



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS



DANIEL CARLOS MAGNO

**16º PROBLEMA DE HILBERT: UMA
MOTIVAÇÃO PARA O ESTUDO DE
FUNÇÕES PERIÓDICAS.**

SOROCABA

JANEIRO, 2022

Daniel Carlos Magno

16º PROBLEMA DE HILBERT: UMA MOTIVAÇÃO PARA O ESTUDO DE FUNÇÕES PERIÓDICAS.

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas (PPGECE), da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, sob orientação da Professora Doutora Ana Cristina de Oliveira Mereu.

Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas

Orientadora: Prof^a Dr^a Ana Cristina de Oliveira Mereu

Sorocaba
Janeiro, 2022

Carlos Magno, Daniel

16º Problema de Hilbert: uma motivação para o estudo de funções periódicas / Daniel Carlos Magno -- 2022. 98f.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São Carlos, campus Sorocaba, Sorocaba
Orientador (a): Ana Cristina de Oliveira Mereu
Banca Examinadora: Luci Any Francisco Roberto, Renato Fernandes Cantão
Bibliografia

1. Equações Diferenciais. 2. Ciclos Limite. 3. Seqência Didática. I. Carlos Magno, Daniel. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática (SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Maria Aparecida de Lourdes Mariano -
CRB/8 6979



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Daniel Carlos Magno, realizada em 22/02/2022.

Comissão Julgadora:

Profa. Dra. Ana Cristina de Oliveira Mereu (UFSCar)

Profa. Dra. Luci Any Francisco Roberto (UNESP)

Prof. Dr. Renato Fernandes Cantão (UFSCar)

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente à minha família, meus pais, minha irmã e minha esposa. Este trabalho só pôde ser escrito e concluído graças ao apoio que recebi, sempre acreditando no meu potencial e em minhas escolhas.

Também agradeço à Universidade Federal de São Carlos e ao PPGECE, pela oportunidade de continuar meus estudos e seguir na carreira acadêmica. Este período foi de grande aprendizagem e crescimento intelectual. Agradeço aos meu colegas de curso que estiveram ao meu lado.

Por fim gostaria de agradecer à minha orientadora Prof^ª Dr^ª Ana Cristina de Oliveira Mereu. Nós nos conhecemos logo no início da minha graduação, e desde lá sempre pude contar com seu apoio nas aulas, no projeto de intercâmbio, em meu TCC e agora na orientação da dissertação.

Resumo

Situações periódicas são encontradas em inúmeros aspectos de conhecimento geral, como a medida das horas em um dia, o movimento das ondas do mar e a translação de corpos celestes. Talvez por isso o estudo de eventos periódicos sempre atraiu muitos matemáticos. Para compreender os conceitos matemáticos complexos que envolvem estes eventos, é importante entender a base de conhecimento sobre funções trigonométricas. Este trabalho pretende apresentar uma motivação para o estudo destas funções, aproximando a matemática de situações cotidianas, propondo modelagens simples. Para isso, foi feito inicialmente um estudo qualitativo dos aspectos gerais das Equações Diferenciais, envolvendo sistemas lineares, Teorema de Existência e Unicidade, campos de vetores, conjuntos limites das trajetórias, entre outros. Para encerrar esta primeira parte, foi desenvolvido um estudo da Teoria de *Averaging* e sua aplicação. Depois destes estudos será feita uma proposta para o ensino de funções trigonométricas na sala de aula, sugerindo atividades diferenciadas, envolvendo a utilização de aplicativos digitais para auxiliar na modelagem de situações do cotidiano do aluno como a variação de temperatura e o movimento das ondas do mar. Diante disso, esperamos que este trabalho sirva como apoio para o ensino de conceitos trigonométricos, usando as situações do dia a dia para incentivar os alunos em sua aprendizagem.

Palavras-chave: Equações Diferenciais, Ciclos Limite, Funções Trigonométricas, Sequência Didática.

Abstract

Periodic situations are found in many aspects of general knowledge, such as the measurement of hours in a day, the movement of the waves and the translation of celestial bodies. Perhaps this is why the study of journals always attracts many mathematicians. To understand the complex mathematical concepts that involve these events, it is important to understand the basic knowledge of trigonometric functions. This work intends to present a motivation for the study of such functions, bringing mathematics closer to everyday situations, proposing simple models. For this, a qualitative study of the general aspects of Differential Equations was initially carried out, involving linear systems, Existence and Uniqueness Theorem, vector fields, limit sets of trajectories, among others. To end this first part, a study of the *Averaging* Theory and its application will be developed. After these studies, a proposal was made for the teaching of trigonometric functions in the classroom, suggesting different activities, involving the use of digital applications to assist in the modelling of student's daily situations such as temperature variation and the movement of sea waves. Therefore, we hope that this work will serve as a support for the teaching of trigonometric concepts, using everyday situations to encourage students in their learning.

Keywords: Differential Equations, Limit Cycle, Trigonometric Functions, Didactic Sequence.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	8
2	SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS	10
2.1	Sistemas Diferenciais Lineares	10
2.1.1	Sistema Diferencial Linear Planar	12
2.1.2	Retrato de Fase e Classificação de Sistemas Planares	14
2.1.3	Sistemas Diferenciais Lineares em Dimensões Maiores	24
2.2	Sistemas Diferenciais Não-Lineares	31
2.2.1	Aspectos Gerais	32
2.2.2	Equilíbrio e Técnicas Locais	37
2.2.3	Ciclos Limite e Técnicas Globais	52
3	APLICANDO O MÉTODO DE AVERAGING	66
3.1	Lienard e Suas Implicações	66
3.2	Método de Averaging	68
4	PROPOSTA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS	72
4.1	Funções Trigonométricas	73
4.1.1	Definições Gerais	73
4.1.2	Parâmetros de Variação	74
4.2	Sequência de Atividades Didáticas	76
4.2.1	Atividade 01 - Conhecimentos Preliminares	78
4.2.2	Atividade 02 - Usando o GeoGebra	78
4.2.3	Atividade 03 - Modelagem da Temperatura	83
4.2.4	Atividade 04 - Modelagem das Ondas	87
4.2.5	Atividade 05 - Propostas Futuras e Conclusões	90
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	92
	BIBLIOGRAFIA	93
	ANEXO A – ATIVIDADE 01	95
	ANEXO B – ATIVIDADES 03 E 04	96
	ANEXO C – ATIVIDADE 05	97

1 Introdução

A primeira parte deste trabalho foi desenvolvida a partir do estudo da Teoria de *Averaging* e sua aplicação para se determinar o número de ciclos limite que bifurcam do centro planar perturbado por uma classe de sistemas diferenciais polinomiais. Quando fazemos um estudo qualitativo das equações diferenciais estamos nos voltando para o estudo das características das soluções e como elas se comportam. Assim, ao estudar um sistema de equações diferenciais estaremos interessados na análise de seus pontos críticos, sua estabilidade, e suas soluções limitantes.

A motivação para buscar este tema foi devido ao fato de que, ao estudar em Portugal, foi possível ter contato com uma disciplina de equações diferenciais, porém, apenas em nível linear. Assim, devido ao número considerável de possíveis aplicações e ramos de estudos, este tema foi escolhido.

Nesta fase do trabalho foi feita uma síntese sobre alguns temas dos aspectos gerais da teoria qualitativa das EDOs como aspectos qualitativos de equações diferenciais envolvendo sistemas lineares, Teorema de Existência e Unicidade de soluções, noções básicas de campos de vetores, Teorema do Fluxo Tubular, conjuntos limites das trajetórias, Teorema de Poincaré-Bendixson, entre outros. As principais referências para esta etapa do projeto são os livros de HIRSCH, SMALE e DEVANEY (2004), PERKO (2006) e SOTOMAYOR (1979).

Uma função $x : \mathbb{R} \rightarrow X$, onde X é um conjunto arbitrário não vazio, é periódica se existe $T \in \mathbb{R}$ tal que, $x(t+T) = x(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Entre as soluções periódicas, denominamos *ciclo limite* uma solução periódica isolada em uma determinada vizinhança. A noção de ciclos limite surgiu pela primeira vez nos estudos de equações diferenciais no plano realizados por *Poincaré* entre os anos de 1880 e 1890. No final da década de 20, do século XX, *Van der Pol*, *Lienard* e *Andronov*, no estudo de certos fenômenos elétricos, obtiveram certas equações especiais de segunda ordem para as quais ocorriam os ciclos limite idealizados por *Poincaré*. Desde então a não existência, a existência, a unicidade e outras propriedades dos ciclos limite têm sido estudadas extensivamente por matemáticos, físicos, químicos, biólogos e economistas.

Em 1900, em Paris, durante o II Congresso Internacional de Matemáticos, *David Hilbert* elaborou uma lista com 23 temas de pesquisa para o próximo século. Nenhum dos problemas havia sido solucionados até então, e vários deles acabaram tornando-se muito influentes na matemática do século XX. Desta lista, dois problemas permanecem abertos. Um deles é a conjectura de Riemann e o outro é o *16º problema de Hilbert*. Originalmente, Hilbert formulou seu 16º problema em duas partes. A primeira delas é de

interesse da geometria e a segunda questiona sobre o número máximo e posição relativa de ciclos limite de sistemas polinomiais planares. Durante o século XX e estes primeiros 21 anos do século XXI a pesquisa sobre ciclos limite tem sido um dos grandes objetivos da *Teoria Qualitativa de Sistemas Dinâmicos*. Porém, muitas perguntas continuam sem resposta. Os problemas de Hilbert citados acima e os matemáticos que os resolveram podem ser encontrados no livro de Yandell (2003). Devido à dificuldade de se resolver o 16º Problema de Hilbert como fora proposto, vários novos enunciados foram surgindo para o problema. Um exemplo é o estudo do número máximo de ciclos limite que bifurcam de um centro, conhecida como *versão fraca do 16º Problema de Hilbert*. Um método para o estudo das órbitas periódicas é a teoria de *Averaging*. De forma resumida, a Teoria de *Averaging* estabelece uma relação entre as soluções de um sistema diferencial não autônomo dependente de pequenos parâmetros, e as soluções de um novo sistema diferencial obtido, que é autônomo. O terceiro capítulo deste trabalho é focado no Método de Averaging. Alguns modelos matemáticos envolvendo sistemas planares são selecionados e neles aplicados tal método. Aqui é utilizado como bibliografia básica o artigo de LLIBRE, MEREU e TEIXEIRA (2010).

Sabemos que as funções trigonométricas são essenciais para estudo das EDO's, porém, o primeiro contato dos alunos com estes conceitos deve acontecer ainda no ensino básico. Utilizando minhas próprias experiências no ensino foi possível perceber que este conceito é algo de extrema dificuldade ao ser trabalhado de forma clássica, seguindo apenas as orientações dos materiais didáticos. Assim, a segunda parte deste trabalho será uma sequência didática para o ensino prático e diferenciado de funções trigonométricas, tentando mostrar aos alunos que funções são mais que fórmulas e regras, mas sim, uma maneira de entendermos as relações entre grandezas do nosso cotidiano. Partindo das ideias estudadas nos capítulos anteriores, vamos direcionar os alunos a enxergar as relações periódicas que envolvem seu dia-a-dia como as horas, os dias da semana, o movimento das marés, as variações de temperatura no ano, o movimento de rotação da Terra, entre muitos outros. Esta é uma combinação interessante de conteúdos matemáticos complexos e uma aplicação didática prática. Tal proposta pode fazer com que o docente saia de sua zona de conforto, conhecendo novas tecnologias, novos assuntos, e assim, precisando alterar o antigo estilo de suas aulas. Mas os resultados que podem ser colhidos ao final desta sequência, poderão mostrar a importância de um ensino matemático diversificado.

2 Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias

Neste início será apresentada uma breve introdução ao estudo de sistemas de equações diferenciais. As imagens apresentadas neste capítulo foram produzidas pelo próprio autor, utilizando os aplicativos Mathematica (versão 13.0, disponível em <https://www.wolfram.com/mathematica/trial>) e GeoGebra (versão 6-0-662-0, disponível em <https://www.geogebra.org/download>).

2.1 Sistemas Diferenciais Lineares

Vamos começar com os sistemas de equações diferenciais, a partir de algumas definições básicas.

Definição 2.1. Uma equação diferencial ordinária (EDO) é uma equação que contém uma ou várias derivadas da função incógnita.

Alguns exemplos de equação diferencial, com $b, g, k, l, m \in \mathbb{R}$ são:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0, \text{ oscilador harmônico}$$

$$\ddot{x} + \frac{g}{l} \sin x = 0 \text{ pêndulo.}$$

Seja Ω um subconjunto do espaço vetorial $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Sejam $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua e I um intervalo real. A função diferenciável $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma solução da equação

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{2.1}$$

no intervalo I quando o conjunto $\{(t, \varphi(t)); t \in I\}$ está contido em Ω e $\frac{d\varphi}{dt}(t) = f(t, \varphi(t))$ para todo $t \in I$.

Definição 2.2. Um sistema de equações diferenciais lineares é da forma:

$$\begin{aligned} x'_1 &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x'_2 &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ x'_n &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned} \tag{2.2}$$

onde f_j é uma função linear com $i \leq j \leq n$, nas variáveis t, x_1, \dots, x_n

Para simplificar as notações iremos utilizar

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

E assim iremos escrever o sistema de equações na forma matricial $X' = f(t, X)$ onde

$$f(t, X) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Dizemos que o sistema (2.2) é **autônomo** se as f_j 's não dependem explicitamente de t . Assim o sistema fica na forma $X' = f(X)$. Vamos considerar agora as *equações diferenciais de segunda ordem*, que são aquelas da forma: $x'' = f(t, x, x')$. Podemos fazer a seguinte substituição de variáveis:

$$x' = y$$

$$y' = x''$$

e assim transformá-las em sistemas em \mathbb{R}^2 , na forma:

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= f(t, x, x'). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Vamos utilizar como exemplo o seguinte caso:

$$x' = y$$

$$y' = -x.$$

Neste exemplo é fácil visualizar que uma possível solução é:

$$x(t) = \text{sen } t$$

$$y(t) = \text{cos } t.$$

Este sistema é equivalente à equação diferencial de segunda ordem $x'' = -x$. A forma geral de escrever uma equação diferencial de segunda ordem linear é:

$$a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = f(t).$$

Um caso especial é quando temos os coeficientes constantes, e assim

$$\begin{aligned} ax'' + bx' + cx &= f(t) \Rightarrow \\ y' &= -\frac{c}{a}x - \frac{b}{a}y + \frac{f(t)}{a}, \text{ quando } a \neq 0 \end{aligned}$$

Um caso ainda mais especial é quando temos $f(t) = 0$, a que damos o nome de equação **homogênea**.

2.1.1 Sistema Diferencial Linear Planar

Agora iremos nos restringir aos sistemas de EDOs lineares definidos no plano, que assumem a forma:

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy, \end{cases} \quad (2.4)$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Considere

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

o que permite escrever o sistema (2.4) na forma $X' = AX$.

Chamamos de *ponto de equilíbrio* as soluções $x(t)$ da equação (2.2) tais que $f(x(t)) = 0$. Estes pontos serão importantes nos estudos posteriores sobre ciclos limite. Assim para encontrar os pontos de equilíbrio do sistema (2.4) fazemos $AX = 0$:

$$0 = ax + by$$

$$0 = cx + dy,$$

ou seja, os pontos de equilíbrio de 2.4 são os zeros de um sistema de equações lineares homogêneo. Segue o seguinte resultado:

Proposição 2.3. *Considere o sistema linear planar $X' = AX$.*

1. *Se $\det A \neq 0$, o sistema tem um único ponto de equilíbrio.*
2. *Se $\det A = 0$, e A não é a matriz nula, o sistema possui uma reta de pontos de equilíbrios.*

Agora passamos a procurar as soluções do sistema que não são de equilíbrio. Para isso recordaremos os conceitos de autovalor e autovetor.

Definição 2.4. Um vetor V_0 não-nulo é chamado de *autovetor* de A se $AV_0 = \lambda V_0$, para algum valor de λ . E neste caso λ é chamado de *autovalor*.

Teorema 2.5. *Suponha que V_0 é um autovetor da matriz A com autovalor associado λ . Então a função $X(t) = e^{\lambda t}V_0$ é uma solução do sistema $X'(t) = AX(t)$*

Demonstração. Temos:

$$X'(t) = (e^{\lambda t}V_0)' = \lambda e^{\lambda t}V_0 = e^{\lambda t}\lambda V_0 = e^{\lambda t}AV_0 = Ae^{\lambda t}V_0 = AX(t).$$

□

Vimos que foi possível encontrar uma solução do sistema a partir do autovetor V_0 e do autovalor λ da matriz A . Se A possui dois autovalores distintos $\lambda_1 \neq \lambda_2$ podemos encontrar duas soluções. Mas como podemos encontrar uma solução geral do sistema?

Vamos supor que a matriz A possui dois autovetores V_1 e V_2 linearmente independentes. Sejam $X_1(t), X_2(t)$ soluções de 2.4 associados aos autovalores λ_1 e λ_2 , respectivamente. Suponhamos também que $Z(t) = \alpha X_1(t) + \beta X_2(t)$, ou seja, $Z(t)$ é uma combinação linear de $X_1(t), X_2(t)$. Afirmamos que $Z(t)$ é uma solução de 2.4. De fato:

$$\begin{aligned} Z'(t) &= \alpha X_1'(t) + \beta X_2'(t) \\ &= \alpha A X_1(t) + \beta A X_2(t) \\ &= A(\alpha X_1(t) + \beta X_2(t)) \\ &= A Z(t) \quad . \end{aligned}$$

A solução $Z(t)$ é chamada solução geral do sistema 2.4, o que nos permite enunciar o seguinte teorema:

Teorema 2.6. *Suponhamos que A tem um par de autovetores V_1 e V_2 , e autovalores reais associados $\lambda_1 \neq \lambda_2$, a solução geral do sistema 2.4 é dada por*

$$X(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} V_1 + \beta e^{\lambda_2 t} V_2.$$

Exemplo 2.7. Encontraremos a solução geral do sistema:

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X.$$

Primeiro calcularemos os autovalores de A :

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2.$$

Este polinômio obtido é chamado de *polinômio característico*. Igualando a zero obtemos os autovalores $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -1$.

Para encontrar os autovetores faz-se:

$$(A - \lambda I) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

E assim encontramos:

$$V_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}; V_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Por fim, obtemos a solução geral do sistema:

$$X(t) = \alpha e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Para encerrar esta parte apresentaremos o *Princípio da Linearidade*, que nos permite afirmar a unicidade das soluções.

Teorema 2.8. *Considere o sistema planar (2.4). Supondo que $Y_1(t)$ e $Y_2(t)$ são soluções de (2.4) e que $Y_1(0)$ e $Y_2(0)$ são linearmente independentes, então*

$$X(t) = \alpha Y_1(t) + \beta Y_2(t)$$

é a única solução do sistema que satisfaz $X(0) = \alpha Y_1(0) + \beta Y_2(0)$.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada no livro de HIRSCH, SMALE e DEVANEY (2004).

2.1.2 Retrato de Fase e Classificação de Sistemas Planares

Agora iremos observar como se comportam os sistemas planares de acordo com a classificação de seus autovalores, e por consequência, iremos ver como são seus *retratos de fase*. Um *retrato de fase* de um sistema é a representação de seu conjunto de soluções. Ao esboçar o retrato de fase, cada curva observada representa uma solução do mesmo.

Nas análises feitas neste capítulo, utilizamos algumas matrizes que são denominadas *canônicas*. Elas possuem este nome, ou *forma canônica de Jordan*, pois são formas de representar uma outra matriz semelhante em uma matriz diagonal ou triangular superior:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Deste modo, é possível surgir a dúvida: mas como tratar de um sistema que possui matrizes mais complexas? Basta que utilizemos *transformações lineares* para fazer com que o sistema dado passe a ser composto pelas *matrizes canônicas*.

Vale lembrar que uma transformação linear em \mathbb{R}^2 é uma função $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}.$$

Assim, iremos transformar um sistema $X' = AX$, que poderia ser mais complicado, em um outro da forma $Y' = (T^{-1}AT)Y$. Para isso, basta considerar a mudança de variável dada pela transformação linear invertível T , com $Y = T^{-1}X$, ou seja, $X = TY$. Se $Y(t)$ é uma solução do sistema obtido com a transformação, então $X(t) = TY(t)$ é uma solução do sistema original.

Para encontrarmos a matriz inversa T^{-1} vamos lembrar que uma matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é invertível se $\det A \neq 0$. Assim, considerando que $\det A \neq 0$, faz-se:

$$T^{-1} = \frac{1}{\det T} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Agora a pergunta que fica é: como encontrar a transformação linear T ? Na maioria dos casos utilizamos os autovetores da matriz A para compor as colunas da matriz T , como será mostrado ao longo deste trabalho.

Para mais informações detalhadas sobre estas transformações lineares pode-se consultar os livros de HIRSCH, SMALE e DEVANEY (2004). e PERKO (2006). A seguir analisamos os retratos de fase de (2.4) quando A assume as formas caônicas de (2.5).

• Autovalores Reais Distintos

Considere um sistema $X' = AX$, onde A possui dois autovalores reais distintos $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Podemos ter 3 possíveis situações:

1. $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$;
2. $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$;
3. $0 < \lambda_2 < \lambda_1$.

Vamos mostrar os exemplos mais simples de cada um dos três casos, para que seja possível ver a diferença entre eles. Iremos utilizar a equação:

$$X' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} X.$$

1º) $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Como já foi visto anteriormente, para determinar a solução geral deste sistema primeiro encontramos o *polinômio característico* $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$ e suas raízes, resultando nos autovalores λ_1 e λ_2 . Posteriormente encontramos os autovetores correspondentes

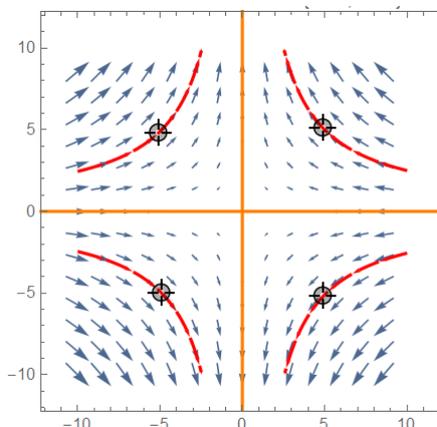
$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

E assim, a solução geral do sistema é:

$$X(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A partir do estudo das soluções de um sistema podemos esboçar o *retrato de fase* do mesmo. Agora vamos analisar este *retrato de fase* do sistema deste primeiro caso. Para isso precisamos entender o comportamento das soluções. Temos que $V_1 = (1, 0)$, assim, as soluções referentes a este vetor formam uma reta no *eixo x*. Temos ainda que $\lambda_1 < 0$, assim as soluções irão tender para $(0, 0)$ quando t tender para ∞ . Neste caso temos uma *linha estável*. Com relação ao outro vetor, $V_2 = (0, 1)$, temos uma linha reta no *eixo y*, e como $\lambda_2 > 0$, as soluções tendem para ∞ , quando t tende para ∞ . Aqui temos uma *linha instável*. Todas as outras soluções do sistema irão seguir as orientações das soluções descritas acima. Assim, o *retrato de fase* pode ser observado na Figura 1.

Figura 1 – Retrato de fase do sistema $x' = -x; y' = y$.



Fonte: Arquivo do autor.

Neste caso o *ponto de equilíbrio* do sistema, $(0, 0)$, é chamado de *sela*.

Exemplo 2.9. Considere o sistema:

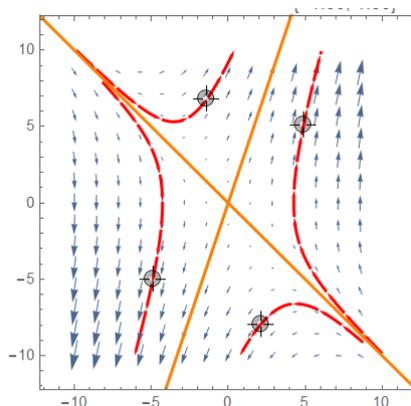
$$X' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} X.$$

Temos que $\lambda_1 = 3$ $\lambda_2 = -1$. O retrato de fase será similar ao caso anterior, mas orientado pelos autovetores $V_1 = (1, 3)$ e $V_2 = (-1, 1)$. Uma representação deste sistema pode ser vista na Figura 2.

2º) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. Como já vimos, a solução geral do sistema é

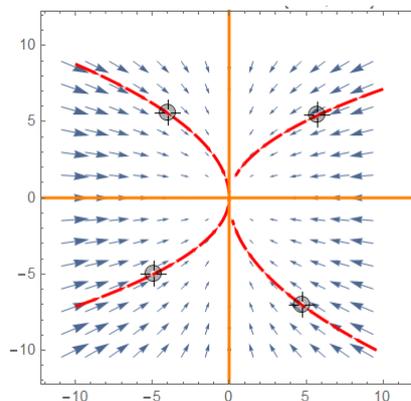
$$X(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Agora vamos estudar o comportamento das soluções para determinar o retrato de fases. Os autovetores são os mesmos do primeiro caso, porém, os autovalores são

Figura 2 – Retrato de fase do sistema $x' = y; y' = 3x + 2y$.

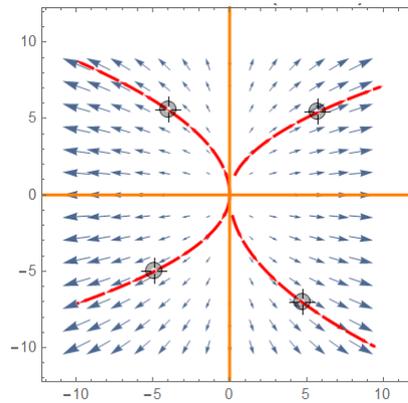
Fonte: Arquivo do autor.

ambos negativos, logo, quando $t \rightarrow \infty$ as soluções tendem para $(0, 0)$. Neste caso, sabemos que $\lambda_1 < \lambda_2$, assim falamos que o autovalor λ_1 é o mais forte, pois a coordenada x das soluções irão tender para 0 mais rápido do que as coordenadas y . Assim, no retrato de fase as soluções irá tender para 0 tangenciando a reta que corresponde ao autovalor mais fraco, neste caso, λ_2 . Podemos observar este retrato de fases na Figura 3. Neste caso o *ponto de equilíbrio* do sistema é chamado de *nó estável*.

Figura 3 – Retrato de fase do sistema $x' = -2x; y' = -y$.

Fonte: Arquivo do autor.

3º) $0 < \lambda_2 < \lambda_1$. Novamente utilizaremos o mesmo sistema, mas agora temos que os dois autovalores são positivos, e assim, ao contrário do 2º caso, as soluções irão se afastar do ponto de equilíbrio tendendo para ∞ . A orientação das soluções segue o mesmo raciocínio do item anterior, ou seja, tangenciando o eixo em que o autovalor é mais fraco. Podemos observar este retrato de fase na Figura 4. Neste terceiro caso chamamos o *ponto de equilíbrio* do sistema de *nó instável*.

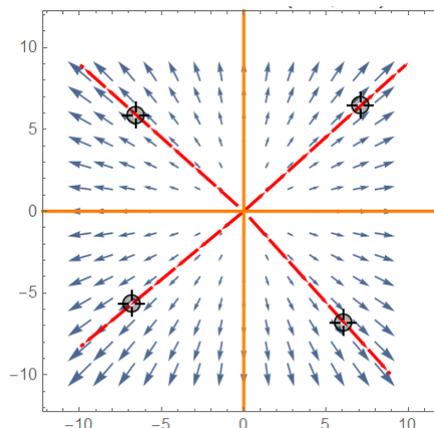
Figura 4 – Retrato de fase do sistema $x' = 2x; y' = y$.

Fonte: Arquivo do autor.

- **Autovalores Reais Iguais** Também podemos ter o caso onde a matriz A possui autovalores repetidos. Novamente vamos utilizar o caso mais simples:

$$X' = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} X$$

Aqui o polinômio característico é $(\lambda_1 - \lambda)^2 = 0$, e assim o único autovalor é λ . Mas ao tentar encontrar os autovetores é possível perceber que todo vetor não-nulo é um autovetor de A . Logo, as soluções seriam linhas retas tendendo para $(0, 0)$ se $\lambda < 0$, e tendendo para ∞ se $\lambda > 0$. Aqui temos um ponto de equilíbrio chamado de *nó próprio*, e o retrato de fase do sistema é como mostra a Figura 5.

Figura 5 – Retrato de fase do sistema $x' = 5x; y' = 5y$.

Fonte: Arquivo do autor.

Um caso um pouco mais complicado é quando temos o seguinte sistema:

$$X' = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} X.$$

Agora o único autovetor possível é $v = (1, 0)$, e assim a solução seria uma única linha reta.

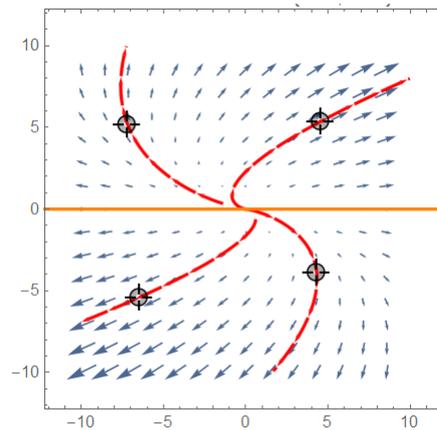
$$X(t) = \alpha e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para encontrarmos a solução geral utilizamos a técnica chamada de *método dos coeficientes indeterminados*, que pode ser vista com mais detalhes no livro de HIRSCH, SMALE e DEVANEY (2004), onde após analisar o sistema conclui-se que X_t é da forma:

$$X(t) = \alpha e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e^{\lambda t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Neste caso o ponto de equilíbrio é chamado de *nó impróprio*, e o retrato de fase do sistema é da forma como mostra a Figura 6.

Figura 6 – Retrato de fase do sistema $x' = x + y; y' = y$.



Fonte: Arquivo do autor.

- **Autovalores Complexos** No caso dos autovalores complexos, podemos dividir em dois grupos, de acordo com a organização do retrato de fase.

1º Caso: Quando temos um sistema da forma:

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{bmatrix} X.$$

Aqui temos o polinômio característico $\lambda^2 + \beta^2 = 0$, e assim os autovalores são imaginários puros da forma $\pm i\beta$. Ao fazermos o cálculo do autovetor relativo a $\lambda = i\beta$, encontramos $v = (1, i)$ e assim temos a solução abaixo. Ao fazermos o cálculo do autovetor relativo a $\lambda = -i\beta$ o resultado é análogo.

$$X(t) = \alpha e^{i\beta t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Como estamos trabalhando com um sistema de equações reais, não seria adequado termos uma solução complexa. Utilizamos a fórmula de Euler:

$$e^{i\beta t} = \cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t.$$

A solução fica na forma:

$$X(t) = \begin{bmatrix} \cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t \\ -\operatorname{sen} \beta t + i \cos \beta t \end{bmatrix}.$$

Separando os fatores reais e imaginários da nossa solução temos:

$$X(t) = X_{Re}(t) + iX_{Im}(t)$$

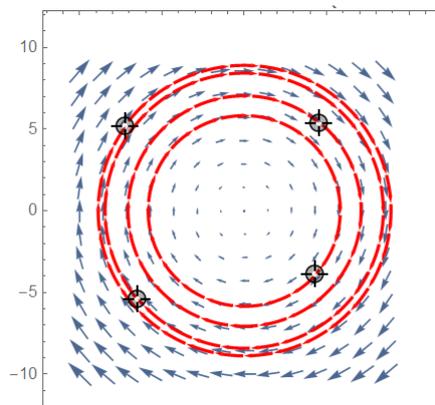
$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos \beta t \\ -\operatorname{sen} \beta t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \operatorname{sen} \beta t \\ \cos \beta t \end{pmatrix}.$$

Podemos verificar que $X_{Re}(t)$ e $X_{Im}(t)$ são ambas soluções do sistema original. Assim, ao fazer a combinação das duas podemos encontrar a solução geral do sistema:

$$X(t) = k_1 X_{Re}(t) + k_2 X_{Im}(t), \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

Por fim, para construirmos o retrato de fase basta observar que as soluções são periódicas de período $2\pi/\beta$ e assim a representação é um círculo em torno da origem. Se o valor de β for positivo então a orientação das soluções é no sentido horário, se o valor de β for negativo então o sentido é anti-horário, assim como mostra a Figura 7. Neste caso o sistema é chamado de *centro*.

Figura 7 – Retrato de fase do sistema $x' = 3y; y' = -3x$.



Fonte: Arquivo do autor.

2º Caso: Quando temos um sistema da forma:

$$X' = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} X.$$

Agora o polinômio característico é $\lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2 + \beta^2$ e os autovalores são $\alpha \pm i\beta$. O autovetor associado a $\alpha + i\beta$ é novamente $v = (1, i)$. Assim, temos a solução:

$$X(t) = \rho e^{(\alpha+i\beta)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \Rightarrow X(t) = \rho e^{\alpha t} e^{i\beta t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

E assim como no caso anterior utilizamos a fórmula de Euler para obter as soluções reais, e podemos ver que as soluções são idênticas as anteriores, porém com adição do termo $e^{\alpha t}$:

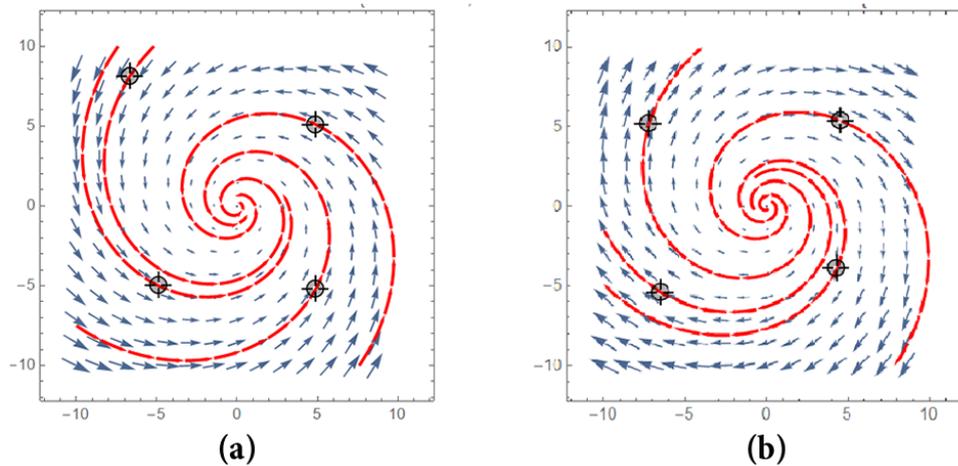
$$X(t) = e^{\alpha t} X_{Re}(t) + i e^{\alpha t} X_{Im}(t),$$

chegando a solução geral da forma:

$$X(t) = k_1 e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t \\ -\sin \beta t \end{pmatrix} + k_2 e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \sin \beta t \\ \cos \beta t \end{pmatrix}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

Para construir o retrato de fase devemos considerar a influência de $e^{\alpha t}$ nas soluções. Temos que quando $\alpha < 0$ o retrato de fase é composto de espirais tendendo para a origem, e quando $\alpha > 0$ elas irão se afastar da origem. Neste caso o *ponto de equilíbrio* do sistema é chamado de *foco estável* ou *foco instável*, como podemos ver na Figura 8.

Figura 8 – Retrato de fase dos sistemas: (a) $x' = -x + 3y; y' = -3x - y$ e (b) $x' = x + 3y; y' = -3x + y$.



Fonte: Arquivo do autor.

Agora apresentaremos dois tipos de classificação para os sistemas planares. Uma é o plano traço-determinante e a outra é dinâmica, envolvendo a noção de sistemas conjugados. Vamos considerar o sistema abaixo:

$$X' = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} X.$$

O traço de A , $tr(A)$, é igual a soma dos elementos de sua diagonal principal, isto é, $a + d$. O determinante de A , $\det(A)$, é dado por $ad - bc$. Ao calcularmos o polinômio característico de A temos:

$$\begin{aligned}\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) &= 0 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A) &= 0.\end{aligned}$$

E assim, resolvendo a equação do segundo grau temos:

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}[tr(A) \pm \sqrt{(tr(A))^2 - 4\det(A)}].$$

Note que $\lambda_+ + \lambda_- = tr(A)$ e $\lambda_+ \cdot \lambda_- = \det(A)$. Assim é possível ver que os valores do traço e do determinante estão ligados à solução do polinômio característico, logo, estão ligados ao comportamento do sistema. Chamando $T = tr(A)$ e $D = \det(A)$, temos:

1. Se $T^2 - 4D < 0$, então os autovalores são complexos com parte imaginária não nula;
2. Se $T^2 - 4D = 0$, então os autovalores são reais e iguais;
3. Se $T^2 - 4D > 0$, então os autovalores são reais e distintos.

Também podemos relacionar T e D com o comportamento do retrato de fase do sistema. Primeiramente tomamos o caso onde os autovalores são reais e distintos, $T^2 - 4D > 0$:

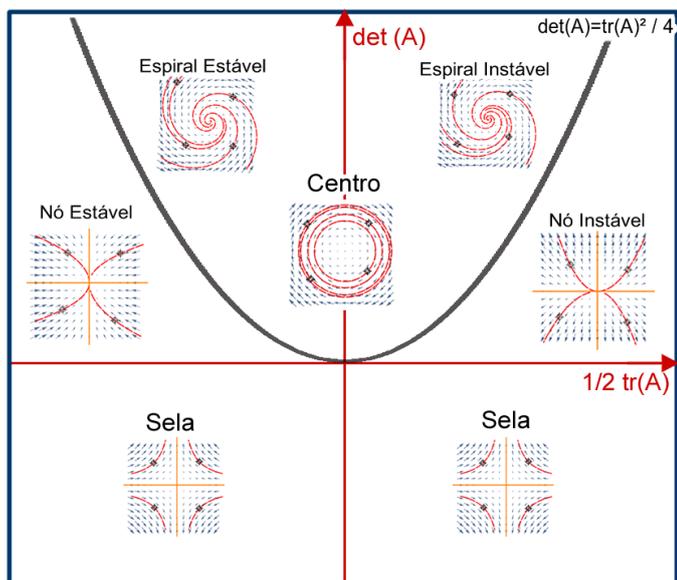
1. Se $D < 0$, então a origem é um Ponto de Sela;
2. Se $D > 0, T < 0$, então a origem é um Nó estável;
3. Se $D > 0, T > 0$, então a origem é um Nó instável.

Se tivermos autovalores complexos com parte imaginária diferente de zero, $T^2 - 4D < 0$:

1. Se $T = 0$, então a origem é um Centro;
2. Se $T < 0$, então a origem é um Foco estável;
3. Se $T > 0$, então a origem é um Foco instável.

Agora juntaremos todas essas informações de uma maneira geométrica. Para isso construiremos um plano chamado Traço(x)-Determinante(y). Nele inserimos a parábola que representa $T^2 = 4D$, e assim, obtemos a Figura 9.

Figura 9 – Representação do plano traço-determinante.



Fonte: Arquivo do autor.

Portanto, é possível perceber que ao encontrar os valores de T e D podemos obter várias informações sobre o sistema, isso sem nem mesmo calcular seus autovalores e autovetores.

Para encerrar esta subseção, vamos mostrar uma outra maneira de classificar os sistemas, baseada no comportamento das soluções, e sua dependência de uma condição inicial. Essa classificação será importante para entendermos sobre o fluxo dos sistemas diferenciais.

Vamos primeiro definir que um problema de valor inicial é uma equação do tipo:

$$\begin{aligned} X' &= F(X) \\ X(t_0) &= X_0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

onde $X(t_0) = X_0$ é chamada de condição inicial. Aqui lueremos deixar claro que as soluções depêndem da condição inicial e do tempo t , e para isso, vamos usar a ideia de *fluxo*.

Definição 2.10. Considere o campo vetorial $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ e a aplicação $\phi_t(X) : E \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dada a equação (2.6), a função $\phi(t, X_0)$ é chamada de *fluxo* da equação diferencial para o tempo t , e representamos como:

$$\phi(t, X_0) = \phi_t(X_0).$$

Portanto, temos que o fluxo $\phi_t(X_0)$ vai descrever a posição das soluções, em função da condição inicial dada. Para a nova classificação que será dada agora vamos considerar

dois sistemas *dinamicamente equivalentes* quando existir uma função h que leva um fluxo a outro, e assim, a função h deve ser um *homeomorfismo* (uma aplicação que seja contínua, invertível e a sua inversa seja contínua). Vamos supor que os sistemas $X' = AX$ e $X' = BX$ possuem fluxos ϕ^A e ϕ^B . Dizemos que os dois sistemas são *conjugados* se existir um homeomorfismo $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que satisfaz:

$$\phi^B(t, X_0) = h(\phi^A(t, X_0)).$$

O homeomorfismo h é chamado de *conjugação*. Assim, a conjugação leva as soluções de $X' = AX$ para aquelas de $X' = BX$.

Agora a partir destas definições podemos criar uma nova maneira de classificar os sistemas. Vamos tratar dos casos onde os sistemas possuem matrizes na forma canônica, como vimos em (2.5), podemos transformar um sistema mais complexo em um canônico. Para enunciar o próximo teorema precisamos nos recordar da definição matriz hiperbólica.

Definição 2.11. A matriz A é chamada *hiperbólica* se todos os seus autovalores possuem parte real diferente de zero. Também dizemos que o sistema é *hiperbólico*.

Teorema 2.12. *Sejam A_1 e A_2 matrizes 2×2 hiperbólicas. Então os sistemas $X' = A_j X; j = 1, 2$, são conjugados se e somente se cada matriz tem o mesmo número de autovalores com parte real negativa.*

Assim, duas matrizes hiperbólicas produzem sistemas lineares conjugados se ambos os conjuntos de autovalores pertencem a mesma categoria abaixo:

1. *Um autovalor é negativo e o outro positivo;*
2. *Ambos autovalores possuem parte real positiva;*
3. *Ambos autovalores possuem parte real negativa.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em HIRSCH, SMALE e DEVANEY (2004).

2.1.3 Sistemas Diferenciais Lineares em Dimensões Maiores

Nos itens anteriores estávamos tratando de sistemas lineares de ordem dois. Agora consideraremos sistemas com dimensões maiores. Dividimos os sistemas em três grupos, um deles contendo autovalores reais distintos, outro contendo autovalores complexos e por fim um contendo os autovalores repetidos.

Primeiro vamos considerar os sistemas que possuem n autovalores reais distintos $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. De maneira análoga ao que foi feito em \mathbb{R}^2 , na seção 2.1.1, é possível aplicar uma

transformação linear para simplificar o sistema $X' = AX$ em um sistema $Y' = (T^{-1}AT)Y$ da forma:

$$\begin{aligned} y_1' &= \lambda_1 y_1 \\ &\vdots \\ y_n' &= \lambda_n y_n. \end{aligned}$$

Considerando uma condição inicial $Y(t) = (c_1, \dots, c_n)$, a solução do sistema que satisfaz esta condição inicial é:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}.$$

Novamente de maneira análoga aos sistemas planares, a solução do sistema $X' = AX$ neste caso é $X(t) = TY(t)$, e podemos escrever da forma:

$$\sum_{j=1}^n c_j e^{\lambda_j t} V_j.$$

Agora vamos supor que os autovalores são negativos até uma certa ordem k $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ e a partir desta ordem são todos positivos $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$. Assim, temos um sistema hiperbólico, onde todos as soluções que começam no subespaço gerado por V_1, \dots, V_k permanecem no mesmo. Com cada solução tendendo para a origem quando $t \rightarrow \infty$. Este subespaço é chamado de *subespaço estável*. Analogamente, o subespaço gerado por V_{k+1}, \dots, V_n contém as soluções que se afastam da origem, e é chamado de *subespaço instável*. Assim, podemos dizer que este sistema assume uma forma de *sela*, agora com maior dimensão.

Vamos dar um exemplo de dimensão 3:

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} X.$$

Esta matriz possui três autovalores 2, 1 e -1 com autovetores associados (3,2,1), (1,0,0) e (0,1,2), respectivamente. Deste modo podemos simplificar o sistema utilizando a matriz dos autovetores:

$$T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

que converte o sistema $X' = AX$ em:

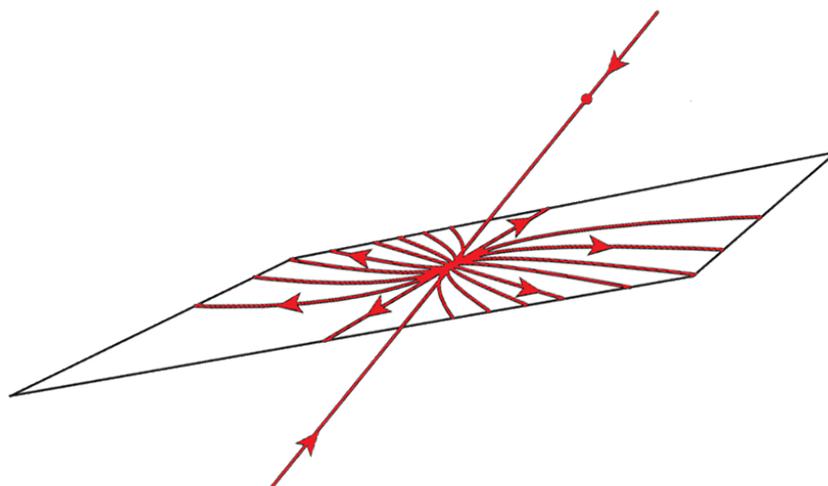
$$Y' = (T^{-1}AT)Y = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} Y.$$

E em seguida multiplicando a solução deste sistema $Y' = (T^{-1}AT)Y$ por T encontramos a solução geral do sistema $X' = AX$:

$$X(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

Considerando as informações dadas no começo desta seção, identificamos a parte *estável* como sendo aquela correspondente ao autovalor negativo $\lambda_3 = -1$, ou seja, o vetor $(0,1,2)$. E a parte *instável* seria aquela correspondente aos autovalores positivos $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 1$, ou seja, o plano gerado pelos vetores $(3, 2, 1)$ e $(1, 0, 0)$. Este caso está representado na Figura 10.

Figura 10 – Representação do retrato de fase sela em 3 dimensões, orientado pelos autovetores $(3, 2, 1)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 2)$.



Fonte: Arquivo do autor.

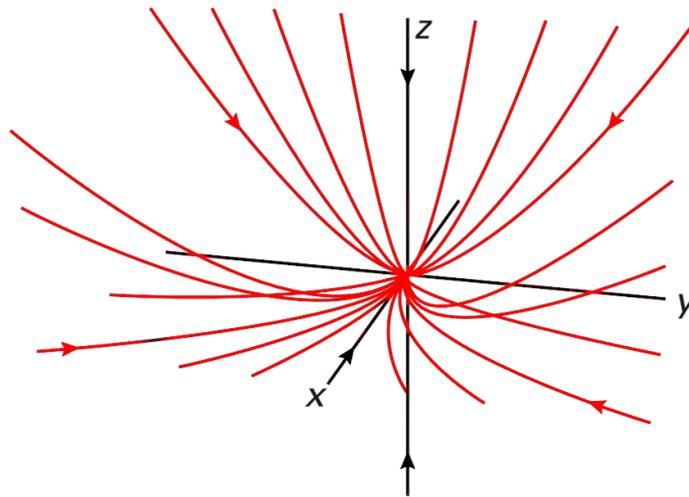
Agora vamos considerar o caso onde a matriz A possui apenas autovalores negativos. Podemos utilizar uma transformação linear e obter:

$$Y' = (T^{-1}AT)Y = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} Y,$$

onde $\lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1 < 0$. Neste caso todas as soluções irão tender para a origem, e assim, temos uma representação de *nó estável* de maior dimensão. Na Figura 11 podemos ver um exemplo onde é dada a condição inicial (x_0, y_0, z_0) .

Também vamos considerar o caso onde a matriz A $n \times n$ possui k_1 autovalores reais e $2k_2$ autovalores complexos, onde $n = k_1 + 2k_2$. Assim, após fazermos a mudança

Figura 11 – Representação do retrato de fase nó estável em 3 dimensões, orientado por 3 autovalores negativos.



Fonte: Arquivo do autor.

de coordenadas, o sistema fica na forma:

$$x'_j = \lambda_j x_j,$$

$$u'_l = \alpha_l u_l + \beta_l v_l,$$

$$v'_l = -\beta_l u_l + \alpha_l v_l,$$

com $j = 1, \dots, k_1$ e $l = 1, \dots, k_2$. Neste caso as soluções são dadas por:

$$x_j = c_j e^{\lambda_j t},$$

$$u_l = p_l e^{\alpha_l t} \cos \beta_l t + q_l e^{\alpha_l t} \sen \beta_l t,$$

$$v_l = -p_l e^{\alpha_l t} \sen \beta_l t + q_l e^{\alpha_l t} \cos \beta_l t.$$

Tendo isso em vista podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 2.13. *Considere o sistema linear $X' = AX$ onde A possui autovalores distintos $\lambda_1, \dots, \lambda_{k_1} \in \mathbb{R}$ e $\alpha_1 + i\beta_1, \dots, \alpha_{k_2} + i\beta_{k_2} \in \mathbb{C}$. Seja T a matriz que coloca A na forma canônica:*

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & 0 \\ & & \lambda_{k_1} & & \\ \vdots & & & B_1 & \vdots \\ & & & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & B_{k_2} \end{bmatrix},$$

onde

$$B_j = \begin{bmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{bmatrix}.$$

Então a solução geral do sistema $X' = AX$ é $TY(t)$, com:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_k e^{\lambda_{k_1} t} \\ a_1 e^{\alpha_1 t} \cos \beta_1 t + b_1 e^{\alpha_1 t} \operatorname{sen} \beta_1 t \\ -a_1 e^{\alpha_1 t} \operatorname{sen} \beta_1 t + b_1 e^{\alpha_1 t} \cos \beta_1 t \\ \vdots \\ a_{k_2} e^{\alpha_{k_2} t} \cos \beta_{k_2} t + b_{k_2} e^{\alpha_{k_2} t} \operatorname{sen} \beta_{k_2} t \\ -a_{k_2} e^{\alpha_{k_2} t} \operatorname{sen} \beta_{k_2} t + b_{k_2} e^{\alpha_{k_2} t} \cos \beta_{k_2} t \end{bmatrix}.$$

As colunas da matriz T formam os autovetores correspondentes a cada autovalor. Assim como no caso anterior, os subespaços gerados pelos autovetores correspondentes aos autovalores com parte real negativa são *estáveis*, e aqueles com parte real positiva são *instáveis*.

Agora vamos mostrar dois exemplos de como podem se comportar os sistemas que possuem autovalores complexos.

Exemplo 2.14. Primeiro consideraremos o sistema:

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} X.$$

A matriz já está na forma canônica. Seus autovalores são $\pm i$ e -1 . Se levarmos em conta uma condição inicial (x_0, y_0, z_0) , obtemos a solução geral do sistema:

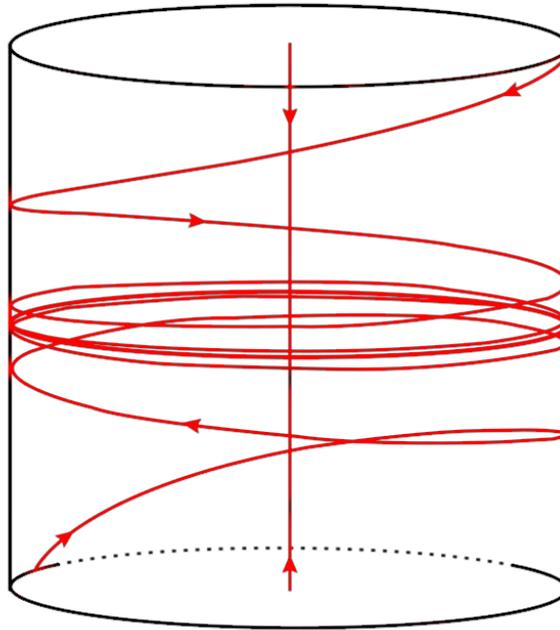
$$X(t) = x_0 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\operatorname{sen} t \\ 0 \end{pmatrix} + y_0 \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} + z_0 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aqui temos um caso onde a parte estável encontra-se ao longo do eixo z , enquanto que todas as soluções do plano xy viajam em círculos centrados na origem. Assim, é formado um cilindro em \mathbb{R}^3 , como mostra a Figura 12, conhecido como *central spiral*.

Exemplo 2.15. Agora vamos considerar o sistema:

$$X' = \begin{bmatrix} -0,1 & 0,0 & 1,0 \\ -1,0 & 1,0 & -1,1 \\ -1,0 & 0,0 & -0,1 \end{bmatrix} X.$$

Figura 12 – Representação do retrato de fase central espiral em 3 dimensões.



Fonte: Arquivo do autor.

Aqui para encontrar os autovalores utilizamos o polinômio característico

$$(1,00 - \lambda)(\lambda^2 + 0,02\lambda + 1,01) = 0.$$

Logo, os autovalores do sistema são $\lambda = 1,0; -0.1 \pm i$. Resolvendo $(A - \lambda I)X = 0$ encontramos os autovetores $(0, 1, 0)$ e $(-i, 1, 1)$, onde parte real é $(0, 1, 1)$ e a parte imaginária é $(-1, 0, 0)$. Logo, a matriz T fica na forma:

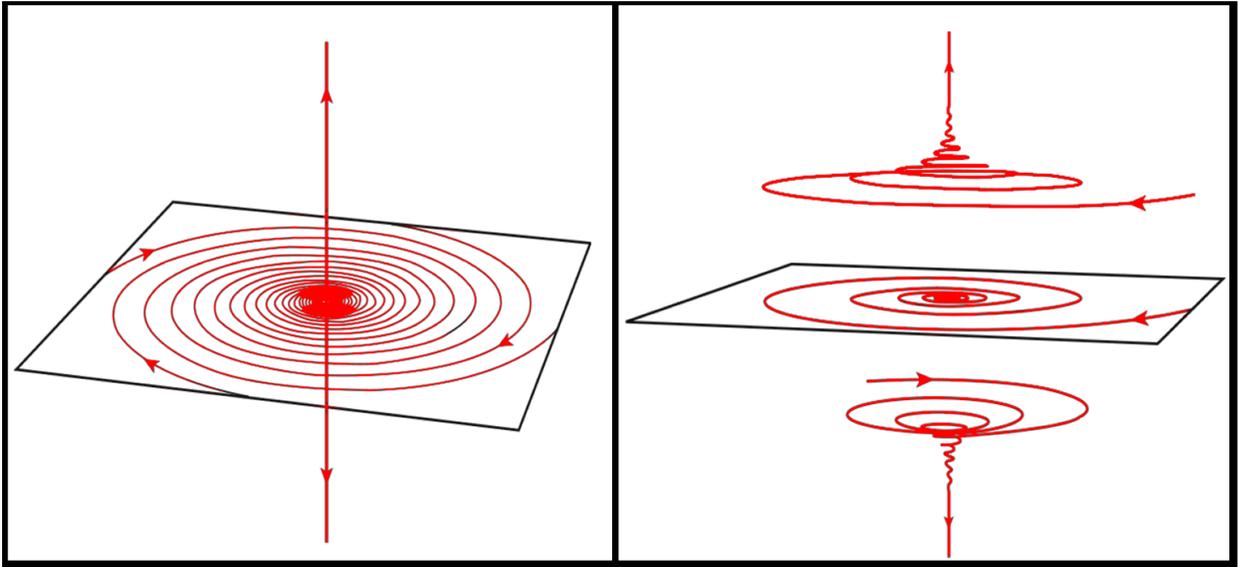
$$T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

E o sistema $X' = AX$ fica na forma:

$$Y' = \begin{bmatrix} -0,1 & 1,0 & 0,0 \\ -1,0 & -0,1 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{bmatrix} Y.$$

Podemos perceber que agora o sistema possui uma linha instável ao longo do eixo z , enquanto que o plano xy é estável. Neste caso as soluções formam uma espiral tendendo para zero no plano estável. Este sistema é chamado de *sela espiral*. As diversas soluções do sistema formam planos estáveis em forma de espirais em direção ao eixo z , conforme as coordenadas de z crescem ou decrescem, assim como está representado na Figura 13.

Figura 13 – Representação das soluções de sela espiral em direção ao eixo z.



Fonte: Arquivo do autor.

No caso da matriz A possuir autovalores repetidos, a transformação linear nos apresenta matrizes que contém blocos da forma:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \lambda & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & & & \lambda \end{bmatrix}.$$

Vamos considerar o caso de uma matriz 3×3 com autovalor λ :

$$X' = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} X$$

O único autovetor associado a λ é $(1, 0, 0)$. Note que a partir da linha três podemos concluir que

$$x_3(t) = c_3 e^{\lambda t}.$$

E assim na linha dois:

$$\begin{aligned} x_2' &= \lambda x_2 + c_3 e^{\lambda t} \\ x_2(t) &= c_2 e^{\lambda t} + c_3 t e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

E por fim, na primeira linha:

$$x_1' = \lambda x_1 + c_2 e^{\lambda t} + c_3 t e^{\lambda t}$$

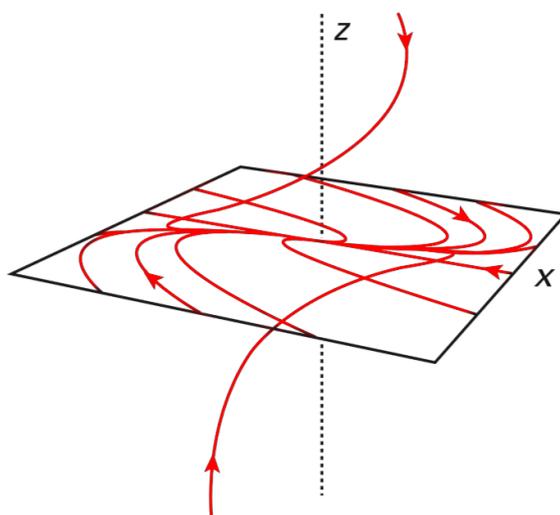
$$x_1(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} + c_3 \frac{t^2}{2} e^{\lambda t}.$$

Juntando as informações, obtemos a solução geral:

$$X(t) = c_1 e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{\lambda t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{\lambda t} \begin{pmatrix} t^2/2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Note que quando $\lambda < 0$, devido aos termos exponenciais, todas as soluções tendem para zero. Este caso está ilustrado na Figura 14. Isso ocorre exatamente como vimos no sistema planar com autovalores repetidos.

Figura 14 – Representação do retrato de fase com autovalores repetidos em 3 dimensões.



Fonte: Arquivo do autor.

2.2 Sistemas Diferenciais Não-Lineares

Aqui veremos que, ao contrário dos sistemas diferenciais lineares, nem sempre podemos descrever as soluções do sistema. Algumas vezes podemos ver que existem infinitas soluções, ou até mesmo casos onde o sistema não possui solução para um valor inicial. Até mesmo propriedades básicas como existência e unicidade de soluções não podem ser provadas de maneira genérica. Logo, ao tratar de sistemas não-lineares veremos que as teorias e hipóteses serão um pouco mais complicadas. Deste modo, mostraremos nesta seção como identificar os casos onde os sistemas se adequam as técnicas gerais das soluções de equações diferenciais, e também os casos onde essas técnicas falham.

2.2.1 Aspectos Gerais

Como já foi dito na seção 2.1, encontrar uma solução analítica para sistemas diferenciais não-lineares não é tarefa fácil. E também, em alguns casos, sistemas com dimensões maiores possuem um comportamento totalmente caótico, e mesmo que pudéssemos encontrar uma solução particular, ela não seria suficiente para entendermos o comportamento global deste sistema. Assim, temos que procurar novas técnicas para entendê-los. Vamos utilizar uma combinação de técnicas analíticas, geométricas e topológicas.

Primeiramente falamos sobre os sistemas dinâmicos, que são uma maneira de descrever a passagem de tempo ao longo de todos os pontos em um espaço S . Dada uma posição inicial $X_0 \in \mathbb{R}^n$, um sistema dinâmico irá nos dizer onde X estará depois de 1 unidade de tempo, depois de 2 unidades de tempo, e assim por diante. O valor inicial no tempo zero é chamado de X_0 , seguido por X_1, X_2, \dots . No geral, a trajetória de X é dada por X_t .

Existem três tipos principais de sistemas dinâmicos. Quando t é dado usando apenas números naturais, dizemos que o sistema é *discreto*. Se o sistema depende de t de uma maneira contínua, utilizando números reais, então dizemos que o sistema é *contínuo*. E por fim, se além de contínuo também for diferenciável, dizemos que o sistema é *suave*.

A função que leva t à sua posição X_t é uma sequência de pontos ou uma curva em \mathbb{R}^n . De maneira formal temos:

Definição 2.16. Um sistema dinâmico suave em \mathbb{R}^n é uma função contínua e diferenciável $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ onde $\phi : (t, X) = \phi_t(X)$ que satisfaz:

1. $\phi_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a função identidade: $\phi_0(X_0) = X_0$;
2. A função composta $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$ é válida para todo $t, s \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.17. Para a equação diferenciável de primeira ordem $x' = ax$, a função $\phi_t(x_0) = x_0 e^{at}$ é uma solução desta equação, com condição inicial $\phi_0(x_0) = x_0$, e também define um sistema dinâmico suave em \mathbb{R} .

De maneira geral, um sistema dinâmico suave sempre produz um campo de vetores em \mathbb{R}^n pela regra:

$$F(X) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t(X),$$

onde ϕ_t é a aplicação t associado ao fluxo do sistema $X' = F(X)$.

Neste caso temos um sistema bem definido e contínuo ao longo do tempo. Porém, nem sempre iremos encontrar sistemas nesta forma.

Consideramos o sistema de equações abaixo e o problema de valor inicial dado

$$\begin{aligned} X' &= F(X) \\ X(t_0) &= X_0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Uma solução deste sistema seria uma função $X : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida num intervalo $J \subset \mathbb{R}$, tal que para qualquer valor $t \in J$, $X'(t) = F(X(t))$. Resolver um problema comum como o de valor inicial, ou seja, determinar a solução do sistema que satisfaz a condição dada para todo $X_0 \in \mathbb{R}^n$ (para simplificar normalmente usamos $t_0 = 0$), nem sempre será possível.

Exemplo 2.18. Consideremos o sistema de primeira ordem:

$$x' = \begin{cases} 1 & x < 0, \\ -1 & x \geq 0. \end{cases}$$

Este campo de vetores em \mathbb{R} é direcionado para a esquerda quando $x \geq 0$ e direcionado para a direita quando $x < 0$. Consequentemente, não existe solução que satisfaz a condição inicial $x(0) = 0$, pois tal solução deveria inicialmente decrescer, pois $x'(0) = -1$, mas para todos os valores negativos de x , as soluções crescem. Isso não pode acontecer. O problema acontece pois o campo de vetores não é contínuo em zero. Sempre que este fato acontece podemos ter a possibilidade de que os vetores nesta vizinhança apontem para direções contrárias.

Além destes casos onde não existe uma solução para uma determinada condição inicial, também podemos encontrar sistemas que possuem mais de uma solução para um mesmo problema de valor inicial.

Exemplo 2.19. Consideremos a equação diferencial $x' = 3x^{\frac{2}{3}}$. A função nula $f(t) = 0$ é claramente uma solução para o problema de valor inicial $f(0) = 0$. Porém, uma outra função $f_1(t) = t^3$ também é uma solução satisfazendo a mesma condição inicial.

Observando estes dois casos anteriores fica claro que não podemos afirmar a existência e unicidade das soluções de maneira geral para os sistemas não-lineares. Podemos ver que no primeiro exemplo a função não é contínua em zero. Já no segundo, a função não é diferenciável em zero. Felizmente, as equações diferenciáveis que normalmente aparecem em aplicações são contínuas e diferenciáveis. Levando em consideração estas restrições podemos enunciar o teorema:

Teorema 2.20. (Existência e Unicidade): *Considere o problema de valor inicial dado em (2.7), onde $X_0 \in \mathbb{R}^n$. Supondo que $F \in C^1$, então existe uma solução para este*

problema, e esta solução é única. Mais precisamente, existe $a > 0$ e uma solução única:

$$X : (t_0 - a, t_0 + a) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

satisfazendo a condição inicial $X(t_0) = X_0$.

A prova deste importante teorema pode ser encontrada em HIRSCH, SMALE e DEVANEY (2004).

Assim, podemos ver que sempre é possível admitir a existência de uma solução única em um intervalo máximo. Porém, veremos que não existem garantias de que a solução estará definida para todo tempo, não importa o quão agradável $F(X)$ possa parecer.

Exemplo 2.21. Consideremos a equação diferencial em \mathbb{R} :

$$x' = 1 + x^2.$$

Essa equação tem como solução a função $x(t) = \tan(t + c)$, onde $c \in \mathbb{R}$ é uma constante. É fácil de entender que esta solução não pode ser estendida para um intervalo maior do que:

$$-c - \frac{\pi}{2} < t < -c + \frac{\pi}{2}.$$

Isso por que a função $x(t) \rightarrow \pm\infty$ quando $t \rightarrow -c \pm \pi/2$.

Logo, temos o seguinte teorema:

Teorema 2.22. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 . Considere a solução $X(t)$ do sistema $X' = F(X)$, definida em um intervalo aberto máximo $J = (a, b) \subset \mathbb{R}$, com $b < \infty$. Então, dado qualquer conjunto fechado e limitado $K \subset U$, existe um $t \in (a, b)$ tal que $X(t) \notin K$.*

Este teorema nos diz que se uma solução não pode ser estendida a um intervalo de tempo maior, então esta solução deixa qualquer conjunto fechado e limitado em U . Isso implica que $X(t)$ deve chegar arbitrariamente perto do limite de U quando $t \rightarrow b$, assim como quando $t \rightarrow a$.

Agora iremos complementar o teorema de existência e unicidade com uma propriedade que descreve a dependência contínua da solução $X(t)$ com uma condição inicial $X(0) = X_0$.

Teorema 2.23. *Considere a equação diferencial $X' = F(X)$, onde $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 . Supondo que $X(t)$ é uma solução desta equação definida em um intervalo fechado $[t_0, t_1]$ com $X(t_0) = X_0$. Existe uma vizinhança $U \subset \mathbb{R}^n$ de X_0 e uma constante*

K , tal que, se $Y_0 \in U$, então existe uma solução única $Y(t)$ também definida em $[t_0, t_1]$ com $Y(t_0) = Y_0$. Além disso, para todo $t \in [t_0, t_1]$, $Y(t)$ satisfaz:

$$|Y(t) - X(t)| \leq K|Y_0 - X_0|e^{K(t-t_0)}.$$

Este resultado nos diz que soluções $X(t)$ e $Y(t)$ que começam próximas, permanecem próximas para um t perto de t_0 . Enquanto que, se estas soluções se separarem, elas não irão fazê-lo com um parâmetro mais rápido do que exponencialmente. Podemos também chegar a mais uma conclusão.

Corolário 2.24. (Dependência contínua em Condições Iniciais): *Seja $\phi(t, X)$ o fluxo do sistema $X' = F(X)$, onde F é de classe C^1 . Então ϕ é uma função contínua de X .*

Não é raro encontrarmos equações diferenciais que dependem de parâmetros. A pergunta que fazemos é: como as soluções desta equação irão depender deste parâmetro? Como no caso anterior, as soluções irão depender continuamente desses parâmetros, desde que o sistema dependa dos parâmetros de uma forma contínua e diferenciável.

Teorema 2.25. (Dependência Contínua em Parâmetros): *Seja $X' = F_a(X)$ um sistema de equações diferenciais, no qual F_a é continuamente diferenciável em ambos X e a . Então o fluxo deste sistema também depende continuamente de a .*

Consideremos o sistema autônomo $X' = F(X)$, onde F é de classe C^1 . Se $\phi(t, X)$ é o fluxo deste sistema, nós já vimos que ϕ é contínua na variável X . Agora, no próximo teorema que será enunciado, veremos que ϕ é contínua e diferenciável em ambos t e X :

Teorema 2.26. (Suavidade do Fluxo): *Considere o sistema $X' = F(X)$, onde F é de classe C^1 . Então o fluxo $\phi(t, X)$ deste sistema também é de classe C^1 , ou seja, as derivadas parciais $\partial\phi/\partial t$ e $\partial\phi/\partial X$ existem e são contínuas.*

Podemos calcular $\partial\phi/\partial t$ para qualquer valor de t , contanto que saibamos a solução da equação (2.7), onde temos:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}(t, X_0) = F(\phi(t, X_0)),$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial X}(t, X_0) = D\phi_t(X_0),$$

onde $D\phi_t$ é a jacobiana da função $X \rightarrow \phi_t(X)$. Para encontrar o valor de $\partial\phi/\partial X$ também precisamos conhecer as soluções que passam próximas ao ponto inicial, visto que precisamos calcular as derivadas parciais dos vários componentes de ϕ_t . Podemos

contornar esta pequena dificuldade introduzindo a equação variacional ao longo da solução através de X_0 .

Considere o sistema $X' = F(X)$. Seja $X(t)$ uma solução particular do sistema definida para t em um intervalo $J = [a, b]$. Fixando $t_0 \in J$ e definindo $X(t_0) = X_0$, para todo $t \in J$ fazemos:

$$A(t) = DF_{X(t)},$$

onde $DF_{X(t)}$ é a matriz jacobiana de F no ponto $X(t)$. Como F é de classe C^1 , $A(t)$ é uma família contínua de matrizes $n \times n$.

Considere a equação linear não-autônoma $U' = A(t)U$. Ela é conhecida como a *equação variacional* ao longo da solução $X(t)$. Para garantir que esta equação possua uma solução definida em todo J , para cada condição inicial $U(t_0) = U_0$ temos:

Teorema 2.27. *Seja $A(t)$ uma família de matrizes $n \times n$ contínuas, definidas para todo $t \in [a, b]$. Então o problema de valor inicial:*

$$X' = A(t)X, \quad X(t_0) = X_0$$

possui uma solução única que está definida em todo o intervalo $[a, b]$.

Voltando para a equação variacional, sabendo que ela possui uma solução definida em todo intervalo J , se $U(t)$ é uma solução que satisfaz $U(t_0) = U_0$ então a função

$$t \rightarrow X(t) + U(t)$$

é uma boa aproximação para a solução $Y(t)$ do do sistema $X' = F(X)$ com condição inicial $Y(t_0) = X_0 + U_0$, desde que U_0 seja suficientemente pequeno.

Assim, dado um sistema qualquer $X' = F(X)$, com um ponto de equilíbrio em X_0 , consideramos a equação variacional ao longo da solução que satisfaz a condição inicial $X(0) = X_0$, $U' = AU$, com $A = DF_{X_0}$, sendo um sistema linear autônomo. Este sistema é chamado de *Sistema Linearizado* em X_0 . Ao redor de um ponto de equilíbrio do sistema não-linear, o retrato de fase se assemelha ao do sistema linearizado correspondente.

Agora, utilizando os resultados acima, podemos enfim calcular o valor de $\partial\phi/\partial X$. Para provar o próximo teorema precisamos da proposição que nos diz:

Proposição 2.28. *Considere as condições abaixo:*

1. $X(t)$ é uma solução do sistema $X' = F(X)$, com F de classe C^1 , onde $X(t)$ está definida para todo $t \in [\alpha, \beta]$ e também $X(t_0) = X_0$;
2. $U(t)$ é a solução da equação variacional ao longo de $X(t)$ que satisfaz $U(t_0) = U_0$;
3. $Y(t)$ é a solução do sistema $X' = F(X)$ que satisfaz $Y_0 = X_0 + U_0$.

$$\lim_{U_0 \rightarrow 0} \frac{|Y(t) - (X(t) + U(t))|}{|U_0|}$$

Então este limite converge para 0 uniformemente em $t \in [\alpha, \beta]$.

Teorema 2.29. *Considere o sistema de equações diferenciais $X' = F(X)$, onde F é de classe C^1 . Seja $X(t)$ uma solução deste sistema que satisfaz a condição inicial $X(0) = X_0$, definida para todo $t \in [a, b]$. Seja $U(t, U_0)$ a solução da equação variacional ao longo de $X(t)$ que satisfaz $U(0, U_0) = U_0$. Então:*

$$D\phi_t(X_0)U_0 = U(t, U_0).$$

Demonstração. Assim, para todo $t \in [\alpha, \beta]$ fazemos:

$$D\phi_t(X_0)U_0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi_t(X_0 + hU_0) - \phi_t X_0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{U(t, hU_0)}{h} = U(t, U_0)$$

□

Resumindo, temos que $\partial\phi/\partial X$ aplicada a U_0 é dada resolvendo a equação variacional correspondente com a condição inicial U_0 .

2.2.2 Equilíbrio e Técnicas Locais

Como já vimos, nem sempre é possível encontrar soluções para os sistemas diferenciais não-lineares. Porém, temos uma exceção quando tratamos de soluções de equilíbrio. Desde que possamos resolver as equações algébricas, podemos encontrar os pontos de equilíbrio. Como já trabalhamos anteriormente com sistemas lineares, aqui, podemos utilizar as técnicas de linearização para estudar o comportamento das soluções próximas aos equilíbrios. Em muitos casos as soluções de equilíbrio são as mais importantes de um sistema.

Ao tratar das soluções de equilíbrio temos duas situações possíveis. Quando temos um sistema linearizado hiperbólico, seu retrato de fase irá se assemelhar ao do sistema não-linear correspondente. Porém, quando o sistema não é hiperbólico, os retratos de fase irão apresentar uma grande diferença.

Levando em consideração o que foi dito nas subseções anteriores, aqui trabalharemos com os sistemas que possuem uma linearização hiperbólica, ou seja, sistemas que possuem todos os autovalores com parte real não-nula. Começaremos descrevendo o comportamento dos sistemas que apresentam Nós. Para facilitar, utilizaremos os resultados abaixo em casos planares, porém, eles também são válidos em \mathbb{R}^n .

Teorema 2.30. Linearização: *Suponha que o sistema n -dimensional $X' = F(X)$ com $F \in C^1$ tenha um ponto de equilíbrio em X_0 que seja hiperbólico. Então o fluxo de $X' = F(X)$ é conjugado ao fluxo do sistema linearizado em uma vizinhança de X_0*

A demonstração deste teorema, também conhecido como teorema de Hartman-Grobman, pode ser encontrada no texto de Chicone (1999).

Para visualizar melhor, considere o sistema não-linear $X' = F(X)$ e suponha que $F(X_0) = 0$. Assim, $DF(X_0)$ denota a matriz Jacobiana de F calculada no ponto X_0 . Temos então o sistema linearizado próximo a X_0 da forma:

$$Y' = DF(X_0)Y.$$

Agora vamos nos restringir aos casos onde o equilíbrio do sistema planar linearizado possui um nó na origem. Considere o sistema:

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y), \end{cases}$$

onde $f(x_0, y_0) = 0 = g(x_0, y_0)$. Podemos fazer uma mudança de coordenadas $u = x - x_0$ e $v = y - y_0$, e assim o novo sistema possui um ponto de equilíbrio em $(0,0)$. Podemos também supor que $x_0 = y_0 = 0$ no início. Em seguida fazemos uma outra mudança de coordenadas que coloca o sistema linearizado na forma canônica. Vamos assumir que neste caso o sistema linearizado possui autovalores distintos $-\lambda < -\mu < 0$. Assim, após essas mudanças, nosso sistema fica na forma:

$$x' = -\lambda x + h_1(x, y)$$

$$y' = -\mu y + h_2(x, y),$$

onde as funções $h_j(x, y)$, $j = 1, 2$, contém todos os termos de ordem superior, isto é, em termos de sua expansão de Taylor, cada h_j contém termos que são de ordem quadrática ou superior em x e/ou y .

E agora o sistema linearizado fica na forma:

$$x' = \begin{cases} x' = -\lambda x \\ y' = -\mu y. \end{cases}$$

Neste sistema linearizado, podemos recordar que o campo vetorial sempre aponta para dentro do círculo de raio r , centralizado na origem. O mesmo irá acontecer com o sistema não-linear, pelo menos próximo a origem. O campo vetorial não-linear aponta para o interior dos círculos de raio pequeno em torno da origem, e assim todas as soluções cujas condições iniciais estão dentro desses círculos devem tender para a origem. Assim, podemos chamar esse tipo de ponto de equilíbrio de nó, exatamente como no caso linear.

Agora vamos nos voltar para o caso de um equilíbrio onde o sistema linearizado possui uma sela na origem em \mathbb{R}^2 . Como já fizemos no caso anterior, podemos utilizar

algumas mudanças de coordenadas e deixar o sistema na forma:

$$\begin{cases} x' = -\lambda x + h_1(x, y) \\ y' = -\mu y + h_2(x, y) \end{cases}$$

Neste caso os autovalores são $-\mu < 0 < \lambda$.

No sistema linearizado, o eixo y serve como reta estável, com todas as soluções tendendo a 0 quando $t \rightarrow \infty$. Da mesma forma, o eixo x é a reta instável. Porém, para o sistema não-linear não podemos esperar que essas linhas retas estáveis e instáveis continuem da mesma forma. No entanto, existe um par de curvas passando pela origem que possuem propriedades semelhantes.

Seja $W_S(0)$ o conjunto de condições iniciais cujas soluções tendem à origem quando $t \rightarrow \infty$. Seja $W_U(0)$ o conjunto de condições iniciais cujas soluções tendem à origem quando $t \rightarrow -\infty$. $W_S(0)$ e $W_U(0)$ são chamados de curva estável e curva instável, respectivamente.

Teorema 2.31. Curva Estável: *Suponha que o sistema:*

$$\begin{cases} x' = -\lambda x + h_1(x, y) \\ y' = -\mu y + h_2(x, y) \end{cases}$$

satisfaz as condições $-\mu < 0 < \lambda$ e $h_j\|(x, y)\| \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow 0$. Então existe um ϵ e uma curva $x = h_s(y)$ que está definida para $|y| < \epsilon$ e satisfaz $h_s(0) = 0$. Além disso:

1. *Todas as soluções cujas condições iniciais se encontram nesta curva permanecem nesta curva para todo $t \geq 0$ e tendem para a origem quando $t \rightarrow \infty$;*
2. *A curva $x = h^s(y)$ passa pela origem tangente ao eixo y ;*
3. *Todas as outras soluções cujas condições iniciais estão no disco de raio ϵ centradas na origem, deixam este disco à medida que o tempo aumenta.*

Como a demonstração deste teorema é um pouco extensa ela não será abordada aqui, mas pode ser encontrada em HIRSCH, SMALE e DEVANEY (2004).

Este teorema nos mostra que soluções próximas a selas não-lineares se comportam da mesma maneira que no caso linear. Podemos fazer algumas observações. A curva $x = h^s(y)$ é chamada de *curva estável local*. Podemos encontrar a curva estável completa $W^S(0)$ seguindo as soluções que estão na curva estável local para no sentido contrário do tempo. A função $x = h^s(y)$ é de classe C^∞ em todos os pontos.

Um teorema parecido, nos dá as curvas instáveis locais da forma $y = h^u(x)$. Esta curva é tangente ao eixo x na origem. Todas as soluções nesta curva tendem para a origem quando $t \rightarrow -\infty$.

Vamos encerrar esta seção com uma breve discussão a respeito das selas em dimensões maiores. Considere o sistema $X' = F(X)$ com $X \in \mathbb{R}^n$. Suponha que X_0

é uma solução de equilíbrio, na qual o sistema linearizado possui k autovalores com a parte real negativa e $n - k$ autovalores com a parte real positiva. Então, os conjuntos locais estáveis e instáveis não são exatamente curvas. Pelo contrário, eles são *subvariedades* de dimensões k e $n - k$, respectivamente. Sem entrar na teoria de variedades, simplesmente notamos que isso significa que há uma mudança linear de coordenadas na qual o conjunto estável local é dado próximo à origem pelo gráfico de uma função $g : B_r \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ de classe C^∞ que satisfaz $g(0) = 0$, e todas as derivadas parciais de g se anulam na origem. Aqui, B_r é o disco de raio r centrado na origem em \mathbb{R}^k . O conjunto instável local é um gráfico semelhante, sobre um disco de dimensão $n - k$. Cada um desses gráficos é tangente aos subespaços estáveis e instáveis no ponto de equilíbrio em X_0 . Por isso, eles se encontram apenas em X_0 .

O estudo dos pontos de equilíbrio de um sistema de equações diferenciais possui um papel fundamental. Para que um ponto de equilíbrio possa ter um papel significativo ele precisa satisfazer certos critérios de estabilidade. Um ponto de equilíbrio de um sistema é chamado de estável se as soluções ao seu redor se mantêm próximas para todo o tempo. No estudo dos sistemas dinâmicos, por exemplo, não é possível denotar com certeza as posições, e assim, um ponto de equilíbrio precisa ser estável para ser fisicamente significativo.

Para entendermos de maneira mais precisa, considere a equação diferencial $X' = F(X)$ com um ponto de equilíbrio $X^* \in \mathbb{R}^n$. Então, X^* é um *equilíbrio estável* se, para cada vizinhança Ω de X^* em \mathbb{R}^n existe uma outra vizinhança Ω_1 de X^* em Ω , tal que toda solução $X(t)$ com $X(0) = X_0$ em Ω_1 está definida e permanece em Ω para $t > 0$.

Uma forma diferente de estabilidade é a estabilidade assintótica. Se Ω_1 pode ser escolhido de modo que, além das propriedades para estabilidade, tenhamos $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = X^*$, então dizemos que X^* é *assintoticamente estável*.

Se um ponto de equilíbrio não condiz com as restrições citadas anteriormente, então ele é chamado de *instável*.

Um nó estável é um exemplo assintoticamente estável, já uma sela é instável. Um ponto de equilíbrio que é estável, porém não assintoticamente, seria a origem em \mathbb{R}^2 para uma equação linear $X' = AX$, onde A possui autovalores imaginários puros. Nestes casos, qualquer perturbação não-linear, por menor que seja, pode alterar completamente o comportamento das soluções.

Quando tratamos de um sistema linearizado, se este for hiperbólico, podemos determinar imediatamente a sua estabilidade. Entretanto, muitos pontos de equilíbrio que encontramos em aplicações importantes possuem um caráter não-hiperbólico. Assim, para determinar a estabilidade destes pontos teríamos que calcular todas as soluções do sistema, o que pode não ser tão fácil, ou até mesmo possível.

Agora vamos descrever alguns exemplos simples de bifurcações que ocorrem em sistemas não-lineares. Vamos considerar a família de sistemas

$$X' = F_a(X)$$

onde a é um parâmetro real. Uma bifurcação ocorre quando a variação do parâmetro a gera uma mudança significativa na estrutura das soluções do sistema. Os tipos mais simples de bifurcações são aquelas que ocorrem quando a variação do parâmetro altera o número de pontos de equilíbrio.

Teorema 2.32. Bifurcação Sela-Nó: *Suponha que $x' = f_a(x)$ seja uma equação diferencial de primeira ordem na qual:*

1. $f_{a_0}(x_0) = 0$;
2. $f'_{a_0}(x_0) = 0$;
3. $f''_{a_0}(x_0) \neq 0$;
4. $\frac{\partial f_{a_0}}{\partial a}(x_0) \neq 0$.

Então esta equação diferencial possui uma bifurcação sela-nó em $a = a_0$

Demonstração. Seja $G(x, a) = f_a(x)$. Temos que $G(x_0, a_0) = 0$. E também:

$$\frac{\partial G}{\partial a}(x_0, a_0) = \frac{\partial f_{a_0}}{\partial a}(x_0) \neq 0,$$

então podemos aplicar o teorema da função implícita, detalhado em PERKO (2006), para concluir que, dadas as vizinhanças V_{a_0}, W_{x_0} existe uma função suave $a = a(x)$ com $a : W_{x_0} \rightarrow V_{a_0}$ tal que $G(x, a(x)) = 0$. Em particular, se x^* pertence ao domínio de $a(x)$, então x^* é um ponto de equilíbrio para a equação $x' = f_{a(x^*)}(x)$, uma vez que $f_{a(x^*)}(x^*) = 0$. Diferenciando $G(x, a(x)) = 0$ em relação a x , encontramos

$$a'(x) = \frac{-\partial G/\partial x}{\partial G/\partial a}.$$

Então, $(\partial G/\partial x)(x_0, a_0) = f'_{a_0}(x_0) = 0$, enquanto $(\partial G/\partial a)(x_0, a_0) \neq 0$ por hipótese. Daí um $a'(x_0) = 0$. Diferenciando mais uma vez, encontramos

$$a''(x) = \frac{-\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \frac{\partial G}{\partial a} + \frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial^2 G}{\partial a^2}}{\left(\frac{\partial G}{\partial a}\right)^2}.$$

Como $(\partial G/\partial x)(x_0, a_0) = 0$, temos:

$$a''(x) = \frac{-\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x_0, a_0)}{\left(\frac{\partial G}{\partial a}(x_0, a_0)\right)^2} \neq 0$$

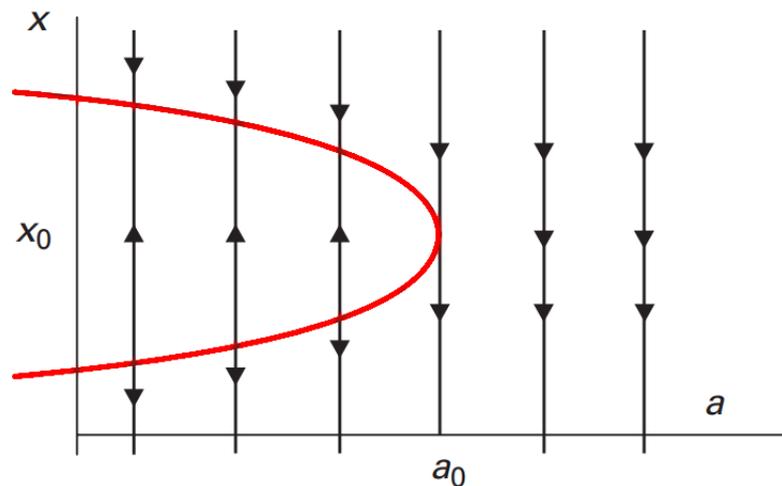
pois $(\partial^2 G / \partial^2 x)(x_0, a_0) = f''_{a_0}(x_0) \neq 0$. Isto implica que o gráfico de $a = a(x)$ é côncavo para cima ou côncavo para baixo, então temos dois equilíbrios próximos a x_0 para valores de a em um lado de a_0 , e nenhum equilíbrio para valores de a no outro lado. \square

Nas bifurcações sela-nó, há um intervalo sobre o valor de bifurcação a_0 e outro intervalo I no eixo x em que a equação diferencial tem:

1. Dois pontos de equilíbrio em I se $a < a_0$;
2. Um ponto de equilíbrio em I se $a = a_0$;
3. Nenhum ponto de equilíbrio em I se $a > a_0$.

O diagrama de bifurcação para $x' = f_a(x)$ é um gráfico das várias linhas de fase da equação e do parâmetro a . O diagrama de uma bifurcação sela-nó típica pode ser visto na Figura 15 (A direção das setas e da curva de equilíbrio pode mudar).

Figura 15 – Representação de um Diagrama de Bifurcação Sela-Nó.



Fonte: Arquivo do autor.

Exemplo 2.33. Considere a equação de primeira ordem

$$x' = f_a(x) = x^2 + a.$$

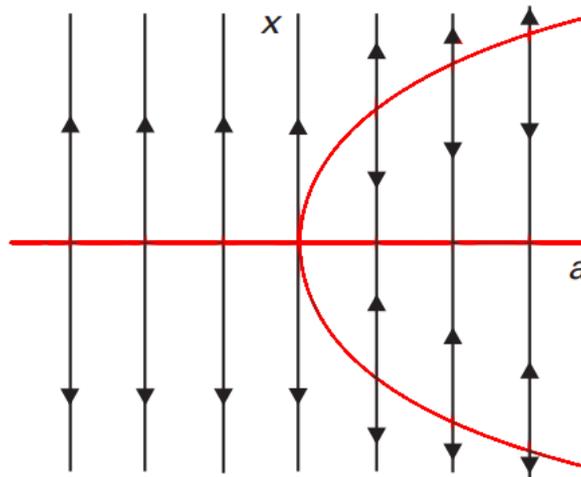
Ela possui um ponto de equilíbrio único em $x = 0$ quando $a = 0$. Veja que $f'_0(0) = 0$, porém $f''_0(0) \neq 0$. Para $a > 0$ a equação não possui pontos de equilíbrio, pois $f_a(x) > 0$ para todo x . Porém quando $a < 0$ a equação possui um par de equilíbrios em $x = \pm\sqrt{-a}$. Portanto, a bifurcação ocorre quando o parâmetro passa por $a = 0$.

Exemplo 2.34. Bifurcação de Forquilha - Pitchfork: Considere a equação

$$x' = f_a(x) = x^3 - ax.$$

Aqui temos duas situações possíveis. Quando $a > 0$ a equação possui três pontos de equilíbrio, um em $x = 0$ e outros dois em $x = \pm\sqrt{a}$. Porém, quando $a \leq 0$ o sistema possui apenas um ponto de equilíbrio em $x = 0$. O diagrama de bifurcações está representado na Figura 16.

Figura 16 – Representação de um Diagrama de Bifurcação Pitchfork.



Fonte: Arquivo do autor.

Exemplo 2.35. Bifurcação de Dimensão Maior: Agora vamos tratar de algumas bifurcações em dimensões maiores. A bifurcação sela-nó no plano é semelhante à sua representação unidimensional, só que agora podemos ver de onde a sela surge. Considere o sistema:

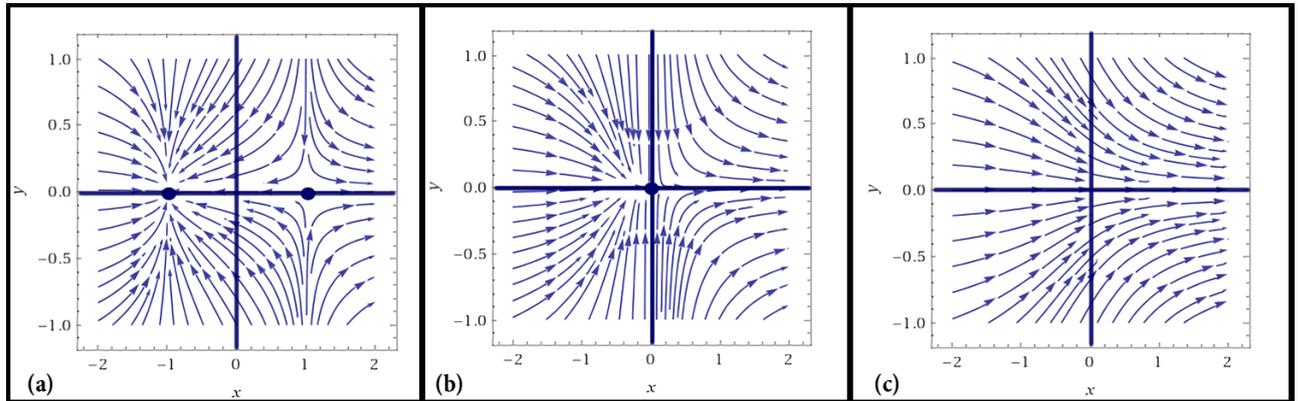
$$\begin{cases} x' = x^2 + a \\ y' = -y. \end{cases}$$

Quando $a = 0$ temos um ponto de equilíbrio único na origem. Quando a passa por $a = 0$ podemos ver uma bifurcação sela-nó acontecendo. Quando $a > 0$ temos $x' > 0$, e assim, todas as soluções se movem para a direita e o ponto de equilíbrio desaparece. Quando $a < 0$ temos um par de equilíbrios em $(-\sqrt{-a}, 0)$ e $(\sqrt{-a}, 0)$. Calculando a equação linearizada correspondente temos:

$$X' = \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} X.$$

Portanto, temos um nó estável em $(-\sqrt{-a}, 0)$ e uma sela em $(\sqrt{-a}, 0)$. Podemos ver que as soluções nas linhas $x = \pm\sqrt{-a}$ permanecem sobre elas para todo tempo, pois $x' = 0$. As soluções nestas linhas tendem para o equilíbrio, visto que $y' = -y$. Esta bifurcação pode ser vista na Figura 17.

Figura 17 – Representação de uma Bifurcação Sela-Nó com (a): $a = -1$, (b) : $a = 0$ e (c): $a = 1$.



Fonte: Arquivo do autor.

Exemplo 2.36. Bifurcação de Hopf: Considere o sistema:

$$x' = ax - y - x(x^2 + y^2)$$

$$y' = x + ay - y(x^2 + y^2).$$

Existe um ponto de equilíbrio na origem e o sistema linearizado correspondente é:

$$X' = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix} X.$$

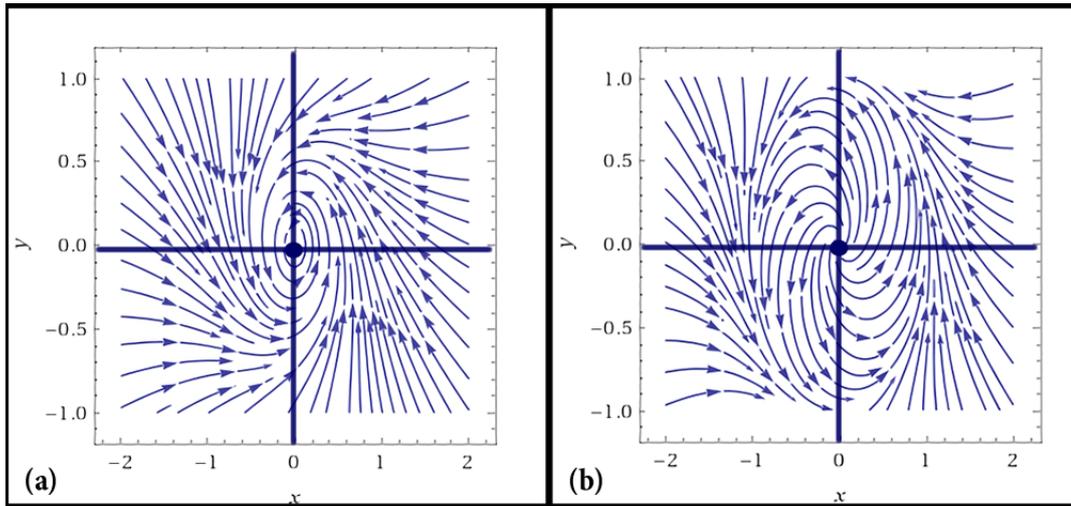
Com autovalores $a \pm i$. Assim, esperamos encontrar uma bifurcação em $a = 0$. Utilizaremos uma mudança de coordenadas polares e colocaremos o sistema em sua forma polar:

$$r' = r(a - r^2)$$

$$\theta' = 1.$$

Como $\theta' \neq 0$, o único ponto de equilíbrio seria a origem. Quando temos $a < 0$ concluí-se que $r(a - r^2) < 0$ para qualquer $r > 0$. Assim, temos um nó estável, com todas as soluções tendendo para a origem. Quando $a > 0$, vamos considerar um caso específico onde $r = \sqrt{a}$, e assim temos $r' = 0$. Logo, obtemos uma solução periódica circular de raio \sqrt{a} . Podemos então concluir que a origem fica isolada por uma órbita fechada que é única, atratora e centrada na origem. Assim sendo, todas as órbitas internas ou externas a este ciclo, com exceção da origem, tendem a órbita fechada quando $t \rightarrow \infty$.

O surgimento da órbita periódica e a mudança de estabilidade do nó a partir da perturbação do sistema, com o parâmetro a , é o que chamamos de *Bifurcação de Hopf*. Uma representação pode ser vista na Figura 18.

Figura 18 – Representação de uma Bifurcação de Hopf com (a): $a < 0$ e (b): $a > 0$.

Fonte: Arquivo do autor.

Agora vamos nos voltar para algumas técnicas qualitativas de analisar o comportamento dos sistemas não-lineares de equações diferenciais. As técnicas que serão apresentadas se mostram de extrema importância, contudo, elas não podem ser aplicadas a todos os tipos de sistemas não-lineares. Elas funcionam para alguns tipos específicos de situações, e estas ocorrem em muitas aplicações importantes de equações diferenciais.

Vamos começar com algumas técnicas locais que podem ser aplicadas em sistemas não-lineares. Estas aplicações nos ajudaram a estudar o comportamento local dos sistemas. Em alguns tipos de sistema é consideravelmente fácil utilizar as técnicas, porém, em outros casos, é mais difícil aplicar tal ferramenta do que resolver analiticamente.

Uma ferramenta muito importante para analisar sistemas de equações diferenciais (principalmente os sistemas planares) é a nulidade. Considere um sistema da forma:

$$\begin{aligned}x'_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ x'_n &= f_n(x_1, \dots, x_n).\end{aligned}$$

O conjunto de pontos onde a derivada x_j é nulas, ou seja, onde $f_j(x_1, \dots, x_n) = 0$, é chamado de nulidade de ordem x_j .

Estas x_j nulidades do sistema separam \mathbb{R}^n em várias regiões, onde a x'_j componente do campo vetorial apontam para o lado positivo ou para o lado negativo. Assim, ao determinar as nulidades de um sistema, podemos decompor \mathbb{R}^n em uma coleção de conjuntos abertos, nos quais o campo de vetores aponta para uma determinada direção. Quando temos a intersecção de duas curvas de nulidade, é formado um ponto de equilíbrio do sistema, quando $n = 2$.

Exemplo 2.37. Para entender melhor, vamos considerar o caso de um sistema planar

$$\begin{aligned}x' &= y - x^2 \\ y' &= x - 2.\end{aligned}$$

Para a nulidade em x temos que $x' = 0$, ou seja, a parábola $y = x^2$. Já para a nulidade em y temos a linha vertical $x = 2$. As intersecções destas nulidades se dá no ponto $(2, 4)$, onde temos um equilíbrio. Assim as nulidades irão dividir \mathbb{R}^2 em quatro regiões distintas. Para determinar a direção do campo vetorial em cada uma destas regiões precisamos apenas escolher um ponto pertencente a cada região, e em seguida determinar a direção do campo vetorial neste ponto. As regiões separadas pelas nulidades possuem o mesmo caráter direcional. Por exemplo, se escolhermos o ponto $(0, 1)$, podemos encontrar o vetor $(1, -2)$ correspondente. Assim, os vetores nesta região irão apontar sempre para sudeste, ou seja, possuem um ângulo θ compreendido entre $-\pi/2$ e 0 . Utilizando este mesmo raciocínio é possível encontrar as direções do campo vetorial em todas as regiões. Uma representação das nulidades deste sistema pode ser vista na Figura 19.

Apenas observando as nulidades e o campo de direções podemos ter uma ideia de que o ponto de equilíbrio do sistema se assemelha a uma sela. De fato, ao encontrar o sistema linearizado correspondente em $(2, 4)$ temos:

$$X' = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X.$$

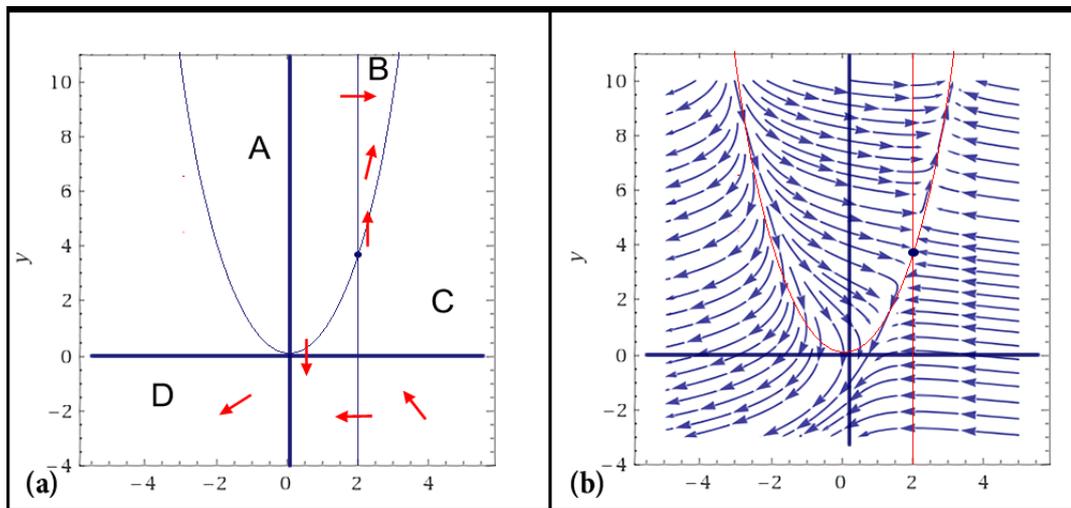
Os autovalores seriam $-2 \pm \sqrt{5}$, um positivo e outro negativo. Ou seja, como previmos, temos um ponto de Sela.

A relação entre as nulidades e o comportamento do campo de direções é muito importante pois conseguimos presumir o comportamento aproximado das soluções em todos os lugares no plano. Observe que todas as soluções das região B e D se mantêm nelas para todo tempo e tendem para ∞ , nas direções nordeste e sudoeste, respectivamente. Já nas outras duas regiões A e C, as soluções se dividem em duas opções. Ou elas tendem diretamente para o ponto de equilíbrio, ou elas atravessam as curvas de nulidade e assim seguem o comportamento das outras soluções nestas regiões. Assim sendo, conseguimos entender de maneira qualitativa o comportamento do retrato de fase deste sistema, que está representado na Figura 19.

Exemplo 2.38. Bifurcação Heteroclínica: Agora vamos considerar o sistema de equações abaixo que depende do parâmetro a :

$$\begin{aligned}x' &= x^2 - 1 \\ y' &= -xy + a(x^2 - 1).\end{aligned}$$

Figura 19 – Representação das Nulidades (a) e do Retrato de Fase (b) do Sistema $x' = y - x^2; y' = x - 2$.



Fonte: Arquivo do autor.

Primeiramente vamos encontrar as nulidades. Para o eixo x elas são dadas em $x = \pm 1$, e para o eixo y temos $xy = a(x^2 - 1)$. Portanto temos dois pontos de equilíbrio $(1, 0)$ e $(-1, 0)$.

Antes de estudar os diferentes valores do parâmetro, temos alguns comportamentos universais deste sistema. Na primeira linha de nulidade do eixo x , em $x = 1$ teríamos $y' = -y$, e assim, as soluções irão tender para o ponto de equilíbrio ao longo desta linha vertical. Já em $x = -1$ teríamos $y' = y$, e assim, as soluções iriam se afastar do ponto de equilíbrio.

Agora vamos considerar o caso $a = 0$, onde o sistema fica na forma

$$\begin{cases} x' = x^2 - 1 \\ y' = -xy. \end{cases}$$

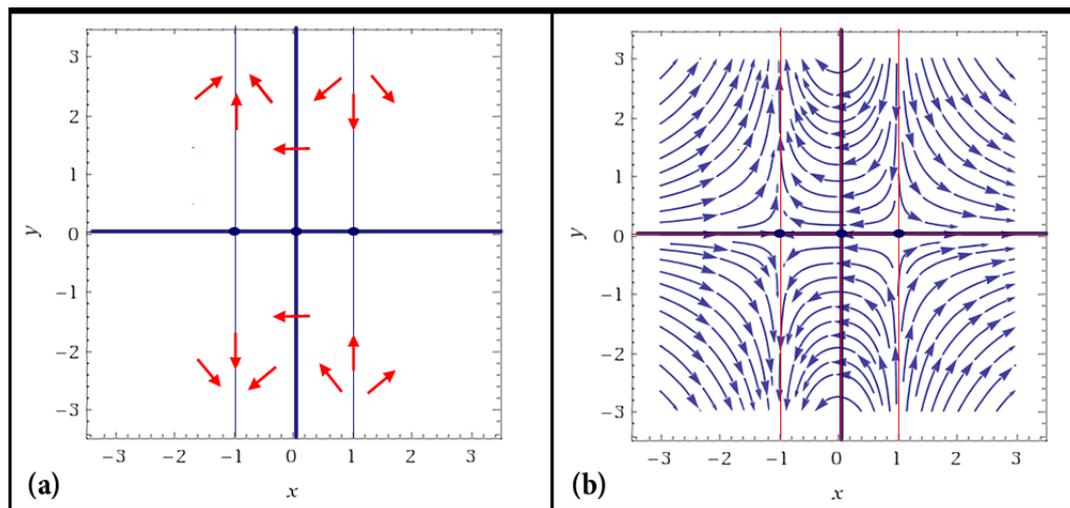
Ao longo dos eixos temos $y' = 0$. Em particular, o campo de vetores é tangente ao eixo x , e é dado por $x' = x^2 - 1$ nesta reta. Assim temos que $x' > 0$ se $x^2 > 1$ e $x' < 0$ se $x^2 < 1$. Portanto, para cada equilíbrio $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ temos uma solução em linha reta tendendo ao equilíbrio e uma tendendo para longe. Ao que parece, cada ponto de equilíbrio seria uma sela. Este fato é facilmente checado ao utilizar o sistema linearizado.

Existe uma segunda nulidade de y , quando $x = 0$. Aqui o campo vetorial não é tangente a essa nulidade. Ao calcular a direção do campo vetorial em cada uma das regiões determinadas pelas nulidades encontramos a Figura 20, a partir da qual podemos deduzir imediatamente o comportamento qualitativo de todas as soluções.

Veja que aqui, quando temos o parâmetro a nulo, uma ramificação da curva instável através de $(1, 0)$ coincide exatamente com uma ramificação da curva estável em

$(-1, 0)$. As soluções nesta curva viajam de uma sela para a outra, de maneira cíclica. Tais soluções são chamadas de *Heteroclínicas* ou *Conexões de Sela*. Normalmente, em sistemas planares, as curvas estáveis e instáveis raramente se encontram para formar tais “conexões” heteroclínicas. Quando o fazem, no entanto, pode-se esperar uma bifurcação. As nulidades e o retrato de fase neste caso podem ser vistos na Figura 20.

Figura 20 – Representação das Nulidades (a) e do Retrato de Fase (b) do sistema $x' = x^2 - 1; y' = xy$.

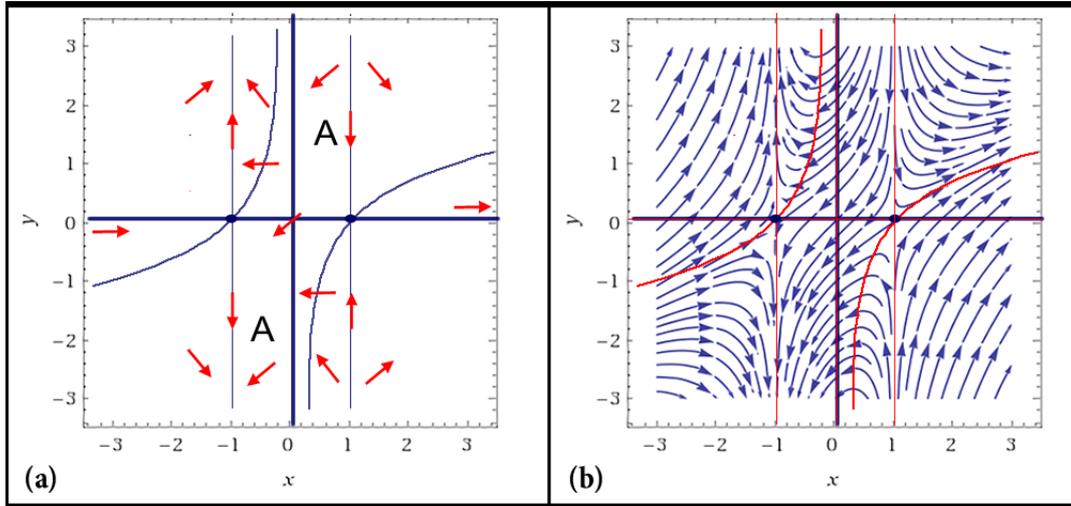


Fonte: Arquivo do autor.

Agora vamos analisar o caso onde o parâmetro $a \neq 0$. Temos uma mudança significativa no sistema. A nulidade do eixo x apresenta o mesmo comportamento anterior, em $x = \pm 1$. Já para a nulidade do eixo y temos aqui as curvas $y = a(x^2 - 1)/x$. Quando $a > 0$, temos uma região central entre as nulidades onde o ciclo heteroclínico é quebrado. O campo de vetores nesta região aponta para a direção sudoeste. A parte direita da curva estável associada a $(-1, 0)$ surge de $y = \infty$ na parte superior do plano. Já a parte esquerda da curva instável associada a $(1, 0)$ tende para $y = -\infty$ na parte inferior do plano. Assim temos um tipo de *corredor* entre as linhas $x = \pm 1$ com soluções viajando de $y \rightarrow \infty$ para $y = -\infty$. Este comportamento pode ser observado na Figura 21. Para $a < 0$ este comportamento seria similar.

Como vimos nestes exemplos anteriores, é relativamente simples determinar a estabilidade de pontos de equilíbrio hiperbólicos. Aqui vamos estudar um método diferente para determinar a estabilidade dos equilíbrios de um sistema. Este método generaliza a noção de que, para sistemas lineares na forma canônica, o componente radial r decresce ao longo das curvas de solução. O matemático russo Liapunov descreveu um método que nos dá uma ideia do tamanho da região de atração de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável. Por definição, a bacia de atração é o conjunto de todas as condições iniciais cujas soluções tendem ao ponto de equilíbrio.

Figura 21 – Representação das Nulidades (a) e do Retrato de Fase (b) para um parâmetro $a > 0$.



Fonte: Arquivo do autor.

Considere o sistema $X' = F(X)$ com um ponto de equilíbrio X^* . Seja $L : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável definida no conjunto aberto U contendo X^* . Considere ainda que:

$$L'(X) = DL_X(F(X)).$$

Se $\phi_t(X)$ é uma solução do sistema passando por X quando $t = 0$, então usando a regra da cadeia para $t = 0$ temos:

$$L'(X) = \frac{\partial L(\phi_t(X))}{\partial t}.$$

Consequentemente, se $L'(X)$ é negativo, então L decresce ao longo da curva de solução através de X .

Teorema 2.39. Estabilidade de Liapunov: Considere o sistema $X' = F(X)$ com um ponto de equilíbrio X^* . Seja $L : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável definida no conjunto aberto U contendo X^* . Considere as três condições:

- (a) $L(X^*) = 0$ e $L(X) > 0$ se $X \neq X^*$;
- (b) $L' \leq 0$ em $U - X^*$;
- (c) $L' < 0$ em $U - X^*$.

Se X^* satisfaz as condições (a) e (b) então é um ponto de equilíbrio estável. Se X^* satisfaz as três condições acima então é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

Se L satisfaz as condições (a) e (b) então é chamada de função de Liapunov. Se L satisfaz as três condições acima então é chamada de Função de Liapunov Estrita.

Veja que o Teorema de Liapunov pode ser aplicado sem resolver a equação diferencial, tudo que precisamos é encontrar $DL_X(F(X))$, e isto é um ganho significativo. Por outro lado, não existe nenhum método simples para encontrar as funções de Liapunov. Normalmente é uma questão de criatividade ou tentativa e erro. Às vezes, existem funções simples para tentar.

Exemplo 2.40. Considere o sistema de equações diferenciais abaixo com um parâmetro λ :

$$\begin{cases} x' = (\lambda x + 2y)(z + 1) \\ y' = (-x + \lambda y)(z + 1) \\ z' = -z^3. \end{cases}$$

O único ponto de equilíbrio do sistema é a origem $(0, 0, 0)$. O sistema linearizado neste ponto é:

$$X' = \begin{bmatrix} \lambda & 2 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X.$$

Os autovalores são 0 e $\lambda \pm \sqrt{2}i$. Supondo que $\lambda > 0$, podemos concluir apenas que a origem seria instável. Supondo que $\lambda \leq 0$ podemos concluir apenas que a origem não seria hiperbólica.

Quando $\lambda \leq 0$ procuramos por uma função de Liapunov para $(0, 0, 0)$ da forma $L(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$, com $a, b, c > 0$. Para tal função temos:

$$L' = 2(axx' + byy' + czz') \Rightarrow$$

$$L'/2 = ax(\lambda x + 2y)(z + 1) + by(-x + \lambda y)(z + 1) - cz^4.$$

Para existir estabilidade, queremos que $L' \leq 0$. Podemos chegar neste resultado utilizando $a = 1, b = 2, c = 1$. Se $\lambda = 0$ a função fica na forma $L' = -z^4$, que é menor ou igual a zero, e assim, a origem é estável. É possível mostrar, no entanto, que a origem não é assintoticamente estável. Se $\lambda < 0$ a função fica na forma $L' = \lambda(x^2 + 2y^2)(z + 1) - z^4$. Aqui, $L' < 0$ na região de U dada por $z > 1$ (exceto a origem). Concluímos então que a origem é assintoticamente estável.

A função de Liapunov não é usada apenas para analisar a estabilidade dos pontos de equilíbrio, mas também, para fazer estimativas sobre o tamanho da bacia de atração dos equilíbrios assintoticamente estáveis. O teorema a seguir nos mostra alguns critérios para definir a estabilidade assintótica e o tamanho da bacia de atração, mesmo quando a função de Liapunov não é estrita. Para entender este teorema precisamos recordar algumas definições.

Um conjunto A é chamado *invariante* se, para cada $X \in A$, $\phi_t(X)$ está em A para todo $t \in \mathbb{R}$. O conjunto A é chamado *positivamente invariante* se para cada $X \in A$, $\phi_t(X)$ está em A para todo $t \geq 0$. Por fim, uma *solução inteira* de um sistema é um conjunto da forma $\{\phi_t(X) | t \in \mathbb{R}\}$.

Teorema 2.41. Princípio de Invariância de Lasalle: *Considere o sistema $X' = F(X)$ com um ponto de equilíbrio X^* . Seja $L : U \rightarrow \mathbb{R}$ a função de Liapunov em X^* , onde U é um conjunto aberto contendo X^* . Seja $\Omega \subset U$ uma vizinhança de X^* fechada e limitada. Supondo que Ω seja positivamente invariante e que não existem soluções inteiras em $\Omega - X^*$ no qual L é constante. Temos que X^* é assintoticamente estável e Ω está contido na bacia de atração de X^* .*

Demonstração. Seja $X(t)$ uma solução que se encontra no conjunto invariante positivo Ω para $0 \leq t \leq \infty$, mas suponha que $X(t)$ não tenda a X^* quando $t \rightarrow \infty$. Como Ω é fechado e limitado, deve haver um ponto $Z \neq X^*$ em Ω e uma sequência $t_n \rightarrow \infty$ tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X(t_n) = Z.$$

Podemos supor que a sequência t_n é crescente.

Afirmamos que toda a solução através de Z está em Ω . Isto é, $\phi_t(Z)$ é definida e está em Ω para todo $t \in \mathbb{R}$, não apenas para $t \geq 0$. Isto pode ser visto como segue. Primeiro, $\phi_t(Z)$ é certamente definida para todo $t \geq 0$, uma vez que Ω é positivamente invariante. Por outro lado, $\phi_t(X(t_n))$ é definida e está em Ω para todo t no intervalo $[-t_n, 0]$. Como t_n é uma sequência crescente, temos que $\phi_t(X(t_{n+k}))$ também é definida e está em Ω para todos $t \in [-t_n, 0]$ e todos $k \geq 0$. Como os pontos $X(t_{n+k}) \rightarrow Z$ quando $k \rightarrow \infty$, segue da dependência contínua de soluções nas condições iniciais que $\phi_t(Z)$ é definida e está em Ω para todo $t \in [-t_n, 0]$. Como isso vale para qualquer t_n , vemos que a solução através de Z é uma solução inteiramente situada em Ω .

Finalmente, mostramos que L é constante em toda a solução através de Z . Se $L(Z) = \alpha$, então temos $L(X(t_n)) \geq \alpha$. Além disso:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(X(t_n)) = \alpha.$$

Mais geralmente, se s_n é qualquer sequência de tempos para a qual $s_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, então $L(X(s_n)) \rightarrow \alpha$. Isso decorre do fato de que L não aumenta ao longo das soluções. Agora a sequência $X(t_n + s)$ converge para $\phi_s(Z)$, e assim $L(\phi_s(Z)) = \alpha$. Isso contradiz nossa hipótese de que não há soluções inteiramente situadas em Ω para as quais L é constante, e isso comprova o teorema.

□

2.2.3 Ciclos Limite e Técnicas Globais

Nas seções anteriores nos focamos em estudar o comportamento das soluções de equilíbrio e suas aplicações. Podemos afirmar sem dúvida que estas soluções estão entre as mais importantes de um sistema diferencial. Porém, existem outras que também representam um papel importante nas aplicações. Agora focaremos em outros tipos de soluções, de maneira mais global, nos voltando para as *soluções periódicas*, ou *órbitas periódicas*.

Uma solução do sistema $X' = F(X)$ é chamada de periódica se para um ponto X (que não seja um equilíbrio) e um tempo $\tau > 0$ temos que $\rho_\tau(X) = X$ e assim $\rho_{t+\tau}(X) = \rho_t(X)$ para todo t . O menor valor $\tau > 0$ em que a igualdade anterior acontece é chamado de período. Veremos que, assim como nos pontos de equilíbrio, aqui as soluções periódicas poderão atrair outras soluções. Iniciaremos descrevendo o comportamento limitante das soluções.

Definição 2.42. Considere um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$. Um ponto $p \in A$ é chamado de ponto ω -limite da solução $\phi_t(X)$ se existe uma sequência $t_n \rightarrow \infty$ tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{t_n}(X) = p.$$

De maneira similar, um ponto $q \in A$ é chamado de ponto α -limite da solução $\phi_t(X)$ se existe uma sequência $t_n \rightarrow -\infty$ tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{t_n}(X) = q.$$

Para simplificar, considere uma solução ϕ . Podemos chamar o conjunto ω -limite desta solução de $\omega(\phi)$. Seguindo a mesma ideia, o conjunto α -limite é chamado $\alpha(\phi)$.

Se X^* é um equilíbrio assintoticamente estável, então ele é o conjunto ω -limite de cada ponto em sua bacia de atração. Qualquer equilíbrio também é seu próprio conjunto ω -limite e α -limite. Uma solução periódica é o conjunto ω -limite e também α -limite de todos os seus pontos. Tal solução também pode ser o conjunto ω -limite de muitos outros pontos.

Para entendermos a próxima definição precisamos saber que dado um conjunto A , a notação $X(t) \rightarrow A$ quando $t \rightarrow \infty$ significa que a distância $d(X(t), A) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Definição 2.43. Um conjunto invariante e fechado $A \subset \mathbb{R}^n$ é chamado de *conjunto atrator* do sistema $X' = F(X)$ se existe alguma vizinhança Ω de A tal que, para todo $X \in \Omega$, a solução $\phi_t(X) \in \Omega$ em todo tempo $t \geq 0$. E também $\phi_t(X) \rightarrow A$ quando $t \rightarrow \infty$.

Seja q qualquer ponto regular em $\alpha(\phi)$ ou $\omega(\phi)$, então a trajetória através de q é chamada de *órbita limite* de ϕ . Consideremos agora alguns exemplos específicos de conjuntos limites e atratores.

Exemplo 2.44. Considere o sistema planar:

$$x' = -y + x(1 - x^2 - y^2)$$

$$y' = x + y(1 - x^2 - y^2).$$

Convertendo o sistema para coordenadas polares ficamos com:

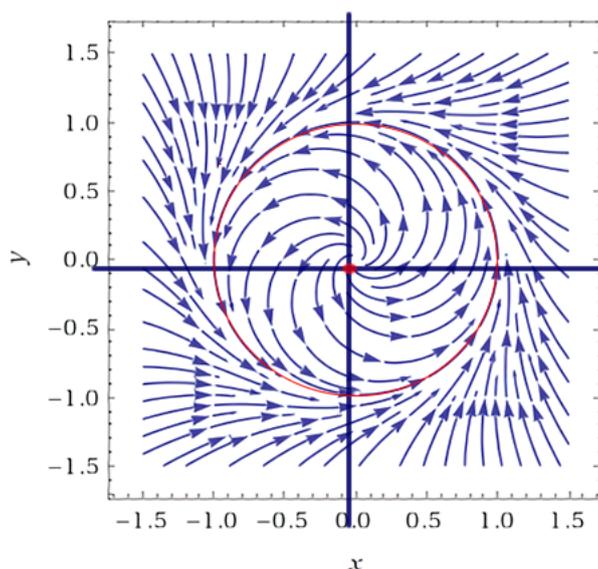
$$r' = r(1 - r^2)$$

$$\theta' = 1.$$

Podemos ver que a origem é um ponto de equilíbrio desse sistema. O fluxo é uma espiral em torno da origem no sentido anti-horário. Se a condição inicial r_0 satisfaz $0 < r_0 < 1$, a solução (ou fluxo) tende para fora, pois $r' > 0$. Já em $r > 1$, a solução tende para dentro, visto que $r' < 0$. Para $r = 1$ o fluxo no sentido anti-horário descreve uma trajetória ρ_0 circular unitária, pois $r' = 0$. O retrato de fase deste sistema é mostrado na Figura 22. Neste caso podemos ver que todas as soluções do sistema estão tendendo para a solução ρ_0 , e assim, ela é chamada de *ciclo limite estável*.

O ciclo de limite estável do sistema no exemplo anterior, é o conjunto ω – *limite* de cada trajetória deste sistema, exceto o ponto de equilíbrio na origem. Este ciclo limite estável do sistema também é um *atrator*.

Figura 22 – Representação do Retrato de Fase do Sistema $r' = r(1 - r^2); \theta' = 1$.



Fonte: Arquivo do autor.

Agora vamos considerar um exemplo de conjunto limite para um sistema em \mathbb{R}^3 .

Exemplo 2.45. Considere o sistema:

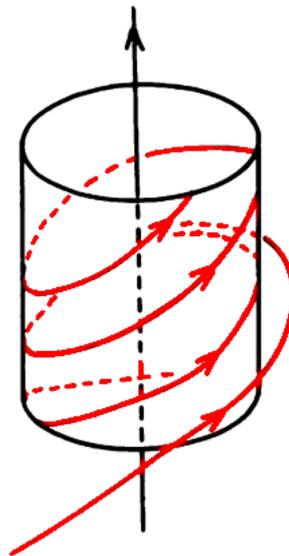
$$x' = -y + x(1 - x^2 - y^2)$$

$$y' = x + y(1 - x^2 - y^2)$$

$$z' = \alpha$$

Veja que o sistema possui no eixo z e no cilindro $x^2 + y^2 = 1$ conjuntos invariantes. Assim, o cilindro é um conjunto atrator. Uma representação deste sistema pode ser vista na Figura 23.

Figura 23 – Representação do Retrato de Fase do Sistema em \mathbb{R}^3 .



Fonte: Arquivo do autor.

Proposição 2.46. Considere dois pontos X e $Z \in \mathbb{R}^n$. Então

1. Se X e Z estiverem na mesma curva de solução, então $\omega(X) = \omega(Z)$ e $\alpha(X) = \alpha(Z)$;

2. Se D é um conjunto fechado, positivamente invariante e $Z \in D$, então $\omega(Z) \subset D$. Este fato acontece similarmente para conjuntos negativamente invariantes e conjuntos α – limite;

3. Um conjunto invariante fechado, em particular, um conjunto limite, contém os conjuntos de α – limite e ω – limite de cada ponto nele mesmo.

Demonstração. Para (1), suponha que $Y \in \omega(X)$ e $\phi_s(X) = Z$. Se $\phi_{t_n}(X) \rightarrow Y$, então temos

$$\phi_{t_n-s}(Z) = \phi_{t_n}(X) \rightarrow Y.$$

E assim $Y \in \omega(Z)$ também.

Para (2), se $\phi_{t_n}(Z) \rightarrow Y \in \omega(Z)$ quando $t_n \rightarrow \infty$, então temos $t_n \geq 0$ para um n suficientemente grande, tal que $\phi_{t_n}(Z) \in D$. Assim $Y \in D$, pois D é um conjunto fechado.

Por fim, a parte (3) segue imediatamente da parte (2).

□

Assim como vimos no estudo dos pontos de equilíbrio, podemos analisar a estabilidade das órbitas periódicas. As definições desses conceitos são inteiramente análogas às dos equilíbrios. Assim, uma órbita periódica ρ se diz estável se todas as soluções ao seu redor se mantêm próximas, para todo o tempo. Uma órbita periódica é instável se não for estável. Estes conceitos, assim como a definição de estabilidade assintótica, serão descritos com mais formalidade nos resultados abaixo.

Definição 2.47. Considere uma órbita periódica ρ . Então:

1. ρ é estável se, para cada $\epsilon > 0$ existe uma vizinhança Ω de ρ tal que para todo $x \in \Omega$ e $t > 0$, a distância entre ρ e qualquer outra solução ϕ_t do sistema é $d(\phi_t(X), \rho) < \epsilon$;
2. ρ é assintoticamente estável se é estável, e também, para todos os pontos X em alguma vizinhança Ω de ρ temos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\phi_t(X), \rho) = 0$$

3. ρ é chamada instável se não for estável;

Para exemplificar vamos nos lembrar de um sistema que possui um ponto de equilíbrio em formato de *centro*. Ele é um ponto de equilíbrio cercado por uma faixa contínua de ciclos. Em geral, o período τ varia continuamente à medida que nos movemos ao longo de uma curva contínua, cruzando essa família de ciclos. No entanto, no caso de um centro para um sistema linear, o período é o mesmo para cada órbita periódica na família. Cada órbita periódica na família de ciclos circundando um centro é estável, mas não assintoticamente estável. Vamos considerar as órbitas periódicas de sistemas planares, com $X \in \mathbb{R}^2$.

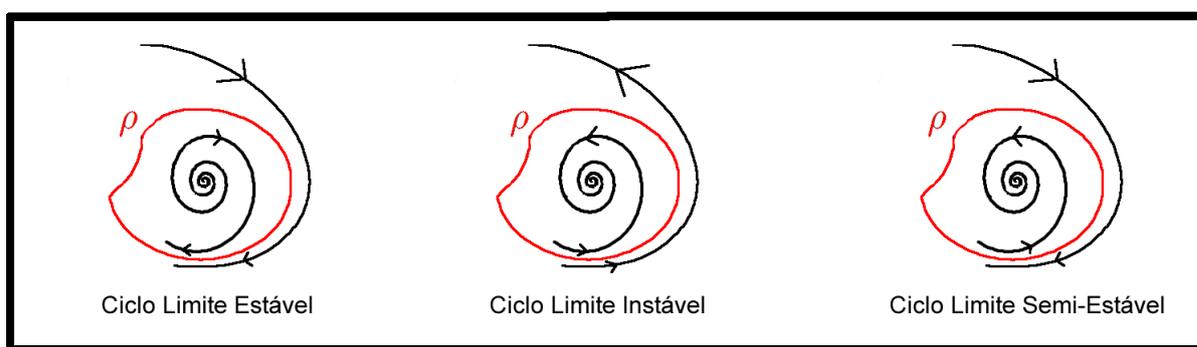
Definição 2.48. Sejam A um conjunto aberto em \mathbb{R}^2 e $\Gamma : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe C^1 . Uma órbita periódica ρ de Γ chama-se *ciclo limite* se existe uma vizinhança Ω de ρ tal que ρ é a única órbita periódica de Γ que intercepta Ω .

De maneira simplificada podemos dizer que, um *ciclo limite* de um sistema de equações diferenciais é uma órbita periódica isolada no conjunto de todas as órbitas periódicas do sistema. A definição abaixo nos diz respeito a estabilidade de ciclos limite.

Definição 2.49. Considere uma órbita periódica ρ que também é um ciclo limite. Então:

1. Se ρ é o conjunto ω – limite de todas as trajetórias em alguma vizinhança de ρ , então ρ é um ciclo limite estável;
2. Se ρ é o conjunto α – limite de todas as trajetórias em alguma vizinhança de ρ , então ρ é um ciclo limite instável;
3. Se ρ é o conjunto ω – limite de uma trajetória, e se, ρ também é o conjunto α – limite de uma outra trajetória, então ρ é um ciclo limite semiestável.

Figura 24 – Representação dos Três Tipos de Estabilidade de Ciclo Limite.



Fonte: Arquivo do autor.

Exemplo 2.50. Considere o sistema:

$$x' = -y + x(x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$y' = x + y(x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Com $x^2 + y^2 \neq 0$ e $x' = y' = 0$ em $(0, 0)$, e assim, sendo de classe C^1 em \mathbb{R}^2 . Passando o sistema para coordenadas polares temos:

$$r' = r^3 \operatorname{sen} \frac{1}{r}$$

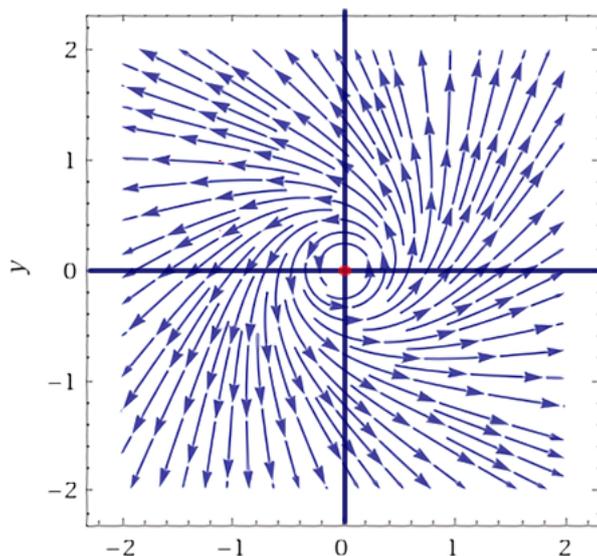
$$\theta' = 1$$

A origem aqui é um ponto de equilíbrio e existem ciclos limite ρ_n situados nos círculos de raio $r = 1/(n.\pi)$. Estes ciclos limite se acumulam na origem, isto é:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(\rho_n, 0) = 0.$$

Cada um dos ciclos limite de ordem par, ρ_{2n} é estável, já os ciclos de ordem ímpar, ρ_{2n+1} são instáveis. Podemos ver uma representação deste sistema na Figura 25.

Figura 25 – Representação do Retrato de fase do sistema $r' = r^3 \sin \frac{1}{r}; \theta' = 1$.



Fonte: Arquivo do autor.

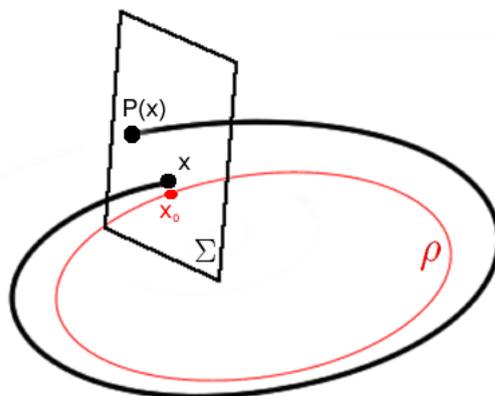
O próximo teorema irá nos mostrar que sistemas planares da forma $X' = F(X)$ em que $F(X)$ é uma função analítica em um conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ não pode admitir um número infinito de ciclos limite se acumulando em ponto crítico, como aconteceu no exemplo anterior.

Teorema 2.51. Teorema de Dulac: *Em qualquer região limitada do plano, um sistema analítico planar $X' = F(X)$ com $F(X)$ analítica em $A \subset \mathbb{R}^2$ tem no máximo um número finito de ciclos limite. Qualquer sistema polinomial tem no máximo um número finito de ciclos limite em $A \subset \mathbb{R}^2$.*

Como vimos, determinar a estabilidade das órbitas periódicas é muito mais difícil do que o problema correspondente para os equilíbrios. Embora tenhamos uma ferramenta que se assemelhe à técnica de linearização usada para determinar a estabilidade da maioria dos pontos de equilíbrio, geralmente essa ferramenta é muito mais difícil de usar na prática. Esta ferramenta é conhecida como o aplicação de Poincaré.

Seja então ρ uma órbita periódica de período τ_0 de um campo vetorial Γ de classe C^k , com $k \geq 1$, definido em um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$. Seja Σ uma secção transversal de Γ em ρ . Agora considere um ponto X_0 pertencente a secção transversal e a ρ . Assim, para qualquer outro ponto $X \in \Sigma$ próximo a X_0 , a solução $\phi_t(X)$ permanece próxima à órbita fechada ρ , com t em um intervalo compacto pré-fixado. Define-se $P(X)$ como o primeiro ponto onde esta órbita, partindo de X intercepta novamente o plano Σ . A função $P(X)$, com domínio Σ_0 , é chamada de *Aplicação de Poincaré*. Temos que $X_0 \in \Sigma_0$ e $P(X_0) = X_0$.

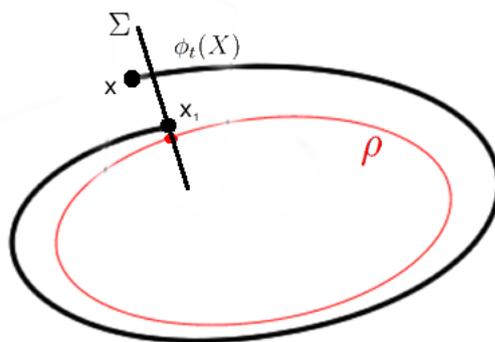
Figura 26 – Representação da Aplicação de Poincaré.



Fonte: Arquivo do autor.

A definição detalhada de seção transversal pode ser vista em HIRSCH, SMALE e DEVANEY (2004). Para sistemas planares, teremos que a seção transversal será uma linha normal a partir da origem. Se a solução $\phi_t(X)$ que parte de um ponto X em Σ se move para mais perto da órbita periódica ρ depois de seu primeiro retorno ao plano Σ . Continuando seu movimento, nós temos que a solução $\phi_t(X)$ se aproxima cada vez mais de ρ cada vez que retorna à Σ . Podemos ver uma representação desta situação na Figura 27. Assim, podemos chegar a proposição seguinte.

Figura 27 – Representação do Aplicação de Poincaré em \mathbb{R}^2 .



Fonte: Arquivo do autor.

Proposição 2.52. *Considere o sistema planar $X' = F(X)$ e uma órbita periódica ρ . Suponha que X_0 esteja situado em ρ . Então, seja P a aplicação de Poincaré definido em uma vizinhança de X_0 em uma seção transversal. Se $|P'(X_0)| < 1$, então ρ é uma órbita assintoticamente estável.*

Este resultado acima é muito importante, visto que, para determinar a estabilidade assintótica de uma órbita fechada precisaremos apenas encontrar uma função P que

satisfaça as condições necessárias. Porém, encontrar esta função nem sempre é uma tarefa fácil. Para facilitar este processo temos o teorema abaixo. Para provar este teorema precisamos antes da proposição que nos diz:

Proposição 2.53. Fórmula de Liouville: *Seja $\phi(t)$ uma matriz cujas colunas são soluções de $x' = A(t)x$. Então para todo $t \in I$ e $t_0 \in I$ fixo,*

$$\det \phi(t) = \det[\phi(t_0)] e^{\int_{t_0}^t \text{tr} A(s) ds}$$

A demonstração desta propriedade pode ser encontrada no livro de SOTOMAYOR (1979), no capítulo 2.

Teorema 2.54. Derivada do Aplicação de Poincaré: *Sejam $S \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto e $X : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um campo vetorial de classe C^1 . Seja ρ uma órbita periódica de período T e $P : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$ a aplicação de Poincaré numa secção transversal Σ em $a \in \rho$. Então:*

$$P'(a) = e^{\int_0^T \text{div} X(\rho(t)) dt}.$$

Em particular, temos que a órbita periódica ρ é um ciclo limite estável se:

$$\int_0^T \text{div} X(\rho(t)) dt < 0$$

e ρ é um ciclo limite instável se:

$$\int_0^T \text{div} X(\rho(t)) dt > 0.$$

Demonstração. Para cada t , definimos $A(t) = DX(\rho(t))$. Seja $\phi(t)$ a matriz fundamental de $x' = A(t)x$, com $\phi(0) = E$. Utilizando a fórmula de Liouville temos:

$$\det \phi(T) = e^{\int_0^T \text{div} X(\rho(t)) dt}.$$

Vamos mostrar que $P'(a) = \det \phi(T)$. Seja φ o fluxo gerado por X . Pela definição global de diferenciabilidade temos $\phi(T) = D_2\varphi(T, a)$. Vamos mostrar primeiro que $D_2\varphi(T, a) \cdot X(a) = X(a)$. De fato, como $\frac{d}{dt}\varphi(t, a)|_{t=0} = X(a)$, temos:

$$D_2\varphi(T, a) \cdot X(a) = \left. \frac{d}{dt}\varphi(T, \varphi(t, a)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}\varphi(T + t, a) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}\varphi(t, a) \right|_{t=0} = X(a).$$

Por outro lado se $g : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \Sigma$ é uma parametrização de Σ tal que $g(0) = a$, o conjunto $B = \{X(a), g'(0)\}$ é uma base de \mathbb{R}^2 . Por definição $P(g(s)) = \varphi(T + \tau(\varphi(T, g(s))), g(s))$, e assim:

$$P'(a) \cdot g'(0) = \left. \frac{d}{ds} P \circ g(s) \right|_{s=0} = D_1\varphi(T, a) \cdot m + D_2\varphi(T, a) \cdot g'(0) =$$

$$= mX(a) + D_2\varphi(T, a) \cdot g'(0),$$

onde m é a derivada de $\tau(\varphi(T, g(s)))$ em $s = 0$. Portanto, a matriz $D_2\varphi(T, a)$ na base B é:

$$\begin{bmatrix} 1 & -m \\ 0 & P'(a) \end{bmatrix}.$$

Obtemos $\det \phi(T) = P'(a)$, provando nossa afirmação. \square

Exemplo 2.55. Considere o sistema planar:

$$x' = -y + x(1 - x^2 - y^2)$$

$$y' = x + y(1 - x^2 - y^2),$$

Temos um ciclo limite de período 2π representado pela solução $\rho(t) = (\cos t, \sin t)$. Podemos converter o sistema para coordenadas polares, e assim temos:

$$r' = r(1 - r^2)$$

$$\theta' = 1$$

Para utilizar o teorema da derivada da aplicação de Poincaré em $\rho(t) = (\cos t, \sin t)$ fazemos $\operatorname{div}[f(x, y)] = (2 - 4x^2 - 4y^2)$. E assim:

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{div}[f(\rho(t))] dt = \int_0^{2\pi} (2 - 4x^2 - 4y^2) dt = -4\pi.$$

Portanto concluímos que no ponto X_0 da trajetória ρ temos:

$$P'(X_0) = e^{-4\pi}.$$

Como $P'(X_0) < 1$, ρ é um ciclo limite estável.

Aqui vamos estudar uma ferramenta muito importante que vem sendo utilizada para determinar a existência de ciclos limite em sistemas planares. Para entender o teorema vamos nos lembrar que se ρ é uma órbita periódica, então o conjunto ρ^+ é definido por $\rho^+ = \{\rho_t(X); t > 0\}$.

Teorema 2.56. Poincaré-Bendixson: *Considere o sistema planar $X' = F(X)$. Seja ω um conjunto limite não-vazio, fechado e limitado do sistema planar. Se este sistema não possui pontos de equilíbrio, então ω é uma órbita fechada.*

Demonstração. Suponha que $\omega(X)$ seja fechado e limitado e que $Y \in \omega(X)$ (A demonstração para o caso do conjunto α – limite é idêntica). Mostraremos primeiro que Y está em uma órbita fechada e depois que essa órbita fechada é na verdade $\omega(X)$.

Como Y pertence a $\omega(X)$, sabemos que $\omega(Y)$ é um subconjunto não vazio de $\omega(X)$. Seja $Z \in \omega(Y)$ e seja S uma seção local em Z . Seja V uma caixa de fluxo associada a S . A solução através de Y encontra S em exatamente um ponto. Por outro lado, existe uma sequência $t_n \rightarrow \infty$ tal que $\phi_{t_n}(Y) \rightarrow Z$, portanto existem infinitas $\phi_{t_n}(Y)$ que pertencem a V . Assim, podemos encontrar $r, s \in \mathbb{R}$ tal que $r > s$ e $\phi_r(Y), \phi_s(Y) \in S$. Daqui resulta que $\phi_r(Y) = \phi_s(Y)$, e assim $\phi_{r-s}(Y) = Y$ e $r - s > 0$. Como $\omega(X)$ não contém equilíbrios, Y deve estar em uma órbita fechada.

Agora precisamos provar que se ρ é uma órbita fechada em $\omega(X)$, então $\rho = \omega(X)$. Para isso, basta mostrar que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\phi_t(X), \rho) = 0,$$

onde $d(\phi_t(X), \rho)$ é a distância de $\phi_t(X)$ até o conjunto ρ .

Seja S uma seção local em $Y \in \rho$. Seja $\epsilon > 0$ e considere a caixa de fluxo V_ϵ associada a S . Então existe uma sequência $t_0 < t_1 < \dots$ tal que

1. $\phi_{t_n}(X) \in S$;
2. $\phi_{t_n}(X) \rightarrow Y$;
3. $\phi_t(X) \notin S$ para $t_{n-1} < t < t_n$, com $n = 1, 2, \dots$

Considere $X_n = \phi_{t_n}(X)$. Assim, X_n é uma sequência monótona em S que converge para Y . Afirmamos que existe um limite superior para o conjunto de números positivos $t_{n+1} - t_n$ para n suficientemente grande. Para ver isso, suponha que $\phi_\tau(Y) = Y$, onde $\tau > 0$. Então, para X_n suficientemente próximo de Y , $\phi_\tau(X_n) \in V_\epsilon$ e, portanto, $\phi_{\tau+t}(X_n) \in S$ para algum $t \in [-\epsilon, \epsilon]$. Logo:

$$t_{n+1} - t_n \leq \tau + \epsilon.$$

Isso fornece o limite superior para $t_{n+1} - t_n$. Além disso, $t_{n+1} - t_n$ é claramente pelo menos 2ϵ , então $t_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$.

Considere $\beta > 0$ pequeno. Pela continuidade das soluções em relação às condições iniciais, existe $\delta > 0$ tal que, se $|Z - Y| < \delta$ e $|t| \leq \tau + \epsilon$ então $|\phi_t(Z) - \phi_t(Y)| < \beta$. Ou seja, a distância da solução $\phi_t(Z)$ para ρ é menor que β para todo t satisfazendo $|t| \leq \tau + \epsilon$. Seja n_0 suficientemente pequeno tal que $|X_n - Y| < \delta$ para todo $n \geq n_0$. Então $|\phi_t(X_n) - \phi_t(Y)| < \beta$ se $|t| \leq \tau$ e $n \geq n_0$. Agora considere um $t \geq t_{n_0}$. Seja $n \geq n_0$ tal que $t_n \leq t \leq t_{n+1}$. Então:

$$d(\phi_t(X), \rho) \leq |\phi_t(X) - \phi_{t-t_n}(Y)| = |\phi_{t-t_n}(X_n) - \phi_{t-t_n}(Y)| < \beta$$

pois $|t - t_n| \leq \tau + \epsilon$. Isso mostra que a distância de $\phi_t(X)$ a ρ é menor que β para todo t suficientemente grande. Isto completa a prova do teorema de Poincaré-Bendixson. \square

Este teorema se mostra de extrema importância para o estudo dos pontos de equilíbrio e ciclos limite de um sistema. Isto por que, além de sua aplicação direta, ele gera vários outros resultados diretos. Vamos mostrar alguns destes resultados abaixo.

Primeiro vamos mostrar um corolário importante, que vai no caminho inverso do teorema de Poincare-Bendixson, ou seja, mostra um critério para determinar quando um sistema planar não possui ciclos limite.

Corolário 2.57. *Seja H a integral primeira de um sistema planar. Se H não é constante em nenhum conjunto aberto, então não existem ciclos limite.*

Demonstração. Suponha que haja um ciclo limite ρ . Seja $c \in \mathbb{R}$ o valor constante de H em ρ . Se $X(t)$ é uma solução que forma uma espiral em direção a ρ , então $H(X(t)) \equiv c$, pela continuidade de H . Considere um $X \notin \rho$ tal que $\rho = \omega(X)$. Então X possui uma vizinhança Θ tal que para todo $Y \in \Theta$ temos que $\rho = \omega(Y)$. Em outras palavras, podemos definir o conjunto:

$$\{Y \mid \omega(Y) = \rho\} - \rho,$$

de modo que este seja aberto e forme uma espiral em direção a ρ . Assim, H é constante em um conjunto aberto. \square

A definição de integral primeira pode ser encontrada em HIRSCH, SMALE e DEVANEY (2004). Para checar o critério acima utilizamos a seguinte estratégia.

Teorema 2.58. Critério de Bendixson-Dulac: *Considere um conjunto A simplesmente conexo. Para determinar se H não é constante encontramos o valor de suas derivadas $\frac{\partial H_1(x, y)}{\partial x}$ e $\frac{\partial H_2(x, y)}{\partial y}$. Se as derivadas forem contínuas em A e para todos os pontos de A :*

$$\frac{\partial H_1(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial H_2(x, y)}{\partial y} \neq 0$$

então o sistema

$$x' = H_1(x, y)$$

$$y' = H_2(x, y)$$

não possui ciclos limite em A .

Demonstração. Suponhamos por contradição que existe um ciclo limite ρ em A . Denote por S o interior da curva fechada ρ . Vamos calcular a integral de linha no sentido positivo (o interior da curva ρ fica sempre à esquerda), ou seja, vamos aplicar o Teorema de Green no plano, que é:

$$\oint_S H_1(x, y)dy - H_2(x, y)dx = \iint_S \left(\frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial H_2}{\partial y} \right) dx dy.$$

Observe que o lado direito da igualdade é diferente de zero por hipótese. Do sistema podemos obter:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{H_1(x, y)}{H_2(x, y)} \quad \text{ou} \quad H_1(x, y)dy = H_2(x, y)dx.$$

Logo, a integral do lado esquerdo da igualdade anterior deve ser igual a zero, o que nos leva a uma contradição. \square

Exemplo 2.59. Considere o sistema planar:

$$\begin{aligned}x' &= e^x \\y' &= 1 + y^3.\end{aligned}$$

Encontramos as derivadas do sistema na forma:

$$\frac{\partial H_1(x, y)}{\partial x} = e^x; \quad \frac{\partial H_2(x, y)}{\partial y} = 3y^2.$$

Como podemos ver, a soma das derivadas é $e^x + 3y^2 > 0$, e assim, pelo critério de Bendixson-Dulac, o sistema não possui ciclos limite.

Exemplo 2.60. Considere um sistema planar genérico da forma:

$$\begin{aligned}x' &= ax + by \\y' &= cx + dy.\end{aligned}$$

Ao calcularmos os valores das derivadas temos que, se $a + d = 0$ então o sistema não possui ciclos limite. Caso $a + d \neq 0$ então não podemos utilizar o critério.

Temos agora mais um resultado importante derivado do teorema de Poincaré-Bendixson. Aqui podemos afirmar que um ciclo limite definido em um campo vetorial F de classe C^1 em um conjunto aberto A de \mathbb{R}^2 envolve pelo menos um ponto de equilíbrio.

Corolário 2.61. *Considere o sistema planar $X' = F(X)$. Suponha que $F \in C^1(A)$ onde A é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^2 que contém uma órbita periódica ρ do sistema, assim como o interior desta órbita B . Então B contém pelo menos um ponto de equilíbrio do sistema ou um ciclo limite.*

Demonstração. Considere D um conjunto compacto tal que $D = B \cup \rho$. Então D é invariante, já que nenhuma solução em B pode cruzar ρ . Se B não contém nenhum ciclo limite e nenhum equilíbrio, então, para qualquer $X \in B$ temos:

$$\omega(X) = \alpha(X) = \rho,$$

pelo teorema de Poincaré-Bendixson.

Agora considere a proposição abaixo:

Proposição 2.62. *Seja S uma seção transversal para um sistema planar de equações diferenciais e Y_0, Y_1, Y_2, \dots é uma sequência de pontos distintos em S que estão na mesma curva de solução. Se esta sequência é monótona ao longo da solução, então ela também é monótona ao longo de S .*

A demonstração desta proposição pode ser encontrada em HIRSCH, SMALE e DEVANEY (2004). Assim, continuando com a prova do nosso corolário, considere S uma seção local em um ponto $Z \in \rho$, existem sequências $t_n \rightarrow \infty$ e $s_n \rightarrow \infty$ tais que $\phi_{t_n}(X), \phi_{s_n}(X) \in S$ e ambos $\phi_{t_n}(X)$ e $\phi_{s_n}(X)$ tendem a Z quando $n \rightarrow \infty$. Mas isso leva a uma contradição da proposição citada em sequências monótonas. \square

Exemplo 2.63. Considere o sistema planar:

$$x' = x^2 + y^2 + 1$$

$$y' = x^2 - y^3.$$

Analisando este sistema podemos perceber que $x^2 + y^2 + 1 \neq 0$ para todo (x, y) , ou seja, o sistema não possui pontos de equilíbrio. Portanto, pelo corolário anterior temos que o sistema também não possui ciclos limite.

Por último temos uma resolução que nos diz respeito das funções de Liapunov estudadas na seção 6.2.

Corolário 2.64. *Considere um sistema planar $X' = L(X)$. Se L é uma função de Liapunov então o sistema não possui ciclos limite.*

Encerramos os estudos deste capítulo mostrando um exemplo onde, ao analisar o sistema e tentar aplicar o teorema de Poincaré-Bendixson, não conseguimos definir que o conjunto ω – limite é um ponto de equilíbrio nem que ele é uma órbita periódica.

Exemplo 2.65. Considere o sistema planar:

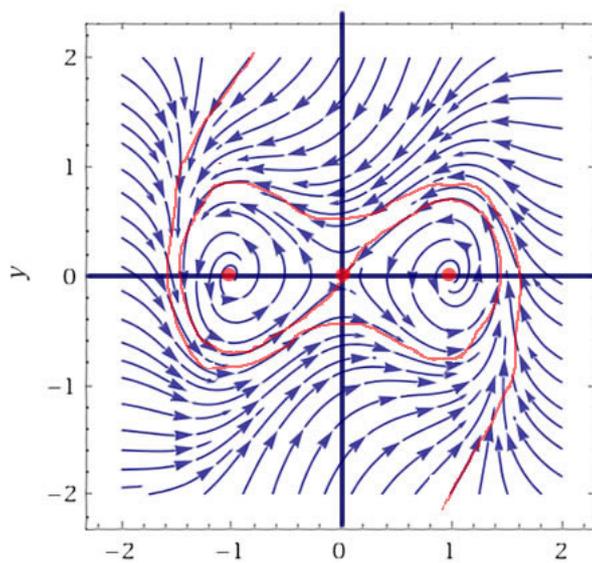
$$x' = -y - \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \right) (x^3 - x)$$

$$y' = x^3 - x - \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \right) y.$$

Podemos encontrar os pontos de equilíbrio em $(0, 0); (-1, 0); (1, 0)$. A origem é uma sela, enquanto os outros dois equilíbrios são nós instáveis. Note que soluções longe da origem tendem a se acumular na origem. O par de soluções homoclínicas, cada uma das quais, deixa e depois retorna para a origem. As soluções que emanam de qualquer nó instável possuem conjunto ω – limite que consiste em apenas uma solução homoclínica e $(0, 0)$. Temos aqui um exemplo onde o conjunto ω – limite, que não é nem um ponto de

equilíbrio nem uma órbita periódica, é fornecido por uma *solução homoclínica*. O retrato de fase deste sistema é mostrado na Figura 28.

Figura 28 – Representação do Retrato de Fase de uma solução Homoclínica.



Fonte: Arquivo do autor.

3 Aplicando o Método de Averaging

Nos capítulos anteriores estudamos as definições de ponto de equilíbrio e ciclos limite, assim como as maneiras de determinar a existência destes nos sistemas não-lineares. Aqui iremos focar em determinar a quantidade de ciclos limite que existem em um sistema específico. Esta linha de estudos vem sendo desenvolvida por vários matemáticos ao longo do tempo, e assim, vem se tornando algo cada vez mais refinado, como vamos ver no decorrer desta seção.

3.1 Lienard e Suas Implicações

Vimos que o Teorema de Poincaré-Bendixson poderia ser usado para estabelecer a existência de ciclos limite para certos sistemas planares. Porém, uma questão muito mais delicada é determinar o número exato de ciclos limite de um determinado sistema ou classe de sistemas, dependendo de parâmetros. Considere uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 que satisfaz as condições:

- $F(x) = \int_0^x f(s)ds$ é ímpar;
- $F(x) \rightarrow \infty$ quando $x \rightarrow \infty$ e existe um $\beta > 0$ tal que se $x > \beta$ então F é crescente;
- Existe um $\alpha > 0$ tal que quando $0 < x < \alpha$ temos $F(x) < 0$.

Utilizando esta função temos o sistema

$$\begin{cases} x' = y - F(x) \\ y' = g(x) \end{cases}$$

que ficou conhecido como sistema de Lienard. E a equação:

$$x'' = y' - F'(x)x' \Rightarrow x'' = g(x) - F'(x)x' \Rightarrow x'' + F'(x)x' - g(x) = 0$$

ficou conhecida como a equação polinomial generalizada de Lienard, onde $f(x)$ e $g(x)$ são polinômios de grau n e m , respectivamente. Assim, o sistema de Lienard é uma versão simplificada do 16º problema de Hilbert, que busca um limite superior do número de ciclos limite em polinômios de campos vetoriais de ordem n .

Teorema 3.1. Lienard: *Seja $F(x)$ uma função que satisfaz as condições acima para $m = 1$. Se a função possui uma única raiz em $x = a$ e é monótona crescente em $x \geq a$. Então, a equação de Lienard correspondente possui um único ciclo limite.*

O número de ciclos limite de uma equação diferencial polinomial pode ser chamado de número de Hilbert $H(m, n)$ onde m e n são os graus dos polinômios $g(x)$ e $f(x)$.

Muitos resultados de ciclos limite de equações diferenciais polinomiais tem sido obtidos considerando os ciclos limite que bifurcam de um ponto singular. Estes ciclos são chamados de ciclos de pequena amplitude. Chamamos de $\hat{H}(m, n)$ o número máximo de ciclos limite de pequena amplitude das equações diferenciais polinomiais da forma vista acima. Agora vamos descrever alguns resultados obtidos a partir dos estudos de Lienard e de sua equação generalizada.

1. Rychkov (1975) provou que se $m = 1$ e $F(x) = \int_0^x f(s)ds$ é um polinômio ímpar de grau 5, então a equação generalizada de Lienard tem até 2 ciclos limite;
2. Lins, de Melo e Pugh (1977) provaram que $H(1, 1) = 0$ e $H(1, 2) = 1$;
3. Dumortier e Chengzhi (1996) provaram que $H(2, 2) = 1$;
4. Coppel (1998) provou que $H(2, 1) = 1$;

A tabela a seguir mostra os valores de $H(m, n)$ ou $\hat{H}(m, n)$ para equações de Lienard em função dos graus m e n . Até a data do artigo estudado, os únicos números de Hilbert determinados são os casos marcados com asterisco na tabela 1.

Tabela 1 – Valores de $H(m, n)$ ou $\hat{H}(m, n)$ para equações de Lienard nos graus m e n .

		n																
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...	48	49	50
m	1	0	1*	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	...	24	24	→
	2	1*	1*	2	3	3	4	5	5	6	7	7	8	9	...	32	33	→
	3	1*	2	2	4	4	6	6	8	8	8	10	10	10	...	36	38	38
	4	2	3	4	4	6	7	8	9	9	10	11	12	13				
	5	2	3	4	6	6	8	9	10	11								
	6	3	4	6	7	8	8	9										
	7	3	5	6	8	9	9	9										
	8	4	5	6	9	10												
	9	4	6	8	9	11												
	10	5	7	8	10													
	11	5	7	8	11													
	12	6	8	10	12													
	13	6	9	10	13													
	⋮	⋮	⋮	⋮														
	20	10	13	14	17													
	⋮	⋮	⋮	⋮														
	48	24	32	36														
49	24	33	38															
50	↓	↓	38															

Fonte: Limit cycles of the generalized polynomial Liénard differential equations.

Temos alguns resultados importantes mostrados por Blows e Lloyd (1984), Lloyd e Lynch (1998) e Lynch (1995), que usaram argumentos indutivos em suas provas:

1. Se g é ímpar, então $\hat{H}(m, n) = [n/2]$;
2. Se f é par, então $\hat{H}(m, n) = n$, para qualquer g ;
3. Se f for ímpar, então $\hat{H}(m, 2n + 1) = [(m - 2)/2] + n$;
4. Se $g(x) = x + g_e(x)$, onde g_e é par, então $\hat{H}(2m, 2) = m$.

Temos também os resultados de Christopher e Lynch (1999), que utilizaram métodos algébricos em suas provas:

1. $\hat{H}(m, 2) = [(2m + 1)/3]$;
2. $\hat{H}(2, n) = [(2n + 1)/3]$;
3. $\hat{H}(m, 3) = 2[(3m + 2)/8]$ para todo $1 < m \leq 50$;
4. $\hat{H}(3, n) = 2[(3n + 2)/8]$ para todo $1 < n \leq 50$;
5. Os valores da figura 1 para $\hat{H}(4, k) = \hat{H}(k, 4)$, com $k = 6, 7, 8, 9$. E $\hat{H}(5, 6) = \hat{H}(6, 5)$.

Gasull e Torregrosa (1998) com cotas superiores para $\hat{H}(7, 6)$, $\hat{H}(6, 7)$, $\hat{H}(7, 7)$, $\hat{H}(4, 20)$.

E por fim, Yu e Han (2006) encontraram os valores da Figura 1 onde $\hat{H}(m, n) = \hat{H}(n, m)$ para alguns valores de m e n :

1. $n = 4$ e $m = 10, 11, 12, 13$;
2. $n = 5$ e $m = 6, 7, 8, 9$;
3. $n = 6$ e $m = 5, 6$.

3.2 Método de Averaging

O método que vamos utilizar nesta secção é conhecido como *Averaging*. Ele está descrito no teorema abaixo.

Teorema 3.2. Método de Averaging de Primeira Ordem: *Considere o seguinte sistema diferencial:*

$$x'(t) = \epsilon F_1(t, x) + \epsilon^2 R(t, x, \epsilon), \quad (*)$$

onde $F_1 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $R : \mathbb{R} \times D \times (-\epsilon_f, \epsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}^n$ são funções contínuas, T -periódicas na segunda variável e D é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n . Definimos f_1 por

$$f_1(z) = \int_0^T F_1(s, z) ds$$

e assumimos que

(i) F_1 e R são localmente Lipschitz em relação a x ;

(ii) para $a \in D$ com $f_1(a) = 0$, existe uma vizinhança V de a tal que $f_1(z) \neq 0$ para todo $z \in V - \{a\}$ e $d_B(f_1, V, 0) \neq 0$.

Então para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe uma solução T -periódica $\varphi(\bullet, \epsilon)$ do sistema (*) tal que $\varphi(\bullet, \epsilon) \rightarrow a$ quando $\epsilon \rightarrow 0$.

A demonstração deste método pode ser encontrada no artigo de BUICA e LLIBRE (2004).

Agora iremos utilizar o método de *averaging* para determinar o número máximo de ciclos limite $\tilde{H}(m, n)$ que bifurcam de órbitas periódicas de um centro linear perturbado, das equações diferenciais polinomiais de Lienard de graus m e n na forma:

$$x' = y$$

$$y' = -x - \sum_{k \geq 1} \epsilon^k (f_n^k(x)y + g_m^k(x)),$$

onde para todo k os polinômios $f_n^k(x)$ e $g_m^k(x)$ tem graus n e m respectivamente, e ϵ é um parâmetro suficientemente pequeno. Ou seja, vamos estudar o número de ciclos limite que podem bifurcar das órbitas periódicas de centro linear $x' = y; y' = -x$. Vamos denotar este número máximo como $\tilde{H}_1(m, n)$.

Vamos aplicar a teoria de averaging para os sistemas descritos acima com $k = 1$, sempre obtendo $H(m, n) \geq \tilde{H}(m, n) \geq \tilde{H}_k(m, n)$.

Teorema 3.3. Primeira Ordem: Se para $k = 1$ os polinômios $f_n^k(x)$ e $g_m^k(x)$ têm graus n e m respectivamente, com $m, n \geq 1$, então para $|\epsilon|$ suficientemente pequeno o número máximo de ciclos limite de média amplitude dos sistemas diferenciais polinomiais de Lienard bifurcando de órbitas periódicas do centro linear $x' = y; y' = -x$, usando a teoria de averaging de primeira ordem é:

$$\tilde{H}_1(m, n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

Demonstração. Primeiramente vamos reescrever o sistema anterior na forma polar, com as coordenadas $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$.

$$r' = -\epsilon \left(\sum_{i=0}^n (a_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta) + \sum_{i=0}^m (b_i r^i \cos^i \theta \sin \theta) \right)$$

$$\theta' = -1 - \frac{\epsilon}{r} \left(\sum_{i=0}^n (a_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta) + \sum_{i=0}^m (b_i r^i \cos^{i+1} \theta \sin \theta) \right).$$

Tomando agora θ como nova variável independente, fazemos a divisão $dr/d\theta$. Ao utilizar a expansão de Taylor encontramos o resultado:

$$\frac{dr}{d\theta} = \epsilon \left(\sum_{i=0}^n (a_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta) + \sum_{i=0}^m (b_i r^i \cos^i \theta \sin \theta) \right) + \epsilon^2 H_1 + \epsilon^3 H_2 + \dots$$

Como estamos trabalhando com o método de primeira ordem podemos desconsiderar os termos de ordem maior em ϵ . Assim, a função f_1 do método de averaging é dada por:

$$f_1(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^n (a_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta) + \sum_{i=0}^m (b_i r^i \cos^i \theta \sin \theta) \right) d\theta.$$

Para encontrar o seu valor exato usamos as fórmulas de integrais trigonométricas com expoentes pares e ímpares:

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2k+1} \theta \sin^2 \theta d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2k} \theta \sin^2 \theta d\theta = \alpha_{2k}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^k \theta \sin \theta d\theta = 0.$$

Por fim, para i assumindo valores pares, temos que:

$$f_1(r) = \sum_{i=0}^{n/2} a_{2i} \alpha_{2i} r^{2i+1}.$$

Neste somatório teríamos o limite superior $(n-1)/2$ para n ímpar. Para encontrarmos o número de soluções desta equação fazemos:

$$f_1(r) = \frac{1}{2} (a_0 \alpha_0 r + a_2 \alpha_2 r^3 + a_4 \alpha_4 r^5 + \dots)$$

$$f_1(r) = \frac{1}{2} r (a_0 \alpha_0 + a_2 \alpha_2 r^2 + a_4 \alpha_4 r^4 + \dots).$$

Assim, esta função possui n soluções, com n par, e $n-1$ soluções com n ímpar. Mas, como estamos tratando da variável r , não podemos levar em conta as soluções negativas. Como os expoentes dos polinômios são todos pares, podemos dizer que suas soluções são dadas em pares. Assim, retirando as soluções negativas, e usando a função do maior inteiro, temos que a função possui $[n/2]$ raízes positivas. Logo, o teorema está provado. \square

Agora vamos enunciar os teoremas referentes a segunda e terceira ordem.

Teorema 3.4. Segunda Ordem: Se para cada $k = 1$ os polinômios $f_n^k(x)$ e $g_m^k(x)$ têm graus n e m respectivamente, com $m, n \geq 1$, então para $|\epsilon|$ suficientemente pequeno o número máximo de ciclos limite de média amplitude dos sistemas diferenciais polinomiais de Lienard bifurcando de órbitas periódicas do centro $x' = y; y' = -x$, usando a teoria de averaging de segunda ordem é:

$$\tilde{H}_2(m, n) = \max \left\{ \left[\frac{n-1}{2} \right] + \left[\frac{m}{2} \right], \left[\frac{n}{2} \right] \right\}.$$

Teorema 3.5. Terceira Ordem: Se para cada $k = 1$ os polinômios $f_n^k(x)$ e $g_m^k(x)$ têm graus n e m respectivamente, com $m, n \geq 1$, então para $|\epsilon|$ suficientemente pequeno o número máximo de ciclos limite de média amplitude dos sistemas diferenciais polinomiais de Lienard bifurcando de órbitas periódicas do centro $x' = y; y' = -x$, usando a teoria de averaging de terceira ordem é:

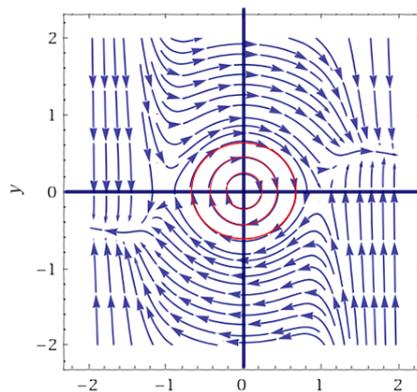
$$\tilde{H}_3(m, n) = \left[\frac{n+m-1}{2} \right].$$

Exemplo 3.6. Vamos considerar o caso simples da primeira ordem onde os polinômios são $f(x) = x^6$ e $g(x) = x^5$ e $\epsilon = 1$. Assim teríamos o sistema:

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x - (x^6 y + x^5) \end{aligned}$$

Logo, pelo teorema podemos afirmar que o número de ciclos limite neste sistema é $[n/2] = [6/2] = 3$. O retrato de fase deste sistema pode ser visto na Figura 29.

Figura 29 – Retrato de fase do sistema $x' = y; y' = -x - (x^6 y + x^5)$



Fonte: Arquivo do autor.

4 Proposta para o Ensino de Funções Trigonométricas

Depois de completar os estudos a respeito de sistemas de equações diferenciais e suas técnicas qualitativas, foi possível perceber que as soluções periódicas são muito importantes e foco de estudos recentes. Este fato também pode ser observado ao analisarmos a matemática do ensino médio. Acredito que seja comum encontrar alunos, e até mesmo salas inteiras, que não conhecem muito bem as funções periódicas, em especial, as funções trigonométricas, baseado em minhas experiências como docente. De acordo com as orientações do Currículo do Estado de São Paulo e da BNCC, este assunto deve ser tratado com as turmas de primeiro ano do ensino médio, no quarto bimestre. Devido à falta de tempo, ou a complexidade do assunto, muitas vezes percebemos que este conteúdo é tratado de maneira superficial. Isso faz com que os alunos não demonstrem interesse, ou queiram saber mais destas funções, até por que, como já viram funções o ano todo, podem estar saturados deste assunto. Assim, este capítulo irá propor uma abordagem diferenciada para as funções periódicas em sala de aula, tentando mostrar aos alunos que funções são mais que fórmulas e regras, mas sim, uma maneira de entendermos as relações entre grandezas do nosso cotidiano.

Como foi perceber ao longo deste trabalho, ao estudar os ciclos limite, o matemático David Hilbert representa um papel muito importante em várias áreas de estudo matemático nos tempos atuais. Sua lista de problemas, proposta em 1900, possui assuntos de diversas áreas, até mesmo da física. Este trabalho tem foco específico na segunda parte do 16º problema, a determinação do limite superior do número de ciclos limite em polinômios de campos vetoriais de ordem n .

Vários matemáticos vêm estudando este assunto ao longo dos anos como Rychkov (1975); Lins, de Melo e Pugh (1977); Dumortier e Chengzhi (1996); Coppel (1998); Christopher e Lynch (1999) e por fim, Yu e Han (2006). As análises teóricas do nosso trabalho nos permitiram ver que o estudo qualitativo das EDOs, direcionado para a compreensão e classificação de ciclos limite, ainda segue gerando artigos e teses, como o trabalho de LLIBRE, MEREU e TEIXEIRA (2010). Assim, partindo desta motivação matemática, iremos construir uma ponte ligando os conteúdos pedagógicos do Ensino Médio brasileiro.

Como professor da rede pública e privada, pude perceber nos últimos anos que é necessária uma atualização constante dos assuntos e metodologias abordados em sala de aula. O modelo de ensino baseado apenas em exposição de conteúdos e mecanização de regras está, cada vez mais, gerando alunos desinteressados em áreas exatas como

matemática, física e química. Assim, testando formas diferentes de ensino, pude perceber que é necessário despertar um interesse prévio nos alunos, a respeito do assunto que irão tratar. Quando eles conseguem visualizar as relações matemáticas presentes no mundo real, tendem a se importar com o que será estudado.

Assim, acredito que usar uma motivação como problemas seculares, estudados até hoje, seja algo interessante e desafiador. Partindo das ideias estudadas nos capítulos anteriores, vamos direcionar os alunos a enxergar as relações periódicas que envolvem seu dia-a-dia como as horas, os dias da semana, o movimento das marés, as variações de temperatura no ano, o movimento de rotação da Terra, entre muitos outros. Esta é uma combinação interessante de conteúdos matemáticos complexos, e uma aplicação didática prática. É evidente que tal proposta faz com que o docente saia de sua zona de conforto, conhecendo novas tecnologias, novos assuntos, e assim, precisando alterar o antigo estilo de suas aulas. Mas os resultados que podem ser colhidos ao final desta sequência, poderão mostrar a importância de um ensino matemático diversificado.

4.1 Funções Trigonométricas

O foco principal da proposta didática será o estudo das funções trigonométricas básicas. Logo, vamos dar uma breve introdução ao leitor sobre tais funções. Como o próprio nome já diz, elas irão tratar de conceitos trigonométricos como seno, cosseno e tangente. Assim, a trigonometria é um importante instrumento para que se possa perceber o detalhamento de situações do nosso dia a dia, que podem ser transformadas em senoides, que são formas de onda cujo gráfico é idêntico ao da função seno ou cosseno generalizada. Na natureza, temos as ondas do mar, do som e da luz.

4.1.1 Definições Gerais

Vamos considerar um número real x . Pode-se destacar um ponto P do ciclo trigonométrico e a esse ponto é associado um único valor para o seno e o cosseno, que são chamados de $\sin x$ e $\cos x$. Com base nessa ideia, definem-se as funções trigonométricas com domínios no conjunto dos números reais e imagens obtidas com o auxílio do ciclo trigonométrico. Antes de estudar as propriedades das funções, veremos as definições de função par e função ímpar.

Definição 4.1. Uma função $y = f(x)$, definida no domínio D , é chamada *função par*, quando $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in D$, e *função ímpar*, quando $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in D$.

a) FUNÇÃO SENO

Denomina-se função seno a função que associa a cada número real x o número $y = \text{sen } x$.

- **Domínio:** Como $\text{sen } x$ é definido para todo x real, então o domínio de $f(x) = \text{sen } x$ é o conjunto \mathbb{R} .
- **Imagem:** $\text{sen } x$ assume valor máximo igual a 1 quando x é um número real que representa um arco com primeira determinação $\frac{\pi}{2} \text{rad}$ e valor mínimo igual a -1 quando x representa um arco com primeira determinação $\frac{3\pi}{2} \text{rad}$. Assim, o conjunto imagem de $f(x) = \text{sen } x$ é $Im = [-1, 1]$
- **Período:** Sabe-se que $\text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen } x$, então o período da função $f(x) = \text{sen } x$ é 2π . Isso explica o fato de o gráfico ser uma repetição de senoides de 2π em 2π .
- **Paridade:** Sabe-se que $\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$, então a função $f(x) = \text{sen } x$ é uma função ímpar.

b) FUNÇÃO COSSENO

Denomina-se função cosseno a função que associa a cada número real x o número $y = \text{cos } x$.

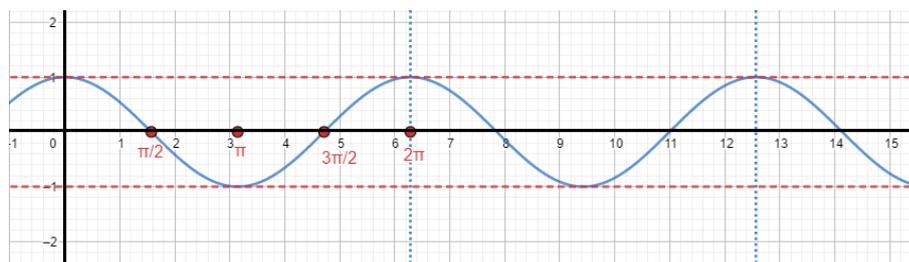
- **Domínio:** Como $\text{cos } x$ é definido para todo x real, então o domínio de $f(x) = \text{cos } x$ é o conjunto \mathbb{R} .
- **Imagem:** $\text{cos } x$ assume valor máximo igual a 1 quando x é um número real que representa um arco com primeira determinação 0 rad e valor mínimo igual a -1 quando x representa um arco com primeira determinação πrad . Assim, o conjunto imagem de $f(x) = \text{cos } x$ é $Im = [-1, 1]$
- **Período:** Sabe-se que $\text{cos}(x + 2\pi) = \text{cos } x$, então o período da função $f(x) = \text{cos } x$ é 2π . Isso explica o fato de o gráfico ser uma repetição de cossenoides de 2π em 2π .
- **Paridade:** Sabe-se que $\text{cos}(-x) = \text{cos}(x)$, então a função $f(x) = \text{cos } x$ é uma função par.

Podemos observar abaixo na figuras 30 e 31 o gráfico das funções seno e cosseno.

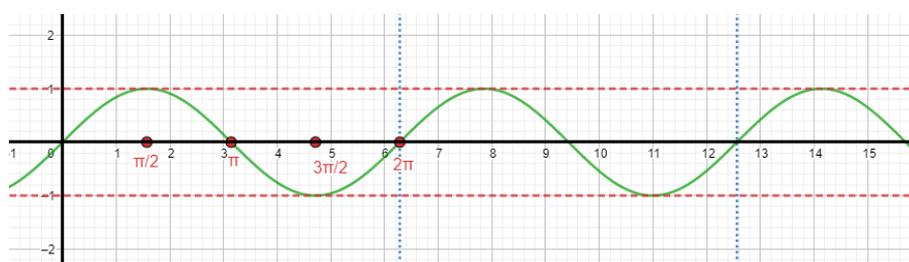
4.1.2 Parâmetros de Variação

Os gráficos das funções trigonométricas podem sofrer transformações, que são periódicas em intervalos consecutivos e de mesmo comprimento. Os gráficos podem se deslocar em relação aos eixos das ordenadas e das abscissas, caminhando para a direita ou para a esquerda ou aumentando ou diminuindo seu tamanho. Considere cada alteração abaixo e, por fim, todas as alterações feitas na mesma função.

- a) Função $f(x) = a + \text{sen } x$

Figura 30 – Gráfico da Função $f(x) = \cos(x)$ 

Fonte: Arquivo do autor.

Figura 31 – Gráfico da Função $f(x) = \sin(x)$ 

Fonte: Arquivo do autor.

O número a , adicionado ao $\sin x$, altera a paridade e a imagem da função $y = \sin x$. Assim, sendo $a \neq 0$, a função $f(x) = a + \sin x$ fica sem paridade (nem par nem ímpar). Quanto ao conjunto imagem, cada uma das imagens de $y = \sin x$ deve ser acrescida de a . Assim, o gráfico de $f(x) = a + \sin x$ pode ser obtido deslocando-se o gráfico de $y = \sin x$ de a unidades, para cima ou para baixo, conforme o valor de a seja positivo ou negativo, respectivamente.

b) Função $f(x) = b \cdot \sin x$

O número $b \neq 0$, multiplicado ao $\sin x$, altera a imagem da função $y = \sin x$. Cada uma das imagens de $y = \sin x$ deve ser multiplicada por b . Assim, o gráfico de $f(x) = b \sin x$ continuará sendo uma senoide, porém de amplitude alterada para o intervalo $[-b, b]$. É importante acrescentar que, quando o valor de b é negativo, todas as imagens ficarão refletidas, com relação ao eixo x , isto é, a senoide ficará invertida.

c) Função $f(x) = \sin(c \cdot x)$

O número c , multiplicado ao arco x , altera o período da função $y = \sin x$. Assim, o final da senoide se torna $x = \frac{2\pi}{c}$. Como c pode ser negativo, dizemos que o período de $f(x) = \sin(c \cdot x)$ é $p = \frac{2\pi}{|c|}$

d) Função $f(x) = \sin(d + x)$

O número d , acrescido ao arco x , altera o gráfico da função $y = \text{sen } x$, deslocando todos os seus pontos para a esquerda ou para a direita, conforme o valor de d seja positivo ou negativo, respectivamente.

e) Função $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(d + c \cdot x)$

Após o estudo dos subitens a, b, c e d, concluímos que, para a função $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(d + c \cdot x)$, temos:

- Domínio: $D = \mathbb{R}$
- Imagem: $\text{Im} = [-b + a, b + a]$
- Gráfico:

$$c \cdot x + d = 0 \rightarrow x = 0 - \frac{d}{c} \text{ (começo da senoide);}$$

$$c \cdot x + d = 2\pi \rightarrow x = \frac{2\pi}{c} - \frac{d}{c} \text{ (final da senoide)}$$

Devemos lembrar que a amplitude da senoide fica determinada pelo conjunto imagem da função e que, se $b < 0$, a senoide ficará invertida.

- Período: $p = \frac{2\pi}{|c|}$

Exemplo 4.2. Considere a função trigonométrica $f(x) = 1 + 2 \cdot \text{sen}(1 + 2 \cdot x)$. Vamos determinar suas características:

- Domínio: $D = \mathbb{R}$
- Imagem: $\text{Im} = [-b + a, b + a] = [-1, 3]$
- Gráfico:

$$x = 0 - \frac{d}{c} = -\frac{1}{2} \text{ (começo da senoide);}$$

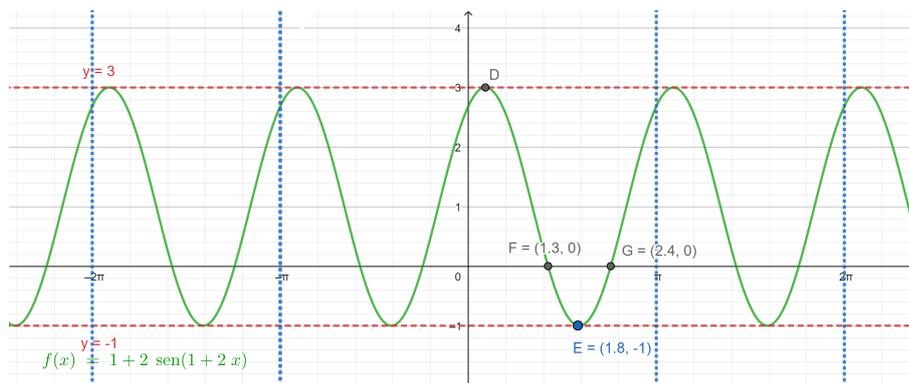
$$x = \frac{2\pi}{c} - \frac{d}{c} = \pi - \frac{1}{2} \text{ (final da senoide)}$$

- Período: $p = \frac{2\pi}{|c|} = \pi$

O gráfico da função pode ser observado na figura 32

4.2 Sequência de Atividades Didáticas

Após finalizar os estudos iremos partir para a análise prática no nosso sistema básico de ensino. Aqui, a turma escolhida será o 1º ano do Ensino Médio, pois o estudo de funções trigonométricas faz parte do conteúdo proposto nesta etapa. A ideia principal é analisar a diferença entre o nível de entusiasmo, aprendizado e motivação ao se propor uma situação de modelagem de um problema tirado de seu cotidiano. Seguindo no mesmo caminho de Rogeri (2015), pretende-se mostrar a importância de um ensino matemático dinâmico, diferente do que muitas vezes é observado no ensino básico, e por meio da análise

Figura 32 – Gráfico da função $f(x) = 1 + 2 \operatorname{sen}(1 + 2x)$ 

Fonte: Arquivo do autor.

dos resultados, sugerir que a utilização dos modelos e projetos envolvidos na realidade pessoal dos alunos pode ser muito benéfica para o processo educativo.

Assim, iremos desenvolver uma proposta didática para motivar a aprendizagem e ajudar no entendimento das funções periódicas. A proposta será dividida em duas partes principais: a primeira é uma investigação das afinidades e conhecimentos prévios; e a segunda é uma sequência didática de atividades dinâmicas e contextualizadas.

Propor problemas reais, e buscar uma modelagem simples de problemas matemáticos, é uma estratégia de ensino que vem sendo proposta e defendida por matemáticos como Bassanezi (2002). Acredito que a investigação de problemas reais pode gerar nos alunos uma inquietação, que pode ser usada pelo professor como uma ferramenta de aprendizagem. Segundo Bassanezi,

No processo evolutivo da Educação Matemática, a inclusão de aspectos de aplicações e mais recentemente, resolução de problemas e modelagem, têm sido defendida por várias pessoas envolvidas com o ensino de matemática. Isto significa, entre outras coisas, que a matéria deve ser ensinada de um modo significativo matematicamente, considerando as próprias realidades do sistema educacional. (Bassanezi, 2002, p. 36)

Assim, iremos propor algumas atividades didáticas que focam no aprendizado do aluno de maneira dinâmica, envolvendo problemas reais e que fazem parte do seu entendimento social. A trigonometria é a origem de funções que são usadas em diversos campos das ciências. Apesar dessa importância, muitos alunos do ensino médio costumam não entender o significado ou o papel das funções trigonométricas no mundo moderno. Assim, vamos utilizar situações reais e também softwares de geometria dinâmica para auxiliar na visualização e compreensão destes conteúdos.

4.2.1 Atividade 01 - Conhecimentos Preliminares

Na parte inicial é proposta uma pesquisa de campo com a turma para buscar uma área de conhecimento que seja do interesse comum, além de um questionário sobre o conhecimento prévio dos alunos sobre o assunto.

Com o objetivo de estabelecer um perfil dos alunos que participarão da nossa proposta, essa primeira etapa de coleta de dados é composta da aplicação de um conjunto de questões que possibilitariam a identificação de conhecimentos sobre relações trigonométricas, seus significados, suas propriedades e sobretudo as relações entre ângulos e seus senos e cossenos.

Os dados obtidos aqui irão compor nosso ponto de partida para as atividades seguintes e servir de base para o professor aplicador fomentar as discussões e reflexões sobre o assunto. Essa atividade inicial da investigação foi composta por 10 questões, que nos permitiram investigar os conhecimentos prévios dos alunos e as possíveis dificuldades que estes podem apresentar durante o processo de aprendizagem do tema.

Serão propostas questões que envolvem a definição de eventos cíclicos; a definição de funções trigonométricas; a relação entre ângulos e seus respectivos senos e cossenos; valores máximos e mínimos de relações trigonométricas; entre outros. Como o objetivo desta fase é diagnosticar e coletar dados, será instruído aos alunos para responder às questões individualmente.

Após esta primeira pesquisa, montaremos um exemplo de quadro organizador de ideias, para que os docentes que utilizarem nosso modelo possam analisar as respostas e compará-las. Para encerrar esta primeira etapa, será proposta uma discussão dos resultados com a turma, a fim de padronizar o nível de entendimento do assunto que iremos trabalhar. A seguir serão propostas as atividades que servirão para motivar e aprimorar os conhecimentos dos alunos.

4.2.2 Atividade 02 - Usando o GeoGebra

Antes de apresentar a atividade em si, vamos situar o autor a respeito do uso de tecnologias digitais em sala de aula. Hoje em dia, o uso de tecnologias digitais vem dominando o modo como nossa sociedade vive e pensa. A maioria das crianças possuem acesso a internet antes mesmo de irem para o ensino básico, como podemos perceber pela pesquisa feita pelo IBGE, disponível em https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv101794_informativo.pdf. Praticamente todas as áreas profissionais sofrem alterações recorrentes, com o surgimento de tecnologias novas e mais avançadas. Assim, não faria sentido deixar essa tendência de fora do ambiente da sala de aula. É evidente que ainda existem discussões sobre o modo mais apropriado de utilizar essas tecnologias para que os resultados sejam benéficos para o aprendizado.

A Tecnologia e a Informática se tornam grandes aliados no ensino da matemática ao permitir uma visualização direta e prática dos elementos matemáticos que podem ser difíceis de se imaginar. Uma experimentação dinâmica das propriedades e relações que antes, eram apenas teóricas. A escola precisa se adaptar continuamente assim como todas as áreas profissionais. Acredito que utilizar esta afeição natural dos alunos com aparelhos eletrônicos, pode propiciar a descoberta de novos métodos de ensino, muito mais efetivos do que aqueles utilizados anteriormente.

Para exemplificar um pouco mais, posso falar sobre minhas experiências ao longo dos anos 2020 e 2021. Devido a situação global de pandemia e isolamento social, as aulas presenciais foram canceladas e os professores precisaram buscar novas ferramentas e didáticas para preparar suas aulas, e não deixar que os alunos perdessem o acesso a educação. Esta situação fez com que eu buscasse novas ferramentas para motivar os alunos, mesmo que em suas casas e rodeados de fatores adversos. A busca por essas novas tecnologias fez que eu percebesse que o meu método de ensino de geometria espacial poderia ser melhorado e intensificado. Utilizar projeções, planificações, modelos 3D e vídeos pedagógicos, foi algo que renovou meu método de ensino. Percebi que os alunos foram capazes de se aproximar muito mais daqueles conhecimentos, comparado a turmas anteriores. Logo, mesmo com o retorno presencial das aulas, é imprescindível o uso destas tecnologias.

Atualmente existem diversos recursos digitais que possibilitam a exploração, em sala de aula, das funções trigonométricas como GeoGebra, e Mathematica. O seu uso é importante para que o aluno possa visualizar os conhecimentos teóricos propostos em aula. Nesta parte do trabalho vamos propor a utilização do software GeoGebra, como um instrumento facilitador na interpretação e resolução dos problemas.

O GeoGebra é um software gratuito, que pode ser utilizado em computadores com Windows, Linux, MacOs, e também em aparelhos portáteis, utilizando aplicativos para Android e IOS e até mesmo online pelo navegador. O objetivo principal do software é proporcionar um ambiente de aprendizado interativo, dando aos professores uma ferramenta para incorporar em suas práticas de ensino. É possível fazer incontáveis construções, algébricas e geométricas, possibilitando uma aplicação prática e lúdica, que muitas vezes é algo necessário para conquistar a atenção e o interesse dos alunos contemporâneos.

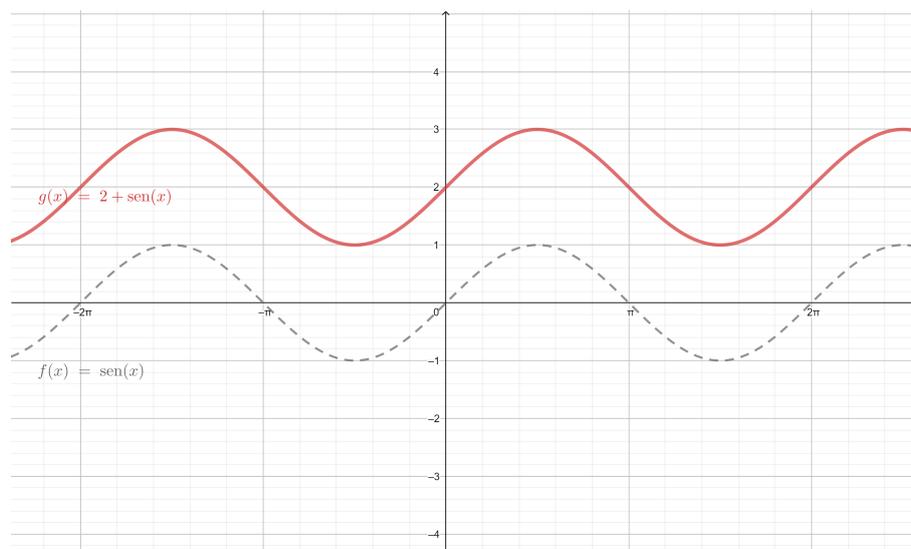
Após esta reflexão pedagógica, podemos começar a descrição da atividade prática proposta para os alunos. Ela tem objetivo de mostrar aos alunos o software que iremos usar para construir as representações gráficas, o GeoGebra. Esta ferramenta possui uma interface simples e direta, o que facilita o contato dos alunos. O professor pode fazer uma introdução da ferramenta, mostrando os pontos básicos que serão importantes no decorrer das próximas atividades, como:

- **Elementos Geométricos Básicos:** Marcar pontos, construir retas e segmentos, construir círculos e polígonos simples, mover objetos;
- **Elementos Algébricos Básicos:** Fazer entradas algébricas simples, definir funções, calcular valores de funções, encontrar raízes, determinar intersecções, comparar dois objetos diferentes;
- **Elementos Trigonométricos Básicos:** Definir funções trigonométricas, inserir ângulos, calcular seno e cosseno de ângulos, alterar escala dos eixos para radianos, comparar seno e cosseno dos ângulos.
- **Elementos de Programação Básicos:** Construir controle deslizante, alterar valores deslizantes, duplicar objetos, redefinir objetos.

É importante que o professor deixe os alunos a vontade para testar a ferramenta e todas as suas implicações. Eles devem se arriscar, errar, corrigir e se familiarizar com a ferramenta. O professor deve guiar as construções feitas, aumentando o nível de dificuldade de maneira gradativa, para não desencorajar os alunos, gerando um resultado inverso do esperado. Após definir as funções trigonométricas seno e cosseno, foco da nossa proposta pedagógica, o professor deve pedir aos alunos para analisar o gráfico da função. Assim, eles poderão ver na prática os conceitos que foram trabalhados em sala como a imagem da função, seus máximos e mínimos, seu período, sua relação entre ângulos e resultados. Somente esta interação dinâmica com a função pode ser suficiente para os alunos demonstrarem um interesse maior do que aquele baseado na exposição em lousa, pois eles possuem um domínio maior dos conceitos matemáticos que estão sendo trabalhados.

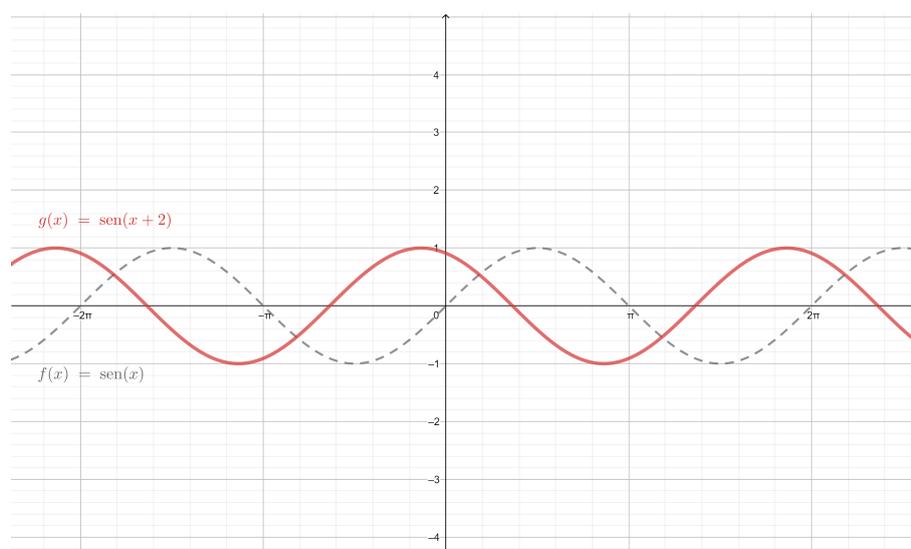
Em seguida, após a familiarização com o aplicativo, nosso objetivo é fazer com que os alunos percebam as relações entre parâmetros inseridos nas funções trigonométricas $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(c \cdot x + d)$. Vamos fazer isso de maneira simplificada, variando cada parâmetro separadamente, e no final unindo todos eles. Assim, o professor deve orientar os alunos a construírem 4 controles deslizantes, sendo eles a, b, c e d . Agora, o professor vai orientar os alunos a fazer as seguintes construções:

- a) *Parâmetro a:* Vamos começar analisando o parâmetro a da nossa função. Instruir os alunos a fazer a construção das funções $f(x) = \text{sen } x$ e $g(x) = a + \text{sen } x$. Ao variar o controle deslizante a o aluno vai perceber que a gráfico da função sofre translações para cima e para baixo, no eixo y , pois estamos alterando a imagem da função. Para orientar os alunos o professor pode fazer perguntas como "Qual é a diferença entre os valores máximos e mínimos das funções $f(x)$ e $g(x)$?", "Qual é a diferença entre as raízes das funções $f(x)$ e $g(x)$ ". Um exemplo com o parâmetro $a = 2$ pode ser observado na figura 33.

Figura 33 – Gráfico das funções $f(x) = \text{sen } x$ e $g(x) = 2 + \text{sen}(x)$ 

Fonte: Arquivo do autor.

- b) *Parâmetro d*: Agora vamos analisar o próximo parâmetro. Instruir os alunos a fazer a construção das funções $f(x) = \text{sen } x$ e $g(x) = \text{sen}(x + d)$. Ao variar o controle deslizante d o aluno vai perceber que a gráfico da função sofre translações para a direita e para a esquerda, no eixo x, pois estamos alterando o domínio da função. Para orientar os alunos o professor pode fazer as mesmas perguntas do item anterior. Um exemplo com o parâmetro $d = 2$ pode ser observado na figura 34.

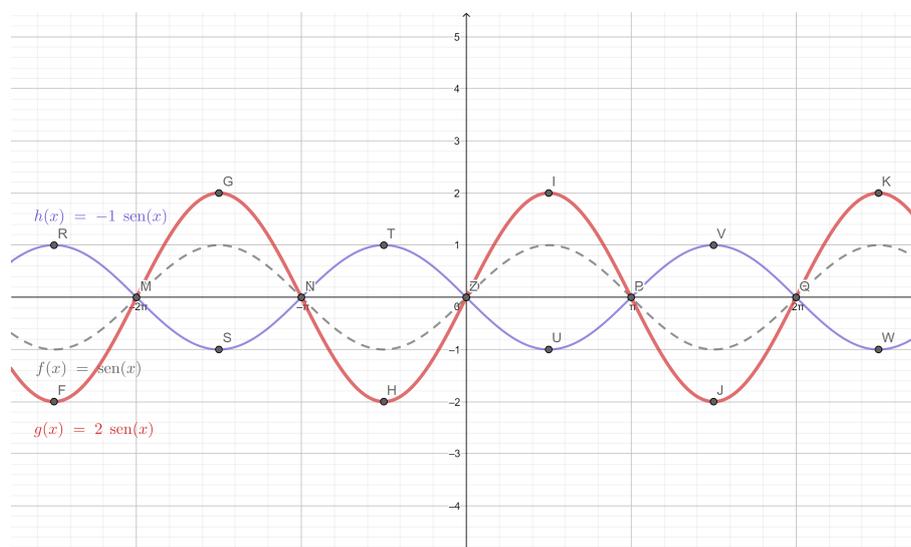
Figura 34 – Gráfico das funções $f(x) = \text{sen } x$ e $g(x) = \text{sen}(x + 2)$ 

Fonte: Arquivo do autor.

- c) *Parâmetro b*: Para o próximo parâmetro, vamos obter uma análise um pouco

diferente. Instruir os alunos a fazer a construção das funções $f(x) = \sin x$ e $g(x) = b \cdot \sin x$. Ao variar o controle deslizante b , podemos verificar uma diferença na amplitude da função $g(x)$, ou seja, uma diferença na distância entre os pontos máximos e mínimos. Para orientar os alunos o professor pode fazer perguntas como "Qual é a diferença entre os valores máximos e mínimos das funções $f(x)$ e $g(x)$?", "Qual é a variação da diferença dos pontos máximos e mínimos das funções $f(x)$ e $g(x)$?", "O que acontece quando o valor de b se torna negativo". Um exemplo com o parâmetro $b = 2$ e $b = -1$ pode ser observado na figura 35.

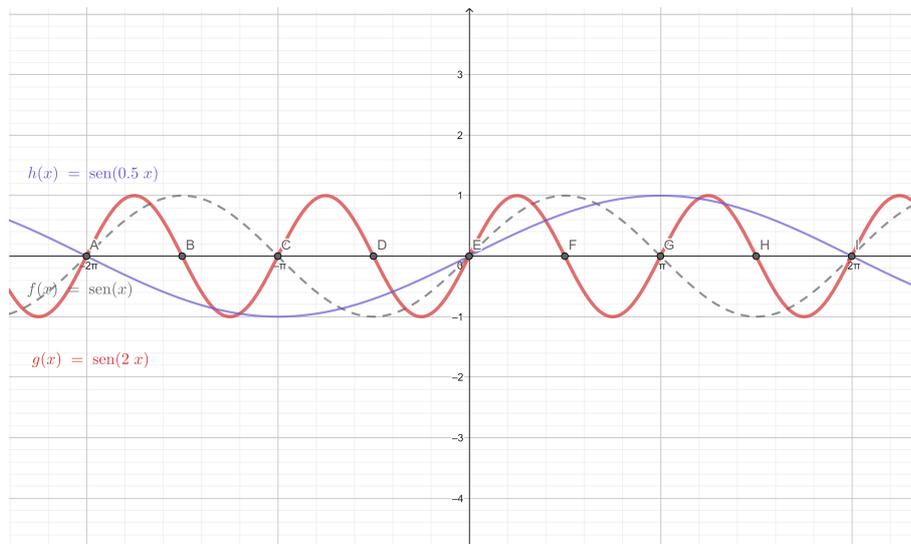
Figura 35 – Gráfico das funções $f(x) = \sin x$ e $g(x) = 2 \cdot \sin x$ e $h(x) = -1 \cdot \sin x$



Fonte: Arquivo do autor.

- d) *Parâmetro c* : Por último vamos analisar o parâmetro que influencia nas repetições da função seno. Instruir os alunos a fazer a construção das funções $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \sin(c \cdot x)$. Ao variar o controle deslizante c , podemos verificar que o período da função seno se altera, ou seja, a distância entre suas raízes aumenta ou diminui. Para orientar os alunos o professor pode fazer as mesmas perguntas dos itens anteriores. Um exemplo com o parâmetro $c = 2$ e $c = 0.5$ pode ser observado na figura 36.
- e) *Parâmetros a , b , c , d* : Agora, após variar todos os parâmetros de maneira separada, o aluno pode ver na prática o que acontece com a função seno. Esta atividade, com ajuda do aplicativo, mostra aos alunos que a matemática pode ser algo dinâmico e intuitivo, onde ele irá descobrir as propriedades investigando e variando constantes. Este processo pode gerar uma interação da sala com os conceitos matemáticos muito mais concreta do que apenas a exposição na lousa de conteúdos. Para finalizar esta parte, o professor deve sugerir aos alunos

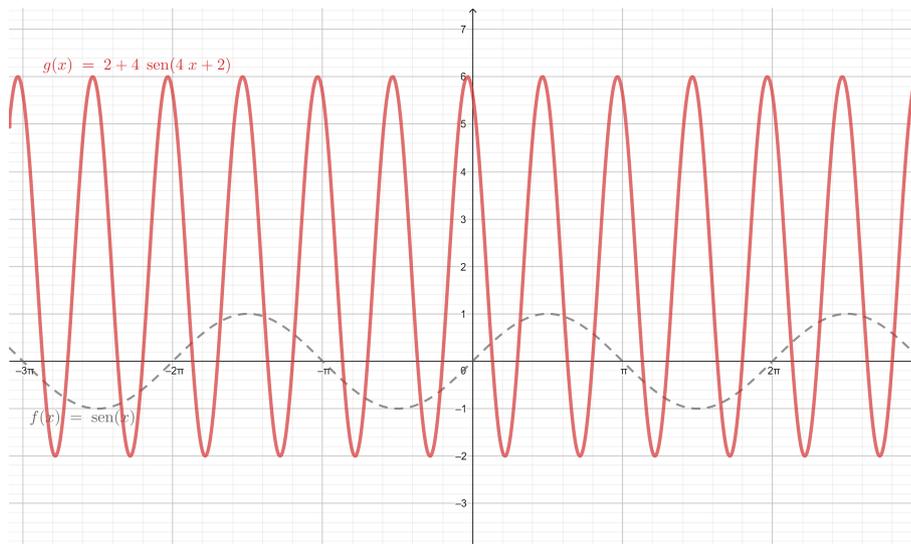
Figura 36 – Gráfico das funções $f(x) = \text{sen } x$ e $g(x) = \text{sen}(2 \cdot x)$ e $h(x) = \text{sen}(0.5 \cdot x)$



Fonte: Arquivo do autor.

a construção das funções $f(x) = \text{sen } x$ e $g(x) = a + b \cdot \text{sen}(c \cdot x + d)$. Ao variar os controles deslizantes ao mesmo tempo, o aluno poderá perceber o que acontece na prática com uma senóide. Um exemplo com os parâmetros $a = 2, b = 4, c = 4, d = 2$ pode ser observado na figura 37.

Figura 37 – Gráfico das funções $f(x) = \text{sen } x$ e $g(x) = 2 + 4 \cdot \text{sen}(4 \cdot x + 2)$



Fonte: Arquivo do autor.

4.2.3 Atividade 03 - Modelagem da Temperatura

Após o encerramento da atividade anterior, espera-se que o aluno tenha uma familiaridade com as funções trigonométricas e a variação de seus parâmetros. Agora

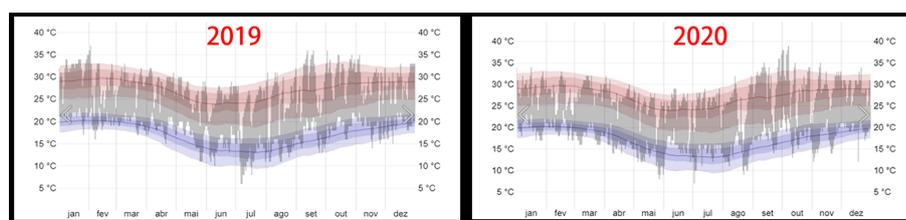
iremos partir para uma abordagem mais relacionada com aplicação dessas funções em situações reais. Para isso, o professor deve falar aos alunos sobre David Hilbert, distribuindo o material didático proposto no anexo deste documento. Este assunto já foi tratado com detalhe nos capítulos anteriores, então, para não cansar o leitor, iremos evidenciar apenas que o professor deve relacionar o 16º problema sobre eventos periódicos, e relacionar com situações do cotidiano dos alunos.

O professor irá propor a segunda atividade, que envolve uma modelagem simples da temperatura de um local ao longo do tempo. Aqui deve-se buscar vídeos e imagens da variação de temperatura em locais conhecidos pelos alunos, para que eles possam se familiarizar com a situação. Medindo as suas características poderemos modelar uma função que represente seu comportamento. A ideia é mostrar aos alunos que as funções trigonométricas que ele construiu na atividade anterior têm um comportamento semelhante ao observado na vida real.

Vamos utilizar como exemplo a temperatura no Aeroporto de Viracopos, em Campinas-SP. Vamos mostrar aos alunos 2 gráficos com as temperaturas ao longo dos dias, nos anos de 2019 e 2020, ilustrados na figura 38. É interessante o professor propor algumas reflexões prévias como:

- Os gráficos mostrados têm semelhança entre si?
- Os gráficos mostrados possuem algum tipo de repetição? Se sim, de quanto em quanto tempo?
- Os gráficos mostrados possuem valores máximos e mínimos? Se sim, eles se repetem ao longo do ano?
- Todos os dias do ano possuem um valor para a temperatura? O que isso significa matematicamente?

Figura 38 – Variação da Temperatura ao longo dos anos 2019 e 2020 em Viracopos/SP.



Fonte: Weather Spark. Disponível em <https://pt.weatherspark.com/h/y/147582/2021>

Com isso, os alunos podem perceber a semelhança da situação real com as nossas funções trigonométricas, visto que o gráfico possui as propriedades semelhantes.

Agora, o professor deve fornecer aos alunos a seguinte pergunta:

O Aeroporto Internacional de Viracopos é um local muito movimentado e recebe uma diversidade de pessoas ao longo do ano. Para se preparar para o clima, os passageiros devem buscar informações meteorológicas na época que pretendem viajar. Em 2019, o dia mais quente do ano foi em 2 de Fevereiro, quando a temperatura atingiu 37°C. O dia mais frio do ano teve uma temperatura de 5°C, em 06 de Julho. Utilize uma função matemática para modelar a temperatura em Viracopos, sendo 365 dias a duração de um ano

As informações dadas neste problema foram obtidas a partir do site *Weather Spark*, assim como o gráfico anterior, disponíveis em <<https://pt.weatherspark.com/h/y/147582/2021>>. Primeiramente, para resolver este problema, vamos mostrar aos alunos que a função procurada é uma função trigonométrica, dadas as características discutidas anteriormente. Mas como definir se é uma função seno ou cosseno? Para responder esta pergunta precisamos de um referencial de início e fim. Se considerarmos o início sendo 1 de Janeiro, nos dias com as maiores temperaturas, a função cosseno é mais adequada. Este fato pode ser discutido com os alunos.

Vamos trabalhar com uma função $T(x) = a + b \cdot \cos(c \cdot x + d)$, que relaciona a temperatura T no dia x do ano. Agora precisamos determinar os valores dos parâmetros para modelar nossa função. Vamos começar com a variação da temperatura máxima e mínima. Faz-se:

$$\frac{Máx - Mín}{2} = \frac{37 + 5}{2} = \frac{42}{2} = 21$$

Então, a média entre o valor máximo e mínimo foi de 21°C. É importante questionar os alunos sobre o significado deste valor. Para guiar o raciocínio o professor pode comparar com as funções básicas, $\sin x$ e $\cos x$. O que acontece quando tiramos a média entre seus extremos? Para um entendimento ainda melhor, os alunos podem variar os parâmetros a e b da função no GeoGebra e ver o que acontece com a média. Podemos concluir que a média é o parâmetro $a = 21$ e a diferença entre os extremos e a média é o parâmetro $b = 16$.

Em seguida vamos analisar o parâmetro d . Sabemos, pelas análise da atividade anterior, que ele representa o deslocamento horizontal da nossa função. Para os alunos compreenderem melhor, é interessante orientá-los a deslocar o parâmetro no GeoGebra e rever o que acontece. Para um deslocamento nulo, a função teria seu máximo em 1º de Janeiro. Como este máximo ocorre em 2 de Fevereiro, o valor do parâmetro é *menos* a quantidade de dias que se passaram, $d = -32$. Novamente pode ser feita uma discussão sobre o sinal negativo utilizado.

Por fim, para encontrarmos o parâmetro c é necessário analisar o período da função. Considerando que o ano possui 365 dias, este deve ser o valor do período, para que a função comece a se repetir. Novamente vamos instigar os alunos a perceber a relação

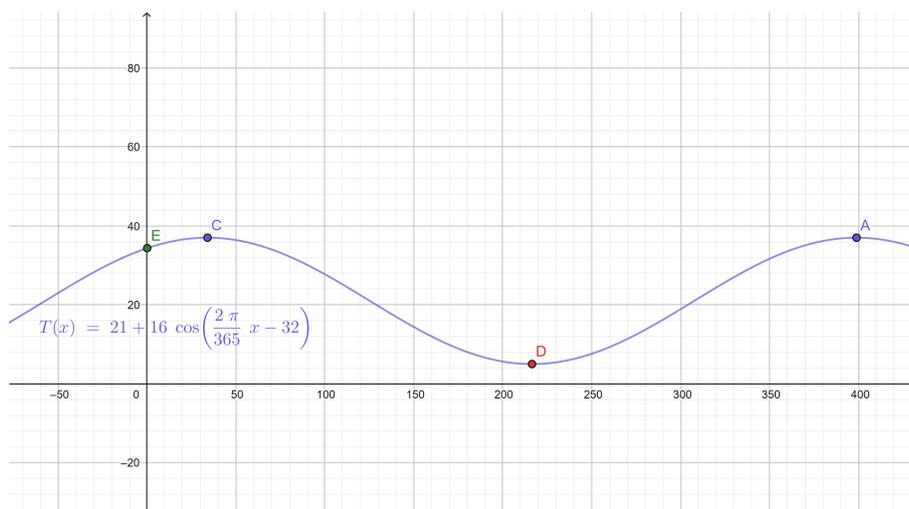
entre o comportamento da função e o valor de c . Na função canônica, com $c = 1$, temos um período igual a 2π , e com um aumento de c , o período diminui proporcionalmente. O inverso ocorre para um valor de c pequeno. Podemos concluir que

$$\text{Período} = \frac{2\pi}{c} \Rightarrow 365 = \frac{2\pi}{c} \Rightarrow c = \frac{2\pi}{365}$$

Assim, podemos unir os parâmetros e montar nossa função modelada por essa situação real. Após ajustar os parâmetros no GeoGebra temos a função representada na figura 39.

$$T(x) = 21 + 16 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{365} \cdot x - 32\right)$$

Figura 39 – Função $T(x) = 21 + 16 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{365} \cdot x - 32\right)$ modelada a partir da temperatura em Viracopos.



Fonte: Arquivo do autor.

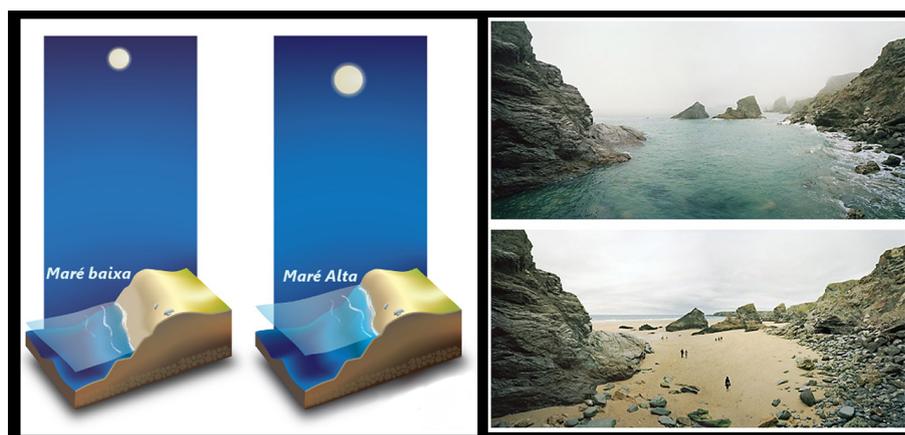
Nesta atividade de modelagem podemos ver na prática os conteúdos matemáticos tomando vida. A função resultante mostra o comportamento da variação de temperatura ao longo do ano de 2019. Notem que os alunos puderam ver a situação como um problema inicial, investigar as informações importantes que seriam utilizadas, transformar essas informações em parâmetros para nossa função periódica, e por fim, montar o gráfico adequado. Acredito que a resolução de problemas reais e a modelagem são metodologias muito eficientes para trabalhar com conteúdos matemáticos mais complexos. Ao ver que a matemática pode ser utilizada em situações reais, e mais do que isso, desenvolver uma fórmula matemática adequada, faz com que os alunos desenvolvam autonomia e interesse na busca por conhecimento.

4.2.4 Atividade 04 - Modelagem das Ondas

Com a primeira atividade de modelagem espera-se que os alunos possam entender a relação de conteúdos matemáticos com situações reais. Para que ele saiba que as situações não são únicas, vamos propor uma segunda atividade, baseada na resolução de problemas e modelagem, que envolve movimento das ondas do mar.

Inicialmente vamos mostrar aos alunos a figura 40, e perguntar o que eles podem concluir da situação. Em seguida, o professor deve passar para a sala o vídeo *Entendendo as Marés*, disponível em <<https://www.youtube.com/watch?v=me5vOePjHzI>>. Nele, os alunos poderão ver a explicação na prática da formação das marés, e sua relação com os movimentos periódicos dos astros. Após o vídeo o professor deve perguntar aos alunos se eles conseguiram entender que o movimento das marés e sua altura nos litorais é um evento periódico.

Figura 40 – Variação das Marés.



Fonte: Escola Kids. Disponível em <https://escolakids.uol.com.br/geografia/mares.htm>

Em seguida, tendo em vista que os alunos já estão por dentro do assunto das marés, o professor deve mostrar o problema que irá guiar esta terceira atividade.

Entender o movimento das marés é muito importante economicamente para as regiões litorâneas. Para um navio entrar em um porto é necessário saber se a maré está alta ou baixa. Se você quiser andar pela praia é preciso ter uma ideia sobre as marés, caso contrário, em algumas regiões, pode ficar ilhado depois de algum tempo. Para ter essas informações você precisa procurar pela Tábua das Marés em sites como o da Marinha e o próprio Tábua de Marés. Você pode escolher a região litorânea de sua preferência e obter todas as informações. Considere a região de Ubatuba, uma das mais procuradas pelos turistas do litoral paulista. A imagem abaixo mostra a altura máximas e mínimas das marés em Março de 2019, mês agitado devido ao feriado de carnaval. Analisando a tabela determine uma função que descreve o comportamento das marés.

Figura 41 – Variação das Marés em Ubatuba, no início de Março de 2019.

DIA			MARÉS DE UBATUBA					ATIVIDADE MÉDIA
			1ª MARÉ	2ª MARÉ	3ª MARÉ	4ª MARÉ	COEFICIENTE	
1 Sex		▲ 5:55 ▼ 18:29	6:59 ▼ 0,5 m	11:04 ▲ 1,2 m	18:19 ▼ 0,3 m	23:25 ▲ 1,4 m	47 baixo	
2 Sáb		▲ 5:56 ▼ 18:28	7:16 ▼ 0,5 m	11:24 ▲ 1,4 m	18:54 ▼ 0,2 m	23:38 ▲ 1,6 m	56 médio	
3 Dom		▲ 5:56 ▼ 18:27	7:36 ▼ 0,4 m	11:47 ▲ 1,6 m	19:27 ▼ 0,1 m		65 médio	
4 Seg		▲ 5:57 ▼ 18:26	0:00 ▲ 1,7 m	7:57 ▼ 0,4 m	12:13 ▼ 0,1 m	20:00 ▼ 0,1 m	74 alto	
5 Ter		▲ 5:57 ▼ 18:25	0:26 ▲ 1,8 m	8:19 ▼ 0,4 m	12:39 ▲ 1,8 m	20:32 ▼ 0,0 m	80 alto	
6 Qua		▲ 5:58 ▼ 18:25	0:55 ▲ 1,8 m	8:40 ▼ 0,3 m	13:07 ▲ 1,8 m	21:05 ▼ 0,0 m	85 alto	
7 Qui		▲ 5:58 ▼ 18:24	1:24 ▲ 1,7 m	9:01 ▼ 0,3 m	13:35 ▲ 1,7 m	21:37 ▼ 0,1 m	87 alto	

Fonte: Tábua das Marés. Disponível em <https://tabuademares.com/br/so-paulo/ubatuba>

Medindo as suas características poderemos modelar uma função que represente seu movimento. A ideia é mostrar aos alunos que as funções trigonométricas que ele construiu na atividade anterior tem um comportamento semelhante ao observado nesta situação. A Tábua das marés e todas as informações do enunciados podem ser encontradas no site <<https://tabuademares.com/br/so-paulo/ubatuba>>. De acordo com as informações, vamos montar a função que modela a variação no dia 04, e ver se este comportamento se assemelha ao dos outros dias. Vamos arredondar os dados da tabela para obter um resultado mais exato, considerando que o intervalo entre marés altas e baixas ao longo dos dias foi de aproximadamente às 6h00:

- As marés baixas ocorrem às 6h00 e às 18h00 do dia, com altura igual a 0,4m.
- As marés altas ocorrem às 00h00 e às 12h00 do dia, com altura igual a 1,7m.

Para modelar nossa função vamos seguir o mesmo caminho da atividade anterior, assim, a descrição será mais breve para não cansar o leitor. Começamos por definir a função trigonométrica mais adequada. Se considerarmos o início sendo meia noite, a função cosseno é mais adequada novamente. Assim, vamos trabalhar com uma função $A(x) = a + b \cdot \cos(c \cdot x + d)$, que relaciona a altura A das marés no horário x do dia. Agora precisamos determinar os valores dos parâmetros para modelar nossa função.

Aqui, podemos começar com o parâmetro d da nossa função. Como sabemos, ele indica a translação horizontal. Mas aqui, o ponto máximo da função cosseno já ocorre para o horário inicial $x = 0$, ou seja, não existe variação horizontal na função, e assim, $d = 0$.

Agora vamos para a análise dos parâmetros a e b . Calculando a variação da altura máxima e mínima temos $a = 1.05$, e calculando a diferença entre este valor e os extremos

obtemos $b = 0.65$.

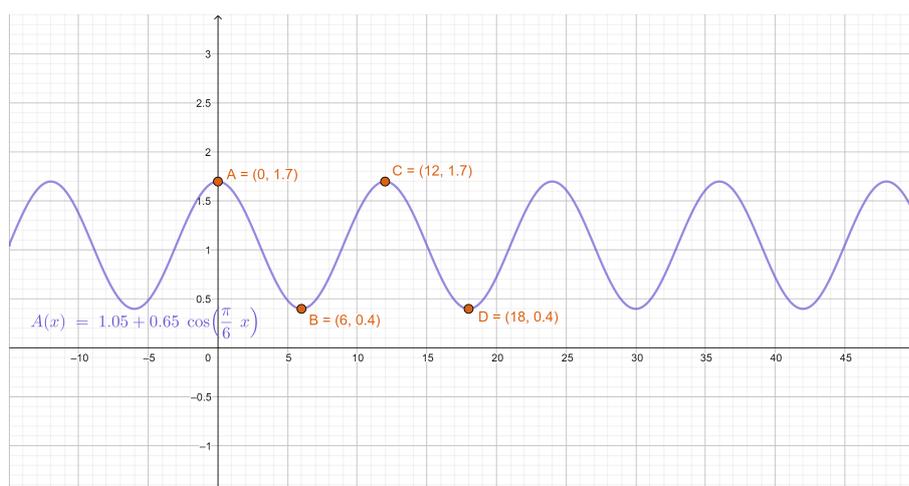
O último parâmetro que nos resta é c . Ele é responsável pela variação do nosso período. A diferença entre duas marés altas, ou duas marés baixas, é de 12 horas, que representa nosso período. Assim, para determinar c temos:

$$\text{Período} = \frac{2\pi}{c} \Rightarrow 12 = \frac{2\pi}{c} \Rightarrow c = \frac{\pi}{6}$$

Portanto, podemos unir os parâmetros e montar a função modelada por essa situação real. Após ajustar os parâmetros no GeoGebra temos a função representada na figura 42.

$$A(x) = 1.05 + 0.65 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot x\right)$$

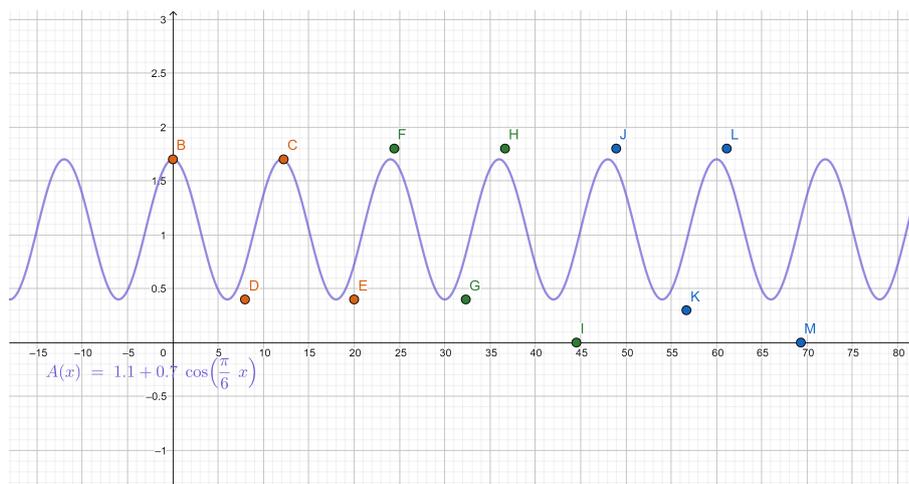
Figura 42 – Função $A(x) = 1.05 + 0.65 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot x\right)$ modelada a partir das marés em Ubatuba.



Fonte: Arquivo do autor.

Para finalizar nossa modelagem, vamos fazer uma comparação com os valores reais. Para isso, vamos inserir no GeoGebra os pontos reais referentes as marés altas e baixas nos dias 04, 05 e 06 de março, tomando como ponto inicial a meia noite do dia 04. Os pontos originais podem ser obtidos na tabela. É importante que ao longo deste processo os alunos já comecem a entender que a matemática possui áreas que buscam entender fenômenos naturais, e em seguida modelar seu comportamento. A relação dos pontos com nossa função pode ser vista na Figura 43.

Aqui, nosso resultado não passou exatamente sobre todos os pontos reais. Podemos levantar esta discussão em grupo, para averiguar o que os alunos pensam a respeito disso. Depois de ouvir algumas ideias, o professor pode dizer que para obter uma modelagem mais exata é necessário um número maior de amostras, como também, se atentar a condições

Figura 43 – Função $A(x)$ e sua relação com valores reais das marés em Ubatuba.

Fonte: Arquivo do autor.

que geram novos parâmetros como a posição do sol e da lua nos dias. Os alunos podem usar os controles deslizantes para ir alternando a função até encontrar aquela que se encaixa melhor em nosso modelo, e ir interagindo com o programa de maneira livre.

Ao trocar os valores das constantes, o aluno poderá observar com a ajuda do GeoGebra as alterações produzidas no movimento ondulatório. Ao final desta quarta atividade esperamos que as funções trigonométricas trabalhadas comecem a fazer mais sentido na cabeça dos alunos, e assim, que eles possam visualizar melhor sua importância.

4.2.5 Atividade 05 - Propostas Futuras e Conclusões

Após finalizar as atividades anteriores, espera-se que os alunos possam estar aptos a identificar situações periódicas em nosso cotidiano, e a relação entre elas e as funções trigonométricas estudadas neste capítulo. Finalizamos nossa sequência didática em duas etapas, uma sugestão para próximas atividades e um questionário para comparar a evolução dos alunos.

A primeira etapa que será proposta pode variar de acordo com os resultados dos primeiros questionários, sobre a afinidade de cada turma com assuntos de seu cotidiano. Para direcionar esta parte, o professor poderá fazer exemplos de situações periódicas que estão presentes no cotidiano como movimento de uma roda gigante; movimento do pêndulo de um relógio cuco; rotação da Terra; ondas sonoras e o som produzido; batimentos cardíacos; posição da sua sombra ao longo do dia. Além destas sugestões, o professor deve pedir aos alunos outros exemplos, que sejam parte de seu cotidiano. Após esta coleta de dados, será momento de definir o próximo assunto a ser modelado e estudado, o assunto mais pedido pela turma.

As modelagens que a turma decidir devem ser feitas seguindo os modelos das

atividades anteriores, propondo um problema, instigando a busca de informações e suas implicações matemáticas, determinação dos parâmetros que podem ser colhidos dos experimentos reais, e por fim, montar uma função trigonométrica que se assemelha à realidade. Acreditamos que esta última atividade pode gerar até mais animação nas turmas, pois, será decidida pelos próprios alunos. Se as turmas forem grandes, pode ser interessante dividir os alunos em grupos, e cada um estudar uma situação diferente. Deixamos claro que esta atividade requer do professor um tempo de dedicação para o estudo das situações reais, para que possa direcionar os alunos da melhor maneira possível.

Para encerrar a proposta pedagógica será feito um novo questionário sobre os assuntos trabalhados das funções trigonométricas. Aqui a ideia será mostrar que quando os alunos podem relacionar os conteúdos trabalhados em sala com situações reais, ele se motiva a fazer parte do espaço de aprendizagem, e assim, permite que sua perspectiva sobre o assunto se torne mais abrangente. Os questionários podem ser encontrados nos anexos deste documento.

5 Considerações Finais

Ao concluir os estudos sobre as equações diferenciais e produzir este trabalho, foi possível perceber que minhas concepções sobre o assunto aumentaram de maneira considerável. No período em que estive participando do Projeto de Licenciaturas Internacionais na Universidade de Coimbra pude ter um contato maior com equações diferenciais, porém, não tive oportunidade de estudar teorias qualitativas sobre os sistemas não-lineares. Este trabalho serviu como um complemento para a minha graduação, visto que ele contempla assuntos não abordados ao longo do curso. Foi possível perceber que ao estudar os sistemas diferenciais é muito importante entender o comportamento que eles descrevem em torno de soluções de equilíbrio e ciclos limite, pois estas soluções são encontradas em diversos casos de aplicação, como por exemplo em mecânica clássica. Assim, ao estudar inicialmente os pontos de equilíbrio de um sistema e sua estabilidade, e posteriormente as órbitas periódicas e ciclos limite, pude ter uma base para o entendimento dos sistemas de Lienard e aplicação do método de Averaging.

Ao aplicar o método de Averaging em equações diferenciais que respeitam certas restrições podemos ter uma ideia do número de ciclos limite em um determinado intervalo. Isso é um resultado muito importante, pois como vimos na dissertação, os ciclos limite estão interligados aos pontos de equilíbrio de um sistema, e o teorema de Poincaré-Bendixson e suas implicações nos dão uma ideia da existência de ciclos limite, mas não de sua quantidade. Também podemos adicionar o fato de que este trabalho serviu como um método efetivo para o desenvolvimento da utilização dos softwares LaTeX, Mathematica e GeoGebra, que são ferramentas muito importantes na produção de relatórios científicos.

Com relação a proposta didática, acredito que sua elaboração foi algo que favoreceu muito minha visão sobre a utilização de aplicativos de geometria dinâmica em sala de aula. A partir de minhas observações práticas pude perceber a diferença de motivação dos alunos, quando comparamos uma aula teórica clássica, e uma outra dinâmica e interativa. O estudo das funções trigonométricas foi importante para aumentar meu conhecimento sobre funções do tipo. A elaboração desta sequência didática precisa de tempo e dedicação do docente, mas ela pode gerar um ambiente de aprendizado mais significativo e motivador.

Desta forma, acredito que seja correto afirmar que os objetivos deste trabalho foram cumpridos, visto que ao final dos estudos foi possível adquirir conhecimentos novos sobre sistemas diferenciais, assim como saber a maneira de determinar o número de ciclos limite em um determinado sistema diferencial planar.

Bibliografia

- [1] BASSANEZI, R. C. **Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática**. Ed. 4, São Paulo, Editora Contexto, 2002.
- [2] BLOWS, T. R.; LLOYD, N. G. **The number of small-amplitude limit cycles of Lienard equations**. Ed. 95, Math.Proc.Camb.Phil.Soc, 1984;
- [3] BUICA, A; LLIBRE, J. **Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree**. Ed. 128, Bull. Sci. Math., 2004;
- [4] CHICONE, C. **Ordinary Differential Equations with Applications, Texts in Applied Mathematics** Ed. 34, Springer, New York, 1999;
- [5] CHRISTOPHER, C. J.; LYNCH, S. **Small-amplitude limit cycle bifurcations for Lienard systems with quadratic or cubic damping or restoring forces**. Ed. 12, Nonlinearity, 1999;
- [6] COPPEL, W. A. **Some quadratic systems with at most one limit cycles**. Dynamics Reported Vol. 2, Wiley, 1998.
- [7] DUMORTIER, F.; LI, C. **On the uniqueness of limit cycles surrounding one or more singularities for Lienard equations**. Ed. 9, Nonlinearity, 1996.
- [8] GASULL, A.; TORREGROSA, J. **Small-amplitude limit cycles in Lienard systems via multiplicity**. Ed. 159, J.Diff.Eqs., 1998;
- [9] HIRSCH, M. W.; SMALE, S.; DEVANEY, R. L. **Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos**. Ed. 8, Elsevier, 2004.
- [10] LINS, A.; DE MELO, W.; PUGH, C.C. **On Lienard's equation. Lecture Notes in Math**. Ed. 597, Springer, 1977.
- [11] LLIBRE, J.; MEREU, A. C.; TEIXEIRA, M. A. **Limit cycles of the generalized polynomial Lienard differential equations**. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 2010;
- [12] LLOYD, N. G.; LYNCH, S. **Small-amplitude limit cycles of certain Lienard systems**. Ed. 418, Proc.Royal Soc., London, 1998;
- [13] LYNCH, S. **Limit cycles of generalized Lienard equations**. Ed. 8, Appl.Math.Lett., 1995;

-
- [14] PERKO, L. **Differential Equations and Dynamical Systems**. Ed. 3, Nova York, Springer, 2006;
- [15] ROGERI, N. K. DE O. **Conhecimentos de professores dos anos iniciais para o ensino dos números racionais em sua representação decimal**. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Universidade Anhanguera de São Paulo - UNIAN, São Paulo, 2015.
- [16] RYCHKOV, G. S. **The maximum number of limit cycle of the system is two**. Ed. 11. *Differential'nye Uravneniya*, (1975).
- [17] SOTOMAYOR, J. **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias**. Projeto Euclides, 1979;
- [18] YANDELL, B.H. **The Honors Class: Hilbert's Problems and Their Solvers**. Ed. 1, AK Peters/CRCPress, 2003;
- [19] YU, P.; HAN, M. **Limit cycles in generalized Lienard systems**. Ed. 30, *Chaos Solitons Fractals*, 2006;

ANEXO A – Atividade 01

ATIVIDADE - QUESTIONÁRIO DIAGNÓSTICO

Nome _____

Data ____/____/____ Série _____ Ass.do professor _____

1. Descreva com suas palavras o significado de um evento periódico.
2. Descreva com suas palavras o significado da palavra trigonometria.
3. Descreva com suas palavras o significado da palavra cosseno.
4. Descreva com suas palavras o significado da palavra seno.
5. Determine o resultado das operações abaixo:

a. $\text{sen}(45^\circ)$	e. $\text{sen}(120^\circ)$
b. $\text{cos}(30^\circ)$	f. $\text{cos}(225^\circ)$
c. $\text{sen}(60^\circ)$	g. $\text{sen}(0^\circ)$
d. $\text{cos}(90^\circ)$	h. $\text{cos}(15^\circ)$
6. Descreva com suas palavras o significado de circunferência trigonométrica.
7. Descreva com suas palavras o significado de função trigonométrica.
8. Determine o valor máximo e o valor mínimo da função $f(x) = \text{sen}(x)$
9. Determine o valor máximo e o valor mínimo da função $f(x) = 1 + 2 \cdot \text{cos}(x)$
10. Determine o período da função $f(x) = \text{sen}(x)$

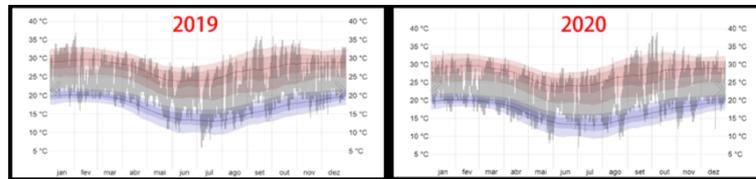
ANEXO B – Atividades 03 e 04

ATIVIDADE - MODELAGEM PRÁTICA

Nome _____

Data ____/____/____ Série _____ Ass.do professor _____

1. (VARIACÃO DE TEMPERATURA) As imagens abaixo mostram a variação de temperatura ao longo dos anos 2019 e 2020 no Aeroporto de Viracopos, em Campinas-SP.



O Aeroporto Internacional de Viracopos é um local muito movimentado e recebe uma diversidade de pessoas ao longo do ano. Para se preparar para o clima, os passageiros devem buscar informações meteorológicas na época que pretendem viajar. Em 2019, o dia mais quente do ano em foi 2 de Fevereiro, quando a temperatura atingiu 37°C. O dia mais frio do ano teve uma temperatura de 5°C, em 06 de Julho. Utilize uma função matemática para modelar a temperatura em Viracopos, sendo 365 dias a duração de um ano.

2. (ALTURA DAS ONDAS) Entender o movimento das marés é muito importante economicamente para as regiões litorâneas. Para um navio entrar em um porto é necessário saber se a maré está alta ou baixa. Se você quiser andar pela praia é preciso ter uma ideia sobre as marés, caso contrário, em algumas regiões, pode ficar ilhado depois de algum tempo.



Para ter essas informações você precisa procurar pela Tábua das Marés em sites como o da Marinha e o próprio Tábua de Marés. Você pode escolher a região litorânea de sua preferência e obter todas as informações. Considere a região de Ubatuba, uma das mais procuradas pelos turistas. A imagem abaixo mostra as alturas máximas e mínimas das marés em Março de 2019, mês agitado devido ao feriado de carnaval. Analisando a tabela determine uma função que descreve o comportamento das marés.

DIA	☀️	MARÉS DE UBATUBA				COMPORTAMENTO	ATIVIDADE MÉDIA
		1ª MARÉ	2ª MARÉ	3ª MARÉ	4ª MARÉ		
1 Dom	☀️	6:59 ▲ 5,5 m ▼ 0,3 m	11:04 ▲ 1,3 m	18:19 ▼ 0,2 m	23:25 ▲ 1,4 m	67 baixo	👉👈
2 Seg	☀️	7:16 ▲ 5,5 m ▼ 0,5 m	11:24 ▲ 1,4 m	18:04 ▼ 0,2 m	23:38 ▲ 1,4 m	66 médio	👉👈
3 Ter	☀️	7:36 ▲ 5,5 m ▼ 0,4 m	11:47 ▲ 1,6 m	19:27 ▼ 0,1 m		65 médio	👉👈
4 Qua	☀️	8:00 ▲ 5,57 m ▼ 1,7 m	7:57 ▼ 0,4 m	12:13 ▲ 1,7 m	20:00 ▼ 0,1 m	74 alto	👉👈
5 Qui	☀️	8:26 ▲ 5,57 m ▼ 1,8 m	8:19 ▼ 0,4 m	12:39 ▲ 1,8 m	20:32 ▼ 0,0 m	69 alto	👉👈
6 Sex	☀️	8:55 ▲ 5,58 m ▼ 1,8 m	8:40 ▼ 0,3 m	13:07 ▲ 1,8 m	21:05 ▼ 0,0 m	68 alto	👉👈
7 Sáb	☀️	1:24 ▲ 5,58 m ▼ 1,7 m	9:01 ▼ 0,3 m	13:35 ▲ 1,7 m	21:37 ▼ 0,1 m	67 alto	👉👈

ANEXO C – Atividade 05

ATIVIDADE - QUESTIONÁRIO FINAL

Nome _____

Data ____/____/____ Série _____ Ass.do professor _____

1. Considere a função trigonométrica $f(x) = 2 \cdot \cos(x + \pi)$. Calcule o valor de:

a) $f(\pi/4)$

c) x , quando $f(x) = -1$

b) $f(-2\pi/3)$

d) x , quando $f(x) = 2$

2. Considere a função real $f(x) = 12 - 5 \sin(3x)$. Os valores de máximo e mínimo de $f(x)$ são?

3. Seja a função real definida por $f(x) = 2 + 2 \sin(x)$, no intervalo $0 \leq x \leq 360$. O ponto de mínimo de $f(x)$, nesse intervalo, tem coordenadas?

4. Em determinada cidade, a concentração diária, em gramas, de partículas de fósforo na atmosfera é medida pela função abaixo, em que t é a quantidade de horas para fazer essa medição. O tempo mínimo necessário para fazer uma medição que registrou 4 gramas de fósforo é de?

$$C(t) = 3 + 2 \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$$

5. Determine o valor do seno e do cosseno dos ângulos 30° , 120° , 225° e 0° .

6. A atração gravitacional que existe entre a Terra e a Lua provoca, entre outros fenômenos, o da chamada maré astronômica. A fórmula a seguir corresponde a medições feitas na cidade de Boston, no dia 10 de fevereiro de 1990, com $h(t)$ (em metros), e t é o tempo transcorrido desde a meia-noite (em horas) Com base nessas informações, quantas horas se passaram desde o início da medição até que o nível do mar tenha atingido 2,2 metros pela primeira vez?

$$h(t) = 1,5 + 1,4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$$

7. Em uma região litorânea a temperature costuma variar bastante durante o dia. Considere a função $f(x) = 21 + 15 \cdot \cos(6x - \pi)$, onde $f(x)$ é a temperature e x é a hora do dia, começando meia noite. Determine as temperaturas máxima e mínima atingidas em um dia e também o período de repetição das temperaturas.

$$f(x) = \frac{\cos(2x)}{7}$$

8. Determine o valor máximo e mínimo da função