

Julia de Assis Scarpin

Estudo das propriedades de buracos negros de Schwarzschild e de Kerr

São Carlos, SP

2022

Julia de Assis Scarpin

Estudo das propriedades de buracos negros de Schwarzschild e de Kerr

Trabalho realizado e apresentado no Departamento de Física da Universidade Federal de São Carlos para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Física.

Universidade Federal de São Carlos
Departamento de Física
Bacharelado em Engenharia Física

Orientador(a): Dr Raphael Santarelli

São Carlos, SP
2022

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente aos meus pais, Raquel e Roberto, que sempre estiveram ao meu lado até nos momentos mais difíceis e complicados e por nunca terem medido esforços para me proporcionar um ensino de qualidade. Ao meu irmão, Sky, por me aguentar em momentos de mau humor e ansiedade, principalmente de madrugada quando ninguém mais estava lá por mim. Aos meus avós, Marlene, Irineu, Jovelina e Orozimbo, pelo carinho e preocupação, também por me escutarem falar sobre física a todos os momentos mesmo sem entender nada. Ao meu gato Miguel, que sempre me animou em momentos de agústia, assistindo séries comigo enquanto tentava discretamente comer minha comida. À Victória, pelas tardes de descanso e de comidas veganas. Ao meu tio Israel, que não pôde ver a conclusão desta etapa acadêmica, mas que com certeza estaria orgulhoso dela.

Agradeço a meus amigos, Rafael, Felipe, André A. e Matheus, por fazerem parte dos momentos bons e estarem comigo nos ruins, me ajudando a chegar até aqui. Ao meu amigo Raian, por me ajudar com diversas disciplinas e ficando até tarde no IFSC comigo resolvendo listas. Ao André B., pelas conversas sobre física e trabalhos feitos juntos.

Também sou grata ao CNPq, pelo auxílio financeiro que me ajudou na realização desta pesquisa. Ao meu orientador, Raphael Santarelli, por responder minhas dúvidas com paciência e me guiar neste projeto, além de me ajudar no caminho até o mestrado escrevendo tantas cartas de recomendação que até perdi a conta. Ao professor Fernando Araújo Moreira, que me apoiou nesta jornada e sempre acreditou em mim. A todos os professores que tive durante a graduação, pelos conselhos e ensinamentos que levarei para a vida toda. À Fulvia, por responder meus milhares de e-mails todo semestre sobre um assunto diferente. À UFSCar como um todo, que possibilitou a abertura deste caminho.

Às pessoas que conheci ao longo desses anos de curso, que me incentivaram, aconselharam, e que certamente tiveram um impacto na minha formação acadêmica.

Resumo

Neste estudo é feito primeiramente uma introdução à Relatividade Geral, publicada em 1915 por Albert Einstein. No primeiro capítulo são mostrados os conceitos de geodésicas e símbolos de Christoffel, seguidos por uma breve apresentação de simetrias e leis de conservação, estas representadas pelos vetores de Killing. Após isso, são introduzidas as equações de Einstein e como estas são compostas por tensores de curvatura e o tensor de energia-momento. No capítulo seguinte são apresentadas propriedades de um buraco negro descrito pela métrica de Schwarzschild, as trajetórias seguidas pelas geodésicas nessa métrica e os respectivos diagramas conformes. Além disso, são explicitados os parâmetros da ISCO (Órbita Circular Estável mais Interna) e uma breve explicação das singularidades presentes na métrica. As propriedades de buracos negros com rotação são apresentadas no capítulo 4. Nele, primeiramente é feita uma introdução à métrica de Kerr, seguido da apresentação dos dois horizontes de eventos presentes nesta métrica e as singularidades que estes exibem. A compreensão destes horizontes pode ser feita a partir de três casos, que também são mostrados nessa seção. Após isso é apresentada a ergosfera e seu significado, e como partículas se comportam em seu limite. Neste capítulo também são mostrados os parâmetros da ISCO, mas agora para um buraco negro com rotação, e uma breve descrição da ideia do processo de Penrose, que serve para teoricamente extrair energia de um buraco negro com rotação a partir do decaimento de uma partícula.

Palavras-chaves: Relatividade Geral. Buracos Negros. Métrica de Schwarzschild. Métrica de Kerr. Tensores. Geodésicas.

Abstract

In this study, firstly General Relativity, defined by Albert Einstein in 1915, is introduced. In the first chapter, the concepts of geodesics and the Christoffel symbols are demonstrated, followed by a brief presentation of symmetries and conservation laws, those described by Killing vectors. After this, the Einstein equations are introduced, and how these are composed of curvature and the energy-momentum tensors. The following chapter presents the properties of a black hole described by the Schwarzschild metric, the trajectories followed by the geodesics in this metric, and the corresponding conformal diagrams. In addition, the ISCO (Innermost Stable Circular Orbit) parameters and a brief explanation of the metric singularities are given. The properties of rotating black holes are presented in Chapter 4. First, an introduction to the Kerr metric is made, followed by the exhibition of the two event horizons present in this metric and the singularities they possess. The understanding of such horizons can be acquired from three cases, which are also shown in this section. Next, the ergosphere and its definition are presented, as well as how particles behave at the ergosphere's limit. In this chapter the ISCO parameters are also evidenced, now, however, for a rotating black hole. There is also a brief description of the idea behind the Penrose process, which stands for the theoretical energy extraction from a rotating black hole from a particle's decay.

Keywords: General Relativity. Black Holes. Schwarzschild Metric. Kerr Metric. Tensors. Geodesics.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Raio em função do quadrado da velocidade radial de colapso de uma estrela para um observador no infinito. (Figura produzida pela autora)	17
Figura 2 – Raio em função do quadrado da velocidade radial de colapso para um observador na superfície da estrela. (Figura produzida pela autora)	18
Figura 3 – Diagrama de Kruskal mostrando que um observador caindo em um buraco negro pode escapar antes de chegar no horizonte $V = U$. (ZEE, 2013)	19
Figura 4 – Diagrama de Penrose do buraco negro de Schwarzschild. (ZEE, 2013)	20
Figura 5 – Potencial efetivo em função do raio para diferentes valores de momento angular. Plot feito a partir da equação 3.26 com $M = 1$. (Figura produzida pela autora)	23
Figura 6 – Gráfico de r/M em função da razão L/M dada pela equação 3.29, a fim de encontrar o valor do momento angular para o qual ocorre a ISCO. (Figura produzida pela autora)	26
Figura 7 – Ponte de Einstein-Rosen, sublinhando a diferença entre uma singularidade coordenada e uma singularidade física. (ZEE, 2013)	27
Figura 8 – Diagrama de Penrose de uma estrela colapsando em uma singularidade nua. (TOWNSEND, 1997)	28
Figura 9 – Diagrama conforme da solução de Kerr com $M^2 > a^2$. Assim como na solução com carga, existe um número infinito de cópias da região fora do buraco negro. (CARROLL, 2014)	32
Figura 10 – Diagrama conforme da solução de Kerr no caso extremo, quando $M^2 = a^2$. (TOWNSEND, 1997)	33
Figura 11 – Esquema das regiões r_{\pm} e $r_{S\pm}$. Como visto, cada par se iguala nos pólos norte e sul no eixo de rotação. (ZEE, 2013)	34
Figura 12 – Esquema de extração de energia de um buraco negro através do processo de Penrose. (TOWNSEND, 1997)	38

Lista de abreviaturas e siglas

BH	Buraco negro (<i>Black Hole</i>)
ISCO	Órbita circular estável mais interna (<i>Innermost Stable Circular Orbit</i>)
RG	Relatividade Geral

Lista de símbolos

Λ	Constante cosmológica
E	Energia
R	Escalar de curvatura
\mathcal{L}	Lagrangiana
M	Massa
L	Momento angular
$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$	Símbolo de Christoffel
τ	Tempo próprio
$G_{\mu\nu}$	Tensor de Einstein
$T_{\mu\nu}$	Tensor de energia-momento
$R_{\mu\nu}$	Tensor de Ricci
$R_{\sigma\mu\nu}^{\rho}$	Tensor de Riemann
ξ	Vetor de Killing

Sumário

1	INTRODUÇÃO	9
2	RELATIVIDADE GERAL	11
2.1	Geodésicas e símbolos de Christoffel	11
2.1.1	Simetrias e leis de conservação	12
2.2	Equações de Einstein	13
2.2.1	Tensores de curvatura	13
2.2.2	Tensor de Energia-Momento	14
3	BURACOS NEGROS DE SCHWARZSCHILD	16
3.1	Métrica de Schwarzschild	16
3.2	Diagramas de Penrose	20
3.3	Geodésicas	21
3.4	Órbitas circulares estáveis mais internas	23
3.5	Singularidades	26
3.5.1	Singularidades Nuas	27
4	BURACOS NEGROS COM ROTAÇÃO	29
4.1	Métrica de Kerr	29
4.2	Horizontes de eventos e Singularidades	30
4.3	Ergosfera	33
4.4	Órbitas circulares estáveis mais internas	35
4.5	Processo de Penrose	37
5	CONCLUSÕES	39
A	APÊNDICE	40
A.1	Coordenadas de Eddington-Finkelstein	40
	REFERÊNCIAS	41

1 Introdução

Na teoria Newtoniana, a gravidade é tratada como um campo análogo a um campo elétrico em muitas de suas propriedades. No entanto, duas ideias básicas sugerem que o campo gravitacional deve ser tratado de maneira diferente de outros campos. A primeira ideia é que a gravidade é universal, todos os corpos são afetados por ela. Essa é a base do princípio da equivalência (WALD, 1992), expressado na teoria Newtoniana pela afirmação que a força gravitacional em um corpo é proporcional à sua massa, fazendo com que a aceleração seja independente da massa. A segunda é um conjunto de ideias um pouco vagas chamado princípio de Mach. Este conjunto era uma hipótese que tentava explicar como objetos com rotação, como giroscópios e corpos celestes giratórios, mantinham um quadro de referência (BAEYER, 1993). Einstein aceitou a ideia principal do princípio de Mach e se baseou inicialmente nele, mas estava motivado a procurar uma nova teoria, na qual o princípio acabou por não ser usado em sua forma original. Nesta teoria, Einstein queria que efeitos da gravitação fossem expressados em termos da estrutura do espaço-tempo e essa estrutura afetada pela matéria presente no espaço-tempo. Criando, então, a teoria da relatividade.

Após a apresentação da Teoria da Relatividade Especial, Einstein desenvolveu a Relatividade Geral (RG) em 1915, com o objetivo de explicar a interação gravitacional entre corpos massivos (HARTLE, 2021). O princípio fundamental da Relatividade Geral é explicar tal interação através da deformação do espaço-tempo, de modo que objetos mais massivos produzem uma deformação maior. Deste modo, a RG afirma que o movimento de uma matéria distante afeta algumas propriedades inerciais locais, mas não as determina completamente. Em particular, a rotação sempre pode ser determinada localmente, mesmo na ausência de matéria distante.

A partir disso, tornou-se possível o estudo de buracos negros, previstos também pela teoria da relatividade geral. Com o passar dos anos, diversas métricas foram elaboradas para descrever o comportamento de um buraco negro. Dentre elas está a métrica de Schwarzschild, a primeira solução moderna das equações de Einstein, cujas soluções exatas são bastante difíceis de encontrar devido a alta não linearidade das equações. A métrica de Schwarzschild descreve o espaço-tempo ao redor de uma massa esférica e sem rotação. No entanto, ainda seria interessante encontrar soluções mais gerais e, depois de alguns anos, Roy Kerr encontrou a solução exata de um buraco negro em rotação. Esse descobrimento possibilitou soluções assimétricas e o *no-hair theorem* (HARTLE, 2021), que afirma que um buraco negro estacionário pode ser descrito completamente por três parâmetros: massa, momento angular e carga elétrica.

A motivação e objetivos deste trabalho são descrever brevemente a base matemática necessária para o estudo dos buracos negros de Schwarzschild e de Kerr a partir das

respectivas métricas, para um aprofundamento dos conhecimentos físicos e matemáticos dos elementos constituintes da Relatividade Geral e maior entendimento do comportamento desses tipos de buracos negros.

2 Relatividade Geral

Na Relatividade Geral, em contraste com a Relatividade Especial, o espaço-tempo não é mais necessariamente tratado como plano, como descrito pelo elemento de linha $ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ (HARTLE, 2021). Agora, o espaço-tempo contém uma curvatura, e $\eta_{\alpha\beta}$ é trocado por $g_{\alpha\beta}(x)$, onde a métrica $g_{\alpha\beta}(x)$ é uma matriz simétrica e dependente da posição, fazendo com que o elemento de linha tome a forma

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta . \quad (2.1)$$

Essa curvatura produz, por exemplo, o “dobramento” da luz, e outros elementos que conseguem descrever o espaço-tempo com mais realismo, como geodésicas no espaço curvo e as equações de Einstein, que relacionam a curvatura com a densidade de energia da matéria. Tais elementos serão tratados a seguir.

2.1 Geodésicas e símbolos de Christoffel

Com o desenvolvimento da RG, tornou-se possível a análise do trajeto de partículas testes e raios de luz através de espaços-tempos curvos. O trajeto mais curto e o qual uma partícula tende a seguir na ausência de forças externas é chamado de *geodésica*.

A ideia principal de uma geodésica é maximizar o tempo próprio entre dois pontos que formam uma linha de mundo do tipo tempo. O tempo próprio em uma linha de mundo entre dois pontos A e B para uma métrica qualquer $g_{\mu\nu}$ é dada pela equação

$$\tau_{AB} = \int_A^B d\tau = \int_A^B (-g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu)^{1/2} , \quad (2.2)$$

na qual foi usada a notação de soma de índices repetidos.

Parametrizando as quatro coordenadas através de um parâmetro λ , em que $\lambda = 0$ no ponto A e $\lambda = 1$ no ponto B , pode-se reescrever a equação do tempo próprio como

$$\tau_{AB} = \int_0^1 \left(-g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)^{1/2} d\lambda . \quad (2.3)$$

Tratando o integrando da equação acima como uma Lagrangiana \mathcal{L} , é observável que as linhas de mundo que extremizam o tempo próprio obedecem a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (dx^\mu/d\lambda)} \right) = 0 . \quad (2.4)$$

Uma vez que a Lagrangiana envolve necessariamente uma raiz quadrada de uma soma de termos, a derivação de sua derivada resultará em um fator da forma $1/\mathcal{L}$. No entanto, como $\mathcal{L} = d\tau/d\lambda \Rightarrow 1/\mathcal{L} = d\lambda/d\tau$, pode-se usar essa relação para alterar as

derivadas com respeito a λ para aquelas com respeito a τ . Em adição, o segundo termo da equação 2.4 implica que as equações resultantes terão segundas derivadas com relação a λ que podem ser trocadas. Desta forma, cada uma das quatro equações (uma para cada dimensão do espaço-tempo) que descrevem o movimento da partícula terá a forma

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \quad (2.5)$$

onde, com a junção de todas elas, chega-se na equação da geodésica.

Na equação acima, os coeficientes $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ são os símbolos de Christoffel. A forma geral desses símbolos é dada por:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\gamma\mu} (\partial_\beta g_{\gamma\alpha} + \partial_\alpha g_{\gamma\beta} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta}) \quad (2.6)$$

2.1.1 Simetrias e leis de conservação

Nos casos em que a métrica é simples, é fácil resolver a equação da geodésica. No entanto, caso a métrica seja mais complexa, torna-se viável a evidenciação de leis de conservação. De acordo com o primeiro teorema de Noether, toda simetria diferenciável da ação de um sistema tem uma lei de conservação correspondente (LEMOS, 2007). No caso da ação ser o tempo próprio, as simetrias ocorrem na métrica.

Uma maneira de encontrar essas simetrias é observando se a métrica é independente de alguma de suas coordenadas, de modo que uma transformação infinitesimal desta coordenada, $x^\mu \rightarrow x^\mu + \delta x^\mu$, não ocasiona em nenhuma alteração na métrica.

É adequada a definição de um campo vetorial, também chamado de vetor de Killing, para cada uma das simetrias tal que, em cada ponto, um vetor aponte ao longo da direção na qual a métrica não muda devido a essa simetria. Por exemplo, em uma métrica independente da coordenada x^1 , o vetor de Killing associado a essa simetria é da forma

$$\xi^\alpha = (0, 1, 0, 0) \quad (2.7)$$

Uma simetria implica que existe uma quantidade conservada ao longo da geodésica. Através da equação de Euler-Lagrange, da qual a equação da geodésica é derivada, é possível perceber este fato considerando ainda a métrica como independente da coordenada x^1 . Assim, a equação de Euler-Lagrange tem a forma

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (dx^1/d\lambda)} \right) = 0 \quad (2.8)$$

Esta equação implica que a quantidade dentro da derivada é constante ao longo da geodésica, de modo que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(dx^1/d\lambda)} = -g_{1\beta} \frac{1}{\mathcal{L}} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \quad (2.9a)$$

$$= -g_{1\beta} \frac{dx^\beta}{d\tau} \quad (2.9b)$$

$$= -g_{\alpha\beta} \xi^\alpha u^\beta \quad (2.9c)$$

$$= -\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{u} \ , \quad (2.9d)$$

onde ξ^α é o vetor de Killing e u^β a quadrivelocidade. Através das equações 2.8 e 2.9, percebe-se que $\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{u} = cte$ é uma quantidade conservada.

2.2 Equações de Einstein

As equações de campo de Einstein relacionam a geometria do espaço-tempo com a distribuição de matéria dentro dele, expressos através dos tensores de curvatura e do tensor de energia-momento.

2.2.1 Tensores de curvatura

A partir da métrica e de suas primeiras e segundas derivadas, pode-se obter o tensor de curvatura de Riemann

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \ . \quad (2.10)$$

A derivação da equação acima pode ser baseada no transporte paralelo ou na equação do desvio da geodésica. (CARROLL, 2014)

Por ser um tensor, é possível subir e descer os índices através da métrica e, tomando a forma puramente covariante, é possível simplificar o cálculo das componentes fazendo o uso das simetrias a seguir:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta} \ , \quad (2.11a)$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma} \ , \quad (2.11b)$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = +R_{\gamma\delta\alpha\beta} \ , \quad (2.11c)$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} = 0 \ . \quad (2.11d)$$

Essas simetrias mostram que as iniciais 256 componentes do tensor contém somente 20 termos independentes, que também são as 20 combinações das segundas derivadas da métrica que não desaparecem com uma transformação de coordenadas.

Após encontrar o valor da medida local da curvatura gravitacional, é praticável a contração de dois dos índices do tensor de Riemann para chegar no tensor de Ricci através da relação

$$R_{\alpha\beta} = R^{\gamma}_{\alpha\gamma\beta} \quad , \quad (2.12)$$

ou seja, quando expresso diretamente em termos dos símbolos de Christoffel, o tensor de curvatura de Ricci tem a forma

$$R_{\alpha\beta} = \partial_{\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} - \partial_{\beta}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\gamma} + \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\Gamma^{\delta}_{\gamma\delta} - \Gamma^{\gamma}_{\alpha\delta}\Gamma^{\delta}_{\beta\gamma} \quad . \quad (2.13)$$

A generalização relativística da expressão $\nabla^2\Phi = 0$, ou equação de Einstein no vácuo, é expressa pela equalização deste tensor à zero:

$$R_{\alpha\beta} = 0 \quad . \quad (2.14)$$

Fora do vácuo, as equações de campo são obtidas através da contração deste tensor, a fim de chegar no escalar de curvatura

$$R = R^{\gamma}_{\gamma} = g^{\gamma\delta}R_{\gamma\delta} \quad , \quad (2.15)$$

e sua combinação com o tensor que descreve a distribuição de matéria.

A forma final das equações de Einstein (CARROLL, 2014) é descrita pelo tensor de Ricci e o escalar de curvatura multiplicando a métrica do lado esquerdo, e uma constante que multiplica o tensor de energia-momento do lado direito, como descrito pela equação

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad , \quad (2.16)$$

onde

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} \quad . \quad (2.17)$$

2.2.2 Tensor de Energia-Momento

O tensor de energia-momento citado anteriormente tem a forma da matriz

$$T^{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|c} \text{densidade} & \text{fluxo de energia} \\ \text{de energia} & \\ \hline \text{densidade} & \text{tensor de estresse} \\ \text{de momento} & \end{array} \right) \quad , \quad (2.18)$$

na qual *densidade de energia* corresponde à componente T^{00} , *tensor de estresse* às componentes T^{ij} , para $i, j = 1, 2, 3$, *densidade de momento* à T^{i0} , e *fluxo de energia* à T^{0j} .

Para um fluido perfeito, o tensor de energia-momento pode ser escrito como

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + g^{\mu\nu} p \quad , \quad (2.19)$$

onde ρ representa a densidade de energia do fluido, p a pressão, e $u^{\mu,\nu}$ a quadrivelocidade. Este modelo que considera um fluido perfeito é usado para descrever a energia-momento dentro de estrelas de nêutrons, em fontes de radiação gravitacional, radiação cósmica de fundo e energia do vácuo, por exemplo.

Em sua publicação original, Einstein mostrou a equação como em 2.16, mas, posteriormente, incluiu um termo com a constante cosmológica para permitir um universo sem expansão ou contração, e as equações tomaram a forma

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad , \quad (2.20)$$

onde

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \quad . \quad (2.21)$$

Algum tempo depois, a equação original sem a constante foi resgatada por dois motivos: (i) qualquer solução de estado estacionário descrito pela equação era instável, e (ii) observações feitas por E. Hubble mostraram que o universo está se expandindo. No entanto, observações astronômicas mais recentes mostraram que tal expansão é acelerada e, para explicar esse fenômeno, é necessária uma constante com um valor positivo. Por isso, a constante cosmológica Λ foi reincorporada nas equações, sendo então equivalente à existência de energia de vácuo e a uma pressão negativa.

Em contraste com a gravidade Newtoniana ou eletromagnetismo, as equações de campo na Relatividade Geral não são lineares. Outras soluções, posteriormente descobertas, incluem a geometria de Schwarzschild e a ondas gravitacionais.

É possível linearizar essas equações através da aplicação da teoria da perturbação na métrica. No entanto, este método é efetivo somente quando o campo gravitacional é fraco, como no caso das ondas gravitacionais.

3 Buracos negros de Schwarzschild

Como citado no capítulo anterior, após a publicação da Teoria da Relatividade Geral por Einstein em 1915, foram descobertas algumas soluções para as equações de campo de Einstein. Dentre elas estão a de Schwarzschild, escrita alguns meses após 1915 e que descreve um campo gravitacional fora de uma massa esférica sem carga elétrica nem momento angular; a de Reissner–Nordström, descoberta entre 1916 e 1921, que corresponde a uma massa esférica sem rotação, mas carregada; a de Kerr, que descreve uma massa sem carga e com uma rotação simétrica em torno de um eixo; e a de Kerr–Newman, uma generalização da solução de Kerr e que inclui a presença de carga na massa com rotação.

3.1 Métrica de Schwarzschild

Embora seja impossível afirmar com total confiança que uma estrela de massa $M \gg 3M_\odot$ se tornará um buraco negro depois de entrar em colapso, é possível assumir estrelas idealizadas, mas fisicamente possíveis, que definitivamente irão colapsar em buracos negros. Considerando esta estrela como uma bola de “poeira” esféricamente simétrica (em outras palavras, um fluido de pressão zero), é possível afirmar, através do teorema de Birkhoff (TOWNSEND, 1997), que a métrica fora dessa estrela é a métrica de Schwarzschild. Em unidades naturais $c = G = 1$, esta é da forma

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (3.1)$$

onde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$, e M corresponde à massa.

A equação 3.1 vale na região fora da estrela e, por continuação da métrica, também na superfície dela. Se $r = R(t)$ na superfície, tem-se que

$$ds^2 = - \left[\left(1 - \frac{2M}{R}\right) - \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1} \dot{R}^2 \right] dt^2 + R^2 d\Omega^2, \quad \left(\dot{R} = \frac{d}{dt} R \right), \quad (3.2)$$

escrevendo $R(t) = R$ para simplificar a notação. Este R não é o escalar de curvatura mostrado anteriormente, ele agora corresponde ao raio em função do tempo.

Nesta região, pressão zero e a presença de simetria esférica implicam que um ponto na superfície segue uma geodésica radial do tipo tempo, de modo que $d\Omega^2 = 0$ e $ds^2 = -d\tau^2$ e fazendo com que a equação 3.2 possa ser escrita como

$$1 = \left[\left(1 - \frac{2M}{R}\right) - \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1} \dot{R}^2 \right] \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \quad (3.3)$$

Mas, como $\partial/\partial t$ é um vetor de Killing, existe a conservação de energia:

$$E = -g_{00} \frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{2M}{R}\right) \frac{dt}{d\tau} \quad (\text{energia/unidade de massa}) \quad (3.4)$$

onde E é constante na geodésica e $E < 1$ para partículas gravitacionalmente ligadas. Substituindo a equação 3.4 em 3.3, obtém-se

$$\dot{R}^2 = \frac{1}{E^2} \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^2 \left(\frac{2M}{R} - 1 + E^2\right) \quad (3.5)$$

De acordo com a equação acima, é possível plotar um gráfico da velocidade ao quadrado em função do raio R , em que este é da forma da figura 1.

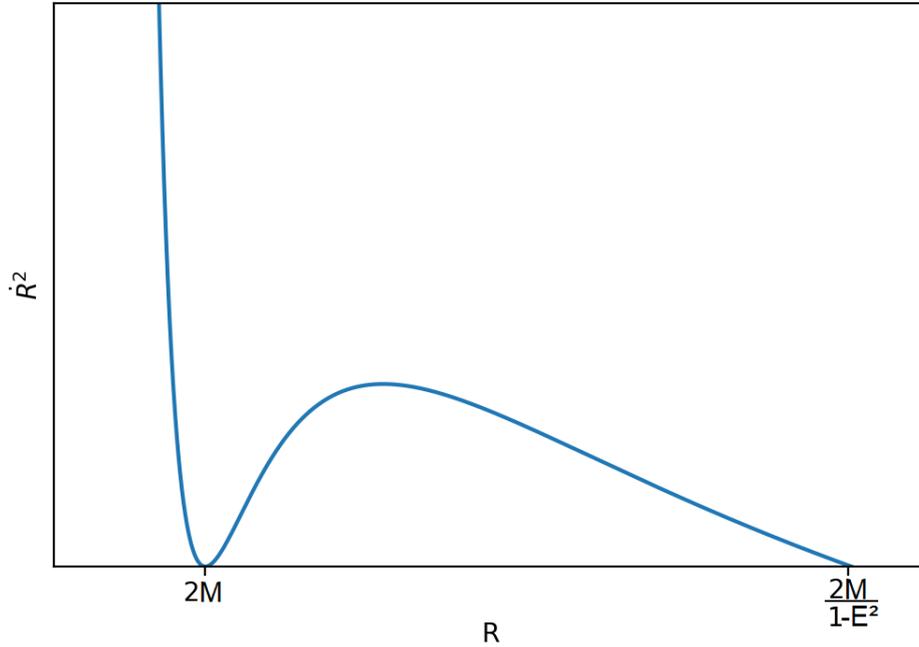


Figura 1 – Raio em função do quadrado da velocidade radial de colapso de uma estrela para um observador no infinito. (Figura produzida pela autora)

Nesta figura, é mostrada que a velocidade radial \dot{R} é zero nos pontos

$$R = \left\{2M; \frac{2M}{1 - E^2}\right\} .$$

Por isso, é considerado que o colapso começa com velocidade $\dot{R} = 0$ em $R = R_{max}$. O raio então diminui e se aproxima de $R = 2M$ assintoticamente na medida que $t \rightarrow \infty$, fazendo com que um observador “veja” a contração da estrela somente até $R = 2M$.

No entanto, no ponto de vista de um observador na superfície da estrela, o tempo relevante é o tempo próprio ao longo de uma geodésica radial, de modo que é usada a relação

$$\frac{d}{dt} = \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^{-1} \frac{d}{d\tau} = \frac{1}{E} \left(1 - \frac{2M}{R}\right) \frac{d}{d\tau} \quad (3.6)$$

para reescrever a equação 3.5 como

$$\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{2M}{R} - 1 + E^2\right) = (1 - E^2) \left(\frac{R_{max}}{R} - 1\right) \quad (3.7)$$

A representação gráfica da equação 3.7 está na figura 2.

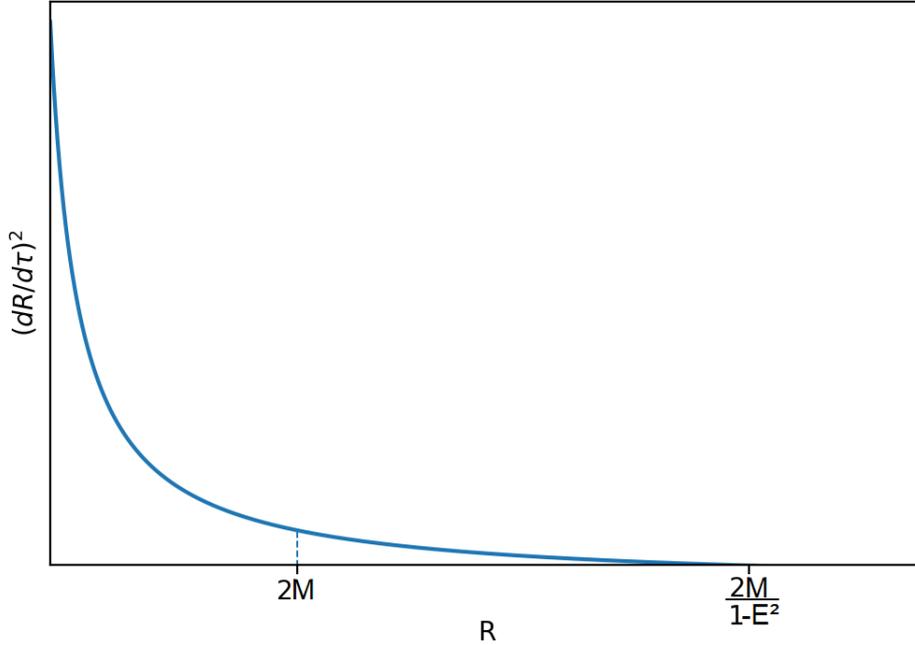


Figura 2 – Raio em função do quadrado da velocidade radial de colapso para um observador na superfície da estrela. (Figura produzida pela autora)

A partir da figura acima, é facilmente observável que a superfície da estrela vai de $R = R_{max}$ até $R = 2M$ em um tempo próprio finito, de modo que chega-se em $R = 0$ quando

$$\tau = \frac{\pi M}{(1 - E^2)^{3/2}}. \quad (3.8)$$

Como também pode ser notado na figura 2, nada de especial acontece para um observador na superfície da estrela quando $R = 2M$, indicando que a singularidade presente neste ponto pode ser somente uma singularidade de coordenadas e não uma singularidade real. Este problema pode ser resolvido com uma troca de coordenadas, por exemplo, escrevendo a métrica em coordenadas de Eddington-Finkelstein (ver Apêndice) ou Kruskal-Szekeres, sendo a última da forma

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} (-dV^2 + dU^2) + r^2 d\Omega^2. \quad (3.9)$$

Nesta equação, as coordenadas inicialmente apresentadas como t e r na métrica de Schwarzschild são trocadas por U e V , de acordo com as transformações

$$r > 2M = \begin{cases} U = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4M} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right) \\ V = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4M} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right) \end{cases} \quad (3.10a)$$

$$r < 2M = \begin{cases} U = \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{1/2} e^{r/4M} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right) \\ V = \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{1/2} e^{r/4M} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right) \end{cases} \quad (3.10b)$$

Manipulando as coordenadas, percebe-se que r segue a relação

$$\left(\frac{r}{2M} - 1\right) e^{r/2M} = U^2 - V^2. \quad (3.11)$$

A fim de entender melhor essa transformação de coordenadas e a natureza da geometria de Schwarzschild, é possível fazer um diagrama de coordenadas r e t constantes nos eixos U e V . Esse diagrama é chamado de diagrama de Kruskal e pode ser visto na figura 3 a seguir.

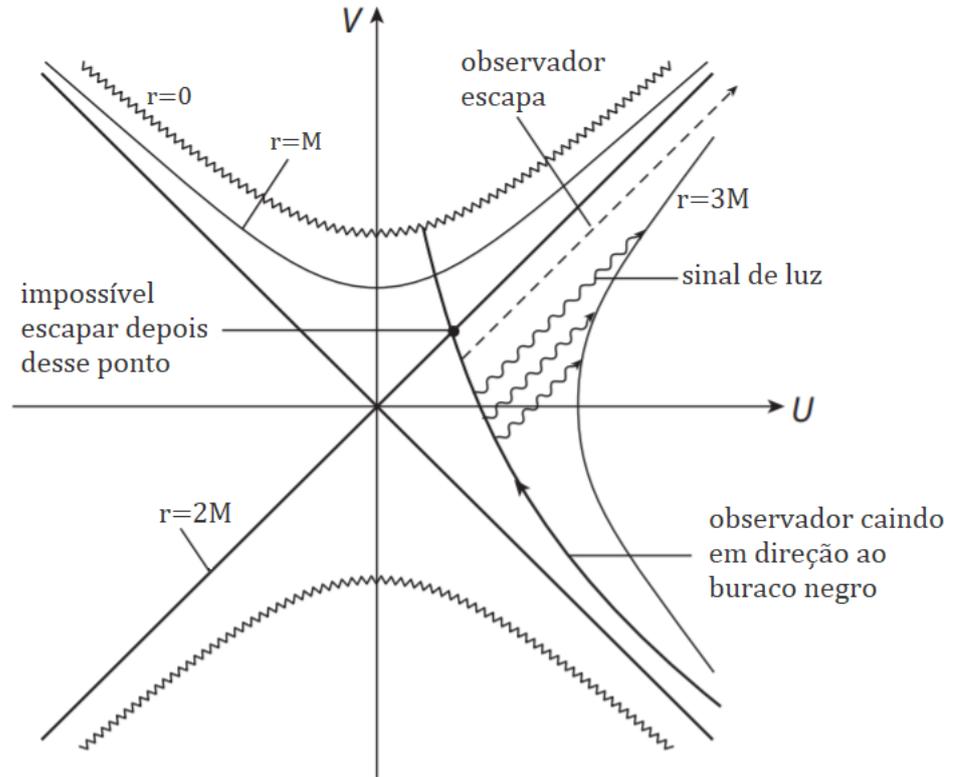


Figura 3 – Diagrama de Kruskal mostrando que um observador caindo em um buraco negro pode escapar antes de chegar no horizonte $V = U$. (ZEE, 2013)

A partir da figura acima e da equação 3.9, observa-se que não existe uma singularidade em $r = 2M$, novamente mostrando que a singularidade presente na métrica de Schwarzschild neste ponto é apenas uma singularidade de coordenadas. Além disso, é facilmente perceptível que, seguindo a linha do “observador caindo em direção ao buraco

negro”, é impossível escapar da queda depois de $r = 2M$, ou seja, depois do horizonte de eventos. Depois deste ponto, seria necessária uma velocidade superior à velocidade da luz para sair e, até o momento, nenhuma partícula conhecida consegue ultrapassar este limite. Ainda na imagem, as curvas $r = M$ e $r = 3M$ são curvas arbitrárias, que servem para exemplificar a representação do diagrama para um r constante antes e depois do horizonte e como um sinal de luz seguiria essas curvas; tais sinais de luz fazem um ângulo de 45° com os eixos U e V .

3.2 Diagramas de Penrose

Uma ferramenta que conseguisse deixar mais clara a estrutura causal completa de buracos negros e os espaços-tempos em volta deles (ou seja, que conseguisse explicitar qual a influência dos eventos ocorrendo dentro dos buracos negros sobre eventos ocorrendo nos espaços-tempos fora deles e vice-versa) seria bastante útil para estudos nesta área, e, com esse pensamento, Roger Penrose criou os diagramas de Penrose, que trazem uma Variedade completa em uma região compacta tal que todo o espaço-tempo pode ser descrito pelo diagrama.

Para a métrica de Schwarzschild, o diagrama é o da figura 4. Nela, as linhas \mathcal{I}^+ e \mathcal{I}^- representam o futuro e o passado nulo, respectivamente. Os pontos i^+ e i^- são os futuros e passados do tipo tempo, também respectivamente. Os infinitos do tipo espaço são denotados por i^0 . Analogamente à figura 3, a região II representa o espaço-tempo dentro do buraco negro, de modo que linha que divide as regiões I e II é o horizonte de eventos. Assim, quando um observador vai para a região II, ele não consegue voltar para I, nem para a região IV. IV representa um universo paralelo e III um buraco branco, ambos somente idealizados teoricamente.

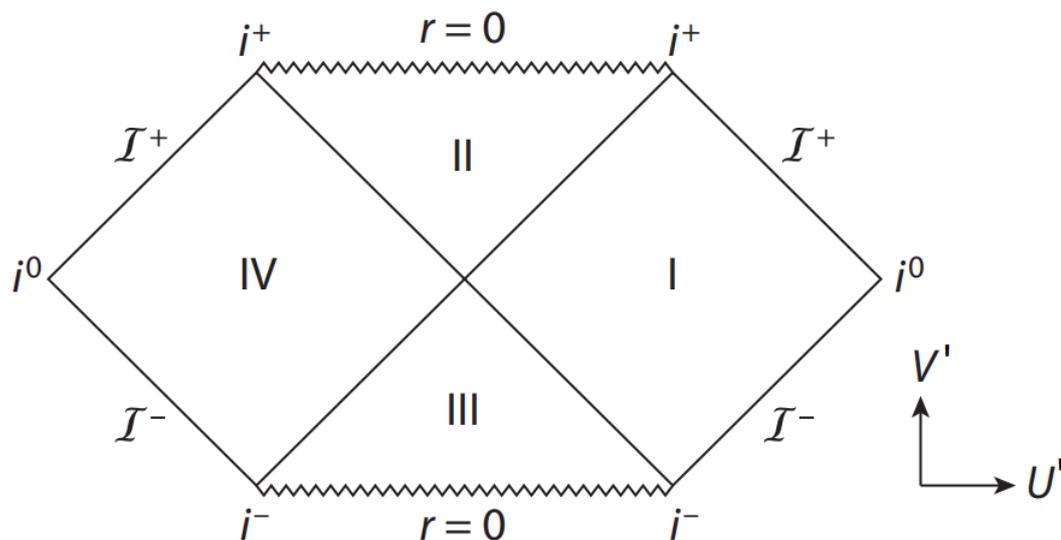


Figura 4 – Diagrama de Penrose do buraco negro de Schwarzschild. (ZEE, 2013)

Como representações usuais do espaço-tempo, o caminho da luz é representado por uma linha com um ângulo de 45° com os eixos U' e V' . Esses eixos são adaptações da geometria de Schwarzschild em coordenadas de Kruskal-Szekeres, de modo que U e V são substituídos por u e v através da relação

$$U = \frac{v - u}{2} \quad , \quad V = \frac{v + u}{2} \quad . \quad (3.12)$$

Os eixos formados por u e v são somente U e V rotacionados em 45° , para que os raios de luz se movam em curvas de u e v constantes. Novas coordenadas U' e V' são introduzidas pela relação

$$u' \equiv \tan^{-1}(u) \equiv V' - U' \quad , \quad v' \equiv \tan^{-1}(v) \equiv V' + U' \quad (3.13)$$

Raios de luz se movem em curvas de u' e v' constantes, de maneira que os intervalos infinitos de u e v são mapeados no intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ de u' e v' e todo o espaço-tempo “cabe” dentro da representação com os novos eixos. O horizonte $V = U$ mapeia a mesma linha em 45° quando no plano $U'V'$.

3.3 Geodésicas

As equações de geodésicas em um espaço-tempo específico podem ser derivadas da Lagrangiana a partir da equação

$$2\mathcal{L} = g_{ij} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} \quad . \quad (3.14)$$

Para o espaço-tempo de Schwarzschild, a Lagrangiana é da forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\theta}^2 - r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right] \quad , \quad (3.15)$$

onde o ponto em cima das coordenadas representa uma derivada em relação à τ . A partir da reescala do parâmetro τ , é possível definir $2\mathcal{L}$ como igual à $+1$ para geodésicas do tipo tempo e \mathcal{L} igual à 0 para as do tipo nulo (trajetória da luz) (CHANDRASEKHAR, 1983). Geodésicas do tipo espaço não serão discutidas, visto que uma partícula precisaria viajar a uma velocidade superior a da luz para seguir uma trajetória do tipo espaço.

Para uma trajetória do tipo tempo, as equações de movimento de uma partícula têm a forma

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) = E^2 \quad (3.16)$$

e

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{L}{r^2} \quad , \quad (3.17)$$

onde E denota a energia total no infinito por unidade de massa de repouso da partícula e L o momento angular por unidade de massa de repouso da partícula. Quando o momento angular é 0, a geodésica é radial. Neste caso, uma partícula saindo de um raio r_i (que se relaciona com a massa e energia através da equação $r_i = \frac{2M}{1-E^2}$) cruza o horizonte de eventos e chega na singularidade em tempos próprios finitos. Estes são

$$\tau_H = \left(\frac{r_i^3}{8M} \right)^{1/2} (\eta_H + \sin \eta_H) \quad \text{e} \quad \tau_0 = \left(\frac{r_i^3}{8M} \right)^{1/2} \pi , \quad (3.18)$$

onde $\eta_H = 2 \sin^{-1} E$. O tempo t obtido por um observador de fora é dado a partir da equação

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{1 - \frac{2M}{r}} \quad (3.19)$$

e também pode ser resolvido em termos de η (CHANDRASEKHAR, 1983). Quando $\eta \rightarrow \eta_H$, $t \rightarrow \infty$, de modo que um observador localizado no “infinito” veria uma partícula em uma geodésica radial do tipo tempo levar um tempo infinito para cruzar o horizonte, enquanto que no referencial da partícula, o tempo levado é equivalente à τ_H da equação 3.18.

Para trajetórias do tipo luz, as equações de movimento são

$$\left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) = E^2 , \quad (3.20)$$

$$\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\tau} = E , \quad (3.21)$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{L}{r^2} . \quad (3.22)$$

Novamente considerando uma geodésica radial, onde $L = 0$, relacionando as equações 3.20 e 3.21 e integrando a equação resultante, obtém-se

$$t = \pm r_* + \text{constante}_\pm , \quad (3.23)$$

onde $r_* = r + 2M \ln \left(\frac{r}{2M} - 1 \right)$, e

$$r = \pm E\tau + \text{constante}_\pm . \quad (3.24)$$

As equações 3.23 e 3.24 mostram novamente que, enquanto uma partícula seguindo uma geodésica radial cruza o horizonte de eventos do buraco negro em seu tempo próprio τ sem ao menos perceber alguma diferença no espaço, é necessário um tempo t infinito para chegar em tal horizonte, significando que um observador externo nunca veria a partícula chegar no horizonte de eventos.

3.4 Órbitas circulares estáveis mais internas

Ao analisar a trajetória de uma partícula de teste massiva e sem rotação orbitando um buraco negro central, pode-se obter um raio mínimo no qual uma partícula consegue sustentar uma órbita circular estável. Este raio é chamado de Órbita Circular Estável mais Interna (ISCO, em inglês), sendo bastante importante pois ele delimita o limite no qual, após o atravessamento, uma pequena perturbação na órbita já causaria um rápido espiral em direção ao centro do buraco negro. (HARTLE, 2021)

Em problemas de uma partícula em um campo central é conveniente expressar as equações de movimento da coordenada radial em termos da energia potencial efetiva. No espaço-tempo de Schwarzschild, essa equação é dada por

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) = E^2 - U_{Sch}^2 . \quad (3.25)$$

A partir a equação acima, obtém-se o potencial efetivo

$$U_{Sch}(r) = \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right)} . \quad (3.26)$$

Aqui, o momento L é o parâmetro que define a forma da curva $U_{Sch}(r)$, como visto na figura 5.

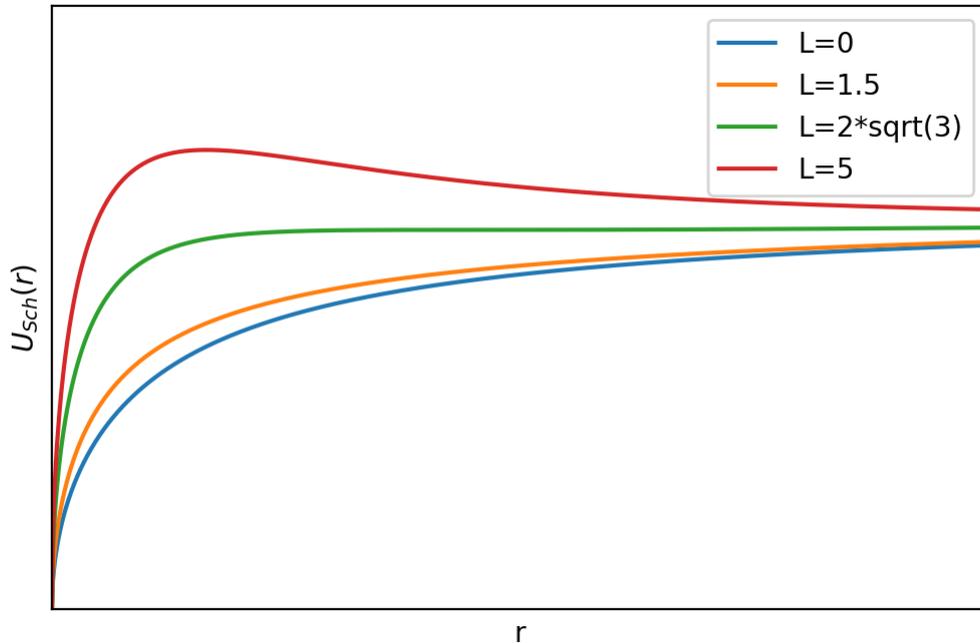


Figura 5 – Potencial efetivo em função do raio para diferentes valores de momento angular. Plot feito a partir da equação 3.26 com $M = 1$. (Figura produzida pela autora)

Quando $L > 2\sqrt{3}M$, como na curva vermelha ($L=5$) do gráfico acima, o potencial efetivo possui dois extremos: máximo e mínimo, em raios nos quais movimentos circulares

instáveis e estáveis são respectivamente possíveis. Quando $L = 2\sqrt{3}M$ (curva verde), os dois extremos do potencial se fundem em um só ponto de inflexão, onde este valor crítico de L define os parâmetros da última órbita estável, também chamada de órbita circular estável mais interna. No último caso, quando $L < 2\sqrt{3}M$, representado pelas curvas azul ($L=0$) e laranja ($L=1.5$) da figura, o potencial efetivo não possui um extremo, para esses valores de momento angular nenhuma forma de movimento estável é possível e uma partícula de teste inevitavelmente cairá no buraco negro, independente dos valores de E que ela possa ter.

Para a obtenção de um movimento circular, é necessário satisfazer duas condições: (i) a velocidade radial ser igual a zero, que corresponde à igualdade $E = U_{Sch}$, e (ii) a aceleração da coordenada radial deve estar ausente. Diferenciando a equação 3.25 em relação a τ e dividindo por \dot{r} , obtém-se

$$2\ddot{r} = \frac{d}{dr}(E^2 - U_{Sch}^2) . \quad (3.27)$$

Para um determinado E , tem-se que

$$\frac{dU_{Sch}^2}{dr} = 0, \quad U_{Sch} > 0. \quad (3.28)$$

Resolvendo a equação 3.28 e aplicando a igualdade $E = U_{Sch}$, obtém-se as expressões para o raio da órbita circular r e para a energia E da partícula em função de L :

$$r = \frac{L^2}{2M} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{12M^2}{L^2}} \right) \quad (3.29)$$

$$E = L \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \sqrt{\frac{1}{Mr}}. \quad (3.30)$$

Na equação 3.29, o sinal positivo (r_+) corresponde às órbitas circulares estáveis no mínimo do potencial efetivo, e o sinal negativo (r_-) às órbitas circulares instáveis no máximo. Nesta mesma equação, é facilmente perceptível que o raio se torna complexo para $L < 2\sqrt{3}M$ e não existe uma órbita circular. Matematicamente, isso significa que o potencial para esses valores não possui um extremo. No caso em que tal extremo ainda pode ser achado, ao encontrar-se o último valor de L , encontra-se também a última órbita estável (ISCO).

Como mencionado no início da seção, a ISCO acontece quando os pontos de máximo e mínimo são os mesmos. Isso ocorre quando a condição (iii) é satisfeita, essa condição implica que o ponto de inflexão do potencial efetivo satisfaz a relação

$$\frac{d^2U_{Sch}^2}{dr^2} = 0. \quad (3.31)$$

Essa condição também pode ser encontrada através da equação 3.29, ao plotar um gráfico da razão r/M em função de L/M , no qual o valor do L_{ISCO} será encontrado quando as curvas de r_+ e r_- se encontrarem, como visto na figura 6.

Da figura 6, é evidente que os pontos de máximo e mínimo do potencial se juntam quando $L/M = 2\sqrt{3}$, no qual o raio corresponde à $6M$. Aplicando esses valores na equação 3.30, obtém-se por fim

$$r_{ISCO} = 6M, \quad L_{ISCO} = 2\sqrt{3}M, \quad E_{ISCO} = \sqrt{\frac{8}{9}}, \quad (3.32)$$

que são os parâmetros da ISCO para o espaço-tempo de Schwarzschild.

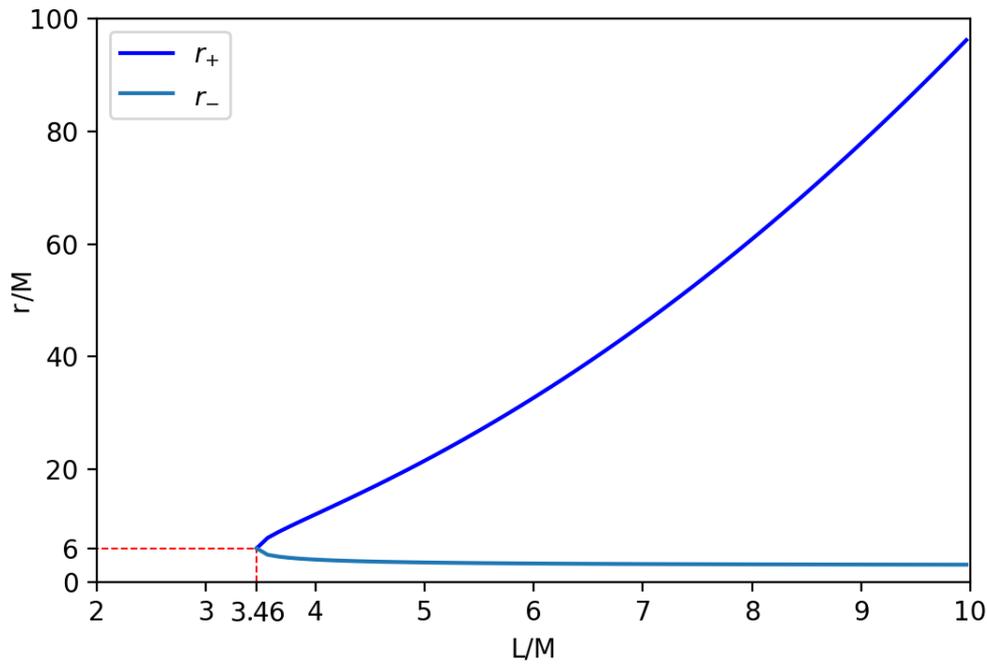


Figura 6 – Gráfico de r/M em função da razão L/M dada pela equação 3.29, a fim de encontrar o valor do momento angular para o qual ocorre a ISCO. (Figura produzida pela autora)

3.5 Singularidades

Como já citado na seção 3.1, a singularidade do horizonte de eventos da métrica de Schwarzschild é uma singularidade de coordenadas, e não uma singularidade real, quando a própria geometria se torna singular. Isso significa que a troca de coordenadas faz com que ela desapareça, como acontece com as coordenadas de Kruskal-Szekeres na métrica de Schwarzschild.

Para melhor visualização desta diferença, é possível considerar uma superfície descrita por

$$ds^2 = \frac{1}{1 - \frac{r_S}{r}} dr^2 + r^2 d\phi^2, \quad (3.33)$$

onde r_S é uma constante positiva. Essa superfície pode ser incorporada a E^3 (espaço Euclidiano tridimensional) usando coordenadas cilíndricas normais $ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2$ e definindo $z^2 = 4r_S(r - r_S)$. A figura 7 mostra uma representação esquemática desta superfície.

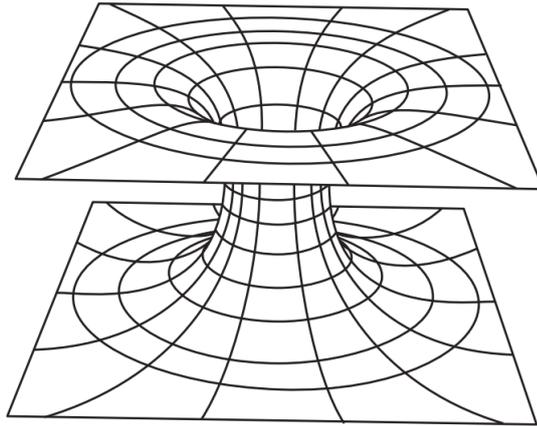


Figura 7 – Ponte de Einstein-Rosen, sublinhando a diferença entre uma singularidade coordenada e uma singularidade física. (ZEE, 2013)

Nesta figura, conhecida como ponte de Einstein-Rosen (ou também “buraco de minhoca”), as linhas circulares representam $r = \text{constantes}$, de modo que uma delas pode ser $r = r_S$. Com isso, é perceptível que a superfície é perfeitamente lisa em $r = r_S$. Um observador poderia perfeitamente viajar do plano de cima para o de baixo sem notar qualquer singularidade, novamente afirmando que a singularidade $r = r_S$ é uma singularidade de coordenadas. A analogia desta superfície com um buraco negro de Schwarzschild ocorre quando o horizonte $r = 2M$ é comparado com r_S .

3.5.1 Singularidades Nusas

Na métrica de Schwarzschild, a solução $M < 0$ leva a uma singularidade nua, ou seja, neste modelo não existe um horizonte de eventos. O diagrama de Penrose desta solução é o da figura 8.

Em tempos posteriores, o espaço-tempo descrito na figura abaixo é o de Schwarzschild com $M < 0$, mas, antes disso, é mostrado um espaço-tempo não singular. Sob essas circunstâncias, pode ser mostrado que $M \geq 0$ para uma matéria fisicamente razoável, de modo que a possibilidade da formação de uma singularidade nua em um colapso esfericamente simétrico não pode ocorrer. Ou seja, buracos negros de Schwarzschild não podem ter singularidades nuas.

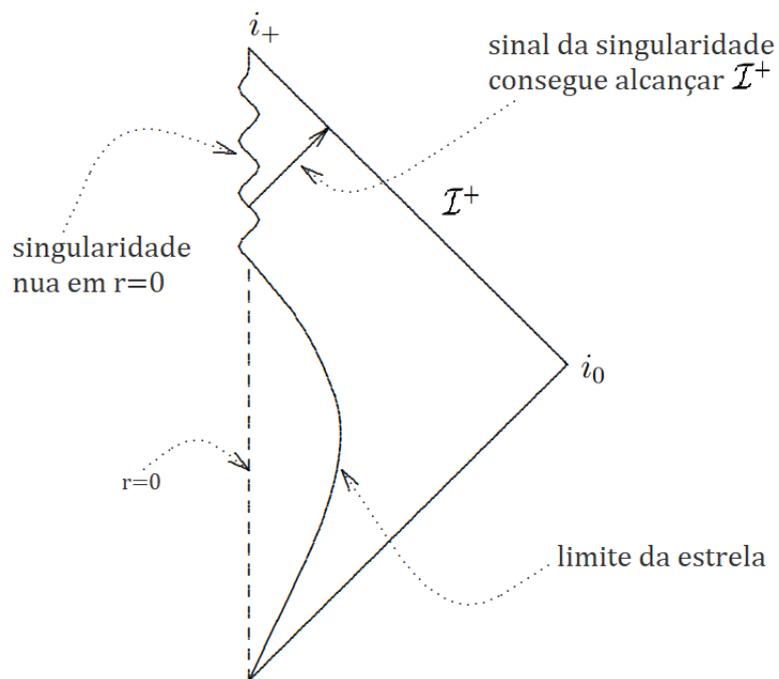


Figura 8 – Diagrama de Penrose de uma estrela colapsando em uma singularidade nua. (TOWNSEND, 1997)

4 Buracos negros com rotação

Sabemos que objetos astronômicos fisicamente razoáveis, devido ao seu processo de formação, devem apresentar alguma rotação. Para estrelas normais, a quantidade de rotação é desprezível, visto que esta é medida pela velocidade rotacional v na superfície dividida pela velocidade da luz no vácuo c . Nestes casos, é apropriado usar a métrica de Schwarzschild para descrever o espaço-tempo fora das estrelas. No entanto, em torno de um buraco negro, a queda de detritos faz com que tal buraco negro gire, tornando necessária uma métrica que descrevesse esse comportamento giratório. Em 1963, Roy Kerr descobriu uma métrica que era a generalização da métrica de Schwarzschild para objetos com rotação, esta ficou conhecida como métrica de Kerr.

4.1 Métrica de Kerr

A métrica de Kerr é importante astrofisicamente pois apresenta uma boa aproximação da métrica de uma estrela em rotação em grandes distâncias, onde todos os momentos multipolares (exceto $l = 0$ e $l = 1$) não são importantes. Até o momento, a única solução conhecida das equações de Einstein para a qual Kerr é exata para $r > R$ é a própria solução de Kerr (em que $T_{\mu\nu} = 0$), significando que não foi obtida nenhuma solução conhecida sem vácuo que poderia representar o interior de uma estrela.

Em sua publicação original, Kerr apresentou a métrica na forma

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & - \left(1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right) (dv - a \sin^2 \theta d\tilde{\phi})^2 \\
 & + 2(dv - a \sin^2 \theta d\tilde{\phi})(dr - a \sin^2 \theta d\tilde{\phi}) \\
 & + (r^2 + a^2 \cos^2 \theta)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\tilde{\phi}^2) .
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Quando $a = 0$, a métrica acima se reduz à métrica de Schwarzschild em coordenadas de Eddington-Finkelstein “entrando” (vide Apêndice). A singularidade em $r = 0$ de Schwarzschild é substituída por $r^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0$, ou seja, a singularidade de Kerr ocorre quando $r = 0$ e $\theta = \pi/2$. Partindo somente dessas coordenadas, não é muito evidente qual é a geometria da singularidade, de modo que é possível interpretar as coordenadas r e θ como coordenadas esféricas usuais. Em vista disto, usando a métrica na forma Kerr-Schild (TEUKOLSKY, 2015), obtém-se que a singularidade $r = 0$ corresponde ao anel

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad , \quad z = 0 \quad , \tag{4.2}$$

onde as coordenadas cartesianas se relacionam com as do espaço Euclidiano tridimensional pelas equações:

$$\begin{aligned}
x &= (r^2 + a^2)^{1/2} \sin \theta \cos \phi \\
y &= (r^2 + a^2)^{1/2} \sin \theta \sin \phi \\
z &= r \cos \theta .
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Um sistema de coordenadas bastante conveniente de escrever a métrica de Kerr foi posteriormente introduzido por Boyer e Lindquist (1967). Neste sistema, ela toma a forma

$$\begin{aligned}
ds^2 &= - \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma} \right) dt^2 - \frac{4Mar \sin^2 \theta}{\Sigma} d\phi dt + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 \\
&+ \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) \sin^2 \theta d\phi^2 ,
\end{aligned} \tag{4.4}$$

onde

$$a \equiv J/M , \quad \Sigma \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta , \quad \Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2 . \tag{4.5}$$

Fazendo $r \rightarrow \infty$, é facilmente perceptível que a métrica é assintoticamente plana, M é identificado como a massa e $J = aM$ como o momento angular. Novamente quando $a = 0$, retorna-se à Schwarzschild em coordenadas usuais.

É possível obter a generalização da solução de Kerr com carga total Q , chamada de métrica de Kerr-Newman. Isso é feito substituindo Δ por $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2$.

4.2 Horizontes de eventos e Singularidades

Assim como em Schwarzschild, a métrica de Kerr também possui horizontes de eventos. Eles são obtidos a partir da percepção que existe uma singularidade quando $\Delta = 0$. Essa é uma singularidade de coordenada, uma vez que a forma de Eddington-Finkelstein “entrando” é regular nesta região. Este comportamento remete à Schwarzschild quando $\Delta = 0$ em $r = 2M$, no horizonte de eventos. Na verdade, é facilmente verificável que o vetor normal às superfícies $r = \text{constante}$ satisfaz a relação

$$n_\alpha n_\beta g^{\alpha\beta} = g^{rr} = \frac{\Delta}{\Sigma} . \tag{4.6}$$

Assim, o vetor normal é nulo quando $\Delta = 0$, e as superfícies $\Delta = 0$ são então hipersuperfícies nulas. A análise das geodésicas nulas de Kerr perto dessas superfícies mostra que elas são de fato horizontes, de modo que as raízes de $\Delta = 0$ são

$$r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - a^2} , \tag{4.7}$$

que representam os horizontes externo e interno, respectivamente.

Para entender completamente esses horizontes, é preciso considerar três casos, sendo estes:

- (i) $\mathbf{M}^2 < \mathbf{a}^2$: r_{\pm} são complexos, de modo que Δ não possui zeros reais e não existem singularidades de coordenadas neste ponto. A métrica ainda possui uma singularidade de curvatura em $\Sigma = 0$ quando

$$r = 0 \quad , \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad . \quad (4.8)$$

- (ii) $\mathbf{M}^2 > \mathbf{a}^2$: a singularidade ainda tem a forma $x^2 + y^2 = a^2$, como citado na seção anterior, mas agora a métrica também é singular nos horizontes r_+ e r_- . Aqui, as hipersuperfícies $r = r_{\pm}$ são horizontes de Killing cujos vetores de Killing são

$$\xi_{\pm} = k + \left(\frac{a}{r_{\pm}^2 + a^2} \right) M \quad , \quad (4.9)$$

com gravidades de superfícies

$$k_{\pm} = \frac{r_{\pm} - r_{\mp}}{2(r_{\pm}^2 + a^2)} \quad . \quad (4.10)$$

A partir do diagrama conforme da métrica neste caso, é possível concluir que, ao entrar no anel da singularidade, um observador sai para outro espaço-tempo assintoticamente plano, mas este descrito pela métrica de Kerr com $r < 0$. Como resultado, Δ nunca se anula e não há horizontes, como na figura 9.

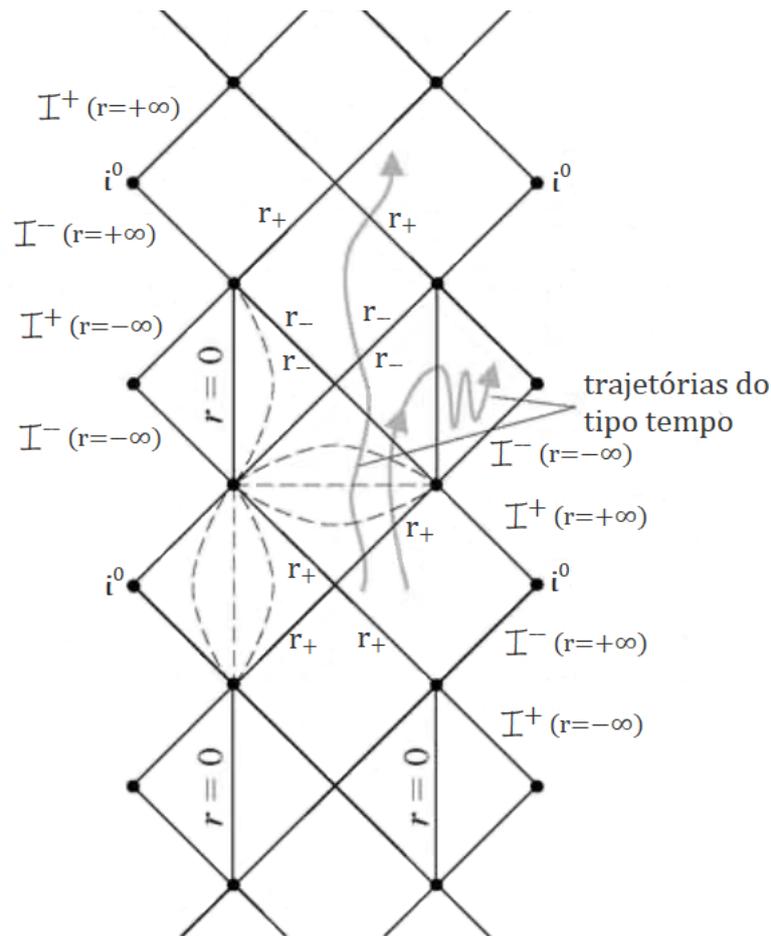


Figura 9 – Diagrama conforme da solução de Kerr com $M^2 > a^2$. Assim como na solução com carga, existe um número infinito de cópias da região fora do buraco negro. (CARROLL, 2014)

Como a métrica de Kerr não é esfericamente simétrica, o diagrama não é tão fiel como outros; um único ponto no diagrama representa valores fixos de t e r , e terá geometrias diferentes para diferentes valores de θ . Além disso, a região próxima à singularidade do anel possui curvas fechadas do tipo tempo (CTCs). Caso essas curvas fossem reais, seria possível se encontrar no passado, com tudo que isso implica, mostrando a improbabilidade da realidade deste caso.

- (iii) $M^2 = a^2$: neste caso, o horizonte de Killing é degenerado ($\xi = 0$) em $r = M$ e o diagrama conforme é da forma da figura 10.

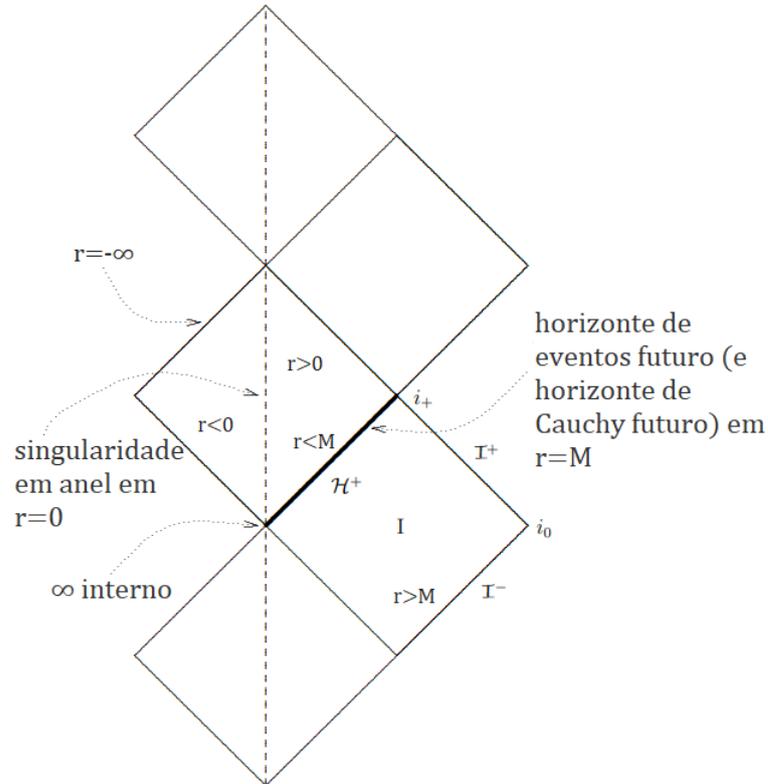


Figura 10 – Diagrama conforme da solução de Kerr no caso extremo, quando $M^2 = a^2$. (TOWNSEND, 1997)

De acordo com o diagrama, somente é possível existir um vetor de Killing ξ para o qual $\xi \cdot \xi \rightarrow -1$ quando $r \rightarrow \infty$.

4.3 Ergosfera

É possível estabelecer duas superfícies em um buraco negro para as quais o *redshift* é infinito para um observador estacionário, ou seja, quando a componente g_{tt} da métrica se anula. Para a métrica de Kerr, a componente relativa ao tempo é a seguinte:

$$g_{tt} = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} = -\left(1 - \frac{2Mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right). \quad (4.11)$$

Resolvendo para o raio, a superfície em que $g_{tt} = 0$ é dada por

$$r_{S\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (4.12)$$

Essas superfícies, juntamente com os horizontes de eventos interno e externo, podem ser vistos graficamente na figura 11 a seguir.

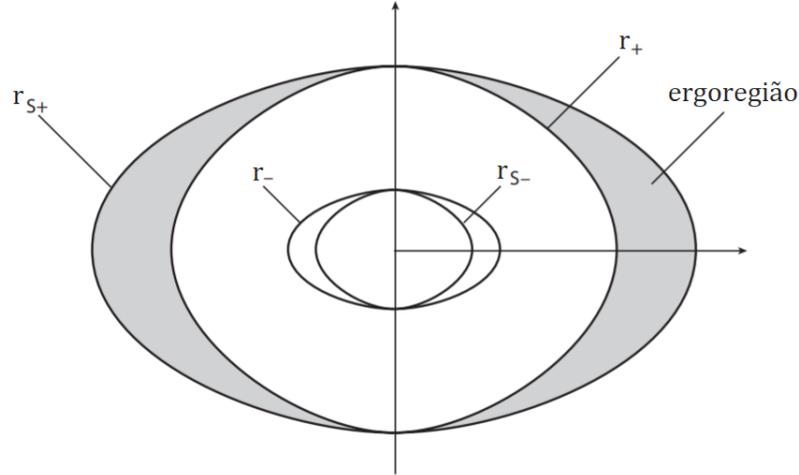


Figura 11 – Esquema das regiões r_{\pm} e $r_{S\pm}$. Como visto, cada par se iguala nos pólos norte e sul no eixo de rotação. (ZEE, 2013)

Embora seja obtido teoreticamente, r_{S-} não tem muito significado físico, de forma que pode ser ignorado. A parte em cinza na figura é denominada *ergosfera*, que compreende a região do buraco negro fora do horizonte r_+ e dentro do limite r_{S+} . Dentro da ergosfera, é inviável um observador estacionário cuja quadrivelocidade do tipo tempo é da forma

$$u_{obs}^{\alpha} = (u_{obs}^t, 0, 0, 0) . \quad (4.13)$$

Quando $a = 0$, $r_{S+} = r_+$ e obtém-se os resultados da solução de Schwarzschild; lembrando que em Schwarzschild não é possível um observador estacionário dentro do horizonte $r = 2M$, onde $g_{tt} > 0$ e a coordenada t se torna do tipo espaço. A presença de rotação permite a extensão dessa região proibida para observadores estacionários para além do horizonte externo.

Embora nenhuma quantidade de energia de foguete permitiria que um observador permanecesse em r , θ e ϕ fixos dentro da ergosfera, é factível manter ao menos r e θ fixos ao girar na mesma direção que o buraco negro. Este observador teria uma quadrivelocidade da forma

$$u_{obs}^{\alpha} = u_{obs}^t (1, 0, 0, \Omega_{obs}) . \quad (4.14)$$

Agora, suponha um fóton emitido na direção ϕ . No instante da emissão, as componentes do momento na direção r e θ são nulas e, portanto, a condição para a trajetória ser nula é

$$ds^2 = 0 = g_{tt}dt^2 + g_{t\phi}(dtd\phi + d\phi dt) + g_{\phi\phi}d\phi^2 . \quad (4.15)$$

Resolvendo a equação acima para ϕ e pegando o limite $g_{tt} = 0$, obtém-se que as duas soluções são

$$\frac{d\phi}{dt} = 0 \quad , \quad \frac{d\phi}{dt} = \frac{a}{2M^2 + a^2} \quad . \quad (4.16)$$

A solução igual à zero significa que o fóton direcionado contra a rotação do buraco negro não se move de maneira alguma neste sistema de coordenadas. A solução diferente de zero tem o mesmo sinal de a ; é possível interpretar isso como o fóton se movendo ao redor do buraco na mesma direção de sua rotação. Ao mostrar que a velocidade instantânea é zero, observa-se um exemplo do fenômeno chamado “arrastamento de referenciais inerciais” (HARTLE, 2021). Partículas massivas devem se mover mais lentamente do que os fótons e são necessariamente arrastadas junto com a rotação do buraco, uma vez que estão dentro da superfície estacionária limite; este arrastamento continua à medida que o observador se aproxima do horizonte de eventos r_+ . Definindo a velocidade angular do próprio horizonte, Ω_H , como a velocidade angular mínima de uma partícula no horizonte, obtém-se através da equação 4.16 que

$$\Omega_H = \left(\frac{d\phi}{dt} \right)_- (r_+) = \frac{a}{r_+^2 + a^2} \quad , \quad (4.17)$$

que é o equivalente à $\Omega_{obs,min}$ de um observador.

4.4 Órbitas circulares estáveis mais internas

No espaço-tempo de Kerr, as órbitas circulares podem ser analisadas no plano equatorial e o raio da ISCO depende da direção do movimento da partícula em comparação com a direção de rotação do buraco negro, sejam elas co-rotação ou contra-rotação. Neste caso, co-rotação e contra-rotação correspondem à orientação paralela e antiparalela dos vetores do momento angular da partícula e do momento angular do buraco negro. No caso de Kerr extremo (caso *iii*) introduzido na seção 4.2), a diferença entre essas duas variantes é bastante considerável: tem-se $r = 9M$ para a orientação antiparalela e $r = M$ para a orientação paralela.

Os valores dos parâmetros da ISCO (raio, momento angular total, energia, frequência angular orbital) são determinados pelo parâmetro de Kerr a . De maneira análoga aos cálculos feitos na seção 3.4, a equação de movimento da coordenada radial de uma partícula no plano equatorial ($\theta = \pi/2$) é dada por

$$\left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 = E^2 - \left[1 - \frac{2M}{r} - \frac{a^2(E^2 - 1) - L^2}{r^2} - \frac{2M(L - aE)^2}{r^3} \right] \quad . \quad (4.18)$$

Na equação acima, $L \equiv L_z$ é a componente do eixo z do momento angular por unidade de massa, que é igual ao momento angular total por unidade de massa quando o eixo z é paralelo ao eixo de rotação do buraco negro. Quando $L > 0$, o vetor do momento angular orbital da partícula tem uma orientação paralela em relação ao momento angular

do buraco negro; no caso em que $L < 0$, essa orientação é antiparalela. a é sempre um parâmetro positivo. Como os termos dentro dos colchetes da equação 4.18 dependem da energia E , a fim de definir o potencial efetivo, pode-se reescrever a equação do movimento radial como

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{1}{r^4}(\alpha E^2 - 2\beta E + \gamma) , \quad (4.19)$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha &= (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 > 0 , \\ \beta &= [a(r^2 + a^2) - \Delta a^2]L = 2MLra , \\ \gamma &= a^2L^2 - \Delta(r^2 + L^2) . \end{aligned} \quad (4.20)$$

Reescrevendo a equação 4.19 como

$$r^4 \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \alpha \left(E - \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha}\right) \times \left(E - \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha}\right) , \quad (4.21)$$

o potencial efetivo no espaço-tempo de Kerr é então definido como

$$U_{Kerr}(r, L) = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha} . \quad (4.22)$$

A raiz positiva foi escolhida a fim de manter a analogia com o potencial de Schwarzschild.

No caso de um buraco de Kerr extremo ($M^2 = a^2$), os parâmetros da ISCO podem ser encontrados primeiramente com a introdução de uma função V que é o equivalente ao lado direito da equação 4.19. A expressão da aceleração é dada pela primeira derivada da velocidade $\dot{r} = \frac{1}{2} \frac{dV}{dr}$ (de maneira semelhante à 3.27), e a estabilidade da órbita circular é dada pelo sinal da segunda derivada $\frac{d^2V}{dr^2}$. Com o objetivo de simplificação dos cálculos, é conveniente usar as variáveis $u = \frac{1}{r}$ e $x = L - aE$.

Para o movimento ser circular, as condições (i) e (ii) precisam ser satisfeitas simultaneamente. Portanto, para a métrica de Kerr, tem-se que

$$\begin{cases} V = 0 \\ \frac{dV}{dr} = 0 \end{cases} \quad (4.23)$$

A partir do sistema de equações acima, percebe-se que o uso da variável u ao invés de r não interfere na forma do sistema, visto que $\frac{dV}{dr} = \frac{dV}{du} \frac{du}{dr}$, fazendo com que $\frac{dV}{dr} = 0$ seja equivalente à $\frac{dV}{du} = 0$. A solução do sistema 4.23 define os parâmetros x e E para órbitas estáveis e instáveis como funções de u . Para órbitas estáveis, tem-se

$$x(u) = -\frac{a\sqrt{u} \pm \sqrt{M}}{[u(1 - 3Mu \mp 2a\sqrt{Mu^3})]^{1/2}} , \quad (4.24)$$

$$E(u) = \frac{1 - 2Mu \mp a\sqrt{Mu^3}}{(1 - 3Mu \mp 2a\sqrt{Mu^3})^{1/2}} . \quad (4.25)$$

Voltando para a variável L , ou seja, fazendo a substituição $L = x + aE$, obtém-se a expressão para o momento angular em função de u

$$L(u) = \mp \frac{\sqrt{M}(1 + a^2u^2 \pm 2a\sqrt{Mu^3})}{[u(1 - 3Mu \mp 2a\sqrt{Mu^3})]^{1/2}} . \quad (4.26)$$

Na equação acima, o sinal negativo corresponde à orientação antiparalela entre o momento angular L da partícula e o spin a do buraco negro (contra-rotação), e o sinal positivo à orientação paralela entre eles (co-rotação).

Agora, satisfazendo a condição (iii) escrita em termos de V e u , juntamente com as outras duas condições anteriores, o sistema fechado dos três parâmetros x , E e u da ISCO é dependente apenas da massa M e o parâmetro de Kerr a . A equação para o raio da ISCO é então da forma

$$r^2 - 6Mr - 3a^2 \mp 8a\sqrt{Mr} = 0 \quad (4.27)$$

A partir da substituição da equação 4.27 (usando a relação entre r e u) em 4.25 e 4.26, obtém-se os parâmetros da Órbita Circular Estável mais Interna no limite de Kerr extremo

$$r_{ISCO} = 9M , \quad L_{ISCO} = -\frac{22}{3\sqrt{3}}M , \quad E_{ISCO} = \frac{5}{3\sqrt{3}} \quad (4.28)$$

para órbitas contra-rotativas, e

$$r_{ISCO} = M , \quad L_{ISCO} = \frac{2}{\sqrt{3}}M , \quad E_{ISCO} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (4.29)$$

para órbitas co-rotativas.

4.5 Processo de Penrose

Nas devidas condições, é possível extrair energia de um buraco negro através do processo de Penrose. De uma maneira bastante simplificada, supondo que uma partícula se aproximando de um buraco negro de Kerr em uma geodésica tem um quadrimomento p , é apropriado a identificação de uma constante de movimento

$$E = -p \cdot \xi \quad (4.30)$$

como sendo sua energia, considerando $E = p^0$ no infinito, onde ξ corresponde ao vetor de Killing. Agora, suponha que a partícula decaia em duas outras, uma delas cai no buraco negro enquanto a outra escapa para o infinito, como na figura abaixo.

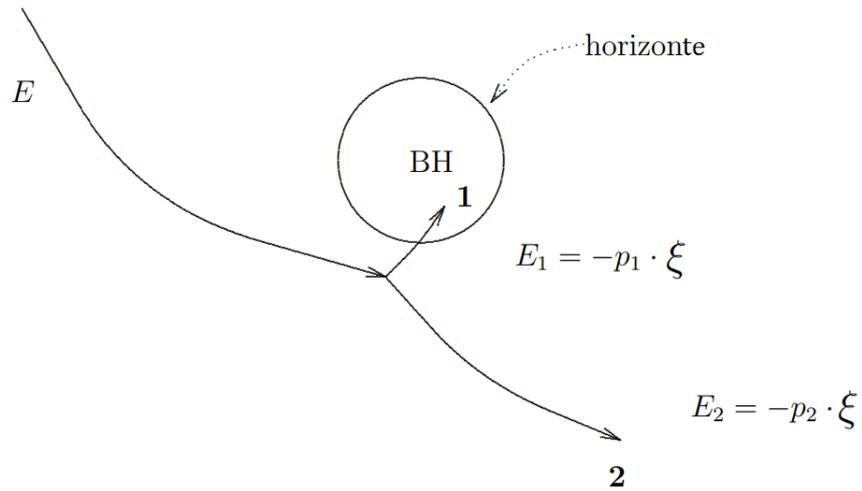


Figura 12 – Esquema de extração de energia de um buraco negro através do processo de Penrose. (TOWNSEND, 1997)

Através da conservação de energia

$$E_2 = E - E_1 \quad , \quad (4.31)$$

observa-se que a energia da partícula 2 pode ser maior do que E , já que, visto pela equação 4.30, a energia da partícula 1 não é necessariamente positiva na ergoregião, tendo em conta que ξ pode ser do tipo espaço nesta região, como visto na seção 4.3. Portanto, se o decaimento da partícula ocorrer na ergosfera, é possível ter $E_2 > E$ e energia rotacional é então extraída do buraco negro.

5 Conclusões

A consequência principal da realização deste trabalho foi um maior aprofundamento nos conceitos da Relatividade Geral e de buracos negros.

Cada uma das métricas apresentadas descrevem uma forma de corpo astronômico; a primeira (Schwarzschild) trata bastante precisamente de massas esféricas assumindo que a carga elétrica, momento angular e constante cosmológica destas são todos zero; a segunda (Kerr) descreve com clareza buracos negros axialmente simétricos. Ambas são soluções exatas das equações de Einstein e poderiam detalhar perfeitamente um buraco negro, caso fosse provado que este possui ou não parâmetros como carga e/ou momento angular.

Como a teoria da relatividade já foi confirmada diversas vezes através de experimentos, é seguro afirmar que estas métricas estão corretas ao descrever a realidade. No futuro, mostra-se interessante o desenvolvimento de pesquisas e experimentos que conseguiriam detectar e provar as características locais de buracos negros, para que estas possam ser determinadas mais assertivamente.

A Apêndice

A.1 Coordenadas de Eddington-Finkelstein

A fim de remover a singularidade do horizonte $r = 2M$ na métrica de Schwarzschild, esta pode ser escrita usando as coordenadas de Eddington-Finkelstein ([HARTLE, 2021](#)). Para isso, existem duas formas:

- (i) **“entrando”**: quando a coordenada t é substituída por $v = t + r^*$, onde $r^* = r + 2M \ln|\frac{r}{2M} - 1|$. A métrica toma então a forma

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2 \quad . \quad (\text{A.1})$$

- (ii) **“saindo”**: a coordenada t é substituída por $u = t - r^*$, e a métrica é dada por

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) du^2 - 2dudr + r^2 d\Omega^2 \quad . \quad (\text{A.2})$$

Em ambos os casos $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$.

Referências

- ZEE, A. *Einstein Gravity in a Nutshell*. New Jersey: Princeton University Press, 2013. ISBN 978-0-691-14558-7. Citado 5 vezes nas páginas 5, 19, 20, 27 e 34.
- TOWNSEND, P. K. *Black holes: Lecture notes*. 7 1997. Citado 5 vezes nas páginas 5, 16, 28, 33 e 38.
- CARROLL, S. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Harlow, Essex: Pearson Education Limited, 2014. ISBN 978-1-292-02663-3. Citado 4 vezes nas páginas 5, 13, 14 e 32.
- WALD, R. M. *Space, Time, and Gravity*. 2. ed. Chicago and London: The University of Chicago Press, 1992. ISBN 0-226-87029-4. Citado na página 9.
- BAEYER, H. C. von. *The Fermi Solution: Essays on Science*. New York: Dover Publications, 1993. ISBN 0-486-41707-7. Citado na página 9.
- HARTLE, J. B. *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity*. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2021. Citado 5 vezes nas páginas 9, 11, 23, 35 e 40.
- LEMOS, N. *Mecânica Analítica*. São Paulo: Livraria da Física, 2007. ISBN 85-88325-24-1. Citado na página 12.
- CHANDRASEKHAR, S. *The Mathematical Theory of Black Holes*. New York: Oxford University Press, 1983. ISBN 0-19-851291-0. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 22.
- TEUKOLSKY, S. A. The kerr metric. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 32, n. 12, p. 124006, Jun 2015. ISSN 1361-6382. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/32/12/124006>>. Citado na página 29.
- BOYER, R. H.; LINDQUIST, R. W. Maximal analytic extension of the kerr metric. *Journal of Mathematical Physics*, v. 8, n. 2, p. 265–281, 1967. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.1705193>>. Citado na página 30.