UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

ERICK QUINTINO DOS SANTOS

A MATEMÁTICA DA MÚSICA: UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO DE FRAÇÕES ATRAVÉS DA TEORIA MUSICAL

SÃO CARLOS - SP
2022

Erick Quintino dos Santos

A MATEMÁTICA DA MÚSICA: UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO DE FRAÇÕES ATRAVÉS DA TEORIA MUSICAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas da Universidade Federal de São Carlos para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Exatas.

Orientador: Prof. Dr. João Carlos Vieira Sampaio.

Santos, Erick Quintino dos

A Matemática da Música: uma abordagem para o Ensino de Frações através da Teoria Musical / Erick Quintino dos Santos -- 2022.
94f.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São Carlos, campus São Carlos, São Carlos
Orientador (a): João Carlos Vieira Sampaio
Banca Examinadora: Eliris Cristina Rizziolli, Grazielle Feliciani Barbosa
Bibliografia

1. Educação. 2. Matemática . 3. Música. I. Santos, Erick Quintino dos. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática (SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Ronildo Santos Prado - CRB/8 7325

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Erick Quintino dos Santos, realizada em 19/04/2022.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. João Carlos Vieira Sampaio (UFSCar)

Profa. Dra. Eliris Cristina Rizziolli (UNESP)

Profa. Dra. Grazielle Feliciani Barbosa (UFSCar)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas.

DEDICATÓRIA

"(...) as vozes da minha mente."

AGRADECIMENTO

Agradeço todas manifestações que são a fonte de energia, sabedoria e inspiração.
Minha família, pela paciência e incentivo no decorrer do curso.
Agradeço a CAPES, a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e o Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) pela coordenação do PROFMAT, e a Universidade Federal de São Carlos pela coordenação do PPGECE.
Também agradeço a Universidade Federal de São Carlos, campus São Carlos pela oportunidade de realizar o curso stricto sensu, pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, na linha de pesquisa de Ensino de Matemática.
Todos(as) os(as) professores(as) do PPGECE e PROFMAT pela paciência, pelas contribuições profissionais, pessoais e os ensinamentos no decorrer do curso.
De maneira especial agradeço o professor Dr. João Carlos Vieira Sampaio, pela orientação, confiança, paciência e apoio, que foram fundamentais no desenvolvimento deste trabalho que junto a mim traz consigo um sonho, algumas paixões, um objetivo, e mais uma conquista pessoal e profissional.
Agradeço também toda equipe administrativa do Departamento de Matemática, por sua dedicação e empenho à frente da coordenação e administração do programa de Pós-Graduação.
Aos amigos no decorrer de toda uma vida e aos conquistados através do curso, pelas contribuições para meu crescimento pessoal, profissional, e acima de tudo, pela parceria e o apoio dado em todos os momentos, sem vocês nada disso seria possível.
Mesmo sendo clichê, agradeço todos os encontros ocorridos durante minha vida, pois, se hoje estou aqui, foi graças a essas experiências e trocas. Tomo liberdade para parafrasear a frase de Antoine de Saint-Exupéry que diz que: “todas as pessoas que cruzam nosso caminho deixam em nós um pouco de si e levam consigo um pouco de nós”.
Então, agradeço todos os momentos (os bons e os ruins), pois foram eles que me trouxeram até aqui.
Enfim, findada essa etapa, vamos em busca de novos desafios!

“Se enxerguei mais longe, foi porque me apoiei sobre os ombros de gigantes.”

Isaac Newton

RESUMO

Este estudo apresenta uma proposta pautada na aplicação de metodologias inovadoras através de sequências didáticas para o ensino de Matemática para alunos do Ensino Fundamental II. Tem por objetivos introduzir conceitos sobre frações pela perspectiva da relação entre razões, de modo a complementar e aprofundar conceitos sobre o tema, combinados à forma tradicional de apresentação prevista nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) e na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do Ensino Fundamental II, através de práticas relacionadas à Música e ao estudo da escala musical utilizando-se de novas perspectivas e metodologias que fornecem estruturas cognitivas e socioemocionais para o ensino da Matemática de maneira consistente e significativa, onde se espera que dessa forma os alunos recebam oportunidades de novas experiências durante a sequência didática para que consigam concretizar e manter o aprendizado por toda sua vida, aplicando-o em sociedade como uma das garantias que a Educação se propõe a cumprir.

Palavras-chave: Educação; Exatas; Frações; Matemática; Música.

ABSTRACT

This study presents a proposal based on the application of innovative methodologies through didactic sequences for the teaching of Mathematics to Elementary School II students. It aims to introduce concepts about fractions from the perspective of the relationship between ratios, in order to complement and deepen concepts on the subject, combined with the traditional form of presentation provided for in the National Curricular Parameters (PCN's) and in the National Common Curricular Base (BNCC) of Education Fundamental II, through practices related to Music and the study of the musical scale using new perspectives and methodologies that provide cognitive and socio-emotional structures for the teaching of Mathematics in a consistent and meaningful way, where it is expected that in this way students receive opportunities of new experiences during the didactic sequence so that they can implement and maintain learning throughout their lives, applying it in society as one of the guarantees that Education proposes to fulfill.

Keywords: Education; Exact Sciences; Fractions; Math; Music.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 – INTRODUÇÃO

A Educação tal como ciência, é uma área fundamental do conhecimento, que por sua característica organizacional e importância social, está sempre em construção, trabalhando e agregando pra si novas práticas em busca de resultados eficazes para um ensino justo garantido a todos por lei.

Abordando o ensino de disciplinas de Ciências Exatas, é muito importante observar que esse processo se dê de forma clara, completa e satisfatória, e para conseguir resultados positivos, necessita-se que essas áreas sejam trabalhadas de modo especial, combinando diferentes metodologias que se pautem na utilização dessas novas abordagens com conceitos educacionais tradicionais previstos nos documentos que norteadores que regem a escola e o ensino.

De forma específica, no caso da Matemática, que é foco deste estudo e uma das bases fundamentais de várias disciplinas exatas, é imprescindível proporcionar um ensino concreto, de forma eficaz dos conceitos, mas que seja prazerosa, pautando-se do conteúdo aplicado e do objeto pedagógico principal, inserindo temas essenciais, reafirmando elementos necessários e suas relações com novas propostas pedagógicas, utilizando uma linguagem simples, objetiva e que faça parte da realidade dos alunos, e assim consiga atingir os objetivos que a Educação tem por meta, ou seja, a criação do cidadão atuante, que compreende, assimila e resolve problemas de forma racional, entendendo seu papel para convier em sociedade.

Para que as práticas educacionais consigam resultados eficazes, é fundamental sempre questionar a efetividade dos métodos e assim, olhar com uma visão abrangente, e que seja capaz de acompanhar a evolução tecnológica, reinventar técnicas e abordagens ultrapassadas, a fim de atingir todos os tipos de aprendizagem, todas as realidades, classes e condições.

Em rumo à finalidade e propósitos aqui apresentados, justifica-se a presente pesquisa que trabalha o ensino de conceitos de Matemática através de uma linguagem universal, a Música. Portanto, este estudo tem por objetivo trazer à tona a discussão sobre novas abordagens para o ensino de Matemática, onde faz uma proposta de inovação nas metodologias de ensino, trabalhando a interdisciplinaridade entre duas ciências que apesar de diretamente integradas e com grande potencial pedagógico exploratório, são pouco exploradas em forma conjunta: a Matemática e a Música.

A Matemática tal como ciência estabelece, de forma racional, verdades absolutas onde se apropria dos números, explicando através de suas relações os fenômenos naturais e suas implicações no mundo real. A Música por sua vez, trabalha através da harmonia com as emoções em várias vertentes, utilizando o som e suas propriedades físico-sensoriais para recorrer a meios circunstanciais e provocar diversas sensações.

É fato que o som sempre esteve presente numa relação direta com a humanidade, e ao que se trata em relação às duas áreas do conhecimento, temos uma correspondência muito interessante e que começou a ser provada na Grécia, por Pitágoras, que sistematizou o início da teoria musical através de propriedades matemáticas, e por isso podemos ensinar diversos fundamentos de Matemática através da teoria musical.

Naturalmente, mesmo que de forma intuitiva não há como negar essa conexão direta, entre a Matemática e a Música. Ambas demonstram a beleza cada qual a seu caso, através de seus propósitos próprios de forma singular. Se juntas, podem ser exploradas em várias ocasiões proporcionando grandes experiências pessoais e pedagógicas consolidando uma nova e potencial perspectiva no Ensino.

Para demonstrar essa possibilidade, desenvolveu-se uma proposta em explorar uma entre as inúmeras relações da Matemática, que é pautada sobre a lógica, mas tem suas concepções e atuações abstratas na ciência, e da Música, que é tida como uma linguagem universal e é uma forma concreta de arte.

No desenvolvimento deste estudo a relevância em sua proposta se evidenciará através das discussões entre as áreas que serão constantemente unificadas desde a apresentação da proposta de intervenção até os resultados. É necessário destacar que os conceitos musicais que foram abordados neste estudo, se deram por definições simples, diretas e muito bem formalizadas, portanto, não houve a necessidade de uma formação mais especifica (dos leitores e/ou dos participantes do projeto) em teoria musical, haja vista, é importante destacar que certamente seria valioso e este conhecimento prévio iria auxiliar bastante para um leitor e/ou participante do estudo.

Na construção argumentativa, para fomentar os objetivos finais desta dissertação são apresentadas através da história da Matemática e da Música, por diversos momentos, inúmeras interligações entre os dois temas, tais como a construção estrutural das escalas (sejam simples e complexas) e a aritmética, também a identificação de oitavas e relações de equivalência para construção da harmonia, intervalos musicais e a divisão fracionária (e consequentemente ao aprimoramento da teoria, a logarítmica), os temperamentos iguais (e expoentes), tons e semitons, timbres, culminado nas séries de Fourier.

Ao longo do desenvolvimento, buscou-se de forma fundamentada, construir e assimilar o conceito da evolução da Matemática partindo do início das sociedades e da contagem, onde o som, tal como fenômeno físico e ainda não demonstrado matematicamente, já era utilizado como comunicação, entretenimento, dentre outros fins, passando pela cultura grega que se encarregou das primeiras fundamentações da teoria musical, pautada em razões numéricas simples possibilitadas pelas razões, portanto nascia assim, essa ligação fundamental entre a Matemática e a Música, que abriu campo para construção efetiva de parte da teoria musical que ainda é utilizada atualmente e que será utilizada para proposta de sequência didática neste estudo.

Portanto, a partir do problema, surge uma possibilidade: porque não utilizar dessa condição de forma pedagógica para o ensino de Matemática? De fato, é necessário sempre reinventar o ensino e a Música, tal como uma arte e claramente considerada uma linguagem universal, demonstrou que pode ser grande aliada nessa construção do conhecimento de Matemática aplicada, buscando a consolidação de conceitos fundamentais sobre frações através da teoria musical.

Através da proposta de trabalhar uma metodologia diferente que utiliza a interdisciplinaridade entre a Matemática e a Música, pautada na Lei 11769/08, que determina o ensino da Música como conteúdo obrigatório na Educação Básica. Ambas as disciplinas, a Matemática e a Música, estimulam o raciocínio lógico e são importantes ferramentas para o desenvolvimento de habilidades, tais como atenção e concentração e ao trabalhar a Música para o ensino de Matemática é possível instigar o raciocínio, a partir da curiosidade e conduzir à compreensão de conteúdos matemáticos através da codificação e decodificação da teoria e dos símbolos musicais.

Todavia, ao que se trata da construção dos capítulos ao decorrer do andamento desde estudo, inicialmente será tratada a história da Matemática tal como ciência e sua construção junto à consolidação social da humanidade e também a construção da Música e consequentemente da teoria musical partindo do conceito físico do som e sua descrição matemática, o que permitiu demonstrar essa relação entre as ciências, desde conceitos mais simples como a percepção pitagórica através da razão, uma divisão fracionária, ponto chave do projeto, passando pelo temperamento proporcionado pelos logaritmos, a fim de complementar a teoria do estudo, culminando até as series de Fourier que permitiu a modernização nas formas de manipular as ondas e também possibilitou uma nova condição de tratar a música para sua utilização em formato digital.

Em sequência, se dará a introdução de conceitos matemáticos aplicados que serão utilizados para formação das propostas educacionais abordadas alternando entre a Matemática e a Música para a fundamentação teórica e comprovação do objeto pedagógico referência que se pauta sobre o ensino de frações através de relações entre razões pela utilização da teoria musical na construção de um "instrumento musical simples".

Por fim a pesquisa traz a Educação Matemática como foco, abordando desde sua criação, seus principais momentos e suas linhas norteadoras, onde o projeto é apresentado desde sua ideia principal seguindo o que recomenda os documentos e agregando essa proposta inovadora nas aulas de Matemática, com a elaboração e apresentação da proposta de uma sequência didática que desde a origem, aplicação e análise dos dados obtidos.

2 – RECORTES SOBRE A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E DA MÚSICA

A partir do momento que o homem deixou a condição de um ser nômade e se estabeleceu em locais fixos, construindo assim as primeiras formas sociais, a Matemática surgiu, juntamente com a necessidade de resolver situações problema, tais como contar, medir, realizar transações comerciais, dentre outras, culminando nos modelos sociais que temos atualmente.

2.1 – O desenvolvimento histórico da Matemática

Concomitantemente as novas configurações nos modelos sociais, o conhecimento e suas áreas de atuação como, por exemplo, a Matemática dentre outras ciências, se tornaram necessárias para sustentar, explicar e desenvolver tais necessidades. Porém, inicialmente a Matemática era pautada e restrita na ação, onde não se preocupava na sistematização, mas na prática.

> No século XVII, a Matemática desempenhou papel fundamental para a comprovação e generalização de resultados. Surgiu a concepção de lei quantitativa que levou o conceito de função e do cálculo infinitesimal. Esses elementos caracterizaram as bases da matemática como se conhece hoje. (PARANÁ, 2008, p. 40)

São remetidos ao período Paleolítico (aproximadamente 20000 a.C.), como um dos primeiros registros de utilização da Matemática, e se dão através do descobrimento de um artefato conhecido como "Osso de Ishango", na região de Ishango do Congo Belga região da África, atual República Democrática do Congo.

Não há uma definição ou consenso formal por parte dos historiadores sobre o que o artefato expressa, mas houve de fato a determinação que o artefato tem uma conjectura, ou seja, segue um padrão expresso e que pode ter sido utilizado como ferramenta na conferência de resultados de cálculos ou para registro de informações, e que provavelmente pela regularidade das marcas nele expressas, já estavam em linguagem decimal.

Após o episódio de Ishango, os próximos vestígios com contextos históricos relevantes da utilização da Matemática são remetidos ao antigo Egito, na região que contempla o rio Nilo (datado aproximadamente de 4.000 a.C.). É importante ressaltar, que como a maioria das civilizações antigas, os egípcios utilizavam a Matemática na prática, ou seja, para resolução de problemas isolados, tal como as demarcações de área nas cheias do Nilo.

Outro ponto cronológico que traz importância se dá na Mesopotâmia (aproximadamente 2000 a.C.), região que está compreendida entre os rios Tigre e Eufrates, povoada de forma diversificada pelos povos assírios, babilônios e sumérios. Esses grupos trabalharam pautando-se na utilização da base sexagesimal, principalmente nos estudos de astronomia e em relação à divisão do tempo que é utilizado até hoje, mas sem preocupação na época dos acontecimentos em sistematizar esse conhecimento.

Segundo Marcondes (2010, p.19):

> Os diferentes povos da Antiguidade – assírios e babilônicos, chineses e indianos, egípcios, persas e hebreus –, todos tiveram visões próprias da natureza e maneiras diversas de explicar os fenômenos e processos naturais. Só os gregos, entretanto, fizeram ciência, e é na cultura grega que podemos identificar o princípio deste tipo de pensamento que podemos denominar, nesta sua fase inicial, de filosófico-científico.

Foi a partir da Grécia (por volta do século VI a.C.), que houve o interesse em sistematizar o conhecimento através da filosofia, e de mecanismos científicos sobre a forma lógica de pensamento, surgindo então registros para a criação, continuação e melhoramento de muitas condições humanas tornando o que já existia na prática, algo que passava a ter embasamento científico. Não diferente a essa condição, música sempre fez parte da humanidade, mesmo quando apenas intuitiva e aguçadora das emoções humanas, ainda não sistematizada sobre conceitos de matemáticos.

A Matemática, de forma direta ou indireta, sempre esteve em diversas áreas do conhecimento. Suas atribuições se dão por muitas vezes pela necessidade do entendimento lógico, para a resolução de problemas práticos. Ao evoluir do homem, tal como ser, o pensamento matemático também foi se construindo nessas aplicações e em suas sistematizações, contribuindo na formação direta e indireta em diversas outras áreas do conhecimento.

2.2 – A construção histórica da Música

Tal como a Matemática, a Música ainda não formalizada, já era usada em sua concepção prática e física, ou seja, o som já era algo que os seres humanos usufruíam e emitiam como forma de comunicação, proteção, dentre outras funções. Mesmo seguindo por expressões e direções diferentes, as duas ciências têm muito em comum e seus valores sempre foram exaltados e reconhecidos ao decorrer da história da humanidade.

> O poder conquistador supra-humano da música já se expressa na mitologia grega em Orfeu, cujo canto acompanhado de lira sustava rios, amansava rios e movia pedras. A matemática também faz-se presente desde os tempos mais remotos, por exemplo, na contagem de objetos. (ABDOUNUR, 2006, p.VII.)

Através de vestígios, estima-se que ainda na Pré-história, mais precisamente no período Paleolítico (aproximadamente 50000 anos a.C.), os primeiros seres humanos, através da observação, começaram a desenvolver (ainda pela técnica da repetição) sons oriundos de seus próprios corpos, de animais e dos fenômenos da natureza. Essas formas arcaicas de experimentação não eram ainda sistematizadas, nem consideradas expressões de arte e estavam relacionadas inicialmente com defesa e comunicação.

Após essas concepções da pré-história relatos que merecem destaque se dão no antigo Egito (aproximadamente 4.000 a.C.), onde o cenário já demonstrava que a música tinha relevada importância para esse povo e se fazia muito presente, pois os egípcios a consideravam como uma forma de arte.

Segundo a crença egípcia, a música foi criada pelo deus *Thoth* (também conhecido como Zehuti, Tehuti, Tote, Toth ou Thot, dentre outras variantes da forma de escrita, de acordo com a sociedade em que a mitologia era usada) e trazida ao mundo pelo deus por *Osíris* para ser utilizada em rituais que eram sagrados para os egípcios, principalmente na contemplação da agricultura e das colheitas. Já é conhecido que no Egito antigo já existia o uso de instrumentos de sopro, tais como flautas, instrumentos de corda, tais como harpas, liras, cítaras e instrumentos de percussão, tais como atabaques e tambores.

Na Ásia a atividade musical (em torno de 3.000 a.C.) tinha força mais precisamente na Índia e na China e era relacionada de forma direta com o espiritual, onde a música já apresentava uma fundamentação teórica não sistematizada em um sistema musical, que se utilizava era a escala de cinco tons, uma espécie de pentatônica e foi utilizada na música ocidental.

Na Mesopotâmia (aproximadamente 2000 a.C.), permaneciam alguns velhos costumes e modelos mais aprimorados dos instrumentos de origem egípcia, houve destaque na harmonia relacionada ao estudo da divisão do tempo que é parte fundamental da harmonia musical. Já na Índia, (aproximadamente em 800 a.C.), o método musical era o de "ragas", que não utilizava notas musicais e era composto de tons e semitons com sistemas de afinação próprios da música indiana.

A Grécia, (por volta do século VI a.C.), contribuiu efetivamente para a evolução da Música, tal como ciência descrita e sistematizada, dando contribuições diretas da Matemática

Pura e Aplicada por meio do primeiro experimento científico que se tem registro realizado pela humanidade. Foram os gregos que estabeleceram muitas das bases para a cultura no Ocidente, dentre elas a Música, tal como ciência. A própria etimologia da palavra “música” é grega, onde "mousikê" significa "a arte das musas", e a concepção artística grega era abrangente, pois contemplava muitas áreas, tais como a dança, a música e a poesia.

O desenvolvimento das Ciências e das Artes se deu paralelamente ao próprio desenvolvimento das sociedades gregas. A necessidade dos gregos pela sistematização do conhecimento fez com que surgissem muitas teorias filosóficas que procuravam compreender seu significado e importância dos fenômenos, sejam eles sociais e ou naturais.

Dentre as áreas que a Filosofia grega tentava sistematizar, a Música sempre exerceu influência sobre os homens, Platão considerava o poder tão importante, que deveria estar sob controle do Estado, considerado como responsável por garantir seu controle e bem social.

Todas essas expressões artísticas eram praticadas de formas integradas, pois nas apresentações os poemas eram recitados sob o acompanhamento de um instrumento musical, geralmente era feito principalmente pela Lira, e também pela Cítara e o Aulos (instrumento de sopro), uma justificativa do nome "poesia lírica" para denominar esse gênero poético. Assim como os demais povos antigos, a Música era utilizada de modo especial na igreja, oferecida também aos deuses, definida como uma criação integral do espírito e um meio de alcançar a perfeição do mesmo, o que estava intimamente ligado ao modo que os gregos mistificavam os números.

Na sociedade grega os cultos religiosos utilizavam melodias que tinham certo padrão, após este período inicial houve uma evolução da música Nomoi para a Lírica Solista, com as inserções do canto conjunto e o solo instrumental, e também vieram as grandes tragédias inteiramente cantadas, que marcaram o apogeu da civilização helênica (do século VI ao século IV a.C.).

De acordo com Abdounur (2006), o início remete a Pitágoras e de acordo com a “lenda dos martelos”, descobriu por meio da criação de seu instrumento musical, chamado monocórdio, a relação existente entre sons agradáveis aos ouvidos, presentes na música, e sua relação com as razões matemáticas, imprescindíveis para sua compreensão e evolução, sendo ponto de partida para aprimoramentos do que temos de teoria musical atualmente.

> Matemáticos e físicos como Pitágoras, Euclides, V. Galilei, G. Galilei., L. Euler e J. Kepler, entre outros sentiram a analogias entre matemática e música. Por outro lado, os músicos recorreram à matemática para descrever a sua arte, tais como J.P. Rameau, J.S. Bach, F. Chopin, A. Shoenberg, entre outros. (SANTOS-LUIZ, 2015, p.272)

Pitágoras descobriu e estabeleceu proporções numéricas ainda vistas de forma simples (frações) para cada intervalo musical. Seu sistema musical apoiava-se numa escala elementar de quatro sons: o Tetracorde, onde o canto prendia-se a uma melodia simples, a Monodia.

Os estudos históricos comprovam que de fato os primeiros grupos de humanos e após, as primeiras civilizações, já executavam sons sejam eles harmoniosos ou não (e esse conceito físico do som é importante), mas também é sabido que estes povos apesar de deter os conhecimentos práticos dessa relação entre os sons e a música, não se preocupavam em sistematizar esses conceitos, então a música se tratando de ciência descrita não foi relatada de forma clara nesses povos, até os gregos. A música grega se baseava em oito escalas diatônicas descendentes, conhecidas como “Modos Gregos” e se fundamentava na Ética e na Matemática.

É importante ressaltar que a Música se encaixa num tipo de arte, uma das mais importantes entre as sete artes liberais (Trivium e Quadrivium e os movimentos que já existiam desde a Idade Média), considerada como linguagem universal e que trabalha com a harmonia entre os sons, ritmos e melodias. No entanto esse conjunto de condições são fundamentais, onde através da Física e da Matemática, se tem por resultados a Música, que compila todos esses elementos e faz ponte, criando sensações, resgatando memórias e reacendendo emoções.

Na Idade Média o desenvolvimento das artes liberais foi uma forma de resgatar uma ideia de origem Greco-romana do conceito para determinar a ação de educar e cultivar o espírito da criança, através de uma formação integralizando o corpo e a mente (esse movimento ficou conhecido como Paideia, de ‘‘formação integral do ser excelente e com virtudes”), que buscavam resgatar as artes que buscavam aprimorar a civilização, através do aprimoramento do indivíduo.

As sete artes são o ponto onde essas habilidades são trabalhadas e exploradas pois tem o intuito em tornar o indivíduo livre, então partindo desse pressuposto, esse movimento não se trata de apenas um uso estruturalmente pontual e/ou instrumental da arte segundo as vertentes trazidas desde a Idade Média, o propósito é maior e em certo sentido metodologicamente estabelecido, traz o modo abstrato: em tornar pela liberdade o ser mais humano, na consolidação da felicidade, no sentido aristotélico/tomista, ou seja, por resultado da aplicação do método tem-se a plena realização humana.

O intuito ao que diz respeito à formação nas artes liberais trabalhava o desenvolvimento da cognição e da moral do ser, onde somente após o desenvolvimento dessas duas áreas e habilidades, haveria aptidão para estudar de forma aprofundada as áreas do conhecimento através da formação universitária. Essa linguagem com vertente educacional e artística perdurou durante séculos, até a racionalização das propriedades do som pelos gregos partindo da junção e dos estudos entre a arte e a ciência e esse aprimoramento segue até os nossos dias atuais nas formas digitais de ondas proporcionadas por Fourier.

3 – A MÚSICA SOBRE A CONCEPÇÃO DA MATEMÁTICA

Todo fenômeno sonoro está diretamente relacionado a um objeto que vibra e emite ondas em um meio mecânico, e um bom exemplo é o Diapasão, um objeto que é por construção e funcionabilidade um instrumento metálico utilizado para auxiliar na afinação de instrumentos musicais e vozes. Ao vibrar emite ondas sonoras, através deslocamento do ar que é o meio mecânico onde essas ondas utilizam para se propagar até o sistema auditivo dos receptores.

FIGURA 1–Diapasão

Fonte: https://www.estudopratico.com.br/o-que-e-para-que-serve-e-como-funciona-um-diapasao.

Essas ondas podem ter ou não a periodicidade, pois partindo desta condição se a periodicidade existe entre duas (ou mais) ondas, temos harmonia (que é um dos pontos importantes ao que se trata da Música) e de forma análoga quando as ondas não combinam acerca de suas periodicidades, temos dissonância.

Esse entendimento é crucial sobre o que é o som e como funcionam as ondas bem como essa harmonia é tão importante pelas razões matemáticas que são pontos deste estudo, mesmo que essa periodicidade seja uma consideração interpretativa do ponto de vista cultural.

É necessário destacar o conceito e a definição de ruído, é algo muito discutido na Física e de forma categórica que ruído na área dos estudos de Acústica é caracterizado por essa ausência de periodicidade das ondas sonoras, pois suas frequências e componentes não possuem relações harmônicas se comparadas.

De forma explicativa no momento que essa onda com dissonância é recebida pelos receptores auditivos, proporciona uma sensação de desconforto, pois quanto mais dissonante for o formato dessa onda, maior será o desconforto auditivo que ela causará, porém tem de ser considerado que escalas com configurações dissonantes são parte da cultura de algumas sociedades. A subjetividade sobre a questão do ruído e do som é tão sutil que um destaque importante é que mesmo que repleta de harmonia a música erudita, pode ser considerada um barulho devido a alguns fatores e/ou para algumas culturas.

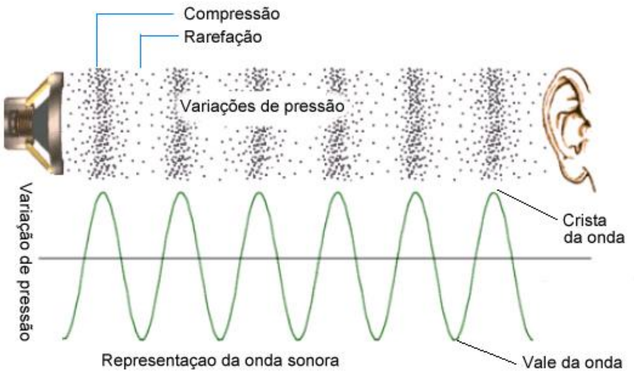
Existem fatores que diferem as questões de periodicidade, é importante ressaltar que de forma generalizada os diversos sons que fazem parte de nossa existência variam muito em suas características e isso nos impõe a questão de frequência, então os sons simples como tons únicos geralmente emitidos por tônicas de instrumentos ou seja "puros", contém um componente de frequência única, ou seja uma analogia trivial, enquanto sons complexos como a fala ou ruído consiste de componentes de várias frequências. A maioria dos sons do cotidiano que ouvimos são sons complexos.

Ao que se trata de Música, há de se trazer à tona alguns conceitos físicos com mais propriedades e definições, tais como a altura, a intensidade, o timbre, e os intervalos, etc., pois cada um desses conceitos tem uma influência específica no que ouvimos, e são importantes para o entendimento sobre a concepção acústica e após, toda construção matemática deste fenômeno.

3.1 – Uma breve introdução sobre a Física do som

A Acústica é a área da Física destinada ao estudo dos fenômenos relacionados ao som, através da investigação e formalização sobre a energia sonora em formato de onda. As ondas sonoras são mecânicas, portanto, utilizam de um meio material para ser transmitido, e como elas se propagam através dos meios e dos materiais, sejam eles sólidos, líquidos ou gasosos, portanto, não é possível existir propagação de som no vácuo.

FIGURA 2–Propagação do Som



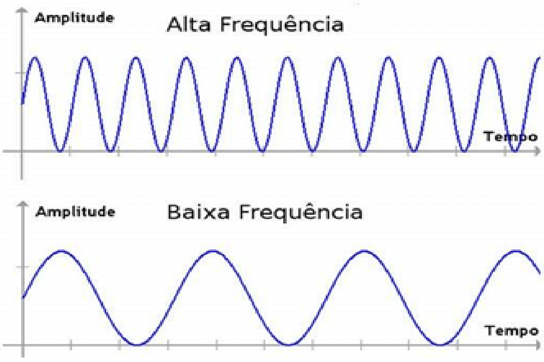
Fonte: https://www.fq.pt/som/propagacao-do-som

Os sons são perceptíveis ao ouvido dos animais (cujos parâmetros de audição são diferentes, cada qual a seu caso de amplitude) e dos seres humanos, que vibram em uma frequência de 20Hz a 20.000 Hz (hertz), a amplitude menor é conhecida como infrassom e a amplitude maior é conhecida como ultrassom. O som é a sensação que sentimos, através da audição do resultado pela ação desse tipo de onda.

Atribui-se também a Pitágoras através da experiência do monocórdio, a descoberta de que a altura (determinada pela frequência) do som gerado por uma corda em vibração varia com seu comprimento de onda. Essas descobertas iniciais de Pitágoras foram fundamentais pois culminaram para novos parâmetros e para aprimoramentos da Música ao decorrer dos tempos.

O conceito de "altura", apresentado por Pitágoras é fisicamente conhecido como a intensidade sonora, ou seja, se trata de quão agudo será o som emitido pela fonte emissora, pois quanto mais agudo é o som, maior será sua frequência. A intensidade sonora está intimamente relacionada ao volume do som.

FIGURA 3–Frequências e as formas de onda



Fonte: https://www.gestaoeducacional.com.br/acustica-o-que-e/

Essa intensidade é medida em dB (decibéis), onde se estabeleceu por amplitudes que ao som de menor intensidade que o ser humanos fosse capaz de escutar seria de 0 dB e o de maior intensidade, de 120 dB. De forma análoga temos que os sons mais graves possuem uma altura baixa e consequentemente também sua frequência e todos outros fatores que são consequentes a ela.

Como é possível ter frequências iguais em fontes de emissão diferentes, isso se dá pelas diferentes formas de onda que cada fonte emite, então o conceito de timbre na Acústica também é importante, como por exemplo: uma nota emitida por instrumentos diferentes pode ter a mesma altura, porém terá um timbre diferente de acordo com o tipo de construção do instrumento emissor.

Através desses conceitos científicos é possível estudar o sistema físico do som, que culminarão na harmonia e pode-se perceber que a Física está intimamente relacionada com a Música, contribuindo para o entendimento de diversos aspectos de suas propriedades.

As escalas musicais é outro conceito muito importante na música, pois se trata de uma sequência de notas, classificadas e organizadas de acordo com suas frequências de modo harmônico e ou/ dissonante, portanto, é trivial trazer a ideia de que existem diferentes tipos de escala, com funções diferentes para usos específicos e geral na teoria musical.

De modo a exemplificar, cada estilo tem uma influência maior de um tipo específico de escala, o que caracteriza este estilo musical, sobre n fatores para essa possibilidade de diversidade na criação musical.

Temos as escalas como um modo geral, como parte prática da utilização das frequências pois são trabalhadas as notas singulares e principais, ou seja, notas Tônicas. Tal fato remete a um conceito mais específico, que é o de acordes, pois os acordes são exatamente a combinação de mais de uma nota tocadas de forma simultânea.

Um bom exemplo destas combinações de notas, é o acorde de Dó, formado pela Tríade (formação de um acorde por três notas) harmônica Dó, Mi e Sol, que são chamados, respectivamente, de tônica, terça e quinta, que são de conceituação simples, das notas fundamentais e harmônicas na formação de um acorde.

Essa progressão se mantém constante, tal como a sequência das notas após o Dó é o acorde de Ré, formado pela Tríade (formação de um acorde por três notas) harmônica: Ré, Fá sustenido e Lá, nas mesmas proporções da anterior, que como na Tríade anterior são chamados, respectivamente, de tônica, terça e quinta.

Através dessas condições e propriedades na formação dos acordes, ao acorde pode-se incluir notas e ao adicionar outras notas, principalmente se as notas adicionadas são constituídas sobre a regência de frequências sem relação ou de relação parcial, dizemos que o acorde é dissonante.

A onda gerada pela tríade com as notas tônica, terça e quinta é agradável aos ouvidos, são nessas (re)combinações de formas aleatórias ou provocadas, que são geradas superposições nas ondas de cada nota, portanto são criadas novas ondas que são dissonantes às originais e geralmente aperiódicas, emitindo a um som que não é agradável aos ouvidos. em um comparativo se dá no exemplo de por esta razão que se apertar cordas aleatórias em um instrumento de cordas o som sairá, muito provavelmente, dissonante e não agradável aos ouvidos.

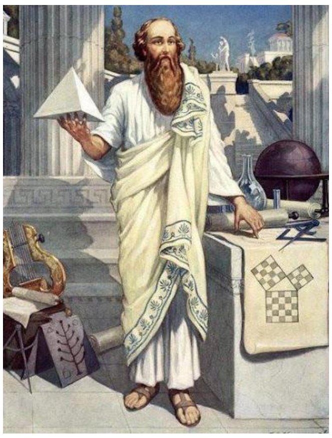
3.2 – A Música, uma expressão de arte construída sobre razões matemáticas

Desde os tempos mais remotos, a Matemática surgiu claramente da urgência humana em organizar, compreender e estruturar algumas de suas atividades, tais como contar, calcular, trocar, comprar, vender, enfim, das exigências inerentes e interessantes à formação das sociedades. A Música em contrapartida surgiu como mecanismo de expressão, tais como a comunicação, alimento espiritual e para subjetivar as emoções.

As primeiras racionalizações matemáticas do conceito sobre a teoria do musical através da ciência, partiram das escolas artísticas gregas e se deram na busca do conhecimento concreto e são atribuídos a Pitágoras, fundador da Escola Pitagórica, cuja estimativa é que tenha vivido aproximadamente entre os anos de 570 e 496 a.C.

Pitágoras nasceu em Samos, ilha grega situada na região do Dodecaneso no Mar Egeu, estima-se que Pitágoras faleceu em Metaponto, colônia grega no sul da Itália, região denominada Magna Grécia. Em vida, durante sua busca por conhecimento Pitágoras peregrinou e construiu muitas ideias sobre a Astronomia e Matemática, onde foi um praticante das ideias e ideais de Buda (563 a.C.– 483 a.C.), Confúcio (551 a.C. – 479 a.C.) e Lao-Tse (604 a.C.– 510 a.C.). Esses conceitos espirituais lhe conceberam a condição de ser um grande crítico no desenvolvimento de relações místicas com relações cientificas entre suas descobertas. Quando retornou a Grécia. Pitágoras estabeleceu-se em Cretona na costa sudeste, onde hoje é a Itália, então chamada de Magna Grécia.

FIGURA 4–Pitágoras de Samos



Fonte: http://www.acervofilosofico.com.br/pitagoras-de-samos/

Pitágoras fundou uma sociedade, considerada como uma seita secreta que os ritos se assemelhavam em partes a um culto dogmático, de origem órfica, que foi baseada em princípios filosóficos atribuídos a Orfeu, que segundo a lenda, tal como Pitágoras era músico e encantava com sua lira e sua voz, exceto pelo embasamento matemático e filosófico. Esta ideia de sociedade com pensamento místico-científico foi chamada de Escola Pitagórica.

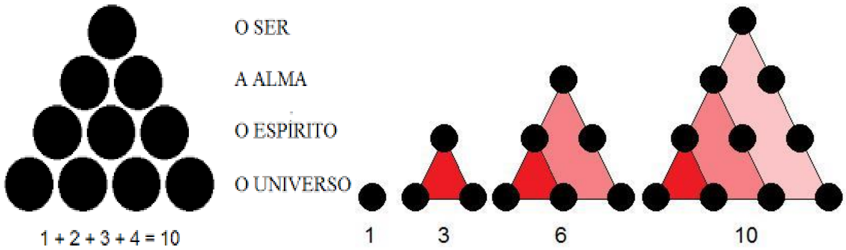
As Ciências Exatas, mais precisamente a Matemática, era algo muito cultivado pelos pitagóricos, que viam a figura do número como a essência de todas as coisas, sejam elas físicas ou espirituais. Segundo as crenças e regras de estudo da seita o princípio metafísico de que tudo que existe é número ou pode ser representado por números e esse foi o pilar da filosofia pitagórica.

Todavia, dentre todos os números, havia uma sequência bem peculiar: os números 1, 2, 3 e 4. Esse pequeno subconjunto dos naturais formava uma tétrade bastante conhecida: eram os termos da sequência de números triangulares (que formam triângulos), formas geométricas tão cultuadas pela escola, e que formavam a figura que os pitagóricos chamavam TETRAKTYS. Roque (2012, p. 84, grifo nosso) reitera que:

> Os pitagóricos não separavam os números do mundo físico, como fará Platão. Os números são a natureza profunda de tudo o que pode ser percebido e mostram o poder de tornar compreensível a ordem e a harmonia do mundo empírico. Os números, para os pitagóricos, apareciam mais no contexto de jogos, acompanhados de interpretação e reverência, do que no de uma pura teoria, de natureza abstrata, caracterizada por um tratamento dedutivo.

Como destaca a figura abaixo:

FIGURA 5–Tetraktys e a telação dos números Pitagóricos



Fonte: http://docplayer.com.br/111597946-A-escola-pitagorica-um-legado-incomensuravel.html

Em contrapartida o fascínio que a Música exercia nos povos antigos e exerce até hoje pode ser bem exemplificado no mito grego de Orfeu, que também era objeto de culto dos pitagóricos. Ele era poeta e músico.

Segundo a lenda, quando cantava e tocava sua lira, acalmava as tempestades, os rios e até os animais, e todos se rendiam aos encantos proporcionados por sua música. Pitágoras, também, compunha e tocava lira desde muito jovem e a música, para ele, tinha várias finalidades, inclusive pedagógicas:

> Pitágoras deu continuidade a seus experimentos investigando a relação entre o comprimento de uma corda vibrante e o tom musical produzido por ela. Caracterizando a primeira lei descoberta empiricamente, o experimento de Pitágoras é ainda a primeira experiência registrada na história da ciência, no sentido de isolar algum dispositivo para observar fenômenos de forma artificial. (ABDOUNUR, 2003, p.5)

Os estudos históricos apontam que se deu através do monocórdio (mono = um, córdio = corda), instrumento possivelmente inventado por Pitágoras, a comprovação inicial da relação entre o comprimento da corda e o tom musical emitido por ela através da frequência.

Das experiências com sons realizadas por meio do monocórdio, nasceu na época, o que foi considerado por Pitágoras e seus seguidores o quarto ramo da Matemática, a Música tal como ciência. Abdounur (2003) afirma que: “Os pitagóricos foram os únicos até Aristóteles a fundamentar cientificamente a Música, começando a desenvolvê-la e tornando-se aqueles mais preocupados por este assunto.”

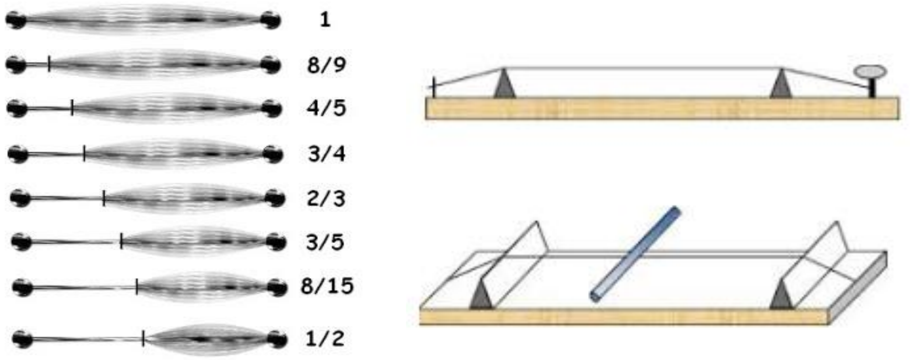
Vandoren (2012, p.50), afirma que Pitágoras utilizou o pensamento matemático (sobre os números e as razões) para tentar encontrar uma conjunção entre a música e os números.

Portanto partindo deste fato ocorreu um dos primeiros experimentos científicos, e o primeiro sobre essa relação registrado na história.

> Um dia, segundo diz a lenda, sentado com um instrumento musical no colo, Pitágoras percebeu que as divisões de uma corda esticada que produzia harmonias poderiam ser descritas em termos de razão simples entre pares de números, a saber,1 para 2,2 para 3 e 3 para 4. Hoje em dia, representamos esta relação como 1/2, 2/3 e 3/4. Este fato extraordinário espantou Pitágoras que adorava música, pois pareceu-lhe extremamente bizarro que existisse uma ligação entre números, por um lado, e as notas de uma corda, por outro, que pudesse levar o espectador às lágrimas ou exaltar-lhe o espírito. (VANDOREN, 2012, p. 50).

Através destas razões matemáticas o monocórdio, que tinha em sua construção e sua composição sendo uma caixa de madeira com apenas uma corda, sobre um cavalete fixo e outro móvel que quando tinha a corda pressionada e tocada em determinados pontos, a mesma produzia sons de alturas (grave/agudo) diferentes. Isto fez com que os pitagóricos descobrissem que a altura de uma nota musical dependia do comprimento da corda que a produz.

FIGURA 6–O Monocórdio e as relações harmônicas



Fonte: https://ceejamarilia.wordpress.com/2020/07/01/historia-da-musica-pitagoras-e-a-escala-musical/

É importante ressaltar que os sons harmoniosos são emitidos por uma corda vibrante cujo comprimento é dividido segundo proporções simples, ou seja, existe uma relação entre sons harmoniosos e números inteiros.

A consonância (essa harmonia e agradabilidade do som aos ouvidos), segundo os pitagóricos, seria mais bela quanto mais simples fosse a relação proporcional entre os sons. A mística dos números fica evidente quando se observam os denominadores das frações:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \text{ e } \frac{3}{4}$$

Essas frações se remetem e eram equivalentes às frações que relacionavam os pesos dos martelos da oficina, tomando a medida doze como sendo o inteiro, e cujos numeradores têm algumas propriedades, como se pode notar abaixo:

$$\frac{12}{12}, \frac{6}{12}, \frac{8}{12} \text{ e } \frac{9}{12}$$

A partir de uma intuição, provavelmente induzido por suas próprias convicções místicas a respeito da Tetraktys, Pitágoras descobriu e associou uma peculiar relação entre os números e os sons, as notas musicais.

A essa relação deu o nome harmonia musical, que era exatamente a união das notas que, quando tocadas simultaneamente, produziam um som agradável aos ouvidos.

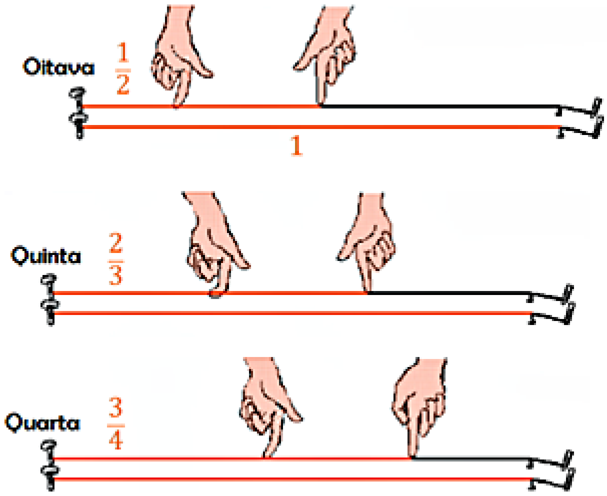
O monocórdio, ao ser tocado na modalidade ‘corda solta’, isto é, presa apenas pelas extremidades, produzia um som, uma nota musical que serviria de referência para que pudesse determinar as outras.

Através da sequência deste experimento, Pitágoras evidenciou que ao posicionar o cavalete móvel e dividir a corda, tocando uma das metades se obtinha um som equivalente ao som da corda solta (o som original e inicial do experimento), o que evidencia, o mesmo som, porém uma oitava acima. Sabemos que a divisão de uma corda ao meio, duplica a sua frequência em relação à frequência (original) da corda solta. Abdounur (1999, p.5) afirma que:

> Em seu experimento, Pitágoras observou que pressionando um ponto situado a 3/4 do comprimento da corda em relação à sua extremidade – o que equivale a reduzi-la a 3/4 de seu tamanho original – e tocando-a a seguir, ouvia-se uma quarta acima do tom emitido pela corda inteira. Analogamente, exercida a pressão a 2/3 do tamanho original da corda, ouvia-se uma quinta acima e a 1/2 obtinha-se a oitava do som original.

Dando sequência ao experimento, essas divisões com relações simples as “novas” notas encontradas foram determinadas a partir de proporções numéricas bem definidas: A Tônica, de razão 1:1 e comprimento c, a Oitava, de razão 1:2 e comprimento $\frac{c}{2}$, a Quinta, de razão 2:3 e comprimento $\frac{2c}{3}$, a Quarta, de razão 3:4 e comprimento $\frac{3c}{4}$ como representa a figura:

FIGURA 7–Divisões harmônicas de Pitágoras



Fonte: http://www.ghtc.usp.br/server/Sites-HF/Lucas Soares/monocordio%20de%20pitagoras.

Essas quatro razões e os sons produzidos pelas vibrações dos comprimentos da corda (c, $\frac{c}{2}$, $\frac{2c}{3}$, $\frac{3c}{4}$), através delas são todos consonantes e são conhecidos como consonância de Pitágoras (visto que foi ele a fundamentar sistematicamente), embora seja provável que estes intervalos já fossem conhecidos por outros povos antigos (FONSECA, 2013).

Tabela 1: Relação entre metade do comprimento da corda e sua consequência

Comprimento da corda	**Consequência**
c	$Oitava$
$\frac{c}{2}$	

Tabela 2: Relação entre dois terços do comprimento da corda e sua consequência

Comprimento da corda	**Consequência**
c	$Quinta$
$\frac{2c}{3}$	

Tabela 3: Relação entre três quartos do comprimento da corda e sua consequência

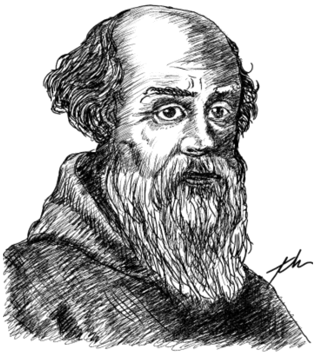
Comprimento da corda	**Consequência**
c	$Quarta$
$\frac{3c}{4}$	

A descoberta destes intervalos (que abrangem as razões: fundamental(is), oitava(s), quinta(s) e quarta(s)), foi significativa paras os pitagóricos, pelo fato de comprovar o existir, das relações entre Matemática e consonância, e maravilhados pelo fato desta relação ser representada por frações de pequenos números inteiros entre 1 e 4 (sobre a ideia mística do Tetraktys). Como cita Abdnounur (2003): “Pitágoras estabeleceu uma afinação utilizando percursos de quinta para a obtenção das notas da escala”. Fazendo uma relação oriunda dos povos orientais:

> A China desenvolveu desde a Antiguidade as sequências pentatônicas chinesas contendo, por exemplo, a partir da nota do, o ré, mi, sol e lá, correspondentes às cincos primeiras notas do ciclo das quintas, comparadas no livro de Tso-kiu-ming aos cincos elementos da filosofia natural - água, fogo, madeira, metal e terra. Já os árabes elaboraram escalas com 17 notas e os indus com 22. (ABDOUNUR, 2003. p. 4)

É importante neste momento evidenciar que os nomes das sete notas musicais surgiram na Idade Média, através do monge italiano Guido D'Arezzo (995-1050), que deu os nomes às notas utilizando as iniciais de um hino a São João Batista, cantado por um coral na época (MELO, 2020).

FIGURA 8–Guido D'Arezzo



Fonte: https://aviagemdosargonautas.net/2012/09/15/guido-darezzo-991-1050-hino-a-s-joao-batista/

O hino proposto pelo monge:

Ut queant laxis
Resonare fibris
Mira gestorum
Famuli tuorum
Solve polluti
Labii reatum
Sancte Ioannes

Portanto:

> Como era de difícil entonação, o Ut foi substituído por Dó. Mas antes dessa nomenclatura que é latina, havia outras, como os gregos que denominavam os sons pelas letras do alfabeto. Os graus da escala eram A, B, C, etc. Não muito fundamentado, o som representado pela letra A tinha frequência próxima do som da nota Lá. Portanto, a relação letras e notas perduram até os dias de hoje e são denominadas cifras. (MELO, 2020, p.29)

Então adotado nas tablaturas musicais:

C = DÓ
D = RÉ
E = MI
F = FÁ
G = SOL
A = LÁ
B = SI

As consonâncias musicais e as razões entre números inteiros simples (1, 2, 3 e 4) como apresenta a tabela abaixo:

Tabela 4: Consonância entre as razões de números inteiros

Razão	Consonâncias perfeitas	Nome
1:1	Uníson	Uníssono (Dó – Dó)
1:2	Diapason	Oitava Justa (Mi grave – Mi agudo)
2:3	Diapente	Quinta Justa (Mi – Si)
3:4	Diatessaron	Quarta Justa (Mi – Lá)

Partindo das equivalências Pitágoras decidiu construir uma escala com 7 notas musicais onde consequentemente a oitava era a equivalente a primeira, foram estabelecidos alguns princípios, tais como valores absolutos da escala tendo como (oitava) a divisão da corda em duas (ou seja, toda corda tem uma nota se tocada inteira e sua equivalente exatamente na metade se seu comprimento).

A unidade divisão desta escala de intervalos é dada de forma progressiva da corda na razão dois terços de seu tamanho (ciclo de quintas) o limite, ou seja, o espectro destes intervalos (sete notas) se dava entre a corta inteira e sua metade (a oitava).

Inicialmente as divisões eram simples e diretas sobre os números inteiros 1, 2, 3 e 4 então:

Tabela 5: Escala e suas proporções

$\boldsymbol{D}ó_{\mathbf{1}}$	$\boldsymbol{R}é_{\mathbf{1}}$	$\boldsymbol{Mi_1}$	$\boldsymbol{F}á_{\mathbf{1}}$	$\boldsymbol{Sol_1}$	$\boldsymbol{L}á_{\mathbf{1}}$	$\boldsymbol{Si_1}$	$\boldsymbol{D}ó_{\mathbf{2}}$
1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°
c	-	-	$\frac{3c}{4}$	$\frac{2c}{3}$	-	-	$\frac{c}{2}$

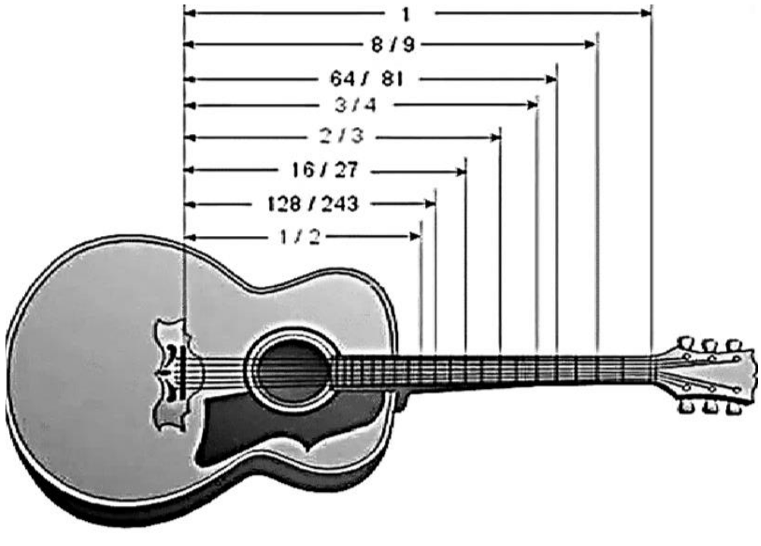
O que pode ser comprovado de forma mais abrangente:

Tabela 6: Condição de existência da escala consonantal de Pitágoras

Largura da corda $\boldsymbol{L_c}$	***Ciclo de Quintas*** $\boldsymbol{C_Q = \frac{2}{3}\ de\ L_c}$	***Largura resultante*** $\boldsymbol{L_r}$	***Condição de Existência*** $\boldsymbol{\frac{1}{2} < L_r} < 1$	***Fração equivalente*** $\boldsymbol{Oitava}\text{:} \times (\mathbf{2})$
1	$\frac{2}{3}$ de 1	$\frac{2}{3} = 0{,}66\ldots$	Sim	-
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$ de $\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9} = 0{,}44\ldots$	Não	$\frac{8}{9} = 0{,}88\ldots$
$\frac{8}{9}$	$\frac{2}{3}$ de $\frac{8}{9}$	$\frac{16}{27} = 0{,}59\ldots$	Sim	-
$\frac{16}{27}$	$\frac{2}{3}$ de $\frac{16}{27}$	$\frac{32}{81} = 0{,}395\ldots$	Não	$\frac{64}{81} \sim 0{,}79$
$\frac{64}{81}$	...			

Na parte aplicável temos como exemplo o violão e as razões de Pitágoras aplicadas em sua construção:

FIGURA 9– Razões Pitagóricas no violão



Fonte: https://slideplayer.com.br/slide/1222200/

Observa-se que essas frações (ou divisões intermediarias) são produtos da unidade de medida (todas partem dos dois terços) da escala pitagórica. O filósofo submeteu o som e o subordinou a Aritmética, ou seja, a Matemática regia a Música.

Inicialmente, forma limitada (pois as concepções trazidas pelos pitagóricos, não tinham o fundamento da física do som, e o som não era tratado na época como um fenômeno acústico) essa fundamentação tinha dois problemas principais.

Logo na revolução cientifica, após o período do Renascimento houve a apreciação da ciência, e através disso foi possível (unindo conceitos primários a várias outras concepções) proporcionar novas perspectivas, onde por consequência disso novas maneiras de entender (e executar) essas razões e escalas musicais.

A partir dos conceitos físicos do som, a escala passou de relações fracionárias das partes das cordas para frequências vibracionais em notas geradoras, que juntas a essas relações iniciais se obtinham condições de execução e racionalização da teoria de formas mais precisas de cálculo destas razões iniciais.

Chegamos então a partir das novas possibilidades que o estudo científico proporcionou ao "ciclo das quintas" pitagóricas sobre a construção na tabela abaixo:

Tabela 7: Ciclo de Quintas

Nota	**Quinta**	**Ajuste/Sintonia**	**Resultante**
$Dó_1$	$\frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}$	Nenhum(a)	$\frac{2}{3}$ (Sol_1)
Sol_1	$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$	$\frac{4}{9} \times 2 = \frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$ $(Ré_1)$
$Fá_1$	$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$	Nenhum(a)	$\frac{1}{2}$ $(Dó_2)$
$Ré_1$	$\frac{2}{3} \times \frac{8}{9} = \frac{16}{27}$	Nenhum(a)	$\frac{16}{27}$ $(Lá_1)$
$Lá_1$	$\frac{2}{3} \times \frac{16}{27} = \frac{32}{81}$	$\frac{32}{81} \times 2 = \frac{64}{81}$	$\frac{64}{81}$ (Mi_1)
Mi_1	$\frac{2}{3} \times \frac{64}{81} = \frac{128}{243}$	Nenhum(a)	$\frac{128}{243}$ (Si_1)

A partir desta descoberta do ciclo das quintas a escala (diatônica) inicial estava completa:

Tabela 8: Escala de intervalos completos e suas proporções

$\boldsymbol{D}ó_{\mathbf{1}}$	$\boldsymbol{R}é_{\mathbf{1}}$	$\boldsymbol{Mi_1}$	$\boldsymbol{F}á_{\mathbf{1}}$	$\boldsymbol{Sol_1}$	$\boldsymbol{L}á_{\mathbf{1}}$	$\boldsymbol{Si_1}$	$\boldsymbol{D}ó_{\mathbf{2}}$
1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°
c	$\frac{8c}{9}$	$\frac{64c}{81}$	$\frac{3c}{4}$	$\frac{2c}{3}$	$\frac{16c}{27}$	$\frac{128c}{243}$	$\frac{c}{2}$

Partindo do comprimento de corda, a quinta (ou quinta justa) de uma nota musical qualquer é construída matematicamente sobre a seguinte condição:

$$Q_j = \frac{2}{3} \, . \, X_n$$

Pereira (2013, p.25), garante que fazendo uso desta condição de construção é possível determinar o ciclo das quintas:

> Partindo da razão definida para a quinta $\left(\frac{2}{3}\right)$, pode-se determinar o ciclo das quintas da seguinte maneira: tomada uma nota como referência, por exemplo, DO, deve-se encontrar a quinta de DO, depois a quinta em relação à quinta, e assim por diante. Para tal, partimos de dois resultados já conhecidos, que definem o intervalo de uma oitava.

Acrescentando o conceito físico, dadas as frequências e razões equivalentes temos:

$$f_0 = \text{(Corda solta)}$$

$$f_1 = 2f_0 = \text{(Oitava)}$$

$$f_2 = \frac{3}{2} = 1{,}5 \, . \, f_0 \text{ (Quinta)}$$

É fato que as escalas pitagóricas são fundamentadas sobre os intervalos “racionais” e que são elementares, ou seja, a oitava, a quinta e a quarta, onde de forma respectiva, tem também suas sucessões alternadas, então que remetem de $f_0 = f$ então temos a nota $f_1 = \frac{3}{2} f$, que determina uma quinta acima na escala, a nota $f_2 = \frac{3}{4}, f_1 = \frac{9}{8} f$ o que determina uma quarta abaixo de f_1, a nota f_3 determina uma quinta acima da f_2 e assim são construídas as escalas de modo sucessivamente sequencial.

Deste modo, tem-se:

$$f_{2n} = \left(\frac{9}{8}\right)^n \; e \; f_{2n+1} = \frac{3}{2}\left(\frac{9}{8}\right)^n, n \in \mathbb{Z}$$

Construindo de $f_0 = f$, a sucessão f do seguinte modo:

$$f_{n+1} = \frac{3}{2} f_n \quad se \quad \frac{3}{2} f_n < 2f$$

Portanto;

$$f_{n+1} = \frac{1}{2} . \frac{3}{2} f_n \quad se \quad \frac{3}{2} f_n \geq 2f$$

Então sobre essa construção temos:

$$f_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n . \left(\frac{1}{2}\right)^p f$$

A nota referência (ou seja, a nota equivalente) ainda continua sendo a oitava, mas a frequência é o dobro da frequência original, (o conceito da frequência ser inversamente proporcional ao tamanho da corda).

Pitágoras sequenciando as divisões sobre a corda inteira obteve as seguintes relações podem ser evidenciadas em relação de suas frações e as suas frequências nas tabelas abaixo:

Tabela 9: Relação entre metade do comprimento da corda e sua frequência

Comprimento da corda	Frequência
c	f_0
$\frac{1}{2}c$	$2f_0$

Tabela 10: Relação entre dois terços do comprimento da corda e sua frequência

Comprimento da corda	Frequência
c	f_0
$\frac{2}{3}c$	$\frac{3}{2}f_0$

Tabela 11: Relação entre três quartos do comprimento da corda e sua frequência

Comprimento da corda	Frequência
c	f_0
$\frac{3}{4}c$	$\frac{4}{3}f_0$

A escala pitagórica gerada partindo dos ciclos das quintas construídas partindo sobre o conceito de frequência inicial (f_0) ficariam desta forma gerando outras notas dentro da escala pitagórica inicial ($1 < f_r < 2$). Portanto:

$$f_0 = 1$$

$$f_1 = \frac{3}{2}f_0 = 1{,}5\,.\,f_0$$

$$f_2 = \frac{3}{2}f_1 = \frac{9}{4}f_0 = 2{,}25.\,f_0$$

Intervalos (gerados pela perspectiva da frequência) maiores que 2 ($1 < f_r < 2$) tem se ser reduzidos em uma oitava.

Então:

$$f_2 = \left(\frac{9}{4} : 2\right) f_0 \ = 1{,}125. f_0$$

e

$$f_3 = \frac{3}{2} . \ \frac{9}{8} f_0 \ = 1{,}6875 . f_0$$

Como se demonstra matematicamente a escala pitagórica foi construída de forma simples. Após a ideia física do som pode-se perceber que a escala inicial tinha duas falhas que eram bem definidas agora, mas pela precariedade de instrumentos e conceitos da época de Pitágoras não puderam ser explicadas.

Uma delas está na ideia de que nem todo número é racional e isso gerava alguns problemas de aplicabilidade, dentre eles a execução e/ou construção de instrumentos, isso implicava teoricamente na incompatibilidade dos ciclos de notas, (ou seja, por exemplo um ciclo de quintas não coincide com o ciclo das oitavas), o que é muito importante pois em certos pontos a escala não possuía equivalências. Para demonstrar essa condição partiremos desta condição. Existem m, n ∈ ℕ, sendo m, n ≠ 0 tal que:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^m = \quad 2^n$$

Onde

$$3^m = \ 2^{n+m}$$

É possível chegar em um questionamento interessante através das equações acima que definem bem essa inconstância na escala pitagórica. Sabemos que não há nenhuma dessas possibilidades apresentadas, ou seja, é fato de que:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^m \neq \quad 2^n$$

onde:

$$3^m \neq 2^{n+m}$$

A prova desta condição (onde um número gerado a partir de uma potência de base 3 jamais será igual a um número gerado a partir de uma potência de base 2, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, sendo m, n ≠ 0, pode ser apresentada utilizando a técnica de demonstração por redução ao absurdo. Onde temos:

$$P \rightarrow Q \quad \therefore \quad \sim Q \rightarrow Absurdo.$$

Portanto:

$$\sim (\sim Q) = Q$$

Vamos partir de:

$$3^m \neq 2^{n+m}$$

Então, temos que. $(2l + 1)^n$ tem a forma 2k + 1, quando desenvolvido pelo binômio de Newton. Supondo a um inteiro ($l \in \mathbb{Z}$) e n natural ($n \in \mathbb{N}$). Portanto a igualdade:

$$(2l + 1)^m = (2k)^{n+m}$$

vai levar a uma igualdade:

$$2k + 1 = 2k'$$

pois m e n são positivos (m, n > 0), e l e k são inteiros ($l, k \in \mathbb{Z}$).

Então:

$$2k + 1 = 2k' \rightarrow 2k - k = 1$$

O que é uma contradição, ou seja, um ***ABSURDO***!

Observação: Outra forma de provar essa condição pode utilizar o teorema fundamental da aritmética. Partindo do fato de que 3^n é um inteiro que só tem o fator primo 3 na sua fatoração e 2^{m+n} é um inteiro que só tem o fator primo 2 na sua fatoração.

Em ambas formas de prova, mantém-se então a condição:

$$3^m \neq 2^{n+m} \rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^m \neq 2^n$$

Após os ciclos melhor aproximação (desta situação, em unificar as razões), acontece depois de 12 ciclos de quintas e sete ciclos de oitavas:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \cong 129{,}75 \quad \text{e} \quad 2^7 = 128$$

A razão de $\frac{129{,}75}{128} \cong 1{,}013671875$, número conhecido como "coma pitagórico", que significa uma falha que tem na sistematização pois gerou uma diferença e consequentemente problemas sem explicação para a época. Desse modo, é impossível, através de sucessões de quintas, obter um som harmônico por sucessivas oitavas, isto porque são números naturais. Rodrigues (1999, p. 22), destaca que:

> É interessante observar que a incongruência resultante da coma pitagórica, que acumula dissonâncias à medida que se sobe ou desce na escala musical, tem uma analogia com as incongruências dos calendários antigos.

Então é fácil constatar que:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^m \neq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

para m e n $\in \mathbb{N}$.

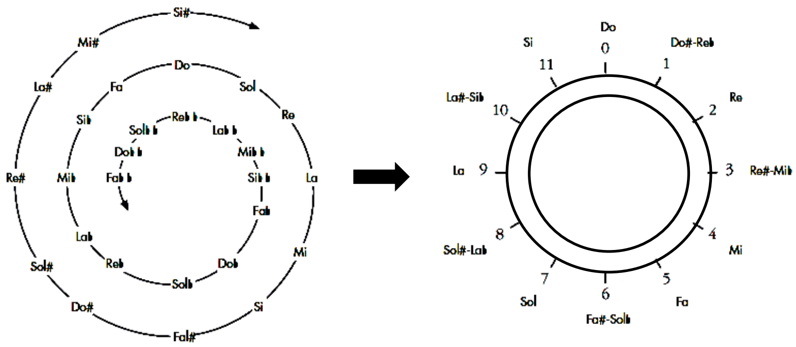
Como consequência desta diferença acontece uma pequena desafinação, mas que compromete muito o andamento e a harmonia da construção musical, principalmente se levada em conta a condição de proporção que isso toma ao decorrer das progressões, além de atrapalhar também a lógica na aplicabilidade ao se construir instrumentos musicais.

O coma pitagórico foi um problema enfrentado e discutido por músicos e matemáticos desde a época de Pitágoras que objetivavam em como resolver essa pequena desafinação que gerava grandes transtornos (pois além das escalas, os instrumentos em grande maioria não sincronizavam de forma totalmente harmônica),

Agora passamos a escala pitagórica de um intervalo de 7 notas (Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá e Si) para 12 notas (Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá e Si), mais seus 5 acidentes respectivos, divididos em# (sustenido(s)) e b (bemol(is)), que são notas intermediarias com sonoridade em frequência na média entre as 7 notas principais, com exceção de Si para Dó e de Mi para Fá).

Temos na figura abaixo a escala pitagórica a esquerda e a escala temperada a direita. Porém mesmo com essa divisão que é de fato mais completa que a proposta inicial, ainda existia algo (coma pitagórico) que intrigava matemáticos e músicos:

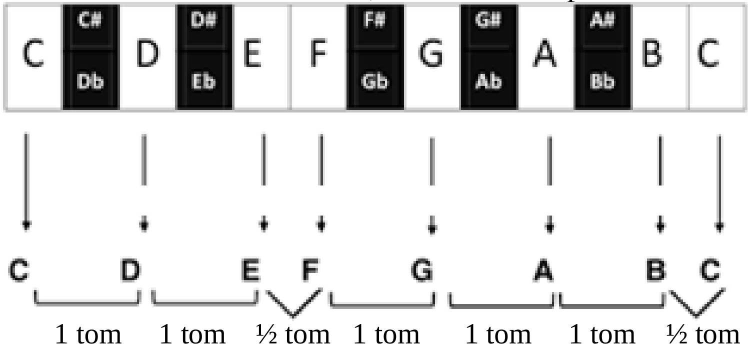
FIGURA 10– Espiral de quintas e o relógio cromático com 12 tons



Fonte: Autor

Essa nova possibilidade em redividir as diferenças nos racionais (resolvia parcialmente o problema), leva o nome de escala cromática. Portanto:

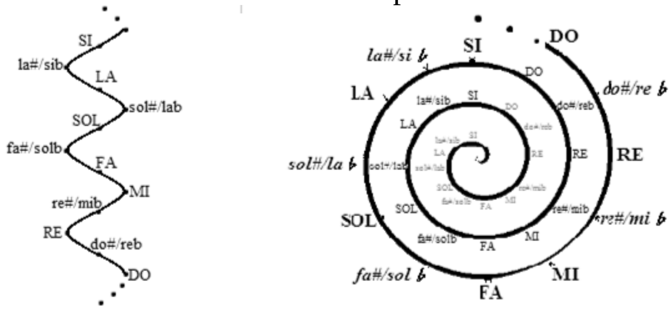
FIGURA 11– Escala Cromática, tons e seus respectivos acidentes



Fonte: Autor

Porém essas novas notas intermediarias e suas aproximações não resolviam o principal problema, que era a escala não unir os ciclos de oitavas, a partir da razão fundamental, portanto:

FIGURA 12– Escala Cromática e o problema dos ciclos

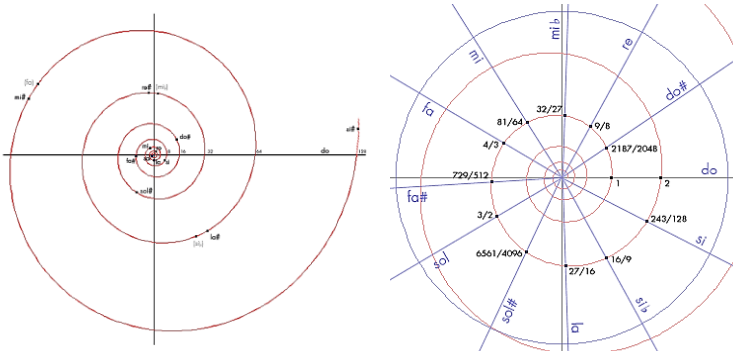


Fonte: http://torblaeianubrae.blogspot.com/2013/02/escala-cromatica.html

Como destacado anteriormente na ideia inicial, o ciclo pitagórico agora reorganizado na escala cromática (com 12 notas), ainda não se fecha, o que ainda mantém um ciclo em formato espiral o que daria a possibilidade ampliada, em chegar a frequências bem próximas de ajustes após os 12 estágios.

Mesmo assim não os músicos não conseguiam fechar perfeitamente o ciclo de oitavas, e o fato das quintas e oitavas não combinarem totalmente, continuava a trazer transtornos na harmonia e na construção de instrumentos, portanto prejudicando ainda toda teoria musical.

FIGURA 13– Inconvenientes iniciais da escala cromática.



Fonte: https://www.enchufa2.es/archives/musica-y-matematicas-la-afinacion-pitagorica-inconvenientes.html

Outro ponto importante que se mostrou problemático (e decorrente do primeiro) na escala desenvolvida por Pitágoras e agregada aos semitons (tons intermediários entre tons) se deu pela diferença (mesmo que mínima) em relação ao espaçamento diferente da progressão entre as notas, como podemos observar na tabela abaixo:

Tabela 12: Razões inconstantes entre frequências sucessivas

Parâmetros/Notas	**Dó**	**Ré**	**Mi**	**Fá**	**Sol**	**Lá**	**Si**	**Dó**
Razão das frequências em relação a Dó	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2
Razão das frequências entre as notas	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	
Distância entre as notas	1 tom	1 tom	$\frac{1}{2}$ tom	1 tom	1 tom	1 tom	$\frac{1}{2}$ tom	

A tabela abaixo mostra a proporção para os semitons:

Tabela 13: Proporção dos semitons

Nota	**Quinta**	**Ajuste/Sintonia**	**Resultante**
Si_1	$\frac{2}{3} \times \frac{128}{243} = \frac{259}{729}$	$\frac{259}{729} \times 2 = \frac{512}{729}$	$Fá\#_1$
$Fá\#_1$	$\frac{512}{729} \times \frac{2}{3} = \frac{1024}{2187}$	$\frac{1024}{2187} \times 2 = \frac{2048}{2187}$	$Dó\#_1$
$Dó\#_1$	$\frac{2048}{2187} \times \frac{2}{3} = \frac{4096}{6561}$	Nenhum(a)	$Sol\#_1$
$Sol\#_1$	$\frac{4096}{6561} \times \frac{2}{3} = \frac{8192}{19683}$	$\frac{8192}{19683} \times 2 = \frac{16384}{19683}$	$Ré\#_1$
$Ré\#_1$	$\frac{16384}{19683} \times \frac{2}{3} = \frac{32768}{59049}$	Nenhum(a)	$Lá\#_1$
$Lá\#_1$	$\frac{32768}{59049} \times \frac{2}{3} = \frac{65536}{177147}$	$\frac{65536}{177147} \times 2 = \frac{131072}{177147}$	$Fá_1$
$Fá_1$	$\frac{131072}{177147} \times \frac{2}{3} = \frac{262144}{531441}$	$\frac{262144}{531441} \times 2 = \frac{524288}{531441}$	$Dó_1$

Essa nova complementação ainda tinha uma diferença harmônica. Como por exemplo desta inconsistência progressiva, temos essa diferença entre as frequências entre um tom e dois semitons:

$$\frac{9}{8} = 1{,}125$$

e

$$\frac{256}{243} \cdot \frac{256}{243} = 1{,}109857915$$

Essa diferença da unidade não ser constante, matematicamente não deveria existir pois se um tom tem a frequência de 1,125 e dois semitons (que equivalem a 1 tom) não poderiam ter frequência de 1,109 e isso foi um grande problema, decorrente dos outros apresentados na teoria naquele momento. Isso impedia a mudança direta de tons dos instrumentos.

A solução desse problema viria tempos depois através de embasamento no uso dos irracionais pelo matemático (engenheiro e físico) belga Simon Stevin (1548 – 1620), em 1605, e se dá pela formulação do "temperamento igual", ou seja, o ajuste da escala. O temperamento traz a ideia de ajuste, ou seja, tornar aquela diferença (entre o ciclo de quintas e o ciclo de oitavas) igual. Para isso ser possível foi necessária uma leve desafinação de forma progressiva em toda escala.

FIGURA 14– Simon Stevin.

Fonte: https://www.sciencephoto.com/media/228272/view/simon-stevin

Essa possibilidade foi trabalhada e contemplada de forma brilhante por Johann Sebastian Bach (1685 –1750), em 1722, através da obra: “O Cravo bem Temperado”. Bach utilizou na obra todos os recursos e tons de forma brilhante, onde se apropriou do temperamento e através desta nova escala, se abria uma nova gama de possibilidades na música, possibilitada mais uma vez pela aplicação direta dos conceitos e fundamentos matemáticos.

FIGURA 15– Johann Sebastian Bach.

Fonte: https://www.istockphoto.com/br/vetor/entalhes-compositor-johann-sebastian-bach

Essa descoberta foi embasada através dos números irracionais e conseguiu de fato acabar com problema que causava grandes transtornos aos músicos e um desafio para os matemáticos desde a racionalização matemática da música.

O temperamento se dá pela divisão da oitava em doze intervalos iguais (o que a escala pitagórica não conseguia fazer). Essa nova proposta ajustou todo sistema sem descaracterizar o conceito já aplicado, ou seja, agregou e acertou todas as diferenças até então existentes. Como exemplos diretos dessa reorganização temos a seguinte comparação:

Semitom - Pitagórico

$$f = \frac{256}{243} = 1{,}05349794$$

Semitom – Temperado

$$f^{12} = 2$$
$$f = \sqrt[12]{2} = 1{,}059463094$$

Outro exemplo está na quinta justa, que define a unidade de medida:

Quinta justa - Pitagórica

$$f = \frac{3}{2} . f_0 = 1{,}5 \, . \, f_0$$

Quinta justa – Temperada

$$f = \sqrt[12]{2^7} = 1{,}498307077$$

Pra resolver esse problema era necessário achar o valor da frequência do semitom que gera essa escala, ou seja, a frequência de um semitom elevado a 12ª potência que culminasse na oitava. Essa possibilidade não existia nos números racionais, porém utilizando conceitos dos irracionais algébricos tornou-se possível esse ajuste, ou seja, foi possível construir uma escala que tivesse notas e intervalos exatamente iguais, com frequências e espaçamentos exatamente iguais.

Essa nova roupagem proporcionada pelo temperamento, resolveu de fato a condição de construção dos instrumentos, em encontrar a harmonia dos ciclos de quintas e os ciclos de oitavas e a afinação de instrumentos de forma síncrona.

A coma pitagórica, foi relacionada com a impossibilidade, já relatada no estudo grego, e se deu na falta de conhecimento da época da medida da diagonal do quadrado através de uma fração exata do seu lado e, portanto, também com a irracionalidade do número $\sqrt{2}$.

Essa diferença causou a impossibilidade, o que explica também o fato de não poder existir uma gama musical "perfeita" ou "bem temperada", cujas razões dos tons ao tom de referência sejam sucessivamente 1, m, m^2 , …, m^{12} = 2, o que fora descoberto nos irracionais.

O conhecimento dos gregos, se dava apenas nas razoes baseadas nos números racionais 1, $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$. Com efeito, não há nenhum modo "natural" de calcular o número irracional m = $\sqrt[12]{2}$ = 1,059463094... que está na base do semitom pitagórico (porém agora em todos os semitons) do intervalo elementar da gama temperada de doze notas formando um "círculo perfeito", o temperamento. Importante observar que a incongruência resultante da coma pitagórica, acumula dissonâncias à medida que se sobe ou desce na escala musical, por conta de suas progressões. Portanto, partindo da "coma pitagórica":

$$\text{Dó} = c,\ \text{Ré} = \frac{8}{9}c,\ \text{Mi} = \frac{64}{81}c,\ \text{Fá} = \frac{3}{4}c,\ \text{Sol} = \frac{2}{3}c,\ \text{Lá} = \frac{16}{27}c,\ \text{Si} = \frac{128}{243}c \text{ e Dó} = \frac{1}{2}c$$

Obtém-se através do estudo das frequências:

$$\text{Dó} = f,\ \text{Ré} = \frac{9}{8}f,\ \text{Mi} = \frac{81}{64}f,\ \text{Fá} = \frac{4}{3}f,\ \text{Sol} = \frac{3}{2}f,\ \text{Lá} = \frac{27}{16}f,\ \text{Si} = \frac{243}{128}f \text{ e Dó} = 2f$$

Uma solução matemática que após apresentada foi de simples entendimento, viria a mostrar um novo instrumento de cálculo importante que só foi construído no início do século XVII, e se dá pelo uso dos logaritmos.

Essa formulação teórica que foi sugerida através dos logaritmos, aparece em estudos sobre teoria musical por volta de 1575, e se refere ao fato da oitava ser dividida em doze partes igualmente proporcionais, as quais serão os semitons iguais, ou seja, se m é o intervalo separando dois tons consecutivos, temos m = $\sqrt[n]{2}$. Isso representa a razão da respectiva progressão geométrica, sendo m o número da divisão em partes iguais da oitava.

No caso particular n = 12, as frequências associadas às sete notas da escala habitual vêm dadas no "temperamento" que resolveria essa falha anterior por:

$$\text{Dó} = f,\ \text{Ré} = \sqrt[6]{2}f,\ \text{Mi} = \sqrt[3]{2}f,\ \text{Fá} = \sqrt[12]{2^5}f,\ \text{Sol} = \sqrt[12]{2^7}f,\ \text{Lá} = \sqrt[4]{2^3}f,\ \text{Si} = \sqrt[12]{2^{11}}f \text{ e Dó} = 2f$$

Então:

$$\text{Dó} = 2^0,\ \text{Ré} = 2^{\frac{1}{6}},\ \text{Mi} = 2^{\frac{1}{3}},\ \text{Fá} = 2^{\frac{5}{12}},\ \text{Sol} = 2^{\frac{7}{12}},\ \text{Lá} = 2^{\frac{3}{4}},\ \text{Si} = 2^{\frac{11}{12}} \text{ e Dó} = 2^1$$

Tempos depois, em meados do século XVII, o matemático francês Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 – 1830) baseado no estudo e manipulação das ondas e frequências através de suas famosas series, recondicionou a Música através da Matemática, onde transformou-a da condição analógica e a tornou digital.

FIGURA 16– Jean Baptiste Joseph Fourier

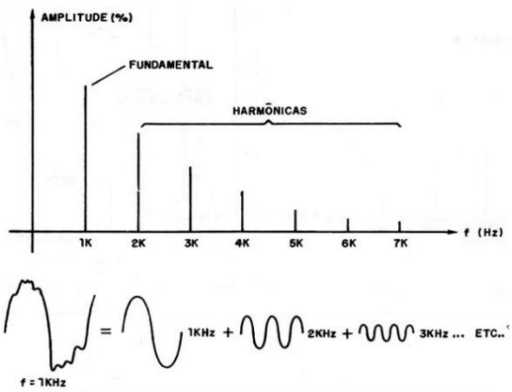
Fonte: http://ecalculo.if.usp.br/historia/fourier.html

Os estudos de Fourier demonstram que:

> (...) permite-nos ancorar significados acústico-musicais outrora sustentados teoricamente por dogmatismo aritmético e aspectos numerológicos. Além de abrir condutos matemáticos na compreensão dos fenômenos mencionados, tal conceito fornece, ainda, suporte para a compreensão de distintas regras de harmonia tradicional estabelecidas sobre argumentações não satisfatórias e (...) propicia reconfigurações e re-representações em conceitos, (...), tais como consonância, harmônicos, timbre, batimento (ABDOUNUR, 2006, p.90).

Dentre esses fenômenos presentes na composição dos elementos que fazem parte da música, as contribuições de Fourier estão fortemente relacionadas ao estudo de Séries Harmônicas e isso consequentemente está relacionado ao conceito dos timbres através de suas ondas emissoras de frequências.

FIGURA 17– Decomposição de sinal em harmônicos



Fonte: https://www.monolitonimbus.com.br/distorcao-harmonica/

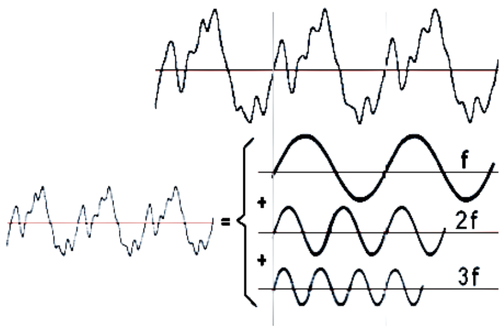
Se analisada sobre o parâmetro acústico e concomitantemente o musical, o princípio apresentado por Fourier, de que qualquer forma periódica de vibração pode ser obtida pela soma de infinitas vibrações com frequências múltiplas da vibração fundamental, pode ser descrito tal como:

> Qualquer movimento vibratório de ar na entrada do ouvido correspondente a um som musical pode ser sempre e de maneira única exibido como uma soma de um número infinito de movimentos vibratórios simples, correspondendo aos sons parciais deste tom musical. (ABDOUNUR, 2006, p. 90).

Fourier utilizando de propriedades físicas do som, demonstrou matematicamente que na harmonia musical, qualquer forma de onda resultante, independente seja qual for qual seja sua origem, é um somatório de ondas senoidais de diferentes frequências, amplitudes e fases, ou seja, como a forma de onda tem periodicidade, e essas novas frequências são componentes senoidais que são restritas a valores que são múltiplos destas frequências de repetição da forma de onda geradora ou seja, a onda fundamental.

Os conceitos científicos empregados para que essa condição mostrada fosse possível, estão diretamente ligados ao estudo do som e suas propriedades mais profundas e são considerados essenciais na compreensão apurada de fenômenos tais como consonâncias, dissonâncias e na afinação dos instrumentos, dentre outros quesitos que dependem de forma direta ou indiretas das frequências relacionadas, e que muitas vezes são intuitivamente sentidas, fisicamente percebidas, mas pouco exploradas em sua leitura matemática.

FIGURA 18– Somatório de ondas senoidais



Fonte: http://lcr.uns.edu.ar/fvc/NotasDeAplicacion/FVC-EstebanPlaza.pdf

A Matemática através da transformada de Fourier aplicada na Música, é representada na soma de uma série de formas de onda senoidais com diferentes amplitudes, frequências e fases, e isso revolucionou muito a teoria musical.

Essa percepção fundamental apresentada por Fourier sintetiza e reúne diversos conceitos matemáticos e musicais capazes de explicar de maneira satisfatória as lacunas que surgiram com a Música desde Pitágoras. As series harmônicas correspondem às frequências associadas aos primeiros termos da Série de Fourier, e isso se dá estabelecendo e justificando as razões de pequenos números inteiros 1, 2, 3 e 4. nas consonâncias pitagóricas.

As propriedades estabelecem que as primeiras componentes da Série Harmônica são melhores percebidas e aproveitadas pelo sistema auditivo receptor. A reação neurossensorial que ocorre nos receptores auditivos através das mudanças no espectro de um som, ou na detecção de uma mudança no timbre ou até na qualidade desse som, é o que se justifica pela riqueza ou pobreza dos campos harmônicos.

Essas condições se relacionam diretamente aos termos das Séries de Fourier das funções representativas deste som como se relacionavam a consonância pitagórica e é possível perceber essa consonância que ainda não era demonstrada de forma físico-matemática desde a batida dos martelos que despertou a curiosidade de Pitágoras, mas que já compunham a condição de existência.

Decompondo uma nota musical matematicamente utilizando as Séries de Fourier pode-se justificar ou até demonstrar algumas lacunas da harmonia musical que foram percebidas desde o início da construção da teoria musical a partir da prática, mas que até então não se podia justificar cientificamente devido à falta de conhecimento cientifico especifico sobre a matemática ligada as propriedades físicas do som.

Os componentes da Série Harmônica são fatores primordiais para a formação de uma vibração (vibração da corda, por exemplo) e a força de cada harmônico que determina e caracteriza um som, o que acaba por estabelecer o timbre (o som característico de cada instrumento).

Se observados por construções matemáticas, esses componentes podem representados graficamente no espectro de frequências, que mostra a amplitude no domínio da frequência, ou seja, ele é capaz de mostrar quais são as frequências principais que constituem um determinado som. Harmonizar as frequências através da análise dos espectros da onda, se dá através de uma repetição das distâncias entre as componentes da decomposição de uma nota em Série de Fourier, onde se verifica que os harmônicos vão se aproximando à medida que se percorre os termos da série.

Mesmo quando uma nota musical é executada singularmente e sua respectiva onda seja gerada de forma complexa, se essas ondas são analisadas no domínio do tempo utilizando as Séries de Fourier por parâmetros, pode acarretar numa situação em que se deseja determinar as frequências das senoides que compõe essa onda, isto é, os componentes harmônicos desse som, é necessário uma análise através do domínio da frequência, essa ação é realizada por meio da Transformada de Fourier onde, se conhecendo a expressão no domínio do tempo em t, é possível obter uma nova expressão em função de algum x, ou seja, em função da frequência(F(x)).

As contribuições das Transformadas de Fourier na teoria musical são efetivas no uso aplicado através de análises de sinais das ondas, que podem ser geradas por uma fonte emissora (como por exemplo a voz ou por meio de instrumentos musicais). Essa análise ocorre de forma sistemática com o uso de softwares.

Os programas utilizam a Transformada Rápida de Fourier, o que possibilita ver graficamente (em tempo real) e manipular o espectro de frequências do som capturado por um microfone (no caso da voz) entre outras formas (através dos captadores dos instrumentos). Esse conhecimento demonstrado por Fourier acabou proporcionando a digitalização e a manipulação das ondas o que modernizou e revolucionou a Música desde então.

Finalizando a síntese da teoria sobre a Matemática existente na Música, partindo do foco deste estudo ser as proporções iniciais sobre as frações simples (utilizando os números 1, 2, 3, 4), é evidente que as relações matemáticas de Pitágoras a Fourier, se fundem para concretizar e elucidara teoria que envolve a Música.

Tal fato visa o aproveitamento dessa transferência entre as duas disciplinas (em muitas etapas do ensino de Matemática e/ou outras disciplinas), para fins de transformar a Matemática numa forma interessante e prazerosa, visto que a Música é uma linguagem universal, o que de forma natural agrega aplicabilidade a Matemática, que faz parte da sistematização em diversas áreas do conhecimento.

Oliveira e Sabba (2013), afirmam sobre a transferência das disciplinas:

> Um exemplo de transferência, é a aprendizagem da matemática por meio da música, há estudos que sugerem fortemente um grande envolvimento de processos espaço-temporais e até mesmo visuo-espaciais no processamento musical, estes processos também são utilizados para aprender conceitos matemáticos, o que nos faz pensar em tal transferência. (OLIVEIRA; SABBA 2013, p. 3).

Está mais que provado sobre a existência desses domínios e que são de natureza relativamente independentes a Música e a Matemática, e isso implica no fato onde podem ocorrer transferências diretas e indiretas entre estes dois domínios, e isso é importante na Educação e as possibilidades pedagógicas que essas relações trazem.

3.3 – O conceito de Frações e os números Racionais

A palavra “fração” em sua etimologia se origina na palavra “fractio”, com raízes no latim, (que era a língua antiga falada por povos que habitavam regiões centrais na Itália, onde se disseminou em muitos territórios do Império Romano, e deu origem em várias línguas, dentre elas o português) e significa “quebrado” ou “partes”.

As frações fazem parte do cotidiano da humanidade, e são empregadas em inúmeras atividades triviais, tais consuma receita, no relógio, na partilha de objetos, entre outros e também podem ser aplicadas sem algumas atividades que não tem relações tão obvias pela percepção racional, como por exemplo, temos a teoria musical, aplicada as notas, escalas, tempo, harmonia, entre outras partes fundamentais a essa área.

A construção matemática na Música inicialmente se dá a partir da descoberta dos Pitagóricos, e veio através da divisão e das partes dos inteiros (sobre a perspectiva da Tetraktys) e isso pode ser explorado de forma educacional, visto que são áreas interdisciplinares. O conceito de frações entre outros conceitos matemáticos é extremamente importante na concretização do ensino de ambas as ciências, uma usando relações da outra.

Matematicamente, um número racional (conjunto numérico nomeado por $\mathbb{Q}$) pode ser entendido e definido, de forma bem simples, como aquele que pode ser representado na forma (uma delas) de $\frac{m}{n}$ com m, n$\in \mathbb{Z}$ e n $\neq 0$.

As demonstrações (e exemplos aleatórios) nesta sessão serão tratadas, cada qual a seu caso, com coeficientes diferentes para que sejam melhor compreendidas. Observe o exemplo a seguir:

$$0{,}5 \times 10 = 5 \rightarrow 0{,}5 = \frac{5}{10}$$

e/ou

$$0{,}25 \times 100 = 25 \rightarrow 0{,}25 = \frac{25}{100}$$

Na representação fracionária dos números racionais, pode-se observar essa condição através do teorema que generaliza essa questão. No caso geral, dada uma representação decimal finita com b_k casas decimais:

$$r = a, b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \dots b_k$$

multiplicando esta expressão por 10^k se obtém:

$$10^k \text{ r} = a, b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \dots b_k \rightarrow r = \frac{a, b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \dots b_k}{10^k}$$

Toma-se agora a expressão acima para transformar uma representação decimal infinita periódica em uma fração ordinária, ou seja, r como uma dízima periódica, portanto:

$$a, b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \dots b_k \overline{p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 \dots p_n}$$

Então, multiplicando r primeiro por 10^{k+n} e depois por 10^k obtém-se as expressões:

$$10^{k+n} \text{ r} = a b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \dots b_k p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 \dots p_n \overline{p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 \dots p_n}$$
$$10^k \text{ r} = a b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \dots b_k \overline{p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 \dots p_n}$$

subtraindo a segunda expressão da primeira temos:

$$10^{k+n} r - 10^k r = a b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \dots b_k p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 \dots p_n \overline{p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 \dots p_n} - a b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \dots b_k \overline{p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 \dots p_n}$$

$$(10^{k+n} - 10^k) r = a b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \dots b_k p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 \dots p_n \overline{p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 \dots p_n} - a b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \dots b_k \overline{p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 \dots p_n}$$

ou seja;

$$r = \frac{a b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \dots b_k p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 \dots p_n - a b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \dots b_k}{10^k (10^n - 1)}$$

Como r é uma dízima periódica, então n ≥ 1 e o denominador da fração acima $10^n - 1 \neq 0$. Logo r é um número racional. Assim acabamos de demonstrar a seguinte proposição:

Proposição 01: A qualquer dízima finita ou infinita periódica r é possível associar um número racional cuja representação decimal é r.

A definição de fração remete ao par ordenado de números inteiros (m, n), cujo primeiro elemento do par é denominado como numerador e o segundo é o denominador, e o termo fração é utilizado para indicar qualquer expressão algébrica com um numerador e um denominador e que podem ser representados de forma decimal.

O número racional obtido pela construção do conjunto pode ser definido partindo dos princípios da aritmética, com propriedades tais como o fechamento da operação de divisão entre inteiros, e também através de conceitos geométricos sobre as medidas de segmentos (segmentos comensuráveis). NIVEN (1984, p.32) afirma que:

> "Uma fração é definida de tal modo que, se multiplicarmos seu numerador e denominador por uma mesma quantidade, a nova fração representará o mesmo número; assim, só de olhar para uma expressão, nem sempre podemos dizer se ela representa, ou não, um número racional."

Tomando de exemplos numéricos é possível notar por aplicação que é simples transformar um número com uma quantidade finita de casas decimais em numa fração com numerador inteiro e denominador igual a uma potência de 10.

$$0{,}5 = \frac{5}{10}$$

e/ou

$$0{,}25 = \frac{25}{100}$$

A seguir simplificamos cada uma dessas frações obtendo sua forma irredutível:

$$0{,}5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

e/ou

$$0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

No livro “Números: racionais e irracionais”, (NIVEN, 1984) também afirma que:

> “Qualquer número racional pode ser escrito na forma decimal (base 10). Mas existem números decimais que não podem ser representados em forma de números racionais. A ideia é representar um número racional na forma decimal utilizando a base 10, ou seja, escrever um número racional em soma de frações decimais.” (p.77)

O denominador da fração irredutível, assim como o da fração original, tem apenas os fatores primos 2 e 5 (provenientes das potências de 10 = 2 × 5 que ali estavam antes de efetuarmos a simplificação).

Com base nesses exemplos podemos intuir que, ao nos deparamos com números racionais cuja decomposição do denominador em fatores primos apareça apenas os fatores primos 2 e 5, poderemos "completar" essa decomposição de modo a obter alguma potência de 10. Por exemplo:

$$0{,}5 = \frac{5}{10} = \frac{5^1}{2^1 5^1} = \frac{1}{2}$$

e/ou

$$0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{5^2}{2^2 5^2} = \frac{1}{4}$$

(NIVEN, 1984) reitera que:

> “Um número racional $\frac{m}{n}$ na forma irredutível, isto é, m.d.c. (m, n) = 1, possui representação decimal finita quando o denominador n não apresentar fatores primos diferentes de 2 e diferentes de 5. A representação será infinita periódica quando o denominador apresentar pelo menos um fator primo diferente de 2 e diferente de 5.” (Niven 1984, p.80)

Sobre a representação decimal finita, pode-se observar através do teorema que generaliza essa questão:

Teorema 01: Um número racional possui representação decimal finita se e somente se quando escrito na forma irredutível, a decomposição em fatores primos de seu denominador possui apenas os fatores 2 ou 5.

Demonstração: Seja r um número com uma quantidade finita de casas decimais, ou seja,

$$r = s + 0, t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 \ldots\ t_k$$

aqui s ∈ Z e é a parte inteira e cada t_j é uma casa decimal de r, ou seja, cada t_j é um número inteiro entre 0 e 9. Note que, se t_j = 0, para todo j = 1, 2, ..., k, então r = s é um número inteiro e podemos escrevê-lo na forma fracionária como:

$$r = \frac{r}{2^0 5^0}$$

Logo podemos supor que $t_k \neq 0$, neste caso:

$$0, t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 \ldots\ t_k \times\ 10^k\ =\ t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 \ldots t_k\ \rightarrow\ 0, t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 \ldots\ t_k\ =\ \frac{t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 \ldots t_k}{10^k}$$

E assim

$$r = s + 0, t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 \ldots\ t_k = s + \frac{t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 \ldots t_k}{10^k} = \frac{s\ \times\ 10^k\ +\ t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 \ldots t_k}{2^k 5^k}$$

Chegamos assim a uma representação fracionária de r com numerador e denominador inteiros, logo r é um número racional.

Observamos também que, para obter a forma irredutível da última fração acima, talvez seja necessário simplificar certa quantidade de fatores primos comuns ao numerador e denominador, restando no denominador apenas potências dos fatores 2 ou 5.

Reciprocamente, seja $\frac{m}{n}$ uma fração irredutível com m ∈ Z, n = $2^p 5^q$ p, q ∈Z_+. Supondo p ≥ q temos:

$$\frac{m}{n} = \frac{m}{2^p 5^q} = \frac{m}{2^p 5^q}\ .\ \frac{5^{p-q}}{5^{p-q}} = \frac{m \times\ 5^{p-q}}{10^p}$$

e daqui podemos concluir que a representação decimal de $\frac{m}{n}$ possui p casas decimais. O caso p < q é análogo, o que conclui a prova do teorema. Da demonstração decorre o corolário a seguir:

Corolário 01: Um número racional possui representação decimal infinita se e somente se quando escrito na forma irredutível, a decomposição em fatores primos do denominador possui fatores primos diferentes de 2 e 5.

Note que este corolário é simplesmente a negação lógica do teorema anterior, logo não podemos afirmar nada a respeito da periodicidade da dízima, nem mesmo quando é possível transformar uma representação decimal infinita para a forma fracionária. A única coisa que podemos afirmar é: partindo de um número racional (escrito em sua forma fracionária irredutível), quando sua representação decimal será finita ou infinita.

Em síntese a representação decimal finita, se dá então, apresentando o teorema apresentado, e é definindo que se n for divisível por algum primo diferente de 2 e de 5, então o número racional $\frac{m}{n}$, onde m e n primos entre si, não terá representação decimal finita.

Conclui-se assim, que há diferentes representações e várias propriedades nos números racionais. Também pode-se perceber as complexidades dessas diferentes formas de representações de um número racional, tal como por exemplo da representação decimal periódica infinita.

Uma observação que deve ser considerada (e observada) é que as expressões "representação decimal" e “dízima” podem ter o mesmo significado dependendo do contexto e são usados indistintamente em certas notações. Partindo da definição:

Definição 01: Diremos que uma representação decimal infinita é uma dízima periódica quando tal dízima puder ser escrita na forma

$$a, b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \dots b_m \overline{p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 \dots p_n}$$

Temos as seguintes condições:

a) a ∈ $\mathbb{Z}$ é a parte inteira da dizima;

b) b_m, $p_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, são algarismos da parte decimal da dízima;

c) $b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \ldots b_m$é a parte decimal não peridica da dizima;

d) $\overline{p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 \ldots p_n} = p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 \ldots p_n p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 \ldots p_n \ldots$ é o padrão de repetição de algarismos da parte decimal periódica a qual chamaremos de período da dízima.

Sobre a representação decimal infinita, pode-se observar através do teorema que generaliza essa questão:

Teorema 02: Seja $\frac{a}{b}$ a forma irredutível de um número racional. Se a decomposição de b em fatores primos contém fatores diferentes de 2 e 5, então sua representação decimal é uma dízima periódica. Além disso, o período possui no máximo b − 1 algarismos

Demonstração: Pelo corolário anterior, sabemos que a representação decimal de $\frac{a}{b}$ é infinita. Resta mostrar que é periódica.

Seja r_1 o resto da divisão de a por b. Note que $r_1 \neq 0$, caso contrário a divisão resultaria em um número inteiro (dízima finita) contrariando o que foi dito na linha anterior. Dessa forma, $1 \leq r_1 \leq$ b − 1.

O próximo passo no algoritmo da divisão é dividir $r_1\ 10^k$ por b (aqui k é o primeiro número natural tal que $r_1\ 10^k$ > b). Nesse passo obtemos um novo resto r_2, com $1 \leq r_2 \leq$ b − 1. Continuando com o processo de divisão acima obtemos a sequência de restos:

$r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, \ldots, r_{b-1}, r_b$, com $1 \leq r_j \leq$ b – 1, com todo j – 1, 2, 3, 4, 5, ..., b

Como há apenas b − 1 possibilidades de restos diferentes para esta divisão, então o resto r_b já apareceu pelo menos uma vez na sequência $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, \ldots, r_{b-1}$. Isso garante que o processo de divisão entrou em um ciclo de repetição e que o comprimento do período é de no máximo b − 1 casas decimais.

Finalmente após todas as demonstrações pode-se enunciar um teorema que reúne todos os resultados obtidos até aqui o que caracteriza completamente a representação decimal de um número racional. Portanto:

Teorema 03: Um número é racional, se e somente se, sua representação decimal é finita ou infinita periódica.

É preciso considerar a unicidade da representação, como pode-se obter seguindo as seguintes condições, pois ao falarmos da representação decimal infinita periódica, estaremos sempre nos referindo da segunda forma acima. A primeira continuará a ser tratada como dízima finita.

Proposição 02: Todo número racional admite uma representação decimal infinita periódica.

Demonstração: Dado um número racional qualquer, se sua forma fracionária irredutível possui denominador com fatores primos distintos de 2 e 5, não há nada a provar. Caso contrário, sua representação decimal é finita, digamos

$$a, b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \dots b_k \text{ com } b_k \neq 0$$

Vai se provar que:

$$a, b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \dots b_m = a, b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \dots (b_k - 1)\ 999 \dots$$

De fato, seja;

$$r = a, b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \dots (b_k - 1)\ \overline{9},$$

multiplicando essa expressão primeiro por 10^{k+1} e depois por 10^k obtemos as expressões:

$$10^{k+1} r = ab_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \dots (b_k - 1)\ 9{,}\overline{9}$$

$$10^k r = ab_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \dots (b_k - 1)\ ,\overline{9}$$

subtraindo a segunda expressão da primeira temos:

$$10^{k+1} r - 10^k r = ab_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \dots (b_k - 1)\ 9{,}\overline{9} - ab_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \dots (b_k - 1)\ ,\overline{9}$$

$$(10^{k+1} - 10^k)r = ab_1b_2b_3b_4b_5 \ldots (b_k - 1)\, 9,\overline{9} - ab_1b_2b_3b_4b_5 \ldots (b_k - 1)\, ,\overline{9}$$

ou seja:

$$9 \times 10^k\, r = ab_1b_2b_3b_4b_5 \ldots (b_k - 1)\, 9 - ab_1b_2b_3b_4b_5 \ldots (b_k - 1)$$

somando e subtraindo o número inteiro 1 no lado direito da expressão acima não alteraremos seu valor, e podemos reescrevê-la da seguinte forma

$$9 \times 10^k\, r = (ab_1b_2b_3b_4b_5 \ldots (b_k - 1)9 + 1) - (ab_1b_2b_3b_4b_5 \ldots (b_k - 1) + 1)$$

$$= 10 \times ab_1b_2b_3b_4b_5 \ldots b_k - ab_1b_2b_3b_4b_5 \ldots b_k$$

$$= 9 \times ab_1b_2b_3b_4b_5 \ldots b_k$$

logo:

$$10^k\, r = ab_1b_2b_3b_4b_5 \ldots b_k$$

portanto:

$$r = \frac{ab_1b_2b_3b_4b_5 \ldots b_k}{10^k} \rightarrow r = a, b_1b_2b_3b_4b_5 \ldots b_k$$

o que conclui a prova do teorema.

Tomando a conclusão anterior, e partindo deste ponto, o teorema pode ser reescrito tal como:

Teorema 04: Um número é racional, se e somente se, admite uma representação decimal infinita periódica.

Demonstração: Suponha que exista um número racional r que admite duas representações decimais infinitas periódicas distintas. Para simplificar a notação vamos supor $0 < r < 1$.

Neste caso podemos escrever:

$$r = 0, b_1b_2b_3b_4b_5 \dots b_k \quad \text{e} \quad r = 0, c_1c_2c_3c_4c_5 \dots c_k$$

como as dizimas periódicas acima são distintas, então existe um menor k tal que $b_k \neq c_k$.Se $b_k < c_k$ temos:

$$r = 0, b_1b_2b_3b_4b_5 \dots b_k\, b_{k+1} < 0, b_1b_2b_3b_4b_5 \dots c_k$$

$$= 0, c_1c_2c_3c_4c_5 \dots c_k = 0, c_1c_2c_3c_4c_5 \dots c_kc_{k+1} = r$$

Ocorre um absurdo, pois houve uma contradição. A prova para $b_k > c_k$ é análoga. Portanto todo número racional admite uma única representação decimal infinita periódica. Partindo dessa condição, algumas propriedades importantes nessa construção, válidas para os inteiros e que decorrem para os múltiplos e para a divisão nos racionais. Sendo m, n $\in \mathbb{Z}_+$, temos:

a) m é múltiplo de 1, é múltiplo dele mesmo.

b) 1 é divisor de todos os números inteiros.

c) O número 0 não divide número algum.

d) O número 0 é múltiplo de todos os números não nulos. Disso se decorre que para cada divisão $\frac{m}{n}$, com n ≠ 0, existe uma família infinita de divisões que têm o mesmo quociente.

E estas divisões são equivalentes e são obtidas combinando pares de múltiplos e pares de divisores de m e n, isto é, dados m, n ≠ 0 e p ≠ 0, $\frac{m}{n} = \frac{pm}{pn}$.

e) Para cada m, n ≠ 0, $\frac{m}{n} = 0$ se e só se m = 0.

Nas definições, sendo *m, n, p, q* $\in \mathbb{Z}^*$ temos as seguintes condições nas operações de:

Adição

$$\frac{m}{p}+\frac{n}{q}=\frac{m.q}{p.q}+\frac{n.p}{q.p}=\frac{m.q+n.p}{p.q}$$

Subtração

$$\frac{m}{p}-\frac{n}{q}=\frac{m.q}{p.q}-\frac{n.p}{q.p}=\frac{m.q-n.p}{p.q}$$

Multiplicação

$$\frac{m}{p}.\frac{n}{q}=\frac{m.n}{p.q}$$

Divisão

Define-se a divisão a partir desta noção de oposto multiplicativo. Sabe-se que, nos números inteiros (não nulos) que:

$$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m}}=1$$

Pelo princípio da permanência (as regras válidas nos inteiros devem permanecer válidas no novo conjunto), tem-se que:

$$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}:\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}=1$$

Sabe-se que, nos racionais

$$\frac{m}{n}.\ \frac{n}{m}=1$$

Igualando as condiçoes apresentadas anteriormente, temos:

$$\frac{m}{n} : \frac{m}{n} = \frac{m}{n} . \frac{n}{m} = \frac{m.n}{m.n} = 1$$

Partindo de duas frações irredutíveis, através da comparação, pode-se perceber de forma intuitiva que os números racionais possuem relações de ordem. Suponha duas frações irredutíveis:

$$\frac{m}{p} \text{ e } \frac{n}{q}$$

Define-se que:

$$\frac{m}{p} > \frac{n}{q} \text{ se, e somente se, } \frac{m}{p} - \frac{n}{q} > 0$$

Portanto;

$$\frac{m}{p} - \frac{n}{q} = \frac{m.q}{p.q} - \frac{n.p}{q.p} - \frac{m.q - n.p}{p.q} > 0$$

Ou seja, pode-se concluir que:

$$\frac{m}{p} > \frac{n}{q} \text{ se e somente se } m.q > n.p$$

Todas as propriedades das operações dos inteiros valem nos racionais então seguimos as propriedades:

a) Leis comutativas e associativas da adição e da multiplicação;

b) Lei distributiva da multiplicação em relação à adição;

c) Existência dos elementos neutros da adição e da multiplicação.

Então se incorpora uma nova propriedade:

d) Propriedade do Elemento Inverso da Multiplicação

A propriedade da existência do elemento oposto (ou simétrico) aditivo será apresentada mais tarde, quando definirmos os números negativos. Reforçam-se as Leis do Cancelamento da adição e da multiplicação, que já foram demonstradas no conjunto dos inteiros:

e) Lei do Cancelamento para Adição

Se m, n e p $\in \mathbb{Q}$, se m + p = n + p então m = n

f) Lei do Cancelamento para Multiplicação

Se m, n e p $\in Q^*$, se m.p = n.p então m = n

Através dos estudos de Pitágoras, as frações e todo seu contexto matemático aplicado deram início a sistematização da Música e o conceito teórico dessa parte da Matemática veio se construindo desde os primórdios da humanidade e está relacionado a teoria dos conjuntos, mais precisamente nos conjuntos numéricos e na área dos números racionais.

> O compositor barroco francês Jean-Philippe Rameau escreveu, em 1722, que, “apesar de toda a experiência que eu possa haver adquirido pela música, por estar associado a ela por tanto tempo, devo confessar que foi somente com a ajuda da matemática que minhas ideias se tornaram claras. (DU SAUTOY, 2007, p. 71).

Esse conjunto tem características e propriedades muito interessantes, e que foram essenciais na construção da teoria musical de forma metodológica e/ou aplicada.

4 - A MÚSICA COMO PROPOSTA PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

Explorar no currículo escolar através da LDB (Lei de Diretrizes e Bases) e da BNCC (Base Nacional Comum Curricular), a correspondência pedagógica e toda gama que a Matemática e a Música possibilitam e toda potencialidade que existe entre símbolos musicais e números, é pertinente onde possibilita através da aplicabilidade, trabalhar conceitos fundamentais de Música, tais como a melodia: combinação dos sons sucessivos, a harmonia: combinação de sons simultâneos e o ritmo: movimento ordenado dos sons em função do tempo.

Desta forma, concomitantemente é possível trabalhar a Matemática (em múltiplas vertentes) de forma interdisciplinar e dinâmica, dando ênfase ao ensino da Matemática (entre outras ciências exatas) através da teoria musical, em conformidade com as orientações dispostas na lei 11769/08, que tornou a Música um componente curricular como conteúdo obrigatório na escola de nível básico.

4.1 – A Educação e os documentos norteadores

A Educação sempre se pautou em leis e regimentos para estabelecer diretrizes no processo de ensino e aprendizagem das instituições educacionais. As leis e documentos que constroem a Educação são inúmeros, dentre eles a BNCC (Base Nacional Comum Curricular), a LDB (Lei de Diretrizes e Bases) da Educação Nacional, dentre outros, que norteiam os estudos regimentais desta pesquisa.

A partir destes documentos a educação brasileira se unificou em currículo, em todo o território nacional para trazer um avanço significativo no que diz respeito a uniformização do ensino no Brasil. Portanto:

> A Base nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). Este documento normativo aplica-se exclusivamente à educação escolar, tal como a define o § 1º do artigo 1º da lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei nº 9.394/96) e está orientado pelos princípios éticos, políticos e estéticos que visam à formação humana integral à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, como fundamentado nas Diretrizes Nacionais da Educação Básica (DCN) e das redes escolares dos estados, do Distrito Federal e dos municípios e das propostas pedagógicas das instituições escolares, a BNCC integra a política nacional da Educação Básica e vai contribuir para o alinhamento de outras políticas e ações, em âmbito federal, estadual e municipal, referentes à formação de

> professores, à avaliação, à elaboração de conteúdos educacionais e aos critérios para a oferta de infraestrutura adequada para o pleno desenvolvimento (Brasil, 2017, p. 7-8).

Sacristán (2000, p. 17-18) afirma que:

> O currículo é uma práxis antes que um objeto estático emanado de um modelo coerente de pensar a educação ou as aprendizagens necessárias das crianças e dos jovens, que tampouco se esgota na parte explícita do projeto de socialização cultural nas escolas. É uma prática, expressa, da função socializadora e cultural que determinada instituição tem, que reagrupa em torno dele uma série de subsistemas ou práticas diversas, entre as quais se encontra a prática pedagógica desenvolvidas em instituições escolares que comumente chamamos ensino. É uma prática que se expressa em comportamentos diversos. O currículo, como projeto baseado num plano construído e ordenado relaciona a conexão entre determinados princípios e uma realização dos mesmos, algo que se há de comprovar e que nessa expressão prática concretiza seu valor. É uma prática na qual se estabelece um diálogo por assim dizer, entre agentes sociais, elementos técnicos, alunos que reagem frente a ele, professores que o modelam etc.

A LDB já trazia uma proposta sobre a ideia de uma uniformidade do currículo escolar e foi a precursora da BNCC. Segundo a lei temos que:

> Art. 26. Os currículos da educação infantil, do ensino fundamental e do ensino médio devem ter base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e em cada estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e dos educandos (Redação dada pela Lei nº 12.796, de 2013).

A BNCC (Brasil, 2017, p. 63), afirma em suas definições que atividades humanas são se realizam através de práticas sociais, e é papel das linguagens mediá-las em diversos formatos possíveis, (oral, verbal, visual, motora, corporal, escrita, visual, sonora, dentre outras), onde por meio dessas práticas de interação que ocorrem os processos educacionais entre os agentes e o conhecimento, constituindo assim o papel da escola em consolidar os sujeitos de forma social. Então:

> Na BNCC, a área de Linguagens é composta pelos seguintes componentes curriculares: Língua Portuguesa, Arte, Educação Física e no Ensino Fundamental - Anos Finais, Língua Inglesa. A finalidade é possibilitar aos estudantes participar de práticas de linguagem diversificadas, que lhes permitam ampliar suas capacidades expressivas em manifestações artísticas, corporais e linguísticas, como também seus conhecimentos sobre essas linguagens, em continuidade às experiências na Educação Infantil (Brasil, 2017, p. 63).

O ensino de Música está intimamente ligado ao ensino das Artes, que por sua vez está ligado ao ensino, integrado à área de Linguagens e essa é a interação que se faz interessante no trabalho interdisciplinar para a Matemática. Utilizar música na escola é garantido e respaldado na lei, fica claro através do trecho (Brasil, 2017, p. 63) que a garantia acontece através do uso da linguagem sonora que é explorada através dos parâmetros e fenômenos do som, de forma direta ou indireta, através de uma diversidade enorme de práticas pedagógicas.

A lei n° 11769/08 de 18 de agosto de 2008, alterou a Lei de Diretrizes e Bases da Educação, nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, para dispor sobre a obrigatoriedade (que até então já era uma orientação, porém facultativa) do ensino de Música na modalidade de Educação Básica, modalidade que compreende o Ensino Fundamental e Médio.

A mudança da lei que após ser sancionada, inicialmente trouxe consigo um problema imediato, devido à baixa formação de professores na área de licenciatura preferencialmente e/ou bacharelado, ambas para ministrar as aulas de Música, visto que habilitação é um dos requisitos para o ensino de Música, uma vez que a maioria dos professores da área artística (ou melhor, da disciplina de Artes) eram graduados apenas em artes plásticas ou visuais, então em um primeiro cenário, o ensino obrigatório e direto da música foi deixado para segundo plano.

Essa mudança e todas suas consequências, inicialmente norteava em partes a forma da implantação da lei, pois dava as escolas um prazo de três anos (a correr a partir da data da publicação no Diário Oficial) para inserção e adaptação nos projetos pedagógicos das escolas, mas não especificava a forma que a disciplina deveria ser trabalhada.

Em 02 de maio de 2016 a lei n° 13.278, veio substituir através da alteração da lei n° 11.769, que mencionava apenas a Música como sendo componente obrigatório, a nova lei cita também as artes visuais, dança e teatro, agora com cinco anos para adaptação e implantação das diretrizes nas escolas de Ensino Básico.

De fato, segundo (Brasil, 2017, p. 197), algumas das missões mais importantes da educação ao longo do ensino básico, é proporcionar aos alunos o pensamento crítico e o ampliar de sua autonomia. Isso acontece em muitas vezes, através das práticas e por meio da reflexão sensível, imaginativa e crítica sobre os conteúdos e seus elementos constitutivos e também sobre as experiências de pesquisa, invenção e criação de formas palpáveis de ensino de conteúdos, ou seja, competências que estejam de acordo a realidade do aluno.

Zabala (2010, p. 11). afirma que: "O uso do termo “Competência” é uma consequência da necessidade de superar um ensino que, na maioria dos casos, foi reduzido a uma aprendizagem memorizadora de conhecimentos, fato que implica dificuldade para que esses conhecimentos possam ser aplicados na vida real". Na BNCC (2017, p.199), a aquisição de conhecimento acontece em torno de competências.

De fato, ensino das Artes de uma forma geral e dentre elas o ensino de Música, carece de investimentos e isso se dá por parte das políticas públicas para que possam ser inviabilizados e realizem todos os benefícios dos quais podem proporcionar ao envolvidos neste processo de ensino-aprendizagem.

Em meio a todos os documentos que condicionam Educação Básica, a LDB e a BNCC revolucionaram e mudaram os rumos da história da Educação no Brasil, pois foram criadas e aprovadas após amplos debates por toda comunidade escolar e a esfera política, desde gestores escolares e parlamentares.

A LDB passa por constantes mudanças, que são significativas para a implantação de novas possibilidades na Educação Básica. Os estudos em torno dos documentos norteadores, de formação de professores e das práticas educacionais, estão em alta e vem sendo discutidos de forma recorrente nas várias esferas de ensino e pelas Secretarias Municipais, Estaduais, Federais, e nas Universidades (IES).

4.2 – A utilização de Música nas escolas

Mesmo após a implementação da BNCC, muitos desafios estão colocados para a Educação, e este estudo tem como objetivo e foco trazer novas perspectivas educacionais aos professores de Matemática e assim auxiliá-los na superação desses desafios. É necessário compreender as convergências e mudanças trazidas pela BNCC em relação ao PCN e que essa essência traz muitas possibilidades pedagógicas, principalmente no que trata aos aspectos gerais da Educação e nos seus detalhes da área de Matemática.

Pautado da obrigatoriedade da lei, através da proposta sobre o ensino de Música na formação de estudantes na Educação Básica, pode-se fazer uma reflexão acerca de todo o conceito interdisciplinar e a relevância da Música como método pedagógico no processo de aprendizagem em diversas disciplinas, com o foco deste estudo na Matemática. Du Sautoy (2007, p.71) afirma que: "Muitos matemáticos possuem uma afinidade natural pela música (...). Existe uma conexão numérica evidente entre as duas, já que o ato de contar é que dá suporte a ambas."

A interdisciplinaridade entre a Matemática e a Música traz a proposta nas novas metodologias, TIC's, e se pauta em mudar paradigmas, uma vez que a interação de conteúdos (a Matemática tal como linguagem universal na tradução racional de fenômenos e a Música que é a linguagem universal das emoções onde designa as racionalidades dos números através da aplicação da Matemática). Camargos relata que:

> (...) devo confessar que ainda não descobri se sou um músico, com alma de professor, ou se sou um professor, com alma de músico. Porém, a arte de lecionar usando Música, não me traz apenas a alegria de ver o olhar curioso e deslumbrado de alguns alunos, mas, também, a satisfação de saber que a Matemática, assim como a Música, também é uma arte que pode tocar o âmago do ser e buscar, por mais singelo que seja um pouco do interesse em aprender. (Camargos, 2010, p. 15)

É importante destacar que essa interação de razão e emoção, representa melhor a realidade dos alunos, visto que a Música faz parte dessa realidade da humanidade e a Matemática é vista no conteúdo de forma aplicada e usual, e não trata mais os conteúdos disciplinas como fatos isolados, mas sim, os conteúdos são apresentados de forma híbrida, ou seja, através da interação a interdisciplinaridade faz com que haja um diálogo direto entre as disciplinas e as diversas áreas do conhecimento. Sobre a interdisciplinaridade, Terradas (2011) afirma que:

> "Essa forma de interação entre as disciplinas e os sujeitos das ações faz com que busquem a totalidade do conhecimento, deixando de lado as divisões disciplinares, partindo para um trabalho coletivo e reflexivo, em busca de respostas para seus questionamentos." (TERRADAS, 2011, p.97)

A interdisciplinaridade apresenta aos estudantes uma nova perspectiva sobre a forma de ensinar e por consequência disso gera novos questionamentos e também estimula a procura por entender a própria realidade através da aplicação dos conceitos matemáticos em ações cotidianas nem sempre tão triviais, como as frações (logaritmos, progressões, sequências, séries, entre outras) na música.

A relação íntima entre as disciplinas se funde a vida dos alunos e dos professores, e torna o uso de ambas muito favorável à interdisciplinaridade, pois muitos componentes tem relações diretas o que se faz interessante trabalhar uma disciplina em função da outra, tal como o exemplo deste estudo, que faz a associação através de uma introdução sobre a concepção da construção da Música, com conceitos da segunda disciplina a Matemática.

Segundo Gean Pierre (2012, p. 11): "Essas duas áreas, matemática e música, estão há muito tempo presentes em minha vida. "A interação traz a vantagem de poder explorar o gosto dos alunos por Música através da curiosidade, que de fato foi o fator crucial que levou Pitágoras dentre muitos outros a formalizar a Música através da Matemática e a transferência de conhecimentos é muito bem aproveitável dentro dos currículos educacionais, em várias vertentes científicas.

Estes métodos de ensino ainda encontram certa resistência, pois há dificuldade no que tange a formação e preparo de professores ao utilizar novas metodologias. Porém, em meio a todas as limitações regimentais e a falta de investimentos na formação e/ou na capacitação, pode-se perceber que há a possibilidade nessa ligação entre Matemática e Música.

De forma bem simples e objetiva possível levar aos estudantes conhecimentos que inicialmente seriam separados entre si, mas que tem total afinidade e desde muitos séculos são também compreendidos de forma integrada.

> De fato, não basta revermos a forma ou metodologia de ensino, se mantivermos o conhecimento matemático restrito à informação, com as definições e os exemplos, assim como a exercitação, ou seja, exercícios de aplicação ou fixação. Pois, se os conceitos são apresentados de forma fragmentada, mesmo que de forma completa e aprofundada, nada garante que o aluno estabeleça alguma significação para as ideias isoladas e desconectadas umas das outras. Acredita-se que o aluno sozinho seja capaz de construir as múltiplas relações entre os conceitos e formas de raciocínio envolvidas nos diversos conteúdos; no entanto, o fracasso escolar e as dificuldades dos alunos frente à Matemática mostram claramente que isso não é verdade. (PCNs Ensino Médio, 1999, p. 43).

Inserir a Música (teoria musical) nas aulas de Matemática muda a percepção e a forma que as disciplinas são ofertadas, pois o ensino tradicional, tecnicista que é por muitas vezes engessado nas práticas nem sempre estão vinculados à realidade dos alunos, fazendo com que os estudantes sejam apenas agentes receptores passivos nos processos de ensino e aprendizagem e a proposta da sequência didática, torna os estudantes protagonistas da aprendizagem pois vão de fato construir o conhecimento com as mãos.

4.3 – Sequência didática proposta para o ensino de Frações através da Música

Os documentos norteadores da Educação, tem como princípio ensinar através de habilidades e competências, e por esses conceitos se tem como consequência o não ampliar da compreensão conceitual acerca da conceituação e da disparidade entre teoria, pratica e a realidade escolar, mas se pauta em implicações no enfoque sobre a prática, tanto a discente quanto a docente. De fato, há a necessidade dos professores em vencer a discrepância sobre o desenvolvimento de sequências didáticas das competências de acordo com as habilidades dos documentos e unir conceitos sobre a teoria para aplicação das sequências. Então:

> Tendo em conta que a música, modo peculiar de se organizar experiências, atende a diferentes aspectos do desenvolvimento humano (físico, mental, social, emocional, espiritual), infere-se ser possível recortar seu papel como agente *facilitador* e integrador do processo educacional, enfatizando desse modo sua importância nas escolas em virtude de sua ação multiplicadora de crescimento. (SEKEFF, 2007, p.18).

É importante relacionar todo o processo de elaboração da sequência didática para trabalhar a proposta de ensino de frações e a teoria musical para o sétimo ano, destacando a atuação do professor no processo de atuação da mesma. E para a efetiva satisfação da proposta, é importante as avaliações diagnósticas e análise dos dados, que pontuam e determinam as orientações com a possibilidade de aprimorar a prática docente e as formas de ensino.

A sequência didática aqui apresentada é uma proposta para o ensino de Frações através do uso de teoria da Música e se dará através dos passos citados nesta unidade, das características do método e etapas de elaboração do conteúdo proposto descrevendo cada uma delas. Os objetivos desta sequência didática estão focados em:

01 – Trazer a compreensão aos alunos sobre a relação entre Matemática e Música bem como a demonstrar a aplicabilidade da Matemática em situações reais e cotidianas criando um ambiente de associação entre a teoria e a prática.
02 – Realizar a proposta sobre a transferência de conhecimentos entre domínios diferentes Matemática e Música através da interdisciplinaridade.
03 – Consolidar o ensino de Matemática, de forma especifica, ou seja, as frações, de maneira prazerosa, contextualizada e aplicada.
04 – Trabalhar e verificar as inteligências múltiplas contidas em sala de aula oportunizando a compreensão de conteúdo por diversas perspectivas.
05 – Organizar o processo de ensino e aprendizagem de Matemática, de modo significativo.

Para consolidação dos objetivos algumas delimitações devem ser adotadas e para tal, o público alvo desta sequência didática se concentra nos Anos Finais do Ensino Fundamental II. É importante pontuar que:

01 – Os conteúdos teórico-práticos tem por média a utilização de 5 aulas de 50 minutos necessários à sua aplicação, trazendo como conteúdo específicos abordados as frações, suas propriedades e operações.
02 – Os recursos necessários a aplicação deste estudo são: afinador eletrônico (ou aplicativo de celular), lápis, monocórdio, quadro escolar e régua.
03 – A estratégia adotada se dará na aplicação de atividades que estão dispostas entre a teoria e a pratica dentro das especificações e apontamentos dos documentos norteadores sobre essa temática.

PLANO DE AULA	
Disciplina:	Matemática
Ano/Serie:	7° ano – Ensino Fundamental II
Habilidade(s) da BNCC:	EF06MA10 - Resolver e elaborar problemas com números racionais positivos na representação decimal, envolvendo as quatro operações fundamentais e potenciação, por meio de estratégias diversas, utilizando estimativas e arredondamentos para verificar a razoabilidade de respostas, com e sem o uso de calculadora. EF07MA06 - Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura pode ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos. EF07MA08 - Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador. EF07MA09 - Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração 2/3 para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza.
Conteúdos/Temas:	Números Racionais
Objetivos:	Conceituar, resolver e elaborar estratégias de cálculo para multiplicação e divisão de números positivos na forma de fração. Efetuar multiplicações envolvendo uma fração e um número natural; realizar uma análise de várias situações problema envolvendo o uso de frações como operador.
Duração/Tempo estimado:	6 aulas – (50 min = 1 h/a)
Recursos didáticos:	- Folha de papel A4 branca; - Lápis - Monocórdio de Pitágoras - Régua - Afinador eletrônico digital (ou aplicativos de celular)
Metodologia:	Sequência didática para o uso aplicado de frações no cotidiano dos alunos
Avaliação:	Avaliações diagnósticas, avaliações formativas, questionários, pré-teste, sequência didática, pós-teste
Referências:	http://clubes.obmep.org.br/blog/aplicando-a-matematica-basica-construcao-de-um-monocordio/

Portanto segue a sequência didática proposta para atingir os objetivos desde estudo:

A ATIVIDADE 01 da sequência didática se pauta sobre qual é o parâmetro de conhecimento dos alunos sobre a relação entre a Música e a Matemática e sobre essa ligação das disciplinas com a relação as frações, através da aplicação de um pequeno questionário.

ATIVIDADE 01 - QUESTIONÁRIO I

01 - Você gosta de música?
Por quê? ____

02 – Qual(is) seu(s) estilo(s) musical(is) preferido(s)?
Cite-o(s) ____

03 - Você toca algum instrumento musical?
( ) Sim
( ) Não
Se sim, qual(is)? ____

04 - Você gosta de Matemática?
Por quê? ____

05 - Você acha que existe alguma relação entre a Matemática e a Música?
( ) Sim ( ) Não

06 - Você conhece as sete notas musicais?
( ) Sim
( ) Não
Se sim, quais são? ____

07 - Você sabe o que são frações?
( ) Sim
( ) Não
( ) Já estudei, mas não lembro

08 - Você acha que é possível estudar frações através da Música, mais especificamente com teoria musical?
( ) Sim ( ) Não

A ATIVIDADE 02 da sequência didática se dá sequencialmente após a análise na aplicação do questionário aos estudantes se pauta no ensino básico e pontual contextualizado da teoria sobre Música e a história concomitante entre as duas disciplinas, e também sobre a Matemática e os pontos principais para o ensino de frações, ou seja, a parte teórica sobre o conceito de números Racionais, baseando-se nos documentos norteadores.

A ATIVIDADE 03 da sequência didática se pauta na construção do monocórdio de Pitágoras, onde utilizaremos os seguintes materiais relacionados abaixo:

ATIVIDADE 03

01 - Tábua de aproximadamente 80 cm (de comprimento) × 10 cm (de largura) × 5 cm (de espessura).

02 - Ganchos com rosca (para fixação da corda) de 10".

02 - Cantoneiras de metal, (devem ficar entre os ganchos para manterem a corda esticada).

01 - Cavalete móvel (pode ser de madeira fino em cima e mais espesso em baixo).

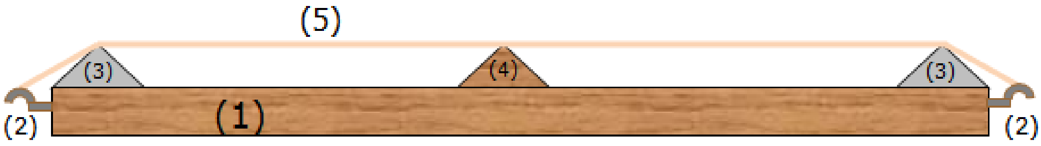
01 - Corda (recomenda-se de instrumento musical, como por exemplo de violão a 3° de Sol de material de Aço ou Nylon).

01 - Régua com aproximadamente 60 cm, (para encontrar as frações da corda de uma maneira mais fácil).

01 – Afinador eletrônico digital.

Para a construção do monocórdio devemos seguir os passos descritos através das seguintes etapas:

FIGURA 19 - Estutura do Monocórdio



Fonte:http://clubes.obmep.org.br/blog/aplicando-a-matematica-basica-construcao-de-um-monocordio/

Seguindo as especificações do esquema para a construção do instrumento temos que:

(1) – Tabua, base de apoio para a construção do Monocórdio de Pitágoras.

(2) – Ganchos 10"

(3) – Cantoneira

(4) – Cavalete

(5) – Corda

Observação: Para a realização das atividades propostas a partir deste momento é necessário o uso do afinador eletrônico digital (ou aplicativo de celular) para auxiliar na representação das frações (e constatação das medidas), por suas respectivas notas e frequências.

A ATIVIDADE 04 da sequência didática se destina ao foco deste estudo, ou seja, será para concretização dos conceitos relacionando as partes (ou frações), e se dará sobre o reconhecimento das relações existentes de acordo com o experimento proposto por Pitágoras através da Matemática das partes.

ATIVIDADE 04 – Parte 1

Agora vamos tocar o monocórdio de Pitágoras, encontrar as frações da corda que se pede no comando e marcar no monocórdio, observar e analisar os sons.

a) A corda inteira $\left(\frac{1}{1}\right)$.
b) Metade da corda $\left(\frac{1}{2}\right)$.
c) Dois terços da corda $\left(\frac{2}{3}\right)$.
d) Três quartos da corda $\left(\frac{3}{4}\right)$.

ATIVIDADE 04 – Parte 2

Vamos tocar o monocórdio de Pitágoras, encontrar as frações da corda que correspondem as notas musicais Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá e Si, demonstrando especificadamente as notas que fazem parte do ciclo das quintas (Ré, Mi, Lá e Si) como Pitágoras demonstrou, observar e analisar os sons.

Encontre pelas razões as 7 notas musicais - Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá e Si.

É reiterado que nesta atividade praticas as notas não serão encontradas através do ciclo das quintas (tal como Pitágoras fez em seu experimento com o monocórdio pra descobri-las), será utilizado o afinador para encontrá-las como forma de facilitar aos alunos, uma vez que as frações que representam esses tons nas notas são formadas por numeradores e denominadores compostos por números grandes o que dificultaria o entendimento e como consequência dificultaria a proposta didática desta sequência.

É importante que seja demonstrado o processo dos ciclos das quintas em outras fases (as fases destinadas a teoria), para que os alunos sejam conhecedores das frações que correspondem às respectivas notas na proposta do matemático. Os cálculos podem ser feitos no quadro ou até através do uso de softwares.

A ATIVIDADE 05 corresponde à avaliação dos alunos sobre a relação matemática-música e como a metodologia aplicada contribuiu para o ensino de frações.

ATIVIDADE 05 - QUESTIONÁRIO II

Agora sendo conhecedor da relação entre as disciplinas, isso fez você ver a Matemática de forma diferente?

Que mais chamou sua atenção nos conteúdos e atividades estudadas?

Você compreende o que são frações?
( ) Sim, agora compreendo melhor.
( ) Não.

Você achou que seria possível estudar Matemática de forma diferente da convencional?
( ) Sim.
( ) Não.

O que você achou de estudar Matemática através da teoria musical?
( ) Gostei, pois compreendi melhor o assunto e de forma mais prazerosa.
( ) Não gostei.

Após a aplicação das atividades, bem como do questionário, é crucial ser feito a avaliação das metodologias usadas, através da análise dos resultados, na culminância em se concluir se de fato foram satisfatórios, ou se cabe dar pequenos ajustes ou mudanças de foco nesta sequência didática.

Seguem abaixo as resoluções das atividades aplicadas:

A resolução das atividades é bem simples e pode se dar pela medida das razões propostas no exercício com o monocórdio de 60 cm de área construída para realizar a medição.

Observação: contudo se mudar as medidas utilizadas, as operações deverão ser refeitas com os novos parâmetros escolhidos. Através das operações de multiplicação de frações, supondo que o monocórdio tenha sido construído com aproveitamento de 60 cm, para medição.

- **ATIVIDADE 01**

Resolução:

Questionário I - (pré-teste diagnostico de situação, com respostas pessoais dos participantes do estudo)

- **ATIVIDADE 02**

Resolução:

Aulas - (Aulas sobre a teoria necessária ao entendimento do conteúdo trabalhado com os(as) participantes do estudo)

- **ATIVIDADE 03**

Resolução:

Construção do Monocórdio - (Parte destinada a construção do instrumento para a consolidação e aplicação com os(as) participantes do estudo),

- **ATIVIDADE 04**

Resolução:

- Atividade - Parte 1

a) $Dó_1 - Dó_1$

Se a corda estiver afinada em Dó ao ser tocada sem nenhuma interferência ela apontará a nota $Dó_1$ (qual seja a oitava que ela estiver afinada, isso o afinador eletrônico mostrará).

A corda inteira é a tônica, medida entre os dois cavaletes, ou seja $Dó_1$

$60 \cdot \frac{1}{1} = \frac{60}{1}$ = 60 cm, a nota encontrada terá de ser um $Dó_1$

b) $Dó_1 - Dó_2$

Se a corda está afinada em Dó ao ser tocada sem nenhuma interferência ela apontará a nota $Dó_2$ uma oitava acima da frequência inicial (qual seja a oitava que ela estiver afinada, isso o afinador eletrônico mostrará).

A metade da corda é a oitava, medida entre os dois cavaletes, ou seja $Dó_2$

$$60 \cdot \frac{1}{2} = \frac{60}{2}$$ = 30 cm, a nota encontrada terá de ser um $Dó_2$

c) $Dó_1 - Sol_1$

Se a corda está afinada em Dó ao ser tocada sem nenhuma interferência ela apontará a nota Sol pois essa fração aponta a 5°justa e a 5° nota sequente ao Dó (Dó, Ré, Mi, Fá, SOL) é SOL (qual seja a oitava que ela estiver afinada, isso o afinador eletrônico mostrará).

Dois terços da corda é a quinta, medida entre os dois cavaletes, ou seja Sol_1

$$60 \cdot \frac{2}{3} = \frac{120}{3}$$ = 40 cm, a nota encontrada terá de ser um Sol_1

d) $Dó_1 - Fá_1$

Se a corda está afinada em Dó ao ser tocada sem nenhuma interferência ela apontará a nota Sol pois essa fração aponta a 4°justa e a 4° nota sequente ao Dó (Dó, Ré, Mi, FÁ) é FÁ (qual seja a oitava que ela estiver afinada, isso o afinador eletrônico mostrará).

Três quartos da corda é a quinta, medida entre os dois cavaletes, ou seja $Fá_1$

$$60 \cdot \frac{3}{4} = \frac{180}{4}$$ = 45 cm, a nota encontrada terá de ser um $Fá_1$

- Atividade - Parte 2

Através da multiplicação de frações, supondo que o monocórdio tenha sido construído com aproveitamento de 60 cm, para medição

Dó

$60 \cdot 1 =$ 60 cm, a nota encontrada terá de ser um $Dó$.

Ré

$60 \cdot \frac{8}{9} = \frac{480}{9}$ = 53,33 cm, a nota encontrada terá de ser um $Ré$.

Mi

$60 \cdot \frac{64}{81} = \frac{3840}{81}$ = 47,40 cm, a nota encontrada terá de ser um Mi.

Fá

$60 \cdot \frac{3}{4} = \frac{180}{4}$ = 45 cm, a nota encontrada terá de ser um $Fá$.

Sol

$60 \cdot \frac{2}{3} = \frac{120}{3}$ = 40 cm, a nota encontrada terá de ser um Sol.

Lá

$60\,.\frac{16}{9} = \frac{480}{9}$ = 53,33 cm, a nota encontrada terá de ser um Lá.

Si

$60\,.\frac{128}{243} = \frac{7680}{243}$ = 31,60 cm, a nota encontrada terá de ser um Si.

- **ATIVIDADE 05**

Resolução:

Questionário II - (pós-teste diagnóstico de aprendizagem, com respostas pessoais dos participantes do estudo)

Outras abordagens que não estão na sequência, mas podem ser trabalhadas nas aulas. Por exemplo:

Proposta - 01

Coloque e encaixe as frações: $\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{8}{9},\frac{16}{27},\frac{64}{81},\frac{128}{243}$ em ordem decrescente na sequência de notas abaixo e calcule sua equivalência na forma decimal:

$\boldsymbol{D}$ó$_{\boldsymbol{1}}$	$\boldsymbol{R}$é$_{\boldsymbol{1}}$	$\boldsymbol{Mi_1}$	$\boldsymbol{F}$á$_{\boldsymbol{1}}$	$\boldsymbol{Sol_1}$	$\boldsymbol{L}$á$_{\boldsymbol{1}}$	$\boldsymbol{Si_1}$	$\boldsymbol{D}$ó$_{\boldsymbol{2}}$
1°	**2°**	**3°**	**4°**	**5°**	**6°**	**7°**	**8°**
1							$\boldsymbol{\frac{1}{2}}$
1							**0,5**

Resposta

$\boldsymbol{D}$ó$_{\boldsymbol{1}}$	$\boldsymbol{R}$é$_{\boldsymbol{1}}$	$\boldsymbol{Mi_1}$	$\boldsymbol{F}$á$_{\boldsymbol{1}}$	$\boldsymbol{Sol_1}$	$\boldsymbol{L}$á$_{\boldsymbol{1}}$	$\boldsymbol{Si_1}$	$\boldsymbol{D}$ó$_{\boldsymbol{2}}$
1°	**2°**	**3°**	**4°**	**5°**	**6°**	**7°**	**8°**
1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{128}{243}$	$\boldsymbol{\frac{1}{2}}$
1	0,88	0,79	0,75	0,66	0,59	0,52	**0,5**

Proposta - 02

Realize as operações e descubra as frações da corda que correspondem ao $\boldsymbol{R}$é$_{\mathbf{3}}$ e ao $\boldsymbol{L}$á$_{\mathbf{4}}$.

Resposta

Ré$_{\mathbf{3}}$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{9} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

Lá$_{\mathbf{4}}$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{27} = \frac{16}{216} = \frac{2}{27}$$

Também nas aulas de Física, em relação as frequências, como por exemplo:

Proposta - 03

Tomando a nota $\boldsymbol{D}$ó$_{\mathbf{1}}$ como referência, cuja frequência é 32,70Hz, calcule as frequências de:

a) $\boldsymbol{D}$ó$_{\mathbf{1}}$

b) $\boldsymbol{D}$ó$_{\mathbf{2}}$

c) $\boldsymbol{Sol_1}$

d) $\boldsymbol{Mi_3}$

Respostas

a) $\boldsymbol{D}$ó$_{\mathbf{1}}$ = 1 . 32,70 = 32,70 Hz

b) $\boldsymbol{D}$ó$_{\mathbf{2}}$ = 2 . 32,70 = 65,40 Hz

c) $\boldsymbol{Sol_1} = \frac{4}{3}$. 32,70 = 43,5999999 Hz

d) $\boldsymbol{Mi_3} = \frac{81}{64} \cdot 2 \cdot 2 \cdot$ 32,70 = 165,54375 Hz

5 – METODOLOGIA

Sobre o conhecimento, é facil perceber sua notoriedade e que concomitante com toda a evolução na humanidade ocorrida após a consolidação das sociedades, das inúmeras descobertas cientificas e tecnológicas, ao decorrrer dos séculos pouco houveram mudanças nas práticas pedagógicas ocorridas durante estes períodos iniciais. Sobre o conhecimento cientifico (GALLIANO, 1979, p. 30) afirma que: é útil, pois proporciona ao homem "um instrumento valioso para o domínio da natureza e a reforma da sociedade, em benefício do próprio homem."

Se observada, a prática científica é concreta, o que caracteriza de forma mais evidente essa condição, é a aplicação da teoria abordada em ações com caráter operacional técnico, que se pauta em uma gama de condições para averiguação das hipóteses para alguma problemática levantada.

Através dessas ações técnicas, são desenvolvidos variados procedimentos que partem de fatos, dados, observação, experimentação, registro, coleta, levantamentos, identificação, catalogação, documentos, estatística, tabulação, cálculos, depoimentos, questionários, entrevistas, dentre outros. Essa gama de técnicas é analisada pelo(a) pesquisador(a), que vai optar pela(s) técnica(s) que mais será (ou serão) eficaz(es) ao estudo.

As escolhas são feitas a rigor e de forma sistemática, pois seguem planos de utilização, ou seja, ele cumpre um roteiro preciso, ele se dá em função de um método. A forma da aplicação destes instrumentos se dá em decorrência de um processo metodológico claro, e consta da prática do método de pesquisa escolhido e que estará sendo utilizada para atingir os objetivos do estudo, cada qual a seu caso.

A palavra método tem origem no grego "méthodos", formada por "metá" que significa no "através", e "odós", que significa "caminho". (TRUJILLO FERRARI, 1982, p. 19), diz que: método significa "ao longo do caminho", ou seja, "forma de proceder ao longo de um caminho".

Entre as partes do estudo científico, o método é um conceito muito importante e se dá através da maneira, ou seja, é a forma que o(a) cientista escolhe para ampliar o conhecimento sobre determinado objeto de estudo, através de uma série de procedimentos rigorosamente técnicos, que são adotados para atingir determinado conhecimento sobre algo.

Na escolha do método, através do uso e análise de novas metodologias, aplica-se ao estudo qualitativo, a análise bibliográfica, para uma reflexão a respeito do pensar, do sentir e do fazer musical no espaço escolar, favorecendo dessa forma o desencadear de novas concepções pedagógicas de forma aplicada, através da associação entre as ciências e o cotidiano dos alunos.

O método qualitativo de pesquisa, tem o(a) pesquisador(a) como uma peça importante, e se utiliza do ambiente natural para a fonte direta do a observação e a retirada de dados. Os estudos qualitativos se preocupam em trabalhar os métodos no mundo empírico e a estudo em seu ambiente natural, o que torna o pesquisador é fundamental no processo de coleta de dados em loco.

Através da observação, dentre outras técnicas, o pesquisador seleciona, interpreta e registra as informações no ambiente em que a pesquisa está inserida, de forma descritiva, para descrever os fenômenos por meio dos significados que o ambiente nos quais eles se manifestam.

Dados aos fatos apresentados, os resultados por vezes são expressos pela transcrição de n formas de coleta de dados entre outras informações, os pesquisadores qualitativos se preocupam com o processo e seus componentes, para que sejam alcançados os objetivos da investigação proposta.

Em vista dessas condições, os pesquisadores qualitativos buscam conhecer, compreender e cientificar determinado(s) fenômeno(s) que se manifesta(m) e tendem a analisar os dados indutivamente, isto é, sobre as abstrações que são construídas a partir dos dados, e através do significado e o que este vai impactar e/ou construir é a preocupação essencial deste método.

Outra parte importante deste estudo está relacionada a pesquisa bibliográfica, que se caracteriza sobre aquela pesquisa que se realiza a partir de registros disponíveis, e é construído através de pesquisas anteriores, em documentos, sejam impressos ou em plataformas online (tais como livros, teses, monografias, artigos, etc.), que são cruciais para a construção de qualquer estudo científico.

Através destes estudos com bibliografias já existentes, tem-se partes concretas de conceitos e dados ou melhor, tem-se categorias teóricas, por outros(as) pesquisadores, ou seja, perspectivas diversas com caráter científico e que são devidamente construídas para fundamentar outras propostas.

Os registros se tornam-se fontes dos temas de pesquisa, e o pesquisador vai explorá-los a partir de contribuições desses autores e dos seus estudos analíticos, e sobre constantes dos aspectos vai construir seus textos aliados à sua perspectiva de foco, sobre o que quer demonstrar com o seu estudo.

Através da somatória das técnicas na escolha para coleta e análise das informações as quais se decorre do problema de pesquisa e dos objetivos e junto à investigação científica, buscou-se compreender e examinar o cenário e das situações dispostas neste estudo, onde as conclusões dependem de informações iniciais coletadas sobre o saber pré-disposto em cada aluno de forma singular, bem como após a aplicação da sequência didática na busca de resolução do problema abordado.

Na busca em reunir essas informações que compõem diferentes fontes partindo do pressuposto das diferentes realidades e os níveis de conhecimento de ambas as disciplinas pelos participantes, e para que a proposta da sequência didática seja eficaz, é preciso planejar desde a abordagem inicial, onde é necessário compreender conhecimento prévio dos participantes envolvidos neste processo e aos quais são concentradas essas informações iniciais, onde elas se encontram, de que forma as obter e como trabalhá-las na proposta de ensino interdisciplinar, isto é, o que se vai fazer com os dados iniciais: como serão agrupados, tratados e analisados para aplicação do projeto.

O questionário inicial é um instrumento fundamental de coleta de dados constituído por uma série ordenada de perguntas descritivas e ele já direcionado ao contexto deste projeto pois, já tem o perfil dos participantes (série, idade, etc.), então para sua eficácia busca-se entender o perfil comportamental e preferencial dos alunos em relação a Música.

Esse direcionamento do questionário é necessário visto que a Matemática e a Música são áreas bem expressas nos documentos norteadores e a opinião e avaliação das condições e/ou circunstância as quais serão trabalhadas é muito importante e o questionário traça o perfil da metodologia a ser aplicada.

Essas técnicas agrupadas possibilitam um leque grande de opções, da mesma forma também tem como ponto positivo a opção de mesmo com uma amostra previsível (n° de alunos de uma ou mais turmas), pode-se preservar o anonimato das respostas e por consequência a liberdade dos participantes em expor sua opinião dentro das suas experiências, vivencias, concepções e visão de mundo.

Um aspecto científico necessário que se dá no questionário é o fato dele ser igual para todos, e essa uniformidade está garantida na pergunta e nas respostas (GIL, 2007; RICHARDSON et al., 2007). Minayo (1996), destaca que mediante essa técnica podem ser obtidos dados de natureza quantitativa (dados estatísticos) e qualitativa (dados significativos).

Importante ressaltar que o questionário pode ser em forma de entrevista, que é um encontro entre duas (ou mais) pessoas, a fim de que uma delas obtenha informações a respeito de determinado assunto (LAKATOS; MARCONI, 2007). A entrevista é uma técnica muito utilizada nas pesquisas qualitativas. No entanto neste estudo não são necessárias a realização de entrevistas visto a logística da sequência didática.

A partir dessas fomentações sobre a pesquisa científica, na era contemporânea a Educação, se pintou com novas roupagens, procurou fundamentar suas abordagens e seu campo de estudo em práticas científicas e diversificadas para atingir seus objetivos, sejam eles principais e/ou secundários, buscando se fundar e contemplar diferentes metodologias em diversos contextos onde ela pode se apresentar, para suprir os desafios ao se reinventar, principalmente nas últimas décadas, para acompanhar o contexto escolar atual.

Pode-se trazer a baila, algumas ilustrações pertinentes as metodologias de pesquisa relacionado aos assuntos fundamentais que tangem o despertar sobre as práticas educacionais e nosconvidam à reflexão sobre elas e dão carcteristicas de ciência e estudo sobre como essas praticas (sejam aplicadas e/ou analisadas), são importantes para a continuação da própria Educação e suas vertentes.

Kalinke (1999, p.16) afirma ao citar o professor Attico Chassot, da UFRS, que:

> Se José de Anchieta, um dos pioneiros em educação no Brasil, entrasse hoje em nossas salas de aula muito pouco se surpreenderia, pois nossos métodos e tecnologias são praticamente os mesmos por ele utilizados. Continua-se fazendo educação com artesania.

Faz-se a reflexão sobre a prática educativa vigente e suas possibilidades, considerando que esta, poderá se tornar muito mais efetiva para a Matemática, se unida a prática musical e contextualizada com a realidade cultural de cada indivíduo, de cada região, valorizando assim, as múltiplas realidades, texturas, contextos e características existentes em busca do aprimoramento de ambas disciplinas.

Machado (apud PAIS, 1999, p. 9) afirma:

> [...] de uma forma geral, há um descontentamento com o ensino da Matemática em todos os níveis de escolaridade; o seu significado real, a sua função no currículo escolar passam a ser questionados e pesquisados de uma forma mais consciente, pontual e contextualizada.

Os efeitos oriundos dessas práticas são sentidos e refletem diretamente no cotidiano escolar, pois as transformações que ocorreram nas relações sociais ao longo dos tempos, trazem consigo a urgente necessidade de uma transformação metodológica, principalmente nas ciências exatas.

Diante desse cenário, é importante abordar a concepção do conhecimento sobre a perspectiva vista tal como uma rede de significados, preconizada por alguns autores, a teoria das inteligências múltiplas, inicialmente idealizada por Gardner, dentre outras práticas que são de forma educacionais muito relevantes para o método cientifico.

É importante abordar os fundamentos da Educação em sua amplitude, das disciplinas nas quais se tem a proposta pedagógica, dentre outros, para discorrer sobre as reflexões da Educação Matemática na atualidade, as propostas e/ou métodos oferecidos segundo os(as) autores(as) que são referências em cada segmento, que vão nortear a expansão dos conceitos do uso das práticas musicais na escola em benefício do ensino de Matemática, o que são objetos desta pesquisa.

Destacar que as instituições que são responsáveis pela formação dos professores (no caso deste estudo, de Matemática) façam uma reflexão sobre a questão da ciência tal com método e interdisciplinaridade é crucial, e com ela neste estudo com a utilização de Música nas abordagens pedagógicas da disciplina de Matemática, as quais essas novas possibilidades pedagógicas preencham as lacunas, que são claras e evidentes na formação desses professores, isso é válido para todas as áreas do conhecimento.

Esse fato é importante para diminuir a distância na formação destes profissionais pois existe um grande abismo entre a teoria e a prática entre os profissionais da Educação, os documentos, currículos e os PPC's referentes aos cursos de formação de professores, sugerem a criação de grupos científicos, que realizem estudos, durante e depois do curso de licenciatura, utilizando-se de instrumentos e os docentes das várias áreas pedagógicas específicas do conhecimento, onde os agentes destes ciclos estão dispostos a discutir não só os problemas de disciplina de forma especifica, mas da Educação como um todo.

Atualmente as instituições tem se preocupado com as questões de ensino-aprendizagem e vem trazendo à tona de suas mesas e pautas, a teoria destes estudos e adaptações curriculares na busca de novas metodologias de ensino, onde de formas preliminar, constroem as novas perspectivas sobre as concepções da natureza da Matemática, seu ensino e aprendizagem.

A formação de professores hoje pauta o cenário dessa construção do conhecimento, sobre perspectivas diferentes ao que era tendência em épocas anteriores, até então um fato normal, se compreendido que o conhecimento é incessante e está em constante movimento. A Educação tal como ciência e suas técnicas, sempre estiveram passando por debates sobre conteúdo das disciplinas, sejam elas, básicas ou avançada, e também sobre a metodologia as quais esse conhecimento é transmitido, através delas.

Através dessas outras concepções e sobre a avaliação dessas perspectivas de estudo cientifico, incorporando os avanços da Psicologia e da Pedagogia tais como áreas importantes na Educação e na Matemática, faz com que a interdisciplinaridade venha como uma estratégia que vem sendo assessoradas por especialistas em cada uma das áreas trabalhadas, incorporando nova visão na forma de ensinar.

De fato, não é útil para Educação permanecer parada nas velhas práticas, pois se fixadas nessas pautas acaba por não realizar seu objetivo, que é proporcionar aos aluno o acesso ao conhecimento e dentre diversas razões das quais a mais importante talvez seja a de que o professor de Matemática não esteja motivado o suficiente para compreender o alcance da reflexão sobre as questões cientificas e pedagógicas as quais são necessárias para trazer realidade e aplicabilidade da disciplina na vida do aluno, o que a Matemática pode fazer através da Música.

6 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

Destacando inicialmente sobre o fato dessas duas disciplinas que parecem tão distintas que possuem uma profunda relação que vem desde a antiguidade desde os primórdios da humanidade e se mostrou mais definida partindo de origens formais na antiga Grécia, não há a necessidade de se ter conhecimento musical teórico aprofundado, porém há a necessidade de intuição e a Matemática será inserida aos poucos neste contexto.

A primeira relação surgiu em um currículo de referência que se perdurou da antiguidade até o final da idade média que possuía o Trivium, composto pelas linguagens: Gramática, Lógica e Retórica e o Quadrivium que era composto por duas subáreas: Repouso/Discreto: Aritmética e Geometria e pelo Movimento/Contínuo: Música e Astronomia.

É importante destacar que inicialmente, entre essas disciplinas, havia uma articulação interna, como por exemplo da Aritmética que era a área responsável pelo estudo dos números em repouso, tal como o estudo dos números primos e/ou números triangulares, entre outros e a Música trazia o estudo dos números em movimento, tendo com o exemplo do ritmo e/ou a harmonia, dentre outras partes da teoria musical, tal como a geometria estudava as formas em repouso e a Astronomia as formas em movimento.

Com a consolidação da ciência e dos métodos, foi possível através da Física, determinar os parâmetros que definem o Som (tal quanto fenômeno) a altura, que está diretamente relacionada a frequência, (ou seja, através do número de vibrações produzidas por segundo), a intensidade, que se dá o quanto forte (ou seja, o quanto potente é esse som), e o timbre, que é a identidade de um instrumento, ou seja, o que diferencia os tipos de fontes que estão emitindo um som.

Essa propriedade Física permite observar em apresentações musicais que os instrumentos apesar de possuir suas características singulares e consequentemente o timbre diferente, tem frequências as quais estão afinados com mesma intensidade, o que torna possível identificar cada qual a seu caso.

Apesar de ser algo trivial o fato de o registro harmônico desse som percebido ser diferente se gerado através de instrumentos diferentes, e se dá quando um instrumento gera um som, que além da frequência fundamental, gera outras *n* frequências, que são superiores classificadas de ordem par e ordem ímpar em relação à fundamental, além do que os sons harmônicos são diferentes também na amplitude, portanto a forma de onda desses instrumentos é diferente e a fisiologia do ouvido percebe muito bem isso.

Pode-se realizar a análises físicas e matemáticas do som, mas certamente que a Música, acrescentará muitas outras características importantes, que também utilizam a Matemática como parâmetros, isso se dá, através da junção das notas e das figuras de duração de tempo e pausas, que impressas nas partituras, são a referência dos musicistas, para transformar aqueles sinais gráficos que serão traduzidos em sons, que são capazes de trabalhar através da razão, a emoção.

Pitágoras foi o responsável pelo primeiro experimento que uniu a Matemática e a Música através da construção do monocórdio, que foi o primeiro instrumento capaz de estabelecer essa relação entre as duas ciências através da sistematização da primeira escala musical construída por razões matemáticas, essa construção foi fundamental para a afinação dos instrumentos da época, pois até então eram instrumentos muito rudimentares.

Tal experimento possibilitou estabelecer a relação entre os comprimentos das cordas e os sons consonantes, tendo como exemplo as razões simples em relação a nota emitida pela corda inteira: então em $\frac{1}{2}$ temos a 8ª justa, então em $\frac{2}{3}$ temos a 5ª justa, então em $\frac{3}{4}$ temos a 4ª justa. Caso seja utilizado outras relações, os sons não são tão agradáveis aos ouvidos.

Então, utilizando seu fascínio e estudo sobre números, através da unidade numérica sagrada, muito cultuada por sua comunidade, ou seja, matematicamente partindo da Tetraktys (pois fez uso dos números 1, 2, 3, 4) e dos números racionais Pitágoras fundamentou de forma consistente a Música o que proporcionou essa relação direta interdisciplinar e que contribuiu muito para a evolução das duas disciplinas, inclusive de forma pedagógica.

Mesmo que não seja tão evidente a priori, a relação entre Música e Matemática já foi muito explorada (desde sua concepção até a aplicação) ao evoluir da sociedade e da ciência como um todo.

Um fato importante e de grande interseção entre estas áreas que são pontes entre a Ciências e as Artes está fomentada nas descobertas quais vão de Pitágoras a Fourier, pois uma das principais aplicações das séries são necessárias para resolver a equação da onda, que é utilizada na solução da equação e descreve o movimento de uma corta elástica que é fixada pelas extremidades.

As definições e conceitos das teorias de Pitágoras foram o início de todo um desencadeamento de concretização da Música, e tem-se o que há de atual em Fourier, onde são apresentados mostram uma estrutura matemática que é capaz de explicar diversos fenômenos no âmbito da Física e da Matemática toda teoria musical, partindo da relação entre pequenos números inteiros e suas consonâncias, além de que as Transformadas de Fourier permitem ainda obter as componentes de frequências que estão contidas em sinais de áudio.

A ciência se prova importante em todas as esferas do conhecimento, pois as teorias aliadas a aplicabilidade desse conhecimento na prática e o avanço das tecnologias, permitem um serie de possibilidades, como por exemplo das transformadas de Fourier, que permitiram aplicando a teoria a compactação de arquivos de áudio (principalmente o formato MP3).

Isso se deu através da análise espectral do sinal e a eliminação dos componentes de frequência praticamente imperceptíveis ao ouvido humano, reduzindo seu tamanho consideravelmente sem perda de qualidade aparente, o que permitiu diminuir muito o tamanho destes arquivos, revolucionado a forma de manipular e armazenar músicas.

Os conceitos apresentados são instrumentos importantes para instigar os alunos em conceber a Matemática como parte de seu cotidiano e também como uma ferramenta para explicar inúmeros fenômenos, além de mostrar que sua aplicabilidade ultrapassa os conceitos básicos, e é responsável pela existência de grande das tecnologias que estão em uso por eles.

A teoria musical abrange diversos conceitos matemáticos, desde os mais simples, envolvendo operações e aritmética básica, até os mais complexos, como o cálculo diferencial e integral, Analise e Teoria dos Números, o que a torna suas aplicabilidades uma gama de possibilidades em ser exploradas por professores e alunos qual seja o nível de ensino, mas com foco no início ou seja, na Educação Básica, pelo desafio de compreender a importância da Matemática para a humanidade e o uso dela em detrimento do conhecimento.

Este é o conceito chave e, portanto, um interessante caminho que possibilita a compreensão da posição da Matemática na sociedade. O fato de explorar a interdisciplinaridade e utilizar a ciência como pauta de saberes matemáticos, contribui efetivamente no processo de ensino e aprendizagem da Matemática na Educação Básica.

Contudo, através deste trabalho, pode-se perceber que o tema desperta o interesse de professores e alunos, contribuindo com a ampliação do número de estudos e assim com o aprofundamento deste tema, e ainda mais as discussões sobre as teorias Matemáticas aplicadas à teoria musical.

REFERÊNCIAS

ABDOUNUR, Oscar João. **Matemática e Música: pensamento analógico na construção de significados.** São Paulo: Escrituras Editora, 1999.

ABDOUNUR, Oscar João. Matemática e Música: **O pensamento analógico na construção de significados** /Oscar João Abdounur – 3ª edição. São Paulo: Escrituras Editora, 2003. – (Coleção ensaios transversais)

ABDOUNUR, Oscar João. **Matemática e música: pensamento analógico na construção de significados**. São Paulo: Escrituras, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais**: ensino médio. Brasília: MEC/SEMTEC, 1999. 4v, disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf. Acesso em: 11/10/2021

BRASIL. **Lei nº 12.796, de 4 de abril de 2013**. Altera a Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, para dispor sobre a formação dos profissionais da educação e dar outras providências. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2011-2014/2013/Lei/L12796.htm. Acesso em: 26 jan. 2022.

BRASIL**. Lei nº 13. 278, de 2 de maio de 2001.** Altera o § 6º do Art. 26 da Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que fixa as diretrizes e bases da educação nacional, referente ao ensino da Arte**.** Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2015-2018/2016/Lei/L13278.htm. Acesso em: 16 dez. 2021.

BRASIL. **Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional**. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm. Acesso em: 19 nov. 2021.

BRASIL. **Lei nº 13.005, de 25 de junho de 2014. Plano Nacional de Educação**. Disponível em: https://www2.camara.leg.br/legin/fed/lei/2014/lei-13005-25-junho-2014-778970-publicacaooriginal-144468-pl.html. Acesso em: 25 fev. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 10 jan. 2022.

CAMARGOS, Chrisley Bruno Ribeiro. **Música e Matemática: A harmonia dos números revelada em uma estratégia de modelagem.** Ouro Preto, 2010. Tese (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais de Matemática**. Lisboa: Gradiva, 1998, páginas 35 a 45, trecho do capítulo 2:1 – A construção do campo racional.

DU SAUTOY, Marcus. **A música dos números primos:** a história de um problema não resolvido na matemática/ Marcus Du Sautoy; tradução, Diego Alfaro – Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2007. 264p.

GALLIANO, Guilherme. **O método científico: teoria e prática**. São Paulo: Mosaico, 1979.

GIL, Antônio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2007

HALLIDAY, RESNICK, WALKER. **Fundamentos de Física. Vol. 2**. 8 ed. Editora LTC, 2009.

KALINKE, Marco Aurélio. **Para não ser um professor do século passado.** Curitiba: Expoente, 1999.]

LAKATOS, Eva Maria; MARCONI, Marina de Andrade. **Metodologia científica.** 7. ed. São Paulo: Atlas, 2007.

MACHADO, Nílson José. **Matemática e língua materna: análise de uma impregnação mútua.** 4. ed. São Paulo: Cortez, 1998.

MACHADO, Nílson José. **Matemática e realidade**. 5. ed. São Paulo: Cortez, 2001.

MARCONDES, Danilo. **Iniciação à filosofia: dos pré-socráticas a Witgenstein**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2010.

MELO, Kleyber Junio Costa. **Um Estudo Sobre a Presença da Matemática na Música**. Disponível em: <https://www.locus.ufv.br/handle/123456789/27737>. Acesso em 20 dez. 2021.

MINAYO, Maria Cecília de Souza. **O desafio do conhecimento: pesquisa qualitativa em saúde**. 4. ed. São Paulo/Rio de Janeiro: HUCITEC/ ABRASCO, 1996.

NIVEN, Ivan Morton. **Números: racionais e irracionais.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

OLIVEIRA, A. P. de S. e SABBA, C. G. **Utilizando Frações da Música à Matemática**. VII CIBEM. Montevideo-Uruguay, 2013.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da matemática: uma análise da influência francesa.** Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação do. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica:** Matemática. Curitiba: SEED, 2008.

PEREIRA, Maria do C. **Matemática e Música De Pitágoras aos dias de hoje**. Dissertação (mestrado) Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro-RJ 2013.

RICHARDSON, et al. **Pesquisa social: métodos e técnicas**. 3. ed. rev. ampl. São Paulo: Atlas, 2007.

ROQUE, T. **História da Matemática**. 1ª Ed. Rio de Janeiro, RJ: Editora Zahar, 2012.

RODRIGUES, J. F. **A Matemática e a Música**. 1999. Disponível em: http://biblio.cscm-lx.pt/wpcontent/uploads/sites/14/2015/10/60471ea02a5cca1834ef3cf95dd6ed972.pdf. Acesso em: 26 out. 2021

SACRISTÁN, J. G. **O currículo: uma reflexão sobre a prática.** Trad. Ernani F. da F. Rosa, Porto Alegre: Artmed, 2000.

SANTOS-LUIZ, Carlos et al. **Matemática e música:** Sistematização de analogias entre conteúdos matemáticos e musicais. Revista Portuguesa de Educação, v.28, n.2, pp. 271-293, 2015.

SEKEFF, Maria de Lourdes. **Da música, seus usos e recursos.** 2 ed. São Paulo: Editora UNESP, 2007

TERRADAS, Rodrigo Donizete. **A importância da interdisciplinaridade na educação matemática**. Revista da Faculdade de Educação. Ano IX nº 16 (Jul/Dez. 2011).

TRUJILLO FERRARI, Alonso. **Metodologia da pesquisa científica.** São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1982.

VANDOREN, Charles. **Uma breve história do conhecimento.** Rio de Janeiro: Casa da Palavra, 2012.

ZABALA, Antoni; ARNAU, Laia. **Como aprender e ensinar competências**. Artmed: Porto Alegre, 2010.