

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

**MODELOS PARA A ESTIMATIVA DA RESISTÊNCIA  
CARACTERÍSTICA À TRAÇÃO INCLINADA DE MADEIRAS  
FOLHOSAS**

**João Paulo Boff Almeida**

São Carlos  
2022

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

**MODELOS PARA A ESTIMATIVA DA RESISTÊNCIA  
CARACTERÍSTICA À TRAÇÃO INCLINADA DE MADEIRAS  
FOLHOSAS**

**João Paulo Boff Almeida**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de São Carlos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil

**Área de Concentração:** Estruturas e Geotecnia

**Orientador:** Prof. Dr. André Luis Christoforo

**Co-orientador:** Prof. Dr. Francisco Antonio Rocco Lahr

São Carlos  
2022



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

---

**Folha de Aprovação**

---

Defesa de Tese de Doutorado do candidato João Paulo Boff Almeida, realizada em 13/04/2022.

**Comissão Julgadora:**

Prof. Dr. Andre Luis Christoforo (UFSCar)

Profa. Dra. Fernanda Giannotti da Silva Ferreira (UFSCar)

Prof. Dr. Eduardo Chahud (UFMG)

Prof. Dr. Maximiliano dos Anjos Azambuja (FEFEB)

Profa. Dra. Cristiane Inácio de Campos (UNESP)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.

## AGRADECIMENTOS

---

Agradeço a Deus pelo dom da vida, pelas oportunidades a mim concedidas e por providenciar tudo neste período de pós-graduação. Glórias e louvores a Ti, Senhor.

À minha mãe Praxedes Boff, minha irmã Carmelice Boff de Almeida, meu cunhado Evandro Luiz Schoninger e minha noiva Camila Raquel de Lacerda, pelo exemplo, apoio e incentivo. Grato a vocês por possibilitarem essa conquista.

Ao meu orientador Prof. Dr. André Luis Christoforo e ao meu co-orientador Prof. Dr. Francisco Antonio Rocco Lahr, por toda atenção, carinho e conhecimento a mim transmitido. Grato a Deus pela amizade que construímos.

À Profa. Dra. Fernanda Giannotti da Silva Ferreira, ao Prof. Dr. Eduardo Chahud, ao Prof. Dr. Maximiliano dos Anjos Azambuja e a Profa. Dra. Cristiane Inácio de Campos pela disponibilidade em participarem da banca de defesa deste trabalho. Agradeço-os imensamente por toda contribuição. Que Deus os abençoe grandemente.

A todos do Laboratório de Madeiras e Estruturas de Madeiras (LaMEM - USP), em especial aos técnicos Sílvio e Jaime, que foram essenciais na realização da parte experimental deste trabalho. Grato por todo auxílio.

A todos os amigos que conheci em São Carlos, em especial aos amigos do PPGE Civ, da Paróquia Nossa Senhora do Carmo e do Ministério Universidades Renovadas (MUR). Grato pelas partilhas e orações. Louvado seja Deus pela vida de cada um.

Aos eternos amigos do Mato Grosso, pelo carinho, apoio, e por torcerem de longe para a realização dessa conquista.

Por fim, agradeço ao PPGE Civ pela oportunidade em cursar a pós-graduação e à CAPES pela concessão da bolsa de estudo. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – nº Processo: 88887.484245/2020-00.

## RESUMO

ALMEIDA, J. P. B. **Modelos para a estimativa da resistência característica à tração inclinada de madeiras folhosas**. 2022. 95f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Universidade Federal de São Carlos. São Carlos, 2022.

Devido as características anisotrópicas, a madeira apresenta desempenho mecânico distinto quando solicitada nas direções longitudinal, radial e tangencial. Em projetos estruturais, considera-se a direção longitudinal como paralela ( $0^\circ$ ) e as demais direções como normais às fibras ( $90^\circ$ ). No Brasil, o documento normativo NBR 7190 (ABNT, 1997) estabelece os métodos de ensaio para a obtenção das propriedades de resistência nas direções paralela ( $f_0$ ) e normal ( $f_{90}$ ) às fibras da madeira. Para tanto, adota-se formulações advindas da teoria da resistência dos materiais, desenvolvida para materiais isotrópicos. A estimativa das propriedades de resistência em direções intermediárias (solicitações inclinadas,  $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ) pode ser realizada por meio de modelos empíricos ou critérios de falha (modelos matemáticos) desenvolvidos para materiais anisotrópicos. Tais critérios, como o de Tsai e Wu (1971) e o de Tsai-Hill (Azzi e Tsai, 1965), por não serem conhecidos pelo meio técnico, são pouco utilizados para prever a falha da madeira. Por outro lado, os modelos empíricos, ajustados em função do expoente  $n$  dos termos trigonométricos, têm sido desenvolvidos e incorporados em diversos documentos normativos. Dentre tais, a NBR 7190 (ABNT, 1997) prescreve a adoção do modelo empírico de Hankinson (1921) para a estimativa de solicitações normais inclinadas ( $\theta > 6^\circ$ ). Por ter sido desenvolvido a partir de ensaios de compressão em madeiras coníferas, o modelo de Hankinson (1921), na sua forma original (expoente  $n = 2$ ), pode não ser um bom estimador da resistência característica à tração inclinada ( $f_{t\theta,k}$ ) de madeiras folhosas. Nesse contexto, este trabalho teve como objetivo principal determinar, para madeiras folhosas, modelos que conduzissem a boas estimativas da  $f_{t\theta,k}$ . Visando resultados abrangentes, foram adotadas 5 espécies distribuídas nas classes de resistência das folhosas e 6 ângulos de inclinação das fibras ( $0^\circ$ ,  $10^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  e  $90^\circ$ ). A análise estatística mostrou que o modelo de Hankinson (1921), com expoente  $n$  igual a 2, não conduz a estimativas precisas de  $f_{t\theta,k}$ . Com exceção do linear, todos os modelos de regressão testados foram significativos e com bons ajustes (coeficiente de determinação -  $R^2 > 96\%$ ). Comparado aos modelos empíricos e aos critérios de falha presentes na literatura, o modelo obtido neste estudo mostrou ser, para o conjunto das espécies, o mais preciso nas estimativas de  $f_{t\theta,k}$ . Além disso, a utilização do modelo proposto demanda, apenas, o conhecimento da resistência característica à tração paralela às fibras; sendo, portanto, de fácil aplicação no desenvolvimento de projetos de estruturas de madeira.

*Palavras-chave:* Inclinação das fibras; Anisotropia da madeira; Madeiras folhosas, Modelos empíricos. Critérios de falha.

## ABSTRACT

ALMEIDA, J. P. B. **Models for estimating the characteristic off-axis tensile strength of hardwoods**. 2022. 95f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Universidade Federal de São Carlos. São Carlos, 2022.

*Due to the anisotropic characteristics, wood has distinct mechanical performance when requested in longitudinal, radial and tangential directions. In structural design, the longitudinal direction is considered to be parallel to the grains ( $0^\circ$ ) and the radial and tangential directions are considered normal to the grains ( $90^\circ$ ). In Brazil, the Brazilian Standard NBR 7190 (ABNT, 1997) establishes the test methods for obtaining strength properties in the parallel ( $f_0$ ) and normal ( $f_{90}$ ) directions to the wood grains. For this, formulations from the theory of mechanics of materials, developed for isotropic materials, are used. The estimation of strength properties in intermediate directions (off-axis strengths,  $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ) can be performed using empirical models or failure criteria (mathematical models) developed for anisotropic materials. These criteria, such as the Tsai and Wu criterion (1971) and the Tsai-Hill criterion (Azzi and Tsai, 1965), because they are little known by the technical community, are rarely used to estimate wood failure. On the other hand, the empirical models, adjusted according to the exponent  $n$  of the trigonometric terms, have been developed and incorporated in several standards documents. Among such, NBR 7190 (ABNT, 1997) recommends the use of Hankinson's empirical model (1921) to estimate the normal off-axis stresses ( $\theta > 6^\circ$ ). Because it was developed through compression tests on softwoods, Hankinson's (1921) model, in its original form (exponent  $n = 2$ ), may not be a good estimator of the characteristic off-axis tensile strength ( $f_{t\theta,k}$ ) of hardwoods. In this context, this research has the main objective of determining, for hardwoods, models that lead to good estimates of the  $f_{t\theta,k}$ . Aiming at comprehensive results, 5 species, distributed in the hardwood resistance classes and 6 grain inclination angles ( $0^\circ$ ,  $10^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  and  $90^\circ$ ) were adopted. The statistical analysis showed that the Hankinson model (1921), with an exponent  $n$  equal to 2, does not lead to accurate estimates of  $f_{t\theta,k}$ . With the exception of linear, all regression models tested were significant and with good fits (coefficient of determination -  $R^2 > 96\%$ ). Compared to empirical models and failure criteria present in the literature, the model obtained in this research proved to be, for the grouping of species, the most accurate in estimating  $f_{t\theta,k}$ . Furthermore, the use of the proposed model requires only the knowledge of the characteristic tensile strength parallel to the grains; therefore, this model is easy use in the development of wooden structures projects.*

*Key-words: Grain slope; Wood anisotropy; Hardwood; Empirical models; Failure criteria.*

## LISTA DE FIGURAS

---

Figura 1: Treliça de cobertura (a) estrutura com mão francesa (b). .....	13
Figura 2: Caso tridimensional: tensões atuantes em um elemento infinitesimal (a) e (b). .....	16
Figura 3: Solicitações uniaxiais: tração (a), compressão (b) e cisalhamento (c). .....	18
Figura 4: Solicitações biaxiais: tração (a) e compressão (b). .....	20
Figura 5: Superfícies de ruptura do critério de Tsai e Wu (1971) com valores distintos de $F_{12}$ . .....	21
Figura 6: Solicitação uniaxial de tração não paralelo às direções principais (a) estado de tensão em relação aos eixos $1'$ e $2'$ (b). .....	22
Figura 7: Melhores ajustes de $E_{c\theta,m}$ para a Peróba Mica por Logsdon <i>et al.</i> (2010). .....	33
Figura 8: Melhores ajustes de $f_{t\theta}$ obtidos por meio de Hankinson (1921) e Tsai e Wu (1971) para a Cupiúba por Mascia e Nicolas (2012). .....	35
Figura 9: Melhores ajustes de $f_{t\theta}$ obtidos por Tsai e Wu (1971) para diferentes valores de $F_{12}$ . .....	36
Figura 10: Sistema $\sigma_1 \times \sigma_2$ : superfícies de ruptura obtidas para a madeira de <i>Pinus elliotti</i> por Mascia <i>et al.</i> (2013). .....	38
Figura 11: Sistema $\sigma_1 \times \sigma_2$ : superfícies de ruptura obtidas para a madeira de <i>Pinus elliotti</i> por Mascia e Simoni (2013). .....	39
Figura 12: Sistema $\sigma_1 \times \sigma_2$ : superfícies de ruptura obtidas para a madeira de <i>Goupia glabra</i> por Mascia e Simoni (2013). .....	39
Figura 13: Melhores ajustes de $f_{t\theta,k}$ por Logsdon <i>et al.</i> (2014a). .....	42
Figura 14: Melhores ajustes de $f_{v\theta,k}$ por Logsdon <i>et al.</i> (2014b). .....	42
Figura 15: Melhores ajustes de $f_{v\theta}$ por Carrasco e Mantilla (2016). .....	44
Figura 16: Corpos de prova para o ensaio de tração: Esquema de extração, dimensões em milímetros (a) confecção conforme o ângulo $\theta$ (b). .....	49
Figura 17: Tábua para extração das amostras (a) Corte para confecção dos corpos de prova (b). .....	50
Figura 18: Máquina universal AMSLER. ....	51
Figura 19: Corpos de prova para a determinação da $\rho_{ap,12\%}$ . .....	51
Figura 20: Diagrama de Kollmann para correção da densidade aparente. ....	52
Figura 21: Ensaio de tração com $\theta = 45^\circ$ (a) Corpo de prova após o ensaio (b). .....	53
Figura 22: Vistas do corpo de prova para o ensaio de tração (a) Inclinação das fibras ( $\theta = 45^\circ$ ) na região central do corpo de prova (b). .....	54
Figura 23: Ensaio de compressão paralela às fibras (a) Corpo de prova utilizado no ensaio de compressão paralela às fibras (b). .....	55
Figura 24: Ensaio de cisalhamento paralelo às fibras (a) Corpo de prova após o ensaio (b). ..	56
Figura 25: Fluxograma para análise estatística dos modelos empíricos. ....	58
Figura 26: Fluxograma para análise estatística dos modelos de regressão. ....	60
Figura 27: Valores de $f_{t\theta}$ : Cedroarana - Ced (a) e Louro preto - LP (b), Angelim amargoso - AA (c), Oichu - Oi (d), Maçaranduba - Ma (e) Valores de $\rho_{ap,12\%}$ (f). .....	62
Figura 28: Verificação da normalidade da distribuição dos dados experimentais e estimados pelo modelo de Hankinson (1921) após a transformação de Johnson: gráfico probabilidade para dados originais (a), gráfico probabilidade para dados transformados (b) e valor Z. ....	66
Figura 29: Verificação da equivalência das variâncias dos valores experimentais e os obtidos pelos modelos empíricos. ....	66
Figura 30: Melhores ajustes de $f_{t\theta,k}$ : Cedroarana (a) e Louro preto (b), Angelim amargoso (c), Oichu (d), Maçaranduba (e). .....	69

Figura 31: Estimativas de $f_{i\theta,k}$ pelo critério de Tsai e Wu (1971): Cedroarana (a) e Louro preto (b), Angelim amargoso (c), Oichu (d), Maçaranduba (e).....	73
Figura 32: Estimativas de $f_{i\theta,k}$ pelo critério de Tsai-Hill (Azzi e Tsai, 1965): Cedroarana (a) e Louro preto (b), Angelim amargoso (c), Oichu (d), Maçaranduba (e).....	75
Figura 33: Razões $f_{i\theta,k}/f_{i0,k}$ das madeiras estudadas.....	78
Figura 34: Melhores ajustes obtidos na estimativa de $f_{i\theta,k}/f_{i0,k}(\theta)$ : Cedroarana (a), Louro preto (b); Angelim amargoso (c); Oichu (d); Maçaranduba (e); conjunto das madeiras estudadas (f).....	81
Figura 35: Estimativas dos modelos gerais na estimativa de $f_{i\theta,k}$ : Cedroarana (a), Louro preto (b), Angelim amargoso (c), Oichu (d), Maçaranduba (e).....	84
Figura 36: Ajustes obtidos sobre os resultados de Logsdon <i>et al.</i> (2014a) pelo modelo proposto neste estudo. ....	87



## LISTA DE TABELAS

---

Tabela 1: Teorias de resistência e equações para a estimativa de $F_{12}$ . .....	20
Tabela 2: Síntese das equações e variáveis empregadas na estimativa da $f_{t\theta}$ por meio dos critérios de falha. ....	26
Tabela 3: Síntese das equações e variáveis empregadas na estimativa da $f_{t\theta}$ por meio dos modelos empíricos. ....	30
Tabela 4: Valores de $f_{t\theta}$ de painéis de LVL por Oh (2011). ....	31
Tabela 5: Valores de $E_{c\theta,m}$ da madeira de Peroba mica por Logsdon <i>et al.</i> (2010). ....	32
Tabela 6: Intervalos de validade e melhores ajustes do expoente $n$ na estimativa de $E_{c\theta}$ por Logsdon <i>et al.</i> (2010). ....	32
Tabela 7: Valores de $f_{v\theta}$ da madeira de Douglas-fir por Gupta e Sinha (2012). ....	34
Tabela 8: Valores de $f_{t\theta}$ da madeira de Cupiúba por Mascia e Nicolas (2012). ....	34
Tabela 9: Resistências à compressão e ao cisalhamento da madeira de Cupiúba por Mascia e Nicolas (2012). ....	34
Tabela 10: Parâmetros de resistência $F_i$ , $F_{ii}$ e $F_{ij}$ da madeira de Cupiúba por Mascia e Nicolas (2012). ....	35
Tabela 11: Parâmetro $F_{12}$ estimado para a Cupiúba por Mascia e Nicolas (2012). ....	36
Tabela 12: Ensaio biaxial de compressão: pares de tensão ( $\sigma_1$ e $\sigma_2$ ) da madeira de <i>Pinus elliotii</i> por Mascia <i>et al.</i> (2013). ....	37
Tabela 13: Valores de $f_{t\theta,k}$ da madeira de Peroba mica por Logsdon <i>et al.</i> (2014a). ....	40
Tabela 14: Valores de $f_{v\theta,k}$ da madeira de Peroba mica por Logsdon <i>et al.</i> (2014b). ....	40
Tabela 15: Intervalos de validade e melhores ajustes do expoente $n$ na estimativa de $f_{t\theta,k}$ por Logsdon <i>et al.</i> (2014a). ....	41
Tabela 16: Intervalos de validade e melhores ajustes do expoente $n$ na estimativa de $f_{v\theta,k}$ por Logsdon <i>et al.</i> (2014b). ....	41
Tabela 17: Valores de $f_{v\theta}$ da madeira de <i>Eucalyptus saligna</i> por Carrasco e Mantilla (2016). ....	43
Tabela 18: Intervalos de validade e melhores ajustes do expoente $n$ na estimativa de $f_{v\theta}$ por Carrasco e Mantilla (2016). ....	43
Tabela 19: Síntese dos modelos investigados e melhores ajustes obtidos pela literatura. ....	45
Tabela 20: Nomes popular e científico e classes de resistência das espécies de madeiras. ....	48
Tabela 21: Valores experimentais de $f_{t\theta,k}$ das madeiras estudadas. ....	65
Tabela 22: Resultados do teste $t$ pareado para a estimativa de $f_{t\theta,k}$ segundo os modelos empíricos. ....	67
Tabela 23: Valores de $n_{\acute{o}tim}$ dos modelos empíricos para a estimativa de $f_{t\theta,k}$ para cada espécie de madeira estudada. ....	68
Tabela 24: Erros percentuais absolutos médios cometidos na estimativa de $f_{t\theta,k}$ pelos modelos empíricos com $n_{\acute{o}tim}$ . ....	71
Tabela 25: Valores de resistências para a aplicação dos critérios de falha. ....	72
Tabela 26: Parâmetros para a aplicação do critério de Tsai e Wu (1971). ....	72
Tabela 27: Parâmetro $F_{12}$ estimado para cada espécie de madeira estudada. ....	72
Tabela 28: Parâmetros para a aplicação do critério de Tsai-Hill (Azzi e Tsai, 1965). ....	75
Tabela 29: Erros percentuais absolutos médios cometidos nas estimativas de $f_{t\theta,k}$ pelos critérios de Tsai e Wu (1971) e Tsai-Hill (Azzi e Tsai, 1965). ....	77
Tabela 30: Valores experimentais de $f_{t\theta,k}/f_{t0,k}$ das espécies de madeira estudadas. ....	78
Tabela 31: Resultados dos modelos de regressão para a estimativa de $f_{t\theta,k}/f_{t0,k}(\theta)$ para a madeira de Cedroarana. ....	79
Tabela 32: Resultados dos modelos de regressão para a estimativa de $f_{t\theta,k}/f_{t0,k}(\theta)$ para a madeira de Louro preto. ....	79

Tabela 33: Resultados dos modelos de regressão para a estimativa de $f_{t\theta,k}/f_{t0,k}(\theta)$ para a madeira de Angelim amargoso. ....	79
Tabela 34: Resultados dos modelos de regressão para a estimativa de $f_{t\theta,k}/f_{t0,k}(\theta)$ para a madeira de Oichu. ....	80
Tabela 35: Resultados dos modelos de regressão para a estimativa de $f_{t\theta,k}/f_{t0,k}(\theta)$ para a madeira de Maçaranduba. ....	80
Tabela 36: Resultados dos modelos de regressão para a estimativa de $f_{t\theta,k}/f_{t0,k}(\theta)$ para o conjunto das madeiras estudadas. ....	80
Tabela 37: Erros percentuais absolutos médios cometidos na estimativa de $f_{t\theta,k}$ pelos modelos de melhor ajuste, obtidos por espécie. ....	83
Tabela 38: Erros percentuais absolutos médios cometidos na estimativa de $f_{t\theta,k}$ pelos modelos de melhor ajuste, obtidos para o conjunto das espécies. ....	86
Tabela 39: Valores da razão $f_{t\theta,k}/f_{t0,k}$ da madeira de Peroba mica provenientes do trabalho de Logsdon <i>et al.</i> (2014a). ....	86
Tabela 40: Valores experimentais de $f_{t\theta,k}$ determinados por Logsdon <i>et al.</i> (2014a), estimativas de $f_{t\theta,k}$ por meio do modelo proposto e respectivos erros cometidos. ....	87

<b>1. INTRODUÇÃO.....</b>	<b>10</b>
<b>1.1 OBJETIVOS .....</b>	<b>12</b>
<b>1.2 JUSTIFICATIVA .....</b>	<b>12</b>
<b>1.3 DESCRIÇÃO DOS CAPÍTULOS.....</b>	<b>13</b>
<b>2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>15</b>
<b>2.1 CRITÉRIOS DE RESISTÊNCIA APLICADOS À MADEIRA .....</b>	<b>15</b>
<b>2.2 MODELOS EMPÍRICOS.....</b>	<b>27</b>
<b>2.3 ESTUDOS ACERCA DA APLICAÇÃO DE CRITÉRIOS DE FALHA E     MODELOS EMPÍRICOS À MADEIRA .....</b>	<b>30</b>
<b>2.4 CONCLUSÃO DA REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....</b>	<b>44</b>
<b>3. MATERIAIS E MÉTODO .....</b>	<b>48</b>
<b>3.1 MATERIAIS .....</b>	<b>48</b>
<b>3.2 MÉTODO .....</b>	<b>49</b>
3.2.1 Densidade aparente a 12% de umidade .....	51
3.2.2 Resistência à tração inclinada em relação às fibras .....	53
3.2.3 Resistência à compressão paralela e normal às fibras .....	54
3.2.4 Resistência ao cisalhamento paralelo às fibras.....	55
3.2.5 Valores a condição padrão de umidade .....	56
3.2.6 Análise estatística e aplicação dos critérios de resistência .....	57
3.2.7 Determinação dos modelos de melhor ajuste .....	61
<b>4. RESULTADOS E DISCUSSÃO .....</b>	<b>62</b>
<b>4.1 RESULTADOS EXPERIMENTAIS .....</b>	<b>62</b>
<b>4.2 ESTIMATIVAS DE <math>f_{t0,k}</math> PELOS MODELOS EMPÍRICOS .....</b>	<b>65</b>
<b>4.3 ESTIMATIVAS DE <math>f_{t0,k}</math> PELOS CRITÉRIOS DE RESISTÊNCIA.....</b>	<b>71</b>
<b>4.4 ESTIMATIVAS DE <math>f_{t0,k}</math> POR MEIO DE MODELOS DE REGRESSÃO .....</b>	<b>77</b>
<b>4.5 COMPARAÇÃO ENTRE OS MODELOS DE MELHOR AJUSTE.....</b>	<b>83</b>
<b>4.6 VALIDAÇÃO DO MODELO PROPOSTO PARA A ESTIMATIVA DE <math>f_{t0,k}</math></b>	<b>86</b>
<b>5. CONCLUSÕES.....</b>	<b>88</b>
<b>5.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....</b>	<b>88</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>90</b>

# 1. INTRODUÇÃO

Diante da demanda crescente por edificações eficientes e sustentáveis (NESHEIM *et al.*, 2021), a madeira, considerada o material do futuro (KUZMAN e SANDBERG, 2017; ŻMIJEWKI e WOJTOWICZ-JANKOWSKA, 2017), vem ganhando cada vez mais reconhecimento e aplicações na construção civil (WIERUSZEWSKI e MAZELA, 2017).

Isso ocorre, não somente pelo fato da madeira ser uma matéria-prima natural, biodegradável, renovável, reciclável e, portanto, ambientalmente correta (WANG *et al.*, 2014; DE ARAUJO *et al.*, 2016; LIMA Jr. *et al.*, 2018; SOUZA *et al.*, 2018), mas também por apresentar atributos que a tornam um material eficiente, quando comparada a materiais estruturais de uso tradicional, como o aço e o concreto (RAMAGE *et al.*, 2017).

Dentre tais atributos, a madeira apresenta excelente relação entre resistência mecânica e densidade (PRIES e MAI, 2013; RAMAGE *et al.*, 2017; HUBER *et al.*, 2018; LIMA Jr. *et al.*, 2018), sendo de uso inteligente em estruturas nas quais o peso próprio corresponde a uma alta proporção das cargas a serem resistidas (*e. g.*, estruturas de cobertura, pontes e edifícios altos). Tem-se, também, o uso eficiente da madeira em estruturas submetidas a eventos sísmicos, haja vista que estruturas mais pesadas são submetidas a esforços sísmicos maiores (RAMAGE *et al.*, 2017).

Diante da eficácia do material como elemento estrutural, construções em madeira tornaram-se a solução habitacional mais comum, prática e econômica para a maioria dos países do Hemisfério Norte (DE ARAUJO *et al.*, 2016). Tem-se, por consequência, o uso expressivo da madeira em países como Áustria, Japão, Escócia e Nova Zelândia, nos quais, respectivamente, 40%, 45%, 83% e 85% das residências são construídas em madeira (MAHAPATRA *et al.*, 2012; HURMEKOSKI *et al.*, 2015; DE ARAUJO *et al.*, 2018).

Todavia, apesar do número expressivo de espécies de árvores catalogadas na Amazônia brasileira - cerca de 7700 (STEEGE *et al.*, 2016) -, do evidente potencial de reflorestamento e da crescente demanda por moradias, no Brasil, a utilização da madeira para uso habitacional ainda é insignificante (DE ARAUJO *et al.*, 2018). Restrições de natureza histórico-cultural, escassez de mão de obra qualificada e desconhecimento das espécies e suas propriedades são fatores que justificam tal constatação (COUTO *et al.*, 2020). Como consequência, tem-se o uso inadequado da madeira, com edificações com baixa vida útil e que sucumbem às vantagens do material (PEDRESCHI *et al.*, 2005).

Tal fato motiva o desenvolvimento de pesquisas que disseminem, principalmente para o mercado consumidor, informações referentes aos benefícios das construções em madeira, as propriedades físico-mecânicas do material e os métodos de cálculo necessários para a elaboração racional de projetos estruturais.

Devido aos aspectos anatômicos (estrutura microscópica), a madeira apresenta comportamento anisotrópico (BRÉMAUD *et al.*, 2011; OZYHAR *et al.*, 2012). Todavia, é comumente tratada como material ortotrópico (MASCIA e LAHR, 2006; GUPTA e SINHA, 2012; MASCIA *et al.*, 2013; PRANATA e SURYOATMONO, 2013; SMÍDOVÁ e KABELE, 2017), com valores de resistência e rigidez distintos quando solicitada nas direções longitudinal (L), radial (R) e tangencial (T) (WOODWARD e MINOR, 1988; YANG *et al.*, 2020).

Tratando-se de projetos estruturais, o documento normativo brasileiro NBR 7190 (ABNT, 1997) intitulado “Projeto de estruturas de madeira” adota a direção longitudinal como paralela às fibras ( $\theta = 0^\circ$ ) enquanto as direções tangencial e radial são consideradas normais às fibras ( $\theta = 90^\circ$ ). Considera-se  $\theta$  como sendo o ângulo formado entre a direção da aplicação da solicitação mecânica e a direção das fibras.

A NBR 7190 (ABNT, 1997) estabelece os métodos de ensaio para a determinação das propriedades de resistência nas direções paralela ( $f_0$ ) e normal ( $f_{90}$ ) às fibras da madeira. Para tanto, assim com outros documentos normativos, a NBR 7190 (ABNT, 1997) emprega formulações advindas da teoria da resistência dos materiais, desenvolvidas para materiais isotrópicos.

A estimativa das propriedades de resistência em direções intermediárias ( $f_\theta - 0^\circ < \theta < 90^\circ$ ) pode ser realizada por meio de modelos empíricos ou critérios de resistência<sup>1</sup>, desenvolvidos para materiais ortotrópicos (modelos matemáticos). A adoção de tais modelos justifica-se pelo fato de que a determinação experimental de  $f_\theta$ , para as diversas solicitações mecânicas e infinitos valores de  $\theta$ , torna-se onerosa, demandando custos com material e mão de obra, o que torna, muitas vezes, tal procedimento inviável.

Desse modo, a NBR 7190 (ABNT, 1997) prescreve a adoção do modelo empírico de Hankinson (1921) para a estimativa das resistências a tensões normais inclinadas com valores de  $\theta$  superiores a  $6^\circ$ . A utilização do modelo de Hankinson (1921) demanda o conhecimento de apenas dois valores de resistência ( $f_0$  e  $f_{90}$ ), sendo, portanto, de fácil aplicação quando comparado aos critérios de resistência. Para espécies usuais,  $f_0$  e  $f_{90}$  são facilmente encontradas na literatura, facilitando o emprego do modelo de Hankinson (1921) na elaboração de projetos estruturais.

---

<sup>1</sup> Também denominados critérios de falha.

No entanto, tal modelo foi desenvolvido por meio de experimentações de madeiras coníferas do Hemisfério Norte. No Brasil, predominam as madeiras do grupo das folhosas, comumente empregadas em projetos estruturais devido a sua alta resistência mecânica. Essas se diferem das madeiras coníferas em termos de características anatômicas e fisiológicas, apresentando, conseqüentemente, comportamentos mecânicos distintos.

Neste contexto, tem-se incertezas na precisão das estimativas da falha do material, por meio do modelo de Hankinson (1921), principalmente para madeiras folhosas crescidas no Brasil.

## 1.1 OBJETIVOS

O objetivo principal desse trabalho foi determinar modelos empíricos para a estimativa da resistência característica à tração de madeiras folhosas, em função do ângulo de inclinação das fibras.

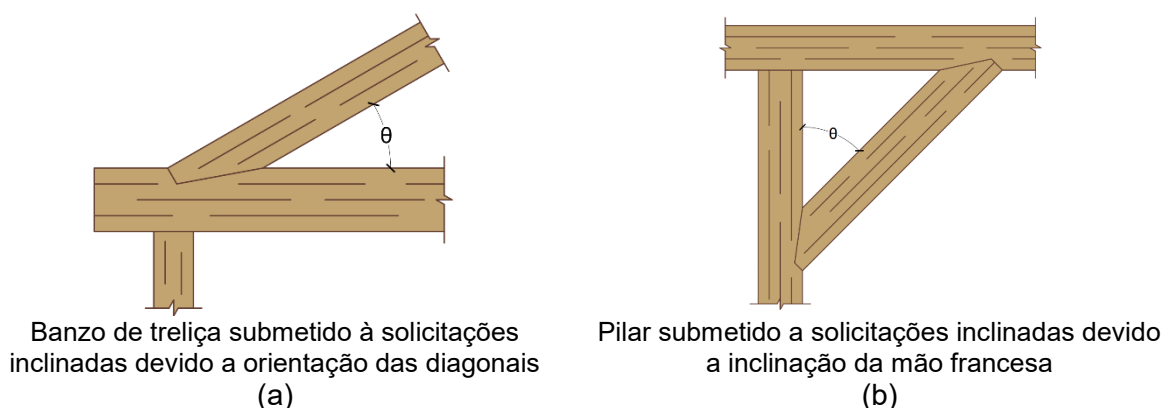
Especificamente, objetivou-se:

- verificar se há equivalência estatística entre os valores de  $f_{t\theta,k}$ , advindos de ensaios experimentais, e os estimados pelo modelo de Hankinson (1921) e demais modelos empíricos estudados;
- em caso de não equivalência, determinar, para cada modelo empírico, expoentes ótimos que melhor estimem  $f_{t\theta,k}$ ;
- aplicar à madeira o critério de resistência de Tsai e Wu (1971) e o de Tsai-Hill (Azzi e Tsai, 1965), visando a estimativa dos valores de  $f_{t\theta,k}$ ;
- como alternativa aos modelos presentes na literatura, determinar, para cada espécie e o conjunto das espécies estudadas, modelos para a estimativa de  $f_{t\theta,k}$ ;
- Fundamentar futuras revisões da NBR 7190 (ABNT, 1997), elegendo o mais preciso dentre os modelos obtidos.

## 1.2 JUSTIFICATIVA

Embora as estruturas de madeira sejam projetadas de modo que os elementos estruturais estejam solicitados na direção longitudinal (direção de maior resistência mecânica), em algumas partes da estrutura, como nas ligações, tem-se a ocorrência de solicitações inclinadas (BRÉMAUD *et al.*, 2011). A Figura 1 ilustra alguns exemplos.

**Figura 1: Treliça de cobertura (a) estrutura com mão francesa (b).**



Tem-se bem difundido na literatura o decréscimo nos valores de resistência e rigidez ao passo que se aumenta o valor de  $\theta$  (KOLLMANN e COTÉ, 1968; DINWOODIE, 1975; WOODWARD e MINOR, 1988; COWN *et al.*, 1996; LIU e FLOETER, 1984; GORLACHER, 2002; XAVIER *et al.*, 2004; POPE *et al.*, 2005). Desse modo, a determinação precisa das resistências inclinadas (em função de  $\theta$ ), é de suma importância para o dimensionamento racional de projetos de estruturas de madeira.

A determinação experimental das resistências a solicitações inclinadas não é prática comum no desenvolvimento de projetos estruturais. Portanto, o modelo a ser utilizado deve conduzir a estimativas precisas, tanto para propriedades determinadas por meio de solicitações normais quanto tangenciais.

Além das incertezas acerca da precisão das estimativas do modelo de Hankinson (1921) para madeiras folhosas, o fato desse modelo ter sido obtido por meio dos valores de resistência à compressão aumenta as incertezas em relação ao uso geral do modelo para a estimativa de demais propriedades como, por exemplo, a resistência à tração.

Diante do exposto, justifica-se a necessidade de estudos que visem investigar a eficácia de modelos empíricos e matemáticos para a estimativa das resistências inclinadas em relação às fibras de madeiras folhosas; com resultados em potencial a serem incorporados na NBR 7190 (ABNT, 1997), atualmente em revisão.

### 1.3 DESCRIÇÃO DOS CAPÍTULOS

O capítulo 1 introduz o tema apresentando os atributos que tornam a madeira um material estrutural eficiente, o expressivo uso da madeira como solução habitacional em diversos países, o potencial florestal e o insignificante uso da madeira no Brasil. Apresenta-se, também, os critérios de falha e os modelos empíricos utilizados para a estimativa da falha

da madeira, assim como as recomendações da NBR 7190 (ABNT, 1997) sobre o assunto. Ademais, descreve-se os objetivos e a justificativa do trabalho.

O capítulo 2 inicia-se descrevendo as particularidades do critério de falha de Tsai e Wu (1971), do Tsai-Hill (Azzi e Tsai, 1965) e dos modelos empíricos presentes na literatura. Em seguida, são apresentados os estudos nos quais se fez uso de critérios de resistência ou modelos empíricos para prever a falha da madeira a diversas solicitações mecânicas. Encerra-se o capítulo resumindo as lacunas identificadas.

Em conformidade com a NBR 7190 (ABNT, 1997), o capítulo 3 descreve as espécies folhosas utilizadas, os métodos adotados para a determinação das propriedades físico-mecânicas estudadas e a análise estatística empregada.

O capítulo 4 apresenta os resultados experimentais obtidos para cada espécie e propriedade físico-mecânica investigada comparando-os com os valores presentes na literatura. Apresenta-se, também, as estimativas dos valores de resistência inclinada determinadas por meio dos modelos empíricos, dos critérios de falha [Tsai e Wu (1971) e Tsai-Hill (Azzi e Tsai, 1965)] e dos modelos de regressão. Além disso, visando avaliar a precisão dos modelos obtidos, comparou-se as diversas estimativas com os valores experimentais.

No capítulo 5 constam as conclusões deste estudo.

Por fim, apresentam-se as referências bibliográficas utilizadas.



## 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Visando englobar a temática investigada neste estudo, esta revisão bibliográfica foi dividida em subitens. Os dois primeiros discorrem, respectivamente, sobre a utilização de critérios de resistência e de modelos empíricos para prever a falha da madeira. Em seguida, são apresentados trabalhos da literatura nos quais se aplicou à madeira critérios de falha ou modelos empíricos. Por fim, na conclusão do capítulo apresentam-se as lacunas identificadas.

### 2.1 CRITÉRIOS DE RESISTÊNCIA APLICADOS À MADEIRA

Conhecido o estado de tensão a qual determinado material esteja submetido, pode-se verificar a condição de ruptura por meio da adoção de critérios de resistência (MASCIA *et al.*, 2013). Tais critérios foram desenvolvidos, inicialmente, para materiais homogêneos isotrópicos com simetria de resistência. Para esta característica, tem-se, em qualquer direção, os mesmos valores das resistências à tração e à compressão (MASCIA *et al.*, 2008).

A madeira apresenta características anisotrópicas (BRÉMAUD *et al.*, 2011; OZYHAR *et al.*, 2012; YANG *et al.*, 2020). Todavia, em termos de modelos elásticos para a engenharia, tem-se, bem difundido na literatura, a consideração de comportamento ortotrópico para a madeira, com as direções L, R e T constituindo eixos de simetria elástica do material (MASCIA e LAHR, 2006; GUPTA e SINHA, 2012; MASCIA *et al.*, 2013; PRANATA e SURYOATMONO, 2013; SMÍDOVÁ e KABELE, 2017; YANG *et al.*, 2020).

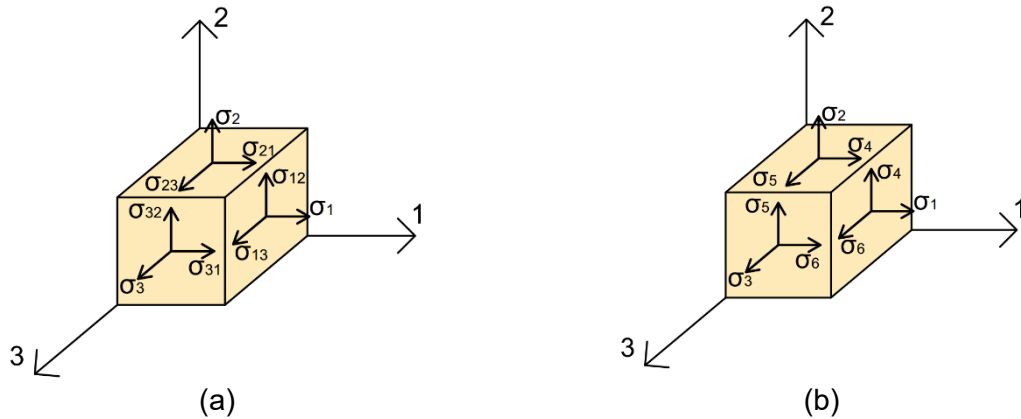
Por ser um material ortotrópico, a madeira possui 9 constantes elásticas, três módulos de elasticidade longitudinal ( $E_L$ ,  $E_R$  e  $E_T$ ), três módulos de elasticidade transversal ( $G_{LR}$ ,  $G_{LT}$  e  $G_{RT}$ ) e três coeficientes de Poisson ( $\nu_{LR}$ ,  $\nu_{LT}$  e  $\nu_{RT}$ ). Além disso, a madeira apresenta assimetria nos valores de resistência.

Devido as particularidades do comportamento mecânico da madeira e seus compósitos (ortotropia e assimetria de resistências), a definição do critério de falha que melhor descreve os fenômenos de ruptura do material não é tarefa simples (NICOLAS *et al.*, 2008).

Dentre os critérios de falha existentes, a teoria geral de resistência para materiais anisotrópicos é considerada um dos mais consistentes (NICOLAS *et al.* 2008). Tal critério foi desenvolvido por Tsai e Wu (1971) considerando a assimetria de resistência do material (MASCIA *et al.*, 2013).

O estado de tensão em determinado ponto na estrutura é caracterizado pelas tensões normais e cisalhantes atuantes em três planos perpendiculares entre si (1-2, 1-3 e 2-3), conforme ilustra a Figura 2.

**Figura 2: Caso tridimensional: tensões atuantes em um elemento infinitesimal (a) e (b).**



Na Figura 2a, pelo teorema de Cauchy, as tensões de cisalhamento  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{13}$  e  $\sigma_{23}$  são iguais, respectivamente, a  $\sigma_{21}$ ,  $\sigma_{31}$  e  $\sigma_{32}$ . Dado a igualdade de tais tensões, tem-se na Figura 2b:  $\sigma_4 = \sigma_{12} = \sigma_{21}$ ,  $\sigma_5 = \sigma_{23} = \sigma_{32}$  e  $\sigma_6 = \sigma_{13} = \sigma_{31}$ . Desse modo, para o caso tridimensional, o estado de tensão (estado triplo de tensão) possui 6 componentes, podendo ser expresso na forma matricial pelo tensor de 2ª ordem (T), conforme a Equação 1.

$$T = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_4 & \sigma_6 \\ \sigma_4 & \sigma_2 & \sigma_5 \\ \sigma_6 & \sigma_5 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

O critério de Tsai e Wu (1971) admite que a ruptura de um material totalmente anisotrópico possa ser condicionada por tensões normais ou tangenciais. Desse modo, a condição geral de ruptura, descrita pelo tensor polinomial de resistência (Equação 2), contempla tanto coeficientes correspondentes à ação isolada ( $F_i$ ) quanto simultânea ( $F_{ij}$ ) das tensões atuantes.

$$F_i \cdot \sigma_i + F_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j = 1 \quad (2)$$

Na Equação 2, tem-se  $i$  e  $j$  de 1 a 6 e  $\sigma_i$  e  $\sigma_j$  correspondentes as tensões atuantes (Figura 2b). A Equação 3 apresenta a forma expandida da Equação 2.

$$\begin{aligned}
 & F_1 \cdot \sigma_1 + F_2 \cdot \sigma_2 + F_3 \cdot \sigma_3 + F_4 \cdot \sigma_4 + F_5 \cdot \sigma_5 + F_6 \cdot \sigma_6 + \\
 & + F_{11} \cdot \sigma_1^2 + 2 \cdot F_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 + 2 \cdot F_{13} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_3 + 2 \cdot F_{14} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_4 + \\
 & + 2 \cdot F_{15} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_5 + 2 \cdot F_{16} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_6 + F_{22} \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot F_{23} \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \\
 & + 2 \cdot F_{24} \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_4 + 2 \cdot F_{25} \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_5 + 2 \cdot F_{26} \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_6 + F_{33} \cdot \sigma_3^2 \\
 & + 2 \cdot F_{34} \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4 + 2 \cdot F_{35} \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_5 + 2 \cdot F_{36} \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_6 + \\
 & + F_{44} \cdot \sigma_4^2 + 2 \cdot F_{45} \cdot \sigma_4 \cdot \sigma_5 + 2 \cdot F_{46} \cdot \sigma_4 \cdot \sigma_6 + F_{55} \cdot \sigma_5^2 \\
 & + 2 \cdot F_{56} \cdot \sigma_5 \cdot \sigma_6 + F_{66} \cdot \sigma_6^2 = 1
 \end{aligned} \tag{3}$$

Da Equação 3, a aplicação do critério de Tsai e Wu (1971) para um material totalmente anisotrópico demanda o conhecimento de 27 coeficientes de resistência (6 valores de  $F_i$  e 21 valores de  $F_{ij}$ ). Para materiais ortotrópicos, devido aos eixos de simetria de resistência (L, R e T), os coeficientes  $F_i$  e  $F_{ij}$  reduzem de 27 para 12, conforme descreve a Equação 4.

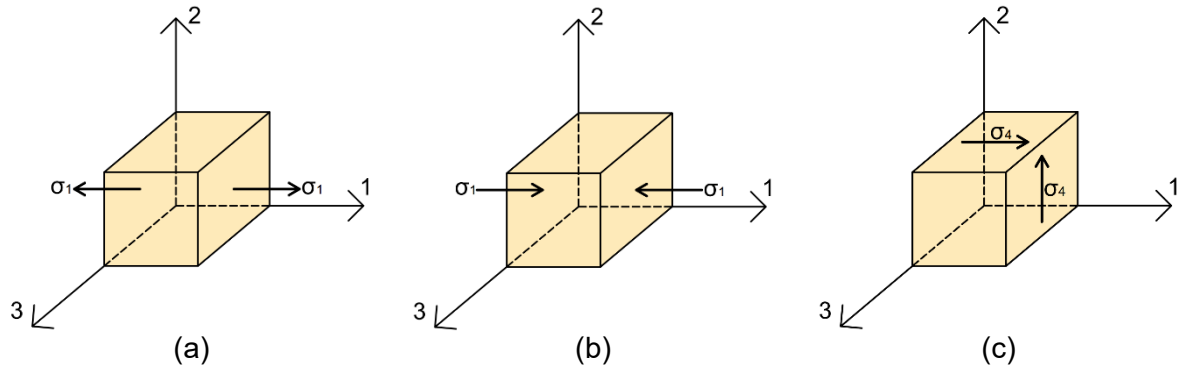
$$\begin{aligned}
 & F_1 \cdot \sigma_1 + F_2 \cdot \sigma_2 + F_3 \cdot \sigma_3 + F_{11} \cdot \sigma_1^2 + F_{22} \cdot \sigma_2^2 + F_{33} \cdot \sigma_3^2 \\
 & + 2 \cdot F_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 + 2 \cdot F_{13} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_3 + 2 \cdot F_{23} \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \\
 & + F_{44} \cdot \sigma_4^2 + F_{55} \cdot \sigma_5^2 + F_{66} \cdot \sigma_6^2 = 1
 \end{aligned} \tag{4}$$

Para o estado plano de tensões (EPT), considerando as direções 1 e 2 ( $\sigma_3 = \sigma_5 = \sigma_6 = 0$ ), tem-se a simplificação da Equação 4 para a Equação 5.

$$F_1 \cdot \sigma_1 + F_2 \cdot \sigma_2 + F_{11} \cdot \sigma_1^2 + F_{22} \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot F_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 + F_{44} \cdot \sigma_4^2 = 1 \tag{5}$$

Os coeficientes  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_{11}$ ,  $F_{22}$  e  $F_{44}$  são determinados, na situação de ruptura, considerando a atuação isolada das tensões  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_4$ . Solicitando o material à tração, apenas na direção 1 (Figura 3a), tem-se  $\sigma_1 = f_{t1} > 0$  e  $\sigma_2 = \sigma_4 = 0$ . Aplicando os valores de tais variáveis à condição de ruptura (Equação 5) obtém-se a Equação 6.

**Figura 3: Solicitações uniaxiais: tração (a), compressão (b) e cisalhamento (c).**



$$F_1 \cdot f_{t1} + F_{11} \cdot f_{t1}^2 = 1 \quad (6)$$

Analogamente, ao solicitar o material à compressão apenas na direção 1 (Figura 3b), tem-se  $\sigma_1 = f_{c1} < 0$  e  $\sigma_2 = \sigma_4 = 0$ . Nessa condição, a Equação 5 resulta na Equação 7.

$$-F_1 \cdot f_{c1} + F_{11} \cdot f_{c1}^2 = 1 \quad (7)$$

As Equações 6 e 7 formam um sistema ao qual se resolvido fornece os valores de  $F_1$  e  $F_{11}$  (Equações 8 e 9, respectivamente).

$$F_1 = \frac{1}{f_{t1}} - \frac{1}{f_{c1}} \quad (8)$$

$$F_{11} = \frac{1}{f_{t1} \cdot f_{c1}} \quad (9)$$

Aplicando o mesmo procedimento para a direção 2, obtêm-se os valores de  $F_2$  e  $F_{22}$  conforme as Equações 10 e 11, respectivamente.

$$F_2 = \frac{1}{f_{t2}} - \frac{1}{f_{c2}} \quad (10)$$

$$F_{22} = \frac{1}{f_{t2} \cdot f_{c2}} \quad (11)$$

Ao solicitar o material somente ao cisalhamento (Figura 3c), tem-se  $\sigma_4 = f_{v4}$  e  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ . Substituindo os valores de  $\sigma_4$ ,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  na Equação 5 obtêm-se a Equação 12.

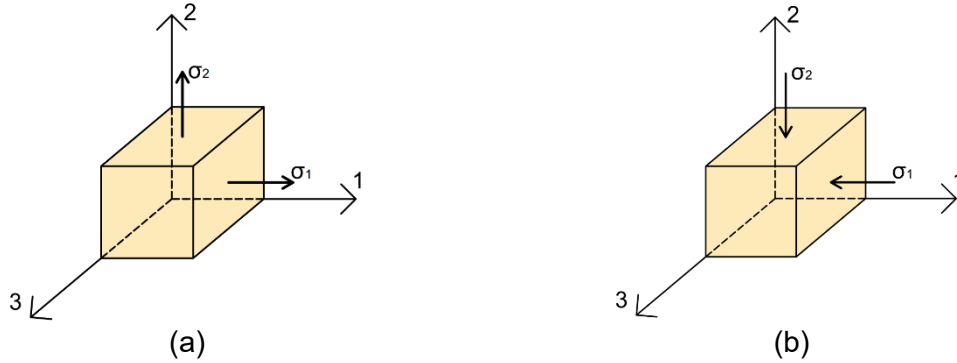
$$F_{44} = \frac{1}{f_{v4}^2} \quad (12)$$

Nas Equações 8 a 12, as direções 1 e 2 correspondem, respectivamente, às direções paralela e normal às fibras da madeira. Portanto,  $f_{t1}$ ,  $f_{c1}$  e  $f_{v4}$  denotam, respectivamente, as resistências (tensões admissíveis) à tração ( $f_{t0}$ ) à compressão ( $f_{c0}$ ) e ao cisalhamento ( $f_{v0}$ ) paralela às fibras;  $f_{t2}$  e  $f_{c2}$  referem-se as resistências à tração ( $f_{t90}$ ) e a compressão ( $f_{c90}$ ) normais às fibras.

Desse modo, para a aplicação do critério de Tsai e Wu (1971), independente da propriedade que se pretende estimar, faz-se necessário a realização de ensaios uniaxiais de compressão, tração e cisalhamento.

Como o coeficiente  $F_{12}$  considera à ação simultânea das tensões  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  sua determinação demanda a realização de ensaios biaxiais de tração ou compressão. Dentre as diversas combinações possíveis de  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , o coeficiente  $F_{12}$  pode ser determinado considerando o material solicitado a tração biaxial (Figura 4a) no estado hidrostático de tensão ( $\sigma_1 = \sigma_2 = t > 0$ ). Aplicando a condição de ruptura para o EPT (Equação 5) obtêm-se a Equação 13. Analogamente, ao considerar o material solicitado a compressão biaxial (Figura 4b) com  $\sigma_1 = \sigma_2 = p < 0$  tem-se o valor de  $F_{12}$  descrito pela Equação 14.

**Figura 4: Solicitações biaxiais: tração (a) e compressão (b).**



$$F_{12} = \frac{1}{2 \cdot t^2} \cdot [1 - t \cdot (F_1 + F_2) - t^2 \cdot (F_{11} + F_{22})] \quad (13)$$

$$F_{12} = \frac{1}{2 \cdot p^2} \cdot [1 + p \cdot (F_1 + F_2) - p^2 \cdot (F_{11} + F_{22})] \quad (14)$$

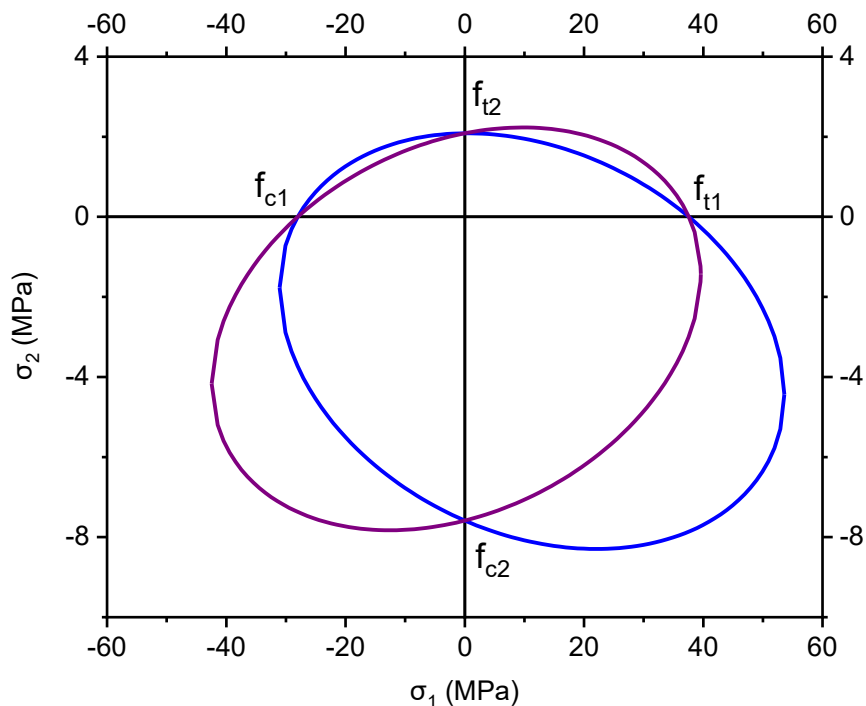
Dado as dificuldades na realização de ensaio biaxiais, para a aplicação do critério de Tsai e Wu (1971), tem-se adotado estimativas de  $F_{12}$  advindas de outras teorias de resistência. Essas demandam a realização de ensaios uniaxiais de tração, compressão ou cisalhamento, facilitando a determinação de  $F_{12}$ . Algumas dessas equações são apresentadas na Tabela 1.

**Tabela 1: Teorias de resistência e equações para a estimativa de  $F_{12}$ .**

Autores	Equação
Norris (1939)	$F_{12} = -\frac{1}{2 \cdot f_{t1} \cdot f_{t2}}$
Hoffman (1967)	$F_{12} = -\frac{1}{2 \cdot f_{t1} \cdot f_{c1}}$
Tsai-Hill (Azzi e Tsai, 1965)	$F_{12} = -\frac{1}{2 \cdot f_{t1}^2}$
Cowin (1979)	$F_{12} = \frac{1}{\sqrt{f_{t1} \cdot f_{c1} \cdot f_{t2} \cdot f_{c2}}} - \frac{1}{2 \cdot f_{v4}^2}$
Liu (1984)	$F_{12} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{f_{t1} \cdot f_{c2}} + \frac{1}{f_{c1} \cdot f_{t2}} - \frac{1}{f_{v4}^2} \right)$

Na condição de ruptura (Equação 5) os termos quadráticos ( $\sigma_i^2$ ) definem, para materiais no EPT, uma elipsóide no espaço das tensões (sistema  $\sigma_1 \times \sigma_2$  – Figura 5). Todavia, para que a superfície de ruptura não seja aberta e intercepte os eixos coordenados  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , faz-se necessário que o coeficiente  $F_{12}$  atenda as condições limites descritas pela Equação 15.

**Figura 5: Superfícies de ruptura do critério de Tsai e Wu (1971) com valores distintos de  $F_{12}$ .**



$$F_{12} = \pm \sqrt{F_{11} \cdot F_{22}} \quad (15)$$

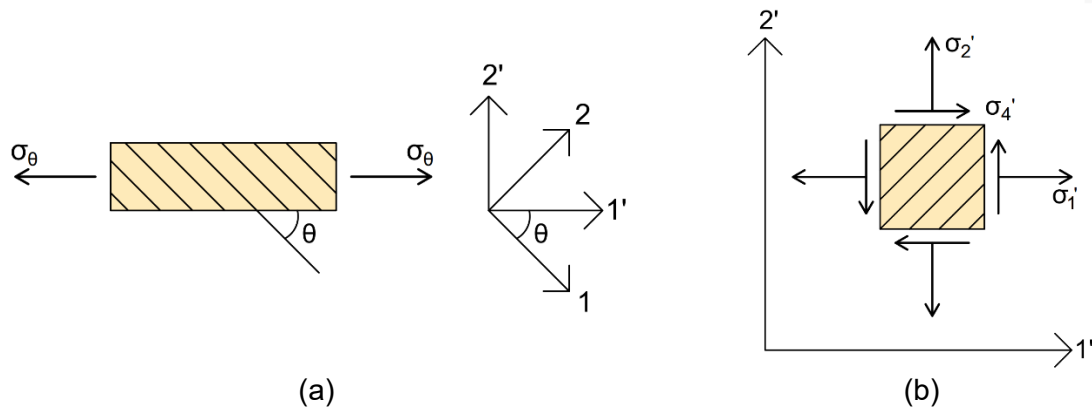
Na Figura 5, as duas superfícies de ruptura foram obtidas com valores distintos de  $F_{12}$ . Verifica-se que, mesmo obedecendo aos limites descritos pela Equação 15, alterações do parâmetro  $F_{12}$  conduzem a superfícies de ruptura significativamente diferentes. Essas divergem, principalmente, nos quadrantes 3 e 4 do sistema  $\sigma_1 \times \sigma_2$ . Em comum, as superfícies de ruptura possíveis interceptam os eixos coordenados  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  nos pontos correspondentes a  $f_{t1}$ ,  $f_{c1}$ ,  $f_{t2}$  e  $f_{c2}$ .

Uma vez conhecido a intensidade dos coeficientes  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_{11}$ ,  $F_{22}$ ,  $F_{44}$  e  $F_{12}$ , pode-se determinar, para os diversos estados planos de tensões, a superfície de ruptura do material.

A aplicação do critério de Tsai e Wu (1971) em direções diferentes das principais, demanda a transformação dos tensores de resistência  $F_i$  (lineares) e  $F_{ij}$  (quadráticos) para outros sistemas de coordenadas.

Considerando-se o material submetido a solicitações normais (tração - Figura 6a) com a força aplicada, na direção  $1'$ , a um certo ângulo  $\theta$  em relação a direção das fibras, tem-se para o estado de plano de tensões, ilustrado pela Figura 6b,  $\sigma'_{1'} = \sigma_{\theta}$  (resistência à tração em uma direção orientada por  $\theta$ ) e  $\sigma'_{2'} = \sigma'_{4'} = 0$ .

**Figura 6: Solicitação uniaxial de tração não paralelo às direções principais (a) estado de tensão em relação aos eixos  $1'$  e  $2'$  (b).**



Para o sistema de coordenadas  $1' 2'$ , substituindo-se  $\sigma'_{1'} = \sigma_{\theta}$  e  $\sigma'_{2'} = \sigma'_{4'} = 0$  no tensor de resistência para o EPT (Equação 5) obtêm-se a Equação 16.

$$F'_1 \cdot \sigma_{\theta} + F'_{11} \cdot \sigma_{\theta}^2 = 1 \quad (16)$$

Os parâmetros  $F'_i$  e  $F'_{ij}$  são obtidos, respectivamente, por meio das matrizes de transformação expressas pelas Equações 17 e 18.

$$\begin{Bmatrix} F'_1 \\ F'_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 \\ n^2 & m^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (17)$$



$$\begin{Bmatrix} F'_{11} \\ F'_{12} \\ F'_{44} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^4 & n^4 & 2 \cdot m^2 \cdot n^2 & m^2 \cdot n^2 \\ m^2 \cdot n^2 & m^2 \cdot n^2 & m^4 \cdot n^4 & -m^2 \cdot n^2 \\ 4 \cdot m^2 \cdot n^2 & 4 \cdot m^2 \cdot n^2 & -8 \cdot m^2 \cdot n^2 & (m^2 - n^2)^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} F_{11} \\ F_{22} \\ F_{12} \\ F_{44} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

Nas Equações 17 e 18 tem-se  $m = \cos \theta$  e  $n = \sin \theta$ . As matrizes de transformação são obtidas determinando-se os valores das tensões dos eixos principais ( $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_4$ ) em função das tensões dos eixos inclinados ( $\sigma'_1$ ,  $\sigma'_2$  e  $\sigma'_4$ ) e substituindo-as na condição de resistência para o EPT (Equação 5).

Substituindo-se os valores de  $F'_1$  e  $F'_{11}$  na Equação 16, obtêm-se a Equação 19 que possibilita a estimativa de  $\sigma_\theta$  (resistência à tração) para qualquer valor de  $\theta$  compreendido entre  $0^\circ$  e  $90^\circ$ .

$$\begin{aligned} \sigma_\theta^2 \cdot [F_{11} \cdot \cos^4 \theta + F_{22} \cdot \sin^4 \theta + (2 \cdot F_{12} + F_{44}) \cdot \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta] + \\ + \sigma_\theta \cdot (F_1 \cdot \cos^2 \theta + F_2 \cdot \sin^2 \theta) = 1 \end{aligned} \quad (19)$$

Além do critério de Tsai e Wu (1971), demais critérios foram desenvolvidos visando prever a falha de materiais anisotrópicos. Muitos desses foram elaborados a partir da teoria de Hill (1950). Tem-se, como exemplo, o critério de Tsai-Hill, proposto por Azzi e Tsai (1965), e o de Norris (1939). O critério de Tsai-Hill (Azzi e Tsai, 1965) é uma extensão do critério de Von Mises, o qual foi idealizado para materiais anisotrópicos dúcteis.

A Equação 20 apresenta a condição de resistência do critério de Hill (1950), na forma reduzida, com  $i$  e  $j$  de 1 a 6.

$$F_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j = 1 \quad (20)$$

A forma expandida da Equação 20, para materiais ortotrópicos no EPT, considerando as direções 1 e 2, é expressa pela Equação 21.

$$F_{11} \cdot \sigma_1^2 + F_{22} \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot F_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 + F_{44} \cdot \sigma_4^2 = 1 \quad (21)$$

A superfície de ruptura do critério de Tsai-Hill (Azzi e Tsai, 1965) é composta pela união de quatro segmentos de elipse (1 segmento para cada quadrante do sistema  $\sigma_1 \times \sigma_2$ ). Logo, para a elaboração da superfície de ruptura, faz-se necessário a obtenção de quatro equações distintas, determinadas a partir da Equação 21 empregando-se  $F_{11}$  e  $F_{22}$  de acordo com os valores de  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ .

Desse modo, quando:

- $\sigma_1 = f_{t1} > 0$  e  $\sigma_2 = \sigma_4 = 0$  (quadrantes 1 ou 4 do sistema  $\sigma_1 \times \sigma_2$ ), tem-se  $F_{11}$  conforme a Equação 22;
- $\sigma_1 = f_{c1} < 0$  e  $\sigma_2 = \sigma_4 = 0$  (quadrantes 2 ou 3 do sistema  $\sigma_1 \times \sigma_2$ ), tem-se  $F_{11}$  conforme a Equação 23;
- $\sigma_2 = f_{t2} > 0$  e  $\sigma_1 = \sigma_4 = 0$  (quadrantes 1 ou 2 do sistema  $\sigma_1 \times \sigma_2$ ), tem-se  $F_{22}$  conforme a Equação 24;
- $\sigma_2 = f_{c2} < 0$  e  $\sigma_1 = \sigma_4 = 0$  (quadrantes 3 ou 4 do sistema  $\sigma_1 \times \sigma_2$ ), tem-se  $F_{22}$  conforme a Equação 25.

$$F_{11} = \frac{1}{f_{t1}^2} \quad (22)$$

$$F_{11} = \frac{1}{f_{c1}^2} \quad (23)$$

$$F_{22} = \frac{1}{f_{t2}^2} \quad (24)$$

$$F_{22} = \frac{1}{f_{c2}^2} \quad (25)$$

Analogamente ao especificado para o critério de Tsai e Wu (1971), os parâmetros  $F_{11}$ ,  $F_{22}$  e  $F_{44}$  do critério de Tsai-Hill (Azzi e Tsai, 1965) são obtidos, a partir da condição de ruptura no EPT (Equação 21), considerando a atuação isolada das tensões  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_4$ , respectivamente.

Substituindo-se  $\sigma_4 = f_{v4}$  e  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$  na Equação 21, tem-se  $F_{44}$  conforme a Equação 12. Portanto, emprega-se nos critérios de Tsai e Wu (1971) e Tsai-Hill (Azzi e Tsai, 1965) o mesmo valor de  $F_{44}$ . Em relação ao parâmetro  $F_{12}$ , a teoria de Tsai-Hill (Azzi e Tsai, 1965) propõe a adoção do valor descrito na Tabela 1.

Para direções intermediárias às direções 1 e 2, a teoria de Tsai-Hill (Azzi e Tsai, 1965) estima que a falha de um determinado material ocorra quando a Equação 26 não for satisfeita.

$$\frac{1}{\sigma_\theta^2} = F_{11} \cdot \cos^4 \theta + (F_{44} - F_{11}) \cdot \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta + F_{22} \cdot \sin^4 \theta \quad (26)$$

Da Equação 26, para a estimativa das resistências à tração, em função de  $\theta$ , emprega-se os valores de  $F_{11}$  e  $F_{22}$  advindos das Equações 22 e 24. A Tabela 2 apresenta a síntese das equações e parâmetros necessários para a aplicação dos critérios de falha nas estimativas da resistência à tração em função de  $\theta$  ( $f_{t\theta}$ ).

**Tabela 2: Síntese das equações e variáveis empregadas na estimativa da  $f_{t\theta}$  por meio dos critérios de falha.**

Autor	Equação	Parâmetros <sup>2</sup>							
		$F_1$	$F_2$	$F_{11}$	$F_{22}$	$F_{44}$	$F_{12}$		
Tsai e Wu (1971)	$f_{t\theta}^2 \cdot [F_{11} \cdot \cos^4 \theta + F_{22} \cdot \sin^4 \theta + (2 \cdot F_{12} + F_{44}) \cdot \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta] +$ $+ \sigma_{\theta} \cdot (F_1 \cdot \cos^2 \theta + F_2 \cdot \sin^2 \theta) = 1$	$\frac{1}{f_{t0}}$	$-\frac{1}{f_{c0}}$	$\frac{1}{f_{t90}}$	$-\frac{1}{f_{c90}}$	$\frac{1}{f_{t0} \cdot f_{c0}}$	$\frac{1}{f_{t90} \cdot f_{c90}}$	$\frac{1}{f_{v0}^2}$	-
Tsai-Hill (Azzi e Tsai, 1965)	$\frac{1}{f_{t\theta}^2} = F_{11} \cdot \cos^4 \theta + (F_{44} - F_{11}) \cdot \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta + F_{22} \cdot \sin^4 \theta$	-	-	$\frac{1}{f_{t0}^2}$	$\frac{1}{f_{t90}^2}$	$\frac{1}{f_{v0}^2}$	$-\frac{1}{2 \cdot f_{t0}^2}$		

$f_{t\theta}$  = resistência à tração em função de  $\theta$ ;  $f_{t0}$  = resistência à tração na direção paralela às fibras;  $f_{t90}$  = resistência à tração na direção normal às fibras;  $f_{c0}$  = resistência à compressão na direção paralela às fibras;  $f_{c90}$  = resistência à compressão na direção normal às fibras;  $f_{v0}$  = resistência ao cisalhamento paralelo às fibras.

<sup>2</sup> Valores do parâmetro  $F_{12}$  advindos da Tabela 1, para a aplicação do critério de Tsai e Wu (1971).

Da Tabela 2, para a estimativa da  $f_{t\theta}$ , a utilização do critério de Tsai e Wu (1971) demanda o conhecimento dos valores experimentais de cinco propriedades de resistência  $f_{t0}$ ,  $f_{t90}$ ,  $f_{c0}$ ,  $f_{c90}$  e  $f_{v0}$ , ao passo que o critério de Tsai-Hill (Azzi e Tsai, 1965) exige o conhecimento de  $f_{t0}$ ,  $f_{t90}$  e  $f_{v0}$ .

## 2.2 MODELOS EMPÍRICOS

Em alternativa aos critérios de falha, tem-se a utilização de modelos empíricos. Tais modelos foram desenvolvidos visando a estimativa das propriedades de resistência ( $f_{\theta}$ ) e rigidez ( $E_{\theta}$ ) em função de  $\theta$ , por meio de um número menor de parâmetros.

De modo geral, a aplicação dos modelos empíricos exige, apenas, a determinação experimental das propriedades, de resistência ou rigidez, obtidas de modo paralelo ( $f_0$  e  $E_0$ ) e normal ( $f_{90}$  e  $E_{90}$ ) às fibras da madeira. Ao contrário do critério de Tsai e Wu (1971) e do Tsai-Hill (Azzi e Tsai, 1965), o uso de modelo empíricos não demanda o conhecimento de propriedades diferentes da que se pretende estimar.

Dentre os modelos empíricos existentes, o de Hankinson, descrito pela Equação 27, foi desenvolvido pelo exército dos Estados Unidos em 1921. Para tanto, foram realizados ensaios de compressão empregando madeiras coníferas da espécie *Spruce* e 11 variações de  $\theta$  ( $0^\circ$ ,  $3^\circ$ ,  $6^\circ$ ,  $10^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $75^\circ$  e  $90^\circ$ ). Na Equação 27 tem-se o expoente  $n$ , dos termos trigonométricos, igual a 2.

$$f_{\theta} = \frac{f_0 \cdot f_{90}}{f_0 \cdot \sin^n \theta + f_{90} \cdot \cos^n \theta} \quad (27)$$

A NBR 7190 (ABNT, 1997) prescreve a adoção do modelo de Hankinson (1921), com expoente  $n$  igual a 2, para a estimativa dos valores de  $f_{\theta}$  determinados a partir de solicitações normais. Para valores de  $\theta$  inferiores ou iguais a  $6^\circ$ , permite-se ignorar a influência da inclinação das fibras na determinação dos valores de resistência.

Apesar de empírico, o modelo de Hankinson (1921) pode ser deduzido por meio de uma aproximação linear do critério de falha de Tsai e Wu (1971). Para tanto, despreza-se na Equação 5 (tensor polinomial para materiais ortotrópicos) a tensão de cisalhamento ( $\sigma_4$ ) e os parâmetros  $F_{11}$ ,  $F_{22}$  e  $F_{12}$ . Deste modo, tem-se a Equação 28.

$$F_1 \cdot \sigma_1 + F_2 \cdot \sigma_2 = 1 \quad (28)$$

Na Equação 28 os parâmetros  $F_1$  e  $F_2$  são determinados considerando a atuação isolada de determinada sollicitação em cada uma das direções principais (1 e 2). Tomando-se o ensaio de tração como exemplo, ao sollicitar o material apenas na direção 1 ( $\sigma_2 = 0$ ) tem-se  $F_1$  conforme a Equação 29.

$$F_1 = \frac{1}{f_{t1}} \quad (29)$$

Analogamente, ao sollicitar o material apenas na direção 2 ( $\sigma_1 = 0$ ), tem-se  $F_2$  conforme a Equação 30.

$$F_2 = \frac{1}{f_{t2}} \quad (30)$$

Considerando-se o ensaio uniaxial de tração em uma direção orientada por  $\theta$ , as Equações 31 e 32 relacionam as tensões nos eixos principais com as tensões dos eixos inclinados.

$$\sigma_1 = \sigma_\theta \cdot \cos^2 \theta \quad (31)$$

$$\sigma_2 = \sigma_\theta \cdot \sin^2 \theta \quad (32)$$

Substituindo-se as Equações 29, 30, 31 e 32 na Equação 28, e fazendo as devidas simplificações, obtêm-se o modelo de Hankinson (1921), conforme expressa a Equação 33.

$$\sigma_\theta = \frac{f_{t1} \cdot f_{t2}}{f_{t1} \cdot \sin^2 \theta + f_{t2} \cdot \cos^2 \theta} \quad (33)$$

Além do modelo de Hankinson (1921), tem-se, na literatura, outros modelos que podem ser empregados para a estimativa de  $f_\theta$  e  $E_\theta$ . As Equações 34, 35 e 36, apresentam, respectivamente, os modelos de Keylwerth (1951), Karlsen *et al.* (1967) e Szücs (1992).

$$f_\theta = \frac{f_0}{\left( \cos^n \theta - \frac{f_0}{f_{90}} \cdot \sin^n \theta \right) \cdot \cos(2 \cdot \theta) + \frac{f_0}{f_{45}} \cdot \sin^n(2 \cdot \theta)} \quad (34)$$

$$f_\theta = \frac{f_0}{1 + \left( \frac{f_0}{f_{90}} - 1 \right) \cdot \sin^n \theta} \quad (35)$$

$$f_\theta = f_0 - (f_0 - f_{90}) \cdot \sin^n \theta \quad (36)$$

Com expoente  $n$  igual a 2, o modelo de Keylwerth (1951) foi desenvolvido para a estimativa de  $E_\theta$ . Esse modelo também é empregado para estimativas de  $f_\theta$ , adotando-se o mesmo valor do expoente  $n$ . O modelo de Keylwerth (1951) se difere dos demais por exigir o conhecimento dos valores de resistência ou rigidez determinados para  $\theta$  igual a  $45^\circ$  ( $f_{45}$  ou  $E_{45}$ ).

O modelo proposto por Karlsen *et al.* (1967), com  $n$  igual a 3, trata da estimativa dos valores de resistência para tensões normais inclinadas. Szücs (1992) discute o uso da Equação 36 com  $n$  igual a 2 para a estimativa das resistências à tração e à compressão em função de  $\theta$ . Modelo esse também adotado pelo antigo documento normativo *Deutsches Institut für Normung* - DIN 1052 (1988), mas com  $n$  igual 1.

Tanto o modelo de Hankinson (1921) quanto o de Karlsen *et al.* (1967) e Szücs (1992) demandam o conhecimento de, apenas, dois parâmetros de resistência ( $f_0$  e  $f_{90}$ ). A Tabela 3 apresenta a síntese das equações dos modelos empíricos estudados, os respectivos valores do expoente  $n$  original ( $n_{orig}$ ) e as variáveis necessárias para a utilização de tais modelos.

**Tabela 3: Síntese das equações e variáveis empregadas na estimativa da  $f_{t\theta}$  por meio dos modelos empíricos.**

Autor	Modelo	Variáveis	$n_{orig}$
Hankinson (1921)	$f_{t\theta} = \frac{f_{t0} \cdot f_{t90}}{f_{t0} \cdot \sin^n \theta + f_{t90} \cdot \cos^n \theta}$	$f_{t0}$ e $f_{t90}$	2,00
Keylwerth (1951)	$f_{t\theta} = \frac{f_{t0}}{\left( \cos^n \theta - \frac{f_{t0}}{f_{t90}} \cdot \sin^n \theta \right) \cdot \cos(2 \cdot \theta) + \frac{f_{t0}}{f_{t45}} \cdot \sin^n(2 \cdot \theta)}$	$f_{t0}$ , $f_{t45}$ e $f_{t90}$	2,00
Karlsen <i>et al.</i> (1967)	$f_{t\theta} = \frac{f_{t0}}{1 + \left( \frac{f_{t0}}{f_{t90}} - 1 \right) \cdot \sin^n \theta}$	$f_{t0}$ e $f_{t90}$	3,00
Szücs (1992)	$f_{t\theta} = f_{t0} - (f_{t0} - f_{t90}) \cdot \sin^n \theta$	$f_{t0}$ e $f_{t90}$	2,00

$f_{t\theta}$  = resistência à tração em função de  $\theta$ ;  $f_{t0}$  = resistência à tração na direção paralela às fibras;  $f_{t90}$  = resistência à tração na direção normal às fibras;  $f_{t45}$  = resistência à tração determinada considerando  $\theta = 45^\circ$ .

### 2.3 ESTUDOS ACERCA DA APLICAÇÃO DE CRITÉRIOS DE FALHA E MODELOS EMPÍRICOS À MADEIRA

Esta seção apresenta trabalhos que investigaram a utilização dos critérios de falha e métodos empíricos na estimativa de  $f_\theta$  e  $E_\theta$ . Para tanto, empregou-se como mecanismo de busca o Portal Periódicos CAPES, o Google Scholar e o endereço eletrônico de revistas relacionadas as temáticas: propriedades da madeira e estruturas de madeira.

Adotando a madeira de Douglas-fir e seis valores distintos de  $\theta$  ( $0^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  e  $90^\circ$ ), Woodward e Minor (1988) realizaram ensaios de tração em 48 corpos de prova, 8 amostras para cada ângulo investigado. Com base nos resultados obtidos, os autores ajustaram o modelo de Hankinson (1921) à uma curva hiperbólica, conforme expressa a Equação 37.

$$f_\theta = \frac{f_{t0} \cdot f_{t90}}{f_{t0} \cdot \sinh(u) + f_{t90} \cdot \cosh(u)}; \quad u = 0,01 \cdot \theta \quad (37)$$

Em termos exponenciais a Equação 37 resulta na Equação 38.



$$f_{\theta} = \frac{2 \cdot f_{t0} \cdot f_{t90}}{e^u \cdot (f_{t0} + f_{t90}) + e^{-u} \cdot (f_{t90} - f_{t0})}; \quad u = 0,01 \cdot \theta \quad (38)$$

Comparando com os dados experimentais, os autores concluíram que as estimativas obtidas por meio da Equação 37 foram mais precisas do que as obtidas pelo modelo de Hankinson (1921) - com expoente  $n = 1,5$  e  $n = 2$  - e o critério de Tsai-Hill (Azzi e Tsai, 1965).

Adotando cinco valores distintos de  $\theta$  ( $0^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $90^\circ$ ), Oh (2011) investigou a eficácia dos modelos de Hankinson (1921), Woodward e Minor (1988) e o critério de Tsai-Hill (Azzi e Tsai, 1965) na estimativa das resistências à tração em função de  $\theta$  ( $f_{t\theta}$ ) de painéis de LVL (*Laminated veneer lumber*). Os resultados obtidos constam na Tabela 4.

**Tabela 4: Valores de  $f_{t\theta}$  de painéis de LVL por Oh (2011).**

$\theta$ ( $^\circ$ )	0	15	30	45	90
$f_{t\theta}^{\text{exp}}$ (MPa)	5,18	1,22	0,50	0,32	0,18
$f_{t\theta}^{\text{hank}}$ (MPa)	5,18	1,09	0,47	0,29	0,18
$f_{t\theta}^{\text{Tsai-Hill}}$ (MPa)	5,18	0,69	0,36	0,25	0,18
$f_{t\theta}^{\text{hiperbólica}}$ (MPa)	5,18	0,97	0,52	0,35	0,17

$\theta$  = ângulo formado entre a direção da aplicação da solicitação mecânica e a direção das fibras;  $f_{t\theta}^{\text{exp}}$  = valores experimentais da resistência à tração em função de  $\theta$ ;  $f_{t\theta}^{\text{hank}}$  = resistência à tração em função de  $\theta$ , estimada pelo modelo de Hankinson (1921);  $f_{t\theta}^{\text{Tsai-Hill}}$  = resistência à tração em função de  $\theta$ , estimada pelo critério de Tsai-Hill (Azzi e Tsai, 1965);  $f_{t\theta}^{\text{hiperbólica}}$  = resistência à tração em função de  $\theta$ , estimada por Woodward e Minor (1988).

Fonte: Adaptado de Oh (2011).

O autor concluiu que tanto o modelo de Hankinson (1921), na sua forma original (expoente  $n = 2$ ), quanto o modelo de Woodward e Minor (1988) conduziram a boas estimativas de  $f_{t\theta}$ , para os painéis de LVL utilizados. Para todos os ângulos investigados, o modelo de Hankinson (1921) apresentou estimativas conservadoras quando comparado ao modelo de Woodward e Minor (1988).

Logsdon *et al.* (2010) investigaram a eficácia dos modelos de Hankinson (1921), Keylwerth (1951), Karlsen *et al.* (1967) e Szücs (1992) na estimativa dos valores do módulo de elasticidade na compressão em função de  $\theta$  ( $E_{c\theta}$ ). Para tanto, os autores adotaram a madeira de Peroba mica (*Aspidosperma populifolium* A. DC.) e ensaiaram 12 corpos de prova para cada valor de  $\theta$  investigado ( $0^\circ$ ,  $10^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $40^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $50^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $70^\circ$ ,  $80^\circ$  e  $90^\circ$ ). Os ensaios foram conduzidos seguindo as prescrições da NBR 7190 (ABNT, 1997) e os valores de  $E_{c\theta}$  foram avaliados pelo seu valor médio (rigidez efetiva -  $E_{c\theta,m}$ ). A Tabela 5 apresenta os valores de  $E_{c\theta,m}$  obtidos pelos autores.

**Tabela 5: Valores de  $E_{c\theta,m}$  da madeira de Peroba mica por Logsdon *et al.* (2010).**

$\theta$ (°)	0	10	20	30	40	45	50	60	70	80	90
$E_{c\theta,m}$ (MPa)	13620	11033	6323	4191	3061	2731	2506	2132	1925	1860	1855

$\theta$  = ângulo formado entre a direção da aplicação da solicitação mecânica e a direção das fibras;  $E_{c\theta,m}$  = valores experimentais do módulo de elasticidade na compressão em função de  $\theta$ .

Fonte: Adaptado de Logsdon *et al.* (2010).

Por meio da análise estatística (teste de *pairing* e teste dos desvios), os autores determinaram, para cada modelo investigado, o intervalo de confiança do expoente  $n$  e o melhor ajuste obtido ( $n_{\text{ótimo}}$ ). Tais resultados constam na Tabela 6.

**Tabela 6: Intervalos de validade e melhores ajustes do expoente  $n$  na estimativa de  $E_{c\theta}$  por Logsdon *et al.* (2010).**

Modelo	Intervalo de validade	$n_{\text{ótimo}}$
Hankinson (1921)	$1,12 \leq n \leq 1,81$	1,65
Keylwerth (1951)	$1,12 \leq n \leq 2,39$	2,03
Karlsen <i>et al.</i> (1967)	$1,22 \leq n \leq 1,78$	1,61
Szücs (1992)	$0,26 \leq n \leq 0,61$	0,41

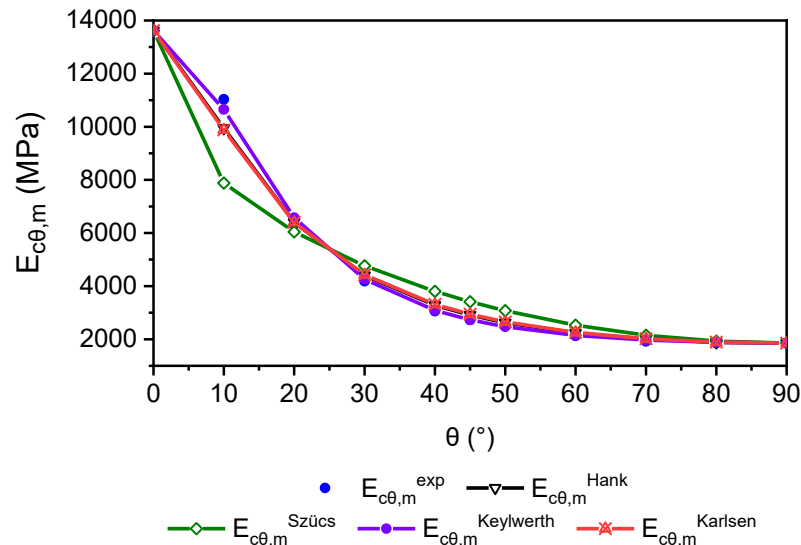
$n$  = expoente dos termos trigonométricos dos modelos empíricos investigados;  $n_{\text{ótimo}}$  = expoente ótimo dos termos trigonométricos dos modelos empíricos investigados.

Fonte: Adaptado de Logsdon *et al.* (2010).

Da Tabela 6, tanto para o modelo de Hankinson (1921) quanto para o de Szücs (1992), o valor tradicional de  $n$  igual a 2 não apresentou validade estatística. A mesma constatação foi observada para o modelo de Karlsen *et al.* (1967) com expoente  $n$  igual a 3. Em contrapartida, o modelo Keylwerth (1951) apresentou validade estatística com o valor do expoente  $n$  originalmente apresentado ( $n = 2$ ). Ressalta-se que o modelo de Keylwerth (1951) foi desenvolvido para a estimativa de  $E_{\theta}$ .

A Figura 7 ilustra os valores experimentais de  $E_{c\theta,m}$  ( $E_{c\theta,m}^{\text{exp}}$  - Tabela 5) e as estimativas obtidas pelos modelos empíricos ( $E_{c\theta,m}^{\text{Hank}}$ ,  $E_{c\theta,m}^{\text{Szücs}}$ ,  $E_{c\theta,m}^{\text{Keylwerth}}$  e  $E_{c\theta,m}^{\text{Karlsen}}$ ) considerando o valor de  $n_{\text{ótimo}}$  apresentado na Tabela 6.

**Figura 7: Melhores ajustes de  $E_{c\theta,m}$  para a Peróba Mica por Logsdon *et al.* (2010).**



Fonte: Adaptado de Logsdon *et al.* (2010).

Seguindo as prescrições da ASTM D143 (2009), Gupta e Sinha (2012) investigaram o efeito da variação de  $\theta$  na resistência ao cisalhamento ( $f_{v\theta}$ ) da madeira de Douglas-fir. Foram ensaiados corpos de prova com plano de cisalhamento paralelo ( $\theta = 0^{\circ}$ ) e normal ( $\theta = 90^{\circ}$ ) às fibras, assim como planos intermediários ( $0^{\circ} < \theta < 90^{\circ}$ ) variando  $\theta$  a cada  $10^{\circ}$ . Como esperado, teve-se decréscimo dos valores da resistência ao cisalhamento com o aumento de  $\theta$ . Ademais, os autores comparam os valores experimentais ( $f_{v\theta}^{exp}$ ) com os estimados ( $f_{v\theta}^{est}$ ) por meio do modelo de Hankinson (1921), do critério de Tsai e Wu (1971) e da Equação 39 (proposta pelos autores).

$$f_{v\theta} = \sqrt{f_{v0}^2 \cdot \cos^2 \theta + f_{v90}^2 \cdot \sin^2 \theta} \quad (39)$$

Com coeficiente de determinação ( $R^2$ ), respectivamente, igual a 50,30% e 31,30%, os autores concluíram que os modelos de Hankinson (1921) e Tsai e Wu (1971) não conduziram a boas estimativas de  $f_{v\theta}$ . O melhor ajuste foi obtido por meio do modelo descrito pela Equação 39, com  $R^2$  igual a 81,10%. Na Tabela 7 constam os valores experimentais e os estimados pelo modelo proposto pelos autores.

**Tabela 7: Valores de  $f_{v\theta}$  da madeira de Douglas-fir por Gupta e Sinha (2012).**

$\theta$ (°)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$f_{v\theta}^{\text{exp}}$ (MPa)	6,57	6,88	5,82	5,72	5,61	4,86	4,05	3,07	2,36	2,24
$f_{v\theta}^{\text{est}}$ (MPa)	6,57	6,48	6,22	5,80	5,24	4,56	3,82	3,08	2,48	2,24

$\theta$  = ângulo formado entre a direção da aplicação da solicitação mecânica e a direção das fibras;  $f_{v\theta}^{\text{exp}}$  = valores experimentais da resistência ao cisalhamento em função de  $\theta$ ;  $f_{v\theta}^{\text{est}}$  = resistência ao cisalhamento em função de  $\theta$ , estimada pelo modelo proposto pelos autores.

Fonte: Adaptado de Gupta e Sinha (2012).

Por meio da experimentação da madeira de Cupiúba (*Goupia glabra*), Mascia e Nicolas (2012) investigaram a aplicação do critério de Tsai e Wu (1971) na estimativa dos valores de resistência à tração em função de  $\theta$  ( $f_{t\theta}$ ). Atendendo as prescrições da NBR 7190 (ABNT, 1997), foram confeccionados 8 corpos de prova para cada ângulo  $\theta$  investigado ( $0^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $75^\circ$  e  $90^\circ$ ) resultando, ao todo, em 56 determinações experimentais. Os valores obtidos de  $f_{t\theta}$  constam na Tabela 8.

**Tabela 8: Valores de  $f_{t\theta}$  da madeira de Cupiúba por Mascia e Nicolas (2012).**

$\theta$ (°)	0	15	30	45	60	75	90
$f_{t\theta}$ (MPa)	72,90	28,51	13,03	7,23	6,17	5,29	4,65

$\theta$  = ângulo formado entre a direção da aplicação da solicitação mecânica e a direção das fibras;  $f_{t\theta}$  = valores experimentais da resistência à tração em função de  $\theta$ .

Fonte: Adaptado de Mascia e Nicolas (2012).

Além dos ensaios de tração, foram realizados ensaios complementares de compressão e cisalhamento para a determinação de  $f_{c0}$ ,  $f_{c90}$  e  $f_{v0}$ , necessários para a obtenção dos parâmetros  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_{11}$ ,  $F_{22}$ ,  $F_{44}$  e  $F_{12}$ . As Tabelas 9 e 10 apresentam, respectivamente, os resultados dos ensaios complementares e os valores dos parâmetros de resistência obtidos pelos autores.

**Tabela 9: Resistências à compressão e ao cisalhamento da madeira de Cupiúba por Mascia e Nicolas (2012).**

$f_{c0} = f_{c1}$ (MPa)	$f_{c90} = f_{c2}$ (MPa)	$f_{v0} = f_{v4}$ (MPa)
58,06	20,09	19,75

$f_{t0}$  = resistência à tração paralela às fibras;  $f_{t90}$  = resistência à tração normal às fibras;  $f_{c0}$  = resistência à compressão paralela às fibras;  $f_{c90}$  = resistência à compressão normal às fibras;  $f_{v0}$  = resistência ao cisalhamento paralelo às fibras.

Fonte: Adaptado de Mascia e Nicolas (2012).

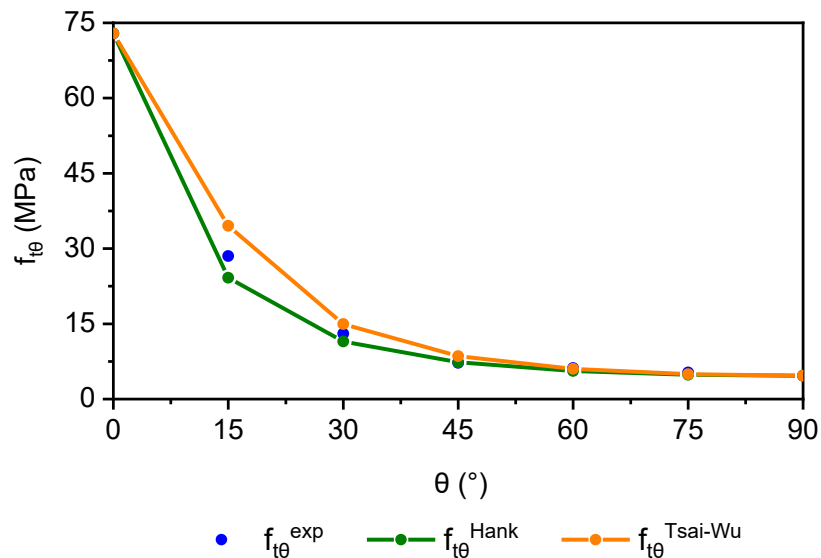
**Tabela 10: Parâmetros de resistência  $F_i$ ,  $F_{ii}$  e  $F_{ij}$  da madeira de Cupiúba por Mascia e Nicolas (2012).**

$F_1$ (MPa <sup>-1</sup> )	$F_2$ (MPa <sup>-1</sup> )	$F_{11}$ (MPa <sup>-2</sup> )	$F_{22}$ (MPa <sup>-2</sup> )	$F_{44}$ (MPa <sup>-2</sup> )	$F_{12}^3$ (MPa <sup>-2</sup> )
$-3,51 \cdot 10^{-3}$	$1,65 \cdot 10^{-1}$	$2,36 \cdot 10^{-4}$	$1,07 \cdot 10^{-2}$	$2,56 \cdot 10^{-3}$	$\pm 1,59 \cdot 10^{-3}$

Fonte: Mascia e Nicolas (2012).

A Figura 8 ilustra os valores experimentais de  $f_{t\theta}$  ( $f_{t\theta}^{exp}$  - Tabela 8) e os estimados por meio do modelo de Hankinson (1921) ( $f_{t\theta}^{Hank}$ ) e do critério de falha de Tsai e Wu (1971) ( $f_{t\theta}^{Tsai-Wu}$ ).

**Figura 8: Melhores ajustes de  $f_{t\theta}$  obtidos por meio de Hankinson (1921) e Tsai e Wu (1971) para a Cupiúba por Mascia e Nicolas (2012).**



Fonte: Adaptado de Mascia e Nicolas (2012).

Da Figura 8, os valores de  $f_{t\theta}^{Hank}$  foram obtidos com  $n$  igual a 1,5, o qual apresentou melhor ajuste em relação ao valor de  $n$  igual a 2, prescrito pela NBR 7190 (ABNT, 1997). Os valores de  $f_{t\theta}^{Tsai-Wu}$  correspondem a estimativas considerando o limite positivo do parâmetro  $F_{12}$  ( $+1,59 \cdot 10^{-3}$  MPa<sup>-2</sup>). Esse conduziu a valores mais precisos de  $f_{t\theta}$  em comparação as estimativas realizadas com o valor mínimo e nulo.

Como forma de comparação, Mascia e Nicolas (2012) estimaram o valor do parâmetro  $F_{12}$  fazendo uso das equações apresentadas na Tabela 1. Os valores obtidos estão apresentados na Tabela 11.

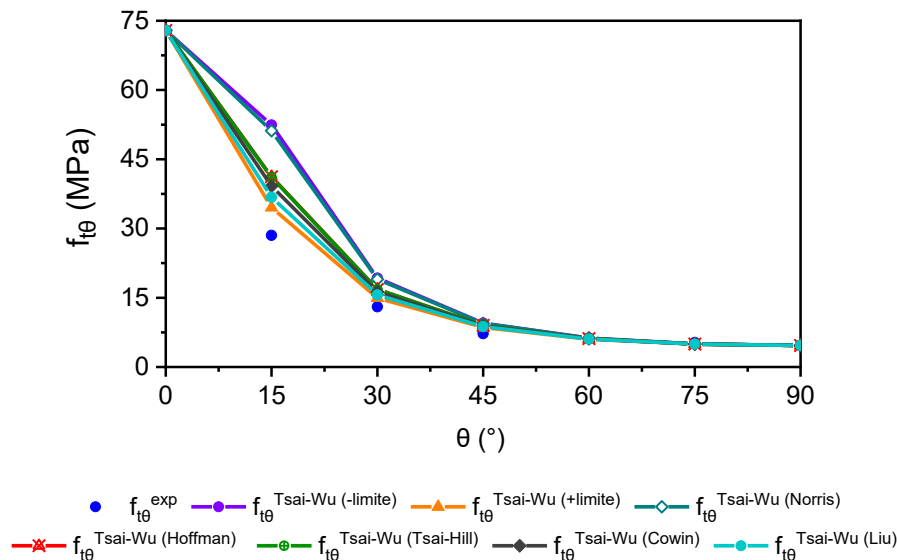
<sup>3</sup> Valores limites, Equação 15.

**Tabela 11: Parâmetro  $F_{12}$  estimado para a Cupiúba por Mascia e Nicolas (2012).**

Norris (1939) (MPa <sup>-2</sup> )	Hoffman (1967) (MPa <sup>-2</sup> )	Tsai-Hill (Azzi e Tsai, 1965) (MPa <sup>-2</sup> )	Cowin (1979) (MPa <sup>-2</sup> )	Liu (1984) (MPa <sup>-2</sup> )
$-1,47 \cdot 10^{-3}$	$-1,18 \cdot 10^{-4}$	$-9,41 \cdot 10^{-5}$	$3,08 \cdot 10^{-4}$	$9,12 \cdot 10^{-4}$

Fonte: Mascia e Nicolas (2012).

Da Tabela 11, todos os valores enquadraram-se no domínio de validade de  $F_{12}$  ( $-1,59 \cdot 10^{-3} \text{ MPa}^{-2} \leq F_{12} \leq +1,59 \cdot 10^{-3} \text{ MPa}^{-2}$ ). A Figura 9 ilustra  $f_{t\theta}^{\text{exp}}$  e os valores de  $f_{t\theta}^{\text{Tsai-Wu}}$  obtidos para os diferentes valores de  $F_{12}$  apresentados na Tabela 11.

**Figura 9: Melhores ajustes de  $f_{t\theta}$  obtidos por Tsai e Wu (1971) para diferentes valores de  $F_{12}$ .**

A Figura 9 foi elaborada visando observar a influência de  $F_{12}$  na determinação de  $f_{t\theta}^{\text{Tsai-Wu}}$ . Todavia, não consta no trabalho de Mascia e Nicolas (2012). Verificou-se que a maior diferença nas estimativas se deu, para  $\theta$  igual a  $15^\circ$ , entre  $f_{t\theta}^{\text{exp}}$  (28,51 MPa) e  $f_{t\theta}^{\text{Tsai-Wu (-limite)}}$  (52,42 MPa). Os autores concluíram que a maior dificuldade de aplicação do critério de Tsai e Wu (1971) se encontra na determinação do parâmetro  $F_{12}$ .

Visando determinar as superfícies de ruptura do critério de Tsai e Wu (1971) para a madeira de *Pinus elliotii*, Mascia *et al.* (2013) realizaram ensaios de compressão uniaxiais e biaxiais em corpos de prova cúbicos, com 4 cm de aresta. Considerou-se como principais as direções paralela e perpendicular, respectivamente 1 e 2. Para a realização do ensaio de compressão biaxial, fez-se uso de um alicate de compressão. Desse modo, a amostra foi,

inicialmente, comprimida pelo alicate, na direção 2, sem atingir a falha. Em seguida, com o auxílio de uma máquina universal, comprimiu-se a amostra até a ruptura. A Tabela 12 apresenta os pares de tensão ( $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  – tensões principais) obtidos no ensaio biaxial de compressão.

**Tabela 12: Ensaio biaxial de compressão: pares de tensão ( $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ ) da madeira de *Pinus elliottii* por Mascia *et al.* (2013).**

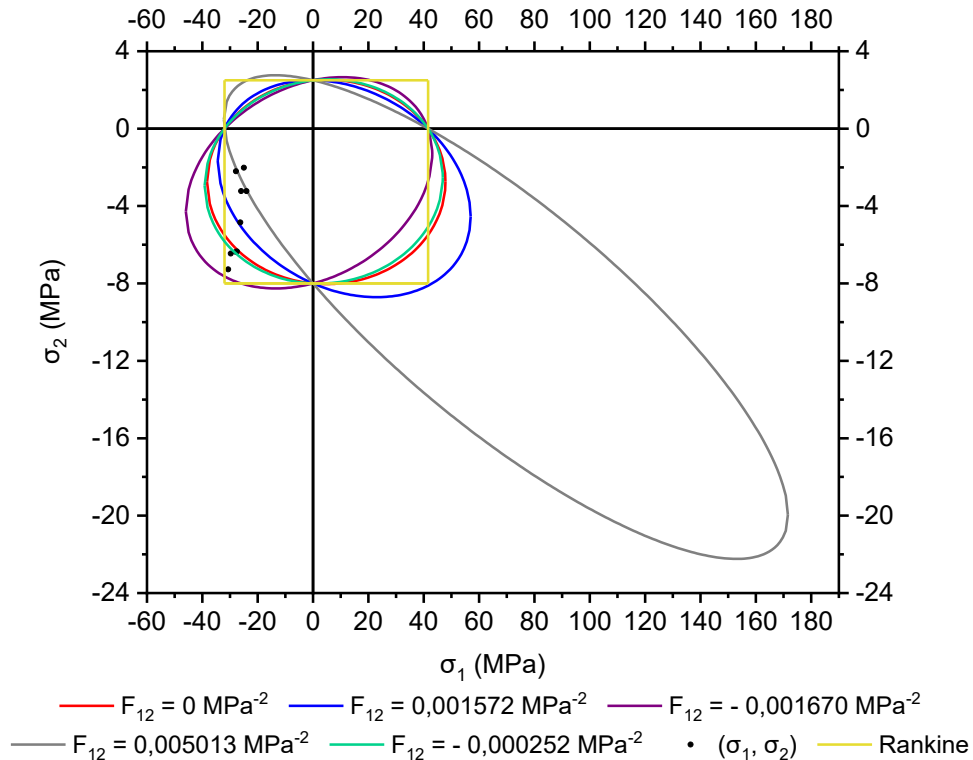
$\sigma_i$ (MPa)	Amostra								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\sigma_1$	-24,06	-25,94	-27,81	-27,50	-26,69	-25,00	-27,81	-26,25	-30,63
$\sigma_2$	-3,23	-3,23	-6,37	-6,35	-6,46	-2,02	-2,20	-4,85	-7,27

$\sigma_1$  = tensão principal de compressão na direção 1 (paralela às fibras);  $\sigma_2$  = tensão principal de compressão na direção 2 (normal às fibras).

Fonte: Adaptado de Mascia *et al.* (2013).

Com posse dos valores de  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  determinou-se o parâmetro  $F_{12}$  por meio da Equação 19. Como as amostras não foram submetidas a solicitações tangenciais, considerou-se  $\sigma_4$  igual a zero. Os parâmetros  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_{11}$ ,  $F_{22}$  e  $F_{44}$  foram estimados, a partir de  $f_{c0}$ , adotando as relações entre propriedades prescritas pela NBR 7190 (ABNT, 1997). Os autores determinaram os valores médios de  $F_{12}$  iguais a 0,001572, -0,001670, 0,005013 e -0,000252  $\text{MPa}^{-2}$  (média dos valores próximos). Tais valores enquadraram-se aos limites de  $F_{12}$  ( $-0,00613 \text{ MPa}^{-2} \leq F_{12} \leq 0,00613 \text{ MPa}^{-2}$ ). A Figura 10 ilustra o sistema  $\sigma_1 \times \sigma_2$  com os pontos correspondentes aos valores de  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  (Tabela 12), assim como as superfícies de ruptura do critério de Tsai e Wu (1971), obtidas para cada valor médio de  $F_{12}$ . Na Figura 10, consta, também, a superfície de ruptura do critério de Rankine (idealizado para materiais frágeis), empregada como comparação.

**Figura 10: Sistema  $\sigma_1 \times \sigma_2$ : superfícies de ruptura obtidas para a madeira de *Pinus elliotti* por Mascia *et al.* (2013).**



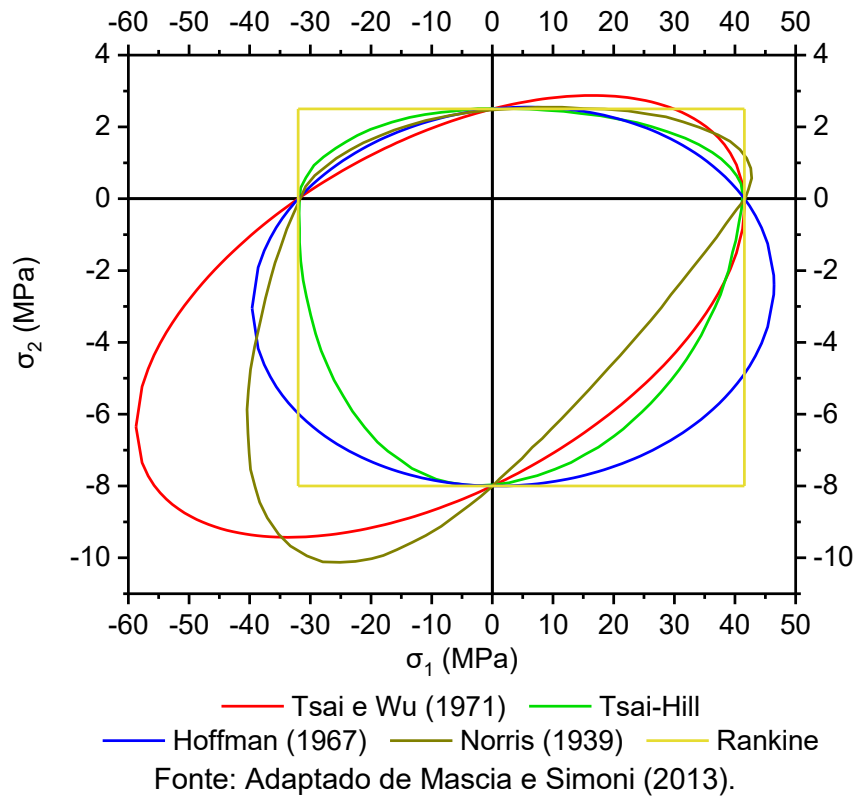
Fonte: Adaptado de Mascia *et al.* (2013).

Com base na Figura 10, os autores concluíram que pequenas alterações nos valores de  $F_{12}$  provocam alterações significativas nas estimativas de resistência por meio do critério de Tsai e Wu (1971). A superfície de ruptura obtida com valores de  $F_{12} = 0,005013 \text{ MPa}^{-2}$  foi considerada a mais adequada, uma vez que não contemplou o grupo de pontos  $(\sigma_1, \sigma_2)$ , que conduziram o material a falha. Assim como trabalho de Mascia e Nicolas (2012), as melhores estimativas foram obtidas considerando valores de  $F_{12}$  próximos ao limite positivo.

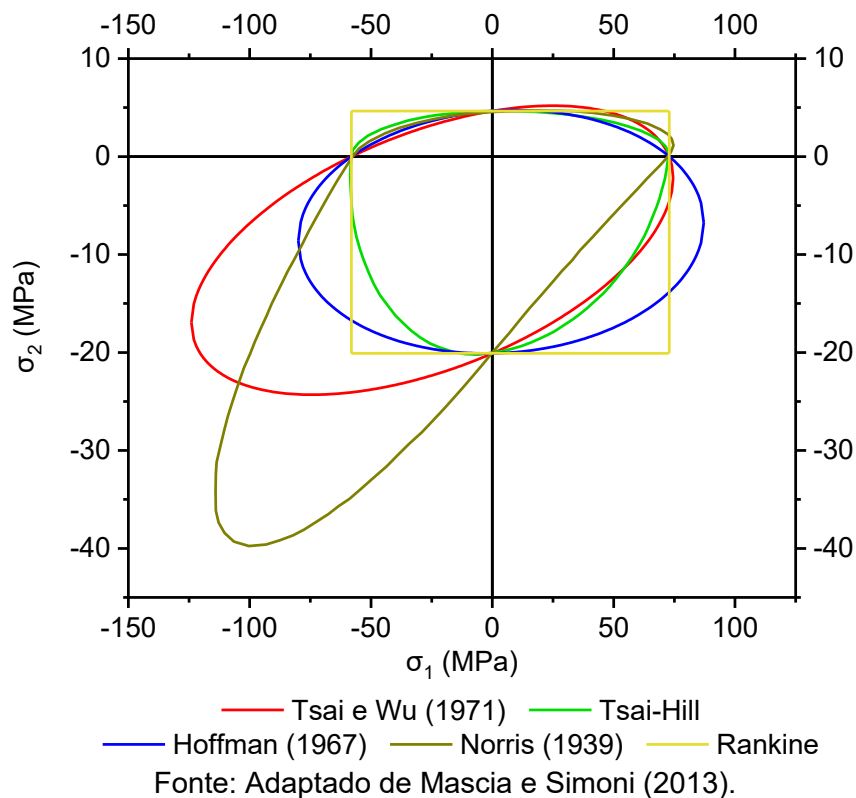
A partir das propriedades mecânicas ( $f_{t1}$ ,  $f_{t2}$ ,  $f_{c1}$  e  $f_{c2}$ ) obtidas para as madeiras de *Pinus elliotti* e *Goupia glabra*, Mascia e Simoni (2013) determinaram as superfícies de ruptura dos critérios de Tsai e Wu (1971), Tsai-Hill (Azzi e Tsai, 1965), Hoffman (1967) e Norris (1939). Para tanto, os autores consideraram  $\sigma_4$  igual a zero e, para o critério de Tsai e Wu (1971),  $F_{12}$  correspondente a metade do limite negativo. As Figuras 11 e 12 apresentam, respectivamente, as superfícies obtidas, para as madeiras de *Pinus elliotti* e *Goupia glabra*, comparando-as com a do critério de Rankine.



**Figura 11: Sistema  $\sigma_1 \times \sigma_2$ : superfícies de ruptura obtidas para a madeira de *Pinus elliotti* por Mascia e Simoni (2013).**



**Figura 12: Sistema  $\sigma_1 \times \sigma_2$ : superfícies de ruptura obtidas para a madeira de *Goupia glabra* por Mascia e Simoni (2013).**



Nas Figuras 11 e 12, para ambas as espécies, as superfícies de resistência apresentaram comportamento, relativamente, semelhante no primeiro e quarto quadrantes do sistema  $\sigma_1 \times \sigma_2$ , divergindo, significativamente, no terceiro e quarto. O critério de Tsai-Hill (Azzi e Tsai, 1965) foi o que apresentou superfície de resistência menos abrangente, mostrando ser, para o estudo em questão, o mais conservador dos critérios de falha estudados.

Considerando os modelos descritos pelas Equações 27, 34, 35 e 36, Logsdon *et al.* (2014a) e Logsdon *et al.* (2014b) estudaram os valores de  $n_{\text{ótimo}}$  na estimativa das resistências características à tração ( $f_{t\theta,k}$ ) e ao cisalhamento ( $f_{v\theta,k}$ ) em função de  $\theta$ . Cabe destacar que a NBR 7190 (ABNT, 1997) não faz menção a utilização de modelos empíricos para a estimativa de resistências a solicitações tangenciais em função de  $\theta$ . Analogamente ao estudo de Logsdon *et al.* (2010), em ambos os trabalhos, adotou-se a madeira de Peroba mica (*Aspidosperma populifolium* A. DC.) e valores de  $\theta$  iguais a 0°, 10°, 20°, 30°, 40°, 45°, 50°, 60°, 70°, 80° e 90°. As Tabelas 13 e 14 apresentam, respectivamente, os valores obtidos de  $f_{t\theta,k}$  e  $f_{v\theta,k}$ .

**Tabela 13: Valores de  $f_{t\theta,k}$  da madeira de Peroba mica por Logsdon *et al.* (2014a).**

$\theta$ (°)	0	10	20	30	40	45	50	60	70	80	90
$f_{t\theta,k}$ (MPa)	32,04	18,58	11,10	6,66	4,34	3,40	2,82	2,30	1,98	1,72	1,29

$\theta$  = ângulo formado entre a direção da aplicação da solicitação mecânica e a direção das fibras;  $f_{t\theta,k}$  = valores experimentais da resistência característica à tração em função de  $\theta$ .

Fonte: Adaptado de Logsdon *et al.* (2014a).

**Tabela 14: Valores de  $f_{v\theta,k}$  da madeira de Peroba mica por Logsdon *et al.* (2014b).**

$\theta$ (°)	0	10	20	30	40	45	50	60	70	80	90
$f_{v\theta,k}$ (MPa)	15,16	14,68	13,74	11,28	9,29	8,55	8,14	7,22	6,72	6,09	6,25

$\theta$  = ângulo formado entre a direção da aplicação da solicitação mecânica e a direção das fibras;  $f_{v\theta,k}$  = valores experimentais da resistência característica ao cisalhamento em função de  $\theta$ .

Fonte: Adaptado de Logsdon *et al.* (2014b).

Os intervalos de validade de  $n$  e os valores de  $n_{\text{ótimo}}$ , dos modelos investigados foram obtidos por meio da análise estatística (teste de *pairing* e teste dos desvios). As Tabelas 15 e 16 apresentam tais resultados para  $f_{t\theta,k}$  e  $f_{v\theta,k}$ , respectivamente.

**Tabela 15: Intervalos de validade e melhores ajustes do expoente  $n$  na estimativa de  $f_{t\theta,k}$  por Logsdon *et al.* (2014a).**

Modelo	Intervalo de validade	$n_{\text{ótimo}}$
Hankinson (1921)	$2,17 \leq n \leq 2,64$	2,37
Keylwerth (1951)	$1,86 \leq n \leq 2,64$	2,53
Karlsen <i>et al.</i> (1967)	$2,18 \leq n \leq 2,92$	2,40
Szücs (1992)	$0,18 \leq n \leq 0,37$	0,33

$n$  = expoente dos termos trigonométricos dos modelos empíricos investigados;  $n_{\text{ótimo}}$  = expoente ótimo dos termos trigonométricos dos modelos empíricos investigados.

Fonte: Adaptado de Logsdon *et al.* (2014a).

**Tabela 16: Intervalos de validade e melhores ajustes do expoente  $n$  na estimativa de  $f_{v\theta,k}$  por Logsdon *et al.* (2014b).**

Modelo	Intervalo de validade	$n_{\text{ótimo}}$
Hankinson (1921)	$1,96 \leq n \leq 2,08$	2,03
Keylwerth (1951)	$1,76 \leq n \leq 2,35$	2,16
Karlsen <i>et al.</i> (1967)	$1,88 \leq n \leq 2,19$	2,04
Szücs (1992)	$0,90 \leq n \leq 1,39$	1,18

$n$  = expoente dos termos trigonométricos dos modelos empíricos investigados;  $n_{\text{ótimo}}$  = expoente ótimo dos termos trigonométricos dos modelos empíricos investigados.

Fonte: Adaptado de Logsdon *et al.* (2014b).

Da Tabela 15, os valores de  $n$  inicialmente apresentados por Hankinson (1921) ( $n = 2$ ), Karlsen *et al.* (1967) ( $n = 3$ ) e Szücs (1992) ( $n = 2$ ) não apresentaram validade estatística na estimativa de  $f_{t\theta,k}$ . Análogo ao estudo de Logsdon *et al.* (2010), o modelo de Keylwerth (1951) foi o único em que o expoente  $n$  originalmente apresentado ( $n = 2$ ) enquadrou-se no intervalo de validade determinado.

Da Tabela 16, a utilização dos modelos de Karlsen *et al.* (1967) e Szücs (1992), na forma original ( $n$  igual a 3 e 2, respectivamente), não apresentou validade estatística. Por outro lado, o expoente  $n$  igual a 2, recomendado por Hankinson (1921) e Keylwerth (1951), mostrou ser representativo na estimativa de  $f_{v\theta,k}$ .

Pautados nos valores de  $n_{\text{ótimo}}$  apresentados nas Tabelas 15 e 16, Logsdon *et al.* (2014a) e Logsdon *et al.* (2014b) afirmaram que a obtenção de um expoente  $n$  estatisticamente aceitável para as diversas solicitações mecânicas pode ser tarefa impraticável.

Os melhores ajustes de  $f_{t\theta,k}$  [ $f_{t\theta,k}(n_{\text{ótimo}})$ ] e  $f_{v\theta,k}$  [ $f_{v\theta,k}(n_{\text{ótimo}})$ ], obtidos para cada modelo investigado, são ilustrados, respectivamente, nas Figuras 13 e 14.

Figura 13: Melhores ajustes de  $f_{t\theta,k}$  por Logsdon *et al.* (2014a).

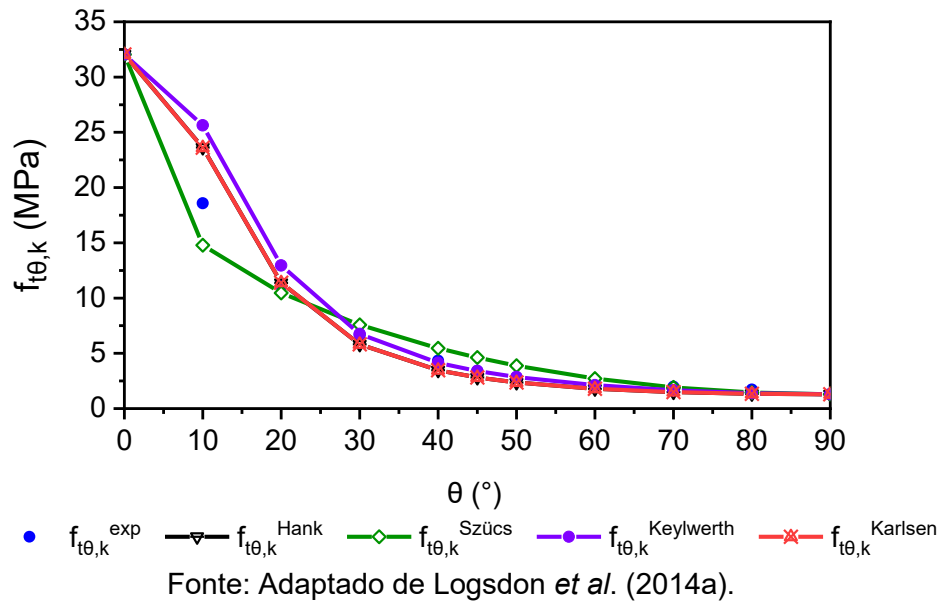
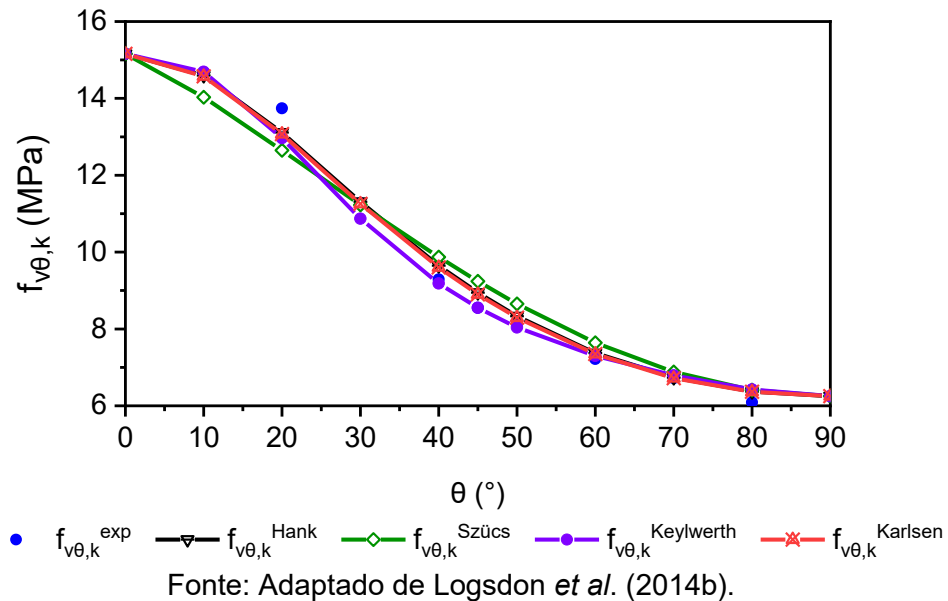


Figura 14: Melhores ajustes de  $f_{v\theta,k}$  por Logsdon *et al.* (2014b).



Das Figuras 13 e 14, seguido dos modelos de Hankinson (1921) e Karlsen *et al.* (1967), o modelo de Keylwerth (1951) foi o que apresentou os melhores ajustes de  $f_{t\theta,k}$  e  $f_{v\theta,k}$ . De acordo com Logsdon *et al.* (2014b), em comparação aos demais, o modelo de Keylwerth (1951) mostrou ser menos sensível a variação do expoente  $n$ . Tal constatação pode ser justificada pelo fato desse modelo demandar o conhecimento de três valores de  $f_{\theta}$ .

Por meio da experimentação de corpos de prova da madeira de *Eucalyptus saligna*, Carrasco e Mantilla (2016) avaliaram o comportamento da resistência ao cisalhamento em

função de  $\theta$  ( $f_{v\theta}$ ). Verificou-se para cada modelo descrito nas Equações 27, 34, 35 e 36 o valor de  $n_{\text{ótimo}}$  que melhor estima  $f_{v\theta}$ . Para tanto, adotou-se valores de  $\theta$  iguais a  $0^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $75^\circ$  e  $90^\circ$ . Os ensaios foram realizados atendendo as prescrições da NBR 7190 (ABNT, 1997). A Tabela 17 apresenta os valores de  $f_{v\theta}$  determinados no estudo.

**Tabela 17: Valores de  $f_{v\theta}$  da madeira de *Eucalyptus saligna* por Carrasco e Mantilla (2016).**

$\theta$ ( $^\circ$ )	0	15	30	45	60	75	90
$f_{v\theta}$ (MPa)	15,64	13,81	12,25	11,82	10,68	9,59	9,10

$\theta$  = ângulo formado entre a direção da aplicação da solicitação mecânica e a direção das fibras;  $f_{v\theta}$  = valores experimentais da resistência ao cisalhamento em função de  $\theta$ .

Fonte: Adaptado de Carrasco e Mantilla (2016).

Na Tabela 18 constam os valores de  $n_{\text{ótimo}}$  e o intervalo de validade do expoente  $n$  para cada modelo investigado.

**Tabela 18: Intervalos de validade e melhores ajustes do expoente  $n$  na estimativa de  $f_{v\theta}$  por Carrasco e Mantilla (2016).**

Modelo	Intervalo de validade	$n_{\text{ótimo}}$
Hankinson (1921)	$1,85 \leq n \leq 2,10$	1,93
Keylwerth (1951)	$n \leq 1,99$	1,51
Karlsen <i>et al.</i> (1967)	$1,45 \leq n \leq 2,25$	1,77
Szücs (1992)	$0,98 \leq n \leq 1,50$	1,23

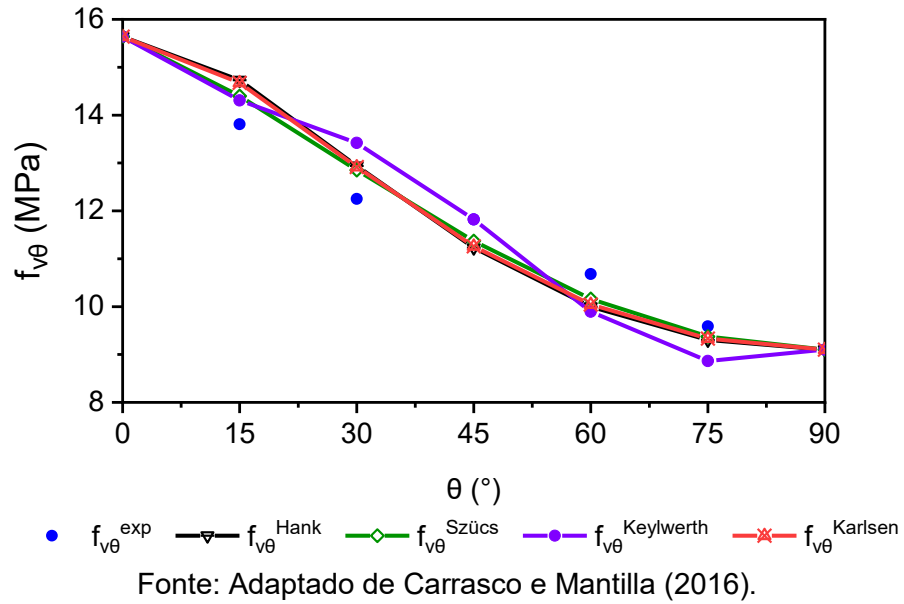
$n$  = expoente dos termos trigonométricos dos modelos empíricos investigados;  $n_{\text{ótimo}}$  = expoente ótimo dos termos trigonométricos dos modelos empíricos investigados.

Fonte: Adaptado de Carrasco e Mantilla (2016).

Da Tabela 18, a adoção do modelo de Hankinson (1921) com o valor tradicional de  $n$  ( $n = 2$ ) mostrou ser representativo na estimativa de  $f_{v\theta}$ . Por outro lado, os valores de  $n$  propostos por Keylwerth (1951) ( $n = 2$ ), Karlsen *et al.* (1967) ( $n = 3$ ) e Szücs (1992) ( $n = 2$ ) não apresentaram validade estatística.

Os autores concluíram que considerando os valores de  $n_{\text{ótimo}}$  descritos na Tabela 18, o modelo de Szücs (1992) foi o que melhor se adequou aos resultados experimentais. Esse resultado diverge do obtido por Logsdon *et al.* (2014b) para  $f_{v\theta,k}$ . A Figura 15 ilustra os melhores ajustes obtidos para cada modelo investigado.

Figura 15: Melhores ajustes de  $f_{v\theta}$  por Carrasco e Mantilla (2016).



## 2.4 CONCLUSÃO DA REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A Tabela 19 apresenta a síntese dos modelos investigados na literatura, espécies, ângulos e os melhores ajustes obtidos para as propriedades mecânicas investigadas.

Tabela 19: Síntese dos modelos investigados e melhores ajustes obtidos pela literatura.

Modelo	Pesquisadores	Propriedade mecânica	Espécie	Ângulos	Melhores ajustes (nótím ou F <sub>12</sub> )
$f_{\theta} = \frac{f_0 \cdot f_{90}}{f_0 \cdot \sin^n \theta + f_{90} \cdot \cos^n \theta}$	Logsdon <i>et al.</i> (2010)	E <sub>cθ</sub>	Peroba mica	0°, 10°, 20°, 30°, 40°, 45°, 50°, 60°, 70°, 80° e 90°	1,65
	Mascia e Nicolas (2012)	f <sub>tθ</sub>	Cupiúba	0°, 15°, 30°, 45°, 60°, 75° e 90°	1,50
	Logsdon <i>et al.</i> (2014a)	f <sub>tθ,k</sub>	Peroba mica	0°, 10°, 20°, 30°, 40°, 45°, 50°, 60°, 70°, 80° e 90°	2,37
	Logsdon <i>et al.</i> (2014b)	f <sub>vθ,k</sub>	Peroba mica	0°, 10°, 20°, 30°, 40°, 45°, 50°, 60°, 70°, 80° e 90°	2,03
	Carrasco e Mantilla (2016)	f <sub>vθ</sub>	<i>Eucalyptus saligna</i>	0°, 15°, 30°, 45°, 60°, 75°, 90°	1,93
$f_{\theta} = \frac{f_0}{\left(\cos^n \theta - \frac{f_0}{f_{90}} \cdot \sin^n \theta\right) \cdot \cos(2 \cdot \theta) + \frac{f_0}{f_{45}} \cdot \sin^n(2 \cdot \theta)}$	Logsdon <i>et al.</i> (2010)	E <sub>cθ</sub>	Peroba mica	0°, 10°, 20°, 30°, 40°, 45°, 50°, 60°, 70°, 80° e 90°	2,03
	Logsdon <i>et al.</i> (2014a)	f <sub>tθ,k</sub>	Peroba mica	0°, 10°, 20°, 30°, 40°, 45°, 50°, 60°, 70°, 80° e 90°	2,53
	Logsdon <i>et al.</i> (2014b)	f <sub>vθ,k</sub>	Peroba mica	0°, 10°, 20°, 30°, 40°, 45°, 50°, 60°, 70°, 80° e 90°	2,16
	Carrasco e Mantilla (2016)	f <sub>vθ</sub>	<i>Eucalyptus saligna</i>	0°, 15°, 30°, 45°, 60°, 75°, 90°	1,51
$f_{\theta} = \frac{f_0}{1 + \left(\frac{f_0}{f_{90}} - 1\right) \cdot \sin^n \theta}$	Logsdon <i>et al.</i> (2010)	E <sub>cθ</sub>	Peroba mica	0°, 10°, 20°, 30°, 40°, 45°, 50°, 60°, 70°, 80° e 90°	1,61
	Logsdon <i>et al.</i> (2014a)	f <sub>tθ,k</sub>	Peroba mica	0°, 10°, 20°, 30°, 40°, 45°, 50°, 60°, 70°, 80° e 90°	2,40
	Logsdon <i>et al.</i> (2014b)	f <sub>vθ,k</sub>	Peroba mica	0°, 10°, 20°, 30°, 40°, 45°, 50°, 60°, 70°, 80° e 90°	2,04
	Carrasco e Mantilla (2016)	f <sub>vθ</sub>	<i>Eucalyptus saligna</i>	0°, 15°, 30°, 45°, 60°, 75°, 90°	1,77

E<sub>cθ</sub> = módulo de elasticidade na compressão em função de θ; f<sub>tθ</sub> = resistência à tração em função de θ; f<sub>tθ,k</sub> = resistência característica à tração em função de θ; f<sub>vθ,k</sub> = resistência característica ao cisalhamento em função de θ; f<sub>vθ</sub> = resistência ao cisalhamento em função de θ; nótím = expoente ótimo dos termos trigonométricos dos modelos empíricos investigados; F<sub>12</sub> = parâmetro do critério de falha de Tsai e Wu (1971); +F<sub>12</sub> = limite positivo do parâmetro F<sub>12</sub> do critério de falha de Tsai e Wu (1971).

Tabela 19: Síntese dos modelos investigados e melhores ajustes obtidos pela literatura - Continuação.

Modelo	Pesquisadores	Propriedade mecânica	Espécie	Ângulos	Melhores ajustes (n <sub>ót</sub> im ou F <sub>12</sub> )
Tsai e Wu (1971)	Mascia e Nicolas (2012)	f <sub>tθ</sub>	Cupiúba	0°, 15°, 30°, 45°, 60°, 75° e 90°	+F <sub>12</sub>
$\sigma_{\theta}^2 \cdot \left[ \frac{\cos^4 \theta}{f_{t1} \cdot f_{c1}} + \frac{\sin^4 \theta}{f_{t2} \cdot f_{c2}} + \left( 2 \cdot F_{12} + \frac{1}{f_{v0}^2} \right) \cdot \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta \right] + \sigma_{\theta} \cdot \left[ \left( \frac{1}{f_{t1}} - \frac{1}{f_{c1}} \right) \cdot \cos^2 \theta + \left( \frac{1}{f_{t2}} - \frac{1}{f_{c2}} \right) \cdot \sin^2 \theta \right] = 1$	Mascia <i>et al.</i> (2013)	Compressão biaxial	<i>Pinus elliottii</i>	-	+F <sub>12</sub>
	Logsdon <i>et al.</i> (2010)	E <sub>cθ</sub>	Peroba mica	0°, 10°, 20°, 30°, 40°, 45°, 50°, 60°, 70°, 80° e 90°	0,41
Szücs (1992)	Logsdon <i>et al.</i> (2014a)	f <sub>tθ,k</sub>	Peroba mica	0°, 10°, 20°, 30°, 40°, 45°, 50°, 60°, 70°, 80° e 90°	0,33
f <sub>θ</sub> = f <sub>0</sub> - (f <sub>0</sub> - f <sub>90</sub> ) · sin <sup>n</sup> θ	Logsdon <i>et al.</i> (2014b)	f <sub>vθ,k</sub>	Peroba mica	0°, 10°, 20°, 30°, 40°, 45°, 50°, 60°, 70°, 80° e 90°	1,18
	Carrasco e Mantilla (2016)	f <sub>vθ</sub>	<i>Eucalyptus saligna</i>	0°, 15°, 30°, 45°, 60°, 75°, 90°	1,23

E<sub>cθ</sub> = módulo de elasticidade na compressão em função de θ; f<sub>tθ</sub> = resistência à tração em função de θ; f<sub>tθ,k</sub> = resistência característica à tração em função de θ; f<sub>vθ,k</sub> = resistência característica ao cisalhamento em função de θ; f<sub>vθ</sub> = resistência ao cisalhamento em função de θ; n<sub>ót</sub>im = expoente ótimo dos termos trigonométricos dos modelos empíricos investigados; F<sub>12</sub> = parâmetro do critério de falha de Tsai e Wu (1971); +F<sub>12</sub> = limite positivo do parâmetro F<sub>12</sub> do critério de falha de Tsai e Wu (1971).



Da Tabela 19, com exceção da madeira de *Pinus elliottii*, todas as espécies estudadas pertencem ao grupo das folhosas. Apesar do número reduzido de espécies e propriedades estudadas, verifica-se, por meio da Tabela 19, que a adoção do modelo de Hankinson (1921), com  $n$  igual a 2, não é capaz de estimar com precisão as diversas solicitações inclinadas ( $f_{t\theta}$ ,  $f_{t\theta,k}$ ,  $f_{v\theta}$ ,  $f_{v\theta,k}$ ,  $E_{c\theta}$ ). Além disso, independente do modelo empírico, os dados da literatura apontam para a adoção de valores distintos de  $n$  para cada propriedade mecânica estimada. Tais constatações evidenciam a necessidade de revisão da NBR 7190 (ABNT, 1997).

Tratando-se da precisão das estimativas dos critérios de falha, o de Tsai e Wu (1971) mostrou ser sensível a escolha do parâmetro  $F_{12}$ . Os melhores ajustes foram obtidos considerando valores próximos ao limite positivo de  $F_{12}$ . Ademais, por demandar o conhecimento de propriedades diferentes da que se pretende estimar, a utilização de tal critério torna-se mais trabalhosa.

Por fim, diferentemente dos trabalhos da literatura que adotaram apenas uma espécie de madeira, este estudo empregou cinco espécies escolhidas de modo a abranger as classes de resistência das folhosas, acarretando em resultados mais abrangentes. Em adição, utilizou-se, por espécie e para o conjunto das espécies, modelos de regressão a dois parâmetros escritos para a estimativa da razão  $f_{t\theta,k}/f_{t0,k}$ . Tal procedimento, diferente da abordagem matemática usualmente explorada nos modelos empíricos, ainda não foi realizada na literatura.

# 3. MATERIAIS E MÉTODO

Esta seção apresenta as espécies de madeiras utilizadas, os métodos de ensaio para determinação das propriedades físico-mecânicas ( $\rho_{ap,U\%}$ ,  $f_{c0,k}$ ,  $f_{c90,k}$ ,  $f_{v0,k}$ ,  $f_{t\theta,k}$ ) e os procedimentos para tratamento estatístico dos resultados.

Todos os ensaios foram realizados no Laboratório de Madeiras e Estruturas de Madeira (LaMEM), pertencente ao Departamento de Engenharia da Escola de Engenharia de São Carlos (EESC), Universidade de São Paulo (USP).

## 3.1 MATERIAIS

Visando resultados abrangentes, foram adotadas cinco espécies de madeira distribuídas nas classes de resistência (CR) do grupo das folhosas. Na Tabela 20 constam os nomes popular e científico e as CR das espécies empregadas nesse estudo.

**Tabela 20: Nomes popular e científico e classes de resistência das espécies de madeiras.**

Nome Popular	Nome Científico <sup>4</sup>	CR
Cedroarana	<u><i>Cedrelinga cateniformis</i> (Ducke) Ducke</u>	C20
Louro preto	<u><i>Ocotea neesiana</i> (Miq.) Kosterm.</u>	C40
Angelim amargoso	<u><i>Vatairea fusca</i> (Ducke) Ducke</u>	C40
Oichu	<u><i>Pradosia</i> sp. Liais</u>	C60
Maçaranduba	<u><i>Manilkara</i> cf. <i>inundata</i> (Ducke) Ducke</u>	C60

CR = classe de resistência do grupo das folhosas.

Da Tabela 20, as CR foram determinadas, conforme prescreve a NBR 7190 (ABNT, 1997), de acordo com o valor da resistência característica à compressão paralela às fibras ( $f_{c0,k}$ ):

- C20 ( $f_{c0,k} < 30$  MPa),
- C30 ( $30 \text{ MPa} \leq f_{c0,k} < 40$  MPa),
- C40 ( $40 \text{ MPa} \leq f_{c0,k} < 60$  MPa) e
- C60 ( $f_{c0,k} \geq 60$  MPa).

<sup>4</sup> Flora do Brasil (2020).

Do mesmo modo que são obtidos os lotes de madeira empregados na construção civil brasileira, as cinco espécies de madeira foram adquiridas no comércio local, na forma de tábuas (madeira serrada). Deste modo, não foi possível afirmar a origem e a idade das árvores.

### 3.2 MÉTODO

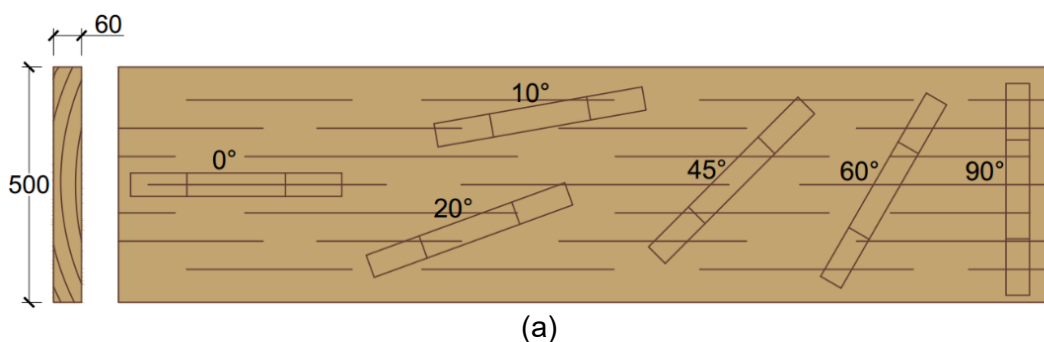
As propriedades físico-mecânicas foram determinadas seguindo os métodos de ensaios prescritos no Anexo B “Determinação das propriedades das madeiras para projeto de estruturas” da NBR 7190 (ABNT, 1997).

Para espécies de madeira usuais, pouco conhecidas e não conhecidas, a NBR 7190 (ABNT, 1997) prescreve, respectivamente, o emprego da caracterização simplificada, mínima e completa. Para a caracterização simplificada e mínima recomenda-se adotar a amostragem de, ao menos, 6 e 12 corpos de prova, respectivamente. Por outro lado, para a caracterização completa a NBR 7190 (ABNT, 1997) não faz menção ao número mínimo de corpos de prova que devem ser adotados.

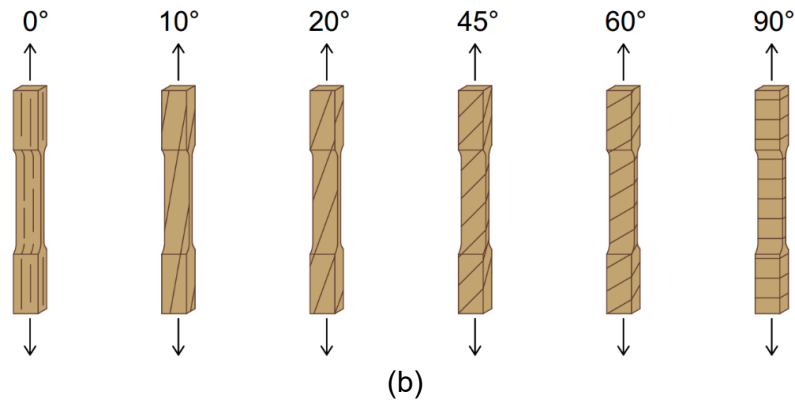
Neste estudo foram adotados 12 corpos de prova para cada espécie, propriedade físico-mecânica e ângulo  $\theta$  ( $0^\circ$  - direção paralela às fibras,  $10^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  e  $90^\circ$  - direção normal às fibras). Deste modo, este estudo resultou, ao todo, em 600 determinações experimentais.

As amostras foram confeccionadas isentas de defeitos e retiradas aleatoriamente ao longo do lote. A Figura 16 retrata a forma de extração dos corpos de prova utilizados no ensaio de tração.

**Figura 16: Corpos de prova para o ensaio de tração: Esquema de extração, dimensões em milímetros (a) confecção conforme o ângulo  $\theta$  (b).**



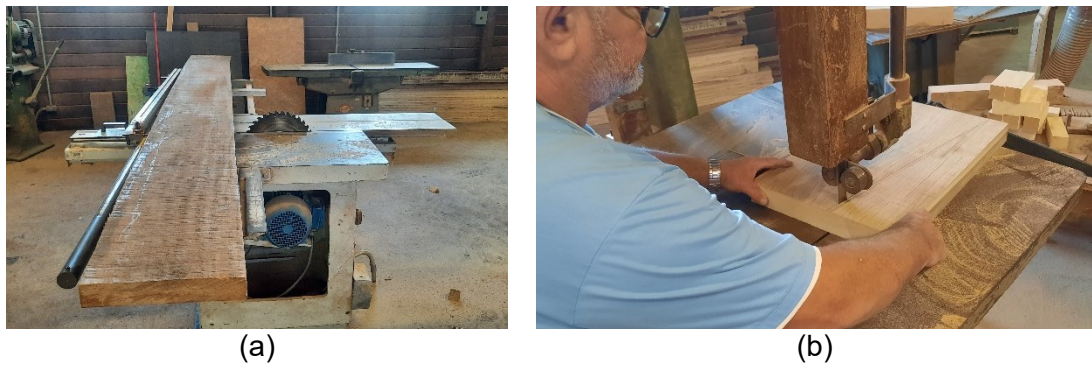
**Figura 16: Corpos de prova para o ensaio de tração: Esquema de extração, dimensões em milímetros (a) confecção conforme o ângulo  $\theta$  (b) - Continuação.**



Da Figura 16, o corpo de prova utilizado para a obtenção dos valores da resistência à tração normal às fibras diverge do prescrito pela NBR 7190 (ABNT, 1997). Entretanto, optou-se por manter o mesmo corpo de prova para os diferentes valores de  $\theta$  estudados haja vista que a alteração da forma da amostra implicaria em mais uma variável que influenciaria nos resultados.

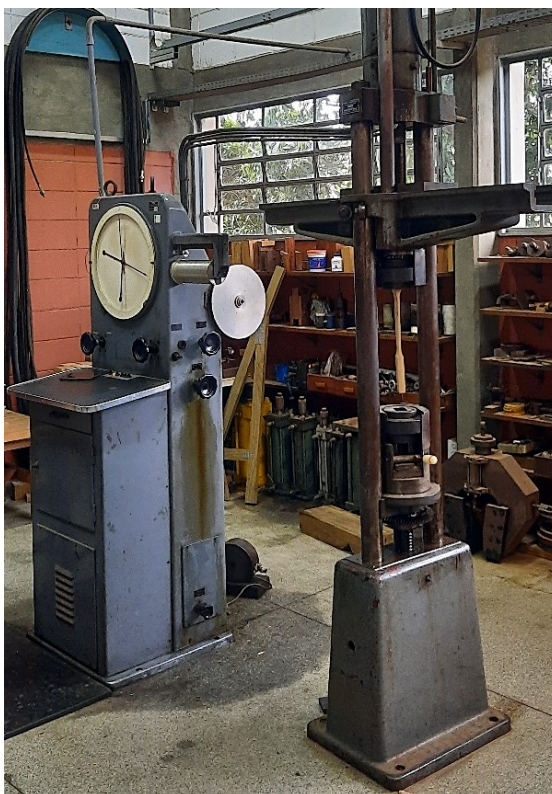
A Figura 17 ilustra uma das tábuas advinda dos lotes empregados assim como a etapa de corte para confecção dos corpos de prova.

**Figura 17: Tábua para extração das amostras (a) Corte para confecção dos corpos de prova (b).**



Para determinação experimental das propriedades mecânicas ( $f_{c0}$ ,  $f_{c90}$ ,  $f_{v0}$ ,  $f_{t\theta}$ ) utilizou-se a máquina universal AMSLER (Figura 18), a qual possui capacidade de 250 kN.

**Figura 18: Máquina universal AMSLER.**



### **3.2.1 DENSIDADE APARENTE A 12% DE UMIDADE**

Para a determinação da densidade aparente ( $\rho_{ap,U\%}$ ), a um certo teor de umidade ( $U\%$ ), foram adotados corpos de prova prismáticos com 2 cm  $\times$  3 cm de lado e comprimento, na direção das fibras, de 5 cm (Figura 19). A  $\rho_{ap,U\%}$  foi determinada pela razão entre a massa ( $m_{U\%}$ ) e o volume ( $V_{U\%}$ ) do corpo de prova, conforme expressa a Equação 40.

$$\rho_{ap,U\%} = \frac{m_{U\%}}{V_{U\%}} \quad (40)$$

**Figura 19: Corpos de prova para a determinação da  $\rho_{ap,12\%}$ .**

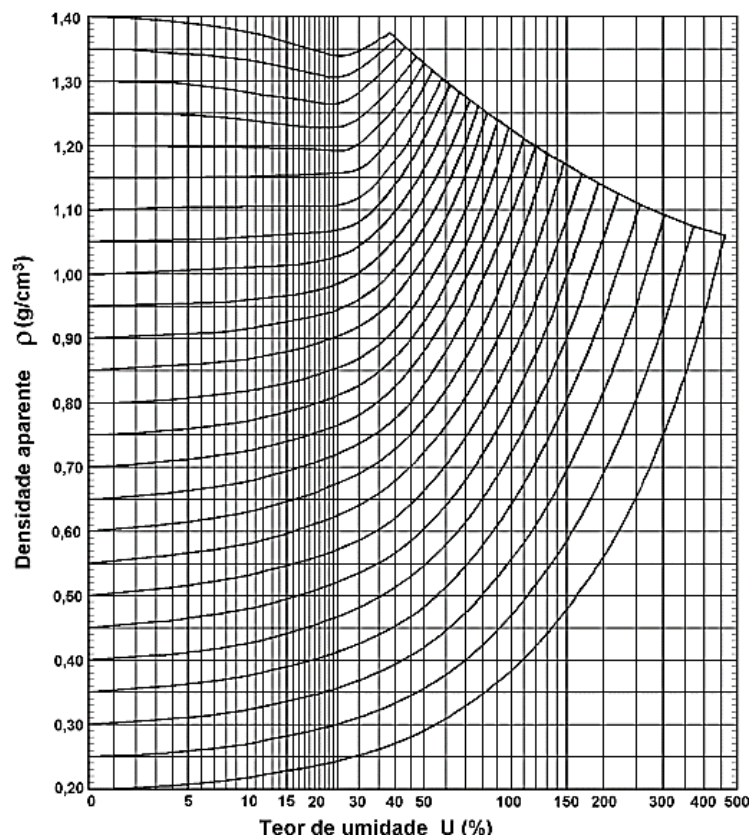


O teor de umidade ( $U\%$ ) correspondente a  $\rho_{ap,U\%}$ , foi determinado por meio da Equação 41, na qual  $m_{0\%}$  denota a massa seca da madeira, obtida com o auxílio de estufa com temperatura máxima de  $103^{\circ}\text{C} \pm 2^{\circ}\text{C}$ . Em atendimento a NBR 7190 (ABNT, 1997), adotou-se como  $m_{0\%}$  o valor de massa, medido a cada seis horas, no qual a variação, em relação a medida anterior, resultou menor ou igual a 0,5%.

$$U\% = \frac{m_{U\%} - m_{0\%}}{m_{0\%}} \cdot 100 \quad (41)$$

Para corpos de prova com teor de umidade ( $U\%$ ) iguais a 12%, foram adotados como densidade aparente a 12% de umidade ( $\rho_{ap,12\%}$ ) os valores obtidos por meio da Equação 40. Enquanto, para teores de umidade distintos, os valores de  $\rho_{ap,U\%}$  foram corrigidos para  $\rho_{ap,12\%}$  com o auxílio do diagrama de Kollmann, ilustrado pela Figura 20.

**Figura 20: Diagrama de Kollmann para correção da densidade aparente.**



Fonte: Kollmann e Coté (1984).

### 3.2.2 RESISTÊNCIA À TRAÇÃO INCLINADA EM RELAÇÃO ÀS FIBRAS

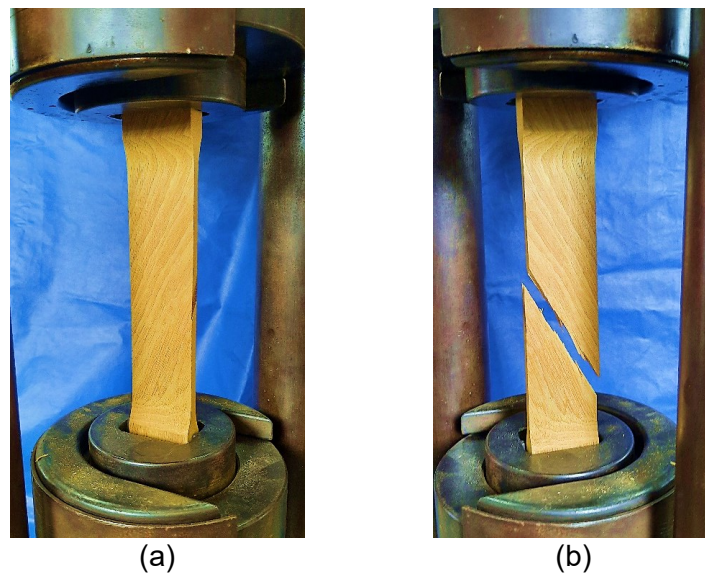
Os valores amostrais de  $f_{t\theta}$  foram obtidos, conforme expressa a Equação 42, pela razão entre a força máxima de tração ( $F_{t\theta,máx}$ ) aplicada, no decorrer do ensaio, a um certo ângulo  $\theta$  e a área inicial da seção transversal do corpo de prova (A).

$$f_{t\theta} = \frac{F_{t\theta,máx}}{A} \quad (42)$$

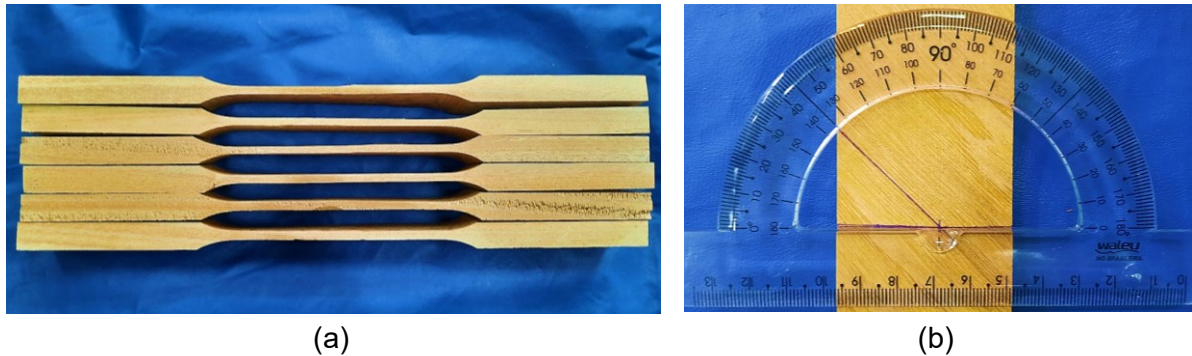
Analogamente ao especificado para o ensaio de compressão, para a determinação de  $f_{t\theta}$ , os ensaios de tração foram realizados com aplicação de carregamento monotônico crescente, à taxa de 10 MPa/min.

Atendendo as prescrições da NBR 7190 (ABNT, 1997), os corpos de prova foram confeccionados com seção transversal retangular de 5 cm  $\times$  2 cm de lado e altura de 45 cm. No trecho central, ao longo de 21 cm, a seção transversal das amostras foi reduzida para 5 cm  $\times$  0,7 cm de lado (Figura 22). A Figura 21 ilustra o ensaio de tração em função de  $\theta$ .

**Figura 21: Ensaio de tração com  $\theta = 45^\circ$  (a) Corpo de prova após o ensaio (b).**



**Figura 22: Vistas do corpo de prova para o ensaio de tração (a) Inclinação das fibras ( $\theta = 45^\circ$ ) na região central do corpo de prova (b).**



### 3.2.3 RESISTÊNCIA À COMPRESSÃO PARALELA E NORMAL ÀS FIBRAS

Conforme apresentado, para a aplicação dos critérios de falha, além dos valores de resistência à tração ( $f_{t0}$  e  $f_{t90}$ ), faz-se necessário a determinação experimental das resistências à compressão ( $f_{c0}$  e  $f_{c90}$ ) e ao cisalhamento ( $f_{v0}$ ).

Os valores amostrais da resistência à compressão paralela ( $f_{c0}$ ) e normal às fibras ( $f_{c90}$ ) foram determinados por meio do ensaio de compressão com carregamento monotônico crescente, à taxa de 10 MPa/min.

A  $f_{c0}$  foi determinada por meio da Equação 43, na qual  $F_{c0,máx}$  denota a força máxima de compressão aplicada no decorrer do ensaio e  $A$  consiste na área inicial da seção transversal do corpo de prova.

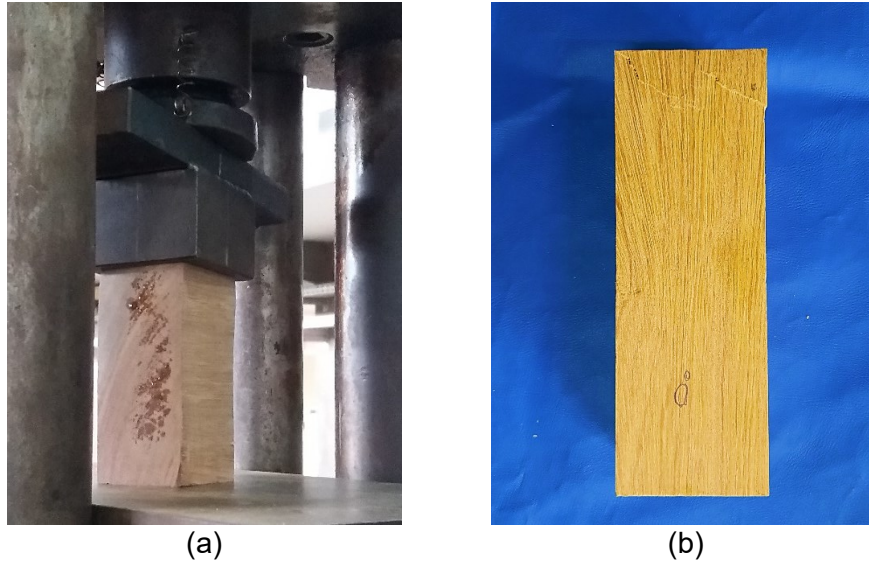
$$f_{c0} = \frac{F_{c0,máx}}{A} \quad (43)$$

A  $f_{c90}$  refere-se ao valor convencional dado pela tensão correspondente à deformação específica residual de 2‰, obtida no ensaio de compressão empregando corpos de prova com dimensões de 5 cm × 5 cm × 10 cm e exatidão dimensional de 0,1 mm.

Os corpos de prova destinados à obtenção de  $f_{c0}$  foram confeccionados com dimensões de 5 cm × 5 cm × 15 cm e exatidão dimensional de 0,1 mm. A Figura 23 retrata o ensaio de compressão normal às fibras e um dos corpos de prova utilizado no ensaio de compressão paralela às fibras.



**Figura 23: Ensaio de compressão paralela às fibras (a) Corpo de prova utilizado no ensaio de compressão paralela às fibras (b).**



### **3.2.4 RESISTÊNCIA AO CISALHAMENTO PARALELO ÀS FIBRAS**

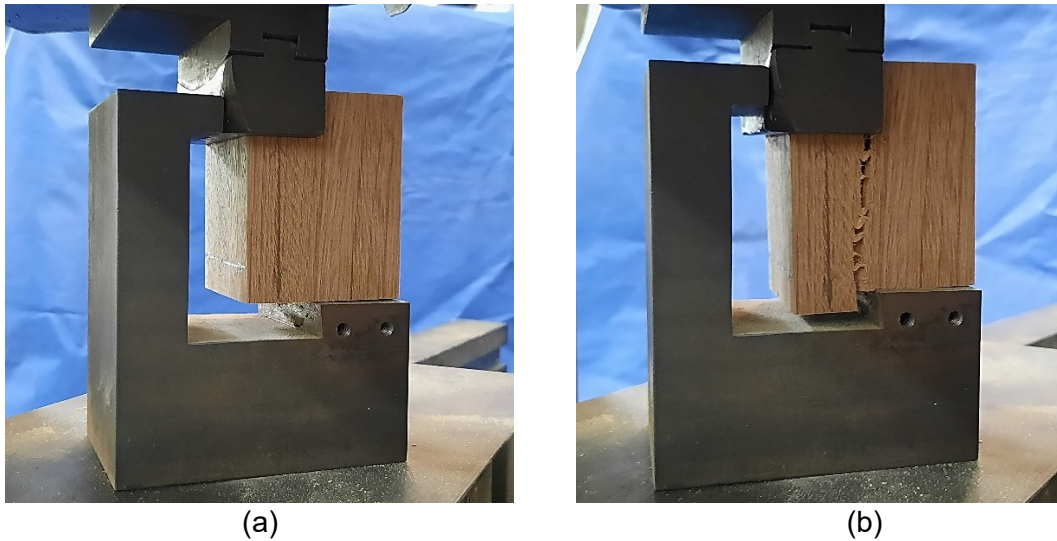
A resistência ao cisalhamento paralelo às fibras ( $f_{v0}$ ) foi determinada por meio do ensaio de cisalhamento com carregamento aplicado de modo monotônico crescente, à taxa de 2,5 MPa/min.

Conforme expressa a Equação 44, os valores amostrais de  $f_{v0}$  foram obtidos pela razão entre a força máxima cisalhante ( $F_{v0,máx}$ ), aplicada ao corpo de prova no decorrer do ensaio, e a área inicial da seção cisalhante do corpo de prova ( $A_{v0}$ ) em um plano paralelo às fibras.

$$f_{v0} = \frac{F_{v0,máx}}{A_{v0}} \quad (44)$$

Foram adotados corpos de prova com seção transversal de 5 cm × 5 cm e altura igual a 6,4 cm. Para a fixação do equipamento de ensaio, confeccionou-se, no corpo de prova, um degrau com seção transversal de 2 cm × 5 cm e altura de 1,4 cm, obtendo-se uma seção cisalhante de 5 cm × 5 cm. A Figura 24 ilustra o ensaio de cisalhamento paralelo às fibras.

**Figura 24: Ensaio de cisalhamento paralelo às fibras (a) Corpo de prova após o ensaio (b).**



### 3.2.5 VALORES A CONDIÇÃO PADRÃO DE UMIDADE

Para a determinação de  $f_{c0}$ ,  $f_{c90}$ ,  $f_{v0}$  e  $f_{t\theta}$  os corpos de prova foram ensaiados com teores de umidade próximos a 12%. De acordo com a NBR 7190 (ABNT, 1997), 12% corresponde ao teor de umidade de equilíbrio da madeira. E, portanto, a condição-padrão de referência para apresentação dos resultados experimentais.

Desse modo, os valores de  $f_{c0}$ ,  $f_{c90}$ ,  $f_{v0}$  e  $f_{t\theta}$ , obtidos com teores de umidade diferentes a 12% ( $10\% \leq U \leq 20\%$ ), foram corrigidos para a umidade de referência por meio da Equação 45.

$$f_{\theta,12\%} = f_{\theta,U\%} \cdot \left[ 1 + \frac{3 \cdot (U\% - 12)}{100} \right] \quad (45)$$

Na Equação 45,  $f_{\theta,U\%}$  e  $f_{\theta,12\%}$  denotam, respectivamente, os valores de resistência em função de  $\theta$  correspondentes aos teores de umidade  $U\%$  e 12%.

A influência do ângulo  $\theta$  na determinação das propriedades de resistência foi avaliada em termos de valores característicos, uma vez que a determinação da resistência de cálculo, fundamental para a elaboração de projetos de estruturas, depende do valor característico de resistência.

Para a determinação da resistência característica ( $f_{w\theta,k}$  -  $f_{c0,k}$ ,  $f_{c90,k}$ ,  $f_{v0,k}$  e  $f_{t\theta,k}$ ), os valores amostrais, à 12% de umidade, foram colocados em ordem crescente ( $f_1 \leq f_2 \leq f_3 \dots \leq f_n = f_{12}$ ).

Conforme preconiza a NBR 7190 (ABNT, 1997), adotou-se como  $f_{w\theta,k}$  o maior valor entre:  $f_1$  e os valores obtidos por meio das Equações 46 e 47.

$$f_{w\theta,k} = f_m \cdot [1 - 1.645 \cdot \delta] \approx 0.70 \cdot f_m \quad (46)$$

$$f_{w\theta,k} = \left( 2 \cdot \frac{f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_{\left(\frac{n}{2}-1\right)}}{\left(\frac{n}{2}-1\right)} - f_{\left(\frac{n}{2}\right)} \right) \cdot 1,10 \quad (47)$$

Na Equação 46,  $f_m$  denota o valor médio das resistências amostrais e  $\delta$  corresponde ao coeficiente de variação das amostras. A favor da segurança, a NBR 7190 (ABNT, 1997) admite que as resistências apresentam distribuições normais e que o valor de  $\delta$  não supera 18%.

### 3.2.6 ANÁLISE ESTATÍSTICA E APLICAÇÃO DOS CRITÉRIOS DE RESISTÊNCIA

Dado que as amostras são dependentes, ou seja, os valores experimentais de  $f_{t\theta,k}$  ( $f_{t\theta,k}^{\text{exp}}$ ) afetam os valores estimados ( $f_{t\theta,k}^{\text{estim}}$ ), adotou-se o teste t pareado<sup>5</sup>, ao nível de 5% de significância, para a verificação da eficácia do modelo de Hankinson (1921) e dos demais modelos empíricos (Equações 34, 35 e 36) na estimativa de  $f_{t\theta,k}$ .

Como hipótese nula ( $H_0$ ) considerou-se a equivalência entre as médias dos grupos  $f_{t\theta,k}^{\text{exp}}$  e  $f_{t\theta,k}^{\text{estim}}$  e em hipótese alternativa ( $H_1$ ) a não equivalência. Deste modo, P-valor superior ao nível de significância adotado (P-valor > 0,05) implica em aceitar  $H_0$ , ou seja, o modelo empírico testado apresenta boa precisão na determinação de  $f_{t\theta,k}^{\text{estim}}$ . Em caso contrário (P-valor ≤ 0,05),  $H_1$  deve ser adotada. Cabe destacar que o nível de significância de 0,05 indica o risco de 5% de se concluir que há diferença significativa entre os grupos testados, quando, na verdade, não existe diferença real.

Em caso de não equivalência (P-valor < 0,05), o  $n_{\text{ótimo}}$  do modelo empírico testado foi determinado para cada uma das espécies estudadas por meio da minimização da Equação 48.

<sup>5</sup> Adotado nos trabalhos de Logsdon *et al.* (2010), Logsdon *et al.* (2014a), Logsdon *et al.* (2014b) e Carrasco e Mantilla (2016).

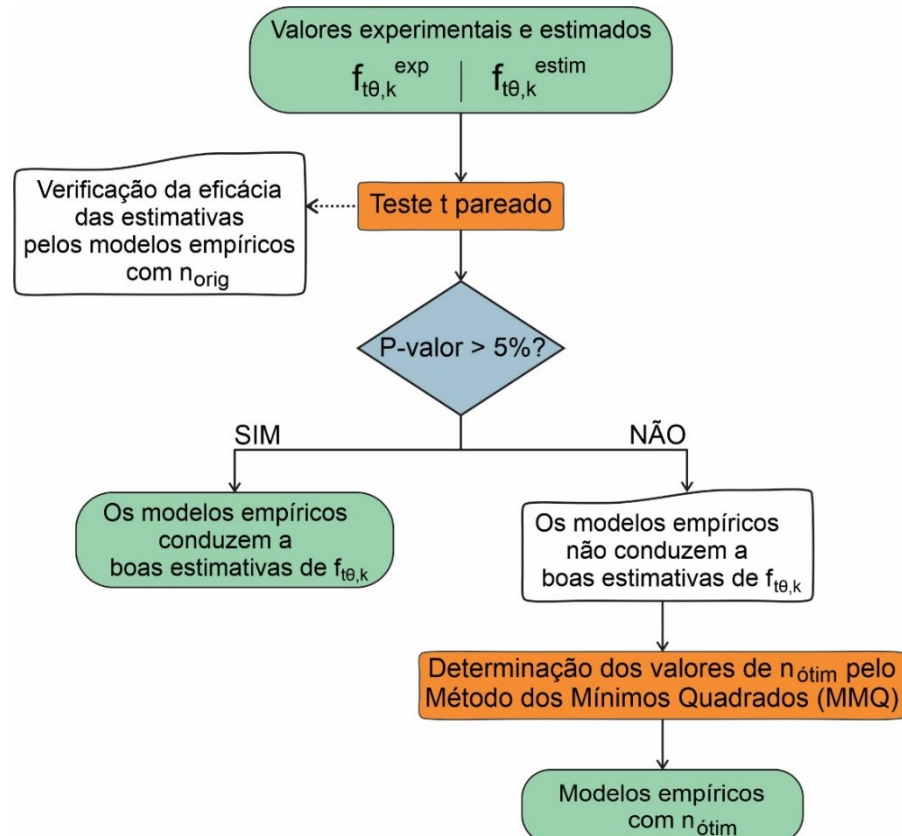
$$f(n) = \frac{1}{2} \cdot \sum (f_{t\theta,k}^{\text{exp}} - f_{t\theta,k}^{\text{estim}}(n))^2 \quad (48)$$

A minimização da Equação 48, que consiste na formulação do método dos mínimos quadrados, fornece o valor de  $n$  que conduz a menor diferença entre  $f_{t\theta,k}^{\text{exp}}$  e  $f_{t\theta,k}^{\text{estim}}$  [mínimo da função  $f(n)$ ]. A solução ótima foi obtida por intermédio da equação de recorrência do método de Newton com busca quadrática (Equação 49), tomando-se como estimativa inicial, para o processo iterativo, o valor de  $n_{\text{orig}}$  dos modelos empíricos.

$$n_{i+1} = n_i - \left( \frac{d^2 f(n = n_i)}{dn^2} \right)^{-1} \cdot \frac{df(n = n_i)}{dn} ; \quad \frac{d^2 f(n = n_i)}{dn^2} \neq 0 \quad (49)$$

Na Equação 49,  $n_{i+1}$  consiste na estimativa da solução ótima do expoente  $n$  do modelo empírico testado, dependente da estimativa de  $n$  do passo anterior  $n_i$ . A Figura 25 sintetiza os procedimentos estatísticos descritos para os modelos empíricos.

**Figura 25: Fluxograma para análise estatística dos modelos empíricos.**



Como alternativa ao modelo de Hankinson (1921), o critério de Tsai e Wu (1971), o de Tsai-Hill (Azzi e Tsai, 1965) e modelos de regressão (ao nível de 5% de significância) foram adotados visando a estimativa dos valores de  $f_{t\theta,k}$ .

Para a aplicação do critério de Tsai e Wu (1971), os parâmetros  $F_1$ ,  $F_{11}$ ,  $F_2$ ,  $F_{22}$  e  $F_{44}$  foram determinados por meio das Equações 8, 9, 10, 11 e 12, respectivamente. Como estimativa de  $F_{12}$  foram adotados os valores limites (Equação 15) e os advindos das equações propostas por Norris (1939), Hoffman (1967), Tsai-Hill (Azzi e Tsai, 1965), Cowin (1979) e Liu (1984) (Tabela 1). Conhecido os parâmetros  $F_i$  e  $F_{ij}$  os valores de  $f_{t\theta,k}$  foram estimados por meio da Equação 19.

Para as estimativas do critério de Tsai-Hill (Azzi e Tsai, 1965), utilizou-se a Equação 26. Empregou-se, para a determinação de  $f_{t\theta,k}$ , os parâmetros  $F_{11}$  e  $F_{22}$  advindos, respectivamente, das Equações 22 e 24. Assim como no critério de Tsai e Wu (1971), o parâmetro  $F_{44}$  foi obtido por meio da Equação 12.

As Equações 50 a 53 descrevem os modelos de regressão, fundamentados na ANOVA, adotados para a estimativa de  $f_{t\theta,k}/f_{t0,k}$  (variável dependente) em função de  $\theta$  (variável independente).

$$\frac{f_{t\theta,k}}{f_{t0,k}} = a + b \cdot \theta + \varepsilon \quad (\text{linear}) \quad (50)$$

$$\frac{f_{t\theta,k}}{f_{t0,k}} = a \cdot e^{b \cdot \theta} + \varepsilon \quad (\text{exponencial}) \quad (51)$$

$$\frac{f_{t\theta,k}}{f_{t0,k}} = a + b \cdot \ln(\theta) + \varepsilon \quad (\text{logarítmico}) \quad (52)$$

$$\frac{f_{t\theta,k}}{f_{t0,k}} = a \cdot \theta^b + \varepsilon \quad (\text{geométrico}) \quad (53)$$

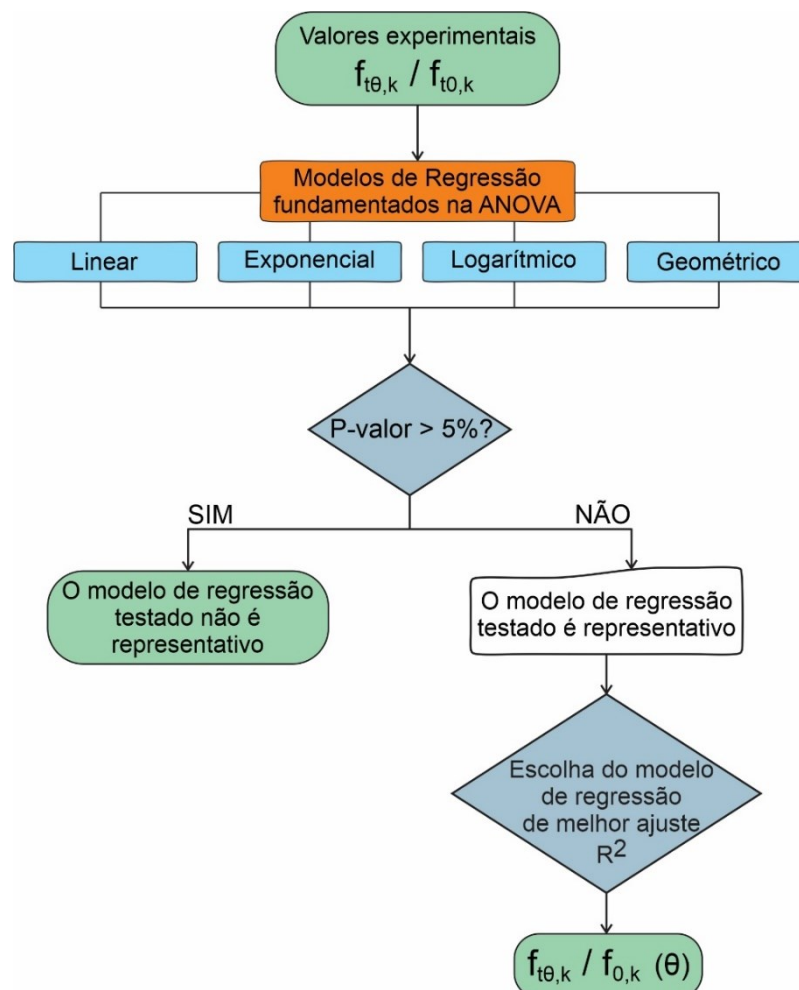
Nas Equações 50 a 53,  $a$  e  $b$  são parâmetros dos modelos de regressão, ajustados pelo método dos mínimos quadrados.

Os modelos de regressão foram utilizados considerando cada espécie e o agrupamento das espécies com os respectivos valores médios de  $f_{t\theta,k}/f_{t0,k}$ . Constituiu-se em hipótese nula ( $H_0$ ) a não representatividade dos modelos testados e em hipótese alternativa ( $H_1$ ) a representatividade.

Valores de P-valor superiores ao nível de significância adotado ( $P\text{-valor} > 0,05$ ) implicaram em aceitar  $H_0$  (o modelo de regressão testado não é representativo - variações de  $\theta$  não são capazes de explicar as variações de  $f_{t\theta,k}/f_{t0,k}$ ), rejeitando-a em caso contrário ( $P\text{-valor} \leq 0,05$  - o modelo de regressão testado foi representativo).

Em adição a ANOVA, foram determinados os valores do coeficiente de determinação ( $R^2$ ) possibilitando avaliar a qualidade do ajuste determinado. Desse modo, pôde-se eleger dentre os modelos representativos ( $P\text{-valor} \leq 0,05$ ) o mais preciso, ou seja, o que melhor descreve as variações da variável dependente  $\theta$  em função da variável independente  $f_{t\theta,k}/f_{t0,k}$ . A Figura 26 sintetiza as análises necessárias para a obtenção dos modelos de regressão para a estimativa de  $f_{t\theta,k}/f_{t0,k}$  em função de  $\theta$  [ $f_{t\theta,k}/f_{t0,k}(\theta)$ ].

**Figura 26: Fluxograma para análise estatística dos modelos de regressão.**



Em especial os modelos das Equações 52 (logarítmico) e 53 (geométrico) não são definidos para  $\theta = 0^\circ$  (direção paralela às fibras). Desse modo, para a utilização desses modelos deve-se considerar valores de  $\theta$  maiores que  $0^\circ$  ( $\theta > 0^\circ$ ). Optou-se por adotar  $\theta \geq 10^\circ$  haja vista que tal angulação corresponde ao menor valor investigado nesse estudo. Destaca-se que a NBR 7190 (ABNT, 1997) prescreve a correção dos valores de resistência, determinados por meios de solicitações normais, para valores de  $\theta > 6^\circ$ .

Ademais, os modelos obtidos requerem apenas a determinação de  $f_{t\theta,k}$ , dispensando o conhecimento de  $f_{t90,k}$  e  $f_{t45,k}$ , necessários para a aplicação de outros modelos (Equações 27, 34, 35 e 36).

### 3.2.7 DETERMINAÇÃO DOS MODELOS DE MELHOR AJUSTE

Os modelos empíricos e os critérios de falha de melhor ajuste foram eleitos com o auxílio do erro percentual absoluto médio (Equação 54) cometido nas estimativas de  $f_{t\theta,k}$ . Na Equação 54,  $n$  denota o total de ângulos  $\theta$  adotados (6, ao todo).

$$Er (\%) = \frac{100}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{|f_{t\theta,k}^{estim_i} - f_{t\theta,k}^{exp_i}|}{|f_{t\theta,k}^{exp_i}|} \quad (54)$$

O erro percentual absoluto médio também foi empregado para eleger o mais preciso dentre os modelos de melhor ajuste obtidos.

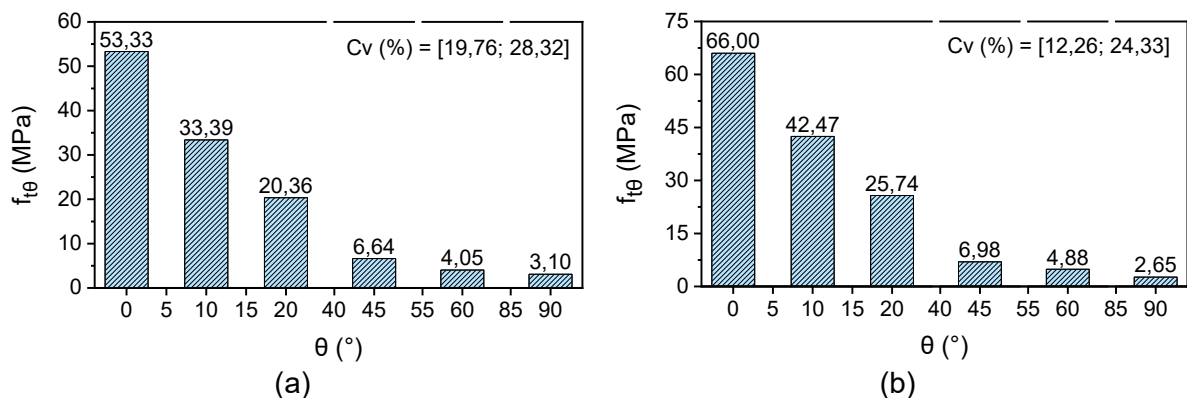
# 4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Essa seção apresenta os resultados obtidos por meio dos procedimentos descritos no capítulo anterior. Os resultados foram divididos e discutidos em subitens. O primeiro apresenta os valores experimentais médios das propriedades físico-mecânicas estudadas e os valores característicos das propriedades mecânicas. Em seguida, são apresentados, respectivamente, no segundo, terceiro e quarto subitens, as estimativas das resistências características pelos modelos empíricos, critérios de resistência e modelos de regressão. Por fim, tem-se a validação do modelo proposto nesse estudo e a comparação entre os modelos obtidos.

## 4.1 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

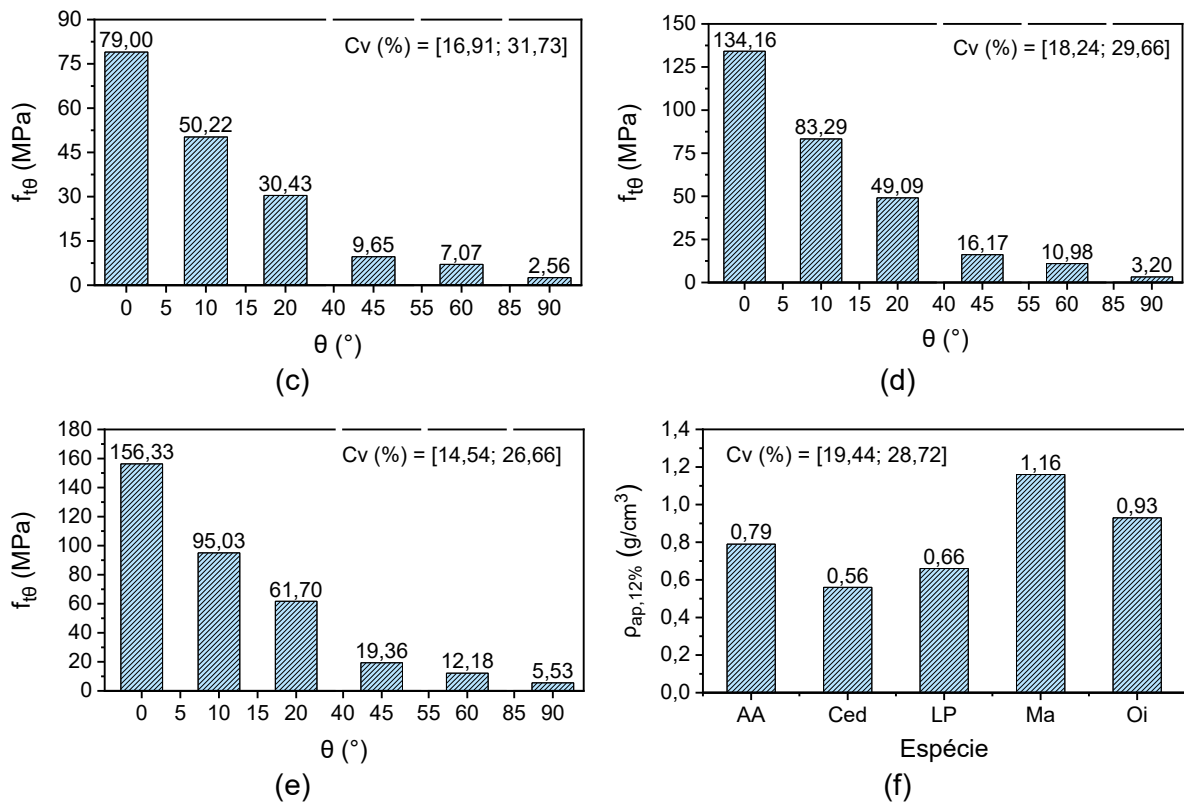
A Figura 27 ilustra os valores médios da resistência à tração em função de  $\theta$  ( $f_{t\theta}$ ), da densidade aparente, a 12% de umidade ( $\rho_{ap,12\%}$ ), e os valores extremos do coeficiente de variação (Cv), obtidos para cada uma das espécies estudadas.

**Figura 27: Valores de  $f_{t\theta}$ : Cedroarana - Ced (a) e Louro preto - LP (b), Angelim amargoso - AA (c), Oichu - Oi (d), Maçaranduba - Ma (e) Valores de  $\rho_{ap,12\%}$  (f).**





**Figura 27: Valores de  $f_{t\theta}$ : Cedroarana - Ced (a) e Louro preto - LP (b), Angelim amargoso - AA (c), Oichu - Oi (d), Maçaranduba - Ma (e) Valores de  $\rho_{ap,12\%}$  (f) - Continuação.**



Da Figura 27f, valores próximos de  $\rho_{ap,12\%}$  foram determinados pelo IPT (2013) (0,52 g/cm<sup>3</sup>) e por Aquino *et al.* (2018) (0,57 g/cm<sup>3</sup>) para a madeira de Cedroarana, por Jesus *et al.* (2015) (0,67 g/cm<sup>3</sup>) e Dias *et al.* (2019) (0,77 g/cm<sup>3</sup>) para a madeira de Angelim amargoso e por Christoforo *et al.* (2014) (0,68 g/cm<sup>3</sup>) para a madeira de Louro preto.

Lahr *et al.* (2010), obtiveram, para a madeira de Oichu,  $\rho_{ap,12\%}$  igual a 0,94 g/cm<sup>3</sup>, próxima a determinada neste estudo (0,93 g/cm<sup>3</sup>). Para a madeira de Maçaranduba, Jesus *et al.* (2015) encontraram valor inferior de  $\rho_{ap,12\%}$  (1,02 g/cm<sup>3</sup>), enquanto a NBR 7190 (ABNT, 1997) apresenta valor próximo (1,14 g/cm<sup>3</sup>).

Em relação a  $f_{t0}$ , o valor determinado neste estudo (53,33 MPa - Figura 27a), para a madeira de Cedroarana, foi inferior ao apresentado por Grobério e Lahr (2002) (62,00 MPa). Para a mesma espécie, Aquino *et al.* (2018) obtiveram valor próximo de  $f_{t90}$  (3,30 MPa), enquanto Araújo (2007) determinou valor superior (4,41 MPa).

A madeira de Louro preto apresentou  $f_{t0}$  correspondente a 66,00 MPa (Figura 27b), próximo ao obtido por Dias e Lahr (2004) (68,00 MPa). Ambos os valores de  $f_{t0}$  são inferiores ao apresentado pela NBR 7190 (ABNT, 1997) (111,90 MPa). O valor de  $f_{t90}$ , obtido para a madeira de Louro preto (2,65 MPa - Figura 27b), foi condizente ao determinado por Dias e

Lahr (2004) e ao apresentado pela NBR 7190 (ABNT, 1997) (3,10 MPa e 3,30 MPa, respectivamente).

Os valores de  $f_{t0}$  (134,16 MPa) e  $f_{t90}$  (3,20 MPa), determinados para a madeira de Oichu, foram próximos aos encontrados por Grobério e Lahr (2002) [ $f_{t0}$  (130,00 MPa) e  $f_{t90}$  (3,00 MPa)]. Do mesmo modo, os valores de  $f_{t0}$  (79,00 MPa) e  $f_{t90}$  (2,56 MPa), obtidos para a madeira de Angelim amargoso, mostraram ser próximos aos determinados por Dias e Lahr (2004) [ $f_{t0}$  (75 MPa) e  $f_{t90}$  (2,8 MPa)].

Para a madeira de Maçaranduba, o valor de  $f_{t0}$ , obtido neste estudo (156,33 MPa - Figura 27e), foi superior ao apresentado pela NBR 7190 (ABNT, 1997) (138,5 MPa). Enquanto, o valor de  $f_{t90}$  foi próximo ao determinado por Araújo (2007) e ao apresentado pela NBR 7190 (ABNT, 1997) (5,50 MPa e 5,40 MPa, respectivamente).

Assim como ocorrido no trabalho de Logsdon *et al.* (2014a), para as cinco espécies, os menores valores de Cv foram provenientes de  $f_{t0}$ , sendo ultrapassado o valor do Cv de 18% [solicitações normais - NBR 7190 (ABNT, 1997)].

Ademais, as comparações das propriedades físico-mecânicas apresentadas na Figura 27 com os valores presentes na literatura validam os resultados obtidos nesse trabalho. Conforme apresentado por Guimarães *et al.* (2012) e Christoforo *et al.* (2020), as variações dos resultados podem ser justificadas, em partes, pela diferença de idade, condições de crescimento e procedência dos lotes.

Nesse contexto, tem-se, para indivíduos da mesma espécie, variação nos valores das propriedades físico-mecânicas. Todavia, conforme constatado por Aquino *et al.* (2021) e Teixeira *et al.* (2021) - respectivamente, para as madeiras de Cambará e Angelim pedra - apesar das variações, as propriedades físico-mecânicas oriundas de diferentes locais de extração mostraram ser estatisticamente equivalentes.

Uma vez que as estimativas foram avaliadas em termos de resistência característica, determinou-se, por meio das Equações 46 e 47, os valores  $f_{t\theta,k}$  para cada valor de  $\theta$  e espécie estudada, conforme apresenta a Tabela 21.

**Tabela 21: Valores experimentais de  $f_{t\theta,k}$  das madeiras estudadas.**

Espécie	$f_{t\theta,k}^{exp}$ (MPa)					
	0°	10°	20°	45°	60°	90°
Cedroarana	33,50	24,91	10,12	5,28	2,30	1,84
Louro preto	54,07	26,08	12,83	5,91	3,14	2,05
Ang. amargoso	58,51	43,66	18,29	7,23	5,76	1,57
Oichu	66,65	46,27	18,11	9,48	7,99	3,21
Maçaranduba	111,45	63,22	32,66	12,55	9,03	3,33

$f_{t\theta,k}^{exp}$  = resistência característica à tração em função de  $\theta$ , valores experimentais.

Os valores de  $f_{t\theta,k}$  determinados por Dias e Lahr (2002) para a madeira de Cedroarana, Louro preto, Angelim amargoso, Oichu e Maçaranduba foram, respectivamente, iguais a 45,70 MPa, 53,50 MPa, 51,00 MPa, 91,00 MPa e 109,40 MPa. Com exceção das madeiras de Cedroarana e Oichu, os valores de  $f_{t\theta,k}$  determinados neste estudo foram próximos aos obtidos por Dias e Lahr (2002).

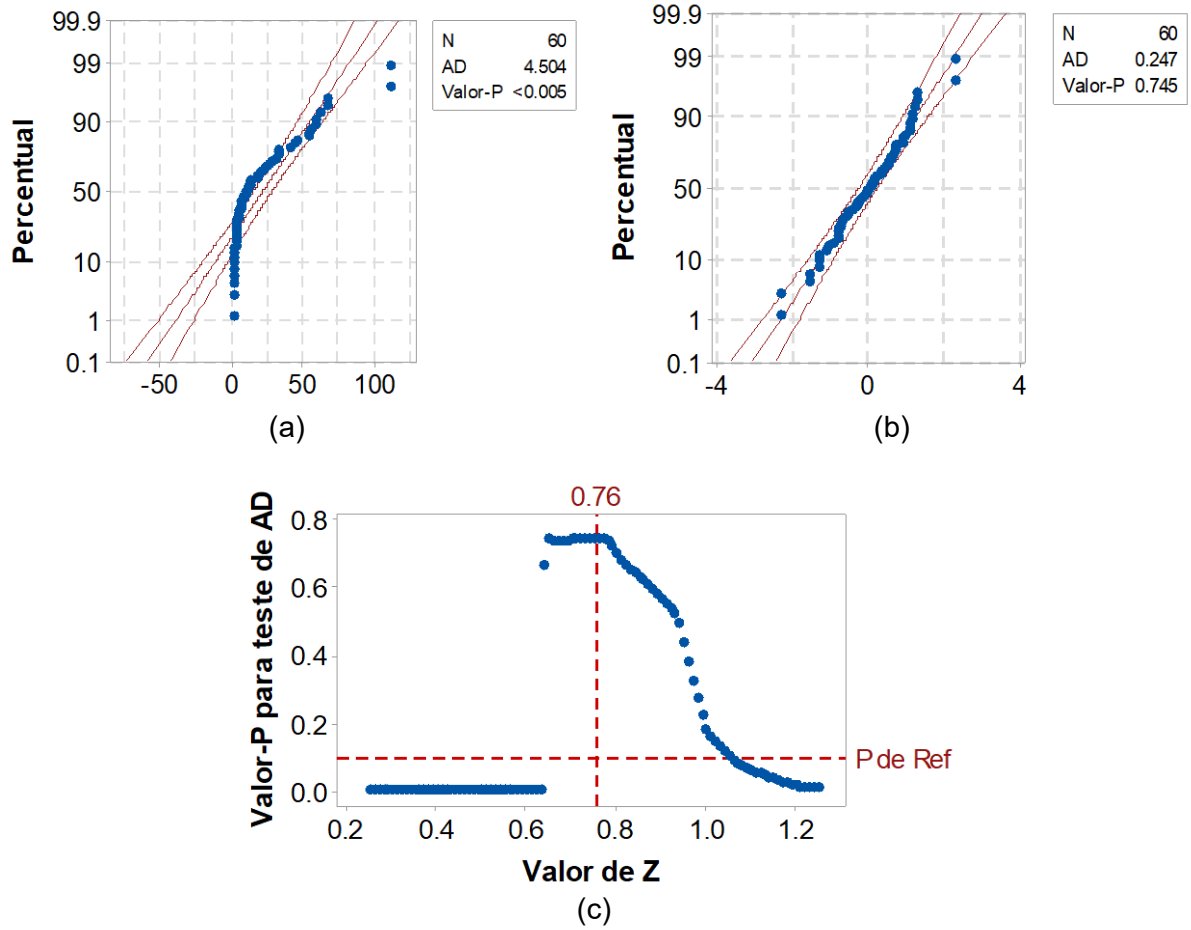
#### 4.2 ESTIMATIVAS DE $f_{t\theta,k}$ PELOS MODELOS EMPÍRICOS

Com posse dos valores de  $f_{t\theta,k}^{exp}$ , verificou-se, por meio do teste t pareado (5% de significância), a eficácia dos modelos empíricos (Equações 27, 34, 35 e 36), na estimativa de  $f_{t\theta,k}$ . Para tal verificação, considerou-se os valores originais do expoente n ( $n_{orig}$ ).

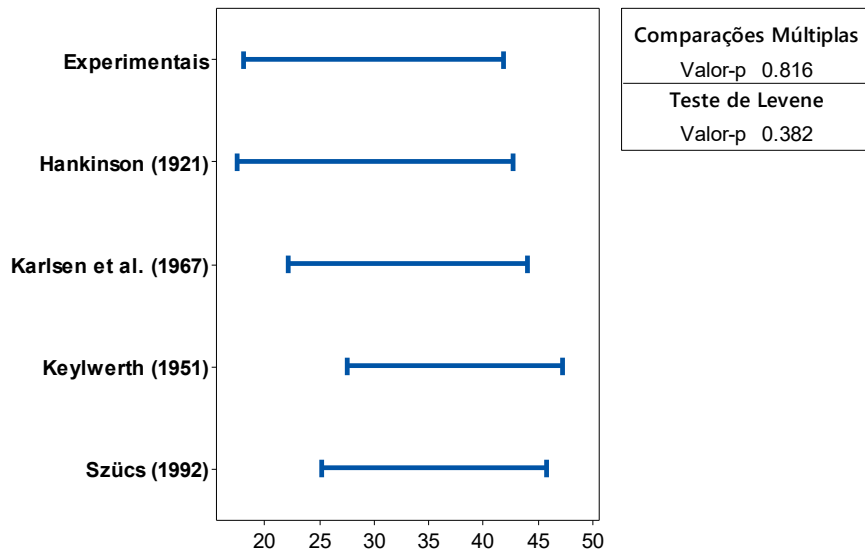
Para a realização do teste t pareado verificou-se as premissas de normalidade na distribuição dos dados e a equivalência de variâncias. Tais premissas foram analisadas segundo a transformação de Johnson e o método de Levene, respectivamente.

As Figuras 28 e 29 ilustram, nessa ordem, a transformação de Johnson - considerando os dados experimentais e os estimados pelo modelo de Hankinson (1921) - e a aplicação do método de Levene adotando os dados experimentais e os estimados pelos modelos empíricos.

**Figura 28: Verificação da normalidade da distribuição dos dados experimentais e estimados pelo modelo de Hankinson (1921) após a transformação de Johnson: gráfico probabilidade para dados originais (a), gráfico probabilidade para dados transformados (b) e valor Z.**



**Figura 29: Verificação da equivalência das variâncias dos valores experimentais e os obtidos pelos modelos empíricos.**



Na Figura 28b, como os pontos no gráfico seguem uma linha aproximadamente reta (dentro dos limites de confiança) e P-valor (0,745) resultou maior que  $\alpha$  (0,10), pôde-se assumir que os dados transformados seguem uma distribuição normal.

A premissa de normalidade na distribuição dos dados também foi verificada considerando os valores experimentais e estimados por meio dos demais modelos empíricos. Para os modelos de Keylwerth (1951), Karlsen *et al.* (1967) e Szücs (1992) obteve-se P-valor iguais a 0,698, 0,486 e 0,138, respectivamente. Desse modo, como os P-valores resultaram superiores a  $\alpha$  (0,10) assumiu-se a normalidade da distribuição dos dados transformados.

Na Figura 29, como os intervalos de comparações dos desvios padrão sobrepõem-se e P-valor (0,382) resultou maior que o nível de significância (0,05), pôde-se assumir que as variâncias, dos grupos testados, não são significativamente diferentes.

Uma vez verificada as premissas necessárias, realizou-se o teste t pareado considerando o agrupamento das espécies. A Tabela 22 apresenta os resultados obtidos.

**Tabela 22: Resultados do teste t pareado para a estimativa de  $f_{\theta,k}$  segundo os modelos empíricos.**

Análise	d	P-valor	Observação <sup>6</sup>
$f_{\theta,k}^{\text{exp}} \times f_{\theta,k}^{\text{Hank}}$	3,40	0,003	H <sub>0</sub> rejeitada
$f_{\theta,k}^{\text{exp}} \times f_{\theta,k}^{\text{Keylwerth}}$	13,24	0,009	H <sub>0</sub> rejeitada
$f_{\theta,k}^{\text{exp}} \times f_{\theta,k}^{\text{Karlsen}}$	6,22	0,013	H <sub>0</sub> rejeitada
$f_{\theta,k}^{\text{exp}} \times f_{\theta,k}^{\text{Szücs}}$	24,79	0,000	H <sub>0</sub> rejeitada

$f_{\theta,k}^{\text{exp}}$  = resistência característica à tração em função de  $\theta$ , valores experimentais;  $f_{\theta,k}^{\text{Hank}}$  = resistência característica à tração em função de  $\theta$ , estimada pelo modelo de Hankinson (1921);  $f_{\theta,k}^{\text{Keylwerth}}$  = resistência característica à tração em função de  $\theta$ , estimada pelo modelo de Keylwerth (1951);  $f_{\theta,k}^{\text{Karlsen}}$  = resistência característica à tração em função de  $\theta$ , estimada pelo modelo de Karlsen *et al.* (1967);  $f_{\theta,k}^{\text{Szücs}}$  = resistência característica à tração em função de  $\theta$ , estimada pelo modelo de Szücs (1992); d = média das diferenças entre os conjuntos, em módulo.

Na Tabela 22, o teste t pareado acusou, para todas as análises, diferença significativa nas médias dos grupos testados (P-valor < 0,05 - H<sub>0</sub> rejeitada). Tal fato, implica que a utilização dos modelos empíricos, com seus respectivos valores originais do expoente n, não conduzem a estimativas precisas de  $f_{\theta,k}$ .

Dentre os modelos empíricos, o de Hankinson (1921) foi o que, na sua forma original, resultou nas melhores estimativas de  $f_{\theta,k}$ , haja vista que apresentou o menor valor médio das diferenças entre os conjuntos ( $f_{\theta,k}^{\text{exp}}$  e  $f_{\theta,k}^{\text{Hank}}$ ).

<sup>6</sup> Conforme definido em 3.2.6, H<sub>0</sub> denota a equivalência entre as médias dos grupos:  $f_{\theta,k}^{\text{exp}}$  e  $f_{\theta,k}^{\text{estim}}$  (P-valor  $\geq$  0,05).

Os resultados apresentados na Tabela 22 corroboram aos obtidos por Logsdon *et al.* (2014a), os quais também constataram a ineficácia dos modelos de Hankinson (1921), Karlsen *et al.* (1967) e Szücs (1992) na estimativa de  $f_{t\theta,k}$ .

Dado a não equivalência entre os valores experimentais de  $f_{t\theta,k}$  e os estimados pelos modelos empíricos com  $n_{orig}$ , determinou-se o valor de  $n_{ótimo}$  para cada modelo empírico e espécie de madeira investigada. Tais valores constam na Tabela 23.

**Tabela 23: Valores de  $n_{ótimo}$  dos modelos empíricos para a estimativa de  $f_{t\theta,k}$  para cada espécie de madeira estudada.**

Modelo	Espécie	$n_{ótimo}$	$n_{orig}$	Dif (%)
$f_{\theta} = \frac{f_0 \cdot f_{90}}{f_0 \cdot \sin^n \theta + f_{90} \cdot \cos^n \theta}$ Hankinson (1921)	Cedroarana	2,11	2,00	6,00
	Louro preto	1,84		8,00
	Ang. amargoso	2,61		30,50
	Oichu	2,09		4,50
	Maçaranduba	2,19		9,50
$f_{\theta} = \frac{f_0}{\left( \cos^n \theta - \frac{f_0}{f_{90}} \cdot \sin^n \theta \right) \cdot \cos(2 \cdot \theta) + \frac{f_0}{f_{45}} \cdot \sin^n(2 \cdot \theta)}$ Keylwerth (1951)	Cedroarana	2,14	2,00	7,00
	Louro preto	1,88		6,00
	Ang. amargoso	2,82		41,00
	Oichu	2,13		6,50
	Maçaranduba	2,44		22,00
$f_{\theta} = \frac{f_0}{1 + \left( \frac{f_0}{f_{90}} - 1 \right) \cdot \sin^n \theta}$ Karlsen <i>et al.</i> (1967)	Cedroarana	2,13	3,00	29,00
	Louro preto	1,83		39,00
	Ang. amargoso	2,66		11,33
	Oichu	2,10		30,00
	Maçaranduba	2,20		26,67
$f_{\theta} = f_0 - (f_0 - f_{90}) \cdot \sin^n \theta$ Szücs (1992)	Cedroarana	0,49	2,00	75,50
	Louro preto	0,30		85,00
	Ang. amargoso	0,52		74,00
	Oichu	0,45		77,50
	Maçaranduba	0,38		81,00

$n_{ótimo}$  = expoente ótimo dos termos trigonométricos dos modelos empíricos investigados;  $n_{orig}$  = expoente original dos termos trigonométricos dos modelos empíricos investigados; Dif = diferença entre os valores de  $n_{orig}$  e  $n_{ótimo}$ .

Na Tabela 23, a maior diferença entre os valores de  $n_{orig}$  e  $n_{ótimo}$  deu-se para o modelo de Szücs (1992), enquanto as menores para os modelos de Hankinson (1921). Tal constatação corrobora com os resultados do teste t pareado (Tabela 22) uma vez que os modelos de Hankinson (1921) e Szücs (1992) obtiveram, respectivamente, os extremos inferior e superior da média das diferenças entre os conjuntos.

Considerando-se as cinco espécies de madeira ensaiadas, os valores médios de  $n_{ótimo}$  para os modelos de Hankinson (1921), Keylwerth (1951), Karlsen *et al.* (1967) e Szücs (1992)

resultaram iguais a 2,17, 2,28, 2,18 e 0,43, respectivamente. Esses resultados estão em conformidade com os obtidos por Logsdon *et al.* (2014a) os quais encontraram valores de  $n_{\text{ótimo}}$  iguais a 2,37, 2,53, 2,40 e 0,33, respectivamente, para os modelos de Hankinson (1921), Keylwerth (1951), Karlsen *et al.* (1967) e Szücs (1992).

Na Figura 30, constam os ajustes ótimos de  $f_{t\theta,k}$  obtidos para as madeiras de Cedroarana, Louro preto, Angelim amargoso, Oichu e Maçaranduba.

**Figura 30: Melhores ajustes de  $f_{t\theta,k}$ : Cedroarana (a) e Louro preto (b), Angelim amargoso (c), Oichu (d), Maçaranduba (e).**

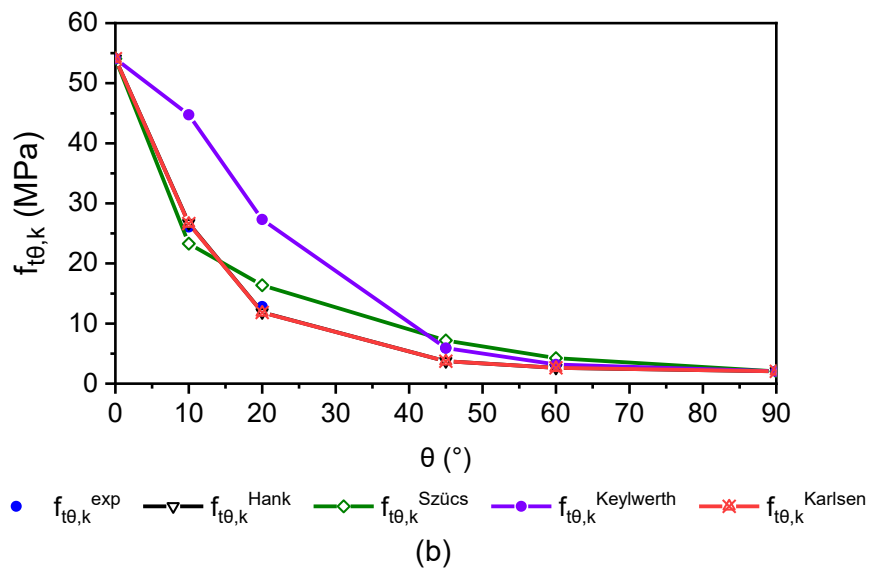
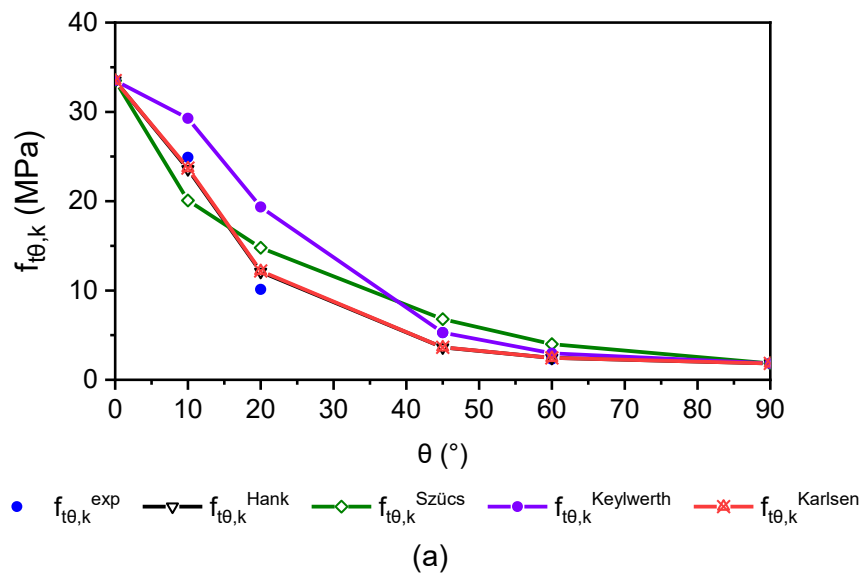
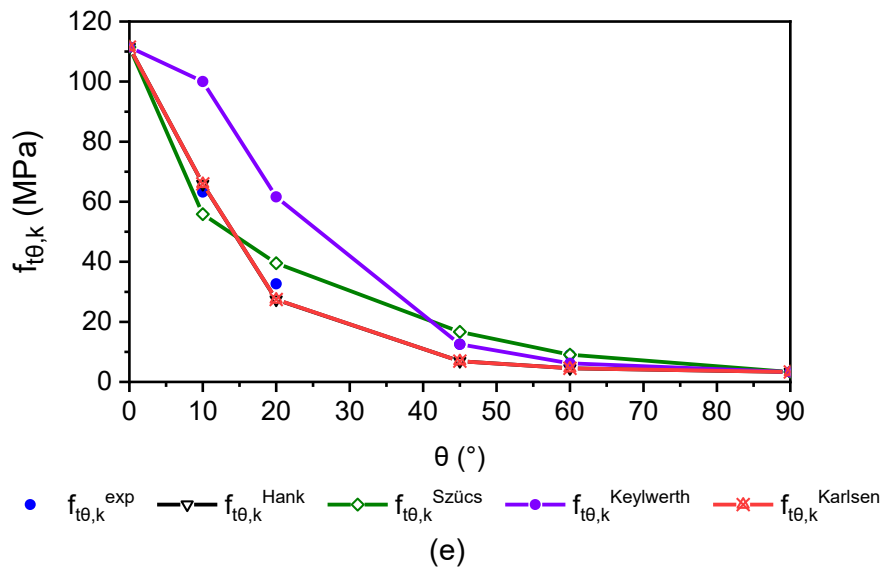
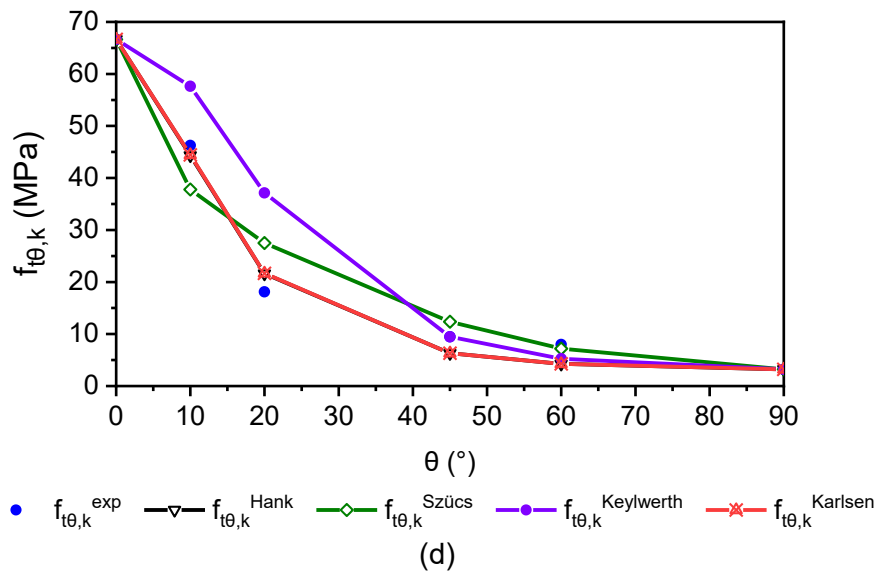
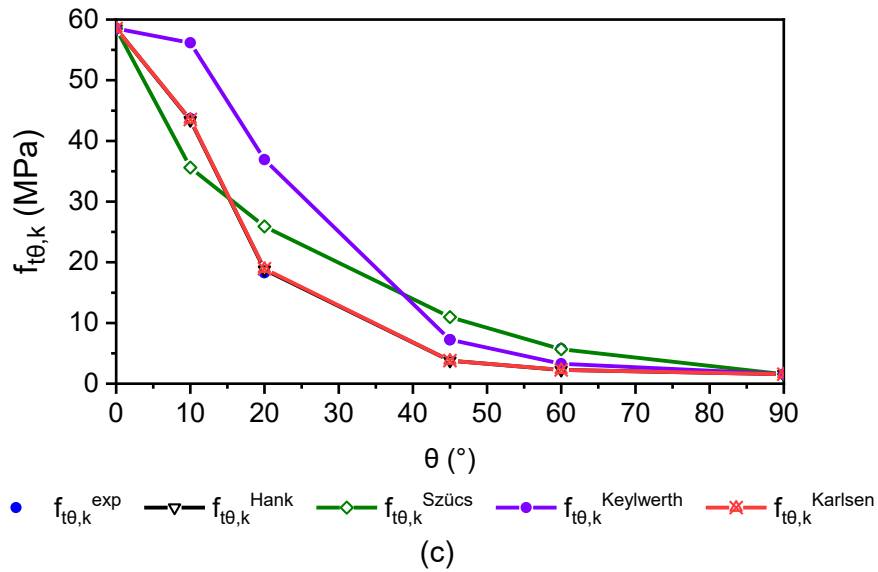


Figura 30: Melhores ajustes de  $f_{t\theta,k}$ : Cedroarana (a) e Louro preto (b), Angelim amargoso (c), Oichu (d), Maçaranduba (e) – Continuação.





Na Figura 30, dentre os modelos empíricos, o de Hankinson (1921) e o de Karlsen *et al.* (1967) foram os que conduziram às melhores estimativas de  $f_{t\theta,k}$ . Verifica-se que, para as cinco espécies estudadas, esses modelos resultaram em estimativas praticamente iguais. Esse comportamento também foi observado por Logsdon *et al.* (2010), Logsdon *et al.* (2014a) e Logsdon *et al.* (2014b) nas estimativas de  $E_{c\theta,m}$  (Figura 7),  $f_{t\theta,k}$  (Figura 13) e  $f_{v\theta,k}$  (Figura 14), respectivamente.

Ainda, na Figura 30, para todas as espécies, as estimativas de  $f_{t\theta,k}$  divergiram, significativamente, para os ângulos de 10° e 20°. O modelo de Keylwerth (1951) conduziu, para tais ângulos, a valores superestimados de  $f_{t\theta,k}$ .

Visando mensurar os erros cometidos pelos modelos empíricos na estimativa de  $f_{t\theta,k}$ , utilizou-se a Equação 54. Tais erros foram determinados para cada espécie estudada e são apresentados na Tabela 24.

**Tabela 24: Erros percentuais absolutos médios cometidos na estimativa de  $f_{t\theta,k}$  pelos modelos empíricos com  $n_{\text{ótimo}}$ .**

Espécie	Er (%)			
	Hankinson (1921)	Keylwerth (1951)	Karlsen <i>et al.</i> (1967)	Szücs (1992)
Cedroarana	10,46	23,06	10,50	27,95
Louro preto	10,46	31,06	10,41	15,84
Ang. amargoso	18,58	28,89	18,65	18,88
Oichu	17,24	27,32	17,25	18,46
Maçaranduba	19,20	29,69	19,22	11,01
$X_m$	15,19	28,00	15,21	18,43

Er (%) = erros percentuais absolutos;  $X_m$  = valor médio.

Da Tabela 24, os modelos de Hankinson (1921) e Karlsen *et al.* (1967) forneceram os menores valores de erro percentual absoluto médio, mostrando ser, dentre os modelos empíricos testados, os mais precisos na estimativa de  $f_{t\theta,k}$ . Esse resultado corrobora o obtido por Logsdon *et al.* (2014a), os quais concluíram que os modelos de Hankinson (1921) e Karlsen *et al.* (1967), com  $n_{\text{ótimo}}$ , foram os que melhor estimaram os valores de  $f_{t\theta,k}$  da madeira de Peroba mica (Figura 13).

### 4.3 ESTIMATIVAS DE $f_{t\theta,k}$ PELOS CRITÉRIOS DE RESISTÊNCIA

A Tabela 25 apresenta, para cada espécie de madeira estudada, os valores de  $f_{c0,k}$ ,  $f_{c90,k}$  e  $f_{v0,k}$ , necessários para a aplicação dos critérios de falha. Com posse desses valores de

resistência e de  $f_{t0,k}$  e  $f_{t90,k}$ , apresentados na Tabela 21, determinou-se os parâmetros  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_{11}$ ,  $F_{22}$  e  $F_{44}$  do critério de Tsai e Wu (1971), conforme apresenta a Tabela 26.

**Tabela 25: Valores de resistências para a aplicação dos critérios de falha.**

Espécie	$f_{c0,k}$ (MPa)	$f_{c90,k}$ (MPa)	$f_{v0,k}$ (MPa)
Cedroarana	26,90	6,73	7,74
Louro preto	42,80	10,70	9,85
Ang. amargoso	45,33	11,33	12,17
Oichu	69,01	17,25	14,31
Maçaranduba	75,81	18,90	19,81

**Tabela 26: Parâmetros para a aplicação do critério de Tsai e Wu (1971).**

Espécie	$F_1$ (MPa <sup>-1</sup> )	$F_2$ (MPa <sup>-1</sup> )	$F_{11}$ (MPa <sup>-2</sup> )	$F_{22}$ (MPa <sup>-2</sup> )	$F_{44}$ (MPa <sup>-2</sup> )
Cedroarana	$-7,32 \cdot 10^{-3}$	$3,95 \cdot 10^{-1}$	$1,11 \cdot 10^{-3}$	$8,08 \cdot 10^{-2}$	$1,67 \cdot 10^{-2}$
Louro preto	$-4,87 \cdot 10^{-3}$	$3,94 \cdot 10^{-1}$	$4,32 \cdot 10^{-4}$	$4,56 \cdot 10^{-2}$	$1,03 \cdot 10^{-2}$
Ang. amargoso	$-4,97 \cdot 10^{-3}$	$5,49 \cdot 10^{-1}$	$3,77 \cdot 10^{-4}$	$5,62 \cdot 10^{-2}$	$6,75 \cdot 10^{-3}$
Oichu	$5,13 \cdot 10^{-4}$	$2,54 \cdot 10^{-1}$	$2,17 \cdot 10^{-4}$	$1,81 \cdot 10^{-2}$	$4,88 \cdot 10^{-3}$
Maçaranduba	$-4,22 \cdot 10^{-3}$	$2,48 \cdot 10^{-1}$	$1,18 \cdot 10^{-4}$	$1,58 \cdot 10^{-2}$	$2,55 \cdot 10^{-3}$

A Tabela 27 apresenta, para cada espécie de madeira investigada, os valores do parâmetro  $F_{12}$ , estimados por meio das equações presentes na literatura (Tabela 1).

**Tabela 27: Parâmetro  $F_{12}$  estimado para cada espécie de madeira estudada.**

Espécie	$F_{12}$ (MPa <sup>-2</sup> )					Valores limites
	Norris (1939)	Hoffman (1967)	Tsai-Hill (Azzi e Tsai, 1965)	Cowin (1979)	Liu (1984)	
Cedroarana	$-8,11 \cdot 10^{-3}$	$-5,55 \cdot 10^{-4}$	$-4,46 \cdot 10^{-4}$	$-1,12 \cdot 10^{-3}$	$3,98 \cdot 10^{-3}$	$\pm 9,47 \cdot 10^{-3}$
Louro preto	$-4,51 \cdot 10^{-3}$	$-2,16 \cdot 10^{-4}$	$-1,71 \cdot 10^{-4}$	$-7,15 \cdot 10^{-4}$	$1,41 \cdot 10^{-3}$	$\pm 4,44 \cdot 10^{-3}$
Ang. amar.	$-5,44 \cdot 10^{-3}$	$-1,89 \cdot 10^{-4}$	$-1,46 \cdot 10^{-4}$	$1,23 \cdot 10^{-3}$	$4,40 \cdot 10^{-3}$	$\pm 4,60 \cdot 10^{-3}$
Oichu	$-2,34 \cdot 10^{-3}$	$-1,09 \cdot 10^{-4}$	$-1,13 \cdot 10^{-4}$	$-4,60 \cdot 10^{-4}$	$2,50 \cdot 10^{-4}$	$\pm 1,98 \cdot 10^{-3}$
Maçarand.	$-1,35 \cdot 10^{-3}$	$-5,92 \cdot 10^{-5}$	$-4,03 \cdot 10^{-5}$	$9,53 \cdot 10^{-5}$	$9,43 \cdot 10^{-4}$	$\pm 1,37 \cdot 10^{-3}$

Na Tabela 27, com exceção dos valores de  $F_{12}$  estimados por meio da equação de Norris (1939) para as madeiras de Louro preto, Angelim amargoso e Oichu, todos os valores enquadram-se na condição limite estabelecida pela Equação 15<sup>7</sup>. Desse modo, não se

<sup>7</sup> Condição imposta para que a superfície de resistência seja fechada.

considerou, para tais espécies, as estimativas de  $f_{t\theta,k}$  advindas do critério de Tsai e Wu (1971) com  $F_{12}$  proposto por Norris (1939).

Por meio da Equação 19, considerando os parâmetros de resistência descritos nas Tabelas 26 e 27, estimou-se os valores de  $f_{t\theta,k}$  segundo o critério de Tsai e Wu (1971). As estimativas, obtidas para cada espécie estudada, constam na Figura 31.

**Figura 31: Estimativas de  $f_{t\theta,k}$  pelo critério de Tsai e Wu (1971): Cedroarana (a) e Louro preto (b), Angelim amargoso (c), Oichu (d), Maçaranduba (e).**

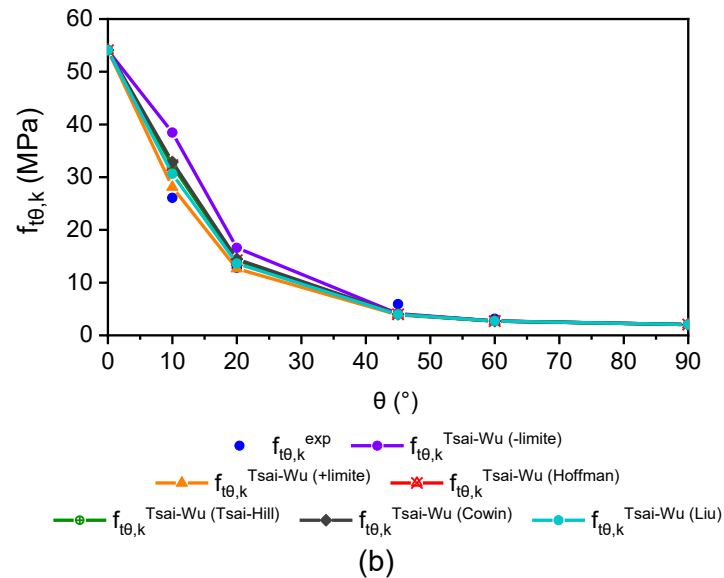
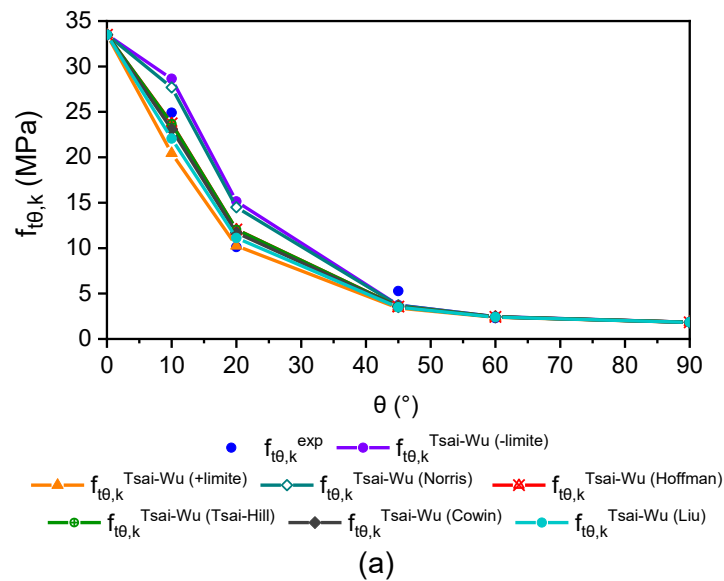
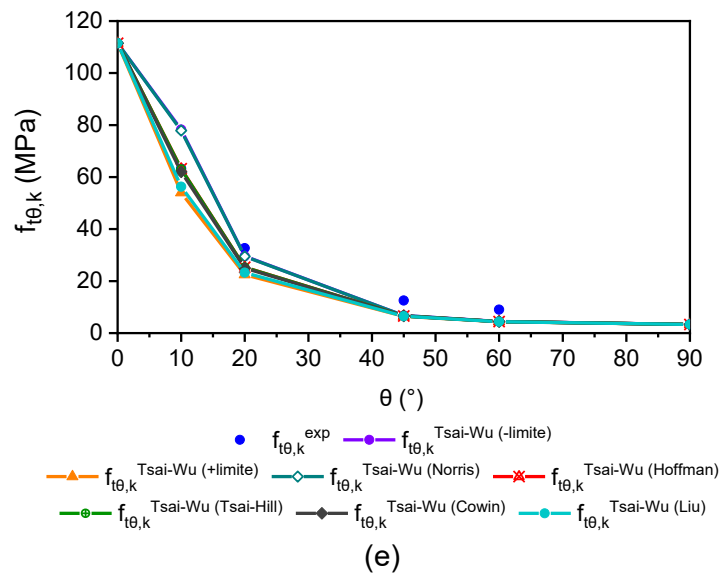
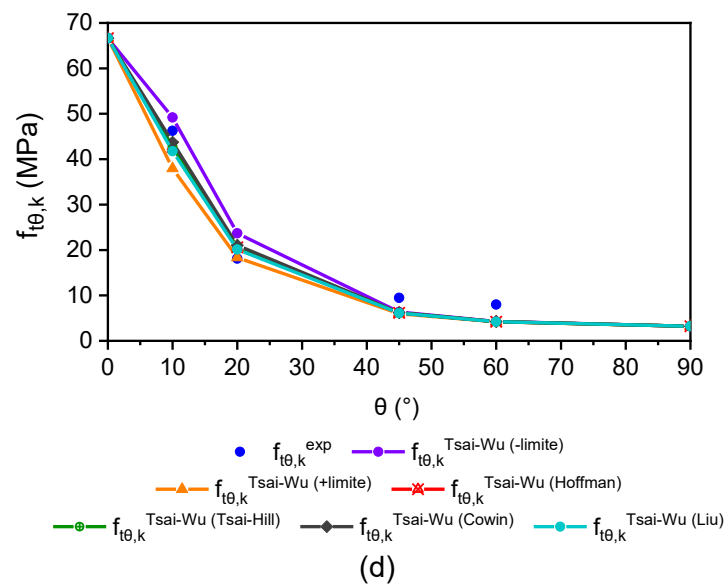
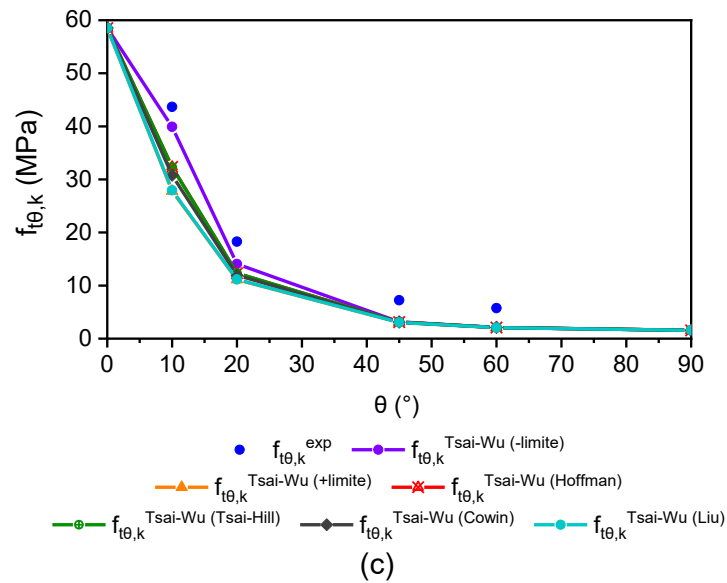


Figura 31: Estimativas de  $f_{t\theta,k}$  pelo critério de Tsai e Wu (1971): Cedroarana (a) e Louro preto (b), Angelim amargoso (c), Oichu (d), Maçaranduba (e) - Continuação.



A Tabela 28 apresenta os parâmetros  $F_{11}$ ,  $F_{22}$  e  $F_{44}$ , do critério de Tsai-Hill (Azzi e Tsai, 1965), determinados considerando os valores de resistência descritos nas Tabelas 21 e 25. Na Figura 32 constam as estimativas de  $f_{t\theta,k}$ , pelo critério de Tsai-Hill (Azzi e Tsai, 1965), obtidas por meio da Equação 26 utilizando os parâmetros de resistência descritos na Tabela 28.

**Tabela 28: Parâmetros para a aplicação do critério de Tsai-Hill (Azzi e Tsai, 1965).**

Espécie	$F_{11}$ (MPa <sup>-2</sup> )	$F_{22}$ (MPa <sup>-2</sup> )	$F_{44}$ (MPa <sup>-2</sup> )
Cedroarana	$8,91 \cdot 10^{-4}$	$2,95 \cdot 10^{-1}$	$1,67 \cdot 10^{-2}$
Louro preto	$3,42 \cdot 10^{-4}$	$2,38 \cdot 10^{-1}$	$1,03 \cdot 10^{-2}$
Ang. amargoso	$2,92 \cdot 10^{-4}$	$4,06 \cdot 10^{-1}$	$6,75 \cdot 10^{-3}$
Oichu	$2,25 \cdot 10^{-4}$	$9,70 \cdot 10^{-2}$	$4,88 \cdot 10^{-3}$
Maçaranduba	$8,05 \cdot 10^{-5}$	$9,02 \cdot 10^{-2}$	$2,55 \cdot 10^{-3}$

**Figura 32: Estimativas de  $f_{t\theta,k}$  pelo critério de Tsai-Hill (Azzi e Tsai, 1965): Cedroarana (a) e Louro preto (b), Angelim amargoso (c), Oichu (d), Maçaranduba (e).**

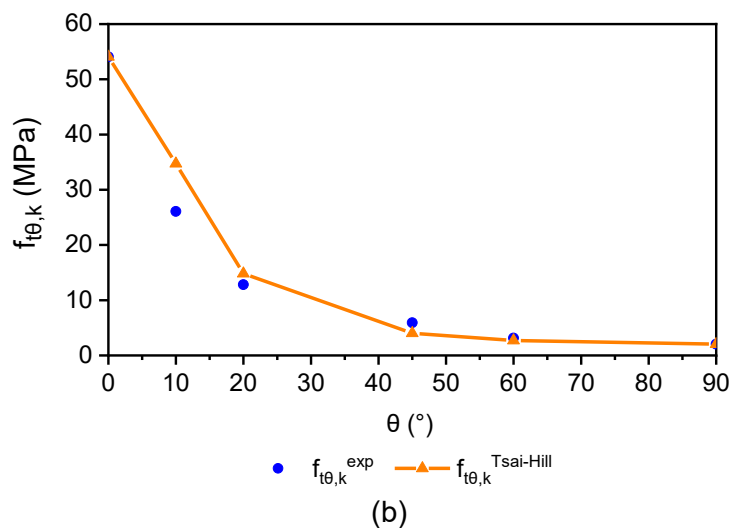
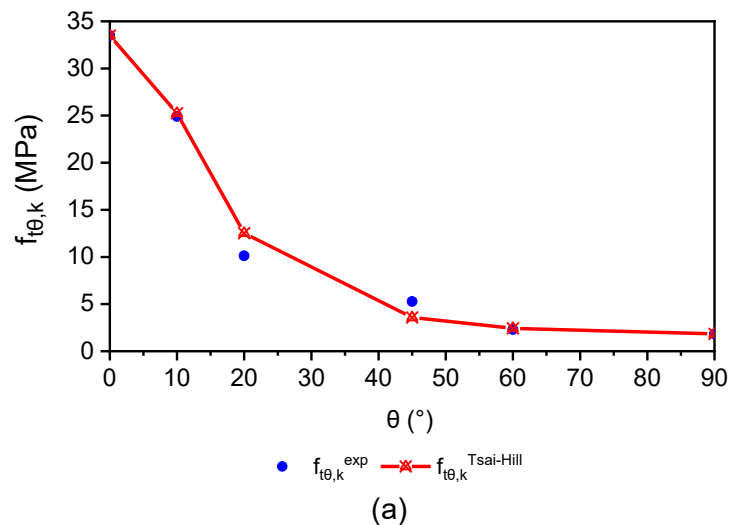
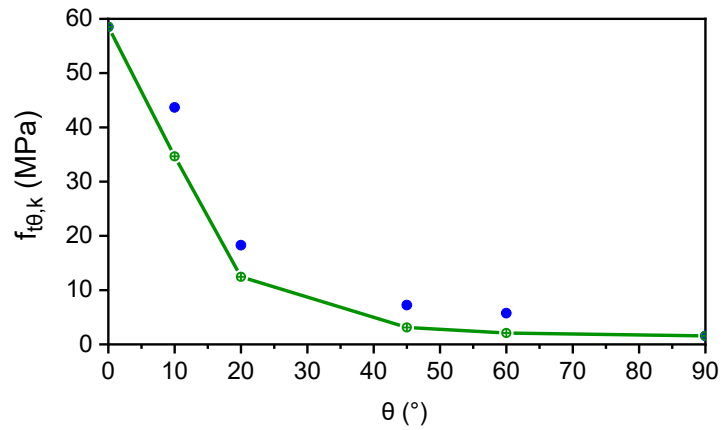
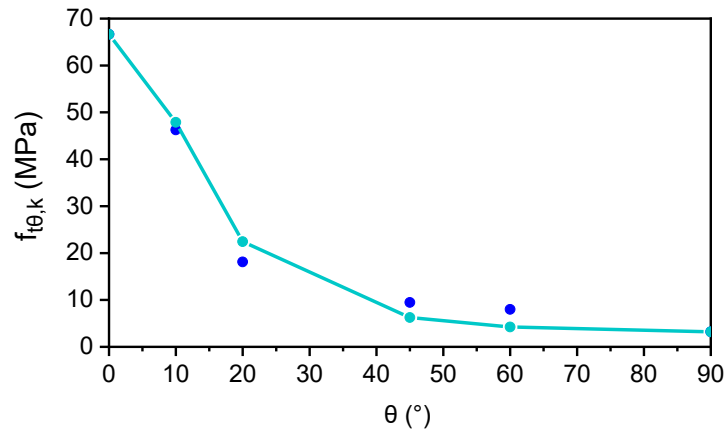


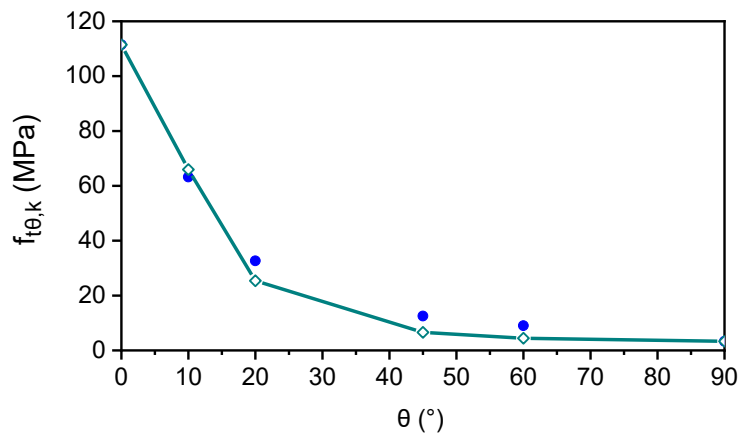
Figura 32: Estimativas de  $f_{t\theta,k}$  pelo critério de Tsai-Hill (Azzi e Tsai, 1965): Cedroarana (a) e Louro preto (b), Angelim amargoso (c), Oichu (d), Maçaranduba (e) - Continuação.



(c)



(d)



(e)

Visando eleger a mais precisa das estimativas de  $f_{t\theta,k}$  realizadas por meio dos critérios de resistência, utilizou-se, analogamente aos modelos empíricos, a Equação 54 para a

determinação dos erros percentuais absolutos. Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 29.

**Tabela 29: Erros percentuais absolutos médios cometidos nas estimativas de  $f_{t\theta,k}$  pelos critérios de Tsai e Wu (1971) e Tsai-Hill (Azzi e Tsai, 1965).**

Espécie	Er (%)							
	Tsai e Wu (1971)							Tsai-Hill
	-limite	Norris	Hoffman	Tsai-Hill	Cowin	Liu	+limite	
Cedroarana	16,86	15,20	10,33	10,32	10,19	10,00	9,75	10,51
Louro preto	20,04	-	13,54	13,48	14,13	11,81	9,71	15,72
Ang. amargoso	25,22	-	29,84	29,87	30,88	32,78	32,88	28,87
Oichu	19,45	-	17,25	17,25	17,25	17,26	17,34	18,03
Maçaranduba	21,68	21,64	20,16	20,22	20,70	23,26	24,33	20,89
$X_m$	20,65	18,42	18,22	18,23	18,63	19,02	18,80	18,80

Er (%) = erros percentuais absolutos;  $X_m$  = valor médio.

Da Tabela 29, as estimativas realizadas por meio dos critérios de Tsai-Hill (Azzi e Tsai, 1965) e Tsai e Wu (1971) apresentaram valores próximos de erro percentual absoluto médio. Dentre tais estimativas, as obtidas pelo critério de Tsai e Wu (1971) com os valores de  $F_{12}$  advindos das formulações de Hoffman (1967) e Tsai-Hill (Azzi e Tsai, 1965) foram as mais precisas.

Para as madeiras de Cedroarana e Louro preto, o menor valor do erro percentual absoluto foi obtido por meio do critério de Tsai e Wu (1971), considerando o limite positivo do parâmetro  $F_{12}$ . Tal constatação também foi observada por Mascia e Nicolas (2012) para a madeira de Cupiúba (Figura 8).

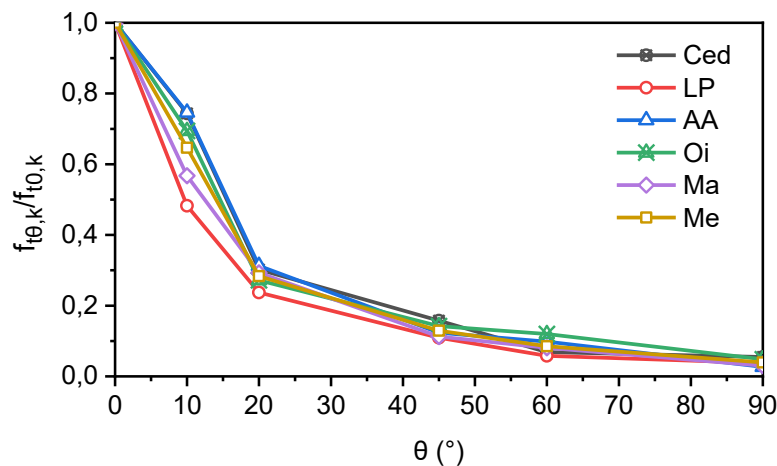
#### 4.4 ESTIMATIVAS DE $f_{t\theta,k}$ POR MEIO DE MODELOS DE REGRESSÃO

A utilização dos modelos de regressão (Equações 50 a 53) se deu na estimativa das razões  $f_{t\theta,k}/f_{t0,k}$ . Os valores experimentais de  $f_{t\theta,k}/f_{t0,k}$  (Figura 33), das espécies estudadas, são apresentados na Tabela 30.

**Tabela 30: Valores experimentais de  $f_{t\theta,k}/f_{t0,k}$  das espécies de madeira estudadas.**

Espécie	$f_{t\theta,k}/f_{t0,k}$					
	0°/0°	10°/0°	20°/0°	45°/0°	60°/0°	90°/0°
Cedroarana	1,0000	0,7436	0,3021	0,1576	0,0687	0,0549
Louro preto	1,0000	0,4823	0,2373	0,1093	0,0581	0,0379
Ang. amargoso	1,0000	0,7462	0,3126	0,1236	0,0984	0,0268
Oichu	1,0000	0,6942	0,2717	0,1422	0,1199	0,0482
Maçaranduba	1,0000	0,5672	0,2930	0,1126	0,0810	0,0299
$X_m$	1,0000	0,6467	0,2833	0,1291	0,0852	0,0395

$f_{t\theta,k}/f_{t0,k}$  = razão entre a resistência característica à tração em função de  $\theta$  e a resistência característica à tração paralela às fibras;  $X_m$  = valor médio.

**Figura 33: Razões  $f_{t\theta,k}/f_{t0,k}$  das madeiras estudadas.**

Ced = Cedroarana; LP = Louro preto; AA = Angelim amargoso; Oi = Oichu; Ma = Maçaranduba; Me = média do conjunto das espécies.

Da Figura 33, nota-se, independente da espécie de madeira, o decaimento dos valores de  $f_{t\theta,k}/f_{t0,k}$  com o aumento de  $\theta$ . Visando descrever tal comportamento, as Tabelas 31 a 36, apresentam os resultados dos modelos de regressão na estimativa de  $f_{t\theta,k}/f_{t0,k}$ , em função de  $\theta$  [ $f_{t\theta,k}/f_{t0,k}(\theta)$ ], para cada espécie e o conjunto envolvendo as cinco espécies estudadas.



**Tabela 31: Resultados dos modelos de regressão para a estimativa de  $f_{t\theta,k}/f_{t0,k}(\theta)$  para a madeira de Cedroarana.**

Modelos de regressão	Parâmetros		P-valor	R <sup>2</sup> (%)
	a	b		
$\frac{f_{t\theta,k}}{f_{t0,k}} = a + b \cdot \theta$ [Linear]	0,5955	-0,0073	0,0859	67,97
$\frac{f_{t\theta,k}}{f_{t0,k}} = a \cdot e^{b \cdot \theta}$ [Exponencial]	0,7032	-0,0318	0,0138	90,04
$\frac{f_{t\theta,k}}{f_{t0,k}} = a + b \cdot \ln(\theta)$ [Logarítmico]	1,3425	-0,3043	0,0156	89,19
$\frac{f_{t\theta,k}}{f_{t0,k}} = a \cdot \theta^b$ [Geométrico]	11,6649	-1,1980	0,0019	97,32

**Tabela 32: Resultados dos modelos de regressão para a estimativa de  $f_{t\theta,k}/f_{t0,k}(\theta)$  para a madeira de Louro preto.**

Modelos de regressão	Parâmetros		P-valor	R <sup>2</sup> (%)
	a	b		
$\frac{f_{t\theta,k}}{f_{t0,k}} = a + b \cdot \theta$ [Linear]	0,4071	-0,0049	0,0606	74,21
$\frac{f_{t\theta,k}}{f_{t0,k}} = a \cdot e^{b \cdot \theta}$ [Exponencial]	0,5017	-0,0313	0,0056	94,48
$\frac{f_{t\theta,k}}{f_{t0,k}} = a + b \cdot \ln(\theta)$ [Logarítmico]	0,8960	-0,2008	0,0068	93,72
$\frac{f_{t\theta,k}}{f_{t0,k}} = a \cdot \theta^b$ [Geométrico]	7,4206	-1,1594	0,0007	98,65

**Tabela 33: Resultados dos modelos de regressão para a estimativa de  $f_{t\theta,k}/f_{t0,k}(\theta)$  para a madeira de Angelim amargoso.**

Modelos de regressão	Parâmetros		P-valor	R <sup>2</sup> (%)
	a	b		
$\frac{f_{t\theta,k}}{f_{t0,k}} = a + b \cdot \theta$ [Linear]	0,6045	-0,0076	0,0755	70,42
$\frac{f_{t\theta,k}}{f_{t0,k}} = a \cdot e^{b \cdot \theta}$ [Exponencial]	0,8529	-0,0386	0,0021	97,14
$\frac{f_{t\theta,k}}{f_{t0,k}} = a + b \cdot \ln(\theta)$ [Logarítmico]	1,3709	-0,3134	0,0122	90,81
$\frac{f_{t\theta,k}}{f_{t0,k}} = a \cdot \theta^b$ [Geométrico]	20,0261	-1,3825	0,0049	94,96

**Tabela 34: Resultados dos modelos de regressão para a estimativa de  $f_{t\theta,k}/f_{t0,k}(\theta)$  para a madeira de Oichu.**

Modelos de regressão	Parâmetros		P-valor	R <sup>2</sup> (%)
	a	b		
$\frac{f_{t\theta,k}}{f_{t0,k}} = a + b \cdot \theta$ [Linear]	0,5529	-0,0066	0,0892	67,22
$\frac{f_{t\theta,k}}{f_{t0,k}} = a \cdot e^{b \cdot \theta}$ [Exponencial]	0,6668	-0,0300	0,0071	93,53
$\frac{f_{t\theta,k}}{f_{t0,k}} = a + b \cdot \ln(\theta)$ [Logarítmico]	1,2243	-0,2737	0,0188	87,79
$\frac{f_{t\theta,k}}{f_{t0,k}} = a \cdot \theta^b$ [Geométrico]	8,5654	-1,1024	0,0029	96,44

**Tabela 35: Resultados dos modelos de regressão para a estimativa de  $f_{t\theta,k}/f_{t0,k}(\theta)$  para a madeira de Maçaranduba.**

Modelos de regressão	Parâmetros		P-valor	R <sup>2</sup> (%)
	a	b		
$\frac{f_{t\theta,k}}{f_{t0,k}} = a + b \cdot \theta$ [Linear]	0,4869	-0,0060	0,0517	76,65
$\frac{f_{t\theta,k}}{f_{t0,k}} = a \cdot e^{b \cdot \theta}$ [Exponencial]	0,6652	-0,0354	0,0010	98,25
$\frac{f_{t\theta,k}}{f_{t0,k}} = a + b \cdot \ln(\theta)$ [Logarítmico]	1,0742	-0,2422	0,0046	95,17
$\frac{f_{t\theta,k}}{f_{t0,k}} = a \cdot \theta^b$ [Geométrico]	12,1933	-1,2716	0,0025	96,73

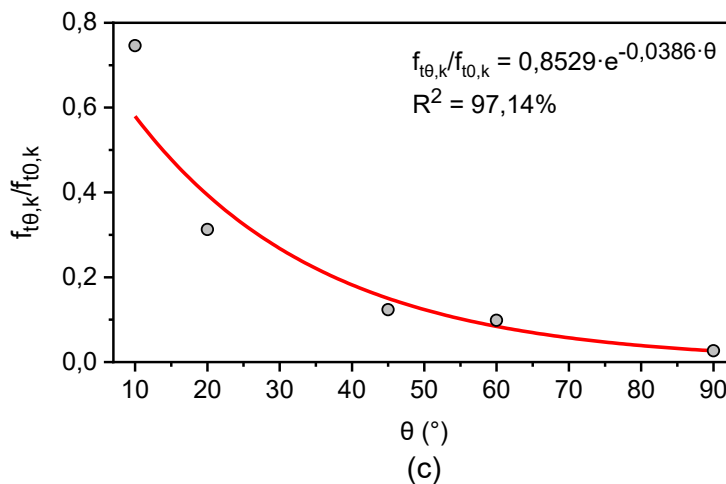
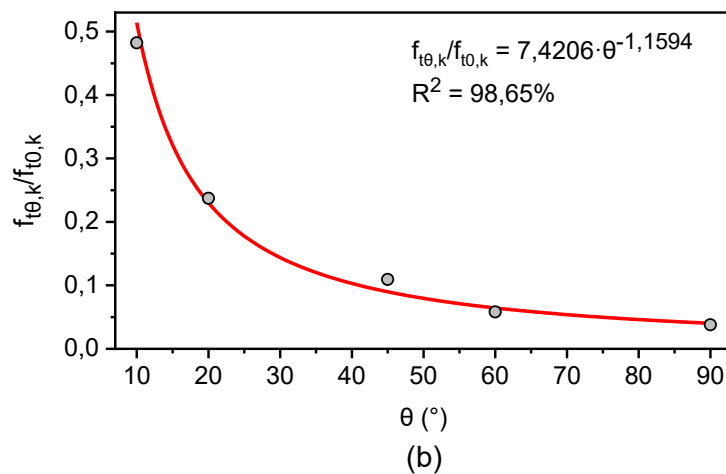
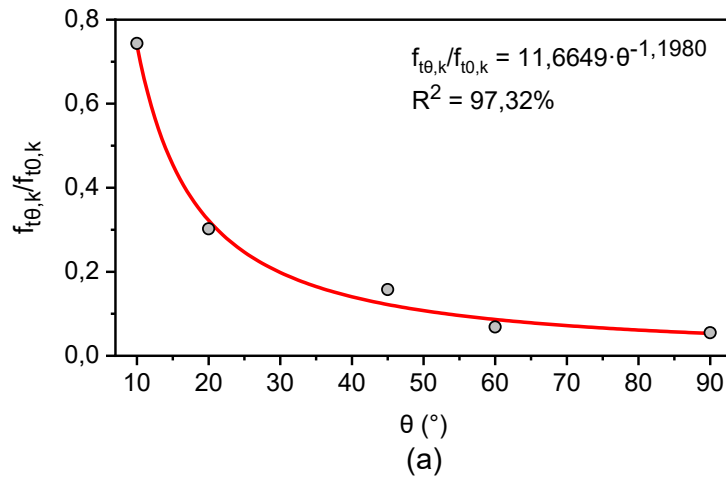
**Tabela 36: Resultados dos modelos de regressão para a estimativa de  $f_{t\theta,k}/f_{t0,k}(\theta)$  para o conjunto das madeiras estudadas.**

Modelos de regressão	Parâmetros		P-valor	R <sup>2</sup> (%)
	a	b		
$\frac{f_{t\theta,k}}{f_{t0,k}} = a + b \cdot \theta$ [Linear]	0,5294	-0,0065	0,0725	71,15
$\frac{f_{t\theta,k}}{f_{t0,k}} = a \cdot e^{b \cdot \theta}$ [Exponencial]	0,6705	-0,0331	0,0032	96,15
$\frac{f_{t\theta,k}}{f_{t0,k}} = a + b \cdot \ln(\theta)$ [Logarítmico]	1,1816	-0,2669	0,0109	91,42
$\frac{f_{t\theta,k}}{f_{t0,k}} = a \cdot \theta^b$ [Geométrico]	11,0330	-1,2115	0,0008	98,45

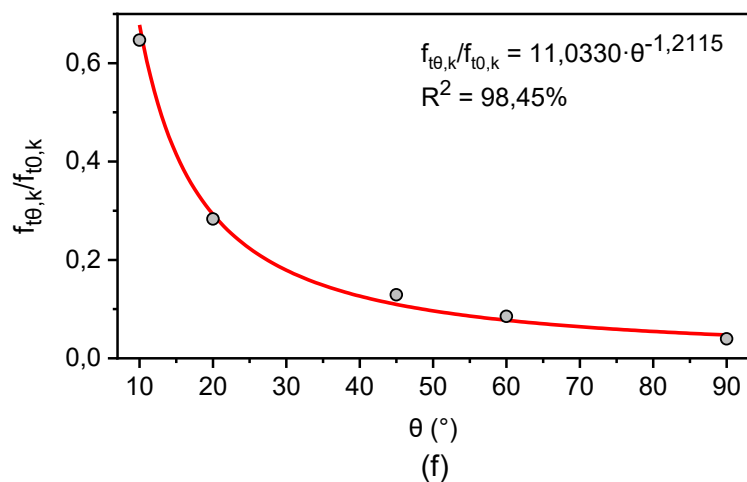
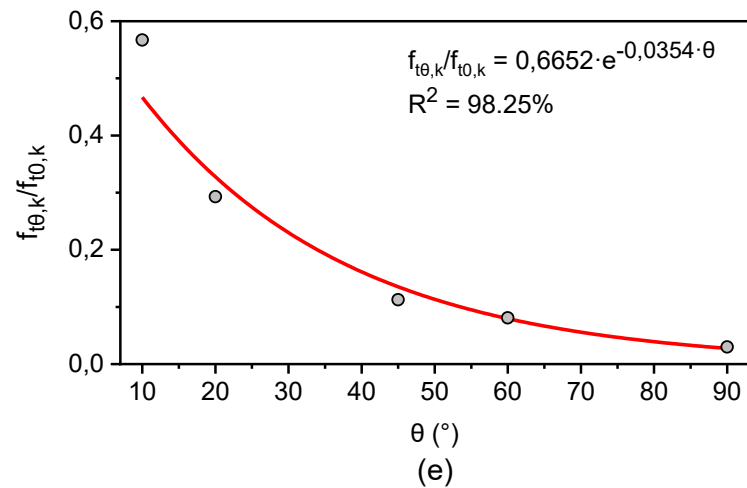
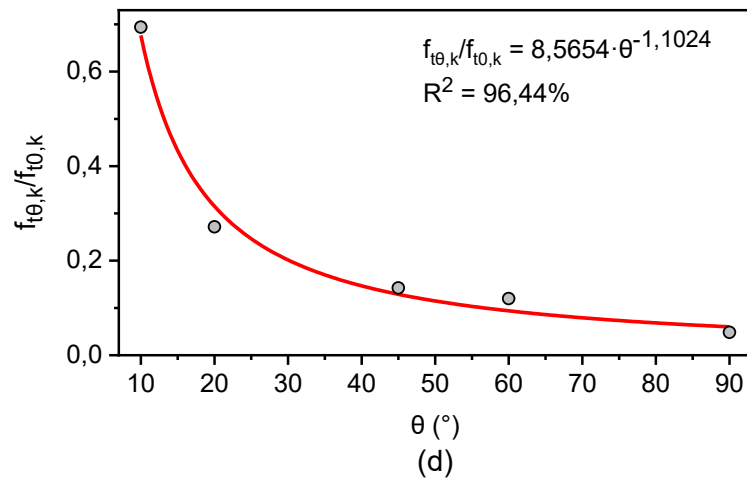
Das Tabelas 31 a 36, com exceção do linear, todos os ajustes testados foram significativos (P-valor < 0,05). Para as madeiras de Angelim amargoso e Maçaranduba, o modelo de regressão exponencial resultou no melhor ajuste. Para as demais espécies e o

conjunto das cinco espécies estudadas, o modelo geométrico mostrou ser o mais preciso. Os valores elevados de  $R^2$ , superiores a 96%, revelam a excelente precisão das estimativas de  $f_{t\theta,k}/f_{t0,k}(\theta)$  pelos modelos obtidos. A Figura 34 ilustra os melhores ajustes.

**Figura 34: Melhores ajustes obtidos na estimativa de  $f_{t\theta,k}/f_{t0,k}(\theta)$ : Cedroarana (a), Louro preto (b); Angelim amargoso (c); Oichu (d); Maçaranduba (e); conjunto das madeiras estudadas (f).**



**Figura 34: Melhores ajustes obtidos na estimativa de  $f_{t\theta,k}/f_{t0,k}(\theta)$ : Cedroarana (a), Louro preto (b); Angelim amargoso (c); Oichu (d); Maçaranduba (e); conjunto das madeiras estudadas (f) - Continuação.**



Da Figura 34, como apresentado anteriormente<sup>8</sup>, as estimativas de  $f_{t\theta,k}/f_{t0,k}(\theta)$ , pelos modelos obtidos, são validas para o domínio:  $10^{\circ} \leq \theta \leq 90^{\circ}$ .

<sup>8</sup> Item 3.2.6

#### 4.5 COMPARAÇÃO ENTRE OS MODELOS DE MELHOR AJUSTE

Conforme apresentado nas Tabelas 24 e 29, a julgar pelos valores médios dos erros percentuais absolutos, os modelos de Hankinson (1921), Karlsen *et al.* (1967) e o critério de Tsai e Wu (1971), com  $F_{12}$  advindo da formulação de Hoffman (1967), foram considerados os modelos de melhor ajuste. Acrescidos a esses, tem-se, eleitos pelo maior valor de  $R^2$ , os modelos de regressão, descritos nas Figura 34.

Visando eleger, para cada espécie, o mais preciso dentre os modelos obtidos, determinou-se os erros percentuais absolutos, cometidos nas estimativas de  $f_{t\theta,k}$ , pelos modelos empíricos, critérios de falha e modelos de regressão considerados de melhor ajuste. Tais erros constam na Tabela 37.

**Tabela 37: Erros percentuais absolutos médios cometidos na estimativa de  $f_{t\theta,k}$  pelos modelos de melhor ajuste, obtidos por espécie.**

Espécie	Er (%)				
	Hankinson (1921)	Karlsen <i>et al.</i> (1967)	Tsai e Wu (1971)	Tsai-Hill (Azzi e Tsai, 1965)	Modelos de regressão <sup>9</sup>
Cedroarana	10,46	10,50	10,33	10,51	9,82
Louro preto	10,46	10,41	13,54	15,72	7,40
Ang. amargoso	18,58	18,65	29,84	28,87	14,32
Oichu	17,24	17,25	17,25	18,03	12,37
Maçaranduba	19,20	19,22	20,22	20,89	9,91

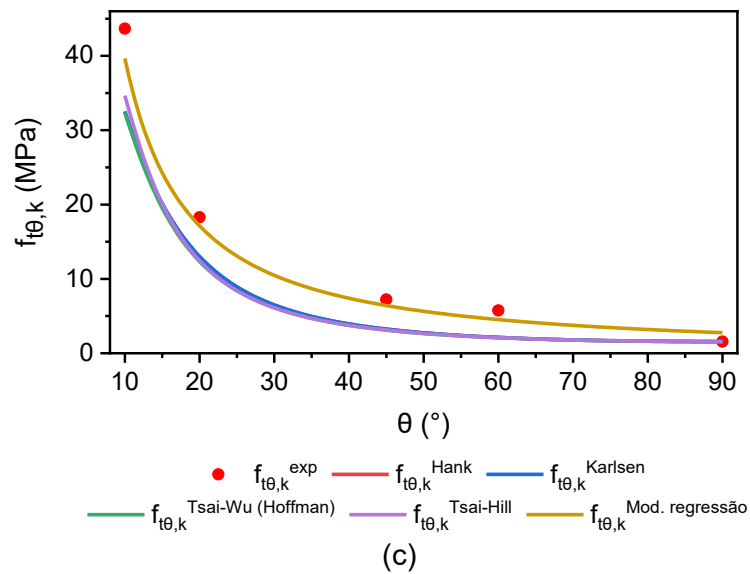
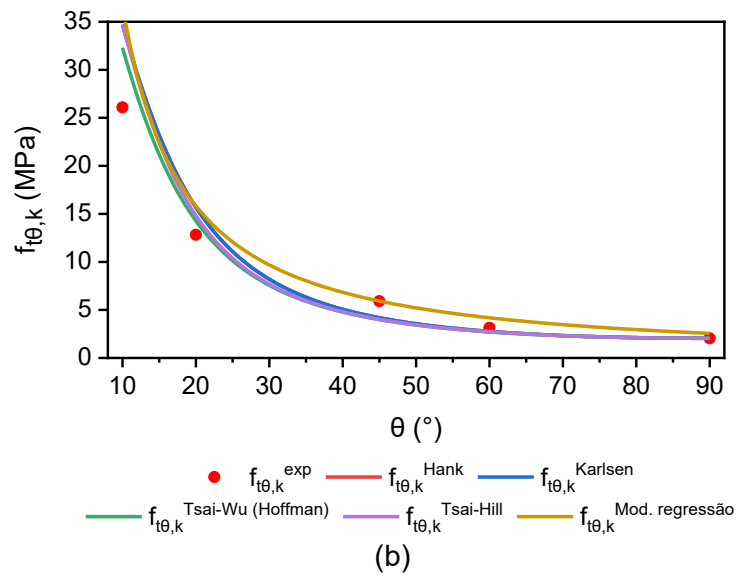
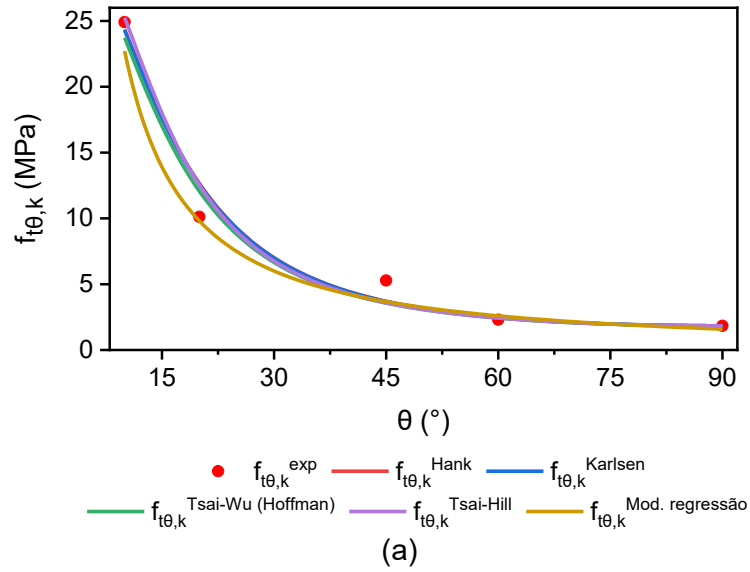
Er (%) = erros percentuais absolutos.

Da Tabela 37, acrescentou-se o critério de Tsai-Hill (Azzi e Tsai, 1965) como comparação. Seguidos dos modelos empíricos e dos critérios de falha, os modelos de regressão (Figura 34) obtiveram, para todas as espécies estudadas, os menores valores de erro percentual absoluto. Esses são, portanto, os mais precisos dentre os modelos de melhor ajuste obtidos por espécie.

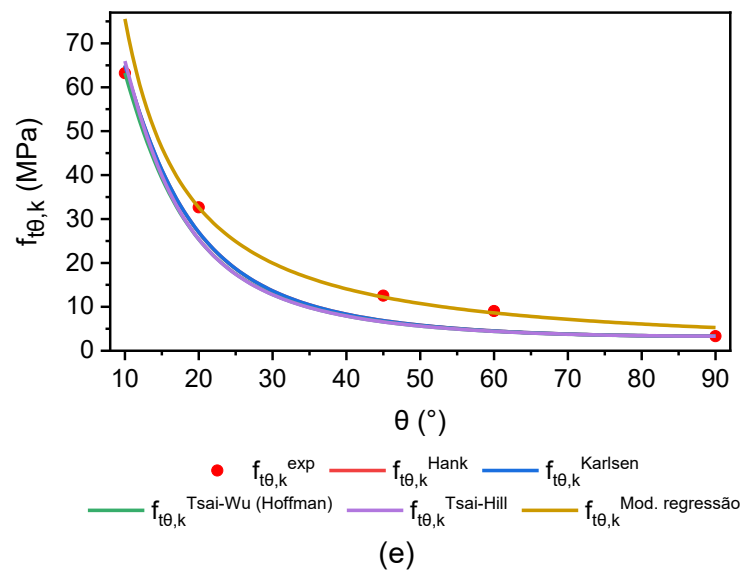
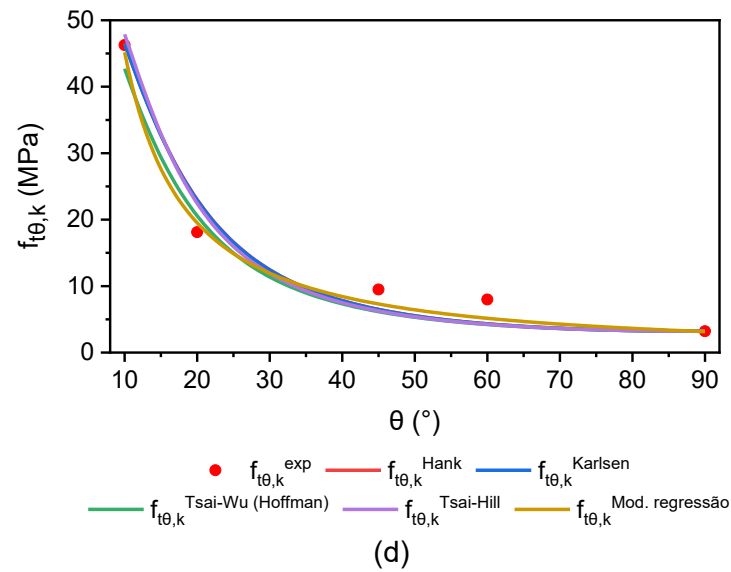
Com o objetivo de eleger um único modelo (modelo geral) que conduza, para todas as espécies estudadas, à boas estimativas de  $f_{t\theta,k}$ , confrontou-se os critérios de falha, os modelos empíricos (com  $n_{\text{ótimo}}$  médio) e o modelo de regressão obtido considerando o agrupamento das espécies. A Figura 35 ilustra as estimativas obtidas.

<sup>9</sup> Melhor ajuste obtido por espécie estudada.

Figura 35: Estimativas dos modelos gerais na estimativa de  $f_{t\theta,k}$ : Cedroarana (a), Louro preto (b), Angelim amargoso (c), Oichu (d), Maçaranduba (e).



**Figura 35: Comparação dos modelos gerais na estimativa de  $f_{t\theta,k}$ : Cedroarana (a), Louro preto (b), Angelim amargoso (c), Oichu (d), Maçaranduba (e) - Continuação.**



Da Figura 35, os critérios de falha e os modelos empíricos apresentaram ajustes semelhantes, distanciando-se, significativamente, do modelo de regressão nas estimativas de  $f_{t\theta,k}$  das madeiras de Angelim amargoso (Figura 35c) e Maçaranduba (Figura 35e). Verifica-se que o modelo de regressão apresentou boa aderência aos pontos experimentais. Tal constatação é validada analisando o valor médio dos erros percentuais absolutos, conforme apresenta a Tabela 38.

**Tabela 38: Erros percentuais absolutos médios cometidos na estimativa de  $f_{t\theta,k}$  pelos modelos de melhor ajuste, obtidos para o conjunto das espécies.**

Espécie	Er (%)				
	Hankinson (1921)	Karlsen <i>et al.</i> (1967)	Tsai e Wu (1971)	Tsai-Hill (Azzi e Tsai, 1965)	Modelo de regressão <sup>10</sup>
Cedroarana	10,17	10,73	10,33	10,51	11,48
Louro preto	16,06	16,06	13,54	15,72	20,37
Ang. amargoso	28,81	28,76	29,84	28,87	20,77
Oichu	17,49	17,44	17,25	18,03	11,71
Maçaranduba	19,27	19,28	20,22	20,89	14,20
$X_m$	18,48	18,45	18,23	18,80	15,71

Er (%) = erros percentuais absolutos;  $X_m$  = valor médio.

Da Tabela 38, os modelos empíricos de Hankinson (1921), Karlsen *et al.* (1967) e os critérios de falha de Tsai e Wu (1971) e Tsai-Hill (Azzi e Tsai, 1965) mostraram ser igualmente precisos na estimativa de  $f_{t\theta,k}$ . O menor valor médio de erro percentual absoluto foi proveniente do modelo de regressão desenvolvido neste estudo. Mostrando ser, esse, o mais preciso dentre os modelos confrontados e, portanto, o modelo proposto para as estimativas de  $f_{t\theta,k}$ .

Cabe destacar que a aplicação do modelo proposto demanda, apenas, o conhecimento de  $f_{t0,k}$ , sendo, portanto, de fácil aplicação na elaboração de projeto de estruturas de madeira.

#### 4.6 VALIDAÇÃO DO MODELO PROPOSTO PARA A ESTIMATIVA DE $f_{t\theta,k}$

Como forma de testar a precisão do modelo desenvolvido neste estudo ( $f_{t\theta,k}/f_{t0,k} = 11,0330 \cdot \theta^{-1,2115}$  - Tabela 36), os resultados de  $f_{t\theta,k}$  obtidos por Logsdon *et al.* (2014a) foram colocados sob a forma  $f_{t\theta,k}/f_{t0,k}$ . Tais resultados constam na Tabela 39.

**Tabela 39: Valores da razão  $f_{t\theta,k}/f_{t0,k}$  da madeira de Peroba mica provenientes do trabalho de Logsdon *et al.* (2014a).**

$f_{t\theta,k}/f_{t0,k}$										
0°/0°	10°/0°	20°/0°	30°/0°	40°/0°	45°/0°	50°/0°	60°/0°	70°/0°	80°/0°	90°/0°
1,000	0,580	0,346	0,208	0,135	0,106	0,088	0,072	0,062	0,054	0,040

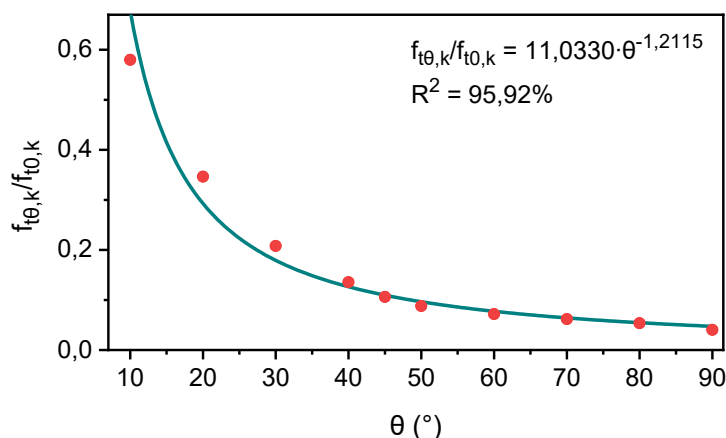
$f_{t\theta,k}/f_{t0,k}$  = razão entre a resistência característica à tração em função de  $\theta$  e a resistência característica à tração paralela às fibras.

<sup>10</sup> Melhor ajuste obtido para o agrupamento das espécies estudadas.



A Figura 36 ilustra o ajuste e o valor de  $R^2$  obtido com o uso do modelo proposto ( $f_{\theta,k}/f_{t0,k} = 11,0330 \cdot \theta^{-1,2115}$  - Tabela 36) na estimativa da  $f_{\theta,k}$  sobre os resultados determinados por Logsdon *et al.* (2014a).

**Figura 36: Ajustes obtidos sobre os resultados de Logsdon *et al.* (2014a) pelo modelo proposto neste estudo.**



Da Figura 36, mesmo considerando valores que não o originaram o modelo, obteve-se  $R^2$  superior a 95%. Desse modo, o modelo proposto ( $f_{\theta,k}/f_{t0,k} = 11,0330 \cdot \theta^{-1,2115}$ ) mostrou ser preciso quando aplicado aos resultados da pesquisa de Logsdon *et al.* (2014a). Para maior confiabilidade desses resultados, faz-se necessário utilizar um número maior de espécies, o que pode motivar o desenvolvimento de pesquisas futuras.

Na Tabela 40 são apresentados os valores de  $f_{\theta,k}$  determinados por Logsdon *et al.* (2014a), as estimativas obtidas com o uso do modelo proposto ( $f_{\theta,k} = f_{t0,k} \cdot 11,0330 \cdot \theta^{-1,2115}$ ) e os respectivos erros cometidos. Tais erros reforçam a boa precisão alcançada nas estimativas de  $f_{\theta,k}$ .

**Tabela 40: Valores experimentais de  $f_{\theta,k}$  determinados por Logsdon *et al.* (2014a), estimativas de  $f_{\theta,k}$  por meio do modelo proposto e respectivos erros cometidos.**

$\theta$ (°)	0	10	20	30	40	45	50	60	70	80	90
$f_{\theta,k}^{\text{exp}}$ (MPa)	32,04	18,58	11,10	6,66	4,34	3,40	2,82	2,30	1,98	1,72	1,29
$f_{\theta,k}^{\text{estim}}$ (MPa)	-	21,72	9,38	5,74	4,05	3,51	3,09	2,48	2,06	1,75	1,52
Er (%)	-	16,91	15,50	13,83	6,67	3,29	9,61	7,75	3,84	1,69	17,55

$f_{\theta,k}^{\text{exp}}$  = valores experimentais da resistência característica à tração em função de  $\theta$  provenientes da pesquisa de Logsdon *et al.* (2014a);  $f_{\theta,k}^{\text{estim}}$  = valores da resistência característica à tração em função de  $\theta$  estimados pelo modelo  $f_{\theta,k} = 32,04 \cdot (11,0330 \cdot \theta^{-1,2115})$ ; Er (%) = erro percentual absoluto.

# 5. CONCLUSÕES

Este estudo contribuiu para ampliar o conhecimento quanto às estimativas de  $f_{t\theta,k}$  de madeiras folhosas, subsidiando a tomada de decisão sobre os parâmetros normativos a serem adotados. Considerando os resultados obtidos, pôde-se concluir:

- (a) o teste t pareado não acusou equivalência estatística entre os valores experimentais de  $f_{t\theta,k}$  e os estimados pelos modelos empíricos com expoente n original. Desse modo, o modelo de Hankinson (1921), prescrito pela NBR 7190 (ABNT, 1997), não conduz, na sua forma original, à boas estimativas da  $f_{t\theta,k}$  das madeiras estudadas;
- (b) dentre os modelos empíricos estudados, o de Hankinson (1921) e o de Karlsen *et al.* (1967) foram os que, com expoente n ótimo, forneceram as melhores estimativas de  $f_{t\theta,k}$ ;
- (c) o critério de Tsai e Wu (1971), empregado com o parâmetro  $F_{12}$  advindo da formulação de Hoffman (1967), foi o mais preciso dentre os critérios de falha investigados;
- (d) com exceção do linear, todos os modelos de regressão testados, foram significativos e apresentaram bons ajustes na estimativa de  $f_{t\theta,k}$ . O modelo geométrico, obtido para o conjunto das espécies (modelo proposto), apresentou boas estimativas para cada uma das espécies estudadas. E, também, quando empregado utilizando dados que não originaram o modelo.
- (e) quando confrontado aos melhores ajustes dos modelos empíricos e dos critérios de falha, o modelo proposto neste estudo mostrou ser o mais preciso nas estimativas de  $f_{t\theta,k}$ . E, também, o de mais fácil aplicação, haja vista que sua utilização demanda, apenas, o conhecimento de  $f_{t0,k}$ .

## 5.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Conforme apresentado, o uso de modelos de regressão a dois parâmetros escritos para a estimativa da razão  $f_{t\theta,k}/f_{t0,k}$  acarretou em boa precisão nas estimativas de  $f_{t\theta,k}$  por espécie de madeira e principalmente para o conjunto das espécies. Essa abordagem configura-se como alternativa, pois é diferente da abordagem matemática usualmente explorada nos modelos empíricos que constam na literatura. Desse modo, como sugestões para trabalhos futuros, propõe-se aplicar a abordagem utilizada neste trabalho visando as estimativas dos valores de resistência à compressão e ao cisalhamento em função de  $\theta$ . Em

adição, sugere-se verificar a possibilidade de se obter um modelo único capaz de estimar com precisão as resistências inclinadas à tração, compressão e ao cisalhamento.

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS – ASTM – ASTM D143-09. **Standard Methods for Testing Small Clear Specimens of Timber**. West Conshohocken, 2009.

AQUINO, V. B. M.; ALMEIDA, D. H.; ALMEIDA, T. H.; PANZERA, T. H.; CHRISTOFORO, A. L.; LAHR, F. A. R. Physical and Mechanical Characterization of *Cedrelinga catenaeformis* Ducke Wood Specie. **International Journal of Materials Engineering**, v.8, n.5, p.97-100, 2018.

AQUINO, V. B. M.; PANZERA, T. H.; MOLINA, J. C.; CHRISTOFORO, A. L.; LAHR, F. A. R. Influence of harvest region on properties of Cambará wood. **Maderas. Ciencia y tecnología**, v. 23, n. 40, p. 1-12, 2021.

ARAÚJO, H. J. B. Relações funcionais entre propriedades físicas e mecânicas de madeiras tropicais brasileiras. **Floresta**, v. 37, n. 3, set/dez. 2007.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS – ABNT – NBR 7190. **Projeto de estruturas de madeira**. Rio de Janeiro, 107 p., 1997.

AZZI, V. D.; TSAI, S. W. Anisotropic Strength of Composites. **Experimental Mechanics**, v. 5, p. 283-288. 1965.

BRÉMAUD, I.; GRIL, J.; THIBAUT, B. Anisotropy of wood vibrational properties: dependence on grain angle and review of literature data. **Wood Science and Technology**, v. 45, p. 735-754, 2011.

CARRASCO, E. V. M.; MANTILLA, J. N. R. Influência da inclinação das fibras da madeira na sua resistência ao cisalhamento. **Ciência Florestal**, v. 26, n. 2, p. 535-543, 2016.

CHRISTOFORO, A. L.; COUTO, N. G.; ALMEIDA, J. P. B.; AQUINO, V. B. M.; LAHR, F. A. R. Apparent density as an estimator of wood properties obtained in tests where failure is fragile. **Engenharia Agrícola**, v. 40, n. 1, p. 105-112, 2020.

CHRISTOFORO, A. L.; SILVA, S. A. M.; PANZERA, T. H.; LAHR, F. A. R. Estimative of wooden toughness by the apparent density and bending strength. **International Journal of Materials Engineering**, v. 4, v. 2, p. 49-55, 2014.

COUTO, N. G.; ALMEIDA, J. P. B.; GOVANE, J. S.; CHRISTOFORO, A. L.; LAHR, F. A. R. Relação entre a resistência ao cisalhamento e a resistência à compressão paralela às fibras de madeiras folhosas. **Ambiente Construído**, v. 20, n. 4, p. 319 - 327, 2020.

COWIN, S. C. On the strength anisotropic of bone and wood. **Journal of Applied Mechanics**, v. 46, n. 4, p. 832-838, 1979.

COWN, D. J.; WALFORD, B.; KIMBERLEY, M.O. Cross-grain effect on tensile strength and bending stiffness of *Pinus radiata* structural lumber. **New Zealand Journal of Forestry Science**, v. 25, n. 2, p. 256 - 262, 1996.

DE ARAUJO, V. A.; CORTEZ-BARBOSA, J.; GAVA, M.; GARCIA, J. N.; SOUZA, A. J. D.; SAVI, A. F.; MORALES, E. A. M.; MOLINA, J. C.; VASCONCELOS, J. S.; CHRISTOFORO, A. L.; LAHR, F. A. R. Classification of wooden housing building systems. **BioResources**, v. 11, n. 3, p. 7889-7901, 2016.

DE ARAUJO, V. A.; VASCONCELOS, J. S.; MORALES, E. A. M.; SAVI, A. F.; HINDMAN, D. P.; O'BRIEN, M. J.; NEGRÃO, J. H. J. O.; CHRISTOFORO, A. L.; LAHR, F. A. R.; CORTEZ-BARBOSA, J.; GAVA, M.; GARCIA, J. N. Difficulties of wooden housing production sector in Brazil. **Wood Material Science & Engineering**, v. 11, n. 3, p. 1-10, 2018.

DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG – DIN – DIN 1052. **Holzbauwerke, Berechnung und Ausführung**. Berlin, 1988.

DIAS, F. M.; ALMEIDA, T. H.; ARAUJO, V. A.; PANZERA, T. H.; CHRISTOFORO, A. L.; LAHR, F. A. R. Influence of the Apparent Density on the Shrinkage of 43 Tropical Wood Species. **Acta Scientiarum. Technology**, v. 41, e30947, 2019.

DIAS, F. M.; LAHR, F. A. R. A densidade aparente como estimador de propriedades de resistência e rigidez da madeira. **Madeira arquitetura e engenharia**, ano 3, n. 8, 2002.

DIAS, F. M.; LAHR, F. A. R. Estimativa de propriedades de resistência e rigidez da madeira através da densidade aparente. **Scientia Florestalis**, n. 65, p. 102-113, 2004.

DINWOODIE, J. M. Timber - A review of the structure-mechanical property relationship. **Journal of Microscopy**, v. 104, n. 1, p. 3 - 32, 1975.

**Flora do Brasil (2020)** Jardim Botânico do Rio Janeiro. Disponível em: <<http://floradobrasil.jbrj.gov.br/>>. Acessado em: Abr. 2021.

GORLACHER, R. A method for determining the rolling shear modulus of timber. **Holz als Roh- und Werkstoff**, v. 60, n. 5, p. 317 - 322, 2002.

GROBÉRIO, M. P.; LAHR, F. A. R. Indicações para o emprego da madeira de espécies tropicais do Brasil. **Revista Madeira: arquitetura e engenharia**, ano 3, n. 8, 2002.

GUIMARAES, L. E. S.; BUSSINGUER, A. P.; DEL MENEZZI, C. H. S.; SIQUEIRA, M. L.; SOUZA, M. R. Efeito do carregamento cíclico sobre as propriedades de flexão e ultrassom em madeiras de quatro espécies florestais. **Scientia Florestalis**, v. 40, n. 96, p. 473-481, 2012.

GUPTA, R.; SINHA, A. Effect of grain angle on shear strength of Douglas-fir wood. **Holzforschung**, v. 66, p. 655-658, 2012.

HANKINSON, R. L. **Investigation of crushing strength of Spruce at varying angles of grain**. Air Service Information Circular – ASIC, v.3, n. 259, 1921.

HILL, R. **The mathematical theory of plasticity**. London: Oxford University Press. 355p., 1950.

HOFFMAN, O. The brittle strength of orthotropic materials. **Journal of Composite Materials**, v. 1, n. 2, p. 200-206, 1967.

HUBER, J. A. J.; EKEVAD, M.; GIRHAMMAR, U. A.; BERG, S. Structural robustness and timber buildings – a review. **Wood Material Science & Engineering**, p. 1-22, 2018.

HURMEKOSKI, E.; JONSSON, R.; NORD, T. Context, drivers, and future potential for wood-frame multi-story construction in Europe. **Technological Forecasting & Social Change**, v. 99, p. 181-196, 2015.

INSTITUTO DE PESQUISAS TECNOLÓGICAS DO ESTADO DE SÃO PAULO (IPT). **Catálogo de Madeiras Brasileiras para a Construção Civil**. Publicação IPT, 4371, 104 p., ISBN: 978-85-09-00175-9, 2013.

JESUS, J. M. H.; LOGSDON, N. B.; FINGER, Z. Classes de resistência de algumas madeiras de Mato Grosso. **Engineering and Science**, v. 1, n. 3, 2015.

KARLSEN, G. G.; BOLSHAKOV, V. V.; KAGAN, M. Y.; SVENTSITSKY, G. V.; ALEKSANDROVSKY, K. V.; BOCHKARYOV, I. V.; FOLOMIN, A. I. **Wooden structures**. Moscow: Mir Publishers. 638p., 1967.

KEYLWERTH, R. Formänderungen in Holzquerschnitten. **Holz als Roh- und Werkstoff**, v. 9, p. 253-260, 1951.

KOLLMANN, F. F. P.; CÔTÉ Jr, W. A. **Principles of wood science and technology**, v. 1 Solid Wood, reprint. New York: Springer-Verlag. 592 p., 1984.

KUZMAN, M. K.; SANDBERG, D. Comparison of timber-house technologies and initiatives supporting use timber in Slovenia and in Sweden – the state of the art. **iForest – Biogeosciences and Forestry**, v. 10, p. 930-938, 2017.

LAHR, F. A. R.; CHAHUD, E.; FERNANDES, R. A.; TEIXEIRA, R. S. Influência da densidade na dureza paralela e na dureza normal às fibras para algumas espécies tropicais Brasileiras. **Scientia Forestalis**, v. 38, n. 86, p. 153-158, 2010.

LIMA Jr., M. P.; BIAZZON, J. C.; DE ARAUJO, V. A.; MUNIS, R. A.; MARTINS, J. C.; CORTEZ-BARBOSA, J.; GAVA, M.; VALARELLI, I. D.; MORALES, E. A. M. Mechanical Properties Evaluation of Eucalyptus grandis Wood at Three Different Heights by Impulse Excitation Technique (IET). **BioResources**, v. 13, v. 2, p. 3377-3385, 2018.

LIU, J. Y. Evaluation of the tensor polynomial strength theory for wood. **Journal of Composite Material**, v. 18, n. 3, p. 216-226, 1984.

LOGSDON, N. B.; FINGER, Z.; JESUS, J. M. H. Influência do ângulo entre o esforço aplicado e a direção das fibras da madeira sobre o módulo de elasticidade. **Floresta**, v. 40, n. 4, p. 837 - 848, 2010.

LOGSDON, N. B.; FINGER, Z.; JESUS, J. M. H. Influência do ângulo entre as fibras da madeira na resistência à tração. **Advances in Forestry Science**, v. 1, n. 3, p. 95-100, 2014a.

LOGSDON, N. B.; FINGER, Z.; JESUS, J. M. H. Influência do ângulo entre o esforço aplicado e a direção das fibras da madeira sobre a resistência ao cisalhamento. **Ciência Florestal**, v. 24, n. 4, p. 969-978, 2014b.

MAHAPATRA, K.; GUSTAVSSON, L.; HEMSTRÖM, K. Multi-storey wood-frame buildings in Germany, Sweden and The UK. **Construction Innovation**, v. 12, p. 62-85, 2012.

MASCIA, N. T.; LAHR, F. A. R. Remarks on orthotropic elastic models applied to wood. **Materials Research**, v. 9, n. 6, p. 301-310, 2006.

MASCIA, N. T.; NICOLAS, E. A. Evaluation of Tsai-Wu criterion and Hankinson's formula for a Brazilian wood species by comparison with experimental off-axis strength tests. **Wood Material Science and Engineering**, v. 7, p. 49-58, 2012.

MASCIA, N. T.; SIMONI, R. A. Analysis of failure criteria applied to wood. **Engineering Failure Analysis**, v. 35, p. 703-712, 2013.

MASCIA, N. T.; TODESCHINI, R.; NICOLAS, E. A. Avaliação de critério de resistência de materiais anisotrópicos aplicado à madeira utilizando ensaios uniaxiais e biaxiais. **Revista Sul-Americana de Engenharia Estrutural**, v. 10, n. 2, p. 5-30, 2013.

NESHEIM, S; MALO, K. A.; LABONNOTE, N. Effects of interconnections between timber floor elements: dynamic and static evaluations of structural scale tests. **European Journal Wood and Wood Products**, v. 79, p. 1163-1182, 2021.

NICOLAS, E. A.; MASCIA, N. T.; TODESCHINI, R. Comparação entre o critério de Tsai-Wu e a fórmula de Hankinson na tração da madeira. **Madeira: Arquitetura e Engenharia**, n. 23. p. 13-29, 2008.

NICOLAS, N. E. **Estudo de critérios de resistência de materiais anisotrópicos aplicados à madeira**. Campinas, 2006. 238 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Faculdade de Engenharia Civil e Arquitetura, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2006.

NORRIS, C. B. The elastic theory of wood failure. **Transactions of the American Society of Mechanical Engineers**, v. 61, n. 3, p. 259-261, 1939.

OH, S. Applying failure criteria to the strength evaluation of 3-ply laminated veneer lumber according to grain direction by uniaxial tension test. **Construction and Building Materials**, v. 25, p. 1480-1484, 2011.

OZYHAR, T.; HERING, S.; NIEMZ, P. Moisture-dependent elastic and strength anisotropy of European beech wood in tension. **Journal of Materials Science**, v. 47, p. 6141-6150, 2012.

PEDRESCHI, R.; GOMES, F. C.; MENDES, L. M. Avaliação do desempenho da madeira na habitação utilizando abordagens de sistemas. **Cerne**, v. 11, n. 3, p. 283-293, jul./set. 2005.

POPE, D.J.; MARCROFT, J.P.; WHALE, L.R.J. The effect of global slope of grain on the bending strength of scaffold boards. **Holz als Roh-und Werkstoff**, v. 63, p. 321 - 326, 2005.

PRANATA, Y. A.; SURYOATMONO, B. Nonlinear finite element modeling of Red Meranti compression at an angle to the grain. **Journal of Engineering and Science**, v. 45, n. 3, p. 222-240, 2013.

PRIES, M.; MAI, C. Fire resistance of wood treated with a cationic silica sol. **European Journal of Wood and Wood Products**, v. 71, n. 2, p. 237-244, 2013.

RAMAGE, M. H.; BURRIDGE, H.; WICHER-BUSSE, M.; FEREDAY, G.; REYNOLDS, T.; SHAH, D. U.; WU, G.; YU L.; FLEMING, P.; DENSLEY-TINGLEY, D.; ALLWOOD, J.; DUPREE, P.; LINDEN, P. F.; SCHERMAN, O. The wood from the tress: The use of timber in construction. **Renewable and Sustainable Energy Reviews**, v. 68, p. 333-359, 2017.

SMIDOVÁ, E.; KABELE, P. Comparison of failure criteria for wood in tensile-shear stress state. **Acta Polytechnica CTU Proceedings**, v. 13, p. 115-120, 2017.



SOUZA, A. M.; NASCIMENTO, M. F.; ALMEIDA, D. H.; SILVA, D. A. L.; ALMEIDA, T. H.; CHRISTOFORO, A. L.; LAHR, F. A. R. Wood-based composite made of wood waste and epoxy based ink-waste as adhesive: A cleaner production alternative. **Journal of Cleaner Production**, v. 193, p. 549-562, 2018.

STEEGE, H.; VAESSEN, R. W.; CÁRDENAS-LÓPEZ, D.; SABATIER, D.; ANTONELLI, A.; OLIVEIRA, S. M.; PITMAN, N. C.A.; JØRGENSEN, P. M.; SALOMÃO, R. P. The discovery of the Amazonian tree flora with an updated checklist of all known tree taxa. **Scientific Reports**, v. 6, n. 29549, p. 1-15, 2016.

SZÜCS, C. A. **Estudo do comportamento da madeira a esforços inclinados**. In: Encontro Brasileiro em Madeiras e em Estruturas de Madeira (EBRAMEM), São Carlos, SP, 1992.

TEIXEIRA, J. N.; WOLENSKI, A. R. V.; AQUINO, V. B. M.; PANZERA, T. H.; SILVA, D. A. L.; CAMPOS, C. I.; SILVA, S. A. M.; LAHR, F. A. R.; CHRISTOFORO, A. L. Influence of provenance on physical and mechanical properties of Angelim-pedra (*Hymenolobium petraeum* Ducke.) wood species. **European Journal of Wood and Wood Products**, v. 79, p.1241-1251, 2021.

TSAI, S. W.; WU, E. M. A general theory of strength for anisotropic materials. **Journal of Composite Materials**, v. 5, n. 1, p. 58-80. 1971.

WANG, L.; TOPPINEN, A.; JUSLIN, H. Use of wood in green building: a study of expert perspectives from the UK. **Journal of Cleaner Production**, v. 65, p. 350-361, 2014.

WIERUSZEWSKI, M.; MAZELA, B. Cross Laminated Timber (CLT) as an Alternative Form of Construction Wood. **Drvna Industrija**, v. 68, n.4, p. 259-367, 2017.

WOODWARD, C.; MINOR, J. Failure theories for Douglas-Fir in tension. **Journal of Structural Engineering**, v. 144, n. 12, p. 2808-2813, 1988.

XAVIER, J.; GARRIDO, N.; OLIVEIRA, M.; MORAIS, J.; CAMANHO, P.; PIERRON, F. A comparison between the losipescu and off-axis shear test methods for the shear characterization of *Pinus pinaster Ait.* **Composites Part A: Applied Science and Manufacturing**, v. 35, p. 824 - 840, 2004.

YANG, N.; TIANHAO, L.; ZHANG, L. A two-dimensional lattice model for simulating the failure and fracture behavior of wood. **Wood Science and Technology**, v. 54, p. 63-87, 2020.

ŻMIJEWKI, T.; WOJTOWICZ-JANKOWSKA, D. Timber – Material of the Future – Examples of Small Wooden Architectural Structures. **IOP Conference Series: Materials Science and Engineering**, v. 245, p. 1-9, 2017.