



Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

Leis de Conservação: Teoria Geral

Matheus Magaiver Barbosa Viana

Orientador: *Prof. Dr. Cezar Issao Kondo*

São Carlos
Fevereiro de 2022

Leis de Conservação: Teoria Geral

Matheus Magaiver Barbosa Viana

Orientador: *Prof. Dr. Cezar Issao Kondo*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

São Carlos
Fevereiro de 2022



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Matheus Magaiver Barbosa Viana, realizada em 24/03/2022.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Cezar Issao Kondo (UFSCar)

Profa. Dra. Claudete Matilde Webler (UEM)

Prof. Dr. Marcelo Rempel Ebert (USP)

À minha querida avó, Tereza Marchi Siqueira.

Agradecimentos

“Mas graças a Deus, que nos dá a vitória por nosso Senhor Jesus Cristo.”

(I Coríntios 15:57)

Agradeço:

À Deus por todas as coisas.

À minha avó Tereza Marchi Siqueira que sempre cuidou de mim com muito amor e carinho. Aos meus pastores, Paulo de Oliveira Isidoro e José Aparecido Siqueira, por todo apoio, aconselhamento e orientação espiritual e à amada Igreja Pentecostal Deus é Amor-Sede Sucursal de Bom Jesus dos Perdões-SP pelas contínuas orações ao meu favor.

Ao professor Ilvanir de Sousa Barbosa que, através das suas aulas e da sua metodologia de ensino, aprendi a gostar de matemática e assim optar pela Licenciatura em Matemática.

Ao meu orientador, professor Cezar Issao Kondo, pela sua paciência e dedicação para comigo e também por me orientar nas minhas iniciações científicas, no meu Trabalho de Conclusão de Curso e no mestrado.

A todo o corpo docente do departamento de matemática da Universidade Federal de São Carlos.

Por fim, à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro (processo 88882.441206/2019-01).

“Eu sou a videira; vós, as varas. Quem está em mim, e eu nele, esse dá muito fruto, porque sem mim nada podeis fazer.” (João 15:5)

Resumo

Apresentaremos alguns aspectos da teoria de Equações Diferenciais Parciais (EDP's), o teorema de existência e unicidade de solução clássica do problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t + f'(u)u_x = 0, \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases}$$

na faixa $\Pi_T \equiv [0, T) \times \mathbb{R}$, onde $f \in C^2(\mathbb{R})$ e $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$. Além disso, mostraremos alguns resultados sobre soluções generalizadas e construiremos uma solução generalizada das funções $f(u) = u^3$ e $f(u) = \sin u$, ambas com cinco retas de descontinuidades. Em seguida, veremos algumas noções de solução de entropia generalizada de Kruzhkov. Por fim, abordaremos soluções do problema de Riemann para uma função f côncava ou convexa e como as envoltórias côncava ou convexa nos permitem resolver o problema de Riemann para uma função $f \in C^1(\mathbb{R})$.

Palavras-chaves: EDP, EDP quasilinear de primeira ordem, características, solução generalizada, onda de choque, onda de rarefação, condição de admissibilidade, entropia, problema de Riemann.

Abstract

In this thesis we study some aspects of the theory of Partial Differential Equations (PDE's), the theory of the existence and the uniqueness of classical solutions to the Cauchy problem

$$\begin{cases} u_t + f'(u)u_x = 0, \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases}$$

in the range $\Pi_T \equiv [0, T) \times \mathbb{R}$, where $f \in C^2(\mathbb{R})$ and $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$. Furthermore, we will show some results on generalized solutions and build a generalized solution for functions $f(u) = u^3$ and $f(u) = \sin u$, both with five discontinuities lines. Next, some notions of Kruzhkov's generalized entropy solution are presented. Finally, we will discuss the solutions of the Riemann problem for a concave or convex function f and how concave or convex envelopes allow us to solve the Riemann problem for a function $f \in C^1(\mathbb{R})$.

Keywords: PDE, first-order quasilinear PDE, characteristics, generalized solution, shock wave, rarefaction wave, admissibility condition, entropy, Riemann problem.

Lista de Figuras

1.1	Dependência experimental $v = v(u)$	7
1.2	Função sinal	10
1.3	Gráfico de $\{E_m\}$	11
1.4	Envoltória côncava de $f(u) = u^3$ em $[-1, 1]$	16
1.5	Envoltória convexa de $f(u) = u^3$ em $[-1, 1]$	17
1.6	Envoltória côncava de $f(u) = \frac{u^3}{3}$ em $[-2, 2]$	18
1.7	Envoltória convexa de $f(u) = \frac{u^3}{3}$ em $[-2, 2]$	19
1.8	Envoltória côncava de $f(u) = \sin u$ em $[0, 3\pi]$	20
1.9	Envoltória convexa de $f(u) = \sin u$ em $[0, 3\pi]$	21
1.10	Envoltória côncava de $f(u) = -\frac{\cos(2u)}{2}$ em $\left[-\frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$	23
1.11	Envoltória convexa de $f(u) = -\frac{\cos(2u)}{2}$ em $\left[-\frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$	23
2.1	Exemplo de um ponto característico.	27
3.1	Evolução do gráfico inicial.	33
3.2	Gráfico de u_0	39
3.3	Gráfico das retas $y = x - u_0(y)t$	44
3.4	Gráfico de $u(1, x)$	45
4.1	Descontinuidade forte (salto).	49
4.2	Solução suave por partes.	52
4.3	Gráfico de $f(u) = \sin u$	61
4.4	Gráfico das características de $f(u) = \sin u$	61
5.1	Condição de Lax: curva de descontinuidade admissível (a) e curva de descontinuidade não admissível (b).	66
5.2	Visualização de saltos admissíveis, II.	71
5.3	Visualização de saltos admissíveis, III.	72
5.4	Crescimento de S para a equação de Hopf.	74
5.5	Área que determina a taxa de decrescimento de energia.	77
6.1	Solução onda de choque do problema de Riemann (6.3).	90

6.2	Solução de onda de rarefação do problema de Riemann (6.3).	91
6.3	Solução do problema de Riemann (6.8).	95
6.4	Solução do problema de Riemann (6.9).	96
6.5	Gráfico de $u = \cos \xi$ (1).	97
6.6	Solução do problema de Riemann (6.10).	98
6.7	Gráfico de $u = \cos \xi$ (2).	99
6.8	Solução do problema de Riemann (6.11).	99
6.9	Gráfico de $u = \sin(2\xi)$.	101
6.10	Solução do problema de Riemann (6.12)	102
6.11	Solução do problema (6.13)-(6.14).	106

Sumário

Introdução	3
1 Preliminares	5
2 A teoria clássica local	24
3 Soluções clássicas do problema de Cauchy e formação de singularidades	31
4 Soluções generalizadas de equações quasilineares	47
5 A noção de solução de entropia generalizada	63
6 O problema de Riemann	88
Referências Bibliográficas	107

Introdução

O estudo das equações diferenciais parciais (EDP's) de primeira ordem é tão antigo quanto a noção de derivada parcial. As EDP's de primeira ordem aparecem em muitos problemas com aplicações físicas e geométricas pela velocidade do movimento e pela tangente do ângulo.

A teoria local das EDP's nasceu no século XVIII. Em muitos problemas, uma das variáveis é o tempo e os processos podem durar um intervalo suficientemente grande. Nesse período, algumas singularidades de soluções clássicas podem aparecer. Consideraremos apenas descontinuidades fracas, que são saltos das derivadas da solução e descontinuidades fortes, que são saltos da solução. Através das singularidades, definimos derivadas fracas e soluções fracas. Tais noções foram introduzidas na linguagem matemática apenas no século XX.

Neste trabalho, utilizamos as notas de aulas do curso de teoria não local de equações diferenciais parciais quasilineares de primeira ordem, também chamadas de leis de conservação, ministrado pelo professor Stanislav Nicolaïevich Kruzhkov, na Universidade Estadual Lomonosov Moscow durante os anos de 1994 a 1997. Tais notas foram escritas pelos seus alunos Gregory A. Chechkin e Andrey Yu. Goritsky. Aqui, apresentaremos diversos exemplos, bem como as técnicas fundamentais para as suas resoluções. Consideramos questões de existência local de soluções suaves para problemas de Cauchy para equações lineares e quasilineares. Além disso, uma teoria detalhada de soluções fracas descontínuas para quase lineares equações com uma variável espacial será exposta aqui. Deduziremos a condição de Rankine-Hugoniot, apresentaremos algumas condições de admissibilidade para soluções generalizadas (fracas) e relacionaremos a condição de admissibilidade com as noções de entropia e de energia. Ainda, construiremos algumas soluções generalizadas utilizando a geometria analítica e resolveremos o problema de Riemann não apenas para uma função convexa ou côncava, mas para qualquer função fluxo de classe C^1 qualquer.

No Capítulo 1, apresentaremos alguns resultados de análise matemática que serão utilizados ao longo da teoria que será desenvolvida nesse trabalho.

No Capítulo 2, apresentaremos alguns resultados da teoria geral das equações diferenciais parciais.

No Capítulo 3, estudaremos solução clássica do problema de Cauchy, encontraremos o tempo maximal dessa solução. Além disso, abordaremos descontinuidade da solução ou

das derivadas parciais dessa solução.

No Capítulo 4, apresentaremos a definição e alguns resultados de solução generalizada da equação $u_t + f'(u)u_x = 0$. Além disso, usaremos a teoria desenvolvida nesse capítulo para construirmos uma solução $u = u(t, x)$ das equações $u_t + (u^3)_x = 0$ e $u_t + (\sin u)_x = 0$, ambas com $u(0, x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

No Capítulo 5, abordaremos as condições de admissibilidade de uma solução generalizada, o método de viscosidade nula, a condição de aumento de entropia. Além disso, apresentaremos a definição de solução de entropia generalizada de Kruzhkov e deduziremos alguns resultados dessa teoria.

No Capítulo 6, construiremos soluções generalizadas autossimilares $u = u(t, x)$ para o problema de Riemann, de modo que tais soluções convirjam para a função $x \mapsto u(0, x)$ quando $t \rightarrow +0$ em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos algumas motivações e alguns resultados de análise matemática que serão utilizados ao longo da teoria que será desenvolvida nesse trabalho.

Motivação 1.1. *Considere um meio unidimensional que consiste em partículas se movendo sem interação e na ausência de forças externas. Seja $u(t, x)$ a velocidade da partícula no instante t e na posição x . Se $x = \varphi(t)$ é a trajetória de uma partícula fixa, então a velocidade dessa partícula é $\varphi'(t) = u(t, \varphi(t))$ e com a aceleração $\varphi''(t) = 0$ para todo $t \in [0, +\infty)$. Consequentemente*

$$0 = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d}{dt}(u(t, \varphi(t))) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\varphi'(t) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u.$$

A equação obtida

$$u_t + uu_x = 0, \tag{1.1}$$

que descreve o campo de velocidade u de partículas que não interagem, é chamada **equação de Hopf**.

Definição 1.2. *Seja $a(x) = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ um campo vetorial. O **divergente** do campo a , denotado por $\operatorname{div} a$, é definido por*

$$\operatorname{div} a \equiv (a_1)_{x_1} + \dots + (a_n)_{x_n}.$$

Teorema 1.3. (Teorema da Divergência). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $C^1(\Omega) \ni F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Então*

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, dS = \int_{\Omega} \operatorname{div} F \, dx,$$

onde ν é o vetor normal unitário apontando para fora de $\partial\Omega$ e dS é um elemento de área infinitesimal em $\partial\Omega$.

Proposição 1.4. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se*

$$\int_G f(x) \, dx = 0 \quad \forall G \subset \Omega \text{ aberto},$$

então $f(x) = 0$ para todo $x \in \Omega$.

Demonstração. Suponhamos que $f(x_0) \neq 0$ para algum $x_0 \in \Omega$. Sem perda de generalidade, podemos supor $f(x_0) > 0$. Como Ω é aberto e f é contínua, existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in B_\varepsilon(x_0) \subset \Omega$. Daí,

$$\int_{B_\varepsilon(x_0)} f(x) \, dx > 0,$$

absurdo. Portanto $f(x) = 0$ para todo $x \in \Omega$. ■

Motivação 1.5. (Equação de continuidade ou conservação de massa). *Sejam $v(t, x) = (v_1, \dots, v_n)$ a velocidade e $\rho(t, x)$ a densidade de um fluido (um líquido ou um gás) em \mathbb{R}^n que não possui poços e nem fontes para todo $V \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Então a massa M_V do fluido contido em V é dada por*

$$M_V(t) = \int_V \rho(t, x) \, dx.$$

Então

$$\frac{dM_V}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}(t, x) \, dx.$$

Por outro lado, como não há poços e nem fontes em V , então

$$\frac{dM_V}{dt} = - \int_{\partial V} \rho(t, x) v(t, x) \cdot \nu \, dS_x = - \int_V \operatorname{div} (\rho(t, x) v(t, x)) \, dx$$

onde $v \cdot \nu$ é o produto escalar do vetor velocidade v pelo vetor normal unitário ν apontando para fora de ∂V no ponto $x \in \partial V$ e dS_x é um elemento de área em ∂V . Daí,

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}(t, x) + \operatorname{div} (\rho(t, x) v(t, x)) \right) \, dx = 0.$$

Pela Proposição 1.4, segue que

$$\rho_t + \operatorname{div} (\rho v) = 0, \tag{1.2}$$

conhecida em hidrodinâmica como **equação de continuidade**.

Motivação 1.6. (Equação da infiltração de fluidos na areia). *Suponhamos que o fluido se mova sob a ação exclusiva da gravidade, ou seja, a direção do movimento é vertical e não há dependência de coordenadas horizontais, nem poços e nem fontes. A velocidade de infiltração v é uma função da densidade $\rho \equiv u(t, x)$, ou seja, $v = v(u)$. Experimentalmente se verifica que o gráfico de v tem a forma da Figura 1.1. No segmento $[0, u_0]$, se pode supor que a dependência é quase parabólica, ou seja, $v(u) = Cu^2$.*

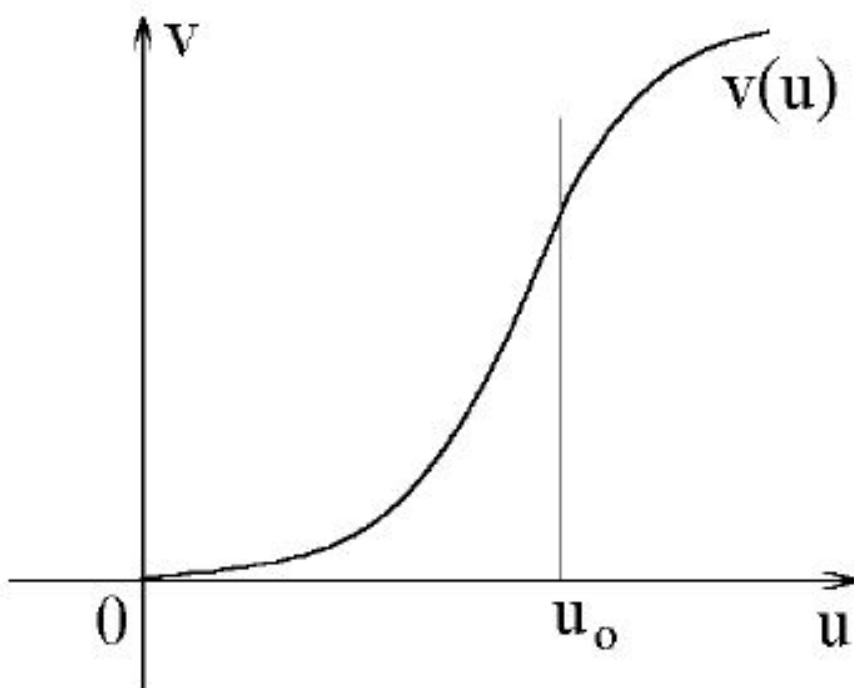


Figura 1.1: Dependência experimental $v = v(u)$.

Considerando o caso unidimensional, a equação (1.2) será reescrita da seguinte maneira:

$$u_t + (uv(u))_x = 0, \quad (1.3)$$

ou

$$u_t + p(u)u_x = 0, \text{ onde } p(u) = v(u) + v'(u)u,$$

pois

$$0 = u_t + (uv(u))_x = u_t + u_x v(u) + uv'(u)u_x = u_t + u_x \underbrace{(v(u) + v'(u)u)}_{=p(u)}.$$

Assumindo $v(u) = \frac{u^2}{3}$, obtemos

$$p(u) = v(u) + v'(u)u = \frac{u^2}{3} + \frac{2u}{3}u = u^2$$

e conseqüentemente

$$u_t + u^2 u_x = 0.$$

Motivação 1.7. (Equação do tráfego). Seja $u(t, x)$ a densidade de carros na estrada no instante t e na posição x . Experimentalmente se verifica que a velocidade v dos carros com densidade u é afim, ou seja,

$$v(u) = C - ku, \quad C, k = \text{constantes} > 0.$$

Nesse caso, a equação (1.3) é

$$u_t + (Cu - ku^2)_x = 0.$$

Teorema 1.8. (Fórmula de Ostrogradskiř-Gauss). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com $\partial\Omega$ suave e $w \in C^1(\overline{\Omega})$. Então*

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} w \cos(\nu, x_i) dS_x,$$

onde $\cos(\nu, x_i)$ é o cosseno do ângulo entre o vetor normal unitário $\nu = (\cos(\nu, x_1), \dots, \cos(\nu, x_n))$ que aponta para fora de $\partial\Omega$ e o eixo Ox_i e dS_x é um elemento de área infinitesimal.

Corolário 1.9. (Fórmula de integração por partes). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado com $\partial\Omega$ suave e $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$. Então*

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} uv \cos(\nu, x_i) dS_x - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx, \quad (1.4)$$

onde $\cos(\nu, x_i)$ é o cosseno do ângulo entre o vetor normal unitário $\nu = (\cos(\nu, x_1), \dots, \cos(\nu, x_n))$ que aponta para fora de $\partial\Omega$ e o eixo Ox_i e dS_x é um elemento de área infinitesimal.

Definição 1.10. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Dizemos que $\varphi \in C_C^\infty(\Omega)$ se $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ e*

$$\text{spt } \varphi \equiv \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}} \subset \Omega$$

é compacto.

Exemplo 1.11. *Seja $\tilde{\varphi} : [0, T) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$\tilde{\varphi}(t, x) \equiv \begin{cases} e^{\frac{1}{t^2+x^2-T^2}} & \text{se } (t, x) \in [0, T) \times (-\sqrt{T^2-t^2}, \sqrt{T^2-t^2}), \\ 0 & \text{se } (t, x) \in [0, T) \times (\mathbb{R} \setminus (-\sqrt{T^2-t^2}, \sqrt{T^2-t^2})). \end{cases}$$

Então $\tilde{\varphi} \in C_C^\infty((0, T) \times \mathbb{R})$.

Proposição 1.12. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se*

$$\int_{\Omega} f\varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_C^\infty(\Omega),$$

então $f \equiv 0$.

Demonstração. [2], página 15. ■

Proposição 1.13. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Então $\text{spt } \varphi$ é compacto se, e somente se, existe G aberto e limitado com $\overline{G} \subset \Omega$ tal que $\varphi(\Omega \setminus G) = \{0\}$.*

Demonstração. Suponhamos que $\text{spt } \varphi$ é compacto. Observe que

$$\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\} \subset \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}} = \text{spt } \varphi \subset \Omega.$$

Como $\text{spt } \varphi$ é compacto, então $\text{spt } \varphi$ é limitado e conseqüentemente $G \equiv \{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}$ é limitado. Mostremos que G também é aberto. De fato,

$$\Omega \setminus \{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\} = \{x \in \Omega : \varphi(x) = 0\} = \varphi^{-1}(\{0\}).$$

Como $\{0\}$ é fechado e φ é contínua, então $\varphi^{-1}(\{0\})$ é fechado, ou seja, $\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}$ é aberto. Além disso, $\varphi(x) = 0$ para todo $x \in \varphi^{-1}(\{0\})$.

Suponhamos que existe $G \subset \Omega$ aberto e limitado com $\overline{G} \subset \Omega$ tal que $\varphi(\Omega \setminus G) = \{0\}$. Como G é limitado, então \overline{G} é limitado. Além disso,

$$\begin{aligned} \varphi(\Omega \setminus G) = \{0\} &\Leftrightarrow \Omega \setminus G \subset \{x \in \Omega : \varphi(x) = 0\} \\ &\Leftrightarrow \{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\} \subset G \\ &\Rightarrow \text{spt } \varphi \subset \overline{G}, \end{aligned}$$

logo $\text{spt } \varphi$ é limitado. Como $\text{spt } \varphi$ também é fechado, segue que $\text{spt } \varphi$ é compacto. ■

Lema 1.14. *Se $\varphi \in C_C^\infty(\Pi_T)$, então existem $\varphi_1, \varphi_2 \in C_C^\infty(\Pi_T)$ não negativas tais que $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$.*

Demonstração. Observe que

$$\varphi(\Pi_T) = \varphi(\text{spt } \varphi \cup \varphi^{-1}(\{0\})) = \varphi(\text{spt } \varphi) \cup \varphi(\varphi^{-1}(\{0\})) = \varphi(\text{spt } \varphi) \cup \{0\}.$$

Como φ é contínua e $\text{spt } \varphi$ é compacto, então $\varphi(\text{spt } \varphi)$ é compacto. Além disso, como $\{0\}$ também é compacto, segue que $\varphi(\Pi_T)$ é compacto, ou seja, $\varphi(\Pi_T)$ é fechado e limitado. Como $\varphi(\Pi_T)$ é limitado, existe $\sup \varphi$ e é não negativo, pois $0 \in \varphi(\Pi_T)$. Além disso, como $\varphi(\Pi_T)$ é fechado, segue que $\sup \varphi \in \varphi(\Pi_T)$. Se $\sup \varphi = 0$, então $\varphi \leq 0$. Neste caso, tomemos $\varphi_1 \equiv 0$ e $\varphi_2 \equiv -\varphi$. Por outro lado, suponhamos que $\sup \varphi > 0$. Como $\sup \varphi, 0 \in \varphi(\Pi_T)$, existem $(t_1, x_1), (t_2, x_2) \in \Pi_T$, com $(t_1, x_1) \neq (t_2, x_2)$, tais que $\varphi(t_1, x_1) = \sup \varphi$ e $\varphi(t_2, x_2) = 0$. Sejam $r = \frac{d((t_1, x_1), (t_2, x_2))}{2} > 0$ e $B \equiv B_r\left(\frac{t_1 + t_2}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2}\right)$. Definamos

$$\varphi_1(t, x) = \begin{cases} \sup \varphi & \text{se } (t, x) \in \{(\tilde{t}, \tilde{x}) \in \Pi_T : \varphi(\tilde{t}, \tilde{x}) \neq 0\} \setminus B, \\ \sup \varphi - \varphi(t, x) & \text{se } (t, x) \in B, \\ 0 & \text{se } (t, x) \in \Pi_T \setminus (\{(\tilde{t}, \tilde{x}) \in \Pi_T : \varphi(\tilde{t}, \tilde{x}) \neq 0\} \cup B) \end{cases}$$

e

$$\varphi_2(t, x) = \begin{cases} \sup \varphi - \varphi(t, x) & \text{se } (t, x) \in \{(\tilde{t}, \tilde{x}) \in \Pi_T : \varphi(\tilde{t}, \tilde{x}) \neq 0\} \cup B, \\ 0 & \text{se } (t, x) \in \Pi_T \setminus (\{(\tilde{t}, \tilde{x}) \in \Pi_T : \varphi(\tilde{t}, \tilde{x}) \neq 0\} \cup B). \end{cases}$$

Além disso, $\varphi_1, \varphi_2 \in C_C^\infty(\Pi_T)$, $\varphi_1 \geq 0$, $\varphi_2 \geq 0$ e $\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi$. ■

Lema 1.15. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e $x = x(t), y = y(t)$ diferenciáveis com gráficos em Ω . Definamos*

$$F(t) \equiv \int_{x(t)}^{y(t)} u(t, z) dz.$$

Então

$$F'(t) = \int_{x(t)}^{y(t)} u_t(t, z) dz + u(t, y(t))y'(t) - u(t, x(t))x'(t).$$

Demonstração. [4], página 198. ■

Definição 1.16. *A função definida por*

$$\operatorname{sgn} x \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ -1 & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

é chamada de função sinal.

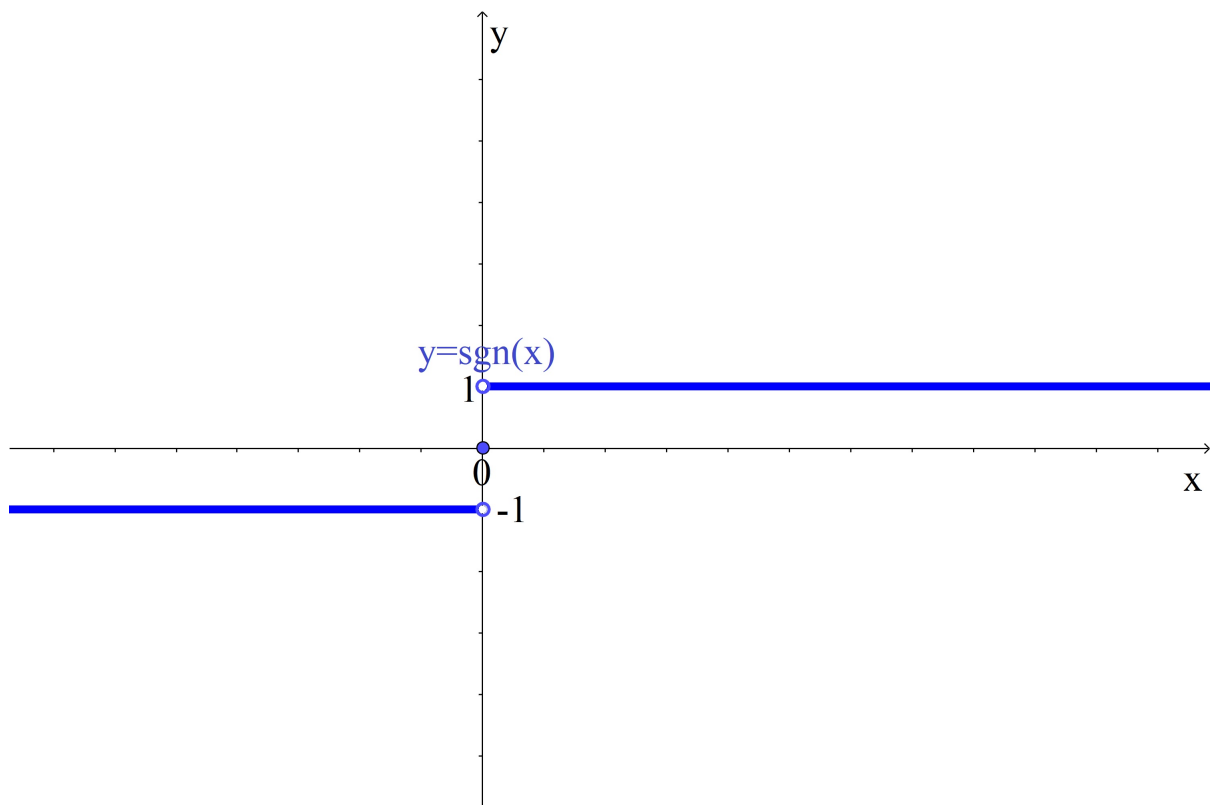


Figura 1.2: Função sinal

Proposição 1.17. *Existe $\{E_m\} \subset C^1(\mathbb{R})$ tal que $E_m(x) \rightarrow |x - k|$ uniformemente quando $m \rightarrow \infty$, E'_m é limitada para todo $m \in \mathbb{N}$ e $E'_m(x) \rightarrow \operatorname{sgn}(x - k)$ para todo $x \neq k$ quando $m \rightarrow \infty$.*

Demonstração. Definamos para cada $m \in \mathbb{N}$

$$E_m(x) \equiv \begin{cases} -x + k & \text{se } x \leq k - \frac{1}{m}, \\ \frac{m(x-k)^2}{2} + \frac{1}{2m} & \text{se } k - \frac{1}{m} < x < k + \frac{1}{m}, \\ x - k & \text{se } x \geq k + \frac{1}{m}. \end{cases}$$

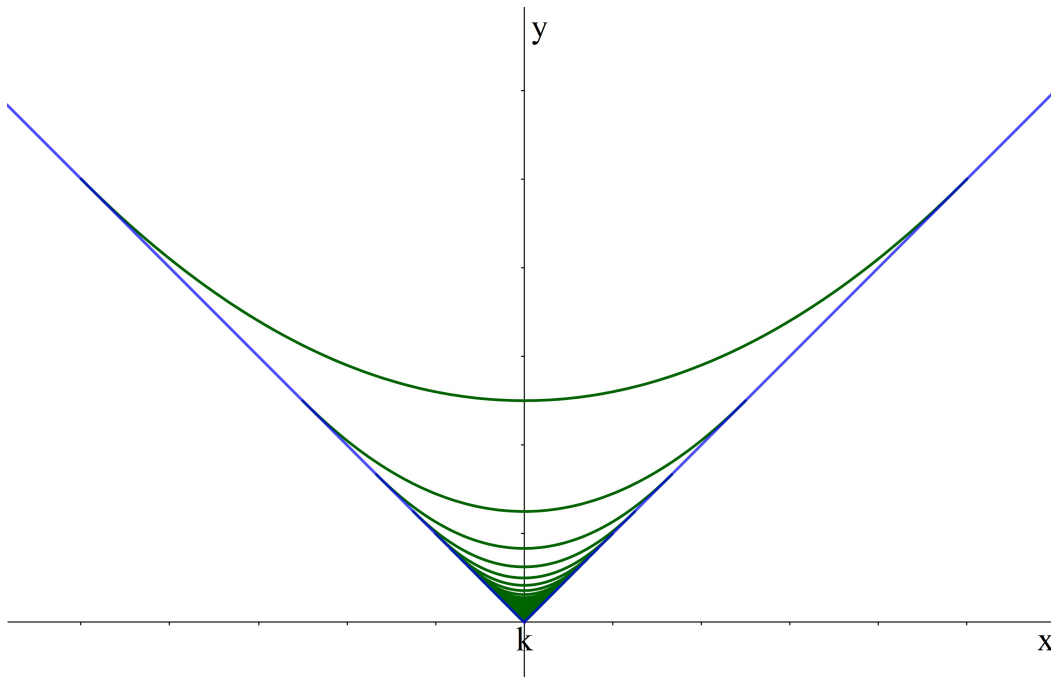


Figura 1.3: Gráfico de $\{E_m\}$.

AFIRMAÇÃO 1: $E_m(x) \rightarrow |x - k|$ uniformemente quando $m \rightarrow \infty$.

O caso $|x - k| \geq \frac{1}{m}$ é imediato. Suponhamos que $|x - k| < \frac{1}{m}$. Seja $\varepsilon > 0$ dado. Pela Propriedade Arquimediana, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2}{N_0} < \varepsilon$. Assim, para todo $m \geq N_0$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{m(x-k)^2}{2} + \frac{1}{2m} - |x-k| \right| &\leq \frac{m|x-k|^2}{2} + \frac{1}{2m} + |x-k| \\ &\stackrel{|x-k| < \frac{1}{m}}{<} \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} + \frac{1}{m} \\ &= \frac{2}{m} \\ &\leq \frac{2}{N_0} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

AFIRMAÇÃO 2: E_m é diferenciável para todo $m \in \mathbb{N}$.

De fato, para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$E'_m(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < k - \frac{1}{m}, \\ m(x - k) & \text{se } k - \frac{1}{m} < x < k + \frac{1}{m}, \\ 1 & \text{se } x > k + \frac{1}{m}. \end{cases}$$

Como

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (k - \frac{1}{m})^-} \frac{E_m(x) - E_m\left(k - \frac{1}{m}\right)}{x - k + \frac{1}{m}} &= \lim_{x \rightarrow k - \frac{1}{m}} \frac{-x + k - \left(-k + \frac{1}{m} + k\right)}{x - k + \frac{1}{m}} \\ &= \lim_{x \rightarrow k - \frac{1}{m}} \frac{-x + k - \frac{1}{m}}{x - k + \frac{1}{m}} \\ &= -1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (k - \frac{1}{m})^+} \frac{E_m(x) - E_m\left(k - \frac{1}{m}\right)}{x - k + \frac{1}{m}} &= \lim_{x \rightarrow k - \frac{1}{m}} \frac{\frac{m(x - k)^2}{2} + \frac{1}{2m} - \left(-k + \frac{1}{m} + k\right)}{x - k + \frac{1}{m}} \\ &= \lim_{x \rightarrow k - \frac{1}{m}} \frac{\frac{m(x - k)^2}{2} + \frac{1}{2m} - \frac{1}{m}}{x - k + \frac{1}{m}} \\ &= \lim_{x \rightarrow k - \frac{1}{m}} \frac{\frac{m(x - k)^2}{2} - \frac{1}{2m}}{x - k + \frac{1}{m}} \left(= \frac{0}{0} \right) \\ &\stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow k - \frac{1}{m}} m(x - k) \\ &= -1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow (k + \frac{1}{m})^-} \frac{E_m(x) - E_m\left(k + \frac{1}{m}\right)}{x - k - \frac{1}{m}} &= \lim_{x \rightarrow k + \frac{1}{m}} \frac{\frac{m(x-k)^2}{2} + \frac{1}{2m} - \left(k + \frac{1}{m} - k\right)}{x - k - \frac{1}{m}} \\
&= \lim_{x \rightarrow k + \frac{1}{m}} \frac{\frac{m(x-k)^2}{2} + \frac{1}{2m} - \frac{1}{m}}{x - k - \frac{1}{m}} \\
&= \lim_{x \rightarrow k + \frac{1}{m}} \frac{\frac{m(x-k)^2}{2} - \frac{1}{2m}}{x - k - \frac{1}{m}} \left(= \frac{0}{0} \right) \\
&\stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow k + \frac{1}{m}} m(x-k) \\
&= 1
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow (k + \frac{1}{m})^+} \frac{E_m(x) - E_m\left(k + \frac{1}{m}\right)}{x - k - \frac{1}{m}} &= \lim_{x \rightarrow k + \frac{1}{m}} \frac{x - k - \left(k + \frac{1}{m} - k\right)}{x - k - \frac{1}{m}} \\
&= \lim_{x \rightarrow k + \frac{1}{m}} \frac{x - k - \frac{1}{m}}{x - k - \frac{1}{m}} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$, então

$$E'_m\left(k - \frac{1}{m}\right) = -1 \quad \text{e} \quad E'_m\left(k + \frac{1}{m}\right) = 1$$

para todo $m \in \mathbb{N}$.

AFIRMAÇÃO 3: E'_m é contínua para todo $m \in \mathbb{N}$.

De fato,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow (k - \frac{1}{m})^-} E'_m(x) &= \lim_{x \rightarrow k - \frac{1}{m}} (-1) = -1 = E'_m\left(k - \frac{1}{m}\right), \\
\lim_{x \rightarrow (k - \frac{1}{m})^+} E'_m(x) &= \lim_{x \rightarrow k - \frac{1}{m}} m(x-k) = -1 = E'_m\left(k - \frac{1}{m}\right), \\
\lim_{x \rightarrow (k + \frac{1}{m})^-} E'_m(x) &= \lim_{x \rightarrow k + \frac{1}{m}} m(x-k) = 1 = E'_m\left(k + \frac{1}{m}\right), \\
\lim_{x \rightarrow (k + \frac{1}{m})^+} E'_m(x) &= \lim_{x \rightarrow k + \frac{1}{m}} 1 = 1 = E'_m\left(k + \frac{1}{m}\right).
\end{aligned}$$

Portanto

$$\lim_{x \rightarrow k - \frac{1}{m}} E'_m(x) = E'_m\left(k - \frac{1}{m}\right) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow k + \frac{1}{m}} E'_m(x) = E'_m\left(k + \frac{1}{m}\right).$$

AFIRMAÇÃO 4: E'_m é limitada para todo $m \in \mathbb{N}$.

De fato, para todo $m \in \mathbb{N}$ e $|x - k| < \frac{1}{m}$,

$$|m(x - k)| = m|x - k| \stackrel{|x-k| < \frac{1}{m}}{<} m \frac{1}{m} = 1.$$

Logo $|E'_m(x)| \leq 1$ para todo $m \in \mathbb{N}$ e para todo $x \in \mathbb{R}$.

Além disso, $E'_m(x) \rightarrow \text{sgn}(x - k)$ para todo $x \neq k$ quando $m \rightarrow \infty$. ■

Definição 1.18. *Seja $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Definamos*

$$\hat{F} \equiv \left\{ \tilde{f} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R} \mid \tilde{f} \text{ é côncava e } \tilde{f}(u) \geq f(u) \quad \forall u \in [\alpha, \beta] \right\}$$

e

$$\check{F} \equiv \left\{ \tilde{f} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R} \mid \tilde{f} \text{ é convexa e } \tilde{f}(u) \leq f(u) \quad \forall u \in [\alpha, \beta] \right\}.$$

Proposição 1.19. *\hat{F} é limitado inferiormente e \check{F} é limitado superiormente.*

Demonstração. De fato, como

$$\hat{F} \subset \underbrace{\left\{ \tilde{f} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R} \mid \tilde{f}(u) \geq f(u) \quad \forall u \in [\alpha, \beta] \right\}}_{\text{limitado inferiormente por } f}$$

e

$$\check{F} \subset \underbrace{\left\{ \tilde{f} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R} \mid \tilde{f}(u) \leq f(u) \quad \forall u \in [\alpha, \beta] \right\}}_{\text{limitado superiormente por } f}$$

segue que \hat{F} é limitado inferiormente e \check{F} é limitado superiormente. ■

Definição 1.20. *Seja $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que a função $\hat{f} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$\hat{f}(u) \equiv \inf_{\tilde{f} \in \hat{F}} \tilde{f}(u) \quad \forall u \in [\alpha, \beta]$$

é a envoltória côncava de f e a função $\check{f} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\check{f}(u) \equiv \sup_{\tilde{f} \in \check{F}} \tilde{f}(u) \quad \forall u \in [\alpha, \beta].$$

é a envoltória convexa de f .

Proposição 1.21. *Seja $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função.*

(i) *Se f é côncava, então $\hat{f} = f$ e o gráfico da envoltória convexa é o segmento de reta*

que liga $(\alpha, f(\alpha))$ e $(\beta, f(\beta))$.

(ii) Se f é convexa, então $\check{f} = f$ e o gráfico da envoltória côncava é o segmento de reta que liga $(\alpha, f(\alpha))$ e $(\beta, f(\beta))$.

Demonstração. (i) Por definição, $f(u) \leq \hat{f}(u)$ para todo $u \in [\alpha, \beta]$. Como f é côncava, então $\hat{f}(u) \leq f(u)$ para todo $u \in [\alpha, \beta]$, logo $\hat{f}(u) = f(u)$ para todo $u \in [\alpha, \beta]$. Além disso, como f é côncava, então

$$f(t\alpha + (1-t)\beta) \geq tf(\alpha) + (1-t)f(\beta) \quad \forall t \in [0, 1].$$

Para cada $\varepsilon > 0$, definamos $g_\varepsilon : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g_\varepsilon(t) \equiv tf(\alpha) + (1-t)f(\beta) + \varepsilon - f(t\alpha + (1-t)\beta) \quad \forall t \in [0, 1].$$

Como $g_\varepsilon(1) = \varepsilon > 0$ e g_ε é contínua, então existe $\delta \in (0, 1)$ tal que $g_\varepsilon(t) > 0$ para todo $t \in [1 - \delta, 1]$, ou seja,

$$tf(\alpha) + (1-t)f(\beta) + \varepsilon > f(t\alpha + (1-t)\beta) \quad \forall \varepsilon > 0 \text{ e } \forall t \in [1 - \delta, 1].$$

Portanto o gráfico da envoltória convexa de f é o segmento de reta que liga os pontos $(\alpha, f(\alpha))$ e $(\beta, f(\beta))$.

(ii) Por definição, $\check{f}(u) \leq f(u)$ para todo $u \in [\alpha, \beta]$. Como f é convexa, então $f(u) \leq \check{f}(u)$ para todo $u \in [\alpha, \beta]$, logo $\check{f}(u) = f(u)$ para todo $u \in [\alpha, \beta]$. Além disso, como f é convexa, então

$$f(t\alpha + (1-t)\beta) \leq tf(\alpha) + (1-t)f(\beta) \quad \forall t \in [0, 1].$$

Para cada $\varepsilon > 0$, definamos $h_\varepsilon : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$h_\varepsilon(t) \equiv f(t\alpha + (1-t)\beta) + \varepsilon - tf(\alpha) - (1-t)f(\beta) \quad \forall t \in [0, 1].$$

Como $h_\varepsilon(1) = \varepsilon > 0$ e h_ε é contínua, então existe $\delta \in (0, 1)$ tal que $h_\varepsilon(t) > 0$ para todo $t \in [1 - \delta, 1]$, ou seja,

$$f(t\alpha + (1-t)\beta) + \varepsilon > tf(\alpha) + (1-t)f(\beta) + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \text{ e } \forall t \in [1 - \delta, 1].$$

Portanto o gráfico da envoltória côncava de f é o segmento de reta que liga os pontos $(\alpha, f(\alpha))$ e $(\beta, f(\beta))$. ■

Exemplo 1.22. Vamos construir as envoltórias côncava e convexa da função $f(u) = u^3$ em $[-1, 1]$. Como $f(u) = u^3$ para todo $u \in [-1, 1]$, então $f'(u) = 3u^2$ para todo $u \in (-1, 1)$ e conseqüentemente $f''(u) = 6u$ para todo $u \in (-1, 1)$. Assim, f é côncava em $(-1, 0]$ e é convexa em $[0, 1)$. Agora, vamos encontrar a equação da reta tangente a f que passa por

$(1, 1)$ e a equação da reta tangente a f que passa por $(-1, -1)$.

$$1 + \hat{u} + \hat{u}^2 \stackrel{\hat{u} \neq 1}{=} \frac{1 - \hat{u}^3}{1 - \hat{u}} = \frac{f(1) - f(\hat{u})}{1 - \hat{u}} = f'(\hat{u}) = 3\hat{u}^2 \Leftrightarrow 2\hat{u}^2 - \hat{u} - 1 = 0 \Rightarrow \hat{u} = -\frac{1}{2}.$$

Logo $f(\hat{u}) = -\frac{1}{8}$ e $f'(\hat{u}) = \frac{3}{4}$.

$$1 - \check{u} + \check{u}^2 \stackrel{\check{u} \neq -1}{=} \frac{1 - \check{u}^3}{-1 - \check{u}} = \frac{f(-1) - f(\check{u})}{-1 - \check{u}} = f'(\check{u}) = 3\check{u}^2 \Leftrightarrow 2\check{u}^2 + \check{u} - 1 = 0 \Rightarrow \check{u} = \frac{1}{2}.$$

Logo $f(\check{u}) = \frac{1}{8}$ e $f'(\check{u}) = \frac{3}{4}$. Portanto

$$\hat{f}(u) = \begin{cases} u^3 & \text{se } u \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right], \\ \frac{3}{4}u + \frac{1}{4} & \text{se } u \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

e

$$\check{f}(u) = \begin{cases} \frac{3}{4}u - \frac{1}{4} & \text{se } u \in \left[-1, \frac{1}{2}\right], \\ u^3 & \text{se } u \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

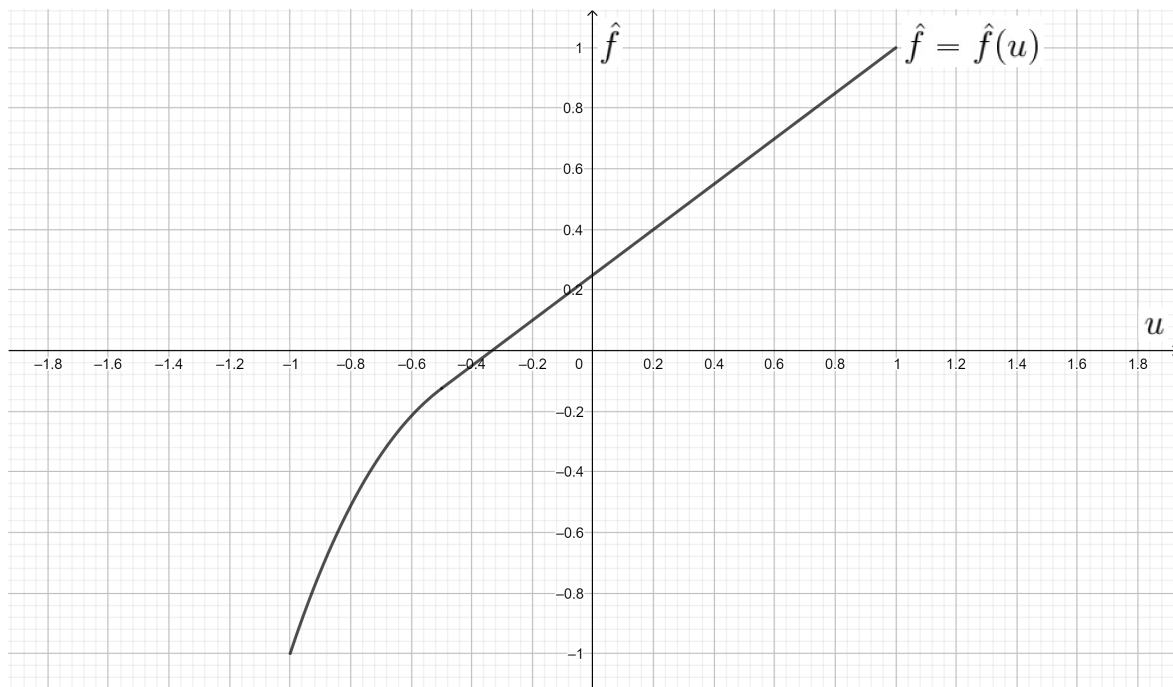


Figura 1.4: Envoltória côncava de $f(u) = u^3$ em $[-1, 1]$.

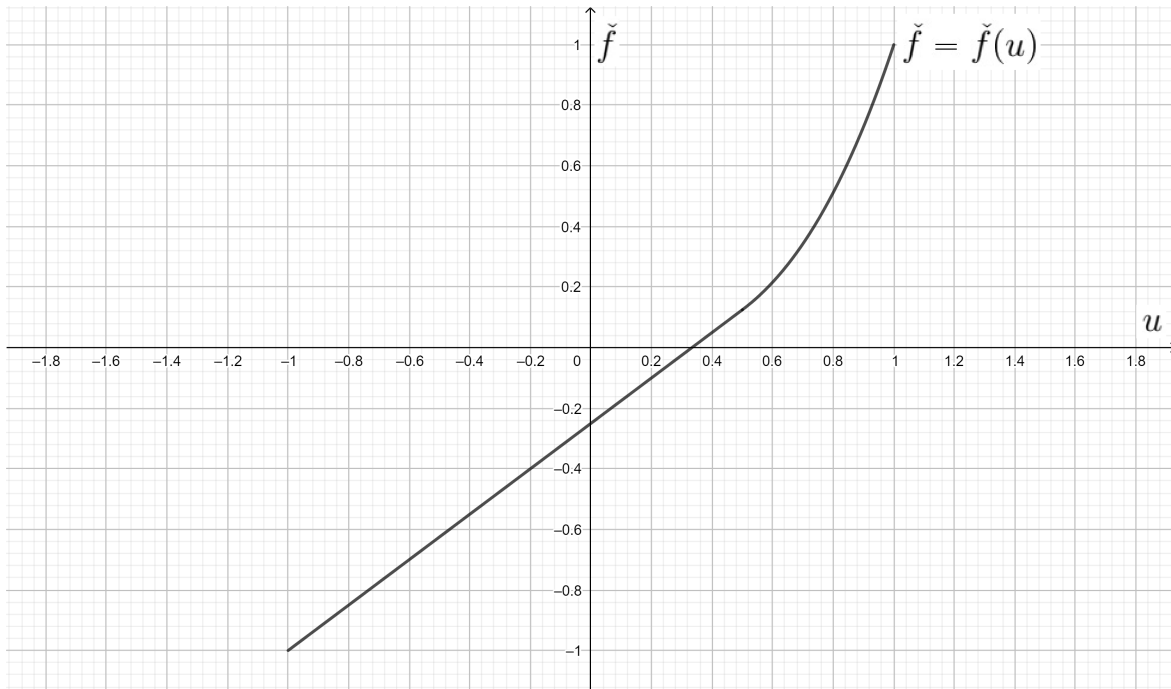


Figura 1.5: Envoltória convexa de $f(u) = u^3$ em $[-1, 1]$.

Exemplo 1.23. Vamos construir as envoltórias côncava e convexa da função $f(u) = \frac{u^3}{3}$ em $[-2, 2]$. Como $f(u) = \frac{u^3}{3}$ para todo $u \in [-2, 2]$, então $f'(u) = u^2$ para todo $u \in (-2, 2)$ e conseqüentemente $f''(u) = 2u$ para todo $u \in (-2, 2)$. Assim, f é côncava em $(-2, 0]$ e é convexa em $[0, 2)$. Agora, vamos encontrar a equação da reta tangente a f que passa por $\left(2, \frac{8}{3}\right)$ e a equação da reta tangente a f que passa por $\left(-2, -\frac{8}{3}\right)$.

$$\frac{4 + 2\hat{u} + \hat{u}^2}{3} \stackrel{\hat{u} \neq 2}{=} \frac{8 - \hat{u}^3}{3(2 - \hat{u})} = \frac{\frac{8}{3} - \frac{\hat{u}^3}{3}}{2 - \hat{u}} = \frac{f(2) - f(\hat{u})}{2 - \hat{u}} = f'(\hat{u}) = \hat{u}^2 \Leftrightarrow 2\hat{u}^2 - 2\hat{u} - 4 = 0,$$

ou seja,

$$\hat{u}^2 - \hat{u} - 2 = 0,$$

logo $\hat{u} = -1$, $f(\hat{u}) = -\frac{1}{3}$ e $f'(\hat{u}) = 1$.

$$\frac{4 - 2\check{u} + \check{u}^2}{3} \stackrel{\check{u} \neq -2}{=} \frac{8 + \check{u}^3}{3(2 + \check{u})} = \frac{-\frac{8}{3} - \frac{\check{u}^3}{3}}{-2 - \check{u}} = \frac{f(-2) - f(\check{u})}{-2 - \check{u}} = f'(\check{u}) = \check{u}^2 \Leftrightarrow 2\check{u}^2 + 2\check{u} - 4 = 0,$$

ou seja,

$$\check{u}^2 + \check{u} - 2 = 0,$$

logo $\tilde{u} = 1$, $f(\tilde{u}) = \frac{1}{3}$ e $f'(\tilde{u}) = 1$. Portanto

$$\hat{f}(u) = \begin{cases} \frac{u^3}{3} & \text{se } u \in [-2, -1], \\ u + \frac{2}{3} & \text{se } u \in [-1, 2] \end{cases}$$

e

$$\tilde{f}(u) = \begin{cases} u - \frac{2}{3} & \text{se } u \in [-2, 1], \\ \frac{u^3}{3} & \text{se } u \in [1, 2]. \end{cases}$$

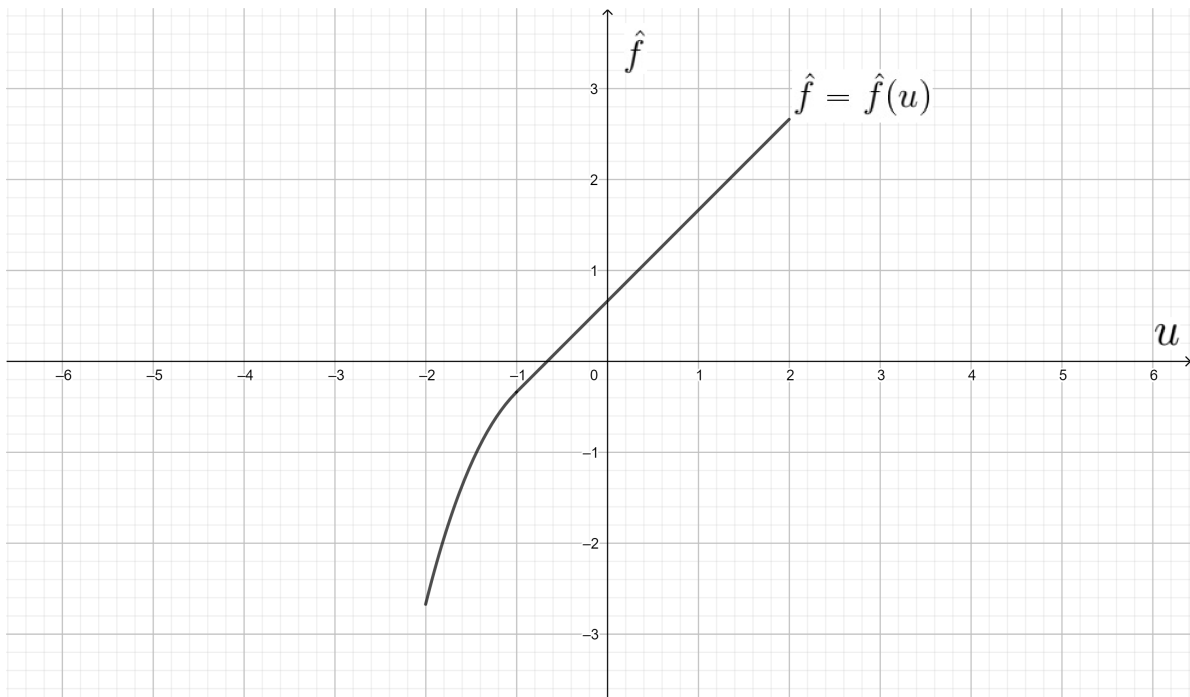


Figura 1.6: Envoltória côncava de $f(u) = \frac{u^3}{3}$ em $[-2, 2]$.

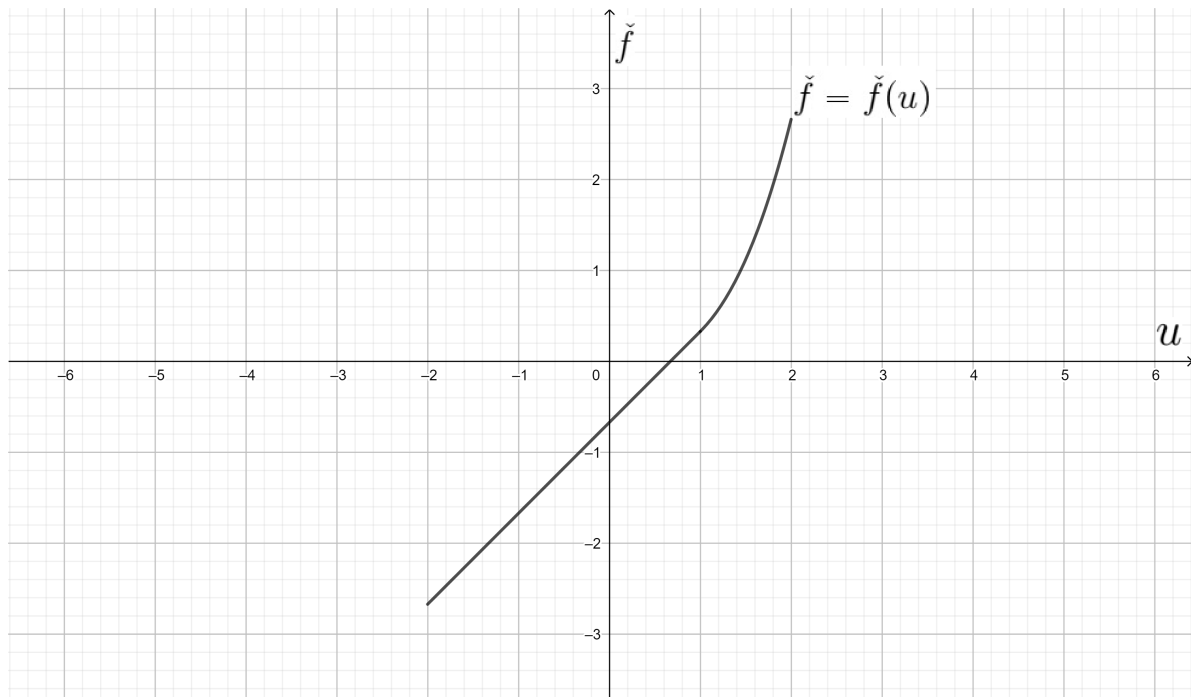


Figura 1.7: Envoltória convexa de $f(u) = \frac{u^3}{3}$ em $[-2, 2]$.

Exemplo 1.24. Vamos construir as envoltórias côncava e convexa de $f(u) = \sin u$ em $[0, 3\pi]$. Como $f(u) = \sin u$ para todo $u \in [0, 3\pi]$, então $f'(u) = \cos u$ para todo $u \in (0, 3\pi)$ e conseqüentemente $f''(u) = -\sin u$ para todo $u \in (0, 3\pi)$. Assim, f é côncava em $(0, \pi) \cup [2\pi, 3\pi)$ e é convexa em $[\pi, 2\pi]$. Vamos encontrar a reta que passa em $(0, 0)$ e é tangente a f :

$$\sin u = \sin u - 0 = f(u) - f(0) = f'(u)(u - 0) = u \cos u \Leftrightarrow \sin u = u \cos u.$$

Definamos $g : (0, 3\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(u) \equiv \sin u - u \cos u.$$

Observe que $g(\pi) = \pi > 0$ e $g\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 < 0$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $u_1 \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ tal que $g(u_1) = 0$, ou seja, $\sin u_1 = u_1 \cos u_1$. Agora, vamos encontrar a reta que passa em $(3\pi, 0)$ e é tangente a f :

$$\sin u = \sin u - 0 = f(u) - f(0) = f'(u)(u - 3\pi) = (u - 3\pi) \cos u.$$

Definamos $h : (0, 3\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$h(u) \equiv \sin u - (u - 3\pi) \cos u.$$

Observe que $h\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 < 0$ e $h(2\pi) = \pi > 0$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $u_2 \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ tal que $h(u_2) = 0$. Então

$$\hat{f}(u) = \begin{cases} \sin u & \text{se } u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{2}, 3\pi\right], \\ 1 & \text{se } u \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right] \end{cases}$$

e

$$\check{f}(u) = \begin{cases} u \cos u_1 & \text{se } u \in [0, u_1], \\ \sin u & \text{se } u \in [u_1, u_2], \\ (u - 3\pi) \cos u_2 & \text{se } u \in [u_2, 3\pi]. \end{cases}$$

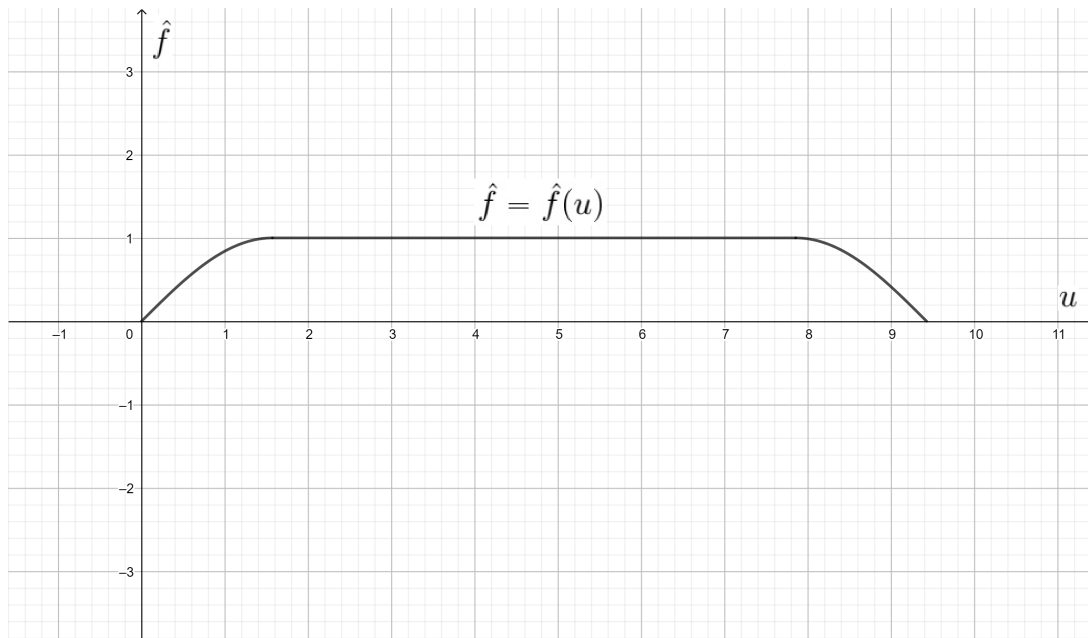


Figura 1.8: Envoltória cônica de $f(u) = \sin u$ em $[0, 3\pi]$.

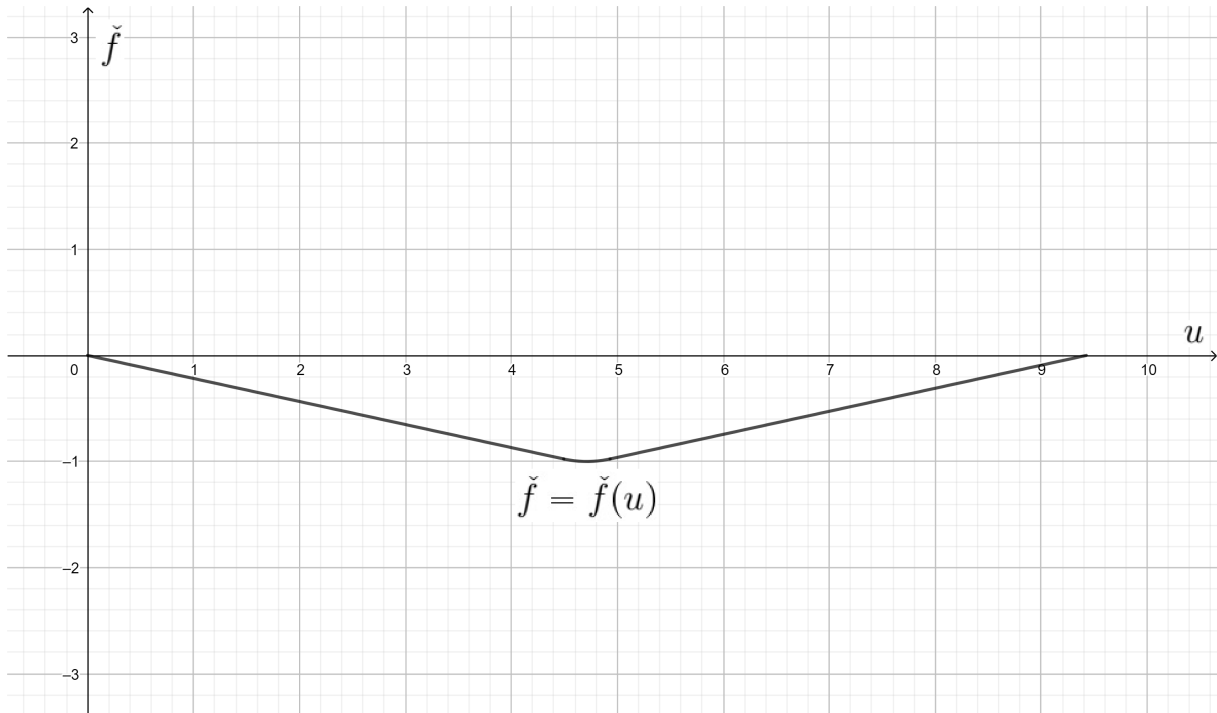


Figura 1.9: Envoltória convexa de $f(u) = \sin u$ em $[0, 3\pi]$.

Exemplo 1.25. Vamos construir as envoltórias côncava e convexa de $f(u) = -\frac{\cos(2u)}{2}$ em $\left[-\frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$. Como $f(u) = -\frac{\cos(2u)}{2}$ para todo $u \in \left[-\frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$, então $f'(u) = \sin(2u)$ para todo $u \in \left(-\frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ e conseqüentemente $f''(u) = 2\cos(2u)$ para todo $u \in \left(-\frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$. Assim, f é côncava em $\left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ e é convexa em $\left(-\frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$. Vamos encontrar a equação da reta que passa em $\left(-\frac{5\pi}{4}, 0\right)$ e é tangente a f :

$$-\frac{\cos(2u)}{2} = -\frac{\cos(2u)}{2} - 0 = f(u) - f\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = f'(u) \left(u + \frac{5\pi}{4}\right) = \left(u + \frac{5\pi}{4}\right) \sin(2u).$$

Definamos $g : \left(-\frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(u) \equiv \left(u + \frac{5\pi}{4}\right) \sin(2u) + \frac{\cos(2u)}{2}.$$

Observe que $g(-\pi) = \frac{1}{2} > 0$ e $g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2} < 0$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $u_1 \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$ tal que $g(u_1) = 0$, ou seja, $-\frac{\cos(2u_1)}{2} = \left(u_1 + \frac{5\pi}{4}\right) \sin(2u_1)$.

Agora, vamos encontrar a equação da reta que passa por $\left(\frac{5\pi}{4}, 0\right)$ e é tangente a f :

$$-\frac{\cos(2u)}{2} = -\frac{\cos(2u)}{2} - 0 = f(u) - f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = f'(u) \left(u - \frac{5\pi}{4}\right) = \left(u - \frac{5\pi}{4}\right) \sin(2u).$$

Definamos $h : \left(-\frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$h(u) \equiv \left(u - \frac{5\pi}{4}\right) \sin(2u) + \frac{\cos(2u)}{2}.$$

Observe que $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2} < 0$ e $h(\pi) = \frac{1}{2} > 0$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $u_2 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ tal que $h(u_2) = 0$, ou seja, $-\frac{\cos(2u_2)}{2} = \left(u_2 - \frac{5\pi}{4}\right) \sin(2u_2)$.

Portanto

$$\hat{f}(u) = \begin{cases} \left(u + \frac{5\pi}{4}\right) \sin(2u_1) & \text{se } u \in \left[-\frac{5\pi}{4}, u_1\right], \\ -\frac{\cos(2u)}{2} & \text{se } u \in \left[u_1, -\frac{\pi}{2}\right], \\ \frac{1}{2} & \text{se } u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \\ -\frac{\cos(2u)}{2} & \text{se } u \in \left[\frac{\pi}{2}, u_2\right], \\ \left(u - \frac{5\pi}{4}\right) \sin(2u_2) & \text{se } \left[u_2, \frac{5\pi}{4}\right] \end{cases}$$

e

$$\check{f}(u) = \begin{cases} -\frac{\cos(2u)}{2} & \text{se } u \in \left[-\frac{5\pi}{4}, -\pi\right] \cup \left[\pi, \frac{5\pi}{4}\right], \\ -\frac{1}{2} & \text{se } u \in [-\pi, \pi]. \end{cases}$$

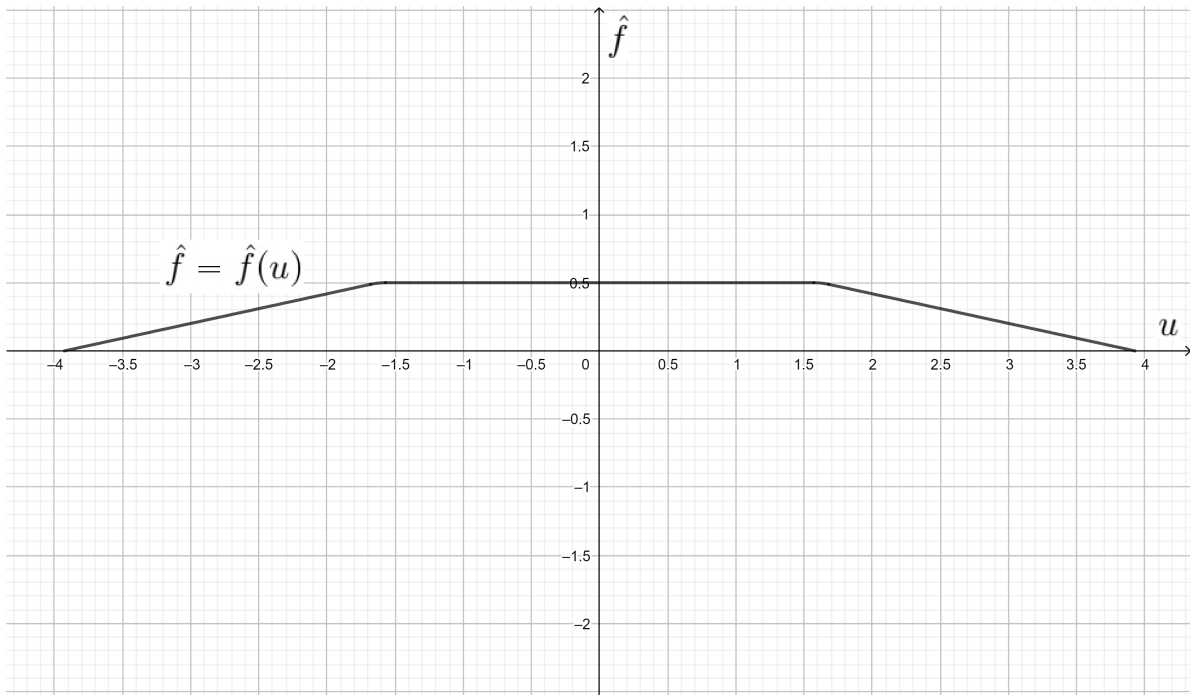


Figura 1.10: Envoltória côncava de $f(u) = -\frac{\cos(2u)}{2}$ em $\left[-\frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$.

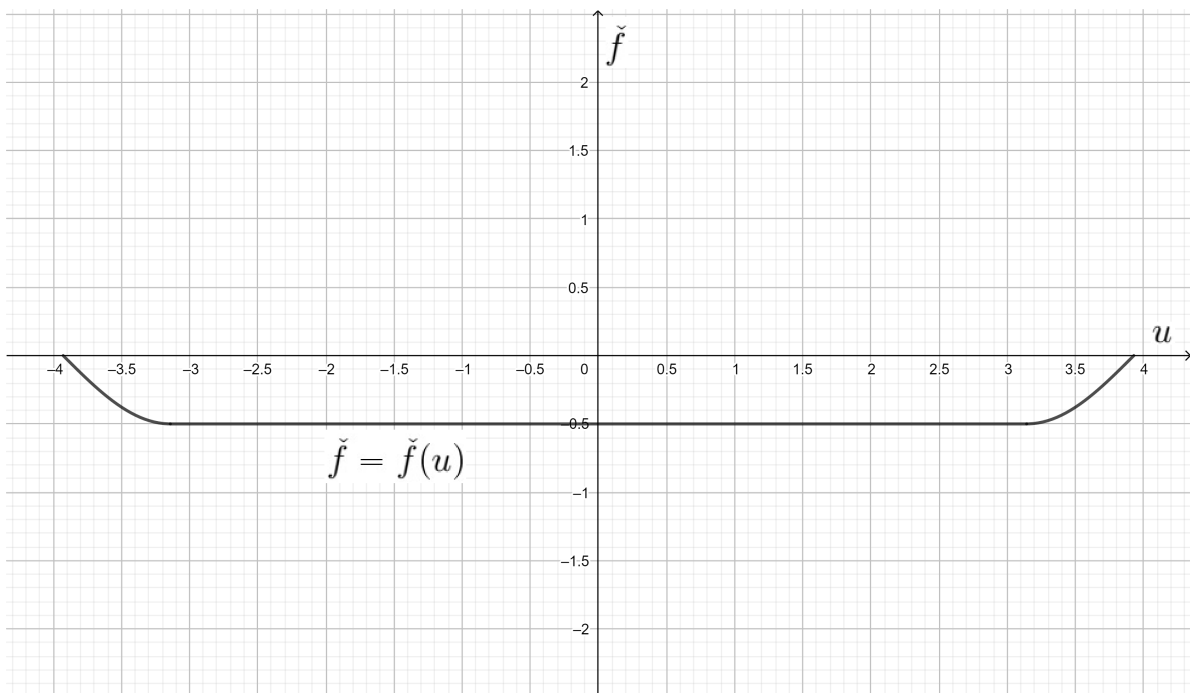


Figura 1.11: Envoltória convexa de $f(u) = -\frac{\cos(2u)}{2}$ em $\left[-\frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$.

Capítulo 2

A teoria clássica local

Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados da teoria geral das equações diferenciais parciais.

Definição 2.1. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $v = v(x) = (v_1(x), \dots, v_n(x)) \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ um campo vetorial. Dizemos aqui que a equação*

$$L_v[u] \equiv v_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + v_n(x) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \quad (2.1)$$

*é uma equação diferencial parcial (EDP) **linear homogênea** de primeira ordem.*

Definição 2.2. *Uma função $u = u(x)$ definida em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto é chamada de **solução clássica** da equação (2.1) se $u \in C^1(\Omega)$ e se u satisfaz a equação (2.1) para todo $x \in \Omega$.*

Definição 2.3. *O operador*

$$L_v \equiv v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

*é chamado de **operador derivada** em torno do campo vetorial v .*

Observação 2.4. *Geometricamente, a equação (2.1) significa que o gradiente*

$$\nabla u \equiv \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$$

da função desconhecida $u = u(x)$ é ortogonal ao campo vetorial v em todos os pontos do aberto Ω .

Proposição 2.5. *Uma função suave $u = u(x)$ é uma solução da equação (2.1) se, e somente se, u for constante ao longo das curvas de fase do campo v , ou seja, u é solução*

do sistema de equações

$$\begin{cases} x'_1 = v_1(x_1, \dots, x_n) \\ x'_2 = v_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x'_n = v_n(x_1, \dots, x_n). \end{cases} \quad (2.2)$$

Demonstração. Suponhamos que $u = u(x)$ é solução de (2.1). Então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \underbrace{(u(x_1(t), \dots, x_n(t)))}_{=x(t)} &= \nabla u \underbrace{(x_1(t), \dots, x_n(t))}_{=x(t)} \cdot \underbrace{(x'_1(t), \dots, x'_n(t))}_{=x'(t)} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \\ &= \sum_{i=1}^n v_i(x(t)) \frac{\partial u}{\partial x_i} \\ &\stackrel{\text{Hipótese}}{=} 0. \end{aligned}$$

Portanto u é constante ao longo do campo v .

Suponhamos que u é constante ao longo das curvas de fase do campo v . Então

$$\sum_{i=1}^n v_i(x(t)) \frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \frac{d}{dt} (u(x(t))) \stackrel{\text{Hipótese}}{=} 0.$$

Portanto $u = u(x)$ é solução de (2.1). ■

Definição 2.6. O sistema (2.2), que pode ser escrito na forma vetorial $x' = v(x)$, é chamado de **sistema característico da equação linear** (2.1).

Definição 2.7. A solução de um sistema característico é chamada de **característica** e o campo vetorial $v = v(x)$ sobre o espaço n -dimensional de x é chamado de **campo vetorial característico da equação linear**.

Definição 2.8. Uma EDP linear **não homogênea** de primeira ordem é uma equação da forma

$$L_v[u] = f(x), \quad (2.3)$$

onde $f = f(x)$ é uma função não nula.

Observação 2.9. A equação (2.3) significa que se movermos ao longo da característica $x = x(t)$, ou seja, ao longo da solução $x = x(t)$ do sistema (2.2), então $u(x(t))$ está se

movendo com a velocidade dada $f(x(t))$, pois

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(u(\underbrace{x_1(t), \dots, x_n(t)}_{=x(t)})) &= \nabla u(\underbrace{(x_1(t), \dots, x_n(t))}_{=x(t)}) \cdot \underbrace{(x'_1(t), \dots, x'_n(t))}_{=x'(t)} \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} v_i(x_i(t)) \\
 &= \underbrace{f(x_1(t), \dots, x_n(t))}_{=x(t)}.
 \end{aligned}$$

Assim, no caso de uma equação linear não homogênea, o sistema característico (2.2) deve ser complementado com a equação adicional em u :

$$\underbrace{u'(x_1(t), \dots, x_n(t))}_{=x(t)} = \underbrace{f(x_1(t), \dots, x_n(t))}_{=x(t)}. \quad (2.4)$$

Definição 2.10. O **problema de Cauchy** de uma EDP de primeira ordem consiste em encontrar uma solução $u = u(x)$ da equação (2.3) satisfazendo a condição inicial

$$u|_{\gamma} = u_0(x), \quad (2.5)$$

onde $\gamma \subset \mathbb{R}^n$, com $\dim \gamma = n - 1$, é uma hipersuperfície no x -espaço e $u_0 \in C^1(\gamma)$.

Observação 2.11. Para resolver o problema de Cauchy (2.1)-(2.5) para uma equação linear homogênea, é suficiente mostrar que a função $u|_{\gamma}$ é constante ao longo das características $x = x(t)$. No caso do problema (2.3)-(2.5) para a equação não homogênea, os dados iniciais devem ser tomados de acordo com a equação (2.4).

Observação 2.12. O problema de Cauchy é definido localmente, ou seja, em uma vizinhança de um ponto x_0 em γ . Caso contrário, como pode ser visto na Figura 2.1, as características que passam por um determinado ponto x podem cruzar γ duas ou mais vezes, atribuindo diferentes valores de u para este ponto. Assim, a solução para o problema (2.1)-(2.5) existe apenas para o dado inicial u_0 . Além disso, pode acontecer que o conjunto de todas as características que têm pontos em comum com a superfície inicial γ não cobre todo o aberto onde queremos resolver o problema de Cauchy. Nesse caso, não temos unicidade de solução para o problema de Cauchy.

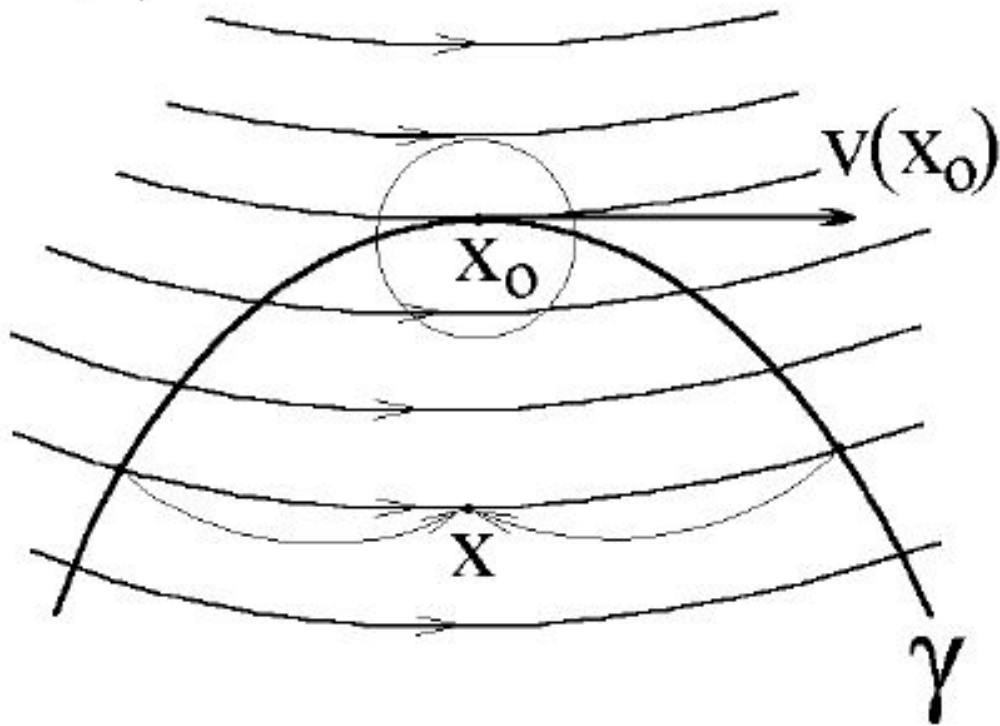


Figura 2.1: Exemplo de um ponto característico.

Definição 2.13. Dizemos que $x_0 \in \gamma$ é um **ponto característico** se o vetor $v(x_0)$ for paralelo à tangente em γ .

Observação 2.14. A existência e a unicidade de uma solução para um problema de Cauchy podem ser garantidas apenas na vizinhança de um ponto não característico de γ . EDPs lineares de primeira ordem podem ser impossíveis de serem resolvidas na vizinhança de um ponto característico mesmo quando cada característica intersecta γ em um único ponto, como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 2.15. Considere o problema de Cauchy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u|_{y=x^3} = x^2. \quad (2.6)$$

Como $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, então

$$1 \frac{\partial u}{\partial x} + 0 \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

logo o campo vetorial característico da EDP (2.6) é $v(x, y) = (1, 0)$. Como $\frac{dx}{dt} = 1$ e $\frac{dy}{dt} = 0$, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Assim, as características de (2.6) são as retas $y = C$, com $C \in \mathbb{R}$, logo cada característica intersecta γ em um único ponto. Além disso, como $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ e $x = y^{\frac{1}{3}}$, então

$$u(x, y) = y^{\frac{2}{3}}.$$

Observe que u não é solução clássica de (2.6), pois u não é de classe C^1 na reta $y = 0$. De fato, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{u(x, k) - u(x, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{k^{\frac{2}{3}}}{k} = \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{1}{k^{\frac{1}{3}}} = +\infty$$

e

$$\lim_{k \rightarrow 0^-} \frac{u(x, k) - u(x, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0^-} \frac{k^{\frac{2}{3}}}{k} = \lim_{k \rightarrow 0^-} \frac{1}{k^{\frac{1}{3}}} = -\infty,$$

logo $\nexists \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0)$.

Escrevendo $x = x' + y'$ e $y = x' - y'$, obtemos $x' = \frac{x + y}{2}$ e $y' = \frac{x - y}{2}$. Daí,

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y'} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial y'} = 0$$

e

$$u|_{\gamma} = (x' + y')^2,$$

onde $\gamma = \{(x', y') \in \mathbb{R}^2 : x' - y' = (x' + y')^3\}$ e $u(x', y') = (x' - y')^{\frac{2}{3}}$ não possui derivadas parciais em x' e nem em y' na reta $x' - y' = 0$.

Definição 2.16. A equação

$$L_{v(x,u)}[u] \equiv v_1(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \cdots + v_n(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_n} = f(x, u) \quad (2.7)$$

é chamada EDP **quasi-linear** de primeira ordem. Se na equação (2.7) todos os coeficientes v_i são independentes de u , ou seja, $v_i = v_i(x)$, então a EDP é chamada **semi-linear**.

Definição 2.17. O sistema

$$\begin{cases} x'_1 = v_1(x_1, \dots, x_n, u), \\ \vdots \\ x'_n = v_n(x_1, \dots, x_n, u), \\ u' = f(x_1, \dots, x_n, u). \end{cases} \quad (2.8)$$

é chamado de **sistema característico da equação quasi-linear** (2.7).

Definição 2.18. As soluções $(x, u) = (x(t), u(t)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ do sistema (2.8) são chamadas de *características* dessa equação.

Definição 2.19. Um *campo vetorial característico da equação quasi-linear* (2.7) é um campo vetorial de classe C^1 com componentes

$$(v_1(x, u), \dots, v_n(x, u), f(x, u))$$

no espaço $(n+1)$ -dimensional com coordenadas (x_1, \dots, x_n, u) .

Proposição 2.20. Se a hipersuperfície $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ de classe C^1 é o gráfico de uma função $u = u(x)$, então o vetor normal a essa superfície em (x, u) é $(\nabla_x u, -1) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, -1 \right)$.

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned} (v_1(x, u), \dots, v_n(x, u), f(x, u)) \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, -1 \right)}_{=(\nabla_x u, -1)} &= \sum_{i=1}^n v_i(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} - f(x, u) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto $(\nabla_x u, -1)$ é normal a M em (x, u) . ■

Teorema 2.21. Uma função $u = u(x) \in C^1(\Omega)$ é uma solução da equação (2.7) se, e somente se, o gráfico $M = \{(x, u(x)) : x \in \Omega\}$, que é uma hipersuperfície em \mathbb{R}^{n+1} , é tangente em todos os seus pontos ao campo vetorial característico (v_1, \dots, v_n, f) .

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned} u = u(x) \text{ é solução de (2.7)} &\Leftrightarrow (v_1, \dots, v_n, f) \cdot \underbrace{(\nabla_x u, -1)}_{\text{é normal em } (x, u)} = 0 \\ &\Leftrightarrow (v_1, \dots, v_n, f) \text{ é tangente a } M. \end{aligned}$$

■

No corolário a seguir e na sequência, assumiremos que o sistema característico está em conformidade com os pressupostos da existência padrão e teoremas de unicidade da teoria de EDOs.

Corolário 2.22. O gráfico de toda solução $u = u(x)$ da equação (2.7) é formado por características.

Demonstração. Como as características $(x(t), u(t))$ são tangentes ao campo vetorial característico, então toda característica que intersecta o gráfico de u em um ponto está inteiramente contida no gráfico de u . ■

Para o caso de uma equação quasi-linear, o problema de Cauchy (2.7), (2.5) pode ser resolvido geometricamente da seguinte forma: seja

$$\Gamma = \{(x, u_0(x)) : x \in \gamma\} \subset \mathbb{R}^{n+1}, \dim \Gamma = n,$$

o gráfico da função inicial $u_0 = u_0(x)$. Emitindo uma característica de cada ponto de Γ , obtemos alguma superfície M de codimensão um. Abaixo mostraremos que o ponto $(x_0, u_0(x_0))$ não é característico. A hipersuperfície M representa o gráfico da desconhecida solução $u = u(x)$ localmente, ou seja, em alguma vizinhança do ponto $(x_0, u_0(x_0)) \in \Gamma$.

Definição 2.23. *Um ponto $(x_0, u_0) \in \Gamma$ é chamado de **ponto característico** se o vetor $v(x_0, u_0)$ é tangente a γ neste ponto.*

Observação 2.24. *No caso de uma equação quasi-linear, não se questiona se $x_0 \in \gamma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é um ponto característico, pois o campo vetorial característico também depende de u . Neste caso, deve-se questionar se $(x_0, u_0(x_0)) \in \Gamma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é um ponto característico.*

Se $(x_0, u_0(x_0))$ não é um ponto característico, então o hiperplano T tangente a M neste ponto projeta-se isomorficamente sobre o x -espaço, pois o hiperplano T é formado pelas direções tangentes a Γ (essas projeções formam o hiperplano em \mathbb{R}^n tangente a γ) e o vetor característico $(v(x_0, u_0(x_0)), f(x_0, u_0(x_0)))$ (essa projeção é o vetor $v(x_0, u_0(x_0))$ transversal a γ). Consequentemente, localmente em uma vizinhança de $(x_0, u_0(x_0)) \in \Gamma$, a hipersuperfície M construída acima representa o gráfico de uma função suave $u = u(x)$, que é a solução desejada.

Capítulo 3

Soluções clássicas do problema de Cauchy e formação de singularidades

Neste capítulo, estudaremos solução clássica do problema de Cauchy, encontraremos o tempo maximal dessa solução. Além disso, abordaremos descontinuidade da solução ou das derivadas parciais dessa solução.

Considere o problema de Cauchy

$$u_t + \underbrace{f(u)_x}_{=f'(u)u_x} = 0, \quad (3.1)$$

$$u(0, x) = u_0(x). \quad (3.2)$$

A função f de (3.1) é chamada **função fluxo**.

Observação 3.1. *Seja $u = u(t, x)$ solução de (3.1). Como*

$$\frac{du}{ds} = \nabla u(t, x) \cdot (t'(s), x'(s)) = u_t + f'(u)u_x = 0,$$

então o sistema característico da EDP quasi-linear (3.1) é

$$\begin{cases} \frac{dt}{ds} = 1, \\ \frac{dx}{ds} = f'(u), \\ \frac{du}{ds} = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Observação 3.2. *Como $t'(s) = 1$ para todo $s \in [0, +\infty)$, então existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $t(s) = s + C$ para todo $s \in [0, +\infty)$. Além disso, $C \geq 0$, pois caso contrário teríamos que $t(0) = C < 0$ e isso contradiz $t \in [0, +\infty)$. Por (3.2), $0 \in t([0, +\infty))$. Então existe $\tilde{s} \in [0, +\infty)$ tal que $\tilde{s} + C = t(\tilde{s}) = 0$, logo $\tilde{s} = 0 = C$ e portanto $t(s) = s$ para todo*

$s \in [0, +\infty)$, ou seja, a variável independente s do sistema (3.3) coincide com a variável t do sistema (3.1).

Assim, (3.3) fica

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt} = f'(u), \\ \frac{du}{dt} = \frac{ds}{ds} = 0. \end{cases}$$

Nesse caso, $\gamma = \{(0, x) : x \in \mathbb{R}\}$ e $\Gamma = \{(0, y, u_0(y)) : y \in \mathbb{R}\}$.

Observação 3.3. Os pontos de γ não são característicos pois, caso contrário, o vetor $(1, f'(u))$ seria paralelo a γ . Assim, os vetores $(1, f'(u))$ e $(0, x)$ seriam linearmente dependentes para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, existiria $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $(1, f'(u)) = \lambda(0, x) = (0, \lambda x)$, o que é um absurdo.

Assim, podemos reescrever o sistema característico (3.3) (com os dados iniciais correspondentes a (3.2)) na forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f'(u), & x(0) = y, \\ \frac{du}{dt} = 0, & u(0, x(0)) = u(0, y) = u_0(y). \end{cases} \quad (3.4)$$

Como

$$\frac{d}{dt}(u(t, x(t))) = 0$$

para todo $t \in [0, +\infty)$, então $u(t, x(t))$ é constante para todo $t \in [0, +\infty)$, logo $u(t, x(t)) = u(0, x(0)) = u(0, y) = u_0(y)$ para todo $t \in [0, +\infty)$. Daí,

$$\begin{aligned} x'(t) = f'(u(t, x(t))) = f'(u_0(y)) &\Rightarrow \int_0^t x'(s) ds = \int_0^t f'(u_0(y)) ds \\ &\Rightarrow x(t) - y = f'(u_0(y))t \\ &\Rightarrow x(t) = y + f'(u_0(y))t. \end{aligned}$$

as soluções deste sistema estão na reta

$$u(t, x) = u_0(y), \quad x = y + f'(u_0(y))t. \quad (3.5)$$

Observação 3.4. Pelo Corolário 2.22, o gráfico da solução $u = u(t, x)$ do problema (3.1) – (3.2) é a união das características emitidas a partir dos pontos da curva inicial Γ . Assim, o gráfico de u consiste das retas (3.5). Portanto, a solução do problema (3.1)–(3.2) em diferentes instantes de tempo $t > 0$ (ou seja, as seções do gráfico da solução $u = u(t, x)$ deste problema por diferentes hiperplanos $t = \text{constante}$) pode ser construída da seguinte

forma: o gráfico da função inicial $u = u_0(x)$ deve ser transformado deslocando cada ponto (x, u) deste gráfico horizontalmente (ou seja, na direção do eixo x) com a velocidade $f'(u)$. Se $f'(u) = 0$, então o ponto (x, u) não se move. Se $f'(u) > 0$, o ponto se move para a direita; e, quanto maior $f'(u)$, mais rápido o movimento. Analogamente, no caso $f'(u) < 0$, o ponto (x, u) se move para a esquerda (ver Figura 3.1).

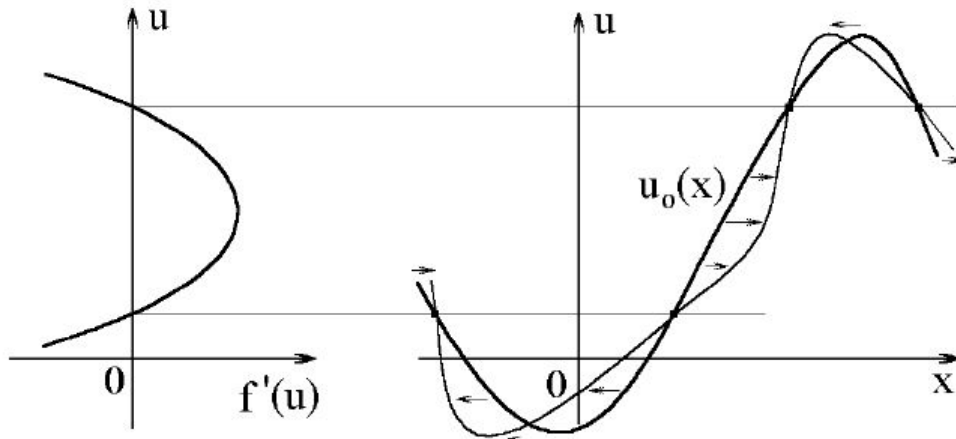


Figura 3.1: Evolução do gráfico inicial.

Observação 3.5. Pontos de u_0 que intersectam a mesma reta horizontal têm a mesma velocidade. De fato, sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ com $u_0(x_1) = u_0(x_2)$. Então $x_1'(0) = f'(u_0(x_1)) = f'(u_0(x_2)) = x_2'(0)$.

Observação 3.6. Os comprimentos dos segmentos horizontais que unem os pontos do gráfico permanecem inalterados. De fato, sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que $u_0(x_1) = u_0(x_2)$. Definamos $x_1(0) \equiv x_1$ e $x_2(0) \equiv x_2$. Pela equação (3.5), temos que

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1 + f'(u_0(x_1))t, \\ x_2(t) = x_2 + f'(u_0(x_2))t \end{cases}$$

para todo $t \in [0, +\infty)$. Como $f'(u_0(x_1)) = f'(u_0(x_2))$, temos que $x_1(t) - x_1 = x_2(t) - x_2$, ou seja, $x_2(t) - x_1(t) = x_2 - x_1$, logo $|x_2(t) - x_1(t)| = |x_2 - x_1|$ para todo $t \in [0, +\infty)$.

Observação 3.7. Em um determinado tempo $T > 0$, pode acontecer que a curva transformada deixe de representar o gráfico de uma função suave $u(T, x)$ na variável x . Considere a equação de Hopf

$$u_t + uu_x = 0$$

e duas partículas x_1, x_2 com $x_1 < x_2$ no instante $t = 0$. Se $u_0 = u_0(x)$ for uma função monótona não decrescente, então $u_0(x_1) \leq u_0(x_2)$ e conseqüentemente $u_0(x_1)t \leq u_0(x_2)t$ para todo $t \in [0, +\infty)$. Mostremos que as partículas $x_1 \equiv x_1(0)$ e $x_2 \equiv x_2(0)$ não colidem.

De fato, sejam

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1 + u_0(x_1)t, \\ x_2(t) = x_2 + u_0(x_2)t. \end{cases}$$

para todo $t \in [0, +\infty)$. Então

$$x_2(t) = x_2 + u_0(x_2)t > x_1 + u_0(x_1)t = x_1(t)$$

para todo $t \in [0, +\infty)$ e portanto x_1 e x_2 não colidem. Caso contrário, se a distribuição de velocidade inicial $u_0 = u_0(x)$ não for uma função monótona não decrescente, então existe $T > 0$ tal que $x_1(T) = x_2(T)$, ou seja, x_1 e x_2 colidem.

Podemos resolver o problema de Cauchy para a equação quasi-linear (3.1) diretamente, sem usar a teoria de EDPs quasi-lineares de primeira ordem apresentada acima. Suponhamos que já temos uma solução $u = u(t, x)$ de classe C^1 do problema (3.1) – (3.2).

Proposição 3.8. *A função $u = u(t, x)$ é constante ao longo das curvas integrais da equação diferencial ordinária*

$$\frac{dx}{dt} = f'(u(t, x)). \quad (3.6)$$

Demonstração. De fato, diferenciando a função $u = u(t, x)$ ao longo da curva integral $\{(t, x(t)) : t \in [0, +\infty)\}$, onde

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f'(u(s, x(s))) ds,$$

obtemos

$$\frac{d}{dt}(u(t, x(t))) = \nabla u(t, x) \cdot (1, x'(t)) = \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot \left(1, \frac{dx}{dt} \right) = u_t + f'(u)u_x = 0.$$

Portanto $u = u(t, x)$ é constante ao longo da curva integral $\{(t, x(t)) : t \in [0, +\infty)\}$. ■

Observação 3.9. *Seja $(t_0, x_0) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}$ com $x_0 \equiv x(t_0)$. Então a curva integral $\{(t, x(t)) : t \in [0, +\infty)\}$, onde*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f'(u(s, x(s))) ds,$$

passa por (t_0, x_0) . Como u é constante ao longo das curvas integrais, então as soluções de (3.6) são as retas $x = f'(u)t + C$, pois como

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f'(u(s, x(s))) ds = x_0 + \int_{t_0}^t f'(u(t_0, x_0)) ds = x_0 + f'(u(t_0, x_0))(t - t_0).$$

Seja $C \equiv x_0 - f'(u(t_0, x_0))t_0$. Então

$$x = f'(u(t_0, x_0))t + C. \quad (3.7)$$

Agora, seja $(0, y_0)$ o ponto de intersecção da reta (3.7) com o eixo x . Então

$$y_0 = C = x_0 - f'(u(t_0, x_0))t_0.$$

Como u é constante ao longo da reta (3.7), temos que

$$u(t_0, x_0) = u(0, y_0) = u_0(y_0) = u_0(x_0 - f'(u(t_0, x_0))t_0).$$

Como (t_0, x_0) é arbitrário, obtemos a seguinte identidade para a solução u do problema de Cauchy (3.1) – (3.2):

$$u(t, x) = u_0(x - f'(u(t, x))t). \quad (3.8)$$

Por outro lado, o problema de Cauchy (3.1)-(3.2) pode ser resolvido estendendo a solução $u(t, x)$ do ponto inicial $(0, y)$ pelo valor constante $u_0(y)$ ao longo da reta

$$y = x - f'(u_0(y))t, \quad (3.9)$$

ou seja, $u(t, x) = u_0(y)$ para quaisquer t, x que satisfazem (3.9). Como $y = y(t, x)$, obtemos

$$u(t, x) = u_0(y(t, x)). \quad (3.10)$$

Nesse caso, estender a solução se reduz ao problema de encontrar o aberto cuja equação (3.9) com a incógnita y pode ser resolvida de maneira única.

Teorema 3.10. *Sejam $f \in C^2(\mathbb{R})$ e $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$. Então existem $T > 0$ e uma única solução $u = u(t, x) \in C^1([0, T] \times \mathbb{R})$ do problema de Cauchy (3.1)-(3.2).*

Demonstração. Definamos

$$\Phi(t, x, u) \equiv u - u_0(x - f'(u)t).$$

Então

$$\Phi_t(t, x, u) = u'_0(x - f'(u)t)f'(u),$$

$$\Phi_x(t, x, u) = -u'_0(x - f'(u)t)$$

e

$$\Phi_u(t, x, u) = 1 + u'_0(x - f'(u)t)f''(u)t,$$

que são contínuas, logo Φ é de classe C^1 . Como

$$\Phi(0, x, u_0(x)) = u_0(x) - u_0(x) = 0$$

e

$$\Phi_u(0, x, u_0(x)) = 1 \neq 0,$$

então para cada $x \in \mathbb{R}$, o Teorema da Função Implícita garante a existência de $T_1 > 0$, $\varepsilon > 0$ e uma única função $u = u(t, \tilde{x}) \in C^1([0, T_1) \times (x - \varepsilon, x + \varepsilon))$ tais que $\Phi(t, \tilde{x}, u(t, \tilde{x})) = 0$ para todo $(t, \tilde{x}) \in [0, T_1) \times (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, ou seja, $u = u_0(\tilde{x} - f'(u)t)$ para todo $(t, \tilde{x}) \in [0, T_1) \times (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Pela unicidade da solução, segue que

$$u = u_0(x - f'(u)t) \quad \forall (t, x) \in [0, T_1) \times \mathbb{R}.$$

Por outro lado, como

$$\Phi_u(0, x, u) = 1 > 0$$

e Φ_u é contínua, existe $T_2 > 0$ tal que

$$\Phi_u(t, x, u(t, x)) > 0 \quad \forall (t, x) \in [0, T_2) \times \mathbb{R},$$

ou seja,

$$1 + u'_0(x - f'(u)t)f''(u)t > 0 \quad \forall (t, x) \in [0, T_2) \times \mathbb{R}.$$

Definamos

$$T \equiv \min\{T_1, T_2\} > 0.$$

Então

$$1 + u'_0(x - f'(u)t)f''(u)t > 0 \quad \forall (t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R}. \quad (3.11)$$

Além disso, para todo $(t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R}$,

$$u_t(t, x) = -u'_0(x - f'(u(t, x))t)(f''(u(t, x))u_t(t, x)t + f'(u(t, x)))$$

$$u_x(t, x) = u'_0(x - f'(u(t, x))t)(1 - f''(u(t, x))u_x(t, x)t),$$

logo

$$u_t(t, x) = -\frac{u'_0(x - f'(u(t, x))t)f'(u(t, x))}{1 + f''(u(t, x))u'_0(x - f'(u(t, x))t)t}, \quad (3.12)$$

$$u_x(t, x) = \frac{u'_0(x - f'(u(t, x))t)}{1 + f''(u(t, x))u'_0(x - f'(u(t, x))t)t}. \quad (3.13)$$

Consequentemente

$$u_t + f'(u)u_x = 0 \quad \text{e} \quad u(0, x) = u_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

■

Proposição 3.11. *Sejam $f \in C^2(\mathbb{R})$ e $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$. Então a função $u_0 \circ y$, onde $y = y(t, x)$ é dada por $y = x - f'(u_0(y))t$, é uma solução de classe C^1 do problema de Cauchy (3.1)-(3.2).*

Demonstração. De fato,

$$y_t = -f''(u_0(y))u'_0(y)y_t t - f'(u_0(y)) \Rightarrow y_t = \frac{-f'(u_0(y))}{1 + f''(u_0(y))u'_0(y)t},$$

$$y_x = 1 - f''(u_0(y))u'_0(y)y_x t \Rightarrow y_x = \frac{1}{1 + f''(u_0(y))u'_0(y)t},$$

logo $y \in C^1$ e conseqüentemente $u_0 \circ f \in C^1$.

Além disso,

$$(u_0 \circ y)_t + f'(u_0 \circ y)(u_0 \circ y) = u'_0(y)y_t + f'(u_0(y))u'_0(y)y_x = 0$$

e

$$(u_0 \circ y)(0, x) = u_0(y(0, x)) = u_0(x).$$

■

Observação 3.12. *Pelo Teorema 3.10, se $f \in C^2(\mathbb{R})$, $u_0, y \in C^1(\mathbb{R})$, e $u_0(y(t, x))$ é solução do problema de Cauchy (3.1)-(3.2), então as equações (3.8) e (3.10) definem a mesma solução desse problema.*

A partir daqui, denotaremos T como sendo o tempo maximal de solução de classe C^1 do problema de Cauchy (3.1)-(3.2). Por (3.11), pela Proposição 3.11 e pela Observação 3.12,

$$1 > -f''(u_0(y))u'_0(y)t \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \forall t \in [0, +\infty),$$

logo existe $\sup_{y \in \mathbb{R}} (-f''(u_0(y))u'_0(y)t)$. Daí,

$$1 \geq \sup_{y \in \mathbb{R}} (-f''(u_0(y))u'_0(y)t) = -t \inf_{y \in \mathbb{R}} (f''(u_0(y))u'_0(y)).$$

Se $\inf_{y \in \mathbb{R}} (f''(u_0(y))u'_0(y)) < 0$, então

$$0 \leq t \leq \frac{1}{-\inf_{y \in \mathbb{R}} (f''(u_0(y))u'_0(y))}$$

e assim definimos

$$T \equiv \frac{1}{-\inf_{y \in \mathbb{R}} (f''(u_0(y))u'_0(y))} = \frac{1}{-\inf_{y \in \mathbb{R}} \left(\frac{d}{dy} (f'(u_0(y))) \right)}. \quad (3.14)$$

Por outro lado, se $\inf_{y \in \mathbb{R}} (f''(u_0(y))u'_0(y)) \geq 0$, então definimos $T \equiv +\infty$.

Exemplo 3.13. (Equação do Transporte). *Seja $a \in \mathbb{R}$ fixado. Então*

$$u(t, x) \equiv u_0(x - at)$$

é a única solução clássica do problema de Cauchy em $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$ do problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t + au_x = 0, \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases} \quad (3.15)$$

onde $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$.

Proposição 3.14. *Sejam $f \in C^2(\mathbb{R})$ e $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$. Se $\inf_{y \in \mathbb{R}} (f''(u_0(y))u_0'(y)) = -\infty$, então não existe uma faixa $\Pi_T = (0, T) \times \mathbb{R}$, com $T > 0$, tal que existe uma solução clássica do problema de Cauchy (3.1)-(3.2) nessa faixa.*

Demonstração. De fato, se existisse $T > 0$ tal que $u = u(t, x)$ fosse uma solução clássica do problema de Cauchy (3.1)-(3.2) na faixa $(0, T) \times \mathbb{R}$, então por (3.14), teríamos que $\inf_{y \in \mathbb{R}} (f''(u_0(y))u_0'(y)) \in (-\infty, 0)$, absurdo. ■

Veremos a seguir um exemplo de singularidade de uma solução do problema de Cauchy.

Exemplo 3.15. *Considere o problema de Cauchy abaixo na equação de Hopf, ou seja,*

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, \\ u(0, x) = -x. \end{cases}$$

Então $u(t, x) \equiv -\frac{x}{1-t}$. Então pelo Teorema 3.10, u é a única solução clássica desse problema na faixa $(0, 1) \times \mathbb{R}$. Claramente, $(1, x)$ é uma singularidade de u para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3.16. *Considere o problema de Cauchy abaixo na equação de Hopf, ou seja,*

$$u_t + uu_x = 0, \quad u(0, x) = u_0(x) \quad (3.16)$$

com

$$u_0(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \leq -3, \\ -\frac{x^2 + 6x + 1}{4} & \text{se } -3 < x < -1, \\ -x & \text{se } -1 \leq x \leq 1, \\ \frac{x^2 - 6x + 1}{4} & \text{se } 1 < x < 3, \\ -2 & \text{se } x \geq 3. \end{cases}$$

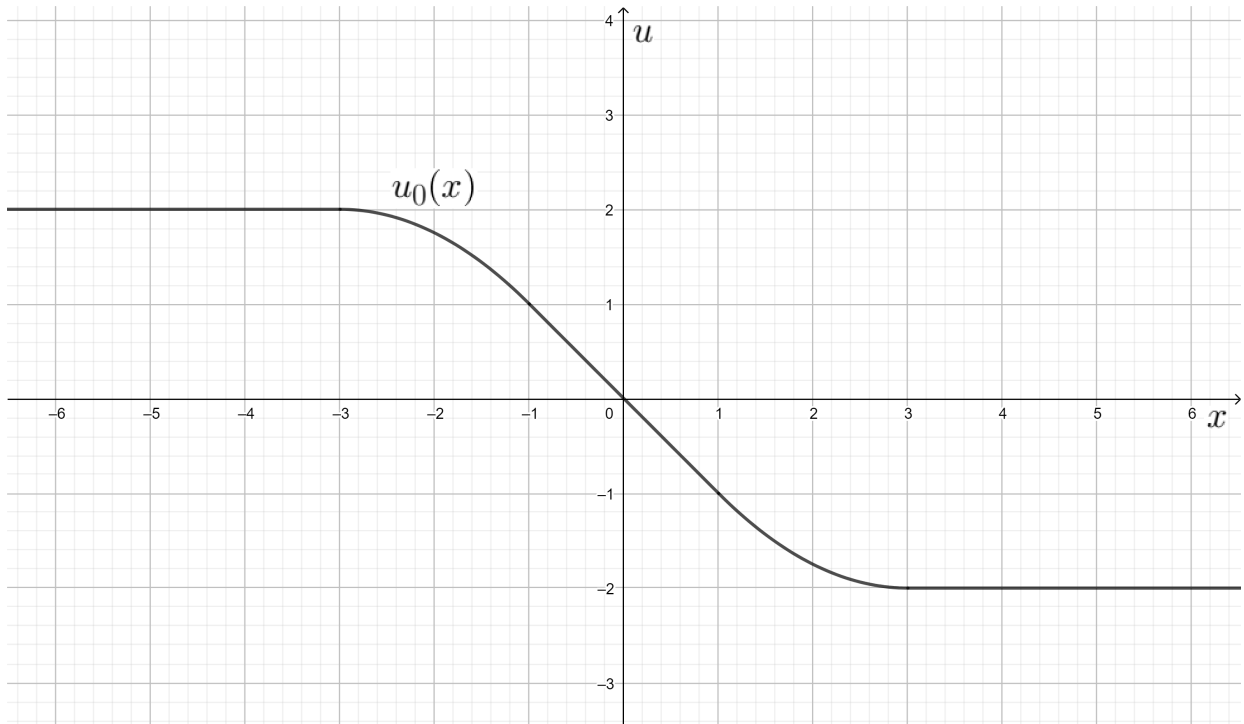


Figura 3.2: Gráfico de u_0 .

Então

$$u'_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < -3, \\ -\frac{x+3}{2} & \text{se } -3 < x < -1, \\ -1 & \text{se } -1 < x < 1, \\ \frac{x-3}{2} & \text{se } 1 < x < 3, \\ 0 & \text{se } x > 3. \end{cases}$$

AFIRMAÇÃO 1: u_0 é diferenciável.

De fato,

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{u_0(x) - u_0(-3)}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{2 - 2}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{0}{x + 3} = 0,$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{u_0(x) - u_0(-3)}{x + 3} &= \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{-\frac{x^2 + 6x + 1}{4} - 2}{x + 3} \\ &= -\frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2 + 6x + 9}{x + 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{(x + 3)^2}{x + 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3^+} (x + 3) \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{u_0(x) - u_0(-1)}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-\frac{x^2 + 6x + 1}{4} - 1}{x + 1} \\
&= -\frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 6x + 5}{x + 1} \\
&= -\frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 5)(x + 1)}{x + 1} \\
&= -\frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow -1} (x + 5) \\
&= -1,
\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{u_0(x) - u_0(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x - 1}{x + 1} = -\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{x + 1} = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{u_0(x) - u_0(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x + 1}{x - 1} = -\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1}{x - 1} = -1,$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{u_0(x) - u_0(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x^2 - 6x + 1}{4} + 1}{x - 1} \\
&= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 1} \\
&= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 5)(x - 1)}{x - 1} \\
&= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 1} (x - 5) \\
&= -1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{u_0(x) - u_0(3)}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{x^2 - 6x + 1}{4} + 2}{x - 3} \\
&= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3} \\
&= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)^2}{x - 3} \\
&= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) \\
&= 0
\end{aligned}$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{u_0(x) - u_0(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-2 + 2}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{0}{x - 3} = 0.$$

Logo $u'_0(-3) = 0$, $u'_0(-1) = -1$, $u'_0(1) = -1$ e $u'_0(3) = 0$.

AFIRMAÇÃO 2: u'_0 é contínua.

De fato,

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} u'_0(x) = \lim_{x \rightarrow -3} 0 = 0 = u'_0(-3),$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} u'_0(x) = - \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{2} = 0 = u'_0(-3),$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} u'_0(x) = - \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+3}{2} = -1 = u'_0(-1),$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} u'_0(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (-1) = -1 = u'_0(-1),$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} u'_0(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (-1) = -1 = u'_0(1),$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} u'_0(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3}{2} = -1 = u'_0(1),$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} u'_0(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{2} = 0 = u'_0(3)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} u'_0(x) = \lim_{x \rightarrow 3} 0 = 0 = u'_0(3),$$

então

$$\lim_{x \rightarrow -3} u'_0(x) = u'_0(-3), \quad \lim_{x \rightarrow -1} u'_0(x) = u'_0(-1), \quad \lim_{x \rightarrow 1} u'_0(x) = u'_0(1) \quad e \quad \lim_{x \rightarrow 3} u'_0(x) = u'_0(3).$$

AFIRMAÇÃO 3: $|u'_0(x)| \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

De fato,

$$\begin{aligned} -3 < x < -1 &\Rightarrow 0 < x+3 < 2 \\ &\Rightarrow -2 < -(x+3) < 0 \\ &\Rightarrow -1 < \underbrace{\frac{x+3}{2}}_{=u'_0(x)} < 0 < 1 \\ &\Rightarrow |u'_0(x)| < 1 \end{aligned}$$

e

$$1 < x < 3 \Rightarrow -2 < x-3 < 0 \Rightarrow -1 < \underbrace{\frac{x-3}{2}}_{=u'_0(x)} < 0 < 1 \Rightarrow |u'_0(x)| < 1.$$

Como $f''(u) = 1$ para todo $u \in \mathbb{R}$, então

$$T = \frac{1}{-\inf_{y \in \mathbb{R}} u'_0(y)} = \frac{1}{-(-1)} = 1.$$

Ainda, como $f \in C^2(\mathbb{R})$ e $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$, então existe uma única solução $u = u(t, x) \in C^1([0, 1] \times \mathbb{R})$ de (3.16). Agora, seja Φ como na demonstração do Teorema 3.10. Nesse caso,

$$\Phi(t, x, u) \equiv u - u_0(x - ut).$$

Então Φ é de classe C^1 . Além disso,

$$\Phi(1, x, u) = u - u_0(x - u) = \begin{cases} u - 2 & \text{se } x - u \leq -3, \\ u + \frac{(x - u)^2 + 6(x - u) + 1}{4} & \text{se } -3 < x - u < -1, \\ u + x & \text{se } -1 \leq x - u \leq 1, \\ u - \frac{(x - u)^2 - 6(x - u) + 1}{4} & \text{se } 1 < x - u < 3, \\ u + 2 & \text{se } x - u \geq 3 \end{cases}$$

e

$$\Phi_u(1, x, u) = 1 + u'_0(x - u) = \begin{cases} 1 & \text{se } x - u < -3, \\ -\frac{x - u + 1}{2} & \text{se } -3 < x - u < -1, \\ 0 & \text{se } -1 < x - u < 1, \\ \frac{x - u - 1}{2} & \text{se } 1 < x - u < 3, \\ 1 & \text{se } x - u > 3. \end{cases}$$

Como

$$\Phi(1, x, 2) = 0 \quad e \quad \Phi_u(1, x, 2) = 1 \neq 0 \quad \forall x \in (-\infty, -1],$$

$$\Phi(1, x, x + 1 + 2\sqrt{-x}) = 0 \quad e \quad \Phi_u(1, x, x + 1 + 2\sqrt{-x}) = -\sqrt{-x} \neq 0 \quad \forall x \in (-1, 0),$$

$$\Phi(1, x, x - 1 - 2\sqrt{x}) = 0 \quad e \quad \Phi_u(1, x, x - 1 - 2\sqrt{x}) = \sqrt{x} \neq 0 \quad \forall x \in (0, 1),$$

$$\Phi(1, x, -2) = 0 \quad e \quad \Phi_u(1, x, -2) = 1 \neq 0 \quad \forall x \in [1, +\infty),$$

então para cada $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, o Teorema da Função Implícita nos garante a existência de $\varepsilon_j > 0$, $j = 1, 2, 3, 4$, de modo que

$$(x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1) \subset (-\infty, -1], \quad (x - \varepsilon_2, x + \varepsilon_2) \subset (-1, 0),$$

$$(x - \varepsilon_3, x + \varepsilon_3) \subset (0, 1), \quad (x - \varepsilon_4, x + \varepsilon_4) \subset [1, +\infty),$$

e uma única $u_j(1, \tilde{x}) \in C^1((x - \varepsilon_j, x + \varepsilon_j))$ tal que $\Phi(1, \tilde{x}, u_j(1, \tilde{x})) = 0$, ou seja, $u_j(1, \tilde{x}) = u_0(\tilde{x} - u_j(1, \tilde{x}))$ para todo $\tilde{x} \in (x - \varepsilon_j, x + \varepsilon_j)$ e $j = 1, 2, 3, 4$. Pela unicidade da solução, existe uma única $u(1, x) \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ tal que

$$u(1, x) = u_0(x - u(1, x)) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Assim, pela unicidade de solução, para todo $(t, x) \in ([0, 1] \times \mathbb{R}) \setminus (\{1\} \times \{0\})$,

$$u(t, x) = u_0(y), \quad \text{onde } y = x - f'(u_0(y))t = x - u_0(y)t. \quad (3.17)$$

Suponhamos que $y \leq -3$. Então $u_0(y) = 2$, logo $x - 2t = y \leq -3$ e conseqüentemente $x \leq 2t - 3$.

Suponhamos que $y \geq 3$. Então $u_0(y) = -2$, logo $x + 2t = y \geq 3$ e conseqüentemente $x \geq -2t + 3$.

Observe que as retas $y = x - 2t$ e $y = x + 2t$ se intersectam quando $t = 0$.

Suponhamos que $y \in (-3, -1)$. Então $u_0(y) = -\frac{y^2 + 6y + 1}{4}$, logo

$$y = x + \frac{y^2 + 6y + 1}{4}t \Leftrightarrow ty^2 + (6t - 4)y + (4x + t) = 0.$$

Se $t = 0$, então $y = x$. Se $t \neq 0$, uma vez que

$$(6t-4)^2 - 4t(4x+t) = 36t^2 - 48t + 16 - 16tx - 4t^2 = 32t^2 - 16tx - 48t + 16 = 16(2t^2 - tx - 3t + 1),$$

temos que

$$y = \frac{-3t + 2 \pm 2\sqrt{2t^2 - tx - 3t + 1}}{t} \quad \text{se } x \leq 2t - 3 + \frac{1}{t}.$$

Mas

$$\begin{aligned} -3 < \frac{-3t + 2 \pm 2\sqrt{2t^2 - tx - 3t + 1}}{t} < -1 &\Leftrightarrow -3t < -3t + 2 \pm 2\sqrt{2t^2 - tx - 3t + 1} \\ &< -t \\ &\Leftrightarrow -2 < \pm 2\sqrt{2t^2 - tx - 3t + 1} < 2t - 2 \\ &\Leftrightarrow -1 < \pm\sqrt{2t^2 - tx - 3t + 1} < t - 1 \leq 0, \end{aligned}$$

logo

$$y = \frac{-3t + 2 - 2\sqrt{2t^2 - tx - 3t + 1}}{t} \quad \text{se } 2t - 3 < x < 2t - 3 + \frac{1}{t}.$$

Suponhamos que $y \in (1, 3)$, então $u_0(y) = \frac{y^2 - 6y + 1}{4}$, logo

$$y = x - \frac{y^2 - 6y + 1}{4}t \Leftrightarrow ty^2 + (4 - 6t)y + (t - 4x) = 0.$$

Se $t = 0$, então $y = x$. Se $t \neq 0$, uma vez que

$$(4-6t)^2 - 4t(t-4x) = 16 - 48t + 36t^2 - 4t^2 + 16tx = 16 - 48t + 32t^2 + 16tx = 16(1 - 3t + 2t^2 + tx),$$

temos que

$$y = \frac{3t - 2 \pm 2\sqrt{1 - 3t + 2t^2 + tx}}{t} \quad \text{se } x \geq -2t + 3 - \frac{1}{t}.$$

Mas

$$\begin{aligned} 1 < \frac{3t - 2 \pm 2\sqrt{1 - 3t + 2t^2 + tx}}{t} < 3 &\Leftrightarrow t < 3t - 2 \pm 2\sqrt{1 - 3t + 2t^2 + tx} < 3t \\ &\Leftrightarrow -2t + 2 < \pm 2\sqrt{1 - 3t + 2t^2 + tx} < 2 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq -t + 1 < \sqrt{1 - 3t + 2t^2 + tx} < 1, \end{aligned}$$

logo

$$y = \frac{3t - 2 + 2\sqrt{1 - 3t + 2t^2 + tx}}{t} \quad \text{se} \quad -2t + 3 - \frac{1}{t} < x < -2t + 3.$$

Observe que as retas $y = x + \frac{y^2 + 6y + 1}{4}t$ e $y = x - \frac{y^2 - 6y + 1}{4}t$ não se intersectam. Suponhamos que $y \in [-1, 1]$. Então $u_0(y) = -y$ e conseqüentemente $y = x + yt$, ou seja, $y(1 - t) = x$. Se $t = 1$, então $x = 0$. Se $t \neq 1$, uma vez que

$$|x| = |y(1 - t)| = |y||1 - t| \stackrel{t \leq 1}{\leq} |y|(1 - t) \leq 1 - t \Leftrightarrow t - 1 \leq x \leq 1 - t,$$

segue que

$$y = \frac{x}{1 - t}, \quad \text{se} \quad (t, x) \in [0, 1) \times [t - 1, 1 - t].$$

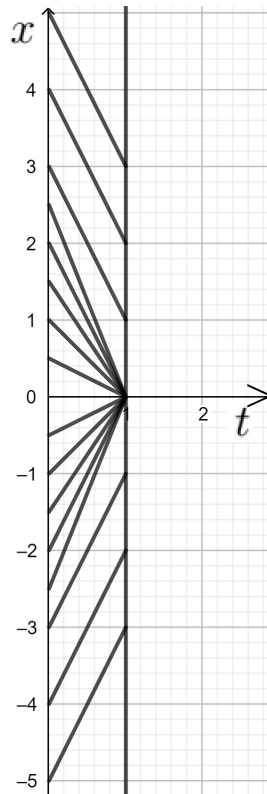


Figura 3.3: Gráfico das retas $y = x - u_0(y)t$.

Logo

$$u(1, x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \leq -1, \\ 1 + x + 2\sqrt{-x} & \text{se } -1 < x < 0, \\ \text{qualquer ponto do segmento } [-1, 1] & \text{se } x = 0, \\ -1 + x - 2\sqrt{x} & \text{se } 0 < x < 1, \\ -2 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Observe que u não é contínua em $(1, 0)$, pois

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} u(1, x) = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x + 2\sqrt{-x}) = 1 \neq -1 = \lim_{x \rightarrow 0} (-1 + x - 2\sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow 0^+} u(1, x).$$

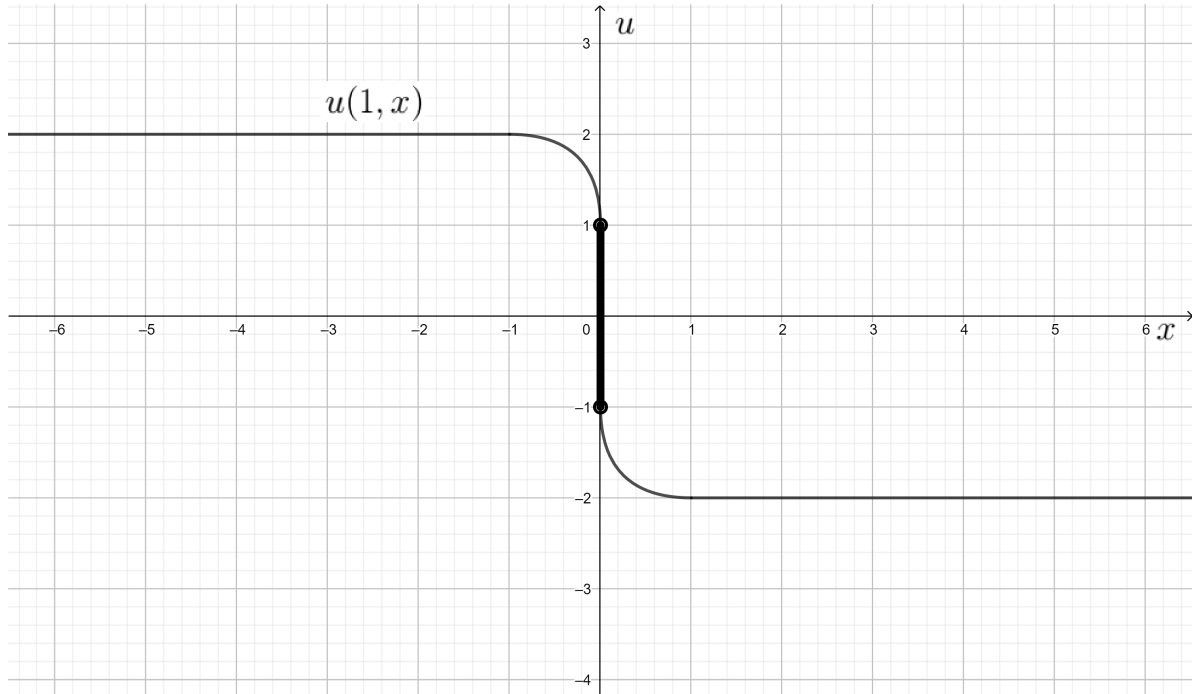


Figura 3.4: Gráfico de $u(1, x)$.

Definição 3.17. Sejam $B \subset \mathbb{R}$ aberto e $(t_0, x_0) \in [0, +\infty) \times \partial B$. Dizemos que (t_0, x_0) é uma **descontinuidade forte** se

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} u(t_0, x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} u(t_0, x).$$

Proposição 3.18. Sejam $f \in C^2(\mathbb{R})$ e $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$. Se $f''(u_0(y))u_0'(y) = I$ para todo $y \in [y_-, y_+]$, onde

$$I = \inf_{y \in \mathbb{R}} (f''(u_0(y))u_0'(y)) < 0,$$

então todas as retas de (3.9) com $y \in [y_-, y_+]$ se intersectam em um único ponto.

Demonstração. Sejam $y_1, y_2 \in [y_-, y_+]$ com $y_1 \neq y_2$ e

$$\begin{cases} y_1 = x - f'(u_0(y_1))t, \\ y_2 = x - f'(u_0(y_2))t \end{cases}$$

duas retas. Como

$$\frac{d}{dy}(f'(u_0(y))) = f''(u_0(y))u_0'(y) < 0 \quad \forall y \in [y_-, y_+],$$

então $f' \circ u_0$ é estritamente decrescente em $[y_-, y_+]$ e conseqüentemente

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -f'(u_0(y_1)) \\ 1 & -f'(u_0(y_2)) \end{pmatrix} = f'(u_0(y_1)) - f'(u_0(y_2)) \neq 0.$$

Assim, a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -f'(u_0(y_1)) \\ 1 & -f'(u_0(y_2)) \end{pmatrix}$$

é invertível e a sua inversa é

$$\frac{1}{f'(u_0(y_1)) - f'(u_0(y_2))} \begin{pmatrix} -f'(u_0(y_2)) & f'(u_0(y_1)) \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & -f'(u_0(y_1)) \\ 1 & -f'(u_0(y_2)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} &= \frac{1}{f'(u_0(y_1)) - f'(u_0(y_2))} \begin{pmatrix} -f'(u_0(y_2)) & f'(u_0(y_1)) \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y_1 f'(u_0(y_1)) - y_2 f'(u_0(y_2))}{f'(u_0(y_1)) - f'(u_0(y_2))} \\ \frac{y_2 - y_1}{f'(u_0(y_1)) - f'(u_0(y_2))} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

■

Definição 3.19. *Seja T dado por (3.14). Dizemos que (T, x_0) é uma **descontinuidade fraca** de $u = u(t, x)$ se $x \mapsto u(T, x)$ é contínua em x_0 mas não é diferenciável em x_0 .*

Capítulo 4

Soluções generalizadas de equações quasilineares

Neste capítulo, apresentaremos a definição e alguns resultados de solução generalizada da equação $u_t + f'(u)u_x = 0$. Além disso, usaremos a teoria desenvolvida nesse capítulo para construirmos uma solução $u = u(t, x)$ das equações $u_t + (u^3)_x = 0$ e $u_t + (\sin u)_x = 0$, ambas com $u(0, x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Teorema 4.1. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto, $u = u(t, x) \in C^1(\Omega)$ e $f \in C^1(\mathbb{R})$. Então $u = u(t, x)$ é uma solução clássica da equação*

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad (4.1)$$

na faixa $\Omega = \Pi_T \equiv (0, T) \times \mathbb{R}$ se, e somente se,

$$\int_{\Omega} (u\varphi_t + f(u)\varphi_x) dt dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_C^\infty(\Omega). \quad (4.2)$$

Demonstração. Suponhamos que u é solução clássica de (4.1) na faixa Π_T . Então para cada $\varphi \in C_C^\infty(\Omega)$, existe G aberto e limitado com $\overline{G} \subset \Omega$ tal que $\varphi(\Omega \setminus G) = \{0\}$. Como G é aberto, então $\partial G \subset \Omega \setminus G$, logo $\varphi(\partial G) = \{0\}$. Além disso, como $\varphi(\Omega \setminus G) = \{0\}$, então $\varphi_t(t, x) = 0$ e $\varphi_x(t, x) = 0$ para todo $(t, x) \in \Omega \setminus G$. Daí, temos que

$$\int_{\Omega} (u\varphi_t + f(u)\varphi_x) dt dx = \int_G (u\varphi_t + f(u)\varphi_x) dt dx = - \int_G (u_t + f(u)_x)\varphi dt dx = 0.$$

Suponhamos que $u \in C^1(\Pi_T)$ é uma solução generalizada de (4.1). Então

$$0 = \int_{\Omega} (u\varphi_t + f(u)\varphi_x) dt dx = - \int_{\Omega} (u_t + f(u)_x)\varphi dt dx \quad \forall \varphi \in C_C^\infty(\Omega).$$

Pela Proposição 1.12, segue que $u_t + f(u)_x = 0$ para todo $(t, x) \in \Omega$. ■

Definição 4.2. Dizemos que u é uma *solução generalizada* (ou *solução fraca*) da equação (4.1) se $u \in L^1_{loc}$ e u satisfaz (4.2).

Proposição 4.3. Sejam $f \in C^2(\mathbb{R})$ e $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$. Então existe uma solução generalizada do problema de Cauchy (3.1)-(3.2).

Demonstração. Pelo Teorema 3.10, existem $T > 0$ e uma única solução clássica $u = u(t, x)$ do problema de Cauchy (3.1)-(3.2) em $(0, T) \times \mathbb{R}$. Pelo Teorema 4.1 segue que u satisfaz (4.2). Além disso, como $u \in C^1((0, T) \times \mathbb{R})$, então $u \in L^1_{loc}((0, T) \times \mathbb{R})$. Portanto u é uma solução generalizada. ■

Exemplo 4.4. (Equação do transporte). A solução $u(t, x) = u_0(x - at)$ é uma solução generalizada do problema de Cauchy (3.15).

Proposição 4.5. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto e limitado, $u = u(t, x) \in C^1(\Omega)$, $f \in C^1(\mathbb{R})$ e $\vec{v} = (u, f(u))$ o campo vetorial associado a u definido em Ω . Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) u é uma solução clássica da equação (4.1).

(ii) $\operatorname{div}_{(t,x)} \vec{v} = 0$.

(iii)

$$\int_{\partial G} (\vec{v}, \nu) \, dS = 0 \quad \forall G \subset \Omega \text{ aberto}, \quad (4.3)$$

onde ν é o vetor normal unitário apontando para fora de ∂G .

Demonstração. (i) \Rightarrow (ii) : De fato,

$$\operatorname{div}_{(t,x)} \vec{v} = u_t + f(u)_x \stackrel{\text{Hipótese}}{=} 0.$$

(ii) \Rightarrow (iii) : De fato, seja G um aberto de Ω . Então

$$\int_{\partial G} (\vec{v}, \nu) \, dS = \int_G \operatorname{div}_{(t,x)} \vec{v} \, dt dx \stackrel{\text{Hipótese}}{=} 0.$$

(iii) \Rightarrow (i) : De fato,

$$\int_{\Omega} (u_t + f(u)_x) \, dt dx = \int_{\Omega} \operatorname{div}_{(t,x)} \vec{v} \, dt dx = \int_{\partial \Omega} (\vec{v}, \nu) \, dS \stackrel{\text{Hipótese}}{=} 0.$$

Portanto segue da Proposição 1.12 que

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad \forall (t, x) \in \Omega. \quad \blacksquare$$

Definição 4.6. A identidade (4.3) é chamada *lei de conservação*.

Definição 4.7. Seja $u = u(t, x)$ uma solução generalizada suave por partes da equação (4.1) definida no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Suponhamos que Ω está dividido em duas partes Ω_- e Ω_+ , separadas por uma curva de descontinuidade Γ . Suponhamos que $u \in C^1(\Omega_-) \cap C^1(\Omega_+)$ e que existem limites laterais u_- e u_+ de u quando aproximamos de Γ por Ω_- e Ω_+ , respectivamente. Para cada $(t_0, x_0) \in \Gamma$, definimos

$$u_-(t_0, x_0) \equiv \lim_{\substack{(t,x) \rightarrow (t_0, x_0) \\ (t,x) \in \Omega_-}} u(t, x) \quad e \quad u_+(t_0, x_0) \equiv \lim_{\substack{(t,x) \rightarrow (t_0, x_0) \\ (t,x) \in \Omega_+}} u(t, x).$$

Essas descontinuidades são chamadas de **descontinuidades de tipo 1**, ou **descontinuidades fortes**, ou **saltos**.

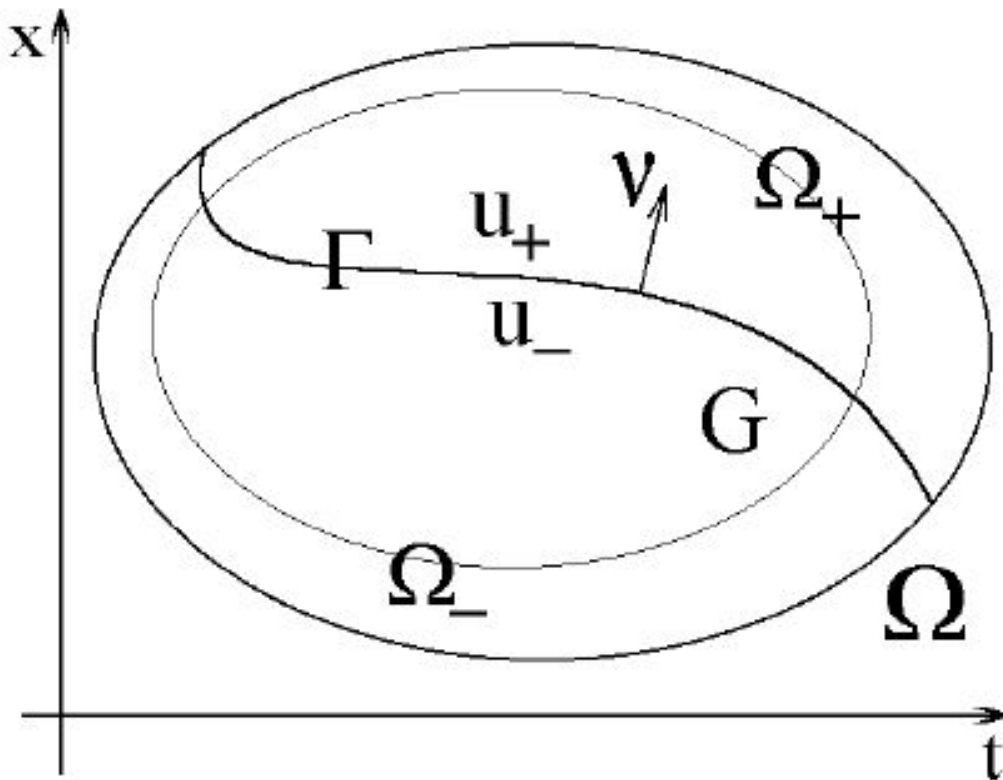


Figura 4.1: Descontinuidade forte (salto).

Veremos a seguir uma caracterização das soluções generalizadas.

Teorema 4.8. Sejam $\Omega \subset [0, +\infty) \times \mathbb{R}$ um aberto dividido em duas partes Ω_- e Ω_+ separadas pela curva de descontinuidade Γ de tipo 1 dada pelo gráfico de uma função $x = x(t)$ de classe C^1 , $f \in C^1(\mathbb{R})$ e $u = u(t, x)$, definida em Ω , solução clássica em $\Omega_- \cup \Omega_+$. Então u é uma solução generalizada suave por partes da equação (4.1) se, e somente se, satisfaz

$$\frac{dx}{dt} = \frac{[f(u)]}{[u]} \equiv \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-}, \quad (4.4)$$

em Γ , onde $[u] \equiv u_+ - u_-$ é o salto de u em Γ e $[f(u)] \equiv f(u_+) - f(u_-)$ é o salto de $f = f(u)$.

Além disso, a relação $\frac{dx}{dt} = -\frac{\cos(\nu, t)}{\cos(\nu, x)}$, onde $\nu = (\cos(\nu, t), \cos(\nu, x))$ é o vetor normal unitário apontando para fora de $\partial\Omega_-$, pode ser reescrita na forma equivalente

$$[u] \cos(\nu, t) + [f(u)] \cos(\nu, x) = 0. \quad (4.5)$$

Demonstração. Suponhamos que u é uma solução generalizada suave por partes de (4.1). Então para cada $\varphi \in C_C^\infty(\Omega)$, existe G aberto e limitado com $\bar{G} \subset \Omega$ tal que $\varphi(\Omega \setminus G) = \{0\}$. Como u é uma solução generalizada suave por partes de (4.1), então

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} (u\varphi_t + f(u)\varphi_x) dt dx \\ &= \int_{\Omega_- \cap G} (u\varphi_t + f(u)\varphi_x) dt dx + \underbrace{\int_{\Gamma \cap G} (u\varphi_t + f(u)\varphi_x) dt dx}_{=0} \\ &\quad + \int_{\Omega_+ \cap G} (u\varphi_t + f(u)\varphi_x) dt dx \\ &= \left(- \underbrace{\int_{\Omega_- \cap G} (u_t + f(u)_x)\varphi dt dx}_{=0} + \int_{\Gamma \cap G} (u_- \cos(\nu, t) + f(u_-) \cos(\nu, x))\varphi dS \right) + \\ &\quad + \left(- \underbrace{\int_{\Omega_+ \cap G} (u_t + f(u)_x)\varphi dt dx}_{=0} + \int_{\Gamma \cap G} (u_+ \cos(-\nu, t) + f(u_+) \cos(-\nu, x))\varphi dS \right) \\ &= - \int_{\Gamma} ([u] \cos(\nu, t) + [f(u)] \cos(\nu, x))\varphi dS. \end{aligned}$$

Daí,

$$\int_{\Gamma} ([u] \cos(\nu, t) + [f(u)] \cos(\nu, x))\varphi dS = 0 \quad \forall \varphi \in C_C^\infty(\Omega).$$

Como u_+ e u_- são contínuas, então $[u]$ é contínua. Além disso, como f é contínua, então $f(u_+)$ e $f(u_-)$ são contínuas e conseqüentemente $[f(u)]$ também é contínua. Ainda, para cada $(t, x(t)) \in \Gamma$, o vetor $(1, x'(t))$ é tangente a $(t, x(t))$ e assim $(x'(t), -1)$ e $(-x'(t), 1)$

são normais a $(t, x(t))$. Se $\nu = \left(\frac{x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + 1}}, -\frac{1}{\sqrt{(x'(t))^2 + 1}} \right)$, então

$$[u] \cos(\nu, t) + [f(u)] \cos(\nu, x) = \frac{1}{\sqrt{(x'(t))^2 + 1}} (x'(t)[u] - [f(u)]), \quad (4.6)$$

que é contínua. O caso $\nu = \left(-\frac{x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{(x'(t))^2 + 1}} \right)$ é análogo.

Pela Proposição 1.12, segue que

$$[u] \cos(\nu, t) + [f(u)] \cos(\nu, x) = 0,$$

ou seja,

$$x'(t) \stackrel{(4.5)}{=} \frac{[f(u)]}{[u]} = -\frac{\cos(\nu, t)}{\cos(\nu, x)}.$$

Observe que $\cos(\nu, x) \neq 0$ pois, caso contrário, por (4.5) teríamos que $[u] \cos(\nu, t) = 0$. Como $[u] \neq 0$, então $\cos(\nu, t) = 0$, logo $\nu = (0, 0)$ e isso contradiz o fato de ν ser unitário. Suponhamos que u é solução clássica de (4.1) em $\Omega_- \cup \Omega_+$ e que (4.5) valha. Como

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad \forall (t, x) \in \Omega_- \cup \Omega_+,$$

então

$$\int_{\Omega} (u\varphi_t + f(u)\varphi_x) dt dx = - \int_{\Gamma} ([u] \cos(\nu, t) + [f(u)] \cos(\nu, x)) \varphi dt dx \stackrel{(4.5)}{=} 0$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Portanto u é uma solução generalizada suave por partes de (4.1). ■

Definição 4.9. As expressões (4.4) e (4.5) são chamadas **condições de Rankine-Hugoniot**.

Definição 4.10. Uma **onda de choque** é uma descontinuidade da solução generalizada da equação (4.1).

Observação 4.11. A condição de Rankine-Hugoniot (4.4) relaciona a velocidade $x'(t)$ de propagação de uma função fluxo $f = f(u)$ e os estados limites u_+ e u_- da solução das ondas de choque $u = u(t, x)$.

Corolário 4.12. Seja $u = u(t, x)$ uma função suave por partes definida em um aberto Ω com um número finito de componentes de suavidade $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$ e com um número finito de curvas de descontinuidade de tipo 1 $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$ tais que

$$\Omega = \left(\bigcup_{i=1}^m \Omega_i \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^k \Gamma_i \right).$$

Então u é uma solução generalizada da equação (4.1) em Ω se, e somente se, u é uma solução clássica de equação (4.1) em cada Ω_i com $i = 1, \dots, m$ e a condição de Rankine-Hugoniot (4.5) é satisfeita em cada curva de descontinuidade Γ_i com $i = 1, \dots, k$ exceto para o número finito de pontos onde as Γ_i 's se intersectam.

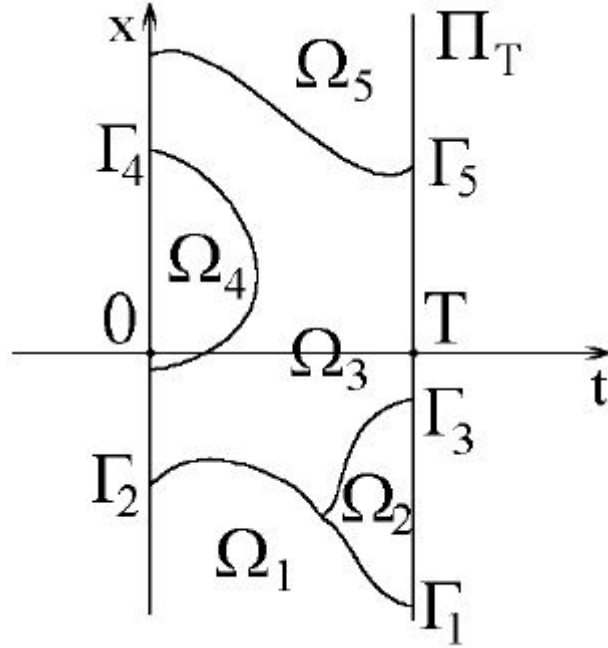


Figura 4.2: Solução suave por partes.

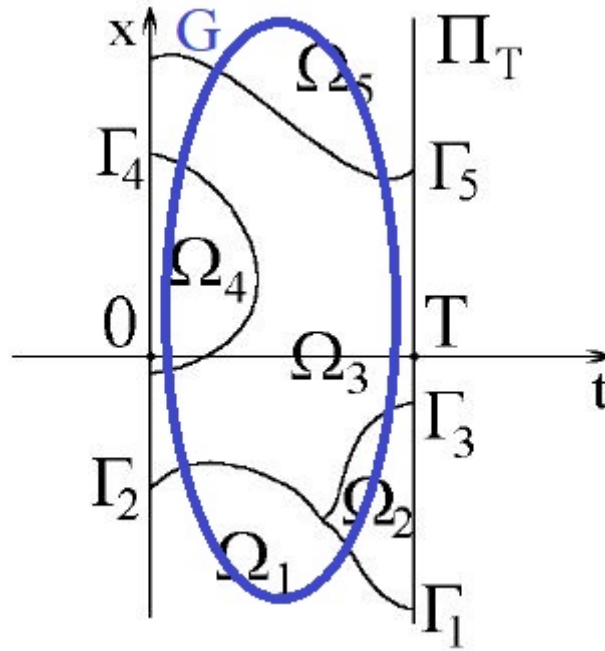
Demonstração. Para cada Γ_i , sejam Ω_{i_1} e Ω_{i_2} as componentes de suavidade de u adjacentes a Γ_i . Então pelo Teorema 4.8 segue o resultado. ■

Proposição 4.13. *Seja $u = u(t, x)$ uma solução generalizada suave por partes da equação (4.1) no aberto Ω . Então o campo vetorial $\vec{v} = (u, f(u))$ satisfaz (4.3).*

Demonstração. Sejam $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ as componentes de suavidade de u e G um aberto de Ω . Como u é solução clássica de (4.1) em Ω_i para todo $i = 1, \dots, n$, então u é solução clássica de (4.1) em cada $\Omega_i \cap G$. Além disso, cada $\Omega_i \cap G$ é aberto, pois cada Ω_i e G são abertos de Ω . Logo o fluxo (4.3) de $\vec{v} = (u, f(u))$ através de cada $\partial(\Omega_i \cap G)$ é zero. Por outro lado, sejam $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ as curvas de descontinuidades de u . Para cada $j = 1, \dots, m$, definamos

$$\tilde{\Gamma}_j \equiv \{(t, x) \in \Gamma_j : (t, x) \notin \Gamma_k \quad \forall k \neq j\} \subset \Gamma_j.$$

Pelo Corolário 4.12, u satisfaz a condição de Rankine-Hugoniot em cada $\tilde{\Gamma}_j$ e consequentemente satisfaz a condição de Rankine-Hugoniot em cada $\tilde{\Gamma}_j \cap G$.



Como

$$\bigcup_{i=1}^n \partial(\Omega_i \cap G) = \partial G \cup \bigcup_{j=1}^m (\Gamma_j \cap G)$$

e

$$\partial G \cap \bigcup_{j=1}^m (\Gamma_j \cap G) = \emptyset,$$

então para cada $j = 1, \dots, m$,

$$\sum_{j=1}^m \int_{\tilde{\Gamma}_j \cap G} (\vec{\nu}, \nu) dS = 0$$

e como cada $\Gamma_j \setminus \tilde{\Gamma}_j$ é finito, então para cada $j = 1, \dots, m$,

$$\int_{(\Gamma_j \setminus \tilde{\Gamma}_j) \cap G} (\vec{\nu}, \nu) dS = 0$$

e conseqüentemente para cada $j = 1, \dots, m$,

$$\int_{\Gamma_j \cap G} (\vec{\nu}, \nu) dS = 0.$$

Logo

$$\int_{\partial G} (\vec{\nu}, \nu) dS = \sum_{i=1}^n \underbrace{\int_{\partial(\Omega_i \cap G)} (\vec{\nu}, \nu) dS}_{=0} - \sum_{j=1}^m \underbrace{\int_{\Gamma_j \cap G} (\vec{\nu}, \nu) dS}_{=0} = 0,$$

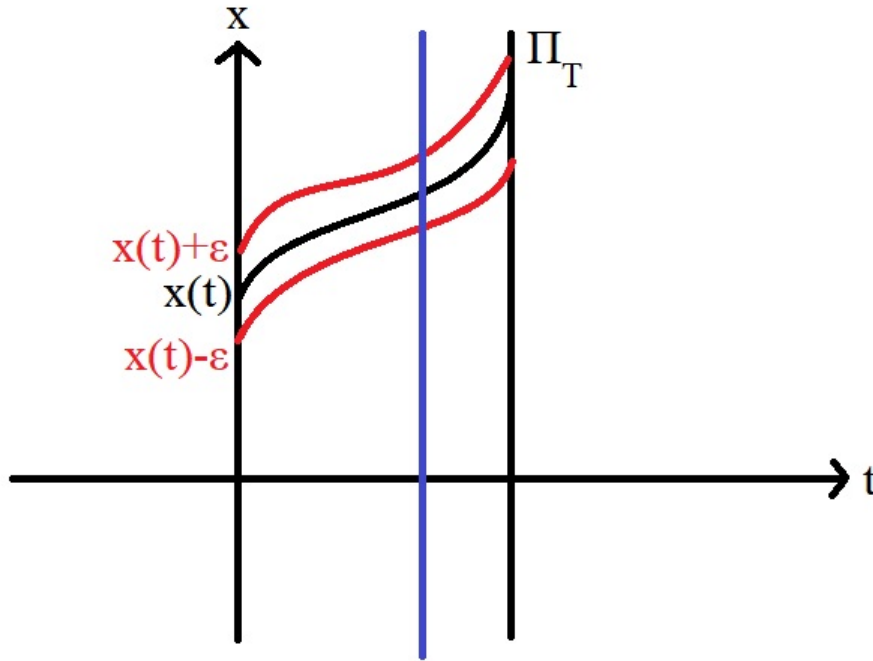
onde ν é o vetor normal unitário apontando para fora de $\partial\Omega$. Portanto $\vec{\nu}$ satisfaz (4.3). ■

Teorema 4.14. *Seja $u = u(t, x)$ uma solução generalizada suave por partes da equação (4.1) com suporte compacto em x tal que $x = x(t) \in C^1$ é a única curva de descontinuidade*

de u . Definamos

$$S(t) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} u(t, x) dx.$$

Então S é constante.



Demonstração. De fato, seja $\varepsilon > 0$ dado. Como $\text{spt } u$ é compacto em x , existe um intervalo aberto (a, b) tal que $u = 0$ em $(0, T) \times ((-\infty, a] \cup [b, +\infty))$, logo

$$S(t) = \int_a^b u(t, x) dx = \int_a^{x(t)-\varepsilon} u(t, y) dy + \int_{x(t)-\varepsilon}^{x(t)+\varepsilon} u(t, y) dy + \int_{x(t)+\varepsilon}^b u(t, y) dy.$$

Como

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{x(t)-\varepsilon}^{x(t)+\varepsilon} u(t, y) dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[x(t)-\varepsilon, x(t)+\varepsilon]} u(t, y) dy = 0,$$

fazendo $\varepsilon \rightarrow +0$, obtemos

$$S(t) = \int_a^{x(t)-0} u(t, y) dy + \int_{x(t)+0}^b u(t, y) dy.$$

Daí,

$$S'(t) = \int_a^{x(t)-0} u_t(t, y) dy + \int_{x(t)+0}^b u_t(t, y) dy + \underbrace{(u(t, x(t) - 0))}_{=u_-} - \underbrace{u(t, x(t) + 0)}_{=u_+} x'(t)$$

Mas

$$\begin{aligned} & \int_a^{x(t)-0} u_t(t, y) dy + \int_{x(t)+0}^b u_t(t, y) dy + (u_- - u_+)x'(t) \\ = & - \int_a^{x(t)-0} (f(u(t, y)))_y dy - \int_{x(t)+0}^b (f(u(t, y)))_y dy + (u_- - u_+)x'(t) \\ = & -f(u_-) + \underbrace{f(u(t, a))}_{=f(0)} - \underbrace{f(u(t, b))}_{=f(0)} + f(u_+) + (u_- - u_+)x'(t) \\ = & f(u_+) - f(u_-) - (u_+ - u_-)x'(t) \\ = & (u_+ - u_-) \left(\frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-} - x'(t) \right) \end{aligned}$$

Logo

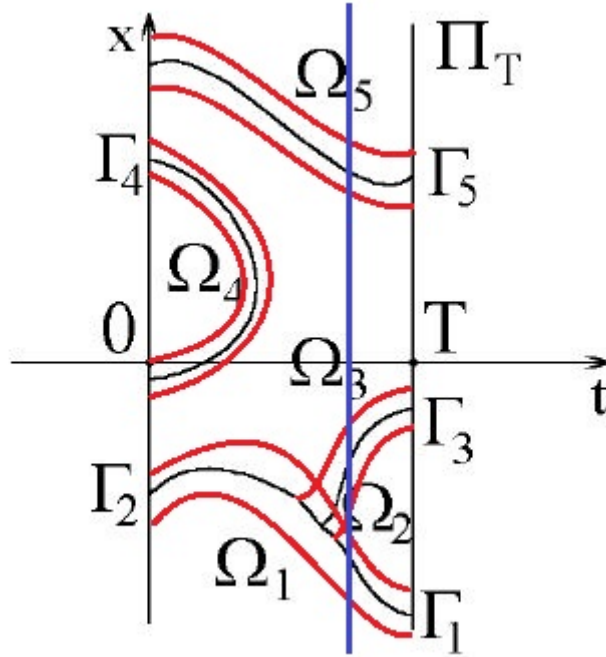
$$S'(t) = (u_+ - u_-) \left(\frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-} - x'(t) \right).$$

Como u é uma solução generalizada por partes da equação (4.1) na faixa $\Pi_T = (0, T) \times \mathbb{R}$, então u satisfaz a condição de Rankine-Hugoniot na curva de descontinuidade $x = x(t)$. Portanto $S'(t) = 0$ para todo $t \in (0, T)$, ou seja, S é constante. ■

Corolário 4.15. *Seja $u = u(t, x)$ uma solução generalizada suave por partes da equação (4.1) com suporte compacto em x com um número finito de curvas de descontinuidades $x_j = x_j(t) \in C^1$ de u com $j = 1, \dots, N$. Definamos*

$$S(t) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} u(t, x) dx.$$

Então S é constante.



Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ dado. Como $\text{spt } u$ é compacto em x , existe um intervalo aberto (a, b) tal que $u = 0$ em $(0, T) \times ((-\infty, a] \cup [b, +\infty))$, temos que

$$\begin{aligned}
 S(t) &= \int_a^b u(t, x) dx \\
 &= \int_a^{x_1(t)-\varepsilon} u(t, y) dy + \int_{x_1(t)-\varepsilon}^{x_1(t)+\varepsilon} u(t, y) dy + \int_{x_1(t)+\varepsilon}^{x_3(t)-\varepsilon} u(t, y) dy \\
 &\quad + \int_{x_3(t)-\varepsilon}^{x_3(t)+\varepsilon} u(t, y) dy + \int_{x_3(t)+\varepsilon}^{x_5(t)-\varepsilon} u(t, y) dy + \int_{x_5(t)-\varepsilon}^{x_5(t)+\varepsilon} u(t, y) dy \\
 &\quad + \int_{x_5(t)+\varepsilon}^b u(t, y) dy.
 \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{x_j(t)-\varepsilon}^{x_j(t)+\varepsilon} u(t, y) dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[x_j(t)-\varepsilon, x_j(t)+\varepsilon]} u(t, y) dy = 0 \quad \forall j = 1, 3, 5,$$

fazendo $\varepsilon \rightarrow +0$, obtemos

$$\begin{aligned}
 S(t) &= \int_a^{x_1(t)-0} u(t, y) dy + \int_{x_1(t)+0}^{x_3(t)-0} u(t, y) dy + \int_{x_3(t)+0}^{x_5(t)-0} u(t, y) dy \\
 &\quad + \int_{x_5(t)+0}^b u(t, y) dy.
 \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
S'(t) &= \int_a^{x_1(t)-0} u_t(t, y) dy + \underbrace{u(t, x_1(t) - 0)}_{=u_-^{(1)}} x_1'(t) + \int_{x_1(t)+0}^{x_3(t)-0} u_t(t, y) dy \\
&\quad + \underbrace{u(t, x_3(t) - 0)}_{=u_-^{(3)}} x_3'(t) - \underbrace{u(t, x_1(t) + 0)}_{=u_+^{(1)}} x_1'(t) + \int_{x_3(t)+0}^{x_5(t)-0} u_t(t, y) dy \\
&\quad + \underbrace{u(t, x_5(t) - 0)}_{=u_-^{(5)}} x_5'(t) - \underbrace{u(t, x_3(t) + 0)}_{=u_+^{(3)}} x_3'(t) + \int_{x_5(t)+0}^b u_t(t, y) dy \\
&\quad - \underbrace{u(t, x_5(t) + 0)}_{=u_+^{(5)}} x_5'(t) \\
&= - \int_a^{x_1(t)-0} (f(u(t, y)))_y dy + u_-^{(1)} x_1'(t) - \int_{x_1(t)+\varepsilon}^{x_3(t)-0} (f(u(t, y)))_y dy \\
&\quad + u_-^{(3)} x_3'(t) - u_+^{(1)} x_1'(t) - \int_{x_3(t)+0}^{x_5(t)-0} (f(u(t, y)))_y dy + u_-^{(5)} x_5'(t) \\
&\quad - u_+^{(3)} x_3'(t) - \int_{x_5(t)+0}^b (f(u(t, y)))_y dy - u_+^{(5)} x_5'(t) \\
&= -f(u_-^{(1)}) + \underbrace{f(u(t, a))}_{=f(0)} + u_-^{(1)} x_1'(t) - f(u_-^{(3)}) + f(u_+^{(1)}) + u_-^{(3)} x_3'(t) \\
&\quad - u_+^{(1)} x_1'(t) - f(u_-^{(5)}) + f(u_+^{(3)}) + u_-^{(5)} x_5'(t) - u_+^{(3)} x_3'(t) - \underbrace{f(u(t, b))}_{=f(0)} \\
&\quad + f(u_+^{(5)}) - u_+^{(5)} x_5'(t) \\
&= (f(u_+^1) - f(u_-^1) - (u_+^1 - u_-^1) x_1'(t)) + (f(u_+^3) - f(u_-^3) - (u_+^3 - u_-^3) x_3'(t)) \\
&\quad + (f(u_+^5) - f(u_-^5) - (u_+^5 - u_-^5) x_5'(t)) \\
&= (u_+^1 - u_-^1) \left(\frac{f(u_+^1) - f(u_-^1)}{u_+^1 - u_-^1} - x_1'(t) \right) + (u_+^3 - u_-^3) \left(\frac{f(u_+^3) - f(u_-^3)}{u_+^3 - u_-^3} \right. \\
&\quad \left. - x_3'(t) \right) + (u_+^5 - u_-^5) \left(\frac{f(u_+^5) - f(u_-^5)}{u_+^5 - u_-^5} - x_5'(t) \right)
\end{aligned}$$

Como u é uma solução generalizada suave por partes da equação (4.1) na faixa $\Pi_T = (0, T) \times \mathbb{R}$, então u satisfaz a condição de Rankine-Hugoniot nas curvas de descontinuidades Γ_1, Γ_3 e Γ_5 , logo $S'(t) = 0$ para todo $t \in (0, T)$ e portanto S é constante. \blacksquare

Proposição 4.16. *Se $u = u(t, x)$ tem uma descontinuidade fraca em $\Gamma = \{(t, x(t))\}$, então u satisfaz a condição de Rankine-Hugoniot (4.5) em Γ .*

Demonstração. De fato, para todo t , temos que

$$u_{\pm}(t) = \lim_{x \rightarrow x(t) \pm 0} u(t, x) = u(t, x(t) \pm 0) = u(t, x(t)).$$

Logo $[u] = u_+ - u_- = 0$ e conseqüentemente $[f(u)] = 0$. Portanto (4.5) é satisfeito. ■

Observação 4.17. *Se u tem descontinuidade fraca na curva $\Gamma = \{(t, x) : x = x(t)\}$ de $u = u(t, x)$, passando o limite $u_{\pm} \rightarrow u$ em (4.4), obtemos*

$$\frac{dx}{dt} = f'(u(t, x)). \quad (4.7)$$

De fato, sejam $u = u(t, x)$ e $v = v(t, x)$ soluções clássicas da equação (4.1) separadas pela curva de descontinuidade fraca Γ . Então

$$u(t, x(t)) = v(t, x(t)) \quad \forall t.$$

Como u e v são constantes ao longo de Γ , então

$$\frac{du}{dt} = \frac{dv}{dt},$$

ou seja,

$$u_t(t, x(t)) + f'(u(t, x(t)))u_x(t, x(t)) = v_t(t, x(t)) + f'(u(t, x(t)))v_x(t, x(t)).$$

Daí,

$$(u_x(t, x(t)) - v_x(t, x(t)))(x'(t) - f'(u(t, x(t)))) = 0.$$

Como u_x e v_x são descontínuas em Γ , segue que

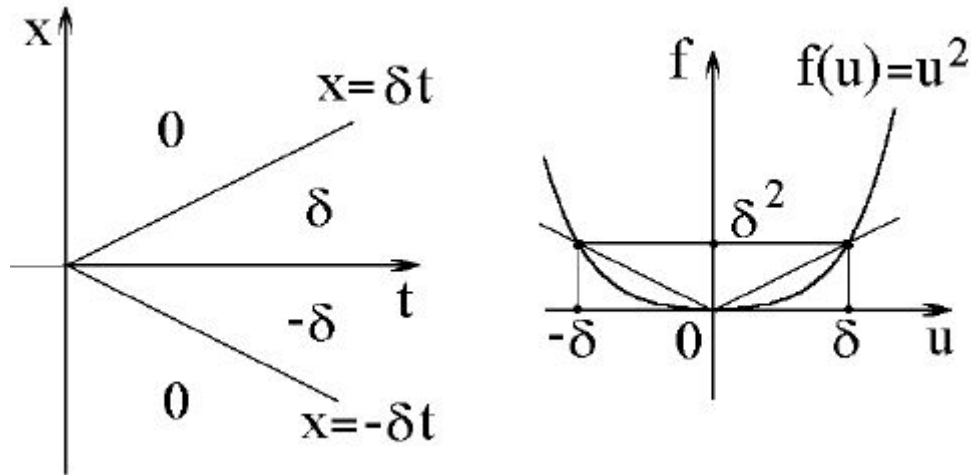
$$x'(t) = f'(u(t, x(t))).$$

Exemplo 4.18. *(Não unicidade de uma solução generalizada). Considere a equação (4.1) com a função fluxo $f(u) = u^2$ e dado inicial como sendo a função nula, ou seja,*

$$\begin{cases} u_t + 2uu_x = 0, \\ u(0, x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (4.8)$$

Observe que a função $u \equiv 0$ é solução clássica e portanto é uma solução generalizada de (4.1). Por outro lado, para cada $\delta > 0$, definamos

$$u_{\delta}(t, x) \equiv \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq -\delta t, \\ -\delta & \text{se } -\delta t < x \leq 0, \\ \delta & \text{se } 0 < x \leq \delta t, \\ 0 & \text{se } x > \delta t. \end{cases} \quad (4.9)$$



Então u_δ é solução clássica de (4.1) fora das retas de descontinuidades $x_1(t) \equiv -\delta t$, $x_2(t) \equiv 0$ e $x_3(t) \equiv \delta t$ para todo $\delta > 0$. Além disso, para todo $\delta > 0$,

$$\frac{f(u(t, x_1(t) + 0)) - f(u(t, x_1(t) - 0))}{u(t, x_1(t) + 0) - u(t, x_1(t) - 0)} = \frac{(-\delta)^2 - 0}{-\delta - 0} = \frac{\delta^2}{-\delta} = -\delta = x'_1(t),$$

$$\frac{f(u(t, x_2(t) + 0)) - f(u(t, x_2(t) - 0))}{u(t, x_2(t) + 0) - u(t, x_2(t) - 0)} = \frac{\delta^2 - (-\delta)^2}{\delta - (-\delta)} = \frac{0}{2\delta} = 0 = x'_2(t),$$

$$\frac{f(u(t, x_3(t) + 0)) - f(u(t, x_3(t) - 0))}{u(t, x_3(t) + 0) - u(t, x_3(t) - 0)} = \frac{0 - \delta^2}{0 - \delta} = \delta = x'_3(t),$$

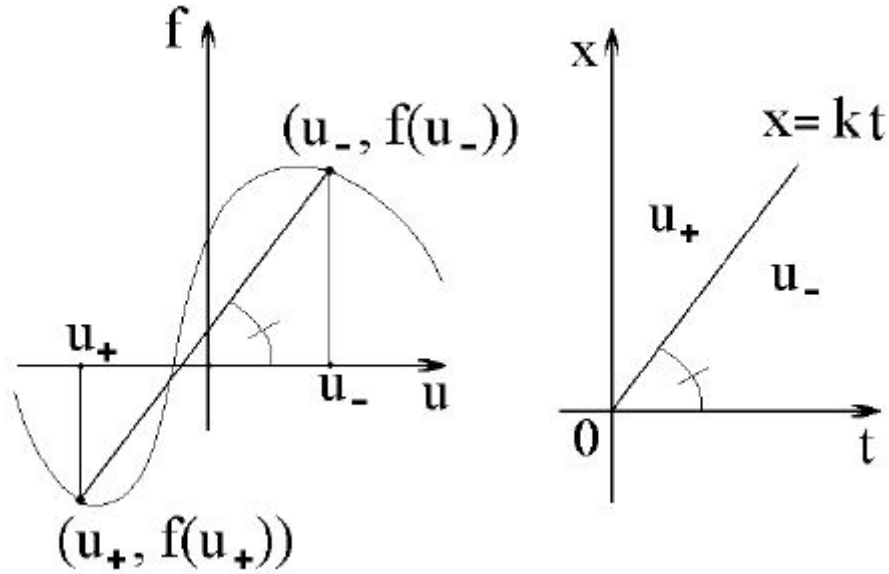
logo u_δ satisfaz a condição de Rankine-Hugoniot nas retas de descontinuidades $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$ e $x_3 = x_3(t)$. Portanto u_δ é solução generalizada de (4.1) para todo $\delta > 0$.

Observação 4.19. (Interpretação geométrica da condição de Rankine-Hugoniot para uma solução constante por partes com descontinuidade sobre uma reta).

Seja $u = u(t, x)$ solução constante por partes da equação $u_t + f(u)_x = 0$ com $u(0, x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde u satisfaz a condição de Rankine-Hugoniot sobre a reta de descontinuidade $x(t) = kt$. Como

$$k = x'(t) = \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-},$$

onde u_+ e u_- são as regiões acima e abaixo da reta $x(t) = kt$ respectivamente, então o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos $(u_-, f(u_-))$, $(u_+, f(u_+))$ é igual ao coeficiente da reta de descontinuidade $x(t) = kt$.



Considere o problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t + f'(u)u_x = 0, \\ u(0, x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (4.10)$$

Exemplo 4.20. Vamos construir uma solução generalizada não trivial do problema (4.10) com $f(u) = u^3$.

A função

$$u(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq t, \\ 1 & \text{se } t < x \leq 7t, \\ 2 & \text{se } 7t < x \leq 12t, \\ -4 & \text{se } 12t < x \leq 21t, \\ 5 & \text{se } 21t < x \leq 25t, \\ 0 & \text{se } x > 25t. \end{cases}$$

é uma solução generalizada não trivial do problema (4.10), pois u é solução clássica fora das retas de descontinuidades $x_1(t) \equiv t$, $x_2(t) \equiv 7t$, $x_3(t) \equiv 12t$, $x_4(t) \equiv 21t$, $x_5(t) \equiv 25t$ e

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{1^3 - 0^3}{1 - 0} = \frac{1 - 0}{1 - 0} = 1 = \frac{dx_1}{dt};$$

$$\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{2^3 - 1^3}{2 - 1} = \frac{8 - 1}{2 - 1} = \frac{7}{1} = 7 = \frac{dx_2}{dt};$$

$$\frac{f(-4) - f(2)}{-4 - 2} = \frac{(-4)^3 - 2^3}{-4 - 2} = \frac{-64 - 8}{-4 - 2} = \frac{-72}{-6} = 12 = \frac{dx_3}{dt};$$

$$\frac{f(5) - f(-4)}{5 - (-4)} = \frac{5^3 - (-4)^3}{5 - (-4)} = \frac{125 - (-64)}{5 - (-4)} = \frac{125 + 64}{5 + 4} = \frac{189}{9} = 21 = \frac{dx_4}{dt};$$

$$\frac{f(0) - f(5)}{0 - 5} = \frac{0^3 - 5^3}{0 - 5} = \frac{0 - 125}{0 - 5} = \frac{-125}{-5} = 25 = \frac{dx_5}{dt},$$

ou seja, u satisfaz a condição de Rankine-Hugoniot nas retas de descontinuidades $x_j = x_j(t)$ com $j = 1, 2, 3, 4, 5$.

Exemplo 4.21. Vamos construir uma solução generalizada não trivial do problema (4.10) com $f(u) = \sin u$.

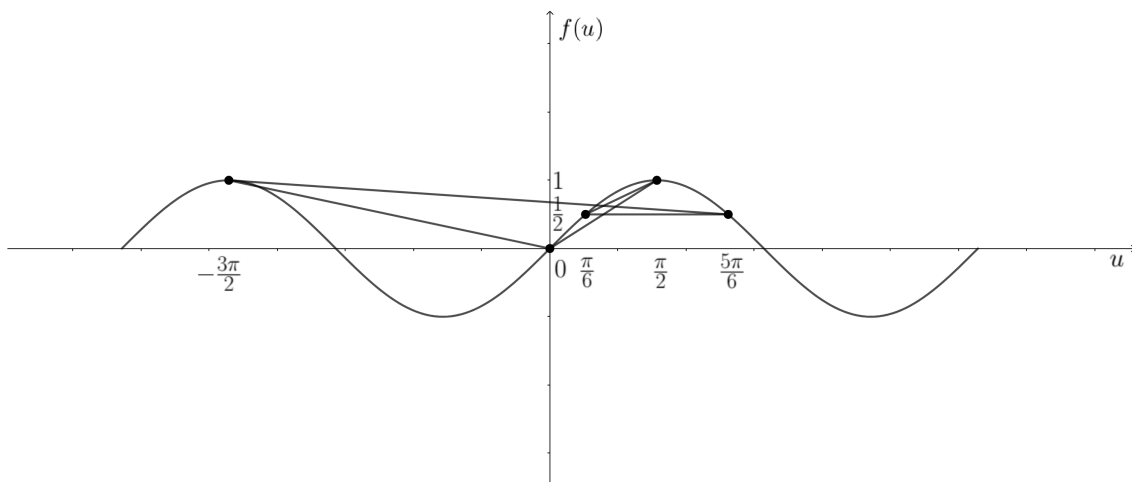


Figura 4.3: Gráfico de $f(u) = \sin u$.

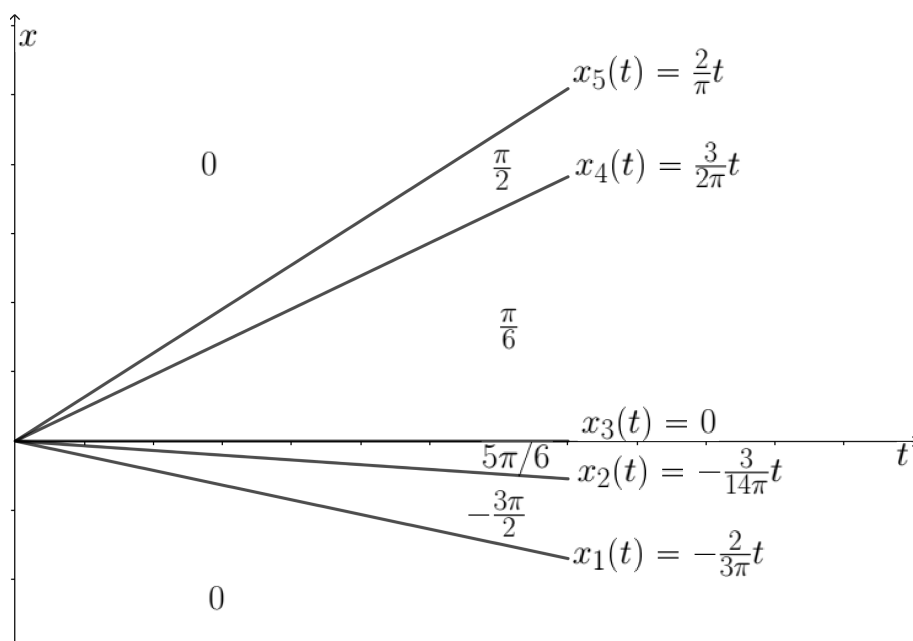


Figura 4.4: Gráfico das características de $f(u) = \sin u$.

A função

$$u(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq -\frac{2}{3\pi}t, \\ -\frac{3\pi}{2} & \text{se } -\frac{3\pi}{2}t < x \leq -\frac{3}{14\pi}t, \\ \frac{5\pi}{6} & \text{se } -\frac{3\pi}{14\pi}t < x \leq 0, \\ \frac{\pi}{6} & \text{se } 0 < x \leq \frac{3}{2\pi}t, \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } \frac{3}{2\pi}t < x \leq \frac{2}{\pi}t, \\ 0 & \text{se } x > \frac{2}{\pi}t \end{cases}$$

é uma solução generalizada não trivial do problema (4.10), pois u é solução clássica fora das retas de descontinuidades $x_j = x_j(t)$ com $j = 1, 2, 3, 4, 5$ e

$$\begin{aligned} \frac{f\left(-\frac{3\pi}{2}\right) - f(0)}{-\frac{3\pi}{2} - 0} &= \frac{\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) - \sin 0}{-\frac{3\pi}{2} - 0} = \frac{1 - 0}{-\frac{3\pi}{2} - 0} = \frac{1}{-\frac{3\pi}{2}} = -\frac{2}{3\pi} = \frac{dx_1}{dt}, \\ \frac{f\left(\frac{5\pi}{6}\right) - f\left(-\frac{3\pi}{2}\right)}{\frac{5\pi}{6} - \left(-\frac{3\pi}{2}\right)} &= \frac{\sin\frac{5\pi}{6} - \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)}{\frac{5\pi}{6} - \left(-\frac{3\pi}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2} - 1}{\frac{5\pi}{6} + \frac{3\pi}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{7\pi}{3}} = -\frac{3}{14\pi} = \frac{dx_2}{dt}, \\ \frac{f\left(\frac{\pi}{6}\right) - f\left(\frac{5\pi}{6}\right)}{\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{6}} &= \frac{\sin\frac{\pi}{6} - \sin\frac{5\pi}{6}}{\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{6}} = \frac{0}{-\frac{2\pi}{3}} = 0 = \frac{dx_3}{dt}, \\ \frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}} &= \frac{\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{2\pi} = \frac{dx_4}{dt}, \\ \frac{f(0) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{0 - \frac{\pi}{2}} &= \frac{\sin 0 - \sin\frac{\pi}{2}}{0 - \frac{\pi}{2}} = \frac{0 - 1}{0 - \frac{\pi}{2}} = \frac{-1}{-\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} = \frac{dx_5}{dt}, \end{aligned}$$

ou seja, u satisfaz a condição de Rankine-Hugoniot nas retas de descontinuidades $x_j = x_j(t)$ com $j = 1, 2, 3, 4, 5$.

Capítulo 5

A noção de solução de entropia generalizada

Neste capítulo, abordaremos as condições de admissibilidade de uma solução generalizada, o método de viscosidade nula, a condição de aumento de entropia. Além disso, apresentaremos a definição de solução de entropia generalizada de Kruzhkov e deduziremos alguns resultados dessa teoria.

Seja $u = u(t, x)$. Considere o problema de Cauchy

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (5.1)$$

$$u(0, x) = u_0(x). \quad (5.2)$$

Proposição 5.1. *Sejam $f \in C^3(\mathbb{R})$, $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ e u como no Teorema 3.10. Então $u \in C^2([0, T) \times \mathbb{R})$.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.10, existe $T > 0$ tal que

$$u(t, x) = u_0(x - f'(u(t, x))t)$$

é a única solução de classe C^1 do problema de Cauchy (5.1)-(5.2) em $[0, T) \times \mathbb{R}$. Como

$$u_t(t, x) = -\frac{u'_0(x - f'(u)t)f'(u)}{1 + f''(u)u'_0(x - f'(u)t)t}$$

e

$$u_x(t, x) = \frac{u'_0(x - f'(u)t)}{1 + f''(u)u'_0(x - f'(u)t)t},$$

temos que

$$\begin{aligned} u_{xt}(t, x) &= -\frac{u_0''(x - f'(u)t)(1 - f''(u)u_x t)f'(u) + u_0'(x - f'(u)t)f''(u)u_x}{1 + f''(u)u_0'(x - f'(u)t)t} \\ &\quad + \frac{u_0'(x - f'(u)t)f'(u)}{(1 + f''(u)u_0'(x - f'(u)t)t)^2}(f'''(u)u_x u_0'(x - f'(u)t)t \\ &\quad + f''(u)u_0''(x - f'(u)t)(1 - f''(u)u_x t)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{tx}(t, x) &= -\frac{u_0''(x - f'(u)t)(f''(u)u_t t + f'(u))}{1 + f''(u)u_0'(x - f'(u)t)t} - \frac{u_0'(x - f'(u)t)}{(1 + f''(u)u_0'(x - f'(u)t)t)^2} \\ &\quad (f'''(u)u_t u_0'(x - f'(u)t)t - f''(u)u_0''(x - f'(u)t)(f''(u)u_t t + f'(u))t \\ &\quad + f''(u)u_0'(x - f'(u)t)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{tt}(t, x) &= \frac{u_0''(x - f'(u)t)(f''(u)u_t t + f'(u))}{1 + f''(u)u_0'(x - f'(u)t)t} + \frac{u_0'(x - f'(u)t)f'(u)}{(1 + f''(u)u_0'(x - f'(u)t)t)^2} \\ &\quad (f'''(u)u_t u_0'(x - f'(u)t)t - f''(u)u_0''(x - f'(u)t)(f''(u)u_t t + f'(u))t \\ &\quad + f''(u)u_0'(x - f'(u)t)) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} u_{xx}(t, x) &= \frac{u_0''(x - f'(u)t)(1 - f''(u)u_x t)}{1 + f''(u)u_0'(x - f'(u)t)t} - \frac{u_0'(x - f'(u)t)}{(1 + f''(u)u_0'(x - f'(u)t)t)^2} \\ &\quad (f'''(u)u_x u_0'(x - f'(u)t)t + f''(u)u_0''(x - f'(u)t)(1 - f''(u)u_x t)), \end{aligned}$$

que são contínuas. Portanto $u \in C^2([0, T] \times \mathbb{R})$. ■

Proposição 5.2. *Sejam $f \in C^3(\mathbb{R})$, $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ com u_0' limitada, $u = u(t, x) \in C^2(\mathbb{R})$ a solução do problema de Cauchy (5.1)-(5.2) e (T, x^*) um ponto de descontinuidade de tipo 1 de u . Então*

- (i) $u_+ < u_-$ se f é convexa.
- (ii) $u_+ > u_-$ se f é côncava.

Demonstração. (i) Seja $p(t, x) \equiv u_x(t, x)$. Derivando a equação (5.1) em x , obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= u_{tx}(t, x) + f''(u(t, x))u_x^2(t, x) + f'(u(t, x))u_{xx}(t, x) \\ &= u_{xt}(t, x) + f''(u(t, x))u_x^2(t, x) + f'(u(t, x))u_{xx}(t, x) \\ &= p_t(t, x) + f''(u(t, x))p^2(t, x) + f'(u(t, x))p_x(t, x) \\ &\stackrel{f'' \geq 0}{\geq} p_t(t, x) + f'(u(t, x))p_x(t, x). \end{aligned}$$

Ao longo das características $x = x(t)$, $x'(t) = f'(u(t, x(t)))$, logo

$$\frac{d}{dt}(p(t, x(t))) = p_t(t, x(t)) + x'(t)p_x(t, x(t)) \leq 0,$$

ou seja, p é decrescente ao longo de $x = x(t)$. Assim,

$$p(t, x(t)) \leq p(0, x(0)) = u_x(0, x(0)) \leq \underbrace{\sup_{x \in \mathbb{R}} u'_0(x)}_{\equiv K_0}.$$

Como a equação (5.1) é satisfeita em $[0, T) \times \mathbb{R}$, então existe uma única característica que passa por cada ponto de $[0, T) \times \mathbb{R}$. Logo

$$p(t, x) \leq K_0 \quad \forall (t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R}. \quad (5.3)$$

Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ com $x_1 < x_2$. Pelo Teorema do Valor Médio existe $\xi \in (x_1, x_2)$ tal que

$$\frac{u(t, x_2) - u(t, x_1)}{x_2 - x_1} = \underbrace{u_x(t, \xi)}_{=p(t, \xi)} \leq K_0 \quad \forall t \in [0, T). \quad (5.4)$$

De (5.4) segue que $u(t, x_2) - u(t, x_1) \leq K_0(x_2 - x_1)$. Fazendo $x_2 \rightarrow x^* + 0$ e $x_1 \rightarrow x^* - 0$, obtemos

$$u_+ \equiv u(t, x^* + 0) \leq u(t, x^* - 0) \equiv u_-.$$

Mas $u_+ \neq u_-$, logo

$$u_+ < u_-. \quad (5.5)$$

(ii) Sejam $u = -v$ e $\tilde{f}(v) = -f(-v)$. Como

$$0 = u_t + f(u)_x = -v_t + (f(-v))_x,$$

então

$$0 = v_t + (-f(-v))_x = v_t + (\tilde{f}(v))_x,$$

ou seja,

$$v_t + (\tilde{f}(v))_x = 0.$$

Como $\tilde{f}''(v) = -f''(-v) \geq 0$, segue do item anterior que $-u_+ = v_+ < v_- = -u_-$, ou seja, $u_+ > u_-$. ■

Definição 5.3. A desigualdade (5.5) é chamada de **condição de admissibilidade** nos saltos das soluções suaves por partes.

Proposição 5.4. Sejam u uma solução generalizada suave por partes do problema de

Cauchy (5.1)-(5.2). Se f é estritamente convexa ou estritamente côncava, então

$$f'(u_+) < \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-} < f'(u_-). \quad (5.6)$$

Demonstração. Como u é uma solução generalizada do problema de Cauchy (5.1)-(5.2), então u satisfaz a condição de Rankine-Hugoniot na curva de descontinuidade $x = x(t)$, ou seja,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-}.$$

Pelo Teorema do Valor Médio, existe \tilde{u} entre u_- e u_+ tal que

$$f'(\tilde{u}) = \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-}.$$

Se $f'' > 0$, então $u_+ < \tilde{u} < u_-$ e como f' é estritamente crescente, segue que $f'(u_+) < f'(\tilde{u}) < f'(u_-)$. Se $f'' < 0$, então $u_- < \tilde{u} < u_+$ e como f' é estritamente decrescente segue que $f'(u_-) > f'(\tilde{u}) > f'(u_+)$. ■

Definição 5.5. A expressão (5.6) é chamada de *condição de admissibilidade de Lax*.

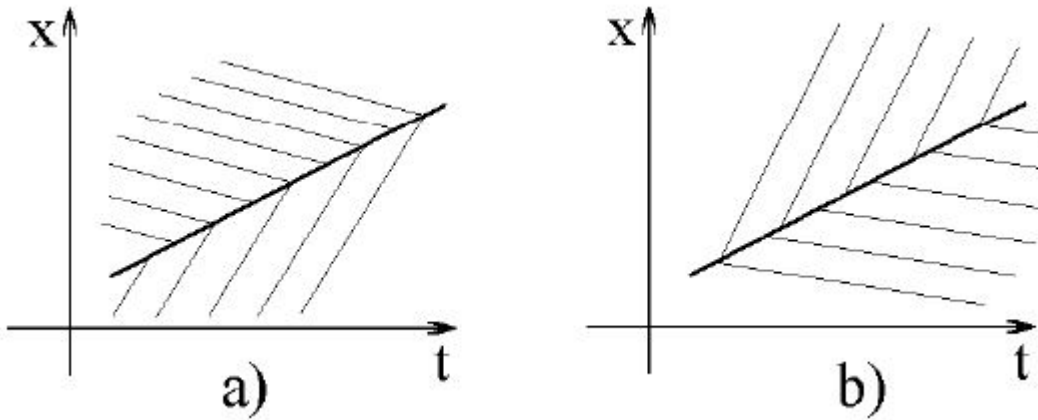


Figura 5.1: Condição de Lax: curva de descontinuidade admissível (a) e curva de descontinuidade não admissível (b).

Exemplo 5.6. No Exemplo 4.18, temos que $f''(u) = 2 > 0$ mas a condição de admissibilidade (5.6) não é satisfeita na reta de descontinuidade $x = 0$, pois

$$f'(u_+) = 2 \underbrace{\delta}_{=u_+} > -2\delta = 2 \underbrace{(-\delta)}_{=u_-} = f'(u_-) \quad \forall \delta > 0.$$

Por outro lado, a solução clássica $u \equiv 0$ é admissível, pois pela Proposição 5.2, $u_+ < u_-$. Além disso, como f é estritamente convexa segue que f' é estritamente crescente e portanto $f'(u_+) < f'(u_-)$.

Para generalizar a condição de admissibilidade para o caso de uma função fluxo que não é nem convexa e nem côncava, faremos a seguinte observação e reformulação desta condição em termos da respectiva localização do gráfico e das cordas das funções convexas ou côncavas.

Observação 5.7. *Sejam $x = x(t)$ a trajetória de uma partícula de um gás ideal em um tubo paralelo ao eixo x e $u = u(t, x)$ a velocidade desta partícula na posição x e no instante t . Então $x'(t) = u(t, x(t))$ e*

$$x''(t) = \frac{d}{dt}(u(t, x(t))) = u_t(t, x(t)) + u(t, x(t))u_x(t, x(t)) = 0.$$

Assim, gases ideais só existem teoricamente, pois são limites quando a viscosidade de um gás real é desprezada por ser pequena.

Definição 5.8. *Seja $\varepsilon > 0$ o coeficiente de viscosidade de um gás real. Então, sob certas condições, a força de atrito viscoso que atua sobre a partícula x no tempo t e em relação à unidade de massa pode ser escrita como $\varepsilon u_{xx}(t, x(t))$. Daí, $x''(t) = \frac{d}{dt}(u(t, x(t))) = \varepsilon u_{xx}(t, x(t))$ e assim obtemos a igualdade*

$$u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx}, \quad (5.7)$$

*que é chamada **equação de Burgers**.*

Observação 5.9. *Suponhamos que todas as soluções generalizadas admissíveis da equação de Hopf podem ser obtidas como o limite de algumas soluções $u^\varepsilon = u^\varepsilon(t, x)$ da equação (5.7) quando $\varepsilon \rightarrow 0$. A introdução de $\varepsilon u_{xx}(t, x)$ em uma equação de primeira ordem e o estudo de $u^\varepsilon = u^\varepsilon(t, x)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ é chamado **método de viscosidade nula**.*

Observação 5.10. *(Método de linearização da equação de Burgers). Como*

$$u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx},$$

então

$$u_t = \varepsilon u_{xx} - uu_x = \left(\varepsilon u_x - \frac{u^2}{2} \right)_x.$$

Seja $U = U(t, x)$ o potencial dado por

$$dU = u dx + \left(\varepsilon u_x - \frac{u^2}{2} \right) dt.$$

Neste caso,

$$\begin{aligned} U_x &= u, \\ U_t &= \varepsilon u_x - \frac{u^2}{2} = \varepsilon U_{xx} - \frac{U_x^2}{2}, \end{aligned}$$

ou seja, U satisfaz a equação

$$U_t + \frac{1}{2}U_x^2 = \varepsilon U_{xx}. \quad (5.8)$$

Fazendo $U = -2\varepsilon \ln z$, obtemos

$$U_t = -\frac{2\varepsilon}{z}z_t,$$

$$U_x = -\frac{2\varepsilon}{z}z_x \Rightarrow U_{xx} = \frac{2\varepsilon}{z} \left(\frac{z_x^2}{z} - z_{xx} \right).$$

Substituindo em (5.8), temos que

$$-\frac{2\varepsilon}{z}z_t + \frac{2\varepsilon^2}{z^2}z_x^2 = \frac{2\varepsilon^2}{z} \left(\frac{z_x^2}{z} - z_{xx} \right),$$

ou seja,

$$z_t = \varepsilon z_{xx}. \quad (5.9)$$

Logo a solução da equação (5.7) é da forma

$$u = U_x = -\frac{2\varepsilon}{z}z_x,$$

onde $z = z(t, x)$ é a solução da equação do calor (5.9).

Definição 5.11. Dizemos que $u = u(t, x)$ é uma *onda simples* se

$$u(t, x) = u_- + \frac{u_+ - u_-}{2}(1 + \operatorname{sgn}(x - \omega t)) = \begin{cases} u_- & \text{se } x < \omega t, \\ u_+ & \text{se } x > \omega t, \end{cases} \quad (5.10)$$

onde $\omega \equiv \text{constante}$.

Observação 5.12. Suponhamos que a onda simples $u = u(t, x)$ é uma solução generalizada da equação (5.1), ou seja,

$$\int_{\Pi_T} (u\varphi_t + f(u)\varphi_x) dt dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_C^\infty(\Pi_T). \quad (5.11)$$

Então vale a condição de Rankine-Hugoniot

$$\omega \equiv \frac{dx}{dt} = \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-} \quad (5.12)$$

na reta de descontinuidade $x(t) = \omega t$. Nesse caso, o método de viscosidade nula pode ser aplicado da seguinte maneira:

$$u^\varepsilon(t, x) = v(\xi), \quad \text{com } \xi = \frac{x - \omega t}{\varepsilon}. \quad (5.13)$$

Como

$$u_t^\varepsilon = -\frac{\omega v'(\xi)}{\varepsilon}, \quad u_x^\varepsilon = \frac{v'(\xi)}{\varepsilon} \quad e \quad u_{xx}^\varepsilon = \frac{v''(\xi)}{\varepsilon^2},$$

então a equação (5.7) pode ser reescrita como

$$-\omega v' + (f(v))' = v''. \quad (5.14)$$

Proposição 5.13. *Sejam $x \neq \omega t$ e $\xi = \frac{x - \omega t}{\varepsilon}$. Então $u^\varepsilon = v(\xi) \rightarrow u$ quando $\varepsilon \rightarrow +0$ se, e somente se,*

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} v(\xi) = u_\pm \quad (5.15)$$

Demonstração. Como

$$\xi = \frac{x - \omega t}{\varepsilon} \quad e \quad x \neq \omega t,$$

então

$$\varepsilon \rightarrow +0 \Leftrightarrow (x < \omega t \text{ e } \xi \rightarrow -\infty) \text{ ou } (x > \omega t \text{ e } \xi \rightarrow +\infty).$$

Suponhamos que $u^\varepsilon = v(\xi) \rightarrow u$ quando $\varepsilon \rightarrow +0$. Então

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} v(\xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} v(\xi) = u \stackrel{x < \omega t}{=} u_-$$

e

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} v(\xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} v(\xi) = u \stackrel{x > \omega t}{=} u_+.$$

Suponhamos que (5.15) valha. Se $x < \omega t$, então

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} v(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow -\infty} v(\xi) = u_- \stackrel{x < \omega t}{=} u.$$

Por outro lado, se $x > \omega t$, então

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} v(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} v(\xi) = u_+ \stackrel{x > \omega t}{=} u.$$

Portanto

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} v(\xi) = u.$$

■

Observação 5.14. *A solução $v = v(\xi)$ de (5.14) e (5.15) não é única. De fato, se $v = v(\xi)$ é solução de (5.14) e (5.15), também o é $\tilde{v} = v(\xi - \xi_0)$ para cada $\xi_0 \in \mathbb{R}$.*

Observação 5.15. *Integrando (5.14), obtemos*

$$v' = \underbrace{-\omega v + f(v)}_{\equiv F(v)} + C, \quad C = \text{constante}. \quad (5.16)$$

Então a EDO (5.16) é autônoma, de primeira ordem e $F(v) + C$ é de classe C^1 , pois f também o é.

Proposição 5.16. *A EDO (5.16) admite uma solução que tende a estados constantes u_- (quando $\xi \rightarrow -\infty$) e u_+ (quando $\xi \rightarrow +\infty$) se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) u_- e u_+ são pontos estacionários da EDO (5.16).

(ii) Não existe ponto estacionário no intervalo aberto entre u_- e u_+ . Nesse caso, o lado direito $F(v) - F(u_-) = F(v) - F(u_+)$ de (5.16) restrito a esse intervalo deve ser

(a) positivo se $u_- < u_+$, ou seja,

$$F(v) - F(u_-) > 0 \quad \forall v \in (u_-, u_+). \quad (5.17)$$

(b) negativo se $u_+ < u_-$, ou seja,

$$F(v) - F(u_+) < 0 \quad \forall v \in (u_+, u_-). \quad (5.18)$$

Demonstração. Suponhamos que a EDO (5.16) admite uma solução que tende a estados constantes u_- .

Mostremos que (i) vale. De fato, como u_- e u_+ são constantes e soluções da EDO (5.16), então u_- e u_+ são pontos estacionários da EDO (5.16). Mostremos que (ii) vale. Para isso, suponhamos que existe $\tilde{v} = \tilde{v}(\xi)$ solução estacionária de (5.16) entre u_- e u_+ com $\tilde{v} \neq u_{\pm}$. Então $\tilde{v}'(\xi) = 0$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$, ou seja, $\tilde{v} = \tilde{v}(\xi)$ é constante, absurdo pois $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \tilde{v}(\xi) = u_{\pm}$ e $u_- \neq u_+$. Além disso, se $u_- < u_+$, então $v' > 0$, pois $v' \neq 0$ e $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} v(\xi) < \lim_{\xi \rightarrow +\infty} v(\xi)$. Então $v = v(\xi)$ é crescente e portanto

$$F(v) - F(u_-) \stackrel{(i)}{=} v' > 0 \quad \text{se } v \in (u_-, u_+).$$

Se $u_- > u_+$, então $v' < 0$, pois $v' \neq 0$ e $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} v(\xi) < \lim_{\xi \rightarrow -\infty} v(\xi)$. Então $v = v(\xi)$ é decrescente e portanto

$$F(v) - F(u_+) \stackrel{(i)}{=} v' < 0 \quad \text{se } v \in (u_+, u_-).$$

Suponhamos que as condições (i) e (ii) são satisfeitas. De fato, seja $v = v(\xi)$ uma solução de (5.16) satisfazendo (i) e (ii) e que está entre u_- e u_+ mas $v \neq u_{\pm}$. Queremos mostrar que v não intersecta u_- e u_+ . Suponhamos que v intersecta u_+ . O caso em que v intersecta u_- é análogo. Então existe $\xi_0 \in \mathbb{R}$ tal que $v(\xi_0) = u_+$. Como F é localmente lipschitziana então, pelo Teorema de Picard, o PVI

$$\begin{cases} w' = F(w) + C \\ w(\xi_0) = u_+ \end{cases}$$

tem solução única em $\overline{B}_1(\xi_0)$, absurdo pois $u_+ \neq v$. Se $u_- < u_+$, então v é crescente e portanto $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} v(\xi) = u_{\pm}$. Se $u_+ < u_-$, então v é decrescente e portanto $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} v(\xi) = u_{\pm}$. Em ambos os casos, segue que $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} v(\xi) = u_{\pm}$. ■

Observação 5.17. Quando as condições (i) e (ii) da Proposição 5.16 são satisfeitas, então $v = v(\xi)$ é injetora e portanto bijetora sobre a sua imagem. Pelo Teorema da Função Inversa, obtemos

$$\int_{v_0}^v \frac{1}{F(w) - F(u_-)} dw = \int_{v_0}^v \frac{1}{w'(\xi)} dw = \int_{v_0}^v \xi'(w) dw = \underbrace{\xi(v)}_{\xi} - \underbrace{\xi(v_0)}_{\xi_0},$$

onde $v_0 = \frac{u_+ + u_-}{2}$.

Observação 5.18. Como $F(v) = f(v) - \omega v$, então

$$f(v) - f(u_-) > \omega(v - u_-) \quad \forall v \in (u_-, u_+) \text{ se } u_- < u_+,$$

$$f(v) - f(u_+) < \omega(v - u_+) \quad \forall v \in (u_+, u_-) \text{ se } u_+ < u_-,$$

ou seja,

$$\frac{f(u) - f(u_-)}{u - u_-} > \omega = \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-} \quad \forall u \in (u_-, u_+) \text{ se } u_- < u_+, \quad (5.19)$$

$$\frac{f(u) - f(u_-)}{u - u_-} < \omega = \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-} \quad \forall u \in (u_+, u_-) \text{ se } u_+ < u_-. \quad (5.20)$$

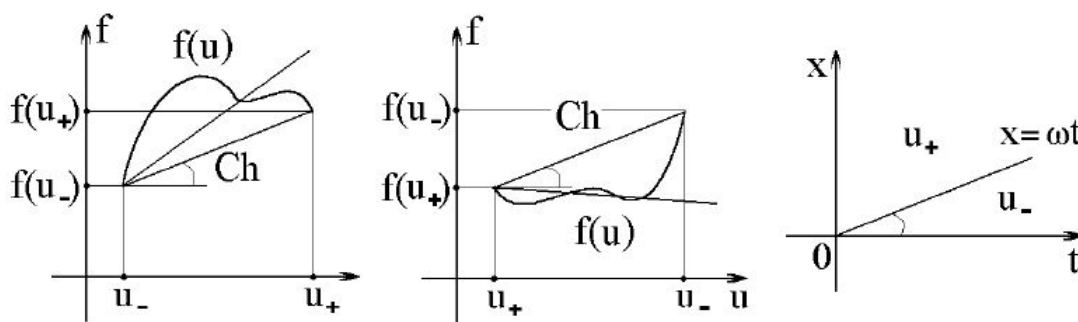


Figura 5.2: Visualização de saltos admissíveis, II.

Vamos representar o gráfico de uma função fluxo $f = f(u)$ (veja Figura 5.2). A condição (5.19) significa que o segmento com os extremos $(u_-, f(u_-))$, $(u_+, f(u_+))$ tem uma inclinação menor do que a inclinação do segmento que une os pontos $(u_-, f(u_-))$ e $(u, f(u))$, onde $u \in (u_-, u_+)$. Conseqüentemente, o ponto $(u, f(u))$ e, portanto, todo o gráfico $\{(u, f(u)) : u \in (u_-, u_+)\}$ está acima do segmento Ch . Da mesma forma, a

condição (5.20) significa que o gráfico $\{(u, f(u)) : u \in (u_+, u_-)\}$ está abaixo do segmento Ch .

Observação 5.19. Uma solução u da equação (5.1) pode ter um salto de u_- para u_+ quando a seguinte **condição de admissibilidade de salto** é válida:

- no caso $u_- < u_+$, $\{(u, f(u)) : u \in [u_-, u_+]\}$ está **acima** do segmento que une os pontos $(u_-, f(u_-))$ e $(u_+, f(u_+))$.
- no caso $u_- > u_+$, $\{(u, f(u)) : u \in [u_+, u_-]\}$ está **abaixo** do segmento que une os pontos $(u_-, f(u_-))$ e $(u_+, f(u_+))$.

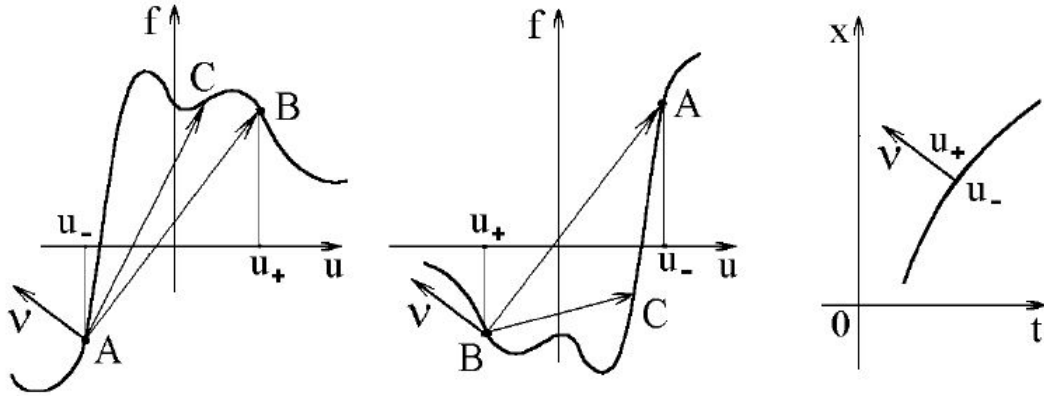


Figura 5.3: Visualização de saltos admissíveis, III.

Vamos dar outra expressão analítica da condição obtida. Considere uma curva na qual a solução salta de u_- para u_+ . Nas coordenadas (u, f) , desenhamos o gráfico da função fluxo $f = f(u)$ definida no segmento de reta de extremidades u_- e u_+ e o segmento de reta de extremidades $(u_-, f(u_-))$ e $(u_+, f(u_+))$. Suponhamos que os eixos (u, f) estão alinhados com os eixos (t, x) . Agora, no mesmo gráfico, vamos indicar o vetor normal unitário $\nu = (\cos(\nu, t), \cos(\nu, x))$ apontando para fora de u_- na curva de descontinuidade (veja a Figura 5.3). Sejam $A \equiv (u_-, f(u_-))$, $B \equiv (u_+, f(u_+))$ e $C \equiv (u, f(u))$, onde u é um ponto do segmento de reta de extremidades u_- e u_+ . Como $u = u(t, x)$ satisfaz a condição de Rankine-Hugoniot na curva de descontinuidade $x = x(t)$, então

$$\vec{AB} \cdot \nu = (u_+ - u_-) \cos(\nu, t) + (f(u_+) - f(u_-)) \cos(\nu, x) = 0,$$

ou seja \vec{AB} e ν são ortogonais. Além disso, ν foi construído de modo que $\cos(\nu, x) > 0$. Se $u_- < u_+$, então o ângulo entre ν e o vetor \vec{AC} pertence ao intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, logo o cosseno desse ângulo é não negativo e conseqüentemente o produto escalar entre esses vetores é não negativo, ou seja,

$$(u - u_-) \cos(\nu, t) + (f(u) - f(u_-)) \cos(\nu, x) \geq 0 \quad \forall u \in (u_-, u_+). \quad (5.21)$$

Se $u_- > u_+$, então o ângulo entre ν e o vetor \vec{AC} pertence ao intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, logo o cosseno desse ângulo é não positivo e conseqüentemente o produto escalar entre esses vetores é não positivo, ou seja,

$$(u - u_+) \cos(\nu, t) + (f(u) - f(u_+)) \cos(\nu, x) \leq 0 \quad \forall u \in (u_+, u_-). \quad (5.22)$$

Definição 5.20. Seja $u = u(t, x)$ uma solução do problema de Cauchy (5.1)-(5.2). A função S definida por

$$S(t, x) \equiv f(u(t, x))$$

é chamada de **entropia**.

Definição 5.21. Sejam Γ uma curva de descontinuidade de uma solução generalizada suave por partes e S uma função de entropia. Dizemos que S satisfaz a **condição de aumento de entropia** se

$$\underbrace{S(t+0, x)}_{\equiv S_+} \geq \underbrace{S(t-0, x)}_{\equiv S_-}, \quad \forall (t, x) \in \Gamma. \quad (5.23)$$

Exemplo 5.22. A condição de aumento de entropia é satisfeita na equação de Hopf quando u satisfaz a condição de admissibilidade no salto. De fato, como $f(u) = \frac{u^2}{2}$ então, pela condição de Rankine-Hugoniot,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-} = \frac{\frac{u_+^2}{2} - \frac{u_-^2}{2}}{u_+ - u_-} = \frac{u_+ + u_-}{2}. \quad (5.24)$$

Como f é convexa, então pela Proposição 5.2,

$$u_- - u_+ > 0. \quad (5.25)$$

Se $\frac{dx}{dt} > 0$, então $S_- = \frac{u_+^2}{2}$ e $S_+ = \frac{u_-^2}{2}$ (veja Figura 5.4). Daí,

$$S_+ - S_- = \frac{1}{2}(u_-^2 - u_+^2) = \frac{1}{2} \underbrace{(u_- + u_+)}_{>0} \underbrace{(u_- - u_+)}_{>0} > 0,$$

ou seja, $S_- < S_+$.

Se $\frac{dx}{dt} < 0$, então $S_- = \frac{u_-^2}{2}$ e $S_+ = \frac{u_+^2}{2}$. Daí,

$$S_- - S_+ = \frac{1}{2}(u_-^2 - u_+^2) = \frac{1}{2} \underbrace{(u_- + u_+)}_{<0} \underbrace{(u_- - u_+)}_{>0} < 0,$$

ou seja, $S_- < S_+$.

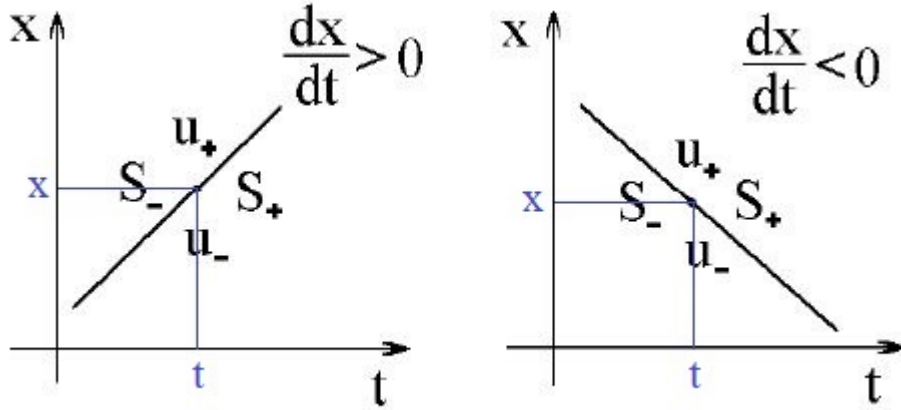


Figura 5.4: Crescimento de S para a equação de Hopf.

Definição 5.23. Seja $u = u(t, x)$ a velocidade de uma partícula de massa $m = 1$ no instante $t \in [0, +\infty)$ e na posição $x \in \mathbb{R}$. Definimos a **energia cinética total** por

$$E(t) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} u^2(t, x) dx. \quad (5.26)$$

Proposição 5.24. Seja $u = u(t, x)$ uma solução clássica da equação (5.1) com

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(t, x) = 0.$$

Então

$$E \equiv \text{constante},$$

ou seja, a energia cinética total (5.26) é uma integral primeira da equação (5.1).

Demonstração. Como

$$E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} u^2(t, x) dx,$$

então

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} u(t, x) u_t(t, x) dx \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} u(t, x) (f(u(t, x)))_x dx \\ &= - \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_{-y}^y u(t, x) (f(u(t, x)))_x dx \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{-(u(t, x) f(u(t, x)))}_{=0} \Big|_{x=-y}^{x=y} + \int_{-y}^y f(u(t, x)) u_x(t, x) dx \right) \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_{u(t, -y)}^{u(t, y)} f(u) du \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto E é constante. ■

Agora, considere a equação correspondente com viscosidade

$$u_t^\varepsilon + (f(u^\varepsilon))_x = \varepsilon u_{xx}^\varepsilon. \quad (5.27)$$

Proposição 5.25. *Seja $u^\varepsilon \not\equiv 0$ uma solução da equação (5.27) tal que*

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u^\varepsilon(t, x) = 0 \quad e \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_x^\varepsilon(t, x) = 0$$

uniformemente em t . Então a energia cinética $E = E(t)$ dessa solução é decrescente ao longo do tempo.

Demonstração. De fato, como

$$E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} (u^\varepsilon(t, x))^2 dx,$$

então

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} u^\varepsilon(t, x) u_t^\varepsilon(t, x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} u^\varepsilon(t, x) (\varepsilon u_{xx}^\varepsilon(t, x) - (f(u^\varepsilon(t, x)))_x) dx \\ &= \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} u^\varepsilon(t, x) u_{xx}^\varepsilon(t, x) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} u^\varepsilon(t, x) (f(u^\varepsilon(t, x)))_x dx. \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} u^\varepsilon(t, x) (f(u^\varepsilon(t, x)))_x dx &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_{-y}^y u^\varepsilon(t, x) (f(u^\varepsilon(t, x)))_x dx \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_{-y}^y u^\varepsilon(t, x) f'(u^\varepsilon(t, x)) u_x^\varepsilon(t, x) dx \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_{u^\varepsilon(t, -y)}^{u^\varepsilon(t, y)} u^\varepsilon f'(u^\varepsilon) du^\varepsilon \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
E'(t) &= \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} u^\varepsilon(t, x) u_{xx}^\varepsilon(t, x) dx \\
&= \varepsilon \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_{-y}^y u^\varepsilon(t, x) u_{xx}^\varepsilon(t, x) dx \\
&= \varepsilon \lim_{y \rightarrow +\infty} \left((u^\varepsilon(t, x) u_x^\varepsilon(t, x)) \Big|_{x=-y}^{x=y} - \int_{-y}^y (u_x^\varepsilon(t, x))^2 dx \right) \\
&= \varepsilon \lim_{y \rightarrow +\infty} \underbrace{(u^\varepsilon(t, y) u_x^\varepsilon(t, y) - u^\varepsilon(t, -y) u_x^\varepsilon(t, -y))}_{=0} - \varepsilon \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_{-y}^y (u_x^\varepsilon(t, x))^2 dx \\
&= -\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} (u_x^\varepsilon(t, x))^2 dx \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Queremos mostrar que a desigualdade é estrita. De fato,

$$\begin{aligned}
E' = 0 &\Leftrightarrow -\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} (u_x^\varepsilon(t, x))^2 dx = 0 \\
&\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} (u_x^\varepsilon(t, x))^2 dx = 0 \\
&\Rightarrow (u_x^\varepsilon)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow u_x^\varepsilon = 0,
\end{aligned}$$

ou seja, se $E' = 0$, então $u^\varepsilon = u^\varepsilon(t, x)$ é constante em x . Como $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u^\varepsilon(t, x) = 0$ uniformemente em t , segue que $u^\varepsilon = 0$, absurdo. Portanto $E' < 0$, ou seja, $E = E(t)$ é decrescente. ■

Observação 5.26. *Como a solução admissível de entropia generalizada u da equação (5.1) foi obtida como limite da solução u^ε da equação (5.27). Nesta última solução, a energia cinética é dissipada. Portanto, pode-se esperar que também nas soluções limites u , a energia cinética não aumenta com o tempo.*

Teorema 5.27. *Seja $u = u(t, x)$ uma solução limitada generalizada suave por partes admissível de entropia da equação (5.1) com $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(t, x) = 0$ e com uma curva de descontinuidade $x = x(t)$. Então a velocidade de decrescimento da energia cinética $E = E(t)$ dessa solução no instante $t = t_0$ é igual à área $S(t_0)$ delimitada pelo gráfico da função fluxo $f = f(u)$, com u pertencente ao segmento de reta com extremidades u_- e u_+ , e o segmento de reta de extremidades $(u_-, f(u_-))$ e $(u_+, f(u_+))$, ou seja,*

$$E'(t_0) = -S(t_0). \quad (5.28)$$

Como anteriormente, denotamos $u_\pm(t_0) \equiv u(t_0, x \pm 0)$.

Demonstração. Suponhamos que $u_- < u_+$. O caso $u_+ < u_-$ é análogo.

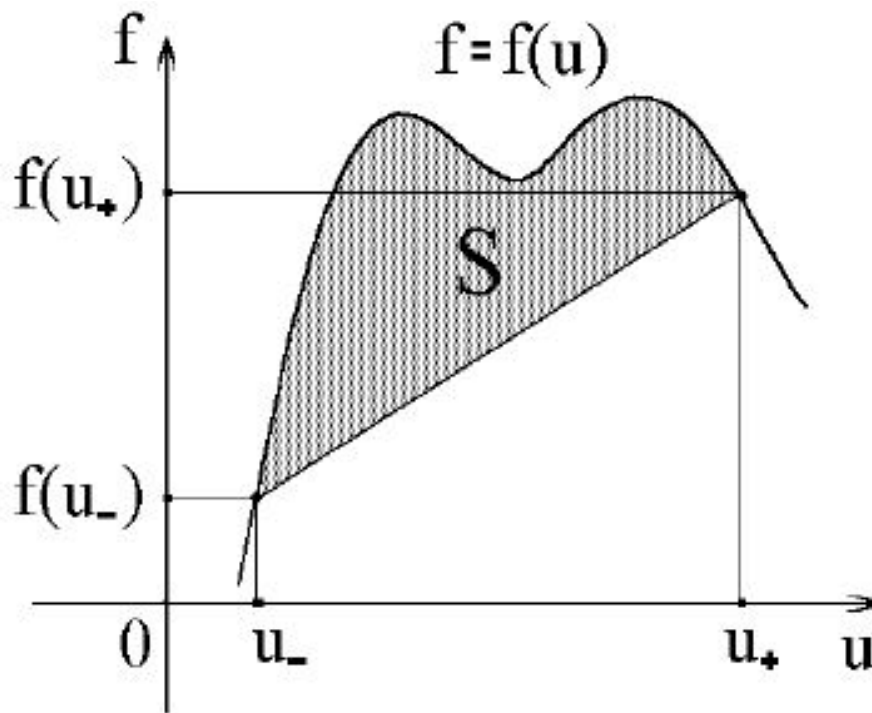
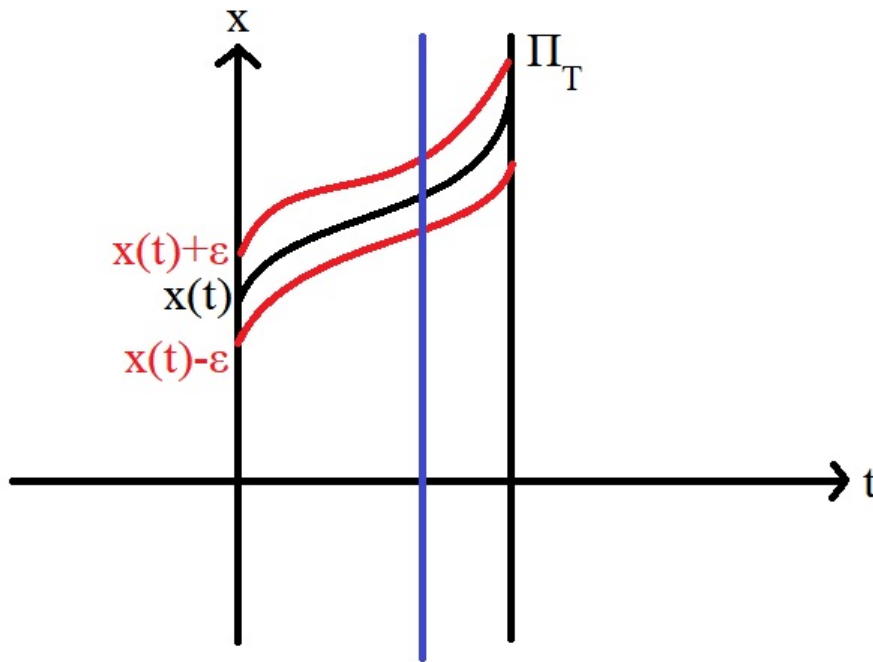


Figura 5.5: Área que determina a taxa de decrescimento de energia.

Então

$$S = \int_{u_-}^{u_+} f(u) \, du - \frac{f(u_+) + f(u_-)}{2} (u_+ - u_-).$$

Por outro lado, para cada $\varepsilon > 0$,



$$\begin{aligned}
 E(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} u^2(t, x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{x(t)-\varepsilon} \frac{1}{2} u^2(t, x) dx + \int_{x(t)-\varepsilon}^{x(t)+\varepsilon} \frac{1}{2} u^2(t, x) dx + \int_{x(t)+\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{2} u^2(t, x) dx.
 \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{x(t)-\varepsilon}^{x(t)+\varepsilon} \frac{1}{2} u^2(t, x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} u^2(t, x) \chi_{[x(t)-\varepsilon, x(t)+\varepsilon]} dx = 0,$$

fazendo $\varepsilon \rightarrow +0$ temos que

$$E(t) = \int_{-\infty}^{x(t)-0} \frac{1}{2} u^2(t, x) dx + \int_{x(t)+0}^{+\infty} \frac{1}{2} u^2(t, x) dx.$$

Daí,

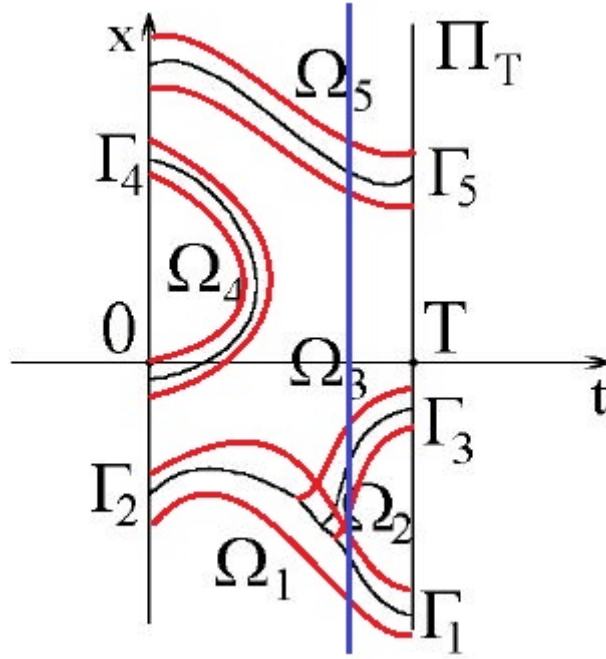
$$\begin{aligned}
E'(t) &= \int_{-\infty}^{x(t)-0} u(t, x) u_t(t, x) dx + \frac{1}{2} u^2(t, x(t) - 0) x'(t) \\
&\quad + \int_{x(t)+0}^{+\infty} u(t, x) u_t(t, x) dx - \frac{1}{2} u^2(t, x(t) + 0) x'(t) \\
&= \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_{-y}^{x(t)-0} u(t, x) u_t(t, x) dx + \frac{1}{2} u^2(t, x(t) - 0) x'(t) \\
&\quad + \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_{x(t)+0}^y u(t, x) u_t(t, x) dx - \frac{1}{2} u^2(t, x(t) + 0) x'(t) \\
&= \frac{u^2(t, x(t) - 0) - u^2(t, x(t) + 0)}{2} x'(t) \\
&\quad - \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\int_{-y}^{x(t)-0} u(t, x) (f(u(t, x)))_x dx + \int_{x(t)+0}^y u(t, x) (f(u(t, x)))_x dx \right) \\
&= \frac{u^2(t, x(t) - 0) - u^2(t, x(t) + 0)}{2} x'(t) - \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} (u(t, x) f(u(t, x))) \Big|_{x=-y}^{x=x(t)-0}}_{=0} \\
&\quad + \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_{-y}^{x(t)-0} f(u(t, x)) u_x(t, x) dx - \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} (u(t, x) f(u(t, x))) \Big|_{x=x(t)+0}^{x=y}}_{=0} \\
&\quad + \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_{x(t)+0}^y f(u(t, x)) u_x(t, x) dx \\
&= \frac{u_-^2 - u_+^2}{2} x'(t) - u_- f(u_-) + \int_0^{u_-} f(u) du + u_+ f(u_+) + \int_{u_+}^0 f(u) du \\
&= \frac{u_-^2 - u_+^2}{2} x'(t) - u_- f(u_-) + u_+ f(u_+) - \int_{u_-}^{u_+} f(u) du.
\end{aligned}$$

Mas $u = u(t, x)$ é uma solução generalizada suave por partes, logo u satisfaz a condição de Rankine-Hugoniot na curva de descontinuidade $x = x(t)$. Daí,

$$\begin{aligned}
E'(t) &= \frac{u_-^2 - u_+^2}{2} \frac{f(u_-) - f(u_+)}{u_- - u_+} - u_- f(u_-) + u_+ f(u_+) - \int_{u_-}^{u_+} f(u) du \\
&= \frac{(u_- + u_+)(f(u_-) - f(u_+))}{2} - u_- f(u_-) + u_+ f(u_+) - \int_{u_-}^{u_+} f(u) du \\
&= \frac{-u_- f(u_-) - u_- f(u_+) + u_+ f(u_-) + u_+ f(u_+)}{2} - \int_{u_-}^{u_+} f(u) du \\
&= \frac{f(u_+) - f(u_-)}{2} (u_+ - u_-) - \int_{u_-}^{u_+} f(u) du \\
&= -S.
\end{aligned}$$

■

Corolário 5.28. *O Teorema 5.27 é válido para um número finito de curvas de descontinuidades de $u = u(t, x)$.*



Demonstração. De fato, para cada $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
 E(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} u^2(t, x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{x_1(t)-\varepsilon} \frac{1}{2} u^2(t, x) dx + \int_{x_1(t)-\varepsilon}^{x_1(t)+\varepsilon} \frac{1}{2} u^2(t, x) dx + \int_{x_1(t)+\varepsilon}^{x_3(t)-\varepsilon} \frac{1}{2} u^2(t, x) dx \\
 &\quad + \int_{x_3(t)-\varepsilon}^{x_3(t)+\varepsilon} \frac{1}{2} u^2(t, x) dx + \int_{x_3(t)+\varepsilon}^{x_5(t)-\varepsilon} \frac{1}{2} u^2(t, x) dx + \int_{x_5(t)-\varepsilon}^{x_5(t)+\varepsilon} \frac{1}{2} u^2(t, x) dx \\
 &\quad + \int_{x_5(t)+\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{2} u^2(t, x) dx.
 \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{x_j(t)-\varepsilon}^{x_j(t)+\varepsilon} \frac{1}{2} u^2(t, x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} u^2(t, x) \chi_{[x_j(t)-\varepsilon, x_j(t)+\varepsilon]} dx = 0, \quad j = 1, 3, 5,$$

fazendo $\varepsilon \rightarrow +0$ e denotando $u_{\pm}^{(j)} = u(t, x_j(t) \pm 0)$ para $j = 1, 3, 5$ temos que

$$\begin{aligned}
 E(t) &= \int_{-\infty}^{x_1(t)-0} \frac{1}{2} u^2(t, x) dx + \int_{x_1(t)+0}^{x_3(t)-0} \frac{1}{2} u^2(t, x) dx + \int_{x_3(t)+0}^{x_5(t)-0} \frac{1}{2} u^2(t, x) dx \\
 &\quad + \int_{x_5(t)+0}^{+\infty} \frac{1}{2} u^2(t, x) dx.
 \end{aligned}$$

Daí, temos que

$$\begin{aligned}
E'(t) &= \int_{-\infty}^{x_1(t)-0} u(t, x)u_t(t, x) dx + \frac{1}{2}u^2(t, x_1(t) - 0)x'_1(t) \\
&+ \int_{x_1(t)+0}^{x_3(t)-0} u(t, x)u_t(t, x) dx + \frac{1}{2}u^2(t, x_3(t) - 0)x'_3(t) \\
&- \frac{1}{2}u^2(t, x_1(t) + 0)x'_1(t) + \int_{x_3(t)+0}^{x_5(t)-0} u(t, x)u_t(t, x) dx \\
&+ \frac{1}{2}u^2(t, x_5(t) - 0)x'_5(t) - \frac{1}{2}u^2(t, x_3(t) + 0)x'_3(t) \\
&+ \int_{x_5(t)+0}^{+\infty} u(t, x)u_t(t, x) dx - \frac{1}{2}u^2(t, x_5 + 0)x'_5(t) \\
&= \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_{-y}^{x_1(t)-0} u(t, x)u_t(t, x) dx + \frac{1}{2}u^2(t, x_1(t) - 0)x'_1(t) \\
&+ \int_{x_1(t)+0}^{x_3(t)-0} u(t, x)u_t(t, x) dx + \frac{1}{2}u^2(t, x_3(t) - 0)x'_3(t) \\
&- \frac{1}{2}u^2(t, x_1(t) + 0)x'_1(t) + \int_{x_3(t)+0}^{x_5(t)-0} u(t, x)u_t(t, x) dx \\
&+ \frac{1}{2}u^2(t, x_5(t) - 0)x'_5(t) - \frac{1}{2}u^2(t, x_3(t) + 0)x'_3(t) \\
&+ \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_{x_5(t)+0}^y u(t, x)u_t(t, x) dx - \frac{1}{2}u^2(t, x_5 + 0)x'_5(t) \\
&= \frac{\left(u_-^{(1)}\right)^2 - \left(u_+^{(1)}\right)^2}{2}x'_1(t) + \frac{\left(u_-^{(3)}\right)^2 - \left(u_+^{(3)}\right)^2}{2}x'_3(t) + \frac{\left(u_-^{(5)}\right)^2 - \left(u_+^{(5)}\right)^2}{2}x'_5(t) \\
&- \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_{-y}^{x_1(t)-0} u(t, x)(f(u(t, x)))_x dx - \int_{x_1(t)+0}^{x_3(t)-0} u(t, x)(f(u(t, x)))_x dx \\
&- \int_{x_3(t)+0}^{x_5(t)-0} u(t, x)(f(u(t, x)))_x dx - \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_{x_5(t)+0}^y u(t, x)(f(u(t, x)))_x dx \\
&= \frac{\left(u_-^{(1)}\right)^2 - \left(u_+^{(1)}\right)^2}{2}x'_1(t) + \frac{\left(u_-^{(3)}\right)^2 - \left(u_+^{(3)}\right)^2}{2}x'_3(t) + \frac{\left(u_-^{(5)}\right)^2 - \left(u_+^{(5)}\right)^2}{2}x'_5(t) \\
&- \lim_{y \rightarrow +\infty} (u(t, x)f(u(t, x)))|_{x=-y}^{x=x_1(t)-0} + \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_{-y}^{x_1(t)-0} f(u(t, x))u_x(t, x) dx \\
&- (u(t, x)f(u(t, x)))|_{x=x_1(t)+0}^{x=x_3(t)-0} + \int_{x_1(t)+0}^{x_3(t)-0} f(u(t, x))u_x(t, x) dx \\
&- (u(t, x)f(u(t, x)))|_{x=x_3(t)+0}^{x=x_5(t)-0} + \int_{x_3(t)+0}^{x_5(t)-0} f(u(t, x))u_x(t, x) dx \\
&- \lim_{y \rightarrow +\infty} (u(t, x)f(u(t, x)))|_{x=x_5(t)+0}^{x=y} + \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_{x_5(t)+0}^y f(u(t, x))u_x(t, x) dx \\
&= \frac{\left(u_-^{(1)}\right)^2 - \left(u_+^{(1)}\right)^2}{2}x'_1(t) + \frac{\left(u_-^{(3)}\right)^2 - \left(u_+^{(3)}\right)^2}{2}x'_3(t) + \frac{\left(u_-^{(5)}\right)^2 - \left(u_+^{(5)}\right)^2}{2}x'_5(t) \\
&- u_-^{(1)}f\left(u_-^{(1)}\right) - u_-^{(3)}f\left(u_-^{(3)}\right) + u_+^{(1)}f\left(u_+^{(1)}\right) - u_-^{(5)}f\left(u_-^{(5)}\right) + u_+^{(3)}f\left(u_+^{(3)}\right) \\
&+ u_+^{(5)}f\left(u_+^{(5)}\right) + \int_0^{u_-^{(1)}} f(u) du + \int_{u_+^{(1)}}^{u_-^{(3)}} f(u) du + \int_{u_+^{(3)}}^{u_-^{(5)}} f(u) du + \int_{u_+^{(5)}}^0 f(u) du.
\end{aligned}$$

Como $u = u(t, x)$ é uma solução generalizada suave por partes, então u satisfaz a condição de Rankine-Hugoniot nas curvas de descontinuidades $x_1 = x_1(t)$, $x_3 = x_3(t)$ e $x_5 = x_5(t)$, ou seja,

$$x'_j(t) = \frac{f(u_+^{(j)}) - f(u_-^{(j)})}{u_+^{(j)} - u_-^{(j)}}, \quad j = 1, 3, 5.$$

Logo

$$\begin{aligned} E'(t) &= \frac{u_-^{(1)} + u_+^{(1)}}{2} \left(f(u_-^{(1)}) - f(u_+^{(1)}) \right) + \frac{u_-^{(3)} + u_+^{(3)}}{2} \left(f(u_-^{(3)}) - f(u_+^{(3)}) \right) \\ &\quad + \frac{u_-^{(5)} + u_+^{(5)}}{2} \left(f(u_-^{(5)}) - f(u_+^{(5)}) \right) - u_-^{(1)} f(u_-^{(1)}) + u_-^{(3)} f(u_-^{(3)}) \\ &\quad + u_+^{(1)} f(u_+^{(1)}) - u_-^{(5)} f(u_-^{(5)}) - u_+^{(3)} f(u_+^{(3)}) - u_+^{(5)} f(u_+^{(5)}) \\ &\quad + \int_0^{u_-^{(1)}} f(u) \, du + \int_{u_+^{(1)}}^{u_-^{(3)}} f(u) \, du + \int_{u_+^{(3)}}^{u_-^{(5)}} f(u) \, du + \int_{u_+^{(5)}}^0 f(u) \, du \\ &= \frac{u_+^{(1)} - u_-^{(1)}}{2} \left(f(u_+^{(1)}) + f(u_-^{(1)}) \right) - \int_{u_-^{(1)}}^{u_+^{(1)}} f(u) \, du \\ &\quad + \frac{u_+^{(3)} - u_-^{(3)}}{2} \left(f(u_+^{(3)}) + f(u_-^{(3)}) \right) - \int_{u_-^{(3)}}^{u_+^{(3)}} f(u) \, du \\ &\quad + \frac{u_+^{(5)} - u_-^{(5)}}{2} \left(f(u_+^{(5)}) + f(u_-^{(5)}) \right) - \int_{u_-^{(5)}}^{u_+^{(5)}} f(u) \, du. \end{aligned}$$

■

Proposição 5.29. (Invariância sob transformação). *Se $u = u(t, x)$ é solução da equação 5.1 na faixa $\Pi_T \equiv (0, T) \times \mathbb{R}$, então $\tilde{u}(t, x) = u(T - t, -x)$ também o é para todo $(t, x) \in \Pi_T$.*

Demonstração. Como $(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}$, então $(T - t, -x) \in (0, T) \times \mathbb{R} = \Pi_T$. Daí,

$$\begin{aligned} \tilde{u}_t(t, x) + f'(\tilde{u}(t, x))\tilde{u}_x(t, x) &= -u_t(T - t, -x) - f'(u(T - t, -x))u_x(T - t, -x) \\ &= -(u_t(T - t, -x) + f'(u(T - t, -x))u_x(T - t, -x)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

para todo $(t, x) \in \Pi_T$. ■

Definição 5.30. *Seja $u : \underbrace{[0, T] \times \mathbb{R}}_{=\Pi_T} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável limitada. Dizemos*

*que $u = u(t, x)$ é uma **solução de entropia generalizada de Kruzhkov** do problema (5.1)-(5.2) se*

(i) para todo $k \in \mathbb{R}$ e para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Pi_T)$ não negativa,

$$\int_{\Pi_T} (|u - k|\varphi_t + \operatorname{sgn}(u - k)(f(u) - f(k))\varphi_x) \, dx \, dt \geq 0; \quad (5.29)$$

(ii) $u \rightarrow u_0$ quando $t \rightarrow +0$ na topologia de $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow +0} \int_a^b |u(t, x) - u_0(x)| dx = 0 \quad \forall [a, b] \subset \mathbb{R}. \quad (5.30)$$

Proposição 5.31. *Se $u = u(t, x)$ é uma solução de entropia generalizada de Kruzhkov do problema (5.1)-(5.2), então u é uma solução generalizada da equação (5.1).*

Demonstração. Como toda função constante é uma solução clássica de (5.1), então toda função constante é uma solução generalizada de (5.1), ou seja, para todo $k \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\Pi_T} (k\varphi_t + f(k)\varphi_x) dx dt = 0 \quad \forall \varphi \in C_C^\infty(\Pi_T).$$

Agora, seja $\varphi \in C_C^\infty(\Pi_T)$ com $\varphi(t, x) \geq 0$ para todo $(t, x) \in \Pi_T$. Como u é uma solução de entropia generalizada de Kruzhkov, tomando $k > \sup_{(t,x) \in \Pi_T} \text{ess } u(t, x)$, temos que $k > u(t, x)$ q.t.p. $(t, x) \in \Pi_T$. Reescrevendo (5.29), obtemos

$$\int_{\Pi_T} ((k - u)\varphi_t + (f(k) - f(u))\varphi_x) dx dt \geq 0,$$

logo

$$0 = \int_{\Pi_T} (k\varphi_t + f(k)\varphi_x) dx dt \geq \int_{\Pi_T} (u\varphi_t + f(u)\varphi_x) dx dt. \quad (5.31)$$

Por outro lado, se tomarmos $k < \inf_{(t,x) \in \Pi_T} \text{ess } u(t, x)$, então $k < u(t, x)$ q.t.p. $(t, x) \in \Pi_T$. Reescrevendo (5.29), temos que

$$\int_{\Pi_T} ((u - k)\varphi_t + (f(u) - f(k))\varphi_x) dx dt \geq 0,$$

logo

$$0 = \int_{\Pi_T} (k\varphi_t + f(k)\varphi_x) dx dt \leq \int_{\Pi_T} (u\varphi_t + f(u)\varphi_x) dx dt. \quad (5.32)$$

De (5.31) e (5.32), segue que

$$\int_{\Pi_T} (u\varphi_t + f(u)\varphi_x) dx dt = 0 \quad \forall \varphi \in C_C^\infty(\Pi_T), \varphi \geq 0. \quad (5.33)$$

Pelo Lema 1.14, para cada $\varphi \in C_C^\infty(\Pi_T)$, existem $\varphi_1, \varphi_2 \in C_C^\infty(\Pi_T)$ não negativas tais que $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Por (5.33),

$$\int_{\Pi_T} (u(\varphi_1)_t + f(u)(\varphi_1)_x) dx dt = 0$$

e

$$\int_{\Pi_T} (u(\varphi_2)_t + f(u)(\varphi_2)_x) dx dt = 0.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\int_{\Pi_T} (u\varphi_t + f(u)\varphi_x) \, dxdt &= \int_{\Pi_T} (u(\varphi_1 - \varphi_2)_t + f(u)(\varphi_1 - \varphi_2)_x) \, dxdt \\
&= \int_{\Pi_T} (u((\varphi_1)_t - (\varphi_2)_t) + f(u)((\varphi_1)_x - (\varphi_2)_x)) \, dxdt \\
&= \int_{\Pi_T} (u(\varphi_1)_t + f(u)(\varphi_1)_x) \, dxdt \\
&\quad - \int_{\Pi_T} (u(\varphi_2)_t + f(u)(\varphi_2)_x) \, dxdt \\
&= 0,
\end{aligned}$$

logo u satisfaz (4.2).

Como u é mensurável e limitada, então $u \in L^1_{\text{loc}}$.

Portanto u é uma solução generalizada. ■

Proposição 5.32. *Seja $u = u(t, x)$ uma função suave por partes que é solução de entropia generalizada de Kruzhkov da equação (5.1). Então em cada curva de descontinuidade de u valem as condições de admissibilidade (5.21) ou (5.22).*

Demonstração. Sejam Γ uma curva de descontinuidade de u e $(t_0, x_0) \in \Gamma$. Definamos

$$u_{\pm}(t_0, x_0) \equiv \lim_{x \rightarrow x_0 \pm 0} u(t_0, x).$$

Suponhamos que $u_-(t_0, x_0) < u_+(t_0, x_0)$. Seja $k \in (u_-(t_0, x_0), u_+(t_0, x_0))$ fixado. Como u é suave por partes, então existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$\|(t, x) - (t_0, x_0)\| < \delta_1 \Rightarrow \underbrace{|u(t, x) - u_-(t_0, x_0 - 0)|}_{=u(t,x)-u_-(t_0,x_0-0)} < k - u_-(t_0, x_0 - 0)$$

e

$$\|(t, x) - (t_0, x_0)\| < \delta_2 \Rightarrow \underbrace{|u(t, x) - u_+(t_0, x_0 + 0)|}_{=u_+(t_0,x_0+0)-u(t,x)} < u_+(t_0, x_0 + 0) - k.$$

Definamos $\delta \equiv \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ e $O \equiv B_{\delta}(t_0, x_0) \subset \Pi_T$. Então

$$u(t, x) < k \quad \text{se } (t, x) \in O_- \equiv \{(t, x) \in O : x < x(t)\}$$

e

$$u(t, x) > k \quad \text{se } (t, x) \in O_+ \equiv \{(t, x) \in O : x > x(t)\}.$$

Como u é uma solução de entropia generalizada de Kruzhkov, então para toda $\varphi \in C^{\infty}_c(O)$

não negativa,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_O (|u-k|\varphi_t + \operatorname{sgn}(u-k)(f(u)-f(k))\varphi_x) dx dt \\
&= - \int_{O_-} ((u-k)\varphi_t + \operatorname{sgn}(u-k)(f(u)-f(k))\varphi_x) dx dt \\
&\quad + \underbrace{\int_{O \cap \Gamma} (|u-k|\varphi_t + \operatorname{sgn}(u-k)(f(u)-f(k))\varphi_x) dx dt}_{=0} \\
&\quad + \int_{O_+} ((u-k)\varphi_t + \operatorname{sgn}(u-k)(f(u)-f(k))\varphi_x) dx dt.
\end{aligned}$$

Como $\partial O_{\pm} \subset \partial O \cup (\Gamma \cap O)$, φ tem suporte compacto em O e $\partial O \subset \Pi_T \setminus O$, pois O é aberto, segue que a integral de (5.29) é zero sobre ∂O . Usando integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_{O_-} (u_t + f(u)_x)\varphi dx dt \\
&\quad - \int_{\Gamma \cap O} ((u_- - k) \cos(\nu, t) + (f(u_-) - f(k)) \cos(\nu, x))\varphi dS \\
&\quad - \int_{O_+} (u_t + f(u)_x)\varphi dx dt \\
&\quad - \int_{\Gamma \cap O} ((u_+ - k) \cos(\nu, t) + (f(u_+) - f(k)) \cos(\nu, x))\varphi dS,
\end{aligned}$$

onde ν é o vetor normal unitário apontando para fora de ∂O_- . Como u é uma solução de entropia generalizada de Kruzhkov, segue da Proposição 5.31 que $u = u(t, x)$ é uma solução generalizada da equação (5.1). Como $u \in C^1(O_- \cup O_+)$, então u é uma solução clássica da equação (5.1) em $O_- \cup O_+$. Daí, temos que para toda $\varphi \in C_c^\infty(O)$ não negativa,

$$\int_{\Gamma \cap O} ((2k - u_- - u_+) \cos(\nu, t) + (2f(k) - f(u_-) - f(u_+)) \cos(\nu, x))\varphi dS \geq 0.$$

Então para todo $(t, x) \in \Gamma \cap O$,

$$(2k - u_- - u_+) \cos(\nu, t) + (2f(k) - f(u_-) - f(u_+)) \cos(\nu, x) \geq 0, \quad (5.34)$$

pois se existisse $(\tilde{t}, \tilde{x}) \in \Gamma \cap O$ tal que

$$(2k - u_- - u_+) \cos(\nu, \tilde{t}) + (2f(k) - f(u_-) - f(u_+)) \cos(\nu, \tilde{x}) < 0,$$

então tomando $\tilde{\varphi}$ do Exemplo 1.11 e denotando

$$\tilde{\Gamma} \equiv \Gamma \cap O \cap \left([0, T) \times \left(-\sqrt{T^2 - t^2}, \sqrt{T^2 - t^2} \right) \right),$$

teríamos que

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma \cap O} ((2k - u_- - u_+) \cos(\nu, t) + (2f(k) - f(u_-) - f(u_+)) \cos(\nu, x)) \tilde{\varphi} \, dS \\ &= \int_{\tilde{\Gamma}} ((2k - u_- - u_+) \cos(\nu, t) + (2f(k) - f(u_-) - f(u_+)) \cos(\nu, x)) \tilde{\varphi} \, dS \\ &< 0, \end{aligned}$$

contradição. Como u é uma solução generalizada, então u satisfaz a condição de Rankine-Hugoniot na curva de descontinuidade Γ , ou seja,

$$(u_+ - u_-) \cos(\nu, t) + (f(u_+) - f(u_-)) \cos(\nu, x) = 0. \quad (5.35)$$

Mas

$$\begin{aligned} 0 &\leq (2k - u_- - u_+) \cos(\nu, t) + (2f(k) - f(u_-) - f(u_+)) \cos(\nu, x) \\ &= 2((k - u_-) \cos(\nu, t) + (f(k) - f(u_-)) \cos(\nu, x)) \\ &\quad - \underbrace{((u_+ - u_-) \cos(\nu, t) + (f(u_+) - f(u_-)) \cos(\nu, x))}_{=0} \\ &= 2((k - u_-) \cos(\nu, t) + (f(k) - f(u_-)) \cos(\nu, x)). \end{aligned}$$

Logo

$$(k - u_-) \cos(\nu, t) + (f(k) - f(u_-)) \cos(\nu, x) \geq 0 \quad \forall k \in (u_-, u_+),$$

ou seja, vale (5.21).

Se $u_+(t_0, x_0) < u_-(t_0, x_0)$, então pelo mesmo argumento obtemos

$$(u_+ - k) \cos(\nu, t) + (f(u_+) - f(k)) \cos(\nu, x) \leq 0 \quad \forall k \in (u_+, u_-),$$

ou seja, vale (5.22). ■

Proposição 5.33. *A desigualdade (5.29) pode ser obtida por aproximação da viscosidade nula.*

Demonstração. De fato, seja $u = u(t, x)$ um limite na topologia de $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ quando $\varepsilon \rightarrow +0$ das soluções clássicas $u^\varepsilon = u^\varepsilon(t, x)$ do problema de Cauchy

$$u_t + f'(u)u_x = \varepsilon u_{xx} \quad (5.36)$$

com $u(0, x) = u_0(x)$.

Seja $E = E(u) \in C^2(\mathbb{R})$ uma função convexa. Como

$$E_t = E'(u)u_t,$$

$$\left(\int_k^u f'(\xi) E'(\xi) d\xi \right)_x = f'(u) E'(u) u_x$$

e

$$(E(u))_{xx} = (E'(u)u_x)_x = E''(u)u_x^2 + E'(u)u_{xx},$$

multiplicando a equação (5.36) por $E'(u)$, obtemos

$$E_t + \left(\int_k^u f'(\xi) E'(\xi) d\xi \right)_x = \varepsilon(E(u))_{xx} - \varepsilon E''(u)u_x^2$$

$$\stackrel{E''(u) \geq 0 \quad \forall u \in \mathbb{R} \text{ e } \varepsilon > 0}{\leq} \varepsilon(E(u))_{xx},$$

logo

$$E_t + \left(\int_k^u f'(\xi) E'(\xi) d\xi \right)_x \leq \varepsilon(E(u))_{xx}. \quad (5.37)$$

Multiplicando (5.37) por uma função não negativa $\varphi \in C_C^\infty(\Pi_T)$ e integrando por partes sobre Π_T , obtemos

$$- \int_{\Pi_T} \left(\varphi_t E(u) + \varphi_x \int_k^u f'(\xi) E'(\xi) d\xi \right) dx dt \leq \varepsilon \int_{\Pi_T} \varphi_{xx} E(u) dx dt.$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow +0$, obtemos

$$\int_{\Pi_T} \left(\varphi_t E(u) + \varphi_x \int_k^u f'(\xi) E'(\xi) d\xi \right) dx dt \geq 0. \quad (5.38)$$

Seja $\{E_m\}$ definida na Proposição 1.17. Como E'_m é limitada, existe $M > 0$ tal que $|E'_m(\xi)| \leq M$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$. Como $|f'(\xi)E'_m(\xi)| \leq \underbrace{M|f'(\xi)|}_{\in C^0(\mathbb{R})}$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$, segue do

Teorema da Convergência Dominada que

$$\begin{aligned} \int_k^u f'(\xi) E'_m(\xi) d\xi &\rightarrow \int_k^u f'(\xi) \operatorname{sgn}(\xi - k) d\xi \\ &= \operatorname{sgn}(u - k) \int_k^u f'(\xi) d\xi \\ &= (f(u) - f(k)) \operatorname{sgn}(u - k). \end{aligned}$$

Desse modo, deduzimos (5.29) de (5.38). ■

Capítulo 6

O problema de Riemann

Neste capítulo, construiremos soluções generalizadas autossimilares $u = u(t, x)$ para o problema

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad u(0, x) = u_0(x) = \begin{cases} u_- & \text{se } x < 0, \\ u_+ & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad (6.1)$$

na faixa $\Pi_T = (0, T) \times \mathbb{R}$, onde u_- e u_+ são dois estados constantes arbitrários e distintos, de modo que tais soluções converjam para a função u_0 quando $t \rightarrow +0$ em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Proposição 6.1. *A equação (6.1) é invariante sob a mudança $t \rightarrow kt$ e $x \rightarrow kx$, o dado inicial permanece inalterado sob a ação de homotetias $x \rightarrow kx$ com $k > 0$ e a condição de aumento de entropia é invariante sobre essas transformações.*

Demonstração. De fato, seja $k > 0$ fixado. Definamos

$$\tilde{u}(t, x) \equiv u(kt, kx).$$

Então

$$\tilde{u}_t(t, x) + f'(\tilde{u}(t, x))\tilde{u}_x(t, x) = k(u_t(kt, kx) + f'(u(kt, kx))u_x(kt, kx)) = 0.$$

$$u_0(x) = \begin{cases} u_- & \text{se } x < 0, \\ u_+ & \text{se } x > 0 \end{cases} \Rightarrow u_0(kx) = \begin{cases} u_- & \text{se } kx \stackrel{k>0}{<} 0, \\ u_+ & \text{se } kx \stackrel{k>0}{>} 0 \end{cases}$$

e

$$S(t+0, x) \geq S(t-0, x) \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow S(kt+0, x) \geq S(kt-0, x) \quad \forall k > 0. \quad \blacksquare$$

Observação 6.2. *Admitindo a unicidade de uma solução generalizada admissível do problema (6.1), concluímos que qualquer mudança de variáveis $t \rightarrow kt$, $x \rightarrow kx$ com $k > 0$ transforma a solução única $u = u(t, x)$ do problema em si mesma, ou seja,*

$$u(kt, kx) \equiv u(t, x) \quad \forall k > 0.$$

Ou seja, a função $u = u(t, x)$ permanece constante em cada reta $x = \xi t$, com $t > 0$, emitida a partir da origem $(0, 0)$, de modo que $u(t, x)$ depende apenas da variável $\xi = \frac{x}{t}$, isto é,

$$u(t, x) = \tilde{u}\left(\frac{x}{t}\right), \quad t > 0. \quad (6.2)$$

Definição 6.3. Soluções de (6.1) que dependem apenas de $\frac{x}{t}$ são chamadas de *autossimilares*.

Observação 6.4. As curvas de descontinuidades de salto de soluções autossimilares só podem ser semirretas de origem $(0, 0)$.

Considere o problema de Riemann (6.1) na equação de Hopf, ou seja,

$$u_t + uu_x = 0, \quad u(0, x) = u_0(x) = \begin{cases} u_- & \text{se } x < 0, \\ u_+ & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad (6.3)$$

Proposição 6.5. O conjunto de todas as soluções autossimilares de (6.3) na faixa $\Pi_T = (0, T) \times \mathbb{R}$ é formado por todas as soluções constantes e a solução $u(t, x) = \frac{x}{t}$.

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\tilde{u}\left(\frac{x}{t}\right)\right)_t + \tilde{u}\left(\frac{x}{t}\right) \left(\tilde{u}\left(\frac{x}{t}\right)\right)_x \\ &= -\frac{x}{t^2} \tilde{u}'\left(\frac{x}{t}\right) + \frac{1}{t} \tilde{u}\left(\frac{x}{t}\right) \tilde{u}'\left(\frac{x}{t}\right) \\ &= \frac{1}{t} \tilde{u}'\left(\frac{x}{t}\right) \left(-\frac{x}{t} + \tilde{u}\left(\frac{x}{t}\right)\right). \end{aligned}$$

Como $t > 0$, então $\tilde{u}' = 0$ ou $-\frac{x}{t} + \tilde{u}\left(\frac{x}{t}\right) = 0$. Se $\tilde{u}' = 0$, então $\tilde{u} \equiv \text{constante}$, ou seja, $u \equiv \text{constante}$. Se $-\frac{x}{t} + \tilde{u}\left(\frac{x}{t}\right) = 0$, então $\tilde{u}\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{x}{t}$, ou seja, $u(t, x) = \frac{x}{t}$. ■

Proposição 6.6. Existe uma solução generalizada suave por partes autossimilar do problema de Riemann (6.3).

Demonstração. Se $u_- > u_+$, definamos

$$u(t, x) \equiv \begin{cases} u_- & \text{se } x < \frac{u_+ + u_-}{2} t, \\ u_+ & \text{se } x > \frac{u_+ + u_-}{2} t. \end{cases} \quad (6.4)$$

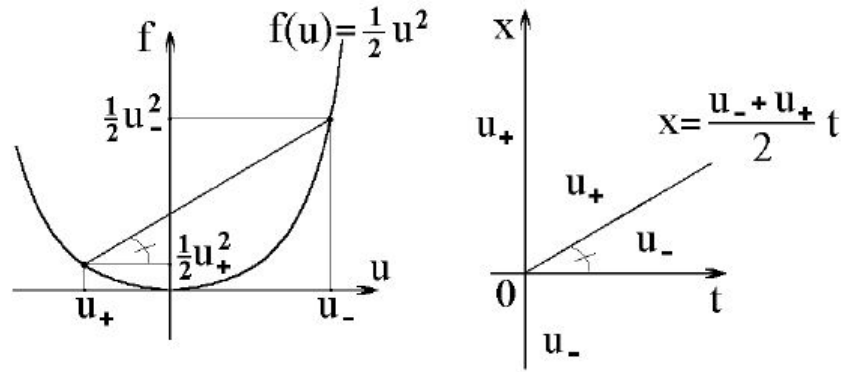


Figura 6.1: Solução onda de choque do problema de Riemann (6.3).

Como u é uma solução constante por partes de (6.3), pela Proposição 6.3, u é uma solução autossimilar do problema de Riemann (6.3). Além disso, na reta de descontinuidade $x = \frac{u_+ + u_-}{2}t$, u satisfaz a condição de Rankine-Hugoniot

$$\frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-} = \frac{\frac{u_+^2}{2} - \frac{u_-^2}{2}}{u_+ - u_-} = \frac{u_+ + u_-}{2}$$

e, pelo Exemplo 5.22, u satisfaz a condição de aumento de entropia. Além disso, u dada por (6.4) é admissível.

Por outro lado, se $u_- < u_+$, definamos

$$u(t, x) \equiv \begin{cases} u_- & \text{se } x < u_- t, \\ \frac{x}{t} & \text{se } u_- t < x < u_+ t, \\ u_+ & \text{se } x > u_+ t. \end{cases} \quad (6.5)$$

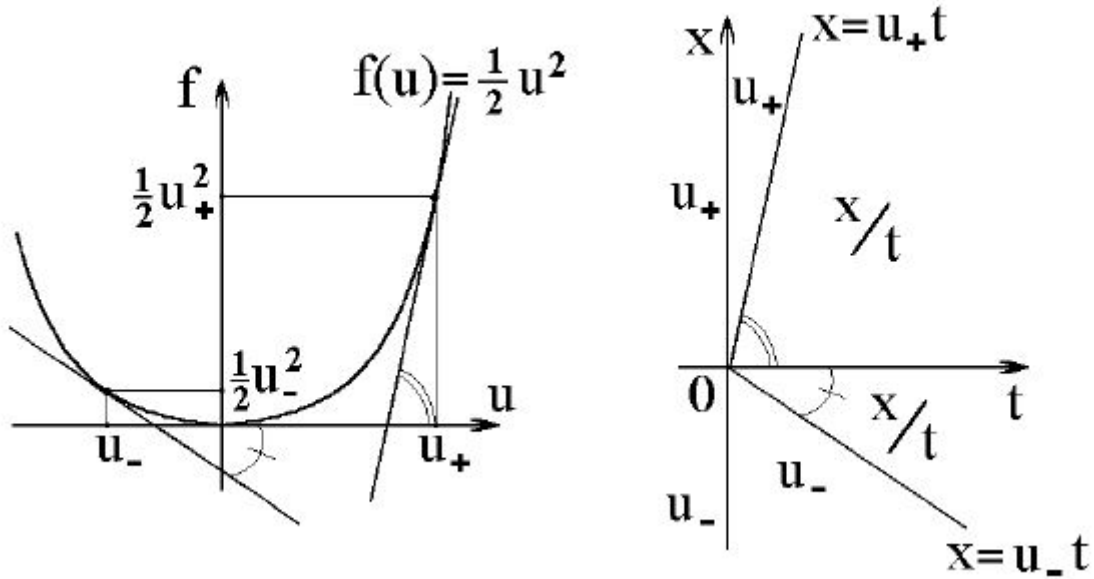


Figura 6.2: Solução de onda de rarefação do problema de Riemann (6.3).

Então u é contínua, pois como

$$\lim_{x \rightarrow (u-t)^-} u(t, x) = \lim_{x \rightarrow u-t} u_- = u_-,$$

$$\lim_{x \rightarrow (u-t)^+} u(t, x) = \lim_{x \rightarrow u-t} \frac{x}{t} = u_-,$$

$$\lim_{x \rightarrow (u+t)^-} u(t, x) = \lim_{x \rightarrow u+t} \frac{x}{t} = u_+$$

e

$$\lim_{x \rightarrow (u+t)^+} u(t, x) = \lim_{x \rightarrow u+t} u_+ = u_+,$$

segue que

$$\lim_{x \rightarrow u-t} u(t, x) = u_- \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow u+t} u(t, x) = u_+.$$

Além disso, u não é diferenciável, pois

$$\lim_{x \rightarrow (u-t)^-} \frac{u(t, x) - u_-}{x - u-t} = \lim_{x \rightarrow u-t} \frac{u_- - u_-}{x - u-t} = \lim_{x \rightarrow u-t} \frac{0}{x - u-t} = 0$$

e

$$\lim_{x \rightarrow (u-t)^+} \frac{u(t, x) - u_-}{x - u-t} = \lim_{x \rightarrow u-t} \frac{\frac{x}{t} - u_-}{x - u-t} = \lim_{x \rightarrow u-t} \frac{\frac{x - u-t}{t}}{x - u-t} = \frac{1}{t} \neq 0.$$

Pela Proposição 6.5, u é uma solução autossimilar do problema de Riemann (6.3). Além disso,

$$\frac{f\left(\frac{x}{t}\right) - f(u_-)}{\frac{x}{t} - u_-} = \frac{\frac{\left(\frac{x}{t}\right)^2}{2} - \frac{u_-^2}{2}}{\frac{x}{t} - u_-} = \frac{\frac{x}{t} + u_-}{2} = \frac{x + u_- t}{2t},$$

$$\frac{f(u_+) - f\left(\frac{x}{t}\right)}{u_+ - \frac{x}{t}} = \frac{\frac{u_+^2}{2} - \frac{\left(\frac{x}{t}\right)^2}{2}}{u_+ - \frac{x}{t}} = \frac{u_+ + \frac{x}{t}}{2} = \frac{u_+t + x}{2t},$$

logo

$$x = \frac{x + u_-t}{2t}t \Leftrightarrow x = u_-t,$$

$$x = \frac{u_+t + x}{2t}t \Leftrightarrow x = u_+t$$

e assim a condição de Rankine-Hugoniot é satisfeita nas retas de descontinuidades $x = u_-t$ e $x = u_+t$. ■

Observação 6.7. Desenhando o gráfico da função $f(u) = \frac{u^2}{2}$ em relação aos eixos (u, f) , paralelo aos eixos (t, x) , vamos marcar os pontos $\left(u_-, \frac{u_-^2}{2}\right)$ e $\left(u_+, \frac{u_+^2}{2}\right)$ no gráfico. Como a reta de descontinuidade da solução (6.4) é paralela ao segmento que une esses dois pontos (veja a Figura 6.1). Observe também que as retas $x = u_-t$ e $x = u_+t$ de descontinuidade fraca da solução $u = u(t, x)$ dada por (6.5), são paralelas às retas tangentes ao gráfico da função $f(u) = \frac{u^2}{2}$ nos pontos $(u_-, f(u_-))$ e $(u_+, f(u_+))$, respectivamente (veja a Figura 6.2).

Observação 6.8. A fórmula (6.4) não satisfaz a condição de aumento de entropia quando $u_+ > u_-$. Além disso, a fórmula (6.5) não faz sentido quando $u_- > u_+$, pois se $u_- > u_+$, então $u_-t > u_+t$ para todo $t > 0$ e conseqüentemente $x \in (u_+t, u_-t)$ satisfaz $u(t, x) = u_-$ e $u(t, x) = u_+$. Mas $u_- \neq u_+$ e isso contradiz o fato de u ser uma função.

Observação 6.9. Sejam f estritamente convexa e u solução do problema de Riemann (6.1). Então existe uma função ψ tal que $u(t, x) = \psi\left(\frac{x}{t}\right)$. De fato, seja $u(t, x) = \tilde{u}\left(\frac{x}{t}\right)$. Então

$$\frac{1}{t}\tilde{u}'\left(\frac{x}{t}\right)\left(f'\left(\tilde{u}\left(\frac{x}{t}\right)\right) - \frac{x}{t}\right) = 0.$$

Então $\tilde{u}' = 0$ ou $f'\left(\tilde{u}\left(\frac{x}{t}\right)\right) = \frac{x}{t}$. Se $\tilde{u}' = 0$, então $\tilde{u} \equiv$ constante, ou seja, $u \equiv$ constante. Se $f'\left(\tilde{u}\left(\frac{x}{t}\right)\right) = \frac{x}{t}$, então como $f'' > 0$, então f' é estritamente crescente e conseqüentemente f' é injetora e portanto bijetora sobre a sua imagem. Assim, existe $(f')^{-1}$ na imagem de f' . Logo $\tilde{u}\left(\frac{x}{t}\right) = (f')^{-1}\left(\frac{x}{t}\right)$, ou seja, $u(t, x) = (f')^{-1}\left(\frac{x}{t}\right)$.

Exemplo 6.10. No caso da equação de Hopf, $f'(u) = u$ para todo $u \in \mathbb{R}$. Assim, $\psi\left(\frac{x}{t}\right) = (f')^{-1}\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{x}{t}$, ou seja, $u(t, x) = \frac{x}{t}$.

Definição 6.11. A solução $u(t, x) = \psi\left(\frac{x}{t}\right)$ de (6.1), que é descontínua em $(0, 0)$ e é contínua em $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$, é chamada **onda de rarefação centralizada**.

Teorema 6.12. Se f é convexa, então existe uma solução generalizada suave por partes autossimilar do problema de Riemann (6.1).

Demonstração. (i) Se $u_- > u_+$, definamos

$$u(t, x) \equiv \begin{cases} u_- & \text{se } x < \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-}t, \\ u_+ & \text{se } x > \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-}t. \end{cases} \quad (6.6)$$

O salto na solução obtida é admissível com a condição de aumento de entropia. De fato, se $f' > 0$, então f é estritamente crescente, logo $f(u_-) > f(u_+)$ e consequentemente $S_+ = f(u_-)$ e $S_- = f(u_+)$. Além disso, o Teorema do Valor Médio nos garante a existência de $\tilde{u} \in (u_+, u_-)$ tal que $\frac{f(u_-) - f(u_+)}{u_- - u_+} = f'(\tilde{u})$. Daí, temos que

$$S_+ - S_- = f(u_-) - f(u_+) = \frac{f(u_-) - f(u_+)}{u_- - u_+}(u_- - u_+) = \underbrace{f'(\tilde{u})}_{>0} \underbrace{(u_- - u_+)}_{>0} > 0,$$

ou seja, $S_+ > S_-$.

Analogamente, se $f' < 0$, então f é estritamente decrescente, logo $f(u_-) < f(u_+)$ e consequentemente $S_+ = f(u_+)$, $S_- = f(u_-)$ e consequentemente

$$S_+ - S_- = f(u_+) - f(u_-) = -\frac{f(u_-) - f(u_+)}{u_- - u_+}(u_- - u_+) = \underbrace{(-f'(\tilde{u}))}_{>0} \underbrace{(u_- - u_+)}_{>0} > 0,$$

ou seja, $S_+ > S_-$. Além disso, (6.6) é admissível.

Se $u_- < u_+$, a função dada por (6.6) é uma solução generalizada mas não satisfaz a condição de aumento de entropia. Nesse caso, definamos

$$u(t, x) \equiv \begin{cases} u_- & \text{se } x < f'(u_-)t, \\ \psi\left(\frac{x}{t}\right) & \text{se } f'(u_-)t < x < f'(u_+)t, \\ u_+ & \text{se } x > f'(u_+)t. \end{cases} \quad (6.7)$$

A função dada por (6.7) está bem definida no semiplano $t > 0$. Como a função fluxo $f'' > 0$, então f' é estritamente crescente, ou seja, $f'(u_-) < f'(u_+)$ se $u_- < u_+$. Como a onda de rarefação $\psi = \psi\left(\frac{x}{t}\right)$ é contínua para todo $t > 0$, então ψ está definida para todos os pontos entre u_- e u_+ e como ψ é a função inversa de f' , então

$$\psi\left(\frac{x}{t}\right) = \hat{u} \Leftrightarrow x = f'(\hat{u})t \quad \forall \hat{u} \text{ entre } u_- \text{ e } u_+.$$

Ou seja, a onda de rarefação $\psi = \psi\left(\frac{x}{t}\right)$ leva \hat{u} , entre u_- e u_+ , na reta $x = f'(\hat{u})t$, $t > 0$. Observe que esta reta é paralela à reta tangente ao gráfico $f = f(u)$ no ponto $(\hat{u}, f(\hat{u}))$ deste gráfico. Assim, as retas de descontinuidade fraca da solução $u = u(t, x)$ dada por (6.7), ou seja, as retas $x = f'(u_{\pm})t$ são paralelas às direções tangentes ao gráfico $f = f(u)$ nos pontos extremos $(u_{\pm}, f(u_{\pm}))$ (veja Figura 6.2). ■

Observação 6.13. A convexidade só é necessária no intervalo fechado entre u_- e u_+ .

Observação 6.14. Se a função fluxo $f = f(u)$ é estritamente côncava e suave no segmento entre u_- e u_+ , uma solução generalizada suave por partes autossimilar do problema de Riemann pode ser construída trocando as duas situações descritas acima. Ou seja, se $u_- < u_+$, obtemos a onda de choque (6.6) e se $u_- > u_+$ então a solução $u = u(t, x)$ é dada por (6.7).

Para resolver o problema de Riemann (6.1) para uma função $f \in C^1(\mathbb{R})$, construiremos a envoltória convexa de $f = f(u)$ em $[u_-, u_+]$ se $u_- < u_+$ ou a envoltória côncava de $f = f(u)$ em $[u_+, u_-]$ se $u_+ < u_-$. Pela Proposição 1.21, o gráfico da envoltória convexa/côncava é formado pelas partes do gráfico da f onde f é convexa/côncava e segmentos de retas que ligam essas partes. Cada segmento de reta corresponde a uma reta de descontinuidade, ou seja, a uma onda de choque na solução do problema de Riemann (6.1). Cada reta separa duas componentes de suavidade da solução, que podem ser os estados constantes u_- ou u_+ , ou uma solução autossimilar de classe C^1 da forma $u(t, x) = \psi\left(\frac{x}{t}\right)$, ou seja, uma onda de rarefação centralizada. Aqui, $\psi = \psi\left(\frac{x}{t}\right)$ é uma função localmente invertível tal que $f'(u(t, x)) = \frac{x}{t}$.

Exemplo 6.15. Vamos resolver o problema de Riemann

$$u_t + (u^3)_x = 0, \quad u(0, x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0, \\ -1 & \text{se } x > 0. \end{cases} \quad (6.8)$$

Como $u_- = 1 > -1 = u_+$, usaremos a envoltória côncava de $f(u) = u^3$ em $[-1, 1]$. Pelo Exemplo 1.22,

$$\hat{f}(u) = \begin{cases} u^3 & \text{se } u \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right], \\ \frac{3}{4}u + \frac{1}{4} & \text{se } u \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases},$$

logo

$$\hat{f}'(u) = \begin{cases} 3u^2 & \text{se } u \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right), \\ \frac{3}{4} & \text{se } u \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right). \end{cases}$$

Daí,

$$\frac{x}{t} = 3u^2 \quad \forall u \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow u = \pm\sqrt{\frac{x}{3t}} \stackrel{u < 0}{\Rightarrow} u = -\sqrt{\frac{x}{3t}}$$

e assim

$$-1 < -\sqrt{\frac{x}{3t}} < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \sqrt{\frac{x}{3t}} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} < \frac{x}{3t} < 1 \Leftrightarrow \frac{3t}{4} < x < 3t.$$

Por (6.7)

$$u(t, x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < \frac{3}{4}t, \\ -\sqrt{\frac{x}{3t}} & \text{se } \frac{3}{4}t < x < 3t, \\ -1 & \text{se } x > 3t. \end{cases}$$

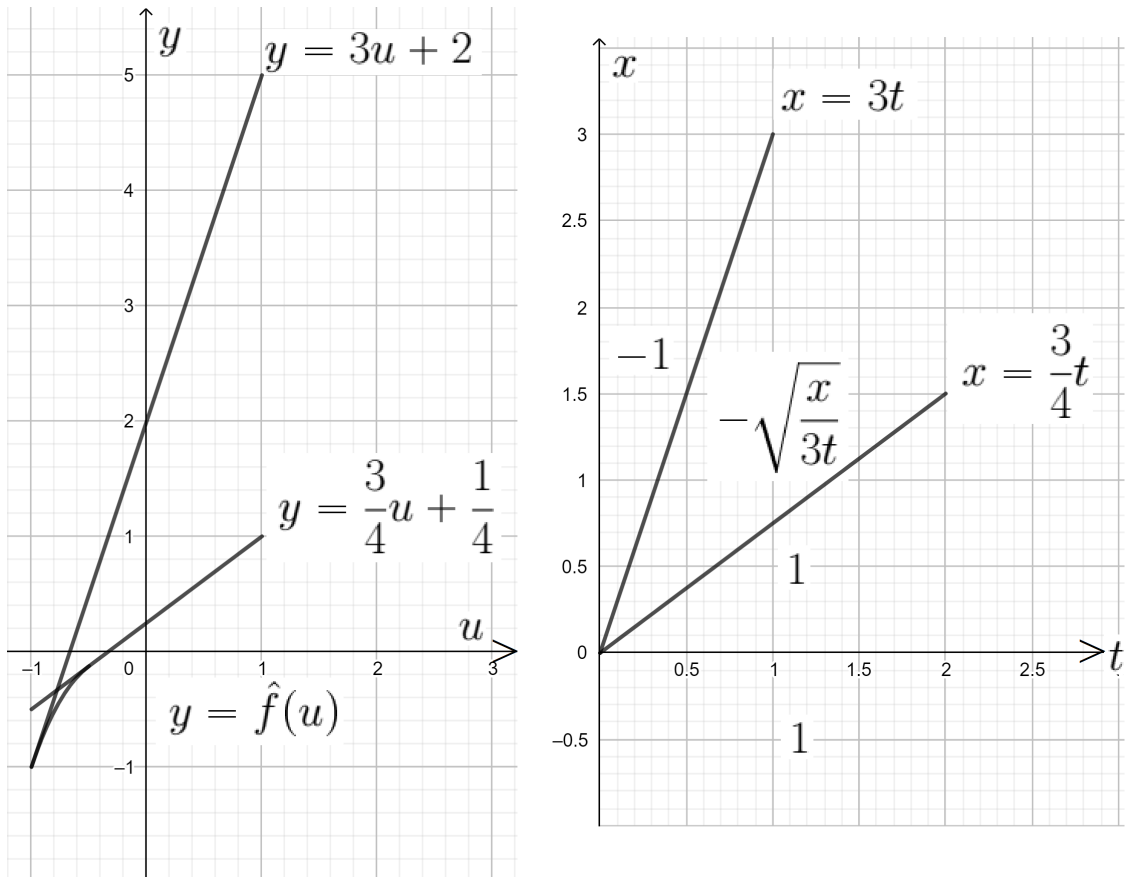


Figura 6.3: Solução do problema de Riemann (6.8).

Exemplo 6.16. Vamos resolver o problema de Riemann

$$u_t + \left(\frac{u^3}{3}\right)_x = 0, \quad u(0, x) = \begin{cases} -2 & \text{se } x < 0, \\ 2 & \text{se } x > 0. \end{cases} \quad (6.9)$$

Como $u_- = -2 < 2 = u_+$, usaremos a envoltória convexa de $f(u) = \frac{u^3}{3}$ em $[-2, 2]$. Pelo Exemplo 1.23,

$$\check{f}(u) = \begin{cases} u - \frac{2}{3} & \text{se } u \in [-2, 1], \\ \frac{u^3}{3} & \text{se } u \in [1, 2], \end{cases}$$

logo

$$\check{f}'(u) = \begin{cases} 1 & \text{se } u \in (-2, 1), \\ u^2 & \text{se } u \in (1, 2). \end{cases}$$

Daí,

$$\frac{x}{t} = u^2 \quad \forall u \in (1, 2) \Leftrightarrow u = \pm \sqrt{\frac{x}{t}} \stackrel{u > 0}{\Rightarrow} u = \sqrt{\frac{x}{t}}$$

e assim

$$1 < \sqrt{\frac{x}{t}} < 2 \Leftrightarrow 1 < \frac{x}{t} < 4 \Leftrightarrow t < x < 4t.$$

Por (6.7),

$$u(t, x) = \begin{cases} -2 & \text{se } x < t, \\ \sqrt{\frac{x}{t}} & \text{se } t < x < 4t, \\ 2 & \text{se } x > 4t. \end{cases}$$

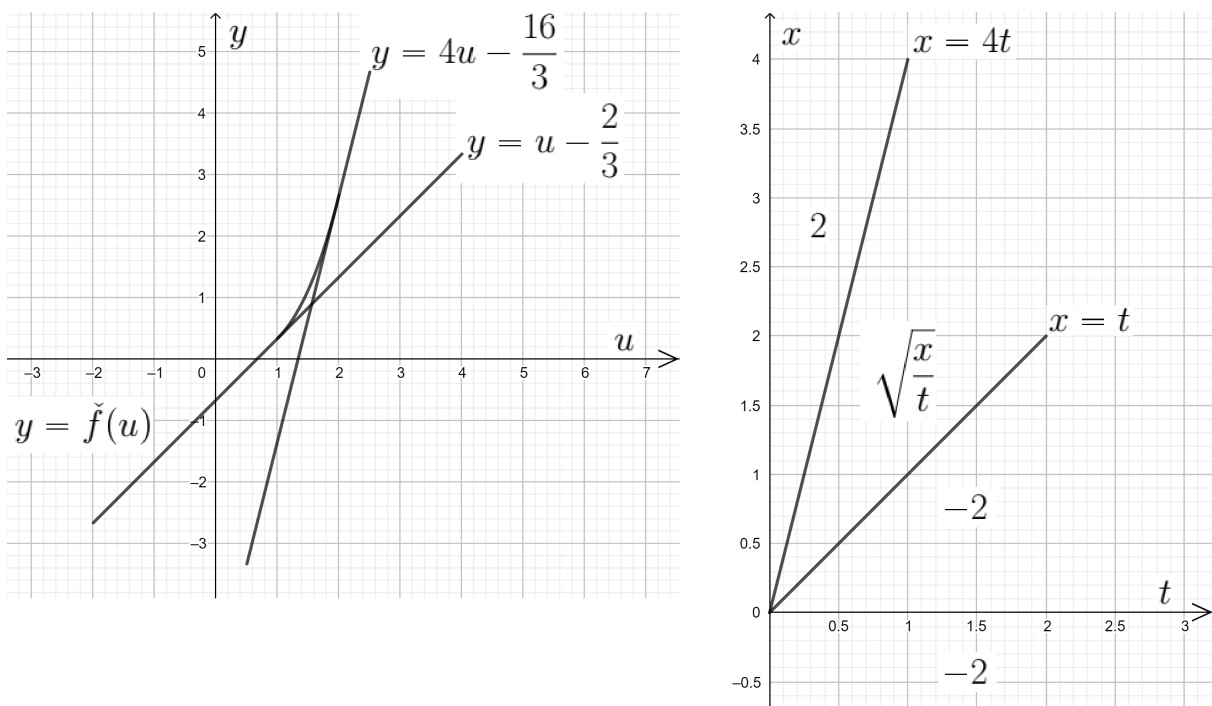


Figura 6.4: Solução do problema de Riemann (6.9).

Exemplo 6.17. Vamos resolver o problema de Riemann

$$u_t + (\sin u)_x = 0, \quad u(0, x) = \begin{cases} 3\pi & \text{se } x < 0, \\ 0 & \text{se } x > 0. \end{cases} \quad (6.10)$$

Como $u_- = 3\pi > 0 = u_+$, usaremos a envoltória côncava de $f(u) = \sin u$ em $[0, 3\pi]$. Pelo

Exemplo 1.24,

$$\hat{f}(u) = \begin{cases} \sin u & \text{se } u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{2}, 3\pi\right], \\ 1 & \text{se } u \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right], \end{cases}$$

logo

$$\hat{f}'(u) = \begin{cases} \cos u & \text{se } u \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{2}, 3\pi\right), \\ 0 & \text{se } u \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right). \end{cases}$$

Além disso,

$$0 < \underbrace{\cos u}_{\substack{x \\ = \frac{x}{t}}} < 1 \quad \forall u \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow 0 < x < t$$

e

$$-1 < \underbrace{\cos u}_{\substack{x \\ = \frac{x}{t}}} < 0 \quad \forall u \in \left(\frac{5\pi}{2}, 3\pi\right) \Leftrightarrow -t < x < 0.$$

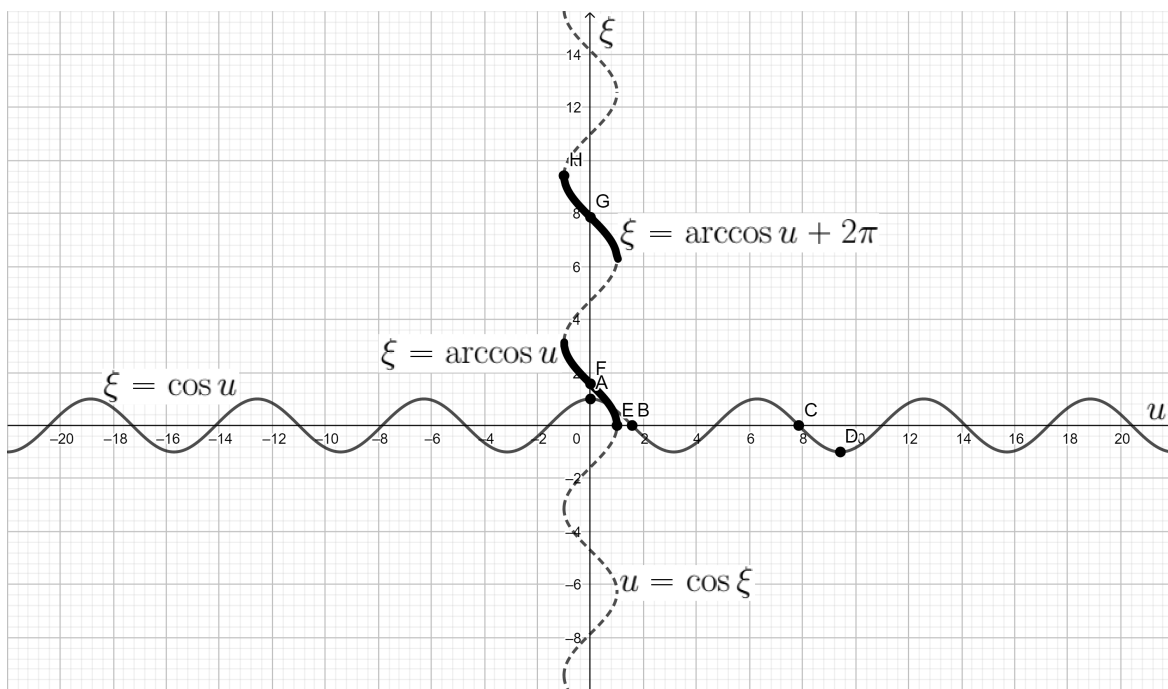


Figura 6.5: Gráfico de $u = \cos \xi$ (1).

Assim,

$$\left(\hat{f}'\right)^{-1}\left(\frac{x}{t}\right) = \begin{cases} \arccos \frac{x}{t} + 2\pi & \text{se } -t < x < 0, \\ \arccos \frac{x}{t} & \text{se } 0 < x < t. \end{cases}$$

Por (6.7),

$$u(t, x) = \begin{cases} 3\pi & \text{se } x < -t, \\ \arccos \frac{x}{t} + 2\pi & \text{se } -t < x < 0, \\ \arccos \frac{x}{t} & \text{se } 0 < x < t, \\ 0 & \text{se } x > t. \end{cases}$$

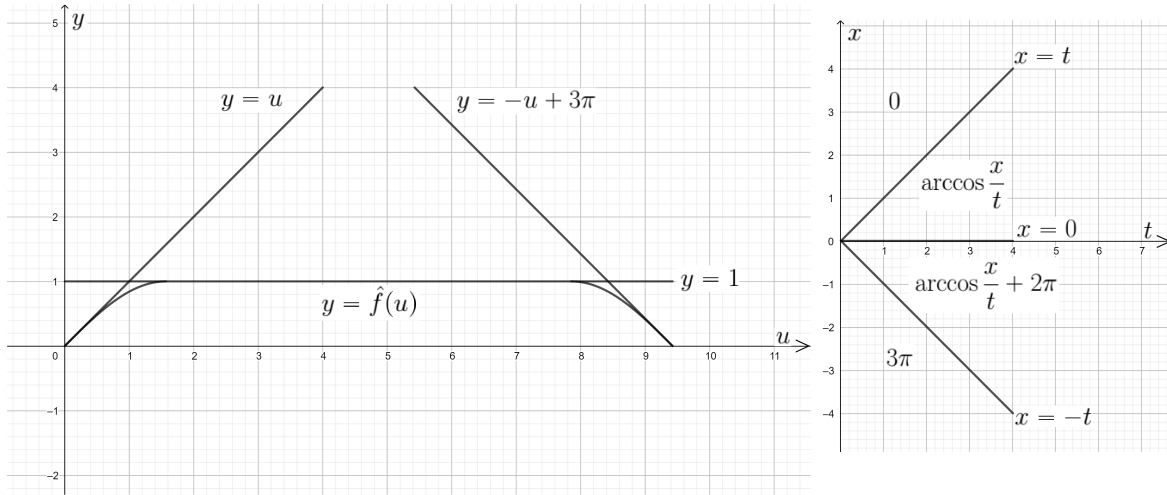


Figura 6.6: Solução do problema de Riemann (6.10).

Exemplo 6.18. Vamos resolver o problema de Riemann

$$u_t + (\sin u)_x = 0, \quad u(0, x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ 3\pi & \text{se } x > 0. \end{cases} \quad (6.11)$$

Como $u_- = 0 < 3\pi = u_+$, usaremos a envoltória convexa de $f(u) = \sin u$ em $[0, 3\pi]$. Sejam u_1 e u_2 definidos no Exemplo 1.24. Pelo Exemplo 1.24,

$$\check{f}(u) = \begin{cases} u \cos u_1 & \text{se } u \in [0, u_1], \\ \sin u & \text{se } u \in [u_1, u_2], \\ (u - 3\pi) \cos u_2 & \text{se } u \in [u_2, 3\pi], \end{cases}$$

logo

$$\check{f}'(u) = \begin{cases} \cos u_1 & \text{se } u \in (0, u_1), \\ \cos u & \text{se } u \in (u_1, u_2), \\ \cos u_2 & \text{se } u \in (u_2, 3\pi). \end{cases}$$

Além disso,

$$\cos u_1 < \underbrace{\cos u}_{\frac{x}{t}} < \cos u_2 \quad \forall u \in (u_1, u_2) \Leftrightarrow t \cos u_1 < x < t \cos u_2.$$

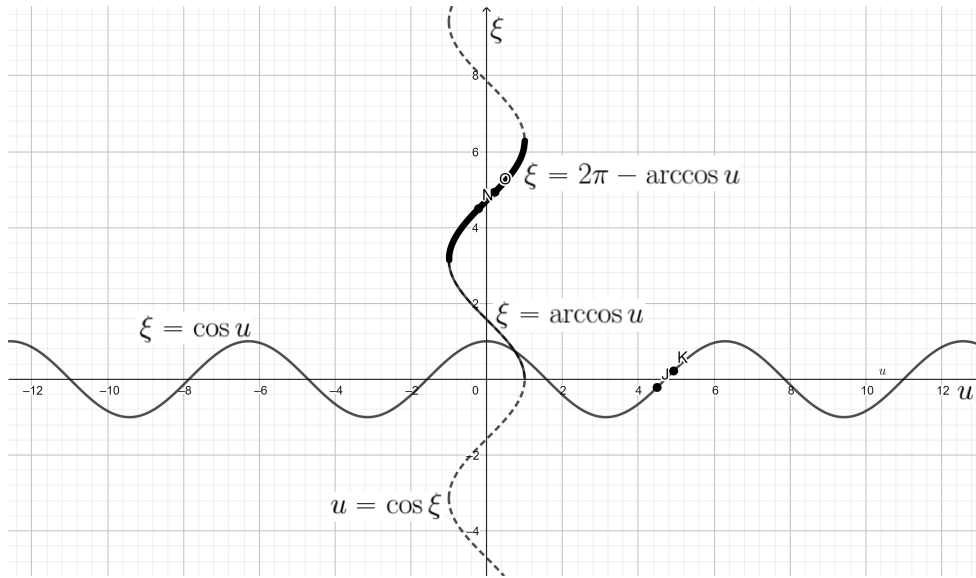


Figura 6.7: Gráfico de $u = \cos \xi$ (2).

Assim,

$$(\check{f}')^{-1} \left(\frac{x}{t} \right) = 2\pi - \arccos \frac{x}{t} \quad \text{se } t \cos u_1 < x < t \cos u_2.$$

Por (6.7),

$$u(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < t \cos u_1, \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{t} & \text{se } t \cos u_1 < x < t \cos u_2, \\ 3\pi & \text{se } x > t \cos u_2. \end{cases}$$

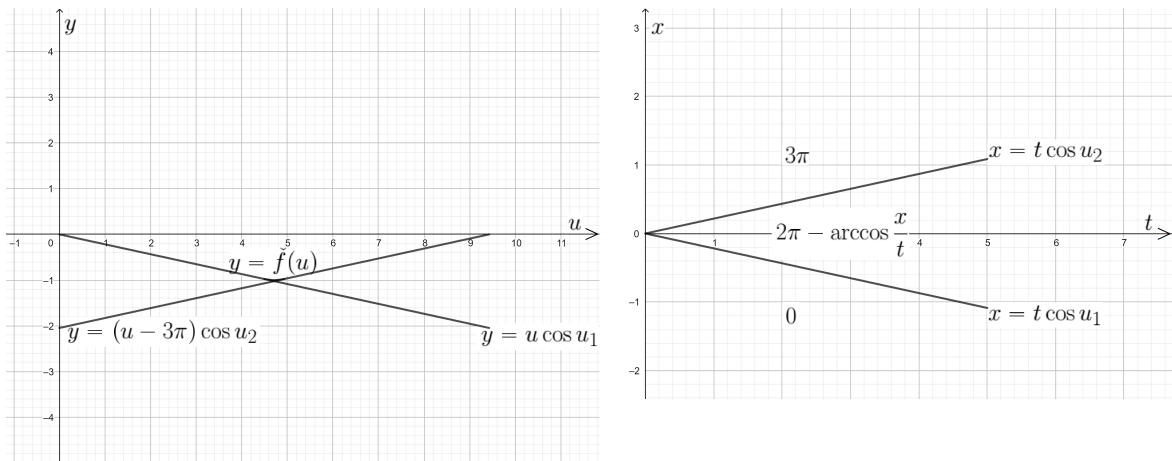


Figura 6.8: Solução do problema de Riemann (6.11).

Exemplo 6.19. *Vamos resolver o problema de Riemann*

$$u_t + \left(-\frac{\cos(2u)}{2} \right)_x = 0, \quad u(0, x) = \begin{cases} -\frac{5\pi}{4} & \text{se } x < 0, \\ \frac{5\pi}{4} & \text{se } x > 0. \end{cases} \quad (6.12)$$

Como $u_- = -\frac{5\pi}{4} < \frac{5\pi}{4} = u_+$, usaremos a envoltória convexa de $f(u) = -\frac{\cos(2u)}{2}$ em $\left[-\frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right]$. Pelo Exemplo 1.25,

$$\check{f}(u) = \begin{cases} -\frac{\cos(2u)}{2} & \text{se } u \in \left[-\frac{5\pi}{4}, -\pi \right] \cup \left[\pi, \frac{5\pi}{4} \right], \\ -\frac{1}{2} & \text{se } u \in [-\pi, \pi], \end{cases}$$

logo

$$\check{f}'(u) = \begin{cases} \sin(2u) & \text{se } u \in \left(-\frac{5\pi}{4}, -\pi \right) \cup \left(\pi, \frac{5\pi}{4} \right), \\ 0 & \text{se } u \in (-\pi, \pi). \end{cases}$$

Além disso,

$$-1 < \underbrace{\sin(2u)}_{\substack{x \\ = \\ t}} < 0 \quad \forall u \in \left(-\frac{5\pi}{4}, -\pi \right) \Leftrightarrow -t < x < 0$$

e

$$0 < \underbrace{\sin(2u)}_{\substack{x \\ = \\ t}} < 1 \quad \forall u \in \left(\pi, \frac{5\pi}{4} \right) \Leftrightarrow 0 < x < t.$$

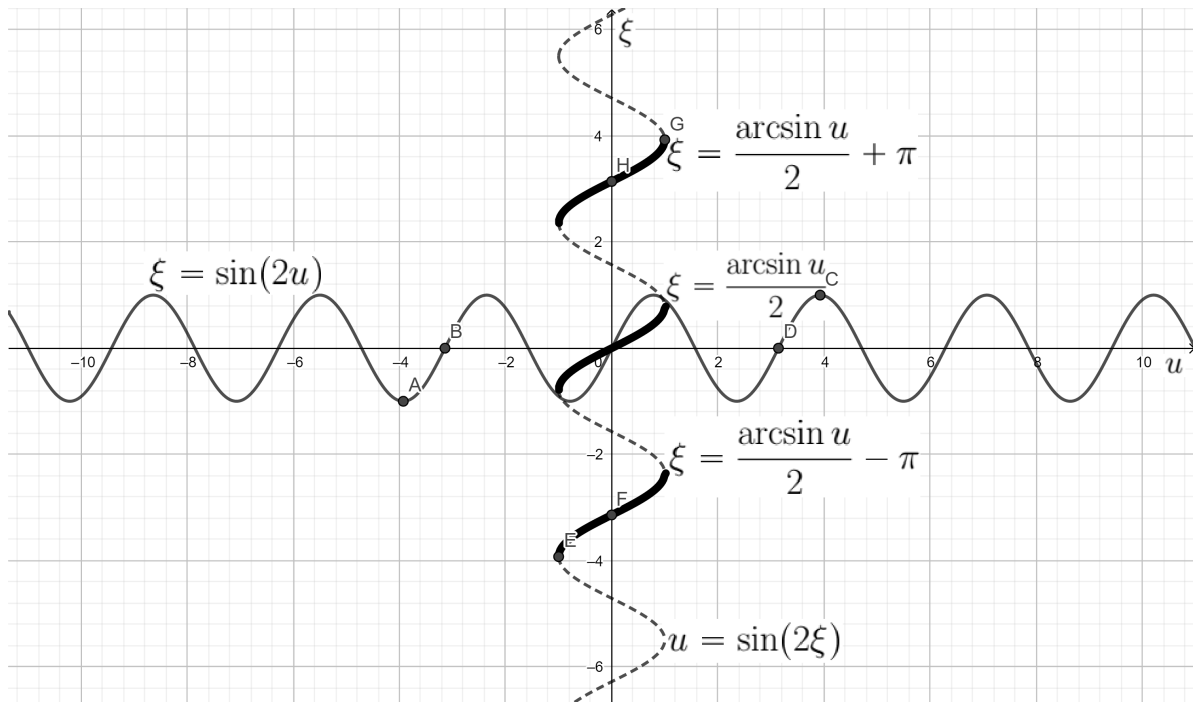


Figura 6.9: Gráfico de $u = \sin(2\xi)$.

Assim,

$$(f')^{-1}\left(\frac{x}{t}\right) = \begin{cases} \frac{\arcsin \frac{x}{t}}{2} - \pi & \text{se } -t < x < 0, \\ \frac{\arcsin \frac{x}{t}}{2} + \pi & \text{se } 0 < x < t. \end{cases}$$

Por (6.7),

$$u(t, x) = \begin{cases} -\frac{5\pi}{4} & \text{se } x < -t, \\ \frac{\arcsin \frac{x}{t}}{2} - \pi & \text{se } -t < x < 0, \\ \frac{\arcsin \frac{x}{t}}{2} + \pi & \text{se } 0 < x < t, \\ \frac{5\pi}{4} & \text{se } x > t. \end{cases}$$

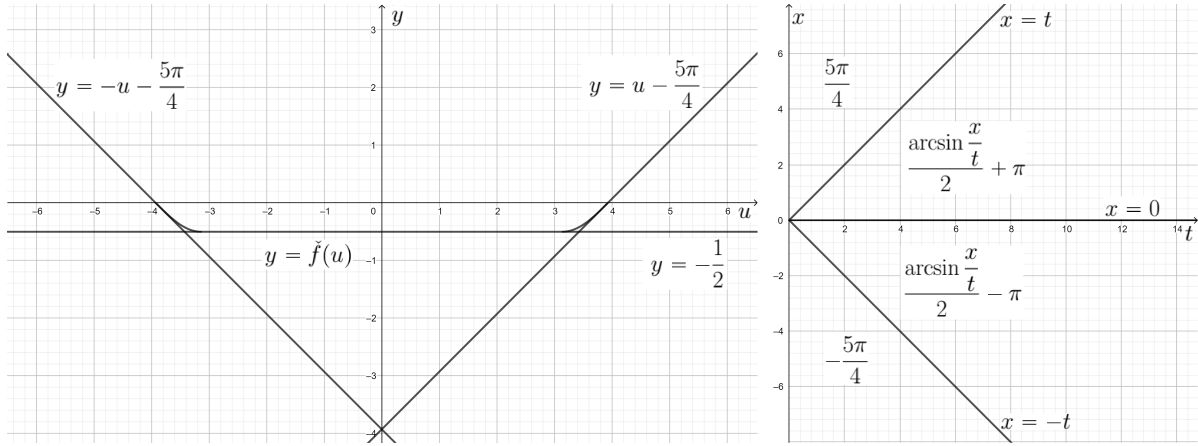


Figura 6.10: Solução do problema de Riemann (6.12)

Exemplo 6.20. Seja $u = u(t, x)$ uma solução de entropia generalizada de Kruzhkov do problema de Cauchy

$$u_t + \left(\frac{|u|^\alpha}{\alpha} \right)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in (0, 1), \quad (6.13)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \equiv \frac{\operatorname{sgn}(x+1) - \operatorname{sgn}x}{2} = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (-1, 0), \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 0). \end{cases} \quad (6.14)$$

AFIRMAÇÃO: $u(t, x) \geq 0$ para todo $(t, x) \in \Pi_T \equiv [0, T) \times \mathbb{R}$.

Tomando $\tilde{\varphi}$ definida no Exemplo 1.11, obtemos

$$\tilde{\varphi}_t(t, x) = \begin{cases} -\frac{2t}{t^2 + x^2 - T^2} e^{\frac{1}{t^2 + x^2 - T^2}} & \text{se } (t, x) \in (0, T) \times \left(-\sqrt{T^2 - t^2}, \sqrt{T^2 - t^2} \right), \\ 0 & \text{se } (t, x) \in (0, T) \times \left((-\infty, -\sqrt{T^2 - t^2}) \cup (\sqrt{T^2 - t^2}, +\infty) \right) \end{cases}$$

e

$$\tilde{\varphi}_x(t, x) = \begin{cases} -\frac{2x}{t^2 + x^2 - T^2} e^{\frac{1}{t^2 + x^2 - T^2}} & \text{se } (t, x) \in (0, T) \times \left(-\sqrt{T^2 - t^2}, \sqrt{T^2 - t^2} \right), \\ 0 & \text{se } (t, x) \in (0, T) \times \left((-\infty, -\sqrt{T^2 - t^2}) \cup (\sqrt{T^2 - t^2}, +\infty) \right). \end{cases}$$

Como u é solução de entropia generalizada de Kruzhkov, então u é limitada. Definamos

$$m \equiv \inf_{\Pi_T} u(t, x).$$

Sabemos que $m \leq 0$. Queremos mostrar que $m = 0$. De fato,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_{\Pi_T} \left((u-m)\tilde{\varphi}_t + \left(\frac{|u|^\alpha}{\alpha} - \frac{|m|^\alpha}{\alpha} \right) \tilde{\varphi}_x \right) dt dx \\
&= \underbrace{\int_{\Pi_T} \left(u\tilde{\varphi}_t + \frac{|u|^\alpha}{\alpha} \tilde{\varphi}_x \right) dt dx}_{=0} - \int_{\Pi_T} \left(m\tilde{\varphi}_t + \frac{|m|^\alpha}{\alpha} \tilde{\varphi}_x \right) dt dx \\
&= -m \underbrace{\int_{(0,T) \times (-\sqrt{T^2-t^2}, \sqrt{T^2-t^2})} \tilde{\varphi}_t dt dx}_{\beta < 0} - \frac{|m|^\alpha}{\alpha} \int_0^T \int_{-\sqrt{T^2-t^2}}^{\sqrt{T^2-t^2}} \tilde{\varphi}_x dx dt \\
&= -m\beta - \frac{|m|^\alpha}{\alpha} \int_0^T \left(\underbrace{\tilde{\varphi}(t, \sqrt{T^2-t^2})}_{=0} - \underbrace{\tilde{\varphi}(t, -\sqrt{T^2-t^2})}_{=0} \right) dt \\
&= -m\beta.
\end{aligned}$$

Então $-m \leq 0$, ou seja, $m \geq 0$. Mas $m \leq 0$, logo $m = 0$ e conseqüentemente

$$u(t, x) \geq 0 \quad \forall (t, x) \in \Pi_T.$$

Assim,

$$f(u) = \frac{|u|^\alpha}{\alpha} \stackrel{u \geq 0}{=} \frac{u^\alpha}{\alpha} \Rightarrow f'(u) = u^{\alpha-1} \Rightarrow f''(u) = (\alpha-1)u^{\alpha-2} \leq 0$$

e portanto f é côncava.

Proposição 6.21. A função

$$u(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < \frac{t}{\alpha} - 1, \\ 1 & \text{se } \frac{t}{\alpha} - 1 < x < t, \\ \left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} & \text{se } x > t \end{cases}$$

define uma solução generalizada admissível suave por partes do problema (6.13)-(6.14) no intervalo $0 < t < \frac{\alpha}{1-\alpha} \equiv \delta$.

Demonstração. De fato, se $u \equiv 0$ ou $u \equiv 1$, então u é solução clássica de (6.13). Se

$$u(t, x) = \left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \text{ então}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{1}{x(1-\alpha)} \left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = -\frac{t}{x^2(1-\alpha)} \left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}},$$

$$f'(u(t, x)) = \frac{x}{t},$$

logo u é solução clássica de (6.13). Resta mostrar que u satisfaz a condição de Rankine-Hugoniot nas retas de descontinuidades $x_1(t) = \frac{t}{\alpha} - 1$ e $x_2(t) = t$.

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{\frac{1}{\alpha}}{1} = \frac{1}{\alpha} = \frac{dx_1}{dt}$$

e

$$\frac{f\left(\left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right) - f(1)}{\left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} - 1} = \frac{\left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \frac{1}{\alpha}}{\frac{1}{\left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} - 1}} = \frac{1}{\alpha} \frac{\left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - 1}{\frac{1}{\left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} - 1}}.$$

Definamos

$$\Psi(t, x, \alpha) \equiv \left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - 1 - \alpha \left(\left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} - 1\right).$$

Então

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha(t, x, \alpha) &= \frac{t}{x(1-\alpha)^2} \ln \frac{\alpha}{1-\alpha} - \left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} - \frac{\alpha t}{x(1-\alpha)^2} \ln \frac{1}{1-\alpha} + 1 \\ &= \frac{t(\ln \alpha - \ln(1-\alpha))}{x(1-\alpha)^2} - \left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} + \frac{\alpha t \ln(1-\alpha)}{x(1-\alpha)^2} + 1. \end{aligned}$$

Como

$$\Psi\left(t, t, \frac{1}{2}\right) = 0 \quad \forall t \in (0, \delta)$$

e

$$\Psi_\alpha\left(t, t, \frac{1}{2}\right) = -2 \ln 2 \neq 0 \quad \forall t \in (0, \delta),$$

então para cada $t \in (0, \delta)$, o Teorema da Função Implícita nos garante a existência de

$r = r(t) \in (0, \delta)$ e uma única função $\alpha \in C^1((0, r) \times (0, r))$ tal que $\Psi(t, x, \alpha(t, x)) = 0$ para todo $(t, x) \in (0, r) \times (0, r)$. Daí, para todo $(t, x) \in (0, r) \times ((0, r) \setminus \{t\})$, temos que

$$\frac{\left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - 1}{\left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} - 1} = \alpha.$$

Logo

$$\frac{f\left(\left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right) - f(1)}{\left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} - 1} = 1 = \frac{dx_2}{dt}.$$

Portanto u é solução generalizada admissível suave por partes do problema (6.13)-(6.14) no intervalo $0 < t < \delta$.

Observe que as retas x_1 e x_2 se intersectam em $t = \delta$, pois

$$x_1(t) = x_2(t) \Leftrightarrow \frac{t}{\alpha} - 1 = t \Leftrightarrow t = \frac{\alpha}{1-\alpha} \equiv \delta.$$

■

Exemplo 6.22. Estenda a solução acima $u = u(t, x)$ do problema (6.13)-(6.14) para o autoespaço $t > \delta = \frac{\alpha}{1-\alpha}$, ou seja, encontre a equação da curva de descontinuidade $x = x(t)$ da solução

$$u(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < x(t), \\ \left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} & \text{se } x > x(t). \end{cases}$$

Demonstração. De fato,

$$\frac{f\left(\left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right) - f(0)}{\left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} - 0} = \frac{\left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \frac{x}{\alpha t}.$$

Como u é solução generalizada suave por partes, então u satisfaz a condição de Rankine-

Hugoniot na curva de descontinuidade $x = x(t)$, ou seja,

$$\frac{x}{\alpha t} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{1}{1-\alpha} \frac{dx}{x} = \frac{1}{\alpha t} \Rightarrow \int \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} dt = \int \frac{dt}{\alpha t} + C_0 \Rightarrow \ln x = \int \frac{dx}{x} = \ln t^{\frac{1}{\alpha}} + C_0$$

e assim

$$x(t) = C_1 t^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Mas $x(\delta) = \delta$, logo

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} = C_1 \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \Rightarrow C_1 = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}.$$

Portanto

$$x(t) = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} t^{\frac{1}{\alpha}}.$$

■

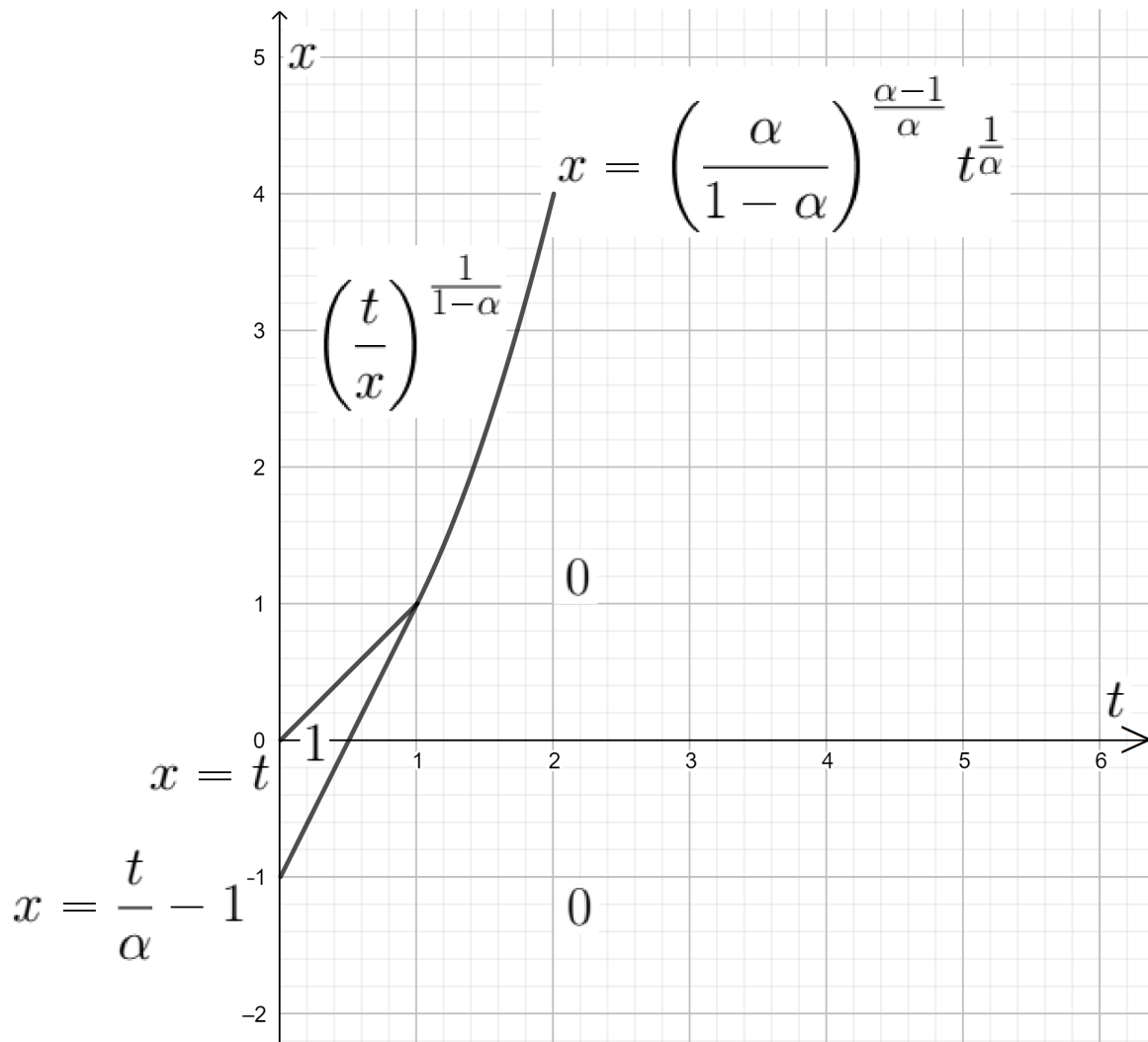


Figura 6.11: Solução do problema (6.13)-(6.14).

Referências Bibliográficas

- [1] CHECHKIN, G. A.; GORITSKY, A. Y. **S. N. Kruzhkov's Lectures on First Order Quasilinear PDEs**. In: Analytical and Numerical Aspects of Partial Differential Equations, Walter de Gruyter, Berlin, 2009, pp. 1–67. Translated from the Russian by Boris P. Andreianov.
- [2] HÖRMANDER, L. **The Analysis of Linear Partial Differential Operators I: Distribution Theory and Fourier Analysis**. Springer, 2015.
- [3] EVANS, L. C. **Partial Differential Equations**. American Math. Soc., Providence, 1998.
- [4] SPIEGEL, M. R. **Advanced Calculus**. Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, New York, 1974.