

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

**O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS APLICADO À ANÁLISE
ESTRUTURAL DE PÓRTICOS PLANOS EM *MS-EXCEL***

Augusto Schiapati Borges

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Departamento de
Engenharia Civil da Universidade Federal
de São Carlos como parte dos requisitos
para a conclusão da graduação em
Engenharia Civil

Orientador: Fernando Menezes de
Almeida Filho

São Carlos
2022

RESUMO

Implementou-se o Método dos Elementos Finitos por meio de uma aplicação na linguagem de programação *Visual Basic for Applications (VBA)* diretamente ao software *MS-Excel* a fim de tornar o processo de análise estrutural mais dinâmico e de permitir um dimensionamento iterativo que atenda a qualquer esquema estático proposto facilitando a busca pela solução ideal. Concluiu-se que a aplicação proposta é capaz de analisar estruturas reticuladas com rigidez longitudinal e transversal, obtendo resultados precisos em relação aos deslocamentos e reações para estruturas apoiadas e, além disso, está apta para calcular esforços internos tanto para esquemas estáticos submetidos a cargas concentradas, quanto para cargas distribuídas.

Palavras-chave: Análise Estrutural; Métodos dos Elementos Finitos; MS-Excel; Visual Basic For Applications.

ABSTRACT

The Finite Element Method was implemented through an application in the Visual Basic for Applications (VBA) programming language directly to the MS-Excel software in order to make the structural analysis process more dynamic and to allow an iterative design that meets the any proposed static scheme facilitating the search for the ideal solution. It was concluded that the proposed application is capable of analyzing reticulated structures with longitudinal and transverse stiffness, obtaining accurate results in relation to displacements and reactions for ported structures and, in addition, is able to calculate internal forces both for static schemes subjected to concentrated loads and for distributed loads.

Keywords: Structural Analysis; Finite Element Methods; MS-Excel; Visual Basic for Applications.

1. INTRODUÇÃO	5
1.1 OBJETIVOS	6
1.2 JUSTIFICATIVA.....	7
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	9
2.1 ANÁLISE ESTRUTURAL	9
2.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	10
2.3 MATRIZ DE RIGIDEZ PARA CARREGAMENTOS AXIAIS	12
2.4 MATRIZ DE RIGIDEZ PARA CARREGAMENTOS NORMAIS	15
2.5 MATRIZ DE RIGIDEZ DE PÓRTICOS PLANOS	19
3. METODOLOGIA	21
4. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	23
4.1 ENTRADA DE DADOS	23
4.2 MÓDULO DE FUNÇÕES AUXILIARES.....	25
4.3 MÓDULO DE GERAÇÃO DA MALHA	26
4.4 MÓDULO DE ANÁLISE ESTRUTURAL	27
4.4.1 Matriz de transformação de coordenadas.....	28
4.4.2 Matriz de rigidez.....	29
4.4.3 Vetor de carregamentos e reações.....	29
4.4.4 Vetor de deslocamentos/rotações.....	30
4.4.5 Resolução do sistema de equações	30
4.4.6 Esforços internos	31
4.4.6.1 <i>Momento fletor</i>	31
4.4.6.2 <i>Esforço cortante</i>	32
4.4.6.3 <i>Esforço normal</i>	32
5. RESULTADOS E DISCUSSÕES	34
5.1 EXEMPLO 1	34
5.2 EXEMPLO 2.....	41
5.3 EXEMPLO 3.....	52
5.4 EXEMPLO 4.....	56
5.5 EXEMPLO 5.....	63
6. CONCLUSÃO	69
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	71

1. INTRODUÇÃO

Ao se projetar uma estrutura que serve a uma determinada função da sociedade, o engenheiro responsável deve, sobretudo, preocupar-se com a segurança do objeto em criação, uma vez que seu colapso pode significar um grande perigo para as pessoas a sua volta. Deve-se preocupar, também, com a estética e funcionabilidade equacionando todas as variáveis tendo em vista as restrições econômicas e ambientais (HIBBELER, 2013).

Segundo o autor, um projeto passa, primeiramente, por um processo criativo de seu idealizador concomitantemente ao processo técnico, exigindo conhecimentos das propriedades dos materiais utilizados. Uma vez estabelecida uma estrutura preliminar, o próximo passo envolve a análise da estrutura identificando se a mesma possui rigidez e resistência necessárias.

Nos dias de hoje, é exigido do engenheiro estrutural, cada vez mais, que seu desempenho ao analisar e dimensionar estruturas seja bastante eficiente, retornando resultados e possibilidades de estrutura no menor tempo possível, sem perda da qualidade e segurança de suas concepções. Para isso, é importante que haja à sua disposição ferramentas que o auxiliem em sua análise e que permita estudos sucessivos buscando equilibrar custos, desempenho estrutural e estética.

Azevedo (2003), corrobora o uso de softwares que viabilizem um tempo de resposta hábil de um projetista frente às suas demandas diárias de maneira a manter a segurança de suas análises, mas atenta aos riscos da utilização de softwares cujas bases de cálculo são desconhecidas para seu usuário, podendo levar a erros na introdução dos dados, ausência de correspondência entre o modelo e a estrutura real ou mesmo a negligência de condicionantes relevantes.

Segundo Chandrupatla e Belegundu (2014), com o contínuo avanço dos computadores de grande porte e larga disponibilidade de pequenos computadores com alta poder de processamento o processo de análise estrutural por meio do Método dos Elementos Finitos (MEF) tem se tornado cada vez mais acessível a alunos e engenheiros que necessitam avaliar estruturas em seu dia a dia.

O autor destaca ainda que, o MEF surgiu pela necessidade de análise de estruturas de aeronaves tendo diversos avanços da década de 1940 até meados de 1970, momento em que as bases matemáticas foram de fato estabelecidas e que o desenvolvimento de novos elementos, estudos de convergência e outras áreas relacionadas se encaixaram na categoria.

Uma vez que o método possui bases teóricas bastantes sólidas e que este conhecimento é largamente difundido nas universidades ao redor no mundo, este trabalho tem como objetivo apresentar a teoria envolvida no Método dos Elementos Finitos e, sobretudo, realizar sua implementação computacional integrada a um software de criação de planilhas eletrônicas.

1.1 OBJETIVOS

Este estudo técnico científico teve a finalidade primeira de apresentar uma metodologia que permita a análise estrutural de estruturas apertadas com o auxílio de computadores, isto é, trouxe luz a uma teoria que capaz de calcular deslocamentos, reações, momentos fletores, esforços cortantes e esforços normais ao longo dos elementos contidos em um sistema considerado com comportamento elástico linear.

À medida que a metodologia foi elucidada, foi foco do presente estudo a implementação computacional que, na prática, realize a análise de estruturas dentro de condições bem estabelecidas e que permita identificar quais as limitações e nível de precisão do algoritmo apresentado.

Dessa forma, o resultado final trouxe análises comparativas entre os resultados obtidos por meio de uma nova ferramenta implementada em *MS-Excel* aliada a algoritmos em *Visual Basic for Applications (VBA)*; em relação a ferramenta elaborada pelo Prof. Dr. Luiz Fernando Martha (PUC – Rio), voltado para a análise de estruturas planas e que está fundamentado no Método da Rigidez.

A metodologia estudada e que fundamentou este trabalho de conclusão de curso é o Método dos Elementos Finitos. Após o detalhamento da teoria bem como a implementação computacional com resultados confiáveis, buscou-se investigar por meio de exemplos, a influência das condições gerais da estrutura, observando o comportamento dos resultados para estruturas com diferentes níveis de hiperestaticidade, número de nós e tipos de carregamento.

Por fim, também foi objetivo deste trabalho que o desenvolvimento de uma ferramenta simples e apta a funcionar em máquinas que possuam um software de planilhas corrobore a praticidade de estudos da engenharia de estruturas como, por exemplo, a viabilidade de estudos paramétricos que alcancem resultados otimizados de dimensionamento do ponto de vista do consumo de materiais.

De maneira sintética, os objetivos desse trabalho foram:

1. Desenvolver uma ferramenta em *MS-Excel* e *VBA* para o cálculo de estruturas aperticadas considerando um comportamento elástico linear;
2. Comparar os resultados obtidos através da ferramenta proposta em relação aos resultados do software *FTOOL®*;
3. Estudar e analisar diferentes configurações de estruturas de pórticos;
4. Estudar os efeitos das condições gerais do esquema estático frente a teoria utilizada para a análise estrutural:
 - Grau da função de aproximação (ou forma);
 - Tipos de carregamentos;
 - Condições de vinculação;
 - Densidade da malha;
5. Corroborar estudos paramétricos que busquem otimizar o dimensionamento de estruturas.

1.2 JUSTIFICATIVA

A necessidade da análise de estruturas em um tempo cada vez menor tem sido uma demanda crescente tendo em vista a gama de softwares comerciais que se propõem a este fim, auxiliando escritórios de engenharia com seus projetos. Neste contexto, os métodos numéricos e, mais especificamente, o método dos elementos finitos vem sendo largamente implementado nos softwares de análise estrutural.

Os motivos para utilização do método aqui em questão estão relacionados com:

- (a) Permitir uma análise paramétrica de estruturas, avaliando diversos cenários em um curto intervalo de tempo;
- (b) Sua teoria preconiza uma descrição simplificada da geometria de uma estrutura por elementos de barra;
- (c) Ser compatível com estruturas que possuam mais de um tipo de material e/ou seção transversal;
- (d) Permitir o lançamento de condições de carregamento diversas: carregamentos pontuais ou carregamentos distribuídos;

Neste trabalho, a bibliografia apresentada aprofundou-se ao nível da análise estrutural de pórticos planos, sendo estudadas as duas condições que o antecedem: análise de treliças

e vigas com rigidez, respectivamente, axial e transversal, sendo as estruturas aporticadas formadas por barras com ambas as rigidezes.

A justificativa que fundamenta a escolha de uma análise de pórticos planos se relaciona com sua vasta aplicação no âmbito da engenharia civil, tendo serventia para análises estruturais de treliças, vigas, escadas, estruturas de contraventamento e até mesmo auxiliar nas análises de vento e estabilidade global de edificações.

A teoria do Método dos Elementos Finitos que foi apresentada nos capítulos deste trabalho, bem como a implementação computacional, foi desenvolvida para elementos de barra descritos por dois nós, cada um com a seguinte condição de graus de liberdade (GDL), a depender da rigidez analisada:

- Treliças: elementos finitos com 2 nós com 1 grau de liberdade cada nó;
- Vigas: elementos finitos com 2 nós com 2 graus de liberdade cada nó;
- Pórticos planos: elementos finitos com 2 nós com 3 graus de liberdade cada nó.

De maneira geral, os tipos variáveis utilizados nesta implementação correspondem ao tipo *Variant* que armazenam informações de matrizes e listas de qualquer tipo de dado (SILVA, 2009) sendo esses, na maioria das vezes, do tipo *Double* e em algumas situações do tipo *String*, quando há a manipulação de matrizes simbólicas referentes às equações da matriz de transformação de coordenadas, das matrizes de rigidez ou das matrizes de função de forma e suas derivadas.

Neste contexto, justifica-se a escolha do software comercial *MS-Excel* por causa da sua popularidade no âmbito da engenharia civil, sendo muito comum seu uso nos mais diversos escritórios de engenharia do país e viabilizando que o algoritmo desenvolvido possa ser utilizado por qualquer um que já possua o software de planilhas, não sendo necessária nenhuma instalação.

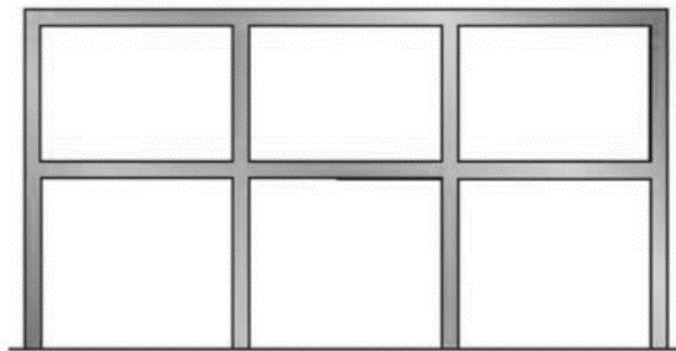
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 ANÁLISE ESTRUTURAL

Como parte inerente ao dimensionamento e detalhamento de estruturas, a etapa de determinação dos deslocamentos e forças atuantes na estrutura é chamada de análise estrutural, uma vez que ela identificará o comportamento da estrutura que está sendo projetada (LIMA, 2017).

Segundo Dias, (1997), o cálculo de estruturas reais torna-se demasiadamente complexo e, portanto, é consenso a utilização de modelos simplificados teóricos, onde barras são substituídas por linhas de eixo que se ligam entre si por meio dos vínculos. Ainda segundo o autor, toda estrutura é formada por barras que, quando vinculadas entre si, constituem um pórtico tridimensional e caso a estrutura seja formada por barras coplanares submetidas a carregamentos neste mesmo plano, têm-se a definição de um pórtico plano.

Figura 1: Estrutura aporticada típica de um prédio



Fonte: HIBBELER (2013).

Com o objetivo de substituir o cálculo de estruturas pelo método analítico de equações em derivadas parciais de modelos matemáticos, surgiram os métodos discretos, numéricos ou aproximados, que solucionam a problemática em questão através de um sistema de equações algébricas (SORIANO, 2003). De acordo com o autor, destacam-se, cronologicamente, os métodos de diferenças finitas, de elementos finitos e de elementos de contorno e deve-se salientar que cada um destes métodos tem maior adequação a situações

específicas, entretanto, o método dos elementos finitos é o que se aplica de forma mais ampla, simples e eficiente posto a necessidade da análise estrutural.

De maneira introdutória, Chandrupatla e Belegundu (2014) descrevem o método dos elementos finitos como a transformação de uma região complexa de um meio contínuo em formas geométricas simples e discretas, chamadas elementos finitos, de forma que as propriedades dos materiais e as interações devam ser consideradas sobre todos os elementos expressando valores conhecidos em pontos específicos dos mesmos. A partir da montagem e posicionamento adequado dos dados de carregamento e vinculação têm-se um conjunto de equações cujos resultados fornecem o comportamento aproximado do meio contínuo analisado.

2.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Neste trabalho adotou-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) entendendo-se que numa estrutura em equilíbrio, quando imposto um campo de deslocamentos virtuais compatíveis, o trabalho realizado pelas forças reais externas sobre os deslocamentos virtuais é igual ao trabalho das tensões reais internas sobre as deformações virtuais (Pitangueira, 2016). Sinteticamente, pode-se escrever a equação:

$$\delta W_i = \delta W_e \quad (1)$$

Em que:

- δW_i é o trabalho das forças internas e;
- δW_e é o trabalho das forças externas.

Segundo Macedo (2020), o Método dos Elementos Finitos (MEF) parte do pressuposto de que o deslocamento de um ponto qualquer de um elemento finito pode ser obtido em função dos deslocamentos nodais deste mesmo elemento. Desta afirmação, é razoável que:

$$\{u^{el,i}\} = [N]\{a^{el,i}\} \quad (2)$$

Em que:

- $\{u^{el,i}\}$ é o vetor de deslocamentos no interior do elemento “i”;
- $[N]$ é a matriz das funções de interpolação do elemento finitos (função de forma) e;
- $\{a^{el,i}\}$ é o vetor de deslocamentos nodais do elemento “i”.

Dias (2014), expõe que a deformação pode ser exprimida pela razão entre a variação de um comprimento em relação ao seu comprimento inicial. Assim:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_1}{\partial x}$$

$$\{\varepsilon^{el,i}\} = [S]\{u^{el,i}\} \quad (3)$$

Em que:

- $[S]$ é a matriz de operação linear das derivadas parciais espaciais.

Se feito a substituição da Equação (2) em (3) tem-se:

$$\{\varepsilon^{el,i}\} = [S][N]\{a^{el,i}\}$$

$$\{\varepsilon^{el,i}\} = [B]\{a^{el,i}\} \quad (4)$$

Em que:

- $[B] = [S][N]$ a matriz das derivadas parciais espaciais das funções de interpolação.

Resgatando a relação de rigidez utilizada no método dos deslocamentos, Azevedo (2003) lembra que os deslocamentos nodais de um elemento são proporcionais as forças nele aplicadas tendo em vista sua rigidez. Assim:

$$[k^{el,i}]\{a^{el,i}\} = \{F^{el,i}\} \quad (5)$$

Em que:

- $[k^{el,i}]$ é a matriz de rigidez do elemento “i” e;
- $\{F^{el,i}\}$ é o vetor de carregamento externo nodal sobre o elemento “i”;

E, segundo Barros (2004), para uma estrutura considerada em estado de plano de tensões, ou seja, for geometricamente plana e com tensão normal nula ao seu plano, pode-se definir a matriz de elasticidade deste elemento pela relação, desprezando-se a componente da variação de temperatura:

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Sendo possível concluir a seguinte expressão para o tensor de tensões:

$$[\sigma^{el,i}] = [D]\{\varepsilon^{el,i}\} \quad (6)$$

Em que:

- E é o módulo de elasticidade do material;

- ν é o coeficiente de Poisson;
- $[D]$ é a matriz de elasticidade;
- $[\sigma^{el,i}]$ é o tensor de tensões do elemento “i”.

Obedecendo o Princípio dos Trabalhos Virtuais, tem-se a equação a seguir e que após a substituição de (4) se torna (7).

$$\{a^{el,i}\}\{F^{el,i}\} = \int_{el,i} \{\varepsilon^{el,i}\}^T \{\sigma^{el,i}\} dVol$$

$$\{F^{el,i}\} = \int_{el,i} [B]^T \{\sigma^{el,i}\} dVol \quad (7)$$

Com a substituição de (4) em (6), tem-se:

$$[\sigma^{el,i}] = [D][B]\{a^{el,i}\} \quad (8)$$

E atribuindo-se esse resultado à Equação (7):

$$\{F^{el,i}\} = \int_{el,i} [B]^T [D][B]\{a^{el,i}\} dVol \quad (9)$$

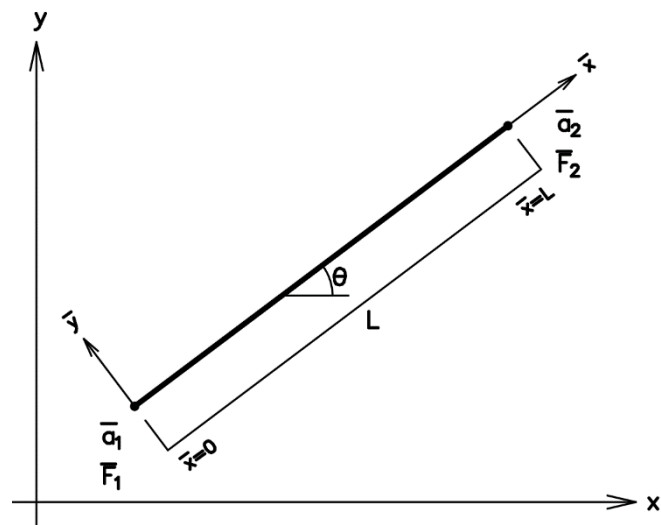
Por fim, a partir das Equações (5) e (9) é possível deduzir que a matriz de rigidez do elemento pode ser expressa através da Equação (10), como indicado por Macedo (2020).

$$[k^{el,i}] = \int_{el,i} [B]^T [D][B] dVol \quad (10)$$

2.3 MATRIZ DE RIGIDEZ PARA ESFORÇOS AXIAIS

Considerando-se uma barra reta cuja seção transversal se mantém constante e que esteja submetida a um carregamento concentrado axial nas suas extremidades, indubitavelmente o elemento sofrerá uma variação no seu comprimento (SOUZA, 2014).

Figura 2: Elemento de barra com rigidez axial



Fonte: o Autor.

Em que:

- L é o comprimento da barra;
- θ é o ângulo da barra em relação ao sistema de coordenadas globais medido no sentido anti-horário;
- \bar{F}_i são as forças nodais em coordenadas locais;
- \bar{a}_i são os deslocamentos nodais em coordenadas locais;
- \bar{x} e \bar{y} são os eixos do sistema de coordenadas locais da barra.

Inicialmente, deve-se determinar a matriz função de forma dos elementos incorporada a Equação (10) por meio da matriz [B]. Dias (2014) sugere que o campo de deslocamentos axial possa ser escrito como:

$$\bar{u}_x(\bar{x}) = N_1(\bar{x})\bar{a}_1 + N_2(\bar{x})\bar{a}_2 \quad (11)$$

Em que:

- $N_1(\bar{x})$ e $N_2(\bar{x})$ são as funções interpoladoras ou funções de forma.

De acordo com a Figura 2 e dadas as condições de contorno do elemento:

$$\bar{u}_x(\bar{x} = 0) = \bar{a}_1$$

$$\bar{u}_x(\bar{x} = L) = \bar{a}_2$$

É possível inferir que:

$$N_1(\bar{x} = 0) = 1$$

$$N_2(\bar{x} = L) = 1$$

De acordo com Macedo (2020), são diversas as possibilidades de solução para estas funções, entretanto a mais simples e que chama a atenção é dada por um conjunto de polinômios lineares, assim:

$$N_1(\bar{x}) = c_0 + c_1(\bar{x})$$

$$N_2(\bar{x}) = d_0 + d_1(\bar{x})$$

E, a partir das condições de contorno já declaradas, conduzem para a seguinte solução de coeficientes:

$$N_1(\bar{x}) = 1 - \frac{\bar{x}}{L}$$

$$N_2(\bar{x}) = \frac{\bar{x}}{L}$$

Recorrendo-se a matriz [B] definida na Equação (4) e simplificada para o caso conhecido como relativo aos elementos estruturais de treliça, em que existem apenas esforços e deslocamentos normais no eixo do elemento de barra, é possível escrever:

$$[B] = [S][N] = \left[\frac{\partial}{\partial x} \right] \left[1 - \frac{\bar{x}}{L} \quad \frac{\bar{x}}{L} \right] = \left[-\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right] \quad (12)$$

Além disso, a matriz de elasticidade pode ser simplificada já que as dimensões da seção transversal são pequenas em relação ao comprimento da barra, sendo possível desprezar o efeito das tensões normais (AZEVEDO, 2003, p.197).

$$[D] = E \quad (13)$$

O próximo passo é substituir as Equações (12) e (13) na expressão da matriz de rigidez deduzida em (10) ao passo da resolução do produto dentro da integral, assim:

$$[B]^T [D] [B] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{L^2} & -\frac{E}{L^2} \\ -\frac{E}{L^2} & \frac{E}{L^2} \end{bmatrix}$$

Por fim, solucionando a integral obtém-se a matriz de rigidez para elementos com rigidez axial:

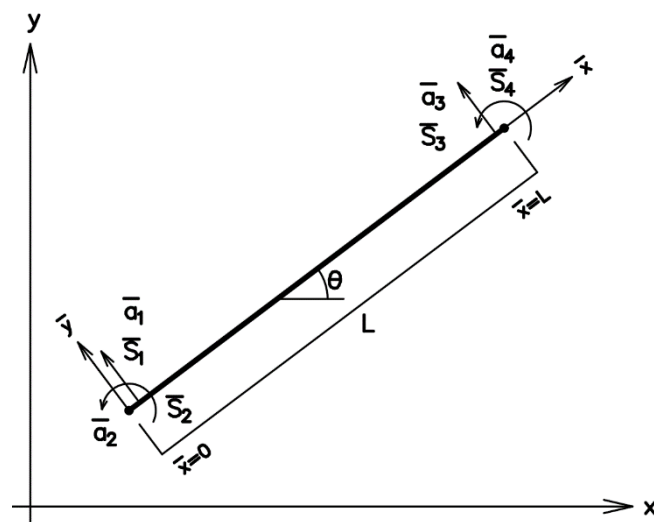
$$[k^{el,i}] = \int_{el,i} [B]^T [D] [B] dVol = \begin{bmatrix} \frac{E}{L^2} & -\frac{E}{L^2} \\ \frac{E}{L^2} & \frac{E}{L^2} \end{bmatrix} \int_{el,i} dVol$$

$$[k^{el,i}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \quad (14)$$

2.4 MATRIZ DE RIGIDEZ PARA ESFORÇOS DE FLEXÃO

Considerando-se um elemento de barra com rigidez transversal com carregamento e deslocamento normal ao seu próprio eixo, isto é, perpendicular a barra têm-se as tensões oriundas do momento fletor que se instala (DIAS, 2014).

Figura 3: Elemento de barra com rigidez transversal



Fonte: o Autor.

Em que:

- L é o comprimento da barra;
- θ é o ângulo da barra em relação ao sistema de coordenadas globais medido no sentido anti-horário;
- \bar{S}_i são as forças e momentos nodais em coordenadas locais;
- \bar{a}_i são os deslocamentos e rotações nodais em coordenadas locais;
- \bar{x} e \bar{y} são os eixos do sistema de coordenadas locais da barra.

O procedimento de dedução da matriz de rigidez para o caso em questão, conhecido como relativo às estruturas de vigas, é semelhante ao já descrito caso das treliças com passo a passo equivalente. Macedo (2020), sugere a adoção do seguinte campo de deslocamentos:

$$\bar{u}_y(\bar{x}) = N_1(\bar{x})\bar{a}_1 + N_2(\bar{x})\bar{a}_2 + N_3(\bar{x})\bar{a}_3 + N_4(\bar{x})a_4 \quad (15)$$

Em que:

- $N_1(\bar{x})$, $N_2(\bar{x})$, $N_3(\bar{x})$ e $N_4(\bar{x})$ são as funções interpoladoras ou funções de forma.

Uma vez que não há rigidez e carregamentos axiais, não há campo de deslocamentos nesta direção.

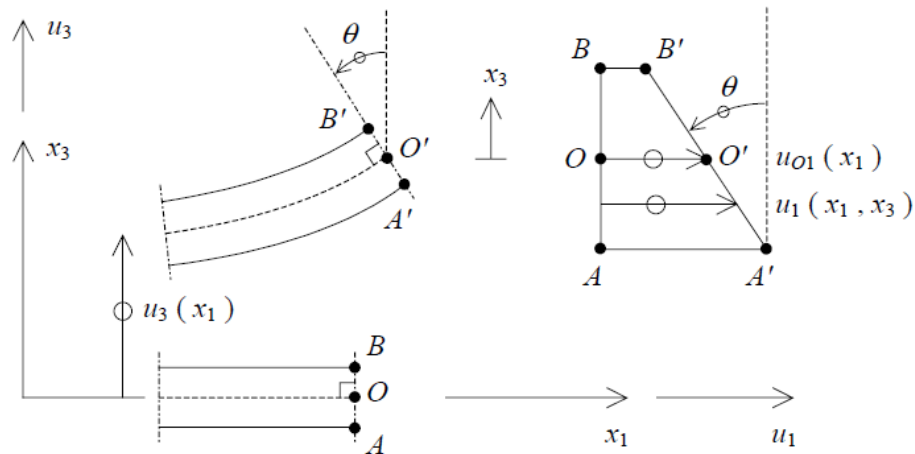
Segundo Azevedo (2005), para uma barra submetida a flexão plana os deslocamentos angulares podem ser considerados pequenos o suficiente da utilização da aproximação:

$$\tan \theta_b \cong \theta_b$$

Em que:

- θ_b é o ângulo de rotação da barra deformada.

Figura 4: Barra deformada e deslocamentos da seção transversal



Fonte: AZEVEDO (2003)

Além disso, vale destacar que uma vez feita a aproximação acima tem-se a equação da deformada em função apenas de x .

$$\theta(x) = \frac{da_i}{dx}$$

Ou seja,

$$a_2(\bar{x}) = \frac{da_1}{d\bar{x}}$$

$$a_4(\bar{x}) = \frac{da_3}{d\bar{x}}$$

De acordo com a Figura 3 e dadas as condições de contorno do elemento, tem-se:

$$\bar{u}_y(\bar{x} = 0) = \bar{a}_1$$

$$\frac{d\bar{u}_y}{d\bar{x}}(\bar{x} = 0) = \bar{a}_2$$

$$\bar{u}_y(\bar{x} = L) = \bar{a}_3$$

$$\frac{d\bar{u}_y}{d\bar{x}}(\bar{x} = L) = \bar{a}_4$$

De maneira análoga àquela adotada à matriz de rigidez axial em que na condição de 2 graus de liberdade adotou-se uma equação linear com 2 coeficientes, agora, para este caso adota-se como solução das funções de forma polinômios de terceiro grau com 4 coeficientes, dado os 4 quatro graus de liberdade do elemento de barra. Assim:

$$N_1(\bar{x}) = c_0 + c_1\bar{x} + c_2\bar{x}^2 + c_3\bar{x}^3$$

$$N_2(\bar{x}) = d_0 + d_1\bar{x} + d_2\bar{x}^2 + d_3\bar{x}^3$$

$$N_3(\bar{x}) = e_0 + e_1\bar{x} + e_2\bar{x}^2 + e_3\bar{x}^3$$

$$N_4(\bar{x}) = f_0 + f_1\bar{x} + f_2\bar{x}^2 + f_3\bar{x}^3$$

De acordo com Chandrupatla e Belegundu (2014), as condições de contorno das expressões supra indicadas devem satisfazer as condições descritas na Tabela 1 a seguir:

Tabela 1: Condições de contorno das funções de forma para vigas

	N_1	N_1'	N_2	N_2'	N_3	N_3'	N_4	N_4'
$x=0$	1	0	0	1	0	0	0	0
$X=1$	0	0	0	0	1	0	0	1

Dadas essas condições, as funções assumem a seguinte forma:

$$N_1(\bar{x}) = 2 \left(\frac{\bar{x}}{L} \right)^3 - 3 \left(\frac{\bar{x}}{L} \right)^2 + 1$$

$$N_2(\bar{x}) = \frac{\bar{x}^3}{L^2} - \frac{2\bar{x}^2}{L} + x$$

$$N_3(\bar{x}) = -2 \left(\frac{\bar{x}}{L} \right)^3 + 3 \left(\frac{\bar{x}}{L} \right)^2$$

$$N_4(\bar{x}) = \frac{\bar{x}^3}{L^2} - \frac{\bar{x}^2}{L}$$

Azevedo (2003), elucida as condições das características das barras após sua deformação uma vez admitido que uma seção plana se mantém plana após a deformação e que o ponto situado no eixo do elemento se comporta como centro de rotação da seção. Dentro dessas condições, é possível definir que:

$$\sigma^{el,i} = -E \frac{d^2 \bar{u}_y}{d\bar{x}^2} y \quad (16)$$

Para esta condição de tensão, a matriz de rigidez assume a forma de uma integral dupla na área e no comprimento.

$$[k^{el,i}] = \int_{el,i} y^2 [B]^T [D] [B] dVol$$

$$[k^{el,i}] = \int_0^L [B]^T [D] [B] \int_A y^2 dA dx \quad (17)$$

A integral na área apresentada é, por definição, o momento de inércia em relação ao eixo horizontal da viga. Assim:

$$I_z = \int_A y^2 dA \quad (18)$$

Sendo, portanto, $[B]$ definida para este caso por:

$$[B] = \left[-\frac{d^2 N_1}{dx^2} \quad -\frac{d^2 N_2}{dx^2} \quad -\frac{d^2 N_3}{dx^2} \quad -\frac{d^2 N_4}{dx^2} \right] \quad (19)$$

De posse dessas funções, procede-se com a solução da matriz $[B]$.

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} & \frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \\ \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} & \frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} & \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \\ \frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} & \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} \\ \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} & \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} & \frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} \end{bmatrix}$$

Substituindo as funções obtidas no produto existente na integral deduzida na Equação (10):

$$[B]^T [D] [B] = \begin{bmatrix} \frac{6}{L^2} - \frac{12\bar{x}}{L^3} \\ \frac{4}{L} - \frac{6\bar{x}}{L^2} \\ \frac{12\bar{x}}{L^3} - \frac{6}{L^2} \\ \frac{2}{L} - \frac{6\bar{x}}{L^2} \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} \frac{6}{L^2} - \frac{12\bar{x}}{L^3} & \frac{4}{L} - \frac{6\bar{x}}{L^2} & \frac{12\bar{x}}{L^3} - \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} - \frac{6\bar{x}}{L^2} \\ \frac{4}{L} - \frac{6\bar{x}}{L^2} & \frac{12\bar{x}}{L^3} - \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} - \frac{6\bar{x}}{L^2} & \frac{6}{L^2} - \frac{12\bar{x}}{L^3} \\ \frac{12\bar{x}}{L^3} - \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} - \frac{6\bar{x}}{L^2} & \frac{6}{L^2} - \frac{12\bar{x}}{L^3} & \frac{4}{L} - \frac{6\bar{x}}{L^2} \\ \frac{2}{L} - \frac{6\bar{x}}{L^2} & \frac{6}{L^2} - \frac{12\bar{x}}{L^3} & \frac{4}{L} - \frac{6\bar{x}}{L^2} & \frac{12\bar{x}}{L^3} - \frac{6}{L^2} \end{bmatrix}$$

$$[B]^T [D] [B] = E \begin{bmatrix} \frac{36(L-2\bar{x})^2}{L^6} & \frac{12(2L-3\bar{x})(L-2\bar{x})}{L^5} & -\frac{36(2\bar{x}-L)^2}{L^6} & \frac{12(L-3\bar{x})(L-2\bar{x})}{L^5} \\ \frac{4(2L-3\bar{x})^2}{L^4} & -\frac{12(2L-3\bar{x})(L-2\bar{x})}{L^5} & \frac{36(L-2\bar{x})^2}{L^6} & \frac{4(L-3\bar{x})(2L-3\bar{x})}{L^4} \\ \frac{6(2\bar{x}-L)}{L^3} & \frac{4(L-3\bar{x})^2}{L^4} & \frac{6(2\bar{x}-L)}{L^3} & \frac{4(L-3\bar{x})^2}{L^4} \\ \text{Sim.} & & & \end{bmatrix} \quad (20)$$

Finalmente, substituindo-se (18) e (20) em (17) e realizando a integral no comprimento do elemento, tem-se a seguinte matriz de rigidez:

$$[k^{el,i}] = I_z E \int_0^L [B]^T [D] [B] dx$$

$$[k^{el,i}] = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 4 & -\frac{6}{L} & 2 \\ -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 2 & -\frac{6}{L} & 4 \end{bmatrix} \quad (21)$$

2.5 MATRIZ DE RIGIDEZ DE PÓRTICOS PLANOS

Dadas as condições obtidas nos itens anteriores, a matriz de rigidez de um elemento de pórtico pode ser escrita a partir da união das Equações (14) e (21). Além disso, como descrito na Equação (5), os deslocamentos nodais da estrutura bem como as forças externas

aplicadas na mesma, podem ser obtidos de maneira direta, uma vez que o PTV seja obedecido. Lima (2017, p.19) confirma matriz de rigidez contida na equação abaixo.

$$[k^{el,i}]\{\bar{a}^{el,i}\} = \{\bar{F}^{el,i}\}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \\ \bar{a}_3 \\ \bar{a}_4 \\ \bar{a}_5 \\ \bar{a}_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{S}_1 \\ \bar{S}_2 \\ \bar{S}_3 \\ \bar{S}_4 \\ \bar{S}_5 \\ \bar{S}_6 \end{Bmatrix}$$

3. METODOLOGIA

A metodologia utilizada para o desenvolvimento deste trabalho, seguiu as seguintes etapas: a revisão bibliográfica do Método dos Elementos Finitos (MEF), o desenvolvimento de funções auxiliares que viabilizem a utilização de um software de planilhas como plataforma base do algoritmo de análise estrutural, a implementação computacional do módulo gerador da malha que refine a análise estrutural, a implementação do módulo de análise estrutural, a análise estrutural de exemplos e a comparação dos resultados obtidos em relação aos resultados do software FTOOL®.

A revisão bibliográfica relatada neste trabalho compreende a teoria do Método dos Elementos Finitos e foca nas soluções matemáticas adequadas para a análise estrutural de pórticos com rigidez axial e transversal com elementos finitos descritos apenas por 2 nós, um de origem e outro de destino. Além disso, desconsiderou-se as deformações transversais e adotou-se a hipótese de comportamento elástico linear dos materiais.

Para a implementação das funções auxiliares, utilizou-se a ferramenta Visual Basic integrada ao *MS-Excel* na linguagem *Visual Basic for Applications (VBA)* que permite a criação de funções e rotinas definidas pelo usuário. Estas funções foram implementadas a fim de permitir a manipulação de equações matriciais de forma literal e compõem o Módulo 2 da aplicação.

O algoritmo responsável pela geração da malha também foi desenvolvido em VBA e corresponde ao Módulo 1 da aplicação, sendo seu objetivo a criação de sub nós intermediários entre o par de nós de início e fim que definem um elemento finito.

A implementação do Método dos Elementos Finitos propriamente dito se encontra no Módulo 3 da solução em VBA. É nesse arquivo que estão escritas as funções e rotinas que, com base nos dados de entrada, calculam os deslocamentos, as reações e os esforços internos.

Os exercícios de aplicação e teste da ferramenta proposta em *MS-Excel*, aqui nomeada como xITool, foram realizados selecionando-se diferentes casos de carregamento, número de barras e hiperestaticidade. Desta forma, cinco exemplos de aplicação foram desenvolvidos cujos resultados se encontram na Seção 5. deste trabalho, sendo eles:

- Viga simplesmente apoiada com carregamento uniformemente distribuído;
- Lance e patamar de escada biapoiado com carregamento longitudinal e transversal uniformemente distribuídos;

- Viga contínua com carregamentos concentrados nos nós;
- Pórtico tipo trave com carregamento uniformemente distribuído;
- Pórtico de dois pavimentos com carregamentos concentrados horizontais.

Uma vez analisados os exemplos acima, os resultados de deslocamentos, reações, momentos fletores, esforços cortantes e normais foram comparados aos da ferramenta FTOOL®.

4. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

4.1 ENTRADA DE DADOS

Como primeira etapa do processo de implementação, foi desenvolvida a interface de entrada de dados da estrutura a ser analisada, como mostrado na Tabela 2.

Tabela 2: Entrada de dados em MS Excel

Barra		Origem						Destino						F. Distribuídas		
N	Nó	Vinculação			F. Nodais			Nó	Vinculação			F. Nodais			Normal (N/mm)	Axial (N/mm)
		dX	dY	dZ	X	Y	Z		dX	dY	dZ	X	Y	Z		
...																

Material	Seção			
E	I	A	L	θ
(MPa)	(mm ⁴)	(mm ²)	(mm)	(°)

Fonte: o Autor.

As informações foram categorizadas de acordo com sua natureza, tais como as propriedades do material, propriedades geométricas da seção das barras, forças e as condições de vinculação.

Deve-se chamar a atenção para a necessidade do input manual dos pontos compartilhados entre as barras, devendo o usuário inserir os nós de maneira que a numeração dos nós seja contínua e sem vazios e que as suas condições de vinculação e carregamento não gerem ambiguidade ao interpretador.

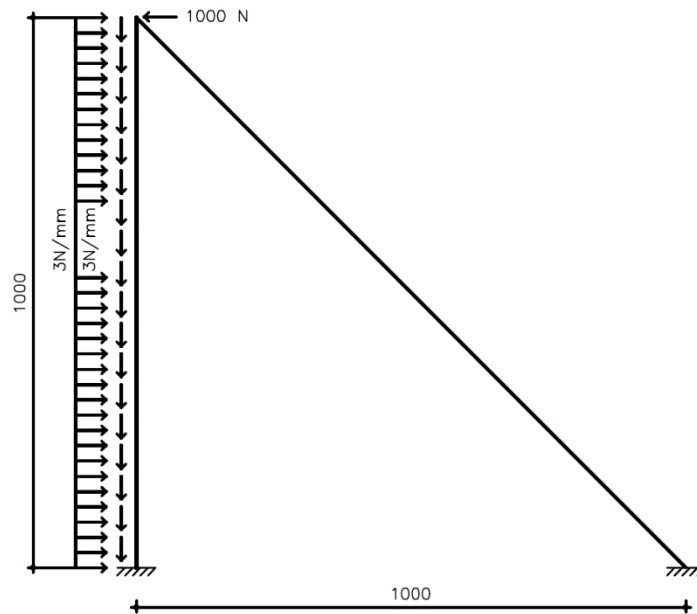
Uma vez definida a geometria da estrutura a partir da definição dos nós e comprimento das barras, procede-se com a inserção das condições de vinculação e carregamentos. A seção de vinculação está apta a qualquer condição bastando um input igual a "0" para restringir o movimento indicado na coluna dX e dY para translação e dZ para rotação.

A atribuição dos carregamentos na estrutura permite a inserção de cargas nodais e carregamentos distribuídos.

As cargas concentradas devem ser inseridas nas colunas da célula mesclada “F. Nodais” sendo seu referencial dado pelo sistema de coordenadas globais. Esta escolha de referencial foi feita em razão da necessidade de o carregamento ser inserido de maneira repetida em nós compartilhados (respeitando a não ambiguidade de interpretação do sistema) facilitando esta inserção para estruturas com barras com diferentes direções.

A Figura 5 abaixo apresenta o esquema estático definido pelas condições expostas na Tabela 3.

Figura 5: Exemplo - Esquema estático



Fonte: o Autor.

Tabela 3: Exemplo - Inserção de dados

Barra	Origem							Destino						F. Distribuídas			
	N	Nó	Vinculação			F. Nodais			Nó	Vinculação			F. Nodais			Normal (N/mm)	Axial (N/mm)
			dX	dY	dZ	X	Y	Z		dX	dY	dZ	X	Y	Z		
1	1	0	0	0				2				-1000	0	0	-3	-3	
2	2				-1000	0	0	3	0	0	0				0	0	

Material	Seção				
	E	I	A	L	θ
(MPa)	(mm ⁴)	(mm ²)	(mm)	(°)	
80000	833	100	1000	90	
80000	833	100	1410	-45	

Fonte: o Autor.

4.2 MÓDULO DE FUNÇÕES AUXILIARES

A fim de tornar a aplicação mais simples de ser implementada em MS Excel, desenvolveu-se *User Defined Functions* (UDFs) que permitem, sobretudo, a manipulação de equações em matrizes cujos elementos sejam equações literais. Segundo Hearn, conforme citado por Corrêa (2007, p. 21), esse tipo de computação é conhecido como computação simbólica, pois permite manipular expressões matemáticas de maneira simbólica.

A definição dos tipos de variáveis usadas neste trabalho se baseou na descrição de Souza (2009). O conceito de computação simbólica foi implementado de maneira simplificada, mantendo-se as equações como variáveis do tipo *string*, isto é, como representações de texto (SOUZA, 2009) e realizando-se as operações matemáticas entre os dados a partir da concatenação de caracteres a emulando um processo de operação matemática. A Tabela 4 traz as UDFs implementadas, seu objetivo ou retorno e seus parâmetros de entrada.

Tabela 4: User Defined Functions (UDF) simbólicas

Nome (tipo de dado)	Objetivo	Parâmetros (tipo de dado)
SomaDeMatrizes (<i>Variant</i>)	Retorna a soma entre duas matrizes.	vMatriz1 (<i>Variant</i>) vMatriz2 (<i>Variant</i>) ehFormula (<i>Boolean</i>) vOperacao (<i>String</i>)
ProdutoEscalar (<i>Variant</i>)	Retorna o produto entre uma matriz e um escalar.	vMatriz (<i>Variant</i>) vConstante (<i>Variant</i>) ehFormula (<i>Boolean</i>)
ProdutoDeMatrizes (<i>Variant</i>)	Retorna produto entre duas matrizes.	vMatriz1 (<i>Variant</i>) vMatriz2 (<i>Variant</i>) ehFormula (<i>Boolean</i>)

Fonte: o Autor.

Para complementar as UDFs simbólicas, foi necessário a implementação de funções que permitam utilizar os elementos de texto das matrizes como expressões matemáticas. A Tabela 5 traz as UDFs criadas.

Tabela 5: User Defined Functions Complementares

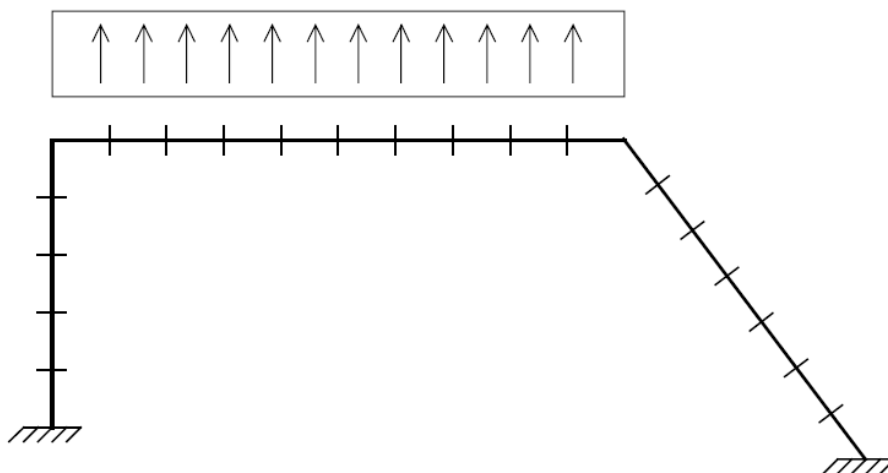
Nome (tipo de dado)	Objetivo	Parâmetros
SubstituirValor (<i>Variant</i>)	Retorna uma matriz após atribuir valores aos seus símbolos.	vMatriz (<i>Variant</i>) ehFormula (<i>Boolean</i>) texto1, ..., texto5 (<i>String</i>) valor1, ..., valor5 (<i>Double</i>)
IntegracaoDeMatriz (<i>Variant</i>)	Retorna uma matriz de valores após sua integração em relação a uma variável e intervalos definidos.	vMatriz (<i>Variant</i>) x (<i>String</i>) a, b (<i>Double</i>) n (<i>Double</i>)

Fonte: o Autor.

4.3 MÓDULO DE GERAÇÃO DA MALHA

De acordo com Azevedo (2003), a matriz das derivadas parciais espaciais das funções de interpolação, a matriz B, avalia apenas o ponto que se pretende calcular um momento fletor, por exemplo. Dessa forma, caso os deslocamentos sejam nulos em um elemento o momento fletor calculado também será, desprezando a contribuição das cargas em seu interior. Em razão deste fato, é necessário que uma barra seja discretizada em vários elementos finitos quando submetida a carregamentos distribuídos.

Figura 6: Discretização das barras de um pórtico



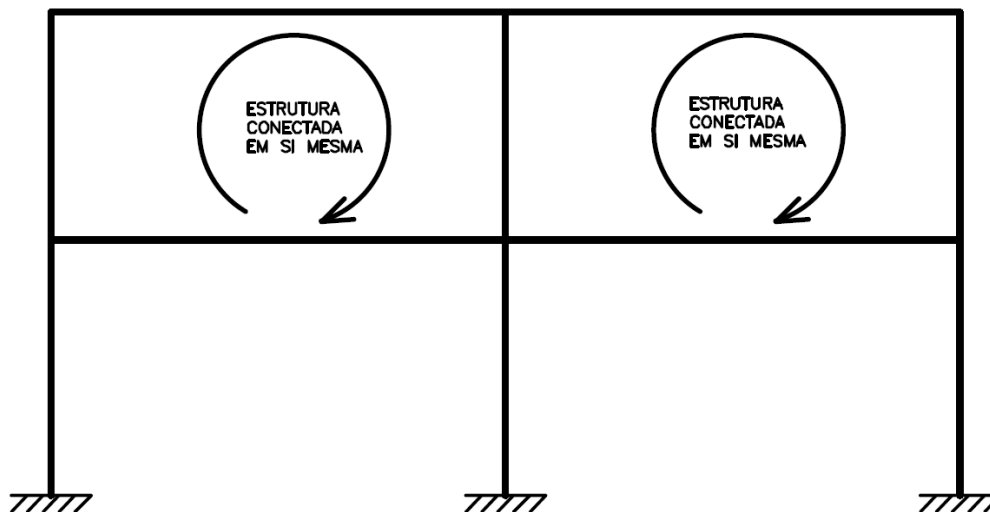
Fonte: Azevedo (2003).

Do ponto de vista de implementação computacional, o desafio foi manter a consistência do sistema quando subdividido em uma malha. Neste projeto, duas possibilidades de geração de malha estão disponíveis: definindo-se um comprimento fixo para os elementos finitos e, então, calculando o número de nós que surgem desta definição; ou atribuindo-se manualmente o número de nós de cada barra. É importante salientar que para a utilização da primeira opção de geração de malha, o comprimento total das barras principais deve ser múltiplo do comprimento adotado para os elementos finitos, garantindo-se o número de nós obtidos seja um número inteiro e maior que 2.

O módulo de geração de malha gera sub elementos com base nas condições definidas pelo usuário na aba de dados de entrada. Para isso, são mantidas as numerações criadas para os nós principais que definem as extremidades das barras e, então, são gerados sub barras com numeração não sequencial em relação aos nós principais. Isso significa que um nó subsequente a um nó principal i , caso seja um produto da geração da malha, não será dado por $i + 1$. Essa lógica de fato não contribui para uma leitura simples dos resultados,

entretanto não a adotar impediria a resolução de estruturas cuja geometria se conecta em si mesma. A Figura 7 ilustra um caso de estrutura onde a geometria acaba se unindo a si mesma, independentemente de ordem de lançamento das barras.

Figura 7: Estrutura com geometria conectada em si mesma



Fonte: o Autor.

Após a geração da lista de nós desejada, a aplicação define a numeração dos três graus de liberdade de cada nó, sendo sempre criados sequencialmente. Assim:

- GDL i é o deslocamento (q_i) ou força de reação horizontal (S_i) (coordenadas globais);
- GDL $i + 1$ é o deslocamento ($q_{i + 1}$) ou força de reação vertical ($S_{i + 1}$) (coordenadas globais);
- GDL $i + 2$ é a rotação ($q_{i + 2}$) ou momento fletor de reação ($S_{i + 2}$) (coordenadas globais).

Por fim, na aba de malha são geradas as variáveis de deslocamento (q) e reação (S) de acordo com as condições impostas na aba de dados de entrada e que serão utilizadas pelo funções de obtenção de resultados.

4.4 MÓDULO DE ANÁLISE ESTRUTURAL

Para a análise estrutural propriamente dita, optou-se por subdividir cada processo em uma rotina específica, sendo elas:

- GerarMatrizDeRigidezDosElementos
- EspalharMatrizesDeRigidez

- GerarMatrizDeForcasNodaisDosElementos
- GerarMatrizDeForcasDistribuidaDosElementos
- EspalharMatrizesDeCarregamentos
- GerarMatrizDeDeslocamentosDosElementos
- EspalharMatrizesDeDeslocamento
- ObterDeslocamentos
- ObterReacoes
- ObterMomentosFletores
- ObterCortantes
- ObterNormal

De maneira geral, a aplicação primeiro calcula e gera as matrizes que irão compor o sistema de equações lineares a ser solucionado e então posiciona cada elemento a_{ij} em seu respectivo lugar baseado no grau de liberdade daquele elemento, processo conhecido como espalhamento. A seguir, os sistemas são de fato solucionados nas funções de obtenção de resultados.

4.4.1 Matriz de transformação de coordenadas

Para viabilizar a capacidade de análise de pórticos planos, é necessário que a aplicação esteja apta a converter a geometria inserida em coordenadas polares para coordenadas cartesianas em relação a um eixo de coordenadas globais. Dessa forma, a matriz que relaciona o módulo e ângulo inseridos com coordenadas bidimensionais é dada pela Equação (22) como exemplificado por Leitão (2014, p.24) para o caso de pórticos.

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Além da sua aplicabilidade para geração da matriz de rigidez em coordenadas globais, sua aplicação também é necessária para obtenção dos deslocamentos em coordenadas locais para, então, o cálculo dos esforços internos: momentos fletores, esforço cortante e normal.

4.4.2 Matriz de rigidez

O cálculo das matrizes de rigidez de cada elemento é dado pela seguinte expressão (AZEVEDO, 2003, p. 36):

$$[k^{el,i}] = [T^t][\bar{k}^{el,i}][T]$$

Em que:

- $[\bar{k}^{el,i}]$ é a matriz de rigidez em coordenadas locais;
- $[k^{el,i}]$ é a matriz de rigidez em coordenadas globais.

Após a obtenção de cada elemento a_{ij} , a aplicação os posiciona por meio do processo de espalhamento. Nesta etapa, as matrizes 6x6 geradas são lidas como 4 blocos de matrizes 3x3, a fim de promover uma melhor manipulação dos elementos, uma vez que cada nó possui 3 graus de liberdade enumerados sequencialmente. A Tabela 6 abaixo ilustra a lógica empregada.

Tabela 6: Espalhamento das matrizes de rigidez

Graus de liberdade	i	$i + 1$	$i + 2$	j	$j + 1$	$j + 2$
i	$a_{i,i}$	$a_{i,i+1}$	$a_{i,i+2}$	$a_{i,j}$	$a_{i,j+1}$	$a_{i,j+2}$
$i + 1$	$a_{i+1,i}$	$a_{i+1,i+1}$	$a_{i+1,i+2}$	$a_{i+1,j}$	$a_{i+1,j+1}$	$a_{i+1,j+2}$
$i + 2$	$a_{i+2,i}$	$a_{i+2,i+1}$	$a_{i+2,i+2}$	$a_{i+2,j}$	$a_{i+2,j+1}$	$a_{i+2,j+2}$
j	$a_{j,i}$	$a_{j,i+1}$	$a_{j,i+2}$	$a_{j,j}$	$a_{j,j+1}$	$a_{j,j+2}$
$j + 1$	$a_{j+1,i}$	$a_{j+1,i+1}$	$a_{j+1,i+2}$	$a_{j+1,j}$	$a_{j+1,j+1}$	$a_{j+1,j+2}$
$j + 2$	$a_{j+2,i}$	$a_{j+2,i+1}$	$a_{j+2,i+2}$	$a_{j+2,j}$	$a_{j+2,j+1}$	$a_{j+2,j+2}$

Fonte: o Autor.

Fica evidente que após a localização dos elementos destacados na tabela acima, a matriz 3x3 que se forma quando tal elemento é identificado como $a_{1,1}$ corresponde as posições subsequentes na matriz de rigidez global.

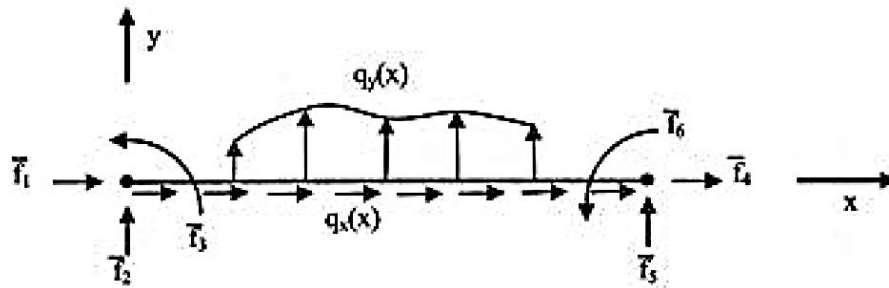
4.4.3 Vetor de carregamentos e reações

Os carregamentos nodais não sofrem manipulação, uma vez que devem ser inseridos em relação ao eixo de coordenadas globais.

Os carregamentos distribuídos, por sua vez, são substituídos por seus efeitos nos nodais equivalentes, ou seja, forças de engastamento perfeito. Segundo Lima (2017), as

forças de engastamento perfeito são aquelas que quando aplicadas às extremidades de um elemento carregado anulam os deslocamentos das suas extremidades. Tais carregamentos podem ser obtidos de forma direta pelo método das forças. A Figura 8 ilustra a teoria.

Figura 8: Forças aplicadas e de engastamento perfeito



Fonte: LIMA (2017).

Considerando as funções de forma obtidas nas seções 2.3 e 2.4 para carregamentos axiais e normal respectivamente, tem-se que:

$$\bar{f}_L^{el,i} = \int_0^L Nq \, dx$$

$$\bar{f}_L^{el,i} = \int_0^L \begin{bmatrix} N_{1,Axial} & 0 & 0 & N_{2,Axial} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,Normal} & N_{2,Normal} & 0 & N_{3,Normal} & N_{4,Normal} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} qx \\ qy \end{Bmatrix} dx$$

Após o processo de integração, o posicionamento destes resultados é somado aos carregamentos nodais já definidos pelo usuário. Desta maneira, cria-se o vetor de forças do sistema juntamente com as variáveis de reação a depender das vinculações atribuídas.

4.4.4 Vetor de deslocamentos/rotações

A matriz de deslocamentos, por sua vez, é dada majoritariamente por incógnitas geradas durante o módulo de geração de malha. Aqui também são utilizadas as condições de vinculação definidas pelo usuário, em que o deslocamento nulo significa a restrição do movimento de um grau de liberdade do nó.

4.4.5 Resolução do sistema de equações

A solução do sistema de equações se dá em duas partes a fim de viabilizar uma solução direta. Primeiramente, a aplicação seleciona as equações relevantes para o cálculo dos deslocamentos, soluciona o sistema através do Método da Matriz Inversa e, num segundo

momento, retorna os deslocamentos obtidos ao sistema original e obtém as reações incógnitas pelo Método da Substituição.

Vale destacar, que para a solução do sistema pelo Método da Matriz Inversa, o processo inclui a obtenção da matriz inversa de parte da matriz de rigidez global (elementos relevantes para o cálculo dos deslocamentos nodais), o que pode gerar alguma aproximação, uma vez que as funções nativas do *MS-Excel* trabalham com variáveis do tipo *double* e que retornam valores sujeitos a arredondamento (Microsoft, 2022).

4.4.6 Esforços internos

A última etapa do Módulo de Análise Estrutural consiste na obtenção dos esforços internos.

O primeiro passo neste processo consiste em converter os deslocamentos nodais obtidos em coordenadas globais para coordenadas locais. Desta forma:

$$\{\bar{a}^{el,i}\} = [T]\{a^{el,i}\} \quad (23)$$

De posse destes resultados procede-se para obtenção do esforço normal, cortante e momento fletor.

4.4.6.1 Momento fletor

Hibbeler (2010), traz a definição de momento fletor como sendo:

$$M = - \int_S \sigma y dS \quad (24)$$

Substituindo-se a Equação (15) e (16) em (24), é possível obter:

$$M = \int_S E \frac{d^2 \bar{u}_y}{d\bar{x}^2} y y dS$$

$$M = \int_S E [B] \{\bar{a}^{el,i}\} y y dS$$

$$M = E [B] \{\bar{a}^{el,i}\} \int_S y^2 dS$$

Pela definição de momento fletor dada na Equação (18) (AZEVEDO, 2003, p.221), tem-se:

$$M = EI[B]\{\bar{a}^{el,i}\}$$

Finalmente, atribuindo-se os valores já calculados da matriz $[B]$ para a função de interpolação para carregamentos normais ao elemento finito, obtém-se a Equação (25) compatibilizada com o vetor de deslocamentos para pórticos.

$$M = EI \left[0 \quad -\frac{6}{L^2} + \frac{12\bar{x}}{L^3} \quad -\frac{4}{L} + \frac{6\bar{x}}{L^2} \quad 0 \quad -\frac{12\bar{x}}{L^3} + \frac{6}{L^2} \quad -\frac{2}{L} + \frac{6\bar{x}}{L^2} \right] \{\bar{a}^{el,i}\} \quad (25)$$

Importante destacar que esta formulação fornece o momento fletor em qualquer ponto de um elemento finito em função da posição de interesse dentro de seus limites. A fim de comparar os resultados da aplicação em desenvolvimento com a de outros softwares, estruturou-se o algoritmo de maneira a permitir que sejam obtidos diversos momentos ao longo de um mesmo elemento finito, viabilizando a obtenção de diversos resultados mesmo quando solicitada uma malha mais esparsa.

4.4.6.2 Esforço cortante

Na prática, o esforço cortante pode ser calculado a partir da derivada do momento fletor (CHANDRUPATLA E BELEGUNDU, 2014, p.160). Assim:

$$[V] = EI \frac{d[B]}{d\bar{x}} \{\bar{a}^{el,i}\}$$

$$[V] = EI \left[0 \quad \frac{12}{L^3} \quad \frac{6}{L^2} \quad 0 \quad -\frac{12}{L^3} \quad \frac{6}{L^2} \right] \{\bar{a}^{el,i}\} \quad (26)$$

4.4.6.3 Esforço normal

Para o cálculo do esforço normal, parte-se das relações introduzidas nas Equações (3) e (6), além da definição de tensão dada pelo quociente entre uma força normal e sua superfície ou área de contato. A partir disso, Dias (2014) traz:

$$N = EA\varepsilon$$

$$N = EA[B]\{\bar{a}^{el,i}\}$$

Para $[B]$ obtido na Equação (12) compatibilizado com vetor de deslocamentos para análise do pórtico, tem-se:

$$N = EA \left[-\frac{1}{L} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{L} \quad 0 \quad 0 \right] \{\bar{a}^{el,i}\}$$

5. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção serão analisados exemplos de esquemas estáticos e seus resultados comparados com o software FTOOL®. Nestas análises, será observada a precisão do algoritmo em relação aos deslocamentos e esforços internos avaliando a influência da densidade da malha utilizada e verificando a precisão dos resultados dos momentos fletores dentro de um elemento finito, uma vez que a Equação (25) permite este cálculo em qualquer posição definida pelos nós de extremidade.

Como meio de quantificar a diferença entre os resultados da aplicação de referência e o xITool, utilizou-se a seguinte formulação para a diferença percentual:

$$\Delta_{dif} = \frac{xITool_{res} - FTOOL_{res}}{FTOOL_{res}} \% \quad (27)$$

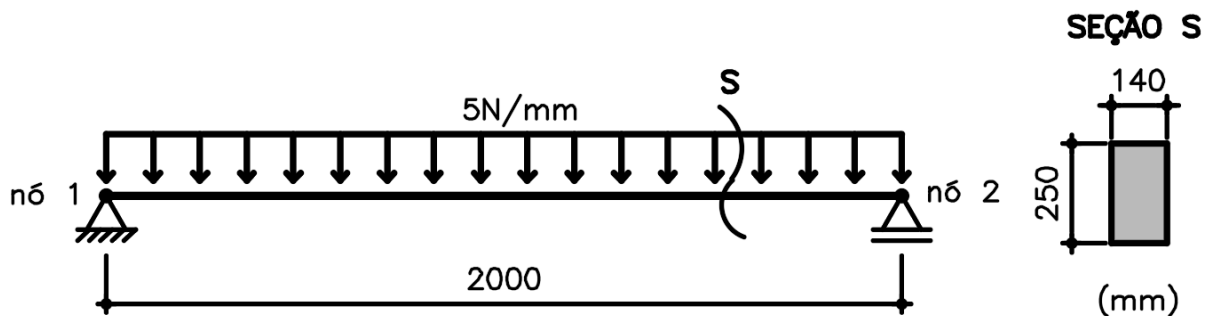
Em que:

- $FTOOL_{res}$ é o resultado obtido pelo software FTOOL®;
- $xITool_{res}$ é o resultado obtido pelo software implementado.

5.1 EXEMPLO 1

A Figura 9 retrata o esquema estático de uma viga simplesmente apoiada com vão entre apoios de 2 metros e carregada uniformemente com 5 N/mm. Considerou-se ainda, uma seção transversal com área de 350 cm², momento de inércia igual a 1,82 10⁴ cm⁴ e material com módulo de elasticidade próximo ao do concreto, E = 25000 MPa. Os dados de entrada com as condições de vinculação podem ser observados na Tabela 7.

Figura 9: Viga simplesmente apoiada com carregamento distribuído



Fonte: o Autor.

Tabela 7: Viga simplesmente apoiada com carregamento distribuído

Barra		Origem						Destino						F. Distribuídas		
N	Nó	Vinculação			F. Nodais			Nó	Vinculação			F. Nodais			Normal (N/mm)	Axial (N/mm)
		dX	dY	dZ	X	Y	Z		dX	dY	dZ	X	Y	Z		
1	1	0	0				0	2		0		0	0	-5	0	

Material	Seção			
E	I	A	L	θ
(MPa)	(mm ⁴)	(mm ²)	(mm)	(°)
25000	1,82E+08	35000	2000,00	0

Fonte: o Autor.

Como primeira etapa do estudo do funcionamento da aplicação, observou-se os resultados considerando-se malhas com diferentes espaçamentos sendo realizadas análises com 5 e 17 nós no total.

A Tabela 8 mostra os resultados obtidos para os deslocamentos e rotações da viga em questão. A partir dela, é possível notar que independentemente da malha utilizada, o cálculo dos deslocamentos dos nós é exato para a precisão até a quinta casa decimal numa escala milimétrica.

Tabela 8: Viga simplesmente apoiada - Deslocamentos

Nº Nós	5			17			FTOOL®		
	dX	dY	rZ	dX	dY	rZ	dX	dY	rZ
x	mm	mm	rad	mm	mm	rad	mm	mm	rad
0	0	0,00000	-0,00037	0	0,00000	-0,00037	0	0,00000	-0,00037
125				0	-0,04537	-0,00036	0	-0,04537	-0,00036
250				0	-0,08875	-0,00033	0	-0,08875	-0,00033
375				0	-0,12840	-0,00030	0	-0,12840	-0,00030
500	0	-0,16286	-0,00025	0	-0,16286	-0,00025	0	-0,16286	-0,00025
625				0	-0,19090	-0,00020	0	-0,19090	-0,00020
750				0	-0,21161	-0,00013	0	-0,21161	-0,00013
875				0	-0,22430	-0,00007	0	-0,22430	-0,00007
1000	0	-0,22857	0,00000	0	-0,22857	0,00000	0	-0,22857	0,00000
1125				0	-0,22430	0,00007	0	-0,22430	0,00007
1250				0	-0,21161	0,00013	0	-0,21161	0,00013
1375				0	-0,19090	0,00020	0	-0,19090	0,00020
1500	0	-0,16286	0,00025	0	-0,16286	0,00025	0	-0,16286	0,00025
1625				0	-0,12840	0,00030	0	-0,12840	0,00030
1750				0	-0,08875	0,00033	0	-0,08875	0,00033
1875				0	-0,04537	0,00036	0	-0,04537	0,00036
2000	0	0,00000	0,00037	0	0,00000	0,00037	0	0,00000	0,00037

Fonte: o Autor.

As reações obtidas também correspondem aos mesmos valores indicados pelo FTOOL®, como mostra a Tabela 9.

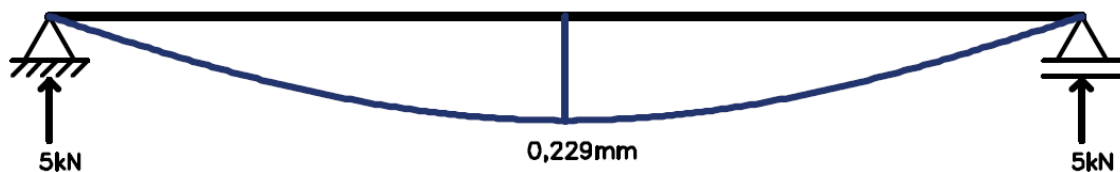
Tabela 9: Viga simplesmente apoiada - Reações

Nº Nós	5	17	FTOOL®
S1	0	0	0
S2	5000	5000	5000
S14/S50*	5000	5000	5000

*S14/S50 correspondem à reação numerada de acordo com o grau de liberdade (GDL) do nó da barra que recebe a vinculação. Na viga analisada, os nós com vinculação possuem os GDL 1 e 2 (reações do apoio de segundo gênero em ambos os casos de malha) e 14 e 50 (apoio de primeiro gênero para a malha de 5 e 17 nós respectivamente).

Fonte: o Autor.

Figura 10: Viga simplesmente apoiada – Deformada e Reações



Fonte: o Autor.

A Tabela 10 comparou os momentos fletores solicitantes obtidos pelo FTOOL® (última coluna) em relação a cada situação de malha apresentada além de uma extra, com 9 nós. Além disso, optou-se por obter no mínimo 3 momentos fletores ao longo de cada elemento finito para o caso da malha mais densa sendo o primeiro junto ao nó de origem, o segundo no meio da barra e o terceiro junto ao nó de destino. À medida que a malha se torna menos densa, aumentou-se o número de momentos calculados por barra, uma vez que a Equação (25) é dependente de da posição x em que se deseja calcular o esforço.

Tabela 10: Viga simplesmente apoiada - Momento fletor

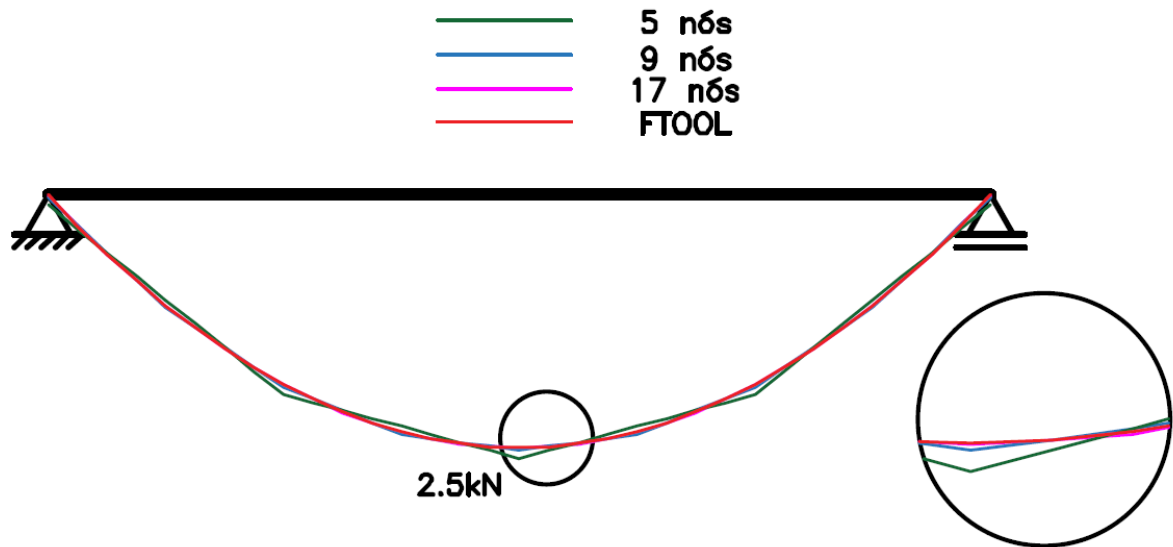
Momentos Elemento	9		5		3		Referência
	$M_{5\text{ nós}}$	Diferença	$M_{9\text{ nós}}$	Diferença	$M_{17\text{ nós}}$	Diferença	
X_{Local} mm	kN.m		kN.m		kN.m		$M_{\text{FTOOL®}}$ kN.m
0	0,104	-	0,026	-	0,007	-	0,000
62,5	0,339	11,83%	0,299	-1,07%	0,299	-1,07%	0,303
125	0,573	-2,22%	0,573	-2,22%	0,592	1,11%	0,586
187,5	0,807	-4,98%	0,846	-0,38%	0,846	-0,38%	0,850
250	1,042	-4,77%	1,120	2,38%	1,100	0,59%	1,094

312,5	1,276	-3,21%	1,315	-0,25%	1,315	-0,25%	1,318
375	1,510	-0,85%	1,510	-0,85%	1,530	0,43%	1,523
437,5	1,745	2,09%	1,706	-0,19%	1,706	-0,19%	1,709
500	1,979	5,56%	1,901	1,39%	1,882	0,35%	1,875
562,5	2,057	1,77%	2,018	-0,16%	2,018	-0,16%	2,022
625	2,135	-0,60%	2,135	-0,60%	2,155	0,30%	2,148
687,5	2,214	-1,88%	2,253	-0,15%	2,253	-0,15%	2,256
750	2,292	-2,22%	2,370	1,11%	2,350	0,28%	2,344
812,5	2,370	-1,75%	2,409	-0,13%	2,409	-0,13%	2,412
875	2,448	-0,53%	2,448	-0,53%	2,467	0,27%	2,461
937,5	2,526	1,44%	2,487	-0,13%	2,487	-0,13%	2,490
1000	2,604	4,17%	2,526	1,04%	2,507	0,26%	2,500
1062,5	2,526	1,44%	2,487	-0,13%	2,487	-0,13%	2,490
1125	2,448	-0,53%	2,448	-0,53%	2,467	0,27%	2,461
1187,5	2,370	-1,75%	2,409	-0,13%	2,409	-0,13%	2,412
1250	2,292	-2,22%	2,370	1,11%	2,350	0,28%	2,344
1312,5	2,214	-1,88%	2,253	-0,15%	2,253	-0,15%	2,256
1375	2,135	-0,60%	2,135	-0,60%	2,155	0,30%	2,148
1437,5	2,057	1,77%	2,018	-0,16%	2,018	-0,16%	2,022
1500	1,979	5,56%	1,901	1,39%	1,882	0,35%	1,875
1562,5	1,745	2,09%	1,706	-0,19%	1,706	-0,19%	1,709
1625	1,510	-0,85%	1,510	-0,85%	1,530	0,43%	1,523
1687,5	1,276	-3,21%	1,315	-0,25%	1,315	-0,25%	1,318
1750	1,042	-4,77%	1,120	2,38%	1,100	0,59%	1,094
1812,5	0,807	-4,98%	0,846	-0,38%	0,846	-0,38%	0,850
1875	0,573	-2,22%	0,573	-2,22%	0,592	1,11%	0,586
1937,5	0,339	11,83%	0,299	-1,07%	0,299	-1,07%	0,303
2000	0,104		0,026		0,007		0,000

Fonte: o Autor.

Observando a Tabela 10 percebe-se que com o aumento da densidade da malha, maior é o grau de precisão do cálculo dos momentos fletores para o caso desta viga submetida a um carregamento distribuído.

Figura 11: Viga Biapoiada – Diagrama de Momento fletor



Fonte: o Autor.

A Tabela 11 traz a comparação do cálculo do esforço cortante para a viga simplesmente apoiada considerando-se a mesma situação de malha: 5, 9 e 17 nós em relação ao FTOOL® (última coluna).

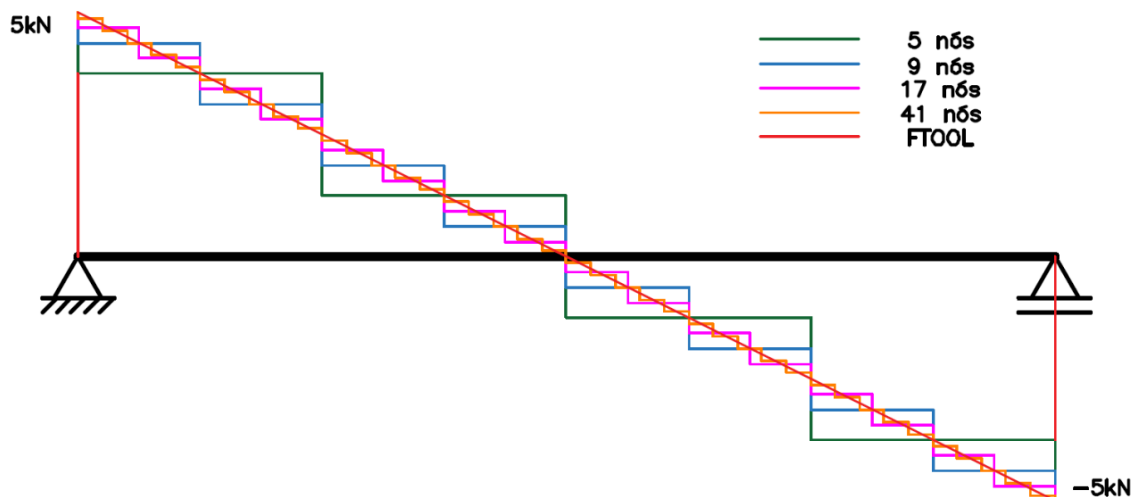
Tabela 11: Viga simplesmente apoiada - Esforço cortante

x mm	V _{5 nós} kN	Diferença	V _{9 nós} kN	Diferença	V _{17 nós} kN	Diferença	V _{FTOOL®} kN
0	3,75	-25,0%	4,375	-12,5%	4,6875	-6,3%	5
125		-12,5%		0,0%	4,0625	7,1%	4,375
250		0,0%		16,7%		8,3%	
375		20,0%		-16,7%	3,4375	-8,3%	3,75
500		50,0%		25,0%	2,8125	10,0%	3,125
625	1,25	-50,0%	1,875	-25,0%	2,1875	-12,5%	2,5
750		-33,3%		0,0%	1,5625	16,7%	1,875
875		0,0%		50,0%		25,0%	
1000		100,0%		-50,0%	0,9375	-25,0%	1,25
1125		-		-	0,3125	50,0%	0,625
1250	-1,25	-100,0%	-0,625	0,0%	-0,3125	-50,0%	-0,625
		0,0%		-50,0%	-0,9375	50,0%	-0,625
						-25,0%	-1,25

				50,0%	-1,5625	25,0%	
1375		-33,3%	-1,875	0,0%		-16,7%	-1,875
					-2,1875	16,7%	
1500		50,0%		-25,0%		-12,5%	-2,5
		-50,0%		25,0%		12,5%	
1625		-20,0%	-3,125	0,0%		-10,0%	-3,125
					-3,4375	10,0%	
1750	-3,75	0,0%		-16,7%		-8,3%	-3,75
				16,7%		8,3%	
1875		12,5%	-4,375	0,0%		-7,1%	-4,375
					-4,0625	7,1%	
2000		25,0%		-12,5%		-6,3%	-5
					-4,6875		

Fonte: o Autor.

Figura 12: Viga Biapoiada - Diagrama de Esforço Cortante



Fonte: o Autor.

É interessante destacar que a diferença encontrada no cálculo do esforço cortante se deve ao fato de que para o caso de uma viga simplesmente apoiada, o diagrama deste esforço é dado por uma função afim e para a função de forma adotada neste trabalho, a equação que se obtém para este esforço corresponde a uma função constante, como pode ser visto na Figura 12. Uma possível interpretação da Tabela 11 é que cada valor de cortante é representativo de cada barra, gerando-se resultados que correspondem a uma função constante para cada elemento finito, sem variação ao longo de si.

A Tabela 12 mostra a viga em questão quando subdividida em 41 nós com elementos finitos de 50 mm de comprimento. A partir dela é possível notar uma diminuição da diferença entre os resultados obtidos em relação aos da referência, sobretudo em valores absolutos.

Tabela 12: Viga simplesmente apoiada - Esforço cortante (41 nós)

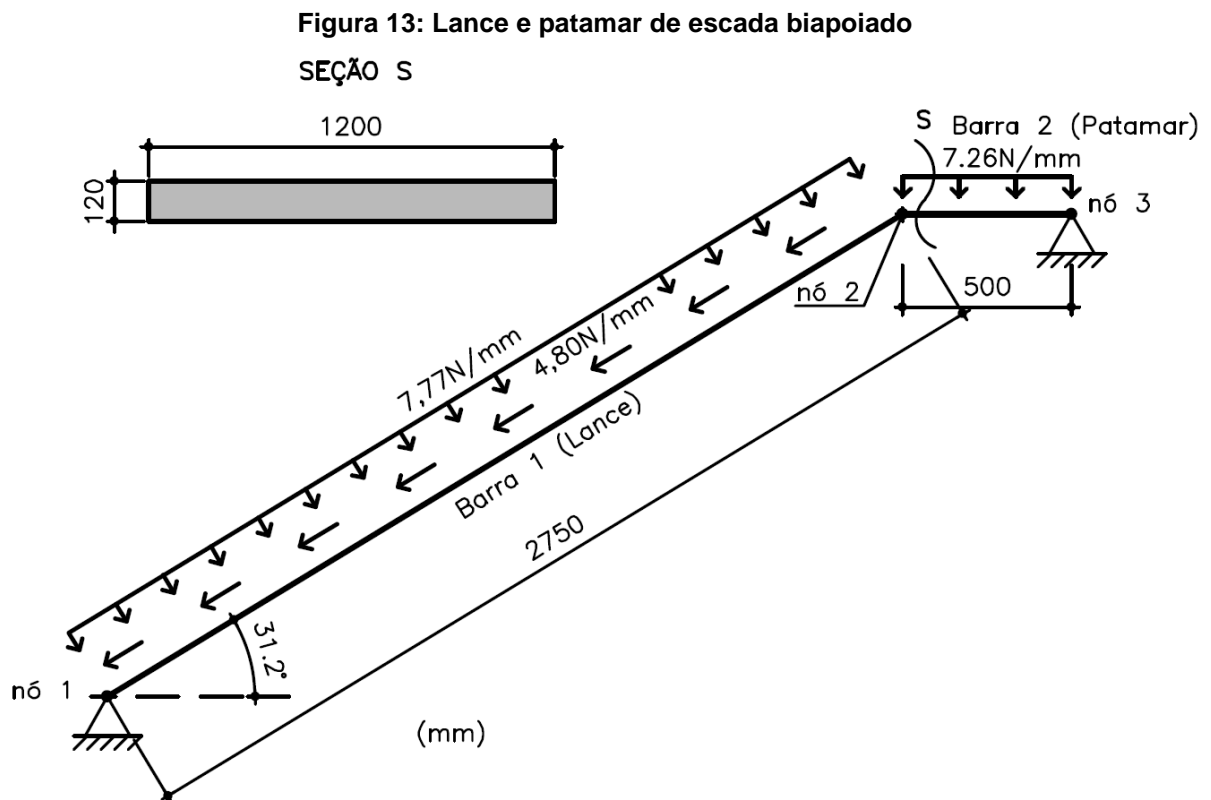
x	V _{41 nós}	Diferença	V _{FTOOL®}	x	V _{41 nós}	Diferença	V _{FTOOL®}
mm	kN		kN	mm	kN		kN
0	4,875	-2,5%	5,0	1000	-0,125	-	0,0
50	4,625	2,6%	4,75	1050	-0,375	-50,0%	-0,25
		-2,6%				50,0%	
100	4,375	2,8%	4,5	1100	-0,625	-25,0%	-0,5
		-2,8%				25,0%	
150	4,125	2,9%	4,25	1150	-0,875	-16,7%	-0,75
		-2,9%				16,7%	
200	3,875	3,1%	4,0	1200	-1,125	-12,5%	-1,0
		-3,1%				12,5%	
250	3,625	3,3%	3,75	1250	-1,375	-10,0%	-1,25
		-3,3%				10,0%	
300	3,375	3,6%	3,5	1300	-1,625	-8,3%	-1,5
		-3,6%				8,3%	
350	3,125	3,8%	3,25	1350	-1,875	-7,1%	-1,75
		-3,8%				7,1%	
400	2,875	4,2%	3,0	1400	-2,125	-6,2%	-2,0
		-4,2%				6,3%	
450	2,625	4,5%	2,75	1450	-2,375	-5,6%	-2,25
		-4,5%				5,6%	
500	2,375	5,0%	2,5	1500	-2,625	-5,0%	-2,5
		-5,0%				5,0%	
550	2,125	5,6%	2,25	1550	-2,875	-4,5%	-2,75
		-5,6%				4,5%	
600	1,875	6,3%	2,0	1600	-3,125	-4,2%	-3,0
		-6,2%				4,2%	
650	1,625	7,1%	1,75	1650	-3,375	-3,8%	-3,25
		-7,1%				3,8%	
700	1,375	8,3%	1,5	1700	-3,625	-3,6%	-3,5
		-8,3%				3,6%	
750	1,125	10,0%	1,25	1750	-3,875	-3,3%	-3,75
		-10,0%				3,3%	
800	0,875	12,5%	1,0	1800	-4,125	-3,1%	-4,0
		-12,5%				3,1%	
850	0,625	16,7%	0,75	1850	-4,375	-2,9%	-4,25
		-16,7%				2,9%	
900	0,375	25,0%	0,5	1900	-4,625	-2,8%	-4,5
		-25,0%				2,8%	
950	0,125	50,0%	0,25	1950	-4,875	-2,6%	-4,75
		-50,0%				2,6%	
1000		-	0,0	2000		-2,5%	-5,0

Fonte: o Autor.

Como a viga não está sendo solicitada por forças axiais, não há esforços normais (eixo longitudinal da barra) neste exemplo.

5.2 EXEMPLO 2

Como segunda demonstração da aplicabilidade, eficiência e limitações da ferramenta, analisou-se uma estrutura apertada comum no cálculo manual de escadas em concreto armado moldadas no local. A Figura 13 apresenta um esquema hiperestático correspondente a um lance associado a um patamar de uma escada com apoios do segundo gênero nas extremidades. Os dados de entrada na ferramenta xITool podem ser observados na Tabela 13.



Fonte: o Autor.

Tabela 13: Lance e patamar de escada biapoado

Barra	Origem							Destino						F. Distribuídas			
	N	Nó	Vinculação			F. Nodais			Nó	Vinculação			F. Nodais			Normal (N/mm)	Axial (N/mm)
			dX	dY	dZ	X	Y	Z		dX	dY	dZ	X	Y	Z		
1	1	0	0				0	2				0	0	0	-7,77	-4,80	
2	2				0	0	0	3	0	0			0		-7,26	0	

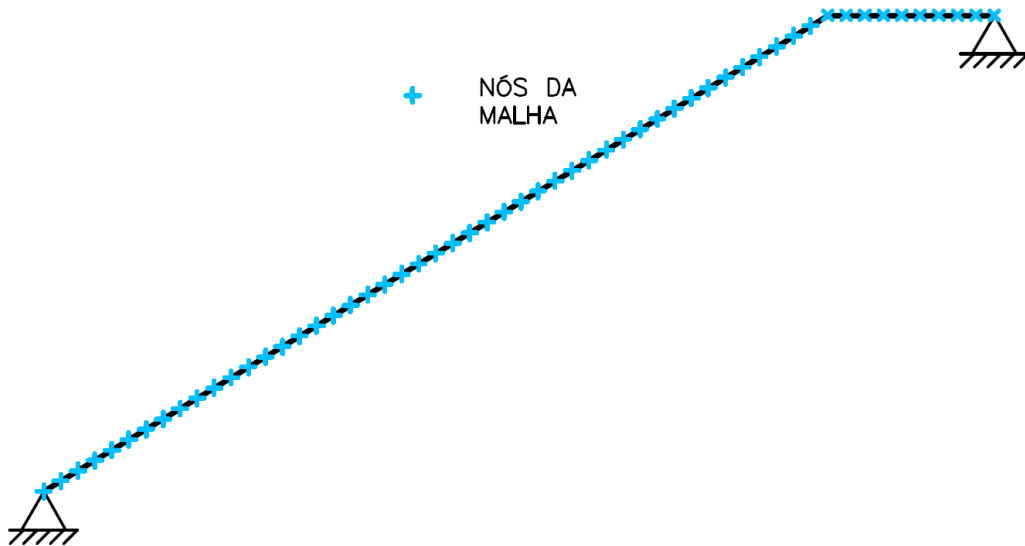
Material	Seção			
E	I	A	L	θ
(MPa)	(mm ⁴)	(mm ²)	(mm)	(°)
25000	1,73E+08	144000	2750,00	31,23

25000	1,73E+08	144000	500,00	0
-------	----------	--------	--------	---

Fonte: o Autor.

A Tabela 14 a seguir compara os deslocamentos obtidos por meio da ferramenta desenvolvida em relação ao FTOOL®, agora com a condição de hiperestaticidade, carregamentos axiais e trechos inclinados. Para esta análise, utilizou-se uma malha de 57 nós, sendo 47 deles no trecho inclinado (lance) e os outros 10 no trecho horizontal (patamar), uma vez que o Exemplo 1 mostrou a necessidade de uma malha mais densa quando a estrutura está submetida a esforços distribuídos para o cálculo dos esforços internos.

Figura 14: Escada – Nós da malha



Fonte: o Autor.

Tabela 14: Lance e patamar de escada biapoiado – Deslocamentos

Ele.	Nós	57			FTOOL®			Diferença percentual			
		X _{Local}	dX	dY	rZ	dX	dY	rZ			
		m	mm	mm	rad	mm	mm	rad			
Barra 1 (lance)	0	0,0000	0,0000	-0,0010	0,0000	0,0000	-0,0010	-	-	0,03%	
	0,06	0,0304	-0,0520	-0,0010	0,0304	-0,0520	-0,0010	-0,01%	0,01%	-0,03%	
	0,12	0,0606	-0,1037	-0,0010	0,0606	-0,1037	-0,0010	0,00%	0,01%	0,00%	
	0,18	0,0904	-0,1547	-0,0010	0,0904	-0,1547	-0,0010	0,01%	-0,01%	0,00%	
	0,24	0,1196	-0,2047	-0,0010	0,1196	-0,2046	-0,0010	-0,02%	0,03%	0,00%	
	0,30	0,1480	-0,2533	-0,0009	0,1480	-0,2533	-0,0009	-0,03%	0,00%	0,00%	
	0,36	0,1754	-0,3003	-0,0009	0,1754	-0,3003	-0,0009	-0,01%	0,02%	0,00%	
	0,42	0,2017	-0,3455	-0,0009	0,2017	-0,3455	-0,0009	-0,01%	0,01%	0,00%	
	0,48	0,2267	-0,3886	-0,0008	0,2267	-0,3886	-0,0008	0,01%	0,01%	0,00%	
	0,54	0,2504	-0,4294	-0,0008	0,2504	-0,4294	-0,0008	-0,02%	0,00%	0,00%	
	0,60	0,2725	-0,4677	-0,0007	0,2725	-0,4677	-0,0007	-0,01%	0,00%	0,01%	

	0,66	0,2930	-0,5032	-0,0007	0,2930	-0,5032	-0,0007	-0,02%	0,01%	0,01%
	0,72	0,3117	-0,5359	-0,0006	0,3117	-0,5359	-0,0006	0,00%	0,01%	0,01%
	0,78	0,3286	-0,5656	-0,0005	0,3286	-0,5656	-0,0005	0,01%	0,01%	0,00%
	0,84	0,3437	-0,5922	-0,0005	0,3437	-0,5922	-0,0005	0,00%	0,00%	0,00%
	0,90	0,3568	-0,6156	-0,0004	0,3568	-0,6155	-0,0004	0,00%	0,01%	0,00%
	0,96	0,3679	-0,6356	-0,0003	0,3679	-0,6356	-0,0003	-0,01%	0,00%	-0,01%
	1,02	0,3769	-0,6522	-0,0003	0,3769	-0,6522	-0,0003	0,01%	0,01%	-0,01%
	1,08	0,3839	-0,6655	-0,0002	0,3839	-0,6655	-0,0002	0,00%	0,00%	0,01%
	1,14	0,3888	-0,6753	-0,0001	0,3888	-0,6752	-0,0001	0,00%	0,01%	-0,02%
	1,20	0,3916	-0,6816	-0,0001	0,3916	-0,6816	-0,0001	0,01%	0,00%	0,00%
	1,26	0,3924	-0,6845	0,0000	0,3924	-0,6845	0,0000	-0,01%	0,00%	0,01%
	1,32	0,3910	-0,6840	0,0001	0,3910	-0,6840	0,0001	0,01%	0,00%	-0,01%
	1,38	0,3877	-0,6802	0,0001	0,3877	-0,6802	0,0001	0,00%	-0,01%	-0,04%
	1,43	0,3824	-0,6731	0,0002	0,3824	-0,6730	0,0002	0,00%	0,01%	0,03%
	1,49	0,3751	-0,6628	0,0002	0,3751	-0,6627	0,0002	0,01%	0,01%	0,01%
	1,55	0,3661	-0,6494	0,0003	0,3661	-0,6494	0,0003	-0,01%	0,00%	0,00%
	1,61	0,3552	-0,6331	0,0004	0,3552	-0,6331	0,0004	0,00%	0,00%	-0,01%
	1,67	0,3426	-0,6141	0,0004	0,3426	-0,6140	0,0004	0,01%	0,01%	-0,01%
	1,73	0,3285	-0,5924	0,0005	0,3285	-0,5924	0,0005	0,01%	0,00%	0,00%
	1,79	0,3129	-0,5683	0,0005	0,3129	-0,5683	0,0005	0,02%	0,00%	0,00%
	1,85	0,2960	-0,5420	0,0005	0,2960	-0,5420	0,0005	0,01%	0,00%	0,00%
	1,91	0,2779	-0,5137	0,0006	0,2779	-0,5137	0,0006	0,01%	0,01%	0,01%
	1,97	0,2588	-0,4837	0,0006	0,2588	-0,4837	0,0006	0,00%	0,01%	0,00%
	2,03	0,2388	-0,4523	0,0006	0,2388	-0,4523	0,0006	-0,01%	0,00%	0,00%
	2,09	0,2181	-0,4197	0,0007	0,2181	-0,4197	0,0007	-0,01%	0,00%	0,00%
	2,15	0,1968	-0,3863	0,0007	0,1968	-0,3862	0,0007	0,02%	0,01%	0,00%
	2,21	0,1753	-0,3523	0,0007	0,1753	-0,3523	0,0007	0,01%	-0,01%	0,00%
	2,27	0,1537	-0,3181	0,0007	0,1537	-0,3181	0,0007	-0,02%	0,01%	0,01%
	2,33	0,1322	-0,2842	0,0007	0,1322	-0,2842	0,0007	-0,03%	-0,01%	-0,01%
	2,39	0,1110	-0,2508	0,0007	0,1110	-0,2508	0,0007	0,01%	0,00%	0,00%
	2,45	0,0905	-0,2184	0,0006	0,0905	-0,2184	0,0006	0,00%	0,00%	0,01%
	2,51	0,0708	-0,1874	0,0006	0,0708	-0,1874	0,0006	0,00%	0,02%	0,01%
	2,57	0,0522	-0,1583	0,0006	0,0522	-0,1583	0,0006	0,00%	0,02%	0,00%
	2,63	0,0351	-0,1316	0,0005	0,0351	-0,1316	0,0005	0,01%	-0,03%	-0,01%
	2,69	0,0197	-0,1076	0,0004	0,0197	-0,1076	0,0004	0,01%	0,01%	0,00%
	2,75	0,0063	-0,0870	0,0004	0,0063	-0,0870	0,0004	0,00%	0,01%	0,01%
Barra 2 (patamar)	0,00	0,0063	-0,0870	0,0004	0,0063	-0,0870	0,0004	0,00%	0,00%	0,01%
	0,06	0,0056	-0,0680	0,0003	0,0056	-0,0680	0,0003	0,00%	0,00%	0,01%
	0,11	0,0049	-0,0524	0,0003	0,0049	-0,0524	0,0003	-0,01%	0,00%	0,00%
	0,17	0,0042	-0,0397	0,0002	0,0042	-0,0397	0,0002	0,01%	0,01%	-0,02%
	0,22	0,0035	-0,0295	0,0002	0,0035	-0,0295	0,0002	0,00%	-0,01%	0,02%
	0,28	0,0028	-0,0213	0,0001	0,0028	-0,0213	0,0001	0,00%	0,01%	0,03%
	0,33	0,0021	-0,0146	0,0001	0,0021	-0,0146	0,0001	-0,02%	-0,02%	-0,02%
	0,39	0,0014	-0,0091	0,0001	0,0014	-0,0091	0,0001	0,03%	0,00%	0,01%
	0,44	0,0007	-0,0044	0,0001	0,0007	-0,0044	0,0001	0,00%	0,01%	-0,01%
0,50	0,0000	0,0000	0,0001	0,0000	0,0000	0,0001	-	-	0,00%	

Fonte: o Autor.

Analisando os dados coletados bem como aqueles apresentados na Tabela 8, percebe-se que independente do grau de estaticidade ou mesmo dos carregamentos impostos ao esquema estático, os deslocamentos calculados atingem um nível bastante satisfatório de precisão.

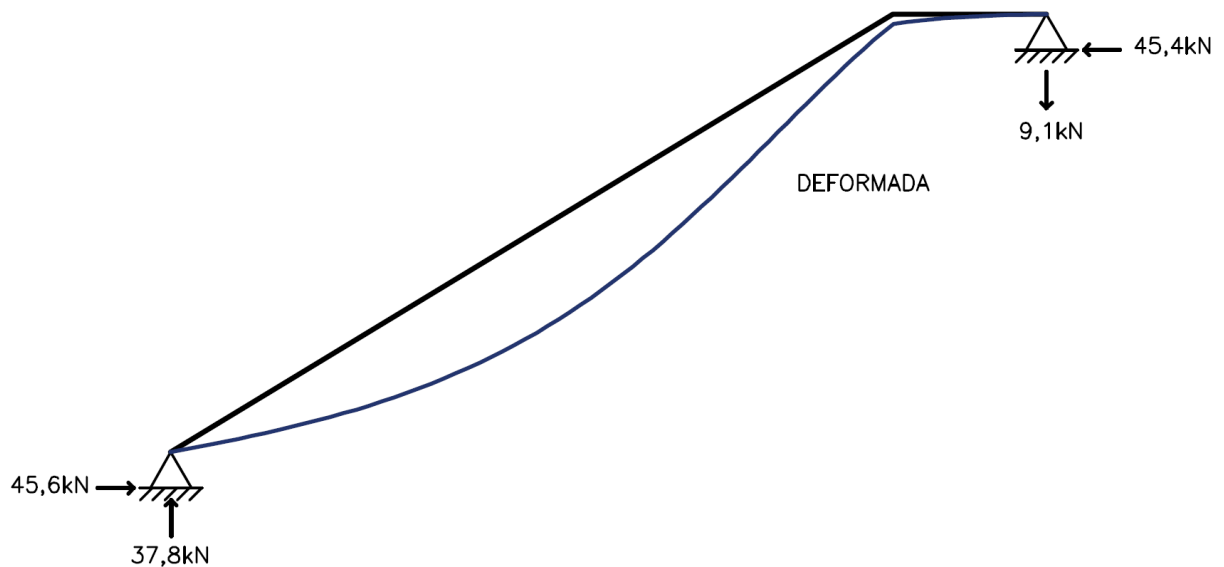
As reações obtidas por meio da aplicação também retornaram valores bastante próximos aos da ferramenta FTOOL® com uma diferença máxima de 0,0002% para valores tomados obtidos em Newtons, como pode ser visto na Tabela 15.

Tabela 15: Lance e patamar de escada biapoiado - Reações

Reações	Unid.	57	FTOOL®	Diferença
rX	N	45582,93685	45582,9686	-0,0001%
rY	N	37817,31365	37817,3419	-0,0001%
rX	N	-45373,99043	-45374,0234	-0,0001%
rY	N	-9072,250491	-9072,2646	-0,0002%

Fonte: o Autor.

Figura 15: Escada – Deformada e Reações



Fonte: o Autor

Para a análise dos esforços internos, utilizou-se a mesma malha discutida acima, solicitando-se 2 momentos fletores ao longo de cada elemento finito, um no início da barra e outro no final dela. Os resultados foram confrontados com a análise do FTOOL® na Tabela 16.

Tabela 16: Escada - Momento fletor

Elemento	Momentos		3	FTOOL®	Diferença
	Elemento				
	X _{Local}	M _{57 nós}	M		
m	kN.m	kN.m			
Barra 1 (Lance)	0,00	0,002	0,000	-	
	0,06	0,509	0,506	0,46%	
	0,12	0,988	0,985	0,23%	
	0,18	1,438	1,436	0,16%	
	0,24	1,862	1,859	0,12%	
	0,30	2,257	2,255	0,10%	
	0,36	2,625	2,622	0,09%	
	0,42	2,964	2,962	0,08%	
	0,48	3,277	3,274	0,07%	
	0,54	3,561	3,559	0,06%	
	0,60	3,817	3,815	0,06%	
	0,66	4,046	4,044	0,06%	
	0,72	4,247	4,245	0,05%	
	0,78	4,420	4,418	0,05%	
	0,84	4,566	4,564	0,05%	
	0,90	4,684	4,681	0,05%	
	0,96	4,774	4,771	0,05%	
	1,02	4,836	4,833	0,05%	
	1,08	4,870	4,868	0,05%	
	1,14	4,877	4,874	0,05%	
1,20	4,856	4,853	0,05%		
1,26	4,807	4,804	0,05%		
1,32	4,730	4,728	0,05%		
1,38	4,626	4,623	0,05%		
1,43	4,493	4,491	0,05%		
1,49	4,333	4,331	0,05%		
1,55	4,146	4,143	0,06%		
1,61	3,930	3,928	0,06%		
1,67	3,687	3,684	0,06%		
Barra 1 (Lance)	1,73	3,416	3,413	0,07%	
	1,79	3,117	3,115	0,07%	
	1,85	2,790	2,788	0,08%	
	1,91	2,436	2,434	0,10%	
	1,97	2,054	2,051	0,11%	
	2,03	1,644	1,641	0,14%	
	2,09	1,206	1,204	0,19%	
	2,15	0,741	0,738	0,31%	
	2,21	0,247	0,245	0,94%	
	2,27	-0,274	-0,276	-0,84%	
	2,33	-0,822	-0,825	-0,28%	
	2,39	-1,399	-1,401	-0,17%	
	2,45	-2,003	-2,006	-0,12%	
	2,51	-2,635	-2,638	-0,09%	
	2,57	-3,295	-3,297	-0,07%	
	2,63	-3,983	-3,985	-0,06%	
	2,69	-4,698	-4,700	-0,05%	
	2,75	-5,442	-5,444	-0,03%	
	Barra 1 (Patamar)	0,00	-5,442	-5,444	-0,03%
		0,06	-4,747	-4,749	-0,04%
0,11		-4,075	-4,077	-0,05%	
0,17		-3,426	-3,427	-0,05%	
0,22		-2,798	-2,800	-0,07%	
0,28		-2,193	-2,195	-0,09%	
0,33		-1,611	-1,613	-0,12%	
0,39		-1,051	-1,053	-0,18%	
0,44		-0,513	-0,515	-0,36%	
0,50		0,002	0,000	-	

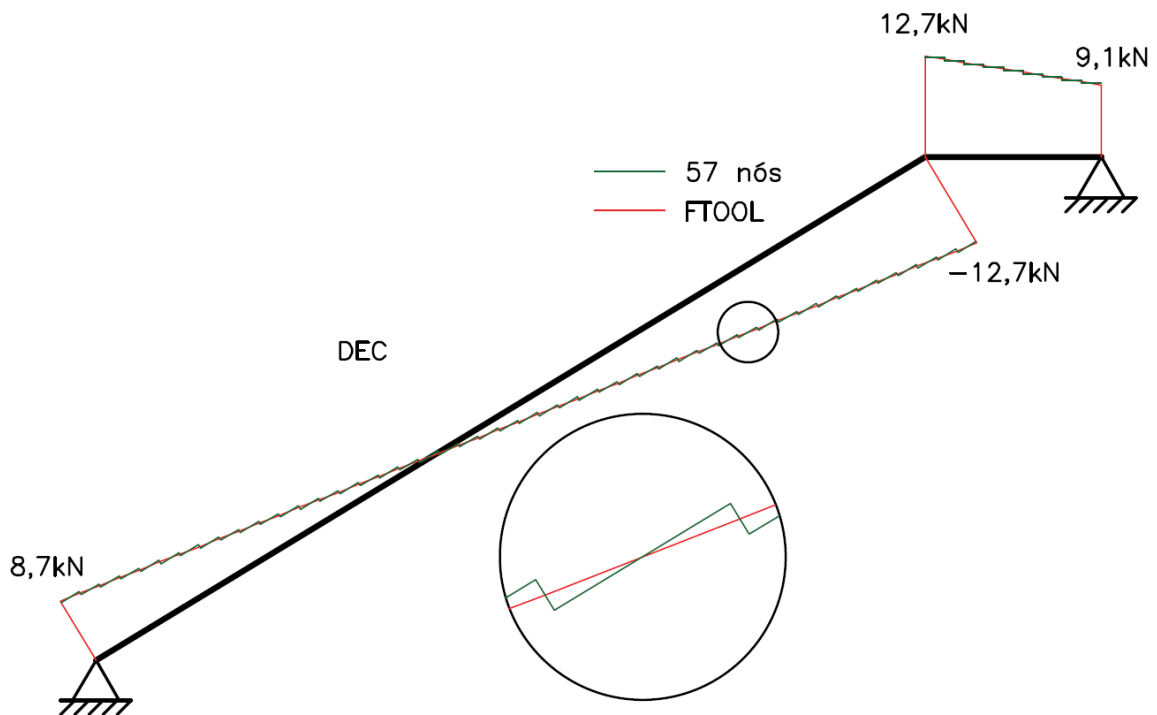
Fonte: o Autor.

Os nós destacados em azul da Figura 14 correspondem à posição x da Tabela 16 em que os momentos fletores foram calculados. As aproximações obtidas atingem um máximo de diferença igual a 0,94% na posição $x = 2,21$ m do eixo local do primeiro elemento, o lance, e 0,36% na posição $x = 0,5$ m do eixo local do patamar. Estas divergências correspondem a uma diferença absoluta de aproximadamente 0,002 kN sendo imperceptível na escala da Figura 16

	4.29		-5.13%	2.33		-9.41	-2.47%
0.60		4.06	5.72%		-9.64		2.47%
	3.83		-5.72%	2.39		-9.88	-2.35%
0.66		3.59	6.46%		-10.11		2.35%
	3.36		-6.46%	2.45		-10.34	-2.25%
0.72		3.13	7.42%		-10.57		2.25%
	2.90		-7.42%	2.51		-10.81	-2.15%
0.78		2.67	8.71%		-11.04		2.15%
	2.43		-8.71%	2.57		-11.27	-2.06%
0.84		2.20	10.55%		-11.50		2.06%
	1.97		-10.55%	2.63		-11.73	-1.98%
0.90		1.74	13.37%		-11.97		1.98%
	1.50		-13.37%	2.69		-12.20	-1.90%
0.96		1.27	18.26%		-12.43		1.90%
	1.04		-18.26%	2.75		-12.66	-1.83%
1.02		0.81	28.76%	0.00	12.50	12.70	-1.59%
	0.58		-28.76%	0.06		12.30	1.64%
1.08		0.34	67.70%		12.10		-1.64%
	0.11		-67.70%	0.11		11.90	1.70%
1.14		-0.12	-191.22%		11.69		-1.70%
	-0.35		191.22%	0.17		11.49	1.75%
1.20		-0.59	-39.64%		11.29		-1.75%
	-0.82		39.64%	0.22		11.09	1.82%
1.26		-1.05	-22.11%		10.89		-1.82%
	-1.28		22.11%	0.28		10.69	1.89%
1.32		-1.51	-15.33%		10.48		-1.89%
	-1.75		15.33%	0.33		10.28	1.96%
1.38		-1.98	-11.73%		10.08		-1.96%
	-2.21		11.73%	0.39		9.88	2.04%
1.43		-2.44	-9.50%		9.68		-2.04%
	-2.68		9.50%	0.44		9.48	2.13%
1.49		-2.91	-7.99%		9.27		-2.13%
	-3.14		7.99%	0.50		9.07	2.22%
1.55		-3.37	-6.89%				
	-3.61		6.89%				
1.61		-3.84	-6.05%				
	-4.07		6.05%				
1.67		-4.30	-5.40%				
	-4.53		5.40%				
1.73		-4.77	-4.87%				
	-5.00		4.87%				

Fonte: o Autor.

Figura 17: Escada – Esforço cortante



Fonte: o Autor.

Observando o comportamento dos gráficos de cisalhamento tanto deste esquema quando dos resultados da viga simplesmente apoiada, fica evidente que o esforço cortante obtido pela ferramenta xITool corresponde a um valor médio entre o cisalhamento no início e no fim no elemento finito. Vale destacar que a região em que ocorre a mudança de sinal do diagrama, leva a uma diferença percentual alta, entretanto a Figura 17 mostra que as diferenças relatadas na Tabela 17 ocorrem em razão da aproximação gerada pela função utilizada para o cálculo do esforço cortante, como no Exemplo 1.

Uma aproximação de pós-processamento adequada pode obter esforços mais confiáveis através do cálculo da média entre aritmética simples entre cortantes subsequentes. A Tabela 18 a compara esta proposta em relação aos resultados do FTOOL®, mostrando que não há diferença percentual significativa entre os resultados.

Tabela 18: Escada - Cortante média

Nós	57	FTOOL®	Diferença	Nós	57	FTOOL®	Diferença
x	V	V		x	V	V	
m	kN	kN		m	kN	kN	
0,00	8,472	8,704	-2,67%	1,79	-5,231	-5,231	0,00%
0,06	8,240	8,240	0,00%	1,85	-5,696	-5,696	
0,12	7,775	7,775		1,91	-6,160	-6,160	
0,18	7,311	7,311		1,97	-6,625	-6,625	
0,24	6,846	6,846		2,03	-7,089	-7,089	

0,30	6,382	6,382	
0,36	5,917	5,917	
0,42	5,453	5,453	
0,48	4,988	4,988	
0,54	4,524	4,524	
0,60	4,059	4,059	
0,66	3,595	3,595	
0,72	3,130	3,130	
0,78	2,666	2,666	
0,84	2,201	2,201	
0,90	1,737	1,737	
0,96	1,272	1,272	
1,02	0,808	0,808	
1,08	0,343	0,343	
1,14	-0,121	-0,121	
1,20	-0,586	-0,586	
1,26	-1,050	-1,050	
1,32	-1,515	-1,515	
1,38	-1,980	-1,980	
1,43	-2,444	-2,444	
1,49	-2,909	-2,909	
1,55	-3,373	-3,373	
1,61	-3,838	-3,838	
1,67	-4,302	-4,302	
1,73	-4,767	-4,767	
2,09	-7,554	-7,554	
2,15	-8,018	-8,018	
2,21	-8,483	-8,483	
2,27	-8,947	-8,947	
2,33	-9,412	-9,412	
2,39	-9,876	-9,876	
2,45	-10,341	-10,341	
2,51	-10,805	-10,805	
2,57	-11,270	-11,270	
2,63	-11,734	-11,734	
2,69	-12,199	-12,199	
2,75	-12,431	-12,663	-1,83%
0,00	12,500	12,702	-1,59%
0,06	12,299	12,299	0,00%
0,11	11,896	11,896	
0,17	11,492	11,492	
0,22	11,089	11,089	
0,28	10,686	10,686	
0,33	10,282	10,282	
0,39	9,879	9,879	
0,44	9,476	9,476	
0,50	9,274	9,072	2,22%

Fonte: o Autor.

É necessário destacar que, os pontos onde há mudança nos parâmetros dos elementos finitos ou fim da estrutura, não é possível calcular um valor médio, já que o nó subsequente corresponde a malha de um outro elemento com dados de entrada diferentes ou não existe.

A análise do esforço normal foi feita observando os dados da Tabela 19 e por meio da Figura 18.

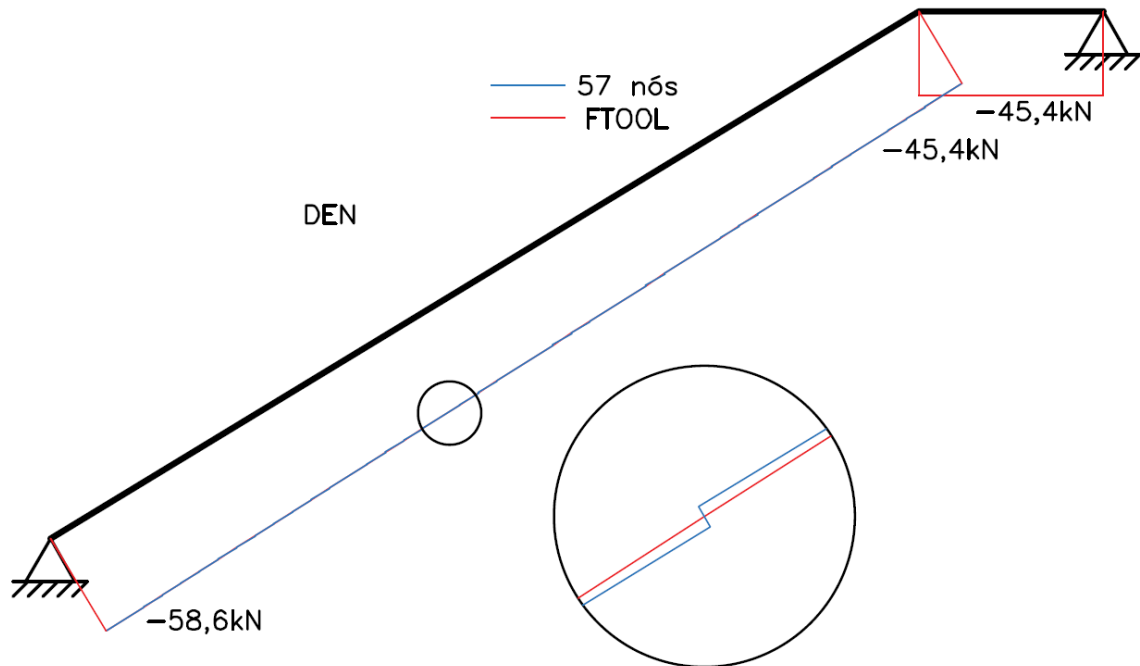
Tabela 19: Escada - Esforço normal

Nós	57	FTOOL	Diferença
x	N	N	
m	kN	kN	
0,00	-58,44	-58,58	-0,24%
0,06	-58,15	-58,30	0,25%
		-58,01	-0,25%
0,12	-57,87	-57,72	0,25%
0,18		-57,72	0,25%
Nós	57	FTOOL	Diferença
x	N	N	
m	kN	kN	
1,79	-49,83	-49,98	0,29%
		-49,69	-0,29%
1,85	-49,55	-49,40	0,29%
		-49,26	-0,29%

			-0,25%				
0,24	-57,58		0,25%	1,97		-49,12	0,29%
		-57,44	-0,25%		-48,97		-0,29%
0,30	-57,29		0,25%	2,03		-48,83	0,29%
		-57,15	-0,25%		-48,68		-0,29%
0,36	-57,01		0,25%	2,09		-48,54	0,30%
		-56,86	-0,25%		-48,40		-0,30%
0,42	-56,72		0,25%	2,15		-48,25	0,30%
		-56,58	-0,25%		-48,11		-0,30%
0,48	-56,43		0,25%	2,21		-47,97	0,30%
		-56,29	-0,25%		-47,82		-0,30%
0,54	-56,15		0,26%	2,27		-47,68	0,30%
		-56,00	-0,26%		-47,54		-0,30%
0,60	-55,86		0,26%	2,33		-47,39	0,30%
		-55,72	-0,26%		-47,25		-0,30%
0,66	-55,57		0,26%	2,39		-47,11	0,30%
		-55,43	-0,26%		-46,96		-0,30%
0,72	-55,28		0,26%	2,45		-46,82	0,31%
		-55,14	-0,26%		-46,68		-0,31%
0,78	-55,00		0,26%	2,51		-46,53	0,31%
		-54,85	-0,26%		-46,39		-0,31%
0,84	-54,71		0,26%	2,57		-46,25	0,31%
		-54,57	-0,26%		-46,10		-0,31%
0,90	-54,42		0,26%	2,63		-45,96	0,31%
		-54,28	-0,26%		-45,82		-0,31%
0,96	-54,14		0,27%	2,69		-45,67	0,31%
		-53,99	-0,27%		-45,53		-0,31%
1,02	-53,85		0,27%	2,75		-45,38	0,32%
		-53,71	-0,27%	0,00		-45,37	0,00%
1,08	-53,56		0,27%		-45,37		0,00%
		-53,42	-0,27%	0,06		-45,37	0,00%
1,14	-53,28		0,27%		-45,37		0,00%
		-53,13	-0,27%	0,11		-45,37	0,00%
1,20	-52,99		0,27%		-45,37		0,00%
		-52,85	-0,27%	0,17		-45,37	0,00%
1,26	-52,70		0,27%		-45,37		0,00%
		-52,56	-0,27%	0,22		-45,37	0,00%
1,32	-52,42		0,27%		-45,37		0,00%
		-52,27	-0,27%	0,28		-45,37	0,00%
1,38	-52,13		0,28%		-45,37		0,00%
		-51,98	-0,28%	0,33		-45,37	0,00%
1,43	-51,84		0,28%		-45,37		0,00%
		-51,70	-0,28%	0,39		-45,37	0,00%
1,49	-51,55		0,28%		-45,37		0,00%
		-51,41	-0,28%	0,44		-45,37	0,00%
1,55	-51,27		0,28%		-45,37		0,00%
		-51,12	-0,28%	0,50		-45,37	0,00%
1,61	-50,98		0,28%				
		-50,84	-0,28%				
1,67	-50,69		0,28%				
		-50,55	-0,28%				
1,73	-50,41		0,29%				
		-50,26	-0,29%				

Fonte: o Autor.

Figura 18: Escada - Esforço normal



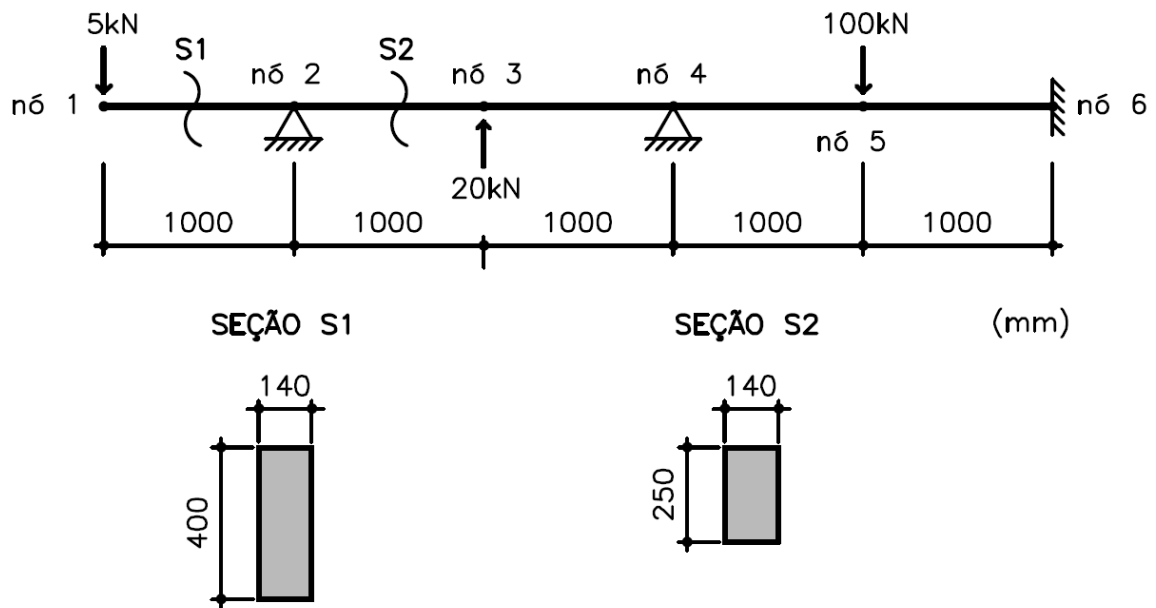
Fonte: o Autor.

De maneira análoga ao esforço cortante, os esforços axiais calculados pela ferramenta xITOOOL correspondem a uma aproximação dada por uma função de grau inferior a ideal. Neste exemplo, as diferenças percentuais se mantiveram abaixo de 0,32%, uma vez que o gráfico não cruza o eixo da barra, ou seja, não há uma região da estrutura próxima do trecho em que haveria a mudança no sinal do diagrama.

5.3 EXEMPLO 3

O exemplo 3 busca apresentar a viabilidade de solução de estruturas com continuidade, portanto será analisado o caso de uma viga hiperestática submetida a carregamentos concentrados. Considerou-se como parâmetros de entrada trechos com diferentes seções transversais e módulo de elasticidade constante. A Figura 19 ilustra o esquema analisado e a Tabela 20 os dados de entrada.

Figura 19: Viga contínua



Fonte: o Autor.

Tabela 20: Viga contínua

Barra	Origem						Destino						F. Distribuídas			
	N	Nó	Vinculação			F. Nodais			Nó	Vinculação			F. Nodais			Normal
		dX	dY	rZ	X	Y	Z		dX	dY	rZ	X	Y	Z	(N/mm)	(N/mm)
1	1				0	-5000	0	2	0	0				0	0	0
2	2	0	0				0	3				0	20000	0	0	0
3	3				0	20000	0	4	0	0				0	0	0
4	4	0	0				0	5				0	-100000	0	0	0
5	5				0	-100000	0	6	0	0	0				0	0

Material	Seção			
E	I	A	L	θ
(MPa)	(mm ⁴)	(mm ²)	(mm)	(°)
25000	7,47E+08	56000	1000,00	0,00
25000	1,82E+08	35000	1000,00	0,00
25000	1,82E+08	35000	1000,00	0,00

25000	1,82E+08	35000	1000,00	0,00
25000	1,82E+08	35000	1000,00	0,00

Fonte: o Autor.

A Tabela 21 compara os deslocamentos obtidos por meio da ferramenta em *MS-Excel* em relação ao FTOOL®. A diferença percentual mostra uma divergência máxima de 0,02% em relação aos resultados de referência.

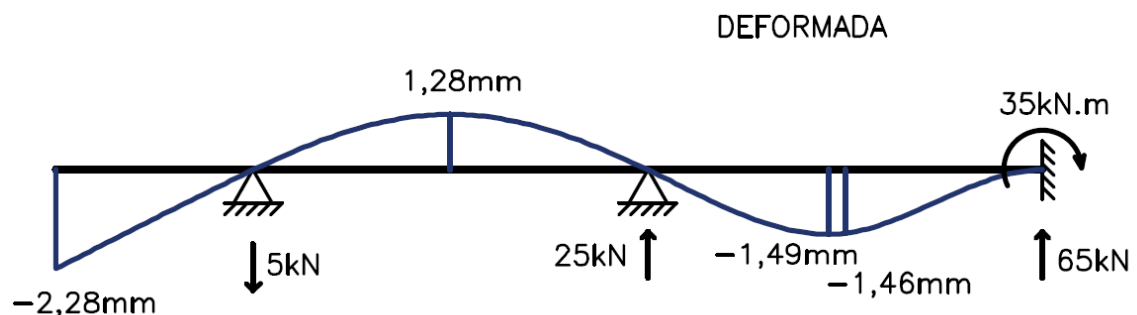
Tabela 21: Viga contínua - Deslocamentos

Nós	11		FTOOL®		Diferença percentual		
	x	dY	rZ	dY			rZ
	m	mm	rad	mm	rad		
0,0	-2,2836	0,0023	-2,2840	0,0023	-0,02%	0,01%	
0,5	-1,1250	0,0023	-1,1250	0,0023	0,00%	-0,01%	
1,0	1,2800	0,0000	1,2800	0,0000	0,00%	-	
1,5	0,9143	0,0014	0,9143	0,0014	0,00%	0,03%	
2,0	1,2800	0,0000	1,2800	0,0000	0,00%	-	
2,5	0,9143	-0,0014	0,9143	-0,0014	0,00%	-0,03%	
3,0	0,0000	-0,0022	0,0000	-0,0022	-	-0,01%	
3,5	-1,0743	-0,0018	-1,0740	-0,0018	0,03%	0,01%	
4,0	-1,4629	0,0005	-1,4630	0,0005	-0,01%	-0,01%	
4,5	-0,6629	0,0021	-0,6629	0,0021	-0,01%	0,01%	
5,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-	-	

Fonte: o Autor.

Não foram encontradas diferenças entre as reações calculadas e as obtidas pela aplicação de referência. Seus valores podem ser vistos na Figura 20.

Figura 20: Viga contínua – Deformada e Reações



Fonte: o Autor.

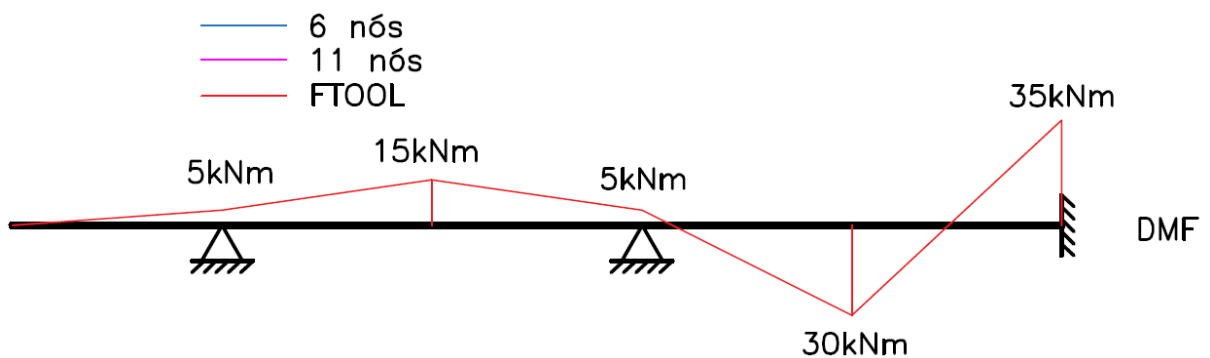
A Tabela 22 compara os momentos fletores obtidos tanto para a condição de 11 nós como para condição de apenas 6 nós (Figura 19), o mínimo possível dado a viga em questão. A partir dela, é possível perceber que não há diferença entre os esforços do valor de referência àqueles calculados através da aplicação proposta em ambas as condições de malha testadas. Na Figura 21, as linhas dos diagramas calculados com a malha de 6 e 11 nós se sobrepõem aos resultados obtidos pelo FTOOL.

Tabela 22: Viga contínua - Momento fletor

Momentos	3	2	FTOOL®
Elemento			
x	$M_{6 \text{ nós}}$	$M_{11 \text{ nós}}$	M
m	kN.m	kN.m	kN.m
0,00	0	0	0
0,50	-2,5	-2,5	-2,5
1,00	-5,0	-5,0	-5,0
1,50	-10,0	-10,0	-10,0
2,00	-15,0	-15,0	-15,0
2,50	-10,0	-10,0	-10,0
3,00	-5,0	-5,0	-5,0
3,50	12,5	12,5	12,5
4,00	30,0	30,0	30,0
4,50	-2,5	-2,5	-2,5
5,00	-35,0	-35,0	-35,0

Fonte: o Autor.

Figura 21: Viga contínua - Diagrama de Momento Fletor



Fonte: o Autor.

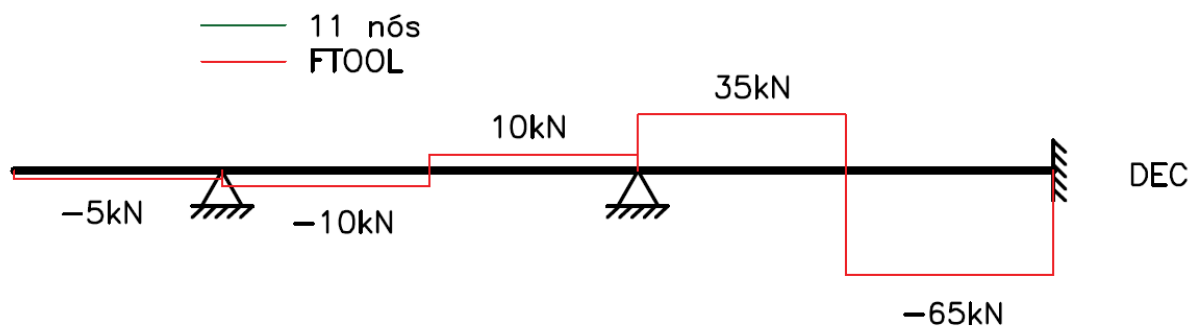
Com relação ao esforço cortante deste esquema estático, a Tabela 23 apresenta os resultados da viga contínua na condição de 11 nós e que mostra não haver divergência significativa entre os resultados. Graficamente na Figura 22, as linhas dos diagramas se sobrepõem.

Tabela 23: Viga contínua - Esforço cortante

Nós	11	FTOOL®
x	V	V
m	kN	kN
0	-5	-5
1	-5	-5
	-10	-10
2	-10	-10
	10	10
3	10	10
	35	35
4	35	35
	-65	-65
5	-65	-65

Fonte: o Autor.

Figura 22: Viga contínua - Diagrama de esforço cortante

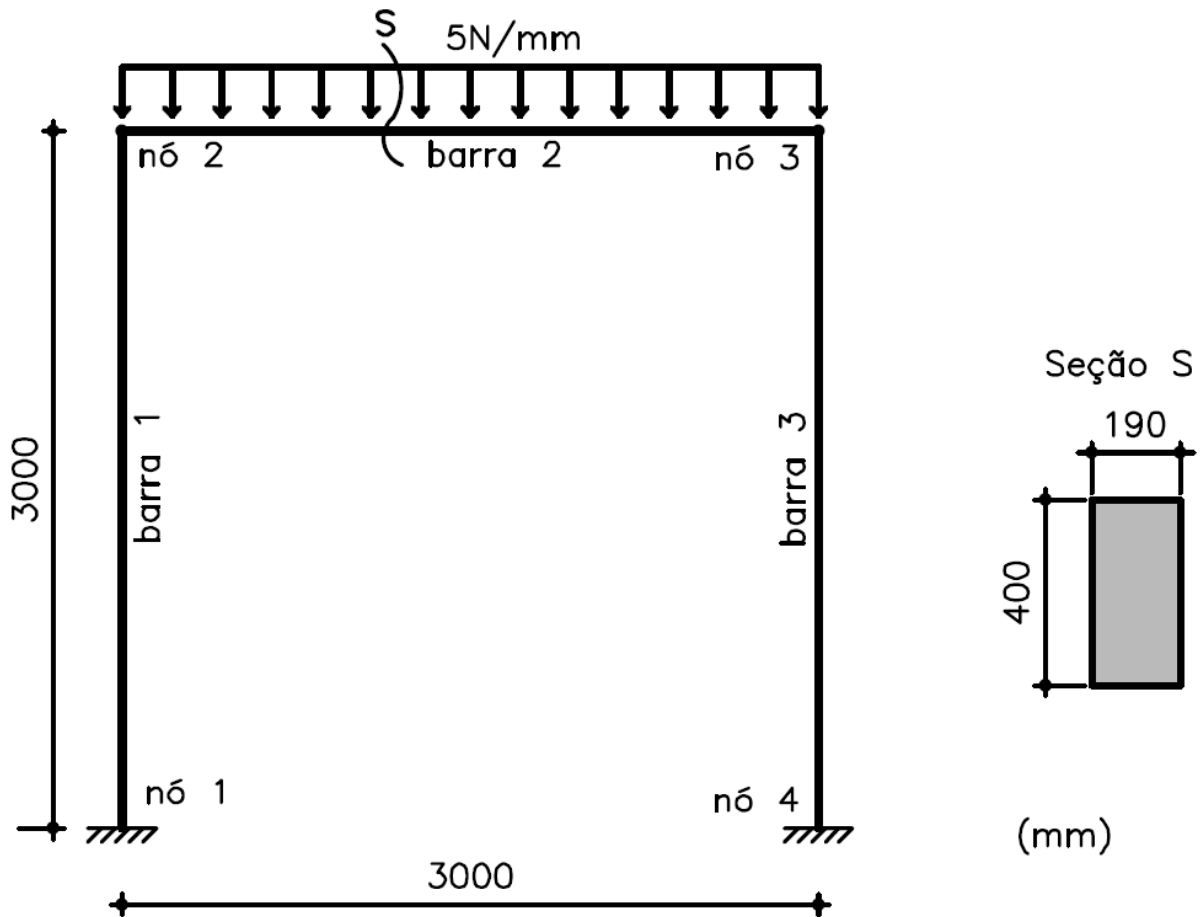


Fonte: o Autor.

5.4 EXEMPLO 4

O próximo exemplo ilustra a análise de um pórtico tipo trave submetido a um carregamento uniformemente distribuído no seu topo. A Figura 23 mostra o esquema estático em questão bem como seus parâmetros geométricos. A Tabela 24 traz os dados de entrada necessários para a aplicação em *MS-Excel*.

Figura 23: Pórtico trave



Fonte: o Autor.

Tabela 24: Pórtico trave

Barra	Origem							Destino							F. Distribuídas		
	N	Nó	Vinculação			F. Nodais			Nó	Vinculação			F. Nodais			Normal (N/mm)	Axial (N/mm)
			dX	dY	rZ	X	Y	Z		dX	dY	rZ	X	Y	Z		
1	1	0	0	0				2				0	0	0	0,00	0,00	
2	2				0	0	0	3				0	0	0	-5,00	0,00	
3	3				0	0	0	4	0	0	0				0,00	0,00	

Material	Seção			
E	I	A	L	θ
(MPa)	(mm ⁴)	(mm ²)	(mm)	(°)
25000	1,01E+09	76000	3000,00	90,00
25000	1,01E+09	76000	3000,00	0,00
25000	1,01E+09	76000	3000,00	-90,00

Fonte: o Autor.

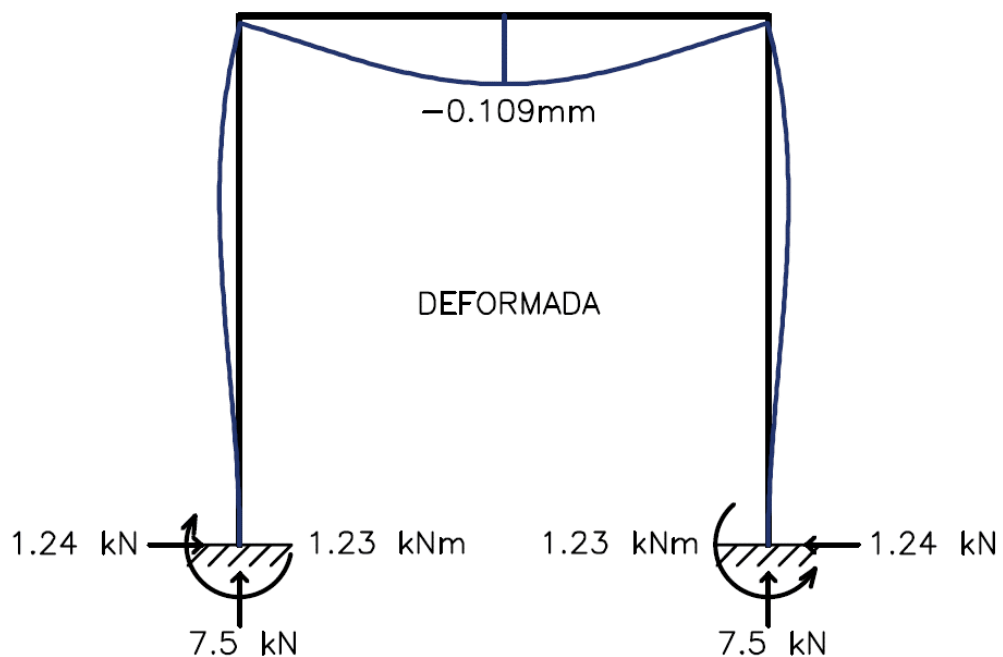
Para a análise dos deslocamentos e reações, considerou-se a malha mínima com 2 nós para cada barra criada na estrutura. Os resultados obtidos foram comparados com o FTOOL® e estão disponibilizados na Tabela 25. Não foram encontradas diferenças significativas entre as reações calculadas e as da aplicação de referência (ver Figura 24).

Tabela 25: Pórtico trave - Deslocamentos

Nós	4			FTOOL®			Diferença percentual		
	dX	dY	rZ	dX	dY	rZ	dX	dY	rZ
	mm	mm	rad	mm	mm	rad			
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-	-	-
2	0.0010	-0.0118	-0.0001	0.0010	-0.0118	-0.0001	0.05%	0.00%	-0.46%
3	-0.0010	-0.0118	0.0001	-0.0010	-0.0118	0.0001	0.05%	0.00%	0.46%
4	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-	-	-

Fonte: o Autor.

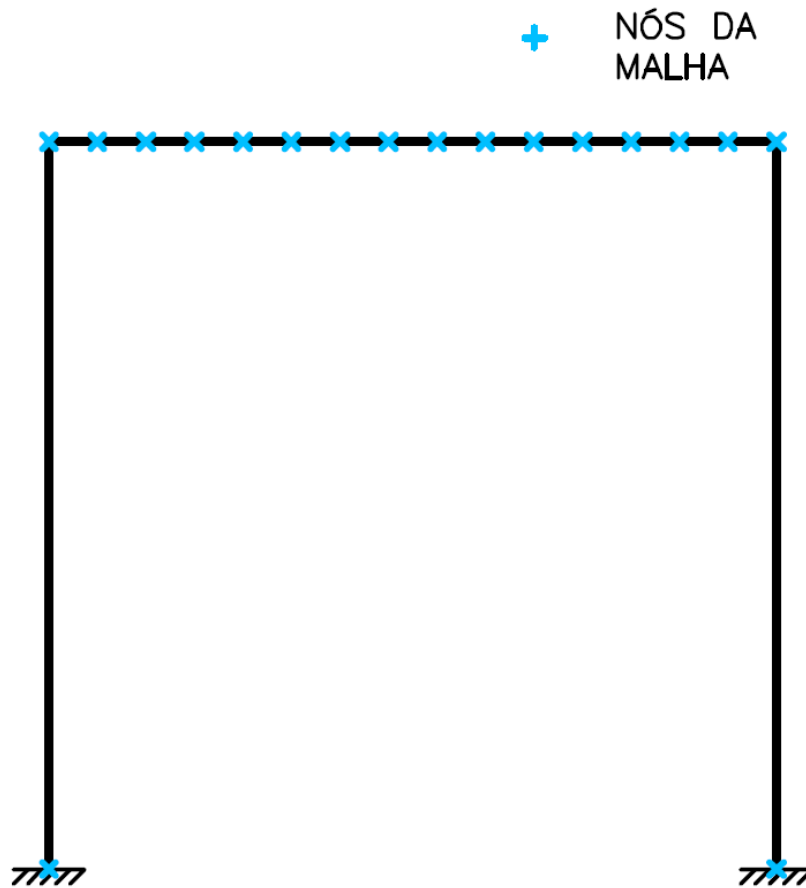
Figura 24: Pórtico trave – Deformada e Reações



Fonte: o Autor.

A análise entre os momentos fletores foi realizada de maneira gráfica por meio da Figura 26 que corresponde aos momentos calculados ao longo das barras com uma malha composta por 2 nós na primeira barra, 16 nós na segunda e 2 na terceira (Figura 25), solicitando-se da aplicação apenas os momentos nas extremidades dos elementos finitos. Os valores dos gráficos plotados se encontram na Tabela 26.

Figura 25: Pórtico trave - Nós da estrutura



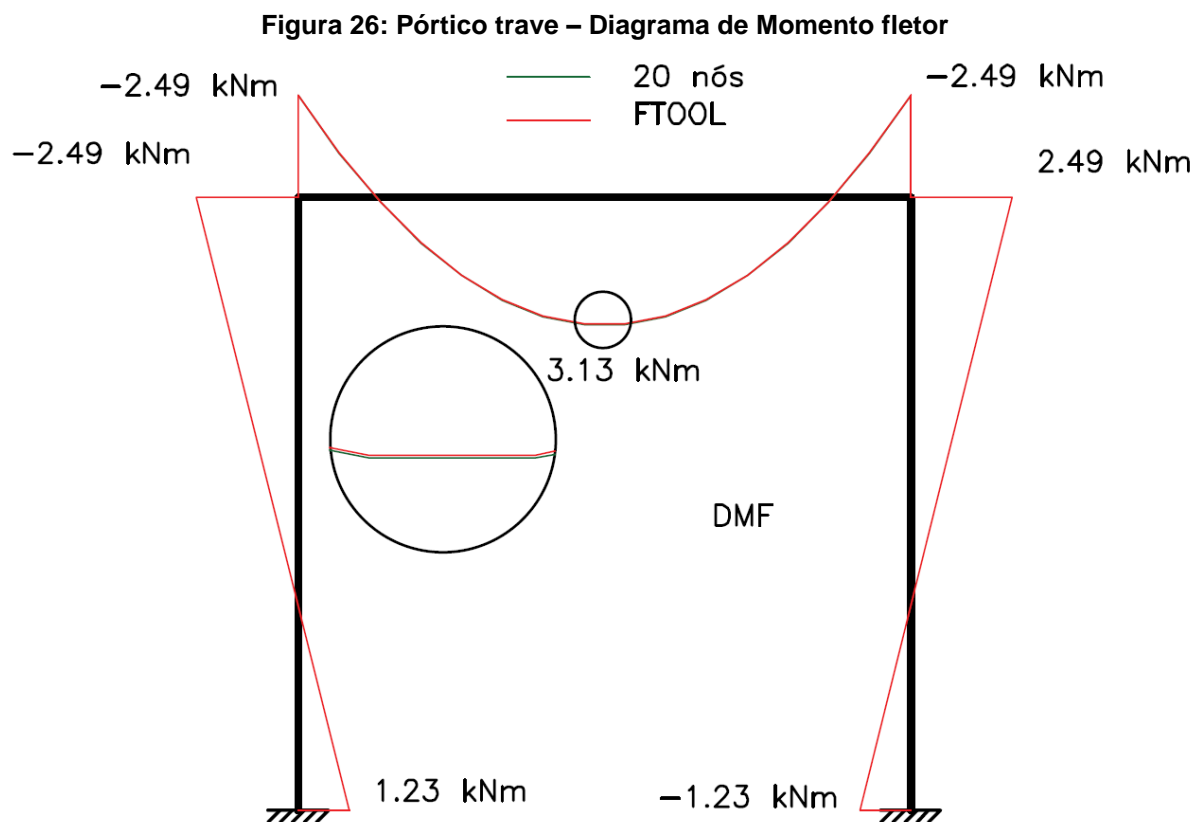
Fonte: o Autor.

Tabela 26: Pórtico trave - Momento fletor

Elem.	Momentos	2	FTOOL	Diferença
	Elemento			
	X local	M _{18 nós}	M	
	m	kN.m	kN.m	
Barra 1	0.0	1.2389	1.2389	0.00%
	3.0	-2.4945	-2.4945	0.00%
Barra 2	0.0	-2.4778	-2.4945	-0.67%
	0.2	-1.0778	-1.0945	-1.52%
	0.4	0.1222	0.1055	15.79%
	0.6	1.1222	1.1055	1.51%

	0.8	1.9222	1.9055	0.87%
	1.0	2.5222	2.5055	0.67%
	1.2	2.9222	2.9055	0.57%
	1.4	3.1222	3.1055	0.54%
	1.6	3.1222	3.1055	0.54%
	1.8	2.9222	2.9055	0.57%
	2.0	2.5222	2.5055	0.67%
	2.2	1.9222	1.9055	0.87%
	2.4	1.1222	1.1055	1.51%
	2.6	0.1222	0.1055	15.79%
	2.8	-1.0778	-1.0945	-1.52%
	3.0	-2.4778	-2.4945	-0.67%
Barra 3	3.0	2.4945	2.4945	0.00%
	0.0	-1.2389	-1.2389	0.00%

Fonte: o Autor.



Fonte: o Autor.

Analisando os momentos obtidos, percebe-se uma divergência máxima de 15,79% entre os resultados. Esse fenômeno ocorre nos nós da malha que se localizam próximos aos pontos onde há mudança no sinal do diagrama, o que gera localmente uma diferença uma

pouco mais acentuada. Em relação aos momentos máximos, nota-se uma divergência de 0,54% entre os resultados, sendo este comportamento acontecendo numa região da função que descreve o momento fletor com uma taxa de variação próxima ou igual a zero (ponto de inflexão), uma vez que o momento máximo aconteceria quando $x = 1,50$ m, ou seja, entre 1,4 e 1,6 m que foram calculados. Salienta-se novamente que as diferenças obtidas neste exemplo ocorrem em razão da função de forma adotada para a aplicação, como nos exemplos 1 e 2.

Para a análise do esforço cortante, procedeu-se com mesma malha utilizada, 2 nós para as barras verticais e 16 nós para a barra horizontal. Com relação ao esforço normal, utilizou-se apenas 6 nós sendo 2 para cada barra.

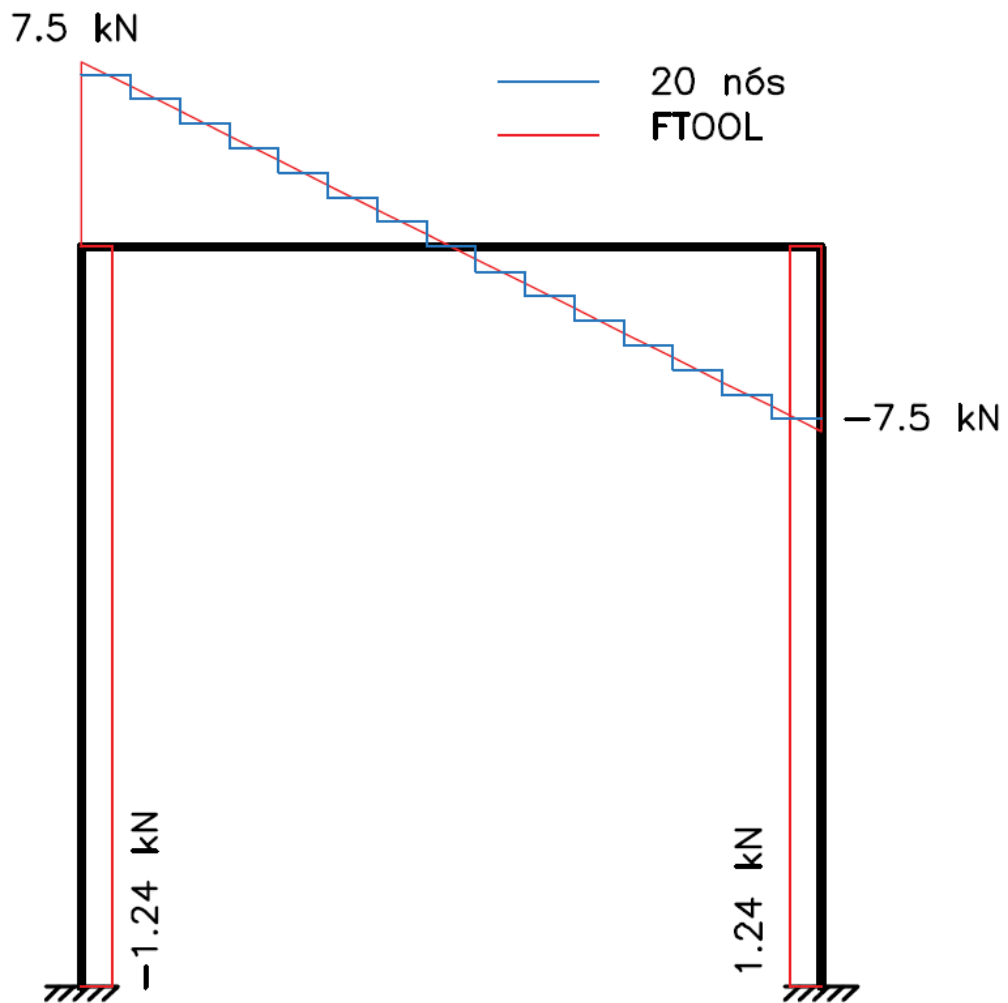
Tabela 27: Pórtico trave - Esforço Cortante

Elem.	Nós		18	FTOOL®	Diferença
	x	y	V	V	
	m	m	kN	kN	
(1)	0.0	0.0	-1.2445	-1.2445	0.00%
	0.0	3.0			
(2)	0.0	3.0	7.0	7.5	-6.67%
	0.2	3.0	6.0	6.5	7.69%
	0.4	3.0		-7.69%	
	0.6	3.0	5.0	5.5	9.09%
	0.8	3.0		-9.09%	
	1.0	3.0	4.0	4.5	11.11%
	1.2	3.0		-11.11%	
	1.4	3.0	3.0	3.5	14.29%
	1.6	3.0		-14.29%	
	1.8	3.0	2.0	2.5	20.00%
	2.0	3.0		-20.00%	
	2.2	3.0	1.0	1.5	33.33%
	2.4	3.0		-33.33%	
	2.6	3.0	0.0	0.5	100.00%
	2.8	3.0		-100.00%	
	3.0	3.0	-1.0	-0.5	-100.00%
3.2	3.0	100.00%			
3.4	3.0	-2.0	-1.5	-33.33%	
3.6	3.0		33.33%		
3.8	3.0	-3.0	-2.5	-20.00%	
4.0	3.0		20.00%		
4.2	3.0	-4.0	-3.5	-14.29%	
4.4	3.0		14.29%		
4.6	3.0	-5.0	-4.5	-11.11%	
4.8	3.0		11.11%		
5.0	3.0	-6.0	-5.5	-9.09%	
5.2	3.0		9.09%		

	2.8	3.0		-6.5	-7.69%
	3.0	3.0	-7.0	-7.5	7.69%
(3)	3.0	3.0	1.2445	1.2445	-6.67%
	3.0	0.0			0.00%

Fonte: o Autor.

Figura 27: Pórtico trave - Diagrama de esforço cortante



Fonte: o Autor.

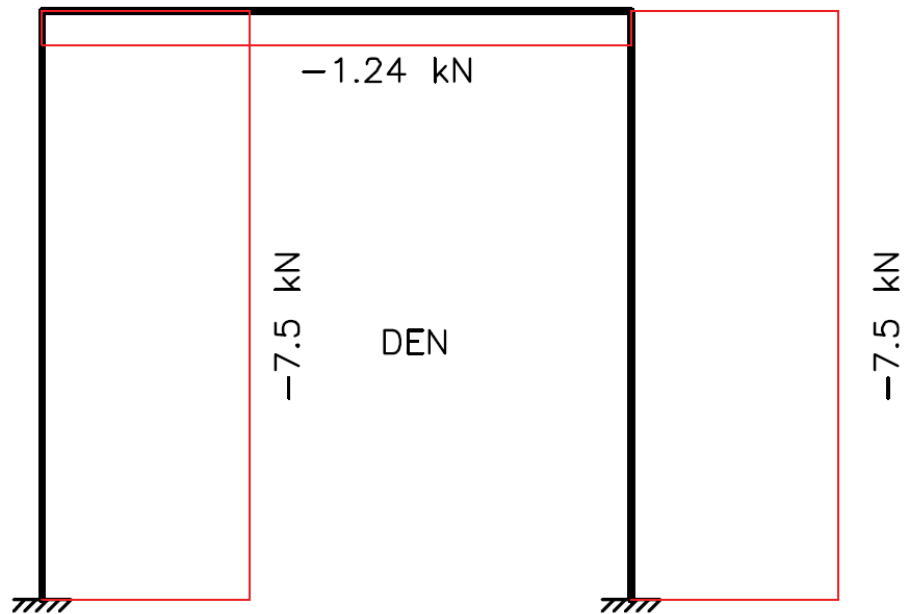
Tabela 28: Pórtico Trave - Esforço Normal (N)

Elem.	Nós		4	FTOOL®	Diferença
	x	y			
	m	m	kN	kN	
(1)	0.0	0.0	-7.500	-7.5000	0.00%
	0.0	3.0			
(2)	0.0	3.0	-1.2445	-1.2445	

	3.0	3.0		
(3)	3.0	3.0	-7.5000	-7.5000
	3.0	0.0		

Fonte: o Autor.

Figura 28: Pórtico trave - Diagrama de esforço normal



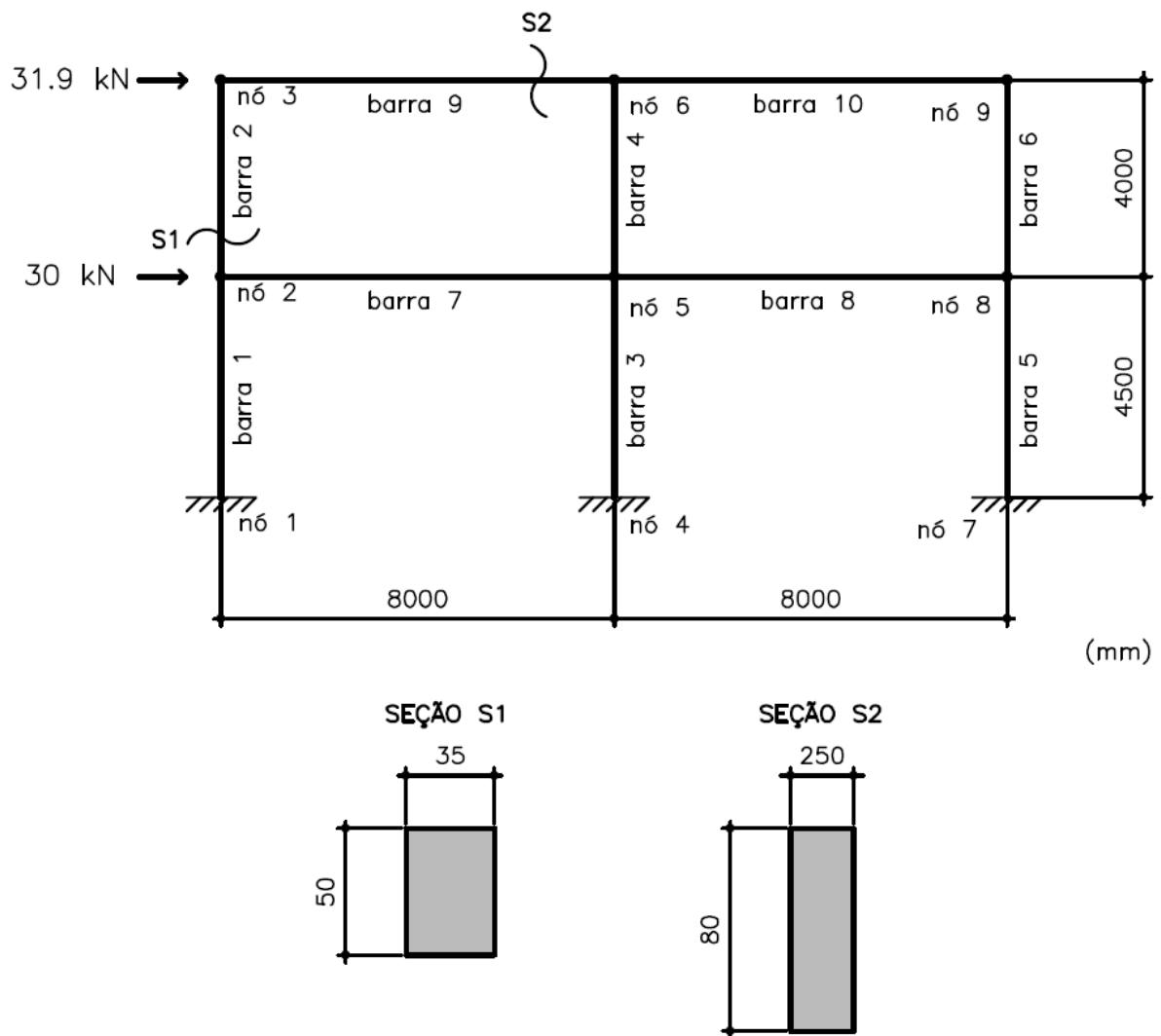
Fonte: o Autor.

Ao observar a Tabela 27, percebe-se que há pontos cuja diferença percentual atinge 100%, entretanto em valores absolutos esta diferença corresponde a 0,5kN, uma diferença que se mostra constante ao longo do elemento 2 do pórtico em razão da malha utilizada.

5.5 EXEMPLO 5

O último exemplo traz uma situação prática da engenharia civil que representa a análise dos efeitos do vento para uma estrutura aperticada com diversos pavimentos. Restringiu-se a estrutura a um pórtico de 2 pavimento a fim de facilitar a interpretação e leitura dos resultados, desta forma a Figura 29 apresenta a geometria do pórtico proposto, bem como as forças horizontais nele aplicadas. A Tabela 29 traz os dados de entradas utilizados.

Figura 29: Pórtico 2 pavimentos



Fonte: o Autor.

Tabela 29: Pórtico 2 pavimentos

Barra	Origem							Destino						F. Distribuídas			
	N	Nó	Vinculação			F. Nodais			Nó	Vinculação			F. Nodais			Normal (N/mm)	Axial (N/mm)
			dX	dY	rZ	X	Y	Z		dX	dY	rZ	X	Y	Z		
1	1	0	0	0				2				30000	0	0	0	0	

2	2				30000	0	0	3				31900	0	0	0	0
3	4	0	0	0				5				0	0	0	0	0
4	5				0	0	0	6				0	0	0	0	0
5	7	0	0	0				8				0	0	0	0	0
6	8				0	0	0	9				0	0	0	0	0
7	2				30000	0	0	5				0	0	0	0	0
8	5				0	0	0	8				0	0	0	0	0
9	3				31900	0	0	6				0	0	0	0	0
10	6				0	0	0	9				0	0	0	0	0

Material	Seção			
	E	I	A	θ
(MPa)	(mm ⁴)	(mm ²)	(mm)	(°)
35418	3.65E+09	175000	4500.00	90.00
35418	3.65E+09	175000	4000.00	90.00
35418	3.65E+09	175000	4500.00	90.00
35418	3.65E+09	175000	4000.00	90.00
35418	3.65E+09	175000	4500.00	90.00
35418	3.65E+09	175000	4000.00	90.00
30672	1.07E+10	200000	8000.00	0.00
30672	1.07E+10	200000	8000.00	0.00
30672	1.07E+10	200000	8000.00	0.00
30672	1.07E+10	200000	8000.00	0.00

Fonte: o Autor.

Como primeira análise, os resultados de deslocamentos foram compilados na Tabela 30 a partir de uma malha simples composta apenas pelos nós de extremidade de cada elemento finito. Vale destacar que para este exemplo, em que há apenas carregamentos horizontais, os deslocamentos horizontais máximos de fato ocorrerão nos nós de extremidade, sendo o maior deles no nó número 3. Em relação as reações e deslocamentos, não foram encontradas diferenças significativas entre os resultados (ver Figura 30).

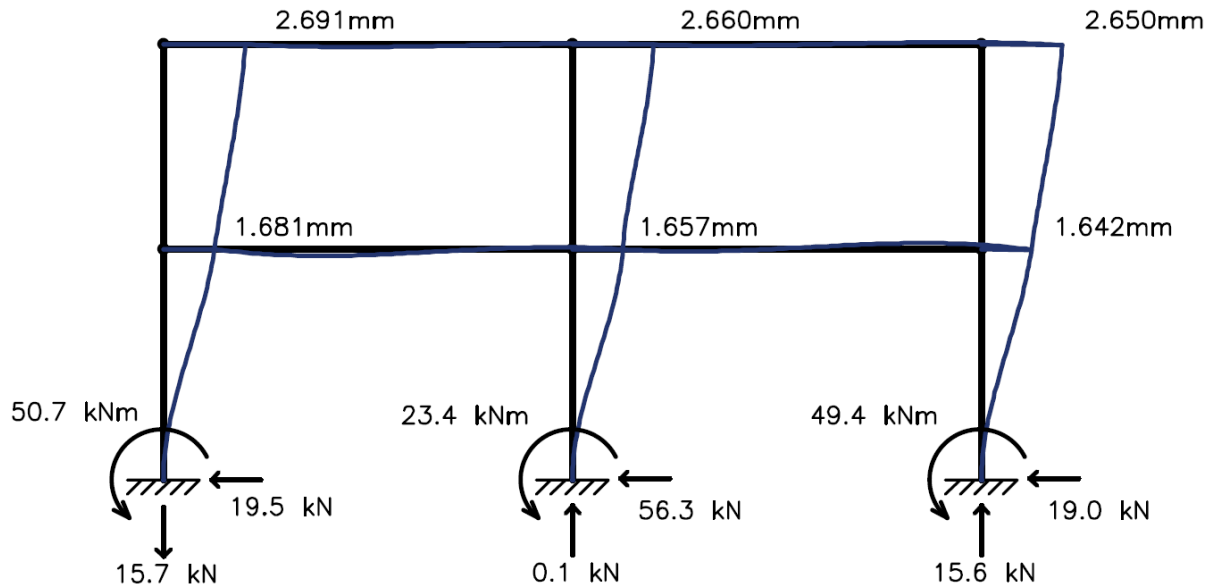
Tabela 30: Pórtico 2 pavimentos - Deslocamentos

Nós	9			FTOOL®			Diferença percentual		
	dX	dY	rZ	dX	dY	rZ			
	mm	mm	rad	mm	mm	rad			
1	0	0	0	0	0	0	-	-	-
2	1.68091	0.01138	-0.00024	1.68091	0.01137	-0.00024	0.00%	0.00%	0.01%
3	2.69184	0.01439	-0.00010	2.69184	0.01439	-0.00010	0.00%	0.00%	-0.05%
4	0	0	0	0	0	0	-	-	-
5	1.65667	-0.00008	-0.00012	1.65667	-0.00008	-0.00012	0.00%	-0.07%	-0.03%
6	2.66076	-0.00007	-0.00005	2.66076	-0.00007	-0.00005	0.00%	0.36%	0.00%
7	0	0	0	0	0	0	-	-	-

8	1.64257	-0.01129	-0.00023	1.64257	-0.01129	-0.00023	0.00%	0.00%	0.02%
9	2.65011	-0.01431	-0.00010	2.65011	-0.01431	-0.00010	0.00%	0.00%	-0.03%

Fonte: o Autor.

Figura 30: Pórtico 2 pavimentos - Deslocamentos e Reações



Fonte: o Autor.

Para a análise dos momentos fletores, manteve-se a malha composta apenas pelos nós de origem e destino dos elementos finitos, uma vez que para uma estrutura carregada exclusivamente por cargas pontuais notou-se, a partir dos exemplos anteriores, que os esforços internos calculados se mantêm com alto grau de precisão em relação ao FTOOL®. A Tabela 31 e a Figura 31 trazem os resultados obtidos para estes esforços, mostrando que não há divergência entre os resultados obtidos e os valores de referência.

Tabela 31: Pórtico 2 pavimentos - Momento fletor

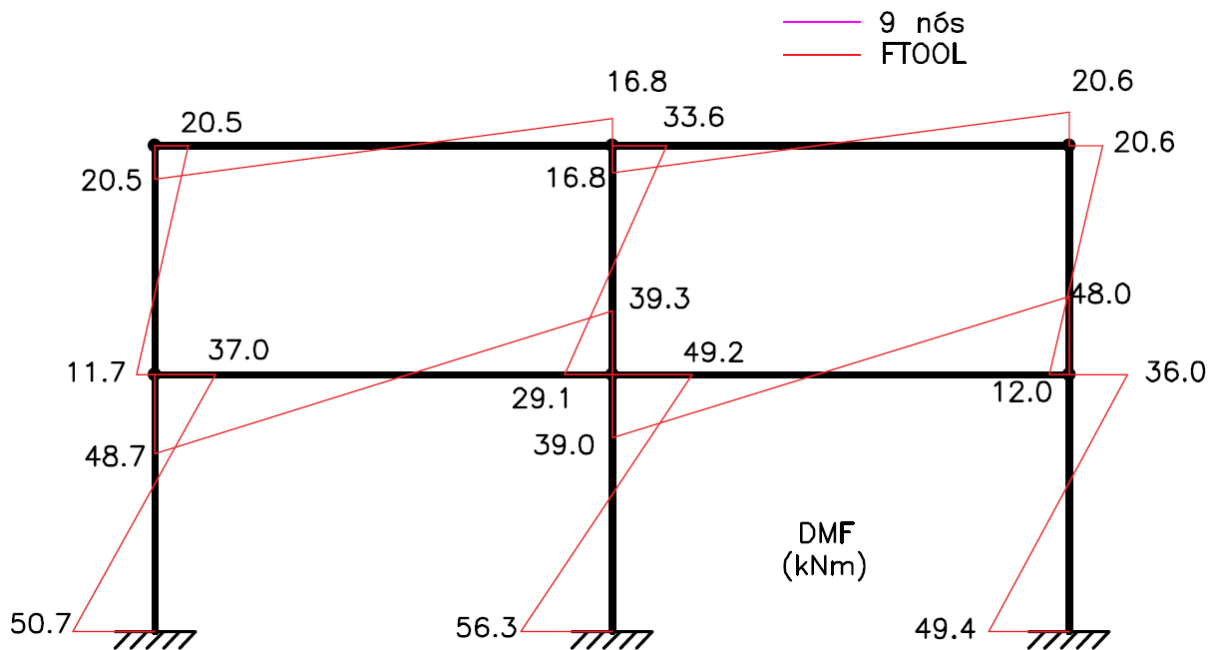
Elem.	Momentos Elemento	3	FTOOL®	Diferença	Elem.	Momentos Elemento	3	FTOOL®	Diferença
		M _{9 nós}	M				M _{9 nós}	M	
	Nó	kN.m	kN.m			m	kN.m	kN.m	
(1)	1	-50.652	-50.652	0.00%	(6)	8	-12.0407	-12.0407	
	int.	-6.830	-6.830			int.	4.2833	4.2833	
	2	36.992	36.992			9	20.6073	20.6073	
(2)	2	-11.699	-11.699		(7)	2	48.6912	48.6912	
	int.	4.425	4.425			int.	4.6810	4.6810	
	3	20.549	20.549			5	-39.3292	-39.3292	
(3)	4	-56.293	-56.293		(8)	5	39.0037	39.0037	
	int.	-3.546	-3.546			int.	-4.5145	-4.5145	

	5	49.202	49.202			8	-48.0327	-48.0327
(4)	5	-29.131	-29.131		(9)	3	20.5490	20.5490
	int.	2.221	2.221			int.	1.8894	1.8894
	6	33.573	33.573			6	-16.7703	-16.7703
(5)	7	-49.418	-49.418		(10)	6	16.8028	16.8028
	int.	-6.713	-6.713			int.	-1.9022	-1.9022
	8	35.992	35.992			9	-20.6073	-20.6073

* int.: momento calculado no ponto médio entre o nó de origem e o nó de destino.

Fonte: o Autor.

Figura 31: Pórtico 2 pavimentos - Diagrama de momento fletor



Fonte: o Autor.

Para análise do esforço cortante, bem como do esforço normal, procedeu-se com a mesma malha composta pelos nós que definem os elementos finitos, não havendo divergência entre os resultados obtidos e os valores de referência.

Tabela 32: Pórtico 2 pavimentos - Esforço cortante

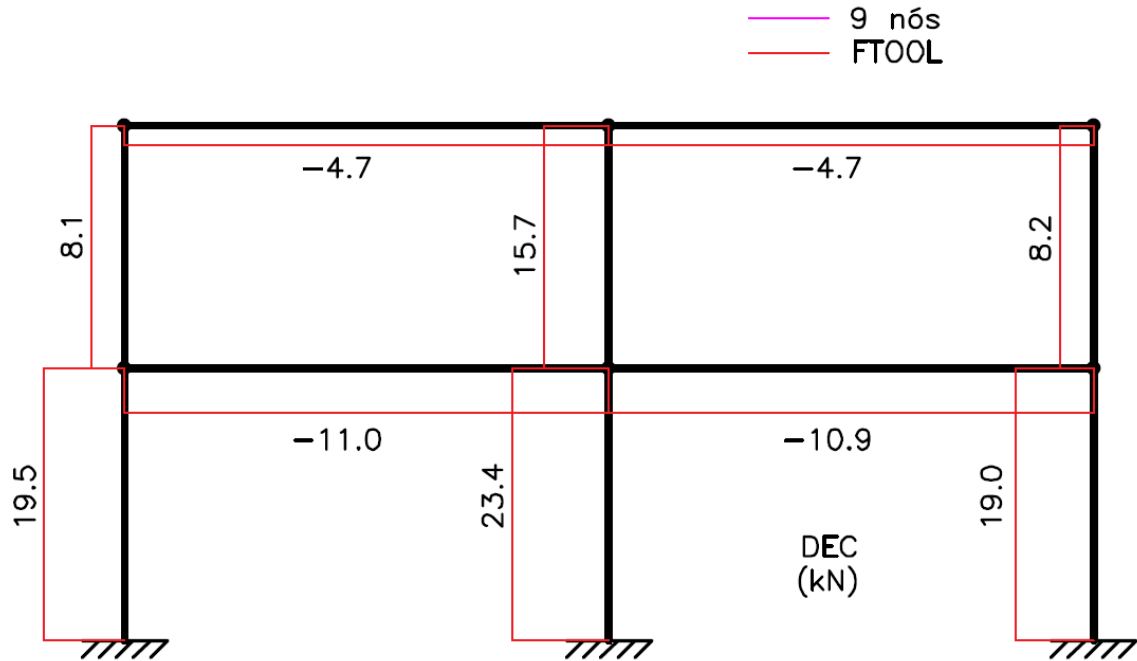
Elem	Nó	V _{9 nós} kN	V _{FTOOL®} kN	Diferença	Elem.	x m	V _{9 nós} kN	V kN	Diferença
(1)	1	19.476	19.476	0.00%	(6)	8	8.162	8.1620	0.00%
	2					9			
(2)	2	8.062	8.062		(7)	2	-11.003	-11.0026	
	3					5			
(3)	4	23.444	23.444		(8)	5	-10.880	-10.8796	

	5		
(4)	5	15.676	15.676
	6		
(5)	7	18.980	18.980
	8		

	8		
(9)	3	-4.665	-4.6649
	6		
(10)	6	-4.676	-4.6763
	9		

Fonte: o Autor.

Figura 32: Pórtico 2 pavimentos - Diagrama de esforço cortante



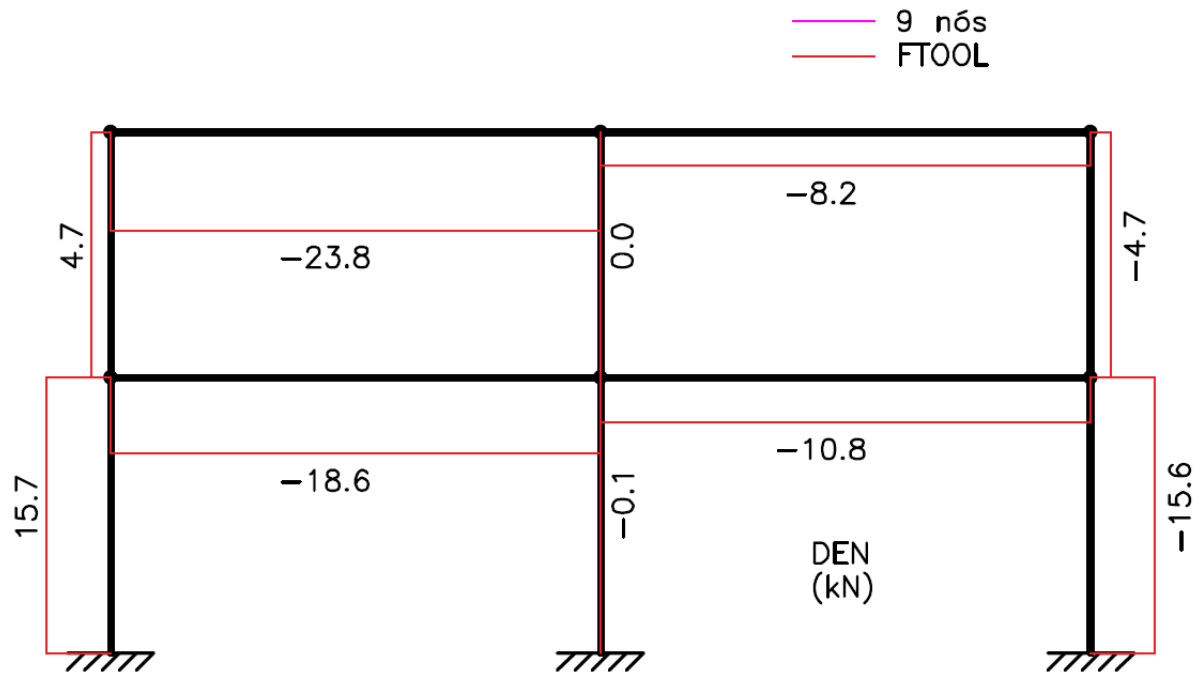
Fonte: o Autor.

Tabela 33: Pórtico 2 pavimentos - Esforço normal

Elem.	Nó	$N_{9 \text{ nós}}$	N	Diferença
		kN	kN	
(1)	1	15.667	15.667	0.00%
	2			
(2)	2	4.665	4.665	
	3			
(3)	4	-0.112	-0.112	
	5			
(4)	5	0.011	0.011	
	6			
(5)	7	-15.556	-15.556	
	8			
(6)	8	-4.676	-4.6763	0.00%
	9			
(7)	2	-18.586	-18.5857	
	5			
(8)	5	-10.818	-10.8181	
	8			
(9)	3	-23.838	-23.8379	
	6			
(10)	6	-8.162	-8.1620	
	9			

Fonte: o Autor.

Figura 33: Pórtico 2 pavimentos: Diagrama de esforço normal



Fonte: o Autor.

Como pôde ser visto, não há divergências significativas entre os esforços calculados por meio da ferramenta em MS-Excel e a de referência FTOOL® para o esquema estático em questão.

6. CONCLUSÃO

A discussão trazida pela revisão bibliográfica e disponibilizada neste trabalho, apresentou as formulações envolvidas no Método dos Elementos Finitos. Nesta etapa, o objetivo foi o entendimento do processo de obtenção das funções de forma para elementos finitos definidos por dois nós, das matrizes que conferem rigidez tanto axial quando transversal às barras, e das formulações que definem os esforços internos: esforço normal, esforço cortante e momento fletor.

O processo de implementação computacional mostrou que o desenvolvimento de funções e rotinas auxiliares viabilizou a implementação de um algoritmo apto à análise estrutural e livre de códigos comerciais, mesmo que o software de planilhas *MS-Excel* associado ao VBA não sejam comumente utilizados para este fim.

Diante dos resultados levantados, ficou evidente que Método dos Elementos Finitos é uma opção viável a ser implementada em um software comum de planilhas. As principais vantagens desta implementação correspondem: à facilidade de alteração da geometria, material e condições de carregamento, à possibilidade de parametrização das variáveis com intuito de discernir uma concepção mais inteligente e ao baixo custo computacional envolvido nas análises.

Durante o desenvolvimento dos exemplos pôde-se notar que, mesmo com o aumento do número de nós das estruturas, o custo computacional envolvido não se mostrou impeditivo ao uso da ferramenta proposta, o xITool, sendo viável a criação de estruturas com dezenas de nós.

Além disso, a discussão das análises relatadas mostrou o grau de eficiência e compatibilidade das formulações do MEF utilizadas frente às condições da estrutura. Diante disso, pode-se afirmar que:

- a) A função de forma (de interpolação), função de primeiro grau para a rigidez axial e função de terceiro grau para rigidez transversal são apropriadas para o cálculo de reações e deslocamentos de estruturas submetidas a carregamentos concentrados e distribuídos;
- b) O software proposto calcula esforços internos com relativa imprecisão (a depender da densidade de malha utilizada) quando submetido à carregamentos distribuídos em razão do grau das funções de forma utilizadas;
- c) O grau de hiperestaticidade da estrutura não impacta na análise estrutural;

- d) Um maior número de nós internos gera maior aproximação nos resultados de esforços internos para estruturas submetidas a carregamentos distribuídos, mas não impacta na precisão de estruturas com cargas concentradas.

Ao observar as conclusões acima, fica evidente a importância da função de forma utilizada que aproximará os resultados de esforços internos de maneira mais ou menos precisa a depender do tipo de carregamento. Para os deslocamentos e reações, a função de forma utilizada se mostrou adequada e eficiente. A escolha das funções de forma relatadas nas seções 2.3 e 2.4 foi feita buscando-se obter a menor e mais simples matriz que viabilizasse o cálculo das reações e deslocamentos do sistema, ou seja, funções de primeiro e terceiro grau para rigidez axial e transversal, respectivamente.

Durante o processo de comparação de resultados com o FTOOL®, notou-se que essa aplicação, adotada como referência de resultados, possui limitação no número de casas decimais. Por conta disso, em diversas situações a formulação utilizada para o cálculo da diferença percentual acusou alguma divergência, mesmo que os resultados fossem idênticos até a casa decimal disponível no FTOOL®.

Por fim, como propostas para trabalhos futuros, recomenda-se a implementação computacional do Métodos dos Elementos Finitos para estruturas apertadas com funções de aproximação de graus superiores àquelas adotadas neste trabalho, podendo-se empregar funções de quinto grau para rigidez transversal e segundo grau para rigidez axial. Do ponto de vista da implementação computacional, são lacunas deste trabalho a atribuição de momentos fletores puros nodais ou em elementos de barra, nós definidos por rótulas, a condição de vinculação com molas e a consideração dos impactos da variação da temperatura na estrutura. Além disso, é de grande valia a implementação de pré e pós processadores que permitam a entrada, leitura e interpretação dos dados de maneira mais simples.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARROS, J. A O. **Método dos elementos finitos aplicado a estruturas reticuladas**. Relatório técnico 04-DEC/E-25, Universidade do Minho, 2004.

CHANDRUPATLA, T. R. BELEGUNDU, A. D. **Elementos finitos**. 4.ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil Ltda, 2014.

CORRÊA, V. A. **Aplicação da Computação Simbólica na Resolução de Problemas de Condução de Calor Em Cilindros Vazados com Condições de Contorno Convectivas**. 2007. Tese (Doutorado) – Curso de Engenharia Mecânica – Universidade Estadual Paulista. Guaratinguetá. 2007.

DIAS, R. P. **Formulação do método dos elementos finitos para a análise elástica linear de pórticos planos**. TCC (Graduação) – Curso de Engenharia Civil – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão. 2014.

HIBBELER, R. C. **Análise das estruturas**. 8.ed. São Paulo: Pearson, 2013.

HIBBELER, R. C. **Resistência dos materiais**. 7. ed. São Paulo: Pearson Education: Prentice-Hall, 2010 HIBBELER, R. C

LEITÃO, E. M. M. **Considerações sobre a Formulação de Diversos Elementos Finitos em Exemplos de Aplicação**. TCC (Graduação) - Especialização em Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte. 2014.

LIMA, S. de S. **Análise de estruturas por computadores**. 1ª ed. Rio de Janeiro, 2017.

MACEDO, L. V. da S. **Estruturas Mecânicas e de Veículos: Método dos Elementos Finitos**. 29 agosto. 2020, 05 dezembro. 2020. Notas de Aula.

SILVA, A. **Programação em VBA: Texto introdutório**. Instituto Superior de Engenharia do Porto, 2009.

SORIANO, H. L. **Método de elementos finitos em análise de estruturas**. São Paulo: EDUSP, 2003. xiv, 580p. (Acadêmica; 48) ISBN 9788531407307.

Tipos de dados numéricos (Visual Basic). **Microsoft**, 2022. Disponível em: <<https://docs.microsoft.com/pt-br/dotnet/visual-basic/programming-guide/language-features/data-types/numeric-data-types>>. Acesso em: 11 de abril de 2022.