. O *operador adjunto* de T é o operador T^* cujo domínio é $\text{dom } T^*$ definido acima e, para $\eta \in \text{dom } T^*$, $T^*\eta := \zeta$. Assim,

$$\langle \eta, T\xi \rangle = \langle T^*\eta, \xi \rangle, \quad \forall \xi \in \text{dom } T \quad e \quad \forall \eta \in \text{dom } T^*.$$

Observe que a hipótese $\text{dom } T \subseteq \mathcal{H}_1$ é essencial para que o operador T^* esteja bem definido.

Definição 1.9. Um operador linear $T: \text{dom } T \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é dito *autoadjunto* se $T = T^*$.

Observação 1.10. Se T é um operador autoadjunto, então $\langle T\xi, \xi \rangle \in \mathbb{R}$, para todo $\xi \in \text{dom } T$. De fato,

$$\langle T\xi, \xi \rangle = \langle \xi, T^*\xi \rangle = \langle \xi, T\xi \rangle = \overline{\langle T\xi, \xi \rangle},$$

para todo $\xi \in \text{dom } T$. Além disso, todo operador autoadjunto é simétrico. E, como $\text{dom } T$ é denso em \mathcal{H} , segue que todo operador autoadjunto é hermitiano.

Um resultado bastante útil quando se trabalha com operadores autoadjuntos é o seguinte.

Teorema 1.11. *Se T é autoadjunto, então $\sigma(T)$ é um subconjunto não vazio de \mathbb{R} .*

Definição 1.12. Um operador hermitiano T é dito *limitado inferiormente* se existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle \xi, T\xi \rangle \geq \beta \|\xi\|^2, \quad \forall \xi \in \text{dom } T.$$

Dizemos que β é um *limite inferior* para T . Caso $\beta = 0$ então dizemos que T é um *operador positivo*.

Notação: $T \geq \beta \text{Id}$.

Teorema 1.13. *Seja T um operador autoadjunto com $T \geq \beta \text{Id}$. Então $\sigma(T) \subseteq [\beta, \infty)$.*

Teorema 1.14. *Seja T um operador autoadjunto. Se λ é um ponto isolado de $\sigma(T)$ então λ é um autovalor de T .*

Baseados no resultado acima, usaremos a seguinte decomposição espectral.

Definição 1.15. Seja T um operador autoadjunto. Definimos:

- O *espectro essencial* de T como o conjunto $\sigma_{ess}(T)$ dos pontos de acumulação de $\sigma(T)$ junto com os autovalores de T de multiplicidade infinita.
- O *espectro discreto* de T como o conjunto $\sigma_{dis}(T) := \sigma(T) \setminus \sigma_{ess}(T)$, que é o conjunto dos autovalores isolados de T , cada um com multiplicidade finita.

Além disso, se $\sigma_{ess}(T) = \emptyset$, dizemos que T possui *espectro puramente discreto* e, se $\sigma_{dis}(T) = \emptyset$, então dizemos que T possui *espectro puramente essencial*.

Observação 1.16. Pelo Corolário 1.5, sabemos que $\sigma(T)$ é fechado, dessa maneira, segue que $\sigma_{ess}(T) \subseteq \sigma(T)$.

O próximo resultado apresenta uma caracterização importante do espectro essencial.

Teorema 1.17. *Se T é autoadjunto, são equivalentes:*

- (i) $\lambda \in \sigma_{ess}(T)$;

(ii) Existe uma sequência normalizada $(\xi_n) \subseteq \text{dom } T$ (isto é, $\|\xi_n\| = 1$, para todo n) de tal modo que $\xi_n \rightarrow 0$ e

$$(T - \lambda \text{Id}) \xi_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Tal sequência é chamada de sequência de Weyl para T em λ .

Corolário 1.18. Se T é autoadjunto, então $\sigma_{\text{ess}}(T)$ é um subconjunto fechado de \mathbb{R} .

As provas dos resultados enunciados nesta seção podem ser encontrados em [8].

1.3 Operadores compactos

Definição 1.19. Um operador linear $T: \text{dom } T \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é dito *compacto*, ou ainda *completamente contínuo*, se $\overline{T(\mathcal{A})}$ é compacto em \mathcal{H} para todo subconjunto limitado $\mathcal{A} \subseteq \text{dom } T$.

Observação 1.20. Equivalentemente, $T: \text{dom } T \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é compacto se $T(\xi_n)$ possui uma subsequência convergente em \mathcal{H} para toda sequência limitada $(\xi_n) \subseteq \text{dom } T$.

1.3.1 Perturbação compacta

Definição 1.21. Seja A um operador autoadjunto. Dizemos que um operador C tal que $\text{dom } C \subseteq \text{dom } A$ é *relativamente compacto* com respeito à A se $C(A + i \text{Id})^{-1}$ é um operador compacto.

Observação 1.22. (i) Se C é relativamente compacto com respeito à A , então $C(A - z \text{Id})^{-1}$ é compacto para todo $z \in \rho(A)$.

(ii) Se $C(A - z \text{Id})^{-1}$ é compacto para algum $z \in \rho(A)$, então C é relativamente compacto com respeito à A .

(iii) C é relativamente compacto com respeito à A se, e somente se,

$$C: (\text{dom } A, \|\cdot\|_A) \longrightarrow (\mathcal{H}, \|\cdot\|)$$

é compacto, em que $\|\psi\|_A^2 := \|\psi\|^2 + \|A\psi\|^2$.

Corolário 1.23. Sejam A um operador autoadjunto e C uma perturbação relativamente compacta de A . Então:

(i) $B := A + C$, definido com $\text{dom } B = \text{dom } A$, é um operador fechado.

(ii) Se C é simétrico, então B é autoadjunto.

(iii) $\sigma_{\text{ess}}(A) = \sigma_{\text{ess}}(B)$.

Corolário 1.24 (Teorema Clássico de Weyl). Se A é autoadjunto e C é autoadjunto e compacto, então $\sigma_{\text{ess}}(A) = \sigma_{\text{ess}}(A + C)$. Isso é válido porque C é automaticamente relativamente compacto.

1.3.2 Operadores com resolvente compacto

Aqui faremos uma caracterização dos operadores autoadjuntos com espectro puramente discreto, e por conta de tal caracterização, esses operadores também serão chamados *operadores com resolvente compacto*.

Teorema 1.25. *Seja $T: \text{dom } T \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ um operador autoadjunto e assumamos que $\dim \mathcal{H} = \infty$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- $\sigma_{\text{ess}}(T) = \emptyset$.
- *Existe uma base ortonormal $(\xi_j)_{j=1}^{\infty}$ de \mathcal{H} de autovetores de T , $T\xi_j = \lambda_j\xi_j$, para todo j , com autovalores reais λ_j , contando suas multiplicidades, satisfazendo $\lim_{j \rightarrow \infty} |\lambda_j| = \infty$ (e, portanto, cada um deles de multiplicidade finita).*
- $R_z(T)$ é um operador compacto para algum $z \in \rho(T)$ (e assim para todo $z \in \rho(T)$).

A prova dos resultados enunciados nesta seção podem ser encontrados em [8] e [15].

1.4 Operadores multiplicação

Seja μ uma medida de Borel positiva sob um espaço métrico X tal que $\mu(E) < \infty$, para todo conjunto de Borel limitado $E \subseteq X$.

Definição 1.26. Fixado um conjunto de Borel E , seja $\varphi: E \rightarrow \mathbb{C}$ uma função mensurável. Definimos o *operador multiplicação* por φ como o operador linear

$$(\mathcal{M}_{\varphi}\psi)(x) = \varphi(x)\psi(x), \quad \forall \psi \in \text{dom } \mathcal{M}_{\varphi},$$

em que $\text{dom } \mathcal{M}_{\varphi} = \{\psi \in \mathcal{L}_{\mu}^2(E) : (\varphi\psi) \in \mathcal{L}_{\mu}^2(E)\}$.

Proposição 1.27. $\text{dom } \mathcal{M}_{\varphi}$ é denso em $\mathcal{L}_{\mu}^2(E)$ e $\mathcal{M}_{\varphi}^* = \mathcal{M}_{\bar{\varphi}}$.

Corolário 1.28. \mathcal{M}_{φ} é autoadjunto se, e somente se, φ é uma função real.

Exemplo 1.29. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto, limitado e com fronteira de classe C^1 . A inclusão ι dada por

$$\begin{array}{ccc} \iota: & H^1(\Omega) & \rightarrow & \mathcal{L}^2(\Omega) \\ & \psi & \mapsto & \psi \end{array}$$

é um operador compacto. Se substituirmos $H^1(\Omega)$ por $H_0^1(\Omega)$, a hipótese de que $\partial\Omega$ é de classe C^1 pode ser omitida e o resultado continua válido (veja [11, Seção 5.7]). Como consequência, se $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que $\varphi \in C(\bar{\Omega})$, então o operador multiplicação \mathcal{M}_{φ} é compacto.

As provas dos resultados enunciados nesta seção podem ser encontrados em [8].

1.5 Formas sesquilineares

Nesta seção considere $\text{dom } b$ um subespaço denso no espaço de Hilbert \mathcal{H} .

Definição 1.30. Definimos uma *forma sesquilinear* b em \mathcal{H} como uma aplicação

$$b: \text{dom } b \times \text{dom } b \longrightarrow \mathbb{C},$$

que é linear na segunda variável e antilinear na primeira.

Em algumas situações podemos denotar $\text{dom } b \times \text{dom } b$ apenas por $\text{dom } b$.

Definição 1.31. Dizemos que uma forma sesquilinear b é *hermitiana* se

$$b(\xi, \eta) = \overline{b(\eta, \xi)}, \quad \forall \xi, \eta \in \text{dom } b.$$

Definição 1.32. Se $\xi \in \text{dom } b$ então a aplicação $\xi \mapsto b(\xi, \xi) := b(\xi)$ é dita *forma quadrática* associada a b .

Observação 1.33. Para todos $\xi, \eta \in \text{dom } b$, vale

$$4b(\xi, \eta) = b(\xi + \eta) - b(\xi - \eta) - ib(\xi + i\eta) + ib(\xi - i\eta).$$

Esta igualdade é chamada *identidade de polarização* para formas quadráticas.

Proposição 1.34. *Uma forma sesquilinear b é hermitiana se, e somente se, a forma quadrática associada é real.*

Demonstração. Suponha que b é uma forma hermitiana. Então, para cada $\xi \in \text{dom } b$, temos

$$b(\xi) = b(\xi, \xi) = \overline{b(\xi, \xi)} = \overline{b(\xi)},$$

que significa que $b(\xi)$ é real.

Agora, suponha que b é uma forma quadrática real. Pela Observação 1.33, para todo $\xi, \eta \in \text{dom } b$,

$$\begin{aligned} b(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} \left[b(\xi + \eta) - b(\xi - \eta) - ib(\xi + i\eta) + ib(\xi - i\eta) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[b(\eta + \xi) - b(\eta - \xi) - ib(\eta - i\xi) + ib(\eta + i\xi) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[b(\eta + \xi) - b(\eta - \xi) + ib(\eta + i\xi) - ib(\eta - i\xi) \right] \\ &= \overline{b(\eta, \xi)}, \end{aligned}$$

ou seja, b é hermitiana. ■

Definição 1.35. Uma forma sesquilinear b é dita *limitada* se $\|b\| < \infty$, em que,

$$\|b\| := \sup_{\substack{\xi_1, \xi_2 \in \text{dom } b \\ \xi_1, \xi_2 \neq 0}} \frac{|b(\xi_1, \xi_2)|}{\|\xi_1\| \|\xi_2\|}.$$

Exemplo 1.36. O produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ num espaço de Hilbert é uma forma sesquilinear limitada, de norma 1.

Proposição 1.37. Se $b : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma forma sesquilinear limitada, então existe um único operador $T_b \in B(\mathcal{H})$ que satisfaz

$$b(\xi, \eta) = \langle T_b \xi, \eta \rangle, \quad \forall \xi, \eta \in \mathcal{H}.$$

E também $\|T_b\| = \|b\|$. Além disso, se b é hermitiana, então T_b é autoadjunto.

Observação 1.38. Em \mathcal{H} , existe uma correspondência biunívoca entre as formas sesquilineares limitadas e os operadores limitados. Respectivamente no caso das formas sesquilineares hermitianas e os operadores autoadjuntos.

Definição 1.39. Seja b uma forma sesquilinear hermitiana. Então:

- b é dita *positiva* se a sua forma quadrática associada satisfaz $b(\xi, \xi) \geq 0$, para todo $\xi \in \text{dom } b$.
- b é dita *limitada inferiormente* se existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$b(\xi, \xi) \geq \beta \|\xi\|^2, \quad \forall \xi \in \text{dom } b.$$

Neste caso, dizemos que β é um *limite inferior* de b .

Notação: $b \geq \beta \text{Id}$.

Observação 1.40. Se b é uma forma sesquilinear limitada inferiormente, então sua forma quadrática associada é real. Assim, pela Proposição 1.34, temos que b é hermitiana.

Definição 1.41. Sejam b uma forma hermitiana e $(\xi_n) \subseteq \text{dom } b$. Dizemos que:

- (ξ_n) é uma *sequência de Cauchy* com respeito à b se

$$b(\xi_n - \xi_m) \rightarrow 0, \quad \text{quando } m, n \rightarrow \infty.$$

- (ξ_n) *converge* a ξ com respeito à b se $\xi \in \text{dom } b$ e

$$b(\xi_n - \xi) \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

- b é fechada se, para cada sequência de Cauchy (ξ_n) em $(\text{dom } b, b)$ com $\xi_n \rightarrow \xi$ em \mathcal{H} , tivermos que $\xi \in \text{dom } b$ e

$$b(\xi_n - \xi) \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Definição 1.42. Seja β um limite inferior de uma forma sesquilinear b . Definimos o *produto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle_+$ em $\text{dom } b \subseteq \mathcal{H}$ por

$$\langle \xi, \eta \rangle_+ := b(\xi, \eta) + (1 - \beta) \langle \xi, \eta \rangle.$$

Em particular, $\|\xi\|_+^2 := \langle \xi, \xi \rangle_+ = b(\xi) - \beta \|\xi\|^2 + \|\xi\|^2 \geq \|\xi\|^2$. Portanto,

$$\|\xi\|_+ \geq \|\xi\|.$$

Definição 1.43. Seja b uma forma fechada e limitada inferiormente, $b \geq \beta \text{Id}$. Dizemos que \mathcal{D} é um *cerne* de b se $\mathcal{D} \subseteq \text{dom } b$ e ele é denso em $\text{dom } b$ com o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_+$.

Lema 1.44. *Seja b uma forma sesquilinear hermitiana e limitada inferiormente. Então, b é fechada se, e somente se, $(\text{dom } b, \langle \cdot, \cdot \rangle_+)$ é um espaço de Hilbert.*

Demonstração. Primeiramente, suponha b fechada. Seja (ξ_n) é uma sequência de Cauchy em $(\text{dom } b, \langle \cdot, \cdot \rangle_+)$. Em particular, (ξ_n) também é uma sequência de Cauchy em $(\text{dom } b, b)$. Já que b é fechada, existe $\xi \in \text{dom } b$ tal que $b(\xi_n - \xi) \rightarrow 0$, conseqüentemente, $\|\xi_n - \xi\|_+ \rightarrow 0$. Portanto, $(\text{dom } b, \langle \cdot, \cdot \rangle_+)$ é um espaço de Hilbert.

Agora, vamos supor que $(\text{dom } b, \langle \cdot, \cdot \rangle_+)$ é um espaço de Hilbert e considere (ξ_n) uma sequência de Cauchy em $(\text{dom } b, b)$ tal que existe $\xi \in \mathcal{H}$ com $\xi_n \rightarrow \xi$ em \mathcal{H} . Mais ainda, note que (ξ_n) também é uma sequência de Cauchy em $(\text{dom } b, \langle \cdot, \cdot \rangle_+)$ que, por hipótese, é completo. Logo, concluímos que $\xi \in \text{dom } b$ e $b(\xi_n - \xi) \rightarrow 0$. Portanto, b é fechada. ■

Definição 1.45. Um operador hermitiano $T: \text{dom } T \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ define uma forma sesquilinear hermitiana b^T da seguinte forma:

$$b^T(\xi, \eta) := \langle \xi, T\eta \rangle, \quad \text{dom } b^T = \text{dom } T.$$

Ainda mais, b^T é limitada inferiormente se, e somente se, T é limitada inferiormente. Dizemos que b^T é uma *forma sesquilinear gerada por* T .

Exemplo 1.46. Considere $T: H^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ o operador $T(\psi) := -\psi''$. Neste caso,

$$b^T(\psi, \varphi) = \langle \psi, -\varphi'' \rangle, \quad \text{dom } b^T = H^2(\mathbb{R}).$$

Mais ainda, observe que utilizando integração por partes temos

$$b^T(\psi, \varphi) = \langle \psi, -\varphi'' \rangle = \langle \psi', \varphi' \rangle.$$

Logo, podemos definir a forma sesquilinear $b(\psi, \varphi) := \langle \psi', \varphi' \rangle$ com $\text{dom } b = H^1(\mathbb{R})$.

As provas dos resultados enunciados nesta seção podem ser encontrados em [8].

1.6 Operadores associados às formas quadráticas

Definição 1.47. Seja $b: \text{dom } b \times \text{dom } b \rightarrow \mathbb{C}$ uma forma sesquilinear hermitiana com $\text{dom } b \subseteq \mathcal{H}$. O operador T_b associado à b é definido por

$$\text{dom } T_b := \{\xi \in \text{dom } b : \exists \zeta \in \mathcal{H} \text{ com } b(\eta, \xi) = \langle \eta, \zeta \rangle, \forall \eta \in \text{dom } b\}.$$

$$T_b \xi := \zeta, \quad \forall \xi \in \text{dom } T_b.$$

Ou seja, $b(\eta, \xi) = \langle \eta, T_b \xi \rangle$, para todos $\eta \in \text{dom } b$ e $\xi \in \text{dom } T_b$.

Observe que se b é hermitiana então o operador T_b é simétrico pois

$$\langle \eta, T_b \xi \rangle = b(\eta, \xi) = \overline{b(\xi, \eta)} = \overline{\langle \xi, T_b \eta \rangle} = \langle T_b \eta, \xi \rangle, \quad \forall \xi, \eta \in \text{dom } b.$$

Mais ainda, se b é uma forma sesquilinear hermitiana limitada então o operador T_b da Definição 1.47 coincide com o operador da Proposição 1.37.

Teorema 1.48. *Sejam $\text{dom } b \subseteq \mathcal{H}$ e $b: \text{dom } b \times \text{dom } b \rightarrow \mathbb{C}$ uma forma sesquilinear fechada e limitada inferiormente por $\beta \in \mathbb{R}$ (consequentemente, b é hermitiana). Então, o operador T_b associado à b é o único operador autoadjunto satisfazendo $T_b: \text{dom } T_b \rightarrow \mathcal{H}$ com*

$$b(\eta, \xi) = \langle \eta, T_b(\xi) \rangle, \quad \forall \eta \in \text{dom } b, \xi \in \text{dom } T_b.$$

Ainda mais, $T_b \geq \beta \text{Id}$ e $\text{dom } T_b$ é denso em $\text{dom } b$ com a norma $\|\cdot\|_+$.

Exemplo 1.49. Sejam $\text{dom } b = H^1(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ e

$$b(\psi, \varphi) := \langle \nabla \psi, \nabla \varphi \rangle, \quad \psi, \varphi \in \text{dom } b.$$

Então, $b(\psi) = \|\nabla \psi\|^2 \geq 0$ é hermitiana e positiva.

Além disso, b é fechada. De fato, seja (ψ_n) uma sequência de Cauchy em $(\text{dom } b, b)$ com $\psi_n \rightarrow \psi$ em $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Em particular, (ψ_n) é uma sequência de Cauchy em $H^1(\mathbb{R}^n)$. Logo, $\psi \in H^1(\mathbb{R}^n)$ e

$$\psi_n \rightarrow \psi \text{ em } H^1(\mathbb{R}^n).$$

Assim, $b(\psi_n - \psi) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$.

Agora, considere o operador autoadjunto T definido por

$$T: \begin{array}{ccc} H^2(\mathbb{R}^n) & \rightarrow & \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n) \\ \psi & \mapsto & -\Delta \psi \end{array}.$$

Vale a relação $b(\psi, \varphi) = \langle \psi, T\varphi \rangle$, para todos $\psi \in H^1(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in H^2(\mathbb{R}^n)$. Mas podemos observar, utilizando integração por partes, que

$$\langle \psi, T\varphi \rangle = \langle \psi, -\Delta \varphi \rangle = \langle \nabla \psi, \nabla \varphi \rangle,$$

para todos $\psi \in H^1(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in H^2(\mathbb{R}^n)$. Portanto, T é o operador autoadjunto associado à b .

Para finalizar esta seção vamos enunciar o seguinte resultado que é uma versão do Teorema 1.17 que utiliza a forma quadrática associada ao operador.

Teorema 1.50. *Sejam $T: \text{dom } T \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ um operador autoadjunto e positivo e b a sua forma quadrática associada. Então, são equivalentes:*

(i) $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(T)$;

(ii) *Existe uma sequência normalizada $(\xi_n) \subseteq \text{dom } b$, de tal modo que $\xi_n \rightarrow 0$ em \mathcal{H} e*

$$(T - \lambda \text{Id}) \xi_n \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

em $(\text{dom } b)^$, que denota o espaço dual do espaço $\text{dom } b$.*

A sequência satisfazendo o item (ii) do Teorema 1.50 também é chamada de *sequência de Weyl* para T em λ .

As provas dos resultados enunciados nesta seção podem ser encontrados em [8] e [13].

1.7 O princípio Min-Max

Proposição 1.51. *Seja $T: \text{dom } T \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ um operador autoadjunto e limitado inferiormente. Suponha que, contando a multiplicidade, os autovalores de T sejam*

$$\lambda_1(T) < \lambda_2(T) < \lambda_3(T) < \dots < \inf \sigma_{\text{ess}}(T).$$

Então,

$$\begin{aligned} \lambda_1(T) &= \inf_{0 \neq \xi \in \text{dom } T} \frac{\langle \xi, T\xi \rangle}{\|\xi\|^2}, & E_1 &:= N(T - \lambda_1 \text{Id}), \\ \lambda_2(T) &= \inf_{0 \neq \xi \in \text{dom } T \cap E_1^\perp} \frac{\langle \xi, T\xi \rangle}{\|\xi\|^2}, & E_2 &:= E_1 \oplus N(T - \lambda_2 \text{Id}), \\ &\vdots & &\vdots \\ \lambda_k(T) &= \inf_{0 \neq \xi \in \text{dom } T \cap E_{k-1}^\perp} \frac{\langle \xi, T\xi \rangle}{\|\xi\|^2}, & E_{k-1} &:= E_{k-2} \oplus N(T - \lambda_{k-1} \text{Id}). \end{aligned}$$

A Proposição 1.51 é conhecida como *caracterização variacional do espectro discreto*.

Teorema 1.52 (Princípio Min-Max, forma do Operador). *Seja T um operador autoadjunto e limitado inferiormente, isto é, $T \geq \beta \text{Id}$ para algum β real. Defina*

$$\lambda_n(T) = \sup_{\psi_1, \dots, \psi_{n-1}} U_T(\psi_1, \dots, \psi_{n-1}),$$

em que

$$U_T(\psi_1, \dots, \psi_{n-1}) = \inf_{\substack{\psi \in \text{dom } T \\ \|\psi\|=1 \\ \psi \in [\psi_1, \dots, \psi_{n-1}]^\perp}} \langle \psi, T\psi \rangle$$

e $[\psi_1, \dots, \psi_{n-1}]$ é uma abreviatura para $\{\varphi : \langle \varphi, \psi_i \rangle = 0, \forall i = 1, \dots, n-1\}$. Observe que os ψ_i não são necessariamente independentes. Então, para cada n fixo:

(a) Existem n autovalores (contando para autovalores degenerados o número de vezes igual à sua multiplicidade) abaixo do ínfimo do espectro essencial de T e $\lambda_n(T)$ é o n -ésimo autovalor contando multiplicidade;

ou

(b) λ_n é o ínfimo do espectro essencial de T , isto é, $\lambda_n = \inf\{\lambda : \lambda \in \sigma_{ess}(T)\}$ e neste caso $\lambda_n = \lambda_{n+1} = \dots$ e existem no máximo $n-1$ autovalores abaixo de λ_n (contando multiplicidade).

Definição 1.53. Seja Ω uma região aberta de \mathbb{R}^n .

- O Laplaciano de Neumann em Ω , denotado por $-\Delta_{\Omega}^N$, é definido como o único operador autoadjunto em $\mathcal{L}^2(\Omega)$ associado à forma sesquilinear

$$q(f, g) = \int \overline{\nabla f} \nabla g \, dx,$$

com $\text{dom } q = H^1(\Omega) = \{f \in \mathcal{L}^2(\Omega) : \nabla f \in \mathcal{L}^2(\Omega)\}$.

- O Laplaciano de Dirichlet em Ω , denotado por $-\Delta_{\Omega}^D$, é definido como o único operador autoadjunto em $\mathcal{L}^2(\Omega)$ associado à forma sesquilinear

$$q(f, g) = \int \overline{\nabla f} \nabla g \, dx,$$

com $\text{dom } q = H_0^1(\Omega) = \{f \in H^1(\Omega) : f = 0 \text{ em } \partial\Omega\}$.

Observação 1.54. O operador Laplaciano de Dirichlet definido sobre um conjunto limitado possui espectro puramente discreto. E os autovalores podem ser ordenados de modo a formarem uma sequência monótona não decrescente que diverge.

Definição 1.55. Sejam \mathcal{H}_1 um subespaço do espaço de Hilbert \mathcal{H} , A e B operadores autoadjuntos e positivos, em que $\text{dom } A \sqsubseteq \mathcal{H}$ e $\text{dom } B \sqsubseteq \mathcal{H}_1$. Escrevemos $0 \leq A \leq B$ se $\text{dom } B \subseteq \text{dom } A$ e

$$0 \leq \langle \psi, A\psi \rangle \leq \langle \psi, B\psi \rangle, \quad \forall \psi \in \text{dom } B.$$

Lema 1.56. Se $0 \leq A \leq B$ então $\lambda_n(A) \leq \lambda_n(B)$ para todo n , em que λ_n é dado pelo Princípio Min-Máx.

Proposição 1.57. (i) Se $\Omega \subseteq \Omega'$, então $0 \leq -\Delta_{\Omega'}^D \leq -\Delta_{\Omega}^D$.

(ii) Para todo Ω , $0 \leq -\Delta_{\Omega}^N \leq -\Delta_{\Omega}^D$.

(iii) Se Ω_1 e Ω_2 são subconjuntos abertos disjuntos de um conjunto Ω aberto tais que $\Omega \setminus \Omega_1 \cup \Omega_2$ é de medida nula e $\overline{(\Omega_1 \cup \Omega_2)^{int}} = \Omega$, então

$$0 \leq -\Delta_{\Omega}^D \leq -\Delta_{\Omega_1 \cup \Omega_2}^D$$

$$0 \leq -\Delta_{\Omega_1 \cup \Omega_2}^N \leq -\Delta_{\Omega}^N.$$

Existem várias versões equivalentes ao Princípio Min-Máx. A seguir enunciaremos uma dessas versões que será usada ao longo do texto (veja [5, Seção 10.2, Teorema 2]):

Teorema 1.58 (Princípio Máx-Min). *Seja T um operador satisfazendo as hipóteses do Teorema 1.52. Então,*

$$\lambda_n(T) = \max_{\mathcal{F} \subseteq \text{dom } T} \inf_{\substack{\varphi \in \mathcal{F} \\ \varphi \neq 0}} \frac{\langle T\varphi, \varphi \rangle}{\|\varphi\|^2},$$

em que $\dim(\text{dom } T \setminus \mathcal{F}) \leq n - 1$.

As provas dos resultados enunciados nesta seção podem ser encontrados em [8] e [15].

1.8 Os quocientes de Rayleigh

Definição 1.59. Os quocientes de Rayleigh associados a um operador autoadjunto T em \mathcal{H} , de $\text{dom } T$, são definidos, para cada $j \in \mathbb{Z}_+$, por

$$\lambda_j(T) = \inf_{\substack{\{u_1, \dots, u_j\} \in \text{dom } T \\ \text{independentes}}} \sup_{\substack{u \in \{u_1, \dots, u_j\} \\ u \neq 0}} \frac{\langle Tu, u \rangle_{\mathcal{H}}}{\langle u, u \rangle_{\mathcal{H}}}, \quad (1.1)$$

em que $[u_1, \dots, u_j]$ denota o subespaço gerado pelos j vetores linearmente independentes u_1, \dots, u_j .

O teorema a seguir fornece a relação entre os quocientes de Rayleigh e os autovalores de um operador autoadjunto:

Teorema 1.60. *Seja T um operador autoadjunto com domínio $\text{dom } T$. Assumimos que T é limitado inferiormente. Considere $\gamma := \min \sigma_{\text{ess}}(T)$. Então os quocientes de Rayleigh λ_j de T formam uma sequência não decrescente que satisfaz:*

(i) Se $\lambda_j(T) < \gamma$, então é um autovalor de T ;

(ii) Se $\lambda_j(T) \geq \gamma$, então $\lambda_j(T) = \gamma$;

(iii) O j -ésimo autovalor menor que γ de T (se existir) coincide com $\lambda_j(T)$.

Observação 1.61. Pelos itens (i) e (iii) do Teorema 1.60, se um operador T autoadjunto e limitado inferiormente possuir espectro discreto, então conseguimos caracterizá-lo totalmente através dos quocientes de Rayleigh.

Lema 1.62. *Seja T um operador autoadjunto em \mathcal{H} associado a uma forma sesquilinear hermitiana b fechada e limitada inferiormente. Então, os quocientes de Rayleigh de T são iguais a*

$$\lambda_j(T) = \inf_{\substack{u_1, \dots, u_j \in V \\ \text{independentes}}} \sup_{\substack{u \in [u_1, \dots, u_j] \\ u \neq 0}} \frac{b(u, u)}{\langle u, u \rangle_{\mathcal{H}}}.$$

Corolário 1.63. *Sejam T e \hat{T} operadores autoadjuntos em \mathcal{H} e $\hat{\mathcal{H}}$ associados às formas sesquilineares hermitianas b e \hat{b} , respectivamente, as quais são fechadas e limitadas inferiormente. Assuma que*

$$\hat{\mathcal{H}} \subseteq \mathcal{H}, \quad \text{dom } \hat{b} \subseteq \text{dom } b, \quad \hat{b}(u, u) \geq b(u, u), \quad \forall u \in \text{dom } \hat{b}.$$

Sejam $\lambda_j(T)$ e $\lambda_j(\hat{T})$ os quocientes de Rayleigh associados a T e \hat{T} , respectivamente. Então

$$\lambda_j(\hat{T}) \geq \lambda_j(T), \quad \forall j \geq 1.$$

Note que o Corolário 1.63 é uma versão do Lema 1.56 que usa as formas sesquilineares associadas aos operadores.

Exemplo 1.64 (Monotonicidade dos autovalores de Dirichlet). *Seja Ω um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n e $\hat{\Omega} \subseteq \Omega$. A extensão por 0 de $\hat{\Omega}$ para Ω realiza uma incorporação natural de $H_0^1(\hat{\Omega})$ em $H_0^1(\Omega)$, e de $\mathcal{L}^2(\hat{\Omega})$ em $\mathcal{L}^2(\Omega)$. Então,*

$$\lambda_j(-\Delta_{\hat{\Omega}}^D) \geq \lambda_j(-\Delta_{\Omega}^D), \quad \forall j \geq 1.$$

As provas dos resultados enunciados nesta seção podem ser encontrados em [15].

1.9 Partições da unidade e a fórmula de localização IMS

Em alguns resultados vamos trabalhar com partições de unidade apropriadamente escolhidas no seguinte sentido:

Definição 1.65. *Uma família de funções $\{\gamma_a\}_{a \in \mathcal{A}}$ indexadas por um conjunto \mathcal{A} , é chamada de *partição de unidade de classe C^∞* se satisfaz:*

- (i) $0 \leq \gamma_a(x) \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$;
- (ii) $\sum_{a \in \mathcal{A}} \gamma_a^2(x) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$;
- (iii) $\{\gamma_a\}$ é localmente finito, ou seja, em qualquer conjunto compacto \mathcal{K} , temos $\gamma_a = 0$ para todos, exceto um número finito, $a \in \mathcal{A}$;
- (iv) $\gamma_a \in C^\infty$;

$$(v) \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{a \in A} |\nabla \gamma_a(x)|^2 < \infty.$$

Observe que a definição de partição de unidade que é mais comum pede que $\sum \gamma_a(x) = 1$ em vez do item (ii). No entanto, para nós o quadrado será muito conveniente.

A chave para a abordagem geométrica apresentada aqui é a seguinte fórmula de localização:

Teorema 1.66 (Fórmula de localização IMS). *Seja $\{\gamma_a\}$ uma partição de unidade de classe C^∞ , de acordo com a Definição 1.65, e seja $H = H_0 + V$, em que H_0 é um operador autoadjunto e V é um operador compacto e autoadjunto. Então,*

$$H = \sum_{a \in A} \gamma_a H \gamma_a - \sum_{a \in A} |\nabla \gamma_a|^2.$$

Chamamos o termo $\sum_{a \in A} |\nabla \gamma_a|^2$ de erro de localização.

A prova desse teorema pode ser encontrada em [6].

1.10 Exemplo de espectro essencial

Exemplo 1.67. Considere a forma quadrática

$$b(\phi, \phi) = \int_{\Sigma} |\nabla \phi|^2 \, dx dy,$$

em que $\text{dom } b = H_0^1(\Sigma)$, $\Sigma := (0, \infty) \times \mathcal{S}$ e $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ é um conjunto aberto, limitado e conexo.

Notações:

- O operador autoadjunto associado à b é dito *Laplaciano de Dirichlet* em Σ e será denotado por $-\Delta_{\Sigma}^D$.
- Se escrevermos $(x, y) \in \Sigma$, estamos afirmando que $x \in (0, \infty)$ e $y \in \mathcal{S}$. Deste modo, se $\varphi(x, y) := \varphi$, denotamos

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} := \varphi' \quad \text{e} \quad \nabla \varphi := (\varphi', \nabla_y \varphi),$$

em que $\nabla_y \varphi := \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial y_{n-1}} \right)$ denota o gradiente de φ restrito à \mathcal{S} .

- Denotamos o Laplaciano de Dirichlet restrito à \mathcal{S} por $-\Delta_{\mathcal{S}}^D$.

Lembremos que o operador Laplaciano de Dirichlet definido sobre um conjunto limitado possui espectro puramente discreto.

Primeiramente, como \mathcal{S} é um subconjunto aberto, limitado e conexo segue que $\sigma_{\text{ess}}(-\Delta_{\mathcal{S}}^D) = \emptyset$ e os autovalores do operador podem ser ordenados da seguinte forma

$$E_1 < E_2 \leq E_3 \leq \dots,$$

em que E_1 é um autovalor simples (veja [11, Seção 6.5, Teorema 1]). Vamos denotar por $\chi_1(y)$ a autofunção normalizada associada à E_1 , isto significa que

$$-\Delta_S^D \chi_1(y) = E_1 \chi_1(y) \quad \text{e} \quad \|\chi_1\|^2 = \int_S |\chi_1(y)|^2 dy = 1.$$

O objetivo deste exemplo é mostrar

$$\sigma_{ess}(-\Delta_\Sigma^D) = [E_1, \infty).$$

Demonstração. Vamos dividir a demonstração em duas partes:

Parte 1. $[E_1, \infty) \subseteq \sigma_{ess}(-\Delta_\Sigma^D)$.

Vamos mostrar que dado qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, existe uma sequência de Weyl para $-\Delta_\Sigma^D$ em $E_1 + \lambda^2$. Mais precisamente, dado $\lambda \in \mathbb{R}$, vamos construir uma sequência $(\psi_n)_{n=1}^\infty \subseteq \text{dom } b$, que satisfaça:

- (1) $\|\psi_n\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{Z}_+$;
- (2) $\psi_n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$;
- (3) $(-\Delta_\Sigma^D - (E_1 + \lambda^2)I) \psi_n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, em $(\text{dom } b)^*$, em que $(\text{dom } b)^*$ denota o espaço dual do espaço $\text{dom } b$ e

$$\|(-\Delta_\Sigma^D - (E_1 + \lambda^2)I) \psi_n\|_{(\text{dom } b)^*} := \sup_{\substack{\phi \in \text{dom } b \\ \phi \neq 0}} \frac{b(\phi, \psi_n) - (E_1 + \lambda^2) \langle \phi, \psi_n \rangle}{\sqrt{b(\phi, \phi) + \|\phi\|^2}}.$$

Para tal construção vamos precisar de uma função auxiliar. Tomemos $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ com $\text{supp}(\varphi) \subseteq (0, 1)$ e

$$\|\varphi\|^2 = \int_0^\infty |\varphi(x)|^2 dx = 1. \tag{1.2}$$

Para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, vamos definir:

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \varphi\left(\frac{x}{n} - n\right).$$

Observe que:

- (i) $\text{supp}(\varphi_n) \subseteq (n^2, n^2 + n)$.

De fato, note que $\text{supp}(\varphi) \subseteq (0, 1)$ e, pela definição de φ_n , temos que

$$\begin{aligned} 0 < \frac{x}{n} - n < 1 &\Leftrightarrow 0 < x - n^2 < n \\ &\Leftrightarrow n^2 < x < n^2 + n. \end{aligned}$$

$$(ii) \int_0^\infty |\varphi_n(x)|^2 dx = 1.$$

De fato, usando (1.2), temos que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |\varphi_n(x)|^2 dx &= \int_0^\infty \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \varphi \left(\frac{x}{n} - n \right) \right|^2 dx \\ &= \frac{1}{n} \int_0^\infty \left| \varphi \left(\frac{x}{n} - n \right) \right|^2 dx \\ &= \frac{1}{n} \int_{-n}^\infty |\varphi(u)|^2 n du \\ &= \int_{-n}^\infty |\varphi(u)|^2 du \\ &= \int_0^\infty |\varphi(x)|^2 dx = 1. \end{aligned}$$

$$(iii) \int_0^\infty |\varphi'_n(x)|^2 dx = \frac{1}{n^2} \int_0^1 |\varphi'(x)|^2 dx.$$

De fato, como

$$\varphi'_n(x) = \frac{1}{n\sqrt{n}} \varphi' \left(\frac{x}{n} - n \right),$$

e lembrando que $\text{supp}(\varphi') \subseteq (0, 1)$, temos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |\varphi'_n(x)|^2 dx &= \int_0^\infty \left| \frac{1}{n\sqrt{n}} \varphi' \left(\frac{x}{n} - n \right) \right|^2 dx \\ &= \frac{1}{n^3} \int_0^\infty \left| \varphi' \left(\frac{x}{n} - n \right) \right|^2 dx \\ &= \frac{1}{n^3} \int_{-n}^\infty |\varphi'(u)|^2 n du \\ &= \frac{1}{n^2} \int_{-n}^\infty |\varphi'(u)|^2 du \\ &= \frac{1}{n^2} \int_0^1 |\varphi'(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

$$(iv) \int_0^\infty |\varphi''_n(x)|^2 dx = \frac{1}{n^4} \int_0^1 |\varphi''(x)|^2 dx.$$

De fato, como

$$\varphi''_n(x) = \frac{1}{n^2\sqrt{n}} \varphi'' \left(\frac{x}{n} - n \right),$$

e $\text{supp}(\varphi'') \subseteq (0, 1)$, segue que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |\varphi_n''(x)|^2 dx &= \int_0^\infty \left| \frac{1}{n^2 \sqrt{n}} \varphi' \left(\frac{x}{n} - n \right) \right|^2 dx \\
&= \frac{1}{n^5} \int_0^\infty \left| \varphi'' \left(\frac{x}{n} - n \right) \right|^2 dx \\
&= \frac{1}{n^4} \int_{-n}^\infty |\varphi'(u)|^2 du \\
&= \frac{1}{n^4} \int_0^1 |\varphi''(x)|^2 dx.
\end{aligned}$$

Agora, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, vamos definir

$$\psi_n(x, y) = \varphi_n(x) e^{i\lambda x} \chi_1(y). \quad (1.3)$$

Queremos mostrar que essa é a sequência que procuramos, isto é, que satisfaz os itens:

(1) $\|\psi_n\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{Z}_+$.

De fato, como $e^{i\lambda x} = \cos \lambda x + i \sin \lambda x$, é fácil ver que $|e^{i\lambda x}| = 1$. Também sabemos, pela hipótese, que $\|\chi_1\|^2 = 1$. Assim, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, segue por (ii) que

$$\begin{aligned}
\|\psi_n\| &= \int_{\Sigma} |\varphi_n(x) e^{i\lambda x} \chi_1(y)|^2 dy dx \\
&= \int_0^\infty \int_S |\varphi_n(x)|^2 |e^{i\lambda x}|^2 |\chi_1(y)|^2 dy dx \\
&= \int_0^\infty |\varphi_n(x)|^2 \left[\int_S |\chi_1(y)|^2 dy \right] dx \\
&= \int_0^\infty |\varphi_n(x)|^2 dx = 1.
\end{aligned}$$

(2) $\psi_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

De fato, fixe $\phi \in C_0^\infty(\Sigma)$ e observe que, para n suficientemente grande, ψ_n e ϕ possuem suportes disjuntos. Logo, para cada $\phi \in C_0^\infty(\Sigma)$, $\langle \psi_n, \phi \rangle \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Como $C_0^\infty(\Sigma)$ é denso em $\mathcal{L}^2(\Sigma)$, concluímos que

$$\langle \psi_n, \phi \rangle \rightarrow 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{L}^2(\Sigma),$$

ou seja, $\psi_n \rightarrow 0$.

(3) $\sup_{\substack{\phi \in \text{dom } b \\ \phi \neq 0}} \frac{b(\phi, \psi_n) - (E_1 + \lambda^2) \langle \phi, \psi_n \rangle}{\sqrt{b(\phi, \phi) + \|\phi\|^2}} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

De fato, seja $\phi \in H_0^1(\Sigma)$ e observe que

$$\begin{aligned}
-\Delta_S^D \psi_n &= -\Delta_S^D \left(\varphi_n e^{i\lambda x} \chi_1 \right) \\
&= \varphi_n e^{i\lambda x} \left(-\Delta_S^D \chi_1 \right) \\
&= \varphi_n e^{i\lambda x} \left(E_1 \chi_1 \right) \\
&= E_1 \left(\varphi_n e^{i\lambda x} \chi_1 \right) = E_1 \psi_n.
\end{aligned}$$

Ou seja, $-\Delta_S^D \psi_n = E_1 \psi_n$ e, dessa forma, segue que

$$\begin{aligned}
&b(\phi, \psi_n) - (E_1 + \lambda^2) \langle \phi, \psi_n \rangle \\
&= \int_{\Sigma} \overline{\nabla \phi} \nabla \psi_n \, dx dy - (E_1 + \lambda^2) \int_{\Sigma} \overline{\phi} \psi_n \, dx dy \\
&= \int_{\Sigma} \left[\overline{\nabla \phi} \nabla \psi_n - (E_1 + \lambda^2) \overline{\phi} \psi_n \right] \, dx dy \\
&= \int_{\Sigma} \left[\overline{\phi'} \psi_n' + \overline{\nabla_y \phi} \nabla_y \psi_n - (E_1 + \lambda^2) \overline{\phi} \psi_n \right] \, dx dy \\
&= \int_{\Sigma} \left[\overline{\phi} \left(-\psi_n'' \right) + \overline{\phi} \left(-\Delta_y \psi_n \right) - (E_1 + \lambda^2) \overline{\phi} \psi_n \right] \, dx dy \\
&= \int_{\Sigma} \left[\overline{\phi} \left(-\psi_n'' \right) + \overline{\phi} \left(E_1 \psi_n \right) - (E_1 + \lambda^2) \overline{\phi} \psi_n \right] \, dx dy \\
&= \int_{\Sigma} \left[\overline{\phi} \left(-\psi_n'' \right) + \overline{\phi} \psi_n \left(E_1 - E_1 - \lambda^2 \right) \right] \, dx dy \\
&= \int_{\Sigma} \left[\overline{\phi} \left(-\psi_n'' \right) - \lambda^2 \overline{\phi} \psi_n \right] \, dx dy \\
&= \int_{\Sigma} \left[-\psi_n'' - \lambda^2 \psi_n \right] \overline{\phi} \, dx dy.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$b(\phi, \psi_n) - (E_1 + \lambda^2) \langle \phi, \psi_n \rangle = \int_{\Sigma} \left[-\psi_n'' - \lambda^2 \psi_n \right] \overline{\phi} \, dx dy. \quad (1.4)$$

Mas pela definição de ψ_n em (1.3), temos que

- $\psi_n' = \left[\varphi_n' + i\lambda \varphi_n \right] e^{i\lambda x} \chi_1(y);$
- $\psi_n'' = \left[\varphi_n'' + 2i\lambda \varphi_n' - \lambda^2 \varphi_n \right] e^{i\lambda x} \chi_1(y).$

Portanto, segue que

$$-\psi_n'' - \lambda^2 \psi_n = -\left[\varphi_n'' + 2i\lambda \varphi_n'\right] e^{i\lambda x} \chi_1(y). \quad (1.5)$$

Assim, substituindo (1.5) em (1.4), obtemos

$$b(\phi, \psi_n) - (E_1 + \lambda^2) \langle \phi, \psi_n \rangle = - \int_{\Sigma} \bar{\phi} \left[\varphi_n'' + 2i\lambda \varphi_n' \right] e^{i\lambda x} \chi_1(y) \, dx dy.$$

Agora, usando a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} & \left| b(\phi, \psi_n) - (E_1 + \lambda^2) \langle \phi, \psi_n \rangle \right| \\ &= \left| - \int_{\Sigma} \bar{\phi} \left[\varphi_n'' + 2i\lambda \varphi_n' \right] e^{i\lambda x} \chi_1(y) \, dx dy \right| \\ &\leq \int_{\Sigma} \left| \bar{\phi} \left[\varphi_n'' + 2i\lambda \varphi_n' \right] e^{i\lambda x} \chi_1(y) \right| \, dx dy \\ &\leq \left(\int_{\Sigma} |\phi|^2 \, dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Sigma} \left| \left(\varphi_n'' + 2i\lambda \varphi_n' \right) e^{i\lambda x} \chi_1(y) \right|^2 \, dx dy \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Além disso, observe que

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\Sigma} \left| \left(\varphi_n'' + 2i\lambda \varphi_n' \right) e^{i\lambda x} \chi_1(y) \right|^2 \, dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_{\Sigma} \left| \varphi_n'' + 2i\lambda \varphi_n' \right|^2 |e^{i\lambda x}|^2 |\chi_1(y)|^2 \, dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\int_0^{\infty} \left| \varphi_n'' + 2i\lambda \varphi_n' \right|^2 \left(\int_S |\chi_1(y)|^2 \, dy \right) \, dx \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_0^{\infty} \left| \varphi_n'' + 2i\lambda \varphi_n' \right|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Assim, voltando em (1.6) e usando (1.7), (iii), (iv) e a desigualdade de Minkowski, segue que

$$\begin{aligned} & \left| b(\phi, \psi_n) - (E_1 + \lambda^2) \langle \phi, \psi_n \rangle \right| \\ &= \left(\int_{\Sigma} |\phi|^2 \, dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\int_0^{\infty} \left| \varphi_n'' \right|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} + 2|\lambda| \left(\int_0^{\infty} \left| \varphi_n' \right|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &= \left(\int_{\Sigma} |\phi|^2 \, dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{n^2} \left(\int_0^1 \left| \varphi_n'' \right|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{2|\lambda|}{n} \left(\int_0^1 \left| \varphi_n' \right|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned}$$

Logo, se $\phi \neq 0$, já que $\left(\int_{\Sigma} |\phi|^2 \, dx dy\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(b(\phi, \phi) + \|\phi\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, temos

$$\begin{aligned} & \left| b(\phi, \psi_n) - (E_1 + \lambda^2) \langle \phi, \psi_n \rangle \right| \\ & \leq \sqrt{b(\phi, \phi) + \|\phi\|^2} \left[\frac{1}{n^2} \left(\int_0^1 |\varphi''|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{2|\lambda|}{n} \left(\int_0^1 |\varphi'|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\left| \frac{b(\phi, \psi_n) - (E_1 + \lambda^2) \langle \phi, \psi_n \rangle}{\sqrt{b(\phi, \phi) + \|\phi\|^2}} \right| \leq \frac{1}{n^2} \left(\int_0^1 |\varphi''|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{2|\lambda|}{n} \left(\int_0^1 |\varphi'|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Observe que o lado direito tende à zero quando $n \rightarrow \infty$, para toda $\phi \in H_0^1(\Sigma)$ não nula. Portanto,

$$\sup_{\substack{\phi \in \text{dom } b \\ \phi \neq 0}} \frac{b(\phi, \psi_n) - (E_1 + \lambda^2) \langle \phi, \psi_n \rangle}{\sqrt{b(\phi, \phi) + \|\phi\|^2}} \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Desta forma, mostramos que $(\psi_n)_n$ é sequência de Weyl para $-\Delta_{\Sigma}^D$ em $E_1 + \lambda^2$. Pelo Teorema 1.50, concluímos que

$$E_1 + \lambda^2 \in \sigma_{ess}(-\Delta_{\Sigma}^D).$$

Como a estratégia acima pode ser aplicada para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$[E_1, \infty) \subseteq \sigma_{ess}(-\Delta_{\Sigma}^D).$$

Parte 2. $\sigma_{ess}(-\Delta_{\Sigma}^D) \subseteq [E_1, \infty)$.

Observe que, para cada $\phi \in H_0^1(\Sigma)$ não nula, temos que

$$\begin{aligned} b(\phi, \phi) &= \int_{\Sigma} |\nabla \phi|^2 \, dx dy \\ &= \int_{\Sigma} \left(|\phi'|^2 + |\nabla_y \phi|^2 \right) \, dx dy \\ &\geq \int_{\Sigma} |\nabla_y \phi|^2 \, dx dy \\ &\geq E_1 \int_{\Sigma} |\phi|^2 \, dx dy \\ &= E_1 \|\phi\|^2. \end{aligned}$$

Isso significa que $b(\phi, \phi) \geq E_1 \|\phi\|^2$, ou seja,

$$E_1 \leq \frac{b(\phi, \phi)}{\|\phi\|^2}, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Sigma), \phi \neq 0. \quad (1.8)$$

Mas, pelo Princípio Min-Máx, sabemos que

$$\lambda_1(-\Delta_\Sigma^D) = \inf_{\substack{\phi \in H_0^1(\Sigma) \\ \phi \neq 0}} \frac{b(\phi, \phi)}{\|\phi\|^2}.$$

Logo, segue por (1.8) que $E_1 \leq \inf \sigma(-\Delta_\Sigma^D) \leq \inf \sigma_{ess}(-\Delta_\Sigma^D)$, ou seja,

$$\sigma_{ess}(-\Delta_\Sigma^D) \subseteq [E_1, \infty).$$

Portanto, pelas **Partes 1 e 2**, concluímos que

$$\sigma_{ess}(-\Delta_\Sigma^D) = [E_1, \infty).$$

■

O exemplo acima é muito importante para o nosso trabalho pois a partir dele podemos fazer as seguintes considerações:

- Pela Observação 1.16: $\sigma_{ess}(-\Delta_\Sigma^D) \subseteq \sigma(-\Delta_\Sigma^D)$;
- Pela Parte 1: $[E_1, \infty) \subseteq \sigma_{ess}(-\Delta_\Sigma^D) \subseteq \sigma(-\Delta_\Sigma^D)$;
- Pela Parte 2: $\sigma(-\Delta_\Sigma^D) \subseteq [E_1, \infty)$;

Portanto, $\sigma(-\Delta_\Sigma^D) = [E_1, \infty)$, ou seja, o espectro é puramente essencial.

Observação 1.68. A mesma conclusão do exemplo acima é válida se considerarmos o operador Laplaciano em Σ com condição de Neumann em $\{0\} \times \mathcal{S}$ e Dirichlet em $\partial\Sigma \setminus (\{0\} \times \mathcal{S})$.

O exemplo a seguir será muito útil para caracterizarmos o espectro essencial do operador discutido no Capítulo 3.

Exemplo 1.69. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto tal que existe um compacto \mathcal{K} de modo que

$$\Omega \setminus \mathcal{K} = \bigcup_{j \text{ finito}} \Omega_j \text{ (união disjunta),}$$

em que para cada j , o conjunto Ω_j é isometricamente isomorfo a um semi tubo $\Sigma_j = (0, \infty) \times \mathcal{S}_j$, em que $\mathcal{S}_j \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ é um conjunto aberto, limitado e conexo. Então

$$\sigma_{ess}(-\Delta_\Omega^D) = \bigcup_j [E_1^j, \infty) = \left[\min_j E_1^j, \infty \right),$$

em que $E_1^j = \inf \sigma(-\Delta_{\Sigma_j}^D)$.

Demonstração. Primeiramente, observe que, para cada j , segue do Exemplo 1.67 que

$$[E_1^j, \infty) \subseteq \sigma_{ess}(-\Delta_\Omega^D).$$

Mas como j é finito, segue que

$$\left[\min_j E_1^j, \infty \right) \subseteq \sigma_{ess}(-\Delta_\Omega^D).$$

Agora, considere $B = A + C$ com $A = -\Delta_\Omega^D$, $B = -\Delta_\Omega^D + \mathcal{M}_\phi$ e $C = \mathcal{M}_\phi$, em que ϕ é uma função positiva, suave e com suporte compacto tal que $\phi \geq \min_j E_1^j$ em \mathcal{K} . Observe que, pelo Exemplo 1.29, o operador C é compacto e, pelo Corolário 1.24, o espectro essencial é estável sob perturbação compacta, ou seja,

$$\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(A + C) = \sigma_{ess}(B). \quad (1.9)$$

Desta forma, podemos estudar o espectro essencial do operador B . Seja \bar{b} a forma quadrática associada ao operador B :

$$\bar{b}(\psi, \psi) = \int_\Omega |\nabla \psi(u)|^2 du + \int_\Omega \phi |\psi(u)|^2 du,$$

$\text{dom } \bar{b} = H_0^1(\Omega)$. E observe que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \phi |\psi|^2 du &= \int_{\mathcal{K}} \phi |\psi|^2 du \\ &\geq \min_j E_1^j \int_{\mathcal{K}} |\psi|^2 du. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Por outro lado, sabemos que $\sigma(-\Delta_{\Sigma_j}^D) = [E_1^j, \infty)$ e, pelo Princípio Min-Máx,

$$E_1^j = \inf_{\substack{\psi \in \text{dom } \bar{b} \\ \psi \neq 0}} \frac{\int_{\Sigma_j} |\nabla \psi|^2 du}{\int_{\Sigma_j} |\psi|^2 du}.$$

Logo, para toda $\psi \in \text{dom } \bar{b}$ não nula, temos

$$\int_{\Sigma_j} |\nabla \psi|^2 du \geq E_1^j \int_{\Sigma_j} |\psi|^2 du. \quad (1.11)$$

Assim, usando (1.11), temos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 \, du &\geq \int_{\Omega \setminus \mathcal{K}} |\nabla \psi|^2 \, du \\
&= \sum_j \int_{\Sigma_j} |\nabla \psi|^2 \, du \\
&\geq \sum_j E_1^j \int_{\Sigma_j} |\psi|^2 \, du \\
&\geq \sum_j \left(\min_j E_1^j \right) \int_{\Sigma_j} |\psi|^2 \, du \\
&= \min_j E_1^j \sum_j \int_{\Sigma_j} |\psi|^2 \, du \\
&= \min_j E_1^j \int_{\Omega \setminus \mathcal{K}} |\psi|^2 \, du.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 \, du \geq \min_j E_1^j \int_{\Omega \setminus \mathcal{K}} |\psi|^2 \, du. \tag{1.12}$$

Assim, por (1.10) e (1.12) temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 \, du + \int_{\Omega} \phi |\psi|^2 \, du &\geq \min_j E_1^j \int_{\Omega \setminus \mathcal{K}} |\psi|^2 \, du + \min_j E_1^j \int_{\mathcal{K}} |\psi|^2 \, du \\
&= \min_j E_1^j \int_{\Omega} |\psi|^2 \, du.
\end{aligned}$$

Dessa forma, para todo $\psi \in \text{dom } \bar{b}$ não nula, $\bar{b}(\psi, \psi) \geq \min_j E_1^j \|\psi\|^2$, ou seja,

$$\min_j E_1^j \leq \frac{\bar{b}(\psi, \psi)}{\|\psi\|^2}.$$

Logo, $\min_j E_1^j \leq \inf \sigma(B) \leq \inf \sigma_{ess}(B)$, isto é, $\sigma_{ess}(B) \subseteq \left[\min_j E_1^j, \infty \right)$. Mas, por (1.9), temos que

$$\sigma_{ess}(-\Delta_{\Omega}^D) \subseteq \left[\min_j E_1^j, \infty \right).$$

Assim, pelas inclusões acima, concluímos que

$$\sigma_{ess}(-\Delta_{\Omega}^D) = \left[\min_j E_1^j, \infty \right).$$

■

Os exemplos desta seção foram detalhados a partir de [7].

O problema do Laplaciano de Dirichlet em uma faixa com canto

Neste capítulo, vamos definir a região do plano que iremos trabalhar e, usando formas quadráticas, iremos definir o operador Laplaciano de Dirichlet nessa região. Denotamos as coordenadas cartesianas do plano \mathbb{R}^2 por $x = (x_1, x_2)$.

2.1 Geometria da faixa

Estamos considerando conjuntos ilimitados do plano em forma de V, isto é, uma faixa infinita de largura constante com um canto. Nosso interesse é estudar as propriedades que estão ligadas ao operador Laplaciano com condições de contorno de Dirichlet em tais conjuntos. Assumimos sem perda de generalidade que a região satisfaz:

- O canto não convexo está na origem $(0, 0)$;
- A região é simétrica em relação ao eixo x_1 ;
- A espessura da região é igual a π .

O único parâmetro é a abertura da faixa, $\theta \in (0, \pi/2)$. A região será denotada por Ω_θ e descrita por

$$\Omega_\theta = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \tan \theta < |x_2| < \left(x_1 + \frac{\pi}{\sin \theta} \right) \tan \theta \right\}.$$

Veja a Figura 2.1.

2.2 Operador Laplaciano de Dirichlet

Considere a forma quadrática Q_θ definida por:

$$Q_\theta(\psi) = \int_{\Omega_\theta} |\nabla \psi(x)|^2 dx, \quad (2.1)$$

$$\text{dom } Q_\theta = H_0^1(\Omega_\theta).$$

Podemos observar que se $\psi \in \text{dom } Q_\theta$, então $\psi = 0$ em $\partial\Omega_\theta$.

Denotamos por $-\Delta_{\Omega_\theta}^D$ seu operador autoadjunto associado que é chamado de *operador Laplaciano de Dirichlet* em Ω_θ .

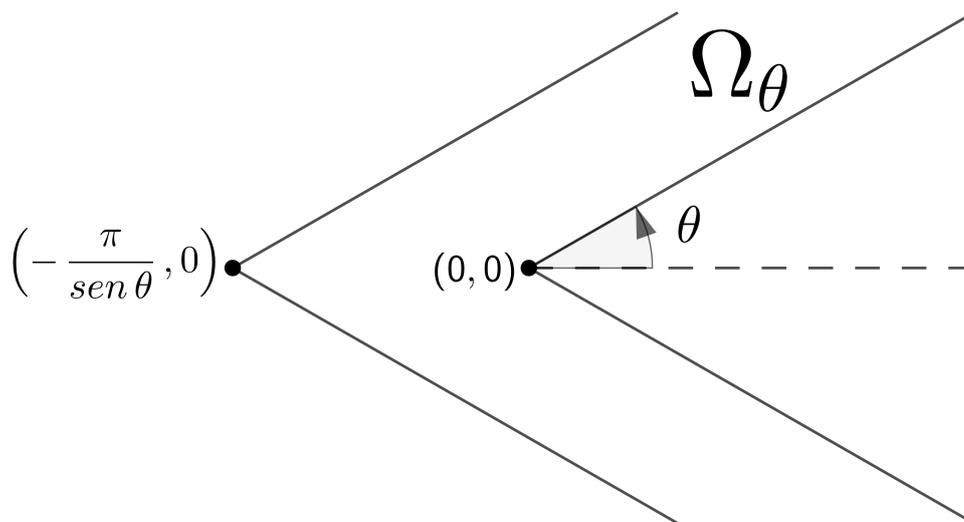


Figura 2.1: A região Ω_θ .

É possível mostrar que $\text{dom } (-\Delta_{\Omega_\theta}^D) = \{H^1(\Omega_\theta) : -\Delta \psi \in \mathcal{L}^2(\Omega_\theta) \text{ e } \psi = 0 \text{ em } \partial\Omega_\theta\}$. No entanto, nossas estratégias se basearão em estudar a forma quadrática (2.1).

2.3 A meia-faixa

Devido a simetria da região Ω_θ também vamos trabalhar com a região Ω_θ^+ , chamada de *meia-faixa*, definida por

$$\Omega_\theta^+ = \{(x_1, x_2) \in \Omega_\theta : x_2 > 0\}.$$

Em particular, defina $\partial_D \Omega_\theta^+ := \partial\Omega_\theta \cap \partial\Omega_\theta^+$. Veja a Figura 2.2.

Denotamos por $-\Delta_{\Omega_\theta^+}^{DN}$ o operador Laplaciano com condições de contorno mistas de Dirichlet-Neumann em Ω_θ^+ . Mais precisamente, $-\Delta_{\Omega_\theta^+}^{DN}$ é o operador autoadjunto associado a forma quadrática

$$Q_\theta^+(\psi) = \int_{\Omega_\theta^+} |\nabla \psi(x)|^2 dx, \quad (2.2)$$

$$\text{dom } Q_\theta^+ = \{\psi \in H^1(\Omega_\theta^+) : \psi = 0 \text{ em } \partial_D \Omega_\theta^+\}.$$

É possível mostrar que

$$\text{dom} \left(-\Delta_{\Omega_{\theta}^+}^{DN} \right) = \left\{ \psi \in H^1(\Omega_{\theta}^+) : -\Delta\psi \in \mathcal{L}^2(\Omega_{\theta}^+), \psi = 0 \text{ em } \partial_D \Omega_{\theta}^+ \right. \\ \left. \text{e } \partial_2\psi = 0 \text{ em } x_2 = 0 \right\},$$

em que $\partial_2\psi$ denota a derivada parcial de primeira ordem de ψ em relação a variável x_2 .

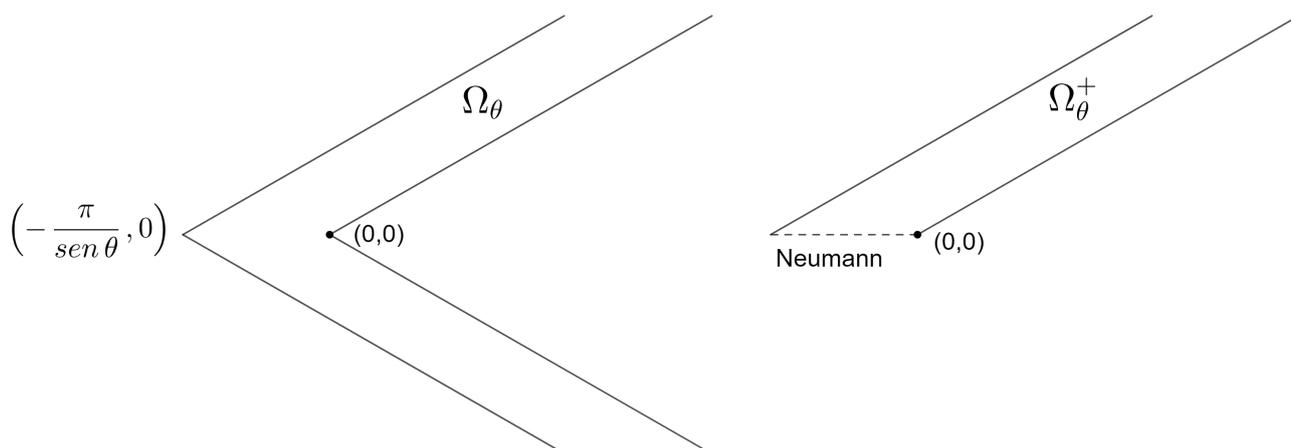


Figura 2.2: A faixa Ω_{θ} e a meia-faixa Ω_{θ}^+ .

Para mais detalhes sobre o domínio do operador Laplaciano, indicamos [4].

Coincidência dos espectros

Neste capítulo, vamos caracterizar o espectro essencial do operador $-\Delta_{\Omega_\theta}^D$. Além disso, mostraremos que o seu espectro discreto coincide com o espectro discreto do operador $-\Delta_{\Omega_\theta^+}^{DN}$. Tal identificação nos permitirá (no próximo capítulo) investigar os autovalores de $-\Delta_{\Omega_\theta^+}^{DN}$ em vez de $-\Delta_{\Omega_\theta}^D$, facilitando o estudo. Os resultados deste capítulo podem ser encontrados em [7].

3.1 Espectro essencial

O seguinte resultado é uma consequência do Exemplo 1.69.

Proposição 3.1. *Para cada $\theta \in (0, \pi/2)$, o espectro essencial do operador $-\Delta_{\Omega_\theta}^D$ coincide com o intervalo $[1, \infty)$.*

Demonstração. Observe que para cada $\theta \in (0, \pi/2)$, podemos tomar um compacto $\mathcal{K}_\theta \subseteq \Omega_\theta$ de modo que

$$\Omega_\theta \setminus \mathcal{K}_\theta = \Omega_1 \cup \Omega_2,$$

em que Ω_1 e Ω_2 são isometricamente isomorfos à $\Sigma = (0, \infty) \times (0, \pi)$.

Já vimos que $-\Delta_\Sigma^D$ possui espectro puramente essencial e com o primeiro autovalor igual à 1 (veja mais detalhes em Apêndice B). Assim, segue, pelo Exemplo 1.69, que

$$\sigma_{ess}(-\Delta_{\Omega_\theta}^D) = [1, \infty).$$

■

Observação 3.2. De forma similar à Proposição 3.1, é fácil ver que $\sigma_{ess}(-\Delta_{\Omega_\theta^+}^{DN}) = [1, \infty)$. Dessa forma, garantimos que o espectro essencial dos operadores coincidem.

3.2 Espectro discreto

Vimos que $\sigma_{ess}(-\Delta_{\Omega_\theta}^D) = [1, \infty)$ e, como $\sigma_{dis}(-\Delta_{\Omega_\theta}^D)$ está “abaixo” do espectro essencial, podemos descrever a sua procura pelo estudo do problema

$$\begin{cases} -\Delta_{\Omega_\theta}^D \psi = \lambda \psi & \text{em } \Omega_\theta \\ \psi = 0 & \text{em } \partial\Omega_\theta \end{cases}, \quad \text{com } \lambda < 1 \text{ e } \psi \neq 0. \quad (3.1)$$

Lema 3.3. *Se ψ é uma autofunção de $-\Delta_{\Omega_\theta}^D$, então ψ é par e $\partial_2 \psi = 0$ em $\Omega_\theta \cap \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$.*

Demonstração. Considere $\lambda \in \sigma_{dis}(-\Delta_{\Omega_\theta}^D)$ e seja ψ uma autofunção associada, ou seja, $\psi \in \text{dom}(-\Delta_{\Omega_\theta}^D)$ e

$$-\Delta_{\Omega_\theta}^D \psi = \lambda \psi.$$

Vale enfatizar que $\lambda < 1$.

Escrevemos $\psi = \psi^{\text{par}} + \psi^{\text{ímpar}}$, em que

$$\psi^{\text{par}}(x_1, x_2) = \frac{\psi(x_1, x_2) + \psi(x_1, -x_2)}{2} \quad \text{e} \quad \psi^{\text{ímpar}}(x_1, x_2) = \frac{\psi(x_1, x_2) - \psi(x_1, -x_2)}{2}.$$

Observemos que:

- Continuidade: Claramente ψ^{par} e $\psi^{\text{ímpar}}$ são contínuas em Ω_θ .
- $-\Delta_{\Omega_\theta}^{DN} \psi^{\text{par}} = \lambda \psi^{\text{par}}$ e $-\Delta_{\Omega_\theta}^{DN} \psi^{\text{ímpar}} = \lambda \psi^{\text{ímpar}}$.

De fato, temos que

$$\begin{aligned} -\Delta_{\Omega_\theta}^{DN} \psi^{\text{par}}(x_1, x_2) &= -\Delta_{\Omega_\theta}^{DN} \left(\frac{\psi(x_1, x_2) + \psi(x_1, -x_2)}{2} \right) \\ &= \frac{-\Delta_{\Omega_\theta}^{DN}(\psi(x_1, x_2)) - \Delta_{\Omega_\theta}^{DN}(\psi(x_1, -x_2))}{2} \\ &= \frac{\lambda \psi(x_1, x_2) + \lambda \psi(x_1, -x_2)}{2} \\ &= \lambda \psi^{\text{par}}(x_1, x_2). \end{aligned}$$

De modo semelhante, mostramos que

$$-\Delta_{\Omega_\theta}^{DN} \psi^{\text{ímpar}}(x_1, x_2) = \lambda \psi^{\text{ímpar}}(x_1, x_2).$$

- Condições de fronteira:

- Em $\partial\Omega_\theta$: As funções ψ^{par} e $\psi^{\text{ímpar}}$ satisfazem a condição de Dirichlet.

Já que $(x_1, x_2) \in \partial\Omega_\theta$ se, e somente se, $(x_1, -x_2) \in \partial\Omega_\theta$, a propriedade segue do fato que $\psi = 0$ em $\partial\Omega_\theta$ e das expressões de ψ^{par} e $\psi^{\text{ímpar}}$.

- Em $x_2 = 0$:

(i) ψ^{par} satisfaz a condição de Neumann.

De fato, basta observarmos que

$$\partial_2 \psi^{\text{par}}(x_1, 0) = \frac{\partial_2 \psi(x_1, 0) - \partial_2 \psi(x_1, 0)}{2} = 0, \quad \forall x_1 \in \left(-\frac{\pi}{\sin \theta}, 0\right).$$

(ii) $\psi^{\text{ímpar}}$ satisfaz a condição de Dirichlet.

De fato, sabemos que

$$\psi^{\text{ímpar}}(x_1, -x_2) = -\psi^{\text{ímpar}}(x_1, x_2), \quad \forall (x_1, x_2) \in \Omega_\theta.$$

Logo, $\psi^{\text{ímpar}}(x_1, 0) = 0$, para todo $x_1 \in (-\pi/\sin \theta, 0)$.

Para finalizar, iremos mostrar que $\psi^{\text{ímpar}} \equiv 0$. Para isto, defina as regiões Λ_θ e Λ_θ^+ como na Figura 3.1.

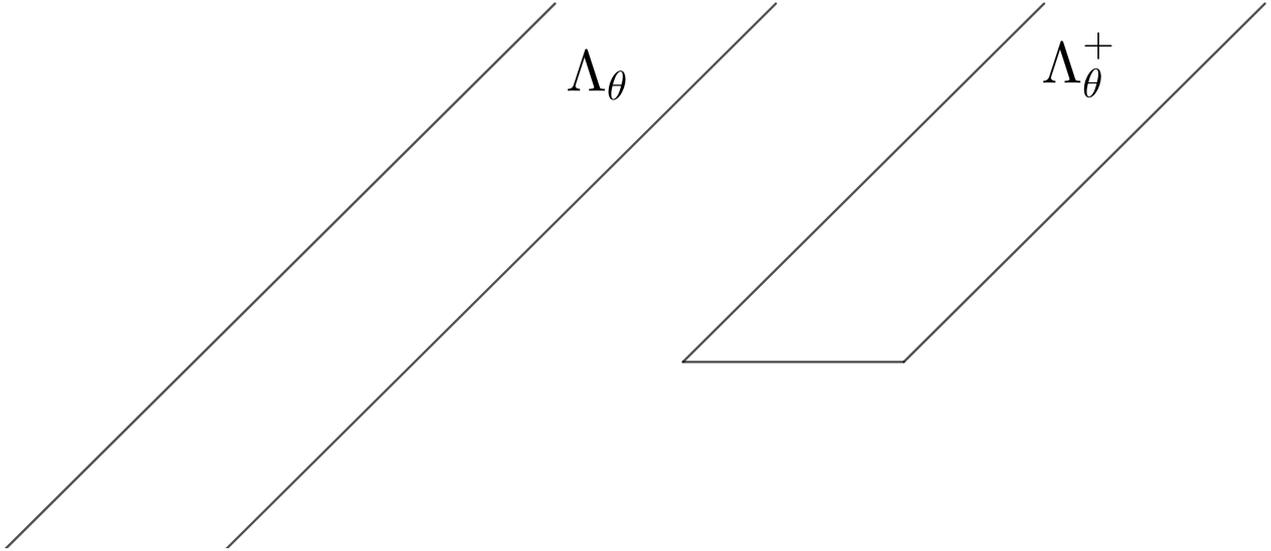


Figura 3.1: As regiões Λ_θ e Λ_θ^+ .

Observe que $\Lambda_\theta^+ \subseteq \Lambda_\theta$. Considere os operadores $-\Delta_{\Lambda_\theta^+}^D$ e $-\Delta_{\Lambda_\theta}^D$. Caracterizando seus autovalores de acordo com o Princípio Min-Máx, encontramos as seqüências não decrescentes $(\lambda_j(-\Delta_{\Lambda_\theta^+}^D))_{j=1}^\infty$ e $(\lambda_j(-\Delta_{\Lambda_\theta}^D))_{j=1}^\infty$. Pelo Exemplo 1.64, temos que

$$\lambda_j(-\Delta_{\Lambda_\theta^+}^D) \geq \lambda_j(-\Delta_{\Lambda_\theta}^D), \quad \forall j \geq 1.$$

Por outro lado, sabemos que $\sigma_{ess}(-\Delta_{\Lambda_\theta}^D) = [1, \infty)$. Logo,

$$\lambda_1(-\Delta_{\Lambda_\theta^+}^D) \geq 1.$$

Consequentemente, o Laplaciano de Dirichlet em Λ_θ^+ não possui autovalores menores que 1 e isto mostra que $\psi^{\text{ímpar}} \equiv 0$, pois caso contrário $\psi^{\text{ímpar}}$ seria uma autofunção de $-\Delta_{\Lambda_\theta^+}^D$ associada a $\lambda < 1$, o que nos levaria a uma contradição.

Portanto, concluímos que $\psi = \psi^{\text{par}}$ e satisfaz a condição de Neumann em $\tilde{\Omega} \cap \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$. ■

Proposição 3.4. *Para cada $\theta \in (0, \pi/2)$, $\sigma_{dis}(-\Delta_{\Omega_\theta}^D)$ coincide com $\sigma_{dis}(-\Delta_{\Omega_\theta^+}^{DN})$.*

Demonstração. Primeiramente, considere $\lambda \in \sigma_{dis}(-\Delta_{\Omega_\theta^+}^{DN})$ e seja ψ uma autofunção associada, ou seja, $\psi \in \text{dom}(-\Delta_{\Omega_\theta^+}^{DN})$ e

$$-\Delta_{\Omega_\theta^+}^{DN} \psi = \lambda \psi.$$

Defina φ como a extensão par de ψ com respeito a segunda variável:

$$\varphi(x_1, x_2) = \begin{cases} \psi(x_1, x_2), & \text{se } x_2 > 0 \\ \psi(x_1, -x_2), & \text{se } x_2 < 0 \end{cases}.$$

Queremos mostrar que φ é uma autofunção de $-\Delta_{\Omega_\theta}^D$ associada a λ . Observe que:

- Continuidade: Como ψ é contínua em Ω_θ^+ , segue pela paridade da extensão que φ é contínua em Ω_θ .
- Condição de Contorno: $\varphi = 0$ em $\partial\Omega_\theta$. De fato,
 - (i) Se $x_2 > 0$, então $\varphi \equiv \psi$ em Ω_θ^+ e, por hipótese $\psi = 0$ em $\partial\Omega_\theta^+$, logo $\varphi = 0$ em $\partial\Omega_\theta \cap \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$.
 - (ii) Se $x_2 < 0$, então $\varphi(x_1, x_2) = \psi(x_1, -x_2)$ e, pela simetria da região Ω_θ , temos $\varphi = 0$ em $\partial\Omega_\theta \cap \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 < 0\}$.
- $-\Delta_{\Omega_\theta}^D \varphi = \lambda \varphi$. De fato,
 - (i) Se $x_2 > 0$, então $\varphi \equiv \psi$ que por hipótese é uma autofunção de $-\Delta_{\Omega_\theta^+}^{DN}$. Então,

$$-\Delta_{\Omega_\theta}^D \varphi = \lambda \varphi.$$

- (ii) Se $x_2 < 0$, segue que

$$\begin{aligned} -\Delta_{\Omega_\theta^+}^{DN} \varphi(x_1, x_2) &= -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(\varphi(x_1, x_2)) - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}(\varphi(x_1, x_2)) \\ &= -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(\psi(x_1, -x_2)) - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}(\psi(x_1, -x_2)) \\ &= \lambda \psi(x_1, -x_2) \\ &= \lambda \varphi(x_1, x_2). \end{aligned}$$

As considerações acima e o fato que $\psi \in \text{dom} \left(-\Delta_{\Omega_\theta^+}^{DN} \right)$, implicam que $\varphi \in \text{dom} \left(-\Delta_{\Omega_\theta}^D \right)$ e $-\Delta_{\Omega_\theta}^D \varphi = \lambda \varphi$. Logo, $\lambda \in \sigma_{dis} \left(-\Delta_{\Omega_\theta}^D \right)$. Portanto,

$$\sigma_{dis} \left(-\Delta_{\Omega_\theta^+}^{DN} \right) \subseteq \sigma_{dis} \left(-\Delta_{\Omega_\theta}^D \right). \quad (3.2)$$

Agora, considere λ um autovalor de $-\Delta_{\Omega_\theta}^D$ e seja ψ uma autofunção associada. Pelo Lema 3.3, a restrição de ψ em Ω_θ^+ é uma autofunção de $-\Delta_{\Omega_\theta^+}^{DN}$ com autovalor λ . Assim,

$$\sigma_{dis} \left(-\Delta_{\Omega_\theta}^D \right) \subseteq \sigma_{dis} \left(-\Delta_{\Omega_\theta^+}^{DN} \right). \quad (3.3)$$

Por (3.2) e (3.3), concluímos o resultado pois

$$\sigma_{dis} \left(-\Delta_{\Omega_\theta}^D \right) = \sigma_{dis} \left(-\Delta_{\Omega_\theta^+}^{DN} \right).$$

■

Espectro Discreto

Neste capítulo, discutiremos as características do espectro discreto do operador Laplaciano de Dirichlet em Ω_θ^+ . Os resultados deste capítulo podem ser encontrados em [7].

4.1 Mudança de coordenadas

Será mais conveniente trabalharmos com uma forma quadrática cuja a região de integração em (2.2) não dependa de θ . Para isso, defina a seguinte região

$$\tilde{\Omega} := \Omega_{\frac{\pi}{4}} = \left\{ (x, y) \in (-\pi, \infty) \times (0, \pi) : y < x + \pi, \text{ se } x \in (-\pi, 0) \right\}.$$

Considere $\partial_D \tilde{\Omega}$ como a união das fronteiras horizontais de $\tilde{\Omega}$. Veja a Figura 4.1.

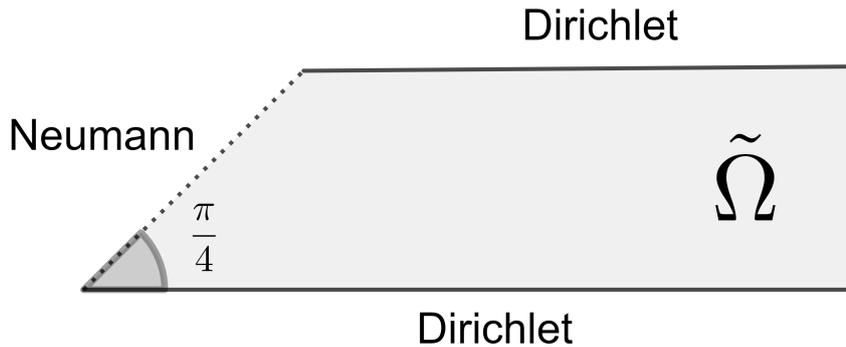


Figura 4.1: Região $\tilde{\Omega} := \Omega_{\frac{\pi}{4}}$ e suas condições de fronteira.

De acordo com as considerações do Apêndice A, a forma sesquilinear resultante da mudança de variáveis é

$$\tilde{b}_\theta(\psi, \varphi) = \int_{\tilde{\Omega}} \left[\tan^2 \theta \psi_x \varphi_x + \psi_y \varphi_y \right] dx dy, \quad (4.1)$$

com domínio

$$\mathcal{V} = \left\{ \psi \in H^1(\tilde{\Omega}) : \psi = 0 \text{ em } \partial_D \tilde{\Omega} \right\}. \quad (4.2)$$

Observe que passamos a dependência de θ para a expressão de \tilde{b}_θ .

Denote por T_θ o operador autoadjunto associado a forma sesquilinear \tilde{b}_θ em $\tilde{\Omega}$. Como os operadores T_θ e $-\Delta_{\Omega_\theta^+}^{DN}$ são unitariamente equivalentes, eles possuem o mesmo espectro.

4.2 Existência do espectro discreto

Nesta seção, estamos interessados em garantir que o espectro discreto do operador $-\Delta_{\Omega_\theta^+}^{DN}$ é não vazio.

Observe que todo autovalor do espectro discreto, se existir, é necessariamente menor que 1. Como o operador $-\Delta_{\Omega_\theta^+}^{DN}$ é autoadjunto, sabemos que o seu espectro discreto, se existir, pode ser completamente determinado pelos quocientes de Rayleigh. Veja que o primeiro quociente de Rayleigh de $-\Delta_{\Omega_\theta^+}^{DN}$ é dado por:

$$\lambda_1(\theta) = \inf_{\substack{0 \neq \psi \in H^1(\Omega_\theta^+) \\ \psi=0 \text{ em } \partial_D \Omega_\theta^+}} \frac{\|\nabla \psi\|_{\Omega_\theta^+}^2}{\|\psi\|_{\Omega_\theta^+}^2}.$$

Assim, observe que, se $\lambda_1(\theta) < 1$, então pelas considerações acima $\lambda_1(\theta) \in \sigma_{dis}(-\Delta_{\Omega_\theta^+}^{DN})$, o que garante a existência do conjunto. Portanto, é suficiente concluir o seguinte resultado:

Proposição 4.1. *Para cada $\theta \in (0, \pi/2)$, o primeiro quociente de Rayleigh $\lambda_1(\theta)$ de $-\Delta_{\Omega_\theta^+}^{DN}$ é menor que 1.*

Demonstração. Considere a forma sesquilinear deslocada \tilde{p}_θ dada por:

$$\tilde{p}_\theta(\psi, \varphi) := \tilde{b}_\theta(\psi, \varphi) - \int_{\tilde{\Omega}} \psi \varphi \, dx dy,$$

e a forma quadrática associada

$$\tilde{P}_\theta(\psi) = \tilde{p}_\theta(\psi, \psi).$$

Para concluir que $\lambda_1(\theta) < 1$, é suficiente mostrar que existe $\psi \in \mathcal{V}$, não nula, de modo que $\tilde{P}_\theta(\psi) < 0$, pois nesse caso

$$\begin{aligned} \tilde{P}_\theta(\psi) = \tilde{p}_\theta(\psi, \psi) < 0 &\iff \tilde{b}_\theta(\psi, \psi) - \int_{\tilde{\Omega}} |\psi|^2 \, dx dy < 0 \\ &\iff \tilde{b}_\theta(\psi, \psi) < \|\psi\|_{\tilde{\Omega}}^2 \\ &\iff \frac{\tilde{b}_\theta(\psi, \psi)}{\|\psi\|_{\tilde{\Omega}}^2} < 1, \end{aligned}$$

para toda $\psi \in \mathcal{V}$ não nula. E, pela definição de $\lambda_1(\theta)$, seguirá que

$$\lambda_1(\theta) = \inf_{\substack{\psi \in \mathcal{V} \\ \psi \neq 0}} \frac{\tilde{b}_\theta(\psi, \psi)}{\|\psi\|_{\tilde{\Omega}}^2} < 1.$$

Assim, vamos mostrar a existência de $\psi \in \mathcal{V}$ tal que $\tilde{P}_\theta(\psi) < 0$ a partir de duas etapas:

Etapa 1. Contruir uma sequência $(\psi_n) \subseteq \mathcal{V}$ tal que $\tilde{P}_\theta(\psi_n) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$.

Considere χ uma função corte suave de modo que

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [-\pi, 0] \\ 0, & \text{se } x \in [1, \infty) \end{cases},$$

ou seja, $\text{supp}(\chi) \subseteq [-\pi, 1]$. Para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, defina $\chi_n(x) := \chi(x/n)$ e

$$\psi_n(x, y) := \chi_n(x) \text{sen } y.$$

Observe que $\text{supp}(\chi_n) \subseteq [-\pi, n]$. E ainda, $\psi_n \in \mathcal{V}$, para todo n , pois $\text{sen } 0 = \text{sen } \pi = 0$ e, portanto, $\psi_n = 0$ em $\partial_D \tilde{\Omega}$. Assim, segue da definição que

$$\begin{aligned} \tilde{P}_\theta(\psi_n) &= \tilde{p}_\theta(\psi_n, \psi_n) \\ &= \tilde{b}_\theta(\psi_n, \psi_n) - \int_{\tilde{\Omega}} |\psi_n|^2 \, dx dy \\ &= \int_{\tilde{\Omega}} \left[\tan^2 \theta |\partial_x \psi_n|^2 + |\partial_y \psi_n|^2 - |\psi_n|^2 \right] \, dx dy. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Mas, sabemos que

- $|\partial_x \psi_n|^2 = \chi_n'^2(x) \text{sen}^2(y)$;
- $|\partial_y \psi_n|^2 = \chi_n^2(x) \cos^2(y)$;
- $|\psi_n|^2 = \chi_n^2(x) \text{sen}^2(y)$.

Então, substituindo em (4.3), obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{P}_\theta(\psi_n) &= \int_{\tilde{\Omega}} \left[\tan^2 \theta \chi_n'^2(x) \text{sen}^2(y) + \chi_n^2(x) \cos^2(y) - \chi_n^2(x) \text{sen}^2(y) \right] \, dx dy \\ &= \int_{\tilde{\Omega}} \left[\tan^2 \theta \chi_n'^2(x) \text{sen}^2(y) + \chi_n^2(x) (\cos^2(y) - \text{sen}^2(y)) \right] \, dx dy. \end{aligned}$$

Pela definição de χ_n , podemos ver que $\chi_n = 1$ e $\chi_n' = 0$ em $[-\pi, 0]$. Logo, segue que

$$\begin{aligned} \tilde{P}_\theta(\psi_n) &= \int_{-\pi}^0 \int_0^{x+\pi} \left[\tan^2 \theta \chi_n'^2(x) \text{sen}^2(y) + \chi_n^2(x) (\cos^2(y) - \text{sen}^2(y)) \right] \, dy dx \\ &\quad + \int_0^\infty \int_0^\pi \left[\tan^2 \theta \chi_n'^2(x) \text{sen}^2(y) + \chi_n^2(x) (\cos^2(y) - \text{sen}^2(y)) \right] \, dy dx \\ &= \int_{-\pi}^0 \int_0^{x+\pi} (\cos^2(y) - \text{sen}^2(y)) \, dy dx \\ &\quad + \int_0^\infty \int_0^\pi \left[\tan^2 \theta \chi_n'^2(x) \text{sen}^2(y) + \chi_n^2(x) (\cos^2(y) - \text{sen}^2(y)) \right] \, dy dx. \end{aligned}$$

Mas também temos que

$$\int_{-\pi}^0 \int_0^{x+\pi} (\cos^2(y) - \sen^2(y)) \, dy dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^0 \sen(2(x + \pi)) \, dx = 0.$$

Então, reescrevendo temos

$$\begin{aligned} \tilde{P}_\theta(\psi_n) &= \int_0^\infty \int_0^\pi \left[\tan^2 \theta \chi_n'^2(x) \sen^2(y) + \chi_n^2(x) (\cos^2(y) - \sen^2(y)) \right] \, dy dx \\ &= \int_0^\infty \int_0^\pi \tan^2 \theta \chi_n'^2(x) \sen^2(y) \, dy dx \\ &\quad + \int_0^\infty \int_0^\pi \chi_n^2(x) (\cos^2(y) - \sen^2(y)) \, dy dx \\ &= \int_0^\infty \int_0^\pi \tan^2 \theta \chi_n'^2(x) \sen^2(y) \, dy dx \\ &\quad + \int_0^\infty \chi_n^2(x) \, dx \int_0^\pi (\cos^2(y) - \sen^2(y)) \, dy \\ &= \tan^2 \theta \int_0^\infty \chi_n'^2(x) \, dx \int_0^\pi \sen^2(y) \, dy \\ &= \tan^2 \theta \int_0^\infty \chi_n'^2(x) \, dx \left[\frac{\pi}{2} \right] \\ &= \frac{\pi \tan^2 \theta}{2} \int_0^n \chi_n'^2(x) \, dx. \end{aligned}$$

Derivando a função $\chi_n(x)$, obtemos

$$\chi_n'(x) = \chi' \left(\frac{x}{n} \right) \frac{1}{n} = \frac{\chi'(x/n)}{n}.$$

Fazendo a mudança de variável $u = x/n$, chegamos em

$$\begin{aligned} \tilde{P}_\theta(\psi_n) &= \frac{\pi \tan^2 \theta}{2} \int_0^n \chi_n'^2(x) \, dx \\ &= \frac{\pi \tan^2 \theta}{2} \int_0^n \left| \chi_n'(x) \right|^2 \, dx \\ &= \frac{\pi \tan^2 \theta}{2} \int_0^1 \left| \frac{\chi' \left(\frac{x}{n} \right)}{n} \right|^2 \, dx \\ &= \frac{\pi \tan^2 \theta}{2} \int_0^1 \left| \chi' \left(\frac{x}{n} \right) \right|^2 \frac{dx}{n^2} \\ &= \frac{\pi \tan^2 \theta}{2n} \int_0^1 \left| \chi'(u) \right|^2 \, du. \end{aligned}$$

Agora, tomando $\kappa_\theta = \pi \tan^2 \theta \int_0^1 |\chi'(u)|^2 du$, podemos observar que $\kappa_\theta \geq 0$ e não depende de n , logo

$$\tilde{P}_\theta(\psi_n) \leq \frac{\kappa_\theta}{2n}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

Assim, fazendo $n \rightarrow \infty$, segue que $\tilde{P}_\theta(\psi_n) \rightarrow 0$, o que conclui esta etapa.

Etapa 2. Construir um elemento $\phi \in \mathcal{V}$ de modo que $\tilde{p}_\theta(\psi_n, \phi)$ é diferente de zero e independente de n , para algum n .

Considere $\eta \not\equiv 0$ uma função corte suave de x com suporte em $(-\pi, 0)$ e f uma função de $y \in [0, \pi]$, que vamos determinar posteriormente, a qual satisfaz $f(0) = f(\pi) = 0$. Defina

$$\phi(x, y) = \eta(x) f(y).$$

Relembre a sequência (ψ_n) da etapa anterior. Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, definimos

$$\psi_{n,\varepsilon}(x, y) = \psi_n(x, y) + \varepsilon \phi(x, y).$$

Observe que $\psi_n(x, y) = \phi(x, y) = 0$, se $y = 0$ e $y = \pi$. Logo, $\psi_{n,\varepsilon} = 0$ em $\partial_D \tilde{\Omega}$, ou seja, $\psi_{n,\varepsilon} \in \mathcal{V}$. Assim, segue que

$$\begin{aligned} \tilde{P}_\theta(\psi_{n,\varepsilon}) &= \tilde{P}_\theta(\psi_n + \varepsilon\phi) \\ &= \tilde{p}_\theta(\psi_n + \varepsilon\phi, \psi_n + \varepsilon\phi) \\ &= \tilde{p}_\theta(\psi_n, \psi_n + \varepsilon\phi) + \tilde{p}_\theta(\varepsilon\phi, \psi_n + \varepsilon\phi) \\ &= \tilde{p}_\theta(\psi_n, \psi_n) + \varepsilon \tilde{p}_\theta(\psi_n, \phi) + \varepsilon \tilde{p}_\theta(\phi, \psi_n) + \varepsilon^2 \tilde{p}_\theta(\phi, \phi) \\ &= \tilde{P}_\theta(\psi_n) + 2\varepsilon \tilde{p}_\theta(\psi_n, \phi) + \varepsilon^2 \tilde{P}_\theta(\phi). \end{aligned}$$

Isto é,

$$\tilde{P}_\theta(\psi_{n,\varepsilon}) = \tilde{P}_\theta(\psi_n) + 2\varepsilon \tilde{p}_\theta(\psi_n, \phi) + \varepsilon^2 \tilde{P}_\theta(\phi). \quad (4.4)$$

A seguir, vamos realizar alguns cálculos em que dividiremos a região $\tilde{\Omega}$ em dois subconjuntos \mathcal{P} e \mathcal{R} como mostra na figura a seguir. Pela parametrização de \mathcal{P} e \mathcal{R} , temos

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Omega}} dydx &= \int_{\mathcal{P}} dydx + \int_{\mathcal{R}} dydx \\ &= \int_{-\pi}^0 \int_0^{x+\pi} dydx + \int_0^\infty \int_0^\pi dydx. \end{aligned}$$

Assim, segue que

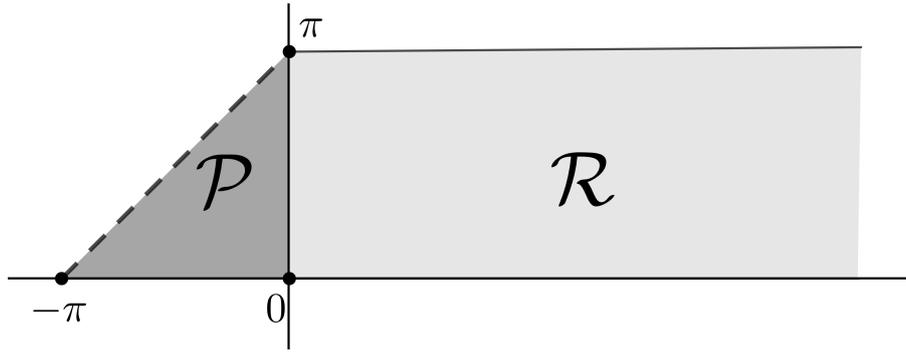


Figura 4.2: Os subconjuntos \mathcal{P} e \mathcal{R} .

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_\theta(\psi_n, \phi) &= \tilde{p}_\theta(\chi_n(x) \text{sen}(y), \eta(x) f(y)) \\
&= \int_{\tilde{\Omega}} \left[\tan^2 \theta \chi'_n(x) \text{sen}(y) \eta'(x) f(y) + \chi_n(x) \cos(y) \eta(x) f'(y) \right. \\
&\quad \left. - \chi_n(x) \text{sen}(y) \eta(x) f(y) \right] dy dx \\
&= \int_{\tilde{\Omega}} \left[\tan^2 \theta \chi'_n(x) \text{sen}(y) \eta'(x) f(y) \right. \\
&\quad \left. + \eta(x) \chi_n(x) \left(\cos(y) f'(y) - \text{sen}(y) f(y) \right) \right] dy dx \\
&= \int_{-\pi}^0 \int_0^{x+\pi} \tan^2 \theta \chi'_n(x) \text{sen}(y) \eta'(x) f(y) dy dx \\
&\quad + \int_0^\infty \int_0^\pi \tan^2 \theta \chi'_n(x) \text{sen}(y) \eta'(x) f(y) dy dx \\
&\quad + \int_{-\pi}^0 \int_0^{x+\pi} \eta(x) \chi_n(x) \left(\cos(y) f'(y) - \text{sen}(y) f(y) \right) dy dx \\
&\quad + \int_0^\infty \int_0^\pi \eta(x) \chi_n(x) \left(\cos(y) f'(y) - \text{sen}(y) f(y) \right) dy dx \\
&= \int_{-\pi}^0 \int_0^{x+\pi} \eta(x) \left(\cos(y) f'(y) - \text{sen}(y) f(y) \right) dy dx \\
&= \int_{-\pi}^0 \int_0^{x+\pi} \eta(x) \left(\cos(y) f(y) \right)' dy dx \\
&= \int_{-\pi}^0 \eta(x) \int_0^{x+\pi} \left(\cos(y) f(y) \right)' dy dx \\
&= \int_{-\pi}^0 \eta(x) \left[\cos(y) f(y) \right]_0^{x+\pi} dx
\end{aligned}$$

Logo,

$$\tilde{p}_\theta(\psi_n, \phi) = \int_{-\pi}^0 \eta(x) \cos(x + \pi) f(x + \pi) dx.$$

Lembrando que $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$, vamos escolher $f(y) = \eta(y - \pi) \cos(y - \pi)$. Note que essa função satisfaz as condições $f(0) = f(\pi) = 0$. Assim, temos

$$\begin{aligned} \tilde{p}_\theta(\psi_n, \phi) &= \int_{-\pi}^0 \eta(x) \cos(x + \pi) \eta(x + \pi - \pi) \cos(x + \pi - \pi) dx. \\ &= \int_{-\pi}^0 \eta^2(x) \cos(x + \pi) \cos(x) dx. \\ &= - \int_{-\pi}^0 \eta^2(x) \cos^2(x) dx := -\tau. \end{aligned}$$

Observe que τ é independente de n . Além disso, como $\cos(x) = 0$ em $[-\pi, 0]$ se, e somente se, $x = \pi/2$, então

$$\int_{-\pi}^0 \eta^2(x) \cos^2(x) dx = 0 \iff \eta \equiv 0.$$

Mas por hipótese $\eta \not\equiv 0$, logo concluímos que $-\tau < 0$. Ou seja, para todo $n \in \mathbb{Z}_+$

$$\tilde{p}_\theta(\psi_n, \phi) \neq 0.$$

Isso conclui a **Etapa 2**.

Para concluir o resultado, observe que temos por (4.4) que

$$\begin{aligned} \tilde{P}_\theta(\psi_{n,\varepsilon}) &= \tilde{P}_\theta(\psi_n) + 2\varepsilon \tilde{p}_\theta(\psi_n, \phi) + \varepsilon^2 \tilde{P}_\theta(\phi) \\ &\leq \frac{\kappa_\theta}{2n} - 2\varepsilon\tau + \varepsilon^2\zeta, \end{aligned}$$

em que $\tilde{P}_\theta(\phi) := \zeta$. Tomando ε suficientemente pequeno, temos que $\varepsilon^2\zeta < \varepsilon\tau$, e então

$$-2\varepsilon\tau + \varepsilon^2\zeta < -\varepsilon\tau.$$

Por outro lado, tomando N suficientemente grande, temos que $\frac{\kappa_\theta}{2N} < \frac{\varepsilon\tau}{2}$. Assim,

$$\begin{aligned} \tilde{P}_\theta(\psi_{N,\varepsilon}) &\leq \frac{\kappa_\theta}{2N} - 2\varepsilon\tau + \varepsilon^2\zeta \\ &< \frac{\varepsilon\tau}{2} - \varepsilon\tau \\ &= -\frac{\varepsilon\tau}{2} \\ &< 0. \end{aligned}$$

Portanto, temos que $\tilde{P}_\theta(\psi_{N,\varepsilon}) < 0$, o que implica que $\lambda_1(\theta) < 1$. ■

4.3 Número finito de autovalores no espectro discreto

Nesta seção, estamos interessados em garantir que independentemente da abertura θ , a quantidade de autovalores no espectro discreto do operador $-\Delta_{\tilde{\Omega}_\theta}^D$ é sempre finita. Lembrando que podemos trabalhar na região $\tilde{\Omega}$ com a forma sesquilinear \tilde{b}_θ ; veja (4.1) e (4.2). Assim, vamos fixar a seguinte notação:

Definição 4.2. Sejam T um operador autoadjunto e $\lambda \in \mathbb{R}$, denotamos por $\mathcal{N}(T, \lambda)$, o índice máximo j tal que o j -ésimo quociente de Rayleigh de T é menor que λ .

Observação 4.3. No caso em que T é um operador autoadjunto definido por uma forma sesquilinear hermitiana, fechada e limitada inferiormente b , com domínio $\text{dom } b$, e Q é a forma quadrática associada, também usamos a notação $\mathcal{N}(Q, \lambda)$ para representar o número $\mathcal{N}(T, \lambda)$.

Note que já discutimos que os autovalores do espectro discreto do operador $-\Delta_{\tilde{\Omega}_\theta^+}^{DN}$ podem ser descritos pelos quociente de Rayleigh menores que 1. Dessa forma, se concluirmos que $\mathcal{N}\left(-\Delta_{\tilde{\Omega}_\theta^+}^{DN}, 1\right)$ é finito, seguirá imediatamente o resultado que queremos, isto é,

$$\sigma_{dis}\left(-\Delta_{\tilde{\Omega}_\theta^+}^{DN}\right) \text{ é finito.}$$

Logo, resta garantir o seguinte resultado:

Proposição 4.4. Para cada $\theta \in (0, \pi/2)$, $\mathcal{N}\left(-\Delta_{\tilde{\Omega}_\theta^+}^D, 1\right)$ é finito.

Demonstração. Seja \tilde{Q}_θ a forma quadrática associada à \tilde{b}_θ , ou seja,

$$\tilde{Q}_\theta(\psi) = \int_{\tilde{\Omega}} (\tan^2 \theta |\partial_x \psi|^2 + |\partial_y \psi|^2) \, dx dy,$$

em que $\text{dom } \tilde{Q}_\theta = \mathcal{V}$. Agora, considere (χ_0, χ_1) uma partição da unidade de classe C^∞ , como na Definição 1.65, em que

$$\begin{cases} \chi_0(x) = 1 \text{ e } \chi_1(x) = 0, & \text{se } x < 1 \\ \chi_0(x) = 0 \text{ e } \chi_1(x) = 1, & \text{se } x > 2 \end{cases}.$$

Desse modo, podemos observar que $\text{supp } (\chi_0) \subseteq (-\infty, 2)$ e $\text{supp } (\chi_1) \subseteq (1, +\infty)$. Defina, para $R > 0$ e $\ell \in \{0, 1\}$, a função

$$\chi_{\ell, R}(x) := \chi_\ell(R^{-1}x), \quad (4.5)$$

e veja que $(\chi_{0, R}, \chi_{1, R})$ é uma partição da unidade de classe C^∞ com $\text{supp } (\chi_{0, R}) \subseteq (-\infty, 2R)$ e $\text{supp } (\chi_{1, R}) \subseteq (R, +\infty)$.

Assim, segue pelo Teorema 1.66 que

$$T_\theta \psi = \left(\chi_{0, R} T_\theta \chi_{0, R}\right) \psi + \left(\chi_{1, R} T_\theta \chi_{1, R}\right) \psi - \left|\chi'_{0, R}\right|^2 \psi - \left|\chi'_{1, R}\right|^2 \psi,$$

$\psi \in \text{dom } T_\theta$. Conseqüentemente,

$$\tilde{Q}_\theta(\psi) = \tilde{Q}_\theta(\chi_{0,R} \psi) + \tilde{Q}_\theta(\chi_{1,R} \psi) - \left\| \chi'_{0,R} \psi \right\|_{\tilde{\Omega}}^2 - \left\| \chi'_{1,R} \psi \right\|_{\tilde{\Omega}}^2, \quad (4.6)$$

$\psi \in \mathcal{V}$. Além disso, segue de (4.5) que $\chi'_{\ell,R}(x) = \chi'_\ell(\mathbf{R}^{-1}x) \mathbf{R}^{-1}$, e então

$$\left| \chi'_{\ell,R}(x) \right|^2 = \mathbf{R}^{-2} \left| \chi'_\ell(\mathbf{R}^{-1}x) \right|^2.$$

Definindo $W_{\mathbf{R}}(x) := \left| \chi'_0(\mathbf{R}^{-1}x) \right|^2 + \left| \chi'_1(\mathbf{R}^{-1}x) \right|^2$, temos

$$\left| \chi'_{0,R}(x) \right|^2 + \left| \chi'_{1,R}(x) \right|^2 = \mathbf{R}^{-2} W_{\mathbf{R}}(x).$$

Logo, podemos escrever

$$\begin{aligned} \left\| \chi'_{0,R} \psi \right\|_{\tilde{\Omega}}^2 + \left\| \chi'_{1,R} \psi \right\|_{\tilde{\Omega}}^2 &= \int_{\tilde{\Omega}} \left| \chi'_{0,R}(x) \right|^2 |\psi|^2 + \left| \chi'_{1,R}(x) \right|^2 |\psi|^2 \, dx dy \\ &= \int_{\tilde{\Omega}} \left(\left| \chi'_{0,R}(x) \right|^2 + \left| \chi'_{1,R}(x) \right|^2 \right) |\psi|^2 \, dx dy \\ &= \int_{\tilde{\Omega}} \mathbf{R}^{-2} W_{\mathbf{R}}(x) |\psi|^2 \, dx dy \\ &= \int_{\tilde{\Omega}} \mathbf{R}^{-2} W_{\mathbf{R}}(x) \left(|\chi_{0,R} \psi|^2 + |\chi_{1,R} \psi|^2 \right) \, dx dy. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Vamos introduzir os seguintes subconjuntos de $\tilde{\Omega}$ (veja as Figuras 4.3 e 4.4):

- $\mathcal{O}_{0,R} = \left\{ (x, y) \in \tilde{\Omega} : x < 2\mathbf{R} \right\}$;
- $\mathcal{O}_{1,R} = \left\{ (x, y) \in \tilde{\Omega} : x > \mathbf{R} \right\}$;

e também,

- $\mathcal{V}_0 = \left\{ \phi \in H^1(\mathcal{O}_{0,R}) : \phi = 0 \text{ em } \partial_D \tilde{\Omega} \cap \partial \mathcal{O}_{0,R} \text{ e em } \{2\mathbf{R}\} \times (0, \pi) \right\}$;
- $\mathcal{V}_1 = H_0^1(\mathcal{O}_{1,R})$.

Assim, vamos definir duas formas quadráticas:

$$Q_{\ell,R}(\phi) = \int_{\mathcal{O}_{\ell,R}} \left[\tan^2 \theta |\partial_x \phi|^2 + |\partial_y \phi|^2 - \mathbf{R}^{-2} W_{\mathbf{R}}(x) |\phi|^2 \right] \, dx dy, \quad (4.8)$$

em que $\text{dom } Q_{\ell,R} = \mathcal{V}_\ell$ e $\ell \in \{0, 1\}$.

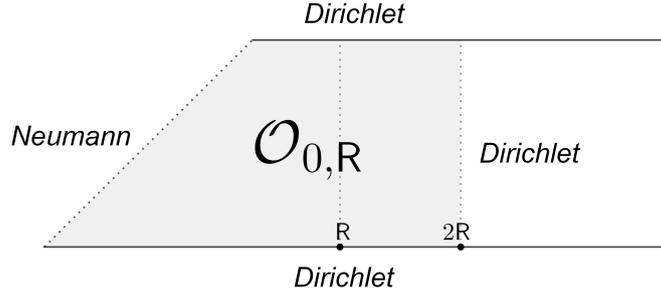


Figura 4.3: Região $\mathcal{O}_{0,R}$ e suas condições de fronteira.

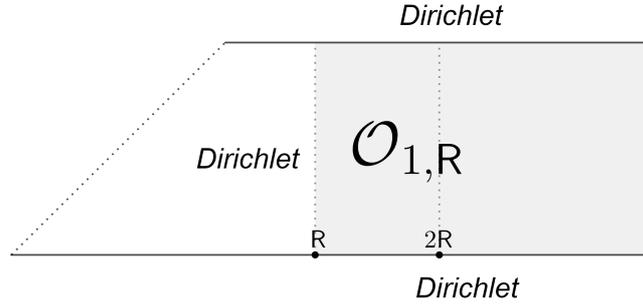


Figura 4.4: Região $\mathcal{O}_{1,R}$ e suas condições de fronteira.

Agora, observe que

$$\begin{aligned}
& Q_{0,R}(\chi_{0,R} \psi) + Q_{1,R}(\chi_{1,R} \psi) \\
&= \int_{\mathcal{O}_{0,R}} \left[\tan^2 \theta |\partial_x \chi_{0,R} \psi|^2 + |\partial_y \chi_{0,R} \psi|^2 - R^{-2} W_R(x) |\chi_{0,R} \psi|^2 \right] dx dy \\
&+ \int_{\mathcal{O}_{1,R}} \left[\tan^2 \theta |\partial_x \chi_{1,R} \psi|^2 + |\partial_y \chi_{1,R} \psi|^2 - R^{-2} W_R(x) |\chi_{1,R} \psi|^2 \right] dx dy \\
&= \int_{\mathcal{O}_{0,R}} \left[\tan^2 \theta |\partial_x \chi_{0,R} \psi|^2 + |\partial_y \chi_{0,R} \psi|^2 \right] dx dy - \int_{\mathcal{O}_{0,R}} R^{-2} W_R(x) |\chi_{0,R} \psi|^2 dx dy \\
&+ \int_{\mathcal{O}_{1,R}} \left[\tan^2 \theta |\partial_x \chi_{1,R} \psi|^2 + |\partial_y \chi_{1,R} \psi|^2 \right] dx dy - \int_{\mathcal{O}_{1,R}} R^{-2} W_R(x) |\chi_{1,R} \psi|^2 dx dy \\
&= \int_{\tilde{\Omega}} \left[\tan^2 \theta |\partial_x \chi_{0,R} \psi|^2 + |\partial_y \chi_{0,R} \psi|^2 \right] dx dy - \int_{\mathcal{O}_{0,R}} R^{-2} W_R(x) |\chi_{0,R} \psi|^2 dx dy \\
&+ \int_{\tilde{\Omega}} \left[\tan^2 \theta |\partial_x \chi_{1,R} \psi|^2 + |\partial_y \chi_{1,R} \psi|^2 \right] dx dy - \int_{\mathcal{O}_{1,R}} R^{-2} W_R(x) |\chi_{1,R} \psi|^2 dx dy \\
&= \tilde{Q}_\theta(\chi_{0,R} \psi) + \tilde{Q}_\theta(\chi_{1,R} \psi) - \int_{\mathcal{O}_{0,R}} R^{-2} W_R(x) |\chi_{0,R} \psi|^2 dx dy \\
&- \int_{\mathcal{O}_{1,R}} R^{-2} W_R(x) |\chi_{1,R} \psi|^2 dx dy.
\end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned}
Q_{0,R}(\chi_{0,R} \psi) + Q_{1,R}(\chi_{1,R} \psi) &= \tilde{Q}_\theta(\chi_{0,R} \psi) + \tilde{Q}_\theta(\chi_{1,R} \psi) \\
&\quad - \int_{\mathcal{O}_{0,R}} \mathbb{R}^{-2} W_{\mathbb{R}}(x) |\chi_{0,R} \psi|^2 dx dy \\
&\quad - \int_{\mathcal{O}_{1,R}} \mathbb{R}^{-2} W_{\mathbb{R}}(x) |\chi_{1,R} \psi|^2 dx dy.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Por outro lado, como $\text{supp}(\chi_{0,R}) \subseteq (-\infty, 2\mathbb{R})$ e $\text{supp}(\chi_{1,R}) \subseteq (\mathbb{R}, +\infty)$, podemos reescrever a Equação (4.7) como

$$\begin{aligned}
\|\chi'_{0,R} \psi\|_{\tilde{\Omega}}^2 + \|\chi'_{1,R} \psi\|_{\tilde{\Omega}}^2 &= \int_{\mathcal{O}_{0,R}} \mathbb{R}^{-2} W_{\mathbb{R}}(x) |\chi_{0,R} \psi|^2 dx dy \\
&\quad + \int_{\mathcal{O}_{1,R}} \mathbb{R}^{-2} W_{\mathbb{R}}(x) |\chi_{1,R} \psi|^2 dx dy.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Por (4.6), (4.9) e (4.10), concluimos que

$$\tilde{Q}_\theta(\psi) = Q_{0,R}(\chi_{0,R} \psi) + Q_{1,R}(\chi_{1,R} \psi). \tag{4.11}$$

Para concluir a prova da Proposição 4.4, vamos mostrar os seguintes lemas:

Lema 4.5. $\mathcal{N}(Q_\theta, 1) \leq \mathcal{N}(Q_{0,R}, 1) + \mathcal{N}(Q_{1,R}, 1)$.

Demonstração. Sabemos a fórmula dos quocientes de Rayleigh correspondentes à \tilde{Q}_θ :

$$\lambda_j = \inf_{\substack{E \subseteq \mathcal{V} \\ \dim E = j}} \sup_{\substack{\psi \in E \\ \psi \neq 0}} \frac{\tilde{Q}_\theta(\psi)}{\|\psi\|_{\tilde{\Omega}}^2}.$$

Primeiramente, observe que

$$\begin{aligned}
\|\psi\|_{\tilde{\Omega}}^2 &= (\chi_{0,R}^2 + \chi_{1,R}^2) \|\psi\|_{\tilde{\Omega}}^2 \\
&= \chi_{0,R}^2 \|\psi\|_{\tilde{\Omega}}^2 + \chi_{1,R}^2 \|\psi\|_{\tilde{\Omega}}^2 \\
&= \|\chi_{0,R} \psi\|_{\tilde{\Omega}}^2 + \|\chi_{1,R} \psi\|_{\tilde{\Omega}}^2.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Agora, vamos considerar a aplicação

$$\begin{aligned}
J: \mathcal{V} &\longrightarrow \mathcal{V}_0 \times \mathcal{V}_1 \\
\psi &\longmapsto (\chi_{0,R} \psi, \chi_{1,R} \psi).
\end{aligned}$$

Em particular, se considerarmos $J: \mathcal{V} \longrightarrow J(\mathcal{V})$ obtemos uma bijeção. Para $\psi \in \mathcal{V}$, vamos denotar $\psi_\ell := \chi_{\ell,R} \psi$ e vale notar que

$$\|\psi_\ell\|_{\tilde{\Omega}}^2 = \|\psi_\ell\|_{\mathcal{O}_{\ell,R}}^2. \tag{4.13}$$

Logo, por (4.12) e (4.13), temos

$$\begin{aligned}
\lambda_j &= \inf_{\substack{\mathcal{F} \subseteq J(\mathcal{V}) \\ \dim \mathcal{F} = j}} \sup_{\psi \in J^{-1}(\mathcal{F})} \frac{\tilde{Q}_\theta(\psi)}{\|\psi\|_{\tilde{\Omega}}^2} \\
&= \inf_{\substack{\mathcal{F} \subseteq J(\mathcal{V}) \\ \dim \mathcal{F} = j}} \sup_{\psi \in J^{-1}(\mathcal{F})} \frac{Q_{0,R}(\chi_{0,R}\psi) + Q_{1,R}(\chi_{1,R}\psi)}{\|\chi_{0,R}\psi\|_{\tilde{\Omega}}^2 + \|\chi_{1,R}\psi\|_{\tilde{\Omega}}^2} \\
&= \inf_{\substack{\mathcal{F} \subseteq J(\mathcal{V}) \\ \dim \mathcal{F} = j}} \sup_{(\psi_0, \psi_1) \in \mathcal{F}} \frac{Q_{0,R}(\psi_0) + Q_{1,R}(\psi_1)}{\|\psi_0\|_{\mathcal{O}_{0,R}}^2 + \|\psi_1\|_{\mathcal{O}_{1,R}}^2}.
\end{aligned}$$

Como $J(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{V}_0 \times \mathcal{V}_1$, pelo Corolário 1.63, obtemos a estimativa

$$\lambda_j \geq \inf_{\substack{\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}_0 \times \mathcal{V}_1 \\ \dim \mathcal{F} = j}} \sup_{(\psi_0, \psi_1) \in \mathcal{F}} \frac{Q_{0,R}(\psi_0) + Q_{1,R}(\psi_1)}{\|\psi_0\|_{\mathcal{O}_{0,R}}^2 + \|\psi_1\|_{\mathcal{O}_{1,R}}^2} := \mu_j. \quad (4.14)$$

Para $\ell \in \{0, 1\}$, vamos considerar $T_{\ell,R}$ o operador autoadjunto com domínio $\text{dom}(T_{\ell,R})$ associado a forma quadrática $Q_{\ell,R}$. Por (4.14), vemos que μ_j é o j -ésimo quociente de Rayleigh do operador diagonal $T_{\ell,R}$ dado por

$$\begin{pmatrix} T_{0,R} & 0 \\ 0 & T_{1,R} \end{pmatrix} \text{ com domínio } \text{dom}(T_{0,R}) \times \text{dom}(T_{1,R}).$$

Observe que os quocientes de Rayleigh de $T_{\ell,R}$ estão associados as formas quadráticas $Q_{\ell,R}$. Logo, μ_j é o j -ésimo elemento de

$$\left\{ \lambda_k(Q_{0,R}) \right\} \cup \left\{ \lambda_k(Q_{1,R}) \right\},$$

em que $\lambda_k(Q_{\ell,R})$ representa o k -ésimo quociente de Rayleigh de $Q_{\ell,R}$. Desse modo, segue que

$$\mathcal{N}(\tilde{Q}_\theta, 1) \leq \mathcal{N}(Q_{0,R}, 1) + \mathcal{N}(Q_{1,R}, 1).$$

■

Lema 4.6. *Para todo $R > 0$, $\mathcal{N}(Q_{0,R}, 1)$ é finito.*

Demonstração. Observe que $Q_{0,R}$ está definido sob $\mathcal{O}_{0,R}$ que é um conjunto aberto e limitado. Logo, $T_{0,R}$ possui espectro puramente discreto. Assim, podemos ordenar os seus autovalores em uma sequência não decrescente que tende à infinito. Portanto, a quantidade de autovalores de $Q_{0,R}$ menores que 1 é finito. ■

Lema 4.7. *Existe $R_0 > 0$ tal que para, $R \geq R_0$, $\mathcal{N}(Q_{1,R}, 1)$ é finito.*

Demonstração. Considere o subespaço fechado $\mathcal{I} := \{\Phi(x) \operatorname{sen}(y) : \Phi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \infty)\}$ do espaço de Hilbert $\mathcal{L}^2((\mathbb{R}, \infty) \times (0, \pi))$. Vale a decomposição ortogonal

$$\mathcal{L}^2((\mathbb{R}, \infty) \times (0, \pi)) = \mathcal{I} \oplus \mathcal{I}^\perp.$$

Em particular, para $\phi \in \mathcal{V}_1$, tem-se

$$\phi(x, y) = \Phi(x) \operatorname{sen} y + \varphi(x, y), \quad (4.15)$$

com $\Phi \in H^1(\mathbb{R}, \infty)$ e $\varphi \in \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{I}^\perp$.

Em alguns momentos usaremos as notações $\Pi_0 \phi(x, y) = \Phi(x) \operatorname{sen}(y)$ e $\Pi_1 \phi = \varphi(x, y)$. Devido à (4.15),

$$\int_{\mathbb{R}} \int_0^\pi \Phi(x) \operatorname{sen}(y) \varphi(x, y) dy dx = 0, \quad (4.16)$$

para toda $\Phi \in H^1(\mathbb{R}, \infty)$ e toda $\varphi \in \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{I}^\perp$. Logo,

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}(y) \varphi(x, y) dy = 0, \quad \text{q.t.p. } [x]. \quad (4.17)$$

O que também implica

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}(y) \partial_x \varphi(x, y) dy = 0, \quad \text{q.t.p. } [x]. \quad (4.18)$$

Por (4.17), temos que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{O}_{1,\mathbb{R}}} \partial_y \left(\Phi(x) \operatorname{sen}(y) \right) \partial_y \varphi(x, y) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_0^\pi \Phi(x) \partial_y \operatorname{sen}(y) \partial_y \varphi(x, y) dy dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \Phi(x) \left(\int_0^\pi \partial_{yy} \operatorname{sen}(y) \varphi(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \Phi(x) \left(\int_0^\pi \operatorname{sen}(y) \varphi(x, y) dy \right) dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

E por (4.18), temos

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{O}_{1,\mathbb{R}}} \tan^2 \theta \partial_x \left(\Phi(x) \operatorname{sen}(y) \right) \partial_x \varphi(x, y) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_0^\pi \tan^2 \theta \Phi'(x) \operatorname{sen}(y) \partial_x \varphi(x, y) dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \tan^2 \theta \Phi'(x) \left(\int_0^\pi \operatorname{sen}(y) \partial_x \varphi(x, y) dy \right) dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned}
Q_{1,R}(\phi) &= Q_{1,R}(\Pi_0 \phi + \Pi_1 \phi) \\
&= Q_{1,R}(\Pi_0 \phi) + Q_{1,R}(\Pi_1 \phi) \\
&\quad + 2 \int_{\mathcal{O}_{1,R}} \partial_y \left(\Phi(x) \operatorname{sen}(y) \right) \partial_y \varphi(x, y) \, dx dy \\
&\quad + 2 \int_{\mathcal{O}_{1,R}} \tan^2 \theta \partial_x \left(\Phi(x) \operatorname{sen}(y) \right) \partial_x \varphi(x, y) \, dx dy \\
&\quad - 2 \int_{\mathcal{O}_{1,R}} \mathbb{R}^{-2} W_{\mathbb{R}}(x) \Pi_0 \phi \Pi_1 \phi \, dx dy \\
&= Q_{1,R}(\Pi_0 \phi) + Q_{1,R}(\Pi_1 \phi) - 2 \int_{\mathcal{O}_{1,R}} \mathbb{R}^{-2} W_{\mathbb{R}}(x) \Pi_0 \phi \Pi_1 \phi \, dx dy.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Sejam $\varepsilon > 0$, $f := \sqrt{W_{\mathbb{R}}(x)} \Pi_0 \phi$ e $g := \sqrt{W_{\mathbb{R}}(x)} \Pi_1 \phi$. Vamos usar a desigualdade auxiliar

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} f - \sqrt{\varepsilon} g \right)^2 \geq 0.$$

Então,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\varepsilon} f^2 - 2 f g + \varepsilon g^2 \geq 0 \\
\Rightarrow &-2 f g \geq -\varepsilon^{-1} f^2 - \varepsilon g^2 \\
\Rightarrow &-2 \int_{\mathcal{O}_{1,R}} f g \, dx dy \geq -\varepsilon^{-1} \int_{\mathcal{O}_{1,R}} f^2 \, dx dy - \varepsilon \int_{\mathcal{O}_{1,R}} g^2 \, dx dy \\
\Rightarrow &-2 \int_{\mathcal{O}_{1,R}} \mathbb{R}^{-2} f g \, dx dy \geq -\varepsilon^{-1} \int_{\mathcal{O}_{1,R}} \mathbb{R}^{-2} f^2 \, dx dy - \varepsilon \int_{\mathcal{O}_{1,R}} \mathbb{R}^{-2} g^2 \, dx dy.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
-2 \int_{\mathcal{O}_{1,R}} \mathbb{R}^{-2} W_{\mathbb{R}}(x) \Pi_0 \phi \Pi_1 \phi \, dx dy &\geq -\varepsilon^{-1} \int_{\mathcal{O}_{1,R}} \mathbb{R}^{-2} W_{\mathbb{R}}(x) |\Pi_0 \phi|^2 \, dx dy \\
&\quad - \varepsilon \int_{\mathcal{O}_{1,R}} \mathbb{R}^{-2} W_{\mathbb{R}}(x) |\Pi_1 \phi|^2 \, dx dy.
\end{aligned}$$

Desta forma, de (4.19) segue que

$$\begin{aligned}
Q_{1,R}(\phi) &\geq Q_{1,R}(\Pi_0 \phi) + Q_{1,R}(\Pi_1 \phi) - \varepsilon^{-1} \int_{\mathcal{O}_{1,R}} \mathbb{R}^{-2} W_{\mathbb{R}}(x) |\Pi_0 \phi|^2 \, dx dy \\
&\quad - \varepsilon \int_{\mathcal{O}_{1,R}} \mathbb{R}^{-2} W_{\mathbb{R}}(x) |\Pi_1 \phi|^2 \, dx dy.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Pelas considerações do Apêndice B, sabemos que, para o operador $-\partial_y^2$ em $H_0^1(0, \pi)$, os dois primeiros autovalores são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 4$, sendo $\sin y$ a autofunção associada à λ_1 . Assim, se $\mathcal{W} := \text{dom } \tilde{Q}_\theta \setminus (\mathcal{I} \cap \text{dom } \tilde{Q}_\theta)$, tem-se

$$\lambda_2 = \inf_{\substack{\varphi \in \mathcal{W} \\ \varphi \neq 0}} \frac{\tilde{Q}_\theta(\varphi)}{\|\varphi\|^2}.$$

Desse modo, para toda $\varphi \in [\sin y]^\perp$, temos que

$$4 \leq \frac{\tilde{Q}_\theta(\varphi)}{\|\varphi\|^2} \Leftrightarrow 4 \|\varphi\|^2 \leq \int_0^\pi |\partial_y \varphi|^2 dy.$$

Em particular, como $\Pi_1 \phi \perp \Pi_0 \phi$, temos que

$$\int_{\mathcal{O}_{1,R}} |\partial_y \Pi_1 \phi|^2 dx dy \geq 4 \|\Pi_1 \phi\|_{\mathcal{O}_{1,R}}^2. \quad (4.21)$$

Seja M o máximo de W_R , que existe pois $\chi_0, \chi_1 \in C^\infty$ com suportes em $(-\infty, 2)$ e $(1, \infty)$. Logo, segue por (4.21) que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{O}_{1,R}} \left[\tan^2 \theta |\partial_x \Pi_1 \phi|^2 + |\partial_y \Pi_1 \phi|^2 - 2R^{-2} W_R(x) |\Pi_1 \phi|^2 \right] dx dy \\ & \geq \int_{\mathcal{O}_{1,R}} \tan^2 \theta |\partial_x \Pi_1 \phi|^2 dx dy + \int_{\mathcal{O}_{1,R}} |\partial_y \Pi_1 \phi|^2 dx dy \\ & \quad - 2R^{-2} M \int_{\mathcal{O}_{1,R}} |\Pi_1 \phi|^2 dx dy \\ & \geq 4 \|\Pi_1 \phi\|_{\mathcal{O}_{1,R}}^2 - 2R^{-2} M \|\Pi_1 \phi\|_{\mathcal{O}_{1,R}}^2 \\ & = \left(4 - 2R^{-2} M \right) \|\Pi_1 \phi\|_{\mathcal{O}_{1,R}}^2. \end{aligned}$$

Agora, tomando $\varepsilon = 1$ em (4.20), obtemos

$$\begin{aligned} Q_{1,R}(\phi) & \geq Q_{1,R}(\Pi_0 \phi) + Q_{1,R}(\Pi_1 \phi) - \int_{\mathcal{O}_{1,R}} R^{-2} W_R(x) |\Pi_0 \phi|^2 dx dy \\ & \quad - \int_{\mathcal{O}_{1,R}} R^{-2} W_R(x) |\Pi_1 \phi|^2 dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathcal{O}_{1,R}} \left[\tan^2 \theta |\partial_x \Pi_0 \phi|^2 + |\partial_y \Pi_0 \phi|^2 - R^{-2} W_R(x) |\Pi_0 \phi|^2 \right] dx dy \\
&\quad + \int_{\mathcal{O}_{1,R}} \left[\tan^2 \theta |\partial_x \Pi_1 \phi|^2 + |\partial_y \Pi_1 \phi|^2 - R^{-2} W_R(x) |\Pi_1 \phi|^2 \right] dx dy \\
&\quad - \int_{\mathcal{O}_{1,R}} R^{-2} W_R(x) |\Pi_0 \phi|^2 dx dy - \int_{\mathcal{O}_{1,R}} R^{-2} W_R(x) |\Pi_1 \phi|^2 dx dy \\
&= \int_{\mathcal{O}_{1,R}} \left[\tan^2 \theta |\partial_x \Pi_0 \phi|^2 + |\partial_y \Pi_0 \phi|^2 - 2 R^{-2} W_R(x) |\Pi_0 \phi|^2 \right] dx dy \\
&\quad + \int_{\mathcal{O}_{1,R}} \left[\tan^2 \theta |\partial_x \Pi_1 \phi|^2 + |\partial_y \Pi_1 \phi|^2 - 2 R^{-2} W_R(x) |\Pi_1 \phi|^2 \right] dx dy \\
&\geq \int_{\mathcal{O}_{1,R}} \left[\tan^2 \theta |\partial_x \Pi_0 \phi|^2 + |\partial_y \Pi_0 \phi|^2 - 2 R^{-2} W_R(x) |\Pi_0 \phi|^2 \right] dx dy \\
&\quad + (4 - 2R^{-2} M) \|\Pi_1 \phi\|_{\mathcal{O}_{1,R}}^2.
\end{aligned}$$

Sabemos que $\Pi_0 \phi(x, y) = \Phi(x) \text{sen}(y)$,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{O}_{1,R}} \left[\tan^2 \theta |\partial_x \Phi(x) \text{sen } y|^2 + |\partial_y \Phi(x) \text{sen } y|^2 - 2 R^{-2} W_R(x) |\Phi(x) \text{sen } y|^2 \right] dx dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left[\tan^2 \theta |\partial_x \Phi(x)|^2 \left(\int_0^\pi \text{sen}^2 y dy \right) \right] dx + \int_{\mathbb{R}} \left[|\Phi(x)|^2 \left(\int_0^\pi \cos^2 y dy \right) \right] dx \\
&\quad - 2 R^{-2} \int_{\mathbb{R}} \left[W_R(x) |\Phi(x)|^2 \left(\int_0^\pi \text{sen}^2 y dy \right) \right] dx \\
&= \frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{R}} \left[\tan^2 \theta |\partial_x \Phi|^2 + |\Phi|^2 - 2 R^{-2} W_R(x) |\Phi|^2 \right] dx.
\end{aligned}$$

Portanto, considere $q_R(\Phi) := \frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{R}} \left[\tan^2 \theta |\partial_x \Phi|^2 + |\Phi|^2 - R^{-2} W_R(x) |\Phi|^2 \right] dx$ e observe que

$$Q_{1,R}(\phi) \geq q_R(\Phi) + (4 - 2R^{-2} M) \|\Pi_1 \phi\|_{\mathcal{O}_{1,R}}^2.$$

Note que, se tomarmos $R = \sqrt{M}$, teremos $4 - 2R^{-2}M = 2$. Como $-M \leq -W_R(x)$ para todo $x \in [R, 2R]$, definimos

$$\tilde{q}_R(\Phi) := \int_{\mathbb{R}} \left[\tan^2 \theta |\partial_x \Phi|^2 + |\Phi|^2 - R^{-2} M \mathbb{1}_{[R,2R]} |\Phi|^2 \right] dx. \quad (4.22)$$

E obtemos a desigualdade

$$Q_{1,R}(\phi) \geq \tilde{q}_R(\Phi) + 2 \|\Pi_1 \phi\|_{\mathcal{O}_{1,R}}^2. \quad (4.23)$$

Vale notar também que $\tilde{q}_R(\Phi)$ age em $H_0^1(R, \infty)$, enquanto $2 \|\Pi_1 \phi\|_{\mathcal{O}_{1,R}}^2$ age em $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{I}^\perp$.

Denote por \tilde{T}_R o operador unidimensional associado a forma quadrática \tilde{q}_R . Assim, por (4.22) e (4.23), temos que o j -ésimo quociente de Rayleigh de $T_{1,R}$ tem como limite inferior o j -ésimo quociente de Rayleigh do operador diagonal

$$\begin{pmatrix} \tilde{T}_R & 0 \\ 0 & 2\text{Id} \end{pmatrix}.$$

Então,

$$\mathcal{N}(Q_{1,R}, 1) \leq \mathcal{N}(\tilde{q}_R, 1) + \mathcal{N}(2\text{Id}, 1) = \mathcal{N}(\tilde{q}_R, 1).$$

Se mostrarmos que $\mathcal{N}(\tilde{q}_R, 1)$ é finito, concluímos a demonstração deste lema. Defina o operador unidimensional U , agindo em $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \infty)$, por

$$U\phi = -\tan^2 \theta \phi'' + V(x)\phi,$$

em que V é o potencial dado por

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in (\mathbb{R}, 2\mathbb{R}) \\ 1, & \text{se } x \in (2\mathbb{R}, \infty) \end{cases}.$$

Vamos dividir o intervalo (\mathbb{R}, ∞) em dois conjuntos: $I_1 = (\mathbb{R}, 2\mathbb{R})$ e $I_2 = (2\mathbb{R}, \infty)$, com os domínios associados:

- $D_{I_1} = \{\psi \in H^1(I_1) : \psi(\mathbb{R}) = 0\}$;
- $D_{I_2} = H^1(I_2)$.

Assim, temos que $U \leq -\Delta_{I_1}^{DN} \oplus (-\Delta_{I_2}^N + \text{Id}) := S$. De fato,

- $\text{dom}(U) \subseteq D_{I_1} \oplus D_{I_2}$;
- $S(\psi) = U(\psi)$, para todo $\psi \in \text{dom}(U)$.

Logo, como $U \leq S$, segue pelo Princípio Min-Máx que $\lambda_j(U) \leq \lambda_j(S)$. Portanto, como I_1 é limitado segue, como discutido no Lema 4.6, que $\mathcal{N}(-\Delta_{I_1}^{DN}, 1)$ é finito. Além disso, como $-\Delta_{I_2}^N + \text{Id} \geq 1$, então

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(S, 1) &\leq \mathcal{N}(-\Delta_{I_1}^{DN}, 1) + \mathcal{N}(-\Delta_{I_2}^N + \text{Id}, 1) \\ &= \mathcal{N}(-\Delta_{I_1}^{DN}, 1) \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Desse modo, concluímos o Lema 4.7, pois $\mathcal{N}(U, 1) = \mathcal{N}(Q_{1,R}, 1)$ é finito para $R \geq R_0 = \sqrt{M}$. ■

Com isso, também concluímos a Proposição 4.4, pois, pelo Lema 4.5, temos

$$\mathcal{N}(\tilde{Q}_\theta, 1) \leq \mathcal{N}(Q_{0,R}, 1) + \mathcal{N}(Q_{1,R}, 1).$$

E, pelos Lemas 4.6 e 4.7, temos que $\mathcal{N}(Q_{0,R}, 1)$ e $\mathcal{N}(Q_{1,R}, 1)$ são finitos, para todo $R \geq R_0 = \sqrt{M}$.

Portanto, para cada $\theta \in (0, \pi/2)$, o número de autovalores no espectro discreto do operador Laplaciano com condição de Dirichlet em Ω_θ é finito. ■

4.4 Relação dos autopares para ângulos pequenos

Proposição 4.8. $\mathcal{N}(-\Delta_{\Omega_\theta}^D, 1)$ cresce à medida que $\theta \rightarrow 0$.

Demonstração. Para qualquer caixa $\mathcal{Q} \subseteq \Omega_\theta$ como na Figura 4.5, temos, pelo Exemplo 1.64, que

$$\lambda_j(\theta) \leq \lambda_j(\mathcal{Q}), \quad j \in \mathbb{Z}_+,$$

em que $\lambda_j(\theta)$ e $\lambda_j(\mathcal{Q})$ são os quocientes de Rayleigh de $-\Delta_{\Omega_\theta}^D$ e $-\Delta_{\mathcal{Q}}^D$, respectivamente.

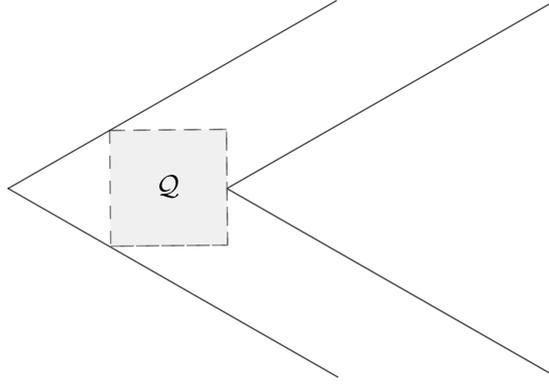


Figura 4.5: A faixa Ω_θ e uma caixa de Dirichlet \mathcal{Q} em seu interior.

Vamos escolher o retângulo \mathcal{Q} limitado pelas retas verticais $x_1 = -\alpha\pi$ e $x_1 = 0$ e pelas retas horizontais $x_2 = \pm\beta\pi$, em que α e β satisfazem

$$\alpha \in \left(0, \frac{1}{\sin \theta}\right) \quad \text{e} \quad \beta\pi = (-\alpha \sin \theta + 1) \frac{\pi}{\cos \theta}.$$

Desse modo, os autovalores do problema de Dirichlet em \mathcal{Q} são (ver Apêndice B)

$$\frac{k^2}{4\beta^2} + \frac{l^2}{\alpha^2}, \quad k, l \in \mathbb{Z}_+.$$

Já que estamos procurando os autovalores que são menores que 1, temos que α deve ser escolhido maior que 1 e, com isso,

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{-\alpha \sin \theta + 1}{\cos \theta} \\ &< \frac{-\sin \theta + 1}{\cos \theta} \\ &< 1. \end{aligned}$$

Consequentemente, devemos ter $k = 1$. Portanto, os $\lambda_j(\mathcal{Q})$ menores que 1 são da forma

$$\begin{aligned}\lambda_j(\mathcal{Q}) &= \frac{1}{4\beta^2} + \frac{j^2}{\alpha^2} \\ &= \frac{1}{4\left(\frac{-\alpha \operatorname{sen} \theta + 1}{\cos \theta}\right)^2} + \frac{j^2}{\alpha^2} \\ &= \frac{\cos^2 \theta}{4(1 - \alpha \operatorname{sen} \theta)^2} + \frac{j^2}{\alpha^2}.\end{aligned}$$

Agora, vamos otimizar \mathcal{Q} , isto é, vamos encontrar o mínimo de $\lambda_j(\mathcal{Q})$. Para isso, vamos analisar a equação

$$\frac{\operatorname{sen} \theta \cos^2 \theta}{2(1 - \alpha \operatorname{sen} \theta)^3} - \frac{2j^2}{\alpha^3} = 0.$$

Para θ suficientemente pequeno temos $\cos \theta \approx 1$. Sendo assim, passaremos a estudar a equação

$$\frac{\operatorname{sen} \theta}{2} = \frac{2j^2}{\alpha^3},$$

cujas soluções são $\alpha = 4^{\frac{1}{3}} j^{\frac{2}{3}} \operatorname{sen}^{-\frac{1}{3}} \theta$. Substituindo em $\lambda_j(\mathcal{Q})$, obtemos

$$\lambda_j(\mathcal{Q}) = \frac{1}{4} \left(\frac{\cos^2 \theta}{\left(1 - 4^{\frac{1}{3}} j^{\frac{2}{3}} \operatorname{sen}^{\frac{2}{3}} \theta\right)^2} + 4^{\frac{1}{3}} j^{\frac{2}{3}} \operatorname{sen}^{\frac{2}{3}} \theta \right).$$

Considerando $Z = 4^{\frac{1}{3}} j^{\frac{2}{3}} \operatorname{sen}^{\frac{2}{3}} \theta$, vemos que

$$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{(1 - Z)^2} + Z \right) = 1 \iff \begin{cases} Z_1 \cong 0,4679 \\ Z_2 \cong 1,6527 \\ Z_3 \cong 3,8793 \end{cases}.$$

Veja que a única raiz da equação que é menor que 1 é Z_1 . Assim, basta tomarmos $Z \leq 0,4679$ que obteremos $\lambda_j(\mathcal{Q}) < 1$. Como $Z = 4^{\frac{1}{3}} j^{\frac{2}{3}} \operatorname{sen}^{\frac{2}{3}} \theta$, temos que

$$j = Z^{\frac{3}{2}} 0,5 \operatorname{sen}^{-1} \theta.$$

Portanto o número máximo J , tal que $\lambda_J(\mathcal{Q}) < 1$, é maior que

$$0,4679^{\frac{3}{2}} 0,5 \operatorname{sen}^{-1} \theta \approx 1,601 \operatorname{sen}^{-1} \theta.$$

Fazendo $\theta \rightarrow 0$, temos que $J \rightarrow \infty$, ou seja, o número de autopares aumenta a medida que o ângulo diminui. ■

Capítulo 5

Número de autovalores discretos

Neste capítulo, discutiremos algumas características do espectro discreto do operador $-\Delta_{\Omega_\theta}^D$ para valores de θ próximos de $\pi/2$ e próximos de 0. Os resultados deste capítulo podem ser encontrados em [7] e [14].

5.1 Monotonicidade dos quocientes de Rayleigh em relação ao ângulo de abertura

Vamos relembrar a forma sesquilinear \tilde{b}_θ , associada ao operador T_θ , definida no Capítulo 4:

$$\tilde{b}_\theta(\psi, \varphi) = \int_{\tilde{\Omega}} \left[\tan^2 \theta |\partial_x \psi \partial_x \varphi| + |\partial_y \psi \partial_y \varphi| \right] dx dy, \quad (5.1)$$

em que $\text{dom } \tilde{b}_\theta$ é o subespaço

$$\mathcal{V} = \left\{ \psi \in H^1(\tilde{\Omega}) : \psi = 0 \text{ em } \partial_D \tilde{\Omega} \right\}.$$

Proposição 5.1. *Fixando um inteiro $j \geq 1$, a função $\theta \mapsto \lambda_j(\theta)$ é monótona não decrescente em $(0, \pi/2)$.*

Demonstração. Primeiramente, observe que, para cada $\theta \in (0, \pi/2)$, a região $\tilde{\Omega}$ e o domínio \mathcal{V} da forma sesquilinear \tilde{b}_θ definida por (5.1) não se alteram.

Agora, considerando $\theta \in (0, \pi/2)$, a aplicação $\theta \mapsto \tan^2 \theta$ é crescente. Consequentemente, se $\theta_1 \geq \theta_2$ então

$$\tilde{b}_{\theta_1}(\psi, \psi) \geq \tilde{b}_{\theta_2}(\psi, \psi), \quad \forall \psi \in \mathcal{V}.$$

Isso significa que, fixado $\psi \in \mathcal{V}$, $\theta \mapsto \tilde{b}_\theta(\psi, \psi)$ é monótona não decrescente.

Assim, pelo Corolário 1.63, temos que

$$\lambda_j(\theta_1) \geq \lambda_j(\theta_2), \quad \forall j \geq 1.$$

Portanto, $\theta \mapsto \lambda_j(\theta)$ também é monótona não decrescente. ■

5.2 Número de autovalores discretos para ângulos próximos de $\pi/2$

Nesta seção, iremos encontrar um intervalo de variação para θ de modo que o espectro discreto do operador $-\Delta_{\Omega_\theta}^D$ possua um único autovalor. De acordo com os resultados do Capítulo 4, a estratégia é estudar T_θ . A principal referência desta seção é [14].

Teorema 5.2. *Para todo $\theta \in [\arctan \sqrt{2/5}, \pi/2)$, têm-se $\mathcal{N}(T_\theta, 1) = 1$.*

Demonstração. Queremos investigar valores de θ de modo que T_θ possua apenas um autovalor discreto. A estratégia é a seguinte, suponha que $\lambda_1(\theta)$ e $\lambda_2(\theta)$ são autovalores discretos de T_θ . Logo, eles pertencem ao intervalo $(0, 1)$ e sabemos, pelo Princípio Máx-Min, que

$$\lambda_j(\theta) = \max_{E_j} \inf_{\substack{\psi \in E_j \\ \psi \neq 0}} \frac{\tilde{Q}_\theta(\psi)}{\|\psi\|^2}, \quad (5.2)$$

em que E_j denota qualquer subespaço de \mathcal{V} com codimensão $j - 1$, ou seja,

$$\text{codim } E_j := \dim(\mathcal{V} \setminus E_j) = j - 1, \quad j = 1, 2.$$

Em particular, observe que $\text{codim } E_1 = 0$ implica em $E_1 = \mathcal{V}$.

Considere o triângulo \mathcal{P} como na Figura 5.1.

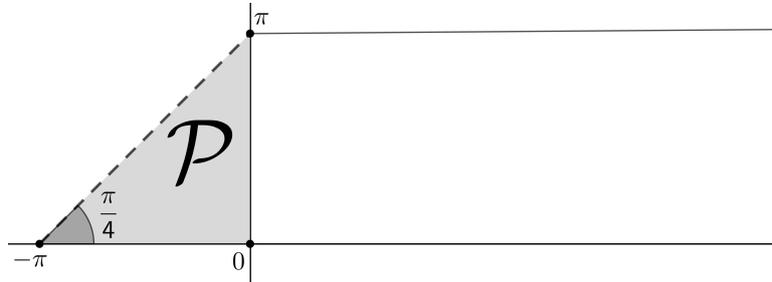


Figura 5.1: O triângulo \mathcal{P} .

Denote por \mathcal{L} o segmento $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \text{ e } x \in (-\pi, 0)\}$. Defina o operador

$$H_\theta := -\tan^2 \theta \partial_x^2 - \partial_y^2.$$

Vamos considerar o problema de autovalor auxiliar

$$\begin{cases} H_\theta \varphi = \mu \varphi, & \text{em } \mathcal{P} \\ \varphi = 0, & \text{em } \mathcal{L} \\ \partial_2 \varphi = 0, & \text{em } \partial \mathcal{P} \setminus \bar{\mathcal{L}} \end{cases}. \quad (5.3)$$

Sejam $\mu_1(\theta)$ e $\mu_2(\theta)$ os dois primeiros autovalores do problema (5.3) e φ_1^θ e φ_2^θ as autofunções correspondentes.

Observe que, no caso particular $\theta = \pi/4$, temos $H_{\pi/4} = -\Delta$. Ainda mais, pelas considerações do Apêndice B,

- $\mu_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ e $\varphi_1^{\frac{\pi}{4}}(x, y) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{y}{2}\right)$;
- $\mu_2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{2}$ e $\varphi_2^{\frac{\pi}{4}}(x, y) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{3y}{2}\right) + \cos\left(\frac{3x}{2}\right) \sin\left(\frac{y}{2}\right)$.

Vamos assumir, e demonstrar posteriormente, que $\mu_2(\theta) \geq 1$.

Consideremos o subespaço

$$\tilde{E}_1 = \left\{ \psi \in \mathcal{V} : \int_{\mathcal{P}} \varphi_1^\theta \psi \, dx dy = 0 \right\}.$$

Quando $\psi \in \mathcal{V}$, vamos denotar por φ a sua restrição em \mathcal{P} . Observemos que, para cada $\varphi \in \mathcal{C} := \{\phi \in H^1(\mathcal{P}) : \phi = 0 \text{ em } \mathcal{L}\}$ tal que $\int_{\mathcal{P}} \varphi_1^\theta \varphi \, dx dy = 0$, tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{P}} |\varphi|^2 \, dx dy &\leq \mu_2(\theta) \int_{\mathcal{P}} |\varphi|^2 \, dx dy \\ &\leq \int_{\mathcal{P}} \left[\tan^2 \theta |\varphi_x|^2 + |\varphi_y|^2 \right] \, dx dy. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Por outro lado, para cada $\psi \in \mathcal{V}$,

$$\int_{\tilde{\Omega} \setminus \mathcal{P}} |\psi|^2 \, dx dy \leq \int_{\tilde{\Omega} \setminus \mathcal{P}} \left[\tan^2 \theta |\psi_x|^2 + |\psi_y|^2 \right] \, dx dy. \tag{5.5}$$

Desse modo, por (5.4) e (5.5), obtemos

$$\int_{\tilde{\Omega}} |\psi|^2 \, dx dy \leq \int_{\tilde{\Omega}} \left[\tan^2 \theta |\psi_x|^2 + |\psi_y|^2 \right] \, dx dy, \quad \forall \psi \in \tilde{E}_1. \tag{5.6}$$

Assim, já que $\text{codim } \tilde{E}_1 = 1$, segue por (5.2) que

$$\lambda_2(\theta) \geq \inf_{\substack{\varphi \in \tilde{E}_1 \\ \varphi \neq 0}} \frac{\tilde{Q}_\theta(\varphi)}{\|\varphi\|^2} \geq 1.$$

Portanto, $\lambda_1(\theta)$ é o único autovalor no intervalo $(0, 1)$.

Agora, para finalizarmos esta demonstração, vamos estimar valores de θ de modo que $\mu_2(\theta) \geq 1$. Lembremos, pelo Princípio Máx-Min, que

$$\mu_2(\theta) = \max_{\varphi \in F_2} \inf_{\substack{\varphi \in F_2 \\ \varphi \neq 0}} \frac{\int_{\mathcal{P}} \left[\tan^2 \theta |\varphi_x|^2 + |\varphi_y|^2 \right] \, dx dy}{\|\varphi\|^2},$$

em que F_2 denota qualquer subespaço de \mathcal{C} com codimensão 1. Observe que

$$\begin{aligned}
\frac{5}{2} &= \mu_2\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \max_{\varphi \in F_2} \inf_{\substack{\varphi \in F_2 \\ \varphi \neq 0}} \frac{\int_{\mathcal{P}} \left[|\varphi_x|^2 + |\varphi_y|^2 \right] dx dy}{\|\varphi\|^2} \\
&\leq \max\{\cot^2 \theta, 1\} \max_{\varphi \in F_2} \inf_{\substack{\varphi \in F_2 \\ \varphi \neq 0}} \frac{\int_{\mathcal{P}} \left[\tan^2 \theta |\varphi_x|^2 + |\varphi_y|^2 \right] dx dy}{\|\varphi\|^2} \\
&= \max\{\cot^2 \theta, 1\} \mu_2(\theta).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mu_2(\theta) \geq \frac{5}{2} \min\{\tan^2 \theta, 1\}. \quad (5.7)$$

Logo, pela desigualdade (5.7), vemos que se $\theta \in \left[\arctan \sqrt{2/5}, \pi/2 \right)$, então $\mu_2(\theta) \geq 1$. O que conclui a demonstração do resultado. ■

5.3 Número de autovalores discretos para ângulos pequenos

Esta seção possui a mesma finalidade da Seção 4.4. Mas aqui vamos explicitar a taxa de crescimento do número de autovalores discretos em relação ao ângulo de abertura. A principal referência desta seção é [14].

Através de mudanças de variáveis similares ao Apêndice A, será mais conveniente trabalharmos com a forma quadrática

$$a_\theta(\psi) = \int_{\Gamma_\theta} \left[|\psi_x|^2 + |\psi_y|^2 \right] dx dy$$

agindo na região

$$\Gamma_\theta = \left\{ (x, y) \in (0, \infty) \times (0, \pi) : y < x \tan \theta, \text{ se } x \in \left(0, \frac{\pi}{\tan \theta} \right) \right\}.$$

Veja a Figura 5.2.

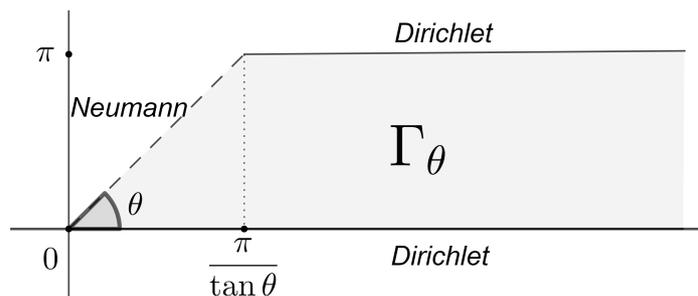


Figura 5.2: A região Γ_θ e suas condições de fronteira.

Considere A_θ o operador autoadjunto associado a forma quadrática a_θ em Γ_θ .

Usaremos o seguinte resultado auxiliar.

Lema 5.3. *Se existe um subespaço $\mathcal{G}_p \subseteq \text{dom } a_\theta$ de dimensão p tal que*

$$\frac{a_\theta(\psi)}{\|\psi\|^2} < 1, \quad \forall \psi \in \mathcal{G}_p,$$

então $\mathcal{N}(A_\theta, 1) \geq p$.

Demonstração. Para verificar o resultado, basta lembrarmos a definição dos quocientes de Rayleigh associados ao operador A_θ que, pelo Lema 1.62, podem ser escritos na forma

$$\lambda_j(\theta) = \inf_{\substack{E \subseteq \text{dom } a_\theta \\ \dim E = j}} \sup_{\substack{\psi \in E \\ \psi \neq 0}} \frac{a_\theta(\psi)}{\|\psi\|^2}.$$

■

Teorema 5.4. *Para cada $\varepsilon > 0$ e θ suficientemente pequeno, tem-se*

$$\mathcal{N}(A_\theta, 1) > \frac{\kappa}{\theta} - \frac{3}{4},$$

em que

$$\kappa = \frac{1}{6} \left(\frac{2(\sqrt{55} - 5)}{3(1 + \varepsilon)} \right)^{\frac{3}{2}} \approx \frac{0,3407}{(1 + \varepsilon)^{\frac{3}{2}}}.$$

Demonstração. Inicialmente, vamos construir um subespaço $\mathcal{G}_p \subseteq \text{dom } a_\theta$, de dimensão p , de acordo com o Lema 5.3. Considere o setor circular

$$S_\theta := \{(r, \varphi) : 0 < r < \pi/\theta \text{ e } 0 < \varphi < \theta\}.$$

Observe que $S_\theta \subseteq \Gamma_\theta$, uma vez que $1/\theta < 1/\text{sen } \theta$. Veja a Figura 5.3.

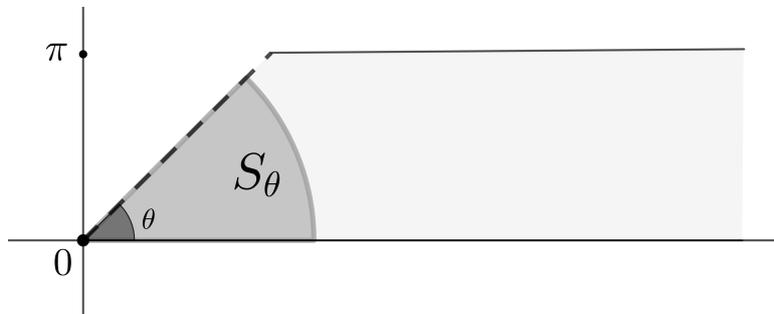


Figura 5.3: O setor circular S_θ contido na região Γ_θ .

Usaremos as notações a seguir para facilitar:

- $R = \{s : 0 < r < \pi/\theta \text{ e } \varphi = 0\} \cup \{s : r = \pi/\theta \text{ e } 0 < \varphi < \theta\}$;

- $C = \{s : 0 < r < \pi/\theta \text{ e } \varphi = \theta\}$.

Assim, vamos considerar o seguinte problema em S_θ :

$$\begin{cases} -\Delta\psi = \mu\psi, & \text{em } S_\theta \\ \psi = 0, & \text{em } R \\ \partial_2\psi = 0, & \text{em } C \end{cases}.$$

Tal problema pode ser visto geometricamente através da figura abaixo.

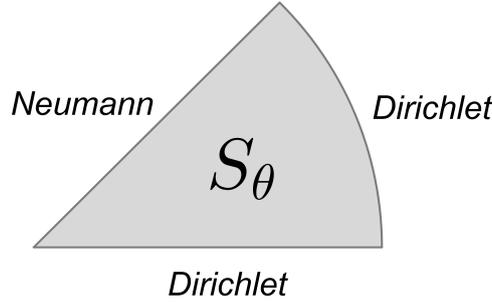


Figura 5.4: A região S_θ e suas condições de fronteira.

De acordo com as considerações do Apêndice B, dentre as autofunções do problema acima vamos selecionar as seguintes:

$$g_n(s) = \frac{\text{sen}(\eta\varphi)}{\pi} J_\eta\left(\frac{r}{\pi}\sqrt{\mu_n}\right),$$

$$\eta = \frac{\pi}{2\theta},$$

em que J_η denotam a função de Bessel, e os valores μ_n , $n = 1, 2, \dots, p$, são escolhidos de modo que

$$J_\eta\left(\frac{\sqrt{\mu_n}}{\theta}\right) = 0. \quad (5.8)$$

Agora, devemos estimar o número de valores μ_n satisfazendo (5.8) e a desigualdade $\mu < 1$.

Observe que a condição dada por (5.8) significa que $\sqrt{\mu_n}/\theta$ é o n -ésimo zero da função de Bessel de ordem η , o qual iremos denotar por $J_{\eta,n}$.

Já é um fato conhecido de que o comportamento das funções de Bessel de ordem maior está conectado com as funções de Airy. Nesse caso, de acordo com [10],

$$J_{\eta,n} < \eta + \beta_n \eta^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{10} \beta_n^2 \eta^{-\frac{1}{3}}, \quad (5.9)$$

em que

$$\beta_n = -b_n 2^{-\frac{1}{3}} \quad (5.10)$$

e b_n é o n -ésimo zero da função de Airy $Ai(b)$.

Para n suficientemente grande, de acordo com [1], temos

$$b_n = -f\left(\frac{3\pi}{2}\left(n - \frac{1}{4}\right)\right), \quad (5.11)$$

em que

$$f(z) \sim z^{\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{5}{48} \frac{1}{z^2} - \frac{5}{36} \frac{1}{z^4} + O\left(\frac{1}{z^6}\right) \right). \quad (5.12)$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$,

$$f(z) < z^{\frac{2}{3}}(1 + \varepsilon),$$

para todo z suficientemente grande. Considere

$$M = \frac{\kappa}{\theta} + \frac{1}{4}, \quad m = [M],$$

em que $[M]$ denota a parte inteira de M . Temos que $m < M$ e

$$m > \frac{\kappa}{\theta} - \frac{3}{4}. \quad (5.13)$$

De acordo com (5.10), (5.11) e (5.12),

$$\begin{aligned} \beta_m &= -b_m 2^{-\frac{1}{3}} \\ &= f\left(\frac{3\pi}{2} \left(m - \frac{1}{4}\right)\right) 2^{-\frac{1}{3}} \\ &< \left(\frac{3\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \left(m - \frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}} 2^{-\frac{1}{3}} (1 + \varepsilon) \\ &< \left(\frac{3\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \left(M - \frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}} 2^{-\frac{1}{3}} (1 + \varepsilon) \\ &= \left(\frac{3\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\kappa}{\theta}\right)^{\frac{2}{3}} 2^{-\frac{1}{3}} (1 + \varepsilon) \\ &= \left(\frac{3\pi}{2\theta}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{1}{6} \left(\frac{2}{3(1+\varepsilon)} (\sqrt{55} - 5)\right) (1 + \varepsilon) 2^{-\frac{1}{3}} \\ &= \left(\frac{3\pi}{6\theta}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{(\sqrt{55} - 5)}{3} \\ &= \left(\frac{\pi}{2\theta}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{(\sqrt{55} - 5)}{3} \\ &= \eta^{\frac{2}{3}} \frac{(\sqrt{55} - 5)}{3}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Finalmente, por (5.9) e (5.14),

$$J_{\eta, m} < \eta + \eta \frac{(\sqrt{55} - 5)}{3} + \eta \frac{3}{10} \frac{(\sqrt{55} - 5)^2}{9} = 2\eta.$$

Assim, $J_{\eta, m} < 1$ para todo θ suficientemente pequeno. Para finalizar, observe que, pela Equação (5.13), m aumenta à medida que o θ diminui. ■

Apêndice

A Mudança de variáveis na forma quadrática

Relembre a forma quadrática dada por

$$Q_{\theta}^{+}(\psi) = \int_{\Omega_{\theta}^{+}} \left[|\psi_{x_1}|^2 + |\psi_{x_2}|^2 \right] dx_1 dx_2,$$

$$\text{dom } Q_{\theta}^{+} = \{ \psi \in H^1(\Omega_{\theta}^{+}) : \psi = 0 \text{ em } \partial_D \Omega_{\theta}^{+} \}.$$

Inicialmente, perceba que a região Ω_{θ}^{+} (Figura A.1) depende fortemente de θ . Logo, através do Teorema de Mudança de Variáveis, iremos transferir essa dependência da abertura para a expressão da forma quadrática e trabalhar com uma região fixa.

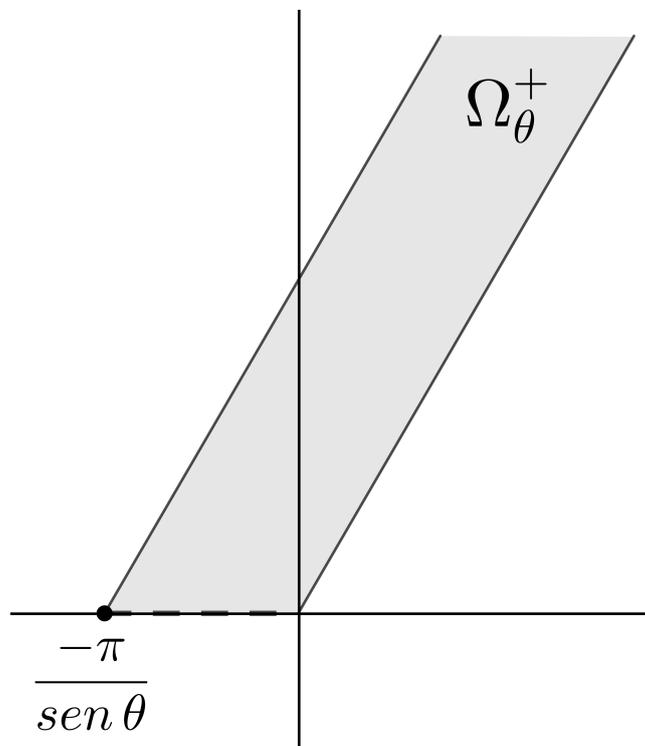


Figura A.1: A região Ω_{θ}^{+} .

Vamos fazer a mudança da região seguindo os passos:

1º. Reflexão sobre o eixo x_1 : $(x_1, x_2) \mapsto (x_1, -x_2)$.

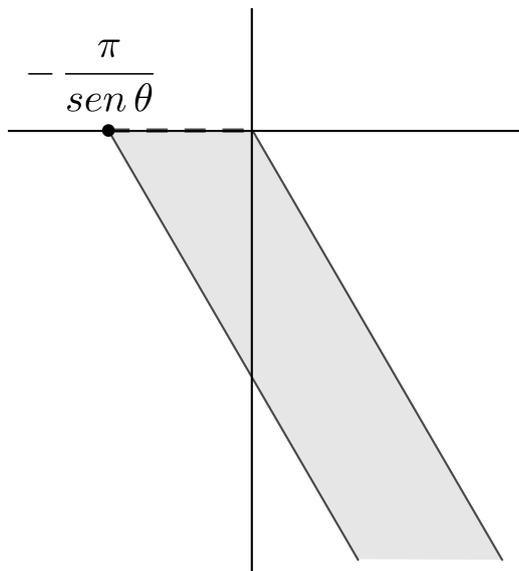


Figura A.2: A região após o passo 1.

2º. Rotação por θ : $(x_1, -x_2) \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$.

Ou seja, $(x_1, -x_2) \mapsto (x_1 \cos \theta + x_2 \text{sen } \theta, x_1 \text{sen } \theta - x_2 \cos \theta)$

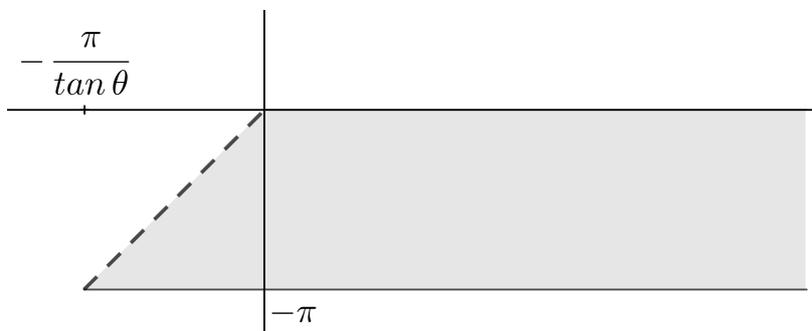


Figura A.3: A região após os passos 1 e 2.

3º. Translação por π em x_2 : $(x_1 \cos \theta + x_2 \text{sen } \theta, x_1 \text{sen } \theta - x_2 \cos \theta) \mapsto (\tilde{x}, \tilde{y})$, em que

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) := (x_1 \cos \theta + x_2 \text{sen } \theta, x_1 \text{sen } \theta - x_2 \cos \theta) + (0, \pi).$$

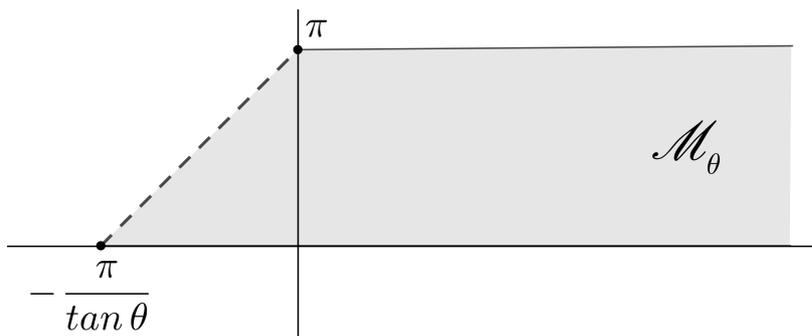


Figura A.4: A região \mathcal{M}_θ resultante dos passos 1, 2 e 3.

4º. Dilatação por $\tan \theta$ em x_1 : $(\tilde{x}, \tilde{y}) \mapsto (\tan^2 \theta \tilde{x}, \tilde{y})$

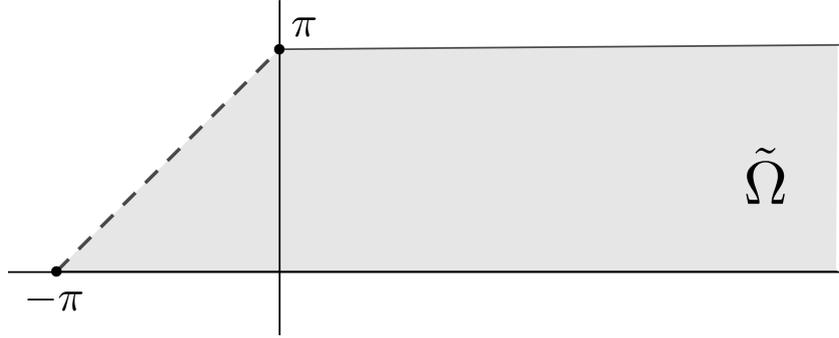


Figura A.5: A região $\tilde{\Omega}$.

Assim, podemos descrever a região $\tilde{\Omega}$ por

$$\tilde{\Omega} := \Omega_{\frac{\pi}{4}} = \left\{ (x, y) \in (-\pi, \infty) \times (0, \pi) : y < x + \pi, \text{ se } x \in (-\pi, 0) \right\}.$$

Considere $\partial_D \tilde{\Omega}$ como sendo a união das fronteiras horizontais de $\tilde{\Omega}$ como na Figura A.6.

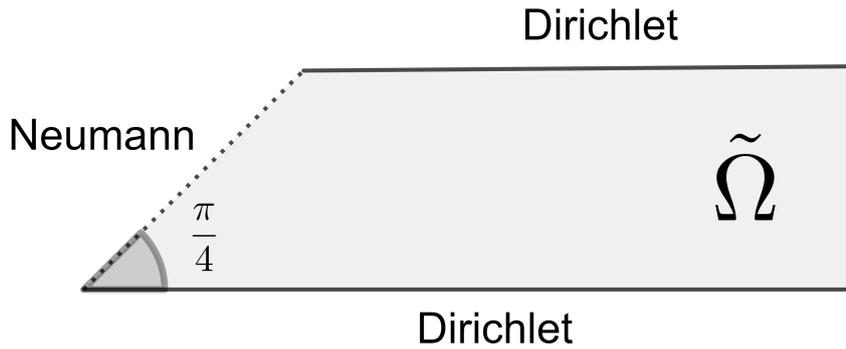


Figura A.6: Região $\tilde{\Omega} := \Omega_{\frac{\pi}{4}}$ e suas condições de fronteira.

Definimos a transformação $F^{-1}: \Omega_{\theta}^+ \rightarrow \tilde{\Omega}$ por

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \text{sen } \theta & \frac{\text{sen}^2 \theta}{\cos \theta} \\ \text{sen } \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \end{pmatrix}.$$

Observe que J^{-1} , a matriz Jacobiana de F^{-1} , é

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} \text{sen } \theta & \text{sen } \theta \\ \frac{\text{sen}^2 \theta}{\cos \theta} & -\cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \det J^{-1} = -\tan \theta.$$

Para $\psi \in V$,

$$J^{-1} \nabla \psi = \begin{pmatrix} \text{sen } \theta & \text{sen } \theta \\ \frac{\text{sen}^2 \theta}{\cos \theta} & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_x \\ \psi_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_x \text{sen } \theta + \psi_y \text{sen } \theta \\ \psi_x \frac{\text{sen}^2 \theta}{\cos \theta} - \psi_y \cos \theta \end{pmatrix}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
|J^{-1}\nabla\psi|^2 &= \operatorname{sen}^2\theta |\psi_x|^2 + 2 \operatorname{sen}^2\theta \psi_x \psi_y + \operatorname{sen}^2\theta |\psi_y|^2 \\
&\quad + \frac{\operatorname{sen}^4\theta}{\operatorname{cos}^2\theta} |\psi_x|^2 - 2 \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{cos}\theta} \operatorname{cos}\theta \psi_x \psi_y + \operatorname{cos}^2\theta |\psi_y|^2 \\
&= \left(\operatorname{sen}^2\theta + \frac{\operatorname{sen}^4\theta}{\operatorname{cos}^2\theta} \right) |\psi_x|^2 + (\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{cos}^2\theta) |\psi_y|^2 \\
&= \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{cos}^2\theta} |\psi_x|^2 + |\psi_y|^2 \\
&= \tan^2\theta |\psi_x|^2 + |\psi_y|^2.
\end{aligned}$$

Assim, segue pelo Teorema de Mudanças de Variáveis que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_\theta^+} |\nabla\psi(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 &= \int_{\tilde{\Omega}} |J^{-1}\nabla\psi|^2 |\det J| dx dy \\
&= \int_{\tilde{\Omega}} \left[(\tan^2\theta |\psi_x|^2 + |\psi_y|^2) \frac{1}{\tan\theta} \right] dx dy.
\end{aligned}$$

Com isso, obtemos a forma

$$\int_{\tilde{\Omega}} \left[(\tan^2\theta |\psi_x|^2 + |\psi_y|^2) \frac{1}{\tan\theta} \right] dx dy.$$

agindo em $\mathcal{L}^2(\tilde{\Omega}, 1/\tan\theta dx dy)$. Agora, considerando a aplicação $\psi \mapsto \sqrt{\tan\theta} \psi$, obtemos a forma quadrática

$$Q(\psi) = \int_{\tilde{\Omega}} \left[\tan^2\theta |\psi_x|^2 + |\psi_y|^2 \right] dx dy,$$

agindo em $\mathcal{L}^2(\tilde{\Omega})$ com a medida usual. Logo, podemos descrever a forma sesquilinear associada à Q :

$$b_\theta(\psi, \varphi) = \int_{\tilde{\Omega}} \left[\tan^2\theta |\partial_x\psi \partial_x\varphi| + |\partial_y\psi \partial_y\varphi| \right] dx dy,$$

com domínio

$$V = \left\{ \psi \in H^1(\tilde{\Omega}) : \psi = 0 \text{ em } \partial_D \tilde{\Omega} \right\}.$$

Definição. Considere \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 espaços de Hilbert.

- Uma função bijetora $U : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ é dita *transformação unitária* se satisfaz:

$$\langle Ux, Uy \rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle x, y \rangle_{\mathcal{H}_1}, \quad \forall x, y \in \mathcal{H}_1.$$

- Operadores T e \tilde{T} são ditos *unitariamente equivalentes* se existe uma transformação unitária U de modo que $T = U\tilde{T}U^{-1}$.

Observação. Se dois operadores autoadjuntos são unitariamente equivalentes, então eles possuem o mesmo espectro.

Considere T_θ como o operador autoadjunto associado a forma sesquilinear b_θ em $\tilde{\Omega}$. Como todas as transformações que utilizamos nas mudanças de variáveis são unitárias segue que os espectros de $-\Delta_{\Omega_\theta^+}^{DN}$ e T_θ coincidem.

Observação. Seguindo os passos da mudança de região acima até o 3º passo, obtemos \mathcal{M}_θ . Assim, se realizarmos a translação

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\theta &\longrightarrow \Gamma_\theta \\ (a, b) &\longmapsto \left(a + \frac{\pi}{\tan \theta}, b\right), \end{aligned}$$

obtemos a região Γ_θ introduzida no Capítulo 5.

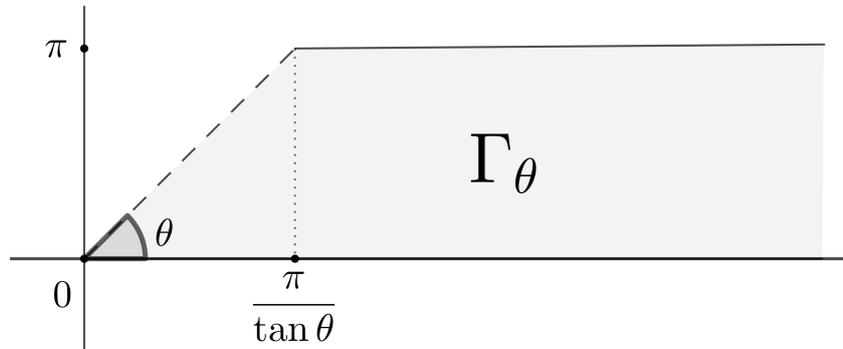


Figura A.7: Região Γ_θ .

B Os autovalores do Laplaciano de Dirichlet

Considere um subconjunto aberto e limitado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. O *problema de autovalor* para o operador Laplaciano em Ω consiste em encontrar todos os valores $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que a equação

$$-\Delta\psi = \lambda\psi$$

admite soluções não triviais, com alguma condição de fronteira imposta sobre ψ . Aqui consideraremos o problema de autovalor com condição de Dirichlet, isto é,

$$\begin{cases} -\Delta\psi = \lambda\psi, & \text{em } \Omega \\ \psi = 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}.$$

No caso unidimensional, temos o seguinte exemplo:

Exemplo B.1. O problema de autovalor do Laplaciano com condição de Dirichlet em $I = (0, l)$ pode ser descrito por

$$\begin{cases} -\psi'' = \lambda\psi, & \text{em } I \\ \psi(0) = \psi(l) = 0 \end{cases}.$$

Assim, os autovalores são da forma

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

com as autofunções correspondentes

$$\psi_n(x) = \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{l} \right), \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Para o caso bidimensional, temos os exemplos:

Exemplo B.2. Os autovalores do Laplaciano de Dirichlet no retângulo $R = (a, b) \times (c, d)$

$$\begin{cases} -(\psi_{xx} + \psi_{yy}) = \lambda\psi, & \text{em } R \\ \psi = 0, & \text{em } \partial R \end{cases}$$

são

$$\lambda_{nm} = \frac{n^2 \pi^2}{(b-a)^2} + \frac{m^2 \pi^2}{(d-c)^2}, \quad n, m \in \mathbb{Z}_+.$$

E as autofunções correspondentes são

$$\psi_{nm}(x, y) = \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{(b-a)} \right) \text{sen} \left(\frac{m\pi y}{(d-c)} \right), \quad n, m \in \mathbb{Z}_+.$$

Exemplo B.3. Para o caso do círculo, utilizamos as coordenadas polares. Assim, o problema de autovalor do Laplaciano de Dirichlet em $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < R\}$ pode ser dado por

$$\begin{cases} -\left(\psi_{rr} + \frac{1}{r}\psi_r + \frac{1}{r^2}\psi_{\theta\theta}\right) = \lambda\psi, & \text{se } 0 < r < R \text{ e } 0 < \theta < 2\pi \\ \psi = 0, & \text{se } r = R \text{ e } 0 < \theta < 2\pi \end{cases}.$$

Usando o método de separação de variáveis, alguns cálculos mostram que

$$\lambda_{nm} = \left(\frac{\alpha_{n,m}}{R} \right)^2, \quad n \in \mathbb{N} \text{ e } m \in \mathbb{Z}_+,$$

em que $\alpha_{n,m}$ é o m -ésimo zero positivo da *função de Bessel* do primeiro tipo J_n

$$J_n(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{r}{2} \right)^{2k+n}.$$

E as autofunções correspondentes são dadas por

$$\psi_{0m}(r, \theta) = J_0(\lambda_{0m}r),$$

$$\psi_{nm}^1(r, \theta) = \cos(n\theta) J_n(\lambda_{nm}r) \quad \text{e} \quad \psi_{nm}^2(r, \theta) = \text{sen}(n\theta) J_n(\lambda_{nm}r).$$

Observe que, para $m \in \mathbb{Z}_+$, existem duas autofunções distintas para o mesmo autovalor. Assim, esses autovalores possuem multiplicidade no mínimo igual a 2.

No caso do problema relacionado a Figura 5.4, a estratégia é similar.

Exemplo B.4. Relembre o problema de autovalores na região \mathcal{P} considerado na Seção 5.2 (veja Figura 5.1). Por simetria, construímos o quadrado $\mathcal{Q} := (-\pi, 0) \times (0, \pi)$, como na figura abaixo, e o problema de autovalores do Laplaciano com as condições de contorno citadas.

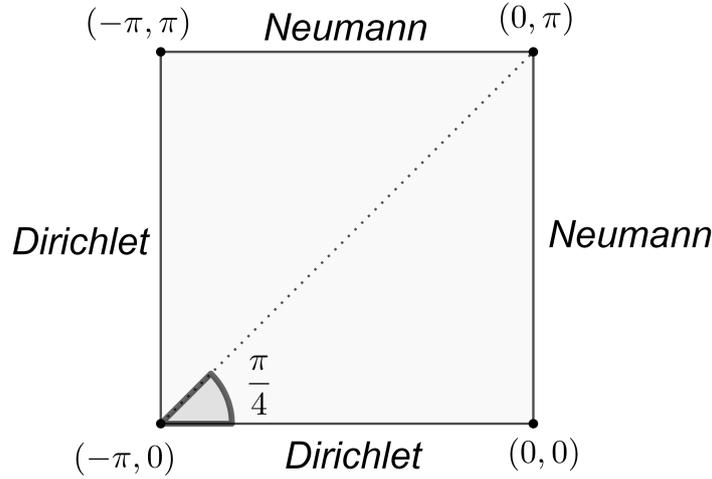


Figura B.1: A região \mathcal{Q} e suas condições de fronteira.

Os autovalores do problema de autovalores em \mathcal{P} coincidem com os autovalores do problema em \mathcal{Q} . Para facilitar, vamos assumir a notação:

- $H_1 = \{(x, y) : y = \pi \text{ e } x \in (-\pi, 0)\}$;
- $H_2 = \{(x, y) : y = 0 \text{ e } x \in (-\pi, 0)\}$;
- $V_1 = \{(x, y) : x = -\pi \text{ e } y \in (0, \pi)\}$;
- $V_2 = \{(x, y) : x = 0 \text{ e } y \in (0, \pi)\}$.

Assim, o problema de autovalor do Laplaciano de Dirichlet-Neumann é dado por

$$\begin{cases} -(\psi_{xx} + \psi_{yy}) = \lambda\psi, & \text{em } \mathcal{Q} \\ \psi = 0, & \text{em } H_2 \text{ e } V_1 \\ \partial_2\psi = 0, & \text{em } H_1 \text{ e } V_2 \end{cases} .$$

Os autovalores são

$$\lambda_{nm} = \frac{(1 + 2n)^2 + (1 + 2m)^2}{4}, \quad n, m \in \mathbb{Z}_+.$$

E as autofunções correspondentes são

$$\psi_{nm}(x) = \cos\left(\frac{1 + 2n}{2}x\right) \text{sen}\left(\frac{1 + 2m}{2}y\right), \quad n, m \in \mathbb{Z}_+.$$

Para mais detalhes sobre autovalores do Laplaciano indicamos [2].

Referências Bibliográficas

- [1] Abramowitz, M.; Stegun, I. A. *Handbook of mathematical functions*. 10ed. NBS, 1972.
- [2] Asmar, N. *Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems*. 2ed. New Jersey: Pearson Prentice Hall, 2004.
- [3] Avishai, Y.; Bessis, D.; Giraud, B. G.; Mantica G. *Quantum bound states in open geometries*. Phys. Rev. B **44**, 8028-8034, 1991.
- [4] Baiocchi, C; Capelo, A. *Variational and Quasivariational Inequalities: Applications to Free Boundary Problems*. Chichester: J. Wiley Sons, 1984.
- [5] Birman M. S.; Solomyak, M. Z. *Spectral-theory of self-adjoint operators in Hilbert space*. Dordrecht: D. Reidel Publishing, 1987.
- [6] Cycon, H. L.; R. G. Froese; W. Kirsch; B. Simon. *Schrödinger Operators: With Applications to Quantum Mechanics and Global Geometry*. Berlin, Springer, 1987.
- [7] Dauge, M.; Lafranche, Y.; Raymond, N. *Quantum waveguides with corners*. ESAIM Proc. **35**, 14-45, 2012.
- [8] de Oliveira, C. R. *Intermediate Spectral Theory and Quantum dynamics*. Birkhäuser Basel, 2008.
- [9] Duclos, P.; Exner P. *Curvature-induced bound states in quantum waveguides in two and three dimensions*. Rev. Math. Phys. **07**, 73-102, 1995.
- [10] Elbert, A. *Some recent results on the zeros of Bessel functions and orthogonal polynomials*. J. Comput. Appl. Math. **133**, 65-83, 2001.
- [11] Evans, L. C. *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics, 19, AMS, 1998.
- [12] Exner P.; Seba P. *Bound states in curved quantum waveguides*. J. Math. Phys. **30**, 2574-2580, 1989.

- [13] Krejčířík, D.; Kříž, J. *On the spectrum of curved planar waveguides*. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **41**, 757-791, 2005.
- [14] Nazarov, S. A.; Shanin, A. V. *Trapped modes in angular joints of 2D waveguides*. Appl. Anal. **93**(3), 572-582, 2014.
- [15] Reed, M.; Simon, B. *Methods of Modern Mathematical Physics, I: Functional Analysis*. New York: Academic Press, 1972.