Universidade Federal de São Carlos

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia

Departamento de Matemática

Não unicidade para uma classe de operadores do tipo parabólico

Marco Antonio Moya Rosas

Orientador: José Ruidival Soares dos Santos Filho

São Carlos

Janeiro de 2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Não unicidade para uma classe de operadores do tipo parabólico

Marco Antonio Moya Rosas

Orientador: José Ruidival Soares dos Santos Filho

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

São Carlos - SP
Janeiro de 2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Defesa de Tese de Doutorado do candidato Marco Antonio Moya Rosas, realizada em 18/01/2022.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Jose Ruidival Soares dos Santos Filho (UFSCar)

Prof. Dr. Cezar Issao Kondo (UFSCar)

Prof. Dr. Marcelo Rempel Ebert (USP)

Prof. Dr. Sérgio Luís Zani (USP)

Prof. Dr. Paulo Leandro Dattori da Silva (USP)

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.
O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática.

À memoria de minha irmã

Norma.

Dedico.

Agradecimentos

A Deus, que todos os dias de minha vida me deu forças para nunca desistir.

Aos meus pais, Marcos e Ermelinda, que me ensinaram tudo o que sou através de exemplo de vida e de trabalho.

A todos meus familiares, que ainda estando longe, me deram apoio durante estes anos de doutorado.

A Diana, minha companheira.

Agradeço a meu orientador Prof. José Ruidival Soares dos Santos Filho, pela confiança, pelo conhecimento transmitido, pela amizade, a paciência e as observações valorosas na elaboração deste trabalho.

Aos professores, Marcelo, Cezar, Paulo e Sergio por aceitarem compor a banca examinadora.

Aos médicos, enfermeiras, técnicas do Hospital Regional Docente de Trujillo e do Hospital Salaverry, por cuidarem de mim.

A todos meus amigos, que de alguma forma colaboraram para a realização deste projeto.
A CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

Nesta tese consideramos a não unicidade para uma classe de operadores parabólicos. Mostraremos que para certa perturbação real analítica do Operador de Calor existe uma solução não única para o Problema de Valor Inicial.

Palavras-chave: Teorema de não unicidade, Operador parabólico, Operador do Calor, Problema de Valor Inicial, Equação de fase, Função de fase.

Abstract

In this thesis we consider the non-uniqueness for a class of parabolic operators. We will prove that for certain real analytic perturbation of the Heat Operator there is a non unique solution for the Initial Value Problem.

Keywords: Non-uniqueness Theorem, Parabolic Operator, Heat Operator, Initial Value Problem, Phase Equation, Phase Function.

Sumário

LISTA DE SÍMBOLOS

$\Omega =$ subconjunto não vazio aberto de um espaço euclideano $\mathbb{R}^n$;

$C^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{C} :$ u é infinitamente diferenciável$\}$;

$S(u) = \overline{\{x \in \Omega : \, u(x) \neq 0\}}$;

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$;

$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$;

$D^\alpha = (-i)^{|\alpha|} \, \partial^\alpha$;

$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : \, x \cdot N^0 = 0\}$ hiperplano;

$\Sigma^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : \, x \cdot N^0 > 0\}$ semiplano;

$J_m = \{(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m) \in \mathbb{N}^m : \, 1\beta_1 + 2\beta_2 + \cdots + m\beta_m = m\}$;

$X_\tau = \{s = \eta + i\,\tau : \, \eta \in \mathbb{R}\}$;

$X_{\tau,L} = \{s = \eta + i\,\tau : \, \eta \in [-L, L]\}$;

$T_f(g) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} g(r)/f(r)dr$;

$H = D_{x_1}^2 + D_{x_2}^2 + \cdots + D_{x_n}^2 + iD_t$;

$Q = \Lambda(x,t)(D_{x_1}^2 + D_{x_2}^2 + \cdots + D_{x_n}^2) + iD_t$;

$P = D_{x_1}^2 + D_{x_2}^2 + \cdots + D_{x_n}^2 + i\Lambda(x,t)D_t$;

$\widehat{u}$ representa a transformada de Fourier de u;

$z \in \mathbb{C}, \Re(z)$ representa a parte real de z e $\Im(z)$ representa a parte imaginaria de z.

Introdução

Seja $F(t, z) = F(t, z_0, \dots, z_m)$ de classe C^1 e

$$F(t,\, u(t),\, u'(t), \dots,\, u^{(m)}(t)) = 0. \tag{1}$$

Se $U(t) = (u(t), u'(t), \dots, u^{(m)}(t))$, considere $F(t_0, U(t_0)) = 0$, $U_0 = U(t_0)$. Dizemos que a equação diferencial ordinária (1) é do tipo principal em (t_0, U_0) se $\partial_{z_m} F(t_0, U_0) \neq 0$, neste caso, o Teorema da função implícita nos diz que (1) pode ser escrita como

$$u^{(m)}(t) = F_0(t,\, u(t), \dots,\, u^{(m-1)}(t)). \tag{2}$$

O problema de valor inicial se escreve como (2) sujeito à condição inicial

$$(u(t_0),\, u'(t_0), \dots,\, u^{(m-1)}(t_0)) = (c_0,\, c_1, \dots,\, c_{m-1}).$$

Tal problema tem solução e é única.

Em equações diferenciais parciais lineares para estender tal resultado supõe-se que $t = t_0$ seja uma variável distinguida e

$$P(t,\, x,\, D_t,\, D_x) = 0. \tag{3}$$

Seja m igual a ordem de P; diz-se que $\{t = t_0\}$ é não característica para P se seu símbolo principal $p_m(t_0,\, x_0,\, \tau,\, 0) \neq 0$, quando $\tau \neq 0$. O problema de Cauchy associado a (3) com valor inicial $\partial_t^j u(t_0, x) = f_j(x)$, para $j \leq m-1$, estende o problema de valor inicial de equações diferenciais ordinárias. Tal problema, com respeito a unicidade e existência tem sido largamente estudado (ver [6, 11, 13]). Para o problema de valor inicial muitas equações diferenciais parciais são características com respeito a uma hipersuperficie.

Em 1955 Lars Hörmander, ver [4], estudo a não-unicidade do problema de valor inicial no caso característico, linear, com coeficientes constantes. Mais precisamente

Teorema 0.0.1 *Se o hiperplano* $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot N^0 = 0\}$ *é caraterístico com respeito ao operador* $P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$, *então existe uma solução* u *da equação*

$$Pu = 0 \tag{4}$$

tal que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *e* $u = 0$ *em* Σ^+, *onde* $\Sigma^+ = \left\{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot N^0 > 0\right\}$, *mas* $0 \in S(u)$.

Isto inclui o operador do calor $H = D_{x_1}^2 + D_{x_2}^2 + \cdots + D_{x_n}^2 + iD_t$.

Nosso objetivo é estender o Teorema 0.0.1 para a família de operadores parabólicos P e Q definidos por $P = D_{x_1}^2 + D_{x_2}^2 + \cdots + D_{x_n}^2 + i\lambda(t)D_t$, $Q = \lambda(t)(D_{x_1}^2 + D_{x_2}^2 + \cdots + D_{x_n}^2) + iD_t$, e originados pelo operador do calor.

No caso em que λ é uma função real analítica que não se anula a não unicidade garante que o operador não é hipoanalítico.

O texto está organizado da seguinte forma: no Capítulo 1, revisamos alguns conceitos básicos e definições, como por exemplo, o Teorema 0.0.1 de não unicidade devido a Lars Hörmander. No Capítulo 2, apresentamos a família de operadores parabólicos P e Q, e as equações de fase associadas a tais operadores, bem como determinamos algumas soluções exatas para as equações de fase. No Capítulo 3, usando as soluções das equações de fase obtidas no Capítulo 2, obtemos extensões do Teorema de não unicidade de Hörmander.

Capítulo 1

Teorema de não unicidade de Hörmander

Neste Capítulo, apresentamos um Teorema de não unicidade devido a Lars Hörmander, que é um elemento essencial para nosso trabalho. A notação e resultados básicos aqui utilizados podem ser encontrados em [1], [6] e [7].

Um operador diferencial parcial linear P de ordem $m \in \mathbb{N}$ em um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é uma aplicação linear

$$\begin{aligned} P : C^\infty(\Omega) &\to C^\infty(\Omega) \\ u &\mapsto Pu \end{aligned}$$

com $Pu = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha u$, onde $D^\alpha = (-i)^{|\alpha|}\partial^\alpha$ e $a_\alpha \in C^\infty(\Omega)$, $|\alpha| \leq m$. Definimos seu símbolo por

$$p(x,\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x)\xi^\alpha, \; x \in \Omega, \, \xi \in \mathbb{R}^n,$$

e seu símbolo principal por

$$p_m(x,\xi) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x)\xi^\alpha, \; x \in \Omega, \, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Uma hipersuperfície Σ de $\mathbb{R}^n$ de classe C^k $(1 \leq k \leq \infty)$ é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ tal que para todo $x_0 \in \Sigma$ existe um conjunto aberto $V \subset \mathbb{R}^n$ com $x_0 \in V$ e existe uma função $\theta \in C^k(V)$

com $\Sigma \cap V = \{x \in V : \theta(x) = 0\}$ e $\nabla\theta(x) \neq 0$, para todo $x \in \Sigma \cap V$. Dizemos que Σ é característica com respeito ao operador P se $p_m(x, \nabla\theta(x)) = 0$, $\forall x \in \Sigma \cap V$.

Lema 1.0.1 (Puiseux) *Seja $P(\tau, \xi) = C_m(\xi)\tau^m + C_{m-1}(\xi)\tau^{m-1} + \ldots + C_0(\xi)$ um polinômio na variável $(\tau, \xi) \in \mathbb{C}^2$ com $m \geq 1$ e $C_m(\xi) \neq 0$, então*

$$P(\tau, \xi) = C_m(\xi) \prod_{j=1}^{m} (\tau - \tau_j(\xi))$$

onde cada τ_j, para algum inteiro positivo p, é uma função analítica de $\xi^{1/p}$ quando $0 < |\xi| < \delta$, sem singularidade essencial em $\xi^{1/p} = 0$, ou seja,

$$\tau_j(\xi) = \sum_{k=N}^{\infty} a_k (\xi^{1/p})^k$$

para algum $N \in \mathbb{Z}$.

O Teorema a seguir é devido a Lars Hörmander, ver Teorema 5.2.2 de [6]. Reproduziremos a demonstração por se tratar de um elemento essencial para nosso trabalho.

Teorema 1.0.1 *Sejam $P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ um operador diferencial linear com coeficientes constantes, $N^0 \neq 0$ e $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : \ x \cdot N^0 = 0\}$ um hiperplano caraterístico com respeito ao operador P. Então, existe uma solução u da equação*

$$Pu = 0 \tag{1.1}$$

tal que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $u = 0$ em Σ^+, onde $\Sigma^+ = \left\{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot N^0 > 0\right\}$, mas a origem pertence a $S(u)$.

Demonstração. Fazendo a descomposição do símbolo do operador P em termos homogêneos, ou seja,

$$p(\xi) = \sum_{j=0}^{m} p_j(\xi), \ \text{com } p_j(\xi) = \sum_{|\alpha|=j} a_\alpha \xi^\alpha, \ \text{para todo } j \in \{0, 1, \ldots, m\}. \tag{1.2}$$

Sejam $s \in \mathbb{C}$ com $|s|$ é suficientemente grande e $\xi^0 \in \mathbb{R}^n$ um vetor fixo não característico com respeito ao operador P. Agora procuraremos uma solução da equação

$$p(sN^0 + t\xi^0) = 0. \tag{1.3}$$

Fazendo a mudança de variáveis $t = sw$ e por (1.3), segue que

$$(1/s)^m p_0(N^0 + w\xi^0) + (1/s)^{m-1} p_1(N^0 + w\xi^0) + \cdots + p_m(N^0 + w\xi^0) = 0. \tag{1.4}$$

Tomando $\eta = 1/s$, segue que

$$\eta^m p_0(N^0 + w\xi^0) + \eta^{m-1} p_1(N^0 + w\xi^0) + \cdots + p_m(N^0 + w\xi^0) = c_0(\eta) + c_1(\eta)w + \cdots + c_m(\eta)w^m,$$

onde $c_0(\eta) = \eta^m p_0(N^0) + \eta^{m-1} p_1(N^0) + \cdots + p_m(N^0)$ e $c_m(\eta) = p_m(\xi^0)$. Como $c_m(\eta) \neq 0$, pelo Lema de Puiseux obtém-se que

$$c_0(\eta) + c_1(\eta)w + \cdots + c_m(\eta)w^m = c_m(\eta) \prod_{j=1}^{m} (w - w_j(\eta)), \tag{1.5}$$

onde cada w_j, para algum inteiro positivo p, é uma função analítica de $\eta^{1/p}$ quando $0 < |\eta| < \delta$, sem singularidade essencial em $\eta^{1/p} = 0$, ou seja,

$$w_j(\eta) = \sum_{j=N}^{\infty} a_j \left(\eta^{1/p}\right)^j,$$

para algum $N \in \mathbb{Z}$. Se $(w, \eta) = (0, 0)$ em (1.5), então existe $j_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que w_{j_0} é uma solução da equação (1.4) com $w_{j_0}(0) = 0$. Consideremos a função auxiliar

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^j,$$

com $f(\eta^{1/p}) = w_{j_0}(\eta)$. Como f é analítica no conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \delta_1\}$, com $\delta_1 = (\delta/2)^{1/p}$, e $f(0) = 0$. Pelo Lema de Schwarz, segue que

$$|f(z)| \leq C|z|, \text{ se } |z| < \delta_1 \tag{1.6}$$

onde $C = \max\{|f(z)| : |z| \leq \delta_1\}/\delta_1$.

Como $t(s) = s\, w_{j_0}(1/s)$, segue que t é solução de (1.3) e

$$|t(s)| \leq C|s|^{1-1/p}, \text{ se } |s| > (2M)^p, \tag{1.7}$$

com $2M = (\delta/2)^{-1/p}$. Escolhendo ρ tal que $\rho \in \left(1-\frac{1}{p}, 1\right)$ e $\tau > (2M)^2$, defina a função u por

$$u(x) = \int_{X_\tau} e^{ix.(sN^0+t(s)\xi^0)} e^{-(-is)^\rho} ds, \tag{1.8}$$

com $X_\tau = \{s = \eta + i\tau : \eta \in \mathbb{R}\}$, onde $(-is)^\rho$ é real e positivo quando s está no eixo imaginário positivo e fixamos um ramo da potência $s^{1/p}$ no semiplano superior. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado, $x \in A$, $s \in X_\tau$ e pela estimativa (1.7) segue que

$$\begin{aligned}
\Re\left(ix.(sN^0+t(s)\xi^0) - (-is)^\rho\right) &= \Re\left(ix.((\eta+i\tau)N^0 + t(s)\xi^0) - (-is)^\rho\right) \\
&= \Re\left(i\eta x.N^0 - \tau x.N^0 + t(s)x.\xi^0 - (-is)^\rho\right) \\
&\leq -\tau x.N^0 + \Re\left(t(s)x.\xi^0\right) - |s|^\rho cos\left(\frac{\pi\rho}{2}\right) \\
&\leq -\tau x.N^0 + C|x||\xi^0||s|^{1-\frac{1}{p}} - |s|^\rho cos\left(\frac{\pi\rho}{2}\right) \\
&\leq -\tau x.N^0 + CC_0|\xi^0||s|^{1-\frac{1}{p}} - |s|^\rho cos\left(\frac{\pi\rho}{2}\right),
\end{aligned} \tag{1.9}$$

onde C_0 é o raio de uma bola com centro no origem que contém o conjunto A. Se $s \in X_\tau$ é tal que $|\eta| > L$ com $L = \left(\dfrac{2CC_0|\xi^0|}{cos(\frac{\pi\rho}{2})}\right)^{\frac{1}{\rho-1+\frac{1}{p}}}$ e como $1-\frac{1}{p} < \rho < 1$, tem-se

$$CC_0|\xi^0||s|^{1-\frac{1}{p}-\rho} \leq \frac{1}{2} cos\left(\frac{\pi\rho}{2}\right). \tag{1.10}$$

Por (1.9) e (1.10), tem-se que

$$\begin{aligned}
\Re\left(ix.(sN^0+t(s)\xi^0) - (-is)^\rho\right) &\leq -\tau x.N^0 + CC_0|\xi^0||s|^{1-\frac{1}{p}} - |s|^\rho cos\left(\frac{\pi\rho}{2}\right) \\
&= -\tau x.N^0 + |s|^\rho\left(CC_0|\xi^0||s|^{1-\frac{1}{p}-\rho} - cos\left(\frac{\pi\rho}{2}\right)\right) \\
&\leq -\tau x.N^0 - C_1|s|^\rho,
\end{aligned} \tag{1.11}$$

onde $C_1 = cos(\pi\rho/2)/2$. Considere o conjunto $X_{\tau,L} = \{s = \eta + i\tau : \ \eta \in [-L, L]\}$, por (1.11), tem-se a seguinte estimativa para a função u

$$\begin{aligned}
|u(x)| &= \left|\int_{X_{\tau,L}} e^{ix.(sN^0+t(s)\xi^0)} e^{-(-is)^\rho} ds + \int_{X_\tau \setminus X_{\tau,L}} e^{ix.(sN^0+t(s)\xi^0)} e^{-(-is)^\rho} ds\right| \\
&\leq \int_{X_{\tau,L}} e^{\Re\left(ix.(sN^0+t(s)\xi^0)-(-is)^\rho\right)} ds + \int_{X_\tau \setminus X_{\tau,L}} e^{\Re\left(ix.(sN^0+t(s)\xi^0)-(-is)^\rho\right)} ds
\end{aligned}$$

$$\leq \ 2L||e^{\Re\left(ix.(sN^0+t(s)\xi^0)-(-is)^\rho\right)}||_{\infty,X_{\tau,L}} \ + \int_{X_\tau\setminus X_{\tau,L}} e^{-\tau x.N^0 - C_1|s|^\rho}\, ds$$
$$\leq \ 2L||e^{\Re\left(ix.(sN^0+t(s)\xi^0)-(-is)^\rho\right)}||_{\infty,X_{\tau,L}} \ + e^{-\tau x.N^0}\int_{X_\tau\setminus X_{\tau,L}} e^{-C_1|s|^\rho}\, ds. \qquad (1.12)$$

Daí, a integral em (1.8) é convergente. Agora considere a integral da função analítica $U(s) = \exp\left(ix_0(sN^0 + t(s)\xi^0) - (-is)^p\right)$ no contorno do retângulo R de vértices $-L + i\tau_1$, $L + i\tau_1$, $L + i\tau_2$ e $-L + i\tau_2$. Pelo Teorema de Cauchy-Goursat, segue que

$$\oint_{\partial R} U(s)ds = 0. \qquad (1.13)$$

Daí,

$$\int_{-L}^{L} U(\eta + i\tau_1)d\eta + i\int_{\tau_1}^{\tau_2} U(L + i\tau)d\tau + \int_{L}^{-L} U(\eta + i\tau_2)d\eta + i\int_{\tau_2}^{\tau_1} U(-L + i\tau)d\tau = 0. \quad (1.14)$$

Quando $L \to \infty$ a segunda e quarta integrais do primeiro membro de (1.14) tendem para zero pela estimativa (1.11). Logo, temos que $\int_{-L}^{L} U(\eta + i\tau_1)d\eta = -\int_{L}^{-L} U(\eta + i\tau_2)d\eta$, equivalentemente

$$\int_{X_{\tau_1,L}} U(s)ds = \int_{X_{\tau_2,L}} U(s)ds. \qquad (1.15)$$

Fazendo $L \to \infty$ em (1.15), segue que

$$\int_{X_{\tau_1}} U(s)ds = \int_{X_{\tau_2}} U(s)ds.$$

Portanto, a integral (1.8) é independente de τ. Sejam $s \in X_\tau$, $x \in A$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Segue que

$$\left| D_x^\alpha \left[e^{ix.(sN^0+t(s)\xi^0)-(-is)^\rho} \right] \right| \leq G(s),$$

onde

$$G(s) = \begin{cases} \|D_x^\alpha \exp\left(ix\cdot(sN^0 + t(s)\xi^0) - (-is)^\rho\right)\|_{\infty,X_{\tau,L}}, & s \in X_{\tau,L} \\ C_\alpha\left(|s|^\alpha|N^0|^\alpha + C^\alpha|s|^{\left(\frac{p-1}{p}\right)\alpha}|\xi^0|^\alpha\right)e^{-2C_1|s|^\rho}, & s \in X_\tau \setminus X_{\tau,L}, \end{cases}$$

com $C_\alpha > 0$. Como $G \in L^1(X_\tau)$ e pelo Teorema da Convergência Dominada, Teorema 2.24 em [2], temos que

$$D_x^\alpha u(x) = \int_{X_\tau} D_x^\alpha \left[e^{ix.(sN^0+t(s)\xi)-(-is)^\rho} \right] ds. \qquad (1.16)$$

Assim $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Das equações (1.4) e (1.16), obtemos

$$P(D)u(x) = \int_{X_\tau} p(sN^0 + t(s)\xi^0) e^{ix\cdot(sN^0+t(s)\xi^0)} e^{-(-is)^\rho} ds = 0. \tag{1.17}$$

Como a integral que define a função u é absolutamente convergente, pelas estimativas (1.9), (1.11) e pelo fato que $s = \eta + i\tau$, segue que

$$\begin{aligned}
|u(x)| &\leq \int_{X_{\tau,L}} e^{\Re\left(ix.(sN^0+t(s)\xi^0)-(-is)^\rho\right)}\, ds + \int_{X_\tau \setminus X_{\tau,L}} e^{\Re\left(ix.(sN^0+t(s)\xi^0)-(-is)^\rho\right)}\, ds \\
&\leq \int_{X_{\tau,L}} e^{-\tau x.N^0 + CC_0|\xi^0||s|^{1-\frac{1}{p}} - |s|^\rho cos\left(\frac{\pi\rho}{2}\right)}\, ds \;+\; \int_{X_\tau \setminus X_{\tau,L}} e^{-\tau x.N^0 - C_1|s|^\rho}\, ds \\
&= e^{-\tau x.N^0} \int_{[-L,L]} e^{CC_0|\xi^0||\eta+i\tau|^{1-\frac{1}{p}}} e^{-2C_1|\eta+i\tau|^\rho} d\eta \;+\; e^{-\tau x.N^0} \int_{\mathbb{R}\setminus[-L,L]} e^{-C_1|\eta+i\tau|^\rho} d\eta \\
&\leq e^{-\tau x.N^0} \int_{[-L,L]} e^{CC_0|\xi^0||\eta+i\tau|^{\frac{p-1}{p}}} e^{-2C_1|\eta|^\rho} d\eta \;+\; e^{-\tau x.N^0} \int_{\mathbb{R}\setminus[-L,L]} e^{-C_1|\eta|^\rho} d\eta \\
&= e^{-\tau x.N^0} \int_{[-L,L]} e^{CC_0C_2|\xi^0|(|\eta|^2+\tau^2)^{\frac{p-1}{2p}}} e^{-2C_1|\eta|^\rho} d\eta \;+\; e^{-\tau x.N^0} \int_{\mathbb{R}\setminus[-L,L]} e^{-C_1|\eta|^\rho} d\eta \\
&\leq e^{-\tau x.N^0} \int_{[-L,L]} e^{CC_0C_2|\xi^0|\left((|\eta|^2)^{\frac{p-1}{2p}} + (\tau^2)^{\frac{p-1}{2p}}\right)} e^{-2C_1|\eta|^\rho} d\eta + e^{-\tau x.N^0} \int_{\mathbb{R}\setminus[-L,L]} e^{-C_1|\eta|^\rho} d\eta \\
&= e^{-\tau x.N^0 + CC_0C_2|\xi^0|\tau^{\frac{p-1}{p}}} \int_{[-L,L]} e^{CC_0C_2|\xi^0||\eta|^{\frac{p-1}{p}} - 2C_1|\eta|^\rho} d\eta + e^{-\tau x.N^0} \int_{\mathbb{R}\setminus[-L,L]} e^{-C_1|\eta|^\rho} d\eta.
\end{aligned}$$

Assim,

$$|u(x)| \leq e^{-\tau x.N^0 + CC_0C_2|\xi^0|\tau^{\frac{p-1}{p}}} \int_{[-L,L]} e^{CC_0C_2|\xi^0||\eta|^{\frac{p-1}{p}} - 2C_1|\eta|^\rho} d\eta + e^{-\tau x.N^0} \int_{\mathbb{R}\setminus[-L,L]} e^{-C_1|\eta|^\rho} d\eta, \tag{1.18}$$

tomando $\tau \to \infty$ em (1.18), concluímos que

$$u(x) = 0, \quad se \;\; x \in \Sigma^+. \tag{1.19}$$

Defina a função auxiliar v por

$$v(t) = \int_{X_\tau} e^{its} e^{-(-is)^\rho} ds. \tag{1.20}$$

Se $x \cdot \xi^0 = 0$, então

$$u(x) = v(x \cdot N^0). \tag{1.21}$$

Pelas equações (1.8) e (1.21), deduzimos que $v(t) = 0$ no intervalo $(0, \infty)$. Logo, multiplicando a equação (1.20) pela função $\frac{1}{2\pi}e^{t\tau}$ e fazendo a mudança de variável $\sigma = s + \frac{\tau}{i}$, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}v(t)e^{t\tau} &= \frac{1}{2\pi}\int_{X_\tau} e^{it\left(s+\frac{\tau}{i}\right)}e^{-(-is)^\rho}ds \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\sigma}e^{-\left(\tau+\frac{\sigma}{i}\right)^\rho}d\sigma. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Pela equação (1.22) e pela Fórmula de Inversão de Fourier, obtém-se

$$e^{-\left(\tau+\frac{\sigma}{i}\right)^\rho} = \left(\frac{1}{2\pi}v(t)e^{t\tau}\right)^\wedge(\sigma).$$

Pela Identidade de Parseval, temos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{1}{2\pi}v(t)e^{t\tau}\right|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\left(\frac{1}{2\pi}v(t)e^{t\tau}\right)^\wedge(\sigma)\right|^2 d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|e^{-\left(\tau+\frac{\sigma}{i}\right)^\rho}\right|^2 d\sigma.$$

Daí,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}|v(t)e^{t\tau}|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\left|e^{-\left(\tau+\frac{\sigma}{i}\right)^\rho}\right|^2 d\sigma, \tag{1.23}$$

Pelo fato que $|\left(\tau+\frac{\sigma}{i}\right)^\rho| \leq (\tau+|\sigma|)^\rho \leq \tau^\rho + |\sigma|^\rho$ e pela equação (1.23), segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\left|v(t)e^{t\tau}\right|^2 dt &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left|e^{-\left(\tau+\frac{\sigma}{i}\right)^\rho}\right|^2 d\sigma \\ &\geq \int_{-\infty}^{+\infty}\left|e^{-\tau^\rho-|\sigma|^\rho}\right|^2 d\sigma \\ &= e^{-2\tau^\rho}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|\sigma|^\rho}d\sigma. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Finalmente, provaremos que v é não nula em qualquer vizinhança do origem. De fato, se $v = 0$ no intervalo $(-\varepsilon, 0)$ para algum $\varepsilon > 0$, pela estimativa (1.24), segue que

$$\begin{aligned} e^{-2\tau^\rho}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|\sigma|^\rho}d\sigma &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\left|v(t)e^{t\tau}\right|^2 dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\left|v(t)e^{-\varepsilon\tau}\right|^2 dt \\ &= \frac{e^{-2\varepsilon\tau}}{2\pi}\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\left|v(t)\right|^2 dt \\ &= O(e^{-2\varepsilon\tau}), \quad \text{quando } \tau\to\infty. \end{aligned}$$

Daí, segue que

$$e^{-2\tau^{\rho}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|\sigma|^{\rho}}d\sigma = O(e^{-2\varepsilon\tau}), \quad \text{quando } \tau \to \infty.$$

o que é um absurdo pois,

$$\frac{e^{-2\tau^{\rho}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|\sigma|^{\rho}}d\sigma}{e^{-2\varepsilon\tau}} = e^{2(\varepsilon\tau-\tau^{\rho})}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|\sigma|^{\rho}}d\sigma \to \infty, \quad \text{quando } \tau \to \infty.$$

Assim $0 \in S(v)$, e, portanto, $0 \in S(u)$. □

Observação 1.0.1 *O Teorema anterior inclui como caso particular ao operador do calor* $H = D_1^2 + D_2^2 + \cdots + D_n^2 + iD_{n+1}$. *Neste caso, o símbolo de* H *é* $h(\xi) = \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 + i\xi_{n+1}$ *e o símbolo principal é dado por* $h_2(\xi) = \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2$. *Um vetor característico é dado por* $N^0 = (0, \ldots, 0, c)$, *com* $c \neq 0$ *e um vetor não característico* $\xi^0 = (a_1, \ldots, a_n, b)$ *verifica* $a_1^2 + \cdots + a_n^2 \neq 0$. *Logo, a equação* $h(sN^0 + t(s)\xi^0) = 0$ *é equivalente a*

$$a_1^2t^2(s) + \cdots + a_n^2t^2(s) + i(bt(s) + cs) = 0$$

Daí, temos que

$$bt(s) + cs = i(a_1^2t^2(s) + \cdots + a_n^2t^2(s)). \tag{1.25}$$

Pela equação (1.8), *segue que*

$$u(x) = \int_{X_\tau} e^{i\Phi(x,s)}ds,$$

é solução da equação $Hu = 0$, $u \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, $u = 0$ *em* Σ^+ *e* $0 \in S(u)$. *A função* Φ *é chamada de função de fase e é dada por*

$$\Phi(x, s) = x \cdot (sN^0 + t(s)\xi^0) + i(-is)^\rho. \tag{1.26}$$

Por (1.25) *e* (1.26), *temos que*

$$\Phi(x, s) = i(-is)^\rho + i\sum_{j=1}^{n} a_j^2t^2(s)x_{n+1} + \sum_{j=1}^{n} a_jt(s)x_j. \tag{1.27}$$

Em obras básicas tais como Folland [1] e John [8] resultados de unicidade e não unicidade são obtidos, ver Teorema1.34b, a solução de Tychonoff (1.19) no Capítulo 7 em [8] e Teorema4.4 em [1].

Capítulo

2

Soluções para as equações de fase

Neste Capítulo apresentaremos as equações de fase associadas aos operadores P e Q, em seguida obtemos soluções exatas para as ditas equações. Na seção 2.1 consideramos o caso em que Λ é uma função polinomial em x de grau k_0 e a seguir procuraremos por soluções Φ e Ψ polinomiais em x . Na seção 2.2 estudamos o caso quando Λ é uma função multiplicativamente separável e para este caso obtemos soluções multiplicativamente separáveis. As soluções determinadas neste Capítulo servem para obter não unicidade e espera-se que sirvam também para construir soluções singulares (no caso parabólico soluções não analíticas).

Considere os operadores

$$\begin{aligned} P &= D_{x_1}^2 + D_{x_2}^2 + ... + D_{x_n}^2 + i\Lambda(x,t)D_t, && (2.1)\\ Q &= \Lambda(x,t)(D_{x_1}^2 + D_{x_2}^2 + ... + D_{x_n}^2) + iD_t, && (2.2)\end{aligned}$$

onde $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\Lambda \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$. Se

$$\begin{aligned} u(x,t) &= e^{i\Phi(x,t)} \\ &\text{e} \\ v(x,t) &= e^{i\Psi(x,t)} \end{aligned}$$

são soluções de $P(u) = 0$ e $Q(v) = 0$ respectivamente, então as funções Φ e Ψ devem verificar as seguintes equações diferenciais parciais

$$\Delta_x\Phi(x,t) + i\sum_{j=1}^{n}(\partial_{x_j}\Phi(x,t))^2 - \Lambda(x,t)\partial_t\Phi(x,t) = 0, \tag{2.3}$$

$$\Lambda(x,t)\Delta_x\Psi(x,t) + i\Lambda(x,t)\sum_{j=1}^{n}(\partial_{x_j}\Psi(x,t))^2 - \partial_t\Psi(x,t) = 0. \tag{2.4}$$

As equações (2.3) e (2.4) são chamadas as equações de fase associadas aos operadores P e Q, respectivamente. Φ e Ψ são as funções de fase correspondentes.

2.1 Soluções polinomiais

Nesta seção procuraremos soluções polinomiais em x para as equações de fase (2.3) e (2.4), quando Λ é uma função polinomial em x de grau k_0, $k_0 \geq 0$. Uma função nas variáveis x e t é dita polinomial em x se tem a seguinte representação:

$$f(x,t) = \sum_{|\alpha|\leq k_0} a_\alpha(t)x^\alpha, \tag{2.5}$$

com $a_\alpha \neq 0$, para algum α tal que $|\alpha| = k_0$, k_0 é chamado o grau de f em x e as funções a_α são chamadas de funções coeficientes de f.

Para cada função real f de classe $C^\infty(\mathbb{R})$ que não se anule, consideramos o operador linear

$$\begin{aligned} T_f : C^\infty(\mathbb{R}) &\rightarrow C^\infty(\mathbb{R}) \\ g &\mapsto T_f(g) \end{aligned} \tag{2.6}$$

dado por $T_f(g) = \int_{t_0}^{t} g(r)/f(r)dr$. Tal classe de operadores será utilizado na construção das funções fase.

2.1.1 Soluções polinomiais para (2.3)

Primeiramente consideramos a equação (2.3) com Λ uma função polinomial em x de grau k_0. Digamos,

$$\Lambda(x,t) = \sum_{|\alpha|\leq k_0} \lambda_\alpha(t)x^\alpha,$$

com λ_α uma função real analítica. Vamos estudar soluções polinomiais em x de grau k_1 para a equação de fase (2.3), com uma condição de anulamento nos termos mistos de maior ordem, ou seja,

$$\Phi(x,t) = \sum_{|\alpha| \le k_1} a_\alpha(t) x^\alpha,$$

tal que

$$a_\alpha = 0, \text{ se } \alpha \neq k_1\, e_j, \text{ para todo } j \in \{1, 2, ..., n\}. \tag{2.7}$$

Lema 2.1.1 *Seja Λ como acima e Φ uma solução polinomial em x de* (2.3) *verificando* (2.7)*. Então o grau de Φ é no máximo $k_0 + 2$.*

Demonstração. Suponhamos que o grau de Φ é igual k_1 e $k_1 > k_0 + 2$, ou seja,

$$\Phi(x,t) = \sum_{|\alpha| \le k_1} a_\alpha(t) x^\alpha, \text{ com } k_1 > k_0 + 2.$$

Fazendo a descomposição de Φ em termos homogêneos

$$\Phi(x,t) = \sum_{j=0}^{k_1} \Phi_j(x,t),$$

com

$$\Phi_j(x,t) = \sum_{|\alpha| = j} a_\alpha(t) x^\alpha, \quad \text{para todo } j \in \{1, 2, ..., n\},$$

como Φ é solução de (2.3), segue que o termo de maior ordem na dita equação é

$$i \sum_{j=1}^{n} (\partial_{x_j} \Phi_{k_1}(x,t))^2,$$

pois $k_0 + k_1 \ge 2k_1 - 2$, implica $2k_0 + 2 \ge k_1$. Pela condição (2.7), temos que

$$\Phi_{k_1}(x,t) = \sum_{j=1}^{n} a_j(t) x_j^{k_1},$$

onde $a_j = a_\alpha$, com $\alpha = k_1 e_j$ para todo $j \in \{1, 2, ..., n\}$. Daí,

$$i \sum_{j=1}^{n} (\partial_{x_j} \Phi_{k_1}(x,t))^2 = i k_1^2 \sum_{j=1}^{n} a_j^2(t)\, x_j^{2(k_1-1)}$$

Pela igualdade de polinômios na equação (2.3), obtemos que $a_j = 0$, para todo $j \in \{1, 2, ..., n\}$, então $a_\alpha = 0$, quando $|\alpha| = k_1$ o que é um absurdo, pois k_1 é o grau de Φ. Portanto, o grau de Φ é no máximo $k_0 + 2$. □

Assumindo o Lema 2.1.1 apresentaremos um método para construir funções de fase. Como Φ é uma função de fase para a equação (2.3), obtemos o sistema de edo's a seguir:

$$\begin{cases} 2a_2(t) + ia_1^2(t) - \lambda_0(t)a_0'(t) = 0, & (x^0) \\ 6a_3(t) + 4ia_2(t)a_1(t) - \lambda_0(t)a_1'(t) - \lambda_1(t)a_0'(t) = 0, & (x^1) \\ 12a_4(t) + 4ia_2^2(t) + 6ia_3(t)a_1(t) - \displaystyle\sum_{j=0}^{2} \lambda_j(t)a_{2-j}'(t) = 0, & (x^2) \\ 30a_5(t) + 8ia_4(t)a_1(t) + 12ia_3(t)a_2(t) - \displaystyle\sum_{j=0}^{3} \lambda_j(t)a_{3-j}'(t) = 0, & (x^3) \\ \vdots & \\ (2l+3)(2l+2)a_{2l+3}(t) + i \displaystyle\sum_{j=1,\, s\neq j,}^{k_0+1} \sum_{j+s=2l+3} jsa_j(t)a_s(t) - \sum_{j=0}^{2l+1} \lambda_j(t)a_{2l+1-j}'(t) = 0, & (x^{2l+1}) \\ \text{onde } l \in \mathbb{N} \text{ e } 2l+1 \leq k_0, & \\ (2l+2)(2l+1)a_{2l+2}(t) + i(l+1)^2 a_{l+1}^2(t) + i \displaystyle\sum_{j=1,\, s\neq j,}^{k_0+1} \sum_{j+s=2l+2} jsa_j(t)a_s(t) & \\ - \displaystyle\sum_{j=0}^{2l} \lambda_j(t)a_{2l+1-j}'(t) = 0, \;\; \text{com } l \in \mathbb{N} \text{ e } 2l \leq k_0, & (x^{2l}) \\ \vdots & \\ (k_0+2)(k_0+1)ia_{k_0+2}(t)a_{k_0+1}(t) - \lambda_{k_0-1}(t)a_{k_0+2}'(t) - \lambda_{k_0}(t)a_{k_0+1}'(t) = 0, & (x^{2k_0+1}) \\ (k_0+2)^2 ia_{k_0+2}^2(t) - \lambda_{k_0}(t)a_{k_0+2}'(t) = 0, & (x^{2k_0+2}) \end{cases}$$

O sistema formado pelas equações (x^{k_0+1}), (x^{k_0+2}), ..., (x^{2k_0+2}) é desacoplado no sentido que podemos obter a função a_{k_0+2} da equação (x^{2k_0+2}); logo resolvemos a equação (x^{2k_0+1}) e determinamos o coeficiente a_{k_0+1}; podemos repetir o argumento até obter a_1 da equação (x^{k_0+1}). Por outro lado, o coeficiente a_0 é determinada pela equação (x^0), pois a_1 e a_2 são conhecidos. Finalmente ao substituir as funções coeficientes a_0, a_1, ..., a_{k_0+2} nas equações (x^1), (x^2), ..., (x^{k_0}) obtemos um sistema de k_0 equações; as ditas equações serão chamadas de equações de compatibilidade. O sistema (x^{k_0+1}) ..., (x^{2k_0+2}) será então

$$\begin{cases} F_1(a_1(t_0),\ldots,a_{k_0+2}(t_0),t,\lambda_0(t),\ldots,\lambda_{k_0}(t))=0,\\ F_2(a_1(t_0),\ldots,a_{k_0+2}(t_0),t,\lambda_0(t),\ldots,\lambda_{k_0}(t))=0,\\ \vdots \\ F_{k_0}(a_1(t_0),\ldots,a_{k_0+2}(t_0),t,\lambda_0(t),\ldots,\lambda_{k_0}(t))=0.\end{cases}$$

que deve ser satisfeito com as escolhas corretas dos dados iniciais $a_j(t_0)$. Com o objetivo exibir os detalhes do método tomaremos $k_0 = 0$ para n qualquer e $k_0 \in \{1, 2\}$ para $n = 1$.

Caso 1: Para o caso que o grau de Λ é 0, pelo Lema 2.1.1, segue que a função de fase Φ tem grau no máximo 2. Agora vamos introduzir a notação $a_j = a_\alpha$, quando $\alpha = e_j$, e $a_{j,j} = a_\alpha$, se $\alpha = 2e_j$, para $j \in \{1, 2, ..., n\}$. Daí, os termos homogêneos de Φ podem ser escritos como:

$$\Phi_0(x,t) = a_0(t),\ \ \Phi_1(x,t) = \sum_{j=1}^{n} a_j(t)x_j \text{ e } \Phi_2(x,t) = \sum_{j=1}^{n} a_{j,j}(t)x_j^2.$$

A seguir apresentamos a forma explícita de tais funções de fase

Lema 2.1.2 *Sejam $\Lambda(x,t) = \lambda_0(t)$, com $\lambda_0(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e Φ uma solução polinomial em x da equação de fase (2.3). Então as funções coeficientes de Φ são determinadas por:*

$$\begin{aligned} a_{j,j}(t) &= \frac{a_{j,j}(t_0)}{1-4ia_{j,j}(t_0)T_{\lambda_0}(1)},\ j \in \{1,2,...,n\}\\ a_j(t) &= a_j(t_0)exp\left[4iT_{\lambda_0}(a_{j,j})\right],\ j \in \{1,2,...,n\}\\ a_0(t) &= a_0(t_0) + 2\sum_{j=1}^{n} T_{\lambda_0}(a_{j,j}) + i\sum_{j=1}^{n} T_{\lambda_0}(a_j^2),\end{aligned}$$

com $a_0(t_0)$, $a_j(t_0)$, $a_{j,j}(t_0) \in \mathbb{C}$ e supomos que $1/(4ia_{j,j}(t_0)) \notin Im(T_{\lambda_0}(1))$, que será o caso se $\Re(a_{j,j}(t_0)) \neq 0$; para $j \in \{1, 2, ..., n\}$. Aqui T_{λ_0} é dado por (2.6).

Demonstração. Como Φ é solução polinomial em x da equação de fase (2.3), segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta_x\Phi(x,t) + i\sum_{j=1}^{n}(\partial_{x_j}\Phi(x,t))^2 - \lambda_0(t)\partial_t\Phi(x,t)\\ &= \left[2\sum_{j=1}^{n} a_{j,j}(t) + i\sum_{j=1}^{n} a_j^2(t) - \lambda_0(t)a_0'(t)\right]\end{aligned}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \left(4ia_k(t)a_{k,k}(t) - \lambda_0(t)a_k'(t)\right) x_k$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} \left(4ia_{k,k}^2(t) - \lambda_0(t)a_{k,k}'(t)\right) x_k^2.$$

Daí, temos o seguinte sistema de edo's:

$$\begin{cases} 2\sum_{j=1}^{n} a_{j,j}(t) + i\sum_{j=1}^{n} a_j^2(t) - \lambda_0(t)a_0'(t) = 0, & (2.8) \\ 4ia_k(t)a_{k,k}(t) - \lambda_0(t)a_k'(t) = 0, \ k \in \{1,2,...,n\}, & (2.9) \\ 4ia_{k,k}^2(t) - \lambda_0(t)a_{k,k}'(t) = 0, \ k \in \{1,2,...,n\}. & (2.10) \end{cases}$$

A função a_0 é determinada por (2.8); logo, nos restringiremos a (2.9) e (2.10). Por (2.10) temos que

$$\left(-\frac{1}{a_{k,k}(t)}\right)' = \frac{4i}{\lambda_0(t)}.$$

Daí, segue que

$$-\frac{1}{a_{k,k}(t)} + \frac{1}{a_{k,k}(t_0)} = 4i\int_{t_0}^{t} \frac{1}{\lambda_0(r)} dr.$$

Portanto,

$$a_{k,k}(t) = \frac{a_{k,k}(t_0)}{1 - 4ia_{k,k}(t_0)T_{\lambda_0}(1)}. \tag{2.11}$$

Como $\Re(a_{k,k}(t_0)) \neq 0$, então a função $a_{k,k}$ dada por (2.31) é bem definida em $\mathbb{R}$, para todo $k \in \{1,2,...,n\}$. Pela equação (2.9), tem-se que

$$\frac{a_k'(t)}{a_k(t)} = \frac{4ia_{k,k}(t)}{\lambda_0(t)}.$$

Portanto,

$$a_k(t) = a_k(t_0)exp\left[4iT_{\lambda_0}(a_{k,k})\right], \tag{2.12}$$

é bem definida em $\mathbb{R}$, para todo $k \in \{1,2,...,n\}$. Consequentemente,

$$a_0(t) = a_0(t_0) + 2\sum_{j=1}^{n} T_{\lambda_0}(a_{j,j}) + i\sum_{j=1}^{n} T_{\lambda_0}(a_j^2). \tag{2.13}$$

$\square$

Observação 2.1.1 *Tendo em vista* (2.11), *se* $a_{k,k}(t_0) = 0$ *para todo* $k \in \{1,2,...,n\}$, *obtemos* *que* $a_{k,k} = 0$, *para todo* $k \in \{1, 2, ..., n\}$. *Neste caso, segue que* $a_k(t) = a_k(t_0)$, *para todo* $t \in \mathbb{R}$, *para todo* $k \in \{1, 2, ..., n\}$. *Consequentemente, temos*

$$a_0(t) = a_0(t_0) + i\sum_{j=1}^{n} a_j^2(t_0)T_{\lambda_0}(1).$$

Portanto,

$$\Phi(x,t) = a_0(t_0) + i\sum_{j=1}^{n} a_j^2(t_0)T_{\lambda_0}(1) + \sum_{j=1}^{n} a_j(t_0)x_j, \tag{2.14}$$

é solução da equação de fase (2.3). *Recuperando portanto o caso* $\lambda_0(t) = 1$ *em* (1.27).

Caso 2: Se a função Λ é afim em x, ou seja,

$$\Lambda(x,t) = \lambda_0(t) + \lambda_1(t)x,$$

com λ_0 e λ_1 não nulas, verificando

$$E(c_1, c_2, c_3, t, \lambda_0(t), \lambda_1(t)) = 0,$$

onde a equação acima, para algum $(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{C}^3$, será explicitada na demonstração do Lema 2.1.3, obtemos que

Lema 2.1.3 *Seja* Λ *como acima e* Φ *uma solução polinomial em* x *da equação de fase* (2.3). *Então as funções coeficientes de* Φ *são determinadas por:*

$$\begin{aligned}
a_3(t) &= \frac{a_3(t_0)}{1 - 9ia_3(t_0)T_{\lambda_1}(1)},\\
a_2(t) &= \left\{9i\int_{t_0}^{t} \frac{a_3^2(r)\lambda_0(r)}{\lambda_1^2(r)} \exp[-12iT_{\lambda_1}(a_3)]dr + a_2(t_0)\right\}\exp[12iT_{\lambda_1}(a_3)],\\
a_1(t) &= \left\{\int_{t_0}^{t}\left[-\frac{9ia_3^2(r)\lambda_0^2(r)}{\lambda_1^3(r)} + \frac{12ia_2(r)a_3(r)\lambda_0(r)}{\lambda_1^2(r)} - \frac{4ia_2^2(r)}{\lambda_1(r)}\right]\exp[-6iT_{\lambda_1}(a_3)]dr\right.\\
&\quad \left. + a_2(t_0)\right\}\exp[6iT_{\lambda_1}(a_3)],\\
a_0(t) &= a_0(t_0) + 2T_{\lambda_0}(a_2) + iT_{\lambda_0}(a_1^2),
\end{aligned}$$

com $a_0(t_0) \in \mathbb{C}$, $\Re(a_3(t_0)) \neq 0$ *e* $a_j(t_0) = c_j$, *para todo* $j \in \{1, 2, 3\}$.

Demonstração. Como Φ é solução polinomial em x da equação de fase (2.3), segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_{xx}\Phi(x,t) + i(\partial_x\Phi(x,t))^2 - \Lambda(x,t)\partial_t\Phi(x,t) \\ &= ia_1^2(t) + 2a_2(t_0) - \lambda_0(t)a_0' + (4ia_1(t)a_2(t_0) + 6a_3(t) - \lambda_1(t)a_0'(t) - \lambda_0(t)a_1'(t))\,x + \\ &\quad \left(4ia_2^2(t_0) + 6ia_1(t)a_3(t) - \lambda_1(t)a_1'(t) - \lambda_0(t)a_2'(t)\right)x^2 + \\ &\quad (12ia_2(t)a_3(t) - \lambda_1(t)a_2'(t) - \lambda_0(t)a_3'(t))\,x^3 + \left(9ia_3^2(t) - \lambda_1(t)a_3'(t)\right)x^4. \end{aligned}$$

Daí, temos o seguinte sistema de edo's:

$$\begin{cases} ia_1^2(t) + 2a_2(t_0) - \lambda_0(t)a_0' = 0, & (2.15) \\ 4ia_1(t)a_2(t_0) + 6a_3(t) - \lambda_1(t)a_0'(t) - \lambda_0(t)a_1'(t) = 0, & (2.16) \\ 4ia_2^2(t_0) + 6ia_1(t)a_3(t) - \lambda_1(t)a_1'(t) - \lambda_0(t)a_2'(t) = 0, & (2.17) \\ 12ia_2(t)a_3(t) - \lambda_1(t)a_2'(t) - \lambda_0(t)a_3'(t) = 0, & (2.18) \\ 9ia_3^2(t) - \lambda_1(t)a_3'(t) = 0, & (2.19) \end{cases}$$

A função a_0 é determinada por (2.15), logo nos restringiremos a (2.16)- (2.19). Por (2.19) temos que

$$a_3(t) = \frac{a_3(t_0)}{1 - 9ia_3(t_0)T_{\lambda_1}(1)}. \tag{2.20}$$

Como $\Re(a_3(t_0)) \neq 0$, segue que a_3 é bem definida em $\mathbb{R}$. A equação (2.18) é linear para a_2; logo temos que

$$a_2(t) = \left\{9i\int_{t_0}^{t} \frac{a_3^2(r)\lambda_0(r)}{\lambda_1^2(r)} \exp[-12iT_{\lambda_1}(a_3)]dr + a_2(t_0)\right\} \exp[12iT_{\lambda_1}(a_3)]. \tag{2.21}$$

Como (2.17) é linear para a_1, obtemos que

$$\begin{aligned} a_1(t) &= \left\{\int_{t_0}^{t} \left[-\frac{9ia_3^2(r)\lambda_0^2(r)}{\lambda_1^3(r)} + \frac{12ia_2(r)a_3(r)\lambda_0(r)}{\lambda_1^2(r)} - \frac{4ia_2^2(r)}{\lambda_1(r)}\right] \exp[-6iT_{\lambda_1}(a_3)]dr \right. \\ &\quad \left. + a_2(t_0)\right\} \exp[6iT_{\lambda_1}(a_3)]. \end{aligned} \tag{2.22}$$

A equação (2.16) é considerada como uma equação de compatibilidade; multiplicando tal equação por $\lambda_0(t)\lambda_1^3(t)$, temos que

$$-9ia_3^2(t)\lambda_0^4(t) + 12ia_2(t)a_3(t)\lambda_0^3(t)\lambda_1(t) - [4ia_2^2(t) + 6ia_1(t)a_3(t)]\lambda_0^2(t)\lambda_1^2(t)$$

$$+[4ia_1(t)a_2(t)+6a_3(t)]\lambda_0(t)\lambda_1^3(t)-[ia_1^2(t)+2a_2(t)]\lambda_1^4(t)=0. \tag{2.23}$$

Substituindo a_1, a_2 e a_3 em (2.23); obtemos a forma explicita da equação

$$E(c_1,c_2,c_3,t,\lambda_0(t),\lambda_1(t))=0.$$

Finalmente,

$$a_0(t)=a_0(t_0)+2T_{\lambda_0}(a_2)+iT_{\lambda_0}(a_1^2).$$

□

Observação 2.1.2 *Tendo em vista (2.20), se $a_3(t_0)=0$, segue que $a_3=0$. Neste caso, temos que $a_2(t)=a_2(t_0)$; logo obtemos que $a_1(t)=4ia_2^2(t_0)T_{\lambda_1}(1)$. Consequentemente,*

$$a_0(t)=a_0(t_0)+2a_2(t_0)T_{\lambda_0}(1)+iT_{\lambda_0}(a_1^2).$$

Por outro lado,

$$E(c_1,c_2,0,t,\lambda_0(t),\lambda_1(t))=-4ic_2^2\lambda_0^2(t)+[4ic_1c_2\lambda_1(t)-16c_2^3\lambda_1(t)T_{\lambda_1}(1)]\lambda_0(t)-(ic_1^2+2c_2)\lambda_1^2(t)$$
$$+8c_1c_2^2\lambda_1^2(t)T_{\lambda_1}(1)+16ic_2^4\lambda_1^2(t)\left(T_{\lambda_1}(1)\right)^2.$$

Além disso, como $E(c_1,c_2,0,t,\lambda_0(t),\lambda_1(t))=0$ é uma equação de segundo grau para λ_0, podemos determinar as soluções de tal equação por

$$\lambda_0(t)=\left(\frac{c_1\pm\sqrt{2ic_2}}{2c_2}\right)\lambda_1(t)+2ic_2\lambda_1(t)T_{\lambda_1}(1).$$

Note que: se $\Re(c_1)=\Re(c_2)=0$, $\Im(c_2)>0$ e λ_1 tem valores reais, então λ_0 também tem valores reais.

Caso 3: Se a função Λ é quadrática em x, ou seja,

$$\Lambda(x,t)=\lambda_0(t)+\lambda_1(t)x+\lambda_2(t)x^2,$$

com λ_0 e λ_2 não nulas; verificando

$$E_1(c_1, c_2, c_3, c_4, t, \lambda_0(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t)) = 0,$$

e

$$E_2(c_1, c_2, c_3, c_4, t, \lambda_0(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t)) = 0,$$

onde as equações acima, para algum $(c_1, c_2, c_3, c_4) \in \mathbb{C}^4$, são explicitadas na demonstração do Lema 2.1.4; obtemos que

Lema 2.1.4 *Seja Λ como acima e Φ uma solução polinomial em x da equação de fase* (2.3). *Então as funções coeficientes de Φ são determinadas por:*

$$\begin{aligned}
a_4(t) &= \frac{a_4(t_0)}{1 - 16ia_4(t_0)T_{\lambda_2}(1)}, \\
a_3(t) &= \left\{16i \int_{t_0}^{t} \frac{a_4^2(r)\lambda_1(r)}{\lambda_2^2(r)} \exp[-24iT_{\lambda_2}(a_3\, a_4)]dr + a_3(t_0)\right\} \exp[24iT_{\lambda_2}(a_3\, a_4)], \\
a_2(t) &= \left\{i \int_{t_0}^{t} \left[-\frac{16a_4^2(r)\lambda_1^2(r)}{\lambda_2^3(r)} + \frac{16a_4^2(r)\lambda_0(r)}{\lambda_2^2(r)} + \frac{24a_3(r)a_4(r)\lambda_1(r)}{\lambda_2^2(r)} - \frac{9a_3^2(r)}{\lambda_2(r)}\right] \exp[-24iT_{\lambda_2}(a_3\, a_4)]dr \right. \\
&\quad \left. + a_2(t_0)\right\} \exp[24iT_{\lambda_2}(a_3\, a_4)], \\
a_1(t) &= \left\{i \int_{t_0}^{t} \left[\frac{16a_4^2(r)\lambda_1^3(r)}{\lambda_2^4(r)} - \frac{32a_4^2(r)\lambda_0(r)\lambda_1(r)}{\lambda_2^3(r)} - \frac{24a_3(r)a_4(r)\lambda_1^2(r)}{\lambda_2^3(r)} + \frac{24a_3(r)a_4(r)\lambda_0(r)}{\lambda_2^2(r)} \right.\right. \\
&\quad \left. + \frac{9a_3(r)a_4^2(r)\lambda_1(r)}{\lambda_2^2(r)} + \frac{16a_2(r)a_4(r)\lambda_1(r)}{\lambda_2^2(r)} - \frac{12a_2(r)a_3(r)}{\lambda_2(r)}\right] \exp[-8iT_{\lambda_2}(a_1\, a_4)]dr \\
&\quad \left. + a_1(t_0)\right\} \exp[8iT_{\lambda_2}(a_1\, a_4)], \\
a_0(t) &= a_0(t_0) + 2T_{\lambda_0}(a_2) + iT_{\lambda_0}(a_1^2),
\end{aligned}$$

com $a_0(t_0) \in \mathbb{C}$, $\Re(a_4(t_0)) \neq 0$ e $a_j(t_0) = c_j$, para $j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Demonstração. Como Φ é solução polinomial em x da equação de fase (2.3), segue que

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_{xx}\Phi(x,t) + i(\partial_x\Phi(x,t))^2 - \Lambda(x,t)\partial_t\Phi(x,t) \\
&= ia_1^2(t) + 2a_2(t) - \lambda_0(t)a_0' + (6a_3(t) + 4ia_1(t)a_2(t) - \lambda_1(t)a_0'(t) - \lambda_0(t)a_1'(t))\, x \;+ \\
&\quad \left(6ia_3(t)a_1(t) + 4ia_2^2(t) - \lambda_2(t)a_0'(t) - \lambda_1(t)a_1'(t) - \lambda_0(t)a_2'(t)\right) x^2 + \\
&\quad (12ia_3(t)a_2(t) + 8ia_1(t)a_4(t) - \lambda_2(t)a_1'(t) - \lambda_1(t)a_2'(t) - \lambda_0(t)a_3'(t))\, x^3 + \\
&\quad \left(9ia_3(t)^2 + 16ia_2(t)a_4(t) - \lambda_2(t)a_2'(t) - \lambda_1(t)a_3'(t) - \lambda_0(t)a_4'(t)\right) x^4 \;+
\end{aligned}$$

$$(24ia_3(t)a_4(t) - \lambda_2(t)a_3'(t) - \lambda_1(t)a_4'(t))\,x^5 + \left(16ia_4^2(t) - \lambda_2(t)a_4'(t)\right)x^6.$$

Daí, temos o seguinte sistema de edo's:

$$\begin{cases} ia_1^2(t) + 2a_2(t) - \lambda_0(t)a_0' = 0, & (2.24)\\ 6a_3(t) + 4ia_1(t)a_2(t) - \lambda_1(t)a_0'(t) - \lambda_0(t)a_1'(t) = 0, & (2.25)\\ 6ia_3(t)a_1(t) + 4ia_2^2(t) - \lambda_2(t)a_0'(t) - \lambda_1(t)a_1'(t) - \lambda_0(t)a_2'(t) = 0, & (2.26)\\ 12ia_3(t)a_2(t) + 8ia_1(t)a_4(t) - \lambda_2(t)a_1'(t) - \lambda_1(t)a_2'(t) - \lambda_0(t)a_3'(t) = 0, & (2.27)\\ 9ia_3(t)^2 + 16ia_2(t)a_4(t) - \lambda_2(t)a_2'(t) - \lambda_1(t)a_3'(t) - \lambda_0(t)a_4'(t) = 0, & (2.28)\\ 24ia_3(t)a_4(t) - \lambda_2(t)a_3'(t) - \lambda_1(t)a_4'(t) = 0, & (2.29)\\ 16ia_4^2(t) - \lambda_2(t)a_4'(t) = 0. & (2.30) \end{cases}$$

A função a_0 é determinada por (2.24), logo nos restringiremos a (2.25)- (2.30). Por (2.30) temos que

$$a_4(t) = \frac{a_4(t_0)}{1 - 16ia_4(t_0)T_{\lambda_2}(1)}. \tag{2.31}$$

Como $Re(a_4(t_0)) \neq 0$, segue que b_4 é bem definida em $\mathbb{R}$. A equação 2.29 é linear para a_3; logo temos que

$$a_3(t) = \left\{16i\int_{t_0}^{t} \frac{a_4^2(r)\lambda_1(r)}{\lambda_2^2(r)} \exp[-24iT_{\lambda_2}(a_3\, a_4)]dr + a_3(t_0)\right\} \exp[24iT_{\lambda_2}(a_3\, a_4)]. \tag{2.32}$$

Como (2.28) é linear para a_2, obtemos que

$$\begin{aligned} a_2(t) \;=\; & \left\{ i\int_{t_0}^{t} \left[-\frac{16a_4^2(r)\lambda_1^2(r)}{\lambda_2^3(r)} + \frac{16a_4^2(r)\lambda_0(r)}{\lambda_2^2(r)} + \frac{24a_3(r)a_4(r)\lambda_1(r)}{\lambda_2^2(r)} \right.\right.\\ & \left.\left. -\frac{9a_3^2(r)}{\lambda_2(r)} \right] \exp[-24iT_{\lambda_2}(a_3\, a_4)]dr + a_2(t_0) \right\} \exp[24iT_{\lambda_2}(a_3\, a_4)]. \end{aligned} \tag{2.33}$$

A equação (2.27) é linear para a_1; logo segue que

$$\begin{aligned} a_1(t) \;=\; & \left\{ i\int_{t_0}^{t} \left[\frac{16a_4^2(r)\lambda_1^3(r)}{\lambda_2^4(r)} - \frac{32a_4^2(r)\lambda_0(r)\lambda_1(r)}{\lambda_2^3(r)} - \frac{24a_3(r)a_4(r)\lambda_1^2(r)}{\lambda_2^3(r)} + \frac{24a_3(r)a_4(r)\lambda_0(r)}{\lambda_2^2(r)} \right.\right.\\ & \left. + \frac{9a_3(r)a_4^2(r)\lambda_1(r)}{\lambda_2^2(r)} + \frac{16a_2(r)a_4(r)\lambda_1(r)}{\lambda_2^2(r)} - \frac{12a_2(r)a_3(r)}{\lambda_2(r)} \right] \exp[-8iT_{\lambda_2}(a_1\, a_4)]dr \\ & \left. + a_1(t_0) \right\} \exp[8iT_{\lambda_2}(a_1\, a_4)]. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Como a_4, a_3, a_2 e a_1 já foram determinados e a_0 será determinada por (2.24), então as equações (2.25) e (2.26) são consideradas como equações de compatibilidade. Multiplicando a equação (2.25) por $\lambda_0(t)\lambda_2^4(t)$; temos que

$$\begin{aligned}
&16a_4^2(t)\lambda_0(t)\lambda_1^4(t) - 48ia_4^2(t)\lambda_0^2(t)\lambda_1^2(t)\lambda_2(t) - 24ia_3(t)a_4(t)\lambda_0(t)\lambda_1^3(t)\lambda_2(t) + 16ia_4^2(t)\lambda_0^3(t)\lambda_2^2(t)\\
&+48ia_3(t)a_4(t)\lambda_0^2(t)\lambda_1(t)\lambda_2^2(t) + 9ia_3^2(t)\lambda_0(t)\lambda_1^2(t)\lambda_2^2(t) + 16ia_2(t)a_4(t)\lambda_0(t)\lambda_1^2(t)\lambda_2^2(t)\\
&-9ia_3^2(t)\lambda_0^2(t)\lambda_2^3(t) + 16ia_2(t)a_4(t)\lambda_0^2(t)\lambda_2^3(t) - 12ia_2(t)a_3(t)\lambda_0(t)\lambda_1(t)\lambda_2^3(t)\\
&-8ia_1(t)a_4(t)\lambda_0(t)\lambda_1(t)\lambda_2^3(t) + 4ia_2^2(t)\lambda_0(t)\lambda_2^4(t) - 8ia_1(t)a_4(t)\lambda_0(t)\lambda_1(t)\lambda_2^3(t)\\
&+6ia_1(t)a_3(t)\lambda_0(t)\lambda_2^4(t) + 12a_4(t)\lambda_0(t)\lambda_2^4(t) - ia_1^2(t)\lambda_2^5(t) - 2a_2(t)\lambda_2^5(t) = 0.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Por outro lado, se multiplicamos a equação de compatibilidade (2.26) por $\lambda_0(t)\lambda_2^4(t)$; segue que

$$\begin{aligned}
&16ia_4^2(t)\lambda_0^2(t)\lambda_1^3(t) - 32ia_4^2(t)\lambda_0^3(t)\lambda_1(t)\lambda_2(t) - 24ia_3(t)a_4(t)\lambda_0^2(t)\lambda_1^2(t)\lambda_2(t)\\
&+24ia_3(t)a_4(t)\lambda_0^3(t)\lambda_2^2(t) + 9ia_3^2(t)\lambda_0^2(t)\lambda_1(t)\lambda_2^2(t) + 16ia_2(t)a_4(t)\lambda_0^2(t)\lambda_1(t)\lambda_2^2(t)\\
&+12ia_2(t)a_3(t)\lambda_0^2(t)\lambda_2^3(t) - 8ia_1(t)a_4(t)\lambda_0^2(t)\lambda_2^3(t) + 4ia_1(t)a_2(t)\lambda_0(t)\lambda_2^4(t)\\
&+6a_3(t)\lambda_0(t)\lambda_2^4(t) - ia_1^2(t)\lambda_1(t)\lambda_2^4(t) - 2a_2(t)\lambda_1(t)\lambda_2^4(t) = 0.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Agora substituindo a_1, a_2, a_3 e a_4 em (2.35) e (2.36); obtemos a forma explicita das equações

$$E_1(c_1, c_2, c_3, c_4, t, \lambda_0(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t)) = 0 \text{ e } E_2(c_1, c_2, c_3, c_4, t, \lambda_0(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t)) = 0,$$

respectivamente.

Finalmente, por (2.27), temos que

$$a_0(t) = a_0(t_0) + 2T_{\lambda_0}(a_2) + iT_{\lambda_0}(a_1^2).$$

□

Observação 2.1.3 *Tendo em vista* (2.31), *se* $a_4(t_0) = 0$, *temos que* $a_4 = 0$. *Neste caso, se* $\lambda_1 = 0$, *segue que* $a_3(t) = a_3(t_0)$; *logo obtemos que* $a_2(t) = a_2(t_0) + 9ia_3(t_0)T_{\lambda_2}(1)$ *e* $a_1(t) =$

$a_0(t_0) + 12ia_0(t_0)T_{\lambda_2}(1)$. *Consequentemente,*

$$a_0(t) = a_0(t_0) + 2T_{\lambda_0}(a_2) + iT_{\lambda_0}(a_1^2).$$

Por outro lado,

$$E_1(c_1, c_2, c_3, 0, t, \lambda_0(t), 0, \lambda_2(t)) = \left(6ic_1c_3 + 4ic_2^2\right)\lambda_0(t)\lambda_2(t) - (ic_1^2 + 2c_2)\lambda_2^2(t) - 9ic_3^3\lambda_0^2(t)$$
$$- \left[144c_2c_3^2\lambda_0(t)\lambda_2(t) - (24c_1c_2c_3 + 18ic_3^2)\lambda_2^2(t)\right]T_{\lambda_2}(1) + [144ic_2^2c_3^2\lambda_2^2(t)$$
$$-324ic_3^4\lambda_0(t)\lambda_2(t)]\,(T_{\lambda_2}(1))^2 - [648ic_3^4\lambda_0(t)\lambda_2(t) + 2592c_2c_3^4\lambda_2^2(t)T_{\lambda_2}(1)]T_{\lambda_2}(T_{\lambda_2}(1))$$
$$-11664ic_3^6\lambda_2^2(t)\,(T_{\lambda_2}(T_{\lambda_2}(1)))^2 = 0,$$

e

$$E_2(c_1, c_2, c_3, 0, t, \lambda_0(t), 0, \lambda_2(t)) = [(6c_3 + 4ic_1c_2)\lambda_2(t) - 12ic_2c_3\lambda_0(t)]$$
$$-432ic_2c_3^3\lambda_2(t)\,(T_{\lambda_2}(1))^2 + \left(108\,c_3^3\lambda_0(t) - 36\,c_1\,c_3^2\lambda_2(t) - 48\,c_2^2\,c_3\lambda_2(t)\right)T_{\lambda_2}(1)$$
$$-432ic_2c_3^3\lambda_2(t)T_{\lambda_2}(T_{\lambda_2}(1)) + 3888c_3^5\lambda_2(t)T_{\lambda_2}(1)T_{\lambda_2}(T_{\lambda_2}(1)) = 0,$$

Além disso, se consideramos $\Re(c_2) = \Im(c_3) = 0$ *e* $\Re(c_3) \neq 0$ *na equação*

$$E_2(c_1, c_2, c_3, 0, t, \lambda_0(t), 0, \lambda_2(t)) = 0,$$

segue que

$$T_{\lambda_2}(T_{\lambda_2}(1)) = \frac{1}{-432\,\Re(c_3)^3\lambda_2(t)\,[\Im(c_2) + 9\,\Re(c_3)^2T_{\lambda_2}(1)]}\Big\{12\Im(c_2)\Re(c_3)\lambda_0(t) - 4c_1\Im(c_2)\lambda_2(t) +$$
$$6\,\Re(c_3)^3\lambda_2(t) + \left[108\,\Re(c_3)^3\lambda_0(t) - 36c_1\,\Re(c_3)^2\lambda_2(t) + 48\Im(c_2)^2\,\Re(c_3)\lambda_2(t)\right]T_{\lambda_2}(1)$$
$$+432\Im(c_2)\,\Re(c_3)^3\lambda_2(t)(T_{\lambda_2}(1))^2\Big\}. \tag{2.37}$$

Daí, pelas equações $E_1(c_1, c_2, c_3, 0, t, \lambda_0(t), 0, \lambda_2(t)) = 0$ *e* (2.37), *tem-se que*

$$\lambda_0(t) = -\frac{\lambda_2(t)}{16\,[\Im(c_2) + 9\,\Re(c_3)^2\,T_{\lambda_2}(1)]^4}\Big[8\Im(c_2)^3 + 9\,\Re(c_3)^2 + 216\Im(c_2)^2\,\Re(c_3)^2\,T_{\lambda_2}(1) +$$

$$1944\Im(c_2)\,\Re(c_3)^4\,(T_{\lambda_2}(1))^2 + 5832\,\Re(c_3)^6\,(T_{\lambda_2}(1))^3\Big] \tag{2.38}$$

Note que: se $\Re(c_3) = 0$ *em* (2.38)*; obtemos que* $\lambda_0(t) = -\lambda_2(t)/2\Im(c_2)$*. Neste caso, segue que* $-4c_1\Im(c_2)\lambda_2(t) = 0$*. Se* $\Im(c_2) \neq 0$*, temos que*

$$\Phi(x,t) = a_0(t_0) + 2i\Im(c_2)\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\lambda_0(r)}dr + i\Im(c_2)x^2, \tag{2.39}$$

é solução da equação de fase (2.3)*. Por outro lado, se* $\Im(c_2) = 0$*, então a função de fase* Φ *é constante.*

2.1.2 Soluções polinomiais para (2.4)

Consideremos a equação de fase (2.4) com Λ uma função polinomial em x de grau k_0. Digamos,

$$\Lambda(x,t) = \sum_{|\alpha|\leq k_0}\lambda_\alpha(t)x^\alpha,$$

onde λ_α é uma função real analítica para cada α com $0 \leq |\alpha| \leq k_0$ e verifica a condição de não anulamento nos termos de maior ordem, ou seja,

$$\lambda_\alpha \neq 0, \text{ se } \alpha = k_0\,e_j, \text{ para todo } j \in \{1,2,...,n\}. \tag{2.40}$$

Vamos estudar soluções polinomiais em x de grau k_1, $k_1 \geq 0$, para a equação de fase (2.4), verificando a condição (2.7), ou seja,

$$\Psi(x,t) = \sum_{|\alpha|\leq k_1} b_\beta(t)x^\beta,$$

tal que

$$b_\beta = 0, \text{ se } \beta \neq k_1\,e_j, \text{ para todo } j \in \{1,2,...,n\}.$$

Lema 2.1.5 *Se a equação de fase* (2.4) *admite uma solução polinomial em* x *de grau positivo verificando a condição* (2.7)*, quando* Λ *verifica a condição* (2.40)*. Então o grau de* Λ *é no máximo igual* 1*.*

Demonstração. Suponhamos que a equação de fase (2.4) admite uma solução polinomial em x de grau positivo verificando a condição (2.7), quando o grau de Λ é maior que 1. Seja Ψ tal solução da equação de fase (2.4), ou seja,

$$\Psi(x,t) = \sum_{|\beta| \leq k_1} b_\beta(t) x^\beta, \ \textit{com } k_1 > 0.$$

e a função Λ dada por

$$\Lambda(x,t) = \sum_{|\alpha| \leq k_0} \lambda_\alpha(t) x^\alpha, \ \textit{com } k_0 > 1.$$

Como Ψ é solução da equação de fase (2.4), segue que o termo de maior ordem na equação é

$$i\Lambda_{k_0}(x,t) \sum_{j=1}^{n} (\partial_{x_j} \Psi_{k_1}(x,t))^2,$$

o qual tem ordem $k_0 + 2k_1 - 2$. Pela condição (2.7), segue que

$$\Psi_{k_1}(x,t) = \sum_{j=1}^{n} b_j(t) x_j^{k_1},$$

onde $b_j = b_\beta$, com $\beta = k_1 e_j$ para todo $j \in \{1,2,...,n\}$. Daí,

$$i\Lambda_{k_0}(x,t) \sum_{j=1}^{n} (\partial_{x_j} \Phi_{k_1}(x,t))^2 = ik_1^2 \sum_{|\alpha| = k_0} \sum_{j=1}^{n} \lambda_\alpha(t)\, b_j^2(t)\, x^\alpha x_j^{2(k_1-1)};$$

o termo de ordem $k_0 + 2k_1 - 2$ em x_j é

$$ik_1^2 \lambda_\alpha(t) b_j^2(t) x_j^{k_0 + 2k_1 - 2},$$

com $\alpha = k_0 e_j$, para todo $j \in \{1,2,...,n\}$. Pela igualdade de polinômios na equação (2.4) e pela condição de não anulamento (2.40), segue que $b_j = 0$, para todo $j \in \{1,2,...,n\}$. Então $b_\beta = 0$, quando $|\beta| = k_1$, o que é um absurdo, pois k_1 é o grau de Φ. Portanto, o grau de Λ é no máximo 1. $\square$

Lema 2.1.6 *Se Λ é uma função polinomial em x de grau k_0, com $k_0 \in \{0,1\}$, verficando a condição de não anulamento* (2.40) *e Ψ é uma solução polinomial em x da equação de fase* (2.4) *verificando a condição de anulamento* (2.7)*. Então o grau de Ψ é no máximo $2 - k_0$.*

Demonstração. Suponhamos que o grau de Ψ seja maior que $2-k_0$, ou seja,

$$\Psi(x,t)=\sum_{|\alpha|\leq k_1} b_\alpha(t)x^\alpha,\ \ com\ k_1>2-k_0.$$

Como Ψ é solução da equação de fase (2.4), segue que o termo de maior grau na equação é

$$i\Lambda_{k_0}(x,t)\sum_{j=1}^{n}(\partial_{x_j}\Psi_{k_1}(x,t))^2,$$

o qual tem grau k_0+2k_1-2. Pela condição (2.7), segue que

$$\Psi_{k_1}(x,t)=\sum_{j=1}^{n} b_j(t)x_j^{k_1},$$

onde $b_j=b_\beta$, com $\beta=k_1e_j$ para todo $j\in\{1,2,...,n\}$. Daí, tem-se que

$$i\Lambda_{k_0}(x,t)\sum_{j=1}^{n}(\partial_{x_j}\Phi_{k_1}(x,t))^2=ik_1^2\sum_{|\alpha|=k_0}\sum_{j=1}^{n}\lambda_\alpha(t)\,b_j^2(t)\,x^\alpha x_j^{2(k_1-1)};$$

o termo de ordem k_0+2k_1-2 em x_j é

$$ik_1^2\lambda_\alpha(t)b_j^2(t)x_j^{k_0+2k_1-2},$$

com $\alpha=k_0\,e_j$, para todo $j\in\{1,2,...,n\}$. Pela igualdade de polinômios na equação (2.4) e pela condição de não anulamento (2.40), segue que $b_j=0$, para todo $j\in\{1,2,...,n\}$. Então $b_\beta=0$, quando $|\beta|=k_1$ o que é um absurdo, pois k_1 é o grau de Φ. Portanto, o grau de Ψ é no máximo $2-k_0$. □

A seguir apresentamos funções de fase para os casos $k_0=1$ e 2, com Ψ satisfazendo (2.7).

Caso 1. Se o grau de Λ é 0, então Ψ tem grau no máximo 2. Usaremos a notação $b_j=b_\alpha$, quando $\alpha=e_j$ e $b_{j,k}=b_\alpha$, se $\alpha=2e_j$, para $j\in\{1,2,...,n\}$. Daí, os termos homogêneos de Ψ são escritos como:

$$\Psi_0(x,t)=b_0(t),\quad \Psi_1(x,t)=\sum_{j=1}^{n} b_j(t)x_j\ \text{ e }\ \Psi_2(x,t)=\sum_{j=1}^{n} b_{j,j}(t)x_j^2.$$

Agora apresentamos a forma explícita de tais funções de fase

Lema 2.1.7 *Sejam $\Lambda(x,t)=\lambda_0(t)$ e Ψ uma solução polinomial em x da equação de fase (2.4). Então as funções coeficientes de Ψ são determinadas por:*

$$\begin{aligned}
b_{j,j}(t) &= \frac{b_{j,j}(t_0)}{1-4ib_{j,j}(t_0)\int_{t_0}^{t}\lambda_0(r)dr},\ j\in\{1,2,...,n\}\\
b_j(t) &= b_j(t_0)exp\left[4i\int_{t_0}^{t}\lambda_0(r)\,b_{j,j}(r)dr\right],\ j\in\{1,2,...,n\}\\
b_0(t) &= b_0(t_0)+2\sum_{j=1}^{n}\int_{t_0}^{t}\lambda_0(r)\,b_{j,j}(r)dr+i\sum_{j=1}^{n}\int_{t_0}^{t}\lambda_0(r)\,b_j^2(r)dr,
\end{aligned}$$

com $b_0(t_0)$, $b_j(t_0)$, $b_{j,j}(t_0)\in\mathbb{C}$ e $\Re(b_{j,j}(t_0))\neq 0$, para todo $j\in\{1,2,...,n\}$.

Demonstração. Como Ψ é solução polinomial em x da equação fase (2.4), segue que

$$\begin{aligned}
0 &= \lambda_0(t)\Delta_x\Psi(x,t)+i\lambda_0(t)\sum_{j=1}^{n}(\partial_{x_j}\Psi(x,t))^2-\partial_t\Psi(x,t)\\
&= \left[2\lambda_0(t)\sum_{j=1}^{n}b_{j,j}(t)+i\lambda_0(t)\sum_{j=1}^{n}b_j^2(t)-b_0'(t)\right]\\
&+ \sum_{k=1}^{n}\left(4i\lambda_0(t)\sum_{j=1}^{n}b_j(t)b_{j,k}(t)-b_k'(t)\right)x_k\\
&+ \sum_{k=1}^{n}\left(4i\lambda_0(t)b_{k,k}^2(t)-b_{k,k}'(t)\right)x_k^2.
\end{aligned}$$

Daí, temos o seguinte de sistema edo's:

$$\begin{cases}
2\lambda_0(t)\sum_{j=1}^{n}b_{j,j}(t)+i\lambda_0(t)\sum_{j=1}^{n}b_j^2(t)-b_0'(t)=0, & (2.41)\\
4i\lambda_0(t)\sum_{j=1}^{n}b_j(t)b_{j,k}(t)-b_k'(t)=0,\ k\in\{1,2,...,n\}, & (2.42)\\
4i\lambda_0(t)b_{k,k}^2(t)-b_{k,k}'(t)=0,\ k\in\{1,2,...,n\}, & (2.43)
\end{cases}$$

A função b_0 é determinada por (2.41), logo nos restringiremos a (2.42) e (2.43). Por (2.43) temos que

$$\left(-\frac{1}{b_{k,k}(t)}\right)'=4i\lambda_0(t).$$

Daí, segue que

$$-\frac{1}{b_{k,k}(t)}+\frac{1}{b_{k,k}(t_0)}=4i\int_{t_0}^{t}\lambda_0(r)dr.$$

Portanto,

$$b_{k,k}(t) = \frac{b_{k,k}(t_0)}{1 - 4ib_{k,k}(t_0)\int_{t_0}^{t}\lambda_0(r)dr}. \tag{2.44}$$

Como $\Re(b_{k,k}(t_0)) \neq 0$, então a função $b_{k,k}$ é bem definida em $\mathbb{R}$, para todo $k \in \{1, 2, ..., n\}$. Pela equação (2.42), obtemos que

$$\frac{b_k'(t)}{b_k(t)} = 4i\lambda_0(t)b_{k,k}(t)$$

Portanto,

$$b_k(t) = b_k(t_0)exp\left[4i\int_{t_0}^{t}\lambda_0(r)b_{k,k}(r)dr\right], \tag{2.45}$$

é bem definida em $\mathbb{R}$, para todo $k \in \{1, 2, ..., n\}$. Consequentemente,

$$b_0(t) = b_0(t_0) + 2\sum_{j=1}^{n}\int_{t_0}^{t}\lambda_0(r)b_{j,j}(r)dr + i\sum_{j=1}^{n}\int_{t_0}^{t}\lambda_0(r)b_j^2(r)dr. \tag{2.46}$$

$\square$

Observação 2.1.4 *Tendo em vista* (2.44)*, se* $b_{k,k}(t_0) = 0$ *para todo* $k \in \{1, 2, ..., n\}$*, obtemos que* $b_{k,k} = 0$*, para todo* $k \in \{1, 2, ..., n\}$*. Neste caso, segue que* $b_k(t) = b_k(t_0)$*, para todo* $t \in \mathbb{R}$*, para todo* $k \in \{1, 2, ..., n\}$*. Consequentemente, temos*

$$b_0(t) = b_0(t_0) + i\sum_{j=1}^{n}b_j^2(t_0)\int_{t_0}^{t}\lambda_0(r)dr.$$

Portanto,

$$\Psi(x,t) = b_0(t_0) + i\sum_{j=1}^{n}b_j^2(t_0)\int_{t_0}^{t}\lambda_0(r)dr + \sum_{j=1}^{n}b_j(t_0)x_j. \tag{2.47}$$

é solução da equação de fase (2.4)*. Recuperando portanto o caso* $\lambda_0(t) = 1$ *em* (1.27)*.*

Caso 2. Se o grau de Λ é 1, então Ψ tem grau no máximo 1. Fazendo $b_j = b_\alpha$, quando $\alpha = e_j$, para $j \in \{1, 2, ..., n\}$, então os termos homogêneos de Ψ são escritos como:

$$\Psi_0(x,t) = b_0(t) \text{ e } \Psi_1(x,t) = \sum_{j=1}^{n}b_j(t)x_j.$$

Agora apresentamos a forma explícita de tais funções de fase

Lema 2.1.8 *Sejam* Λ *uma função polinomial em* x *verificando a condição de não anulamento* (2.40) *e* Ψ *uma solução polinomial em* x *da equação de fase* (2.4) *verificando* (2.7)*. Então* *i) Se existe $j_0 \in \{1,2,...,n\}$, tal que $\lambda_j = \lambda_{j_0}$ e $b_j(t_0) = b_{j_0}(t_0)$, para todo $j \in \{1,2,...,n\}$, então*

$$b_j = b_{j_0}, \text{ para todo } j \in \{1,2,...,n\} \text{ e } b_{j_0}(t) = \frac{b_{j_0}(t_0)}{1 - ni\, b_{j_0}(t_0) \int_{t_0}^{t} \lambda_{j_0}(r)dr},$$

desde que $b_{j_0}(t_0) \in \mathbb{C}$ e $\Re(b_{j_0}(t_0)) \neq 0$.

ii) Se $\lambda_j = c_j$, com $c_j \in \mathbb{R}$, para todo $j \in \{1,2,...,n\}$ e existe $j_0 \in \{1,2,...,n\}$ tal que $b_j(t_0) = \dfrac{c_j}{c_{j_0}} b_{j_0}(t_0)$ então

$$b_j(t) = \frac{c_j}{c_{j_0}} b_{j_0}(t_0) \text{ e } b_{j_0}(t) = \frac{b_{j_0}(t_0)}{1 - i\, b_{j_0}(t_0) \dfrac{|c|^2}{c_{j_0}}(t - t_0)},$$

para todo para todo $j \in \{1,2,...,n\}$, com $b_{j_0}(t_0) \in \mathbb{C}$, $\Re(b_{j_0}(t_0)) \neq 0$ e $c = (c_1, c_2, ..., c_n)$.

Além disso, a função b_0 é dada por:

$$b_0(t) = b_0(t_0) + \sum_{j=1}^{n} \int_{t_0}^{t} b_j^2(r)\, \lambda_0(r)dr,$$

desde que $b_0(t_0) \in \mathbb{C}$.

Demonstração. Como Ψ é solução polinomial em x da equação de fase (2.4), segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \Lambda(x,t)\Delta_x\Psi(x,t) + i\Lambda(x,t)\sum_{j=1}^{n}(\partial_{x_j}\Psi(x,t))^2 - \partial_t\Psi(x,t) \\ &= \left(\lambda_0(t)\sum_{k=1}^{n} b_k^2(t) - b_0'(t)\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(i\lambda_j(t)\sum_{k=1}^{n} b_k^2(t) - b_j'(t)\right)x_j \end{aligned} \tag{2.48}$$

Daí, temos o seguinte sistema de edo's:

$$\begin{cases} \lambda_0(t)\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k^2(t) - b_0'(t) = 0, & (2.49) \\ i\lambda_j(t)\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k^2(t) - b_j'(t) = 0, \; j \in \{1,2,...,n\}. & (2.50) \end{cases}$$

A função b_0 é determinada por (2.49), logo nos restringiremos a (2.50).

i) Como $\lambda_j = \lambda_{j_0}$, para todo $j \in \{1, 2, ..., n\}$, pela equação (2.50) tem-se

$$b'_j(t) = \lambda_{j_0}(t) \sum_{k=1}^{n} b_k^2(t), \text{ para todo } j \in \{1, 2, ..., n\}. \tag{2.51}$$

Daí, segue que

$$b'_{j_1}(t) = b'_{j_2}(t), \text{ para todo } j_1,\, j_2 \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Como $b_j(t_0) = b_{j_0}(t_0)$, para todo $j \in \{1, 2, ..., n\}$, então $b_{j_1} = b_{j_2}$, para todo $j \in \{1, 2, ..., n\}$. Equivalentemente,

$$b_j = b_{j_0}, \text{ para todo } j \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Como $b_j = b_{j_0}$, para todo $j \in \{1, 2, ..., n\}$ e pela equação (2.51), segue que

$$b'_{j_0}(t) = n\, \lambda_{j_0}(t) b_{j_0}^2(t).$$

Consequentemente,

$$\left(-\frac{1}{b_{j_0}(t)}\right)' = ni\lambda_{j_0}(t).$$

Daí, segue que

$$-\frac{1}{b_{j_0}(t)} + \frac{1}{b_{j_0}(t_0)} = ni \int_{t_0}^{t} \lambda_{j_0}(r) dr.$$

Portanto,

$$b_{j_0}(t) = \frac{b_{j_0}(t_0)}{1 - ni b_{j_0}(t_0) \int_{t_0}^{t} \lambda_{j_0}(r) dr}\,. \tag{2.52}$$

Como $\Re(b_{j_0}(t_0)) > 0$, então a função b_{j_0} dada pela equação (2.52) é bem definida em $\mathbb{R}$.

ii) Como $\lambda_j = c_j$, com c_j constante, para todo $j \in \{1, 2, ..., n\}$, pela equação (2.50), tem-se

$$b'_j(t) = i\, c_j \sum_{k=1}^{n} b_k^2(t), \text{ para todo } j \in \{1, 2, , ..., n\}. \tag{2.53}$$

Como o grau de Λ é 1, então existe $j_0 \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que $c_{j_0} \neq 0$; logo,

$$b'_j(t) = \frac{c_j}{c_{j_0}} b'_{j_0}(t), \text{ para todo } j \in \{1, 2, , ..., n\}.$$

Como $b_j(t_0) = \frac{c_j}{c_{j_0}} b_{j_0}(t_0)$, para todo $j \in \{1, 2, ..., n\}$, segue que

$$b_j(t) = \frac{c_j}{c_{j_0}} b_{j_0}(t), \quad \textit{para todo } \; j \in \{1, 2, , ..., n\}. \tag{2.54}$$

Pelas equações (2.53) e (2.54), tem-se

$$b'_{j_0}(t) = i \, \frac{1}{c_{j_0}} \, b^2_{j_0}(t) \, |c|^2, \;\; \text{onde } \; c = (c_1, c_2, ..., c_n).$$

Logo,

$$\left(-\frac{1}{b_{j_0}(t)} \right)' = i \, \frac{1}{c_{j_0}} \, |c|^2.$$

Daí, segue que

$$-\frac{1}{b_{j_0}(t)} + \frac{1}{b_{j_0}(t_0)} = i \, \frac{|c|^2}{c_{j_0}} \, (t - t_0).$$

Portanto,

$$b_{j_0}(t) = \frac{b_{j_0}(t_0)}{1 - i \, b_{j_0}(t_0) \dfrac{|c|^2}{c_{j_0}} (t - t_0)} \, . \tag{2.55}$$

Como $\Re(b_{j_0}(t_0)) > 0$, então a função b_{j_0} dada por (2.55) é bem definida em $\mathbb{R}$. Finalmente pela equação (2.49), tem-se

$$b_0(t) = b_0(t_0) + \sum_{j=1}^{n} \int_{t_0}^{t} b^2_j(r) \, \lambda_0(r) dr \tag{2.56}$$

□

2.2 Soluções separáveis

Nesta seção procuraremos soluções exatas das equações de fase (2.3) e (2.4), quando Λ é multiplicativamente separável. Uma função nas variáveis x e t é multiplicativamente separável se ela é representada como

$$f(x, t) = f_0(x) f_1(t),$$

onde f_0 e f_1 são funções. Para esta seção consideraremos $(x, t) \in \mathbb{R}^2$.

Se Λ é multiplicativamente separável, digamos $\Lambda(x, t) = \lambda_0(t)\gamma(x)$ tal que

$$\gamma(x) = -\frac{1}{(x - c_0)^2} \frac{1}{\log(x - c_0) - c_1}, \tag{2.57}$$

onde $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ e Φ é uma função de fase multiplicativamente separável, ou seja, $\Phi(x,t) = \phi_0(t)\theta(x)$. Então as funções ϕ_0 e θ são determinadas de forma explícita a seguir

Lema 2.2.1 *Seja Λ como acima e Φ uma solução multiplicativamente separável da equação de fase* (2.3)*, então a função θ é dada por*

$$\theta(x) = -\log(x - d_0) + d_1,$$

desde que $d_0\,, d_1 \in \mathbb{R}$ e $d_j = c_j$, onde c_j é dada por (2.57)*, para todo $j \in \{0,1\}$ e a função ϕ_0 é solução da edo*

$$\phi_0(t) + i\phi_0^2(t) - \lambda_0(t)\phi_0'(t) = 0.$$

Demonstração. Como Φ é uma solução multiplicativamente separável de (2.3), segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_{xx}\Phi(x,t) + i(\partial_x\Phi(x,t))^2 - \Lambda(x,t)\partial_t\Phi(x,t) \\ &= \phi_0(t)\theta_{xx}(x) + i\phi_0^2(t)\theta_x^2(x) - \lambda_0(t)\phi'(t)\gamma(x)\theta(x). \end{aligned}$$

Daí, as funções $\lambda_0, \gamma, \phi_0$ e θ verificam a equação

$$\phi_0(t)\theta_{xx}(x) + i\phi_0^2(t)\theta_x^2(x) - \lambda_0(t)\phi'(t)\gamma(x)\theta(x) = 0. \tag{2.58}$$

Para escrever o lado esquerdo da equação (2.58) como uma função multiplicativamente separável estudaremos o seguinte sistema auxiliar de edo's:

$$\begin{cases} \theta_{xx}(x) = \gamma(x)\theta(x), & (2.59) \\ \theta_x^2(x) = \gamma(x)\theta(x). & (2.60) \end{cases}$$

Por (2.59), segue que $\theta_x(x) = \int_0^x \gamma(y)\theta(y)dy + \theta_0$, onde θ_0 é uma constante. Escolhendo $\theta_0 = 0$, segue que

$$\theta_x^2(x) = \left(\int_0^x \gamma(y)\theta(y)dy\right)^2. \tag{2.61}$$

Igualando o lado direito de (2.60) e (2.61), segue que $\gamma(x)\theta(x) = \left(\int_0^x \gamma(y)\theta(y)dy\right)^2$.
Ou seja, tomando $u = \gamma\,\theta$, segue que

$$u(x) = \left(\int_0^x u(y)dy\right)^2.$$

Daí, a função u verifica a edo

$$u'(x) = 2u^{\frac{3}{2}}(x),$$

uma solução para a edo acima é dada por

$$u(x) = \frac{1}{(x-d_0)^2}, \text{ quando } x \in (-\infty, d_0) \cup (d_0, +\infty),$$

onde d_0 é constante. Daí, o sistema (2.59)-(2.60) pode ser escrito como

$$\begin{cases} \theta_{xx}(x) = \dfrac{1}{(x-d_0)^2}, \\ \theta_x^2(x) = \dfrac{1}{(x-d_0)^2}. \end{cases}$$

A solução do último sistema é $\theta(x) = -\log(x-d_0) + d_1$, quando $x > d_0$ e d_1 é constante. Como $u = \gamma\theta$, segue que $\gamma = u/\theta$, ou seja,

$$\gamma(x) = -\frac{1}{(x-d_0)^2} \frac{1}{\log(x-d_0) - d_1}.$$

Como $d_j = c_j$, para $j \in \{0, 1\}$, então γ verifica a condição (2.57). Pela equação (2.58) e como $u = \gamma\theta = \theta_x^2 = \theta_{xx}$, segue que

$$\frac{1}{(x-d_0)^2} \left[\phi_0(t) + i\phi_0^2(t) - \lambda_0(t)\phi_0'(t)\right] = 0.$$

Portanto, ϕ_0 é solução da edo:

$$\phi_0(t) + i\phi_0^2(t) - \lambda_0(t)\phi_0'(t) = 0.$$

□

Agora consideraremos a função Λ como sendo $\Lambda(x,t) = \lambda_0(t)\eta(x)$ tal que

$$\eta(x) = \frac{-\log(x-c_0) - c_1}{(x-c_0)^2}, \tag{2.62}$$

onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ e Ψ é uma função de fase multiplicativamente separável, ou seja, $\Psi(x,t) = \psi_0(t)\theta(x)$. Então as funções ψ_0 e θ são determinadas de forma explícita no Lema a seguir

Lema 2.2.2 *Seja Λ como acima e Ψ uma solução multiplicativamente separável da equação de fase* (2.4)*, então a função θ é dada por*

$$\theta(x) = -\log(x - d_0) + d_1,$$

desde que $d_0\,, d_1 \in \mathbb{R}$ e $d_j = c_j$, onde c_j é dada por (2.62)*, para todo $j \in \{0,1\}$ e a função ψ_0 é solução da edo*

$$\lambda_0(t)\psi_0(t) + i\lambda_0(t)\psi_0^2(t) - \psi_0'(t) = 0.$$

Demonstração. Como Ψ é uma solução multiplicativamente separável de (2.3), segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \Lambda(x,t)\partial_{xx}\Psi(x,t) + i\Lambda(x,t)(\partial_x\Psi(x,t))^2 - \partial_t\Phi(x,t) \\ &= \lambda_0(t)\psi_0(t)\eta(x)\theta_{xx}(x) + i\lambda_0(t)\psi_0^2(t)\eta(x)\theta_x(x) - \psi_0'(t)\theta(x). \end{aligned}$$

Daí, as funções λ_0, η, ψ_0 e θ verificam a equação

$$\lambda_0(t)\psi_0(t)\eta(x)\theta_{xx}(x) + i\lambda_0(t)\psi_0^2(t)\eta\theta_x(x) - \psi_0'(t)\theta(x) = 0. \tag{2.63}$$

Para escrever o lado esquerdo da equação (2.63) como uma função multiplicativamente separável estudaremos o seguinte sistema auxiliar de edo's:

$$\begin{cases} \eta(x)\theta_{xx}(x) = \theta(x), & (2.64) \\ \eta(x)\theta_x^2(x) = \theta(x). & (2.65) \end{cases}$$

Por (2.64), segue que $\theta_x(x) = \int_0^x \theta(y)/\eta(y)dy + \theta_0$, onde θ_0 é uma constante. Escolhendo $\theta_0 = 0$, segue que

$$\theta_x^2(x) = \left(\int_0^x \theta(y)/\eta(y)dy\right)^2. \tag{2.66}$$

Pelas equações (2.65) e (2.66), segue que $\theta(x)/\eta(x) = \left(\int_0^x \frac{\theta(y)}{\eta(y)}dy\right)^2$.
Ou seja, tomando $u = \theta/\eta$, segue que

$$u(x) = \left(\int_0^x u(y)dy\right)^2.$$

Daí, a função u verifica a edo

$$u'(x) = 2u^{\frac{3}{2}}(x);$$

uma solução para a edo acima é dada por

$$u(x) = \frac{1}{(x-d_0)^2}, \text{ quando } x \in (-\infty, d_0) \cup (d_0, +\infty),$$

onde d_0 é constante. Daí, o sistema (2.64)-(2.65) pode ser escrito como

$$\begin{cases} \theta_{xx}(x) = \dfrac{1}{(x-d_0)^2}, \\ \theta_x^2(x) = \dfrac{1}{(x-d_0)^2}. \end{cases}$$

A solução do último sistema é $\theta(x) = -\log(x-d_0)+d_1$, quando $x > d_0$ e d_1 é constante. Como $u = \theta/\eta$, segue que $\eta = \theta u$, ou seja,

$$\eta(x) = \frac{-\log(x-d_0) - d_1}{(x-d_0)^2}.$$

Como $d_j = c_j$, para todo $j \in \{0,1\}$, então η verifica a condição (2.62). Pela equação (2.63) e como $\theta = \eta\theta_x^2 = \eta\theta_{xx}$, segue que

$$[-\log(x-d_0)+d_1]\left[\lambda_0(t)\psi_0(t) + i\lambda_0(t)\psi_0^2(t) - \psi_0'(t)\right] = 0.$$

Portanto, ψ_0 é solução da edo:

$$\lambda_0(t)\psi_0(t) + i\lambda_0(t)\psi_0^2(t) - \psi_0'(t) = 0.$$

□

Capítulo

3

Teoremas de não unicidade

Neste Capítulo mostramos que para o caso $k_0 = 0$ e λ_0 real analítica positiva a função de fase (2.14) permite estender o Teorema 1.0.1. Logo, provamos que para o caso λ_0 real analítica com $\Gamma(t) = \int_0^t \lambda_0(r)dr$ invertível a função de fase (2.47) também estende o Teorema de não unicidade de Hörmander. Na parte final do Capítulo explicamos brevemente por que as outras funções de fase obtidas no Capítulo 2 não permitem estender o Teorema 1.0.1.

Sejam $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $N^0 = -e_{n+1}$, consideraremos o hiperplano $\Sigma = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x,t) \cdot N^0 = 0\}$ e o semiplano $\Sigma^+ = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x,t) \cdot N^0 > 0\}$.

Teorema 3.0.1 *Seja $P = D_{x_1}^2 + D_{x_2}^2 + \cdots + D_{x_n}^2 + i\lambda_0(t)D_t$, com λ_0 uma função real analítica positiva, então existe uma função u em $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, tal que*

$$Pu = 0, \ \ em \ \ \mathbb{R}^{n+1} \tag{3.1}$$

$u = 0$ em Σ^+ e $0 \in S(u)$.

Para demonstrar o Teorema 3.0.1 nos basearemos nas ideias da demonstração do Teorema 1.0.1. Seguindo estas ideias procuramos como candidato da solução de (3.1) uma função da forma

$$u(x,t) = \int_{X_\tau} e^{i\Phi(x,t,s)} ds,$$

onde Φ é uma solução da equação de fase (2.3) e X_τ é uma curva em $\mathbb{C}$. Pela equação (2.14) tem-se que

$$\Phi(x,t) = c_0 + i(c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2)\gamma(t) + c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n,$$

onde $c_j = a_j(0)$, para todo $j \in \{0,1,2,\ldots,n\}$ e $\gamma(t) = \int_0^t \frac{1}{\lambda_0(r)}dr$, é uma solução da equação de fase (2.3). Agora consideramos a seguinte família de soluções, dependendo do parâmetro s, da equação de fase (2.3)

$$\Phi(x,t,s) = c_0(s) + i(c_1^2(s) + c_2^2(s) + \cdots + c_n^2(s))\gamma(t) + c_1(s)x_1 + c_2(s)x_2 + \cdots + c_n(s)x_n, \quad (3.2)$$

onde $c_j(s) = w_j\, s^{\rho_j}$, com $w_j \in \mathbb{C}^*$, $\rho_j \in \mathbb{R}$, s^{ρ_j} é o ramo da potência definida no conjunto $\mathbb{C} \setminus L_{-\pi}$, e $L_{-\pi} = \{te^{-i\pi} \,:\, t \geq 0\}$, para todo $j \in \{0,1,\ldots,n\}$.

Observação 3.0.1 *Como λ_0 é uma função positiva, então γ é uma função crescente.*

Agora apresentamos alguns lemas prévios que auxiliarão na demonstração do Teorema 3.0.1.

Lema 3.0.1 *Se $c_0(s) = i(-is)^{\rho_0}$, com $\rho_0 \in (1/2, 1)$ e $c_j(s) = \left(\dfrac{is}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$ para $j \in \{1,2,\ldots,n\}$, então a função*

$$u(x,t) = \int_{X_\tau} e^{i\Phi(x,t,s)}ds, \quad (3.3)$$

com $X_\tau = \{s = \eta + i\tau \,:\, \eta \in \mathbb{R}\}$, $\tau > 0$ é uma solução da equação (3.1) de classe C^∞ em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Demonstração. Seja K_1 compacto de $\mathbb{R}^n$ tal que $x \in K_1$ e escolha $r_2 > 0$ tal que $t \in [-r_2, r_2]$. Como $s = \eta + i\tau$, com $\eta \in \mathbb{R}$ e $\tau > 0$ temos que

$$\begin{aligned}
\Re\left(i\Phi(x,t,s)\right) &= \Re\Big(ic_0(s) - is\gamma(t) + i\sqrt{i}\sqrt{s}\,n^{-\frac{1}{2}}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\Big) \\
&= -\Re\left((-is)^{\rho_0}\right) + \tau\gamma(t) + \Re\left(i\sqrt{i}\sqrt{s}\right)\, n^{-\frac{1}{2}}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \\
&\leq -2C_1|s|^{\rho_0} + \tau\gamma(t) + n^{\frac{1}{2}}r_1|s|^{\frac{1}{2}}, \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

onde $C_1 = \cos(\pi\rho_0/2)/2$ e $r_1 = \max\{|x_j| \,:\, x \in K_1,\, j \in \{1,2,\ldots,n\}\}$.

Tome η tal que $|\eta| > L$, com $L = \left(\dfrac{n^{\frac{1}{2}}r_1}{C_1}\right)^{\frac{1}{\rho_0 - \frac{1}{2}}}$, como $\rho_0 \in (1/2, 1)$ segue que

$$n^{\frac{1}{2}}r_1|s|^{\frac{1}{2}-\rho_0} < C_1. \quad (3.5)$$

Pelas estimativas (3.4) e (3.5), obtemos que

$$\begin{aligned}
\Re\left(i\Phi(x,t,s)\right) &\leq -2C_1|s|^{\rho_0} + \tau\gamma(t) + n^{\frac{1}{2}} r_1 |s|^{\frac{1}{2}} \\
&= \gamma(t)\tau + |s|^{\rho_0}\left(n^{\frac{1}{2}} r_1 |s|^{\frac{1}{2}-\rho_0} - 2C_1\right) \\
&\leq \gamma(t)\tau - C_1|s|^{\rho_0}. \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Agora considere o conjunto:

$$X_{\tau,L} = \{s = \eta + i\tau : \ \eta \in [-L, L]\}.$$

Pela estimativa (3.6), tem-se a seguinte estimativa para a função u

$$\begin{aligned}
|u(x,t)| &= \left| \int_{X_{\tau,L}} e^{i\Phi(x,t,s)} ds + \int_{X_\tau \setminus X_{\tau,L}} e^{i\Phi(x,t,s)} ds \right| \\
&\leq \int_{X_{\tau,L}} e^{\Re(i\Phi(x,t,s))}\, ds + \int_{X_\tau \setminus X_{\tau,L}} e^{\Re(i\Phi(x,t,s))}\, ds \\
&\leq 2L||e^{\Re(i\Phi(x,t,.))}||_{\infty, X_{\tau,L}} + \int_{X_\tau \setminus X_{\tau,L}} e^{\gamma(t)\tau - C_1|s|^{\rho_0}}\, ds \\
&\leq 2L||e^{\Re(i\Phi(x,t,.))}||_{\infty, X_{\tau,L}} + e^{\gamma(t)\tau} \int_{X_\tau \setminus X_{\tau,L}} e^{-C_1|s|^{\rho_0}}\, ds. \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

Daí a integral em (3.3) é convergente. Considerando a integral da função analítica $U(s) = e^{i\Phi(x,t,s)}$ no contorno do retângulo R de vértices $-L + i\tau_1,\ L + i\tau_1,\ L + i\tau_2$ e $-L + i\tau_2$. Pelo Teorema de Cauchy-Goursat, segue que

$$\oint_{\partial R} U(s) ds = 0. \qquad (3.8)$$

Daí,

$$\int_{-L}^{L} U(\eta + i\tau_1) d\eta + i \int_{\tau_1}^{\tau_2} U(L + i\tau) d\tau + \int_{L}^{-L} U(\eta + i\tau_2) d\eta + i \int_{\tau_2}^{\tau_1} U(-L + i\tau) d\tau = 0. \qquad (3.9)$$

Quando $L \to \infty$ a segunda e quarta integrais do primeiro membro de (3.9) tendem para zero pela estimativa (3.6). Logo, temos que $\int_{-L}^{L} U(\eta+i\tau_1)d\eta = -\int_{L}^{-L} U(\eta+i\tau_2)d\eta$, equivalentemente

$$\int_{X_{\tau_1,L}} U(s)ds = \int_{X_{\tau_2,L}} U(s)ds. \qquad (3.10)$$

Fazendo $L \to \infty$ em (3.10), segue que

$$\int_{X_{\tau_1}} U(s)ds = \int_{X_{\tau_2}} U(s)ds.$$

Daí, a integral (3.3) é independente de τ.

Sejam $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $m \in \mathbb{N}$, pela Fórmula de Faà di Bruno, segue que

$$\begin{aligned} D_x^\alpha e^{i\Phi(x,t,s)} &= c^\alpha(s) e^{i\Phi(x,t,s)}, \; onde \;\; c(s) = (c_1(s), c_2(s), \ldots, c_n(s)). \\ D_t^m e^{i\Phi(x,t,s)} &= (-i)^m \sum_{\beta \in J_m} \frac{m!}{\beta_1!\beta_2! \cdots \beta_m!} \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{-(c_1^2(s) + c_2^2(s) + \cdots + c_n^2(s))\gamma^{(j)}(t))}{j!} \right)^{\beta_j} e^{i\Phi(x,t,s)}, \end{aligned}$$

onde $J_m = \{\beta = (\beta_1, \beta_2 \ldots, \beta_m) \in \mathbb{N}^m \;:\; 1\beta_1 + 2\beta_2 + \cdots + m\beta_m = m\}$. Defina a função $G_{\alpha,m}$ por

$$G_{\alpha,m}(s) = \begin{cases} ||D_t^m D_x^\alpha e^{i\Phi(x,t,.)}||_{\infty, X_{\tau,L}}, & s \in X_{\tau,L} \\ A_{\alpha,m}\, e^{nC_2\tau - C_1|s|^{\rho_0}} |s|^{\frac{|\alpha|}{2}} |s|^m \quad , & s \in X_\tau \setminus X_{\tau,L}, \end{cases}$$

onde

$$A_{\alpha,m} = n^m\, n^{\frac{|\alpha|}{2}} \sum_{\beta \in J_m} \frac{m!}{\beta_1!\beta_2! \cdots \beta_m!} \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{||\gamma^{(j)}||_{\infty, K_2}}{j!} \right)^{\beta_j}, \;\; C_2 = ||\gamma||_{\infty, K_2} \; e \; K_2 = [-r_2,\, r_2].$$

Daí, segue que

$$|D_t^m D_x^\alpha e^{i\Phi(x,t,s)}| \leq G_{\alpha,m}(s),$$

Como $G_{\alpha,m} \in L^1(X_\tau)$, segue pelo Teorema da convergência dominada que

$$D_t^m D_x^\alpha u(x) = \int_{X_\tau} D_t^m D_x^\alpha \left[e^{i\Phi(x,t,s)} \right] ds. \tag{3.11}$$

Assim $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Pelas equações (3.3) e (3.11), segue que

$$Pu(x,t) = \int_{X_\tau} P e^{i\Phi(x,t,s)} ds = 0. \tag{3.12}$$

$\square$

Lema 3.0.2 *Se u é definida por* (3.3) *com $c_j(s)$ como no Lema 3.0.1, para todo $j \in \{0,1,2,\dots,n\}$, então*

$$u = 0 \ \text{em}\ \Sigma^+.$$

Demonstração.

Como a integral que define a função u é absolutamente convergente, pelas estimativas (3.4), (3.6) e pelo fato que $s = \eta + i\tau$, temos

$$\begin{aligned}
|u(x,t)| &\leq \int_{X_{\tau,L}} e^{\Re(i\Phi(x,t,s))}\,ds + \int_{X_\tau\setminus X_{\tau,L}} e^{\Re(i\Phi(x,t,s))}\,ds \\
&\leq \int_{X_{\tau,L}} e^{-2C_1|s|^{\rho_0}+\tau\gamma(t)+n^{\frac{1}{2}}r_1|s|^{\frac{1}{2}}}\,ds \ + \ \int_{X_\tau\setminus X_{\tau,L}} e^{\gamma(t)\tau-C_1|s|^{\rho_0}}\,ds \\
&= e^{\gamma(t)\tau}\int_{[-L,L]} e^{n^{\frac{1}{2}}r_1|\eta+i\tau|^{\frac{1}{2}}}e^{-2C_1|\eta+i\tau|^{\rho_0}}d\eta \ + \ e^{\gamma(t)\tau}\int_{\mathbb{R}\setminus[-L,L]} e^{-C_1|\eta+i\tau|^{\rho_0}}d\eta \\
&\leq e^{\gamma(t)\tau}\int_{[-L,L]} e^{n^{\frac{1}{2}}r_1|\eta+i\tau|^{\frac{1}{2}}}e^{-2C_1|\eta|^{\rho_0}}d\eta \ + \ e^{\gamma(t)\tau}\int_{\mathbb{R}\setminus[-L,L]} e^{-C_1|\eta|^{\rho_0}}d\eta \\
&= e^{\gamma(t)\tau}\int_{[-L,L]} e^{n^{\frac{1}{2}}r_1(|\eta|^2+\tau^2)^{\frac{1}{4}}}e^{-2C_1|\eta|^{\rho_0}}d\eta \ + \ e^{\gamma(t)\tau}\int_{\mathbb{R}\setminus[-L,L]} e^{-C_1|\eta|^{\rho_0}}d\eta \\
&\leq e^{\gamma(t)\tau}\int_{[-L,L]} e^{n^{\frac{1}{2}}C_3r_1\left((|\eta|^2)^{\frac{1}{4}}+(\tau^2)^{\frac{1}{4}}\right)}e^{-2C_1|\eta|^{\rho_0}}d\eta + e^{\gamma(t)\tau}\int_{\mathbb{R}\setminus[-L,L]} e^{-C_1|\eta|^{\rho_0}}d\eta \\
&= e^{\gamma(t)\tau+n^{\frac{1}{2}}C_3r_1\tau^{\frac{1}{2}}}\int_{[-L,L]} e^{n^{\frac{1}{2}}C_3r_1|\eta|^{\frac{1}{2}}-2C_1|\eta|^{\rho_0}}d\eta + e^{\gamma(t)\tau}\int_{\mathbb{R}\setminus[-L,L]} e^{-C_1|\eta|^{\rho_0}}d\eta.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Seja $(x,t) \in \Sigma^+$, pela definição de γ e como $\Sigma^+ = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : t < 0\}$, então $\gamma(t) < 0$. Daí, fazendo $\tau \to \infty$ em (3.13), segue que

$$u = 0 \ \text{em}\ \Sigma^+. \tag{3.14}$$

□

Lema 3.0.3 *Se u é definida por* (3.3) *com $c_j(s)$ como no Lema 3.0.1, para todo $j \in \{0,1,2,\dots,n\}$, então $0 \in S(u)$.*

Demonstração. Defina a função auxiliar v por

$$v(t) = \int_{X_\tau} e^{-i\gamma(t)s}e^{-(-is)^{\rho_0}}ds. \tag{3.15}$$

Se $x = 0$ segue que

$$u(x,t) = v(t). \tag{3.16}$$

Pelas equações (3.14) e (3.16), segue que $v(t) = 0$ no intervalo $(-\infty, 0)$.

Multiplicando a equação (3.15) pela função $e^{-\gamma(t)\tau}$ e fazendo a mudança de variável $\sigma = s - i\tau$, tem-se

$$\begin{aligned} v(t)e^{-\gamma(t)\tau} &= \int_{-\infty+i\tau}^{+\infty+i\tau} e^{-i\gamma(t)(s-i\tau)} e^{-(-is)^{\rho_0}} ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\gamma(t)\sigma} e^{-(\tau-i\sigma)^{\rho_0}} d\sigma. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Como γ é injetora definamos

$$g(s) = v(\gamma^{-1}(s))e^{-s\tau}, \tag{3.18}$$

onde $s = \gamma(t)$. Pela equação (3.17), segue que

$$g(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-is\sigma} e^{-(\tau-i\sigma)^{\rho_0}} d\sigma.$$

Daí, pela definição de Tranformada de Fourier tem-se

$$\left(e^{-(\tau-i\sigma)^{\rho_0}}\right)^{\wedge}(s) = g(s). \tag{3.19}$$

Como $s = \gamma(t)$ e pelas equações (3.18) e (3.19), segue que

$$v(\gamma^{-1}(s))e^{-s\tau} = \left(e^{-(\tau-i\sigma)^{\rho_0}}\right)^{\wedge}(s). \tag{3.20}$$

Pela equação (3.20) e pela Identidade de Parseval segue que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|e^{-(\tau-i\sigma)^{\rho_0}}\right|^2 d\sigma &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\left(e^{-(\tau-i\sigma)^{\rho_0}}\right)^{\wedge}(s)\right|^2 ds \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|v(\gamma^{-1}(s))e^{-s\tau}\right|^2 ds. \end{aligned}$$

Daí, segue que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|e^{-(\tau-i\sigma)^{\rho_0}}\right|^2 d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} \left|v(\gamma^{-1}(s))e^{-s\tau}\right|^2 ds. \tag{3.21}$$

Pela equação (3.21) e do fato que $\left|(\tau-i\sigma)^{\rho_0}\right| \leq (\tau+|\sigma|)^{\rho_0} \leq \tau^{\rho_0}+|\sigma|^{\rho_0}$, segue que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\left|v(\gamma^{-1}(s))e^{-s\tau}\right|^2 ds &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left|e^{-(\tau-i\sigma)^{\rho_0}}\right|^2 d\sigma \\
&\geq \int_{-\infty}^{+\infty}\left|e^{-\tau^{\rho_0}-|\sigma|^{\rho_0}}\right|^2 d\sigma \\
&= e^{-2\tau^{\rho_0}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|\sigma|^{\rho_0}} d\sigma. \qquad (3.22)
\end{aligned}$$

Agora provaremos que v é não nula em qualquer vizinhança do origem. De fato, se $v=0$ no intervalo $(0,\varepsilon)$ para algun $\varepsilon>0$. Pela estimativa (3.22), segue que

$$\begin{aligned}
e^{-2\tau^{\rho_0}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|\sigma|^{\rho_0}} d\sigma &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\left|v(\gamma^{-1}(s))e^{-s\tau}\right|^2 ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_\varepsilon^{+\infty}\left|v(\gamma^{-1}(s))e^{-s\tau}\right|^2 ds \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_\varepsilon^{+\infty}\left|v(\gamma^{-1}(s))e^{-\varepsilon\tau}\right|^2 ds \\
&= \frac{e^{2\varepsilon\tau}}{2\pi}\int_\varepsilon^{+\infty}\left|v(\gamma^{-1}(s))\right|^2 ds, \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

Daí, segue que

$$\frac{e^{2\varepsilon\tau}}{2\pi}\int_\varepsilon^{+\infty}\left|v(\gamma^{-1}(s))\right|^2 ds = O(e^{-2\varepsilon\tau}), \quad \text{quando } \tau\to\infty. \qquad (3.24)$$

Pelas equações (3.23) e (3.24), tem-se

$$e^{-2\tau^{\rho_0}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|\sigma|^{\rho_0}} d\sigma = O(e^{-2\varepsilon\tau}), \quad \text{quando } \tau\to\infty.$$

o que é um absurdo pois,

$$\frac{e^{-2\tau^{\rho_0}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|\sigma|^{\rho_0}} d\sigma}{e^{-2\varepsilon\tau}} = e^{2(\varepsilon\tau-\tau^{\rho_0})}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|\sigma|^{\rho_0}} d\sigma \to \infty, \quad \text{quando } \tau\to\infty.$$

Assim $0\in S(v)$, e, portanto $0\in S(u)$. □

Demonstração do Teorema 3.0.1

A demonstração do Teorema segue pelos Lemas 3.0.1,3.0.2 e 3.0.3. □

Teorema 3.0.2 *Seja* $Q = \lambda_0(t)(D_{x_1}^2 + D_{x_2}^2 + \cdots + D_{x_n}^2) + iD_t$, *com* λ_0 *uma função real analítica tal que* $\Gamma(t) = \int_0^t \lambda_0(r)dr$ *é uma função invertível em* $\mathbb{R}$. *Então existe uma função* u *em* $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, *tal que*

$$Qu = 0, \ em \ \mathbb{R}^{n+1} \tag{3.25}$$

$u = 0$ *em* Σ^+ *e* $0 \in S(u)$.

Como no Teorema 3.0.1 procuramos como candidato da solução de (3.25) uma função da forma

$$u(x,t) = \int_{X_\tau} e^{i\Psi(x,t,s)} ds,$$

onde Ψ é uma solução da equação de fase (2.4) e X_τ é uma curva em $\mathbb{C}$. Pela equação (2.47) tem-se que

$$\Psi(x,t) = c_0 + i(c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2)\Gamma(t) + c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n,$$

onde $c_j = b_j(0)$, para todo $j \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, é uma solução da equação de fase (2.4). Consideremos a família de soluções, dependendo do parâmetro s, da equação de fase (2.4)

$$\Psi(x,t,s) = c_0(s) + i(c_1^2(s) + c_2^2(s) + \cdots + c_n^2(s))\Gamma(t) + c_1(s)x_1 + c_2(s)x_2 + \cdots + c_n(s)x_n, \tag{3.26}$$

onde $c_j(s) = w_j\, s^{\rho_j}$, com $w_j \in \mathbb{C}^*$, $\rho_j \in \mathbb{R}$, s^{ρ_j} é o ramo da potência definda no conjunto $\mathbb{C}\setminus L_{-\pi}$, e $L_{-\pi} = \{te^{-i\pi} \ : \ t \geq 0\}$, para todo $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Agora apresentamos alguns lemas prévios que auxiliarão na demonstração do Teorema 3.0.2

Lema 3.0.4 *Se* $c_0(s) = i(-is)^{\rho_0}$, *com* $\rho_0 \in (1/2, 1)$ *e*

i) $c_j(s) = i\,(is/n)^{\frac{1}{2}}$ *para* $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *ou*

ii) $c_j(s) = (is/n)^{\frac{1}{2}}$ *para* $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Então a função

$$u(x,t) = \int_{X_\tau} e^{i\Psi(x,t,s)} ds, \tag{3.27}$$

com $X_\tau = \{s = \eta + i\tau \ : \ \eta \in \mathbb{R}\}$, $\tau > 0$ *é uma solução da equação* (3.1) *de classe* C^∞ *em* $\mathbb{R}^{n+1}$.

Demonstração. Seja K_1 compacto de $\mathbb{R}^n$ tal que $x \in K_1$ e escolha $r_2 > 0$ tal que $t \in [-r_2, r_2]$. Para o caso $c_j(s) = i\left(\dfrac{is}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$ para $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ temos que

$$\begin{aligned}
\Re\left(i\Psi(x,t,s)\right) &= \Re\left(ic_0(s) + is\Gamma(t) - \sqrt{i}\sqrt{s}n^{-\frac{1}{2}}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\right) \\
&= -\Re\left((-is)^{\rho_0}\right) - \tau\Gamma(t) - \Re\left(\sqrt{i}\sqrt{s}\right) n^{-\frac{1}{2}}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \\
&\leq -2C_1|s|^{\rho_0} - \tau\Gamma(t) + n^{-\frac{1}{2}} r_1 |s|^{\frac{1}{2}},
\end{aligned} \tag{3.28}$$

onde $C_1 = \cos(\pi\rho_0/2)/2$ e $r_1 = \max\{|x_j| : \, x \in K_1, \, j \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$.

Tome η tal que $|\eta| > L$, com $L = \left(\dfrac{n^{\frac{1}{2}} r_1}{C_1}\right)^{\frac{1}{\rho_0 - \frac{1}{2}}}$, como $\rho_0 \in (1/2, 1)$ segue que

$$n^{\frac{1}{2}} r_1 |s|^{\frac{1}{2} - \rho_0} < C_1. \tag{3.29}$$

Pelas estimativas (3.28) e (3.29), obtemos que

$$\begin{aligned}
\Re\left(i\Psi(x,t,s)\right) &\leq -2C_1|s|^{\rho_0} - \tau\Gamma(t) + n^{\frac{1}{2}} r_1 |s|^{\frac{1}{2}} \\
&= -\Gamma(t)\tau + |s|^{\rho_0}\left(n^{\frac{1}{2}} r_1 |s|^{\frac{1}{2} - \rho_0} - 2C_1\right) \\
&\leq -\Gamma(t)\tau - C_1|s|^{\rho_0}.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Considere o conjunto:

$$X_{\tau,L} = \{s = \eta + i\tau : \; \eta \in [-L, L]\}.$$

Pela estimativa (3.30), tem-se a seguinte estimativa para a função u

$$\begin{aligned}
|u(x,t)| &= \left| \int_{X_{\tau,L}} e^{i\Psi(x,t,s)} ds + \int_{X_\tau \setminus X_{\tau,L}} e^{i\Psi(x,t,s)} ds \right| \\
&\leq \int_{X_{\tau,L}} e^{\Re(i\Psi(x,t,s))}\, ds + \int_{X_\tau \setminus X_{\tau,L}} e^{\Re(i\Psi(x,t,s))}\, ds \\
&\leq 2L||e^{\Re(i\Psi(x,t,.))}||_{\infty, X_{\tau,L}} + \int_{X_\tau \setminus X_{\tau,L}} e^{-\Gamma(t)\tau - C_1|s|^{\rho_0}}\, ds \\
&\leq 2L||e^{\Re(i\Psi(x,t,.))}||_{\infty, X_{\tau,L}} + e^{-\Gamma(t)\tau} \int_{X_\tau \setminus X_{\tau,L}} e^{-C_1|s|^{\rho_0}}\, ds.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Daí a integral em (3.27) é convergente. Considerando a integral da função analítica $U(s) =$

$e^{i\Psi(x,t,s)}$ no contorno do rectângulo R de vértices $-L+i\tau_1$, $L+i\tau_1$, $L+i\tau_2$ e $-L+i\tau_2$. Pelo Teorema de Cauchy-Goursat, segue que

$$\oint_{\partial R} U(s)ds = 0. \tag{3.32}$$

Daí,

$$\int_{-L}^{L} U(\eta+i\tau_1)d\eta + i\int_{\tau_1}^{\tau_2} U(L+i\tau)d\tau + \int_{L}^{-L} U(\eta+i\tau_2)d\eta + i\int_{\tau_2}^{\tau_1} U(-L+i\tau)d\tau = 0. \tag{3.33}$$

Quando $L\to\infty$ a segunda e quarta integrais do primeiro membro de (3.33) tendem para zero pela estimativa (3.30). Logo, temos que $\int_{-L}^{L} U(\eta+i\tau_1)d\eta = -\int_{L}^{-L} U(\eta+i\tau_2)d\eta$, equivalentemente

$$\int_{X_{\tau_1,L}} U(s)ds = \int_{X_{\tau_2,L}} U(s)ds. \tag{3.34}$$

Fazendo $L\to\infty$ em (3.34), segue que

$$\int_{X_{\tau_1}} U(s)ds = \int_{X_{\tau_2}} U(s)ds.$$

Daí, a integral (3.27) é independente de τ.

Sejam $\alpha\in\mathbb{N}^n$, $m\in\mathbb{N}$, pela Fórmula de Faà di Bruno, segue que

$$\begin{aligned} D_x^{\alpha} e^{i\Psi(x,t,s)} &= c^{\alpha}(s)e^{i\Psi(x,t,s)},\ onde\ \ c(s)=(c_1(s),c_2(s),\ldots,c_n(s)).\\ D_t^{m} e^{i\Psi(x,t,s)} &= (-i)^m \sum_{\beta\in J_m}\frac{m!}{\beta_1!\beta_2!\cdots\beta_m!}\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{-(c_1^2(s)+c_2^2(s)+\cdots+c_n^2(s))\Gamma^{(j)}(t))}{j!}\right)^{\beta_j} e^{i\Psi(x,t,s)}, \end{aligned}$$

onde $J_m=\{\beta=(\beta_1,\beta_2\ldots,\beta_m)\in\mathbb{N}^m\ :\ 1\beta_1+2\beta_2+\cdots+m\beta_m=m\}$. Defina a função $G_{\alpha,m}$ por

$$G_{\alpha,m}(s)=\begin{cases} ||D_t^m D_x^{\alpha} e^{i\Psi(x,t,.)}||_{\infty,X_{\tau,L}}, & s\in X_{\tau,L}\\ A_{\alpha,m}\, e^{nC_2\tau - C_1|s|^{\rho_0}}|s|^{\frac{|\alpha|}{2}}|s|^m \quad , & s\in X_\tau\setminus X_{\tau,L}, \end{cases}$$

onde

$$A_{\alpha,m}=n^m\, n^{\frac{|\alpha|}{2}}\sum_{\beta\in J_m}\frac{m!}{\beta_1!\beta_2!\cdots\beta_m!}\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{||\Gamma^{(j)}||_{\infty,K_2}}{j!}\right)^{\beta_j},\ \ C_2=||\Gamma||_{\infty,K_2}\ e\ K_2=[-r_2,\,r_2].$$

Daí, segue que

$$|D_t^m D_x^\alpha e^{i\Psi(x,t,s)}| \leq G_{\alpha,m}(s),$$

Como $G_{\alpha,m} \in L^1(X_\tau)$, segue pelo Teorema da convergência dominada que

$$D_t^m D_x^\alpha u(x) = \int_{X_\tau} D_t^m D_x^\alpha \left[e^{i\Psi(x,t,s)}\right] ds. \tag{3.35}$$

Assim $u \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$. Pelas equações (3.27) e (3.35), segue que

$$Qu(x,t) = \int_{X_\tau} Q e^{i\Psi(x,t,s)} ds = 0. \tag{3.36}$$

Por outro lado, se $c_j(s) = (is/n)^{\frac{1}{2}}$ para $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ o resultado segue do Lema 3.0.1. $\square$

Lema 3.0.5 *Se u é definida por* (3.27) *com $c_0(s) = i(-is)^{\rho_0}$ e*

i) $c_j(s) = i\,(is/n)^{\frac{1}{2}}$ para $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e $\Gamma(t) > 0$ em $(-\infty, 0)$ ou

ii) $c_j(s) = (is/n)^{\frac{1}{2}}$ para $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e $\Gamma(t) < 0$ em $(-\infty, 0)$.

Então

$$u = 0 \text{ em } \Sigma^+.$$

Demonstração. Para o caso $c_j(s) = i\,(is/n)^{\frac{1}{2}}$ para $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e $\Gamma(t) > 0$ em $(-\infty, 0)$, temos que a integral que define a função u é absolutamente convergente. Pelas estimativas (3.28) e (3.30) obtemos que

$$\begin{aligned}
|u(x,t)| &\leq \int_{X_{\tau,L}} e^{\Re(i\Psi(x,t,s))}\, ds + \int_{X_\tau \setminus X_{\tau,L}} e^{\Re(i\Psi(x,t,s))}\, ds \\
&\leq \int_{X_{\tau,L}} e^{-2C_1|s|^{\rho_0} - \tau\Gamma(t) + n^{\frac{1}{2}} r_1 |s|^{\frac{1}{2}}}\, ds \;+\; \int_{X_\tau \setminus X_{\tau,L}} e^{-\Gamma(t)\tau - C_1|s|^{\rho_0}}\, ds \\
&= e^{-\Gamma(t)\tau} \int_{[-L,L]} e^{n^{\frac{1}{2}} r_1 |\eta + i\tau|^{\frac{1}{2}}} e^{-2C_1|\eta + i\tau|^{\rho_0}} d\eta \;+\; e^{-\Gamma(t)\tau} \int_{\mathbb{R}\setminus[-L,L]} e^{-C_1|\eta + i\tau|^{\rho_0}} d\eta \\
&\leq e^{-\Gamma(t)\tau} \int_{[-L,L]} e^{n^{\frac{1}{2}} r_1 |\eta + i\tau|^{\frac{1}{2}}} e^{-2C_1|\eta|^{\rho_0}} d\eta \;+\; e^{-\Gamma(t)\tau} \int_{\mathbb{R}\setminus[-L,L]} e^{-C_1|\eta|^{\rho_0}} d\eta \\
&= e^{-\Gamma(t)\tau} \int_{[-L,L]} e^{n^{\frac{1}{2}} r_1 (|\eta|^2 + \tau^2)^{\frac{1}{4}}} e^{-2C_1|\eta|^{\rho_0}} d\eta \;+\; e^{-\Gamma(t)\tau} \int_{\mathbb{R}\setminus[-L,L]} e^{-C_1|\eta|^{\rho_0}} d\eta \\
&\leq e^{-\Gamma(t)\tau} \int_{[-L,L]} e^{n^{\frac{1}{2}} C_3 r_1 \left((|\eta|^2)^{\frac{1}{4}} + (\tau^2)^{\frac{1}{4}}\right)} e^{-2C_1|\eta|^{\rho_0}} d\eta + e^{-\Gamma(t)\tau} \int_{\mathbb{R}\setminus[-L,L]} e^{-C_1|\eta|^{\rho_0}} d\eta \\
&= e^{-\Gamma(t)\tau + n^{\frac{1}{2}} C_3 r_1 \tau^{\frac{1}{2}}} \int_{[-L,L]} e^{n C_3 r_1 |\eta|^{\frac{1}{2}} - 2C_1|\eta|^{\rho_0}} d\eta + e^{-\Gamma(t)\tau} \int_{\mathbb{R}\setminus[-L,L]} e^{-C_1|\eta|^{\rho_0}} d\eta.
\end{aligned}$$

$$ \tag{3.37} $$

Se $(x,t) \in \Sigma^+$ temos que $\Gamma(t) > 0$. Daí, fazendo $\tau \to \infty$ em (3.37), segue que

$$u = 0 \; em \; \Sigma^+. \tag{3.38}$$

Por outro lado, se $c_j(s) = (is/n)^{\frac{1}{2}}$ para $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ o resultado segue do Lema 3.0.2. $\square$

Lema 3.0.6 *Se u é definida por (3.27) com $c_0(s) = i(-is)^{\rho_0}$, Γ invertível e*

i) $c_j(s) = i\,(is/n)^{\frac{1}{2}}$ para $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ou

ii) $c_j(s) = (is/n)^{\frac{1}{2}}$ para $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Então $0 \in S(u)$.

Demonstração. Para o caso $c_j(s) = i\,(is/n)^{\frac{1}{2}}$. Defina a função auxiliar v por

$$v(t) = \int_{X_\tau} e^{i\Gamma(t)s} e^{-(-is)^{\rho_0}} ds. \tag{3.39}$$

Se $x = 0$ segue que

$$u(x,t) = v(t). \tag{3.40}$$

Pelas equações (3.38) e (3.40), segue que $v(t) = 0$ no intervalo $(-\infty, 0)$.
Multiplicando a equação (3.39) pela função $\frac{1}{2\pi} e^{\Gamma(t)\tau}$ e fazendo a mudança de variável $\sigma = s - i\tau$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} v(t) e^{\Gamma(t)\tau} &= \frac{1}{2\pi} \int_{X_\tau} e^{i\Gamma(t)(s-i\tau)} e^{-(-is)^{\rho_0}} ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\Gamma(t)\sigma} e^{-(\tau - i\sigma)^{\rho_0}} d\sigma. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Como Γ é invertível definamos

$$g(s) = \frac{1}{2\pi} v(\Gamma^{-1}(s)) e^{-s\tau}, \tag{3.42}$$

onde $s = \Gamma(t)$. Pela equação (3.41), segue que

$$g(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{is\sigma} e^{-(\tau - i\sigma)^{\rho_0}} d\sigma.$$

Daí, pela definição de pela Fórmula de Inversão de Fourier temos

$$\widehat{g}(\sigma) = e^{-(\tau - i\sigma)^{\rho_0}}. \tag{3.43}$$

Como $s = \Gamma(t)$ e pelas equações (3.42) e (3.43), segue que

$$\left(\frac{1}{2\pi} v(\Gamma^{-1}(s)) e^{-s\tau}\right)^{\wedge}(\sigma) = e^{-(\tau - i\sigma)^{\rho_0}}. \tag{3.44}$$

Pela equação (3.44) e pela Identidade de Parseval segue que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{1}{2\pi} v(\Gamma^{-1}(s)) e^{-s\tau}\right|^2 ds &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\left(\frac{1}{2\pi} v(\Gamma^{-1}(s)) e^{-s\tau}\right)^{\wedge}(\sigma)\right|^2 d\sigma \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|e^{-(\tau - i\sigma)^{\rho_0}}\right|^2 ds.\end{aligned}$$

Daí, segue que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} \left|v(\Gamma^{-1}(s)) e^{-s\tau}\right|^2 ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|e^{-(\tau - i\sigma)^{\rho_0}}\right|^2 d\sigma. \tag{3.45}$$

Pela equação (3.45) e do fato que $\left|(\tau - i\sigma)^{\rho_0}\right| \leq (\tau + |\sigma|)^{\rho_0} \leq \tau^{\rho_0} + |\sigma|^{\rho_0}$, temos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} \left|v(\Gamma^{-1}(s)) e^{-s\tau}\right|^2 ds &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left|e^{-(\tau - i\sigma)^{\rho_0}}\right|^2 d\sigma \\ &\geq \int_{-\infty}^{+\infty} \left|e^{-\tau^{\rho_0} - |\sigma|^{\rho_0}}\right|^2 d\sigma \\ &= e^{-2\tau^{\rho_0}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|\sigma|^{\rho_0}} d\sigma.\end{aligned} \tag{3.46}$$

Agora provaremos que v é não nula em qualquer vizinhança do origem. De fato, se $v = 0$ no intervalo $(0, \varepsilon)$ para algum $\varepsilon > 0$. Pela estimativa (3.46), segue que

$$\begin{aligned}e^{-2\tau^{\rho_0}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|\sigma|^{\rho_0}} d\sigma &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} \left|v(\Gamma^{-1}(s)) e^{-s\tau}\right|^2 ds \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{+\infty} \left|v(\Gamma^{-1}(s)) e^{-s\tau}\right|^2 ds \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{+\infty} \left|v(\Gamma^{-1}(s)) e^{-\varepsilon\tau}\right|^2 ds \\ &= \frac{e^{2\varepsilon\tau}}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{+\infty} \left|v(\Gamma^{-1}(s))\right|^2 ds,\end{aligned} \tag{3.47}$$

Daí, segue que
$$\frac{e^{2\varepsilon\tau}}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{+\infty}\left|v(\Gamma^{-1}(s))\right|^2 ds = O(e^{-2\varepsilon\tau}), \quad \text{quando } \tau \to \infty. \tag{3.48}$$

Pelas equações (3.47) e (3.48), tem-se

$$e^{-2\tau^{\rho_0}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|\sigma|^{\rho_0}} d\sigma = O(e^{-2\varepsilon\tau}), \quad \text{quando } \tau \to \infty.$$

o que é um absurdo pois,

$$\frac{e^{-2\tau^{\rho_0}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|\sigma|^{\rho_0}} d\sigma}{e^{-2\varepsilon\tau}} = e^{2(\varepsilon\tau-\tau^{\rho_0})}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|\sigma|^{\rho_0}} d\sigma \to \infty, \quad \text{quando } \tau \to \infty.$$

Assim $0 \in S(v)$, e portanto $0 \in S(u)$. Por outro lado, se $c_j(s) = (is/n)^{\frac{1}{2}}$ para $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ o resultado segue do Lema 3.0.3. $\square$

Demonstração do Teorema 3.0.2

Como Γ é uma função invertível e $\Gamma(0) = 0$, temos que Γ não muda de sinal em $(-\infty, 0)$. Logo, para o caso que $\Gamma(t) > 0$ em $(-\infty, 0)$ escolhemos $c_j(s) = i\,(is/n)^{\frac{1}{2}}$ para $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Neste caso o Teorema segue pelos Lemas 3.0.4,3.0.5 e 3.0.6.
Por outro lado, se $\Gamma(t) < 0$ em $(-\infty, 0)$ escolhemos $c_j(s) = (is/n)^{\frac{1}{2}}$ para $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Daí, o resultado segue pelos Lemas 3.0.1,3.0.2 e 3.0.6. $\square$

Observação 3.0.2 *Para o caso $k_0 = 0$ as funções de fase* (2.14) *e* (2.47) *geram famílias de soluções, dependendo de um parâmetro, para as equações de fase* (2.3) *e* (2.4) *respectivamente. Tal parâmetro está relacionado por uma multiplicação com as variáveis temporal e espacial, veja equações* (3.2) *e* (3.26)*, tal propriedade permite estender o Teorema 1.0.1, ver Teoremas 3.0.1 e 3.0.2.*

Por outro lado, se $k_0 > 0$ as funções de fase obtidas nos Lemas 2.1.3, 2.1.4 e 2.1.8 geram famílias de soluções dependentes de um parâmetro, porém o parâmetro não fica relacionado por uma multiplicação com as variáveis temporal e espacial, logo não é possível aplicar a técnica usada acima para construir exemplos de não unicidade.

Finalmente no caso de funções multiplicativamente separáveis obtidas nos Lemas 2.2.1 e 2.2.2 não é possível construir famílias de soluções dependentes de um parâmetro para as equações de fase. Assim, neste caso não conseguimos estender o Teorema 1.0.1.

Referências Bibliográficas

[1] Folland G. B., *Introduction to partial differential equations*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1995.

[2] Folland G. B., *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, John Wiley & Sons, 1999.

[3] Galaktionov, V.A., Posashkov, S. A., *On new exact solution of parabolic equations with quadratic nonlinearities*, Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz., 29(4), New York, 1989.

[4] Hörmander, L., *On the theory of general partial differential operators*, Acta Math. 94 (1955), 161-248.

[5] Hörmander, L., *Null solutions of partial differential equations*, Arch. Rational Mech. Anal., 4 (1960),247-285.

[6] Hörmander, L., *Linear partial differential operators*, Springer Verlag, 1963.

[7] Hounie, J., *Teoria elementar das distribuições*, Inst. de Mat. Pura, Rio de Janeiro, 1970.

[8] John, F., *Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1981.

[9] Polyanin, A.D., Zhurov, A. I., *Exact solutions of heat and mass transfer equations*, Matematica Contemporanea 19 (2000), 105–127.

[10] Polyanin, A.D., Zhurov, A. I, Vyazmin, A.V., *Generalized separation of variables in nonlinear heat and mass transfer equations*, Matematica Contemporanea 19 (2000), 105–127.

[11] Zachmanoglou, E. C., *Uniqueness of the Cauchy problem for linear partial differential equations with variable coefficients*, Archive for Rat. Mech. and Anal (1967), 517-526.

[12] Zachmanoglou, E. C., *Nonuniqueness of the Cauchy problem for linear partial differential equations with variable coefficients*, Archive for Rat. Mech. and Anal 27 (1967), 373- 383.

[13] Zuily, C., *Uniqueness and non-uniqueness in the Cauchy problems*, Springer Science+Business Media, New York, 1983.